为什么PBR中Lambert光照要除PI?

计算机图形学

原文地址：https://zhuanlan.zhihu.com/p/29837458

原始lambert光照模型为

$$L_o = C_d L_i (N \cdot L)$$

其中，
C_d：漫反射材质颜色
L_i：入射光颜色
n：法线
L：指向光源的单位向量
这个光照模型的缺陷在于它能量不守恒。
在PBR渲染中，处理反射的公式为：

$$f_r = k_d f_{lambert} + k_s f_{cook-torrance}$$

其中，$k_d + k_s < 1$
$f_{lambert}$称作Lambertian Diffuse用于计算漫反射
$f_{lambert} = \frac{c}{\pi}$，c是表面固有色，然后除以了$\pi$
那么π从哪来的？
大多数光照模型中，假设漫反射光线在半球上分布均匀，假设有一个点，考察它漫反射情况，因为有能量守恒，所以这个点发射出去的能量不能大于接收到的能量。
假设接收到的能量为E_i(Irradiance)，发射能量为E_o（Radiant exitance），由于能量守恒，那么必然有

$$E_o \leqslant E_i$$

E_o是半球所有方向上出射光的功率总和，因此可以有如下表达式：

$$E_o = \int_{\Omega out} L_o \cos\theta d\omega$$

L_0表示出射光的光强(Intensify)
$\cos\theta$：法线与出射光L_o的夹角
因此能量守恒不等式改写为：

$$E_o = \int_{\Omega out} L_o \cos\theta d\omega \leqslant E_i$$

现在考虑BRDF的定义，$\frac{L_o}{E_i}$，其中L_o是某个方位角的出射光强。
根据BRDF定义，假设漫反射BRDF系数是C_d，由此我们可以得到$L_o = C_d * E_i$，代入不等式

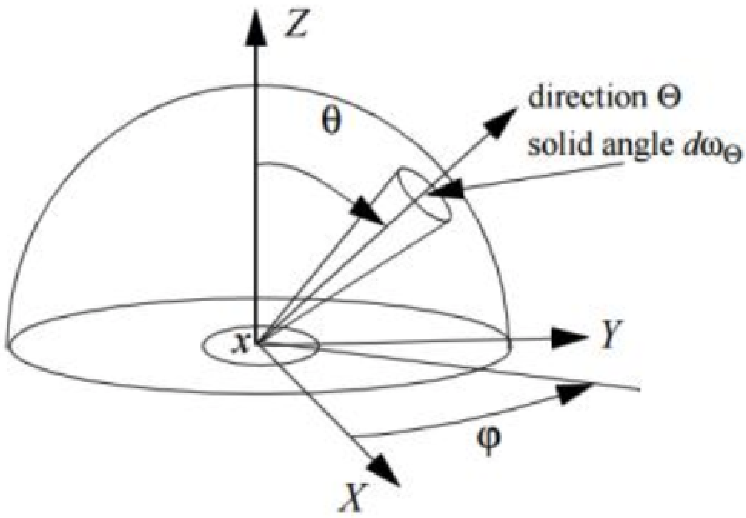
$$\int_{\Omega out} C_d E_i \cos\theta d\omega \leqslant E_i$$

满反射的辐射总功率小于吸收的辐射总功率
对于积分而言，C_d和E_i都是常量，因此拿到积分符号外。

$$C_d E_i \int_{\Omega out} \cos\theta d\omega \leqslant E_i$$

$$C_d \int_{\Omega out} \cos\theta d\omega \leqslant 1$$

现在参考立体角的图片如下：



$Direction\Theta = (\phi, \theta)$
$\phi \in [0, 2\pi]$
$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$
对应笛卡尔坐标系
$x = r\cos\phi\sin\theta$
$y = r\sin\phi\sin\theta$
$z = r\cos\theta$
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$\tan\phi = \frac{y}{x}$
$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$
$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$
$d\omega_\Theta = \sin\theta d\theta d\phi$
这里，我们需要：

$$C_d \int_{\Omega out} \cos\theta d\omega \leqslant 1$$
$$C_d \int_{\Omega out} \cos\theta\sin\theta d\theta d\phi \leqslant 1$$
$$C_d \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta d\phi \leqslant 1$$

由正弦二倍角公式：

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\frac{1}{2}\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta$$

得：

$$
\begin{aligned}
C_d \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \leqslant 1 \\
C_d \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta d\phi \leqslant 1 \\
\frac{1}{2} C_d \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \leqslant 1 \\
\frac{1}{2} C_d \int_{\phi=0}^{2\pi} 1 d\phi \leqslant 1 \\
\frac{1}{2} C_d \left[\phi \right]_{\phi=0}^{2\pi} \leqslant 1 \\
C_d \leqslant \frac{1}{\pi}
\end{aligned}
$$

也就是说，漫反射BRDF应该落在$[0, \frac{1}{\pi}]$之间。
因此

$$
\frac{c}{\pi} \rightarrow (\frac{1}{\pi})c
$$

这样才能保证能量守恒。