Exercícios de Probabilidade

Paulo Justiniano Ribeiro Jr

Versão compilada em 25 de abril de 2025 às 14:47

1. Considere o lançamento de um dado normal.
   (a) Quais os resultados possíveis?
   (b) Qual a probabilidade de sair a face 5?
   (c) Qual a probabilidade de cada possível resultado?
   (d) Qual a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

   Solução:
   Solução com elementos básicos de probabilidades:

   (a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   (b) $P[\{5\}] = \frac{1}{6}$
   (c) Espaço amostral equiprovável

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilidade	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

   (d) $P[\{3, 6\}] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = 0,333$

   Solução alternativa utilizando conceito e notação de variável aleatória:

$$
\begin{aligned}
&Y : \text{face no lançamento de um dado} \\
&y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}
\end{aligned}
$$

   Distribuição de probabilidades de Y:

y	1	2	3	4	5	6
$P[Y = y]$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

   Ou, de forma resumida em uma fórmula:

$$P[Y = y] = \frac{1}{\#Y} = \frac{1}{6}$$

   Pode-se obter as probabilidades pedidas da tabela ou da fórmula.

$$
\begin{aligned}
P[Y = 5] &= 1/6 \\
P[Y = 3 \cup Y = 6] &\overset{Mut.Exc.}{=} P[Y = 3] + P[Y = 6] = \frac{2}{6} = 0,333
\end{aligned}
$$

---

2. Considere o lançamento de um dado não usual, no qual a probabilidade de cada face é proporcional ao seu valor.
   (a) Quais os resultados possíveis?
   (b) Qual a probabilidade de sair a face 5?
   (c) Qual a probabilidade de cada possível resultado?
   (d) Qual a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

Solução:
Solução com elementos básicos de probabilidades:

(a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Cada ponto do espaço amostral tem uma probabilidade associada e as probabilidades somam 1. Como cada uma é proporcional ao valor da face:

$$w + 2w + 3w + 4w + 5w + 6w = 21w = 1 \longrightarrow w = 1/21$$

(b) $P[\{5\}] = 5/21 = 0,238$

(c) $1/21, 2/21, 3/21, 4/21, 5/21, 6/21$ (espaço não-equiprovável)

(d) $P[\{3, 6\}] = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = 0,429$

Solução alternativa usando notação de variável aleatória.

$$Y : \text{face no lançamento deste dado}$$
$$y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Distribuição de probabilidades de Y:

y	1	2	3	4	5	6
$P[Y = y]$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
$P[Y = y]$	w	$2w$	$3w$	$4w$	$5w$	$6w$

Como para uma distribuição discreta de probabilidades $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$:

$$\begin{aligned} w + 2w + 3w + 4w + 5w + 6w &= 1 \\ 21w &= 1 \\ w &= 1/21 \end{aligned}$$

A distribuição das probabilidades é dada pela tabela a seguir,

y	1	2	3	4	5	6
$P[Y = y]$	$1/21$	$2/21$	$3/21$	$4/21$	$5/21$	$6/21$

ou, de forma resumida, por uma fórmula:

$$P[Y = y] = \frac{y}{21}$$

E as probabilidades pedidas são obtidas da tabela ou da fórmula.

$$P[Y = 5] = \frac{5}{21} = 0.238$$

$$P[Y = 3 \cup Y = 6] \overset{Mut.Exc.}{=} P[Y = 3] + P[Y = 6] = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = 0,429$$

---

3. Considere o lançamento de dois dados e o interesse está na soma das faces.

(a) Quais os resultados possíveis?

(b) Qual a probabilidade da soma ser 5?

(c) Qual a probabilidade de cada possível resultado?

(d) Qual a probabilidade que a soma das faces seja um número divisível por 3?

Solução:
Solução com elementos básicos de probabilidades:

(a)

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Este espaço é equiprovável, ou seja, cada uma dos 36 resultados possíveis tem a mesma probabilidade de ocorrência (1/36).

(b) $P[\text{soma } 5] = P[\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}] = 4/36 = 0,111$

(c) 1/36 (espaço equiprovável)

(d) $P[\{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6),(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}] = 12/36 = 0,333$

Solução usando a definição de uma variável aleatória:

$$Y : \text{soma das faces no lançamento de dois dados}$$
$$y \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Distribuição de probabilidades de Y:

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[Y = y]$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Ou, de forma resumida por uma fórmula:

$$P[Y = y] = \frac{6 - |y - 7|}{36}$$

As probabilidades pedidas, obtidas pela tabela or fórmula são:

$$P[Y = 5] = \frac{4}{36} = 0.111$$
$$P[Y = 3 \cup Y = 6 \cup Y = 9 \cup Y = 12] \overset{Mut.Exc.}{=} P[Y = 3] + P[Y = 6] + P[Y = 9] + P[Y = 12]$$
$$= \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = 0,333$$

---

4. Um dado foi fabricado com o centro em madeira leve e cada face com uma chapa metálica porém de diferentes características (espessura/densidade) em cada face?

   (a) Quais os resultados possíveis?
   (b) Como calcular a probabilidade de sair a face 5?
   (c) Como calcular a probabilidade de cada possível resultado?
   (d) Como calcular a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

Solução:
A ideia aqui é discutir que problema não pode ser resolvido com as informações dadas pois parece questionável assumir que o espaço amostral seja equiprovável.
É necessário alguma informação ou suposição adicional. Por exemplo poderia-se fazer um experimento no qual se lance os dados várias vezes, para fornecer as probabilidades (estimadas) de cada face.

---

5. Voce vai a um cassino em uma mesa que tem um jogo no qual se lançam dois dados como em um problema anterior. A regra é a de que se a soma for 6, 7 ou 8 voce ganha, valor igual ao apostado, caso contrário, perde o apostado.

(a) Qual sua opinião sobre suas chances de ganhar?

(b) Quais os resultados possíveis?

(c) Qual sua opinião sobre a probabilidade da soma ser 5?

(d) Qual sua opinião sobre a probabilidade de cada possível resultado?

(e) Qual sua opinião sobre a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

Solução:
A ideia aqui é discutir que o problema é resolvido com alguma suposição adicional.
É possível considerar que o espaço amostral seja equiprovável, ou seja, que os dados são *regulares* (honestos).
Com isto e revisitando o problema 3) tem-se que:

(a) Qual sua opinião sobre suas chances de ganhar?
$P[Y=6 \cup Y=7 \cup Y=8] \overset{Mut.Exc.}{=} P[Y=6]+P[Y=7]+P[Y=8] = \frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{16}{36}=0,444$

(b) $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

(c) $P[Y=5]=4/36=1/9=0,111$

(d) Ver a distribuição de Y no problema 3).

(e) Neste caso voltamos ao espaço amostral original e definimos o evento e sua probabilidade:

$$\begin{aligned} A &: \text{uma face tem um número divisível por 3} \\ A = &\{(1,3),(1,6),(2,3),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ &(4,3),(4,6),(5,3),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

Como o espaço amostral é suposto equiprovável:

$$P[A]=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}=0,556$$

---

6. Em um teste múltipla escolha de quatro questões, deve-se marcar uma alternativa em cada questão. Cada questão possui cinco alternativas, das quais apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar, por mero acaso, alguma questão?

Solução:
Vamos ver uma primeira solução baseada nos conceitos fundamentais de probabilidades.
Notar que estão envolvidos os conceitos de: *eventos*, *eventos complementares* e *independência de eventos*.

$$\begin{aligned} A_i &: \text{acerta a } i\text{-ésima questão} \;\; i=1,\ldots,4 \\ \forall i \;\; P(A_i) &= 0,2 \;\;\text{ e } P(\overline{A_i})=0,8 \\ P(\text{acertar alguma}) &= 1-P(\text{errar todas}) = 1-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}) \overset{ind}{=} 1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})\cdot P(\overline{A_4})) = \\ &= 1-(0,8)^4 = 0,59 \end{aligned}$$

Uma solução alternativa utilizando conceitos de variáveis aleatórias e distribuição de probabilidades.
Identificamos que o interesse é no número de questões certas.
São $n=4$ questões e cada questão tem duas possibilidades, pode estar certa ($p=0,20$) ou errada ($p=1-0,20=0,80$).

Como se assume independência e que a chance de acerto ao acaso (*chute*) é a mesma em todas questões é um caso de distribuição **Binomial**.

$$\begin{aligned}
&Y : \text{número de questões certas}\\
&Y \sim \text{B}(n=4, p=0,20)\\
P[Y=y] =& \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} = \binom{4}{y} 0,2^y (1-0,2)^{4-y}\\
P[Y>0] =& 1-P[Y=0] = 1-\binom{4}{0} 0,2^0 (1-0,2)^{4-0} = 1-1\cdot 1\cdot 0,8^4 = 0,59.
\end{aligned}$$

---

7. Um reservatório recebe água de três fontes diferentes. A primeira tem 5% de chance de apresentar alguma contaminação, a segunda tem 6,5% e a terceira tem 12%. Qual a probabilidade do reservatório ser contaminado?

   A solução utiliza conceitos de união e interseção de eventos, probabilidade complementar e faz a suposição de independência dos eventos para obter a resposta.

   Solução:
   Evento A : a água da primeira fonte é contaminada
   Evento B : a água da segunda fonte é contaminada
   Evento C : a água da terceira fonte é contaminada
   Dados:

$$\begin{aligned}
P[A] &= 0,05 \quad ; P[\overline{A}] = 0,95\\
P[B] &= 0,065 \quad ; P[\overline{B}] = 0,935\\
P[C] &= 0,12 \quad ; P[\overline{C}] = 0,88\\
P[\text{contaminação}] &= P[A\cup B\cup C] = 1-P[\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}] \overset{ind}{=} 1-P[\overline{A}]\cdot P[\overline{B}]\cdot P[\overline{C}]\\
&= 1-0.95\cdot 0.935\cdot 0.88 = 0,2183
\end{aligned}$$

---

8. Um site de vendas pela internet registra 40% dos acessos do estado do PR, 50% de outros estados e 10% do exterior. 20% dos acessos do PR resultam em uma compra, enquanto que os percentuais para outros estados e exterior são de 10% e 30%, respectivamente.

   (a) Qual a probabilidade de um acesso resultar em compra?

   (b) Se foi feita uma compra, qual a probabilidade de ela ter sido do exterior?

9. Alguns biólogos fizeram estudos de laboratório sobre o comportamento de animais quando submetidos a um estímulo, o quais poderiam apresentar ou não resposta positiva. Em particular, estavam interessados nas respostas positivas os estímulo. Quando necessário, considera-se que na população destes animais, 10% sejam sensíveis ao estímulo.

   O biólogo A dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar um sensível ao estímulo.

   O biologo B possuia um grupo em que 10 animais eram sensíveis e 20 eram insensíveis. Ele selecionou ao acaso 8 animais para teste.

   O biólogo C tomou fazia testes diários e encontrava uma média de 2,8 animais sensíveis a cada dia.

   O biólogo D submeteu 10 animais ao estímulo.

   O biólogo E dispunha de um grande número de animais e foi testando um a um até encontrar o terceiro sensível ao estímulo.

   (a) Qual a probabilidade do biólogo A precisar testar mais que 3 animais?

(b) Qual a probabilidade do biólogo B encontrar ao menos 2 animais sensíveis?
(c) Qual a probabilidade do biólogo C encontrar menos que dois sensíveis em um determinado dia?
(d) Qual a probabilidade do biólogo D encontrar mais que 3 animais sensíveis?
(e) Qual a probabilidade do biólogo E precisar testar no máximo 6 animais?

Sugestão: especifique a(s) variável(eis) aleatória, sua(s) distribuição(ções) e suposições feitas.

10. Considere o surgimento de um defeito na pista em um trecho de rodovia com extensão de 20 km.

(a) Qual a probabilidade de que o defeito ocorra nos primeiros 5 km?
(b) Qual a probabilidade de que o defeito ocorra entre os quilômetros 12 e 15?
(c) Se o defeito ocorre na segunda metade do trecho, qual a probabilidade de seja nos últimos 3 km?
(d) O custo de manutenção é de R\$2.000,00 se ocorre nos primeiros 5 km, de R\$5.000,00 se ocorre entre 5 e 16 kms e de R\$10.000,00 se ocorre nos ultimos 4 km. Que custo espera-se ter em 20 manutenções?

11. O rendimento de uma frota de veículos de uma locadora tem a seguinte função de densidade de probabilidades. Calcule o solicitado nos itens a seguir.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{k(y-5)}{2} & \text{se } 5 \leq y < 7 \\ \frac{k(11-y)}{4} & \text{se } 7 \leq y \leq 11 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) O valor de k.
(b) $P[Y < 7]$
(c) $P[Y > 10]$.
(d) $P[Y \leq 9]$
(e) $P[7,5 < Y < 9,5]$.
(f) $P[Y > 6 | Y \leq 7]$.
(g) $P[Y \leq 10 | Y > 8]$.
(h) O consumo médio.
(i) O consumo mediano.

12. Uma determinada indústria classifica ovos como: XL acima de 73 g, L 63 a 73 g, M 53 a 63 g, S abaixo de 53 g. Suponha que um produtor produza ovos cujos tamanhos (pesos) são descritos pela seguinte função de densidade de probabilidades:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-48)}{12k} & \text{se } 48 \leq x < 60 \\ -\frac{(x-78)}{18k} & \text{se } 60 \leq x \leq 78 \\ 0 & \text{se } x < 48 \text{ ou } x > 78 \end{cases}$$

(a) Qual o valor de k ?
(b) Qual a proporção de ovos que deve ser produzida em cada classificação?
(c) Se o produtor recebe R\$ 0,05 por ovo S, R\$ 0,10 por ovo M, R\$ 0,12 por ovo L e R\$ 0,18 por ovo XL, quanto deve receber em um lote de 10.000 ovos?
(d) Qual o tamanho (peso) mediano dos ovos?
(e) Forneça a expressão da distribuição acumulada $F(x)$.
(f) Qual o tamanho (peso) para o qual apenas 20% dos ovos estão acima dele?

13. Suponha que os escores obtidos por estudantes em um teste *online* possam ser bem modelados por uma distribuição normal com média $\mu = 120$ e variância $\sigma^2 = 12^2$.

(a) Considera-se como estudante de alta performance os que atingem um escore a partir de 135. Qual o percentual esperado de estudantes de alta performance entre todos os que fazem o teste?

(b) Estudantes com escore abaixo de 100 devem se reinscrever e só podem voltar a fazer o teste após seis meses e os com escore entre 100 e 125 são convidados a refazer o teste após um mês. Quais as proporções de estudantes que deverá se reinscrever e que deverá refazer o teste após um mês?

(c) Define-se como *quartis* os escores abaixo dos quais espera-se encontrar 25, 50 e 75% dos estudantes. Quais os valores dos escores que definem os quartis?

(d) Quanto deveria ser o valor μ da média dos escores para que ao menos 30% dos escores fossem de alta performance?

(e) Há um outro teste que possui média $\mu = 125$ e variância $\sigma^2 = 6^2$. Em qual deles espera-se a maior proporção de estudantes de alta performance?