

Komplexe Funktionen

1 Allgemeines

1.1 Reihen

Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ | $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \dots$ | $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$
 $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$ | $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

1.2 Trigonometrie

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z) \quad | \quad e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \quad | \quad \cos(ix) = \cosh(x) \quad | \quad \cosh(ix) = \cos(x)$$
$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \quad | \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad | \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2 Möbius Transformation

2.1 Bestimmen

Transformation w ist gegeben mit $T(z_1) = w_1$, $T(z_2) = w_2$ und $T(z_3) = w_3$ durch Doppelverhältnis:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Rightarrow \frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}$$

1. Zwei Punkte bestimmen die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen: $(z_1 - z_0)(\bar{z}_2 - \bar{z}_0) = R^2$ für alle Gleichungen $|z - z_0| = R$ aufstellen, Gleichungssystem lösen
2. Transformation bestimmen: $T(a) = 0 \Rightarrow T_1(x) = x - a$, $T(b) = \infty \Rightarrow T_2(x) = \frac{x-a}{x-b}$, $T(c) = d \Rightarrow T(x) = \frac{x-a}{x-b} \cdot e = d$ erfüllen

2.2 Kreise

Die Punkte z_0, z_1, z_2 und z_3 liegen auf einem verallgemeinerten Kreis wenn: $\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}$
Ist das Punktepaar $((0, 0), (\infty, 0))$ symmetrisch so geht der Kreis im Bildraum durch den Ursprung und der Kreisradius R sei $T(p)$ mit p Randpunkt im Urbildraum auf Kreis.

2.3 Konforme Funktion

$$T(z) = k \frac{z - z_1}{z - z_2} \text{ mit } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Wobei $T(z_1) = 0, T(z_2) = \infty$. Konformität: $f'(z) \neq 0$

3 Reihen

3.1 Taylorreihen

$$f(x) = A \int_{start}^{end} \frac{1}{b - \xi} d\xi = \frac{A}{b + z_0} \int_{start}^{end} \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{b + z_0}} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(b + z_0)^{n+1}} \cdot \int_{start}^{end} (\xi - z_0)^n d\xi$$

Radius: |Entwicklungspunkt - Singularität| - Kreise!

3.2 Laurentreihen

1. Bestimme Singularitäten
2. Hebe Hebbare Singularitäten
3. In Summe aus Hauptteilen $(\frac{a}{(z - z_k)^k})$ und Nebenteilen $(\frac{z - z_k}{a})$ umformen.

$$f(x) = \frac{A}{\xi - b} = \frac{A}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(b - z_0)}{\xi - z_0}} = \frac{A}{\xi - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b - z_0}{\xi - z_0} \right)^k$$

3.2.1 Singularitäten

Ringe \rightarrow Pole

1. Hebbar
2. n-facher Pol
3. Wesentliche Singularität

3.3 Residuen

Berechnung ohne Laurent:

1. Polstelle 1. Ordnung: $Res(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$
2. Polstelle 2. Ordnung: $Res(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} ((z - a)^2 f(z))$
3. Polstelle n. Ordnung: $Res(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} (z - a)^n f(z)$
4. $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ $g(a) \neq 0, h(a) = 0, h'(a) \neq 0 \Rightarrow Res(f, a) = \frac{g'(a)}{h'(a)}$

Mit Laurent: z_k seien die Singularitäten, $Res(f, a_k)$ die dazugehörigen Residuen wobei der 1-te Hauptteil wie folgt aussieht: $\frac{Res(f, a_k)}{z - z_0}$

3.4 Residuenkalkül

- $\oint_K f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \neq 0} Res(f, a_k)$ wobei $Res(f, a_k)$ im Kreis
- $\oint_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \neq 0} Res(f, a_k)$ wobei $Im(Res(f, a_k)) \geq 0$
- $\oint_0^{\infty} f(z) dz = \pi i \sum_{z_k \neq 0} Res(f, a_k)$

3.5 Partialbruchzerlegung

1. Residuen berechnen
2. Für alle Residuen: $f = \sum_a \frac{Res(f, a)}{z - a}$

4 Kreisintegrale

1. Singularität liegt außerhalb oder auf dem Kreises - integral ist null
2. Hebbare Singularität vorhanden - integral ist null
3. Nichthebbare Singularität im Kreis:

(a) Cauchysche Integralformel $2\pi i \cdot f(z_0) = \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$

(b) Verallg. Cauchysche Integralformel $\frac{2\pi i}{n!} \cdot f^n(z_0) = \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$

5 Funktionseigenschaften

5.1 Holomorphie

Eine Abbildung f heißt holomorph wenn sie in jedem Punkt z_0 komplex differenzierbar ist. Dabei ist $f(z) = u(z) + v(z)i$ mit u und v reelle Funktionen.

Cauchy-Riemannsche DGL:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Schreibe: Da u und v stetig partiell differenzierbar sind ist f holomorph.

Eine reelle Funktion muss konstant sein um holomorph zu sein.

Folgende Funktionen sind holomorph: polynomisch, trigonometrisch, exponential, potenzreihen, rational.

Holomorphie impliziert harmonie.

5.2 Harmonie

Der Realteil einer Funktion ist harmonisch wenn die Funktion holomorph ist.

Eine Funktion $f = u + iv$ ist harmonisch wenn gilt: $f_{xx} + f_{yy} = 0$

- c) Für die Polynome p und q der rationalen Funktion $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ gelte $\text{Grad } p < \text{Grad } q$. Außerdem habe r keine Polstellen z_k im Bereich $0 \leq x < \infty$, dann kann das folgende reelle uneigentliche Integral mit $0 < \alpha < 1$ berechnet durch

$$\int_0^{\infty} \frac{r(x)}{x^\alpha} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \sum_{z_k \neq 0} \text{Res} \left(\frac{r(z)}{z^\alpha}; z_k \right).$$

Man wähle in der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ für die Auswertung von z^α den Zweig $0 < \varphi < 2\pi$.

Berechnung reeller Integral über den Residuensatz

- a) Es sei f im Gebiet G , das die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z \geq 0\}$ umfasst, bis auf endlich viele isolierte und nicht reelle Singularitäten z_k holomorph und es gelte $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$ gleichmäßig in H , dann kann das folgende reelle uneigentliche Integral berechnet durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} (f; z_k).$$

Insbesondere fallen rationale Funktionen $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ in diese Klasse, wenn für die Polynome $\text{Grad } p + 2 \leq \text{Grad } q$ gilt.

- b) Es sei f im Gebiet G , das die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z \geq 0\}$ umfasst, holomorph bis auf endlich viele isolierte und nicht reelle Singularitäten z_k in der oberen Halbebene und es gelte $\lim_{|z| \rightarrow \infty, y \geq 0} f(z) = 0$, dann gilt

$$CHW \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} (f(z) e^{iz}; z_k).$$

- d) Ein Integral vom Typ $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ mit einer rationalen

Funktion R lässt sich als (geschlossenes) Kurvenintegral über den Einheitskreis deuten:

Parametrisierung des Einheitskreises $c: c(\varphi) = e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Auf dem Einheitskreis, also für $z = c(\varphi)$, gilt:

$$c'(\varphi) = iz, \quad \bar{z} = \frac{1}{z}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Besitzt R keine Polstellen auf dem Einheitskreis, dann gilt nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi &= \int_c \underbrace{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}_{=r(z)} \frac{1}{iz} dz \\ &= 2\pi i \sum_{|z_k| < 1} \text{Res} (r; z_k), \end{aligned}$$

dabei sind z_k die Polstellen der rationalen Funktion $r(z)$.