Testes de hipóteses

Introdução aos testes de hipóteses, testes para uma média, uma proporção e uma variância

Prof. Me. Lineu Alberto Cavazani de Freitas

Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Inferência

- Em inferência buscamos falar sobre a população a partir da observação da amostra.
- Os objetivos são:
  1. Estimar parâmetros populacionais de forma pontual e intervalar.
  2. Testar hipóteses sobre parâmetros.
- Nos testes de hipóteses buscamos avaliar uma declaração sobre o estado da população.
- Tentamos verificar se existe evidência suficiente nos dados que permita afirmar que o valor do parâmetro é igual ou diferente de alguma determinada quantidade de referência.

Testes de hipóteses

- Uma hipótese estatística é uma afirmativa sobre uma propriedade da população.
- Um teste de hipótese é um procedimento para se avaliar esta afirmativa confrontando-a com dados.
- A pergunta de interesse é: a amostra é compatível com a hipótese?
- Na prática, definimos duas hipóteses: uma hipótese nula e uma hipótese alternativa,
- Avaliamos com base nos dados a plausibilidade destas hipóteses.

Procedimento geral

O procedimento geral depende de uma sequência de passos:

1. Definir as hipóteses nula e alternativa.
2. Identificar o teste a ser efetuado, sua estatística de teste e distribuição.
3. Obter as quantidades necessárias para o cálculo da estatística de teste.
4. Fixar o nível de significância.
5. Definir o valor e a região crítica.
6. Confrontar o valor e região crítica com a estatística de teste.
7. Obter o p-valor.
8. Concluir pela rejeição ou não rejeição da hipótese nula.

Hipóteses

Hipótese nula (H_0):

- Hipótese de igualdade.
- Afirma-se que o valor do parâmetro é igual a algum valor especificado.

Hipótese alternativa (H_a ou H_1):

- Hipótese de diferença.
- Afirma-se que o valor do parâmetro é diferente daquele que foi enunciado na hipótese nula.

Hipóteses

- A hipótese alternativa determina o sentido do teste de hipótese:
  - Bilateral ($\neq$).
  - Unilateral à esquerda ($<$).
  - Unilateral à direita ($>$).

Exemplos

- Deseja-se verificar se a média de idade de alunos calouros é igual ou superior a 20 anos.
- A pergunta de interesse é: existe evidência suficiente nos dados que permite afirmar que a média é superior a 20?
- Definindo as hipóteses:

$$H_0 : \mu = 20 \times H_1 : \mu > 20.$$

Exemplos

- Um novo medicamento é lançado e promete curar 90% dos casos de determinada doença. Caso a proporção de curados seja menor do que isso o fabricante é multado.
- A pergunta de interesse é: existe evidência suficiente nos dados que permite afirmar que a proporção é inferior a 0,9?
- Definindo as hipóteses:

$$H_0 : p = 0{,}9 \times H_1 : p < 0{,}9.$$

Exemplos

- Espera-se que o desvio padrão da temperatura de uma máquina durante operação seja 5°C. Suponha que se este valor for diferente de 5 existe evidência de que a máquina está desregulada.

- A pergunta de interesse é: existe evidência suficiente nos dados que permite afirmar que o desvio padrão é diferente de 5?

- Definindo as hipóteses:

$$H_0 : \sigma = 5 \times H_1 : \sigma \neq 5.$$

Conclusões de um teste de hipóteses

- A interpretação do teste sempre é feita em termos da hipótese nula.
- Na prática verificamos se podemos rejeitar ou não rejeitar a hipótese nula H_0.
- Não se usa o termo “aceitar” a hipótese nula pois não se pode aceitar uma hipótese baseada apenas em evidências amostrais.

Tipos de erro

- Como tudo que fizemos em Inferência até este ponto, os testes de hipóteses também são baseados na observação de uma amostra.

- Logo, podemos cometer erros ao testar hipóteses, são eles:
  - Erro do tipo I: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira.
  - Erro do tipo II: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa.

- Definimos por α e β as probabilidades de cometer os erros do tipo I e II:
  - α = P(erro tipo I) = P(rejeitar H_0 | H_0 verdadeira).
  - β = P(erro tipo II) = P(não rejeitar H_0 | H_0 falsa).

Exemplos

- Deseja-se verificar se a média de idade de alunos calouros é igual ou superior a 20 anos.
- A pergunta de interesse é: existe evidência suficiente nos dados que permite afirmar que a média é superior a 20?
- Definindo as hipóteses:

$$H_0 : \mu = 20 \times H_1 : \mu > 20.$$

- Erro do tipo I: concluir que a média é maior que 20 quando na verdade não é.
- Erro do tipo II: concluir que a média não é maior que 20 quando na verdade é.

Exemplos

- Um novo medicamento é lançado e promete curar 90% dos casos de determinada doença. Caso a proporção de curados seja menor do que isso o fabricante é multado.
- A pergunta de interesse é: existe evidência suficiente nos dados que permite afirmar que a proporção é inferior a 0,9?
- Definindo as hipóteses:

$$H_0 : p = 0{,}9 \times H_1 : p < 0{,}9.$$

- Erro do tipo I: concluir que a proporção é menor que 0,9 quando na verdade não é.
- Erro do tipo II: concluir que a proporção não é menor que 0,9 quando na verdade é.

Exemplos

- Espera-se que o desvio padrão da temperatura de uma máquina durante operação seja 5°C. Suponha que se este valor for diferente de 5 existe evidência de que a máquina está desregulada.
- A pergunta de interesse é: existe evidência suficiente nos dados que permite afirmar que o desvio padrão é diferente de 5?
- Definindo as hipóteses:

$$H_0 : \sigma = 5 \times H_1 : \sigma \neq 5.$$

- Erro do tipo I: concluir que o desvio padrão é diferente de 5 quando na verdade não é.
- Erro do tipo II: concluir que o desvio padrão não é diferente de 5 quando na verdade é.

Tipos de erro

- Como tratam-se de erros, o ideal é que α e β sejam próximos de 0.
- Na prática a medida que diminui-se o α, o β aumenta.
- Nossa preocupação é sempre evitar o erro do tipo I.
- Por esta razão, α é chamado de nível de significância do teste.
- A quantidade $1 - \alpha$ é chamada nível de confiança do teste.

Estatística de teste

- Sabemos como definir as hipóteses, como interpretar em termos de H_0 e os erros que podemos cometer.
- Com as hipóteses definidas precisamos de uma regra de decisão que permita rejeitar ou não rejeitar uma hipótese nula.
- Esta regra de decisão é criada por meio de uma estatística de teste.
- A estatística de teste é um valor usado para tomar a decisão sobre a hipótese nula, supondo que ela seja verdadeira.
- Considera a distribuição amostral do estimador sob a hipótese nula.

Estatística de teste

- Estatística de teste para a média com variância conhecida.

$$z = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Estatística de teste para a média com variância desconhecida.

$$t = \frac{\bar{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

- Estatística de teste para a proporção

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

- Estatística de teste para a variância

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Valores críticos

- A estatística de teste sozinha não nos dá informação suficiente para a tomada de decisão sobre a afirmativa em um teste.
- É necessário comparar esta estatística com algum valor de referência que deve nos informar o quão extrema é a estatística de teste para rejeição de H_0.
- Este valor de referência é chamado de valor crítico.

Valores críticos

- O valor crítico divide a região de rejeição da região de não rejeição da hipótese nula.
- Se a estatística de teste estiver dentro da região crítica, rejeita-se H_0.
- Se a estatística de teste estiver fora da região crítica, não se rejeita H_0.

p-valor

- Geralmente, o nível de significância é pré-fixado para construir a regra de decisão.
- Uma alternativa é deixar em aberto a escolha de α para quem for tomar a decisão.
- A ideia é calcular, supondo que a hipótese nula é verdadeira, a probabilidade de se obter estatísticas mais extremas do que aquela fornecida pela amostra.
- Essa probabilidade é chamada de nível descritivo ou p-valor.
- Valores pequenos de p-valores evidenciam que a hipótese nula é falsa.

Relação entre intervalos de confiança e testes de hipótese

- Em ambos os casos os elementos são baseados na distribuição amostral.
- Para os intervalos de confiança temos a distribuição amostral baseada na amostra observada.
- Em testes de hipótese, temos a distribuição amostral baseada na hipótese nula. E então vemos o resultado da amostra em relação à distribuição no valor da hipótese.

Alguns testes

- Testes para uma população.
  - Teste para média.
  - Teste para proporção.
  - Teste para variância.
- Testes para comparar duas populações.
  - Teste para duas médias.
  - Teste para duas proporções.
  - Teste para duas variâncias.
- Outros testes
  - Testes de aderência.
  - Testes de associação.

Teste de hipóteses para a média com variância conhecida

Teste de hipóteses para a média com variância conhecida

Condições

- A amostra é aleatória simples.
- A variância (σ^2) é conhecida.
- A variável de interesse na população tem distribuição normal ou o tamanho amostral é suficientemente grande (em geral maior que 30).

- O TLC nos garante que a distribuição amostral da média se comporta segundo um modelo normal.
- Para o teste, podemos usar a seguinte estatística de teste:

$$z = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

Teste de hipóteses para a média com variância desconhecida

Teste de hipóteses para a média com variância desconhecida

Condições

- A amostra é aleatória simples.
- A variância (σ^2) é desconhecida.
- A variável de interesse na população tem distribuição normal ou o tamanho amostral é suficientemente grande (em geral maior que 30).

- O TLC nos garante que a distribuição amostral da média se comporta segundo um modelo normal.
- Neste caso, como não temos informação a respeito da variabilidade, usamos a distribuição t.
- Para o teste, podemos usar a seguinte estatística de teste:

$$t = \frac{\bar{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_\nu.$$

Teste de hipóteses para proporção

Teste de hipóteses para proporção

Condições

- A amostra é aleatória simples.
- As condições para a distribuição binomial são satisfeitas.
  - Tentativas independentes.
  - Variável dicotômica.
  - Probabilidade constante.
- Adicionalmente: $np_0 \geq 5$ e $n(1-p_0) \geq 5$.

- Se $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$, a distribuição amostral de $\hat{p}$ é aproximadamente normal.
- Para o teste, podemos usar a seguinte estatística de teste:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1).$$

Teste de hipóteses para variância

Teste de hipóteses para variância

Condições

- A amostra é aleatória simples.
- A população tem distribuição Normal.

- Para o teste, podemos usar a seguinte estatística de teste:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

O que foi visto:

- Introdução ao testes de hipóteses
- Principais teste de hipóteses
  - Teste de hipóteses para uma média com variância conhecida ou desconhecida.
  - Teste de hipóteses para uma proporção.
  - Teste de hipóteses para uma variância

Próximos assuntos:

- Teste de hipóteses para comparação de médias.
- Teste de hipóteses para comparação de proporções.
- Teste de hipóteses para comparação de variâncias.