

# Contas para o caso Gamma

Silvaneio Viera dos Santos Junior

## Contexto

Modelo observacional ( $\alpha$  conhecido):

$$y_t | \alpha, \mu \sim \mathcal{G} \left( \alpha, \frac{\alpha}{\mu} \right)$$

Priori conjugada:

$$\begin{aligned} \mu &\sim \mathcal{IG}(\alpha_0, \beta_0) \\ f(\mu) &= \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \mu^{-\alpha_0-1} \exp \left\{ -\frac{\beta}{\mu} \right\} \\ &= \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \exp \left\{ (-\alpha_0 - 1) \ln(\mu) - \frac{\beta}{\mu} \right\} \end{aligned}$$

Vetor de estatísticas suficientes:

$$H_1 = \left( \ln(\mu), \frac{1}{\mu} \right)'$$

Priori normal:

$$\ln(\mu) \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$$

Vetor de estatísticas suficientes:

$$H_2 = (\ln(\mu), \ln(\mu)^2)'$$

Observações:

- Se  $\ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , então  $\ln\left(\frac{1}{X}\right) \sim \mathcal{N}(-\mu, \sigma^2)$ .
- Se  $X \sim \mathcal{IG}(\alpha, \beta)$ , então  $\mathbb{E}[\ln(X)] = \mathbb{E}[-\ln(\frac{1}{X})] = -\psi(\alpha) + \ln(\beta)$ .
- $\psi$  é a função *digamma*.

## Primeiro sistema (priori normal para priori inversa-gamma)

Queremos encontrar  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  tais que:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[H_1] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}}[H_1]$$

Já sabemos que:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[H_1] = \left( -\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0), \frac{\alpha_0}{\beta_0} \right)'$$

Ademais, temos que  $\mathbb{E}_{\mathcal{N}}[\ln(\mu)] = \mu_0$  e, como  $\ln\left(\frac{1}{\mu}\right) \sim \mathcal{N}(-\mu_0, \sigma_0^2)$ , então  $\mathbb{E}_{\mathcal{N}}[\frac{1}{\mu}] = \exp\left\{-\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right\}$ .

O sistema obtido é:

$$\begin{aligned} -\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0) &= \mu_0 \\ \frac{\alpha_0}{\beta_0} &= \exp\left\{-\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{\alpha_0}{\exp\left\{-\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right\}} = \alpha_0 \exp\left\{\mu_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}\right\} \\ -\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0) &= -\psi(\alpha_0) + \ln(\alpha_0) + \mu_0 - \frac{\sigma_0^2}{2} = \mu_0 \end{aligned}$$

Portanto, precisamos que:

$$-\psi(\alpha_0) + \ln(\alpha_0) = \frac{\sigma_0^2}{2}.$$

Vamos fazer uma aproximação de segunda ordem para  $\psi$ , isto é, vamos usar  $\psi(x) \approx \ln(x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2}$ . Vale destacar que uma aproximação de segunda ordem é necessária, pois, para certos valores de  $\sigma_0$ , uma aproximação de primeira ordem não é boa o bastante, fazendo com que o ajuste do modelo fique ruim.

Voltando para o sistema, encontrar  $\alpha_0$  tal que:

$$-\ln(\alpha_0) + \frac{1}{2\alpha_0} + \frac{1}{12\alpha_0^2} + \ln(\alpha_0) = \frac{\sigma_0^2}{2}.$$

Chamemos  $h = \alpha_0$ , então podemos reescrever a equação acima como:

$$\frac{1}{6}h^2 + h - \sigma_0^2 = 0.$$

Por Bhaskara, obtemos que:

$$h = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{3}\sigma_0^2}}{\frac{1}{3}} = -3 \pm 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}\sigma_0^2}.$$

Como  $\alpha_0 > 0$ , devemos tomar sempre a raiz positiva.

Por fim obtemos a seguinte solução para o sistema original:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{-3 \pm 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}\sigma_0^2}} \\ \beta_0 &= \alpha_0 \exp\left\{\mu_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

## Atualização dos parâmetros

$$\begin{aligned} f(\mu|y_t) &\propto \mu^{-\alpha} \exp\left\{-\frac{\alpha y_t}{\mu}\right\} \mu^{-\alpha_0-1} \exp\left\{-\frac{\beta_0}{\mu}\right\} \\ &\propto \mu^{-(\alpha+\alpha_0)-1} \exp\left\{-\frac{\alpha y_t + \beta_0}{\mu}\right\} \end{aligned}$$

Assim:

$$\mu|y_t \sim \mathcal{IG}(\alpha + \alpha_0, \alpha y + \beta_0)$$

Se  $\alpha_0 = \alpha\alpha_0^*$  e  $\beta_0 = \alpha\beta_0^*$ , então a atualização fica da seguinte forma:

$$\mu|y_t \sim \mathcal{IG}(\alpha(\alpha_0^* + 1), \alpha(\beta_0^* + y_t))$$

## Segundo sistema (posteriori inversa-gamma para posteriori normal)

Queremos encontrar  $\mu_0$  e  $\sigma_0^2$  tais que:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[H_2] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}}[H_2]$$

Vale que:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}}[H_2] = (\mu_0, \sigma_0^2 + \mu_0^2)'$$

Veja que  $\mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[\ln(\mu)] = -\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0)$ , ademais:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[\ln(\mu)^2] &= \text{Var}_{\mathcal{IG}}[\ln(\mu)] + \mathbb{E}_{\mathcal{IG}}[\ln(\mu)]^2 \\ &= \psi'(\alpha_0) + (-\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0))^2 \end{aligned}$$

Com isto, obtemos a seguinte solução para o sistema:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= -\psi(\alpha_0) + \ln(\beta_0) \\ \sigma_0^2 &= \psi'(\alpha_0). \end{aligned}$$