CE301 - Estatística Básica - Prova 4

1o. Semestre 2025

Nome: ____

Data: ____/____/____ **GRR:** ______________ **Assinatura:** ______________________

1) Uma refinaria recebe navios transportando petróleo bruto. Historicamente, a quantidade de carga por navio segue distribuição normal com média $\mu = 30000$ toneladas, mas o desvio-padrão populacional σ é desconhecido. Você coleta uma amostra aleatória simples de $n = 25$ navios, e obtém uma média amostral de $\bar{x} = 28000$ toneladas e um desvio-padrão amostral de $s = 4200$ toneladas.

a) Identifique e descreva, neste contexto, os seguintes elementos segundo os conceitos de estatística. (0,5 ponto)

   i) a população,

   ii) a variável aleatória de interesse,

   iii) o parâmetro de interesse,

   iv) a amostra,

   v) o estimador,

   iv) a estimativa,

   vii) a distribuição amostral.

b) Construa o intervalo de confiança de 95% para μ. Qual distribuição foi usada? Interprete o resultado no contexto da refinaria. (0,5 ponto)

c) A refinaria suspeita que a média atual é menor que a histórica de 30000 t.

   i) Formule a hipótese nula e a alternativa? (0,5 ponto)

   ii) Calcule o valor da estatística de teste, a região crítica e o p-valor? (1,0 ponto)

   iii) Qual é a conclusão do teste com nível de significância de 5%? Interpretação prática. (0,5 ponto)

d) Obtenha um intervalo de confiança de 95% para σ^2. Quais parâmetros foram usados (graus de liberdade, distribuição)? Interprete. (0,5 ponto)

e) Calcule o tamanho de amostra necessário para que a margem de erro máxima para estimar μ seja 500 toneladas, com 99% de confiança. Use como estimativa substituta $s = 4200$ t. Interprete esse resultado. (0,5 ponto)

Solução

a) i) a população: todos os navios que transportam petróleo bruto para a refinaria,

ii) a variável aleatória de interesse: a quantidade de carga transportada por cada navio,

iii) o parâmetro de interesse: a média μ da quantidade de carga e a variância σ^2 da quantidade de carga,

iv) a amostra: os 25 navios selecionados aleatoriamente,

v) o estimador: $\bar{x}$ (média amostral) e s^2 (variância amostral),

iv) a estimativa: $\bar{x} = 28000$ toneladas e $s^2 = 17640000$ toneladas^2,

vii) a distribuição amostral: $\bar{X}$ segue distribuição t de Student com $n-1 = 24$ graus de liberdade, pois a população é normal e o desvio-padrão populacional é desconhecido e $(n-1)s^2/\sigma^2$ segue distribuição χ^2 com $n-1 = 24$ graus de liberdade.

b) IC 95% para μ: $[2.8 \times 10^4 \pm 2.064 * 4200/5]$= $[2.6266 \times 10^4; 2.9734 \times 10^4]$ toneladas.

Interpretação: Há 95% de confiança de que este intervalo cobre a verdadeira média.

c) Teste unilateral $H_0 : \mu = 30000$ vs $H_1 : \mu < 30000$

- Estatística de teste: t_{calc} = -2.3809524
- $RC = \{t_{calc} \leq$ -1.711$\}$
- p-valor=0.0127759 $< 0,05 \rightarrow$ Rejeitamos H_0.

Conclusão: Há evidência suficiente de que a média atual é menor que 30000 t.

d) IC 95% para σ^2: $[24 * 4200^2/39.36; 24 * 4200^2/12.4]$ toneladas^2= $[1.0754984 \times 10^7; 3.4138769 \times 10^7]$ ton^2

Interpretação: Há 95% de confiança de que este intervalo cobre a verdadeira variância das cargas.

e) **Tamanho amostral** p/ $ME = 500$ (99% conf.): $n = (2.58 * 4200/500)^2$= 470 navios.

Interpretação: Para uma estimativa tão precisa, seria necessário uma amostra bem maior.

---

2) Uma fábrica visa que 2% das peças produzidas sejam defeituosas. Em um lote recente, foi sorteada uma amostra aleatória simples de $n = 500$ peças e observou-se 12 peças defeituosas.

a) Identifique e descreva, neste contexto, os seguintes elementos segundo os conceitos de estatística. (0,5 ponto)

(a) a população,

(b) a variável aleatória de interesse,

(c) o parâmetro de interesse,

(d) a amostra,

(e) o estimador,

(f) a estimativa,

(g) a distribuição amostral.

b) Calcule o erro padrão da proporção estimada. Verifique as condições para aplicar a aproximação normal ($np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$). (0,5 ponto)

c) Monte o intervalo de confiança otimista de 95% para a proporção populacional de peças defeituosas. Interprete o resultado em relação ao padrão da fábrica. (0,5 ponto)

d) Há evidência de que a taxa de defeitos excede o limite desejado? Estabeleça H_0 e H_1 para o teste de hipóteses. Calcule a estatística de teste e a região crítica. Decida a um nível de significância $\alpha = 5\%$. (1,5 pontos)

e) Especifique o p-valor calculado e explique seu significado no contexto decisional. (0,5 ponto)

f) Quer-se reduzir a margem de erro para metade da atual (considerando o intervalo de confiança prévio) com 95% de confiança. Utilize valor otimista $p = 0,02$ (maximiza precisão). Calcule o novo n. Explique como interpretar esse tamanho conforme investimento em controle de qualidade. (0,5 ponto)

Solução

a) (a) a população: todas as peças produzidas pela fábrica,

   (b) a variável aleatória de interesse: a proporção de peças defeituosas,

   (c) o parâmetro de interesse: a proporção populacional de peças defeituosas p,

   (d) a amostra: as 500 peças selecionadas aleatoriamente,

   (e) o estimador: $\hat{p} = \frac{12}{500}$ (proporção amostral de defeitos),

   (f) a estimativa: $\hat{p} = 0.024$ (2,4% de defeitos),

   (g) a distribuição amostral: $\hat{p}$ segue aproximadamente uma distribuição normal, pois n é grande e $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$.

b) Erro padrão e condições

$$
\begin{aligned}
se &= 0.0068446 \\
np &= 10 \geq 5 \\
nq &= 490 \geq 5 \\
&\text{condições atendidas}
\end{aligned}
$$

c) IC 95% para proporção

$$
\begin{aligned}
&\text{Intervalo}= [0.0106; 0.0374] \\
&\text{Interpretação: A verdadeira taxa de defeitos é coberta pelo IC com uma confiança de 95\%.}
\end{aligned}
$$

d) Teste unilateral $H_0 : p = 0,02$ vs $H_1 : p > 0,02$

$$
\begin{aligned}
\text{Estatística de teste: } & z = 0.58 \\
\text{p-valor: } & 0.2795 > 0.05 \rightarrow \text{não rejeita} H_0 \\
\text{Conclusão: } & \text{sem evidência de que a proporção excede 2\%.}
\end{aligned}
$$

e) Valor-p = 0.2795.

$$
\begin{aligned}
\text{Interpretação: } & \text{Sob } H_0, \text{há 27.9\%de chance de observar } \hat{p} \text{ tão alto ou maior;} \\
& \text{Não é suficiente para rejeitar.}
\end{aligned}
$$

f) Tamanho amostral p/ metade do erro (95%)

Resultado: 1674 peças.

Interpretação: aumentaria a amostra para reduzir o erro pela metade.

---

3) Explique os conceitos de erro tipo I e erro tipo II em testes de hipóteses e interprete no contexto da questão 2. Discuta como esses erros podem impactar decisões neste contexto. (1,0 ponto)

---

4) Seja Y a variável tempo de serviço dos funcionários de determinada localidade. Se Y tem distribuição normal com média 15 anos desvio padrão 10 anos.
   (a) Qual a probabilidade de um funcionário, aleatoriamente escolhido, ter pelo menos 10 anos de tempo de serviço? (0,5 ponto)
   (b) Tomando-se uma amostra de 16 funcionários, qual a probabilidade do tempo médio de serviço estar entre 13 e 16 anos? (0,5 ponto)

Solução:

$$\begin{aligned} Y &: \text{tempo de serviço de um funcionário} \\ Y &\sim \mathrm{N}(\mu = 15, \sigma^2 = 10^2) \\ \overline{Y} &: \text{tempo médio de serviço de um grupo de 16 funcionários} \\ \overline{Y}_{16} &\sim \mathrm{N}(\mu = 15, \sigma^2 = 10^2/16) \end{aligned}$$

1. $P[Y \geq 10] = P[Z \geq \frac{10-15}{10}] = P[Z \geq -0.5] = 0.6915$
2. $P[13 \leq \overline{Y}_{16} \leq 16] = P[\frac{13-15}{10/\sqrt{16}} \leq Z \leq \frac{16-15}{10/\sqrt{16}}] = P[-0.8 \leq Z \leq 0.4] = 0.4436$
