Caso Gamma revisto²

Relatório

Silvaneo Viera dos Santos Junior

2022-11-23

Priori alternativa para o modelo Gamma

Neste relatório apresentaremos um *follow-up* das análises feitas sobre o GDLM k-paramétrico para o caso Gamma com parâmetro de forma e média desconhecidos. Neste relatório apresento as contas para o ajuste feito com a parametrização do Bernardo.

Modelo observacional:

$$X|\phi,\mu \sim \mathcal{G}\left(\phi, \frac{\phi}{\mu}\right)$$

Priori:

$$\begin{aligned}\pi(\phi,\mu) &\propto \exp\left\{n_0\left(\phi\ln\left(\frac{\phi}{\mu}\right) - \ln(\Gamma(\phi))\right) + \theta_0\phi - \tau_0\frac{\phi}{\mu}\right\} \\ &= \exp\left\{-n_0\left(\phi\ln(\mu) - \ln(\phi) + \ln(\Gamma(\phi))\right) + \theta_0\phi - \tau_0\frac{\phi}{\mu}\right\},\end{aligned}$$

Nesta priori, temos que o vetor de estatística suficientes associado é $H_p = \left(\phi, \frac{\phi}{\mu}, \phi\ln(\mu) - \phi\ln(\phi) + \ln(\Gamma(\phi))\right)'$.

Se X, Y tem densidade π, então diremos que $X, Y \sim \Pi(n_0, \tau_0, \theta_0)$. Se $\phi, \mu \sim \Pi\left(n_0, \theta_0, \tau_0\right)$, então:

$$\begin{aligned}f(\mu|\phi) &\propto \pi(\phi,\mu) \propto \exp\left\{-(n_0\phi\ln(\mu) - \phi\ln(\phi) + \ln(\Gamma(\phi)) + \theta_0\phi - \tau_0\frac{\phi}{\mu}\right\} \\ &\propto \exp\left\{-n_0\phi\ln(\mu) - \tau_0\frac{\phi}{\mu}\right\} \\ &= \mu^{-n_0\phi}e^{-\tau_0\frac{\phi}{\mu}},\end{aligned}$$

ou seja $\mu|\phi \sim \mathcal{IG}(n_0\phi + 1, \phi\tau_0)$, onde $\mathcal{IG}$ representa a distribuição Inversa Gamma.

Usando a distribuição condicional de μ podemos reescrever $\mathbb{E}_p[H_p] = \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[H_p|\phi]]$, de onde obtemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_p\left[\frac{\phi}{\mu}\right] &= \mathbb{E}_p[\phi\mathbb{E}_p\left[\frac{1}{\mu}|\phi\right]] = \mathbb{E}_p\left[\phi\frac{n_0\phi+1}{\phi\tau_0}\right] = \frac{n_0\mathbb{E}_p\left[\phi\right]+1}{\tau_0} \\ \mathbb{E}_p[\phi\ln(\mu)] &= \mathbb{E}_p[\phi\mathbb{E}_p[\ln(\mu)|\phi]] = \mathbb{E}_p\left[\phi(-\psi(n_0\phi+1) + \ln(\phi\tau_0))\right].\end{aligned}$$

Usando que $\mathbb{E}_p\left[\phi\right] = \mathbb{E}_q\left[\phi\right]$ ($\mathbb{E}_q\left[H_p\right]$ é suposto conhecido), temos que:

$$\tau_0 = \frac{n_0\mathbb{E}_q\left[\phi\right]+1}{\mathbb{E}_q\left[\frac{\phi}{\mu}\right]}$$

Ademais:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_p[\phi\ln(\mu)-\phi\ln(\phi)+\ln(\Gamma(\phi))] &= \mathbb{E}_p[\phi\ln(\mu)]+\mathbb{E}[-\phi\ln(\phi)+\ln(\Gamma(\phi))]\\ &= \mathbb{E}_p\left[\phi(-\psi(n_0\phi+1)+\ln(\phi\tau_0))\right]+\mathbb{E}[-\phi\ln(\phi)+\ln(\Gamma(\phi))]\\ &= \mathbb{E}_p\left[-\phi\psi(n_0\phi+1)+\phi\ln(\tau_0)+\cancel{\phi\ln(\phi)}-\cancel{\phi\ln(\phi)}+\ln(\Gamma(\phi))\right]\\ &= \mathbb{E}_p\left[\ln(\Gamma(\phi))-\phi\psi(n_0\phi+1)\right]+\mathbb{E}_q\left[\phi\right]\ln(\tau_0)\end{aligned}$$

Com as equações acimas, conseguimos escrever $\mathbb{E}_p[H_p]$ como valores esperados que dependem apenas da distribuição marginal de ϕ, sendo que a distribuição marginal de ϕ é tal que:

$$\begin{aligned}f(\phi) &\propto \int_0^{+\infty}\pi(\phi,\mu)d\mu\\ &\propto \int_0^{+\infty}\exp\left\{-(n_0\phi\ln(\mu)-\phi\ln(\phi)+\ln(\Gamma(\phi))+\theta_0\phi-\tau_0\frac{\phi}{\mu}\right\}d\mu\\ &= \exp\{n_0(\phi\ln(\phi)-\ln(\Gamma(\phi))+\theta_0\phi\}\int_0^{+\infty}\exp\left\{-n_0\phi\ln(\mu)-\tau_0\frac{\phi}{\mu}\right\}d\mu\\ &= \exp\{n_0(\phi\ln(\phi)-\ln(\Gamma(\phi))+\theta_0\phi\}\frac{\Gamma(n_0\phi+1)}{\phi^{n_0\phi+1}\tau_0^{n_0\phi+1}}\\ &\propto \frac{\phi^{n_0\phi}}{\Gamma(\phi)^{n_0}}\frac{\Gamma(n_0\phi+1)}{\phi^{n_0\phi+1}\tau_0^{n_0\phi+1}}\exp\{\theta_0\phi\}\\ &= \frac{\phi^{n_0\phi}}{\phi^{-n_0}\Gamma(\phi+1)^{n_0}}\frac{\Gamma(n_0\phi+1)}{\phi^{n_0\phi+1}\tau_0^{n_0\phi+1}}\exp\{\theta_0\phi\}.\end{aligned}$$

Novamente, a fórmula de Stirling nos diz que:

$$\Gamma(x+1)\approx\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

Usando essa aproximação na densidade de ϕ obtemos que:

$$\begin{aligned}f(\alpha) &\propto \frac{\phi^{n_0\phi}}{\phi^{-n_0}\Gamma(\phi+1)^{n_0}}\frac{\Gamma(n_0\phi+1)}{\phi^{n_0\phi+1}\tau_0^{n_0\phi+1}}\exp\{\theta_0\phi\}\\ &\approx \frac{\phi^{n_0\phi}}{\phi^{-n_0}(\sqrt{2\pi\phi}(\frac{\phi}{e})^{\phi})^{n_0}}\frac{\sqrt{2\pi n_0\phi}(\frac{n_0\phi}{e})^{n_0\phi}}{\phi^{n_0\phi+1}\tau_0^{n_0\phi+1}}\exp\{\theta_0\phi\}\\ &\propto \frac{\cancel{\phi^{n_0\phi}}}{\phi^{-n_0}\phi^{\frac{n_0}{2}}\cancel{\phi^{n_0\phi}}e^{-n_0\phi}}\frac{n_0^{n_0\phi}\phi^{\frac{1}{2}}\cancel{\phi^{n_0\phi}}e^{-n_0\phi}}{\phi\cancel{\phi^{n_0\phi}}\tau_0^{n_0\phi}}\exp\{\theta_0\phi\}\\ &\propto \phi^{\frac{n_0+1}{2}-1}\exp\{-(n_0\ln\left(\frac{\tau_0}{n_0}\right)-\theta_0)\phi\}.\end{aligned}$$

Ou seja, ϕ tem distribuição aproximada $\mathcal{G}\left(\frac{n_0+1}{2},n_0\ln\left(\frac{\tau_0}{n_0}\right)-\theta_0\right)$.

A aproximação acima é muito útil para destacar a condição na qual Π é própria: Para que Π, basta que $n_0\ln\left(\frac{\tau_0}{n_0}\right)-\theta_0>0$.

Usando a aproximação acima, podemos calcular obter que:

$$\mathbb{E}_p[\phi]=\frac{n_0+1}{2\left(n_0\ln\left(\frac{\tau_0}{n_0}\right)-\theta_0\right)}$$

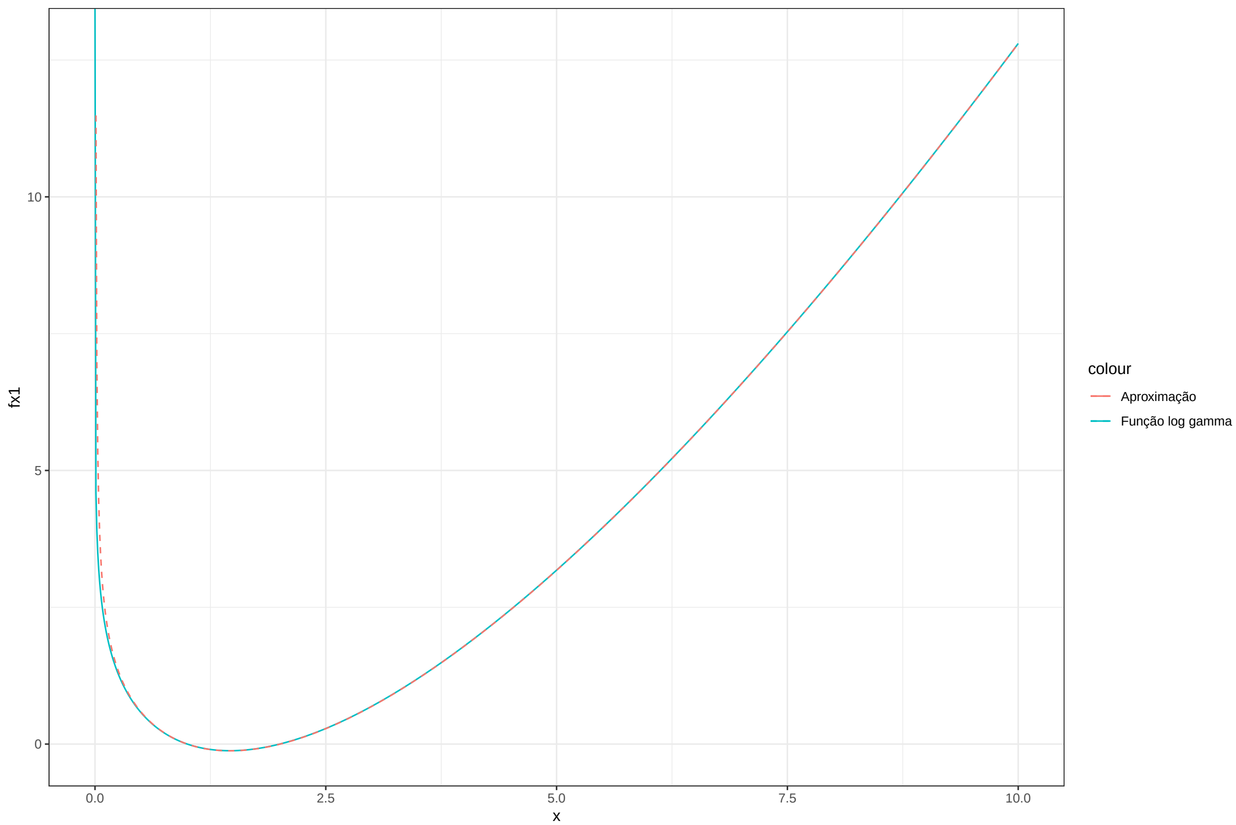
Usando que $\psi(x) \approx \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2}$ (ψ é a função digamma) e que $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
-\phi\psi(n_0\phi + 1) &= -\phi\left(\psi(n_0\phi) + \frac{1}{n_0\phi}\right) \\
&\approx -\phi\left(\ln(n_0\phi) - \frac{1}{2n_0\phi} - \frac{1}{12n_0^2\phi^2} + \frac{1}{n_0\phi}\right) \\
&\approx -\phi\ln(\phi) - \phi\ln(n_0) + \frac{1}{12n_0^2\phi} - \frac{1}{2n_0}.
\end{aligned}
$$

Usando que $\psi(x) \approx \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2}$ junto ao Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos:

$$
\ln(\Gamma(x)) = \int_1^x \psi(t)dt \approx \int_1^t \ln(t) - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12t^2}dt = \left(t\ln(t) - t - \frac{1}{2}\ln(t) + \frac{1}{12t}\right)_1^x = x\ln(x) - x - \frac{1}{2}ln(x) + \frac{1}{12x} + \frac{11}{12}
$$

Podemos verificar que a qualidade da aproximação acima no gráfico a seguir:



Em geral a aproximação parece boa, porém há certas ressalvas sobre o seu uso, conforme discutirei mais à frente.

Calculemos então o valor esperado da última estatística suficiente restante:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_p[\phi\ln(\mu) - \phi\ln(\phi) + \ln(\Gamma(\phi))] &= \mathbb{E}_p\left[\ln(\Gamma(\phi)) - \phi\psi(n_0\phi+1)\right] + \mathbb{E}_q\left[\phi\right]\ln(\tau_0) \\
&= \mathbb{E}_p\left[\cancel{\phi\ln(\phi)} - \phi - \frac{1}{2}ln(\phi) + \frac{1}{12\phi} + \frac{11}{12} - \cancel{\phi\ln(\phi)} - \phi\ln(n_0) + \frac{1}{12n_0^2\phi} - \frac{1}{2n_0}\right] \\
&+ \mathbb{E}_q\left[\phi\right]\ln(\tau_0) \\
&= -\mathbb{E}_q[\phi](1+\ln(n_0\tau_0)) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{n_0+1}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\ln\left(n_0\ln\left(\frac{\tau_0}{n_0}\right) - \theta_0\right) + \frac{n_0+1}{n_0-1}\frac{\ln\left(\frac{\tau_0}{n_0}\right) - \frac{\theta_0}{n_0}}{6} \\
&+ \frac{11}{12} - \frac{1}{2n_0}
\end{aligned}
$$

A aproximação acima é usada apenas quando $\frac{n_0+1}{2}$ é grande (maior que 3 já é o suficiente). Quando $\frac{n_0+1}{2}$ é pequeno, esse valor esperado é calculado usando quadratura Gaussiana.

A expressão aproximada para $\mathbb{E}_p[\phi\ln(\mu) - \phi\ln(\phi) + \ln(\Gamma(\phi))]$ parece bastente útil, porém ela tem um defeito muito grave: Ela não são válidas para $n_0 \leq 1$. De fato, se $n_0 \leq 1$, $\mathbb{E}_p[1/\phi]$ não está definido, o que invalida as equações acima. Vale destacar que $\mathbb{E}_p[\phi\ln(\mu) - \phi\ln(\phi) + \ln(\Gamma(\phi))]$ **existe** e são finitos, porém a aproximação da função ψ é ruim para valores baixos de n_0, especificamente, a aproximação de ψ é ruim para valores pequenos de ϕ e, quando n_0 é pequeno, a região onde a aproximação de ψ é ruim tem bastante massa de probabilidade, de modo que a aproximação do valor esperado é ruim.

De todo modo, a observação acima não é necessariamente um empecilho, uma vez que podemos usar outros métodos para cálcular $\mathbb{E}_p[\phi\ln(\mu) - \phi\ln(\phi) + \ln(\Gamma(\phi))]$ sem aproximações.

Usando o novo sistema obtido, tentamos fazer o ajuste do modelo, porém não conseguimos um ajuste funcional.