Università degli Studi di Bergamo

APPUNTI DI FISICA II

LPs & Kyra
Production

Anno Accademico 2017/2018

Contents

1

Cinematica del punto: Forza elettrostatica

1.1 Cariche elettriche. Isolanti e conduttori

Le cariche elettriche preesistono nei corpi e vengono passate da un corpo ad un altro durante lo strofinio. I corpi che si caricano per strofinio sono detti isolanti in quanto capaci di trattenere la carica elettrica, mentre altri non trattengono la carica e sono detti conduttori.

1.2 Struttura elettrica della materia

La materia stabile è formata da 3 costituenti elementari: il protone **P**, il neutrone **N** e l'elettrone **E**. Questi si aggregano in strutture che si chiamano atomi.
La composizione di un atomo è descritta da:

- il numero atomico **Z**=P+E
- il numero di massa **A**=Z+N

Principio di conservazione della carica elettrica

In un sistema elettricamente isolato la somma algebrica di tutte le cariche elettriche rimane costante nel tempo.

1.3 La legge di Coulomb

Date due cariche puntiformi q_1 e q_2, poste a distanza r, esse interagiscono con una forza F diretta secondo la loro congiungente di modulo:

$$F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad k = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

1.4 Campo elettrostatico

Il campo elettrostatico prodotto da un punto P da un sistema di cariche ferme è definito come la forza elettrostatica F che agisce su una carica di prova q_0 posta in P divisa per la carica q_0 stessa:

$$E = \frac{F}{q_0}$$

1.5 Campo elettrostatico prodotto da una distribuzione continua di cariche

Di solito le cariche non sono concentrate in un unico punto, ma sono distribuite nello spazio con una ben determinata geometria. Quindi non si è di solito interessati allo studio del campo elettrostatico locale in prossimità di ciascuna carica, quando piuttosto al campo elettrostatico medio nei punti distanti dalle cariche.

1.6 Linee di forza nel campo elettrostatico

Ogni carica puntiforme ha N linee di forza e valgono le seguenti proprietà:

- una linea di forza è tangente e concorde al campo elettrostatico in quel punto.
- le linee di forza si addensano dove l'intensità del campo elettrostatico è maggiore.
- non si incrociano mai.
- esse hanno origine dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative.

1.7 Moto di una carica in un campo elettrostatico

La legge della dinamica di Newton per una carica q di piccole dimensioni, puntiforme, di massa m è data da:

$$a = \frac{q}{m} \cdot E$$

2

Lavoro elettrico. Potenziale elettrostatico

2.1 Lavoro della forza elettrica. Tensione, potenziale.

La forza che agisce su una carica elettrica, che come tale prende il nome di *forza elettrica*, si esprime sempre come prodotto della carica per un certo campo elettrico:

$$F = q_0 \cdot E$$

Il lavoro svolto dalla forza elettrostatica per portare q_0 da A a B è dato dall'opposto del prodotto di q_0 per la differenza di potenziale $V_B - V_A$ tra il punto di arrivo e il punto di partenza:

$$W = AB = -q_0 \cdot (V_B - V_A)$$

In un campo elettrostatico la forza elettromotrice è uguale a 0 ovvero è nullo il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica per qualsiasi percorso ciclico.

2.2 Calcolo del potenziale elettrostatico

Il lavoro non dipende dal percorso seguito in quanto la forza elettrica è centrale e il suo modulo dipende solo dalla distanza r. La differenza di potenziale elettrostatico $V_B - V_A$ è pari a:

$$V_B - V_A = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right)$$

Il potenziale elettrostatico prodotto da un sistema discreto di cariche è uguale alla somma dei potenziali elettrostatici prodotti singolarmente dalle carche.

2.3 Energia potenziale elettrostatica

L'energia potenziale elettrostatica del sistema di due cariche rappresenta il lavoro di una forza esterna per portare le due cariche dall'infinito alla distanza r; Il lavoro è positivo se fatto contro la forza repulsiva tra cariche dello stesso segno, negativo se le cariche sono di segno opposto. Durante il moto di una particella l'energia totale, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale rimane costante:

$$E = E_k + U_e = \frac{1}{2}mv^2 + q_0 V$$

2.4 Il campo come gradiente del potenziale

Il campo elettrostatico è uguale in ogni punto al gradiente del potenziale elettrostatico calcolato in quel punto cambiato di segno:

$$E = -\nabla V$$

2.5 Superficie equipotenziale

Si definisce superficie equipotenziale una superficie dello spazio tridimensionale nei cui punti il potenziale elettrostatico ha lo stesso valore:

$$V(x, y, z) = \textit{costante}$$

2.6 Il dipolo elettrico

Due cariche puntiformi $-q$ e $+q$ distanti a costituiscono un dipolo elettrico. Si chiama *momento del dipolo el ettrico* il vettore:

$$p = q \cdot a$$

con a orientato dalla carica negativa alla carica positiva.

2.7 La forza su un dipolo elettrico

Consideriamo un dipolo di momento p posto in una regione in cui agisce un campo elettrostatico E uniforme. Le forze $F_1 = -qE$ e $F_1 = +qE$ costituiscono una coppia e ha una risultante nulla e momento meccanico diverso da 0.

L'energia potenziale elettrostatica di un dipolo può essere espressa con notazione vettoriale:

$$U_e(\theta) = -p \cdot E$$

dove θ è l'angolo formato tra E e il momento p.

3
Legge di Gauss

3.1 Flusso del campo elettrostatico

La legge di Gauss stabilisce che il flusso del campo elettrostatico E prodotto a un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute all'interno della superficie, divisa per ϵ_0: o

$$\Phi(E) = \oint E \cdot u_n d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0}\Sigma_i q_i$$

3.2 Alcune applicazioni e conseguenze della legge di Gauss

La legge di Gauss è uno strumento molto efficace per determinare il campo elettrostatico E quando la distribuzione di carica che genera il campo elettrostatico presenta un elevato grado di simmetria (sferica, cilindrica, piana). In queste condizioni è facile individuare l'andamento delle linee di forza e trovare le superfici chiuse Σ nei cui punti il campo elettrostatico è parallelo o ortogonale alla superficie stessa.

3.3 La divergenza del campo elettrostatico

3.3.1 Il teorema della divergenza

Afferma che il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa è uguale all'integrale della divergenza del campo vettoriale ∇E esteso al volume τ racchiuso dalla superficie:

$$\oint E \cdot u_n d\Sigma = \int_\tau \nabla \cdot E d\tau$$

Questo teorema costituisce la formulazione locale della legge di Gauss per il campo elettrostatico.

3.3.2 Equazione di Poisson

L'equazione di Poisson lega il potenziale elettrostatico $V(x, y, z)$ alla densità di carica $\rho(x, y, z)$ tale che:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

3.3.3 Equazione di Laplace

Nello spazio vuoto, dov $\rho = 0$ l'equazione di Poisson diventa:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

4

Conduttori. Dielettrici. Energia elettrostatica.

4.1 Conduttori in equilibrio

I materiali conduttori sono caratterizzati dal fatto che nel loro interno sono verificate particolari condizioni per cui è possibile il moto di alcune delle cariche che li costituiscono (metalli). Lo stato di un conduttore in equilibrio elettrostatico è definito dalla condizione $E = 0$ all'interno. Questo porta alle seguenti conseguenze:

- l'eccesso di carica elettrica in un conduttore può stare solo sulla superficie del conduttore.
- il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore.
- il campo elettrostatico in un punto delle vicinanze della superficie del conduttore è perpendicolare alla superficie e tale che, *teorema di Coulomb*:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot u_n$$

4.2 Conduttore cavo e schermo elettrostatico

Un conduttore cavo è un conduttore carico con al suo interno una cavità all'interno della quale non ci siano cariche elettriche. Sulle pareti della cavità la carica è nulla, inoltre sulle pareti della cavità non possono esserci cariche elettriche.
Il potenziale elettrostatico in un qualsiasi punto della cavità è uguale a quello del conduttore.
In conclusione:

- la carica di un conduttore in equilibrio elettrostatico si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche in presenza di una o più cavità.
- il campo elettrostatico è nullo, e il potenziale elettrostatico è costante in ogni punto interno alla superficie del conduttore anche in presenza di cavità.

4.3 Condensatori

Un sistema costituito da due conduttori tra i quali c'è induzione completa si chiama condensatore; i due conduttori prendono il nome di armatura del condensatore. Si definisce *capacità del condensatore*:

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

dove q è la carica presente sulle due armature e ΔV è la differenza di potenziale fra le stesse.

4.4 Energia del campo elettrostatico

Il processo di carica di un condensatore in cui si passa dalla situazione di carica 0 alla situazione $(+q, -q)$ consiste in una separazione di cariche e richiede un determinato lavoro. Questo lavoro è pari a:

$$W = \frac{q^2}{2C}$$

Questo lavoro effettuato contro la forza elettrostatica che si oppone ad un accumulo di cariche dello stesso segno viene immagazzinato nel sistema sotto forma di *energia potenziale elettrostatica*:

$$U_e = \frac{1}{2} \cdot CV^2 = \frac{1}{2} \cdot qV$$

Se facciamo l'ipotesi che l'energia elettrostatica sia distribuita nei punti in cui c'è campo elettrostatico e che tale distribuzione sia uniforme, possiamo definire la *densità di energia elettrostatica*, ovvero l'unita di energia elettrostatica per unità di volume:

$$u_e = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 E^2$$

4.5 Dielettrici. La costante dielettrica.

Le sostanze isolanti che hanno la proprietà di ridurre la differenza di potenziale fra le armature si chiamano *sostanze dielettriche* e il rapporto:

$$k = \frac{V_0}{V_k} > 1$$

è detto *costante dielettrica relativa del dielettrico*

Da questa si ricava la *suscettività elettrica del dielettrico*:

$$x = k - 1$$

L'energia elettrostatica nel caso di condensatori sferici e cilindrici completamente riempiti di dielettrico vale:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 k r^2} \qquad \textit{condensatore sferico}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 k r} \qquad \textit{condensatore cilindrico}$$

4.6 Polarizzazione dei dielettrici

La polarizzazione elettronica avviene quando un atomo acquista un *momento di dipolo elettrico microscopico* p_a indotto dal campo elettrostatico E a questo parallelo e concorde; L'effetto cessa non appena si annulla il campo elettrostatico E.

4.7 Equazioni generali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici

Si definisce *induzione dielettrica* il vettore:

$$D = \epsilon_0 \cdot E + P$$

dove P è il vettore polarizzazione parallelo ad E e calcolato come:

$$P = \epsilon_0 \cdot (k-1)E$$

La legge di Gauss per l'induzione elettrica diventa:

$$\Phi(D) = \oint D \cdot u_n \cdot d\Sigma = q$$

ovvero il flusso dell'induzione dielettrica attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma delle cariche libere contenute all'interno della superficie.

5
Corrente elettrica

5.1 Conduzione elettrica

Il moto ordinato di elettroni in una certa direzione costituisce una corrente elettrica e il fenomeno è un esempio di conduzione elettrica.

5.2 Corrente elettrica e corrente elettrica stazionaria

Consideriamo una superficie tracciata all'interno di un conduttore detto Δq l carica che passa nel tempo Δt attraverso la superficie si definisce *intensità di corrente media*:

$$i_m = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

L'intensità di corrente istantanea è definita come:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

La *densità di corrente* j è la corrente che attraversa l'unità di superficie perpendicolare alla direzione del moto delle cariche. Chiamata Σ la superficie:

$$j = \frac{i}{\Sigma}$$

5.3 Legge di Ohm della conduzione elettrica

La legge di Ohm della *conduttività elettrica*:

$$j = \sigma E$$

con σ una grandezza caratteristica del conduttore detta *conduttività elettrica*.

La legge di Ohm molto spesso è scritta nella forma:

$$E = \rho j$$

dove ρ è chiamata *resistività del conduttore*. Minore è la resistività maggiore è la densità di corrente che può circolare in un conduttore a parità di campo elettrico E.

La legge di Ohm per i conduttori metallici viene riscritta come:

$$V = \rho\frac{h}{\Sigma}i$$

dove h è la lunghezza di un conduttore metallico cilindrico e Σ è la sua sezione.

La resistività è una funzione crescente della temperatura:

$$\rho = \rho_{20}(1 + \alpha\Delta t)$$

dove $\Delta t = t - 20$ e ρ_{20} è la resistività a $20°C$ e α è il coefficiente termico.

5.3.1 Potenza ed effetto Joule

La potenza elettrica per effettuare uno spostamento di una carica che si muove attraversando una differenza di potenziale è pari a:

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} = V \cdot i$$

5.4 Modello classico della conduzione elettrica

Nel loro moto gli elettroni subiscono continue interazioni con gli ioni che chiamiamo urti: tra un urto e il successivo il moto è libero e la traiettoria è rettilinea. Dopo ogni urto la distribuzione delle velocità rimane casuale. Per tanto si definisce *velocità di deriva*:

$$v_d = -\frac{e\tau}{m}E$$

5.5 Forza elettromotrice

La forza elettromotrice è definita come:

$$\mathcal{E} = \int_A^B E^* \cdot dl$$

dove A e B sono i due capi di un generatore, E^* è un campo all'interno del generatore di natura non elettrostatica chiamato *campo elettromotore* capace di far muovere le cariche all'interno del generatore contro l campo elettrostatico E_{el} ed l è la linea interna al generatore.

La differenza di potenziale ai capi della resistenza esterna del generatore risulta:

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - ri$$

ovvero la FEM di un generatore è uguale alla differenza di potenziale misurata ai capi del generatore a circuito aperto ($i = 0$).

5.6 Carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore

5.6.1 Carica di un condensatore

Quando si carica un condensatore connettendo ad un generatore la differenza di potenziale finale ai capi del condensatore è uguale alla FEM del generatore, mentre la carica finale è $q_0 = C\mathcal{E}$.

5.6.2 Scarica di un condensatore

La carica, la differenza di potenziale ai capi del condensatore e la corrente nel circuito diminuiscono esponenzialmente nel tempo con una rapidità caratterizzata dalla costante di tempo $\tau = RC$ dove R è un resistore.
Nell'intero processo viene dissipata una energia pari all'energia elettrostatica iniziale del condensatore:

$$W_R = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{q_0^2}{2C}$$

5.7 Corrente di spostamento

In un condensatore, nel processo di carica e scarica, non vi è trasporto di carica nello spazio compreso fra le armature. In ogni caso è come se la carica fosse passata attraverso il condensatore. Definiamo *corrente di spostamento* la corrente i_s come variazione nel tempo del flusso del campo elettrico attraverso la sezione del condensatore:

$$i_s = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(E)}{\partial t}$$

5.8 Leggi di Kirchhoff

La *prima legge di Krichhoff*, o legge dei nodi, dice che la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla.

La *seconda legge di Krichhoff*, o legge delle maglie, stabilisce che la somma algebrica delle FEM presenti nei rami della maglia è uguale alla somma algebrica delle differenze dei potenziali dei capi dei resistori R situati nei rami della maglia.

$$\Sigma_k R_k i_k = \Sigma_k \cdot \mathcal{E}_k$$

6
Campo magnetico e forza magnetica

6.1 Interazione magnetica e campo magnetico

Preso un magnete sospeso tramite un filo e libero di ruotare si avvicina un secondo magnete bloccato si osserva che questo esercita sul primo una certa forza, ovvero il magnete genera un campo magnetico.

Non è mai possibile ottenere un polo magnetico isolato: i poli magnetici sembrano esistere sempre a coppie di egual valore e segno opposto, cioè si manifestano solamente sotto forma di *dipoli magnetici*.

6.2 Elettricità e magnetismo

Le azioni magnetiche non sono altro che la manifestazione dell'interazione tra cariche elettriche in movimento. Un campo elettrico e un campo magnetico non possono avere esistenza indipendente e vanno unificati nell'unico concetto di *campo elettromagnetico*.

6.3 Forza magnetica su una carica in moto

Data una particella in moto con velocità V rispetto ad un sistema di riferimento, si verifica che su di essa agisce la *forza di Lorentz*:

$$F = qv \times B$$

dove B è il campo magnetico dove la particella è posta.

Per qualsiasi spostamento da un punto P ad un punto Q dove esiste il campo magnetico B l'energia cinetica della particella resta costante, in quanto la forza di Lorentz non compie lavoro sulla particella, ovvero: quando una particella carica si muove in un campo magnetico la sua velocità cambia in direzione ma non in modulo.

6.4 Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

Quando un conduttore percorso da corrente è immerso in un campo magnetico, a ciascun elettrone è applicata la forza di Lorentz:

$$F_L = -ev_d \times B$$

Dato un conduttore filiforme, la forza su un filo percorso da corrente che giace in un piano in cui agisce un campo magnetico uniforme B non dipende dalla forma del filo, ma solo dalla lunghezza del segmento che unisce i suoi estremi.

Se il filo forma un circuito chiuso e sta su un piano in cui agisce un campo magnetico B uniforme la forza sul circuito è nulla.

6.5 Momenti meccanici su circuiti piani

Considerando i circuiti piani rigidi percorsi da corrente e immersi in un campo magnetico uniforme, in tal caso la forza risultante è nulla e il circuito non si sposta ne si deforma, ma il momento risultante può essere diverso a 0 mettendo in rotazione il circuito. Il momento meccanico di una coppia sui lati del circuito vale in modulo:

$$M = b \sin(\theta) F$$

dove b è uno dei lati del circuito.

Definiamo *momento magnetico della spira* il vettore:

$$m = i \Sigma u_n$$

parallelo e concorde a u_n e con modulo uguale al prodotto dell'intensità di corrente per l'area della spira.
In analogia con il dipolo elettrico anche per il dipolo magnetico (spira o ago) si può definire una energia potenziale legata alla posizione angolare rispetto alla direzione del campo magnetico B

$$U_p = -m \cdot B$$

6.6 Moto di una particella carica in un campo magnetico

Moto in un campo magnetico uniforme $\theta = \frac{\pi}{2}$
Dato un campo magnetico B uniforme e presa una particella che si muove con velocità iniziale ortogonale a B, il moto della particella si svolge nel piano perpendicolare al campo magnetico e si ricavano le seguenti formule:

- raggio di curvatura della traiettoria della particella: $r = \frac{mv}{qB}$
- velocità angolare del moto della particella $\omega = -\frac{q}{m} B$
- periodo del moto della particella $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Il moto lungo la traiettoria è di tipo circolare uniforme.

Moto in un campo magnetico uniforme θ generico
La particella si muove secondo un moto elicoidale uniforme e valgono le stesse regole scritte sopra.

7 Sorgenti del campo magnetico

7.1 Campo magnetico prodotto da una corrente

La costante $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}$ è chiamata permeabilità magnetica del vuoto.

Prima legge elementare di Laplace: esprime il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo di filo percorso dalla corrente i in un punto P distante r dal filo.

$$\partial B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \partial s}{r^2} \cdot u_t \times u_r$$

La legge di Ampere-Laplace: fornisce il legame tra il campo magnetico e la corrente che lo genera:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \oint \frac{\partial s \times u_r}{r^2}$$

7.2 Calcolo di campi magnetici prodotti da circuiti particolari

7.2.1 Caso di filo rettilineo - legge di Biot-Savart

Campo magnetico di un tratto di filo:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \cdot u_t \times u_n$$

Le linee del campo magnetico sono circonferenze concentriche al filo e risultano per tanto concatenate alla corrente, sorgente del campo stesso.

7.2.2 Spira circolare

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m}{r^3} \cdot (2\cos(\theta) u_r + \sin(\theta) u_\theta)$$

Si osserva che tutte le linee di campo sono concatenate con la sorgente che le ha prodotte.

7.3 Azioni elettrodinamiche tra fili percorsi da corrente

Consideriamo due fili rettilinei paralleli molto lunghi percorsi dalle correnti i_1, i_2. I valori dei campi magnetici sono dati dalla legge di Biot-Savart:

$$F_{1,2} = F_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$$

7.4 Legge di Ampere

Qualunque sia la forma del circuito percorso da corrente e qualunque sia la linea chiusa considerata vale sempre la legge di Ampere:

$$\oint BdS = \mu_0 i$$

cioè l'integrale di linea del campo magnetico B lungo una linea chiusa è uguale alla somma delle correnti concatenate, moltiplicata per μ_0

7.5 Proprietà magnetiche della materia

Consideriamo un solenoide indefinito e indichiamo con B_0 il valore del campo magnetico che si misura quando il solenoide è vuoto.
Definiamo *permeabilità magnetica relativa* il valore:

$${}_m = \frac{B}{B_0}$$

dove B è il valore del campo quando riempiamo completamente il solenoide con un mezzo omogeneo.

Definiamo *permeabilità magnetica assoluta* la grandezza:

$$\mu = \mu_0 k_m$$

La variazione del campo magnetico dovuta alla presenza del mezzo omogeneo è data da:

$$B_m = B - B_0$$

Definiamo *suscettività magnetica* definita come variazione relativa del campo magnetico dovuta al materiale:

$$x_m = k_m - 1$$

Valgono le seguenti relazioni:

- Sostante diamagnetiche: $k_m < 1 \quad x_m < 0$
- Sostanze paramagnetiche: $k_m > 1 \quad x_m > 0$
- Sostanze ferromagnetiche: per ognuna di esse esiste una temperatura critica detta *temperatura di Curie* al di sopra della quale il materiale diventa paramagnetico:

  $$x_m = \frac{C\rho}{T - T_c}$$

  dove ρ è la densità della sostanza, C è la costante di Curie e T_c è la temperatura di Curie.

7.6 La legge di Gauss per il campo magnetico

La legge di Gauss per il campo magnetico dice che il flusso del campo magnetico B, attraverso una superficie chiusa, è sempre nulla:

$$\oint B u_n d\Sigma = 0$$

Inoltre la divergenza del campo magnetico B è sempre nulla (forma locale della legge di Gauss)

7.7 Equazioni generali della Magnetostatica in presenza di mezzi magnetizzati

La legge di Ampere per il campo H definito come:

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

dove M è il vettore magnetizzazione che descrive direttamente le proprietà magnetiche sotto l'azione delle correnti, dice che la circuitazione di H lungo una linea chiusa è uguale alla somma delle correnti di conduzione concatenate alla stessa.

La legge di Gauss per i campi magnetici e la legge di Ampere per H hanno validità generale e possono essere come *leggi fondamentali della magnetostatica*.

8

Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo

8.1 Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica

La legge di Faraday dice che ogni qualvolta il flusso del campo magnetico $\Phi(B)$ concatenato con un circuito varia nel tempo si ha nel circuito una forza elettromotrice indotta data dall'opposto della derivata del flusso nel tempo:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\partial(\Phi(B))}{\partial t}$$

La legge di Lenz si enuncia dicendo che l'effetto della forza elettromotrice indotta è sempre tale da opporsi alla causa che l'ha generata; per tanto la forza elettromotrice che si manifesta nel circuito è tale da produrre una corrente indotta i cui effetti magnetici si oppongono alle variazioni del flusso $\Phi(B)$ concatenato con il circuito stesso.

8.2 Origine del campo elettrico indotto e della forza elettromotrice indotta

Dalla legge di Faraday si può esplicitare la relazione tra campo magnetico e campo elettrico indotto.

$$\mathcal{E}_i = \oint E_i dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} B \cdot u_n d\Sigma$$

dove Σ è una qualsiasi superficie che si appoggia sulla linea chiusa s.

8.3 Autoinduzione

Si definisce *coefficiente di autoinduzione* o *induttanza del circuito*:

$$\Phi = Li$$

dove L è il coefficiente.
Quando la corrente nel circuito non è costante nel tempo il flusso concatenato varia e nel circuito compare una forza elettromotrice indotta:

$$\mathcal{E} = -L\frac{\partial i}{\partial i}$$

8.4 Energia magnetica

La presenza di una forza elettromotrice in un circuito implica un lavoro sulle cariche che costituiscono la corrente, positivo e negativo, a seconda del segno della forza elettromotrice. Il bilancio energetico di un circuito RL è dato da:

$$\mathcal{E} \cdot i\partial t = Ri^2 \partial t + Li\partial i$$

Possiamo definire *l'energia intrinseca della corrente* come:

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2$$

Inoltre chiamiamo *densità di energia magnetica* il valore:

$$u_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

Definiamo infine *l'energia magnetica totale* integrando B su tutto lo spazio in cui è diverso da 0:

$$U_m = \int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

8.5 Legge di Ampere-Maxwell

La legge di Ampere-Maxwell stabilisce che i campi magnetici sono prodotti sia dalle correnti di conduzione che da variazioni temporali del campo elettrico:

$$\oint Bds = \mu_0 \left(i_c + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(E)}{\partial t} \right)$$

8.6 Equazione di Maxwell

Nello spazio vuoto, in presenza di cariche q e di correnti di conduzione i, le equazioni di Maxwell in forma integrale sono:

- Legame tra carica elettrica e campo elettrico:

$$\oint Eu_n d\Sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- Anche un campo magnetico variabile nel tempo è sorgente di un campo elettrico:

$$\oint Eds = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t}$$

- Il campo magnetico è sempre solenoidale e che quindi non esistono cariche magnetiche libere

$$\oint Bu_n d\Sigma = 0$$

- Le sorgenti del campo magnetico sono le correnti di conduzione e le variazioni temporali del campo elettrico:

$$\oint Bds = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(E)}{\partial t} \right)$$

8.7 Le equazioni di Maxwell in forma differenziale

TABELLA 8.1 Le equazioni di Maxwell nel vuoto

	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss	$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Legge di Faraday	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Legge di Gauss	$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Legge di Ampère-Maxwell	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \right)$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$

9 Oscillazioni elettriche. Correnti alternate

9.1 Oscillazioni elettriche

Dato un circuito LC esso è sede di una oscillazione elettrica permanente e per questa ragione viene chiamato circuito oscillante. La pulsazione, la frequenza e il periodo sono dati da:

- $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- $v = \frac{\omega}{2\pi}$
- $T = \frac{1}{v}$

Energia del circuito LC: in un circuito LC ideale l'energia totale del sistema si conserva:

$$U(t) = U_e(t) + U_m(t) = \frac{1}{2}CV_0^2$$

9.2 Circuito in corrente alternata

Una forza elettromotrice e una corrente che variano nel tempo proporzionalmente a $\sin(\omega t)$ o $\cos(\omega t)$ sono dette alternate.
Esaminiamo il comportamento in regime alternato dei singoli elementi R, L, C:

- Dato un resistore R attraversato dalla corrente $i = i_0 \cos(\omega t)$ possiamo dire che ai capi del resistore compare la tensione:

$$V_R = Ri = Ri_0 \cos(\omega t)$$

- Ai capi dell'induttore L percorso da una corrente $i = i_0 \cos(\omega t)$ la tensione vale:

$$V_L = -\omega L i_0 \sin(\omega t)$$

  La tensione V_L è in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ sulla corrente i

- Ai capi di un condensatore C carico, percorso da una corrente $i = i_0 \cos(\omega t)$ la tensione vale:

$$V_C = \frac{i_0}{\omega C}\sin(\omega t)1$$

9.3 Il circuito RLC

Consideriamo il circuito RLC in serie la corrente alternata in ciascun componente ha la stessa ampiezza e la stessa fase. La tensione ai capi della serie coincidente con la forza elettromotrice del generatore è data da:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \Phi)$$

dove $\mathcal{E}_0 = Zi_0$ e la fase Φ si trova come:

$$\tan\Phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

9.4 Potenza nei circuiti in corrente alternata

La potenza media in un periodo, data l'applicazione di una forza elettromotrice alternata $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \Phi)$ che provoca il passaggio di una corrente $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$, è data da:

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 i_0 \cos(\Phi) = \mathcal{E}_{eff} \cdot i_{eff} \cos(\Phi)$$

detta *Formula di Galileo-Ferraris* e $\cos(\Phi)$ è detto *Fattore di potenza*.

10
Onde elettromagnetiche

10.1 Introduzione alle onde elettromagnetiche

In generale si definisce come *onda* una qualsiasi perturbazione, impulsiva o periodica, che si proponga con una velocità ben definita. Una situazione particolare è costituita dalle onde piane, dipendenti dalla sola coordinata spaziale x oltre che dal tempo t.

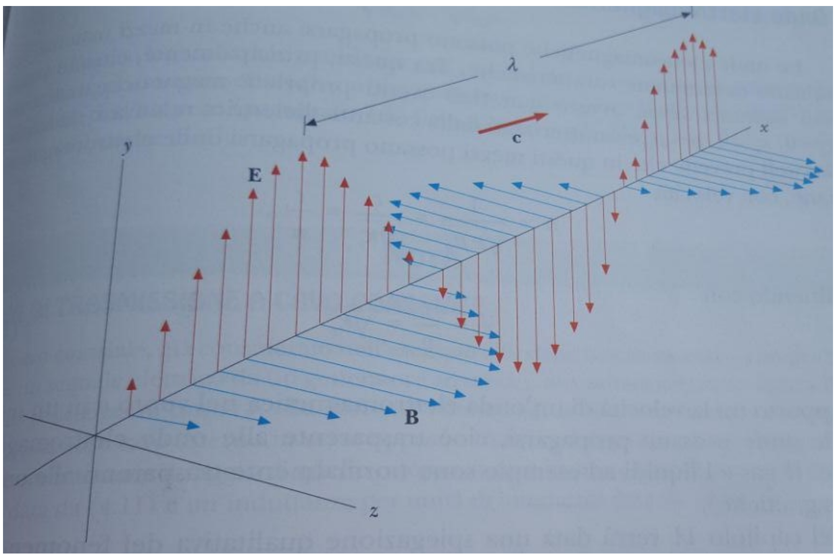
10.2 Onde elettromagnetiche piane

La velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto è uguale al valore misurato della velocità della luce nel vuoto:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,998 \times 10^8 m/s$$

Le proprietà delle onde elettromagnetiche si riassumono come segue, dato il campo elettrico E e il campo magnetico B che si propagano nel vuoto:

- E e B si propagano con a stessa velocità c
- i moduli dei campi sono legati dalla relazione $B = \frac{E}{c}$
- E e B sono ortogonali fra di loro e alla direzione di propagazione: le onde elettromagnetiche sono onde trasversali e per esse è significativo il concetto di polarizzazione.
- il vero del prodotto vettoriale $E \times B$ definisce il verso di propagazione.
- Le onde elettromagnetiche obbediscono al principio di sovrapposizione.



10.3 Energia di un'onda elettromagnetica piana. Vettore di Poynting

La presenza di un campo elettrico E e di un campo magnetico B comporta la presenza di una certa quantità di energia distribuita nello spazio con densità u.

Si definisce *densità di energia* il valore:

$$u = 2u_e = \epsilon_0 E^2$$

Il vettore S chiamato *vettore di Poynting* vale:

$$S = \epsilon_0 c^2 EBu = \frac{1}{\mu_0} E \times B$$

Si definisce *intensità dell'onda elettromagnetica*:

$$I = S_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

quindi:

- l'intensità di un'onda elettromagnetica piana è la potenza media per unità di superficie trasposrtata dall'onda.
- L'intensità è data dal prodotto della densità d'energia media per la velocità di propagazione c
- nel caso di onde elettromagnetiche sferiche l'intensità diminuisce con il quadrata della distanza della sorgente:

$$I = S_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{r^2}$$

10.4 Quantità di moto. Pressione di radiazione.

Le onde elettromagnetiche trasportano anche quantità di moto pari a:

$$p = \frac{I}{c}$$

La pressione di radiazione è definita come la quantità di moto nel caso in cui la superfice colpita sia completamente assorbente: caso limite.

10.5 Polarizzazione dell'onda elettromagnetica piana

L'onda elettromagnetica piana è rappresentata come sovrapposizione di due onde elettromagnetiche piane polarizzate rettilineamente nei piani x, y e X, Z di ampiezza rispettivamente $E_0 \cos(\theta)$ e $E_0 \sin(\theta)$, di uguale ampiezza E_0 e sfasate di $\frac{\pi}{2}$.

L'intensità trasportata dall'onda elettromagnetica piana polarizzata è somma dell'intensità associata a ciascuna delle due componenti $I = I_y + I_z$. Diversamente, se non polarizzata, l'intensità è quella assunta lungo l'asse y.

11 Riflessione e rifrazione della luce

11.1 La luce e l'indice di rifrazione

Si definisce *indice di rifrazione assoluto* di una sostanza il valore:

$$n = \frac{c}{v}$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto e v è la velocità della luce attraverso la sostanza.

Si definisce *formula di Cauchy* il valore:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

con A e B costanti caratteristiche della sostanza.

11.2 Principio di Huygens-Fresnel

Il principio di Huygens-Fresnel ci dice che ogni elemento $\partial\Sigma$ della superficie d'onda Σ si può considerare come una sorgente di onde secondarie sferiche la cui ampiezza è proporzionale all'ampiezza $\frac{E_0}{q}$ dell'onda primaria e all'area $\partial\Sigma$.
Il campo elettro $E_P(r,t)$ in un punto P si ottiene sempre come sovrapposizione di tutte le onde sferiche elementari che raggiungono P.

11.3 Leggi della riflessione e rifrazione

Nell'attraversamento di una superficie di separazione tra due mezzi la frequenza e la pulsazione non variano, mentre la lunghezza d'onda e il numero d'onda varano:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad k = nk_0$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo, λ_0 è la lunghezza d'onda e k_0 è il numero d'onda.

La lunghezza d'onda in un mezzo è sempre minore della lunghezza d'onda nel vuoto.

Le leggi della riflessione e della rifrazione asseriscono che:

- le direzioni di propagazione dell'onda incidente, dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa (rifratta) giacciono nel piano d'incidenza.
- L'angolo di riflessione θ_r è uguale all'angolo di incidenza θ_i.

- Il rapporto tra il $\sin(\theta_i)$ e $\sin(\theta_t)$ (rifrazione) è costante ed uguale al rapporto fra le velocità di rifrazione:
$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \frac{v_1}{v_2}$$

11.4 Intensità delle onde elettromagnetiche riflesse e rifratte

Le seguenti formule forniscono la percentuale di energia e quindi potenza riflessa nel caso dell'onda piana polarizzata rettilineamente nel piano d'incidenza e polarizzata rettilineamente in un piano perpendicolare al piano d'incidenza:

$$R_\pi = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_+ \theta_t)} \qquad R_\sigma = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_+ \theta_t)}$$

Il coefficiente di riflessione per la luce ordinaria è: $R = \frac{1}{2}(R_\pi + R_\sigma)$

11.5 Polarizzazione della luce per assorbimento selettivo e per diffusione

Se chiamiamo *asse della lamina polarizzatrice o del polarizzatore* la direzione in cui la componente del campo elettrico dell'onda incidente non viene assorbito possiamo concludere che da una lamina di materiale dicroico esce un'onda luminosa polarizzata rettilineamente lungo la direzione dell'asse del polarizzatore.

La legge di Malus dice che l'intensità della luce uscente da un polarizzatore colpito da luce polarizzata rettilineamente varia proporzionalmente con il quadrato del $\cos$ dell'angolo tra la direzione di polarizzazione dell'onda incidente e l'asse del polarizzatore:

$$I_P = I_0 \cos^2(\theta)$$

Se la luce incidente non è polarizzata, cioè è luce ordinaria, l'intensità vale:

$$I = \frac{I_0}{2}$$

12 Ottica geometrica

12.1 Leggi della riflessione e della trasmissione

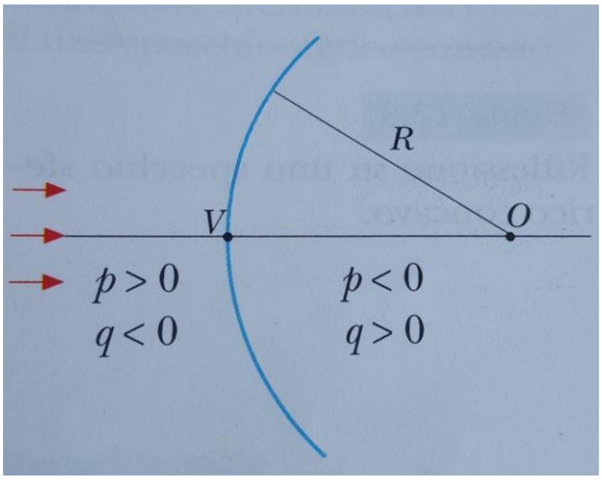
La legge della riflessione dice che il raggio incidente sulla superficie e la normale alla superficie in un punto O di incidenza individuano un piano detto di incidenza; il raggio riflesso sta in questo piano e forma con la normale un angolo θ_r uguale all'angolo θ_i formato con la normale del piano incidente.

La legge della trasmissione dice che, da un raggio luminoso incidente hanno origine un raggio riflesso e un raggio trasmesso che giace nel piano di incidenza e forma con la normale l'angolo θ_t tale che:

$$\frac{\sin(\theta_t)}{\sin(\theta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$

12.2 Definizioni e convenzioni

Fissata una superficie di discontinuità, detto V il suo vertice, cioè l'intersezione con l'asse ottico del sistema che coincide con l'asse di simmetria, ci atteniamo a queste regole:



- la luce incidente proviene da sinistra
- la distanza p di un oggetto P dal vertice V è positiva se l'oggetto si trova a sx del vertice.
- la distanza q dell'immagine Q dal vertice V è positiva se l'immagine si trova a dx.
- il raggio di curvatura R della superficie sferica è positivo se il centro di curvatura si trova a dx di V

- a sh di V gli angoli che i raggi formano con l'asse sono positivi se considerati nel verso antiorario a partire dall'asse
- Le distanze y dall'asse sono positive per punti al di sopra dell'asse.

12.3 Specchi

12.3.1 Specchi sferico concavo

Consideriamo una superficie catottrica sferica concava, ovvero uno specchio sferico concavo. L'equazione dello specchio sferico concavo è pari a:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R}$$

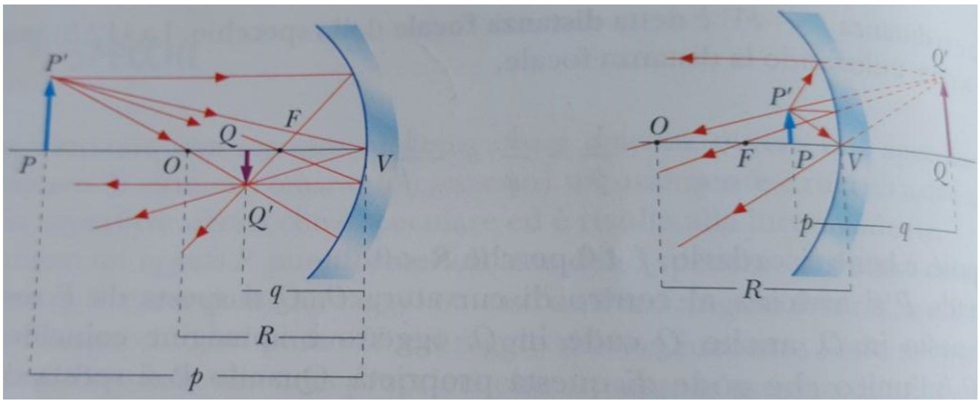
Si chiama *fuoco dello specchio sferico concavo* il punto in cui si forma l'immagine riflessa ed è pari a:

$$f = q = \frac{R}{2}$$

Si chiama *ingrandimento trasversale dello specchio sferico* il valore:

$$I = \frac{y'}{y}$$

dove y' è la lunghezza del segmento (q, q') e y è la lunghezza del segmento (p, p')



Riassumendo:

- lo specchio concavo da di figure contenute in un piano immagini contenute in un altro piano.
- l'immagine è reale, capovolta e rimpicciolita se il piano in cui sta la figura dista dal vertice V più della distanza focale f.
- l'immagine è virtuale diritta e ingrandita se la figura sta tra il fuoco f e il vertice V

12.3.2 Specchio sferico convesso

Valgono le stesse equazioni dello specchio sferico concavo con le seguenti eccezione: l'immagine è sempre virtuale diritta e rimpicciolita, indipendentemente della distanza dal fuoco.

12.3.3 Specchio piano

Lo specchio piano può essere considerato caso limite tra il concavo e il convesso quando il raggio diventa infinito. L'equazione diventa $p = q$.

L'immagine si forma dietro lo specchio in posizione simmetrica a quella dell'oggetto di cui conserva le dimensioni

12.4 Diottri

L'equazione del diottro sferico convesso è pari a:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Esistono due distanze focali f_1, f_2 anteriori e posteriori. Vale il seguente rapporto:

$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1$$

L'ingrandimento trasversale vale:

$$I = \frac{n_1 q}{n_2 p}$$

Se il raggio della superficie diottrica tende a infinito esso diventa piano e la sua equazione è:

$$q = -\frac{n_2}{n_1} p$$

13 Interferenza

13.1 Fenomeni di interferenza: sorgenti di luminose coerenti

Si definisce differenza di fase in un punto P tra due onde luminose sferiche emesse da due sorgenti S_1, S_2 che si sovrappongono in P la quantità:

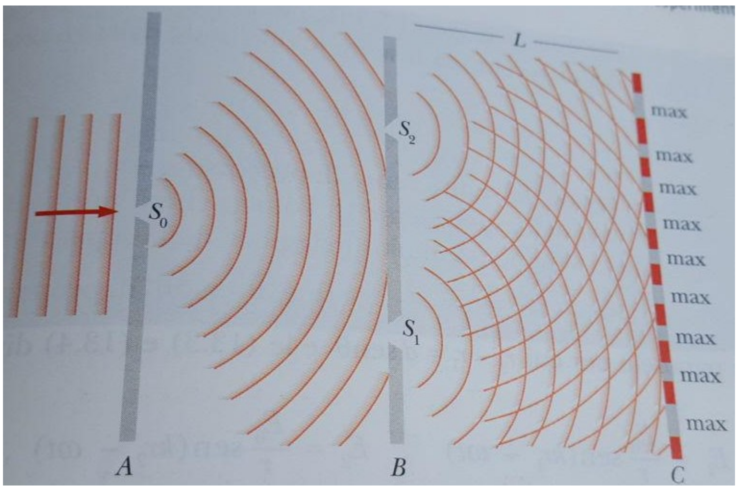
$$\delta = k(r_2 - r_1) + (\phi_2 - \phi_1)$$

Quando la differenza di fase è costante nel tempo le sorgenti delle due onde si dicono coerenti.

Il termine interferenza è riferito ali fenomeni di sovrapposizione ottenute con onde emesse da sue o più sorgenti coerenti.

13.2 L'esperimento di Young

La luce emessa da S_1, S_2 su uno schermo c posto a distanza L dalle sorgenti mostra una fgura visibile detta *figura di interferenza* che consiste in una serie di strisce chiare e scure parallele alle fenditure chiamate *frange di interferenza*.



La differenza di fase tra le due onde è:

$$\delta = k(r_2 - r_1)$$

L'intensità luminosa in P in funzione dell'angolo θ di osservazione vale:

$$I_P(\theta) = 4I_1 \cos^2\left(\frac{\pi\partial\sin(\theta)}{\lambda}\right)$$

13.3 Interferenza della luce su lamine sottili

L'interferenza dovuta alla riflessione della luce del sole sulle due superfici di una lamina sottile di una sostanza trasparente è il caso di interferenza più comunemente osservabile.

L'interferenza in un punto P della superficie posteriore della lamina può essere costruttiva o distruttiva se:

$$\delta = 2m\pi \quad m = [0, 1, dots] \qquad \delta = (2m+1)\pi \quad m = [0, 1, \dots]$$

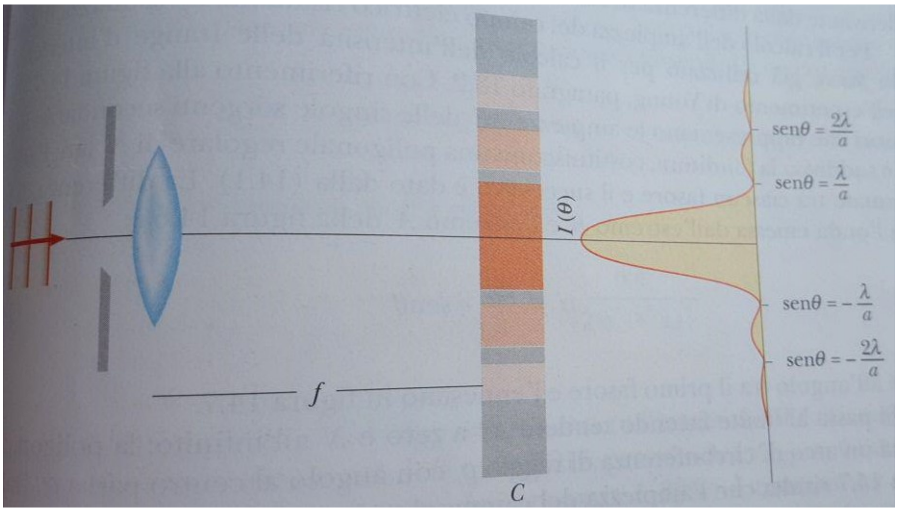
dove m è il numero della frangia.

14
Diffrazione

14.1 Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer

La diffrazione è un particolare fenomeno di interferenza che si verifica quando un'onda incontra nel suo percorso un ostacolo o una apertura.

14.2 Diffrazione di Fraunhofer a una fenditura rettilinea

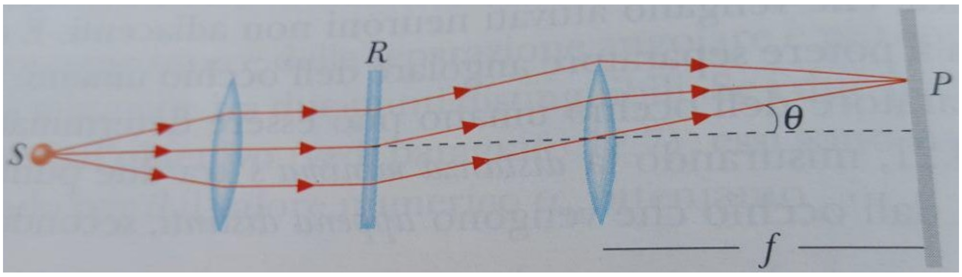


Consideriamo un foro rettangolare praticato in uno schermo opaco di larghezza a e lunghezza L molto maggiore di a. Il foro viene chiamato *fenditura rettilinea indefinita*. La figura di diffrazione di Fraunhofer è osservata sullo schermo C e consta di una frangia chiara centrale e di frange chiare laterali con intensità rapidamente decrescente allontanandosi dal centro, intervallate da frange scure.
In base al principio di Huygens-Fresnel ciascuna striscia funge da sorgente di onde secondarie e contribuisce con ampezza ΔE al campo elettrico risultante E_P in un punto P dello schermo individuato dai raggi uscenti ad angolo θ rispetto alla normale al piano della fenditura.

14.3 Il reticolo di diffrazione

Un reticolo di diffrazione è un sistema di N fenditure, ciascuna di larghezza a, equispaziate di una distanza d. La distanza fra due fenditure è detta *passo del reticolo*.

Supponiamo che un'onda piana di lunghezza λ incida sul reticolo che sta su una superficie d'onda piana; dopo il reticolo si pone una lente convergente si osserva la figura di interferenza. I fasci diffratti dalle singole fenditure interferiscono a loro volta nel punto P determinando la figura di diffrazione prodotta dal reticolo osservato in trasmissione.



Si definisce *larghezza angola di un massimo principale* la grandezza:

$$\Delta\theta_m = \frac{2\lambda}{L\cos(\theta_m)}$$

Il numero di massimi principali effettivamente osservabili, in condizione di intensità ordinaria, è determinata dal rapporto tra il passo del reticolo e la larghezza delle singole fenditure risultando tanto maggiore quanto maggiore è questo rapporto.

14.4 Potere risolutivo di un reticolo di diffrazione

Se la sorgente che illumina il reticolo non emette luce monocromatica, le differenti lunghezze d'onda che compongono la luce producono massimi principali ad angoli diversi.

Si definisce *potere risolutivo del reticolo all'ordine* m la grandezza:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

la quale esprime, per una data λ la minima differenza $\Delta\lambda$ risolvibile. Dunque:

- il potere risolutivo del reticolo risulta proporzionale al numero totale di fenditure e aumenta con l'ordine dello spettro utilizzabile.
- il potere risolutivo non dipende dal passo del reticolo.

15

Proprietà corpuscolari e ondulatorie della radiazione e della materia

15.1 Radiazione termica e corpo nero

Un corpo nero è un corpo (solido o liquido) che ha la proprietà di assorbire completamente qualsiasi radiazione che lo colpisca, ovvero non riflette la radiazione elettromagnetica che lo colpisce.

15.1.1 Legge di Stefan-Bolzmann

Il potere emissivo integrale è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta del corpo nero:

$$\epsilon_{cn} = \sigma T^4$$

dove σ è la costante d Stefan e vale $5,67 \times 10^{-8}$

15.1.2 Prima legge di Wien

L'ascissa del massimo della curva che descrive il potere emissivo specifico è inversamente proporzionale alla temperatura, quindi:

$$\lambda_{max} T = 2,89 \times 10^{-3}$$

15.1.3 Seconda legge di Wien

L'ordinata del massimo della curva che descrive il potere emissivo specifico del corpo nero è proporzionale alla quinta potenza delle temperature.

15.1.4 Legge di Kirhoff sul potere emissivo di un corpo

Il potere emissivo ϵ di un corpo generico, portato ad una certa temperatura T è legato al potere emissivo ϵ_{cn} del corpo nero alla stessa temperatura dalla reazione:

$$\epsilon = l\epsilon_{cn}$$

ove l è un coefficiente di emissività che dipende dalla natura del materiale.

15.2 Legge di Planck

Palnck ipotizzò che:

- gli atomi che costituiscono le pareti della cavità si comportano come oscillatori che emettono e assorbono energia.
- L'energia di un oscillatore può assumere solamente valori discreti:

$$E_n = hv$$

dove v è la frequenza della radiazione, n un numero intero positivo chiamato *numero quantico* e $h = 6,626 \times 10^{-34} J/s$ detta *costante di Planck*

15.3 Effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico è un fenomeno dove l'incidenza di luce ultravioletta causa emissione di elettroni da parte di una superficie metallica.
Einstein estese le ipotesi di Planck nel seguente modo:

- la radiazione elettromagnetica è composta da quanti di energia detti fotoni.
- nell'interazione della radiazione con la materia un elettrone può assorbire un solo fotone.
- nel processo di assorbimento il fotone cede istantaneamente tutta la sua energia all'elettrone.

15.4 Effetto Compton. Produzione di coppie

Compton ipotizzo che:

- il fascio di raggi X è composto da fotoni, ciascuno dei quali ha energia $U = hv$ e quantità di moto $p = \frac{h}{\lambda}$.
- ciascun fotone può essere diffuso da un singolo elettrone presente nel conduttore.
- il processo di diffusione fotone-elettrone è cinematicamente descrivibile come un urto elastico regolato dalle leggi meccaniche di conservazione dell'energia e della quantità di moto.

La relazione di Compton esprime la quantità di moto in funzione delle lunghezze d'onda:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{h}{m_l c} \cdot (1 - \cos(\theta))$$

dove $\frac{h}{m_l c}$ è detta *lunghezza d'onda Compton dell'elettrone* e vale $2,43 \times 10^{-12} m$.