TEORÍA DE CONJUNTOS

CARRERAS ONLINE

ciisa

Instituto
de Ciencias
Tecnológicas

Contenido

Conceptos Básicos

Una teoría matemática se fundamenta y se va construyendo a partir de esos fundamentos, encadenando los nuevos conocimientos o proposiciones que se basan en las anteriores. Es así como se parte de **términos no definidos** o **conceptos fundamentales**. Luego hay proposiciones que relacionan estos conceptos fundamentales que son tan evidentes que se aceptan como verdaderas. Estas proposiciones se denominan **axiomas** de la teoría. Siguiendo con la construcción, aparecen las proposiciones, cuya veracidad debe ser probada o demostrada. Son los llamados **teoremas**, que según su importancia se pueden denominar: *proposición, lema, corolario o teorema*.

En la teoría de conjuntos aceptamos como términos no definidos las ideas de "conjunto", "elemento" y "pertenencia"; son tres palabras que usamos, que entendemos, pero que no definimos.

Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas, sus elementos por letras minúsculas y se escriben entre corchetes.

$A = \{a, e, i, o, u\}$ $\qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ 8\}$

La relación de pertenencia se simboliza por $\in$ y la negación de ella es $\notin$.

Así $\quad a \in A$: Verdadero
$i \in B$: Falso
$3 \notin A$: Verdadero
$5 \notin B$: Falso

Los conjuntos se definen por **extensión** (nombrando todos sus elementos) o por **comprensión** (indicando la característica que poseen sus elementos y que no poseen los elementos que no son conjunto).

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\qquad B = \{x \,/\, x \text{ es dígito}\}$
$P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $\qquad Q = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x < 3\}$
A y *P* están definidos por extensión.
B y *Q* están definidos por comprensión.

Observación: El operador " / " se lee "tal que".

Conjunto Vacío: es el conjunto que no contiene elementos. En símbolo $\{ \quad \}$ o $\emptyset$.

Conjunto Universo: es el conjunto que contiene a todos los elementos. Se puede definir de acuerdo con el contexto en que se esté trabajando. Se denota por U.

Subconjunto: dado un conjunto no vacío A, se llama subconjunto de A a todo conjunto B tal que todo elemento de B está en A. Se anota $B \subset A$.

En símbolos:
$B \subset A \Leftrightarrow (\forall\, x \in B\,)\, x \in A$
El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.

Conjunto Potencia: se llama conjunto potencia de A y se denota $P(A)$ al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos del conjunto A.
$P(A) = \{B\ \ / B \subset A\}$
Ejemplo: si $A = \{1, 2, 3\}$
$P(A) = \big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\big\}$

Cardinalidad de un Conjunto: corresponde al número de elementos que el conjunto tiene:

$\#A$ Representa la cardinalidad de A.
En el ejemplo anterior $\#A = 3$ y $\#P(A) = 8$

En general, la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto dado es igual a 2 elevado a la cardinalidad del conjunto, es decir:

Si $\#A = n$ entonces $\#P(A) = 2^n$

Igualdad de Conjuntos: dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si tiene los mismos elementos. En símbolos:

$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x \in A), x \in B\ \wedge (\forall x \in B), x \in A$
En otras palabras y de acuerdo con la definición de subconjuntos:
$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

Observación: El operador "$\wedge$" se lee “y”; el operador " $\vee$ " se lee “o”.

Equivalencia de Conjuntos: dos conjuntos son equivalentes si y sólo si tienen el mismo número de elementos (igual cardinalidad). En símbolos:

$(A \sim B) \Leftrightarrow (\#A = \#B)$

Ejercicios Resueltos

1. Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

a) $\boldsymbol{B = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leq x \leq 5\}}$

b) $\boldsymbol{C = \{x / x \;\; es\ dígito\ del\ número\ 4.552.361\}}$

Solución:

a) $\boldsymbol{B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}}$

b) $\boldsymbol{C = \{4, 5, 2, 3, 6, 1\}}$

2. Escribir por comprensión los siguientes conjuntos:

a) $\boldsymbol{A = \{2, 4, 6, 8\}}$

b) $\boldsymbol{B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}}$

Solución:

a) $\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{N} / x\, es\, par \wedge x < 10\}}$

b) $\boldsymbol{B = \left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq n \leq 7\right\}}$

3. Hay conjuntos que no se pueden escribir por extensión porque contienen infinitos elementos. Ejemplo:

$$\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 5\}}$$

Este tipo de conjuntos se puede escribir como intervalo y graficar como subconjunto de $\mathbb{R}$ en la recta numérica.

-Graficar los siguientes conjuntos en la recta numérica y escribirlos como intervalo.

a) $\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}}$

b) $\boldsymbol{B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -5\}}$

c) $\boldsymbol{C = \{x \in \mathbb{R} / x < 8\}}$

d) $\boldsymbol{D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1\}}$

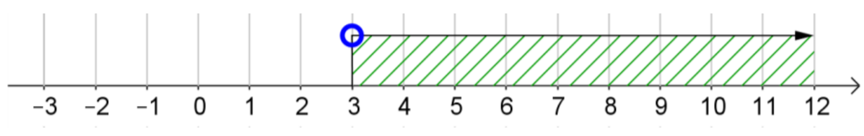
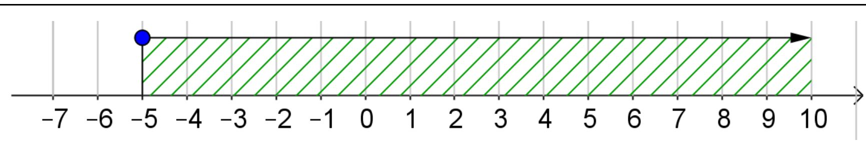
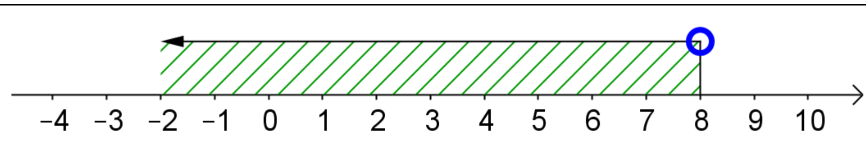
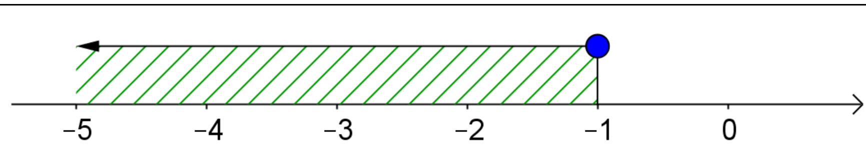
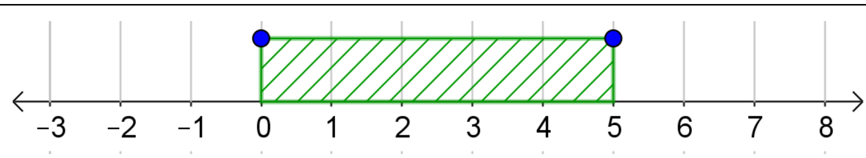
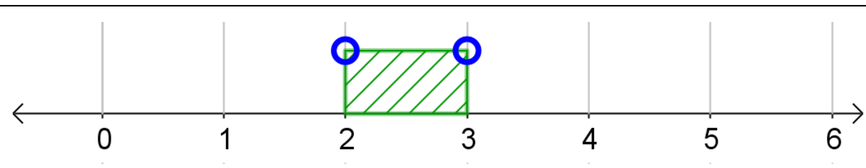
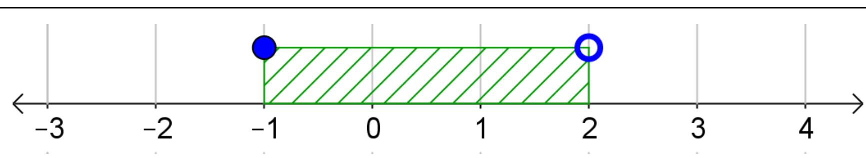
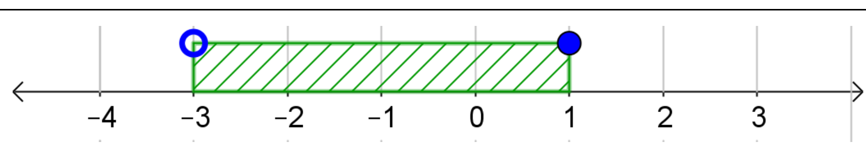
e) $\boldsymbol{E = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 5\}}$

f) $\boldsymbol{F = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3\}}$

g) $\boldsymbol{G = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 2\}}$

h) $H = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 1\}$

Solución:

$A = (3, +\infty)$	
$B = [-5, +\infty)$	
$C = (-\infty, 8)$	
$D = (-\infty, -1]$	
$E = [0, 5]$	
$F = (2, 3)$	
$G = [-1, 2)$	
$H = (-3, 1]$	

4. Dados los conjuntos $\boldsymbol{A} = \{\textbf{dígitos de } \mathbf{125}\}$ y $\boldsymbol{B} = \{\textbf{vocales de la frase "hace frío"}\}$

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

Proposición:	**Solución:**
a) $\mathbf{2} \in \boldsymbol{A}$	**a)** Verdadero porque 2 pertenece a $\boldsymbol{A}$.
b) $\mathbf{5} \in \boldsymbol{B}$	**b)** falso porque 5 no pertenece a $\boldsymbol{B}$.
c) $\boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{B}$	**c)** falso porque i pertenece a $\boldsymbol{B}$.
d) $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{B}$	**d)** falso porque u no pertenece a $\boldsymbol{B}$.
e) $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{B}$	**e)** verdadero porque e pertenece a $\boldsymbol{B}$.
f) $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}$	**f)** falso porque f no pertenece a $\boldsymbol{B}$.
g) $\mathbf{125} \notin \boldsymbol{A}$	**g)** verdadero porque 125 no pertenece a $\boldsymbol{A}$.
h) $\mathbf{1} \notin \boldsymbol{A}$	**h)** falso porque 1 pertenece a $\boldsymbol{A}$.
i) $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$	**i)** verdadero porque a no pertenece a $\boldsymbol{A}$.

5. Sea $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}\}$. Encontrar todos los subconjuntos de $\boldsymbol{A}$ y formar el conjunto potencia de $\boldsymbol{A}$.

Solución:

Son subconjuntos de A los siguientes conjuntos:
$\{\mathbf{2}\}, \{\mathbf{4}\}, \{\mathbf{6}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{6}\}, \{\mathbf{4}, \mathbf{6}\}, \boldsymbol{A}, \emptyset$.
$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \left\{\{\mathbf{2}\}, \{\mathbf{4}\}, \{\mathbf{6}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{6}\}, \{\mathbf{4}, \mathbf{6}\}, \boldsymbol{A}, \emptyset\right\}$

6. Dados los siguientes conjuntos, determinar cuáles de ellos son iguales y cuáles son equivalentes.

$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{u}\}$
$\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N} / \boldsymbol{x} \leq \mathbf{5}\}$
$\boldsymbol{C} = \{\textbf{vocales de la frase "hace mucho frío"}\}$
$\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N} / \boldsymbol{x} + \mathbf{1} \leq \mathbf{6}\}$

Solución:

$$\#\boldsymbol{A} = \mathbf{5} \ , \ \#\boldsymbol{B} = \mathbf{5} \ , \ \#\boldsymbol{C} = \mathbf{5} \ , \ \#\boldsymbol{D} = \mathbf{5}$$

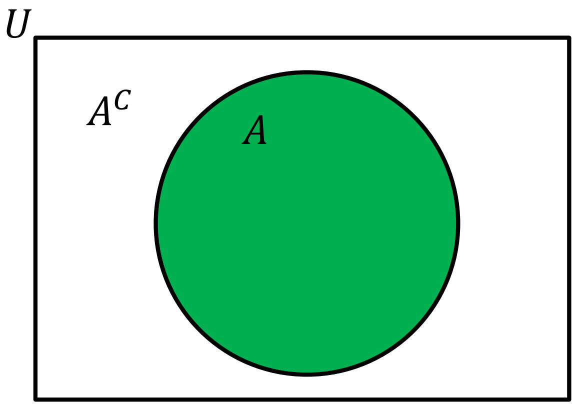
Por lo tanto, todos son equivalentes, pero sólo son iguales $\boldsymbol{A = C}$ y $\boldsymbol{B = D}$
Nota: $\boldsymbol{A = B \Rightarrow A \sim B}$; pero el recíproco no se cumple.

Operaciones entre Conjuntos:

Los conjuntos en general y sus operaciones suelen graficarse a través de una figura llamada diagrama de Venn-Euler. A continuación definiremos las operaciones más usuales y las graficaremos según el diagrama de Venn-Euler. Consideramos el conjunto universal como el rectángulo que contiene a todos los demás conjuntos.

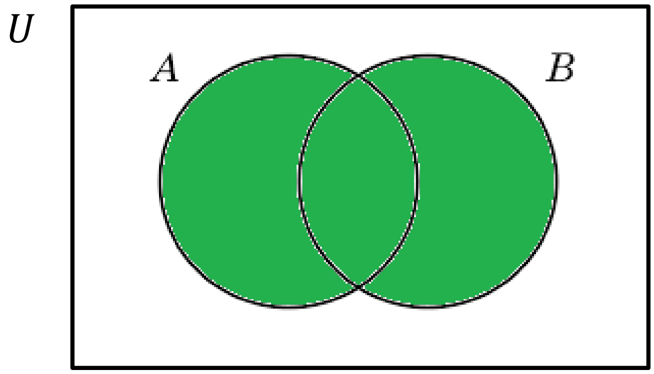
Complemento: dado un conjunto A, llamaremos complemento de A y lo denotaremos por A', A^C o $\bar{A}$ al conjunto que contiene a todos los elementos del universo que no están en A.

$$A^C = \{x \in U \,/ x \notin A\}$$



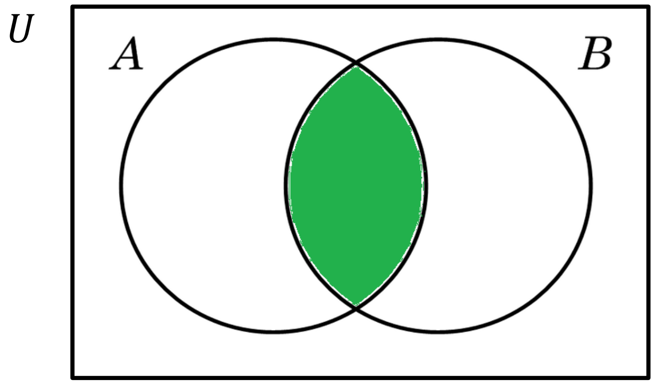
Unión de Conjuntos: dados dos conjuntos A y B, se llama **unión** de A y B, y se denota por $A \cup B$ al conjunto que contiene los elementos de A, los elementos de B y los elementos que están en ambos conjuntos.

$$A \cup B = \{x/x \in A \ \vee \ x \in B\}$$



Intersección de Conjuntos: dados dos conjuntos A y B, se llama **intersección** de A y B y se denota por $A \cap B$ al conjunto que contiene a los elementos que están simultáneamente en ambos conjuntos:

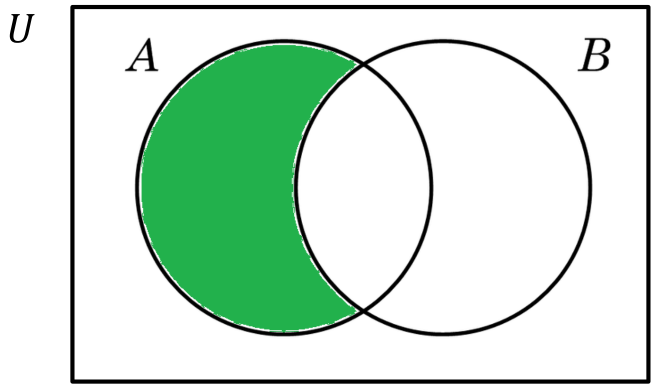
$$A \cap B = \{x/x \in A \ \wedge x \in B\}$$



Dos conjuntos cuya intersección es vacía se denominan conjuntos disjuntos.

Diferencia de Conjuntos: dados dos conjuntos A y B, se llama diferencia de A y B, se denota $A - B$ al conjunto que contiene a los elementos de A que no están en B.

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

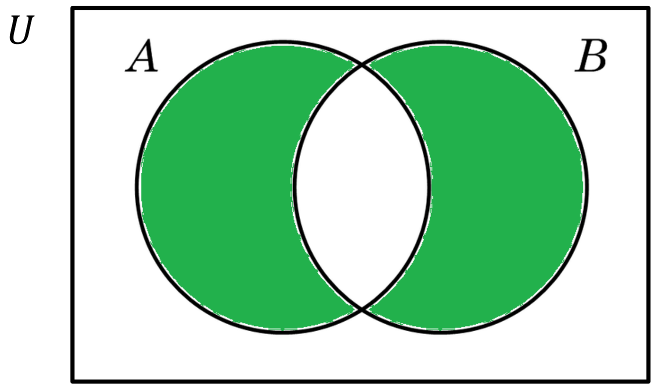


Otra forma de definir el complemento de A es según la diferencia.

$$A^C = U - A = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$$

Diferencia Simétrica de Conjuntos: dados dos conjuntos A y B se llama **diferencia simétrica** de A y B y se denota $A\Delta B$ al conjunto que contiene a los elementos que están en A y no están en B más los elementos que están en B y no están en A.

$$A\Delta B = \{x/(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$



O bien: $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Propiedades de la Operaciones entre Conjuntos

Sean A, B, C conjuntos contenidos en el universo U.

1. $(A^C)^C = A$

2. $U^C = \emptyset$ $\quad\quad$ $\emptyset^C = U$

3. $A - A = \emptyset$ $\quad\quad$ $A - \emptyset = A$

4. $A \cup \emptyset = A$ $\quad\quad$ $A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup U = U$ $\quad\quad$ $A \cap U = A$

$A \cup A = A$ $\quad\quad$ $A \cap A = A$ $\quad\quad$ (Idempotencia)

$A \cup A^C = U$ $\quad\quad$ $A \cap A^C = \emptyset$

5. $\left.\begin{array}{l}(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\end{array}\right\}$ Leyes de la Asociatividad

6. $\left.\begin{array}{l}A \cup B = B \cup A\\ A \cap B = B \cap A\end{array}\right\}$ Leyes de la Conmutatividad

7. $\left.\begin{array}{l}A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{array}\right\}$ Leyes de la Distributividad

8. $\left.\begin{array}{l}(A \cup B)^C = A^C \cap B^C\\ (A \cap B)^C = A^C \cup B^C\end{array}\right\}$ Leyes de Morgan

Ejercicios Resueltos

1. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $\quad B = \{3, 4, 5\} \quad y \quad C = \{4, 5, 6\}$

Hallar:

- **a)** $A \cap B$
- **b)** $A \cup B$
- **c)** $A \cup B \cup C$
- **d)** $A \cap B \cap C$
- **e)** $A - B$
- **f)** $B \Delta C$

Solución:

a) $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\} = \{3\}$

b) $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $A \cup B \cup C = \{x / x \in A \vee x \in B \vee x \in C\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

d) $A \cap B \cap C = \{x / x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\} = \emptyset$

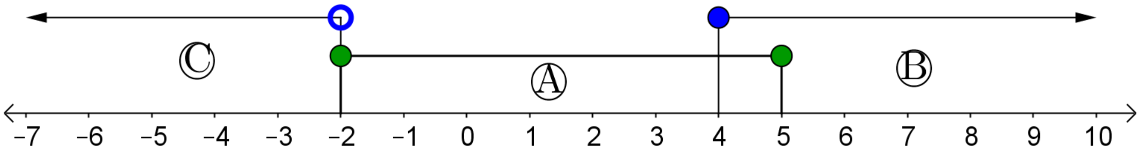
e) $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\} = \{1, 2\}$

f) $B \Delta C = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} = \{1, 2, 4, 5\}$

2. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} / x < -2\}$
Hallar

a) $A \cap B$
b) $B \cup C$
c) A^C
d) C^C
e) $(A \cap B)^C$
f) $(A \cup B) - B$

Solución: Representemos los tres conjuntos en la recta numérica. $U = \mathbb{R}$



a) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / 4 \leq x \leq 5\}$
b) $B \cup C = \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \vee x \geq 4\}$
c) $A^C = \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \vee x > 5\}$
d) $C^C = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$
e) $(A \cap B)^C = \{x \in \mathbb{R} / x < 4 \vee x > 5\}$
f) $(A \cup B) - B = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 4\}$

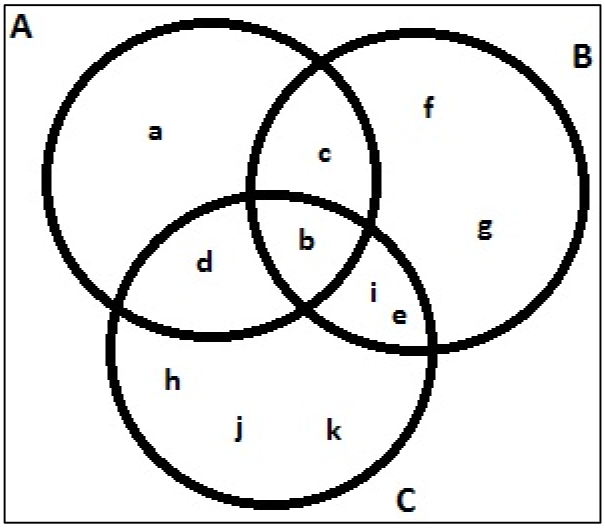
3. Sean $P = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q = \{3, 4, 5, 6\}$ considérese el universo
$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Verificar que:
a) $(P \cup Q)^C = P^C \cap Q^C$
b) $(P \cap Q)^C = P^C \cup Q^C$

Solución: tenemos que $P^C = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $Q^C = \{0, 1, 2, 7, 8, 9\}$

a) $P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ luego $(P \cup Q)^C = \{0, 7, 8, 9\}$
$P^C \cap Q^C = \{0, 7, 8, 9\}$ $\therefore (P \cup Q)^C = P^C \cap Q^C$
b) $P \cap Q = \{3, 4\}$ luego $(P \cap Q)^C = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$P^C \cup Q^C = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\therefore (P \cap Q)^C = P^C \cup Q^C$

Observación: $\therefore$ se lee "por lo tanto"

4. En el diagrama de Venn-Euler adjunto verificar:
a) Escribir por comprensión los conjuntos.
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
c) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$



Solución:

a) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{b, c, e, g, i, f\}$ $C = \{b, e, d, h, i, j, k\}$
b) $B \cup C = \{b, c, e, d, f, g, h, i, j, k\}$, luego $A \cap (B \cup C) = \{b, c, d\}$
Por otro lado
$A \cap B = \{b, c\}$ y $A \cap C = \{b, d\}$ Entonces $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{b, c, d\}$

$$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

c) $B - C = \{c, f, g\}$, luego $A \cap (B - C) = \{c\}$
Por otro lado
$A \cap B = \{b, c\}$, luego $(A \cap B) - C = \{c\}$
$\therefore A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$. Cabe destacar que esta igualdad no siempre es verdadera.

5. En una encuesta en la Región Metropolitana se consulta a 1.000 personas y se obtiene que:

990 personas hablan castellano.

626 personas hablan inglés.

134 personas hablan francés.

620 personas hablan castellano e inglés.

130 personas hablan castellano y francés.

100 personas hablan los tres idiomas.

a) Haga un diagrama de Venn-Euler que refleja la situación.

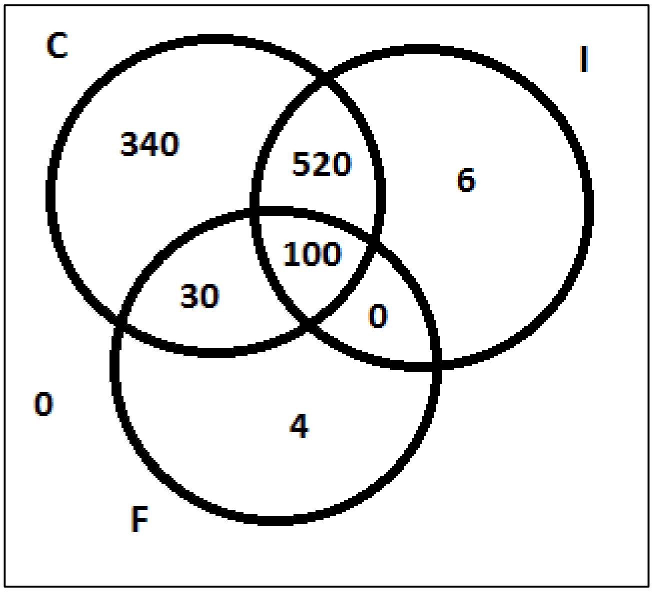
b) ¿Cuántas personas hablan sólo castellano? ¿cuántas sólo inglés? Y ¿cuántas sólo francés?

c) ¿Cuántas hablan inglés y no hablan francés?

d) ¿cuántas hablan inglés o francés?

Solución:

a) Los números representan la cardinalidad de cada conjunto.



b) Sólo castellano 340, sólo ingles 6 y sólo francés 4.

c) 526 personas.

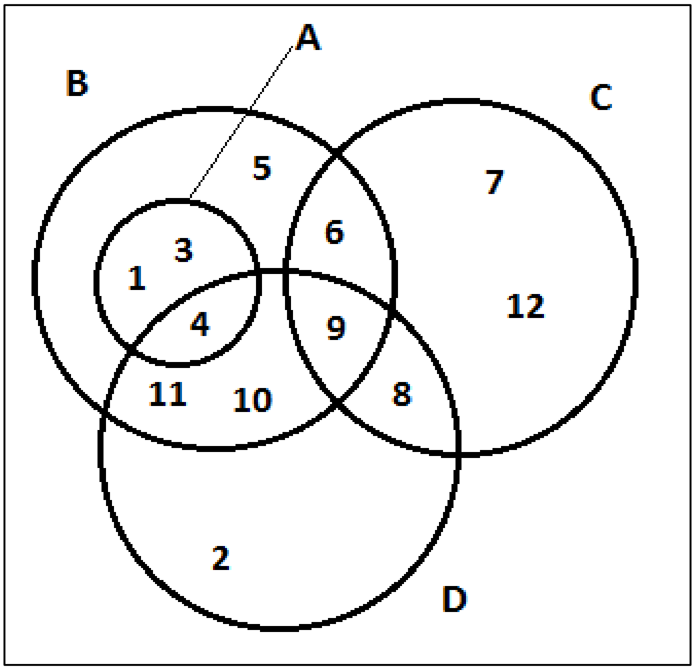
d) 660 personas.

6. En el siguiente diagrama de Venn-Euler verifique que:

a) $(A \cap B) - D = (B - D) \cap A$

b) $(B \cup C)^C = D - (B \cup C)$

c) $(B \cup C) - (A \cup D) = (A \cup D)^C$



Solución:

a) Ambos son el conjunto $\{1, 3\}$

b) Ambos son el conjunto $\{2\}$

c) Ambos son el conjunto $\{5, 6, 7, 12\}$

Bibliografía

Baldor, A. (2001). *Álgebra.* Ciudad de Mexico: Publicaciones Cultural, S.A. .

Carreño, X., & Cruz, X. (2008). *Álgebra.* Santiago: McGRAW-Hill.

Labbé Díaz, C. (2010). *Ensayo PSU, Matemática. 700 problemas resueltos.* Santiago: Editorial Catalonia.

Saiz, O., & Viktor, B. (2012). *Matemática 3° Medio.* Santiago: Ediciones Cal y Canto.

Zañartu, M., Darrigrandi, F., & Ramos, M. (2009). *Matemática 2° Medio.* Santiago: Santillana.

CARRERAS ONLINE

ciisa

Instituto
de Ciencias
Tecnológicas