Lista 08 - Fundamentos Estatísticos para Ciência dos Dados

Nome: Vinícius de Oliveira Silva

Matrícula: 2013007820

Questão 1

Gerando a matriz *L*, e os vetores z e x

```
sigma <- matrix( c(4, 9, -14,
                  9, 30, -44,
                -14, -44, 94),
                 nrow=3,
                 ncol=3)

mu<-as.numeric(c(10,20,-50))

#Matriz L
L<-t(chol(sigma))

#vetor z
z <-rnorm(3, mean=0, sd=1)

#vetor x
x<-mu + L%*%z
```

Gerando uma amostra com 200 registros, calculando o vetor médio e comparando com o vetor esperado:

```
amostra <- matrix(nrow = 200, ncol=3)
for(i in 1:200){
  amostra[i,] <- t(mu + L%*%rnorm(3, mean=0, sd=1))
}

vetorMedio <- apply(amostra, MARGIN = 2, FUN=mean)

print(vetorMedio)
```

```
## [1]  10.08007  20.42356 -51.23353
```

Conforme podemos observar, o vetor medio é bastante proximo do vetor esperado μ.

Estimando a matriz de covariancia:

```
getSij <-function(i,j,n,matriz){

  sum<-0
  for(counter in 1:ncol(matriz)){
    sum <- sum + (
                  (amostra[counter,i] - vetorMedio[i]) *
                  (amostra[counter,j] - vetorMedio[j])
                 )
  }

  return(sum/n)
}

#gerando a matriz S:
S <- matrix(nrow = 3, ncol = 3)

for(i in 1:3){
  for(j in 1:3){
    S[i,j] <- getSij(i,j,n=200,matriz=amostra)
  }
}
```

Se subtrairmos Σ de S, podemos ver com clareza o quanto elas são parecidas.

```
## [1] "Σ - S = "
```

```
##
##    3.955059   9.012445 -13.99284
##    9.012445  29.953831 -44.01289
##  -13.992843 -44.012892  93.99569
```

Vemos que as diferenças entre a matriz estimada e a matriz geradora dos dados são bem pequenas.

Gerando a matriz de correlação ρ:

```
origVariances <- diag(sigma)

rho <- matrix(nrow = 3, ncol = 3)

for(i in 1:3){
  for(j in 1:3){
    rho[i,j] <- sigma[i,j]/sqrt(origVariances[i] * origVariances[j])
  }
}

print('A matriz de correlação ρ é:')
```

```
## [1] "A matriz de correlação ρ é:"
```

```
prmatrix(rho, rowlab=rep("",3), collab=rep("",3))
```

```
##
##   1.0000000  0.8215838 -0.7219949
##   0.8215838  1.0000000 -0.8285679
##  -0.7219949 -0.8285679  1.0000000
```

Desejamos agora construir R, uma estimativa da matriz de correlação ρ:

```
approxVariances <- diag(S)
R<- matrix(nrow = 3, ncol = 3)

for(i in 1:3){
  for(j in 1:3){
    R[i,j] <- S[i,j]/sqrt(approxVariances[i] * approxVariances[j])
  }
}

print('A matriz de correlação estimada R é:')
```

```
## [1] "A matriz de correlação estimada R é:"
```

```
prmatrix(R, rowlab=rep("",3), collab=rep("",3))
```

```
##
##   1.0000000 -0.2732191 -0.5140716
##  -0.2732191  1.0000000  0.9136294
##  -0.5140716  0.9136294  1.0000000
```

Para compararmos as matrizes R e ρ, podemos olhar para o resultado da subtração das duas:

```
## [1] "ρ - R = "
```

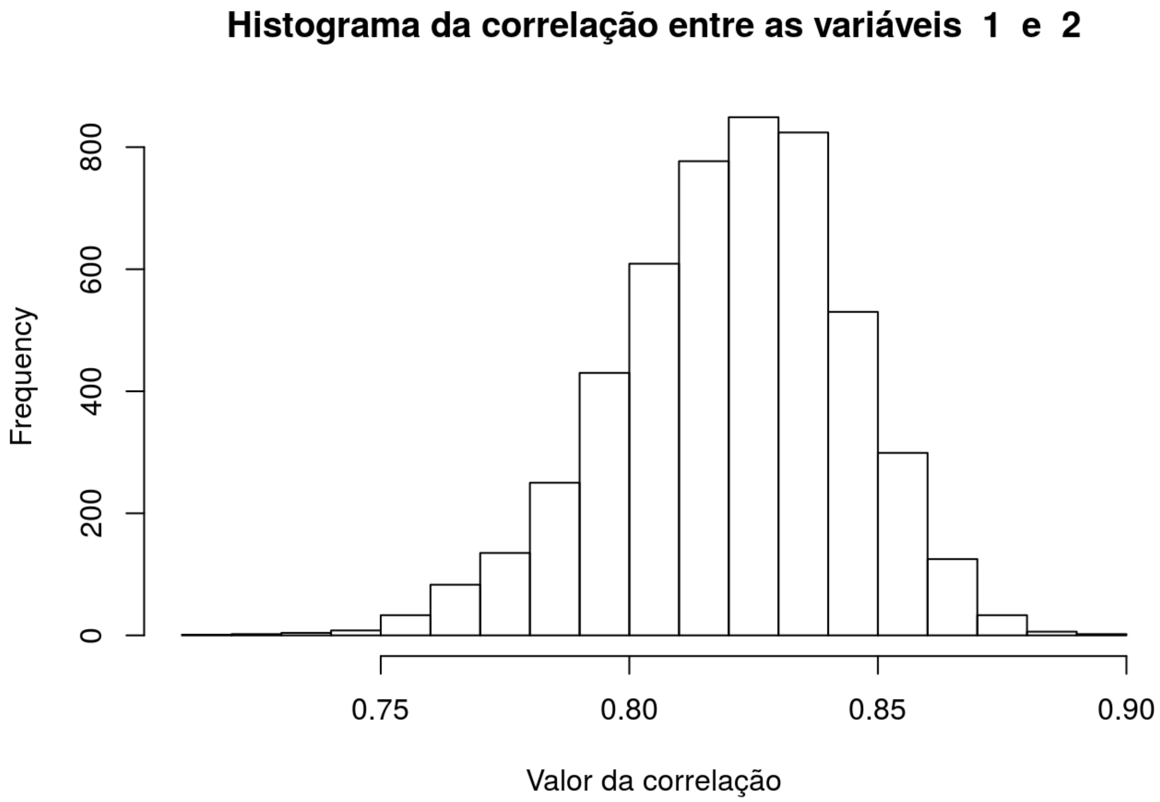
```
##
##   0.0000000  1.094803 -0.2079233
##   1.0948029  0.000000 -1.7421973
##  -0.2079233 -1.742197  0.0000000
```

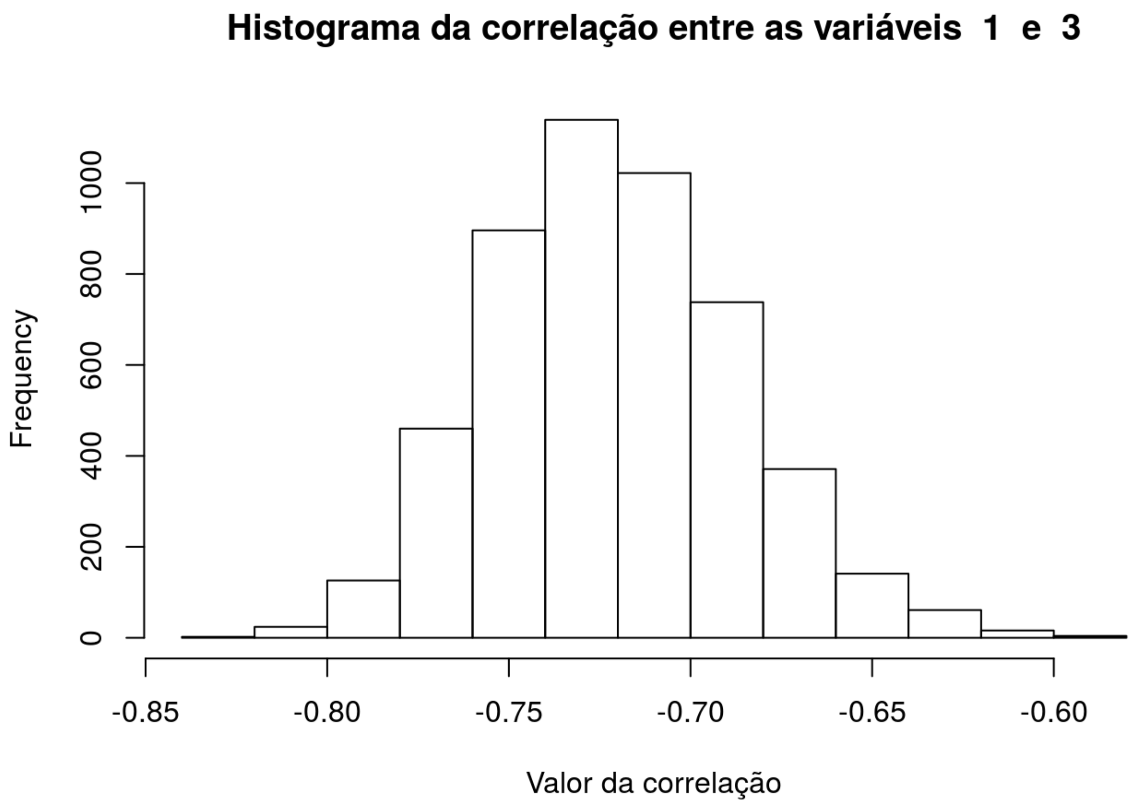
Percebemos que as entradas da matriz resultante desta subtração são bastante pequenas, o que indica que as matrizes são bastante similares

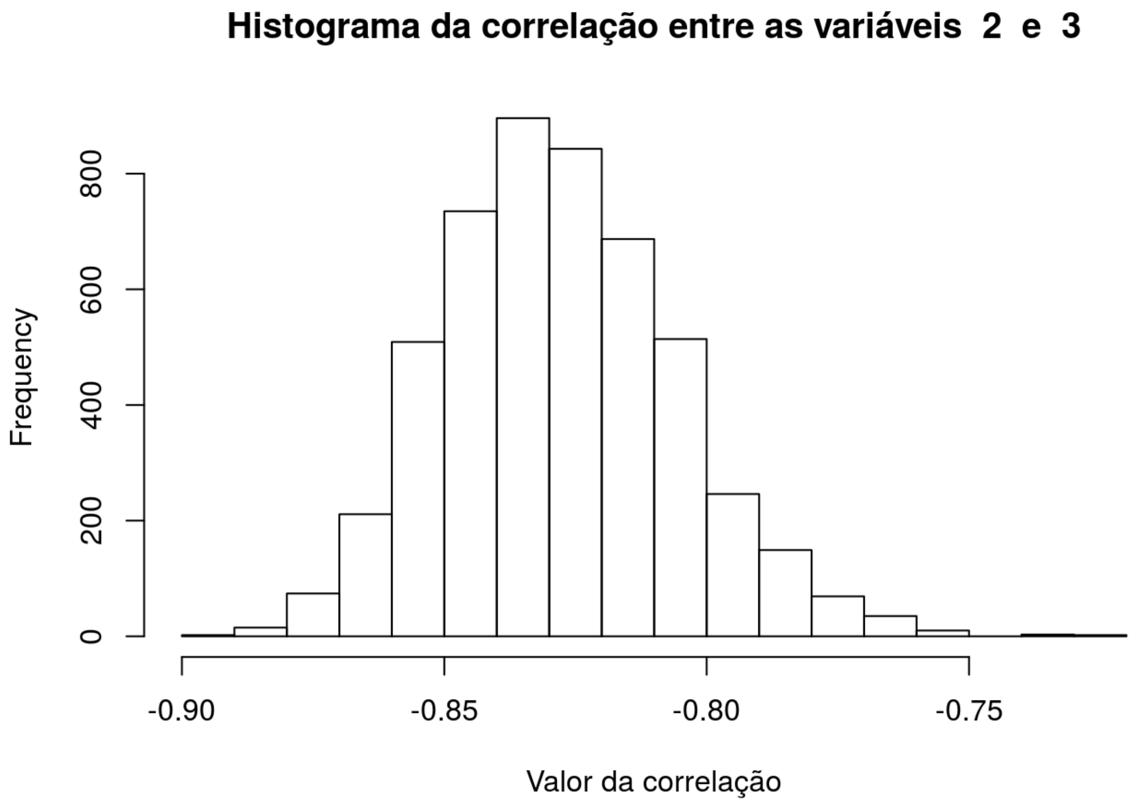
Questão 2

```
R11 <- list()
R12 <- list()
R13 <- list()
R21 <- list()
R22 <- list()
R23 <- list()
R31 <- list()
R32 <- list()
R33 <- list()

amostraR <- list(R11, R12, R13, R21, R22, R23, R31, R32, R33)

#repetiremos a simulação 5000 vezes
for (counter in 1:5000){

  #gerando a matriz amostra
  for(i in 1:200){
    amostra[i,] <- t(mu + L%*%rnorm(3, mean=0, sd=1))
  }

  #matriz de correlacao empirica R
  R <- cor(amostra)

  amostraR[[1]] <- append(amostraR[[1]], R[1,1])
  amostraR[[2]] <- append(amostraR[[2]], R[1,2])
  amostraR[[3]] <- append(amostraR[[3]], R[1,3])
  amostraR[[4]] <- append(amostraR[[4]], R[2,1])
  amostraR[[5]] <- append(amostraR[[5]], R[2,2])
  amostraR[[6]] <- append(amostraR[[6]], R[2,3])
  amostraR[[7]] <- append(amostraR[[7]], R[3,1])
  amostraR[[8]] <- append(amostraR[[8]], R[3,2])
  amostraR[[9]] <- append(amostraR[[9]], R[3,3])
}

k<-1
for(i in 1:3){

  for(j in 1:3){

    #não precisamos calcular a correlação de uma variavel com ela mesma, poi
s esse valor é sempre 1
    "também não precisamos recalcular a correlação entre as variáveis i e j
se i > j, uma vez que a correlação entre i e j é
    igual a correlação entre j e i"
    if(i<j){
      hist(as.numeric(amostraR[[k]]), main=paste("Histograma da correlação e
ntre as variáveis ", i, " e ", j), xlab = "Valor da correlação")
    }
```

```
    k<- k+1
  }
}
```


Histograma da correlação entre as variáveis 1 e 2
Frequency
0
200
400
600
800
0.75
0.80
0.85
0.90
Valor da correlação


Histograma da correlação entre as variáveis 1 e 3
Frequency
0
200
400
600
800
1000
-0.85
-0.80
-0.75
-0.70
-0.65
-0.60
Valor da correlação


Histograma da correlação entre as variáveis 2 e 3
Frequency
0
200
400
600
800
-0.90
-0.85
-0.80
-0.75
Valor da correlação

```
#transforma uma lista de listas em uma matriz (cada lista é uma coluna)
matrixAmostraR <-  (sapply (amostraR, function (x) {length (x) <- 5000; retu
rn (x)}))

#---------------------Obtendo a matriz R---------------------
myMean <- function(myArray){
  return (mean(as.numeric(myArray)))
}

matrixExpectedR <- matrix(apply(matrixAmostraR, MARGIN = 2,FUN = myMean), nr
ow = 3, ncol = 3)


#-------------------------------------------------------------
```

A matriz R é portanto:

```
prmatrix(matrixExpectedR, rowlab=rep("",3), collab=rep("",3))
```

```
##
##   1.0000000  0.8203613 -0.7208222
##   0.8203613  1.0000000 -0.8279538
##  -0.7208222 -0.8279538  1.0000000
```

Podemos ver que ela é bem parecida com a matriz rho:

```
prmatrix(rho, rowlab=rep("",3), collab=rep("",3))
```

```
##
##   1.0000000  0.8215838 -0.7219949
##   0.8215838  1.0000000 -0.8285679
##  -0.7219949 -0.8285679  1.0000000
```

Podemos tambem calcular os DP de cada r_{ij} da matriz R e montar uma nova matriz contendo esses desvios:

```
dpMatrix <- matrix(nrow = 3, ncol = 3)

amostraRindex<-1
for (i in 1:3){
  for(j in 1:3){
    dpMatrix[i,j] <- sd(as.numeric(amostraR[[amostraRindex]]))
    amostraRindex <- amostraRindex+1
  }
}

prmatrix(rho, rowlab=rep("",3), collab=rep("",3))
```

```
##
##   1.0000000  0.8215838 -0.7219949
##   0.8215838  1.0000000 -0.8285679
##  -0.7219949 -0.8285679  1.0000000
```

Questão 3

a) A matriz de correlação ρ de X é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3.9}} & \frac{2}{\sqrt{3.4}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{1.9}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3.9}} & \frac{1}{\sqrt{1.9}} & 1 & \frac{-2}{\sqrt{9.4}} \\ \frac{2}{\sqrt{3.4}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{9.4}} & 1 \end{bmatrix}$$

b) $E(X^{(1)}) = (0, 1)$

c) $E(AX^{(1)}) = A.E(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.0 + (-1).1 = -1$

d) $Cov(X^{(1)}) \rightarrow$ Basta identificarmos em Σ a submatriz referente a $X^{(1)}$:

$\hookrightarrow Cov(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $Cov(AX^{(1)}) \to$ Sabemos que $Cov(AX^{(1)}) = A\,Cov(X^{(1)})A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4$

f) $E(X^{(2)}) = (0, -1)$

g) $E(BX^{(2)}) = BE(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 0 + (-1)\times(-1) \\ 1\times 0 + 2\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

h) $Cov(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

i) $Cov(BX^{(2)}) = B\,Cov(X^{(2)})B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix}$

Questão 4

$X = (X_1, X_2, X_3)' \qquad E(X) = (-1, 0, 2)$

$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a)

$Y_1 = \frac{1}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{2}X_3 \to c_1' = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$E(Y_1) = E(c_1'X) = c_1 E(X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow Y_1 \sim N\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{8}\right)$

$V(Y_1) = c_1'\Sigma c_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{9}{8}$

b) $Y_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 - \frac{1}{2}X_3 \to c_2' = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$E(Y_2) = E(c_2' X) = c_2' \cdot E(X) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow Y_2 \sim N\left(-\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right)$$

$$V(Y_2) = c_2' \Sigma c_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{5}{8}$$

c)
Para encontrarmos a distribuição conjunta de $Y = (Y_1, Y_2)$ só nos falta encontrar os elementos da diagonal secundária da matriz de covariancia, uma vez que:

$$Y \sim N\left(\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & ? \\ ? & \frac{5}{8} \end{bmatrix}\right)$$

Para encontrarmos os elementos faltantes (que são iguais, dado que a matriz é simétrica) basta determinar o resultado do $\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} \times \Sigma \times \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{3}{4}$$

Portanto, a distribuição de Y é

$$Y \sim N\left(\begin{bmatrix} 3/4 \\ -5/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9/8 & -3/4 \\ -3/4 & 5/8 \end{bmatrix}\right)$$

Questão 5

Sabemos que a matriz de covariância Σ tem a seguinte forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{31}\sigma_3\sigma_1 & \rho_{32}\sigma_3\sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Se duas variáveis são independentes, sua correlação $\rho = 0$. Desta forma, para sabermos se duas variáveis são independentes, basta observarmos as entradas correspondentes na matriz Σ

a) X_1 e X_2 não são independentes $\Rightarrow \Sigma_{12} \neq 0$

b) X_2 e X_3 são independentes $\Rightarrow \Sigma_{23} = 0$

c) (X_1, X_2) e X_3 são independentes $\Rightarrow \Sigma_{13} = 0$ e $\Sigma_{23} = 0$

d) $(X_1 + X_2)/2$ e X_3 são independentes pois $(X_1 + X_2)/2$ é uma função de X_1 e X_2, que individualmente são independentes de X_3

e) X_2 e $X_2 + \frac{5X_1}{2} - X_3$ são independentes, pois se usarmos a propriedade de bilinearidade da covariância, temos que:

$$Cov\left(X_2, X_2 + \frac{5X_1}{2} - X_3\right) = Cov(X_2, X_2) + \frac{5}{2} Cov(X_2, X_1) - Cov(X_2, X_3)$$

$$= 5 + \frac{5}{\cancel{2}} \cdot -\cancel{2} - 0 = 5 - 5 = 0$$

Questão 6

a. $E(D^2) = p$ –> dimensão do vetor X
b. $\sqrt{V(D^2)} = p$ –> dimensão do vetor X
c. D^2 ~ Quiquadrado com p graus de liberdade
d. Os eixos deste elipsoide são os autovetores da matriz de covariância de X. O comprimento desses eixos é proporcional aos autovalores associados
e.

```
stiffness = matrix(scan("stiffness.txt"), ncol=5, byrow=T)

x <- stiffness[,1:4]

mu <- apply(x, MARGIN = 2, FUN=mean)

sigma <- cov(x)
```

O vetor esperado μ é:

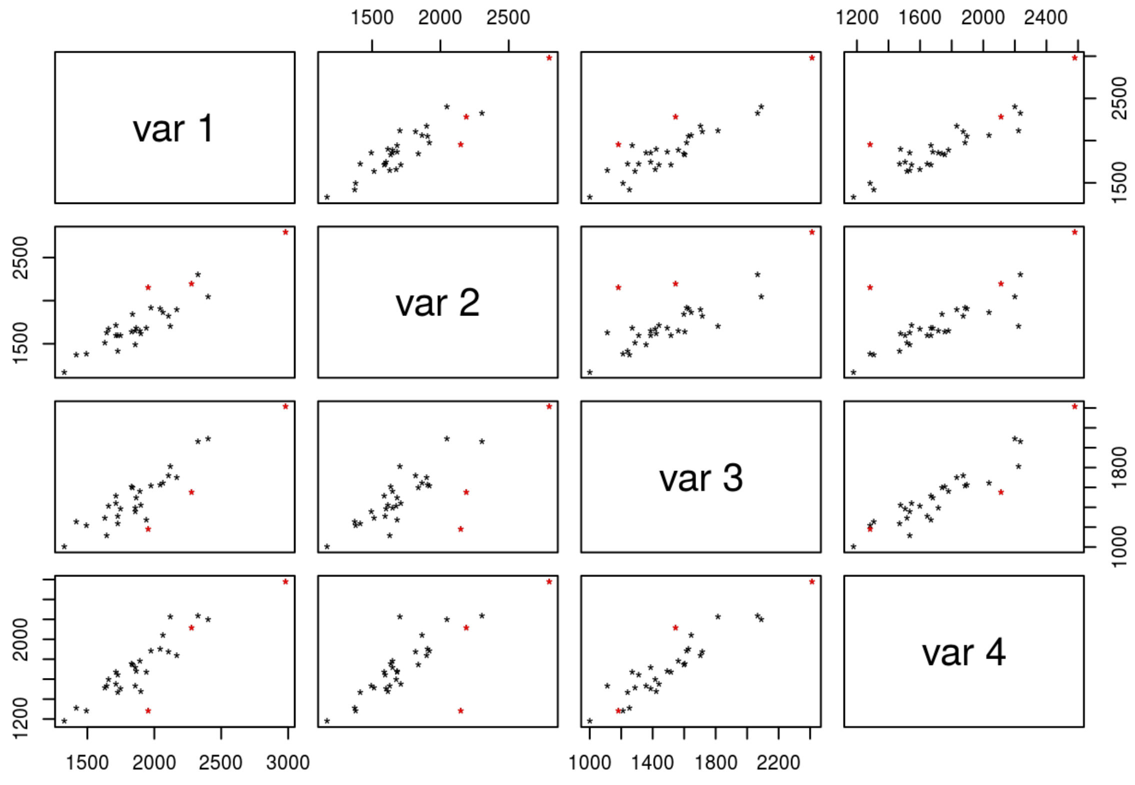
```
## [1] 1906.100 1749.533 1509.133 1724.967
```

A matriz de covariância Σ é:

```
##
##  105616.30  94613.53 87289.71  94230.73
##   94613.53 101510.12 76137.10  81064.36
##   87289.71  76137.10 91917.09  90352.38
##   94230.73  81064.36 90352.38 104227.96
```

Encontrando os registros de stiffness que são considerados anomalias:

```
anomalies <-mahalanobis(x, mu, sigma) > qchisq(0.95, 4)
n <-nrow(x)
nAnom <- sum(anomalies)
pairs(rbind(x, x[anomalies,]), pch="*", col=rep(c("black", "red"), c(n, nAnom)))
```



Questão 7

```
head(iris)
```

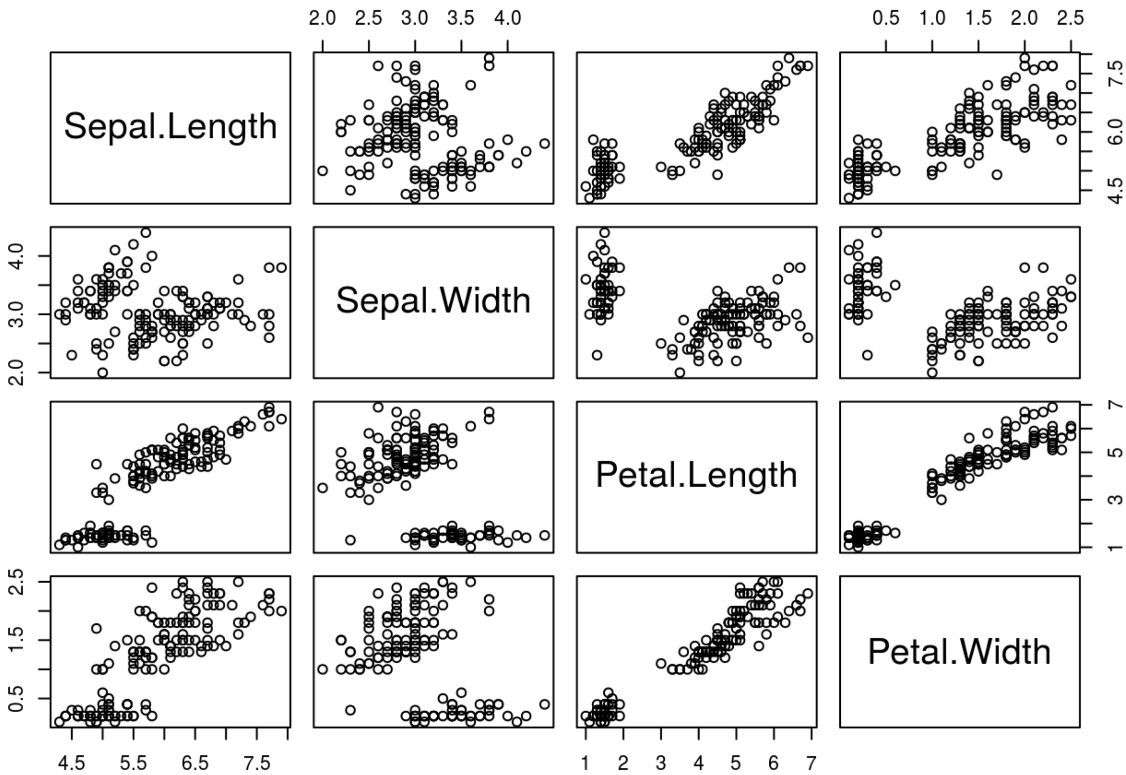
Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species

6 rows

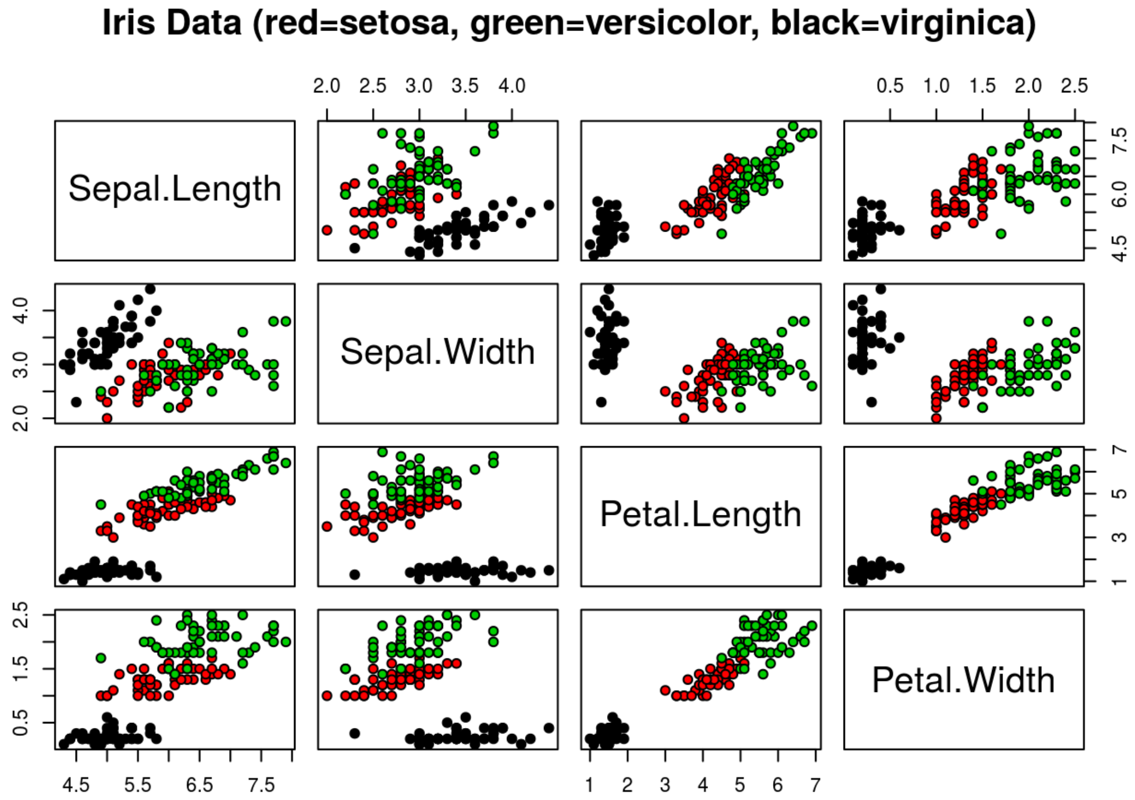
```
dim(iris)
```

```
## [1] 150   5
```

```
pairs(iris[,1:4])
```

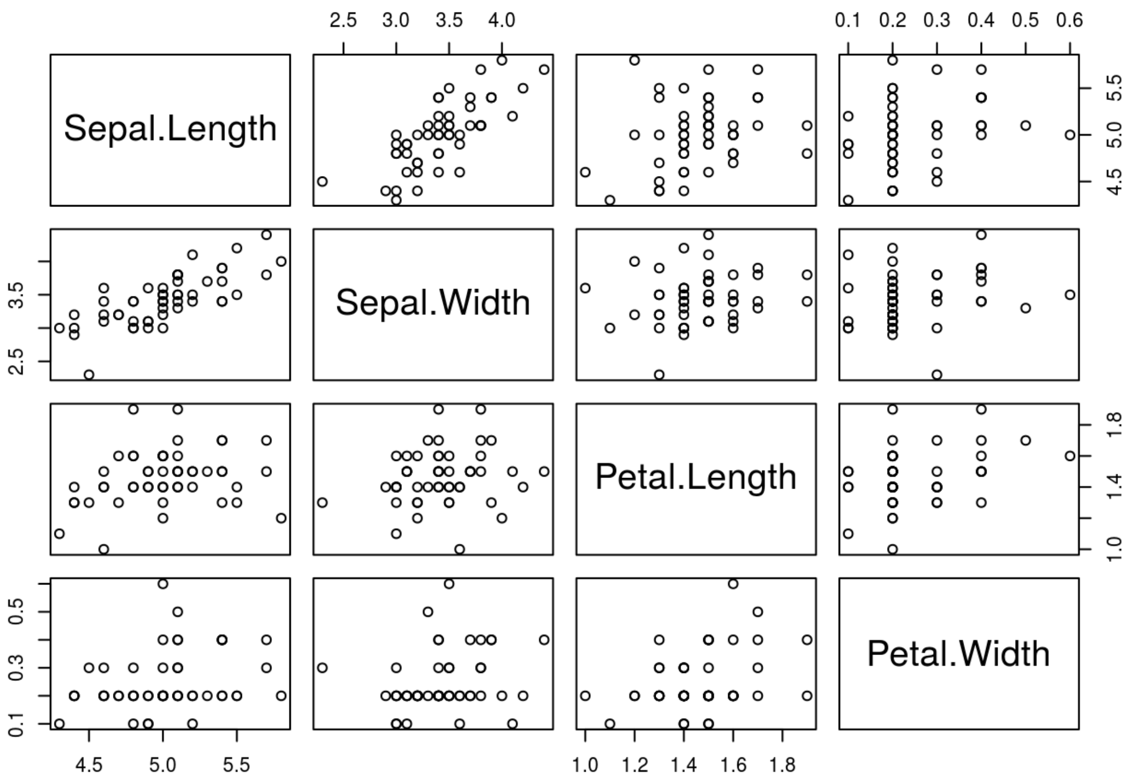



```
titulo = "Iris Data (red=setosa, green=versicolor, black=virginica)"
pairs(iris[,1:4],main=titulo, pch=21, bg = iris$Species)
```



Analisando a espécie setosa:

```
setosa <- iris[iris$Species == "setosa", 1:4]
pairs(setosa) # plots de pares das 4 variaveis
```




```
mu <- apply(setosa, 2, mean) # media aritmetica de cada variavel
sigma <- cov(setosa) # estimativa da matriz de covariancia
rho <- cor(setosa) # estimativa da matriz de correlacao
```

a. As estimativas para μ, Σ e ρ são:

```
## μ≈
##
```

```
## Sepal.Length  Sepal.Width Petal.Length  Petal.Width
##        5.006        3.428        1.462        0.246
```

```
##
## Σ≈
```

```
##
##  0.12424898 0.099216327 0.016355102 0.010330612
##  0.09921633 0.143689796 0.011697959 0.009297959
##  0.01635510 0.011697959 0.030159184 0.006069388
##  0.01033061 0.009297959 0.006069388 0.011106122
```

```
##
## ρ≈
```

```
##
##  1.0000000 0.7425467 0.2671758 0.2780984
##  0.7425467 1.0000000 0.1777000 0.2327520
##  0.2671758 0.1777000 1.0000000 0.3316300
##  0.2780984 0.2327520 0.3316300 1.0000000
```

b. Analisando a matriz de correlação, vemos que as variáveis mais correlacionadas são o comprimento e a largura da sépala (ρ=0.74) e as variáveis menos correlacionadas são o comprimento da pétala e a largura da sépala.

c. Para determinarmos a distribuição marginal de **X*** = (X_1, X_2) basta observarmos as posições correspondentes no vetor esperado e na matriz de covariância de X.

$$\mathbf{X}^* \sim N_2\left(\begin{pmatrix}5.006\\3.428\end{pmatrix}, \begin{bmatrix}0.124 & 0.099\\0.099 & 0.144\end{bmatrix}\right)$$

d. A distribuição condicional de **X*** quando $X_3 = x_3$ e $X_4 = x_4$ é da forma N_2(**m**, **V**), onde:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix}5.006\\3.428\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}0.399 & 0.712\\0.247 & 0.702\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_3 - 1.462\\x_4 - 0.246\end{pmatrix}$$

Conhecendo os valores de $x_3 = 1.8$ e $x_4 = 0.6$ temos:

```
## m =
##
```

```
## 5.393
##  3.76
```

A matriz de covariância é dada por:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}0.124 & 0.099\\0.099 & 0.144\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0.016 & 0.010\\0.012 & 0.009\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.030 & 0.006\\0.006 & 0.011\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.016 & 0.012\\0.010 & 0.009\end{bmatrix}$$

V =

```
##
##  0.110 0.088
##  0.088 0.134
```

e. Sabemos que a distribuição condicional de **X*** = (X_1, X_2)|$X_3 = x_3$ continuará sendo uma normal multivariada da forma N_2(**m**, **V**), onde precisamos encontrar **m** e **V**. Utilizamos as fórmulas conhecidas, temos então:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}\sigma_{13}\\\sigma_{23}\end{bmatrix}[\sigma_{33}]^{-1}(1.8 - \mu_3)$$

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 5.006 \\ 3.428 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.180 \\ 0.135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.186 \\ 3.563 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} [\sigma_{33}]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{31} & \sigma_{32} \end{bmatrix}$$

V

$$= \begin{bmatrix} 0.124 & 0.099 \\ 0.099 & 0.144 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.016 \\ 0.012 \end{bmatrix} [0.030]^{-1} \begin{bmatrix} 0.016 & 0.012 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.115 & 0.093 \\ 0.093 & 0.139 \end{bmatrix}$$

f. Aplicando os mesmos procedimentos do item anterior, temos que:

X* ~ N_2(**m**, **V**)

onde **m** $= \begin{pmatrix} 5.006 \\ 3.428 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0.010 \\ 0.009 \end{bmatrix} [0.011]^{-1} (0.6 - 0.246)$

m =

```
##
##  5.328
##  3.718
```

e

V

$$= \begin{bmatrix} 0.124 & 0.099 \\ 0.099 & 0.144 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.010 \\ 0.009 \end{bmatrix} [0.011]^{-1} \begin{bmatrix} 0.010 & 0.009 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.115 & 0.091 \\ 0.091 & 0.136 \end{bmatrix}$$

g. Analisando os resultados anteriores, vemos que saber o valor de X_4 diminui mais a incerteza sobre o valor de X_2 do que conhecer o valor de X_3. Desta forma, prefiro conhecer X_4 pois ela tem maior poder de influência sobre a variável X_2. É importante observar que os valores específicos *3/i> e 4/i> não tem influência sobre as variâncias condicionais, o que faz com que seja melhor conhecer algum valor de X_3 do que de X_4 independentemente do número conhecido.*

h. Comparando as variâncias condicionais quando conhecemos X_3 e X_4 temos:

$V(X_2 \mid X_3=1.8, X_4 = 0.6) = 0.134$

$V(X_2 \mid X_4 = 0.6) = 0.136$

Vemos que adicionar informação sobre a variável X_3 reduz a variância de X_2 em apenas 0.002, quando o valor de X_4 é conhecido.

Questão 8

a. Afirmativa Falsa, uma vez que se $(x_1 - \mu_1) / \sqrt{\sigma_{11}} = 2)$ temos que $\mu_c = \mu_2 + 2\rho\sqrt{\sigma_{22}}$. Como $|\rho| < 1$, $2\rho\sqrt{\sigma_{22}} < 2\sqrt{\sigma_{22}}$, ou seja, o valor esperado μ_c não varia por mais de dois desvios-padrão.

b. a variancia condicional $V(X_2 \mid X_1 = x) = \sigma_c^{2 = \sigma_{22}(1-\rho^2), \text{ que independe de x}}$

c. Verdadeiro, pois a variância de X_2 condicionada em X_1 é igual a $\sigma_{22}(1-\rho^2)$ que é sempre menor que σ_{22}, já que $\rho^2 < 1$.

d. Verdadeiro, pois temos que:

$$\mu_c = \mu_2 + \rho\sqrt{\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}}(x_1 - \mu_1)$$

sabemos que μ_2 e $\rho\sqrt{(\sigma_{22} / \sigma_{11})}$ são constantes, o que significa que a equação encontrada para μ_c é uma função linear de x_1