1 Kombinatorik

Anzahl der Möglichkeiten:

1. Mit Reihenfolge: (Variation)
   (a) k aus n mit zurücklegen: n^k
   (b) k aus n ohne zurücklegen: $k!\binom{n}{k}$
2. Ohne Reihenfolge: (Kombination)
   (a) k aus n mit zurücklegen: $\binom{n+k-1}{k}$
   (b) k aus n ohne zurücklegen: $\binom{n}{k}$
3. Ohne Reihenfolge: (Permutation)
   (a) n ohne gleiche Elemente: $n!$
   (b) n ohne zurücklegen: $\frac{n!}{\prod(k_i!)}$ mit k_i Anzahl der Elemente i.

2 Wahrscheinlichkeit

2.1 Elementarereignis

Schliessen sich gegenseitig aus. Ein einelementiges Versuchsergebnis ist ein Elementarereignis. Z.B. $\omega_1 =$ Kopf , $\omega_2 =$Zahl.

2.2 Ereignisraum

Menge aller möglichen Ereignisse: $\Omega = \omega_1 \cup \omega_2$. Werfen zweier Münzen: $\Omega_2 = \Omega \times \Omega$

2.3 Bernoulli/Laplace

Endlich viele Ereignisse: $P = \frac{\sum \text{Erfolgsmoeglichkeiten}}{\sum \text{Alle Moeglichkeiten}}$. Auch Gegenereignis betrachten!!!

2.4 nach von Mises

Statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff: $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} H(A,n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$ mit $H(A,n)$ relative Wahrscheinlichkeit von A, also n_A Anzahl der Versuche wo A eintritt und n Gesamtanzahl der Versuche.

2.5 nach Kolmogorov

Massaxiom: $P(A) \geq 0$, Normierungsaxiom: $P(\Omega) = 1$, Additivitaetsaxiom: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ mit $A \cap B = \emptyset$. Bertrands Paradoxon.

2.6 Bayes Law

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

2.7 Erwartungswert

$E\{X\}$ ist eine lineare Operation. Ausserdem ist $E\{X \cdot Y\} = E\{X\} \cdot E\{Y\}$ wenn X und Y stochastisch unabhängig.

2.8 Moment

Das k-te Moment ist $m_k = E\left\{X^k\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f_X(x)dx$.

Das k-te zentrierte Moment ist $z_k = E\left\{(x - E\{X\})^k\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E\{X\})^k \cdot f_X(x)dx$.

2.9 Varianz

Nichtlinear. Fuer statistisch unabhaengige X_i: $Var\left\{\sum\limits_{i=1}^{N} \{X_i\}\right\} = \sum\limits_{i=1}^{N} Var\{X_i\}$

Diskret: $Var(X) = \sum(x-\mu)^2 P(X=x)$
$Var\{X\} = Cov(X,X) = E\left\{(X - E\{X\})^2\right\}$

3 Funktionen

3.1 Verteilungsfunktion

$F_X(c) = P(X \leq c) = \int f_X(c)dc$ wobei $f(c)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist.

Erwartungswert: $E\{X\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$. Varianz: $Var\{X\} = E\left\{(X - E\{X\})^2\right\}$

3.2 Bernoulli/Alternativverteilung

$F_{X_i}(k) = \begin{cases} p & k = 1 \\ (1-p) & k = 0 \end{cases}$ dann ist $\mu_{X_i} = p$ und $\sigma^2_{X_i} = p \cdot (1-p)$

3.3 Binomialverteilung

$Z_n = \sum X_i, B_{n,p}(k) = f_Z(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ dabei ist $\mu = N \cdot p$ und $\sigma^2 = Var\{Z_n\} = n \cdot Var\{X_i\} = N \cdot p \cdot (1-p)$

3.4 Poissionverteilung

$f_X(k) = \dfrac{A^k e^{-A}}{k!}$

3.5 Gleichverteilung

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } b \leq x \end{cases}$

3.6 Normalverteilung

$f_X(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ und $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} du$. Standard-NV hat Varianz $\sigma^2 = 1$ und Erwartungswert $\mu = 0$.

3.7 Exponentialverteilung

$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ hat den Erwartungswert $\dfrac{1}{\lambda}$. Dazugehörige Verteilungsfunktion: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

3.7.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$c, d \in \mathbb{R}, P(x > c | x > d) = \frac{P(x > c \cap x > d)}{P(x > d)}, c > d \Rightarrow \{x > c\} \subset \{x > d\} \Rightarrow P(x > c | x > d) = \frac{P(x > c)}{P(x > d)}$$

Im Falle der Exponantialfunktion: $\frac{P(x>c)}{P(x>d)} = F_X(c - d)$

4 Mehrdimensionaler Kram

4.1 Verbundverteilungsfunktion

$$x \in [a,b], y \in [c,d] \quad F_{X,Y}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dtds \quad F_{\vec{X}} = \begin{cases} 0 & x \leq a, y \leq c \\ F_{X,Y}(x,y) & a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \\ F_{X,Y}(b,y) & b \leq x, c \leq y \leq d \\ F_{X,Y}(x,d) & a \leq x \leq b, d \leq y \\ 1 & b \leq x, d \leq y \end{cases}$$

4.2 Randdichteverteilung

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \qquad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

4.3 Kovarianz/Unkorreliertheit

$Cov\{X,Y\} := E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\} = E\{X,Y\} - E\{X\}E\{Y\}$ $\quad E\{U \cdot V\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x,y)dxdy$

statistische Unabhaengigkeit $\Rightarrow Cov\{X,Y\} = 0$.

$$Var\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var\{X_i\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_i a_j Cov\{X_i, X_j\}$$

4.4 Stochastische Unabhängigkeit

A und B sind stochastisch Unabhängig $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

4.5 Eindimensional Summieren

Sei $Z = \sum X_i$ so ist $f_Z(z) = (\prod f_{X_i})(z)$. (Faltung!)
Faltung der Rechteckfunktion mit sich selbst ist die dreiecksfunktion.

4.6 Tschebyscheff Ungleichung

Erwartungswert $\mu = E\{X\}$ und Varianz σ^2 sowie $k \in \mathbb{R}$, dann $P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$ und $P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{k^2}$

4.7 Charakteristische Funktion

Diskret: $\Phi_X(j\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{j\omega x_k} P(X = x_k)$

Kontinuierlich: $\Phi_X(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)dx$ Char. Funktionen fuer versch. Verteilungen bei Maike abschreiben!

$\Phi(0) = 1$

4.8 Misc

X und Y sind statistisch unabhängig $\Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.
$P(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$
Erwartungswert fuer jede Dimension einzeln normal ueber Randdichteverteilungsfunktionen berechnen.

5 Weird Stuff

5.1 Leistungsdichtespektrum

$S_{XX}(j\omega) = Fourier(r_{XX}(\tau)) =$ r nehmen und $\phi(t) = 1$.

5.2 Leistung

$P = r_{XX}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)df$