CE301 - Estatística Básica

Famílias de distribuições

Paulo Justiniano Ribeiro Jr

Departamento de Estatística
Setor de Ciências Exatas
Universidade Federal do Paraná

22 de maio de 2025

Probabilidades

Como interpretar probabilidades?

- Informação prévia/disponível. Definição clássica.
- Obtida por observação/simulação. Definição frequentista (estimativa, limite de proporção)
- Atribuição "opinativa". Definição subjetiva.

Probabilidades

Como interpretar probabilidades?

- Informação prévia/disponível. Definição clássica.
- Obtida por observação/simulação. Definição frequentista (estimativa, limite de proporção)
- Atribuição "opinativa". Definição subjetiva.

Em outras palavras, probabilidades podem ser atribuídas por:

- modelos,
- dados,
- ou de forma *subjetiva*.

Probabilidades

Probabilidade(s) em (eventos de) interesse.
Revisando:

- Medida no intervalo $[0,1]$.
- Resultados por vezes contra-intuitivos.
- Formalização: fundamentos e notação.
- Propriedades (complementar, união, intersecção, condicional).
- Teorema de Bayes.

Probabilidades

Probabilidade(s) em (eventos de) interesse.
Revisando:

- Medida no intervalo $[0,1]$.
- Resultados por vezes contra-intuitivos.
- Formalização: fundamentos e notação.
- Propriedades (complementar, união, intersecção, condicional).
- Teorema de Bayes.

Problemas estilizados e analogias.

Atribuindo probabilidades

- Sair cara no lançamento de uma moeda.
- A soma de dois dados ser 6.
- Uma ninhada de cinco cães ter três fêmeas.
- Um jogador de basquete acertar todos lance-livres em um jogo.
- Uma seguradora registrar mais de 10 sinistros em um dia.
- Uma região registrar chuva (precipitação) em abril superior a 200 mm.
- Um paciente responder positivamente a certo tratamento.
- Uma pessoa avaliar positivamente um filme.

Atribuindo probabilidades

Modelos probabilísticos

- Padrões de comportamento.
- Situações *estilizadas* – modelos probabilísticos.
- Variáveis aleatórias
- Distribuições de probabilidades

Atribuindo probabilidades

Modelos probabilísticos

- Padrões de comportamento.
- Situações *estilizadas* – modelos probabilísticos.
- Variáveis aleatórias
- Distribuições de probabilidades

Muitas vezes a sociedade "organiza" o mundo de forma a trazer previsibilidade a partir fenômenos de ocorrência imprevisível.

Atribuindo probabilidades

Modelos probabilísticos

- Padrões de comportamento.
- Situações *estilizadas* – modelos probabilísticos.
- Variáveis aleatórias
- Distribuições de probabilidades

Muitas vezes a sociedade "organiza" o mundo de forma a trazer previsibilidade a partir fenômenos de ocorrência imprevisível.

Como ter previsibilidade a partir da imprevisibilidade?

Variáveis aleatórias

São "simplificações" (funções) de interesse do espaço amostral.

Variáveis aleatórias

São “simplificações” (funções) de interesse do espaço amostral.
São "dispositivos" para atribuir probabilidades em certos padrões de comportamento.

Um exemplo simples: quantos machos há em uma ninhada de três cães?
(estamos interessados somente no número de machos e não na ordem dos nascimentos)

Espaço amostral:

$$\Omega = \{(F,F,F),(F,F,M),(F,M,F),(M,F,F),(F,M,M),(M,F,M),(M,M,F),(M,M,M)\}$$

Variáveis aleatórias

São “simplificações” (funções) de interesse do espaço amostral.
São "dispositivos" para atribuir probabilidades em certos padrões de comportamento.

Um exemplo simples: quantos machos há em uma ninhada de três cães?
(estamos interessados somente no número de machos e não na ordem dos nascimentos)

Espaço amostral:

$$\Omega = \{(F,F,F),(F,F,M),(F,M,F),(M,F,F),(F,M,M),(M,F,M),(M,M,F),(M,M,M)\}$$

Variável aleatória: Y : número de machos

Domínio: $y \in \{0, 1, 2, 3\}$

Variáveis aleatórias

Organizando:

- Definindo a variável aleatória:

$$Y: \text{ número de machos em ninhada com 3 cães.}$$

- Verificando seus possíveis valores (*domínio*):

$$y \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

- Atribuindo probabilidades a seus possíveis valores:

y	0	1	2	3
Probabilidades	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Variáveis aleatórias

Organizando:

- Definindo a variável aleatória:

$$Y: \text{ número de machos em ninhada com 3 cães.}$$

- Verificando seus possíveis valores (*domínio*):

$$y \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

- Atribuindo probabilidades a seus possíveis valores:

y	0	1	2	3
Probabilidades	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

A tabela pode ser substituída por uma equação que produz seus valores:

$$P[Y = y] = \binom{3}{y} (1/2)^y (1 - 1/2)^{3-y}$$

Variáveis aleatórias

Organizando:

- Definindo a variável aleatória:

$$Y: \text{ número de machos em ninhada com 3 cães.}$$

- Verificando seus possíveis valores (*domínio*):

$$y \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

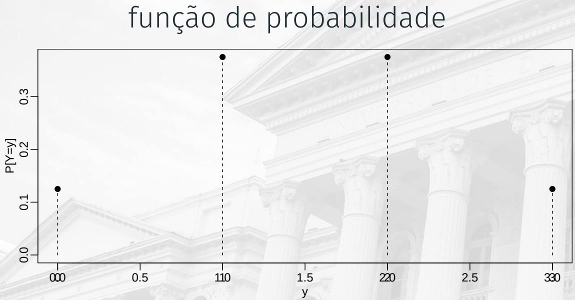
- Atribuindo probabilidades a seus possíveis valores:

y	0	1	2	3
Probabilidades	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

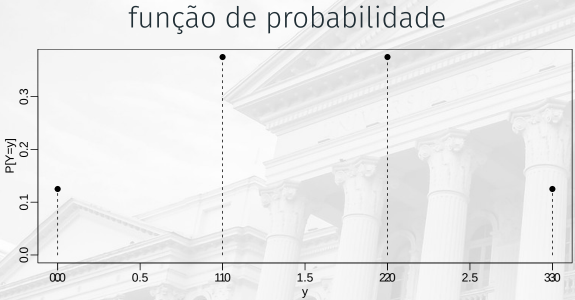
A tabela pode ser substituída por uma equação que produz seus valores:

$$P[Y = y] = \binom{3}{y} (1/2)^y (1 - 1/2)^{3-y} = \binom{n}{y} (p)^y (1 - p)^{n-y}.$$

Probabilidades em gráficos

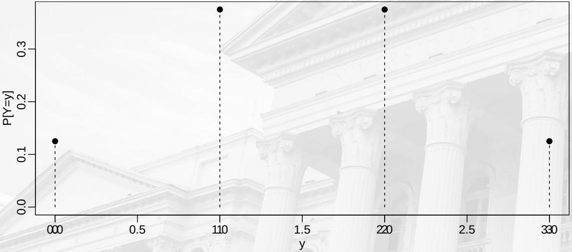


Probabilidades em gráficos

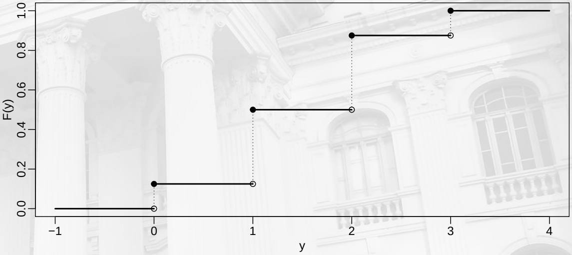


Probabilidades em gráficos

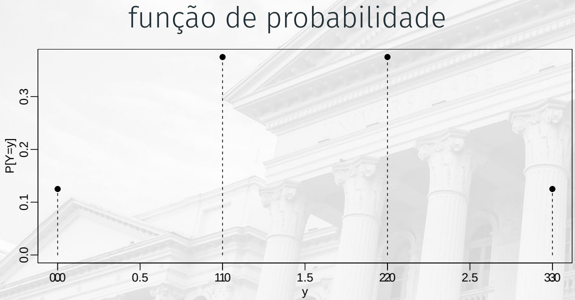
função de probabilidade

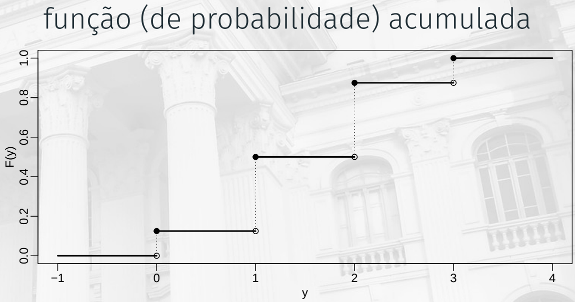


função (de probabilidade) acumulada



Probabilidades em gráficos





Calculando Probabilidades

Revisitando a lista de problemas:

- Vamos formalizar as soluções
- Pode-se representar problemas *reais* parecidos ou análogos

Exercício 1

Considere o lançamento de um dado normal.

1. Quais os resultados possíveis?
2. Qual a probabilidade de sair a face 5?
3. Qual a probabilidade de cada possível resultado?
4. Qual a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

Exercício 1

Suposições e modelo teórico

- ocorre uma entre seis possíveis faces
- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- as faces são igualmente prováveis

Tabela 1. Distribuição de probabilidades da face no lançamento de um dado

Face (y)	1	2	3	4	5	6
Probabilidades $P[Y = y]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Prob. Acum. $P[Y \leq y] = F(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

$$P[Y = y_i] = \frac{1}{6} \quad \forall i$$

Generalizando

- Definimos uma variável aleatória (v.a.) que associa valores ao resultado do experimento. Neste último caso a associação é simples e direta, 1-1.

Generalizando

- Definimos uma variável aleatória (v.a.) que associa valores ao resultado do experimento. Neste último caso a associação é simples e direta, 1-1.

- Distribuição de probabilidades: como o total da probabilidade (1) se distribui entre os possíveis valores da v.a..

Generalizando

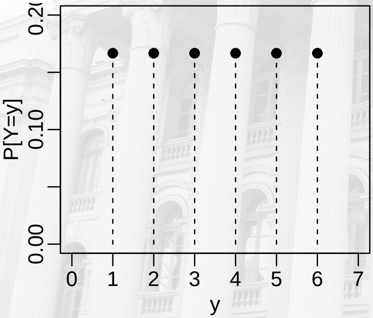
- Definimos uma variável aleatória (v.a.) que associa valores ao resultado do experimento. Neste último caso a associação é simples e direta, 1-1.
- Distribuição de probabilidades: como o total da probabilidade (1) se distribui entre os possíveis valores da v.a..
- A distribuição da v.a. pode ser descrita por uma tabela, ou, caso possível, por uma *fórmula* (uma função de probabilidades) que atribui seus valores.

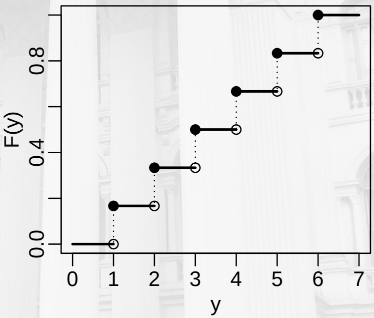
Generalizando

- Definimos uma variável aleatória (v.a.) que associa valores ao resultado do experimento. Neste último caso a associação é simples e direta, 1-1.
- Distribuição de probabilidades: como o total da probabilidade (1) se distribui entre os possíveis valores da v.a..
- A distribuição da v.a. pode ser descrita por uma tabela, ou, caso possível, por uma *fórmula* (uma função de probabilidades) que atribui seus valores.
- Neste caso dizemos ter uma família de distribuição especial ou conhecida.

Generalizando a solução: Exercício 1

$$Y : \text{face de um dado (v.a. discreta)}$$
$$y \in \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$Y \sim \mathrm{U_d}(n = 6)$$
$$P[Y = y] = \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$$





Exercício 2

Considere o lançamento de um dado não usual, no qual a probabilidade de cada face é proporcional ao seu valor.

1. Quais os resultados possíveis?
2. Qual a probabilidade de sair a face 5?
3. Qual a probabilidade de cada possível resultado?
4. Qual a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

Exercício 2

Suposições e modelo probabilístico (teórico)

- Ocorre uma entre seis possíveis faces.
- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- As faces não são igualmente prováveis.

Tabela 2. Distribuição de probabilidades da face no lançamento de um dado

Face (y)	1	2	3	4	5	6
$P[Y = y]$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$
$P[Y \leq y]$	$\frac{1}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{15}{21}$	$\frac{21}{21}$

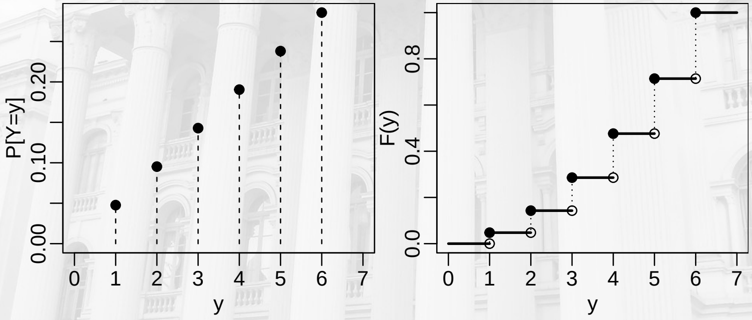
Generalizando a partir do Exercício 2

Notação:

$$Y : \text{face de um dado (v.a. discreta)}$$

$$y \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$P[Y = y_i] = \frac{y_i}{\sum_i y_i}$$



Exercício 3

Considere o lançamento de dois dados e o interesse está na soma das faces.

1. Quais os resultados possíveis?
2. Qual a probabilidade da soma ser 5?
3. Qual a probabilidade de cada possível resultado?
4. Qual a probabilidade que a soma das faces seja um número divisível por 3?

Exercício 3

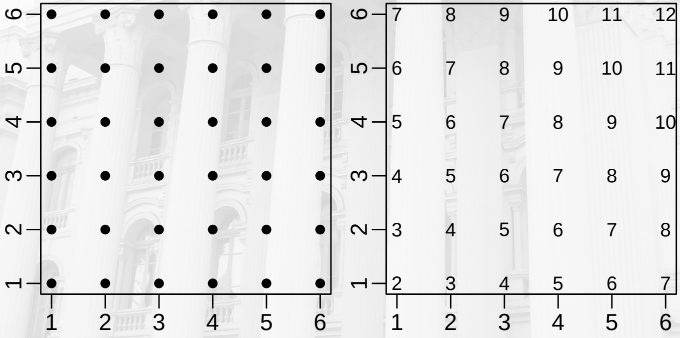
Suposições e modelo teórico

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots(2,1),(2,2),\ldots(6,5),(6,6)\}$ $n(\Omega) = 36$
- Y: soma das faces no lançamento de dois dados
- $y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Exercício 3

Suposições e modelo teórico

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots(2,1),(2,2),\dots(6,5),(6,6)\}$ $n(\Omega) = 36$
- Y: soma das faces no lançamento de dois dados
- $y \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

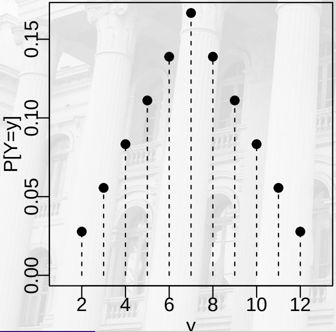


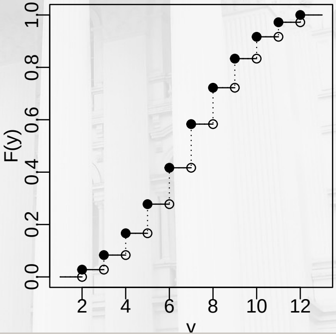
Exercício 3 (cont)

Tabela 3. Distribuição de probabilidades da soma das faces no lançamento de dois dados

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[Y=y]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(y)=P[Y \leq y]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1

A tabela pode ser expressa pela equação: $P[Y=y] = \frac{6-|y-7|}{36}$.





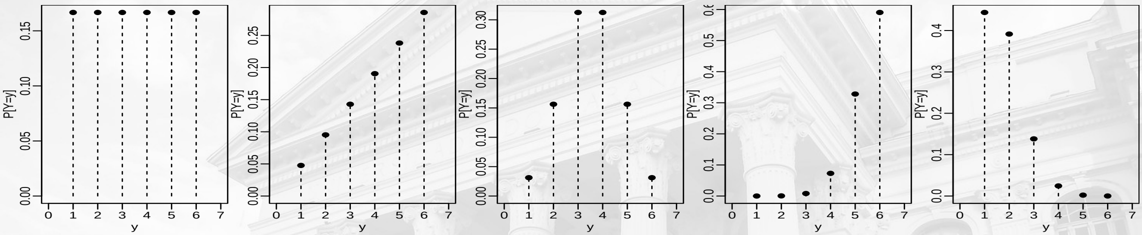
Variáveis aleatórias discretas

- Y tem valores em um conjunto enumerável
- Possui um função de probabilidades $P[Y = y]$ com valores expressos por uma tabela ou fórmula
- Pode tb ser caracterizada por uma função acumulada

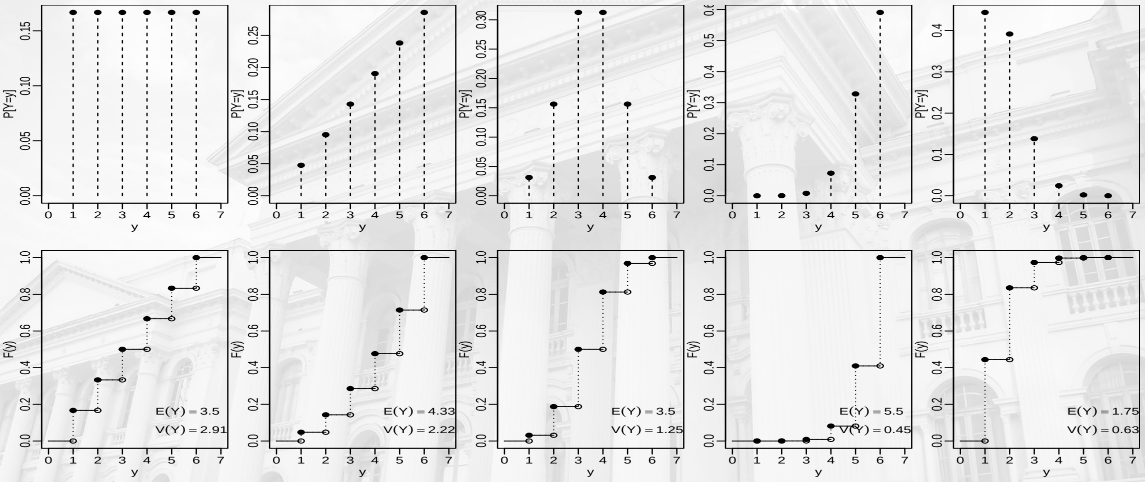
$$F(y) = \sum_i P[Y = y_i]$$

- Pode-se calcular medidas que expressam características da distribuição tais como:
  - Média (valor esperado, esperança): $\text{E}[Y] = \sum_i y_i \cdot P[Y = y_i]$
  - Variância : $\text{Var}[Y] = \sum_i (y_i - \text{E}[Y])^2 \cdot P[Y = y_i]$
  - mediana, quantis, etc

Variáveis aleatórias discretas



Variáveis aleatórias discretas



Exercício 4

Um dado foi fabricado com o centro em madeira leve e cada face com uma chapa metálica porém de diferentes características (espessura/densidade) em cada face?

1. Quais os resultados possíveis?
2. Como calcular a probabilidade de sair a face 5?
3. Como calcular a probabilidade de cada possível resultado?
4. Como calcular a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

Exercício 4

Suposições e procedimento empírico

- ocorre uma entre seis possíveis faces
- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- as faces podem não ser igualmente prováveis

Exercício 4

Suposições e procedimento empírico

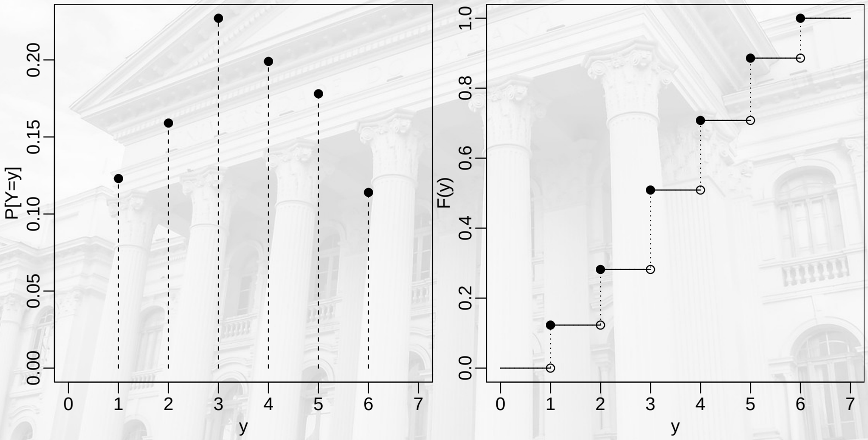
- ocorre uma entre seis possíveis faces
- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- as faces podem não ser igualmente prováveis
- experimento: lançou-se o dado 1000 vezes obtendo-se

Tabela 4. Distribuição de probabilidades da face no lançamento de um dado

Face (y)	1	2	3	4	5	6
Probabilidades	$\frac{123}{1000}$	$\frac{159}{1000}$	$\frac{227}{1000}$	$\frac{199}{1000}$	$\frac{178}{1000}$	$\frac{114}{1000}$

Exercício 4 (cont)

Distribuição de probabilidades obtida *empiricamente*



Exercício 4 (cont)

Uma pergunta válida:
Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?

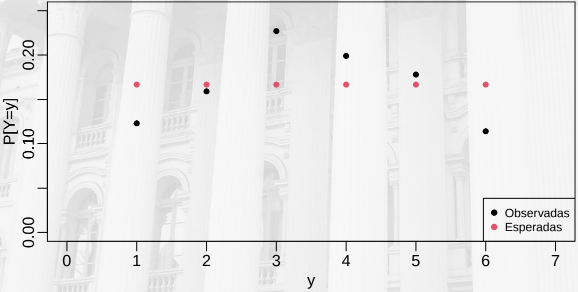
Face (y)	1	2	3	4	5	6
Probs Observadas	$\frac{123}{1000}$	$\frac{159}{1000}$	$\frac{227}{1000}$	$\frac{199}{1000}$	$\frac{178}{1000}$	$\frac{114}{1000}$
Probs "Esperadas"	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{166}{1000}$	$\frac{166}{1000}$

Exercício 4 (cont)

Uma pergunta válida:

Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?

Face (y)	1	2	3	4	5	6
Probs Observadas	$\frac{123}{1000}$	$\frac{159}{1000}$	$\frac{227}{1000}$	$\frac{199}{1000}$	$\frac{178}{1000}$	$\frac{114}{1000}$
Probs "Esperadas"	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{166}{1000}$	$\frac{166}{1000}$



Exercício 4 (cont)

Uma pergunta válida:

Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?

Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?

Face (y)	1	2	3	4	5	6
Probs Observadas	$\frac{123}{1000}$	$\frac{159}{1000}$	$\frac{227}{1000}$	$\frac{199}{1000}$	$\frac{178}{1000}$	$\frac{114}{1000}$
Probs "Esperadas"	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{166}{1000}$	$\frac{166}{1000}$
Probs Simuladas	$\frac{185}{1000}$	$\frac{163}{1000}$	$\frac{164}{1000}$	$\frac{169}{1000}$	$\frac{172}{1000}$	$\frac{147}{1000}$

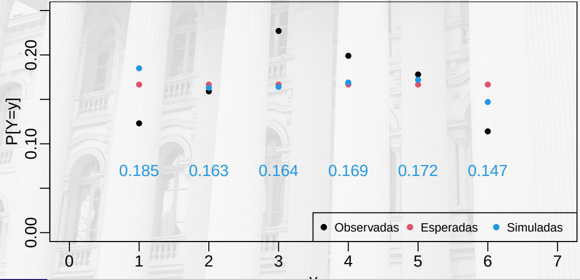
Exercício 4 (cont)

Uma pergunta válida:

Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?

Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?

Face (y)	1	2	3	4	5	6
Probs Observadas	$\frac{123}{1000}$	$\frac{159}{1000}$	$\frac{227}{1000}$	$\frac{199}{1000}$	$\frac{178}{1000}$	$\frac{114}{1000}$
Probs "Esperadas"	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{166}{1000}$	$\frac{166}{1000}$
Probs Simuladas	$\frac{185}{1000}$	$\frac{163}{1000}$	$\frac{164}{1000}$	$\frac{169}{1000}$	$\frac{172}{1000}$	$\frac{147}{1000}$



Exercício 4 (cont)

Uma pergunta válida:

Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?

Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?

Face (y)	1	2	3	4	5	6
Probs Observadas	$\frac{123}{1000}$	$\frac{159}{1000}$	$\frac{227}{1000}$	$\frac{199}{1000}$	$\frac{178}{1000}$	$\frac{114}{1000}$
Probs "Esperadas"	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{166}{1000}$	$\frac{166}{1000}$
Probs Simuladas (2)	$\frac{146}{1000}$	$\frac{179}{1000}$	$\frac{160}{1000}$	$\frac{164}{1000}$	$\frac{170}{1000}$	$\frac{181}{1000}$

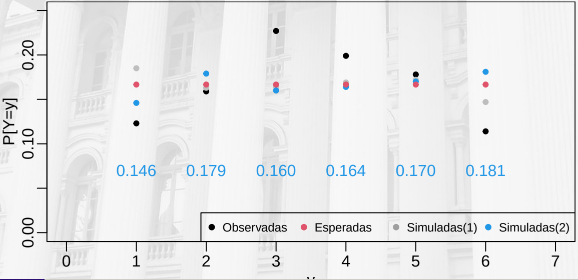
Exercício 4 (cont)

Uma pergunta válida:

Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?

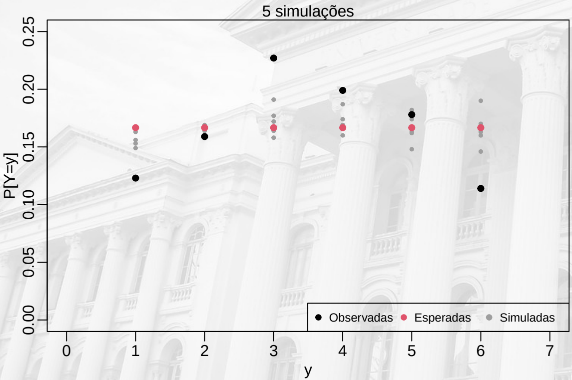
Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?

Face (y)	1	2	3	4	5	6
Probs Observadas	$\frac{123}{1000}$	$\frac{159}{1000}$	$\frac{227}{1000}$	$\frac{199}{1000}$	$\frac{178}{1000}$	$\frac{114}{1000}$
Probs "Esperadas"	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{167}{1000}$	$\frac{166}{1000}$	$\frac{166}{1000}$
Probs Simuladas (2)	$\frac{146}{1000}$	$\frac{179}{1000}$	$\frac{160}{1000}$	$\frac{164}{1000}$	$\frac{170}{1000}$	$\frac{181}{1000}$



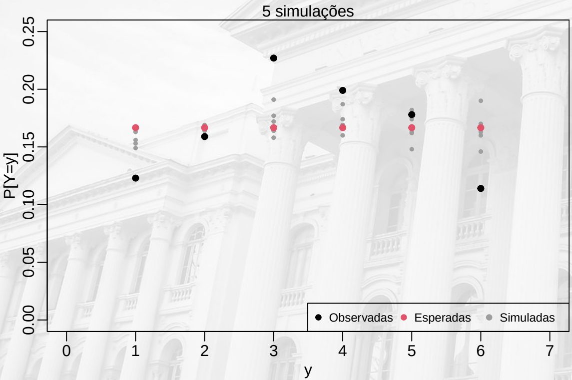
Exercício 4 (cont)

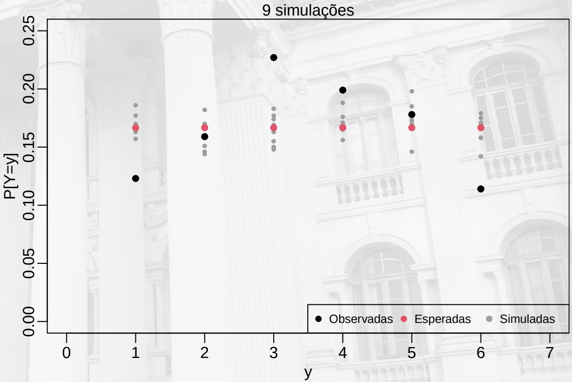
Uma pergunta válida:
Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?
Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?



Exercício 4 (cont)

Uma pergunta válida:
Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?
Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?



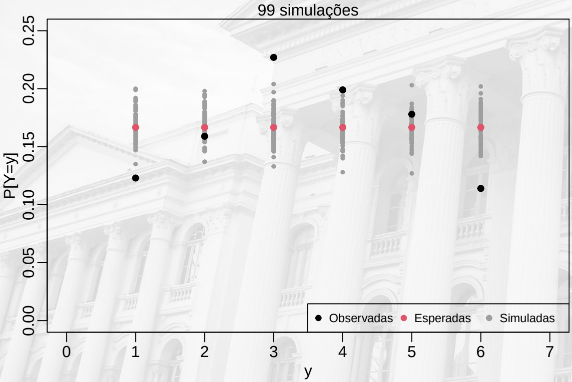


Exercício 4 (cont)

Uma pergunta válida:

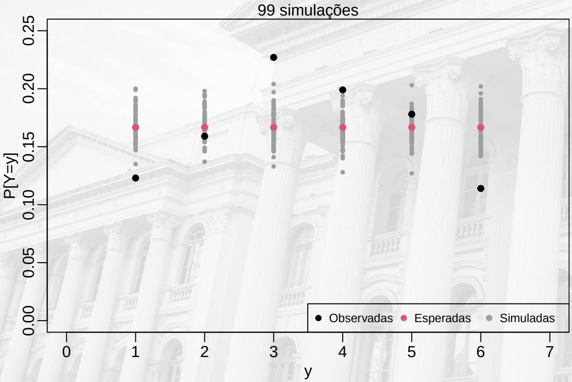
Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?

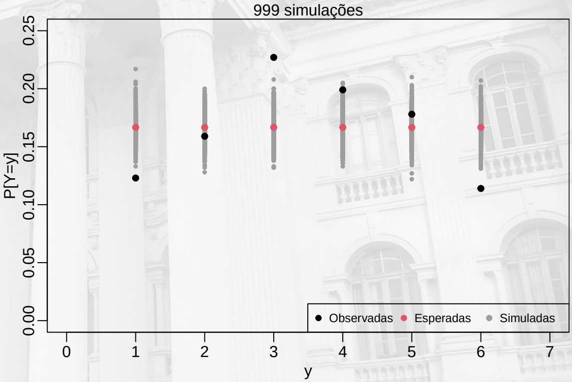
Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?



Exercício 4 (cont)

Uma pergunta válida:
Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?
Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?





Exercício 5

Voce vai a um cassino em uma mesa que tem um jogo no qual se lançam dois dados como em um problema anterior. A regra é a de que se a soma for 6, 7 ou 8 voce ganha, valor igual ao apostado, caso contrário, perde o apostado.

1. Qual sua opinão sobre suas chances de ganhar?
2. Quais os resultados possíveis?
3. Qual sua opinião sobre a probabilidade da soma ser 5?
4. Qual sua opinião sobre a probabilidade de cada possível resultado?
5. Qual sua opinião sobre a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

Exercício 5

Qual sua opinião sobre a probabilidade?

Exercício 5

Qual sua opinião sobre a probabilidade?

Revisitando Interpretações de probabilidade

- Clássica: obtenção a partir de modelo teórico (ex. 1 a 3)
- Frequentista: obtenção a partir de procedimento empírico (ex. 4)
- Subjetiva: opinião do indivíduo (ex. 5)

Exercício 6

Em um teste múltipla escolha de quatro questões, deve-se marcar uma alternativa em cada questão.
Cada questão é composta de cinco alternativas das quais apenas uma é correta.
Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

Exercício 6

A resposta é mais simples se calcularmos pelo complementar: $P[\cdot] = 1 - (0{,}8)^4 = 0.59$,

Exercício 6

A resposta é mais simples se calcularmos pelo complementar: $P[\cdot] = 1 - (0{,}8)^4 = 0.59$, mas
Organizando o problema ...

- $\Omega = \{(CCCC), (CCCE), \ldots, (EEEE)\} \quad n(\Omega) = 16$
- Y: número de questões certas
- $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $P[Y = y] = \binom{4}{y}(1/5)^y(4/5)^{4-y} = \binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}$ (distribuição Binomial!)
- Evento de interesse:

$$P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] = 1 - \binom{4}{0}(1/5)^0(4/5)^4 = 0.59$$

Código **R**:

```
1 - dbinom(0, size=4, prob=1/5)
## [1] 0.5904
```

Exercício 8

Alguns biólogos fizeram estudos de laboratório sobre o comportamento de animais quando submetidos a um estímulo, o quais poderiam apresentar ou não resposta positiva. Em particular estavam interessados nas respostas positivas ao estímulo. Considera-se que na população destes animais, 10% sejam sensíveis ao estímulo.

O biólogo A possuia um grupo em que 10 animais eram sensíveis e 20 eram insensíveis. Ele selecionou ao acaso 8 animais para teste.

O biólogo B dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar o terceiro sensível ao estímulo.

O biólogo C fazia testes diários e encontrava uma média de 2,8 animais sensíveis a cada dia.

O biólogo D submeteu 10 animais ao estímulo e registrou quantos eram sensíveis.

O biólogo E dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar um sensível ao estímulo.

Exercício 8

Distribuições discretas mais usuais:

- Hipergeométrica
- Binomial negativa (Pascal)
- Poisson
- Bernoulli e Binomial
- Geométrica

Biólogo A: Distribuição Hipergeométrica

O biólogo A possuia um grupo em que 10 animais eram sensíveis e 20 eram insensíveis. Ele selecionou ao acaso 8 animais para teste.
Qual a probabilidade do biólogo A encontrar ao menos 2 animais sensíveis?

$$Y: \text{número de sensíveis entre oito testados.}$$

$$Y \sim \text{HG}(m, n, k)$$

$$y \in \{0, 1, 2, \ldots 8\}$$

$$P[Y = y] = \frac{\binom{m}{y}\binom{n}{k-y}}{\binom{m+n}{k}} = \frac{\binom{10}{y}\binom{20}{8-y}}{\binom{30}{8}}$$

$$P[Y \geq 2] = 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] = 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{20}{8-0}}{\binom{30}{8}} - \frac{\binom{10}{1}\binom{20}{8-1}}{\binom{30}{8}} = 0.8460$$

Código **R**:

```
1 - phyper(1, m=10, n=20, k=8)
## [1] 0.8460308
```

Distribuição binomial negativa

O biólogo B dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar o terceiro sensível ao estímulo.
Qual a probabilidade de precisar testar no máximo 6 animais?

Y : número de não sensíveis encontrados até encontrar o terceiro sensível.

$Y \sim \text{BN}(k, p)$

$y \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$P[Y = y] = \binom{y+k-1}{k-1}(1-p)^y p^k = \binom{y+3-1}{3-1}(0.9)^y(0.1)^3$$

$$P[Y \leq 3] = P[Y = 0] + P[Y = 1] + P[Y = 2] + P[Y = 3] = 0.0158$$

Código **R**:

```
pnbinom(3, size=3, prob=0.1)
## [1] 0.01585
```

Distribuição Poisson

O biólogo C fazia testes diários e encontrava uma média de 2,8 animais sensíveis a cada dia.
Qual a probabilidade de encontrar menos que dois sensíveis em um determinado dia?

$$Y: \text{número de sensíveis encontrados por dia.}$$

$$Y \sim \mathrm{P}(\lambda)$$

$$y \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$P[Y = y] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} = \frac{e^{-2.8}2.8^{y}}{y!}$$

$$P[Y < 2] = P[Y = 0] + P[Y = 1] = \frac{e^{-2.8}2.8^{0}}{0!} + \frac{e^{-2.8}2.8^{1}}{1!} = 0.2311$$

Código **R**:

```
ppois(1, lambda=2.8)
## [1] 0.2310782
```

Distribuição Binomial

O biólogo *D* submeteu 10 animais ao estímulo e registrou quantos eram sensíveis..
Qual a probabilidade de encontrar mais que 3 animais sensíveis?

Y : número de sensíveis entre 10 testados.

$Y \sim \mathrm{B}(n, p)$

$y \in \{0, 1, 2, \ldots 10\}$

$$P[Y = y] = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \binom{10}{y} (0.1)^y (0.9)^{10-y}$$

$$P[Y > 3] = 1 - P[Y \leq 3] = 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] - P[Y = 2] - P[Y = 3] = 0.0128$$

Código **R**:

```
1 - pbinom(3, size=10, prob=0.1)
## [1] 0.0127952
```

Distribuição Geométrica

O biólogo E dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar um sensível ao estímulo..
Qual a probabilidade de precisar testar mais que 3 animais?

Y : número de não sensíveis testados até encontrar o primeiro sensível.

$$Y \sim \mathrm{G}(p)$$

$$y \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

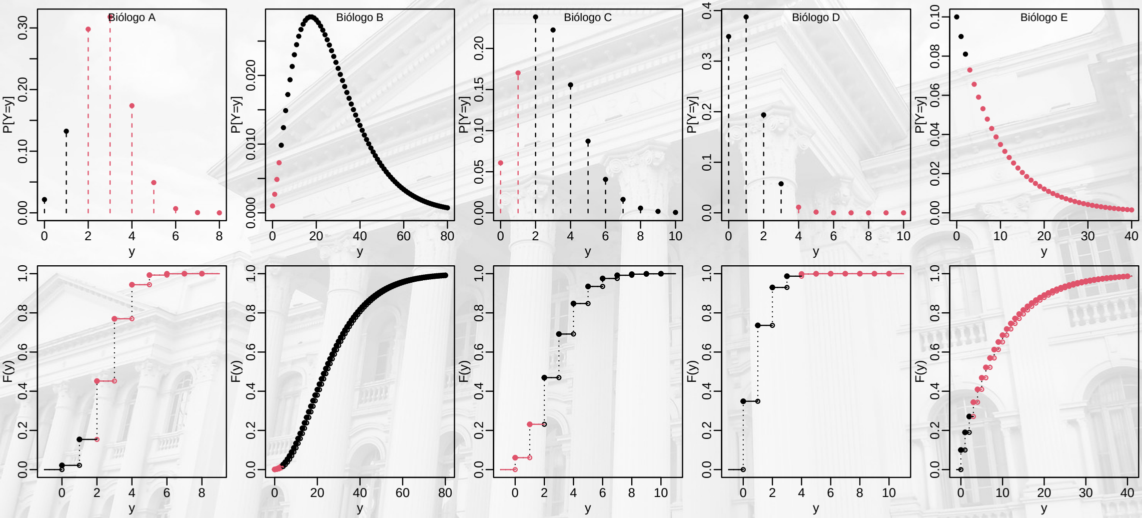
$$P[Y = y] = (1 - p)^y p$$

$$P[Y \geq 3] = 1 - P[Y = 0] - P[Y = 1] - P[Y = 2] = 0.7290$$

Código **R**:

```
1 - pgeom(2, prob=0.1)
## [1] 0.729
```

Os modelos dos biólogos



Atenção: definição da variável

Geométrica:

Y: número de "falhas" até primeiro sucesso $P[Y = y] = (1-p)^y p, \text{ para } y = 0, 1, \ldots$

ou

Y: número de tentativas até primeiro sucesso $P[Y = y] = (1-p)^{y-1} p, \text{ para } y = 1, 2, \ldots$

Atenção: definição da variável

Geométrica:

Y: número de "falhas" até primeiro sucesso $P[Y = y] = (1-p)^y p, \;$ para $y = 0, 1, \ldots$

ou

Y: número de tentativas até primeiro sucesso $P[Y = y] = (1-p)^{y-1} p, \;$ para $y = 1, 2, \ldots$

Binomial negativa:

Y: número de "falhas" até o k-ésimo sucesso ...

ou

Y: número de tentativas até o k-ésimo sucesso ...

Modelos

Modelos de probabilidade e modelos estatísticos.

- Escolha de modelo.
- Constantes e parâmetros.
- Famílias e obtenção do(s) parâmetro(s).
- Modelagem estatística, regressão e generalizações.

Exercício 10

Considere o surgimento de um defeito na pista em um trecho de rodovia com extensão de 20 km.

1. Qual a probabilidade de que o defeito ocorra nos primeiros 5 km?
2. Qual a probabilidade de que o defeito ocorra entre os quilômetros 12 e 15?
3. Se o defeito ocorre na segunda metade do trecho, qual a probabilidade de seja nos últimos 3 km?
4. O custo de manutenção é de R$2.000,00 se ocorre nos primeiros 5 km, de R$5.000,00 se ocorre entre 5 e 16 kms e de R$10.000,00 se ocorre nos ultimos 4 km. Que custo espera-se ter em 20 manutenções?

Exercício 10

Considere o surgimento de um defeito na pista em um trecho de rodovia com extensão de 20 km.

1. Qual a probabilidade de que o defeito ocorra nos primeiros 5 km?
   Resposta: 1/4
2. Qual a probabilidade de que o defeito ocorra entre os quilômetros 12 e 15?
   Resposta: 3/20
3. Se o defeito ocorre na segunda metade do trecho, qual a probabilidade de seja nos últimos 3 km?
   Resposta: 3/10
4. O custo de manutenção é de R$2.000,00 se ocorre nos primeiros 5 km, de R$5.000,00 se ocorre entre 5 e 16 kms e de R$10.000,00 se ocorre nos ultimos 4 km. Que custo espera-se ter em 20 manutenções?
   Resposta: $\frac{5}{20}2000 + \frac{11}{20}5000 + \frac{4}{20}10000 = 5250$

Exercício 10

O que mudou?

Exercício 10

O que mudou?

Domínio de Y nos reais (ou subconjunto dos reais), no exemplo $y \in [0, 20]$

Exercício 10

O que mudou?

Domínio de Y nos reais (ou subconjunto dos reais), no exemplo $y \in [0, 20]$

- a v.a. é contínua,
- não faz mais sentido em avaliar o valor em um ponto $P[Y = y]$
- Define-se uma função de densidade de probabilidade (fdp) $f(y)$
  - $f(y) \geq 0 \;\; \forall y$
  - $\int f(y) \mathrm{d}y = 1$
- E as probabilidades de interesse são áreas sob a função

$$P[a < Y < b] = \int_a^b f(y) \mathrm{d}y$$

Exercício 10 (cont)

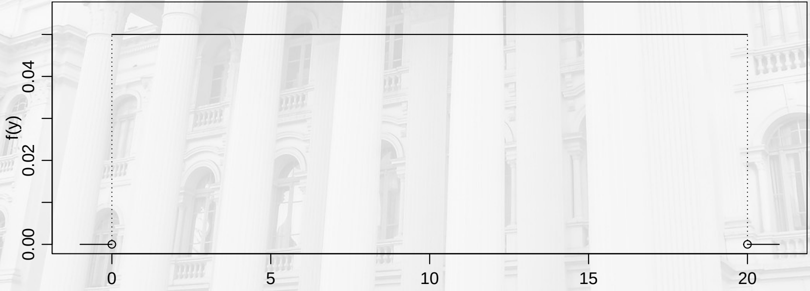
Considere o surgimento de um defeito na pista em um trecho de rodovia com extensão de 20 km.

$$Y : \text{local onde ocorre o defeito}$$

$$y \in [0, 20]$$

$$Y \sim U_c[0, 20]$$

$$f(y) = \frac{1}{20}$$

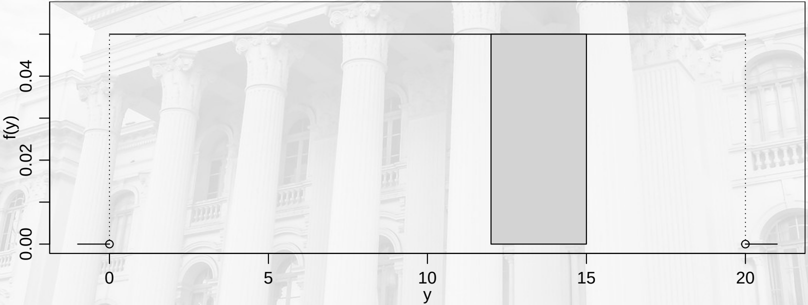


Exercício 10 (cont)

1. Qual a probabilidade de que o defeito ocorra nos primeiros 5 km?
   Resposta: 1/4 = 0,25

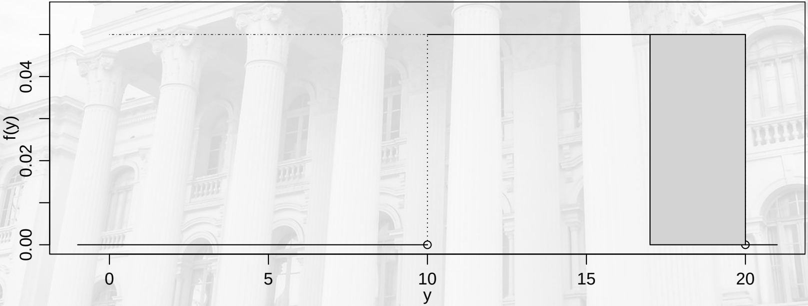
Exercício 10 (cont)

2. Qual a probabilidade de que o defeito ocorra entre os quilômetros 12 e 15?
   Resposta: 3/20 = 0,15



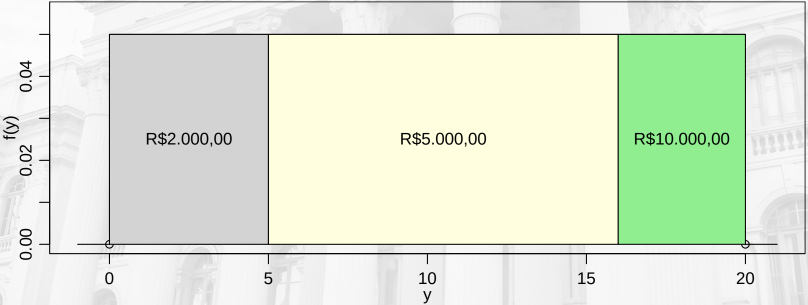
Exercício 10 (cont)

3 Se o defeito ocorre na segunda metade do trecho, qual a probabilidade de seja nos últimos 3 km?
Resposta: $\frac{3}{10}$



Exercício 10 (cont)

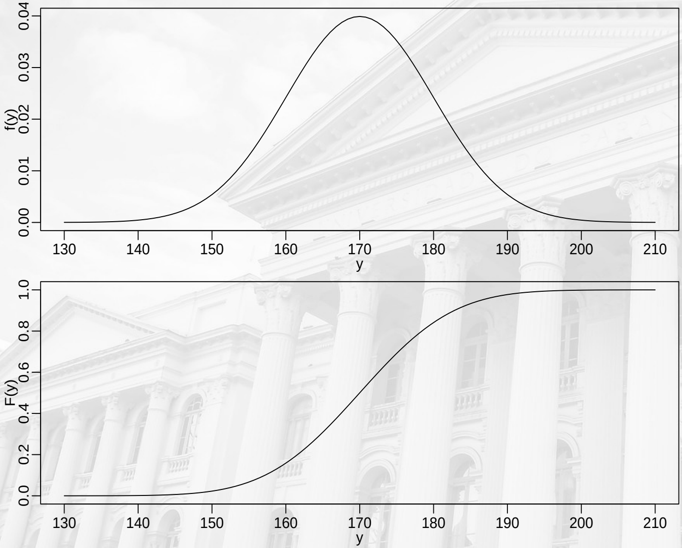
4. O custo de manutenção é de R$2.000,00 se ocorre nos primeiros 5 km, de R$5.000,00 se ocorre entre 5 e 16 kms e de R$10.000,00 se ocorre nos ultimos 4 km. Que custo espera-se ter em 20 manutenções?
   Resposta: $\frac{5}{20}2000 + \frac{11}{20}5000 + \frac{4}{20}10000 = 5250$



Outras distribuições

Mas, ..."o mundo" não é uniforme!

Uma distribuição especial, ou melhor, **normal**



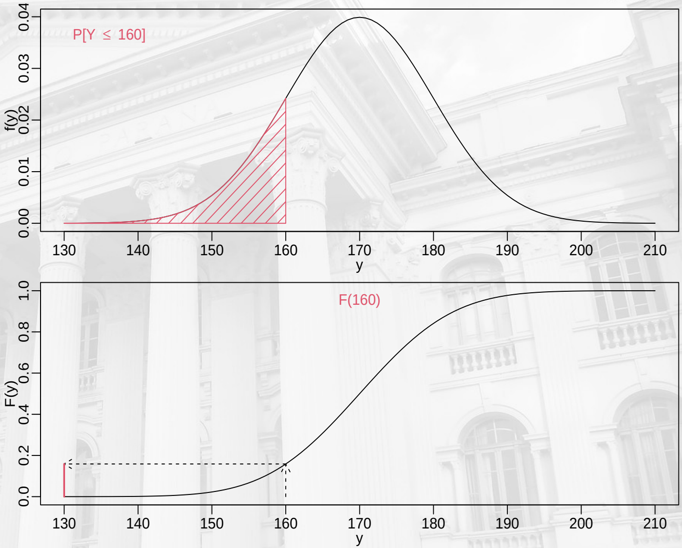
$$Y \sim \mathrm{N}(\mu = 170, \sigma^2 = 10^2)$$

1. $P[Y \leq 160]$
2. $P[Y > 180]$
3. $P[155 \leq Y \leq 175]$
4. $P[Y \leq a] = 0{,}99$
5. $P[\mu - b \leq Y \leq \mu + b] = 0{,}80$
6. $P[Y \leq 160 | Y \leq 170]$
7. $P[Y > 180 | Y > 165]$
8. $P[Y \leq 185 | Y > 155]$
9. $P[Y > 175 | Y \leq 190]$

Probabilidade

$$Y \sim \text{N}(\mu = 170, \sigma^2 = 10^2)$$

1. $P[Y \leq 160]$
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.



Código **R**:

```
pnorm(160, mean = 170, sd = 10)
## [1] 0.1586553
```

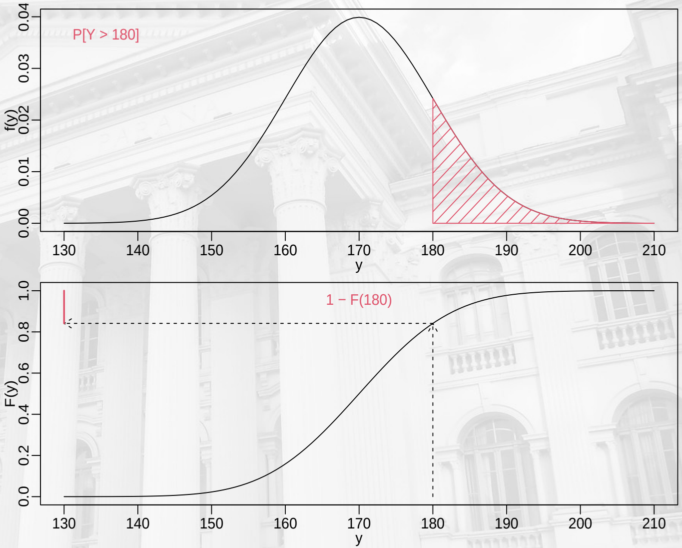
Probabilidade

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu = 170, \sigma^2 = 10^2)$$

1.
2. $P[Y > 180]$
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.

Código **R**:

```
1 - pnorm(180, 170, 10)
## [1] 0.1586553
```



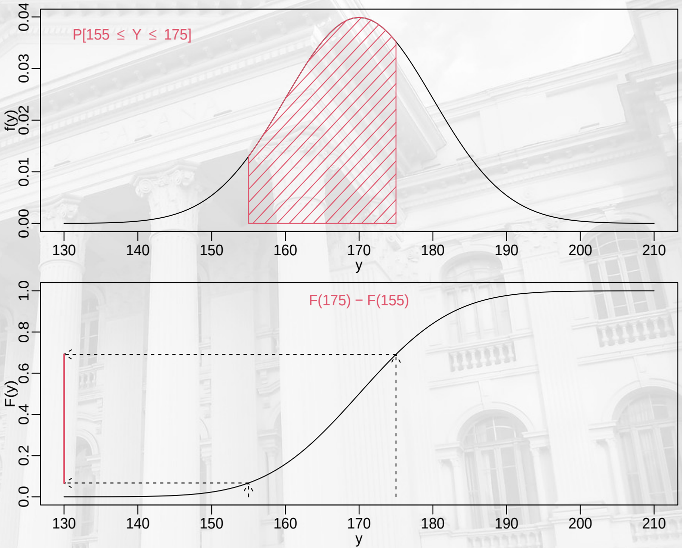
Probabilidade

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu = 170, \sigma^2 = 10^2)$$

1.
2.
3. $P[155 \leq Y \leq 175]$
4.
5.
6.
7.
8.
9.

Código **R**:

```
pnorm(175, mean = 170, sd = 10) -
    pnorm(155, mean = 170, sd = 10)
## [1] 0.6246553
```



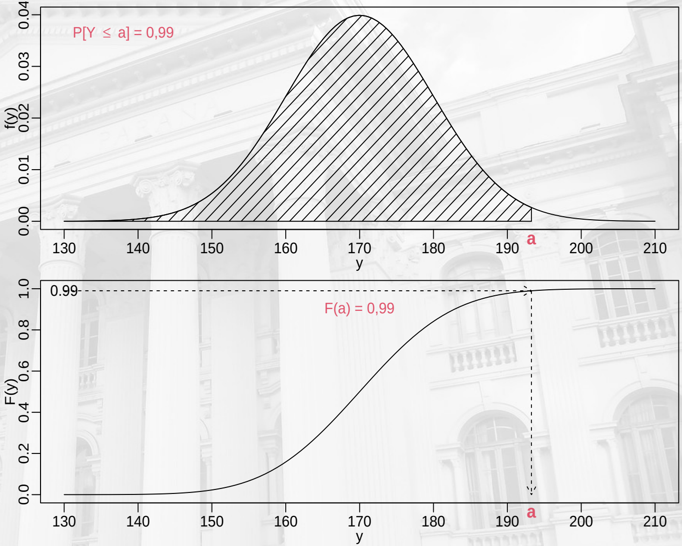
Quantis

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu = 170, \sigma^2 = 10^2)$$

1.
2.
3.
4. $P[Y \leq a] = 0{,}99$
5.
6.
7.
8.
9.

Código **R**:

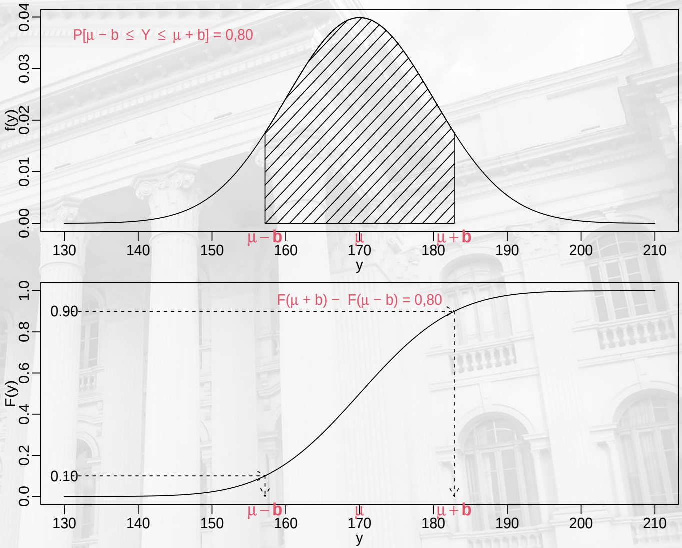
```
qnorm(0.99, mean = 170, sd = 10)
## [1] 193.2635
```



Quantis

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu = 170, \sigma^2 = 10^2)$$

1.
2.
3.
4.
5. $P[\mu - b \leq Y \leq \mu + b] = 0{,}80$
6.
7.
8.
9.



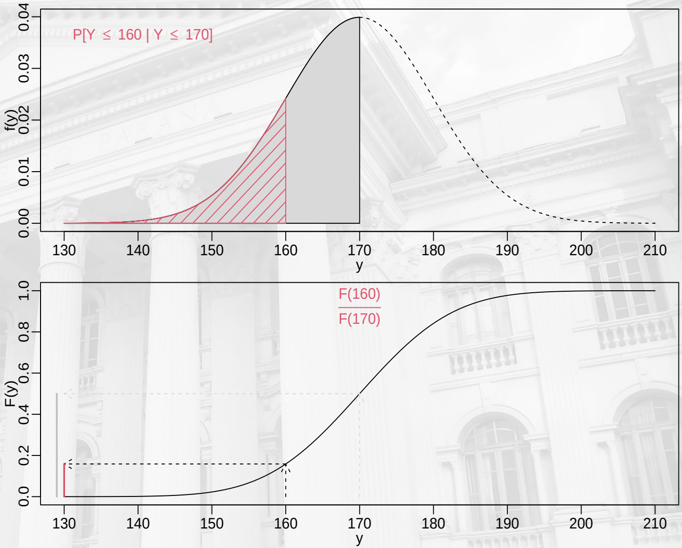
Código **R**:

```
qnorm(0.90, 170, 10) - 170
## [1] 12.81552
```

Probabilidade condicional

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu = 170, \sigma^2 = 10^2)$$

1.
2.
3.
4.
5.
6. $P[Y \leq 160 | Y \leq 170]$
7.
8.
9.



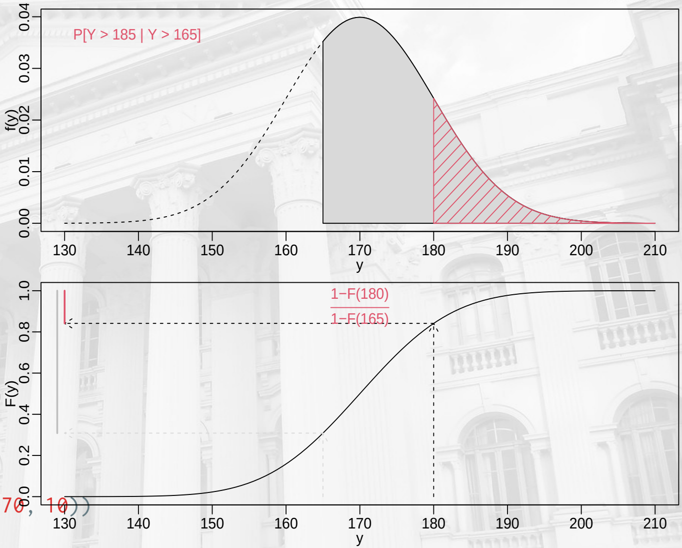
Código **R**:

```
pnorm(160, 170, 10)/pnorm(170, 170, 10)
## [1] 0.3173105
```

Probabilidade condicional

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu = 170, \sigma^2 = 10^2)$$

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7. $P[Y > 180 | Y > 165]$
8.
9.



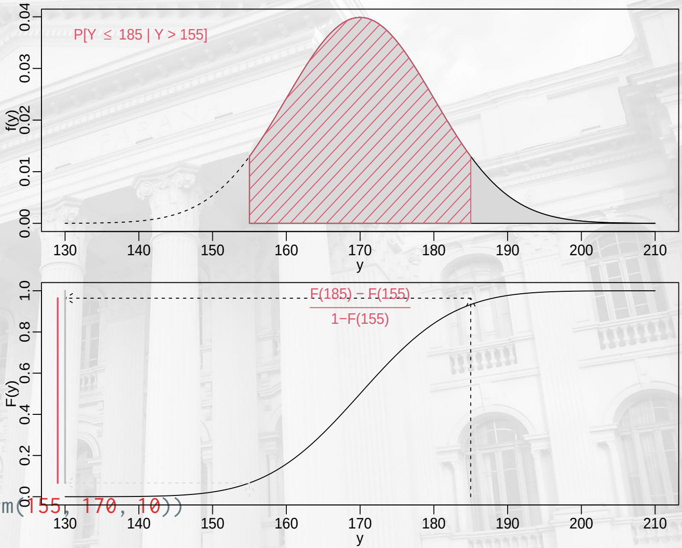
Código **R**:

```
(1 - pnorm(180, 170, 10))/(1 - pnorm(165, 170, 10))
## [1] 0.2294488
```

Probabilidade condicional

$$Y \sim N(\mu = 170, \sigma^2 = 10^2)$$

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8. $P[Y \leq 185 | Y > 155]$
9.



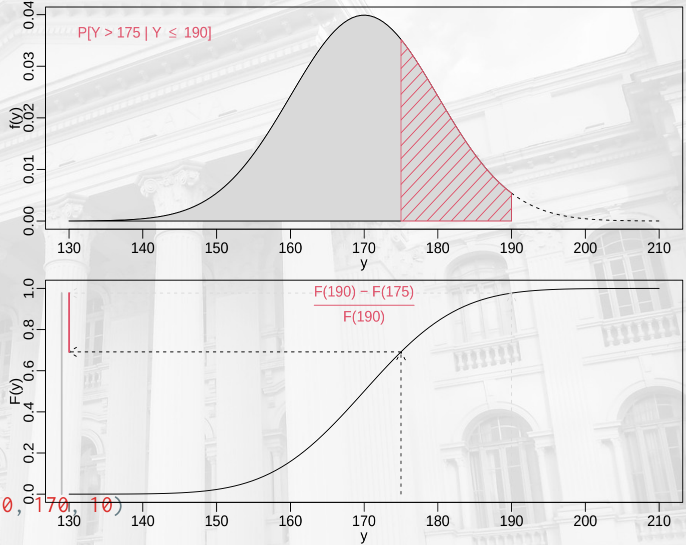
Código **R**:

```
diff(pnorm(c(155,185), 170, 10))/(1 - pnorm(155, 170, 10))
## [1] 0.9284101
```

Probabilidade condicional

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu = 170, \sigma^2 = 10^2)$$

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9. $P[Y > 175 | Y \leq 190]$



Código **R**:

```
diff(pnorm(c(175,190), 170, 10))/pnorm(190, 170, 10)
## [1] 0.2924405
```

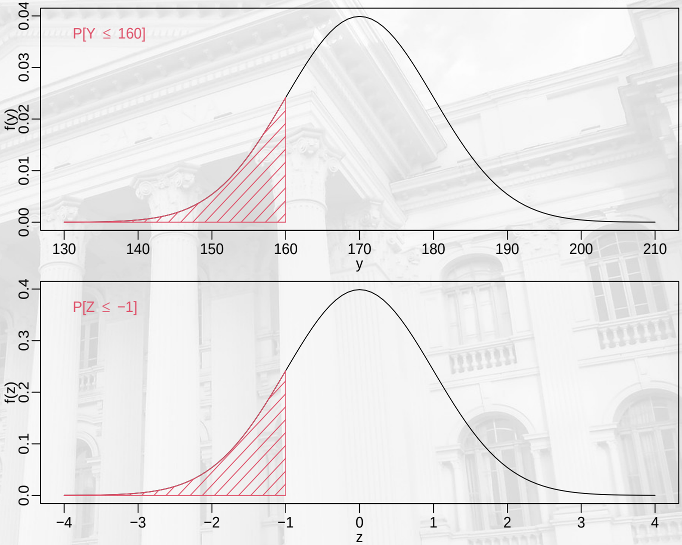
Escore Z e probabilidade

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(\mu_z = 0, \sigma_z^2 = 1)$$

- Z desvios padrão acima (ou abaixo) da média.
- Probabilidades equivalentes em Y ou Z.
- Usado para cálculo de probabilidades utilizando "tabelas da distribuição normal".
- No exemplo:

$$P[Y \leq 160] = P[Z \leq \frac{160 - 170}{10}] = P[Z \leq -1]$$

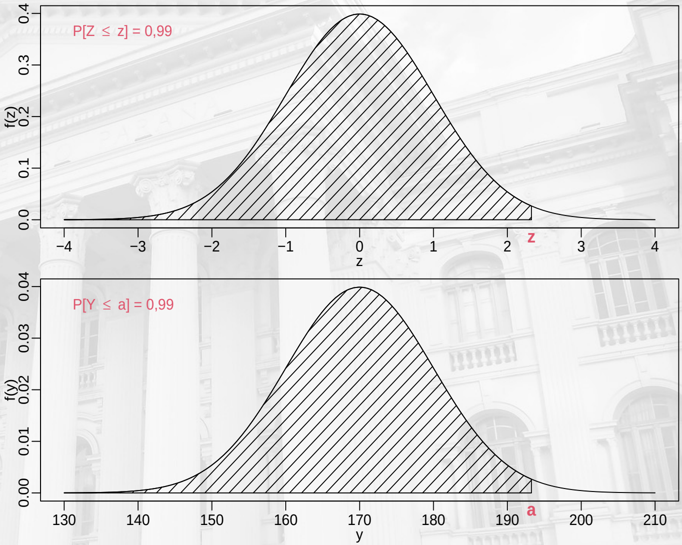


Escore Z e quantil

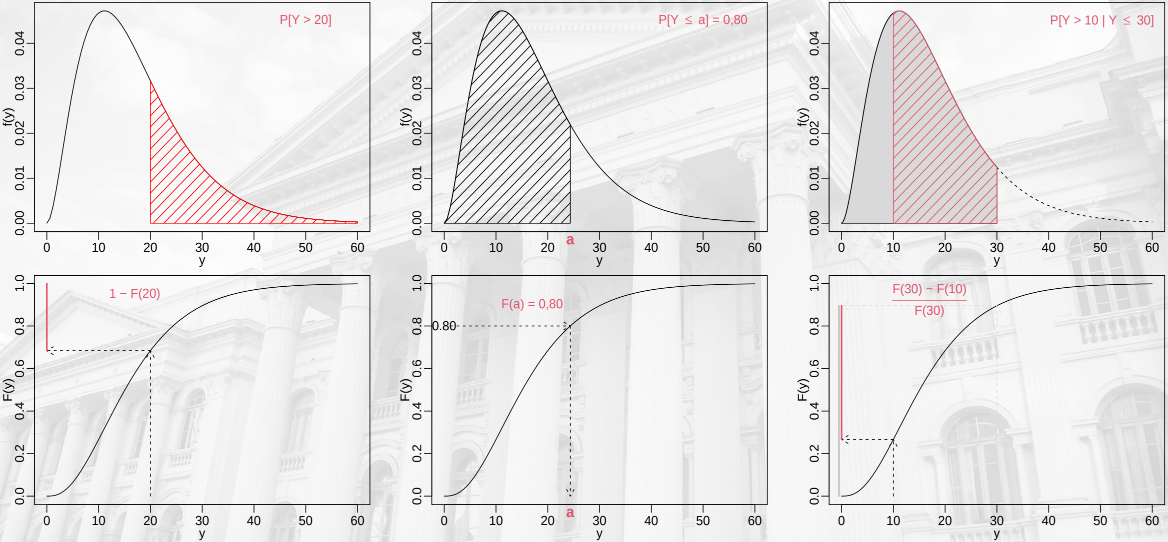
$$Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(\mu_z = 0, \sigma_z^2 = 1)$$

$$P[Z \leq z] = 0{,}99$$
$$z = 2.326$$
$$\frac{a - 170}{10} = 2.326$$
$$a = 193.263$$



Distribuição Gama



Distribuição Gama

$\mu = 17$: média e $\sigma^2 = 100$: variância

Parametrização utilizada: "shape" (forma) e "scale" (escala)

$$\text{(shape) sh} = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$$

$$\text{(scale) sc} = \frac{\sigma^2}{\mu}$$

Códigos **R**:

```
pgamma(20, sh = (17/10)^2, sc = 10^2/17, lower = FALSE)
## [1] 0.3160481
qgamma(0.80, sh = (17/10)^2, sc = 10^2/17)
## [1] 24.35641
diff(pgamma(c(10, 30), sh = (17/10)^2, sc = 10^2/17))/pgamma(30, sh = (17/10)^2, sc=10^2/17)
## [1] 0.7024844
```

Comparando v.a.'s discretas e contínuas

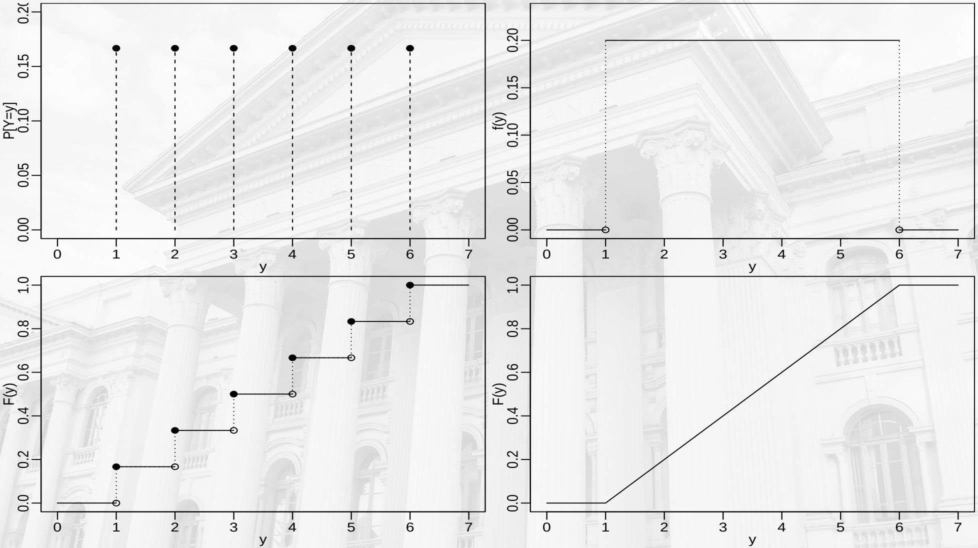
Uniforme discreta:

$$Y_1 \sim U_d\{1,6\}$$
$$y \in \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$P[Y_1 = y] = \frac{1}{6}$$
$$F_{Y_1}(y) = \frac{\lfloor y \rfloor + 1}{6}$$

Uniforme contínua:

$$Y_2 \sim U_c[1,6]$$
$$y \in [1,6]$$
$$f(Y_2 = y) = \frac{1}{6-1} = \frac{1}{5}$$
$$F_{Y_2}(y) = \frac{y-1}{6-1} = \frac{y-1}{5}$$

V.A.'s (uniforme) discreta e contínua



Probabilidades para v.a.'s discretas e contínuas

Uniforme discreta:

$$Y_1 \sim U_d\{1,6\}$$

$$P[Y_1 = 4] = \frac{1}{6}$$

$$P[Y_1 \leq 4] = F_{y_1}(4) = P[Y_1 = 1] + P[Y_1 = 2] + P[Y_1 = 3] + P[Y_1 = 4] = \frac{4}{6} = 0{,}67$$

Uniforme contínua:

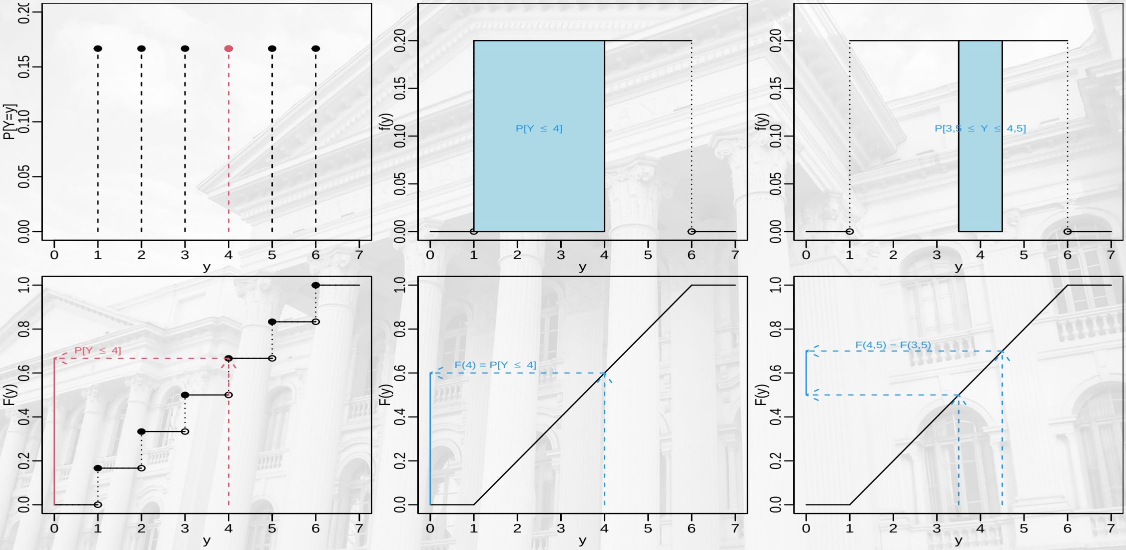
$$Y_2 \sim U_c[1,6]$$

$$P[Y_2 = 4] = f(4) = 0$$

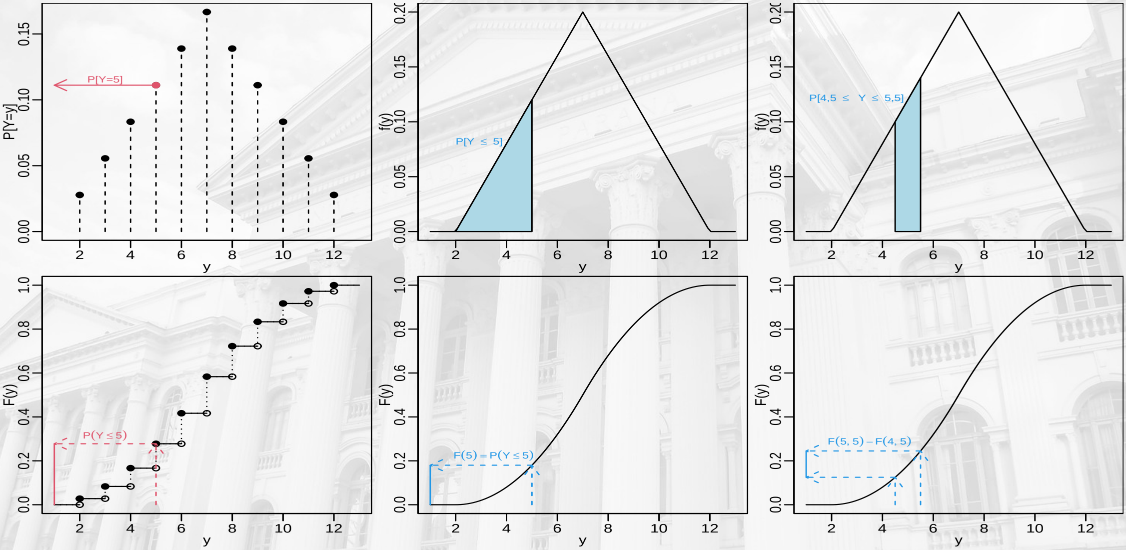
$$P[3{,}5 < Y_2 \leq 4{,}5] = \int_{3.5}^{4.5} f(y)dy = 0.2$$

$$P[Y_2 \leq 4] = F_{y_2}(4) = \int_{1}^{4} f(y)dy = 0.6$$

V.A.'s (uniforme) discreta e contínua



V.A.'s discretas e contínuas



Comentários finais

- Variáveis aleatórias são um tipo de "dispositivo" que nos ajuda a atribuir probabilidades a eventos de interesse.
- A distribuição de probabilidade define como a probabilidade “se espalha” entre os possíveis valores da v.a..
- Existem distribuições discretas e continuas que acomodam diferentes comportamentos da variável de interesse.
- Aqui tratamos de distribuições univariadas, os conceitos se extendem para distribuições multivariadas.