Università di Camerino - Formazione Insegnanti STEM 20/21

Matematica

Logica nella scuola secondaria di primo grado

Laboratorio: tracce per la discussione

Indice

Proposte per laboratori in classe 2
Discussione 3
E, o, almeno, tutti 4
L'implicazione spiegata da Raymond Smullyan 6

Proposte per laboratori in classe

Come introdurre l'isola dei cavalieri e dei furfanti?

Si possono usare due tipi di **maschere:** una per il cavaliere, e una per il furfante. In alternativa, si possono usare dei **distintivi** da tenere momentaneamente nascosti (sotto un maglione, sotto il bavero)

L'obiettivo è di rendere concreti i concetti di di proposizioni vere e false, e i personaggi - i cavalieri che dicono sempre la verità, e i furfanti che mentono sempre.

1) L'insegnante si mette di spalle alla classe e indossa una maschera. Pronuncia una frase a suo piacimento in accordo con la maschera scelta. La classe dovrà indovinare quale personaggio stia parlando.

2) Il gioco può essere ripetuto, e poi fatto fare da uno o più studenti. I rompicapi presenti nelle schede possono essere proposti in questo modo – come vere e proprie messe in scena in cui la natura di ciascun attore è stabilita a priori ma è nascosta al pubblico (indossando una maschera e dando le spalle al pubblico, o indossando un distintivo nascosto da rivelare solo al momento della soluzione).

Come introdurre gli scrigni di Porzia?

I rompicapi che coinvolgono gli scrigni di Porzia si prestano a un approccio più concreto, perché si possono rappresentare usando

- tre scatole opache (gli scrigni), dipinte in colori diversi o su cui sia chiaramente indicato "oro", "argento" e "piombo"

- etichette rimuovibili (Post-it) per le iscrizioni

- un ritratto di Porzia.

Come per l'isola di Smullyan, si possono condurre **attività preliminari** per introdurre i concetti di proposizioni vere o false, e concretizzare lo scenario.

Per esempio, si decide di inserire il ritratto in uno degli scrigni, e poi si invitano gli alunni, a turno, a proporre delle iscrizioni vere o false da apporre a ciascuno scrigno.

Discussione

Laboratori

Questi scenari possono funzionare?

Può risultare utile illustrare i concetti di proposizione, verità e falsità in questo modo?

Schede

Come si possono usare le schede? Per esempio:
- lavorando in gruppi
- organizzando una caccia al tesoro simile a quella proposta nel lavoro dei colleghi del PLS Piemonte 2013 (https://repository.supsi.ch/10142/1/Gare-e-giochi-matematici%202014.pdf, Capitolo 1)
- semplicemente lavorando sui rompicapi tutti assieme con la guida dell'insegnante

Versione online

Alcuni rompicapi alla Smullyan sono disponibili online:
https://oiler.education/game/smullyan
Può essere utile questa versione? In che contesto? Ha qualche vantaggio rispetto a un gioco di ruolo o all'uso di semplici schede?

Collegamenti con il programma

Può essere utile esplicitare il ruolo dei connettivi nei rompicapi della prima scheda (cavalieri e furfanti) e collegarli alle nozioni di unione e intersezione di insiemi? O si rischia di fare confusione? Se è utile, in che modo si può spiegare il collegamento?

Troverete allegata una proposta su come spiegare i connettivi (e il quantificatore "tutti") nel contesto dei cavalieri e dei furfanti.

Il caso dell'implicazione

I rompicapi che coinvolgono l'implicazione sono alla portata dei ragazzi, o gli aspetti più astratti e formali rischiano di confondere le idee?

Troverete allegata la spiegazione dell'implicazione tratta da *Qual è il titolo di questo libro?*

Per l'insegnante – traccia per introdurre i connettivi

E, o, almeno, tutti

Se *A* è un furfante e dice "Io sono un furfante e *B* è un furfante" in quali casi la sua affermazione è vera?

- *A* è un cavaliere e *B* è un furfante

- *A* è un cavaliere e *B* è un cavaliere

- *A* è un furfante e *B* è un cavaliere

- *A* è un furfante e *B* è un furfante

In quali casi è falsa?

- *A* è un cavaliere e *B* è un furfante

- *A* è un cavaliere e *B* è un cavaliere

- *A* è un furfante e *B* è un cavaliere

- *A* è un furfante e *B* è un furfante

Il viaggiatore incontra gli abitanti *A* e *B*. Se *A* dice "Io sono un cavaliere o *B* è un cavaliere" in quali casi l'affermazione di *A* è vera?

- *A* è un cavaliere e *B* è un furfante

- *A* è un cavaliere e *B* è un cavaliere

- *A* è un furfante e *B* è un cavaliere

- *A* è un furfante e *B* è un furfante

In quali casi è falsa?

- *A* è un cavaliere e *B* è un furfante

- *A* è un cavaliere e *B* è un cavaliere

- *A* è un furfante e *B* è un cavaliere

- *A* è un furfante e *B* è un furfante

Se A è un furfante e dice "Nella mia famiglia siamo tutti furfanti" di cosa possiamo essere certi?

- In famiglia tutti sono cavalieri

- In famiglia c'è almeno un cavaliere

- In famiglia non ci sono furfanti

Per l'insegnante: estratto da Raymond Smullyan, *Qual è il titolo di questo libro?*

L'implicazione spiegata da Raymond Smullyan

Capitolo 8

Problemi logici

Preambolo

Molti dei problemi di questo capitolo trattano delle cosiddette proposizioni condizionali: proposizioni del tipo «Se P è vera allora Q è vera», dove P, Q sono le proposizioni prese in esame. Prima di affrontare problemi di questo tipo, dobbiamo chiarire attentamente alcune ambiguità che possono sorgere. Ci sono alcuni fatti concernenti tali proposizioni su cui tutti sono d'accordo, ma ce ne sono altri sui quali sembra che vi sia un notevole disaccordo.

Facciamo un esempio concreto. Consideriamo la proposizione seguente:
(1) Se John è colpevole allora sua moglie è colpevole.

Tutti concorderanno che se John è colpevole e la proposizione (1) è vera, allora anche sua moglie è colpevole.

Tutti concorderanno anche sul fatto che se John è colpevole e sua moglie è innocente, allora la proposizione (1) deve essere falsa.

Supponiamo ora, che si sappia che sua moglie è colpevole, ma non si sappia se John è colpevole o innocente. Direste allora che la proposizione (1) è vera o no? Non direste che se John è colpevole o innocente sua moglie è in ogni caso colpevole? O non direste: «Se John è colpevole allora sua moglie è colpevole; e se John è innocente allora sua moglie è colpevole?».

Vi sono molti esempi di questo uso della lingua nella letteratura: nel racconto di Rudyard Kipling Riki-Tiki-Tavi, il cobra dice alla famiglia terrorizzata: «Se vi muovete colpirò e se non vi muovete colpirò». Ciò significa né più né meno che dire «Colpirò». Vi è anche la storia del maestro di Zen, Tokusan, che era solito rispondere a tutte le domande, come alle non-domande, con dei colpi di bastone. È famoso il suo detto:
«Trenta colpi quando avete qualcosa da dire, trenta colpi egualmentquando non avete nulla da dire».

La conclusione di ciò è che se la proposizione Q è comunque vera, allora lo è anche la proposizione «Se P, allora Q» (come pure la proposizione «Se non P, allora Q»).

Il caso più controverso di tutti è il seguente: supponiamo che P, Q siano entrambe false. In tal caso, la proposizione «Se P, allora Q» è vera o falsa? O dipende da cosa sono P e Q? Tornando al nostro esempio, se John e sua moglie fossero entrambi innocenti, la proposizione (1) dovrebbe essere ritenuta vera o falsa? Torneremo tra breve su questo problema essenziale.

Una domanda collegata è questa: siamo già d'accordo sul fatto che, se John è colpevole e sua moglie innocente, allora la proposizione (1) deve essere falsa. È vero anche il contrario? Cioè se la proposizione (1) è falsa, ne segue necessariamente che John debba essere colpevole e sua moglie innocente?
In altri termini, è esatto che il solo caso in cui la (1) è falsa è che John sia colpevole e sua moglie innocente? Ebbene, secondo il modo in cui la maggior parte dei logici, dei matematici e degli scienziati usano le parole «se…, allora…», la risposta è «sì», e questa è la convenzione che adotteremo. In altre parole, date due proposizioni P e Q, ogni volta che scrivo «Se P, allora Q» io non vorrò dire né più né meno che «Non si dà il caso che P sia vera e Q falsa». In particolare, questo significa che se John e sua moglie sono entrambi innocenti, allora la proposizione (1) deve essere considerata vera; poiché il solo modo in cui questa proposizione può essere falsa è che John sia colpevole e sua moglie innocente, e ciò non si può avere se John e sua moglie sono entrambi innocenti. In altri termini, se John e sua moglie sono entrambi innocenti, è certo che non si ha che John sia colpevole e sua moglie innocente, quindi la proposizione non può essere falsa.

Il seguente esempio è ancora più strano:
(2) Se Confucio è nato nel Texas, allora io sono Dracula.Tutto ciò che la proposizione (2) dice è che non si dà il caso che Confucio sia nato nel Texas e che io non sia Dracula. E in effetti è così, dato che Confucio non è nato nel Texas. Pertanto la proposizione (2) deve essere considerata vera.

Un altro modo di considerare la questione è che il solo modo in cui la (2) può essere falsa è che Confucio sia nato nel Texas e io non sia Dracula. Bene, dato che Confucio non è nato nel Texas, allora non si può avere che Confucio sia nato nel Texas e io non sia Dracula. In altre parole, la (2) non può essere falsa, quindi deve essere vera.

Ora consideriamo due proposizioni arbitrarie P, Q, e la seguente proposizione formata da esse:
(3) Se P, allora Q.

Questa proposizione si rappresenta in simboli: $P \rightarrow Q$ e viene anche letta: «P implica Q». L'uso del termine «implica» può essere piuttosto infelice, ma si è affermato nella letteratura in questo senso. Tutto ciò che la proposizione significa, come abbiamo visto, è che non si dà il caso che P sia vera e Q sia falsa. Così noi abbiamo i seguenti fatti:
Primo: Se P è falsa, allora $P \rightarrow Q$ è automaticamente vera.
Secondo: Se Q è vera, allora $P \rightarrow Q$ è automaticamente vera.
Terzo: L'unico modo in cui $P \rightarrow Q$ può essere falsa è che P sia vera e Q falsa.

Il primo fatto viene parafrasato talvolta: «Una proposizione falsa implica qualsiasi proposizione». Questa proposizione rappresentò un vero shock tra molti filosofi (vedi Capitolo 14, numero 244, per una ulteriore discussione). Il secondo fatto viene parafrasato talvolta: «Una proposizione vera è implicata da qualsiasi proposizione».

Riassunto e tavola di verità.

Date due proposizioni qualsiasi P, Q, ci sono sempre esattamente quattro possibilità: (1) P, Q sono entrambe vere; (2) P è vera e Q è falsa; (3) P è falsa e Q è vera; (4) P, Q sono entrambe false.

Una e solo una di queste possibilità deve essere valida. Ora, consideriamo la proposizione: «Se P allora Q (in simboli P → Q). È possibile determinare in quali dei quattro casi la proposizione è valida e in quali no? Sì, è possibile mediante la seguente analisi:

Caso 1: P e Q sono entrambe vere. In questo caso Q è vera, quindi P → Q è vera per il secondo fatto.

Caso 2: P è vera e Q è falsa. In questo caso, P → Q è falsa per il terzo fatto.

Caso 3: P è falsa e Q è vera. Allora P → Q è vera per il primo fatto (anche per il secondo).

Caso 4: P è falsa e Q è falsa. Allora P → Q è vera per il primo fatto.

Questi quattro casi possono essere riassunti nella seguente tavola, chiamata *tavola di verità per l'implicazione*.

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La prima fila V, V, V (vera, vera, vera), significa che quando P è vera e Q è vera, P → Q è vera. la seconda fila V, F, F, significa che quando P è vera e Q è falsa, allora P → Q è falsa. La terza fila indica che quando P è falsa e Q è vera, P → Q è vera. la quarta fila indica che quando P è falsa e Q è falsa, allora P → Q è vera.

Notiamo che P → Q è vera tre volte su quattro di questi casi, solamente nel secondo caso essa è falsa.

Un'altra importante proprietà dell'implicazione è la seguente: per mostrare che una proposizione «Se P allora Q» è valida, è sufficiente assumere P come premessa e quindi dimostrare che Q deve seguirne. D'ora in poi ci riferiremo a questo fatto come al *quarto fatto*.

https://vdoc.pub/documents/qual-e-il-titolo-di-questo-libro-6ejh7to7kp70