n. 10 – Forma Normal Conjuntiva
Forma Normal Disjuntiva
Princípio de Dualidade

Redução do número de conectivos

Teorema: Entre os cinco conectivos fundamentais ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$), três exprimem-se em termos de apenas dois dos seguintes pares:

i. $\sim$ e $\vee$

ii. $\sim$ e $\wedge$

iii. $\sim$ e $\rightarrow$

Demonstração:

i. $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de $\sim$ e $\vee$

$p \wedge q$	$\Leftrightarrow$	$\sim\sim p \wedge \sim\sim q$
	$\Leftrightarrow$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$

$p \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \vee q$

$p \leftrightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
	$\Leftrightarrow$	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
	$\Leftrightarrow$	$\sim[\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)]$

ii. $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de $\sim$ e $\wedge$

$p \vee q$	$\Leftrightarrow$	$\sim\sim p \vee \sim\sim q$
	$\Leftrightarrow$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$

$p \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \vee q$
	$\Leftrightarrow$	$\sim(p \wedge \sim q)$

$p \leftrightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
	$\Leftrightarrow$	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
	$\Leftrightarrow$	$\sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)$

iii. $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de $\sim$ e $\rightarrow$

$p \wedge q$	$\Leftrightarrow$	$\sim\sim p \wedge \sim\sim q$
	$\Leftrightarrow$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$
	$\Leftrightarrow$	$\sim(p \rightarrow \sim q)$

$p \vee q$	$\Leftrightarrow$	$\sim\sim p \vee q$
	$\Leftrightarrow$	$\sim p \rightarrow q$

$p \leftrightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
		Utilizando a primeira equivalência demonstrada aqui no item iii passamos para a equivalência a seguir.
	$\Leftrightarrow$	$\sim[(p \rightarrow q) \rightarrow \sim(q \rightarrow p)]$

Forma Normal das Proposições

Def.: Diz-se que uma proposição está na forma normal (FN) se e somente se, quando muito, contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$.

Por exemplo, estão na forma normal (FN) as proposições:

i. $\sim p \ \wedge \sim q$

ii. $\sim (\sim p \ \vee \sim q)$

iii. $(p \ \wedge \ q) \ \vee \ (\sim q \ \vee \ r)$

Toda a proposição pode ser levada para uma FN equivalente pela eliminação dos conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, se existirem, ou seja, pela substituição de:

i. $p \rightarrow \mathrm{q}$ por $\sim p \ \vee \ q$

ii. e de $p \leftrightarrow \mathrm{q}$ por $(\sim p \vee q) \ \wedge \ (p \ \vee \sim q)$

Há duas espécies de FN para uma proposição: a forma normal conjuntiva (FNC) e a forma normal disjuntiva (FND).

> “A normalização de fórmulas é importante para padronizar a notação, já que é possível escrever fórmulas logicamente equivalentes de muitas maneiras diferentes. As fórmulas lógicas na FND são usadas em circuitos lógicos. Há dispositivos físicos idealizados, chamados de portas lógicas, os quais utilizam funções relacionadas á conjunção, disjunção e negação.
>
> Qualquer função matemática descrita por uma tabela verdade pode ser especificada por uma fórmula na FNC ou FND. Em Programação lógica, a simplificação ou padronização de expressões resulta em um melhor desempenho ao verificar a satisfatibilidade de uma fórmula. O mesmo ocorre em circuitos lógicos, quanto menor a fórmula lógica menor o circuito.”

Disponível em: <http://www.dainf.ct.utfpr.edu.br/~adolfo/tempAll/Trabalhos_2009.1/EngComp/FormasNormais/Formas_Normais_1.pdf>. Aceso em: 03 abr. 2017.

Forma Normal Conjuntiva – FNC

Def.: Diz-se que uma proposição está na forma normal conjuntiva (FNC) se e somente se são verificadas as seguintes condições:

i. Contém, quando muito, os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$;
ii. O $\sim$ não aparece repetido ($\sim\sim$) e não tem alcance sobre o $\wedge$ e $\vee$ (isto é, só incide sobre as letras proposicionais);
iii. O $\vee$ não tem alcance sobre o $\wedge$ (isto é, não há componentes como $p \vee (q \wedge r)$).

Por exemplo, estão na FNC as seguintes proposições:

i. $\sim p \wedge \sim q$
ii. $\sim p \wedge q \wedge r$
iii. $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$

Para toda proposição, pode-se determinar uma FNC equivalente, mediante as seguintes transformações:

- Eliminando-se os conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ substituindo:
  i. $p \rightarrow q$ por $\sim(p \wedge \sim q)$

	$(p \rightarrow q)$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \vee q)$
$\Leftrightarrow$	$\sim[\sim(\sim p \vee q)]$
$\Leftrightarrow$	$\sim(p \wedge \sim q)$

  ii. $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

- Eliminando as negações repetidas e parênteses precedidos de $\sim$ pelas regras da Dupla Negação e de De Morgan.

- Substituindo:

  $p \vee (q \wedge r)$ por $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

  $(p \wedge q) \vee r$ por $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$

Exercícios

1. Determine a FNC das seguintes proposições:

   a. $\sim\{[(p \vee q) \wedge \sim q] \vee (q \wedge r)\}$

   b. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

   c. $p \leftrightarrow q \vee \sim r$

Resolução:

a. $\sim\{[(p \vee q) \wedge \sim q] \vee (q \wedge r)\}$

$\Leftrightarrow$	$\sim \{[(p \vee q) \wedge \sim q] \vee (q \wedge r)\}$
$\Leftrightarrow$	$\sim[(p \vee q) \wedge \sim q] \wedge \sim(q \wedge r)$
$\Leftrightarrow$	$[\sim(p \vee q) \vee \sim\sim q] \wedge (\sim q \vee \sim r)$
$\Leftrightarrow$	$[(\sim p \wedge \sim q) \vee q] \wedge (\sim q \vee \sim r)$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$

Outra FNC equivalente da proposição dada é também:

$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

O que significa que uma mesma proposição pode ter mais de uma FNC, equivalente.

b. $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$

	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim\sim q \vee \sim p)$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \sim p)$
$\Leftrightarrow$	$[(\sim p \vee q) \to (q \vee \sim p)] \wedge [(q \vee \sim p) \to (\sim p \vee q)]$
$\Leftrightarrow$	$[\sim(\sim p \vee q) \vee (q \vee \sim p)] \wedge [\sim(q \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q)]$
$\Leftrightarrow$	$[(p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)] \wedge [(\sim q \wedge p) \vee (\sim p \vee q)]$
$\Leftrightarrow$	$\sim[\sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \vee \sim p)] \wedge \sim[\sim(\sim q \wedge p) \wedge \sim(\sim p \vee q)]$
$\Leftrightarrow$	$\sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \wedge p)] \wedge \sim[(q \vee \sim p) \wedge (p \wedge \sim q)]$
$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p) \wedge (\sim q \wedge p) \vee (\sim p \vee q)$
$\Leftrightarrow$	$(p \vee q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim p \vee q)$

c. $p \leftrightarrow q \vee \sim r$

	$p \leftrightarrow (q \vee \sim r)$
$\Leftrightarrow$	$(p \to (q \vee \sim r)) \wedge (q \vee \sim r) \to p$
$\Leftrightarrow$	$[\sim p \vee (q \vee \sim r)] \wedge [\sim(q \vee \sim r) \vee p]$
$\Leftrightarrow$	$[(\sim p \vee q \vee \sim r)] \wedge [(\sim q \wedge r) \vee p]$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee p) \wedge (r \vee p)$

Forma Normal Disjuntiva – FND

Def.: Diz-se que uma proposição está na forma normal disjuntiva (FND) se e somente se são verificadas as seguintes condições:

i. Contém, quando muito, os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$;

ii. O $\sim$ não aparece repetido ($\sim\sim$) e não tem alcance sobre o $\wedge$ e $\vee$ (isto é, só incide sobre as letras proposicionais);

iii. O $\wedge$ não tem alcance sobre o $\vee$ (isto é, não há componentes como $p \wedge (q \vee r)$).

Por exemplo, estão na FND as seguintes proposições:

$i.$ $\sim p \vee q$

$ii.$ $p \vee (\sim q \wedge r)$

$iii.$ $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$

Para toda proposição, pode-se determinar uma FND equivalente, mediante as seguintes transformações:

- Eliminando-se os conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ substituindo:
  $p \rightarrow q$ por $\sim p \vee q$ e,
  $p \leftrightarrow q$ por $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
$\Leftrightarrow$	$[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p]$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)$
	como $(q \wedge \sim q)$ *e* $(\sim p \wedge p)$ são contradições "C", então, pela Propriedade da Identidade: Elemento Neutro da Disjunção temos: $p \vee C \leftrightarrow p$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$

- Eliminando as negações repetidas e parênteses precedidos de $\sim$ pelas regras da Dupla Negação e de De Morgan.

- Substituindo:
  $p \wedge (q \vee r)$ por $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  $(p \vee q) \wedge r$ por $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Exercícios

1. Determine a FND das seguintes proposições:

    a. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

    b. $\sim\{[(p \vee q) \wedge \sim q] \vee (q \wedge r)\}$

Resolução:

a. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
$\Leftrightarrow$	$[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p]$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)$

Outra FND equivalente da proposição dada é também:

$$(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$$

O que significa que uma mesma proposição pode ter mais de uma FND, equivalente.

b. $\sim\{[(p \vee q) \wedge \sim q] \vee (q \wedge r)\}$

$\Leftrightarrow$	$\sim \{[(p \vee q) \wedge \sim q] \vee (q \wedge r)\}$
$\Leftrightarrow$	$\sim [(p \vee q) \wedge \sim q] \wedge \sim(q \wedge r)$
$\Leftrightarrow$	$[\sim(p \vee q) \vee \sim\sim q] \wedge (\sim q \vee \sim r)$

$\Leftrightarrow$	$\{\, [(\sim p \wedge \sim q) \vee q] \;\wedge \sim q \,\} \quad \vee \;\{\, [(\sim p \wedge \sim q) \vee q] \;\wedge \sim r \,\}$
$\Leftrightarrow$	$[(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)] \quad \vee \;[(\sim p \wedge \sim q \;\wedge \sim r) \vee (\, q \;\wedge \sim r]$

Outra FND equivalente da proposição dada é também:

$$(\sim p \wedge \sim q) \;\vee\; (\,\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r\,) \;\vee\; (q \wedge \sim r)$$

Observe que é contraválida toda a proposição cujos elementos de sua FND encerram, cada um deles, uma proposição e a sua negação, isto é, cujos elementos são todos contraválidos.

Princípio de Dualidade

Seja P uma proposição que só contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$.

A proposição que resulta de P trocando cada símbolo $\wedge$ por $\vee$ e cada símbolo $\vee$ por $\wedge$, chama-se a dual de P.

Exemplo: $\sim[(\, p \;\wedge\; q) \vee \sim r]$ é $\sim[(\, p \;\vee\; q) \wedge \sim r]$

Se P e Q são proposições equivalentes que só contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$, então as suas duais respectivas P_1 e Q_1 também são equivalentes.

Exemplo:

i. $p \;\wedge\; (p \;\vee\; q) \;\leftrightarrow\; p$ deduz-se pelo Princípio de Dualidade a equivalência: $p \;\vee\; (p \;\wedge\; q) \;\leftrightarrow\; p$

$ii.$ $(p \wedge \sim p) \vee q \leftrightarrow q$ deduz-se pelo Princípio de Dualidade a equivalência: $(p \vee \sim p) \wedge q \leftrightarrow q$

Exercícios

1. Demonstre as equivalências:
   $a.$ $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$
   $b.$ $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

2. Simplifique as proposições:
   $a.$ $\sim(\sim p \rightarrow \sim q)$
   $b.$ $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

3. Utilizando o Método Dedutivo demonstre:
   $a.$ $\sim p \wedge \sim p \Longrightarrow q$
   $b.$ $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$
   $c.$ $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$
   $d.$ $(p \rightarrow q) \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q$

4. Determine a FNC equivalente para cada proposição:
   $a.$ $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$
   $b.$ $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

5. Determine a FND equivalente para cada proposição:
   $a.$ $(\sim p \uparrow \sim q) \downarrow (p \vee q) \leftrightarrow p$
   $b.$ $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

Resoluções:

1. Demonstre as equivalências:

$a.\quad p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$

	$p \wedge (p \vee q)$
$\Leftrightarrow$	$(p \wedge p) \vee (p \wedge q)$
$\Leftrightarrow$	$(p \wedge p)$
$\Leftrightarrow$	p

$b.\quad p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

	$p \vee (p \wedge q)$
$\Leftrightarrow$	$(p \vee p) \wedge (p \vee q)$
$\Leftrightarrow$	$(p \vee p)$
$\Leftrightarrow$	p

2. Simplifique as proposições:

$a.\quad \sim(\sim p \rightarrow \sim q)$

	$\sim(\sim p \rightarrow \sim q)$
$\Leftrightarrow$	$\sim(\sim\sim p \vee \sim q)$
$\Leftrightarrow$	$\sim(p \vee \sim q)$
$\Leftrightarrow$	$\sim p \wedge q$

$b.\quad \sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

	$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
$\Leftrightarrow$	$(\sim p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee q)$

$\Leftrightarrow$	$\sim p \ \wedge \ (q \vee \sim q)$
Como $(q \vee \sim q)$ é uma Tautologia "T", então, pela Propriedade da Identidade – Elemento Neutro da Conjunção temos: $p \wedge T \ \leftrightarrow \ p$	
$\Leftrightarrow$	$\sim p \ \wedge T$
$\Leftrightarrow$	$\sim p$

3. Utilizando o Método Dedutivo demonstre:

a. $p \ \wedge \ \sim p \ \Longrightarrow q$

$p \ \wedge \sim p$	$\Longrightarrow$	q
$(p \ \wedge \sim p) \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\sim(p \ \wedge \sim p) \vee q$
	$\Leftrightarrow$	$(\sim p \ \vee p) \vee q$
	$\Leftrightarrow$	$T \ \vee q$
	$\Longrightarrow$	q

b. $\sim p \rightarrow p \ \Leftrightarrow p$

$\sim p \rightarrow p$	$\Leftrightarrow$	p
$\sim p \rightarrow p$	$\Leftrightarrow$	$\sim(\sim p) \ \vee \ p$
	$\Leftrightarrow$	$p \vee p$
	$\Leftrightarrow$	p

c. $p \rightarrow p \ \wedge \ q \Leftrightarrow p \rightarrow \ q$

$p \rightarrow p \ \wedge \ q$	$\Leftrightarrow$	$p \rightarrow \ q$
$p \rightarrow p \ \wedge \ q$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \ \vee (p \ \wedge q)$
	$\Leftrightarrow$	$(\sim p \ \vee p) \wedge (\sim p \vee q)$
	$\Leftrightarrow$	$T \ \wedge (\sim p \vee q)$
	$\Leftrightarrow$	$(\sim p \vee q)$
	$\Leftrightarrow$	$p \rightarrow \ q$

d. $(p \rightarrow q) \rightarrow \ q \Leftrightarrow p \vee q$

$(p \rightarrow q) \rightarrow \ q$	$\Leftrightarrow$	$p \ \vee \ q$
$(p \rightarrow q) \rightarrow \ q$	$\Leftrightarrow$	$[(\sim p \ \vee q) \ \rightarrow \ q$

	$\Leftrightarrow$	$\sim(\sim p \vee q) \vee q$
	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \sim q) \vee q$
	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$
	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge T$
	$\Leftrightarrow$	$p \vee q$

4. Determine a FNC equivalente para cada proposição:

$a.\quad p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$

$b.\quad p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

5. Determine a FND equivalente para cada proposição:

$a.\quad (\sim p \uparrow \sim q) \downarrow (p \vee q) \leftrightarrow p$

$b.\quad p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

Referências Bibliográficas

ALENCAR FILHO, Edgard. **Iniciação à Lógica Matemática**. São Paulo, Nobel, 2002.

BISPO, Carlos Alberto F.; CASTANHEIRA, Luiz B.; FILHO, Oswaldo Melo S. **Introdução à Lógica Matemática**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

CARVALHO, Sérgio; CAMPOS, Weber. **Raciocínio Lógico Simplificado**. V. 1. Rio de Janeiro: Elsevier. 2010

CASTRUCCI, Benedito. **Introdução à Lógica Matemática**. 6 ed. São Paulo: Nobel, 1984.

DIAS, Carlos Magno Corrêa. **Lógica matemática**: introdução ao cálculo proposicional. 3 ed. Curitiba: C. M. C. Dias, 2011.

GERÔNIMO, João Roberto; FRANCO, Valdeni Soliani. **Fundamentos da Matemática**: uma introdução à lógica matemática, teoria dos conjuntos, relações e funções. 2 ed. Maringá: Eduem, 2008.

MORTARI, Cezar A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: Editora UNESP: Imprensa Oficial do Estado, 2001.

Disponível em: http://www.dainf.ct.utfpr.edu.br/~adolfo/tempAll/Trabalhos_2009.1/EngComp/FormasNormais/Formas_Normais_1.pdf. Acesso em: 04 abr. 2017.