Resumo de Medida e Integração

1 Aula 1 - Medida e anel

Definição 1.1. Dizemos que uma coleção de subconjuntos $\mathcal{S}$ de Ω é um **semianel**, se:

- $\emptyset \in \mathcal{S}$.
- Se $A, B \in \mathcal{S}$, então $A \cap B \in \mathcal{S}$.
- Se $S_0, S \in \mathcal{S}$, com $S_0 \subset S$, então existem $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$, tais que $S - S_0 = \sum_{i=1}^{n} S_i$ (o somatório significa que os S_i são 2 a 2 disjuntos).

Exemplo 1.1.

1. A coleção de todos os intervalos limitados de $\mathbb{R}$ é um semianel (intervalos limitados são da forma: $(a, b), (a, b], [a, b)$ e $[a, b]$).
2. $\mathcal{S} = \{\emptyset, A \mid A$ é unitário$\}$ é semianel (um conjunto A é unitário se $A \neq \emptyset$ e $\forall\, x, y \in A$, temos que $x = y$).

Teorema 1.1. Sejam $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ semianéis de Ω_1 e Ω_2, respectivamente. Então $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ é um semianel do produto cartesiano do espaço $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Corolário 1.1. O conjunto dos "retângulos" limitados de $\mathbb{R}^n$ forma um semianel.

Definição 1.2. Uma função $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é uma **medida finitamente aditiva**, se:

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Se $S, S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$, com $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$, então $\mu(S) = \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i)$.

Dizemos que μ é uma **medida σ-aditiva**, se no lugar de *ii*) valer:

ii') Se $S, S_1, S_2, \ldots, S_n, \cdots \in \mathcal{S}$, com $S = \sum_{i=1}^{\infty} S_i$, então $\mu(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S_i)$.

Definição 1.3. Dizemos que uma coleção de subconjuntos $\mathcal{A}$ de Ω é um **anel**, se:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- Se $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \cap B, A \cup B, A \cap B^{\complement} \in \mathcal{A}$.

Teorema 1.2. Sejam $\mathcal{S}$ um semianel e $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ o conjunto formado por todas as uniões finitas e disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$. Então:

a) $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ é um anel.

b) Se $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é uma medida finitamente aditiva em $\mathcal{S}$, então ela se estende de modo único a todos os elementos de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, segundo a regra $\mu(\sum_{i=1}^{n} S_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i$, onde $\sum_{i=1}^{n} S_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$.

Teorema 1.3. Seja $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ medida finitamente aditiva. Então:

- Se $A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ e $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, então $\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

2 Aula 2 - Integral de funções simples

Definição 2.1. Sejam Ω um espaço topológico e $\mathcal{S}$ um semianel de Ω. Dizemos que uma medida $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ finitamente aditiva é **regular**, se para todo $S \in \mathcal{S}$, temos que

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \inf\{\mu(G) \mid \forall\, G \supset S, G \in \mathcal{S} \text{ aberto}\} \\ &= \sup\{\mu(K) \mid \forall\, K \subset S, K \in \mathcal{S} \text{ compacto}\}\end{aligned}$$

Teorema 2.1. Toda medida regular, finitamente aditiva é σ-aditiva.

Corolário 2.1 (Borel)**.** A medida λ do comprimento dos intervalos de $\mathbb{R}$ é σ-aditiva.

Teorema 2.2. Se $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ é σ-aditiva, então a extensão $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{S}) \to [0, \infty]$ também é σ-aditiva.

Teorema 2.3. Sejam $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ σ-aditiva e $A, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$.

a) Se $A_n \uparrow A$, então $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

b) Se $A_n \downarrow A$ e $\mu(A_1) < \infty$, então $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

c) Se $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, então $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Definição 2.2. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é **$\mathcal{S}$-simples**, se existem $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ e $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$, 2 a 2 disjuntos, tais que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \mathbb{1}_{S_i}(x)$, onde

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Definição 2.3. Sejam $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ uma medida σ-aditiva e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{S}$-simples. Definimos a **integral de f com respeito a μ**, denotado por $I(f)$ ou $\int_\Omega f d\mu$, como sendo $\sum_{i=1}^{n} r_i \mu(S_i)$.

Proposição 2.1. Seja $\mathcal{H} = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ é } \mathcal{S}\text{-simples}\}$. então $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial e $I : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ é um operador linear.

Definição 2.4. Um conjunto de funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$, χ, é um **retuculado vetorial** se é um espaço vetorial tal que se $f \in \chi$, então $|f| \in \chi$.

3 Aula 3 - Espaço de medida

Proposição 3.1. Seja $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ uma medida σ-aditiva e h, h_n funções $\mathcal{S}$-simples.

1. Se $h \geq 0$, então $I(h) \geq 0$.
2. Se $h_1 \geq h_2$, então $I(h_1) \geq I(h_2)$
3. Se $h_n \downarrow 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} I(h_n) = 0$.
4. Se $h_n \uparrow h$ (ou $h_n \downarrow h$), então $\lim\limits_{n\to\infty} I(h_n) = I(h)$.
5. Se $h \leq \sum_{n=1}^{\infty} h_n$, então $I(h) \leq \sum_{n=1}^{\infty} I(h_n)$.

Definição 3.1. Sejam $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ e $f : \Omega \to [0, \infty]$. Definimos a **integral superior de f com respeito à medida** μ, como $I^*(f) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} I(h_n) \mid h_n \in \mathcal{H}, h_n \geq 0 \text{ e } f \leq \sum_{n=1}^{\infty} h_n\}$.

Proposição 3.2. Sejam $f, f_n : \Omega \to [0, \infty]$ e $h \in \mathcal{H}$ e $h \geq 0$. Então:

1. $I^*(h) = I(h)$.
2. Se $r \geq 0$, então $I^*(rf) = rI^*(f)$.
3. Se $f \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, então $I^*(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} I^*(f_n)$. Em particular, $I^*(\sum_{n=1}^{\infty} f_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} I^*(f_n)$, ou seja, I^* é σ-subaditiva.

Definição 3.2. Uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω é uma σ**-álgebra de** Ω, se:

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^{\complement} \in \mathcal{A}$.

iii) Se $A_1, \ldots, A_n, \cdots \in \mathcal{A}$, então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Se $iii)$ for válida apenas para uniões finitas, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **álgebra**.

Definição 3.3. Um **espaço de medida** é $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, onde Ω é um conjunto qualquer, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de Ω e $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ é uma medida σ-aditiva. Quando $\mu(\Omega) < \infty$, dizemos que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é um **espaço de medida finito**. Em particular, se além de finita $\mu(\Omega) = 1$, dizemos que ele é um **espaço de probabilidades**.

Definição 3.4. Uma σ-álgebra é **completa com respeito à medida** μ, se, para todo $A \in \mathcal{A}$, com $\mu(A) = 0$, temos que todo subconjuto de A pertence à σ-álgebra, isto é, $\forall\, B \subset A, B \in \mathcal{A}$.

Teorema 3.1 (Existência da σ-álgebra e da medida de Lebesgue)**.** Seja $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ σ-aditiva. Então existe σ-álgebra $\mathcal{A} \supset \mathcal{S}$, tal que:

a) Se $f = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \mathbb{1}_{A_n}$, com $A_n \in \mathcal{A}$ e $r_n \geq 0$ real, então $I^*(f) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n I^*(\mathbb{1}_{A_n})$.

b) Defina $\nu(A) = I^*(\mathbb{1}_A) : \mathcal{A} \to [0, \infty]$. Então $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ é um espaço de medida completo.

c) Dado $A \subset \Omega$, temos que $A \in \mathcal{A}$, se para todo $S \in \mathcal{S}$, $A \cap S \in \mathcal{A}$.

4 Aula 4 - Existência da σ-álgebra e medida de Lebesgue

Lema 4.1. Sejam V espaço vetorial seminormado, $W \subset V$ subespaço e $T : W \to \mathbb{R}$ função linear limitada. Então:

a) $\overline{W}$ é subespaço de V.

b) Existe $\overline{T} : \overline{W} \to \mathbb{R}$ funcional linear que estende T.

Lema 4.2. Seja $\mathcal{F}_1 = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \mid I^*(|f|) < \infty\}$. Então $\mathcal{F}_1$ é espaço vetorial seminormado, com a seminorma definida como $\|f\| = I^*(|f|)$.

Lema 4.3. $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_1$.

Lema 4.4. $\overline{\mathcal{H}}$ é reticulado vetorial e existe $\overline{I} : \overline{\mathcal{H}} \to \mathbb{R}$ que estende I e $\overline{I}(f) = I^*(f)$, para todo $f \geq 0$.

Lema 4.5. Sejam $(f_n) \in \overline{\mathcal{H}}$, com $f_n \geq 0$, e $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Então:

a) $I^*(f) = \sum_{n=1}^{\infty} I^*(f_n)$.

b) Se $I^*(f) < \infty$ e $f(x) \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \Omega$, então $f \in \overline{\mathcal{H}}$.

Definição 4.1. $\Lambda_0 = \{A \subset \Omega \mid \mathbb{1}_A \in \overline{\mathcal{H}}\}$.

Lema 4.6.

a) Λ_0 é anel.

b) Se $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, com $A_n \in \Lambda_0$, para todo n, e $I^*(\mathbb{1}_A) < \infty$, então $A \in \Lambda_0$.

Definição 4.2. $\Lambda = \{A \subset \Omega \mid \forall\, S \in \mathcal{S}, A \cap S \in \Lambda_0\}$.

Lema 4.7. Λ é uma σ-álgebra.

Lema 4.8. $\Lambda_0 = \{A \subset \Omega \mid I^*(\mathbb{1}_A) < \infty\}$.

5 Aula 5 - Conjuntos e funções mensuráveis

Proposição 5.1. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, ou seja, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em Ω e $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ é uma medida σ-aditiva.

1. Se $A, B \in \mathcal{A}$, com $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Se $(A_n), A \in \mathcal{A}$ e $A_n \uparrow A$, então $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
3. Se $(A_n), A \in \mathcal{A}$, $A_n \downarrow A$ e $\mu(A_1) < \infty$, então $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
4. Se $(A_n) \in \mathcal{A}$, então $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
5. Se, para todo n, $\mu(A_n) = 0$, então $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

Definição 5.1.

a) Quando $\mathcal{S}$ for o conjunto dos intervalos limitados da reta e $\mu((a, b)) = b - a$, denotaremos μ por λ.

b) Quando $\mathcal{S} = \{\emptyset, A \mid A \text{ é unitário}\}$ e μ for tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(A) = 1$, para todo $A \in \mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}$, então denotaremos μ por $\#$.

Teorema 5.1. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os retângulos abertos de $\mathbb{R}^n$ da forma $\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$, com $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, para todo i. Então

i) $\mathcal{C}$ é enumerável.

ii) Para todo G aberto de $\mathbb{R}^n$, existe $(S_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$ tal que $G = \cup_{k=1}^{\infty} S_k$ e $\overline{S_k} \subset G$, para todo k.

Corolário 5.1. Seja $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Então temos que $\mathcal{A}$ contém todos os conjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.1.

1. (Borel) Seja $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\}$. Defina $G_n = (x_n - {}^1\!/_{2^{n+2}}, x_n + {}^1\!/_{2^{n+2}})$ e $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$. Seja $F = G^{\complement} \cap [0, 1]$. Então F é compacto, não enumerável, não contém intervalos e tem medida positiva.
2. (Cantor) Seja K o conjunto de Cantor, isto é, o conjunto dos pontos que sobram do processo de retirar o terço médio de cada intevalo, começando por $[0, 1]$. Então K é compacto, não enumerável, não contém intervalos e tem medida nula.

Definição 5.2. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que $A \subset \Omega$ é um **conjunto mensurável** (ou $\mathcal{A}$-mensurável), se $A \in \mathcal{A}$. Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma **função mensurável**, se $(f > r) = f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{A}$, para todo $r \in \mathbb{R}$ e denotaremos por $f \in \mu(\mathcal{A})$. Quando $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ for de probabilidade, utilizamos a nomenclatura, **evento** e **variável aleatória**, respectivamente.

Definição 5.3. Seja $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \in \mathcal{A}$. Dizemos que f é mensurável, se $(f < r) \in \{B \subset A \mid B \in \mathcal{A}\}$.

Teorema 5.2.

a) Se f é mensurável, então $f|_A$ é mensurável, para todo $A \in \mathcal{A}$.

b) Se $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, com $A_n \in \mathcal{A}$ e $f_n|_{A_n}$ é mensurável, então f é mensurável.

Definição 5.4. Seja $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é mensurável, se cada f_i é mensurável.

Teorema 5.3. Seja $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. São equivalentes:

i) f é mensurável.

ii) Para todo G aberto de $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$.

iii) Para toda função $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua, $\psi \circ f$ é mensurável.

Teorema 5.4.

1. $f(x) = c$ é mensurável, para todo $c \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. $\mathbb{1}_A \in \mu(\mathcal{A})$, para todo $A \in \mathcal{A}$.
3. Se $f, g \in \mu(\mathcal{A})$, então $f + g, fg \in \mu(\mathcal{A})$. Em particular, $\alpha f + \beta g \in \mu(\mathcal{A})$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
4. Se $(f_n) \in \mu(\mathcal{A})$, então $\sup f_n, \inf f_n \in \mu(\mathcal{A})$. Em particular, $f_1 \vee \cdots \vee f_n$ e $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$.
5. Se $f \in \mu(\mathcal{A})$, então $f^+, f^-, |f| \in \mu(\mathcal{A})$.
6. Se $f_n \in \mu(\mathcal{A})$, para todo n, então $\liminf f_n, \limsup f_n \in \mu(\mathcal{A})$. Em particular, se $\lim f_n = f$, então $f \in \mu(\mathcal{A})$.
7. Se $(f_n) \in \mu(\mathcal{A})$, então $f_1 + \cdots + f_n \in \mu(\mathcal{A})$, para todo n, e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mu(\mathcal{A})$.

Teorema 5.5. Seja $f : \Omega \to [0, \infty)$ mensurável. Então existem $r_n \in \mathbb{R}_+$ e $A_n \in \mathcal{A}$, para todo n, tais que $f = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \mathbb{1}_{A_n}$.

6 Aula 6 - Integral de Lebesgue

Definição 6.1. Dizemos que uma proposição $P(x) : \Omega \to [v, f]$ é **verdadeira em quase todo ponto**, qtp, se $\{x \in \Omega \mid P(x) = f\} \in \mathcal{A}$ e $\mu(\{x \in \Omega \mid P(x) = f\}) = 0$.

Definição 6.2. Sejam $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ uma medida σ-aditiva e $f : \Omega \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Definimos a **integral de Legesgue de f com respeito à medida** μ, denotado por $I(f)$ ou $\int_\Omega f d\mu$, por $I^*(f)$.

Proposição 6.1. Sejam $f, g, f_n \in \mu(\mathcal{A})$.

1. $I(\mathbb{1}_A) = \mu(A)$.
2. Se $f \leq g$, então $I(f) \leq I(g)$.
3. $I(rf) = rI(f)$, para todo $r \geq 0$.
4. Se $f = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \mathbb{1}_{A_n}$, então $I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \mu(A_n)$
5. $I(\sum_{n=1}^{\infty} f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$.

Proposição 6.2. Sejam $f, g \in \mu(\mathcal{A})$.

1. Se $f \leq g$ qtp, então $I(f) \leq I(g)$.
2. Se $f = g$ qtp, então $I(f) = I(g)$.
3. Se $I(f) = 0$ qtp, então $f = 0$ qtp.
4. Se $I(f) < \infty$, então $\mu(f = \infty) = 0$.

Definição 6.3. Seja $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável.

a) Dizemos que f é **semi-integrável**, se $I(f^+)$ ou $I(f^-)$ são finitos.

b) Dizemos que f é **integrável**, se $I(f^+)$ e $I(f^-)$ são finitos.

c) Se f é semi-integrável, definimos a **integral de Lebesgue de** f, denotada por $I(f)$ ou $\int_\Omega f d\mu$, como $I(f^+) - I(f^-)$

Teorema 6.1. Sejam f, g funções com $f = g$ qtp e f mensurável. Então

- $g \in \mu(\mathcal{A})$.
- $I(f) = I(g)$.

Teorema 6.2. Sejam $f_n \in \mu(\mathcal{A})$, para todo n e $f = \lim f_n$ qtp. Então f é mensurável.

Teorema 6.3. Seja $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ semi-integrável. Então $I(rf) = rI(f)$, para todo $r \in \mathbb{R}$.

Teorema 6.4. Seja $f \in \mu(\mathcal{A})$. Então, se f é integrável, então $|f|$ é integrável.

7 Aula 7 - Teorema da convergência monótona

Definição 7.1. $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ \mid |f| \text{ é integrável}\}$.

Teorema 7.1. $\mathcal{L}^1$ é espaço vetorial e $I : \mathcal{L}^1 \to \mathbb{R}$ é funcional linear.

Teorema 7.2. Sejam $f, g \in \mathcal{L}^1$.

a) Se $f \leq g$ qtp, então $I(f) \leq I(g)$.

b) Se $f \leq g$ qtp e $I(f) = I(g)$, então $f = g$ qtp.

Teorema 7.3. Sejam $g_1 \leq f \leq g_2$ qtp, com $g_1, g_2 \in \mu(\mathcal{A})$. Se $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1$, então $f \in \mathcal{L}^1$.

Teorema 7.4 (Teorema da Convergência Monótona)**.** Sejam $f, f_n : \Omega \to [0, \infty]$ mensuráveis.

1. Se $f_n \uparrow f$ qtp, então $I(f_n) \uparrow I(f)$.

2. Se $f_n \downarrow f$ qtp e $I(f_1) < \infty$, então $I(f_n) \downarrow I(f)$.

Proposição 7.1. Sejam $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ semi-integrável e $A \in \mathcal{A}$. Então $\mathbb{1}_A f$ é semi-integrável e $I(\mathbb{1}_A f) \in [-I(f^-), I(f^+)]$.

Definição 7.2. $\int_A f d\mu = I(\mathbb{1}_A f) = \int_\Omega (\mathbb{1}_A f) d\mu$.

Teorema 7.5. Seja $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ semi-integrável e $A = \sum_{n=1}^\infty A_n$, com $A, A_n \in \mathcal{A}$. Então $\int_A f = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f$.

Definição 7.3. Sejam $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ e μ medida. Definimos **integral definida de f com respeito à** μ como sendo $\nu : \mathcal{A} \to [-I(f^-), I(f^+)]$, fazendo $\nu(A) = \int_A f d\mu$.

Teorema 7.6.

a) Se $A_n \uparrow A$, com $A_n, A \in \mathcal{A}$, então $\lim \int_{A_n} f = \int_A f$.

b) Se $A \in \mathcal{A}$, com $\mu(A) = 0$, então $\nu(A) = \int_A f d\mu = 0$.

Definição 7.4. Sejam $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ e $A \in \mathcal{A}$. Dizemos que g **é semi-integrável**, se a função $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, definida como $f(x) = g(x)$, se $x \in A$, e $f(x) = 0$, se $x \notin A$, for semi-integrável. Nesse caso, $I(g) = \int_A f \mu$.

8 Aula 8 - Riemann × Lebesgue

Teorema 8.1. Sejam $\mu_i : \mathcal{S}_i \to [0, \infty)$ medida σ-aditiva, para todo $i = 1, \ldots, n$. Então definindo $(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n) : \prod_{i=1}^n \mathcal{S}_i \to [0, \infty)$, como $(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)(I_1 \times \cdots \times I_n) = \mu_1(I_1) \ldots \mu_n(I_n)$, temos que $(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ é medida σ-aditiva.

Definição 8.1. Seja $[a, b]$ intervalo de $\mathbb{R}$. Dizemos que o conjunto $\{x_n\}$, com $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ forma uma **partição pontilhada de** $[a, b]$. Dizemos que $\mathcal{P} = \{[x_i, x_{i+1}] \mid i = 0, \ldots, n-1\}$ é uma **partição de** $[a, b]$

Teorema 8.2. Sejam $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, onde Ω_i é intervalo limitado de $\mathbb{R}$ e $(\mathcal{P}_i)_{i=1}^n$ sequência de partições de Ω_i. Então, definindo $\mathcal{P} = \prod_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \{I_1 \times \cdots \times I_n \mid I_j \in \mathcal{P}_j\}$, temos que $\mathcal{P}$ é uma partição de Ω e, se $I, J \in \mathcal{P}$, com $I \neq J$, então $\lambda(I \cap J) = 0$.

Definição 8.2. Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{P}$ partição de Ω. Para todo $K \in \mathcal{P}$, defina $m_K(f) = \inf\{f(x) \mid x \in K\}$ e $M_K(f) = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$. Definimos as **somas de Riemann-Darboux** com sendo $s(\mathcal{P}, f) = \sum_{K \in \mathcal{P}} m_K \lambda(K)$ e $S(\mathcal{P}, f) = \sum_{K \in \mathcal{P}} M_K \lambda(K)$.

Definição 8.3. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Definimos a **integral superior de Riemann** como sendo $\inf\{S(\mathcal{P}, f) \mid \mathcal{P}$ é partição de $\Omega\}$ e a denotamos por $\overline{\int_\Omega} f dx$ ou simplesmente por $\overline{\int} f$. Analogamente, definimos a **integral inferior de Riemann** como $\sup\{s(\mathcal{P}, f) \mid \mathcal{P}$ é partição de $\Omega\}$ e a denotamos por $\underline{\int_\Omega} f dx$ ou simplesmente por $\underline{\int} f$. Quando $\overline{\int} f = \underline{\int} f$, dizemos que f é **Riemann integrável** sendo seu valor $\overline{\int} f = \underline{\int} f$, denotado por $\int_\Omega f dx$ ou, somente, $\int f$.

Teorema 8.3. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Riemann integrável. Então f é Lebesgue integrável e sua integral de Lebesgue $I(f) = \int_\Omega f d\lambda$ será igual a integral de Riemann $\int_\Omega f dx$.

Definição 8.4. Seja $\Omega = \prod \Omega_i$ retângulo de $\mathbb{R}^n$ (não necessariamente limitado). Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tem **integral imprópria de Riemann**, se para todo $(\Gamma_n)_n$, onde Γ_n é compacto de $\mathbb{R}^n$, com $\Gamma_n \uparrow \Omega$ e $f|_{\Gamma_n}$ é Riemann integrável. Além disso, a integral imprópria é definida como $II(f) = \lim\limits_{n \to \infty} \int_{\Gamma_n} f dx$.

Teorema 8.4. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tem integral imprópria de Riemann, então f é Lebesgue mensurável. Além disso, se f for semi-integrável (a Lebesgue), então $I(f) = \int_\Omega f d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int_{\Gamma_n} f dx$.

9 Aula 9 - Teorema da Convergência Dominada

Definição 9.1. Seja $f : \Omega \to V$, onde $V = \mathbb{R}^n$ ou $V = \mathbb{C}$. Note que $f = (f_1, \ldots, f_n)$, no primeiro caso e $f = f_1 + if_2$, no segundo, com $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é mensurável, se (f_i) for mensurável. para cada i.

Definição 9.2. $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, V) = \{f : \Omega \to V \mid |f| \text{ é integrável}\}$. Note que $|f| = \sqrt{\sum_i |f_i|^2} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

Definição 9.3. f é integrável, se f_i for integrável, para todo i. Assim, $I(f) = (I(f_1), \ldots, I(f_n))$, se $V = \mathbb{R}^n$ e $I(f) = I(f_1) + iI(f_2)$, se $V = \mathbb{C}$.

Proposição 9.1.

a) $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, V)$ é espaço vetorial (real, se $V = \mathbb{R}$, ou complexo, se $V = \mathbb{C}$) seminormado, onde a seminorma é $\|f\|_1 = \int_\Omega |f| d\mu$.

b) $I : \mathcal{L}^1 \to V$ é transformação linear.

Teorema 9.1 (Lema de Fatou)**.** Sejam $(f_n) : \Omega \to [0, \infty]$ mensuráveis. Então $I(\liminf f_n) \leq \liminf I(f_n)$.

Corolário 9.1. Se $f_n \to f$ qtp, então $I(f) \leq \liminf I(f_n)$.

Teorema 9.2 (Teorema da Convergência Dominada)**.** Sejam $f_n, f : \Omega \to V$ $(V = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C})$ mensuráveis tais que $f = \lim f_n$ x-qtp. Se existe uma função $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ integrável tal que $g(x) \geq |f_n(x)|$ x-qtp, para todo n, então f_n e f são integráveis e $I(f) = \lim I(f_n)$.

Corolário 9.2. Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida finito, $(f_n), f : \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis, com $f = \lim f_n$ qtp e f_n uniformemente limitadas qtp (isto é, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$. x-qtp e para todo n). Então vale o teorema da convergência dominada.

Teorema 9.3. Seja $F : \Omega \times Y \to V$ $(V = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C})$, onde Y é um espaço métrico, tal que:

i) para todo $y \in Y$ fixo, a função $F(x, y)$ é mensurável;

ii) x-qtp, a função $F(x, y)$ é contínua;

iii) existe uma função $g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrável tal que $|F(x, y)| < g(x)$, para todo y e x-qtp.

Então:

a) para todo y, a função $F(x, y)$ é integrável;

b) a função $\int_\Omega F(x, y) d\mu(x)$ é contínua.

10 Aula 10 - Primeira prova

Foi realizada a primeira prova.

11 Aula 11 - σ-álgebra de Borel

Teorema 11.1. Seja $F : \Omega \times J \to \mathbb{R}$, onde J é intervalo de $\mathbb{R}$ tal que:

i) para todo $y \in J$, $x \mapsto F(x, y)$ é integrável;

ii) para todo $(x, y) \in \Omega \times J$, existe $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$;

iii) existe $g : \Omega \to [0.\infty]$ integrável tal que $g(x) \geq \left|\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right|$, $\forall\,(x, y) \in \Omega \times J$.

Então:

a) a função $y \mapsto \int_\Omega F(x, y) d\mu(x)$ é diferenciável;

b) para todo $y \in J$, $x \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)(x, y)$ é integrável;

c) vale que $\dfrac{d}{dy} \int F(x, y) d\mu(x) = \int \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) d\mu(x)$.

Teorema 11.2. Sejam Ω um conjunto qualquer e $\mathcal{C}$ uma coleção qualquer de subconjuntos de Ω. Então existe a menor σ-álgebra que contém todos os elementos de $\mathcal{C}$. Chamamos essa σ-álgebra de **σ-álgebra gerada por** $\mathcal{C}$. Notação: $\sigma(\mathcal{C})$.

Definição 11.1. Seja Ω um espaço topológico. Definimos a **σ-álgebra de Borel** (ou borelianos de Ω) como sendo a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de Ω, isto é, $\sigma(A \mid A \text{ é aberto de } \Omega)$.

Proposição 11.1.

a) Todo intervalo real é boreliano.

b) Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos retângulos de $\mathbb{R}^n$. Então $\sigma(\mathcal{S})$ é a σ-álgebra de Borel.

c) Todo conjunto Borel mensurável é Lebesgue mensurável.

Definição 11.2. Seja $\mathcal{S}$ um semianel. Definimos $\mathcal{S}_\sigma = \{\cup_{i=1}^\infty S_i \mid S_i \in \mathcal{S}\}$. Note que $\mathcal{S}_\sigma \subset \sigma(\mathcal{S})$.

Proposição 11.2. Sejam $(S_n) \in \mathcal{S}_\sigma$. Então:

a) $\cup_{n=1}^\infty S_n \in \mathcal{S}_\sigma$.

b) $\cap_{n=1}^k S_n \in \mathcal{S}_\sigma$, $\forall\, k$.

Teorema 11.3. Para todo $A \in \Lambda$, vale $\mu(A) = \inf\{\mu(B) \mid B \supset A, B \in \mathcal{S}_\sigma\}$. Em particular, se não existe $B \supset A, B \in \mathcal{S}_\sigma$, então $\mu(A) = \infty$.

12 Aula 12 - Completamento e Funções Borel Mensuráveis

Teorema 12.1. Para todo $A \in \Lambda$, com $\mu(A) < \infty$, existe $\tilde{A} \in \sigma(\mathcal{S})$, com $\tilde{A} \supset A$ e $\mu(\tilde{A} \backslash A) = 0$. Além disso, existe (B_n), com $B_n \in \mathcal{S}_\sigma$ e $\mu < \infty$, tal que $B_n \downarrow \tilde{A}$.

Corolário 12.1. Se $A \in \Lambda$, com $\mu(A) = 0$, então $\exists\, \tilde{A} \in \sigma(\mathcal{S})$ tal que $\tilde{A} \supset A$ e $\mu(\tilde{A}) = 0$.

Definição 12.1. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida. Dizemos que $A \in \mathcal{A}$ é **σ-finito**, se existe $(A_n) \in \mathcal{A}$, com $\mu(A_n) < \infty$ tal que $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Teorema 12.2.

a) Se A_n é σ-finito, $\forall\, n$, então $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ é σ-finito.

b) Se A é σ-finito e $B \subset A$, então B é σ-finito.

Corolário 12.2. Se Ω é σ-finito, então A é σ-finito, para todo $A \in \mathcal{A}$.

Definição 12.2. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida. Dizemos que o espaço é **σ-finito**, se Ω for σ-finito. Dizemos que o espaço é **finito**, se $\mu(\Omega) < \infty$. Quando $\mu(\Omega) = 1$, dizemos que é um **espaço de probabilidade**.

Teorema 12.3. Seja $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$. Se f é integrável, então $(f \neq 0)$ é σ-finito.

Definição 12.3. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida. Defina $\mathcal{N} = \{E \subset \Omega \mid \exists\, A \in \mathcal{A}\,, A \supset E, \mu(A) = 0\}$ e $\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup E \mid A \in \mathcal{A}, E \in \mathcal{N}\}$.

Teorema 12.4. O conjunto $\overline{\mathcal{A}}$ é uma σ-álgebra (o completamento de $\mathcal{A}$).

Teorema 12.5. Seja $\mu : \Omega \to [0, \infty)$ medida σ-aditiva. Valem:

a) $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S}) \subset \overline{\sigma(\mathcal{S})} \subset \Lambda$;

b) seja $A \in \Lambda$. Se A é σ-finito, então $A \in \overline{\sigma(\mathcal{S})}$;

c) se (Ω, Λ, μ) é σ-finito, então $\overline{\sigma(\mathcal{S})} = \Lambda$.

Corolário 12.3. A σ-álgebra de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ é o completamento da σ-álgebra de Borel.

Teorema 12.6. Seja $\mu : \Omega \to [0, \infty)$ medida σ-aditiva. Então existe uma única σ-álgebra Λ satisfazendo as três condições do teorema de extensão de Lebesgue.

Definição 12.4. Sejam Ω e Ω' conjuntos quaisquer e $f : \Omega \to \Omega'$. Dado $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de Ω', defina $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{C}\}$.

Teorema 12.7.

a) Se $\mathcal{A}'$ é σ-álgebra de Ω', então $f^{-1}(\mathcal{A}')$ é σ-álgebra de Ω.

b) Se $\mathcal{A}$ é σ-álgebra de Ω, então $\{A \subset \Omega' \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$ é σ-álgebra de Ω'.

Corolário 12.4. Sejam $\mathcal{A}$ σ-álgebra e $\mathcal{C}$ classe de subconjuntos de Ω'. Então se $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, $\forall\, A \in \mathcal{C}$, então $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, $\forall\, A \in \sigma(\mathcal{C})$.

Teorema 12.8.

a) $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é Borel mensurável, se, e somente se, $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, para todo A boreliano de $\mathbb{R}^n$.

b) Se $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$ é contínua, então f é Borel mensurável.

Teorema 12.9. Sejam $f : \Omega \to \Omega'$ e $\mathcal{C}$ classe de subconjuntos de Ω. Então $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

13 Aula 13 - Teorema de Tonelli-Cavalieri

Proposição 13.1 (Lema Maluco)**.** Sejam $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ uma medida σ-aditiva, $\mu : \Lambda \to [0, \infty]$ medida de Lebesgue e $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de Ω tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{C} \subset \{A \in \Lambda \mid A \text{ é } \sigma\text{-finito}\}$. Então, se valem as condições:

i) Se $A_n \in \mathcal{C}$, $\mu(A_n) < \infty$, $\forall\, n$ e $A = \sum A_n$, então $A \in \mathcal{C}$.

ii) Se $A_1 \subset A_2$, $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, $\mu(A_i) < \infty$, com $i = 1, 2$, então $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{C}$.

iii) Se $A \in \mathcal{C}$, $\mu(A) = 0$ e $E \subset A$, então $E \in \mathcal{C}$.

Temos que $\mathcal{C} = \{A \in \Lambda \mid A \text{ é } \sigma\text{-finito}\}$.

Definição 13.1. Sejam Ω_1, Ω_2 conjuntos quaisquer, $\mathcal{S}_j$ semianel de Ω_j, $\mu_j : \mathcal{S}_j \to [0, \infty)$ medida σ-aditiva e $\mu_j : \Lambda_j \to [0, \infty]$ a respectiva extensão de Lebesgue. Já vimos que $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ é semianel de $\Omega_1 \times \Omega_2$ e que $(\mu_1 \times \mu_2) : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \to [0, \infty)$, com $(\mu_1 \times \mu_2)(S \times T) = \mu_1(S)\mu_2(T)$ é medida σ-aditiva. Então está bem definida a extensão de Lebesgue $(\mu_1 \times \mu_2) : \Lambda \to [0, \infty]$, onde Λ é a σ-álgebra de Lebesgue de $\Omega_1 \times \Omega_2$. Chamamos $\mu_1 \times \mu_2$ de **medida produto**.

Definição 13.2.

a) Seja $A \in \Lambda$, Para todo $x \in \Omega_1$, definimos a x**-seção de** A, como sendo $A_x = \{y \in \Omega_2 \mid (x, y) \in A\}$. Analogamente, para todo $y \in \Omega_2$, definimos a y**-seção de** A, como sendo $A_y = \{x \in \Omega_1 \mid (x, y) \in A\}$.

b) Seja $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$. Para todo $x \in \Omega_1$, definimos a x**-seção de** f, como sendo $f_x : \Omega_2 \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$. Analogamente, para todo $y \in \Omega_2$, definimos a y**-seção de** f, como sendo $f_y : \Omega_1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$.

Teorema 13.1 (Tonelli-Cavalieri)**.** Seja $A \in \Lambda$ e A σ-finito. Então:

i) $A_x \in \Lambda_2$ e A_x σ-finito com respeito a μ_2, x-qtp $\in \Omega_1$

ii) $A_y \in \Lambda_1$ e A_y σ-finito com respeito a μ_1, y-qtp $\in \Omega_2$

iii) Sejam $g : \Omega_1 \to [0, \infty]$, $g(x) = \mu_2(A_x)$ e $h : \Omega_2 \to [0, \infty]$, $h(y) = \mu_1(A_y)$. Então g é Λ_1-mensurável, h é Λ_2-mensurável e $\int_{\Omega_1} g(x) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} h(y) d\mu(y) = (\mu_1 \times \mu_2)(A)$.

14 Aula 14 - Teorema de Fubini

Corolário 14.1. Se $A \in \Lambda$ e $(\mu_1 \times \mu_2)(A) = 0$, então $\mu_2(A_x) = 0$ x-qtp e $\mu_1(A_y) = 0$ y-qtp.

Teorema 14.1 (Tonelli-Funibi)**.** Seja $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, \infty]$ Λ-mensurável, tal que $(f > 0)$ é σ-finito. Então:

a) f_x é Λ_2-mensurável, x-qtp;

b) f_y é Λ_1-mensurável, y-qtp;

c) se $g : \Omega_1 \to [0, \infty]$, $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ e $h : \Omega_2 \to [0, \infty]$, $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x)$, vale que $\int_{\Omega_1} g(x) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} h(y) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d(\mu_1 \times \mu_2)$.

Teorema 14.2 (Fubini)**.** Seja $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$) integrável com respeito a $\mu_1 \times \mu_2$. Então:

a) f_x é integrável, x-qtp;

b) f_y é integrável, y-qtp;

c) se $g : \Omega_1 \to [0, \infty]$, $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ e $h : \Omega_2 \to [0, \infty]$, $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x)$, vale que $\int_{\Omega_1} g(x) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} h(y) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) d(\mu_1 \times \mu_2)$.

Teorema 14.3. Sejam $A_i \in \Lambda_i$, μ_i σ-finito, para $i = 1, 2$. Então:

a) $A_1 \times A_2 \in \Lambda$ é σ-finito;

b) $(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_2)\mu_2(A_2)$.

Corolário 14.2. Se Ω_j é μ_j σ-finito, $j = 1, 2$, então $\Omega_1 \times \Omega_2$ é $(\mu_1 \times \mu_2)$ σ-finito.

Corolário 14.3. Sejam $f_j : \Omega_j \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis, $j = 1, 2$. Então $g(x, y) = f_1(x)$, $h(x, y) = f_2(y)$ e $i(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ são Λ-mensuráveis.

Teorema 14.4. Seja $(V_{n,k})$, $n \in \Omega_1$ e $k \in \Omega_2$ tal que vale $i)$ ou $ii)$ abaixo:

i) $0 \leq V_{n,k}$, para todo $(n, k) \in \Omega_1 \times \Omega_2$;

ii) $\sum_{(n,k) \in \Omega_1 \times \Omega_2} |V_{n,k}| < \infty$

Então $\sum_n \sum_k V_{n,k} = \sum_k \sum_n V_{n,k} = \sum_{(n,k) \in \Omega_1 \times \Omega_2} V_{n,k}$.

15 Aula 15 - Medida de Lebesgue-Stieltjes

Lema 15.1. Sejam $\nu : \Lambda \to [0, \infty]$ extensão de Lebesgue de $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ e $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \rho)$ espaço completo tal que $\mathcal{S} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ e $\rho = \nu$ em $\mathcal{S}$. Então $\{A \in \Lambda \mid A\, \sigma\text{-finito em } (\Omega, \mathcal{A}, \nu)\} = \{A \in \Lambda \mid A\, \sigma\text{-finito em } (\Omega, \mathcal{A}, \nu), A \in \tilde{\mathcal{A}} \text{ e } \rho(A) = \nu(A)\}$.

Teorema 15.1. Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço completo, $g : \Omega \to [0, \infty]$ $\mathcal{A}$-mensurável. Suponha $\mathcal{A} \supset \mathcal{S}$ semianel. Defina $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, como $\nu(S) = \int_S g d\mu$ e $\nu : \Lambda_\nu \to [0, \infty]$ sua extensão de Lebesgue. Se $A \in \Lambda_\nu$ é σ-finito com respeito a ν, então $A \cap (g > 0) \in \mathcal{A}$ e $\nu(A) = \int_{A \cap (g > 0)} g d\mu$

Proposição 15.1. Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida, $g : \Omega \to [0, \infty]$ $\mathcal{A}$-mensurável. Defina a medida σ-aditiva $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, como $\nu(A) = \int_A g d\mu$. Dada $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ $\mathcal{A}$-mensurável, então temos que f é (semi-)integrável com respeito a ν se, e somente se, fg é (semi-)integrável com respeito a μ. Neste caso, $\int_\Omega f d\nu = \int_\Omega f g d\mu$.

Proposição 15.2. Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ espaços de medida, $\Omega_1 \in \mathcal{A}$ $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ e $\mu_1 = \mu|_{\mathcal{A}_1}$. Dado $f : \Omega_1 \to [-\infty, \infty]$ $\mathcal{A}_1$-mensurável, temos que f é (semi)-integrável com respeito a μ_1 se, e somente se, f é (semi)-integrável com respeito a μ. Neste caso, $\int_{\Omega_1} f d\mu_1 = \int_\Omega f d\mu$.

Definição 15.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ intervalo não degenerado e $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com $\alpha'(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$. Denote por $\mathcal{S}_\Omega$ o semianel dos intervalos S tais que $\overline{S} \subset \Omega$. A **medida de Stieltjes** $\nu : \mathcal{S}_\Omega \to \mathbb{R}$ é dada por $\nu(S) = \int_S \alpha'(x) d\lambda$. Logo $\nu \geq 0$ e ν é σ-aditiva em $\mathcal{S}_\Omega$. Portanto, ν tem extensão de Lebesgue $\nu : \Lambda_\nu \to [0, \infty]$, chamada **medida de Lebesgue-Stieltjes** definida por α.

Teorema 15.2. Seja $\Lambda(\Omega) = \{A \in \Omega \mid A \in \Lambda_\lambda\}$, onde Λ_λ é a σ-álgebra de Lebesgue da reta. Então:

a) $\Lambda_\nu = \{A_1 \cup A_2 \mid A_1 \in \Lambda(\Omega), A_2 \subset (\alpha' = 0)\}$;

b) $\nu(A_1) = \int_{A_1} \alpha'(x) d\lambda$, para todo $A_1 \in \Lambda(\Omega)$;

c) $A_2 \in \Lambda_\nu$ e $\nu(A_2) = 0$, para todo $A_2 \subset (\alpha' > 0)$;

d) ν é σ-finita.

16 Aula 16 - Espaço $\mathcal{L}^p$

Corolário 16.1. Sejam $\Lambda(\Omega) = \{A \in \Omega \mid A \in \Lambda_\lambda\}$, onde Λ_λ é a σ-álgebra de Lebesgue da reta e $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$ Λ-mensurável. Então

a) f é Λ_ν-mensurável

b) f é (semi-)integrável com respeito a ν, se, e somente se, $f\alpha'$ é (semi-)integrável com respeito a λ. E neste caso $\int f d\nu = \int f\alpha' d\lambda$.

Definição 16.1. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida. Definimos $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, V) = \{f : \Omega \to V \mid \exists\, c > 0 \;\; |f(x)| \leq c \;\; x\text{-qtp}\}$, onde $V = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}$. Definimos também $\|f\|_\infty = \{c \geq 0 \mid c \geq |f(x)| \;\; x\text{-qtp}\}$.

Proposição 16.1. $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ x-qtp, isto é, $\|f\|_\infty$ é a menor das cotas superiores qtp.

Teorema 16.1. $\mathcal{L}^\infty$ é espaço vetorial seminormado com seminorma $\|f\|_\infty$.

Corolário 16.2. $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ x-qtp.

Teorema 16.2. Se $f \in \mathcal{L}^\infty$ e $g = f$ qtp, então $g \in \mathcal{L}^\infty$.

Teorema 16.3. Sejam $(f_n), f \in \mathcal{L}^\infty$ tais que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Então existe A, com $\mu(A) = 0$, tal que $f_n \to f$ uniformemente, para todo $x \in A^\complement$.

17 Aula 17 - Desigualdade de Minkovski

Definição 17.1.

a) Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida e $p \in [1, \infty)$. Definimos $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, V) = \{f : \Omega \to V \mid f$ é mensurável e $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$, onde $V = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

b) $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Proposição 17.1.

a) Para todo $c \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) vale que se $f \in \mathcal{L}^p$, então $cf \in \mathcal{L}^p$ e $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$

b) $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ x-qtp.

Lema 17.1. Sejam $a, b \geq 0$ e $t \in [0, 1]$. Então $m = ta + (1-t)b \geq g = a^t b^{1-t}$.

Corolário 17.1 (Desigualdade de Young)**.** Sejam $a, b \geq 0$, $p \in [1, \infty)$ e q tal que $1/p + 1/q = 1$. Então $ab \leq a^p/p + b^q/q$. Se $a^p = b^q$, então vale a igualdade.

Teorema 17.1 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam p e q tais que $1/p + 1/q = 1$, $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$. Então $fg \in \mathcal{L}^1$ e vale $|\int fg d\mu| \leq \int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Teorema 17.2. Sejam $p \in [1, \infty)$, q tal que $1/p + 1/q = 1$ e $f \in \mathcal{L}^p$. Então existe uma função $g \in \mathcal{L}^q$ com $\|g\|_q = 1$ tal que $\int |fg| d\mu = \|f\|_p \|g\|_q$. Além disso, se $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$, então $g(\Omega) \subset \mathbb{R}$ e se $f \geq 0$, então $g \geq 0$.

Teorema 17.3.

a) (Desigualdade de Minkovski) Se $f, g \in \mathcal{L}^p$, então $f + g \in \mathcal{L}^p$ e $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

b) $\mathcal{L}^p$ é espaço vetorial seminormado com seminorma $\|f\|_p$.

Definição 17.2. Sejam $(f_n), f \in \mathcal{L}^p$. Dizemos que $f_n \to f$ em $\mathcal{L}^p$, se $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Teorema 17.4 (Teorema da Convergência Dominada em $\mathcal{L}^p$)**.** Sejam f_n e f tais que $f_n \to f$ qtp. Se existe $g \in \mathcal{L}^p$, $g \geq 0$ tal que $f_n \leq g$ qtp $\forall\, n$, então $f, f_n \in \mathcal{L}^p$ e $\|f - f_n\|_p \to 0$.

18 Aula 18 - $\mathcal{L}^p$ é completo

Definição 18.1. Sejam $f, f_n \in \mathcal{L}^p$. Fizemos que $\{f_n\}$ é uma **sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p$** se dadp $\varepsilon > 0$, $\exists\, M \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$, para quaisquer $m, n \geq M$. Dizemos também que $\{f_n\}$ **converge para f em $\mathcal{L}^p$** se $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to 0} 0$.

Definição 18.2. Um espaço vetorial V é **completo** se toda sequência de Cauchy em V converge para um elemento de V segundo $\|\cdot\|_V$.

Proposição 18.1. $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f \;\Rightarrow\; f_n$ é de Cauchy em $\mathcal{L}^p$.

Teorema 18.1. $\mathcal{L}^p$ é completo para $1 \leq p < \infty$.

Corolário 18.1. Se $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$, então existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k} \xrightarrow{qtp} f$.

19 Aula 19 - Teoremas de decomposição de Hahn e Jordan

Definição 19.1. Seja $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ carga (medida com sinal). Um conjunto $\Omega^+ \in \mathcal{A}$ é **positivo para a carga** μ se $\mu(E \cap \Omega^+) \geq 0, \forall\, E \in \mathcal{A}$. Analogamente, dizemos que $\Omega^- \in \mathcal{A}$ é **negativo para a carga** μ se $\mu(E \cap \Omega^-) \leq 0, \forall\, E \in \mathcal{A}$. O conjunto $\mathcal{N} \in \mathcal{A}$ é **nulo para a carga** μ se $\mu(E \cap \mathcal{N}) = 0, \forall\, E \in \mathcal{A}$.

Teorema 19.1 (Teorema de Decomposição de Hahn)**.** Dada $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ carga, existem Ω^+ e Ω^- tais que $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$, $\Omega^+ \cap \Omega^- = \varnothing$, Ω^+ é positivo para a carga μ e Ω^- é negativo para a carga μ.

Teorema 19.2. Sejam (Ω_1^+, Ω_1^-) e (Ω_2^+, Ω_2^-) decomposições de Hahn distintas. Então $\mu(E \cap \Omega_1^+) = \mu(E \cap \Omega_2^+)$ e $\mu(E \cap \Omega_1^-) = \mu(E \cap \Omega_2^-)$.

Definição 19.2. Sejam $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ uma carga e Ω^+ e Ω^- uma decomposição de Hahn para μ. Definimos a **variação positiva de** μ, denotada por μ^+, como $\mu^+ : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $\mu^+(E) = \mu(E \cap \Omega^+)$. Definimos a **variação negativa de** μ, denotada por μ^-, como $\mu^- : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $\mu^-(E) = -\mu(E \cap \Omega^-)$. Analogamente, definimos a **variação total de** μ, $|\mu|$, como $|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$.

Teorema 19.3 (Teorema de Decomposição de Jordan)**.** Seja $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ uma carga. Então $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$. Além disso, se $\mu = \lambda - \nu$, com λ e ν medidas positivas, então $\mu^+(E) \leq \lambda(E)$ e $\mu^-(E) \leq \nu(E)$.

Corolário 19.1. Sejam $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ medida, $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ e $\lambda(E) = \int_E |f| d\mu$. Então $\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu$, $\lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu$, $|\lambda|(E) = \int_E |f| d\mu$.

Definição 19.3. Sejam μ e λ medidas em $(\Omega, \mathcal{A})$. Dizemos que λ **é absolutamente contínua com respeito a** μ, denotado por $\lambda << \mu$, se para todo $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) = 0$ vale que $\lambda(A) = 0$.

Lema 19.1. Sejam μ e λ medidas em $(\Omega, \mathcal{A})$. Então $\lambda << \mu$ se, e somente se, $\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) < \delta$, vale $\delta(A) < \varepsilon$.

20 Aula 20 - Segunda prova

Foi realizada a segunda prova.

21 Aula 21 - Teorema de Radón-Nikodým

Teorema 21.1 (Radón-Nikodým)**.** Sejam μ medida positiva e λ carga, ambas σ-finitas. Então $|\lambda| << \mu$ se, e somente se, existe $f : \Omega \to \mathbb{R}$ semi-integrável tal que $\lambda(E) = \int_E f d\mu$. Além disso, temos que f é única μ-qtp e se λ for medida positiva, então $f \geq 0$ μ-qtp.

Definição 21.1. Sejam λ e μ medidas em $(\Omega, \mathcal{A})$. Dizemos que λ e μ são **mutualmente singulares**, se existem $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \varnothing$ e $\mu(A) = \lambda(B) = 0$. Notação: $\lambda \perp \mu$.

Teorema 21.2 (Decomposição de Lebesgue)**.** Sejam λ e μ medidas σ-finitas em $(\Omega, \mathcal{A})$. Então existem λ_1 e λ_2 medidas em $(\Omega, \mathcal{A})$ tais que:

i) $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

ii) $\lambda_1 \perp \mu$.

iii) $\lambda_2 << \mu$.

Além disso, a decomposição é única.

22 Aula 22 - Teorema da Representação de Riesz

Definição 22.1.

a) Dizemos que $G : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é um **funcional linear** ($p \in [1, \infty)$), se $G(\alpha f + \beta g) = \alpha G(f) + \beta G(g)$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}($ ou $\mathbb{C})$ e $\forall\, f, g \in \mathcal{L}^p$.

b) Dizemos que G é **limitado** se existe $c > 0$ tal que $|G(f)| < c\|f\|_p$, $\forall\, f \in \mathcal{L}^p$.

c) $\|G\| = \sup\{|G(f)| \mid f \in \mathcal{L}^p, \|f\|_p = 1\}$.

d) Dizemos que um funcional linear limitado é **positivo**, se $G(f) \geq 0$, $\forall\, f \geq 0$.

Lema 22.1. Seja $G : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ funcional linear limitado. Então existem $G^+, G^- : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ funcionais lineares limitados positivos tais que $G(f) = G^+(f) = G^-(f)$.

Teorema 22.1 (Representação de Riesz)**.**

a) Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida σ-finito e $G : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ funcional linear limitado ($p \in [1, \infty)$). Então existe $g \in \mathcal{L}^q$ (onde $q = \frac{p}{p-1}$) tal que $G(f) = \int_\Omega f g d\mu$. Além disso, $\|G\| = \|g\|_q$ e se G for funcional linear limitado positivo, então $g \geq 0$.

b) Se $p \in (1, \infty)$, a hipótese de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ser σ-finito é desnecessário.

23 Aula 23 - Modos de Convergência

Definição 23.1. Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida e $f, f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

a) Dizemos que f_n **converge uniformemente para** f se $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \geq 1$ tal que $\forall\, x \in \Omega$ e $\forall\, n \geq N$, temos que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Notação: $f_n \to f$ uniformente.

b) Dizemos que f_n **converge pontualmente para** f se $\forall\, x \in \Omega$ e $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \geq 1$ tal que $\forall\, n \geq N$, temos que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Notação: $f_n \to f$ pontualmente.

c) Dizemos que f_n **converge para f qtp** se $\forall\, x \in \Omega \setminus \{A\}$, com $\mu(A) = 0$, e $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \geq 1$ tal que $\forall\, n \geq N$, temos que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Notação: $f_n \to f$ qtp.

d) Dizemos que f_n **converge para f em $\mathcal{L}^p$** se $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \geq 1$ tal que $\forall\, n \geq N$, temos que $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Notação: $f_n \to f$ em $\mathcal{L}^p$ ou $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$.

e) Dizemos que f_n **converge em medida para** f se $\forall\, \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) = 0$ (em outros termos, $\forall\, \varepsilon > 0$ e $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, N \geq 1$ tal que $\forall\, n \geq N$, temos que $\mu(|f_n - f| \geq \varepsilon) < \delta$). Notação: $f_n \to f$ em medida ou $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

f) Dizemos que f_n **converge quase uniformemente para** f se $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, E_\delta$, com $\mu(E_\delta) < \delta$ tal que $f_n \to f$ uniformemente em $E_\delta^\complement$. Notação: $f_n \to f$ quase uniformente ou $f_n \xrightarrow{qu} f$.

Definição 23.2. Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de medida e $f, f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

a) Dizemos que (f_n) é uma **sequência de Cauchy em medida**, se $\forall\, \varepsilon > 0$ e $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, N \geq 1$ tal que $\forall\, m, n \geq N$, temos que $\mu(|f_m - f_n| \geq \varepsilon) < \delta$.

b) Dizemos que (f_n) é uma **sequência de Cauchy quase uniformemente**, se $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, E_\delta$, com $\mu(E_\delta) < \delta$ tal que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \geq 1$ tal que $\forall\, x \in E_\delta^\complement$ e $\forall\, m, n \geq N$, temos que $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

Exemplo 23.1. Suponha $\mu(\Omega) = 1$. Seja (f_n) sequência de funções mensuráveis. Dizemos que vale uma lei dos grandes números para (f_n), se

$$\frac{s_n - \int_\Omega s_n d\mu}{n} \to 0$$

onde $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Quando a convergência acima é qtp, dizemos que vale uma lei forte dos grandes números; quando a convergência acima é em medida, dizemos que vale uma lei fraca dos grandes números.

Proposição 23.1.

- Se $f_n \to f$ uniformemente, então $f_n \xrightarrow{\mu} f$.
- Se $f_n \to f$ em $\mathcal{L}^p$, então $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Teorema 23.1. Seja (f_n) de Cauchy em medida. Então existe uma subsequência (g_k) tal que g_k converge qtp e em medida.

Corolário 23.1. Se (f_n) é de Cauchy em medida, então existe f tal que $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Além disso, f é única qtp.

Teorema 23.2. Se $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $(f_n) \in \mathcal{L}^p$ e $\exists\, g \in \mathcal{L}^p$ tal que $|f_n| \leq g$ qtp, então $f \in \mathcal{L}^p$ e $f_n \to f$ em $\mathcal{L}^p$.

Teorema 23.3. Seja (f_n) de Cauchy quase uniformemente. Então existe f tal que $f_n \to f$ qu e qtp.

24 Aula 24 - Teoremas de Egoroff e de Vitali

Teorema 24.1. Se $f_n \to f$ qu, então $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Reciprocamente, se $f_n \xrightarrow{\mu} f$, então existe (g_k) subsequência de (f_n) tal que $g_k \to f$ qu.

Corolário 24.1. Se $f_n \to f$ em $\mathcal{L}^p$, então existe (g_k) tal que $g_k \to f$ qu.

Teorema 24.2 (Egoroff)**.** Se $\mu(\Omega) < \infty$ e $f_n \to f$ qtp, então $f_n \to f$ qu.

Teorema 24.3. Seja $f : \Omega \to [0, \infty]$ integrável. Então valem:

a) $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, A \in \mathcal{A}\,,$ como $\mu(A) < \delta$, vale que $\int_A f d\mu < \varepsilon$. Notação: $\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A f d\mu$.

b) $\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, B \in \mathcal{A}\,,$ com $\mu(B) < \infty$ tal que $\int_{B^{\complement}} f d\mu < \varepsilon$.

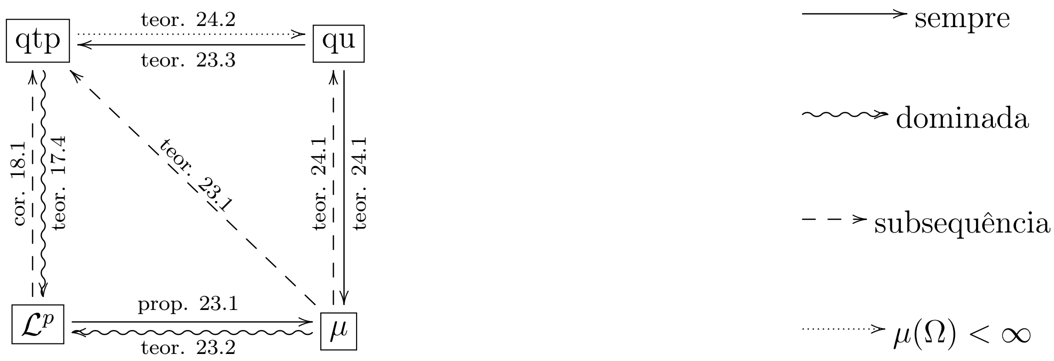
Teorema 24.4 (Convergência de Vitali)**.** Sejam $(f_n) \in \mathcal{L}^p$ e f mensurável. Então $f \in \mathcal{L}^p$ e $f_n \to f$ em $\mathcal{L}^p$ se, e somente se, valem as condições:

i) $f_n \to f$ em μ

ii) $\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A |f_n|^p d\mu = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,$ isto é, $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0\,,\ \forall\, A \in \mathcal{A}\,,\ \mu(A) < \delta$, vale $\int_A |f_n|^p d\mu < \varepsilon$, $\forall\, n \in \mathbb{N}\,.$

iii) $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, B \in \mathcal{A}\,,\ \mu(B) < \infty$ tal que $\sup \int_{B^{\complement}} |f_n|^p d\mu < \varepsilon$.

Modos de convergência:



25 Aula 25 - Lema de Vitali

Definição 25.1. Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, onde $\mathcal{A}$ é álgebra ou $\mathcal{S}_\sigma$ ou $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Então, para todo $A \subseteq \Omega$, definimos a **medida exterior de** A como $\mu^* = \inf\{\mu(B) \mid B \supseteq A, B \in \mathcal{A}\}$. Temos que $\mu^*(\varnothing) = 0$, $\mu^*(\sum A_n) \leq \sum \mu^*(A_n)$, mas, em geral, μ^* não é medida.

Definição 25.2. Sejam $\mathcal{I}$ uma coleção de intervalos não degeneados de $\mathbb{R}$ e $E \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $\mathcal{I}$ é uma **cobertura de Vitali para** E, se $\forall\, x \in E\,,\ \forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ e $\lambda(I) < \varepsilon$.

Lema 25.1 (Lema de Vitali)**.** Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ com $\lambda^*(E) < \infty$ e $\mathcal{I}$ uma cobertura de Vitali para E. Então $\forall\, \varepsilon > 0\,,$ existem $I_1, \ldots, I_{\tilde{n}}$ intervalos de $\mathcal{I}$ dois a dois disjuntos tais que $\lambda^*(E \setminus \cup_{i=1}^{\tilde{n}} I_i) < \varepsilon$.

Definição 25.3. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mensurável. Definimos as quantidades

$$D^+ f(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad D_+ f(x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D^- f(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \qquad D_- f(x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Quando $D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x) \neq \pm\infty$, dizemos que $f(x)$ é **diferenciável em** x e denotamos o limite por $f'(x)$.

Teorema 25.1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ não decrescente. Então f é diferenciável qtp, f' é integrável e $\int_a^b f'(y)dy \leq f(b) - f(a)$.

26 Aula 26 - Variação Limitada

Definição 26.1. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ uma partição. Definimos as quantidades $p = p(f, \pi) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^+$, $n = n(f, \pi) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^-$ e $t = t(f, \pi) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$. Observe que $t = p + n$ e $p - n = f(b) - f(a)$. Definimos $P = P_a^b(f) = \sup_\pi p(f, \pi)$, $N = N_a^b(f) = \sup_\pi n(f, \pi)$ e $T = T_a^b(f) = \sup_\pi t(f, \pi)$. As quantidades P, N e T são chamadas, respectivamente, de **variação positiva, negativa e total de f no intervalo** $[a, b]$. Note que $P, N \leq T \leq P + N$.

Definição 26.2. Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de **variação limitada** se $T_a^b(f) < \infty$.

Lema 26.1. Se f é uma função de variação limitada então $T = P + N$ e $P - N = f(b) - f(a)$.

Teorema 26.1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então f é de variação limitada se, e somente se, f pode ser escrita como a diferença de duas funções monótonas.

Corolário 26.1. Se f é variação limitada, então f é derivável qtp.

Definição 26.3. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Definimos a **integral indefinida de** f como a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Lema 26.2. Se f é integrável, então F é contínua e de variação limitada.

Lema 26.3. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Então se $\int_a^x f(t)dt = 0$, $\forall\, x \in [a, b]$, então $f = 0$ qtp.

Lema 26.4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mensurável e limitada e seja $F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$. Então F é derivável e $F' = f$ qtp.

Teorema 26.2. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e $F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$. Então F é derivável e $F' = f$ qtp.

27 Aula 27 - Continuidade Absoluta

Definição 27.1. Dizemos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é **absolutamente contínua**, se $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, (x_i, y_i)\,,$ com $i = 1, \ldots, n$, intervalos disjuntos de $[a, b]$, com $\sum_{i=1}^n |y_i - x_i| < \delta$, vale que $\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.

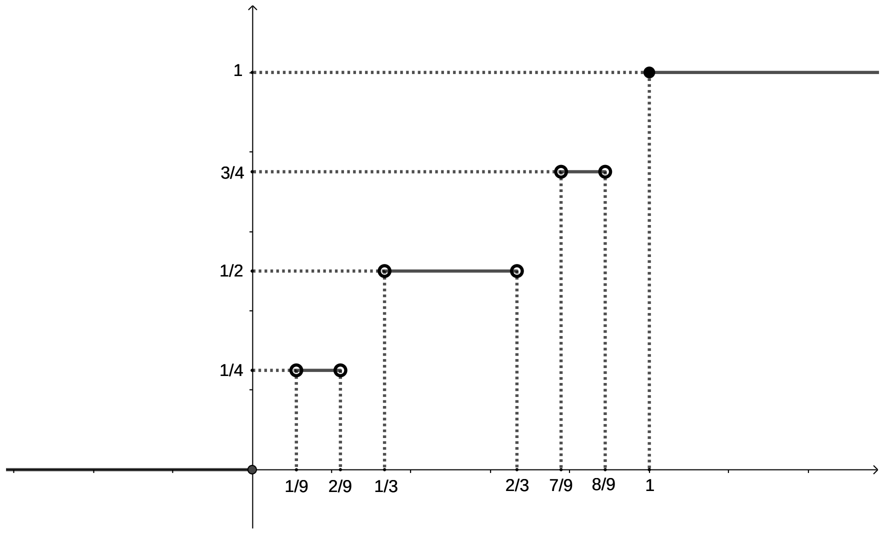
Lema 27.1. Toda função absolutamente contínua é de variação limitada.

Corolário 27.1. Toda função absolutamente contínua é diferenciável qtp.

Lema 27.2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolutamente contínua. Se $f'(x) = 0$ qtp, então f é constante.

Exemplo 27.1. Definimos $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ da seguinte maneira:

1. $f(x) = 0, \forall\, x \leq 0$, e $f(x) = 1, \forall\, x \geq 1$.
2. Para $x \in K^{\complement}$, $f(x)$ é definida indutivamente, conforme figura abaixo.
3. Para $x \in K$, tome (x_k) sequência com $x_k \in K^{\complement}$ e $x_k \downarrow x$. Então $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$.



i) f é contínua.

ii) f é monótona, logo de variação limitada.

iii) $f'(x) = 0, \forall\, x \in K^{\complement}$. Como $\lambda(K) = 0$, então $f'(x) = 0$ qtp.

iv) f não é constante, portanto, f não é absolutamente contínua.

Teorema 27.1. Uma função F é integral indefinida se, e somente se, F for absolutamente contínua.

Corolário 27.2. Toda função absolutamente contínua é a integral indefinida de sua derivada, isto é, se F é absolutamente contínua, então $\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$.

28 Aula 28 - Extensão de Kolmogorov

Teorema 28.1 (Extensão de Carathéorory)**.** Seja Ω conjunto qualquer, $\mathcal{A}$ uma álgebra de Ω e $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ medida σ-aditiva. Então existe uma única medida $\overline{\mu} : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ tal que $\overline{\mu}(A) = \mu(A), \forall\, A \in \mathcal{A}$.

Definição 28.1. Um conjunto de $\mathbb{R}^\infty$ é um **cilindro** n **dimensional de base** B, com $n \in \mathbb{N}$ e $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, se ele é da forma $\{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \mid (x_1, \ldots, x_n) \in B\}$. Denotamos por $C_n(B)$.

Definição 28.2. Seja $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu_n)$, espaço de medida, para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência μ_n de medidas é **consistente**, se, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, vale que $\mu_n(B) = \mu_{n+1}(B \times \mathbb{R})$.

Teorema 28.2 (Extensão de Kolmogorov)**.** Seja (μ_n) sequência de consistente de medida de probabilidade em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Então existe uma única medida (que é de probabilidade) em $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ tal que, $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\,,\, \mu_n(B) = \mu(C_n(B))$

29 Aula 29 - Terceira prova

Foi realizada a terceira prova.