Lógica para Computação **Segundo Semestre, 2014**

Aula 8: Tableaux Analíticos

DAINF-UTFPR Prof. Ricardo Dutra da Silva

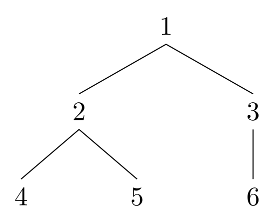
O métodos de Dedução Natural não permite inferir a falsidade de um sequente, ou seja, se $\Gamma \nvdash A$. O método dos tableaux analíticos é um sistema de inferência que permite decidir a questão sem necessariamente gerar uma prova de tamanho exponencial no número de variáveis, como acontece com o método da tabela-verdade.

Um tableau analítico é uma sequência de fórmulas construídas por um conjunto de regras. Geralmente, o método é representado por uma árvore. Uma árvore é um modelo bastante usado na computação para estruturas hierárquicas. Um exemplo conhecido de árvore é a árvore genealógica.

Uma árvore é formada por vértices com uma relação de hierarquia entre eles. Existe um vértice especial que é a raiz da árvore. Se uma árvore contém um único vértice, então este vértice é raiz. Arestas (linhas ligando vértices) denotam as relações hierárquicas entre vértices. Podemos ter nós filhos e nós pais. Vértices que não possuem filhos são chamados de folhas. Dois vértices que possuem um mesmo pai são irmãos. Dada uma árvore, chamaremos de ramo uma sequência de vértices partido da raiz e terminando em uma folha.

Exemplo 8.1

Um exemplo de árvore. A raiz é o elemento 1. Os elementos 2 e 3 são filhos do elemento 1. Consequentemente, 1 é pai de 2 e de 3. Existem também relações hierárquicas entre os vértices 2 e 4, 2 e 5, e 3 e 6. Os vértices 4, 5 e 6 são folhas. Existem três ramos na árvore que são dados pelas sequências de vértices $1, 2, 4$; $1, 2, 5$ *e* $1, 3, 6$.



O método de tableaux analíticos usa um processo de refutação. Para provar $B_1, B_2, \ldots, B_n \vdash A_1, A_2, \ldots, A_m$, será afirmada a veracidade das fórmulas do antecedente, $B_1, B_2, \ldots, B_n$, e a falsidade do consequente, $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Para provar a veracidade de uma sequente é preciso gerar uma contradição. Se a contradição não é obtida, encontra-se um contra-exemplo ao sequente, uma valoração que satisfaz todas as fórmulas B_i do antecedente e falsifica todas das fórmulas A_j do consequente.

Trabalharemos com fórmulas marcadas pelos símbolos T e F. Ao invés de fórmulas como A, usaremos fórmulas da forma TA ou FA.

Definição 8.1. *Os elementos básicos do sistema de tableaux analíticos são definidos pelos conjuntos:*

- *o alfabeto da lógica proposicional;*
- *o conjunto das fórmulas da lógica proposicional;*
- *um conjunto de regras de dedução.*

Definição 8.2. *Dado um sequente $B_1, B_2, \ldots, B_n \vdash A_1, A_2, \ldots, A_m$, um tableaux analítico é construído da seguinte forma:*

- *A árvore tab_1 é iniciada com as fórmulas do antecedente marcadas com T e as fórmulas do consequente marcadas com F.*
- *Se tab_2 é a árvore resultante da aplicação de uma das regras à tab_1, então tab_2 também é um tableau iniciado com as fórmulas de tab_1.*
- *Seja tab_i, $i \geq 2$, um tableau iniciado com tab_1. Se tab_{i+1} é a árvore resultante da aplicação de uma das regras à árvore tab_i, então tab_{i+1} é também um tableau iniciado com as fórmulas de tab_1.*

Exemplo 8.2

Dado o sequente $p, p \wedge q \rightarrow r \vdash r$, marcamos as formas do antecedente $(p, p \wedge q \rightarrow r)$ com T e as fórmulas do consequente (r) com F. Iniciamos a nossa árvore com essas fórmulas, escolhemos uma fórmula para ser a raiz e adicionamos as outras fórmulas numa sequência hierárquica formando um único ramo. O resultado é mostrado na árvore abaixo.

$$\begin{array}{c} Tp \\ | \\ Tp \wedge q \rightarrow r \\ | \\ Fr \end{array}$$

A prova prossegue através da aplicação de regras que aumentam a árvore, podendo criar bifurcações (novos ramos). Teremos dois tipos de regras: regras α, que geram bifurcações; e regras β, que não geram bifurcações. São usadas duas regras por conectivo, uma para quando a fórmulas está marcada com T e outra para quando a fórmula está marcada com F.

Uma forma de entender como as regras são criadas é através da própria semântica dos conectivos. Vamos iniciar pela implicação. A tabela abaixo denota a semântica para uma fórmula do tipo $A \rightarrow B$.

$I(A \rightarrow B)$	$I(B) = 0$	$I(B) = 1$
$I(A) = 0$	1	1
$I(A) = 1$	0	1

Em um tableaux analítico, a fórmula $A \rightarrow B$ pode ser marcada tanto com T quanto com F, indicando se a fórmula é tida como verdadeira ou falsa, respectivamente. Temos que analisar os dois casos: $TA \rightarrow B$ e $FA \rightarrow B$. Note que a marcação está relacionada com toda a fórmulas. Assim, $TA \rightarrow B$ deve ser vista como "$A \rightarrow B$ é tida como verdadeira". A marcação não deve ser vista como modificando apenas a fórmula A.

Se temos $FA \rightarrow B$ então devemos analisar as possibilidades que fazem $A \rightarrow B$ ser falsa. Existe apenas uma, quando A é verdadeira e e B é falsa. Como existe uma única possibilidade, esta será uma regra α. Regras alfa não bifurcam a árvore pois representam a única possibilidade para uma valoração.

A regra pode ser resumida como abaixo. Se existe uma fórmula $FA \rightarrow B$ em um ramo da árvore, crie dois novos vértices TA e FB, um sendo filho do outro, para cada um dos ramos que contém $FA \rightarrow B$.

$$\begin{array}{c} FA \to B \\ | \\ TA \\ | \\ FB \end{array}$$

Se temos $TA \to B$ então devemos analisar as possibilidades que fazem $A \to B$ ser verdadeira. Existe basicamente duas, quando A é falsa ou quando B é verdadeira. Como existem duas possibilidades, esta será uma regra β. Regras beta bifurcam a árvore pois representam que uma mesma valoração pode ser obtida de formas diferentes.

A regra pode ser resumida como abaixo. Se existe uma fórmula $TA \to B$ em um ramo da árvore, crie dois novos vértices irmãos TA e FB para cada um dos ramos que contém $TA \to B$.

$$\begin{array}{c} TA \to B \\ \swarrow \quad \searrow \\ FA \quad TB \end{array}$$

Exemplo 8.3

O tableaux analítico para o sequente $p, p \wedge q \to r \vdash r$ foi iniciado como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{c} Tp \\ | \\ Tp \wedge q \to r \\ | \\ Fr \end{array}$$

A árvore possui uma fórmula marcada do tipo $TA \to B$, que é $Tp \wedge q \to r$. Podemos então aplicar a regra beta para a implicação, criando uma bifurcação no ramo da árvore.

$$\begin{array}{c} Tp \\ | \\ Tp \wedge q \to r \\ | \\ Fr \\ \swarrow \quad \searrow \\ Fp \wedge q \quad Tr \end{array}$$

Por uma análise semelhante à que foi feita para a implicação, geramos as regras para os outros conectivos. Uma fórmula conjuntiva marcada $TA \wedge B$ indica que A e B são verdadeiras. Temos uma regra α. Uma fórmula conjuntiva marcada $FA \wedge B$ indica que ou A ou B é falsa. Temos uma regra β.

$$\begin{array}{c} TA \wedge B \\ | \\ TA \\ | \\ FB \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{c} TA \wedge B \\ \diagup \quad \diagdown \\ FA \quad TB \end{array}$$

Uma fórmula disjuntivas marcada $FA \vee B$ indica que A e B são falsas. Temos uma regra α. Uma fórmula conjuntiva marcada $TA \vee B$ indica que ou A ou B é verdadeira. Temos uma regra β.

$$\begin{array}{c} TA \vee B \\ | \\ TA \\ | \\ FB \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{c} TA \vee B \\ \diagup \quad \diagdown \\ FA \quad TB \end{array}$$

As regras para a negação nunca bifurcam pois sempre existem uma única possibilidade. Se temos $T\neg A$ então necessariamente temos A falsa. Por outro lado, se temos $F\neg A$ então necessariamente A é verdadeira.

$$\begin{array}{c} T\neg A \\ | \\ FA \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{c} F\neg A \\ | \\ TA \end{array}$$

Definição 8.3. *Sejam A e B duas fórmulas da lógica proposicional. As regras de inferência do sistema de tableaux analíticos são as regras descritas na Figura 8.1.*

Definição 8.4. *Um ramo em um tableau é uma sequência de fórmulas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, onde A_1 é a primeira fórmula do tableau, A_j é derivada de A_i, $j > i$, utilizando alguma regra.*

Exemplo 8.4

O tableaux analítico parcial (visto nos exemplos anteriores) para o sequente $p, p \wedge q \rightarrow$

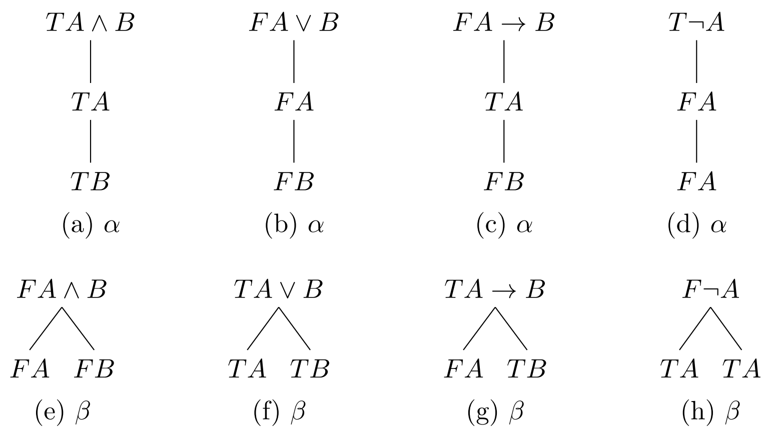
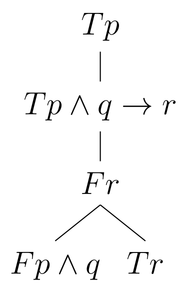


Figura 8.1: Regras de inferência para o método dos tableaux analíticos.

$r \vdash r$



possui dois ramos:

- $Tp, Tp \wedge q \to r, Fr, Fp \wedge q$ *e*
- $Tp, Tp \wedge q \to r, Fr, Tr.$

Definição 8.5. *Um ramo em um tableau é fechado se ele contém um par de fórmulas conjugadas TA e FA.*

Usaremos o símbolo $\times$ para indicar que um determinado ramo é fechado. Ramos fechados indicam que uma contradição foi encontrada. Não é necessário aplicar regras a mais nenhuma fórmula de um ramo fechado.

Exemplo 8.5

O ramo $Tp, Tp \wedge q \to r, Fr, Tr$ do tableaux analítico abaixo possui um par conjugado *de fórmulas Fr e Tr. O ramo é fechado.*

$$Tp$$
$$|$$
$$Tp \wedge q \to r$$
$$|$$
$$Fr$$
$$Fp \wedge q \qquad Tr$$
$$|$$
$$\times$$

Definição 8.6. *Uma ramo de uma tableau é saturado se para toda fórmula A_i do ramo,*

- *ou A_i já foi expandida por alguma regra;*
- *ou A_i é um átomo.*

Em um ramo saturado não há mais regras que possam ser aplicadas. Por outro lado, se o ramo não foi saturado podemos ainda aplicar regras. A ideia é continuar aplicando regras até que um ramo seja fechado ou saturado. No Exemplo 8.5 temos que o ramo $Tp, Tp \wedge q \to r, Fr, Fp \wedge q$ ainda não foi saturado pois nenhuma regra foi aplicada à fórmula $Fp \wedge q$.

Definição 8.7. *Um ramo em um tableau é aberto se ele é saturado e não fechado.*

Definição 8.8. *Um tableau é aberto quando algum ramo é aberto.*

Exemplo 8.6

Continuando a aplicação de regras para o sequente $p, p \wedge q \to r \vdash r$, chegamos no tableaux abaixo.

$$
\begin{array}{ccc}
 & Tp & \\
 & | & \\
 & Tp \wedge q \to r & \\
 & | & \\
 & Fr & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
Fp \wedge q & & Tr \\
\swarrow \quad \searrow & & | \\
Fp \quad Fq & & \times \\
| & & \\
\times & &
\end{array}
$$

O tableaux possui três ramos:

- $Tp, Tp \wedge q \to r, Fr, Fp \wedge q, Fp$, *fechado;*
- $Tp, Tp \wedge q \to r, Fr, Fp \wedge q, Fq$, *aberto;*
- $Tp, Tp \wedge q \to r, Fr, Tr$, *fechado.*

Como o tableau possui um ramo aberto, o tableau é considerado um tableau aberto.

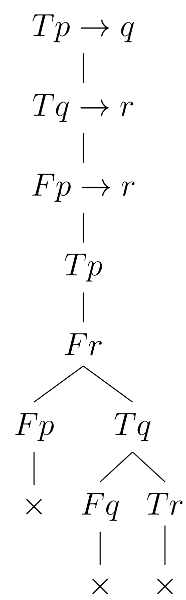
Definição 8.9. *Um tableau é fechado quando todos os seus ramos são fechados.*

Definição 8.10. *Um sequente é deduzido pelo método dos tableaux analíticos se existir um tableau fechado para ele.*

O tableau do Exemplo 8.6 não é fechado, portanto, o sequente $p, p \wedge q \to r \vdash r$ não pode ser deduzido. Se ele não pode ser deduzido, então não é correto, ou seja, $p, p \wedge q \to r \nvDash r$.

Exemplo 8.7

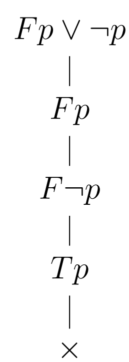
O sequente $p \to q, q \to r \vdash p \to r$ *possui o tableau abaixo.*



Todos os ramos são fechados. Portanto, o tableaux é fechado. Isso significa que sempre encontraremos uma contradição e que por consequência o sequente $p \to q, q \to r \vdash p \to r$ *é correto.*

Exemplo 8.8

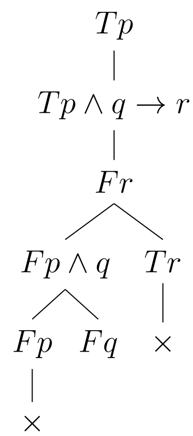
O sequente $\vdash p \lor \neg p$ *é provado pelo tableau abaixo.*



Os tableaux analíticos são capazes de provar ou refutar uma dedução. Quando um sequente é refutado, um ramo aberto do tableau indica uma valoração para os átomos que tornam o consequente falso.

Exemplo 8.9

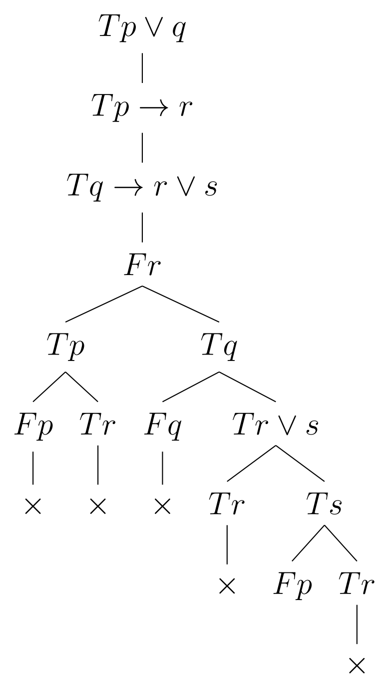
Vimos que o tableau abaixo refuta o sequente $p, p \wedge q \to r \vdash r$, uma vez que existe um ramo aberto.



O ramo aberto possui as fórmulas atômicas Tp, Fq e Fr. Isso significa que dadas as valorações $V(p) = 1$, $V(q) = V(r) = 0$, as fórmulas do antecedente são satisfeitas ($V(p) = 1$, $V(p \wedge q \to r) = 1$), mas a fórmula do consequente é falsificada ($V(r) = 0$). Portanto, o ramo aberto indica um contra-exemplo do sequente, mostrando que $p, p \wedge q \to r \nvdash r$.

Exemplo 8.10

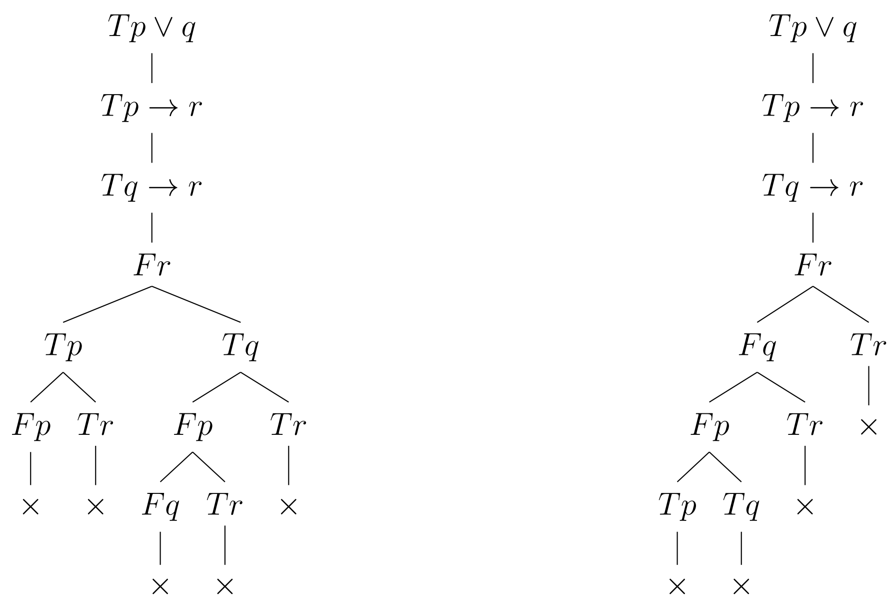
O método dos tableaux analíticos refuta o sequente $p \vee q, p \to r, q \to r \vee s \vdash r$. Um contra-exemplo é dado pelas fórmulas atômicas Fp, Tq e Fr.



Um sequente pode ter mais de um tableau.

Exemplo 8.11

Dado o sequente $p \lor q, p \to r, q \to r \vdash r$*, abaixo são mostrados dois tableaux diferentes que o provam*



Uma boa heurística para a construção de tableaux é aplicar inicialmente regras que não bifurcam (regras α) a árvore. Dessa forma, em geral, obtemos tableaux menores, com menos ramos.