

# Caso Gamma

## Relatório

Silvaneio Viera dos Santos Junior

2022-11-23

### Introdução

Neste relatório apresentaremos os resultados das análises feitas sobre o GDLM k-paramétrico para o caso Gamma com parâmetro de forma e média desconhecidos. Para esta análise, vamos assumir o seguinte modelo observacional:

$$X|\phi, \mu \sim \mathcal{G}\left(\phi, \frac{\phi}{\mu}\right),$$

onde  $\mathcal{G}$  representa a distribuição Gamma. Por conveniência, usaremos a parametrização com  $\alpha = \phi$  e  $\beta = \frac{\phi}{\mu}$  de modo que:

$$X|\alpha, \beta \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta),$$

sendo que transitar de uma parametrização para a outra é trivial e a resolução dos sistemas de compatibilização é a mesma.

Para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , temos que a priori conjugada é tal que:

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \exp \{n_0 \alpha \ln(\beta) - k_0 \ln(\Gamma(\alpha)) + \theta_0 \alpha - \tau_0 \beta\},$$

onde  $n_0, k_0, \theta_0$  e  $\tau_0$  são os parâmetros da distribuição e  $\Gamma$  é a função *Gamma*. Quando um par de variáveis aleatórias  $X, Y$  tiver a densidade descrita acima, diremos que  $X, Y \sim \Pi(n_0, k_0, \theta_0, \tau_0)$ , sendo que  $n_0, k_0, \tau_0 > 0$ . No caso especial onde  $n_0 = k_0$ , diremos que  $X, Y \sim \Pi(n_0, \theta_0, \tau_0)$ .

Ao obter uma amostra de tamanho  $m$  do modelo observacional, a obtenção dos parâmetros da posteriori ( $n_m, k_m, \theta_m$  e  $\tau_m$ ) pode ser feita a partir das equações a seguir:

$$\begin{aligned} n_m &= n_0 + m \\ k_m &= k_0 + m \\ \theta_m &= \theta_0 + \sum_{i=1}^m \ln(x_i) \\ \tau_m &= \tau_0 + \sum_{i=1}^m x_i. \end{aligned}$$

Por último, esta distribuição pertence à família exponencial e o vetor de estatísticas suficientes associado a esta distribuição é:

$$H_p = (\alpha, \beta, \alpha \ln(\beta), \ln(\Gamma(\alpha)))'$$

Para utilizar o método proposto no artigo k-paramétrico é necessário obter  $\mathbb{E}_p[H_p]$  e  $\mathbb{E}_q[H_p]$ , onde  $E_p$  é o valor esperado calculado com  $\alpha$  e  $\beta$  tendo a distribuição conjugada  $p$  e  $E_q$  é o valor esperado calculado com  $\alpha$  e  $\beta$  tendo distribuição log-Normal.

Na próxima sessão discutiremos algumas propriedades da distribuição  $\Pi$ , pois diversos problemas encontrados tem sua origem nas características de  $\Pi$ .

Na sessão subsequente abordaremos os resultados da tentativa de se calcular  $\mathbb{E}_p[H_p]$  usando aproximações de Laplace (Tierney e Kadane, 1995). Infelizmente, não conseguimos obter um ajuste funcional com esta abordagem devido a problemas na solução do sistema  $\mathbb{E}_p[H_p] = \mathbb{E}_q[H_p]$ .

Na última sessão apresentamos uma proposta que permite obter uma expressão analítica aproximada para  $\mathbb{E}_p[H_p]$ . Com isso, conseguimos resolver o sistema (ainda usando Newton-Raphson, mas sem problemas numéricos) e fazer o ajuste do modelo. Ainda assim, o ajuste deixa a desejar. Mais investigações estão sendo feitas para tentar identificar o problema.

## Propriedades da distribuição $\Pi$

Primeiro, observemos que, se  $\alpha, \beta \sim \Pi(n_0, k_0, \theta_0, \tau_0)$ , então:

$$\begin{aligned} f(\beta|\alpha) &\propto \pi(\alpha, \beta) \propto \exp \{n_0 \alpha \ln(\beta) - k_0 \ln(\Gamma(\alpha)) + \theta_0 \alpha - \tau_0 \beta\} \\ &\propto \exp \{n_0 \alpha \ln(\beta) - \tau_0 \beta\} = \beta^{n_0 \alpha} e^{-\tau_0 \beta}, \end{aligned}$$

ou seja  $\beta|\alpha \sim \mathcal{G}(n_0 \alpha + 1, \tau_0)$ .

Usando a distribuição condicional de  $\beta$  podemos reescrever  $\mathbb{E}_p[H_p] = \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[H_p|\alpha]]$ , de onde obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p[\beta] &= \mathbb{E}_p[\mathbb{E}_p[\beta|\alpha]] = \mathbb{E}_p \left[ \frac{n_0 \alpha + 1}{\tau_0} \right] = \frac{n_0 \mathbb{E}_p[\alpha] + 1}{\tau_0} \\ \mathbb{E}_p[\alpha \ln(\beta)] &= \mathbb{E}_p[\alpha \mathbb{E}_p[\ln(\beta)|\alpha]] = \mathbb{E}_p[\alpha(\psi(n_0 \alpha + 1) - \ln(\tau_0))] \\ &= \mathbb{E}_p[\alpha \psi(n_0 \alpha + 1)] - \ln(\tau_0) \mathbb{E}_p[\alpha]. \end{aligned}$$

Usando que  $\mathbb{E}_p[\alpha] = \mathbb{E}_q[\alpha]$  ( $\mathbb{E}_q[H_p]$  é suposto conhecido), temos que:

$$n_0 = \frac{\mathbb{E}_q[\beta] \tau_0 - 1}{\mathbb{E}_q[\alpha]}$$

Com as equações acima, conseguimos escrever  $\mathbb{E}_p[H_p]$  como valores esperados que dependem apenas da distribuição marginal de  $\alpha$ , o que pode ser útil para simplificar algumas integrais e possibilitar a resolução numérica com métodos determinísticos. Vale observar que a distribuição marginal de  $\alpha$  é tal que:

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &\propto \int_0^{+\infty} \pi(\alpha, \beta) d\beta \\
&\propto \int_0^{+\infty} \exp \{n_0 \alpha \ln(\beta) - k_0 \ln(\Gamma(\alpha)) + \theta_0 \alpha - \tau_0 \beta\} d\beta \\
&= \exp \{-k_0 \ln(\Gamma(\alpha)) + \theta_0 \alpha\} \int_0^{+\infty} \exp \{n_0 \alpha \ln(\beta) - \tau_0 \beta\} d\beta \\
&= \exp \{-k_0 \ln(\Gamma(\alpha)) + \theta_0 \alpha\} \int_0^{+\infty} \beta^{n_0 \alpha + 1 - 1} e^{-\tau_0 \beta} d\beta \\
&= \exp \{-k_0 \ln(\Gamma(\alpha)) + \theta_0 \alpha\} \frac{\Gamma(n_0 \alpha + 1)}{\tau_0^{n_0 \alpha + 1}} \\
&= \exp \{-k_0 \ln(\Gamma(\alpha)) + \theta_0 \alpha + \ln(\Gamma(n_0 \alpha + 1)) - (n_0 \alpha + 1) \ln(\tau_0)\} \\
&\propto \exp \{\ln(\Gamma(n_0 \alpha + 1)) - k_0 \ln(\Gamma(\alpha)) + (\theta_0 - n_0 \ln(\tau_0)) \alpha\} \\
&= \frac{\Gamma(n_0 \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)^{k_0}} \exp \{(\theta_0 - n_0 \ln(\tau_0)) \alpha\}.
\end{aligned}$$

Usando a densidade acima e aproveitando a escrita de  $\mathbb{E}_p[H_p]$  como uma valor esperado em  $\alpha$ , podemos obter  $\mathbb{E}_p[H_p]$  usando quadratura Gaussiana e dispensando o uso da aproximação de Laplace.

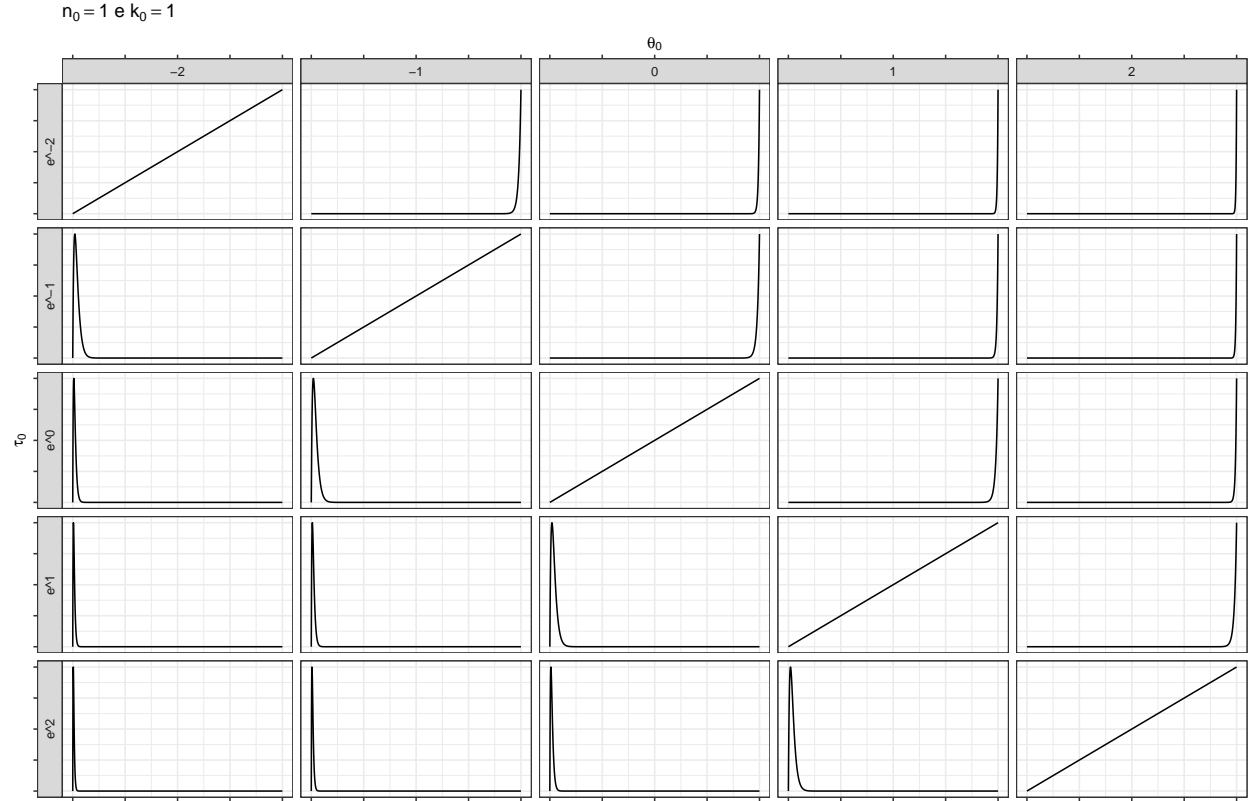
Como discutido em outros reuniões, um pre-requisito para o uso do Teorema da Projeção é que o valor esperado de  $H_p$  exista e seja finito. Caso esta condição não seja satisfeita, não podemos fazer a compatibilização das prioris normal e conjugada. Assim, devemos encontrar as condições para as quais  $\Pi$  é própria (i.e., a constante de normalização de  $\pi$  é finita) e o valor esperado de  $H_p$  é finito. Para facilitar esta análise, podemos fazer o estudo da distribuição marginal de  $\alpha$ , pois se  $\Pi$  é própria,  $\alpha$  também será, ademais, podemos avaliar o valor esperado de  $H_p$  olhando apenas para a distribuição de  $\alpha$ .

Adiante, vamos exibir a densidade não normalizada de  $\alpha$  para vários valores de  $k_0$ ,  $n_0$ ,  $\theta_0$  e  $\tau_0$ , porém, como são muitas combinações de parâmetros, a análise acaba se tornando exaustiva, por isso, antes de apresentar os gráficos, vamos resumir as conclusões:

- Se  $n_0$  e  $k_0$  são grandes em comparação a  $\tau_0$  e  $\theta_0$  a densidade de  $\alpha$  se torna crescente em  $\alpha$  a partir de algum valor de  $\alpha$  (como consequência, a distribuição marginal de  $\alpha$  não é própria). Observe que, para uma amostra grande, temos que  $n_m \approx k_m \approx m$ ,  $\tau_m \approx n_m \sum_{i=1}^m x_i / m$ ,  $\theta_m \approx k_m \sum_{i=1}^m \ln(x_i) / m$ , assim, a observação feita neste item equivale a dizer que a média dos  $x_i$ 's e dos  $\ln(x_i)$ 's não pode ser demasiadamente pequena.
- Se  $n_0 \geq k_0$  a densidade de  $\alpha$  se torna crescente em  $\alpha$  para grande parte dos possíveis valores de  $\tau_0$  e  $\theta_0$ .

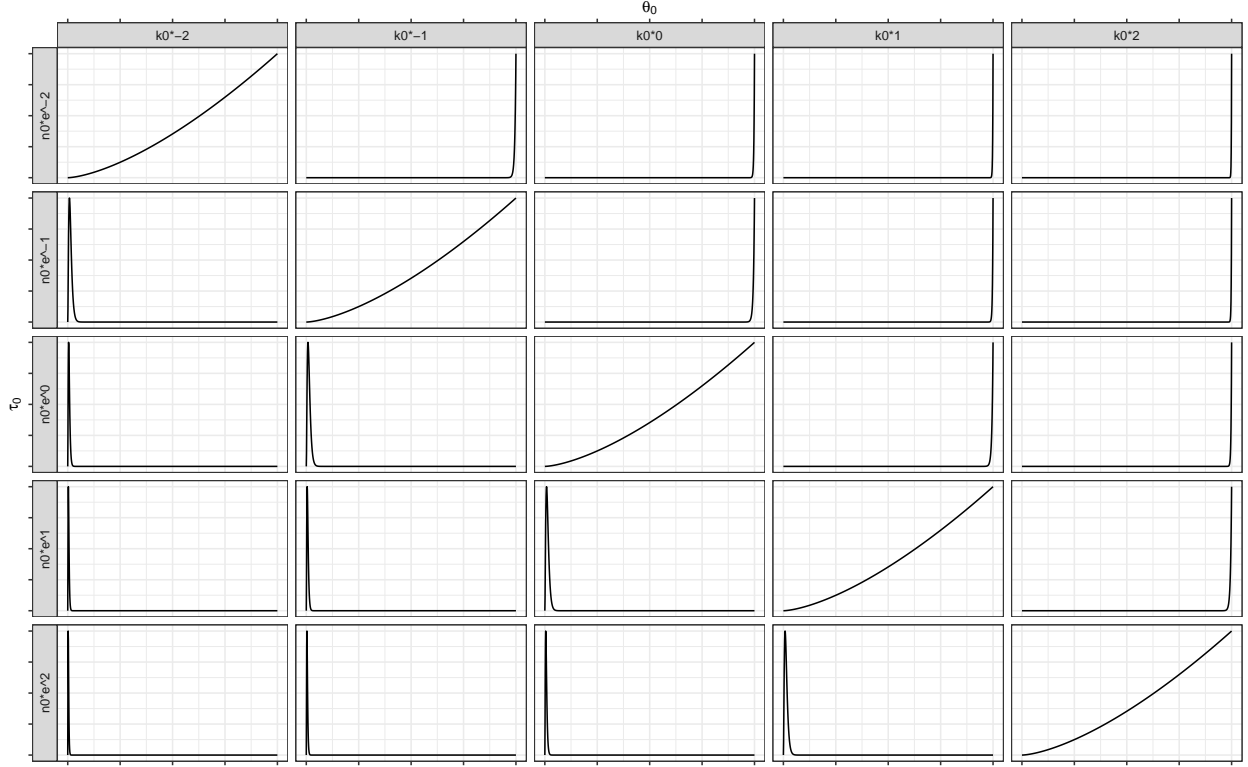
Para garantir que a distribuição marginal de  $\alpha$  seja própria, precisamos que  $n_0$  seja significativamente maior que  $k_0$  (o quão menor vai depender da escala de  $k_0$ ) e/ou que  $\tau_0$  e  $\theta_0$  estejam compatíveis com a escala de  $k_0$  e  $n_0$ . Em geral, essa informação será relevante apenas para inicialização do Newton-Raphson, sendo necessária uma escolha que evite que o algoritmo passe por “regiões ruins”.

A seguir, apresentamos a densidade marginal não normalizada de  $\alpha$  para  $n_0 = k_0 = 1$  e diversos valores de  $\tau_0$  e  $\theta_0$ :



Veja que, se  $\tau_0 = e^{\theta_0}$ , a densidade de  $\alpha$  é simplesmente uma reta crescente em  $\alpha$ . Se  $\tau_0 > e^{\theta_0}$  a densidade de  $\alpha$  é própria e se  $\tau_0 \leq e^{\theta_0}$  a densidade de  $\alpha$  é crescente em  $\alpha$  (a partir de algum valor), logo a distribuição de  $\alpha$  não é própria.

$$n_0 = 2 \text{ e } k_0 = 2$$



Com  $n_0 = k_0 = 2$  temos um resultado parecido com o anterior, porém, o “ponto de corte” para tornar a densidade imprópria muda. De modo geral, quando  $n_0 = k_0 = m$ , observamos que o ponto de corte é  $\ln\left(\frac{\tau_0}{m}\right) > \frac{\theta_0}{m}$ . Intuitivamente, podemos entender a razão para este ponto de corte da seguinte forma: Se temos uma amostra de tamanho  $m$  com  $m$  muito grande, então  $\tau_m \approx m \sum \frac{x_i}{m}$  e  $\theta_m \approx m \sum \frac{\ln(x_i)}{m}$ , então teríamos que  $\ln\left(\frac{\tau_m}{m}\right) > \frac{\theta_m}{m}$ , pois a função logarítmo é côncava, portanto  $\ln\left(\frac{\tau_m}{m}\right) \approx \ln\left(\sum \frac{x_i}{m}\right) > \sum \frac{\ln(x_i)}{m} \approx \frac{\theta_m}{m}$ . Ou seja, é “artificial” para uma  $\Pi$  que a condição  $\ln\left(\frac{\tau_0}{m}\right) > \frac{\theta_0}{m}$  não seja válida, pois dados reais nunca produziram parâmetros sem essa propriedade.

A partir das análises feitas não conseguimos encontrar uma regra que garanta que a densidade de  $\alpha$  seja própria a menos que tomemos  $n_0 = k_0$ , porém, ainda nesse caso, a restrição encontrada é inconveniente, pois a restrição  $\ln\left(\frac{\tau_0}{m}\right) > \frac{\theta_0}{m}$  induz um espaço paramétrico onde não há garantias de que exista um elemento que minimize a divergência KL. No geral, tivemos muitos problemas em encontrar o mínimo, pois o algoritmo frequentemente sai do conjunto válido de parâmetros. Em diversas ocasiões conseguimos encontrar um valor inicial para os parâmetros de modo que o algoritmo de Newton-Raphson convirja de forma adequada, mas não conseguimos estabelecer um critério geral que garanta que sempre poderemos resolver o sistema. Uma forma de mitigar esse problema seria através da simplificação dos sistemas (se possível), pois isso facilitaria a busca dos parâmetros.

## Método de Laplace

Suponhamos que queremos calcular  $\mathbb{E}[g(x)]$  com  $x$  tendo densidade proporcional a  $f^*$  e  $g$  sendo uma função positiva, então podemos escrever:

$$\mathbb{E}[g(x)] = \frac{\int_{\mathbb{R}} g(x) f^*(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} f^*(x) dx}.$$

Se considerarmos que:

$$g(x)f^*(x) \approx \exp \left\{ L_1(x_1^*) - \frac{(x - x_1^*)^2}{2v_1} \right\},$$

$$f^*(x) \approx \exp \left\{ L_2(x_2^*) - \frac{(x - x_2^*)^2}{2v_2} \right\},$$

onde  $L_1(x) = \ln(g(x)f^*(x))$ ,  $L_2(x) = \ln(f^*(x))$ ,  $x_i^*$  é o argumento que maximiza  $L_i$  e  $v_i = -L_i''^{-1}(x_i^*)$ . Usando a aproximação acima, obtemos:

$$\mathbb{E}[g(x)] \approx \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \{ L_1(x_1^*) - L_2(x_2^*) \}$$

A abordagem acima pode ser facilmente generalizada para o caso onde  $x$  é um vetor.

A ideia proposta pelo Migon é utilizar o método descrito para calcular  $\mathbb{E}_p[H_p]$ , porém encontramos um problema ao tentar por em prática esta proposta: Para calcular  $\mathbb{E}_p[H_p]$  pelo método de Laplace precisamos conhecer os parâmetros da distribuição conjugada, mas desejamos calcular  $\mathbb{E}[g(x)]$  justamente para encontrar os parâmetros da distribuição conjugada.

Para apresentar o problema de forma clara, vamos descrever o algoritmo de Newton-Raphson para a solução do sistema  $\mathbb{E}_p[H_p] = \mathbb{E}_q[H_p]$ :

- Passo 0: Suponha que conhecemos  $\mathbb{E}_q[H_p]$  e seja  $\phi = \mathbb{E}_p[H_p]$  com  $p = \Pi(n, k, \tau, \theta)$ .
- Passo 1: Inicializamos escolhendo  $n, k, \tau$  e  $\theta$  como valores válidos.
- Passo 2: Calculamos  $\phi$  e  $\nabla\phi$  (a matriz de derivadas parciais de  $\phi$  com relação aos parâmetro de  $\Pi$ ). Caso não exista a forma analítica para  $\nabla\phi$ , devemos avaliar  $\phi$  4 vezes (além da avaliação inicial) para calcular numericamente as derivadas de  $\phi$ .
- Passo 3: Atualizamos  $n, k, \tau$  e  $\theta$  segundo o algoritmo de Newton-Raphson.
- Passo 4: Se  $\phi$  é suficientemente próximo de  $\mathbb{E}_q[H_p]$  encerramos o algoritmo, do contrário voltamos ao passo 2.

Usando o método de Laplace para obter  $\phi$ , digamos, para encontrar  $\mathbb{E}_p[\alpha]$ , então temos que  $g(\alpha, \beta) = \alpha$  e devemos encontrar  $\alpha_1^*$ ,  $\beta_1^*$ ,  $\alpha_2^*$  e  $\beta_2^*$  que maximizam  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente. Infelizmente, não é possível obter uma forma analítica fechada para  $\alpha_1^*$  e  $\beta_1^*$ , de modo que seria necessário usar o método de Newton-Raphson para encontrar esses valores, porém isto está ocorrendo dentro de **uma** avaliação de **uma** das componentes de  $\phi$  para **uma** iteração do método de Newton-Raphson, ou seja, seria necessário usar o método de Newton-Raphson 20 vezes **para cada iteração** do método de Newton-Raphson principal (temos de calcular  $\phi$  5 vezes a cada iteração e em cada cálculo precisamos usar Newton-Raphson 4 vezes). Por conta disso, é inviável usar a abordagem acima para realizar a compatibilização das prioris. Se fosse possível obter  $\alpha_1^*$ ,  $\beta_1^*$  de forma analítica para todos os parâmetro, não haveria problema, porém, não sendo este o caso, se torna inviável a resolução do sistema.

Como alternativa ao método descrito acima, podemos usar o seguinte fato, se  $\Pi(n, k, \theta, \tau)$  pertence à família exponencial, então:

$$\mathbb{E}_p[H_p] = \nabla A(n, k, \theta, \tau),$$

onde  $A(n, k, \theta, \tau)$  é o logaritmo da constante de normalização de  $\Pi(n, k, \theta, \tau)$ , isto é:

$$\exp\{A(n, k, \theta, \tau)\} = \left( \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp \{ n\alpha \ln(\beta) - k \ln(\Gamma(\alpha)) + \theta\alpha - \tau\beta \} d\beta d\alpha \right)^{-1}.$$

Pelo método de Laplace, temos que:

$$\exp\{A(n, k, \theta, \tau)\} \approx \sqrt{2\pi v_2} \exp \{ L_2(\alpha_2^*, \beta_2^*) \},$$

sendo que, especificamente para este caso, por sorte, há forma analítica aproximada para  $\alpha_2^*, \beta_2^*$ . De fato, veja que  $L_2(\alpha, \beta) = n\alpha \ln(\beta) - k \ln(\Gamma(\alpha)) + \theta\alpha - \tau\beta$ , daí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} L_2(\alpha, \beta) &= n \ln(\beta) - k\psi(\alpha) + \theta \\ \frac{\partial}{\partial \beta} L_2(\alpha, \beta) &= n \frac{\alpha}{\beta} - \tau,\end{aligned}$$

onde  $\psi$  é a função *digamma*.

Da segunda equação obtemos que:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} L_2(\alpha^*, \beta^*) = 0 \iff n \frac{\alpha^*}{\beta^*} = \tau \iff \beta^* = \frac{n}{\tau} \alpha^*$$

Substituindo o valor de  $\beta^*$  na primeira equação e usando uma aproximação de primeira ordem para a função *digamma* obtemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha} L_2(\alpha^*, \beta^*) &= n \ln\left(\frac{n}{\tau}\right) + n \ln(\alpha^*) - k\psi(\alpha^*) + \theta, \\ &\approx n \ln\left(\frac{n}{\tau}\right) + n \ln(\alpha^*) - k \ln(\alpha^*) + \frac{k}{2\alpha^*} + \theta,\end{aligned}$$

Usando o Wolfram, encontramos que  $\frac{\partial}{\partial \alpha} L_2(\alpha^*, \beta^*) = 0$  se, e somente se:

$$\alpha^* = \frac{k}{2(k-n)W\left(\frac{k(2^{1-\frac{n}{k}} e^{\theta/k} \frac{n}{\tau}) - k/(k-n)}{k-n}\right)},$$

onde  $W$  é a função  $W$  de Lambert.

Veja que a solução proposta não está bem definida no caso  $n = k$ , ademais, como discutido anteriormente, a aproximação de primeira ordem para a função *digamma* deixa muito a desejar. Contudo, no caso onde  $n = k$  podemos usar uma aproximação de segunda ordem para a função *digamma*, pois, neste caso, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L_2(\alpha^*, \beta^*) \approx n \ln\left(\frac{n}{\tau}\right) + n \ln(\alpha^*) - k \ln(\alpha^*) + \frac{k}{2\alpha^*} + \frac{k}{12\alpha^{*2}} + \theta = n \ln\left(\frac{n}{\tau}\right) + \frac{n}{2\alpha^*} + \frac{k}{12\alpha^{*2}} + \theta,$$

daí:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L_2(\alpha^*, \beta^*) = 0 \iff \alpha^* = \frac{1}{3 + \sqrt{9 + 12 \left( \ln\left(\frac{\tau}{n}\right) - \frac{\theta}{n} \right)}}.$$

Observe que, na solução acima, se  $\ln\left(\frac{\tau}{n}\right) < \frac{\theta}{n} - \frac{3}{4}$ , então  $\alpha^*$  não está bem definido, o que é algo problemático. Dito isso, como visto anteriormente, já é necessário que  $\ln\left(\frac{\tau}{n}\right) > \frac{\theta}{n}$ , a restrição  $\ln\left(\frac{\tau}{n}\right) > \frac{\theta}{n} - \frac{3}{4}$  já está sendo satisfeita.

Vale destacar que, se  $\Pi$  é a posteriori depois de se observar uma amostra de tamanho  $m$  do modelo observacional ( $m \gg 0$ ), então  $\ln\left(\frac{\tau}{n}\right) \approx \ln\left(\frac{1}{m} \sum x_i\right)$  e  $\theta/n \approx \frac{1}{m} \sum \ln(x_i)$ , daí, como a função *log* é concava, vale que  $\ln\left(\frac{\tau}{n}\right) > \frac{\theta}{n}$ , ou seja,  $\alpha^*$  está bem definido, logo, após observar uma quantidade razoável de dados, estaremos livres do risco de que  $\alpha^*$  não existir.

Uma vez obtido  $\alpha^*$  e  $\beta^*$ , podemos obter uma aproximação para  $A(n, k, \theta, \tau)$  e então obter  $\mathbb{E}_p[H_p] = \nabla A(n, k, \theta, \tau)$ .

Como mencionado anteriormente, também podemos obter  $\mathbb{E}_p[H_p]$  por integração numérica e obter um resultado semelhante. A princípio, não seria viável obter  $\mathbb{E}_p[H_p]$  por integração numérica, pois a integral que devemos calcular é dupla, inviabilizando os métodos determinísticos que conheço (eles funcionam, mas ficam com o custo computacional irrazoável), ademais, não podemos usar integração por Monte Carlo, pois, para o método de Newton-Raphson, devemos calcular as derivadas de  $\mathbb{E}_p[H_p]$  e como não conhecemos a forma analítica de  $\mathbb{E}_p[H_p]$ , devemos recorrer a diferenciação numérica, porém o erro de Monte Carlo impede que isso seja feito (o ruído aleatório intrínscio ao método de Monte Carlo “ofusca” o valor das derivadas, sendo necessário usar amostras irrazoavelmente grandes para contornar esse problema).

Dito isso, durante a construção deste relatório, observamos que  $\mathbb{E}_p[H_p]$  pode ser escrito como uma integral que depende apenas de  $\alpha$ , o que viabiliza o uso de métodos numérico determinísticos para calcular  $\mathbb{E}_p[H_p]$  (especificamente, usamos Quadratura Gaussiana, que é o método *default* da função *integrate* do *R*), usando essa abordagem obtemos um resultado parecido com o resultado usando a aproximação de Laplace, porém, acredito que o uso de Quadratura Gaussiana seja mais adequado, pois evita o uso de aproximações, gerando assim valores que são numericamente iguais ao verdadeiro.

Vale destacar que, apesar da abordagem usando o método de Laplace não ser a que recomendo, acredito que o desenvolvimento dessa abordagem foi útil para dar alguns *insights* que não obteríamos se tivéssemos feito uso de integração numérica desde o início.

Isso concluí a análise sobre o uso da aproximação de Laplace para calcular  $\mathbb{E}_p[H_p]$ . Resolvido esta questão, resta apenas usar o algoritmo de Newton-Raphson para resolver o sistema  $\mathbb{E}_p[H_p] = \mathbb{E}_q[H_p]$ .

Como mencionado anteriormente, há certas escolhas de parâmetros para a distribuição conjugada para as quais  $\Pi$  não é própria, sendo que não conseguimos uma forma de garantir que o algoritmo de Newton-Raphson não passe por parâmetros inadequados. Não bastasse isso, também não conseguimos garantir que o sistema sequer tenha solução.

Tentando aplicar o a metodologia em dados simulados, independente da inicialização do modelo, sempre há alguma iteração onde o algoritmo de Newton-Raphson tem problemas. Ademais também reparamos que há uma distorção considerável dos dados após a compatibilização das priors, de modo que tivemos problemas mesmo nas ocasiões em que o algoritmo de Newton-Raphson de fato convergiu.

Por último, apresentarei na próxima sessão uma abordagem alternativa que permite simplificar a resolução do sistema e obter forma analítica aproximada para  $\mathbb{E}_p[H_p]$ .

## Proposta alternativa: Aproximação da distribuição marginal de $\alpha$

Lembremos que, se  $\alpha, \beta \sim \Pi(n, k, \tau, \theta)$ , então  $\beta|\alpha \sim \mathcal{G}(n\alpha + 1, \tau)$  e:

$$f(\alpha) \propto \frac{\Gamma(n\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)^k} \exp\{(\theta - n \ln(\tau))\alpha\}.$$

Ademais, a fórmula de Stirling nos diz que:

$$\Gamma(x + 1) \approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

Usando essa aproximação na densidade de  $\alpha$  obtemos que:



$$\begin{aligned}
f(\alpha) &\propto \frac{\Gamma(n\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)^k} \exp\{(\theta - n \ln(\tau))\alpha\} \\
&= \frac{\Gamma(n\alpha + 1)}{\alpha^{-k} \Gamma(\alpha + 1)^k} \exp\{(\theta - n \ln(\tau))\alpha\} \\
&\approx \frac{\sqrt{2\pi n} \alpha^{\frac{1}{2}} n^{n\alpha} \alpha^{n\alpha} e^{-n\alpha}}{\sqrt{2\pi}^k \alpha^{-k} \alpha^{\frac{k}{2}} \alpha^{k\alpha} e^{-k\alpha}} \exp\{(\theta - n \ln(\tau))\alpha\} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}} \alpha^{\frac{1}{2} + \frac{k}{2}} \alpha^{(n-k)\alpha} e^{-(n-k)\alpha} \exp\{(\theta - n \ln(\tau/n))\alpha\}.
\end{aligned}$$

Até aqui a equação acima não é particularmente útil, porém, se assumirmos  $n = k$ , obtemos:

$$f(\alpha) \propto \alpha^{\frac{1}{2} + \frac{n}{2}} \exp\{(\theta - n \ln(\tau/n))\alpha\}.$$

Ao olhar com carinho, podemos reparar que  $\alpha$  tem distribuição aproximada  $\mathcal{G}(\frac{n+3}{2}, n \ln(\tau/n) - \theta)$  (e esta é uma boa aproximação). Com essa informação, temos que:

$$\mathbb{E}_p[\alpha] \approx \frac{n+3}{2(n \ln(\tau/n) - \theta)}$$

O que pode ser usado para resolver mais uma das equações do sistema  $\mathbb{E}_p[H_p] = \mathbb{E}_q[H_p]$  sem recorrer a métodos numéricos.

Para obter solução analítica para todo o sistema resta apenas calcular um valor esperado, uma vez que, ao supor  $n = k$  reduzimos o sistema para 3 equações, das quais temos solução analítica para duas. Se conseguirmos resolver a última de forma analítica, podemos conseguir uma forma garantida de fazer a compatibilização das prioris sem depender de métodos iterativos.

O valor esperado que resta calcular é  $\mathbb{E}_p[\alpha \ln(\beta) - \ln(\Gamma(\alpha))] = \mathbb{E}_p[\alpha \psi(n\alpha + 1) - \ln(\tau)\alpha - \ln(\Gamma(\alpha))]$  (note que, ao supor  $n = k$ ,  $H_p$  se tornou outro vetor). Usando que:

$$\begin{aligned}
\psi(n\alpha + 1) &\approx \psi(n\alpha) \approx \ln(n\alpha) - \frac{1}{2n\alpha} - \frac{1}{12n^2\alpha^2} \\
\ln(\Gamma(\alpha)) &\approx \alpha \ln(\alpha) - \frac{1}{2} \ln(\alpha) + \frac{1}{12\alpha},
\end{aligned}$$

podemos obter a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned}
\alpha \psi(n\alpha + 1) - \ln(\tau)\alpha - \ln(\Gamma(\alpha)) &\approx \alpha \ln(n\alpha) - \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2\alpha} - \alpha \ln(\alpha) + \frac{1}{2} \ln(\alpha) - \frac{1}{12\alpha} \\
&= \alpha \ln(n) - \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12} \right) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} \ln(\alpha).
\end{aligned}$$

Por último, considerando que  $\mathbb{E}_p[\frac{1}{\alpha}] \approx \frac{2(n \ln(\tau/n) - \theta)}{n+1}$  e  $\mathbb{E}_p[\ln(\alpha)] \approx \psi(\frac{n+3}{2}) - \ln(n \ln(\tau/n) - \theta)$  (pois  $\alpha$  tem distribuição aproximada  $\mathcal{G}(\frac{n+3}{2}, n \ln(\tau/n) - \theta)$ ), então:

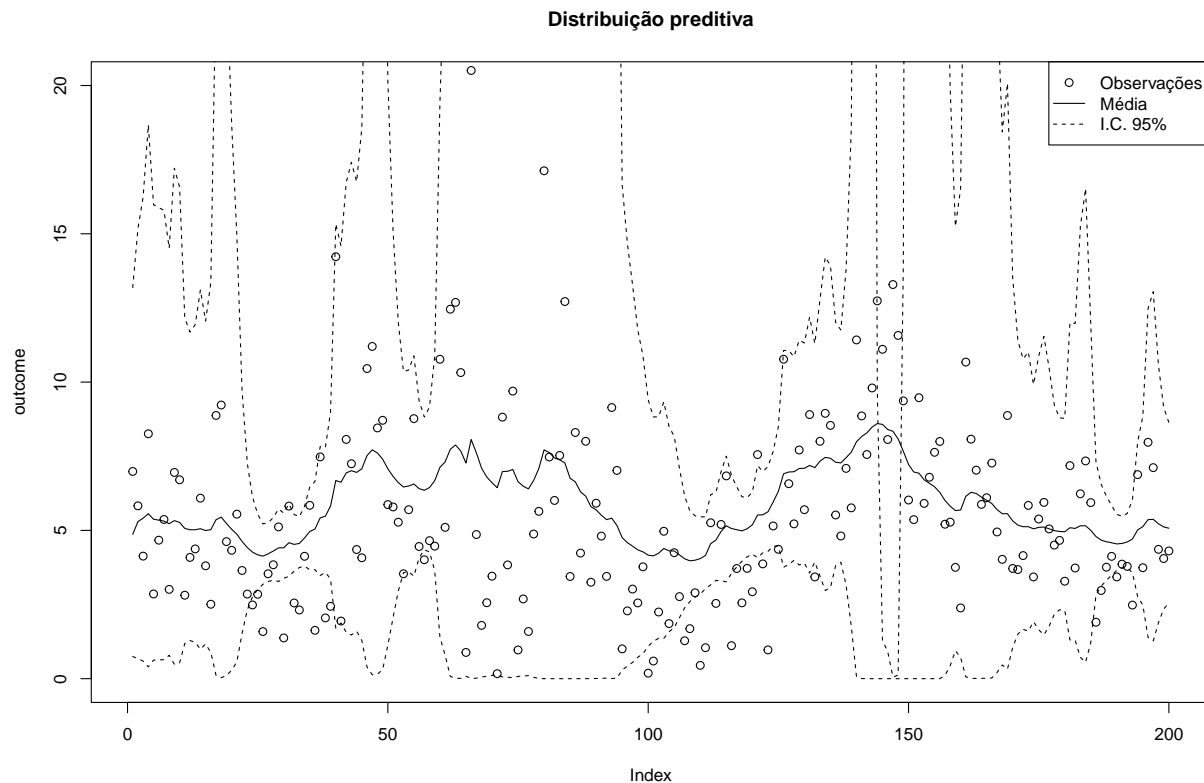
$$\mathbb{E}_p[\alpha \ln(\beta) - \ln(\Gamma(\alpha))] \approx \frac{n+3}{2(n \ln(\tau/n) - \theta)} \ln(n) - \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12} \right) \frac{2(n \ln(\tau/n) - \theta)}{n+1} + \frac{1}{2} \psi\left(\frac{n+3}{2}\right) - \ln(n \ln(\tau/n) - \theta).$$

Usando a equação acima, ainda temos de usar Newton-Raphson para resolver o sistema, porém com estas simplificações o algoritmo ficou muito mais rápido e converge sem dificuldades, possibilitando a

compatibilização das prioris. Vale destacar também que a aproximação usada é muito boa, de modo que não há perdas significativas na resolução do sistema (pelo menos nos casos em que testei).

Usando os resultados acima, foi possível fazer o ajuste do GDLM, prossigamos então a análise apresentando o resultado do ajuste do modelo usando as aproximações propostas.

Para testar a qualidade do ajuste, geramos uma amostra i.i.d. com 200 elementos da distribuição  $\mathcal{G}(1, 1)$  e usamos a abordagem do artigo k-paramétrico para estimar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da distribuição dos dados. O resultado pode ser observado a seguir:



Parâmetro phi

Valor real: 10.6420752370203

Média: 15.2945149123022

Mediana: 11.6910037352706

Quantil de 0.975: 48.883874825558

Quantil de 0.025: 2.79963662432153

Parâmetro phi

Valor real: 9.40817291509541

Média: 15.2945149123022

Mediana: 11.6910037352706

Quantil de 0.975: 48.883874825558

Quantil de 0.025: 2.79963662432153

Parâmetro phi

Valor real: 9.66577720682625

Média: 15.2945149123022

Mediana: 11.6910037352706

Quantil de 0.975: 48.883874825558

Quantil de 0.025: 2.79963662432153

Parâmetro phi

Valor real: 9.43175042479924  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 9.14513851307554  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 10.0390122033711  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 11.375474583094  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 10.1646160202539  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 12.1642563980039  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 14.2365842354453  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 15.0980515768024  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 14.3191118480243  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 13.5094613251377  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 12.9802175208892  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 12.8493828386635  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 13.3530040031902  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 11.0824113601114  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 11.7351103868046  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 11.3948716933057  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 9.308275246483  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 9.36989513725236  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 6.77271732228701  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.26681412523542  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.94612594800385  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.24481164134102  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.55876729949041  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.33677110950658  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.09012064572465  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.72995098582124  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.90751687075813  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 5.37087734409483  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.68443274110232  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.40745040301063  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.24704105873636  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.90745226065966  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.88832998702897  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.22089161687334  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.23572730564337  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.25415833667311  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 4.23057766194786  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.65248054643327  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.27747935241676  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.29830065038567  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.66147703399929  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.78679708013622  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.38137410307801  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.99665006341951  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.4641725807267  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 5.32607120328508  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.05301850802023  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.76850978005533  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.08539591433553  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.66183815692999  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.18443198569877  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.70549582905552  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.85421842448243  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.9574882282157  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi



Valor real: 2.3381653234682  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.30213268085274  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.27375505303628  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.26108608209847  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 1.99550267275025  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.03403902965008  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.52932725563237  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.54413416484128  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.6548276124931  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 2.32547181481465  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.33960517353218  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.14987819531601  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 1.90352501447387  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 1.85329240648316  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 1.87485198400149  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 1.75660230468895  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 1.65809050952203  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 1.58688614088599  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 1.66629901054181  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 1.90754999832869  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.06069828965211  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.32716340232431  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.56208341958041  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.78928252203235  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.9534565601688  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.22865351489678  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.12905446700429  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 3.35250318727499  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.6625227233003  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.29318368515057  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.92158194942819  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.4357151664538  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.88735609793565  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.92378098560982  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.58742905180294  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.06840900486548  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 2.99388187645193  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.39051043915374  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.71648650239927  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.13775602967082  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.18330391173167  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.70854631114951  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.40767021079086  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.93964807231384  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.72514906616173  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 2.47429681809069  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.36589538165969  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.15176940115585  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.62168050440338  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.00419471245481  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.05176091855447  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.67405856530518  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.79668872740816  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.20352860906711  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 3.24036877412505  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.87043562394239  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.92214005990333  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.94424752500388  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.22154886634289  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.22241836831841  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.15691544541476  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.64094612926813  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.35998117519627  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 3.70183559168873  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.72993665702768  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.47909637301785  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 2.93273375734699  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.22384625754934  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.43580130145966  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.58099411523248  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 3.36032222463058  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.21956661874291  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi



Valor real: 4.93737708954286  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.10370620143637  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.35955377392898  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.85159261897674  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.17680389269775  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.19671139921028  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.34499080591429  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 9.00776267545166  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 10.8716900206268  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 9.2425557011153  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 9.53722837021695  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 9.76579606584708  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 12.0627273825393  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 12.3126996511434  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 11.1475673083064  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 10.5913787834138  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 9.82724888597073  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 8.36173038106723  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 7.82052880777944  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.56346509535844  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 9.11098026320128  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 9.97104721018595  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 9.56143860840986  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 8.62602133958698  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.60234267588374  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.10566414808884  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.0338847923669  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 6.58187265008506  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.93143702314605  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.60046729047128  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.05788744378297  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.77152125916137  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.53953926261214  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.65870657013162  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 8.82477165772282  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 8.95938587419712  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 7.6917838061013  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.8181068335552  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 8.09952823330539  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.8993030211159  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 8.76961180157853  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 9.5722923490136  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 8.73474097438654  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 8.29374853178003  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 8.00635006183448  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 7.24618401233172  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.77751296232366  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.53653948248973  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.94294640773751  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 8.11553880286387  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 7.21486592685349  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.7510249888242  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.20830404367871  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.85469998454104  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 6.50969166163604  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.9955836213297  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.53242503317969  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.07859615437801  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 6.749891017086  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.25315397263608  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.86334568522566  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.33851790381636  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.66594437311736  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi

Valor real: 4.65311417907475  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.22195954073716  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.22248543080549  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 4.47276979192425  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.20523640846482  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.31830117549447  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.02426242283277  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro phi  
 Valor real: 5.15727254886035  
 Média: 15.2945149123022  
 Mediana: 11.6910037352706  
 Quantil de 0.975: 48.883874825558  
 Quantil de 0.025: 2.79963662432153  
 Parâmetro mu  
 Valor real: 5.38478193791682  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937



Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.82628790638706  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.99089474365256  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.56147905304844  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.47328808491154  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.65458614081207  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.01917720705705  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.04543077802415  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.82762718688467  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.96021590655587  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.5482061369913  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.86225942937811  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.54699817464169  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.31308454765094  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.15685532662218  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.85994121874151  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.71122567695789  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.80553683255182  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.55688433782027  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.48152533837448  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.90894003520361  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.66395208626829  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.55976852436045  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.6293777821014  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.57841273907668  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.63503634299483  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.51450198683603  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.99750844648504  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.76848268996301  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.90952249721153  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.04411850921086  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.39086819756435  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.35236730853781  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.23030010000359  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.34023536499344  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.10102521143766  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.61982516971959  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.78035674895679  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.03745869293012  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.72996961386862  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.03443262269069  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.98353274652907  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.80956465148372  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.97813768888267  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.4313252552731  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.11599308622317  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.96717892316874  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.89985334062161  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.02174383333823  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.3296984121946  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.37081035847541  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.07533818011663  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.96575106142818  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.36745354688502  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.54270466933142  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.77128178946765  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 9.01712614799209  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.8811998457415  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.63124222984801  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.36071652818637  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.3221864094373  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.94311543045781  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.30151352000064  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.12611545451107  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.9138559171316  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 10.1134105435448  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 9.1087801873511  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 9.51912470487633  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 11.0959278524767  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 9.40483101624838  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.92894253109097  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.16737895122529  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.04002025801744  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937



Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.74614945469798  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.19109870513758  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.93107135159954  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.47555946574976  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.66615191014381  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.95463881716242  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.67011005386021  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.56633337096357  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.55084218142373  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.54442876190301  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.03781744071714  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.95953398281002  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.04548710629918  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.82133351638119  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.19108337189845  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.92530618652915  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.0651755164332  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.2076428445361  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.27627963603129  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.91730673067465  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.99977872767944  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.60125298815249  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.01803922858268  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.50081048579065  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.96875151239444  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.67935341359845  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.87679899990548  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.72420669244803  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.90942819802504  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.58714244923246  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.37611511592104  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.24247411511604  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 1.97610447443246  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.14946279201469  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.0747797634738  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.13241625618396  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.15864819758534  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.45934169741839  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.69560904344157  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 2.98358021928426  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.07311607347721  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.86943040950584  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.90063761059618  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.75609881920609  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.39506565957949  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.85703319189868  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.22177516522571  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.95117644462211  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.49924398538756  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.52444774349275  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.8140783890308  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.48291815763429  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.7072946248554  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.57884303158182  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.39747374184092  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.15914763736722  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.35680269408626  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.42950176056743  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.33091523947126  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.42178846268312  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.94389914664281  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.13268132956393  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 10.5502431002294  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.6101500560344  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 8.61806951182525  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 10.3550740161527  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 10.7026494788299  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 10.6522215463208  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 9.82762153663953  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 10.341435423773  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 11.4172379502598  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 10.4938803755622  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937



Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 10.2787361555612  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 10.1187404856948  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 9.20580190772067  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.84725987837543  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.18992311339023  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.99487113987776  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.87204855047158  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.88067452948738  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.88251663661959  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.44744668928888  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.9307258682599  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.65737019679727  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.46106125803933  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.56546208787792  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.96001117946327  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.27540720600275  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.40084592211697  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.61112192745283  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.19720948349467  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 7.43974234905018  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.9175285788438  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.61224492037381  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.01722425648153  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.76083835766113  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.08829691908821  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.77696356593018  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.69259265512636  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

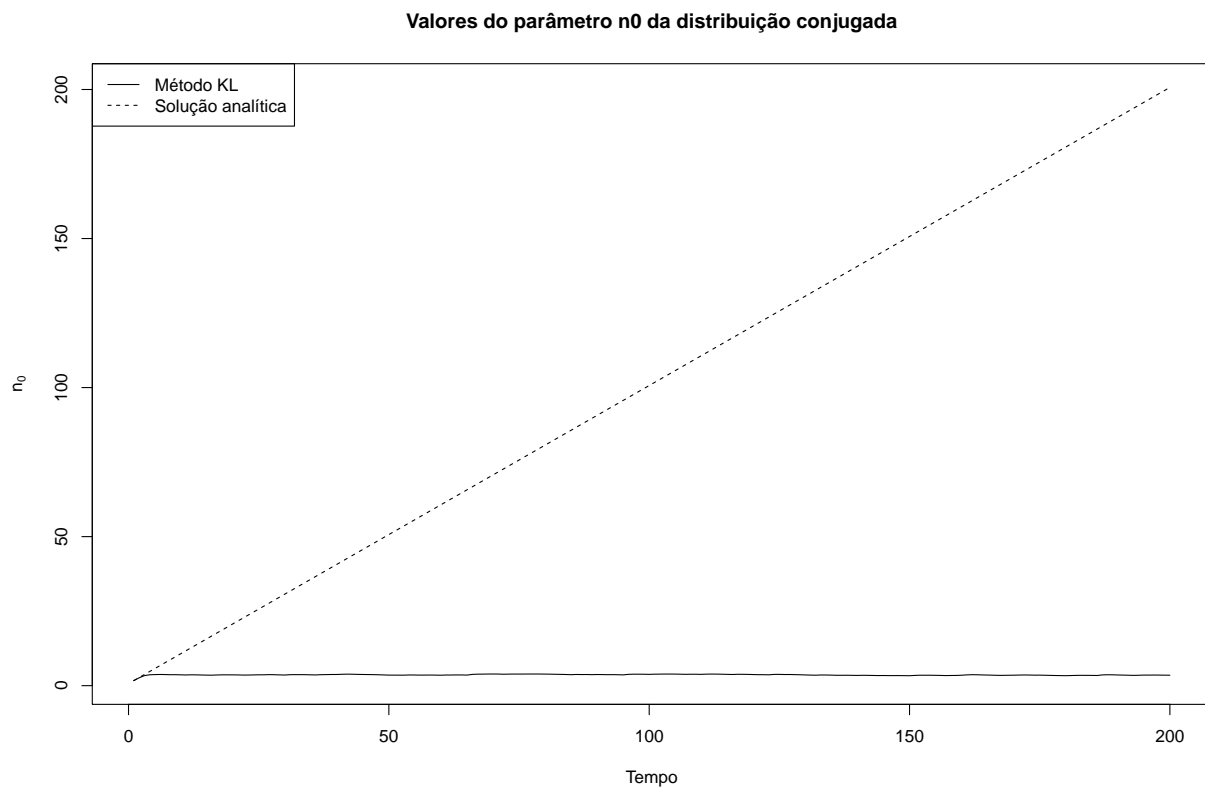
Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.17119984311298  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.42425775800705  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.01694398067984  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.83476806454486  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.50475875208434  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.97339245697857  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.7953051011353  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.59203834936553  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.70124798618934  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.84985897849824  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.15706916496691  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.43723923685393  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.58249756138902  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.42561783252606  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.13007211068917  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 3.81260708133217  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.0114619017731  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.38625986569374  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

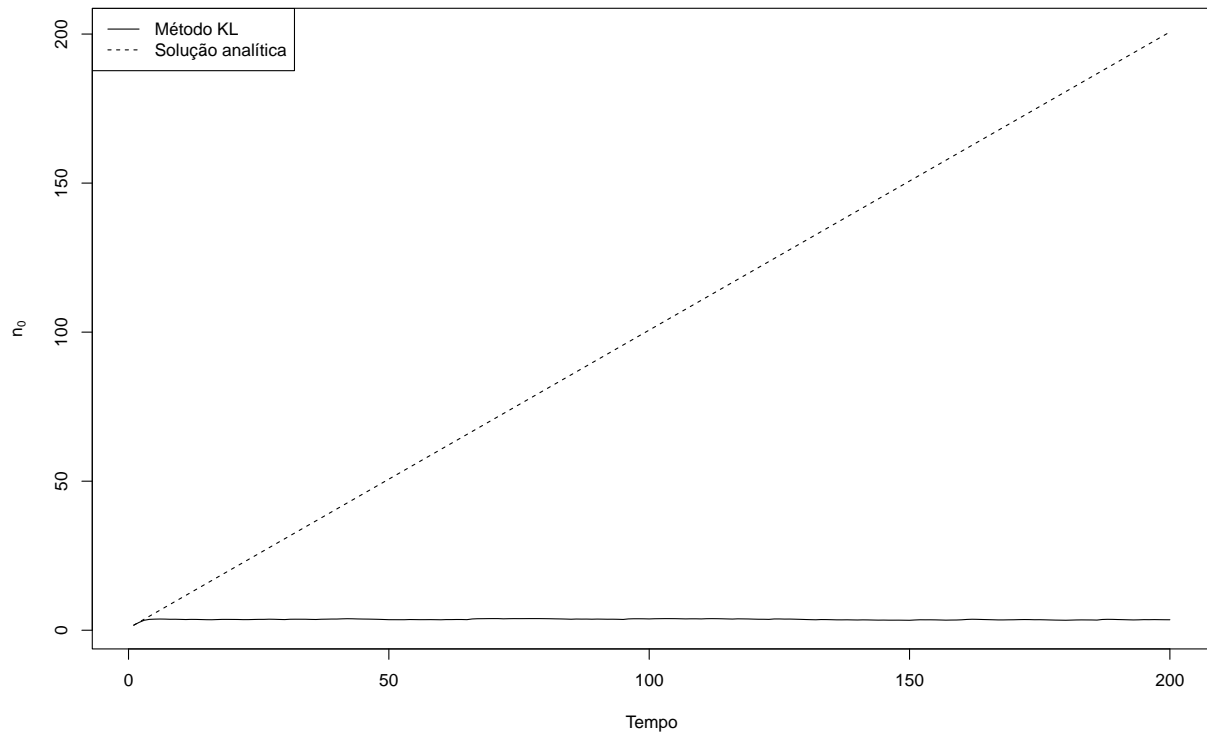
Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.38341472236534  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.74922381570254  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.77514428203695  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.59107043704504  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.60515180836408  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.52358167407538  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 4.50999938043971  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 5.79550764646824  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937  
 Parâmetro  $\mu$   
 Valor real: 6.54038835528552  
 Média: 5.07330337642994  
 Mediana: 5.07026851033013  
 Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
 Quantil de 0.025: 4.88549653883937

Parâmetro  $\mu$   
Valor real: 5.5282065160932  
Média: 5.07330337642994  
Mediana: 5.07026851033013  
Quantil de 0.975: 5.27122464224986  
Quantil de 0.025: 4.88549653883937

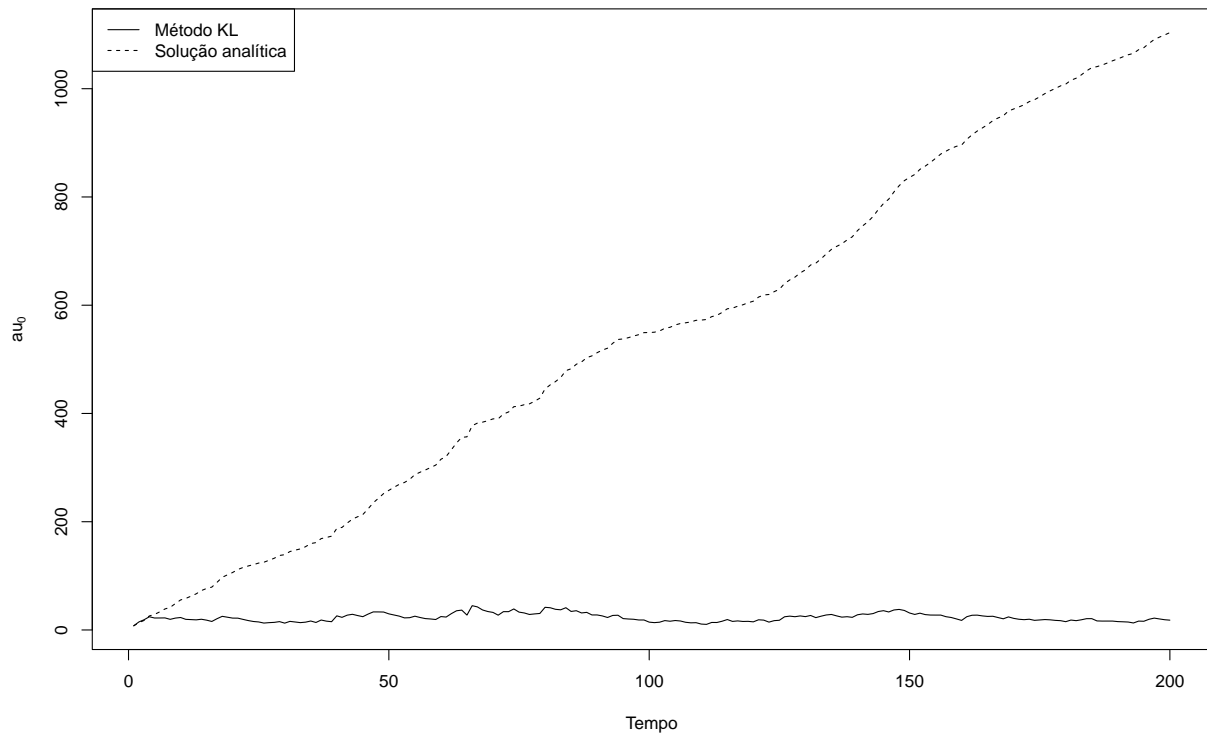
Podemos observar que a estimativa dos parâmetros está bem ruim. Afim de tentar entender a causa para essas estimativas ruins, apresentamos um gráfico com a estimação dos parâmetros a cada iteração:



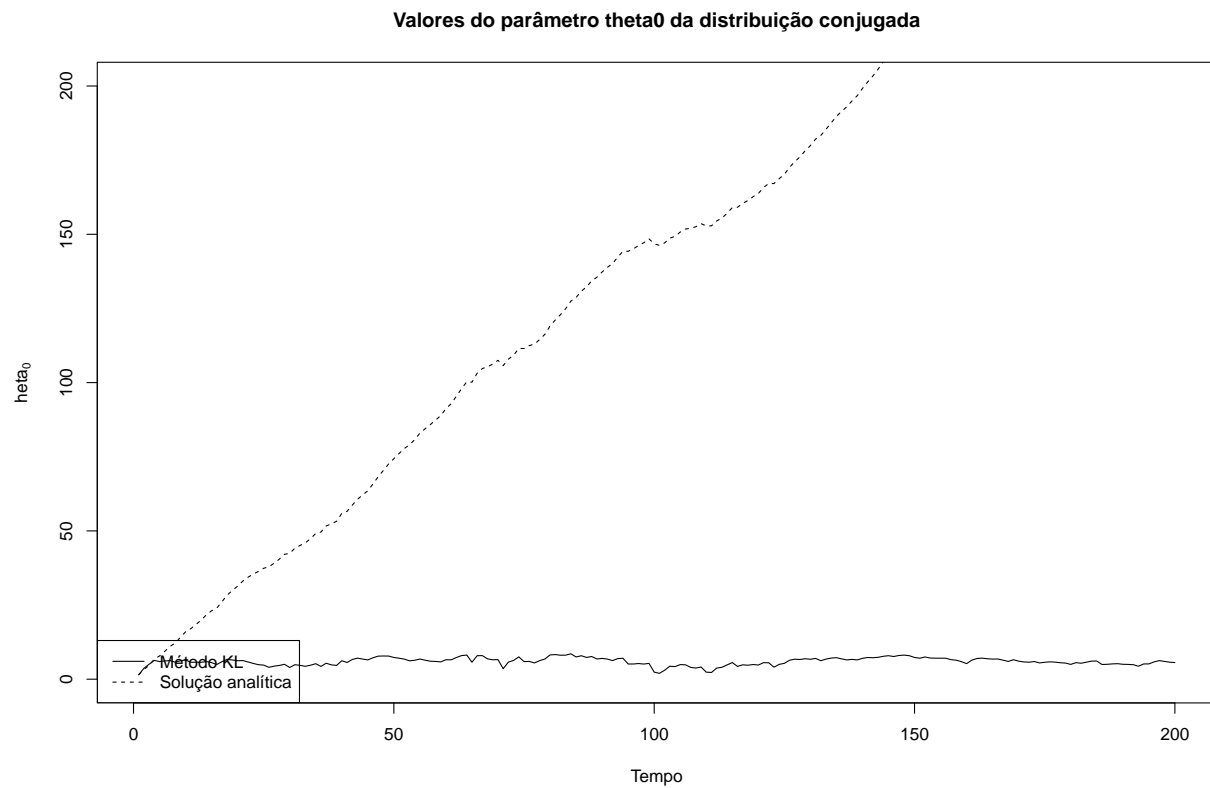
Valores do parâmetro  $k_0$  da distribuição conjugada



Valores do parâmetro  $\tau_0$  da distribuição conjugada







Claramente temos um problema na compatibilização das prioris, especificamente, parece que a informação adquirida após se observar o dado é perdida durante a compatibilização. Mais investigações serão feitas para tentar resolver esse problema.