Messtechnik und Messdatenverarbeitung - Blatt 7

Maike Meier und Lasse Schuirmann

15. Dezember 2014

THIS PAGE INTENTIONALLY LEFT BLANK.

Aufgabe 1

1.1. Welcher Test

Um eine Ablösung des Sensors zu detektieren, kann der χ^2-Verteilung Anpassungstest durchgeführt werden. (Die Normalverteilung lässt sich ab ca. $n = 30$ durch eine χ^2-Verteilung approximieren.)

Eine Voraussetzung für diesen Test ist, dass die Messwerte statistisch unabhängig sind und eine große Stichprobe vorhanden ist.

Der Test kann wie folgt durchgeführt werden:

1. Voraussetzungen sicherstellen
2. Klassen festlegen, Häufigkeiten n_i bestimmen
3. Null- und Alternativhypothese aufstellen:

   H_0 Die Daten sind normalverteilt

   H_1 Die Daten sind nicht normalverteilt
4. Signifikanzniveau wählen
5. $\chi^2 \approx \sum_{i=1}^{8} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ berechnen
6. Nullhypothese annehmen oder ablehnen

1.2. Klasseneinteilung

Klasse	≤ 35.0	$35.1 - 35.5$	$35.6 - 36.0$	$36.1 - 36.5$	$36.6 - 37.0$	$37.1 - 37.5$	$37.6 - 38.0$	≥ 38.0
Anzahl n_i	4	9	16	20	16	16	6	8

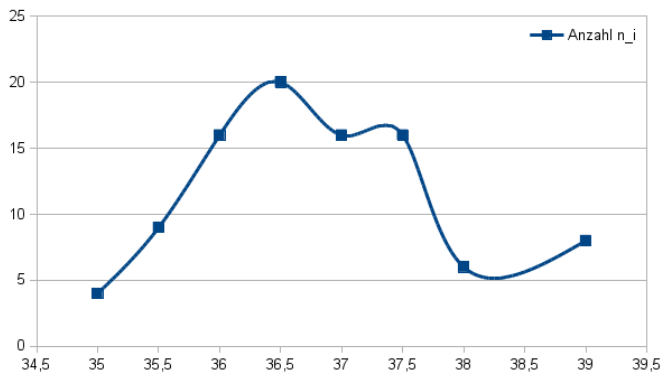
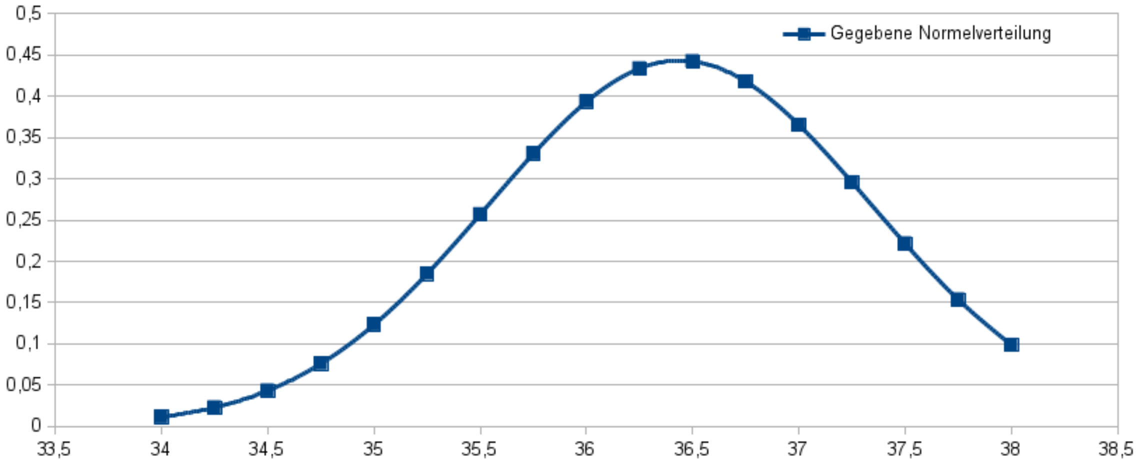


Diagramm 1.

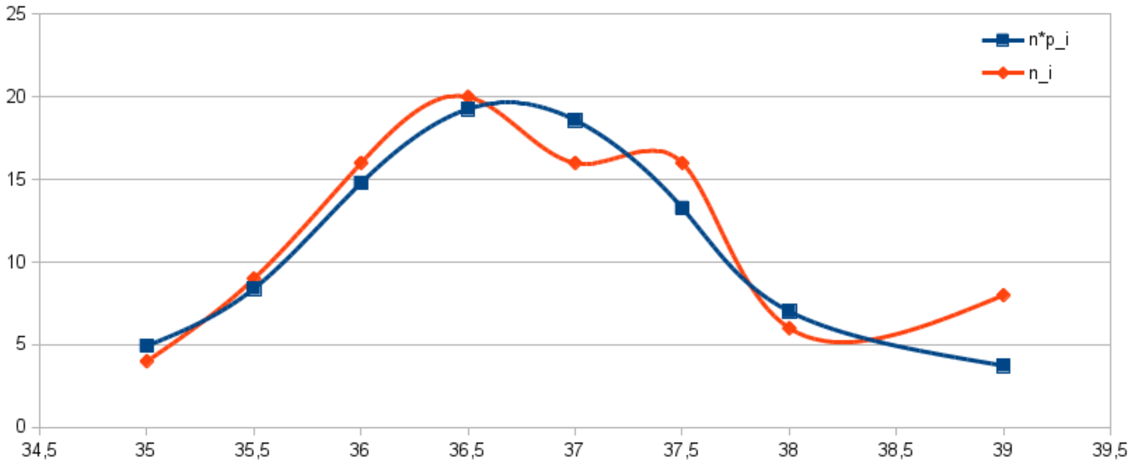
Das Nebenstehende Diagramm ist eine Visualisierung der Obenstehenden Tabelle. (Hierbei wurde ein Datenpunkt jeweils bei einer Oberen Grenze der Klasse gezeichnet.)
Da jede Klasse nicht zu wenige Elemente enthält, das Diagramm aber aussagekräftig scheint, ist diese Einteilung bei dieser Stichprobenmenge sinnvoll.

1.3. Erwartete Häufigkeiten

Die p_is können mithilfe der gegebenen Daten aus einer Normalverteilung errechnet werden. Die gegebene Normalverteilungsfunktion ist im folgenden Diagramm dargestellt:



Ermittelt man die Werte der Dichtefunktion zu den gegebenen Klassengrenzen (mit n multipliziert) erhält man folgendes Diagramm:



(Alle Datenpunkte bis auf der letzte des Graphen für np_i stellen wieder die obere Grenze für die Klasse dar. Der Ausnahmepunkt ist der Klasse $38 - \infty$ zuzuordnen, die in unserer Stichprobe keine Werte > 39 enthält.)

Die dazugehörige Tabelle ist (Werte abgerundet [Informatiker] auf die erste Stelle nach dem Komma):

Klasse	≤ 35.0	$35.1 - 35.5$	$35.6 - 36.0$	$36.1 - 36.5$	$36.6 - 37.0$	$37.1 - 37.5$	$37.6 - 38.0$	≥ 38.0
Anzahl n_i	4	9	16	20	16	16	6	8
p_i	4.6	8.4	14.7	19.2	18.5	13.2	7.0	3.5

1.4. Prüfgröße und Vertrauensniveau

$$\chi^2 \approx \sum_{i=1}^{8} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \approx 6,27 (= 0,18 + 0,04 + 0,1 + 0,02 + 0,36 + 0,56 + 0,15 + 4,86)$$

Also mit $\mu \approx 36.44$:

$$P(6.28) = \int_{30.16}^{42.72} \mathcal{N}(x) dx \approx 1$$

Die Differenz des realen Ergebnis' zu 1 ist außerhalb der double Rechnergenauigkeit.

Damit gilt $P > 1 - \alpha$ für übliche α und die Nullhypothese wird abgelehnt.

1.5. Interpretation

Die Ergebnisse, wie auch Anfangs die Diagramme, legen klar dar, dass es sich nicht um eine Normalverteilte Größe handelt. Es ist also sehr Wahrscheinlich, dass sich der Sensor von dem Probanden gelöst hat.

Aufgabe 2

2.1. Toleranzgrenzen

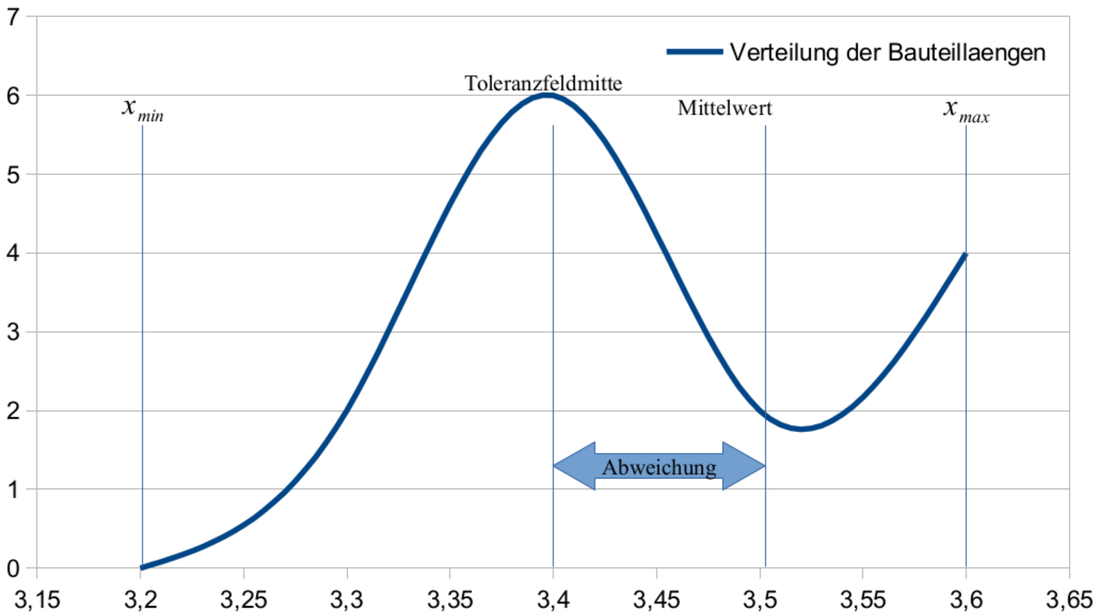
Toleranzgrenzen sind die Grenzen in denen ungefähr 99.73% ($\mu \pm 3\sigma$) aller Messwerte liegen müssen.

2.2. Standardabweichung und Toleranzfeldmittenabweichung

Die Standardabweichung der gegebenen Daten ist $\sigma \approx 0.1$.

Die Abweichung des Mittelwerts $\hat{x}$ von der Toleranzfeldmitte ist $\Delta\hat{x} \approx 3.3$.

2.3. Visualisierung



2.4. Prozessfähigkeitsindex

Der Prozessfähigkeitsindex ist $c_p = \frac{x_{max} - x_{min}}{6\sigma} \approx 0.63$.

Wenn $c_p \geq 1$ und $c_{pk} \geq 1$ gibt es weniger als 0.27% Ausschuss.

2.5. Prozessbrauchbarkeitsindex

Der Prozessbrauchbarkeitsindex ist $c_{pk} = c_p \left(1 - \frac{\Delta\hat{x}}{\Delta x_s}\right) \approx 0.47$.

2.6. Ausschuss

Der Ausschuss beträgt:

$$p \approx \frac{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{3c_{pk}}{\sqrt{2}}\right)}{2} \approx 0.08$$

Aufgabe 3

3.1. Genauigkeitsklasse

Die Genauigkeit $G = \left|\frac{\Delta x_{max}}{u_e}\right|$ ist der maximale Fehler relativ zu dem gegebenen Messbereich. Dieser Wert ist für beide Geräte mit 4% und 7% gegeben. Da also für beide Geräte $G < 0.1$ gilt, fallen beide in die Kategorie der Feinmessgeräte.

3.2. Varianz

Stellt man den gegebenen Zusammenhang um, erhält man:

$$\frac{U \cdot F}{R \cdot T} = \ln(pH - 7) \Rightarrow \exp\left(\frac{U \cdot F}{R \cdot T}\right) = pH - 7$$

Also:

$$\frac{(1 + \Delta U) \cdot U \cdot F}{(1 + \Delta T) \cdot T \cdot R} = \ln(pH - 7) \Rightarrow \exp\left(\frac{(1 + \Delta U) \cdot U \cdot F}{(1 + \Delta T) \cdot T \cdot R}\right) = pH - 7$$

Mit $Var(U) = \sigma_U^2$ ergibt sich für die Varianz $1 + \Delta U = 1.0001$ und $1 + \Delta T = 1.02$. Dann ist die Varianz des Terms $\frac{U \cdot F}{R \cdot T}$ durch $\frac{(1+\Delta U) \cdot U \cdot F}{(1+\Delta T) \cdot T \cdot R} \approx 0.98 \cdot \frac{U \cdot F}{T \cdot R}$ bestimmt, also eine Varianz von ungefähr 2%.

Es gelte nun $g = \frac{U \cdot F}{R \cdot T}$. Also $\exp(g) = pH - 7$ und $\Delta g = 0.02$. Nun ist die Varianz für $\exp(g)$ gegeben durch $\Delta pH = \exp(g) \cdot (1 + \Delta g) - 1 = \exp\left(\frac{U \cdot F}{R \cdot T}\right) \cdot 1.02 - 1$.

□

3.3. Maximaler Relativer Fehler

Wie bereits in Teilaufgabe 3.1 angenommen ergeben sich die maximalen relativen Fehler von Spannungs- und Temperaturmessung zu 4% beziehungsweise 7%.

Normalerweise gibt sich der relative Gesamtfehler durch Addition der einzelnen relativen Fehler. Aufgrund der beteiligten Exponentialfunktion lässt sich dies hier aber nicht einfach übertragen. Wir wählen daher außerdem den gleichen Ansatz wie in Teilaufgabe 3.2.

$\Delta g = \frac{1.04}{1.07} - 1 = 0.03$.

Somit folgt $\Delta pH = \exp(g) \cdot (1 + \Delta g) - 1 = \exp\left(\frac{U \cdot F}{R \cdot T}\right) \cdot 1.03 - 1$.