Instituto de Ciencias Tecnológicas

POTENCIAS Y RAÍCES

Contenido

Potencias

Potencias de exponente natural

Definimos: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n \text{ veces})$

La expresión a^n se llama potencia $n - ésima$ de a. Donde:

"a" Es la base de la potencia.

"n" Es el exponente de la potencia.

Potencias de exponente cero y exponente negativo

De las propiedades que estudiaremos más adelante se deduce que:

- $a^0 = 1$ para todo valor de "a". (con $a \neq 0$)
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^{-n}}$ para todo valor de a. (con $a \neq 0\,; n \in \mathbb{N}$)

Ejercicios Resueltos

1. Calculemos el valor de $(-2)^3$
Aplicando la definición tenemos:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

2. Calculemos el valor de -3^4
Observamos aquí que la base de la potencia es 3 (y no -3), expresándola en forma de producto nos queda:

$$-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$$

3. Calculemos $(-3)^4$
Aquí la base es (-3) y por lo tanto:

$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$

4. Calculemos 2^{-5}
Aplicando la definición (exponente negativo):

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{32}$$

5. Calculemos $\left(2\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{17}{4}\right)^5 \cdot (-3)^{-7}\right)^0$

Como el exponente es cero y la base es distinta de cero, aquí no es necesario hacer ningún cálculo. El valor es 1.

Propiedades de las Potencias

Multiplicación de potencias de igual base

Para Multiplicar potencias de igual base mantenemos la base y sumamos los exponentes, es decir:

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

División de potencias de igual base

En este caso, mantenemos la base y restamos los exponentes, es decir:

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

Elevación de potencia a potencia

Aquí debemos elevar la base a la multiplicación de los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{n \cdot m}$$

Multiplicación de potencias de igual exponente

Elevamos el producto de las bases al exponente común.

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

División de potencias de igual exponente

Elevamos el cociente de las bases al exponente común.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potencia de un producto

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Potencia de un cociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ecuaciones exponenciales

Son aquellas ecuaciones que presentan las variables en el exponente. Para resolverlas aplicamos la siguiente propiedad de potencias:

$$\boldsymbol{a^x = a^y \Leftrightarrow x = y} \text{, para todo } a,\ a \neq 0,\ a \neq 1$$

Si en una ecuación **no** resulta posible igualar las bases, la solución se obtiene aplicando **logaritmos**, tema que no abordaremos en este capítulo.

Ejercicios resueltos

1. Resolvamos la ecuación $2^x = 4$

Debemos expresar ambos miembros de la igualdad como potencias de la misma base; en este caso claramente la base es 2.

Así tenemos: $2^x = 4 \rightarrow 2^x = 2^2$

Y aplicando la propiedad indicada al comienzo obtenemos la solución $x = 2$.

2. Resolvamos la ecuación $3^{x+2} = 27$

$$3^{x+2} = 3^3 \rightarrow x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$$

3. Resolvamos la ecuación $16^x = 32$

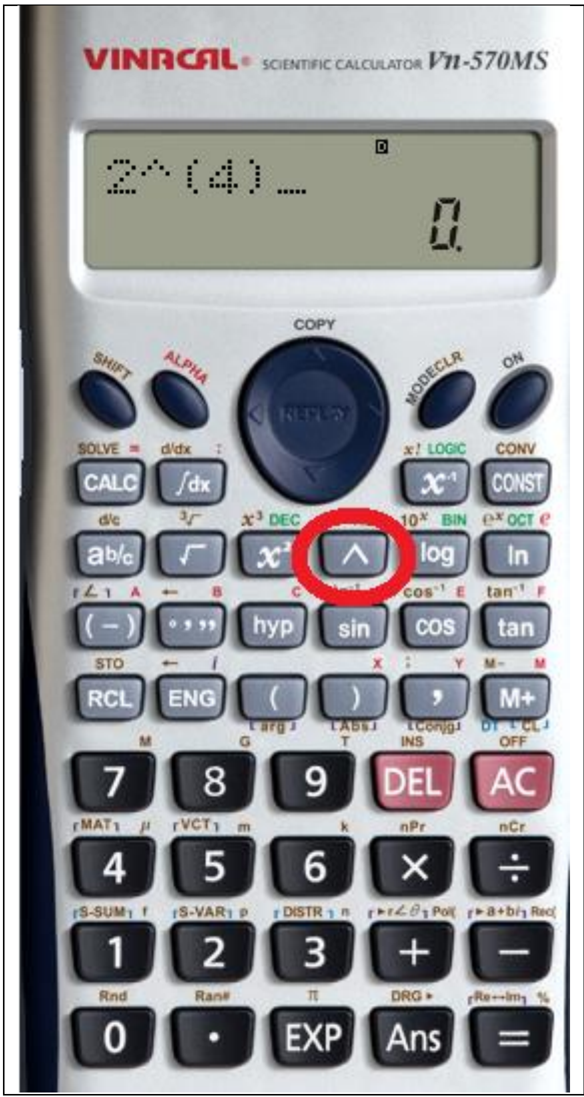
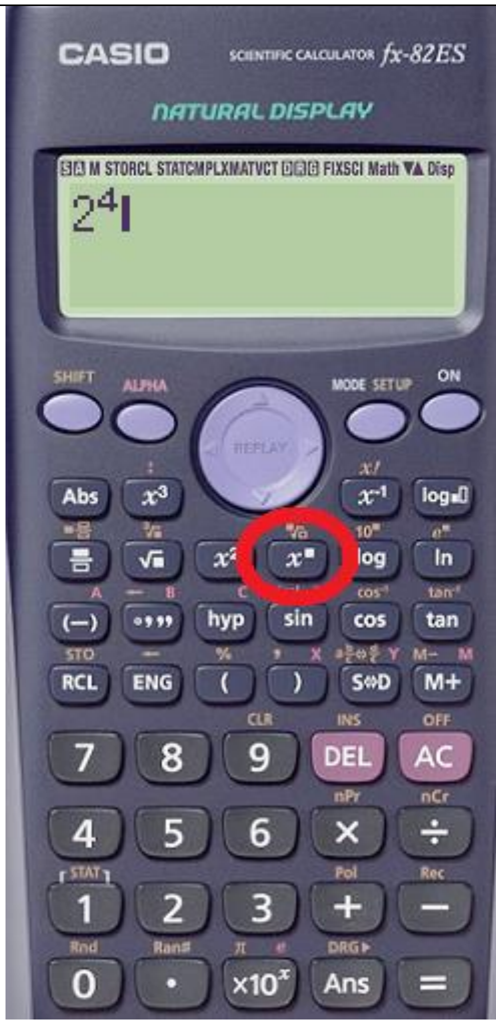
$$\begin{aligned} 16^x = 32 \rightarrow \left(2^4\right)^x = 2^5 \rightarrow 2^{4x} &= 2^5 \\ \rightarrow 4x &= 5 \\ \rightarrow \quad x &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

4. Resolvamos la ecuación $7^{x-3} = 1$

$$\begin{aligned} 7^{x-3} = 1 \rightarrow 7^{x-3} &= 7^0 \\ \rightarrow x - 3 &= 0 \\ \rightarrow \quad x &= 3 \end{aligned}$$

En calculadora, las potencias se ingresan de la siguiente manera:

La operación 2^4

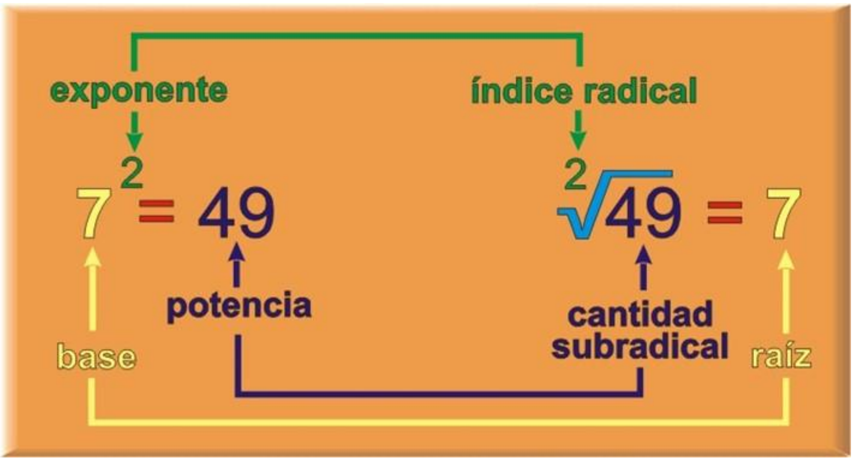
Raíces

Definición: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

"n" Es el índice de la raíz.

"a" Es la cantidad subradical.

Ejemplo:



Observaciones:

- Si $a > 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ representa un número real, es decir $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$.
- Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ representa un número complejo, conjunto que no estudiaremos en esta asignatura.
  Es decir, $a < 0$ y n es par $\rightarrow \sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$.
- Las operaciones definidas para las raíces verifican las propiedades que se cumplen en los números reales $(\mathbb{R})$.

Propiedades de las raíces

Potencia de exponente fraccionario

Toda potencia de exponente fraccionario se puede expresar como raíz cuyo índice es el denominador del exponente.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Multiplicación de raíces de igual índice

Multiplicamos las cantidades subradicales y conservamos el índice.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

División de raíces de igual índice

Dividimos las cantidades subradicales y conservamos el índice.

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$$

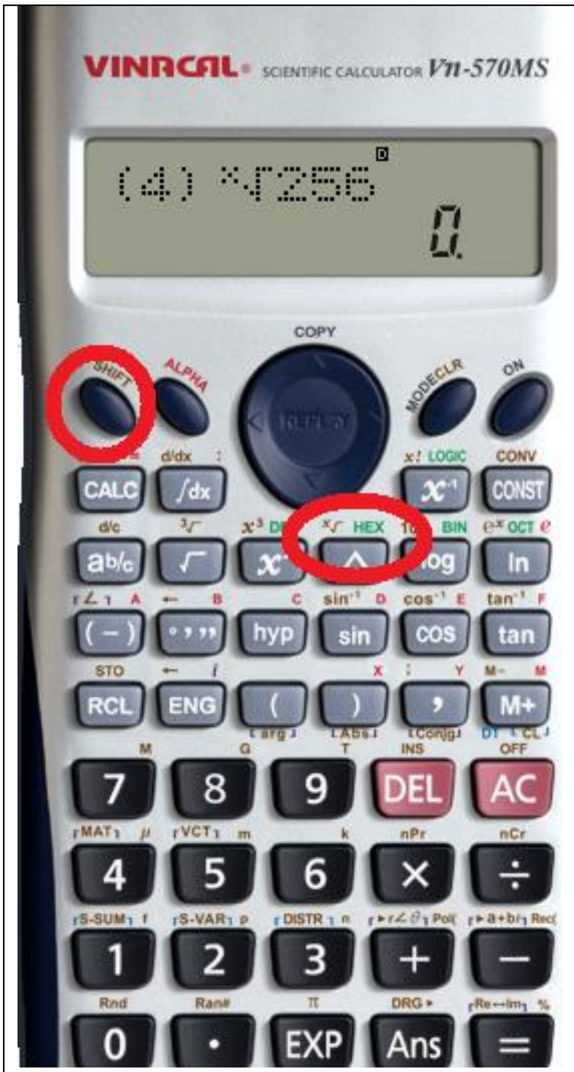
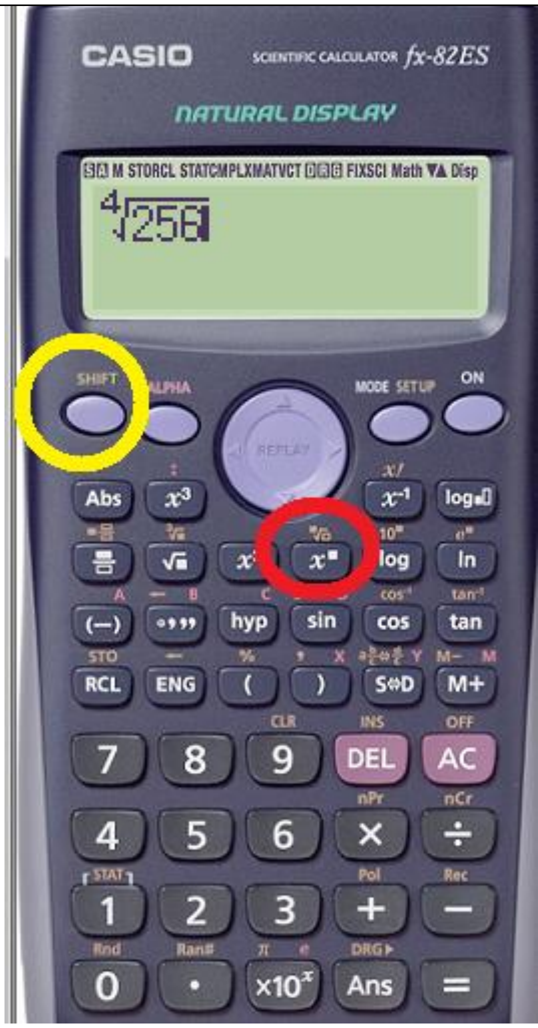
Raíz de una raíz

Conservamos la cantidad subradical y multiplicamos los índices.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

En calculadora para ingresar la operación $\sqrt[4]{256}$

Se debe presionar el botón SHIFT antes de presionar el botón de raíz.

Racionalización

Definición: el proceso de racionalización consiste en expresar una fracción cuyo denominador es un término irracional, es decir, tiene raíz irreductible, en otra fracción equivalente cuyo denominador es un término racional, es decir, no contiene raíz.

Técnicas de racionalización

Veremos aquí los casos más frecuentes de racionalización que son:

a) Denominador irracional monomio:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{p^r}} \quad , \ (r < n)$$

En este caso amplificamos la fracción por: $\sqrt[n]{p^{n-r}}$

Y obtenemos:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{p^r}} \cdot \frac{\sqrt[n]{p^{n-r}}}{\sqrt[n]{p^{n-r}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{p^{n-r}}}{\sqrt[n]{p^{r+n-r}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{p^{n-r}}}{\sqrt[n]{p^{\cancel{r}+n-\cancel{r}}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{p^{n-r}}}{\sqrt[\cancel{n}]{p^{\cancel{n}}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{p^{n-r}}}{p}$$

En resumen:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{p^r}} \cdot \frac{\sqrt[n]{p^{n-r}}}{\sqrt[n]{p^{n-r}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{p^{n-r}}}{p}$$

b) Denominador binomio (de índice 2):

$$\frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

En este caso la amplificación adecuada es por: $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$

Es decir, los mismos términos del binomio pero con la operación opuesta. De este modo obtenemos del producto la diferencia de cuadrados, con lo cual eliminamos las raíces:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\cancel{\sqrt{}}a\right)^{\cancel{2}} - \left(\cancel{\sqrt{}}b\right)^{\cancel{2}}} = \frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

En resumen:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{A\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

- **Observación 1**: se pueden combinar ambas técnicas en algunos casos.
- **Observación 2**: la segunda técnica se puede utilizar para casos de sumas o diferencias de cubos, haciendo una adecuada amplificación.

Ejercicios Resueltos

1. Racionalicemos la expresión: $\dfrac{a}{\sqrt[5]{b^2}}$

Amplificando por $\sqrt[5]{b^{5-2}} = \sqrt[5]{b^3}$

$$\frac{a}{\sqrt[5]{b^2}} \bullet \frac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^3}} = \frac{a\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^2 \cdot b^3}} = \frac{a\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^{2+3}}} = \frac{a\sqrt[5]{b^3}}{\cancel{\sqrt[5]{b^{5}}}} = \frac{a\sqrt[5]{b^3}}{b}$$

2. Racionalizar $\dfrac{a-b}{\sqrt[7]{(a-b)^3}}$

$$\frac{a-b}{\sqrt[7]{(a-b)^3}} \bullet \frac{\sqrt[7]{(a-b)^4}}{\sqrt[7]{(a-b)^4}} = \frac{\cancel{(a-b)}\sqrt[7]{(a-b)^4}}{\cancel{(a-b)}} = \sqrt[7]{(a-b)^4}$$

3. Racionalizar $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \bullet \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(x-y)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\cancel{\sqrt{x}}\right)^{\cancel{2}} - \left(\cancel{\sqrt{y}}\right)^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{(x-y)}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\cancel{(x-y)}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

4. Racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \bullet \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$$

Ahora amplificamos por $2-\sqrt{3}$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} \bullet \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{4-3} = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Ecuaciones Irracionales

Son aquellas ecuaciones que presentan la variable como cantidad subradical. Para resolverlas debemos elevar a la potencia adecuada tantas veces sea necesario hasta eliminar la raíz (o las raíces).

Ejercicios resueltos

1. Resolver $\sqrt{x+7}=5$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+7} &= 5 && /(\ )^2 \\
\left(\sqrt{x+7}\right)^2 &= 5^2 \\
x+7 &= 25 && /-7 \\
x &= 18
\end{aligned}
$$

2. Resolver $\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{3x+4}}}=2$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{3x+4}}} &= 2 && /(\ )^2 \\
1+\sqrt{5+\sqrt{3x+4}} &= 4 && /-1 \\
\sqrt{5+\sqrt{3x+4}} &= 3 && /(\ )^2 \\
5+\sqrt{3x+4} &= 9 && /-5 \\
\sqrt{3x+4} &= 4 && /(\ )^2 \\
3x+4 &= 16 && /-4 \\
3x &= 12 && /\bullet\frac{1}{3} \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

3. Resolver: $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2 \qquad /(\ )^2$$

$$\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right)^2=2^2$$

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2-2\bullet\sqrt{x+5}\bullet\sqrt{x-3}+\left(\sqrt{x-3}\right)^2=4$$

$$x+5-2\bullet\sqrt{(x+5)(x-3)}+x-3=4$$

$$2x+2=4+2\bullet\sqrt{(x+5)(x-3)}$$

$$2x-2=2\bullet\sqrt{(x+5)(x-3)} \qquad /\div 2$$

$$x-1=\sqrt{(x+5)(x-3)} \qquad /(\ )^2$$

$$(x-1)^2=\left(\sqrt{(x+5)(x-3)}\right)^2$$

$$x^2-2x+1=(x+5)(x-3)$$

$$x^2-2x+1=x^2+2x-15 \qquad /-x^2$$

$$-2x+1=2x-15$$

$$16=4x$$

$$4=x$$

Bibliografía

Baldor, A. (2001). *Álgebra.* Ciudad de Mexico: Publicaciones Cultural, S.A. .

Carreño, X., & Cruz, X. (2008). *Álgebra.* Santiago: McGRAW-Hill.

Cid Figueroa, E. (2009). *Matemática PSU.* Santiago: Editorial Cid.

Labbé Díaz, C. (2010). *Ensayo PSU, Matemática. 700 problemas resueltos.* Santiago: Editorial Catalonia.

Saiz, O., & Viktor, B. (2012). *Matemática 3° Medio.* Santiago: Ediciones Cal y Canto.

Zañartu, M., Darrigrandi, F., & Ramos, M. (2009). *Matemática 2° Medio.* Santiago: Santillana.

ciisa

Instituto
de Ciencias
Tecnológicas