Questão 1

06 March 2018 21:00

Somente os conjuntos dos reais ($\mathbb{R}$) e dos irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) são não-enumeráveis

Questão 2

06 March 2018 21:05

$x^a y^a = (xy)^a$ → Correto

$\frac{a}{x+y} = \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$ → Incorreto

$x^{\;b} = x^{ab}$ → Correto

$(x/y)^a = x^a / y^a$ → Correto

$(x+y)^a = x^a + y^a$ → Incorreto

$x^a y^b = (xy)^{a+b}$ → Incorreto

$(-x)^2 = -x^2$ → Incorreto

$\sqrt{x^2 + y^2} = |x| + |y|$ – Incorreto

$\frac{x+y}{a} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a}$ → Correto

Questão 3

06 March 2018 21:19

$x^2 + y^2 = 1$ → Circunferência de raio 1 e centro na origem

$x^2 + y^2 = 4$ → Circunferência de raio 2 e centro na origem

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$ → Circunferência de raio 1 e centro em $(2,-1)$

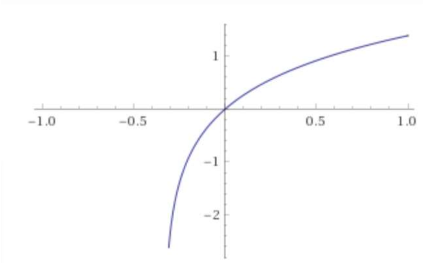
$\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{1}\right)^2 = 1$ → Elipse de centro $(2,-1)$, semi-eixo maior em $x=2$ e semi-eixo menor em $y=1$

Questão 4

06 March 2018 21:32

- $f(x) = \log(3x+1)$

Gráfico:



Domínio: $3x+1>0$

$x > -\frac{1}{3}$

$\hookrightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3}\}$

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y) \rightarrow$ correto

$\log(x+y) = \log(x) \cdot \log(y) \rightarrow$ Incorreto

$e^{x+y} = e^{x} + e^{y} \rightarrow$ Incorreto

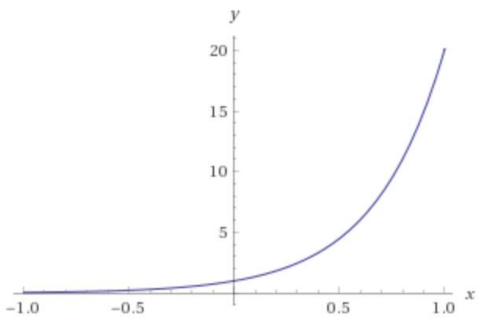
$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y) \rightarrow$ correto

$e^{xy} = (e^{x})^{y} \rightarrow$ Correto

$e^{xy} = e^{x} + e^{y} \rightarrow$ Incorreto

$f(x) = e^{3x}$

Gráfico:



Domínio: $\mathbb{R}$

- $f(x) = \log(3x+1)$

$\hookrightarrow f'(x) = \frac{3}{3x+1}$

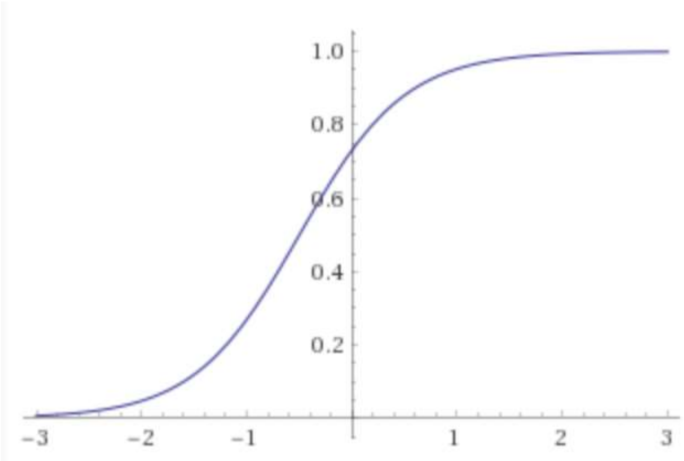
$f(x) = e^{3x}$

$\hookrightarrow f'(x) = 3e^{3x}$

Questão 5

07 March 2018 08:31

Gráfico:



Derivada: $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-1-2x}}$ → $U = e^{-1-2x}$, $U' = -2e^{-1-2x}$ → $f(U) = \dfrac{1}{1+U}$

↳ $f'(U) = \dfrac{1'(1+U) - 1(1+U)'}{(1+U)^2} = \dfrac{-U'}{(1+U)^2}$ ⇒ $f'(x) = \dfrac{2e^{-1-2x}}{(1+e^{-1-2x})^2}$

↳ Maximizando $f'(x)$ no intervalo $(-3,3)$ encontramos:

$f'(x)$ é máxima quando $x = -\frac{1}{2}$

$f'(x)$ é próxima de zero quando x está próximo dos extremos 3 e -3

Questão 6

07 March 2018 08:41

Queremos mostrar que:

$$\ln\left(\frac{f(x)}{1-f(x)}\right) = 1+2x \quad \text{se } f(x) = \frac{1}{1+e^{-1-2x}}$$

Usando a propriedade do logaritmo do quociente, temos que: $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

Podemos escrever portanto:

$$\ln\left(\frac{f(x)}{1-f(x)}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+e^{-1-2x}}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{1+e^{-1-2x}}\right)$$

$$= \cancel{\ln(1)}^{0} - \ln\left(1+e^{-1-2x}\right) - \ln\left(\frac{\cancel{1} + e^{-1-2x} - \cancel{1}}{1+e^{-1-2x}}\right)$$

$$= -\ln\left(1+e^{-1-2x}\right) - \ln\left(\frac{e^{-1-2x}}{1+e^{-1-2x}}\right)$$

$$= -\ln\left(1+e^{-1-2x}\right) - \left[\ln\left(e^{-1-2x}\right) - \ln\left(1+e^{-1-2x}\right)\right]$$

$$= -\ln\left(1+e^{-1-2x}\right) - \left[-1-2x - \ln\left(1+e^{-1-2x}\right)\right]$$

$$= \cancel{-\ln\left(1+e^{-1-2x}\right)} + 1 + 2x + \cancel{\ln\left(1+e^{-1-2x}\right)}$$

$$= 1+2x$$

Questão 7

07 March 2018 08:52

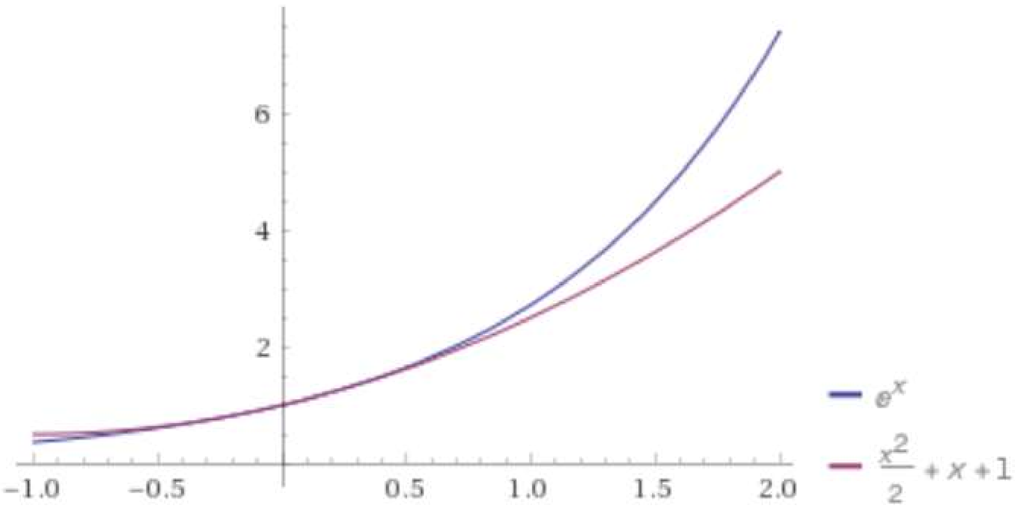
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

- $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$f(x) \approx e^0 + e^0(x-0) + \frac{1}{2} e^0 (x-0)^2$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

- Gráfico:



- $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$

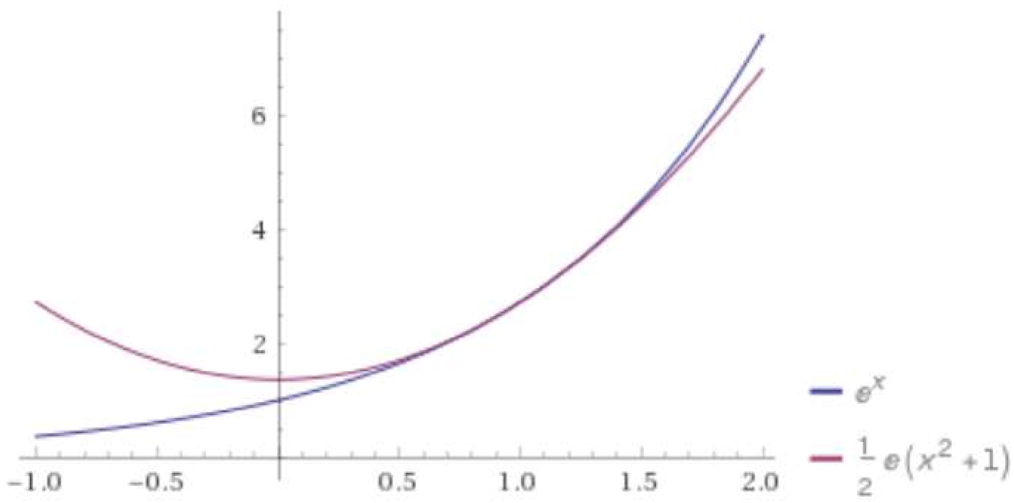
$$f(x) \approx e^1 + e^1(x-1) + \frac{1}{2} e^1 (x-1)^2$$

$$= \cancel{e} + ex - \cancel{e} + \frac{1}{2} e(x^2 - 2x + 1)$$

$$= \cancel{ex} + \frac{ex^2}{2} - \cancel{ex} + \frac{e}{2}$$

$$= \frac{e}{2}(x^2+1)$$

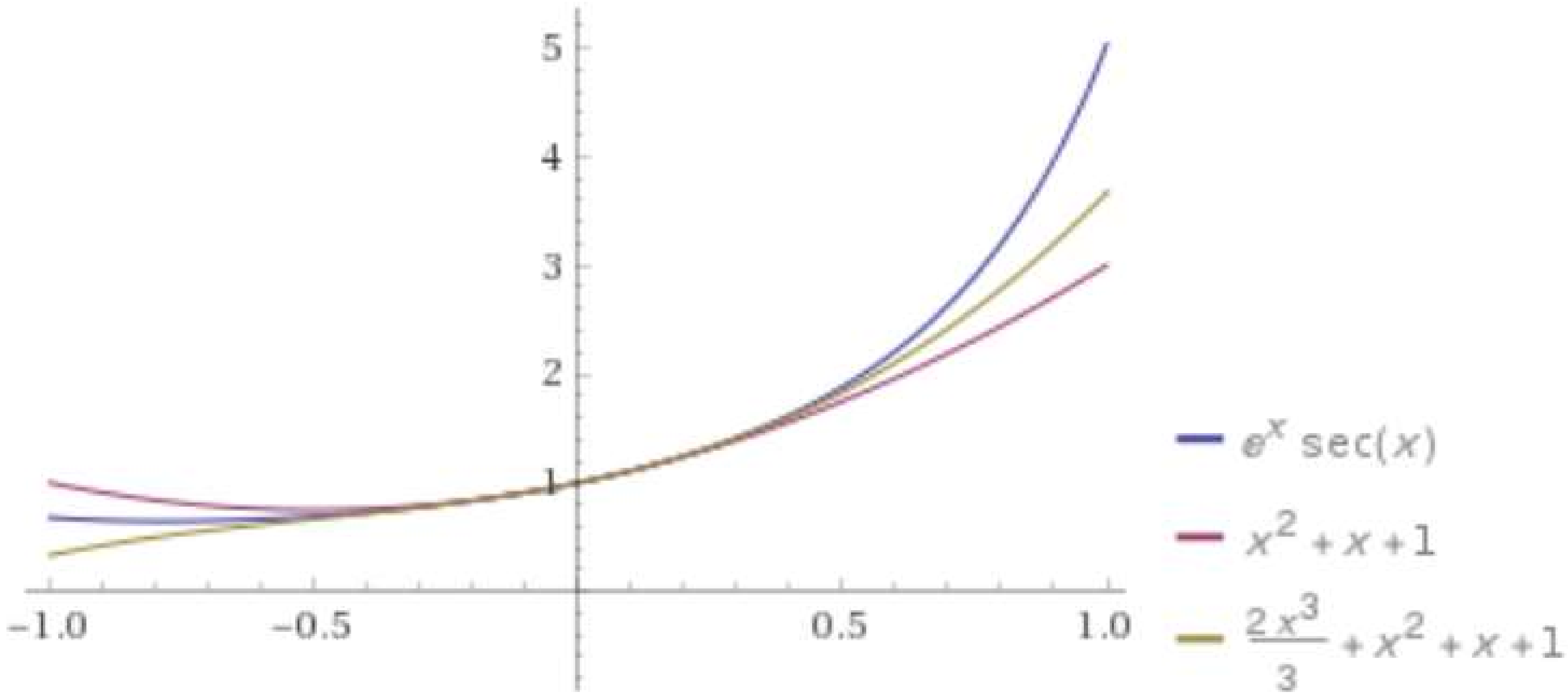
- Gráfico:



Questão 8

07 March 2018 09:31

O gráfico obtido está exibido abaixo e corresponde ao esperado



Questão 9

07 March 2018 09:32

- Para mostrarmos que um conjunto **V** de vetores é um sub-espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ para algum n, este conjunto precisa obedecer às seguintes propriedades:
  1- **V** deve ser subconjunto de $\mathbb{R}^n$
  2- O vetor nulo deve pertencer a **V**
  3- Dados 2 vetores v_1 e v_2 pertencentes a **V**, qualquer combinação linear de v_1 e v_2 também pertencem a **V**

↳ Seja A o conjunto das combinações lineares dos k vetores $v_1, v_2, \dots v_k$:

$$A = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \;/\; \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

1- Como cada v_i é um vetor em $\mathbb{R}^5$, é fácil notarmos que todos os elementos de A também estão contidos em $\mathbb{R}^5$, portanto A é um subconjunto de $\mathbb{R}^5$

2- O vetor nulo está contido em A, basta que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

3- Sejam w_1 e $w_2 \in A$. Se ambos w_1 e w_2 são pertencentes a A, eles podem ser escritos na forma de combinações lineares de $v_1, v_2 \dots v_k$. Assim:

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$
$$w_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k$$

Podemos escrever então:

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 = a_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k) + a_2(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k)$$
$$= a_1\alpha_1 v_1 + a_1\alpha_2 v_2 + \dots + a_1\alpha_k v_k + a_2\beta_1 v_1 + a_2\beta_2 v_2 + \dots + a_2\beta_k v_k$$
$$= \underbrace{(a_1\alpha_1 + a_2\beta_1)}_{\text{constante real}} v_1 + \underbrace{(a_1\alpha_2 + a_2\beta_2)}_{\text{constante real}} v_2 + \dots + \underbrace{(a_1\alpha_k + a_2\beta_k)}_{\text{constante real}} v_k$$

↳ Percebemos que a combinação linear $a_1 w_1 + a_2 w_2$ é também uma combinação linear de $v_1, v_2 \dots v_k$ e portanto também pertencem a A.

- $$X\beta = \begin{bmatrix} 1 & 153 & 2 \\ 1 & 107 & 1 \\ 1 & 238 & 3 \\ 1 & 179 & 2 \\ 1 & 250 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + 153\beta_1 + 2\beta_2 \\ \beta_0 + 107\beta_1 + \beta_2 \\ \beta_0 + 238\beta_1 + 3\beta_2 \\ \beta_0 + 179\beta_1 + 2\beta_2 \\ \beta_0 + 250\beta_1 + 4\beta_2 \end{bmatrix}$$

↳ $$\beta_0 X_0 = \begin{bmatrix} \beta_0 \cdot 1 \\ \beta_0 \cdot 1 \\ \beta_0 \cdot 1 \\ \beta_0 \cdot 1 \\ \beta_0 \cdot 1 \end{bmatrix} \quad \beta_1 X_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \cdot 153 \\ \beta_1 \cdot 107 \\ \beta_1 \cdot 238 \\ \beta_1 \cdot 179 \\ \beta_1 \cdot 250 \end{bmatrix} \quad \beta_2 X_2 = \begin{bmatrix} \beta_2 \cdot 2 \\ \beta_2 \cdot 1 \\ \beta_2 \cdot 3 \\ \beta_2 \cdot 2 \\ \beta_2 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

↳ $$\beta_0 X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 = \begin{bmatrix} \beta_0 + 153\beta_1 + 2\beta_2 \\ \beta_0 + 107\beta_1 + \beta_2 \\ \beta_0 + 238\beta_1 + 3\beta_2 \\ \beta_0 + 179\beta_1 + 2\beta_2 \\ \beta_0 + 250\beta_1 + 4\beta_2 \end{bmatrix}$$

Questão 10

07 March 2018 09:32

Sabemos que $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_i^n x_i$

•

$\Rightarrow \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)$

$= \sum_i^n x_i^2 - 2\bar{x}\sum_i^n x_i + \sum_i^n \bar{x}^2$ Não depende de x_i

$= \sum_i^n x_i^2 - 2\bar{x}\sum_i^n x_i + n\bar{x}^2$

$= \sum_i^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2$

$= \sum_i^n x_i^2 - n\bar{x}^2$ CQD

• $\sum_i^n (x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 = \sum_i^n \left((x_i-\bar{x})^2 - 2(x_i-\bar{x})(\bar{x}-a) + (\bar{x}-a)^2\right)$

$= \sum_i^n (x_i-\bar{x})^2 - 2\sum_i^n \left((x_i-\bar{x})(\bar{x}-a)\right) + \sum_i^n (\bar{x}-a)^2$ Como $\bar{x}-a$ não varia com i, podemos escrever...

$= \sum_i^n (x_i-\bar{x})^2 - 2(\bar{x}-a)\cancel{\sum_i^n (x_i-\bar{x})}^{0} + n(\bar{x}-a)^2$

$= \sum_i^n (x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-a)^2$ CQD

• O valor de a que minimiza $\sum_i^n (x_i - a)^2$ é $a = \bar{x}$ porque dado que $\sum_i^n (x_i - a)^2 = \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x}-a)^2$, vemos que para que a expressão seja minimizada, é necessário que o termo $n(\bar{x}-a)^2$ seja o menor possível. É possível notar, porém, que devido ao termo $(\bar{x}-a)$ estar elevado ao quadrado, não é possível obtermos um fator negativo e portanto, o menor número real que podemos obter é zero. Igualando o termo a zero temos então:

$\bar{x} - a = 0$

$\Rightarrow \bar{x} = a$

Questão 11

07 March 2018 10:47

- $$x'Ax = (x_1, x_2, \ldots, x_n) A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\sum_i^n x_i A_{i1}, \sum_i^n x_i A_{i2}, \ldots, \sum_i^n x_i A_{in} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \sum x_i A_{i1} + x_2 \sum_i^n x_i A_{i2} + \ldots + x_n \sum_i^n x_i A_{in}$$

$$= \sum_j^n x_j \sum_i^n x_i A_{ij}$$

$$= \sum_{ij} x_j x_i A_{ij} \qquad CQD$$

- $$x'x = [x_1, x_2, \ldots x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

↳ Pela definição de produto escalar entre vetores, temos:

$$x'x = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_i^n x_i^2 \qquad CQD$$

- $$x x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n x_1 & x_n x_2 & \cdots & x_n^2 \end{bmatrix}$$

↳ Devido a propriedade comutativa da multiplicação, percebemos que a matriz obtida é igual à sua transposta, o que a configura como simétrica