CE301 - Estatística Básica

Introdução a Probabilidades

Paulo Justiniano Ribeiro Jr

Departamento de Estatística
Setor de Ciências Exatas
Universidade Federal do Paraná

22 de abril de 2025

Probabilidades

Em busca de uma definição:

> *Probabilidade: medida de chance.*
> *Expressa por um número o intervalo* [0,1].
> *Representa incerteza.*

(SPIEGELHALTER, 2019):

> *Chapter 8: Probability – the language of uncertainty and variability.*

- Mas, como medir chance?
- Há uma forma padrão/única de medir e interpretar?
- Será que nossa intuição funciona bem?

Coincidência de aniversário

1. Qual a probabilidade de haver alguma coincidência de aniversário em um grupo de 37 pessoas?
2. Qual deve ser o número mínimo de pessoas em um grupo para que a chance ultrapasse 50%?
3. Qual deve ser o número mínimo de pessoas em um grupo para que a chance chegue a 99%?

Coincidência de aniversário

Opiniões coletadas de 1025 estudantes de PG:

1. Qual a probabilidade de haver alguma coincidência de aniversário em um grupo de 37 pessoas?

	1%	10%	40%	85%	99%
q37.2020	0.31	0.49	0.11	0.08	0.01
q37.2021	0.35	0.45	0.10	0.09	0.01
q37.2022	0.28	0.42	0.16	0.14	0.00
q37.2023	0.28	0.32	0.13	0.24	0.03

	1%	10%	40%	85%	99%
q37.todos	0.31	0.43	0.12	0.13	0.01

Coincidência de aniversário

Opiniões coletadas de 1025 estudantes de PG:

1. Qual deve ser o número mínimo de pessoas em um grupo para que a chance ultrapasse 50%?

	214	183	68	23	10
n50.2020	0.20	0.47	0.14	0.12	0.07
n50.2021	0.20	0.43	0.12	0.16	0.09
n50.2022	0.21	0.44	0.07	0.21	0.06
n50.2023	0.23	0.33	0.09	0.29	0.06

	214	183	68	23	10
n50.todos	0.21	0.42	0.11	0.19	0.07

Coincidência de aniversário

Opiniões coletadas de 1025 estudantes de PG:

1. Qual deve ser o número mínimo de pessoas em um grupo para que a chance chegue a 99%?

	57	102	216	308	350
n99.2020	0.13	0.06	0.07	0.07	0.68
n99.2021	0.12	0.08	0.04	0.06	0.70
n99.2022	0.19	0.05	0.06	0.08	0.62
n99.2023	0.26	0.09	0.06	0.07	0.52

	57	102	216	308	350
n99.todos	0.17	0.07	0.06	0.07	0.63

Qual a probabilidade? (I)

O problema dos aniversários

1. Seja um grupo de 37 pessoas.
   Qual a probabilidade de haver alguma coincidência de aniversário?
2. Qual deve ser o número mínimo de pessoas no grupo para que a chance ultrapasse 50%?
3. Qual deve ser o número mínimo de pessoas no grupo para que a chance chegue a 99%?

Solução:

$$P[C] = 1 - P[\overline{C}]$$

$$P[C] = 1 - \frac{365}{365}\frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{365-n+1}{365} = \frac{365!}{365^n\,(365-n)!}.$$

Qual a probabilidade? (I)

O problema dos aniversários

1. Seja um grupo de 37 pessoas.
   Qual a probabilidade de haver alguma coincidência de aniversário? **Resposta: 0,85**
2. Qual deve ser o número mínimo de pessoas no grupo para que a chance ultrapasse 50%? **Resposta: 23**
3. Qual deve ser o número mínimo de pessoas no grupo para que a chance chegue a 99%? **Resposta: 57**

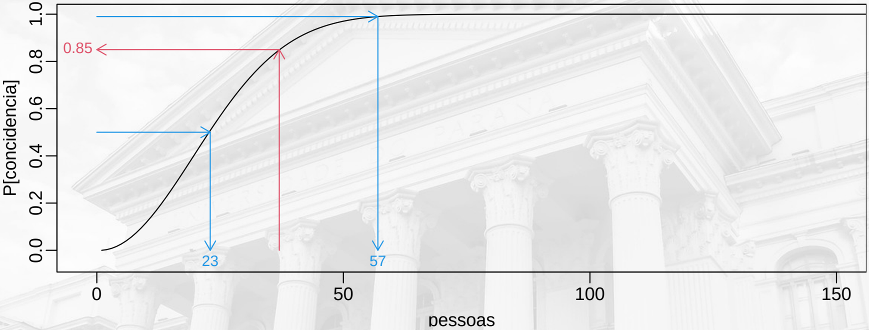
Solução:

$$P[C] = 1 - P[\overline{C}]$$

$$P[C] = 1 - \frac{365}{365}\frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{365-n+1}{365}$$

Implementação visual: Calculadora online

O problema dos aniversários



Código **R**:

```
pbirthday(37)
## [1] 0.848734
qbirthday(0.50)
## [1] 23
qbirthday(0.99)
## [1] 57
```

O problema dos aniversários no computador

Usando propriedades de logarítmos

$$P[C] = 1 - \frac{365}{365}\frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{365-n+1}{365} = \frac{365!}{365^n(365-n)!}$$

$$= 1 - \exp\{\sum_{i=(365-n+1)}^{365} \log i - n \cdot \log 365.\}$$

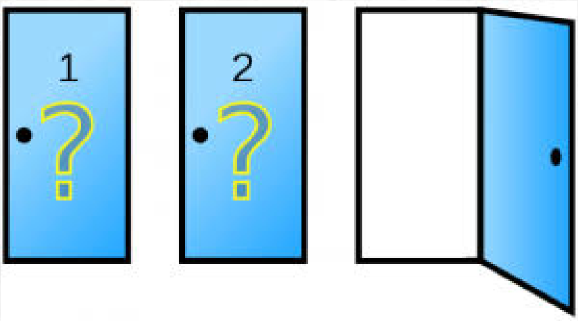
A primeira expressão pode "estourar" a capacidade do computador representar números. A segunda é computável para qualquer $n \leq 365$.

Código **R**, para $n = 37$ pessoas:

```
n <- 37
1 - exp(sum(log((365-n+1):365))-n*log(365))
## [1] 0.848734
```

Qual a probabilidade? (II)

O problema de Monty Hall (*Let's make a deal. The game change.*)



Qual a probabilidade? (II)

O problema de Monty Hall (*Let's make a deal. The game change.*)

O jogo: Há três portas sendo uma delas premiada.

Etapas:

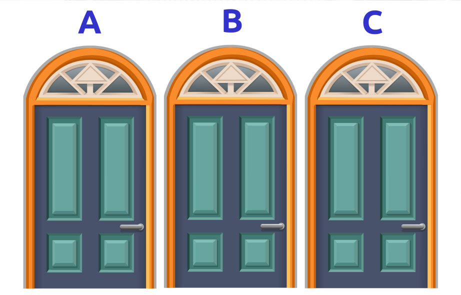
1. O participante escolhe uma porta.
2. O apresentador abre uma das portas que não contém o prêmio.
3. Antes de revelar a premiada o participante opção de trocar ou não sua escolha inicial.

Qual a melhor estratégia? trocar, não trocar ou tanto faz?

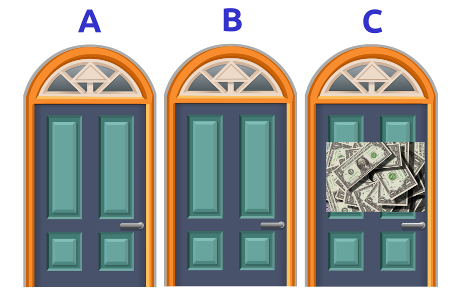
O problema de Monty Hall

- Voce teria algum preferência?
- Existe uma melhor estratégia?
- É impossível ter certeza que vai ganhar.
- Melhor estratégia: maior chance de ganhar!
- Decisão guiada por probabilidades.

O problema de Monty Hall



O problema de Monty Hall



Escolha	Revelada	Não Troca	Troca
A	B	Perde	Ganha
B	A	Perde	Ganha
C	A ou B	Ganha	Perde

O problema de Monty Hall

Solução:

Se trocar o participante tem a change de 2/3 de ganhar, enquanto que se não trocar a chance é de apenas 1/3.

Argumentação lógica ou por simulação.

Lições:

- Existência de uma probabilidade inicial (*a priori*).
- Nova informação ...
- (possivelmente) alterando probabilidade final (*a posteriori*).
- Classificação de possíveis *estados da natureza* e suas probabilidades.
- Decisão guiada por probabilidades.
- Probabilidades podem ser contra-intuitivas.

Qual a probabilidade? (III)

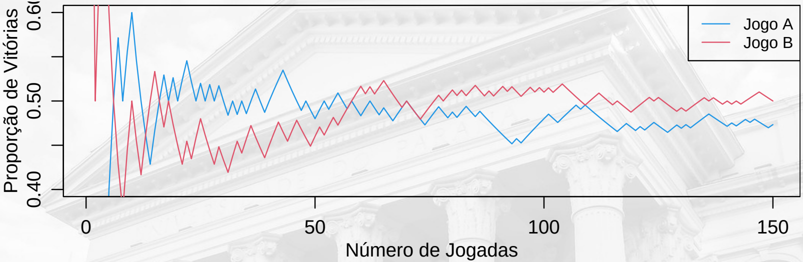
O problema de Chavalier de Méré (Antoine Gombaud)[1]: Em qual é maior chance de ganhar?

- **Jogo A:** Lança-se um dado até no máximo quatro vezes e ganha se obtiver um seis.
- **Jogo B:** Lança-se dois dados até no máximo 24 vezes e ganha se obtiver um duplo seis.

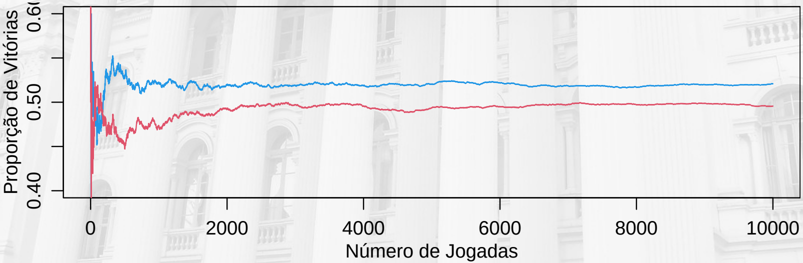
- O *experimento* de Chevalier de Méré.
- A (tentativa de) solução.
- A intuição/experiência.
- Blaise Pascal e Pierre Fermat entram em cena.

[1] *baseado em (SPIEGELHALTER, 2019), Ch 8*

Experimento de Chevalier



Chevalier "no computador"



A solução ("errada") de Chevalier

- **Jogo A:** Lança-se um dado até no máximo quatro vezes e ganha se obtiver um seis.

$$P[J1] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- **Jogo B:** Lança-se dois dados até no máximo 24 vezes e ganha se obtiver um duplo seis.

$$P[\text{duplo } 6] = \frac{1}{36}$$

$$P[J2] = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \ldots + \frac{1}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Não faz sentido!
Por que?

A intuição/experiência de Chevalier

Experiência *vs* experimento *vs* “cálculos”

Uma possível solução - I

- **Jogo A:** Lança-se um dado até no máximo quatro vezes e ganha se obtiver um seis.

$$
\begin{aligned}
P[\text{Ganhar}] &= P[6 \text{ na } 1^a \text{ tentativa}] + P[6 \text{ na } 2^a \text{ tentativa}] + P[6 \text{ na } 3^a \text{ tentativa}] + P[6 \text{ na } 4^a \text{ tentativa}] \\
&= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \\
&= 0.518
\end{aligned}
$$

- **Jogo B:** Lança-se dois dados até no máximo 24 vezes e ganha se obtiver um duplo seis.

$$
\begin{aligned}
P[\text{Ganhar}] &= P[(6{,}6) \text{ na } 1^a \text{ tentativa}] + P[(6{,}6) \text{ na } 2^a \text{ tentativa}] + \ldots + P[(6{,}6) \text{ na } 24^a \text{ tentativa}] \\
&= \frac{1}{36} + \frac{35}{36} \cdot \frac{1}{36} + \ldots + \left(\frac{35}{36}\right)^{23} \cdot \frac{1}{36} \\
&= 0.491
\end{aligned}
$$

A intuição/experiência de Chevalier

A solução melhor:
Há muitas formas de ganhar mas somente uma de perder

$$P[\text{Ganhar}] = 1 - P[\text{Perder}]$$

- **Jogo A:** Lança-se um dado até no máximo quatro vezes e ganha se obter um seis.

$$P[J1] = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.52$$

- **Jogo B:** Lança-se dois dados até no máximo 24 vezes e ganha se obter um duplo seis.

$$P[J2] = 1 - \frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.49$$

Lições de Chevalier

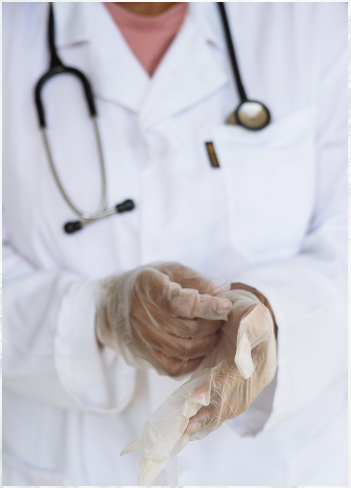
- Intuição e contra-intuição.
- Avaliação pela experiência.
- Experimento quando solução formal não disponível (ou sob suspeita).
- Incerteza no resultado do experimento.
- "Convergência".
- Teoria conjunto de "regras" consistentes.

Leis básicas de probabilidade:

- Probabilidade de certo evento é um número entre 0 e 1
- Complemento: P[acontecer] = 1 - P[não acontecer]
- Adição, regra do OU
- Multiplicação, regra do E

Qual a probabilidade? (IV)

Teste de diagnóstico positivo implica doente?



- Será que o teste sempre acerta o diagnóstico?
- Se não, qual a chance de erro?
- Como avaliar um teste? Ou comparar?
- Se o teste resultar positivo, será que a pessoa realmente está doente?
- Se o teste resultar negativo, será que a pessoa realmente não está doente?

Qual a probabilidade? (IV)

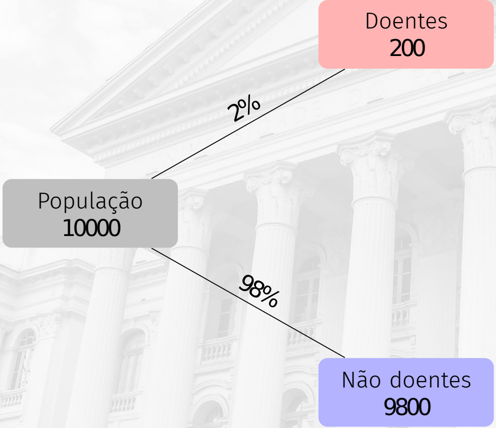
O problema dos testes de diagnóstico

Informação disponível:

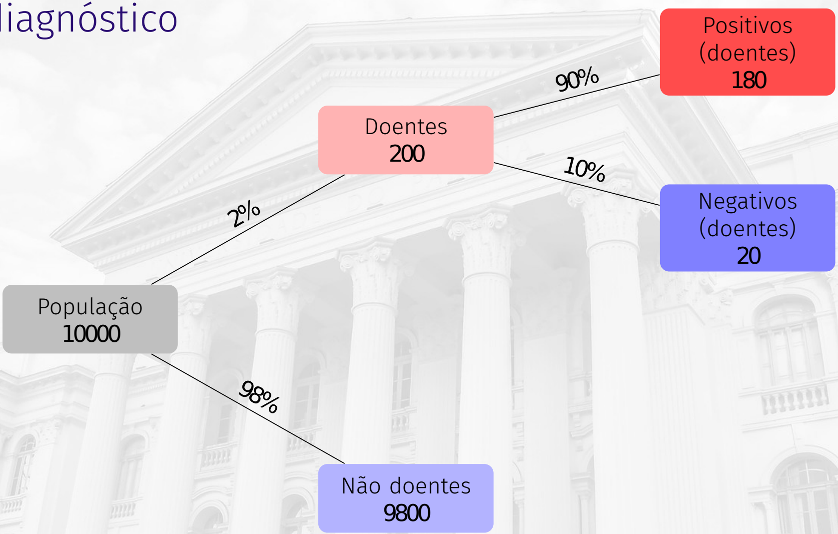
- Teste de varredura (*screening*) para uma determinada doença
- Testes são *imperfeitos*, suponha que:
  acerta 90% dos que tem doença e 80% dos que não tem.
- A doença ocorre em 2% da população

Perguntas de interesse:
Se uma pessoa testou positivo, qual a chance de ter a doença?
Se uma pessoa testou negativo, qual a chance de estar livre da doença?

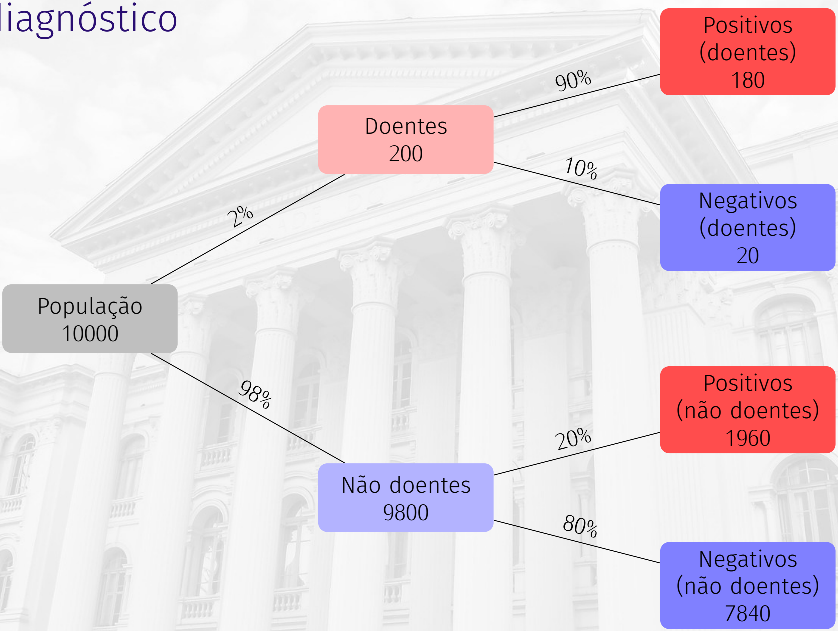
Teste de diagnóstico



Teste de diagnóstico



Teste de diagnóstico



Qual a probabilidade? (IV)

O problema dos testes de diagnóstico

Terminologia específica:

- Teste de *screening* para uma determinada doença
- Teste *imperfeito*:
  acerta 90% dos que tem doença (*sensibilidade*) e portanto 10% de *falso negativo*
  acerta 80% dos que não tem (*especifidade*) e portanto 20% de *falso positivo*
- A doença ocorre em 2% da população (*prevalência*)

Pergunta de interesse:
Se uma pessoa testou positivo, qual a chance de ter a doença?
(*valor preditivo positivo*)

Testes de diagnóstico - Organizando dados tabelas

Temos 2% com a doença na população (e portanto 98% sem)
Características do teste (para diagnósticos conhecidos)

	Positivo	Negativo	
c/ Doença	0,90	0,10	1
s/ Doença	0,20	0,80	1

	Positivo	Negativo	Total
c/ Doença	0,018	0,002	0,02
s/ Doença	0,196	0,784	0,98
Total	0,214	0,786	1

Conhecendo o resultado do teste

	Positivo	Negativo
c/ Doença	0.0841	0.0025
s/ Doença	0.9159	0.9975
Total	1	1

Testes de diagnóstico

A notação é nossa amiga ...

$$P[+|D] = 0{,}90 \longrightarrow P[-|D] = 0{,}10$$

$$P[-|\overline{D}] = 0{,}80 \longrightarrow P[+|\overline{D}] = 0{,}20$$

$$P[D] = 0{,}02$$

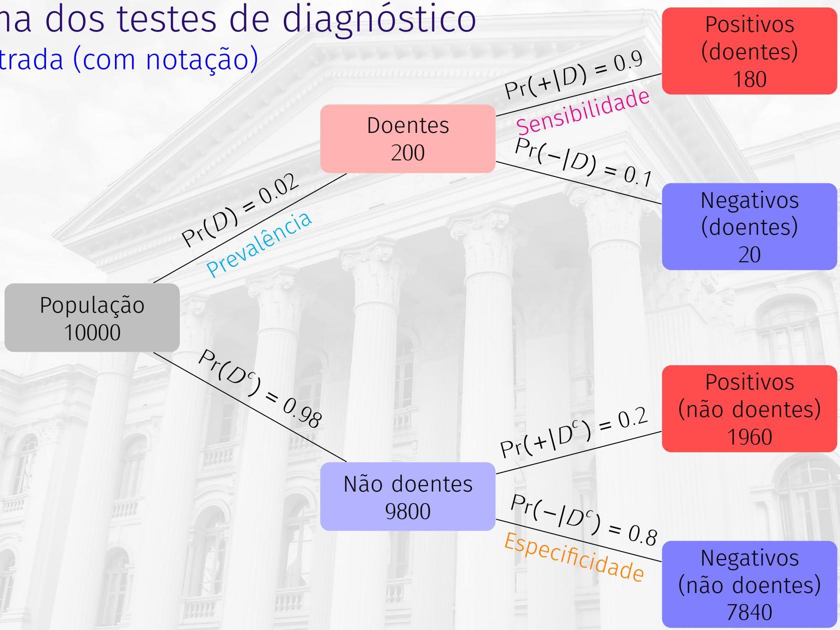
$$P[D|+] = ?$$

...e um Teorema resolve o problema!

$$\begin{aligned} P[D|+] &= \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]} \\ &= \frac{0{,}90 \cdot 0{,}02}{0{,}90 \cdot 0{,}02 + 0{,}20 \cdot 0{,}98} = 0.0841 \end{aligned}$$

O problema dos testes de diagnóstico

Solução ilustrada (com notação)



O problema dos testes de diagnóstico

E se o teste tivesse sido feito por recomendação médica após um exame? Mudaria algo?

Baseado em sua experiência o médico estima que 30% dos pacientes com os sintomas apresentados tem a doença.

Solução? (reproduzir passos acima!)

Neste caso:

$$\begin{aligned} P[D|+] &= \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]} \\ &= \frac{0{,}90 \cdot 0{,}30}{0{,}90 \cdot 0{,}30 + 0{,}20 \cdot 0{,}70} = 0.659 \end{aligned}$$

Comparação e *interpretação* (e ... muito cuidado!)

Teorema de Bayes

Voltando à situação inicial ... mas ... não está estranho?
A probabilidade de doença $P = 0{,}084$ não está muito baixa?
Qual a população?

- teste de varredura (*screening*) $P(D) = 0{,}02$
- teste por indicação (*auxílio a diagnóstico*) $P(D) \gg 0{,}02$

Consulta levanta suspeita e pede-se o teste.
Opinião especializada após consulta $P(D) = 0{,}50$

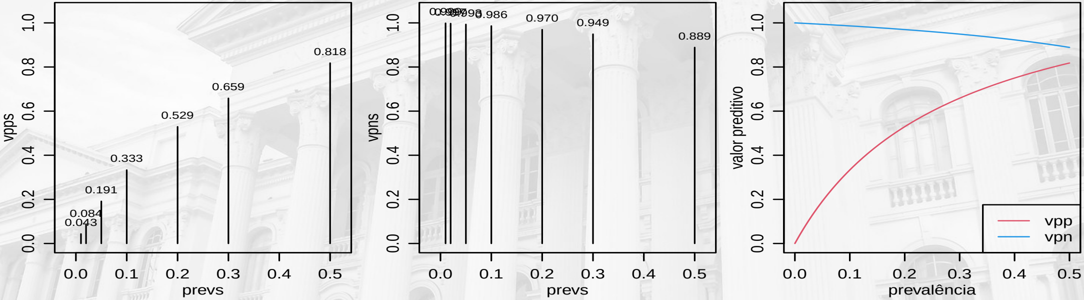
$$P[D|+] \propto 0{,}90 \cdot 0{,}50 = 0.450$$
$$P[\overline{D}|+] \propto (1 - 0.80) \cdot (1 - 0{,}50) = 0.100$$

Padronizando para somar 1:

$$P[D|+] = \frac{0.450}{0.450 + 0.100} = 0.818$$
$$P[\overline{D}|+] = \frac{0.100}{0.450 + 0.100} = 0.182$$

O problema dos testes de diagnóstico

Valor preditivo positivo (vpp) e negativo (vpn) para diferentes prevalências.
Resultados para sensibilidade = 0,90 e especificidade = 0,80.



Comentários sobre probabilidades

Mensagens

- Intuição pode ser uma péssima conselheira.
- Cuidado com as interpretações.
- Problemas rapidamente ficam complexos para avaliarmos mentalmente.
- Notação e formalização ajudam organizar e extrair resultados.
- Usar problemas estilizados ajuda a *enquadrar* problemas reais.

problemas estilizados: situações fáceis de compreender e calcular. Fazemos analogias destes com problemas reais a serem resolvidos utilizando *moedas*, *dados*, *baralho*, etc

Quiz

A♦	2♦	3♦	4♦	5♦	6♦	7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	Q♦	K♦
A♥	2♥	3♥	4♥	5♥	6♥	7♥	8♥	9♥	10♥	J♥	Q♥	K♥
A♣	2♣	3♣	4♣	5♣	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣
A♠	2♠	3♠	4♠	5♠	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠

1. ouros
2. figura
3. carta preta
4. rei sabendo que é figura
5. P[par] > P[figura]?
6. rei sabendo que é ouros
7. dama de ouros
8. dama ou ouros
9. não figura
10. dama preta

Probabilidades no quiz

A♦	2♦	3♦	4♦	5♦	6♦	7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	Q♦	K♦
A♥	2♥	3♥	4♥	5♥	6♥	7♥	8♥	9♥	10♥	J♥	Q♥	K♥
A♣	2♣	3♣	4♣	5♣	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣
A♠	2♠	3♠	4♠	5♠	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠

1. ouros: 1/4

Probabilidades no quiz

A♦	2♦	3♦	4♦	5♦	6♦	7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	Q♦	K♦
A♥	2♥	3♥	4♥	5♥	6♥	7♥	8♥	9♥	10♥	J♥	Q♥	K♥
A♣	2♣	3♣	4♣	5♣	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣
A♠	2♠	3♠	4♠	5♠	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠

1. ouros: 1/4
2. figura: 12/52

Probabilidades no quiz

A♦	2♦	3♦	4♦	5♦	6♦	7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	Q♦	K♦
A♥	2♥	3♥	4♥	5♥	6♥	7♥	8♥	9♥	10♥	J♥	Q♥	K♥
A♣	2♣	3♣	4♣	5♣	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣
A♠	2♠	3♠	4♠	5♠	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠

1. ouros: $1/4$
2. figura: $12/52$
3. carta preta: $26/52$

Probabilidades no quiz

A♦	2♦	3♦	4♦	5♦	6♦	7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	Q♦	K♦
A♥	2♥	3♥	4♥	5♥	6♥	7♥	8♥	9♥	10♥	J♥	Q♥	K♥
A♣	2♣	3♣	4♣	5♣	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣
A♠	2♠	3♠	4♠	5♠	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠

1. ouros: 1/4
2. figura: 12/52
3. carta preta: 26/52
4. P[par] > P[figura]? 20/52 > 12/52

Probabilidades no quiz

J♦	Q♦	K♦
J♥	Q♥	K♥
J♣	Q♣	K♣
J♠	Q♠	K♠

1. ouros: 1/4
2. figura: 12/52
3. carta preta: 26/52
4. P[par] > P[figura]? 20/52 > 12/52
5. rei sabendo que é figura: 4/12

Probabilidades no quiz

$A\diamondsuit$ $2\diamondsuit$ $3\diamondsuit$ $4\diamondsuit$ $5\diamondsuit$ $6\diamondsuit$ $7\diamondsuit$ $8\diamondsuit$ $9\diamondsuit$ $10\diamondsuit$ $J\diamondsuit$ $Q\diamondsuit$ $K\diamondsuit$

1. ouros: 1/4
2. figura: 12/52
3. carta preta: 26/52
4. P[par] > P[figura]? 20/52 > 12/52
5. rei sabendo que é figura: 4/12
6. rei sabendo que é ouros: 1/13

Probabilidades no quiz

A♦	2♦	3♦	4♦	5♦	6♦	7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	Q♦	K♦
A♥	2♥	3♥	4♥	5♥	6♥	7♥	8♥	9♥	10♥	J♥	Q♥	K♥
A♣	2♣	3♣	4♣	5♣	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣
A♠	2♠	3♠	4♠	5♠	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠

1. ouros: 1/4
2. figura: 12/52
3. carta preta: 26/52
4. P[par] > P[figura]? 20/52 > 12/52
5. rei sabendo que é figura: 4/12
6. rei sabendo que é ouros: 1/13
7. dama de ouros: 1/52

Probabilidades no quiz

A♦	2♦	3♦	4♦	5♦	6♦	7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	Q♦	K♦
A♥	2♥	3♥	4♥	5♥	6♥	7♥	8♥	9♥	10♥	J♥	Q♥	K♥
A♣	2♣	3♣	4♣	5♣	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣
A♠	2♠	3♠	4♠	5♠	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠

1. ouros: 1/4
2. figura: 12/52
3. carta preta: 26/52
4. P[par] > P[figura]? 20/52 > 12/52
5. rei sabendo que é figura: 4/12
6. rei sabendo que é ouros: 1/13
7. dama de ouros: 1/52
8. dama ou ouros: 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52

Probabilidades no quiz

$A\diamondsuit$	2♦	3♦	4♦	5♦	6♦	7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	Q♦	K♦
$A\heartsuit$	2♥	3♥	4♥	5♥	6♥	7♥	8♥	9♥	10♥	J♥	Q♥	K♥
$A\clubsuit$	2♣	3♣	4♣	5♣	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣
$A\spadesuit$	2♠	3♠	4♠	5♠	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠

1. ouros: 1/4
2. figura: 12/52
3. carta preta: 26/52
4. rei sabendo que é figura: 4/12
5. P[par] > P[figura]? 20/52 > 12/52
6. rei sabendo que é ouros: 1/13
7. dama de ouros: 1/52
8. dama ou ouros: 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52
9. não figura: 1 - 12/52 = 40/52

Probabilidades no quiz

A♦	2♦	3♦	4♦	5♦	6♦	7♦	8♦	9♦	10♦	J♦	Q♦	K♦
A♥	2♥	3♥	4♥	5♥	6♥	7♥	8♥	9♥	10♥	J♥	Q♥	K♥
A♣	2♣	3♣	4♣	5♣	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣
A♠	2♠	3♠	4♠	5♠	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠

1. ouros: 1/4
2. figura: 12/52
3. carta preta: 26/52
4. rei sabendo que é figura: 4/12
5. P[par] > P[figura]? 20/52 > 12/52
6. rei sabendo que é ouros: 1/13
7. dama de ouros: 1/52
8. dama ou ouros: 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52
9. não figura: 1 - 12/52 = 40/52
10. dama preta: 2/52

Notação e terminologia

- Retirar uma carta de um baralho é um *experimento aleatório*
- O experimento aleatório possui um *espaço amostral* (que é um conjunto)

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} A\diamondsuit & 2\diamondsuit & 3\diamondsuit & 4\diamondsuit & 5\diamondsuit & 6\diamondsuit & 7\diamondsuit & 8\diamondsuit & 9\diamondsuit & 10\diamondsuit & J\diamondsuit & Q\diamondsuit & K\diamondsuit \\ A\heartsuit & 2\heartsuit & 3\heartsuit & 4\heartsuit & 5\heartsuit & 6\heartsuit & 7\heartsuit & 8\heartsuit & 9\heartsuit & 10\heartsuit & J\heartsuit & Q\heartsuit & K\heartsuit \\ A\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & K\clubsuit \\ A\spadesuit & 2\spadesuit & 3\spadesuit & 4\spadesuit & 5\spadesuit & 6\spadesuit & 7\spadesuit & 8\spadesuit & 9\spadesuit & 10\spadesuit & J\spadesuit & Q\spadesuit & K\spadesuit \end{array} \right\}$$

- Interesse na probabilidade de algum *evento* (que é subconjunto de Ω)

  Exemplos:

O : carta de ouros	F : figura	$D \cap O$: dama de ouros (dama **e** ouros)
P : carta preta	R : rei	$P \cup F$: preta **ou** figura
par : carta é número par	Q : dama	$R\|F$: rei entre as figuras

- Atribuímos *probabilidades* $P[\cdot]$ aos eventos

Notação e terminologia

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} A\diamondsuit & 2\diamondsuit & 3\diamondsuit & 4\diamondsuit & 5\diamondsuit & 6\diamondsuit & 7\diamondsuit & 8\diamondsuit & 9\diamondsuit & 10\diamondsuit & J\diamondsuit & Q\diamondsuit & K\diamondsuit \\ A\heartsuit & 2\heartsuit & 3\heartsuit & 4\heartsuit & 5\heartsuit & 6\heartsuit & 7\heartsuit & 8\heartsuit & 9\heartsuit & 10\heartsuit & J\heartsuit & Q\heartsuit & K\heartsuit \\ A\clubsuit & 2\clubsuit & 3\clubsuit & 4\clubsuit & 5\clubsuit & 6\clubsuit & 7\clubsuit & 8\clubsuit & 9\clubsuit & 10\clubsuit & J\clubsuit & Q\clubsuit & K\clubsuit \\ A\spadesuit & 2\spadesuit & 3\spadesuit & 4\spadesuit & 5\spadesuit & 6\spadesuit & 7\spadesuit & 8\spadesuit & 9\spadesuit & 10\spadesuit & J\spadesuit & Q\spadesuit & K\spadesuit \end{array} \right\}$$

1. ouros: $P[O] = 1/4$
2. figura: $P[F] = 12/52$
3. carta preta: $P[P] = 26/52$
4. P[par] > P[figura]? $P[par] = 20/52 > P[F] = 12/52$
5. rei sabendo que é figura: $P[R|F] = 4/12$
6. rei sabendo que é ouros: $P[R|O] = 1/13$
7. dama de ouros: $P[D \cap O] = 1/52$
8. dama ou ouros: $P[D \cup O] = P[D] + P[O] - P[D \cap O] = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52$
9. não figura: $P[\overline{F}] = 1 - P[F] = 1 - 12/52 = 40/52$
10. dama preta: $P[D \cap P] = 2/52$

Probabilidade?

Visitando a lista de problemas:

- Quais somos capazes de resolver?
- Que problemas *reais* são parecidos? (problemas estilizados)

Qual a Probabilidade?

Visitando os problemas da lista:

- Ex 01 (b): $P(5) = 1/6$
- Ex 02 (b): $P(5) = 5/21$
- Ex 03 (b): $P(5) = 4/36$
- Ex 04 (b): $P(5) =?$
- Ex 05 (c): $P(5) =?(\text{dados } equilibrados?)$
- Ex 06 : $P(\text{algum acerto}) = 1 - P(\text{erro}) \overset{ind.}{=} 1 - (4/5)^4 = 0.59$

Probabilidade

Reforçando ...

- Intuição pode ser uma péssima conselheira
- Problemas rapidamente ficam complexos para avaliarmos mentalmente

Precisamos de método para calcular probabilidades.
Definições, notação, propriedades, etc

Probabilidades

Conceitos fundamentais/terminologia

- Experimento aleatório
- Evento (A)
- Espaço amostral (Ω)
- Espaço de probabilidades: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Em situações reais que possam ser vistas como experimentos aleatórios devemos:

- caracterizar o espaço amostral Ω,
- especificar o(s) eventos(s) de interesse,
- atribuir/calcular probabilidades aos eventos de interesse.

Espaço de probabilidades

Espaço amostral

- Equiprovável *vs* não-equiprovável
- Finito *vs* infinito
- Enumerável *vs* não enumerável (discreto *vs* contínuo)

Eventos

- simples ou compostos
- operações de conjuntos: união ($\cup$) e intersecção ($\cap$)

Atribuição de probabilidades

- Clássica: obtenção a partir de modelo teórico.
- Frequentista: obtenção a partir de procedimento empírico.
- Subjetiva: opinião do indivíduo.

Formalização matemática

Axiomas de Kolmogorov

$P[\cdot]$ é denominada probabilidade se satisfaz:

i) $0 \leq P[A] \leq 1$, $\forall$ evento A em Ω
ii) $P[\Omega] = 1$
iii) $P[\bigcup_{j=1}^{n} A_j] = \sum_{i=1}^{n} P[A_j]$ se A_j's são mutuamente exclusivos

Propriedades (decorrem dos axiomas)

- $P[\overline{A}] = 1 - P[A]$
- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$
- $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$ e A e B são mutuamente exclusivos (disjuntos)
- $P[\overline{A \cup B}] = P[\overline{A} \cap \overline{B}]$
- $P[\overline{A \cap B}] = P[\overline{A} \cup \overline{B}]$
- $P[A \cap (B \cup C)] = P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$
- ...

Aplicações nos exercícios (ex 7)

Exemplo

A chance de um indivíduo resolver um problema é de 80% e de um segundo é 50%. Se ambos tentam resolver, isoladamente, qual a chance do problema ser resolvido?

Notação:

$$A: \text{o primeiro indivíduo resolve o problema}$$
$$B: \text{o segundo indivíduo resolve o problema}$$
$$P[A] = 0{,}80$$
$$P[B] = 0{,}50$$

Usando notação e propriedades

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

mas, como são independentes

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B] = 0{,}80 + 0{,}50 - 0{,}80 \cdot 0{,}50 = 0{,}90$$

Exemplo (outra solução)

Notação:

$$A: \text{o primeiro indivíduo resolve}$$
$$B: \text{o segundo indivíduo resolve}$$

$$P[A] = 0{,}80 \qquad P[\overline{A}] = 0{,}20$$
$$P[B] = 0{,}50 \qquad P[\overline{B}] = 0{,}50$$

Usando notação e propriedades

$$P[A \cup B] = 1 - P[\overline{A \cup B}] = 1 - P[\overline{A} \cap \overline{B}]$$

mas, como são independentes

$$P[A \cup B] = 1 - P[\overline{A}] \cdot P[\overline{B}] = 1 - 0{,}20 \cdot 0{,}50 = 1 - 0{,}10 = 0{,}90$$

Outros contextos: duas aplicações financeira, duas doenças, duas tentativas de avistar aves, preservação de backups, etc

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Probabilidade Condicional

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

ou, equivalentemente,

$$P[A \cap B] = P[A|B] \cdot P[B]$$

Interpretação: Probabilidade em um subconjunto do espaço amostral.

Exemplo: probabilidade de retirar uma dama sabendo que saiu uma figura

$$P[\text{dama}|\text{figura}] = \frac{P[\text{dama} \cap \text{figura}]}{P[\text{figura}]}$$

$$\frac{4}{12} = \frac{4/52}{12/52}$$

Probabilidade condicional e independência

Se A e B são eventos independentes

$$P[A|B] = P[A]$$

e

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$

Exemplo: probabilidade de sair às sabendo que saiu ouros

$$P[\text{Ás}|\text{ouros}] = P[\text{Ás}]$$
$$\frac{1}{13} = \frac{4}{52}$$

ou

$$P[\text{Ás} \cap \text{ouros}] = P[\text{Ás}] \cdot P[\text{ouros}]$$
$$\frac{1}{52} = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52}$$

Mais aplicações nos exercícios sugeridos.

Reforçando

Não confundir:

Eventos Mutuamente Exclusivos:
Não podem ocorrer ao mesmo tempo.
Se os eventos A e B são mutuamente exclusivos então:
$P[A \cap B] = 0$, e então
$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

Eventos Independentes:
A ocorrência de um evento não altera a probabilidade de ocorrência outro.
Se os eventos A e B são independentes então:
$P[A|B] = P[A]$, ou equivalentemente, $P[B|A] = P[B]$, ou ainda,
$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$ e portanto
$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B]$.

Probabilidade condicional

Pode-se intercambiar A e B e portanto:

$$P[B \cap A] = P[B|A] \cdot P[A]$$

e

$$P[A \cap B] = P[A|B] \cdot P[B]$$

igualando

$$P[A|B] \cdot P[B] = P[B|A] \cdot P[A]$$

Temos:

$$P[A|B] = \frac{P[B|A] \cdot P[A]}{P[B]}$$

Teorema de Bayes

Se eventos $A_i's$ são partição de Ω, então $P[A_j|B] = \dfrac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]}$

Revisitando o problema do teste de diagnóstico (e tb ex 9):

$$A \text{ :estado do paciente} : A_1(D) : \text{com a doença}, A_2(\overline{D}) : \text{sem a doença}$$

$$B \text{ :resultado do teste} : B(+) : \text{positivo}, \overline{B}(-) : \text{negativo}$$

Dados:

$$P[D] = P[A_1] = 0{,}02 \qquad P[\overline{D}] = P[A_2] = 0{,}98$$

$$P[+|D] = P[B|A_1] = 0{,}90 \qquad P[-|D] = P[\overline{B}|A_1] = 0{,}10$$

$$P[-|\overline{D}] = P[\overline{B}|A_2] = 0{,}80 \qquad P[+|\overline{D}] = P[B|A_2] = 0{,}20$$

Teorema de Bayes:

$$P[D|+] = \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+]} = \frac{P[+|D] \cdot P[D]}{P[+|D] \cdot P[D] + P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}]}$$

$$= \frac{0{,}90 \cdot 0{,}02}{0{,}90 \cdot 0.02 + 0{,}20 \cdot 0{,}98} = 0.0841$$

Teorema de Bayes

Reescrevendo e reinterpretando como problema de classificação

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]} \propto P[B|A_j] \cdot P[A_j]$$

Como o paciente deve ser classificado após o teste?

$$P[A_1|B] \propto P[B|A_1] \cdot P[A_1](\text{ou}, P[D|+] \propto P[+|D] \cdot P[D])$$
$$P[A_2|B] \propto P[B|A_2] \cdot P[A_2](\text{ou}, P[\overline{D}|+] \propto P[+|\overline{D}] \cdot P[\overline{D}])$$

Portanto

$$P[A_1|B] \propto 0{,}90 \cdot 0{,}02 = 0{,}018$$
$$P[A_2|B] \propto 0{,}20 \cdot 0{,}98 = 0{,}196$$

A_1 e A_2 são todas as categorias possíveis, as probabilidades devem somar 1:

$$P[A_1|B] = \frac{0{,}018}{0{,}018 + 0{,}196} = 0{,}084$$
$$P[A_2|B] = \frac{0{,}196}{0{,}018 + 0{,}196} = 0{,}916$$

Teorema de Bayes

E se o teste for repetido?

Notaçao: B_1 positivo no primeiro teste e B_2 positivo no segundo teste

Supondo independência

$$P[A_1|B_1,B_2] \propto P[B_2|A_1] \cdot P[B_1|A_1] \cdot P[A_1]$$
$$P[A_2|B_1,B_2] \propto P[B_2|A_2] \cdot P[B_1|A_2] \cdot P[A_2]$$

Portanto se for o mesmo teste (mesma sensibilidade e especificidade)

$$\begin{aligned} P[A_1|B_1,B_2] &\propto 0{,}90^2 \cdot 0{,}02 &= 0.0162 \\ P[A_2|B_1,B_2] &\propto (1-0{,}80)^2 \cdot (1-0{,}02) &= 0.0392 \end{aligned} \tag{1}$$

Logo,

$$P[A_1|B] = \frac{0.0162}{0.0162 + 0.0392} = 0.2924 \qquad P[A_2|B] = \frac{0.0392}{0.0162 + 0.0392} = 0.7076$$

Usando como critério de classificação como doente se $P[D|\text{Testes}] > 0{,}50$:

- A classificação ainda é a mesma mas as chances mudaram!
- Com três testes positivos a classificação mudaria.

Teorema de Bayes

E se o segundo teste for outro com sensibilidade de 85% e especificidade de 95%?
Notaçao: B_1 positivo no primeiro teste e B_2 positivo no segundo teste
Supondo independência:

$$P[A_1|B_1,B_2] \propto P[B_2|A_1] \cdot P[B_1|A_1] \cdot P[A_1]$$
$$P[A_2|B_1,B_2] \propto P[B_2|A_2] \cdot P[B_1|A_2] \cdot P[A_2]$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P[A_1|B_1,B_2] &\propto 0{,}85 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}02 &= 0.0153 \\ P[A_2|B_1,B_2] &\propto (1-0.95)\cdot(1-0.80)\cdot(1-0.02) &= 0.0098 \end{aligned} \quad (2)$$

Logo,

$$P[A_1|B] = \frac{0.0153}{0.0153+0.0098} = 0.6096 \qquad P[A_2|B] = \frac{0.0098}{0.0153+0.0098} = 0.3904$$

Sequência de testes:

- Qual teste aplicar primeiro? Possíveis estratégias para aplicações sequenciais.
- Testes podem ser feitos em série (exemplo anteriores) ou paralelo (não ilustrados aqui).

Teorema de Bayes

Alguns tópicos adicionais em *testes de diagnóstico*:
(ver material pós aula)

- Testes em série ou paralelo.
- opinião especialista (subjetiva):
  probabilidade pré-teste.
- estimação de características dos testes:
  probabilidades estimadas a partir dados,
  dados organizados em tabelas de frequências/probabilidades.
- desenho amostral:
  amostra aleatória (total fixado),
  desenho controlado (margins fixadas).
- resposta contínua (e.q. glicose):
  dicotomização para resultado.
  curva ROC

Teorema de Bayes

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_j P[B|A_j] \cdot P[A_j]}$$

- No exemplo só haviam duas categorias:

$$A_1(D) : \text{com a doença}, A_2(\overline{D}) : \text{sem a doença}$$

- O resultado é mais geral, para várias categorias.
- Um outro exemplo: *trauma score*
- Aplicação em problemas de classificação (naïve Bayes)
- categorias: possíveis estados do sistema
  - estados do sistema categóricos (ou ainda discretos ou enumeráveis)
  - e estados do sistema em uma escala contínua:

$$f(\theta|y) = \frac{f(y|\theta) \cdot f(\theta)}{\int f(y|\theta) \cdot f(\theta) \mathrm{d}\theta}$$

Referências bibliográficas

SPIEGELHALTER, D. **The Art of Statistics: Learning from Data**. [S.l.]: Penguin Books Limited, 2019. (Pelican Books). ISBN 9780241258750.