Equações da volta

Silvaneo Viera dos Santos Junior

2022-11-29

Queremos calcular $\mathbb{E}[\ln(\phi)]$, $\mathbb{E}[\ln(\mu)]$, $Var[\ln(\phi)]$, $Var[\ln(\mu)]$ e $Cov[\ln(\phi), \ln(\mu)]$.

Usando que a distribuição aproximada de ϕ ($\mathcal{G}\left(\frac{n_0+1}{2}, n_0 \ln\left(\frac{\tau_0}{n_0}\right) - \theta_0\right)$) podemos obter uma expressão aproximada para os valores esperados que dependem apenas de ϕ:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\ln(\phi)] &\approx \psi\left(\frac{n_0+1}{2}\right) - ln\left(n_0 \ln\left(\frac{\tau_0}{n_0}\right) - \theta_0\right) \\
Var[\ln(\phi)] &\approx \psi'\left(\frac{n_0+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Como visto antes $\mu|\phi \sim \mathcal{IG}(n_0\phi + 1, \phi\tau_0)$ (lembrando que isso não é uma aproximação, essa é a distribuição exata de $\mu|\phi$), daí podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\ln(\mu)] &= -\mathbb{E}[\ln(1/\mu)] = -\mathbb{E}[\mathbb{E}[\ln(1/\mu)|\phi]] \\
&= -\mathbb{E}[\psi(n_0\phi + 1) - ln(\phi\tau_0)] \\
Var[\ln(\mu)] &= Var[\ln(1/\mu)] = \mathbb{E}[Var[\ln(1/\mu)|\phi]] + Var[\mathbb{E}[\ln(1/\mu)|\phi]] \\
&= \mathbb{E}[\psi'(n_0\phi + 1)] + Var[\psi(n_0\phi + 1) - ln(\phi\tau_0)] \\
\mathbb{E}[\ln(\phi)\ln(\mu)] &= -\mathbb{E}[\ln(\phi)\ln(1/\mu)] = -\mathbb{E}[\ln(\phi)\mathbb{E}[\ln(1/\mu)|\phi]] \\
&= -\mathbb{E}[\ln(\phi)(\psi(n_0\phi + 1) - ln(\phi\tau_0))]
\end{aligned}$$

Talvez seja possível obter expressões analíticas aproximadas para os valores esperados que envolvem μ usando a distribuição aproximada de ϕ, mas não cheguei a fazer essas contas. De qualquer forma, essa aproximação não é válida para certos valores dos parâmetros, então temos de usar outra forma para calcular esses valores esperados.

No final fiz todas as contas para a volta usando quadratura gaussiana, uma vez que o custo de se calcular essas integrais numericamente é negligenciável (pois conseguimos escrever todas as integrais como integrais univariadas), pois, uma vez calculados os valores esperados, a solução do sistema da volta é trivial.