Komplexe Funktionen

1 Vorletzte Seite schwarze FS kopieren

2 Allgemeines

2.1 Reihen

Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$

2.2 Trigonometrie

$$e^{iz} = cos(z) + isin(z) \qquad e^z = e^x(cos(y) + isin(y))$$

3 Möbius Transformation

3.1 Bestimmen

Transformation w ist gegeben mit $T(z_1) = w_1$, $T(z_2) = w_2$ und $T(z_3) = w_3$ durch Doppelverhältnis:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \Rightarrow \frac{w-w_1}{w-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \cdot \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}$$

1. Zwei Punkte bestimmen die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen: $(z_1 - z_0)(\overline{z}_2 - \overline{z}_0) = R^2$ fuer alle Gleichungen $|z - z_0| = R$ aufstellen, Gleichungssystem loesen
2. Transformation bestimmen: $T(a) = 0 \Rightarrow T_1(x) = x-a$, $T(b) = \infty \Rightarrow T_2(x) = \frac{x-a}{x-b}$, $T(c) = d \Rightarrow T(x) = \frac{x-a}{x-b} \cdot e = d$ erfuellen

3.2 Kreise

Die Punkte z_0, z_1, z_2 und z_3 liegen auf einem verallgemeinerten Kreis wenn: $\frac{z_0-z_1}{z_0-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \in R$

Ist das Punktepaar $((0,0),(\infty,0))$ symmetrisch so geht der Kreis im Bildraum durch den Ursprung und der Kreisradius R sei $T(p)$ mit p Randpunkt im Urbildraum auf Kreis.

3.3 Konforme Funktion

$$T(z) = k\frac{z-z1}{z-z2} \text{ mit } k \in R \setminus \{0\}$$

Konformitaet: $f'(z) \neq 0$

4 Reihen

4.1 Taylorreihen

$$f(x) = A\int_{start}^{end} \frac{1}{b-\xi}d\xi = \frac{A}{b+z_0}\int_{start}^{end} \frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{b+z_0}} = A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(b+z_0)^{n+1}} \cdot \int_{start}^{end} (\xi - z_0)^n d\xi$$

Radius: |entwicklungspunkt − singularitaet| - Kreise!

4.2 Laurentreihen

1. Bestimme Singularitaeten
2. Hebe Hebbare Singularitaeten
3. In Summe aus Hauptteilen ($\frac{a}{(z-z_k)^k}$) und Nebenteilen ($\frac{z-z_k}{a}$) umformen.

4.2.1 Singularitäten

Ringe $\rightarrow$ Pole

1. Hebbar
2. n-facher Pol
3. Wesentliche Singularität

4.3 Residuen

Berechnung ohne Laurent:

1. Polstelle 1. Ordnung: $Res(f,a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$
2. Polstelle n. Ordning: $Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (z-a)^n f(z)$
3. $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad g(a) \neq 0, h(a) = 0, h'(a) \neq 0 \Rightarrow Res(f,a) = \frac{g(a)}{h(a)}$

Mit Laurent: z_k seien die Singularitaeten, $Res(f, a_k)$ die dazugehoerigen Residuen wobei der 1-te Hauptteil wie folgt aussieht: $\frac{Res(f,a_k)}{z-z_0}$

- $\oint\limits_K f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{z_k \neq 0} Res(f, a_k)$ wobei $Res(f, a_k)$ im Kreis
- $\oint\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{z_k \neq 0} Res(f, a_k)$ wobei $Im(Res(f, a_k)) \geq 0$
- $\oint\limits_{0}^{\infty} f(z)dz = \pi i \sum\limits_{z_k \neq 0} Res(f, a_k)$

4.4 Partialbruchzerlegung

1. Residuen berechnen
2. Fuer alle Residuen: $f = \sum\limits_a \frac{Res(f,a)}{z-a}$

5 Kreisintegrale

1. Singularitaet liegt ausserhalb des Kreises - integral ist null
2. Hebbare Singularitaet vorhanden - integral ist null
3. Nichthebbare Singularitaet im Kreis:
   (a) Cauchysche Itegralformel $2\pi i \cdot f(z_0) = \int \frac{f(z)}{z-z_0} dz$
   (b) Verallg. Cauchysche Integralformel

6 Funktionseigenschaften

6.1 Holomorphie

Eine Abbildung f heisst holomorph wenn sie in jedem Punkt z_0 komplex differenzierbar ist. Dabei ist $f(z) = u(z) + v(z)i$ mit u und v reelle Funktionen.

Cauchy-Riemannsche DGL:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Schreibe: Da u und v stetig partiell differenzierbar sind ist f holomorph.
Eine reelle Funktion muss konstant sein um holomorph zu sein.
Holomorphie impliziert harmonie.

6.2 Harmonie

Der Realteil einer Funktion ist harmonisch wenn die Funktion holomorph ist.

Eine Funktion $f = u + iv$ ist harmonisch wenn gilt: $f_{xx} + f_{yy} = 0$