Contas para o caso Gamma

Silvaneo Viera dos Santos Junior

Contexto

Modelo observacional (α conhecido):

$$y_t|\alpha, \mu \sim \mathcal{G}\left(\alpha, \frac{\alpha}{\mu}\right)$$

Priori conjugada:

$$\begin{aligned}
\mu \sim & \mathcal{IG}\left(\alpha_0, \beta_0\right) \\
f(\mu) = & \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \mu^{-\alpha_0 - 1} \exp\left\{-\frac{\beta}{\mu}\right\} \\
= & \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \exp\left\{(-\alpha_0 - 1)\ln(\mu) - \frac{\beta}{\mu}\right\}
\end{aligned}$$

Vetor de estatísticas suficientes:

$$H_1 = \left(\ln(\mu), \frac{1}{\mu}\right)'$$

Priori normal:

$$\mu \sim \mathcal{LN}\left(\mu_0, \sigma_0^2\right)$$

Vetor de estatísticas suficientes:

$$H_2 = \left(\ln(\mu), \ln(\mu)^2\right)'$$

Observações:

- Se $X \sim \mathcal{LN}\left(\mu, \sigma^2\right)$, então $\frac{1}{X} \sim \mathcal{LN}\left(-\mu, \sigma^2\right)$.
- Se $X \sim \mathcal{IG}\left(\alpha, \beta\right)$, então $\mathbb{E}[\ln(X)] = \mathbb{E}[-\ln(\frac{1}{X})] = -\psi(\alpha) + \ln(\beta)$.
- ψ é a função *digamma*.

Primeiro sistema (priori log-normal para priori inversa-gamma)

Queremos encontrar α_0 e β_0 tais que:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[H_1] = \mathbb{E}_{\mathcal{LN}}[H_1]$$

Já sabemos que:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[H_1] = \left(-\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0), \frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)'$$

Ademais, temos que $\mathbb{E}_{\mathcal{LN}}[\ln(\mu)] = \mu_0$ e, como $\frac{1}{\mu} \sim \mathcal{LN}\left(-\mu_0, \sigma_0^2\right)$, então $\mathbb{E}_{\mathcal{LN}}[\frac{1}{\mu}] = \exp\left\{-\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right\}$.

O sistema obtido é:

$$\begin{aligned}
-\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0) =& \mu_0 \\
\frac{\alpha_0}{\beta_0} =& \exp\left\{-\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right\}
\end{aligned}$$

Daí:

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0}{\exp\left\{-\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right\}} = \alpha_0 \exp\left\{\mu_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}\right\}$$

$$-\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0) = -\psi(\alpha_0) + \ln(\alpha_0) + \mu_0 - \frac{\sigma_0^2}{2} = \mu_0$$

Portanto, precisamos que:

$$-\psi(\alpha_0) + \ln(\alpha_0) = \frac{\sigma_0^2}{2}.$$

Vamos fazer uma aproximação de segunda ordem para ψ, isto é, vamos usar $\psi(x) \approx \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2}$. Vale destacar que uma aproximação de segunda ordem é necessária, pois, para certos valores de σ_0, uma aproximação de primeira ordem não é boa o bastante, fazendo com que o ajuste do modelo fique ruim.

Voltando para o sistema, encontrar α_0 tal que:

$$-\ln(\alpha_0) + \frac{1}{2\alpha_0} + \frac{1}{12\alpha_0^2} + \ln(\alpha_0) = \frac{\sigma_0^2}{2}.$$

Chamemos $h = \frac{1}{\alpha_0}$, então podemos reescever a equação acima como:

$$\frac{1}{6}h^2 + h - \sigma_0^2 = 0.$$

Por Bhaskara, obtemos que:

$$h = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3}\sigma_0^2}}{2\frac{1}{6}} = -3 \pm 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}\sigma_0^2}.$$

Como $\alpha_0 > 0$, devemos tomar sempre a raiz positiva.

Por fim obtemos a seguinte solução para o sistema original:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 =& \frac{1}{-3 \pm 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}\sigma_0^2}} \\
\beta_0 =& \alpha_0 \exp\left\{\mu_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}\right\}
\end{aligned}$$

Atualização dos parâmetros

$$\begin{aligned} f(\mu|y_t) \propto & \mu^{-\alpha} \exp\left\{-\frac{\alpha y_t}{\mu}\right\} \mu^{-\alpha_0 - 1} \exp\left\{-\frac{\beta_0}{\mu}\right\} \\ \propto & \mu^{-(\alpha+\alpha_0)-1} \exp\left\{-\frac{\alpha y_t + \beta_0}{\mu}\right\} \end{aligned}$$

Assim:

$$\mu|y_t \sim \mathcal{IG}\left(\alpha + \alpha_0, \alpha y + \beta_0\right)$$

Se $\alpha_0 = \alpha\alpha_0^*$ e $\beta_0 = \alpha\beta_0^*$, então a atualização fica da seguinte forma:

$$\mu|y_t \sim \mathcal{IG}\left(\alpha(\alpha_0^* + 1), \alpha(\beta_0^* + y_t)\right)$$

Segundo sistema (posteriori inversa-gamma para posteriori log-normal)

Queremos encontrar μ_0 e σ_0^2 tais que:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[H_2] = \mathbb{E}_{\mathcal{LN}}[H_2]$$

Vale que:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{LN}}[H_2] = \left(\mu_0, \sigma_0^2 + \mu_0^2\right)'$$

Veja que $\mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[\ln(\mu)] = -\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0)$, ademais:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[\ln(\mu)^2] = & Var_{\mathcal{IG}}[\ln(\mu)] + \mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[\ln(\mu)]^2 \\ = & \psi'(\alpha_0) + (-\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0))^2 \end{aligned}$$

Com isto, obtemos a seguinte solução para o sistema:

$$\begin{aligned} \mu_0 = & -\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0) \\ \sigma_0^2 = & \psi'(\alpha_0). \end{aligned}$$