

1 Allgemeines

1.1 Nabla Operator ∇

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad \vec{\nabla} \vec{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$$

2 Partielle Differentialgleichungen

2.1 Homogene lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

1. Umstellen in Normalform: $\sum_{i=1}^n a_i(\vec{x}) \cdot u_i = 0$, weitere Beispiele für $n = 2$.
2. Charakteristische DGLs sind zu lösen: $\dot{x}(t) = a_1(x(t), y(t)); \dot{y}(t) = a_2(x(t), y(t))$
 - (a) Dabei darf man alle Gleichungen z.B. durch eine andere teilen
 - (b) Hat man dies getan, erhält man z.B. $\dot{x}(t) = 1$ und somit $x(t) = t + c$
 - (c) $c = 0$ kann zulaessig sein wenn Anfangswert gegeben ist, also $x = t$ in diesem Fall
3. Eine der Gleichungen durch Variablen der anderen darstellen: $y = \psi(x, C)$, nach $C(\vec{c})$ umstellen $C(\vec{c}) = \phi(x, y)$
4. $\Phi(\phi(x, y))$ mit beliebigem Φ aus C^1 ist die Lösung
5. Allgemein: $u(\vec{x}) = \Phi(\phi_1(x), \dots, \phi_{n-1}(\vec{x}))$

2.2 Quasilineare partielle inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung

So sieht sie aus: $\sum_{i=1}^n a_i(\vec{x}, u) \cdot u_{x_i} = b(\vec{x}, u)$

Lösen mit erweiterter quasilinearer homogener DGL: $\left(\sum_{i=1}^n a_i(\vec{x}, u) \cdot U_{x_i} \right) + b(\vec{x}, u) \cdot U_u = 0$

Dann wie homogene lineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung lösen.

Dann $U = 0$, Nach dem Satz über implizite Funktionen ergibt sich:

Zum Schluss eine Basis als Funktion der anderen Basis darstellen, nach u umformen und $\psi(\dots)$ passend aussuchen.

Wir erhalten als allgemeine Lösung eine implizite Gleichung mit beliebige C^1 Funktion Φ .

2.3 Anfangswertaufgaben

$u(\vec{x}) = \Phi(\phi_1(x), \dots, \phi_{n-1}(\vec{x}))$

Anfangsfunktion: $u_0(s) := u(x(s), y(s))$ auf der Kurve $c(s) := (x(s), y(s))^T$.

2.4 Burgersgleichung

TODO

2.5 Lineare inhomogene partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\vec{x}) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{x}) u_{x_i} + f(\vec{x}) u = g(\vec{x})$$

Für $n = 2$ und $\vec{x} = (x, y)$: $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$

Matrix: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} TODO$

elliptisch: Alle $\lambda_i \neq 0$ gleiches Vorzeichen

parabolisch: $\exists k : \lambda_k = 0$

hyperbolisch: $\exists i : \lambda_i$ hat verschiedenes Vorzeichen von allen anderen λ .

ultrahyperbolisch: erst ab $n=4$: alle anderen Faelle

> 0 : elliptisch

Wenn $\det = 0$: parabolisch

< 0 : hyperbolisch

Für $n = 2$ immer \det nehmen, ultrahyperbolisch gibts nur in höheren Dimensionen.

Für $n = 3$ nach einer spalte/zeile entwickeln und $\det(\text{Rest})$ nehmen. Produkt der EW ist \det , reicht aus.

3 Dim: $au_{xx} + 2bu_{xy} + 2cu_{xz} + 2du_{yz} + eu_{yy} + fu_{zz} + gu_x + hu_y + iu_z + ju = k$

$$\nabla^T \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} \nabla u + \left(g - \nabla^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, h - \nabla^T \begin{pmatrix} b \\ e \\ d \end{pmatrix}, i - \nabla^T \begin{pmatrix} c \\ d \\ f \end{pmatrix} \right) \nabla u + ju = k$$

2.5.1 Wärmeleitungsgleichung

So sieht sie aus: $v_t = v_{xx} + g(x)$ mit einer beliebigen C^1 Funktion $g(x)$. $v_h(x, t)$ löst $0 = v_t - v_{xx}$.

Löse nun homogene Gleichung mit inhomogener Anfangsbedingung: Fourier! :)

$$v_h(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{z}\right) e^{-\frac{t k^2 \pi^2}{z^2}} \quad T = 2 \cdot z \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{z}\right) \text{ mit } f(x) = \text{Anfangsbedingung}$$

Koeffizientenvergleich d. Anfangsbedingung mit Summenansatz hilfreich!

Nun Inhomogenität lösen: Inhomogene Gleichung mit homogener Randbedingung und Anfangsbedingung: $\omega = \pi/z$

$$v_p(x, t) \xrightarrow{\text{Ansatz}} v_p(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin(k\omega x) \text{ und } v_k(0) = 0.$$

$$\text{In DGL einsetzen. } \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{v}_k(t) + k^2 \omega^2 v_k(t)) \sin(k\omega x) = g(x)$$

3 Polarkoordination

3.1 Produktansatz in Polarkoordinaten

Differentialgleichungen II, K. Rothe, SoSe 2014, Theoriehinweise zu Blatt 4 6

Zum Produktansatz in Polarkoordinaten:

Die Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten $u_{xx} + u_{yy} = 0$ besitzt in Polarkoordinaten $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ folgende Darstellung:

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} = 0.$$

Mit Hilfe eines Produktansatzes der Form $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ erhält man

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

und damit die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0, \quad \Phi'' + \lambda \Phi = 0.$$

Ist das zu Grunde liegende Gebiet ein Kreisring, so muss $(\Phi(0) = \Phi(2\pi))$ gelten. Damit kommen nur 2π -periodische Lösungen für $\Phi(\varphi)$ in Frage ($\lambda_k = k^2, k \in \mathbb{N}_0$):

$$\Phi_0(\varphi) = a_0, \quad \Phi_k(\varphi) = a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi).$$

Bei der Lösung der Differentialgleichung in $R(r)$ unterscheidet man

1. Fall: $\lambda_0 = 0$:

$$0 = r^2 R'' + r R' \Rightarrow R'(r) = \frac{c_0}{r} \Rightarrow R_0(r) = c_0 \ln r + d_0$$

2. Fall: $\lambda_k = k^2 > 0$:

Der Ansatz $R(r) = r^\alpha$ eingesetzt in $r^2 R'' + r R' - k^2 R = 0$ liefert

$$r^\alpha (\alpha(\alpha-1) + \alpha - k^2) = 0 \Rightarrow \alpha^2 = k^2 \Rightarrow R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k}.$$

Die sich aus dem Produktansatz ergebenden Lösungen lauten also:

$$u_k(r, \varphi) = R_k(r) \cdot \Phi_k(\varphi) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, & k = 0 \\ (A_k r^k + C_k r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k + D_k r^{-k}) \sin(k\varphi), & k > 0 \end{cases}$$

Durch Superposition erhält man damit für $0 < R_1 < r < R_2 < \infty$ die Lösung

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + C_k r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k + D_k r^{-k}) \sin(k\varphi).$$

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi \text{ mit } \sin(2\phi) = 2 \sin \phi \cos \phi \text{ und } \cos(3\phi) = 4 \cos^3 \phi - 3 \cos \phi$$

TODO: Herleitung kann in der Klausur uebersprungen werden. Wegkuerzen!

4 Dirichlet Problem

Der Produktansatz $u(r, \phi) = R(r) \cdot \Phi(\phi)$ ergibt:

- Kreis: $u(r, \phi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k \cos(k\phi) + B_k r^k \sin(k\phi)$
- Halbkreis: $u(r, \phi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k \sin(k\phi)$
- Kreisring: $u(r, \phi) = A_0 + B_0 \ln |r| + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + C_k r^{-k}) \cos(k\phi) + (B_k r^k + D_k r^{-k}) \sin(k\phi)$
- Halbkreisring: $u(r, \phi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + C_k r^{-k}) \sin(k\phi)$

Kartesischerisierung: $x = \cos(\phi) * r, y = r \sin(\phi), r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$ und $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Da u harmonisch und nicht konstant ist, werden die Extremwerte nur auf dem Rand angenommen.

5 d'Alembertsche Lösungsformel

Für: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ist $u(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x + ct) + u_0(x - ct) + \frac{1}{6} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi$