Resumo de Variedades Diferenciáveis

Aula 1 - Variedade diferenciável

Definição 1.1. Seja M um espaço topológico. Um **sistema de coordenadas locais** (ou carta local) em M é um homeomorfismo $\varphi : U \to \varphi(U)$ de um subconjunto aberto $U \subseteq M$ sobre um aberto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$. Dizemos que m é a **dimensão** de $\varphi : U \to \varphi(U)$. Para cada $p \in U$ tem-se $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_m(p))$. Os números $\varphi_i(p)$, $i = 1, \dots, m$ são chamados as **coordenadas** do ponto $p \in M$ no sistema φ.

Observação 1.2. Se $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ e $\varphi : V \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ são sistema de coordenadas locais em um espaço topológico M, tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então $m = n$.

Definição 1.3. Um **atlas de dimensão m** sobre um espaço topológico M é uma coleção $\mathfrak{A}$ de sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ em M, cujos domínios U cobrem M.

Definição 1.4. Um espaço topológico M no qual existe um atlas de dimensão m chama-se uma **variedade topológica de dimensão m**.

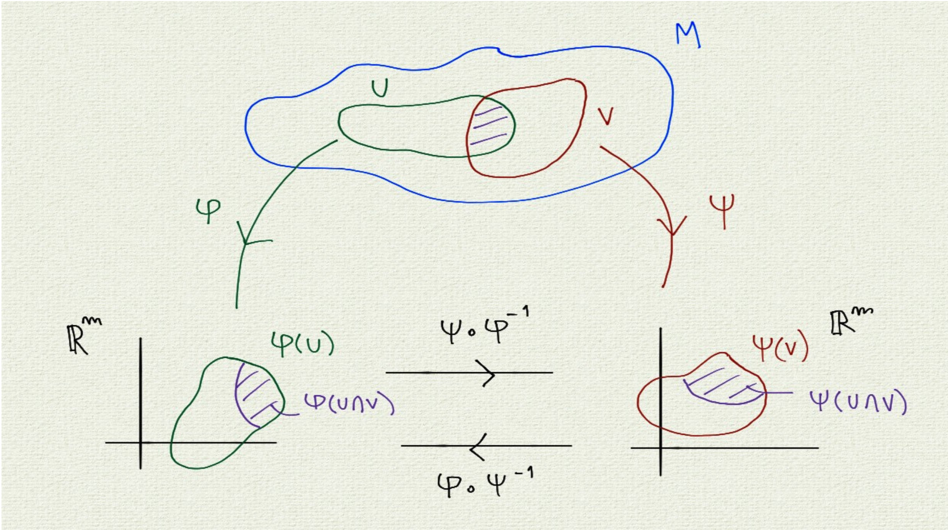
Definição 1.5. Dados os sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M, tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenadas $\varphi_i(p)$ no sistema φ e $\psi_i(p)$ no sistema ψ. A correspondência $(\varphi_1(p), \dots, \varphi_m(p)) \longleftrightarrow (\psi_1(p), \dots, \psi_m(p))$ estabelece um homeomorfismo $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ que é chamado **mudança de coordenadas**.

Definição 1.6. Um atlas $\mathfrak{A}$ sobre um espaço topológico M diz-se **diferenciável**, de classe C^k, com $k \geq 1$, se todas as mudanças de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$, onde $\psi, \varphi \in \mathfrak{A}$, são aplicações de classe C^k.

Definição 1.7. Seja $\mathfrak{A}$ um atlas de dimensão m e classe C^k num espaço topológico M. Um sistema de coordenadas $\chi : W \to \mathbb{R}^n$ em M diz-se **admissível** relativamente ao atlas $\mathfrak{A}$ se, para todo sistema de coordenadas locais $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$, pertencente a $\mathfrak{A}$, com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $\varphi \circ \chi^{-1}$ e $\chi \circ \varphi^{-1}$ são de classe C^k. Em outras palavras, se $\mathfrak{A} \cup \{\chi\}$ é ainda um atlas de classe C^k em M.

Definição 1.8. Um atlas $\mathfrak{A}$, de dimensão m e classe C^k, sobre M, diz-se **máximo** quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a $\mathfrak{A}$.

Definição 1.9. Uma **variedade diferenciável**, de dimensão m e classe C^k é um par ordenado $(M, \mathfrak{A})$, onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathfrak{A}$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M.



Aula 2 - Variedades quocientes

Exemplo 2.1.

(a) *Espaços euclidianos*. Consideremos em $\mathbb{R}^m$ o atlas $\mathfrak{A}$ contendo o único sistema de coordenadas $\mathrm{id} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Então $\mathfrak{A}$ é um atlas de classe C^∞ e dimensão m em $\mathbb{R}^m$. Para cada $k = 0, 1, \ldots, \infty$, seja $\mathfrak{A}_k$ o atlas máximo de classe C^k em $\mathbb{R}^m$ que contém $\mathfrak{A}$. O par $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{A}_k)$ é uma variedade de dimensão m e classe C^k.

(b) *Subvariedades abertas*. Um subconjunto aberto W de uma variedade C^k tem uma estrutura natural de variedade de classe C^k, dada pelo atlas máximo em W, formado por todos os sistemas de coordenadas admissíveis $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ em M, cujos domínios U estão contidos em W.

(c) *Superfícies em* $\mathbb{R}^n$. Toda superfície de dimensão m e classe C^k, $M^m \subseteq R^n$, é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k, com o atlas $\mathfrak{A}$ formado pelos sistemas de coordenadas $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$, inversos das parametrizações $\phi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^m \to U \subseteq M$, de classe C^k.

(d) *Produto de variedades*. Sejam $(M^m, \mathfrak{A})$ e $(N^n, \mathfrak{B})$ variedades de classe C^k. O espaço topológico produto $M \times N$ tem uma estrutura de variedade de dimensão $m + n$ e classe C^k, por meio do atlas $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ formado pelos sistemas de coordenadas $\varphi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^{m+n}$, dados por $(\varphi \times \psi)(p,q) = (x(p), y(q))$, $\varphi \in \mathfrak{A}$, $\psi \in \mathfrak{B}$.

Definição 2.2. Sejam X e Y espaços topológicos, $\sim$ uma relação de equivalência em X e $\varphi : X \to Y$. Dizemos que $\sim$ é uma relação aberta, se $[A] := \cup_{x \in A}[x]$ é aberto sempre que A for aberto.

Lema 2.3. A relação de equivalência $\sim$ é aberta se, e somente se, $\pi : X \to X/\sim$ é aberta (isto é, leva aberto de X em aberto de $X/\sim$).

Lema 2.4. Se X possui base enumerável e $\sim$ é aberta, então $X/\sim$ possui base enumerável.

Lema 2.5. Seja $\sim$ uma relação aberta. Então $X/\sim$ é Hausdorff se, e somente se, $G(\sim) \subseteq X \times X$ é fechado na topologia produto em $X \times X$, onde $G(\sim)$ é o gráfico da relação $\sim$, isto é, $\{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$.

Aula 3 - Espaço projetivo

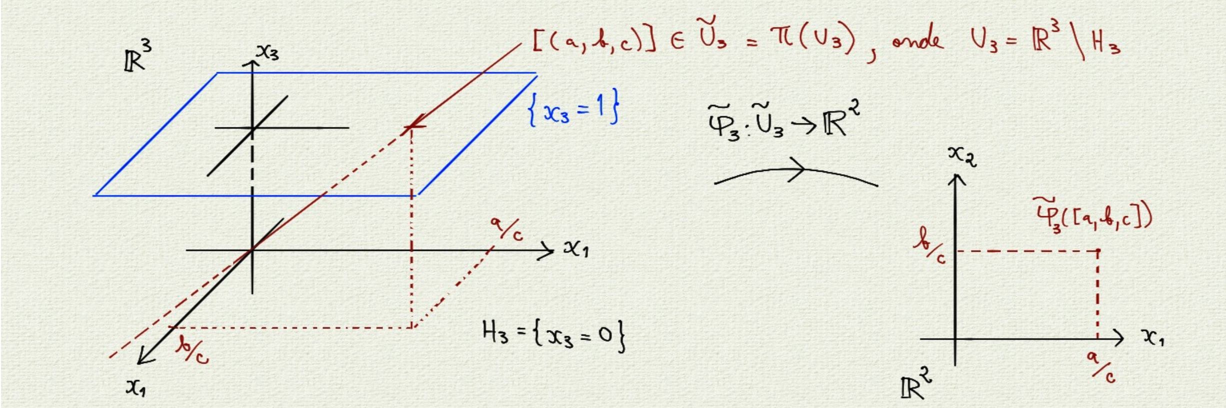
Definição 3.1. Considere $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ com a topologia usual e $n \geq 1$. Defina a relação $\overset{R}{\sim}$ da seguinte maneira: $x \overset{R}{\sim} y \iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $x = \alpha y$. Defina

$$\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \big/ \overset{R}{\sim}$$

Com relação à topologia quociente, podemos mostrar que $\mathbb{RP}^n$ é um espaço topológico de Hausdorff, compacto e com base enumerável. Seja $U_i = \mathbb{R}^{n+1} \setminus H_i$, onde $H_i = \{x_i = 0\}$, e defina $\tilde{U}_i := \pi(U_i)$, onde $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{RP}^n$, $x \mapsto [x]$ é a projeção canônica. Definimos um sistema de coordenadas

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i &\to \mathbb{R}^n \\ [(x_1, \cdots, x_{n+1})] &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right) \end{aligned}$$

A coleção $\mathfrak{A} = \{\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{n+1}\}$ é um atlas de classe C^∞ de dimensão n em $\mathbb{RP}^n$. Para cada $k = 0, 1, \ldots, \infty$, indiquemos por $[\mathfrak{A}]_k$ o único atlas máximo de classe C^k que contém $\mathfrak{A}$. O par $(\mathbb{RP}^n, [\mathfrak{A}]_k)$ é o **espaço projetivo real (relação de retas que passam pela origem)** de dimensão n visto como variedade de classe C^k.



Observação 3.2. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

(a) Se existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $x = \alpha y$, então $x_i y_j = x_j y_i$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$.

(b) Se $x_i y_j = x_j y_i$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$, então existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $x = \alpha y$.

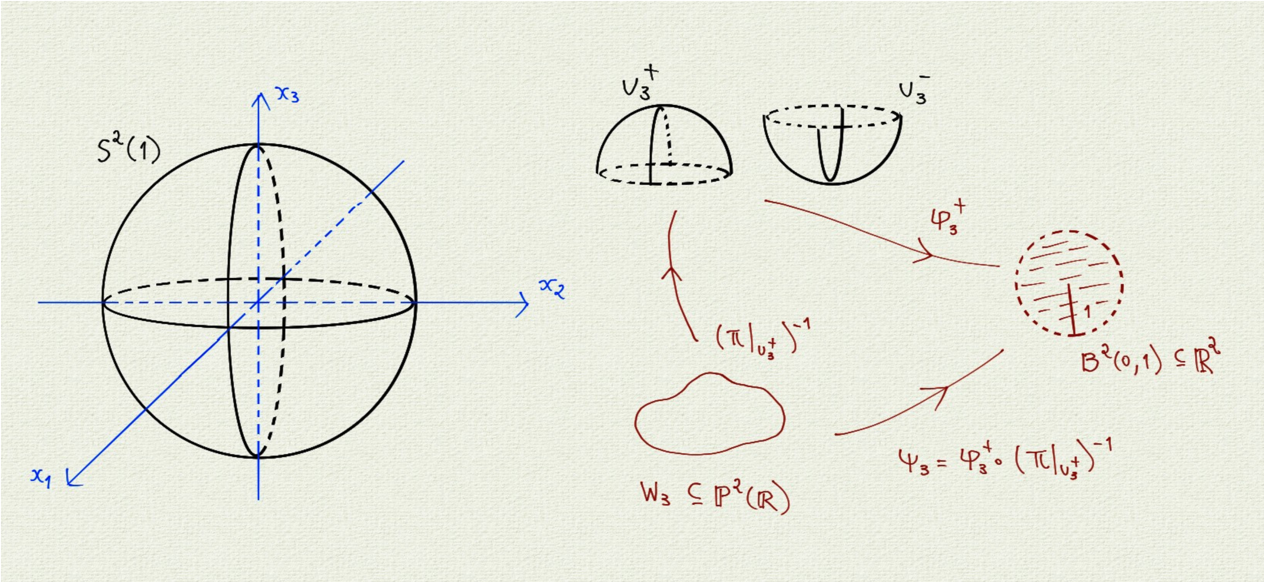
Definição 3.3. Considere $S^n(1) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$, a esfera unitária de dimensão n, com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$. Defina a relação $\overset{A}{\sim}$ da seguinte maneira: $x \overset{A}{\sim} y \iff x = -y$. Defina

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := {S^n(1)}/{\overset{A}{\sim}}$$

Sejam $U_i^+ = \{x = (x_i)_{i=1}^{n+1} \in S^n(1) \mid x_i > 0\}$ e $U_i^- = \{x = (x_i)_{i=1}^{n+1} \in S^n(1) \mid x_i < 0\}$. Considere a projeção canônica $\pi : S^n(1) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $p \mapsto [p] = \{-p, p\}$. Defina

$$\begin{aligned} \varphi_i^\pm : U_i^\pm &\to B^n(0,1) \\ (x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

onde $B^n(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$. Note que π leva $U_i^\pm$ homeomorficamente ao mesmo aberto $W_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Definimos um sistema de coordenadas $\psi_i : W_i \to \mathbb{R}^n$ como sendo $\psi_i := \varphi_i^+ \circ (\pi|_{U_i^+})^{-1}$. A coleção $\mathfrak{A} = \{\psi_1, \ldots, \psi_{n+1}\}$ é um atlas de classe C^∞ de dimensão n em $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Para cada $k = 0, 1, \ldots, \infty$, indiquemos por $[\mathfrak{A}]_k$ o único atlas máximo de classe C^k que contém $\mathfrak{A}$. O par $(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), [\mathfrak{A}]_k)$ é o **espaço projetivo real (relação de antípoda)** de dimensão n visto como variedade de classe C^k.



Aula 4 - Aplicações diferenciáveis

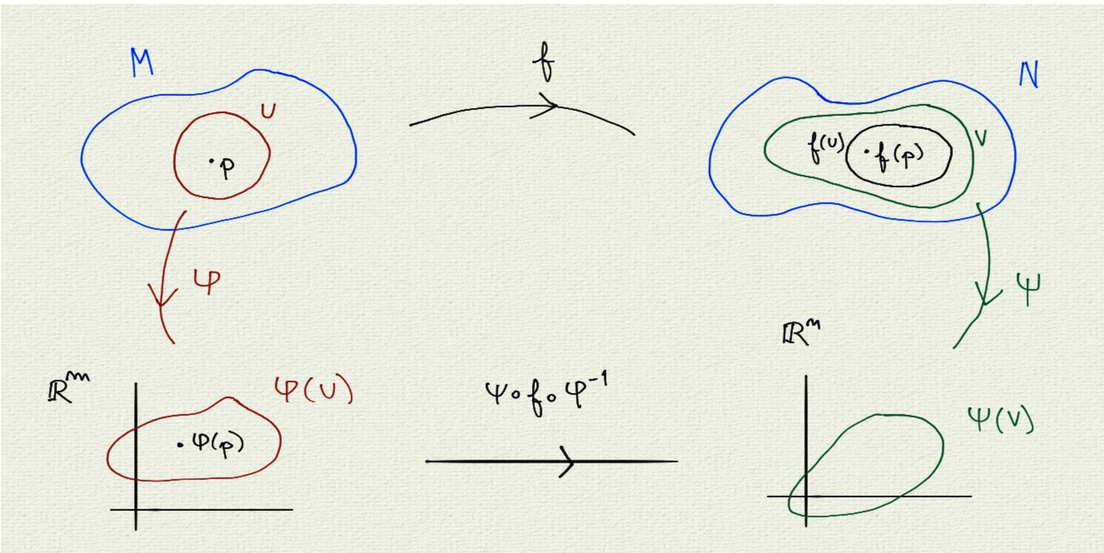
Definição 4.1. Sejam

(a) M^m uma variedade diferenciável de classe C^k (com $k \geq 1$) de dimensão m,

(b) N^n uma variedade diferenciável de classe C^k (com $k \geq 1$) de dimensão n e

(c) $f : M \to N$ uma aplicação.

Dado $p \in M$, dizemos que f é **diferenciável em p**, se existem cartas locais (U, φ) e (V, ψ) tais que $p \in U$, $f(U) \subseteq V$ e $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$.



Observação 4.2.

(a) Se $f : M \to N$ é diferenciável em p, então f é contínua em p.

(b) Dizemos que $f : M \to N$ é *diferenciável*, se f é diferenciável em todo ponto de M.

(c) Se $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é de classe C^r $(r \leq k)$, dizemos que f é de classe C^r.

(d) A noção de diferenciabilidade independe das cartas, isto é, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$ se, e somente se, $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ é diferenciável em $\tilde{\varphi}(p)$.

Definição 4.3.

(a) $f : M \to N$ é **difeormorfismo de classe $\mathbf{C^r}$** $(r \leq k)$, se f é bijeção diferenciável de classe C^r e f^{-1} é de classe C^r.

(b) $f : M \to N$ é **difeormorfismo local de classe $\mathbf{C^r}$**, se para cada $p \in M$ existe um aberto $U \subseteq M$, com $p \in U$, tal que $f|_U : U \to f(U)$ é difeormorfismo de classe C^r.

Exemplo 4.4.

(a) Sejam $(M = \mathbb{R}, \mathcal{A}_1)$ e $(N = \mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$ variedades diferenciáveis, onde $\mathcal{A}_1$ é o atlas maximal que contém o atlas $(\mathbb{R}, \varphi(t) = t)$ e $\mathcal{A}_2$ é o atlas maximal que contém o atlas $(\mathbb{R}, \psi(t) = t^{\frac{1}{3}})$. Então

- $f : M \to M$, $p \mapsto p^{\frac{1}{3}}$ não é diferenciável;
- $f : M \to N$, $p \mapsto p^3$ é diferenciável;
- $f : M \to N$, $p \mapsto p$ não é diferenciável;

Proposição 4.5.

(a) Se $f : M \to N$ e $g : N \to S$ são diferenciáveis, então $g \circ f : M \to S$ é diferenciável.

(b) Sejam $M \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$, com M sendo uma superfície e A um aberto. Se $F : A \to \mathbb{R}^s$ é diferenciável, então $F|_M : M \to \mathbb{R}^s$ é diferenciável.

(c) Sejam M, N, S variedades diferenciáveis e $f : M \to N \times S$, $p \mapsto (f_1(p), f_2(p))$. Então f é diferenciável se, e somente se, f_1 e f_2 são diferenciáveis.

Exemplo 4.6. As aplicações abaixo são diferenciáveis.

(a) $A : S^n(1) \to S^n(1)$, $p \mapsto -p$.

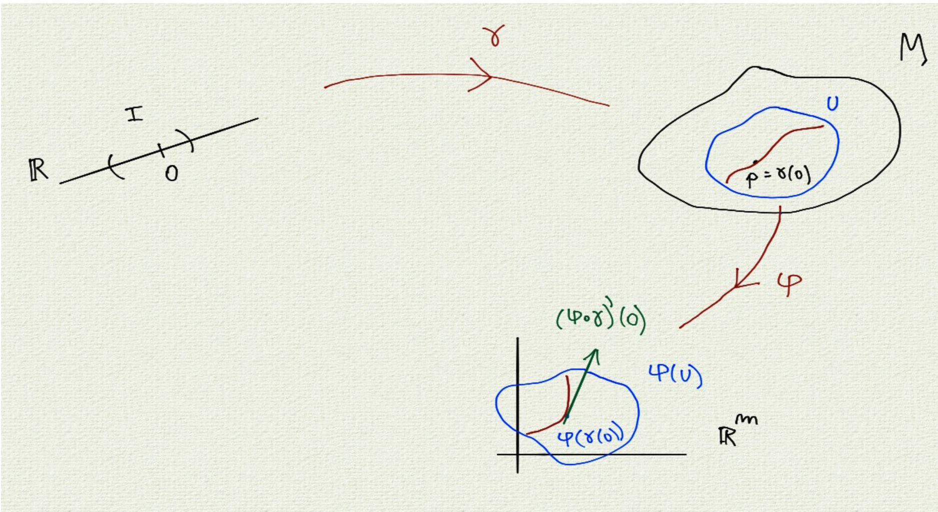
(b) $F : S^n(1) \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \cos(p_1) + \cdots + \cos(p_{n+1})$.

(c) $G : S^n(1) \to S^n(1) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $p \mapsto (-p, [p])$.

Aula 5 - Espaço tangente (parte 1)

Definição 5.1. Seja M^m uma variedade diferenciável (C^k, com $k \geq 1$) e dimensão m. Dado $p \in M$, considere o conjunto $\mathcal{C}_p(M) := \{\gamma : I \to M \mid \gamma \text{ é curva diferenciável, } I \subseteq \mathbb{R} \text{ intervalo aberto contendo } 0 \text{ e } \gamma(0) = p\}$. Dados $\gamma, \beta \in \mathcal{C}_p(M)$, defina a relação de equivalência:

$$\gamma \overset{p}{\sim} \beta \iff \text{existe carta local } (U, \varphi) \text{ tal que } p \in U \text{ e } (\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0).$$



Observação 5.2. A relação $\overset{p}{\sim}$ não depende da carta local, ou seja,

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0) \Rightarrow (\psi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ \beta)'(0).$$

Definição 5.3. O **espaço tangente** à M no ponto p é definido como sendo $\mathcal{C}_p(M) / \overset{p}{\sim}$ o qual denotamos por T_pM.

Proposição 5.4. Para cada $p \in M^m$ o espaço T_pM possui estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita igual a m, cujas operações são definidas da seguinte maneira:

$$[\gamma] + [\beta] := \overline{\varphi}_p^{-1}\big((\varphi \circ \gamma)'(0) + (\varphi \circ \beta)'(0)\big) \quad \text{e} \quad \alpha[\gamma] := \overline{\varphi}_p^{-1}\big(\alpha(\varphi \circ \gamma)'(0)\big)$$

onde $\overline{\varphi}_p : T_pM \to \mathbb{R}^m$, $[\gamma] \mapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)$.

Observação 5.5.

(a) Note que a estrutura de $\mathbb{R}$-espaço vetorial atribuída ao espaço tangente depende de uma carta específica. Seja $T_p^{\varphi}M$ e $T_p^{\psi}M$ os espaço tangente, cuja estrutura de $\mathbb{R}$-espaço vetorial é devida às cartas φ e ψ, respectivamente. Podemos mostrar que $T_p^{\varphi}M$ e $T_p^{\psi}M$ são canonicamente isomorfas, conforme o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
T_p^{\varphi}M \arrow[r, "\overline{\psi}_p^{-1}\circ d(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}\circ\overline{\varphi}_p"] \arrow[d, "\overline{\varphi}_p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T_p^{\varphi}M \arrow[d, "\overline{\psi}_p"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "d(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}"'] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

(b) Seja $\{e_i\}_{i=1}^m$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$ e defina a curva $c_i(t) := \varphi(p) + te_i$ em $\mathbb{R}^m$ e a curva $\gamma_{e_i} := \varphi^{-1} \circ c_i$. Observe que $[\gamma_{e_i}] = \overline{\varphi}_p^{-1}(e_i)$. Assim, denotando $[\gamma_{e_i}]$ por $\dfrac{\partial^{\varphi}}{\partial x_i}(p)$, definimos a **base canônica** de $T_p^{\varphi}M$, como sendo o conjunto formado pelos elementos $\dfrac{\partial^{\varphi}}{\partial x_i}(p) = \overline{\varphi}_p^{-1}(e_i)$.

(c) A matriz de mudança de base da base canônica de $T_p^{\varphi}M$ para a base canônica de $T_p^{\psi}M$ é

$$\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})_1}{\partial x_1}(\varphi(p)) & \dots & \dfrac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})_1}{\partial x_m}(\varphi(p)) \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})_m}{\partial x_1}(\varphi(p)) & \dots & \dfrac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})_m}{\partial x_m}(\varphi(p))
\end{pmatrix}$$

Definição 5.6. Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$, definimos a **derivada** de f no ponto p, como sendo

$$\begin{aligned} df_p : T_pM &\to T_{f(p)}N \\ [\gamma] &\mapsto [f\circ\gamma] \end{aligned}$$

Proposição 5.7. df_p está bem definida e é linear.

Aula 6 - Espaço tangente (parte 2)

Definição 6.1. Seja M^m uma variedade diferenciável de classe C^k e dimensão m. Sejam também $C^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty\}$ e $C^\infty(M)^* = \{f : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid T \text{ é linear}\}$. Dada uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(0) = p$, defina

$$\begin{aligned} \gamma'(0) : C^\infty(M) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto (f \circ \gamma)'(0) \end{aligned}$$

Então $\gamma'(0) \in C^\infty(M)^*$. Defina $V_pM := \{\gamma'(0) \mid \gamma \text{ é curva diferenciável}, \gamma(0) = p\} \subseteq C^\infty(M)^*$.

Proposição 6.2. Sejam M^m uma variedade diferenciável de classe C^k e dimensão m e (U, φ) uma carta local, com $p \in U$. Considere as curvas $c_i(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$. Então

(a) $\{c_i'(0)\}_{i=1}^m$ é linearmente independente.

(b) V_pM é igual ao espaço gerado pelo conjunto $\{c_i'(0)\}_{i=1}^m$.

(c) T_pM e V_pM são canonicamente isomorfos.

Observação 6.3. Defina $\chi_p(M) := \{X_p \in C^\infty(M)^* \mid X_p \text{ é derivação}\}$ ($X_p \in C^\infty$ é uma derivação se satisfaz a regra do produto, isto é, $X_p(f \cdot g) = f(p)X_p(f) + g(p)X_p(g)$). Então $\chi_p(M) = V_pM$

Aula 7 - Teorema do posto

Teorema 7.1 (Teorema do posto). Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ um aberto e $f : A \to \mathbb{R}^{m+p}$ uma aplicação diferenciável. Se o posto de f em $x_0 \in A$ é igual a m (isto é, se $df_{x_0} : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+p}$ tem posto m), então existem difeomorfismos

(a) $h : U \to h(U) \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$, com $x_0 \in U \subseteq A$, e

(b) $g : V \to g(V) \subseteq \mathbb{R}^{m+p}$, com $f(x_0) \in f(U) \subseteq V$

tais que $g \circ f \circ h^{-1} : h(U) \to \mathbb{R}^{m+p}$ satisfaz $(g \circ f \circ h^{-1})(x, y) = (x, 0)$, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $(x, 0) \in \mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$.

Teorema 7.2 (Teorema do posto para variedades)**.** Sejam M^{m+n} e N^{m+p} variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Se $df_{x_0} : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$ tem posto m, então existem cartas locais

(a) (U, φ), com $x_0 \in U$, e

(b) (V, ψ), com $f(U) \subseteq V$

tais que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : h(U) \to \mathbb{R}^{m+p}$ satisfaz $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x, y) = (x, 0)$, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $(x, 0) \in \mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$.

Corolário 7.3 (Teorema local das imersões)**.** Considere o enunciado do Teorema 7.2. Se $n = 0$, isto é, se $f : M^m \to N^{m+p}$ é uma aplicação diferenciável e $df_{x_0} : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$ é injetiva, então $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0)$.

Observação 7.4. Considere o Corolário 7.3.

(a) O conjunto dos pontos onde a derivada é injetiva é um aberto em M.

(b) A aplicação f é injetiva no aberto U contendo o ponto (a informação de injetividade de df_{x_0} passa para f).

Corolário 7.5 (Teorema local das submersões)**.** Considere o enunciado do Teorema 7.2. Se $p = 0$, isto é, se $f : M^{m+n} \to N^m$ é uma aplicação diferenciável e $df_{x_0} : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$ é sobrejetiva, então $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x, y) = x$.

Corolário 7.6 (Teorema da aplicação inversa)**.** Considere o enunciado do Teorema 7.2. Se $n = p = 0$, isto é, se $f : M^m \to N^m$ é uma aplicação diferenciável e $df_{x_0} : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$ é um isomorfismo, então $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = x$. Em outras palavras, existem abertos $U \subseteq M$ e $V \subseteq N$, com $x_0 \in U$ e $f(x_0) \in V$ tais que $f(U) = V$ e $f|_U$ é um difeomorfismo.

Definição 7.7. Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é um **mergulho**, se

(a) df_x é injetiva, para todo $x \in M$ (ou seja, f é uma imersão) e

(b) $f : M \to f(M)$ é um homeomorfismo.

Definição 7.8. Seja M^m uma variedade diferenciável de classe C^k $(k \geq 1)$ e dimensão m. Dizemos que $\varnothing \neq S \subseteq M^m$ é uma **subvariedade** de dimensão m de M, se S possui uma estrutura de variedade diferenciável de classe C^r $(1 \leq r \leq k)$ e dimensão s $(s \leq m)$ tal que $i : S \to M$, $p \mapsto i(p) = p$ é um mergulho de classe C^r.

Aula 8 - Subvariedades

Observação 8.1. $S \subseteq M^m$ é uma subvariedade de M de dimensão $s \iff$ para cada ponto $p \in S$ existe uma carta local (V, ψ), com $p \in V$ e $\psi : V \subseteq M \to \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$, tal que $\psi(S \cap V) \subseteq \mathbb{R}^s \times \{0\}$.

Exemplo 8.2.

(a) As subvariedades S de $\mathbb{R}^m$ ("usual") são exatamente as superfícies de $\mathbb{R}^m$. Observação: apesar de o cubo tridimensional e o gráfico da função módulo serem uma variedades diferenciáveis, eles não são subvariedades de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

(b) As únicas subvariedades de M^m que têm dimensão m são os aberto.

(c) Se M^m é conexa e S é uma subvariedade compacta de dimensão M, então $S = M^m$.

(d) Se a aplicação diferenciável $f : N^n \to M^m$ é um mergulho, então $S = f(N)$ é uma subvariedade de M de dimensão n. Mais geralmente, se $R^r \subseteq N$ é subvariedade de N, então $f(R^r)$ é subvariedade de M.

(e) Se $f : N \to M$ é imersão injetiva, onde N é compacto, então f é mergulho. Assim, não existe imersão injetiva de

   (i) $S^m(1)$ em $\mathbb{R}^m$;

   (ii) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$;

   (iii) $\mathbb{T}^m$ (toro) em $\mathbb{R}^m$;

   (iv) $\mathbb{T}^m$ em $S^m(1)$, se $m \geq 2$.

Teorema 8.3. Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável. Se $c \in N$ é tal que df_p tem posto igual a $r \leq n$, para todo $p \in f^{-1}(c)$, então $S = f^{-1}(c)$ é uma subvariedade de M de dimensão $m - r$. Além disso, $T_pS = \ker(df_p)$.

Teorema 8.4. Sejam R^r e S^s subvariedades de M^m. Assuma que $R \cap S \neq \varnothing$ e que $T_pR + T_pS = T_pM$, para todo $p \in R \cap S$. Então $N = R \cap S$ é subvariedade de M de dimensão $r + s - m$.

Aula 9 - Fibrado tangente

Observação 9.1. Seja M^m uma variedade diferenciável de classe C^k de dimensão m e defina o conjunto $TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$. Considere a projeção natural $\pi : TM \to M$, $(p, v) \mapsto p$. Dizemos que $A \subseteq TM$ é um aberto se, e somente se, existe um aberto $U \subseteq M$ tal que $A = \pi^{-1}(U)$.

Teorema 9.2. Se M^m é uma variedade diferenciável de classe C^k de dimensão m, com atlas $\mathfrak{A} = \{U_i, \varphi_i\}$, então TM possui estrutura de variedade diferenciável de classe C^{k-1} de dimensão $2m$, com atlas $\mathfrak{B} = \{TU_i, T\varphi_i\}$, onde

$$TU_i = \pi^{-1}(U_i) \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} T\varphi_i : TU_i &\to \mathbb{R}^{2m} \\ \left(p, \textstyle\sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(p)\right) &\mapsto (\varphi_i(p), (v_j)_{j=1}^m) \end{aligned}$$

O conjunto TM com essa estrutura de variedade diferenciável é chamado de **fibrado tangente**.

Definição 9.3. Um **campo vetorial tangente** sobre M é um mapa $X : M \to TM$ tal que $(\pi \circ X)(p) = p$ (ou seja, $X(p) = (p, x_p)$, onde $x_p \in T_pM$). Se o mapa X é diferenciável (classe C^r, com $1 \leq r \leq k-1$), dizemos que o campo vetorial é diferenciável (classe C^r). Denotamos $\mathcal{X}(M) := \{X : M \to TM \mid X \text{ é campo vetorial tangente de classe } C^\infty \text{ sobre } M\}$

Aula 10 - Variedades paralelizáveis (parte 1)

Exemplo 10.1.

(a) $TS^1(1) = S^1(1) \times \mathbb{R}$.

(b) Se $\varphi : M \to \varphi(M) \subseteq \mathbb{R}^m$ é difeomorfismo, então $d\varphi_p : T_pM \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, para todo $p \in M$. Disso segue que $F : TM \to M \times \mathbb{R}^m$, $(p, v) \mapsto (\varphi(p), d\varphi_p \cdot v)$ é um difeomorfismo. Em particular, $T\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

(c) Sejam S e T espaços topológicos e $f : S \to T$ uma aplicação contínua. Então o gráfico de f, $G(f)$, é uma variedade diferenciável com uma única carta. Logo, $TG(f) = G(f) \times \mathbb{R}^m$, onde m é a dimensão de $G(f)$.

Definição 10.2. Dizemos que M é uma **variedade paralelizável**, se existem campos vetoriais tangentes $X_1, X_2, \cdots, X_m \in \chi(M)$ tais que $\{X_1(p), X_2(p), \cdots, X_m(p)\} \subseteq T_pM$ é uma base de T_pM, para todo $p \in M$.

Observação 10.3. Toda variedade M é localmente paralelizável, isto é, dado uma carta (U, φ) de M, definindo $X_i := \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\cdot) : U \to TM$, $p \mapsto \left(p, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p)\right)$, temos que $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p)\right\}_{i=1}^m$ é uma base de T_pM

Definição 10.4. Dizemos que TM é **trivial** se existe um difeomorfismo $F : TM \to M \times \mathbb{R}^m$, onde m é a dimensão de m, tal que

(a) $\pi \circ F^{-1}(p, v) = p$;

(b) $F|_{\{p\} \times T_pM} : T_pM \to \mathbb{R}^m$ é linear.

Teorema 10.5. M é paralelizável se, e somente se, o fibrado tangente de M, TM, é trivial.

Aula 11 - Variedades paralelizáveis (parte 2)

Exemplo 11.1.

(a) $S^2(1)$ não é paralelizável. De fato, para todo campo vetorial $X \in \chi(S^2(1))$, existe $p \in S^2(1)$ tal que $X(p) = 0 \in T_pS^2(1)$.

(b) $M = \mathbb{R}^m$ é paralelizável.

(c) Todo grupo de Lie é paralelizável.

(d) Se M_1 e M_2 são paralelizáveis, então $M_1 \times M_2$ é paralelizável.

(e) Usando o Teorema 10.5, temos que: $TS^1(1) = S^1(1) \times \mathbb{R}$, $T\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^3 \times \mathbb{R}^3$, $TSO(n) = SO(n) \times \mathbb{R}^m$.

Aula 12 - Fibrado cotangente

Definição 12.1. Seja M^m uma variedade diferenciável de dimensão m. Para cada espaço tangente, T_pM, considere o dual T_pM^*. O **fibrado cotangente** é definido como sendo $TM^* = \{(p, \omega) \mid p \in M, \omega \in T_pM^*\}$.

Teorema 12.2. Se M é uma variedade diferenciável de classe C^k de dimensão m, com atlas $\mathfrak{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, então o fibrado cotangente TM^* possui uma estrutura de variedade diferenciável de classe C^{k-1} de dimensão $2m$, com atlas $\mathfrak{B} = \{TU_\alpha^*, T\varphi_\alpha^*\}$, onde

(a) $TU_\alpha^* := (\pi^*)^{-1}(U_\alpha)$,

(b) $\pi^* : TM^* \to M$, $(p, m) \mapsto p$ é a projeção natural e

(c) $T\varphi_\alpha^* : TU_\alpha^* \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m$, $\big(p, \sum_{i=1}^m \omega_i(p)\big(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i}(p)\big)^*\big) \mapsto (\varphi_\alpha(p), (\omega_i(p))_{i=1}^m)$.

Definição 12.3. Uma **1-forma** é um mapa $\omega : M \to TM^*$ tal que $(\pi^* \circ \omega)(p) = p$ (ou seja, $\omega(p) \in T_pM^*$, para todo $p \in M$). Uma 1-forma $\omega : M \to TM^*$ é diferenciável, se ω é um mapa diferenciável, isto é, fixada uma carta local (U, φ) de M, ω se expressa localmente como $\omega(p) = \sum_{i=1}^m \omega_i(p)\big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p)\big)^*$, onde $\omega_i : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável de classe C^∞. Denotamos $\mathcal{T}^1(M) = \{\omega : M \to TM^* \mid \omega \text{ é 1-forma diferenciável}\}$

Aula 13 - Formas diferenciais

Observação 13.1. Observações sobre campos vetoriais tangentes (ver Definição 9.3).

(a) Seja $X \in \mathcal{X}(M)$. Então, as expressões locais de X, isto é, fixada uma carta (U, φ) de M, são funções do tipo $X(p) = \sum_{i=1}^m X^i(p)\partial_i(p)$, onde $X^i : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ e $\partial_i(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p)$.

(b) Um campo vetorial tangente $X : M \to TM$ em $\mathcal{X}(M)$ se confunde com um mapa $\mathbb{R}$-linear $\tilde{X} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que satisfaz a regra do produto, isto é, $\tilde{X}(f \cdot g) = f \cdot \tilde{X}(g) + g \cdot \tilde{X}(f)$.

- Dado um campo vetorial tangente $X : M \to TM$, $p \mapsto (p, x_p)$ em $\mathcal{X}(M)$ (lembre-se de que $x_p \in C^\infty(M)^*$ - ver observação 6.3), defina

$$\begin{aligned} \tilde{X} : C^\infty(M) &\to C^\infty(M) \\ f &\mapsto \tilde{X}(f) : M \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad p \mapsto x_p(f)(p) \end{aligned}$$

- Dado um mapa $\mathbb{R}$-linear $\tilde{X} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que satisfaz a regra do produto, defina o campo vetorial tangente $X : M \to TM$, $p \mapsto (p, x_p)$, onde

$$\begin{aligned} x_p : C^\infty(M) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \tilde{X}(f)(p) \end{aligned}$$

Observação 13.2.

(a) Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão m, com base $\{E_1, \dots, E_m\}$. Então seu dual V^* tem base $\{E^1, \dots, E^m\}$, onde $E^j : V \to \mathbb{R}$, $E_i \mapsto \delta_{ij}$.

(b) Considerando o espaço T_pM, temos que $\{\partial_1(p), \dots, \partial_m(p)\}$ é sua base canônica. Então T_pM^* tem como base $\{\partial^1(p), \dots, \partial^m(p)\}$. É comum denotar $\partial^i(p)$ por $dx^i(p)$. Assim, $dx^j(p)(\partial_i(p)) = \delta_{ij}$.

Definição 13.3.

(a) Uma função $T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ vezes}} \to \mathbb{R}$ multilinear é chamada de **tensor k-covariante sobre um espaço vetorial**. Denotamos $T^k(V) := \{\text{tensores } k\text{-covariantes}\}$. Observe que $T^1(V) = V^*$.

(b) Uma função $T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\ell \text{ vezes}} \to \mathbb{R}$ multilinear é chamada de **tensor $\boldsymbol{\ell}$-contravariante sobre um espaço vetorial**. Denotamos $T_\ell(V) := \{\text{tensores } \ell\text{-contravariantes}\}$. Observe que $T_1(V) = V^{**}$.

(c) Uma função $T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ vezes}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{\ell \text{ vezes}} \to \mathbb{R}$ multilinear é chamada de **tensor do tipo $\boldsymbol{(k, \ell)}$** (k-covariante e ℓ-contravariante). Denotamos $T^k_\ell(V) := \{\text{tensores do tipo } (k, \ell)\}$.

(d) Definimos $T^0(V) = T_0(V) = \mathbb{R}$. Observe que $T^k(V) = T^k_0(V)$ e $T_\ell(V) = T^0_\ell(V)$.

Observação 13.4. Quando definimos TM e TM^* "colamos" na variedade M, T_pM e T_pM^*, respectivamente. Deles definimos campo vetorial, para TM, e 1-forma, para TM^*. Usaremos a mesma ideia para definir o *fibrado de tensores k-covariantes*, T^kM, onde colaremos um tensor em $T^k(T_pM)$ para cada $p \in M$. Analogamente, definiremos o *fibrado de tensores ℓ-contravariantes*, $T_\ell M$.

Aula 14 - Tensores

Definição 14.1. Sejam T um tensor do tipo (k,ℓ) e S um tensor do tipo (s,r). O **produto tensorial** de T com S, denotado por $T \otimes S$, é o tensor do tipo $(k+s,\ell+r)$ dado por

$$\begin{aligned} T\otimes S : \underbrace{V\times\cdots\times V}_{(k+s)\text{-vezes}} \times \underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{(\ell+r)\text{-vezes}} &\to \mathbb{R} \\ (v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_{k+s},\omega^1,\ldots,\omega^\ell,\omega^{\ell+1},\ldots,\omega^{\ell+r}) &\mapsto \\ \mapsto \quad T(v_1,\ldots,v_k,\omega^1,\ldots,\omega^\ell)&S(v_{k+1},\ldots,v_{k+s},\omega^{\ell+1},\ldots,\omega^{\ell+r}) \end{aligned}$$

Proposição 14.2. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão m. Então o conjunto

$$\{E^{i_1}\otimes\cdots\otimes E^{i_k}\otimes E_{j_1}\otimes\cdots\otimes E_{j_\ell} \mid i_1,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,m\} \text{ e } j_1,\ldots,j_\ell\in\{1,\ldots,m\}\}$$

é uma base para o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $T^k_\ell(V)$. Assim, $\dim(T^k_\ell(V)) = m^{k+\ell}$.

Observação: lembre-se, da Observação 13.2, de que E^{i_t}, com $t = 1,\ldots,k$, é um tensor do tipo $(1,0)$, isto é, $E^{i_t}\in T^1_0$. Note também que E_{j_r}, com $r = 1,\ldots,\ell$, é visto, através do isomorfismo entre os espaços V e V^{**}, como tensor do tipo $(0,1)$, isto é, $E_{j_r}\in T^0_1$. Portanto, $E^{i_1}\otimes\cdots\otimes E^{i_k}\otimes E_{j_1}\otimes\cdots\otimes E_{j_\ell} : \underbrace{V\times\cdots\times V}_{k\text{ vezes}}\times\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{\ell\text{ vezes}}\to\mathbb{R}\in T^k_\ell(V)$.

Observação 14.3. Seja $T\in T^k_\ell(V)$. Então

$$T = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\\ j_1,\ldots,j_\ell}} T^{j_1,\ldots,j_\ell}_{i_1,\ldots,i_k} E^{i_1}\otimes\cdots\otimes E^{i_k}\otimes E_{j_1}\otimes\cdots\otimes E_{j_\ell},$$

onde $T^{j_1,\ldots,j_\ell}_{i_1,\ldots,i_k} = T(E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_k}\otimes E^{j_1}\otimes\cdots\otimes E^{j_\ell})$.

Definição 14.4. Um T um tensor do tipo $(k,0)$ é dito **anti-simétrico** (ou alternado), se $T(v_1,\ldots,v_a,\ldots,v_b,\ldots,v_k) = -T(v_1,\ldots,v_b,\ldots,v_a,\ldots,v_k)$, para todo $(v_1,\ldots,v_k)\in V\times\cdots\times V$. Ele é **simétrico** se o sinal não muda quando se troca a posição de dois elementos no argumento. Também chamamos um tensor do tipo $(k,0)$ anti-simétrico de **k-forma**. Denotamos por $\Lambda^k(V)$ o conjunto de todas as k-formas. Notação: $\Lambda^0(V)=\mathbb{R}$ e $\Lambda^1(V) = T^1(V) = V^*$.

Definição 14.5. Sejam $\omega^1,\omega^2\in T^1(V)$. Definimos o **produto exterior** de ω^1 por ω^2, como sendo $\omega^1 \wedge \omega^2 \in T^2(V)$, definido da seguinte maneira:

$$(\omega^1 \wedge \omega^2)(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} \omega^1(v_1) & \omega^1(v_2) \\ \omega^2(v_1) & \omega^2(v_2) \end{pmatrix}$$

Observação 14.6. Note que, da Definição 14.5, obtemos uma 2-forma a partir de duas 1-forma. De maneira geral, dados $\omega^1, \ldots, \omega^k \in T^1(V)$, o produto exterior $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k \in T^k(V)$, dado por $(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\omega^i(v_j))$ é uma k-forma.

Observação 14.7. Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão m e $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, m\}$. Se dentre os $j_1, \ldots, j_k$ existirem pelo menos dois iguais, então $E^{j_1} \wedge \cdots \wedge E^{j_k} = 0$.

Proposição 14.8. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão m. Então o conjunto

$$\{E^{j_1} \wedge \cdots \wedge E^{j_k} \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m \ \text{ e } \ j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, m\}\}$$

é uma base de $\Lambda^k(V)$.

Observação 14.9. Se $\omega \in \Lambda^k(V)$, então $\omega = \displaystyle\sum_{j_1 < \cdots < j_k} \omega_{j_1,\ldots,j_k} E^{j_1} \wedge \cdots \wedge E^{j_k}$, onde $\omega_{j_1,\ldots,j_k} = \omega(E^{j_1} \wedge \cdots \wedge E^{j_k})$. Para facilitar a notação, é comum escrever $\omega = \displaystyle\sum_J \omega_J E^J$, onde $J = (j_1, \ldots, j_k)$, com $j_1 < \cdots < j_k$.

Observação 14.10. Vimos na Definição 12.3 que uma 1-forma diferencial é um mapa diferencial $\omega : M \to TM^*$ tal que $(\pi^* \circ \omega)(p) = p$. Assim como fizemos na Observação 13.1, podemos fazer uma identificação de uma 1-forma diferencial como uma aplicação $C^\infty(M)$-linear $\tilde{\omega} : \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$.

- Dado uma 1-forma $\omega : M \to TM^*$, $p \mapsto (p, \omega_p)$ (observe que $\omega_p \in T_pM^*$, isto é, é um transformação linear de T_pM para $\mathbb{R}$), defina

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} : \mathcal{X}(M) &\to C^\infty(M) \\ X &\mapsto \tilde{\omega}(X) : M \to \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad p \mapsto \omega_p(x_p) \end{aligned}$$

- Dada uma aplicação $C^\infty(M)$-linear $\tilde{\omega} : \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$, defina a 1-forma $\omega : M \to TM^*$, $p \mapsto (p, \omega_p)$, onde

$$\begin{aligned} \omega_p : T_pM &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \tilde{\omega}(\overline{v})(p), \end{aligned}$$

onde $\overline{v}$ é a extensão de v para um campo vetorial tangente em M.

Definição 14.11. Seja M^m uma variedade diferenciável de dimensão m. Definimos o **fibrado tensorial do tipo (k,ℓ)** como sendo $T^k_\ell M = \{(p,T) \mid p \in M, T \in T^k_\ell(T_pM)\}$.

Observação 14.12. O fibrado tensorial do tipo (k,ℓ) possui uma estrutura de variedade diferencial. As coordenadas que consideramos em $T^k_\ell M = \{(p,T) \mid p \in M, T \in T^k_\ell(T_pM)\}$ são as coordenadas de p e as coordenadas de T, isto é, se (U,φ) é uma carta local de M, com $p \in U$, temos que $\varphi(p)$ são as coordenadas de p e considerando a Observação 14.3, temos que $T^{j_1,\dots,j_\ell}_{i_1,\dots,i_k}(p)$ são as coordenadas de T. Assim, $T^k_\ell M$ é uma variedade de dimensão $m+m^{k+\ell}$.

Definição 14.13. Um **campo tensorial do tipo (k,ℓ)** sobre M é um mapa $T : M \to T^k_\ell M$ tal que $(\pi \circ T)(p) = p$ (ou seja, $T(p) = (p,T_p)$, onde $T_p \in T^k_\ell(T_pM)$). Se o mapa T é diferencial, então dizemos que o campo tensorial é diferenciável. Nesse caso, fixada (U,φ) uma carta local de M, com $p \in U$, temos que T se escreve localmente como $\displaystyle\sum_{I,J} T^J_I E^I \otimes E_J$, onde $T^J_I : U \to \mathbb{R}$ é uma mapa diferenciável (lembrando que $T^J_I = T^{j_1,\dots,j_\ell}_{i_1,\dots,i_k}$). Assim como $\mathcal{X}$ é o conjunto de todos os campos vetoriais tangentes suave e $\mathcal{T}^1(M)$ é o conjunto de todas as 1-formas diferenciáveis, denotamos por $\mathcal{T}^k_\ell(M)$ o conjunto de todos os campos tensoriais do tipo (k,ℓ) diferenciáveis.

Observação 14.14. Um campo tensorial $T : M \to T^k_\ell M$ pode ser identificado com um mapa $\tilde{T} : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{k\text{-vezes}} \times \underbrace{\mathcal{T}^1(M) \times \cdots \times \mathcal{T}^1(M)}_{\ell\text{-vezes}} \to C^\infty(M)$ $C^\infty(M)$-multilinear.

- Dado um campo tensorial $T : M \to T^k_\ell M$, $p \mapsto (p,T_p)$ (observe que $T_p \in T^k_\ell(T_pM)$, isto é, é um tensor do tipo (k,ℓ) sobre T_pM), defina o mapa $C^\infty(M)$-multilinear $\tilde{T} : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{k\text{-vezes}} \times \underbrace{\mathcal{T}^1(M) \times \cdots \times \mathcal{T}^1(M)}_{\ell\text{-vezes}} \to C^\infty(M)$, da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \tilde{T}(X_1,\dots,X_k,\omega^1,\dots,\omega^\ell) : M &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto T_p(X_1(p),\dots,X_k(p),\omega^1(p),\dots,\omega^\ell(p)), \end{aligned}$$

  onde $X_i(p) \in T_pM$ e $\omega^j(p) \in T_pM^*$.

- Dado $\tilde{T} : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M)}_{k\text{-vezes}} \times \underbrace{\mathcal{T}^1(M) \times \cdots \times \mathcal{T}^1(M)}_{\ell\text{-vezes}} \to C^\infty(M)$ um mapa $C^\infty(M)$-

multilinear, defina o campo tensorial $T : M \to T^k_\ell M$, $p \mapsto (p, T_p)$, onde

$$\begin{aligned} T_p : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k\text{-vezes}} \times \underbrace{T_pM^* \times \cdots \times T_pM^*}_{\ell\text{-vezes}} &\to \mathbb{R} \\ (v_1, \ldots, v_k, \omega^1, \ldots, \omega^\ell) &\mapsto \tilde{T}(\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}, \overline{\omega^1}, \ldots, \overline{\omega^\ell})(p), \end{aligned}$$

onde $\overline{v_i}$ é a extensão de v_i para um campo vetorial tangente em M e $\overline{\omega^j}$ é a extensão de ω^j para uma 1-forma em M.