

Messtechnik und Messdatenverarbeitung - Kalman-Filter

Maike Meier und Lasse Schuirmann

March 16, 2015

THIS PAGE INTENTIONALLY LEFT BLANK.

1 Inertiale Navigation

Es ist nicht sinnvoll die Flughöhe allein auf Basis der Beschleunigung zu berechnen, da wie in der Aufgabenstellung beschrieben zusätzlich noch Inhomogenitäten des Treibstoffgemischs und Luftdruckschwankungen berücksichtigt werden müssen.

2 Messunsicherheit

Mit zunehmender Flughöhe kann der aktuelle Zustand stärker durch Aktionen und Ungenauigkeiten der Sensoren beeinflusst werden, dadurch steigt auch die Varianz der Messwerte und somit die Messungenauigkeit. Der Fehler wird also mit Aufintegriert.

3 GPS Messung

Die (ideale) GPS Messung mit der bekannten Standardabweichung von $\sigma_h = 2m$ ist nicht Höhenabhängig insbesondere da die aktuelle Messung nicht von vorherigen Abhängt.

4 Kalman: Grundlagen

Ein Kalman-Filter schätzt den Zustand eines Prozesses auf Kenntnis früherer Beobachtungen.

Betrachtet werden zeitdiskrete Prozesse der Form $x_t = A_t \cdot x_{t-1} + B_t \cdot u_t + eps_t$. Die Messwerte werden durch den (geschätzten) Zustand $z_t = C_t \cdot x_t \Delta_t$ beschrieben.

- $x_t \in \mathbb{R}^n$ bildet einen Zustandvektor zum Zeitpunkt t mit kontinuierlichen Komponenten.
- $u_t \in \mathbb{R}^l$ bildet einen Aktionsvektor.
- $A_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Systemmatrix, beschreibt den idealen Zustandsübergang von t nach $t + 1$
- $B_t \in \mathbb{R}^{n \times l}$, Steuermatrix, beschreibt den Zustandsübergang der durch die Aktion u_t bewirkt wird
- $C_t \in \mathbb{R}^{k \times n}$, Messmatrix, beschreibt die Abbildung von Zustand x_t auf Beobachtung z_t
- eps_t, Δ_t beschreiben das Rauschen des Prozesses als Zufallsvariablen, unabhängig und mit Kovarianzen R_t und Q_t verteilt

Daraus ergibt sich ein Kreislauf aus Prädiktion und Korrektur der Messungen.

5 Messunsicherheitsverlauf

Durch den Kalman-Filter und die damit einhergehende Kombination der vorherigen und verschiedenen Messungen ist zu vermuten, dass die Messunsicherheit wahrscheinlich weit unter der des naiven Angangs liegt.

6 Stochastischer Prozess

Mit ϵ_{ps_t} und Δ_t ist der gesamte Prozess abhängig von zwei stochastischen Variablen und somit selbst ein stochastischer Prozess.

7 Erwartungswert

Der Erwartungswert der einzelnen Messungen liegt bei den beschriebenen Grössen bei den realen Werten dieser Grössen.

8 Mittelwertberechnungen

Die bekanntesten Mittelwertberechnungen sind das arithmetische Mittel, das geometrische Mittel und der Median. Das geometrische Mittel ist für unsere Anwendung nicht geeignet, da dabei die Messwerte multipliziert werden und wir einen Wert 0.0 haben. Sowohl das arithmetische Mittel als auch der Median sind in diesem Fall geeignet, wobei beim Median "Ausreißer" nicht so sehr ins Gewicht fallen. Daher ist der Median zu bevorzugen, um die teilweise starken Schwankungen der gemessenen Werte auszugleichen.

9 Initialisierung

Der initiale Zustandsvektor ist gegeben durch $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ also $n = 2$. Der Aktionsvektor enthält nur die Beschleunigung: $u_0 = u_t = 2.5 \frac{m}{s^2}$.

10 Zustandsübergänge

$$A = \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot dt^2 \\ dt \end{pmatrix}$$

11 Kovarianz

Da beide Messgrößen näherungsweise nicht miteinander zusammenhängen ist die Kovarianzmatrix näherungsweise die Diagonalmatrix mit den Varianzen der einzelnen Größen auf der Diagonale.

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

12 Zustandsgleichung

$$\bar{x}_t = A \cdot x_{t-1} + B \cdot u_t$$

Ausserdem:

$$\bar{\Sigma}_t = A \cdot \Sigma_{t-1} \cdot A^T + Q$$

13 A Priori Schätzung

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \cdot dt^2 \\ dt \end{pmatrix} \cdot (2.5) = \begin{pmatrix} 1.25 \cdot dt^2 \\ 2.5 \cdot dt \end{pmatrix} \\ \bar{\Sigma}_t &= \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & dt \\ dt & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 + dt & dt \\ dt & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

14 A Priori Unsicherheit

Durch den Prädikationsschritt wird die Unsicherheit des Ergebnisses erhöht. Man sieht daran recht gut ein wichtiges Prinzip des Kalman-Filters: Bei der a priori Schätzung erhöht sich mit zunehmender Zeit die Unsicherheit, die durch eine Messung wieder verkleinert werden kann.

15 A Posteriori Schätzung

$$K_t = \bar{\Sigma}_t \cdot C^T \cdot (C \cdot \bar{\Sigma}_t \cdot C^T + R)^{-1}$$

$$x_t = \bar{x}_t + K_t \cdot (z_t - C \cdot \bar{x}_t)$$

$$\Sigma_t = (I - K_t \cdot C) \cdot \bar{\Sigma}_t$$

Mit $dt = 0.303$ und $z_t = \begin{pmatrix} -1.863 \\ 2.5 \cdot 0.303 \end{pmatrix}$:

$$x_{0.303} = \begin{pmatrix} -0.186292 \\ 0.075785 \end{pmatrix}, \Sigma_{0.303} = \begin{pmatrix} 5.2678e-06 & 3.4771e-05 \\ 3.4771e-05 & 2.2951e-04 \end{pmatrix}$$

16 A Posteriori Unsicherheit

Wie in 14. erwähnt wird die Vorhersage nun durch Messungen gestützt und daher sicherer, die Kovarianzmatrix ist kleiner.

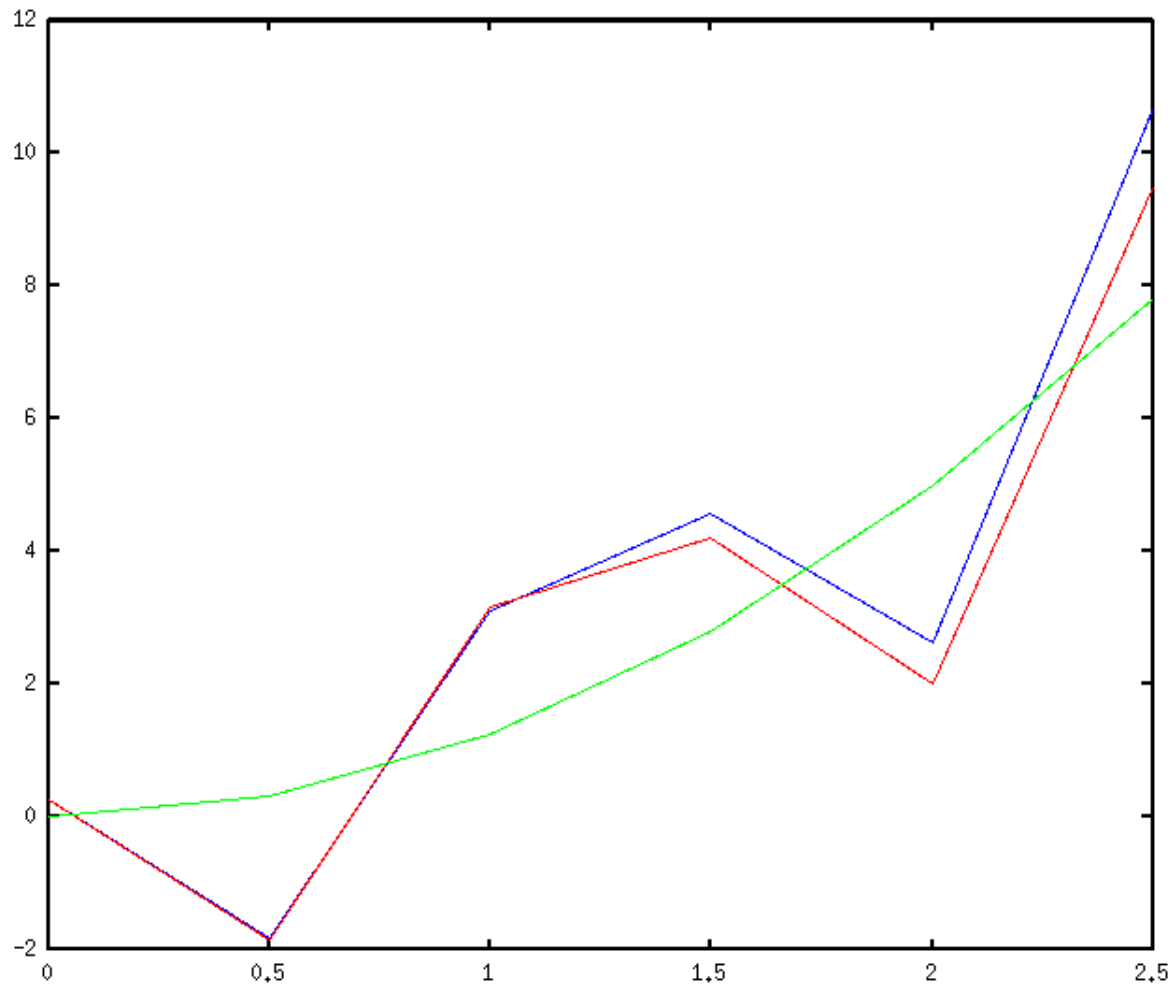
17 Rechnung

Die Rechnungen wurden mit einem octave script ausgerechnet mit $C = (1)$.

`kalmanf([0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5], [0.253, 0; -1.863, 2.5*0.5; 3.157, 2.5; 4.199, 2.5*1.5; 2.01, 2.5*2; 9.501, 2.5 * 2.5])`

$$x_{2.5} = \begin{pmatrix} 10.68463 \\ 7.82818 \end{pmatrix}$$

18 Visualisierung



Rot: GPS Messung, Blau: interpolierte Position, Grün: Reale Position.

19 Fazit

Der Kalman-Filter eignet sich durch seine Interpolations- und Echtzeitfähigkeit (durch die Rekursion) sehr gut für derartige Probleme (z.B. Positionsbestimmung). Vor allem der Vergleich der Vorhersage mit der Messung macht ihn sehr effizient.

Die schlechte Qualität des eigenen Ergebnisses lässt auf einen Fehler in dem Modell oder der Implementierung des Algorithmus schließen, der leider aus Zeitgründen nicht mehr behoben werden kann. Weiterhin ist zu vermuten, dass die Matrix C nicht einfach als 1 angenommen werden kann.