# Questão 01

13 March 2018 08:49

Axiomas do Kolmogorov: 1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

2- $P(\Omega) = 1$

3 - $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

↳ Se os eventos $A_i$ forem disjuntos.

a) $P(A^c) = 1 - P(A)$

Prova:

Sabemos que $\Omega = A \cup A^c$ e que $P(\Omega) = 1$.

Sabemos também que $A \cap A^c = \emptyset \rightarrow A$ e $A^c$ são disjuntos

Pelo axioma 3, temos portanto:

$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

$1 = P(A) + P(A^c) \Rightarrow \boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$

b) $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo $A \in \mathcal{A}$

Prova:

Pelo axioma 1, já sabemos que $P(A) \geq 0$. Precisamos mostrar agora que $1 \geq P(A)$

Sabemos também que $P(A^c) \geq 0$ e que $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$

Podemos portanto escrever:

$1 = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \geq P(A) \Rightarrow 1 \geq P(A)$ Como queremos demonstrar.

c) Se $A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$

Prova: Se $A_1$ está contido em $A_2$, podemos dizer que $A_1 \cup A_1^c = A_2$. Portanto temos:

$P(A_1 \cup A_1^c) = P(A_2)$

$P(A_1) + P(A_1^c) = P(A_2) \Rightarrow P(A_1) = P(A_2) - P(A_1^c)$

Se $A_1 = A_2 \Rightarrow A_1^c = \emptyset$

d) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$

↳ Temos 2 casos.

Caso 1: Cada intersecção entre os conjuntos $A_i$ é vazia:

↳ Esse é o caso coberto pelo 3° axioma de Kolmogorov.

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$

Caso 2: A intersecção entre $A_i$ e $A_j$ é não vazia para algum $ij$:

↳ $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i) - \underbrace{P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_i)}_{\text{Não negativo}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$ Como queremos demonstrar

e) $P(A \cup B) - P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Prova: Essa propriedade pode ser dividida em 2 casos:

- Caso 1 - A e B são disjuntos:

  Neste caso, $(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(\emptyset)}_{0}$

  $= P(A) + P(B)$

  ↳ Pelo axioma 3 do Kolmogorov, $P(A) + P(B) - P(\cancel{A \cap B}) = P(A \cup B)$

- Caso 2 - A e B não são disjuntos:

  ?

# Questão 02

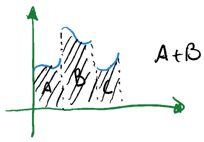
13 March 2018 14:08

a) V → A probabilidade do intervalo é igual ao comprimento do intervalo

b) F → A função pode ultrapassar o valor 1 desde que a área total abaixo de sua curva seja igual a 1

c) F → Se a função é maior que 1 em todo o intervalo, a área abaixo da curva será maior que 1, o que é impossível

d) V → A função f pode ser descontínua mas composta por funções contínuas em diferentes intervalos: ↳




A+B+C = 1

e) F → A função pode ter n pontos de máximo desde que a área abaixo da curva seja 1

f) V → $\int_0^1 2x\,dx = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} = x^2\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$ → Se a integral é igual a 1 no intervalo, a função é válida

g) V → $12\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 = 12\int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x\right]\Big|_0^1 = 12\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right]$

$= 12\left[\frac{4-6+3}{12}\right] = 1$ → Mesma justificativa do caso anterior

h) V → A função de densidade sempre deve ser positiva.
Se $f(x) \to \infty$ quando $x \to 1$, a área abaixo da curva não será 1.

# Questão 03

13 March 2018 15:24

Sabemos que $P(X|Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$

↳ Dessa forma, se $A \supset B$, $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

↳ Mas $A \cap B = B \Rightarrow P(B|A) = \dfrac{P(B)}{P(A)}$ → Ora, sabemos que $0 < P(A) \leq 1$

Dessa forma, $P(B|A)$ é igual a $P(B)$ dividido por uma constante positiva menor ou igual a 1 resultando em um número igual ou maior que $P(B)$

# Questão 04

13 March 2018 16:09

B → evento em que o paciente tem pelo menos mais um ano de vida

$P(B) = 0.7$

A → paciente de câncer de estômago cujo tumor é benigno.

P(B) pode ser estimada contando o número de pacientes de câncer de estômago vivos há mais de um ano do diagnóstico dividido pelo total de pacientes de câncer de estômago

P(B|A) pode ser estimado contando o número de pacientes de câncer de estômago com tumor benigno que estão vivos por mais de um ano desde o diagnóstico e dividindo pela quantidade de pacientes com tumor benigno

# Questão 05

13 March 2018 16:32

Sensibilidade = • Teste positivo = $P(T+|D+)$ = recall
• Paciente doente

• "Aumentar muito o recall é praticamente não deixar passar um caso positivo"

↳ Essa frase diz que quando o recall é alto, $P(T+|D+)$ se aproxima de um, o que quer dizer que é mais provável que o teste dê positivo caso o paciente realmente esteja doente

• Uma alta sensibilidade significa uma alta taxa de "verdadeiros positivos"

↳ Um verdadeiro positivo ocorre quando o paciente realmente está doente e o teste dá positivo. Pela definição, uma sensibilidade alta significa uma alta probabilidade do teste acusar doença p/ um paciente realmente doente

• Em recuperação da informação, o recall seria igual a

$$\frac{\text{nº de documentos relevantes recuperados}}{\text{nº de documentos relevantes}}.$$

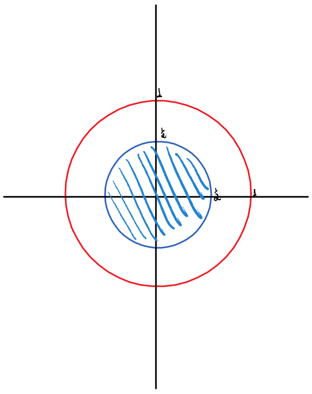
Podemos então fazer a seguinte analogia:

Documento relevante => pessoa doente
Documento recuperado => teste positivo

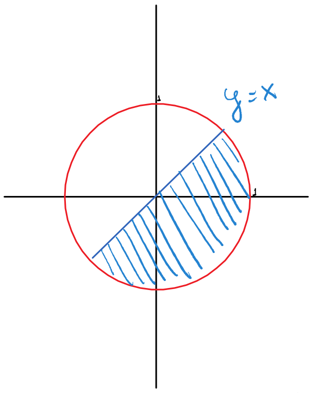
# Questão 06

14 March 2018 09:27

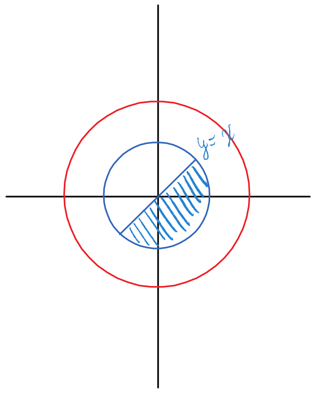
A=



B=




A ∩ B=




Area A: $\pi r^2 = \pi \cdot \frac{1}{4}$

$P(A) = \frac{1}{4}$

Area B: $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

A área hachurada da figura acima corresponde a metade da área do circulo menor

Area $(A \cap B) = \frac{1}{2}(\pi r^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

Sabemos que dois eventos A e B são independentes se e somente se $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$.

$P(A \cap B)$ foi calculada intuitivamente como $\frac{1}{8}$,

mas $P(A) = \frac{1}{4}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$.

Como $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, podemos concluir que os dois eventos são independentes.

# Questão 07

14 March 2018 10:34

a) F → A e B são independentes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$
O fato de $A \cap B = \emptyset$ implica que $P(A \cap B) = 0$, mas $P(A)$ e $P(B)$ podem ser ambos maiores que zero, o que faz com que o produto $P(A).P(B)$ seja diferente de 0.

b) F → Se $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
A e B são independentes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$
Mas $P(A \cap B) = P(A) \neq P(A).P(B)$ se $P(B) \neq 1$

c) V → $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Se A e B independentes, $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$

↳ $P(A|B) = \dfrac{P(A).\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$

↳ $P(B|A) = \dfrac{\cancel{P(A)}.P(B)}{\cancel{P(A)}} = P(B)$

d) V → $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$

↳ Para que $P(B|A)$ seja maior que $P(B)$, temos:
$\dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} > P(B) \Rightarrow P(B \cap A) > P(B).P(A)$

# Questão 08

14 March 2018 11:03

Sabemos que A e B são independentes $\iff P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Se $P(A) = 0 \Rightarrow P(A).P(B) = 0$ para qualquer $P(B)$

Isso faz sentido intuitivamente, uma vez que A nunca acontece, impedindo-o assim de influenciar em algum evento B

# Questão 09

14 March 2018 14:11

A e B são independentes $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$\hookrightarrow A \cap A = A \Rightarrow P(A \cap A) = P(A).P(A)$

$\hookrightarrow P(A) = (P(A))^2$

No intervalo $[0,1]$, onde $P(A)$ está definido, apenas os valores 0 e 1 satisfazem essa igualdade

# Questão 10

14 March 2018 14:20

$A$ e $B$ independentes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$ (I)

$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$

$\hookrightarrow P(A) = P((A \cap B^c) \cup (A \cap B)) = P((A \cap B^c)) + P(A \cap B) - P(\underbrace{(A \cap B^c) \cap (A \cap B)}_{\emptyset})$

$\hookrightarrow P(A) = P((A \cap B^c)) + P(A).P(B)$

$P(A) - P(A).P(B) = P((A \cap B^c))$

$P(A)(\underbrace{1 - P(B)}_{P(B^c)}) = P((A \cap B^c)) \Rightarrow P(A).P(B^c) = P((A \cap B^c))$

$\hookrightarrow$ Por I, sabemos que essa igualdade implica que $P(A)$ e $P(B^c)$ são independentes.

# Questão 11

14 March 2018 14:44

$A, B, C$ mutuamente independentes $\Rightarrow$ $P(A\cap B) = P(A).P(B)$ (I)
$P(A\cap C) = P(A).P(C)$ (II)
$P(B\cap C) = P(B).P(C)$ (III)

- Provar que $C$ é independente de $A\cap B$
  - ↳ Se $C$ é independente de $A\cap B$, podemos escrever:

    $P(C\cap A\cap B) = P(C).P(A\cap B)$

    ↳ Por I, temos: $\underbrace{P(C\cap A\cap B) = P(C).P(A).P(B)}_{\text{Por definição, } C, A \text{ e } B \text{ são independentes}}$

- Provar que $C$ é independente de $A\cap B^c$ $\Rightarrow P(A\cap B^c) = P(A).P(B^c)$
  - ↳ Conforme visto no exercício 10, $A$ e $B^c$ são independentes
  - ↳ Se $C$ e $A\cap B^c$ são independentes $\Rightarrow P(C\cap A\cap B^c) = P(C).P(A\cap B^c)$

    $\underbrace{= P(C).P(A).P(B^c)}_{\text{Mais uma vez encontramos a definição de independência entre } C, A \text{ e } B^c}$

- Provar que $C$ é independente de $A^c\cap B^c$
  - ↳ Conforme visto no exercício 10, $P(A^c\cap B^c) = P(A^c).P(B^c)$
  - ↳ Se $C$ é independente de $A^c\cap B^c$ $\Rightarrow P(C\cap A^c\cap B^c) = P(C).P(A^c\cap B^c)$

    $\underbrace{= P(C).P(A^c).P(B^c)}_{\text{Definição de independência entre } C, A^c \text{ e } B^c}$

# Questão 12

14 March 2018 15:47

Sabemos que A pode ser escrito como: $(A \cap B^c) \cup (A \cap B)$

É natural dizer que B pode ser escrito como: $(B \cap A^c) \cup (B \cap A)$

Assim, $A \cup B = (A \cap B^c) \cup \underbrace{(A \cap B)} \cup (B \cap A^c) \cup \underbrace{(B \cap A)}$

termos iguais, podemos manter apenas um

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B)$$

↳ Conforme visto na questão 11, C é independente de $(A \cap B^c)$, $(B^c \cap A)$ e $(A \cap B)$, o que o faz independente de $(A \cap B^c) \cup (B^c \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup B$

# Questão 13

14 March 2018 16:24

$P(B) = 5P(A)$ ①

$\hookrightarrow P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\hookrightarrow P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Fazendo $\dfrac{P(B|A)}{P(A|B)}$, temos:

$$\frac{\cancel{P(B \cap A)}}{P(A)} \cdot \frac{P(B)}{\cancel{P(A \cap B)}} = \frac{P(B)}{P(A)}$$

Usando a equação I, temos:

$$\frac{P(B|A)}{P(A|B)} = \frac{P(B)}{P(A)} = 5 \Rightarrow \boxed{P(B|A) = 5P(A|B)}$$

# Questão 14

15 March 2018 08:09

- F
- V
- F
- F → O falso positivo é quando o indivíduo tem TESTE + mas HIV −

# Questão 15

15 March 2018 08:20

Figura 1a:

Falso positivo: P(Teste + | Gravidez -)

Figura 1b:

Falso negativo: P(Teste - | Gravidez +)