Integração Numérica:

Os métodos do retângulo, do trapézio e de Simpson

Silvio Romero de Araújo Júnior
Departamento de Engenharia Elétrica
Centro Universitário da FEI
São Bernardo do Campo, Brasil
silvioromerojr@yahoo.com.br

Reinaldo A. C. Bianchi
Departamento de Engenharia Elétrica
Centro Universitário da FEI
São Bernardo do Campo, Brasil
rbianchi@fei.edu.br

Resumo **—** Neste trabalho, discute-se alguns dos métodos clássicos de integração numérica de uma função. Os métodos que discutimos são a regra retangular, trapezoidal e de Simpson para abscissas igualmente espaçadas e a abordagem de integração baseada na quadratura adaptativa. Este último é mais adequado para o caso em que as abscissas não são igualmente espaçadas. Após uma breve introdução teórica, desenvolveu-se um programa em C++ para verificação dos algoritmos de integração.

Palavras chave – integração numérica; cálculo numérico; métodos numéricos; integração por Newton-Cotes

I. Introdução

A disciplina de cálculo numérico apresenta métodos e estratégias para tentar resolver problemas matemáticos por meio de um computador. Sua importância no cálculo de integrais reside no fato de que muitas vezes a primitiva de uma função F(x) é difícil de ser encontrada, o que dificulta ou impossibilita seu cálculo. Além disso, em certas situações não se tem a função a ser integrada de forma analítica, o que inviabiliza o cálculo de sua integral pela definição matemática [1]. Para ambos os casos, utilizamos os métodos numéricos, como os apresentados neste relatório.

A. Objetivo

Utilizar a linguagem de programação C++ para solucionar o problema de cálculo de integrais pelos métodos do retângulo, do trapézio, de Simpson e quadratura adaptativa.

B. Motivação

Com o crescimento do campo de estudo chamado ciência de dados, técnicas de aprendizado de máquina têm sido utilizadas para obter melhor desempenho nos objetivos de tal campo. Desta forma, não é difícil encontrar aplicações de integração numérica como ferramenta para desenvolver aplicações em análise de dados, alicerce dos dois tópicos supracitados. Compreender como programação e métodos numéricos se relacionam, é também entender os mecanismos por trás de muitos dos conceitos envolvidos em aprendizado de máquina.

C. Metodologia

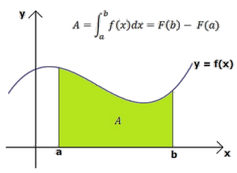
Efetuou-se uma pesquisa bibliográfica com base em livros abordando os conceitos aplicados ao relatório. Após esta etapa, aplicou-se a linguagem de programação C++ para implementação computacional e análise de três funções mencionadas devidamente no capítulo "Experimentos e Resultados" utilizando o método de integração numérica conhecidos como: retangular, trapezoidal, de Simpson e quadratura adaptativa.

II. Revisão da Literatura

Por definição, a integral definida em:

$$I = \int_a^b f(x).dx$$

É numericamente igual a área sob a curva f(x) no intervalo do domínio [a, b].



Integração numérica é a técnica empregada no cálculo de uma integral e consiste na aproximação:

$$I = \int_a^b f(x).dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} w_i.f(x_i).\Delta x$$

Para calcular o valor da aproximação acima, neste trabalho utilizou-se três métodos, abordados a seguir: regra do retângulo, regra do trapézio e regra de Simpson.

A. Regra do Retângulo

Consiste em subdividir o intervalo [a, b] em "n" intervalos iguais que servirão para as bases dos retângulos a serem construídos. A soma das áreas destes retângulos será uma aproximação da integral definida da função f(x) no intervalo [a, b].

B. Regra do Trapézio

Consiste em subdividir o intervalo [a, b] em "n" intervalos iguais que servirão para as bases dos trapézios a serem construídos. A soma das áreas destes trapézios será uma aproximação da integral definida da função f(x) no intervalo [a, b].

C. Regra de Simpson

A Regra de Simpson consiste na aproximação da função contínua f(x) no intervalo [a,b] por um polinômio do 2º grau:

$$h = (b - a) / n = (x_n - x_0) / n$$

III. IMPLEMENTAÇÃO PROPOSTA

Na implementação do código proposto (enviado como anexo) no presente relatório utilizou-se os seguintes recursos de Hardware:

- MacBook Pro (Retina, 15-inch, Early 2013);
- Processador: 2,4 GHz Intel Core i7;
- Memória: 8 GB 1600 MHz DDR3.

Com relação aos softwares utilizados, citam-se:

- macOS Mojave Versão 10.14.5
- Xcode 10.2.1

IV. EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Para a validação do programa implementado, utilizou-se como referência os exemplos 21.1 e 21.4 da referência [2]. Comparando os resultados simulados com a solução dos exercícios. Depois executou-se o programa para calcular o valor das integrais dos itens *A, B e C*, do presente capítulo no intervalo de [0, 1].

A. Função 1

Tabela 1 – Resultados para Função 1

f(x) = exp(x)					
Iterações	Retangular	Trapezoidal	Simpson	Quad. Adapt.	Valor Analítico
1	1,648721	1,859141	1,718861	1,718282	1,718282
10	1,717566	1,719713	1,718282	1,718282	1,718282
20	1,718103	1,718640	1,718282	1,718282	1,718282
50	1,718253	1,718339	1,718282	1,718282	1,718282
100	1,718275	1,718296	1,718282	1,718282	1,718282
500	1,718282	1,718282	1,718282	1,718282	1,718282

B. Função 2

Tabela 2 – Resultados para Função 2

f(x) = sqrt(1 - x^2)					
Iterações	Retangular	Trapezoidal	Simpson	Quad. Adapt.	Valor Analítico
1	0,866025	0,500000	0,744017	0,785398	0,785398
10	0,788103	0,776130	0,784112	0,785398	0,785398
20	0,786358	0,782116	0,784944	0,785398	0,785398
50	0,785641	0,784567	0,785283	0,785398	0,785398
100	0,785484	0,785104	0,785358	0,785398	0,785398
500	0,785406	0,785372	0,785395	0,785398	0,785398

C. Função 3

Tabela 3 – Resultados para Função 3

f(x) = exp(-x^2)					
Iterações	Retangular	Trapezoidal	Simpson	Quad. Adapt.	Valor Analítico
1	0,778801	0,683940	0,747180	0,746824	0,746824
10	0,747131	0,746211	0,746824	0,746824	0,746824
20	0,746901	0,746671	0,746824	0,746824	0,746824
50	0,746836	0,746800	0,746824	0,746824	0,746824
100	0,746827	0,746818	0,746824	0,746824	0,746824
500	0,746824	0,746824	0,746824	0,746824	0,746824

D. Resultados

Pode-se notar comparando os resultados, que o método que apresentou o melhor resultado (quando comparado com o calculado analiticamente), foi o da quadratura adaptativa. Visto que este método é melhoria baseada nos outros, o resutado não poderia ser diferente. Os outros métodos estudados, também mostram resultados satisfatórios, porém somente quando se aumenta o número de iterações do laços *FOR* utilizados no programa.

V. TRABALHOS CORRELATOS

Alguns autores têm utilizado integração numérica como ferramenta nas mais diversas aplicações, citadas em [1] e [2]. Porém, do ponto de vista de inovação, tais técnicas não apresentaram evolução, a não ser emaplicações no campo de aprendizado de máquina.

VI. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Técnicas de integração numérica têm sido aplicadas em diversos campos científicos e a atividade descrita neste relatório ofereceu a oportunidade de se avaliar a importância da modelagem matemática e computacional de tais técnicas. Além de proporcionar os caminhos para explorar de forma mais profunda o tema de integração numérica.

REFERENCES

[1] Barroso, L. C.; Barroso, M. M. A; Filho, F. F. C.; et al. Cálculo Numérico (Com Aplicações), 2ªed., São Paulo, Editora Harbra, 1987.

[2] Chapra, S. C.; Canale R. P. Métodos Numéricos para Engenharia, Quinta Edição, São Paulo, McGraw-Hill, 2008.