UN RECORRIDO RÁPIDO POR ALGUNOS TÓPICOS DE GEOMETRÍA RIEMANNIANA HOMOGÉNEA

SILVIO REGGIANI

Resumen. En la primera parte de este mini-curso veremos de manera introductoria los conceptos fundamentales que se estudian en geometría riemanniana, haciendo énfasis en el tensor de curvatura y sus parientes (curvatura seccional, curvatura de Ricci, curvatura escalar, etc.). En la segunda parte estudiaremos estos mismos conceptos para ciertas métricas homogéneas, observando cómo la presencia de un grupo transitivo de isometrías simplifica significativamente los cálculos. Finalmente, veremos algunas técnicas de cálculo simbólico (usando el software SageMath) que sirven para abordar problemas geométricos relacionados con el tensor de curvatura en espacios homogéneos.

Índice

1. Variedades riemannianas

Una buena referencia introductoria a la geometría riemanniana es el libro [do 92]. Una *variedad riemanniana* $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ consiste de una variedad diferenciable (la cual siempre supondremos N_2 y de clase C^∞) junto con un tensor $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de tipo $(0, 2)$, simétrico y definido positivo en cada punto. En otras palabras, la función $p \mapsto \langle\cdot,\cdot\rangle_p$ asigna de manera suave a cada $p \in M$ un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ en T_pM. Cuando no haya ambigüedad denotaremos simplemente por M a la variedad riemanniana $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

En coordenadas locales $(U, (x_1, \ldots, x_n))$, podemos representar la métrica en el punto $p \in U$ por una matriz simétrica y definida positiva $g_p = (g_{ij}(p))_{ij}$ en donde

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \in C^\infty(U).$$

Ejemplo 1.1 (Espacio euclídeo)**.** El ejemplo más sencillo de variedad riemanniana es el *espacio euclídeo* $\mathbb{R}^n$ junto con la métrica constante $g_{ij} = \delta_{ij}$ (en las coordenadas usuales).

Teorema 1.2. *Toda variedad diferenciable admite una métrica Riemanniana.*

Demostración. El resultado claramente vale localmente. Usando particiones de la unidad se puede construir globalmente una métrica riemanniana. □

En una variedad riemanniana M tenemos definida la norma de vectores tangentes $v \in T_pM$ por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ y también el ángulo θ entre dos vectores tangentes $v, w \in T_pM$ por la conocida fórmula

$$\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\theta.$$

A partir de estas nociones geométricas, podemos definir la longitud de una curva suave a trozos $c : [a, b] \to M$ como

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| \, dt \tag{1.1}$$

y con esto podemos definir una distancia en M como

$$d(p, q) = \inf\{L(c) : c : [a, b] \to M, \ c(a) = p, \ c(b) = q\}$$

Teorema 1.3. *La topología de M coincide con la topología del espacio métrico (M, d).*

Corolario 1.4. *Toda variedad diferenciable es metrizable.*

A continuación mencionamos algunas construcciones de nuevas variedades riemannianas a partir de ejemplos conocidos.

Ejemplo 1.5 (Métrica producto)**.** Si $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle^M)$, $(N, \langle\cdot,\cdot\rangle^N)$ son dos variedades riemannianas, entonces $M \times N$ es una variedad riemanniana con la *métrica producto* definida por

$$\langle (v_1, w_1), (v_2, w_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle^M + \langle w_1, w_2\rangle^M, \qquad v_1, v_2 \in T_pM, \ w_1, w_2 \in T_qN.$$

Ejemplo 1.6 (Métrica inducida)**.** Si $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle^M)$ es una variedad riemanniana y $N \subset M$ es una subvariedad, entonces podemos considerar en N la *métrica inducida* definida por

$$\langle v, w\rangle = \langle v, w\rangle^M, \qquad v, w \in T_pN \subset T_pM.$$

La misma construcción es válida si en lugar de una subvariedad tenemos sólo una inmersión. Hay distintas maneras de incluir una misma variedad riemanniana dentro de un espacio ambiente dado. La geometría de subvariedades, la cual no veremos en este curso, se encarga de estudiar este tópico.

Ejemplo 1.7 (La esfera)**.** La geometría usual de la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es la de la métrica inducida. Para la esfera, usaremos la identificación $T_pS^n = \{p\}^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Ejemplo 1.8 (El espacio hiperbólico)**.** Consideremos el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$, es decir, el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$ con el producto interno lorentziano

$$\langle v, w\rangle = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n - v_{n+1}w_{n+1}.$$

El *espacio hiperbólico* se define como

$$H^n = \{v \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle v, v\rangle = -1, \ v_{n+1} > 0\}.$$

Para definir la métrica hiperbólica identificamos $T_pH^n = \{p\}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle v, p\rangle = 0\}$ y observamos que el producto lorentziano restringido a T_pH^n es definido positivo.

2. Conexión de Levi-Civita y transporte paralelo

La noción de conexión afín o de derivación covariante en una variedad diferenciable M se utiliza para derivar campos vectoriales y campos a lo largo de curvas. En particular, sirve para dar sentido a la noción de aceleración de una curva en M. Más precisamente, una conexión es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, denotada $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$, tal que

1. $\nabla_X Y$ es $\mathbb{R}$-bilineal;
2. $\nabla_X Y$ es $C^\infty(M)$-lineal en X (es decir, $\nabla_X Y$ es tensorial en X);
3. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ para toda $f \in C^\infty(M)$ (regla de Leibniz).

Se dice que ∇ es *sin torsión* si

$$\nabla_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.1}$$

Adicionalmente, si M es una variedad riemanniana, se dice que ∇ es una *conexión métrica* si

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.2}$$

Teorema 2.1. *En toda variedad riemanniana M existe una única conexión métrica y sin torsión llamada* conexión de Levi-Civita *de M.*

Demostración. Aplicando 2.2 a $X\langle Y, Z\rangle$, $Y\langle Z, X\rangle$ y $Z\langle X, Y\rangle$, restando apropiadamente y utilizando 2.1 obtenemos la llamada fórmula de Koszul

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\{&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &+ \langle [X,Y], Z\rangle - \langle [X,Z], Y\rangle - \langle [Y,Z], X\rangle\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

lo cual prueba la unicidad. Para probar la existencia observamos que $\nabla_X Y$ dada implícitamente por 2.3 define una conexión métrica y sin torsión en M. $\square$

Asociado a una conexión ∇ y a una curva $c : [a,b] \to M$ tenemos un operador de derivación covariante D/dt de campos a lo largo de c. Más precisamente, si $V(t) \in T_{c(t)}M$ es un campo suave a lo largo de $c(t)$, entonces DV/dt es campo a lo largo de $c(t)$, es lineal en $V(t)$, satisface la regla de Leibniz

$$\frac{D}{dt}(f(t)V(t)) = f'(t)V(t) + f(t)\frac{DV}{dt}, \qquad f \in C^\infty([a,b])$$

y si $V(t) = X(c(t))$ es el campo a lo largo de c inducido por $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)} X.$$

Decimos que $V(t)$ es *paralelo* a lo largo de $c(t)$ si $DV/dt \equiv 0$

Teorema 2.2. *Dada una curva suave a trozos $c : [a,b] \to M$ con $c(a) = p$, $c(b) = q$ y un vector $v \in T_pM$, existe un único campo paralelo a lo largo de $c(t)$ con condición inicial $c(a) = v$.*

Demostración. Podemos trabajar en coordenadas locales $(U, (x_1, \ldots, x_n))$. En este caso escribimos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Las funciones $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ son los llamados *símbolos de Christoffel* de la conexión ∇. Un campo paralelo $V(t) = \sum_i v_i(t)\partial/\partial x_i|_{c(t)}$ satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$v_k'(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(c(t))v_j(t)(x_i \circ c)'(t) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n$$

el cual es un sistema lineal y tiene una única solución con condición inicial $V(a) = v$. $\square$

Sigue del teorema anterior, la existencia de un isomorfismo lineal $\tau_c : T_pM \to T_qM$ dado por $\tau_c(v) = V(b)$, llamado el *transporte paralelo* a lo largo de c. Si M es una variedad riemanniana y ∇ es la conexión de Levi-Civita de M, el transporte paralelo resulta una isometría lineal entre los correspondientes espacios tangentes.

Ejemplo 2.3. La conexión de Levi-Civita en $\mathbb{R}^n$ se calcular como

$$\nabla_X Y = \mathbf{J}_Y X$$

en donde $\mathbf{J}_Y$ es la matriz jacobiana de $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.4. Si X, Y son campos en S^n y denotamos por $\nabla, \bar{\nabla}$ las conexiones de Levi-Civita de S^n y $\mathbb{R}^{n+1}$ respectivamente, entonces

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top$$

en donde la notación $(\cdot)^\top$ denota la proyección ortogonal sobre el espacio tangente. Más generalmente si $N \subset M$ es una subvariedad de una variedad riemanniana M (con la métrica inducida) y si ∇^M, ∇^N son las conexiones de Levi-Civita de M y N respectivamente, entonces

$$\nabla_X^N Y = \left(\bar{\nabla}_X^M Y\right)^\top.$$

3. Geodésicas

Sea M una variedad riemanniana. Decimos que una curva suave $\gamma : [a, b] \to M$, con $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, es una *geodésica* si su campo de velocidades es paralelo, es decir, si

$$\frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0.$$

No es difícil ver que si γ es una geodésica, entonces $\gamma(t)$ está parametrizada por un múltiplo de la longitud de arco. Más aún,

Teorema 3.1. *Sea M una variedad riemanniana. Una curva suave $\gamma(t)$ es una geodésica en M si y sólo si $\gamma(t)$ está parametrizada por un múltiplo de la longitud de arco y localmente minimiza la distancia.*

Teorema 3.2. *Sea M una variedad riemanniana. Para cada $p \in M$ y $v \in T_pM$ existe una única geodésica $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\gamma_v(0) = p$, $\gamma_v'(0) = v$.*

Demostración. Usando una idea similar la de la demostración del Teorema 2.2, una curva $\gamma(t)$ con $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ es una geodésica si y sólo si, en coordenadas locales, satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\gamma_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\gamma_i'(t)\gamma_j'(t) = 0, \qquad k = 1, \ldots, \dim M.$$

Observar que como este sistema de EDO es no lineal, la existencia está garantizada solo localmente. $\square$

El teorema anterior (usando la regularidad de la solución del sistema (3)) nos garantiza la existencia de una función diferenciable, llamada *exponencial geométrica*, $\exp_p : U \subset T_pM \to M$, en donde U es un entorno suficientemente pequeño alrededor del origen en T_pM, la cual se define como

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1).$$

Se tiene que $\exp_p$ es un difeomorfismo sobe su imagen en un enterono del origen de T_pM (posiblemente más pequeño que U). Más aún, como $\exp_p(tv) = \gamma_v(t)$, se tiene que $d\exp_p|_p = \mathrm{id}_{T_pM}$.

Se dice que M es *geodésicamente completa* si $\exp_p$ está definida en todo T_pM para todo $p \in M$. Equivalentemente, M es geodésicamente completa si las geodésicas de M están definidas en todo $\mathbb{R}$

Teorema 3.3 (Hopf-Rinow). *Una variedad riemanniana es geodésicamente completa si y sólo si es completa como espacio métrico. Más aún, si M es geodésicamente completa y conexa, entonces para cada para de puntos $p, q \in M$, existe una geodésica minimizante que une p con q.*

Ejemplo 3.4.
1. Las geodésicas en $\mathbb{R}^n$ son las rectas, es decir, las curvas de la forma $\gamma_v(t) = p + tv$ para $p \in \mathbb{R}^n$ y $v \in T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.
2. Las geodésicas en la esfera S^n son los círculos máximos. Más precisamente, si $p \in S^n$ y $v \in T_pS^n \simeq \{p\}^\perp$ es un vector unitario, entonces $\gamma_v(t) = (\cos t)p + (\operatorname{sen} t)v$.

3.1. Enfoque variacional. Sea M una variedad riemanniana. La longitud de curva $L(c)$ definida en (1.1) puede pensarse como un funcional sobre todas las curvas suaves $c : [a, b] \to M$ tales que $c(a) = p$, $c(b) = q$. Claramente un punto crítico (de tipo mínimo) de este funcional será una geodésica de M, aunque la recíproca no necesariamente es cierta. Sin embargo, las geodésicas pueden definirse como los mínimos del *funcional energía*

$$E(c) = \frac{1}{2}\int_a^b \|c'(t)\|^2\, dt.$$

3.2. Enfoque dinámico. Sea M una variedad riemanniana completa. Observemos que

$$\gamma_v(0) = v$$
$$\gamma_v(t+s) = \gamma_{\gamma_v(t)}(s) = \gamma_{\gamma_v(s)}(t).$$

esto nos asegura la existencia de un flujo monoparamétrico $G_t : TM \to TM$, definido como $G_t(v) = \gamma_v'(t)$ llamada el *flujo geodésico* de M, cuyo campo vectorial asociado en TM se llama *campo geodésico*. Si M es además una variedad compacta, muchos problemas dinámicos son interesantes de estudiar para el flujo geodésico. Más precisamente, si uno restringe el flujo geodésico al fibrado tangente unitario T^1M, las órbitas del flujo geodésico están en biyección con las geodésicas (unitarias) de M. Mencionamos particularmente la existencia y densidad de órbitas cerradas, la existencia de geodésicas densas y la integrabilidad del flujo geodésico (es decir, cuando la dinámica del flujo geodésico es casi lineal).

4. Curvatura

El objeto geométrico más importante asociado a una variedad riemanniana es probablemente el tensor de curvatura $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, el cual se define a partir de la conexión de Levi-Civita. Más precisamente, si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ son campos vectoriales, entonces el *tensor de curvatura* se define[1] por

$$R_{X,Y}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z)$$

y tiene las siguientes propiedades

1. $R_{X,Y} = -R_{Y,X}$;
2. $\langle R_{X,Y}Z, W\rangle = -\langle Z, R_{X,Y}W\rangle$;
3. $\langle R_{X,Y}Z, W\rangle = \langle R_{Z,W}X, Y\rangle$;
4. $R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$ (primera identidad de Bianchi).

No es difícil ver que la tercera condición puede deducirse de las demás. El tensor de curvatura satisface además una ecuación de segundo orden llamada segunda identidad de Bianchi:

$$(\nabla_X R)_{Y,Z} + (\nabla_Y R)_{Z,X} + (\nabla_Z R)_{X,Y} = 0$$

Mencionemos aquí que ∇R es un tensor de tipo $(1, 4)$ llamado la derivada covariante de R y se define como

$$(\nabla_X R)_{Y,Z}W = \nabla_X(R_{Y,Z}W) - R_{\nabla_X Y,Z}W - R_{Y,\nabla_X Z}W - R_{Y,Z}\nabla_X W.$$

Más aún, la conexión de Levi-Civita nos permite derivar, usando fórmulas similares, todo tipo de tensores en M.

El tensor de curvatura de una variedad riemanniana genérica es un objeto muy complejo y su estudio puede resultar muy complicado. Es por ello que muchas veces se estudian otras nociones más débiles de curvatura que se derivan de R “contrayendo” algunas variables.

En primer lugar, mencionamos la *curvatura seccional* la cual es una generalización del concepto de curvatura gaussiana para superficies en $\mathbb{R}^3$. Dado $p \in M$, $\mathbb{V} \subset T_pM$ un subespacio de dimensión 2 y v, w una base ortonormal de $\mathbb{V}$. La curvatura seccional de $\mathbb{V}$ se define por

$$\kappa(\mathbb{V}) = \langle R_{v,w}v, w\rangle$$

y se puede probar que esta definición no depende de la base ortonormal elegida. Un concepto relacionado aunque no tan frecuentemente usado es la función curvarua seccional definido por $\kappa(X, Y) = \langle R_{X,Y}X, Y\rangle$. Observemos que $\kappa(X, Y)$ es simétrica en X e Y pero no es un tensor. En cambio, sí es más frecuente pensar en la curvatura seccional como una función suave definida en la grassmanniana de planos de el espacio tangente $\kappa : G_2(T_pM) \to \mathbb{R}$, o si no fijamos p, como una función en el fibrado de grassmannianas $\kappa : G_2(TM) \to \mathbb{R}$. Decimos que M es un espacio de *curvatura constante* si κ es una función constante.

Teorema 4.1 (Schur)**.** *Si $\dim M \geq 3$ y $\kappa : G_2(T_pM) \to \mathbb{R}$ es constante para cada $p \in M$, entonces M es un espacio de curvatura constante.*

Teorema 4.2. *M es un espacio de curvatura constante $\kappa \equiv c$ si y solo si*

$$\langle R_{X,Y}Z, W\rangle = c\,(\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle)$$

Teorema 4.3. *La curvatura seccional tiene la misma información geométrica que el tensor de curvatura.*

Demostración. Contrayendo con el tensor métrico, podemos pensar al tensor de curvatura como un tensor de tipo $(0, 4)$, abusando de la notación $R(X, Y, Z, W) = \langle R_{X,Y}Z, W\rangle$, el cual es antisimétrico en X, Y y en Z, W y por lo tanto, en cada punto $p \in M$, puede

[1] En la literatura también es común la definición $R_{X,Y}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$.

ser visto como una forma bilineal simétrica en $\bigwedge^2(T_pM)$ cuya forma cuadrática es precisamente la curvatura seccional. El resultado sigue pues por la identidad de polarización, toda forma bilineal queda determinada por su forma cuadrática. □

Ejemplo 4.4. Los espacios $\mathbb{R}^n$, S^n, H^n son espacios de curvatura constante 0, 1, y -1 respectivamente ($n \geq 2$). Más aún, son los únicos ejemplos completos y simplemente conexos.

El *tensor de Ricci* de una variedad riemanniana M se define como

$$\operatorname{Ric}(X,Y) = \operatorname{tr}(Z \mapsto R_{X,Z}Y), \qquad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Es decir, dados $v, w \in T_pM$ y una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de T_pM, calculamos el tensor de Ricci en v, w como

$$\operatorname{Ric}(v,w) = \sum_{i=1}^{n} \langle R_{v,e_i}w, e_i \rangle$$

Es fácil ver que el tensor de Ricci es un tensor simétrico de tipo $(0,2)$, el cual equivalentemente puede definirse vía un tensor $r : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ de tipo $(1,1)$, llamado *operador de Ricci*, determinado implícitamente por la ecuación

$$\operatorname{Ric}(X,Y) = \langle r(X), Y \rangle. \tag{4.1}$$

Por la identidad de polarización, tenemos que $\operatorname{Ric}(X,Y)$ puede recuperarse desde la forma cuadrática $\operatorname{Ric}(X,X)$, la cual tiene la siguiente interpretación geométrica. Si $v \in T_pM$ es un vector unitario y completamos a una base ortonormal $v = e_1, e_2, \ldots, e_n$ de T_pM, entonces

$$\operatorname{Ric}(v,v) = \sum_{i=2}^{n} \langle R_{v,e_i}v, e_i \rangle = \sum_{i=2}^{n} \kappa(e_1, e_i)$$

Luego, $(n-1)\operatorname{Ric}(v,v)$ representa el promedio de las curvaturas seccionales de los planos mutuamente ortogonales que contienen a v.

Una noción aún más débil del tensor curvatura es la llamada *curvatura escalar* de M, la cual se define como la traza del tensor de Ricci: en un punto $p \in M$ la curvatura escalar se define como

$$\operatorname{scal}_p = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ric}(e_i, e_i) = 2\sum_{i<j} \kappa(e_i, e_j)$$

en donde $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormal de T_pM. Notar que la curvatura escalar puede interpretarse como $n(n-1)$ veces el promedio de las curvaturas seccionales de T_pM

Una variedad riemanniana M se dice de *Einstein* si existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{Ric} = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

El número $\lambda \in \mathbb{R}$ es llamado constante cosmológica y su signo tiene significado geométrico (más aún, en el caso de métricas genéricas, la signatura de los autovalores del operador de Ricci son un invariante geométrico relevante). Si $\lambda = 0$ decimos que la métrica es *Ricci-flat* Una métrica de Einstein en una variedad diferenciable dada es considerada, por diversos motivos en los cuales no podremos profundizar, entre las mejores geometrías que puede admitir M y su existencia es un tópico muy importante en geometría diferencial.

Ejemplo 4.5.

1. La condición de Einstein puede interpretarse como curvatura de Ricci constante (restringiendo a la esfera la forma cuadrática del tensor de Ricci). En particular, los espacios de cuarvatura constante son de Einstein.
2. El producto de dos variedades Einstein es una variedad de Einstein si y sólo si ambas tienen la misma constante cosmológica.

4.1. Formulación variacional para las variedades de Einstein. Dada una variedad riemanniana compacta $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tenemos asociado un elemento de volumen μ_g, definido localmente en coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ como

$$\mu_g = \sqrt{\det g_{ij}}\,|dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n|.$$

El elemento de volumen de M nos permite integrar funciones $f : M \to \mathbb{R}$ (incluso aunque M no sea orientable). En particular, nos permite definir el volumen M como $\mathrm{vol}(M) = \int_M d\mu_g$. El funcional de Hilbert-Einstein, también llamado *curvatura escalar total*, se define como

$$\mathrm{HE}(g) = \int_M \mathrm{scal}_g\, \mu_g$$

Teorema 4.6. *(M, g) es una variedad de Einstein si y sólo si g es un punto crítico del funcional*

$$g \mapsto \frac{\mathrm{HE}(g)}{\mathrm{vol}(M,g)^{\frac{n-2}{n}}} \tag{4.2}$$

Esta caracterización tiene importancia teórica pero no es muy útil como método para encontrar métricas de Einstein en una variedad diferenciable dada M, el cual es un problema difícil (e interesante). Las métricas de Einstein, pensadas como puntos críticos del funcional (4.2), son siempre puntos de silla, incluso si nos restringimos al subespacio de métricas con volumen 1. El problema de la estabilidad de métricas de Einstein consiste en estudiar el "hessiano" la curvatura escalar restringidos a un subespacio aún más chico que las métricas de volumen 1 y curvatura escalar constante, en este caso pueden aparecer ademas puntos críticos de tipo máximo (estables).

4.2. Curvatura y topología. Recopilamos a continuación una serie de resultados que ilustran hasta qué punto la curvatura de una variedad riemanniana determina su topología. Esta lista no pretende ser exhaustiva.

Teorema 4.7 (Cartan-Hadamard)**.** *El cubrimiento universal de una variedad riemanniana completa M^n de curvatura seccional no-positiva (no necesariamente constante) es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Más aún, si M es una variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura seccional no-positiva, entonces, para cada $p \in M$, $\exp_p : T_pM \to M$ es un difeomorfismo.*

Teorema 4.8 (Sphere theorem)**.** *Sea M^n una variedad riemanniana completa y simplemente conexa tal que*

$$\frac{1}{4} < \kappa \leq 1.$$

Entonces M es homeomorfa a S^n.

Teorema 4.9 (Bonnet-Myers)**.** *Sea M^n una variedad riemanniana completa y conexa. Supongamos que existe $\rho > 0$ tal que para todo $p \in M$ y para todo vector unitario $v \in T_pM$ se tiene*

$$\mathrm{Ric}_p(v, v) \geq \frac{n-1}{\rho^2}.$$

Entonces M es compacta y $\mathrm{diam}(M) \leq \pi\rho$ (es decir, dos puntos cualesquiera de M pueden unirse por una geodésica de longitud menor o igual que $\pi\rho$).

Teorema 4.10 (Chern-Gauss-Bonnet)**.** *Sea M una variedad riemanniana compacta de dimensión 2, entonces*

$$\int_M \kappa\, d\mu = 2\pi\chi(M).$$

Más generalmente, si M es una variedad riemanniana compacta y orientable de dimensión $2n$ entonces

$$\int_M \mathrm{Pf}(\Omega) = (2\pi)^n \chi(M),$$

en donde Ω es la forma de curvatura de la conexión de Levi-Civita de M.

Nota 4.11. Algunas aclaraciones sobre el enunciado del teorema anterior. El número $\chi(M)$ es un invariante topológico llamado *característica de Euler* de M. Si M es una superficie podemos tomar como definición

$$\chi(M) = V - E + F,$$

en donde V, E, F son los números de vértices, aristas y caras asociados con una triangulación de M (y se puede probar que la característica de Euler es independiente de la triangulación). Este concepto se extiende a espacios de dimensión mayor usando CW-complejos, en incluso para espacios topológicos más generales tenemos

$$\chi(M) = b_0(M) - b_1(M) + b_2(M) - \cdots$$

en donde $b_i(M) = \dim H_k(M)$ es el i-ésimo número de Betti de M.

Con respecto a la forma de curvatura Ω de M, mencionamos simplemente $\mathrm{Pf}(\Omega)$ es el pfaffiano de la $2n$-forma en M que se obtiene utilizando el producto exterior a partir de los operadores antisimétricos $R_{v,w} \in \mathfrak{so}(T_pM) \simeq \Lambda^2(T_pM)$. Finalmente, recordemos que el pfaffiano de una $2n$-forma generaliza el concepto de pfaffiano de una matriz antisimétrica A, tamaño $(2n) \times (2n)$,

$$\mathrm{Pf}(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

en donde $\pm\lambda_1\sqrt{-1}, \ldots, \pm\lambda_n\sqrt{-1}$ son los autovalores de A.

Para terminar esta sección mencionamos un resultado que ilustra la poca influencia que tiene la curvatura escalar en la topología del espacio.

Teorema 4.12 (Kazdan-Warner)**.** *Toda variedad diferenciable compacta, de dimensión mayor igual que* 3*, admite una métrica con curvatura escalar constante negativa. Más aún, las variedades diferenciables compactas M, con $\dim M \geq 3$, se dividen en tres clases:*

- *toda $f \in C^\infty(M)$ es la curvatura escalar de una métrica riemanniana en M;*
- *una $f \in C^\infty(M)$ es la curvatura escalar de una métrica riemanniana si y solo si $f \equiv 0$ o f es negativa en algún punto; más aún, cualquier métrica con curvatura escalar es Ricci-flat (en particular Einstein);*
- *una $f \in C^\infty(M)$ es la curvatura escalar de una métrica riemanniana si y sólo si es negativa en algún punto.*

Este teorema resuelve el llamado problema de la curvatura escalar prescrita para variedades diferenciables compactas. Observemos que el teorema dice en particular, que si conocemos cuándo una M admite una métrica con curvatura escalar constante de un signo dado, entonces sabremos que funciones diferenciables pueden ser la curvatura escalar de una métrica riemanniana.

5. Isometrías y campos de Killing

Sean M, N dos variedades riemannianas. Denotemos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ al tensor métrico tanto en M como en N. Un difeomorfismo $f : M \to N$ se dice una *isometría* si $df|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ $v, w \in T_pM$ es una isometría lineal para todo $p \in M$, es decir, si para todos $v, w \in T_pM$ se satisface

$$\langle df|_p(v), df|_p(w)\rangle_{f(p)} = \langle v, w\rangle_p$$

Decimos que $f : M \to N$ es una *isometría local* si para cada $p \in M$ existe un entorno abierto de $p \in M$ tal que $f : U \to f(U)$ es una isometría.

El *grupo de isomerías* de M se denotará por

$$I(M) = \{f : M \to M \mid f \text{ es una isometría}\}$$

Teorema 5.1 (Myers-Steenrod)**.** *Sea M una variedad riemanniana de dimensión n. Entonces $I(M)$ es un grupo de Lie de dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$. Si $\dim I(M) = \frac{n(n+1)}{2}$, entonces M es un espacio de curvatura constante. Más aún, si M es compacta, entonces $I(M)$ es compacto.*

Ejemplo 5.2. No es difícil ver que

$$I(\mathbb{R}^n) = E(n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$$
$$I(S^n) = \mathrm{O}(n+1)$$
$$I(H^n) = \mathrm{O}^+(n, 1)$$

Decimos que un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un *campo de Killing* si $(\nabla X)_p \in \mathfrak{so}(T_pM)$ para todo $p \in M$, es decir, si para cada $p \in M$ y para cada par de vectores $v, w \in T_pM$ se tiene

$$\langle \nabla_v X, w\rangle + \langle v, \nabla_w X\rangle = 0.$$

No es dificil ver que X es un campo de Killing si y sólo si la derivada de Lie del tensor métrico en la dirección de X se anula, $\mathcal{L}\langle\cdot,\cdot\rangle = 0$ lo cual a su vez es equivalente a que el flujo local de X está dado por isometrías (si el campo es completo).

Si X, Y, Z son campos de Killing, la fórmula de Koszul se simplifica en

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\{\langle [X, Y], Z\rangle + \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle\} \tag{5.1}$$

Observemos también que cada grupo monoparamétrico de isometrías $\{\varphi_t\}$ genera un campo de Killing X definiendo

$$X_p = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi_t(p)$$

y por consiguiente hay una identificación natural entre el álgebra de Lie del grupo de isometrías $I(M)$ y el álgebra de Lie de campos de Killing M. Dicha identificación resulta un anti-isomorfismo de álgebras de Lie (es decir, invierte el signo del cochete).

Finalmente, menocionamos el siguiente resultado que dice que los campos de Killing quedan completamente determinados por sus condiciones iniciales.

Proposición 5.3. *Sea M una variedad riemanniana conexa y sean X, Y dos campos de Killing en M. Supongamos que existe $p \in M$ tal que $X_p = Y_p$ y $(\nabla X)_p = (\nabla Y)_p$. Entonces $X = Y$. En particuar, si X es un campo de Killing en M tal que $X_p = 0$ y $(\nabla X)_p = 0$, entonces $X \equiv 0$.*

6. Holonomía

...

7. Métricas invariantes a izquierda

Una excelente introducción a la geometría de los grupos de Lie es clásico artículo de Milnor [Mil76].

Sea G un grupo de Lie. Una métrica riemanniana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en G se dice *invariante a izquierda* si las traslaciones a izquierda $L_g : G \to G$, definidas como $L_g(x) = gx$, son isometrías para cada $g \in G$. Denotemos por $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G (es decir, la subálgebra de

Lie de $\mathfrak{X}(G)$ formada por los campos invariantes a izquierda). Como los campos invariantes a izquierda son, por definición, invariantes por traslaciones a izquierda, una métrica invariante a izquierda en G se identifica naturalmente con un producto interno en $\mathfrak{g}$, el cual denotaremos con el mismo símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En particular, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, se tiene que $\langle X, Y \rangle$ es una función constante en $\mathfrak{g}$. Usando (2.3) obtenemos la llamada fórmula de Koszul en campos invariantes a izquierda:

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2}\{\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle\}. \tag{7.1}$$

En particular, $\nabla_X Y \in \mathfrak{g}$. Esto nos permite interpretar a la conexión de Levi-Civita de G como un operador bilineal $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Observemos que los campos invariantes a derecha en G son campos de Killing con respecto a cualquier métrica invariante a izquierda en G, pues su flujo está dado por traslaciones a izquierda, las cuales son isometrías. Recordar que si $X, Y \in \mathfrak{g}$ y X^*, Y^* son los campos invariantes a derecha con condiciones iniciales $X^*_e = X_e$, $Y^*_e = Y_e$, entonces

$$[X^*, Y^*]_e = -[X, Y]^*_e,$$

lo cual evidencia el anti-isomorfismo entre el álgebra de Lie del grupo de isometrías y el álgebra de campos de Killing, ya que en este caso tenemos la identificación natural de G como un subgrupo de $I(G)$, vía traslaciones a izquierda.

Al igual que lo hicimos con la conexión de Levi-Civita, el tensor de curvatura de G también puede trabajarse algebraicamente, interpretándolo como un operador trilineal $R : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Dada una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathfrak{g}$ sean α_{ijk} los coeficientes de estructura del corchete de Lie de $\mathfrak{g}$ asociados con dicha base, es decir,

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} e_k$$

o equivalentemente

$$\alpha_{ijk} = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle.$$

Lema 7.1. *Las curvaturas seccionales de los planos coordenados en $\mathfrak{g}$ están dadas por*

$$\kappa(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2}\alpha_{ijk}(-\alpha_{ijk} + \alpha_{jki} + \alpha_{kij}) - \frac{1}{4}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij})(\alpha_{ijk} + \alpha_{jki} - \alpha_{kij}) - \alpha_{kii}\alpha_{kjj} \right\}.$$

Lema 7.2. *El tensor de Ricci en G queda determinado por*

$$\operatorname{Ric}(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\sum_{h,k} \left\{ \alpha_{hkh}(\alpha_{kij} + \alpha_{kji}) + \frac{1}{2}\alpha_{hkj}\alpha_{hki} - \alpha_{hik}\alpha_{kjh} + \alpha_{hkh}\alpha_{ijk} - \alpha_{hik}\alpha_{hjk} \right\}.$$

Ejemplo 7.3. Algunos de los espacios de curvatura constante pueden realizarse (localmente) como la geometría de un grupo de Lie con métrica invariante a izquierda. Más precisamente

- El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie abeliano (las traslaciones en $\mathbb{R}^n$ son claramente isometrías).
- Si
$$G = \mathrm{SO}(3) = \{A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) : AA^T = I, \text{ y } \det A = 1\},$$
entonces
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R}) : X + X^T = 0\}$$

y podemos considerar en G la métrica invariante a izquierda asociada al producto interno

$$\langle X, Y\rangle = -\operatorname{tr}(XY), \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

No es difícil ver que con esta métrica G resulta un espacio de curvatura constante positiva. Más aún, G resulta isométrico al espacio proyectivo $\mathbb{R}P^3$ y por lo tanto localmente isométrico a la esfera redonda. Alternativamente, se puede realizar la esfera S^3 como un grupo de Lie con métrica invariante a izquierda, identificándola con el grupo de Lie

$$\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : AA^* = I \text{ y } \det A = 1\}$$

construyendo la métrica de manera similar. Es conocido que las únicas esferas que admiten estructura de grupo de Lie son S^0, S^1 y S^3, por lo que la construcción que acabamos de hacer es específica para dimensión 3.

- La geometría del espacio hiperbólico H^n puede realizarse como la geometría de un grupo de Lie con una métrica invariante a izquierda. Más precisamente, sea $\mathfrak{s}_{\mathrm{hy}}(n)$ el álgebra de Lie cuyo corchete de Lie en la base $e_1, \ldots, e_n$ queda determinado por las siguientes relaciones no triviales

$$[e_1, e_i] = e_i, \qquad i = 2, \ldots, n$$

Sigue $\mathfrak{s}_{\mathrm{hy}}(n)$ es un álgebra de Lie soluble. Puede probarse que el grupo de Lie simplemente conexo $S_{\mathrm{hy}}(n)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{s}_{\mathrm{hy}}(n)$ con cualquier métrica invariante a izquierda es isométrico a un espacio de curvatura seccional constante negativa (por ende, a un espacio hiperbólico)

La propiedad de que todas las métricas invariantes a izquierda sean isométricas (salvo scaling) es una propiedad muy restrictiva.

Teorema 7.4 (Lauret)**.** *Sea G un grupo de simplemente conexo de dimensión n tal que todas las métricas invariantes a izquierda son isométricas (salvo scaling). Entonces vala alguna de las siguientes:*

- *$G \simeq \mathbb{R}^n$;*
- *$G \simeq H \times \mathbb{R}^{n-3}$, en donde H es el grupo de Heisenberg tridimensional (cfr. Ejemplo 8.6 más adelante);*
- *$G \simeq S_{\mathrm{hy}}(n)$*

Las métricas del segundo ítem del Ejemplo 7.3 también son invariantes por traslaciones a derecha. Una métrica invariante a izquierda en un grupo de Lie G que también es invariante a derecha, se llama *bi-invariante*. La geometría de grupos de Lie con métricas bi-invariantes son substancialmente más sencillas comparadas con una métrica invariante a izquierda genérica. De hecho estos son ejemplos de los llamados espacios simétricos[2]. En particular, para grupos de Lie con métrica bi-invariante, las geodésicas y el tensor de curvatura son muy fáciles de calcular y de manipular algebraicamente.

Proposición 7.5. *Sea G un grupo de Lie con métrica bi-invariante y sea* $\operatorname{Exp} : \mathfrak{g} \to G$ *la aplicación exponencial (algebraica) de G.*

1. *Las geodésicas por $e \in G$ están dadas por* $\operatorname{Exp}(tX)$*, $X \in \mathfrak{g}$.*

[2] Una variedad riemanniana M se dice un *espacio simétrico* si para cada $p \in M$, la transformación s_p definida localmente alrededor de p como $s_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ para toda geodésica con $\gamma(0) = 0$, se extiende a una isometría global (esta transformación se conoce como simetría geodésica en p). Los espacios simétricos se caracterizan localmente por tener curvatura paralela $\nabla R = 0$. Notar que los espacios de curvatura constante son en particular, espacios localmente simétricos.

2. *Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, se tiene $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ y como consecuencia*

$$R_{X,Y}Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z]$$

3. *Si $\mathbb{V} \subset \mathfrak{g} \simeq T_eG$ es un plano y X, Y es una base ortonormal de G, entonces*

$$\kappa(\mathbb{V}) = \frac{1}{4}\|[X, Y]\|^2.$$

En particular, la curvatura seccional de $\mathbb{V}$ es no-negativa para todo $\mathbb{V}$, y es nula si y sólo si $\mathbb{V}$ es una subálgebra abeliana bidimensional de $\mathfrak{g}$.

La condición sobre el signo de la curvatura seccional de una métrica bi-invariante, sugiere que hay obstrucciones topológicas para su existencia.

Teorema 7.6. *Un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite una métrica bi-invariante si y sólo si $\mathfrak{g}$ es un* álgebra de Lie compacta*, es decir, si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto (no necesariamente G).*

Mencionemos que las álgebras de Lie compactas son de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{z}$, en donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ es un ideal semisimple y compacto.

Proposición 7.7. *Si G es un grupo de Lie simple y compacto con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, toda métrica biinvariante en G es un múltiplo (negativo) de la forma de Killing de $\mathfrak{g}$.*

El siguiente resultado nos dice que dos grupos de Lie algebraicamente diferentes pueden tener la misma geometrías.

Teorema 7.8 (Milnor)**.** *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ munido de una métrica invariante a izquierda. La métrica en G es plana si y sólo si $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$, en donde $\mathfrak{b}$ es una subálgebra abeliana, $\mathfrak{u}$ es un ideal abeliano,* $\mathrm{ad}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{so}(\mathfrak{u})$.

Ejemplo 7.9. Sigue del teorema anterior que un grupo de Lie un grupo de Lie plano es necesariamente soluble. El ejemplo no trivial más sencillo es el grupo euclídeo

$$\mathrm{E}(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{O}(2).$$

Teorema 7.10. *Si un grupo de Lie G admite una métrica invariante a izquierda de curvatura seccional no-positiva entonces G es soluble. Más aún, si G es unimodular y admite una métrica de curvatura seccional no-positiva, entonces G es plano.*

Teorema 7.11. *Un grupo de Lie G admite una métrica con curvatura de Ricci estrictamente positiva si y sólo si G es compacto y $\pi_1(G)$ es finito.*

Teorema 7.12. *Sea N un grupo de Lie nilpotente con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ munido de una métrica invariante a izquierda. Entonces existen $X, Y \in \mathfrak{n}$ tales que*

$$\mathrm{Ric}(X, X) < 0 < \mathrm{Ric}(Y, Y).$$

En el siguiente apartado profundizamos un poco en la geometría de grupos de Lie nilpotentes.

8. Geometría de Nilvariedades

La referencia principal para esta sección es el artículo [Ebe94], dentro del mismo hay una excelente introducción a la geometría de grupos de Lie 2-pasos nilpotentes. Sea N un grupo de Lie 2-pasos nilpotente munido de una métrica invariante a izquierda. Sea $\mathfrak{n}$ el álgebra de Lie de N y denotemos por $\mathfrak{z}$ el centro de $\mathfrak{n}$. Observar que $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z}$. Descomponemos ortogonalmente

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \tag{8.1}$$

Para cada $Z \in \mathfrak{z}$ existe un operador lineal $j(Z) : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$ definido implícitamente como

$$\langle [X, Y], Z\rangle = \langle j(Z)X, Y\rangle$$

Sigue de la antisimetría del corchete de Lie que $j(Z) \in \mathfrak{so}(\mathfrak{v})$ para cada $Z \in \mathfrak{z}$. Estos operadores llevan toda la información geométrica de N y es muy frecuente usarlos para describir los tensores geométricos de N. Fijaremos esta notación por lo que queda de la sección salvo que se aclare algo distinto.

Proposición 8.1. *La conexión de Levi-Civita de N está dada por*

$$\begin{aligned}
&\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], && X, Y \in \mathfrak{v}\\
&\nabla_X Z = \nabla_Z X = -\frac{1}{2} j(Z)X, && X \in \mathfrak{v},\ Z \in \mathfrak{z}\\
&\nabla_Z Z' = 0, && Z, Z' \in \mathfrak{z}
\end{aligned}$$

Proposición 8.2. *El tensor de curvatura de N está dado por*

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}Z &= -\frac{1}{2} j([X, Y])X' + \frac{1}{4} j([Y, X'])X - \frac{1}{4} j([X, X'])Y, && X, Y, X' \in \mathfrak{v}\\
R_{X,Z}Y &= \frac{1}{4}[X, j(Z)Y], && X, Y \in \mathfrak{v},\ Z \in \mathfrak{z}\\
R_{X,Y}Z &= \frac{1}{4}[X, j(Z)Y] - \frac{1}{4}[Y, j(Z)X], && X, Y \in \mathfrak{v},\ Z \in \mathfrak{z}\\
R_{X,Z}Z' &= \frac{1}{4}\left\{j(Z) \circ j(Z')X\right\}, && X \in \mathfrak{v},\ Z, Z' \in \mathfrak{z}\\
R_{Z,Z'}X &= \frac{1}{4}[j(Z), j(Z')]X, && X \in \mathfrak{v},\ Z, Z' \in \mathfrak{z}\\
R_{Z,Z'}Z'' &= 0, && Z, Z', Z'' \in \mathfrak{z}.
\end{aligned}$$

Corolario 8.3. *Se tiene que*

$$\begin{aligned}
&\kappa(X, Y) = -\frac{3}{4}\|[X, Y]\|^2, && X, Y \in \mathfrak{v} \textit{ ortonormales,}\\
&\kappa(X, Z) = -\frac{1}{4}\|j(Z)X\|^2, && X \in \mathfrak{v},\ Z \in \mathfrak{z} \textit{ ortonormales,}\\
&\kappa(Z, Z') = 0, && Z, Z' \in \mathfrak{z} \textit{ ortonormales.}
\end{aligned}$$

Observar que los casos en el corolario anterior no son exhaustivos. A continuación calculamos el tensor de Ricci usando el operador de Ricci r definido en (4.1).

Proposición 8.4.
1. $\mathrm{Ric}(X, Z) = 0$ *para todos* $X \in \mathfrak{v}, Z \in \mathfrak{z}$. *En particular,* r *deja* $\mathfrak{v}$ *y* $\mathfrak{z}$ *invariantes.*
2. *Si* $Z_1, \ldots, Z_m$ *es una base ortonormal de* $\mathfrak{z}$ *entonces*

$$r|_{\mathfrak{v}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} j(Z_k)^2.$$

3. $\mathrm{Ric}(Z, Z') = -\frac{1}{4}\operatorname{tr}(j(Z) \circ j(Z'))$.

Usando esta proposición podemos dar una demostración del Teorema 7.12 para el caso en que N es 2-pasos nilpotentes.

Recordemos que si N es un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo, entonces la aplicación exponencial $\mathrm{Exp} : \mathfrak{n} \to N$ es un difeomorfismo. Más aún, si N es además

2-pasos nilpontente, la conocida fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff se simplifica en

$$\operatorname{Exp}(X)\operatorname{Exp}(Y) = \operatorname{Exp}\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y]\right), \qquad X, Y \in \mathfrak{n}.$$

Teorema 8.5 (Kaplan)**.** *Sea N un grupo de Lie simplemente conexo y 2-pasos nilpotente con una métrica invariante a izquierda y despcompongamos $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ como en (8.1). Sean $X_0 \in \mathfrak{v}$, $Z_0 \in \mathfrak{z}$. La geodésica $\gamma(t)$ con condiciones iniciales $\gamma(0) = e$, $\gamma'(0) = X_0 + Z_0$ está dada por*

$$\gamma(t) = \operatorname{Exp}(X(t) + Z(t))$$

en donde $X(t)$ y $Z(t)$ son curvas en $\mathfrak{v}$ y $\mathfrak{z}$ respectivamente que satisfacen las ecuaciones diferenciales

- $X''(t) = j(Z_0)X'(t)$,
- $Z'(t) + \frac{1}{2}[X'(t), X(t)] = Z_0$,

con condiciones iniciales $X(0) = Z(0) = 0$, $X'(0) = X_0$, $Z'(0) = Z_0$.

Ejemplo 8.6. El ejemplo paradigmático de grupo de Lie 2-pasos nilpotente es el grupo de Heisenberg tridimensional

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Para trabajar la geometría con herramientas algebraicas, usualmente se describe el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de H por medio de una base ortonormal e_1, e_2, e_3 cuyo único corchete no trivial es

$$[e_1, e_2] = e_3$$

Siguiendo la notación del teorema anterior las geodésicas de H por la identidad son exponenciales de curvas en el álgebra de Lie de la forma

$$X(t) + Z(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

con condiciones iniciales $X(0) = (x_0, y_0)$, $Z(0) = z_0$ las cuales pueden resolverse explícitamente como ...

Nota 8.7. Las ecuaciones geodésicas dadas por el Teorema 8.5 se pueden integrar de manera sencilla en grupos tipo-H (es decir, tales que $J(Z)^2 = -\|Z\| \operatorname{id}$ para todo $Z \in \mathfrak{z}$) y para el caso general también se pueden integrar si uno conoce los autovalores de $j(Z_0)$.

A diferencia del caso soluble, para grupos nilpotentes la geometría determina la estructura algebraica.

Teorema 8.8 (Wolf)**.** *Si N y N' son dos grupos (no necesariamente 2-pasos) con métricas invariantes a izquierda tales que N es isométrico a N', entonces N es isomorfo a N' (como grupos de Lie).*

También tenemos una descomposición explícita para el grupo de isometrías que generaliza a la del grupo de isometrías del espacio euclídeo $E(n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$

Teorema 8.9 (Wolf)**.** *Sea N un grupo de Lie (no necesariamente 2-pasos) nilpotente con métrica invariante a izquierda y sea $\mathfrak{n}$ el álgebra de Lie de N. Entonces,*

$$I(N) \simeq N \rtimes (\operatorname{Aut}(\mathfrak{n}) \cap \mathrm{O}(\mathfrak{n})),$$

en donde N se identifica con las traslaciones de izquierda y $\operatorname{Aut}(\mathfrak{n}) \cap \mathrm{O}(\mathfrak{n})$ se identifica con el subgrupo de isotropía de N (vía la representación isotrópica).

9. Geometría de espacios homogéneos

Dos buenas referencias generales sobre espacios riemannianos homogéneos son los libros [Bes08] y [Arv03]. Una variedad riemanniana M se dice un *espacio homogéneo* si $I(M)$ actúa transitivamente en M. En este contexto, es usual estudiar los espacios homogéneos asociados a una *presentación homogénea*: $M = G/K$ donde G es un grupo de Lie que actúa transitivamente en M de manera (casi) efectiva, K es un subgrupo compacto de G y tal que el cociente admite una *métrica G-invariante*. El concepto de métrica G-invariante puede trabajarse algebraicamente como sigue. En primer lugar, puede probarse la existencia de una *descomposición reductiva*:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \tag{9.1}$$

en donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G, $\mathfrak{k}$ es el álgebra de Lie de K y $\mathfrak{m}$ es subespacio $\mathrm{Ad}(K)$-invariante munido de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para el cual cada $\mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{m}}$, con $k \in K$, es una transformación ortogonal. En este caso, $\mathfrak{m}$ se identifica con el espacio tangente T_oM en el punto $o = [e]$ y el producto interno en $\mathfrak{m}$ induce una métrica riemanniana en M tal que $G \subset I(M)$ (si la acción es efectiva, o módulo un cubrimiento discreto si no lo es).

Análogamente a lo que hicimos con métricas invariantes a izquierda en grupos de Lie, la idea ahora será describir la geometría de una métrica G-invariante en M usando la información algebraica provista por la descomposición reductiva (9.1). Notemos que cada elemento $X \in \mathfrak{g}$ induce un campo de Killing X^* en M definido como

$$X^*_p = \frac{d}{dt}\Big|_0 \operatorname{Exp}(tX) \cdot p, \qquad p \in M.$$

En particular, para cada $v \in T_pM$, existe un campo de Killing con condición inicial v. Usando la fórmula (5.1) podemos interpretar la conexión de Levi-Civita como un operador lineal $\nabla : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$:

Proposición 9.1. *Para todos $X, Y \in \mathfrak{m}$ se tiene*

$$(\nabla_{X^*} Y^*)_o = -\frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y),$$

en donde $U : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ es la aplicación bilineal determinada por

$$2\langle U(X, Y), Z\rangle = \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y\rangle + \langle X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}\rangle \tag{9.2}$$

para todo $Z \in \mathfrak{m}$.

La proposición anterior sugiere que los espacios homogéneos para los cuales el tensor U se anula, o equivalentemente, para los cuales $[Z, \cdot]_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ es antisimétrica para todo $Z \in \mathfrak{m}$, son de una importancia destacada. Estos espacios se llaman *naturalmente reductivos*. Observar que la definición de espacio naturalmente reductivo depende de la elección del complemento reductivo $\mathfrak{m}$. Los espacios naturalmente reductivos tienen la siguiente propiedad: las geodésicas por $o = [e]$ son de la forma

$$\gamma(t) = \operatorname{Exp}(tX) \cdot o, \qquad X \in \mathfrak{m}.$$

Esta propiedad dice que los espacios naturalmente reductivos son ejemplos de los llamados *espacios g.o.* (geodesic orbit spaces), en los cuales toda geodésica es la órbita de un subgrupo monoparamétrico de isometrías.

Ejemplo 9.2. En este ejemplo veremos que un espacio naturalmente reductivo puede tener más de una descomposición naturalmente reductiva reductiva, es decir, pueden existir distintas (incluso infinitas) descomposiciones reductivas con $U = 0$. Sea $M = G$ un grupo de Lie compacto y simple con una métrica bi-invariante (un múltiplo negativo de la forma de Killing). Observar que $G \times G$ actúa isométricamente en M con la acción definida por

$$(g,h)\cdot x = gxh^{-1}, \qquad g,h,x \in G,$$

con subgrupo de isotropía la diagonal

$$\Delta(G) = \{(g,g) : g \in G\}.$$

Es decir $M = (G\times G)/\Delta(G)$ es un espacio homogéneo y la métrica es $(G\times G)$-invariante. Se puede probar que

$$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = \Delta(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{m}_\lambda$$

es una descomposición naturalmente reductiva para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, en donde

$$\begin{aligned} \Delta(\mathfrak{g}) &= \{(X,X) : X \in \mathfrak{g}\}, \\ \mathfrak{m}_\lambda &= \{((\lambda+1)X, (\lambda-1)X) : X \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

A continuación damos expresiones relativamente sencillas para la curvatura seccional, curvatura de Ricci y curvatura escalar de un espacio riemanniano reductivo $M = G/K$ con descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$.

Teorema 9.3. *Dados $X, Y \in \mathfrak{m}$, se tiene*

$$\begin{aligned} \kappa(X,Y) = &-\frac{3}{4}|[X,Y]_\mathfrak{m}|^2 - \frac{1}{2}\langle [X,[X,Y]_\mathfrak{m}]_\mathfrak{m}, Y\rangle - \frac{1}{2}\langle [Y,[Y,X]_\mathfrak{m}]_\mathfrak{m}, X\rangle \\ &+ |U(X,Y)|^2 - \langle U(X,X), U(Y,Y)\rangle + \langle Y, [[X,Y]_\mathfrak{k}, X]\rangle, \end{aligned}$$

en donde U está definido como en (9.2).

Observar que en el último sumando tenemos $[[X,Y]_\mathfrak{k}, X] \in \mathfrak{m}$ por la $\mathrm{Ad}(K)$-invariancia de $\mathfrak{m}$. En lo que sigue fijamos $\{X_i\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{m}$.

Proposición 9.4. *Para cada $X \in \mathfrak{m}$ se tiene,*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X,X) = &-\frac{1}{2}\sum_i |[X,X_i]_\mathfrak{m}|^2 - \frac{1}{2}\sum_i \langle [X,[X,X_i]_\mathfrak{m}]_\mathfrak{m}, X_i\rangle \\ &- \sum_i \langle [X,[X,X_i]_\mathfrak{k}], X_i\rangle + \frac{1}{4}\sum_{i,j}\langle [X_i,X_j]_\mathfrak{m}, X\rangle^2 \\ &- \langle [Z,X]_\mathfrak{m}, X\rangle, \end{aligned}$$

en donde $Z = \sum_i U(X_i,X_i)$.

Notar que Z en la Proposición anterior puede calcularse implícitamente como

$$\begin{aligned} \langle Z, X\rangle &= \sum_i \langle U(X_i,X_i), X\rangle = \sum_i \langle [X,X_i], X_i\rangle \\ &= \sum_i \langle \mathrm{ad}(X)(X_i), X_i\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)). \end{aligned}$$

Usando la forma de Killing B de $\mathfrak{g}$ podemos simplificar un poco la fórmula de la Proposición 9.4 del siguiente modo.

Proposición 9.5. *Para cada $X \in \mathfrak{m}$ se tiene,*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X,X) = &-\frac{1}{2}\sum_i |[X,X_i]_\mathfrak{m}|^2 - B(X,X) \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{i,j}\langle [X_i,X_j]_\mathfrak{m}, X\rangle^2 + \langle [Z,X]_\mathfrak{m}, X\rangle, \end{aligned}$$

en donde $Z = \sum_i U(X_i, X_i)$.

Proposición 9.6. *La curvatura escalar de un espacio reductivo está dada por*

$$\mathrm{scal} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} |[X_i, X_j]_{\mathfrak{m}}|^2 - \sum_i B(X_i, X_i) - |Z|^2,$$

en donde $Z = \sum_i U(X_i, X_i)$.

Si la métrica es naturalmente reductiva con respecto a $\mathfrak{m}$, las fórmulas anteriores se simplifican todavía más.

Proposición 9.7. *Sea* $M = G/K$ *un espacio naturalmente reductivo con descomposición* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$. *Entonces, para todos* $X, Y \in \mathfrak{m}$ *se tiene*

$$\langle R(X,Y)X, Y\rangle = \frac{1}{4}|[X,Y]_{\mathfrak{m}}|^2 + \langle [[X,Y]_{\mathfrak{k}}, X], Y\rangle.$$

Por último, consideremos el caso en que G es un grupo de Lie semisimple y compacto y $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp}$ es el complemento ortogonal de $\mathfrak{k}$ con respecto a una métrica bi-invariante $\langle\cdot,\cdot\rangle$. en G. En este caso la métrica en $M = G/K$ inducida por la restricción de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\mathfrak{m}$ se dice una *métrica normal homogénea* o alternativamente se dice que el espacio reductivo M es un *espacio normal homogéneo*. Cuando la métrica bi-invariante en G es menos la forma de Killing, nos referiremos a la métrica normal homogénea como la *métrica normal homogénea estándar*. Es decir, en este caso el producto interno que consideramos en $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp}$ es $-B|_{\mathfrak{m}}$. No es difícil ver que la métrica normal homogénea es naturalmente reductiva.

Proposición 9.8. *Si* $M = G/K$ *es un espacio normal homogéneo, entonces para todos* $X, Y \in \mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp}$ *tenemos*

- $\langle R(X,Y), X, Y\rangle = |[X,Y]_{\mathfrak{k}}|^2 + \frac{1}{4}|[X,Y]_{\mathfrak{m}}|^2$. *En particular, la curvatura seccional de* M *es no-negativa;*
- $\mathrm{Ric}(X,X) = -\frac{1}{4}B(X,X) + \frac{1}{2}\sum_i |[X, V_i]_{\mathfrak{k}}|^2$, *en donde los* V_i *forman una base* $\langle\cdot,\cdot\rangle$-*ortonormal de* $\mathfrak{k}$.

10. Cálculo simbólico en geometría homogénea

A continuación estudiaremos con más detalle algunos de los ejemplos que mencionamos en estas notas. Para ello utilizaremos el software SageMath (ver las notebooks que acompañan a estas notas).

Ejemplo 10.1. En este ejemplo calculamos el tensor de curvatura para $\mathbb{R}^n$ y H^n. SageMath es capaz de manejar variedades diferenciables y riemannianas arbitrarias, aunque no siempre esta es la opción más eficiente.

Ejemplo 10.2. El módulo SageManifolds utilizado en el ejemplo anterior puede usarse también para la esfera S^3 (en realidad, para cualquier dimensión). Sin embargo, los cálculos se simplifican considerablemente si pensamos a S^3 como un grupo de Lie con métrica bi-invariante. A nivel del álgebra de Lie es indistinto trabajar con $\mathfrak{su}(2)$ o $\mathfrak{so}(3)$.

Ejemplo 10.3. En este ejemplo estudiamos el espacio hiperbólico presentado como el grupo de Lie $S_{\mathrm{hy}}(n)$ con una métrica invariante a izquierda.

Ejemplo 10.4. En este ejemplo estudiaremos las famosas *esferas de Berger*, que se obtienen deformando la métrica redonda en la esfera S^3 en una cierta dirección. Puede probarse que si esta deformación es pequeña, la curvatura seccional permanece estrictamente positiva (aunque deja de ser constante, por supuesto). Los cálculos ser harán en la misma notebook que utilizamos para el Ejemplo 10.2.

Ejemplo 10.5. En este ejemplo estudiamos la métrica invariante a izquierda en el grupo de Heisenberg.

Ejemplo 10.6. En este ejemplo veremos que el grupo euclídeo $E(2)$ admite métricas invariantes a izquierda tanto planas como no-planas.

Ejemplo 10.7. Presentamos a la esfera como el espacio homogéneo $S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ (con la métrica normal) y probamos que la curvatura seccional es constante y positiva.

Ejemplo 10.8. Finalmente, en este ejemplo estudiamos la geometría de la grassmanniana de subespacios orientados $G_k(\mathbb{R}^n) = \mathrm{SO}(n)/(\mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k))$ (con la métrica normal, la cual la convierte en un espacio simétrico).

Referencias

[Arv03] A. Arvanitogeorgos, *An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces*, Student Mathematical Library, no. v. 22, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Bes08] A. L. Besse, *Einstein Manifolds: Reprint of the 1987 edition, with 22 figures*, reprint of the 1987 edition.- t.p ed., Classics in Mathematics, Springer, Berlin ; New York, 2008.

[do 92] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry. Translated from the Portuguese by Francis Flaherty*, Boston, MA etc.: Birkhäuser, 1992.

[Ebe94] P. Eberlein, *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **27** (1994), no. 5, 611–660.

[Mil76] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Adv. Math. **21** (1976), no. 3, 293–329.