1 Allgemeines

1.1 Nabla Operator ∇

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \qquad \vec{\nabla}\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

2 Partielle Differentialgleichungen

2.1 Homogene lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

1. Umstellen in Normalform: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}) \cdot u_i = 0$, weitere Beispiele für $n = 2$.
2. Charakteristische DGLs sind zu lösen: $\dot{x}(t) = a_1(x(t), y(t)); \dot{y}(t) = a_2(x(t), y(t))$
   (a) Dabei darf man alle Gleichungen z.B. durch eine andere teilen
   (b) Hat man dies getan, erhält man z.B. $\dot{x}(t) = 1$ und somit $x(t) = t + c$
   (c) $c = 0$ kann zulaessig sein wenn Anfangswert gegeben ist, also $x = t$ in diesem Fall
3. Eine der Gleichungen durch Variablen der anderen darstellen: $y = \psi(x, C)$, nach $C(\vec{c})$ umstellen $C(\vec{c}) = \phi(x, y)$
4. $\Phi(\phi(x, y))$ mit beliebigem Φ aus C^1 ist die Lösung
5. Allgemein: $u(\vec{x}) = \Phi(\phi_1(x), ..., \phi_{n-1}(\vec{x}))$

2.2 Quasilineare partielle inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung

So sieht sie aus: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}, u) \cdot u_{x_i} = b(\vec{x}, u)$

Lösen mit erweiterter quasilinearer homogener DGL: $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}, u) \cdot U_{x_i}\right) + b(\vec{x}, u) \cdot U_u = 0$
Dann wie homogene lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung lösen.
Dann $U = 0$, Nach dem Satz über implizite Funktionen ergibt sich:
Zum Schluss eine Basis als Funktion der anderen Basis darstellen, nach u umformen und $\psi(...)$ passend aussuchen.
Wir erhalten als allgemeine Loesung eine implizite Gleichung mit beliebige C^1 Funktion Φ.

2.3 Anfangswertaufgaben

$u(\vec{x}) = \Phi(\phi_1(x), ..., \phi_{n-1}(\vec{x}))$
Anfangsfunktion: $u_0(s) := u(x(s), y(s))$ auf der Kurve $c(s) := (x(s), y(s))^T$.

2.4 Lineare inhomogene partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x}) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\vec{x}) u_{x_i} + f(\vec{x}) u = g(\vec{x})$$

Für $n = 2$ und $\vec{x} = (x, y)$: $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$
Vektor/Matrix Schreibweise: $\nabla^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \nabla u + \left(d - \nabla^T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, e - \nabla^T \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\right) \nabla u + fu = g$
elliptisch: Alle $\lambda_i \neq 0$ gleiches Vorzeichen
parabolisch: $\exists k : \lambda_k = 0$
hyperbolisch: $\exists! i : \lambda_i$ hat verschiedenes Vorzeichen von allen anderen λ.
ultrahyperbolisch: erst ab n=4: alle anderen Faelle

$$\text{Wenn det:} \begin{cases} > 0: & \text{elliptisch} \\ = 0: & \text{parabolisch} \\ < 0: & \text{hyperbolisch} \end{cases}$$

Für $n = 2$ immer det nehmen, ultrahyperbolisch gibts nur in höheren Dimensionen.
Für $n = 3$ nach einer spalte/zeile entwickeln und det(Rest) nehmen. Produkt der EW ist det, reicht aus.
3 Dim: $au_{xx} + 2bu_{xy} + 2cu_{xz} + 2du_{yz} + eu_{yy} + fu_{zz} + gu_x + hu_y + iu_z + ju = k$

$$\nabla^T \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} \nabla u + \left(g - \nabla^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, h - \nabla^T \begin{pmatrix} b \\ e \\ d \end{pmatrix}, i - \nabla^T \begin{pmatrix} e \\ d \\ f \end{pmatrix}\right) \nabla u + ju = k$$

2.4.1 Wärmeleitungsgleichung

So sieht sie aus: $v_t = v_{xx} + g(x)$ mit einer beliebigen C^1 Funktion $g(x)$. $v_h(x,t)$ löst $0 = v_t - v_{xx}$.

Löse nun homogene Gleichung mit inhomogener Anfangsbedingung, wenn Anfangsbedingung homogen diesen Schritt auslassen: Fourier! :)

$$v_h(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot sin\left(\frac{k\pi x}{z}\right) e^{-\frac{tk^2\pi^2}{z^2}} \qquad T = 2\cdot z \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot sin\left(\frac{k\pi x}{z}\right) \text{ mit } f(x) = \text{ Anfangsbedingung}$$

Koeffizientenvergleich d. Anfangsbedingung mit Summenansatz hilfreich!

Nun Inhomogenität lösen: Inhomogene Gleichung mit homogener Randbedingung und Anfangsbedingung: $\omega = \pi/z$

$v_p(x,t) \xrightarrow{Ansatz} v_p(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) sin\,(k\omega x)$ und $v_k(0) = 0$.

In DGL einsetzen. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dot{v}_k(t) + k^2\omega^2 v_k(t)\right) sin(k\omega x) = g(x)$

3 Polarkoordination

3.1 Produktansatz in Polarkoordinaten

$$x = r\,cos\phi, y = r\,sin\phi \text{ mit } sin(2\phi) = 2sin\phi cos\phi \text{ und } cos(3\phi) = 4cos^3\phi - 3cos\phi$$

4 Dirichlet Problem

Der Produktansatz $u(r,\phi) = R(r)\cdot\Phi(\phi)$ ergibt:

- Kreis: $u(r,\phi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k cos(k\phi) + B_k r^k sin(k\phi)$
- Halbkreis: $u(r,\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k sin(k\phi)$
- Kreisring: $u(r,\phi) = A_0 + B_0 ln|r| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k r^k + C_k r^{-k}\right) cos(k\phi) + \left(B_k r^k + D_k r^{-k}\right) sin(k\phi)$
- Halbkreisring: $u(r,\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k r^k + C_k r^{-k}\right) sin(k\phi)$

Karthesischisierung: $x = cos(\phi) * r$, $y = rsin(\phi)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$sin(\alpha \pm \beta) = sin(\alpha)\cdot cos(\beta) \pm sin(\beta)\cdot cos(\alpha)$ und $cos(\alpha\pm\beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta) \mp sin(\alpha)\cdot sin(\beta)$

Da u harmonisch und nicht konstant ist, werden die Extremwerte nur auf dem Rand angenommen.

5 d'Alembertsche Loesungsformel

Fuer: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ist $u(x,t) = \frac{1}{2}u_0(x+ct) + u_0(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0\,(\xi)\,d\xi$ mit $u_0 = u(x,0)$ und $v_0 = u_t(x,0)$.

Abhängigkeitsbereich: $A = x_0 - ct_0$ bis $x_0 + ct_0$ Bestimmtheitsbereiche: x_0 und t_0 aus Intervall bestimmen.

5.1 Inhomogen

Zuerst inhomogene Gleichung mit homogenen Anfangsdaten loesen w sei diese Teilloesung:

$w_{tt} - c^2 w_{xx} = f(x,t)$ und $w(x,0) = 0, w_t(x,0) = 0$

$$w(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Dann homogene Gleichung mit inhomogenen Anfangsdaten loesen, superponieren.

5.2 Reflexionsmethode

wird durch die **Reflexionsmethode** auf ein reines Anfangswertsproblem, für dass die d'Alembertsche Lösungsformel gilt, zurückgeführt, indem die Anfangsfunktionen u_0 und v_0 ungerade fortgesetzt werden.

Die resultierende Lösungsformel lautet:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\,dy \quad, \quad 0 \leq ct \leq x \\ \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) - u_0(ct-x)\right) + \frac{1}{2c}\int\limits_{ct-x}^{x+ct} v_0(y)\,dy \quad, \quad 0 \leq x < ct\,. \end{cases}$$

6 Wellengleichung

6.1 Produktansatz (Homogen, inhomogene Anfangsbedingungen)

$v^*(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (A_k cos(kt) + B_k sin(kt))\, sin(kx)$

6.2 Inhomogen, homogene Anfangsbedingungen

$v^{**}(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(t) sin(kx)$

7 Transformation

Die **Anfangsrandwertaufgabe** der inhomogenen Wellengleichung mit inhomogenen Randbedingungen in einer Raumdimension ($n = 1$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + f(x,t)\,, \quad 0 < x < a\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= \varphi_0(t)\,, \quad t \geq 0\,, \\ u(a,t) &= \varphi_1(t)\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \quad 0 \leq x \leq a\,, \\ u_t(x,0) &= u_1(x) \end{aligned}$$

wird in drei Schritten gelöst:

1. Schritt
Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen

$$u(0,t) = \varphi_0(t) \quad \text{und} \quad u(a,t) = \varphi_1(t)$$

wird durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \varphi_0(t) - \frac{x}{a}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))$$

8 Fourier

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k cos(k\omega z) + b_k sin(k\omega z) \text{ mit } a_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} u_0(x) cos(k\omega x) dx \text{ unt } b_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} u_0(x) sin(k\omega x) dx$$

9 Wellengleichungen

$$\text{Produktansatz: } u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k cos(kt) + b_k sin(kt))\, sin(kt)$$