

# Equações da volta

Silvaneio Viera dos Santos Junior

2022-11-29

Queremos calcular  $\mathbb{E}[\ln(\phi)]$ ,  $\mathbb{E}[\ln(\mu)]$ ,  $Var[\ln(\phi)]$ ,  $Var[\ln(\mu)]$  e  $Cov[\ln(\phi), \ln(\mu)]$ .

Usando que a distribuição aproximada de  $\phi$  ( $\mathcal{G}\left(\frac{n_0+1}{2}, n_0 \ln\left(\frac{\tau_0}{n_0}\right) - \theta_0\right)$ ) podemos obter uma expressão aproximada para os valores esperados que dependem apenas de  $\phi$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\ln(\phi)] &\approx \psi\left(\frac{n_0+1}{2}\right) - \ln\left(n_0 \ln\left(\frac{\tau_0}{n_0}\right) - \theta_0\right) \\ Var[\ln(\phi)] &\approx \psi'\left(\frac{n_0+1}{2}\right)\end{aligned}$$

Como visto antes  $\mu|\phi \sim \mathcal{IG}(n_0\phi + 1, \phi\tau_0)$  (lembrando que isso não é uma aproximação, essa é a distribuição exata de  $\mu|\phi$ ), daí podemos escrever:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\ln(\mu)] &= -\mathbb{E}[\ln(1/\mu)] = -\mathbb{E}[\mathbb{E}[\ln(1/\mu)|\phi]] \\ &= -\mathbb{E}[\psi(n_0\phi + 1) - \ln(\phi\tau_0)] \\ Var[\ln(\mu)] &= Var[\ln(1/\mu)] = \mathbb{E}[Var[\ln(1/\mu)|\phi]] + Var[\mathbb{E}[\ln(1/\mu)|\phi]] \\ &= \mathbb{E}[\psi'(n_0\phi + 1)] + Var[\psi(n_0\phi + 1) - \ln(\phi\tau_0)] \\ \mathbb{E}[\ln(\phi) \ln(\mu)] &= -\mathbb{E}[\ln(\phi) \ln(1/\mu)] = -\mathbb{E}[\ln(\phi) \mathbb{E}[\ln(1/\mu)|\phi]] \\ &= -\mathbb{E}[\ln(\phi)(\psi(n_0\phi + 1) - \ln(\phi\tau_0))]\end{aligned}$$

Talvez seja possível obter expressões analíticas aproximadas para os valores esperados que envolvem  $\mu$  usando a distribuição aproximada de  $\phi$ , mas não cheguei a fazer essas contas. De qualquer forma, essa aproximação não é válida para certos valores dos parâmetros, então temos de usar outra forma para calcular esses valores esperados.

No final fiz todas as contas para a volta usando quadratura gaussiana, uma vez que o custo de se calcular essas integrais numericamente é negligenciável, pois conseguimos escrever todas as integrais como integrais univariadas). Ademais, uma vez calculado os valores esperados, a solução do sistema da volta é trivial, logo não há ganhos significativos de performance ao usar aproximações.