Università degli Studi di Bergamo

FISICA I

LPs & Kyra

Production

Anno Accademico 2016/2017

Contents

1

Cinematica del punto: moto rettilineo

1.1 Velocità nel moto rettilineo

La velocità media v_m di un punto è definita come rapporto tra lo spostamento Δx e l'intervallo di tempo Δt

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

La velocità istantanea di un punto nel moto rettilineo è data dalla derivata dello spazio rispetto al tempo:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

L'equazione del moto rettilineo uniforme vale:

$$x(t) = x_0 + v \cdot \int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v \cdot (t - t_0)$$

1.2 Accelerazione nel moto rettilineo

L'accelerazione media a_m di un punto è definita come il rapporto tra la variazione di velocità Δv e l'intervallo di tempo Δt in cui avviene la variazione:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

L'accelerazione istantanea di un punto è definita come la derivata della velocità rispetto al tempo, ovvero la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'equazione del moto rettilineo uniformemente accelerato vale:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - to)^2$$

1.3 Moto armonico semplice

La legge oraria del moto armonico semplice vale:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Dove

- A è l'ampiezza del moto
- $\omega t + \phi$ è la fase del moto;
- ϕ è la fase iniziale;
- ω è la pulsazione.

Il moto armonico è un moto periodico e il periodo vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La velocità di un punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando la legge oraria:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega \cdot A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

L'accelerazione di un punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $v(t)$ o con doppia derivazione della legge oraria:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

1.4 Moto rettilineo smorzato esponenzialmente

Il moto rettilineo smorzato esponenzialmente è un moto vario in cui l'accelerazione soddisfa la condizione $a = -kv$, con k costante positiva. La velocità è data da:

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-kt}$$

La legge oraria si ricava per integrazione da $v(t)$ e vale:

$$x(t) = \frac{v_0}{k} \cdot (1 - \exp^{-kt})$$

2

Cinematica del punto: moto nel piano

2.1 Moto circolare

Un punto che si muove su una circonferenza di raggio R con velocità costante v esegue un moto circolare uniforme. Esso ruota con velocità angolare costante:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$

e con accelerazione normale costante:

$$a = a_N = \frac{v^2}{R}$$

Nel moto circolare uniformemente accelerato con accelerazione angolare costante si ha:

$$\alpha = \frac{a_t}{R}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t^2$$

2.2 Moto parabolico dei corpi

La legge oraria di un proiettile lanciato dall'origine con velocità v_0 che forma l'angolo θ con l'asse orizzontale è data dalle relazioni:

$$x = v_0 \cdot \cos(\theta t)$$

$$y = v_0 \cdot \sin(\theta t) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

La gittata risulta:

$$s = \frac{2v_0^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)}{g}$$

L'altezza massima raggiunta:

$$y = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta)}{2g}$$

3

Dinamica del punto: le leggi di Newton

3.1 Leggi di Newton

Prima legge di Newton: Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in stato di quiete se era fermo oppure si muove di moto rettilineo uniforme.

Seconda legge di Newton: L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espresso tramite la forza F determina l'accelerazione del punto, ovvero la variazione della sua velocità nel tempo; m è la massa inerziale del punto:

$$F = m \cdot a$$

Terza legge di Newton:

- Se un corpo A esercita una forza $F_{A,B}$ su un corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza $F_{B,A}$ sul corpo A;
- Le due forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto:

$$F_{A,B} = -F_{B,A}$$

- Le due forze hanno la stessa retta d'azione.

3.2 Quantità di moto e impulso

Si definisce quantità di moto di un punto materiale il vettore:

$$p = m \cdot v$$

Se la massa è costante è possibile riscrivere la seconda legge di Newton come:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

Si definisce impulso di una forza il termine vettoriale J integrale della forza nel tempo:

$$J = \int_0^t F dt = \int_{p_0}^{p} dp = (p - p_0) = \Delta p$$

Teorema dell'impulso: L'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della quantità di moto. Se la massa è costante allora:

$$J = m \cdot (v - v_0) = m \cdot \Delta v$$

Principio della conservazione della quantità di moto: In assenza di forze applicate la quantità di motodi un punto materiale rimane costante, ovvero si conserva.

3.3 Risultante delle forze, equilibrio e reazioni vincolari

Se su un punto materiale agiscono contemporaneamente più forze il moto del punto ha luogo come se agisse un'unica forza, la risultante:

$$R = F_1 + F_2 + \cdots + T_n$$

per cui l'accelerazione risulta

$$A = \frac{R}{m}$$

Ciascuna forza agisce indipendentemente dalle altre, per cui si parla di *Indipendenza delle azioni simultanee*.
Se $R = 0$ e il punto materiale è inizialmente in quiete sono realizzate le condizioni di equilibrio statico.
Se un corpo è soggetto ad una forza risultante R e rimane fermo vuol dire che esso provoca una reazione dell'ambiente circostante detta *Reazione vincolare* di valore N tale che:

$$R + N = 0$$

3.4 Forza peso

Un corpo lasciato libero assume un'accelerazione costante data dall'accelerazione di gravità g, indipendentemente dalla sua massa. La forza peso che agisce sul corpo è quindi:

$$P = m \cdot g$$

3.5 Forza elastica

Si definisce forza elastica una forza di direzione costante con verso rivolto sempre ad un punto O chiamato centro e con modulo proporzionale alla distanza da O. Se assumiamo come asse X la direzione della forza e come origine il centro possiamo scrivere:

$$F = -k \cdot x \cdot u_x$$

dove k è una costante positiva detta *costante elastica* e u_x è *il versore dell'asse X*

3.6 Pendolo semplice

Un pendolo semplice è costituito da un punto materiale di massa m appesa tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile. La forza esercitata dal filo è detta *Tensione del filo* vale $T_f = m \cdot g$ diretta verso il punto di sospensione.
Se spostiamo il filo dalla verticale:

$$T_f = m \cdot \left[g \cdot \cos(\theta)(t) + \frac{v^2(t)}{L} \right]$$

4

Dinamica del punto: lavoro, energia, momenti

4.1 Lavoro,potenza e energia cinetica

Il lavoro L compiuto dalla forza per lo spostamento ΔS è definito come prodotto scalare della forza per lo spostamento:

$$W = F \cdot \Delta s = \int_A^B F ds$$

Il lavoro può essere anche definito come l'integrale di linea della forza lungo la traiettoria.
La potenza corrisponde al lavoro per unità di tempo:

$$P = \frac{dL}{dt}$$

4.2 Teorema dell'energia cinetica

Qualunque sia la forza che agisce nello spostamento di un punto materiale dalla posizione A alla posizione B, il lavoro fatto dalla forza è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale stesso.

4.2.1 Dimostrazione

Partendo dalla definizione di lavoro elementare associato ad uno spostamento di s:

$$d\mathcal{L} = \underline{F} \cdot d\underline{s} = m \cdot \underline{a} \cdot d\underline{s} = m \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot d\underline{s} = m \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{v} \cdot dt$$

Calcoliamo ora:

$$\frac{d}{dt} \cdot (v^2) = \frac{d}{dt} \cdot (\underline{v}.\underline{v}) = \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} = 2 \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{v}$$

Sostituendo nella precedente equazione:

$$m \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{v} \cdot dt = \frac{m}{2} \cdot (2 \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{v}) \cdot dt = \frac{m}{2} \cdot \frac{d}{dt} \cdot (v^2) \cdot dt = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2) \cdot dt$$

cioè:

$$d\mathcal{L} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2) \cdot dt$$

Abbiamo trovato il legame tra lavoro e la variazione del modulo della velocità. Per un percorso finito dalla posizione A alla posizione B abbiamo:

$$L = \int_A^B d\mathcal{L} = \int_i^f \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2) \cdot dt = E_c^f - E_c^i = \Delta E_c$$

dove la quantità E_k prende il nome di *Energia cinetica del punto* e il simbolo Δ indica la differenza tra il valore nella posizione finale e quello nella posizione iniziale.

4.3 Lavoro della forza peso

Il lavoro della forza peso è uguale all'opposto della variazione dell'energia potenziale della forza peso durante lo spostamento da A a B. Pertanto non dipende dalla particolare traiettoria che collega A a B:

$$W = -\Delta E_p = -(m \cdot g \cdot h_B - m \cdot g \cdot h_A)$$

4.4 Lavoro di una forza elastica

Il lavoro della forza elastica $F = -k \cdot x \cdot u_x$ per uno spostamento lungo l'asse X vale:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_B^2 = -\Delta E_p$$

4.5 Conservazione dell'energia meccanica

Si definisce energia meccanica la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative.

4.6 Momento angolare e momento della forza

Si definisce momento angolare di un punto materiale rispetto ad un polo O:

$$L = r \times p = r \times m \cdot v$$

con $r = OP$
Il momento della forza F rispetto ad un polo O analogamente è definito come:

$$M = r \times F$$

Quando ad un corpo sono applicate più forze il momento complessivo è uguale al momento della forza risultante:

$$M = r \times F_1 + \cdots + r \times F_n$$

Teorema del momento angolare per un punto materiale: la derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambe i momenti sono riferiti allo stesso polo:

$$M = \frac{dL}{dt}$$

5

Dinamica dei sistemi di punti materiali

5.1 Teorema del moto del centro di massa

Il teorema del moto del centro di massa dice che il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne. La risultante delle forze esterne è uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto del sistema:

$$R^{(E)} = \frac{dP}{dt}$$

5.2 Conservazione della quantità di moto

Il principio della conservazione della quantità di moto per un sistema di punti materiali dice che quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete.

5.3 Teorema del momento angolare

Il teorema del momento angolare stabilisce che: se il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale o coincide con il centro di massa l'evoluzione nel tempo del momento angolare del sistema di punti è determinata dal momento delle forze esterne rispetto a O e le forze interne non influenzano L:

$$M^E = \frac{L}{dt}$$

5.4 Conservazione del momento angolare

Il principio di conservazione del momento angolare dice che se è nullo il momento delle forze esterne che agiscono sul sistema, il momento angolare si conserva.

5.5 Teoremi di Konig

Per il momento angolare: Il momento angolare del sistema si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa L_{CM}, e di quello del sistema rispetto al centro di massa:

$$L = L' + L_{CM}$$

Per l'energia cinetica: L'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuto al moto del centro di massa $E_{k,CM}$, e di quella del sistema rispetto al centro di massa:

$$E_k = E'_k + E_{k,CM}$$

5.6 Il teorema dell'energia cinetica

Il lavoro complessivo fatto dalle forze esterne ed interne che agiscono su un sistema di punto materiali è uguale alla variazione dell'energia cinetica dello stesso sistema tra la configurazione finale e quella iniziale:

$$W^E + W^I = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

6
Dinamica del corpo rigido

6.1 Teorema di Huygens-Steiner

Stabilisce che il momento di inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova ad una distanza α dal centro di massa del corpo è dato da:

$$I = I_c + m \cdot \alpha^2$$

dove I_c è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

6.2 Moto di puro rotolamento

Il moto di puro rotolamento su un piano orizzontale di una ruota di massa m raggio r e di momento di inerzia I rispetto ad un asse orizzontale passante per il centro di massa sotto l'azione di una forza orizzontale F applicata nel centro di massa avviene con le seguenti modalità:

$$a_{CM} = \frac{F}{m \cdot (1 + \frac{I}{m \cdot r^2})}$$

$$f_{attr} = -\frac{F}{1 + \frac{m \cdot r^2}{I}}$$

6.3 Equilibrio statico del corpo rigido

Un corpo rigido in quiete rimane fermo se sono verificate le condizioni di equilibrio statico:

$$R = 0 \text{ , } M = 0$$

Dove

$$M$$

è la somma dei momenti inerziali e

$$R$$

è la somma delle reazioni vincolari.

7
Fenomeni d'urto

7.1 Urto completamente anelastico

Un urto si chiama completamente anelastico quando i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$. Se v_1 e v_2 sono le velocità dei due punti nell'istante prima dell'urto e v_{CM} è la velocità comune immediatamente dopo l'urto:

$$v_{CM} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

L'energia cinetica è pari a:

$$\Delta E_k = E_f - E_I = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v_{CM}^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2$$

7.2 Urto elastico

Si definisce urto elastico un urto durante il quale si conserva anche l'energia cinetica del sistema. I due corpi che si urtano subiscono durante l'urto delle deformazioni elastiche riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto.
La velocità iniziale e finale e la quantità di moto di ciascun punto restano le stesse in modulo, cambia solo il verso.

7.3 Urto anelastico

Si definisce urto anelastico un urto in cui i punti ritornano separati dopo l'urto durante il quale si conserva la quantità di moto del sistema, ma non l'energia cinetica.

8

Proprietà meccaniche dei fluidi

8.1 Equilibrio statico di un fluido in presenza di forza peso

La legge di Stevino dice che in un liquido con ρ costante la pressione cresce linearmente con la profondità:

$$p(h) = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

8.2 Principio di Archimede

Il principio di Archimede dice che un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido che viene occupato dal volume del corpo immerso:

$$F_A = -\rho \cdot V_0 \cdot g$$

dove ρ è la densità de fluido e V_0 il volume della parte immersa.

8.3 Teorema di Bernoulli

In un fluido ideale in moto con regime stazionario la somma della pressione, dell'energia cinetica per unità di volume e dell'energia potenziale per unità di volume è costante lungo un condotto, ovvero lungo un qualsiasi tubo di flusso:

$$p + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h = costante$$

9 Oscillazioni

9.1 Proprietà dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico

L'equazione differenziale dell'oscillatore armonico:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

è un'equazione del secondo ordine lineare a coefficienti costanti omogenea, cioè con termine noto nullo.

9.2 Energia nell'oscillatore armonico

Il punto che si muove come un oscillatore armonico possiede energia meccanica definita come somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale elastica. E' una forza conservativa che vale in qualsiasi istante:

$$E_{mec} = E_k + E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = costante$$

dove k è il coefficiente elastico e A è l'ampiezza.

9.3 Somma di moti armonici sullo stesso asse

Supponiamo di avere due punti sottoposti ad una forza elastica diretta lungo l'asse x e che quindi si muovono entrambi di moto armonico. Vogliamo determinare il moto del punto di mezzo del segmento che congiunge i due punti. Il problema è combinare linearmente due moti armonici. Due moti armonici con pulsazioni diverse si possono comporre e seguono le seguenti leggi orarie:

$$x_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \phi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \phi_2)$$

che combinate sono:

$$x(t) = A(t) \cdot \sin(\omega(t)) = 2A \cdot \cos(\Omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

dove:

- $x = x_1 + x_2$
- $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$
- $\Omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$

9.4 Somma di moti armonici su assi ortogonali

Se un punto materiale è sottoposto a due forze elastiche agenti con direzioni ortogonali, uno lungo l'asse x e uno ungo l'asse y, il moto risultante è un moto piano con traiettoria ellittica.

9.5 Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa

In una situazione realistica l'oscillatore armonico viene frenato da delle forze di attrito, ovvero l'ampiezza dell'oscillazione diminuisce fino alla quiete. Interessante è il caso in cui, l'oscillatore armonico venga frenato da una forza di tipo viscoso proporzionale e opposta alla velocità meno λb e che non agiscano forze di attrito costanti.
Per descrivere la legge del moto si parte dall'equazione della dinamica:

$$m \cdot a = -kx - bv$$

Sostituiamo a e v con e relative derivate rispetto allo spazio e otteniamo:

$$m \cdot \ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Sappiamo inoltre che:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \frac{b}{2m} = \gamma$$

dove ω_0 è chiamata *pulsazione propria* e γ è il *coefficiente di smorzamento*. Sostituendo si ottiene l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico smorzato:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Sappiamo che l'attrito viscoso porta ad uno smorzamento esponenziale per cui cerchiamo se esiste una soluzione $x(t)$ proporzionale a $e^{\alpha t}$, da cui:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma\alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

$$e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2) = 0$$

Si deduce che $e^{\alpha t}$ è soluzione solo se α soddisfa l'equazione caratteristica in parentesi, ovvero se:

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

9.5.1 Primo caso: smorzamento forte. Delta positivo.

Se $\gamma^2 > \omega_0^2$ il polinomio ha due radici reali distinte la soluzione:

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

9.5.2 Secondo caso: smorzamento Critico. Delta 0.

Se $\gamma^2 = \omega_0^2$ le due soluzioni sono coincidenti, da cui:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$$

9.5.3 Terzo caso: smorzamento Debole. Delta negativo.

Se $\gamma^2 < \omega_0^2$ le due soluzioni sono complesse coniugate e la legge oraria vale:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$$

10 Gravitazione

10.1 Forze centrali

Si definisce forza centrale una forza agente in una certa regione dello spazio aventi le seguenti proprietà: in qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto O detto centro di forza e il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso:

$$L = \underline{r} \times m\underline{v} = costante$$

Ovvero in un campo di forze centrali il momento angolare rispetto al centro della forza rimane costante nel tempo e si conserva.

10.2 Energia potenziale gravitazionale

L'energia potenziale gravitazionale vale:

$$E_p = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

10.3 Moto di un corpo sottoposto alla forza gravitazionale: soluzione generale

Il moto di un corpo di massa m nel campo gravitazione generato da una massa M è descritto da un'orbita rispetto a M che può essere un'iperbole, una parabola o una ellisse.

11
Primo principio della termodinamica

11.1 Sistemi adiabatici, esperimenti di Joule e calore

Il calore Q scambiato senza lavoro esterno per far variare la temperatura di ΔT di una massa d'acqua è uguale al lavoro W che deve essere speso in condizioni adiabatiche per ottenere la stessa variazione di temperatura:

$$Q = -W$$

11.2 Primo principio della termodinamica: energia interna

Se un sistema compie una trasformazione dallo stato A allo stato B scambiando calore e lavoro con l'ambente, Q e W dipendono dalla trasformazione che congiunge i due stati termodinamici, mentre la differenza $Q - W$ risulta indipendente dalla trasformazione. SI può per tanto scrivere, posto $\Delta U = U_B - U - A$:

$$Q - W = \Delta U$$

ovvero:

$$Q = \Delta U + W$$

11.3 Trasformazioni termodinamiche: lavoro e calore

Si chiama trasformazione adiabatica una qualsiasi trasformazione in cui $Q = 0$, cioè il sistema non scambia calore con l'esterno.

Classificazione delle trasformazioni:

- Reversibile: se essa avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di qualsiasi forza dissipativa.
- Irreversibile: se essa passa attraverso stati di non equilibrio o avvenga in presenza di forze dissipative oppure si verificano, durante il suo svolgimento, entrambe queste situazioni

12
Gas ideali e reali

12.1 Leggi dei gas ed equazione di stato dei gas ideali

12.1.1 Legge isoterma di Boyle

A temperatura costante la pressione è inversamente proporzionale al volume:

$$P \cdot V = costante$$

12.1.2 Legge isobara di Volta-Gay Lussac

Se la pressione di un gas durante una trasformazione resta costante si parla di trasformazione isobara: il volume varia linearmente con la temperatura:

$$V = V_0 \cdot (1 + \alpha t)$$

12.1.3 Legge isocora di Volta-Gay Lussac

Se durante una trasformazione il volume di un gas resta costante la pressione risulta funzione lineare della temperatura:

$$P = P_0 \cdot (1 + \beta_T)$$

12.1.4 Legge di Avogadro

Volumi uguali di gas diversi alla stessa temperatura e pressione contengono lo stesso numero di molecole.

12.1.5 Equazione di stato del gas ideale

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

12.2 Trasformazioni di un gas: lavoro

In una trasformazione finita da uno stato A allo stato B si ha:

$$W = \int_A^B PVdV$$

Se la trasformazione è isocora il lavoro è sempre nullo.
Se il gas si espande il volume finale V_B è maggiore del volume V_A e il gas compie un lavoro sull'ambiente che è positivo.
Se il gas viene compresso, $V_B < V_A$ e il gas subisce un lavoro negativo compiuto dall'ambiente.

12.3 Calore e calori specifici

Calore specifico molare a volume costante:

$$c_V = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

Calore specifico molare a pressione costante:

$$c_P = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_P$$

Se c_V e c_P possono essere ritenuti costanti il calore scambiato per una variazione ΔT di temperatura si scrive:

$$Q_V = n \cdot c_V \cdot \Delta T$$

$$Q_P = n \cdot c_P \cdot \Delta T$$

12.4 Energia interna del gas ideale

Si considerino due generici stati di equilibrio A e B allora l'energia interna è pari a:

$$\Delta U = U_B - U_A = n \int_{T_A}^{T_B} c_V dT$$

Relazione di Mayer:

$$c_P - c_V = R$$

12.5 Studio di alcune trasformazioni

12.5.1 Trasformazioni Adiabatiche

Le equazioni di una trasformazione adiabatica reversibile di un gas ideale sono:

$$TV^{\gamma-1} = costante, PV^{\gamma} = costante, TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = costante$$

con $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$

12.5.2 Trasformazioni isoterme

Data una trasformazione isoterma reversibile vale che:

$$\Delta U = 0, Q = W, P_A V_A = P_B V_B, W_{AB} = nRTln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

12.5.3 Trasformazioni isocore

L'equazione di stato diventa:

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B}$$

12.5.4 Trasformazioni isobare

L'equazione di stato diventa:

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B}$$

Si definisce **entalpia**

$$H = U + PV$$

12.6 Trasformazioni cicliche e ciclo di Carnot

Il rendimento η di una macchina termica è definito come rapporto tra il lavoro fornito e la quantità di calore assorbito.

$$\eta = \frac{W}{Q_A}$$

12.6.1 Ciclo di Carnot

Il rendimento del ciclo di Carnot, descritto da un gas ideale con calore specifico costante, dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermi di calore.
Il ciclo di Carnot è costituito da 4 trasformazioni reversibili:

Trasformazione A-B

Espansione isoterma reversibile alla temperatura T_2

$$W_{AB} = Q_A = nRT_2 ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Trasformazione B-C

Espansione adiabatica reversibile per cui il lavoro fatto dal gas è:

$$W_{BC} = nc_V(T_2 - T_1)$$

Trasformazione C-D

Compressione isoterma reversibile alla temperatura T_1

$$W_{CD} = Q_C = nRT_1 ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

12.6.2 Trasformazione D-A

Compressione adiabatica reversibile per cui il lavoro fatto dal gas è:

$$W_{DA} = nc_V(T_1 - T_2) = -W_{BC}$$

Rendimento del ciclo di Carnot

Sommando tutti i contributi:

$$Q = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = WAB + W_{CD}$$

il rendimento de ciclo è:

$$\eta = 1 + \frac{T_1 \cdot \left[-ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)\right]}{T_2 \cdot ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

Dividendo membro a membro i termini delle relazioni si ottiene che:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

per cui:

$$\eta = \frac{T_1 \cdot ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}{T_2 \cdot ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

12.6.3 Ciclo di Stirling

Il ciclo di Stirling è un ciclo reversibile costituito da 2 isoterme e 2 isocore.

Trasformazione A-B

Isoterma a temperatura T_1

$$W = nRT_1 \cdot ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Trasformazione B-C

Isocora e quindi il lavoro è nullo $W = 0$. Il sistema riceve calore dall'esterno:

$$Q = nc_V(T_1 - T_2) + nRT_1 \cdot ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Trasformazione C-D

Isoterma a temperatura T_2

$$W = nRT_2 \cdot ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

12.6.4 Trasformazione D-A

Isocora e quindi il lavoro è nullo $W = 0$. Il sistema riceve calore dall'esterno:

$$Q = nc_V(T_1 - T_2) + nRT_1 \cdot ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Rendimento del ciclo di Stirling

Tenendo conto che $V_B = V_C$ e $V_D = V_A$ si ha che:

$$W = nR(T_1 - T_2) \cdot ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Il rendimento risulta per tanto:

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{nR(T_1 - T_2) \cdot ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}{nc_V(T_1 - T_2) + nRT_1 \cdot ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

12.6.5 Ciclo di Otto: motore a scoppio

Il ciclo di Otto è un ciclo reversibile costituito da 2 adiabatiche e 2 isocore.

Trasformazione A-B

Adiabatica

Trasformazione B-C

Isocora

Trasformazione C-D

Adiabatica

12.6.6 Trasformazione D-A

Isocora

Rendimento del ciclo di Otto

Il lavoro è:

$$W = Q_{DA} + Q_{BC} = nc_V(T_A - T_B) + nc_V(T_C - T_B)$$

Il rendimento risulta:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{T_C - T_B}{T_A - T_D} = 1 - \frac{T_B - T_C}{T_A - T_D}$$

12.7 Teoria cinetica dei gas

L'energia cinetica media di una molecola di un gas ideale è proporzionale alla temperatura del gas espressa in Kelvin:

$$E_k = \frac{3}{2}k_B T$$

La temperatura è proporzionale all'energia cinetica media delle molecole, ovvero al quadrato della velocità media quadratica:

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{A}}$$

dove A è il numero di Avogadro.

13
Secondo principio della termodinamica

13.1 Enunciato di Kelvin-Planck

Il secondo principio della termodinamica dice che è impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme.

13.2 Enunciato di Clausius

É impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore.

13.3 Reversibilità e irreversibilità

Una *trasformazione reversibile* non comporta alterazioni permanenti nel senso che è sempre possibile riportare nei rispettivi stati iniziali il sistema e l'ambiente che con esso interagisce.
Una *trasformazione irreversibile* avviene quando non è più possibile ritornare allo stato di partenza senza modificare il resto dell'universo.

13.4 Teorema di Carnot

Il teorema di Carnot afferma che tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti alle temperature T_2 e T_2 hanno rendimento uguale; Qualsiasi altra macchina che lavori fra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore. Questo risultato è indipendente dal particolare sistema che compie il ciclo.

13.5 Entropia del gas ideale

La variazione di Entropia di un gas ideale dipende sempre da due coordinate termodinamiche.

- Trasformazione isoterma $S_B - S_A = nR \cdot ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$
- Trasformazione isocora $S_B - S_A = nc_V \cdot ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$
- Trasformazione isobara $S_B - S_A = nc_P \cdot ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$

13.6 Energia inutilizzabile

Quando avviene un processo irreversibile in cui l'entropia dell'universo aumenta di ΔS_u la grandezza:

$$E_{IN} = T_0 \Delta S_u$$

è pari alla differenza tra il lavoro che si sarebbe potuto ottenere se il processo fosse stato reversibile e il lavoro effettivamente ottenuto; T_0 è la temperatura più bassa tra quelle disponibile nell'ambiente.
E_{IN} viene chiamata *energia inutilizzabile* che è pari al lavoro supplementare che bisognerebbe spendere per riportare in modo reversibile il sistema complessivo nello stato iniziale.