质心坐标系

计算机图形学

质心坐标系

重心坐标系也叫质心坐标系，用ABC三点的权重来表示点P。

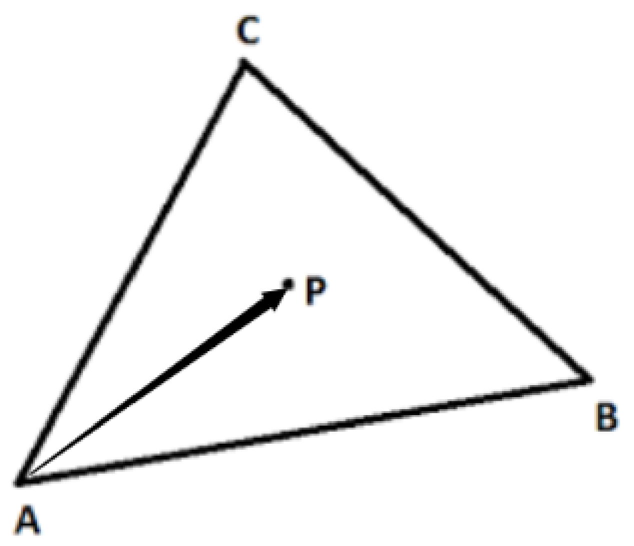
一. 公式直接推导

以线段插值为例，P位于线段AB之间，因此P点公式为

$$P = At + B(1 - t)$$

同样的在三角形中也有对应关系

$$P = A + m(B - A) + n(C - A)$$



如何计算m和n呢？由于

$$P - A = m(B - A) + n(C - A)$$

将$P - A$记为向量$\overrightarrow{v_2}$，将$B - A$记为$\overrightarrow{v_0}$，将$C - A$记为$\overrightarrow{v_1}$，因此公式为：

$$\overrightarrow{v_2} = m\overrightarrow{v_0} + n\overrightarrow{v_1}$$

两边分别乘以$\overrightarrow{v_0}$和$\overrightarrow{v_1}$得：

$$\vec{v_2} \cdot \vec{v_0} = m(\vec{v_0} \cdot \vec{v_0}) + n(\vec{v_1} \cdot \vec{v_0})$$

$$\vec{v_2} \cdot \vec{v_1} = m(\vec{v_0} \cdot \vec{v_1}) + n(\vec{v_1} \cdot \vec{v_1})$$

令：

$$d_{20} = \vec{v_2} \cdot \vec{v_0}$$

$$d_{21} = \vec{v_2} \cdot \vec{v_1}$$

$$d_{00} = \vec{v_0} \cdot \vec{v_0}$$

$$d_{01} = \vec{v_0} \cdot \vec{v_1}$$

$$d_{11} = \vec{v_1} \cdot \vec{v_1}$$

则可简化方程式得：

$$d_{20} = md_{00} + nd_{10}$$

$$d_{21} = md_{01} + nd_{11}$$

由克莱姆定理

$$m = \frac{\begin{vmatrix} d_{20} & d_{10} \\ d_{21} & d_{11} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{00} & d_{10} \\ d_{01} & d_{11} \end{vmatrix}}$$

$$n = \frac{\begin{vmatrix} d_{00} & d_{20} \\ d_{01} & d_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{00} & d_{10} \\ d_{01} & d_{11} \end{vmatrix}}$$

二. 几何理解

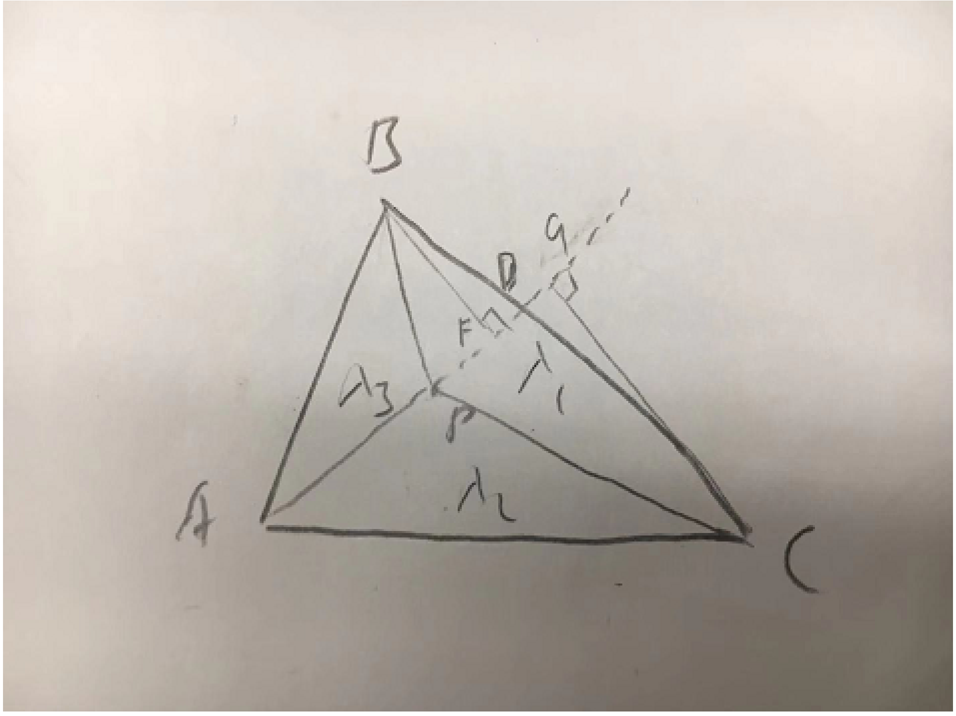
对于重心坐标系的另一个理解也源于对它的几何含义，重心坐标又称为面积坐标，点P关于三角形ABC的重心坐标和三角形PBC，PCA，PAB的有向面积成比例。证明：
对于三角形ABC，有一点P，其有向面积之比

$$S(PBC) : S(PCA) : S(PAB) = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$$

满足

$$P = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$$

其中$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$。



AP延长到边BC，交点为D，从B向AD做垂线，交于F，从C向AD做垂线，交于G。因为$\angle BDG = \angle GDC$，因此$\triangle BDF$与$\triangle GDC$相似。

$$
\begin{aligned}
S(PAB) : S(PCA) &= \lambda_3 : \lambda_2 \\
\frac{AP \times BF \times \frac{1}{2}}{AP \times CG \times \frac{1}{2}} &= \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \\
\frac{BF}{CG} &= \frac{\lambda_3}{\lambda_2}
\end{aligned}
$$

由于$\triangle BDF$与$\triangle GDC$相似，因此得出结论

$$BD : DC = \lambda_3 : \lambda_2$$

由此得出

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3} \cdot B + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \cdot C \\
&= \frac{\lambda_2 B + \lambda_3 C}{\lambda_2 + \lambda_3}
\end{aligned}
$$

另外，

$$
\begin{aligned}
\frac{S(PAB)+S(PCA)}{S(PBC)} &= \frac{\lambda_3+\lambda_2}{\lambda_1} \\
\frac{AP\times BF\times\frac{1}{2}+AP\times CG\times\frac{1}{2}}{PD\times BF\times\frac{1}{2}+PD\times CG\times\frac{1}{2}} &= \frac{\lambda_3+\lambda_2}{\lambda_1} \\
\frac{AP}{PD}\cdot\frac{BF+CG}{BF+CG}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} &= \frac{\lambda_3+\lambda_2}{\lambda_1} \\
\frac{AP}{PD} &= \frac{\lambda_3+\lambda_2}{\lambda_1}
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{(\lambda_2+\lambda_3)D+\lambda_1 A}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \\
&= \frac{(\lambda_2+\lambda_3)\frac{\lambda_2 B+\lambda_3 C}{\lambda_2+\lambda_3}+\lambda_1 A}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \\
&= \lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C
\end{aligned}
$$

证毕