



Kauno technologijos universitetas

Informatikos fakultetas

Laboratorinio darbo ataskaita

Pirmas laboratorinis darbas

P170B115 Skaitiniai metodai ir algoritmai

IFF-2/1 Kristupas Kondratavičius

Studentas

Andrius Kriščiūnas

Dėstytyjas

Kaunas, 2024

Turiny

1. Užduoties pirma dalis	4
1.1. Tikslaus ir grubaus įverčio skaičiavimai	5
1.2. Skenavimo intervalai	6
1.3. Skenavimo intervalų tikslinimas	7
1.4. Rezultatų tikrinimas	9
2. Užduoties antra dalis	11
2.1. Teiloro eilutės tarpiniai grafikai	12
2.2. Sudaryto daugianario vaizdavimas	13
2.3. Gauta TE išraiška	14
2.4. Sprendinio tikslumo kitimo grafikai	14

Vizualizacijų sąrašas

pav. 1 – daugianario aptiktų šaknų intervalai	6
pav. 2 – funkcijos aptiktų šaknų intervalai	6
pav. 3 – daugianario šaknų tikslinimas.....	7
pav. 4 – funkcijos šaknų tikslinimas.....	8
pav. 5 – wolframalpha.com apskaičiuotos daugianario šaknys.....	9
pav. 6 - wolframalpha.com apskaičiuotos funkcijos šaknys	10
pav. 7 – teiloro eilutė, kai jos narių skaičius 3, 4 ir 5	12
pav. 8 – grafiškai vaizduojama 26 elementų Teiloro eilutė.....	13

1. Užduoties pirma dalis

1 dalis (5 balai). Išspręskite netiesines lygtis (1 ir 2 lentelės), kai lygties funkcija yra daugianaris $f(x) = 0$ ir transcendentinė funkcija $g(x) = 0$.

1. Nustatykite daugianario $f(x)$ šaknų intervalą, taikydami „grubų“ ir „tikslėsių“ įverčius. Grafiškai pavaizduokite daugianarį tokiam intervalui, kad matytųsi abu įverčiai. Funkciją $g(x)$ grafiškai pavaizduokite užduotyje nurodytame intervalui. Esant poreikiui, grafikų ašis pakeiskite taip, kad būtų aiškiai matomos funkcijų šaknys;
2. Naudodami skenavimo algoritmą su nekintančiu skenavimo žingsniu raskite šaknų atskyrimo intervalus. Daugianariui skenavimo intervalas parenkamas pagal 1 užduoties punkte gautas įverčių reikšmes. Funkcija $g(x)$ skenuojama užduotyje nurodytame intervalui.
3. Skenavimo metodu atskirtas daugianario ir funkcijos šaknis tikslinkite užduotyje nurodytais metodais. Skaičiavimo scenarijuje turi būti panaudotos skaičiavimų pabaigos sąlygos. Skaičiavimų rezultatus pateikite lentelėje, kurioje nurodykite šaknies tikslinimui naudojamą metodą, pradinį artinį arba atskyrimo intervalą, gautą sprendinį (šaknį), funkcijos reikšmę ties šaknimi, tikslumą, iteracijų skaičių. Palyginkite, kuriuo metodu sprendiniui rasti panaudota mažiau iteracijų;
4. Gautas šaknų reikšmes patikrinkite naudodami išorinius išteklius (funkcijas roots arba fzero, tinklapį wolframalpha.com arba kitas priemones) ir pateikite patikrinimo rezultatus.

Pradiniai duomenys

Užduoties variantas: 8.

Daugianaris:

$$f(x) = -0.67x^4 + 2.51x^3 + 2.27x^2 - 4.02x - 2.48$$

Funkcija:

$$g(x) = e^{-x^2} \sin(x^2)(x + 2), \quad \text{kai } -3 \leq x \leq 3$$

Metodai:

Pusiaukirtos ir Kvazi-Niutono (kirstinių).

1.1. Tikslaus ir grubaus įverčio skaičiavimai

Daugianario persitvarkymas:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.67x^4 + 2.51x^3 + 2.27x^2 - 4.02x - 2.48 \\ &\rightarrow 0.67x^4 - 2.51x^3 - 2.27x^2 + 4.02x + 2.48 \end{aligned}$$

Grubus įvertis:

$$R = 1 + \frac{4.02}{0.67} = 7$$

Grubus šaknų įvertis = $(-7; 7)$

Tikslus įvertis:

$$B \text{ (didžiausias neigiamas koficientas) } = 2.51$$

$$k = n - \max_{0 \leq i \leq n-1} (i, a_i < 0) = 4 - \max(3; 2) = 1$$

$$R \text{ teigiamas } = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[1]{\frac{2.51}{0.67}} \approx 4.7463$$

Įsistačius -x vietoj x gauname daugianarį:

$$f(-x) = 0.67x^4 + 2.51x^3 - 2.27x^2 - 4.02x + 2.48 = 0$$

$$B \text{ (didžiausias neigiamas koficientas) } = 4.02$$

$$k = n - \max_{0 \leq i \leq n-1} (i, a_i < 0) = 4 - \max(2; 1) = 2$$

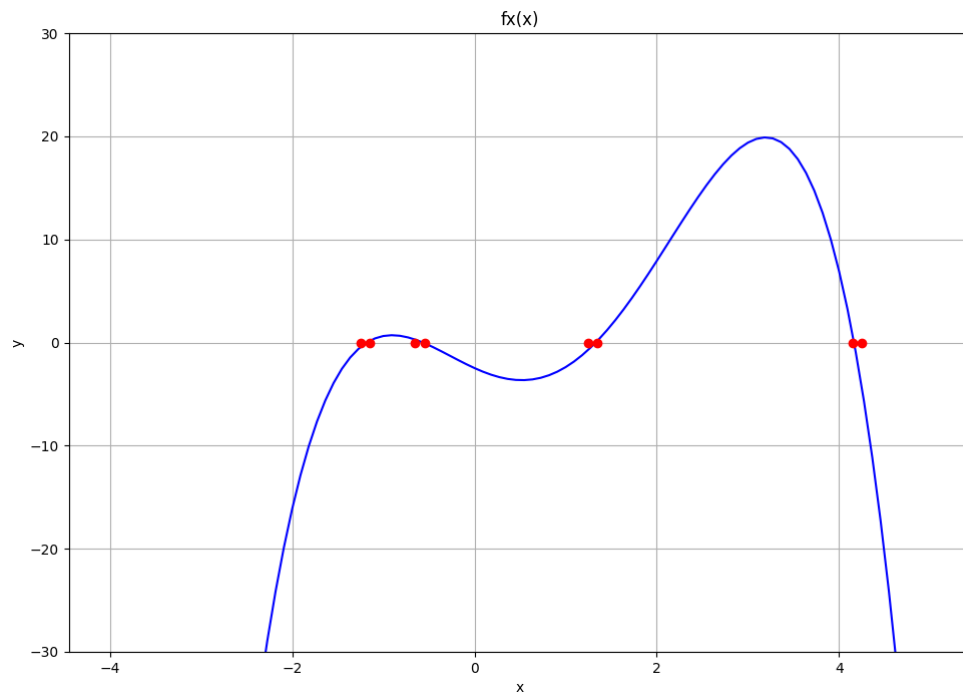
$$R \text{ neigiamas } = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_n}} = 1 + \sqrt[2]{\frac{4.02}{0.67}} \approx 3.4495$$

Tikslus rėžių įvertinimas: $-3.4495 \leq x \leq 4.7463$

1.2.Skenavimo intervalai

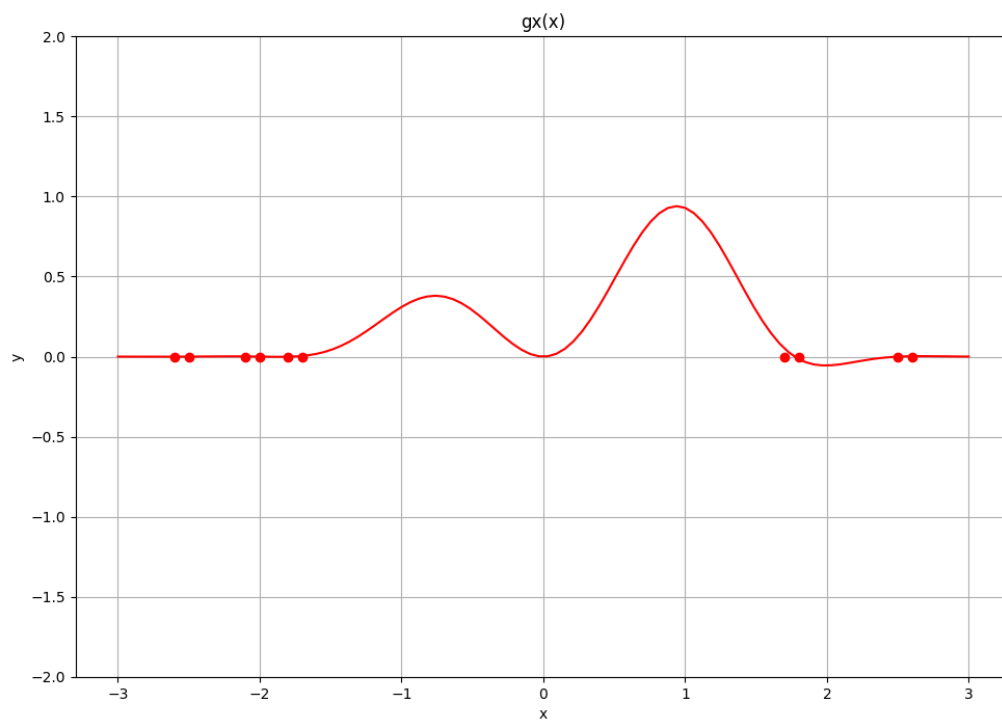
Skenuojama intervalu 0.1.

f(x) aptikti šaknų intervalai:



pav. 1 – daugianario aptiktų šaknų intervalai

g(x) aptikti šaknų intervalai:

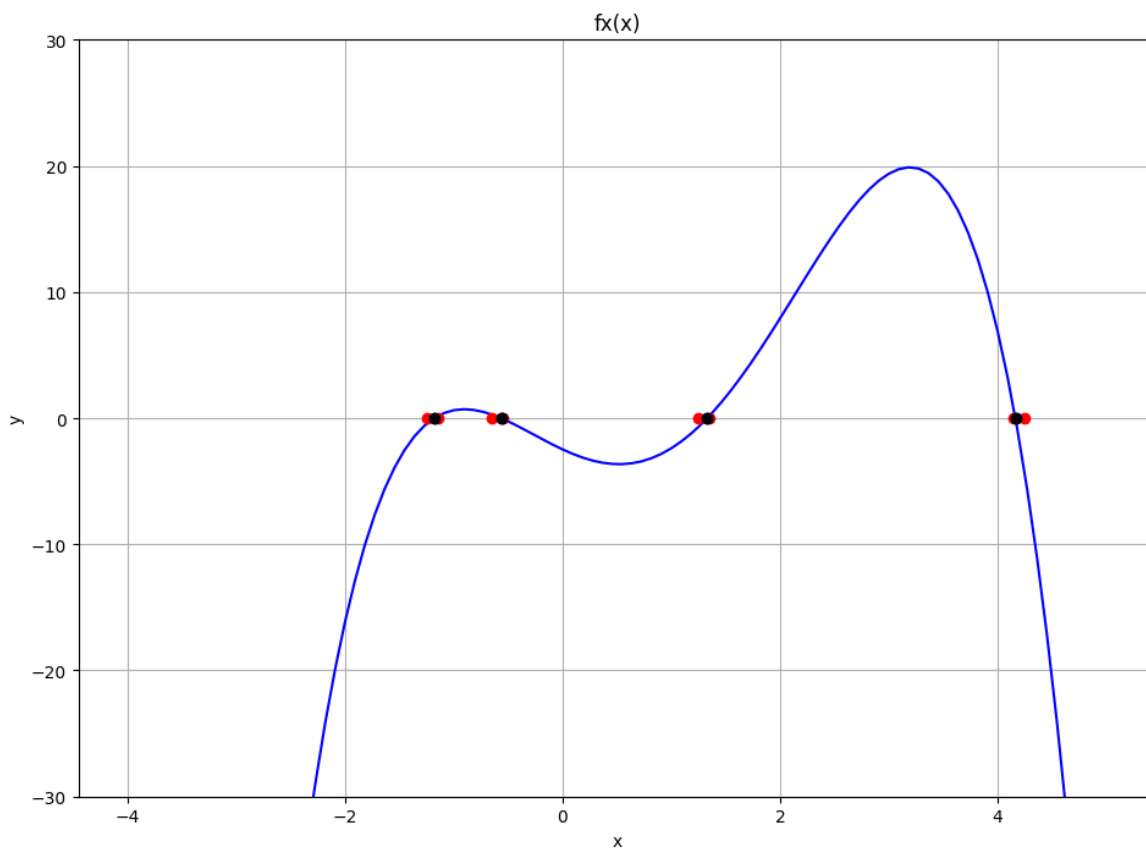


pav. 2 – funkcijos aptiktų šaknų intervalai

1.3.Skenavimo intervalų tikslinimas

Pagal užduotį skenuotų intervalų šaknų tikslinimui naudojame Pusiauškirtos ir Kvazi-Niutono(cross-section) algoritmus.

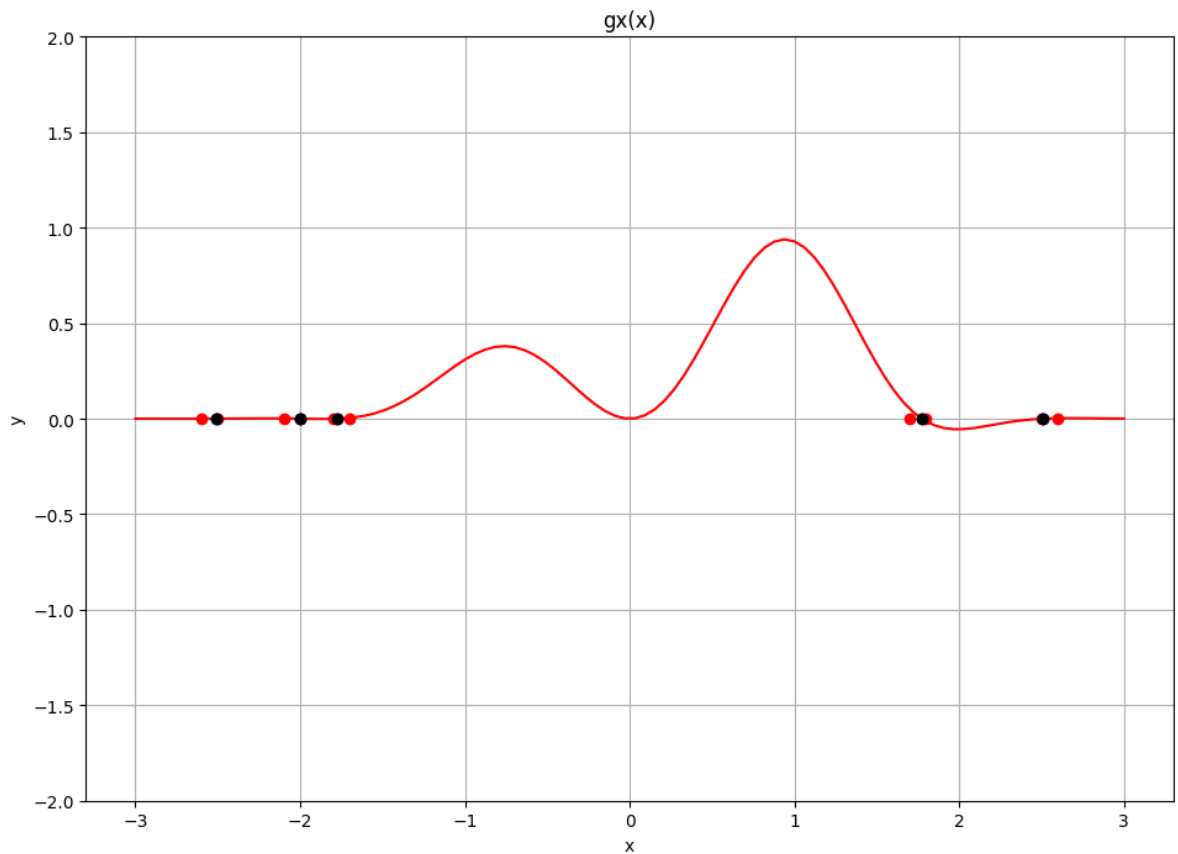
Gauti daugianario šaknų rezultatai:



pav. 3 – daugianario šaknų tikslinimas

$f(x)$						
Šaknis	Metodas	Atskyrimo intervalas	Sprendinys	Funkcijos reikšmė	Tikslumas	Iteracijos
1	Bisection	[-1.249; -1.149]	-1.180246	0	1e-12	35
	Cross section		-1.180246	0		5
2	Bisection	[-0.649; -0.549]	-0.566366	0		36
	Cross section		-0.566366	0		5
3	Bisection	[1.251; 1.351]	1.330278	0		39
	Cross section		1.330278	0		5
4	Bisection	[4.151; 4.251]	4.162602	0		41
	Cross section		4.162602	0		5

Gauti funkcijos šaknų rezultatai:



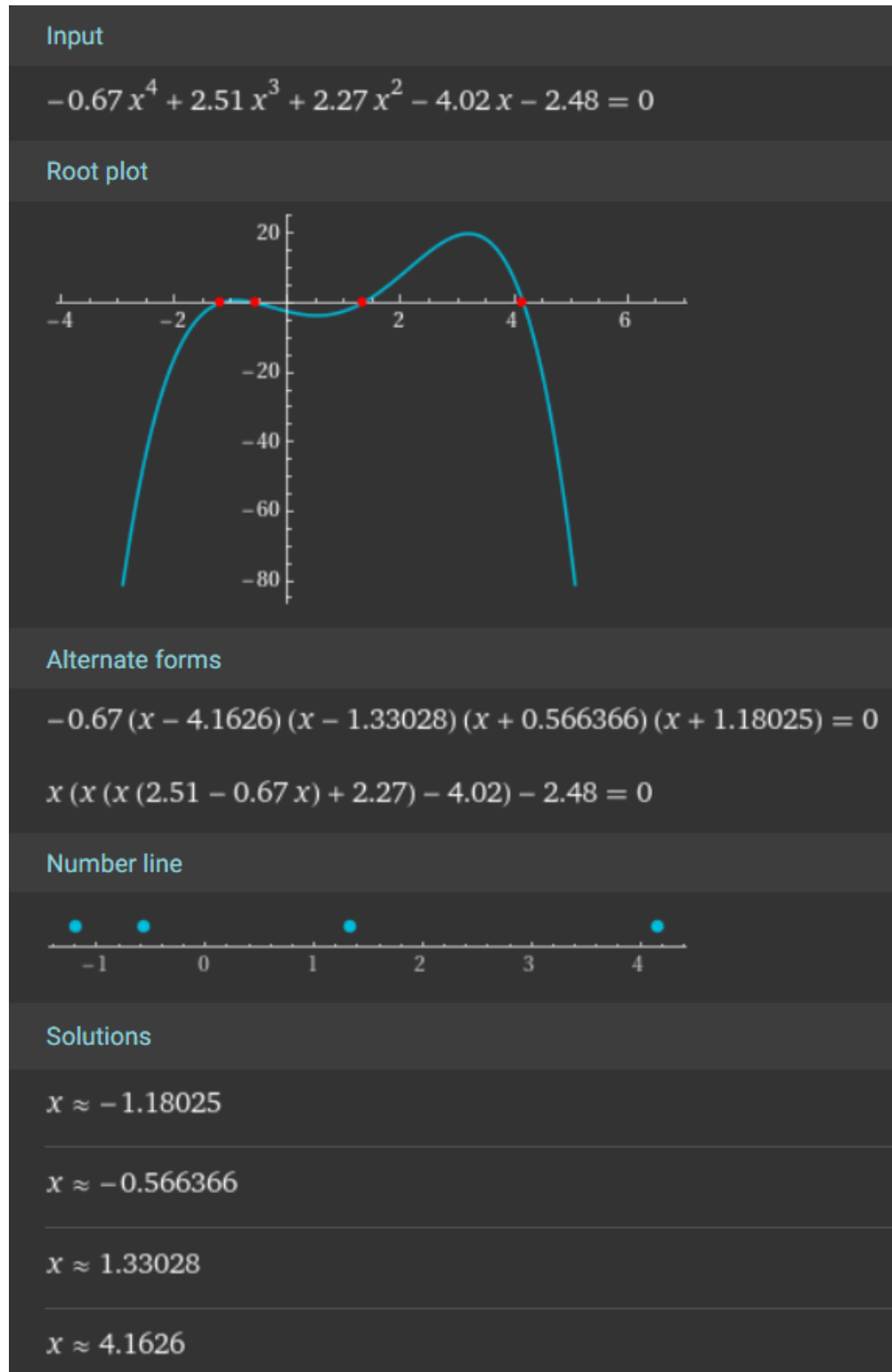
pav. 4 – funkcijos šaknų tikslinimas

$g_x(x)$						
Šaknis	Metodas	Atskyrimo intervalas	Sprendinys	Funkcijos reikšmė	Tikslumas	Iteracijos
1	Bisection	[-2.6; -2.5]	-2.506628	0	1e-12	34
	Cross section		-2.506628	0		5
2	Bisection	[-2.1; -2]	-2	0		38
	Cross section		-2	0		1
3	Bisection	[-1.8; -1.7]	-1.772453	0		37
	Cross section		-1.772453	0		7
4	Bisection	[1.7; 1.8]	1.772453	0		41
	Cross section		1.772453	0		6
5	Bisection	[2.5; 2.6]	2.506628	0		36
	Cross section		2.506628	0		5

1.4. Rezultatų tikrinimas

Pasinaudojame wolframalpha.com, kad patikrinti gautus rezultatus.

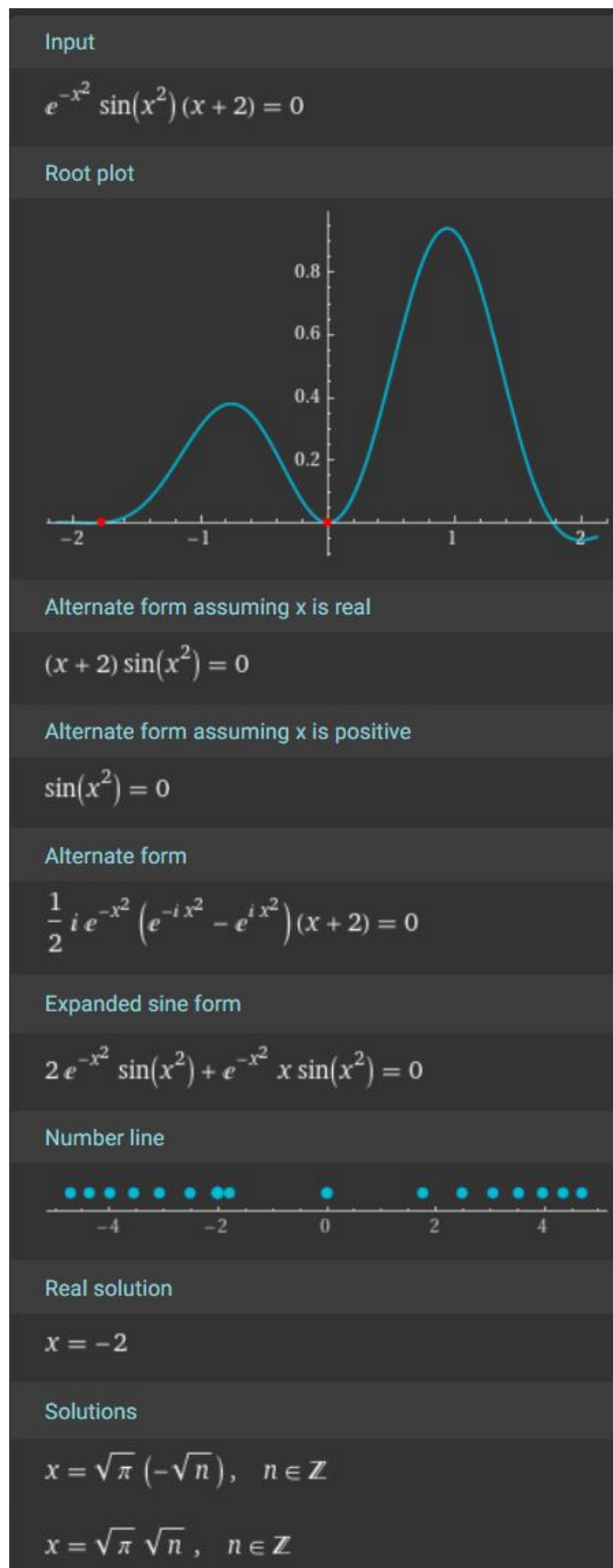
Tikriname daugianario šaknis:



pav. 5 – wolframalpha.com apskaičiuotos daugianario šaknys

Matome, kad gauti rezultatai atitinka apskaičiuotus.

Tikriname funkcijos šaknis:



pav. 6 - wolframalpha.com apskaičiuotos funkcijos šaknys

Matome, kad šie gauti rezultatai taip pat atitinka skaičiavimų rezultatus.

2. Užduoties antra dalis

2 dalis (5 balai). 3 lentelėje pateiktą funkciją $h(x)$ išskleiskite Teiloro eilute (TE) nurodyto intervalo vidurio taško aplinkoje. Nustatykite TE narių skaičių, su kuriuo visos TE šaknys esančios nurodytame intervale, skiriasi nuo funkcijos $h(x)$ šaknų ne daugiau negu $|1e-4|$. Tiek pateiktos funkcijos $h(x)$ šaknis, tiek TE šaknis raskite antru iš pirmoje dalyje realizuotų skaitinių metodų (Niutono arba Kvazi-Niutono, priklausomai nuo varianto). Darbo ataskaitoje pateikite:

1. tarpinius grafikus, kai drauge su pateikta funkcija $h(x)$ nurodytame intervale atvaizduojama TE, kai jos narių skaičius lygus 3, 4 ir 5.
2. grafiką, kuriame pavaizduotas reikalaujamą tikslumą užtikrinantis pagal TE sudarytas daugianaris, drauge pateikiant ir funkcijos $h(x)$ grafiką;
3. nustatytos reikalaujamą tikslumą užtikrinančios TE analitinę išraišką daugianario pavidalu;
4. grafikus, pagal kuriuos būtų galima įvertinti, kaip gerėjo sprendinys priklausomai nuo TE narių skaičiaus:
 - a) grafikas, kuris nurodo visą randamų šaknų skaičių nagrinėjamame intervale (ox-TE eilė, oy – šaknų skaičius);
 - b) atskiri grafikai kiekvienai šakniai, kuriuose oy ašyje pateikti tikslumo įverčiai tarp $h(x)$ apskaičiuotos šaknies ir artimiausios TE šaknies, o ox ašyje TE narių skaičiai.

Pradiniai duomenys

Užduoties variantas: 8.

Funkcija:

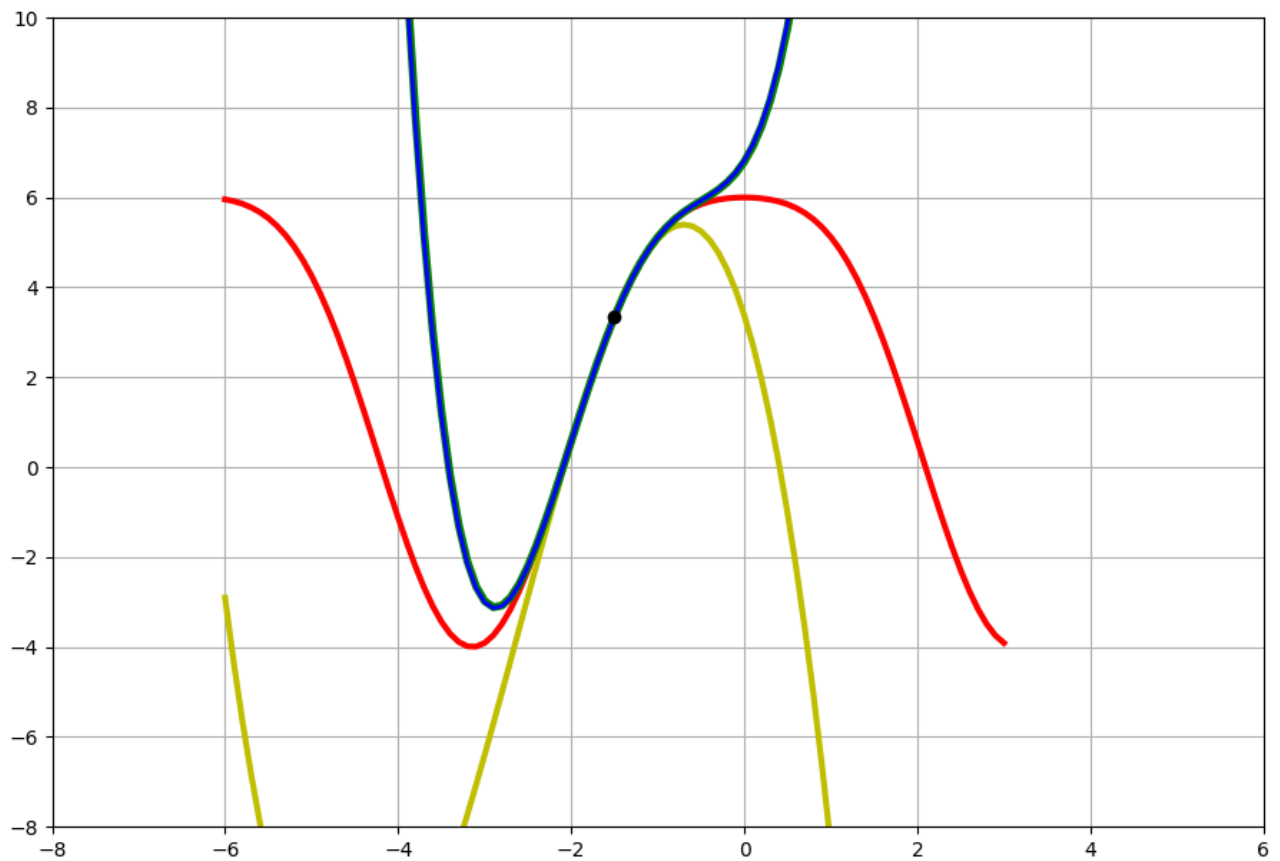
$$h(x) = 5 \cos(x) - \cos(2x) + 2, \quad -6 \leq x \leq 3$$

2.1. Teiloro eilutės tarpiniai grafikai

Daugianario reikšmės skaičiavimui naudojama rekurentinė funkcija:

```
def ts(x, x0, elementCount):  
    if (elementCount > 0):  
        return (np.power((x-x0), elementCount) / math.factorial(elementCount)) *  
        lambdify_func(derivative_func(f, elementCount), x0) + ts(x, x0, elementCount - 1)  
    else:  
        return lambdify_func(f, x0)
```

Teiloro eilutė, kai jos narių skaičius 3 – geltona, 4 – žalia ir 5 – mėlyna (raudona yra funkcija, juodas pradinis TE taškas):



pav. 7 – teiloro eilutė, kai jos narių skaičius 3, 4 ir 5

2.2.Sudaryto daugianario vaizdavimas

Vaizduojama 26 elementų Teiloro eilutė (juoda), pradinis TE taškas, ir funkcija (raudona)



pav. 8 – grafiškai vaizduojama 26 elementų Teiloro eilutė

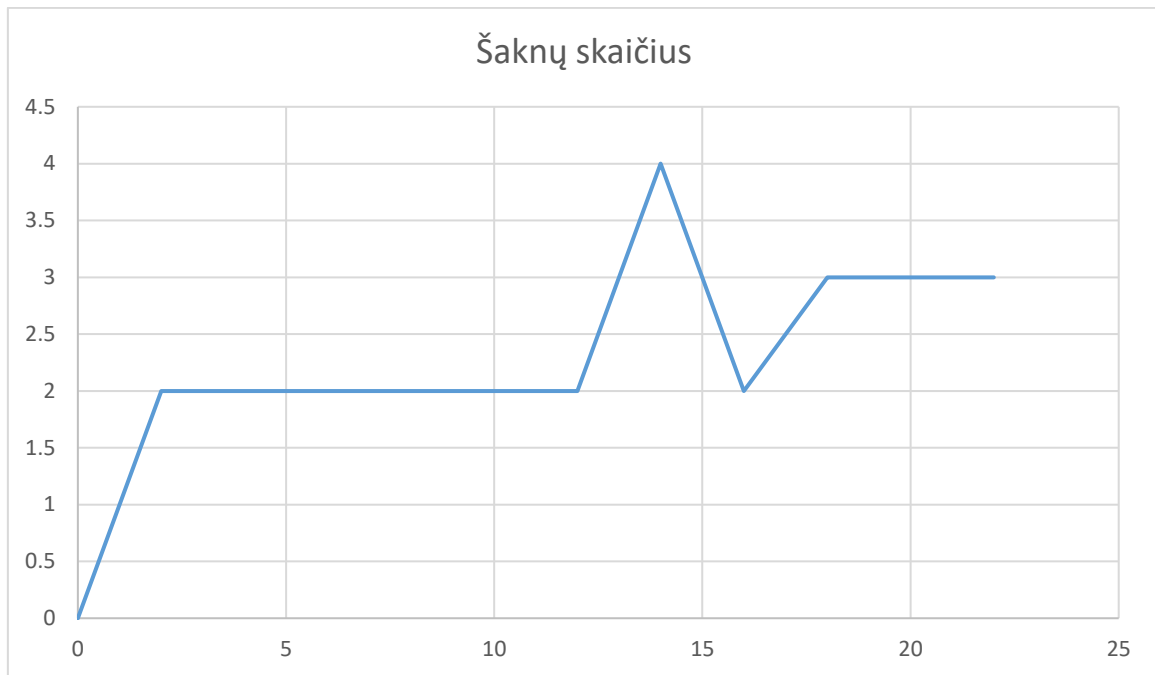
2.3. Gauta TE išraiška

Gaunama daugianario išraiška:

$$\begin{aligned} & 1.62793026614317e-21*(0.666666666666667*x + 1)**25*(-5*\sin(x) + 33554432*\sin(2*x)) + \\ & 2.71321711023861e-20*(0.666666666666667*x + 1)**24*(5*\cos(x) - 16777216*\cos(2*x)) + \\ & 4.34114737638177e-19*(0.666666666666667*x + 1)**23*(5*\sin(x) - 8388608*\sin(2*x)) + \\ & 6.65642597711872e-18*(0.666666666666667*x + 1)**22*(-5*\cos(x) + 4194304*\cos(2*x)) + \\ & 9.76275809977412e-17*(0.666666666666667*x + 1)**21*(-5*\sin(x) + 2097152*\sin(2*x)) + \\ & 1.36678613396838e-15*(0.666666666666667*x + 1)**20*(5*\cos(x) - 1048576*\cos(2*x)) + \\ & 1.82238151195784e-14*(0.666666666666667*x + 1)**19*(5*\sin(x) - 524288*\sin(2*x)) + \\ & 2.30834991514659e-13*(0.666666666666667*x + 1)**18*(-5*\cos(x) + 262144*\cos(2*x)) + \\ & 2.77001989817591e-12*(0.666666666666667*x + 1)**17*(-5*\sin(x) + 131072*\sin(2*x)) + \\ & 3.13935588459937e-11*(0.666666666666667*x + 1)**16*(5*\cos(x) - 65536*\cos(2*x)) + \\ & 3.34864627690599e-10*(0.666666666666667*x + 1)**15*(5*\sin(x) - 32768*\sin(2*x)) + \\ & 3.34864627690599e-9*(0.666666666666667*x + 1)**14*(-5*\cos(x) + 16384*\cos(2*x)) + \\ & 3.12540319177892e-8*(0.666666666666667*x + 1)**13*(-5*\sin(x) + 8192*\sin(2*x)) + \\ & 2.7086827662084e-7*(0.666666666666667*x + 1)**12*(5*\cos(x) - 4096*\cos(2*x)) + \\ & 2.16694621296672e-6*(0.666666666666667*x + 1)**11*(5*\sin(x) - 2048*\sin(2*x)) + \\ & 1.58909388950893e-5*(0.666666666666667*x + 1)**10*(-5*\cos(x) + 1024*\cos(2*x)) + \\ & 0.000105939592633929*(0.666666666666667*x + 1)**9*(-5*\sin(x) + 512*\sin(2*x)) + \\ & 0.000635637555803571*(0.666666666666667*x + 1)**8*(5*\cos(x) - 256*\cos(2*x)) + \\ & 0.00339006696428571*(0.666666666666667*x + 1)**7*(5*\sin(x) - 128*\sin(2*x)) + \\ & 0.0158203125*(0.666666666666667*x + 1)**6*(-5*\cos(x) + 64*\cos(2*x)) + \\ & 0.06328125*(0.666666666666667*x + 1)**5*(-5*\sin(x) + 32*\sin(2*x)) + \\ & 0.2109375*(0.666666666666667*x + 1)**4*(5*\cos(x) - 16*\cos(2*x)) + \\ & 0.5625*(0.666666666666667*x + 1)**3*(5*\sin(x) - 8*\sin(2*x)) + \\ & 1.125*(0.666666666666667*x + 1)**2*(-5*\cos(x) + 4*\cos(2*x)) + \\ & (x + 1.5)*(-5*\sin(x) + 2*\sin(2*x)) + \\ & 5*\cos(x) - \cos(2*x) + 2 \end{aligned}$$

2.4. Sprendinio tikslumo kitimo grafikai

grafikas, kuris nurodo visą randamų šaknų skaičių keliant TE ilgį nuo 0 iki 22



atskiri grafikai kiekvienai šakniai, kuriuose oy ašyje pateikti tikslumo įverčiai tarp $h(x)$ apskaičiuotos šaknies ir artimiausios TE šaknies, o ox ašyje TE narių skaičiai:

