Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2019/20

Тема № СИ20-П-69

30.06.2020

София

Изготвил: Силвия Руменова Стоянова

Ф. No. 62365

Група: 3

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задание) на проекта

Учебен проект по ДУПрил
спец. СИ, 2 курс, летен семесътр, уч. год. 2019/20

Име...,
Ф.No..........., група ....

Тема СИ20-П-69. Трептенето на струна се моделира със следната задача

$$
\left|\begin{array}{l}
u_{tt} = \frac{2}{9}u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < 11, \\[2ex]
u|_{t=0} = \begin{cases} 5(1 - \ln(x^2 - 3x + 3))^3, & x \in [1,2] \\ 0, & x \in [0,1) \cup (2,11], \end{cases} \\[2ex]
u_t|_{t=0} = \sin\frac{\pi x}{11}, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\[2ex]
u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=11} = 0, \quad t \ge 0.
\end{array}\right.
$$

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. Използвайте 55-та частична сума на реда за $u(x,t)$ за да направете на MatLab анимация на движението на струната за $t \in [0,13]$. Начертайте в един прозорец една под друга графиките от направената анимация в началния, крайния и един междинен момент, като означите коя графика за кое t се отнася.

2. Решение на задачата

2.1 Теоретична част

69

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{2}{9} u_{xx}, & t>0,\ 0<x<11 \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 5(1-\ln(x^2-3x+3))^3, & x\in[1,2] \\ 0, & x\in[0,1)\cup(2,11] \end{cases} \\ u_t|_{t=0} = \sin\frac{\pi x}{11}, & 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=11}=0, & t\ge 0 \end{cases}$$

Начални условия:

1. $\varphi(x) = u|_{t=0} = \begin{cases} 5(1-\ln(x^2-3x+3))^3, & x\in[1,2] \\ 0, & x\in[0,1)\cup(2,11] \end{cases}$

2. $\psi(x) = u_t|_{t=0} = \sin\frac{\pi x}{11}$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ са непрекъснати в интервала $[0, 11]$

$a = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$L = 11$

Ще използваме метода на Фурие за разделяне на променливи

Търси се решение от вида $u(x,t) = X(x)T(t) \not\equiv 0$, защото при $\varphi(x)\equiv 0$ и $\psi(x)\equiv 0 \Rightarrow u\equiv 0$.

① Заместваме в уравнението:

$$X(x).T''(t) = \frac{2}{9}X''(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{\frac{2}{9}T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega \quad (\omega \text{ - произволна константа})$$

от ① получаваме следните уравнения:

$$X''(x) + \omega X(x) = 0$$

$$T''(t) + \frac{2}{9}\omega T(t) = 0$$

От условието $\rightarrow$ $\left.\begin{aligned} u|_{x=0}=0, \ t\ge 0 \\ u_x|_{x=11}=0, \ t\ge 0 \end{aligned}\right\}$ гранични условия

Използваме граничните условия:

$$u_x|_{x=11} = X'(11).T(t)=0, \quad t\ge 0 \Rightarrow X'(11)=0$$

$$u|_{x=0} = X(0).T(t)=0, \quad t\ge 0 \Rightarrow X(0)=0$$

За $X(x)$ получаваме следната задача на Щурм-Лиувил:

② $\begin{cases} X''(x)+\omega X(x)=0, & 0<x<11 \\ X'(11)=0, & X(0)=0 \end{cases}$

Търсим нетривиално решение на уравнението $X''(x)+\omega X(x)=0$

$P(\alpha)=\alpha^2+\omega=0$ - характеристичен полином

$\alpha^2=-\omega$

I сл. $\omega<0$, $\alpha=\pm\sqrt{-\omega}$

ФСР $=\{e^{\sqrt{-\omega}x}, e^{-\sqrt{-\omega}x}\}$

$X(x)=c_1\cdot e^{-\sqrt{-\omega}x}+c_2\cdot e^{\sqrt{-\omega}x}$

$X'(x)=\sqrt{-\omega}(-c_1\cdot e^{-\sqrt{-\omega}x}+c_2\cdot e^{\sqrt{-\omega}x})$

$X(0)=c_1+c_2=0 \Rightarrow c_1=-c_2$

$X'(11)=\sqrt{-\omega}(c_2\cdot e^{-11\sqrt{-\omega}}+c_2\cdot e^{11\sqrt{-\omega}})$

$=\sqrt{-\omega}\cdot c_2\cdot(e^{-11\sqrt{-\omega}}+e^{11\sqrt{-\omega}})=0$

$\Rightarrow c_2=0 \Rightarrow \boxed{X(x)\equiv 0}$

II сл. $\omega=0$, $\alpha=0$

ФСР $=\{1, x\}$

$X(x)=c_1+c_2x$

$X'(x)=c_2$

$X(0)=c_1=0 \Rightarrow c_1=0$

$X'(11)=c_2=0 \Rightarrow c_2=0$

$\Rightarrow \boxed{X(x)\equiv 0}$

III сл. $\omega>0$, $\alpha=\pm i\sqrt{\omega}$

ФСР $=\{\cos(\sqrt{\omega}x), \sin(\sqrt{\omega}x)\}$

$X(x)=c_1\cdot\cos(\sqrt{\omega}x)+c_2\cdot\sin(\sqrt{\omega}x)$

$X'(x)=\sqrt{\omega}(-c_1\cdot\sin(\sqrt{\omega}x)+c_2\cdot\cos(\sqrt{\omega}x))$

$X(0)=c_1\cdot\cos 0+c_2\cdot\sin 0=c_1 \Rightarrow \boxed{c_1=0}$

$X'(11)=\sqrt{\omega}(0+c_2\cdot\cos(11\sqrt{\omega}))=\sqrt{\omega}\cdot c_2\cdot\cos(11\sqrt{\omega})=0$

3.1) $c_2=0 \Rightarrow \boxed{X(x)\equiv 0}$

3.2) $c_2\neq 0$

$\cos(11\sqrt{\omega})=0$

$\Rightarrow 11\cdot\sqrt{\omega}=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k=0,1,2\ldots$

$\sqrt{\omega}=\frac{\pi+2k\pi}{2\cdot 11}=\frac{\pi(1+2k)}{22}$

$\omega=\left(\frac{\pi(1+2k)}{22}\right)^2$, $k=0,1,2\ldots$

Собствени стойности: $\omega_k=\left(\frac{\pi(1+2k)}{22}\right)^2$, $k=0,1,2\ldots$

Собствени функции: $X_k(x)=\cos(\sqrt{\omega_k}x)=\sin\left(\frac{\pi(1+2k)}{22}\cdot x\right)$; $k=0,1,2$

но $\pi = \frac{22}{7} \rightarrow$ $w_k = \left(\frac{2k+1}{7}\right)^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$X_k = \sin\left(\frac{2k+1}{7} \cdot x\right)$ $k = 0, 1, 2, \dots$

При $w = w_k$ (2) има безброй много решения:

$X(x) = c_2 \cdot X_k(x)$. c_2 - произволна константа
$k = 0, 1, 2, \dots$

При всички останали стойности за w задачата (2) има единствено тривиалното решение $X(x) \equiv 0$

Решаваме уравнението за $T(t)$ при $w = w_k$:

$$T''(t) + \frac{2}{9} w_k T(t) = 0$$

$Q(\alpha) = \alpha^2 + \frac{2}{9} w_k = 0$ - характеристичен полином

$$\alpha^2 = -\frac{2}{9} \cdot w_k$$

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{2k+1}{7}\right)^2} = \pm i \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{2k+1}{7}\right)$$

$$\text{ФСР} = \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2k+1}{7}\right)t\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2k+1}{7}\right)t\right) \right\}$$

$$T_k(t) = A_k \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2k+1}{7}\right)t\right) + B_k \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2k+1}{7}\right)t\right)$$

A_k, B_k - произволни константи

Така намерихме функции:

$u_k(x,t) = T_k(t) \cdot X_k(x)$, които са решение на уравнението на струната и удовлетворяват граничните условия

$u_k|_{t=0} = A_k \cdot X_k(x) = \varphi(x)$ - изпълнено само при специално $\varphi(x)$

В общия случай търсим решение от вида:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2k+1}{7}\right)t\right) + B_k \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2k+1}{7}\right)t\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{7}x\right)$$

$$u|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi(x)$$

Променяме индекса, по който сумираме: $\sum_{j=0}^{\infty} A_j X_j(x) = \varphi(x)$

Нека k е фиксирано:

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j X_j(x) \cdot X_k(x) = \varphi(x) \cdot X_k(x)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \int_0^l X_j(x) X_k(x) = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx$$

Тоді като $\int_0^l X_k(x) X_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \frac{l}{2}, & k = j \end{cases}$

$$\Rightarrow A_k \frac{l}{2} = \int_0^l u(x) X_k(x)\,dx$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l u(x) X_k(x)\,dx$$

$$A_k = \frac{2}{11} \int_0^{11} u(x) X_k(x)\,dx$$

$$u_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2k+1}{7}\right)\left[-A_k \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2k+1}{7}\right)t\right) + B_k \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2k+1}{7}\right)t\right)\right] \cdot X_k(x)$$

$$u_t|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2k+1}{7}\right) B_k X_k(x) = \psi(x)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2k+1}{7}\right) B_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) X_k(x)\,dx$$

$$B_k = \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{(2k+1)} \int_0^{11} \psi(x) X_k(x)\,dx$$

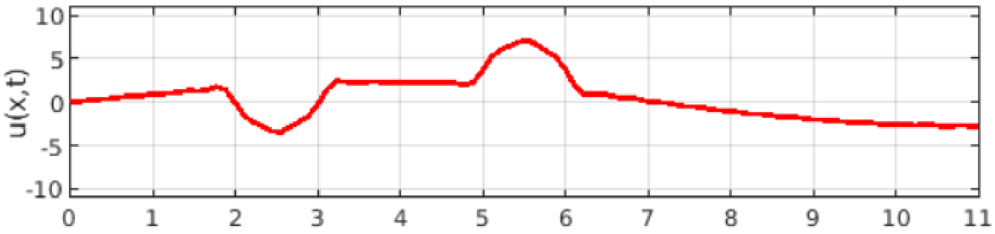
$$B_k = \frac{\cancel{2} \cdot 21 \cdot \sqrt{2}}{11 \cdot \cancel{2}(2k+1)} \int_0^{11} \psi(x) X_k(x)\,dx$$

$$B_k = \frac{21\sqrt{2}}{11(2k+1)} \int_0^{11} \psi(x) X_k(x)\,dx$$

2.2 MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

```
function dupr_project_62365

%define parameters
    a = sqrt(2/9);
    L = 11;
    tmax = 13;
    x = linspace(0, L);
    t = linspace(0, tmax);

    %define function phi
    function y = phi(x)
        for i = 1:length(x)
            if x(i) >= 1 && x(i) <= 2
                y(i)=5*(1-log(x(i)^2 - 3*x(i) + 3))^3;
            else
                y(i) = 0;
            end
        end
    end

    %define function psi
    function y = psi(x)
            y=sin((pi*x)/11);
    end

    %define function u(x,t)
    function y = u(x,t)
        y = 0;
        for k = 1:54
            Xk=sin(((2*k+1)*pi*x)/(2*L));
            Ak=(2/L)*trapz(x,phi(x).*Xk);
            Bk=(4/((2*k+1)*pi*a))*trapz(x,psi(x).*Xk);
            Tk=Ak*cos((2*k+1)*pi*a*t/(2*L))+Bk*sin((2*k+1)*pi*a*t/(2*L));
            y = y + Tk*Xk;
        end
    end

    %generate animation graphics
    for n = 1:length(t)
        plot(x, u(x,t(n)),'r', 'LineWidth', 2)
        axis([0 L -11 11])
        ylabel('u(x,t)');
        grid on
        M(n)=getframe;
    end
    movie(M,1)

    %draw graphics in a single window
    %first stage
    subplot(3,1,1)
    plot(x, u(x, 0), 'r', 'LineWidth', 2)
axis([0 L -15 15])
title('t = 0')
grid on

%mid stage
subplot(3,1,2)
plot(x, u(x, 7), 'r', 'LineWidth', 2)
axis([0 L -11 11])
title('t = 7')
grid on

%final stage
subplot(3,1,3)
plot(x, u(x, tmax), 'r', 'LineWidth', 2)
axis([0 L -11 11])
title('t = 13')
grid on
end
```

2.3 Графика на анимацията



2.4 Графика на отделните моменти