Lista 05 - Fundamentos Estatísticos para Ciência dos Dados

Vinícius de Oliveira Silva - 2013007820

Questão 2

Questão 4.3 - Capítulo 4 - Meyer

$X \to \{1, 2, 3, \dots\}$

$P(X=j) = \frac{1}{2^j}$

a) $P(X \text{ é par}) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + \dots$

$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{2i}}$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \boxed{\frac{1}{3}}$

b) $P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + \dots$

$= \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \dots$

$= \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \boxed{\frac{1}{16}}$

c) $P(X \text{ é divisível por } 3) = P(X=3) + P(X=6) + P(X=9) + \dots$

$= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots$

$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3i}} = \boxed{\frac{1}{7}}$

Questão 4.6 - Capítulo 4 - Meyer

$$P(T = K - C) = 0,8$$

$$P\left(T = K + \frac{K}{3} - C\right) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$$

$$P\left(T = K + \frac{K}{3} + \frac{K}{3} - C\right) \; 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,032$$

$$P\left(T = K + \frac{K}{3} + \frac{K}{3} + \frac{K}{3} - C\right) \; 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,0064$$

$$P\left(T = K + \frac{K}{3} + \frac{K}{3} + \frac{K}{3} + \frac{K}{3} - C\right) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,00128$$

$$P\left(T = K + \frac{K}{3} + \frac{K}{3} + \frac{K}{3} + \frac{K}{3}\right) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,00032$$

Questão 4.14 - Capítulo 4 - Meyer

a) $F(x) = \int 20x^3(1-x)\,dx = 20\int x^3 - x^4\,dx = 20\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right) = 5x^4 - 4x^5$

b $\int_0^{\frac{2}{3}} 20x^3(1-x)\,dx = \left[5x^4 - 4x^5\right]\Big|_0^{\frac{2}{3}} = 5\left(\frac{2}{3}\right)^4 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0,460$

c) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 20x^3(1-x)\,dx = \left[5x^4 - 4x^5\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = 0,4156$

↳ Função de densidade $= (0,4156 * C_1) + (1 - 0,4156) * C_2 - C_3$

Questão 9.3 - Capítulo 9 - Meyer

```
cat ("A probabilidade de obtermos um cabo defeituoso é de ", 2*pnorm(0.8-0.025, 0.8,
sqrt(0.0004)))

## A probabilidade de obtermos um cabo defeituoso é de  0.2112995
```

Questão 9.17 - Capítulo 9 - Meyer

a) A esperança de uma distribuição normal é μ. Neste caso, μ=33. T(33) = \$0.10 por galão
b) T(x) = \$0.15 por galão se 30 < X < 35 = \$0.05 por galão se 35 ≤ X < 40 ou 25 < X ≤ 30 = \$0.10 caso contrário

Questão 3

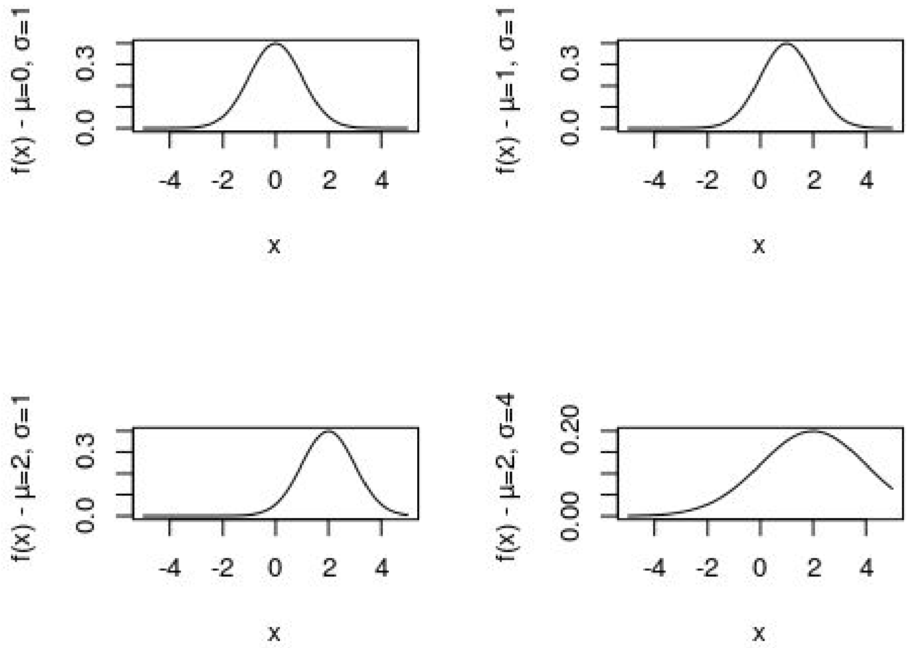
A) Desenhando os graficos:

```
par(mfrow=c(2,2))

eixoX <- seq(from=-5, to=5, by=0.1)

fDens01 <- dnorm(eixoX, 0, sqrt(1))
fDens11 <- dnorm(eixoX, 1, sqrt(1))
fDens21 <- dnorm(eixoX, 2, sqrt(1))
fDens24 <- dnorm(eixoX, 2, sqrt(4))


plot(eixoX, fDens01, type = "l", xlab = "x", ylab= "f(x) - µ=0, σ=1 ")
plot(eixoX, fDens11, type = "l", xlab = "x", ylab= "f(x) - µ=1, σ=1 ")
plot(eixoX, fDens21, type = "l", xlab = "x", ylab= "f(x) - µ=2, σ=1 ")
plot(eixoX, fDens24, type = "l", xlab = "x", ylab= "f(x) - µ=2, σ=4 ")
```



B) O ponto onde f(x) é máximo é quando x=µ. A altura que f(x) atinge é inversamente proporcional a σ

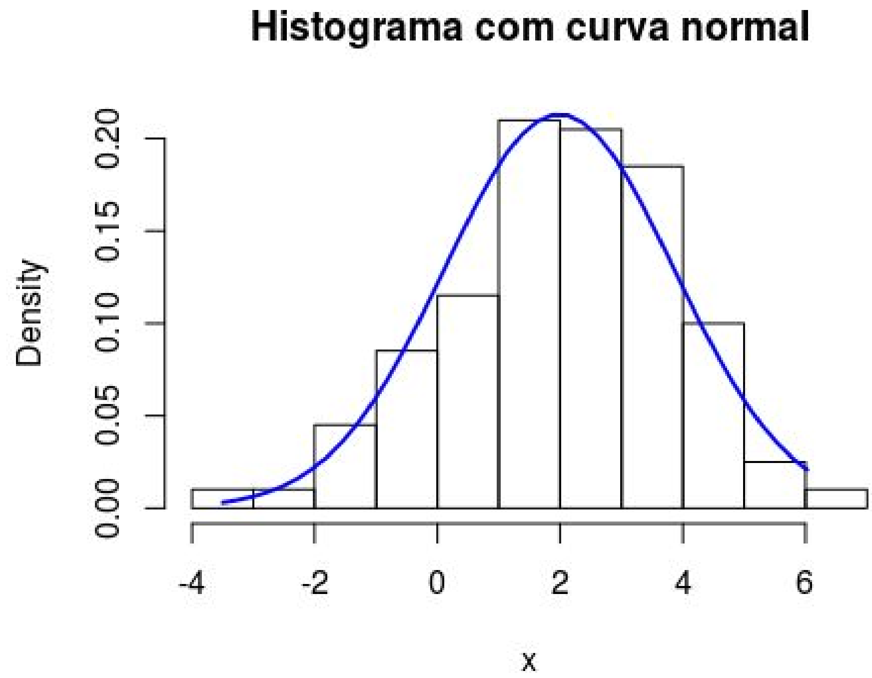
```
limSup <- pnorm(10 + (2*sqrt(5)),10,sqrt(5))
limInf <- pnorm(10 - (2*sqrt(5)),10,sqrt(5))
area <- limSup - limInf

cat("A area abaixo da curva considerando os limites dados é: ", area)

## A area abaixo da curva considerando os limites dados é:  0.9544997

x <- rnorm(200, 2, sqrt(4))
h <- hist(x, breaks= 10, prob=T, main="Histograma com curva normal")

xfit<-seq(min(x),max(x),length=40)
yfit<-dnorm(xfit,mean=mean(x),sd=sd(x))
lines(xfit, yfit, col="blue", lwd=2)
```



Sim, a curva se parece com o histograma

Questão 4

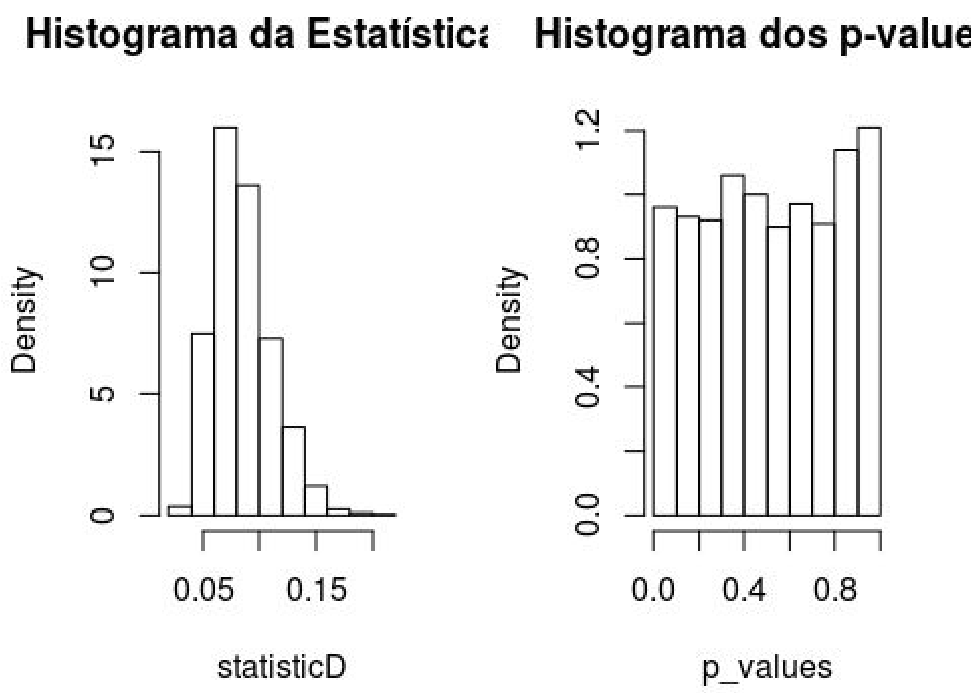
```
statisticD <- vector(mode = "numeric", length = "1000")
p_values <- vector(mode = "numeric", length = "1000")

for(i in 1:1000){
  x <- rnorm(100, 0, sqrt(1))
  ktest <- ks.test(x, "pnorm", 0, 1)
  statisticD[i] <- ktest$statistic
  p_values[i] <- ktest$p.value
}
par(mfrow=c(1,2))
hist(statisticD, prob=T, main="Histograma da Estatística D")
hist(p_values, prob=T, main="Histograma dos p-values")
```

```
proporcao <- length(p_values[p_values<0.05]) / length(p_values)

cat("A proporcao de p-values menores que 0.05 é ", proporcao)

## A proporcao de p-values menores que 0.05 é  0.039
```



Questão 5

Calculando E(X):

a)

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\, dx$$

$$\hookrightarrow E(x) = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}}\, dx \Rightarrow \frac{1}{\cancel{3}} \int_0^\infty \cancel{-3} y\, e^{y} \cdot (-3)\, dy = 3\int_0^\infty y\, e^{y}\, dy \Rightarrow 3\left[y e^{y} - \int_0^\infty e^{y} dy\right] = 3\left[y e^{y} - e^{y} \Big|_0^\infty\right]$$

↳ Fazendo uma substituição:

$y = \frac{x}{3} \Rightarrow x = -3y$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3} \Rightarrow dx = -3\, dy$

↳ Aplicando integração por partes:

$u = y$

$dv = e^{y}$ $\Rightarrow \int u\, dv = uv - \int v\, du$

↳ Voltando p/ variável x:

$$\left[-e^{-\frac{x}{3}}(x+3)\Big|_0^\infty\right] = \boxed{3}$$

b)

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}}\, dx \Rightarrow \cancel{\frac{1}{3}} \int_0^{-3u} \cancel{-3}\, e^u\, du = -\int_0^{-3u} e^u\, du = -e^u \Big|_0^{-3u}$$

↳ Fazendo uma substituição:

$$u = -\frac{x}{3} \Rightarrow x = -3u$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{3} \Rightarrow dx = -3du$$

↳ Voltando p/ variável x:

$$= -e^{-\frac{x}{3}} \Big|_0^x = \boxed{1 - e^{-\frac{x}{3}}}$$

c)

$$P(X > 3) = \int_3^{\infty} f(x)\, dx$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}\int_3^{\infty} e^{-\frac{x}{3}}\, dx}_{\text{A integral indefinida já foi calculada no item anterior.}} = -e^{-\frac{x}{3}} \Big|_3^{\infty} = \underbrace{\left[\lim_{x \to \infty} -e^{-\frac{x}{3}}\right]}_{0} - \left[-e^{-\frac{3}{3}}\right] + \frac{1}{e} = \boxed{\frac{1}{e}}$$

Questão 6

Calculando F(x) = P(X<x):

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\alpha m}{x^{\alpha+1}}\, dx = \alpha m \int_{-\infty}^{x} x^{-\alpha-1}\, dx = \alpha m^{\alpha} \left(\left[\frac{-x^{-\alpha}}{\alpha} \right] \Bigg|_{-\infty}^{x} \right)$$

$$= \alpha m^{\alpha} \left(\frac{-x^{-\alpha}}{\alpha} - \underbrace{\left[\lim_{x \to -\infty} \frac{x^{-\alpha}}{\alpha} \right]}_{0} \right)$$

$$= \frac{-\cancel{\alpha}\, m^{\alpha} x^{-\alpha}}{\cancel{\alpha}} = \boxed{-m^{\alpha} x^{-\alpha}}$$

Calculando E(X):

$$E(X) = \int_{a}^{b} x f(x)\, dx$$

$$= \int_{m}^{\infty} \frac{x\, \alpha\, m^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\, dx = \alpha m \int_{m}^{\infty} \frac{x}{x^{\alpha+1}}\, dx = \alpha m \int_{m}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx$$

$$= \alpha m^{\alpha} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Bigg|_{m}^{\infty} \right] = \alpha m^{\alpha} \left(\frac{m^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \right) = \boxed{\frac{\alpha m}{\alpha-1}}$$