1 Allgemeines

1.1 Nabla Operator ∇

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \qquad \vec{\nabla}\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

2 Partielle Differentialgleichungen

2.1 Homogene lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

1. Umstellen in Normalform: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}) \cdot u_i = 0$, weitere Beispiele für $n = 2$.
2. Charakteristische DGLs sind zu lösen: $\dot{x}(t) = a_1(x(t), y(t)); \dot{y}(t) = a_2(x(t), y(t))$
   (a) Dabei darf man alle Gleichungen z.B. durch eine andere teilen
   (b) Hat man dies getan, erhält man z.B. $\dot{x}(t) = 1$ und somit $x(t) = t + c$
   (c) $c = 0$ kann zulaessig sein wenn Anfangswert gegeben ist, also $x = t$ in diesem Fall
3. Eine der Gleichungen durch Variablen der anderen darstellen: $y = \psi(x, C)$, nach $C(\vec{c})$ umstellen $C(\vec{c}) = \phi(x, y)$
4. $\Phi(\phi(x, y))$ mit beliebigem Φ aus C^1 ist die Lösung
5. Allgemein: $u(\vec{x}) = \Phi(\phi_1(x), ..., \phi_{n-1}(\vec{x}))$

2.2 Quasilineare partielle inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung

So sieht sie aus: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}, u) \cdot u_{x_i} = b(\vec{x}, u)$

Lösen mit erweiterter quasilinearer homogener DGL: $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}, u) \cdot U_{x_i} \right) + b(\vec{x}, u) \cdot U_u = 0$
Dann wie homogene lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung lösen.
Dann $U = 0$, Nach dem Satz über implizite Funktionen ergibt sich:
Zum Schluss eine Basis als Funktion der anderen Basis darstellen, nach u umformen und $\psi(...)$ passend aussuchen.
Wir erhalten als allgemeine Loesung eine implizite Gleichung mit beliebige C^1 Funktion Φ.

2.3 Anfangswertaufgaben

$u(\vec{x}) = \Phi(\phi_1(x), ..., \phi_{n-1}(\vec{x}))$
Anfangsfunktion: $u_0(s) := u(x(s), y(s))$ auf der Kurve $c(s) := (x(s), y(s))^T$.

2.4 Burgersgleichung

TODO

2.5 Lineare inhomogene partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x}) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\vec{x}) u_{x_i} + f(\vec{x}) u = g(\vec{x})$$

Für $n = 2$ und $\vec{x} = (x, y)$: $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$
Matrix: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} TODO$
TODO typen und kriterien aufschreiben. Für $n = 2$ immer det nehmen, ultrahyperbolisch gibts nur in höheren Dimensionen.
3 Dim: $au_{xx} + 2bu_{xy} + 2cu_{xz} + 2du_{yz} + eu_{yy} + fu_{zz} + gu_x + hu_y + iu_z + ju = k$

$$\nabla^T \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} \nabla u + \left(g - \nabla^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, h - \nabla^T \begin{pmatrix} b \\ e \\ d \end{pmatrix}, i - \nabla^T \begin{pmatrix} e \\ d \\ f \end{pmatrix} \right) \nabla u + ju = k$$

2.5.1 Wärmeleitungsgleichung

So sieht sie aus: $v_t = v_{xx} + g(x)$ mit einer beliebigen C^1 Funktion $g(x)$. $v_h(x, t)$ löst $0 = v_t - v_{xx}$.
Löse nun homogene Gleichung mit inhomogener Anfangsbedingung: Fourier! :)

$$v_h(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot sin\left(\frac{k\pi x}{z}\right) e^{-\frac{tk^2\pi^2}{z^2}} \qquad T = 2 \cdot z \qquad b_k = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(x) \cdot sin\left(\frac{k\pi x}{z}\right) \text{ mit } f(x) = \text{ Anfangsbedingung}$$

Koeffizientenvergleich d. Anfangsbedingung mit Summenansatz hilfreich!
Nun Inhomogenität lösen: Inhomogene Gleichung mit homogener Randbedingung und Anfangsbedingung: $\omega = \pi/z$
$v_p(x,t) \xrightarrow{Ansatz} v_p(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(t) sin\,(k\omega x)$ und $v_k(0) = 0$.
In DGL einsetzen. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dot{v}_k(t) + k^2\omega^2 v_k(t)\right) sin(k\omega x) = g(x)$

3 Polarkoordination

3.1 Produktansatz in Polarkoordinaten

Differentialgleichungen II, K. Rothe, SoSe 2014, Theoriehinweise zu Blatt 4 6

Zum Produktansatz in Polarkoordinaten:

Die Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten $u_{xx}+u_{yy}=0$ besitzt in Polarkoordinaten $(x,y)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ folgende Dartstellung:

$$u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2}=0\,.$$

Mit Hilfe eines Produktansatzes der Form $u(r,\varphi)=R(r)\cdot\Phi(\varphi)$ erhält man

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=:\lambda$$

und damit die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0 \quad , \quad \Phi''+\lambda\Phi=0\,.$$

Ist das zu Grunde liegende Gebiet ein Kreisring, so muss $(\Phi(0)=\Phi(2\pi))$ gelten. Damit kommen nur 2π-periodische Lösungen für $\Phi(\varphi)$ in Frage ($\lambda_k=k^2\,, k\in\mathbb{N}_0$):

$$\Phi_0(\varphi)=a_0\,,\quad \Phi_k(\varphi)=a_k\sin(k\varphi)+b_k\cos(k\varphi)\,.$$

Bei der Lösung der Differentialgleichung in $R(r)$ unterscheidet man

1.Fall: $\lambda_0=0$:

$$0=r^2R''+rR' \quad\Rightarrow\quad R'(r)=\frac{c_0}{r} \quad\Rightarrow\quad R_0(r)=c_0\ln r+d_0$$

2.Fall: $\lambda_k=k^2>0$:

Der Ansatz $R(r)=r^\alpha$ eingesetzt in $r^2R''+rR'-k^2R=0$ liefert

$$r^\alpha(\alpha(\alpha-1)+\alpha-k^2)=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha^2=k^2 \quad\Rightarrow\quad R_k(r)=c_kr^k+d_kr^{-k}.$$

Die sich aus dem Produktansatz ergebenden Lösungen lauten also:

$$u_k(r,\varphi) = R_k(r)\cdot\Phi_k(\varphi) = \begin{cases} A_0+B_0\ln r \quad , \quad k=0 \\ (A_kr^k+C_kr^{-k})\cos(k\varphi) \quad , \quad k>0 \\ +(B_kr^k+D_kr^{-k})\sin(k\varphi)\,. \end{cases}$$

Durch Superposition erhält man damit für $0<R_1<r<R_2<\infty$ die Lösung

$$u(r,\varphi)=A_0+B_0\ln r+\sum_{k=1}^{\infty}(A_kr^k+C_kr^{-k})\cos(k\varphi)+(B_kr^k+D_kr^{-k})\sin(k\varphi).$$

$x=r\,cos\phi, y=r\,sin\phi$ mit $sin(2\phi)=2sin\phi cos\phi$ und $cos(3\phi)=4cos^3\phi-3cos\phi$

TODO: Herleitung kann in der Klausur uebersprungen werden. Wegkuerzen!

4 Dirichlet Problem

Kreis: $u(r,\phi)=A_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_kr^kcos(k\phi)+B_kr^ksin(k\phi)$

Halbkreis: $u(r,\phi)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_kr^ksin(k\phi)$

Kreisring: $u(r,\phi)=A_0+B_0ln|r|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(A_kr^k+C_kr^{-k}\right)cos(k\phi)+\left(B_kr^k+D_kr^{-k}\right)sin(k\phi)$

Halbkreisring: $u(r,\phi)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(A_kr^k+C_kr^{-k}\right)sin(k\phi)$