UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Università degli Studi di Bergamo

ver. 0000A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria

Corso di Elettrotecnica NO

Angelo Baggini - Franco Bua

Prolusione

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria

Corso

- Lezioni ex cathedra
- Esercitazioni
- Laboratorio (Aula PC) in gruppi

Orario

- Non tutti faranno tutte le ore

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria

Perchè un corso di elettrotecnica?

Che cosa è l’elettrotecnica?

Programma

1. Dalla Fisica all'Elettrotecnica
2. Rappresentazione e analisi dei circuiti CC
3. Rappresentazione e analisi dei circuiti magnetici
4. Rappresentazione e analisi dei circuiti CA
5. Analisi delle reti elettriche trifase
6. Analisi delle reti elettriche in regime transitorio
7. Elementi di Sicurezza elettrica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO Facoltà di Ingegneria

Testi

1. Dispense
2. Edminister: "Esercizi di Elettrotecnica", Ed. Schaum
3. Pier Paolo Civalleri, Elettrotecnica, Editrice Levrotto e Bella - Torino
4. Filippo Ciampoli, Elettrotecnica generale, Pitagora Editrice - Bologna
5. Un qualsiasi buon testo di elettrotecnica

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO Facoltà di Ingegneria

Esame

- **1a prova** - soluzione scritta di esercizi (è possibile usare tutto quello che si vuole eccetto consulenti)
- **2a prova** - domande multiple su nozioni di teoria (non è possibile usare altro che la biro) – Nella stessa sessione della 1a prova

Punteggio 1ª prova	Esito	Possibilità	Voto proposto senza ulteriori prove	Voto finale
0-15	Insufficiente	necessario ripetere la prima prova	NA	NA
16-17	Quasi sufficiente	necessario sostenere la 2ª prova o ripetere la 1ª prova	NA	Media aritmetica voto 1ª prova e 2ª prova
18-24	Sufficiente	possibile registrare il voto della 1ª prova oppure sostenere la 2ª prova	Punteggio della 1° prova	Media aritmetica voto 1ª prova e 2ª prova
25-29	Sufficiente	possibile registrare il voto oppure sostenere la 2ª prova	24	Media aritmetica voto 1ª prova e 2ª prova
30-30lode	Sufficiente	possibile registrare il voto della 1ª prova oppure sostenere la 2a prova	Punteggio della 1° prova	Media aritmetica voto 1ª prova e 2ª prova

Punteggio >= 18 con le due prove e non soddisfatto -> ulteriore colloquio

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO Facoltà di Ingegneria

Test in itinere

La 1a prova può essere sostituita dai test in itinere con almeno un punteggio corretto >= 16

- Con 2 punteggi corretti, singolarmente maggiori o uguali a 16, con media aritmetica maggiore o uguale a 18, è possibile registrare direttamente la media pesata con le regole della registrazione diretta della 1a prova alla prima sessione utile e comunque entro settembre
- La 2a prova può essere sostenuta in una qualsiasi sessione d'esame regolare dell'AA in cui sono (è) state(a) superate(a) le(la) prove(a) in itinere. Il voto finale calcolato come media aritmetica del punteggio di accesso all'orale e di quello della prova orale.
- Calcolo della media pesata dei punteggi corretti dei test in itinere:
  - con due punteggi maggiori o uguali a 16 i pesi sono pari ad 1
  - con un punteggio maggiori o uguali a 16 ed uno inferiore il primo peso è pari ad 1 ed il secondo a 0
- Calcolo del punteggio di accesso alla seconda prova:
  - due punteggi >= 16 il punteggio di accesso alla 2a prova è pari alla media pesata dei punteggi corretti dei test in itinere più 4 punti
  - con un punteggio maggiore o uguale a 16 ed uno inferiore il punteggio di accesso all'orale è pari esattamente alla media pesata dei punteggi corretti dei test in itinere

Corso di Elettrotecnica NO

Angelo Baggini

Dalla fisica all'elettrotecnica

Fisica

- Carica elettrica
- Campo elettrico
- Campo magnetico

- Leggi di Maxwell

Elettrotecnica

- Carica elettrica
- Tensione elettrica
- Corrente elettrica

- Leggi di Kirchhoff
- Leggi di Ohm

Ripasso di Fisica

- Le cariche elettriche generano i campi elettrici

- Le cariche elettriche in moto generano i campi magnetici

Leggi di Maxwell

legge di Gauss per il campo elettrico:

$$\oiint_S \bar{E} \cdot \bar{u}_n dS = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

legge di Gauss per il campo magnetico:

$$\oiint_S \bar{B} \cdot \bar{u}_n dS = 0$$

legge di Faraday-Henry:

$$\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = \cancel{-\frac{d}{dt} \iint_{S(L)} \bar{B} \cdot \bar{u}_n dS}$$

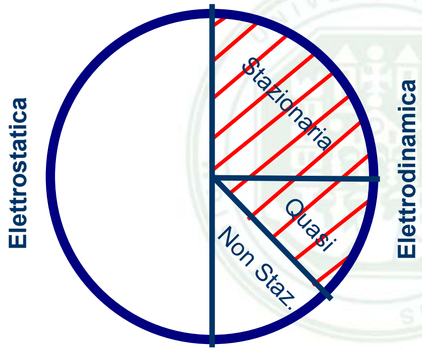
legge di Ampère-Maxwell:

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_o I + \cancel{\mu_o \varepsilon_o \frac{d}{dt} \iint_{S(L)} \bar{E} \cdot \bar{u}_n dS}$$

e l'equazione di continuità:

$$\oiint_A \bar{J} \cdot \bar{u}_n dA \cancel{= -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV}$$

Suddivisione dei fenomeni elettrici



ver. 0000A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria

Corso di Elettrotecnica NO

Angelo Baggini

Rappresentazione e analisi delle reti elettriche in regime stazionario

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria

Ipotesi

Regime stazionario

- Cariche libere di muoversi
- Tutte le derivate rispetto al tempo nulle

Circuito elettrico

- Un tubo di flusso del vettore densità di corrente

Rete elettrica

- L'unione di circuiti diversi

Ramo o lato

- E' un tubo di flusso della densità di corrente nel quale si può considerare la corrente uguale in ogni sezione

Nodo

- Punto in cui convergono 3 o più rami

Maglia

- Un qualunque percorso chiuso che partendo da un nodo, ritorni allo stesso nodo percorrendo rami diversi della rete, senza mai percorrere un ramo più di una volta.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria

Legge di Kirchhoff ad un percorso chiuso

Legge di Faraday-Henry: $\oint_L \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0$

$$\sum V = 0$$

- **la somma algebrica delle tensioni presenti sui lati di un percorso chiuso è uguale a zero.**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria

Legge di Kirchhoff alle superfici

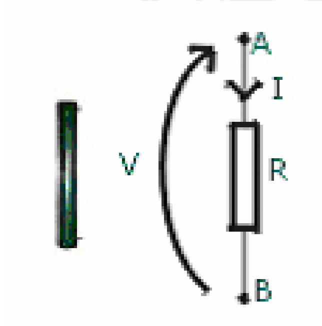
Equazione di continuità $\oiint_A \overline{J} \cdot \overline{u}_n dA = 0$

$$\sum I = 0$$

- **La somma algebrica delle correnti su una superficie chiusa è uguale a zero**

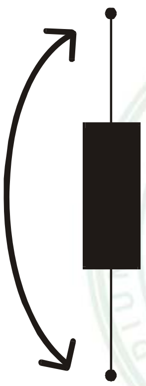
Bipoli

- Dai fenomeni fisici ai bipoli
- Parametri concentrati
- Fenomeni fisici – Effetti – Bipoli (modelli matematici) - Dispositivi



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di
Ingegneria

Morsetti o poli

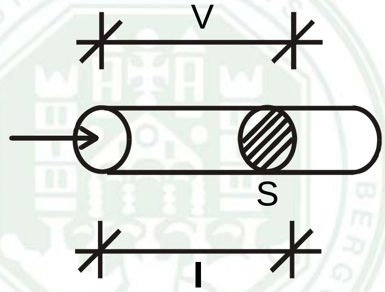


Elemento grafico caratteristico dello specifico bipolo

Bipolo generico

FENOMENO RESISTIVO

OHM



$V = RI$

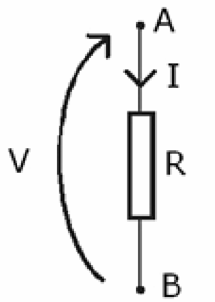
Resistenza

$R = \rho \frac{l}{S}$

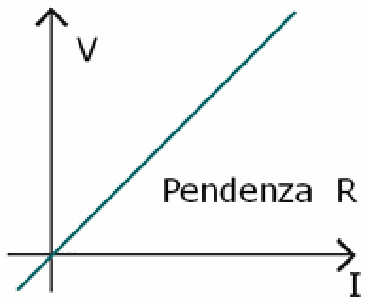
Resistività

U.M. ohm Ω

Resistore



$V=RI$



Simbolo **Equazione** **Caratteristica V-I**

Effetto della temeperatura

Bipoli

Bipolo resistivio

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO — Facoltà di Ingegneria

$I = GV$

$= \frac{1}{R}$

Conduttanza

1\ $g = \rho$

Conducibilità

U.M. siemens S

Bipoli

Dispositivi resistivi

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO — Facoltà di Ingegneria

Affinché possa circolare corrente nel circuito, il ragionamento appena fatto per un singolo segmento va esteso a tutto il circuito, e quindi il punto di partenza e quello di arrivo coincidono …

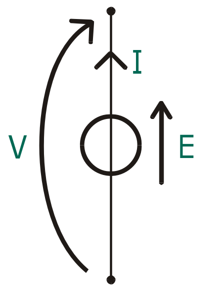
$$\oint_L \overline{E} \cdot d\overline{l} = 0$$

$$\oint_L (\overline{E}_S + \overline{E}_G + \overline{E}_R) \cdot d\overline{l} = 0$$

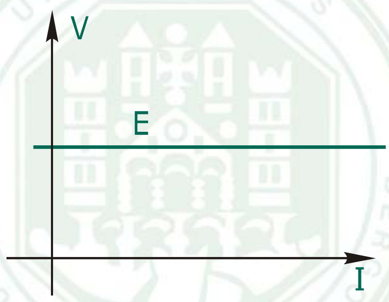
Forza elettromotrice

Bipoli
Generazione della tensione
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Generatore ideale di tensione

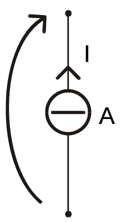


V=E
per qualsiasi I

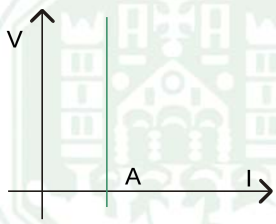


Simbolo **Equazione** **Caratteristica V-I**

GENERATORE IDEALE DI CORRENTE

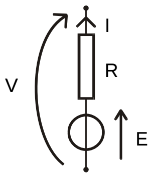


I = A
per qualsiasi V

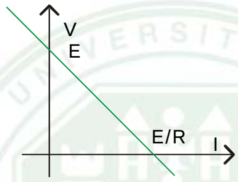


Simbolo **Equazione** **Caratteristica V-I**

GENERATORE REALE DI TENSIONE

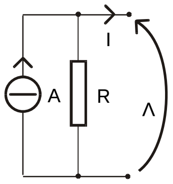


$V = E - RI$

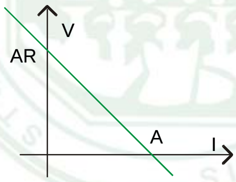


Simbolo | Equazione | Caratteristica V-I

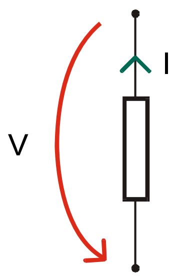
GENERATORE REALE DI CORRENTE



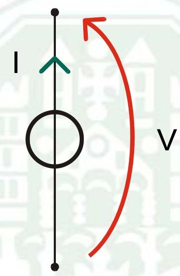
$I = A - V/R$



Simbolo | Equazione | Caratteristica V-I



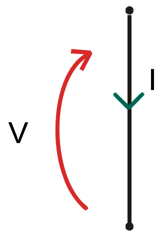
Convenzione degli utilizzatori



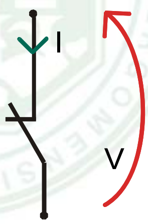
Convenzione dei generatori

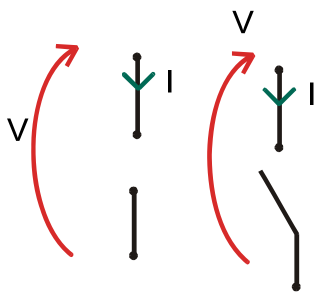
Bipoli passivi e attivi

CORTO CIRCUITO

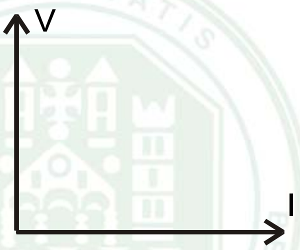


V = 0
I

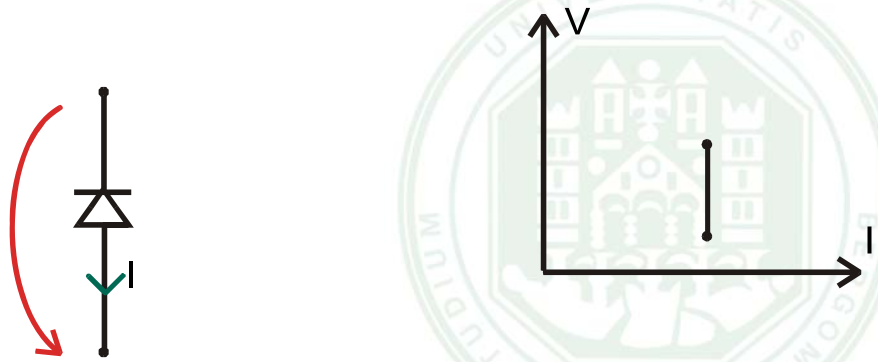




V
I = 0



Diodo ideale

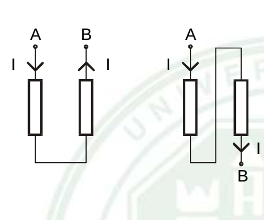


$$V = f(I)$$

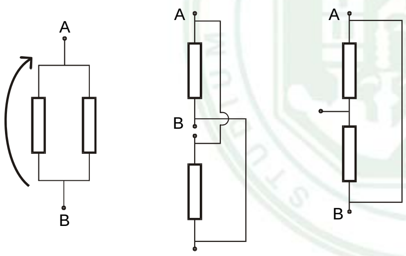
Bipoli lineari e NON lineari

Collegamento tra bipoli

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria



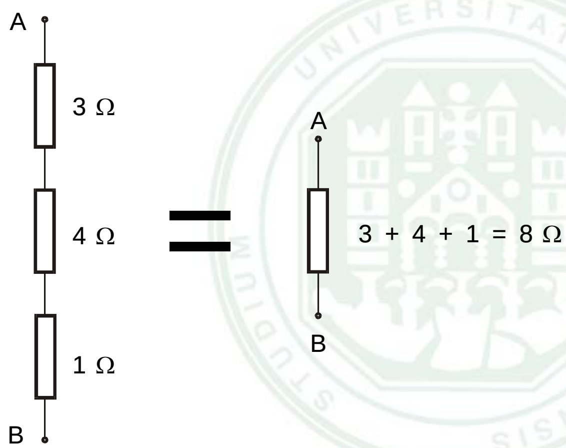
Collegamenti in serie



Collegamenti in parallelo

Collegamento tra bipoli
Resistori in serie

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

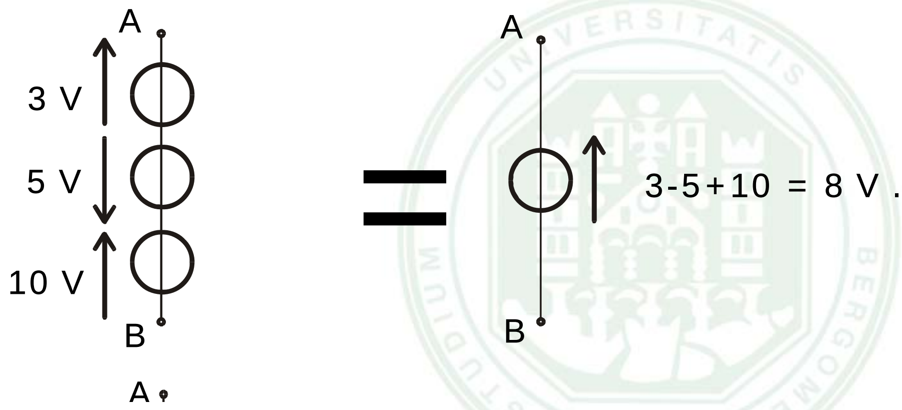


Collegamento tra bipoli

Generatori di tensione in serie

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria



Collegamento tra bipoli

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

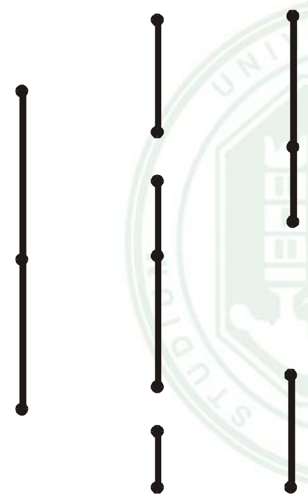
Facoltà di Ingegneria

Generatori di corrente in serie

?

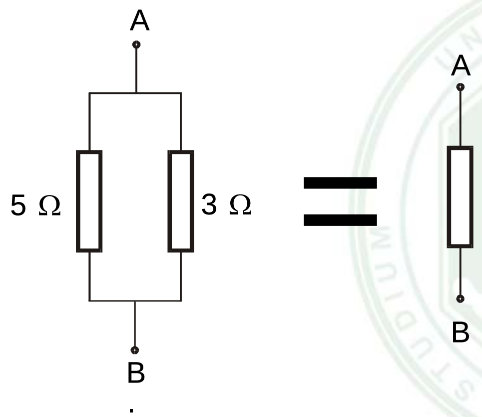
Collegamento tra bipoli
Ctocto e circuiti aperti in serie

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria



Colegamento
Resistori in parallelo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria



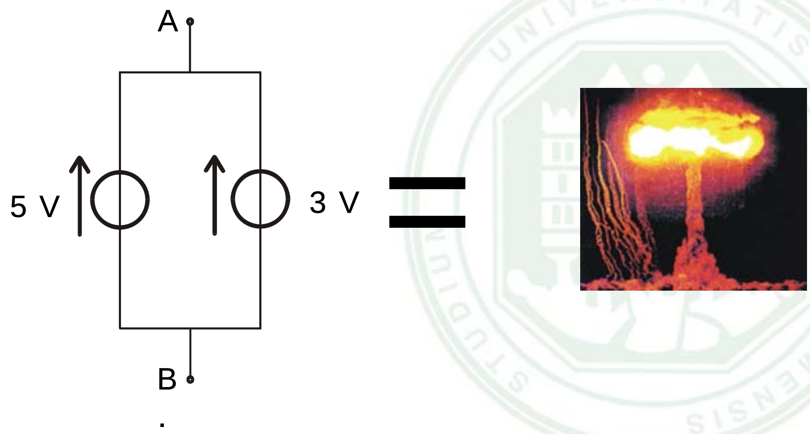
$$\frac{1}{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}} = \frac{3 \cdot 5}{3+5} = \frac{15}{8}\ \Omega$$

Collegamento

Generatori di tensione in parallelo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria

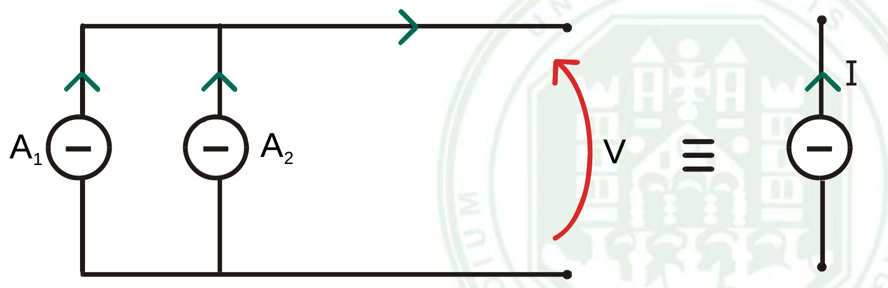


Collegamento

Generatori di corrente in parallelo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria



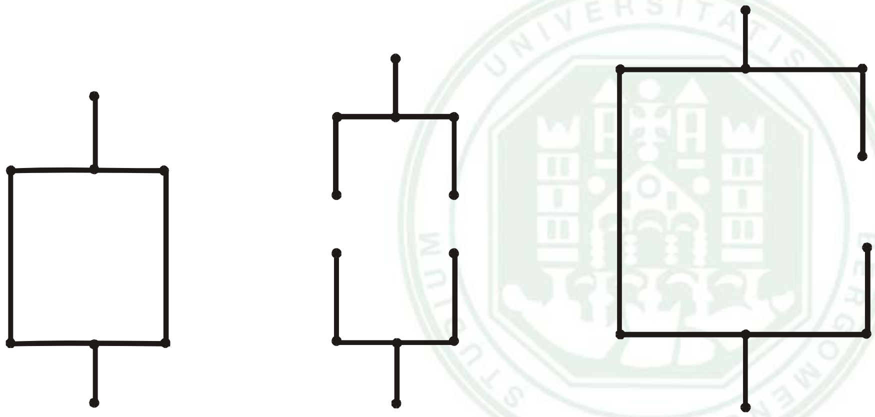
$$I = A_1 + A_2$$

Collegamento

Ctocto e circuiti aperti in parallelo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria

Metodi sistematici per la soluzione delle reti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO — Facoltà di Ingegneria

Metodi sistematici per la soluzione delle reti

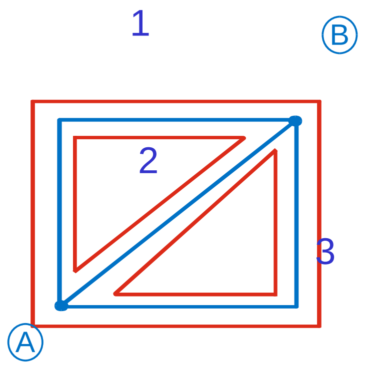
- **Cosa significa risolvere una rete?**
- **MA … una rete è risolubile?**
- **Incognite:**
  - **l correnti di lato**
  - **l tensioni di lato**
- **Equazioni:**
  - **n-1 equazioni indipendenti ai nodi**
  - **m=l-n+1 equazioni indipendenti alle maglie**
  - **l equazioni di Ohm (certamente indipendenti)**

Il problema diventa la scelta delle equazioni

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO — Facoltà di Ingegneria

Metodi sistematici …

Scelta delle maglie e dei nodi indipendenti



n = 2

l = 3

l – n + 1 = 2

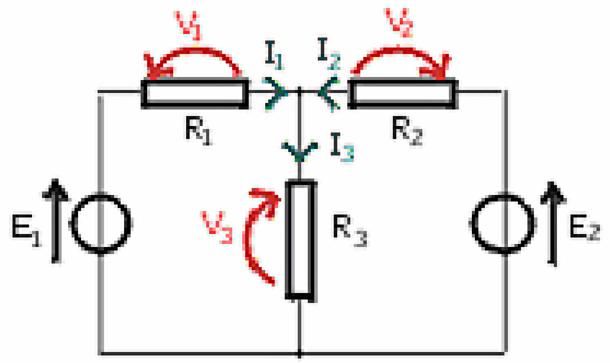
n - 1 = 1

1 – 2 2 – 3 1 – 3

Metodi sistematici …

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO Facoltà di Ingegneria

Operazioni preliminari



③ Si segnano i versi delle tensioni rispettando le convenzioni degli utilizzatori e dei generatori

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO Facoltà di Ingegneria

Metodo delle correnti di lato

- incognite le correnti nei lati
- N-1 eq. di K ai nodi
- L-N+1 eq. di K alle maglie (RI)
- (N-1)+(L-N+1) = L equazioni, con L incognite

- Risolto il sistema, si possono trovare le tensioni

Metodo delle tensioni di nodo

- incognite le tensioni di N-1 nodi (tutti, escluso il nodo di riferimento)
- N-1 eq. di K. ai nodi
- (N-1) equazioni con (N-1) incognite

- Risolto il sistema, dalle ddp si ottengono le correnti nei lati.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Metodo delle correnti di maglia

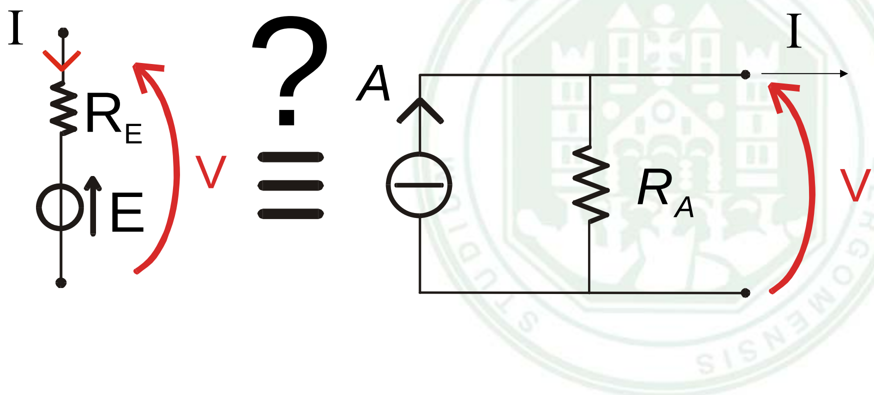
- ad ognuna delle L-N+1 maglie fondamentali una corrente di maglia
- L-N+1 eq. di K. alle maglie
- (l-N+1) equazioni con (L-N+1) incognite

- Risolto il sistema, si ricostruiscono le correnti di lato e quindi, come sopra, le tensioni nodali.

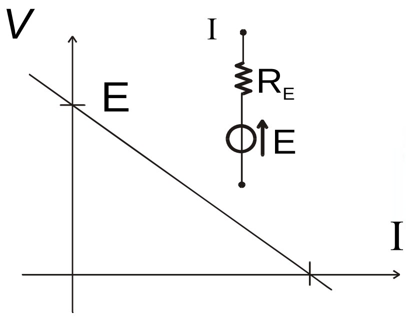
Teoremi delle reti elettriche

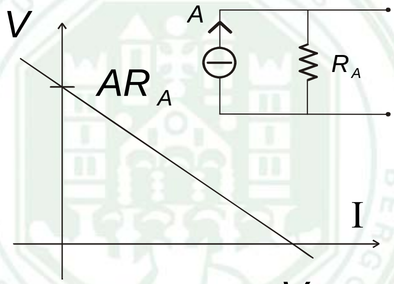
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Generatori equivalenti



Generatori equivalenti





$$V = E - R_E I$$

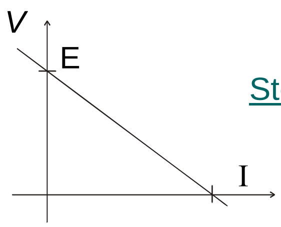
$$I = A - \frac{V}{R_A}$$

$$R_A A - R_A I = V$$

Equivalenza matematica

Stessa pendenza

$$-R_E = -R_A = -R$$



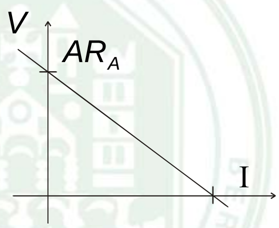
$$V = E - R_E I$$

Stesso termine noto (vuoto)

$$E = AR_A$$

2°punto (ctocto)

$$\frac{E}{R_E} = A$$

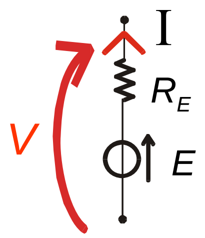


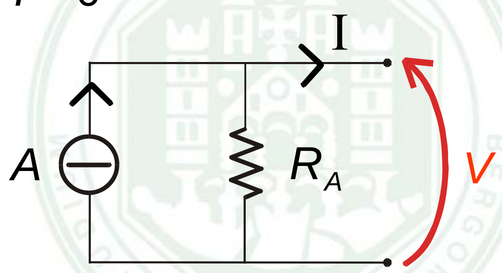
$$R_A A - R_A I = V$$

Eq. elettrotecnica

1) Stessa tensione a vuoto

$I = 0$





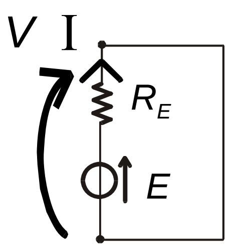
$V_0 = E \qquad \longleftrightarrow \qquad AR_A = V_0$

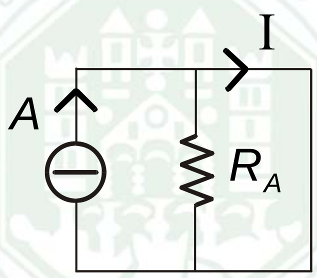
Teoremi sulle reti elettriche
Generatori equivalenti
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Eq. elettrotecnica

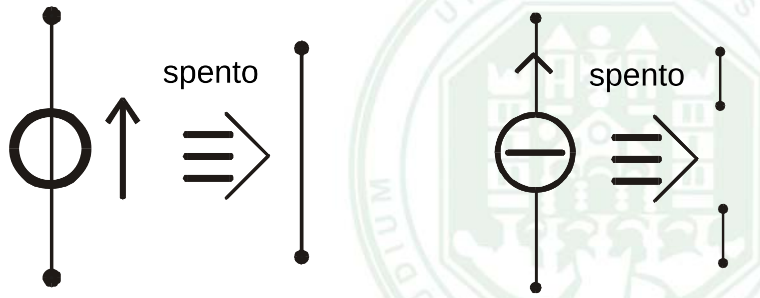
2) Stessa corrente di ctocto

V = 0



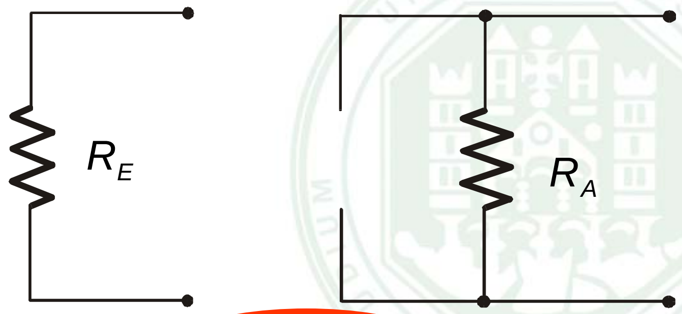


$I_{CC} = \dfrac{E}{R_E} \qquad \longleftrightarrow \qquad I_{CC} = A$



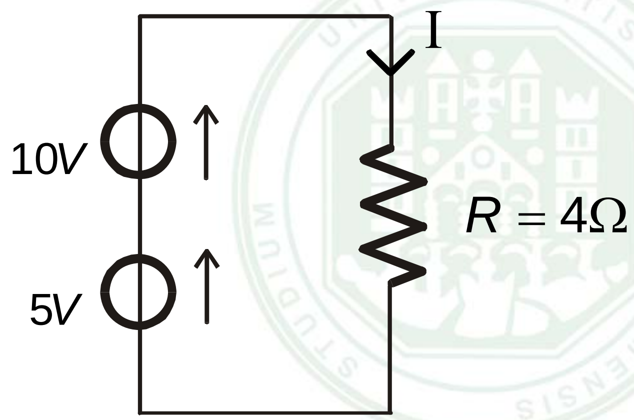
Eq. Elettrotecnica

3) Stessa resistenza interna

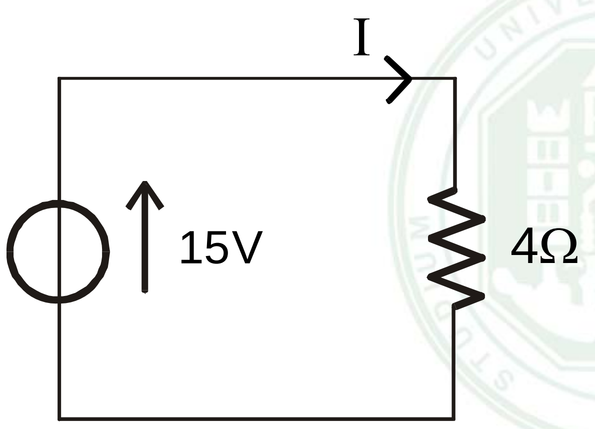


$$R_E = R_A$$

Sovrapposizione effetti

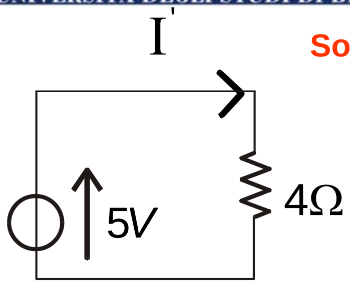


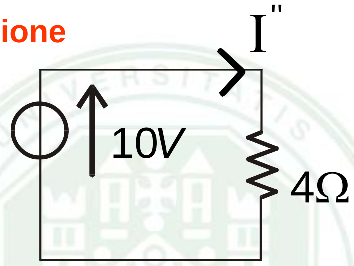
Metodo tradizionale



$$I = \frac{15}{4} A$$

Sovrapposizione



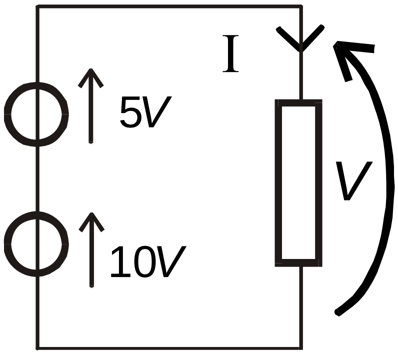


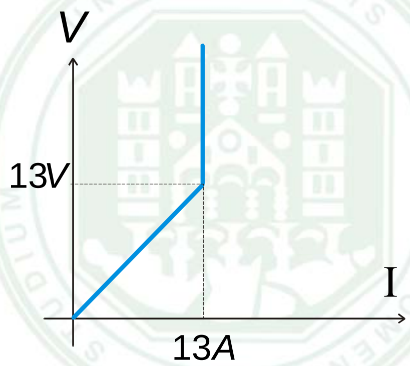
$$I' = \frac{5}{4} A$$

$$I'' = \frac{10}{4} A$$

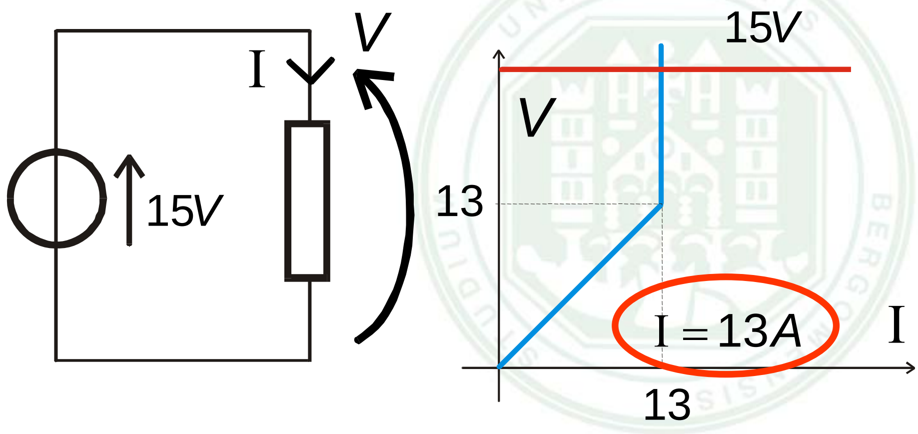
$$I = I' + I'' = \frac{5}{4} + \frac{10}{4} = \frac{15}{4} A$$

Rete NON lineare

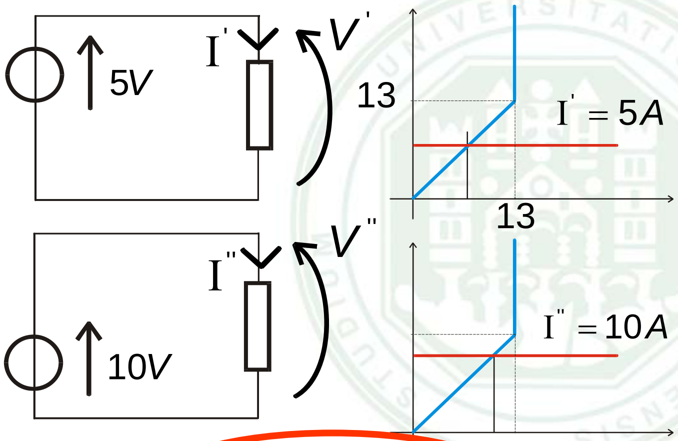




Metodo Tradizionale

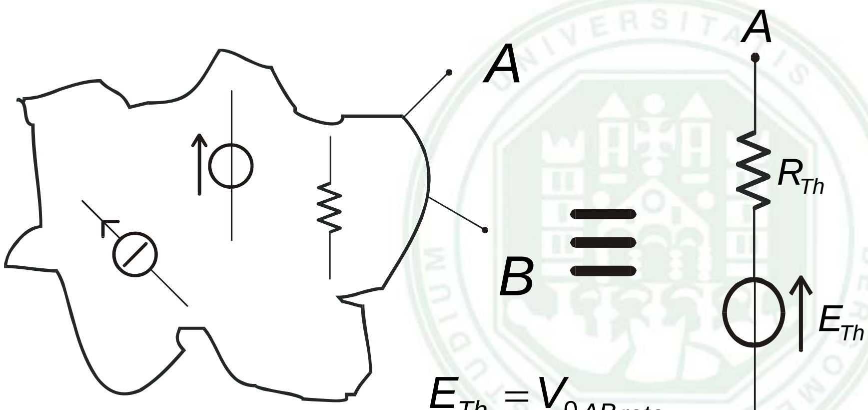


Sovrapposizione



$$I = I' + I'' = \cancel{15A}$$

Teorema di THEVENIN

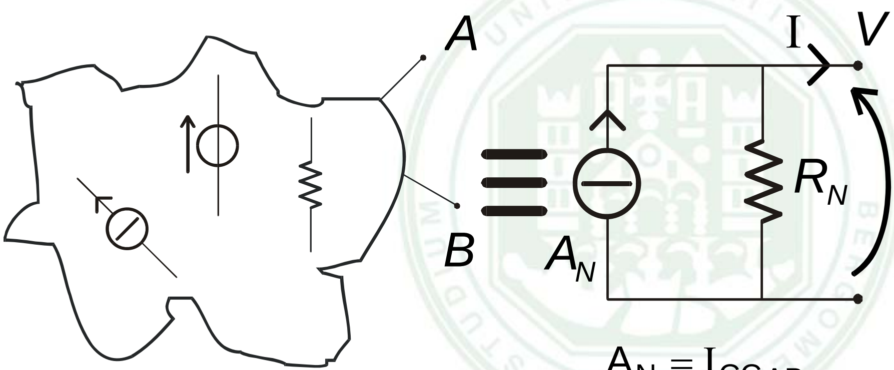


$$E_{Th} = V_{0ABrete}$$

$$R_{Th} = R_{inABrete}$$

LINEARE

Teorema di NORTON

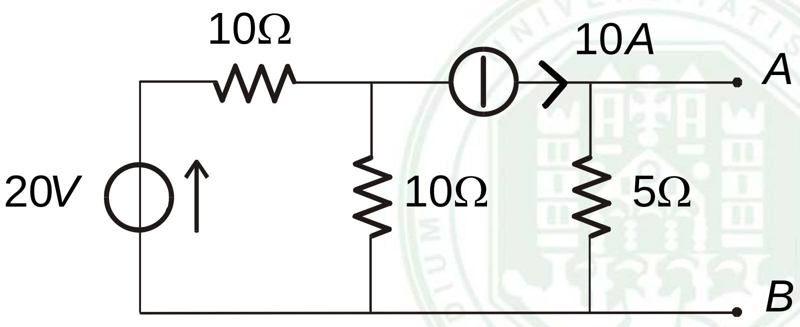


$$A_N = I_{CCABrete}$$

$$R_N = R_{inABrete}$$

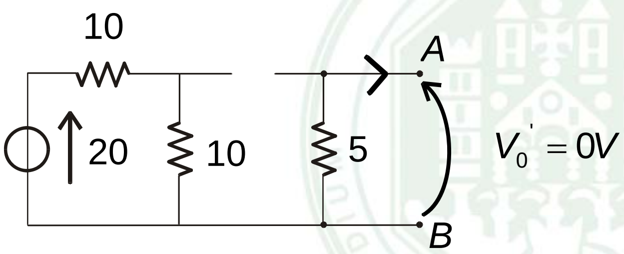
LINEARE

Teorema di THEVENIN

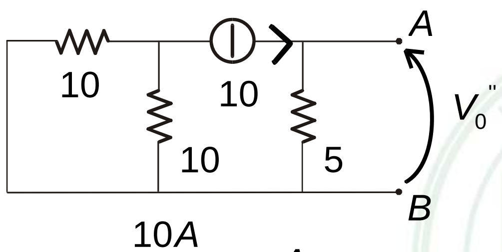


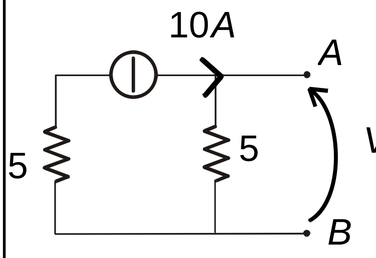
Applicabile ? SI

$$\boxed{E_{th} = ?}$$



$\boxed{E_{th} = ?}$



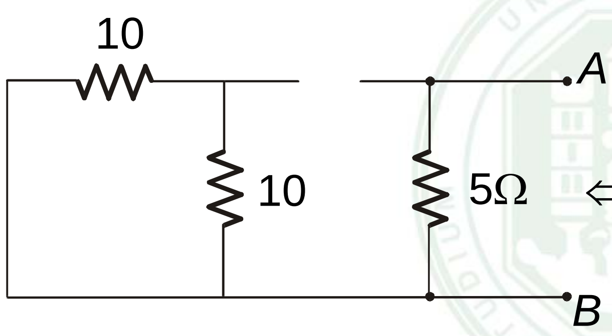


$$V_0'' = 10 \cdot 5 = 50V$$

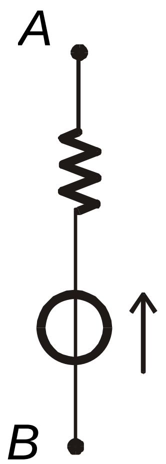
$$V_0 = V_0' + V_0'' = 50V$$
$$E_{th} = V_0 = 50V$$

Teoremi sulle reti elettriche
Teorema di Thevenin
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

$\boxed{R_{in} = ?}$



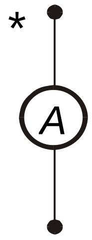
$$\Leftarrow R_{in} = ? = 5\Omega$$



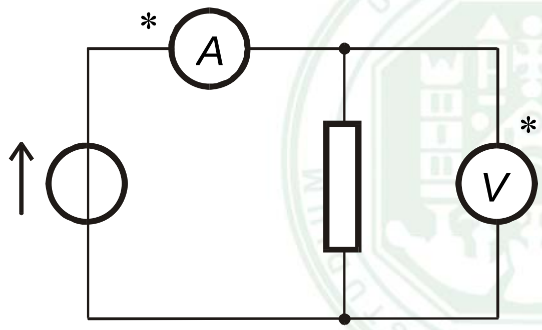
$$R_{th} = 5\Omega$$

$$E_{th} = 50V$$

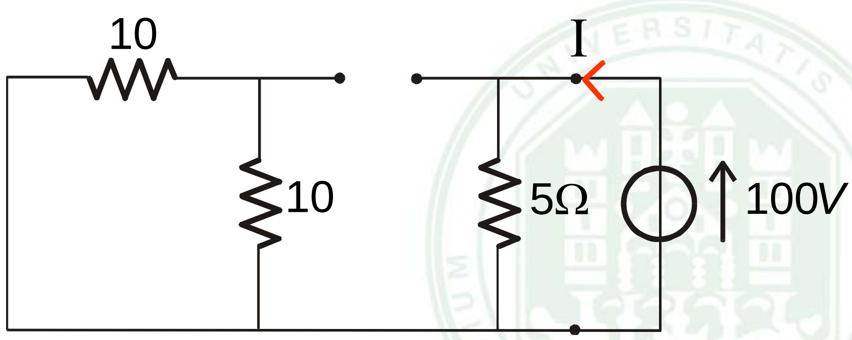
Voltmetri, amperometri (… e ancora convenzioni)



Metodo voltamperometrico

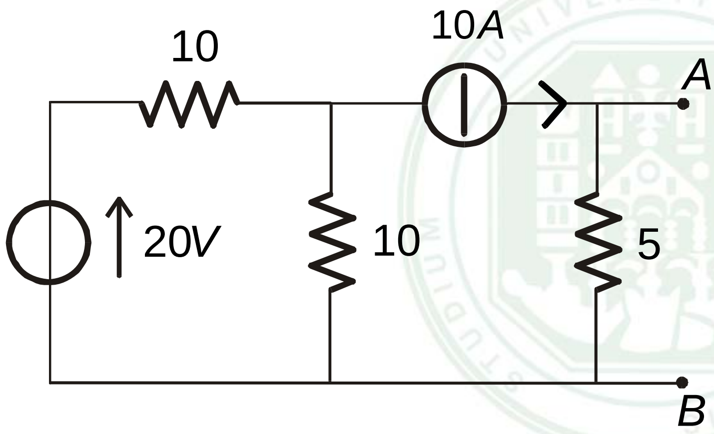


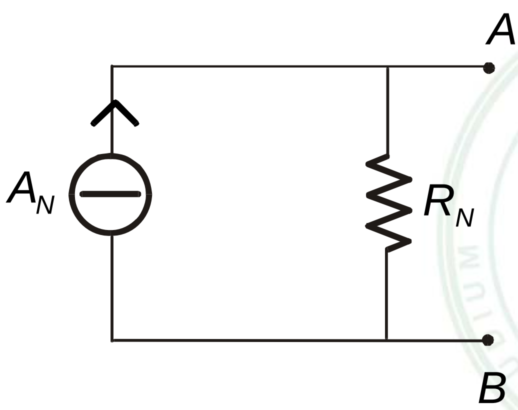
Alternativa per il calcolo della R



$$R_{in} = \frac{100V}{I} = 5\Omega$$

NORTON

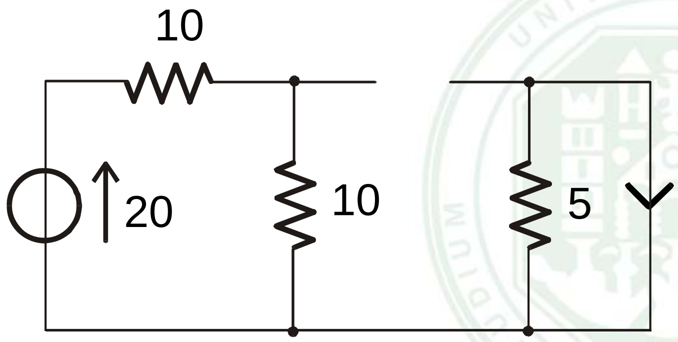




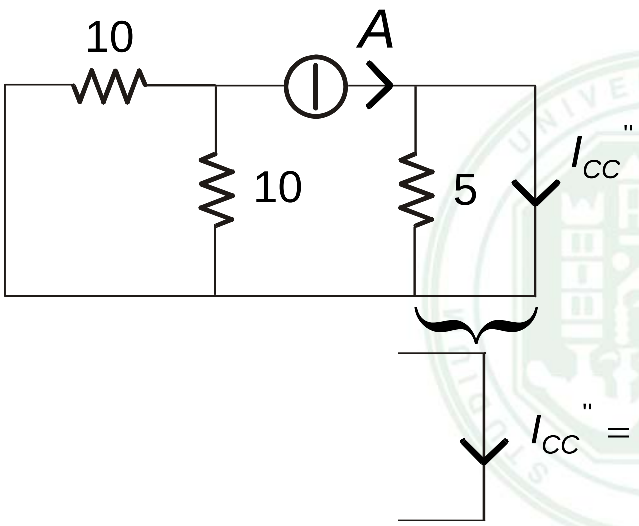
$$A_N = \frac{E_{th}}{R_{th}} = \frac{50}{5} = 10A$$

$$R_N = R_{th} = 5\Omega$$

A_N



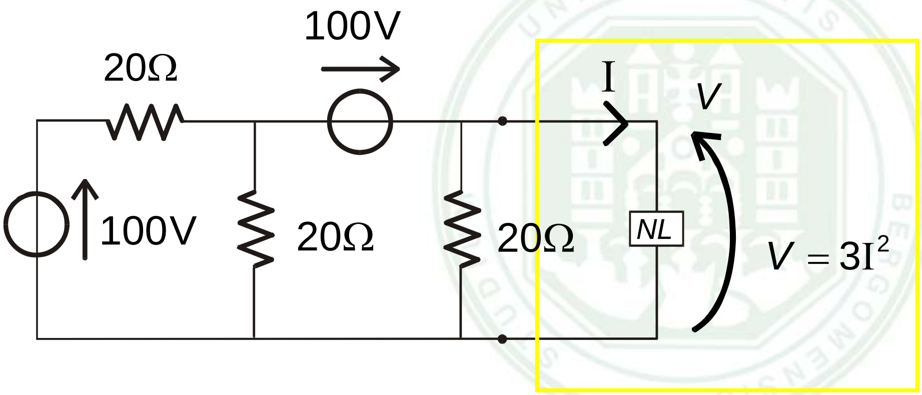
$I_{CC}{}' = 0$



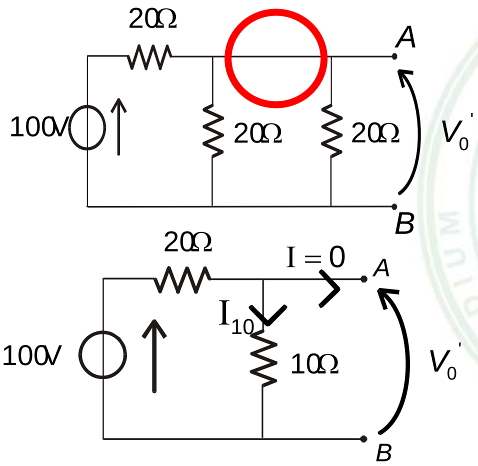
$I_{CC}{}'' = A = 10A$

$I_{CC} = A_N = 10A = I_{CC}{}' + I_{CC}{}''$

Reti con carichi NON lineari



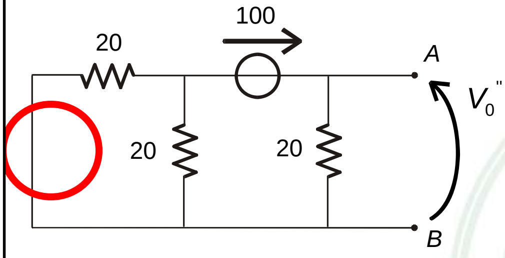
$E_{th} = ?$

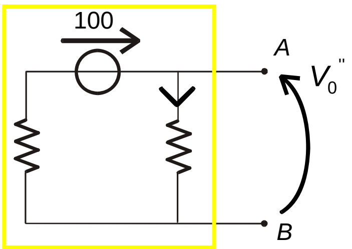


$$I_{10} = \frac{100}{20+10} = \frac{100}{30} A$$

$$V_0' = \frac{100}{3\cancel{0}} \cdot 1\cancel{0} = \frac{100}{3} V$$

Eth



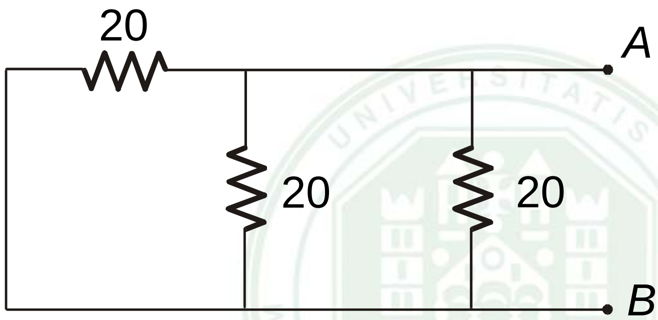


$$I = \frac{100}{30} A$$

$$V_0'' = 20 \cdot \frac{100}{30} = \frac{200}{3} V$$

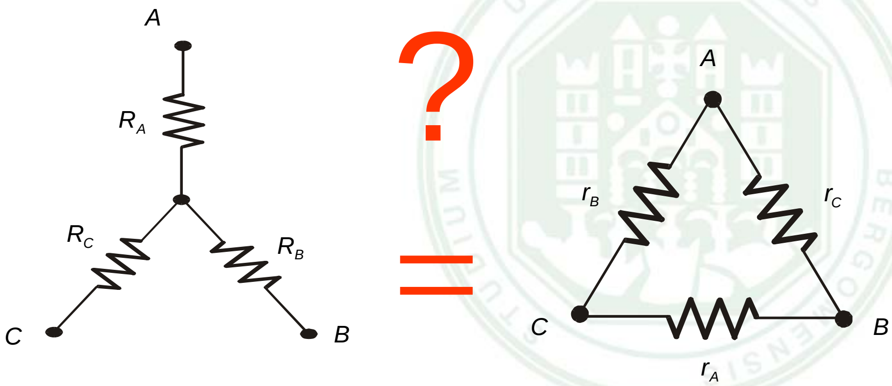
$$V_0 = V_0' + V_0'' = 100V$$

R_{th}

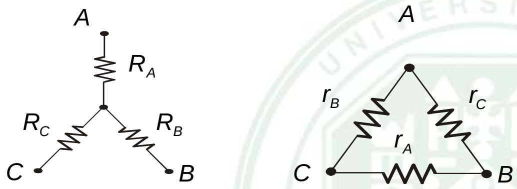


$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}} = \frac{20}{3} \Omega$$

Equivalenza stella/triangolo



Equivalenza stella/triangolo



$$\begin{cases} R_A + R_B = r_C /\!/ (r_A + r_B) \\ R_B + R_C = r_A /\!/ (r_B + r_C) \\ R_C + R_A = r_B /\!/ (r_A + r_C) \end{cases}$$

Equivalenza stella/triangolo

$$\begin{cases} R_A + R_B = r_C /\!/ (r_A + r_B) \\ R_B + R_C = r_A /\!/ (r_B + r_C) \\ R_C + R_A = r_B /\!/ (r_A + r_C) \end{cases}$$

$$R_A - R_C = \frac{r_C (r_A + r_B)}{\Sigma} - \frac{r_A (r_B + r_C)}{\Sigma}$$

$$2R_A = \frac{r_C (r_A + r_B)}{\Sigma} - \frac{r_A (r_B + r_C)}{\Sigma} + \frac{r_B (r_A + r_C)}{\Sigma}$$

$$2R_A = \frac{\cancel{r_C r_A} + r_B r_C - \cancel{r_A r_B} - \cancel{r_A r_C} + \cancel{r_B r_A} + r_B r_C}{r_A + r_B + r_C}$$

$$\cancel{2}R_A = \frac{\cancel{2} r_B r_C}{r_A + r_B + r_C}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Equivalenza stella/triangolo

$$R_A = \frac{r_B r_C}{r_A + r_B + r_C}$$

$$R_B = \frac{r_A r_C}{r_A + r_B + r_C}$$

$$R_C = \frac{r_A r_B}{r_A + r_B + r_C}$$

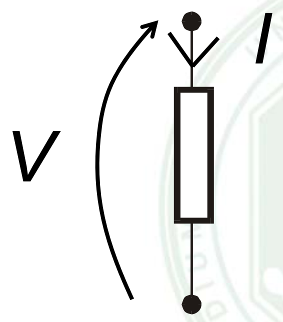
Equivalenza triangolo/stella

$$\begin{cases} r_A = \dfrac{R_A R_B + R_A R_C + R_C R_B}{R_A} \\ r_B = \qquad idem \\ r_C = \end{cases}$$

… se le R sono tutte uguali

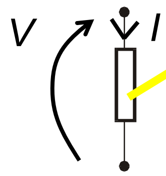
$$r = 3R$$

Potenza elettrica



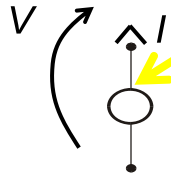
$$P = V \cdot I$$

Potenza elettrica



$$\left.\begin{array}{l} V;I > 0 \\ V;I < 0 \end{array}\right\} P > 0$$

$$V;I \text{ discordi} \} P < 0$$

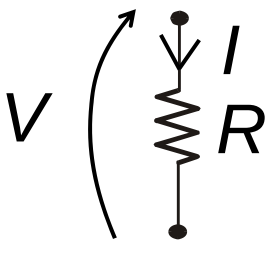


$$\left.\begin{array}{l} V;I > 0 \\ V;I < 0 \end{array}\right\} P > 0$$

$$V;I \text{ discordi} \} P < 0$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

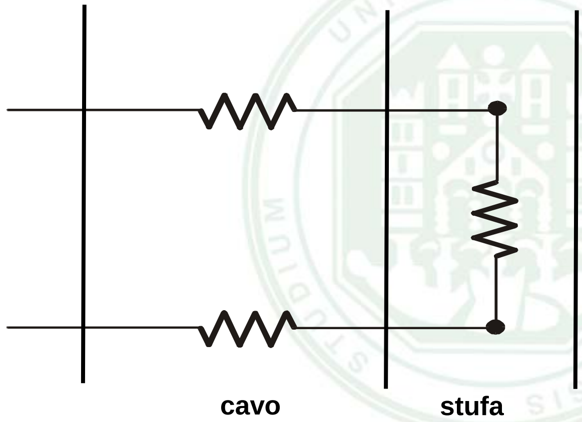
Potenza elettrica



$$P = V \cdot I \quad V = RI$$

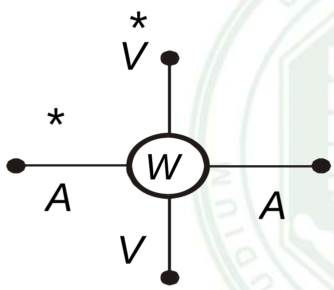
$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

Effetto Joule

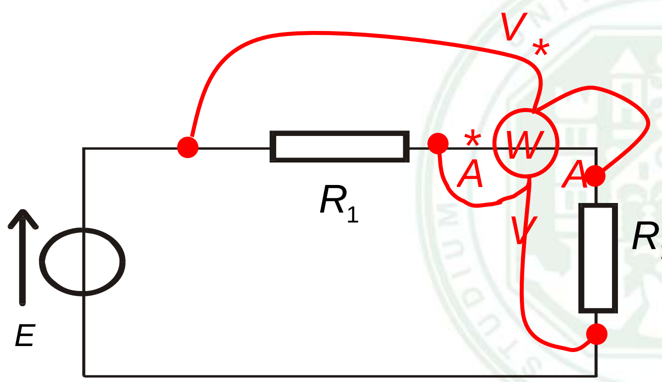


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Misure di potenza - Wattmetro



Misure di potenza - Wattmetro



Corso di Elettrotecnica NO
Angelo Baggini

Rappresentazione e analisi dei circuiti magnetici

Ipotesi

$$\cancel{\frac{d}{dt}} \qquad I \neq 0$$

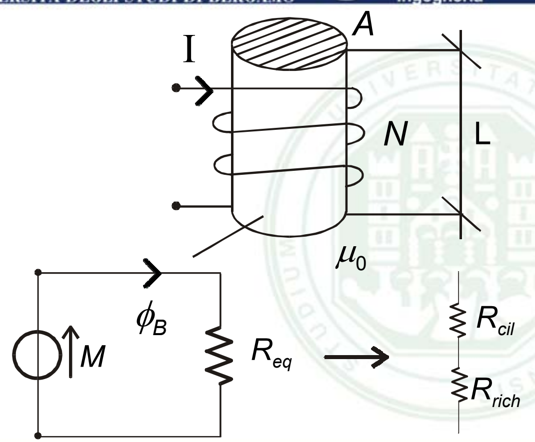
Equazioni di Maxwell in B

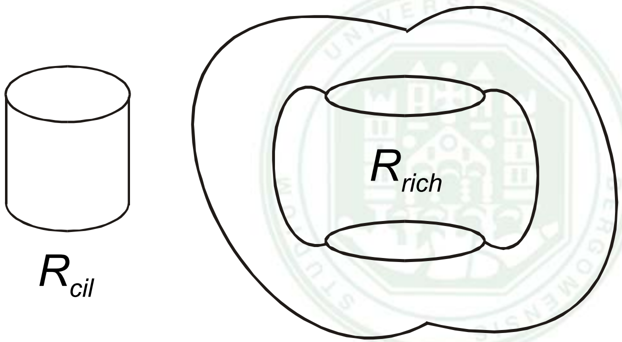
$$\int \overline{B}\, d\overline{S} = 0$$

$$\int_e \overline{B} \cdot \overline{dl} = \mu_0 I + \mu\varepsilon_0 \cancel{\frac{d}{dt}} \int_{S(e)} \overline{E} \cdot \overline{ds}$$

Equivalenza formale con le equazioni del campo elettrico

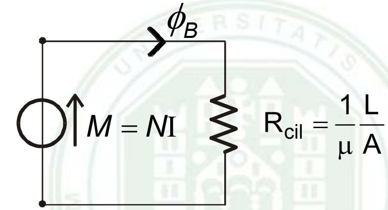
C. Elettrici	C. Magnetici
I	Φ_B
J	B
V, E, fem	U, M, fmm
$\sum V = 0$	$\sum U = 0$
$\sum I = 0$	$\sum \Phi_B = 0$
$R = \rho \frac{l}{S}$	$R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}$
$V = RI$	$U = R\Phi$





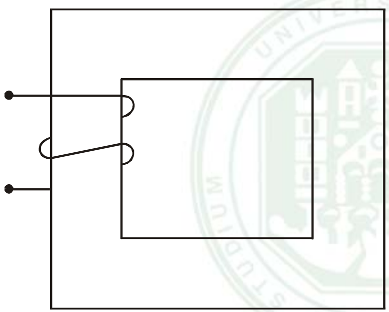
$$R_{cil} = \frac{1}{\mu_0}\frac{L}{A}$$

$$R_{rich} << R_{cil}$$



$$\Phi_B = \frac{M}{R_{cil}} = \frac{NI}{\frac{1}{\mu}\frac{L}{A}}$$

$$n = \frac{N}{L}$$

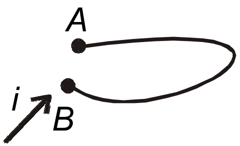


- **Rimuoviamo l'ipotesi**

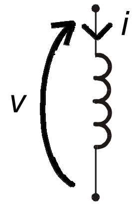
$$\frac{d}{dt} = 0$$

Simboli minuscoli!

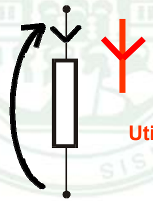
Induzione elettromagnetica



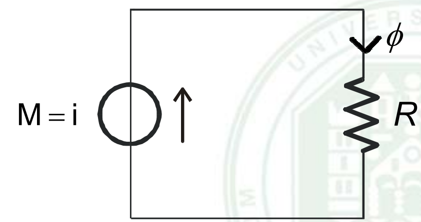
$$\int_e \overline{E}\,d\overline{l} = -\frac{d\int_S \overline{B}\,d\overline{s}}{dt} \qquad v_{AB} = -\frac{d\Phi_C}{dt}$$



$$v = \frac{d\Phi_C}{dt}$$



Utilizzatori



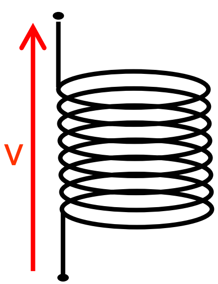
$$\phi = \frac{i}{R}$$

$$v = \frac{\frac{di}{R}}{dt} = \frac{1}{R}\frac{di}{dt}$$

Induttanza

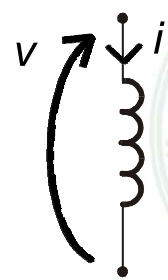
$$e = \frac{d\Phi_C}{dt} \longleftarrow \phi_C = N\phi \qquad e = \frac{N}{R}\frac{di}{dt}$$

$$\phi_C = \frac{Ni}{R} \qquad v = N\,e$$



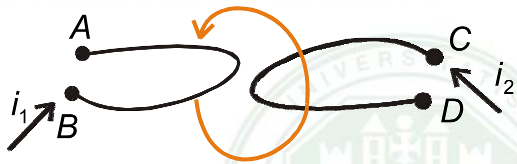
$$v = \frac{N^2}{R}\frac{di}{dt} \qquad \frac{N^2}{R} = L$$

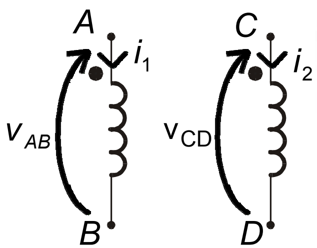
Induttanza



$$v = L\frac{di}{dt}$$

Henry *H*

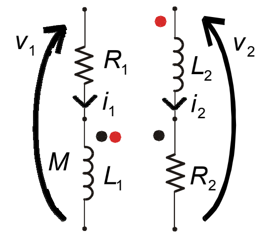




$$v_{AB} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_{CD} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

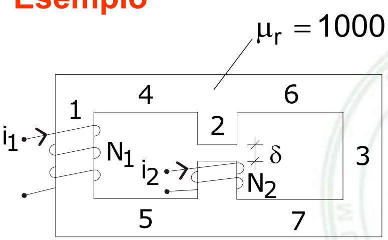
$$M_{12} = M_{21} = \frac{N_1 N_2}{R}$$



$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Esempio



$L_1 = ?\ L_2 = ?\ M = ?$

$N_1 = 50$

$N_2 = 60$

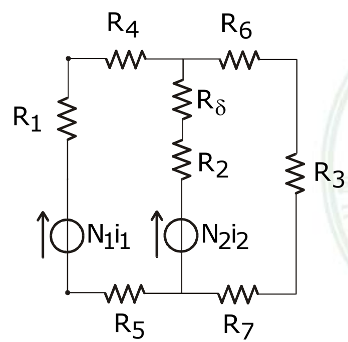
$l_1 = l_2 = l_3 = 1\,\mathrm{m}$

$l_4 = l_5 = l_6 = l_7 = 0{,}5\,\mathrm{m}$

$\delta = 1\,\mathrm{mm}$

$A_1 = A_3 = 0{,}2\,\mathrm{m}^2$ $\quad A_2 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = 0{,}25\,\mathrm{m}^2$

Esempio - modello



$$R_1 = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l_1}{A_1} \cong 4000\,\mathrm{H}^{-1}$$

$$R_2 = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l_2}{A_2} \cong 3200\,\mathrm{H}^{-1}$$

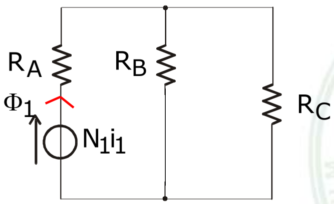
$$R_\delta = \frac{1}{\mu_0} \frac{\delta}{A_2} \cong 3200\,\mathrm{H}^{-1}$$

$$R_3 = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l_3}{A_3} \cong 4000\,\mathrm{H}^{-1}$$

$$R_4 = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l_4}{A_4} \cong 1600\,\mathrm{H}^{-1}$$

$$R_5 = R_6 = R_7 = R_4$$

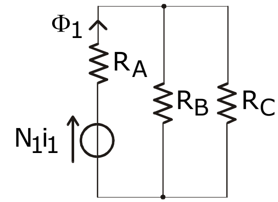
Esempio – L1



$$R_A = 7200\,H^{-1}$$
$$R_B = 6400\,H^{-1}$$
$$R_C = 7200\,H^{-1}$$

$$\frac{N_1^2}{R_{eq}} = \frac{\Phi_{C11}}{i_1} = L_1$$

Esempio – L1



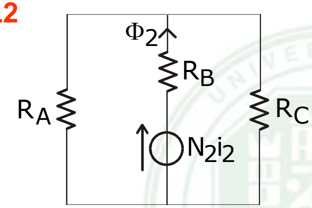
$$\Phi_{C11} = N_1\Phi_1 \qquad \Phi_1 = \frac{N_1 i_1}{R_{eq}}$$

$$\Phi_1 = \frac{N_1 i_1}{10600}$$

$$R_{eq} = R_A + \frac{R_B R_C}{R_B + R_C} = 10600\,H^{-1} \qquad \Phi_{C11} = \frac{N_1^2 i_1}{10600}$$

$$L_1 = \frac{N_1^2 i_1}{10600\, i_1} = 0{,}236\,H^{-1}$$

Esempio – L2

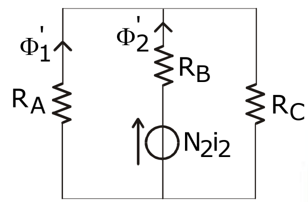


$$L_2 = \frac{\Phi_{C22}}{i_2} \qquad \Phi_{C22} = N_2\Phi_2 \qquad \Phi_2 = \frac{N_2 i_2}{R'_{eq}}$$

$$R'_{eq} = R_B + \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} = 10000\,H^{-1} \qquad \Phi_2 = \frac{N_2 i_2}{10000}$$

$$L_2 = \frac{N_2^2 \cancel{i_2}}{10000\cancel{i_2}} = 0{,}36\,H$$

Esempio – M12



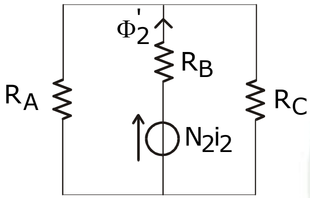
$$M_{12} = \frac{N_1 N_2}{R'_{eq}} = \frac{\Phi_{C12}}{i_2}$$

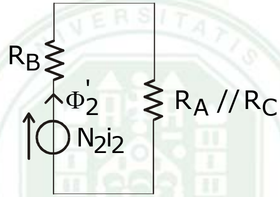
$$\Phi_{C12} = N_1\Phi'_1 \qquad \Phi'_2 = \frac{N_2 i_2}{R'_{eq}} = \frac{N_2 i_2}{10000}$$

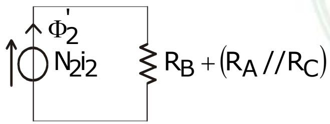
$$\Phi'_1 = -\Phi'_2 \frac{R_C}{R_A + R_C} = -\frac{N_2 i_2}{20000} \qquad \Phi_{C12} = -\frac{N_1 N_2 i_2}{20000}$$

$$M_{12} = -\frac{N_1 N_2 i_2}{20000\, i_2} = -0{,}15\,H$$

Esempio – M12 - Req

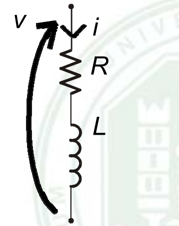






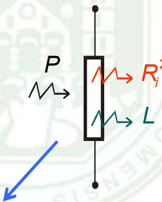
$$\Phi_2' = \frac{N_2 i_2}{R_B + (R_A // R_C)}$$

Potenza del campo magnetico



$$i\,v = (R_i + L\frac{d_i}{d_t})\,i$$

$$P = R_i^2 + L_i\frac{d_i}{d_t}$$

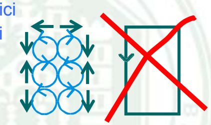


Comportamento magnetico della materia

materiali

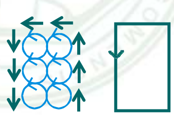
diamagnetici
M ≠ magneti
$\mu_r < 1$
$\mu \cong \mu_0$

paramagnetici
M = magneti
$\mu_r > 1$
$[\mu \cong \mu_0]$

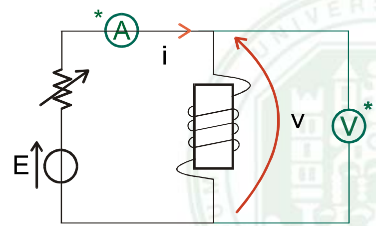


Ferromagnetici
$\mu_r >> 1$

Magneti permanenti



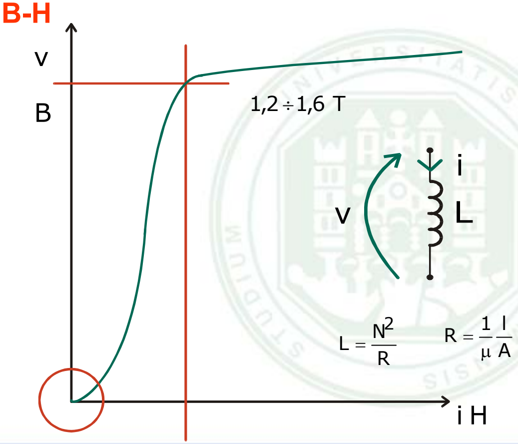
Materiali ferromagnetici



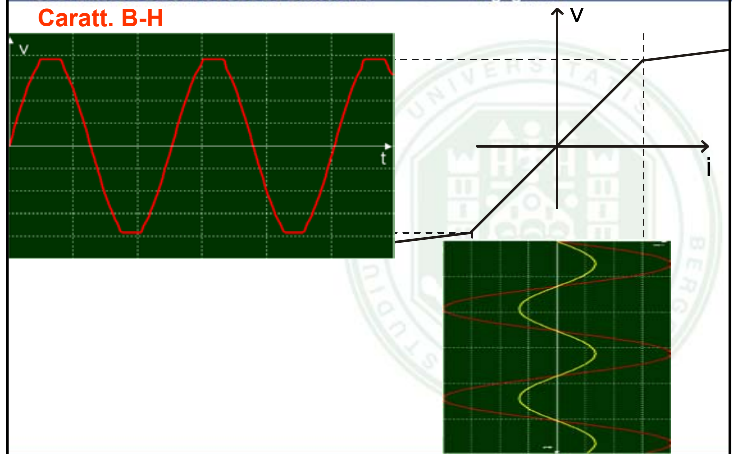
$$v = -\frac{d\Phi_{eB}}{dt} \qquad \oint H\,dl = \mu_0\, i$$

$$v \equiv B \qquad i \equiv H \qquad B = \mu H$$

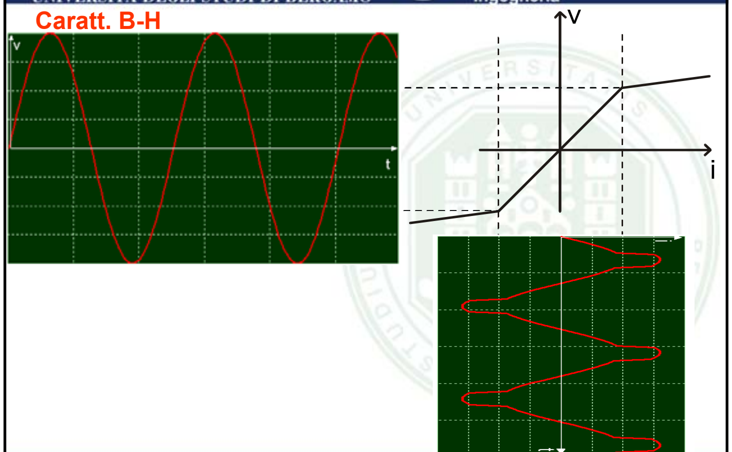
Caratt. B-H



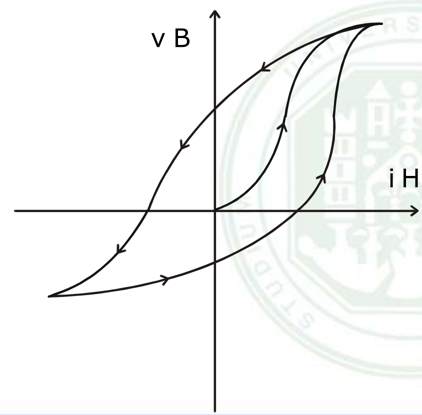
Caratt. B-H



Caratt. B-H



Caratt. B-H



Perdite:
- Per isteresi
- Per correnti parassite

Cifra di perdita

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di
Ingegneria

Corso di
Elettrotecnica NO

ver. 0000B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di
Ingegneria

Corso di Elettrotecnica NO

Angelo Baggini

Cap. 4

Rappresentazione e analisi delle reti elettriche in regime variabile
Regime PAS

Ipotesi

Abbiamo già rimosso $\frac{d}{dt} = 0$

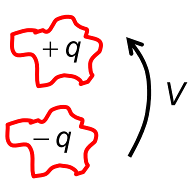
$$\oint_e \overline{E}\,\overline{dl} = -\frac{d\phi}{dt} \qquad \left(\oint_e \overline{E}\,\overline{dl} = 0 \rightarrow \sum V = 0 \right)$$

Adesso rimuoviamo l'ipotesi di impossibilità di accumulo di carica

$$\oint_S \overline{J} \cdot \overline{S} = -\frac{dq}{dt} \qquad \left(\oint_S \overline{J}S = 0 \rightarrow \sum I = 0 \right)$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

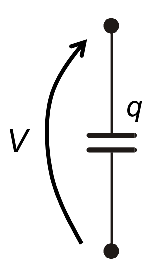
Fenomeno capacitivo



$$\frac{q}{V} = \text{costante} = C$$

U.M.

farad F

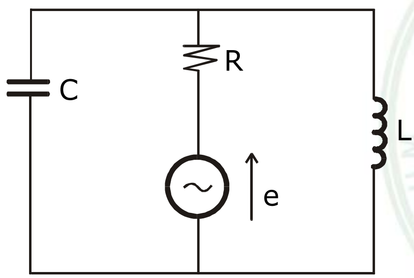


$$C = \frac{q}{V}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Circuito in regime variabile - Esempio



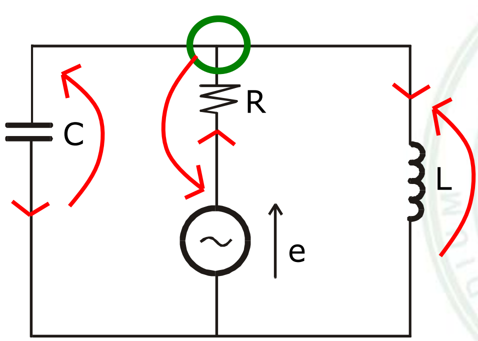
$$e(t) = 10\ sen\ t\ V$$

$$C = 1\,\mu F$$

$$R = 2\,\Omega$$

$$L = 1\,m H$$

Circuito in regime variabile - Esempio



$$i_R = i_C + i_L$$

$$v_C + v_R - e = 0$$

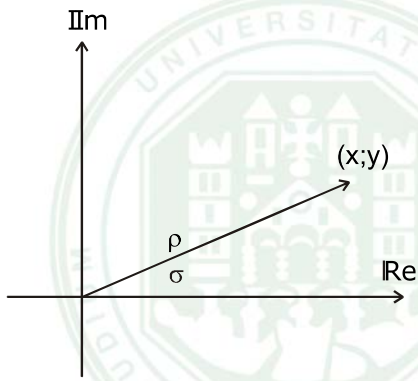
$$e - v_R - v_L = 0$$

$$v_R = Ri$$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$v_C = \int_{-\infty}^{t} \frac{i_c}{c}\,dt$$

Richiami sui numeri complessi

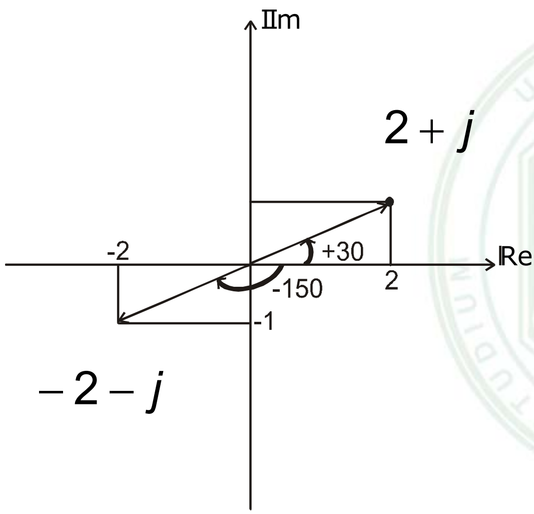


$$x + jy = \rho e^{j\vartheta} = \rho\angle\vartheta$$

$$x = \rho\cos\vartheta \rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho\, sen\,\vartheta \rightarrow \vartheta = atg\frac{y}{x}$$

Richiami sui numeri complessi



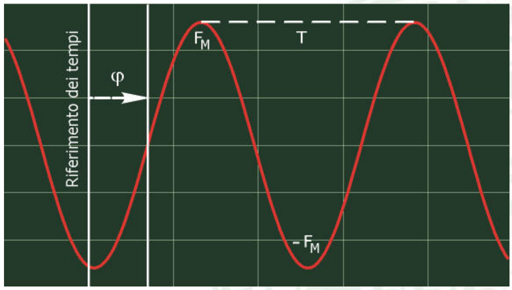
$$\rho_1 = \sqrt{4+1}$$

$$\rho_2 = \sqrt{4+1}$$

$$\vartheta_1 = atg\frac{1}{2}$$

$$\cancel{\vartheta_2 = atg\frac{1}{2}}$$

Funzione Periodica Alternata Sinusoidale (PAS)



$$T = \frac{1}{f}$$

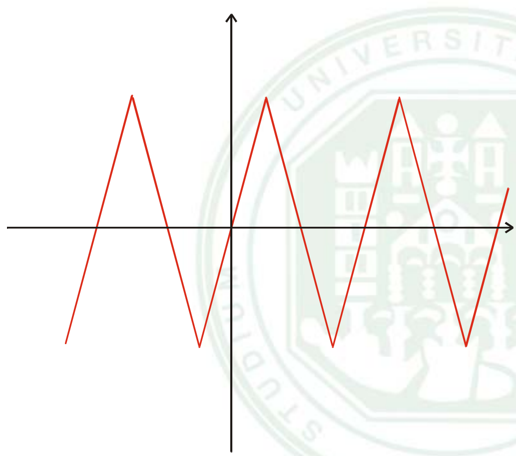
$$\omega = 2\pi f$$

$$f(t) = F_M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$(F_M; \omega; \varphi)$$

$$f' \longrightarrow PAS - \text{stessa } \omega$$

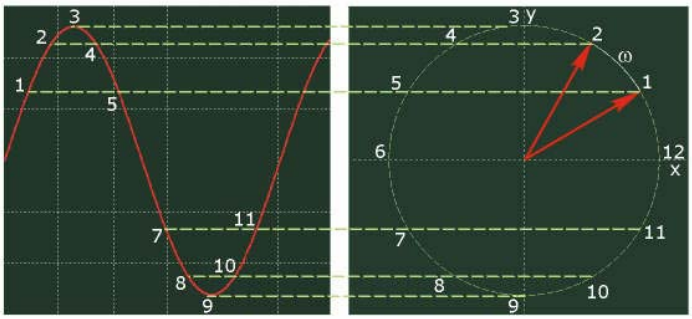
$$\int f dt \longrightarrow PAS - \text{stessa } \omega$$



Forma di Eulero di una funzione PAS

$$f(t) = F_M \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\,(F_M e^{\,j(\omega t+\varphi)}) =$$

$$= \mathrm{Re}\,(F_M[\cos(\omega t + \varphi) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)])$$



Derivazione e integrazione

$$f' = \mathrm{Re}(j\omega F_M e^{j(\omega t+\varphi)}) = \mathrm{Re}(\omega F_M e^{j(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})})$$

$$\int f dt = \mathrm{Re}(\frac{1}{j\omega} F_M e^{j(\omega t+\varphi)}) = \mathrm{Re}(\frac{F_M}{\omega} e^{j(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})})$$

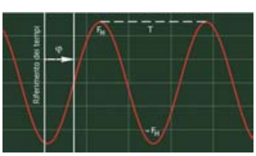
Funzione “cappello”

$$\bar{f}(t) = F_M e^{j(\omega t+\varphi)}$$

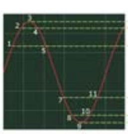
$$f' = j\omega F_M e^{j(\omega t+\varphi)} = \omega F_M e^{j(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})}$$

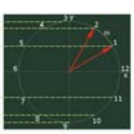
$$\int f dt = \frac{1}{j\omega} F_M e^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{F_M}{\omega} e^{j(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})}$$

Dominio del tempo



$f(t) = F_M \cos(\omega t + \varphi)$



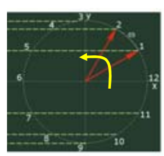


$f(t) = F_M \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(F_M e^{j(\omega t+\varphi)})$

$\frac{df}{dt} = -\omega F_M \mathrm{sen}(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}(j\omega F_M e^{j(\omega t+\varphi)})$

$\int$......

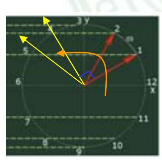
Dominio dei vettori rotanti



$\bar{f}(t) = F_M e^{j(\omega t+\varphi)}$

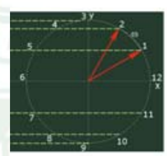
$\frac{d\bar{f}}{dt} = j\omega \bar{f}(t)$

$\int \bar{f} dt = \frac{\bar{f}(t)}{j\omega}$



Supponendo tutti con la stessa w

Dominio dei fasori



$\bar{F} = \frac{F_M}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$

$\frac{d\bar{F}}{dt} = \bar{F} j\omega$

$\int \bar{F} dt = \frac{\bar{F}}{j\omega}$

Derivate e integrali nel tempo: idem, ma non ruotano

Rappresentazione fasoriale

$$f(t) = \sqrt{2}\,10\cos(50t + \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \bar{F} = 10 e^{j\frac{\pi}{3}}$$

Rappresentazione fasoriale

$$\bar{I} = 5\,e^{j\frac{\pi}{2}}\,A \quad \text{nota}\ \omega = 10\ \text{rad}\cdot s^{-1}$$

$$\to i(t) = \sqrt{2}\,5\cos(10t + \frac{\pi}{2})$$

Rappresentazione fasoriale

$$\overline{E} = 5V \quad nota\ \omega = 10\ rad\ s^{-1} \rightarrow e(t) = \sqrt{2}\,5\cos(10t)$$

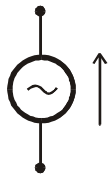
Rappresentazione fasoriale

$$\overline{G} = 5 + j5 \ \text{nota}\ \omega = 10\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$$

$$\overline{G} = \sqrt{50}\ e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\rightarrow g(t) = \underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}}_{10}\cos(10t + \frac{\pi}{4})$$

Generatore di tensione



$$e(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$$

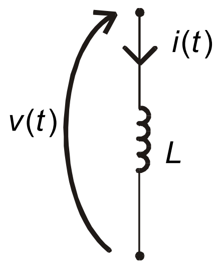
$$\bar{E} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$$

Generatore di corrente

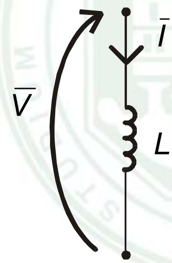
$$a(t) = A_M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\bar{A} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$$

Induttore



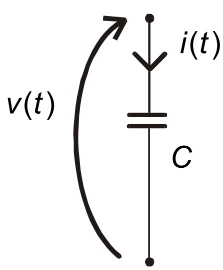
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



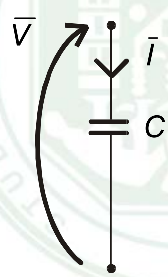
$$\bar{V} = j\omega L\,\bar{I}$$

Rappresentazione dei bipoli in regime PAS
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Condensatore



$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$



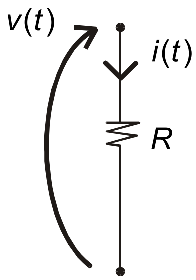
$$\bar{I} = C\,j\omega\bar{V}$$

$$\bar{V} = \frac{-j}{\omega C}\bar{I}$$

< 0

Corso di Elettrotecnica NO - Capitolo 4 – **Rappresentazione e Analisi delle reti elettriche in regime variabile – regime PAS**

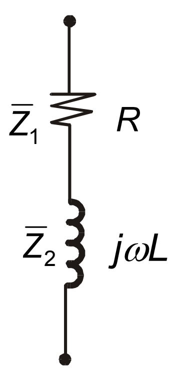
Resistore



$$v(t) = Ri(t)$$

$$\bar{V} = R\bar{I}$$

Impedenza



$$\bar{Z} = R + j\omega L = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

$$\bar{V} = \bar{Z}\,\bar{I}$$

Impedenza

Resistenza   Reattanza

$$\overline{Z} = R \pm jX$$

$$\overline{V} = \overline{Z}\,\overline{I}$$

Ammettenza

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = G \pm jB$$

Conduttanza   Suscettanza

Rappresentazione dei bipoli
in regime PAS
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Impedenza

$$X = \omega L > 0 \;\; \text{reattanza induttiva}$$

$$X = \frac{-1}{\omega C} < 0 \;\; \text{reattanza capacitiva}$$

Ammettenza

$$\overline{Y} = G \pm jB = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R + jX} \neq \frac{1}{R} \pm j\frac{1}{X}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - \frac{jX}{R^2 + X^2}$$

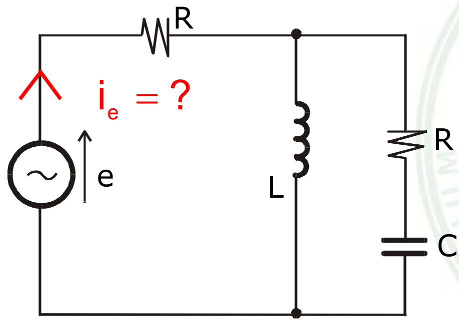
Corso di Elettrotecnica NO - Capitolo 4 – **Rappresentazione e Analisi delle reti elettriche in regime variabile – regime PAS**

Impedenza

Impedenze e fasori sono rappresentati con numeri complessi, ma sono due cose diverse

Le impedenze non sono fasori!!

Esempio

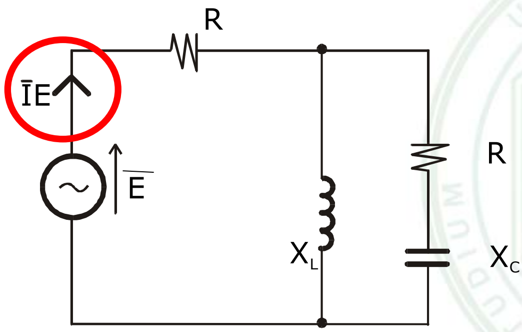


$$e = \sqrt{2}\,10\cos(10t + \frac{\pi}{2})$$

$$L = 1H \qquad R = 5\Omega$$

$$C = \frac{1}{10}F$$

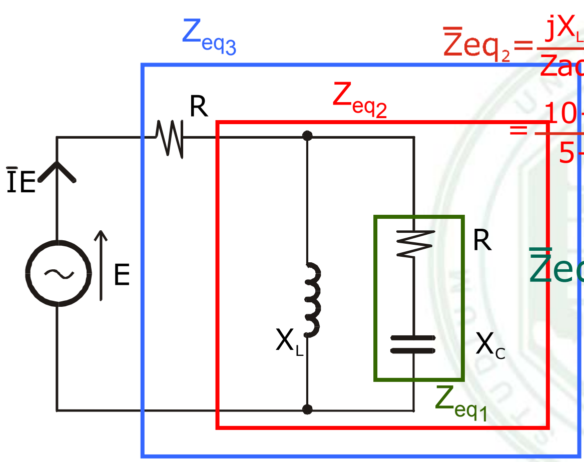
Trasformazione nel dominio dei fasori



$$\bar{E} = 10e^{j\frac{\pi}{2}}\ V = 0 + j10\ \ V$$

$$X_L = \omega L = 10 \cdot 1 = 10\Omega$$

$$X_C = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-1}{\frac{1}{10} \cdot 10} = -1\Omega$$



$$\bar{Z}eq_2 = \frac{jX_L\ Zaq_1}{Zaq_1 + jX_L} = \frac{j10(5-j)}{5-j+j10}$$

$$= \frac{10+j50}{5+j9} = 4{,}72 + j1{,}51\Omega$$

$$\bar{Z}eq_1 = R + jX_c = 5 - j\Omega$$

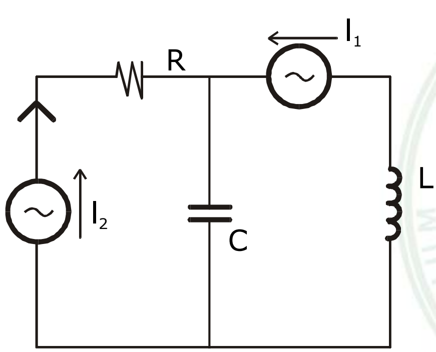
$$\bar{Z}eq_3 = R + \bar{Z}eq_2 = 5 + 4{,}72 + j1{,}51 = 9{,}72 + j1{,}51\Omega$$

$$\bar{I}_E = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{eq3}} = \frac{10e^{j\frac{\pi}{2}}}{9{,}72 + j1{,}51} = \underbrace{0{,}16 + j}_{} = \boxed{\sqrt{0{,}16^2 + 1^2}}\, e^{j\,\boxed{\mathrm{tg}\frac{1}{0{,}16}}}\, A$$

$$i_e = \boxed{\sqrt{2} \cdot 1{,}027}\cos(10t + \boxed{1{,}41})\quad A$$

Se volessi le altre correnti potrei procedere
con un partitore di corrente

Esempio 2

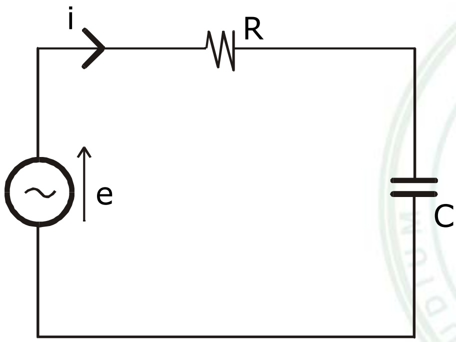


$$I_1 = \sqrt{25}\,\underline{\underline{sen}}(5t + \frac{\pi}{3})$$

cos

$$I_2 = \sqrt{23}\,\underline{\underline{\cos}}(5t + \frac{\pi}{6})$$

Esempio 3

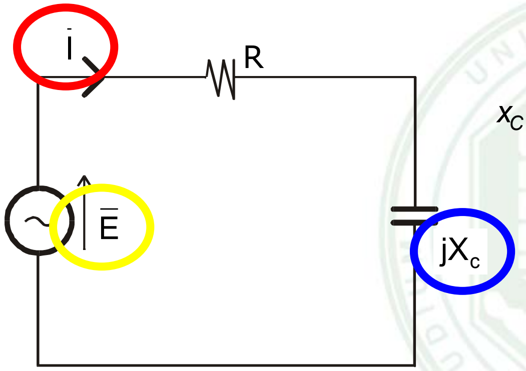


$$e = \sqrt{2}10\ \mathrm{sen}(10t)\ \mathrm{V}$$

$$R = 10\Omega$$

$$C = 1mF$$

Trasformazione nel dominio dei fasori



$$X_C = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-1}{10 \cdot 10^{-3}} = -100\Omega$$

$$e = \sqrt{2}10\ \mathrm{sen}(10t) = \sqrt{2}10\ \cos(10t - \frac{\pi}{2})$$

$$\bar{E} = 10e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

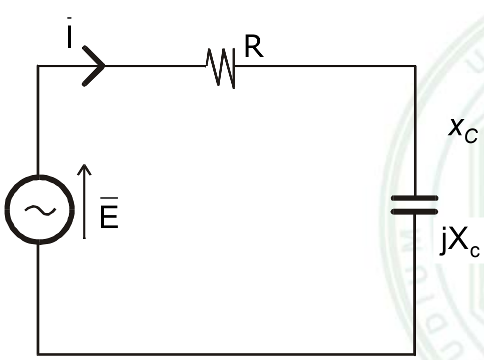
Soluzione nel dominio dei fasori

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{10e^{-j\frac{\pi}{2}}}{10 - j\,100} = 0{,}099 - j\,0{,}0099 = 0{,}1e^{-j\,0{,}0996} \quad A$$

RI-trasformazione nel dominio del tempo

$$i = \sqrt{2}0{,}1\cos(10t - 0{,}099) \;\; A$$

Esempio 3 bis – Trasformazione fasori



$$x_C = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-1}{10 \cdot 10^{-3}} = -100\Omega$$

$$e = \sqrt{2}10\ \mathrm{sen}(10t) \qquad \bar{E} = 10V$$

Soluzione nel dominio dei fasori

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{10}{10 - j\,100} = 0{,}0099 + j\,0{,}099 = 0{,}1e^{j\,1{,}471}$$

RI-trasformazione nel dominio del tempo

$$i = \sqrt{2} \cdot 0{,}1\,\mathrm{sen}(10t + 1{,}471)\ \ \mathrm{A}$$

$$= \sqrt{2}0{,}1\cos(10t + 1{,}471 - \frac{\pi}{2}) =$$

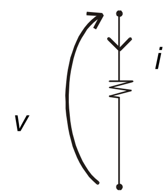
$$= \sqrt{2}0{,}1\cos(10t - 0{,}099)\ \ \mathrm{A}$$

Potenza

$$P = V \cdot I$$

$$p = v \cdot i$$

Potenza - Resistore



$$v = V_M \cos(\omega t + \delta)$$

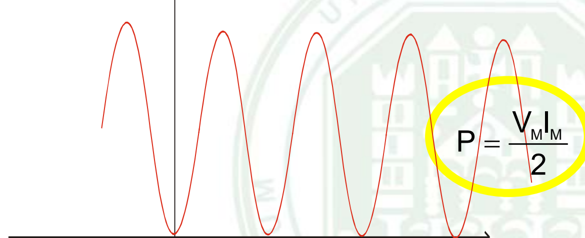
$$i = \frac{V}{R}$$

$$i = \frac{V_M}{R} \cos(\omega t + \delta) = I_M \cos(\omega t + \delta)$$

$$p = v \cdot i = V_M \cdot I_M \cdot \cos^2(\omega t + \delta) =$$

$$= V_M \cdot I_M \frac{1 + \cos\left(2(\omega t + \delta)\right)}{2} = \frac{V_M \cdot I_M}{2} + \frac{V_M \cdot I_M}{2} \cos 2(\omega t + \delta)$$

Potenza - Resistore



Definiamo

Potenza attiva = valor medio potenza istantanea

Simbolo P - Unità di misura watt (W)

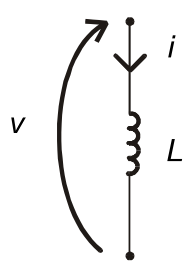
Valore efficace

$$P = \frac{V_M I_M}{2} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}\frac{I_M}{\sqrt{2}} = V\,I$$

PAS: $$\mathrm{V_{eff}} = \frac{\mathrm{V_M}}{\sqrt{2}}$$

f ∀ : $$Veff = \sqrt{\frac{1}{T}\int f^2 dt}$$ RMS

Potenza - Induttore



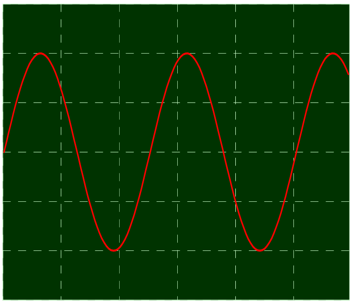
$$v = V_M \cos(\omega t + \delta) \qquad \bar{V} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} e^{j\delta}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{j\omega L} = \frac{\bar{V}}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{V_M}{\omega L\sqrt{2}} e^{j(\delta - \frac{\pi}{2})}$$

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{V_M}}{\omega \mathrm{L}} \cos(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2}) = \mathrm{I_M}\,\mathrm{sen}(\omega t - \delta)$$

Potenza - Induttore

$$p = V_M I_M \cos(\omega t + \delta)\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta) =$$
$$= \frac{V_M I_M}{2}\,\mathrm{sen}\,2(\omega t + \delta)$$



Definiamo

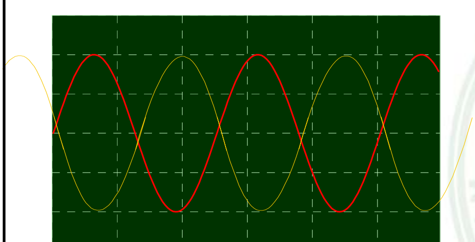
Potenza reattiva = Valore massimo della potenza PAS

Simbolo **Q**

Unità di misura voltamperereattivo (var)

$$Q_L = \frac{V_M I_M}{2} = VI$$

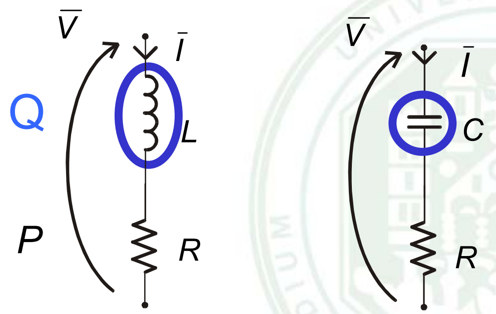
Potenza reattiva



< 0 $\quad Q_C = -VI$

> 0 $\quad Q_L = \frac{V_M I_M}{2} = VI$

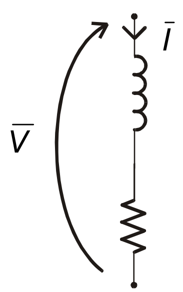
Potenza Apparente complessa

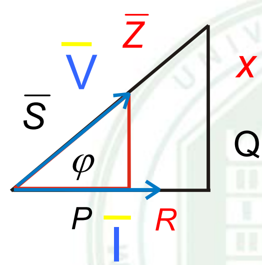


$$P \pm jQ = \bar{S} = \bar{V}\,\bar{I}^*$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Potenza apparente





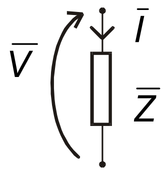
$$|\bar{S}| = S \;\; \textit{Potenza Apparente VA}$$

$$\bar{S} = \bar{V}\,\bar{I}^* = VI\cos\varphi + jVI\operatorname{sen}\varphi$$

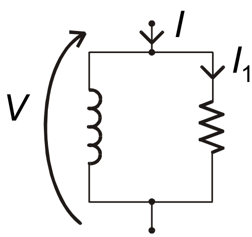
$$\cos\varphi = \text{Fattore di potenza}$$

Potenza apparente

$$\overline{S} = P + jQ = \overline{V}\,\overline{I}^*$$

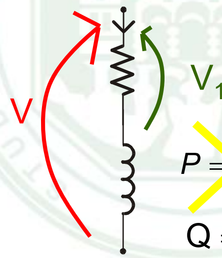


$$\overline{V} = \overline{Z}\,\overline{I} \qquad \overline{S} = \frac{V^2}{\overline{Z}^*} = \overline{Z}\,I^2$$



$$P = \frac{V^2}{R} = \cancel{RI^2}$$

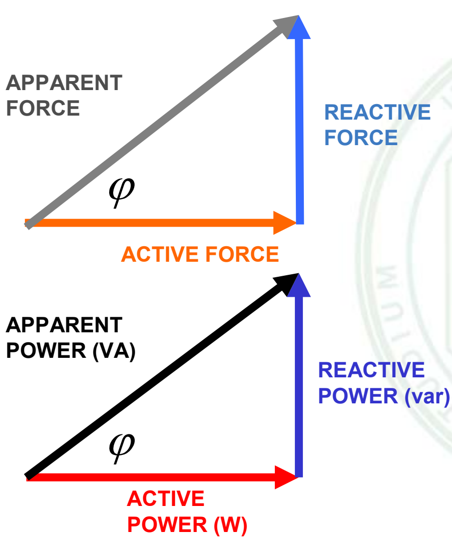
Q = ...

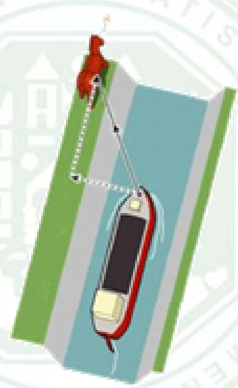


$$P = \cancel{\frac{V_1^2}{R}} = RI^2$$

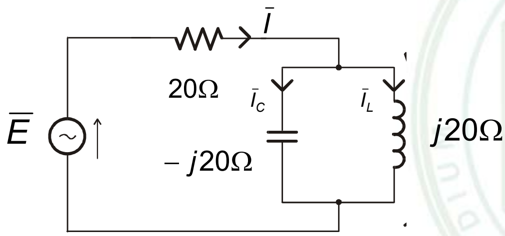
Q = ...

Potenza apparente





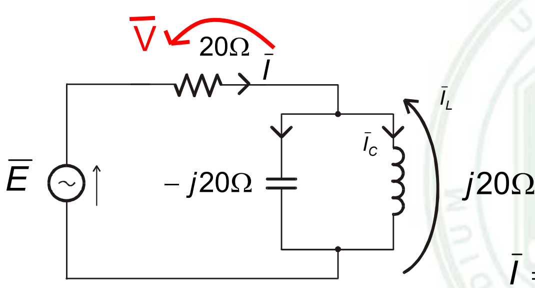
Esercizio



$$\bar{E} = 100\,V$$

$$\bar{I};\bar{I}_C;\bar{I}_L = ?$$

Esercizio

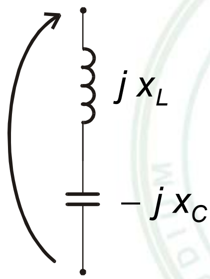


$$\bar{Z}_{\parallel} = \frac{-j20\,j20}{j20 - j20} = \infty$$

$$\bar{I} = 0 \qquad \bar{V} = 0 \qquad \bar{V}_{\parallel} = \bar{E}$$

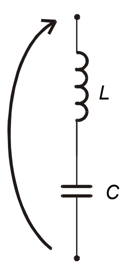
$$\bar{I}_C = \frac{100}{-j20} = 5jA \qquad \bar{I}_L = \frac{100}{j20} = -5jA$$

Risonanza serie



$$\rightarrow \overline{Z} = 0$$

Risonanza serie



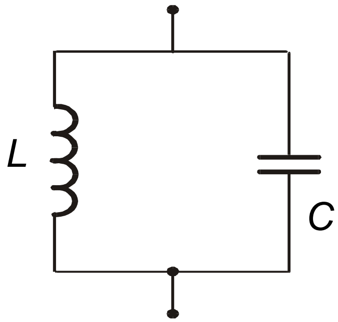
$\overline{Z}(\omega) <^{\infty}_{0}$

$$\overline{Z}(\omega) = +j\omega L - \frac{j}{\omega C} = \frac{j(\omega^2 LC - 1)}{\omega C} =$$

$N = 0 \qquad \omega^2 LC - 1 = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$D = 0 \qquad \omega = 0$

Risonanza parallelo



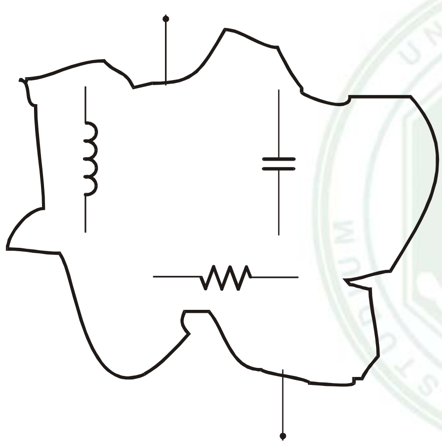
$$\overline{Z}(\omega) = ?$$

$$= \frac{j\omega L\left(\frac{-j}{\omega C}\right)}{j\omega L + \frac{-j}{\omega C}} = \frac{\frac{L}{C}}{\frac{j(\omega^2 LC - 1)}{\omega C}} = \frac{L}{C}\,\frac{\omega C}{j(\omega^2 LC - 1)}$$

$N = 0 \qquad \omega = 0$

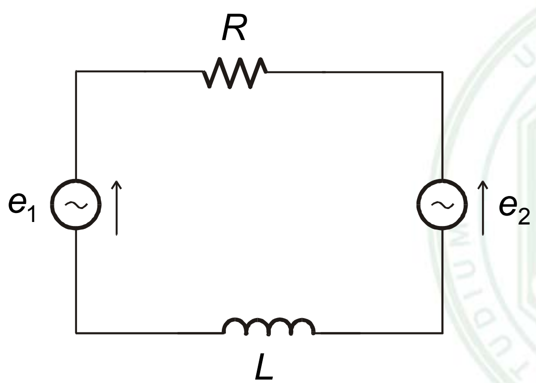
$D = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Risonanza in una rete



$$\overline{Z}(\omega) = ?$$

Esercizio



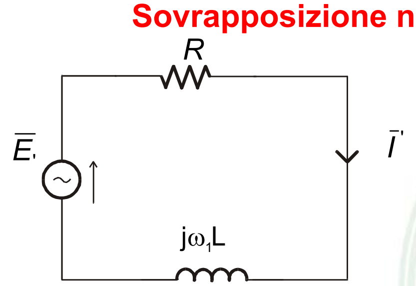
$$e_1 = 10\sqrt{2}\ sen\ 10\ t$$

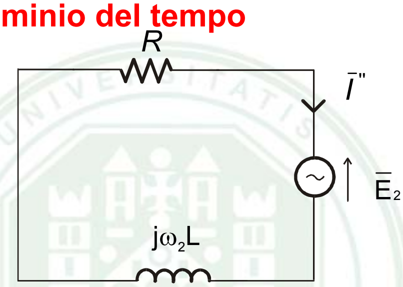
$$e_2 = 10\sqrt{2}\ sen\ 100\ t$$

$$R = 5\Omega$$

$$L = 100mH$$

Sovrapposizione nel dominio del tempo





$R = 5\Omega \quad \bar{E}_{1'} = 10V \quad x_L = \omega_1 L = 1\Omega$

$X_L = \omega_2 L = 100\,10^{-1} = 10\Omega \quad \bar{E}_2 = 10V$

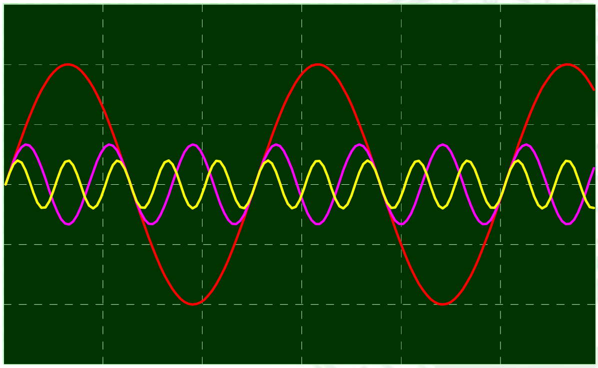
$$\bar{I}' = \frac{\bar{E}_{1'}}{5+j} = \frac{10}{5+j} = 1{,}92 - 0{,}38\,j\,A = 1{,}96e^{-j0{,}197}A$$

$$\bar{I}'' = -\frac{\bar{E}_2}{5+j10} = 0{,}89e^{+j2}$$

$$\cancel{\bar{I} = \bar{I}' + \bar{I}''} \text{ con } 2\omega \neq !$$

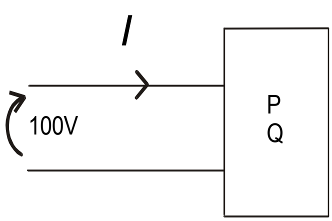
$$i = i' + i'' = \sqrt{2}\cdot 1{,}96\,\text{sen}(10t - 0{,}197) + \sqrt{2}\,0{,}89\,\text{sen}(100t + 2)$$

Armoniche



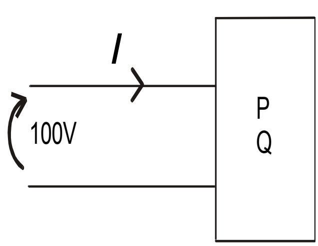
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Rifasamento



1000 W
1000 var

$$I = \left|\frac{1000+j1000}{100}\right| = 14{,}14A$$

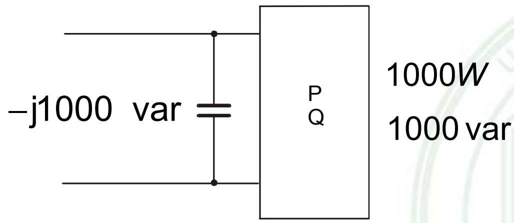


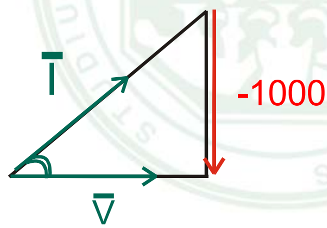
1000 W
0 var

$$\bar{I} = \frac{1000}{100} = 10A$$

RI^2
- Effetti sulle perdite
- Cavi di sezione maggiore

Rifasamento





Esercizio

$P = 1500 \;\; \text{kW}$

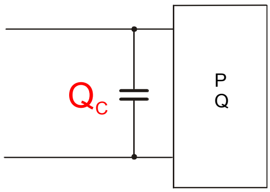
$Q = 1800 \;\; \text{k var} \quad$ induttivo

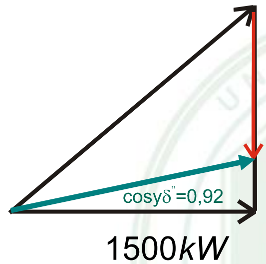
$\cos\varphi = 0{,}92$

$V = 400V$

$Q_C = ?$

Esercizio





Q_C 1800-640=1160 kvar

Qdr≅640kvar

$$atg\frac{1800}{1500} \cong 50$$

$$\cos 50 = 0{,}64 = \cos\delta$$

$$\text{tg acos } 0{,}92 = \frac{Q_{dr}}{P} = \frac{Q_{dr}}{1500}$$

$$\cos\delta'' = \cos \text{ atg}\frac{Q_{dr}}{P}$$

Q_{dr}=1500tg acos0,92=
≅640kvar

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Corso di
Elettrotecnica NO

Corso di Elettrotecnica NO

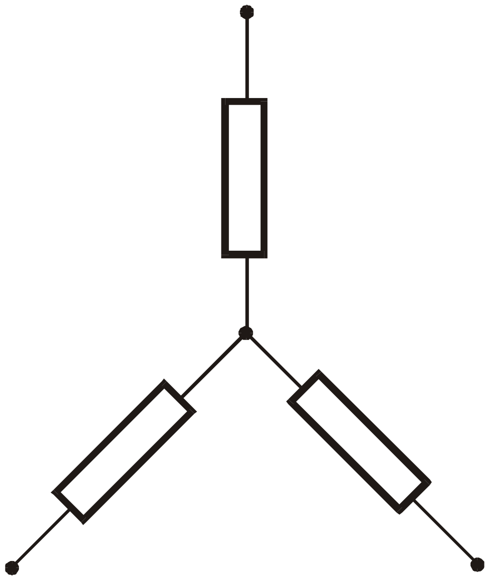
Angelo Baggini

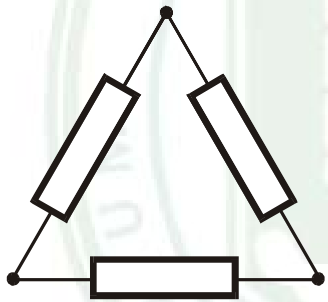
Cap. 5

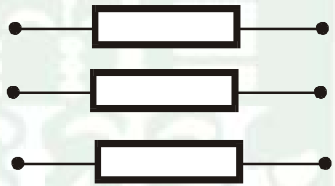
Rappresentazione e analisi delle reti elettriche trifase

Introduzione

Elementi di rete “tripli”

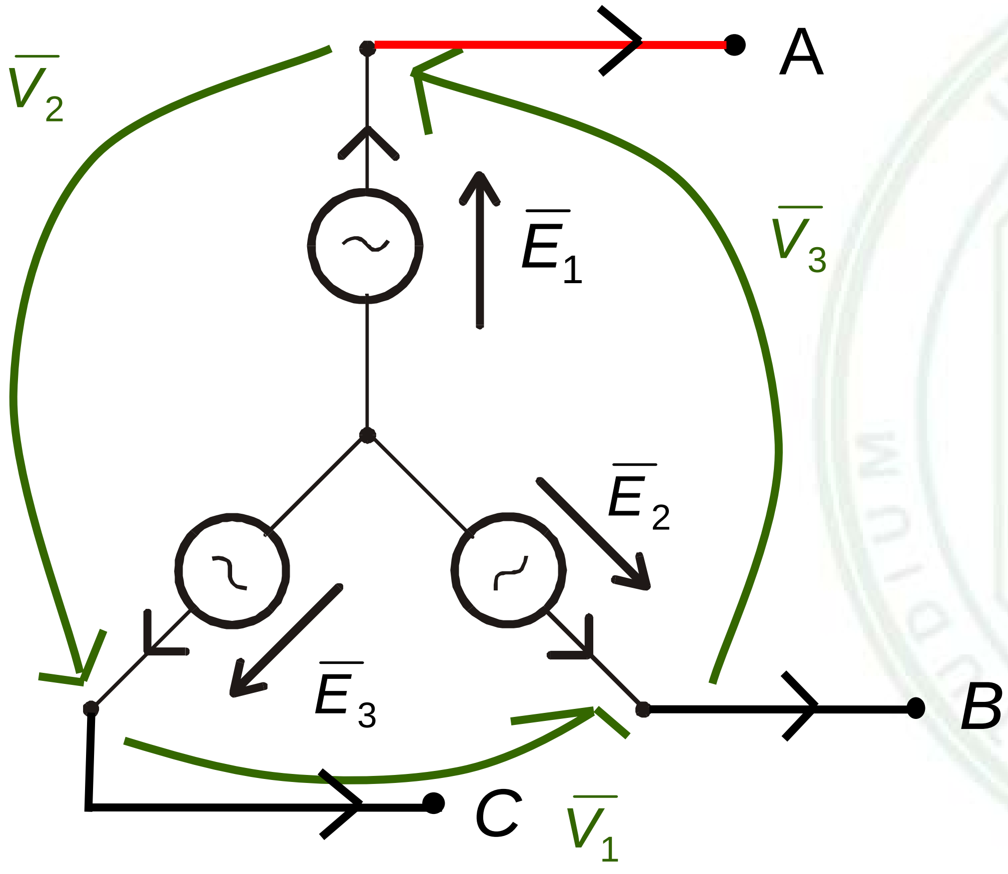






Tutti PAS

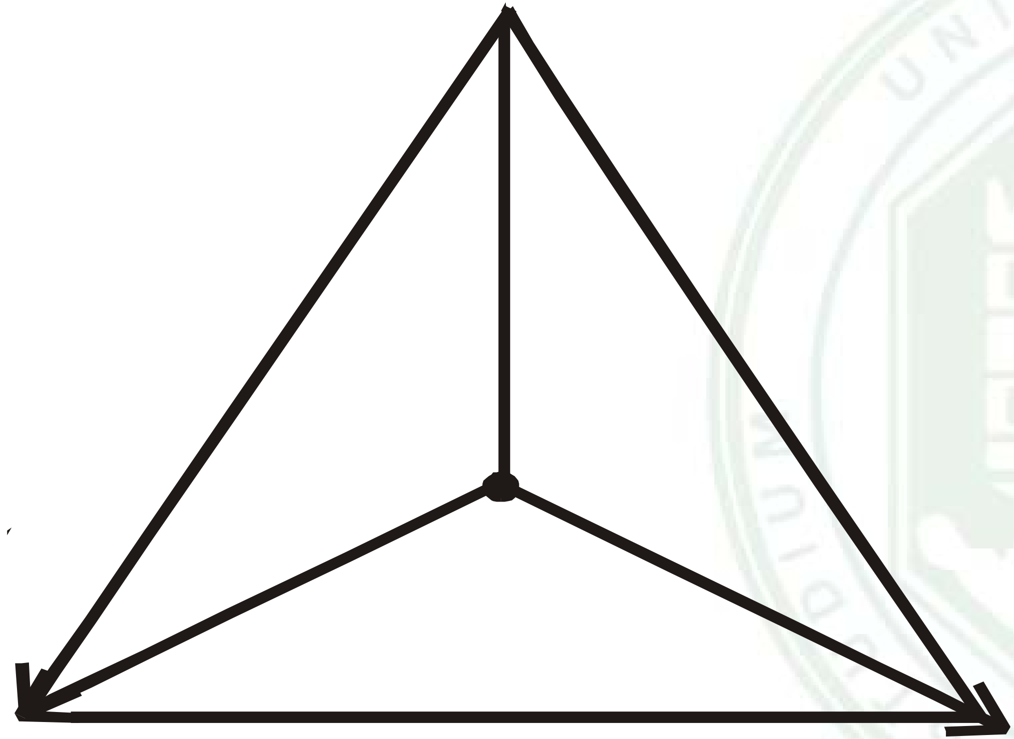
Definizioni (tensioni concatenate e di fase)



E1, E2, E3
Tensioni di fase (stellate)

V1, V2, V3
Tensioni concatenate

Nota (Terne simmetriche)



Se $E_1E_2E_3(V_1V_2V_3)$:

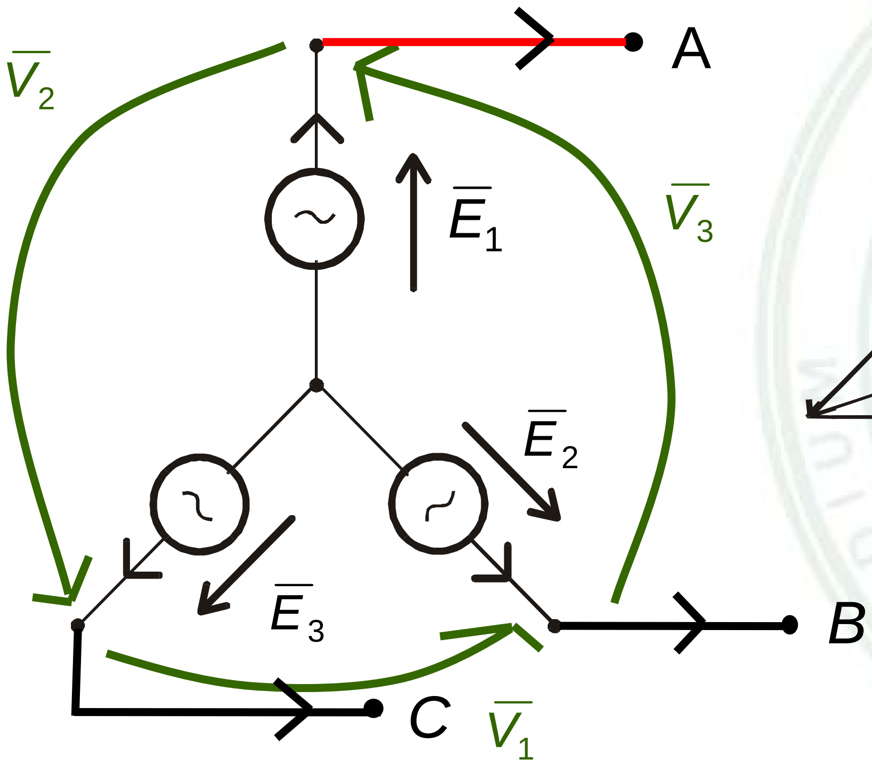
stessa $E\,(V)$

fasi relative $\neq 120$

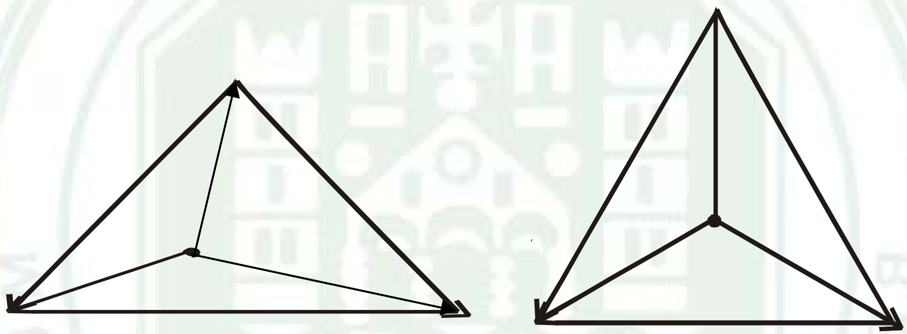
Le terne si dicono simmetriche

$$V = \sqrt{3}E$$

Nota



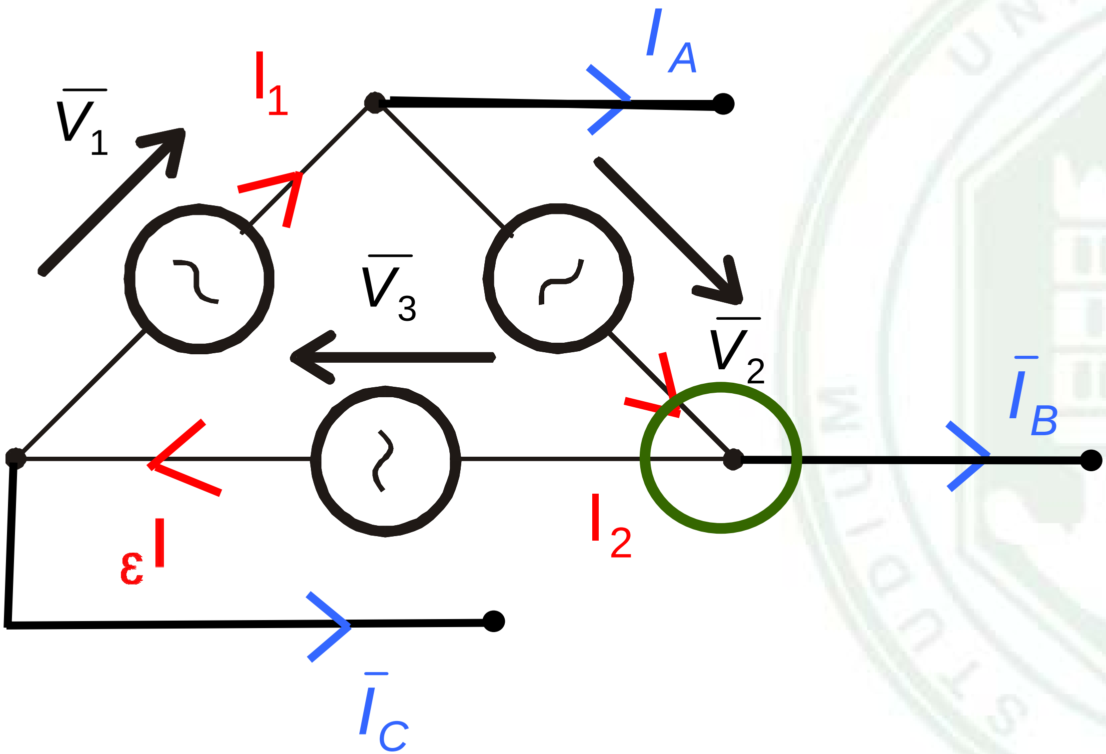
Deve sempre essere



$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = 0$$

Nulla si può dire a proposito della somma delle E !

Definizioni - Correnti di linea e di fase



IA, IB, IC
Correnti di linea

I1, I2, I3
Correnti di fase

Se $I_1 I_2 I_3 (I_A I_B I_C)$:

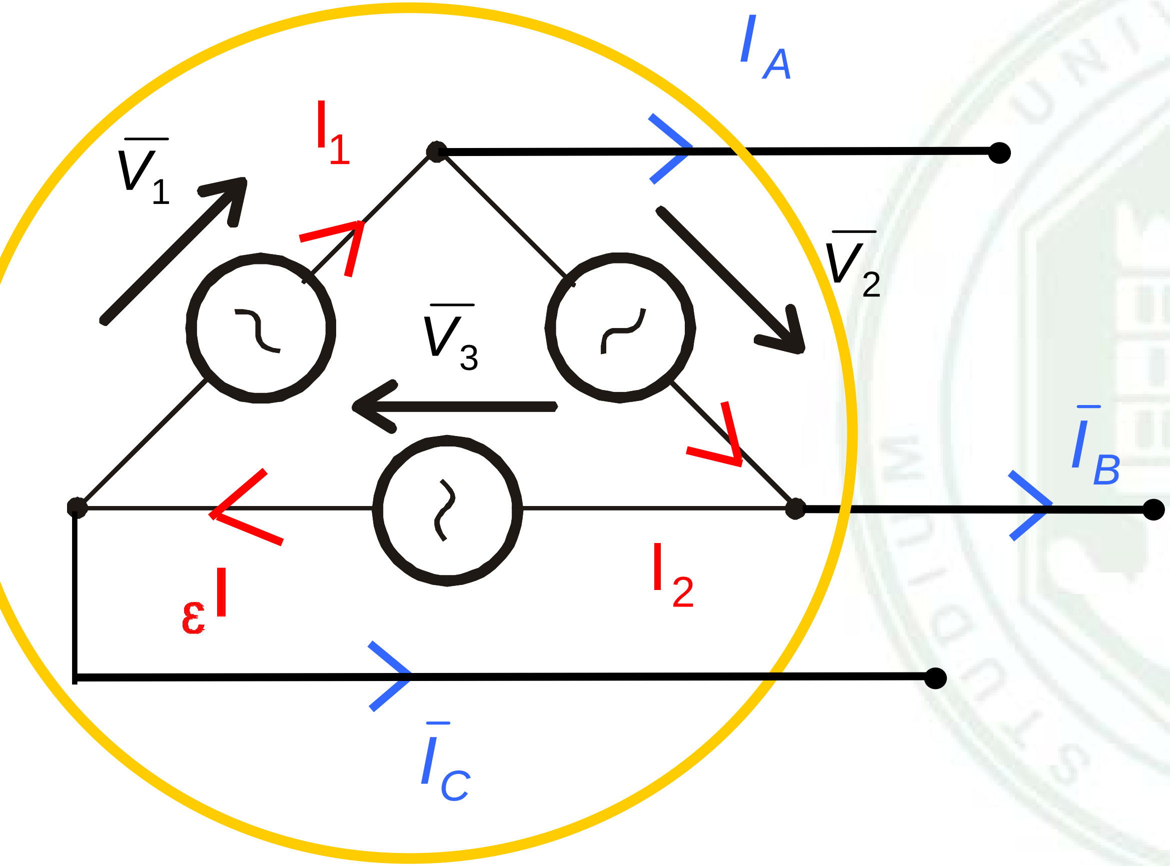
stessa I

fasi relative $\neq 120$

Le terne si dicono equilibrate

$$I_L = \sqrt{3} I_F$$

Nota

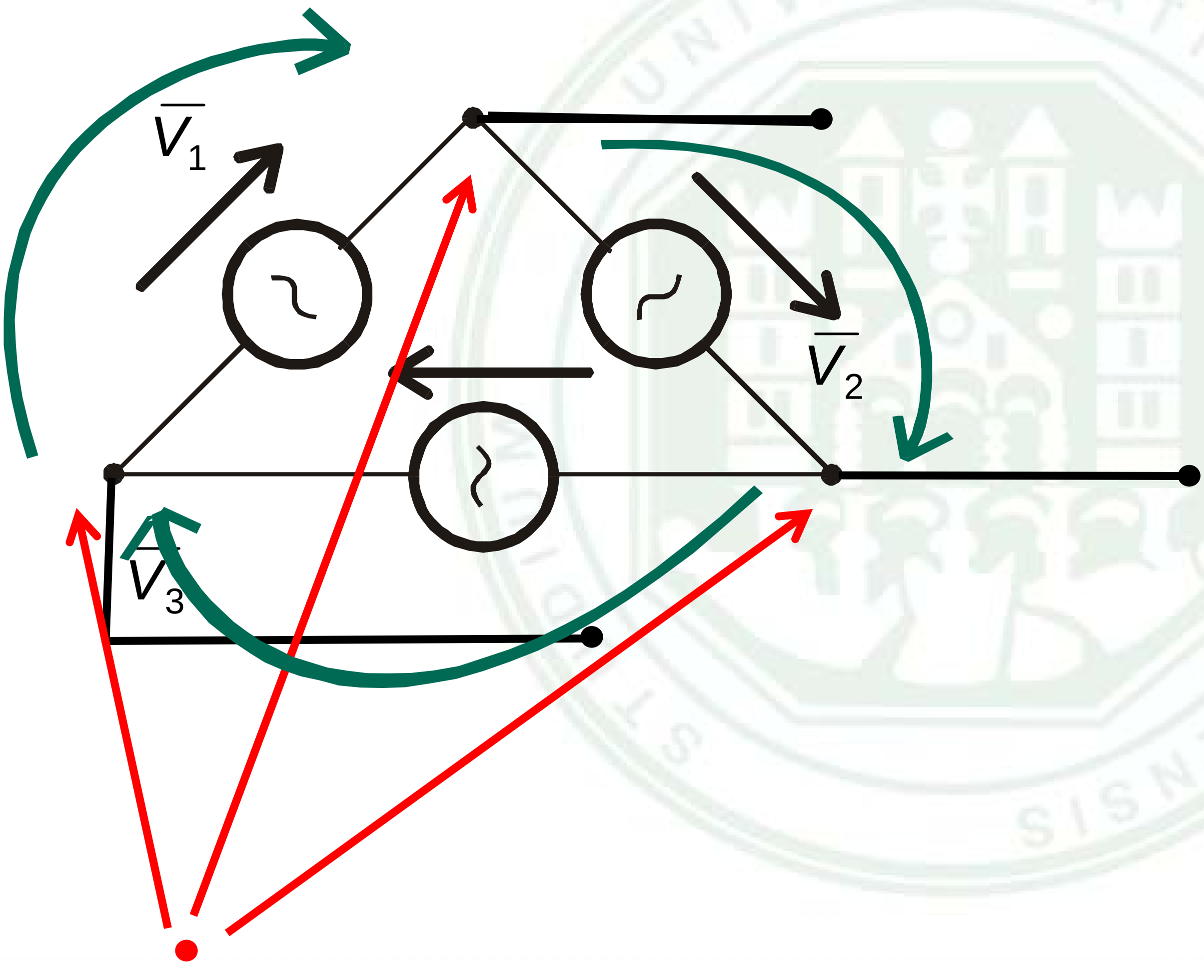


Deve essere sempre

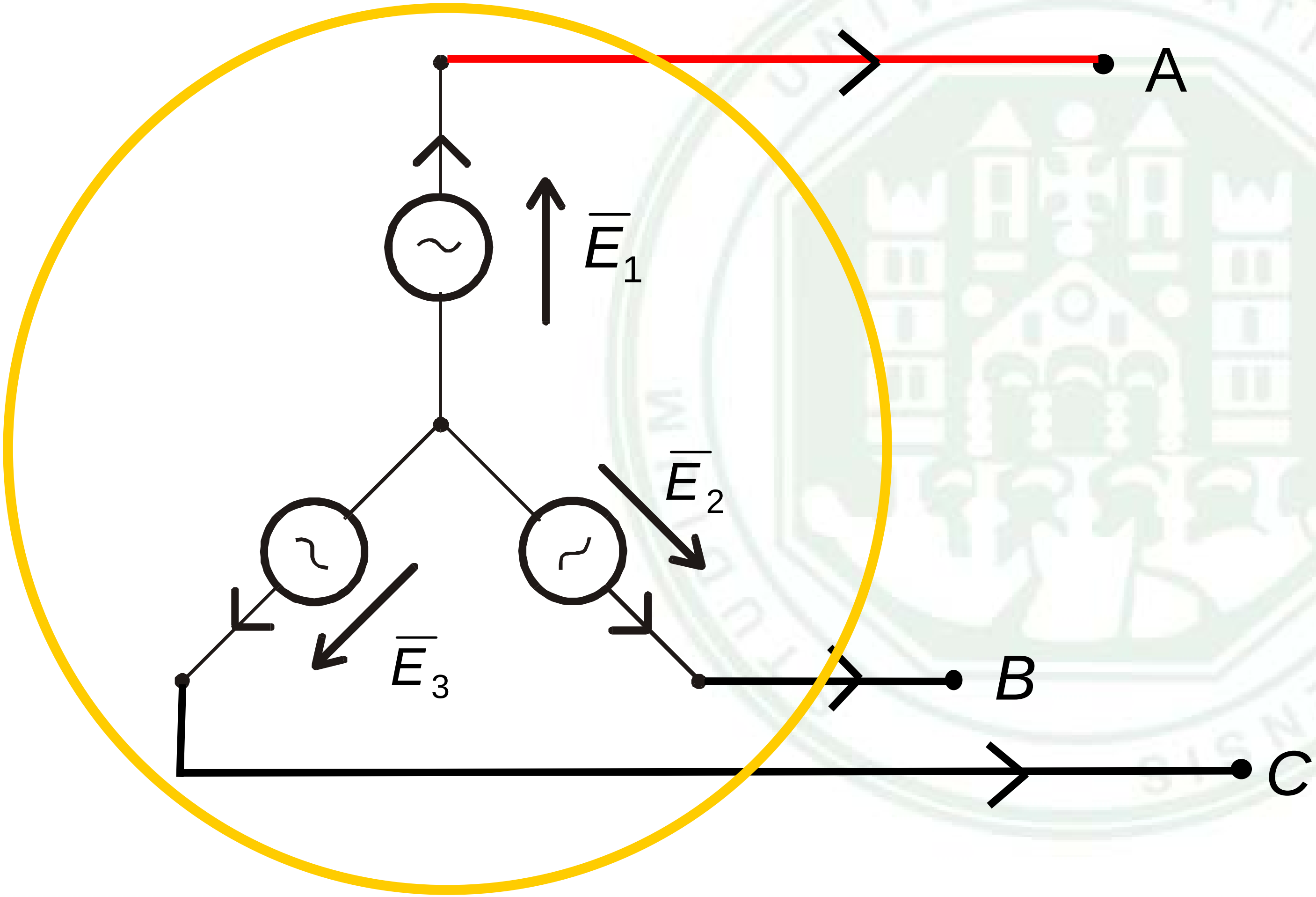
$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = 0$$

Nulla si può dire della somma delle correnti di fase

Nota - Tensioni di fase e concatenate

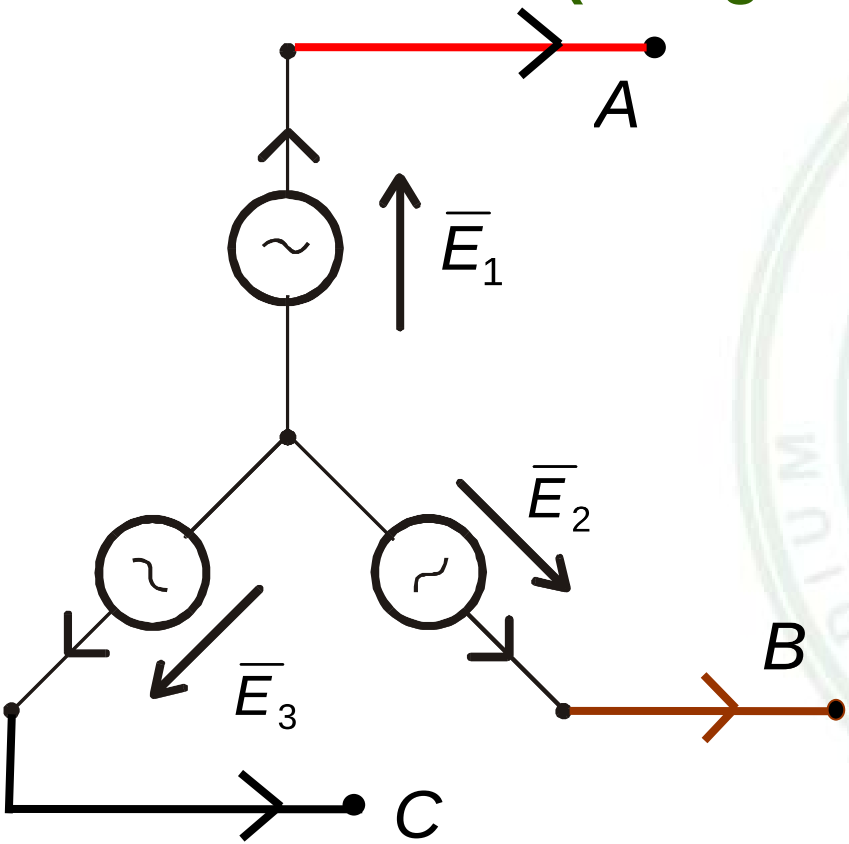


Nota - correnti di linea e di fase



Generatore trifase a stella

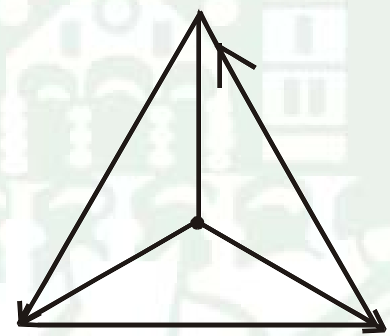
(triangolo idem)



$E_1 E_2 E_3$:

stessa E

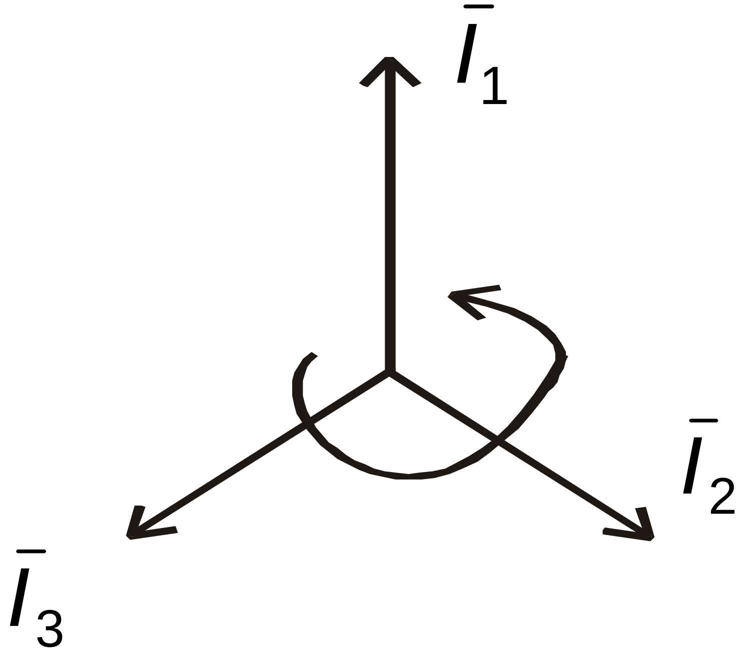
fasi relative $\neq 120$



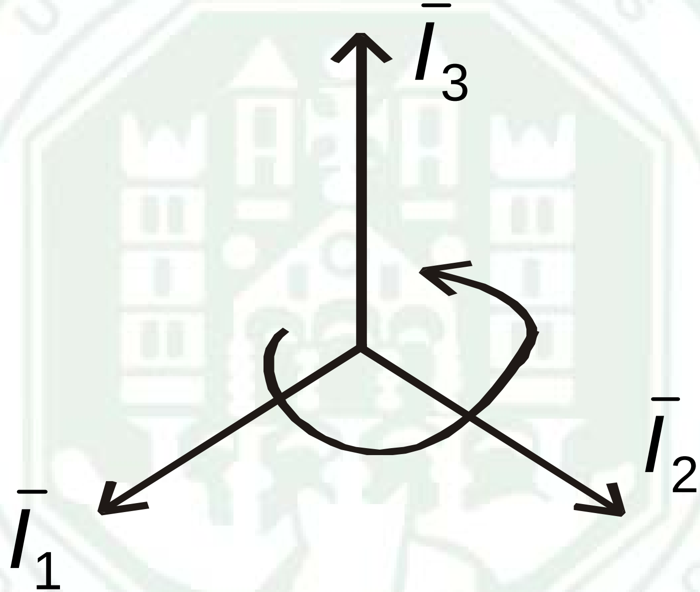
$$V = \sqrt{3}E$$

Tensioni simmetriche

Definizioni - Sequenze

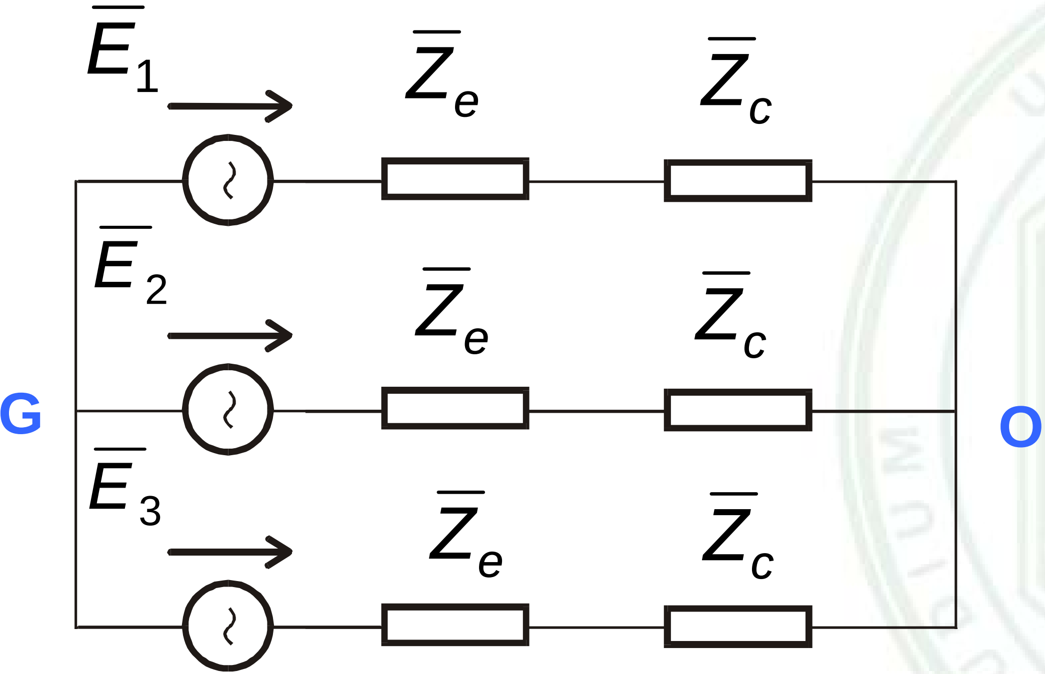


Seq. diretta



Seq. inversa

Esercizio

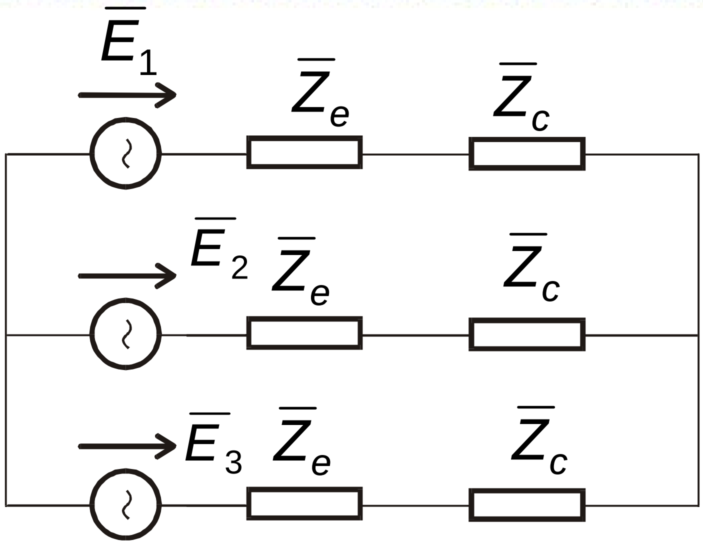


$$\overline{E}_1 = Ee^{j\delta}$$

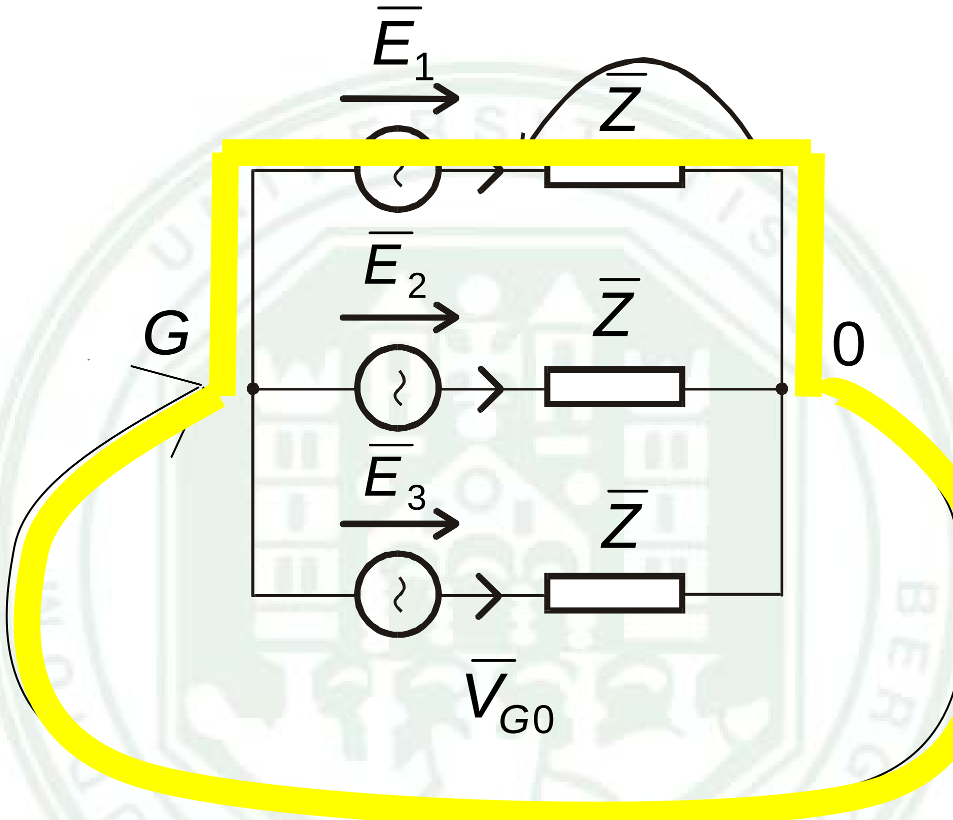
$$\overline{E}_2 = Ee^{j(\delta+\frac{2\pi}{3})}$$

$$\overline{E}_3 = Ee^{j(\delta-\frac{2\pi}{3})}$$

$$\overline{V}_{G0} = ?$$



$$\overline{Z} = \overline{Z}_e + \overline{Z}_C$$

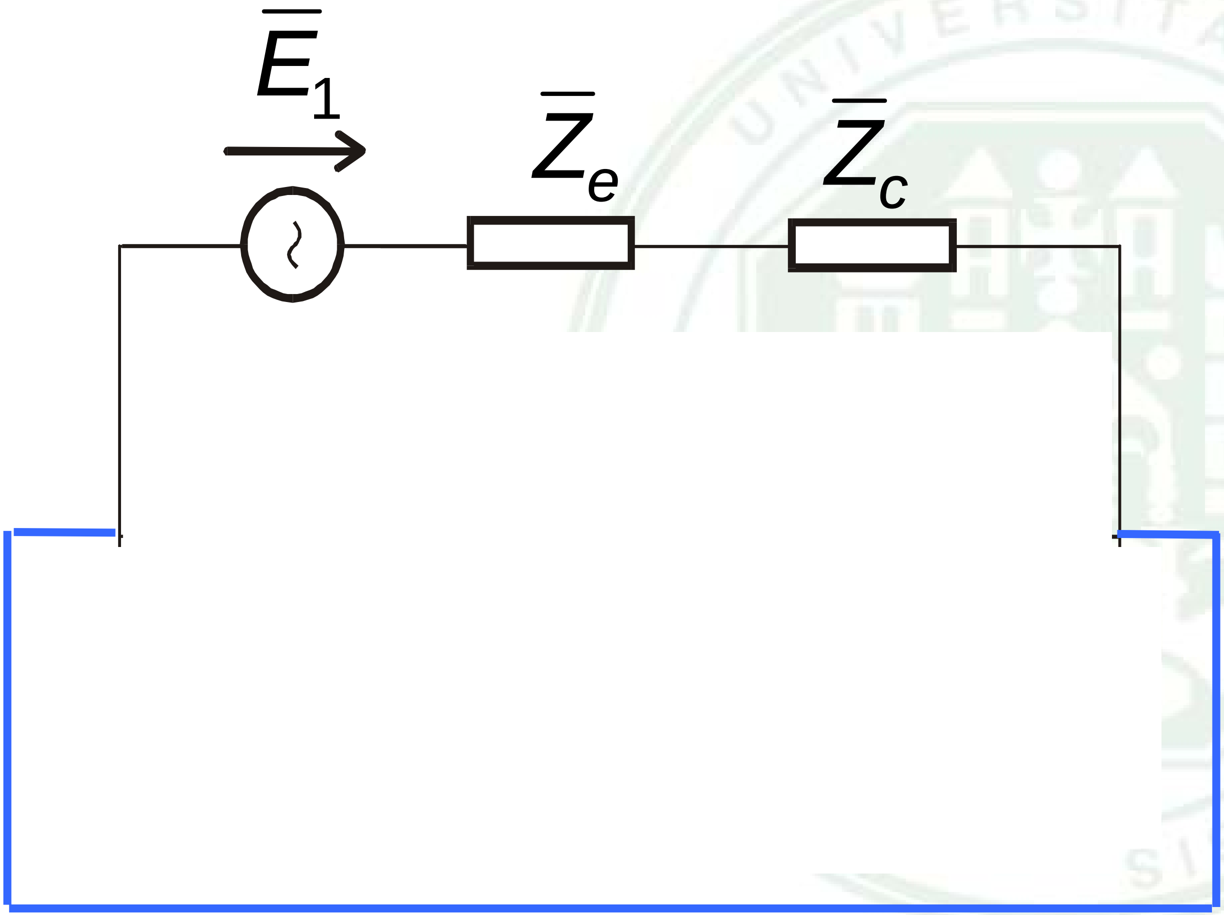


$$\overline{V}_{G0} + \overline{E}_1 - \overline{Z}\overline{I}_1 = 0$$
$$\overline{V}_{G0} + \overline{E}_2 - \overline{Z}\overline{I}_2 = 0$$
$$\overline{V}_{G0} + \overline{E}_3 - \overline{Z}\overline{I}_3 = 0$$

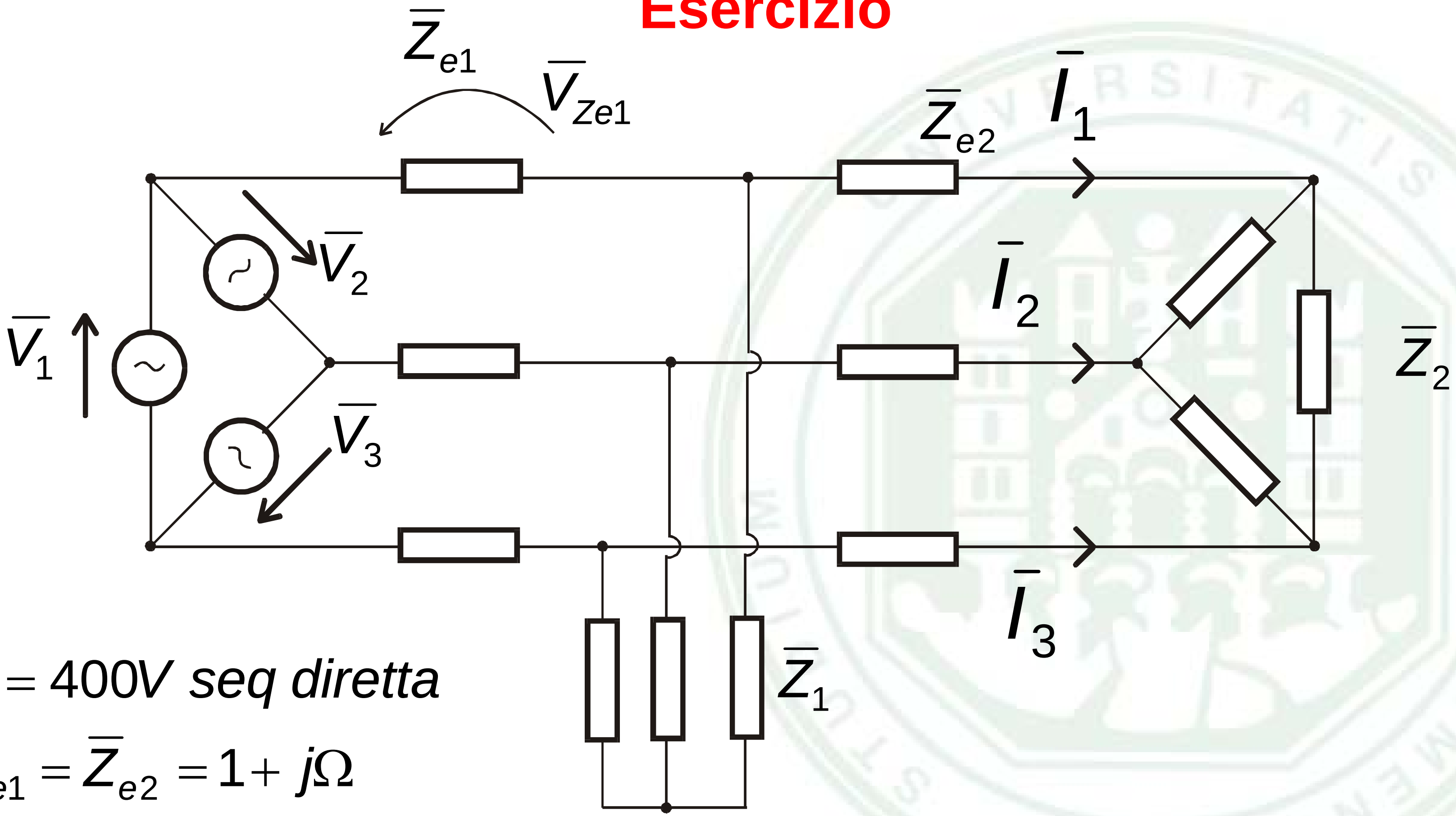
$$3\overline{V}_{G0} + \underbrace{\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \overline{E}_3}_{=0} - \overline{Z}\underbrace{(\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3)}_{=0} = 0$$

$$\overline{V}_{G0} = 0$$

Metodo monofase equivalente



Esercizio



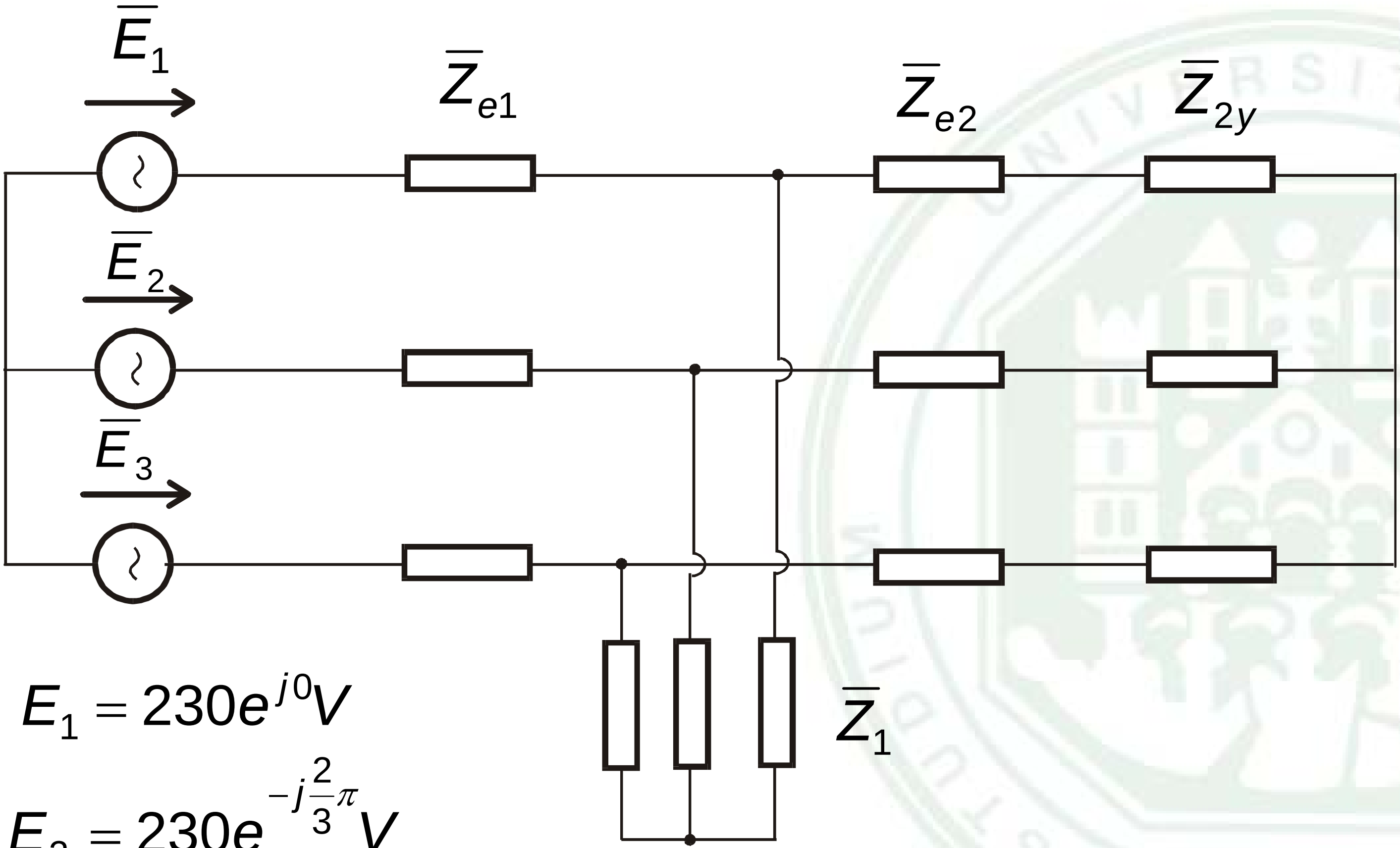
$\overline{V}_1 = 400V$ *seq diretta*

$\overline{Z}_{e1} = \overline{Z}_{e2} = 1 + j\Omega$

$\overline{Z}_1 = 50 + j50\Omega$

$\overline{Z}_2 = 147 + 147j\Omega$

Trasformo tutti i triangoli in stelle



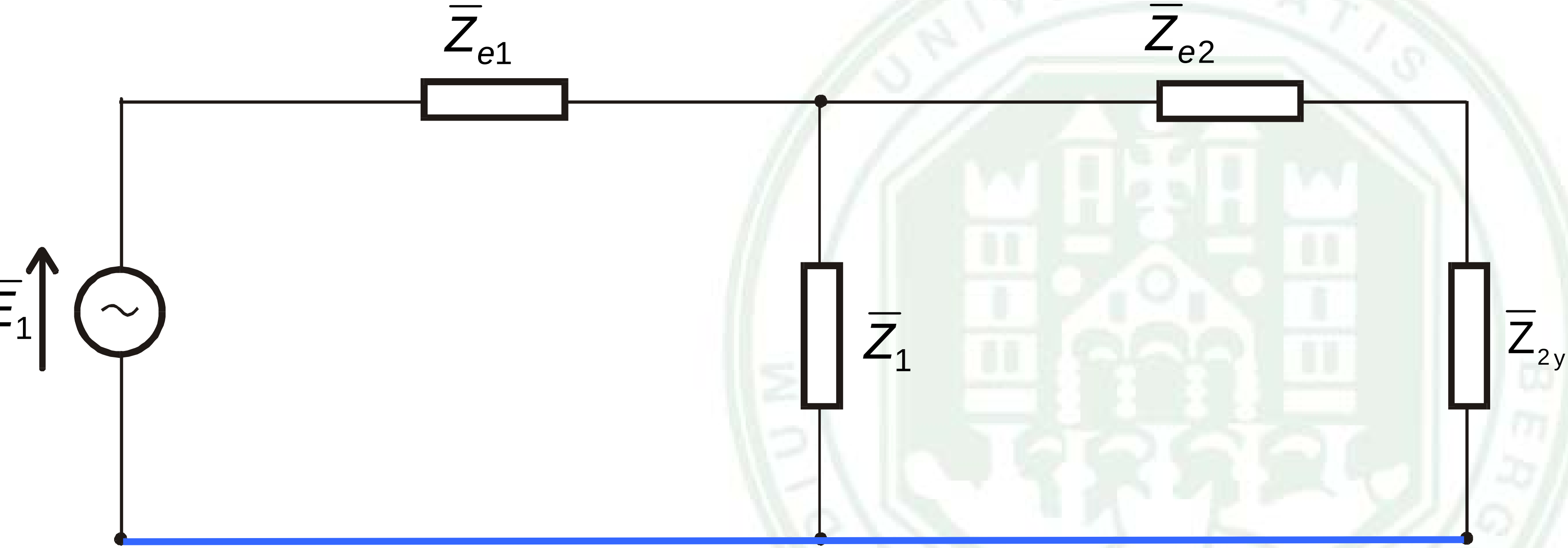
$$E_1 = 230e^{j0}V$$

$$E_2 = 230e^{-j\frac{2}{3}\pi}V$$

$$E_3 = 230e^{+j\frac{2}{3}\pi}V$$

$$\overline{Z}_{2y} = \frac{\overline{Z}_2}{3} = 49 + j49\Omega$$

Monofase equivalente



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Corso di
Elettrotecnica NO

ver. 0000B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di
Ingegneria

Corso di Elettrotecnica NO

Angelo Baggini

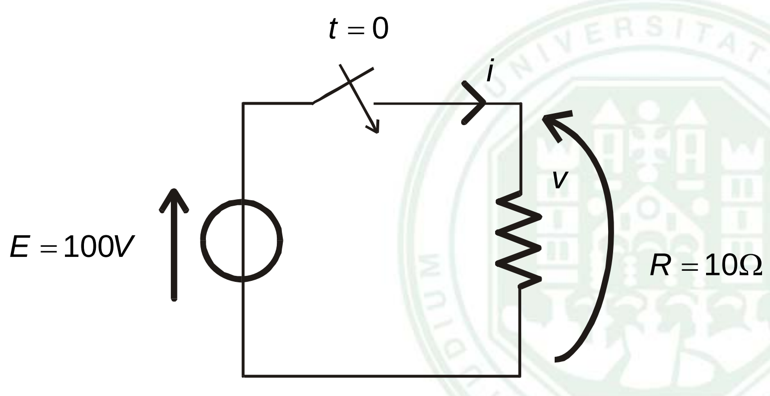
Cap. 6

Rappresentazione e analisi dei circuiti elettrici in regime transitorio

Introduzione

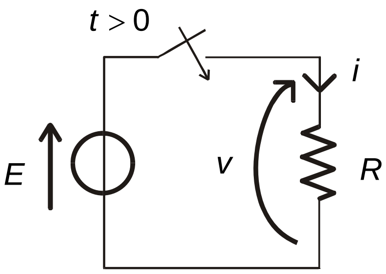
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

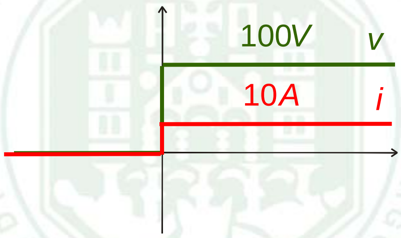
Circuito resistivo (1)



Corso di Elettrotecnica NO - Capitolo 5 – **Rappresentazione e Analisi dei circuiti elettrici in regime transitorio**

Circuito puramente resistivo (2)





$$V = E$$

$$E = Ri$$

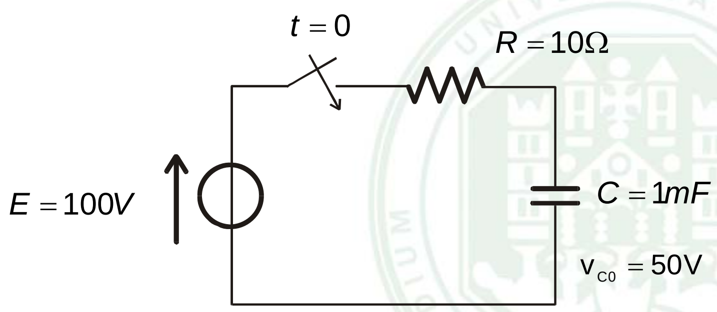
$$i = \frac{E}{R}$$

Condensatori ed induttori

$$i = \int_{-\infty}^{t} \frac{v}{L} dt$$

$$v = \int_{-\infty}^{t} \frac{i}{C} dt$$

Circuito capacitivo

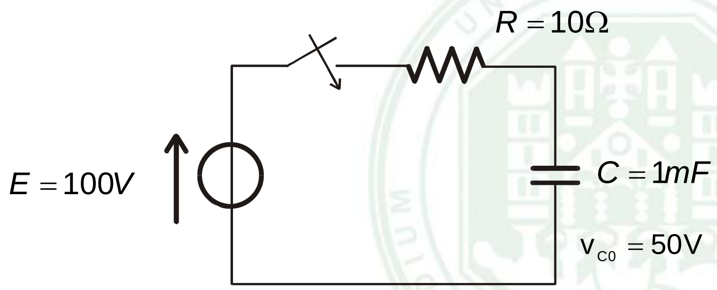


i = ?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Circuito capacitivo

$t < 0$

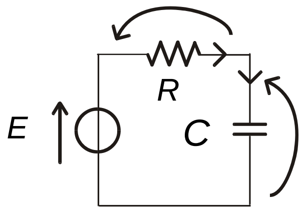


$i = 0$

Corso di Elettrotecnica NO - Capitolo 5 – **Rappresentazione e Analisi dei circuiti elettrici in regime transitorio**

Circuito capacitivo

$t > 0$



$$0 = R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

Eq. differenziale lineare a parametri costanti del 1° ordine

$$E = Ri + \int_{-\infty}^{t} \frac{i}{C} dt$$

$$int.gen = \sum_i K_i e^{\lambda_i t} + \sum_i intpart_i$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Circuito capacitivo

$t > 0$

Integrale generale (omogenea)

$$\cancel{E = Ri + \int_{-\infty}^{t} \frac{i}{C} dt}$$

$$0 = R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

$$0 = R\lambda + \frac{1}{C}$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

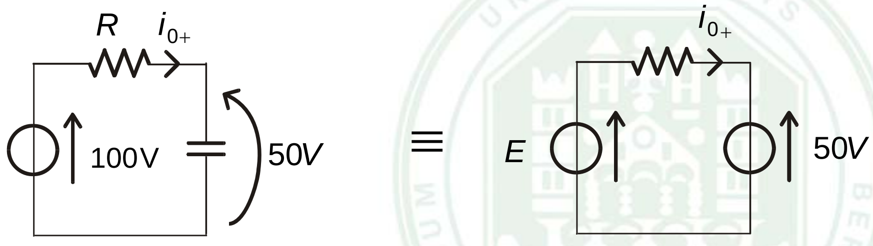
da ricavare con le Condizioni Iniziali

$$i(t) = Ke^{\lambda t}$$

Corso di Elettrotecnica NO - Capitolo 5 – **Rappresentazione e Analisi dei circuiti elettrici in regime transitorio**

Circuito capacitivo

Condizioni iniziali



$$i_{0+} = \frac{100-50}{10} = 5A \qquad i_{0+} = 5A = Ke^{\frac{-0}{RC}} = K \qquad K = 5A$$

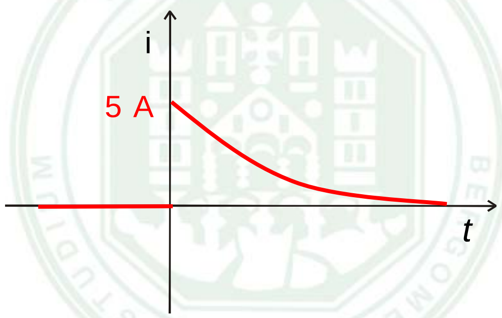
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Circuito capacitivo

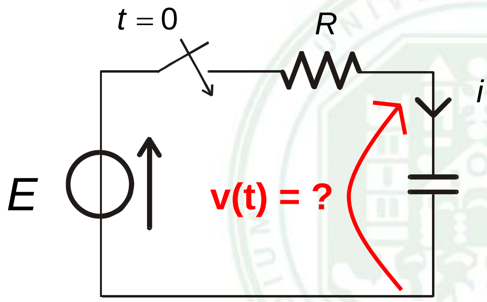
Soluzione completa

$$i(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

$$i(t) = 5e^{\frac{-t}{10^{-2}}} \text{ A per } t \geq 0$$



Circuito capacitivo (tensione)



$R = 10\Omega$

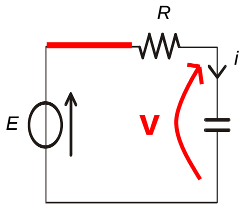
$E = 100V$

$C = 1mF$

$v_{C0} = 50V$

$t > 0$

Circuito capacitivo (tensione)



$$\begin{cases} E = +Ri + v \\ i = C\dfrac{dv}{dt} \end{cases} \rightarrow E = RC\dot{v} + v$$

Eq. differenziale lineare a parametri costanti non omogena del 1° ordine

$$\text{int}.gen. = \sum_i K_i e^{\lambda_i t} + \sum_i \text{int}\, part_i$$

Circuito capacitivo

Integrale generale omogena associata

$$0 = RC\dot{v} + v$$

$$0 = RC\lambda + 1$$

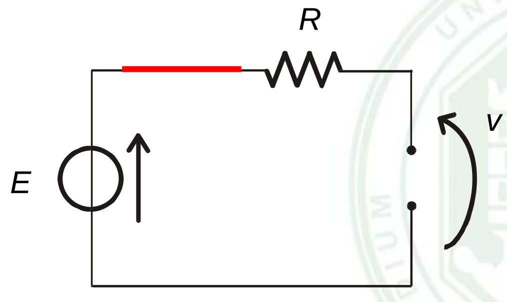
$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

$$V_{OM} = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

In transitorio tutte le grandezze della rete hanno le stesse τ

Circuito capacitivo

Integrale particolare completa (t=oo)



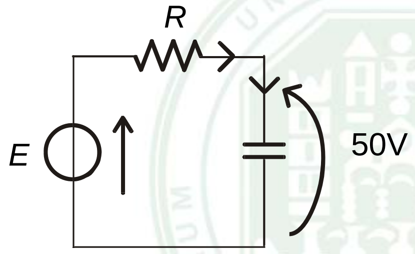
$$v = E = 100V$$

$$v = K e^{-\frac{t}{RC}} + E$$

Circuito capacitivo

Condizioni iniziali

$\underline{\underline{0+}}$

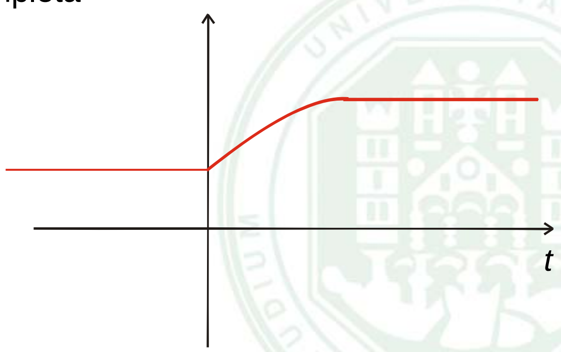


$$V_{0+} = 50 = Ke^{-\frac{0}{RC}} + E$$

K = 50-E = 50-100 = -50V

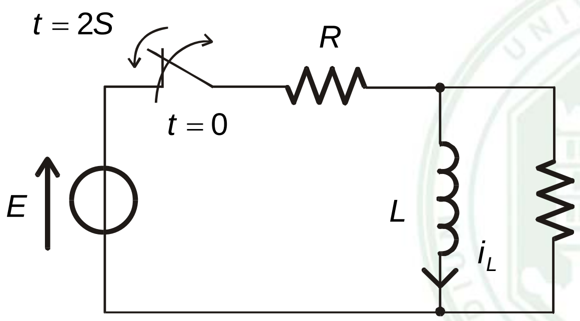
Circuito capacitivo

Soluzione completa



$$V = -50e^{-\frac{t}{10^{-2}}} + 100$$

Circuito induttivo

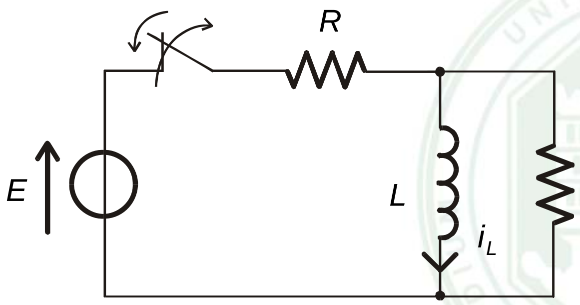


$R = 10\Omega$
$L = 1mH$
$E = 100V$
$i_L = ?$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Circuito induttivo

t < 0

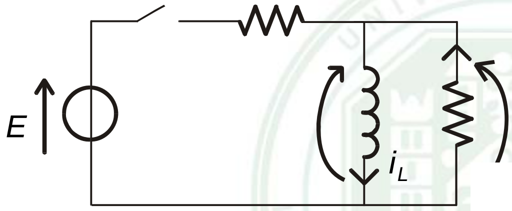


$$i_L = \frac{100}{10} = 10A$$

Circuito induttivo

$0 < t < 2S$

$i_{L_{0-}} = 10A$



$V_L = V_R$

$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$

$L\lambda + R = 0$

$i_L = Ke^{-\frac{R}{L}t}$

$L\frac{di_L}{dt} = -Ri_L$

$\lambda = -\frac{R}{L} \longrightarrow \tau = \frac{L}{R}$

Circuito induttivo

Condizioni iniziali

$$i_{L_{0+}} = 10 = Ke^{-\frac{R}{L}0} \rightarrow k = 10$$

Soluzione

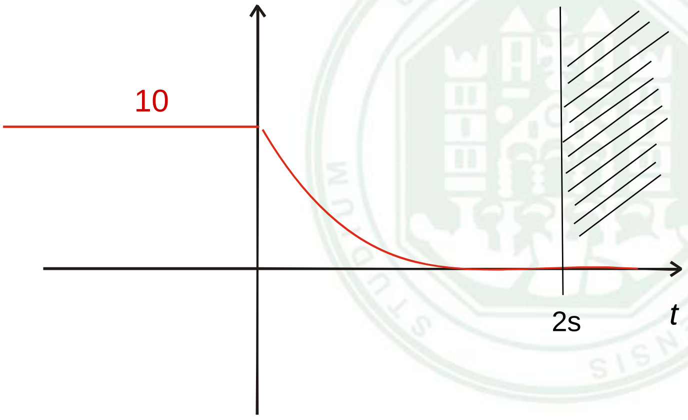
$$i_L = 10e^{-10^4 t}A$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Circuito induttivo

Soluzione

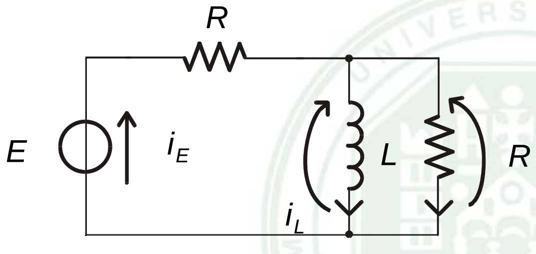
$$i_L = 10e^{-10^4 t} A$$



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Circuito induttivo

$\underline{\underline{t > 2}}$



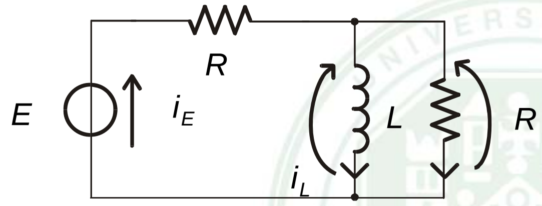
$$i_L(2) = 10e^{-10^4 \cdot 2} \cong 0$$

$$t' = t - 2$$

Corso di Elettrotecnica NO - Capitolo 5 – **Rappresentazione e Analisi dei circuiti elettrici in regime transitorio**

Circuito induttivo

$\underline{\underline{t > 2}}$



$$i_E = i_L + i_R \longrightarrow i_E = i_L + \frac{L}{R}\dot{i}_L$$

$$L\frac{di_L}{dt} = Ri_R \rightarrow i_R = \frac{L}{R}\dot{i}_L$$

$$E - i_E R - L\frac{di_L}{dt} = 0 \longrightarrow E - i_E R - L\dot{i}_L = 0$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

$$E - (i_L + \frac{L}{R}\dot{i}_L)R - L\dot{i}_L = 0$$

$$E - i_L R - L\dot{i}_L - L\dot{i}_L = 0$$

$$E = 2L\dot{i}_L + R\,i_L$$

1°
NON OM
Coefficienti costanti
LIN

Corso di Elettrotecnica NO - Capitolo 5 – **Rappresentazione e Analisi dei circuiti elettrici in regime transitorio**

OM

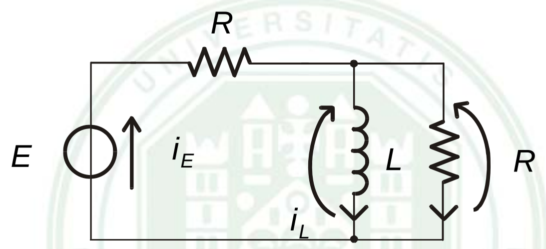
$$0 = 2L\dot{i}_L + Ri_L$$

$$0 = 2L\lambda + R \rightarrow \lambda = -\frac{R}{2L}$$

$$i_{LOM} = ke^{-\frac{R}{2L}t'}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

int *part*



$$i_{L\infty} = 10A$$

$$i_L = ke^{-\frac{R}{2L}t'} + 10A$$

Condizioni iniziali

$$i_L(0t) = 0 = ke^{-0} + 10 \qquad k = -10$$

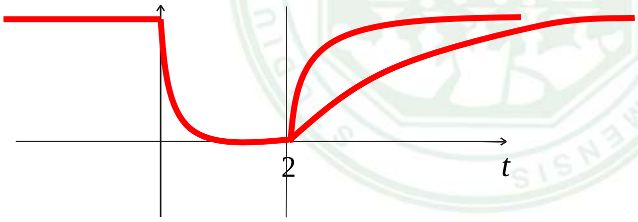
$$i_L = -10e^{-\frac{10^4}{2}t'} + 10A$$

Corso di Elettrotecnica NO - Capitolo 5 – **Rappresentazione e Analisi dei circuiti elettrici in regime transitorio**

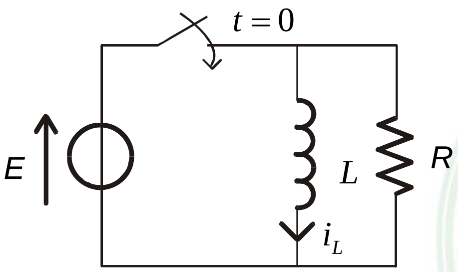
$$i_L = 10A \qquad t<0$$

$$i_L = -10e^{10^4 t}A \qquad 0 \le t < 2$$

$$i_L = -10e^{-\frac{10^4}{2}(t-2)} + 10A \qquad t \ge 2$$



Un caso particolare

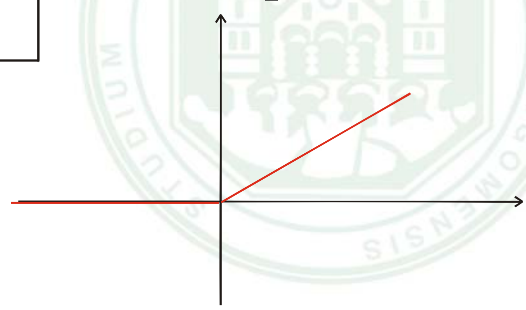


$$E = L\frac{di_L}{dt}$$

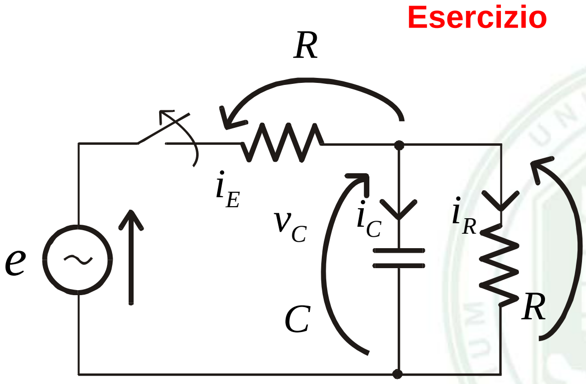
$$\int_{-\infty}^{t} E dt = \int_{-\infty}^{t} L di_L$$

$$\frac{Et}{L} = i_L$$

$$i_L = ?$$



Esercizio



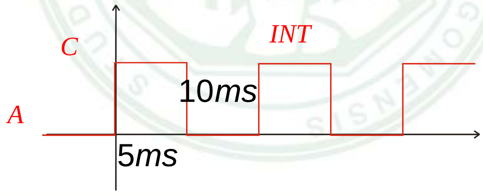
$v_{c0} = 0V$

$R = 10\Omega$

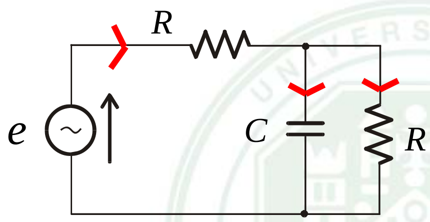
$C = 1mF$

$e = 100 sen 10t \ \ V$

Vc = ?



$0 < t < 5ms$



$i_E = i_C + i_R$

$i_C = C\dfrac{dv_C}{dt}$

$v_C = R i_R$

$e = i_E R + v_C$

$i_E = C\dot{v}_C + \dfrac{v_C}{R}$

$e = R(C\dot{v}_C + \dfrac{v_C}{R}) + v_C \qquad e = RC\dot{v}_C + 2v_C$

1°
LIN
N OM
CC

OM

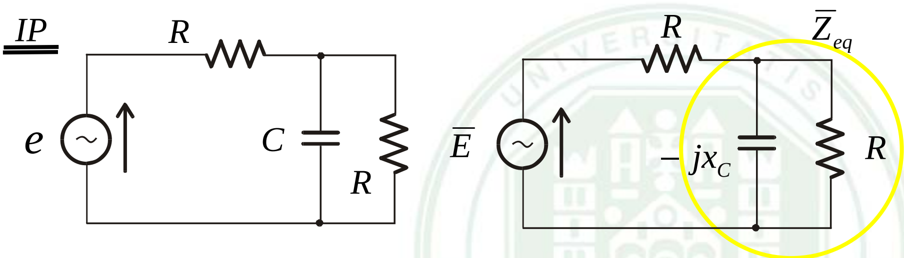
$$0 = RC\dot{v}_C + 2v_C$$

$$0 = RC\lambda + 2 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{RC}$$

$$v = ke^{-\frac{2t}{RC}}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

IP

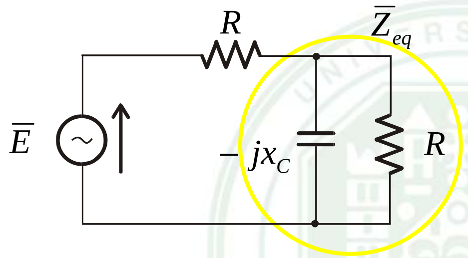


$$\overline{E} = \frac{100V}{\sqrt{2}} \qquad -jx_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{10\,10^{-3}} = -10^2 j$$

$$\overline{Z}_{eq} = \frac{-j10^2 \cdot 10}{10 - j10^2} = 9{,}9 - j$$

Corso di Elettrotecnica NO - Capitolo 5 – **Rappresentazione e Analisi dei circuiti elettrici in regime transitorio**

IP



$$\overline{V}_C = \frac{100}{\sqrt{2}} \frac{9{,}9 - j}{9{,}9 - j + 10} = \frac{49{,}87 - j2{,}49}{\sqrt{2}} = \frac{49{,}93}{\sqrt{2}} e^{-j0{,}05} V$$

$$V_{C\,IP} = 49{,}93 sen(10t - 0{,}05)\ V$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

$$v_C = ke^{-200t} + 49{,}93 sen(10t - 0{,}05)V$$

$$v_{Ct=0} = 0 = ke^{0} + 49{,}93 \underbrace{sen(10 * 0 - 0{,}05)}_{-0{,}05} V$$

$$0 = k - 2{,}495$$

$$k = 2{,}495$$

$$0 < t < 5mS$$

$$v_C(t) = 2{,}495e^{-200t} + 49{,}93 sen(10t - 0{,}05)V$$

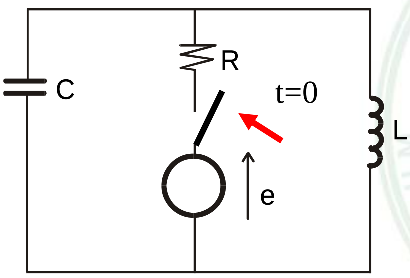
Corso di Elettrotecnica NO - Capitolo 5 – **Rappresentazione e Analisi dei circuiti elettrici in regime transitorio**

Circuiti di ordine superiore al primo

- **equazione differenziale di ordine pari al numero di induttori e condensatori indipendenti**
- **Tutto analogo, ma obiettivamente analiticamente più pesante**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Secondo ordine - Esempio



$$e = \begin{cases} 10V \\ 10sentV \end{cases}$$

$$C = 1\,\mu F$$

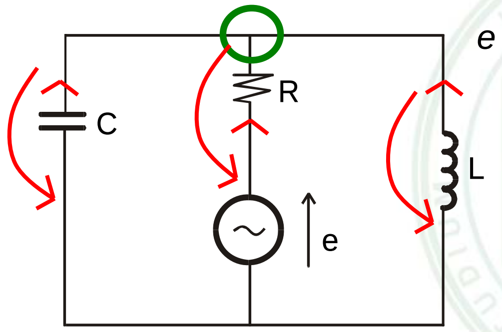
$$R = 2\,\Omega$$

$$L = 1\,mH$$

iL(t) = ?

Corso di Elettrotecnica NO - Capitolo 5 – **Rappresentazione e Analisi dei circuiti elettrici in regime transitorio**

Esempio



$$i_R + i_C + i_L = 0$$
$$-v_C + v_R - e = 0$$
$$e - v_R + v_L = 0$$

$$v_R = Ri$$
$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$
$$v_C = \int_{-\infty}^{t}\frac{i_c}{C}dt$$

$$\begin{cases} i_C + i_R + i_L = 0 \\ -V_{C0} - \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_c dt \quad + Ri_R - e = 0 \\ e - Ri_R + L\dfrac{di_L}{dt} = 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} i_C + i_R + i_L = 0 \\ -V_{C0} - \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_c dt + Ri_R = e \\ Ri_R - L\dfrac{di_L}{dt} = e \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_C + i_R + i_L = 0 \\ -\dfrac{1}{C}i_C + R\dfrac{di_R}{dt} = \dfrac{de}{dt} \\ Ri_R - L\dfrac{di_L}{dt} = e \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_R = +\dfrac{L}{R}\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{e}{R} \\ i_C = +CR\dfrac{di_R}{dt} - C\dfrac{de}{dt} = +LC\dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + C\dfrac{de}{dt} - C\dfrac{de}{dt} = +LC\dfrac{d^2 i_L}{dt^2} \\ +LC\dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + \dfrac{L}{R}\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{e}{R} + i_L = 0 \end{cases}$$

$$i_L'' + \frac{1}{RC}i_L' + \frac{1}{LC}i_L = -\frac{1}{RLC}e$$

Esempio

$$i_L'' + \frac{1}{RC} i_L' + \frac{1}{LC} i_L = -\frac{1}{RLC} e$$

Eq. differenziale lineare a parametri costanti non omogena del 2° ordine

$$\text{int.gen.} = \sum_i K_i e^{\lambda_i t} + \text{int}_p$$

Esempio – Radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

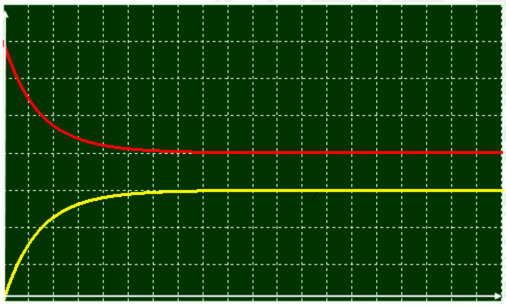
$$\lambda^2 + 0{,}5 \cdot 10^6 \lambda + 10^9 = 0$$

$$\lambda = \frac{-500000 \pm \sqrt{\left(0{,}5 \cdot 10^6\right)^2 - 4 \cdot 10^9}}{2} = \begin{matrix} -497991{,}93 \\ -2008{,}06 \end{matrix}$$

Radici dell'equazione caratteristiche
Radici reali distinte

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \Re e$$

$$i_L(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + IP$$

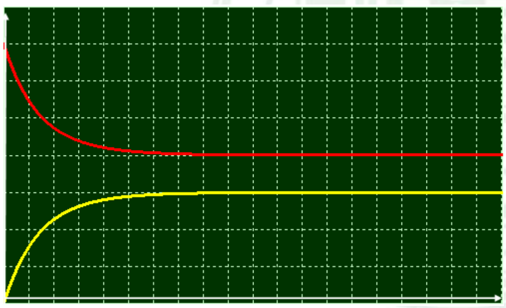


e=E

Radici dell'equazione caratteristiche
Radici reali uguali

$$\lambda_1 = \lambda_2 \in \Re e$$

$$i_L(t) = K_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t} + IP$$

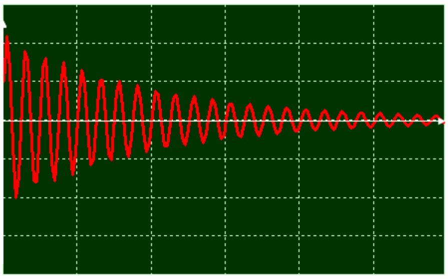


e=E

Radici dell'equazione caratteristiche
Radici complesse coniugate

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta \qquad \lambda_2 = \alpha - j\beta$$

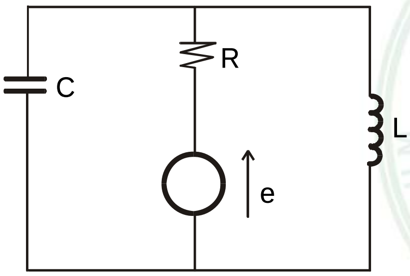
$$i_L(t) = e^{\alpha t} \cdot \left(K_1 \cos \beta t + k_2 sen \beta t\right) + IP$$



e=E

Integrale particolare

t=oo



$$e = \begin{cases} 10V \\ 10sentV \end{cases}$$

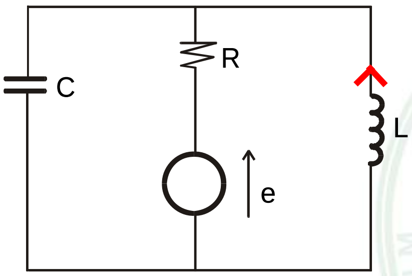
$$C = 1\,\mu F$$

$$R = 2\,\Omega$$

$$L = 1\,mH$$

Integrale particolare (caso e = 10sent)

t=oo



$$\bar{E} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}07V$$

$$X_C = \frac{1}{10^{-6} \cdot 1} = 1M\Omega$$

$$R = 2\,\Omega$$

$$X_L = 1 \cdot 10^{-3} = 1m\Omega$$

$$I_E = \frac{E}{Z_{eq}} = \frac{7{,}07}{2 + j10^{-3}} = 3{,}53\angle -0{,}0005A = 3{,}53 - j0{,}0018A$$

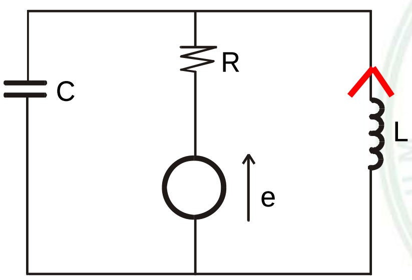
$$Z_{eq} = R + jX_L // -jX_C = 2 + \frac{j10^{-3} * (-j10^{6})}{j10^{-3} - j10^{6}} = 2 + j10^{-3}\Omega$$

$$I_L = -I_E = 3{,}53\angle +0{,}0005A = -3{,}53 + j0{,}0018A$$

$$i_L(t) = \sqrt{2}3{,}53 sen(t + 0{,}0005)A$$

Integrale particolare (caso e = E)

t=oo



$$e = 10V$$

$$C = 1\,\mu\,F$$

$$R = 2\,\Omega$$

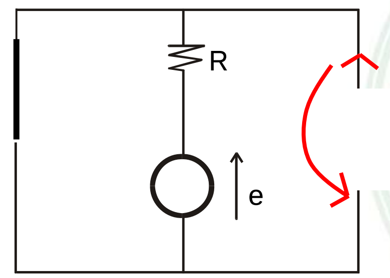
$$L = 1m\,H$$

$$iL(oo) = -\frac{e}{R} = -\frac{10}{2} = -5A$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Condizioni iniziali

t=0- e=E t=0+

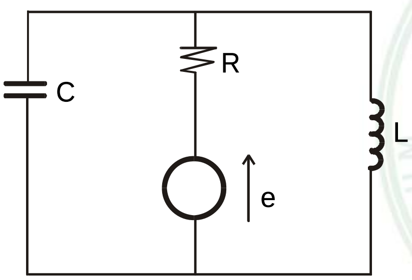


$$\begin{cases} I_{L0^-} = 0 \\ V_{C0^-} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_L(0) = I_{L0} = 0 \\ L i_L^{'}(0) = V_{C0} = 0 \end{cases}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Facoltà di Ingegneria

Condizioni iniziali



t=0

$$\begin{cases} i_L(0) = I_{L0} \\ L i_L^{'}(0) = V_{C0} \end{cases}$$

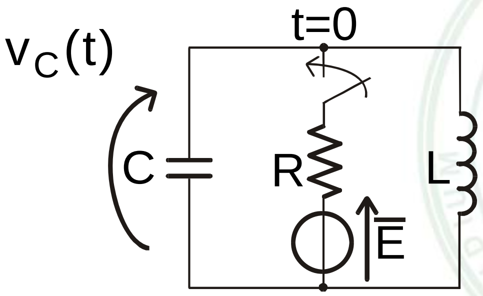
Metodo trucco

- **Poichè:**
  - La struttura della soluzione è sempre la stessa
  - Tutte le grandezze di una rete hanno le stesse costanti di tempo
  - Le maggiori difficoltà analitiche sono nell'impostazione e nella soluzione dell'equazione differenziale vera e propria
- **se una fata ci desse le λ saremmo in grado di assemblare la soluzione direttamente e molto più facilmente**
- **Ma …**

Metodo trucco

- **Rendere passiva la rete**
- **Tagliarla in un punto a piacere**
- **Scrivere la $Z(\lambda)$ rispetto ai due morsetti messi in evidenza**
- **Gli zeri di $Z(\lambda)$ sono le λ**

Esercizio B

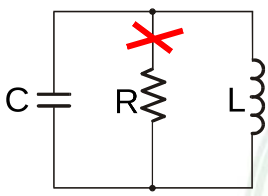


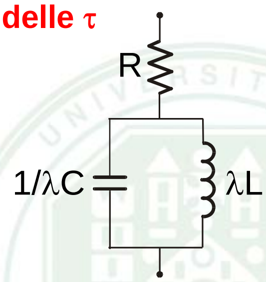
$$v_C(t) = ?$$

$$V_{C0^-} = 0$$

$$I_{L0^-} = 0$$

Calcolo delle τ



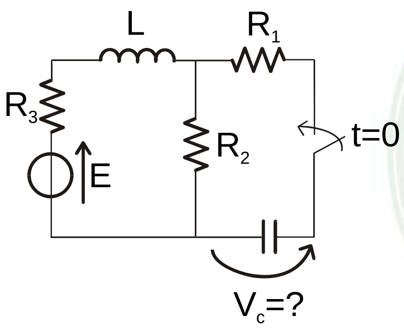


$$R + \left(\frac{1}{\lambda C} // \lambda L\right) = R + \left(\frac{\frac{1}{\lambda C}\cdot \lambda L}{\frac{1}{\lambda C} + \lambda L}\right) = R + \frac{\frac{L}{C}}{\frac{1+\lambda^2 LC}{\lambda C}} = R + \frac{\frac{L}{C}\cdot \lambda C}{1+\lambda^2 LC} =$$

$$= \frac{R + \lambda^2 LRC + L\lambda}{1+\lambda^2 LC}$$

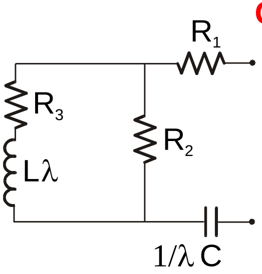
$$\lambda^2 LRC + L\lambda + R = 0$$

Esercizio C



$$E = 50\ \text{V}$$
$$R_1 = 20\ \Omega$$
$$R_2 = R_3 = 40\ \Omega$$
$$L = 0{,}1\ \text{H}$$
$$C = 0{,}05\ \text{F}$$
$$v_{C0^-} = 0$$

Calcolo delle τ



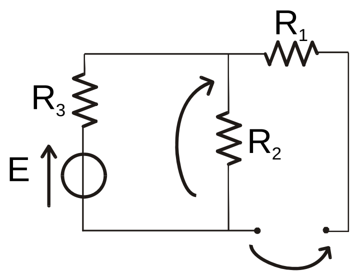
$$\frac{(R_3+\lambda L)R_2}{R_2+R_3+\lambda L}+R_1+\frac{1}{\lambda C}$$

$$\frac{(40+0{,}1\lambda)40}{80+0{,}1\lambda}+20+\frac{20}{\lambda}=\frac{1600\lambda+4\lambda^2+20\lambda(80+0{,}1\lambda)+20(80+0{,}1\lambda)}{(80+0{,}1\lambda)\lambda}=$$

$$=\frac{1600\lambda+4\lambda^2+1600\lambda+2\lambda^2+1600+2\lambda}{(80+0{,}1\lambda)\lambda}\Rightarrow 6\lambda^2+3202\lambda+1600=0$$

$$\lambda_{1/2}=\frac{-3202\pm\sqrt{(3202)^2-4\cdot 6\cdot 1600}}{12}\begin{cases}\lambda_1=-533{,}16\\ \lambda_2=-0{,}5\end{cases}$$

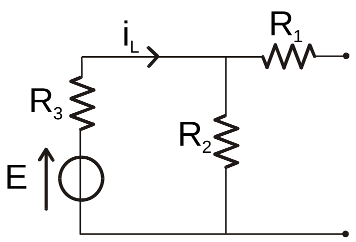
Integrale particolare (t=00)



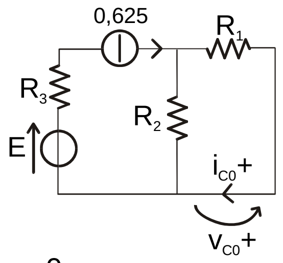
$$v_C = E \cdot \frac{R_2}{R_3 + R_2} = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25\ \text{V}$$

$$v_C(t) = Ae^{-533t} + Be^{-0,5t} + 25$$

t<0



$$i_L = \frac{E}{R_2 + R_3} = 0,625\ \text{A}$$



0^+

$$\begin{cases} v_{C0^+} = 0 \\ i_{C0^+} = 0{,}625\dfrac{40}{60} = 0{,}417\ \text{A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = A + B + 25 = v_{C0^+} \\ 0{,}417 = 0{,}05\left(-533{,}16A - 0{,}5B\right) = C\left.\dfrac{dv_C(t)}{dt}\right|_{t=0^+} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B - 25 \\ 0{,}417 = 0{,}05 \cdot \left(533{,}16 \cdot \left(B + 25\right) - 0{,}5B\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B - 25 \\ 0{,}417 = 26{,}633B + 666{,}45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B - 25 \\ B = -\dfrac{666{,}033}{26{,}633} = -25{,}0078 \end{cases}$$

$$A = 0{,}0078$$

$$v_C(t) = 0{,}0078 \cdot e^{-533{,}16t} - 25{,}0078 \cdot e^{-0{,}5t} + 25$$