MAO

Silviu Filote

February 2024

Contents

1 Il metodo grafico

Cos'è il Metodo grafico? Metodo per la risoluzione di un problema di programmazione matematica tramite rappresentazione nel piano cartesiano. Il metodo risulta essere applicabile esclusivamente in presenza di 2 variabili decisionali.

$$
\begin{array}{llcl}
\textit{max} & \omega = 4x_1 + 5x_2 & & \text{Funzione obiettivo} \\
\text{soggetto a} & x_1 \leq 3 & \multirow{3}{*}{$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}$} & \\
& 2x_2 \leq 12 & & \text{Vincoli funzionali} \\
& 4x_1 + 2x_2 \leq 18 & & \\
& x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 & & \text{Vincoli di non-negatività}
\end{array}
$$

Determinazione della base B:

- Matrice quadrata di ordine m
- Non singolare: $det(B) \neq 0$
- B sottomatrice di $F \in mat(m, m+n)$
- Viene costruita in maniera odinata secondo w

Dato il seguente problema del testo:

$$
\begin{cases}
x_1 + 0 + s_1 = 3 \\
0 + 2x_2 + s_2 = 12 \\
4x_1 + 2x_2 + s_3 = 18
\end{cases}
$$

$$
Fw = b, \qquad F = [A|I_m] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \end{array}, \qquad w = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}
$$

m	*numero vincoli*
n	*numero variabili decisionali*
x_i	*variabili decisionali, ordine n*
s_i	*variabili slack, ordine m*
A	*matrice dei coefficienti dei vincoli*
I_m	*matrice identitá di ordine m*
b	*vettore dei termini noti*
w	*vettore di tutte le varabili decisionali + slack*
$B \subset F$	*base, sottomatrice di F, colonne sono* w_B
$N \subset F$	*sottomatrice di F, colonne sono* w_N*, colonne non incluse in B*
$w_B = B^{-1}b$	*Variabili di base associate alle colonne della base B (m variabili)*
$w_N = 0$	*Variabili non di base associate alle colonne di N (n variabili)*

Le var non di base sono nulle $w_N = 0$***, dunque***
risolvo rispetto alle variabili di base $w_B = B^{-1}b$

$$
w_B + B^{-1}Nw_N = B^{-1}b
$$
$$
w_B = B^{-1}b
$$

NB: ogni soluzione di base coincide con l'intersezione delle frontiere di n vincoli (le var. non di base sono le var. associate agli n vincoli che si intersecano)

Fasi eseguibili in sequenza, soluzione grafica:

- **Selezione del quadrante:** in base ai vincoli di non negativitá, solitamente I quadrante

$$x_1 \geqslant 0, \qquad x_2 \geqslant 0$$

- **Rappresentazione dei vincoli:** transformare i vincoli di disuguaglianza in vincoli di uguaglianza e rappresentare la retta nel piano e la parte di piano individuata dal vincolo per identificare la regione ammissibile. Le variabili s_i vengono denominate **variabili slack**

$$x_1 \leqslant 3 \quad \rightarrow \quad x_1 + s_1 = 3$$

$$2x_2 \leqslant 12 \quad \rightarrow \quad 2x_2 + s_2 = 12$$

$$4x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \quad \rightarrow \quad 4x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$

Attenzione: la moltiplicazione per $\cdot(-1)$ cambia il verso della disequazione:

$$-3x_1 + 9x_2 \leqslant 13 \quad \equiv \quad 3x_1 - 9x_2 \geqslant -13$$

$$3x_1 - 9x_2 \geqslant -13 \quad \rightarrow \quad 3x_1 - 9x_2 - s_4 = -13$$

NB: per la rappresentazione nel piano utilizzare le equazioni con $s_i = 0$ e verificare la regione ammissibili sostituendo un punto, per esempio l'origine $(0, 0)$

$$\begin{array}{lll} x_1 \leqslant 3 & x_1 + s_1 = 3 & x_1 = 3,\ con\ (s_1 = 0) \\ 2x_2 \leqslant 12 & 2x_2 + s_2 = 12 & x_2 = 6,\ con\ (s_2 = 0) \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 18 & 4x_1 + 2x_2 + s_3 = 18 & 2x_1 + x_2 = 9,\ con\ (s_3 = 0) \end{array}$$

- **Identificazione della regione ammissibile:** la regione ammissibile viene determinata dalla sovrapposizione di tutti i vincoli funzionali + vincoli di non negativitá. Se esiste un solo vincolo che non soddisfa la regione ammissibile il problema non ha soluzione.

  La regione ammissibile puó essere:

  - limitato, i vertici rappresentano i punti ottimali, per cui basta selezionare il piú prestante tra quelli evidenziati
  - illimitata, l'esistenza di soluzioni dipende dalla funzione obiettivo, possibile problema illimitato

- **Rappresentazione grafica della funzione obiettivo:** il grafico viene disegnato come ascisse: x_1 e ordinate: x_2. Scrivere la funzione obiettivo in funzione di x_2 e rappresentare l'equazione come fascio di rette passante per i punti ottimali:

$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{\omega}{5} \qquad x_2 = -\frac{4}{5}x_1 \ con\ (\omega = 0)$$

- **Determinazione dell'ottimo:** la funzione obiettivo dev'essere massimizzata in questo caso, dunque la scomponiamo e scegliamo il punto ottimo che massimizza l'intercetta e dunque ω:

$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + q \qquad \uparrow q = \frac{\omega \uparrow}{5}$$

$$C : \begin{cases} s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 6 \\ x_1 = 3/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{\omega}{5} \qquad \omega^* = 36$$

Quanto valgono le variabili slack:

$$s_1 = 3 - x_1 = \frac{3}{2}, \qquad w^C = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 6 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \omega^C = 36, \qquad C = (x_1, x_2)$$

Fasi eseguibili in sequenza, metodo algebrico:

- **Determinazione della base:** w^C essendo l'ottimo sará maggiore di qualsiasi altro ottimo/vertice della regione ammissibile, infatti $w^C > w^D$

$$C : \begin{cases} s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \textit{Var non di base: } s_2, s_3 \\ \textit{Var di base: } x_1, x_2, s_1 \end{cases}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \scriptstyle x_1 \quad x_2 \quad s_1 \end{array} \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} w_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 6 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{bmatrix} \\ w_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \quad w^C = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 6 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Metodo alternativo:

$$w^C = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 6 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 + s_3 = 18 \\ 2x_2 + s_2 = 12 \\ x_1 + s_1 = 3 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 6 \\ s_1 = 3 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{bmatrix}$$

Determinazione delle soluzioni: segmento BC

- 2 soluzioni di base (vertici della Regione Ammissibile)

Nel punto C

$$B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \scriptstyle x_1 \quad x_2 \quad s_1 \end{array} \qquad [w^C]^T = \left[\frac{3}{2}; 6; \frac{3}{2}; 0; 0\right]$$

Nel punto B

$$B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \scriptstyle x_1 \quad x_2 \quad s_2 \end{array} \qquad [w^C]^T = \left[3; 3; 0; 6; 0\right]$$

- ∞ soluzioni non di base (punti del segmento BC). Non sono soluzioni di base perché non sono l'intersezione delle frontiere dei due vincoli

$$\alpha \in (0,1) \rightarrow [w^{BC}]^T = \alpha[w^C]^T + (1-\alpha)[w^B]^T = \left[3 - \frac{3}{2}\alpha; 3 + 3\alpha; \frac{3}{2}\alpha; 6 - 6\alpha; 0\right]$$

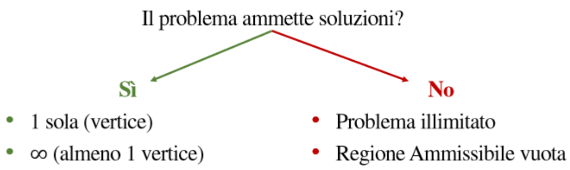
Il segmento é sovrapposto al vincolo s_3 ecco perché é posto a 0

- Tutte con lo stesso valore della funzione obiettivo: $\omega^* = 27$

Attenzione:

- I vertici della regione ammissibile non sono le uniche soluzioni di base
- Esistono soluzioni di base non ammissibili, che sono i vertici fuori dalla regione ammissibile
- Se la funzione obiettivo puó determinare un intero segmento per la soluzione ottima, questo accade quando il fascio di rette seleziona una porzione di segmento della regione ammissibile
- Se il vertice interseca 3 vincoli $\Rightarrow$ **soluzione degenere**

Algebra	Geometria
Soluzione di base	Intersezione delle frontiere dei vincoli
Soluzione di base ammissibile	Vertice della Regione Ammissibile
Soluzione di base non ammissibile	Intersezione tra vincoli esterna alla regione ammissibile
Soluzione di base degenere	Intersezione delle frontiere di (almeno) $n + 1$ vincoli



2 Algoritmo del simplesso

Cos'è il Simplesso? Algoritmo fondato sul Teorema Fondamentale della PL per la risoluzione di un problema di programmazione lineare strutturato in due fasi.

Fase 1 - Ammissibilitá: da svolgere esclusivamente quando l'origine non è un vertice della regione ammissibile. A partire dall'origine degli assi, viene esplorata una sequenza di soluzioni di base non ammissibili, terminando con

- Identificazione di una soluzione di base ammissibile iniziale (s.b.a.i.)
- Constatazione dell'inammissibilità del problema: regione ammissibile vuota

Fase 2 - Ottimalità: A partire dalla s.b.a.i. identificata al termine della fase precedente, viene esplorata una sequenza di soluzioni di base ammissibili, terminando con

- Identificazione di una o più di una o piú s.b.a.o. (Soluzione (o soluzioni) di base ammissibile ottima)
- Constatazione dell'illimitatezza del problema

Ad ogni iterazione il valore della funzione obiettivo migliora, fino all'ottenimento dell'ottimo (se esiste)

Tableau

L'algoritmo del simplesso utilizza il tableau ad ogni iterazione:

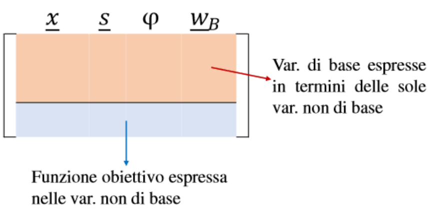


Tableau Iniziale
$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc} A & I & \underline{0} & \underline{b} \\ \hline -\underline{c}^T & \underline{0}^T & 1 & \gamma \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

Tableau Finale
$$\begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc} B^{-1}A & B^{-1} & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \hline \underline{c}_B^T B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{array}\right]$$

Nota bene:

- La funzione obiettivo viene espressa in maniera implita: $\varphi + k_j x_i = 0$, cambiando il segno dei k_j
- Le variabili di base sono i versori, dunque inizialmente sono le var slack
- I termini noti devono essere positivi: $w_B > 0$
- **Test di ottimalitá:** la soluzione ottima della funzione obiettivo la si ottiene quando tutti i coefficienti di costo sono negativi: $c_i < 0$
- Nel caso $\exists c_i > 0$ si effettua: **la regola dei minimi rapporti**. Si sceglie la var non di base con il coefficiente di costo positivo maggiore e la si porta in base, in questo modo peró dobbiamo togliere una var di base. I rapporti si effettuano solo se il termine risulta essere postivo altrimenti possiamo saltare il rapporto e si sceglie il minimo rapporto tra quelli calcolati. La componente minore del vettore diventerá **l'elemento pivot**, ossia su tale **riga pivot** dobbiamo portarla a 1 e trasformare l'intero vettore in un versore applicando operazioni di riga:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1^{0} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3^{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2^{0} & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3^{0} & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Calcolo rapporti:

$$\frac{w_B}{x_1} = \left(\frac{1}{1}; \frac{1}{3}; \cancel{\frac{15}{-2}}\right)$$

La variabile x_1 entrerá in base come II var di base

Operazione riga fondamentale: *e per gli altri calcoli uso* $\overline{R_{piv}}$

$$\overline{R_{piv}} = \frac{R_{piv}}{n} = 1$$

$$\overline{R_i} = R_i - \overline{R_{piv}} = 0$$

Forma standard:

- Modelizzare il problema in problema di minimo
- Termini noti: $w_B > 0$
- Da disequazione ad equazione: aggiungere le var di slack s_i
- Vedere se l'ordine é inclusa o meno $(0, 0) \rightarrow$ saltare direttamente alla fase II

Fase I:

- Costruzione del problema artificiale:
  - Introduzione di una variabile temporazione t_i per ciascun vincolo violato nell'origine: $\geqslant, =$
  - Le variabili t_i saranno delle variabile che assorbiranno al loro interno l'inamissibilitá dei vincoli
  - Introduzione della nuova variabile obiettivo $\psi = \sum_i t_i$, somma totale delle inamissibilitá
  - creazione tableau, la funzione obiettivo deve essere espressa in termini di variabili non di base. La funzione obiettivo viene scritta in forma implicita, dunque cambio segni
  - **Test di ottimalitá:** fase iterativa, si tratta di una soluzione ottima se i $c_i < 0$ se cosí non fosse effettuiamo i **minimi rapporti**
  - **Minimi rapporti:** prendiamo la variabile non di base con c_i maggiore dividiamo le componenti per w_B. Tale variabile non di base entrará in base a una data posizione dato il rapporto piú piccolo che troviamo dividendo per w_B. Tale variabile non di base diventerá un versore
  - Eseguiamo il test di ottimalitá + minimi rapporti fino a quando non otteniamo una soluzione ottima $\rightarrow c_i < 0$
- Risoluzione del problema artificiale: $min\ \psi$ + indentificazione var di base/non di base
  - se $\psi^* = 0 \rightarrow$ abbiamo risolto tutte le inamissibilitá e abbiamo ottenuto una sbai alla quale possiamo applicare la fase II del simplesso.
  - se $\psi^* > 0 \rightarrow$ non é possibile risolvere le inamissibilitá, il problema presenta una regione di ammisibilitá vuota che non ammetta alcuna soluzione

Fase II - origine esclusa:

- In questa fase le t_i devono essere eliminate, inoltre si deve sostituire ψ con φ.
- Le t_i si possono eliminare tranquillamente senza dover modificare la parte sopra del tableau e cambiare la riga R0 con quella originale del problema, ma bisogna portare tutto in **forma standard**
- La funzione obiettivo φ deve essere espressa in termini di variabili non di base.
- Seguire poi la fase II normale

Fase II - origine inclusa:

- Creazione del tableau
- **Test di ottimalitá** per vedere se soluzione ottima: $c_i \leqslant 0$
- Calcolare i **minimi rapporti** se non abbiamo una soluzione ottima: $\exists c_i > 0$
- La componente $i - esima$ con rapporto minimo della var non di base con coefficiente maggiore entrará in base come var di base nella posizione $i - esima$

Risultati soluzione ottima:

- **Var non di base (i non versori):** soluzione viene scritta in fuzione di var non di base
- **Var di base (versori):** ordinata secondo I_m + il valore é il w_B della riga (m var m vincoli s_i)
- **Valore ottimo della funzione obiettivo:** φ^*
- **La base dell'esercizio:** B stesso ordine di I_m andando a prendere i valori dei vettori iniziali

Casistiche speciali:

- **Ottimi alternativi:** se una var non di base della soluzione ottima ha $c_i = 0$. Portare tale var in base e ottenere il risultato secondario, l'ultima riga rimarrá invariata. Attribuendo qualsiasi valore a $x_i/s_i = 0$ il valore di φ non cambia.

Soluzioni di base:	*punto A, punto B, 2 soluzioni*
var di base w_A e w_B:	*var di base $\neq$ 0, mentre le altre = 0*
∞ soluzioni non di base:	$\alpha \in (0,1) \rightarrow [w^{AB}]^T = \alpha[w^A]^T + (1-\alpha)[w^B]^T$
Tutte con lo stesso valore della funzione obiettivo:	φ^*

Esempio:

$$0x_i - 2s_i + \varphi = -16 \quad \rightarrow \quad \varphi = -16 + 0x_1 + 2s_1$$

Attribuendo valore positivo a x_1 il valore di φ non cambia

- **Soluzione degenere:** durante il minimo rapporto abbiamo 2 componenti o piú componenti con lo stesso rapporto. Di conseguenza una variabile di base possiede w_B associato $0 \rightarrow s_i/x_i = 0$. Date m var di base dobbiamo trovare m soluzioni diverse cambiando minimi rapporti.

$$\left(/; \frac{6}{3}; \frac{12}{4} \right) \rightarrow \textit{soluzioni degenere}$$

Var non di base:	s_1, s_2
Var di base:	$x_1 = 3, x_2 = 3, s_3 = 0$

s_3 soluzione degenere

- **Problema illimitato:** dato il fallimento del test di ottimalitá, se nei minimi rapporti l'unico elemento da portare in base non presenta alcuna componente positiva $(/;/;/) \rightarrow$ *non esiste l'elemento pivot* il problema risulta illimitato (componenti tutte negative o nulle) per i minimi rapporti

Minimi rapporti: componenti nulle o negative

$(/;/;/) \Rightarrow$ *non esiste elemento pivot* $\Rightarrow$ ***problema risulta illimitato***

Ricapitolando:
L'algoritmo del simplesso è basato sul Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare:

- **Parte I:** Fase di ammissibilità $r \rightarrow$ sbai / regione ammissibile vuota
- **Parte II:** Fase di ottimalità $r \rightarrow$ sbao / problema illimitato

Note:

- Modelizzare il problema in un problema di minimo usando una nuova variabile obiettivo φ

$$max\ \omega = x_1 + 3x_2$$

$$min\ \varphi = -x_1 - 3x_2$$

- Aggiungere le variabili slack $s_i \geqslant 0$, trasformando le disequazioni in equazioni.

se: $x \leqslant 20$	$x + s_1 = 20$
se: $x \geqslant 20$	$x - s_1 = 20$

- Dato il vincolo di non negativitá, viene selezionato il I quadrante come regione ammissibile. Si salta la fase I se l'origine viene inclusa perché sicuramente un vertice, visto che rappresenta il punto piú estremo di tale regione ammissibile
- Ottengo **la soluzione ottima** portando tutti gli $c_i < 0$
- Gli **ottimi alternativi** accade quando una variabile non di base possiede $c_i = 0$, attribuendo valore positivo a x_i il valore di φ non cambia, volendo avere un'altra soluzione ottima portare in base x_i. L'ultima riga del tableau $R0$ non va toccata perché é giá sistemata
- Otteniamo una **soluzione degenere** se una variabile di base possiede w_B associato $0 \rightarrow s_i/x_i = 0$. Questo accade quando facciamo i minimi rapporti e i rapporti ottenuti dalle componenti sono gli stessi e dobbiamo decidere in maniera albitraria con quale variabile entrare in base. Per ottenere tutte le soluzioni ottime della degenerazione, ritornare sui minimi rapporti e scegliere di portare in base con un rapporto diverso rispetto a prima o ritornare al principio e portare e portare in base una variabile con c_i non maggiore. Dati m vincoli abbiamo m var di base e dunque m soluzioni ottime al caso di degenerazione.
- Le variabili slack s_i e le varaibili temporanee t_i sono soggette alla non negativitá: $s_i, t_i \geqslant 0$.
- Moltiplicando la disequazione per $\cdot(-1)$ il verso della disequazione cambia
- Le variabili di base sono versori e nulli mentre quelle non di base non sono nulle. Guardare riga R0 per verificare se sono nulle o meno
- Il metodo grafico puó essere effettuato quiand le variabili decisionali sono al piú 2
- Ad ogni iterazione del simplesso puo essere portata in base qualsiasi variabile non di base che ha un coefficiente di costo relativo positivo
- Come regola generale portiamo in base quella che possiede coefficiente piú grande, raggiungendo in qusta maniera l'ottimo piú rapidamente
- le variabili decisionali x_i possiedono vincoli di non negativitá: $x_i \geqslant 0$
- I **minimi rapporti** si fanno solo su coefficienti $c_i > 0$ perché voglio portarli ad essere negativi per ottimizzare la funzione obiettivo. Oltretutto considero solo le componenti positive della variabile che sto considerando quando effettuo la divisione per w_B

Per l'esame:

- All'esame non ci verrá chiesto di calcolare tutte le basi per la degenerazione
- Ma dovranno essere calcolate tutte le basi nel caso di ottimi alternativi

Cosa scrivere:

- **Test di ottimalitá:** soluzione non ottima $\exists c_i > 0$ / soluzione ottima $\forall c_i < 0$
- **Minimi rapporti:** x_i entrerá in base come $i - esima$ var di base
- **Fase I:**

se $\psi^* = 0$	*Abbiamo individuato una s.b.a.i.*
se $\psi^* > 0$	*Non esiste alcuna s.b.a.i. La regione ammissibile è vuota*

3 GAMS

Note per la scrittura

;	*carattere terminatore di ogni blocco*
*	*inserire commenti*
$\$ontext \quad \$offtext$	*commenti su piú righe*

Defizione blocchi:
var commento /valori/

Set ;	*blocco insieme decisionale*
$Sets$;	*blocco insiemi decisionali*
$alias(i, ii)$;	*attribuire due nomi diversi a uno stesso insieme*
$scalar/s$;	*blocco dichiarazione scalare/i*
$Parameter/s$;	*blocco dichiarazione vettore/i*
$Table$;	*blocco dichiarazione matrici da input*
$Parameter/s$;	*blocco dichiarazione matrici basate su rielaborazioni*
$Variable/s$;	*blocco dichiarazione variabili decisionali*
$Equation/s$;	*blocco dichiarazione vincoli funzionali e var obiettivo*
$Model\ nome$;	*blocco dichiarazione modello*
$Solve\ nome$;	*risoluzione del modello*

Tipologia di variabili:

Positive Variables ;	*blocco dichiarazione variabili soggette a vincoli di non negativitá*
Negative Variables ;	
Binary Variables ;	
Integer Variables ;	*variabile compresa tra [0,100]*
Free Variables ;	*tutto R*

Estensioni variabili decisionali:

x.lo(j) = 3 ;	*imporre lower bound della variabile x*
x.up(j) = 3 ;	*imporre upper bound della variabile x*
x.fx(j) = 3 ;	*imporre fixed value della variabile x*
x.l(j) ;	*accedere al valore di x a valla della risolzuione*

Segni operazioni:

=e=	*uguale a*
=l=	*minore uguale a*
=g=	*maggiore uguale a*

Risoluzione del modello:
Solve *Esempio* ***using*** *LP* ***maximizing*** *z ;*
Display *x.l, z.l, A, At, b, c ;*

Note:

- Non é case sensitive
- Ogni variabile che viene inizializzata viene assunta come free variable (di default)
- La variabile obiettivo deve essere sempre una variabile **free variabile**
- **Fase di input:** insiemi e indici + dati (scalari, vedttori e matrici)
- **Fase di modellazione:** variabili + vincoli + modello
- **Fase di implementazione:** risoluzione del modello e la stampa degli output
- Il modello é un insieme di vincoli che abbiamo definito in equations
- Non per forza gli elementi che costituiscono un insieme devono essere numerici
- Tutti i dati di input non richiedono estensione $.l$ mentre le variabili decisionali si

4 Analisi di sensitività

Cos'è l'analisi di sensitività? Analisi finalizzata a valutare la robustezza di una soluzione, determinando gli effetti sui risultati di un modello indotti da modifiche nei valori dei parametri

- Variazione della disponibilità di una risorsa
- Variazione del profitto unitario di una variabile decisionale
- Introduzione di un nuovo vincolo
- Introduzione di una nuova variabile decisionale
- Variazione di un coefficiente della matrice dei vincoli

Notazione:

$\underline{x}$	*var decisionali*
$\underline{p}^T$	*vettore dei profitti unitari*
$\underline{b}$	*termini noti*
$\gamma \in \mathbb{R}$	*solitamente 0*
$A^{m \times n}$	*matrice coefficienti dei vincoli* ***n:*** *vincoli,* ***m:*** *var decisionali*
r	*coefficiente di costo relativo, riga R0*
$c = -p$	*i costi sono dati dall'opposto dei profitti*
$max\ \omega = \underline{p}^T \underline{x} - \gamma$	*var obiettivo, massimizzare i profitti*
$min\ \varphi = \underline{c}^T \underline{x} + \gamma$	*var obiettivo, minimizzare i costi, opposto di* ω
$\underline{c}_B$	*costi unitari delle variabili di base (ordinate secondo* B*)*
$\underline{c}_N$	*costi unitari delle variabili non di base (ordinate secondo* N*)*
$\underline{v}_b$	*variabili di base*
$\underline{v}_{nb}$	*variabile non di vase*
s_i	*nella riga R0 delle slack: prezzi ombra*
$\underline{c}_B^T B^{-1}$	*prezzi ombra*
$\varphi = -\omega$	*min - max funzione obiettvo*

Problema equivalente:

$$max\ \omega = \underline{p}^T \underline{x} - \gamma \qquad\qquad min\ \varphi = \underline{c}^T \underline{x} + \gamma$$

$$A\underline{x} \leqslant \underline{b} \qquad\qquad A\underline{x} + I\underline{s} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geqslant \underline{0} \qquad\qquad \underline{x}, \underline{s} \geqslant \underline{0}$$

Variabili decisionali / slack:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\ \text{Tableau Iniziale} & \left[\begin{array}{cccc} A & I & \underline{0} & \underline{b} \\ \hline -\underline{c}^T & \underline{0}^T & 1 & \gamma \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\ \text{Tableau Finale} & \left[\begin{array}{cccc} B^{-1}A & B^{-1} & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \hline \underline{c}_B^T B^{-1} A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{array}\right] \end{array}$$

Variabili di base / non di base:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \underline{v}_b & \underline{v}_{nb} & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\ \text{Tableau Iniziale} & \left[\begin{array}{cccc} B & N & \underline{0} & \underline{b} \\ \hline -\underline{c}_B^T & -\underline{c}_N^T & 1 & \gamma \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \underline{v}_b & \underline{v}_{nb} & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\ \text{Tableau Finale} & \left[\begin{array}{cccc} I & B^{-1}N & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \hline \underline{0}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{array}\right] \end{array}$$

Fasi per la costruzione del tableau finale:

- Da massimizzare a minimizzare i costi $\rightarrow$ da funzione di profitto a funzione di costo
- Da disequazione ad equazione, creazioni variabili slack
- Costruzione del tableau, il testo fornisce l'inversa della base B^{-1} $\rightarrow$ Variabili slack
- Dal modello inziale ricaviamo la matrice dei vincoli A, facendo $B^{-1} \cdot a_i$ $\rightarrow$ Variabile decisionale
- Dal modello ricaviamo il vettore dei termini noti $\underline{b}$, facendo $B^{-1} \cdot \underline{b}$ $\rightarrow$ Ottengo $\underline{w}_B$
- Identifico var di base e var non di base e costruisco i costi di base e non di base guardando la funzione obiettivo φ:

$$\varphi = -2x_1 - 7x_2 - x_3$$

$$\varphi = \color{red}{-2x_1 - 7x_2 + 0s_2} \color{blue}{- x_3 + 0s_1 + 0s_3}$$

  - Costruisco le var di base in ordine guardando I_m e c_B^T secondo guardando i coefficienti della forma esplicita di φ, le var non comprese esempio s_2 vengono poste a 0

Ordine: *per* I_m

$\color{red}{\textit{Var di base: } [x_1; s_2; x_2]}$ $\qquad$ $c_B^T = [-2; 0; -7]$

  - Costruisco le var non di base da quelle rimaste nel tableau in ordine di colonna e assemblo c_N^T allo stesso modo di quello sopra:

Ordine: *per rimanenza*

$\color{blue}{\textit{Var di base: } [x_3; s_1; s_3]}$ $\qquad$ $c_B^T = [-1; 0; 0]$

- Le var non di base v_{nb} é data dalla matrice $B^{-1}N$
- Le variabili di base (versori) hanno coefficienti nulli nella riga $R0$
- Determiniamo i coefficienti di costo relativo (var. non di base): $\underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T$
- Determiniamo il valore della funzione obiettivo: $\varphi = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b}$
- Otteniamo in questo modo il tabluea finale
  - **Test ammissbilitá:** viene fatto sulla colonna w_B sopra il tabluea senza includere la riga $R0$

$$\begin{array}{ll} \textit{se } \exists w_{B_i} < 0 & \textit{soluzione non ammissibile} \\ \textit{se } \forall w_{B_i} > 0 & \textit{soluzione ammissibile} \end{array}$$

  - **Test ottimalitá: viene eseguito sulla riga** $R0$

$$\begin{array}{ll} \textit{se } \forall c_i < 0 & \textit{soluzione ottima} \\ \textit{se } \exists c_i > 0 & \textit{soluzione non ammissibile} \end{array}$$

Soluzione non ammissibile e ottima

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & -2/5 & 2/5 & 0 & -3/5 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & -13/5 & -7/5 & 1 & 3/5 & 0 & \boxed{-10} \\ 0 & 1 & 4/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 0 & \boxed{5} \\ \hline 0 & 0 & -19/5 & -11/5 & 0 & -1/5 & 1 & -45 \end{array}\right]$$

	Ammissibile	Ottimo	Attività
A.	Sì	Sì	Nessuna. Ottimo identificato
B.	Sì	No	Applicazione del simplesso
C.	No	Sì	Applicazione del simplesso duale
D.	No	No	Nessuna. Non è possibile identificare l'ottimo

Calcolare le variazioni/perturbazione

- **Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa/in eccesso:** determinare l'intervallo entro cui il parametro b_2 può variare senza che cambi la composizione della base ottima e determinare il corrispondente intervallo di variazione del profitto

$$\widetilde{b}_2 = b_2 + \delta$$
$$\widetilde{\underline{b}} = \underline{b} + \underline{e}_2 \delta$$

Questo parametro se cambia cosa cambia nel tableau?
ricalcolare le parti interessate

$$\underline{\widetilde{w_B}} = B^{-1}\widetilde{\underline{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_2\delta \geqslant 0$$

sistema di equazioni dove si trova un range di $k_{min} \leqslant \delta \leqslant k_{max}$

$$\widetilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_2\delta$$

Le componenti sono termini noti:

s_2 *della matrice* B^{-1}	$B^{-1}\underline{e}_2$
sw_B *vettore dei noti*	$B^{-1}\underline{b}$

- La variazione di una risorsa in eccesso non comporta alcuna variazione dei profitti → ossia indipendentemente dalla perturbazione il risultato finale di $\widetilde{\varphi} = \varphi$

- **Variazione del profitto unitario di una variabile di base:** determinare l'intervallo di valori del parametro p_1 per i quali la composizione della base iniziale non cambia. Determinare l'intervallo dei profitti totali associato a tale intervallo di valori di p_1

profitto unitario:	$\underline{p}_i$
costo unitario:	$\underline{c}_i = -\underline{p}_i$
costi unitari v_b*:*	$\underline{c}_B^T$
costi unitari v_{nb}*:*	$\underline{c}_N^T$
coeff. di costo relativo v_{nb}	$\underline{r}_N^T$
Calcolo funzione obiettivo riga R0 w_B*:*	φ

$\underline{p}_1 \rightarrow \underline{x}_1$ ***che é il secondo vettore di*** $\underline{c}_B^T$

$$\underline{c}_B^T = \left[s_1 = 0 \quad x_1 = -5 \quad s_3 = 0\right]$$
$$\widetilde{p}_1 = p_1 + \delta \quad \rightarrow \quad \widetilde{c}_1 = c_1 - \delta$$
$$\widetilde{\underline{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_2^T\delta$$

Dalla variazione di questo termine variano:

$$\widetilde{\underline{r}}_N^T = \widetilde{\underline{c}}_B^T B^{-1}N - \underline{c}_N^T \leqslant \underline{0}^T$$
$$\widetilde{\varphi} = \widetilde{\underline{c}}_B^T B^{-1}\underline{b}$$

Sapendo che:

$$\delta = -3 : \begin{cases} \widetilde{c}_1 = c_1 - \delta = -5 + 3 = -2 \\ \widetilde{p}_1 = -\widetilde{c}_1 = 2 \\ \widetilde{\varphi} = -50 - 10\delta = -20 \\ \widetilde{\omega} = -\widetilde{\varphi} = 20 \end{cases}$$

$$\delta \geqslant -3 \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{p}_1 \geqslant -2 \\ \widetilde{\omega} \geqslant 20 \end{cases}$$

$\underline{p}_2 \rightarrow \underline{x}_2$ ***che é il secondo vettore di*** $\underline{c}_N^T$

$$\underline{c}_B^T = \left[x_2 = -3 \quad s_1 = 0\right]$$
$$\widetilde{p}_2 = p_2 + \delta \quad \rightarrow \quad \widetilde{c}_2 = c_2 - \delta$$
$$\widetilde{\underline{c}}_N^T = \underline{c}_N^T - \underline{e}_1^T\delta$$

Dalla variazione di questo termine variano:

$$\widetilde{\underline{r}}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1}N - \widetilde{\underline{c}}_N^T \leqslant \underline{0}^T$$

Sapendo che:

$$\delta = \frac{9}{2} : \begin{cases} \widetilde{c}_2 = c_2 - \delta = -3 - \frac{9}{2} = -\frac{15}{2} \\ \widetilde{p}_2 = -\widetilde{c}_2 = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\delta \leqslant \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{p}_2 \leqslant \frac{15}{2}$$

- Introduzione di un nuovo vincolo:
  - Verificare sostituendo x_i con i valori attuali del tablueau per vedere se il vincolo é giá soddisfatto prima di fare trasformazioni inutili
  - Introduzione nuova riga e colonna nel tabluea: da disequazione ad equazione + nuova var slack
  - Il vincolo deve essere espresso nelle variabili non di base
  - Dato il termine noto w_{B_i} del nuovo vincolo si posso presentare:

Vincolo ridondante	w_{B_i} *giá presente*
Vincolo inammissibile	$w_{B_i} < 0$

- Introduzione nuova var decisionale
  - dato il vettore $\underline{a}_3$ della nuova var decisionale x_3 aggiunta calcolare c_3 e determinare p_3
  - nel caso il coefficiente $r_3 > 0$ in $R0$ è necessario applicare l'algoritmo del simplesso al nuovo tableau ottenuto aggiungendo al precedente una colonna associata alla nuova variabile decisionale.

$$B^{-1}\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w_B}$
0	3/2	1/2	1	-1/2	0	0	2
1	3/2	1/2	0	1/2	0	0	10
0	7/2	9/2	0	1/2	1	0	16
0	-9/2	r_3	0	-5/2	0	1	-50

Note sul tabluau finale

- Indicare le seguenti infomazioni:
  - Var non di base: v_{nb}
  - Var di base: v_b
  - Valore funzione obiettivo (massimizzare i profitti/minimizzare i costi): $\varphi^*, \omega^* = -\varphi^*$
  - Indicare la base: B
  - Indicare che si tratta di una soluzione ammissibile ottima
- **Individuare le risorse scarse:** quest'ultime sono solitamente le s_i presenti nelle v_{nb}
- **Individuare le risorse in eccesso:** quest'ultime sono solitamente le s_i presenti nelle v_b
- Queste informazioni sono riassumibili nella riga $R0$ rappresentando i g delle risorse in eccesso tramite $\underline{r}_N^T$ e 0 per le risorse scarse

Variazione	Rischio	Operazioni sul tableau
Disponibilità risorse	Ammissibilità	Simplesso duale
Profitti unitari	Ottimalità	Simplesso primale
Nuovo vincolo	Ammissibilità	Simplesso duale
Nuova variabile	Ottimalità	Simplesso primale
Matrice dei vincoli	Ottimalità	Simplesso primale

5 Teoria della Dualità

Cos'è la Dualità? Associazione ad ogni problema di programmazione lineare un altro problema di programmazione lineare **(problema duale)** definito sullo stesso insieme di dati. Dal problema duale è possibile dedurre importanti proprietà sul problema originario **(problema primale)**:

- Costruire stime del valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale
- Determinare la soluzione ottima del problema primale

Problema primale: *visione del produttore, massimizzazione dei profitti*

$$\begin{aligned} &max\ \omega = \underline{p}^T \underline{x} + \gamma \\ &s.a \quad A\underline{x} \leqslant \underline{b} \\ &\underline{x} \geqslant \underline{0} \end{aligned}$$

Problema duale: *visione del compratore, minimizzazione dei costi*

$$\begin{aligned} &min\ \varphi_D = \underline{b}^T \underline{y} + \gamma \\ &s.a \quad A^T\underline{y} \geqslant \underline{p} \\ &\underline{y} \geqslant \underline{0} \end{aligned}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \underline{p}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{b}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega + \underline{x}^T \underline{z} + \underline{s}^T \underline{y} = \varphi_D$$

Fasi:

- Da vincolo di maggioranza a vincolo di minoranza, e segnamo tale vincolo $\overline{y_2}$
- Il vincolo di uguaglianza andrá trasformato in una coppia di vincoli di minoranza: $\leqslant, \geqslant \rightarrow =$

$$x_1 + 2x_3 = 4, \ \textit{diventa:}$$

$$x_1 + 2x_3 \leqslant 4$$

$$x_1 + 2x_3 \geqslant 4 : y_1^+ \quad \rightarrow \quad -x_1 - 2x_3 \leqslant -4 : y_1^-$$

- La variabile non-positiva $x_2 \leqslant 0$ dovrà essere sostituita da una variabile non-negativa

$$\overline{x}_2 = -x_2 \quad \rightarrow \quad \overline{x}_2 \geqslant 0$$

- La variabile libera $x_2 \in \mathbb{R}$ dovrà essere sostituita da variabili non-negative

$$x_2 = x_2^+ - x_2^-, \qquad x_2^+, x_2^- \geqslant 0$$

e aggiungiamo per ogni vincolo la coppia

$$+kx_2^+ - kx_2^-$$

- Gli m vincoli primali y_i diventano variabili decisionali nel problema duale e vengono posti: $y_i \geqslant 0$
- Le n variabili decisionali x_i diventano i vincoli nel problema duale. Se ho n var decisionali avró dunque n righe, inoltre $(x_2^+ - x_2^-)$ sono 2 var decisionali
- Trasposizione valori da primale a duale:
  - $min \varphi_D$: trasposizione termini noti da primale
  - $\underline{b}$: trasposizione coefficienti funzione obiettivo da primale
  - I vincolo $\geqslant 0$: coefficienti a_1 di x_1
  - II vincolo $\geqslant 0$: coefficienti a_2^+ di x_2^+
  - III vincolo $\geqslant 0$: coefficienti a_2^- di x_2^-
- I vincoli y_1^+ e y_1^- diventano: $y_1 = y_1^+ - y_1^-$ e dunque $y_1 \in \mathbb{R}$
- Vincoli che sono uguali ma con versi opposti: $\leqslant, \geqslant$ diventa unico vincolo di uguaglianza
- I vincoli segnati $\overline{y}_2$ diventano $y_2 = -\overline{y}_2$ e dunque bisogna cambiare tutti i segni e il verso dei vincoli di non negativitá

Calcolo delle stime

Essendo il problema primale un problema di massimo

- Il valore di ω in una qualsiasi soluzione ammissibile del primale è un lower bound per il valore ottimo ω^*
- Il valore di φ_D in una qualsiasi soluzione ammissibile del duale è un upper bound per il valore ottimo φ_D^*

$$\underline{x}^T = [1; 2] \ \textit{è una soluzione ammissibile per il problema primale}$$

$$\omega = 3x_1 + 2x_2 = 7$$

$$\underline{y}^T = [2; 0] \ \textit{è una soluzione ammissibile per il problema duale}$$

$$\varphi_D = 6y_1 + 2y_2 = 12$$

$$7 \leqslant \omega^* = \varphi^* \leqslant 12$$

Algoritmo velocizzato:

	Problema max ω	min φ_D	
Vincoli m	$y_1 \leqslant$ $y_2 \geqslant$ $y_3 =$	$y_1 \geqslant$ $y_2 \leqslant$ $y_3 \in \mathbb{R}$	Variabili m
Variabili n	$x_1 \leqslant$ $x_2 \geqslant$ $x_3 \in \mathbb{R}$	$x_1 \leqslant$ $x_2 \geqslant$ $x_3 =$	Vincoli n

	Problema min φ	max ω_D	
Vincoli m	$y_1 \leqslant$ $y_2 \geqslant$ $y_3 =$	$y_1 \leqslant$ $y_2 \geqslant$ $y_3 \in \mathbb{R}$	Variabili m
Variabili n	$x_1 \leqslant$ $x_2 \geqslant$ $x_3 \in \mathbb{R}$	$x_1 \geqslant$ $x_2 \leqslant$ $x_3 =$	Vincoli n

Condizioni di complementarietà primale-duale

$$\omega + \underline{x}^T \underline{z} + \underline{s}^T \underline{y} = \varphi_D$$

$$\begin{aligned} &\textit{min } \varphi = x_1 - x_2 \\ &\textit{s.a} \quad x_1 + 2x_2 \geqslant 7 \\ &\quad -2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ &\quad 3x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ &\quad x_1 \leqslant 0 \\ &\quad x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\textit{max } \omega_D = 7y_1 + 6y_2 + 8y_3 \\ &\textit{s.a} \quad y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geqslant 1 \\ &\quad 2y_1 + y_2 + 3y_3 \leqslant -1 \\ &\quad y_1, y_3 \geqslant 0 \\ &\quad y_2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot z_1 = 0 \\ x_2 \cdot z_2 = 0 \\ y_1 \cdot s_1 = 0 \\ y_2 \cdot s_2 = 0 \\ y_3 \cdot s_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \cdot (y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 1) = 0 \\ x_2 \cdot z_2 = 0 \\ y_1 \cdot (x_1 + 2x_2 - 7) = 0 \\ y_2 \cdot s_2 = 0 \\ y_3 \cdot s_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x}_A = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} -1 \cdot (y_1 - 2y_2 - 1) = 0 \\ 4 \cdot (2y_1 + y_2 + 1) = 0 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y}_A = \begin{bmatrix} -1/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{y}_A$ non è una soluzione ammissibile per il problema duale perché viola il vincolo di non-negatività sulla variabile $y_1 \geqslant 0$. Possiamo dunque escludere che $\underline{x}_A$ non rappresenta la soluzione ottima per il problema assegnato

Algoritmo del simplesso duale

- Si applica su tableau ottimi ma non ammissibili
- Si individua la riga con $w_{Bi} < 0$ e applichiamo la regola dei minimi rapporti tra la riga $i - esima$ Ri e $R0$, solo componenti positive e si sceglie la componente con rapporto minimo:

$$\frac{R0}{Ri} = \left(\frac{10}{19}; \frac{1}{2}; / \right)$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
5/3	1	0	1	0	-2/3	0	4
2/3	0	1	0	0	1/3	0	7
$\boxed{-19/3}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-4}$	$\boxed{1}$	$\boxed{7/3}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-3}$
-10/3	0	0	-2	0	-2/3	1	-50

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
5/3	1	0	1 0	0	-2/3	0	4
2/3	0	1	0 0	0	1/3	0	7
-19/3	0	0	-4 1	1	7/3	0	-3
-10/3	0	0	-2 0	0	-2/3	1	-50

- Si seleziona la componente minore e si effettua come al solito operazioni tra le righe per portare in base la variabile selezionata

	Simplesso	**Simplesso Duale**
Soluzioni esplorate	Soluzioni di base ammissibili	Soluzioni di base ottime
Criterio di arresto	Ottimalità	Ammissibilità
Valore della v.o.	Migliora ad ogni iterazione	Peggiora ad ogni iterazione
Variabile entrante in base	Coefficiente di costo relativo positivo	Stabilita dai minimi rapporti
Variabile uscente dalla base	Stabilita dai minimi rapporti	Variabile con valore negativo
Inesistenza pivot	Regione ammissibile illimitata	Regione ammissibile vuota

$$\omega + \underline{x}^T \underline{z} + \underline{s}^T \underline{y} = \varphi_D$$

$$\begin{aligned}
& min\ \varphi = x_1 - x_2 \\
s.a \quad & x_1 + 2x_2 \geqslant 7 && y_1 \\
& -2x_1 + x_2 \leqslant 6 && y_2 \\
& 3x_1 + 3x_2 \leqslant 6 && y_3 \\
& x_1 \leqslant 0 \\
& x_2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& max\ \omega_D = 7y_1 + 6y_2 + 6y_3 \\
s.a \quad & y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geqslant 1 && x_1 \\
& 2y_1 + y_2 + 3y_3 \leqslant -1 && x_2 \\
& y_1 \geqslant 0 \\
& y_2, y_3 \leqslant 0
\end{aligned}$$

Problema max ω		min φ_D	
Vincoli m	$y_1 \leqslant$ $y_2 \geqslant$ $y_3 =$	$y_1 \geqslant$ $y_2 \leqslant$ $y_3 \in \mathbb{R}$	Variabili m
Variabili n	$x_1 \leqslant$ $x_2 \geqslant$ $x_3 \in \mathbb{R}$	$x_1 \leqslant$ $x_2 \geqslant$ $x_3 =$	Vincoli n

Problema min φ		max ω_D	
Vincoli m	$y_1 \leqslant$ $y_2 \geqslant$ $y_3 =$	$y_1 \leqslant$ $y_2 \geqslant$ $y_3 \in \mathbb{R}$	Variabili m
Variabili n	$x_1 \leqslant$ $x_2 \geqslant$ $x_3 \in \mathbb{R}$	$x_1 \geqslant$ $x_2 \leqslant$ $x_3 =$	Vincoli n

6 Programmazione Lineare Intera (PLI)

Cos'è la Programmazione Lineare Intera? Classe di modellazione in cui le variabili decisionali, oltre ai vincoli funzionali e di non-negatività, devono soddisfare anche dei vincoli di interezza. Esistono due tecniche risolutive per la PLI:

- Branch and Bound:
  - Risoluzione grafica (solo con 2 variabili decisionali)
  - Risoluzione algebrica
- Gomory

Risoluzione grafica

- Si seleziona il I quadrante dati i vincoli di non negativitá: ordinate x_2, ascisse x_1
- Da disequazioni a rette e rappresentare le rette dei vincoli ponendo le slack $s_i = 0$
- Individuare la regione ammissibile e selezionare i vertici
- Riscrivere la funzione obiettivo in funzione di x_2 in maniera esplicita

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\omega}{4} = -\frac{1}{2}x_1 + q$$

- Tracciare x_2 con $q = 0$ e poi traslare su tutti i vertici. L'obiettivo é massimizzare dunque scegliere l'intercetta massima:

$$\uparrow \omega \Rightarrow \uparrow q$$

- **La soluzione del rilassamento continuo:** individuato il vertice che poggia sui vincoli/rette determino le coordinate del vertice P_0 e il valore della funzione obiettivo ω^* → **Punto di partenza**
- **NB:** la soluzione del rilassamento continuo non è ammissibile per il problema di PLI è necessario applicare l'algoritmo di Branch and Bound

Branch and Bound:

- Ad ogni iterazione, dal problema originario (padre) vengono generati due sottoproblemi (figli), selezionando una variabile x_i che presenta valore frazionario x_i^* e considerando i due vincoli addizionali (tagli).

$$x_i \leqslant \lfloor x_i^* \rfloor$$
$$x_i \geqslant \lceil x_i^* \rceil$$

- Ogni problema figlio viene risolto, procedendo in maniera iterativa (generando altri figli) fino alla chiusura di tutti i nodi (problemi). Un nodo viene chiuso (non genererà ulteriori figli) in tre casi:
  1. La sua soluzione è intera
  2. Ha una regione ammissibile vuota, oppure una regione con un solo punto ma giá compreso nelle soluzioni precedenti
  3. Il valore della funzione obiettivo è peggiore del valore della funzione obiettivo in una soluzione intera già determinata
- **Soluzione:** Quando il valore della f.o. in un nodo con variabili decisionali frazionarie è uguale al valore della funzione obiettivo della migliore soluzione intera individuata, la chiusura o meno di quel nodo dipende dagli obiettivi del decisore:
  - Se l'obiettivo è l'individuazione di una soluzione ottima, il nodo può essere chiuso
  - Se l'obiettivo è l'individuazione di tutte le soluzioni ottime, il nodo deve essere esplorato (potrebbe contenere un ottimo alternativo)
  - Se non esplicitamente richiesto dal testo, siamo liberi di introdurre la nostra ipotesi preferita, purché sia dichiarata

- **Svolgimento:** nella radice si pongono i valori trovati nel rilassamento continuo, si sceglie una variabile frazionaria x_i e si generano 2 nodi andando ad approssimare per effetto ed eccesso e si aggiornano i valori di φ^* e delle variabili. Graficamente si taglia la regione ammissibile e si determina un nuovo vertice P_1:

$$P_0 : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 16/5 \\ \omega = 74/5 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x_2 \leqslant \lfloor 16/5 \rfloor = 3 \\ x_2 \geqslant \lceil 16/5 \rceil = 4 \end{cases} \quad \xrightarrow{x_2 \leqslant 3} P_1 : \begin{cases} x_1 = 5/4 \\ x_2 = 3 \\ \omega = 29/2 \end{cases}$$

Si va sucessivamente ad escludere se necessario uno dei nodi, nel caso in cui il vincolo non rientra nella regione ammissibile. $\rightarrow P_2$ ***Infeasible***

Risoluzione algebrica:

- Creazione del tableau: Fase 1 + Fase 2 del simplesso $\rightarrow$ **tableau del rilassamento continuo**
- Ad ogni iterazione, dal tableau del problema padre vengono generati due tableau figli, considerando alternativamente i due tagli

$$x_i \leqslant \lfloor x_i^* \rfloor$$
$$x_i \geqslant \lceil x_i^* \rceil$$

- I tagli devono essere espressi nelle variabili non di base
- I tagli conportano un'aggiunta di un vincolo al tableau, che da disequazione passa ad equazione e dunque vi é l'aggiunta di: una riga + una collonna (s_i) $\rightarrow$ **applicazione simplesso**
- Dato il vincolo aggiunto il tableau ottenuto risulta essere ottimo, ma non ammissibile $\rightarrow$ **applicazione simplesso duale**

Problema non ottimo/no var di base	*algoritmo del simplesso*
problema inammissibile	*algoritmo del simplesso duale*
Non esiste l'elemento pivot (coeff. non +)	*Il problema è inammissibile*

Gomory

- Creazione del tableau del rilassamento continuo
- Se la colonna $w_B + R0$ le componenti non sono intere (sono frazionarie), la soluzione non é ammissibile per il problema di PLI $\rightarrow$ Algoritmo dei piani di taglio (Gomory)
- Si sceglie la riga dove ci sono variabili decisionali frazionarie (guardare $w_B + R0$ colonna), nel caso ce ne fossero piú si sceglie sempre quella piú in alto. Si approssima per difetto e si pone come denominatore quello della componenete selezionata. Il termine $-$ si sostitusce con la parte intera che manca per completare la frazione

$$x_1 + \frac{5}{7}s_1 - \frac{2}{7}s_2 = \frac{33}{7}$$

$$x_1 + \left(0 + \frac{-}{7}\right)s_1 - \left(-1 + \frac{-}{7}\right) = 4 + \frac{-}{7}$$

Approssimazione per difetto:

$$\begin{cases} \lfloor \frac{5}{7} \rfloor = 0.14 \approx 0 \\ \lfloor -\frac{2}{7} \rfloor = -0.29 \approx -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \\ -1 + \frac{5}{7} = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

$$x_1 + \left(0 + \frac{5}{7}\right)s_1 + \left(-1 + \frac{5}{7}\right)s_2 = \frac{33}{7}$$

$$x_1 - s_2 + \frac{5}{7}s_1 + \frac{5}{7}s_2 = 4 + \frac{5}{7}$$

$$A + B = C + D$$

Intere var
Frazionarie var
Intere noti
Frazionarie noti

$$x_1 - s_2 + \frac{5}{7}s_1 + \frac{5}{7}s_2 = 4 + \frac{5}{7}$$

$$A + B = C + D \xrightarrow{B \geq 0} A \leq C + D \xrightarrow{0 \leq D < 1} A \leq C \xrightarrow{A + B = C + D} B \geq D$$

Formulazione tagli:

- $A + B \overset{\lessgtr}{=} C + D$
- Slack s_i introdotte con $s_i \geqslant 0 \rightarrow B \geqslant 0$
- $5/7$ frazione $\rightarrow 0 \leqslant D < 1$
- Bilanciare l'equazione $\rightarrow B \geqslant D$

- Le due disequazioni $A \leqslant C$ e $B \geqslant D$ rappresentano due formulazioni equivalenti dello stesso taglio, espresso in termini di variabili differenti:
  - $B \geqslant D$ è il taglio espresso nelle sole variabili non di base **(da inserire nel tableau)**
  - $A \leqslant C$ include una variabile di base

$$\boldsymbol{B \geqslant D:} \quad \frac{5}{7}s_1 + \frac{5}{7}s_2 \geqslant \frac{5}{7}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{5}{7}s_1 - \frac{5}{7}s_2 \leqslant -\frac{5}{7}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{5}{7}s_1 - \frac{5}{7}s_2 + s_3 = -\frac{5}{7}$$

$$\boldsymbol{A \leqslant C:} \quad x_1 - s_2 \leqslant 4$$

$$\downarrow *(1)$$

$$x_1 - 21 + 4x_1 + 5x_2 \leqslant 4$$

$$\downarrow$$

$$5x_1 + 5x_2 \leqslant 25$$

$*(1)$ *dal problema iniziale sappiamo che*

$$s_2 = 21 - 4x_1 - 5x_2$$

- Le righe rosse rappresentano le stesse cose, mentre la riga arancione viene aggiunta al tableau e si risolve eventuali problemi di non ammissibilitá con il simplesso duale:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
1	0	5/7	-2/7	0	0	33/7
0	1	-4/7	3/7	0	0	3/7
0	0	-5/7	-5/7	1	0	-5/7
0	0	-3/7	-24/7	0	1	-549/7

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
1	0	0	-1	1	0	4
0	1	0	1	-4/5	0	1
0	0	1	1	-7/5	0	1
0	0	0	-3	-3/5	1	-78

- La soluzione deve soddisfare:
  - Var decisionali - criterio di interezza
  - Soluzione ammissibile
  - Soluzione ottima
  - **Inoltre rappresentare:** var di base - var non di base - valore funzione obiettivo
- All'esame applicare una sola iterazione di Gomory indipendentemente dal risultato
- La soluzione risulta essere ottima se e solo se $w_B + R0$ non é frazionario, altrimenti non ottima

7 Ottimizzazione sul grafo

- **Cammini minimi:** Etichette, Dijkstra, Floyd-Warshall
- **Massimo Flusso**
- **Albero di Supporto di Costo Minimo:** Kruskal, Prim

Cammini Minimi

Cos'è il problema di individuazione dei cammini minimi? determinazione, in un grafo orientato, del cammino dal nodo sorgente ad un nodo destinazione per il quale risulta minima la somma dei costi degli archi che compongono il cammino.

NB: la risoluzione é possibile **solo per grafi che non presentano cicli di costo negativo**. Possibile applicazione di tre algoritmi (con differenti requisiti applicativi): **Etichette, Dijkstra, Floyd-Warshall**

Algoritmo delle Etichette

- Applicabile esclusivamente su grafi con ordinamento topologico
- Sempre realizzabile su grafi aciclici (applicando l'algoritmo di ordinamento topologico)
- **Non realizzabile su grafi ciclici**
- Analisi dei nodi in ordine di numerazione crescente
- Assegnazione ad ogni nodo t di un'etichetta $[pred(t); L(t)] \equiv [predecessore, costo]$

$pred(t)$	*precessore al nodo t*
$L(T)$	*costo complesso sorgente - nodo t*

$$L(t) = \underset{i<t}{min}\{L(i) + c_{i,t}\}$$

$$pred(t) = arg\ \underset{i<t}{min}\{L(i) + c_{i,t}\}$$

- Il nodo sorgente parte per definizione con: $[1; 0]$

Algoritmo di Dijkstra

- Applicabile esclusivamente su grafi con archi di **costo non-negativi**
- Partizione iterativa dei nodi in due insiemi disgiunti S e T
  - Si considerano gli archi diretti del taglio $\delta^+(S,T) = \{(i,j) : i \in S, j \in T\}$
  - $\delta^+(S,T)$ archi che entrano in S e vanno in T
  - Si seleziona l'arco di taglio di peso minimo $(v,t) = arg \underset{(i,j)\in\delta^+(S,T)}{min} \{L(i) + c_{i,j}\}$
  - Al nodo t viene assegnata etichetta definitiva $[v, L(v) + c_{v,t}]$
  - Si aggiornano gli insiemi S e T

$$S = S \cup t \qquad T = T - \{t\}$$

Algoritmo di Floyd-Warshall

- Applicabile a qualsiasi grafo: ciclici, **archi a costo negativo** → l'algoritmo individua l'esistenza di cicli di costo negativo, arrestandosi dopo il loro riconoscimento
- **Input:**

matrice $c_{i,j}$	*costo dell'arco che collega i nodi i e j del grafo*

- **Output:**

matrice $d_{i,j}$	*costo del cammino minimo dal nodo i al nodo j*
matrice $p_{i,j}$	*predecessore del nodo j nel cammino minimo dal nodo i al nodo j*

Note:

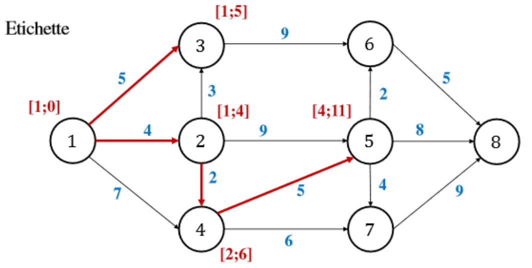
- **Dijkstra** é applicabile se → archi hanno un costo positivo $x \geqslant 0$
- **Etichette** é applicabile se → ordinamento topologico + grafi aciclici (costo tende a ∞ l'arco non sará mai selezionato costo infinito: $x \to \infty$)
- **Floyd-Warshall** é applicabile sempre
- **Ordinamento topologico:** e possibile effettuare l'ordinamento **se il grafo é aciclico**. viene associato a ciascun nodo un numero in modo tale da garantire che tutti gli archi siano orientati da nodi con numerazione inferiore verso nodi a numerazione superiore
  - Rimuoviamo la numerazione e andiamo a considerare il nodo sorgente (no archi entranti) ponendolo a 1
  - Rimuoviamo il nodo sorgente e gli archi uscenti ad esso associati e cerchiamo la nuova sorgente, ossia nodo con archi solo uscenti
  - **Scelta albitraria:** dare prioritá ai nodi posizionati piú in alto
  - Una volta terminato aggiungiamo i pesi sui archi
- **L'aggiunta del nuovo arco rende il grafo ciclico:** affinché esista una soluzione i cicli non devono essere di costo negativo

Algoritmo delle Etichette fasi

- Il nodo sorgente per definizione con: $[1;0]$

$$[preced, \textit{costo totale} += \textit{costo ramo singolo}]$$

- Considero i nodi dato l'ordinamento topologico
- Selezionato il nodo considero tutti gli archi entranti in quel nodo e vado a scegliere quello con peso minore
- Aggiorno il cammino minimo
- **L'aggiunta di un grafo che crea ciclicitá:** perché esista una soluzione i cicli non devono essere di costo negativo



Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
5	(2,5) (4,5)	4+9=13 6+5=11	[4;11]	(1,2)–(2,4)–(4,5)

Algoritmo di Dijkstra fasi

- **Inizializzazione:** nodo sorgente = $[1;0]$, nodi con etichette $S = \{1\}$ (solo nodo sorgente) mentre $T = \{2,3,4,5,6\}$ (senza etichette). Tutti gli archi vengono rimossi

$$[preced, \textit{costo totale} += \textit{costo ramo singolo}]$$

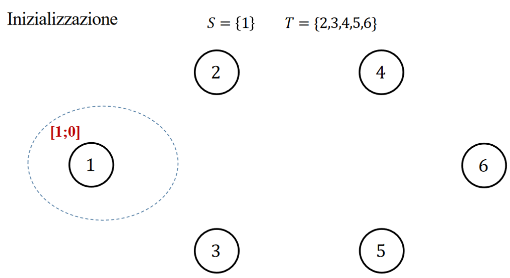
- Dal nodo sorgente considero tutti gli archi uscenti: $\delta^+(S,T) = \{(1,2),(1,3),(1,6)\}$ e calcolo il loro peso: $L(1) + c_{1,i}$. Scelgo quello con peso minore e aggiorno

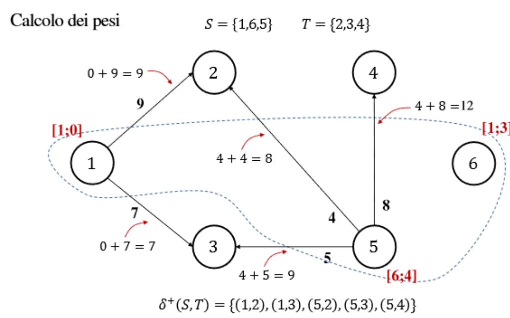
$$S = \{1,6\}, \qquad T = \{2,3,4,5\}$$

$$(v,t) = (1,6)$$

$$\textit{nodo 6} = [1, 0+3]$$

- **Ripeto:** considero **solo** gli archi uscenti **verso i nodi mancati** di tutti i nodi all'interno di S, ossia guardo in $\delta^+(S,T)$ e scelgo quello con costo minore e aggiorno S e T





Massimo Flusso

Cos'è il problema del massimo flusso? problema di determinazione della massima quantità di flusso che può essere inviata da una sorgente ad un pozzo, nel rispetto di vincoli legati a:

- Capacità degli archi
- Conservazione del flusso

Problema formulabile introducendo le variabili decisionali:

- $x_{i,j}$: flusso sull'arco $(i, j) \in A$
- v : valore del flusso (quantitá immessa nel nodo sorgente s e prelevata nel nodo pozzo t)

Modello matematico:

$max\ \omega = v$		*Massimizzazione del flusso*
$s.a$	$v + \sum_{(j,s) \in BS(s)} x_{j,s} = \sum_{(s,j) \in FS(s)} x_{s,j}$	*Bilancio nel nodo sorgente*
	$\sum_{(j,t) \in BS(t)} x_{j,t} = \sum_{(t,j) \in FS(t)} x_{t,j} + v$	*Bilancio nel nodo pozzo*
	$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{j,i} = \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{i,j}, \ i \in N - \{s, t\}$	*Bilancio nei nodi di trasferimento*
	$0 \leqslant x_{i,j} \leqslant u_{i,j} \in A$	*Capacità degli archi*

Algoritmo di Ford-Fulkerson

- A partire dal flusso corrente $\underline{\boldsymbol{x}}$ si costruisce il grafo residuale $\overline{G}(\underline{\boldsymbol{x}}) = (N, \overline{A})$ sostituendo ad ogni arco $(i, j) \in A$ una coppia di archi:
  - Un arco diretto (i, j) di capacitá residua $\overline{u}_{i,j} = u_{i,j} - x_{i,j}$
  - Un arco inverso (j, i) di capacitá residua $\overline{u}_{j,i} = x_{i,j}$
- Si valuta l'esistenza di un cammino aumentante dalla sorgente al pozzo
  - Se tale cammino non esiste, il flusso è ottimo
  - e tale cammino esiste, si indica con θ il minimo della capacitá residue degli archi che compongono il cammino:
    * Il flusso massimo è incrementato di θ
    * Sugli archi diretti del cammino aumentante $x_{i,j} = x_{i,j} + \theta$
    * Sugli archi inversi del cammino aumentante $x_{i,j} = x_{i,j} - \theta$

Algoritmo di Ford-Fulkerson informale

- Ogni arco presenta una coppia: a, b dove

a	*Quantità di flusso*
b	*Capacità dell'arco*

- Flusso iniziale é nullo quindi tutti gli archi sono scarichi, ossia $a = 0$
- **Grafo residuale:** si costruisce il grafo residuale, lasciando su ogni orco solo la **capacitá dell'arco**
- **Cammino aumentante:** si sceglie il cammino aumentante, ossia un cammino che dal nodo sorgente s arrivi al nodo pozzo t. La scelta é arbitraria ma si preferisce scegliere quello con costo minore. Dal cammino si sceglie il costo dell'arco minore e si aggiorna tutti gli a del cammino aumentante:
$$\theta = min(4; 6; 4) = 4, \quad \forall a = \theta$$

- **Aggiornamento del Flusso:** si aggiorna il valore del flusso: $v = 0 + \theta + 4$ e faccio vedere il grafo completo con le coppie a, b, aggiornamndo il valore attuale di a
- **Nel grafo residuale sul cammino aumentante scelto:**

Arco saturo, b - $\theta = 0$	*inverso l'arco - trattetggiato pongo uguale ad* θ
Arco ne scarico ne saturo $b - \theta \neq 0$	*arco diretto* $(b - \theta)$ *e inverso* (θ)
Aggiornamento flusso grafo:	$(arco\ inverso, b)$

- Scelgo un'altro cammino aumentante e rifaccio il tutto da capo. L'aggiornamento nuovo: $v = v + \theta$. Il nuovo cammino aumentate provoca l'aggiornamento:

Grafo residuale

Passo per un arco inverso (tratteggiato)	$b_{diretto} = b + \theta$	$b_{inverso} = b - \theta$
Passo per un arco diretto	$b_{diretto} = b - \theta$	$b_{inverso} = b + \theta$

Aggiornamento del flusso

$$\forall a \in cammino\ aumentate : a = b_{inverso}$$

- Ripeto tante volte il passo precedente fino a quanto non possiamo piú raggiungere il nodo pozzo t $\rightarrow$ non esiste alcun cammino aumentante $\Rightarrow$ ottimalitá del flusso

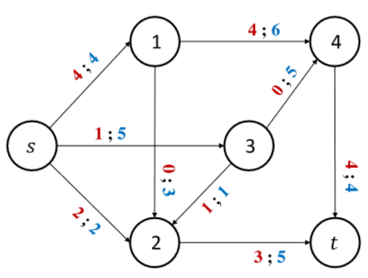
$N_s = \{\dots\}$	*insieme di nodi raggiungibili da s*
$N_t = \{\dots\}$	*insieme di nodi non raggiungibili da s*
Se $N_t = \{t\}$	*Ottimalitá del flusso*

- Effettuiamo sul **grafo di partenza** un taglio per separare i due insiemi N_s e N_t. Calcoliamo C_t come la somma degli archi entranti in t:

$$C_t = x + y = k$$

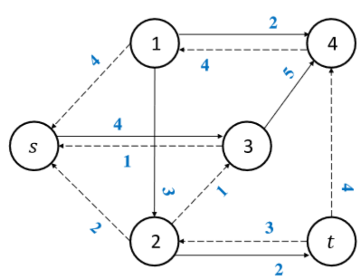
$$Se\ k = v_{last} \Rightarrow Il\ flusso\ è\ massimo$$

Aggiornamento del Flusso

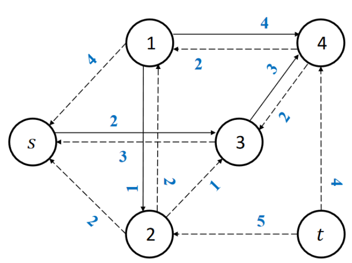


$v = 6 + \theta = 7$

Grafo Residuale

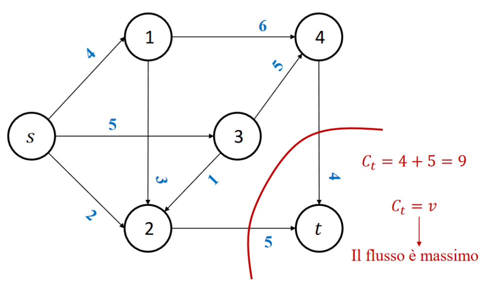


Grafo Residuale



Non esiste alcun cammino aumentante

Verifica di Ottimalità



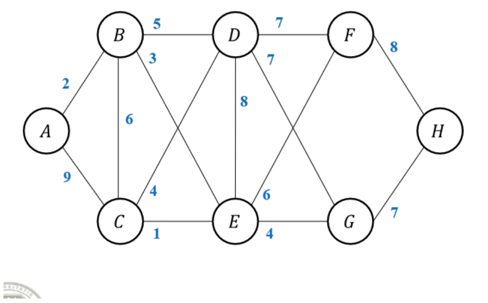
$N_s = \{s, 1,2,3,4\}$ $N_t = \{t\}$

Albero di Supporto di Costo Minimo

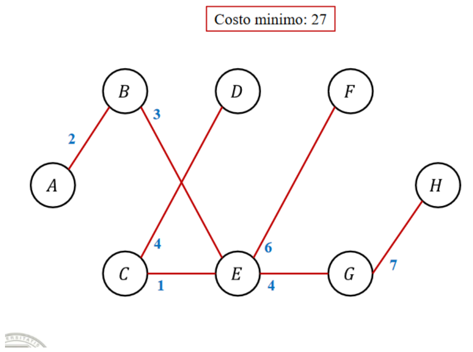
- **Dato un grafo non orientato**, definiamo come albero di supporto un sottografo: **connesso**, **senza cicli**, **contenente tutti i vertici del grafo.**
- Determinazione, in un grafo non orientato, di un albero di supporto per cui è minima la somma dei costi dei collegamenti selezionati.
- Possibile applicazione di due algoritmi: **Kruskal, Prim**

Algoritmo di Kruskal

- I collegamenti/lati vengono ordinati in ordine di costo crescente
- Tra i collegamenti non ancora considerati, selezionare quello di costo minimo
  - Se la sua selezione non comporta la generazione di un ciclo, inserire il collegamento nell'albero di supporto
  - Altrimenti, scartare il collegamento
- Procedere iterativamente fino all'inserimento di $N-1$ collegamenti
- Il sottografo parziale ottenuto nelle iterazioni intermedie non è connesso



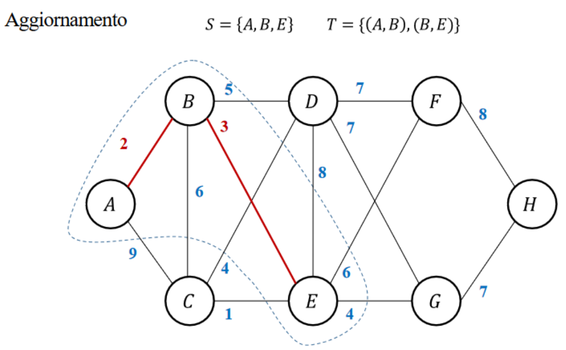
Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

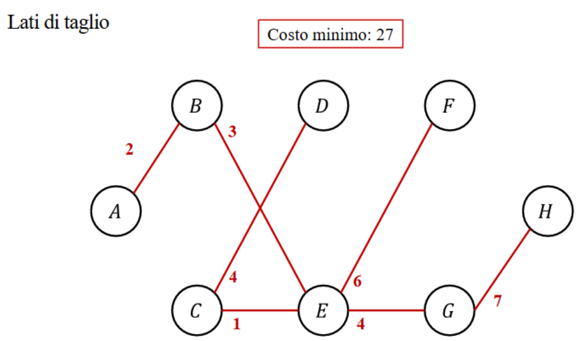


Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Algoritmo di Prim

- Costruzione dinamica dei due insiemi S e T
  - Si inizializza $S = \{1\}$ e $T = \varnothing$
  - Si considerano i lati di taglio (archi) $\delta(S) = \{(i,j) : i \in S, j \notin S\}$
  - Si seleziona il collegamento di costo minimo $(v,h) = \underset{(i,j)\in\delta(S)}{argmin}\{c_{i,j}\}$ (sui nodi mancanti)
- Si aggiornano gli insiemi S e T, (in S aggiungo h il nodo mentre in T aggiungo l'arco selezionato)
  - $S = S \cup h$
  - $T = T \cup \{(v,h)\}$
- Procedere iterativamente fino all'inserimento di $N-1$ collegamenti ($|T| = N-1$ e $|S| = N$)
- Il sottografo parziale ottenuto nelle iterazioni intermedie è connesso.





8 Note

Sensitivitá

- Determinare **l'intervallo entro cui il vincolo s_i** può variare senza che cambi la composizione della base ottima (**variazione della disponibilitá di una risorsa scarsa/in eccesso**):

$$\underline{\widetilde{b}} = \underline{b} + \underline{e_i}\delta \qquad \underline{\widetilde{w}}_B = B^{-1}\underline{\widetilde{b}} \qquad \widetilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\widetilde{b}}$$

  Controlllare che $\underline{\widetilde{w}}_B$ sia ammissibile, in caso contrario modificare il tableau con i nuovi dati ed effettuare il simplesso duale.

- Profitto unitario $P_2 \to c_2$, $\underline{c}_B^T/\underline{c}_N^T$, $\underline{r}_N^T$,φ (ricordarsi segno meno di delta in $\underline{c}_B^T/\underline{c}_N^T$)

- Quando cambio $\underline{r}_N^T$ e $\widetilde{\varphi}$, modificare il tableau e controllare che $\underline{r}_N^T$, altrimenti **algoritmo del simplesso** sul nuovo tableau

- Variazione del profitto unitario di una variabile non di base $\to \underline{r}_N^T$

- Introduzione di un nuovo vincolo nel tableau $\to$ il vincolo deve essere espresso nelle variabili non di base + simplesso/simplesso duale

- Introduzione di una nuova variabile decisionale a_4 e determinare i valori del corrispondente profitto unitario (dove c_3 é incognita):

$$\underline{a_4} = \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} \qquad r_4 = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{a}_4 - c_4 \leqslant 0$$

- Variazione di un coefficiente dei vincoli $\widetilde{a}_{12} = a_{12} + \delta$:

$$\underline{\widetilde{a}}_2 = \underline{a}_2 + \underline{e}_1\delta \qquad r_2 = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{a}_2 - c_3 + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_1\delta \leqslant 0$$

PLI - metodo grafico

- Se il vincolo passa solo sopra un punto $\to$ regione amissibile vuota
- Se il vincolo passa solo sopra un'altro vincolo e la regione amissibile é una retta $\to$ regione amissibile non vuota
- Se dopo il simplesso non otteniamo una soluzione intera in $w_B + R0 \to$ soluzione non ammissibile per il problema di PLI (soluzione non intera)

Duale

- Determinare la soluzione in scarti complementari $\underline{\boldsymbol{y}}_A^T$ associata a $\underline{\boldsymbol{x}}_A^T \to$ sistema di equazioni
- Il calcolo delle stime $\underline{\boldsymbol{y}}_B^T$ e $\underline{\boldsymbol{x}}_A^T$ vanno sostituiti a ω e φ_D per ottenere: $k \leqslant \omega^* = \varphi_D^* \leqslant l$
- $\underline{\boldsymbol{x}}_A^T$ é una soluzione ottima se e solo se non viene violato alcun vincolo
- cosa si può affermare in merito al valore ottimo della variabile obiettivo del problema primale P: basta sostituire $\underline{\boldsymbol{x}}_A^T$ alla funzione obiettivo

se primale é max	$\omega \overset{x_A^T}{=} 9$ *é un lower bound*
se primale é min	$\varphi \overset{x_A^T}{=} 9$ *é un upper bound*

Rilassamento (PLI): eliminare alcuni vincoli, cercando di ottenere un problema facile da risolvere.

Rilassamento continuo:	*vincoli interi $\to$ continui*
Rilassamento lineare:	*vincoli continui $\to$ interi*

Cammini minimi

- La risoluzione é possibile **solo per grafi che non presentano cicli di costo negativo**

$$x + 9 + 10 \geqslant 0$$

- se l'introduzione di x non genera alcun ciclo é possibile assegnare ad x qualsiasi valore
- Ordinamento topologico non possibile in presenza di cicli → Algoritmo di Dijkstra
- Se ordinamento topologico é possibile → Algoritmo delle etichette

Floyd-Warshal	*sempre applicabile (si arresta cicli costo negativo)*
Etichette	*applicabile se topologico + aciclico* $x \to \infty$
Dijkstra	*applicabile solo con costi positivi* $x \geqslant 0$

8.1 Note teoriche

Grafo non orientato	$G = (N, E)$ *oppure* $G = (V, E)$
Grafo orientato	$G = (N, A)$
Taglio entrante introdotto da un insieme I	$\delta^-(I) = \{(i, j) \in A : i \in N - I, j \in I\}$
Taglio uscente introdotto da un insieme I	$\delta^+(I) = \{(i, j) \in A : i \in I, j \in N - S\}$
Stella entrante nel nodo i	$BS(i) = \{(j, i) \in A\}$
Stella uscente nel nodo i	$FS(i) = \{(i, j) \in A\}$
Grafo non orientato	$S(i)$ *lati incidenti ad* $i \in N$
Grafo orientato	$S(i)$ *successori di* $i \in N$

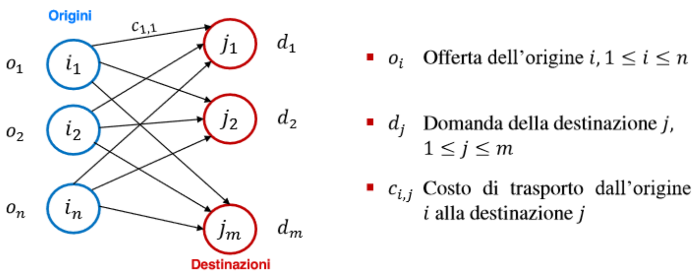
Terminologia grafi:

- Si definiscono **estremi di un lato** $\{i, j\}$ i nodi i e j collegati dal lato
- Il lato $\{i, j\}$ si dice **incidente nei nodi** i e j
- Due nodi collegati da un lato si dicono **adiacenti**
- Un arco che collega un nodo con se stesso viene detto **autoanello**
- In un grafo non orientato si parla di **lati adiacenti** quando essi hanno un nodo in comune
- Una sequenza di lati adiacenti consecutivi è detta **cammino**
- Gli estremi di un arco (i, j) si distinguono in **nodo di coda** e **nodo di testa**
- Si definisce **ciclo** un cammino in cui il nodo iniziale del primo arco ed il nodo finale dell'ultimo coincidono, mentre un grafo **aciclico** è un grafo che non contiene cicli
- Un **grafo connesso** è un grafo in cui esiste almeno un cammino tra ogni coppia di nodi
- Un cammino che non contiene archi ripetuti si dice **semplice** mentre un cammino che non contiene nodi ripetuti si dice **elementare**
- Un **grafo completo** è un grafo semplice tale che ogni nodo è collegato ad ogni altro
- Si definisce **grafo parziale** o **sottografo** un grafo ottenuto come parte di un grafo più grande

9 Metodi non richiesti esame

Problema del Trasporto

Cos'è il problema del trasporto? consiste nel determinare la quantità da trasportare dalle origini alle destinazioni, minimizzando i costi totali di trasporto. Problema visualizzabile su un grafo bipartito:



n	*numero origini*
m	*numero destinazioni*
$n+m$	*equazioni*
$n+m-1$	*equazioni linearmente indipendenti*
$n+m-1$	*var di base*
$x_{i,j}$	*quantità trasportata dall'origine i alla destinazione j*
φ	*costi complessivi di trasporto*
u_i	*acquistare prezzo unitario prodotto orgine i*
v_i	*vendere prezzo unitario prodotto destinazione j*
$c_{i,j}$	*costo unitario di trasporto da orgine i alla destinazione j*

Modello matematico

$$min\ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{i,j} \cdot x_{i,j} \ \ (costi)$$

$$\begin{aligned} s.a \quad & \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = o_i && 1 \leqslant i \leqslant n \quad : u_i \in \mathbb{R} \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = d_j && 1 \leqslant j \leqslant m \quad : v_j \in \mathbb{R} \\ & x_{i,j} \geqslant 0 && 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m \end{aligned}$$

Modello duale

$$max\ \omega_D = \sum_{i=1}^{n} o_i u_i + \sum_{j=1}^{m} d_j v_j \ \ (ricavi)$$

$$\begin{aligned} s.a \quad & u_i + v_j \leqslant c_{i,j} && 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m \\ & u_i \in \mathbb{R} && 1 \leqslant i \leqslant n \\ & v_j \in \mathbb{R} && 1 \leqslant j \leqslant m \end{aligned}$$

Formulazione duale - un'azienda fornitrice di servizi logistici offre all'impresa in considerazione di:

- Acquistare il prodotto disponibile presso l'origine i al prezzo unitario u_i
- Vendere il prodotto richiesto presso la destinazione j al prezzo unitario v_j

Perché l'offerta venga presa in considerazione dal produttore, i prezzi proposti dall'azienda logistica per ogni coppia origine-destinazione non devono essere superiori al costo unitario di trasporto

$$u_i + v_j \leqslant c_{i,j}$$

Metodo Risolutivo - per la risoluzione del problema di trasporto si applica un metodo specializzato articolato in tre fasi:

- Fase 0: verifica del bilanciamento del problema
  - se $\sum_{i=1}^{n} o_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$ il problema è bilanciato
  - se $\sum_{i=1}^{n} o_i > \sum_{j=1}^{m} d_j$ il problema presenta un eccesso di offerta, gestito tramite la creazione di una destinazione fittizia $j*$ con:
    - $d_{j*} = \sum_{i=1}^{n} o_i - \sum_{j=1}^{m} d_j$
    - $c_{i,j*} = 0, \forall i$
  - se $\sum_{i=1}^{n} o_i < \sum_{j=1}^{m} d_j$ il problema presenta un eccesso di domanda, gestito tramite la creazione di un'origine fittizia $i*$ con
    - $o_{i*} = \sum_{j=1}^{m} d_j - \sum_{i=1}^{n} o_i$
    - $c_{i*,j} = 0, \forall j$
- Fase 1: ricerva di una soluzione ammissibile inziale
  - Una volta verificato (ed eventualmente ottenuto) il bilanciamento del problema, si procede con la ricerca di un piano di trasporto ammissibile, che rispetti
    * L'offerta delle origini
    * La domanda alle destinazioni
  - La ricerca della soluzione ammissibile iniziale può essere condotta tramite due metodi:
    * Angolo di Nord-Ovest
    * Costi Minimi
- Fase 2: Ricerca della soluzione ottima
  - Una volta determinata una soluzione ammissibile iniziale, il metodo specializzato per il problema di trasporto individua i piani di trasporto ottimali applicando una procedura iterativa basata su:
    * Calcolo delle variabili duali u_i e v_j
    * Determinazione dei coefficienti di costo relativo $r_{i,j}$ delle variabili non di base
    * Cambio di base

c_{11} 120	c_{12} — r_{12}	c_{13} — r_{13}	c_{14} — r_{14}	120	u_1
c_{21} 30	c_{22} 70	c_{23} 50	c_{24} — r_{24}	150	u_2
c_{31} — r_{31}	c_{32} — r_{32}	c_{33} 80	c_{34} 80	160	u_3
150	70	130	80		
v_1	v_2	v_3	v_4		

Leggenda:

n origini - offerte i-esima

m destinazioni - domanda j-esima

costi unitari: $c_{i,j}$

coefficiente costo relativo: $r_{i,j}$

Fase 1 – Angolo di Nord Ovest:

- Si considera, tra le celle disponibili, la prima cella in alto a sinistra
- Si assegna alla cella selezionata il valore minimo tra domanda residua ed offerta residua
  - Se la domanda residua è minore dell'offerta residua, si satura il vincolo di domanda
  - Se l'offerta residua è minore della domanda residua, si satura il vincolo di offerta
  - **Caso di degenerazione:** se domanda residua ed offerta residua coincidono e l'assegnamento da realizzare non è l'ultimo, si sceglie arbitrariamente di saturare il vincolo di domanda (offerta) e attribuire valore nullo all'offerta (domanda) residua

(5) 120	(16) –	(9) –	(2) –	~~120~~
(7) 30	(8) 70	(15) 50	(11) –	~~150~~ ~~120~~ ~~50~~
(6) –	(20) –	(9) 80	(4) 80	~~160~~ ~~80~~
~~150~~ ~~30~~	~~70~~	~~130~~ ~~80~~	~~80~~	

Variabili di base?
$3 + 4 - 1 = 6$

$$\varphi = 120 \cdot 5 + 30 \cdot 7 + 70 \cdot 8 + 50 \cdot 15 + 80 \cdot 9 + 80 \cdot 4 = 3160$$

Fase 1 – Costi Minimi:

- Si considera, tra le celle disponibili, la cella con il minore costo di trasporto (se ne esiste più di una la scelta è arbitraria)
- Si assegna alla cella selezionata il valore minimo tra domanda residua ed offerta residua
  - Stessi sottocasi del Angolo di Nord Ovest

(5) 40	(16) –	(9) –	(2) 80	~~120~~ ~~40~~
(7) –	(8) 70	(15) 80	(11) –	~~150~~ ~~80~~
(6) 110	(20) –	(9) 50	(4) –	~~160~~ ~~50~~
~~150~~ ~~110~~	~~70~~	~~130~~ ~~80~~	~~80~~	

Variabili di base?
$3 + 4 - 1 = 6$

$$\varphi = 40 \cdot 5 + 110 \cdot 6 + 70 \cdot 8 + 80 \cdot 15 + 50 \cdot 9 + 80 \cdot 2 = 3230$$

Fase 2:

- **Variabili duali:** si verifica l'ottimalità della soluzione attuale calcolando i coefficienti di costo relativo $r_{i,j}$ delle variabili non di base:

$$r_{i,j} = -(u_i + v_j + c_{i,j})$$

  - si pone $u_1 = 0$
  - Si utilizzano le $n+m-1$ variabili di base ($r_{i,j} = 0$) per calcolare le restanti $n+m-1$ variabili duali u_i e v_j
  - Si utilizzano le variabili duali per calcolare i coefficienti di costo relativo delle variabili non di base

- Se esiste una variabile non di base con coefficiente di costo relativo positivo $r_{i,j} > 0$, si effettua un cambio di base, altrimenti la soluzione è ottima.
  - $r_{i,j}$ si calcola solo per le celle " − "
  - Se $\exists r_{i,j} > 0$ si cambia la base $\Rightarrow$ **soluzione non ottima**
  - Ripetere il passo delle variabili duali
  - Se $\exists r_{i,j} = 0$ si cambia la base $\Rightarrow$ **ottimi alternativi**

Variabili duali:

- Per definizione: $u_1 = 0$
- Calcolo: $v_1 = -(u_1 + c_{1,1})$
- Calcolo: $v_3 = -(u_2 + c_{2,3})$
- Calcolo: $u_2 = -(v_1 + c_{2,1})$
- Calcolo: $u_3 = -(v_3 + c_{3,3})$
- Calcolo: $r_{1,3} = -(u_1 + v_3 + c_{1,3})$

Soluzione non ottima

5 — 120	16 — − (-10)	9 — − (4)	2 — − (6)	$u_1 = 0$
7 — 30	8 — 70	15 — 50	11 — − (-1)	$u_2 = -2$
6 — − (-5)	20 — − (-18)	9 — 80	4 — 80	$u_3 = 4$
$v_1 = -5$	$v_2 = -6$	$v_3 = -13$	$v_4 = -8$	

Cambio di base:

- Prendo la cella con $r_{i,j} > 0$ maggiore
- In tale cella ci pongo $\varepsilon \geqslant 0$
- Dobbiamo estendere la variazione ε in maniera corretta alle celle intorno $\rightarrow$ rispettare vincoli
- Sistema includendo solamente le differenze in variazione $x - \varepsilon \geqslant 0$
- Aggiornare la tabella con $\varepsilon = 50$ e ripetere nuovamente il calcolo delle **variabili duali**

5 — $120-\varepsilon$	16 — − (-10)	9 — − (4)	2 — ε (6)
7 — $30+\varepsilon$	8 — 70	15 — $50-\varepsilon$	11 — − (-1)
6 — − (-5)	20 — − (-18)	9 — $80+\varepsilon$	4 — $80-\varepsilon$

$$\begin{cases} 120-\varepsilon \geq 0 \\ 50-\varepsilon \geq 0 \\ 80-\varepsilon \geq 0 \\ \varepsilon \geq 0 \end{cases} \rightarrow \quad 0 \leq \varepsilon \leq 50 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon = 50}$$

Variabili di base:	$r_{i,j} = 0$
Variabili non di base:	$r_{i,j} \neq 0$
Soluzione non ottima:	$\exists r_{i,j} > 0$
Soluzione ottima:	$\forall r_{i,j} < 0$
Ottimi alternativi:	$\exists r_{i,j} = 0$

Fase 0:

- Se: $\sum_{i=1}^{n} o_i = \sum_{j=1}^{m} d_j \rightarrow$ **problema bilanciato**, salto alla fase 1
- Se: $\sum_{i=1}^{n} o_i \lessgtr \sum_{j=1}^{m} d_j \rightarrow$ **problema sbilanciato**

introduco destinazione fittizia con domanda = 5

$$\sum_{i=1}^{n} o_i = 50 > \sum_{j=1}^{m} d_j = 45$$

introduco origine fittizia con offerta = 5

$$\sum_{i=1}^{n} o_i = 45 < \sum_{j=1}^{m} d_j = 50$$

3	6	0	30
5	7	0	20
30	15	5	

Critical Path Method

Cos'è il CPM? Metodo per la pianificazione ed il controllo dei tempi di svolgimento di un progetto. A partire da informazioni relative a:

- Attività che compongono il progetto
- Durate (fisse) delle attività
- Relazioni di precedenza tra le attività (finish to start)

il CPM determina la minima durata del progetto e la lista di attività critiche per la gestione del progetto

Diagramma Reticolare:

- Rappresentazione del progetto tramite un grafo orientato
- **Archi (attività):**
  - Attività che compongono il progetto
  - Attività fittizie (relazioni di precedenza)
- **Nodi (eventi)**
  - Inizio del progetto (nodo sorgente)
  - Conclusione del progetto (nodo pozzo)
  - Istante di tempo in cui tutte le attività entranti nel nodo sono completate

Metodo Risolutivo:

- **Step 1: Assegnazione ai nodi delle etichette**
  - **Tempo minimo:** minimo istante temporale in cui si può verificare un evento

$$
\begin{aligned}
&t_{min_1} = 0\\
&t_{min_i} = \max_{j<i}\{t_{min_j} + d(j,i)\}\\
&\textit{Durata minima del progetto} = t_{min_{|I|}}
\end{aligned}
$$

  - **Tempo massimo:** massimo istante temporale in cui si può verificare un evento senza comportare un aumento della durata del progetto

$$
\begin{aligned}
t_{max_{|I|}} &= t_{min_{|I|}}\\
t_{max_i} &= \min_{j>i}\{t_{max_j} - d(j,i)\}
\end{aligned}
$$

- **Step 2: Calcolo degli slittamenti**
  - **Early Start Time:** istante in cui un'attività può essere avviata al più presto
  - **Late Start Time:** istante in cui un'attività può essere avviata al più tardi senza comportare un prolungamento della durata del progetto
  - **Slittamento:** ritardo nello svolgimento dell'attività che non comporta un prolungamento della durata del progetto.

Per ogni attivitá (i,j)

$$
\begin{aligned}
&EST = t_{min_i}\\
&LST = t_{max_j} - d(i,j)\\
&\textit{Slittamento} = LST - EST\\
&\textit{Attivitá critiche} = \textit{slittamento nullo}
\end{aligned}
$$

Proprietà dei cammini critici:

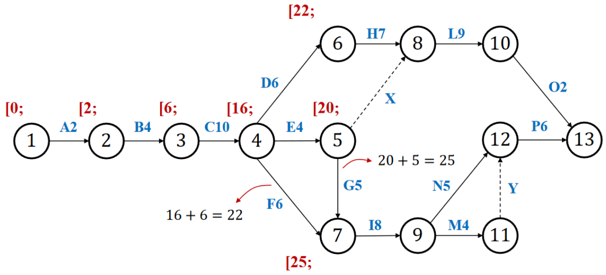
- Ogni progetto ammette sempre almeno un cammino critico
- Tutte le attività e tutti gli eventi con slittamento nullo devono appartenere ad almeno un cammino critico (non necessariamente lo stesso)
- Attività ed eventi con slittamento non nullo non possono appartenere ad alcun cammino critico
- La somma delle durate delle attività che compongono ciascun cammino critico è sempre pari alla minima durata del progetto

Note:

- il grafo reticolare viene dato in sede di esame non bisogna calcolarlo ma è riproducibile data la tabella
- L'unica cosa da controllare e che il gruppo sia effettivamente ordinato → Per capire se è ordinato basta vedere se gli archi si spostano da nodi a numerazione inferiore verso nord e numerazione maggiore
- L'arco fittizio serve solo per le precedenze e per far capire che la prossima attivitá necessitá la conclusione di quella prima. Inoltre l'arco fittizio non ha alcuna durata
- Attività con slittamento nullo sono critiche in quanto ogni ritardo nel loro svolgimento comporta un ritardo nella realizzazione del progetto
- Attività con slittamento positivo possono essere ritardate, nei limiti dello slittamento, senza comportare ritardi nel progetto

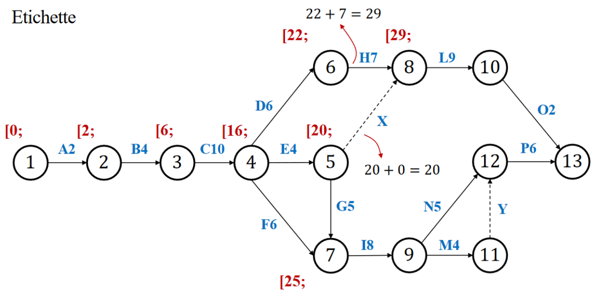
Attività	Descrizione	Durata	Predecessori
A	Scavi	2	-
B	Fondamenta	4	A
C	Muri Esterni	10	B
D	Costruzione tetto	6	C
E	Tubazioni esterne	4	C
F	Impianto elettrico	6	C
G	Tubazioni interne	5	E
H	Rivestimenti esterni	7	D
I	Pannelli	8	F,G
L	Verniciatura esterna	9	E,H
M	Pavimentazione	4	I
N	Verniciatura	5	I
O	Infissi esterni	2	L
P	Infissi interni	6	M,N

Etichette



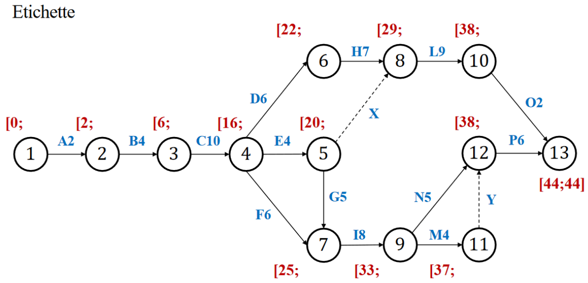
$t_{min_i} = \max_{j<i}\{t_{min_j} + d(j,i)\}$

Etichette



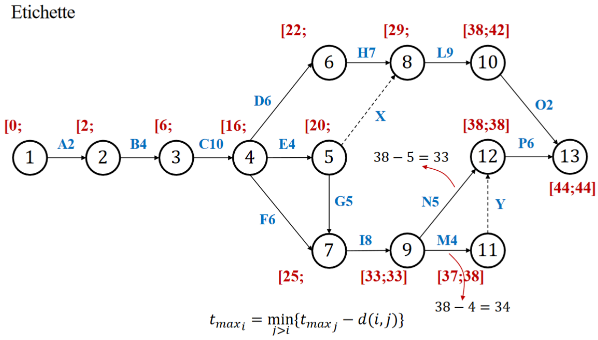
$t_{min_i} = \max_{j<i}\{t_{min_j} + d(j,i)\}$

Etichette



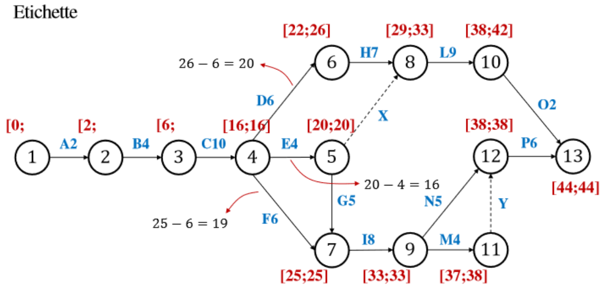
$t_{max_{|I|}} = t_{min_{|I|}} =$ durata minima del progetto

Etichette



$t_{max_i} = \min_{j>i}\{t_{max_j} - d(i,j)\}$

Etichette



$t_{max_i} = \min_{j>i}\{t_{max_j} - d(i,j)\}$

Attività^{Durata}	Arco	EST	LST	Slittamento
A^{2}	**(1,2)**	**0**	**2 – 2 = 0**	**0**
B^{4}	**(2,3)**	**2**	**6 – 4 = 2**	**0**
C^{10}	**(3,4)**	**6**	**16 – 10 = 6**	**0**
D^{6}	(4,6)	16	26 – 6 = 20	4
E^{4}	**(4,5)**	**16**	**20 – 4 = 16**	**0**
F^{6}	(4,7)	16	25 – 6 = 19	3
G^{5}	**(5,7)**	**20**	**25 – 5 = 20**	**0**
H^{7}	(6,8)	22	33 – 7 = 26	4
I^{8}	**(7,8)**	**25**	**33 – 8 = 25**	**0**
L^{9}	(8,10)	29	42 – 9 = 33	4
M^{4}	(9,11)	33	38 – 4 = 34	1
N^{5}	**(9,12)**	**33**	**38 – 5 = 33**	**0**
O^{2}	(10,13)	38	44 – 2 = 42	4
P^{6}	**(12,13)**	**38**	**44 – 6 = 38**	**0**

Cammino Critico