Analisi I

LPs & Kyra
production

Anno accademico 2016-2017

Contents

Maggiorante

Sia $E \subseteq X$. Si dice maggiorante un numero $k \in X$ (non necessariamente in E) tale che $\forall x \in E$ tale che $k \geqslant x$

Minorante

Sia $E \subseteq X$. Si dice minorante un numero $k \in X$ (non necessariamente in E) tale che $\forall x \in E$ tale che $k \leqslant x$

Massimo

Un numero $\overline{x}$ si dice massimo dell'insieme E se $\forall x \in E$ si ha $\overline{x} \geqslant x$

Minimo

Un numero $\underline{x}$ si dice minimo dell'insieme E se $\forall x \in E$ si ha $\underline{x} \leqslant x$

Estremo superiore

Minimo dei maggioranti

Estremo inferiore

Massimo dei minoranti

Successione superiormente limitata

Una successione A_n si dice superiormente limitata se esiste un numero M tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $A_n \leqslant M$

Successione inferiormente limitata

Una successione A_n si dice inferiormente limitata se esiste un numero m tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $A_n \geqslant m$

Assioma di continuità / completezza in $\mathbb{R}$

Sia $\{A, B\}$ una partizione dell'insieme $\mathbb{R}$. Si dice sezione se $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a < b$. In una partizione esiste un unico numero $\overline{s}$, detto elemento separatore, tale che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ vale $a \leqslant \overline{s} \leqslant b$

$\sqrt{2}$ non è razionale

Per dimostrare che $\sqrt{2}$ non è razionale possiamo procedere per assurdo. Cominciando definendo $\sqrt{2}$ come un numero esprimibile dal rapporto di due numeri primi fra loro, quindi una frazione ridotta ai minimi termini.

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2}$$

Procediamo quindi a risolvere l'equazione per m

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \iff m = n\sqrt{2} \iff m^2 = 2n$$

A questo punto possiamo dire che mm è un numero pari, quindi possiamo porre $m = 2k$ e continuare risolvendo l'equazione per n

$$2n = (2k)^2 \iff 2n = 4k^2 \iff n = \frac{4k^2}{2} \iff n = 2K^2$$

Risulta che anche n è un numero pari, affermazione per cui decade la tesi per cui il rapporto $\frac{m}{n}$ sia composto da due numeri primi fra loro, in quanto entrambi i numeri sono divisibili per 2.
Concludiamo quindi che $\sqrt{2}$ non è razionale.

Successione convergente

Una successione A_n è convergente se esiste un numero $l \in \mathbb{R}$ tale che $\forall \epsilon > 0$ esite un n_0 tale che $\forall n \geqslant n_0$ si ha che $|A_n - l| < \epsilon$

Successione divergente a +infinito

Una successione A_n è divergente a $+\infty$ se $\forall M > 0$ esiste un n_0 tale che $\forall n \geqslant n_0$ si ha $A_n > M$

Successione divergente a -infinito

Una successione A_n è divergente a -∞ se $\forall M > 0$ esiste un n_0 tale che $\forall n \geqslant n_0$ si ha $A_n < -M$

Definizioni di successioni monotone

Una successione A_n si dice:

- Monotona crescente se $A_n \leqslant A_{n+1}$
- Monotona decrescente se $A_n \geqslant A_{n+1}$
- Strettamente crescente se $A_n < A_{n+1}$
- Strettamente decrescente se $A_n > A_{n+1}$

Ogni successione convergente è limitata

Sia A_n una successione convergente quindi esiste un numero $l \in \mathbb{R}$ tale $\forall \epsilon > 0$ esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geqslant n_0$ si ha che $|A_n - l| < \epsilon$, ovvero

$$l - \epsilon < A_n < l + \epsilon$$

Dimostrazione

Per disuguaglianza triangolare possiamo scrivere

$$|A_n| = |A_n - l + l| < |A_n - l| + |l|$$

Per ipotesi sappiamo che $|A_n - l| < \epsilon$, ovvero $|A_n| < \epsilon + |l|$ quindi possiamo scrivere

$$|A_n| < |\epsilon + |l| - l| + |l| < \epsilon + |l|$$

Possiamo quindi concludere che

$$|A_n| < M$$

Dove

$$M = MAX\{|a_1|, |a_2, ..., |a_n|, \epsilon + |l|\}$$

Teorema di monotonia

- Sia A_n una successione monotona crescente e superiormente limitata allora converge ed il suo limite è $SUP\{A_n\} = A$
- Sia A_n una successione monotona decrescente e inferiormente limitata allora converge ed il suo limite è $INF\{A_n\} = A$

Il teorema è valido in $\mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{Q}$.

Dimostrazione

Per definizione sappiamo che A_n è una successione che converge a $SUP\{A_n\} = A$ quindi $\forall \epsilon > 0$ esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geqslant n_0$ si ha che $|A_n - A| < \epsilon$, ovvero

$$A - \epsilon < A_n < A + \epsilon$$

La disequazione di destra è verificata per definizione di estremo superiore.
Per quanto riguarda la disequazione di sinistra sappiamo che $A - \epsilon < A$ quindi $A - \epsilon$ non è un maggiorante della successione.
Possiamo quindi trovare un numero $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che si ha che

$$A_{n_0} > A - \epsilon$$

D'altro canto la successione è monotona crescente e quindi possiamo dire che $\forall n \geqslant n_0$ si ha

$$A_n \geqslant A_{n_0} > A - \epsilon$$

Algebra delle successioni

Siano A_n e B_n due successioni tali che $A_n \to a$ e $B_n \to b$ allora:

- $A_n \cdot B_n \to ab$
- $A_n \pm B_n \to a \pm b$
- $\frac{A_n}{B_n} \to \frac{a}{b}$ con $B_n \neq 0$ e $b \neq 0$
- $A_n^{B_n} \to a^b$ con $A_n \geqslant 0$ e $a \geqslant 0$

Dimostrazione del prodotto

Siano A_n e B_n due successioni tali che $A_n \to a$ e $B_n \to b$ allora $A_n \cdot B_n \to ab$.
Per disuguaglianza triangolare possiamo scrivere

$$|A_n Bn - ab| = |A_n(B_n - b) + b(A_n - a)| \leqslant |A_n(B_n - b)| + |b(A_n - a)| = |A_n||(B_n - b)| + |b||(A_n - a)|$$

Per ipotesi sappiamo che $A_n \to a$ quindi possiamo scrivere $|A_n - a| < \epsilon$ ovvero $|A_n| < \epsilon + |a|$ Per ipotesi sappiamo che $< B_n \to b$ quindi possiamo scrivere $|B_n - b| < \epsilon$ ovvero $|B_n| < \epsilon + |b|$
Sostituendo nella disuguaglianza triangolare precedentemente definita si può scrivere

$$|A_n B_n| - ab < |(\epsilon + |a|)\epsilon| + |b|\epsilon < \epsilon k$$

Per l'arbitrarietà di ϵ segue la tesi.

Discussione di particolari successioni

n^α, si discute al variare di α rispetto al valore 0.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ è } \begin{cases} 1 \text{ se } \alpha = 0 \\ 0 \text{ se } \alpha < 0 \\ \infty \text{ se } \alpha > 0 \end{cases} \tag{1}$$

q^n, si discute al variare di q rispetto al valore 1.

$$q^n = \begin{cases} 1 \text{ se } q = 1 \\ \infty \text{ se } q > 1 \\ 0 \text{ se } |q| < 1 \\ \nexists \text{ se } q \leqslant -1 \end{cases} \tag{2}$$

Teorema del confronto per successioni convergenti

Siano A_n, B_n, C_n tre successioni tali che $A_n \leqslant B_n \leqslant C_n \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo inoltre che

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} C_n = l$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} B_n = l$$

Dimostrazione

Sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} C_n = l$$

Quindi fissato un numero $\epsilon > 0$ e scelti due numeri n_1 e n_2 possiamo scrivere

$$l - \epsilon < A_n < l + \epsilon \ \forall n > n_1$$

$$l - \epsilon < C_n < l + \epsilon \ \forall n > n_2$$

Possiamo allora trovare $N = MAX\{n_1, n_2\}$ tale che $\forall n > N$ vale:

$$l - \epsilon < A_n \leqslant C_n < l + \epsilon$$

Per ipotesi sappiamo inoltre che $A_n \leqslant B_n \leqslant C_n$ quindi possiamo scrivere

$$l - \epsilon < A_n \leqslant B_n \leqslant C_n < l + \epsilon$$

Dalla catena di disequazioni possiamo quindi concludere che

$$l - \epsilon < B_n < l + \epsilon$$

Per cui

$$\lim_{n\to\infty} B_n = l$$

Teorema del confronto per successioni divergenti

Siano A_n, B_n due successioni tali che $A_n \leqslant B_n \forall n \in \mathbb{N}$, allora:
1)
$$\lim_{n \to \inf} A_n = +\infty \to \lim_{n \to \inf} B_n = +\infty$$

2)
$$\lim_{n \to \inf} B_n = -\infty \to \lim_{n \to \inf} A_n = -\infty$$

Dimostrazione

Sappiamo che
$$\lim_{n \to \inf} A_n = +\infty$$
Allora per definizione di successione divergente a $+\infty$ possiamo scrivere $\forall M > 0$ esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_M$ vale $A_n > M$ Sappiamo inoltre che $A_n \leqslant B_n$ quindi possiamo scrivere

$$M < A_n \leqslant B_n \ \forall n > n_M$$

Da cui si evince che
$$\lim_{n \to \inf} B_n = +\infty$$

Forme di indecisione

- $+\infty - \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$
- $0 \cdot \infty$
- 0^0
- 1^∞
- ∞^0

Teorema di unicità del limite

Se una funzione $f(x)$ per $x \to x_0$ o $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ ammette limite allora esso è unico.

Dimostrazione

Dimostriamo il teorema per assurdo, ovvero immaginiamo che il limite possa avere due differenti valori:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

Questo significa che fissato un $\epsilon > 0$ si possono determinare due intorni di x_0 tale che $\forall x \in \mathbb{R}$ valga

$$l_1 - \epsilon < f(x) < l_1 + \epsilon$$

$$l_2 - \epsilon < f(x) < l_2 + \epsilon$$

Fissiamo ora il $l_2 > l_1$ e $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$. Nella parte comune dei due intorni devono valere entrambe le disequazioni prima definite. In questa parte comune varrà quindi:

$$l_2 - \epsilon < f(x) < l_1 + \epsilon$$

Da cui si evince che

$$l_2 - \epsilon < l_1 + \epsilon$$

cioè

$$\epsilon > \frac{l_2 - l_1}{2}$$

che è assurdo perchè per ipotesi

$$\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$$

Gerarchia degli infiniti

La gerarchia degli infiniti è: $\log(x) < x^n < \alpha^n$

Teorema di unicità del limite per le successioni

Data una successione A_n tale che il:

$$\lim_{n \to +\infty} A_n$$

esiste, tale limite è unico.

Dimostrazione

Procediamo per assurdo,cioè ammettiamo che:

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = A_1$$

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = A_2$$

Fissato un $\epsilon > 0$ poiché le due successioni sono convergenti possiamo trovare un $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\forall n > n_1 \text{ vale } |A_n - A_1| < \epsilon$$

$$\forall n > n_2 \text{ vale } |A_n - A_2| < \epsilon$$

Possiamo allora definire $N = MAX(n_1, n_2)$ e scriviamo:

$$|A_1 - A_2| = |A_1 - A_n + A_n - A_2| \leqslant |A_n - A_1| + |A_n - A_2| < 2\epsilon \ \forall n > N$$

Da cui

$$|A_1 - A_2| < 2\epsilon$$

ma per definizione di ϵ ovvero $\epsilon > 0$ deve valere

$$|A_1 - A_2| = 0$$

Cioè

$$A_1 = A_2$$

Teorema di permanenza del segno

Sia A_n una successione. Supponiamo che

$$\lim_{n \to \inf} A_n = l > 0$$

dove l è un numero reale positivo, allora esiste un numero $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_0$ si ha $A_n > 0$ (la successione è definitivamente positiva).

Dimostrazione

Per ipotesi la successione converge a l, si può quindi scrivere che fissato $\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geqslant n_0$ si ha che:

$$l - \epsilon < A_n < l + \epsilon$$

Ipotizziamo $\epsilon = \frac{l}{2}$ da cui

$$l - \epsilon = \frac{l}{2}$$

Di conseguenza possiamo determinare un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $A_n \geqslant \frac{l}{2}$ che è sicuramente positivo per definizione di ϵ.

Definizione successionale di limite

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, si dice che

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

se per ogni successione $\{X_n\}$ di punti dell'intervallo I diversi c tali che $X_n \to c$ si ha che $f(X_n) \to c$ per $n \to +\infty$

Asintoto orizzontale

Si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = l$ con $l \in \mathbb{R}$ per $x \to \pm\infty$ se:

$$\lim_{x \to \pm \inf} f(x) = l$$

Asintoto verticale

Si dice che f ha un asintoto verticale di equazione $x = c$ con $c \in \mathbb{R}$ per $x \to c$ se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

Asintoto obliquo

Si dice che f ha un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$, $q \in \mathbb{R}$ per $x \to \pm\infty$ se:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (mx + q) = 0$$

La funzione $f(x)$ ammette asintoto obliquo se e solo se:
1) esiste ed è finito

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)/x = m \neq 0$$

2) esiste ed è finito

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = q$$

Definizione di continuità

Se $f : I \to \mathbb{R}$ e $c \in I$ si dice che f è continua in c se esiste il

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Si dice che f è continua in I se è continua in ciascun punto di I altrimenti si dice discontinua in c

Tipi di discontinuità

- Di prima specie se esistono e sono finiti i limiti destro e sinistro ma sono diversi fra loro (discontinuità a salto).
- Seconda specie se uno dei due limiti (destro o sinistro) non esiste oppure tende a più o meno infinito.
- Terza specie se esistono e sono finiti e uguali il limiti destro e sinistro ma sono diversi dal valore di $f(c)$

Teorema di continuità delle funzioni elementari

Le seguenti funzioni sono continue in tutti i punti del proprio insieme di definizione:

- funzioni esponenziali
- funzioni logaritmiche
- funzioni $\sin \cos$
- potenze ad esponente $\mathbb{N}\mathbb{Q}\mathbb{R}$

Teorema delle funzioni continue

Siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$. Se f e g sono continue in $x_0 \in I$ allora $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ sono continue in x_0.
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ tale che $I_m(f) \subseteq J$. Supponiamo che f sia continua in $x_0 \in I$ e g sia continua in $f(x)$ allora $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ è continua in x_0

Limiti notevoli $\sin \cos$

Vedere il quadernino

Teorema degli 0

Sia:

- f continua in $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$. Se fè anche strettamente monotona lo 0 è unico.

Dimostrazione

Costruiamo una successione che tende a uno 0 di f. Poniamo $c_1 = \frac{a+b}{2}$, ovvero il punto medio dell'intervallo (a, b)

- Se $f(c_1) = 0$ siamo fortunati e il teorema è dimostrato.
- Se $f(c_1) \neq 0$ dobbiamo analizzare il segno di $f(a) \cdot f(c_1)$
  - Se $f(a) \cdot f(c_1) < 0$ consideriamo l'intervallo $[a_1, b_1]$ dove $a_1 = a$ e $b_1 = c_1$
  - Se $f(a) \cdot f(c_1) > 0$ consideriamo l'intervallo $[a_1, b_1]$ dove $a_1 = c_1$ e $b_1 = b$

Poniamo ora $c_1 = \frac{b_1+a_1}{2}$, ovvero l'altro punto medio e procediamo come prima. Continuiamo in questo modo troviamo una sequenza $[a_n, b_n]$ tali che:

1. $a_n \leqslant a_{n+1}$ e $b_n \geqslant b_{n+1}$.
2. $b_n - b_{n+1} = \frac{b-a}{2^n}$
3. $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$

Per il punto 1 le successioni sono evidentemente limitate e monotone e quindi ammettono limite.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} b_n = l_2$$

Allora **per il punto 3** abbiamo che:

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(l_1) \leqslant 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} f(b_n) = f(l_2) \geqslant 0$$

Poiché la lunghezza dell'intervallo I_{n+1} è la metà dell'intervallo I_n **per il punto 2** abbiamo che:

$$\lim_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$$

e quindi:

$$l_1 = l_2 = c$$

Avremo allora $f(c) \leqslant 0$ e $f(c) \geqslant 0$ ovvero:

$$f(c) = 0$$

Teorema di Weierstrass

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$, ossia esistono $x_m, x_M \in [a, b]$ tali che:

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M)\ \forall x \in [a, b]$$

Teorema dei valori intermedi

Se f è continua su $[a, b]$,allora per ogni valore λ compreso fra m E M (minimo e massimo), esiste un ingresso x in $[a, b]$ che ha il valore λ come uscita.

Dimostrazione

Sia $m < \lambda < M$ e $f(x_2) = m$ e $f(x_1) = M$, allora la funzione $g(x) = f(x) - \lambda$:

- è continua in $[x_1, x_2]$ (supponendo $x_1 < x_2$)
- $g(x_1) = f(x_1) - \lambda = M - \lambda > 0$
- $g(x_2) = f(x_2) - \lambda = m - \lambda < 0$

Dal teorema degli zeri esiste l tale che $g(l) = 0$ cioè $f(l) = \lambda$

Derivate

- Consideriamo una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ fissato un punto $x_0 \in I$ e un piccolo incremento h possiamo scrivere l'equazione della retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h)$ come:

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot (x - x_0)$$

- Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è detta derivabile in $x_0 \in I$ se:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  esiste ed è finito. Il valore del limite è detto derivata e si scrive:

$$f'(x_0) \text{ oppure } \frac{df}{dx}(x_0) \text{ oppure } Df(x_0)$$

- E' quindi possibile riscrivere la retta tangente come

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Derivate elementari

Table 1: Tabella delle derivate delle funzioni elementari

f(x)	f'(x)
c	0
x	q
x^2	$2x$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$	$\alpha \cdot x^{\alpha - 1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x $(a > 0)$	$a^x \cdot \log(a)$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot \log(a)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$
$[f(x)]^\alpha$	$\alpha \cdot [f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
$\sin(f(x))$	$\cos(f(x)) \cdot f'(x)$
$\mathrm{e}^{f(x)}$	$\mathrm{e}^{f(x)} \cdot f'(x)$

Dimostrazioni delle derivate delle funzioni elementari

$\mathbf{f'(\mathrm{e}^{x}) = \mathrm{e}^{x}}$

Sia $f(x) = \mathrm{e}^x$ allora:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x$$

$\mathbf{f'(x^{\alpha}) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}}$

Sia $f(x) = x^\alpha$ allora:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^\alpha \cdot (1 + \frac{h}{x})^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(1 + \frac{h}{x})^\alpha - 1}{h} = x^\alpha \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\alpha + \frac{h}{x}}{h} =$$
$$= \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

Ogni funzione derivabile è anche continua

Se una funzione f è derivabile in un punto x_0 allora in questo punto la funzione è continua.

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Quindi possiamo scrivere che:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0}[f(x_0)+f(x_0+h)-f(x_0)] = \lim_{h\to 0}[f(x_0)+h\cdot(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h})] =$$

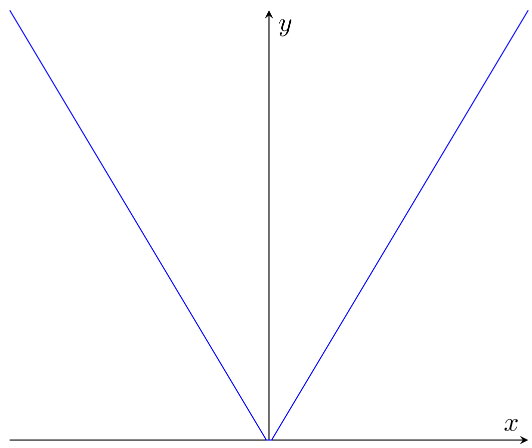
$$= f(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = f(x_0)$$

Osservazioni

1. Se una funzione non è continua in x_0 non può essere derivabile in x_0.
2. La condizione è solo sufficiente, ma non necessaria, cioè se f è continua in x_0, non necessariamente f è derivabile in x_0

Punti angolosi

Sia $f(x) = |x|$



Nell'origine $x = 0$ calcoliamo f'

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} =$$

- Se $h \to 0^+ = 1$
- Se $h \to 0^- = -1$

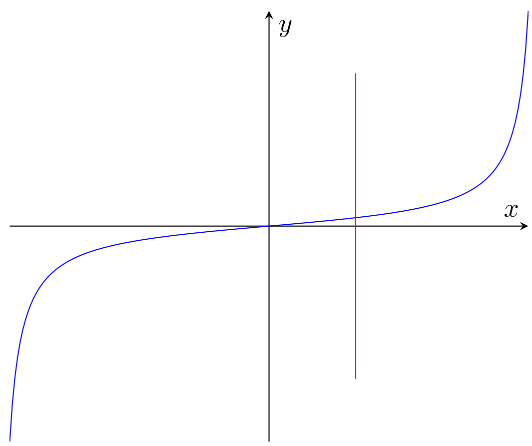
Si conclude che f non è derivabile in x_0, ovvero significa che la tangente dell'origine non è ben definita (in quanto la funzione presenta un angolo).

Definizione

Nel caso in cui f sia continua e derivabile da destra e da sinistra, ma non derivabile in x_0 si dice che f ha un punto angoloso.

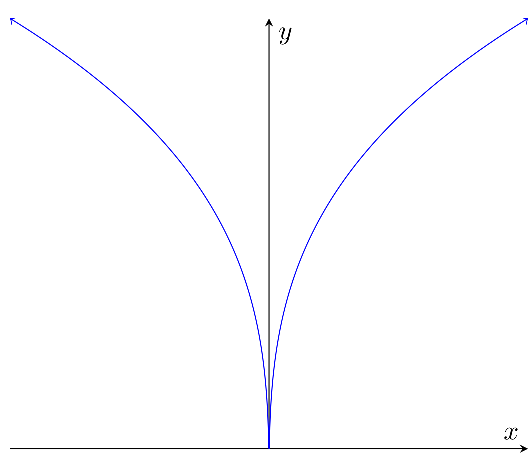
Punti a tan **verticale**

Sia $f(x) = \sqrt[3]{x}$
Se f è continua in un punto x_0 e $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)f(x_0)}{h} = \pm\infty$ allora f non è derivabile in x_0, ma il grafico di f ha una retta tangente ben definita e parallela all'asse delle y. Parleremo quindi di flesso a tangente verticale.



Cuspidi

Sia $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
Se f è continua in x_0 e $f'_+(x_0) = \pm\infty$ e $f'_-(x_0) = \mp\infty$ si dice che f ha in x_0 una cuspide



Algebra delle derivate

Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a, b) allora la loro somma, il loro prodotto, e il loro rapporto sono derivabili in (a, b) e valgono:

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(f \cdot g)' = (f' \cdot g) + (f \cdot g')$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{(f' \cdot g) - (f \cdot g')}{g^2}$
- $(\frac{1}{g})' = \frac{-g'}{g^2}$

Dimostrazione della derivata del prodotto

Fissato $x \in (a, b)$

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} g(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

Questo per $h \to 0$ equivale a:

$$(f' \cdot g) + (f \cdot g')$$

Dimostrazione della derivata del reciproco

Fissato $x \in (a, b)$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Questo per $h \to 0$ equivale a:

$$-\frac{1}{g(x) \cdot g(x)} \cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Dimostrazione della derivata del rapporto

Fissato $x \in (a, b)$ sappiamo che per la derivata del rapporto e del reciproco

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + \left(\frac{1}{g}\right)' \cdot f(x)$$

Quindi:

$$\frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x) \cdot g(x)}{[g(x)]^2} - \frac{g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2} = \frac{[f'(x) \cdot g(x)] - [f(x) \cdot g'(x)]}{[g(x)]^2}$$

Derivata di una funzione composta

Sia $g \circ f$ la composta di due funzioni f e g. Se f è derivabile in un punto x e g è derivabile in $y = f(x)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Dimostrazione

Si può scrivere che

$$(g \circ f)' = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$$

Poniamo ora $k = f(x+h) - f(x)$ e osservando che se $h \to 0$ anche $k \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x+h) - f(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{k \to 0} \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Derivata di una funzione inversa

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua ed invertibile in (a, b) e sia $g = f^{-1}$ la sua inversa definita in $f(a, b)$. Supponiamo inoltre che esista $f'(x_0) \neq 0$ con $x_0 \in (a, b)$ allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e $g(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Inversa di $\sin(x)$ ovvero $\arcsin(x)$

La funzione $\sin : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ è invertibile se il suo dominio è limitato nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to [-1, 1]$$

La sua inversa è arcsin definita in$[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Calcoliamo ora la derivata della funzione arcsin e scriviamo:

$$(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Poiché per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ si ha $\cos(x) > 0$ abbiamo

$$\cos(x) = \sqrt[2]{1 - \sin^2(x)} = \sqrt[2]{1 - y^2}$$

e dunque

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt[2]{1 - y^2}}$$

Quindi:

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{\sqrt[2]{1 - y^2}}$$

La funzione arcsin non è derivabile nei punti ± 1 che corrispondono a $x = \pm \frac{\pi}{2}$ nei quali $f'(x) = 0$

Inversa di $\cos(x)$ ovvero $\arccos(x)$

Consideriamo una funzione $\cos(x)$ definita da $[0, \pi] \to (-1, 1)$. Questa funzione è invertibile e la sua inversa è: $\arccos : (-1, 1) \to [0, \pi]$. Posto $y = \cos(x)$ si ha:

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Inversa di $\tan(x)$ ovvero $\arctan(x)$

Consideriamo la funzione $\tan(x)$ definita dall'intervallo aperto $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. Sappiamo che questa funzione è invertibile e la sua funzione inversa è

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

Posto $y = \tan(x)$:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$$

Punto di massimo assoluto (estremante)

Consideriamo una funzione $f : I \to \mathbb{R}$. Un punto x_0 è detto di massimo assoluto per f se $\forall x \in I$ si ha $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Punto di massimo locale (estremante)

Un punto x_0 si dice di massimo locale se esiste un intorno $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ tale che $\forall x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ si ha $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Punto di minimo assoluto (estremante)

Consideriamo una funzione $f : I \to \mathbb{R}$. Un punto x_0 è detto di minimo assoluto per f se $\forall x \in I$ si ha $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Punto di minimo locale (estremante)

Un punto x_0 si dice di minimo locale se esiste un intorno $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ tale che $\forall x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ si ha $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Teorema di Fermat

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di massimo o di minimo (assoluto o locale). Se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione

Supponiamo per ipotesi che x_0 sia un punto di massimo (detto anche estremante), allora per definizione se x è in un intorno di x_0 vale che $f(x) \leqslant f(x_0)$. Calcoliamo la derivata in $f(x_0)$:

$$f'_+(x_0)_+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Poiché $f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$ e $h > 0$ abbiamo:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

e quindi:

$$f'_+(x_0) \leqslant 0$$

Analogamente per $f'_-(x_0)$, se $h < 0$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

$$f'_-(x_0) \geqslant 0$$

Poiché f è derivabile in x_0 per ipotesi, deve essere:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Quindi:

$$f'(x_0) = 0$$

Osservazione

Poiché il teorema valga è essenziale che x_0 sia un punto interno al dominio di f.

Teorema di Rolle

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a, b). Supponiamo che $f(a) = f(b)$ allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione

Per ipotesi la funzione f è continua su $[a, b]$ e quindi per il teorema di Weierstrass esistono un punto di minimo x_m e un punto di massimo x_M. Se questi due punti coincidessero con gli estremi dell'intervallo avremmo:

$$f(x_m) = f(x_M)$$

e quindi la funzione sarebbe costante e avremmo:

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Possiamo supporre allora che almeno uno dei due punti sia interno all'intervallo $[a, b]$.
Il teorema di Fermat ci dice allora che in questo punto la derivata è nulla.

Teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a, b), allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione

Introduciamo la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

Osserviamo che g è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Inoltre:

$$g(b) = \cancel{f(b)} - \frac{\cancel{f(b)} - f(a)}{\cancel{(b - a)}} \cdot \cancel{(b - a)} = f(a)$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a)$$

Poichè $g(a) = g(b)$ possiamo allora applicare il teorema di Rolle alla funzione g.
Esisterà quindi $c \in (a, b)$ tale che $g'(c) = 0$.
Poiché

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dato che $g'(c) = 0$ allora:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema di monotonia delle derivate

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile, allora:

1. f è monotona crescente se e solo se $f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (a, b)$
2. f è monotona decrescente se e solo se $f'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che:

- f monotona crescente $\implies f'(x) \geqslant 0 \ \forall x \in (a, b)$
- $f'(x) \geqslant 0 \ \forall x \in (a, b) \implies f$ monotona crescente.

Supponiamo come prima cosa che f sia monotona crescente.
Preso $h > 0$ avremo $(x + h) > x$ e quindi $f(x + h) \geqslant f(x)$.
Per tanto:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

Se invece $h < 0$ si avrà $(x + h) < x$ e quindi $f(x + h) \leqslant f(x)$ cioè:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

Quindi:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

Supponiamo ora che $f'(x) \geqslant 0 \forall x \in (a, b)$ e proviamo che f è monotona crescente.
Siano $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$.
Dobbiamo dimostrare che $f(x_1) \leqslant f(x_2)$
Applichiamo il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1, x_2]$ cioè esiste $c \in (x1, x_2)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Poiché $f'(c) \geqslant 0$ si ha che:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant 0$$

e quindi:

$$f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0 \text{ ovvero } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

Quindi f è monotona crescente.

Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla su un intervallo

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Allora:

$$f' = 0 \in (a, b)$$

se e solo se f è costante in (a,b).

Definizione di derivata seconda

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile. Si dice che f è due volte derivabile in $x_0 \in (a, b)$ se $f'(x)$ è derivabile in x_0.
Essa si chiama derivata seconda: f''

Definizione di funzione convessa

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile. Si dice che f è convessa se $\forall x_0 \in (a, b)$ e $\forall x \in (a, b)$ si ha:

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Definizione di funzione concava

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile. Si dice che f è concava se $\forall x_0 \in (a, b)$ e $\forall x \in (a, b)$ si ha:

$$f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Teorema di convessità

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b). Si dice che f è convessa se e solo se f' è crescente.

Dimostrazione

Per ipotesi supponiamo che f sia convessa e dimostriamo che f' è crescente.
Siano $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x1 < x_2$.
Per definizione di convessità si ha

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

ed anche

$$f(x_1) \geqslant f(x_2) + f'(x_2) \cdot (x_1 - x_2)$$

Sommando le due disuguaglianze:

$$f(x_2) + f(x_1) \geqslant f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + f(x_2) + f'(x_2) \cdot (x_1 - x_2)$$

Da cui

$$0 \geqslant f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + f'(x_2) \cdot (x_1 - x_2)$$

Raccogliendo:

$$0 \geqslant (x_2 - x_1) \cdot (f'(x_1) - f'(x_2))$$

Poiché $x_2 - x_1 > 0$ segue che $f'(x_1) \leqslant f(x_2)$ e quindi f è crescente.
Supponiamo ora che f' sia crescente e dimostriamo che f è convessa.
Fissiamo $x_0 \in (a, b)$ e consideriamo $x \in (a, b)$ con $x > x_0$ e applichiamo il teorema di Lagrange.
Esiste quindi un $c \in (x_0, x)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Poiché f' è crescente e $x_0 < c$ si ha:

$$f'(x_0) \leqslant f'(c)$$

Da cui:

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Da cui

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Teorema di concavità

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b). Si dice che f è concava se e solo se f' è decrescente.

Teorema della convessità derivata seconda

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ due volte derivabile in (a, b). Si dice che f è convessa se e solo se $f''(x) \geqslant 0 \forall x \in (a, b)$.

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che:

- se $f''(x) >= 0$ allora $f(x)$ è convessa;
- se $f(x)$ è convessa allora $f''(x) >= 0$;

Fissiamo x_1, $x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$. La funzione $f'(x)$ rispetta le ipotesi del teorema di Lagrange (ovvero, è continua e derivabile). Di conseguenza esiste un punto $c \in (x_1, x_2)$ tale che:

$$f''(c) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Sappiamo che il denominatore è > 0 per ipotesi e inoltre $f''(c) >= 0$ e dunque deve valere che $f'(x_2) - f'(x_1) >= 0$ ovvero $f'(x_2) >= f'(x_1)$. Quindi la derivata prima è crescente e dunque per il teorema sul rapporto tra le derivata prima e la convessità si ha che f è convessa in (a,b). Sappiamo per ipotesi che f è convessa in (a,b) dunque la sua derivata prima è crescente in (a,b), per cui $\forall x$, $x_0 \in (a, b)$ vale la disuguaglianza:

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} >= 0$$

Facendo tendere x a x_0 per definizione di derivata seconda si ha:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} >= 0$$

Dall'arbitrarietà di x_0 di ha la tesi, ovvero la derivata seconda non è negativa.

Teorema della concavità derivata seconda

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ due volte derivabile in (a, b). Si dice che f è concava se e solo se $f''(x) \leqslant 0 \forall x \in (a, b)$.

Teorema De L'Hopital

Siano f e g due funzioni derivabili in (a, b) e sia $g'(x) \neq 0$.
Supponiamo che:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

Oppure

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$$

Allora se esiste:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si ha che:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Polinomio di Taylor

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in un punto $x_0 \in (a, b)$. Chiameremo polinomio di Taylor di grado n con centro in x_0 il polinomio:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Osservazioni

Nel caso in cui $x_0 = 0$ il polinomio di Taylor è anche detto Polinomio di McLaurin.

Definizione di o (leggasi o piccolo)

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di x_0 si dice che $f(x) = o \cdot g(x)$, ovvero $f(x)$ è o di $g(x)$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$f(x)$ **è un infinitesimo di grado superiore**
Ovvero $o(g(x))$ indica una quantità trascurabile rispetto a $g(x)$.

Definizione formula di Taylor con resto di Peano

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

ovvero

$$s(x) = f(x) + f'(x) \cdot (x - x_0) + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$$

Definizione formula di Taylor con resto di Lagrange

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile $n + 1$ volte in (a, b).
Sia $x_0 \in (a, b)$ fissato.
Preso $x \in (a, b)$ esiste $x_0 < c < x$ tale che:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Serie numerica

Data una successione di numeri reali a_n, chiamiamo serie dei termini a_n la scrittura formale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Somma parziale

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ per } n = 0, 1, 2, ...$$

Il numero s_n viene detto somma parziale n-esima della serie e la successione s_n si dice successione delle somme parziali della serie.

Definizione di serie convergente, divergente e irregolare

Diremo che la serie è convergente, divergente o irregolare se la successione s_n delle sue somme parziali è convergente divergente o irregolare rispettivamente. In particolare se s_n è convergente allora $s_n \to S$ e diremo che S è la somma delle serie e scriveremo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

Dunque in questo caso vale la relazione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Osservazioni

Parlare di una serie numerica coinvolge sempre due diverse successioni: la successione a_n dei termini della serie e la successione s_n delle sue somme parziali.

Serie geometrica

Sia $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$. Se $q \neq 1$ utilizzando la formula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

abbiamo

$$s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Se invece abbiamo $q = 1$ si ha

$$s_n = n + 1$$

Prendendo il limite per $n \to \infty$ otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \left\{ \frac{1}{1-q} \text{ se } |q| < 1 + \infty \text{ se } q \geqslant 1 \nexists \text{ se } q \leqslant -1 \right. \tag{3}$$

E per tanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ è } \left\{ Convergente \text{ se } |q| < 1 Divergente \text{ se } q \geqslant 1 Irregolare \text{ se } q \leqslant -1 \right. \tag{4}$$

Serie di Mengoli

E' la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

Osservando che $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, si riesce a dare un'espressione semplice alla successione s_n:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} [\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}] = [1 - \cancel{\frac{1}{2}}] + [\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}] + ... + [\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}] = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Dunque, come si vede, con le opportune cancellazioni, $s_n \to 1$, ossia la serie converge e ha somma 1.

Serie telescopica

La serie di Mengoli è il più semplice esempio di serie telescopica che significa quanto segue.
Il termine a_k ha la forma $(b_k - b_{k+1})$ dove b_k è un'altra opportuna successione e di conseguenza alle cancellazioni, si ha:

$$s_n = b_1 - b_{n+1}$$

Se il termine $b_n \to 0$, la serie è convergente e ha somma b_1.

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Condizione necessaria affinché una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga è che il termine generale a_n tenda a 0.
Come dimostrato della serie armonica non è condizione sufficiente.
Comunque se il termine generale non tende a 0, certamente la serie non converge.

Dimostrazione

Indichiamo con s_n le somme parziali della serie. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$

Poiché

$$s_n = \underbrace{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}_{=s_{n-1}} + a_n$$

Abbiamo

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

E quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0$$

Abbiamo quindi dimostrato che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ è convergente } \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Il viceversa non è vero:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ è convergente}$$

Ad esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} log(\frac{n+1}{n})$$

Soddisfa la condizione:

$$\lim_{n\to\infty} log(1 + \frac{1}{n} = 0)$$

Però non è convergente.

Serie a termini non negativi

Una serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Si dice a termini non negativi se $\forall n$ si ha $a_n \geqslant 0$

Convergenza delle serie a termini non negativi

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini non negativi, allora la serie non è mai irregolare. Converge oppure diverge a $+\infty$.

Dimostrazione

Poiché $s_n - s_{n-1} = a_n \geqslant 0$ abbiamo che $s_n \geqslant s_{n-1}$ e quindi la successione delle somme parziali è monotona crescente. Ricordiamo ora che per il teorema sul limite delle successioni monotone si ha:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = SUP\{s_n\}$$

Quindi se s_n è limitata, il limite esiste finito e la serie converge.
Se invece s_n non è limitata $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ e quindi la serie diverge a $+\infty$

Criterio del confronto

Siano $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$.

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Dimostrazione

Siano:

- $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$
- $t_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$

Poiché $b_n \leqslant a_n$ si ha che $t_n \leqslant s_n$.
Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora s_n è limitata e quindi anche t_n lo è.
Per il precedente teorema allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
Viceversa supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverga. Per quanto appena dimostrato $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non può convergere e quindi diverge.

Criterio asintotico

Siano $a_n > 0$ e $b_n > 0$ tali che $a_n \sim b_n$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento: convergono entrambe o divergono entrambe.

Criterio del rapporto

Sia $a_n \geqslant 0$ e supponiamo che esista:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

- converge se $l < 1$
- diverge se $l > 1$
- se $l = 1$ il criterio del rapporto non dice nulla

Criterio della radice

Sia $a_n \geqslant 0$ e supponiamo che esista:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

- converge se $l < 1$
- diverge se $l > 1$
- se $l = 1$ il criterio della radice non dice nulla

Serie armonica generalizzata

Sappiamo che la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e che $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^2$ converge.
Poiché

$$\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$$

se $\alpha \leqslant 1$, per il criterio del confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

diverge per $\alpha \leqslant 1$.
Similmente

$$\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

se $\alpha > 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge per $\alpha > 1$.

Serie di segno qualunque

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice che la serie converge assolutamente se converge la $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

1

Teorema della convergenza assoluta

Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia assolutamente convergente, allora converge.

Dimostrazione

Sia:

$$b_n = \frac{a_n + |a_n|}{2} = \Big\{ a_n \text{ se } a_n > 00 \text{ se } a_n \leqslant 0 \tag{5}$$

e

$$c_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \Big\{ -a_n \text{ se } a_n < 00 \text{ se } a_n \geqslant 0 \tag{6}$$

Chiaramente $a_n = b_n - c_n$ con $0 \leqslant b_n \leqslant |a_n|$ e $0 \leqslant c_n \leqslant |a_n|$.
Poiché per ipotesi la serie converge allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ che sono a termini positivi convergono per il criterio del confronto. Fissiamo B e C definite come le loro somme.
Siano ora s_n, t_n e u_n le somme parziali delle tre serie.
Poiché $a_n = b_n - c_n$ si ha $s_n = t_n - u_n$ da cui:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = B - C$$

Per tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Osservazioni

La convergenza assoluta implica la convergenza ordinaria, ma non vale viceversa.
La convergenza ordinaria è chiamata anche convergenza semplice.

Criterio di Leibniz

Sia a_n monotona decrescente e tale che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ converge. Detta S la somma delle serie e s_n le sue somme parziali si ha:

$$|S - s_n| \leqslant a_{n+1}$$

La convergenza dello sviluppo della serie di Taylor della funzione esponenziale

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ e scriviamone il polinomio di Taylor fino all'ordine n con centro in $x_0 = 0$.
Abbiamo che $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ e scrivendo la formula di Taylor con il resto secondo Lagrange si ha:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

Dove $0 < c < x$. Fissato $x \in \mathbb{R}$ consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Le somme parziali di questa serie coincidono con i polinomi di Taylor della funzione f, ovvero:

$$s_n = P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

Si ha allora:

$$s_n = e^x - \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

Vogliamo ora calcolare il $\lim_{n\to+\infty} s_n$.
Poiché il punto c proviene dalla formula di Lagrange, variando il grado n del polinomio di Taylor c può cambiare. E' quindi necessario verificare il comportamento di e^c.
Osserviamo che:

- se $x < 0$ si ha $x < c < 0$ e quindi $e^c < e^0 = 1$
- se $x > 0$ si ha $0 < c < x$ e quindi $e^c < e^x$

In entrambi i casi la quantità e^c è limitata.
Poiché $(n + 1)!$ è un infinito di ordine superiore rispetto a x^{n+1} avremo:

$$\frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \to 0$$

E quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} e^x - \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = e^x$$

cioè:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Definizione di integrale

Diciamo che la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, è integrabile in $[a, b]$ se, detta S_n una sua qualsiasi successione di Cauchy-Riemann esiste finito il $\lim_{n\to+\infty} S_n$ e tale limite non dipende da come vengono scelti i punti ξ_j ad ogni passo della costruzione iterativa. In tal caso si pone

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Teoremi sulla integrabilità

Teorema 1

Se $f : [a, b] \in \mathbb{R}$ è continua allora è integrabile.

Teorema 2

Se $f : [a, b] \in \mathbb{R}$ è monotona e limitata allora è integrabile.

Teorema 3

Se $f_1 : [a, b] \in \mathbb{R}$ e $f_2 : [b, c] \in \mathbb{R}$ sono integrabili allora la funzione:

$$f(x) = \Big\{ f_1(x) \text{ se } x \in [a, b) f_2(x) \text{ se } x \in [b, c) \tag{7}$$

è integrabile in $[a, c]$.

Proprietà dell'integrale definito

Siano f, g integrabili in $[a, b]$. Valgono allora le seguenti proprietà:

1. linearità dell'integrale: se α, β sono costanti allora anche la funzione $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ è integrabile e vale l'identità

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

2. additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione: se $a \leqslant r \leqslant b$ allora f è integrabile anche su $[a, r]$ e $[r, b]$ e vale l'identità:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^r f(x)dx + \int_r^b f(x)dx$$

3. positività e monotonia dell'integrale: se $f \geqslant 0$ in $[a.b]$ questo implica che

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0 \text{ con } a < b$$

   Se $f \geqslant g$ in $[a, b]$ questo implica :

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$$

   In particolare:

$$\int_a^b |f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

Teorema del valore medio

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Dimostrazione

Per il teorema di Weierstrass la funzione f ammette nell'intervallo $[a, b]$ un punto di minimo e un punto di massimo. Siano essi x_m e x_M. Si ha allora:

$$f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M)$$

E quindi abbiamo:

$$\int_a^b f(x_m)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b f(x_M)dx$$

Ovvero:

$$(b-a)f(x_m) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant (b-a)f(x_M)$$

$$f(x_m) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant f(x_M)$$

Per il teorema dei valori intermedi esiste $c \in [a, b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Teorema sulla derivata della funzione integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, $\forall x \in [a, b]$ definiamo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$\forall x \in [a, b]$ si ha $F'(x) = f(x)$

Dimostrazione

Per la proprietà di additività dell'integrale possiamo scrivere:

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Calcoliamo allora il rapporto incrementale per F nel punto x e, per quanto sopra scritto, vale:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left[\cancel{F(x)} + \int_x^{x+h} f(t)dt - \cancel{F(x)} \right] = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Per il teorema del valore medio esiste $x \leqslant c \leqslant (x+h)$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Abbiamo per $h \to 0$ si ha $x \leqslant c \leqslant x$, quindi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c) = f(x)$$

Primitive e loro determinazione

L'insieme delle primitive di una data funzione $F(x)$ si indica con il simbolo $\int f(x)dx$ ed è chiamato integrale indefinito della funzione f.

Teorema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e G è una sua primitiva, tutte le primitive di f avranno la forma $G(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Definizione di primitiva

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile. F è detta primitiva di f se $\forall x \in [a, b]$ si ha $F'(x) = f(x)$.

Teorema fondamentale del calcolo dell'integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e sia G un sua primitiva, allora:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione

Sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Anche F è una primitiva di f. Esisterà allora una costante c tale che:

$$G(x) = F(x) + c$$

Poiché $F(a) = 0$ si ha $G(a) = c$ da cui:

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

E infine :

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Integrazioni immediate

k	$k \cdot x$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
k^x	$\frac{k^x}{ln(k)}$
$\frac{1}{x}$	$log\|x\|$
e^x	e^x
$sen(x)$	$-cos(x)$
$cos(x)$	$sen(x)$
$\frac{1}{sen^2(x)}$	$-cotg(x)$
$\frac{1}{cos^2(x)}$	$tg(x)$
$1 + (tg(x))^2$	$tg(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsen(x)$

$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$ln\|f(x)\|$
$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$e^{f(x)}$
$[f(x)]^\alpha \cdot f'(x)$	$\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$sen(f(x)) \cdot f'(x)$	$-cos(f(x))$
$cos(f(x)) \cdot f'(x)$	$sen(f(x))$
$\frac{f'(x)}{sen^2(x)}$	$-cotg(f(x))$
$\frac{f'(x)}{cos^2(x)}$	$-tg(f(x))$
$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	$arcsen(f(x))$
$\frac{f'(x)}{1-f^2(x)}$	$arctg(f(x))$
$k^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\frac{a^{f(k)}}{ln(k)}$

Integrazione per scomposizione

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Integrazione per sostituzione

Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua e sia F una sua primitiva. Sia $g : [a, b] \to I$ derivabile.
Consideriamo la funzione

$$h(x) = F(g(x))$$

.
Allora:

$$h'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Integrazione per parti

Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile. Sia inoltre F una primitiva di f. Allora:

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$