

# Messtechnik und Messdatenverarbeitung - Kalman-Filter

Maike Meier und Lasse Schuirmann

27. Januar 2015

THIS PAGE INTENTIONALLY LEFT BLANK.

# 1 Inertiale Navigation

Es ist nicht sinnvoll die Flughöhe allein auf Basis der Beschleunigung zu berechnen, da wie in der Aufgabenstellung beschrieben zusätzlich noch Inhomogenitäten des Treibstoffgemischs und Luftdruckschwankungen berücksichtigt werden müssen.

# 2 Messunsicherheit

Mit zunehmender Flughöhe kann der aktuelle Zustand stärker durch Aktionen und Ungenauigkeiten der Sensoren beeinflusst werden, dadurch steigt auch die Varianz der Messwerte und somit die Messungenauigkeit. Der Fehler wird also mit Aufintegriert.

# 3 GPS Messung

Die (ideale) GPS Messung mit der bekannten Standardabweichung von  $\sigma_h = 2m$  ist nicht Höhenabhängig insbesondere da die aktuelle Messung nicht von vorherigen Abhängt.

# 4 Kalman: Grundlagen

Ein Kalman-Filter schätzt den Zustand eines Prozesses auf Kenntnis früherer Beobachtungen.

Betrachtet werden zeitdiskrete Prozesse der Form  $x_t = A_t \cdot x_{t-1} + B_t \cdot u_t + eps_t$ . Die Messwerte werden durch den (geschätzten) Zustand  $z_t = C_t \cdot x_t \Delta_t$  beschrieben.

- $x_t \in \mathbb{R}^n$  bildet einen Zustandvektor zum Zeitpunkt  $t$  mit kontinuierlichen Komponenten.
- $u_t \in \mathbb{R}^l$  bildet einen Aktionsvektor.
- $A_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , Systemmatrix, beschreibt den idealen Zustandsübergang von  $t$  nach  $t + 1$
- $B_t \in \mathbb{R}^{n \times l}$ , Steuermatrix, beschreibt den Zustandsübergang der durch die Aktion  $u_t$  bewirkt wird
- $C_t \in \mathbb{R}^{k \times n}$ , Messmatrix, beschreibt die Abbildung von Zustand  $x_t$  auf Beobachtung  $z_t$
- $eps_t, \Delta_t$  beschreiben das Rauschen des Prozesses als Zufallsvariablen, unabhängig und mit Kovarianzen  $R_t$  und  $Q_t$  verteilt

Daraus ergibt sich ein Kreislauf aus Prädiktion und Korrektur der Messungen.

## 5 Messunsicherheitsverlauf

Durch den Kalman-Filter und die damit einhergehende Kombination der vorherigen und verschiedenen Messungen ist zu vermuten, dass die Messunsicherheit wahrscheinlich weit unter der des naiven Angangs liegt.

## 6 Stochastischer Prozess

Mit  $\epsilon_t$  und  $\Delta_t$  ist der gesamte Prozess abhängig von zwei stochastischen Variablen und somit selbst ein stochastischer Prozess.

## 7 Erwartungswert

Der Erwartungswert der einzelnen Messungen liegt bei den beschriebenen Grössen bei den realen Werten dieser Grössen.

## 8 TODO

## 9 Initialisierung

Der initiale Zustandsvektor ist gegeben durch  $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  also  $n = 2$ . Der Aktionsvektor enthält nur die Beschleunigung:  $u_0 = u_t = 2.5 \frac{m}{s^2}$ .

## 10 Zustandsübergänge

$$A = \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot dt^2 \\ dt \end{pmatrix}$$

## 11 Kovarianz

Da beide Messgrössen näherungsweise nicht miteinander zusammenhängen ist die Kovarianzmatrix näherungsweise die Diagonalmatrix mit den Varianzen der einzelnen Grössen auf der Diagonale.

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

## 12 Zustandsgleichung

$$\bar{x}_t = A \cdot x_{t-1} + B \cdot u_t$$

Ausserdem:

$$\bar{\Sigma}_t = A \cdot \Sigma_{t-1} \cdot A^T + Q$$

## 13 A Priori Schätzung

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \cdot dt^2 \\ dt \end{pmatrix} \cdot (2.5) = \begin{pmatrix} 1.25 \cdot dt^2 \\ 2.5 \cdot dt \end{pmatrix} \\ \bar{\Sigma}_t &= \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & dt \\ dt & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 + dt & dt \\ dt & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 14 Vergleich - Schätzung/Original

Durch den Prädikationsschritt wird die Unsicherheit des Ergebnisses erhöht. Man sieht daran recht gut ein wichtiges Prinzip des Kalman-Filters: Bei der a priori Schätzung erhöht sich mit zunehmender Zeit die Unsicherheit, die durch eine Messung wieder verkleinert werden kann.

## 15 A Posteriori Schätzung

$$\begin{aligned} K_t &= \bar{\Sigma}_t \cdot C^T \cdot (C \cdot \bar{\Sigma}_t \cdot C^T + R)^{-1} \\ x_t &= \bar{x}_t + K_t \cdot (z_t - C \cdot \bar{x}_t) \\ \Sigma_t &= (I - K_t \cdot C) \cdot \bar{\Sigma}_t \end{aligned}$$

Mit  $dt = 0.303$  und  $z_t = \begin{pmatrix} -1.863 \\ 2.5 \cdot 0.303 \end{pmatrix}$ :

$$x_t = \begin{pmatrix} -0.186292 & 0.075755 \\ -0.186250 & 0.075785 \end{pmatrix}, \Sigma_t = \begin{pmatrix} 5.2678e-06 & 3.4771e-05 \\ 3.4771e-05 & 2.2951e-04 \end{pmatrix}$$