Introdução a Robótica

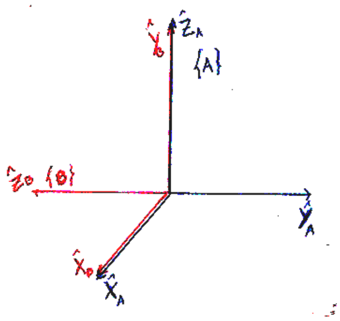
Jhonatan da Silva

Instituto Federal de Santa Catarina. Janeiro 21, 2017

Sumário

1 Matrizes de Rotação e Translação

Quando temos um frame de referência A e outro frame de referência B e queremos saber qual relação por exemplo do eixo x em A, $\hat{X}^A$ com o eixo x em B, $\hat{X}^B$, como na imagem abaixo,



podemos utilizar de matrizes de rotação, geralmente uma matriz de rotação R, tem a seguinte forma geral.

$$R := \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Assim com matrizes de rotação podemos escrever a relação entre $\hat{X}^A$ e $\hat{X}^B$ em termos de ${}^A_B R$, onde

$${}^A\hat{X}_B \;=\; {}^A_B R \; {}^B\hat{X}_B$$

e ${}^A_B R$ é definido como

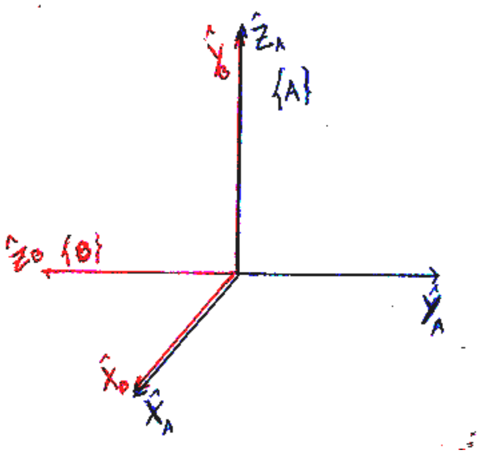
$${}^A_B R \;=\; \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix}$$

Nos resta determinar ${}^A\hat{X}_B \;\; {}^A\hat{Y}_B \;\; {}^A\hat{Z}_B$,

$${}^A\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_B\hat{X}_A \\ \hat{X}_B\hat{Y}_A \\ \hat{X}_B\hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

1.1 Definindo a matriz de rotação

Definindo os dois frames de referência pela imagem abaixo



Como poderiamos determinar ${}^A_B R$ tal que $\hat{X}^A \mapsto \hat{X}^B$ Pela definição anterior de que

$${}^A_B R \;=\; \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix}$$

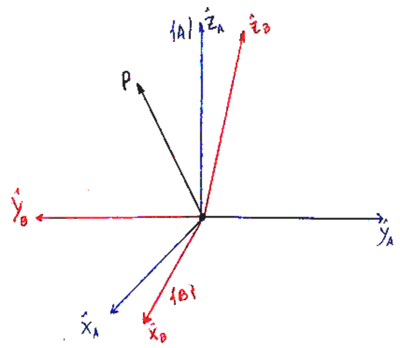
Pela matriz podemos ver que cada coluna na verdade é a cordenada de B em relação a A, como vemos na imagem as coordenadas de $\hat{X}^A$ e $\hat{X}^B$ são as mesmas, já, $\hat{Y}^B$ tem coordenadas em $\hat{Z}^A$ enquanto $\hat{Z}^B$ tem coordenadas em $\hat{Y}^A$. Então podemos escrever ${}^A_B R$ como

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

E como R é ortonormal sabemos que ${}^A_B R^T = {}^B_A R = {}^A_B R^{-1}$

1.2 Rotação geral

E quando temos um ponto P em termos de B e queremos saber como definir o mesmo em termos de A, por exemplo na imagem

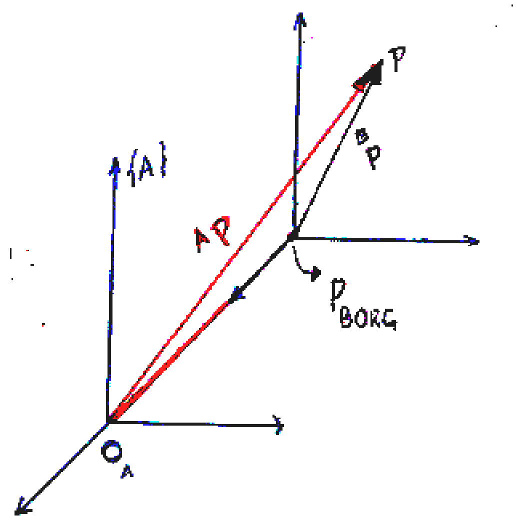


Podemos definir o ponto P em A como ${}^{A}P$ assim temos

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P$$

1.3 Translações

Quando temos um ponto P em um frame A e queremos transladá-lo sem rotacionar ou mudar de frame como mostra a imagem a seguir

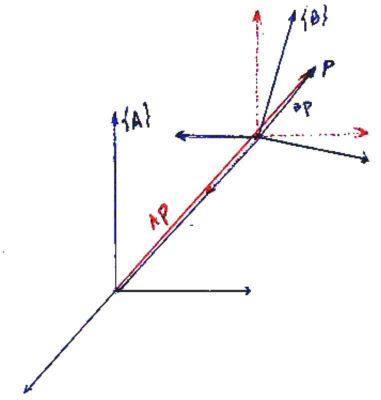


Podemos definir ${}^{A}P$ como

$${}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$

1.4 Transformação Geral

Se temos um caso onde foi feita uma translação e uma rotação em relação a um novo frame, e queremos saber qual é o novo ponto em relação ao frame original, como na imagem abaixo



Primeiro temos que fazer a matriz de rotação ${}^{A}_{B}R$ pois o novo ponto está em um frame diferente do original, então não podemos apenas fazer a soma, depois de fazer ${}^{A}_{B}R$ aplicado em ${}^{B}P$ podemos fazer a translação somando com ${}^{A}P_{BORG}$, em uma forma geral podemos escrever

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P \,+\, {}^{A}P_{BORG}$$

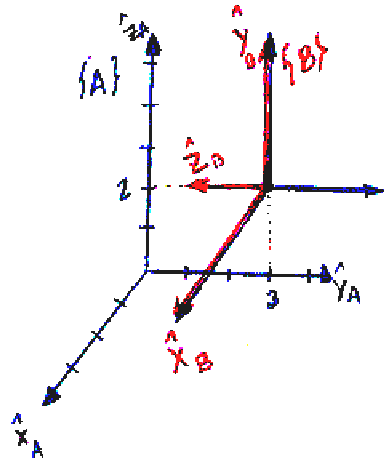
1.4.1 A Transformação Homogênea

Seria interessante ter uma matriz que resolvesse o problema geral, onde temos a rotação e a translação, porque computacionalmente falando, é mais interessante ter uma multiplicação de uma matriz com um vetor que ter várias operações. A transformação homogênea resolve esse problema, expandindo para uma matriz $(4,4)$ podemos reescrever a expressão ${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P \,+\, {}^{A}P_{BORG}$ em forma matricial

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 00 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.4.2 Exemplo

Um exemplo prático de como funciona a transformação homogênea, pela imagem abaixo,



Temos um frame de referência A e outro B, pelo que se ve na image o frame de referêcia continuou no mesmo plano xy, deslocou 3 casas em direção ao eixo y e 2 em relação ao eixo z, definindo a translação como q temos que

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Agora precisamos definir ${}^{A}_{B}R$, que tem a mesma rotação do primeiro exemplo de rotações

$${}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora podemos definir uma transformação homogênea ${}^A_BT$ de tal modo

$$ {}^A_BT = \begin{bmatrix} {}^A_BR & {}^AP_{BORG} \\ 00 & 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^A_BT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Se definirmos um ponto ${}^BP$

$$ {}^BP = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} $$

Onde a quarta cordenada de ${}^BP$ não é levada em conta no final. Podemos saber o novo ponto ${}^AP$ fazendo

$$ {}^AP = {}^A_BT^BP $$

$$ {}^AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^AP = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ \therefore \quad {}^AP = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} $$

1.5 Usando python para resolver problemas de robótica