EL PORISMA DE STEINER COMO INTEGRADOR DE LA GEOMETRÍA DE LA INVERSIÓN

Silvia Noemí Romero

Universidad Nacional de Salta

(Avenida Bolivia N° 5150)

silvi_778@hotmail.com

Categoría del Trabajo: Reflexiones.

Nivel educativo: Universitario.

Palabras claves: Geometría de la Inversión, Porisma de Steiner, Geometría asistida por computadora, Enseñanza de la geometría.

Resumen: En este trabajo se plantea y resuelve el problema del Porisma de Steiner. Este problema posee gran riqueza ejemplificadora debido a la variada cantidad de recursos de la geometría de la Inversión. Este hecho convierte este problema en candidato excelente como herramienta de integración de conceptos tales como propiedad involutiva de inversión, inversión de rectas y circunferencias, circunferencias ortogonales, y otros temas de geometría; y por lo tanto de mucha utilidad para los que deban enseñar o aprender estos temas. También describimos en el trabajo la construcción de herramientas útiles para la visualización del problema, realizadas con el Geogebra, que es un programa principalmente educativo y que permite la exploración por parte del estudiante de ciertas propiedades geométricas. Y por último propondremos una serie de actividades a desarrollar por los estudiantes con objetivo de la manipulación de los objetos inherentes en este problema.

1. Introducción

1.1. Reseña histórica

Ningún país especial tuvo el monopolio en el desarrollo de la matemática elemental, pero quizá se pueda atribuir a Alemania el papel principal, por ser la patria de Jacob Steiner (1796 - 1863), uno de los muchos descubridores independientes de la circunferencia de los nueve puntos y, mucho más importante aún, el matemático al que se suele considerar generalmente como el más grande de los geómetras de la época moderna, tal como Apolonio lo fue en la antigüedad. Steiner sentía una gran aversión por los métodos analíticos, y en sus manos la geometría sintética hizo progresos comparables a los que había hecho anteriormente el análisis. Demostró que todas las construcciones euclídeas pueden efectuarse con la regla únicamente, siempre que se nos de además una única circunferencia fija. En 1824 descubrió la fructífera transformación geométrica conocida como inversión, que le sirvió como herramienta para dar solución al problema del Porisma, que había sido planteado por Apolonio [Bo].

1.2. La inversión

Definición 1. Dada una circunferencia ω con centro O y radio k, como en la figura 1.1, y un punto P diferente de O, definimos el inverso de P como el punto P_1, en la semirrecta OP, cuya distancia desde O satisface la ecuación

$$OP \times OP_1 = k^2$$

Se sigue de esta definición [Co] que el inverso de P_1 es P: la inversión es de periodo dos. Los únicos puntos auto-inversos son los puntos de ω.

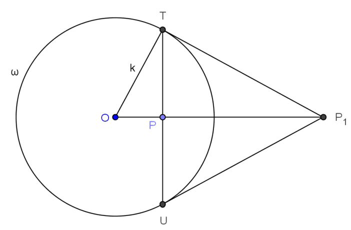

Figura 1.1: Inversión

Si P describe un lugar geométrico, P_1 describe el lugar geométrico inverso. En particular, el inverso de una circunferencia de centro O y radio r es una circunferencia concéntrica de radio k^2/r.

Sea P un punto interior a ω (que no sea O). Consideremos la cuerda TU que pasa por P, perpendicular a OP, y el punto P_1 donde se cortan las tangentes en T y U.

Como $\triangle OPT \sim \triangle OTP_1$, el punto P_1 construido de esta manera, satisface

$$\frac{OP}{OT} = \frac{OT}{OP_1}$$

y entonces $OP \times OP_1 = k^2$ y por tanto P_1 es el inverso de P.

Recíprocamente, para construir el inverso de cualquier punto P_1 exterior a ω, podemos dibujar la circunferencia que tiene como diámetro OP_1. Si esta circunferencia corta ω en T y U, el inverso buscado P es el punto medio de TU (es decir, el punto en el que TU corta a OP_1).

1.3. Rectas y Circunferencias

Cualquier recta que pase por O es su propia inversa, siempre que omitamos al propio punto O. (No debemos intentar evitar esta omisión, considerando O como su propio inverso, porque entonces la inversión no sería una transformación continua; cuando P se acerca a O, P_1 se aleja).

En la 1.2se observa que la inversa de cualquier recta a, que no pase por O, es una circunferencia que pasa por O (menos el mismo punto O), y que el diámetro de esta circunferencia que pasa por O, es perpendicular a a .

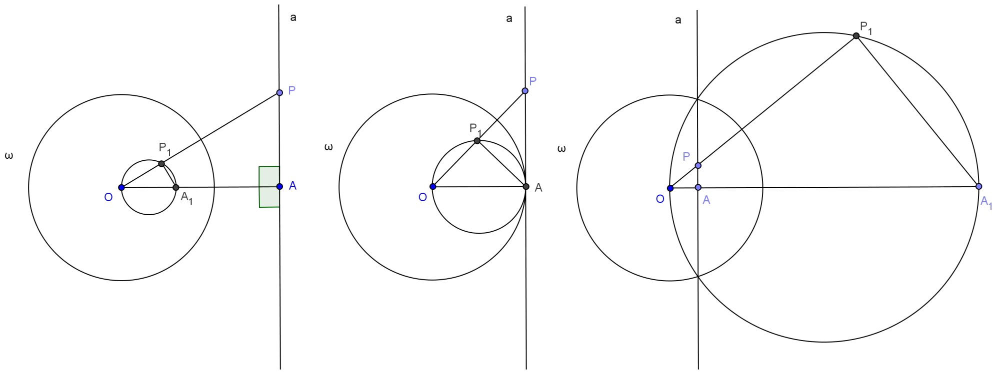

Figura 1.2: Inversión de una recta a que no pasa por O

Los detalles son los siguientes: sea A el pie de la perpendicular desde O a a, A_1 el inverso de A, P un punto arbitrario en a, y P_1 el punto en el que la semirrecta OP corta a la circunferencia que tiene como diámetro OA_1.

Entonces $\triangle OAP \sim \triangle OP_1A_1$,

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OA_1}{OP_1}$$

y $OP \times OP_1 = OA \times OA_1 = k^2$.

Recíprocamente, cualquier punto P_1 (excepto O) que pertenezca a la circunferencia con diámetro OA_1, se invierte en un punto P de la recta a. Por lo tanto, la inversa de cualquier circunferencia que pase por O (excepto el mismo O) es una recta perpendicular al diámetro que pasa por O, es decir, una recta paralela a la tangente a la circunferencia en O.

Se sigue que un par de circunferencias tangentes, con puntos comunes O y P, se invierten en un par de rectas que pasan por el inverso del punto P_1; y que un par de circunferencias tangentes en O, se invierten en un par de rectas paralelas.

Vamos a hallar ahora el resultado de invertir una circunferencia que no pasa por el centro de inversión. Para ello consideremos una circunferencia α que no pasa por el centro de inversión O. Sean A,B los puntos en que esta circunferencia corta a la recta que une su centro con el centro O. Sean A_1, B_1 los inversos de estos puntos, como muestra la 1.3.

Tomamos un punto arbitrario X de α. Tenemos que $\angle XBA = \angle OX_1B_1$ y $\angle XAB = \angle A_1X_1X$. Como el ángulo $\angle AXB$ es recto, por ser AB diámetro, ha de ser $\angle A_1X_1B_1$ recto, y X_1 pertenece a la circunferencia de diámetro A_1B_1. Como X es arbitrario, todo punto de α tiene la imagen sobre esta circunferencia; y recíprocamente [Co].

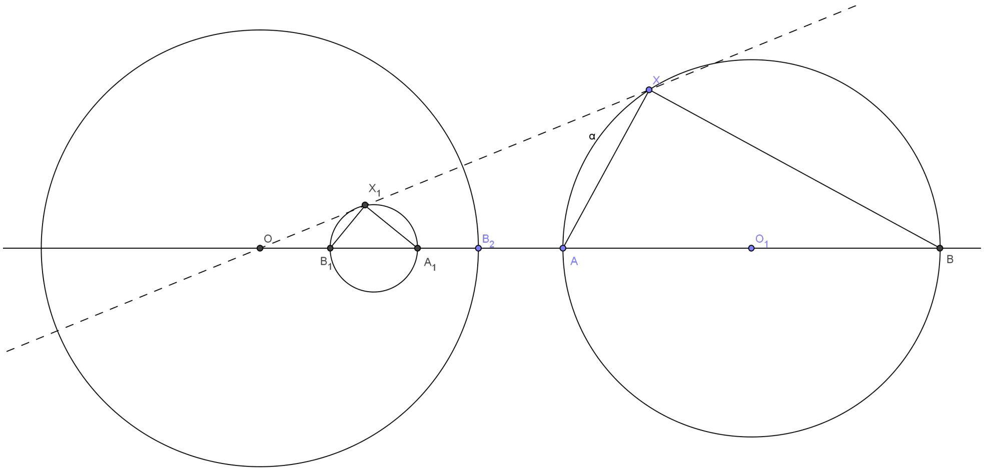

Figura 1.3: Inversión de una circunferencia

1.4. Circunferencias Ortogonales

Dos circunferencias son ortogonales si se cortan en dos puntos formando ángulos rectos.

Sean dos circunferencias ω_1 y ω_2 ortogonales, entonces ω_1 es auto-inversa con respecto a ω_2 y recíprocamente. O sea que si una de ellas, por ejemplo ω_1, tiene un punto P, entonces también tendrá un punto P', inverso de P con respecto a ω_2. También vale la proposición recíproca: Cualquier circunferencia que pase por dos puntos distintos, inversos uno del otro en ω, entonces es su propia inversa con respecto a ω y es ortogonal a ω.

2. Porisma de Steiner

Un primer ejemplo donde se ve el poder de las inversiones es el llamado Porisma de Steiner. Dadas dos circunferencias no concéntricas, una interior a la otra, se quiere saber si hay una cadena de circunferencias cada una de ellas tangente a la anterior y a la posterior y tangentes todas ellas a las dos circunferencias dadas.

Este problema o bien no tiene solución, o bien tiene infinitas soluciones. Esta situación se describe diciendo que tenemos un "Porisma", en este caso el Porisma de Steiner.

Si tenemos dos circunferencias (no concéntricas), una dentro de la otra, y dibujamos otras circunferencias, que sean tangentes una a la otra sucesivamente y todas ellas tangentes a las dos circunferencias originales, como la figura 2.1, es posible que suceda que la sucesión de las circunferencias tangentes se cierre, formando un anillo de n circunferencias, la última de las cuales es tangente a la primera. En este caso, podemos considerar como primera circunferencia del anillo a cualquiera de las circunferencias tangentes a las dos circunferencias originales, y el anillo seguirá cerrándose con el mismo valor n. Si pudiéramos invertir las circunferencias originales en circunferencias concéntricas , y entonces las otras se convierten en un anillo de circunferencias iguales, cuyos centros forman un n-ágono regular como en la figura 2.1 entonces el problema tendría una solución sencilla. Afortunadamente, como mostraremos en la siguiente subsección, esto último es posible.

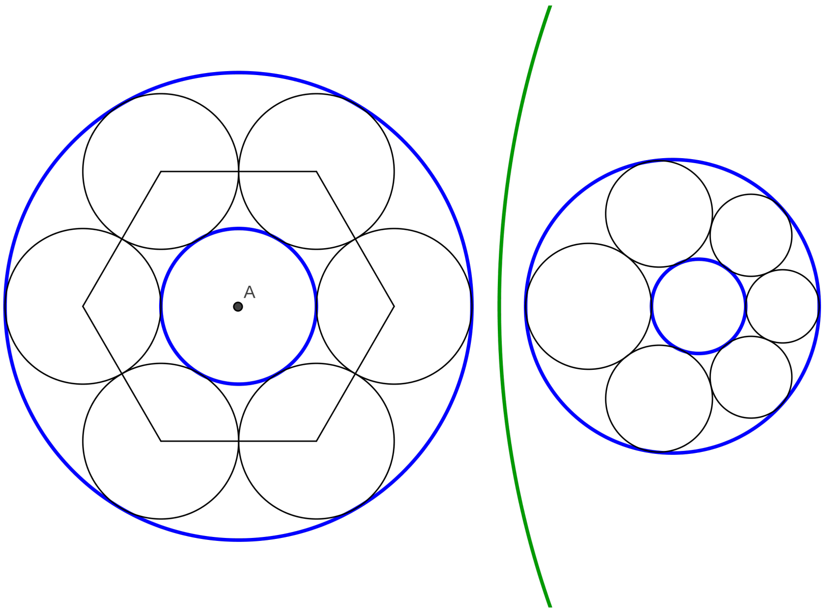

Figura 2.1: Transformación del Porisma

2.1. Inversión de circunferencias no concéntricas

La siguiente secuencia de actividades transforma dos circunferencias no concéntricas por medio de inversiones en dos circunferencias concéntricas.

1. Dibujar las circunferencias no concéntricas, para lo cual debes trazar la circunferencia que pasa por $B = (-2, 0)$ con centro en $A = (2, 0)$. Llamarla c. Y la circunferencia

que pasa por $D = (-1, 0)$ con centro en $C = (1, 0)$. Llamarla d.

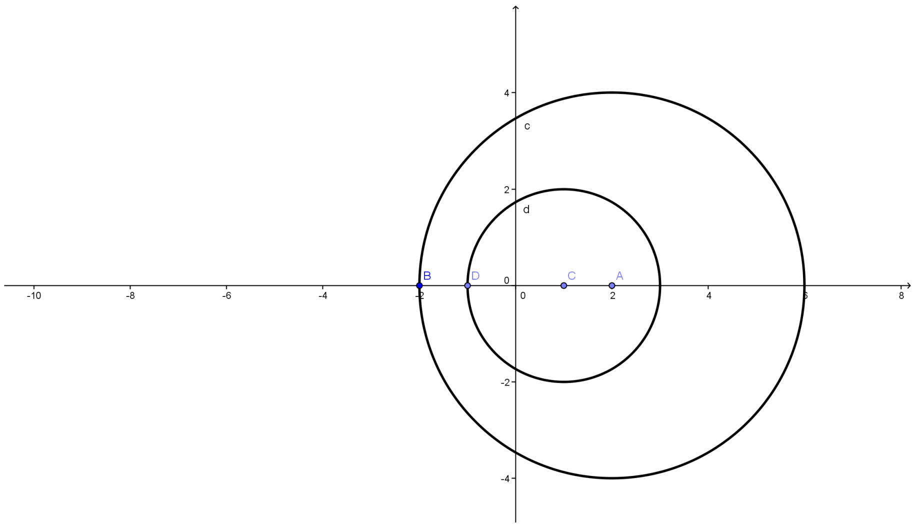

Figura 2.2: Secuencia 1

2. Usando la herramienta Tangentes, determinar las tangentes por el punto B a la circunferencia d. Para ello una vez seleccionada la herramienta, marcar el punto B y después la circunferencia d. Llamar E al punto tangencia superior. Luego trazar la circunferencia que pase por E con centro en B. Llamarla e.

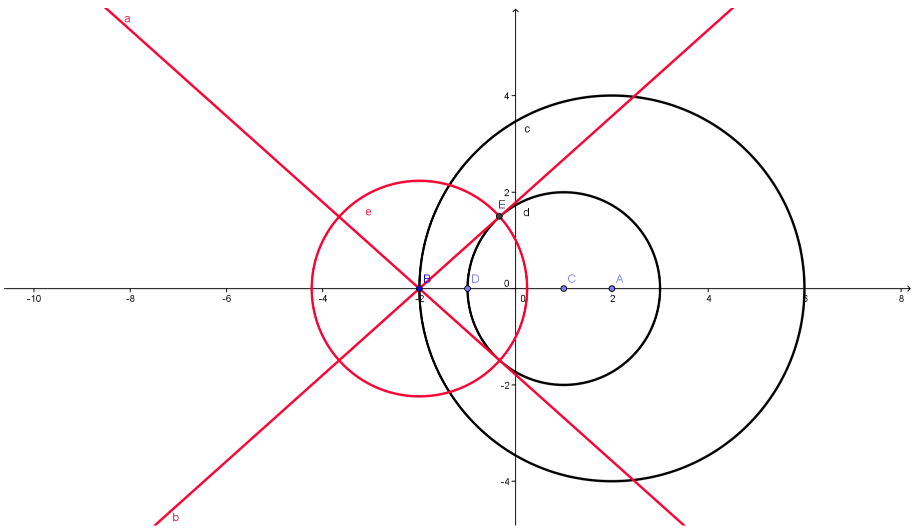

Figura 2.3: Secuencia 2

3. Llamar F al punto de intersección superior de la circunferencia e con la circunferencia c. Usando nuevamente la herramienta Tangentes como en el punto anterior, determinar las tangentes por el punto F a la circunferencia d. Llamar G al punto

de tangencia inferior. Trazar la circunferencia que pase por G con centro en F. Llamarla h. Llamar H al punto de intersección izquierdo de la circunferencia h con el eje x.

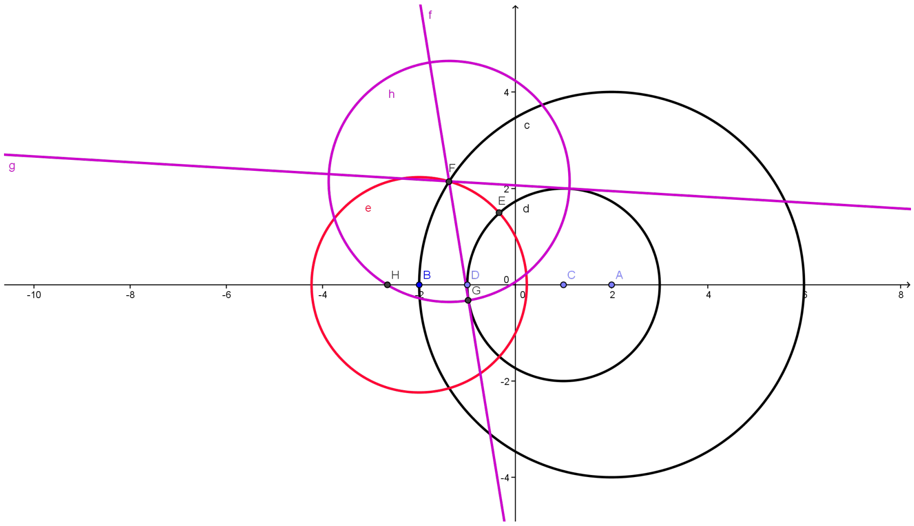

Figura 2.4: Secuencia 3

4. A través de la herramienta Refleja Objeto en Circunferencia (Inversión), hallar el punto H', inverso del punto H. Para ello, una vez seleccionada la herramienta debes marcar el punto H y la circunferencia e. Llamar I al punto de intersección inferior de la circunferencia e con la circunferencia d. Y J al punto de intersección inferior de la circunferencia e con la circunferencia c.

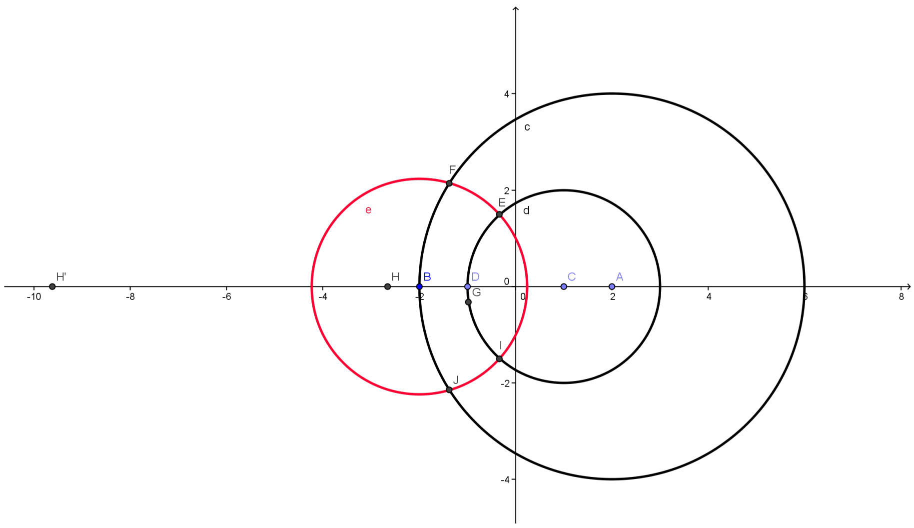

Figura 2.5: Secuencia 4

5. Trazar la circunferencia que pase por B con centro en H'. Usando nuevamente la herramienta Refleja Objeto en Circunferencia (Inversión), hallar el punto F', inverso del punto F , y el punto J', inverso del punto J .Para ello selecciona la herramienta, marca el punto y después la circunferencia . Luego a través de la herramienta Circunferencia dados Tres de sus Puntos, hallar la circunferencia que pase por los puntos F',J' y B; y llamarla p.

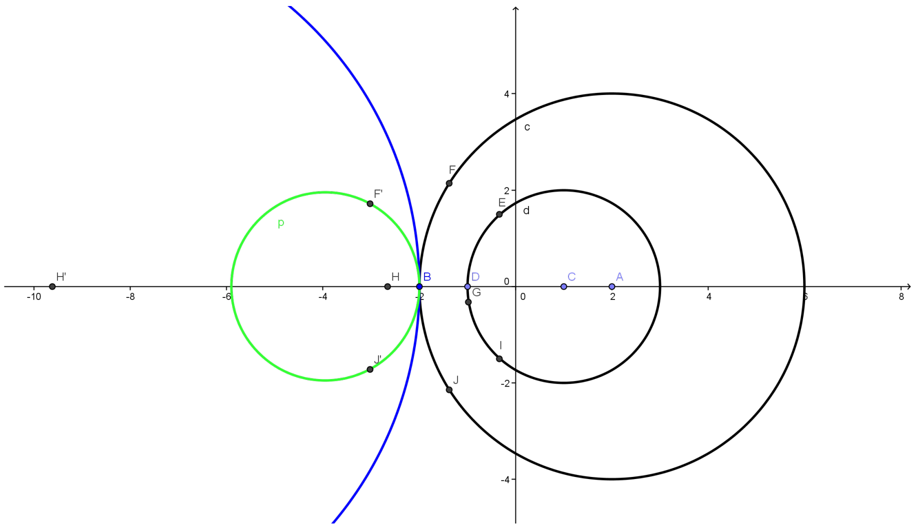

Figura 2.6: Secuencia 5

6. De la misma manera que en el punto anterior, determinar usando la herramienta Refleja Objeto en Circunferencia (Inversión) el punto D', inverso del punto D. También el punto E', inverso del punto E', y el punto I', inverso del punto I. Finalmente, a través de la herramienta Circunferencia dados Tres de sus Puntos, hallar la circunferencia que pase por los puntos E',D' y I'; y llamarla q. De esta manera las circunferencias originales c y d se transforman en circunferencias concéntricas p y q.

3. Conclusión

El valor pedagógico de los problemas integradores es innegable. El Porisma de Steiner, como se vio anteriormente, es un excelente ejemplo de esto último, para una primera introducción a la Geometría de la Inversión.

En cuanto a la importancia que tiene, en general, el estudio de la geometría de la inversión, se evidencia por la amplia gama de aplicaciones que tiene. Por ejemplo, al ser

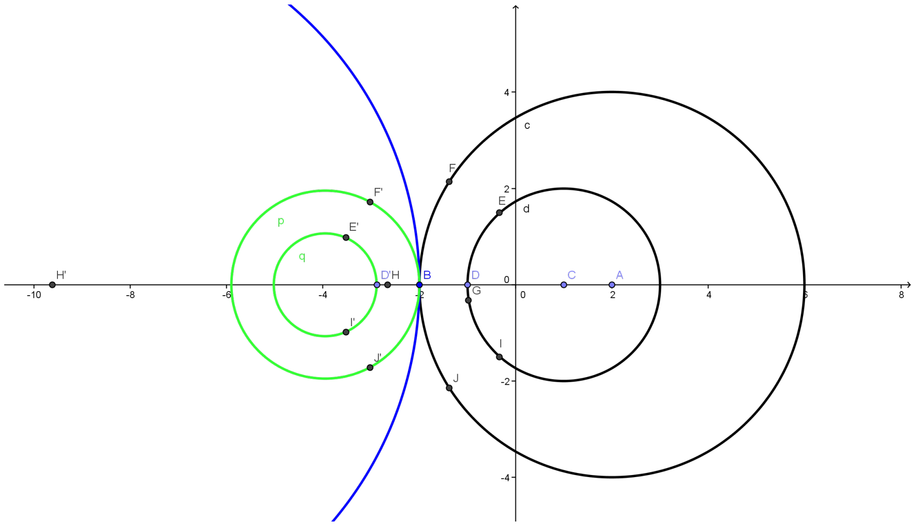

Figura 2.7: Secuencia 6

una transformación conforme, cobra importancia en las aplicaciones de la variable compleja, donde se requiere transformaciones conformes de dominios, para la resolución de ecuaciones diferenciales. Otra aplicación menos difundida, pero igualmente interesante, es la de sentar una base para realizar construcciones geométricas con solo compás [Ar]. Estas aplicaciones obligan a incluir en las currículas de profesorados y licenciaturas en matemáticas temas de la geometría de la Inversión.

El valor agregado del uso del Geogebra, que ha cobrado relevancia por más de un motivo en la educación, hace que el tema que nos ocupa sea altamente motivador. Y esta motivación, nos sirve a nuestro principal objetivo como docentes: Interesar a los estudiantes a nuestro cargo en temas de Matemáticas.

Referencias

[Co] Coxeter H.S.M, S.L Greitzer. Retorno a la Geometría. La Tortuga de Aquiles. 1993.

[Ar] Arias, M. V. Sángari, A. Construcciones con solo compás. volumen 27. Recuperado de http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/#rev_intro

[Bo] Boyer C. B. Historia de la Matemática. Editorial Alianza. 1986.