

Exercícios de Probabilidade

Paulo Justiniano Ribeiro Jr

Versão compilada em 24 de abril de 2025 às 15:46

1. Considere o lançamento de um dado normal.

- (a) Quais os resultados possíveis?
- (b) Qual a probabilidade de sair a face 5?
- (c) Qual a probabilidade de cada possível resultado?
- (d) Qual a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

Solução:

Solução com elementos básicos de probabilidades:

- (a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- (b) $P[\{5\}] = \frac{1}{6}$
- (c) Espaço amostral equiprovável

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilidade	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

(d) $P[\{3, 6\}] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = 0,333$

Solução alternativa utilizando conceito e notação de variável aleatória:

Y : face no lançamento de um dado
 $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Distribuição de probabilidades de Y :

Y	1	2	3	4	5	6
$P[Y = y]$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Ou, de forma resumida em uma fórmula:

$$P[Y = y] = \frac{1}{\#Y} = \frac{1}{6}$$

Pode-se obter as probabilidades pedidas da tabale ou da fórmula.

$$P[Y = 5] = 1/6$$

$$P[Y = 3 \cup Y = 6] \stackrel{Mut.Exc.}{=} P[Y = 3] + P[Y = 6] = \frac{2}{6} = 0,333$$

2. Considere o lançamento de um dado não usual, no qual a probabilidade de cada face é proporcional ao seu valor.

- (a) Quais os resultados possíveis?
- (b) Qual a probabilidade de sair a face 5?
- (c) Qual a probabilidade de cada possível resultado?
- (d) Qual a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

Solução:

Solução com elementos básicos de probabilidades:

(a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Cada ponto do espaço amostral tem uma probabilidade associada e as probabilidades somam 1.

Como cada uma é proporcional ao valor da face:

$$w + 2w + 3w + 4w + 5w + 6w = 21w = 1 \longrightarrow w = 1/21$$

(b) $P[\{5\}] = 5/21 = 0,238$

(c) $1/21, 2/21, 3/21, 4/21, 5/21, 6/21$ (espaço não-equiprovável)

(d) $P[\{3, 6\}] = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = 0,429$

Solução alternativa usando notação de variável aleatória.

Y : face no lançamento deste dado

$$y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Distribuição de probabilidades de Y :

Y	1	2	3	4	5	6
$P[Y = y]$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
$P[Y = y]$	w	$2w$	$3w$	$4w$	$5w$	$6w$

Como para uma distribuição discreta de probabilidades $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$:

$$w + 2w + 3w + 4w + 5w + 6w = 1$$

$$21w = 1$$

$$w = 1/21$$

A distribuição das probabilidades fica como na tabela a seguir.

Y	1	2	3	4	5	6
$P[Y = y]$	$1/21$	$2/21$	$3/21$	$4/21$	$5/21$	$6/21$

Ou, de forma resumida por uma fórmula:

$$P[Y = y] = \frac{y}{21}$$

E as probabilidades pedidas são obtidas da tabela ou da fórmula.

$$P[Y = 5] = \frac{5}{21} = 0.238$$

$$P[Y = 3 \cup Y = 6] \stackrel{Mut.Exc.}{=} P[Y = 3] + P[Y = 6] = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = 0,429$$

3. Considere o lançamento de dois dados e o interesse está na soma das faces.

(a) Quais os resultados possíveis?

(b) Qual a probabilidade da soma ser 5?

(c) Qual a probabilidade de cada possível resultado?

(d) Qual a probabilidade que a soma das faces seja um número divisível por 3?

Solução:

Solução com elementos básicos de probabilidades:

(a)

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Este espaço é equiprovável, ou seja, cada uma dos 36 resultados possíveis tem a mesma probabilidade de ocorrência ($1/36$).

(b) $P[\text{soma } 5] = P[\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}] = 4/36 = 0,111$

(c) $1/36$ (espaço equiprovável)

(d) $P[\{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}] = 12/36 = 0,333$

Solução usando a definição de uma variável aleatória:

Y : soma das faces no lançamento de dois dados

$$y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Distribuição de probabilidades de Y :

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[Y = y]$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

Ou, de forma resumida por uma fórmula:

$$P[Y = y] = \frac{6 - |y - 7|}{36}$$

As probabilidades pedidas, obtidas pela tabela or fórmula são:

$$P[Y = 5] = \frac{4}{36} = 0,111$$

$$P[Y = 3 \cup Y = 6 \cup Y = 9 \cup Y = 12] \stackrel{Mut.Exc.}{=} P[Y = 3] + P[Y = 6] + P[Y = 9] + P[Y = 12] \\ = \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = 0,333$$

4. Um dado foi fabricado com o centro em madeira leve e cada face com uma chapa metálica porém de diferentes características (espessura/densidade) em cada face?

(a) Quais os resultados possíveis?

(b) Como calcular a probabilidade de sair a face 5?

(c) Como calcular a probabilidade de cada possível resultado?

(d) Como calcular a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

Solução:

A ideia aqui é discutir que problema não pode ser resolvido com as informações dadas pois parece questionável assumir que o espaço amostral seja equiprovável.

É necessário alguma informação ou suposição adicional. Por exemplo poderia-se fazer um experimento no qual se lance os dados várias vezes, para fornecer as probabilidades (estimadas) de cada face.

5. Você vai a um cassino em uma mesa que tem um jogo no qual se lançam dois dados como em um problema anterior. A regra é a de que se a soma for 6, 7 ou 8 você ganha, valor igual ao apostado, caso contrário, perde o apostado.
- (a) Qual sua opinião sobre suas chances de ganhar?
 - (b) Quais os resultados possíveis?
 - (c) Qual sua opinião sobre a probabilidade da soma ser 5?
 - (d) Qual sua opinião sobre a probabilidade de cada possível resultado?
 - (e) Qual sua opinião sobre a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

Solução:

A ideia aqui é discutir que o problema é resolvido com alguma suposição adicional.

É possível considerar que o espaço amostral seja equiprovável, ou seja, que os dados são *regulares* (honestos). Com isto e revisitando o problema 3) tem-se que:

- (a) Qual sua opinião sobre suas chances de ganhar?

$$P[Y = 6 \cup Y = 7 \cup Y = 8] \stackrel{Mut.Exc.}{=} P[Y = 6] + P[Y = 7] + P[Y = 8] = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{16}{36} = 0,444$$

- (b) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

- (c) $P[Y = 5] = 4/36 = 1/9 = 0,111$

- (d) Ver a distribuição de Y no problema 3).

- (e) Neste caso voltamos ao espaço amostral original e definimos o evento e sua probabilidade:

A : uma face tem um número divisível por 3

$$A = \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 3), (4, 6), (5, 3), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Como o espaço amostral é suposto equiprovável:

$$P[A] = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0,556$$

6. Em um teste múltipla escolha de quatro questões, deve-se marcar uma alternativa em cada questão. Cada questão possui cinco alternativas, das quais apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar, por mero acaso, alguma questão?

Solução:

Vamos ver uma primeira solução baseada nos conceitos fundamentais de probabilidades.

Notar que estão envolvidos os conceitos de: *eventos*, *eventos complementares* e *independência de eventos*.

A_i : acerta a i -ésima questão $i = 1, \dots, 4$

$$\forall i \quad P(A_i) = 0,2 \quad \text{e} \quad P(\overline{A_i}) = 0,8$$

$$P(\text{acertar alguma}) = 1 - P(\text{errar todas}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) \stackrel{ind}{=} 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = \\ = 1 - (0,8)^4 = 0,59$$

Uma solução alternativa utilizando conceitos de variáveis aleatórias e distribuição de probabilidades.

Identificamos que o interesse é no número de questões certas.

São $n = 4$ questões e cada questão tem duas possibilidades, pode estar certa ($p = 0,20$) ou errada ($p = 1 - 0,20 = 0,80$).

Como se assume independência e que a chance de acerto ao acaso (*chute*) é a mesma em todas questões é um caso de distribuição **Binomial**.

Y : número de questões certas

$$Y \sim B(n = 4, p = 0,20)$$

$$P[Y = y] = \binom{n}{y} p^y (1 - p)^{n-y} = \binom{4}{y} 0,2^y (1 - 0,2)^{4-y}$$

$$P[Y > 0] = 1 - P[Y = 0] = 1 - \binom{4}{0} 0,2^0 (1 - 0,2)^{4-0} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0,8^4 = 0,59.$$

-
7. Um reservatório recebe água de três fontes diferentes. A primeira tem 5% de chance de apresentar alguma contaminação, a segunda tem 6,5% e a terceira tem 12%. Qual a probabilidade do reservatório ser contaminado?

A solução utiliza conceitos de união e interseção de eventos, probabilidade complementar e faz a suposição de independência dos eventos para obter a resposta.

Solução:

Evento A : a água da primeira fonte é contaminada

Evento B : a água da segunda fonte é contaminada

Evento C : a água da terceira fonte é contaminada

Dados:

$$P[A] = 0,05 \quad ; P[\bar{A}] = 0,95$$

$$P[B] = 0,065 \quad ; P[\bar{B}] = 0,935$$

$$P[C] = 0,12 \quad ; P[\bar{C}] = 0,88$$

$$\begin{aligned} P[\text{contaminação}] &= P[A \cup B \cup C] = 1 - P[\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \stackrel{ind}{=} 1 - P[\bar{A}] \cdot P[\bar{B}] \cdot P[\bar{C}] \\ &= 1 - 0,95 \cdot 0,935 \cdot 0,88 = 0,2183 \end{aligned}$$

-
8. Um site de vendas pela internet registra 40% dos acessos do estado do PR, 50% de outros estados e 10% do exterior. 20% dos acessos do PR resultam em uma compra, enquanto que os percentuais para outros estados e exterior são de 10% e 30%, respectivamente.

(a) Qual a probabilidade de um acesso resultar em compra?

(b) Se foi feita uma compra, qual a probabilidade de ela ter sido do exterior?

9. Alguns biólogos fizeram estudos de laboratório sobre o comportamento de animais quando submetidos a um estímulo, o quais poderiam apresentar ou não resposta positiva. Em particular, estavam interessados nas respostas positivas os estímulo. Considera-se que na população destes animais, 10% sejam sensíveis ao estímulo.

O biólogo A possuía um grupo em que 10 animais eram sensíveis e 20 eram insensíveis. Ele selecionou ao acaso 8 animais para teste.

O biólogo B dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar o terceiro sensível ao estímulo.

O biólogo C tomou fazia testes diários e encontrava uma média de 2,8 animais sensíveis a cada dia.

O biólogo D submeteu 10 animais ao estímulo.

O biólogo E dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar um sensível ao estímulo.

(a) Qual a probabilidade do biólogo A encontrar ao menos 2 animais sensíveis?

(b) Qual a probabilidade do biólogo B precisar testar no máximo 6 animais?

- (c) Qual a probabilidade do biólogo C encontrar menos que dois sensíveis em um determinado dia?
- (d) Qual a probabilidade do biólogo D encontrar mais que 3 animais sensíveis?
- (e) Qual a probabilidade do biólogo E precisar testar mais que 3 animais?

Sugestão: especifique a(s) variável(eis) aleatória, sua(s) distribuição(ões) e suposições feitas.

10. Considere o surgimento de um defeito na pista em um trecho de rodovia com extensão de 20 km .
- (a) Qual a probabilidade de que o defeito ocorra nos primeiros 5 km ?
 - (b) Qual a probabilidade de que o defeito ocorra entre os quilômetros 12 e 15?
 - (c) Se o defeito ocorre na segunda metade do trecho, qual a probabilidade de seja nos últimos 3 km ?
 - (d) O custo de manutenção é de R\$2.000,00 se ocorre nos primeiros 5 km , de R\$5.000,00 se ocorre entre 5 e 16 kms e de R\$10.000,00 se ocorre nos ultimos 4 km . Que custo espera-se ter em 20 manutenções?
11. O rendimento de uma frota de veículos de uma locadora tem a seguinte função de densidade de probabilidades. Calcule o solicitado nos itens a seguir.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{k(y-5)}{2} & \text{se } 5 \leq y < 7 \\ \frac{k(11-y)}{4} & \text{se } 7 \leq y \leq 11 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) O valor de k .
 - (b) $P[Y < 7]$
 - (c) $P[Y > 10]$.
 - (d) $P[Y \leq 9]$
 - (e) $P[7, 5 < Y < 9, 5]$.
 - (f) $P[Y > 6 | Y \leq 7]$.
 - (g) $P[Y \leq 10 | Y > 8]$.
 - (h) O consumo médio.
 - (i) O consumo mediano.
12. Uma determinada indústria classifica ovos como: XL acima de 73 g, L 63 a 73 g, M 53 a 63 g, S abaixo de 53 g. Suponha que um produtor produza ovos cujos tamanhos (pesos) são descritos pela seguinte função de densidade de probabilidades:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-48)}{12k} & \text{se } 48 \leq x < 60 \\ -\frac{(x-78)}{18k} & \text{se } 60 \leq x \leq 78 \\ 0 & \text{se } x < 48 \text{ ou } x > 78 \end{cases}$$

- (a) Qual o valor de k ?
 - (b) Qual a proporção de ovos que deve ser produzida em cada classificação?
 - (c) Se o produtor recebe R\$ 0,05 por ovo S , R\$ 0,10 por ovo M , R\$ 0,12 por ovo L e R\$ 0,18 por ovo XL , quanto deve receber em um lote de 10.000 ovos?
 - (d) Qual o tamanho (peso) mediano dos ovos?
 - (e) Forneça a expressão da distribuição acumulada $F(x)$.
 - (f) Qual o tamanho (peso) para o qual apenas 20% dos ovos estão acima dele?
13. Suponha que os escores obtidos por estudantes em um teste *online* possam ser bem modelados por uma distribuição normal com média $\mu = 120$ e variância $\sigma^2 = 12^2$.
- (a) Considera-se como estudante de alta performance os que atingem um escore a partir de 135. Qual o percentual esperado de estudantes de alta performance entre todos os que fazem o teste?

- (b) Estudantes com escore abaixo de 100 devem se reinscrever e só podem voltar a fazer o teste após seis meses e os com escore entre 100 e 125 são convidados a refazer o teste após um mês. Quais as proporções de estudantes que deverá se reinscrever e que deverá refazer o teste após um mês?
- (c) Define-se como *quartis* os escores abaixo dos quais espera-se encontrar 25, 50 e 75% dos estudantes. Quais os valores dos escores que definem os quartis?
- (d) Quanto deveria ser o valor μ da média dos escores para que ao menos 30% dos escores fossem de alta performance?
- (e) Há um outro teste que possui média $\mu = 125$ e variância $\sigma^2 = 6^2$. Em qual deles espera-se a maior proporção de estudantes de alta performance?