Expresiones Algebraicas

CARRERAS ONLINE

Instituto
de Ciencias
Tecnológicas

Contenido

Lenguaje Algebraico

El lenguaje algebraico se basa en el uso de letras y relaciones matemáticas para generalizar diferentes situaciones.

Ejemplos:

- El perímetro **P** de un cuadrado de lado a $P = 4a$
- El área **A** de un cuadrado de lado a $A = a^2$
- El área **A** de un triángulo de base b y altura h $A = \frac{b \cdot h}{2}$

Cada una de las letras involucradas en las fórmulas anteriores es una variable; a cada variable se le pueden asignar diferentes valores. En general, una variable es cualquier letra involucrada en una expresión algebraica.

Expresiones	Símbolo
Más, suma, adición, agregar, añadir, aumentar	$+$
Menos, diferencia, disminución, exceso, resta	$-$
Multiplicación, veces, producto, por, factor	$\cdot$
División, cuociente, razón, es a	$/$
Igual, es, da, resulta, se obtiene, equivale a	$=$
Un número cualquiera	x
Antecesor de un número cualquiera	$x - 1$
Sucesor de un número cualquiera	$x + 1$

Cuadrado de un número cualquiera	x^2
Cubo de un número cualquiera	x^3
Doble de un número, duplo, dos veces, número par, múltiplo de dos	$2x$ ó $2 \cdot x$
Tres número consecutivo	$x-1\ ,\ x\ ,\ x+1$
Número impar cualquiera	$2x+1$

Ejercicios Resueltos

Expresemos en lenguaje algebraico:

1. El doble de un número, aumentado en la mitad del mismo número.

Aquí el 2número" no está determinado; asignémosle la variable x; nos queda:

$$2x + \frac{x}{2}$$

2. El doble de a, aumentado en b.

$$2a + b$$

3. El doble de a aumentado en b.

$$2(a + b)$$

4. El doble del cuadrado a.

$$2a^2$$

5. El cuadrado del doble de a.

$$(2a)^2$$

6. La cuarta parte del triple del cuadrado de b.

$$\frac{3b^2}{4}$$

7. El triple de la cuarta parte del cuadrado de b.

$$3\left(\frac{b^2}{4}\right)$$

8. El cuadrado de la cuarta parte del triple de b.

$$\left(\frac{3b}{4}\right)^2$$

9. La semisuma entre a y b.

$$\frac{a+b}{2}$$

10. El producto entre un número y su antecesor.

$$x(x-1)$$

Definición: se llama término (algebraico) a un conjunto de números y letras que se relacionan entre sí por medio de la multiplicación y/o división.

Ejemplo: $2a^2b, \frac{3a}{p}$ $, -\frac{5}{7}x^2y^2z$

El término algebraico consta de un **factor numérico**, un **factor literal** y un **grado**.

El grado es la suma de los exponentes de las letras que aparecen en el término.

Ejemplo: en el término $-\frac{12}{17}a^6b^4c^2$ el coeficiente numérico es $-\frac{12}{17}$; el factor literal es $a^6b^4c^2$ y el grado es 12 = (6+4+2).

Observación 1: Si el coeficiente numérico no está escrito, entonces, es 1.

Observación 2: si el grado no está escrito, entonces, es 1.

Se llama **expresión algebraica** a cualquier suma o resta de términos algebraicos. Si la expresión tiene dos términos, entonces, es un **binomio**; si tiene tres términos se llama **trinomio**; si tiene cuatro o más, hablamos de **polinomios**. (El término **polinomio** se puede usar en forma general para cualquier expresión algebraica).

Observación 3: Dado un polinomio P en una cierta variable x, su grado es el máximo de los exponentes de x en los distintos monomios del polinomio.Se puede omitir la variable si no hay posibilidad de confusión. Ejemplo:

$P(x) = 2x - 3x^3 + x^7 - 1$ Es un polinomio de grado 7.

La misma definición se aplica en este caso pero solo cumpliendo las siguientes condiciones: “el grado de un polinomio es el máximo de los grados de sus monomios.”

Ejemplo:

$Q(x, y, z) = 2x^2yz + 4x^3y^2 - z + 7x + 6y^2z^4 - 5$ Es un polinomio de grado 6, ya que $6y^2z^4$

Reducción de Términos Semejantes y uso de paréntesis

Definición: se llaman términos semejantes aquellos que tienen el mismo factor literal (y por consiguiente el mismo grado); sólo pueden diferir en el coeficiente numérico.

Ejemplo 1. Son términos semejantes:

$$a^2\ ;\ \ 2a^2;\ -3a^2;\ \ 0{,}5a^2;\ \ \frac{a^2}{4}$$

Ejemplo 2. No son términos semejantes:

$$a^2b \text{ y } ab^2 \quad ; \quad -a \text{ y } -a^2 \quad ; \quad 2ab \text{ y } ab^2$$

Vemos que en el ejemplo 1, el factor literal de todos ellos es a^2; por esta razón son todos semejantes.

En el ejemplo 2, en cambio, tenemos en los tres casos factores literales diferentes entre sí.

En una expresión algebraica **sólo** podemos reducir aquellos términos que son semejantes y esto se efectúa sumando (o restando) los coeficientes numéricos y manteniendo el factor literal.

El uso de paréntesis es frecuente en álgebra. Sirve para separar expresiones algebraicas y se elimina de acuerdo con las siguientes reglas:

1. si está precedido de un signo $+$ o no tiene signo escrito, se elimina sin hacer ningún cambio.

2. Si está precedido de un signo – se elimina después de cambiar **todos** los signos de los términos del interior del paréntesis. (Es importante hacer notar que al eliminar el paréntesis también se elimina el signo – que lo antecede).

Si una expresión algebraica contiene paréntesis, es conveniente eliminarlo antes de proceder a reducir los términos semejantes.

Ejemplos:

- $a + a^2 + a^3 + a^4$

  Aquí no es posible hacer ninguna reducción pues no existen términos semejantes.

- $3x^2y - \left(x^2y - 2xy^2\right) + 3x^2y$

  En este caso, al eliminar el paréntesis (y el signo que lo precede) debemos cambiar los signos de los términos del interior; nos queda:

  $$3x^2y - x^2y + 2xy^2 + 3x^2y$$
  $$\left(3x^2y - x^2y + 3x^2y\right) + 2xy^2 = 5x^2y + 2xy^2$$

- $$\begin{aligned} 2a + \{-x + a - 1\} - \{a + x - 3\} &= 2a - x + a \ -1 - a - x + 3 \\ &= 2a - 2x + 2 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} m^2 - \left\{-7mn + \left[-n^2 - \left(m^2 - 3mn + 2n^2\right)\right]\right\} &= m^2 - \left\{-7mn + \left[\ -n^2 - m^2 + 3mn - 2n^2\ \right]\ \right\} \\ &= m^2 - \left\{-7mn \quad -n^2 - m^2 + 3mn - 2n^2\right\} \\ &= m^2 + 7mn + n^2 + m^2 - 3mn + 2n^2 \\ &= 2m^2 + 4mn + 3n^2 \end{aligned}$$

Observación: Si en una expresión algebraica existen paréntesis dentro de otros, se empiezan a eliminar desde el más interior.

Multiplicación Algebraica

Para multiplicar expresiones algebraicas, debes observar los siguientes pasos:

1. Multiplicar los signos (ley de los signos para la multiplicación)
2. Multiplicar los coeficientes numéricos.
3. Multiplicar las letras (multiplicación de potencias de igual base).

Multiplicación de potencias.

La expresión a^n se llama potencia de base "a" y exponente "n". Se cumple:

$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$
$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$
$\boldsymbol{a^0 = 1 \qquad con\ a \neq 0}$
$\boldsymbol{(ab)^n = a^n \cdot b^n}$

Multiplicación de 2 o más monomios.
Multiplicamos los coeficientes numéricos y los factores literales entre sí (hacemos uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación).

Multiplicación de un monomio por un polinomio.
Multiplicamos el monomio por cada término del polinomio (hacemos uso de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición).

Multiplicación de dos polinomios.
Multiplicamos cada término del primer polinomio por cada término del segundo. Siempre que sea posible, es necesario reducir términos semejantes.

Ejemplos

Monomios por Monomios	Monomios por Polinomios	Polinomios por Polinomios
$(-4a^5b^4)\cdot(12ab^2)= \boxed{-48\,a^6b^6}$	$7a^4b \cdot (2a^3 - ab + 5b^3) = \boxed{14a^7b - 7a^5b^2 + 35a^4b^4}$	$(2a-3b)(3a-7b)=$ $6a^2-14ab-9ab+21b^2=$ $\boxed{6a^2-23ab+21b^2}$
$(6m^5n^{-3}p^{-4})\cdot(5mn^{-1}p^2)= \boxed{30m^6n^{-4}p^{-2}}$ $\left(\frac{3}{4}a^4b\right)\cdot\left(\frac{2}{3}ab^3\right)=\boxed{\frac{1}{2}a^5b^4}$	$(ax+by-cz)\cdot(-xy)= \boxed{-ax^2y-bxy^2+cxyz}$ $\left(-\frac{2}{5}m^{2a-3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}m^{a-1}+\frac{5}{2}m^{5a}\right)=$ $\boxed{\frac{1}{2}m^{3a-4}-m^{7a-3}}$	$(x-2)(x^2+2x+4)=$ $x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8=$ $\boxed{x^3-8}$

Productos Notables

Dentro de la multiplicación algebraica existen algunos productos que pueden ser desarrollados en forma directa, es decir, sin multiplicar término a término primero, y luego reducir. Éstos son:

Cuadrado de un binomio.

El desarrollo de este producto corresponde al cuadrado del primer término, más (o menos) el doble del producto del primer término por el segundo y más el cuadrado del segundo, es decir

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Suma por su diferencia.

Es igual a la diferencia de los cuadrados de los términos, es decir:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Producto de binomios con un término común.

Es el cuadrado del término común más el producto del término común por la suma de los términos no comunes y más el producto de los términos no comunes, o sea:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + x \cdot (a+b) + ab$$

Cubo de un binomio.

Corresponde al cubo del primer término, más (o menos) el triple del cuadrado del primer término multiplicado por el segundo, más el triple del primer término multiplicado por el cuadrad del segundo y más (o menos) el cubo del segundo. Así:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Ejercicios Resueltos

1. $(2+x)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + x^2 = 4 + 4x + x^2$

2. $(2x-y)(2x+y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2$

3. $(2a+3)(2a-7) = (2a)^2 + (3-7) \cdot 2a + 3 \cdot -7$

$$= 4a^2 - 4 \cdot 2a - 21 = 4a^2 - 8a - 21$$

4. $(2t-r)^3 = (2t)^3 - 3(2t)^2 \cdot r + 3(2t) \cdot r^2 - r^3$

$$= 8t^3 - 3 \cdot 4t^2 \cdot r + 6t \cdot r^2 - r^3 = 8t^3 - 12t^2r + 6tr^2 - r^2$$

Factorización

Factorizar una expresión algebraica (o suma de términos algebraicos) consiste en escribirla en forma de multiplicación. Veremos los siguientes casos:

Factor común (monomio y polinomio)

Aquí, todos los términos de la expresión presentan un factor común, que puede ser un monomio o un polinomio, por el cual se factoriza, es decir, el término común es uno de los factores de la multiplicación. El otro se determina aplicando la multiplicación algebraica.

Ejemplos:

- Al factorizar la expresión $2a + 6a^2$ vemos que el término $2a$ está contenido en ambos términos del binomio que queremos factorizar; por lo tanto, $2a$ es el factor común y se escribe como:

  $$2a + 6a^2 = 2a(1 + 3a)$$

  El segundo factor se obtiene buscando los términos por los cuales hay que multiplicar el factor común $(2a)$ para obtener los términos de la expresión original.

- Expresión: $6xy^2 - 15x^2y + 21x^2y^2$ el coeficiente numérico contenido en los tres términos de la expresión es el tres y el factor literal es xy; por lo tanto, el factor común es $3xy$. Y escribimos:

  $$6xy^2 - 15x^2y + 21x^2y^2 = 3xy(2y - 5x + 7xy)$$

- Expresión:

  $$\frac{5a^6}{3b^2} - \frac{10a^2}{21b} - \frac{20a^3}{9b^4}$$

  El término o factor común de los numeradores es $5a^2$ y el de los denominadores es $3b$; por lo tanto, el factor común de la expresión es $\frac{5a^2}{3b}$ y escribimos:

  $$\frac{5a^6}{3b^2} - \frac{10a^2}{21b} - \frac{20a^3}{9b^4} = \frac{5a^2}{3b}\left(\frac{a^4}{b} - \frac{2}{7} - \frac{4a}{3b^3}\right)$$

- Expresión: $m(2a + b) - 3n(2a + b)$ aquí podemos considerar el paréntesis $(2a + b)$ como un solo término y podemos factorizar por él.

  $$m(2a + b) - 3n(2a + b) = (2a + b)(m - 3n)$$

- Expresión: $a(p-q)-p+q$; haciendo una asociación adecuada:

$$a(p-q)-(p-q)=(p-q)(a-1)$$

Observación 1: el proceso está completo si no es posible seguir factorizando dentro de los paréntesis (o factores) obtenidos.

Observación 2: por la propiedad conmutativa de la multiplicación no importa el orden en que se entregue el resultado.

Factor común compuesto

Muchas veces, no todos los términos de una expresión algebraica contienen un factor común, pero haciendo una adecuada agrupación de ellos podemos encontrar factores comunes de cada grupo. Veremos, con ejemplos, cómo procederemos en estos casos.

Ejemplos:

- Expresión: $ac+ad+bc+bd$

$$ac+ad+bc+bd=(ac+ad)+(bc+bd)$$

$$=a(c+d)+b(c+d)$$

Ahora nos queda $(c+d)$ como factor común, por lo tanto, la expresión original queda factorizada como sigue:

$$=a(c+d)+b(c+d)$$
$$=(c+d)(a+b)$$

- Expresión: $ax+bx+cx-ay-by-cy$

$$ax+bx+cx-ay-by-cy=(ax-ay)+(bx-by)+(cx-cy)$$
$$=a(x-y)+b(x-y)+c(x-y)$$
$$=(a+b+c)(x-y)$$

- Expresión: $ax+bx+cx+ay+by+cy-az-bz-cz$

$ax+bx+cx+ay+by+cy-az-bz-cz=$

$$=(ax+bx+cx)+(ay+by+cy)-(az+bz+cz)$$
$$=x(a+b+c)+y(a+b+c)-z(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(x+y-z)$$

Observación: la forma de asociar no es única, pero la factorización sí lo es.

Diferencia de cuadrados

Recordemos que el producto de una suma de dos términos por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de ambos términos.

Ejemplos:

- Expresión: $a^2 - b^2$
  Observamos que a^2 y b^2 son los cuadrados de a y b, respectivamente. Así:
  $$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

- Expresión: $9m^2 - 16p^2$
  $$9m^2 - 16p^2 = (3m+4p)(3m-4p)$$

- Expresión: $\frac{1}{a^2} - \frac{25}{4b^2}$
  $$\frac{1}{a^2} - \frac{25}{4b^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{5}{2b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{5}{2b}\right)$$

- Expresión: $6a^2 - 24m^4$
  $$\begin{aligned} 6a^2 - 24m^4 &= 6(a^2 - 4m^4) \\ &= 6(a - 2m^2)(a + 2m^2) \end{aligned}$$

Observación: No es importante el orden en que uno presente los factores, puesto que la multiplicación es conmutativa, es decir:

$$(a+b)(a-b)=(a-b)(a+b)$$

Sumas o diferencias de cubos

Los factores de una diferencia de cubos son:

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

Los factores de una suma de cubos son:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

Ejemplos:

- Expresión: a^3-8

$$a^3-8=(a-2)(a^2+2a+4)$$

- Expresión: x^3+27

$$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$$

- Expresión: $27a^3-125b^3$

$$27a^3-125b^3=(3a-5b)(9a^2+15ab+25b^2)$$

- Expresión: a^6-b^6

$$\begin{aligned}a^6-b^6&=(a^3+b^3)(a^3-b^3)\\&=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

Ecuaciones

Definición: Se llama ecuación a una igualdad que presenta incógnitas y que es verdadera sólo para algunos valores de la incógnita.

Ejemplos:

$$2x - 5 = 3$$
$$4x + 2y - 1 = 0$$
$$5x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$ax - by = 3 - ab$$
$$2x^3 - 1 = x^2 + 2$$

Observaciones:

i. La expresión de la izquierda del signo igual se denomina **primer miembro** y la del lado derecho se llama **segundo miembro**.
ii. Una ecuación puede tener una o más incógnitas.
iii. Se llama **grado** de una ecuación al grado del término que presenta el grado más alto, después que se hayan reducido los términos semejantes.
iv. Se llama raíz o solución

Ejemplos:

$2x - 1 = 5$	Es ecuación de primer grado.
$x^2 - x = 7 + x$	Es ecuación de segundo grado.
$x^4 - x + 2 = 0$	Es ecuación de cuarto grado.
$2xy + 5 - 3x^2 + 2y = 0$	Es ecuación de segundo grado.
$x^2 + 5x - 1 = (x - 2)^2$	Es ecuación de primer grado.

Resolver una ecuación significa encontrar el o los valores de la o las variables (incógnitas) para que la igualdad sea verdadera.

Para resolver una ecuación debemos tener presente las siguientes propiedades de la igualdad:

i. Al sumar o restar la misma cantidad en ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.
ii. Al multiplicar o dividir por una misma cantidad distinta de 0 en ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.

iii. Al elevar a una potencia distinta de 0 ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.

iv. Al extraer la misma raíz, en ambos miembros de una igualdad, la igualdad persiste.

Ecuaciones de Primer Grado

Ejemplos

- Resolver la ecuación $3x + 2 = 7$

  Debemos despejar x. Para ello restamos 2 en ambos miembros de la ecuación.

$$3x + 2 = 7 \qquad / -2$$
$$3x + 2 - 2 = 7 - 2$$

  Efectuamos las operaciones

$$3x = 5$$

  Dividimos ambos miembros por 3

$$3x = 5 \qquad / \div 3$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$$

  Efectuamos las operaciones

$$x = \frac{5}{3}$$

  Verificamos: reemplazamos en la ecuación original, el valor de x obtenido.

$$3x + 2 = 7 \qquad / \, x = \frac{5}{3}$$

$$3 \cdot \frac{5}{3} + 2 = 7$$
$$5 + 2 = 7$$
$$7 = 7$$

- Resolver la ecuación: $-9780t + 997560 = 0$

$$-9.780t + 997.560 = 0 \qquad / -997.560$$

$$-9.780t = -997.560 \qquad / \div -9.780$$

$$t = \frac{-997.560}{-9.780}$$

$$t = 102$$

- Resolver la ecuación: $-9.780t + 997.560 = 381.420$

$$-9.780t + 997.560 = 381.420 \qquad / -997.560$$

$$-9.780t = -616.140 \qquad / \div -9.780$$

$$t = \frac{-616.140}{-9.780}$$

$$t = 63$$

- Resolver la ecuación: $3(x + 6) - 6x$

$$3(x+6) - 6x = 0$$

$$3x + 18 - 6x = 0 \qquad / -18$$

$$-3x = -18 \qquad / \div -3$$

$$x = \frac{-18}{-3}$$

$$x = 6$$

- Resolver la ecuación: $\frac{500x}{x+12} = 512$

$$\frac{500x}{x+12} = 512 \qquad / \cdot (x+12)$$

$$500x = 512(x+12)$$

$$500x = 512x + 6.144 \qquad / -512x$$

$$500x - 512x = 6.144$$

$$-12x = 6.144 \qquad / \div -12$$

$$x = -512$$

- Resolver la ecuación: $4.500x + 200.000 = 2.500x + 250.000$

$$4.500x + 200.000 = 2.500x + 250.000 \qquad / -200.000$$

$$4.500x = 2.500x + 250.000 - 200.000 \qquad / -2.500x$$

$$4.500x - 2.500x = 50.000$$

$$2.000x = 50.000 \qquad / \div 2.000$$

$$x = \frac{50.000}{2.000}$$

$$x = 25$$

- La suma de tres números pares consecutivos es 102. Hallar los tres números.
  La expresión $2n$ representa un número par, el siguiente es $2n+2$ y el que sigue es $2n+4$.

  Como los tres números sumas 102 podemos decir que:

$$\begin{aligned} 2n+2n+2+2n+4&=102\\ 6n+6&=102\\ n&=\frac{96}{6}\\ n&=16 \end{aligned}$$

  Si $n=16$, entonces:

$$\begin{aligned} 2n&=32\\ 2n+2&=34\\ 2n+4&=36 \end{aligned}$$

  Los números pedidos son 32, 34 y 36.

- El perímetro de un rectángulo es de 40m. si el largo se aumenta 2m y el ancho se disminuye 2m, su área disminuye en 12m^2. Calcular sus dimensiones.

  El perímetro es 40 m, luego el semi-perímetro es 20 m. si llamamos x al largo, entonces, $20-x$ representa el ancho.
  Área del rectángulo $x(20-x)$
  El nuevo rectángulo tiene: Largo $(x+2)$, ancho $(20-x-2)$ y área $(x+2)(20-x-2)$.
  Pero el área disminuye en $12\ \mathrm{m}^2$, luego:

$$x(20-x)-(x+2)(20-x-2)=12$$

  Resolviendo la ecuación:

$$\begin{aligned} 20x-x^2-(x+2)(18-x)&=12\\ 20x-\cancel{x^2}-18x+\cancel{x^2}-36+2x&=12\\ 4x&=48\\ x&=12 \end{aligned}$$

  El largo es 12 m y el ancho es 8 m.

- La edad de Pedro es el doble de la edad de María. Si en cinco años más la suma de sus edades será 43 años, ¿qué edad tienen actualmente?

  En este tipo de problemas es adecuado hacer un cuadro en el tiempo.

	Actual	**5 años más**
Edad de María	x	$x+5$
Edad de pedro	$2x$	$2x+5$

  En cinco años más sus edades sumarán 43 años:

$$(x+5)+(2x+5)=43$$

  Resolviendo la ecuación:

$$3x+10=43$$
$$3x=33$$
$$x=11$$

  Actualmente María tiene 11 años y Pedro tiene 22 años.

- En un gallinero hay 5 pavos más que gallinas y 3 patos más que pavos. Si en total hay 49 aves, ¿cuántas gallinas, pavos y patos hay?

  Sea x el número de gallinas, entonces:

  $x+5$ Será el número de pavos y

  $x+5+3$ Será el número de patos.

  Como en total hay 49 aves podemos decir que:

$$x+x+5+x+5+3=49$$
$$3x+13=49$$
$$3x=36$$
$$x=12$$

  Respuesta: hay 12 gallinas, 17 pavos y 20 patos.

- La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 103. ¿Cuáles son los números?

  Sea x el menor de los números, por ende, el consecutivo será $(x+1)$.
  La diferencia de sus cuadrados es 103, al ser positiva esta diferencia, se extrae que se resta el mayor con el menor, entonces:

$$
\begin{aligned}
(x+1)^2 - x^2 &= 103 \\
x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - x^2 &= 103 \\
\cancel{x^2} + 2x + 1 - \cancel{x^2} &= 103 \\
2x &= 102 \\
x &= 51
\end{aligned}
$$

  Los números son 51 y 52.

Ecuaciones de Segundo Grado

La expresión $ax^2+bx+c=0$, donde a, b y c son números reales cualesquiera y $a \neq 0$, se llama ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado.

La solución de esta ecuación puede obtenerse por factorización o aplicando la fórmula general.

Solución de la ecuación cuadrática aplicando la fórmula general

A partir de la ecuación general de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ podemos obtener las soluciones x_1 y x_2 aplicando la fórmula:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

O bien resumiendo:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Observación: llamaremos $\Delta= b^2-4ac$, esto corresponde a la cantidad sub-radical de la fórmula, entonces, si

$\Delta> \mathbf{0}$	$\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$
$\Delta= \mathbf{0}$	$x_1 = x_2$
$\Delta< \mathbf{0}$	x_1 y x_2 son números complejos

Ejemplos

- Resolvamos la ecuación $x^2+3x-10=0$ aplicando la fórmula.
  Primero determinamos los coeficientes que son: $a=1\,; b=3$ y $c=-10$
  Y luego reemplazamos estos valores en la fórmula.

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot -10}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}$$

$$x=\frac{-3\pm 7}{2}$$

Tenemos:

$$x_1 = \frac{-3+7}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{-3-7}{2}$$

$$x_1 = 2 \qquad\qquad x_2 = -5$$

Los dos valores satisfacen la ecuación original $x^2 + 3x - 10 = 0$; es decir:

$$x_1 = 2 \qquad\qquad x_2 = -5$$

Reemplazando:

$$(2)^2 + 3\cdot(2) - 10 = 0 \qquad\qquad (-5)^2 + 3\cdot(-5) - 10 = 0$$

$$0 = 0 \qquad\qquad 0 = 0$$

- Resolver la ecuación $-a^2 + 800a = 120.000$

$$-a^2 + 800a = 120.000 \qquad / -120.000$$

$$-a^2 + 800a - 120.000 = 0$$

$$a = -1$$

$$b = 800$$

$$c = -120.000$$

$$a = \frac{-800 \pm \sqrt{(-800)^2 - 4\cdot -1\cdot -120.00}}{2\cdot -1} = \frac{-800 \pm 400}{-2}$$

$$a_1 = \frac{-800+400}{-2} = 200 \qquad ; \qquad a_2 = \frac{-800-400}{-2} = 600$$

- Resolver la ecuación $-500x+100x^2+250=-50$

$$-500x+100x^2+250=-50 \qquad /+50$$
$$-500x+100x^2+250+50=0$$
$$-500x+100x^2+300=0$$

$$a=100$$
$$b=-500$$
$$c=300$$

$$x=\frac{--500\pm\sqrt{(-500)^2-4\cdot100\cdot300}}{2\cdot100}=\frac{500\pm360,56}{200}$$
$$x_1=\frac{500+360,56}{200}=4,3028 \qquad ; \qquad x_2=\frac{500-360,56}{200}=0,6972$$

- Resolver la ecuación $(x-2)(x-4)=0$

$$(x-2)(x-4)=0$$
$$x^2-4x-2x+8=0$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$a=1$$
$$b=-6$$
$$c=8$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\frac{6\pm2}{2}$$
$$x_1=\frac{6+2}{2}=4 \qquad ; \qquad x_2=\frac{6-2}{2}=2$$

- Resolver la ecuación $\dfrac{T^2+1,5T}{100}=1,15$

$$\frac{T^2+1,5T}{100}=1,15 \qquad\qquad /\cdot 100$$

$$T^2+1,5T=115 \qquad\qquad /-115$$

$$T^2+1,5T-115=0$$

$$a=1$$
$$b=1,5$$
$$c=-115$$

$$T=\frac{-1,5\pm\sqrt{(1,5)^2-4\cdot 1\cdot -115}}{2\cdot 1}=\frac{-1,5\pm 21,5}{2}$$
$$T_1=\frac{-1,5+21,5}{2}=10 \qquad ; \qquad T_2=\frac{-1,5-21,5}{2}=-11,5$$

- Resolver la ecuación $-0,01t^2+0,02t+2,49=-0,13t+2,49$

$$-0,01t^2+0,02t+2,49=-0,13t+2,49 \qquad\qquad /+0,13t-2,49$$
$$-0,01t^2+0,02t+2,49+0,13t-2,49=0$$
$$-0,01t^2+0,15t=0$$
$$-0,01t^2+0,15t=0$$

$$a=-0,01$$
$$b=0,15$$
$$c=0$$

$$t=\frac{-0,15\pm\sqrt{(0,15)^2-4\cdot -0,01\cdot 0}}{2\cdot -0,01}=\frac{-0,15\pm 0,15}{-0,02}$$
$$t_1=\frac{-0,15+0,15}{-0,02}=0 \qquad ; \qquad t_2=\frac{-0,15-0,15}{-0,02}=15$$

Bibliografía

Baldor, A. (2001). *Álgebra.* Ciudad de Mexico: Publicaciones Cultural, S.A. .

Carreño, X., & Cruz, X. (2008). *Álgebra.* Santiago: McGRAW-Hill.

Cid Figueroa, E. (2009). *Matemática PSU.* Santiago: Editorial Cid.

Labbé Díaz, C. (2010). *Ensayo PSU, Matemática. 700 problemas resueltos.* Santiago: Editorial Catalonia.

Saiz, O., & Viktor, B. (2012). *Matemática 3° Medio.* Santiago: Ediciones Cal y Canto.

ciisa

CARRERAS ONLINE

ciisa

Instituto
de Ciencias
Tecnológicas