Komplexe Funktionen

1 Allgemeines

1.1 Reihen

Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-q} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ | $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!}...$ | $sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}...$
$cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}...$ | $sinh(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | $cosh(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

1.2 Trigonometrie

$$e^{iz} = cos(z) + isin(z) \ \mid \ e^z = e^x(cos(y) + isin(y)) \ \mid \ cos(ix) = cosh(x) \ \mid \ cosh(ix) = cos(x)$$

$$sin(x) = \frac{1}{2r}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \ \mid \ cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ \mid \ sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2 Möbius Transformation

2.1 Bestimmen

Transformation w ist gegeben mit $T(z_1) = w_1$, $T(z_2) = w_2$ und $T(z_3) = w_3$ durch Doppelverhältnis:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Rightarrow \frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}$$

1. Zwei Punkte bestimmen die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen: $(z_1 - z_0)(\overline{z}_2 - \overline{z}_0) = R^2$ für alle Gleichungen $|z - z_0| = R$ aufstellen, Gleichungssystem lösen
2. Transformation bestimmen: $T(a) = 0 \Rightarrow T_1(x) = x - a, T(b) = \infty \Rightarrow T_2(x) = \frac{x-a}{x-b}, T(c) = d \Rightarrow T(x) = \frac{x-a}{x-b} \cdot e = d$ erfüllen

2.2 Kreise

Die Punkte z_0, z_1, z_2 und z_3 liegen auf einem verallgemeinerten Kreis wenn: $\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in R$
Ist das Punktepaar $((0,0), (\infty, 0))$ symmetrisch so geht der Kreis im Bildraum durch den Ursprung und der Kreisradius R sei $T(p)$ mit p Randpunkt im Urbildraum auf Kreis.

2.3 Konforme Funktion

$$T(z) = k\frac{z - z1}{z - z2} \text{ mit } k \in R \setminus \{0\}$$

Wobei $T(z_1) = 0, T(z_2) = \infty$. Konformitaet: $f'(z) \neq 0$

3 Reihen

3.1 Taylorreihen

$$f(x) = A \int\limits_{start}^{end} \frac{1}{b - \xi} d\xi = \frac{A}{b + z_0} \int\limits_{start}^{end} \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{b + z_0}} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(b + z_0)^{n+1}} \cdot \int\limits_{start}^{end} (\xi - z_0)^n d\xi$$

Radius: |Entwicklungspunkt − Singularität| - Kreise!

3.2 Laurentreihen

1. Bestimme Singularitäten
2. Hebe Hebbare Singularitäten
3. In Summe aus Hauptteilen $(\frac{a}{(z - z_k)^k})$ und Nebenteilen $(\frac{z - z_k}{a})$ umformen.

$$f(x) = \frac{A}{\xi - b} = \frac{A}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(b - z_0)}{\xi - z_0}} = \frac{A}{\xi - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b - z_0}{\xi - z_0}\right)^k$$

3.2.1 Singularitäten

Ringe $\rightarrow$ Pole

1. Hebbar
2. n-facher Pol
3. Wesentliche Singularität

3.3 Residuen

Berechnung ohne Laurent:

1. Polstelle 1. Ordnung: $Res(f,a) = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$
2. Polstelle 2. Ordnung: $Res(f,a) = \lim\limits_{z\to a} \frac{d}{dz}\left((z-a)^2 f(z)\right)$
3. Polstelle n. Ordnung: $Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to a}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}(z-a)^n f(z)$
4. $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ $\;g(a)\neq 0, h(a) = 0, h'(a)\neq 0 \Rightarrow Res(f,a) = \frac{g(a)}{h(a)}$

Mit Laurent: z_k seien die Singularitäten, $Res(f,a_k)$ die dazugehörigen Residuen wobei der 1-te Hauptteil wie folgt aussieht: $\frac{Res(f,a_k)}{z-z_0}$

3.4 Residuenkalkül

- $\oint\limits_K f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{z_k\neq 0} Res(f,a_k)$ wobei $Res(f,a_k)$ im Kreis
- $\oint\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{z_k\neq 0} Res(f,a_k)$ wobei $Im(Res(f,a_k)) \geq 0$
- $\oint\limits_{0}^{\infty} f(z)dz = \pi i \sum\limits_{z_k\neq 0} Res(f,a_k)$

3.5 Partialbruchzerlegung

1. Residuen berechnen
2. Für alle Residuen: $f = \sum\limits_a \frac{Res(f,a)}{z-a}$

4 Kreisintegrale

1. Singularität liegt außerhalb oder auf dem Kreises - integral ist null
2. Hebbare Singularität vorhanden - integral ist null
3. Nichthebbare Singularität im Kreis:
   (a) Cauchysche Itegralformel $2\pi i \cdot f(z_0) = \int\limits_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$
   (b) Verallg. Cauchysche Integralformel $\frac{2\pi i}{n!}\cdot f^n(z_0) = \int\limits_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

5 Funktionseigenschaften

5.1 Holomorphie

Eine Abbildung f heißt holomorph wenn sie in jedem Punkt z_0 komplex differenzierbar ist. Dabei ist $f(z) = u(z)+v(z)i$ mit u und v reelle Funktionen.
Cauchy-Riemannsche DGL:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Schreibe: Da u und v stetig partiell differenzierbar sind ist f holomorph.
Eine reelle Funktion muss konstant sein um holomorph zu sein.
Folgende Funktionen sind holomorph: polynomisch, trigonomisch, exponential, potenzreihen, rational.
Holomorphie impliziert harmonie.

5.2 Harmonie

Der Realteil einer Funktion ist harmonisch wenn die Funktion holomorph ist.
Eine Funktion $f = u + iv$ ist harmonisch wenn gilt: $f_{xx} + f_{yy} = 0$

Berechnung reeller Integral über den Residuensatzes

a) Es sei f im Gebiet G, das die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z \geq 0\}$ umfasst, bis auf endlich viele isolierte und nicht reelle Singularitäten z_k holomorph und es gelte $\lim\limits_{|z|\to\infty} z \cdot f(z) = 0$ gleichmäßig in H, dann kann das folgende reelle uneigentliche Integral berechnet durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k > 0} \mathrm{Res}\,(f; z_k)\,.$$

Insbesondere fallen rationale Funktionen $r(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ in diese Klasse, wenn für die Polynome Grad $p + 2 \leq$ Grad q gilt.

b) Es sei f im Gebiet G, das die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z \geq 0\}$ umfasst, holomorph bis auf endlich viele isolierte und nicht reelle Singularitäten z_k in der oberen Halbebene und es gelte $\lim\limits_{|z|\to\infty, y\geq 0} f(z) = 0$, dann gilt

$$CHW \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k > 0} \mathrm{Res}\,\left(f(z)e^{iz}; z_k\right)\,.$$

c) Für die Polynome p und q der rationalen Funktion $r(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ gelte Grad $p <$ Grad q. Außerdem habe r keine Polstellen z_k im Bereich $0 \leq x < \infty$, dann kann das folgende reelle uneigentliche Integral mit $0 < \alpha < 1$ berechnet durch

$$\int_0^{\infty} \frac{r(x)}{x^\alpha}\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi\alpha i}} \sum_{z_k \neq 0} \mathrm{Res}\,\left(\frac{r(z)}{z^\alpha}; z_k\right)\,.$$

Man wähle in der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ für die Auswertung von z^α den Zweig $0 < \varphi < 2\pi$.

d) Ein Integral vom Typ $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$ mit einer rationalen Funktion R lässt sich als (geschlossenes) Kurvenintegral über den Einheitskreis deuten:

Parametrisierung des Einheitskreises c: $\quad c(\varphi) = e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Auf dem Einheitskreis, also für $z = c(\varphi)$, gilt:

$$c'(\varphi) = iz\,, \quad \bar{z} = \frac{1}{z}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Besitzt R keine Polstellen auf dem Einheitskreis, dann gilt nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi &= \int_c \underbrace{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}}_{=r(z)}\,dz \\ &= 2\pi i \sum_{|z_k|<1} \mathrm{Res}\,(r; z_k)\,,\end{aligned}$$

dabei sind z_k die Polstellen der rationalen Funktion $r(z)$.