Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2020/2021

RICERCA OPERATIVA

Il Metodo Grafico

Giovanni Micheli

Introduzione

Cos'è il Metodo grafico?

- Metodo per la risoluzione di un problema di programmazione matematica tramite rappresentazione nel piano cartesiano
  - ✓ Metodo applicabile esclusivamente in presenza di 2 variabili decisionali
- Procedura strutturata in fasi specifiche
  - ✓ Rappresentazione grafica dei vincoli
  - ✓ Identificazione della regione ammissibile
  - ✓ Rappresentazione grafica della funzione obiettivo
  - ✓ Identificazione della soluzione

Vuol dire applicare in sequenza queste fasi

Esercizio A

$$\max \quad \omega = 4x_1 + 5x_2$$ Funzione obiettivo

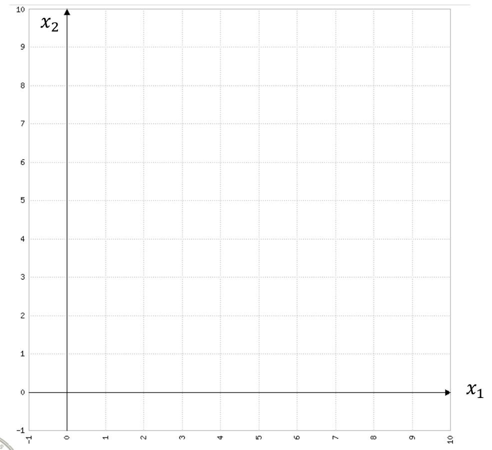
soggetto a

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}\right\}$$ Vincoli funzionali

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$ Vincoli di non-negatività

Esercizio A

Rappresentazione nel piano cartesiano

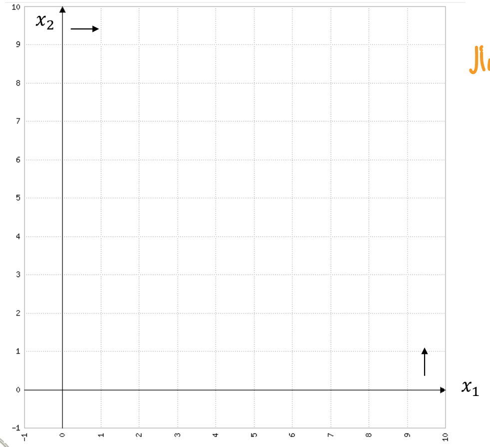


ordinate

ascisse

Esercizio A

Rappresentazione nel piano cartesiano



Vincoli di non negatività:

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

$\downarrow$

I vincoli di non-negatività implicano la selezione del primo quadrante

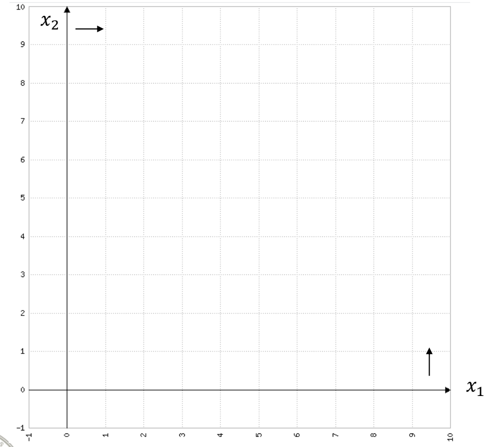
Esercizio A

1° vincolo funzionale : $x_1 \leq 3 \longleftrightarrow x_1 + s_1 = 3$

NB: trasformare un vincolo di disuguaglianza in un vincolo di uguaglianza

aggiungo una variabile SLACK

per definizione $S1 \geq 0$



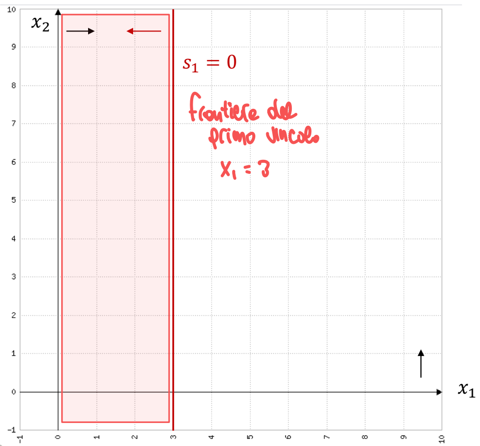
$x_1 \leq 3$

$\downarrow$

La frontiera del primo vincolo è una retta parallela all'asse delle ordinate

Esercizio A

1° vincolo funzionale : $x_1 \leq 3 \longleftrightarrow x_1 + s_1 = 3$



$x_1 \leq 3$

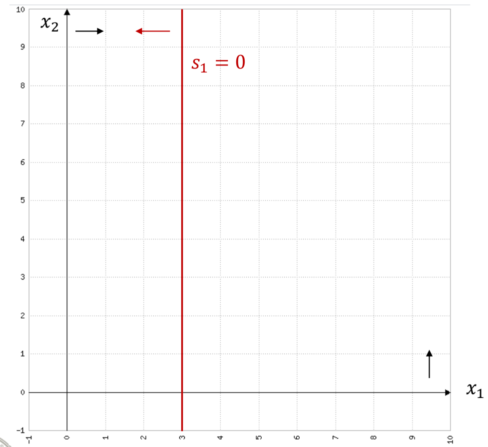
$\downarrow$

La frontiera del primo vincolo è una retta parallela all'asse delle ordinate

$x_1 = 3$

Esercizio A

2° vincolo funzionale : $2x_2 \leq 12 \longleftrightarrow 2x_2 + s_2 = 12$



$2x_2 \leq 12$

$\downarrow$

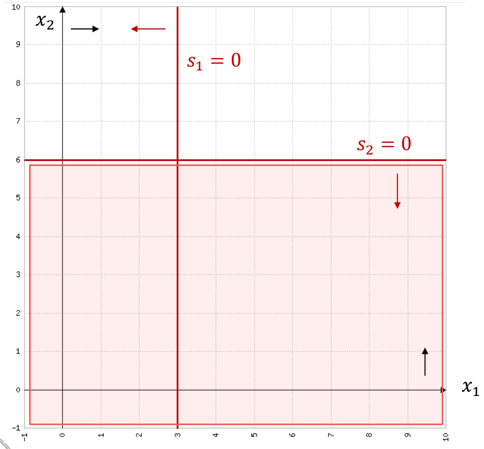
$x_2 \leq 6$

$\downarrow$

La frontiera del secondo vincolo è una retta parallela all'asse delle ascisse

Esercizio A

2° vincolo funzionale : $2x_2 \leq 12 \longleftrightarrow 2x_2 + s_2 = 12$



$2x_2 \leq 12$

$\downarrow$

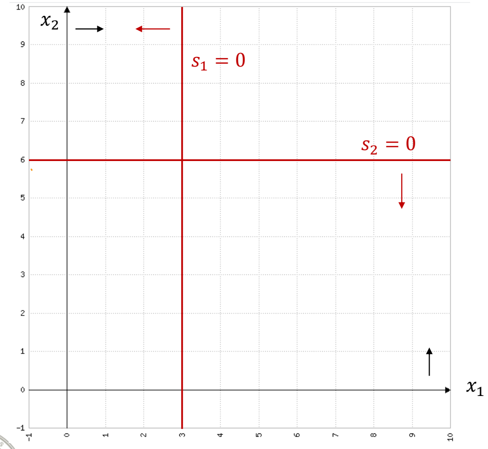
$x_2 \leq 6$

$\downarrow$

La frontiera del secondo vincolo è una retta parallela all'asse delle ascisse

Esercizio A

3° vincolo funzionale : $4x_1 + 2x_2 \leq 18 \longleftrightarrow 4x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$



$4x_1 + 2x_2 \leq 18$

$\downarrow$

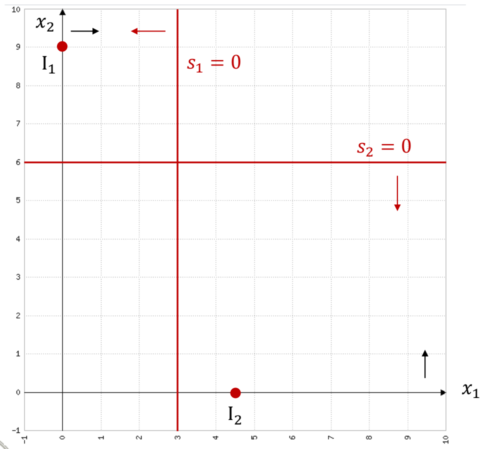
$x_2 \leq -2x_1 + 9$

$\downarrow$

La frontiera del terzo vincolo è una retta con coeff. angolare -2 e intercetta 9

Esercizio A

3° vincolo funzionale : $4x_1 + 2x_2 \leq 18 \longleftrightarrow 4x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$



$4x_1 + 2x_2 \leq 18$

$\downarrow$

$x_2 \leq -2x_1 + 9$

$\downarrow$

La frontiera del terzo vincolo è una retta con coeff. angolare -2 e intercetta 9

$\downarrow$

$$\mathrm{I}_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases} \quad \wedge \quad \mathrm{I}_2: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

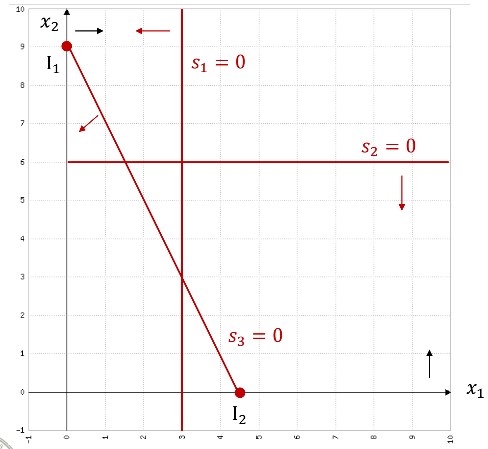
NB: nel caso di coeff. negativo la moltiplicazione cambia il verso della disuguaglianza

$-2x \geq 10$

$x \leq 5$

Esercizio A

3° vincolo funzionale : $4x_1 + 2x_2 \leq 18 \longleftrightarrow 4x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$



$4x_1 + 2x_2 \leq 18$

$\downarrow$

$x_2 \leq -2x_1 + 9$

$\downarrow$

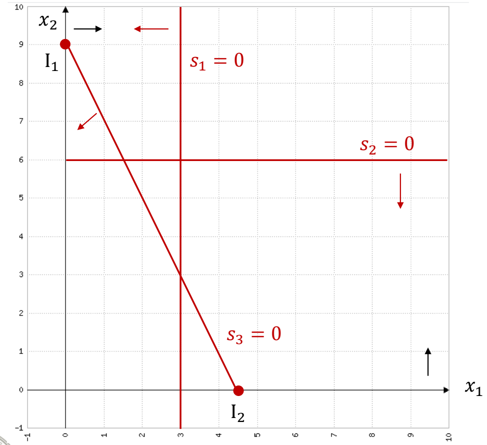
La frontiera del terzo vincolo è una retta con coeff. angolare -2 e intercetta 9

$\downarrow$

$$\mathrm{I}_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases} \quad \wedge \quad \mathrm{I}_2: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Esercizio A

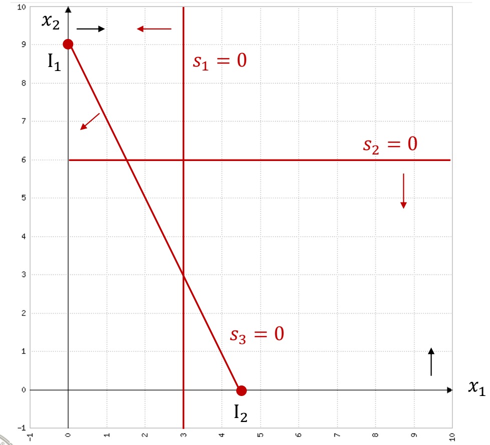
SUGGERIMENTO



Il semipiano selezionato è corretto?

Esercizio A

SUGGERIMENTO



Il semipiano selezionato è corretto?

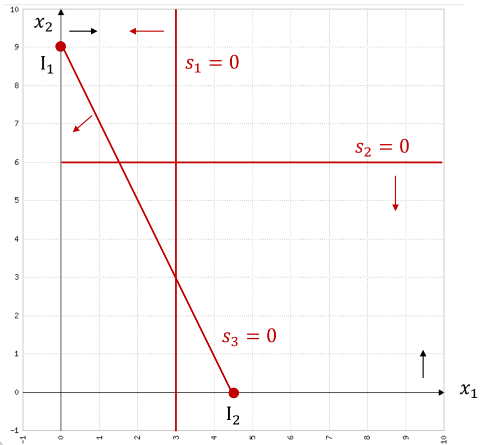
↓

Si può considerare un punto arbitrario e verificare se tale punto soddisfa il vincolo

Usare l'origine: (0,0)

Esercizio A

SUGGERIMENTO



Il semipiano selezionato è corretto?

↓

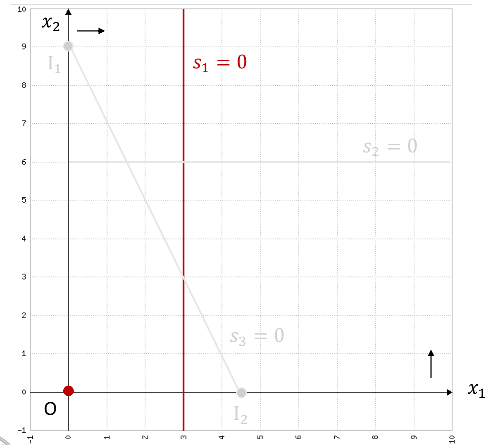
Si può considerare un punto arbitrario e verificare se tale punto soddisfa il vincolo

↓

Se il vincolo ha termine noto diverso da 0, tale punto può essere l'origine

Esercizio A

SUGGERIMENTO



1° vincolo funzionale : $x_1 \leq 3$

↓

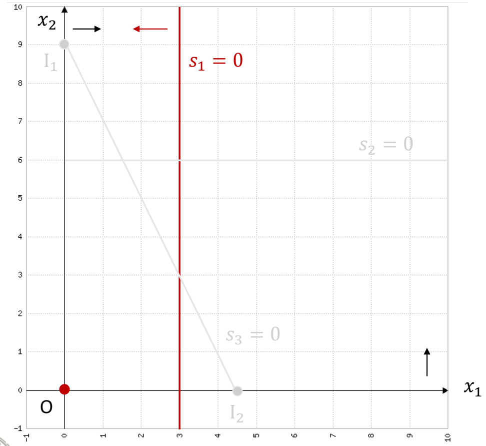
Nell'origine: $0 \leq 3$

↓

V

Esercizio A

SUGGERIMENTO



1° vincolo funzionale : $x_1 \leq 3$

↓

Nell'origine: $0 \leq 3$

↓

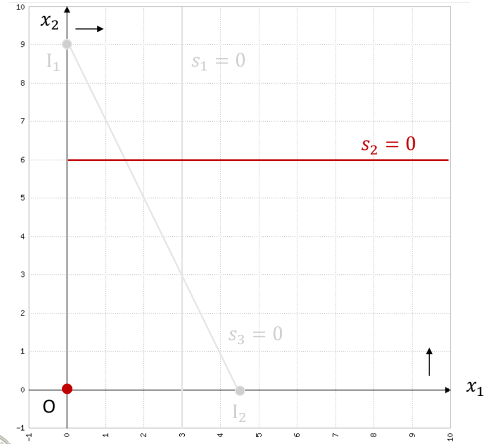
V

↓

L'origine appartiene al semipiano ammissibile definito dal vincolo 1

Esercizio A

SUGGERIMENTO



2° vincolo funzionale : $2x_2 \leq 12$

↓

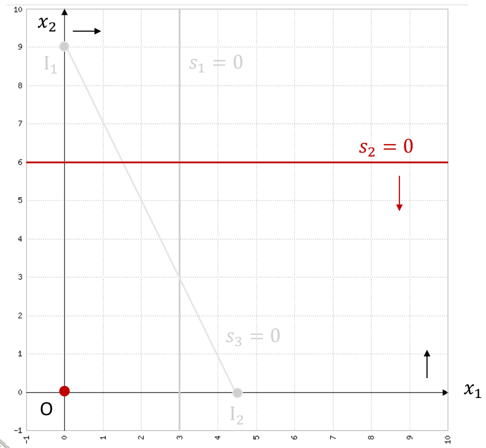
Nell'origine: $0 \leq 12$

↓

V

Esercizio A

SUGGERIMENTO



2° vincolo funzionale : $2x_2 \leq 12$

↓

Nell'origine: $0 \leq 12$

↓

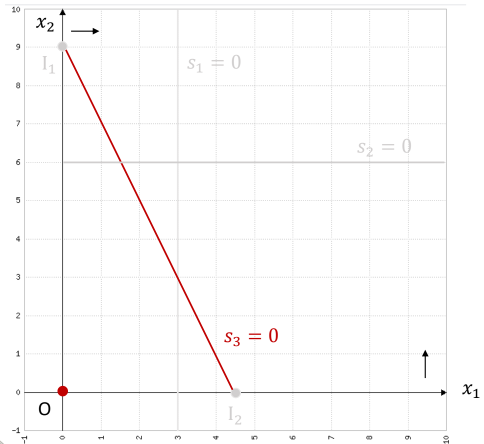
V

↓

L'origine appartiene al semipiano ammissibile definito dal vincolo 2

Esercizio A

SUGGERIMENTO



3° vincolo funzionale :
$4x_1 + 2x_2 \leq 18$

↓

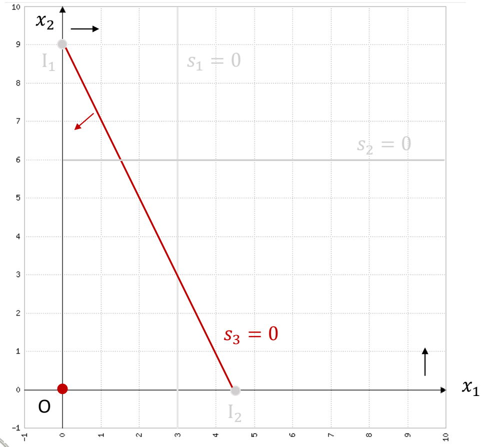
Nell'origine: $0 \leq 18$

↓

V

Esercizio A

SUGGERIMENTO



3° vincolo funzionale :
$4x_1 + 2x_2 \leq 18$

↓

Nell'origine: $0 \leq 18$

↓

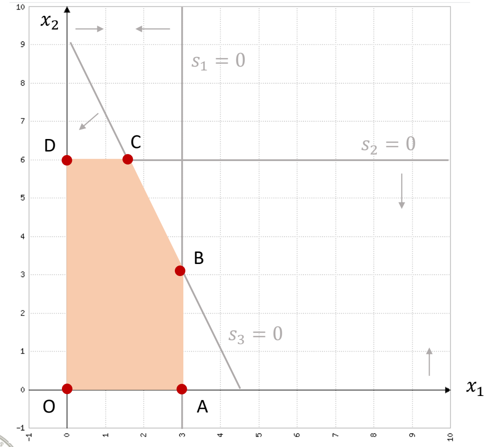
V

↓

L'origine appartiene al semipiano ammissibile definito dal vincolo 3

Esercizio A

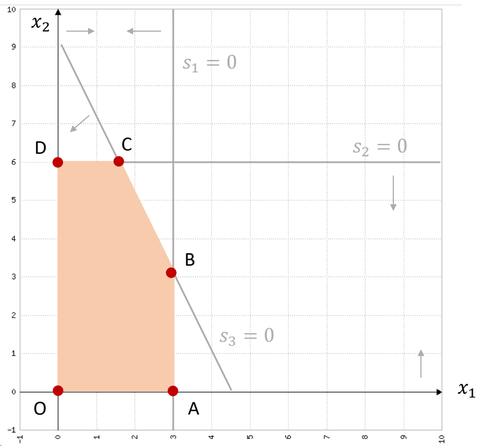
Regione ammissibile



Insieme delle soluzioni ammissibili limitato

Esercizio A

Funzione obiettivo : $\omega = 4x_1 + 5x_2$



fascio di rette parallele // per ogni valore di ω:

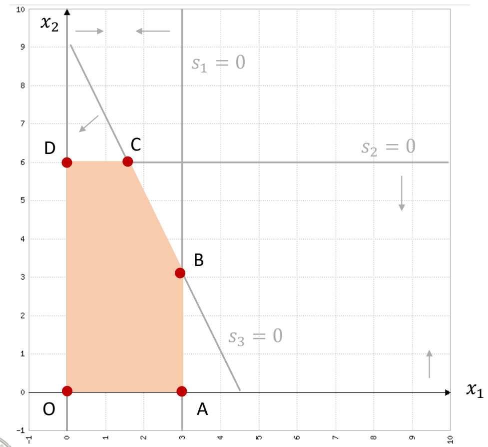
$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{\omega}{5}$$

↓

Fascio di rette con:
- ✓ Coeff. angolare $-\frac{4}{5}$
- ✓ Intercetta $\frac{\omega}{5}$

Esercizio A

Funzione obiettivo : $\omega = 4x_1 + 5x_2$



$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{\omega}{5}$$

↓

Fascio di rette con:
- ✓ Coeff. angolare $-\frac{4}{5}$
- ✓ Intercetta $\frac{\omega}{5}$

↓

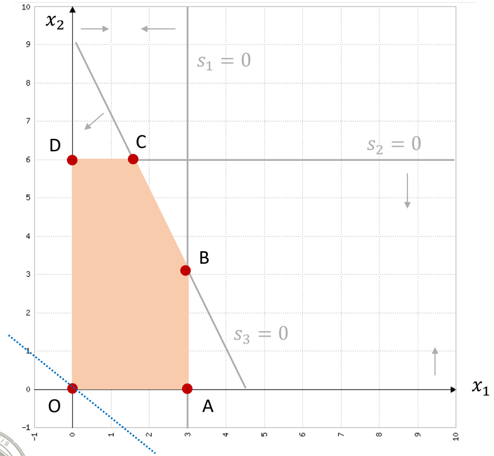
e.g. $\omega = 0$

↓

$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1$$

Esercizio A

Funzione obiettivo : $\omega = 4x_1 + 5x_2$



$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{\omega}{5}$$

$\downarrow$

Fascio di rette con:
- ✓ Coeff. angolare $-\frac{4}{5}$
- ✓ Intercetta $\frac{\omega}{5}$

$\downarrow$

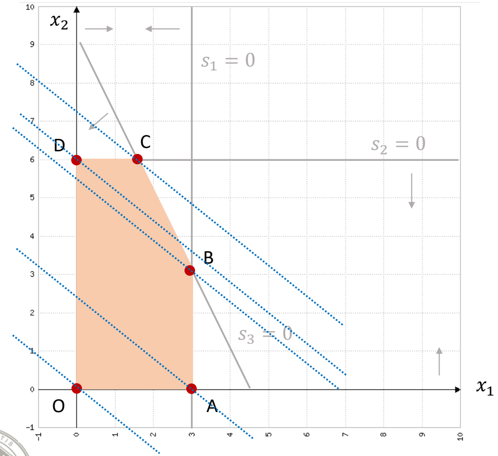
e.g. $\omega = 0$

$\downarrow$

$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1$$

Esercizio A

Funzione obiettivo : $\omega = 4x_1 + 5x_2$



$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{\omega}{5}$$

$\downarrow$

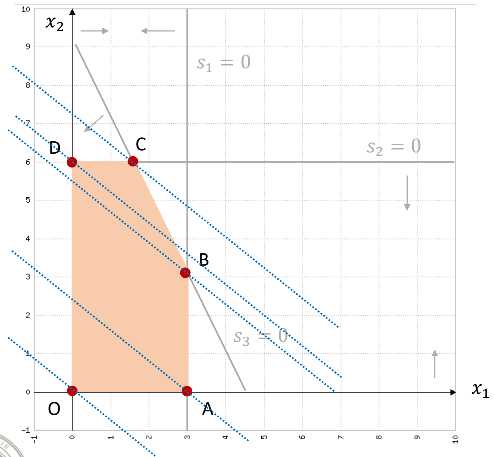
Fascio di rette con:
- ✓ Coeff. angolare $-\frac{4}{5}$
- ✓ Intercetta $\frac{\omega}{5}$

$\downarrow$

Rette che intersecano i vertici della Regione Ammissibile

Esercizio A

Determinazione dell'ottimo



Obiettivo: massimizzare ω

$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{\omega}{5}$$

$\downarrow$

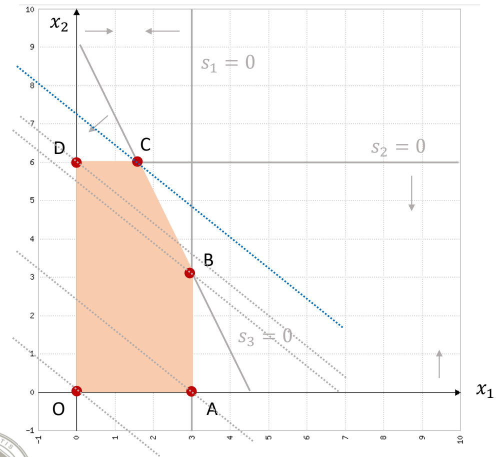
max

$$q = \frac{\omega}{5}$$

max

Esercizio A

Determinazione dell'ottimo



$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{\omega}{5}$$

$\downarrow$

max

$$q = \frac{\omega}{5}$$

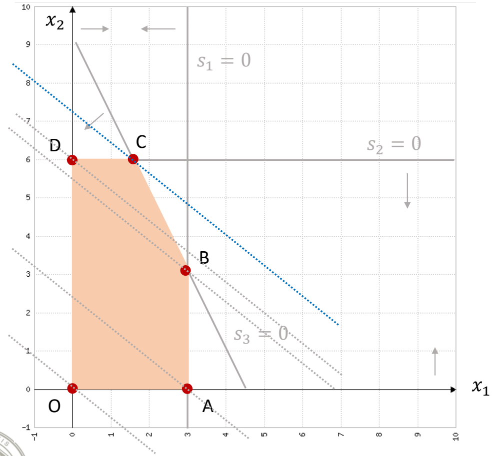
max

$\downarrow$

Massimizzare la f.o. equivale a selezionare la retta del fascio con intercetta massima

Esercizio A

Determinazione dell'ottimo



La soluzione è il punto C

- ✓ Punto della regione ammissibile
- ✓ Per cui passa la curva del fascio di rette della f.o. con intercetta massima

$$C: \begin{cases} s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = 6 \\ x_2 = -2x_1 + 9 \end{cases}$$

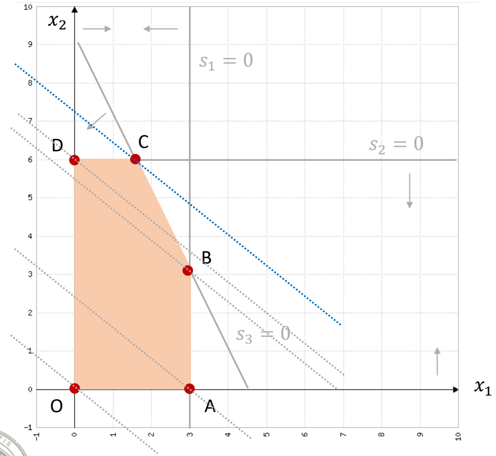
$$-3 = -2x_1$$

$$\omega = 4x_1 + 5x_2$$

$$\omega^* = 36 \leftarrow \boxed{C: \left(\frac{3}{2}; 6\right)}$$

Esercizio A

Determinazione dell'ottimo



Quanto valgono le variabili slack nel punto C?

- ✓ $s_2 = 0$
- ✓ $s_3 = 0$
- ✓ $s_1 = 3 - x_1 = \frac{3}{2}$

C: (3/2; 6)

$$w^C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 6 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \quad ; \quad \omega^C = 36$$

Punto C

Esercizio A

Determinazione della base

Condizioni da soddisfare

- Matrice quadrata di ordine m
- Non singolare : $\det(B) \neq 0$
- Sottomatrice di $F \in mat(m, m+n)$

numero variabili decisionali

numero vincoli

$$F = [A \mid I_m]$$

$$Fw = b$$

A: matrice dei coeff. dei vincoli
Im: matrice identità
w: vettore di tutte le variabili decisionali + slack
b: vettore dei termini noti

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad w = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

A   Im

I) $x_1 \leq 3$
II) $2x_2 \leq 12$
III) $4x_1 + 2x_2 \leq 18$

Esercizio A

- Sulla base delle colonne che compongono la matrice B, le variabili del problema vengono distinte in:
  - ✓ Variabili di base w_B, associate alle colonne della base B (m variabili)
  - ✓ Variabili non di base w_N, associate alle colonne di F non incluse nella base B (n variabili)

$$w_B + B^{-1} N w_N = B^{-1} b$$

B è una sottomatrice di F = [A|I]
• è costruita selezionando alcune col di F
• deve essere quadrata

N: sottomatrice di F che non include alcun wB
include solo i wN

Esercizio A

- Sulla base delle colonne che compongono la matrice B, le variabili del problema vengono distinte in:
  - ✓ Variabili di base w_B, associate alle colonne della base B (m variabili)
  - ✓ Variabili non di base w_N, associate alle colonne di F non incluse nella base B (n variabili)

$$w_B + B^{-1}Nw_N = B^{-1}b$$

- La soluzione ottenuta
  - ✓ assegnando valore nullo alle variabili non di base ($w_N = 0$)
  - ✓ risolvendo il sistema lineare rispetto alle variabili di base ($w_B = B^{-1}b$)

  viene detta soluzione di base (associata alla base B)

Esercizio A

- Sulla base delle colonne che compongono la matrice B, le variabili del problema vengono distinte in:
  - ✓ Variabili di base w_B, associate alle colonne della base B (m variabili)
  - ✓ Variabili non di base w_N, associate alle colonne di F non incluse nella base B (n variabili)

$$w_B + B^{-1}Nw_N = B^{-1}b$$

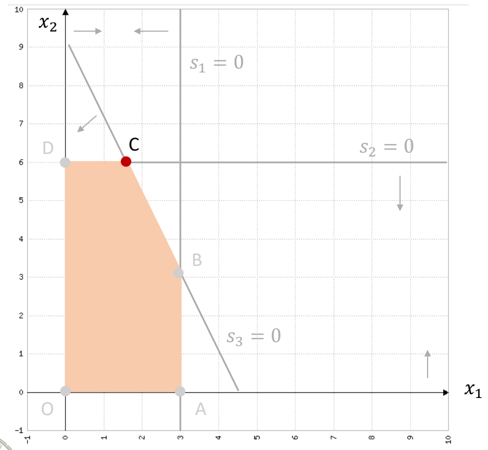
- La soluzione ottenuta
  - ✓ assegnando valore nullo alle variabili non di base ($w_N = 0$)
  - ✓ risolvendo il sistema lineare rispetto alle variabili di base ($w_B = B^{-1}b$)

  viene detta soluzione di base (associata alla base B)

- A livello geometrico, ogni soluzione di base coincide con l'intersezione delle frontiere di n vincoli (le var. non di base sono le var. associate agli n vincoli che si intersecano)

Esercizio A

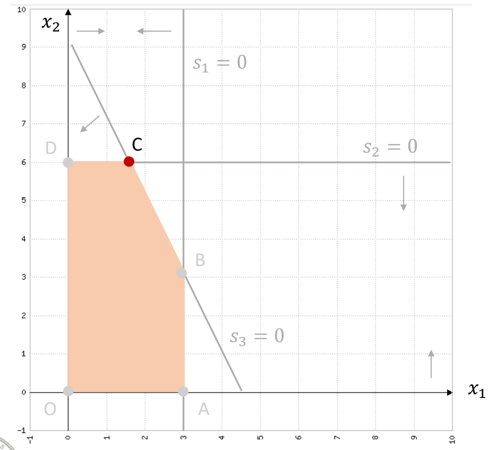
Determinazione della base



$$C: \begin{cases} s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio A

Determinazione della base



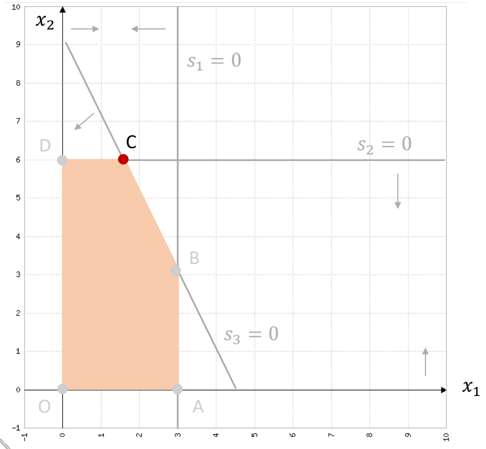
$$C: \begin{cases} s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases} \quad W_N = 0$$

$\downarrow$

Var. non di base: s_2, s_3
Var. di base: x_1, x_2, s_1

Esercizio A

Determinazione della base



$$C : \begin{cases} s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

Var. non di base: s_2, s_3
Var. di base: x_1, x_2, s_1

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & s_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esercizio A

La base determinata è corretta?

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} B^T$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & s_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Esercizio A

La base determinata è corretta?

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & s_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} w_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 6 \\ 3/2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{array} \\ w_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} s_2 \\ s_3 \end{array} \end{cases}$$

Esercizio A

La base determinata è corretta?

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & s_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} w_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 6 \\ 3/2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \end{array} \\ w_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} s_2 \\ s_3 \end{array} \end{cases}$$

$\downarrow$

$$w^C = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 6 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array}$$

Soluzione grafica = soluzione algebrica

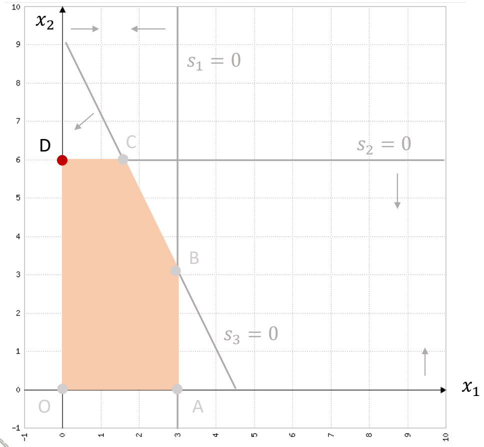
Stessa soluzione determinata graficamente!

ad ogni base viene associata una soluzione di base

Esercizio A

Calcoliamo la base associata a D

Determinazione della base



$$D : \begin{cases} x_1 = 0 \\ s_2 = 0 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}}$$

uso questi valori

$\downarrow$

Variabili slack nel punto D?

- ✓ $s_2 = 0$
- ✓ $s_1 = 3 - x_1 = 3$
- ✓ $s_3 = 18 - 4x_1 - 2x_2 = 6$

$\downarrow$

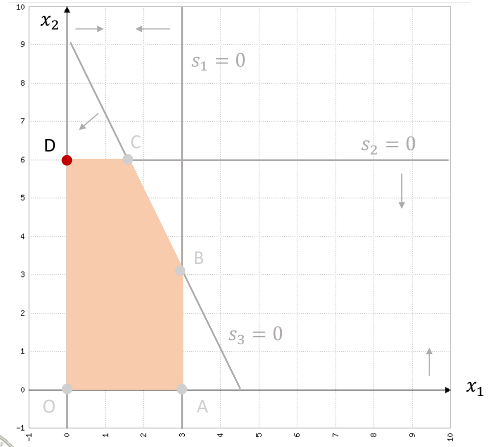
$$w^D = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \quad ; \quad \omega = 4x_1 + 5x_2 \quad \omega^D = 30$$

$\omega^C > \omega^D$ perché C è il punto di ottimo

Esercizio A

NB: I vertici della regione ammissibile sono delle sol. di base ossia → sol. di base ammissibili

Determinazione della base



$$D : \begin{cases} x_1 = 0 \\ s_2 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

Var. non di base: x_1, s_2

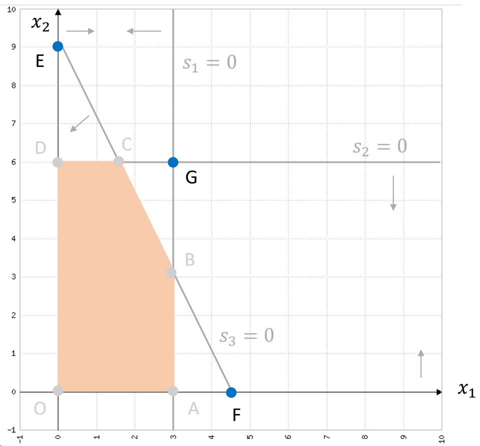
Var. di base: x_2, s_1, s_3

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & s_1 & s_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esercizio A

Determinazione della base



I vertici della regione ammissibile non sono le uniche soluzioni di base

$\downarrow$

Esistono soluzioni di base non ammissibili

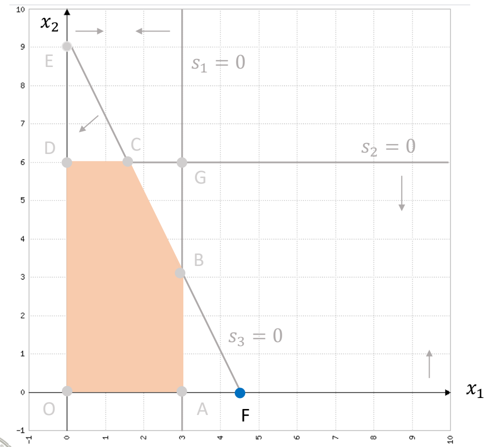
Fuori dalla regione ammissibile ma sono sempre delle soluzioni di base

$\downarrow$

Punti E, F e G

Esercizio A

Determinazione della base



$$F : \begin{cases} x_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 9/2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

Variabili slack nel punto F?

- ✓ $s_3 = 0$
- ✓ $s_1 = 3 - x_1 = -3/2$
- ✓ $s_2 = 12 - 2x_2 = 12$

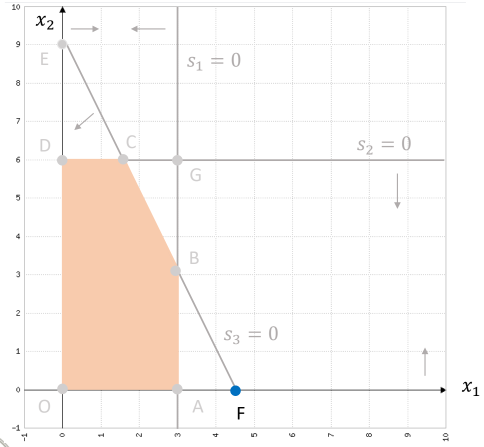
$\downarrow$

$$w^F = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 0 \\ -3/2 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \quad ; \quad \omega^F = 18$$

È un punto che non appartiene alla regione ammissibile perché non soddisfa i vincoli di non negatività delle variabili

Esercizio A

Determinazione della base



$$F:\begin{cases} x_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

Var. non di base: x_2, s_3
Var. di base: x_1, s_1, s_2

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

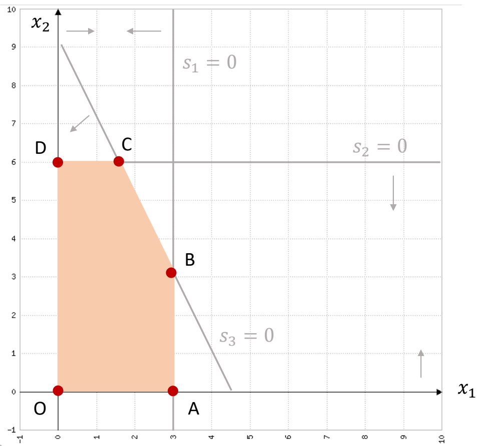
Esercizio B

$$\max \ \omega = 6x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} x_1 \quad\quad & \leq 3 \\ 2x_2 & \leq 12 \\ 4x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Esercizio B

Regione ammissibile



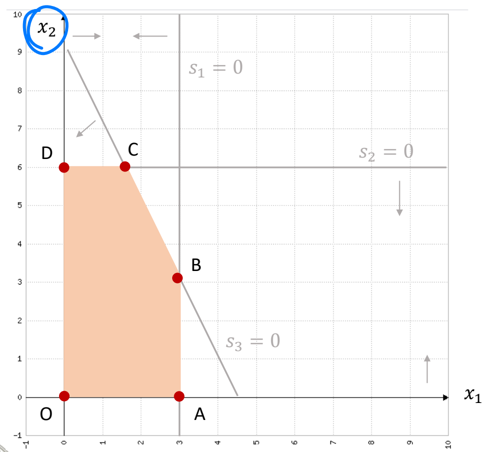
I vincoli che definiscono l'esercizio B) sono invariati rispetto all'esercizio A)

$\downarrow$

Regione ammissibile invariata

Esercizio B

Funzione obiettivo : $\omega = 6x_1 + 3x_2$



y

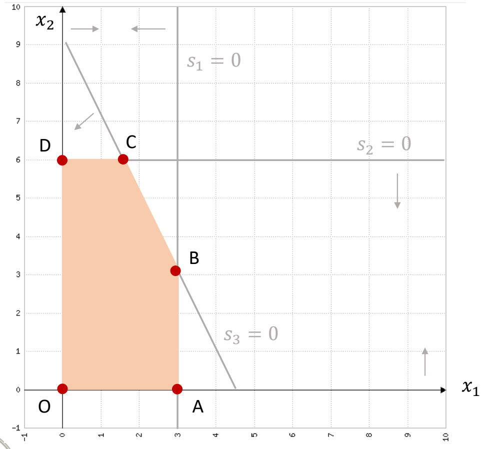
$$x_2 = -2x_1 + \frac{\omega}{3}$$

$\downarrow$

Fascio di rette con:
- ✓ Coeff. angolare -2
- ✓ Intercetta $\frac{\omega}{3}$

Esercizio B

Funzione obiettivo : $\omega = 6x_1 + 3x_2$



$$x_2 = -2x_1 + \frac{\omega}{3}$$

↓

Fascio di rette con:
- ✓ Coeff. angolare -2
- ✓ Intercetta $\frac{\omega}{3}$

↓

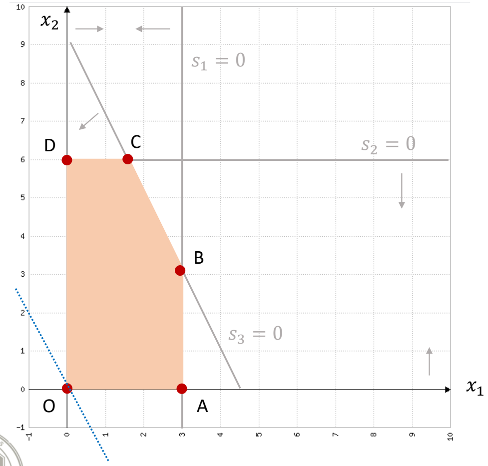
e.g. $\omega = 0$

↓

$$x_2 = -2x_1$$

Esercizio B

Funzione obiettivo : $\omega = 6x_1 + 3x_2$



$$x_2 = -2x_1 + \frac{\omega}{3}$$

↓

Fascio di rette con:
- ✓ Coeff. angolare -2
- ✓ Intercetta $\frac{\omega}{3}$

↓

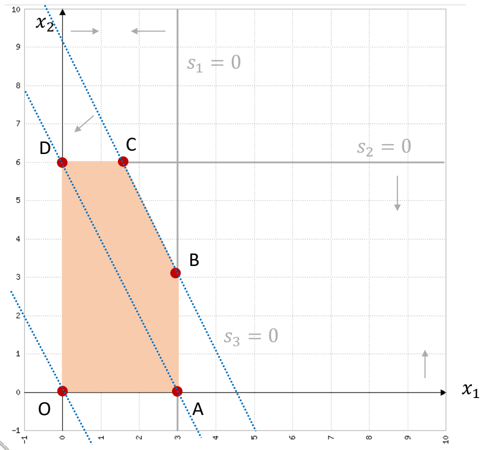
e.g. $\omega = 0$

↓

$$x_2 = -2x_1$$

Esercizio B

Funzione obiettivo : $\omega = 6x_1 + 3x_2$



$$x_2 = -2x_1 + \frac{\omega}{3}$$

↓

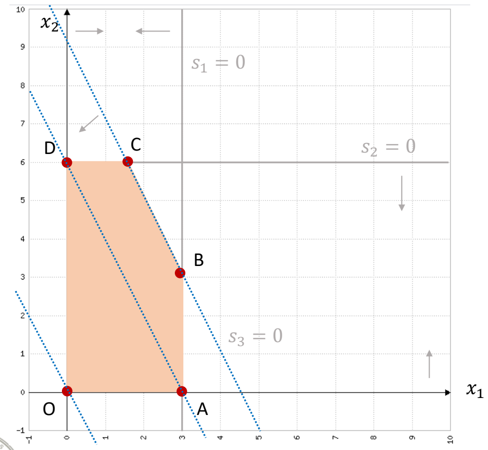
Fascio di rette con:
- ✓ Coeff. angolare -2
- ✓ Intercetta $\frac{\omega}{3}$

↓

Rette che intersecano i vertici della Regione Ammissibile

Esercizio B

Determinazione dell'ottimo



$$x_2 = -2x_1 + \frac{\omega}{3}$$

↓

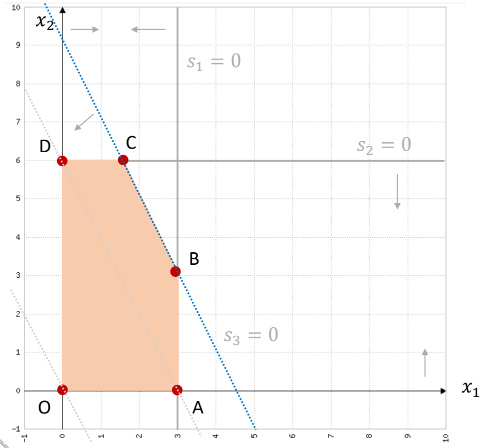
max

$$q = \frac{\omega}{3}$$

max

Esercizio B

Determinazione dell'ottimo



$$x_2 = -2x_1 + \frac{\omega}{3}$$

↓

max

$$q = \frac{\omega}{3}$$

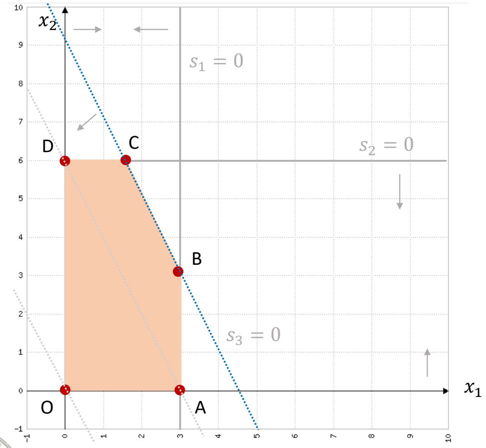
max

↓

Massimizzare la f.o. equivale a selezionare la retta del fascio con intercetta massima

Esercizio B

Determinazione dell'ottimo

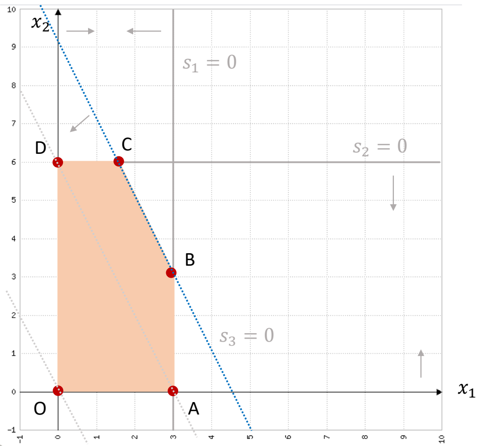


La soluzione è ogni punto del segmento BC

- ✓ Abbiamo già determinato C (cambia solo $\omega^C = 27$)
- ✓ Determiniamo B

Esercizio B

Determinazione dell'ottimo



La soluzione è ogni punto del segmento BC

- ✓ Abbiamo già determinato C (cambia solo $\omega^C = 27$)
- ✓ Determiniamo B

↓

$$\text{B:} \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2x_1 + 9 \end{cases}$$

↓

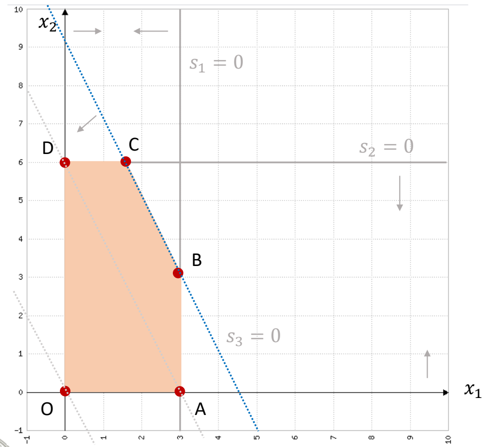
$$x_2 = -6 + 9$$

↓

$$\omega^B = 27 \leftarrow \text{B} : (3; 3)$$

Esercizio B

Determinazione dell'ottimo



La soluzione è ogni punto del segmento BC

- ✓ Abbiamo già determinato C (cambia solo $\omega^C = 27$)
- ✓ Determiniamo B

ottimi alternativi

↓

$$\text{B:} \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2x_1 + 9 \end{cases}$$

↓

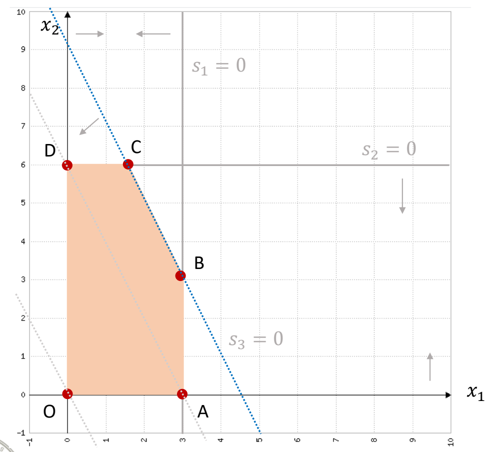
$$x_2 = -6 + 9$$

↓

$$\omega^B = 27 \leftarrow \text{B} : (3; 3)$$

Esercizio B

Determinazione dell'ottimo



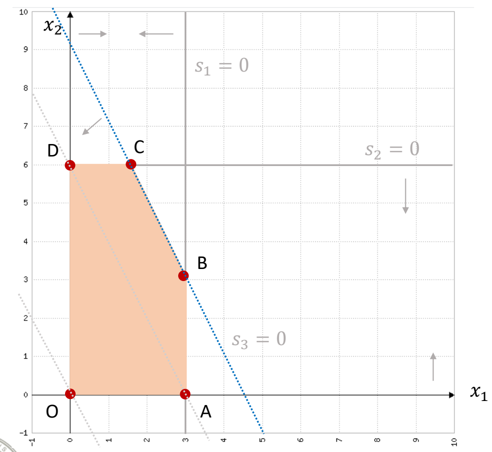
Quanto valgono le variabili slack nel punto B?

- ✓ $s_1 = 0$
- ✓ $s_3 = 0$
- ✓ $s_2 = 12 - 2x_2 = 6$

$$w^B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{matrix} \quad ; \quad \omega^B = 27$$

Esercizio B

Determinazione della base



$$B : \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

Var. non di base: s_1, s_3
Var. di base: x_1, x_2, s_2

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esercizio B

Soluzioni?

- Intestazione delle frontiere e dei vincoli
- Quando questo accade nella sezione ammissibile e quindi questo caso abbiamo a che fare con il vertice

- 2 soluzioni di base (vertici della Regione Ammissibile)

1) Punto C

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[w^C]^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ \left[\frac{3}{2}; 6; \frac{3}{2}; 0; 0\right] \end{array}$$

2) Punto B

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[w^B]^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ [3; 3; 0; 6; 0] \end{array}$$

Non sono soluzioni di base perché non sono l'intersezione delle frontiere dei due vincoli

- ∞ soluzioni non di base (punti del segmento BC)

Perché?

$s_3 = 0 \Rightarrow$ il segmento BC si trova sul vincolo funzionale $s_3 = 0$ indipendentemente da α

$$\alpha \in (0,1) \rightarrow [w^{BC}]^T = \alpha[w^C]^T + (1-\alpha)[w^B]^T = \left[3 - \frac{3}{2}\alpha; 3 + 3\alpha; \frac{3}{2}\alpha; 6 - 6\alpha; \mathbf{0}\right]$$

soluzione generica

- Tutte con lo stesso valore della funzione obiettivo : $\omega^* = 27$

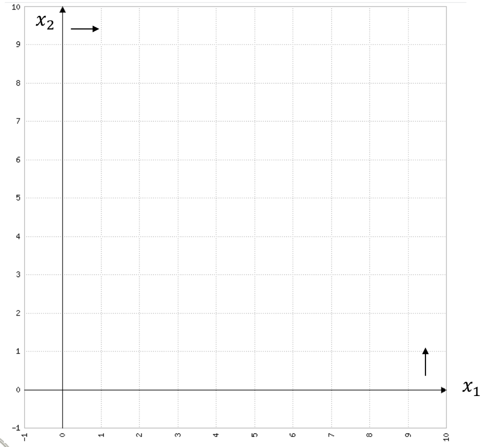
ottimi alternativi

Esercizi C-D

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{min/max} & \omega = 4x_1 - 5x_2 & & & & \\ & x_1 & & & \le & 3 \\ \text{s. a} & & & 4x_2 & \ge & 12 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \ge & 18 \\ & x_1 \ge 0 & & x_2 \ge 0 & & \end{array}$$

Esercizi C-D

1° vincolo funzionale : $x_1 \leq 3$ $\longleftrightarrow$ $x_1 + s_1 = 3$



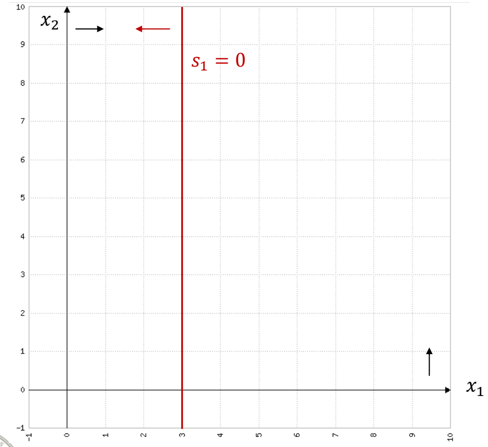
$x_1 \leq 3$

$\downarrow$

La frontiera del primo vincolo è una retta parallela all'asse delle ordinate

Esercizi C-D

1° vincolo funzionale : $x_1 \leq 3$ $\longleftrightarrow$ $x_1 + s_1 = 3$



$x_1 \leq 3$

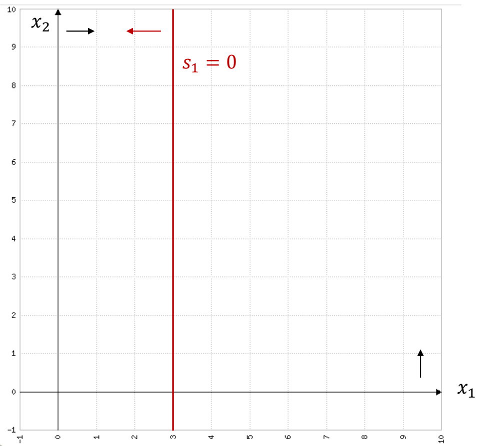
$\downarrow$

La frontiera del primo vincolo è una retta parallela all'asse delle ordinate

Esercizi C-D

2° vincolo funzionale : $4x_2 \geq 12$ $\longleftrightarrow$ $4x_2 - \bar{s}_2 = 12$

- variabile surplus : $\geq$
- variabile slack : $\leq$



$4x_2 \geq 12$

$\downarrow$

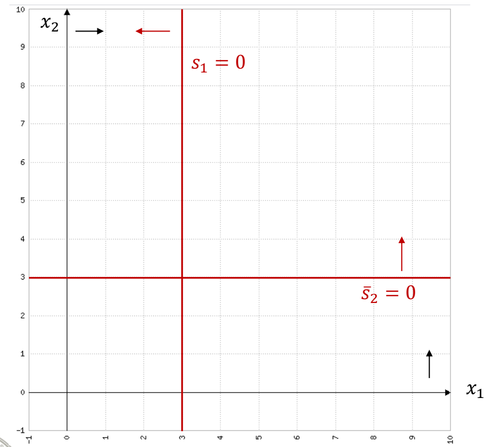
$x_2 \geq 3$

$\downarrow$

La frontiera del secondo vincolo è una retta parallela all'asse delle ascisse

Esercizi C-D

2° vincolo funzionale : $4x_2 \geq 12$ $\longleftrightarrow$ $4x_2 - \bar{s}_2 = 12$



$4x_2 \geq 12$

$\downarrow$

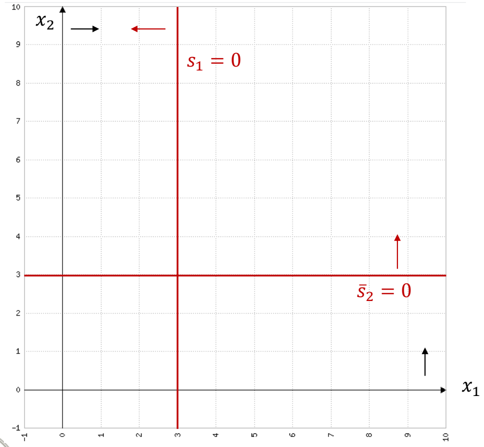
$x_2 \geq 3$

$\downarrow$

La frontiera del secondo vincolo è una retta parallela all'asse delle ascisse

Esercizi C-D

3° vincolo funzionale : $4x_1 + 2x_2 \geq 18$ $\qquad 4x_1 + 2x_2 - \bar{s}_3 = 18$

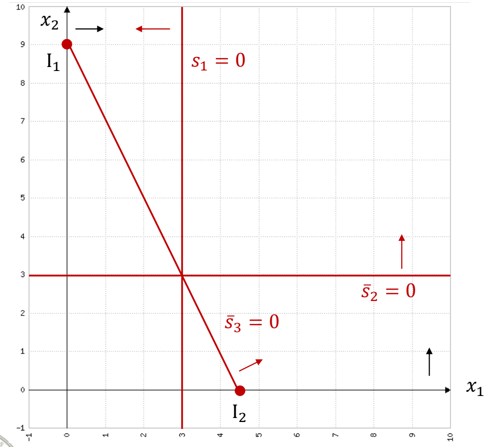


$$4x_1 + 2x_2 \geq 18$$
$$\downarrow$$
$$x_2 \geq -2x_1 + 9$$
$$\downarrow$$

La frontiera del terzo vincolo è una retta con coeff. angolare -2 e intercetta 9

Esercizi C-D

3° vincolo funzionale : $4x_1 + 2x_2 \geq 18 \longleftrightarrow 4x_1 + 2x_2 - \bar{s}_3 = 18$



$$4x_1 + 2x_2 \geq 18$$
$$\downarrow$$
$$x_2 \geq -2x_1 + 9$$
$$\downarrow$$

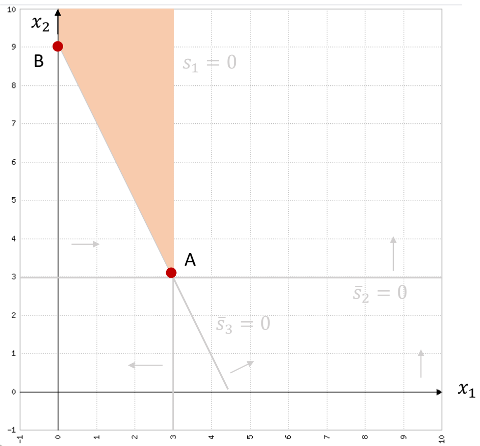
La frontiera del terzo vincolo è una retta con coeff. angolare -2 e intercetta 9

$$\downarrow$$

$$\mathrm{I}_1 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases} \wedge \quad \mathrm{I}_2 : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Esercizi C-D

Regione Ammissibile



• regione limitata ⇒ ∃ una soluzione
• regione illimitata ⇒ non necessariamente ∃ una soluzione dipende dalla funzione obiettivo.

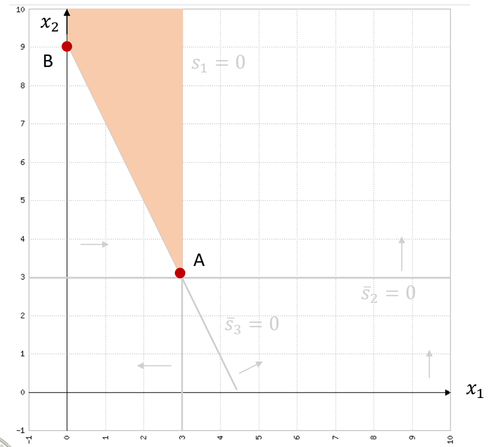
Regione ammissibile illimitata

$$\downarrow$$

L'esistenza di soluzioni dipende dalla funzione obiettivo

Esercizi C-D

Funzione obiettivo : $\quad \omega = 4x_1 - 5x_2$



$$x_2 = \frac{4}{5}x_1 - \frac{\omega}{5}$$
$$\downarrow$$

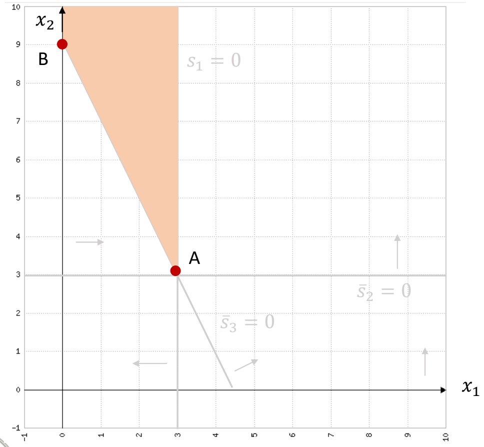
Fascio di rette con:

✓ Coeff. angolare $\frac{4}{5}$

✓ Intercetta $-\frac{\omega}{5}$

Esercizi C-D

Funzione obiettivo : $\omega = 4x_1 - 5x_2$



$$x_2 = \frac{4}{5}x_1 - \frac{\omega}{5}$$

$\downarrow$

Fascio di rette con:
- ✓ Coeff. angolare $\frac{4}{5}$
- ✓ Intercetta $-\frac{\omega}{5}$

$\downarrow$

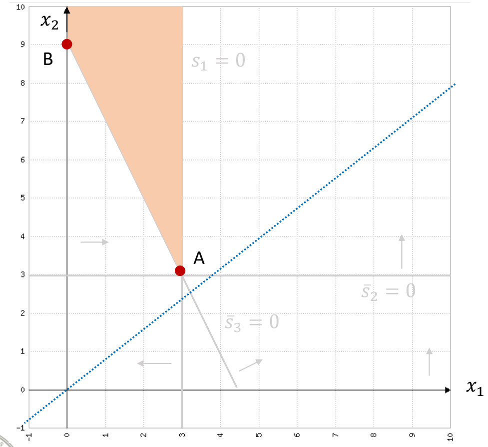
e.g. $\omega = 0$

$\downarrow$

$$x_2 = \frac{4}{5}x_1$$

Esercizi C-D

Funzione obiettivo : $\omega = 4x_1 - 5x_2$



$$x_2 = \frac{4}{5}x_1 - \frac{\omega}{5}$$

$\downarrow$

Fascio di rette con:
- ✓ Coeff. angolare $\frac{4}{5}$
- ✓ Intercetta $-\frac{\omega}{5}$

$\downarrow$

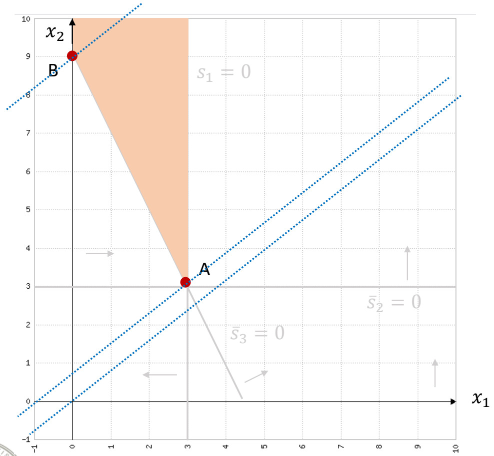
e.g. $\omega = 0$

$\downarrow$

$$x_2 = \frac{4}{5}x_1$$

Esercizi C-D

Funzione obiettivo : $\omega = 4x_1 - 5x_2$



$$x_2 = \frac{4}{5}x_1 - \frac{\omega}{5}$$

$\downarrow$

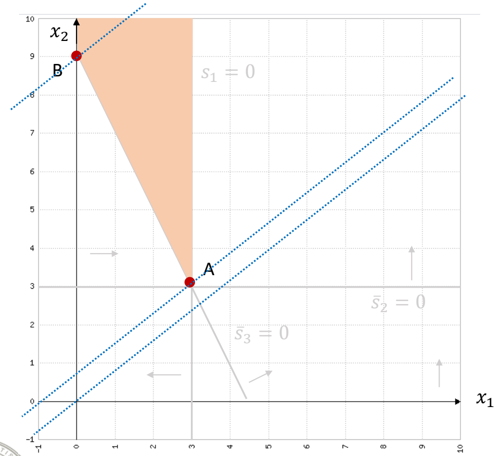
Fascio di rette con:
- ✓ Coeff. angolare $\frac{4}{5}$
- ✓ Intercetta $-\frac{\omega}{5}$

$\downarrow$

Rette che intersecano i vertici della Regione Ammissibile

Esercizi C-D

Determinazione dell'ottimo : 1) Problema di minimo (Esercizio C)



$$x_2 = \frac{4}{5}x_1 - \frac{\omega}{5}$$

$\downarrow$

min

$$q = -\frac{\omega}{5}$$

max

Problema di minimizzazione

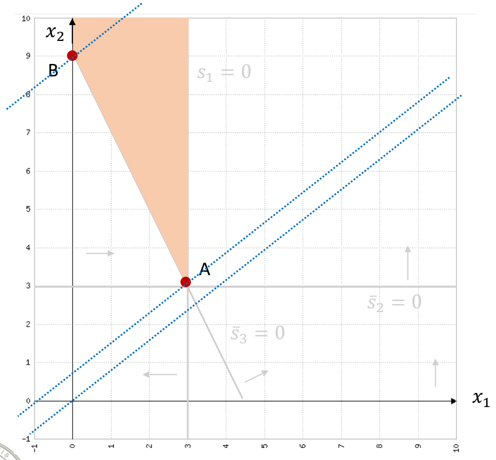
$\omega \Rightarrow$ min

$q \Rightarrow$ max

perché negativo

Esercizi C-D

Determinazione dell'ottimo : 1) Problema di minimo (Esercizio C)



$$x_2 = \frac{4}{5}x_1 - \frac{\omega}{5}$$

$\downarrow$

min

$$q = -\frac{\omega}{5}$$

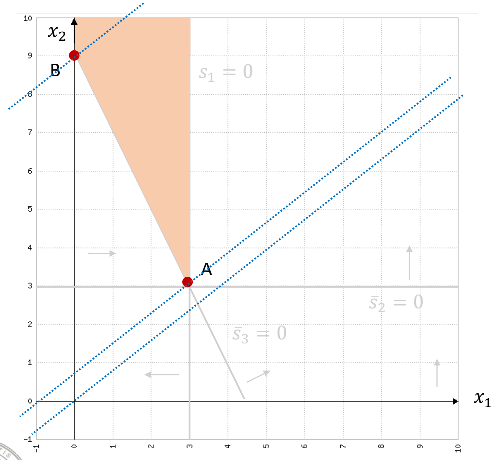
max

$\downarrow$

Minimizzare la f.o. equivale a selezionare la retta del fascio con intercetta massima

Esercizi C-D

Determinazione dell'ottimo : 1) Problema di minimo (Esercizio C)



Il problema non ammette alcuna soluzione

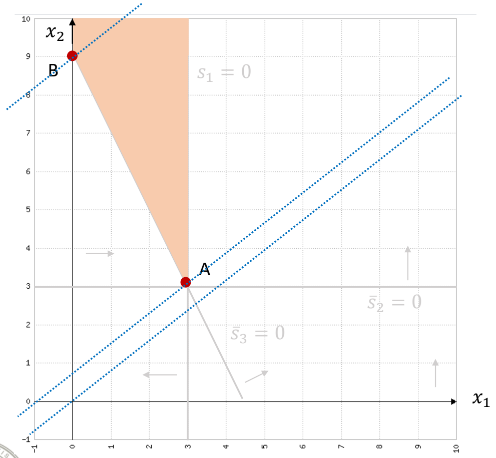
✓ È possibile traslare verso l'alto all'infinito la funzione obiettivo intersecando sempre la Regione Ammissibile

$\downarrow$

Problema Illimitato

Esercizi C-D

Determinazione dell'ottimo : 2) Problema di massimo (Esercizio D)



$$x_2 = \frac{4}{5}x_1 - \frac{\omega}{5}$$

$\downarrow$

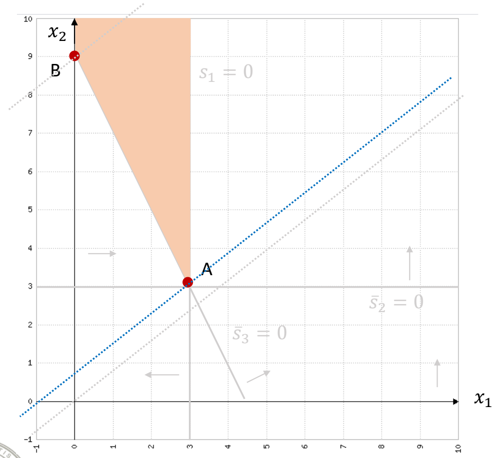
max

$$q = -\frac{\omega}{5}$$

min

Esercizi C-D

Determinazione dell'ottimo : 2) Problema di massimo (Esercizio D)



$$x_2 = \frac{4}{5}x_1 - \frac{\omega}{5}$$

$\downarrow$

max

$$q = -\frac{\omega}{5}$$

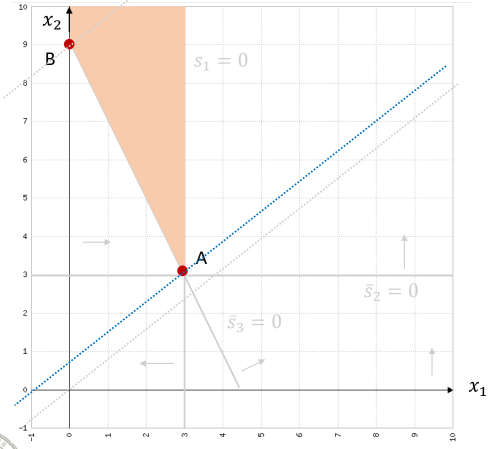
min

$\downarrow$

Massimizzare la f.o. equivale a selezionare la retta del fascio con intercetta minima

Problema di massimizzazione:
$\omega \Rightarrow$ max
$q \Rightarrow$ min

Determinazione dell'ottimo : 2) Problema di massimo (Esercizio D)

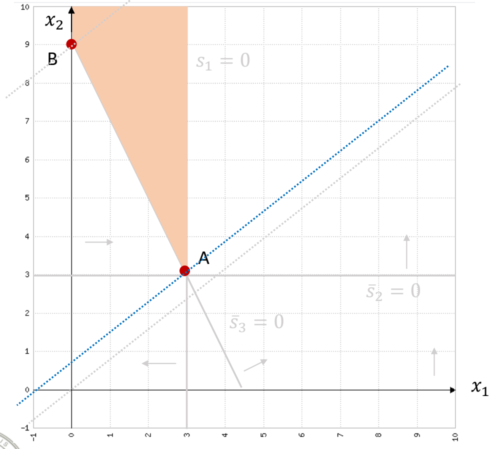


La soluzione è il punto A

$$A: \begin{cases} s_1 = 0 \\ \bar{s}_2 = 0 \\ \bar{s}_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow A: (3;3)$$

$$w^A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ \bar{s}_2 \\ \bar{s}_3 \end{array} \end{array} \quad ; \quad \omega^A = -3$$

Determinazione dell'ottimo : 2) Problema di massimo (Esercizio D)



La soluzione è il punto A

$$A: \begin{cases} s_1 = 0 \\ \bar{s}_2 = 0 \\ \bar{s}_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow A: (3;3)$$

$$w^A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ \bar{s}_2 \\ \bar{s}_3 \end{array} \end{array} \quad ; \quad \omega^A = -3$$

In vertice è un punto è ottenuto intersecando 2 vincoli

⇒ In A si intersecano 3 vincoli
Condizione di degenerazione

Soluzione di base degenere

A intersezione 3 $s_i = 0$
soluzione degenere

w= variabili problema
b= vettore termini noti
F= matrice

$$Fw = b$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad w = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ \bar{s}_2 \\ \bar{s}_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

- Essendo $n = 2$ avremo due variabili non di base, ma nel punto A le variabili nulle sono 3
  - ✓ 2 variabili non di base;
  - ✓ 1 variabile di base con valore nullo.
- Quale variabile deve essere considerata di base e quali non di base?

Si possono verificare 3 possibili scenari

1)

Var. non di base: $s_1, \bar{s}_2$
Var. di base: $x_1, x_2, \bar{s}_3$

↓

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esercizi C-D

1)

Var. non di base: $s_1, \bar{s}_2$
Var. di base: $x_1, x_2, \bar{s}_3$

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

2)

Var. non di base: $s_1, \bar{s}_3$
Var. di base: $x_1, x_2, \bar{s}_2$

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Esercizi C-D

1)

Var. non di base: $s_1, \bar{s}_2$
Var. di base: $x_1, x_2, \bar{s}_3$

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

2)

Var. non di base: $s_1, \bar{s}_3$
Var. di base: $x_1, x_2, \bar{s}_2$

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

3)

Var. non di base: $\bar{s}_2, \bar{s}_3$
Var. di base: x_1, x_2, s_1

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & s_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Esercizi C-D

1)

Var. non di base: $s_1, \bar{s}_2$
Var. di base: $x_1, x_2, \bar{s}_3$

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

2)

Var. non di base: $s_1, \bar{s}_3$
Var. di base: $x_1, x_2, \bar{s}_2$

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

3)

Var. non di base: $\bar{s}_2, \bar{s}_3$
Var. di base: x_1, x_2, s_1

$\downarrow$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & s_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$w^A = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ \bar{s}_2 \\ \bar{s}_3 \end{array} \quad ; \quad \omega^A = -3$$

Esercizio E

$$\max \ \omega = 4x_1 + 5x_2$$

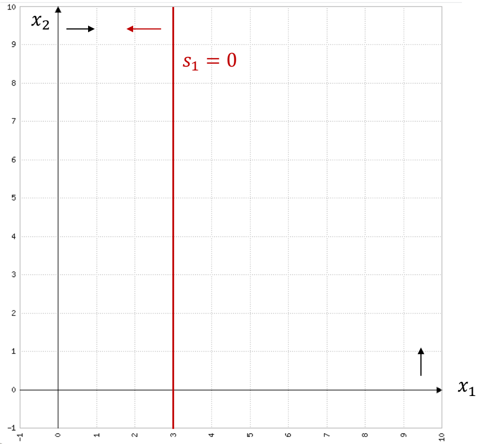
$$\text{s. a} \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 3 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

- A può essere un punto rappresentato da basi 3 diverse => caratteristica della generazione.
- Ogni punto che non é degenere ha una e una sola base

Esercizio E

1° vincolo funzionale : $x_1 \leq 3 \longleftrightarrow x_1 + s_1 = 3$



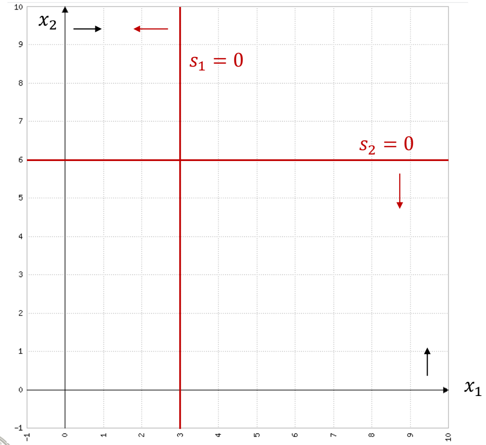
$x_1 \leq 3$

$\downarrow$

La frontiera del primo vincolo è una retta parallela all'asse delle ordinate

Esercizio E

2° vincolo funzionale : $2x_2 \leq 12 \longleftrightarrow 2x_2 + s_2 = 12$



$2x_2 \leq 12$

$\downarrow$

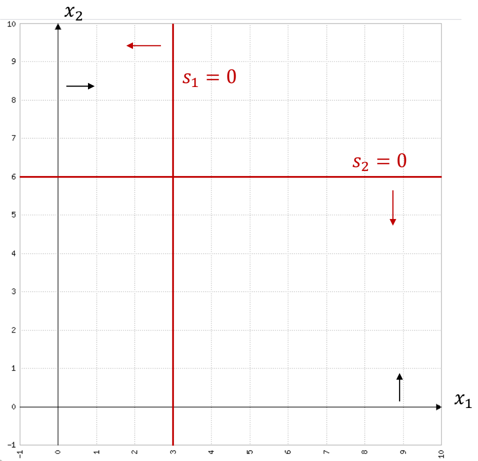
$x_2 \leq 6$

$\downarrow$

La frontiera del secondo vincolo è una retta parallela all'asse delle ascisse

Esercizio E

3° vincolo funzionale : $x_1 + x_2 \geq 10 \longleftrightarrow x_1 + x_2 - \bar{s}_3 = 10$



$x_1 + x_2 \geq 10$

$\downarrow$

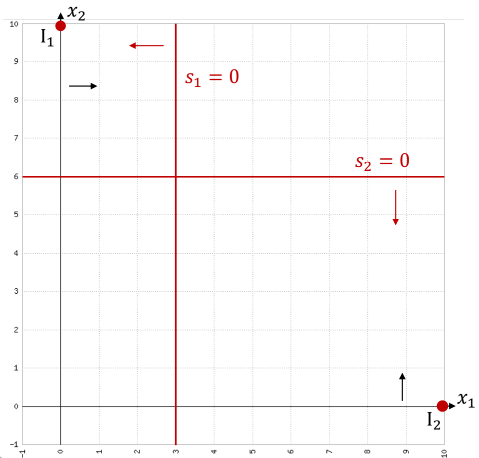
$x_2 \geq -x_1 + 10$

$\downarrow$

La frontiera del terzo vincolo è una retta con coeff. angolare -1 e intercetta 10

Esercizio E

3° vincolo funzionale : $x_1 + x_2 \geq 10 \longleftrightarrow x_1 + x_2 - \bar{s}_3 = 10$



$x_1 + x_2 \geq 10$

$\downarrow$

$x_2 \geq -x_1 + 10$

$\downarrow$

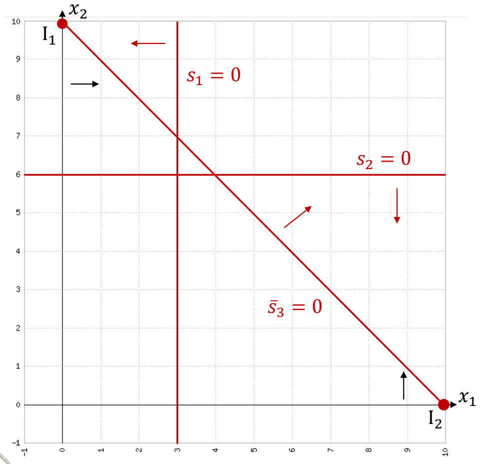
La frontiera del terzo vincolo è una retta con coeff. angolare -1 e intercetta 10

$\downarrow$

$$\mathrm{I}_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 10 \end{cases} \wedge \quad \mathrm{I}_2: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 10 \end{cases}$$

Esercizio E

3° vincolo funzionale : $x_1 + x_2 \geq 10 \longleftrightarrow x_1 + x_2 - \bar{s}_3 = 10$



$x_1 + x_2 \geq 10$

$\downarrow$

$x_2 \geq -x_1 + 10$

$\downarrow$

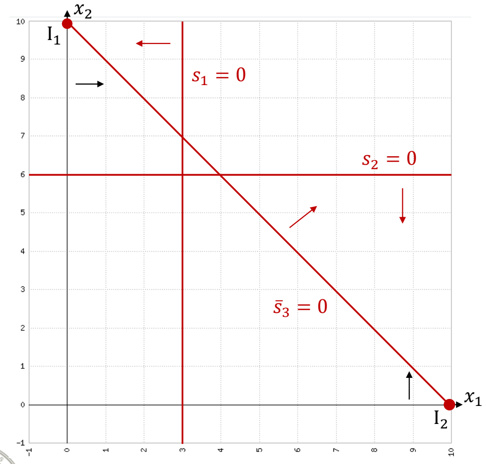
La frontiera del terzo vincolo è una retta con coeff. angolare -1 e intercetta 10

$\downarrow$

$$\mathrm{I}_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 10 \end{cases} \wedge \quad \mathrm{I}_2: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 10 \end{cases}$$

Esercizio E

Regione Ammissibile



La regione ammissibile è vuota

$\downarrow$

Il problema non ammette soluzioni

Takeaway

1. Corrispondenza tra nozioni algebriche e geometriche

2. Rilevanza dei vertici della Regione Ammissibile nella ricerca della soluzione ottima

Takeaway

1. Corrispondenza tra nozioni algebriche e geometriche

Algebra	Geometria
Soluzione di base	Intersezione delle frontiere dei vincoli
Soluzione di base ammissibile	Vertice della Regione Ammissibile
Soluzione di base non ammissibile	Intersezione tra vincoli esterna alla regione ammissibile
Soluzione di base degenere	Intersezione delle frontiere di (almeno) $n+1$ vincoli

n variabili sono poste a 0 e abbiamo restanti mvsraibili

Takeaway

2. Rilevanza dei vertici della Regione Ammissibile nella ricerca della soluzione ottima

Il problema ammette soluzioni?

Takeaway

2. Rilevanza dei vertici della Regione Ammissibile nella ricerca della soluzione ottima

Il problema ammette soluzioni?

No

- Problema illimitato
- Regione Ammissibile vuota

Takeaway

2. Rilevanza dei vertici della Regione Ammissibile nella ricerca della soluzione ottima

Il problema ammette soluzioni?

Sì

- 1 sola (vertice)
- ∞ (almeno 1 vertice)

No

- Problema illimitato
- Regione Ammissibile vuota

Takeaway

2. Rilevanza dei vertici della Regione Ammissibile nella ricerca della soluzione ottima

Il problema ammette soluzioni?

Sì

- 1 sola (vertice)
- ∞ (almeno 1 vertice)

No

- Problema illimitato
- Regione Ammissibile vuota

La ricerca dell'ottimo può essere indirizzata verso le soluzioni di base

Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2020/2021

RICERCA OPERATIVA

Algoritmo del Simplesso

Giovanni Micheli

Introduzione

Cos’è il Simplesso?

- Algoritmo fondato sul Teorema Fondamentale della PL per la risoluzione di un problema di programmazione lineare strutturato in due fasi
  - ✓ Fase 1: Ammissibilità
    - Soluzione di base ammissibile iniziale (s.b.a.i.)
    - Regione ammissibile vuota
  - ✓ Fase 2: Ottimalità
    - Soluzione (o soluzioni) di base ammissibile ottima (s.b.a.o.)
    - Problema illimitato

Solo se esiste una soluzione di base ammissibile si effettua la seconda fase

Introduzione

Fase 1

- Da svolgere esclusivamente quando l’origine non è un vertice della regione ammissibile
- A partire dall’origine degli assi, viene esplorata una sequenza di soluzioni di base non ammissibili, terminando con
  - ✓ Identificazione di una s.b.a.i.
  - ✓ Constatazione dell’inammissibilità del problema

Introduzione

Fase 2

- A partire dalla s.b.a.i. identificata al termine della fase precedente, viene esplorata una sequenza di soluzioni di base ammissibili, terminando con
  - ✓ Identificazione di una o più s.b.a.o.
  - ✓ Constatazione dell’illimitatezza del problema
- Ad ogni iterazione il valore della funzione obiettivo migliora, fino all’ottenimento dell’ottimo (se esiste)

Esercizio A

$$
\begin{array}{lrcrcl}
 & \max\ \omega = 3\,x_1 + 3x_2 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & 2\ x_2 & \leq & 1 \\
 & 3\ x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -2\ x_1 & + & 3\ x_2 & \leq & 15 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- 3 vincoli funzionali
- A sinistra una combinazione lineare delle variabili decisionali e a destra un termine noto

Esercizio A

nuova variabile obiettivo

$$\min\ \varphi = -3\,x_1 - 3x_2$$

$\cdot(-1)$

$$
\begin{array}{lrcrcl}
 & \max\ \omega = 3\,x_1 + 3x_2 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & 2\ x_2 & \leq & 1 \\
 & 3\ x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -2\ x_1 & + & 3\ x_2 & \leq & 15 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Noi lavoreremo sempre con problemi di minimi
- Quindi in questo caso da max passiamo a min

Esercizio A

$$\min\ \varphi = -3\,x_1 - 3x_2$$

$$
\begin{array}{lrcrcl}
 & \max\ \omega = 3\,x_1 + 3x_2 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & 2\ x_2 & \leq & 1 \\
 & 3\ x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -2\ x_1 & + & 3\ x_2 & \leq & 15 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

verifica del segno termini noti

$\rightarrow b_i \geq 0$

Esercizio A

$$\min\ \varphi = -3\,x_1 - 3x_2$$

$$
\begin{array}{lrcrcl}
 & \max\ \omega = 3\,x_1 + 3x_2 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & + & 2\ x_2 & \leq & 1 \\
 & 3\ x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -2\ x_1 & + & 3\ x_2 & \leq & 15 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$\rightarrow b_i \geq 0$

L'origine soddisfa i vincoli funzionali (s.b.a.i.)

Controllo versi

Origine é una soluzione di base ammissibile quindi possiamo evitare di fare la fase 1 e passare direttamente alla fase 2

Esercizio A

1) Aggiungo variabili slack

Da disuguaglianze a uguaglianze

$$\min\ \varphi = -3\,x_1 - 3x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{s.a.} & x_1 & + & 2\,x_2 & + & s_1 & & & & & = & 1 \\
 & 3\,x_1 & - & x_2 & + & & & s_2 & & & = & 1 \\
 & -2\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & & & & & s_3 & = & 15 \\
 & & & & & & & & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Esercizio A

Tableau

L'algoritmo deve creare ad ogni iterazione il tableau

$$\underline{x} \quad \underline{s} \quad \varphi \quad \underline{w_B}$$

Esercizio A

Tableau

$$\underline{x} \quad \underline{s} \quad \varphi \quad \underline{w_B}$$

Var. di base espresse in termini delle sole var. non di base

Esercizio A

Tableau

$$\underline{x} \quad \underline{s} \quad \varphi \quad \underline{w_B}$$

Var. di base espresse in termini delle sole var. non di base

Funzione obiettivo espressa nelle var. non di base

Esercizio A

Tableau iniziale

C: coefficiente di costo

$$\begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc} A & I & \underline{0} & \underline{b} \\ \hline -\underline{c}^T & \underline{0}^T & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Esercizio A

Tableau successivi

$$\begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc} B^{-1}A & B^{-1} & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \hline \underline{c}_B^T B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} \end{array}\right]$$

Esercizio A

Tableau successivi

$$\begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc} B^{-1}A & B^{-1} & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \hline \underline{c}_B^T B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} \end{array}\right]$$

Nell'origine $\Downarrow$ $B = I \quad \underline{c}_B^T = \underline{0}^T$

Esercizio A

Tableau successivi

$$\begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc} B^{-1}A & B^{-1} & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \hline \underline{c}_B^T B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} \end{array}\right]$$

Nell'origine $\Downarrow$ $B = I \quad \underline{c}_B^T = \underline{0}^T$

$$\begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc} A & I & \underline{0} & \underline{b} \\ \hline -\underline{c}^T & \underline{0}^T & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Esercizio A

Tableau iniziale

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \min & \varphi & = & -3x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 + s_1 & = & 1 \\ & 3x_1 - x_2 + s_2 & = & 1 \\ & -2x_1 + 3x_2 + s_3 & = & 15 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Esercizio A

Tableau iniziale

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\end{array}$$

- Var. non di base: x_1, x_2
- Var. di base: $s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 15$

Esercizio A

Tableau iniziale

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\end{array}$$

- Var. non di base: x_1, x_2
- Var. di base: $s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 15$

test di ottimalità

Funzione obiettivo: $3x_1 + 3x_2 + \varphi = 0 \rightarrow \varphi = -3x_1 - 3x_2$

Esercizio A

Tableau iniziale

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\end{array}$$

- Var. non di base: x_1, x_2
- Var. di base: $s_1 = 1, s_2 = 1, s_3 = 15$

Funzione obiettivo: $3x_1 + 3x_2 + \varphi = 0 \rightarrow \varphi = -3x_1 - 3x_2$

Soluzione non ottima: attribuendo valore positivo alle var. non di base, il valore di φ diminuisce (migliora)

Esercizio A

Cambio di base

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

- Attribuiamo valore positivo alla var. non di base con il coefficiente di costo relativo maggiore (scegliamo arbitrariamente x_1)

Esercizio A

Cambio di base

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

- Attribuiamo valore positivo alla var. non di base con il coefficiente di costo relativo maggiore (scegliamo arbitrariamente x_1)
- x_1 diventerà var. di base → quale var. di base dovrà uscire dalla base assumendo un valore nullo?

Esercizio A

Cambio di base

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

- Attribuiamo valore positivo alla var. non di base con il coefficiente di costo relativo maggiore (scegliamo arbitrariamente x_1)
- x_1 diventerà var. di base → quale var. di base dovrà uscire dalla base assumendo un valore nullo?
- Calcoliamo i rapporti:

Regola dei minimi rapporti

$$\left(\frac{1}{1}\right.$$

Esercizio A

Cambio di base

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

- Attribuiamo valore positivo alla var. non di base con il coefficiente di costo relativo maggiore (scegliamo arbitrariamente x_1)
- x_1 diventerà var. di base → quale var. di base dovrà uscire dalla base assumendo un valore nullo?
- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{1}{1}\,;\,\frac{1}{3}\,;\right.$$

Esercizio A

Cambio di base

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\end{array}$$

- Attribuiamo valore positivo alla var. non di base con il coefficiente di costo relativo maggiore (scegliamo arbitrariamente x_1)
- x_1 diventerà var. di base → quale var. di base dovrà uscire dalla base assumendo un valore nullo?
- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{1}{1};\frac{1}{3};\frac{15}{-2}\right)$$

Esercizio A

Cambio di base

elemento pivot

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\end{array}$$

riga pivot

- Attribuiamo valore positivo alla var. non di base con il coefficiente di costo relativo maggiore (scegliamo arbitrariamente x_1)
- x_1 diventerà var. di base → quale var. di base dovrà uscire dalla base assumendo un valore nullo?
- Calcoliamo i rapporti:

Selezioniamo il minimo rapporto tra quelli positivi: x_1 deve diventare la 2° var. di base

$$\left(\frac{1}{1};\frac{1}{3};\cancel{\frac{15}{-2}}\right)$$

Andiamo a considerare per i rapporti solo gli elementi positivi

Esercizio A

Cambio di base

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1^{0} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3^{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2^{0} & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3^{0} & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\end{array}$$

- Attribuiamo valore positivo alla var. non di base con il coefficiente di costo relativo maggiore (scegliamo arbitrariamente x_1)
- x_1 diventerà var. di base → quale var. di base dovrà uscire dalla base assumendo un valore nullo?
- Calcoliamo i rapporti:

Selezioniamo il minimo rapporto tra quelli positivi: x_1 deve diventare la 2° var. di base

$$\left(\frac{1}{1};\frac{1}{3};\frac{15}{-2}\right)$$

Esercizio A

Operazioni di riga

effettuiamo delle operazioni riga per ottenere il versore indicato

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1^{0} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3^{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2^{0} & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3^{0} & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}\end{array}$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{3}$$

$$\overline{R1} = R1 - \overline{R2}$$

$$\overline{R3} = R3 + 2\overline{R2}$$

$$\overline{R0} = R0 - 3\overline{R2} = R0 - R2$$

Esercizio A

Operazioni di riga

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{3} \qquad \begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \\ \overline{R2} & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}$$

Esercizio A

Operazioni di riga

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{3} \qquad \begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \\ \overline{R2} & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}$$

$$\overline{R1} = R1 - \overline{R2} \qquad \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \\ R1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\overline{R2} & -1 & 1/3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & -1/3 \\ \hline \overline{R1} & 0 & 7/3 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \end{array}$$

Esercizio A

Operazioni di riga

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{3} \qquad \begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \\ \overline{R2} & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}$$

$$\overline{R3} = R3 + 2\overline{R2} \qquad \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \\ R3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ +2\overline{R2} & 2 & -2/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ \hline \overline{R3} & 0 & 7/3 & 0 & 2/3 & 1 & 0 & 47/3 \end{array}$$

Esercizio A

Operazioni di riga

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{3} \qquad \begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \\ \overline{R2} & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}$$

$$\overline{R0} = R0 - R2 \qquad \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \\ R0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -R2 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \overline{R0} & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Esercizio A

Nuovo tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
0	7/3	1	-1/3	0	0	2/3
1	-1/3	0	1/3	0	0	1/3
0	7/3	0	2/3	1	0	47/3
0	4	0	-1	0	1	-1

Ossia i non versori

- Var. non di base: x_2, s_2
- Var. di base: $s_1 = 2/3, x_1 = 1/3, s_3 = 47/3$

Esercizio A

Nuovo tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
0	7/3	1	-1/3	0	0	2/3
1	-1/3	0	1/3	0	0	1/3
0	7/3	0	2/3	1	0	47/3
0	4	0	-1	0	1	-1

- Var. non di base: x_2, s_2
- Var. di base: $s_1 = 2/3, x_1 = 1/3, s_3 = 47/3$

Funzione obiettivo: $4x_2 - s_2 + \varphi = -1 \rightarrow \varphi = -1 - 4x_2 + s_2$

Esercizio A

Nuovo tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
0	7/3	1	-1/3	0	0	2/3
1	-1/3	0	1/3	0	0	1/3
0	7/3	0	2/3	1	0	47/3
0	4	0	-1	0	1	-1

- Var. non di base: x_2, s_2
- Var. di base: $s_1 = 2/3, x_1 = 1/3, s_3 = 47/3$

Funzione obiettivo: $4x_2 - s_2 + \varphi = -1 \rightarrow \varphi = -1 - 4x_2 + s_2$

Soluzione non ottima: attribuendo valore positivo a x_2 il valore di φ diminuisce (migliora)

Soluzione non ancora ottima

Esercizio A

Cambio di base

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
0	7/3	1	-1/3	0	0	2/3
1	-1/3	0	1/3	0	0	1/3
0	7/3	0	2/3	1	0	47/3
0	4	0	-1	0	1	-1

- Calcoliamo i rapporti:

Applichiamo la regola dei minimi rapporti: si applica solo per gli elementi che sono strettamente positivi

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}; -; \frac{47}{3}\cdot\frac{3}{7}\right)$$

Esercizio A

Cambio di base

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 7/3 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\
1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 7/3 & 0 & 2/3 & 1 & 0 & 47/3 \\
\hline
0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7};-;\frac{47}{3}\cdot\frac{3}{7}\right)$$

$$\downarrow$$

x_2 entra in base come prima var. di base

Esercizio A

Cambio di base

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 7/3^{\color{green}1} & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\
1 & -1/3^{\color{green}0} & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 7/3^{\color{green}0} & 0 & 2/3 & 1 & 0 & 47/3 \\
\hline
0 & 4\ {\color{green}0} & 0 & -1 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7};-;\frac{47}{3}\cdot\frac{3}{7}\right)$$

$$\downarrow$$

x_2 entra in base come prima var. di base

Esercizio A

Cambio di base

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 7/3^{\color{green}1} & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\
1 & -1/3^{\color{green}0} & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 7/3^{\color{green}0} & 0 & 2/3 & 1 & 0 & 47/3 \\
\hline
0 & 4\ {\color{green}0} & 0 & -1 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$\overline{R1} = \frac{3}{7}R1$$

$$\overline{R2} = R2 + \frac{1}{3}\overline{R1}$$

$$\overline{R3} = R3 - R1$$

$$\overline{R0} = R0 - 4\overline{R1}$$

Esercizio A

Operazioni di riga

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 7/3 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\
1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 7/3 & 0 & 2/3 & 1 & 0 & 47/3 \\
\hline
0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$\overline{R1} = \frac{3}{7}R1$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w_B}$
$\overline{R1}$	0	1	3/7	-1/7	0	0	2/7

Esercizio A

Operazioni di riga

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 7/3 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3\\
1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3\\
0 & 7/3 & 0 & 2/3 & 1 & 0 & 47/3\\
\hline
0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$\overline{R1} = \frac{3}{7}R1$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$\overline{R1}$	0	1	3/7	-1/7	0	0	2/7

$\overline{R2} = R2 + \frac{1}{3}\overline{R1}$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$R2$	1	-1/3	0	1/3	0	0	1/3
$+\overline{R1}/3$	0	1/3	1/7	-1/21	0	0	2/21
$\overline{R2}$	1	0	1/7	2/7	0	0	3/7

Esercizio A

Operazioni di riga

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 7/3 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3\\
1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3\\
0 & 7/3 & 0 & 2/3 & 1 & 0 & 47/3\\
\hline
0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$\overline{R1} = \frac{3}{7}R1$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$\overline{R1}$	0	1	3/7	-1/7	0	0	2/7

$\overline{R3} = R3 - R1$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$R3$	0	7/3	0	2/3	1	0	47/3
$-R1$	0	-7/3	-1	1/3	0	0	-2/3
$\overline{R3}$	0	0	-1	1	1	0	15

Esercizio A

Operazioni di riga

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 7/3 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3\\
1 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3\\
0 & 7/3 & 0 & 2/3 & 1 & 0 & 47/3\\
\hline
0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$\overline{R1} = \frac{3}{7}R1$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$\overline{R1}$	0	1	3/7	-1/7	0	0	2/7

$\overline{R0} = R0 - 4\overline{R1}$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$R0$	0	4	0	-1	0	1	-1
$-4\overline{R1}$	0	-4	-12/7	4/7	0	0	-8/7
$\overline{R0}$	0	0	-12/7	-3/7	0	1	-15/7

Esercizio A

Nuovo tableau

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 3/7 & -1/7 & 0 & 0 & 2/7\\
1 & 0 & 1/7 & 2/7 & 0 & 0 & 3/7\\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 15\\
\hline
0 & 0 & -12/7 & -3/7 & 0 & 1 & -15/7
\end{array}\right]
\end{array}
$$

- Var. non di base: s_1, s_2
- Var. di base: $x_2 = 2/7, x_1 = 3/7, s_3 = 15$

Esercizio A

Nuovo tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w_B}$
0	1	3/7	-1/7	0	0	2/7
1	0	1/7	2/7	0	0	3/7
0	0	-1	1	1	0	15
0	0	-12/7	-3/7	0	1	-15/7

- Var. non di base: s_1, s_2
- Var. di base: $x_2 = 2/7, x_1 = 3/7, s_3 = 15$

test di ottimalità:

Funzione obiettivo: $-\frac{12}{7}s_1 - \frac{3}{7}s_2 + \varphi = -\frac{15}{7} \rightarrow \varphi = -\frac{15}{7} + \frac{12}{7}s_1 + \frac{3}{7}s_2$

Esercizio A

Nuovo tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w_B}$
0	1	3/7	-1/7	0	0	2/7
1	0	1/7	2/7	0	0	3/7
0	0	-1	1	1	0	15
0	0	-12/7	-3/7	0	1	-15/7

- Var. non di base: s_1, s_2
- Var. di base: $x_2 = 2/7, x_1 = 3/7, s_3 = 15$

Funzione obiettivo: $-\frac{12}{7}s_1 - \frac{3}{7}s_2 + \varphi = -\frac{15}{7} \rightarrow \varphi = -\frac{15}{7} + \frac{12}{7}s_1 + \frac{3}{7}s_2$

Soluzione ottima: attribuendo valore positivo alle var. non di base il valore di φ aumenta (peggiora)

problema di minimo ⇒ soluzione ottima

Esercizio A

Nuovo tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w_B}$
0	1	3/7	-1/7	0	0	2/7
1	0	1/7	2/7	0	0	3/7
0	0	-1	1	1	0	15
0	0	-12/7	-3/7	0	1	-15/7

- Var. non di base: s_1, s_2
- Var. di base: $x_2 = 2/7, x_1 = 3/7, s_3 = 15$
- Valore ottimo della funzione obiettivo: $\varphi^* = -15/7$
- $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

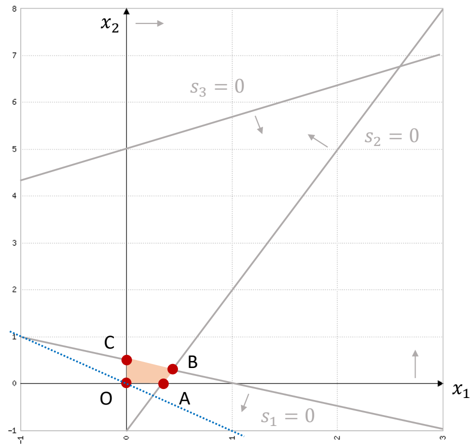
$x_2 \quad x_1 \quad s_3$

I	II			III		
x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w_B}$
1	2	1	0	0	0	1
3	-1	0	1	0	0	1
-2	3	0	0	1	0	15
3	3	0	0	0	1	0

Esercizio A

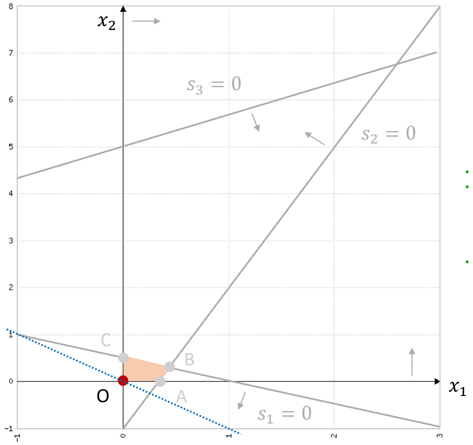
Interpretazione geometrica

risoluzione grafica all'esercizio



Esercizio A

Interpretazione geometrica

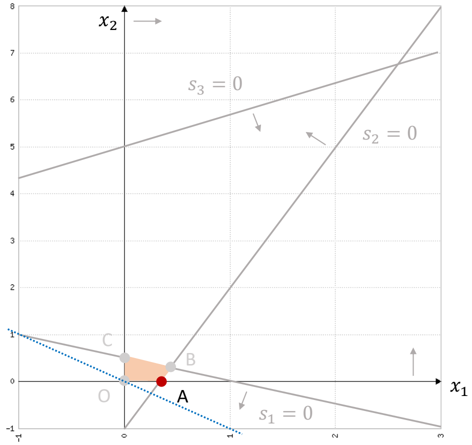


O (0; 0)

- Non era la soluzione ottima
- Dall'origine abbiamo deciso di portare in base X1 e dunque abbiamo attribuito valore positivo X1 lungo l'asse delle ordinate fino a raggiungere il vertice A => interpretazione dei minimi rapporti
- I minimi rapporti ci dice di fermarci in corrispondenza della prima intersezione con il primo vincolo funzionale

Esercizio A

Interpretazione geometrica



O (0; 0)

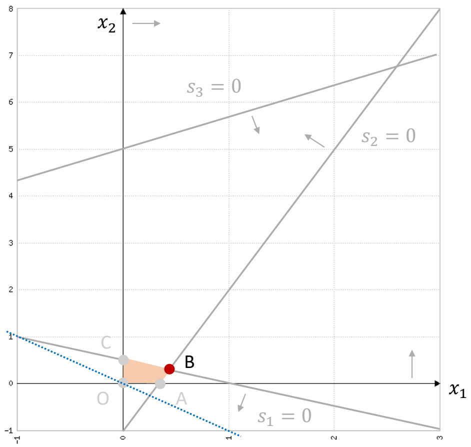
$\downarrow$ 1°

A $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

1°) tramite i minimi rapporti

Esercizio A

Interpretazione geometrica



O (0; 0)

$\downarrow$

A $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

$\downarrow$

B $\left(\frac{3}{7}; \frac{2}{7}\right)$

Esercizio B

$$\max\ \omega = 2\,x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad x_1 + 2\,x_2 &\le 8 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 &\le 12 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Esercizio B

$$\min\ \varphi = -2\,x_1 - 4x_2$$

$$\max\ \omega = 2\,x_1 + 4x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{s.a.} & x_1 & + & 2\,x_2 & \le & 8 \\ & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & \le & 12 \\ & & & x_1, x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

Esercizio B

$$\min\ \varphi = -2\,x_1 - 4x_2$$

$$\max\ \omega = 2\,x_1 + 4x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{s.a.} & x_1 & + & 2\,x_2 & \le & \boxed{8} \\ & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & \le & \boxed{12} \\ & & & x_1, x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow b_i \ge 0$$

Esercizio B

$$\min\ \varphi = -2\,x_1 - 4x_2$$

$$\max\ \omega = 2\,x_1 + 4x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{s.a.} & x_1 & + & 2\,x_2 & \boxed{\le} & \boxed{8} \\ & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & \boxed{\le} & \boxed{12} \\ & & & x_1, x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow b_i \ge 0$$

L'origine soddisfa i vincoli funzionali (s.b.a.i.)

L'origine é inclusa e quindi posso partire direttamente con (0,0) senza dover applicare la fase 1

Esercizio B

$$\min\ \varphi = -2\,x_1 - 4x_2$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{s.a.} & x_1 & + & 2\,x_2 & + & s_1 & & & = & 8 \\ & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & & & s_2 & = & 12 \\ & & & & & x_1, x_2, s_1, s_2 & & & \ge & 0 \end{array}$$

Esercizio B

Tableau iniziale

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- Var. non di base: x_1, x_2
- Var. di base: $s_1 = 8, s_2 = 12$

Esercizio B

Tableau iniziale

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Soluzione non ottima

Portiamo in base per prima la variabile che presenta il coefficiente del costo relativo più alto

- Var. non di base: x_1, x_2
- Var. di base: $s_1 = 8, s_2 = 12$

Esercizio B

Cambio di base

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{8}{2};\frac{12}{2}\right)$$

Esercizio B

Cambio di base

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{8}{2};\frac{12}{2}\right)$$

$\downarrow$

x_2 entra in base come prima var. di base

Esercizio B

Cambio di base

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2^{1} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 2^{0} & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline 2 & 4^{0} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{8}{2};\frac{12}{2}\right)$$

$$\downarrow$$

x_2 entra in base come prima var. di base

Esercizio B

Cambio di base

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2^{1} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 2^{0} & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline 2 & 4^{0} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overline{R1} = \frac{R1}{2}$$

$$\overline{R2} = R2 - \overline{2R1} = R2 - R1$$

$$\overline{R0} = R0 - 4\overline{R1}$$

Esercizio B

Operazioni di riga

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overline{R1} = \frac{R1}{2}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	φ	w_B
$\overline{R1}$	1/2	1	1/2	0	0	4

Esercizio B

Operazioni di riga

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ \hline 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overline{R1} = \frac{R1}{2}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	φ	w_B
$\overline{R1}$	1/2	1	1/2	0	0	4

$$\overline{R2} = R2 - R1$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	φ	w_B
$R2$	3	2	0	1	0	12
$-R1$	-1	-2	-1	0	0	-8
$\overline{R2}$	2	0	-1	1	0	4

Esercizio B

Operazioni di riga

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\
3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\
\hline
2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

$$\overline{R1} = \frac{R1}{2}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	φ	w_B
$\overline{R1}$	1/2	1	1/2	0	0	4

$$\overline{R0} = R0 - 4\overline{R1}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	φ	w_B
$R0$	2	4	0	0	1	0
$-4\overline{R1}$	-2	-4	-2	0	0	-16
$\overline{R0}$	0	0	-2	0	1	-16

Esercizio B

Nuovo tableau

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B
\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccc}
1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\
2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -16
\end{array}\right]
\end{array}
$$

- Var. non di base: x_1, s_1
- Var. di base: $x_2 = 4, s_2 = 4$

Esercizio B

Nuovo tableau

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B
\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccc}
1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\
2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -16
\end{array}\right]
\end{array}
$$

- Var. non di base: x_1, s_1
- Var. di base: $x_2 = 4, s_2 = 4$

Soluzione ottima

Esercizio B

Nuovo tableau

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B
\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccc}
1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\
2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -16
\end{array}\right]
\end{array}
$$

- Var. non di base: x_1, s_1
- Var. di base: $x_2 = 4, s_2 = 4$
- $\varphi^* = -16$
- $B = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc} x2 & s1 \end{array}\end{array}$

Soluzione ottima

Esercizio B

Nuovo tableau

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix}
1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\
2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
\boxed{0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad -16}
\end{bmatrix}
$$

- Var. non di base: x_1, s_1
- Var. di base: $x_2 = 4, s_2 = 4$

Funzione obiettivo: $0x_1 - 2s_1 + \varphi = -16 \rightarrow \varphi = -16 + 0x_1 + 2s_1$

Esercizio B

Nuovo tableau

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix}
1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\
2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
\boxed{0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad -16}
\end{bmatrix}
$$

- Var. non di base: x_1, s_1
- Var. di base: $x_2 = 4, s_2 = 4$

Funzione obiettivo: $0x_1 - 2s_1 + \varphi = -16 \rightarrow \varphi = -16 + 0x_1 + 2s_1$

Ottimi alternativi: attribuendo valore positivo a x_1 il valore di φ non cambia

Portiamo in base X1

Esercizio B

Cambio di base

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix}
1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\
2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -16
\end{bmatrix}
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{4}{1/2}; \frac{4}{2}\right)$$ II° versore

Esercizio B

Cambio di base

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix}
1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\
2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -16
\end{bmatrix}
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{4}{1/2}; \frac{4}{2}\right)$$

x_1 entra in base come seconda var. di base

Esercizio B

Cambio di base

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1/2^{\,0} & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ 2^{\,1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0^{\,0} & 0 & -2 & 0 & 1 & -16 \end{array}\right]$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{4}{1/2};\frac{4}{2}\right)$$
$$\downarrow$$

x_1 entra in base come seconda var. di base

Esercizio B

Cambio di base

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1/2^{\,0} & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ 2^{\,1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0^{\,0} & 0 & -2 & 0 & 1 & -16 \end{array}\right]$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{2}$$

$$\overline{R1} = R1 - \frac{\overline{R2}}{2}$$

$$\overline{R0} = R0$$

Esercizio B

Cambio di base

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -16 \end{array}\right]$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \\ \overline{R2} & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 2 \end{array}$$

Esercizio B

Cambio di base

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -16 \end{array}\right]$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \\ \overline{R2} & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\overline{R1} = R1 - \frac{\overline{R2}}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & w_B \\ R1 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ -\overline{R2}/2 & -1/2 & 0 & 1/4 & -1/4 & 0 & -1 \\ \hline \overline{R1} & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & 0 & 3 \end{array}$$

Esercizio B

Nuovo tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	φ	w_B
0	1	3/4	-1/4	0	3
1	0	-1/2	1/2	0	2
0	0	-2	0	1	-16

- Var. non di base: s_1, s_2
- Var. di base: $x_2 = 3, x_1 = 2$

Esercizio B

Nuovo tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	φ	w_B
0	1	3/4	-1/4	0	3
1	0	-1/2	1/2	0	2
0	0	-2	0	1	-16

- Var. non di base: s_1, s_2
- Var. di base: $x_2 = 3, x_1 = 2$

Soluzione ottima

Esercizio B

Nuovo tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	φ	w_B
0	1	3/4	-1/4	0	3
1	0	-1/2	1/2	0	2
0	0	-2	0	1	-16

- Var. non di base: s_1, s_2
- Var. di base: $x_2 = 3, x_1 = 2$
- $\varphi^* = -16$
- $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Soluzione ottima

Esercizio B

Soluzioni?

- 2 soluzioni di base

1) Punto A

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & s_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[w^A]^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 \end{array} \\ [0; 4; 0; 4\,] \end{array}$$

2) Punto B

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$[w^B]^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 \end{array} \\ [2; 3; 0; 0] \end{array}$$

- ∞ soluzioni non di base

$$\alpha \in (0,1) \rightarrow [w^{AB}]^T = \alpha[w^A]^T + (1-\alpha)[w^B]^T = [2 - 2\alpha; 3 + \alpha; 0; 4\alpha\,]$$

- Tutte con lo stesso valore della funzione obiettivo : $\varphi^* = -16$

- **abbiamo effettuato una iterazione del simplessoe abbiamo trovato che esistono ottimi alternativi**
- **Effettuiamo nuovamente una nuova iterazione del simplesso**
- **troviamo le infinite soluzioni**

Fase: I° + II°

Esercizio C

$$\max\ \omega = 5\,x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{llcllcl} \text{s.a.} & x_1 & & & \le & 3 \\ & & & 4\ x_2 & \le & 12 \\ & 4\ x_1 & + & 2\ x_2 & \le & 18 \\ & & & x_1, x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

Esercizio C

$$\min\ \varphi = -5\,x_1 - 2x_2$$

$$\max\ \omega = 5\,x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{llcllcl} \text{s.a.} & x_1 & & & \le & 3 \\ & & & 4\ x_2 & \le & 12 \\ & 4\ x_1 & + & 2\ x_2 & \le & 18 \\ & & & x_1, x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

Esercizio C

$$\min\ \varphi = -5\,x_1 - 2x_2$$

$$\max\ \omega = 5\,x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{llcllcl} \text{s.a.} & x_1 & & & \le & 3 \\ & & & 4\ x_2 & \le & 12 \\ & 4\ x_1 & + & 2\ x_2 & \le & 18 \\ & & & x_1, x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

$b_i \ge 0$

Esercizio C

$$\min\ \varphi = -5\,x_1 - 2x_2$$

$$\max\ \omega = 5\,x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{llcllcl} \text{s.a.} & x_1 & & & \le & 3 \\ & & & 4\ x_2 & \le & 12 \\ & 4\ x_1 & + & 2\ x_2 & \le & 18 \\ & & & x_1, x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

$b_i \ge 0$

L'origine soddisfa i vincoli funzionali (s.b.a.i.)

Esercizio C

$$\min \ \varphi = -5x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + s_1 &=& 3 \\ 4x_2 + s_2 &=& 12 \\ 4x_1 + 2x_2 + s_3 &=& 18 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq& 0 \end{array}$$

Esercizio C

Tableau iniziale

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ \hline 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- Var. non di base: x_1, x_2
- Var. di base: $s_1 = 3, s_2 = 12, s_3 = 18$

Esercizio C

Tableau iniziale

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ \hline 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- Var. non di base: x_1, x_2
- Var. di base: $s_1 = 3, s_2 = 12, s_3 = 18$

Soluzione non ottima

Esercizio C

Cambio di base

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ \hline 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{3}{1}; - ; \frac{18}{4}\right)$$

Esercizio C

Cambio di base

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1&0&1&0&0&0&3\\ 0&4&0&1&0&0&12\\ 4&2&0&0&1&0&18\\ \hline 5&2&0&0&0&1&0\end{array}\right]\end{array}$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{3}{1};-;\frac{18}{4}\right)$$

$$\downarrow$$

x_1 entra in base come prima var. di base

Esercizio C

Cambio di base

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1^{1}&0&1&0&0&0&3\\ 0^{0}&4&0&1&0&0&12\\ 4^{0}&2&0&0&1&0&18\\ \hline 5^{0}&2&0&0&0&1&0\end{array}\right]\end{array}$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{3}{1};-;\frac{18}{4}\right)$$

$$\downarrow$$

x_1 entra in base come prima var. di base

Esercizio C

Cambio di base

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1^{1}&0&1&0&0&0&3\\ 0^{0}&4&0&1&0&0&12\\ 4^{0}&2&0&0&1&0&18\\ \hline 5^{0}&2&0&0&0&1&0\end{array}\right]\end{array}$$

$$\overline{R1} = R1$$

$$\overline{R2} = \overline{R2}$$

$$\overline{R3} = R3 - 4\overline{R1} = R3 - 4R1$$

$$\overline{R0} = R0 - 5\overline{R1} = R0 - 5R1$$

Esercizio C

Cambio di base

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1&0&1&0&0&0&3\\ 0&4&0&1&0&0&12\\ 4&2&0&0&1&0&18\\ \hline 5&2&0&0&0&1&0\end{array}\right]\end{array}$$

$\overline{R3} = R3 - 4R1$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$R3$	4	2	0	0	1	0	18
$-4R1$	-4	0	-4	0	0	0	-12
$\overline{R3}$	0	2	-4	0	1	0	6

Esercizio C

Cambio di base

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \\
\hline
5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

$\overline{R0} = R0 - 5R1$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w_B}$
$R0$	5	2	0	0	0	1	0
$-5R1$	-5	0	-5	0	0	0	-15
$\overline{R0}$	0	2	-5	0	0	1	-15

Esercizio C

Nuovo tableau

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
\hline
0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & -15
\end{array}\right]
$$

- Var. non di base: x_2, s_1
- Var. di base: $x_1 = 3, s_2 = 12, s_3 = 6$

Esercizio C

Nuovo tableau

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
\hline
0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & -15
\end{array}\right]
$$

- Var. non di base: x_2, s_1
- Var. di base: $x_1 = 3, s_2 = 12, s_3 = 6$

Soluzione non ottima

Esercizio C

Cambio di base

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
\hline
0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & -15
\end{array}\right]
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(-; \frac{12}{4}; \frac{6}{2}\right)$$

Esercizio C

Cambio di base

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
\hline
0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & -15
\end{array}\right]
\end{array}$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(-;\frac{12}{4};\frac{6}{2}\right)$$

$\downarrow$

x_2 potrebbe entrare in base come seconda o come terza var. di base

Esercizio C

Cambio di base

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0^{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 4^{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 2^{0} & -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
\hline
0 & 2^{0} & -5 & 0 & 0 & 1 & -15
\end{array}\right]
\end{array}$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(-;\frac{12}{4};\frac{6}{2}\right)$$

valori uguali
$\Rightarrow$ soluzione
degenere

$\downarrow$

x_2 entra in base come seconda var. di base

Esercizio C

Cambio di base

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0^{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 4^{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 2^{0} & -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
\hline
0 & 2^{0} & -5 & 0 & 0 & 1 & -15
\end{array}\right]
\end{array}$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{4}$$

$$\overline{R1} = R1$$

$$\overline{R3} = R3 - 2\overline{R2}$$

$$\overline{R0} = R0 - 2\overline{R2}$$

Esercizio C

Operazioni di riga

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
0 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
\hline
0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & -15
\end{array}\right]
\end{array}$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{4}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$\overline{R2}$	0	1	0	1/4	0	0	3

Esercizio C

Operazioni di riga

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
1	0	1	0	0	0	3
0	4	0	1	0	0	12
0	2	-4	0	1	0	6
0	2	-5	0	0	1	-15

$\overline{R2} = \frac{R2}{4}$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$\overline{R2}$	0	1	0	1/4	0	0	3

$\overline{R3} = R3 - 2\overline{R2}$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$R3$	0	2	-4	0	1	0	6
$-2\overline{R2}$	0	-2	0	-1/2	0	0	-6
$\overline{R3}$	0	0	-4	-1/2	1	0	0

Esercizio C

Operazioni di riga

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
1	0	1	0	0	0	3
0	4	0	1	0	0	12
0	2	-4	0	1	0	6
0	2	-5	0	0	1	-15

$\overline{R2} = \frac{R2}{4}$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$\overline{R2}$	0	1	0	1/4	0	0	3

$\overline{R0} = R0 - 2\overline{R2}$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
$R0$	0	2	-5	0	0	1	-15
$-2\overline{R2}$	0	-2	0	-1/2	0	0	-6
$\overline{R0}$	0	0	-5	-1/2	0	1	-21

Esercizio C

Nuovo tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
1	0	1	0	0	0	3
0	1	0	1/4	0	0	3
0	0	-4	-1/2	1	0	0
0	0	-5	-1/2	0	1	-21

- Var. non di base: s_1, s_2
- Var. di base: $x_1 = 3, x_2 = 3, s_3 = 0$

Esercizio C

Nuovo tableau

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
1	0	1	0	0	0	3
0	1	0	1/4	0	0	3
0	0	-4	-1/2	1	0	0
0	0	-5	-1/2	0	1	-21

- Var. non di base: s_1, s_2
- Var. di base: $x_1 = 3, x_2 = 3, s_3 = 0$

Soluzione ottima

Esercizio C

Nuovo tableau

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-5} & \boxed{-1/2} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{-21} \end{array}\right]$$

- Var. non di base: s_1, s_2
- Var. di base: $x_1 = 3, x_2 = 3, s_3 = 0$
- $\varphi^* = -21$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Soluzione ottima

Esercizio C

Nuovo tableau

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-5} & \boxed{-1/2} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{-21} \end{array}\right]$$

- Var. non di base: s_1, s_2
- Var. di base: $x_1 = 3, x_2 = 3, s_3 = 0$
- $\varphi^* = -21$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Soluzione ottima

Soluzione degenere

Esercizio C

Determinazione delle altre basi

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0^{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4^{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 2^{1} & -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 2^{0} & -5 & 0 & 0 & 1 & -15 \end{array}\right]$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(-; \frac{12}{4}; \frac{6}{2}\right)$$

x_2 entra in base come terza var. di base

Esercizio C

Determinazione delle altre basi

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0^{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4^{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 2^{1} & -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 2^{0} & -5 & 0 & 0 & 1 & -15 \end{array}\right]$$

$$\overline{R3} = \frac{R3}{2}$$

$$\overline{R1} = R1$$

$$\overline{R2} = R2 - 4\overline{R3}$$

$$\overline{R0} = R0 - 2\overline{R3} = R0 - R3$$

Esercizio C

Determinazione delle altre basi

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
1	0	1	0	0	0	3
0	0	8	1	-2	0	0
0	1	-2	0	1/2	0	3
0	0	-1	0	-1	1	-21

- Var. non di base: s_1, s_3
- Var. di base: $x_1 = 3, s_2 = 0, x_2 = 3$
- $\varphi^* = -21$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Soluzione degenere

Esercizio C

Determinazione delle altre basi

- Se avessimo portato in base x_2 prima di x_1, ci saremmo imbattuti nella terza base

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	w_B
0	0	1	1/8	-1/4	0	0
0	1	0	1/4	0	0	3
1	0	0	-1/8	1/4	0	3
0	0	0	1/8	-5/4	1	-21

- Var. non di base: s_2, s_3
- Var. di base: $s_1 = 0, x_2 = 3, x_1 = 3$
- $\varphi^* = -21$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Soluzione degenere

- all'esame non ci verrà chiesto di calcolare anche la 3 base basta indicare la degenerazione
- Per gli ottimi alternativi invece dobbiamo calcolare tutte le soluzioni

Esercizio D

$$\max\ \omega = \frac{x_1}{4} + 2x_2$$

Var decisionali

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad x_1 + 4\,x_2 &\leq 20 \\ 3\,x_1 + 12\,x_2 &\geq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vincoli funzionali

Vincoli di non negatività

Esercizio D

$$\min\ \varphi = -\frac{x_1}{4} - 2x_2$$

$$\max\ \omega = \frac{x_1}{4} + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad x_1 + 4\,x_2 &\leq 20 \\ 3\,x_1 + 12\,x_2 &\geq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Esercizio D

$$\min\ \varphi = -\frac{x_1}{4} - 2x_2$$

$$\max\ \omega = \frac{x_1}{4} + 2x_2$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{s.a.} & x_1 + 4\ x_2 & \leq & \boxed{20} \\
& 3\ x_1 + 12\ x_2 & \geq & \boxed{9} \\
& x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

$b_i \geq 0$

Esercizio D

$$\min\ \varphi = -\frac{x_1}{4} - 2x_2$$

$$\max\ \omega = \frac{x_1}{4} + 2x_2$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{s.a.} & x_1 + 4\ x_2 & \leq & \boxed{20} \\
& 3\ x_1 + 12\ x_2 & \geq & \boxed{9} \\
& x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

$b_i \geq 0$

L'origine non soddisfa i vincoli funzionali (Fase 1)

Esercizio D

$$\begin{array}{lrcl}
& \min\ \varphi = -\frac{x_1}{4} - 2x_2 & & \\
\text{s.a.} & x_1 + 4\ x_2 + s_1 & = & 20 \\
& 3\ x_1 + 12\ x_2 - \bar{s}_2 & = & 9 \\
& x_1, x_2, s_1, \bar{s}_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Esercizio D

$$\begin{array}{lrcl}
& \min\ \varphi = -\frac{x_1}{4} - 2x_2 & & \\
\text{s.a.} & x_1 + 4\ x_2 + s_1 & = & 20 \\
& 3\ x_1 + 12\ x_2 - \bar{s}_2 & = & 9 \\
& x_1, x_2, s_1, \bar{s}_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Nell'origine $\bar{s}_2 = -9$. Dobbiamo ricercare una s.b.a.i.

Esercizio D

Fase 1

- Costruzione del problema artificiale
  - ✓ Introduzione di una variabile temporanea t_i per ciascun vincolo violato nell'origine ($\geq, =$)
  - ✓ Introduzione della nuova variabile obiettivo $\psi = \sum_i t_i$
- Risoluzione del problema aritificiale (min ψ)
  - ✓ $\psi^* = 0 \rightarrow$ s.b.a.i.
  - ✓ $\psi^* > 0 \rightarrow$ problema inammissibile

Esercizio D

$$\min \ \psi = t_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} x_1 + 4\,x_2 + s_1 \quad\quad\quad &= 20 \\ 3\,x_1 + 12\,x_2 - \quad \bar{s}_2 + t_2 &= 9 \\ x_1, x_2, s_1, \bar{s}_2, t_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Esercizio D

Tableau iniziale (Fase 1)

x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	t_2	ψ	w_B
1	4	1	0	0	0	20
3	12	0	-1	1	0	9
0	0	0	0	-1	1	0

$\psi - t_2 = 0$

Esercizio D

Tableau iniziale (Fase 1)

x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	t_2	ψ	w_B
1	4	1	0	0	0	20
3	12	0	-1	1	0	9
0	0	0	0	-1	1	0

La funzione obiettivo deve essere espressa in termini di var. non di base

Esercizio D

Tableau iniziale (Fase 1)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
3 & 12 & 0 & -1 & 1 & 0 & 9 \\
\hline
\boxed{0} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

da -1 a 0

La funzione obiettivo deve essere espressa in termini di var. non di base

$\overline{R0} = R0 + R2$

	x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	t_2	ψ	$\underline{w_B}$
$R0$	0	0	0	0	-1	1	0
$+R2$	3	12	0	-1	1	0	9
$\overline{R0}$	3	12	0	-1	0	1	9

Esercizio D

Tableau iniziale (Fase 1)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
3 & 12 & 0 & -1 & 1 & 0 & 9 \\
\hline
3 & 12 & 0 & -1 & 0 & 1 & 9
\end{array}\right]
$$

- Var. non di base: $x_1, x_2, \bar{s}_2$
- Var. di base: $s_1 = 20, t_2 = 9$

Esercizio D

Tableau iniziale (Fase 1)

vr di base

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
3 & 12 & 0 & -1 & 1 & 0 & 9 \\
\hline
3 & 12 & 0 & -1 & 0 & 1 & 9
\end{array}\right]
$$

- Var. non di base: $x_1, x_2, \bar{s}_2$
- Var. di base: $s_1 = 20, t_2 = 9$

Soluzione non ottima

se $c_i < 0 \Rightarrow$ soluzione ottima

Esercizio D

Cambio di base (Fase 1)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
3 & 12 & 0 & -1 & 1 & 0 & 9 \\
\hline
3 & 12 & 0 & -1 & 0 & 1 & 9
\end{array}\right]
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{20}{4}; \frac{9}{12}\right)$$

x_2 entra in base come seconda var. di base

Esercizio D

Cambio di base (Fase 1)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 4^{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 3 & 12^{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 9 \\ \hline 3 & 12^{0} & 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{20}{4};\frac{9}{12}\right)$$
$$\downarrow$$

x_2 entra in base come seconda var. di base

Esercizio D

Cambio di base (Fase 1)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 4^{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 3 & 12^{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 9 \\ \hline 3 & 12^{0} & 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{12}$$

$$\overline{R1} = R1 - 4\overline{R2}$$

$$\overline{R0} = R0 - 12\overline{R2} = R0 - R2$$

Esercizio D

Operazioni di riga (Fase 1)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 3 & 12 & 0 & -1 & 1 & 0 & 9 \\ \hline 3 & 12 & 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{12} \qquad \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \\ \overline{R2} & 1/4 & 1 & 0 & -1/12 & 1/12 & 0 & 3/4 \end{array}$$

Esercizio D

Operazioni di riga (Fase 1)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 3 & 12 & 0 & -1 & 1 & 0 & 9 \\ \hline 3 & 12 & 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{12} \qquad \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \\ \overline{R2} & 1/4 & 1 & 0 & -1/12 & 1/12 & 0 & 3/4 \end{array}$$

$$\overline{R1} = R1 - 4\overline{R2} \qquad \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \\ R1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ -4\overline{R2} & -1 & -4 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & -3 \\ \hline \overline{R1} & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 & 17 \end{array}$$

Esercizio D

Operazioni di riga (Fase 1)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & w_B
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
3 & 12 & 0 & -1 & 1 & 0 & 9 \\
\hline
3 & 12 & 0 & -1 & 0 & 1 & 9
\end{array}\right]
$$

$\overline{R2} = \dfrac{R2}{12}$

	x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	t_2	ψ	w_B
$\overline{R2}$	1/4	1	0	-1/12	1/12	0	3/4

$\overline{R0} = R0 - R2$

	x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	t_2	ψ	w_B
$R0$	3	12	0	-1	0	1	9
$-R2$	-3	-12	0	1	-1	0	-9
$\overline{R0}$	0	0	0	0	-1	1	0

Esercizio D

Nuovo tableau (Fase 1)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & w_B
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 & 17 \\
1/4 & 1 & 0 & -1/12 & 1/12 & 0 & 3/4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

- Var. non di base: $x_1, \bar{s}_2, t_2$
- Var. di base: $s_1 = 17, x_2 = 3/4$

Esercizio D

Nuovo tableau (Fase 1)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & w_B
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 & 17 \\
1/4 & 1 & 0 & -1/12 & 1/12 & 0 & 3/4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Soluzione ottima, con $\psi^* = 0$

- Var. non di base: $x_1, \bar{s}_2, t_2$
- Var. di base: $s_1 = 17, x_2 = 3/4$

Esercizio D

Nuovo tableau (Fase 1)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & t_2 & \psi & w_B
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 & 17 \\
1/4 & 1 & 0 & -1/12 & 1/12 & 0 & 3/4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

Soluzione ottima, con $\psi^* = 0$

Abbiamo individuato una s.b.a.i.

- Var. non di base: $x_1, \bar{s}_2, t_2$
- Var. di base: $s_1 = 17, x_2 = 3/4$

Esercizio D

Tableau iniziale (Fase 2)

x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	φ	w_B
0	0	1	1/3	0	17
1/4	1	0	-1/12	0	3/4
1/4	2	0	0	1	0

1) eliminare t_i
2) sho ψ e φ

$\varphi + 1/4\, x_1 + 2x_2 = 0$

$\min\ \varphi = -\frac{x_1}{4} - 2x_2$

$$
\begin{array}{llcl}
 & \max\ \omega = \frac{x_1}{4} + 2x_2 & & \\
\text{s.a.} & x_1 + 4x_2 & \leq & 20 \\
 & 3x_1 + 12x_2 & \geq & 9 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esercizio D

Tableau iniziale (Fase 2)

x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	φ	w_B
0	0	1	1/3	0	17
1/4	1	0	-1/12	0	3/4
1/4	2	0	0	1	0

Var di base

La funzione obiettivo deve essere espressa in termini di var. non di base

Esercizio D

Tableau iniziale (Fase 2)

x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	φ	w_B
0	0	1	1/3	0	17
1/4	1	0	-1/12	0	3/4
1/4	2	0	0	1	0

La funzione obiettivo deve essere espressa in termini di var. non di base

$\overline{R0} = R0 - 2R2$

	x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	φ	w_B
$R0$	1/4	2	0	0	1	0
$-2R2$	-1/2	-2	0	1/6	0	-3/2
$\overline{R0}$	-1/4	0	0	1/6	1	-3/2

Esercizio D

Tableau iniziale (Fase 2)

x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	φ	w_B
0	0	1	1/3	0	17
1/4	1	0	-1/12	0	3/4
-1/4	0	0	1/6	1	-3/2

$c_i \leq 0$

Soluzione non ottima

$c_i \geq 0$

Esercizio D

Cambio di base (Fase 2)

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 17 \\
1/4 & 1 & 0 & -1/12 & 0 & 3/4 \\
\hline
-1/4 & 0 & 0 & 1/6 & 1 & -3/2
\end{array}\right]
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$(17 \cdot 3; -)$$

$$\downarrow$$

$\bar{s}_2$ entra in base come prima var. di base

Esercizio D

Cambio di base (Fase 2)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 & 0 & 17 \\
1/4 & 1 & 0 & -1/12 & 0 & 0 & 3/4 \\
\hline
-1/4 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1 & -3/2
\end{array}\right]
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$(17 \cdot 3; -)$$

$$\downarrow$$

$\bar{s}_2$ entra in base come prima var. di base

Esercizio D

Cambio di base (Fase 2)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 & 0 & 17 \\
1/4 & 1 & 0 & -1/12 & 0 & 0 & 3/4 \\
\hline
-1/4 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1 & -3/2
\end{array}\right]
$$

$$\overline{R1} = 3R1$$

$$\overline{R2} = R2 + \frac{1}{12}\overline{R1}$$

$$\overline{R0} = R0 - \frac{1}{6}\overline{R1}$$

Esercizio D

Operazioni di riga (Fase 2)

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 17 \\
1/4 & 1 & 0 & -1/12 & 0 & 3/4 \\
\hline
-1/4 & 0 & 0 & 1/6 & 1 & -3/2
\end{array}\right]
$$

$\overline{R1} = 3R1$

	x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	φ	w_B
$\overline{R1}$	0	0	3	1	0	51

Esercizio D

Operazioni di riga (Fase 2)

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 17 \\
1/4 & 1 & 0 & -1/12 & 0 & 3/4 \\
\hline
-1/4 & 0 & 0 & 1/6 & 1 & -3/2
\end{array}\right]
$$

$\overline{R1} = 3R1$

	x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	φ	w_B
$\overline{R1}$	0	0	3	1	0	51

$\overline{R2} = R2 + \frac{1}{12}\overline{R1}$

	x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	φ	w_B
$R2$	1/4	1	0	-1/12	0	3/4
$+\overline{R1}/12$	0	0	1/4	1/12	0	17/4
$\overline{R2}$	1/4	1	1/4	0	0	5

Esercizio D

Operazioni di riga (Fase 2)

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 17 \\
1/4 & 1 & 0 & -1/12 & 0 & 3/4 \\
\hline
-1/4 & 0 & 0 & 1/6 & 1 & -3/2
\end{array}\right]
$$

$\overline{R1} = 3R1$

	x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	φ	w_B
$\overline{R1}$	0	0	3	1	0	51

$\overline{R0} = R0 - \frac{1}{6}\overline{R1}$

	x_1	x_2	s_1	$\bar{s}_2$	φ	w_B
$R0$	-1/4	0	0	1/6	1	-3/2
$-\overline{R1}/6$	0	0	-1/2	-1/6	0	-17/3
$\overline{R0}$	-1/4	0	-1/2	0	1	-10

Esercizio D

Nuovo tableau (Fase 2)

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 51 \\
1/4 & 1 & 1/4 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
-1/4 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & -10
\end{array}\right]
$$

- Var. non di base: x_1, s_1
- Var. di base: $\bar{s}_2 = 51, x_2 = 5$

Esercizio D

Nuovo tableau (Fase 2)

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & \bar{s}_2 & \varphi & w_B
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 51 \\
1/4 & 1 & 1/4 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
-1/4 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & -10
\end{array}\right]
$$

Soluzione ottima

- Var. non di base: x_1, s_1
- Var. di base: $\bar{s}_2 = 51, x_2 = 5$
- $\varphi^* = -10$
- $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

x_1 s_1

Esercizio E

$$\max\ \omega = 3x_1 + 7x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.}\ -2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Esercizio E

$$\min\ \varphi = -3x_1 - 7x_2$$

$$\max\ \omega = 3x_1 + 7x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.}\ -2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Esercizio E

$$\min\ \varphi = -3x_1 - 7x_2$$

$$\max\ \omega = 3x_1 + 7x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.}\ -2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$b_i \geq 0$

Esercizio E

$$\min\ \varphi = -3x_1 - 7x_2$$

$$\max\ \omega = 3x_1 + 7x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.}\ -2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$b_i \geq 0$

L'origine non soddisfa i vincoli funzionali (Fase 1)

Esercizio E

$$\min \ \varphi = -3\,x_1 - 7x_2$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} \text{s.a.} -2\,x_1 & + & x_2 & - & \bar{s}_1 & = & 3 \\ 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & = & 6 \\ & & & & x_1, x_2, \bar{s}_1 & \geq & 0 \end{array}$$

Esercizio E

$$\min \ \psi = t_1 + t_2$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \text{s.a.} -2\,x_1 & + & x_2 & - & \bar{s}_1 & + & t_1 & & & = & 3 \\ 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & & & + & t_2 & = & 6 \\ & & & & & & & x_1, x_2, \bar{s}_1, t_1, & t_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Esercizio E

Tableau iniziale (Fase 1)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Esercizio E

Tableau iniziale (Fase 1)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{0} \end{array}\right]$$

La funzione obiettivo deve essere espressa in termini di var. non di base

Esercizio E

Tableau iniziale (Fase 1)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

La funzione obiettivo deve essere espressa in termini di var. non di base

$\overline{R0} = R0 + R1 + R2$

	x_1	x_2	$\bar{s}_1$	t_1	t_2	ψ	w_B
$R0$	0	0	0	-1	-1	1	0
$+R1$	-2	1	-1	1	0	0	3
$+R2$	3	3	0	0	1	0	6
$\overline{R0}$	1	4	-1	0	0	1	9

Esercizio E

Tableau iniziale (Fase 1)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{array}$$

- Var. non di base: $x_1, x_2, \bar{s}_1$
- Var. di base: $t_1 = 3, t_2 = 6$

Esercizio E

Tableau iniziale (Fase 1)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{array}$$

$\psi = t_1 + t_2$
$= 3 + 6 = 9$

- Var. non di base: $x_1, x_2, \bar{s}_1$
- Var. di base: $t_1 = 3, t_2 = 6$

Soluzione non ottima

$c_i > 0$

Esercizio E

Cambio di base (Fase 1)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & w_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{array}$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{3}{1}; \frac{6}{3}\right)$$

x_2 entra in base come seconda var. di base

Esercizio E

Cambio di base (Fase 1)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -2 & 1^{0} & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3^{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 4^{0} & -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{array}$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{3}{1}; \frac{6}{3}\right)$$

$$\downarrow$$

x_2 entra in base come seconda var. di base

Esercizio E

Cambio di base (Fase 1)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -2 & 1^{0} & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3^{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 4^{0} & -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{3}$$

$$\overline{R1} = R1 - \overline{R2}$$

$$\overline{R0} = R0 - 4\overline{R2}$$

Esercizio E

Operazioni di riga (Fase 1)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{3} \qquad \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \\ \overline{R2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2 \end{array}$$

Esercizio E

Operazioni di riga (Fase 1)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{3} \qquad \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \\ \overline{R2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\overline{R1} = R1 - \overline{R2} \qquad \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & \underline{w_B} \\ R1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -\overline{R2} & -1 & -1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & -2 \\ \hline \overline{R1} & -3 & 0 & -1 & 1 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}$$

Esercizio E

Operazioni di riga (Fase 1)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

$\overline{R2} = \dfrac{R2}{3}$

	x_1	x_2	$\bar{s}_1$	t_1	t_2	ψ	w_B
$\overline{R2}$	1	1	0	0	1/3	0	2

$\overline{R0} = R0 - 4\overline{R2}$

	x_1	x_2	$\bar{s}_1$	t_1	t_2	ψ	w_B
$R0$	1	4	-1	0	0	1	9
$-4\overline{R2}$	-4	-4	0	0	-4/3	0	-8
$\overline{R0}$	-3	0	-1	0	-4/3	1	1

Esercizio E

Nuovo tableau (Fase 1)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} -3 & 0 & -1 & 1 & -1/3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2 \\ \hline -3 & 0 & -1 & 0 & -4/3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Var. non di base: $x_1, \bar{s}_1, t_2$
- Var. di base: $t_1 = 1, x_2 = 2$

Esercizio E

Nuovo tableau (Fase 1)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} -3 & 0 & -1 & 1 & -1/3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2 \\ \hline \boxed{-3 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -4/3 \quad 1 \quad 1} \end{array}\right]$$

Soluzione ottima, con $\psi^* > 0$

- Var. non di base: $x_1, \bar{s}_1, t_2$
- Var. di base: $t_1 = 1, x_2 = 2$

Esercizio E

Nuovo tableau (Fase 1)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & t_1 & t_2 & \psi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} -3 & 0 & -1 & 1 & -1/3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2 \\ \hline \boxed{-3 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -4/3 \quad 1 \quad 1} \end{array}\right]$$

Soluzione ottima, con $\psi^* > 0$

$\downarrow$

Non esiste alcuna s.b.a.i.
La regione ammissibile è vuota

- Var. non di base: $x_1, \bar{s}_1, t_2$
- Var. di base: $t_1 = 1, x_2 = 2$

Esercizio F

$$\max\ \omega = 2\,x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rrrrrrl} \text{s.a.} & - & x_1 & + & 2 & x_2 & \le -1 \\ & & & & & x_2 & \le \ \ 5 \\ & 6 & x_1 & + & 3 & x_2 & \ge 21 \\ & & & & & x_1, x_2 & \ge \ \ 0 \end{array}$$

Esercizio F

$$\min\ \varphi = -2\,x_1 - x_2$$

$$\max\ \omega = 2\,x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rrrrrrl} \text{s.a.} & - & x_1 & + & 2 & x_2 & \le -1 \\ & & & & & x_2 & \le \ \ 5 \\ & 6 & x_1 & + & 3 & x_2 & \ge 21 \\ & & & & & x_1, x_2 & \ge \ \ 0 \end{array}$$

Esercizio F

$$\min\ \varphi = -2\,x_1 - x_2$$

$$\max\ \omega = 2\,x_1 + x_2 \qquad \cdot(-1)$$

$$\begin{array}{rrrrrrl} \text{s.a.} & - & x_1 & + & 2 & x_2 & \le -1 \longrightarrow b_i < 0 \\ & & & & & x_2 & \le \ \ 5 \\ & 6 & x_1 & + & 3 & x_2 & \ge 21 \\ & & & & & x_1, x_2 & \ge \ \ 0 \end{array}$$

Esercizio F

$$\min\ \varphi = -2\,x_1 - x_2$$

$$\max\ \omega = 2\,x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rrrrrrl} \text{s.a.} & & x_1 & - & 2 & x_2 & \ge 1 \\ & & & & & x_2 & \le 5 \longrightarrow b_i \ge 0 \\ & 6 & x_1 & + & 3 & x_2 & \ge 21 \\ & & & & & x_1, x_2 & \ge 0 \end{array}$$

Esercizio F

$$\min\ \varphi = -2\,x_1 - x_2$$

$$\max\ \omega = 2\,x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{s.a.} & x_1 & - & 2\ x_2 & \boxed{\geq} & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 5 \\
 & 6\ x_1 & + & 3\ x_2 & \boxed{\geq} & 21 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad b_i \geq 0
$$

L'origine non soddisfa i vincoli funzionali (Fase 1)

Esercizio F

$$\min\ \psi = t_1 + t_3$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{s.a.} & x_1 - 2\ x_2 - \bar{s}_1 \qquad + t_1 & = & 1 \\
 & x_2 + \quad s_2 & = & 5 \\
 & 6\ x_1 + 3\ x_2 - \qquad \bar{s}_3 \qquad + t_3 & = & 21 \\
 & x_1, x_2, \bar{s}_1, s_2, \bar{s}_3, t_1, t_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esercizio F

Tableau iniziale (Fase 1)

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & t_1 & t_3 & \psi & w_B \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
6 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 21 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

forma implicita

$\psi - t_1 - t_3 = 0$

La funzione obiettivo deve essere espressa in termini di var. non di base

Esercizio F

Tableau iniziale (Fase 1)

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & t_1 & t_3 & \psi & w_B \end{array} & \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
6 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 21 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right] &
\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_0 \end{array}
\end{array}
$$

La funzione obiettivo deve essere espressa in termini di var. non di base

$\overline{R0} = R0 + R1 + R3$

	x_1	x_2	$\bar{s}_1$	s_2	$\bar{s}_3$	t_1	t_3	ψ	w_B
$R0$	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
$+R1$	1	-2	-1	0	0	1	0	0	1
$+R3$	6	3	0	0	-1	0	1	0	21
$\overline{R0}$	7	1	-1	0	-1	0	0	1	22

Esercizio F

Tableau iniziale (Fase 1)

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & t_1 & t_3 & \psi & w_B \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 21 \\ \hline 7 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 22 \end{array}\right]\end{array}$$

- Var. non di base: $x_1, x_2, \bar{s}_1, \bar{s}_3$
- Var. di base: $t_1 = 1, s_2 = 5, t_2 = 21$

Esercizio F

Tableau iniziale (Fase 1)

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & t_1 & t_3 & \psi & w_B \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 21 \\ \hline 7 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 22 \end{array}\right]\end{array}$$

Soluzione non ottima

- Var. non di base: $x_1, x_2, \bar{s}_1, \bar{s}_3$
- Var. di base: $t_1 = 1, s_2 = 5, t_2 = 21$

Esercizio F

Cambio di base (Fase 1)

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & t_1 & t_3 & \psi & w_B \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 21 \\ \hline 7 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 22 \end{array}\right]\end{array}$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{1}{1}; -; \frac{21}{6}\right)$$

$$\downarrow$$

x_1 entra in base come prima var. di base

Esercizio F

Cambio di base (Fase 1)

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & t_1 & t_3 & \psi & w_B \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 21 \\ \hline 7 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 22 \end{array}\right]\end{array}$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{1}{1}; -; \frac{21}{6}\right)$$

$$\downarrow$$

x_1 entra in base come prima var. di base

Esercizio F

Cambio di base (Fase 1)

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & t_1 & t_3 & \psi & w_B \end{matrix} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1\;{\color{green}1} & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0\;{\color{green}0} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
6\;{\color{green}0} & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 21 \\ \hline
7\;{\color{green}0} & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 22
\end{array}\right]
\end{array}$$

$\overline{R1} = R1$

$\overline{R2} = R2$

$\overline{R3} = R3 - 6\overline{R1}$

$\overline{R0} = R0 - 7\overline{R1}$

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 1)

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & s_3 & t_1 & t_3 & \psi & w_B \end{matrix} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 15 & 6 & 0 & -1 & -6 & 1 & 0 & 15 \\ \hline
0 & 15 & 6 & 0 & -1 & -7 & 0 & 1 & 15
\end{array}\right]
\end{array}$$

- Var. non di base: $x_2, \bar{s}_1, \bar{s}_3, t_1$
- Var. di base: $x_1 = 1, s_2 = 5, t_3 = 15$

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 1)

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & t_1 & t_3 & \psi & w_B \end{matrix} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 15 & 6 & 0 & -1 & -6 & 1 & 0 & 15 \\ \hline
0 & 15 & 6 & 0 & -1 & -7 & 0 & 1 & 15
\end{array}\right]
\end{array}$$

- Var. non di base: $x_2, \bar{s}_1, \bar{s}_3, t_1$
- Var. di base: $x_1 = 1, s_2 = 5, t_3 = 15$

Soluzione non ottima

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 1)

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & t_1 & t_3 & \psi & w_B \end{matrix} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 15 & 6 & 0 & -1 & -6 & 1 & 0 & 15 \\ \hline
0 & 15 & 6 & 0 & -1 & -7 & 0 & 1 & 15
\end{array}\right]
\end{array}$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(-; \frac{5}{1}; {\color{red}\frac{15}{15}}\right)$$

$$\downarrow$$

x_2 entra in base come terza var. di base

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 1)

x_1	x_2	$\bar{s}_1$	s_2	$\bar{s}_3$	t_1	t_3	ψ	w_B
1	-2 ^{0}	-1	0	0	1	0	0	1
0	1 ^{0}	0	1	0	0	0	0	5
0	15 ^{1}	6	0	-1	-6	1	0	15
0	15 ^{0}	6	0	-1	-7	0	1	15

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(-;\frac{5}{1};\frac{15}{15}\right)$$

x_2 entra in base come terza var. di base

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 1)

x_1	x_2	$\bar{s}_1$	s_2	$\bar{s}_3$	t_1	t_3	ψ	w_B
1	-2 ^{0}	-1	0	0	1	0	0	1
0	1 ^{0}	0	1	0	0	0	0	5
0	15 ^{1}	6	0	-1	-6	1	0	15
0	15 ^{0}	6	0	-1	-7	0	1	15

$$\overline{R3} = \frac{R3}{15}$$

$$\overline{R1} = R1 + 2\overline{R3}$$

$$\overline{R2} = R2 - \overline{R3}$$

$$\overline{R0} = R0 - 15\overline{R3} = R0 - R3$$

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 1)

x_1	x_2	$\bar{s}_1$	s_2	$\bar{s}_3$	t_1	t_3	ψ	w_B
1	0	-1/5	0	-2/15	1/5	2/15	0	3
0	0	-2/5	1	1/15	2/5	-1/15	0	4
0	1	2/5	0	-1/15	-2/5	1/15	0	1
0	0	0	0	0	-1	-1	1	0

- Var. non di base: $\bar{s}_1, \bar{s}_3, t_1, t_3$
- Var. di base: $x_1 = 3, s_2 = 4, x_2 = 1$

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 1)

x_1	x_2	$\bar{s}_1$	s_2	$\bar{s}_3$	t_1	t_3	ψ	w_B
1	0	-1/5	0	-2/15	1/5	2/15	0	3
0	0	-2/5	1	1/15	2/5	-1/15	0	4
0	1	2/5	0	-1/15	-2/5	1/15	0	1
0	0	0	0	0	-1	-1	1	0

- Var. non di base: $\bar{s}_1, \bar{s}_3, t_1, t_3$
- Var. di base: $x_1 = 3, s_2 = 4, x_2 = 1$

Soluzione ottima, con $\psi^* = 0$

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 1)

x_1	x_2	$\bar{s}_1$	s_2	$\bar{s}_3$	t_1	t_3	ψ	w_B
1	0	-1/5	0	-2/15	1/5	2/15	0	3
0	0	-2/5	1	1/15	2/5	-1/15	0	4
0	1	2/5	0	-1/15	-2/5	1/15	0	1
0	0	0	0	0	-1	-1	1	0

- Var. non di base: $\bar{s}_1, \bar{s}_3, t_1, t_3$
- Var. di base: $x_1 = 3, s_2 = 4, x_2 = 1$

Soluzione ottima, con $\psi^* = 0$

Abbiamo individuato una s.b.a.i.

Esercizio F

Tableau iniziale (Fase 2)

x_1	x_2	$\bar{s}_1$	s_2	$\bar{s}_3$	φ	w_B
1	0	-1/5	0	-2/15	0	3
0	0	-2/5	1	1/15	0	4
0	1	2/5	0	-1/15	0	1
2	1	0	0	0	1	0

Esercizio F

Tableau iniziale (Fase 2)

x_1	x_2	$\bar{s}_1$	s_2	$\bar{s}_3$	φ	w_B
1	0	-1/5	0	-2/15	0	3
0	0	-2/5	1	1/15	0	4
0	1	2/5	0	-1/15	0	1
2	1	0	0	0	1	0

La funzione obiettivo deve essere espressa in termini di var. non di base

Esercizio F

Tableau iniziale (Fase 2)

x_1	x_2	$\bar{s}_1$	s_2	$\bar{s}_3$	φ	w_B
1	0	-1/5	0	-2/15	0	3
0	0	-2/5	1	1/15	0	4
0	1	2/5	0	-1/15	0	1
2	1	0	0	0	1	0

La funzione obiettivo deve essere espressa in termini di var. non di base

$$\overline{R0} = R0 - 2R1 - R3$$

Esercizio F

Tableau iniziale (Fase 2)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & \varphi & w_B \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & -1/5 & 0 & -2/15 & 0 & 3 \\
0 & 0 & -2/5 & 1 & 1/15 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 2/5 & 0 & -1/15 & 0 & 1 \\
\hline
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

La funzione obiettivo deve essere espressa in termini di var. non di base

$$\overline{R0} = R0 - 2R1 - R3$$

x_1	x_2	$\bar{s}_1$	s_2	$\bar{s}_3$	φ	w_B
0	0	0	0	1/3	1	-7

Esercizio F

Cambio di base (Fase 2)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & \varphi & w_B \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & -1/5 & 0 & -2/15 & 0 & 3 \\
0 & 0 & -2/5 & 1 & 1/15 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 2/5 & 0 & -1/15 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & -7
\end{array}\right]
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$(-;\, 4 \cdot 15;\, -)$$

$\bar{s}_3$ entra in base come seconda var. di base

Esercizio F

Cambio di base (Fase 2)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & \varphi & w_B \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & -1/5 & 0 & -2/15\ {}^{0} & 0 & 3 \\
0 & 0 & -2/5 & 1 & 1/15\ {}^{1} & 0 & 4 \\
0 & 1 & 2/5 & 0 & -1/15\ {}^{0} & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1/3\ {}^{0} & 1 & -7
\end{array}\right]
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$(-;\, 4 \cdot 15;\, -)$$

$\bar{s}_3$ entra in base come seconda var. di base

Esercizio F

Cambio di base (Fase 2)

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & \varphi & w_B \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & -1/5 & 0 & -2/15\ {}^{0} & 0 & 3 \\
0 & 0 & -2/5 & 1 & 1/15\ {}^{1} & 0 & 4 \\
0 & 1 & 2/5 & 0 & -1/15\ {}^{0} & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1/3\ {}^{0} & 1 & -7
\end{array}\right]
$$

$$\overline{R2} = 15R2$$

$$\overline{R1} = R1 + \frac{2}{15}\overline{R2} = R1 + 2R2$$

$$\overline{R3} = R3 + \frac{1}{15}\overline{R2} = R3 + R2$$

$$\overline{R0} = R0 - \frac{\overline{R2}}{3}$$

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 2)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 15 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & -27 \end{array}\right]$$

- Var. non di base: $\bar{s}_1, s_2$
- Var. di base: $x_1 = 11, \bar{s}_3 = 60, x_2 = 5$

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 2)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 15 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & -27 \end{array}\right]$$

Soluzione non ottima

- Var. non di base: $\bar{s}_1, s_2$
- Var. di base: $x_1 = 11, \bar{s}_3 = 60, x_2 = 5$

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 2)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 15 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & -27 \end{array}\right]$$

Non esiste l'elemento pivot

Esercizio F

Nuovo tableau (Fase 2)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \bar{s}_1 & s_2 & \bar{s}_3 & \varphi & w_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 15 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 1 & -27 \end{array}\right]$$

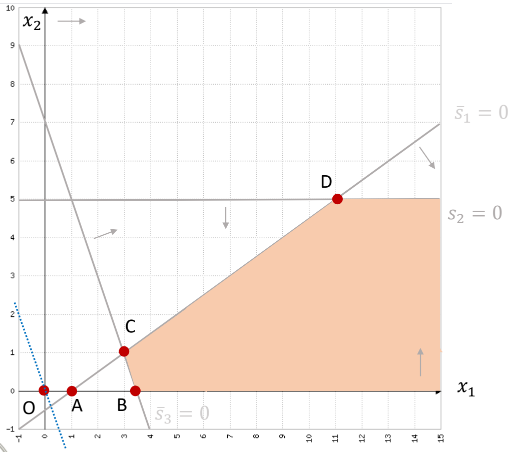
Non esiste l'elemento pivot

$\downarrow$

Il problema risulta illimitato

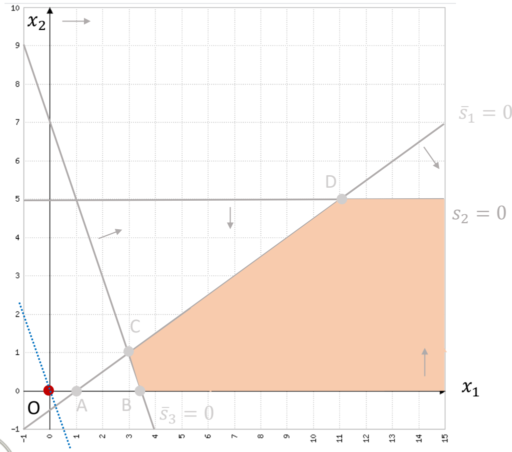
Esercizio F

Interpretazione geometrica



Esercizio F

Interpretazione geometrica

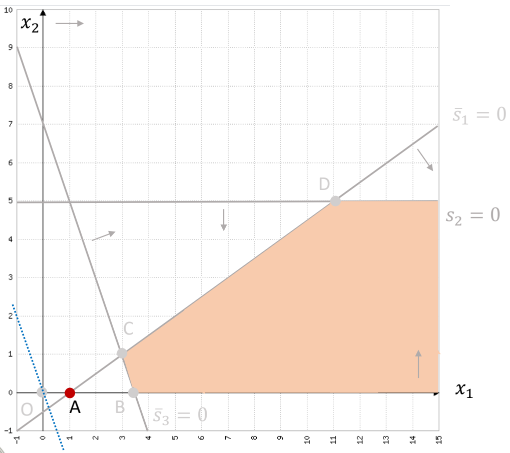


O $(0; 0)$

fase I | punto non ammissibile

Esercizio F

Interpretazione geometrica



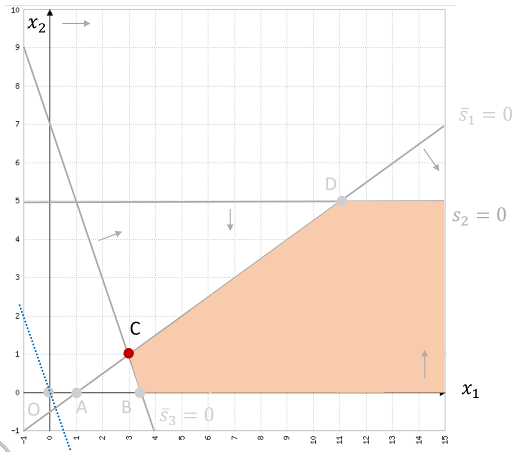
O $(0; 0)$

A $(1; 0)$

siamo riusciti a risolvere l'inammissibilità

Esercizio F

Interpretazione geometrica



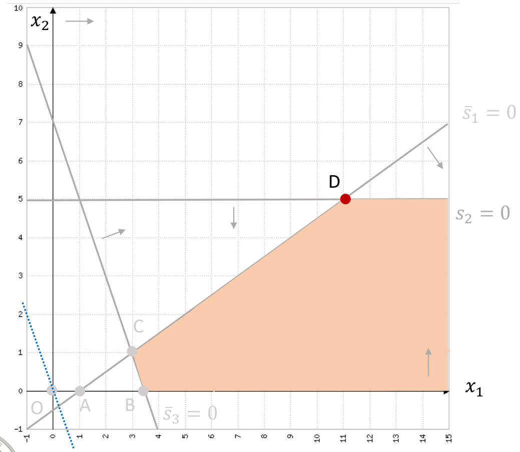
O $(0; 0)$

A $(1; 0)$

C $(3; 1)$

Esercizio F

Interpretazione geometrica



O (0; 0)
↓
A (1; 0)
↓
C (3; 1)
↓
D (11; 5)

arrivati in D non possiamo più spostarci
→ regione illimitata

Takeaway

1. Fondamento dell'algoritmo del simplesso

2. Tipologia di soluzioni esplorate dall'algoritmo

Takeaway

1. Fondamento dell'algoritmo del simplesso

L'algoritmo del simplesso è basato sul Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare

Parte I : Fase di ammissibilità

Parte II : Fase di ottimalità

Takeaway

2. Tipologia di soluzioni esplorate dall'algoritmo

L'algoritmo esplora unicamente soluzioni di base

Takeaway

2. Tipologia di soluzioni esplorate dall'algoritmo

L'algoritmo esplora unicamente soluzioni di base

Fase 1

- A partire dall'origine
- Sequenza di soluzioni di base non ammissibili
- Fino alla s.b.a.i. (se esiste)

s = soluzione di
b = base
a = ammissibile
i = iniziale
o = ottima

Takeaway

2. Tipologia di soluzioni esplorate dall'algoritmo

L'algoritmo esplora unicamente soluzioni di base

Fase 1

- A partire dall'origine
- Sequenza di soluzioni di base non ammissibili
- Fino alla s.b.a.i. (se esiste)

Fase 2

- A partire dalla s.b.a.i.
- Sequenza di soluzioni di base ammissibili
- Fino alla s.b.a.o. (se esiste)

Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2020/2021

RICERCA OPERATIVA

Introduzione a GAMS

Giovanni Micheli

Programma della lezione

- Introduzione
- Installazione
- Modellazione in GAMS
- Esecuzione di un programma

Programma della lezione

- Introduzione
- Installazione
- Modellazione in GAMS
- Esecuzione di un programma

Introduzione

- Cos'è GAMS?
  - ✓ GAMS (General Algebraic Modeling System) è un software sviluppato per la risoluzione di problemi di programmazione matematica del seguente tipo: lineare, intero, misto-intero, non-lineare
  - ✓ Consente di modellare in forma compatta problemi di grandi dimensioni
  - ✓ La versione demo può essere scaricata gratuitamente al link www.gams.com/download/ dopo aver completato la procedura di richiesta di una licenza

Introduzione

- Vantaggi di GAMS?
  - ✓ Linguaggio di programmazione di alto livello, adatto alla formulazione compatta di problemi di grandi dimensioni
  - ✓ Possibilità di apportare modifiche ai modelli in maniera semplice e sicura
  - ✓ Possibilità di formulare equazioni in maniera simile all'usuale notazione matematica
  - ✓ Formulazione indipendente dall'algoritmo risolutivo

Introduzione

- Svantaggi di GAMS?
  - ✓ Gestione estremamente rigida di input e output
  - ✓ Difficoltà di implementazione di procedure non di ottimizzazione, rendendo spesso necessarie integrazioni
    - Matlab
    - R
    - …

Programma della lezione

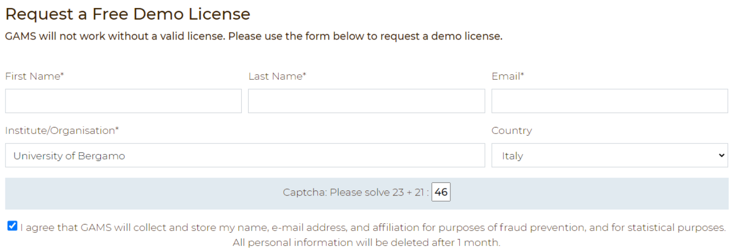
- Introduzione
- Installazione
- Modellazione in GAMS
- Esecuzione di un programma

Installazione

- Procedura di installazione divisa in tre fasi sequenziali:
  1. Richiesta licenza
  2. Creazione licenza
  3. Installazione GAMS
- Tutti i dettagli sull'installazione
  - Windows: slide successive
  - Mac OS X
    - Fasi 1 e 2: slide successive
    - Fase 3: www.gams.com/latest/docs/UG_MAC_INSTALL.html

Installazione

1. Richiesta licenza
   - Collegarsi al link www.gams.com/download/
   - Compilare il form con i propri dati personali e selezionare Submit



   - Attendere la mail con mittente noreply@gams.com contenente il link per la verifica dell'indirizzo di posta fornito (~15 min)

Installazione

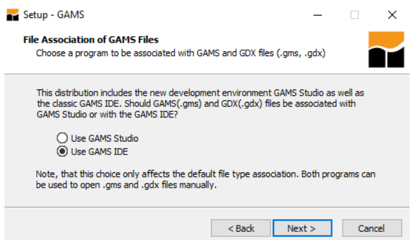
2. Creazione licenza
   - Dopo aver verificato l'indirizzo di posta, attendere una nuova mail con mittente noreply@gams.com contenente il testo della licenza (~1 min)

```
GAMS_Demo_license_for_Giovanni_Micheli_________G201003|0002CO-GEN
University_of_Bergamo,_Italy_____________________________________
1268433000_**GAMS_Demo_license_restricted_to_non-commercial_use**
194229140C_______________________________________________________
DL018875___________________________________C_DEMO________________
giovanni.micheli@unibg.it,_Giovanni_Micheli______________________
```

   - Creare un file di testo in cui copiare la licenza (6 linee)
   - Salvare ad un determinato percorso il file di testo col nome *gamslice.txt*

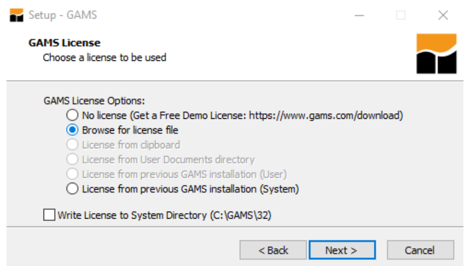
Installazione

3. Installazione GAMS
   - Scaricare al link www.gams.com/download/ la versione di GAMS compatibile con il proprio sistema operativo
   - Nella procedura di installazione prediligere l'utilizzo di *GAMS IDE* rispetto a *GAMS Studio*, se tale scelta è applicabile.



Installazione

3. Installazione GAMS
   - Nella fase di selezione della licenza, scegliere l'opzione *Browse for license file* e selezionare il file *gamslice.txt* precedentemente creato



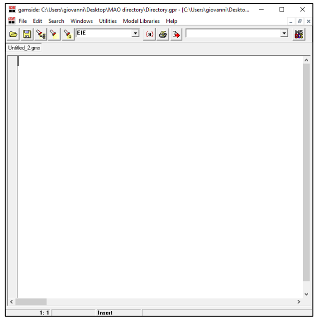
   - Terminare l'installazione

Programma della lezione

- Introduzione
- Installazione
- **Modellazione in GAMS**
- Esecuzione di un programma

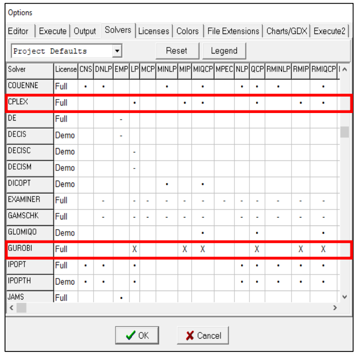
Modellazione in GAMS

- Creazione di un codice GAMS
  - ✓ Per risolvere un problema di ottimizzazione in GAMS è innanzitutto necessario creare un nuovo file (*file/new* o *Ctrl+N)*
  - ✓ Il nuovo file ha estensione *.gms*
  - ✓ Creando un nuovo file, si apre un editor di testo per la scrittura del modello
  - ✓ [*Opzionale*] Creazione di un nuovo progetto (*file/project/new project*)
    - Salvataggio codici GAMS
    - Lettura file input
    - Scrittura file output



Modellazione in GAMS

- Scelta del solutore (solver)
  - ✓ Solutore: software matematico che risolve il problema di ottimizzazione
  - ✓ Possibilità di selezionare solutori specifici per ciascuna tipologia di problema
  - ✓ Selezione del solutore
    - Manuale (*file/options/solver*)
    - Da editor di testo (e.g., option LP = Gurobi ;)



Modellazione in GAMS

- Regole di programmazione
  - ✓ Ogni elemento nel codice deve essere precedentemente dichiarato
  - ✓ Ciascun blocco di comandi deve terminare con ;
  - ✓ Linee di codice sono trasformate in commenti con il simbolo *
  - ✓ Molteplici linee di codice sono convertire in commenti se inserite tra i comandi $ontext e $offtext
  - ✓ Il linguaggio non è case-sensitive
  - ✓ Non è possibile attribuire ad oggetti nomi composti da più parole

Modellazione in GAMS

- Struttura di un programma GAMS
  - ✓ Insiemi e indici
  - ✓ Dati (scalari, vettori e matrici)
  - ✓ Variabili
  - ✓ Vincoli
  - ✓ Modello
  - ✓ Risoluzione del modello
  - ✓ [*Opzionale*] Visualizzazione dei risultati

Modellazione in GAMS

- Esempio – Modello

$$\max z = \sum_{j=1}^{5} c_j \cdot x_j$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{5} A_{ij} \cdot x_j \leq b_i \qquad i = 1,2,3$$

$$f \leq x_j \leq g \qquad j = 1,2,3,4,5$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,3,4,5$$

Vincoli funzionali

Var decisionali
- lower bound
- upper bound

Vincolo di non negatività

Modellazione in GAMS

- Esempio – Dati

$$c = [-1 \;\; 1.5 \;\; 2 \;\; 2.5 \;\; 3]^T$$

$$b = [0.5 \;\; 1 \;\; 1]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$f = [0.1]$$

$$g = [1]$$

Modellazione in GAMS

- Insiemi e indici
  - ✓ Insiemi (e indici) sono dichiarati con il comando Set

keyword — commento — dichiarazione esplicita

```
Sets
  i    indice associato ai vincoli       /1,2,3/
  j    indice associato alle variabili   /1*5/
;
```

terminatore — nomi degli indici — dichiarazione compatta

  - ✓ Creazione di sottoinsiemi $Q \subset J \longrightarrow$ q(j)
  - ✓ La funzione alias consente di riferirsi allo stesso insieme mediante due indici differenti (e.g., alias(i,ii))

Modellazione in GAMS

- Dati - Scalari
  - ✓ Uno scalare è una grandezza che non dipende da alcun indice
  - ✓ Gli scalari sono dichiarati con il comando Scalar

keyword — commento — assegnamento in fase di dichiarazione

```
Scalars
 f   lower bound per le variabili /0.1/
 g   upper bound per le variabili
;
g=1 ;
```

nomi degli scalari

assegnamento successivo alla dichiarazione

Modellazione in GAMS

- Dati - Vettori
  - ✓ Un vettore è una grandezza che dipende da un indice
  - ✓ I vettori sono dichiarati con il comando Parameter

```
Parameters
 c(j) costo associato alla variabile j-esima
 /
 1 -1
 2 1.5
 3 2
 4 2.5
 5 3
 /
 b(i) termine noto del vincolo i-esimo
;
b(i)=1 ;
b('1')=0.5 ;
```

dichiarazione e inizializzazione del vettore *c*

i valori del vettore *b* vengono assegnati a valle della dichiarazione

assegnazione del valore 1 a ciascuna componente del vettore *b*

assegnazione del valore 0.5 alla componente del vettore *b* associata a 1

Modellazione in GAMS

- Dati – Matrici
  - ✓ Una matrice è una grandezza che dipende da due indici
  - ✓ Le matrici sono dichiarate con i comandi
    - Table se contenenti dati in input inseriti da console
    - Parameter se frutto di un processamento

```
Table A(i,j) matrice dei vincoli
    1    2    3    4    5
1  0.5  0.7  0.2  0.4  0.5
2  0.3  0.1  0.4  0.5  0.6
3  0.2  0.5  0.4  0.6  0.5
;

Parameter A_t(j,i) matrice trasposta di A ;
A_t(j,i)=A(i,j) ;
```


Modellazione in GAMS

- Variabili
  - ✓ Le variabili di un problema di ottimizzazione sono dichiarate tramite il comando Variable
  - ✓ È possibile lavorare con diverse tipologie di variabili
    - Free (default): valori reali
    - Positive: valori non-negativi
    - Negative: valori non-positivi
    - Binary: 0/1
    - Integer: valori interi tra 0 e 100 (ma il range è modificabile)

variabile vettoriale con componenti non-negative

```
Variables
 x(j)   variabili decisionali
 z      funzione obiettivo
;
Positive Variables x ;
```

va sempre definita una variabile scalare libera coincidente con la variabile obiettivo

Modellazione in GAMS

- Variabili
  - ✓ Le variabili in GAMS presentano alcune estensioni fondamentali:
    - .lo : controllare il lower bound della variabile
      y.lo = 3 ; ⟶ $y \geq 3$
    - .up : controllare l'upper bound della variabile
      y.up = 3 ; ⟶ $y \leq 3$
    - .fx : fissare il valore della variabile
      y.fx = 3 ; ⟶ $y = 3$
    - .l: accedere all'attuale valore della variabile
      c = y.l ; ⟶ allo scalare *c* viene assegnato il valore corrente attribuito da GAMS alla variabile *y* (a valle della risoluzione del modello)

Modellazione in GAMS

- Vincoli
  - ✓ I vincoli che compongono un modello di ottimizzazione (inclusa la funzione obiettivo) sono dichiarati con il comando Equation
  - ✓ Nella definizione di un'equazione si utilizzano le seguenti espressioni
    - =e= ⟶ =
    - =g= ⟶ ≥
    - =l= ⟶ ≤

Insiemi di appoggio per vincoli vettoriali ⟶ ∀

```
Equations
 obiettivo              funzione obiettivo
 vincoli(i)             vincoli funzionali
 lower_bound(j)         lower bound
 upper_bound(j)         upper bound
;
```

il simbolo .. separa il nome di un'equazione dalla sua formulazione

```
obiettivo..         z =e= sum(j,c(j)*x(j)) ;
vincoli(i)..        sum(j,A(i,j)*x(j)) =l= b(i) ;
lower_bound(j)..    x(j) =g= f ;
upper_bound(j)..    x(j) =l= g ;
```


Modellazione in GAMS

- Vincoli
  - ✓ Nei vincoli (e in generale nell'assegnamento di valori a dati o variabili) i seguenti operatori sono utilizzati:
    - Operazioni elementari
      - \+ somma
      - \- differenza
      - / divisione
      - * prodotto
      - ** elevamento a potenza
    - Operazioni su indici
      - sum operatore di somma, e.g. *sum(j,c(j))* ⟶ $\sum_j c_j$
      - prod operatore di prodotto, e.g. *prod(j,c(j))* ⟶ $\prod_j c_j$
      - smin minimo valore, e.g. *smin(j,c(j))* ⟶ $\min_j c_j$
      - smax massimo valore, e.g. *smax(j,c(j))* ⟶ $\max_j c_j$

Modellazione in GAMS

- Modello
  - ✓ Un modello è un insieme di vincoli (inclusa la funzione obiettivo)
  - ✓ Un modello è dichiarato utilizzando il comando Model e indicando i vincoli inclusi nel modello
  - ✓ È possibile definire più modelli nello stesso codice

Modello_1 include tutti i vincoli dichiarati con Equations

```
Model Modello_1 /all/ ;

Model Modello_2 /obiettivo, vincoli,
                 lower_bound, upper_bound / ;

Model Modello_3 /Modello_1 - lower_bound / ;
```

Modello_3 è ottenuto rimuovendo il vincolo *lower_bound* da *Modello_1*

Modellazione in GAMS

- Modello
  - ✓ Vincoli e variabili inclusi in un modello determinano la classe del modello stesso
    - LP   Modello lineare
    - QCP   Modello quadratico
    - NLP   Modello non lineare
    - MIP   Modello lineare misto-intero
    - MINLP   Modello non-lineare misto-intero

Elevare al quadrato una variabile decisionale

LP, QCP, NLP → Solo variabili continue

MIP, MINLP → Presenza di variabili binarie o intere

Solo operazioni lineari sulle variabili decisionali

Presenza di operazioni non lineari sulle variabili decisionali

Vedremo solo: LP o MIP

Modellazione in GAMS

- Risoluzione del modello
  - ✓ Una volta definito, il modello deve essere risolto dal solutore scelto per la specifica classe di modellazione
  - ✓ La risoluzione avviene tramite il comando Solve, specificando:
    - Nome del modello
    - Classe di modellazione
    - Direzione di ottimizzazione (max o min)
    - Variabile obiettivo

```
Solve Modello_1 using lp maximizing z ;
```

per problemi di minimo: *minimizing*

Modellazione in GAMS

- Visualizzazione dei risultati
  - ✓ Tramite il comando Display è possibile mostrare nel file di output in una sezione apposita le informazioni desiderate relative a
    - Dati di input
    - Variabili e vincoli
    - Risultati della computazione

per accedere al valore corrente delle variabili è necessario utilizzare l'estensione *.l*, che non va invece MAI utilizzata per i dati (scalari, matrici o vettori)

```
Display A, b, x.l, z.l,
Modello_1.solvestat,
Modello_1.modelstat  ;
```

stato del solutore

stato del modello

Programma della lezione

- Introduzione
- Installazione
- Modellazione in GAMS
- **Esecuzione di un programma**

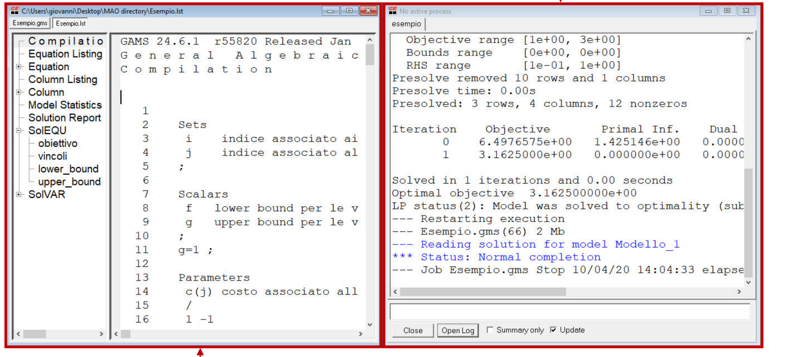
Esecuzione di un programma

- Una volta completato il codice, per poter ottenere i risultati è necessario eseguire il programma
  - ✓ Premendo *F9*
  - ✓ Selezionando *file/run*
  - ✓ Cliccando sull'icona
- Premendo *Shift + F9* è possibile compilare senza eseguire il codice, per verificare la presenza di errori di sintassi.

Esecuzione di un programma

- L'esecuzione genera due file

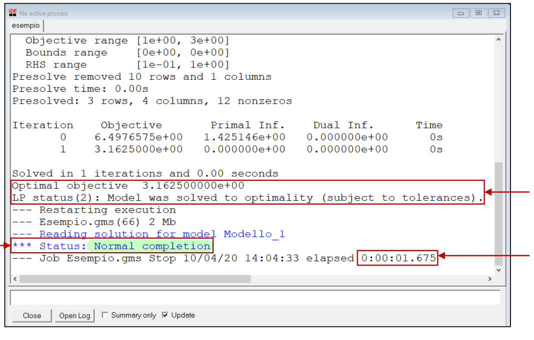
1) File *.log*



2) File *.lst*

Esecuzione di un programma

1) File *.log* : risultati della computazione forniti dal solutore
   - A. Esito della computazione (solver status)
   - B. Tempi totali di esecuzione
   - C. Tipologia di soluzione ottenuta (+ gap di ottimalità se MIP)



A
Compitazione andata a buon fine

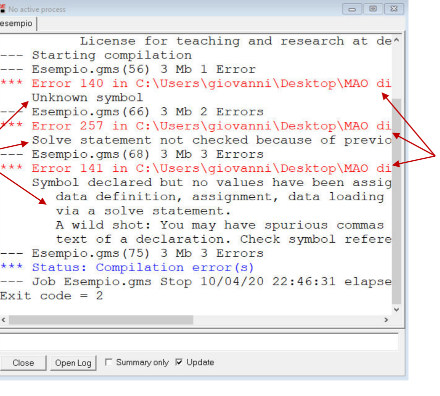
B

C

Esecuzione di un programma

- In caso di errori di compilazione, il file *.log* presenta la seguente struttura

spiegazione degli errori



cliccando 2 volte sul messaggio d'errore viene indicata la posizione nel codice in cui è localizzato il corrispondente errore

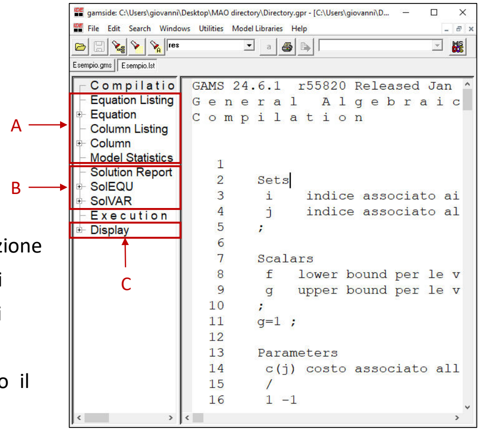
Esecuzione di un programma

2) File *.lst* : soluzione del modello

A. Input
   1. Vincoli
   2. Variabili
   3. Modello

B. Output
   1. Proprietà della soluzione
   2. Soluzione dei vincoli
   3. Valore delle variabili

C. Display (solo se inserito il comando nel codice)

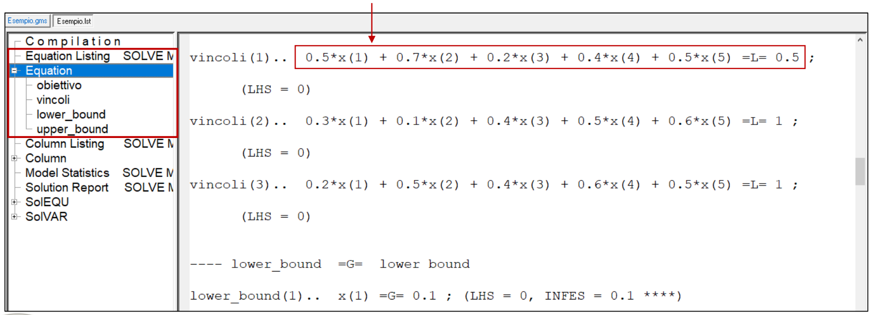


Esecuzione di un programma

A1. Input – Vincoli

- Scrittura in forma esplicita e standard dei vincoli del modello

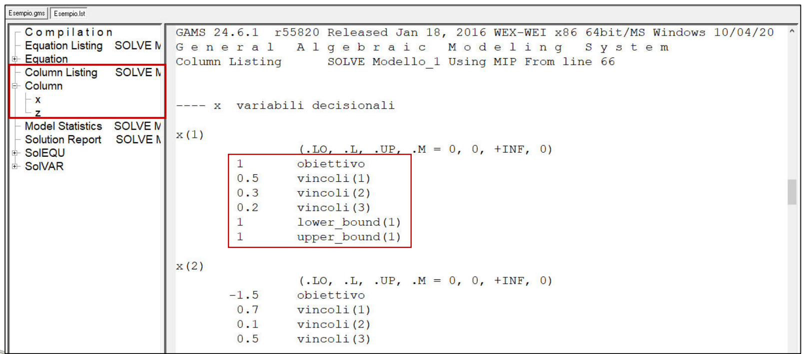
Le variabili decisionali sono separate dai termini noti



Esecuzione di un programma

A2. Input – Variabili

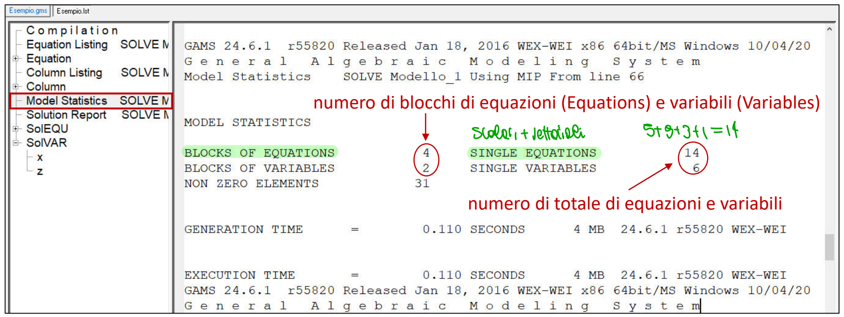
- Indicazione per ogni variabile dei rispettivi coefficienti nei vincoli del modello



Esecuzione di un programma

A3. Input – Modello

- Indicazione della dimensione del modello



Numero di equazioni scritte nel blocco equations: possono essere scalari o vettoriali

Esecuzione di un programma

B1. Output – Proprietà della soluzione

- Gap di ottimalità (solo se MIP)
- Stato del solutore
- Stato del modello

```
Esempio.gms | Esempio.lst

Compilation
Equation Listing    SOLVE M
Equation
Column Listing      SOLVE M
Column
Model Statistics    SOLVE M
Solution Report     SOLVE M
SolEQU
SolVAR
  x
  z

EXECUTION TIME       =        0.110 SECONDS      4 MB  24.6.1 r55820 WEX-WEI
GAMS 24.6.1  r55820 Released Jan 18, 2016 WEX-WEI x86 64bit/MS Windows 10/04/20
G e n e r a l   A l g e b r a i c   M o d e l i n g   S y s t e m
Solution Report     SOLVE Modello_1 Using MIP From line 66


               S O L V E      S U M M A R Y

     MODEL   Modello_1           OBJECTIVE  z
     TYPE    MIP                 DIRECTION  MAXIMIZE
     SOLVER  GUROBI              FROM LINE  66

**** SOLVER STATUS     1 Normal Completion
**** MODEL STATUS      1 Optimal
**** OBJECTIVE VALUE               3.1625

 RESOURCE USAGE, LIMIT          0.003      1000.000
 ITERATION COUNT, LIMIT         1    2000000000
```


Esecuzione di un programma

Gap di ottimalità

- I modelli MIP possono richiedere un enorme impegno di risorse per la determinazione della soluzione ottima
  - Rilassamento continuo (tempo polinomiale) ⇒ algoritmo del simplesso
  - Branch-and bound (tempo esponenziale)
- Di default GAMS nella risoluzione di un modello MIP non determina l'ottimo, ma una soluzione intera (SI) che si trova sufficientemente vicina ad una stima della soluzione ottima (SO)

CASO MIP:
Questo perché se abbiamo tanti dati e il tempo risulta essere esponenziale => soluzione sub-ottima

- Si definisce gap di ottimalità la distanza tra le due soluzioni:
  - ✓ $|SO - SI|$ è il gap assoluto di ottimalità
  - ✓ $\frac{|SO-SI|}{\max(|SO|,|SI|)}$ è il gap relativo di ottimalità
- I gap di ottimalità sono controllabili mediante le estensioni optca e optcr (e.g. *Model_Name.optcr = 0 ;* ⟶ soluzione ottima)

Quando vogliamo la soluzione ottima

Esecuzione di un programma

Stato del solutore

- Informazione numerica relativa all'esito della computazione realizzata dal solutore
- Memorizzato nell'attributo solvestat del modello
- 13 valori, di cui i più comuni
  - ✓ **1. Normal completion**
  - ✓ 2. Iteration interrupt
  - ✓ 3. Resource interrupt
  - ✓ 4. Terminated by solver
  - ✓ 7. Licensing problems
  - ✓ 8. User interrupt
- Consultare la guida disponibile in GAMS (*help/GAMS Users Guide*) per conoscere gli altri valori dell'attributo solvestat

Esecuzione di un programma

Stato del modello

- Informazione numerica relativa alla tipologia di soluzione determinata
- Memorizzato nell'attributo modelstat del modello
- 19 valori, di cui i più comuni
  - ✓ **1. Optimal**
  - ✓ 2. Locally optimal
  - ✓ 3. Unbounded
  - ✓ 4. Infeasible
  - ✓ **8. Integer solution**
  - ✓ 10. Integer infeasible
  - ✓ 13. Error no solution
- Consultare la guida disponibile in GAMS (*help/GAMS Users Guide*) per conoscere gli altri valori dell'attributo modelstat

Esecuzione di un programma

B2. Output – Soluzione dei vincoli

- Informazioni relative al soddisfacimento dei vincoli (espressi in forma standard) nella soluzione corrente

lower e upper bound per i valori assunti dal vincolo

I vincoli vengono riscritti in forma standard

```
Esempio.gms | Esempio.lst

Compilation
  Equation Listing   SOLVE Modello_1 L
  Equation
  Column Listing     SOLVE Modello_1 L
  Column
  Model Statistics   SOLVE Modello_1 L
  Solution Report    SOLVE Modello_1 L
  SolEQU
    obiettivo
    vincoli
    lower_bound
    upper_bound
  SolVAR
```

```
         LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

1         -INF     0.500     0.500     6.250
2         -INF     0.663     1.000       .
3         -INF     0.715     1.000       .

---- EQU lower_bound  lower bound

         LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

1        0.100     0.100     +INF     -4.125
2        0.100     0.100     +INF     -2.875
3        0.100     1.000     +INF       .
4        0.100     0.325     +INF       .
5        0.100     0.100     +INF     -0.125
```

Var di base = 0

c_i in valore assoluto, nel tableau sarebbero negativi

coefficiente di costo relativo della variabile slack/surplus associata al vincolo (i.e. prezzo ombra)

livello con cui è soddisfatto il vincolo nella soluzione corrente

Esecuzione di un programma

B3. Output – Valori delle variabili

- Informazioni relative al valore attribuito alle variabili decisionali a valle della risoluzione del modello matematico

lower e upper bound per le variabili decisionali

```
Esempio.gms | Esempio.lst

Compilation
  Equation Listing   SOLVE Modello_1 L
  Equation
  Column Listing     SOLVE Modello_1 L
  Column
  Model Statistics   SOLVE Modello_1 L
  Solution Report    SOLVE Modello_1 L
  SolEQU
  SolVAR
    x
    z
```

```
---- VAR x  variabili decisionali

         LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

1          .       0.100     +INF       .
2          .       0.100     +INF       .
3          .       1.000     +INF       .
4          .       0.325     +INF       .
5          .       0.100     +INF       .

                   LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR z          -INF     3.162     +INF       .

  z  funzione obiettivo
```

coefficiente di costo relativo della variabile

valore "ottimo" della variabile decisionale

Esecuzione di un programma

C. Display

- Informazioni specificate nel file *.gms* tramite il comando Display

```
Esempio.gms | Esempio.lst

Compilation
  Equation Listing   SOLVE M
  Equation
  Column Listing     SOLVE M
  Column
  Model Statistics   SOLVE M
  Solution Report    SOLVE M
  SolEQU
  SolVAR
Execution
  Display
    A
    b
    x
    z
    Modello_1
    Modello_1
```

```
----     68 PARAMETER A  matrice dei vincoli

            1           2           3           4           5

1       0.500       0.700       0.200       0.400       0.500
2       0.300       0.100       0.400       0.500       0.600
3       0.200       0.500       0.400       0.600       0.500


----     68 PARAMETER b  termine noto del vincolo i-esimo

1 0.500,    2 1.000,    3 1.000


----     68 VARIABLE x.L  variabili decisionali

1 0.100,    2 0.100,    3 1.000,    4 0.325,    5 0.100


----     68 VARIABLE z.L                  =        3.162  funzione obiettivo
            MODEL Modello_1.SolveStat     =        1.000
            MODEL Modello_1.ModelStat     =        1.000
```


NB:

Valore ottimo

Il puntino indica lo 0 questo perché abbiamo settato la variabile come positive => $x \geq 0$

Ultima riga del tableau che leggiamo, i coefficienti ci ma in valore assoluto

Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2023/2024

MODELLI E ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Analisi di Sensitività

Giovanni Micheli

Cos'è l'analisi di sensitività?

- Analisi finalizzata a valutare la robustezza di una soluzione, determinando gli effetti sui risultati di un modello indotti da modifiche nei valori dei parametri

  - ✓ Variazione della disponibilità di una risorsa
  - ✓ Variazione del profitto unitario di una variabile decisionale
  - ✓ Introduzione di un nuovo vincolo
  - ✓ Introduzione di una nuova variabile decisionale
  - ✓ Variazione di un coefficiente della matrice dei vincoli

$$\max\ \omega = \underline{p}^T\,\underline{x} - \gamma$$

s. a $\qquad A\underline{x} \leq \underline{b}$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\max\ \omega = \underline{p}^T\,\underline{x} - \gamma \qquad\qquad \min\ \varphi = \underline{c}^T\,\underline{x} + \gamma$$

$$\text{s. a} \quad A\underline{x} \le \underline{b} \qquad \Rightarrow \qquad \text{s. a} \quad A\underline{x} + I\underline{s} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \ge \underline{0} \qquad\qquad \underline{x}, \underline{s} \ge \underline{0}$$

Variabili decisionali / slack

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\
\begin{array}{c}\text{Tableau} \\ \text{Iniziale}\end{array} & \left[\begin{array}{cccc} A & I & \underline{0} & \underline{b} \\ \hline -\underline{c}^T & \underline{0}^T & 1 & \gamma \end{array}\right]
\end{array}
$$

Variabili decisionali / slack

$$\text{Tableau Iniziale}\quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} A & I & \underline{0} & \underline{b} \\ \hline -\underline{c}^T & \underline{0}^T & 1 & \gamma \end{array}\right] \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Tableau Finale}\quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} B^{-1}A & B^{-1} & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \hline \underline{c}_B^T B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{array}\right] \end{array}$$

Variabili decisionali / slack

Tableau Iniziale

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc} A & I & \underline{0} & \underline{b} \\ \hline -\underline{c}^T & \underline{0}^T & 1 & \gamma \end{array}\right]
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

Tableau Finale

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \underline{x} & \underline{s} & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc} B^{-1}A & B^{-1} & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \hline \underline{c}_B^T B^{-1}A - \underline{c}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{array}\right]
\end{array}
$$

Introduzione

Variabili di base / non di base

Tableau Iniziale

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{v}_b & \underline{v}_{nb} & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} B & N & \underline{0} & \underline{b} \\ \hline -\underline{c}_B^T & -\underline{c}_N^T & 1 & \gamma \end{array}\right] \end{array}$$

Variabili di base / non di base

$$
\text{Tableau Iniziale} \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
\underline{v}_b & \underline{v}_{nb} & \varphi & \underline{w}_B
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
B & N & \underline{0} & \underline{b} \\
\hline
-\underline{c}_B^T & -\underline{c}_N^T & 1 & \gamma
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\text{Tableau Finale} \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
\underline{v}_b & \underline{v}_{nb} & \varphi & \underline{w}_B
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
I & B^{-1}N & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\
\hline
\underline{0}^T & \underline{c}_B^T B^{-1}N - \underline{c}_N^T & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Variabili di base / non di base

Tableau Iniziale

$$\begin{array}{cccc} \underline{v}_b & \underline{v}_{nb} & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} B & N & \underline{0} & \underline{b} \\ \hline -\underline{c}_B^T & -\underline{c}_N^T & 1 & \gamma \end{array}\right]$$

Tableau Finale

$$\begin{array}{cccc} \underline{v}_b & \underline{v}_{nb} & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} I & B^{-1}N & \underline{0} & B^{-1}\underline{b} \\ \hline \underline{0}^T & \underline{c}_B^T B^{-1}N - \underline{c}_N^T & 1 & \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \gamma \end{array}\right]$$

Esercizio 1

- Variabili decisionali
  - ✓ x_1: quantità di tessuto A prodotta
  - ✓ x_2: quantità di tessuto B prodotta
  - ✓ x_3: quantità di tessuto C prodotta

Esercizio 1

- Variabili decisionali
  - ✓ x_1: quantità di tessuto A prodotta
  - ✓ x_2: quantità di tessuto B prodotta
  - ✓ x_3: quantità di tessuto C prodotta

- Risorse
  - ✓ Poliestere (s_1) $50\ x_1 + 50\ x_2 + 100\ x_3 \leq 8000$

Esercizio 1

- Variabili decisionali
  - ✓ x_1: quantità di tessuto A prodotta
  - ✓ x_2: quantità di tessuto B prodotta
  - ✓ x_3: quantità di tessuto C prodotta

- Risorse
  - ✓ Poliestere (s_1) $\quad 50\ x_1 + 50\ x_2 + 100\ x_3 \leq 8000$
  - ✓ Lana (s_2) $\quad 200\ x_1 + 150\ x_2 + 500\ x_3 \leq 27000$

Esercizio 1

- Variabili decisionali
  - ✓ x_1: quantità di tessuto A prodotta
  - ✓ x_2: quantità di tessuto B prodotta
  - ✓ x_3: quantità di tessuto C prodotta

- Risorse
  - ✓ Poliestere (s_1) $\quad 50\ x_1 + 50\ x_2 + 100\ x_3 \leq 8000$
  - ✓ Lana (s_2) $\quad 200\ x_1 + 150\ x_2 + 500\ x_3 \leq 27000$
  - ✓ Seta (s_3) $\quad 100\ x_1 + 50\ x_2 + 200\ x_3 \leq 12000$

Esercizio 1

- Variabili decisionali
  - ✓ x_1: quantità di tessuto A prodotta
  - ✓ x_2: quantità di tessuto B prodotta
  - ✓ x_3: quantità di tessuto C prodotta

- Risorse
  - ✓ Poliestere (s_1) $\quad 50\ x_1 + 50\ x_2 + 100\ x_3 \leq 8000$
  - ✓ Lana (s_2) $\quad 200\ x_1 + 150\ x_2 + 500\ x_3 \leq 27000$
  - ✓ Seta (s_3) $\quad 100\ x_1 + 50\ x_2 + 200\ x_3 \leq 12000$

- Profitti $\quad \omega = 26\,x_1 + 16x_2 + 56x_3$

Esercizio 1

$$\min \ \varphi = -26\,x_1 - 16x_2 - 56x_3$$

$$\max \ \omega = 26\,x_1 + 16x_2 + 56x_3$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{s.a.} & 50\ x_1 & + & 50\ x_2 & + & 100\ x_3 & \leq & 8000 \quad (s_1) \\
 & 200\ x_1 & + & 150\ x_2 & + & 500\ x_3 & \leq & 27000 \quad (s_2) \\
 & 100\ x_1 & + & 50\ x_2 & + & 200\ x_3 & \leq & 12000 \quad (s_3) \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

A. Descrizione della soluzione

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & -3300 \end{array}\right]$$

- Var. non di base: x_3, s_2, s_3
- Var. di base: $s_1 = 500, x_2 = 60, x_1 = 90$
- $\omega^* = -\varphi^* = 3300$ €
- $B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & x_2 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 50 & 50 \\ 0 & 150 & 200 \\ 0 & 50 & 100 \end{bmatrix} \end{array}$

A. Descrizione della soluzione

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & -3300
\end{array}\right]
$$

- Var. non di base: x_3, s_2, s_3
- Var. di base: $s_1 = 500, x_2 = 60, x_1 = 90$
- $\omega^* = -\varphi^* = 3300$ €
- $B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & x_2 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 50 & 50 \\ 0 & 150 & 200 \\ 0 & 50 & 100 \end{bmatrix} \end{array}$

La lana e la seta sono risorse scarse, mentre il poliestere è una risorsa in eccesso

Esercizio 1

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_3 = b_3 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_3\delta$$

Esercizio 1

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_3 = b_3 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_3\delta$$

$$\underline{\tilde{w}}_B = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_3\delta$$

Esercizio 1

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_3 = b_3 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_3 \delta$$

$$\underline{\tilde{w}}_B = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_3 \delta$$

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & \boxed{1/2} & 0 & \boxed{500} \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & \boxed{-2/50} & 0 & \boxed{60} \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & \boxed{3/100} & 0 & \boxed{90} \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & -3300
\end{array}\right]$$

Esercizio 1

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_3 = b_3 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_3\delta$$

$$\underline{\tilde{w}}_B = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_3\delta = \begin{bmatrix} 500 \\ 60 \\ 90 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2/50 \\ 3/100 \end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix} 500 + \delta/2 \\ 60 - 2\delta/50 \\ 90 + 3\delta/100 \end{bmatrix} \geq \underline{0}$$

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & \boxed{1/2} & 0 & \boxed{500} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & -3300 \end{array}\right]$$

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_3 = b_3 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e_3}\delta$$

$$\underline{\widetilde{w}_B} = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e_3}\delta = \begin{bmatrix} 500 \\ 60 \\ 90 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2/50 \\ 3/100 \end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix} 500 + \delta/2 \\ 60 - 2\delta/50 \\ 90 + 3\delta/100 \end{bmatrix} \geq \underline{0}$$

$$\begin{cases} \delta \geq -1000 \\ \delta \leq 1500 \\ \delta \geq -3000 \end{cases} \rightarrow \ -1000 \leq \delta \leq 1500 \ \rightarrow \ \boldsymbol{11000 \leq \tilde{b}_3 \leq 13500}$$

Esercizio 1

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_3 = b_3 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_3\delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_3\delta$$

Esercizio 1

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_3 = b_3 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_3\delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_3\delta$$

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & \boxed{-7/50} & 1 & \boxed{-3300} \end{array}\right]$$

Esercizio 1

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_3 = b_3 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_3\delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_3\delta = -3300 - \frac{7}{50}\delta$$

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & \boxed{-7/50} & 1 & \boxed{-3300}
\end{array}\right]$$

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_3 = b_3 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_3\delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_3\delta = -3300 - \frac{7}{50}\delta$$

$\delta = -1000$: $\tilde{\varphi} = -3160$, $\tilde{\omega} = 3160$

$\delta = 1500$: $\tilde{\varphi} = -3510$, $\tilde{\omega} = 3510$

$$\mathbf{3160 \le \tilde{\omega} \le 3510}$$

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1\delta$$

Esercizio 1

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1 \delta$$

$$\underline{\tilde{w}}_B = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_1 \delta$$

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & -50 & \boxed{1} & -1/2 & 1/2 & 0 & \boxed{500} \\
0 & 1 & 2 & \boxed{0} & 1/50 & -2/50 & 0 & \boxed{60} \\
1 & 0 & 1 & \boxed{0} & -1/100 & 3/100 & 0 & \boxed{90} \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & -3300
\end{array}\right]$$

Esercizio 1

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1 \delta$$

$$\underline{\tilde{w}}_B = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_1\delta = \begin{bmatrix} 500 \\ 60 \\ 90 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta = \begin{bmatrix} 500 + \delta \\ 60 \\ 90 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & -3300 \end{array}\right] \end{array}$$

Esercizio 1

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1\delta$$

$$\underline{\widetilde{w}_B} = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_1\delta = \begin{bmatrix} 500 \\ 60 \\ 90 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix} 500+\delta \\ 60 \\ 90 \end{bmatrix}$$

$$\delta = -250$$

$$\underline{\widetilde{w}_B} = \begin{bmatrix} 250 \\ 60 \\ 90 \end{bmatrix} \geq \underline{0} \longrightarrow$$

La riduzione di 250 g della disponibilità di poliestere non comporta la perdita dell’ammissibilità della base attuale

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1 \delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_1 \delta$$

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\ \hline 0 & 0 & -2 & \boxed{0} & -3/50 & -7/50 & 1 & \boxed{-3300} \end{array}\right]$$

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1 \delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_1 \delta = -3300$$

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\ \hline 0 & 0 & -2 & \boxed{0} & -3/50 & -7/50 & 1 & \boxed{-3300} \end{array}\right]$$

Esercizio 1

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1 \delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e}_1 \delta = -3300$$

La riduzione di poliestere non comporta alcuna variazione dei profitti (risorsa in eccesso)

Esercizio 1

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_1 = p_1 + \delta \quad \rightarrow \quad \tilde{c}_1 = c_1 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

x_1 è la terza variabile di base

Esercizio 1

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_1 = p_1 + \delta \quad \rightarrow \quad \tilde{c}_1 = c_1 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

$$\underline{\tilde{r}}_N^T = \underline{\tilde{c}}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \left(\underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta\right) B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T - \delta \underline{e}_3^T B^{-1} N$$

Esercizio 1

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_1 = p_1 + \delta \;\rightarrow\; \tilde{c}_1 = c_1 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

$$\underline{\tilde{r}}_N^T = \underline{\tilde{c}}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \left(\underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta\right) B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T - \delta \underline{e}_3^T B^{-1} N$$

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{-1/100 \quad 3/100} & & 0 & 90 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & \boxed{-3/50 \quad -7/50} & & 1 & -3300 \end{array}\right]$$

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_1 = p_1 + \delta \quad \rightarrow \quad \tilde{c}_1 = c_1 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

$$\underline{\tilde{r}}_N^T = \underline{\tilde{c}}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \left(\underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta\right) B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T - \delta \underline{e}_3^T B^{-1} N =$$

$$= \left[-2; -\frac{3}{50}; -\frac{7}{50}\right] - \delta \left[1; -\frac{1}{100}; \frac{3}{100}\right] = \left[-2 - \delta; \frac{-6+\delta}{100}; \frac{-14-3\delta}{100}\right] \leq \underline{0}^T$$

$$\begin{cases} \delta \geq -2 \\ \delta \leq 6 \\ \delta \geq -14/3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad -2 \leq \delta \leq 6 \rightarrow \mathbf{24 \leq \tilde{p}_1 \leq 32}$$

Esercizio 1

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_1 = p_1 + \delta \;\; \rightarrow \;\; \tilde{c}_1 = c_1 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{\tilde{c}}_B^T B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} - \underline{e}_3^T B^{-1} \underline{b} \delta$$

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B
\end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & \boxed{90} \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & \boxed{-3300}
\end{array}\right]$$

Esercizio 1

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_1 = p_1 + \delta \ \rightarrow \ \tilde{c}_1 = c_1 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{\tilde{c}}_B^T B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} - \underline{e}_3^T B^{-1} \underline{b} \delta = -3300 - 90\delta$$

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \\
\end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & \boxed{90} \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & \boxed{-3300}
\end{array}\right]$$

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_1 = p_1 + \delta \quad \rightarrow \quad \tilde{c}_1 = c_1 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{\tilde{c}}_B^T B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} - \underline{e}_3^T B^{-1} \underline{b} \delta = -3300 - 90\delta$$

$\delta = -2$

$\tilde{\varphi} = -3120$
$\tilde{\omega} = 3120$

$\delta = 6$

$\tilde{\varphi} = -3840$
$\tilde{\omega} = 3840$

$$\mathbf{3120 \leq \tilde{\omega} \leq 3840}$$

Esercizio 1

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$\tilde{p}_3 = p_3 + \delta \;\; \rightarrow \;\; \tilde{c}_3 = c_3 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_N^T = \underline{c}_N^T - \underline{e}_1^T \delta$$

Consideriamo x_3 la prima variabile non di base

Esercizio 1

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$\tilde{p}_3 = p_3 + \delta \;\; \rightarrow \;\; \tilde{c}_3 = c_3 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_N^T = \underline{c}_N^T - \underline{e}_1^T \delta$$

$$\underline{\tilde{r}}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{\tilde{c}}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T + \underline{e}_1^T \delta$$

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$\tilde{p}_3 = p_3 + \delta \;\; \rightarrow \;\; \tilde{c}_3 = c_3 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_N^T = \underline{c}_N^T - \underline{e}_1^T \delta$$

$$\underline{\tilde{r}}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{\tilde{c}}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T + \underline{e}_1^T \delta$$

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B
\end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & \boxed{-3/50 \quad -7/50} & & 1 & -3300
\end{array}\right]$$

Esercizio 1

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$\tilde{p}_3 = p_3 + \delta \;\rightarrow\; \tilde{c}_3 = c_3 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_N^T = \underline{c}_N^T - \underline{e}_1^T \delta$$

$$\underline{\tilde{r}}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{\tilde{c}}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T + \underline{e}_1^T \delta = \left[-2; -\frac{3}{50}; -\frac{7}{50}\right] + [1; 0; 0]\delta$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w}_B$
0	0	-50	1	-1/2	1/2	0	500
0	1	2	0	1/50	-2/50	0	60
1	0	1	0	-1/100	3/100	0	90
0	0	$\boxed{-2}$	0	$\boxed{-3/50}$	$\boxed{-7/50}$	1	-3300

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$\tilde{p}_3 = p_3 + \delta \;\rightarrow\; \tilde{c}_3 = c_3 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_N^T = \underline{c}_N^T - \underline{e}_1^T \delta$$

$$\underline{\tilde{r}}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{\tilde{c}}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T + \underline{e}_1^T \delta = \left[-2; -\frac{3}{50}; -\frac{7}{50}\right] + [1; 0; 0]\delta =$$

$$= \left[-2 + \delta; -\frac{3}{50}; -\frac{7}{50}\right]$$

Varia solamente il coefficiente di costo relativo della variabile non di base considerata

Esercizio 1

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$\tilde{p}_3 = p_3 + \delta \;\; \rightarrow \;\; \tilde{c}_3 = c_3 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_N^T = \underline{c}_N^T - \underline{e}_1^T \delta$$

$$\underline{\tilde{r}}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{\tilde{c}}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T + \underline{e}_1^T \delta = \left[-2; -\frac{3}{50}; -\frac{7}{50}\right] + [1;0;0]\delta =$$

$$= \left[-2+\delta; -\frac{3}{50}; -\frac{7}{50}\right] = \left[3; -\frac{3}{50}; -\frac{7}{50}\right]$$

Perdita di ottimalità

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\
\hline
0 & 0 & 3 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & -3300
\end{array}\right]
$$

Il valore della funzione obiettivo non varia al variare del profitto unitario di una variabile non di base

Esercizio 1

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\
\hline
0 & 0 & 3 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & -3300
\end{array}\right]
\end{array}
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(- \,;\, \frac{60}{2} \,;\, \frac{90}{1}\right)$$

$$\downarrow$$

x_3 entra in base come seconda var. di base

Esercizio 1

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & -50 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\
\hline
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & -3300
\end{array}\right]
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(-\,;\frac{60}{2};\frac{90}{1}\right)$$

$$\downarrow$$

x_3 entra in base come seconda var. di base

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & -50 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\
\hline
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & -3300
\end{array}\right]
$$

$$\overline{R2} = \frac{R2}{2}$$

$$\overline{R1} = R1 + 50\overline{R2}$$

$$\overline{R3} = R3 - \overline{R2}$$

$$\overline{R0} = R0 - 3\overline{R2}$$

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$
$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 25 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 2000 \\
0 & 1/2 & 1 & 0 & 1/100 & -1/50 & 0 & 30 \\
1 & -1/2 & 0 & 0 & -1/50 & 1/20 & 0 & 60 \\
\hline
0 & -3/2 & 0 & 0 & -9/100 & -2/25 & 1 & -3390
\end{array}\right]
$$

- Var. non di base: x_2, s_2, s_3
- Var. di base: $s_1 = 2000, x_3 = 30, x_1 = 60$
- $\omega^* = -\varphi^* = \boxed{3390\ €}$ → Crescita dei profitti
- $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} s_1 & x_3 & x_1 \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 1 & 100 & 50 \\ 0 & 500 & 200 \\ 0 & 200 & 100 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esercizio 1

C2. Variazione del profitto unitario di una variabile non di base

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 25 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 2000 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1/100 & -1/50 & 0 & 30 \\ 1 & -1/2 & 0 & 0 & -1/50 & 1/20 & 0 & 60 \\ \hline 0 & -3/2 & 0 & 0 & -9/100 & -2/25 & 1 & -3390 \end{array}\right] \end{array}$$

- Var. non di base: x_2, s_2, s_3
- Var. di base: $s_1 = 2000, x_3 = 30, x_1 = 60$
- $\omega^* = -\varphi^* = 3390$ €
- $$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 100 & 50 \\ 0 & 500 & 200 \\ 0 & 200 & 100 \end{bmatrix} \end{array}$$

La lana e la seta sono risorse scarse, mentre il poliestere è una risorsa in eccesso

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 200 \quad \rightarrow \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_4 = 200$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 0 & 90 \\
2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 200 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 0 & 1 & -3300
\end{array}\right]
\end{array}$$

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 200 \quad \rightarrow \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_4 = 200$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 0 & 90 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 200 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 0 & 1 & -3300 \end{array}\right]$$

Il vincolo deve essere espresso nelle variabili non di base:

$$\overline{R4} = R4 - 2R3 - R2$$

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B}
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 0 & 90 \\
2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 200 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 0 & 1 & -3300
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r|ccccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \\
R4 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 200 \\
-2R3 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1/50 & -3/50 & 0 & 0 & -180 \\
-R2 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1/50 & 2/50 & 0 & 0 & -60 \\
\hline
\overline{R4} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1/50 & 1 & 0 & -40
\end{array}
$$

Esercizio 1

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 0 & 90 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1/50 & 1 & 0 & -40 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 0 & 1 & -3300
\end{array}\right]
$$

L'introduzione del nuovo vincolo comporta la perdita dell'ammissibilità della base iniziale

Esercizio 1

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 0 & 90 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1/50 & 1 & 0 & -40 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 0 & 1 & -3300
\end{array}\right]
$$

L'introduzione del nuovo vincolo comporta la perdita dell'ammissibilità della base iniziale

↓

Applicazione dell'algoritmo del simplesso duale (s_4 uscirà dalla base)

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 0 & 90 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1/50 & 1 & 0 & -40 \\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 0 & 1 & -3300
\end{array}\right]
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{-2}{-2}; -; \frac{-7}{50}(-50)\right)$$

$$\downarrow$$

x_3 entra in base come quarta var. di base

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B}
\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & -50 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 500\\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 0 & 60\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 0 & 90\\
0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1/50 & 1 & 0 & -40\\
\hline
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -3/50 & -7/50 & 0 & 1 & -3300
\end{array}\right]
\end{array}
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{-2}{-2};-;\frac{-7}{50}(-50)\right)$$

$\downarrow$

x_3 entra in base come quarta var. di base

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B}
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & -50 & {\color{green}0} & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & {\color{green}0} & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & {\color{green}0} & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 0 & 90 \\
0 & 0 & -2 & {\color{green}1} & 0 & 0 & -1/50 & 1 & 0 & -40 \\
\hline
0 & 0 & -2 & {\color{green}0} & 0 & -3/50 & -7/50 & 0 & 1 & -3300
\end{array}\right]
$$

$$\overline{R4} = \frac{R4}{-2}$$

$$\overline{R1} = R1 + 50\overline{R4}$$

$$\overline{R2} = R2 - 2\overline{R4} = R2 + R4$$

$$\overline{R3} = R3 - \overline{R4}$$

$$\overline{R0} = R0 + 2\overline{R4} = R0 - R4$$

Esercizio 1

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -25 & 0 & 1500 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/50 & -3/50 & 1 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1/100 & 1/50 & 1/2 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/100 & -1/2 & 0 & 20 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -3/50 & -3/25 & -1 & 1 & -3260 \end{array}\right]$$

- Var. non di base: s_2, s_3, s_4
- Var. di base: $s_1 = 1500, x_2 = 20, x_1 = 70, x_3 = 20$
- $\omega^* = -\varphi^* = \boxed{3260\ €} \longrightarrow$ Riduzione dei profitti
- $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} s_1 & x_2 & x_1 & x_3 \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 1 & 50 & 50 & 100 \\ 0 & 150 & 200 & 50 \\ 0 & 50 & 100 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esercizio 1

E. Introduzione di una nuova variabile decisionale

$$\underline{a}_4 = \begin{bmatrix} 50 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$r_4 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{a}_4 - c_4$$

Esercizio 1

E. Introduzione di una nuova variabile decisionale

$$\underline{a}_4 = \begin{bmatrix} 50 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$r_4 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{a}_4 - c_4$$

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & -3/50 & -7/50 & 1 & -3300 \end{array}\right]$$

Esercizio 1

E. Introduzione di una nuova variabile decisionale

$$\underline{a}_4 = \begin{bmatrix} 50 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

La produzione è conveniente se comporta una perdita di ottimalità

$$r_4 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{a}_4 - c_4 = \left[0; -\frac{3}{50}; -\frac{7}{50}\right] \begin{bmatrix} 50 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix} - c_4 = -18 - 14 - c_4 \geq 0$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w}_B$
0	0	-50	1	-1/2	1/2	0	500
0	1	2	0	1/50	-2/50	0	60
1	0	1	0	-1/100	3/100	0	90
0	0	-2	0	-3/50	-7/50	1	-3300

Esercizio 1

E. Introduzione di una nuova variabile decisionale

$$\underline{a}_4 = \begin{bmatrix} 50 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$r_4 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{a}_4 - c_4 = \left[0; -\frac{3}{50}; -\frac{7}{50}\right] \begin{bmatrix} 50 \\ 300 \\ 100 \end{bmatrix} - c_4 = -18 - 14 - c_4 \geq 0$$

$$c_4 \leq -32$$

$$p_4 \geq 32$$

F. Variazione di un coefficiente dei vincoli

$$\tilde{a}_{2,3} = a_{2,3} + \delta$$

$$\underline{\tilde{a}}_3 = \underline{a}_3 + \underline{e}_2\delta$$

$$\tilde{r}_3 = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{a}}_3 - c_3 = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{a}_3 - c_3 + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_2\delta$$

Esercizio 1

F. Variazione di un coefficiente dei vincoli

$$\tilde{a}_{2,3} = a_{2,3} + \delta$$

$$\underline{\tilde{a}}_3 = \underline{a}_3 + \underline{e}_2\delta$$

$$\tilde{r}_3 = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{a}}_3 - c_3 = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{a}_3 - c_3 + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_2\delta = -2 - \frac{3}{50}\delta$$

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & \boxed{-3/50} & -7/50 & 1 & -3300
\end{array}\right]$$

Esercizio 1

F. Variazione di un coefficiente dei vincoli

$$\tilde{a}_{2,3} = a_{2,3} + \delta$$

$$\underline{\tilde{a}}_3 = \underline{a}_3 + \underline{e}_2\delta$$

$$\tilde{r}_3 = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{a}}_3 - c_3 = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{a}_3 - c_3 + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_2\delta = -2 - \frac{3}{50}\delta$$

$$\delta = -0.05 \cdot 500 = -25$$

$$\tilde{r}_3 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \leq 0$$

F. Variazione di un coefficiente dei vincoli

$$\tilde{a}_{2,3} = a_{2,3} + \delta$$

$$\underline{\tilde{a}}_3 = \underline{a}_3 + \underline{e}_2\delta$$

$$\tilde{r}_3 = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{a}}_3 - c_3 = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{a}_3 - c_3 + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_2\delta = -2 - \frac{3}{50}\delta$$

$$\delta = -0.05 \cdot 500 = -25$$

$$\tilde{r}_3 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \leq 0$$

La riduzione della quantità di lana utilizzata nel tessuto C non comporta variazioni dei piani di produzione

F. Variazione di un coefficiente dei vincoli

Lo stesso esercizio poteva essere risolto senza introdurre il parametro δ:

$$\tilde{a}_{2,3} = 0.95 \cdot 500 = 475$$

$$\underline{\tilde{a}}_3 = \begin{bmatrix} 100 \\ 475 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{r}_3 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{\tilde{a}}_3 - c_3$$

F. Variazione di un coefficiente dei vincoli

Lo stesso esercizio poteva essere risolto senza introdurre il parametro δ:

$$\tilde{a}_{2,3} = 0.95 \cdot 500 = 475$$

$$\underline{\tilde{a}}_3 = \begin{bmatrix} 100 \\ 475 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{r}_3 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{\tilde{a}}_3 - c_3$$

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & -50 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/50 & -2/50 & 0 & 60 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1/100 & 3/100 & 0 & 90 \\ \hline 0 & 0 & -2 & \boxed{0 \quad -3/50 \quad -7/50} & & & 1 & -3300 \end{array}\right]$$

F. Variazione di un coefficiente dei vincoli

Lo stesso esercizio poteva essere risolto senza introdurre il parametro δ:

$$\tilde{a}_{2,3} = 0.95 \cdot 500 = 475$$

$$\underline{\tilde{a}}_3 = \begin{bmatrix} 100 \\ 475 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{r}_3 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{\tilde{a}}_3 - c_3 = \left[0; -\frac{3}{50}; -\frac{7}{50}\right] \begin{bmatrix} 100 \\ 475 \\ 200 \end{bmatrix} - (-56) = -\frac{57}{2} - 28 + 56 = -\frac{1}{2}$$

Otteniamo lo stesso coefficiente di costo relativo

Esercizio 2

- Variabili decisionali
  - ✓ x_A: quantità di borse di tipo A prodotte
  - ✓ x_B: quantità di borse di tipo B prodotte

Esercizio 2

- Variabili decisionali
  - ✓ x_A: quantità di borse di tipo A prodotte
  - ✓ x_B: quantità di borse di tipo B prodotte

- Risorse
  - ✓ Pelle (s_1) $\quad 2 \ x_A + \ 2 \ x_B \leq 800$

Esercizio 2

- Variabili decisionali
  - ✓ x_A: quantità di borse di tipo A prodotte
  - ✓ x_B: quantità di borse di tipo B prodotte

- Risorse
  - ✓ Pelle (s_1) $\quad 2\ x_A + 2\ x_B \leq 800$
  - ✓ Borchie (s_2) $\quad x_A \leq 200$

Esercizio 2

- Variabili decisionali
  - ✓ x_A: quantità di borse di tipo A prodotte
  - ✓ x_B: quantità di borse di tipo B prodotte

- Risorse
  - ✓ Pelle (s_1) $\quad 2x_A + 2x_B \leq 800$
  - ✓ Borchie (s_2) $\quad x_A \leq 200$
  - ✓ Ore lavorazione (s_3) $\quad 2x_A + x_B \leq 500$

Esercizio 2

- Variabili decisionali
  - ✓ x_A: quantità di borse di tipo A prodotte
  - ✓ x_B: quantità di borse di tipo B prodotte

- Risorse
  - ✓ Pelle (s_1) $\quad 2x_A + 2x_B \leq 800$
  - ✓ Borchie (s_2) $\quad x_A \leq 200$
  - ✓ Ore lavorazione (s_3) $\quad 2x_A + x_B \leq 500$

- Profitti $\quad \omega = 30\,x_A + 20x_B$

Esercizio 2

$$\min\ \varphi = -30\,x_A - 20x_B$$

$$\max\ \omega = 30\,x_A + 20x_B$$

$$\begin{array}{lrcrcll}
\text{s.a.} & 2\,x_A & + & 2\,x_B & \leq & 800 & (s_1) \\
 & x_A & & & \leq & 200 & (s_2) \\
 & 2\,x_A & + & x_B & \leq & 500 & (s_3) \\
 & & & x_A, x_B & \geq & 0 &
\end{array}$$

Esercizio 2

A. Descrizione della soluzione

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & w_B \\
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\
\hline
0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 1 & -9000
\end{array}\right]
$$

- Var. non di base: s_1, s_3
- Var. di base: $s_2 = 100, x_A = 100, x_B = 300$
- $\omega^* = -\varphi^* = 9000$ €
- $B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_2 & x_A & x_B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

Esercizio 2

A. Descrizione della soluzione

$$\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ \hline 0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 1 & -9000 \end{array}\right]$$

- Var. non di base: s_1, s_3
- Var. di base: $s_2 = 100, x_A = 100, x_B = 300$
- $\omega^* = -\varphi^* = 9000$ €
- $B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_2 & x_A & x_B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

La pelle e le ore di lavorazione sono risorse scarse, mentre le borchie sono una risorsa in eccesso

Esercizio 2

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1\delta$$

$$\underline{\tilde{w}}_B = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_1\delta$$

Esercizio 2

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1 \delta$$

$$\underline{\tilde{w}}_B = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_1 \delta$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & \boxed{1/2} & 1 & -1 & 0 & \boxed{100} \\ 1 & 0 & \boxed{-1/2} & 0 & 1 & 0 & \boxed{100} \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & \boxed{300} \\ \hline 0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 1 & -9000 \end{array}\right]$$

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1 \delta$$

$$\underline{\tilde{w}}_B = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_1\delta = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 300 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix} 100 + \delta/2 \\ 100 - \delta/2 \\ 300 + \delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ \hline 0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 1 & -9000 \end{array}\right] \end{array}$$

Esercizio 2

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1\delta$$

$$\underline{\tilde{w}}_B = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_1\delta = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 300 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix} 100 + \delta/2 \\ 100 - \delta/2 \\ 300 + \delta \end{bmatrix}$$

$$\delta = 100$$

$$\underline{\tilde{w}}_B = \begin{bmatrix} 150 \\ 50 \\ 400 \end{bmatrix} \geq \underline{0} \longrightarrow$$

L'aumento di 100 unità di pelle non comporta la perdita dell'ammissibilità della base attuale

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1\delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_1\delta$$

Esercizio 2

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1\delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_1\delta$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{-5} & 0 & -10 & 1 & \boxed{-9000} \end{array}\right] \end{array}$$

Esercizio 2

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1\delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_1\delta = -9000 - 5\delta = -9500$$

$$\begin{array}{ccccccc}
x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{-5} & 0 & -10 & 1 & \boxed{-9000}
\end{array}\right]$$

B1. Variazione della disponibilità di una risorsa scarsa

$$\tilde{b}_1 = b_1 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_1\delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{e}_1\delta = -9000 - 5\delta = -9500$$

L'aumento di pelle comporta una variazione (nello specifico un amento) dei profitti (risorsa scarsa)

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_2 = b_2 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e}_2\delta$$

$$\underline{\tilde{w}}_B = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e}_2\delta$$

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_2 = b_2 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e_2}\delta$$

$$\underline{\tilde{w}_B} = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e_2}\delta$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ \hline 0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 1 & -9000 \end{array}\right]$$

Esercizio 2

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_2 = b_2 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e_2}\delta$$

$$\underline{\widetilde{w}_B} = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e_2}\delta = \begin{bmatrix}100\\100\\300\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix}100+\delta\\100\\300\end{bmatrix} \geq \underline{0}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ \hline 0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 1 & -9000 \end{array}\right] \end{array}$$

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_2 = b_2 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e_2}\delta$$

$$\underline{\widetilde{w}_B} = B^{-1}\underline{\tilde{b}} = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\underline{e_2}\delta = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 300 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\delta = \begin{bmatrix} 100+\delta \\ 100 \\ 300 \end{bmatrix} \geq \underline{0}$$

$$\delta \geq -100 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\tilde{b}_2 \geq 100}$$

Esercizio 2

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_2 = b_2 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e_2}\delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e_2}\delta$$

Esercizio 2

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_2 = b_2 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e_2}\delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c_B^T} B^{-1} \underline{\tilde{b}} = \underline{c_B^T} B^{-1} \underline{b} + \underline{c_B^T} B^{-1} \underline{e_2}\delta$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\
\hline
0 & 0 & -5 & \boxed{0} & -10 & 1 & \boxed{-9000}
\end{array}\right]
\end{array}$$

Esercizio 2

B2. Variazione della disponibilità di una risorsa in eccesso

$$\tilde{b}_2 = b_2 + \delta$$

$$\underline{\tilde{b}} = \underline{b} + \underline{e_2}\delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{\tilde{b}} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} + \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{e_2} \delta = -9000 \longrightarrow \text{Profitti invariati}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ \hline 0 & 0 & -5 & \boxed{0} & -10 & 1 & \boxed{-9000} \end{array}\right]$$

Esercizio 2

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_2 = p_2 + \delta \quad \rightarrow \quad \tilde{c}_2 = c_2 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

x_B è la terza variabile di base

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_2 = p_2 + \delta \quad \rightarrow \quad \tilde{c}_2 = c_2 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

$$\underline{\tilde{r}}_N^T = \underline{\tilde{c}}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \left(\underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta\right) B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T - \delta \underline{e}_3^T B^{-1} N$$

Esercizio 2

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_2 = p_2 + \delta \;\; \rightarrow \;\; \tilde{c}_2 = c_2 - \delta$$

$$\tilde{\underline{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

$$\tilde{\underline{r}}_N^T = \tilde{\underline{c}}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \left(\underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta\right) B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T - \delta \underline{e}_3^T B^{-1} N$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & \boxed{1} & 0 & \boxed{-1} & 0 & 300 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{-5} & 0 & \boxed{-10} & 1 & -9000
\end{array}\right]
\end{array}$$

Esercizio 2

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_2 = p_2 + \delta \quad \rightarrow \quad \tilde{c}_2 = c_2 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

$$\underline{\tilde{r}}_N^T = \underline{\tilde{c}}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \left(\underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta\right) B^{-1} N - \underline{c}_N^T = \underline{c}_B^T B^{-1} N - \underline{c}_N^T - \delta \underline{e}_3^T B^{-1} N =$$

$$= [-5; -10] - \delta[1; -1] = [-5 - \delta; -10 + \delta]$$

$$\delta = -6$$

$$\underline{\tilde{r}}_N^T = [1; -16]$$

Perdita di ottimalità

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_2 = p_2 + \delta \;\rightarrow\; \tilde{c}_2 = c_2 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{\tilde{c}}_B^T B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} - \underline{e}_3^T B^{-1} \underline{b}\,\delta$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & \boxed{300} \\ \hline 0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 1 & \boxed{-9000} \end{array}\right]$$

Esercizio 2

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\tilde{p}_2 = p_2 + \delta \;\rightarrow\; \tilde{c}_2 = c_2 - \delta$$

$$\underline{\tilde{c}}_B^T = \underline{c}_B^T - \underline{e}_3^T \delta$$

$$\tilde{\varphi} = \underline{\tilde{c}}_B^T B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} - \underline{e}_3^T B^{-1} \underline{b} \delta = -9000 - 300\delta = -7200$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & \boxed{300} \\ \hline 0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 1 & \boxed{-9000} \end{array}\right]$$

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -16 & 1 & -7200 \end{array}\right]$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{100}{1/2}; -; \frac{300}{1}\right)$$

$$\downarrow$$

s_1 entra in base come prima var. di base

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_A & x_B & s_1 & & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 1/2 & {\color{green}1} & 1 & -1 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & {\color{green}0} & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & {\color{green}0} & 0 & -1 & 0 & 300 \\
\hline
0 & 0 & 1 & {\color{green}0} & 0 & -16 & 1 & -7200
\end{array}\right]
$$

- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{100}{1/2}; -; \frac{300}{1}\right)$$

$$\downarrow$$

s_1 entra in base come prima var. di base

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_A & x_B & s_1 & & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 1/2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 300 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -16 & 1 & -7200
\end{array}\right]
$$

$$\overline{R1} = 2R1$$

$$\overline{R2} = R2 + R1$$

$$\overline{R3} = R3 - \overline{R1}$$

$$\overline{R0} = R0 - \overline{R1}$$

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 200 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 \\
0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 100 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -2 & -14 & 1 & -7400
\end{bmatrix}
$$

- Var. non di base: s_2, s_3
- Var. di base: $s_1 = 200, x_A = 200, x_B = 100$
- $\omega^* = -\varphi^* = \boxed{7400\ €}$ → Diminuzione dei profitti
- $B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & x_A & x_B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

C1. Variazione del profitto unitario di una variabile di base

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\hline
0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 200 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 \\
0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 100 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -2 & -14 & 1 & -7400
\end{array}
$$

- Var. non di base: s_2, s_3
- Var. di base: $s_1 = 200, x_A = 200, x_B = 100$
- $\omega^* = -\varphi^* = 7400$ €
- $B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & x_A & x_B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

Le ore di lavorazione e le borchie sono risorse scarse, mentre la pelle è una risorsa in eccesso

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$x_A + x_B \leq \gamma \;\rightarrow\; x_A + x_B + s_4 = \gamma$$

$$\begin{array}{cccccccc}
x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 300 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma \\
\hline
0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 0 & 1 & -9000
\end{array}\right]$$

Esercizio 2

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$x_A + x_B \leq \gamma \;\; \rightarrow \;\; x_A + x_B + s_4 = \gamma$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 300 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma \\
\hline
0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 0 & 1 & -9000
\end{array}\right]
\end{array}$$

Il vincolo deve essere espresso nelle variabili non di base:

$$\overline{R4} = R4 - R2 - R3$$

Esercizio 2

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 300 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma \\
\hline
0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 0 & 1 & -9000
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \\
R4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma \\
-R2 & -1 & 0 & 1/2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -100 \\
-R3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -300 \\
\hline
\overline{R4} & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma\text{-}400
\end{array}
$$

Esercizio 2

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & w_B \end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100\\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100\\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 300\\
0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma\text{-}400\\
\hline
0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 0 & 1 & -9000
\end{array}\right]
\end{array}
$$

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & w_B
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 300 \\
0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma\text{-}400 \\
\hline
0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 0 & 1 & -9000
\end{array}\right]
$$

- Se $\gamma \geq 400$ il nuovo vincolo risulta ridondante e non modifica la composizione della base ottima

D. Introduzione di un nuovo vincolo

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 300 \\
0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma\text{-}400 \\
\hline
0 & 0 & -5 & 0 & -10 & 0 & 1 & -9000
\end{array}\right]
$$

- Se $\gamma \geq 400$ il nuovo vincolo risulta ridondante e non modifica la composizione della base ottima
- Se $\gamma < 400$ il nuovo vincolo comporta l'inammissibilità dell'attuale soluzione, richiedendo l'applicazione dell'algoritmo del simplesso duale

Esercizio 2

D. Introduzione di un nuovo vincolo

In alternativa il quesito poteva essere affrontato semplicemente considerando i valori delle variabili decisionali nella soluzione corrente:

$$x_A + x_B \leq \gamma$$

$$x_A^* + x_B^* = 100 + 300 = 400$$

- Se $\gamma \geq 400$ il nuovo vincolo non modifica la soluzione attuale
- Se $\gamma < 400$ il nuovo vincolo rende inammissibile l'attuale soluzione, richiedendo l'applicazione dell'algoritmo del simplesso duale

Esercizio 2

E. Introduzione di una nuova variabile decisionale

$$\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{a}_3 - c_3$$

E. Introduzione di una nuova variabile decisionale

$$\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{a}_3 - c_3$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\
1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{-5} & \boxed{0} & \boxed{-10} & 1 & -9000
\end{array}\right]
\end{array}$$

Esercizio 2

E. Introduzione di una nuova variabile decisionale

$$\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Conservazione della base

$$r_3 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{a}_3 - c_3 = [-5; 0; -10] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - c_3 = -5 - 20 - c_3 \leq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{-5 \quad 0 \quad -10} & & & 1 & -9000 \end{array}\right]$$

Esercizio 2

E. Introduzione di una nuova variabile decisionale

$$\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{a}_3 - c_3 = [-5; 0; -10] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - c_3 = -5 - 20 - c_3 \leq 0$$

$$c_3 \geq -25$$

$$p_3 \leq 25$$

F. Variazione di un coefficiente dei vincoli

Come calcolato in precedenza, per $p_3 = 20$ ($c_3 = -20$) la composizione della base attuale non varia e x_C è variabile non di base

$$\underline{\tilde{a}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+\delta \end{bmatrix}$$

$$\tilde{r}_3 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{\tilde{a}}_3 - c_3$$

F. Variazione di un coefficiente dei vincoli

Come calcolato in precedenza, per $p_3 = 20$ ($c_3 = -20$) la composizione della base attuale non varia e x_C è variabile non di base

$$\underline{\tilde{a}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+\delta \end{bmatrix}$$

$$\tilde{r}_3 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{\tilde{a}}_3 - c_3$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w}_B \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{-5 \quad 0 \quad -10} & & & 1 & -9000 \end{array}\right]$$

Esercizio 2

F. Variazione di un coefficiente dei vincoli

Come calcolato in precedenza, per $p_3 = 20$ ($c_3 = -20$) la composizione della base attuale non varia e x_C è variabile non di base

$$\underline{\tilde{a}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+\delta \end{bmatrix}$$

$$\tilde{r}_3 = \underline{c}_B^T B^{-1} \underline{\tilde{a}}_3 - c_3 = [-5; 0; -10] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+\delta \end{bmatrix} - (-20) = -5 - 20 - 10\delta + 20 =$$

$$= -5 - 10\delta \leq 0$$

$$\downarrow$$

$$\delta \geq -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \tilde{a}_{3,3} \geq \frac{3}{2}$$

- Impatto delle variazioni dei parametri sul tableau ottimo

Variazione	**Rischio**	**Operazioni sul tableau**
Disponibilità risorse	Ammissibilità	Simplesso duale
Profitti unitari	Ottimalità	Simplesso primale
Nuovo vincolo	Ammissibilità	Simplesso duale
Nuova variabile	Ottimalità	Simplesso primale
Matrice dei vincoli	Ottimalità	Simplesso primale

Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2023/2024

MODELLI E ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Dualità + PLI

Giovanni Micheli

Teoria della Dualità

Cos'è la Dualità?

- Associazione ad ogni problema di programmazione lineare di un altro problema di programmazione lineare (problema duale) definito sullo stesso insieme di dati.

- Dal problema duale è possibile dedurre importanti proprietà sul problema originario (problema primale):
  - ✓ Costruire stime del valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale;
  - ✓ Determinare la soluzione ottima del problema primale.

$$\max\ \omega = \underline{p}^T\,\underline{x} + \gamma \qquad\qquad \min\ \varphi_D = \underline{b}^T\,\underline{y} + \gamma$$

$$\text{s. a} \quad A\underline{x} \leq \underline{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{s. a} \quad A^T\underline{y} \geq \underline{p}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad\qquad \underline{y} \geq \underline{0}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m,n}\ ;\ \underline{p}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n\ ;\ \underline{b}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m\ ;\ \gamma \in \mathbb{R}$$

Introduzione

$$\max\ \omega = \underline{p}^T \underline{x} + \gamma \qquad\qquad \min\ \varphi_D = \underline{b}^T \underline{y} + \gamma$$

$$\text{s. a} \quad A\underline{x} \le \underline{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{s. a} \quad A^T\underline{y} \ge \underline{p}$$

$$\underline{x} \ge \underline{0} \qquad\qquad \underline{y} \ge \underline{0}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m,n}\ ;\ \underline{p}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n\ ;\ \underline{b}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m\ ;\ \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\omega + \underline{x}^T\, \underline{z} + \underline{s}^T\, \underline{y} = \varphi_D$$

Esercizio A

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max\ \omega = & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & & \\
\text{s.a.} & 4\,x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & -\,2\,x_1 & + & 3\,x_2 & \geq & 2 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

Esercizio A

$$\begin{array}{lrcrcrl}
\max\ \omega = & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & & \\
\text{s.a.} & 4\,x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
& \boxed{-2\,x_1} & \boxed{+} & \boxed{3\,x_2} & \boxed{\geq} & \boxed{2} \\
& x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & x_2 & \in & \mathbb{R}
\end{array}$$

Il vincolo di maggioranza andrà trasformato in minoranza

Esercizio A

$$
\begin{array}{llcrcrcr}
\max\ \omega = & 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & & \\
\text{s.a.} & 4\,x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & \leq & -2 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

Esercizio A

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max\ \omega = & 3\ x_1 & + & 2\ x_2 & & \\
\text{s.a.} & 4\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & 2\ x_1 & - & 3\ x_2 & \leq & -2 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & \boxed{x_2 \in \mathbb{R}} & &
\end{array}
$$

La variabile libera dovrà essere sostituita da variabili non-negative

Esercizio A

$$
\begin{array}{llcccccccc}
\max\ \omega = & 3\ x_1 & + & 2\ x_2^+ & - & 2\ x_2^- & & \\
\text{s.a.} & 4\ x_1 & + & x_2^+ & - & x_2^- & \leq & 6 \\
 & 2\ x_1 & - & 3\ x_2^+ & + & 3\ x_2^- & \leq & -2 \\
 & x_1, & & x_2^+, & & x_2^- & \geq & 0
\end{array}
$$

$$\boxed{x_2 = x_2^+ - x_2^-}$$

Esercizio A

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max\ \omega = & 3\ x_1 & + & 2\ x_2^+ & - & 2\ x_2^- & & & \\
\text{s.a.} & 4\ x_1 & + & x_2^+ & - & x_2^- & \leq & 6 & \color{blue}{y_1} \\
 & 2\ x_1 & - & 3\ x_2^+ & + & 3\ x_2^- & \leq & -2 & \color{blue}{\bar{y}_2} \\
 & x_1, & & x_2^+, & & x_2^- & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$\min\ \varphi_D = \quad y_1 \qquad \bar{y}_2$$

$$\text{s.a.} \quad y_1 \qquad \bar{y}_2 \geq \qquad x_1$$

$$y_1 \qquad \bar{y}_2 \geq \qquad x_2^+$$

$$y_1 \qquad \bar{y}_2 \geq \qquad x_2^-$$

$$y_1, \qquad \bar{y}_2 \geq \quad 0$$

Esercizio A

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrl}
\max\ \omega = & 3\ x_1 & + & 2\ x_2^+ & - & 2\ x_2^- & & & & \\
\text{s.a.} & 4\ x_1 & + & x_2^+ & - & x_2^- & \leq & 6 & & {\color{blue}y_1} \\
 & 2\ x_1 & - & 3\ x_2^+ & + & 3\ x_2^- & \leq & -2 & & {\color{blue}\bar{y}_2} \\
 & x_1, & & x_2^+, & & x_2^- & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Esercizio A

$$\min \ \varphi_D = \boxed{6\ y_1 \ - \ 2\ \bar{y}_2}$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{s.a.} & y_1 \qquad \bar{y}_2 & \geq & x_1 \\
& y_1 \qquad \bar{y}_2 & \geq & x_2^+ \\
& y_1 \qquad \bar{y}_2 & \geq & x_2^- \\
& y_1, \qquad \bar{y}_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esercizio A

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max \omega = & \boxed{3\,x_1 & + & 2\,x_2^+ & - & 2\,x_2^-} & & \\
\text{s.a.} & 4\,x_1 & + & x_2^+ & - & x_2^- & \leq & 6 \quad {\color{blue} y_1} \\
 & 2\,x_1 & - & 3\,x_2^+ & + & 3\,x_2^- & \leq & -2 \quad {\color{blue} \bar{y}_2} \\
 & x_1, & & x_2^+, & & x_2^- & \geq & 0
\end{array}
$$

$$\min\ \varphi_D = 6\,y_1 - 2\,\bar{y}_2$$

$$\begin{array}{llll}
\text{s.a.} & y_1 \quad \bar{y}_2 \geq & \boxed{\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ -2 \end{array}} & \begin{array}{l} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \end{array} \\
& y_1 \quad \bar{y}_2 \geq & & \\
& y_1 \quad \bar{y}_2 \geq & & \\
& y_1, \quad \bar{y}_2 \geq & 0 &
\end{array}$$

Esercizio A

$$
\begin{array}{llcccccccccc}
\max\ \omega = & 3 & x_1 & + & 2 & x_2^+ & - & 2 & x_2^- & & & \\
\text{s.a.} & \boxed{\begin{matrix}4 \\ \\ 2\end{matrix}} & \begin{matrix}x_1 \\ \\ x_1\end{matrix} & \begin{matrix}+ \\ \\ -\end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ 3\end{matrix} & \begin{matrix}x_2^+ \\ \\ x_2^+\end{matrix} & \begin{matrix}- \\ \\ +\end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ 3\end{matrix} & \begin{matrix}x_2^- \\ \\ x_2^-\end{matrix} & \begin{matrix}\leq \\ \\ \leq\end{matrix} & \begin{matrix}6 \\ \\ -2\end{matrix} & \begin{matrix}{\color{blue}y_1} \\ \\ {\color{blue}\bar{y}_2}\end{matrix} \\
 & & x_1, & & & x_2^+, & & & x_2^- & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio A

$$
\begin{array}{llcl}
\min\ \varphi_D = & 6\ y_1 - 2\ \bar{y}_2 & & \\
\text{s.a.} & \boxed{4\ y_1 + 2\ \bar{y}_2} \geq & 3 & x_1 \\
& y_1 \qquad\quad \bar{y}_2 \geq & 2 & x_2^+ \\
& y_1 \qquad\quad \bar{y}_2 \geq & -2 & x_2^- \\
& y_1, \qquad\quad \bar{y}_2 \geq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio A

$$
\begin{array}{lrlrlrlcrl}
\max\ \omega = & 3 & x_1 & + & 2\ x_2^+ & - & 2\ x_2^- & & & \\
\text{s.a.} & 4 & x_1 & + & x_2^+ & - & x_2^- & \leq & 6 & \color{blue}{y_1} \\
 & 2 & x_1 & - & 3\ x_2^+ & + & 3\ x_2^- & \leq & -2 & \color{blue}{\bar{y}_2} \\
 & & x_1, & & x_2^+, & & x_2^- & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcrcl}
\min \ \varphi_D = & 6\,y_1 & - & 2\,\bar{y}_2 & & & \\
\text{s.a.} & 4\,y_1 & + & 2\,\bar{y}_2 & \geq & 3 & x_1 \\
& \boxed{y_1 \ - \ 3\,\bar{y}_2} & & & \geq & 2 & x_2^+ \\
& y_1 & & \bar{y}_2 & \geq & -2 & x_2^- \\
& y_1, & & \bar{y}_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio A

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max\ \omega = & 3\ x_1 & + & 2\ x_2^+ & - & 2\ x_2^- & & & \\
\text{s.a.} & 4\ x_1 & + & x_2^+ & - & x_2^- & \leq & 6 & y_1 \\
 & 2\ x_1 & - & 3\ x_2^+ & + & 3\ x_2^- & \leq & -2 & \bar{y}_2 \\
 & x_1, & & x_2^+, & & x_2^- & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\min\ \varphi_D = & 6\,y_1 & - & 2\,\bar{y}_2 & & & \\
\text{s.a.} & 4\,y_1 & + & 2\,\bar{y}_2 & \geq & 3 & \color{red}{x_1} \\
 & y_1 & - & 3\,\bar{y}_2 & \geq & 2 & \color{red}{x_2^+} \\
 & \boxed{-\,y_1 + 3\,\bar{y}_2} & & & \geq & -2 & \color{red}{x_2^-} \\
 & y_1, & & \bar{y}_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrl}
\min\ \varphi_D = & 6\,y_1 - 2\,\bar{y}_2 & & \\
\text{s.a.} & 4\,y_1 + 2\,\bar{y}_2 & \geq & 3 \\
 & y_1 - 3\,\bar{y}_2 & \geq & 2 \\
 & \boxed{-\,y_1 + 3\,\bar{y}_2 \geq -2} & & \\
 & y_1,\ \bar{y}_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Cambiamo il verso del vincolo

Esercizio A

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\min\ \varphi_D = & 6\ y_1 & - & 2\ \bar{y}_2 & & \\
\text{s.a.} & 4\ y_1 & + & 2\ \bar{y}_2 & \geq & 3 \\
 & y_1 & - & 3\ \bar{y}_2 & \geq & 2 \\
 & y_1 & - & 3\ \bar{y}_2 & \leq & 2 \\
 & y_1, & & \bar{y}_2 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\min \ \varphi_D = 6\,y_1 - 2\,\bar{y}_2$$

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{s.a.} & 4\,y_1 & + & 2\,\bar{y}_2 & \geq & 3 \\
 & \boxed{y_1} & \boxed{-} & \boxed{3\,\bar{y}_2} & \boxed{\geq} & \boxed{2} \\
 & y_1 & - & 3\,\bar{y}_2 & \leq & 2 \\
 & y_1, & & \bar{y}_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Equivalente ad una uguaglianza

Esercizio A

$$
\begin{array}{llll}
\min \ \varphi_D = & 6\, y_1 & - & 2\, \bar{y}_2 & & \\
\text{s.a.} & 4\, y_1 & + & 2\, \bar{y}_2 & \geq & 3 \\
 & y_1 & - & 3\, \bar{y}_2 & = & 2 \\
 & y_1, & & \bar{y}_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esercizio A

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\min\ \varphi_D = & 6\ y_1 & - & 2\ \bar{y}_2 & & \\
\text{s.a.} & 4\ y_1 & + & 2\ \bar{y}_2 & \geq & 3 \\
 & y_1 & - & 3\ \bar{y}_2 & = & 2 \\
 & y_1, & & \bar{y}_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$y_2 = -\bar{y}_2 \ \ (y_2 \leq 0)$$

Esercizio A

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\min\ \varphi_D = & 6\ y_1 & + & 2\ y_2 & & \\
\text{s.a.} & 4\ y_1 & - & 2\ y_2 & \geq & 3 \\
 & y_1 & + & 3\ y_2 & = & 2 \\
 & y_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & y_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

Esercizio A

$$
\begin{aligned}
\max\ \omega = {} & 3\,x_1 + 2\,x_2 \\
\text{s.a.}\quad & 4\,x_1 + x_2 \le 6 \\
& -2\,x_1 + 3\,x_2 \ge 2 \\
& x_1 \ge 0 \\
& x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min\ \varphi_D = {} & 6\,y_1 + 2\,y_2 \\
\text{s.a.}\quad & 4\,y_1 - 2\,y_2 \ge 3 \\
& y_1 + 3\,y_2 = 2 \\
& y_1 \ge 0 \\
& y_2 \le 0
\end{aligned}
$$

Esercizio A

$$\begin{array}{llcl}
\max \ \omega = 3\,x_1 + 2\,x_2 & & & \\
\text{s.a.} & 4\,x_1 + x_2 & \leq & 6 \\
 & -2\,x_1 + 3\,x_2 & \geq & 2 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_2 & \in & \mathbb{R}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
\min \ \varphi_D = 6\,y_1 + 2\,y_2 & & & \\
\text{s.a.} & 4\,y_1 - 2\,y_2 & \geq & 3 \\
 & y_1 + 3\,y_2 & = & 2 \\
 & y_1 & \geq & 0 \\
 & y_2 & \leq & 0
\end{array}$$

Esercizio A

$$\begin{array}{llrl}
\max\ \omega = & 3\,x_1 + 2\,x_2 & & \\
\text{s.a.} & 4\,x_1 + x_2 & \leq & 6 \\
 & -2\,x_1 + 3\,x_2 & \geq & 2 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_2 & \in & \mathbb{R}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrl}
\min\ \varphi_D = & 6\,y_1 + 2\,y_2 & & \\
\text{s.a.} & 4\,y_1 - 2\,y_2 & \geq & 3 \\
 & y_1 + 3\,y_2 & = & 2 \\
 & y_1 & \geq & 0 \\
 & y_2 & \leq & 0
\end{array}$$

Esercizio A

$$\max\ \omega = 3\,x_1 + 2\,x_2$$

$$\text{s.a.}\quad 4\,x_1 + x_2 \leq 6$$

$$-2\,x_1 + 3\,x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\min\ \varphi_D = 6\,y_1 + 2\,y_2$$

$$\text{s.a.}\quad 4\,y_1 - 2\,y_2 \geq 3$$

$$y_1 + 3\,y_2 = 2$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \leq 0$$

Esercizio A

$$
\begin{aligned}
\max\ \omega = &\ 3\,x_1 + 2\,x_2 \\
\text{s.a.}\quad &\ 4\,x_1 + x_2 \le 6 \\
&-2\,x_1 + 3\,x_2 \ge 2 \\
&\ x_1 \ge 0 \\
&\ x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\min\ \varphi_D = &\ 6\,y_1 + 2\,y_2 \\
\text{s.a.}\quad &\ 4\,y_1 - 2\,y_2 \ge 3 \\
&\ y_1 + 3\,y_2 = 2 \\
&\ y_1 \ge 0 \\
&\ y_2 \le 0
\end{aligned}
$$

Calcolo delle stime

- Essendo il problema primale un problema di massimo
  - ✓ Il valore di ω in una qualsiasi soluzione ammissibile del primale è un lower bound per il valore ottimo ω^*
  - ✓ Il valore di φ_D in una qualsiasi soluzione ammissibile del duale è un upper bound per il valore ottimo ω^*

Calcolo delle stime

- Essendo il problema primale un problema di massimo
  - ✓ Il valore di ω in una qualsiasi soluzione ammissibile del primale è un lower bound per il valore ottimo ω^*
  - ✓ Il valore di φ_D in una qualsiasi soluzione ammissibile del duale è un upper bound per il valore ottimo ω^*

- $\underline{x}^T = [1\ ;\ 2]$ è una soluzione ammissibile per il problema primale
  - ✓ $\omega = 3x_1 + 2x_2 = 7$

Calcolo delle stime

- Essendo il problema primale un problema di massimo
  - ✓ Il valore di ω in una qualsiasi soluzione ammissibile del primale è un lower bound per il valore ottimo ω^*
  - ✓ Il valore di φ_D in una qualsiasi soluzione ammissibile del duale è un upper bound per il valore ottimo ω^*

- $\underline{x}^T = [1\ ;\ 2]$ è una soluzione ammissibile per il problema primale
  - ✓ $\omega = 3x_1 + 2x_2 = 7$

- $\underline{y}^T = [2\ ;\ 0]$ è una soluzione ammissibile per il problema duale
  - ✓ $\varphi_D = 6y_1 + 2y_2 = 12$

Calcolo delle stime

$$\boxed{7 \leq \omega^* = \varphi_D^* \leq 12}$$

Esercizio B

$$
\begin{array}{llcccccccc}
\max\ \omega = & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & & & + & 2\,x_3 & = & 4 \\
 & 3\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1, & & & & x_3 & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & & \leq & 0
\end{array}
$$

Esercizio B

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\max \ \omega = & 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & \\
\text{s.a.} & \boxed{x_1} & & & + & 2\,x_3 = & 4 \\
 & 3\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 \leq & 6 \\
 & x_1, & & & & x_3 \geq & 0 \\
 & & & x_2 & & \leq & 0
\end{array}
$$

Il vincolo di uguaglianza andrà trasformato in una coppia di vincoli di minoranza

Esercizio B

$$
\begin{array}{llcrcrcrcr}
\max\ \omega = & 2\ x_1 & + & 4\ x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & & & + & 2\ x_3 & \le & 4 \\
 & x_1 & & & + & 2\ x_3 & \ge & 4 \\
 & 3\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \le & 6 \\
 & x_1, & & & & x_3 & \ge & 0 \\
 & & & x_2 & & & \le & 0
\end{array}
$$

Esercizio B

$$
\begin{array}{llrlrlrlcr}
\max\ \omega = & 2 & x_1 & + & 4 & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.a.} & & x_1 & & & & + & 2\,x_3 & \le & 4 \\
& - & x_1 & & & & - & 2\,x_3 & \le & -4 \\
& 3 & x_1 & + & & x_2 & + & x_3 & \le & 6 \\
& & x_1, & & & & & x_3 & \ge & 0 \\
& & & & & x_2 & & & \le & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrrrrrrrr}
\max\ \omega = & 2 & x_1 & + & 4 & x_2 & + & & x_3 & & \\
\text{s.a.} & & x_1 & & & & + & 2 & x_3 & \leq & 4 \\
& - & x_1 & & & & - & 2 & x_3 & \leq & -4 \\
& 3 & x_1 & + & & x_2 & + & & x_3 & \leq & 6 \\
& & x_1, & & & & & & x_3 & \geq & 0 \\
& & & & & \boxed{x_2} & & & & \boxed{\leq} & \boxed{0}
\end{array}
$$

La variabile non-positiva dovrà essere sostituita da una variabile non-negativa

Esercizio B

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrr}
\max\ \omega = & 2 & x_1 & - & 4 & \overline{x}_2 & + & & x_3 & & \\
\text{s.a.} & & x_1 & & & & + & 2 & x_3 & \leq & 4 \\
 & - & x_1 & & & & - & 2 & x_3 & \leq & -4 \\
 & 3 & x_1 & - & & \overline{x}_2 & + & & x_3 & \leq & 6 \\
 & & x_1, & & & \overline{x}_2, & & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$\boxed{\overline{x}_2 = -x_2 \quad (\overline{x}_2 \geq 0)}$$

Esercizio B

$$
\begin{array}{llcrcrcrcrl}
\max\ \omega = & 2x_1 & - & 4\bar{x}_2 & + & x_3 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 4 & & y_1^+ \\
 & -x_1 & & & - & 2x_3 & \leq & -4 & & y_1^- \\
 & 3x_1 & - & \bar{x}_2 & + & x_3 & \leq & 6 & & y_2 \\
 & x_1, & & \bar{x}_2, & & x_3 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\min\ \varphi_D = & y_1^+ & y_1^- & y_2 & & \\
\text{s.a.} & y_1^+ & y_1^- & y_2 & \geq & {\color{red}x_1} \\
 & y_1^+ & y_1^- & y_2 & \geq & {\color{red}\overline{x}_2} \\
 & y_1^+ & y_1^- & y_2 & \geq & {\color{red}x_3} \\
 & y_1^+, & y_1^-, & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esercizio B

$$
\begin{array}{llrlrlrlcrl}
\max\ \omega = & 2 & x_1 & - & 4 & \bar{x}_2 & + & x_3 & & & \\
\text{s.a.} & & x_1 & & & & + & 2\,x_3 & \leq & 4 & \color{blue}{y_1^+} \\
 & - & x_1 & & & & - & 2\,x_3 & \leq & -4 & \color{blue}{y_1^-} \\
 & 3 & x_1 & - & & \bar{x}_2 & + & x_3 & \leq & 6 & \color{blue}{y_2} \\
 & & x_1, & & & \bar{x}_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$\min \ \varphi_D = \boxed{4\ y_1^+ \ - \ 4\ y_1^- \ + \ 6\ y_2}$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{s.a.} & y_1^+ & y_1^- & y_2 & \geq & \color{red}{x_1} \\
 & y_1^+ & y_1^- & y_2 & \geq & \color{red}{\overline{x}_2} \\
 & y_1^+ & y_1^- & y_2 & \geq & \color{red}{x_3} \\
 & y_1^+, & y_1^-, & y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Esercizio B

$$\max\ \omega = \boxed{2x_1 - 4\bar{x}_2 + x_3}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr l}
\text{s.a.} & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 4 & \quad y_1^+ \\
 & -x_1 & & & - & 2x_3 & \leq & -4 & \quad y_1^- \\
 & 3x_1 & - & \bar{x}_2 & + & x_3 & \leq & 6 & \quad y_2 \\
 & x_1, & & \bar{x}_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Esercizio B

$$
\begin{array}{llcccccccl}
\min\ \varphi_D = & 4\ y_1^+ & - & 4\ y_1^- & + & 6\ y_2 & & & \\
\text{s.a.} & y_1^+ & & y_1^- & & y_2 & \geq & 2 & x_1 \\
 & y_1^+ & & y_1^- & & y_2 & \geq & -4 & \overline{x}_2 \\
 & y_1^+ & & y_1^- & & y_2 & \geq & 1 & x_3 \\
 & y_1^+, & & y_1^-, & & y_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max\ \omega = & 2\ x_1 & - & 4\ \bar{x}_2 & + & x_3 & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & & & + & 2\ x_3 & \leq & 4 & y_1^+ \\
 & -\ x_1 & & & - & 2\ x_3 & \leq & -4 & y_1^- \\
 & 3\ x_1 & - & \bar{x}_2 & + & x_3 & \leq & 6 & y_2 \\
 & x_1, & & \bar{x}_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio B

$$
\begin{array}{llcl}
\min \ \varphi_D = & 4\,y_1^+ - 4\,y_1^- + 6\,y_2 & & \\
\text{s.a.} & \boxed{\begin{array}{rcrcr} y_1^+ & - & y_1^- & + & 3\,y_2 \\ & & & - & y_2 \\ 2\,y_1^+ & - & 2\,y_1^- & + & y_2 \end{array}} & \begin{array}{c} \geq \\ \geq \\ \geq \end{array} & \begin{array}{rl} 2 & \color{red}{x_1} \\ -4 & \color{red}{\bar{x}_2} \\ 1 & \color{red}{x_3} \end{array} \\
 & y_1^+,\quad y_1^-,\quad y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min\ \varphi_D = & 4\,y_1^+ & - & 4\,y_1^- & + & 6\,y_2 & & \\
\text{s.a.} & y_1^+ & - & y_1^- & + & 3\,y_2 & \geq & 2 \\
 & & & & - & y_2 & \geq & -4 \\
 & 2\,y_1^+ & - & 2\,y_1^- & + & y_2 & \geq & 1 \\
 & y_1^+, & & y_1^-, & & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Cambiamo il verso del vincolo

Esercizio B

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min\ \varphi_D = & 4\,y_1^+ & - & 4\,y_1^- & + & 6\,y_2 & & \\
\text{s.a.} & y_1^+ & - & y_1^- & + & 3\,y_2 & \geq & 2 \\
 & & & & & y_2 & \leq & 4 \\
 & 2\,y_1^+ & - & 2\,y_1^- & + & y_2 & \geq & 1 \\
 & y_1^+, & & y_1^-, & & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
\min \ \varphi_D = & 4\, y_1^+ & - & 4\, y_1^- & + & 6\, y_2 & & \\
\text{s.a.} & y_1^+ & - & y_1^- & + & 3\, y_2 & \geq & 2 \\
 & & & & & y_2 & \leq & 4 \\
 & 2\, y_1^+ & - & 2\, y_1^- & + & y_2 & \geq & 1 \\
 & \boxed{y_1^+, \quad y_1^-,} & & & & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Sostituiamo le due variabili non-negative con una variabile libera

$$y_1 = y_1^+ - y_1^-$$

Esercizio B

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\min \ \varphi_D = & 4\,y_1 & + & 6\,y_2 & & \\
\text{s.a.} & y_1 & + & 3\,y_2 & \geq & 2 \\
 & & & y_2 & \leq & 4 \\
 & 2\,y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\
 & y_1 & & & \in & \mathbb{R} \\
 & & & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\max\ \omega = 2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 & \\
\text{s.a.} \quad x_1 + 2\,x_3 &= 4 \\
3\,x_1 + x_2 + x_3 &\le 6 \\
x_1,\ x_3 &\ge 0 \\
x_2 &\le 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min\ \varphi_D = 4\,y_1 + 6\,y_2 & \\
\text{s.a.} \quad y_1 + 3\,y_2 &\ge 2 \\
y_2 &\le 4 \\
2\,y_1 + y_2 &\ge 1 \\
y_1 &\in \mathbb{R} \\
y_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Esercizio B

$$\max\ \omega = 2\ x_1 + 4\ x_2 + \ x_3$$

$$\begin{array}{lrrrcr}
\text{s.a.} & x_1 & & +2\ x_3 & = & 4 \\
& 3\ x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq & 6 \\
& x_1 & & x_3 & \geq & 0 \\
& & x_2 & & \leq & 0
\end{array}$$

$$\min\ \varphi_D = 4\ y_1 + 6\ y_2$$

$$\begin{array}{lrrcr}
\text{s.a.} & y_1 & +3\ y_2 & \geq & 2 \\
& & y_2 & \leq & 4 \\
& 2\ y_1 + & y_2 & \geq & 1 \\
& y_1 & & \in & \mathbb{R} \\
& & y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Esercizio B

$$
\begin{array}{llrrrcr}
\max\ \omega = & 2\,x_1 & +\,4\,x_2 & +\ \ x_3 & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & & +\,2\,x_3 & = & 4 \\
& 3\,x_1 + & x_2\ + & x_3 & \le & 6 \\
& x_1 & & x_3 & \ge & 0 \\
& & x_2 & & \le & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrrcr}
\min\ \varphi_D = & 4\,y_1 & +\,6\,y_2 & & \\
\text{s.a.} & y_1 & +\,3\,y_2 & \ge & 2 \\
& & y_2 & \le & 4 \\
& 2\,y_1\ + & y_2 & \ge & 1 \\
& y_1 & & \in & \mathbb{R} \\
& & y_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

Esercizio B

$$\max\ \omega = 2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3$$

$$\text{s.a.}\quad x_1 + 2\,x_3 = 4$$

$$3\,x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \qquad x_3 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

$$\min\ \varphi_D = 4\,y_1 + 6\,y_2$$

$$\text{s.a.}\quad y_1 + 3\,y_2 \geq 2$$

$$y_2 \leq 4$$

$$2\,y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1 \in \mathbb{R}$$

$$y_2 \geq 0$$

Esercizio B

$$\begin{aligned}
\max\ \omega = 2\,x_1 + 4\,x_2 + \,x_3 & \\
\text{s.a.}\quad x_1 + 2\,x_3 &= 4 \\
3\,x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \\
x_1 \quad x_3 &\geq 0 \\
x_2 &\leq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min\ \varphi_D = 4\,y_1 + 6\,y_2 & \\
\text{s.a.}\quad y_1 + 3\,y_2 &\geq 2 \\
y_2 &\leq 4 \\
2\,y_1 + y_2 &\geq 1 \\
y_1 &\in \mathbb{R} \\
y_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Calcolo delle stime

- $\underline{x}^T = [2\,; -1\,;\ 1]$ è una soluzione ammissibile per il problema primale
  - ✓ $\omega = 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1$

- $\underline{y}^T = [-1\,;\ 3]$ è una soluzione ammissibile per il problema duale
  - ✓ $\varphi_D = 4y_1 + 6y_2 = 14$

$$\boxed{1 \leq \omega^* = \varphi_D^* \leq 14}$$

	$\max\ \omega$	$\min\ \varphi_D$	
Vincoli	$\leq$	Non-negative	Variabili
	$\geq$	Non-positive	
	$=$	Libere	
Variabili	Non-negative	$\geq$	Vincoli
	Non-positive	$\leq$	
	Libere	$=$	

Esercizio C

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\min\ \varphi = & & x_1 & - & x_2 & & \\
\text{s.a} & & x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 7 \\
 & & -\,2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & & 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & \geq & 8 \\
 & & x_1 & & & \leq & 0 \\
 & & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esercizio C

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
\min \varphi = & & x_1 & - & x_2 & & & & \\
\text{s.a} & & x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 7 & & y_1 \\
 & -2 & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & & y_2 \\
 & 3 & x_1 & + & 3\,x_2 & \geq & 8 & & y_3 \\
 & & x_1 & & & \leq & 0 & & \\
 & & & & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Esercizio C

$$
\begin{array}{llrrrcrl}
\min\ \varphi = & & x_1 & - & x_2 & & & \\
\text{s.a} & & x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 7 & \color{blue}{y_1 \geq 0} \\
& - & 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \color{blue}{y_2} \\
& & 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & \geq & 8 & \color{blue}{y_3 \geq 0} \\
& & x_1 & & & \leq & 0 & \\
& & & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio C

$$
\begin{array}{lrrrrrrrl}
\min \varphi = & & x_1 & - & & x_2 & & & \\
\text{s.a} & & x_1 & + & 2 & x_2 & \geq & 7 & y_1 \geq 0 \\
& -2 & x_1 & + & & x_2 & \leq & 6 & y_2 \leq 0 \\
& 3 & x_1 & + & 3 & x_2 & \geq & 8 & y_3 \geq 0 \\
& & x_1 & & & & \leq & 0 & \\
& & & & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio C

$$
\begin{array}{llllll}
\max\ \omega_D = & y_1 & y_2 & y_3 & & \\
\text{s.a.} & y_1 & y_2 & y_3 & & \\
 & y_1 & y_2 & y_3 & & \\
 & y_1, & & y_3 & \geq & 0 \\
 & & y_2 & & \leq & 0
\end{array}
$$

Esercizio C

$$
\begin{array}{lrcrcl l}
\min \varphi = & x_1 & - & x_2 & & & \\
\text{s.a} & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 7 & y_1 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & y_2 \\
 & 3x_1 & + & 3x_2 & \geq & 8 & y_3 \\
 & x_1 & & & \leq & 0 & \\
 & & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio C

$$\max\ \omega_D = \boxed{7\ y_1 + 6\ y_2 + 8\ y_3}$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{s.a.} & y_1 & y_2 & y_3 & & \\
 & y_1 & y_2 & y_3 & & \\
 & y_1, & & y_3 & \geq & 0 \\
 & & y_2 & & \leq & 0
\end{array}$$

Esercizio C

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\min \varphi = & & \boxed{x_1 - x_2} & & & & & \\
\text{s.a} & & x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 7 & y_1 \\
& - & 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & y_2 \\
& & 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & \geq & 8 & y_3 \\
& & x_1 & & & \leq & 0 & \\
& & & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$$\max\ \omega_D = 7\ y_1 + 6\ y_2 + 8\ y_3$$

$$\begin{array}{lccccc}
\text{s.a.} & y_1 & y_2 & y_3 & & 1 \\
 & y_1 & y_2 & y_3 & & -1 \\
 & y_1, & & y_3 & \geq & 0 \\
 & & y_2 & & \leq & 0
\end{array}$$

Esercizio C

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\min \varphi = & & x_1 & - & x_2 & & \\
\text{s.a} & & x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 7 \quad y_1 \\
& -\,2 & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \quad y_2 \\
& 3 & x_1 & + & 3\,x_2 & \geq & 8 \quad y_3 \\
& & x_1 & & & \leq & 0 \\
& & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esercizio C

$$\max\ \omega_D = 7\ y_1 + 6\ y_2 + 8\ y_3$$

$$\text{s.a.} \quad \boxed{\begin{array}{rrr} y_1 & -\ 2\ y_2 & +\ 3\ y_3 \\ 2\ y_1 & +\ \ y_2 & +\ 3\ y_3 \end{array}} \quad \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array}$$

$$y_1,\ y_3 \geq 0$$

$$y_2 \leq 0$$

Esercizio C

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrl}
\max\ \omega_D = & 7 & y_1 & + & 6 & y_2 & + & 8 & y_3 & & & \\
\text{s.a.} & & y_1 & - & 2 & y_2 & + & 3 & y_3 & & 1 & {\color{red} x_1 \leq 0} \\
 & 2 & y_1 & + & & y_2 & + & 3 & y_3 & & -1 & {\color{red} x_2 \geq 0} \\
 & & y_1, & & & & & & y_3 & \geq & 0 & \\
 & & & & & y_2 & & & & \leq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio C

$$
\begin{array}{llcccccccl}
\max\ \omega_D = & 7\ y_1 & + & 6\ y_2 & + & 8\ y_3 & & & & \\
\text{s.a.} & y_1 & - & 2\ y_2 & + & 3\ y_3 & \geq & 1 & & \color{red}{x_1 \leq 0} \\
 & 2\ y_1 & + & y_2 & + & 3\ y_3 & & -1 & & \color{red}{x_2 \geq 0} \\
 & y_1, & & & & y_3 & \geq & 0 & & \\
 & & & y_2 & & & \leq & 0 & &
\end{array}
$$

Esercizio C

$$
\begin{array}{lrrrcrl}
\max\ \omega_D = & 7\ y_1 & +\ 6\ y_2 & +\ 8\ y_3 & & & \\
\text{s.a.} & y_1 & -\ 2\ y_2 & +\ 3\ y_3 & \geq & 1 & \color{red}{x_1 \leq 0} \\
 & 2\ y_1 & +\ \ \ y_2 & +\ 3\ y_3 & \leq & -1 & \color{red}{x_2 \geq 0} \\
 & y_1, & & y_3 & \geq & 0 & \\
 & & y_2 & & \leq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio C

$$
\begin{array}{llrlrll}
\min \varphi = & & x_1 & - & x_2 & & \\
\text{s.a} & & x_1 & + & 2\,x_2 & \geq & 7 \\
& -2 & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
& 3 & x_1 & + & 3\,x_2 & \geq & 8 \\
& & x_1 & & & \leq & 0 \\
& & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrlrlrll}
\max \omega_D = & 7\,y_1 & + & 6\,y_2 & + & 8\,y_3 & & \\
\text{s.a.} & y_1 & - & 2\,y_2 & + & 3\,y_3 & \geq & 1 \\
& 2\,y_1 & + & y_2 & + & 3\,y_3 & \leq & -1 \\
& y_1, & & & & y_3 & \geq & 0 \\
& & & y_2 & & & \leq & 0
\end{array}
$$

Esercizio C

$$\begin{cases} x_1 z_1 = 0 \\ x_2 z_2 = 0 \\ y_1 s_1 = 0 \\ y_2 s_2 = 0 \\ y_3 s_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1(y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 1) = 0 \\ x_2(2y_1 + y_2 + 3y_3 + 1) = 0 \\ y_1(x_1 + 2x_2 - 7) = 0 \\ y_2(-2x_1 + x_2 - 6) = 0 \\ y_3(3x_1 + 3x_2 - 8) = 0 \end{cases}$$

Esercizio C

$$\begin{cases} x_1 z_1 = 0 \\ x_2 z_2 = 0 \\ y_1 s_1 = 0 \\ y_2 s_2 = 0 \\ y_3 s_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1(y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 1) = 0 \\ x_2(2y_1 + y_2 + 3y_3 + 1) = 0 \\ y_1(x_1 + 2x_2 - 7) = 0 \\ y_2(-2x_1 + x_2 - 6) = 0 \\ y_3(3x_1 + 3x_2 - 8) = 0 \end{cases} \xrightarrow[\underline{\boldsymbol{x}}_A = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}]{} \begin{cases} -1(y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 1) = 0 \\ 4(2y_1 + y_2 + 3y_3 + 1) = 0 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(1) = 0 \end{cases}$$

Esercizio C

$$\begin{cases} x_1 z_1 = 0 \\ x_2 z_2 = 0 \\ y_1 s_1 = 0 \\ y_2 s_2 = 0 \\ y_3 s_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 1) = 0 \\ x_2(2y_1 + y_2 + 3y_3 + 1) = 0 \\ y_1(x_1 + 2x_2 - 7) = 0 \\ y_2(-2x_1 + x_2 - 6) = 0 \\ y_3(3x_1 + 3x_2 - 8) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\underline{\boldsymbol{x}}_A = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}} \begin{cases} -1(y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 1) = 0 \\ 4(2y_1 + y_2 + 3y_3 + 1) = 0 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 1 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 + 1 = 0 \\ // \\ // \\ y_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_1 = 2y_2 + 1 \\ y_2 = -1 - 2y_1 = -3 - 4y_2 \end{cases} \rightarrow \underline{\boldsymbol{y}}_A = \begin{bmatrix} -1/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifica di Ammissibilità

- $\underline{\boldsymbol{y}}_A^T = [-1/5; -3/5; 0]$ non è una soluzione ammissibile per il problema duale perché viola il vincolo di non-negatività sulla variabile y_1.

- Essendo non ammissibile la soluzione in scarti complementare di $\underline{\boldsymbol{x}}_A$, possiamo concludere che $\underline{\boldsymbol{x}}_A$ non rappresenta la soluzione ottima per il problema assegnato.

Esercizio D

$$
\begin{array}{llrrrrrrrr}
\max\ \omega = & & & & & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.a.} & - & x_1 & - & & x_2 & + & 2\,x_3 & \leq & 1 \\
 & - & 2\,x_1 & + & & x_2 & & & \leq & 2 \\
 & & & & & 2\,x_2 & & & \geq & -3 \\
 & & 2\,x_1 & & & & + & x_3 & = & 2 \\
 & & x_1 & & & & & & \in & \mathbb{R} \\
 & & & & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{lrrrrcrl}
\max\ \omega = & & x_2 & + & x_3 & & & \\
\text{s.a.} & -\ x_1 & -\ x_2 & + & 2\,x_3 & \leq & 1 & y_1 \\
& -\ 2\,x_1 & +\ x_2 & & & \leq & 2 & y_2 \\
& & 2\,x_2 & & & \geq & -3 & y_3 \\
& 2\,x_1 & & + & x_3 & = & 2 & y_4 \\
& x_1 & & & & \in & \mathbb{R} & \\
& & x_2 & & & \geq & 0 & \\
& & & & x_3 & \leq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
\max\ \omega = & & x_2 & + & x_3 & & & \\
\text{s.a.} & - x_1 & - x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 & \color{blue}{y_1 \geq 0} \\
 & -2x_1 & + x_2 & & & \leq & 2 & \color{blue}{y_2 \geq 0} \\
 & & 2x_2 & & & \geq & -3 & \color{blue}{y_3} \\
 & 2x_1 & & + & x_3 & = & 2 & \color{blue}{y_4} \\
 & x_1 & & & & \in & \mathbb{R} & \\
 & & x_2 & & & \geq & 0 & \\
 & & & & x_3 & \leq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llrrrrrl}
\max\ \omega = & & & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.a.} & - x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq 1 & \color{blue}{y_1 \geq 0} \\
 & -2x_1 & + & x_2 & & & \leq 2 & \color{blue}{y_2 \geq 0} \\
 & & & 2x_2 & & & \geq -3 & \color{blue}{y_3 \leq 0} \\
 & 2x_1 & & & + & x_3 & = 2 & \color{blue}{y_4} \\
 & x_1 & & & & & \in \mathbb{R} & \\
 & & & x_2 & & & \geq 0 & \\
 & & & & & x_3 & \leq 0 &
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llrrrrrl}
\max \ \omega = & & & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.a.} & - x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \qquad \color{blue}{y_1 \geq 0} \\
 & -2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 \qquad \color{blue}{y_2 \geq 0} \\
 & & & 2x_2 & & & \geq & -3 \qquad \color{blue}{y_3 \leq 0} \\
 & 2x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \qquad \color{blue}{y_4 \in \mathbb{R}} \\
 & x_1 & & & & & \in & \mathbb{R} \\
 & & & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & x_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llllllll}
\min\ \varphi_D = & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \\
\text{s.a.} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \\
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \\
 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \\
 & y_1, & y_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & y_3 & & \leq & 0 \\
 & & & & y_4 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llrrrcrl}
\max\ \omega = & & x_2 & + & x_3 & & & \\
\text{s.a.} & -\ x_1 & -\ x_2 & + & 2\,x_3 & \leq & 1 & \quad y_1 \geq 0 \\
 & -\ 2\,x_1 & +\ x_2 & & & \leq & 2 & \quad y_2 \geq 0 \\
 & & 2\,x_2 & & & \geq & -3 & \quad y_3 \leq 0 \\
 & 2\,x_1 & & + & x_3 & = & 2 & \quad y_4 \in \mathbb{R} \\
 & x_1 & & & & \in & \mathbb{R} & \\
 & & x_2 & & & \geq & 0 & \\
 & & & & x_3 & \leq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio D

$$\min \ \varphi_D = \boxed{y_1 + 2\,y_2 - 3\,y_3 + 2\,y_4}$$

s.a.

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4$$

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4$$

$$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4$$

$$y_1, \quad y_2 \geq 0$$

$$y_3 \leq 0$$

$$y_4 \in \mathbb{R}$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llrcl}
\max\ \omega = & \boxed{x_2 + x_3} & & & \\
\text{s.a.} & -x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq & 1 & y_1 \geq 0 \\
& -2x_1 + x_2 & \leq & 2 & y_2 \geq 0 \\
& 2x_2 & \geq & -3 & y_3 \leq 0 \\
& 2x_1 + x_3 & = & 2 & y_4 \in \mathbb{R} \\
& x_1 & \in & \mathbb{R} & \\
& x_2 & \geq & 0 & \\
& x_3 & \leq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min\ \varphi_D = & y_1 & + 2 & y_2 & - 3 & y_3 & + 2 & y_4 & & \\
\text{s.a.} & y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & \boxed{0} \\
 & y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & \boxed{1} \\
 & y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & \boxed{1} \\
 & y_1, & & y_2 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & y_3 & & & \leq & 0 \\
 & & & & & & & y_4 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llrcl}
\max\ \omega = & & x_2 + x_3 & & & \\
\text{s.a.} & & \boxed{\begin{array}{r} -x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + x_2 \qquad \\ 2x_2 \qquad \\ 2x_1 \qquad + x_3 \end{array}} & \begin{array}{c} \leq \\ \leq \\ \geq \\ = \end{array} & \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{l} y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \leq 0 \\ y_4 \in \mathbb{R} \end{array} \\
& & x_1 & \in & \mathbb{R} & \\
& & x_2 & \geq & 0 & \\
& & x_3 & \leq & 0 &
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llrrrrcl}
\min \ \varphi_D = & & y_1 & +\,2\,y_2 & -\,3\,y_3 & +\,2\,y_4 & & \\
\text{s.a.} & & -\,y_1 & -\,2\,y_2 & & +\,2\,y_4 & & 0 \\
& & -\,y_1 & +\,y_2 & +\,2\,y_3 & & & 1 \\
& & 2\,y_1 & & & +\,y_4 & & 1 \\
& & y_1, & y_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & y_3 & & \leq & 0 \\
& & & & & y_4 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llrrrrcll}
\min\ \varphi_D = & & y_1 & +\,2\,y_2 & -\,3\,y_3 & +\,2\,y_4 & & & \\
\text{s.a.} & - & y_1 & -\,2\,y_2 & & +\,2\,y_4 & & 0 & \color{red}{x_1 \in \mathbb{R}} \\
 & - & y_1 & +\,y_2 & +\,2\,y_3 & & & 1 & \color{red}{x_2 \geq 0} \\
 & & 2\,y_1 & & & +\,y_4 & & 1 & \color{red}{x_3 \leq 0} \\
 & & y_1, & y_2 & & & \geq & 0 & \\
 & & & & y_3 & & \leq & 0 & \\
 & & & & & y_4 & \in & \mathbb{R} &
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrrrll}
\min & \varphi_D = & & y_1 & + & 2\,y_2 & - & 3\,y_3 & + & 2\,y_4 & & & & \\
\text{s.a.} & & - & y_1 & - & 2\,y_2 & & & + & 2\,y_4 & = & 0 & & {\color{red}x_1 \in \mathbb{R}} \\
 & & - & y_1 & + & y_2 & + & 2\,y_3 & & & & 1 & & {\color{red}x_2 \geq 0} \\
 & & & 2\,y_1 & & & & & + & y_4 & & 1 & & {\color{red}x_3 \leq 0} \\
 & & & y_1, & & y_2 & & & & & \geq & 0 & & \\
 & & & & & & & y_3 & & & \leq & 0 & & \\
 & & & & & & & & & y_4 & \in & \mathbb{R} & &
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llccccccccl}
\min \ \varphi_D = & & y_1 & + 2\, y_2 & - 3\, y_3 & + 2\, y_4 & & & \\
\text{s.a.} & - & y_1 & - 2\, y_2 & & + 2\, y_4 & = & 0 & \color{red}{x_1 \in \mathbb{R}} \\
 & - & y_1 & + \ y_2 & + 2\, y_3 & & \geq & 1 & \color{red}{x_2 \geq 0} \\
 & & 2\, y_1 & & & + \ y_4 & & 1 & \color{red}{x_3 \leq 0} \\
 & & y_1, & y_2 & & & \geq & 0 & \\
 & & & & y_3 & & \leq & 0 & \\
 & & & & & y_4 & \in & \mathbb{R} &
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrl}
\min\ \varphi_D = & y_1 & + 2\,y_2 & - 3\,y_3 & + 2\,y_4 & & & \\
\text{s.a.} & -\ y_1 & - 2\,y_2 & & + 2\,y_4 & = & 0 & x_1 \in \mathbb{R} \\
 & -\ y_1 & + \ y_2 & + 2\,y_3 & & \geq & 1 & x_2 \geq 0 \\
 & 2\,y_1 & & & + \ y_4 & \leq & 1 & x_3 \leq 0 \\
 & y_1, & y_2 & & & \geq & 0 & \\
 & & & y_3 & & \leq & 0 & \\
 & & & & y_4 & \in & \mathbb{R} &
\end{array}
$$

Esercizio D

$$
\begin{array}{llrrrrl}
\max \ \omega = & & & x_2 & + \ x_3 & & \\
\text{s.a.} & - & x_1 & - \ x_2 & + 2\ x_3 & \leq & 1 \\
& - & 2\ x_1 & + \ x_2 & & \leq & 2 \\
& & & 2\ x_2 & & \geq & -3 \\
& & 2\ x_1 & & + \ x_3 & = & 2 \\
& & x_1 & & & \in & \mathbb{R} \\
& & & x_2 & & \geq & 0 \\
& & & & x_3 & \leq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrrrrrl}
\min \ \varphi_D = & & y_1 & + 2\ y_2 & - 3\ y_3 & + \ 2\ y_4 & & \\
\text{s.a.} & - & y_1 & - 2\ y_2 & & + \ 2\ y_4 & = & 0 \\
& - & y_1 & + \ y_2 & + 2\ y_3 & & \geq & 1 \\
& & 2\ y_1 & & & + \ y_4 & \leq & 1 \\
& & y_1 & y_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & y_3 & & \leq & 0 \\
& & & & & y_4 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

Esercizio D

$$\begin{cases} x_1 z_1 = 0 \\ x_2 z_2 = 0 \\ x_3 z_3 = 0 \\ y_1 s_1 = 0 \\ y_2 s_2 = 0 \\ y_3 s_3 = 0 \\ y_4 s_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(-y_1 - 2y_2 + 2y_4) = 0 \\ x_2(-y_1 + y_2 + 2y_3 - 1) = 0 \\ x_3(2y_1 + y_4 - 1) = 0 \\ y_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 - 1) = 0 \\ y_2(-2x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ y_3(2x_2 + 3) = 0 \\ y_4(2x_1 + x_3 - 2) = 0 \end{cases}$$

Esercizio D

$$\begin{cases} x_1 z_1 = 0 \\ x_2 z_2 = 0 \\ x_3 z_3 = 0 \\ y_1 s_1 = 0 \\ y_2 s_2 = 0 \\ y_3 s_3 = 0 \\ y_4 s_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(-y_1 - 2y_2 + 2y_4) = 0 \\ x_2(-y_1 + y_2 + 2y_3 - 1) = 0 \\ x_3(2y_1 + y_4 - 1) = 0 \\ y_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 - 1) = 0 \\ y_2(-2x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ y_3(2x_2 + 3) = 0 \\ y_4(2x_1 + x_3 - 2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\underline{\boldsymbol{x}}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{cases} 1(-y_1 - 2y_2 + 2y_4) = 0 \\ 4(-y_1 + y_2 + 2y_3 - 1) = 0 \\ 0(2y_1 + y_4 - 1) = 0 \\ y_1(-6) = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(11) = 0 \\ y_4(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio D

$$\begin{cases} x_1 z_1 = 0 \\ x_2 z_2 = 0 \\ x_3 z_3 = 0 \\ y_1 s_1 = 0 \\ y_2 s_2 = 0 \\ y_3 s_3 = 0 \\ y_4 s_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1(-y_1 - 2y_2 + 2y_4) = 0 \\ x_2(-y_1 + y_2 + 2y_3 - 1) = 0 \\ x_3(2y_1 + y_4 - 1) = 0 \\ y_1(-x_1 - x_2 + 2x_3 - 1) = 0 \\ y_2(-2x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ y_3(2x_2 + 3) = 0 \\ y_4(2x_1 + x_3 - 2) = 0 \end{cases} \quad \underline{\boldsymbol{x}}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 1(-y_1 - 2y_2 + 2y_4) = 0 \\ 4(-y_1 + y_2 + 2y_3 - 1) = 0 \\ 0(2y_1 + y_4 - 1) = 0 \\ y_1(-6) = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_3(11) = 0 \\ y_4(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 + 2y_4 = 0 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 - 1 = 0 \\ // \\ y_1 = 0 \\ // \\ y_3 = 0 \\ // \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_2 = 1 + y_1 - 2y_3 = 1 \\ y_4 = -\dfrac{1}{2} y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \underline{y}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verifica di Ammissibilità

- $\underline{\boldsymbol{y}}_A^T = [0; 1; 0; 1]$ è una soluzione ammissibile per il problema duale
  - ✓ $-y_1 - 2y_2 + 2y_4 = 0 = 0$
  - ✓ $-y_1 + y_2 + 2y_3 = 2 \geq 1$
  - ✓ $2y_1 + y_4 = 1 \leq 1$
  - ✓ $y_1 = 0 \geq 0$
  - ✓ $y_2 = 1 \geq 0$
  - ✓ $y_3 = 0 \leq 0$
  - ✓ $y_4 = 1 \in \mathbb{R}$

Verifica di Ammissibilità

- $\underline{\boldsymbol{y}}_A^T = [0; 1; 0; 1]$ è una soluzione ammissibile per il problema duale
  - ✓ $-y_1 - 2y_2 + 2y_4 = 0 = 0$
  - ✓ $-y_1 + y_2 + 2y_3 = 2 \geq 1$
  - ✓ $2y_1 + y_4 = 1 \leq 1$
  - ✓ $y_1 = 0 \geq 0$
  - ✓ $y_2 = 1 \geq 0$
  - ✓ $y_3 = 0 \leq 0$
  - ✓ $y_4 = 1 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\underline{\boldsymbol{x}}_A \text{ è soluzione ottima del problema in considerazione}}$

Programmazione
Lineare Intera

Cos'è la Programmazione Lineare Intera?

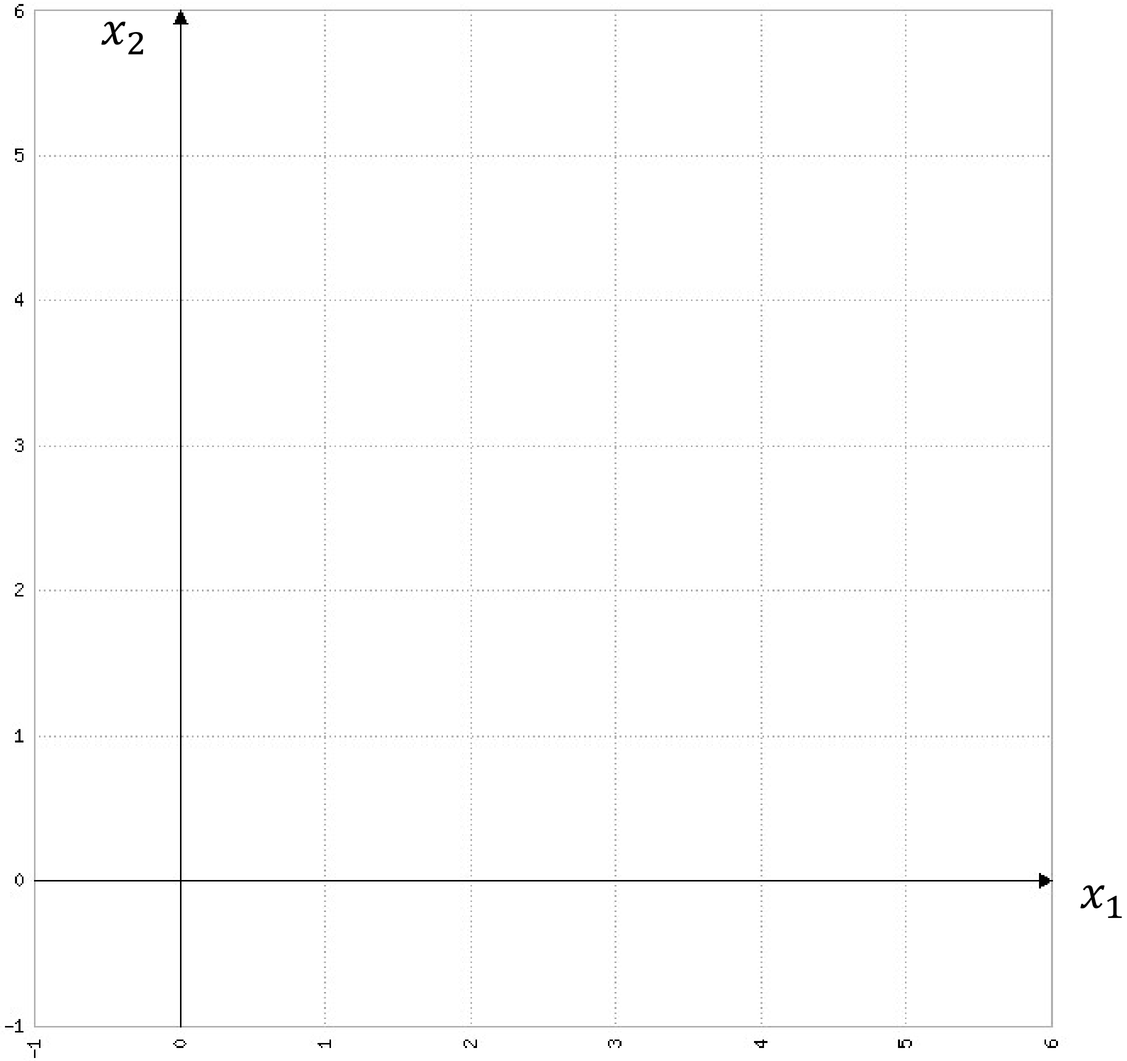
- Classe di modellazione in cui le variabili decisionali, oltre ai vincoli funzionali e di non-negatività, devono soddisfare anche dei vincoli di interezza.

- Esistono due tecniche risolutive per la PLI
  - ✓ Branch and Bound
  - ✓ Gomory

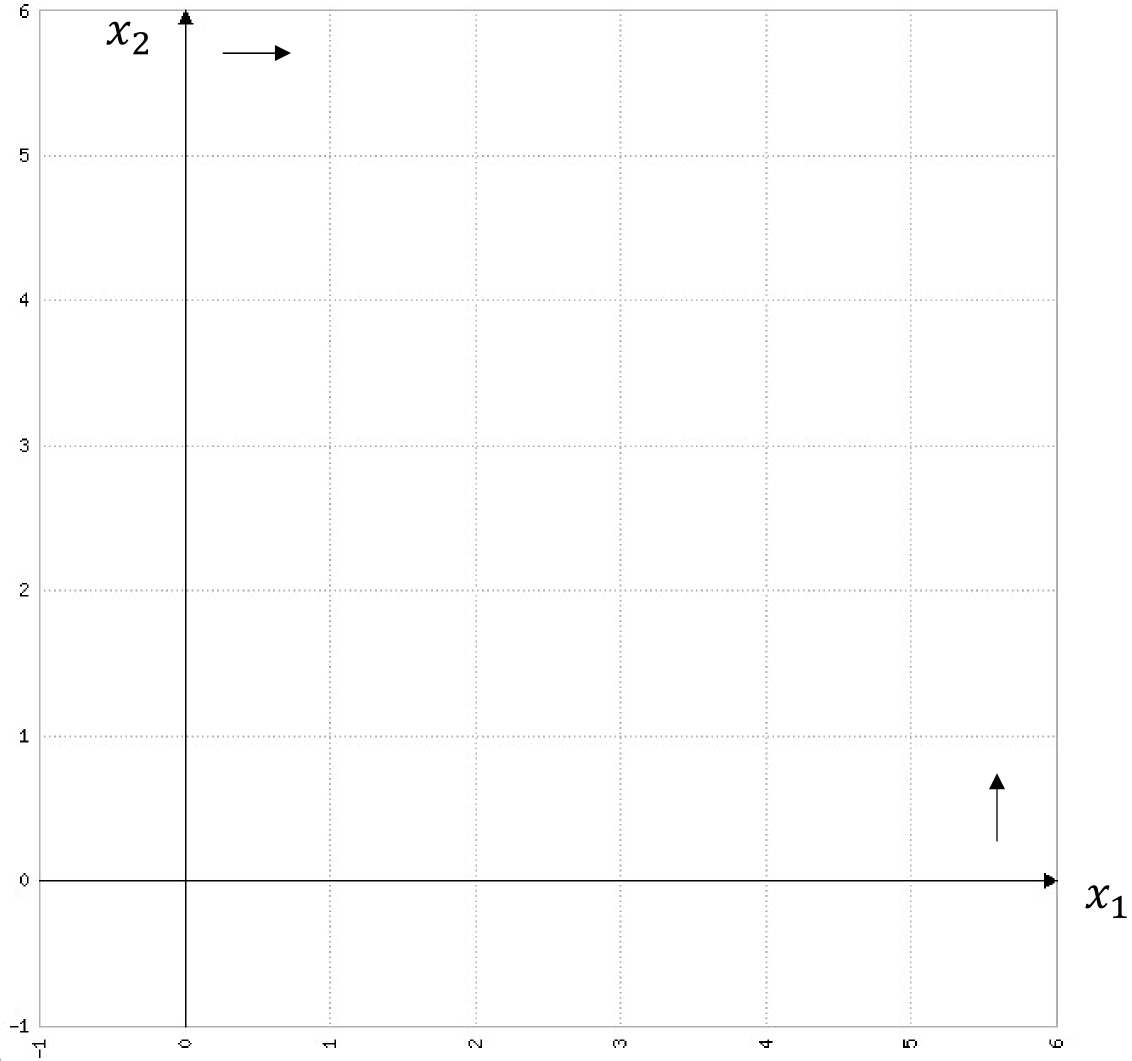
Esercizio E

$$
\begin{aligned}
\max \ \omega = 2x_1 + 4x_2 & \\
\text{s. a} \quad 4x_1 + 5x_2 &\leq 20 \\
x_1 &\geq 1 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \quad \text{e intere}
\end{aligned}
$$

Rappresentazione nel piano cartesiano



Rappresentazione nel piano cartesiano

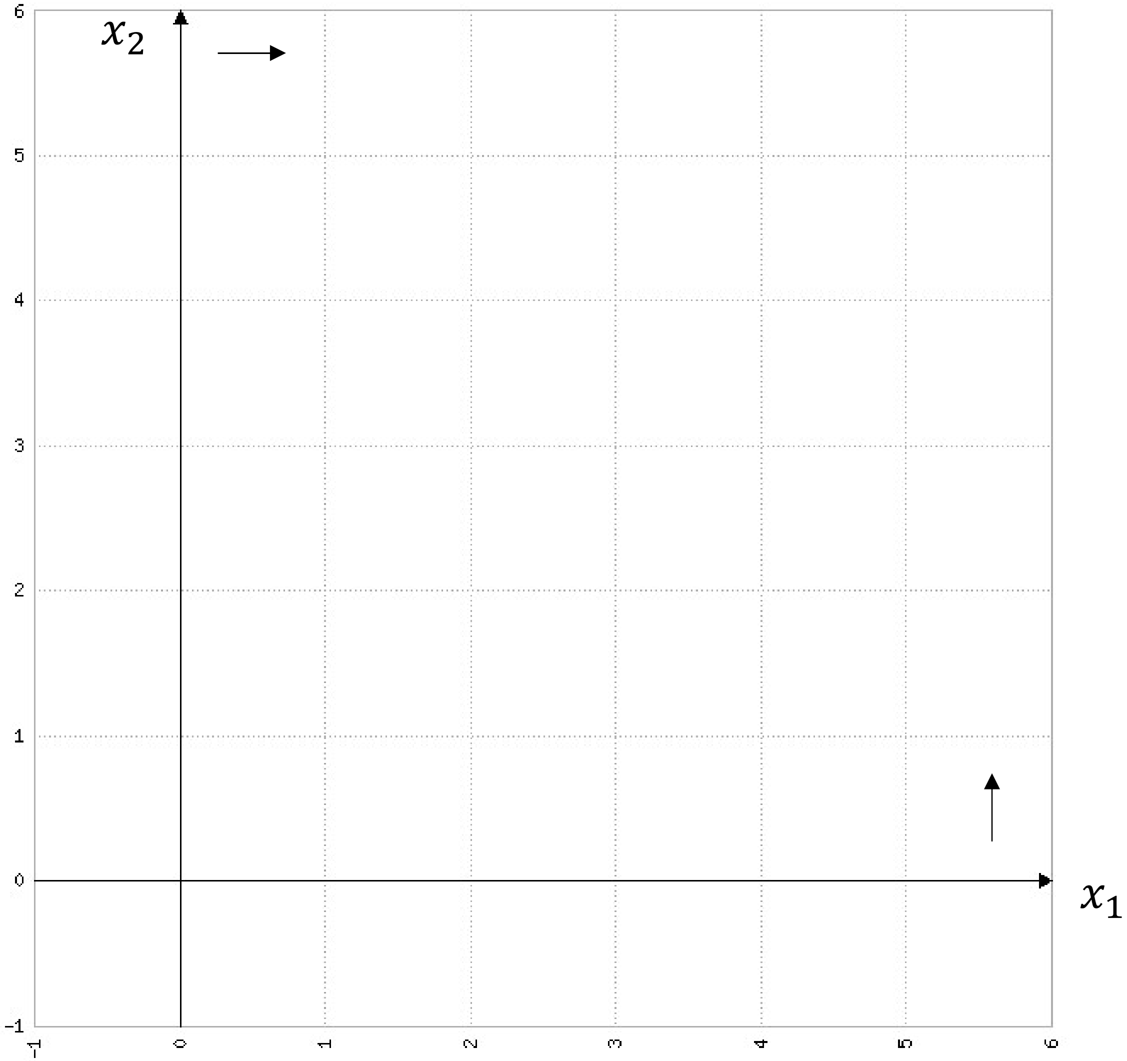


$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0$

$\downarrow$

I vincoli di non-negatività implicano la selezione del primo quadrante

1° vincolo funzionale : $4x_1 + 5x_2 \leq 20 \longleftrightarrow 4x_1 + 5x_2 + s_1 = 20$



$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$\downarrow$$

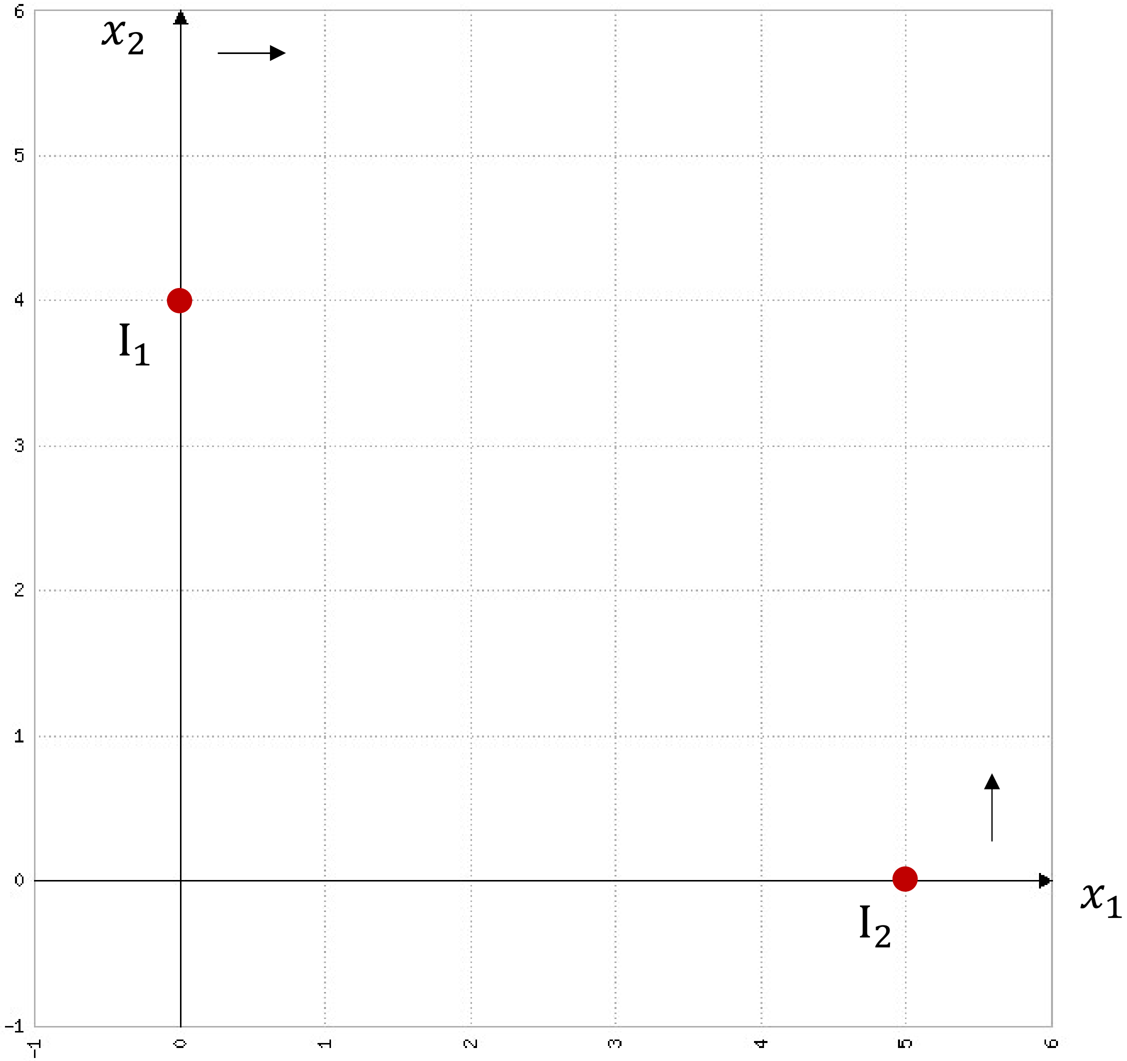
$$x_2 \leq -\frac{4}{5}x_1 + 4$$

$$\downarrow$$

La frontiera del primo vincolo è una retta con coeff. angolare $-\frac{4}{5}$ e intercetta 4

Esercizio E

1° vincolo funzionale : $4x_1 + 5x_2 \leq 20 \longleftrightarrow 4x_1 + 5x_2 + s_1 = 20$



$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

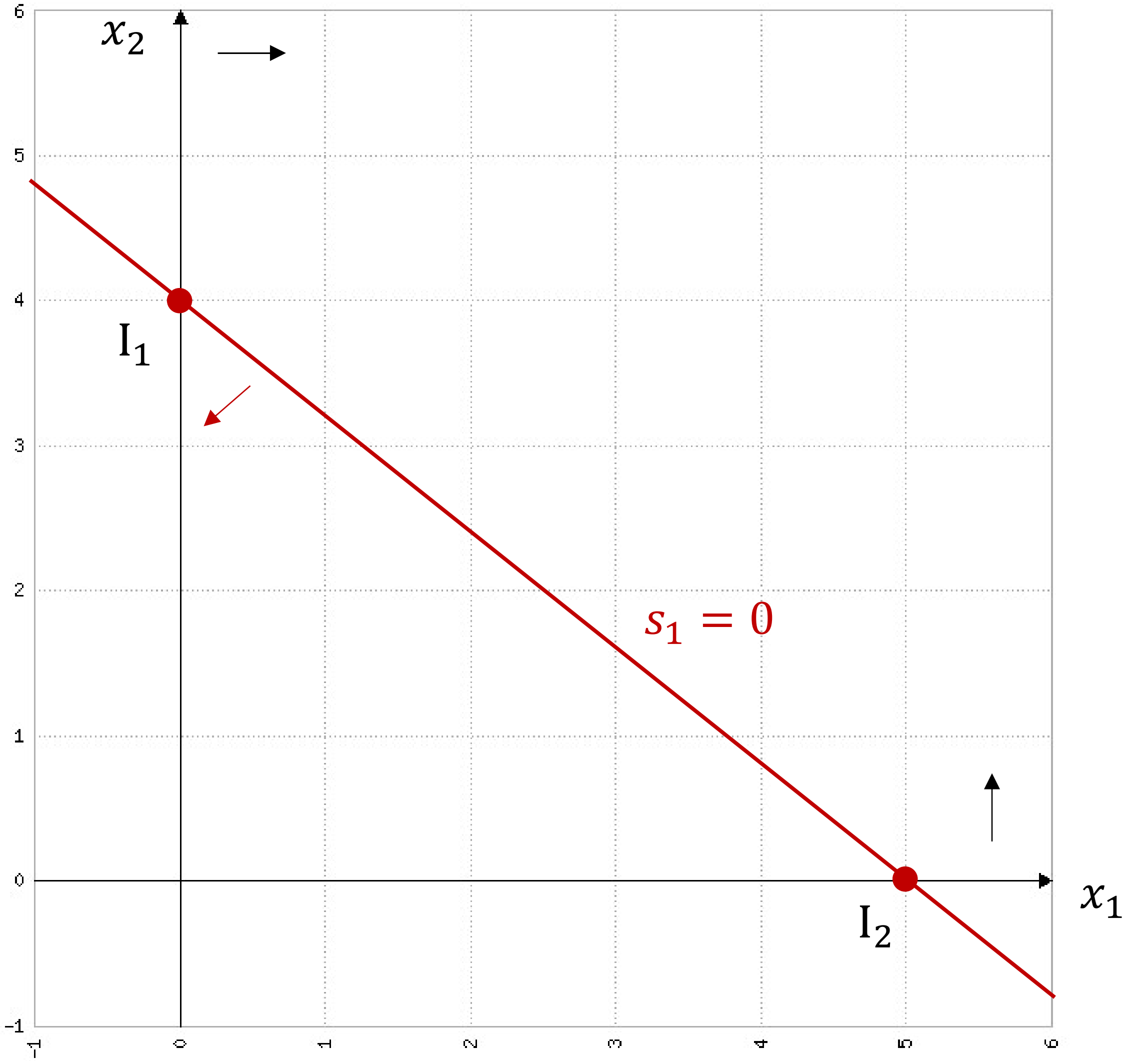
$$x_2 \leq -\frac{4}{5}x_1 + 4$$

La frontiera del primo vincolo è una retta con coeff. angolare $-\frac{4}{5}$ e intercetta 4

$$\mathrm{I}_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \wedge \quad \mathrm{I}_2: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

Esercizio E

1° vincolo funzionale : $4x_1 + 5x_2 \leq 20 \longleftrightarrow 4x_1 + 5x_2 + s_1 = 20$



$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$\downarrow$$

$$x_2 \leq -\frac{4}{5}x_1 + 4$$

$$\downarrow$$

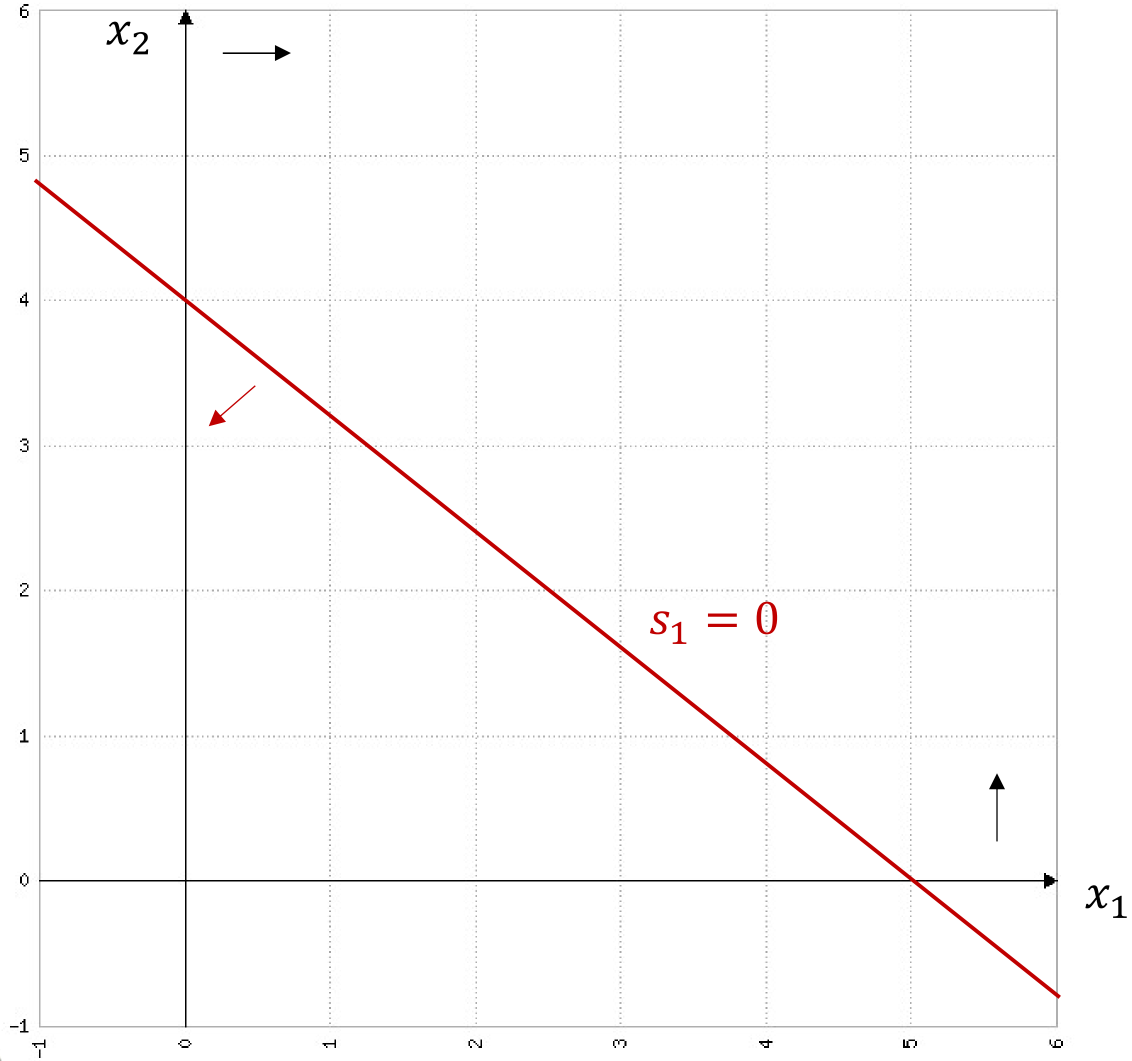
La frontiera del primo vincolo è una retta con coeff. angolare $-\frac{4}{5}$ e intercetta 4

$$\downarrow$$

$$I_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \wedge \quad I_2: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

Esercizio E

2° vincolo funzionale : $x_1 \geq 1 \longleftrightarrow x_1 - \bar{s}_2 = 1$



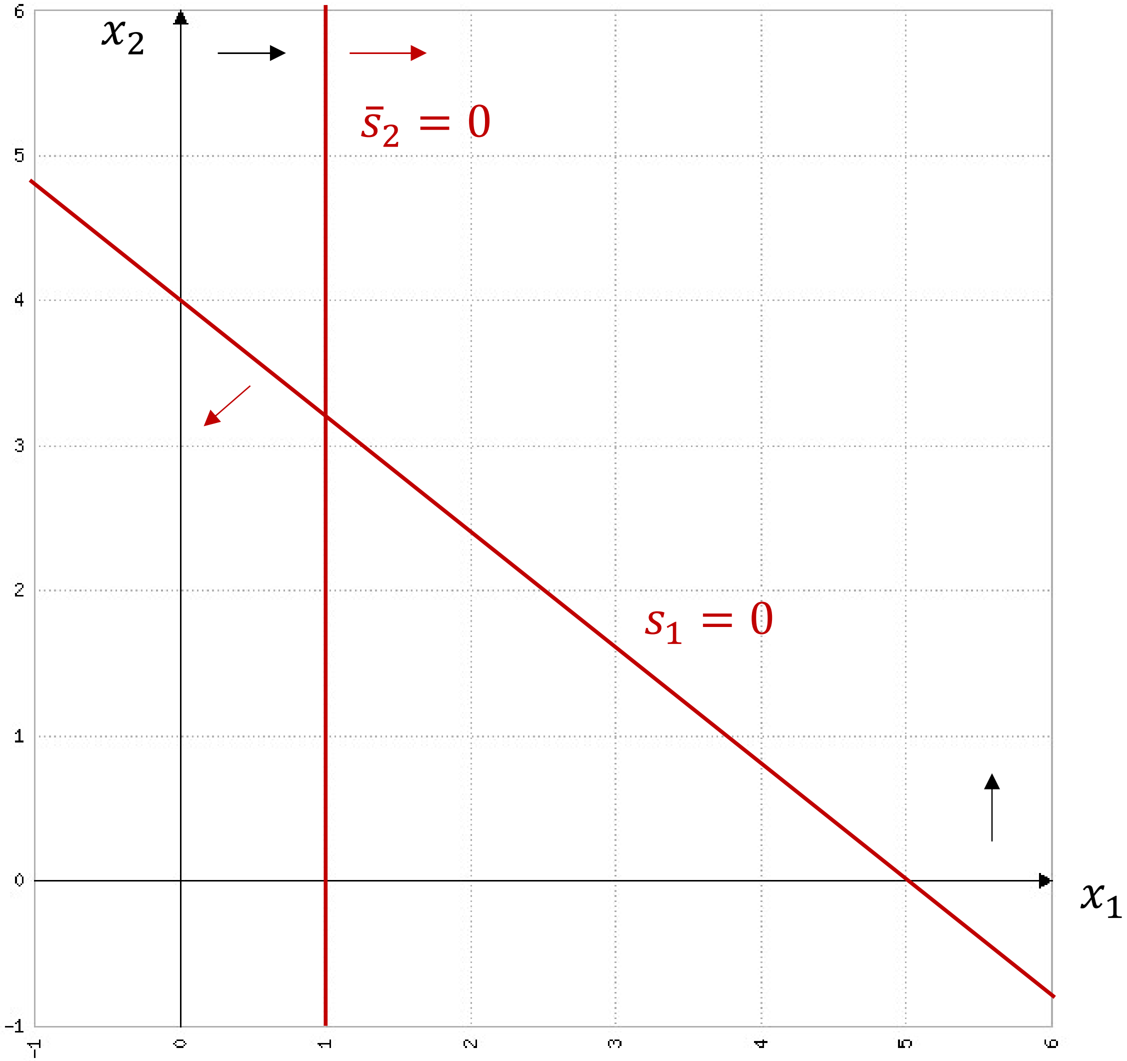
$x_1 \geq 1$

$\downarrow$

La frontiera del secondo vincolo è una retta parallela all'asse delle ordinate

Esercizio E

2° vincolo funzionale : $x_1 \geq 1$ $\longleftrightarrow$ $x_1 - \bar{s}_2 = 1$

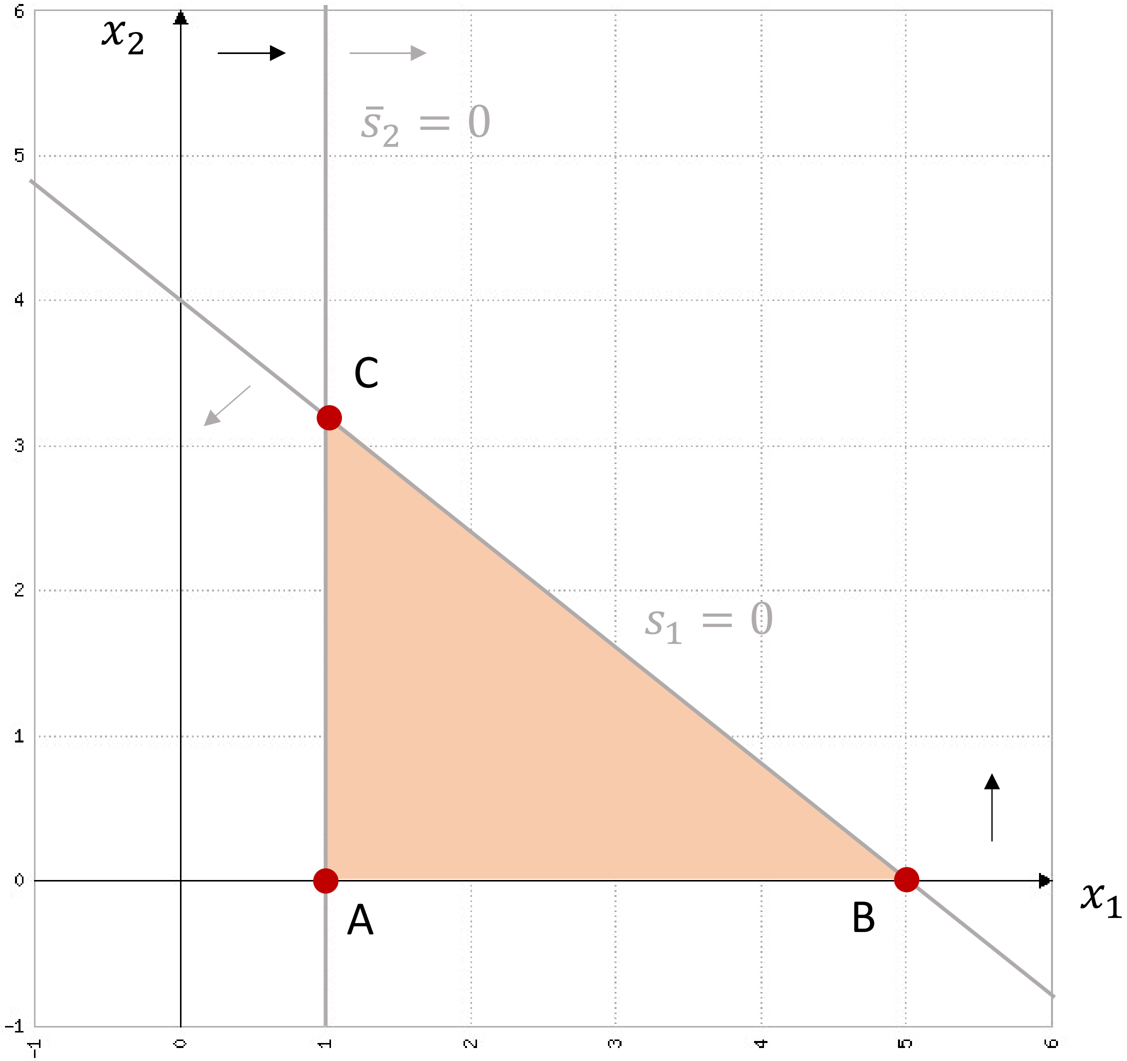


$x_1 \geq 1$

$\downarrow$

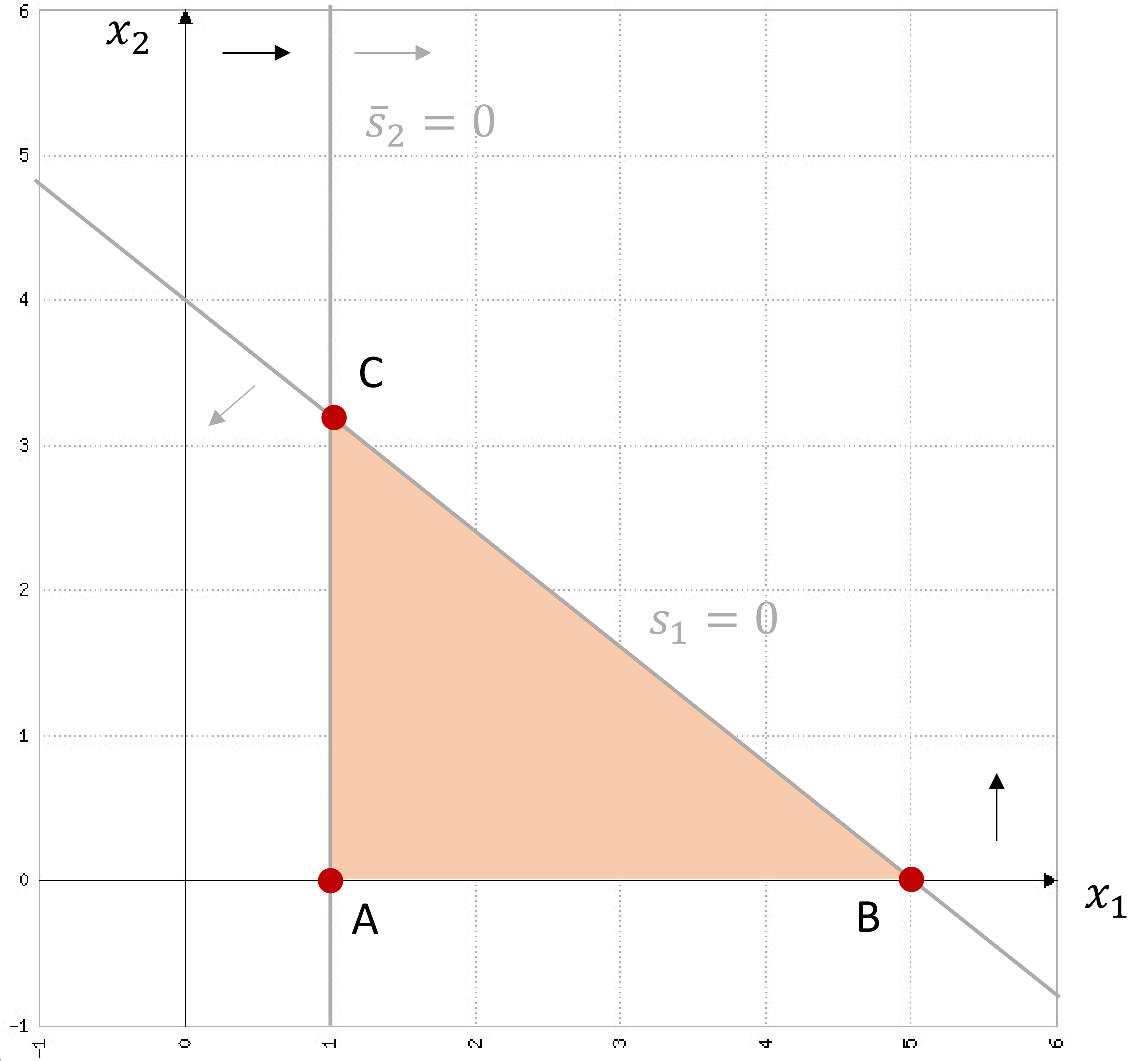
La frontiera del secondo vincolo è una retta parallela all'asse delle ordinate

Regione ammissibile



Esercizio E

Funzione obiettivo : $\omega = 2x_1 + 4x_2$



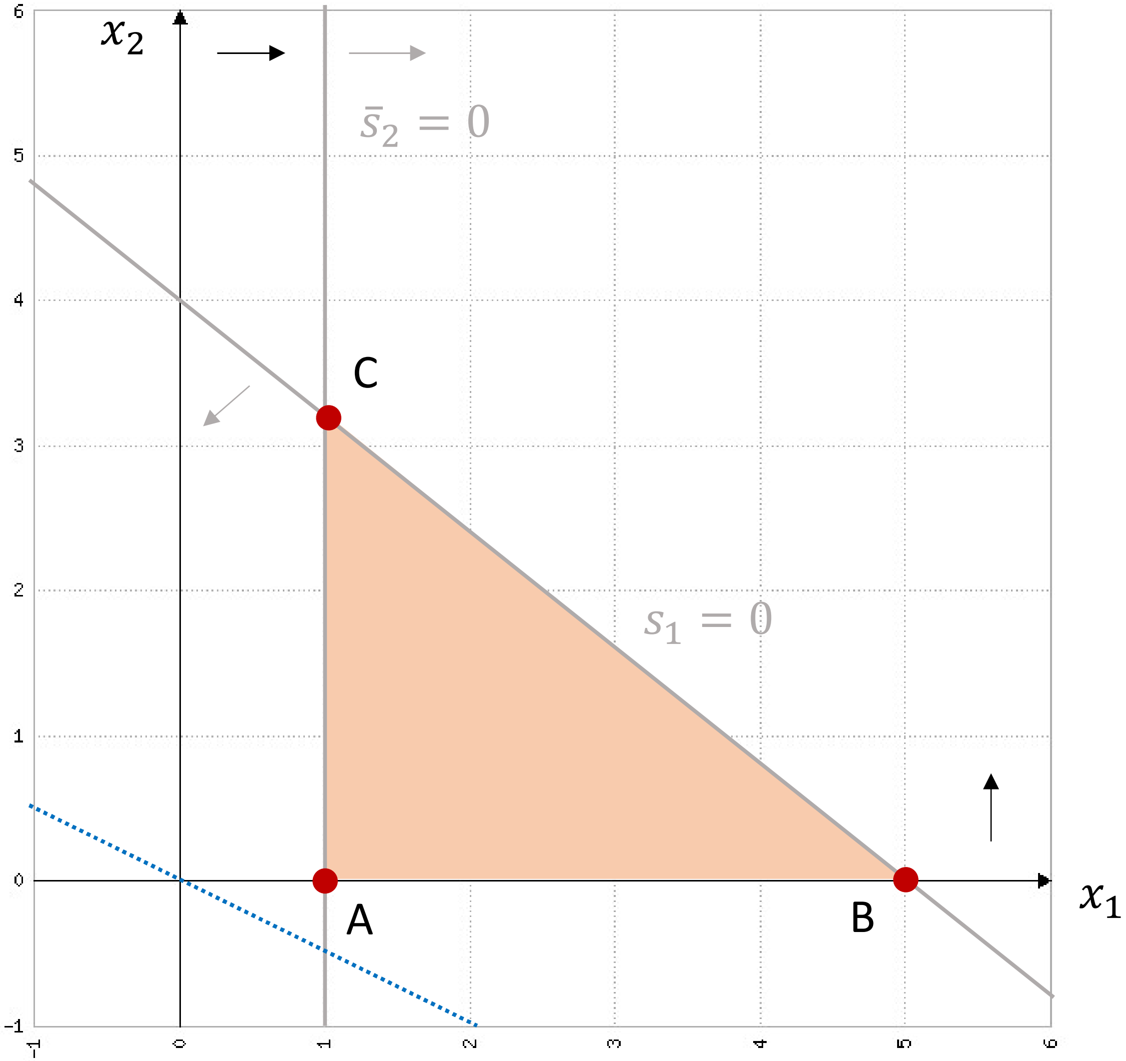
$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\omega}{4}$$

Fascio di rette con:

✓ Coeff. angolare $-\frac{1}{2}$

✓ Intercetta $\frac{\omega}{4}$

Funzione obiettivo : $\omega = 2x_1 + 4x_2$



$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\omega}{4}$$

$\downarrow$

Fascio di rette con:

- ✓ Coeff. angolare $-\frac{1}{2}$
- ✓ Intercetta $\frac{\omega}{4}$

$\downarrow$

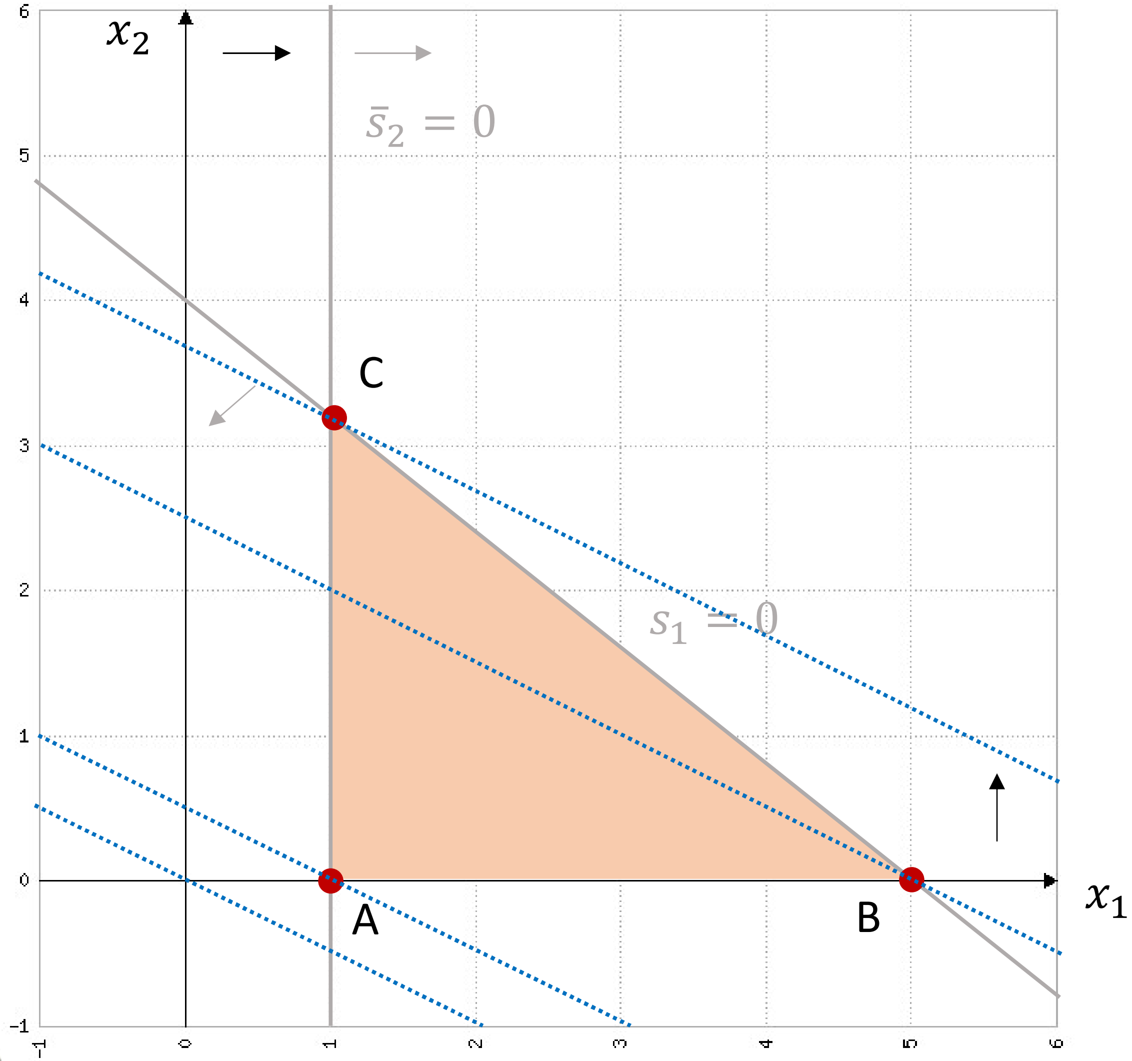
e.g. $\omega = 0$

$\downarrow$

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1$$

Esercizio E

Funzione obiettivo : $\omega = 2x_1 + 4x_2$



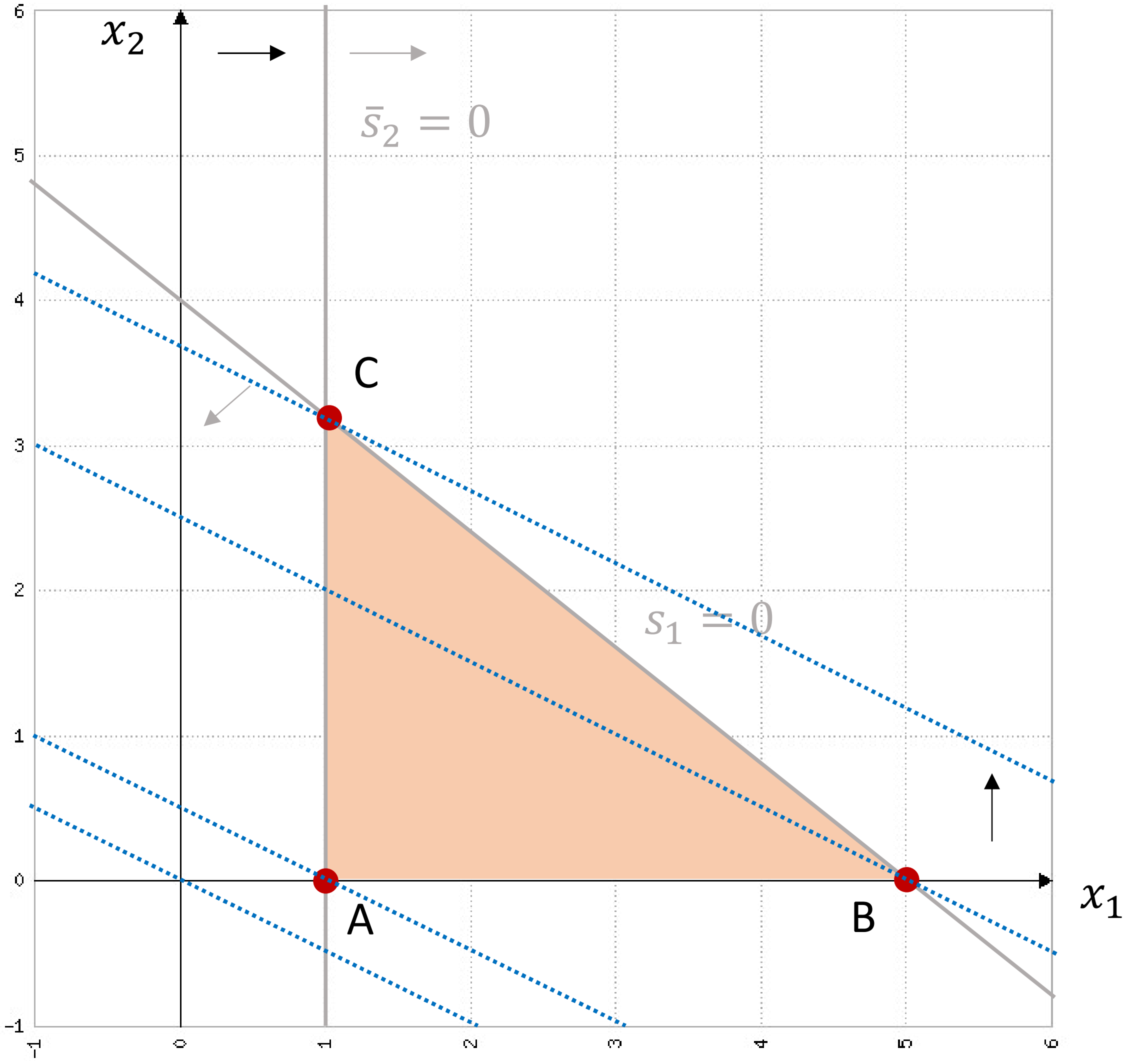
$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\omega}{4}$$

Fascio di rette con:

- ✓ Coeff. angolare $-\frac{1}{2}$
- ✓ Intercetta $\frac{\omega}{4}$

Rette che intersecano i vertici della Regione Ammissibile

Funzione obiettivo : $\omega = 2x_1 + 4x_2$



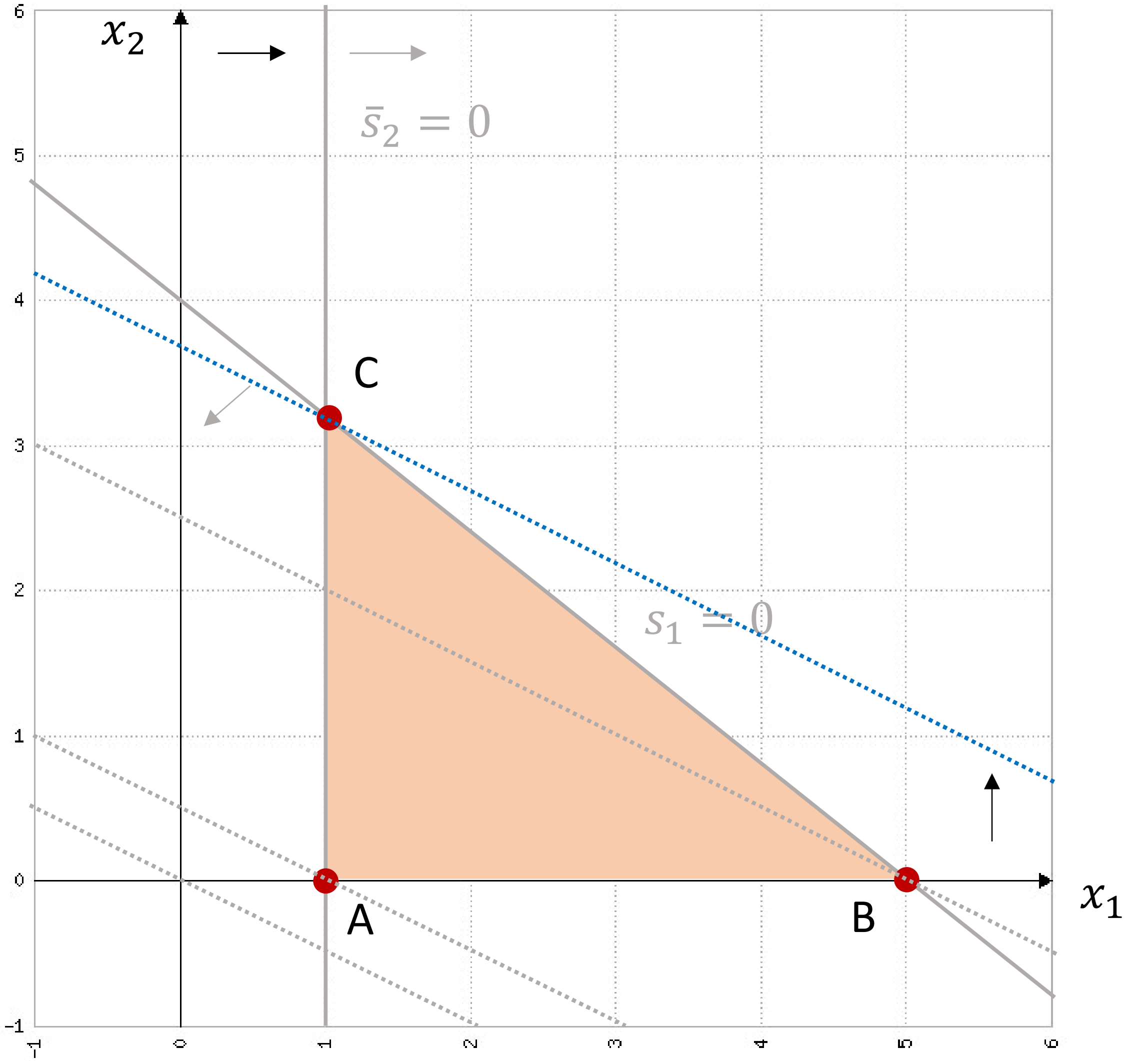
$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\omega}{4}$$

max

$$q = \frac{\omega}{4}$$

max

Funzione obiettivo : $\omega = 2x_1 + 4x_2$



$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\omega}{4}$$

$$\downarrow$$

max

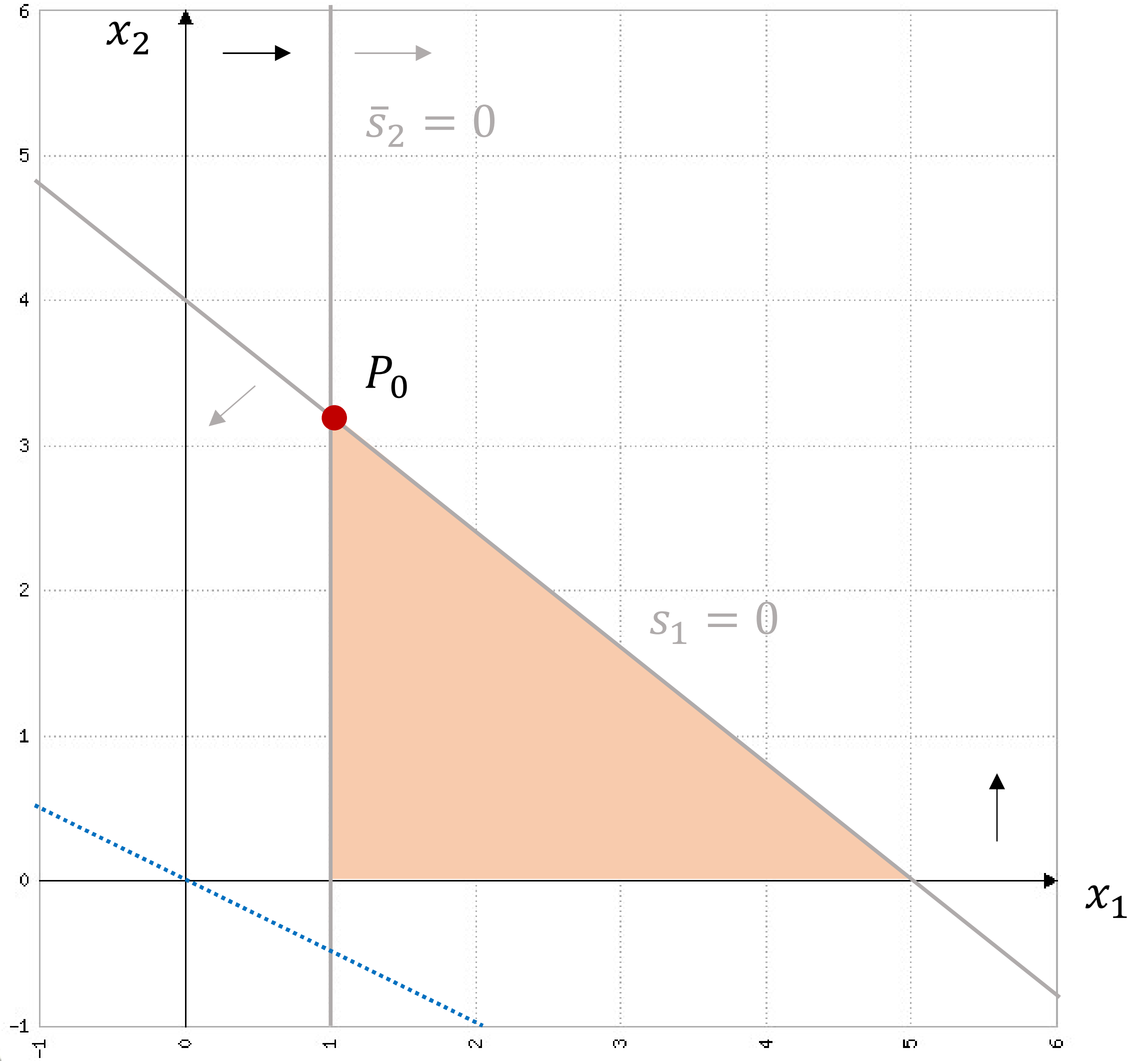
$$q = \frac{\omega}{4}$$

max

$$\downarrow$$

Massimizzare la f.o. equivale a selezionare la retta del fascio con intercetta massima

Determinazione dell'ottimo



La soluzione del rilassamento continuo è il vertice C, che chiamiamo P_0

$$P_0 : \begin{cases} s_1 = 0 \\ \bar{s}_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{4}{5} x_1 + 4 \end{cases}$$

$$P_0 : \left(1; \frac{16}{5}\right)$$

$$\omega^* = 2x_1 + 4x_2 = \frac{74}{5}$$

Esercizio E

- La soluzione del rilassamento continuo non è ammissibile per il problema di PLI: è necessario applicare l'algoritmo di Branch and Bound.

Esercizio E

- La soluzione del rilassamento continuo non è ammissibile per il problema di PLI: è necessario applicare l'algoritmo di Branch and Bound.

- Ad ogni iterazione, dal problema originario (padre) vengono generati due sottoproblemi (figli), selezionando una variabile x_i che presenta valore frazionario x_i^* e considerando i due vincoli addizionali (tagli)
  - ✓ $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$
  - ✓ $x_i \geq \lceil x_i^* \rceil$

Esercizio E

- La soluzione del rilassamento continuo non è ammissibile per il problema di PLI: è necessario applicare l'algoritmo di Branch and Bound.

- Ad ogni iterazione, dal problema originario (padre) vengono generati due sottoproblemi (figli), selezionando una variabile x_i che presenta valore frazionario x_i^* e considerando i due vincoli addizionali (tagli)
  - ✓ $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$
  - ✓ $x_i \geq \lceil x_i^* \rceil$

- Ogni problema figlio viene risolto, procedendo in maniera iterativa (generando altri figli) fino alla chiusura di tutti i nodi (problemi).

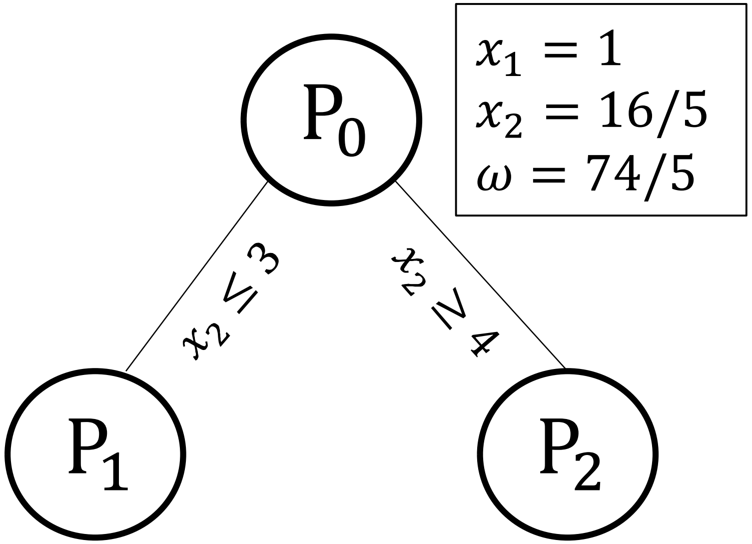
- La soluzione del rilassamento continuo non è ammissibile per il problema di PLI: è necessario applicare l'algoritmo di Branch and Bound.

- Ad ogni iterazione, dal problema originario (padre) vengono generati due sottoproblemi (figli), selezionando una variabile x_i che presenta valore frazionario x_i^* e considerando i due vincoli addizionali (tagli)
  - ✓ $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$
  - ✓ $x_i \geq \lceil x_i^* \rceil$

- Ogni problema figlio viene risolto, procedendo in maniera iterativa (generando altri figli) fino alla chiusura di tutti i nodi (problemi).

- Un nodo viene chiuso (non genererà ulteriori figli) in tre casi:
  1. La sua soluzione è intera;
  2. Ha una regione ammissibile vuota;
  3. Il valore della funzione obiettivo è peggiore del valore della funzione obiettivo in una soluzione intera già determinata.

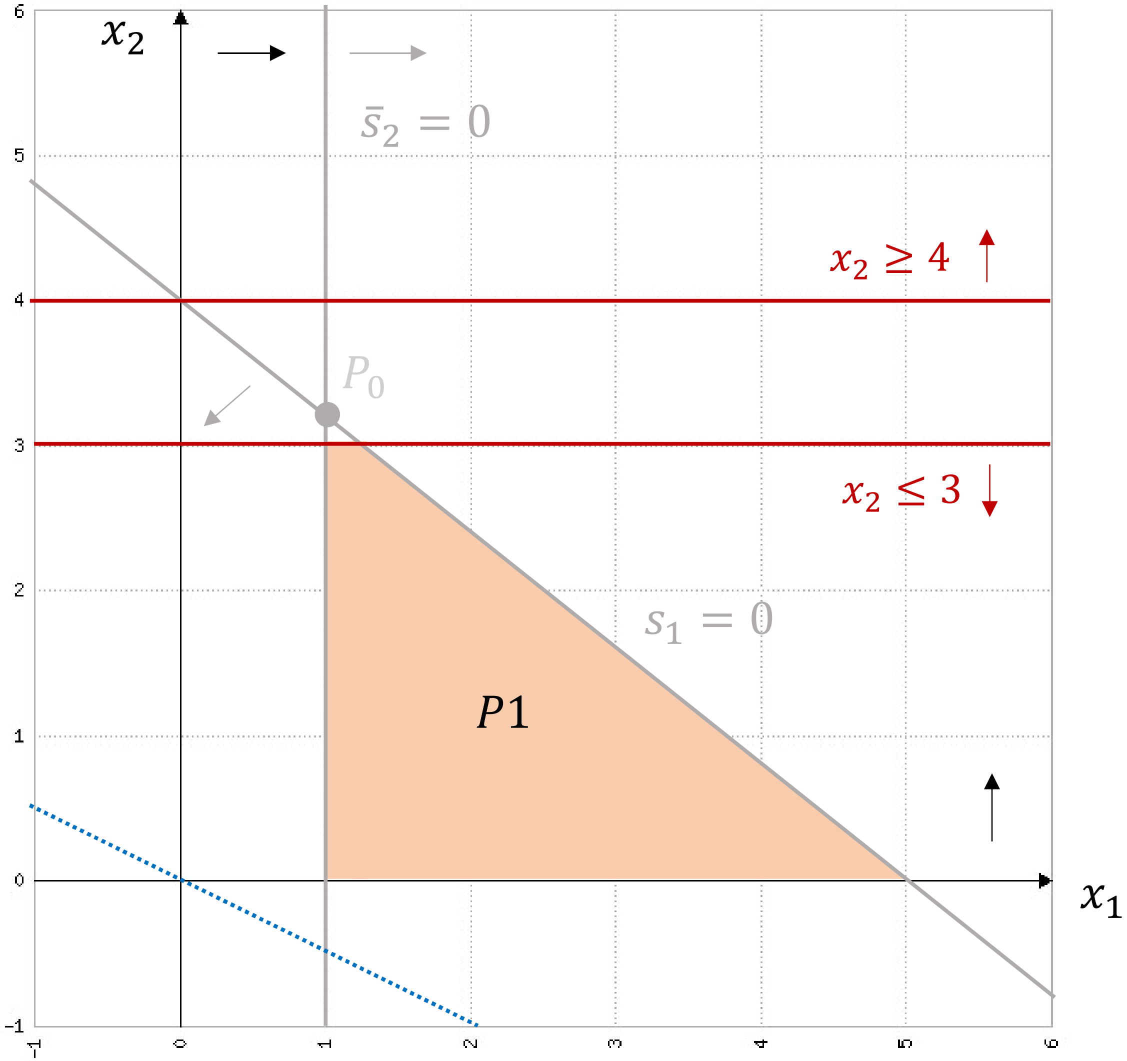
Esercizio E



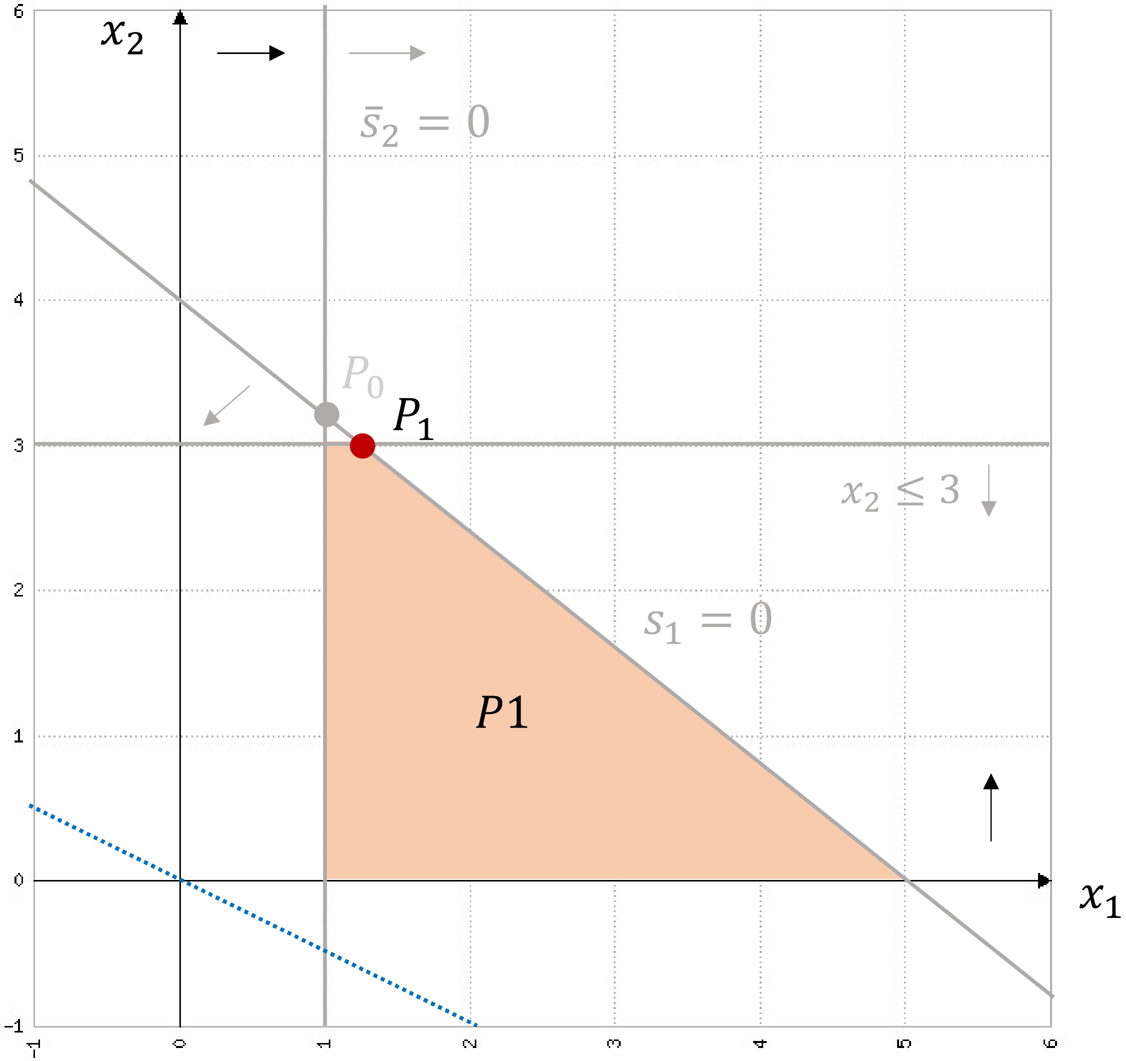
$$
\begin{array}{lrcll}
\max & \omega = 2x_1 + 4x_2 & & & \\
\text{s.a} & 4x_1 + 5x_2 & \leq & 20 & \\
 & x_1 & \geq & 1 & \\
 & x_2 & \leq & 3 & \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 & \text{e int.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & \omega = 2x_1 + 4x_2 & & & \\
\text{s.a} & 4x_1 + 5x_2 & \leq & 20 & \\
 & x_1 & \geq & 1 & \\
 & x_2 & \geq & 4 & \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0 & \text{e int.}
\end{array}
$$

Generazione dei sottoproblemi



Generazione dei sottoproblemi

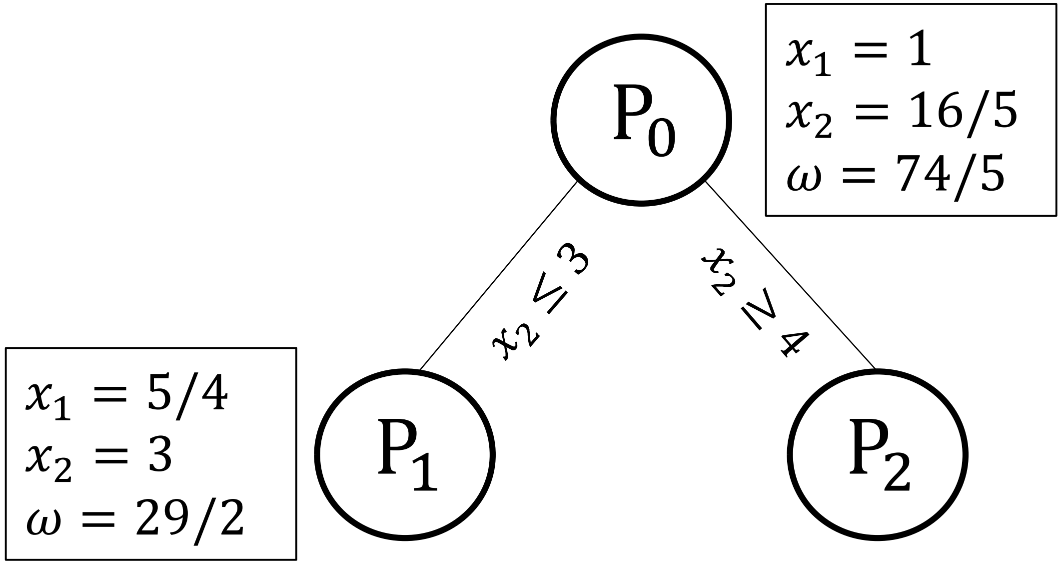


La soluzione del problema P1 è rappresentata dal punto P_1

$$P_1 : \begin{cases} s_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = -\dfrac{4}{5}x_1 + 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

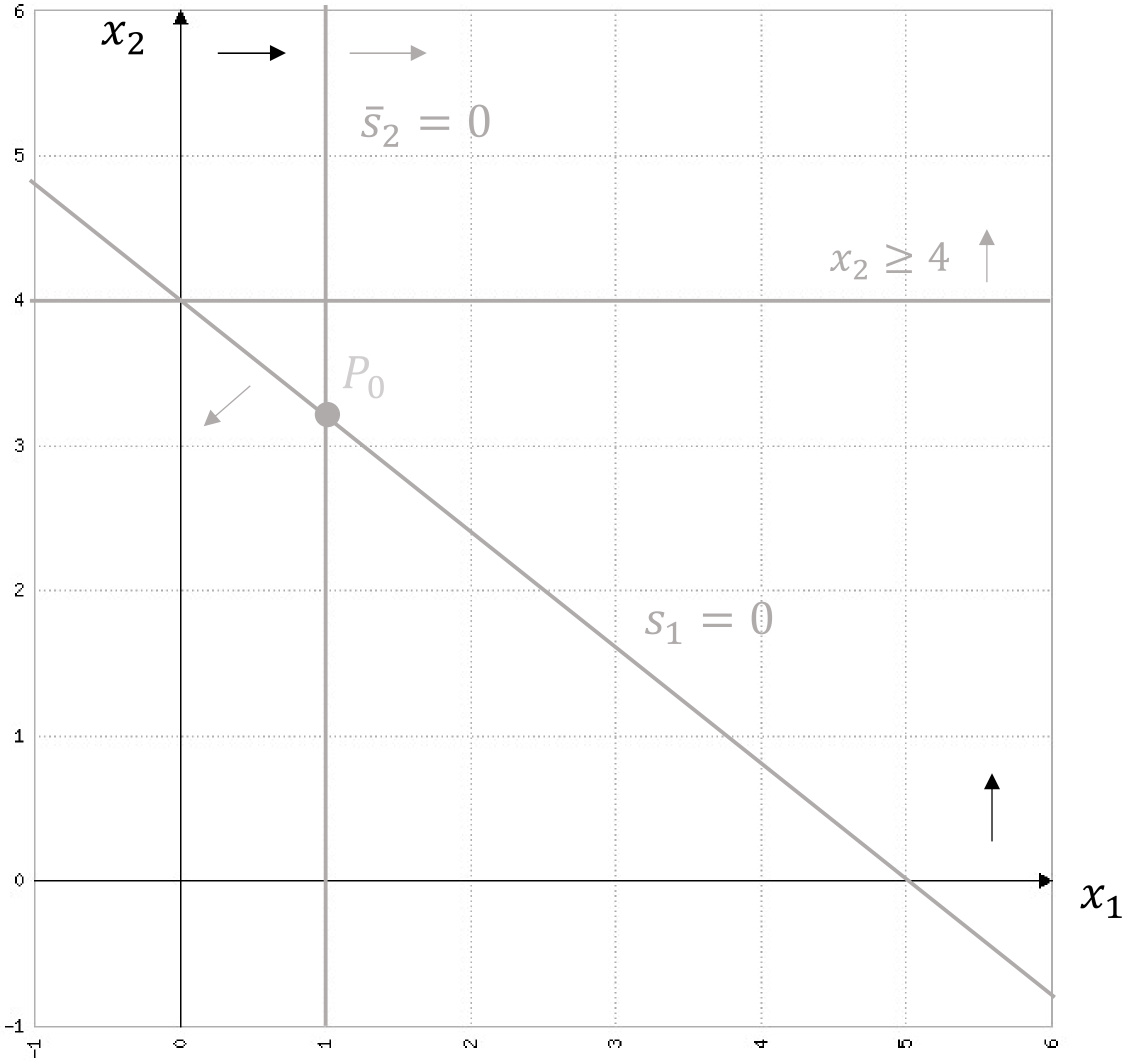
$$P_1 : \left(\frac{5}{4}; 3\right)$$

$$\omega^* = 2x_1 + 4x_2 = \frac{29}{2}$$



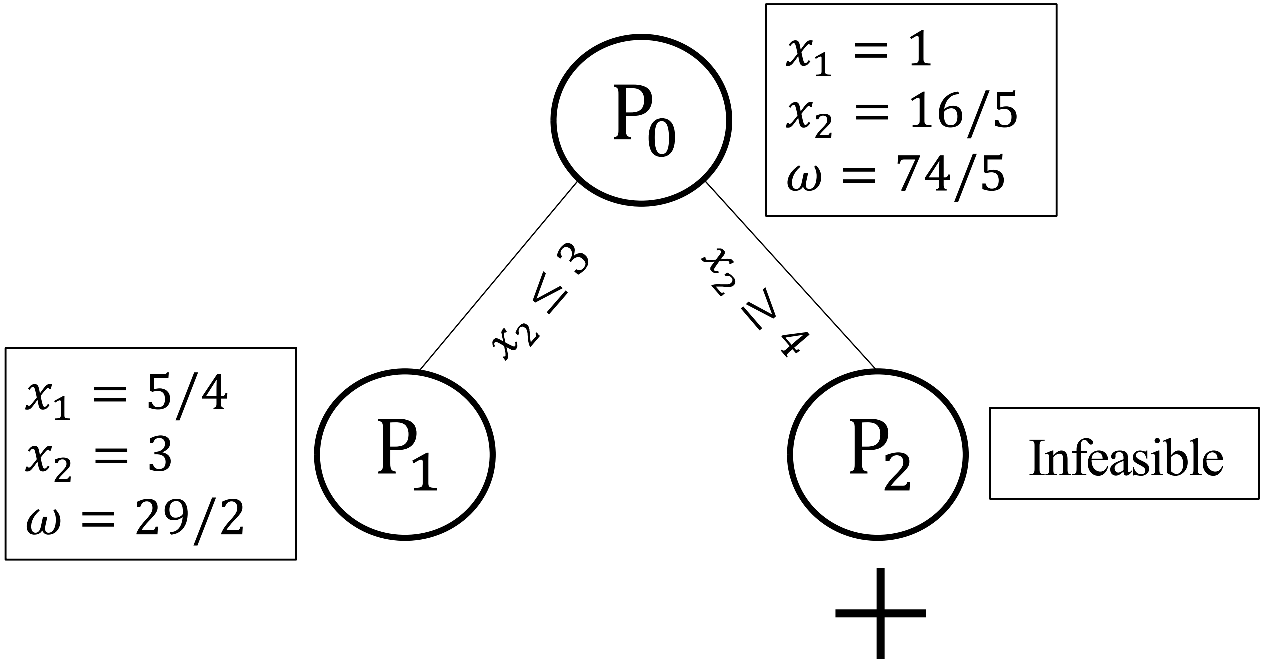
P_0
$x_1 = 1$
$x_2 = 16/5$
$\omega = 74/5$
$x_2 \leq 3$
$x_2 \geq 4$
P_1
$x_1 = 5/4$
$x_2 = 3$
$\omega = 29/2$
P_2

Generazione dei sottoproblemi

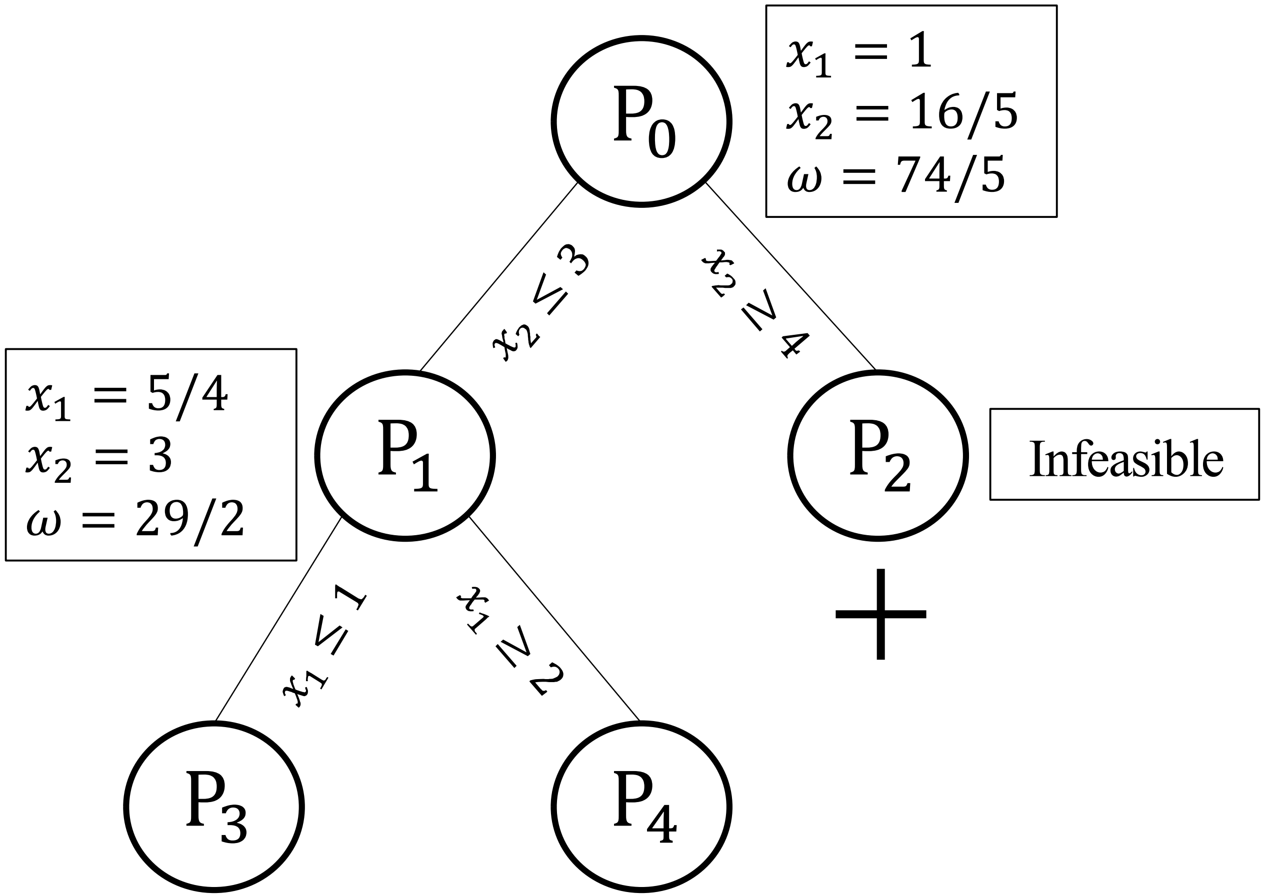


Il problema P2 non ammette alcuna soluzione perché caratterizzato da una regione ammissibile vuota

Esercizio E


P0
$x_1 = 1$
$x_2 = 16/5$
$\omega = 74/5$
$x_2 \leq 3$
$x_2 \geq 4$
P1
$x_1 = 5/4$
$x_2 = 3$
$\omega = 29/2$
P2
Infeasible

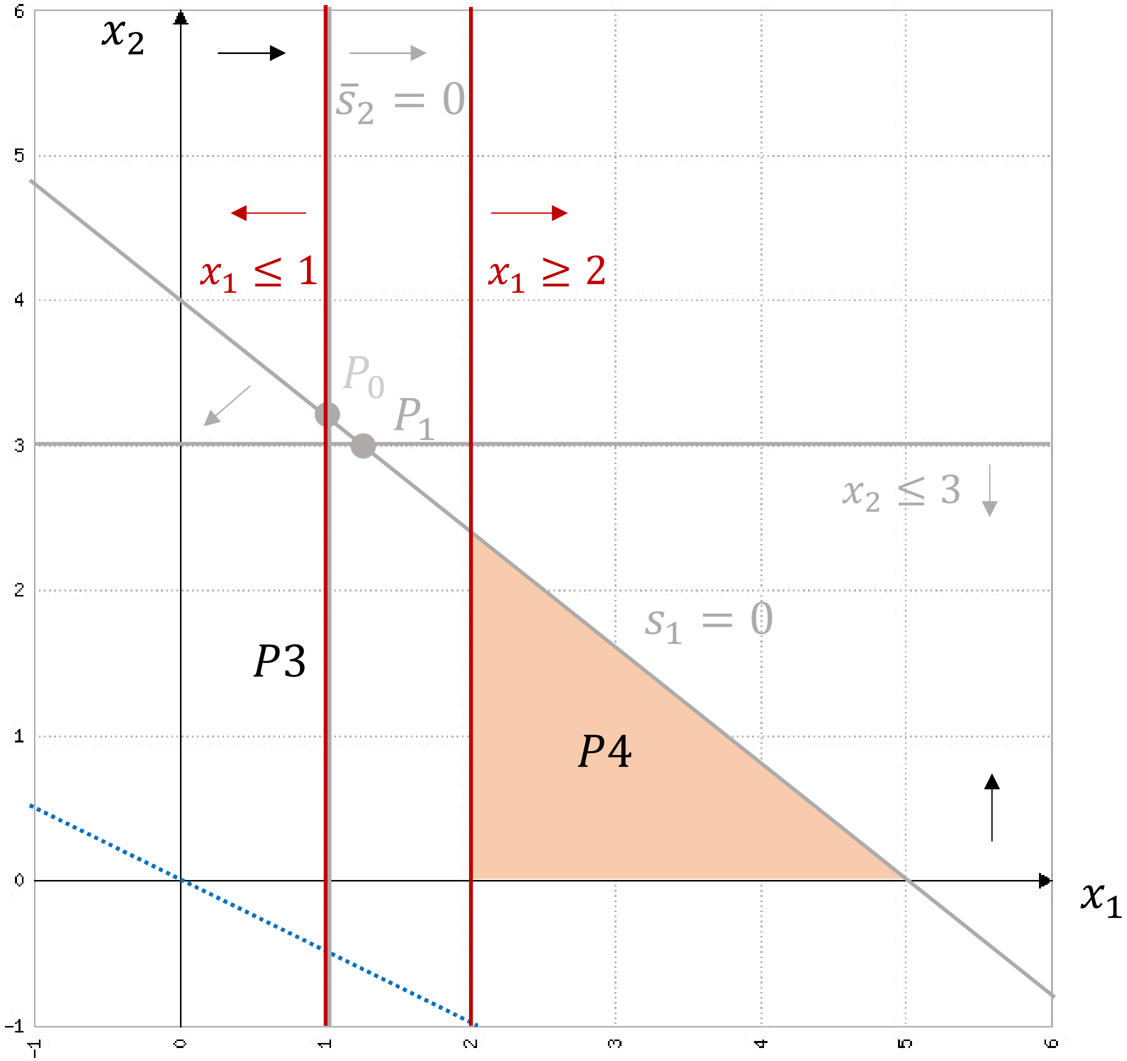
Esercizio E



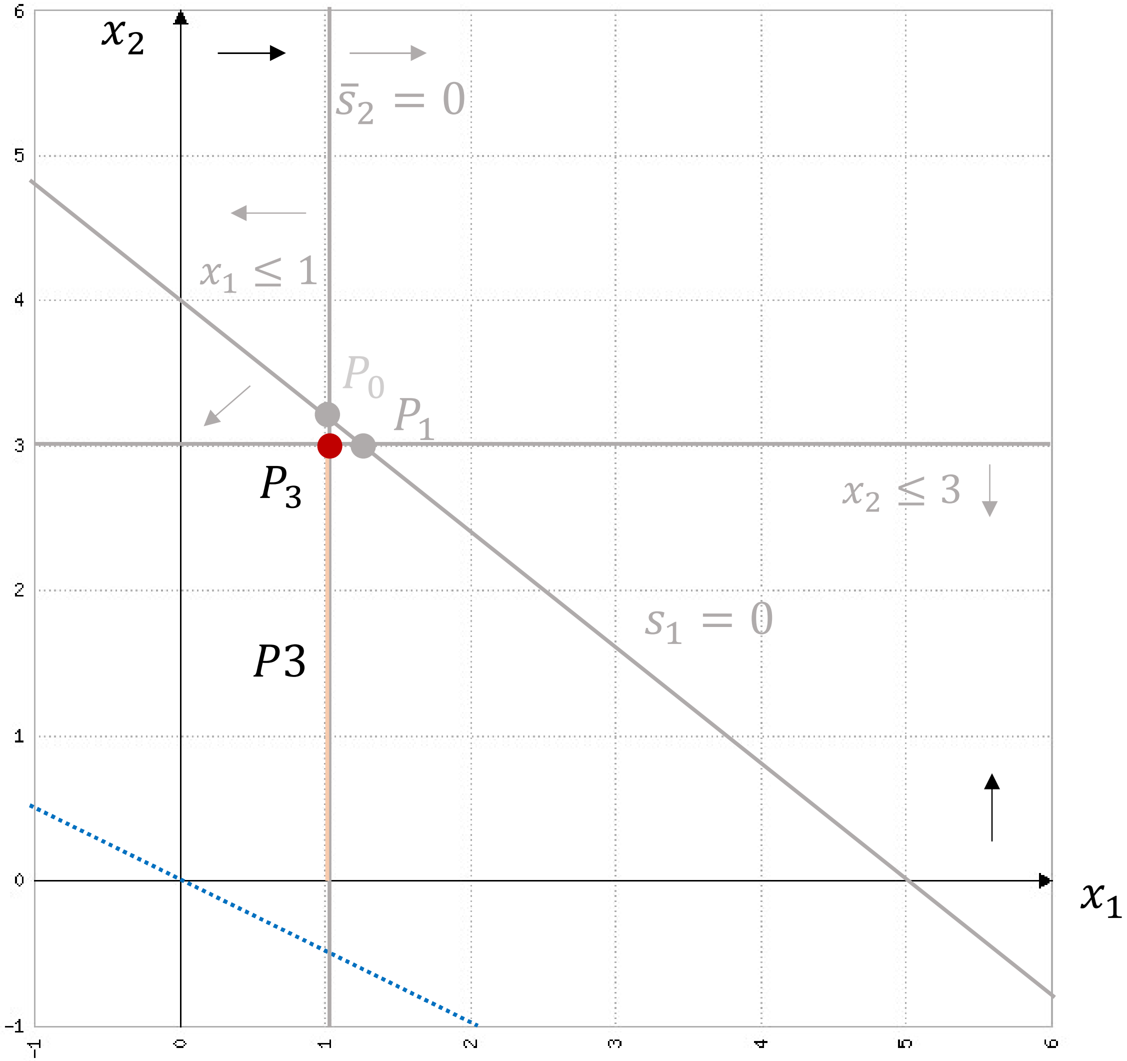
P0
$x_1 = 1$
$x_2 = 16/5$
$\omega = 74/5$
$x_2 \leq 3$
$x_2 \geq 4$
P1
$x_1 = 5/4$
$x_2 = 3$
$\omega = 29/2$
P2
Infeasible
$x_1 \leq 1$
$x_1 \geq 2$
P3
P4

Esercizio E

Generazione dei sottoproblemi



Generazione dei sottoproblemi



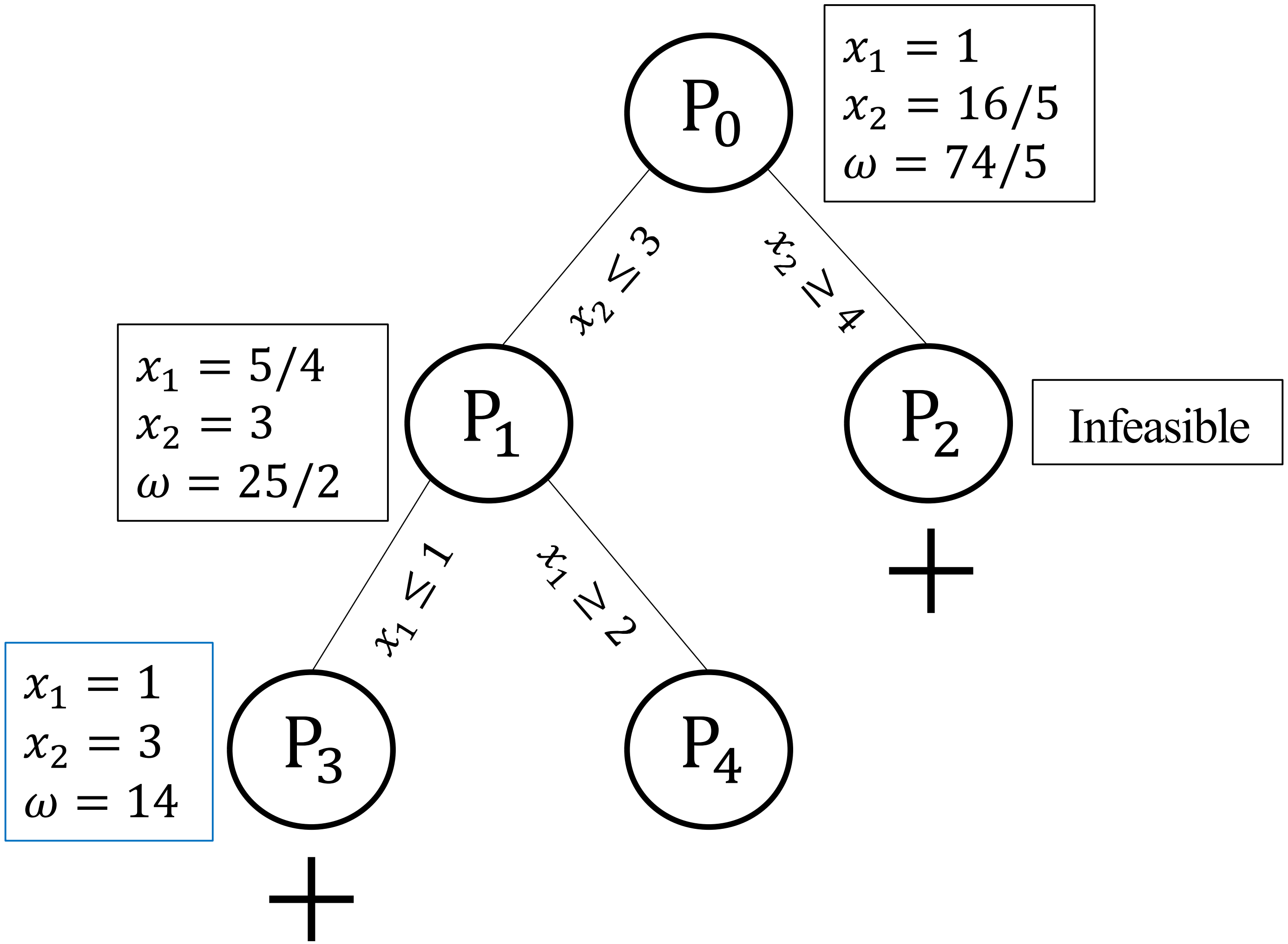
La soluzione del problema P3 è rappresentata dal punto P_3

$$P_3: \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

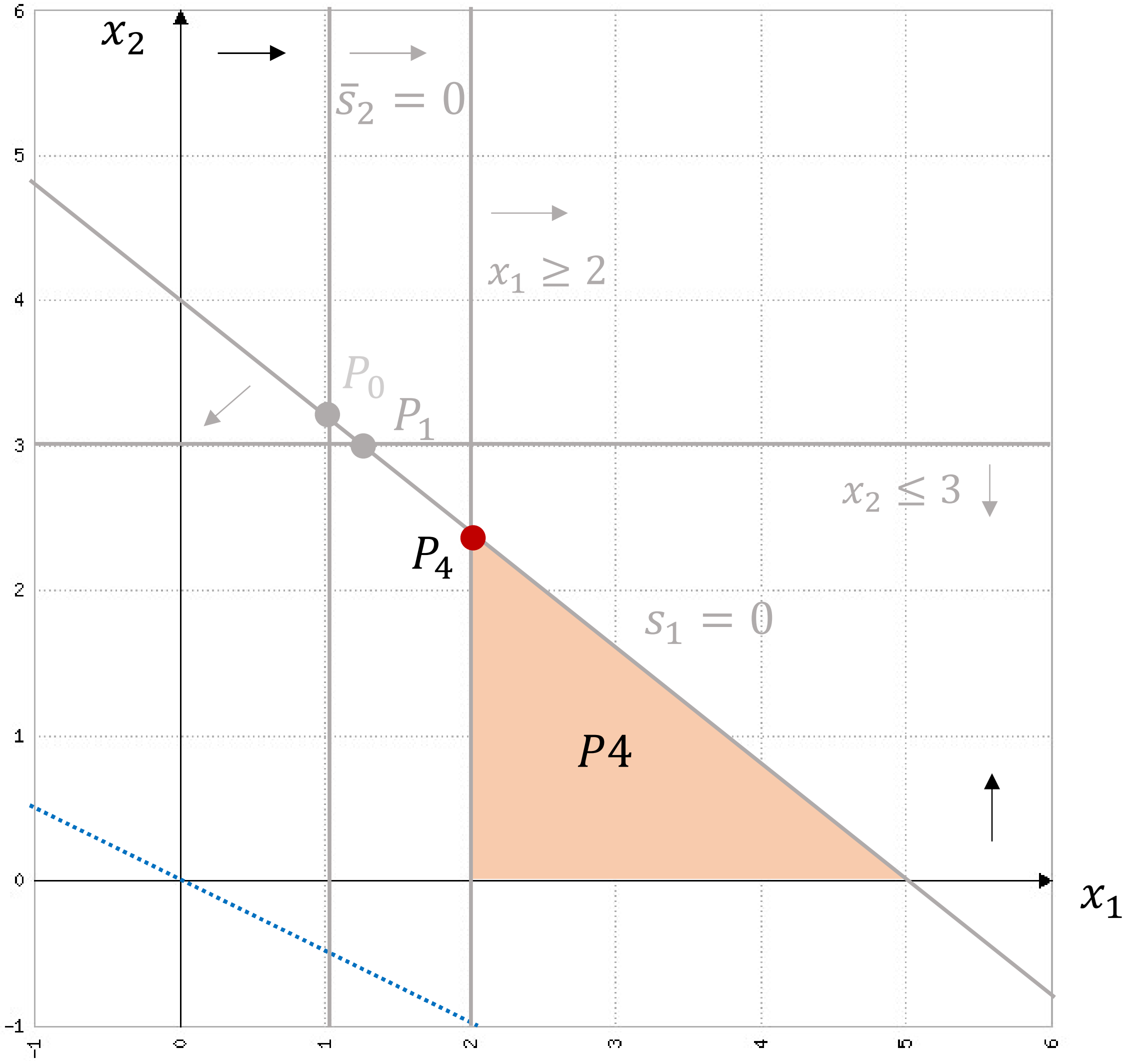
$$P_3: (1; 3)$$

$$\omega^* = 2x_1 + 4x_2 = 14$$

Esercizio E


P0
$x_1 = 1$
$x_2 = 16/5$
$\omega = 74/5$
$x_2 \leq 3$
$x_2 \geq 4$
P1
$x_1 = 5/4$
$x_2 = 3$
$\omega = 25/2$
P2
Infeasible
$x_1 \leq 1$
$x_1 \geq 2$
P3
$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$\omega = 14$
P4

Generazione dei sottoproblemi



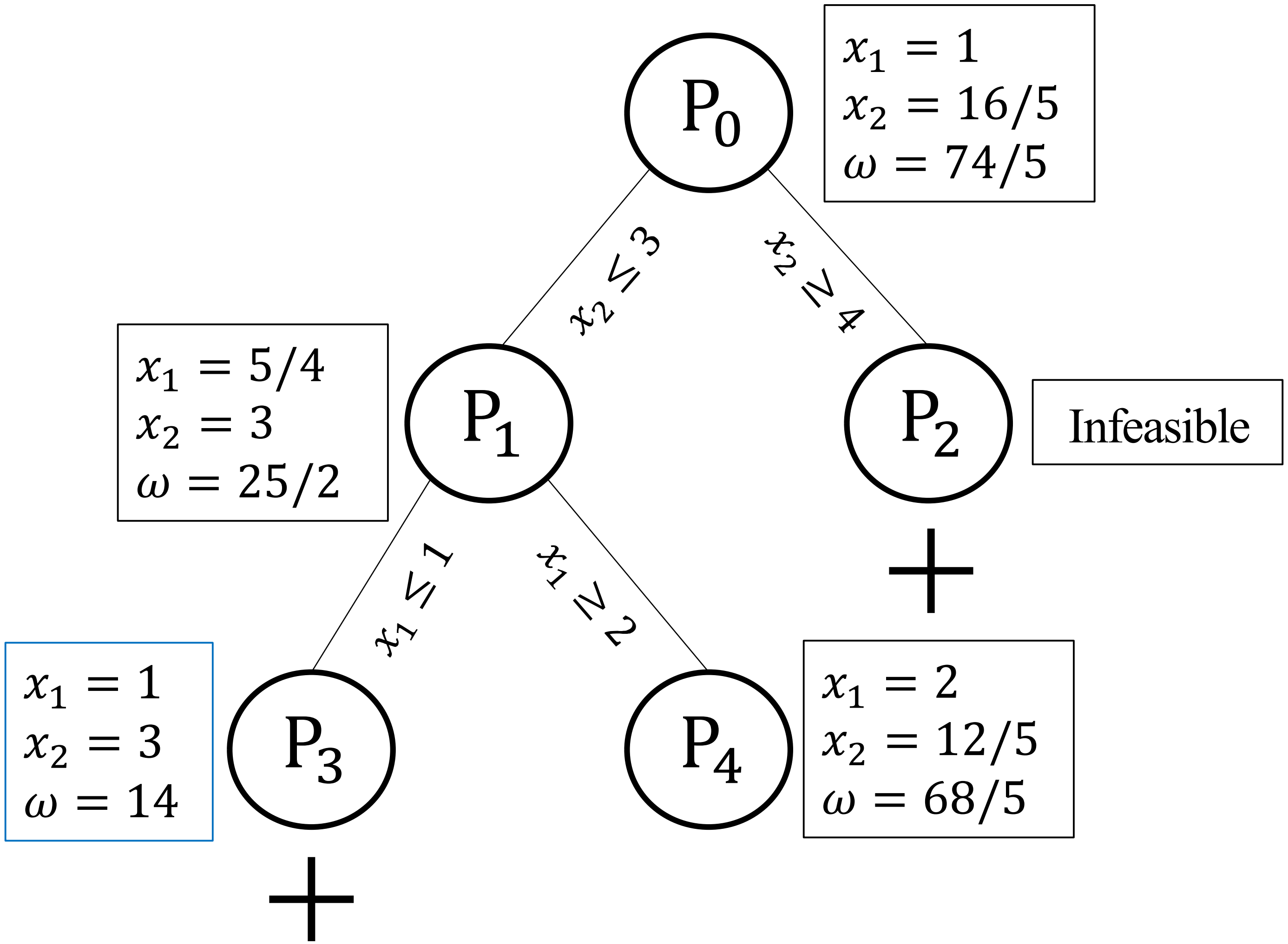
La soluzione del problema P4 è rappresentata dal punto P_4

$$P_4: \begin{cases} x_1 = 2 \\ s_1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + 4 \end{cases}$$

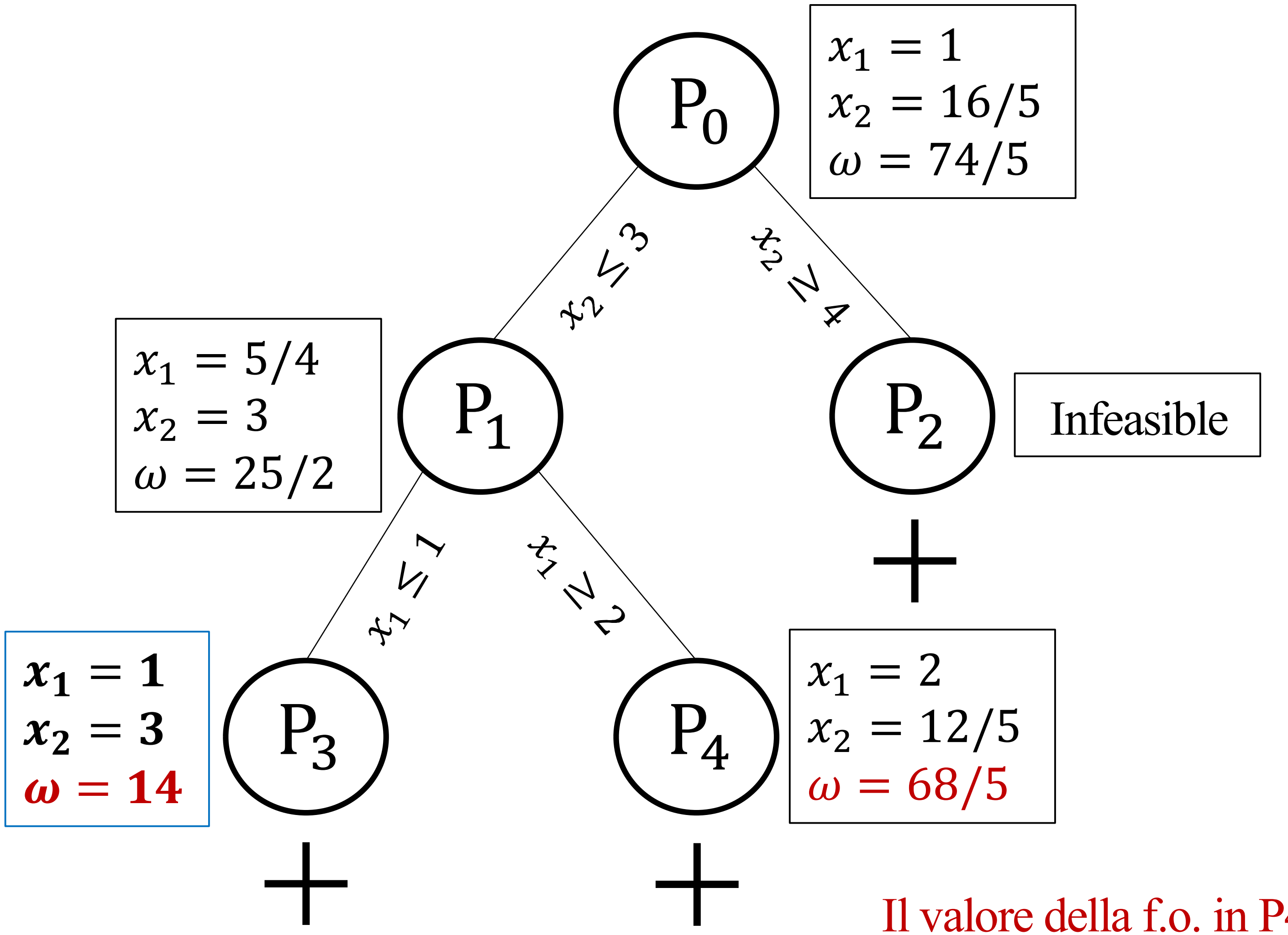
$$P_4: \left(2; \frac{12}{5}\right)$$

$$\omega^* = 2x_1 + 4x_2 = \frac{68}{5}$$

Esercizio E


P0
$x_1 = 1$
$x_2 = 16/5$
$\omega = 74/5$
$x_2 \leq 3$
$x_2 \geq 4$
P1
$x_1 = 5/4$
$x_2 = 3$
$\omega = 25/2$
P2
Infeasible
$x_1 \leq 1$
$x_1 \geq 2$
P3
$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$\omega = 14$
P4
$x_1 = 2$
$x_2 = 12/5$
$\omega = 68/5$

Esercizio E

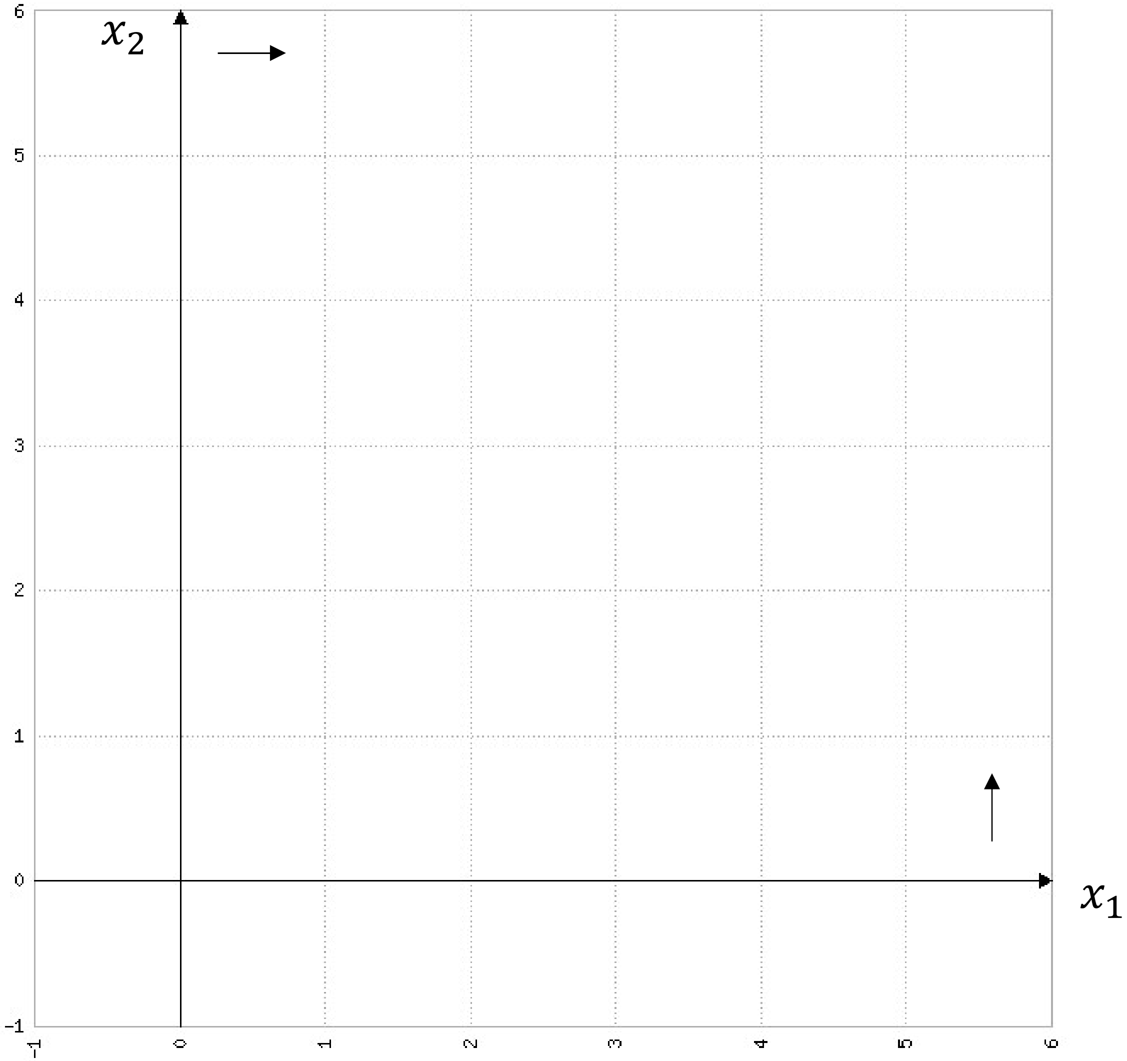


Il valore della f.o. in P4 è peggiore della soluzione intera P3

Esercizio F

$$
\begin{array}{llcrcrcrl}
\max & \omega = 2x_1 + x_2 & & & & & & & \\
\text{s. a} & & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & & \\
 & & x_1 & & & \leq & 4 & & \\
 & & & & x_2 & \geq & 4/5 & & \\
 & & & & x_1, x_2 & \geq & 0 & & \text{e intere}
\end{array}
$$

Rappresentazione nel piano cartesiano

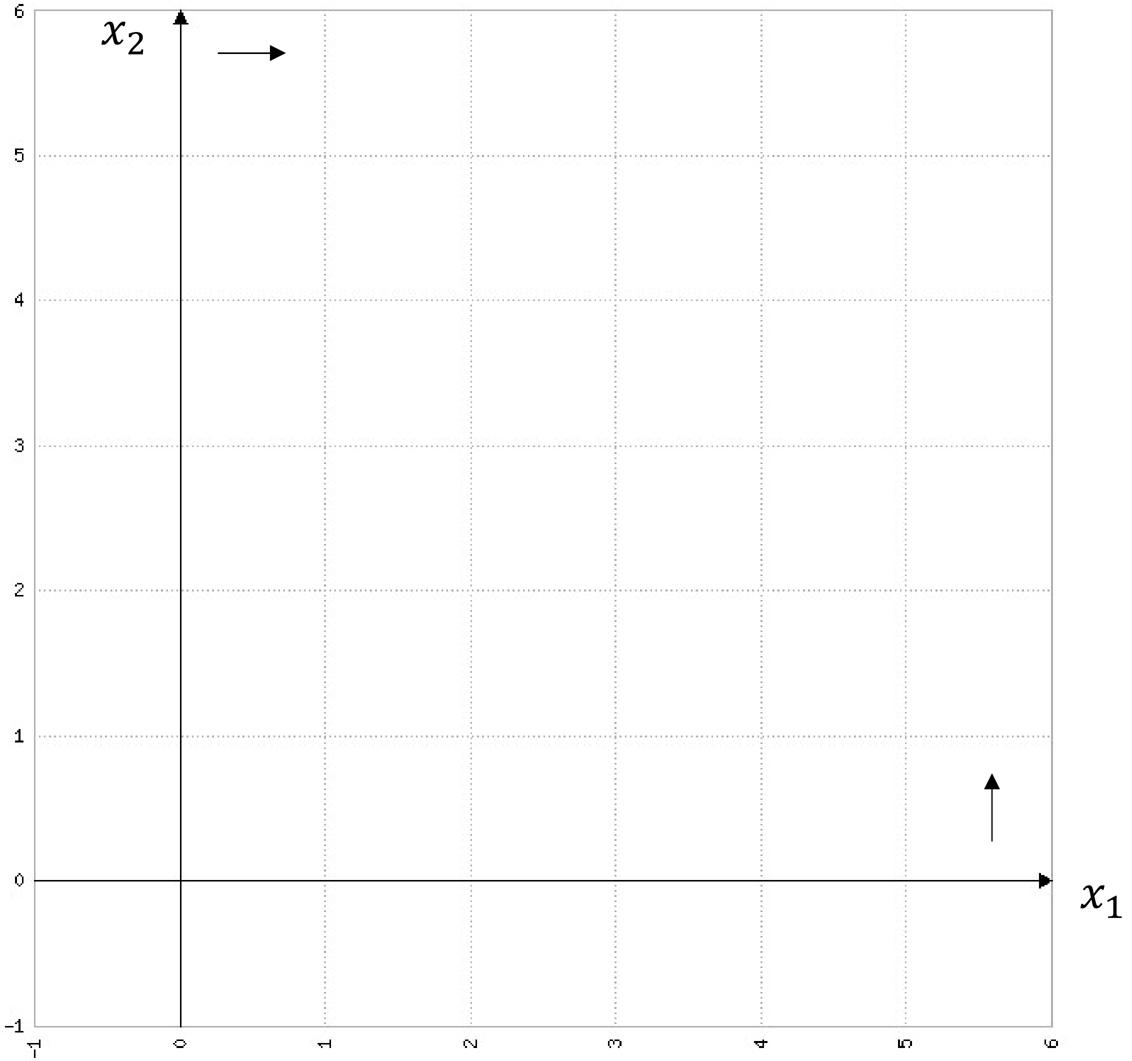


$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

I vincoli di non-negatività implicano la selezione del primo quadrante

Esercizio F

1° vincolo funzionale : $4x_1 + 5x_2 \leq 20 \longleftrightarrow 4x_1 + 5x_2 + s_1 = 20$



$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$\downarrow$$

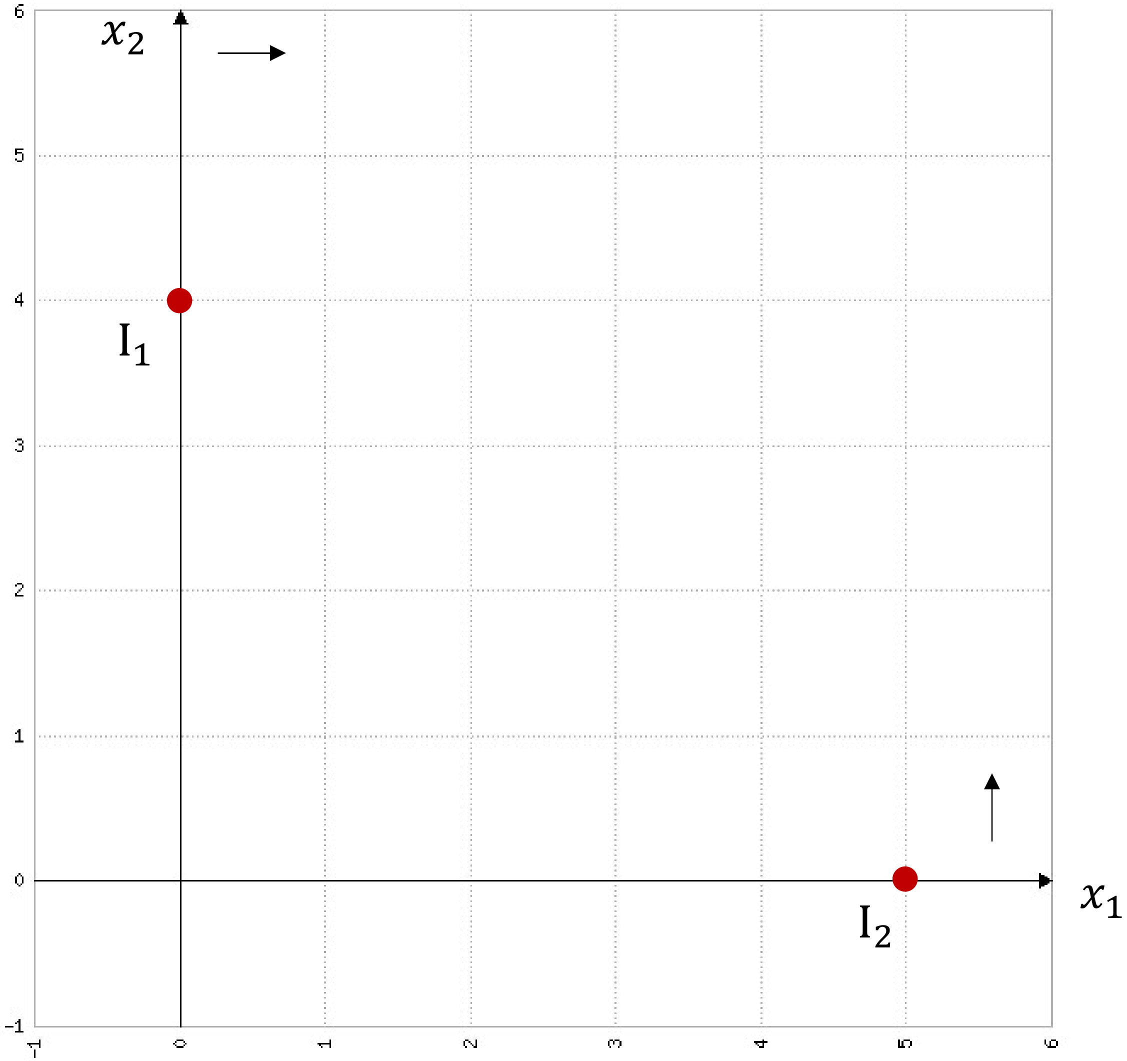
$$x_2 \leq -\frac{4}{5}x_1 + 4$$

$$\downarrow$$

La frontiera del primo vincolo è una retta con coeff. angolare $-\frac{4}{5}$ e intercetta 4

Esercizio F

1° vincolo funzionale : $4x_1 + 5x_2 \leq 20$ $\longleftrightarrow$ $4x_1 + 5x_2 + s_1 = 20$



$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$\downarrow$$

$$x_2 \leq -\frac{4}{5}x_1 + 4$$

$$\downarrow$$

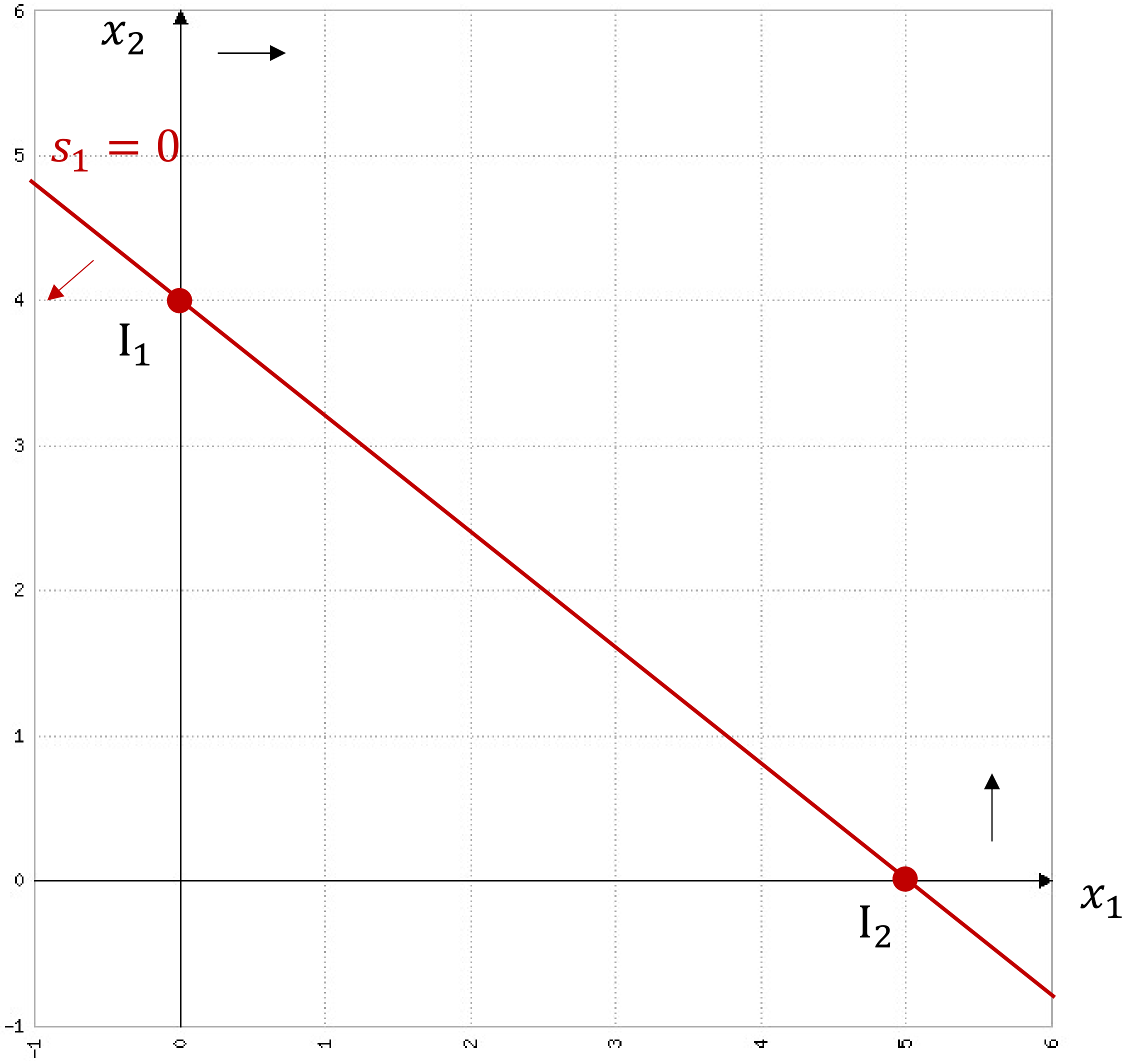
La frontiera del primo vincolo è una retta con coeff. angolare $-\frac{4}{5}$ e intercetta 4

$$\downarrow$$

$$\mathrm{I}_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad \wedge \quad \mathrm{I}_2: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

Esercizio F

1° vincolo funzionale : $4x_1 + 5x_2 \leq 20 \longleftrightarrow 4x_1 + 5x_2 + s_1 = 20$



$$4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$\downarrow$$

$$x_2 \leq -\frac{4}{5}x_1 + 4$$

$$\downarrow$$

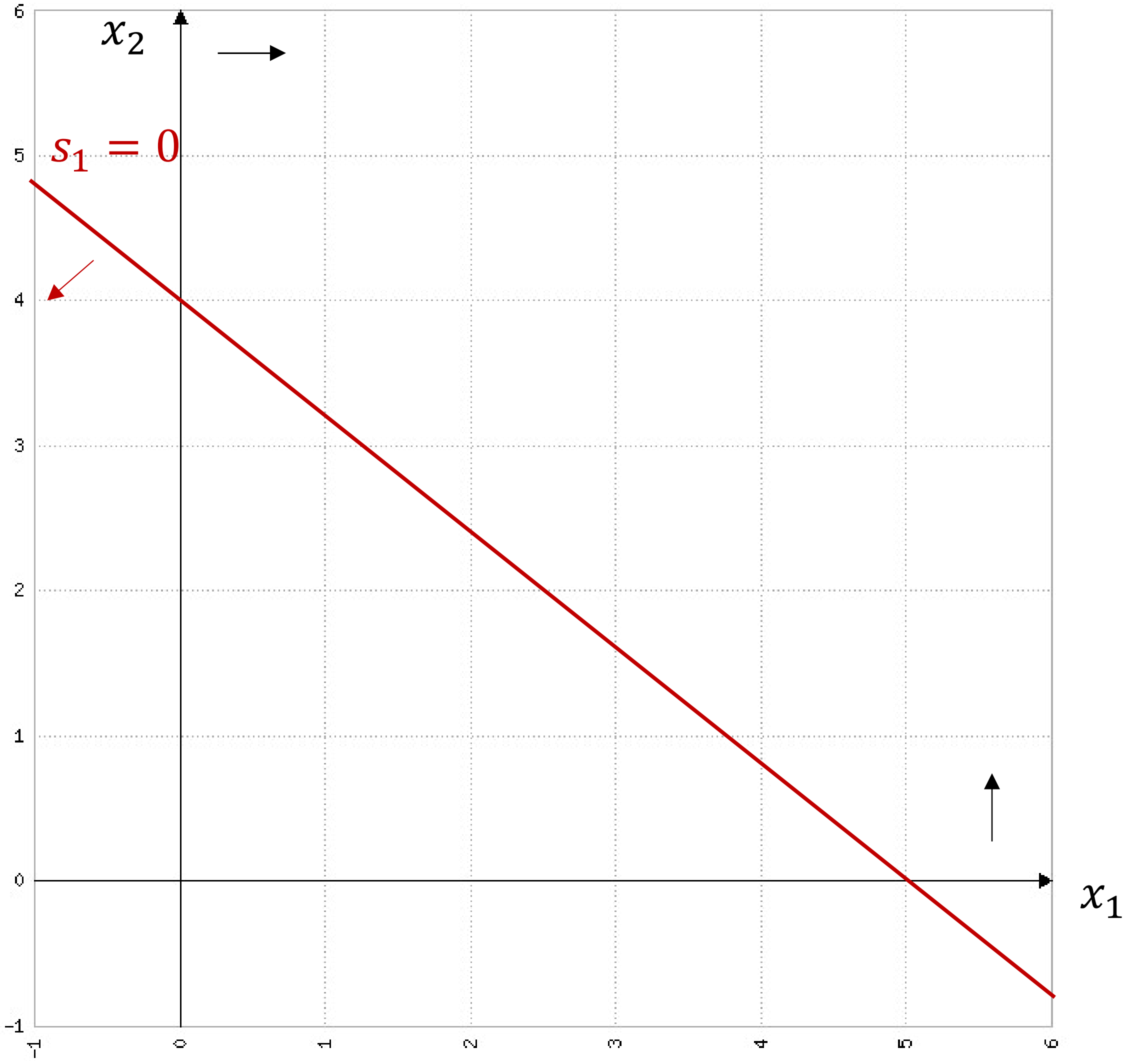
La frontiera del primo vincolo è una retta con coeff. angolare $-\frac{4}{5}$ e intercetta 4

$$\downarrow$$

$$I_1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \wedge \quad I_2: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

Esercizio F

2° vincolo funzionale : $x_1 \leq 4 \longleftrightarrow x_1 + s_2 = 4$



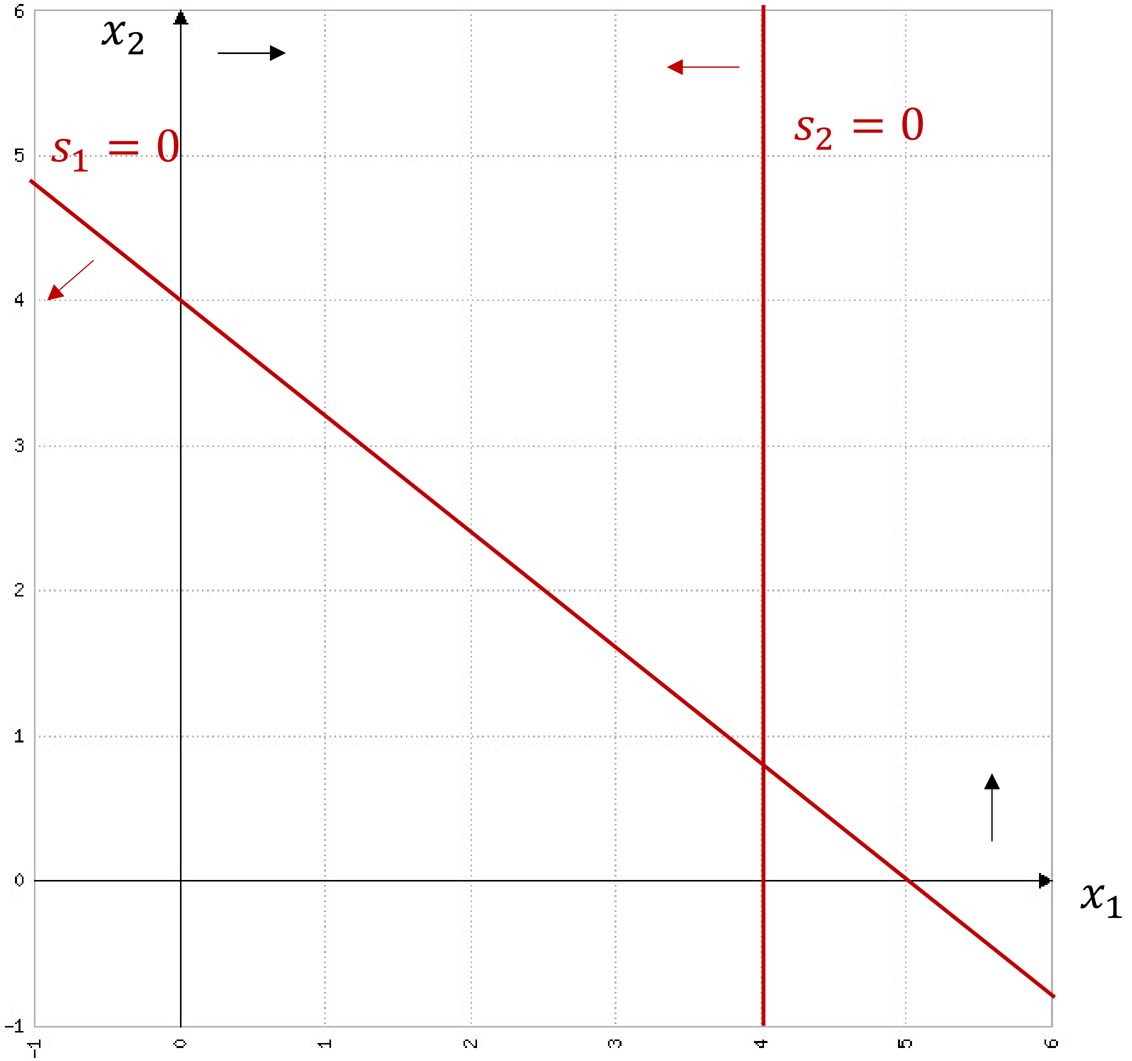
$x_1 \leq 4$

$\downarrow$

La frontiera del secondo vincolo è una retta parallela all'asse delle ordinate

Esercizio F

2° vincolo funzionale : $x_1 \leq 4 \longleftrightarrow x_1 + s_2 = 4$

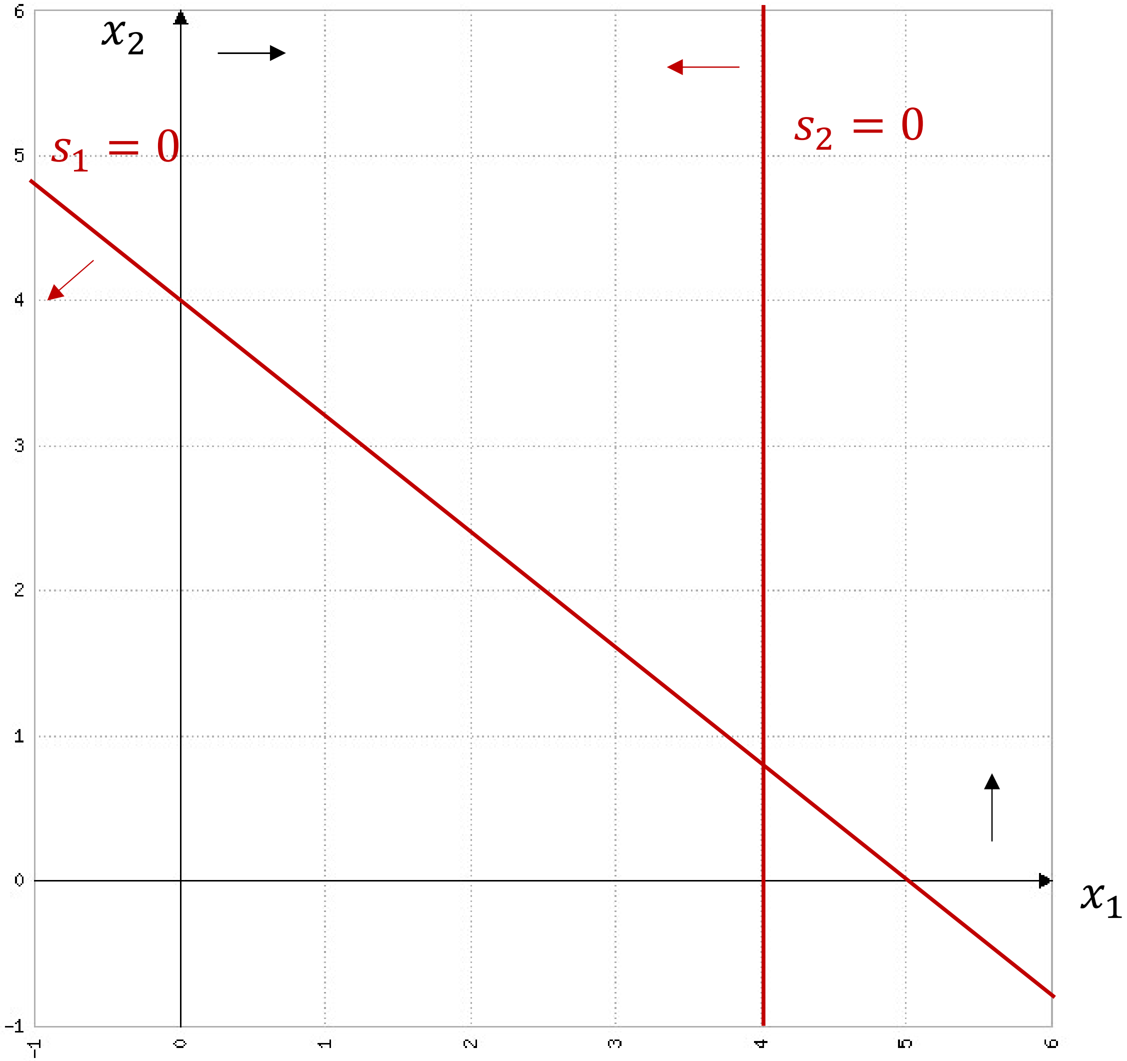


$x_1 \leq 4$

$\downarrow$

La frontiera del secondo vincolo è una retta parallela all'asse delle ordinate

3° vincolo funzionale : $x_2 \geq 4/5 \longleftrightarrow x_2 - \bar{s}_3 = 4/5$



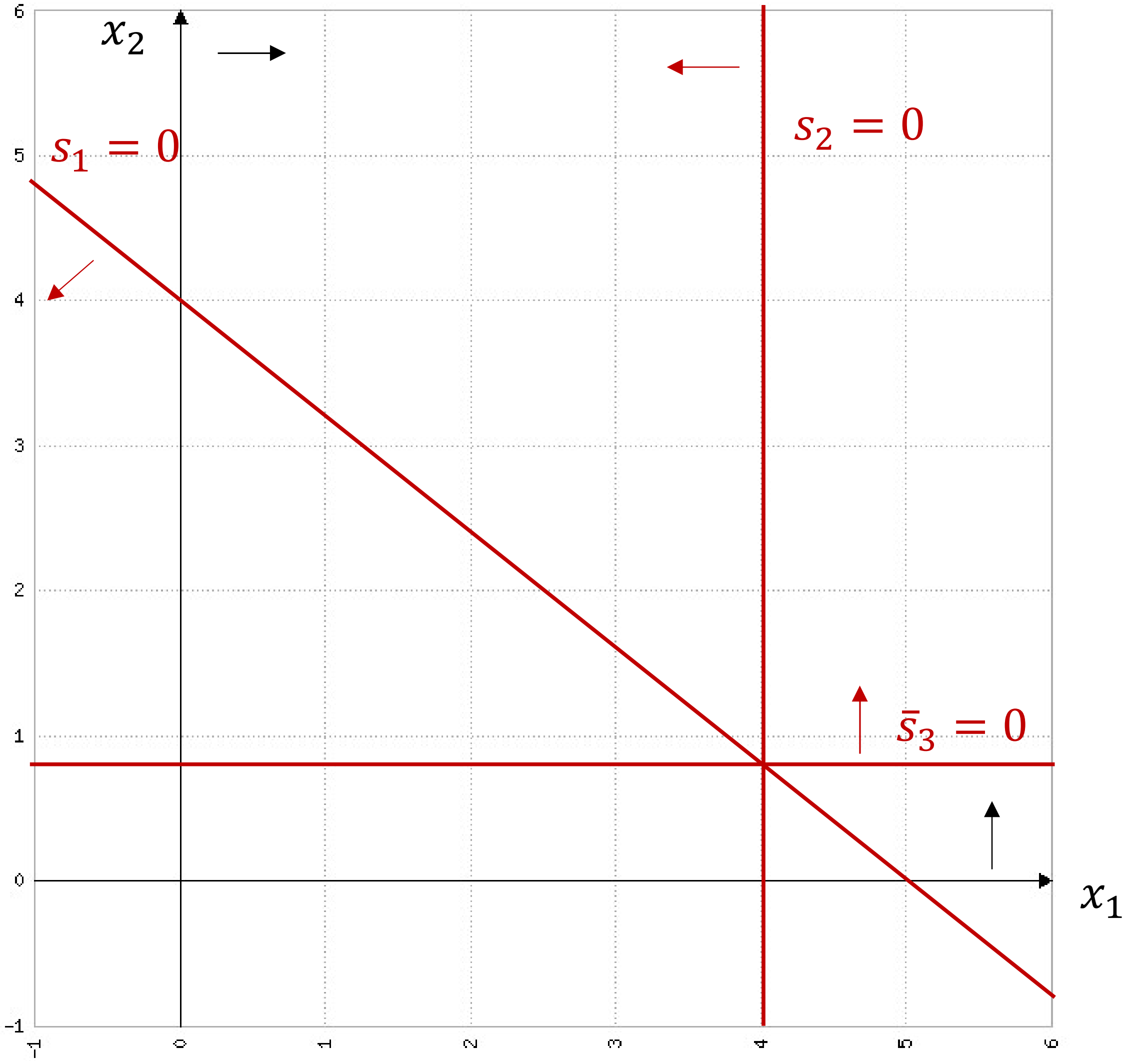
$x_2 \geq 4/5$

$\downarrow$

La frontiera del secondo vincolo è una retta parallela all'asse delle ordinate

Esercizio F

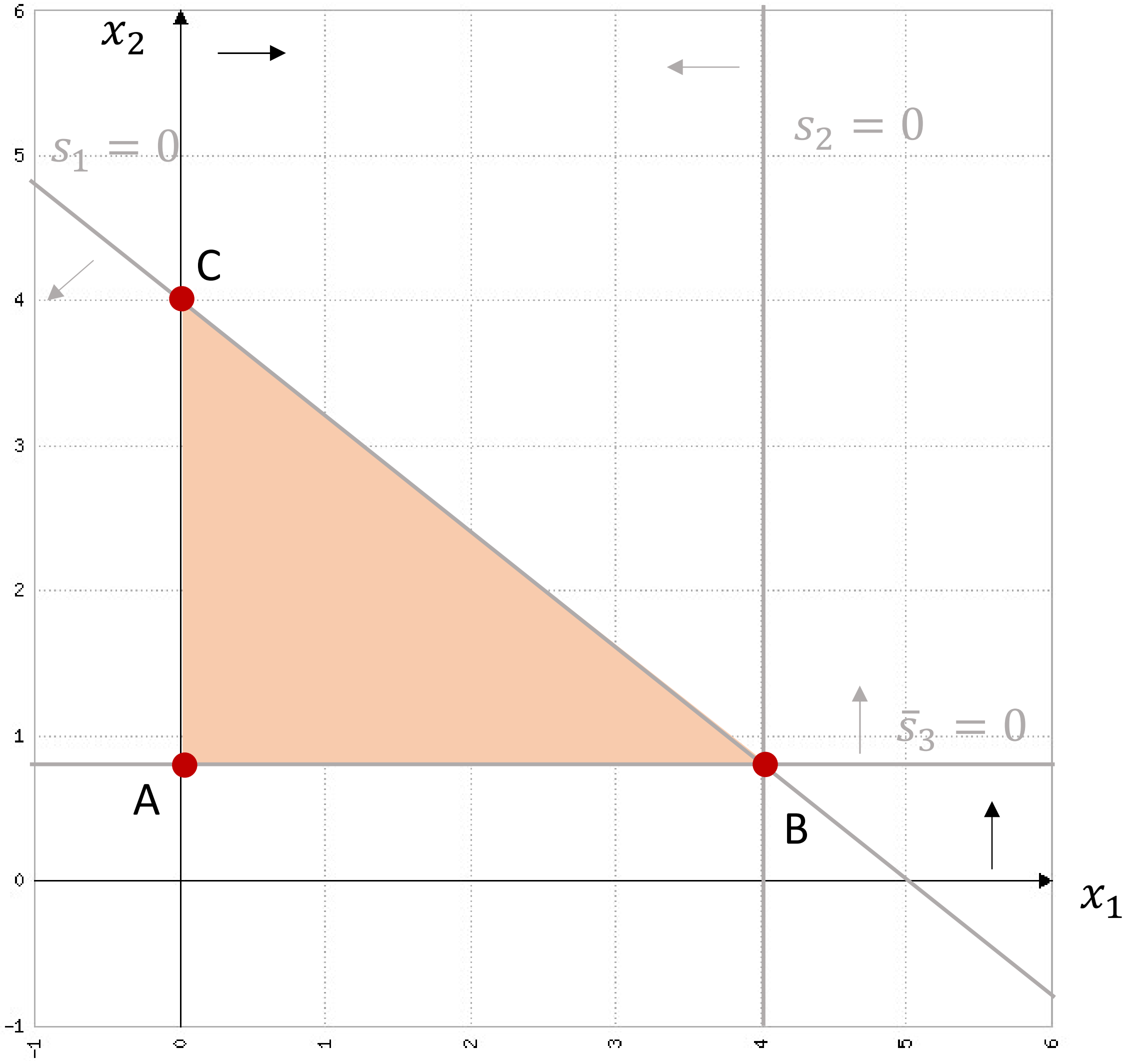
3° vincolo funzionale : $x_2 \geq 4/5 \longleftrightarrow x_2 - \bar{s}_3 = 4/5$



$x_2 \geq 4/5$

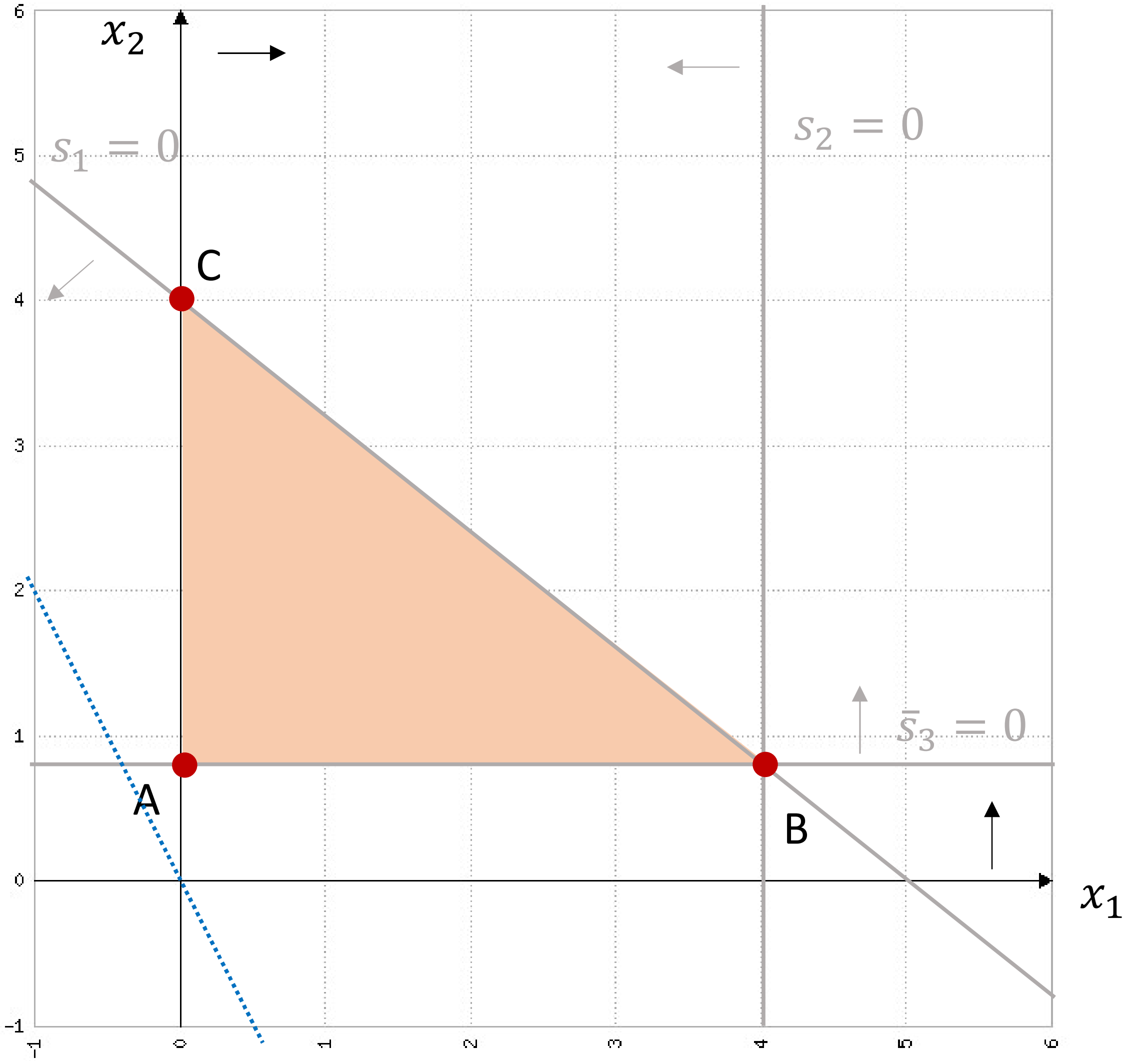
La frontiera del secondo vincolo è una retta parallela all'asse delle ordinate

Regione ammissibile



Esercizio F

Funzione obiettivo : $\omega = 2x_1 + x_2$



$x_2 = -2x_1 + \omega$

↓

Fascio di rette con:

- ✓ Coeff. angolare -2
- ✓ Intercetta ω

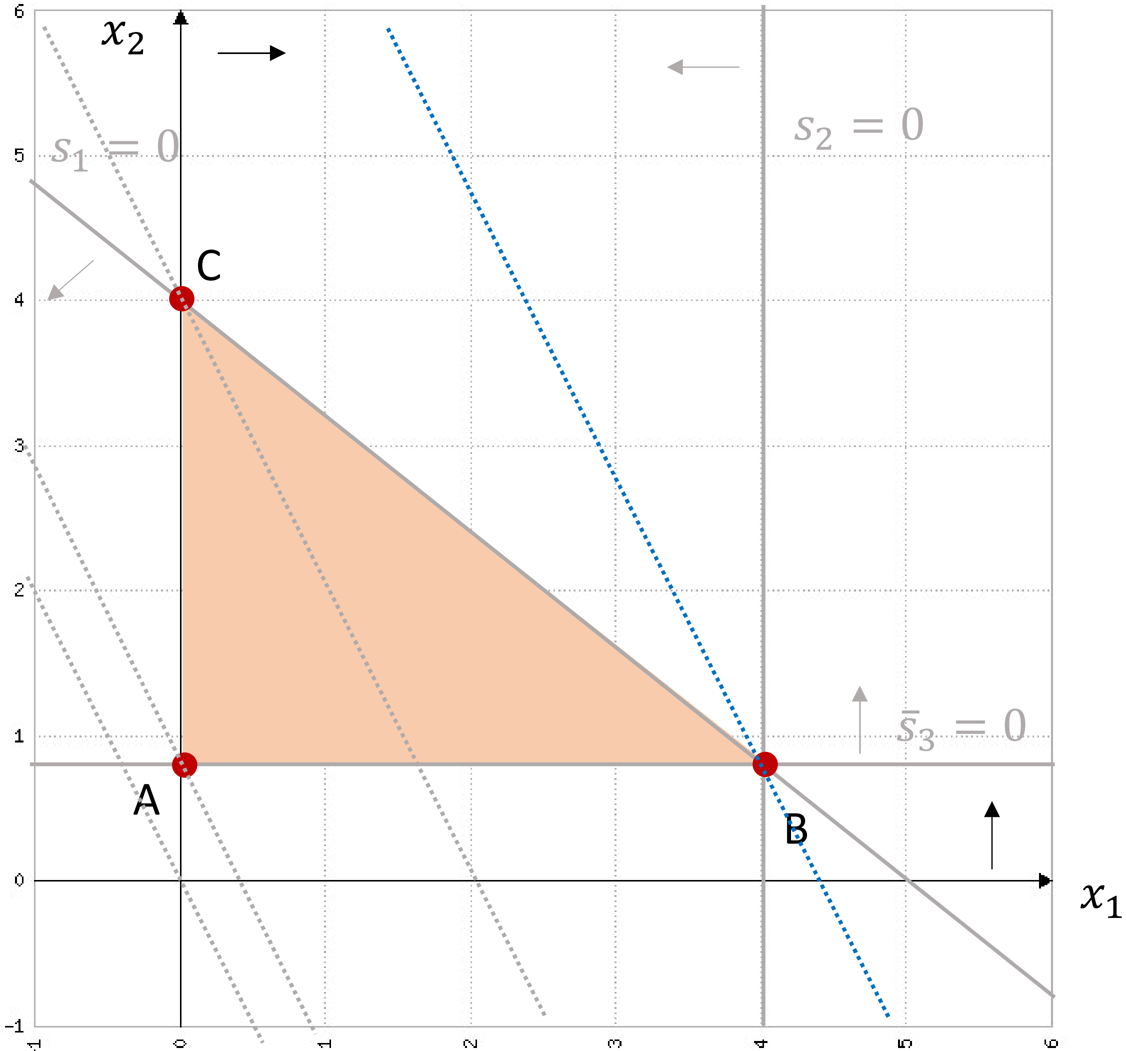
↓

e.g. $\omega = 0$

↓

$x_2 = -2x_1$

Funzione obiettivo : $\omega = 2x_1 + x_2$



$x_2 = -2x_1 + \omega$

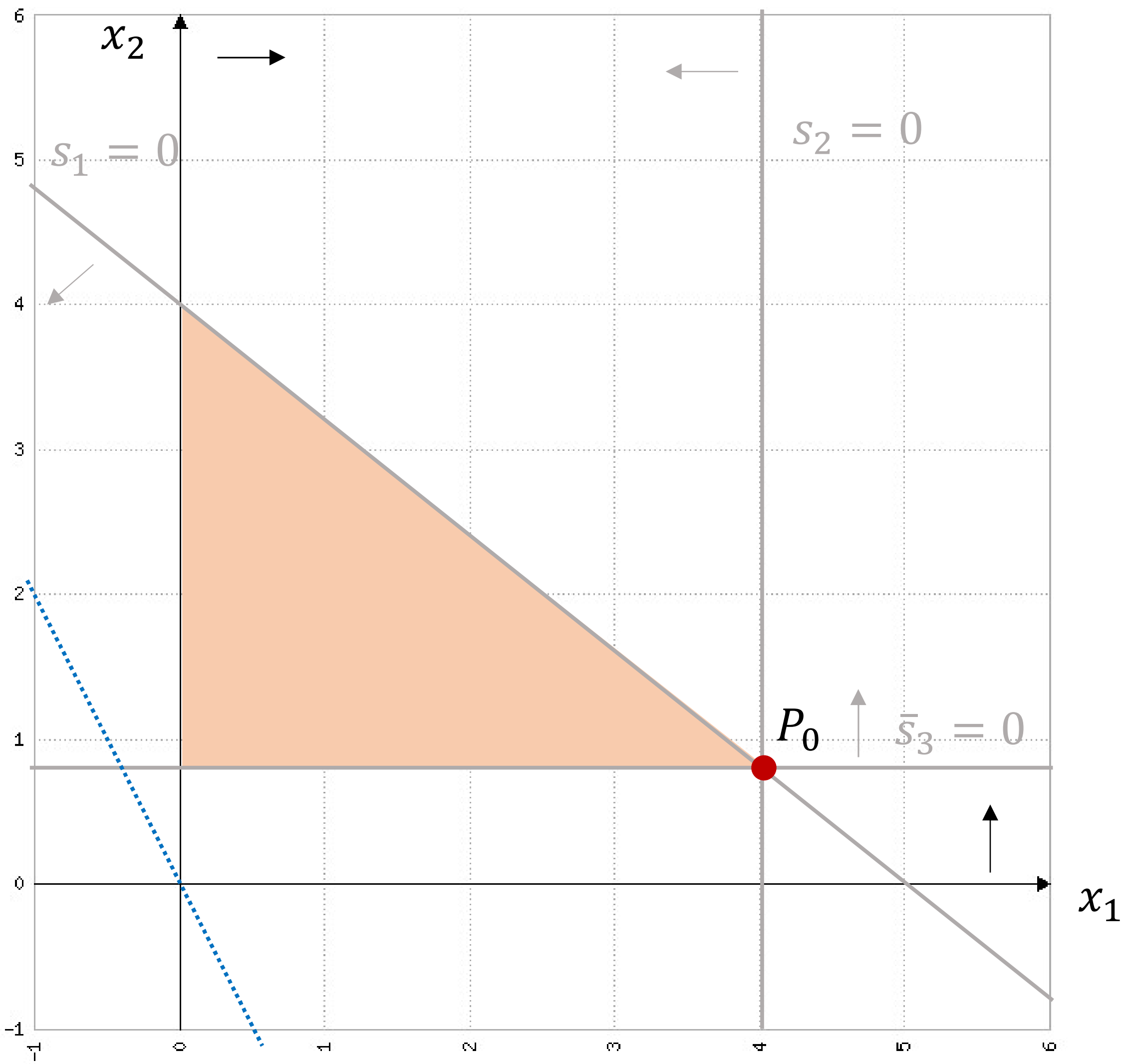
max

$q = \omega$

max

Massimizzare la f.o. equivale a selezionare la retta del fascio con intercetta massima

Determinazione dell'ottimo



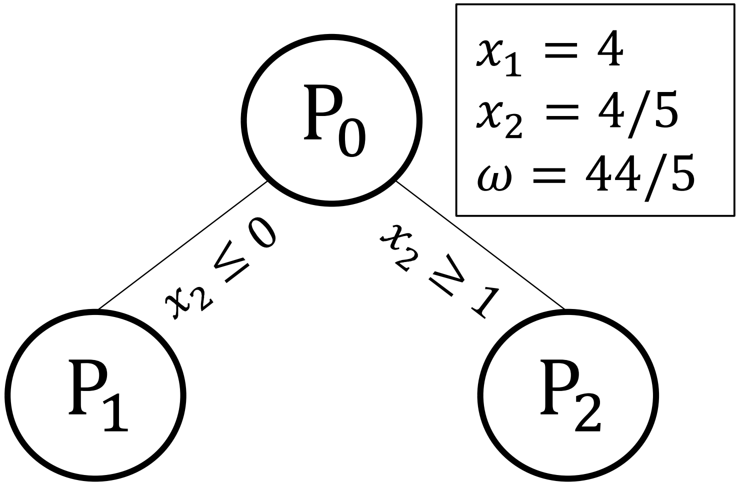
La soluzione del rilassamento continuo è il vertice B, che chiamiamo P_0

$$P_0: \begin{cases} s_2 = 0 \\ \bar{s}_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

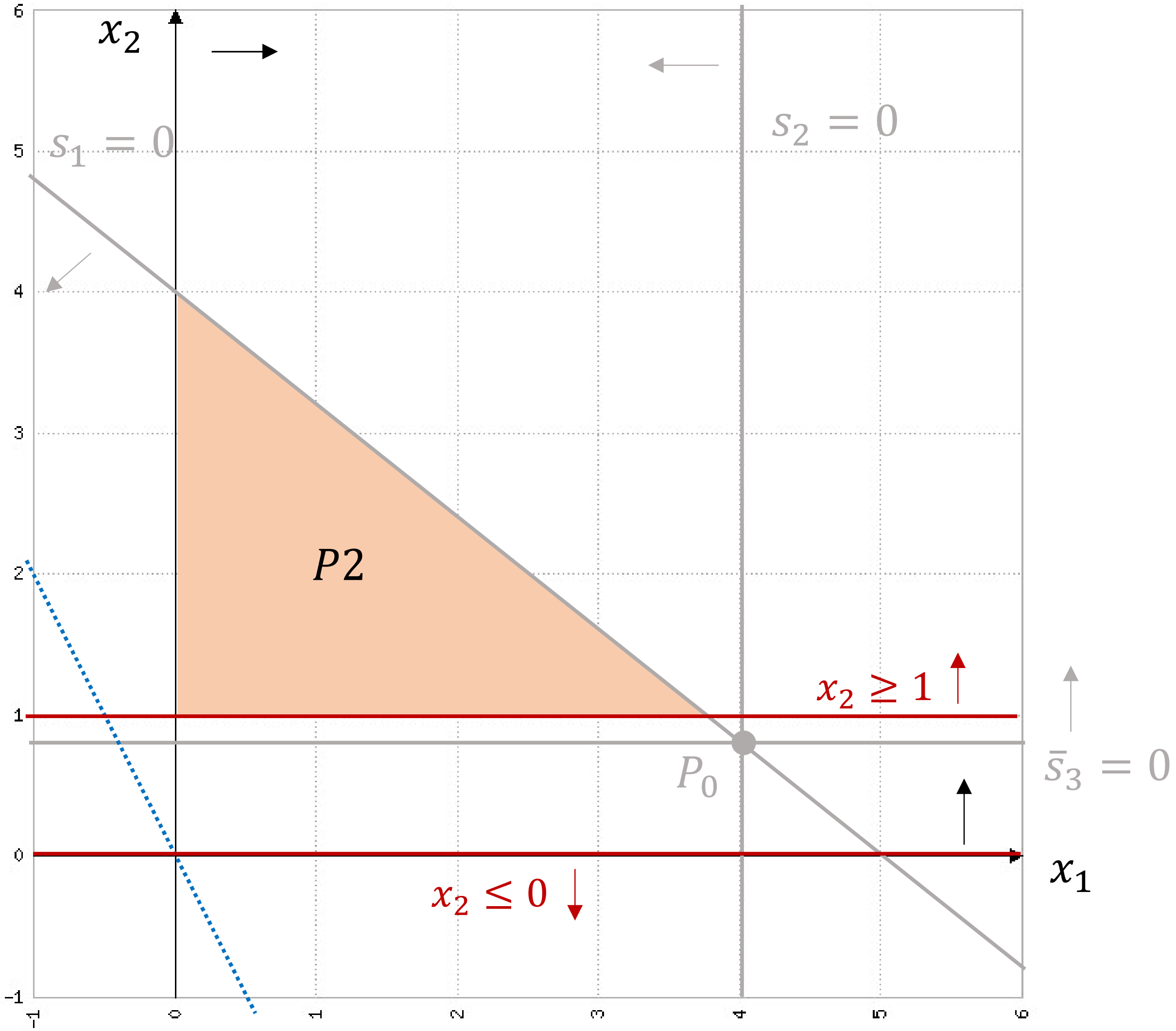
$$P_0: \left(4; \frac{4}{5}\right)$$

$$\omega^* = 2x_1 + x_2 = \frac{44}{5}$$

Esercizio F

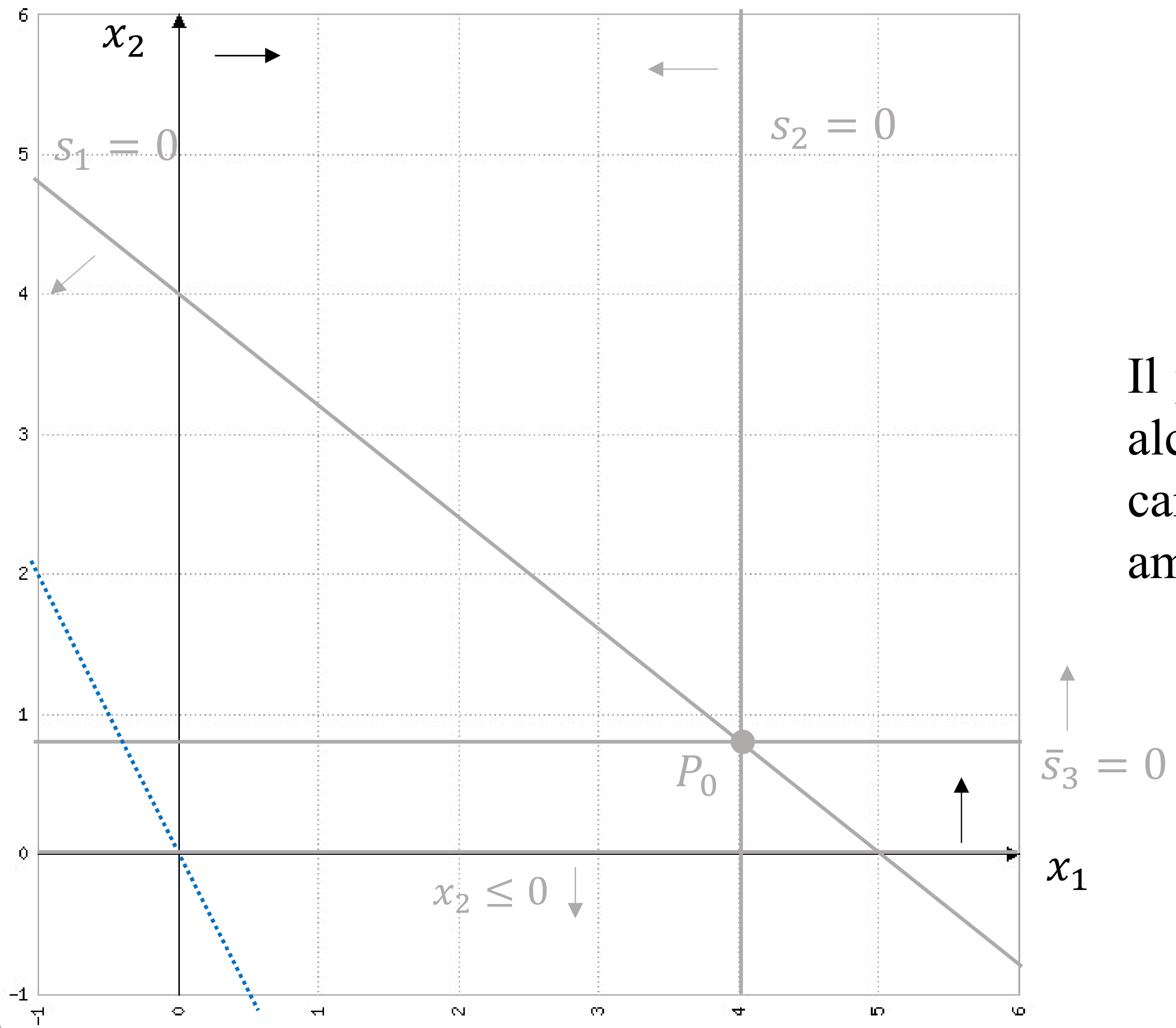


Generazione dei sottoproblemi



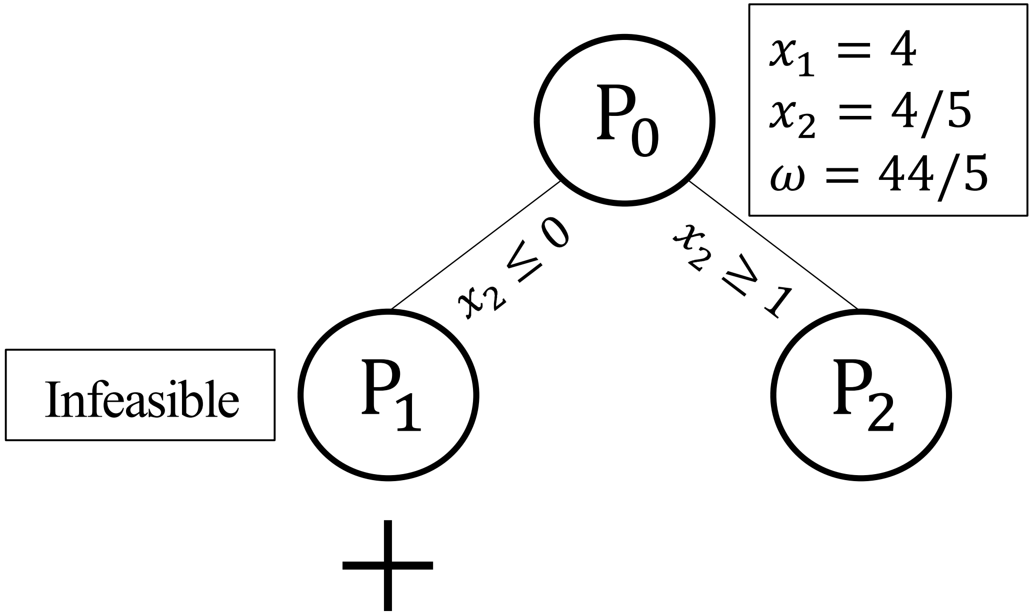
Esercizio F

Generazione dei sottoproblemi



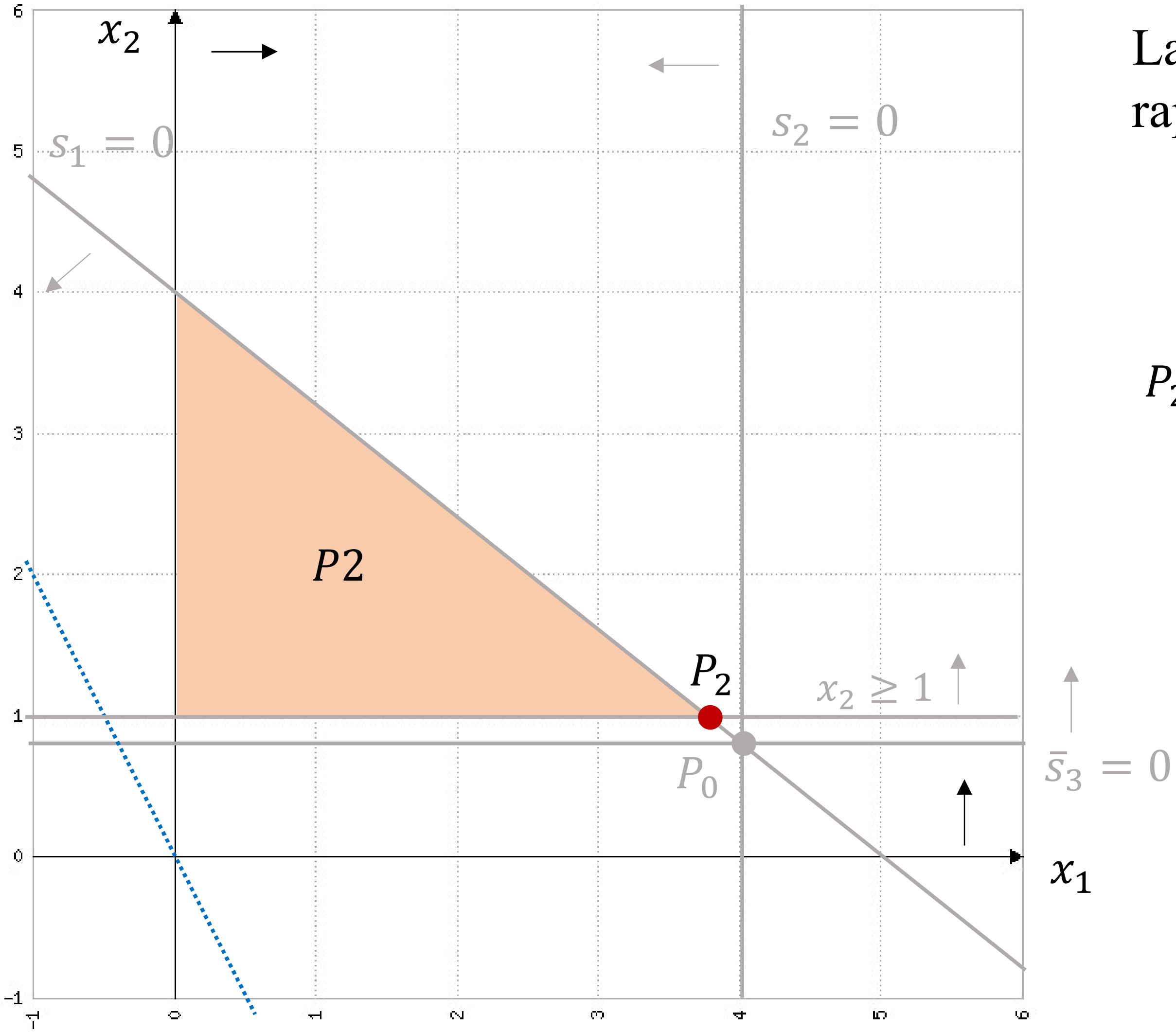
Il problema P1 non ammette alcuna soluzione perché caratterizzato da una regione ammissibile vuota

Esercizio F



Esercizio F

Generazione dei sottoproblemi



La soluzione del problema P2 è rappresentata dal punto P_2

$$\downarrow$$

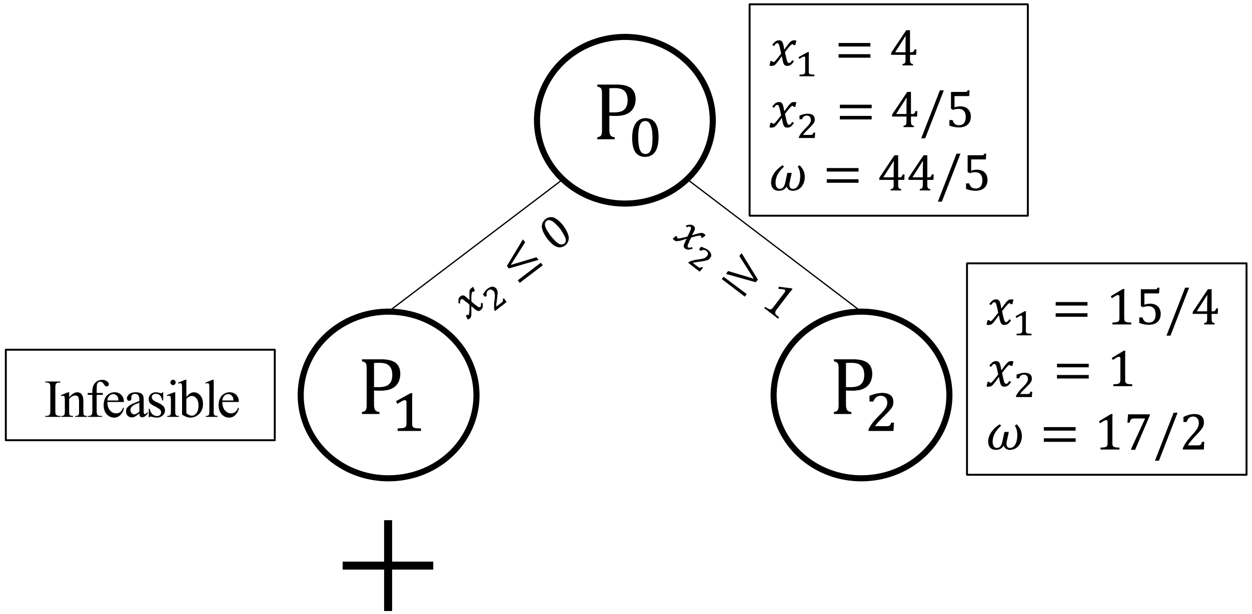
$$P_2: \begin{cases} s_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$P_2: \left(\frac{15}{4}; 1\right)$$

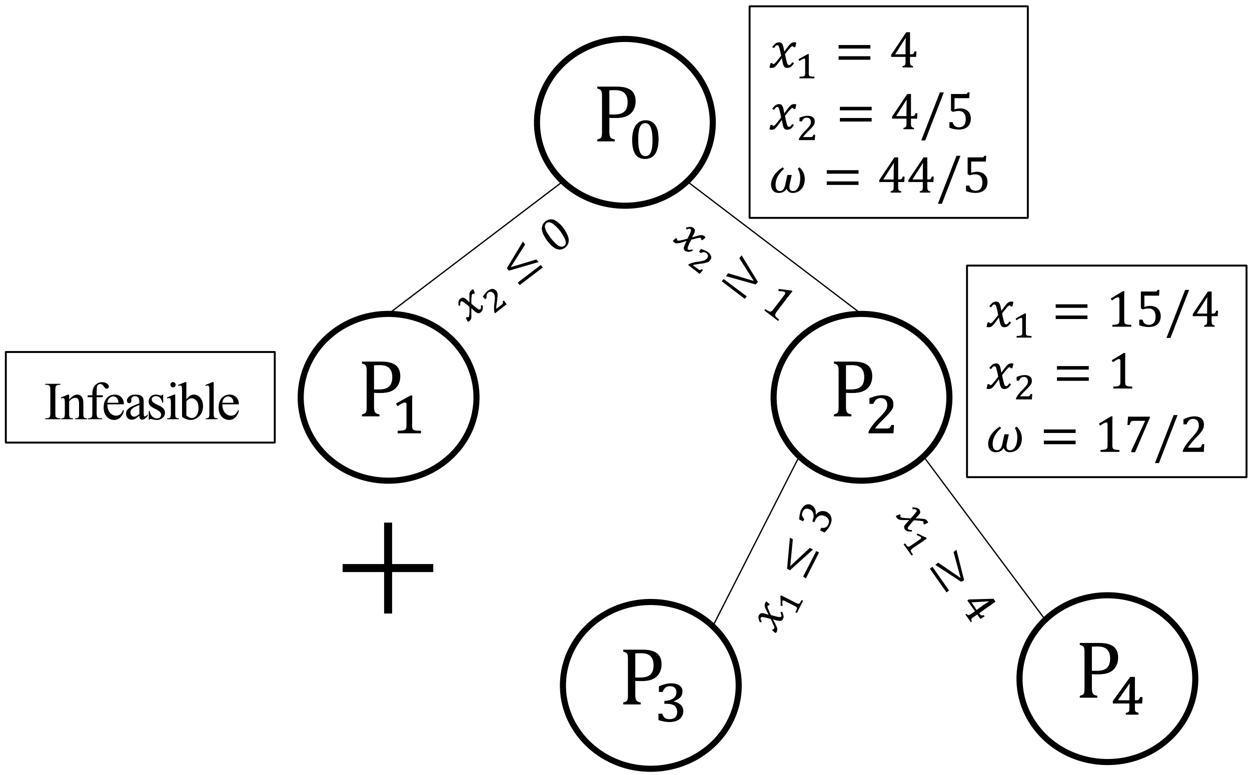
$$\downarrow$$

$$\omega^* = 2x_1 + x_2 = \frac{17}{2}$$



P0
$x_1 = 4$
$x_2 = 4/5$
$\omega = 44/5$
$x_2 \leq 0$
$x_2 \geq 1$
Infeasible
P1
P2
$x_1 = 15/4$
$x_2 = 1$
$\omega = 17/2$

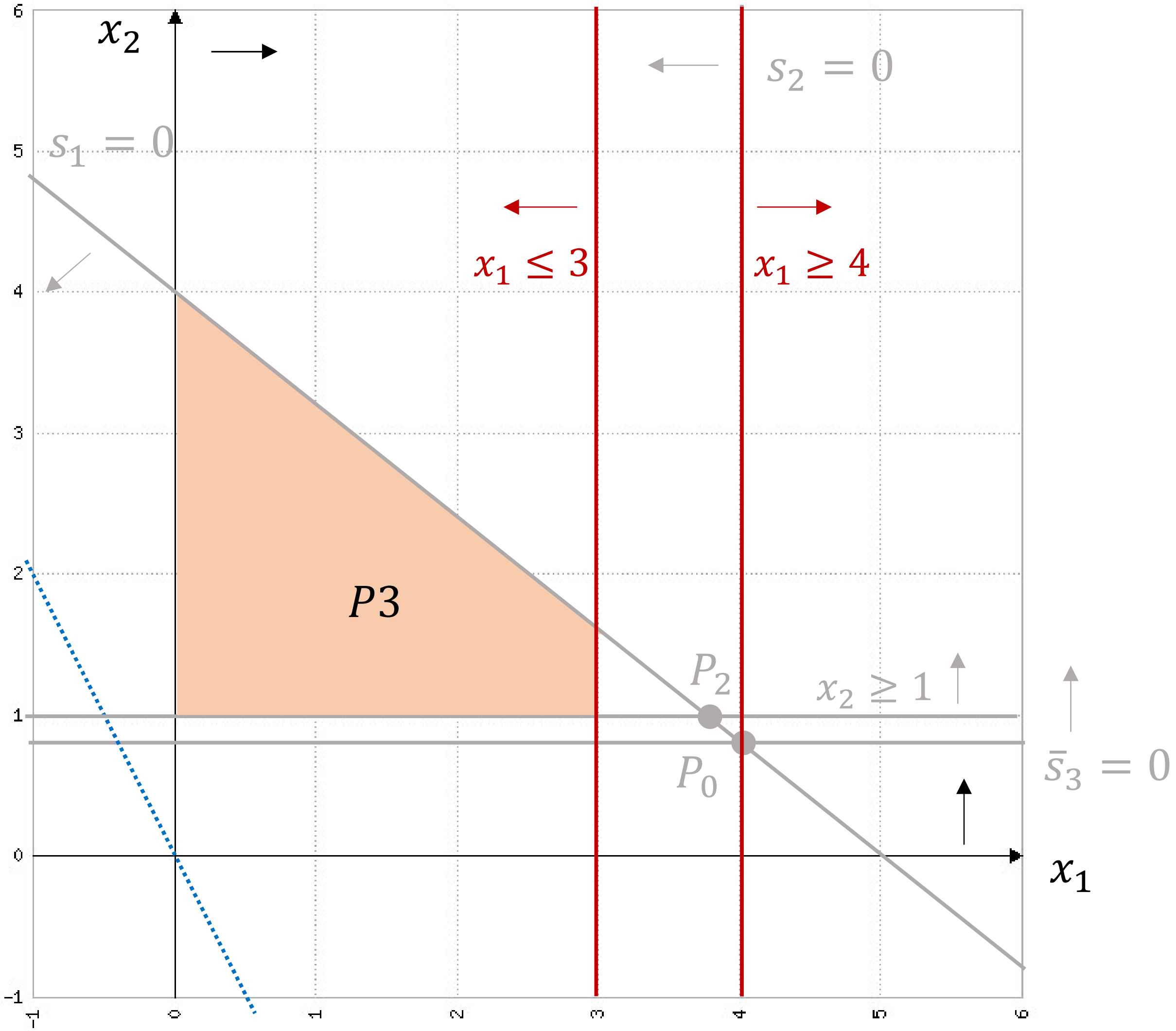
Esercizio F



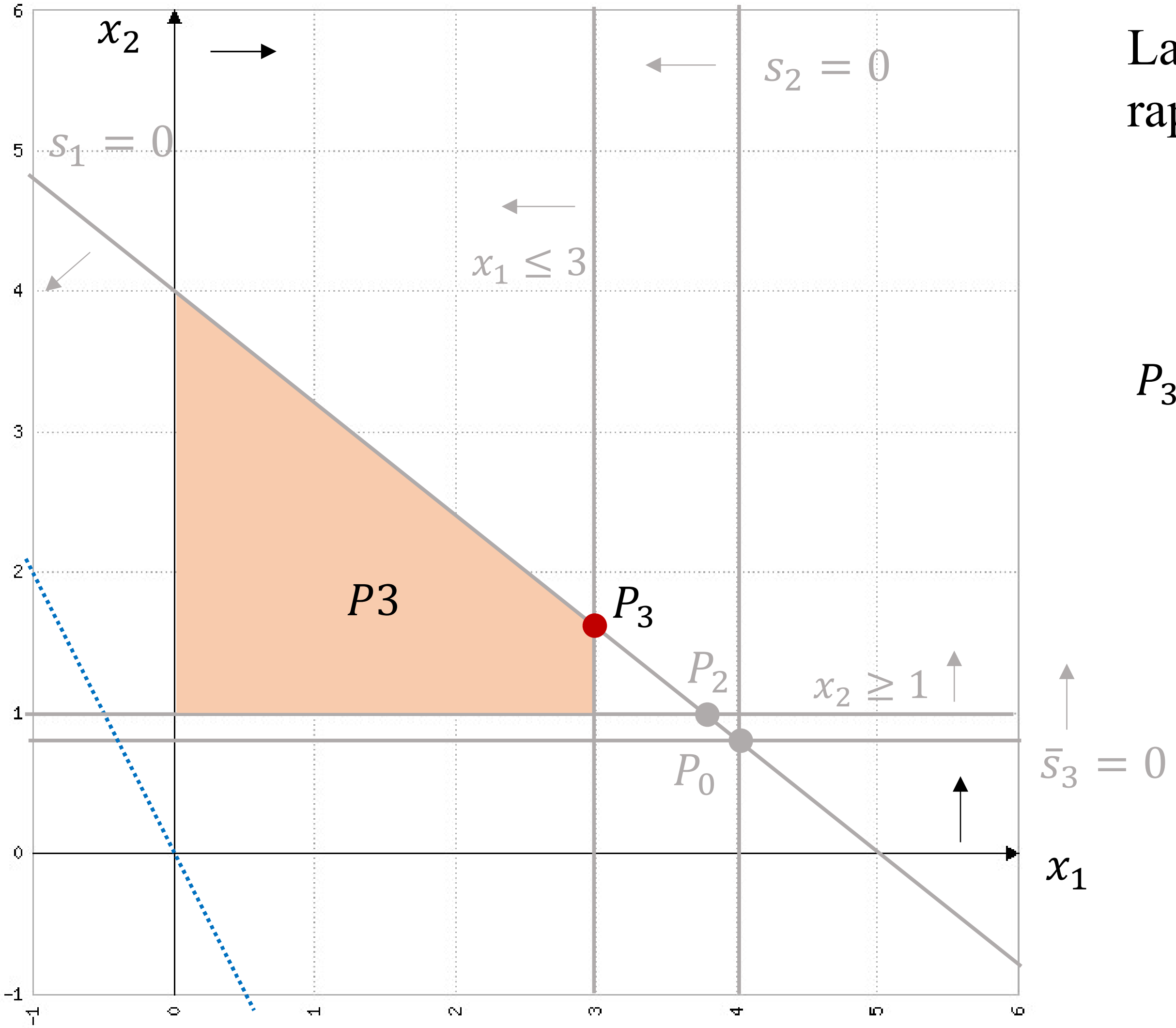
P0
$x_1 = 4$
$x_2 = 4/5$
$\omega = 44/5$
$x_2 \leq 0$
$x_2 \geq 1$
Infeasible
P1
P2
$x_1 = 15/4$
$x_2 = 1$
$\omega = 17/2$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
P3
P4

Esercizio F

Generazione dei sottoproblemi



Generazione dei sottoproblemi



La soluzione del problema P3 è rappresentata dal punto P_3

$$\downarrow$$

$$P_3\colon \begin{cases} x_1 = 3 \\ s_1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\dfrac{4}{5}x_1 + 4 \end{cases}$$

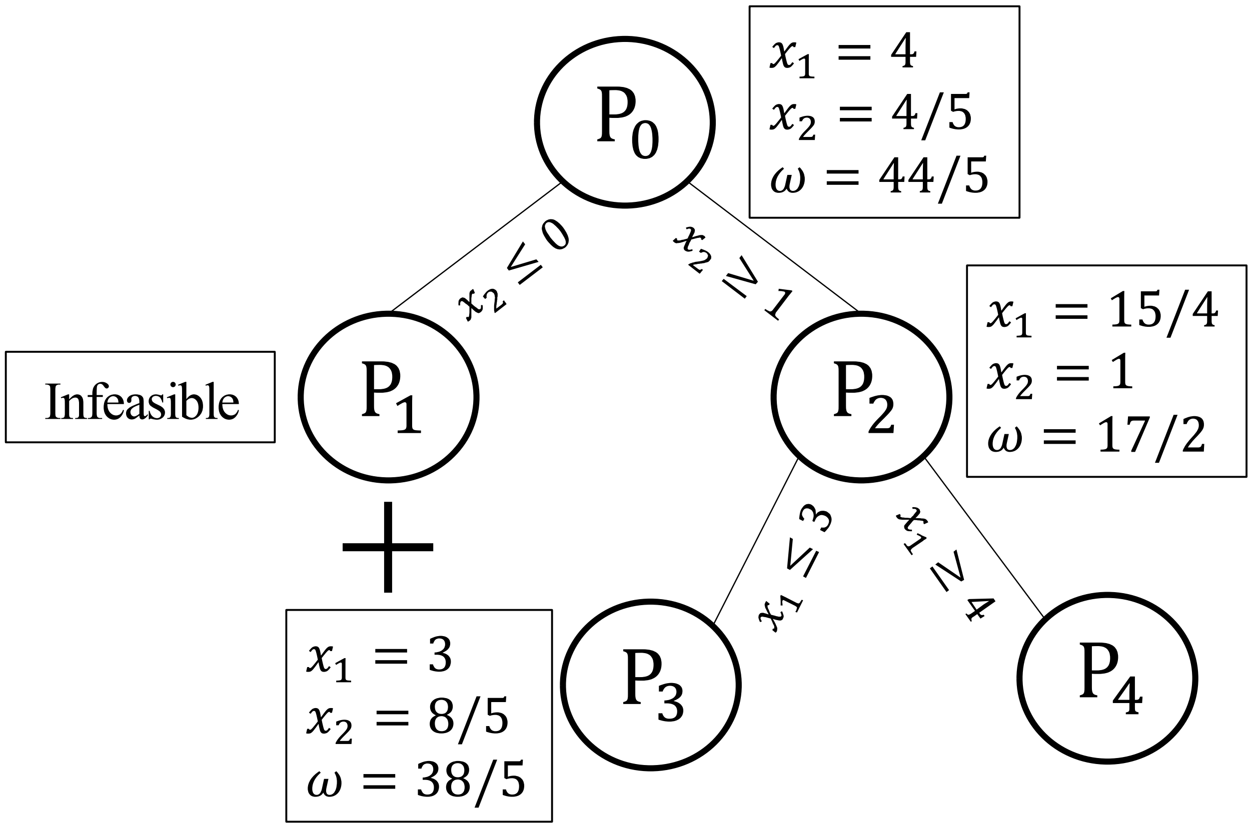
$$\downarrow$$

$$P_3\colon \left(3; \frac{8}{5}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\omega^* = 2x_1 + x_2 = \frac{38}{5}$$

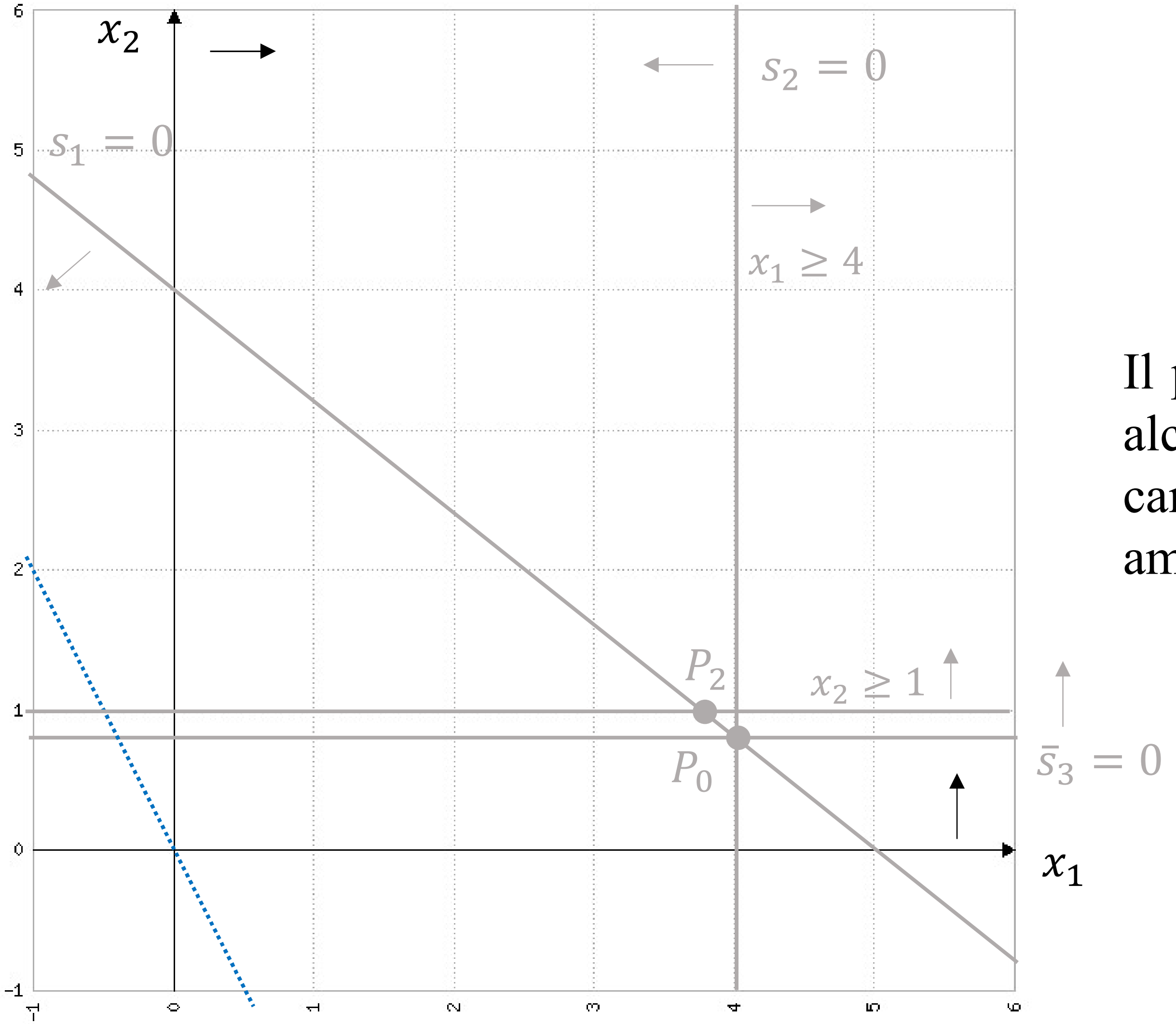
Esercizio F



P0
$x_1 = 4$
$x_2 = 4/5$
$\omega = 44/5$
$x_2 \leq 0$
$x_2 \geq 1$
Infeasible
P1
P2
$x_1 = 15/4$
$x_2 = 1$
$\omega = 17/2$
$x_1 = 3$
$x_2 = 8/5$
$\omega = 38/5$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
P3
P4

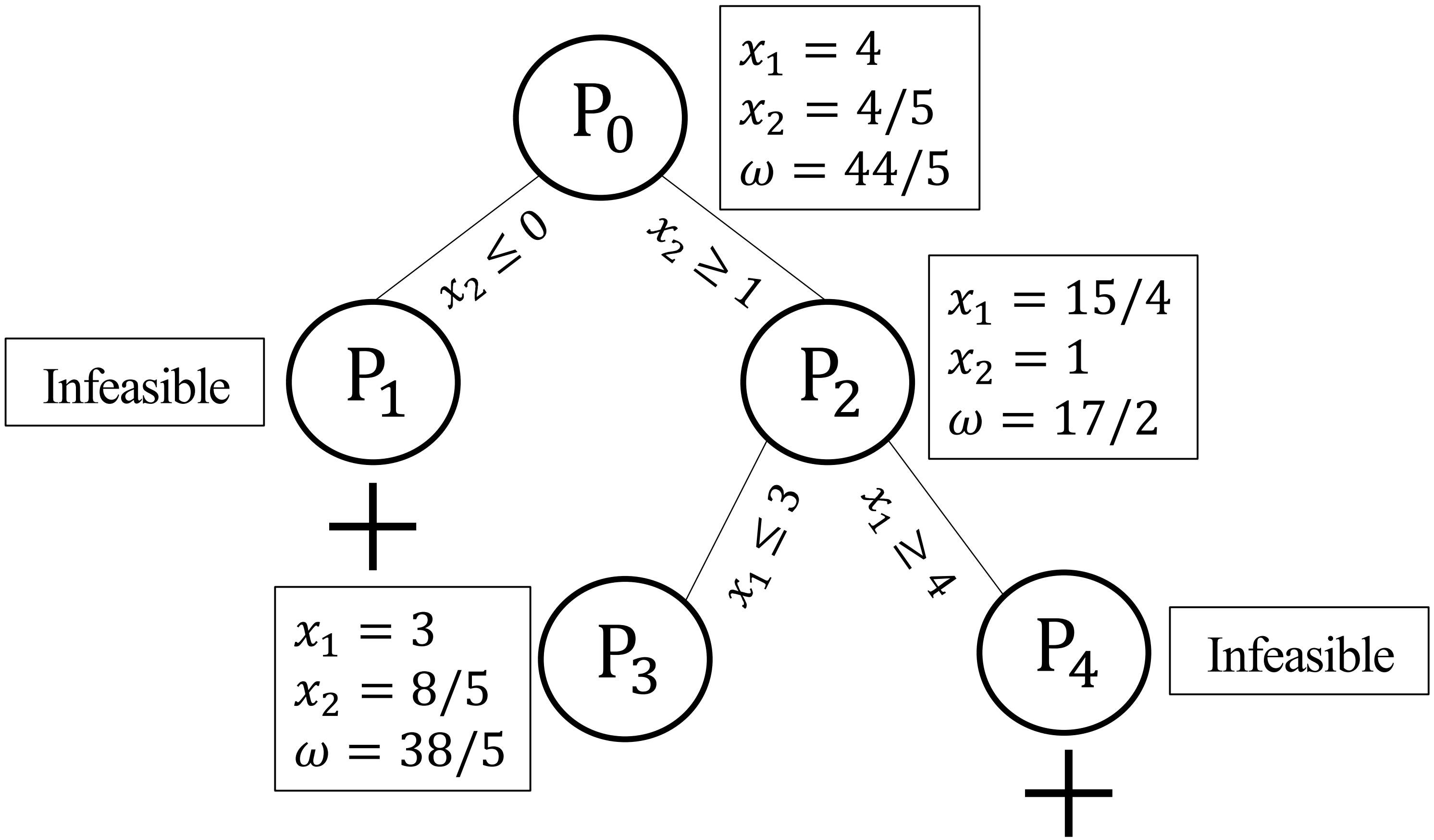
Esercizio F

Generazione dei sottoproblemi



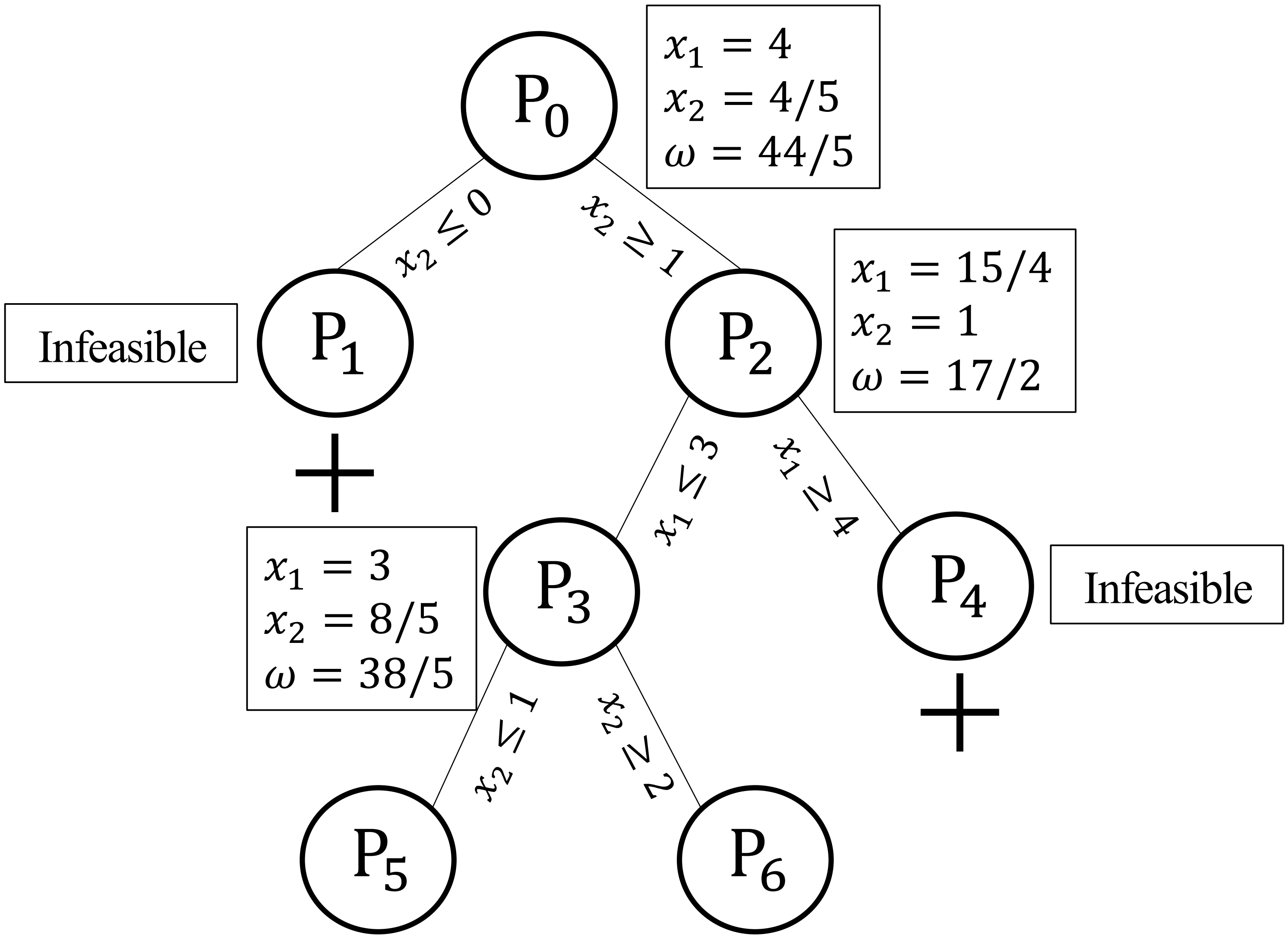
Il problema P4 non ammette alcuna soluzione perché caratterizzato da una regione ammissibile vuota

Esercizio F



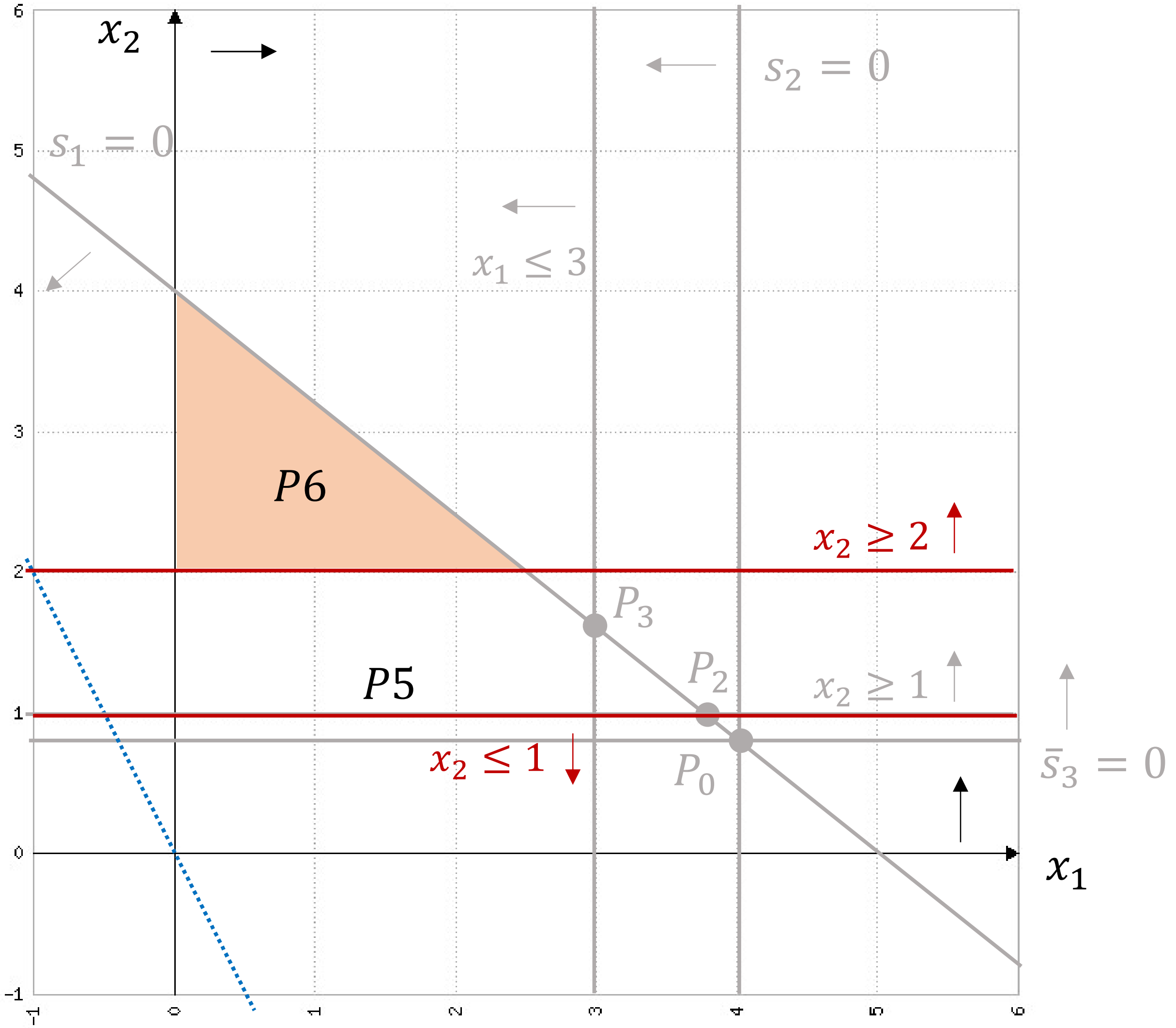
P_0
$x_1 = 4$
$x_2 = 4/5$
$\omega = 44/5$
$x_2 \leq 0$
$x_2 \geq 1$
Infeasible
P_1
P_2
$x_1 = 15/4$
$x_2 = 1$
$\omega = 17/2$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
$x_1 = 3$
$x_2 = 8/5$
$\omega = 38/5$
P_3
P_4
Infeasible

Esercizio F



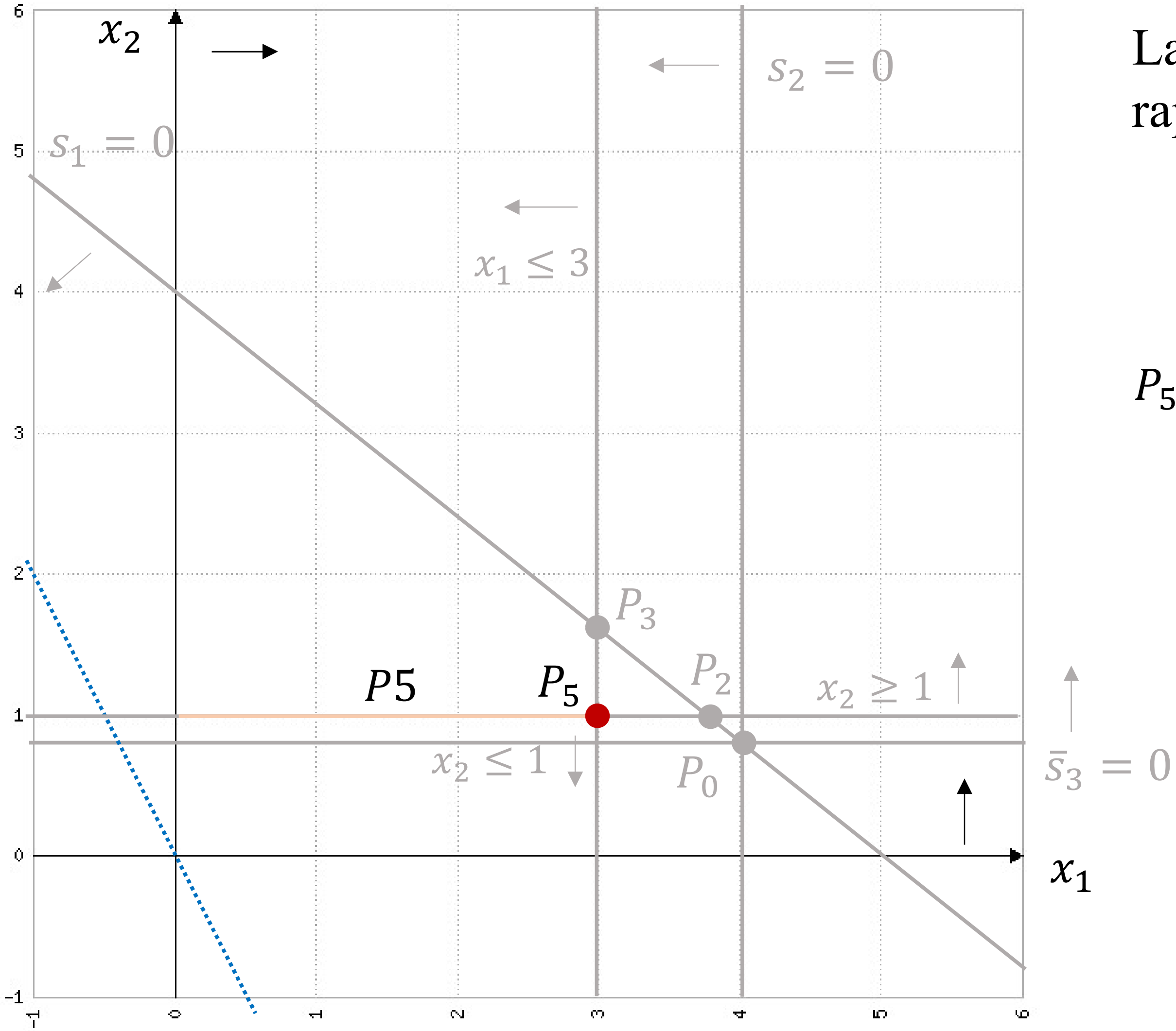
P_0
$x_1 = 4$
$x_2 = 4/5$
$\omega = 44/5$
$x_2 \leq 0$
$x_2 \geq 1$
Infeasible
P_1
P_2
$x_1 = 15/4$
$x_2 = 1$
$\omega = 17/2$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
$x_1 = 3$
$x_2 = 8/5$
$\omega = 38/5$
P_3
P_4
Infeasible
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
P_5
P_6

Generazione dei sottoproblemi



Esercizio F

Generazione dei sottoproblemi



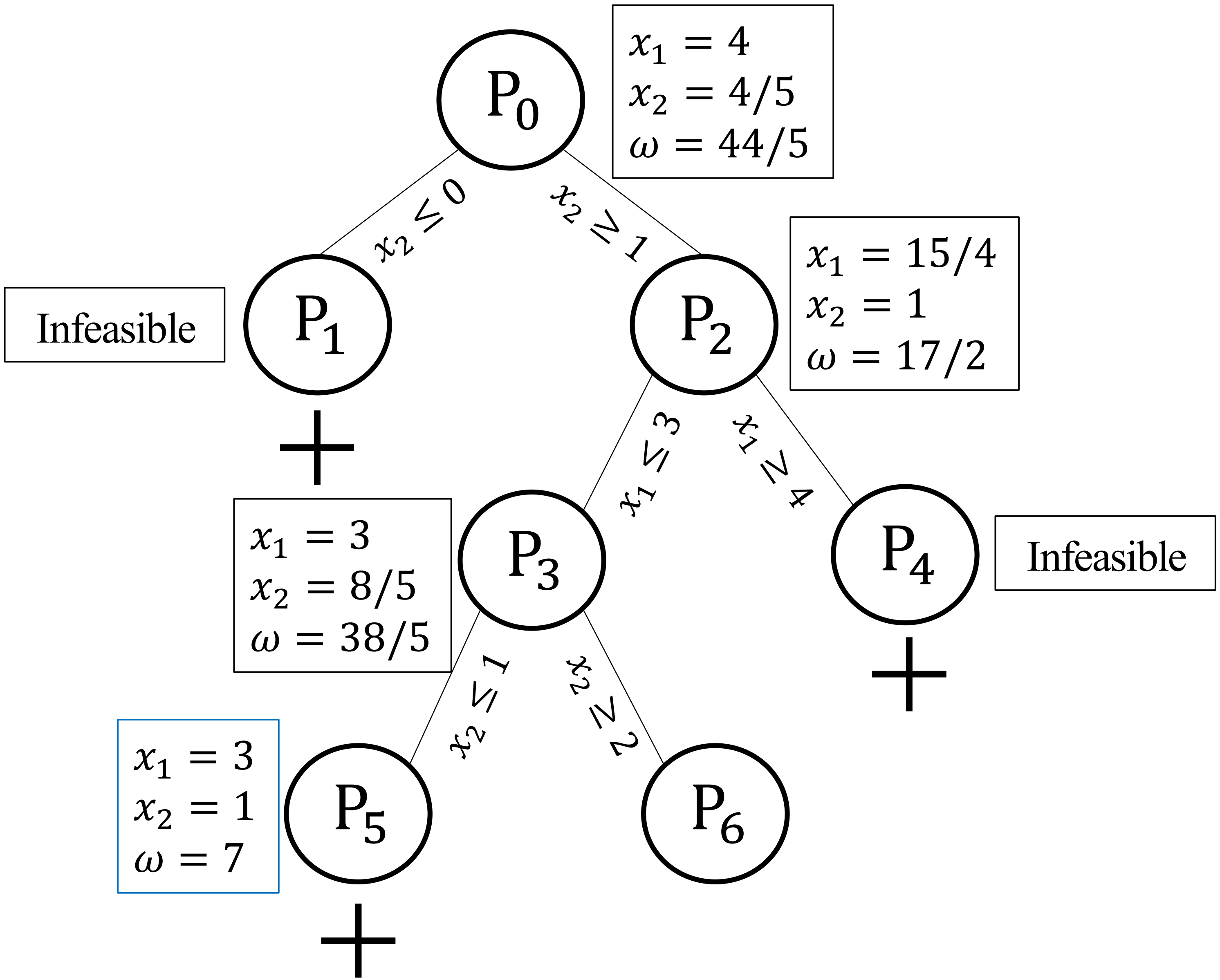
La soluzione del problema P5 è rappresentata dal punto P_5

$$P_5: \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$P_5: (3; 1)$

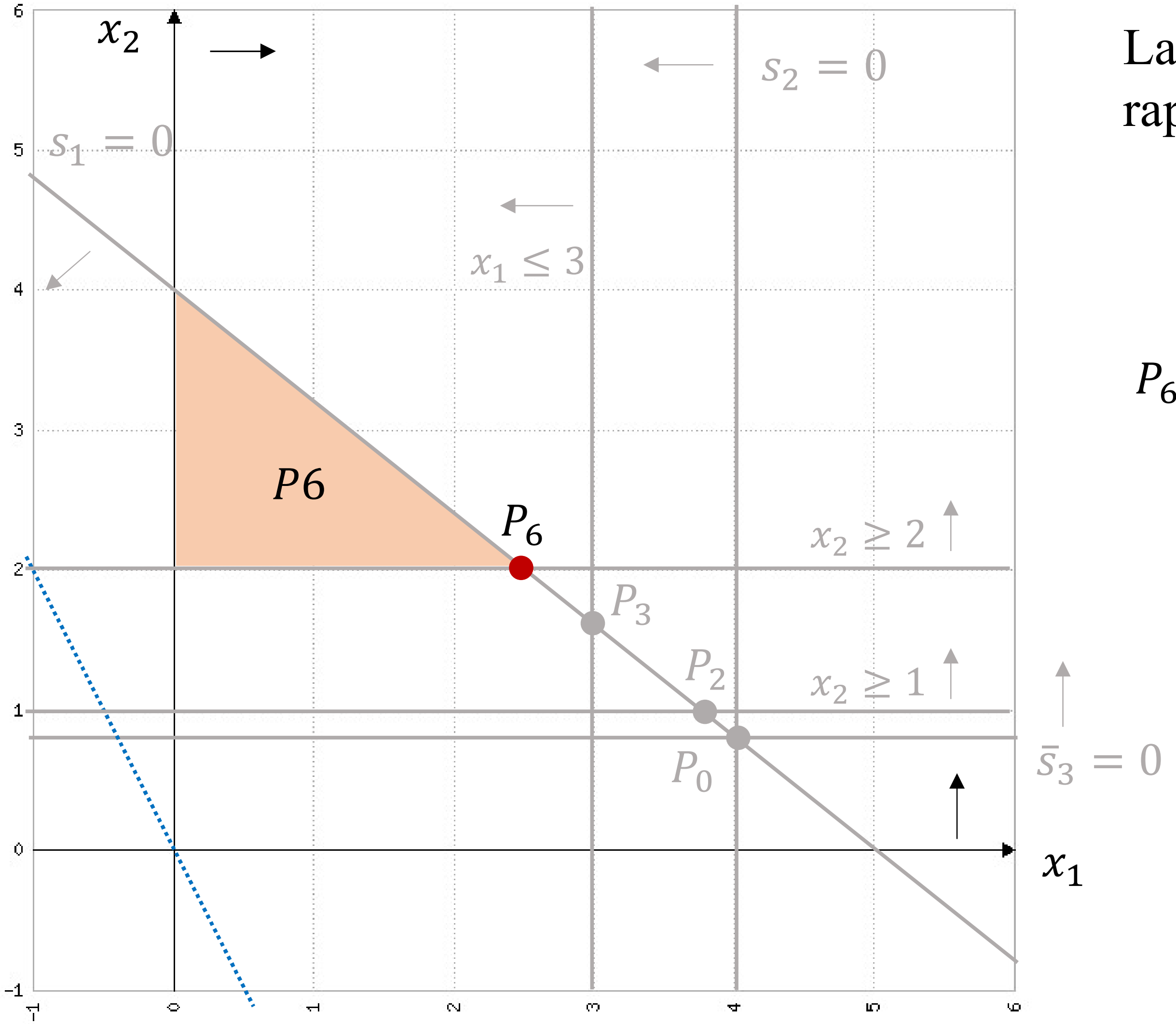
$\omega^* = 2x_1 + x_2 = 7$

Esercizio F



P0
$x_1 = 4$
$x_2 = 4/5$
$\omega = 44/5$
$x_2 \leq 0$
$x_2 \geq 1$
P1
Infeasible
P2
$x_1 = 15/4$
$x_2 = 1$
$\omega = 17/2$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
P3
$x_1 = 3$
$x_2 = 8/5$
$\omega = 38/5$
P4
Infeasible
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
P5
$x_1 = 3$
$x_2 = 1$
$\omega = 7$
P6

Generazione dei sottoproblemi



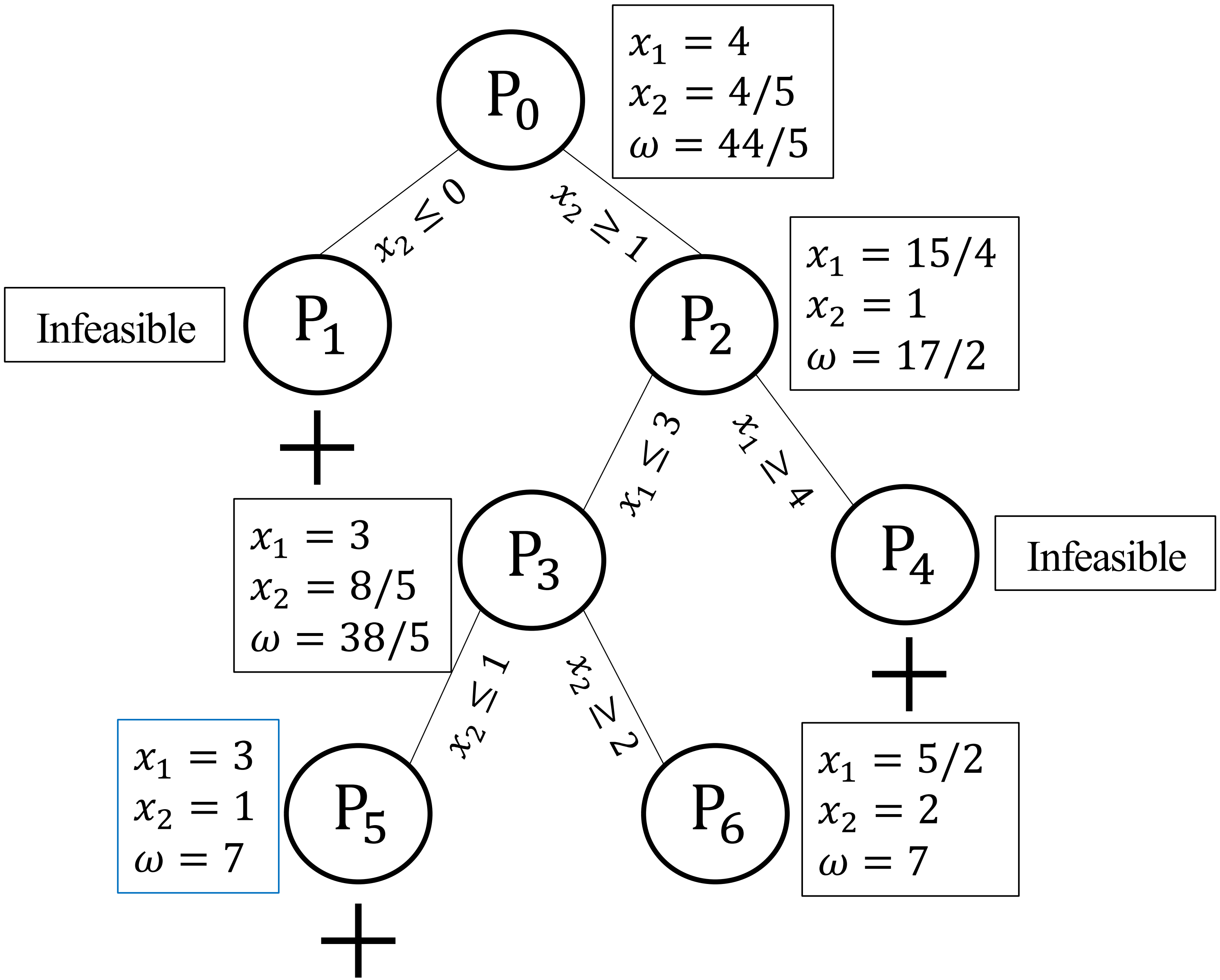
La soluzione del problema P6 è rappresentata dal punto P_6

$$P_6: \begin{cases} x_2 = 2 \\ s_1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + 4 \end{cases}$$

$$P_6: \left(\frac{5}{2}; 2\right)$$

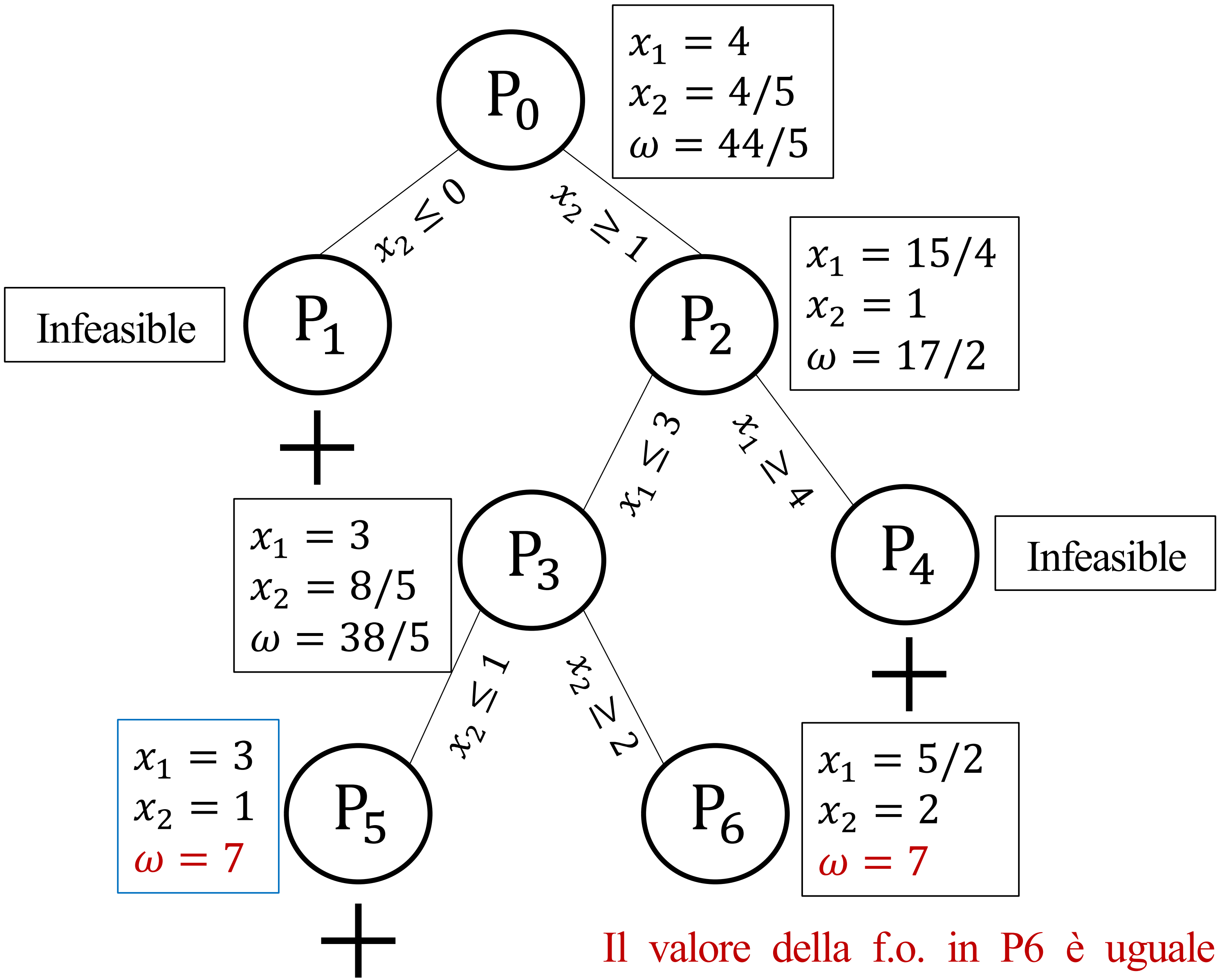
$$\omega^* = 2x_1 + x_2 = 7$$

Esercizio F



P_0
$x_1 = 4$
$x_2 = 4/5$
$\omega = 44/5$
$x_2 \leq 0$
$x_2 \geq 1$
Infeasible
P_1
P_2
$x_1 = 15/4$
$x_2 = 1$
$\omega = 17/2$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
$x_1 = 3$
$x_2 = 8/5$
$\omega = 38/5$
P_3
P_4
Infeasible
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$x_1 = 3$
$x_2 = 1$
$\omega = 7$
P_5
P_6
$x_1 = 5/2$
$x_2 = 2$
$\omega = 7$

Esercizio F



Il valore della f.o. in P6 è uguale al valore della f.o. della soluzione intera P5

Esercizio F

- Quando il valore della f.o. in un nodo con variabili decisionali frazionarie è uguale al valore della funzione obiettivo della migliore soluzione intera individuata, la chiusura o meno di quel nodo dipende dagli obiettivi del decisore:

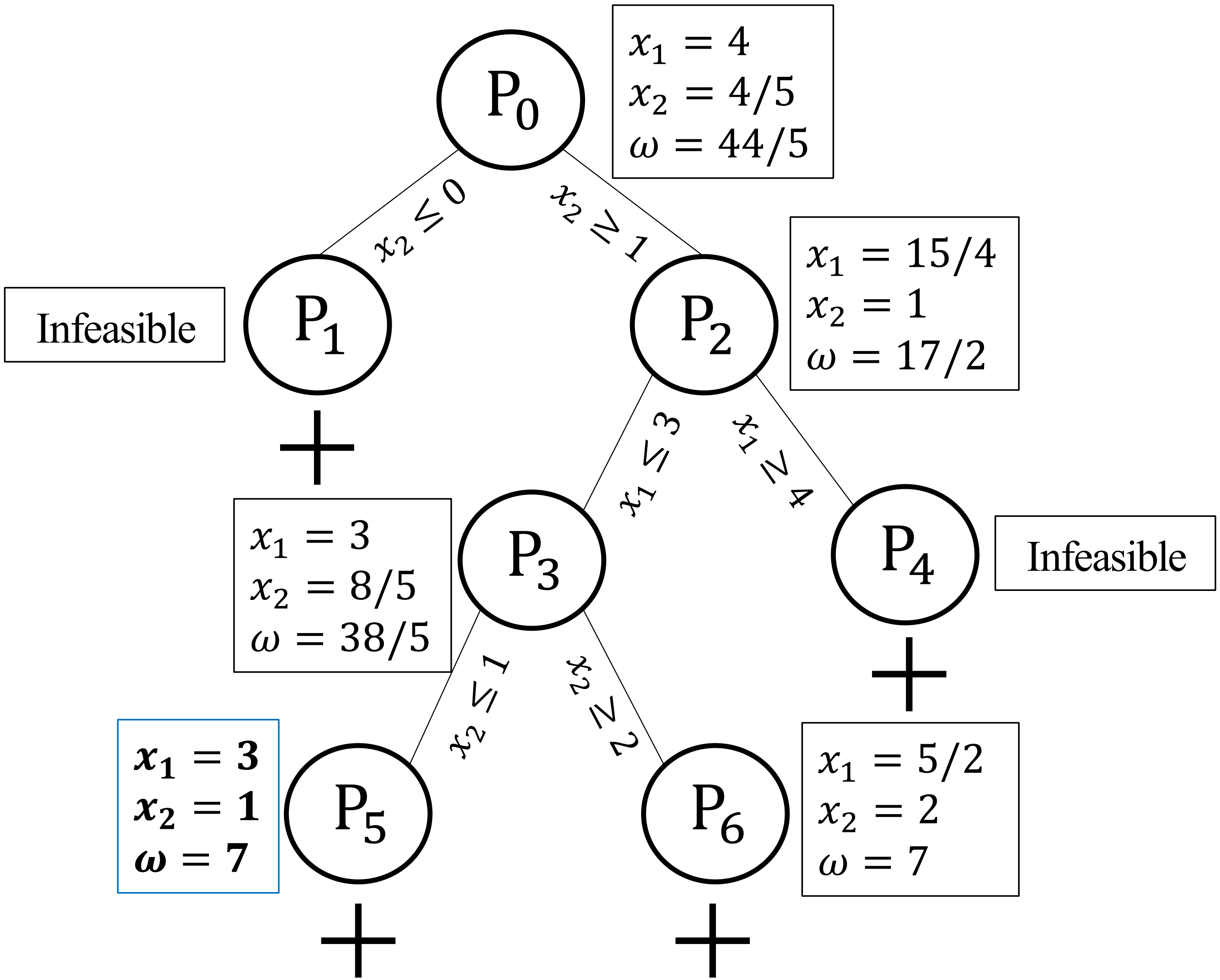
    ✓ Se l'obiettivo è l'individuazione di **una** soluzione ottima, il nodo può essere chiuso;

    ✓ Se l'obiettivo è l'individuazione di **tutte** le soluzioni ottime, il nodo deve essere esplorato (potrebbe contenere un ottimo alternativo).

- Se non esplicitamente richiesto dal testo, siamo liberi di introdurre la nostra ipotesi preferita, **purché sia dichiarata**.

- Nell'esercizio in questione, dichiariamo di essere interessati all'individuazione di una sola soluzione ottima.

Esercizio F


P0
$x_1 = 4$
$x_2 = 4/5$
$\omega = 44/5$
$x_2 \leq 0$
$x_2 \geq 1$
Infeasible
P1
P2
$x_1 = 15/4$
$x_2 = 1$
$\omega = 17/2$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
$x_1 = 3$
$x_2 = 8/5$
$\omega = 38/5$
P3
P4
Infeasible
$x_2 \leq 1$
$x_2 \geq 2$
$\boldsymbol{x_1 = 3}$
$\boldsymbol{x_2 = 1}$
$\boldsymbol{\omega = 7}$
P5
P6
$x_1 = 5/2$
$x_2 = 2$
$\omega = 7$

Esercizio G

$$\max\ \omega = 15x_1 + 18x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s. a} \qquad & 3x_1 + 2x_2 \le 15 \\ & 4x_1 + 5x_2 \le 21 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \quad \text{e intere} \end{aligned}$$

Esercizio G

$$\min \ \varphi = -15x_1 - 18x_2$$

$$\max \ \omega = 15x_1 + 18x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s. a} \qquad 3x_1 + 2x_2 &\leq 15 \qquad (s_1) \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 21 \qquad (s_2) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \quad \text{e intere} \end{aligned}$$

Esercizio G

Il tableau del rilassamento continuo è

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 33/7 \\
0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 3/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
$$

Esercizio G

Il tableau del rilassamento continuo è

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 33/7 \\
0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 3/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
$$

↓

Soluzione non ammissibile per il problema di PLI

↓

Algoritmo dei piani di taglio (Gomory)

Esercizio G

Generazione del taglio

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 33/7 \\ 0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 3/7 \\ \hline 0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 1 & -549/7 \end{array}\right]$$

$$x_1 + \frac{5}{7}s_1 - \frac{2}{7}s_2 = \frac{33}{7}$$

Esercizio G

Generazione del taglio

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
\boxed{1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 33/7} \\
0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 3/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
$$

$$x_1 + \frac{5}{7}s_1 - \frac{2}{7}s_2 = \frac{33}{7}$$

$$\downarrow$$

$$x_1 + \left(0 + \frac{5}{7}\right)s_1 + \left(-1 + \frac{5}{7}\right)s_2 = 4 + \frac{5}{7}$$

Generazione del taglio

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc}
\boxed{1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 33/7} \\
0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 3/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
$$

$$x_1 + \frac{5}{7}s_1 - \frac{2}{7}s_2 = \frac{33}{7}$$

$$\downarrow$$

$$x_1 + \left(0 + \frac{5}{7}\right)s_1 + \left(-1 + \frac{5}{7}\right)s_2 = 4 + \frac{5}{7}$$

$$\downarrow$$

$$x_1 - s_2 + \frac{5}{7}s_1 + \frac{5}{7}s_2 = 4 + \frac{5}{7}$$

Esercizio G

Generazione del taglio

$$x_1 - s_2 + \frac{5}{7}s_1 + \frac{5}{7}s_2 = 4 + \frac{5}{7}$$

$$A + B = C + D$$

Generazione del taglio

$$x_1 - s_2 + \frac{5}{7}s_1 + \frac{5}{7}s_2 = 4 + \frac{5}{7}$$

$$A + B = C + D$$

$$\Big\downarrow \; B \geq 0$$

$$A \leq C + D$$

Esercizio G

Generazione del taglio

$$x_1 - s_2 + \frac{5}{7}s_1 + \frac{5}{7}s_2 = 4 + \frac{5}{7}$$

$$A + B = C + D$$

$$\Big\downarrow \; B \geq 0$$

$$A \leq C + D$$

$$\Big\downarrow \; 0 \leq D < 1$$

$$A \leq C$$

Generazione del taglio

$$x_1 - s_2 + \frac{5}{7}s_1 + \frac{5}{7}s_2 = 4 + \frac{5}{7}$$

$$\begin{array}{c} A + B = C + D \\ \Big\downarrow \; B \geq 0 \\ A \leq C + D \\ \Big\downarrow \; 0 \leq D < 1 \\ A \leq C \\ \Big\downarrow \; A + B = C + D \\ B \geq D \end{array}$$

Esercizio G

Generazione del taglio

- Le due disequazioni $A \leq C$ e $B \geq D$ rappresentano due formulazioni **equivalenti** dello stesso taglio, espresso in termini di variabili differenti:

  - ✓ $B \geq D$ è il taglio espresso nelle sole variabili non di base (da inserire nel tableau);

  - ✓ $A \leq C$ include una variabile di base (da utilizzare in genere per esprimere il taglio in funzione delle variabili decisionali).

Esercizio G

Equazione del taglio da aggiungere al tableau

$$\frac{5}{7}s_1 + \frac{5}{7}s_2 \geq \frac{5}{7}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{5}{7}s_1 - \frac{5}{7}s_2 \leq -\frac{5}{7}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{5}{7}s_1 - \frac{5}{7}s_2 + s_3 = -\frac{5}{7}$$

Esercizio G

Equazione del taglio in funzione delle variabili decisionali

$$x_1 - s_2 \leq 4$$

$$\Big\downarrow \; s_2 = 21 - 4x_1 - 5x_2$$

$$x_1 - 21 + 4x_1 + 5x_2 \leq 4$$

$$\Big\downarrow$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 25$$

Eserzio G

Calcolo della nuova soluzione

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 0 & 33/7 \\
0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 0 & 3/7 \\
0 & 0 & -5/7 & -5/7 & 1 & 0 & -5/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 0 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Calcolo della nuova soluzione

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 0 & 33/7 \\
0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 0 & 3/7 \\
0 & 0 & -5/7 & -5/7 & 1 & 0 & \boxed{-5/7} \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 0 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$\downarrow$

Tableau ottimo, ma non ammissibile

$\downarrow$

Algoritmo del simplesso duale

Calcolo della nuova soluzione

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 0 & 33/7 \\
0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 0 & 3/7 \\
0 & 0 & -5/7 & -5/7 & 1 & 0 & -5/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 0 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
\end{array}
$$

- Per risolvere l'inammissibilità s_3 dovrà diventare variabile non di base.
- Applichiamo la regola dei minimi rapporti per determinare quale variabile non di base diventerà di base al posto di s_3:
- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{-3}{7} \cdot \frac{-7}{5} = \frac{3}{5}; \frac{-24}{7} \cdot \frac{-7}{5} = \frac{24}{5}\right)$$

Esercizio G

Calcolo della nuova soluzione

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 0 & 33/7 \\
0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 0 & 3/7 \\
0 & 0 & -5/7 & -5/7 & 1 & 0 & -5/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 0 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
$$

- Per risolvere l'inammissibilità s_3 dovrà diventare variabile non di base.
- Applichiamo la regola dei minimi rapporti per determinare quale variabile non di base diventerà di base al posto di s_3:
- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{-3}{7}\cdot\frac{-7}{5}=\frac{3}{5};\frac{-24}{7}\cdot\frac{-7}{5}=\frac{24}{5}\right)$$

Calcolo della nuova soluzione

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B}
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 5/7 & 0 & -2/7 & 0 & 0 & 33/7 \\
0 & 1 & -4/7 & 0 & 3/7 & 0 & 0 & 3/7 \\
0 & 0 & -5/7 & 1 & -5/7 & 1 & 0 & -5/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & 0 & -24/7 & 0 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
\end{array}
$$

- Per risolvere l'inammissibilità s_3 dovrà diventare variabile non di base.
- Applichiamo la regola dei minimi rapporti per determinare quale variabile non di base diventerà di base al posto di s_3:
- Calcoliamo i rapporti:

$$\left(\frac{-3}{7} \cdot \frac{-7}{5} = \frac{3}{5} ; \frac{-24}{7} \cdot \frac{-7}{5} = \frac{24}{5}\right)$$

Calcolo della nuova soluzione

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B}
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 5/7 & 0 & -2/7 & 0 & 0 & 33/7 \\
0 & 1 & -4/7 & 0 & 3/7 & 0 & 0 & 3/7 \\
0 & 0 & -5/7 & 1 & -5/7 & 1 & 0 & -5/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & 0 & -24/7 & 0 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$\overline{R3} = -\frac{7}{5} R3$$

$$\overline{R1} = R1 + R3$$

$$\overline{R2} = R2 + \frac{4}{7} \overline{R3}$$

$$\overline{R0} = R0 + \frac{3}{7} \overline{R3}$$

Esercizio G

Calcolo della nuova soluzione

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 0 & 33/7 \\
0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 0 & 3/7 \\
0 & 0 & -5/7 & -5/7 & 1 & 0 & -5/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 0 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
$$

$$\overline{R3} = -\frac{7}{5}R3$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w_B}$
$\overline{R3}$	0	0	1	1	-7/5	0	1

Esercizio G

Calcolo della nuova soluzione

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 0 & 33/7 \\ 0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 0 & 3/7 \\ 0 & 0 & -5/7 & -5/7 & 1 & 0 & -5/7 \\ \hline 0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 0 & 1 & -549/7 \end{array}\right]$$

$$\overline{R3} = -\frac{7}{5} R3 \qquad \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\ \overline{R3} & 0 & 0 & 1 & 1 & -7/5 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\overline{R1} = R1 + R3 \qquad \begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\ R1 & 1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 0 & 33/7 \\ +R3 & 0 & 0 & -5/7 & -5/7 & 1 & 0 & -5/7 \\ \hline \overline{R1} & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \end{array}$$

Calcolo della nuova soluzione

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 0 & 33/7 \\
0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 0 & 3/7 \\
0 & 0 & -5/7 & -5/7 & 1 & 0 & -5/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 0 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
$$

$$\overline{R3} = -\frac{7}{5}R3$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w_B}$
$\overline{R3}$	0	0	1	1	-7/5	0	1

$$\overline{R2} = R2 + \frac{4}{7}\overline{R3}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	φ	$\underline{w_B}$
$R2$	0	1	-4/7	3/7	0	0	3/7
$+4/7\overline{R3}$	0	0	4/7	4/7	-4/5	0	4/7
$\overline{R2}$	0	1	0	1	-4/5	0	1

Calcolo della nuova soluzione

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 5/7 & -2/7 & 0 & 0 & 33/7 \\
0 & 1 & -4/7 & 3/7 & 0 & 0 & 3/7 \\
0 & 0 & -5/7 & -5/7 & 1 & 0 & -5/7 \\
\hline
0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 0 & 1 & -549/7
\end{array}\right]
$$

$$\overline{R3} = -\frac{7}{5} R3$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\overline{R3} & 0 & 0 & 1 & 1 & -7/5 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$\overline{R0} = R0 + \frac{3}{7} \overline{R3}$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
R0 & 0 & 0 & -3/7 & -24/7 & 0 & 1 & -549/7 \\
+3/7\overline{R3} & 0 & 0 & 3/7 & 3/7 & -3/5 & 0 & 3/7 \\
\hline
\overline{R0} & 0 & 0 & 0 & -3 & -3/5 & 1 & -78
\end{array}
$$

Esercizio G

Calcolo della nuova soluzione

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \varphi & \underline{w_B} \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4/5 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -7/5 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -3 & -3/5 & 1 & -78
\end{array}\right]
$$

- Var. non di base: s_2, s_3
- Var. di base: $x_1 = 4, x_2 = 1, s_1 = 1$
- $\varphi^* = -78$
- Soluzione ammissibile per il problema di PLI

Takeaway

1. Relazioni tra modelli primale e duale

2. Criteri di chiusura dei nodi nel B&B

3. Integrazione dei metodi di PLI con l’algoritmo del simplesso duale

1. Relazioni tra modelli primale e duale

	max $\boldsymbol{\omega}$	**min** $\boldsymbol{\varphi_D}$	
Vincoli	$\leq$	Non-negative	Variabili
	$\geq$	Non-positive	
	$=$	Libere	
Variabili	Non-negative	$\geq$	Vincoli
	Non-positive	$\leq$	
	Libere	$=$	

2. Criteri di chiusura dei nodi nel B&B

   A. La soluzione del nodo è intera;

   B. Il nodo ha regione ammissibile vuota;

   C. Il valore della funzione obiettivo nel nodo è peggiore (o non migliore) del valore della funzione obiettivo in un nodo intero.

3. Integrazione dei metodi di PLI con l'algoritmo del simplesso duale

- Ad ogni iterazione, i tagli generati sia con B&B sia con Gomory escludono dalla regione ammissibile l'ottimo del rilassamento continuo.

- Perdita di ammissibilità, da ripristinare applicando l'algoritmo del simplesso duale.

Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2023/2024

MODELLI E ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Ottimizzazione su Grafi

Giovanni Micheli

Massimo Flusso

Cos'è il problema del massimo flusso?

- Problema di determinazione della massima quantità di flusso che può essere inviata da una sorgente ad un pozzo, nel rispetto di vincoli legati a:
  - ✓ Capacità degli archi;
  - ✓ Conservazione del flusso.

- Problema formulabile introducendo le variabili decisionali
  - ✓ $x_{i,j}$ Flusso sull'arco $(i, j) \in A$;
  - ✓ v Valore del flusso (quantità immessa nel nodo sorgente s e prelevata nel nodo pozzo t).

Modello matematico

$$\max \ \omega = v$$

Massimizzazione del flusso

$$\text{s.a} \quad v + \sum_{(j,s)\in BS(s)} x_{j,s} = \sum_{(s,j)\in FS(s)} x_{s,j}$$

Bilancio nel nodo sorgente

$$\sum_{(j,t)\in BS(t)} x_{j,t} = \sum_{(t,j)\in FS(t)} x_{t,j} + v$$

Bilancio nel nodo pozzo

$$\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{j,i} = \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{i,j} \quad i \in N \setminus \{s,t\}$$

Bilancio nei nodi di trasferimento

$$0 \le x_{i,j} \le u_{i,j} \quad (i,j) \in A$$

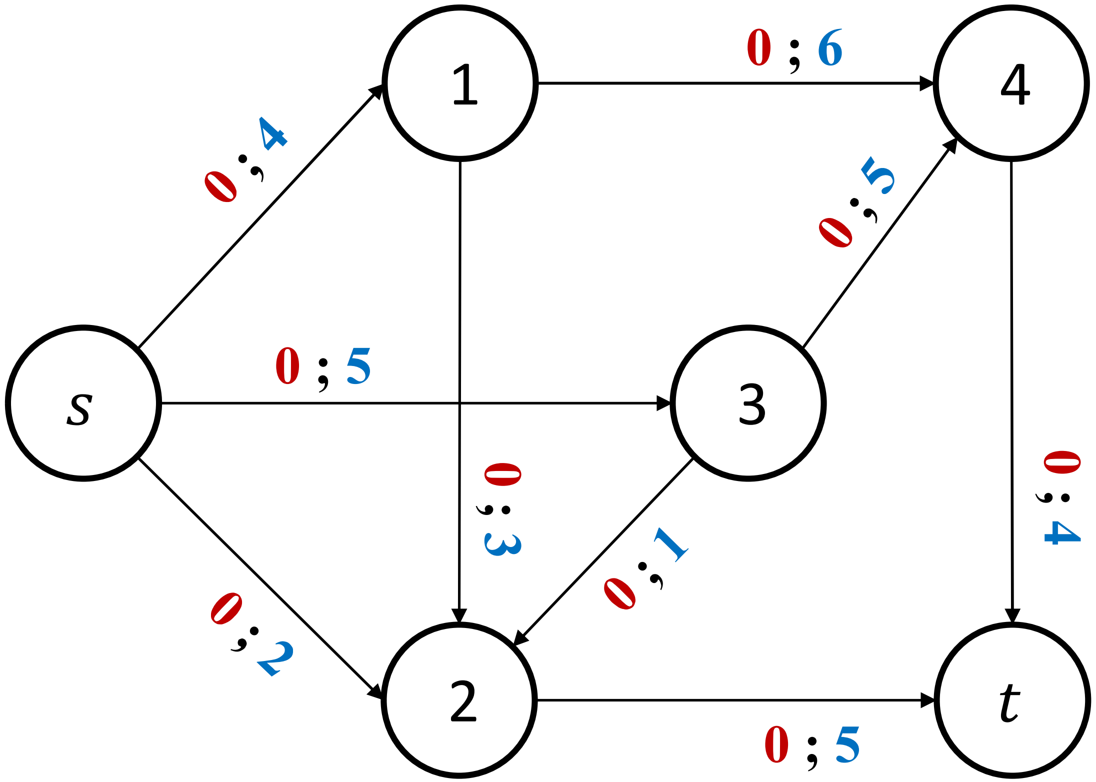
Capacità degli archi

Algoritmo di Ford-Fulkerson

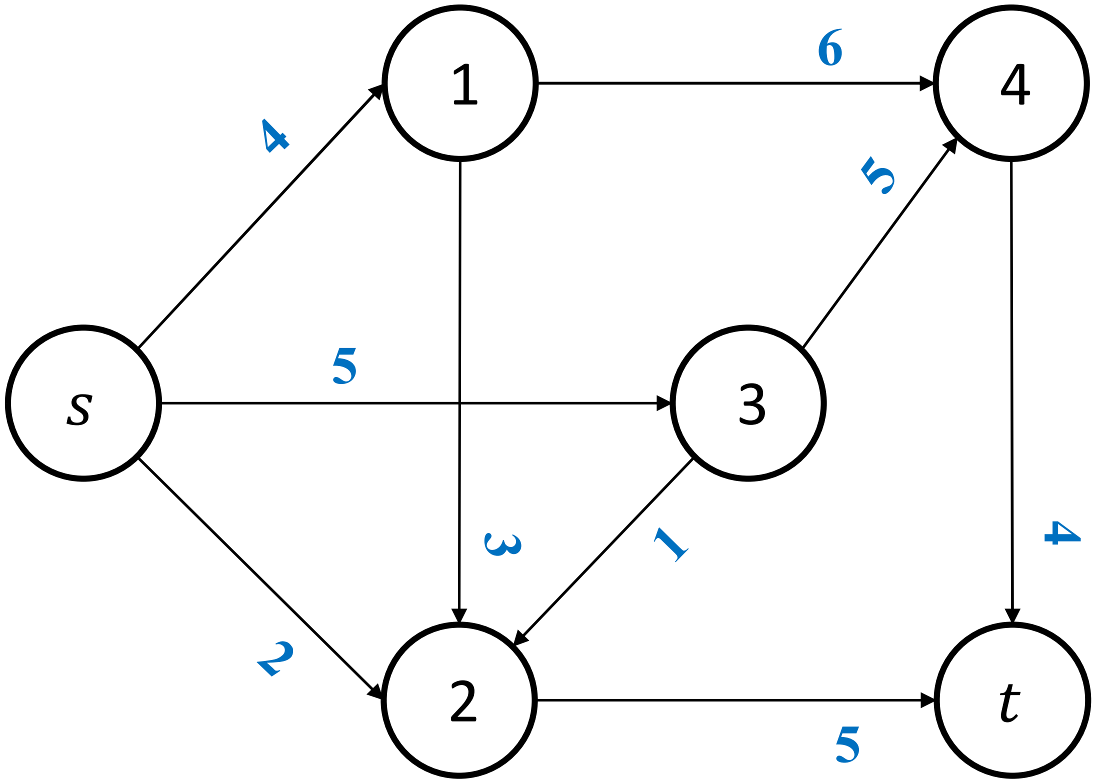
- A partire dal flusso corrente $\underline{\boldsymbol{x}}$, si costruisce il grafo residuale $\overline{G}(\underline{\boldsymbol{x}}) = (N, \overline{A})$, sostituendo ad ogni arco $(i, j) \in A$ una coppia di archi:
  - ✓ Un arco diretto (i, j) di capacità residua $\overline{u}_{i,j} = u_{i,j} - x_{i,j}$
  - ✓ Un arco inverso (j, i) di capacità residua $\overline{u}_{j,i} = x_{i,j}$

- Si valuta l'esistenza di un cammino aumentante dalla sorgente al pozzo
  - ✓ Se tale cammino non esiste, il flusso è ottimo;
  - ✓ Se tale cammino esiste, si indica con θ il minimo delle capacità residue degli archi che compongono il cammino:
    - Il flusso massimo è incrementato di θ
    - Sugli archi diretti del cammino aumentante $x_{i,j} = x_{i,j} + \theta$
    - Sugli archi inversi del cammino aumentante $x_{i,j} = x_{i,j} - \theta$

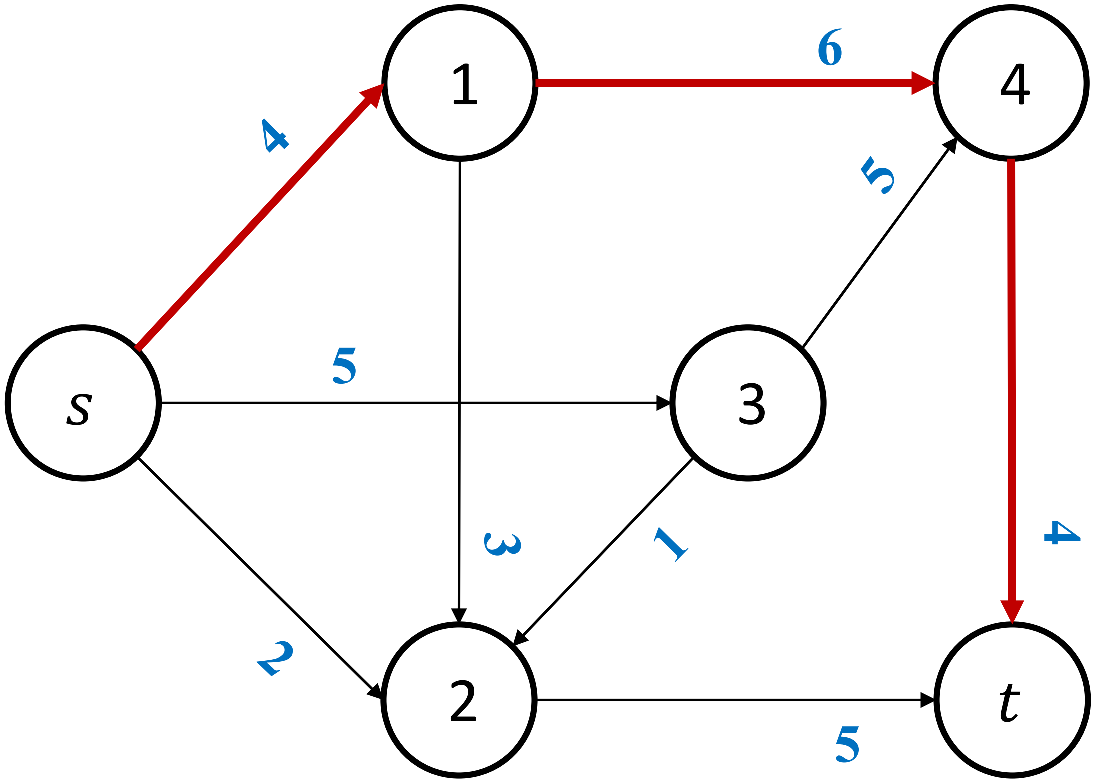
Flusso Iniziale



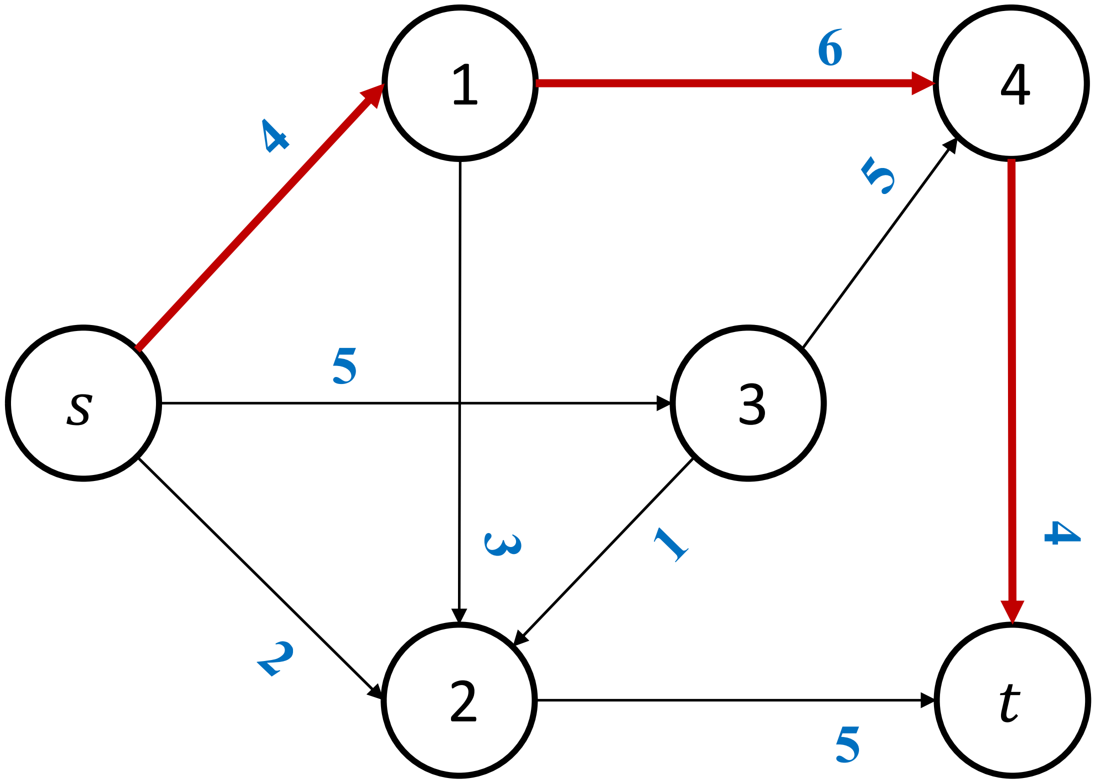
Grafo Residuale



Cammino Aumentante

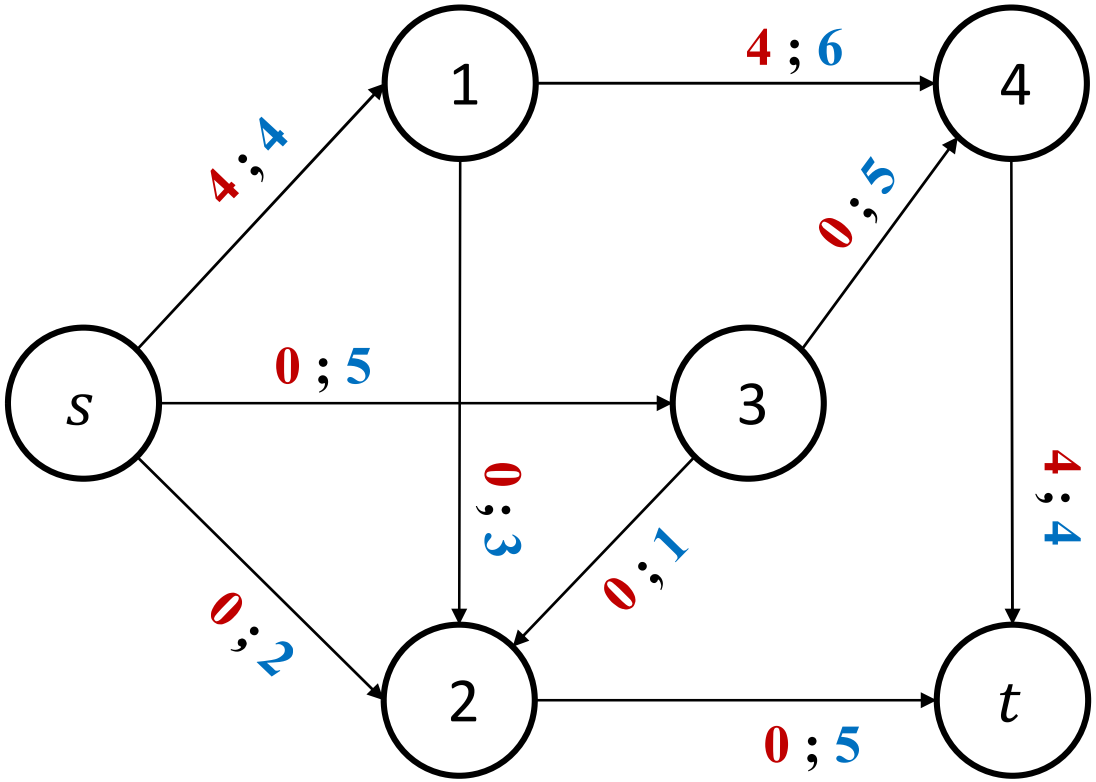


Cammino Aumentante



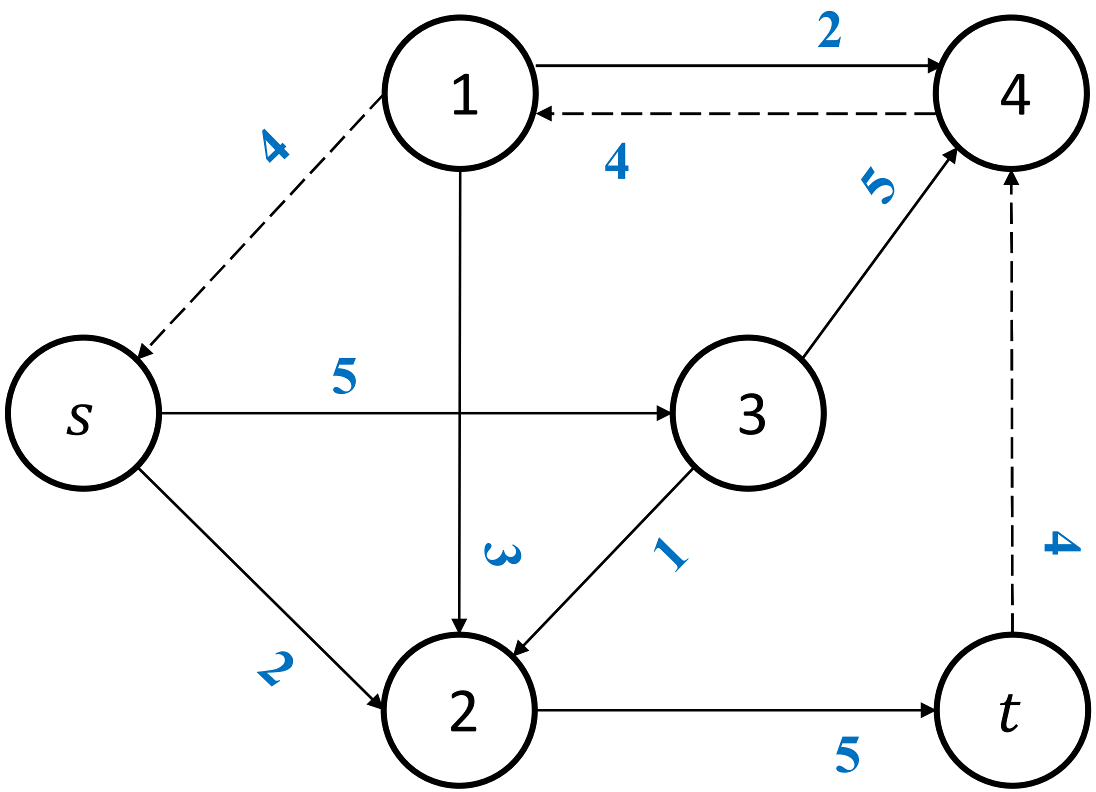
$$\theta = \min(4; 6; 4) = 4$$

Aggiornamento del Flusso

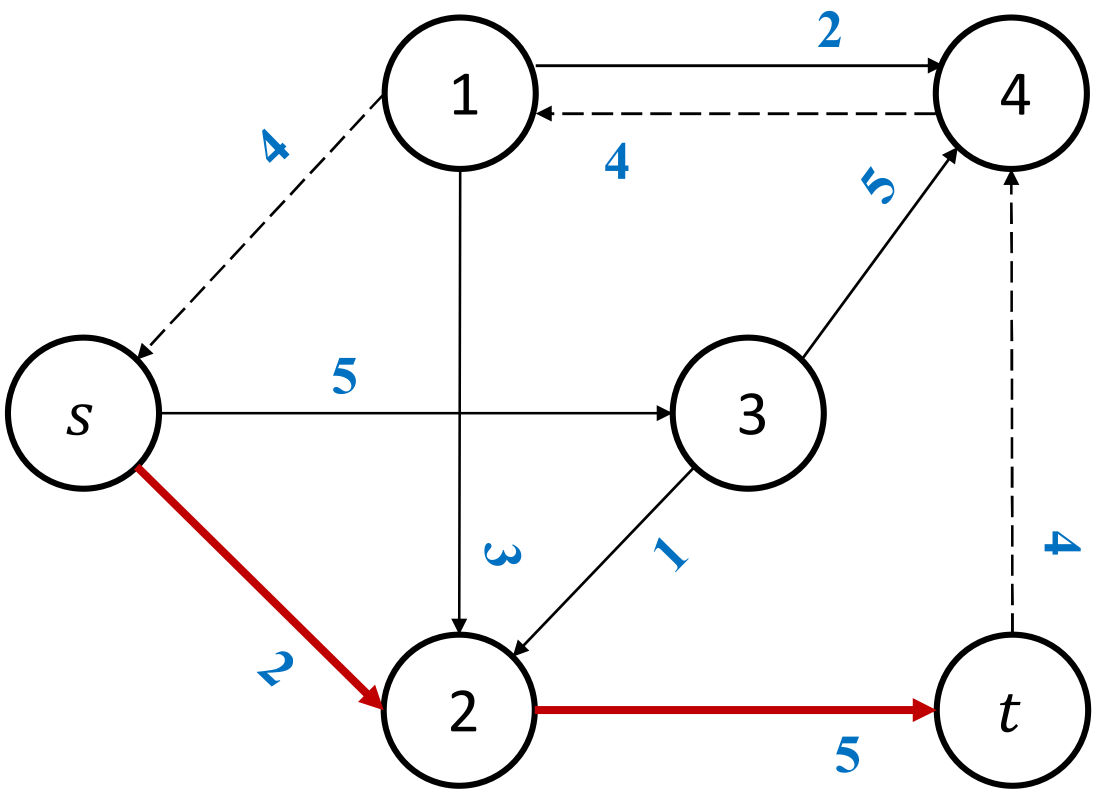


$$v = 0 + \theta = 4$$

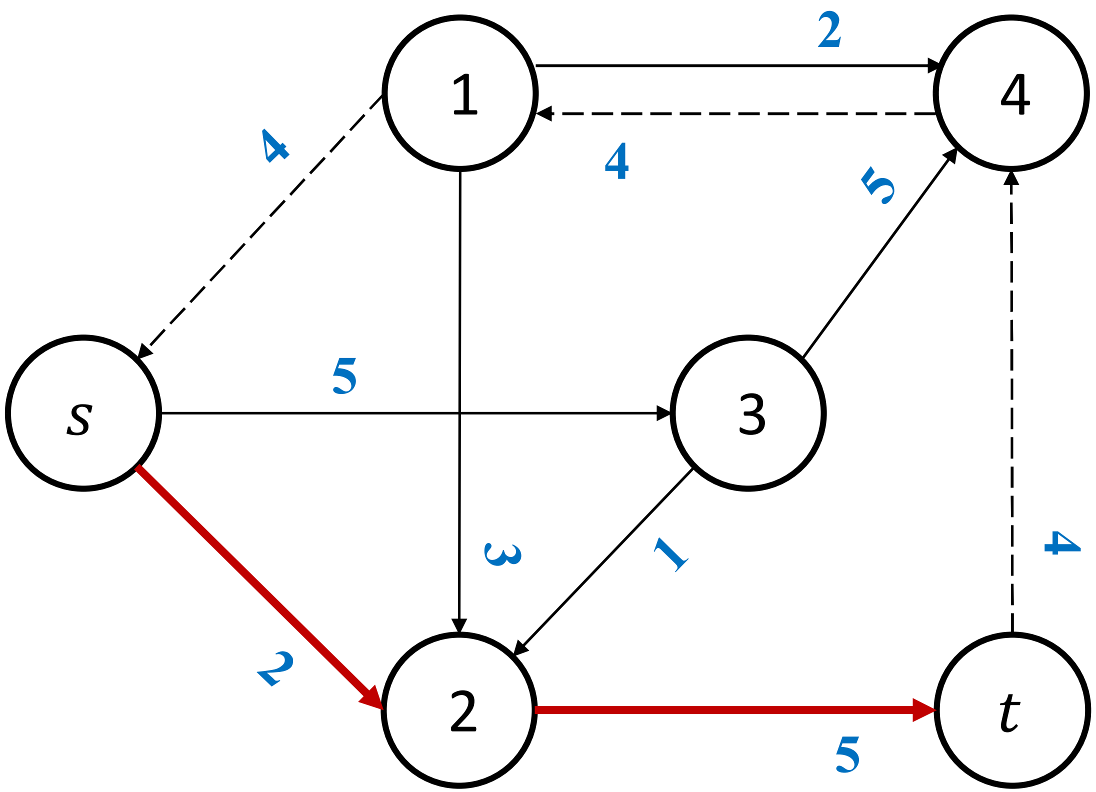
Grafo Residuale



Cammino Aumentante

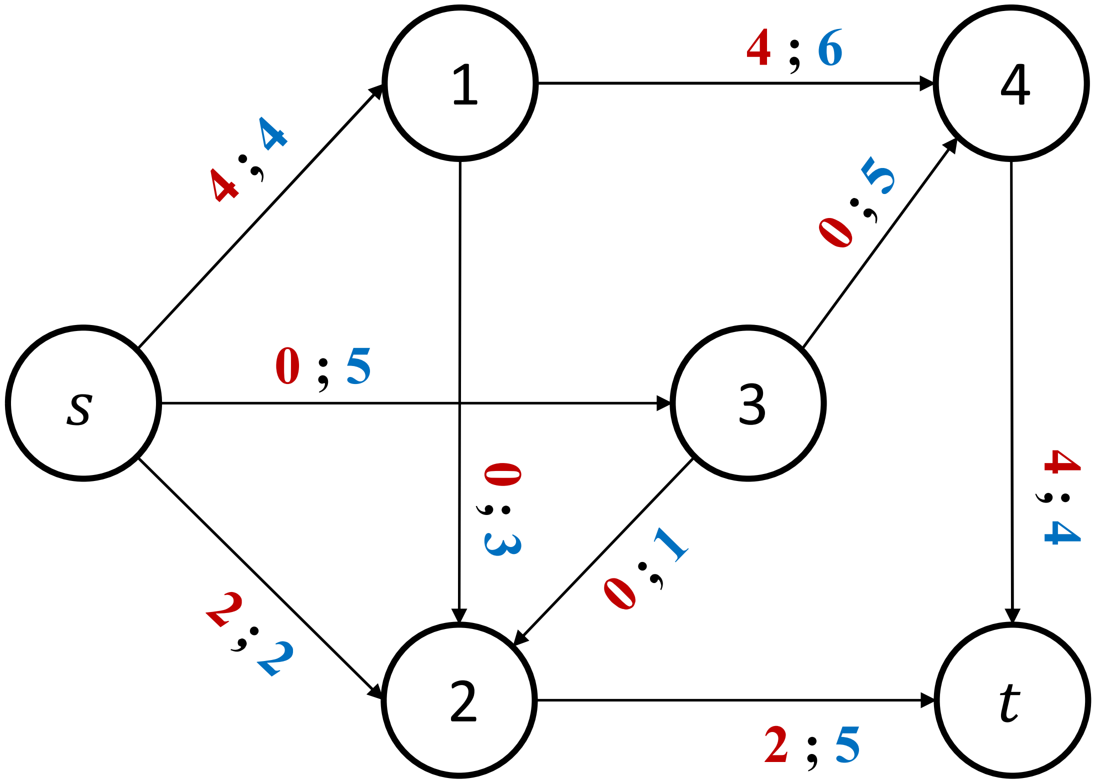


Cammino Aumentante



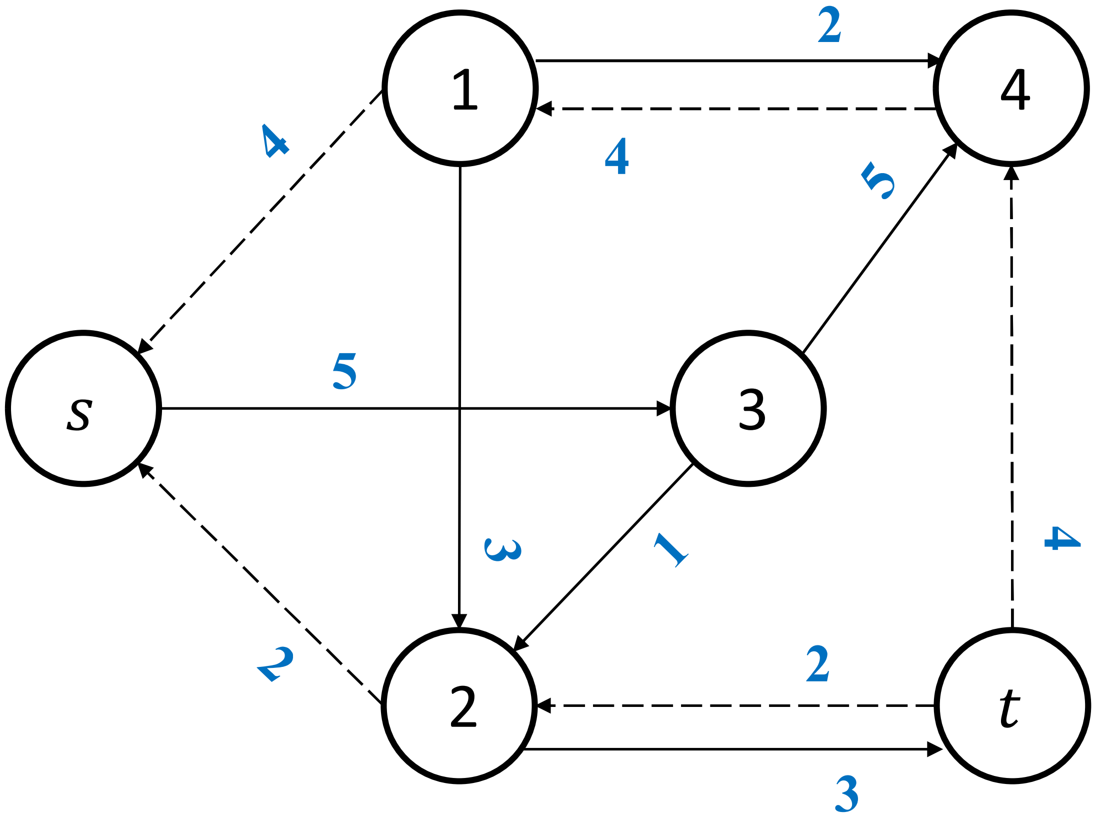
$$\theta = \min(2; 5) = 2$$

Aggiornamento del Flusso

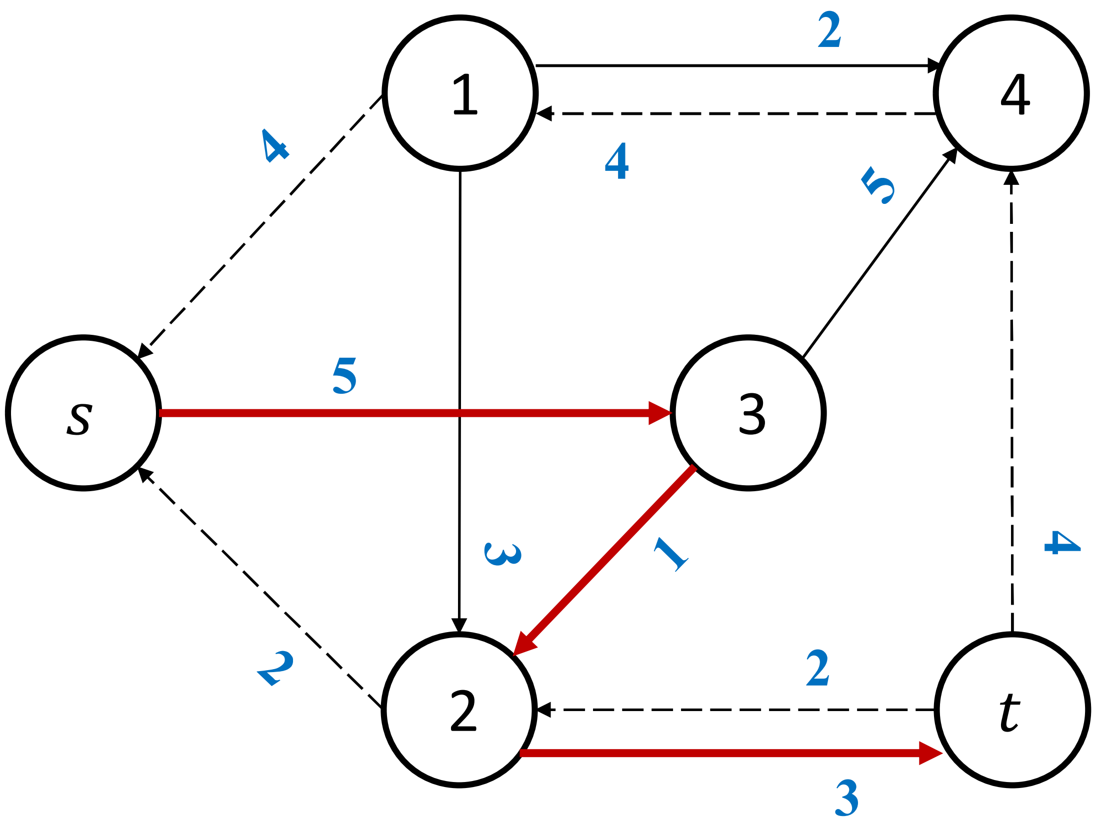


$$v = 4 + \theta = 6$$

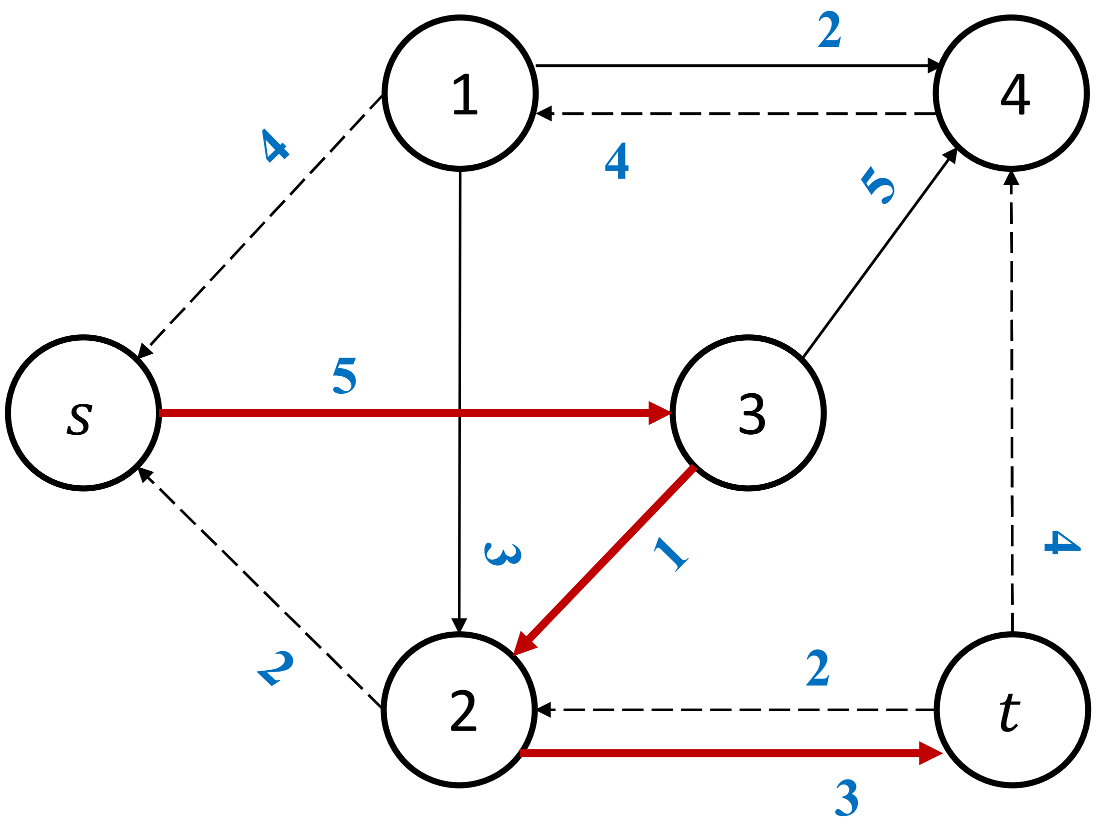
Grafo Residuale



Cammino Aumentante

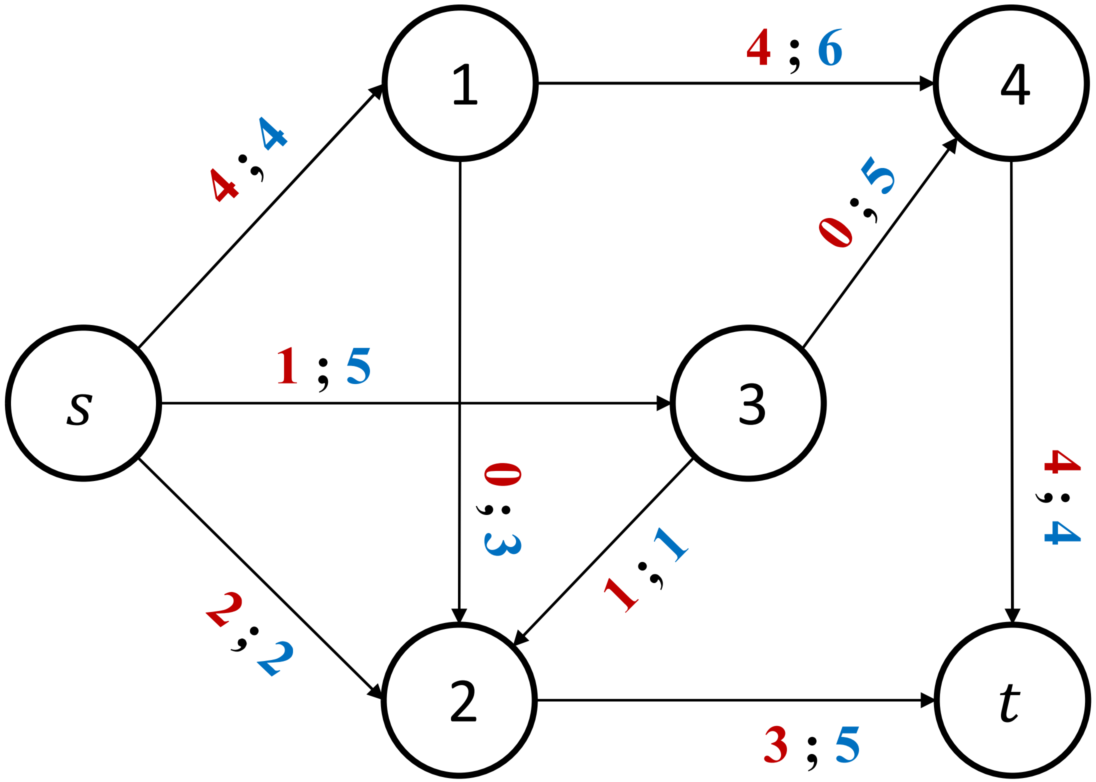


Cammino Aumentante



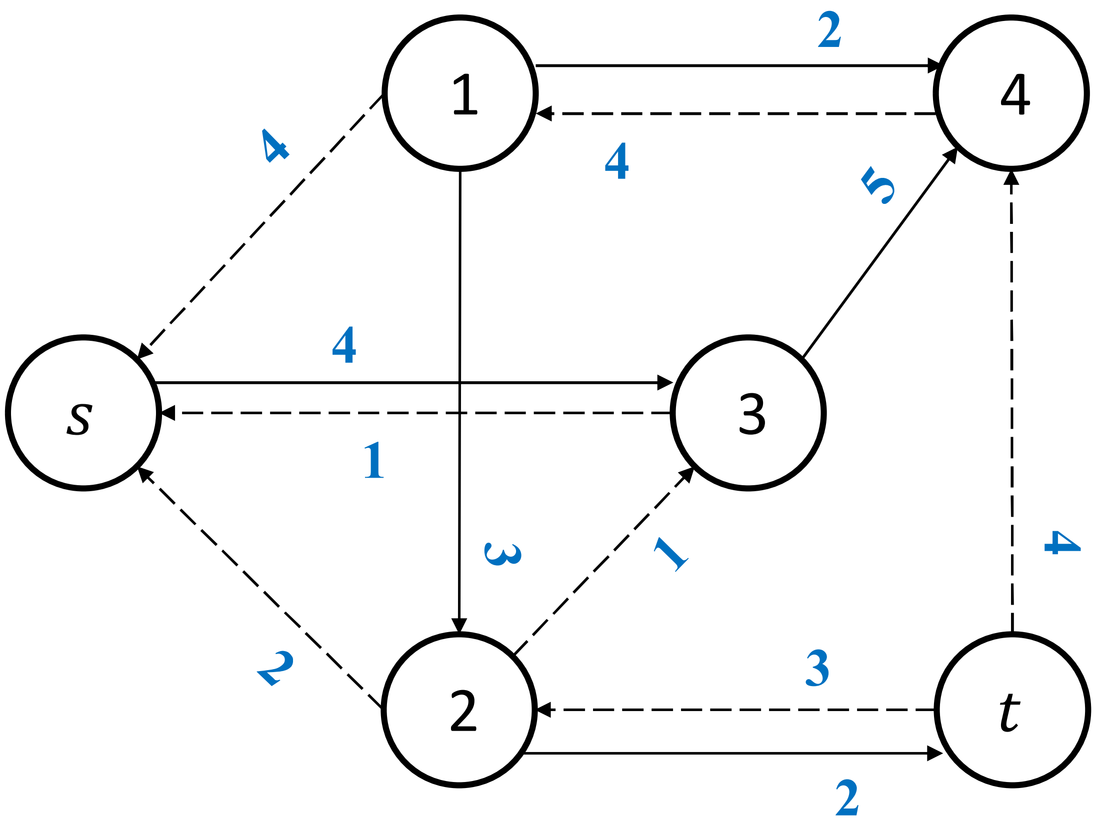
$$\theta = \min(5; 1; 3) = 1$$

Aggiornamento del Flusso

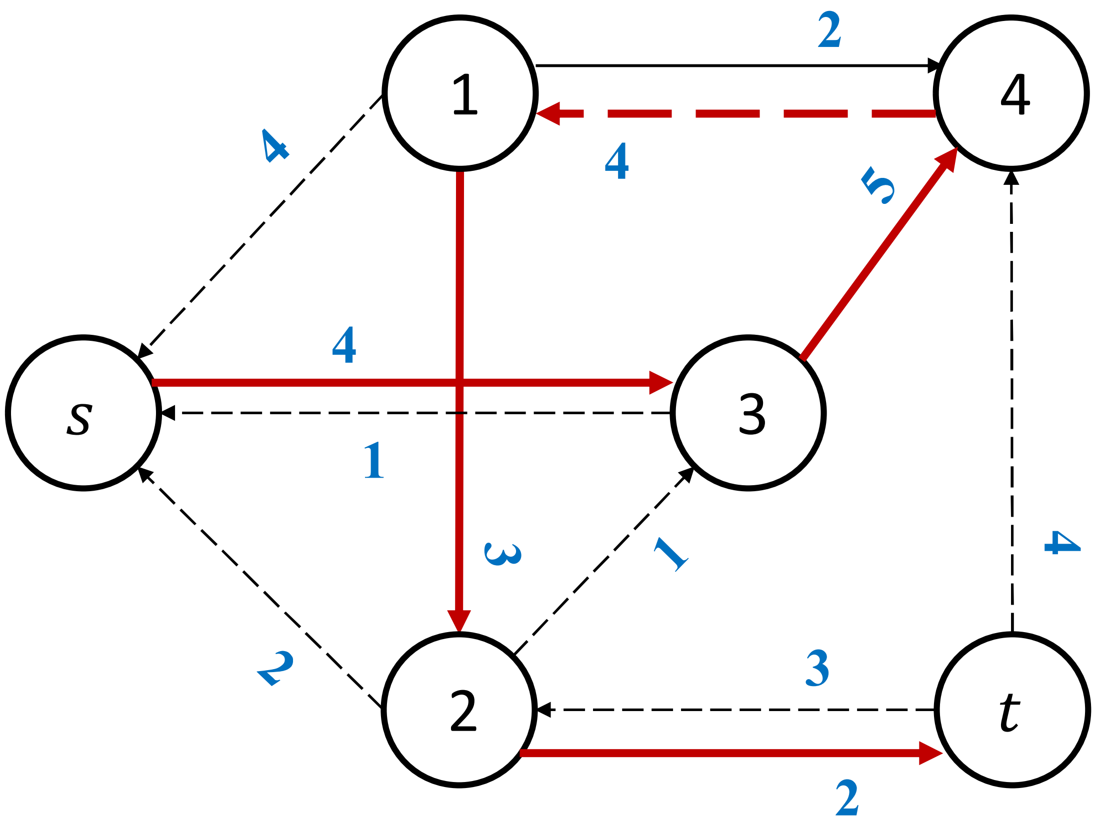


$$v = 6 + \theta = 7$$

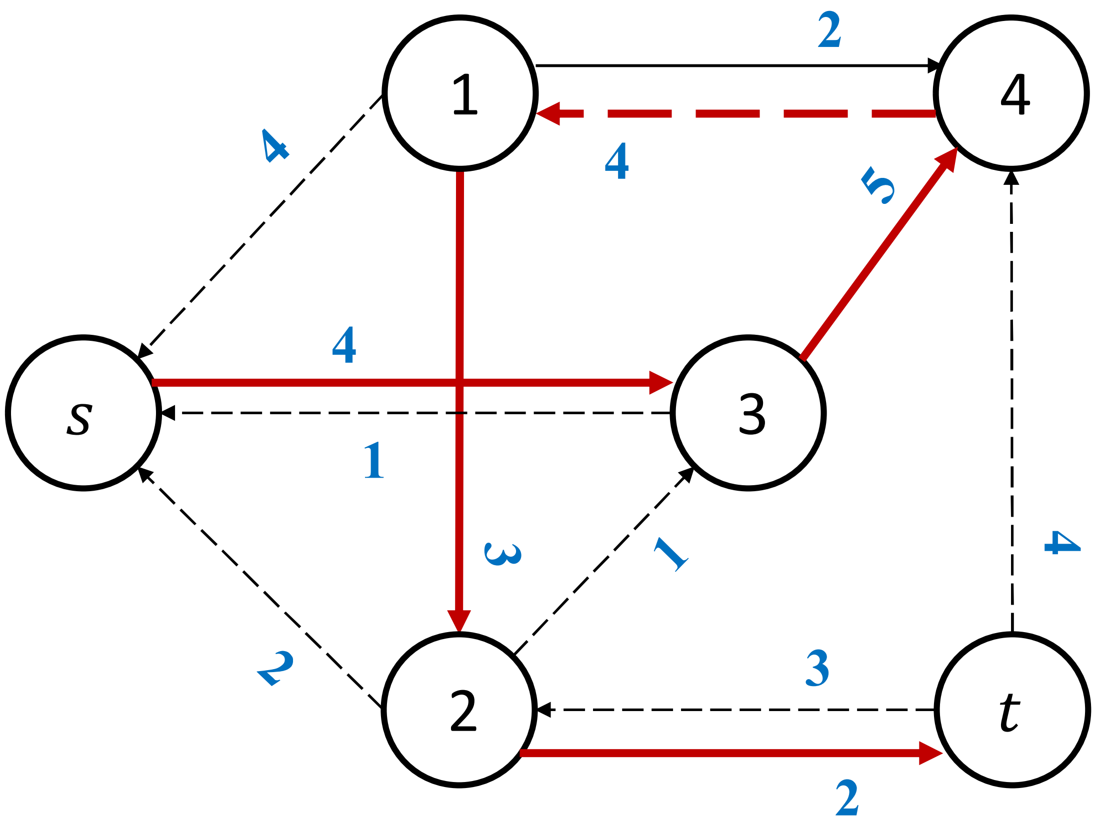
Grafo Residuale



Cammino Aumentante

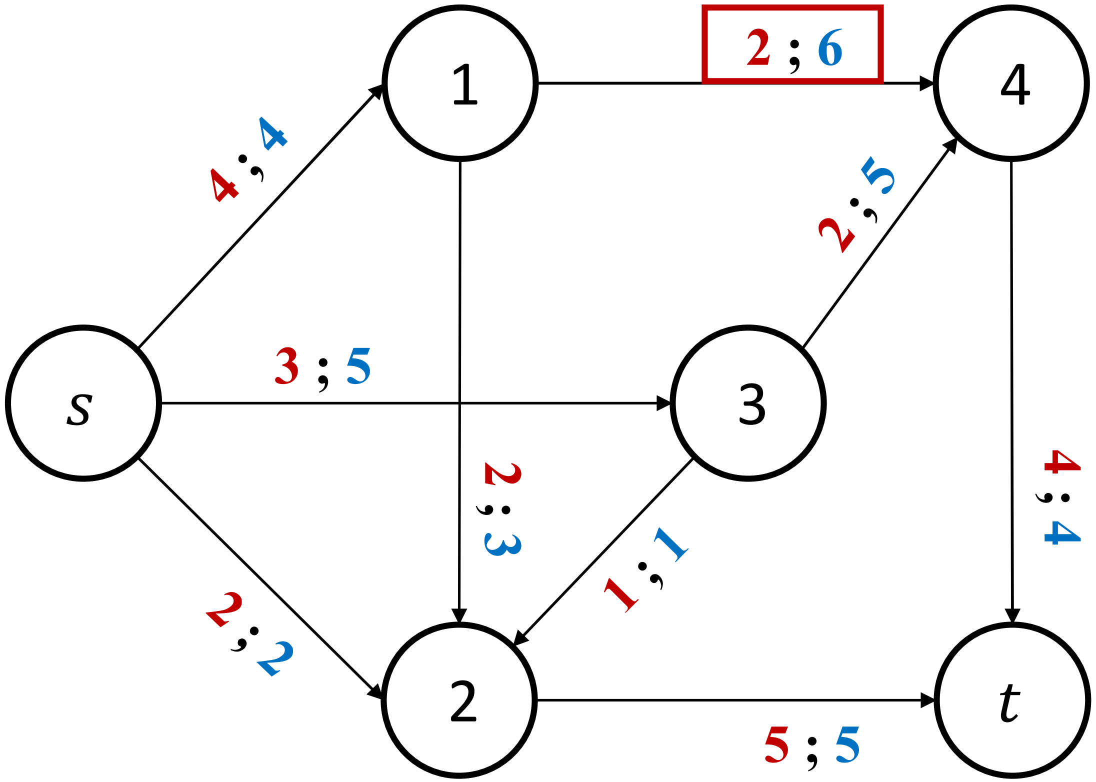


Cammino Aumentante



$$\theta = \min(4; 5; 4; 3; 2) = 2$$

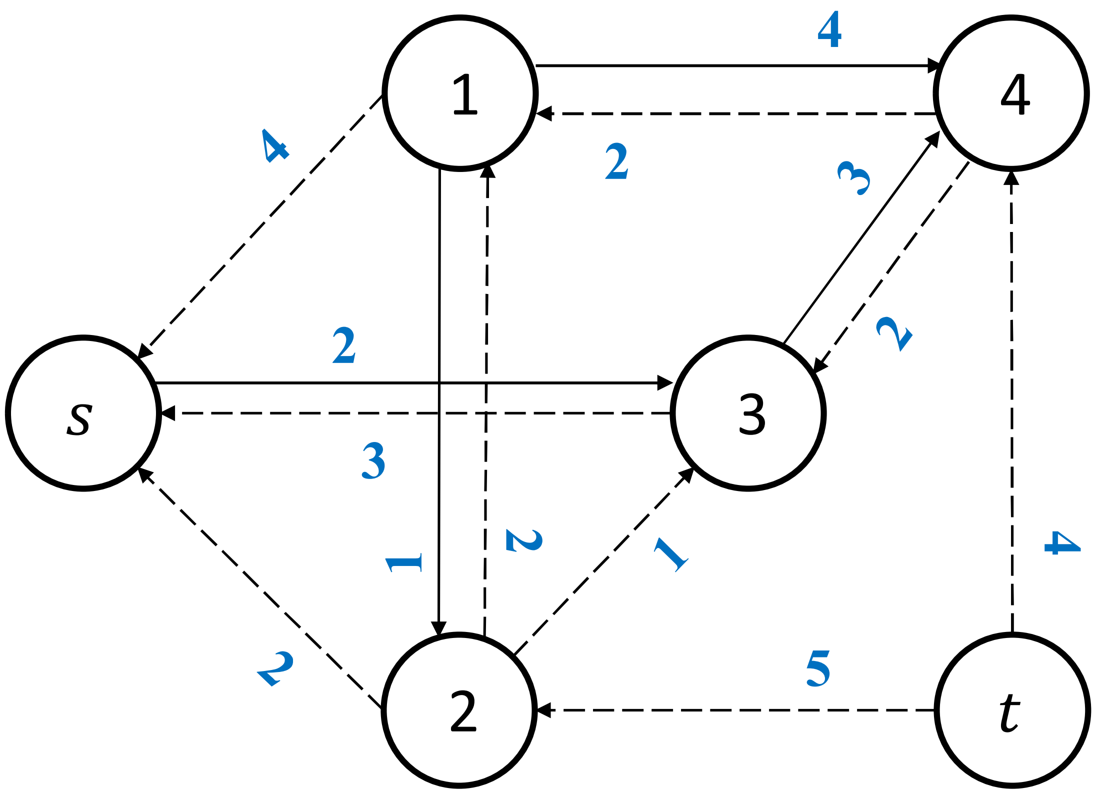
Aggiornamento del Flusso



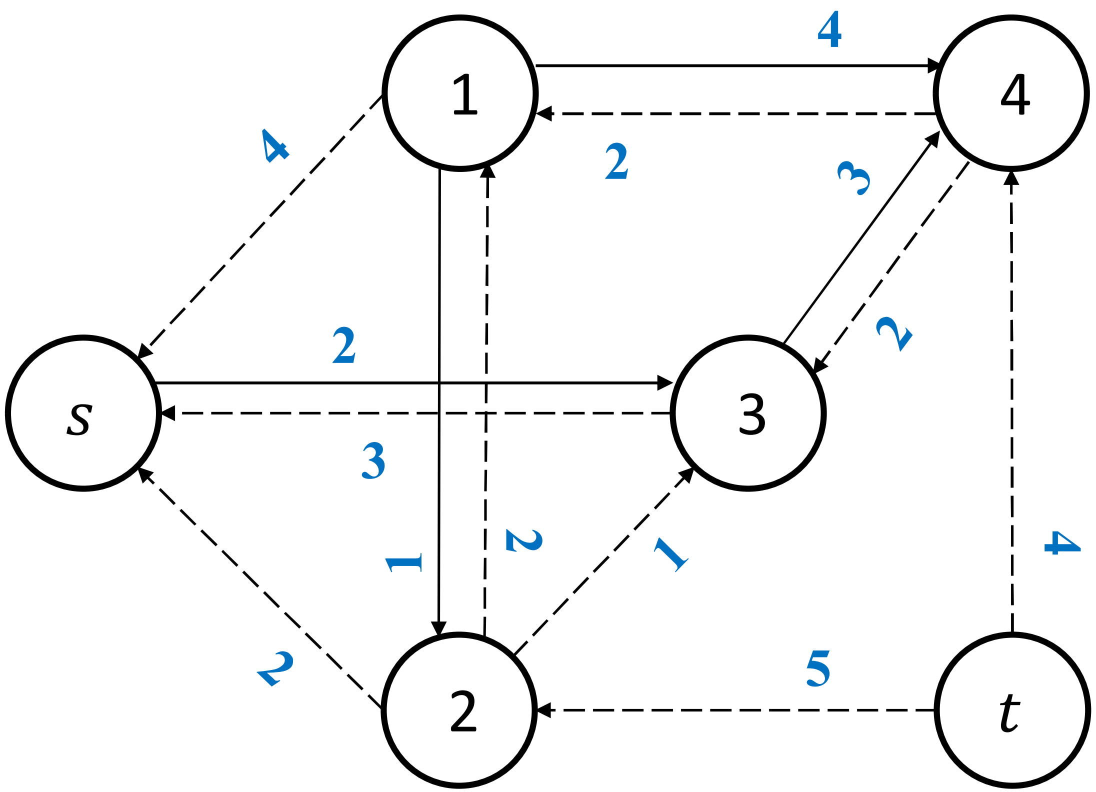
$$v = 7 + \theta = 9$$

Esercizio A

Grafo Residuale

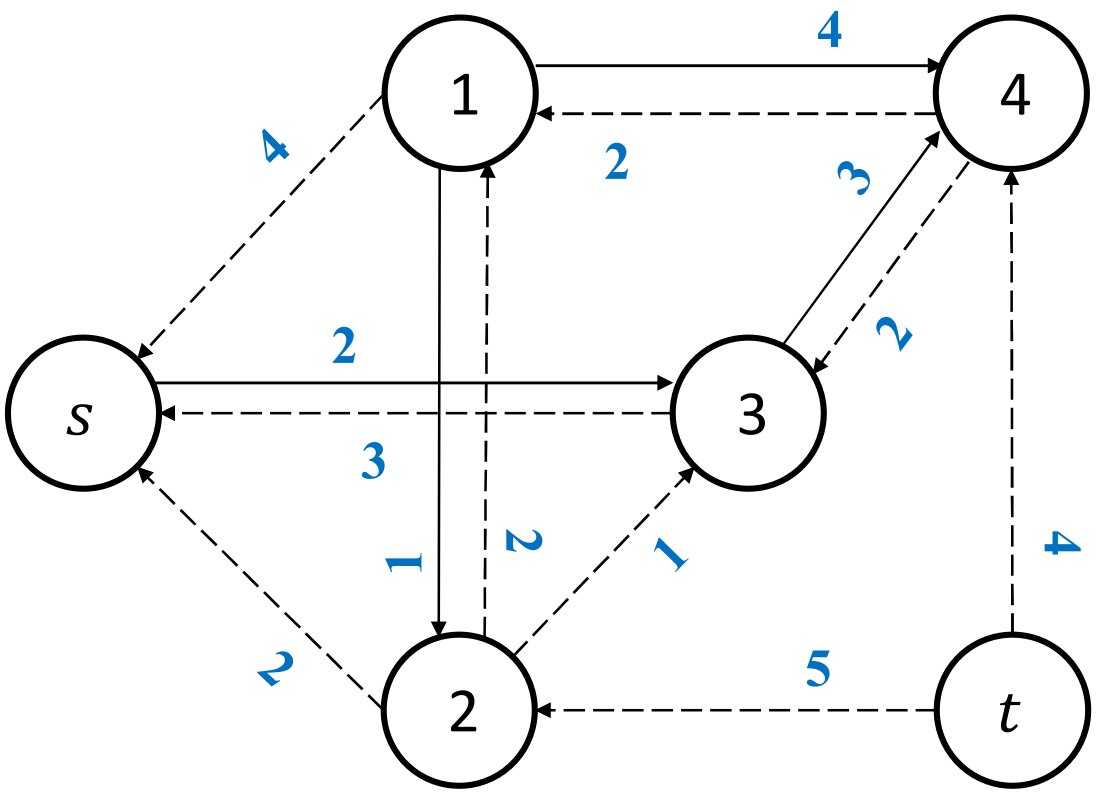


Grafo Residuale



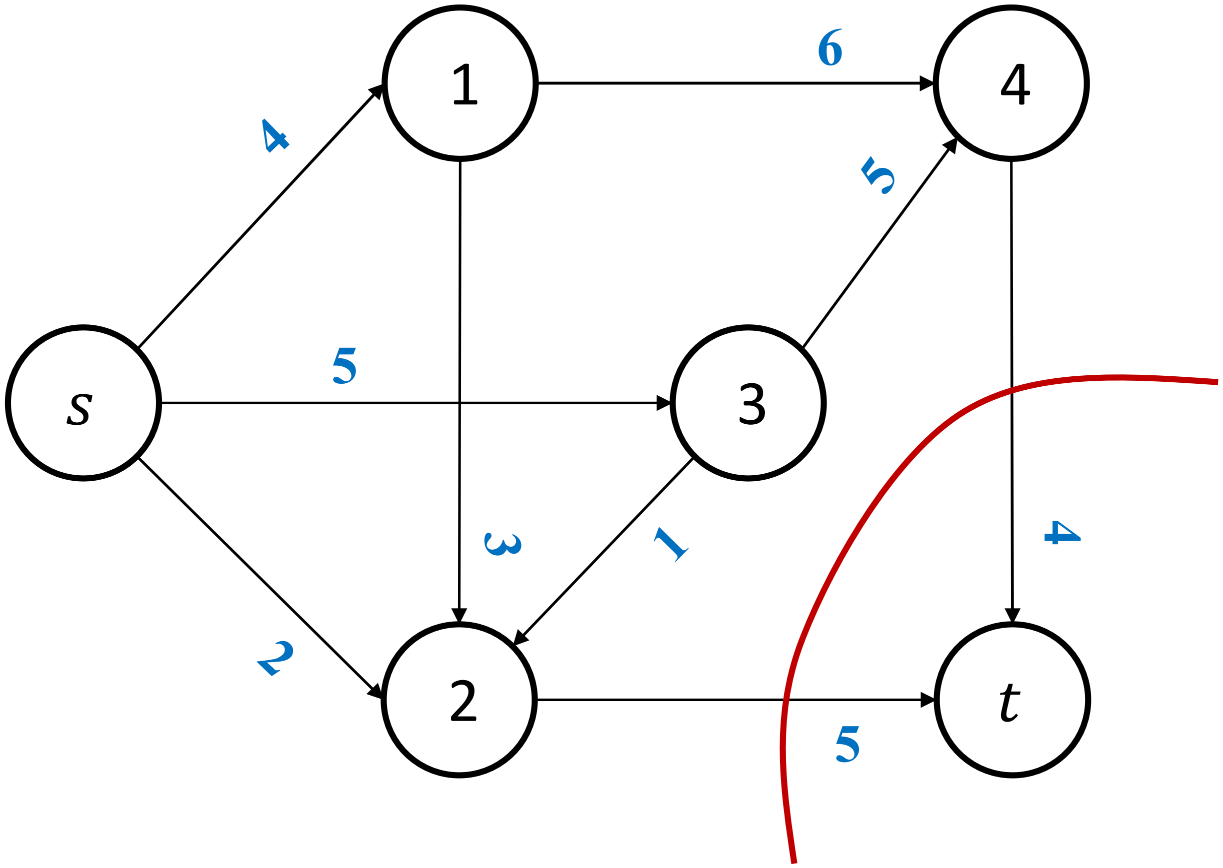
Non esiste alcun cammino aumentante

Grafo Residuale



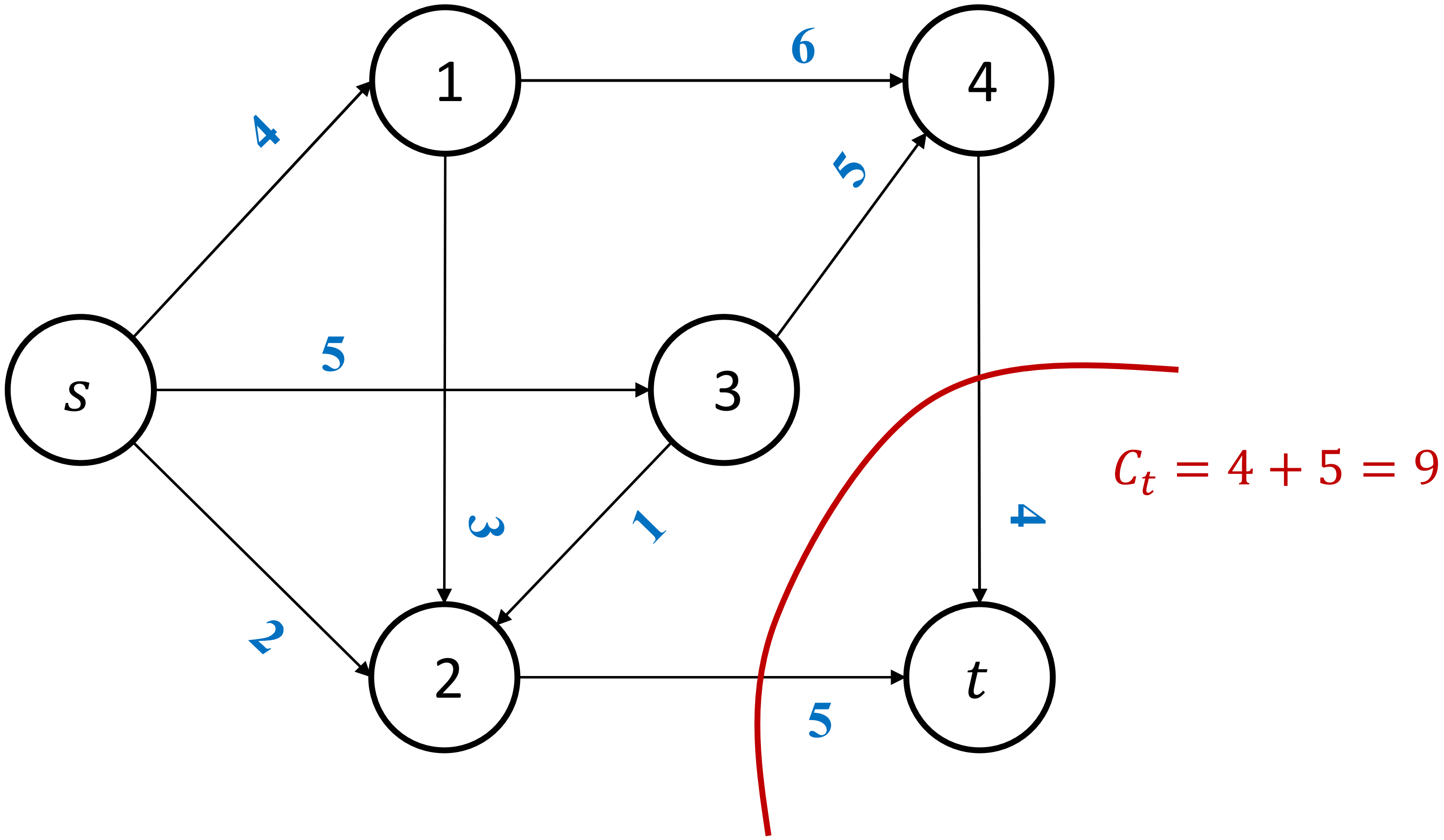
$$N_s = \{s, 1,2,3,4\} \qquad N_t = \{t\}$$

Verifica di Ottimalità



$$N_s = \{s, 1{,}2{,}3{,}4\} \qquad N_t = \{t\}$$

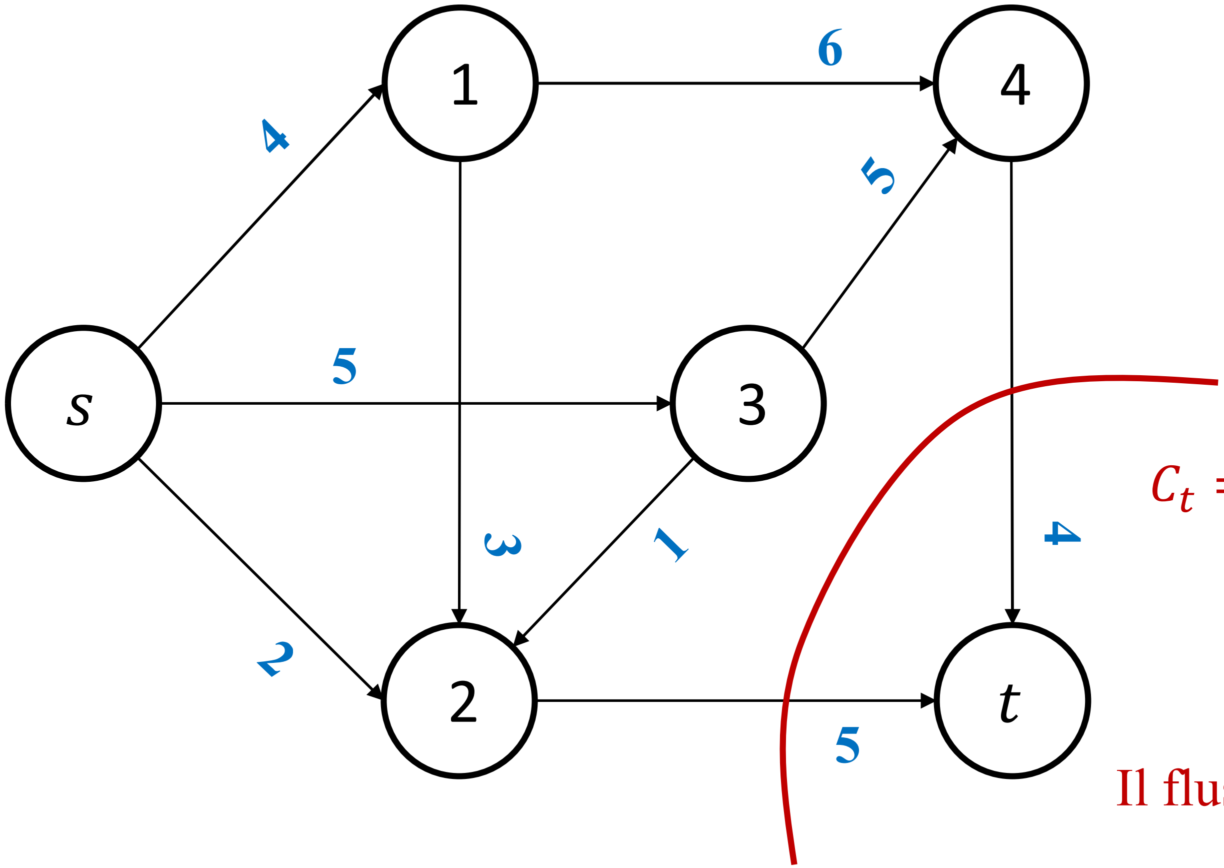
Verifica di Ottimalità



$N_s = \{s, 1,2,3,4\}$ $\quad N_t = \{t\}$

Esercizio A

Verifica di Ottimalità



$C_t = 4 + 5 = 9$

$C_t = v$

Il flusso è massimo

$N_s = \{s, 1,2,3,4\}$ $\quad N_t = \{t\}$

Cammini Minimi

Cos’è il problema di individuazione dei cammini minimi?

- Determinazione, in un grafo orientato, del cammino dal nodo sorgente ad un nodo destinazione per il quale risulta minima la somma dei costi degli archi che compongono il cammino.

- Risoluzione possibile solo per grafi che non presentano cicli di costo negativo.

- Possibile applicazione di tre algoritmi (con differenti requisiti applicativi)
  - ✓ Etichette
  - ✓ Dijkstra
  - ✓ Floyd-Warshall

Algoritmo delle Etichette

- Applicabile esclusivamente su grafi con ordinamento topologico
  - ✓ Sempre realizzabile su grafi aciclici (applicando l'algoritmo di ordinamento topologico)
  - ✓ Non realizzabile su grafi ciclici
- Analisi dei nodi in ordine di numerazione crescente
- Assegnazione ad ogni nodo t di un'etichetta $[pred(t); L(t)]$
  - ✓ $L(t) = \min_{i<t}\{L(i) + c_{i,t}\}$
  - ✓ $pred(t) = \arg\min_{i<t}\{L(i) + c_{i,t}\}$

Algoritmo di Dijkstra

- Applicabile esclusivamente su grafi con archi di costo non-negativi
- Partizione iterativa dei nodi in due insiemi disgiunti S e T
  - ✓ Si considerano gli archi diretti del taglio $\delta^+(S,T) = \{(i,j): i \in S, j \in T\}$
  - ✓ Si seleziona l'arco di taglio di peso minimo $(v,t) = \underset{(i,j)\in\delta^+(S,T)}{\arg\min} \{L(i) + c_{i,j}\}$
  - ✓ Al nodo t viene assegnata etichetta definitiva $[v, L(v) + c_{v,t}]$
  - ✓ Si aggiornano gli insiemi S e T
    - $S = S \cup t$
    - $T = T \setminus \{t\}$

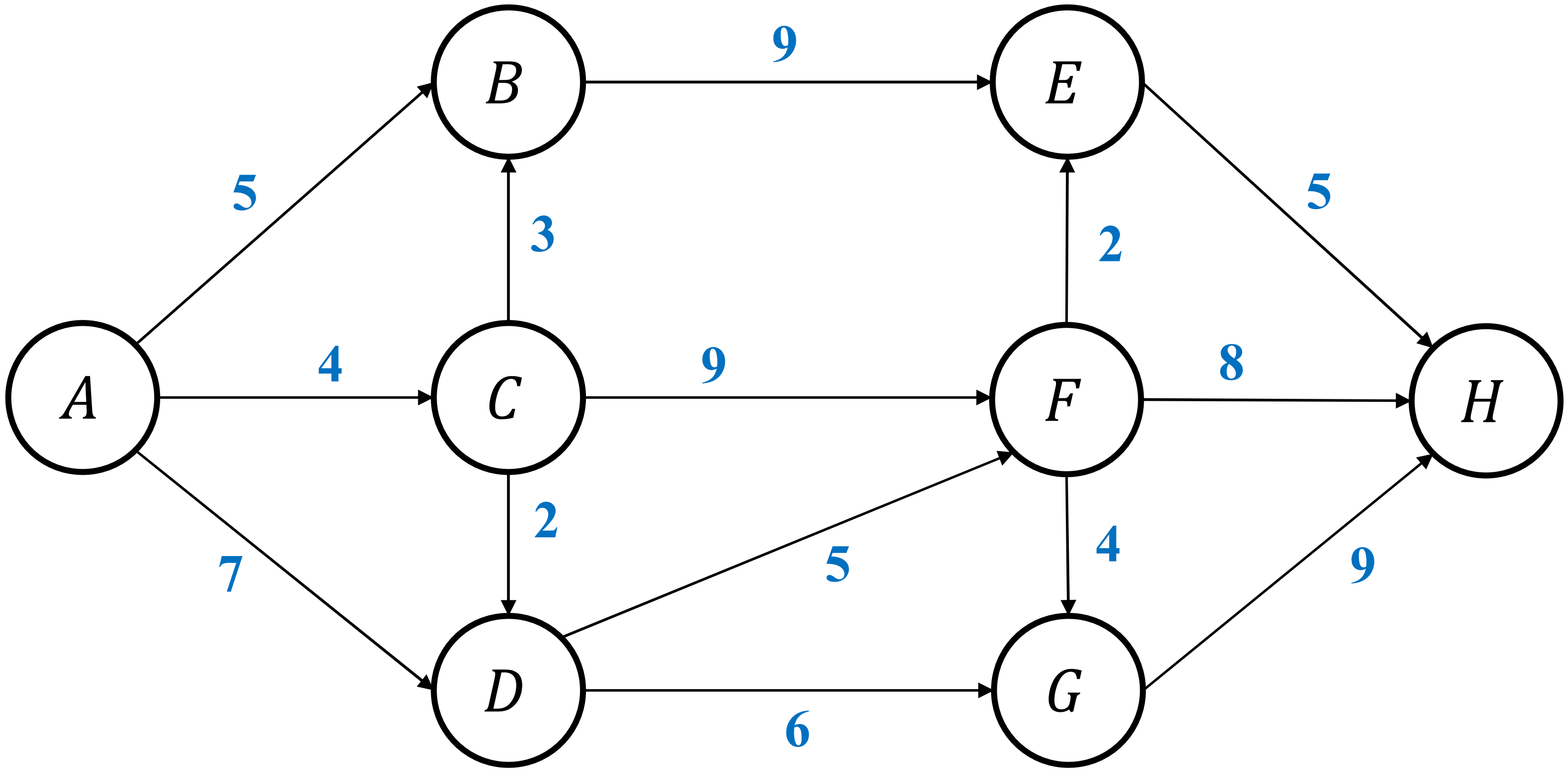
Algoritmo di Floyd-Warshall

- Applicabile a qualsiasi grafo
  - ✓ Grafi ciclici
  - ✓ Archi di costo negativo
  - ✓ L'algoritmo individua l'esistenza di cicli di costo negativo, arrestandosi dopo il loro riconoscimento

- Input
  - ✓ Matrice $c_{i,j}$ (costo dell'arco che collega i nodi i e j del grafo)

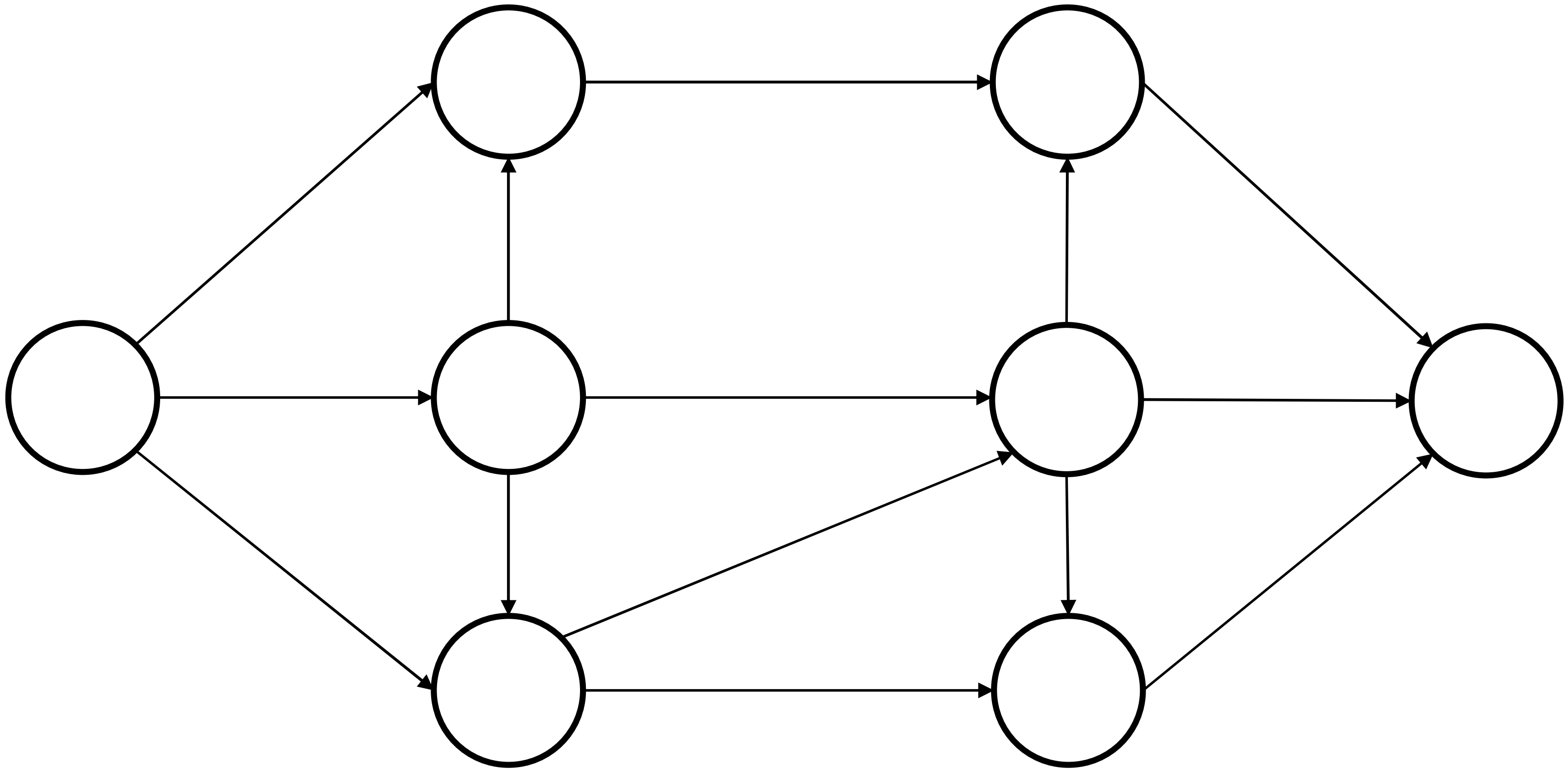
- Output
  - ✓ Matrice $d_{i,j}$ (costo del cammino minimo dal nodo i al nodo j)
  - ✓ Matrice $p_{i,j}$ (predecessore del nodo j nel cammino minimo dal nodo i al nodo j)

Grafo Iniziale



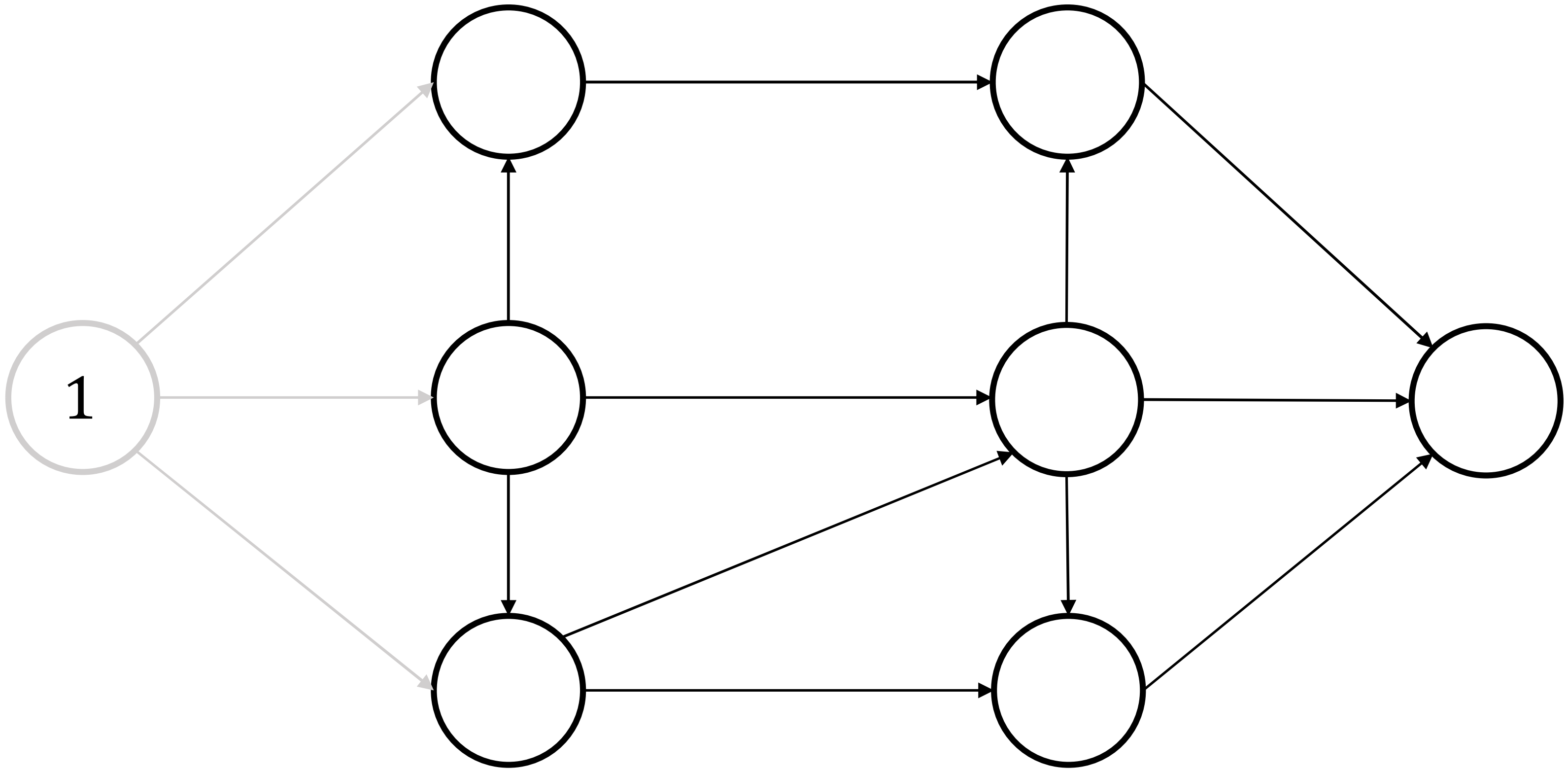
Esercizio B

Ordinamento Topologico

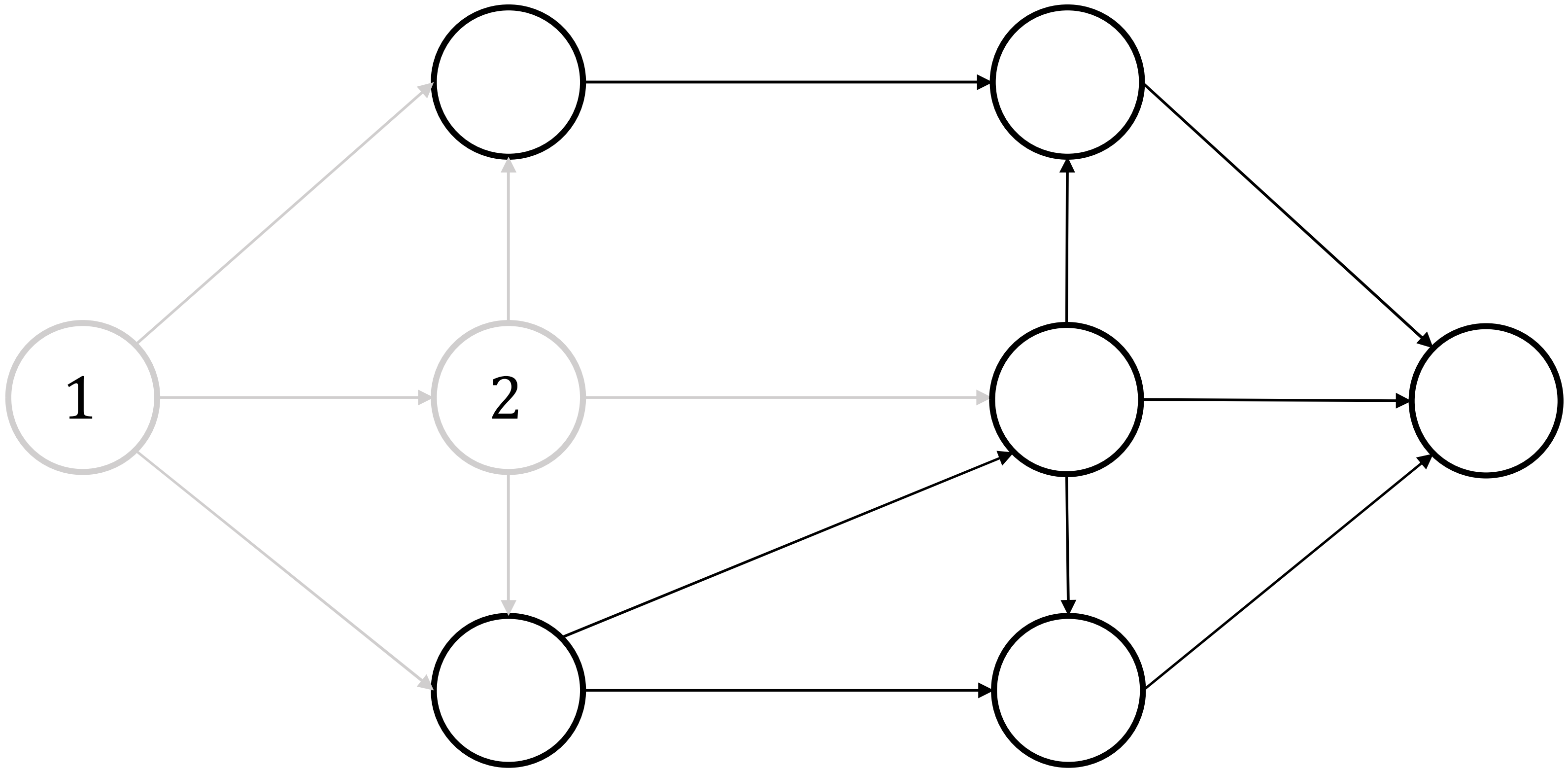


Esercizio B

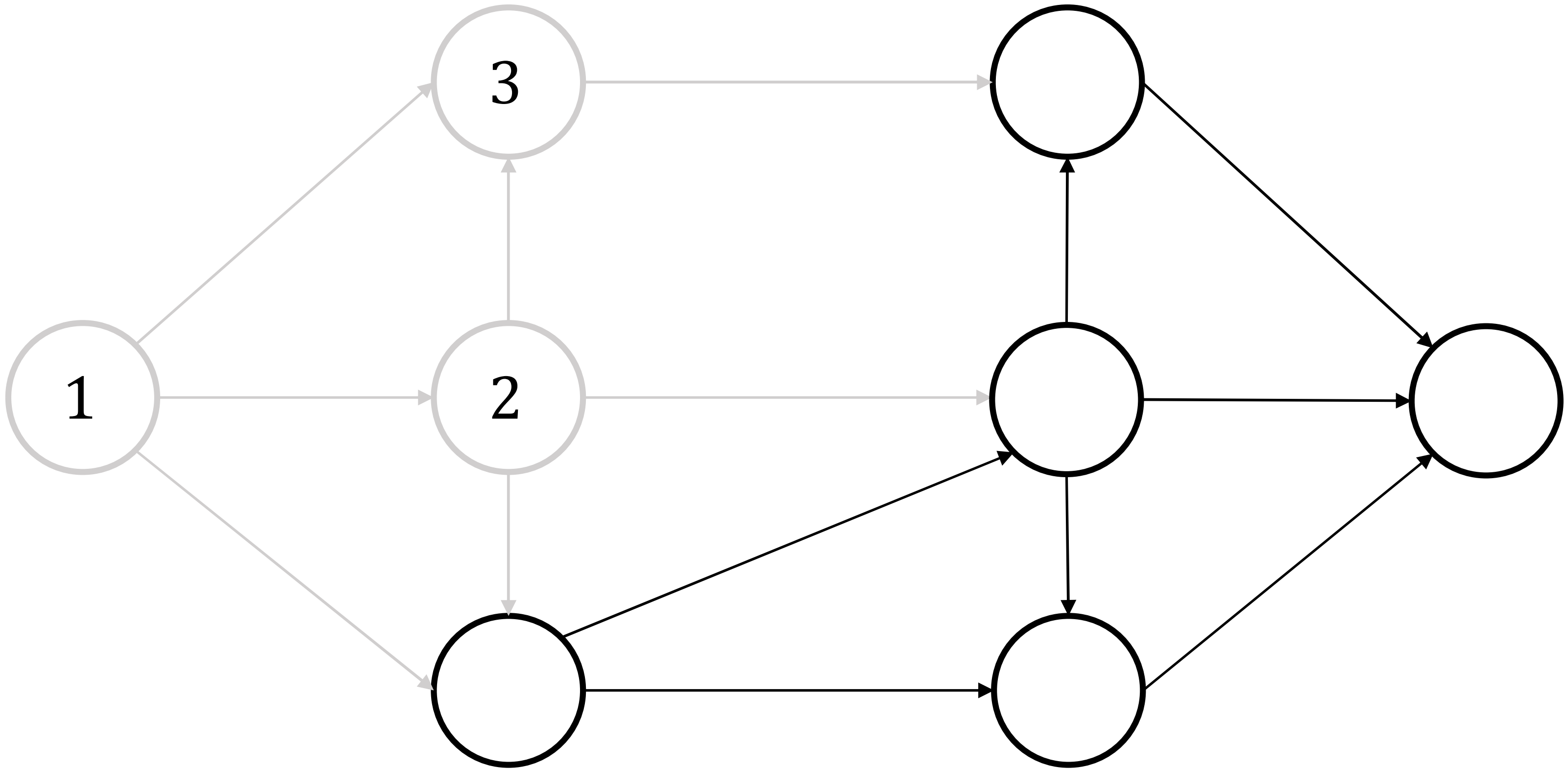
Ordinamento Topologico



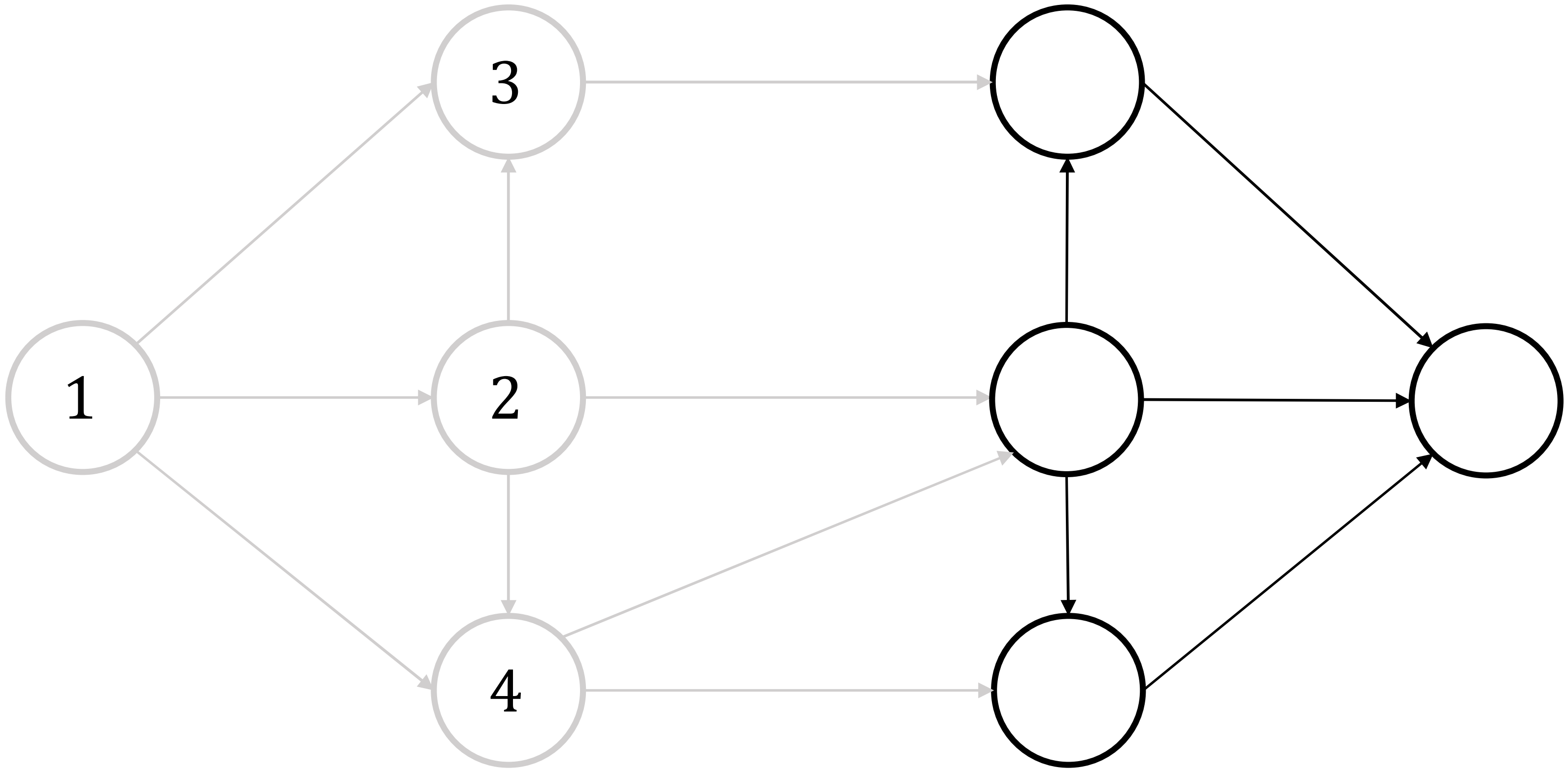
Ordinamento Topologico



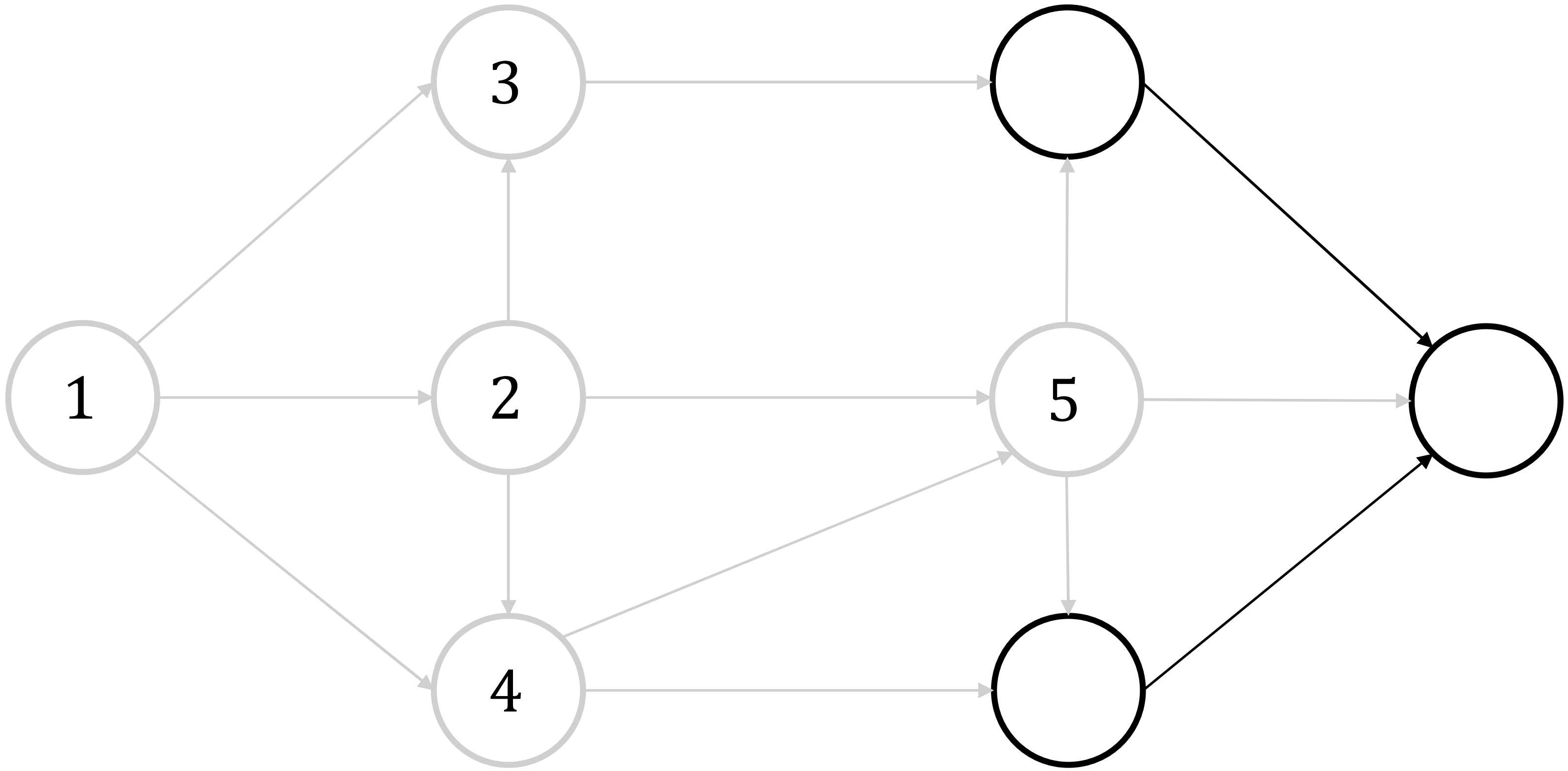
Ordinamento Topologico



Ordinamento Topologico

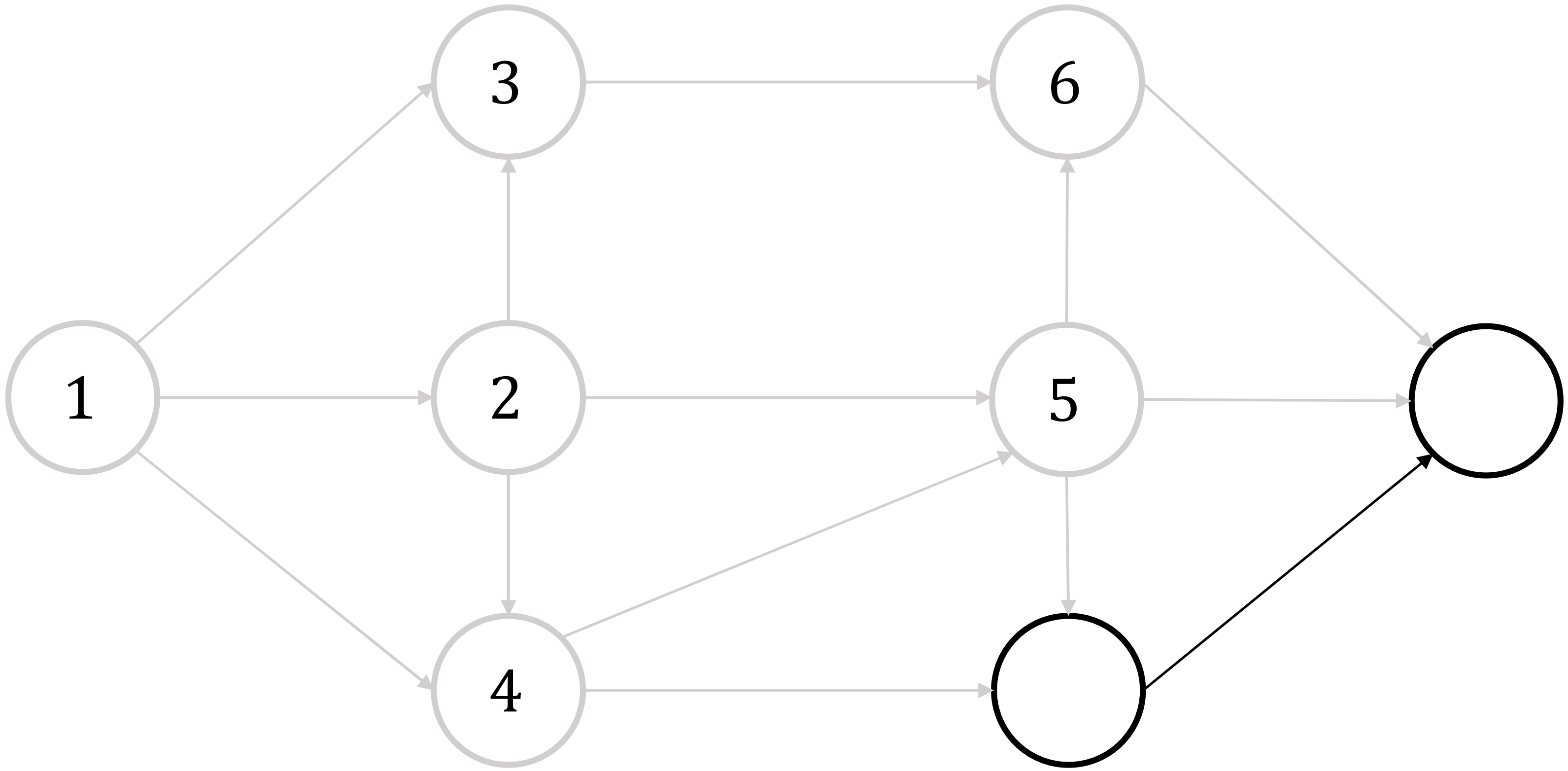


Ordinamento Topologico

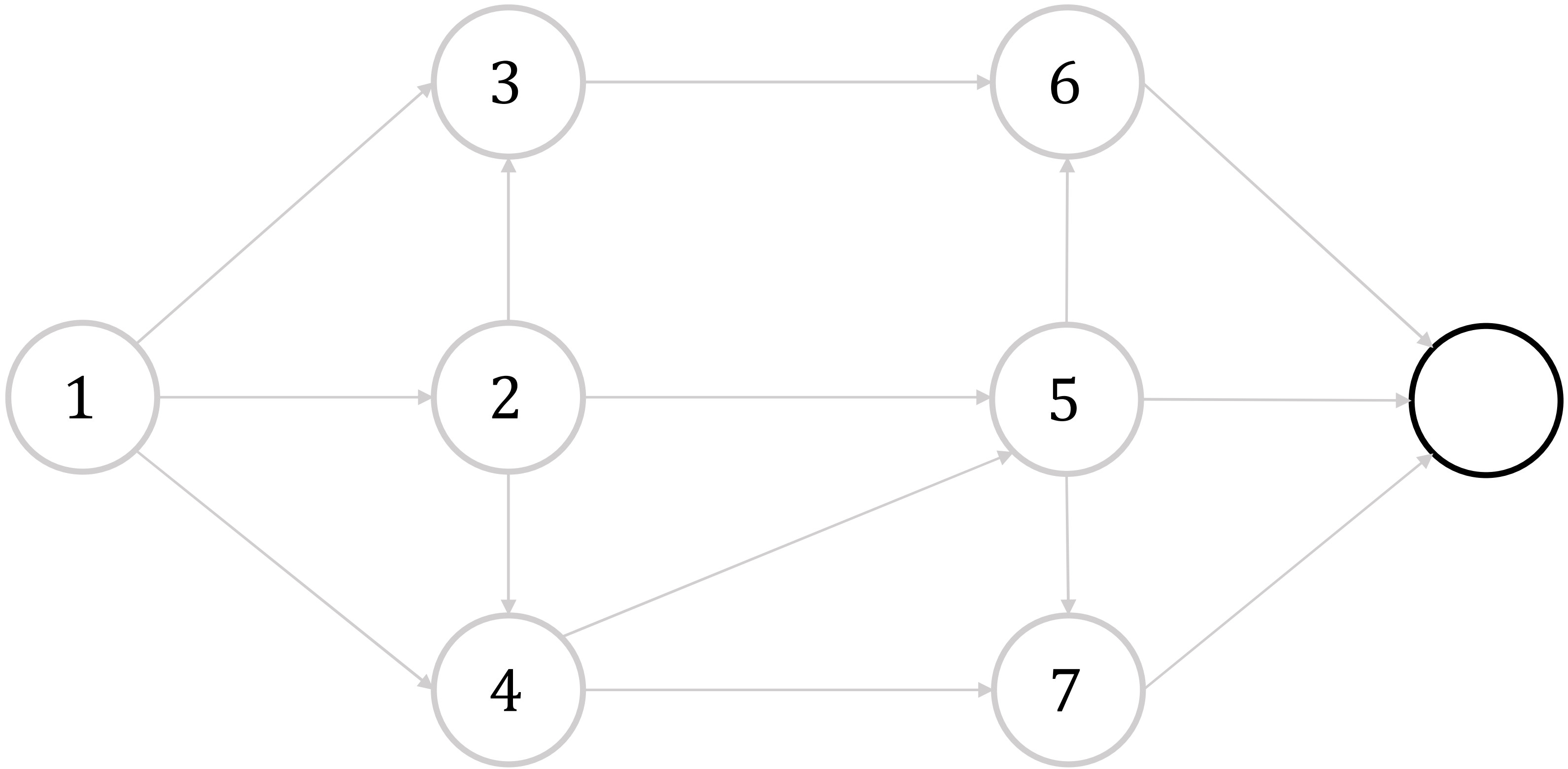


Esercizio B

Ordinamento Topologico

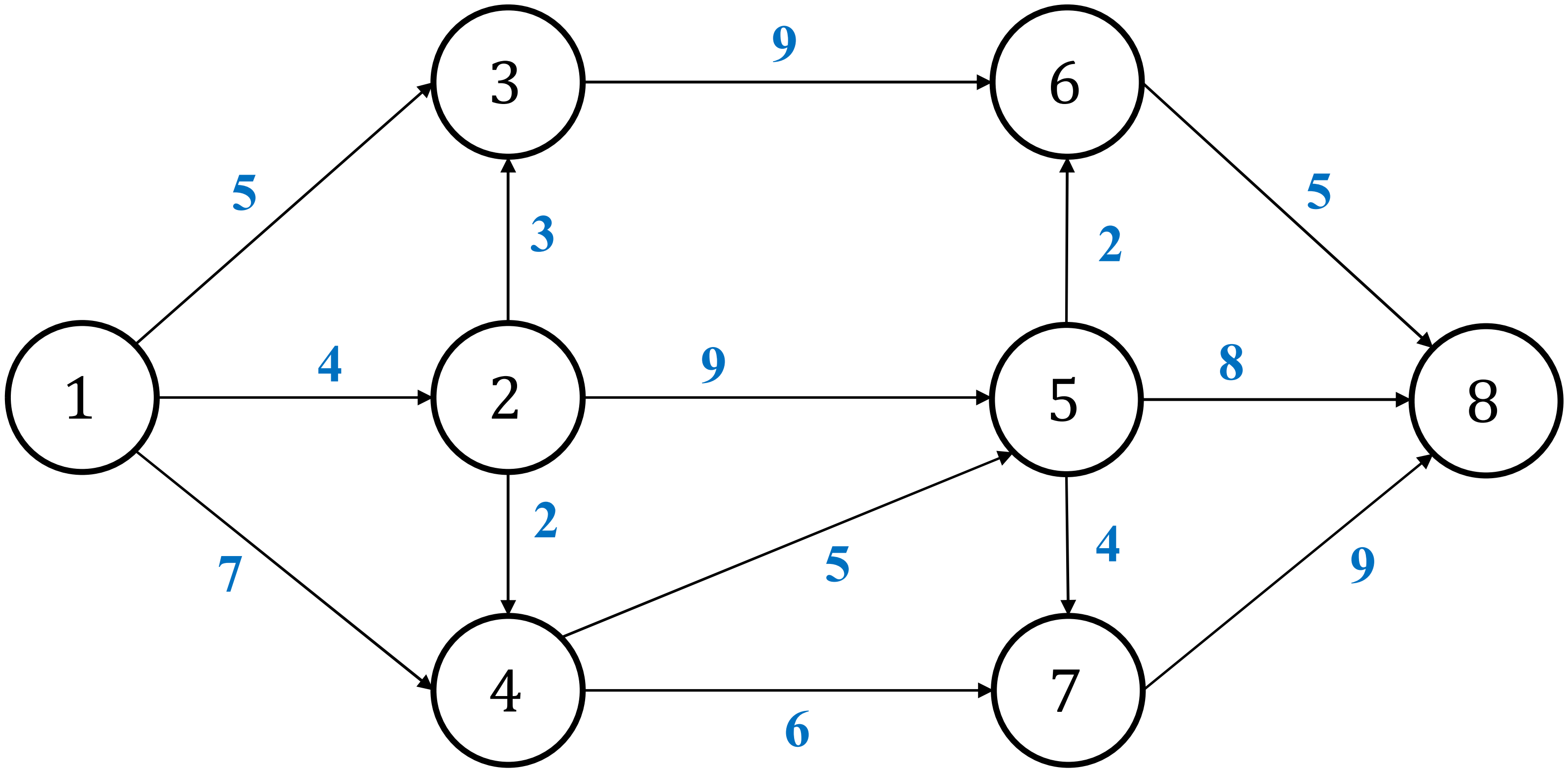


Ordinamento Topologico



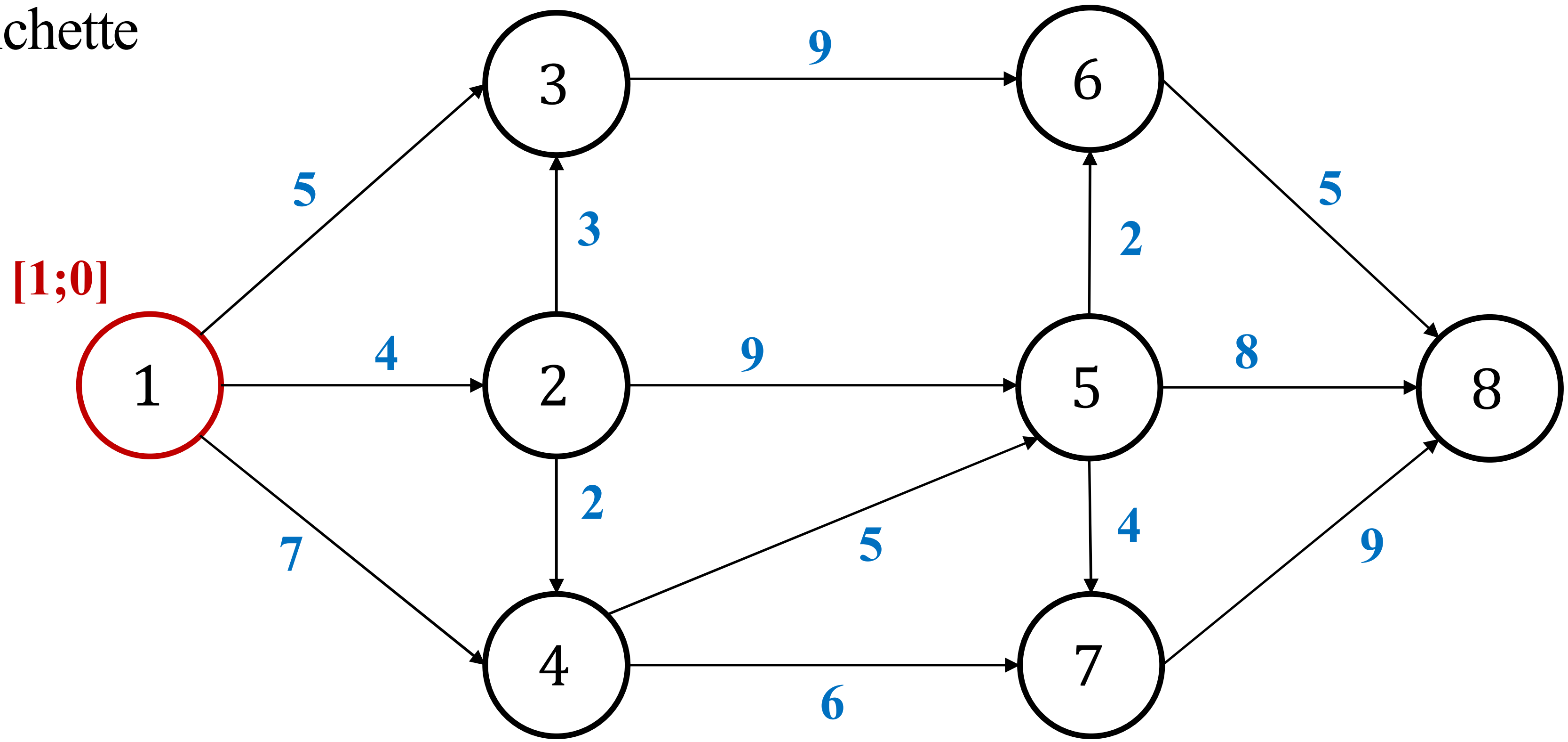
Esercizio B

Ordinamento Topologico



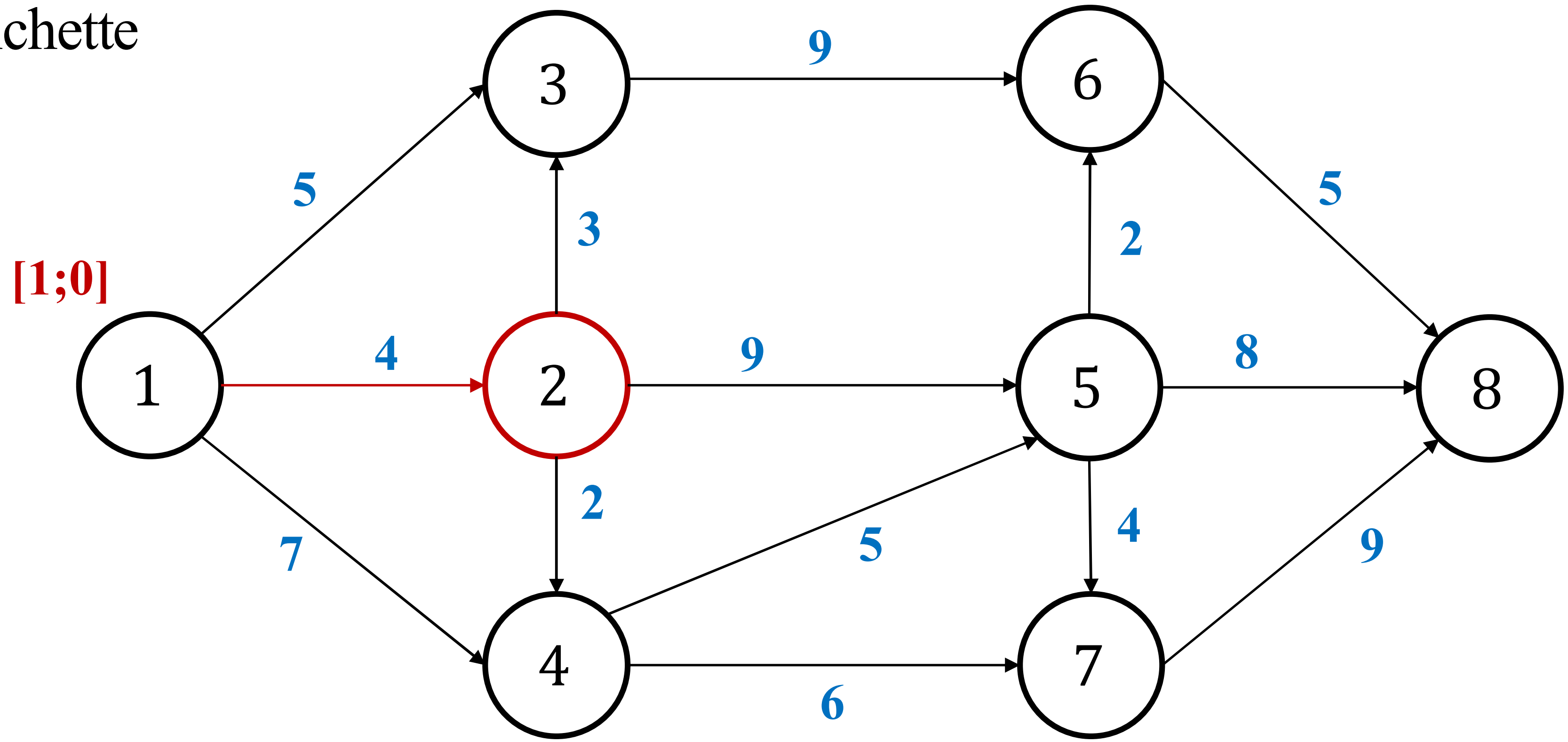
Esercizio B

Etichette



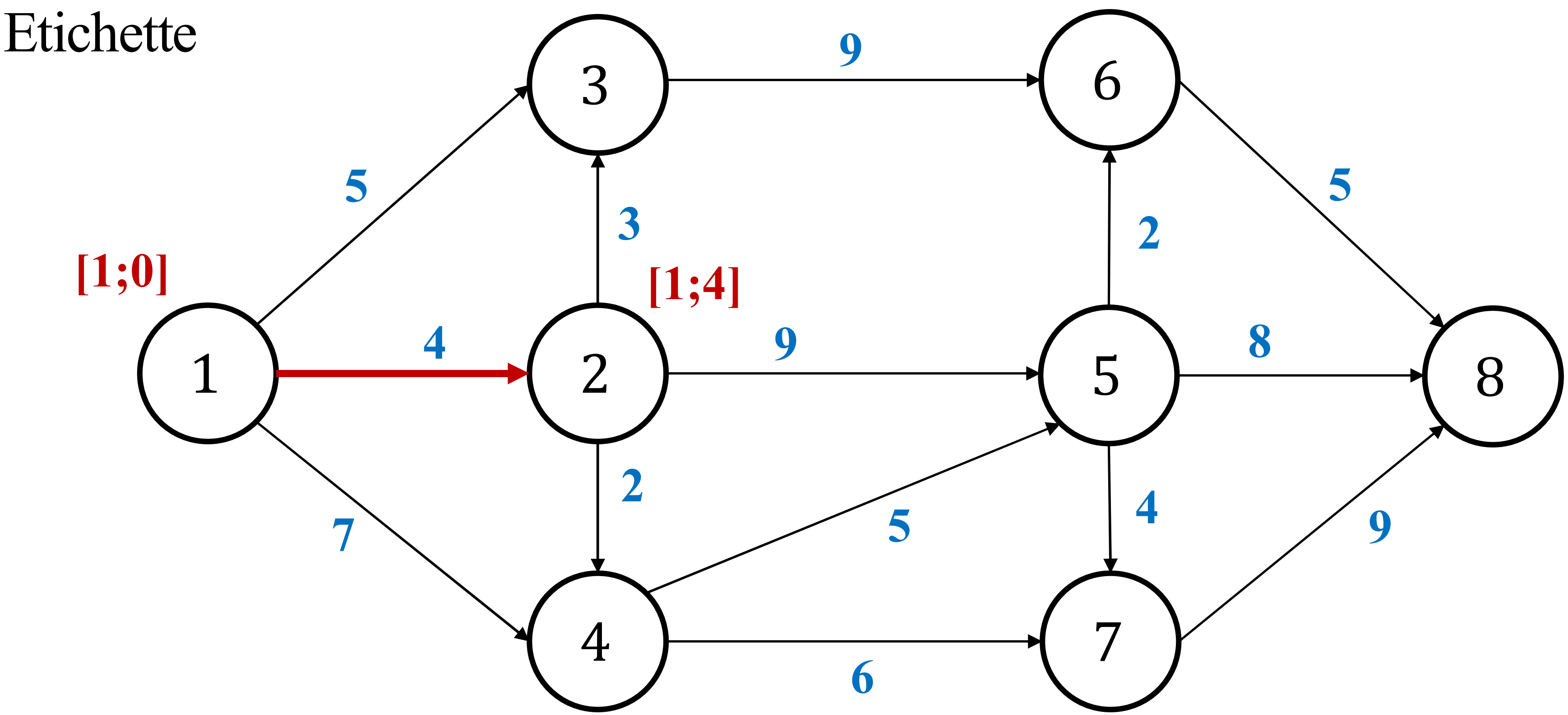
Esercizio B

Etichette



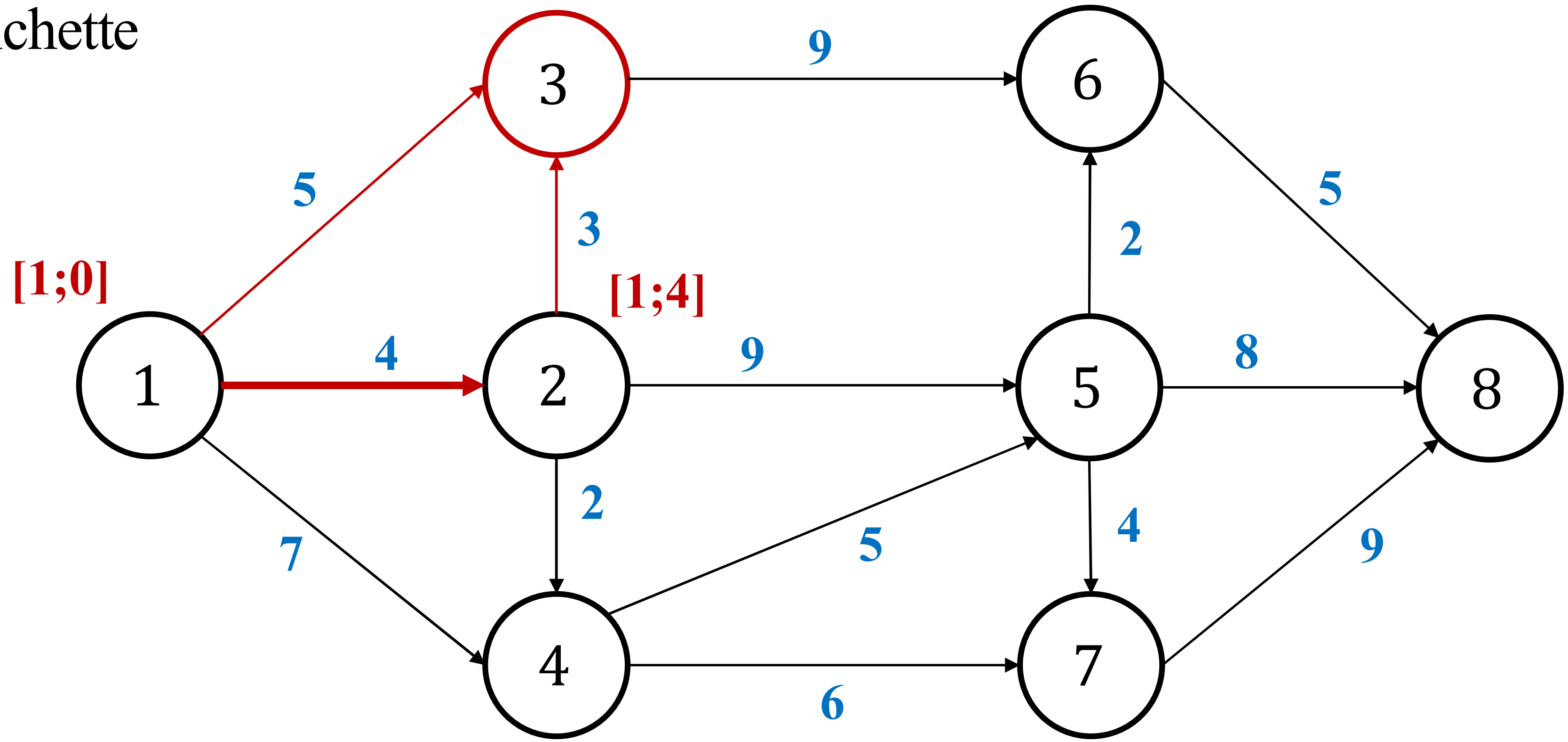
Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
2	(1,2)	4		

Esercizio B



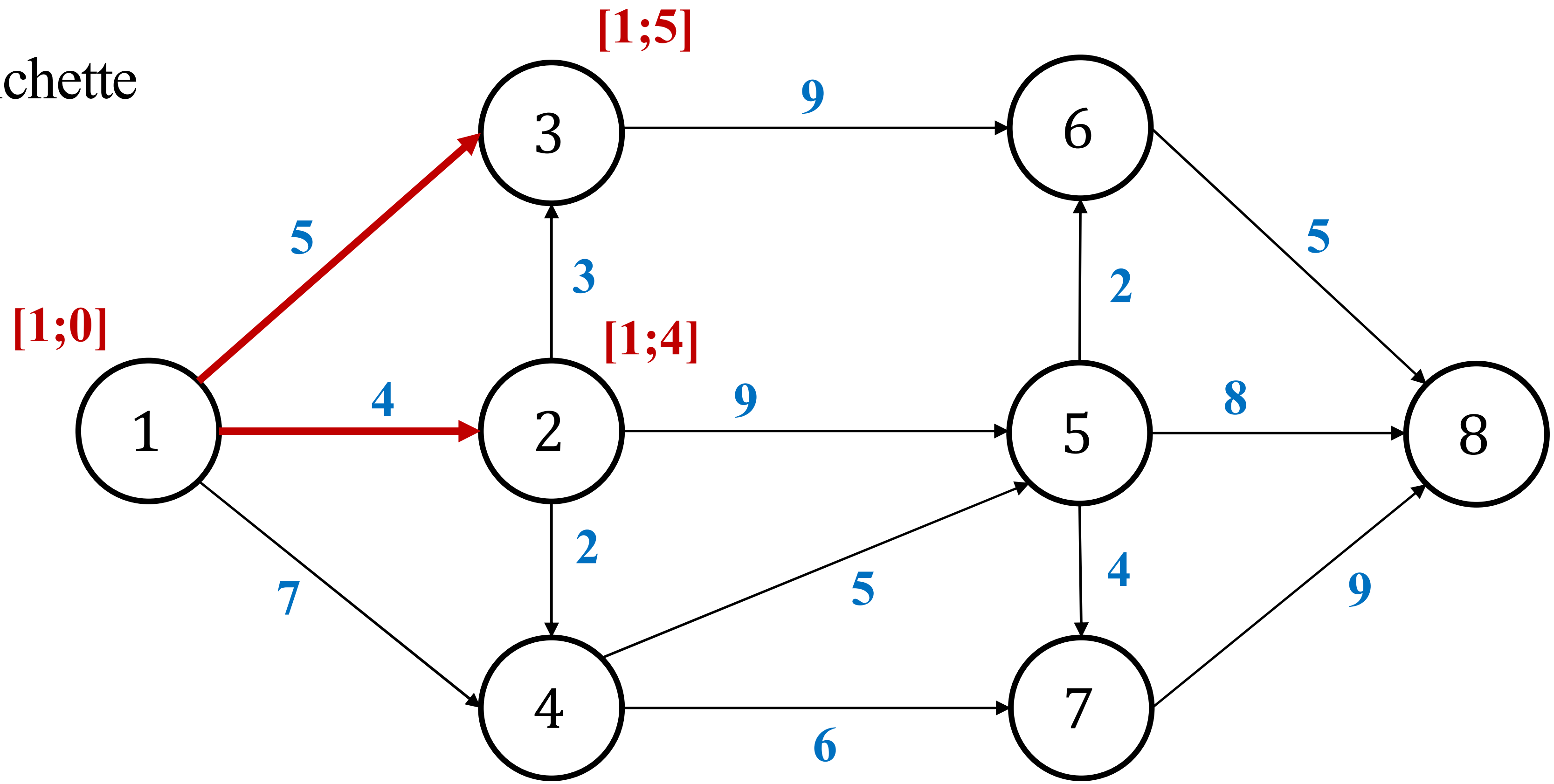
Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
2	(1,2)	4	[1;4]	(1,2)

Etichette



Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
3	(1,3) (2,3)	5 4+3=7		

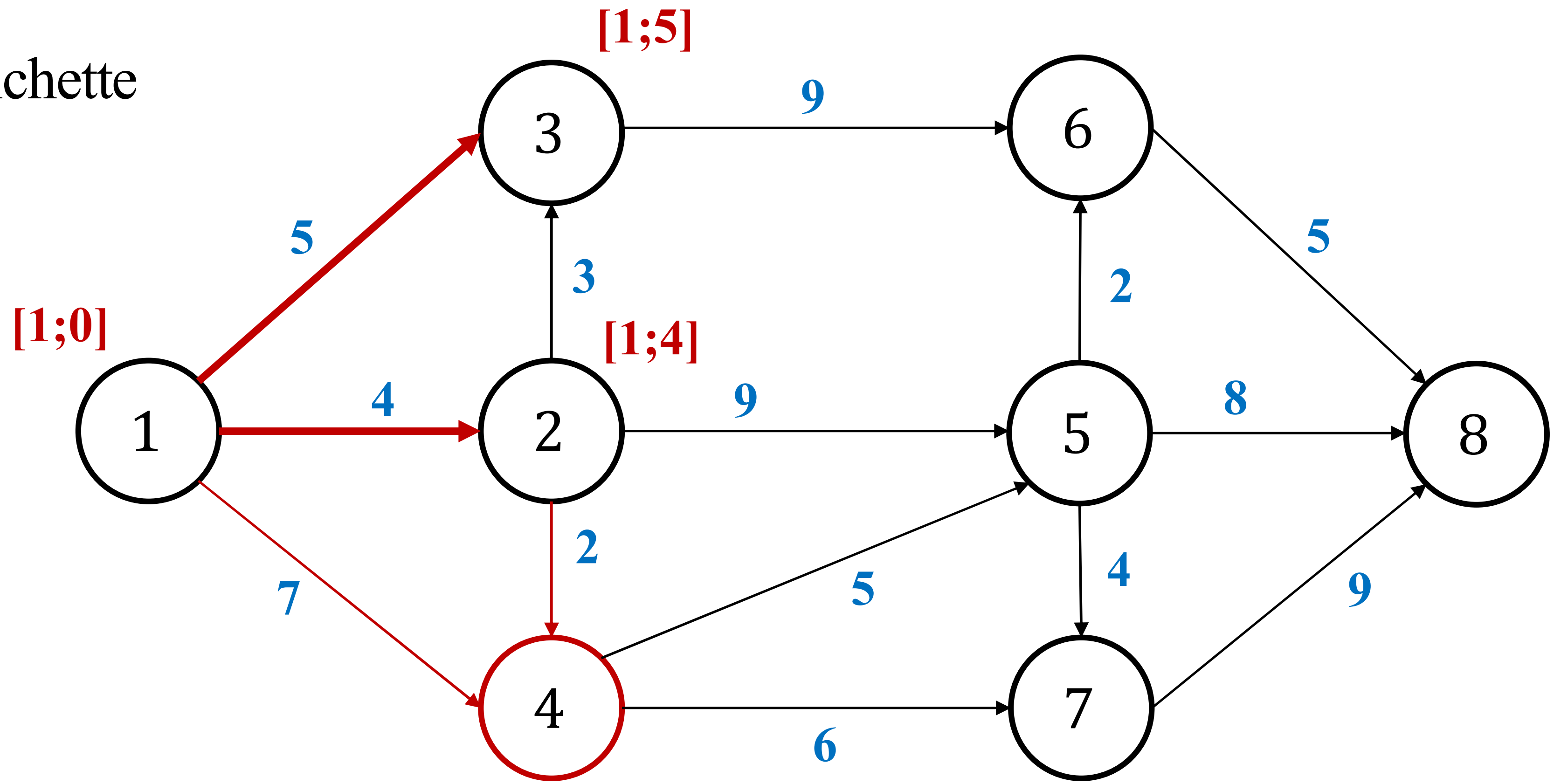
Etichette



Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
3	(1,3) (2,3)	5 4+3=7	[1;5]	(1,3)

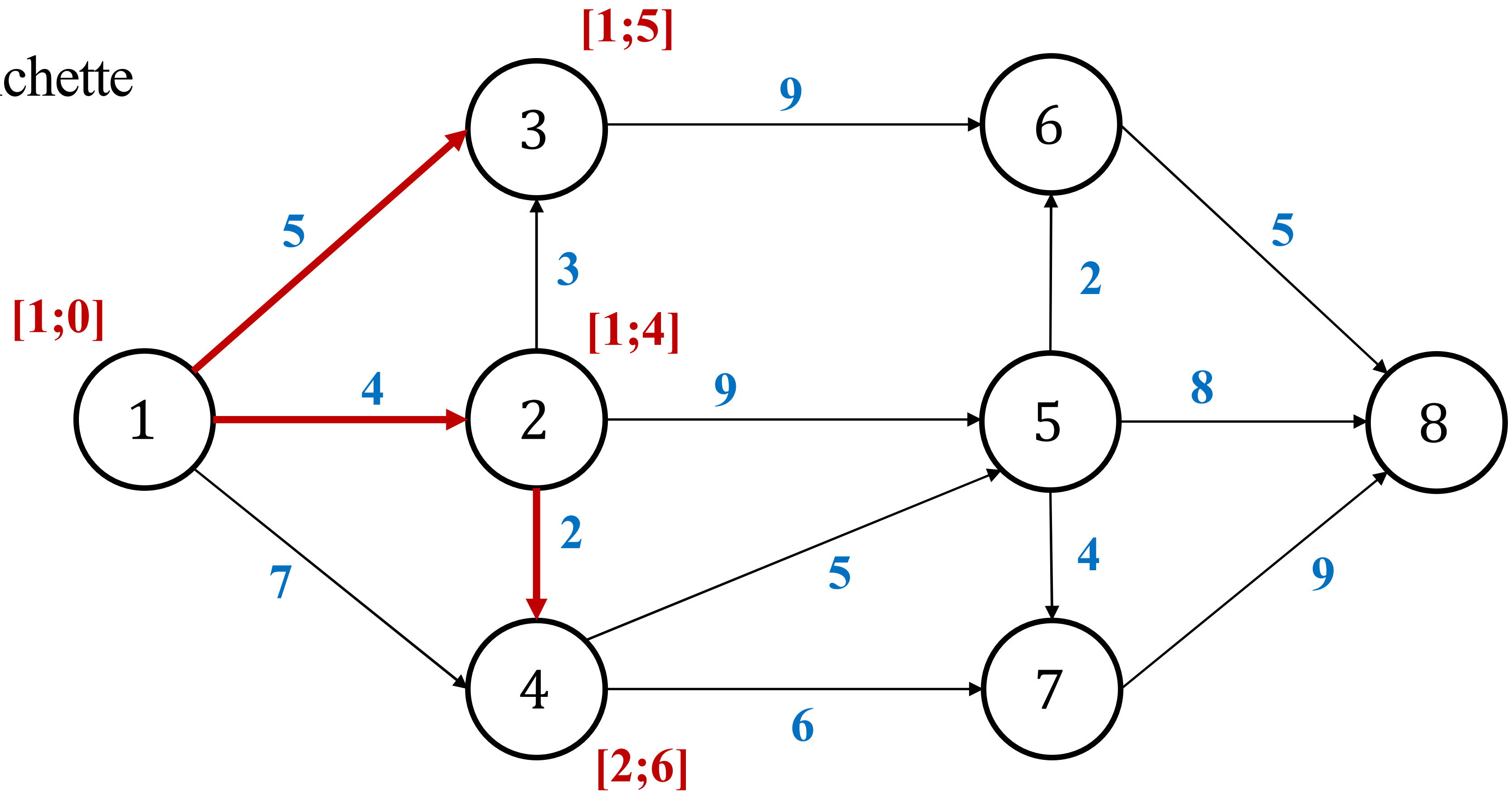
Esercizio B

Etichette



Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
4	(1,4) (2,4)	7 4+2=6		

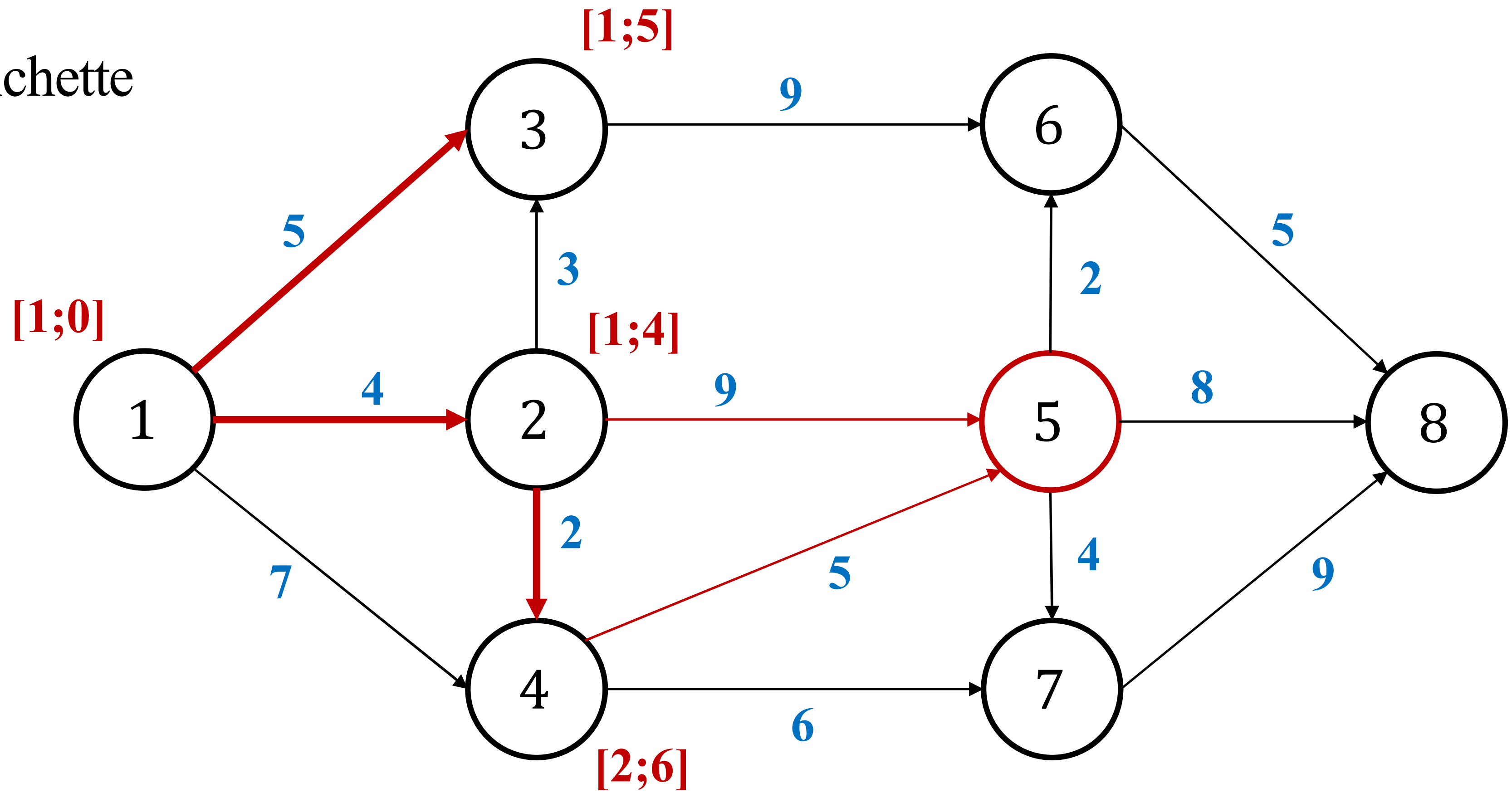
Etichette



Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
4	(1,4) (2,4)	7 4+2=6	[2;6]	(1,2)–(2,4)

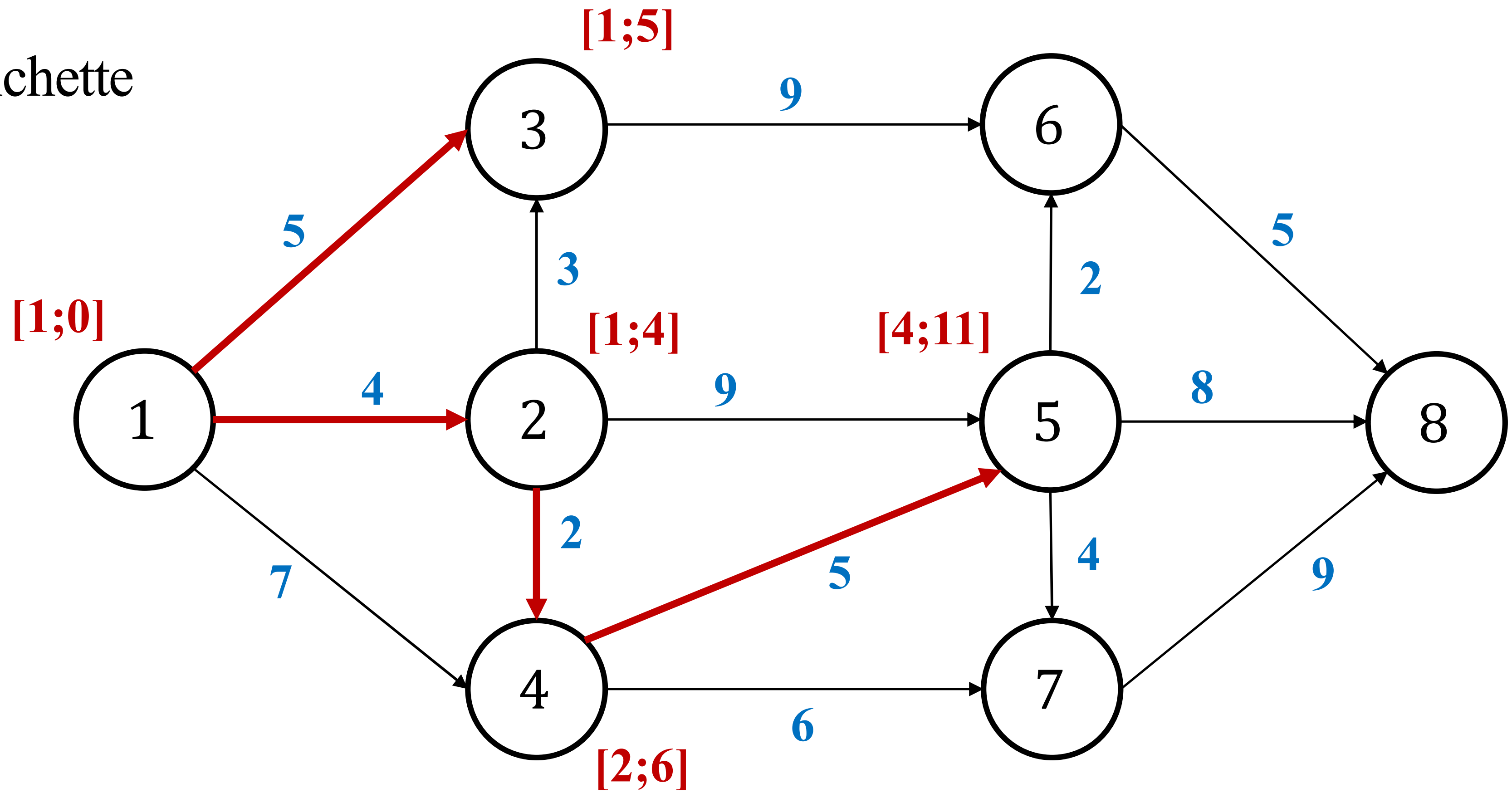
Esercizio B

Etichette



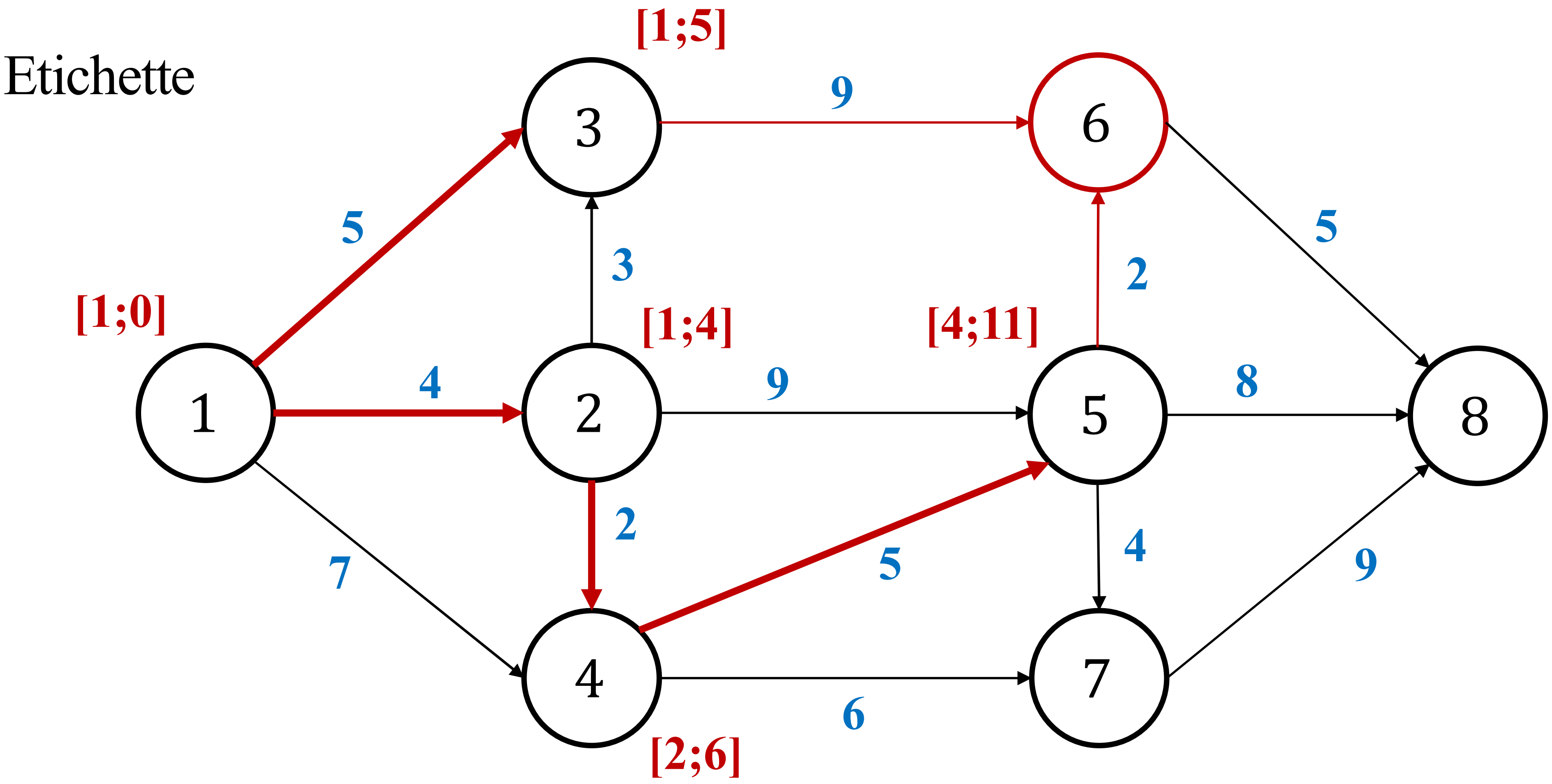
Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
5	(2,5) (4,5)	4+9=13 6+5=11		

Etichette

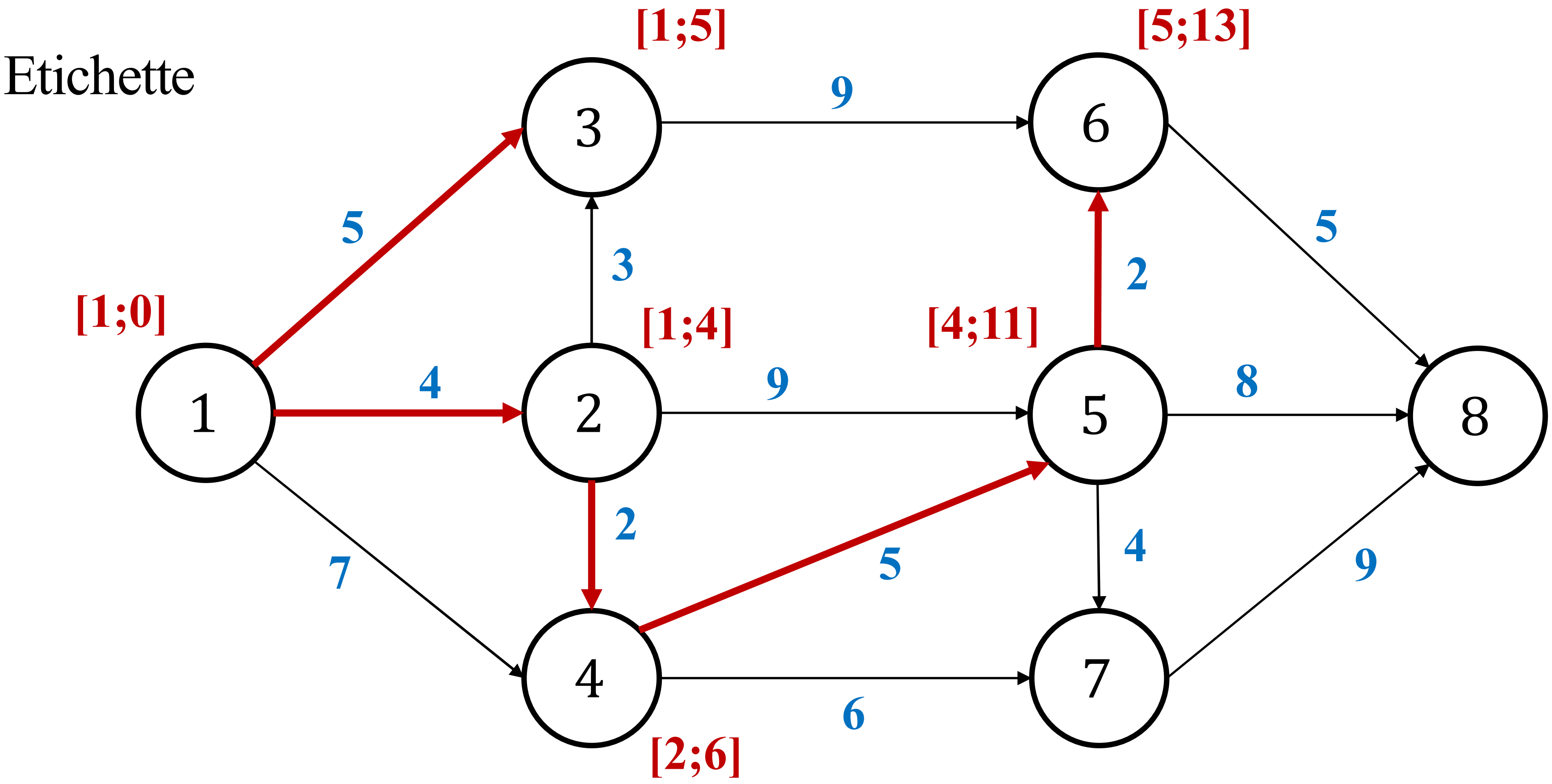


Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
5	(2,5) (4,5)	4+9=13 6+5=11	[4;11]	(1,2)–(2,4)–(4,5)

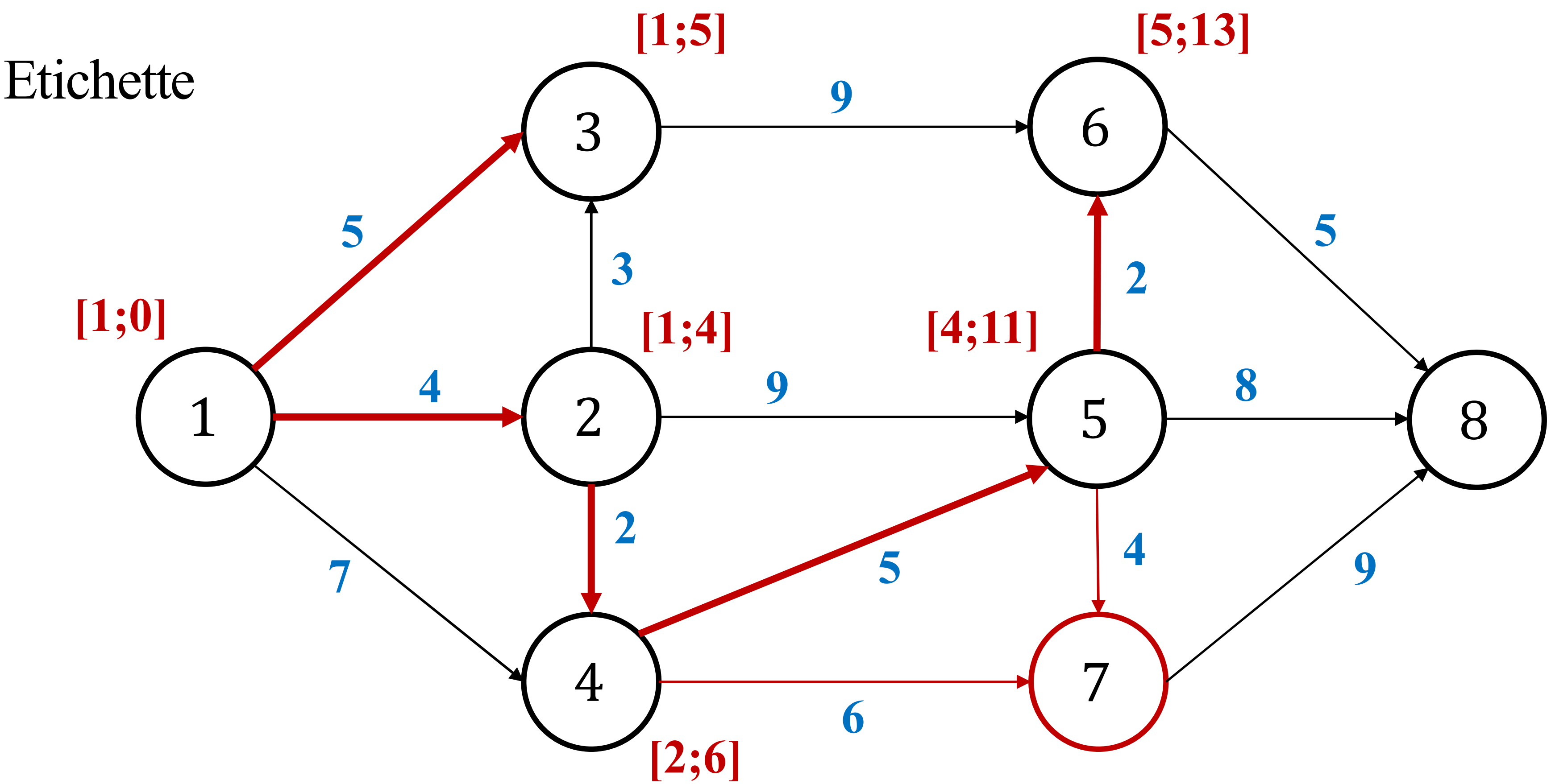
Esercizio B



Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
6	(3,6) (5,6)	5+9=14 11+2=13		

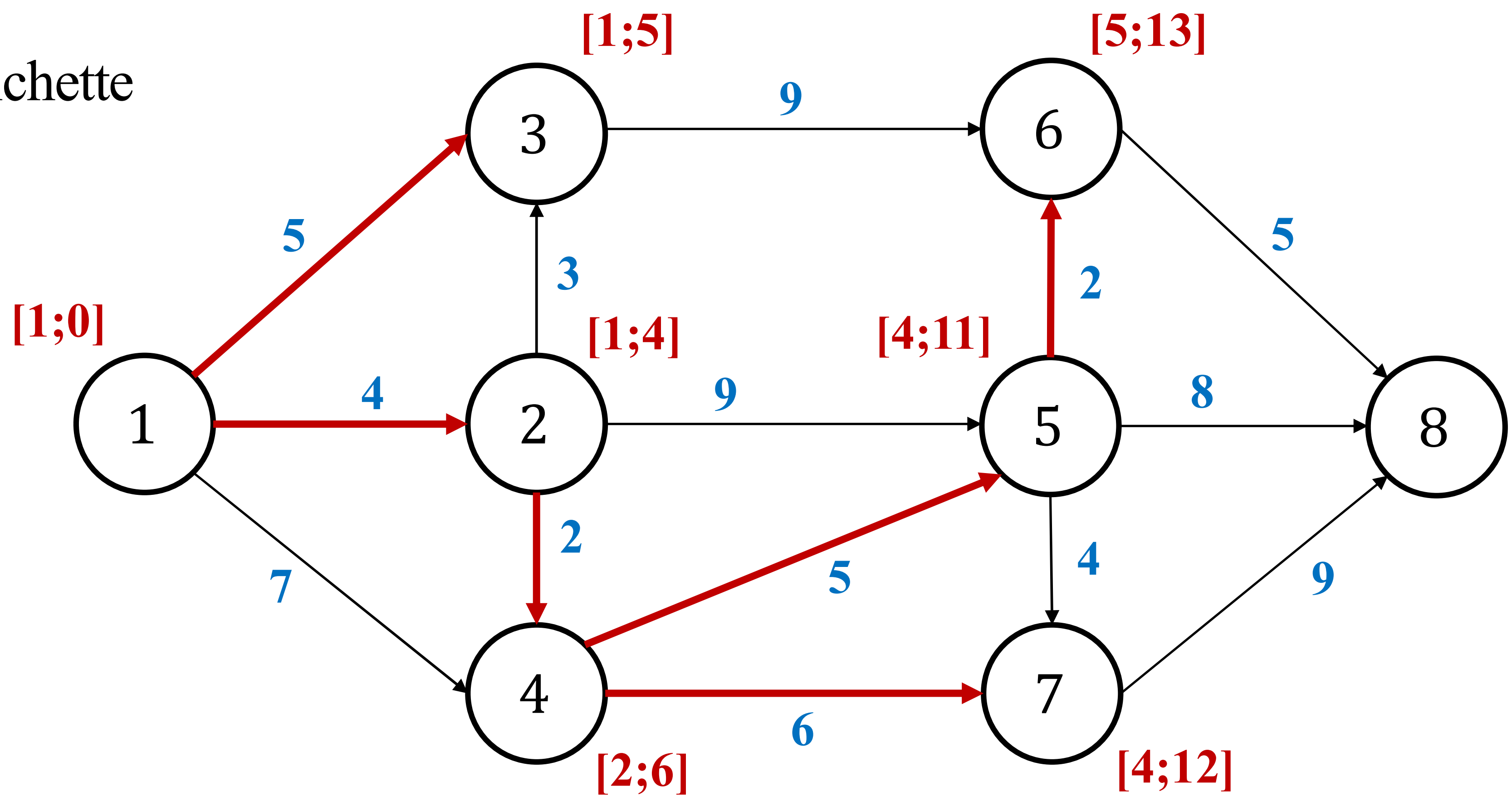


Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
6	(3,6) (5,6)	5+9=14 11+2=13	[5;13]	(1,2)–(2,4)–(4,5)–(5,6)



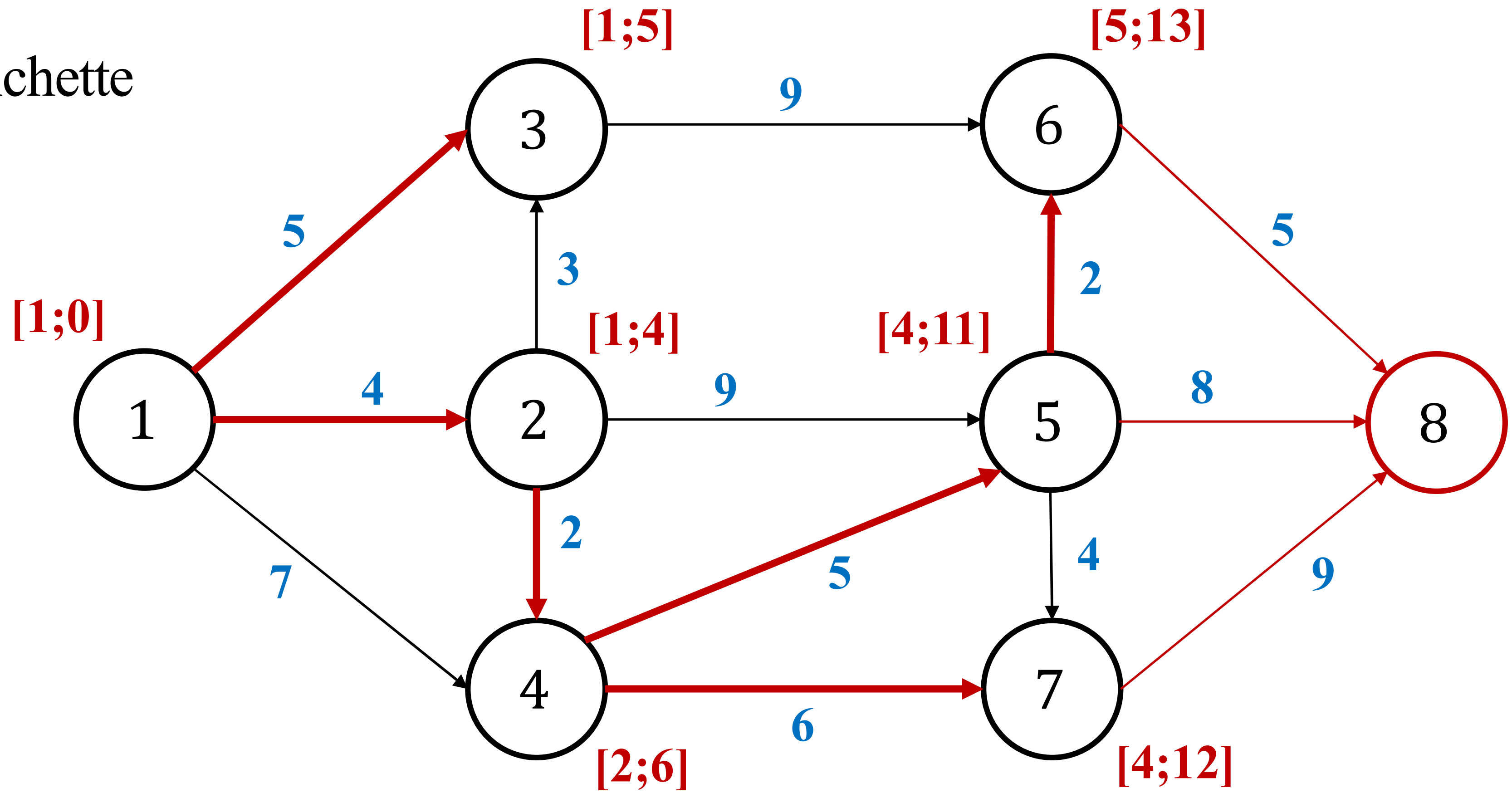
Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
7	(4,7) (5,7)	6+6=12 11+4=15		

Etichette



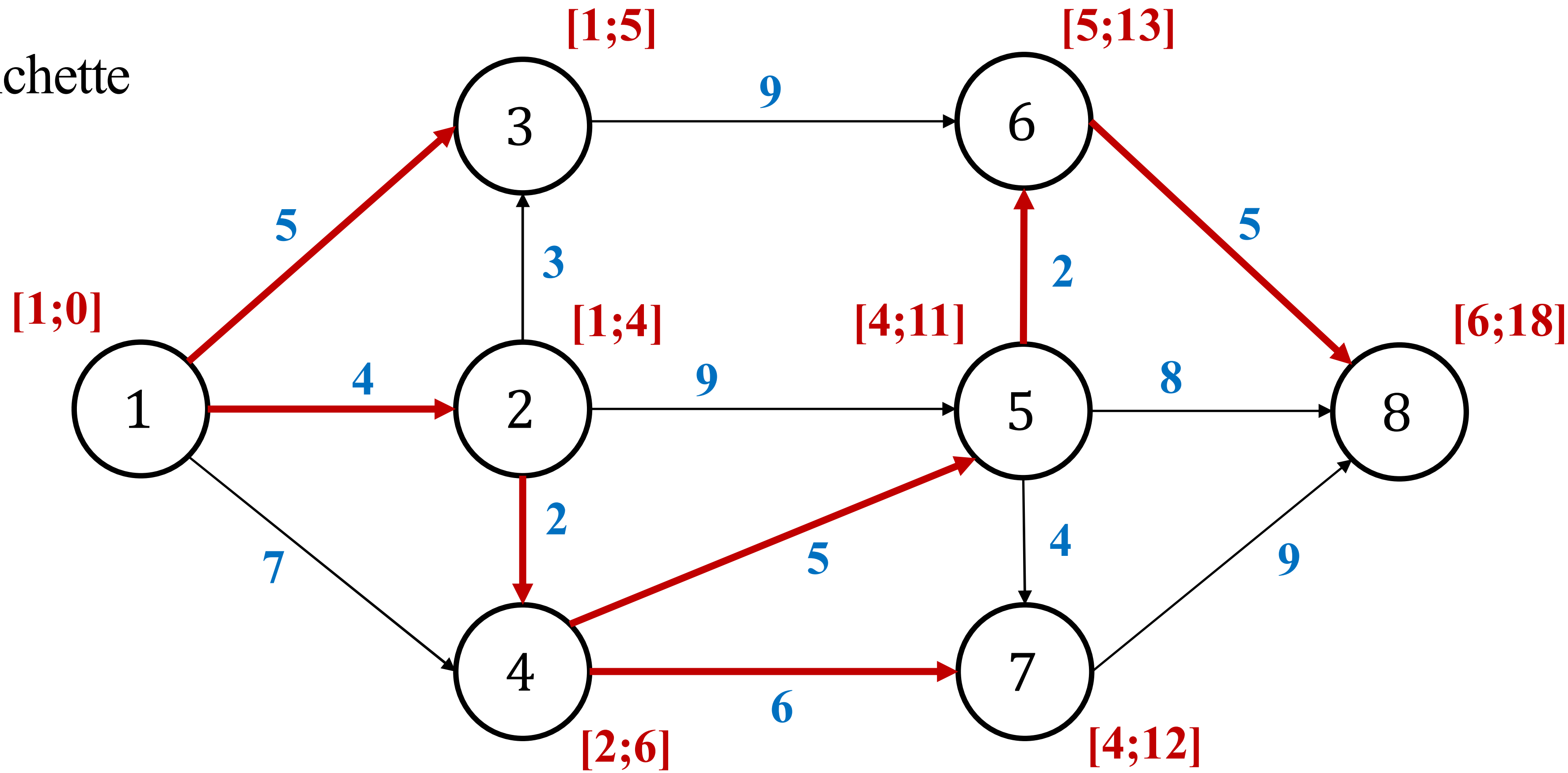
Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
7	(4,7) (5,7)	6+6=12 11+4=15	[4;12]	(1,2)–(2,4)–(4,7)

Etichette



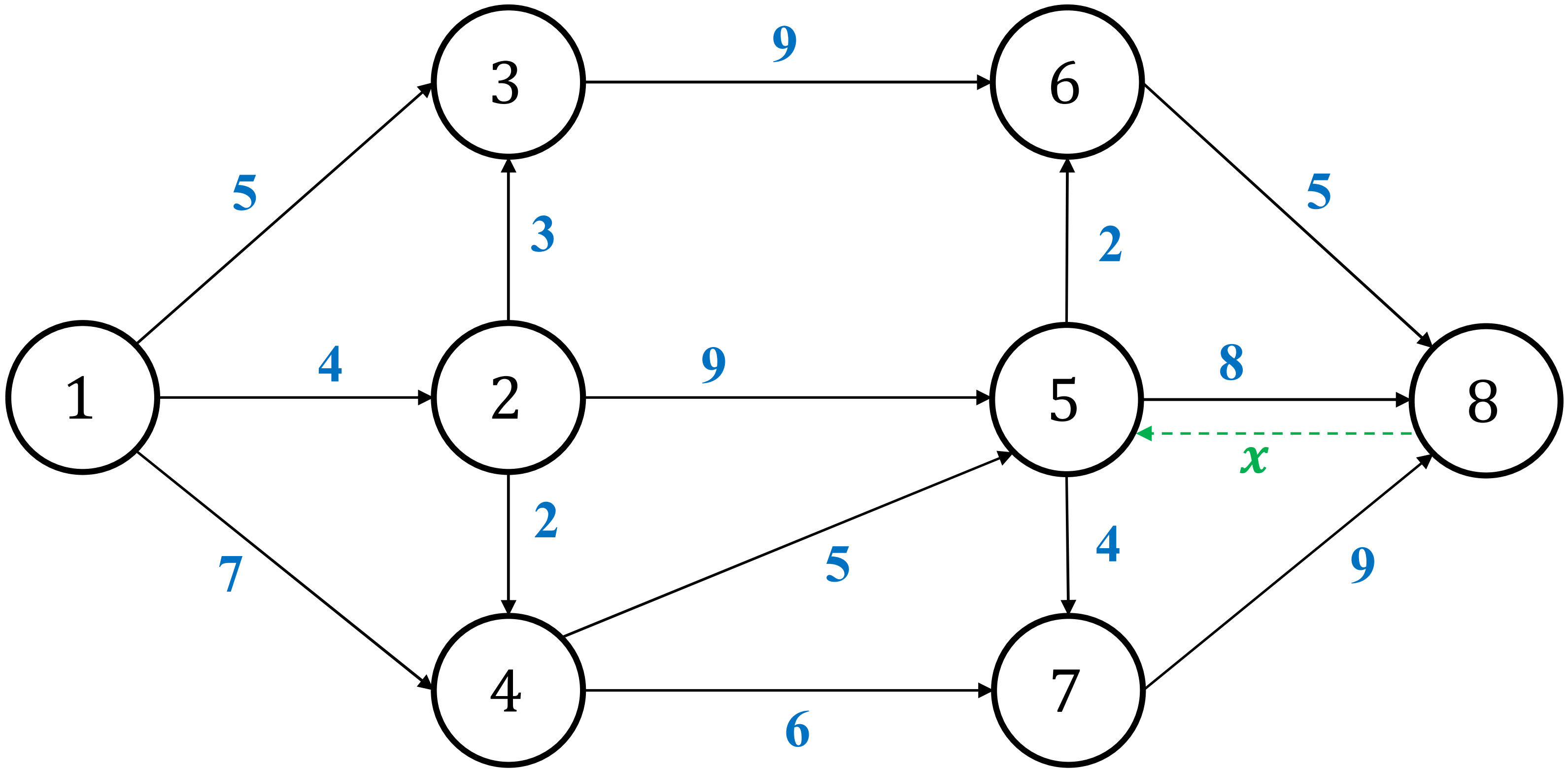
Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
8	(5,8) (6,8) (7,8)	11+8=19 13+5=18 12+9=21		

Etichette



Nodo	Archi	Peso	Etichetta	Cammino Minimo
8	(5,8) (6,8) (7,8)	11+8=19 13+5=18 12+9=21	[6;18]	(1,2)–(2,4)–(4,5)–(5,6)–(6,8)

Aggiunta del nuovo arco



Aggiunta del nuovo arco

- L'aggiunta del nuovo arco rende il grafo ciclico (5-6-8 e 5-7-8).

Aggiunta del nuovo arco

- L'aggiunta del nuovo arco rende il grafo ciclico (5-6-8 e 5-7-8).
- Perché esista una soluzione i cicli non devono essere di costo negativo
  - ✓ $x + 2 + 5 \geq 0 \rightarrow x \geq -7$
  - ✓ $x + 4 + 9 \geq 0 \rightarrow x \geq -13$

Aggiunta del nuovo arco

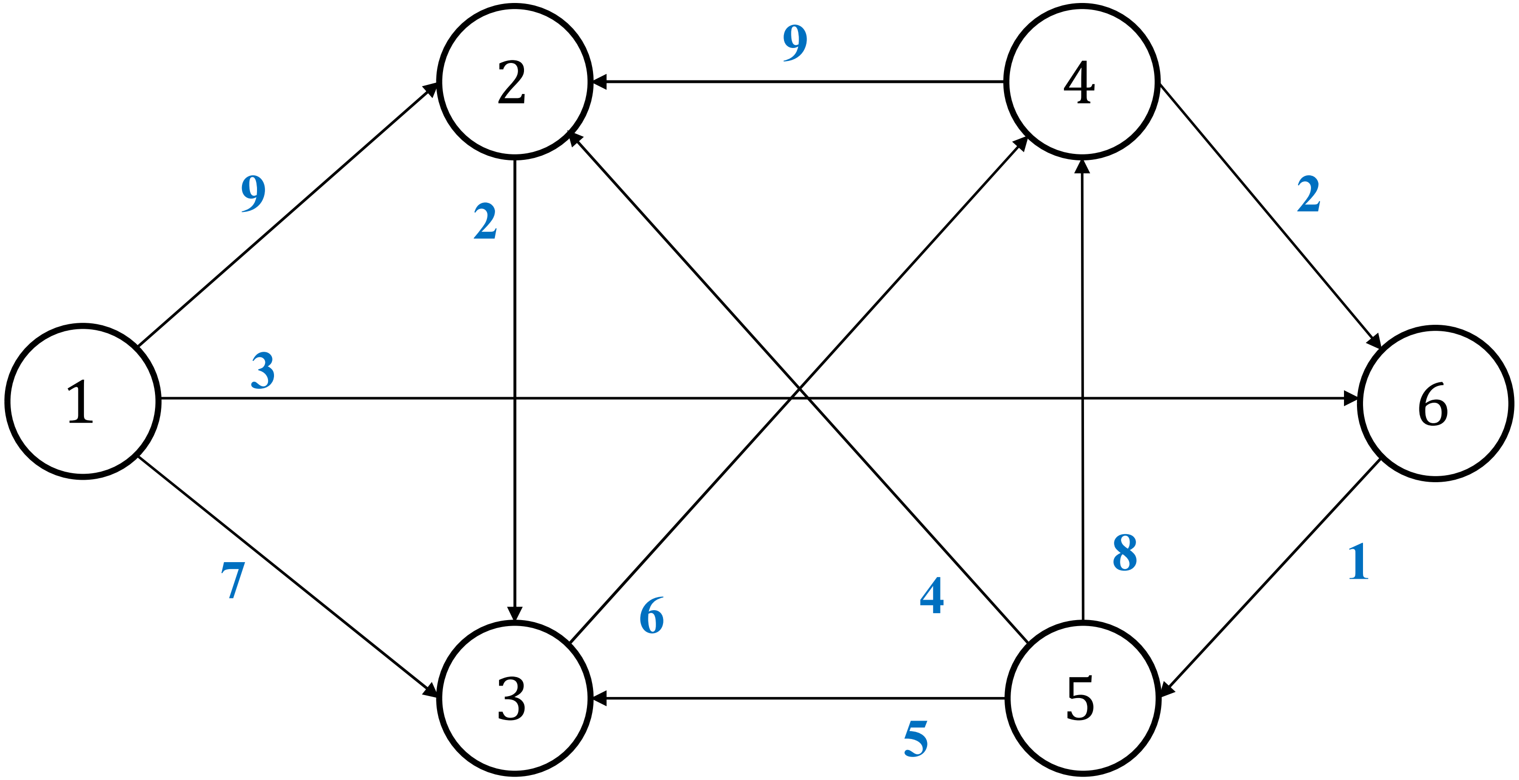
- L'aggiunta del nuovo arco rende il grafo ciclico (5-6-8 e 5-7-8).

- Perché esista una soluzione i cicli non devono essere di costo negativo
  - ✓ $x + 2 + 5 \geq 0 \rightarrow x \geq -7$
  - ✓ $x + 4 + 9 \geq 0 \rightarrow x \geq -13$

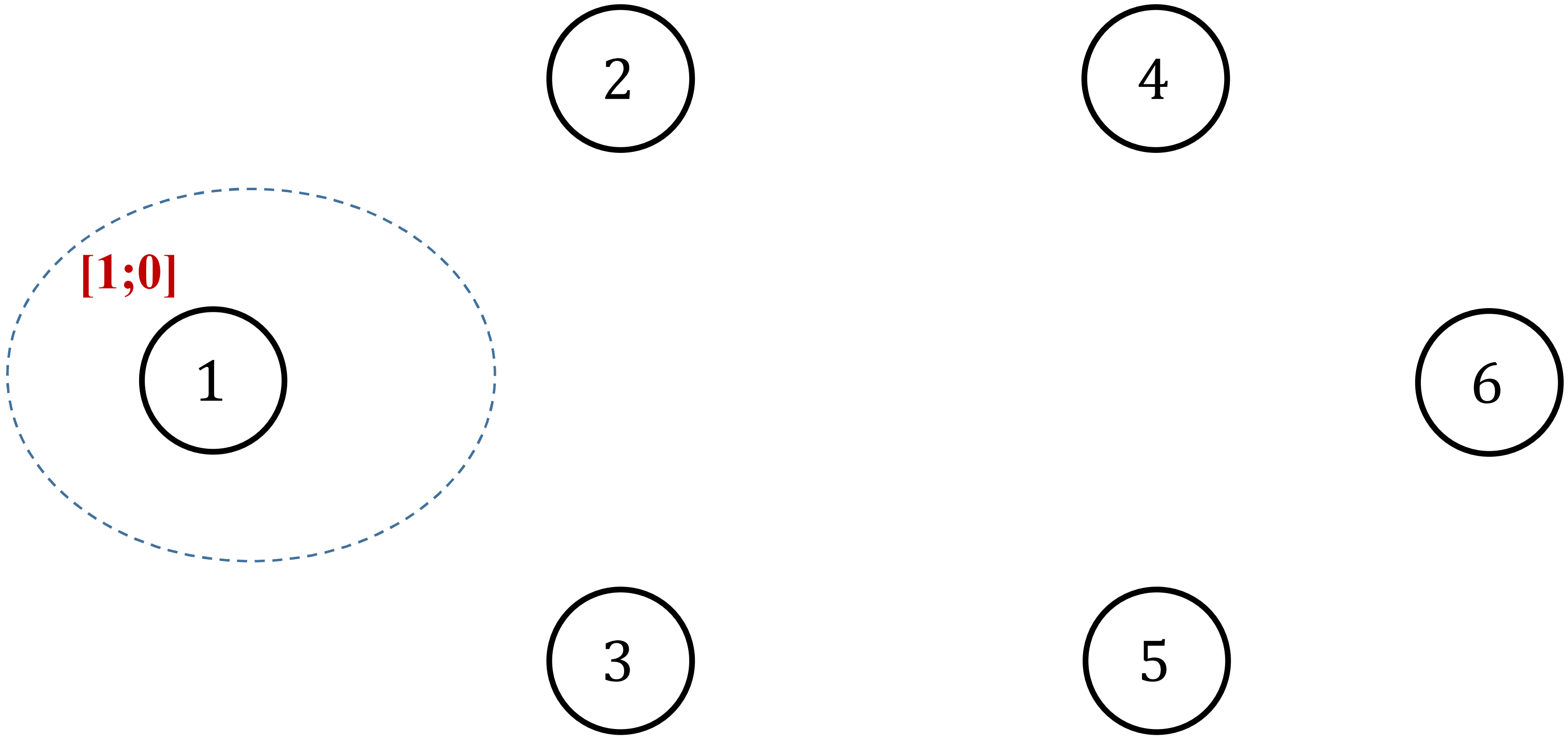
- Algoritmi applicabili
  - ✓ Floyd-Warshall sempre applicabile (restituisce una soluzione per $x \geq -7$)
  - ✓ Dijkstra applicabile per $x \geq 0$
  - ✓ Etichette applicabile per $x \rightarrow \infty$

Esercizio C

Grafo Iniziale

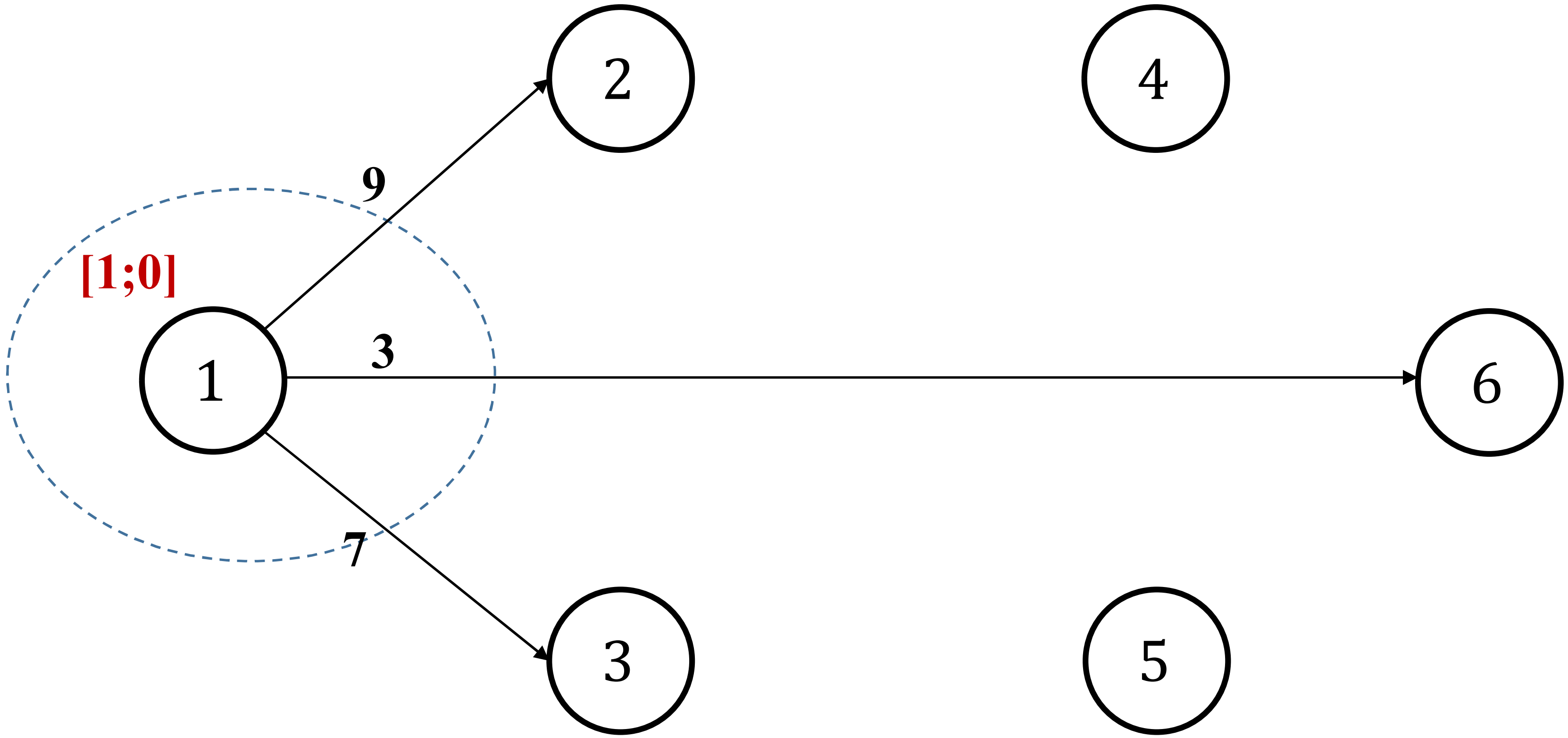


Inizializzazione $S = \{1\}$ $T = \{2,3,4,5,6\}$



Archi di taglio

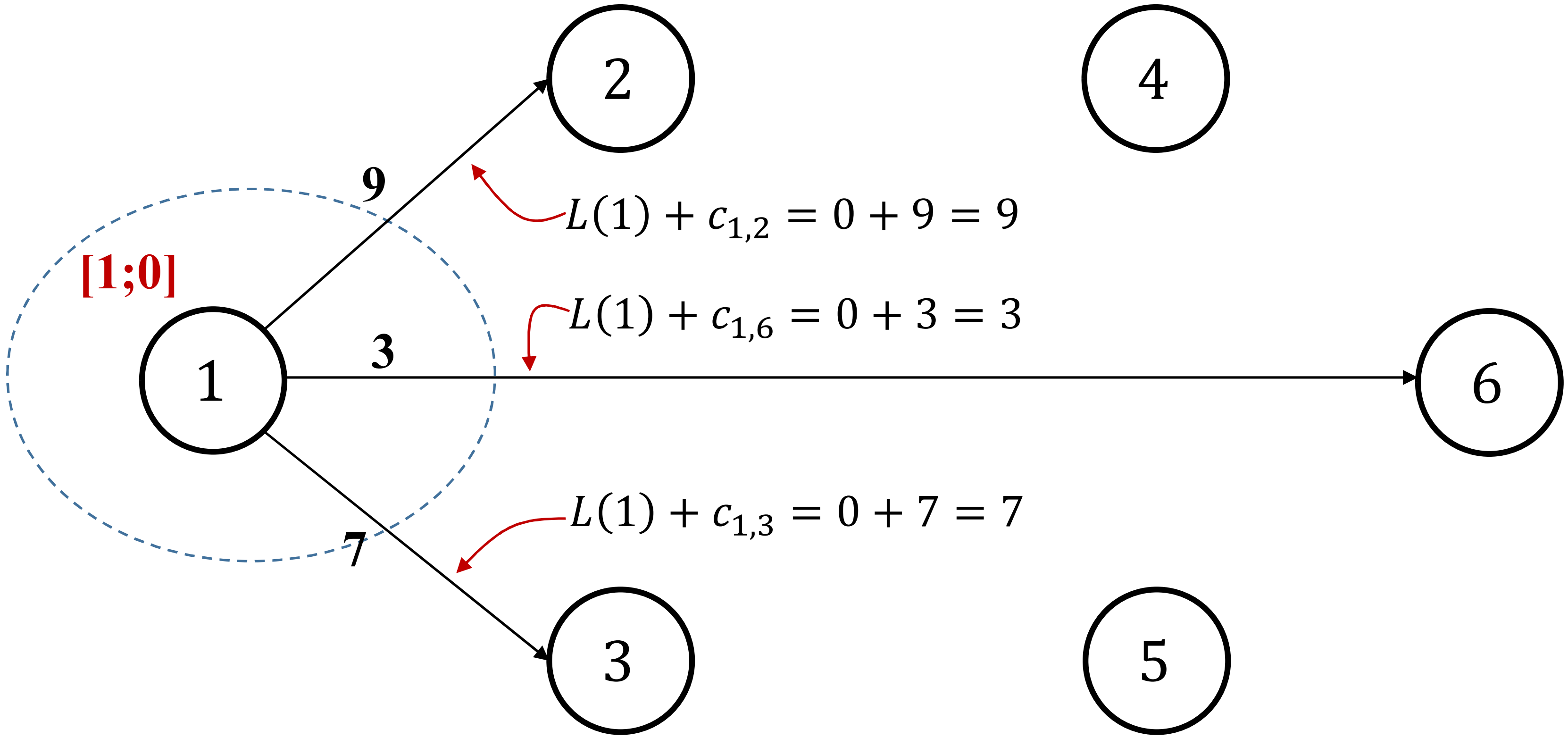
$S = \{1\}$ $T = \{2,3,4,5,6\}$



$$\delta^+(S,T) = \{(1,2), (1,3), (1,6)\}$$

Calcolo dei pesi

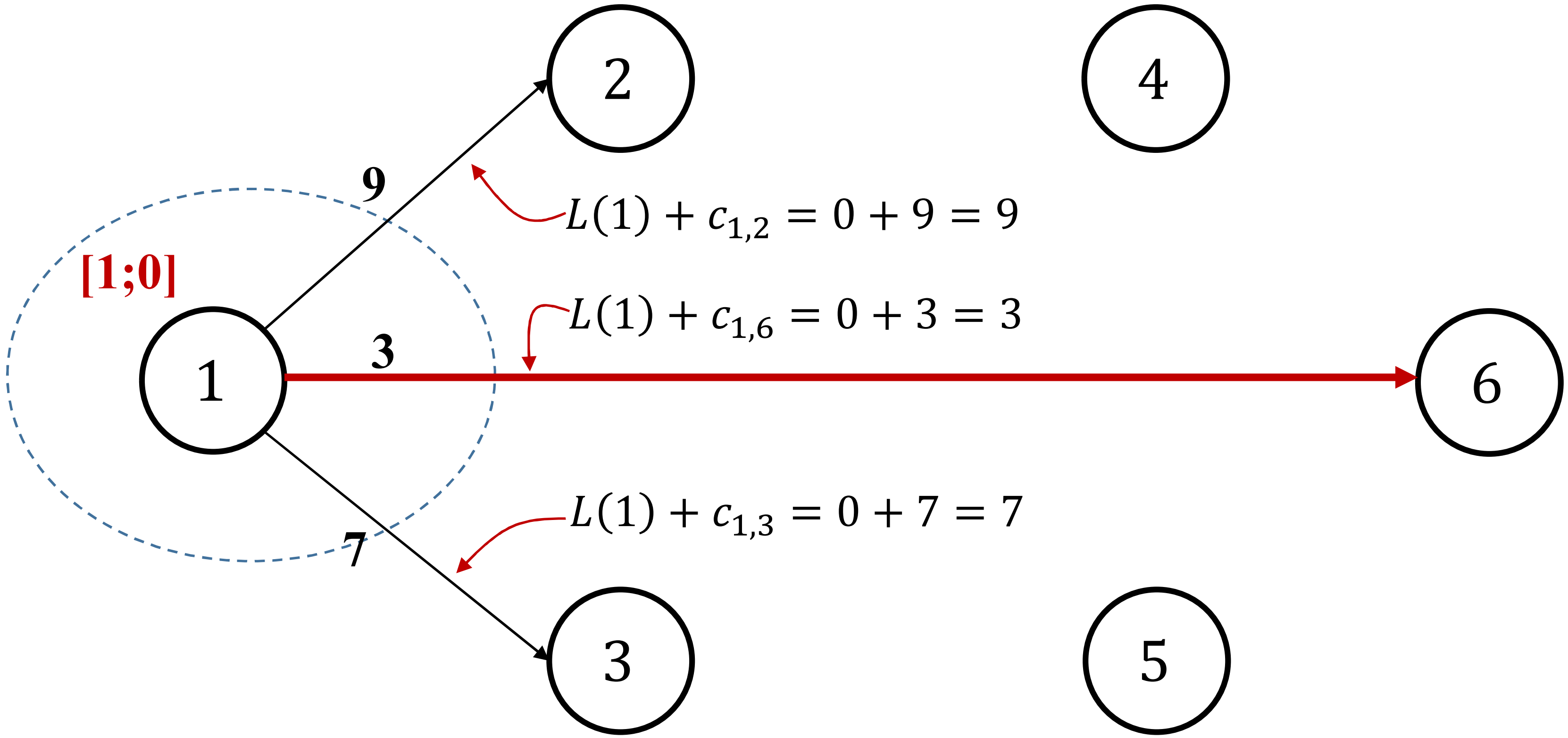
$S = \{1\} \qquad T = \{2,3,4,5,6\}$



$\delta^+(S,T) = \{(1,2),(1,3),(1,6)\}$

Calcolo dei pesi

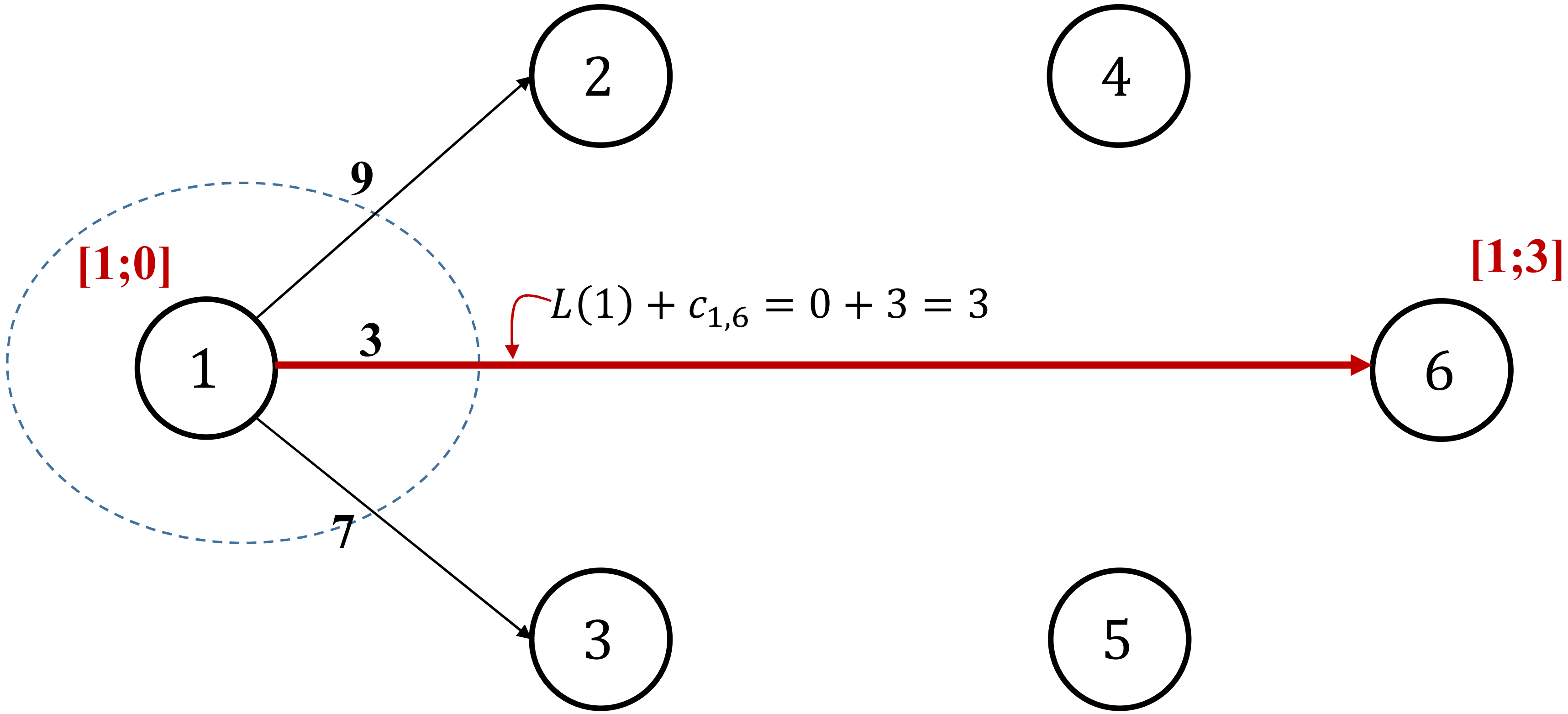
$S = \{1\}$ $\quad T = \{2,3,4,5,6\}$



$(v, t) = (1,6)$

Etichetta definitiva

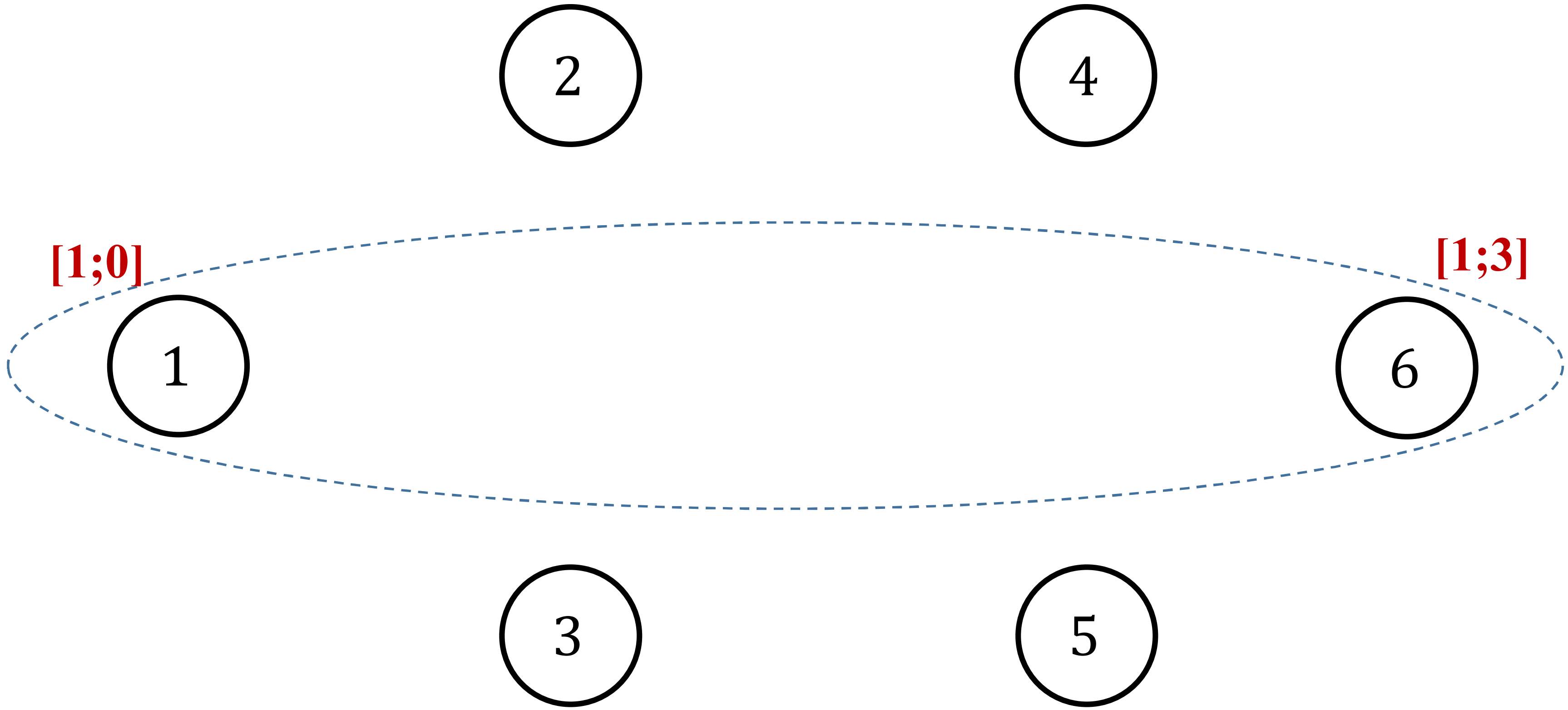
$S = \{1\} \qquad T = \{2,3,4,5,6\}$



$(v, t) = (1,6)$

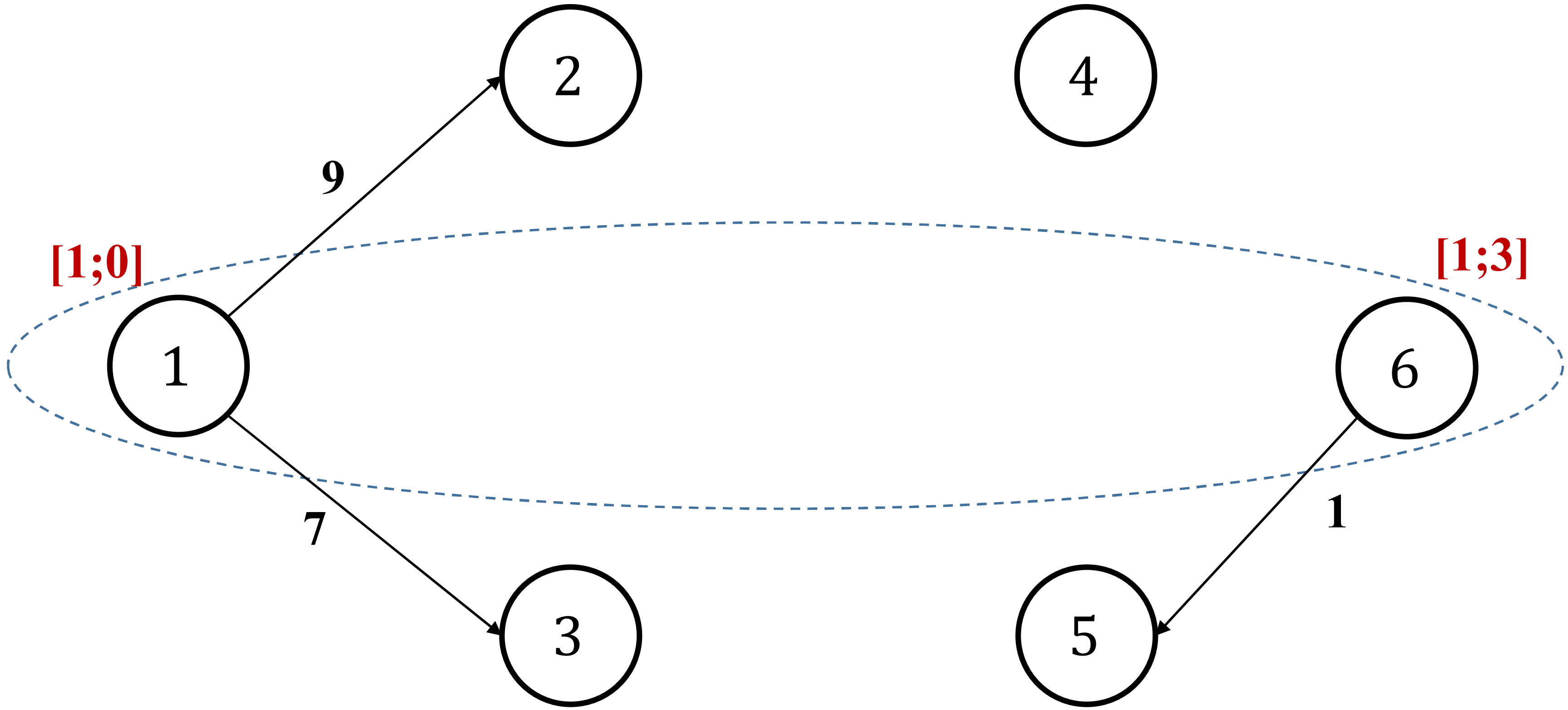
Esercizio C

Aggiornamento insiemi $S = \{1,6\}$ $T = \{2,3,4,5\}$



Archi di taglio

$S = \{1,6\}$ $T = \{2,3,4,5\}$

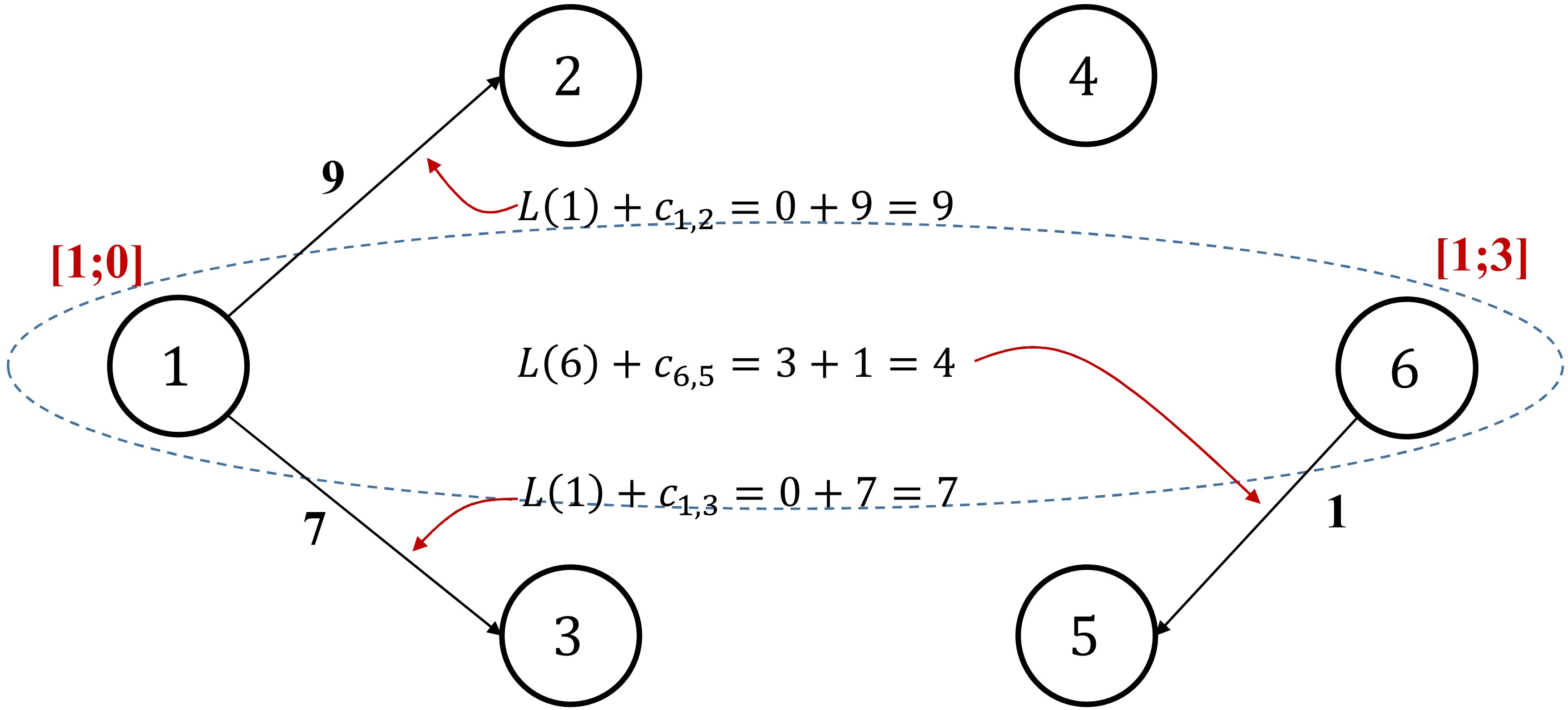


$$\delta^+(S,T) = \{(1,2),(1,3),(6,5)\}$$

Esercizio C

Calcolo dei pesi

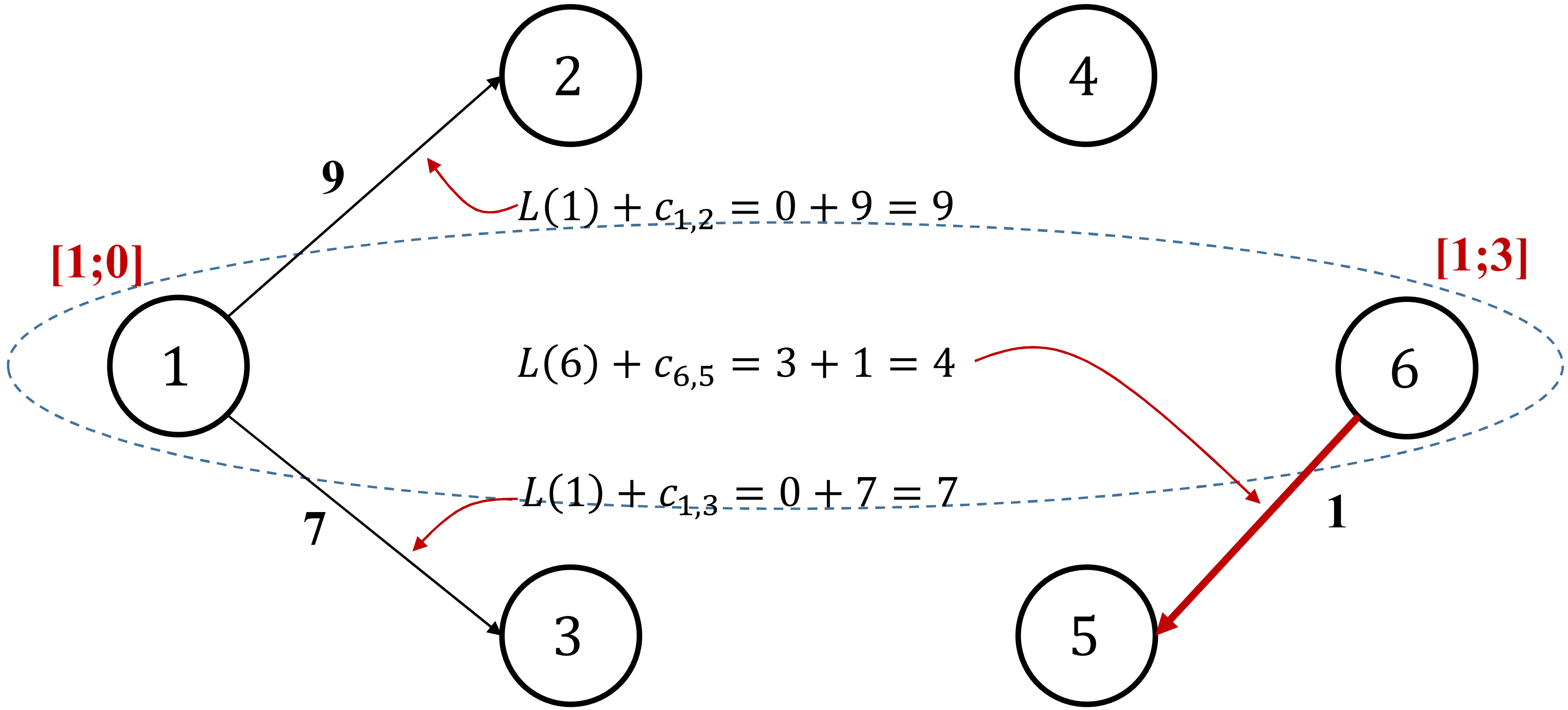
$S = \{1,6\} \qquad T = \{2,3,4,5\}$



$\delta^+(S,T) = \{(1,2),(1,3),(6,5)\}$

Calcolo dei pesi

$S = \{1,6\}$ $T = \{2,3,4,5\}$

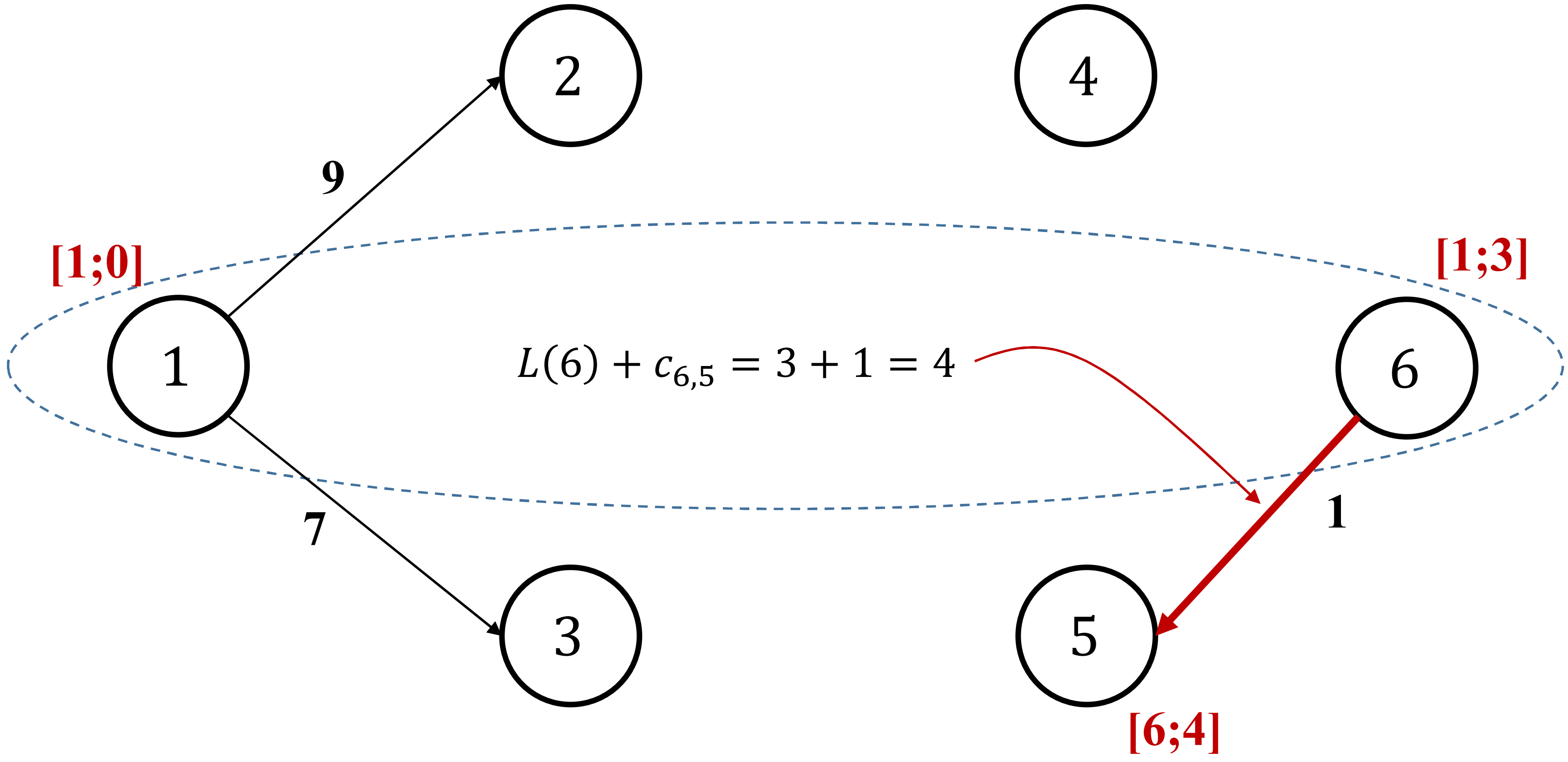


$(v, t) = (6,5)$

Esercizio C

Etichetta definitiva

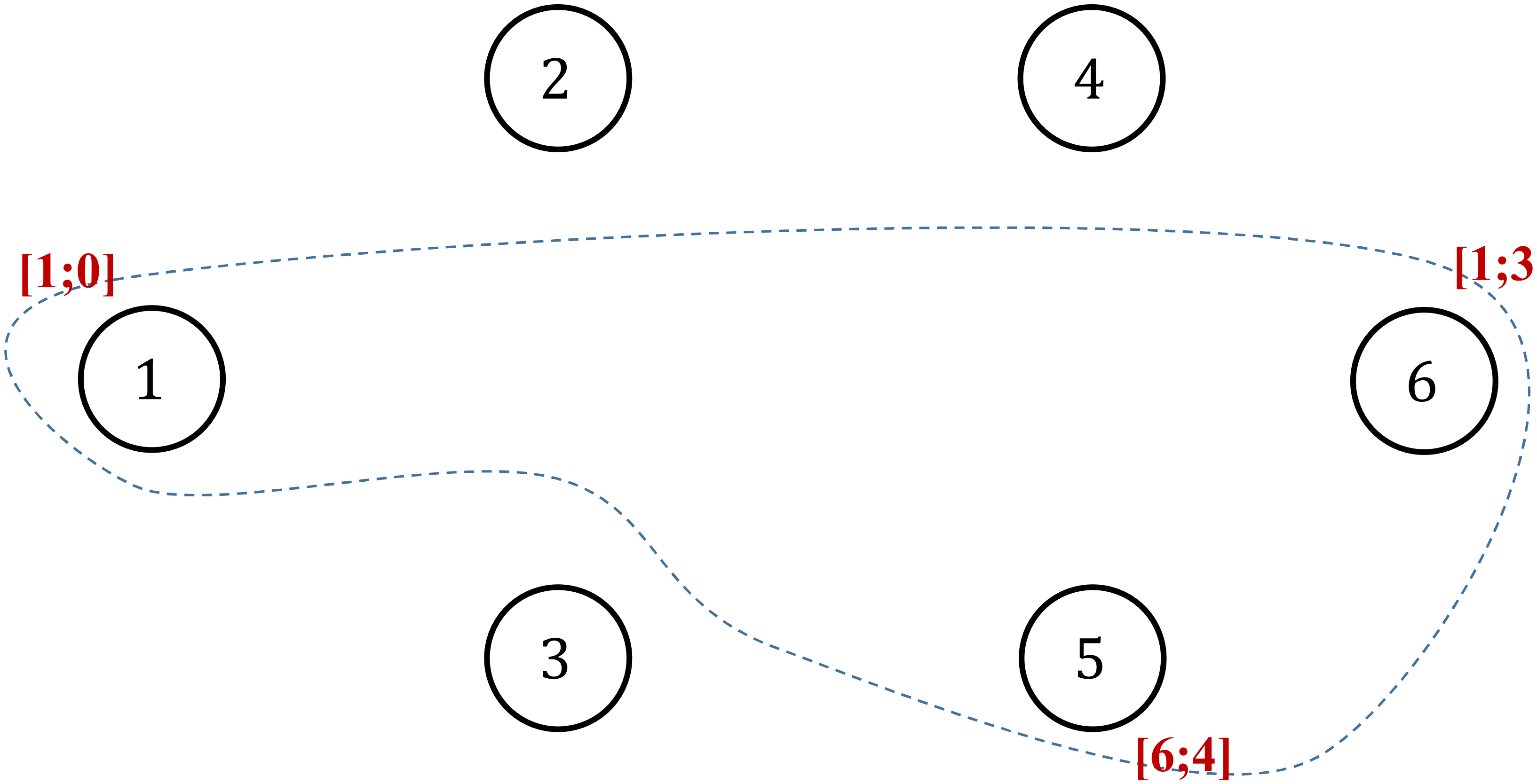
$S = \{1,6\} \qquad T = \{2,3,4,5\}$



$(v,t) = (6,5)$

Esercizio C

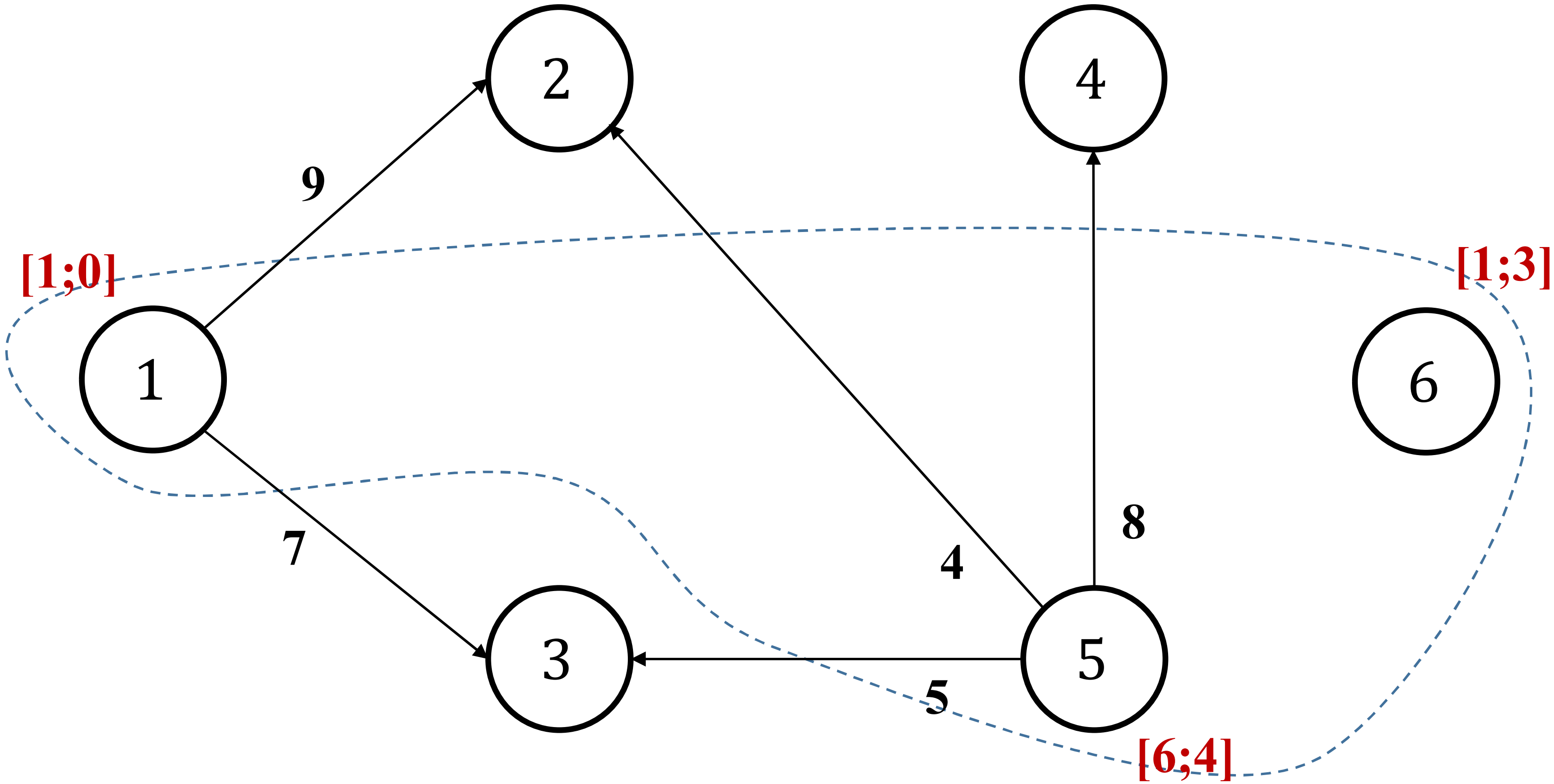
Aggiornamento insiemi $S = \{1,6,5\}$ $T = \{2,3,4\}$



Esercizio C

Archi di taglio

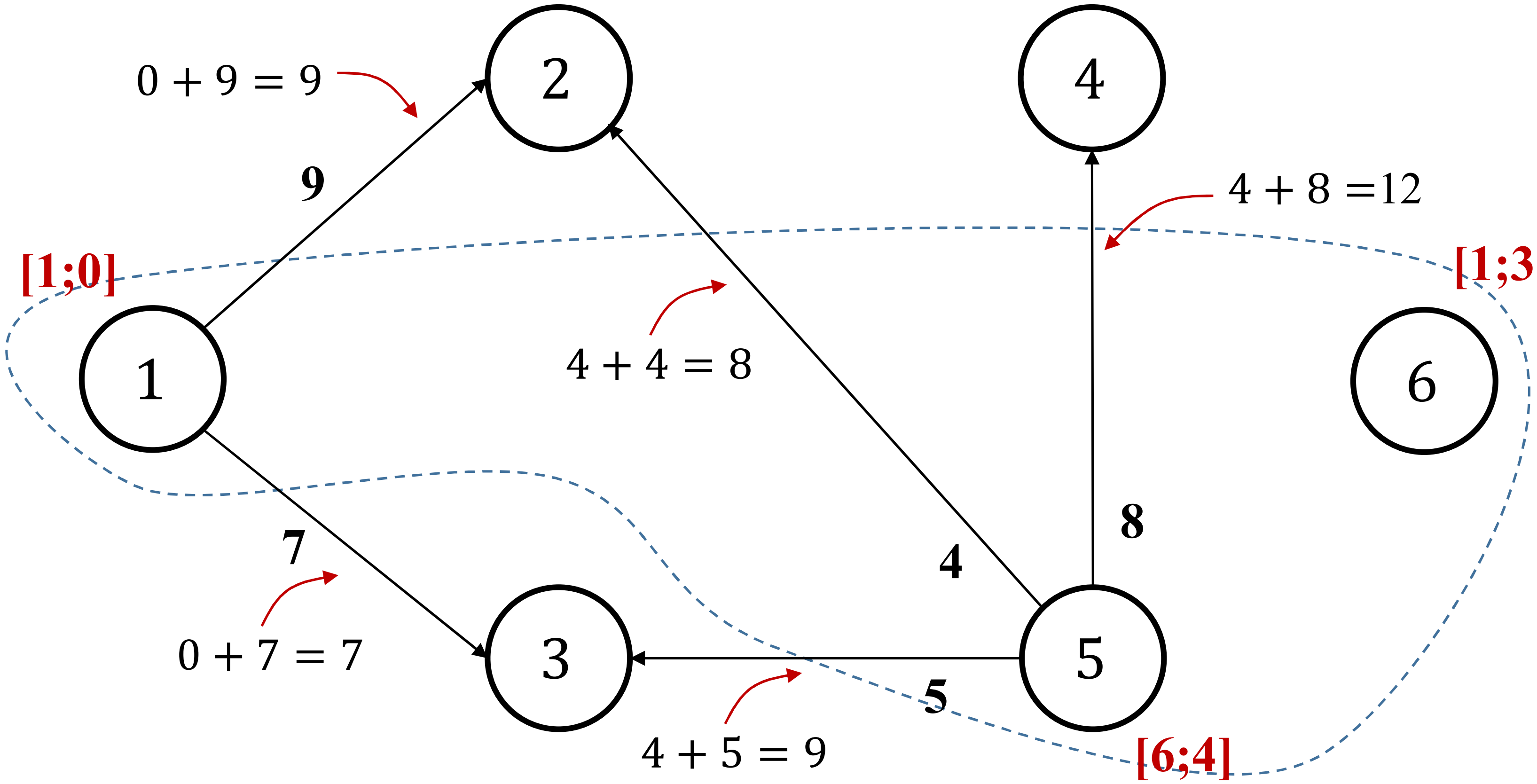
$S = \{1,6,5\}$ $T = \{2,3,4\}$



$$\delta^+(S,T) = \{(1,2), (1,3), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

Calcolo dei pesi

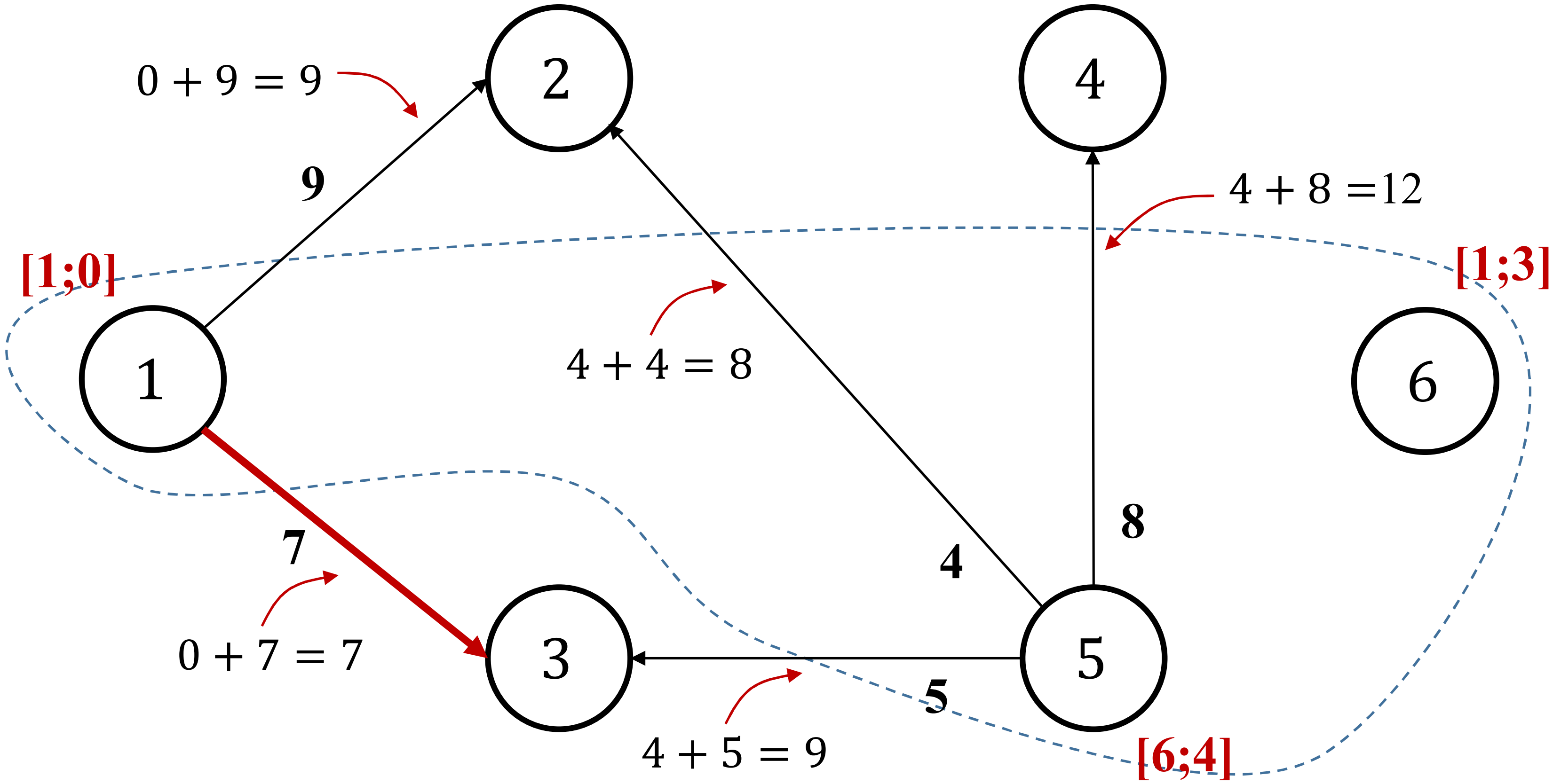
$S = \{1,6,5\}$ $\quad$ $T = \{2,3,4\}$



$$\delta^+(S,T) = \{(1,2),(1,3),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

Calcolo dei pesi

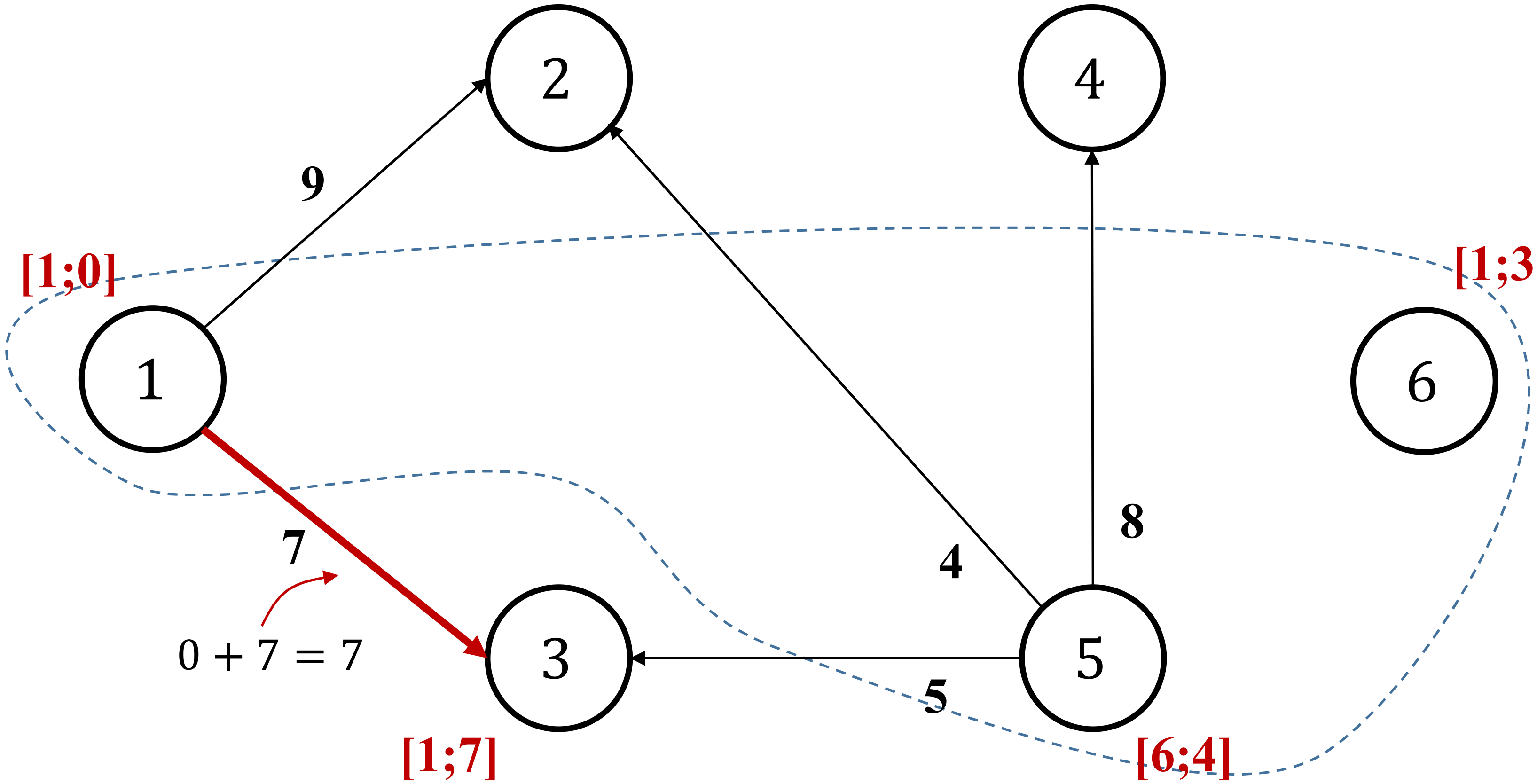
$S = \{1,6,5\}$ $T = \{2,3,4\}$



$(v, t) = (1,3)$

Etichetta definitiva

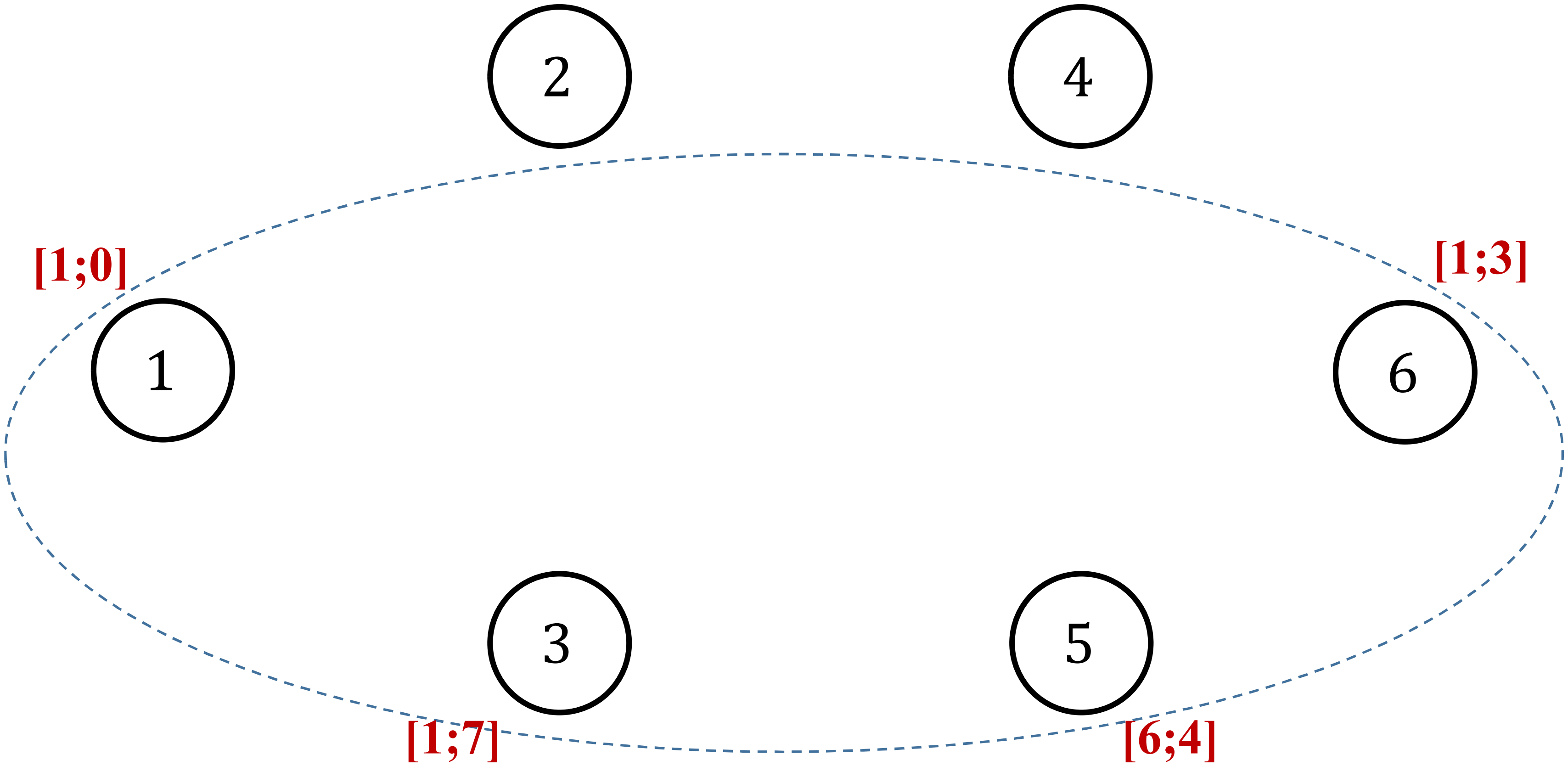
$S = \{1,6,5\}$ $T = \{2,3,4\}$



$(v,t) = (1,3)$

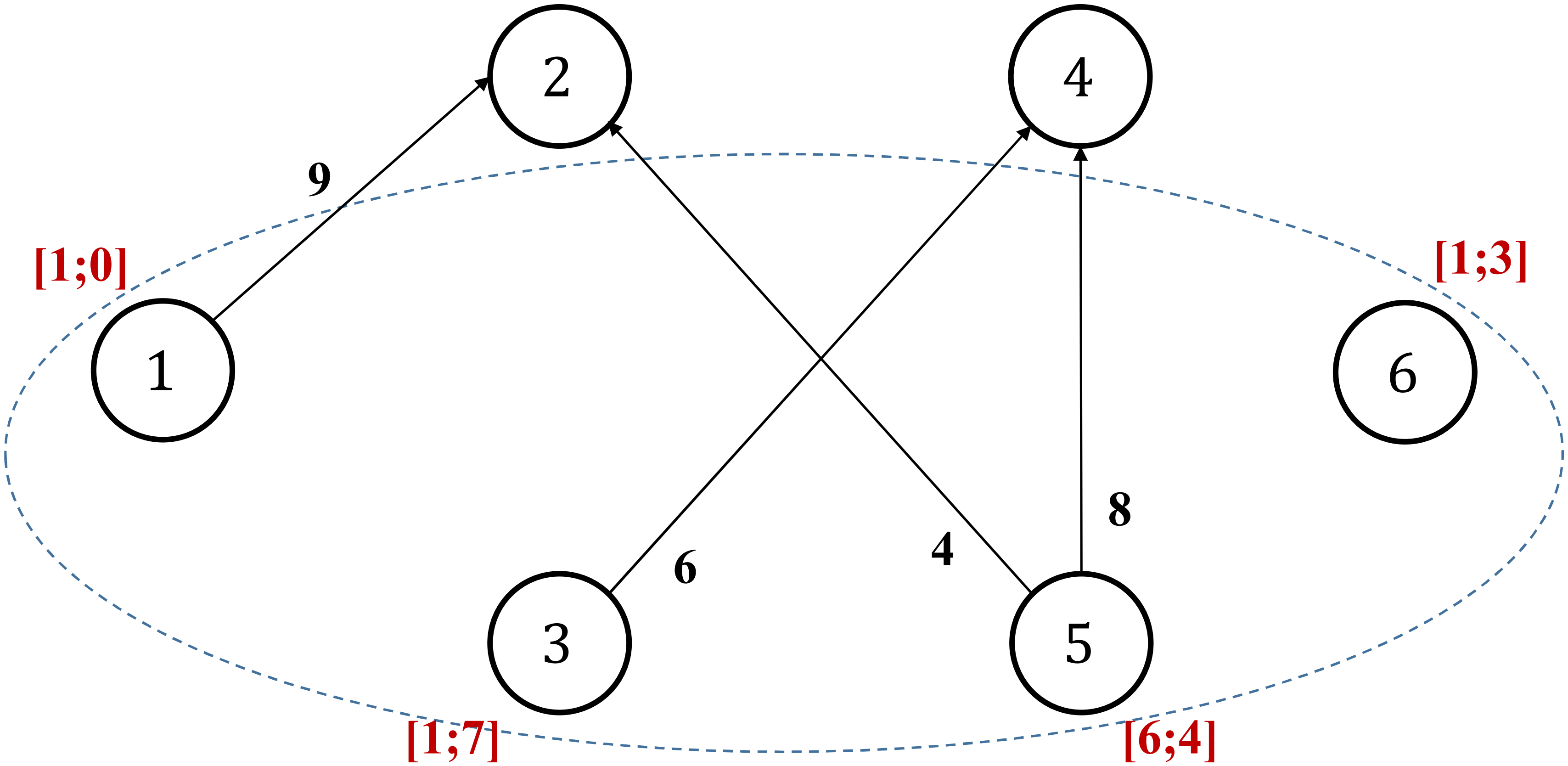
Esercizio C

Aggiornamento insiemi $S = \{1,6,5,3\}$ $T = \{2,4\}$



Archi di taglio

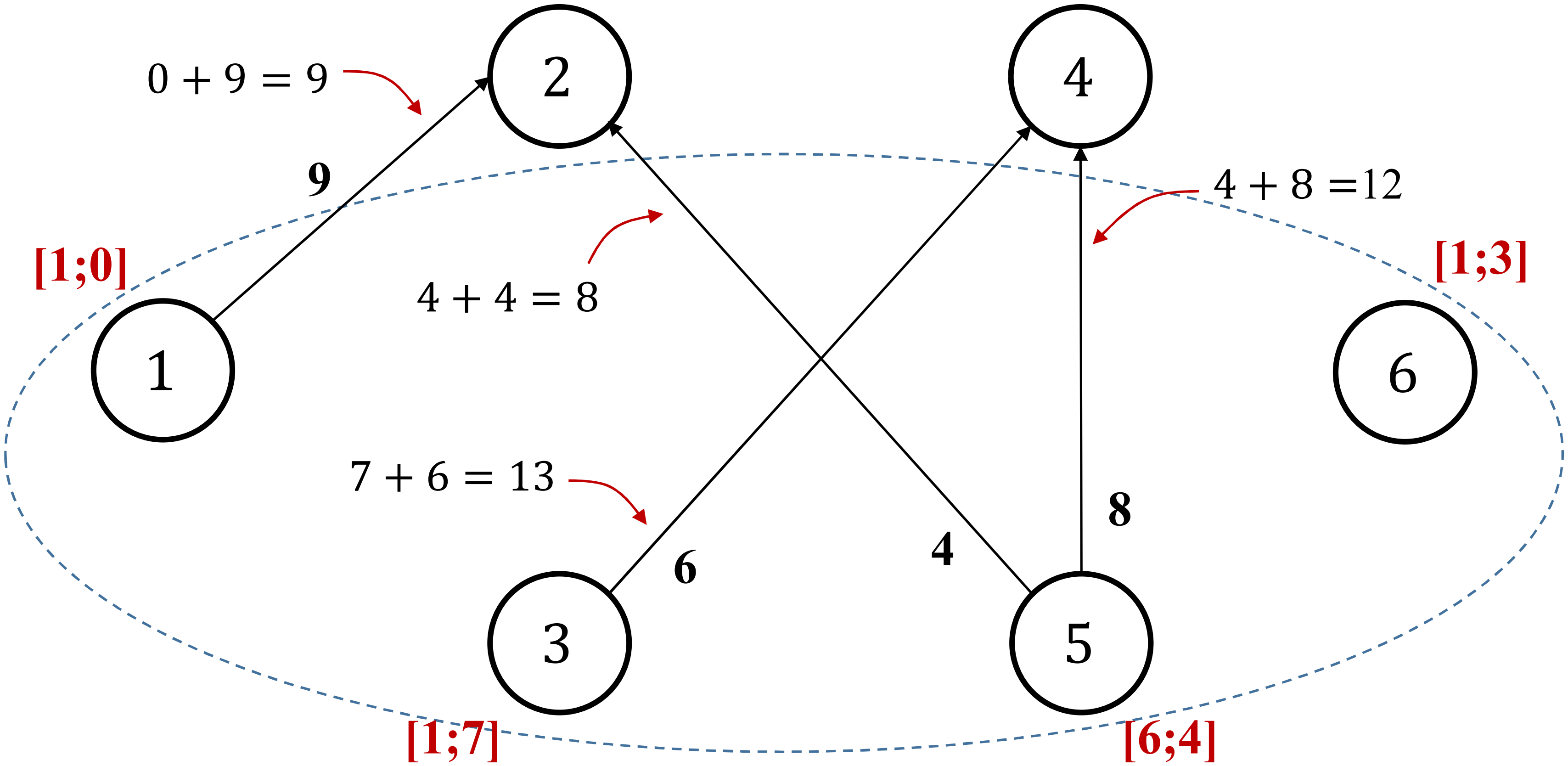
$S = \{1,6,5,3\} \qquad T = \{2,4\}$



$\delta^{+}(S,T) = \{(1,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$

Calcolo dei pesi

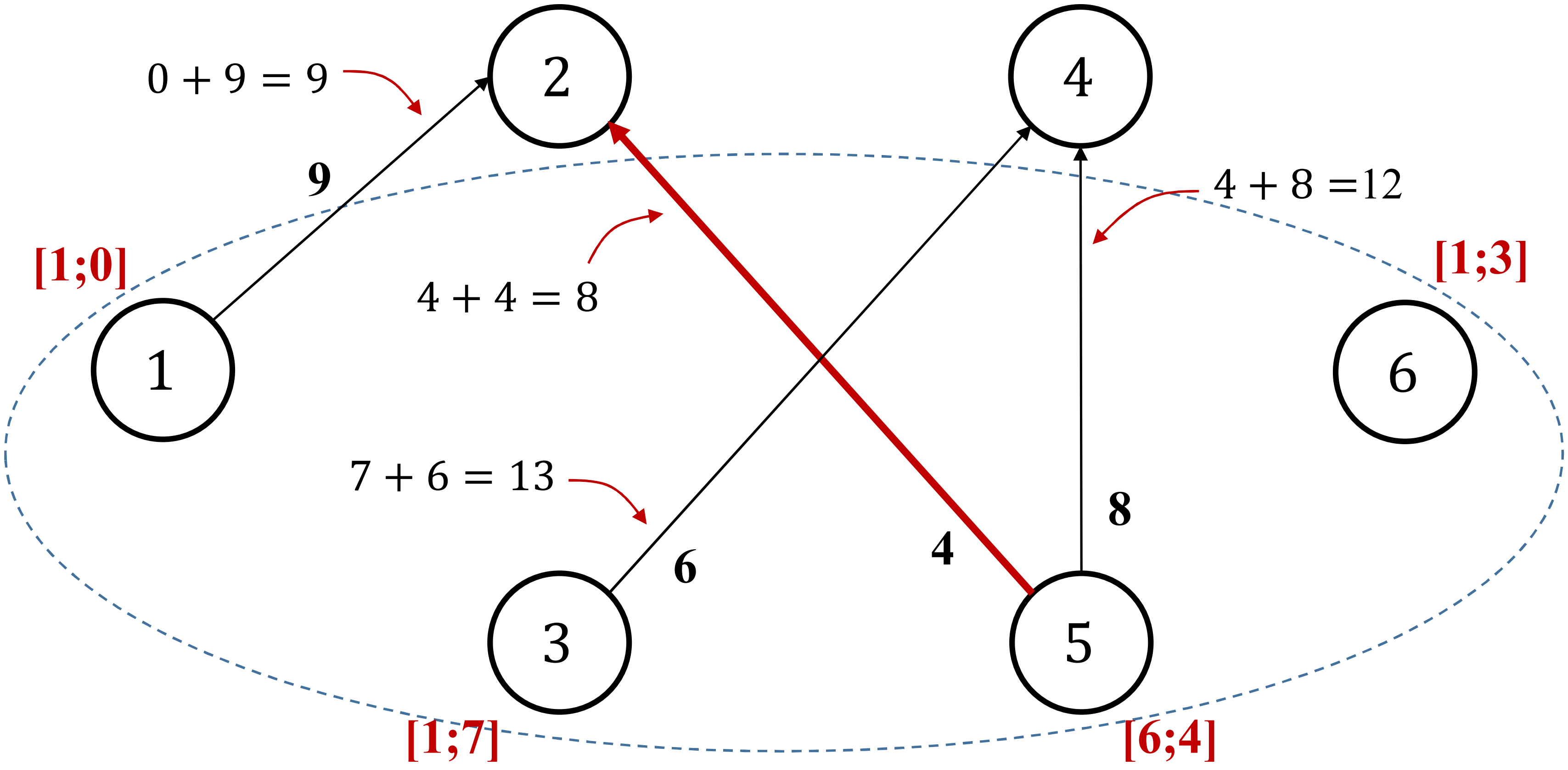
$S = \{1,6,5,3\}$ $T = \{2,4\}$



$\delta^+(S,T) = \{(1,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$

Calcolo dei pesi

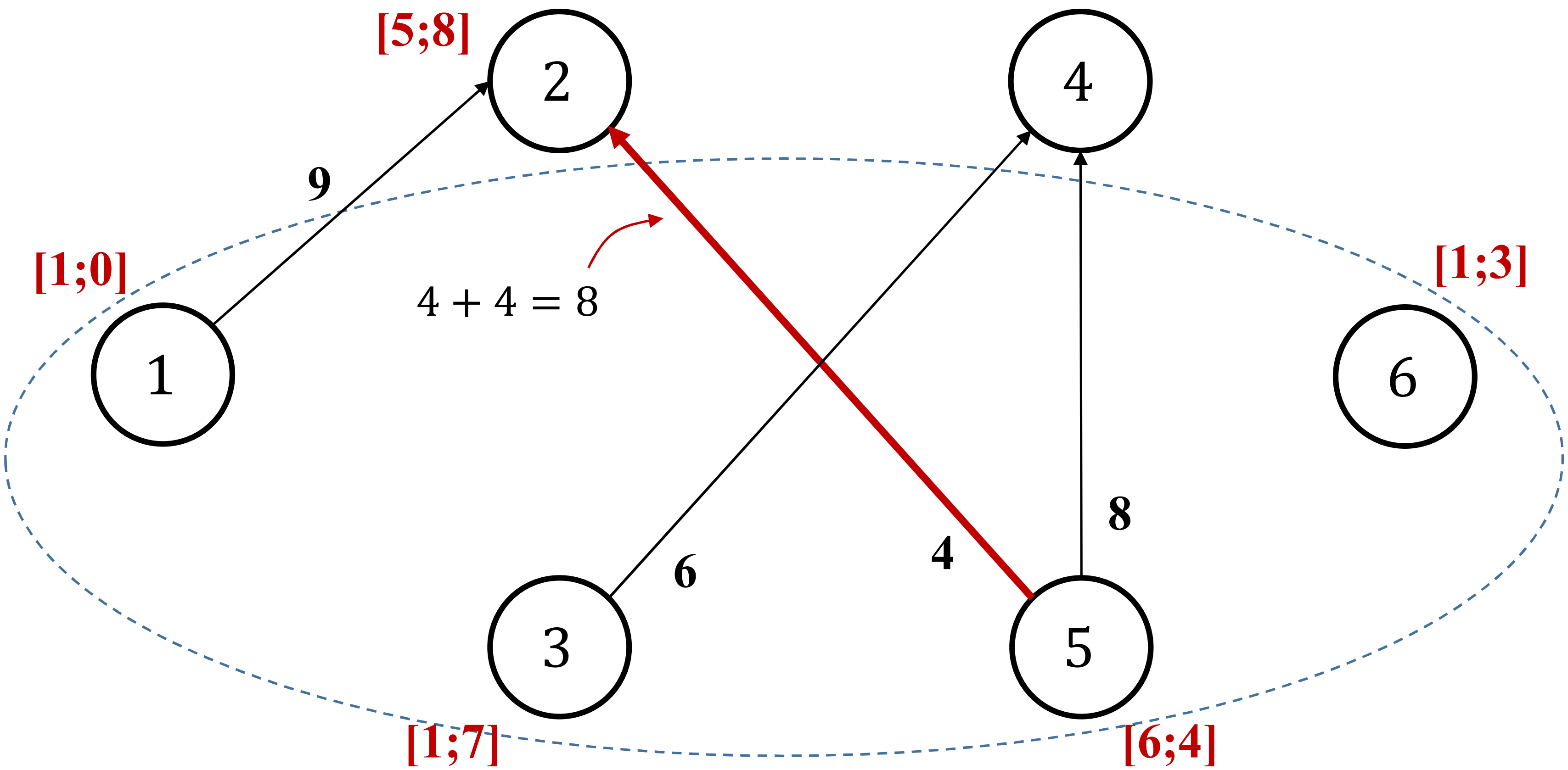
$S = \{1,6,5,3\}$ $T = \{2,4\}$



$(v, t) = (5,2)$

Etichetta definitiva

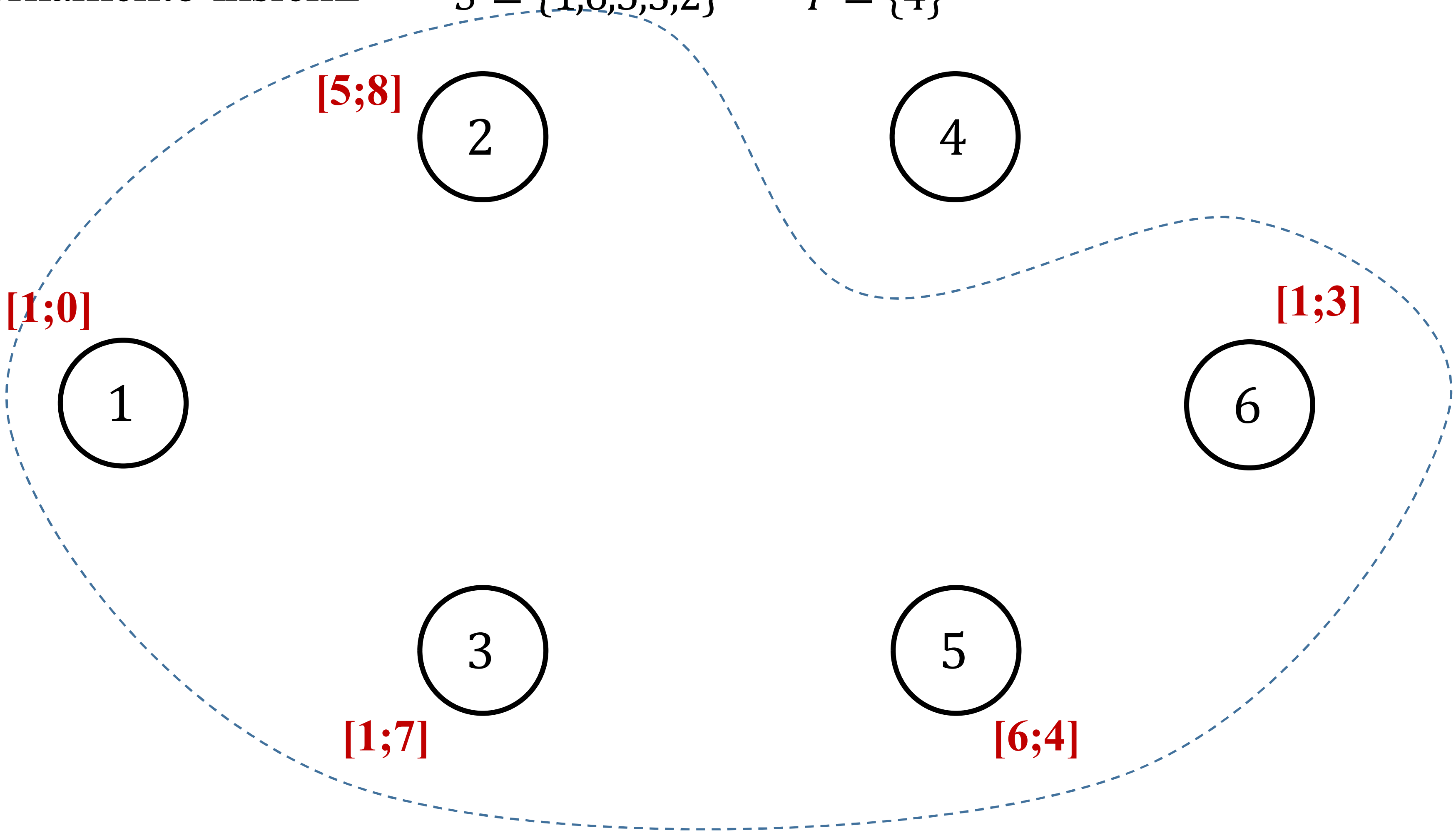
$S = \{1,6,5,3\}$ $\quad T = \{2,4\}$



$(v,t) = (5,2)$

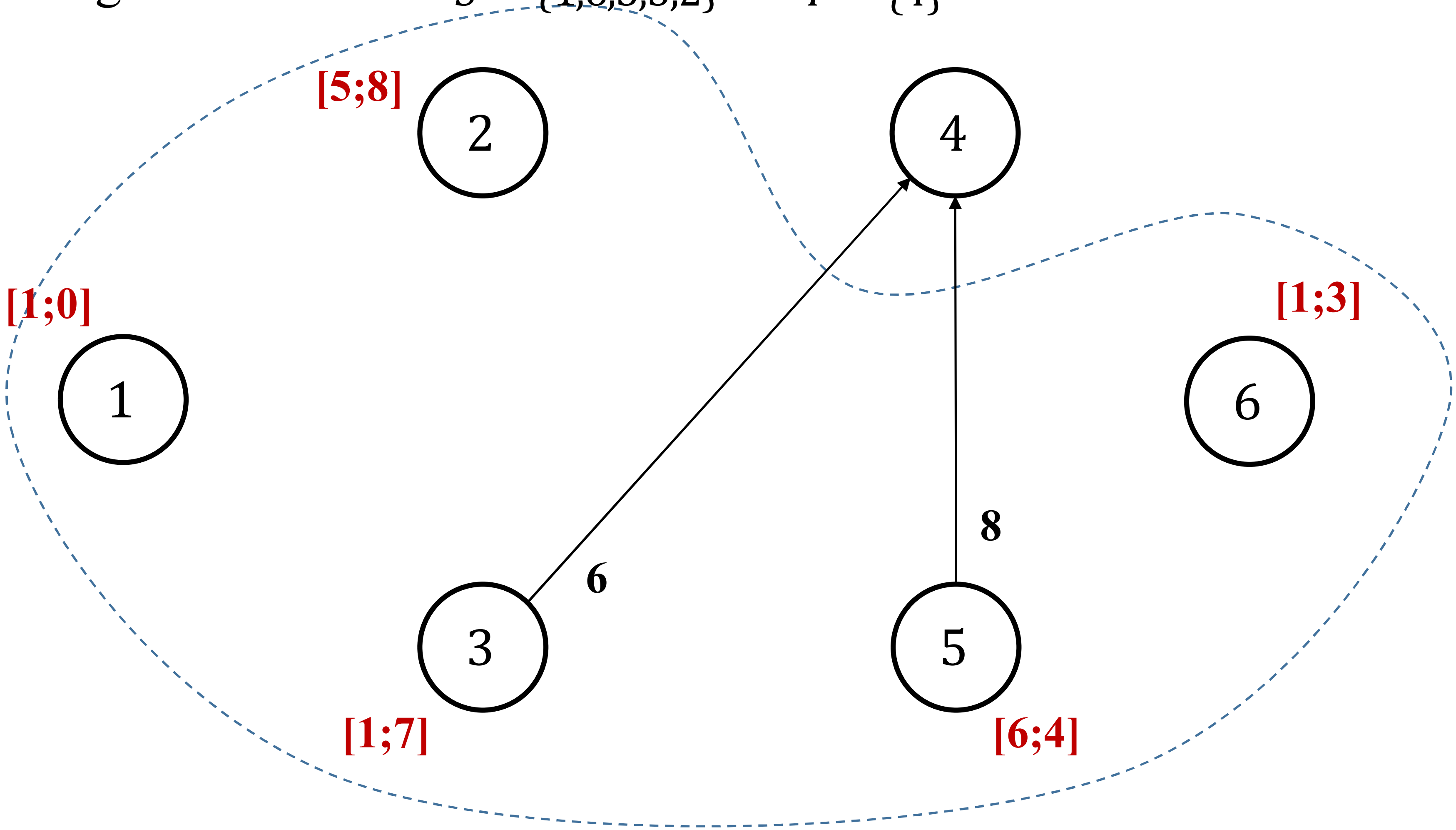
Esercizio C

Aggiornamento insiemi $S = \{1,6,5,3,2\}$ $T = \{4\}$



Archi di taglio

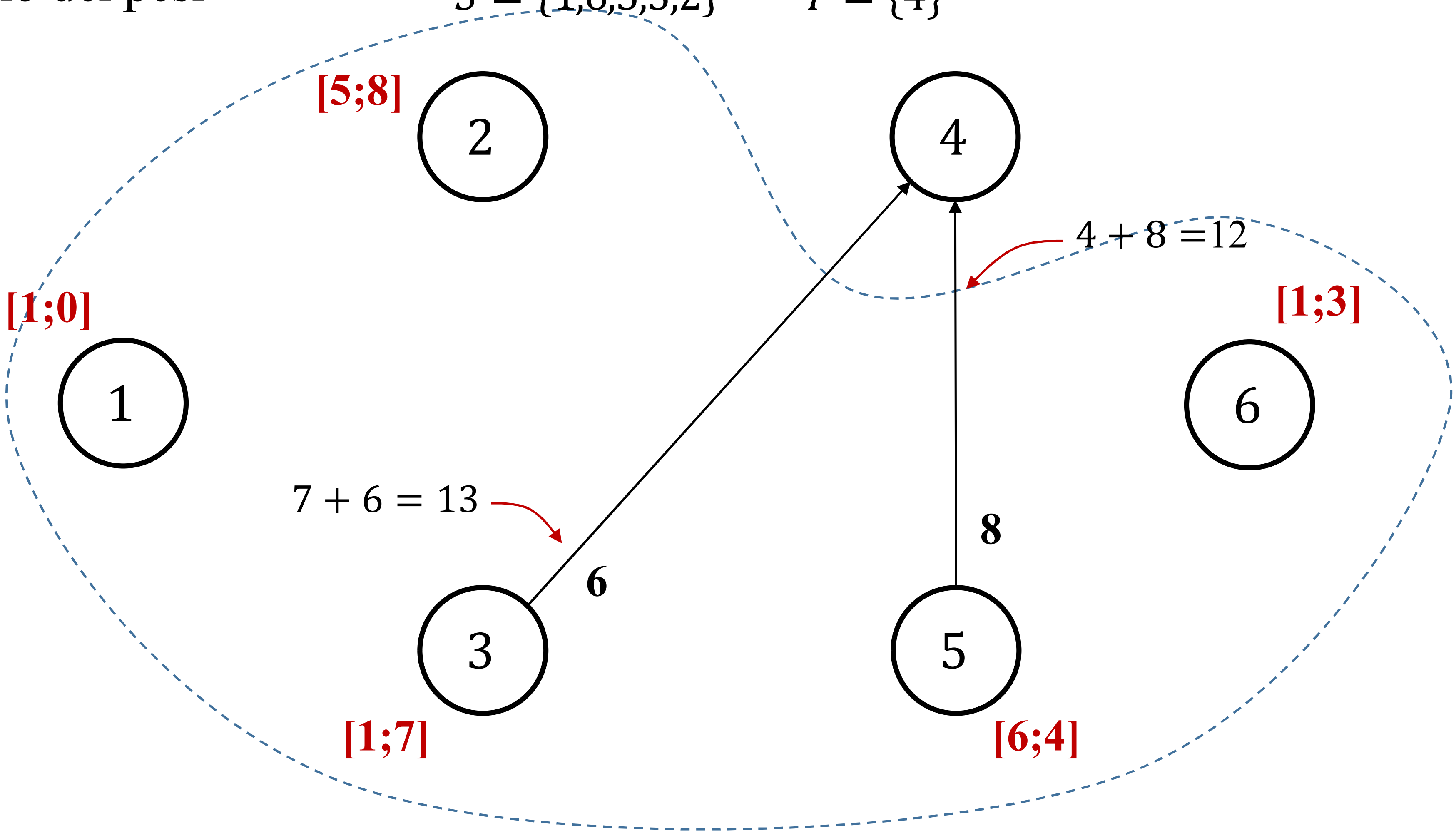
$S = \{1,6,5,3,2\} \qquad T = \{4\}$



$\delta^+(S,T) = \{(3,4),(5,4)\}$

Calcolo dei pesi

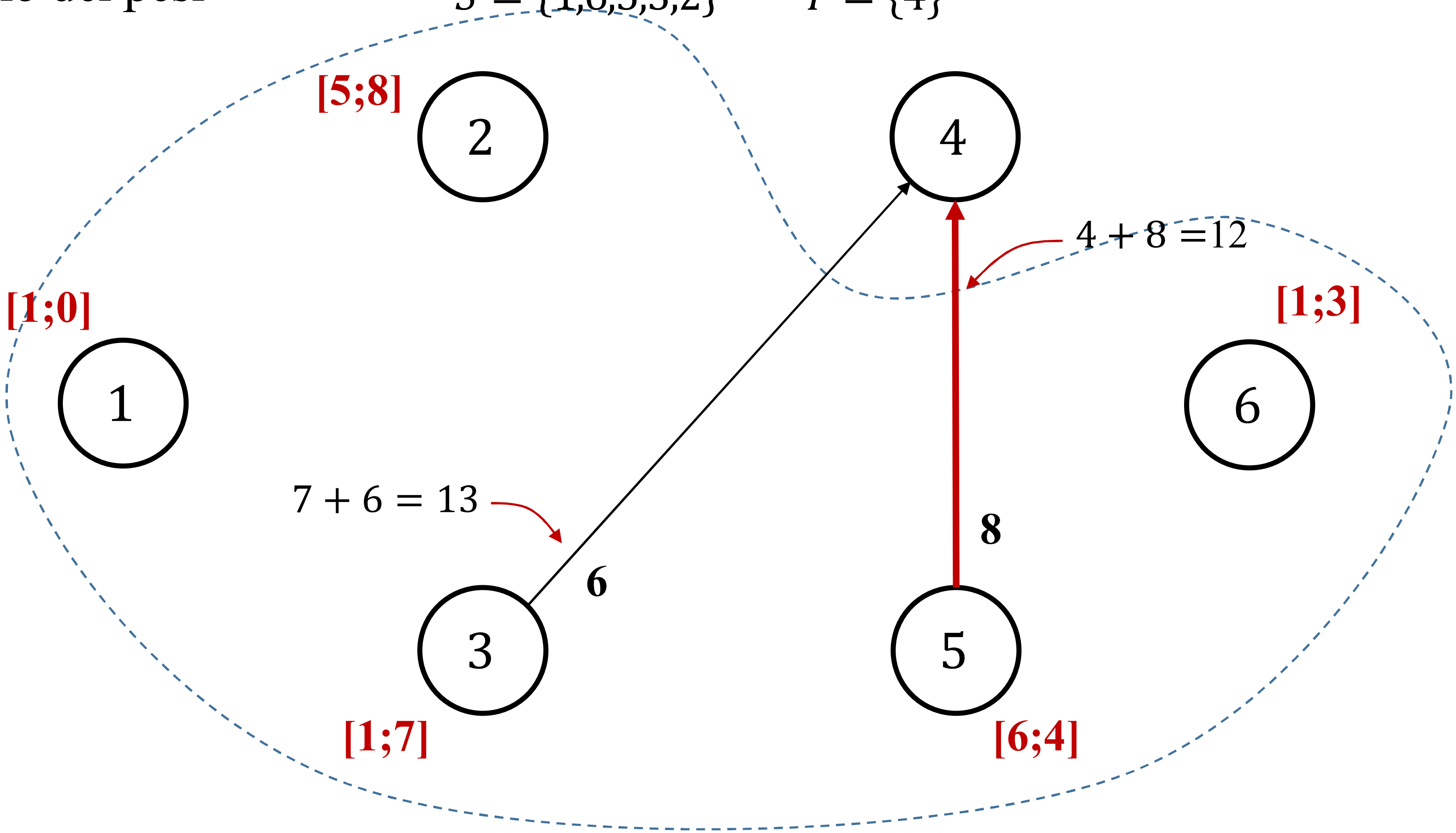
$S = \{1,6,5,3,2\}$ $T = \{4\}$



$\delta^+(S,T) = \{(3,4),(5,4)\}$

Calcolo dei pesi

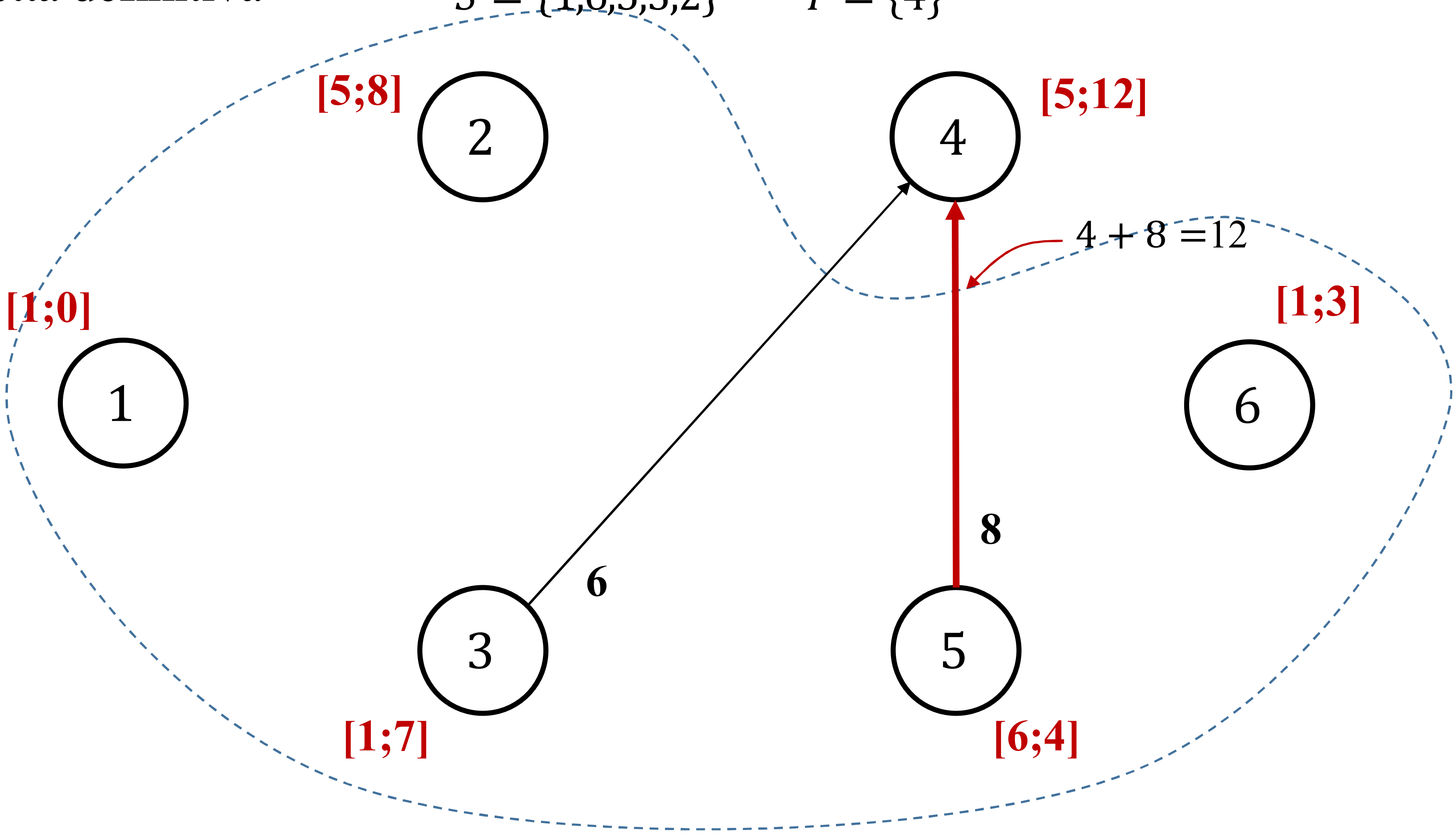
$S = \{1,6,5,3,2\}$ $T = \{4\}$



$(v, t) = (5,4)$

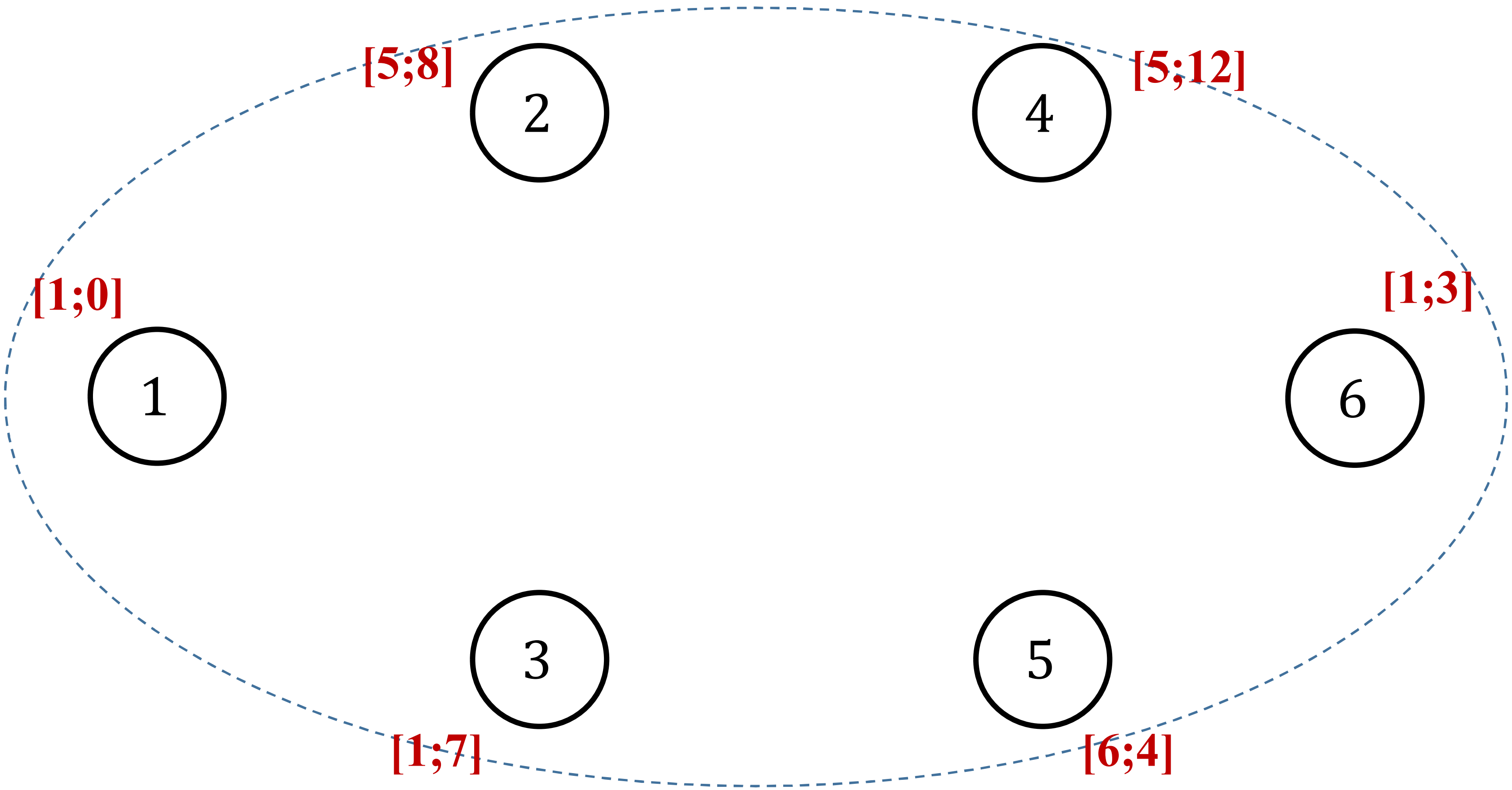
Etichetta definitiva

$S = \{1,6,5,3,2\}$ $T = \{4\}$



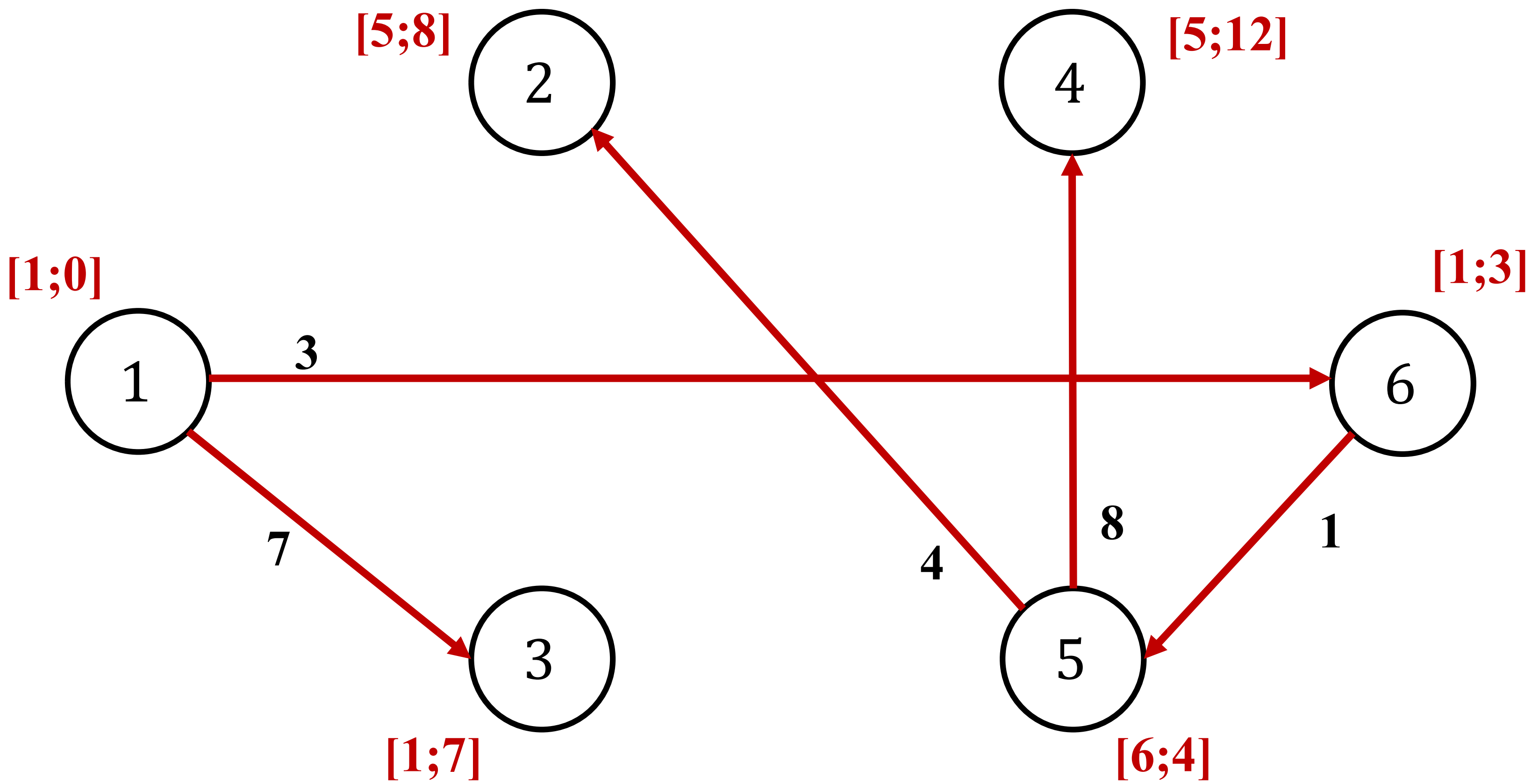
$(v, t) = (5,4)$

Aggiornamento insiemi $S = \{1,6,5,3,2,4\}$ $T = \{\emptyset\}$



Esercizio C

Cammini Minimi



Albero di Supporto di Costo Minimo

Cos'è il problema di individuazione dell'albero di supporto di costo minimo?

- Dato un grafo non orientato, definiamo come albero di supporto un sottografo:
  - ✓ Connesso
  - ✓ Senza cicli
  - ✓ Contenente tutti i vertici del grafo.

- Determinazione, in un grafo non orientato, di un albero di supporto per cui è minima la somma dei costi dei collegamenti selezionati.

- Possibile applicazione di due algoritmi
  - ✓ Kruskal
  - ✓ Prim

Algoritmo di Kruskal

- I collegamenti vengono ordinati in ordine di costo non decrescente.

- Tra i collegamenti non ancora considerati, selezionare quello di costo minimo:
  - ✓ Se la sua selezione non comporta la generazione di un ciclo, inserire il collegamento nell'albero di supporto
  - ✓ Altrimenti, scartare il collegamento.

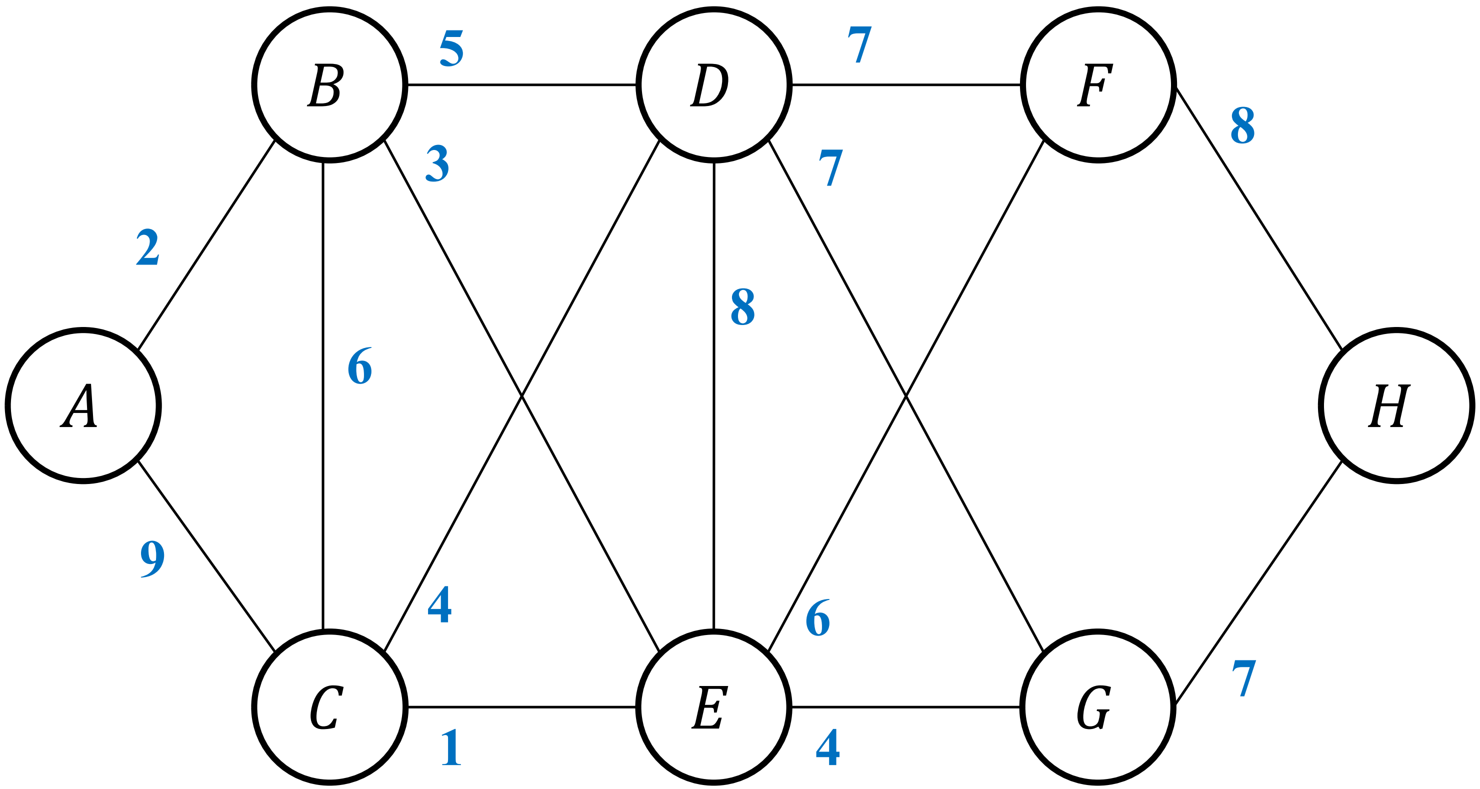
- Procedere iterativamente fino all'inserimento di $N - 1$ collegamenti.

- Il sottografo parziale ottenuto nelle iterazioni intermedie non è connesso.

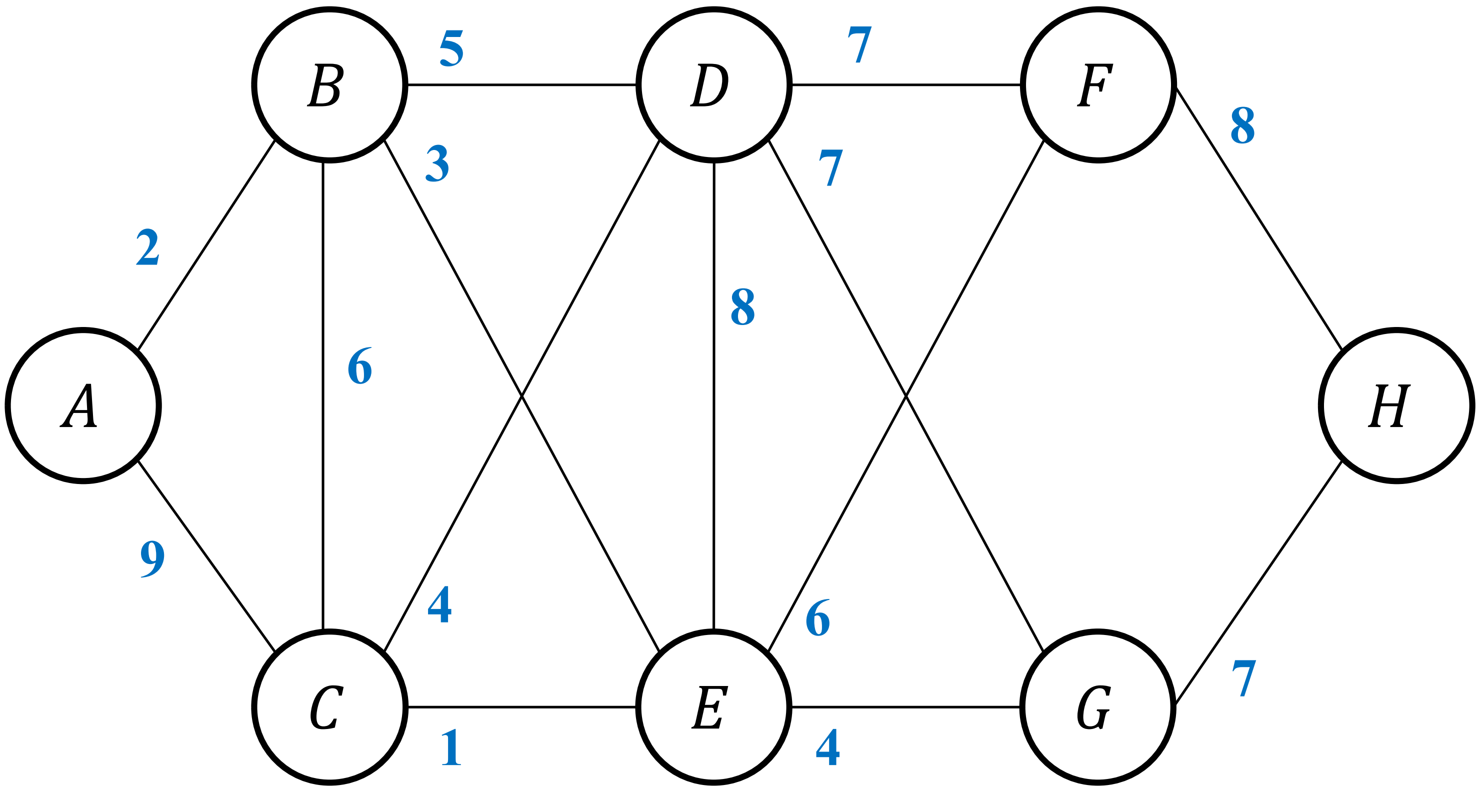
Algoritmo di Prim

- Costruzione dinamica dei due insiemi S e T
  - ✓ Si inizializza $S = \{1\}$ e $T = \emptyset$
  - ✓ Si considerano i lati di taglio $\delta(S) = \{(i,j): i \in S, j \notin S\}$
  - ✓ Si seleziona il collegamento di costo minimo $(v,h) = \underset{(i,j)\in\delta(S)}{\arg\min}\{c_{i,j}\}$
  - ✓ Si aggiornano gli insiemi S e T
    - $S = S \cup h$
    - $T = T \cup \{(v,h)\}$
- Procedere iterativamente fino all'inserimento di $N-1$ collegamenti (i.e., $|T| = N-1$ e $|S| = N$).
- Il sottografo parziale ottenuto nelle iterazioni intermedie è connesso.

Grafo Iniziale

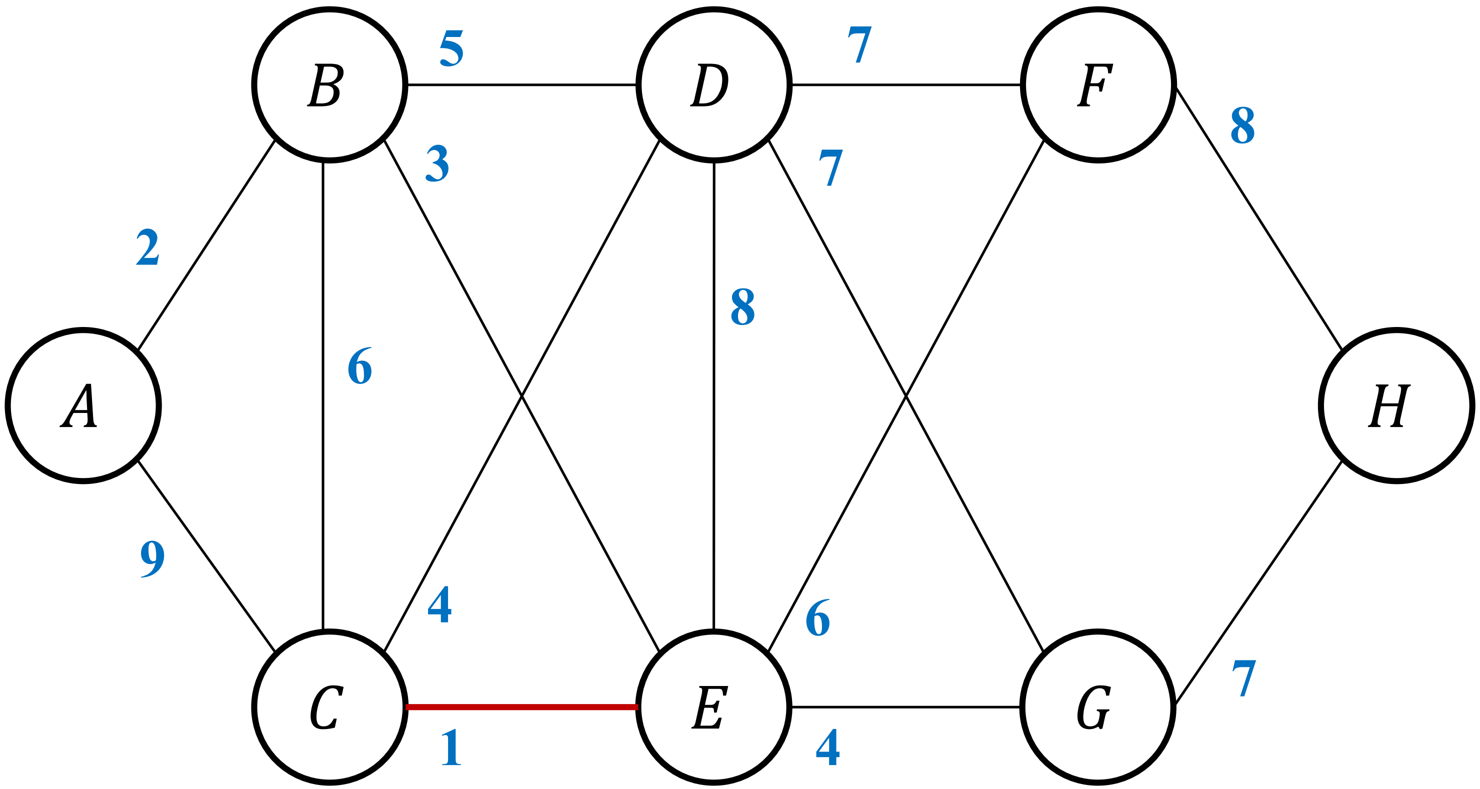


Esercizio D



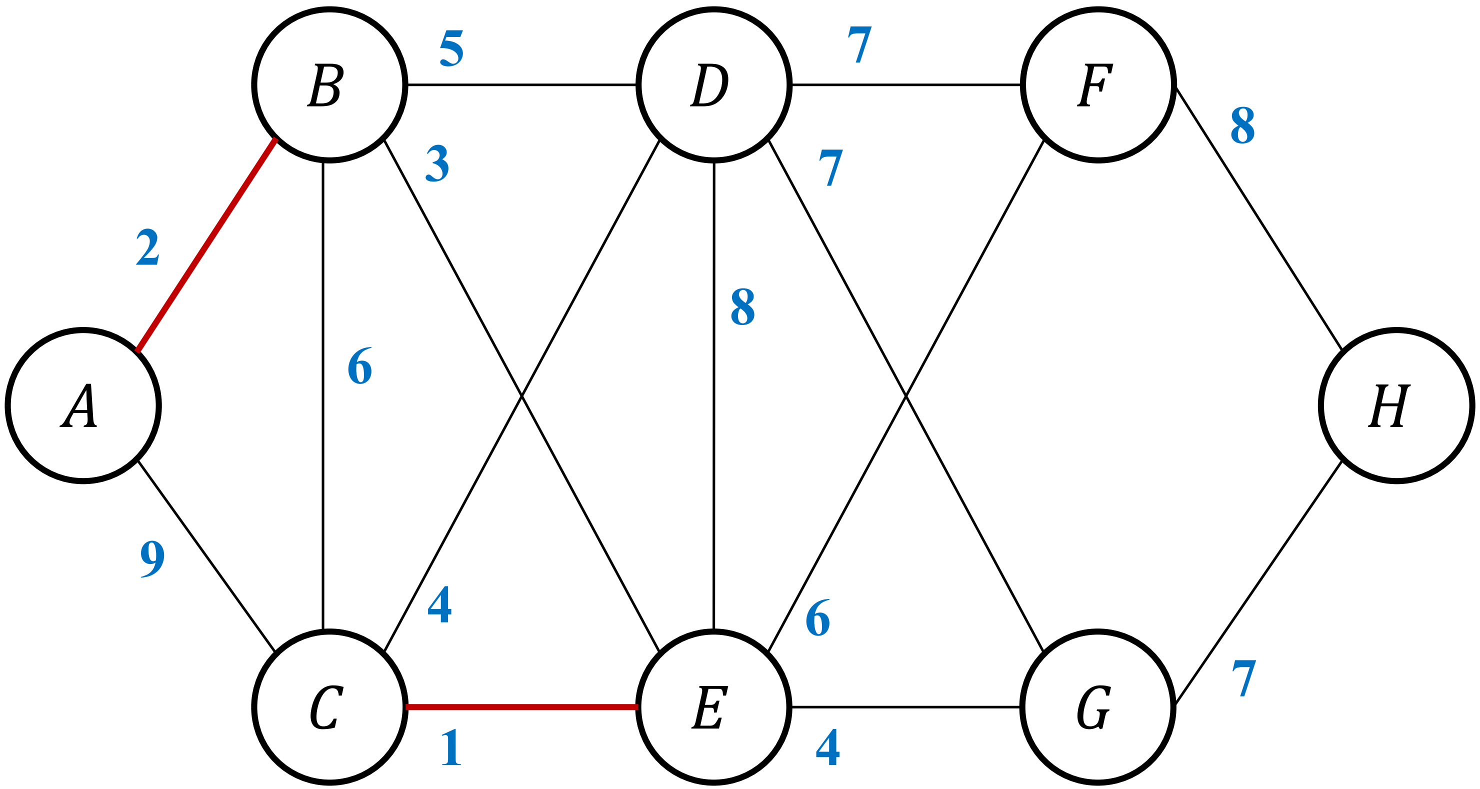
Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Esercizio D



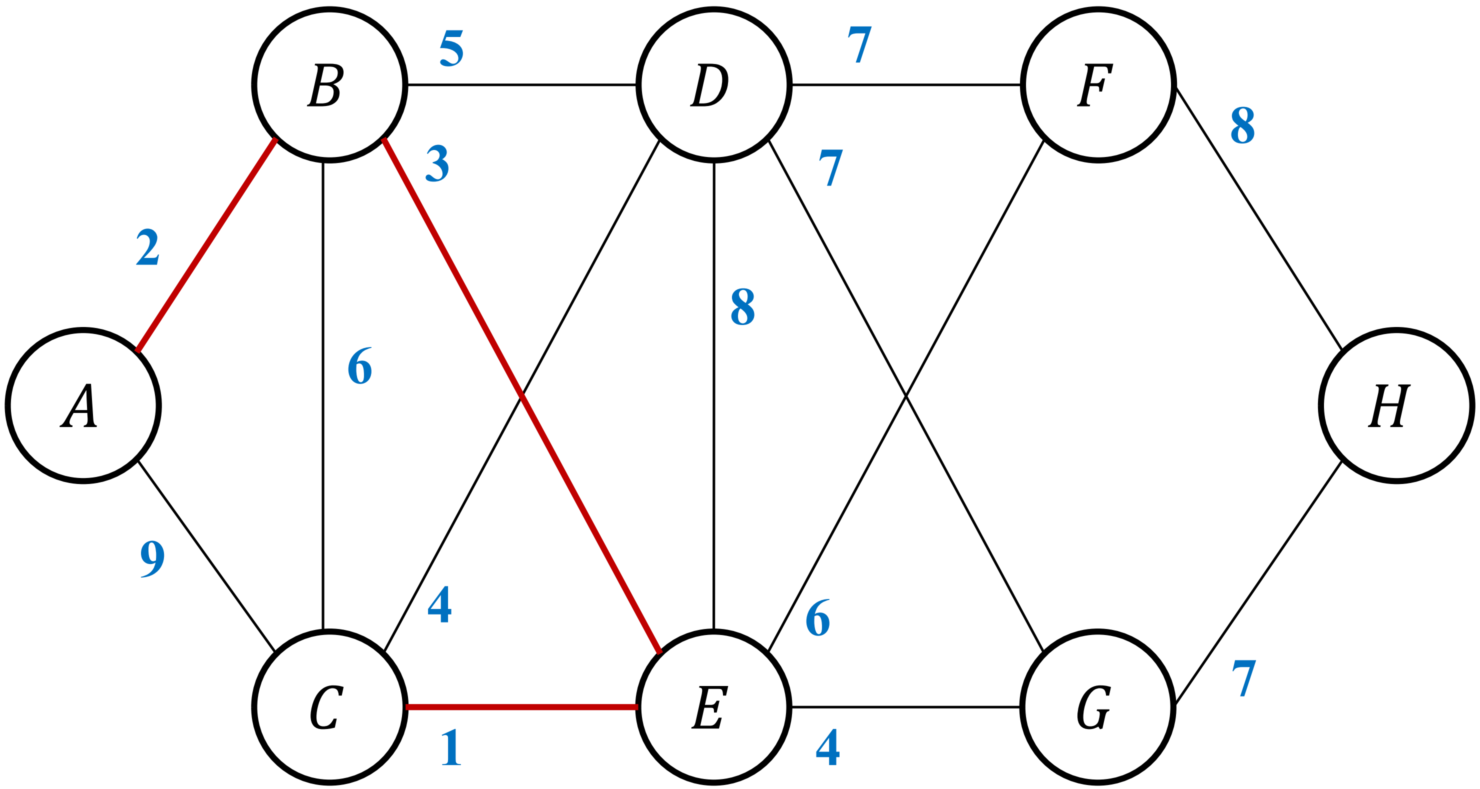
Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Esercizio D



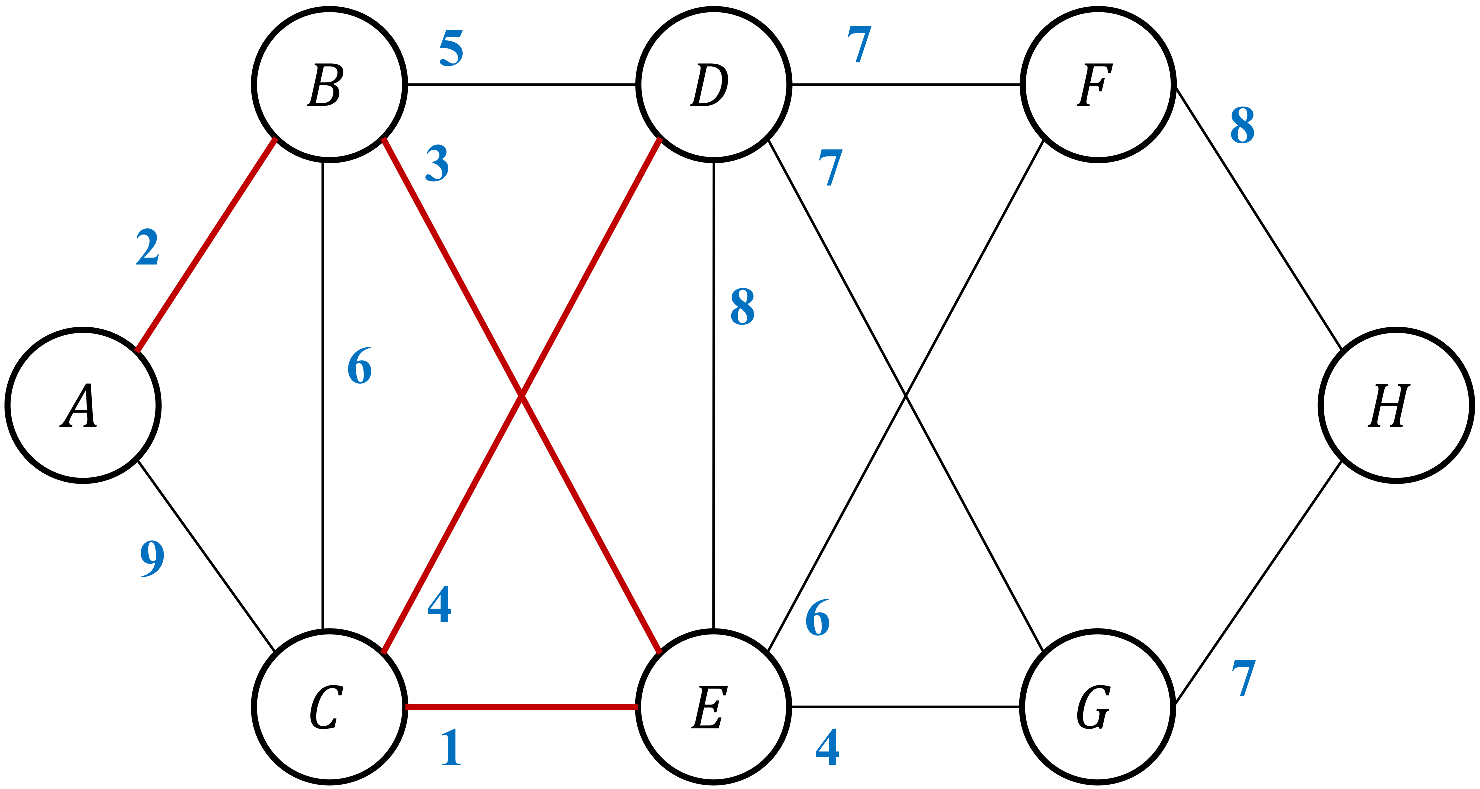
Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Esercizio D



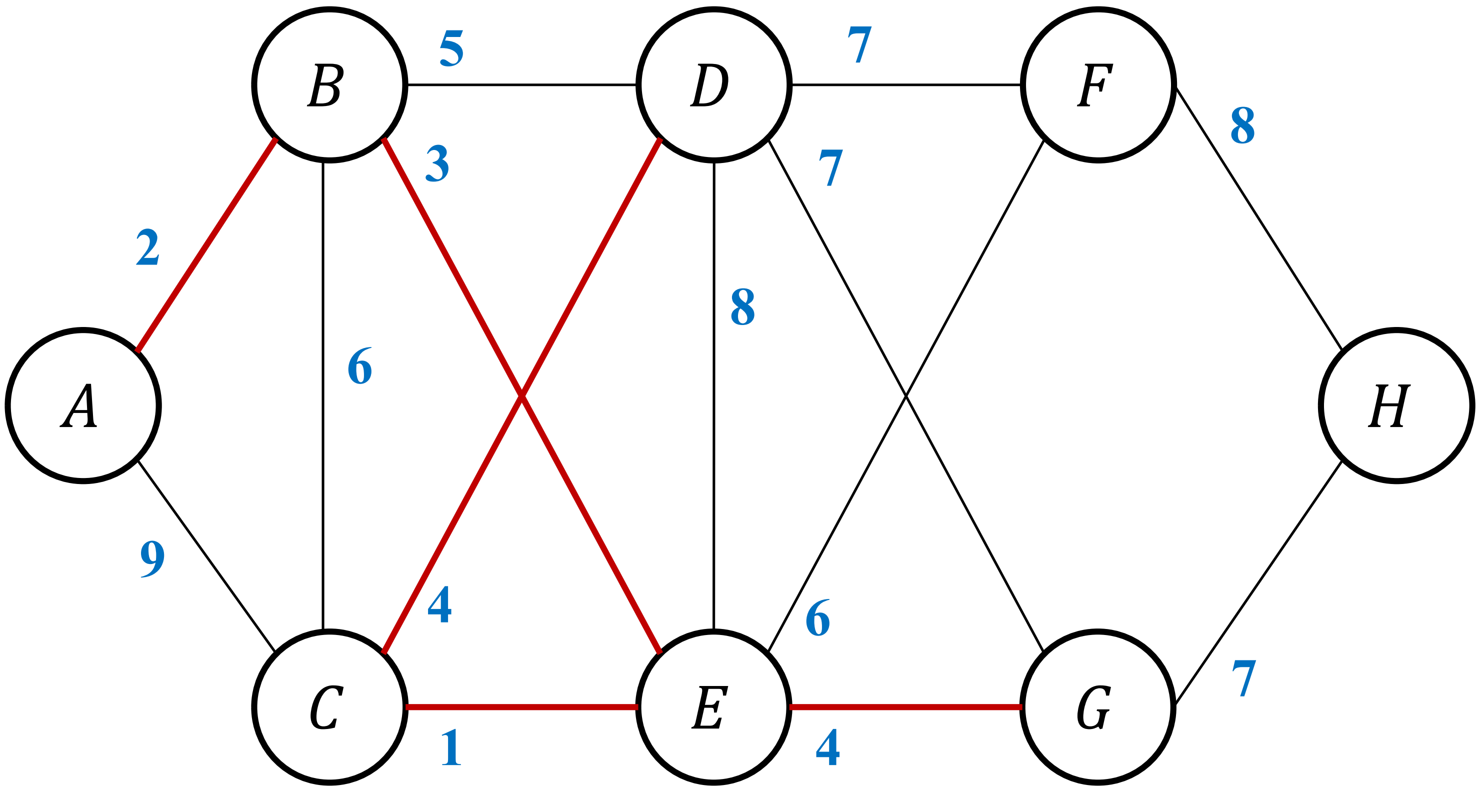
Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Esercizio D



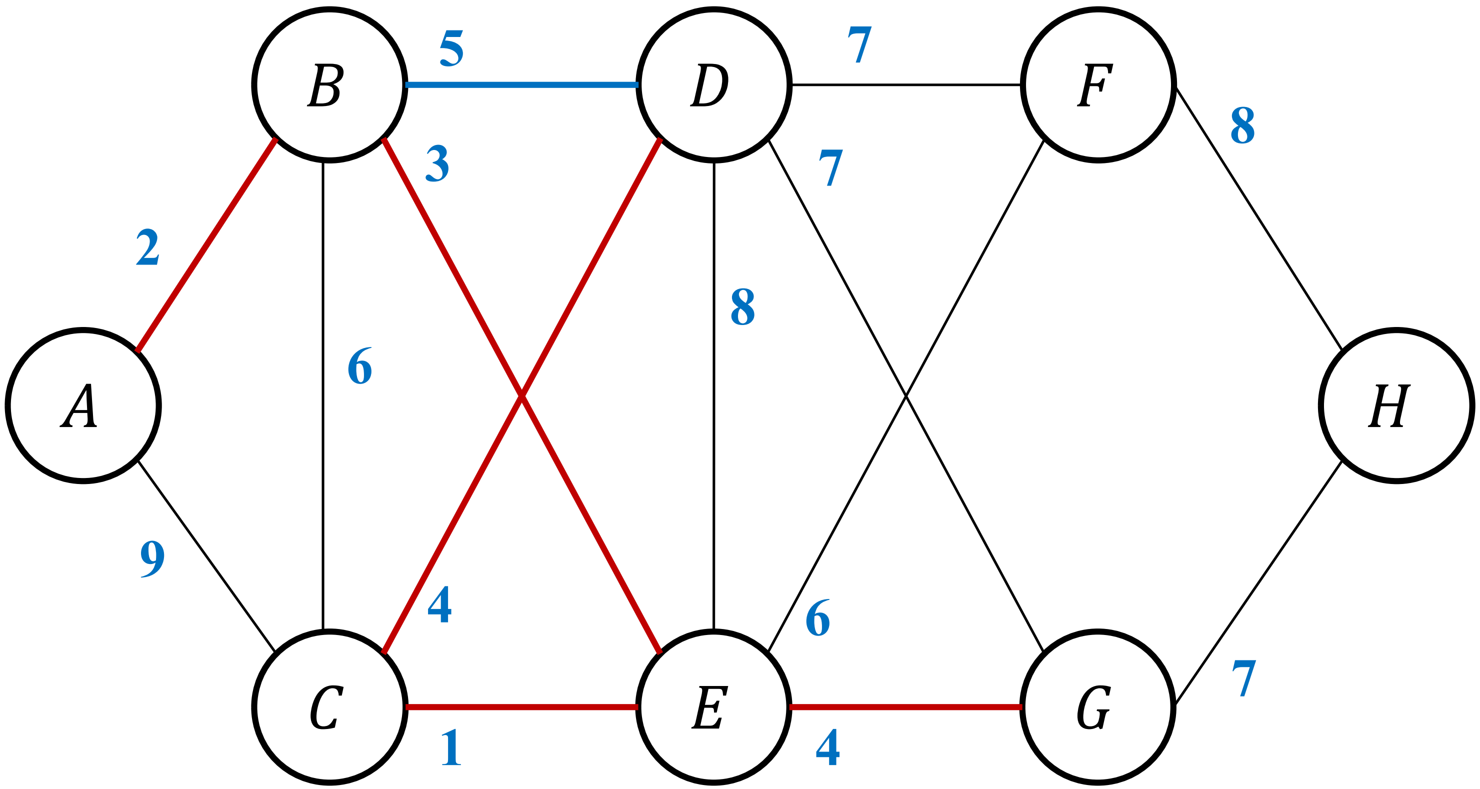
Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Esercizio D



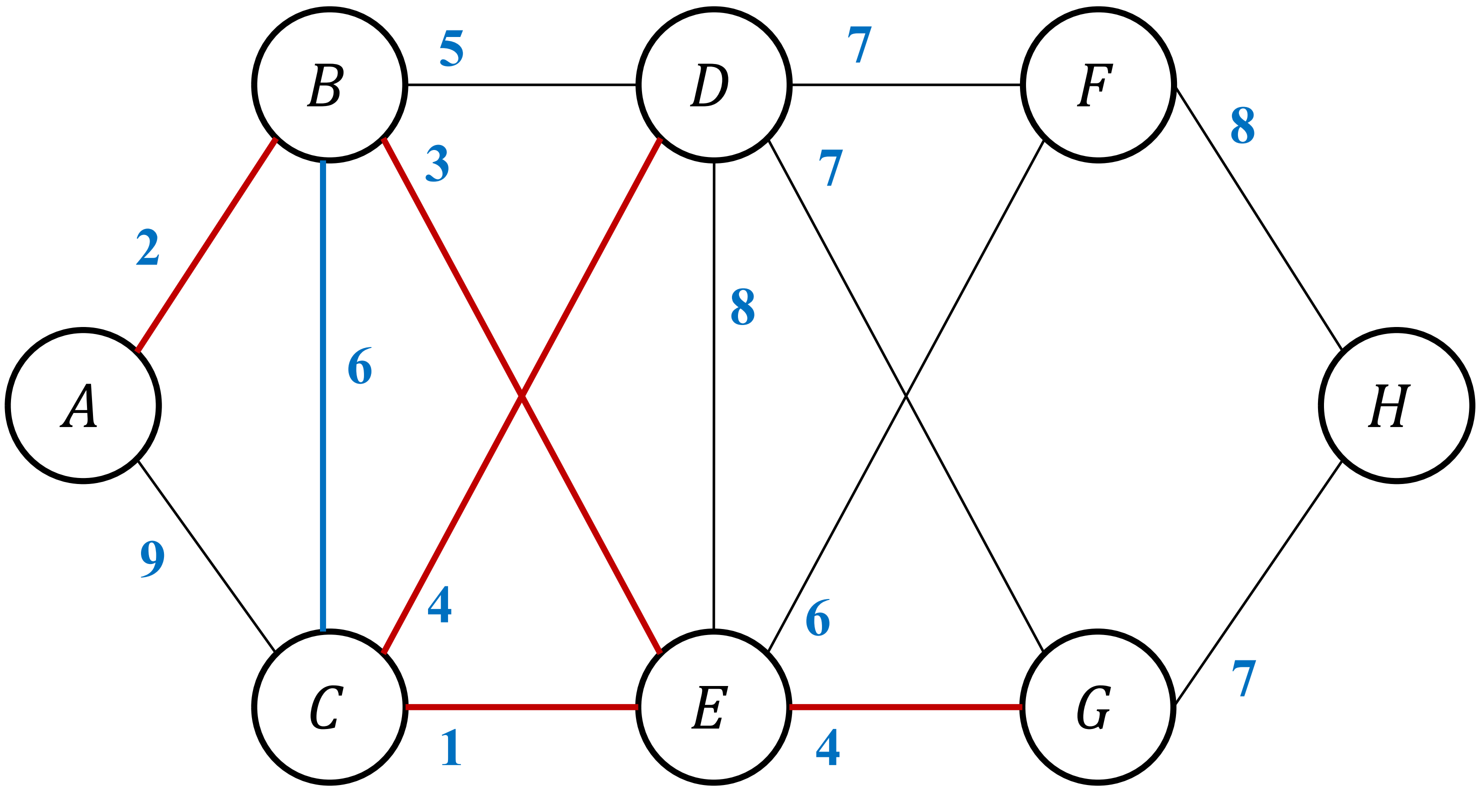
Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Esercizio D



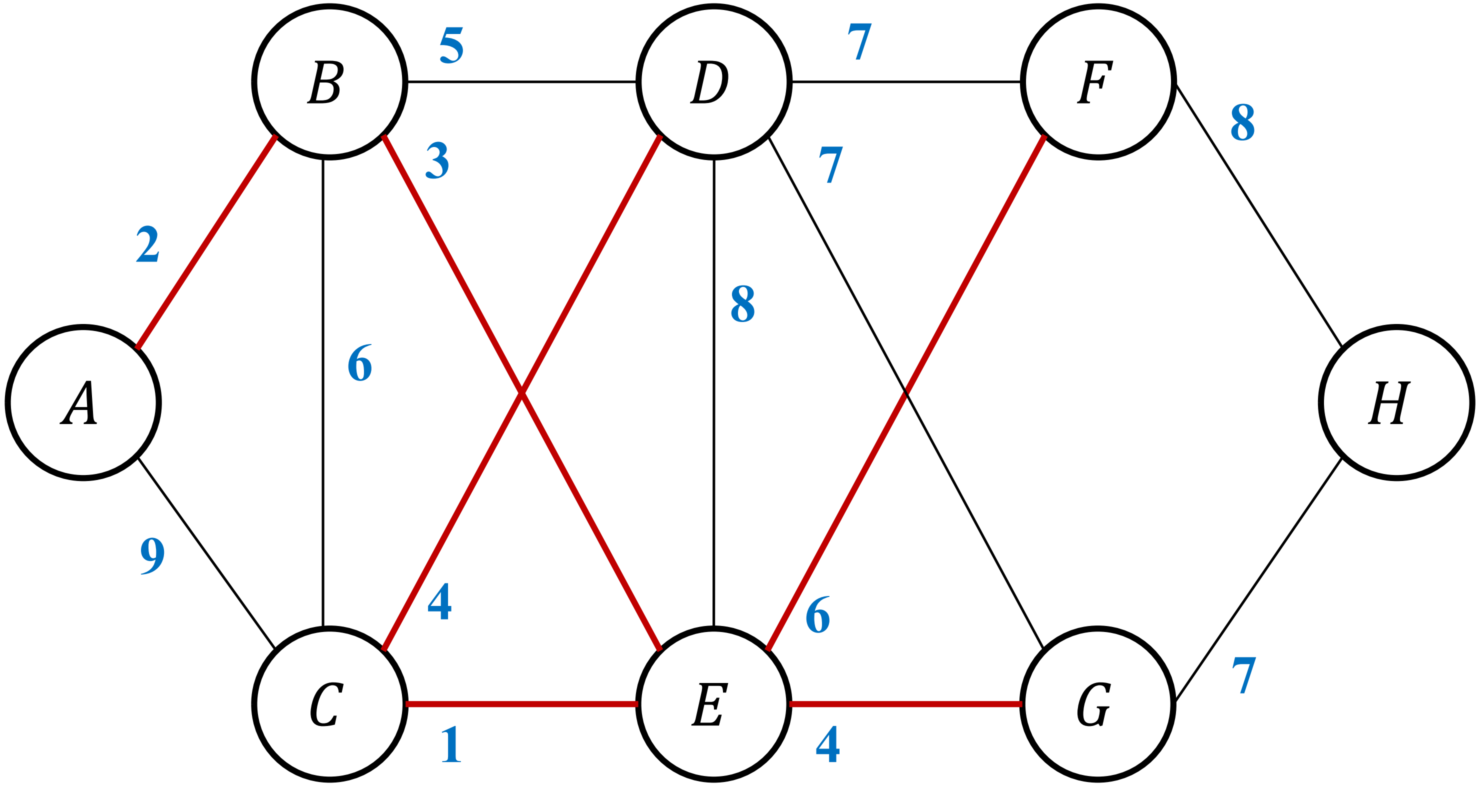
Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Esercizio D



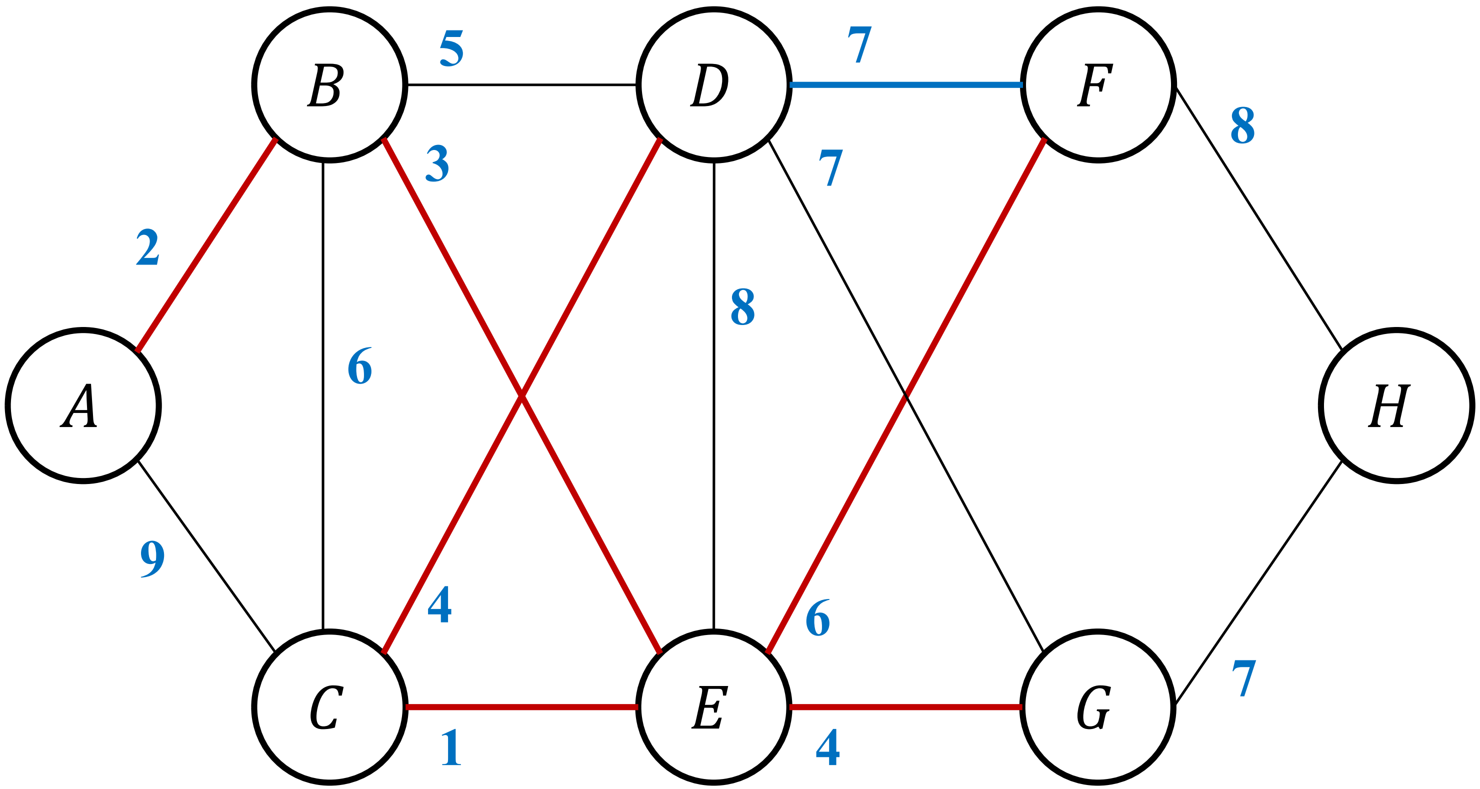
Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Esercizio D



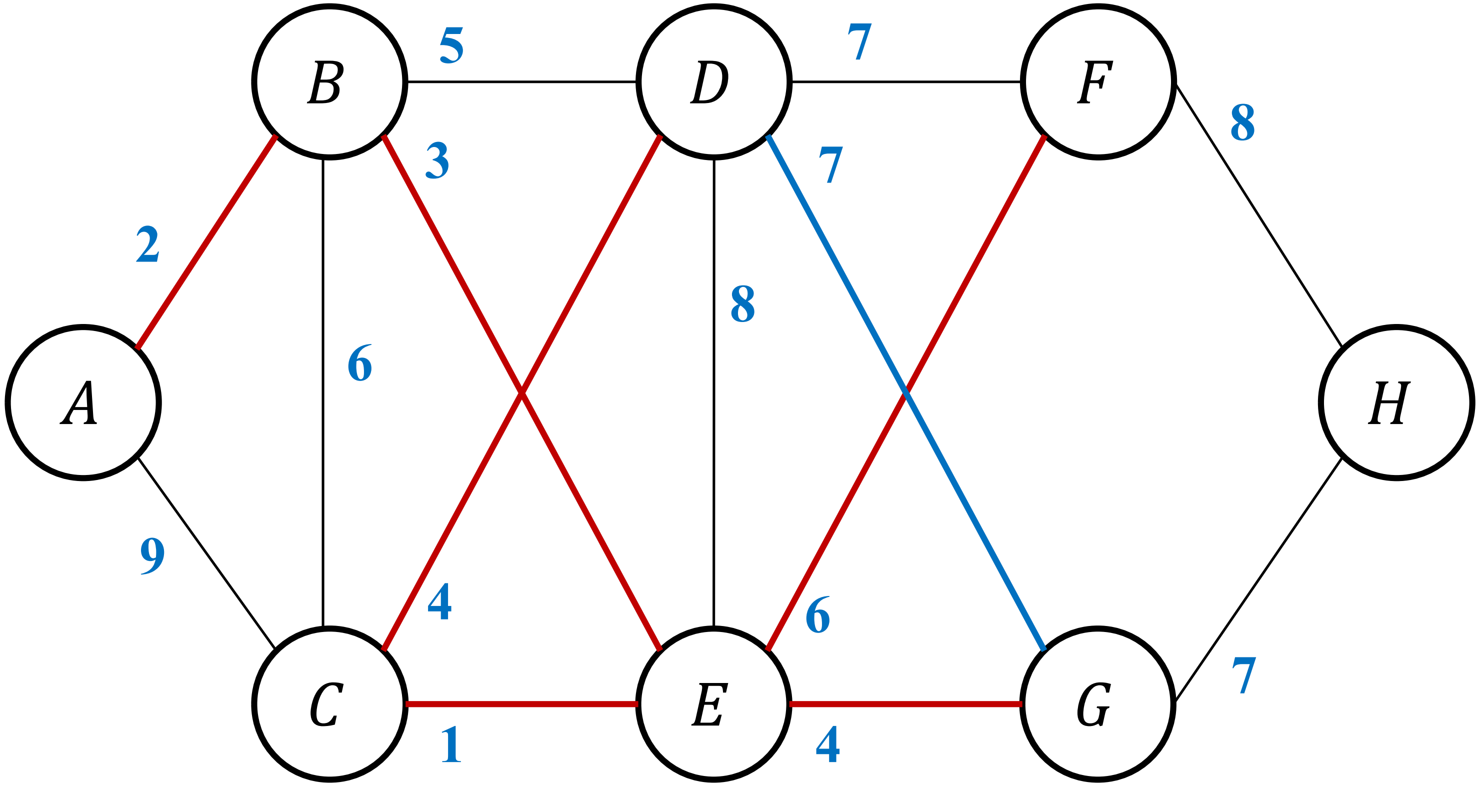
Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Esercizio D



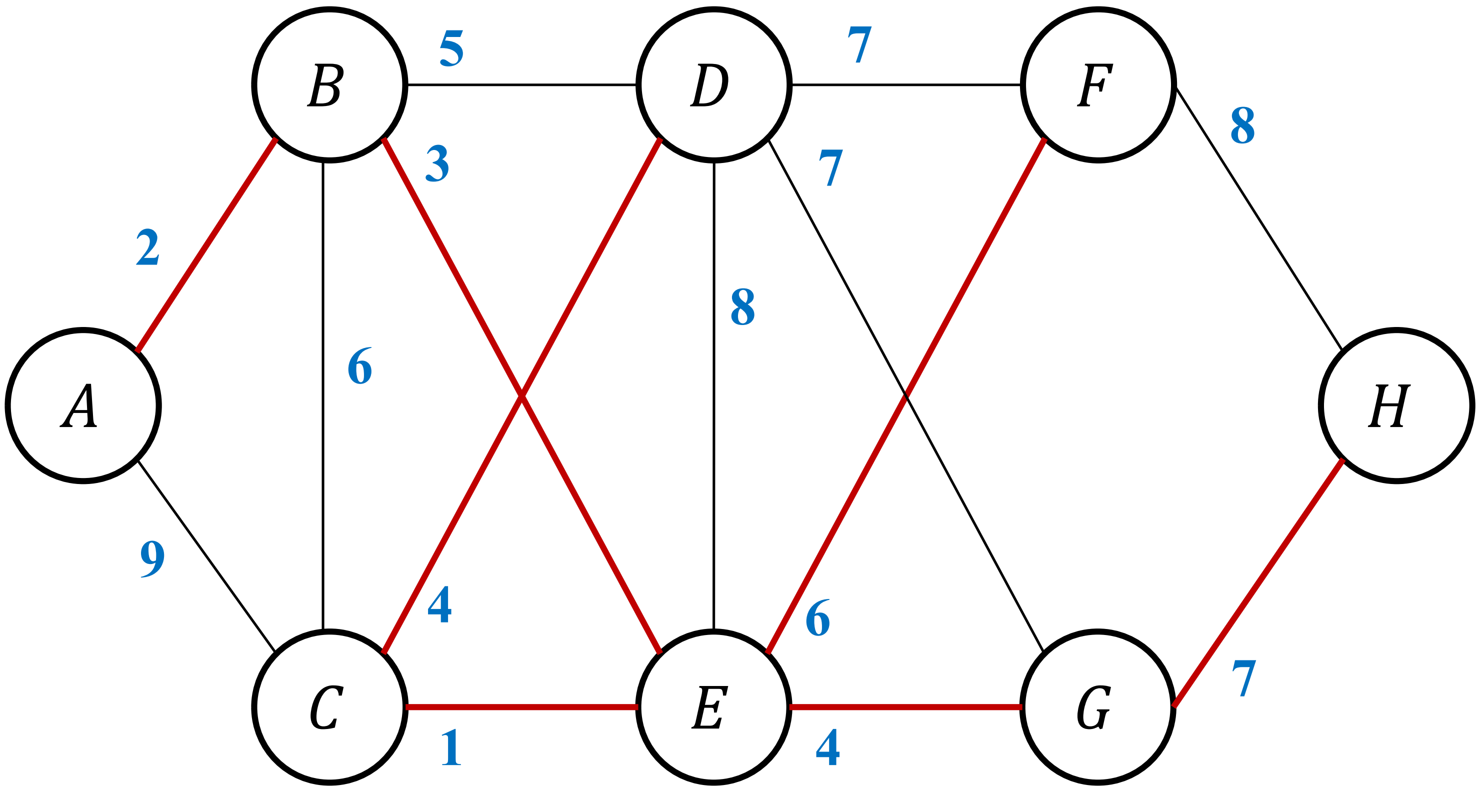
Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Esercizio D



Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

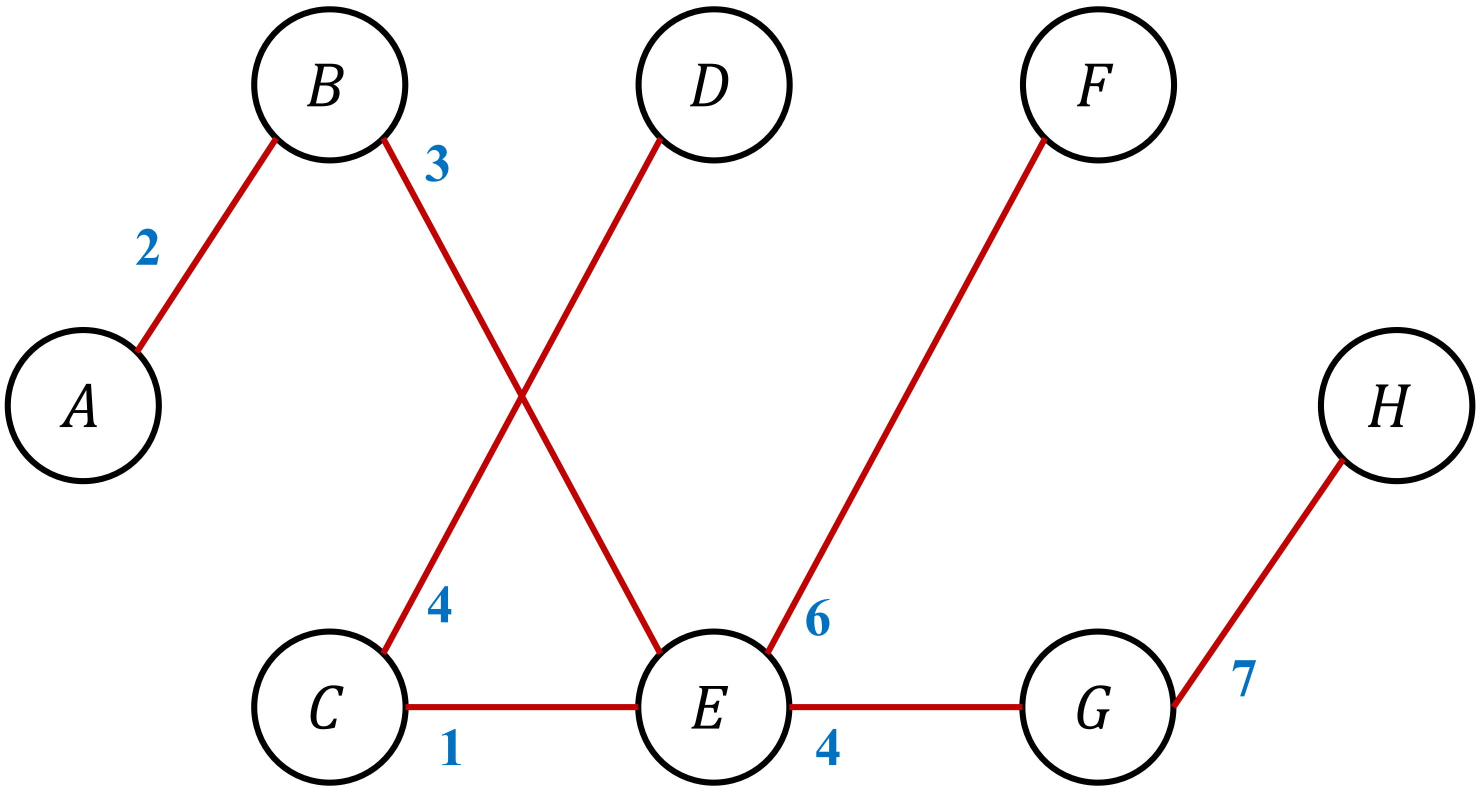
Esercizio D



Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

Esercizio D

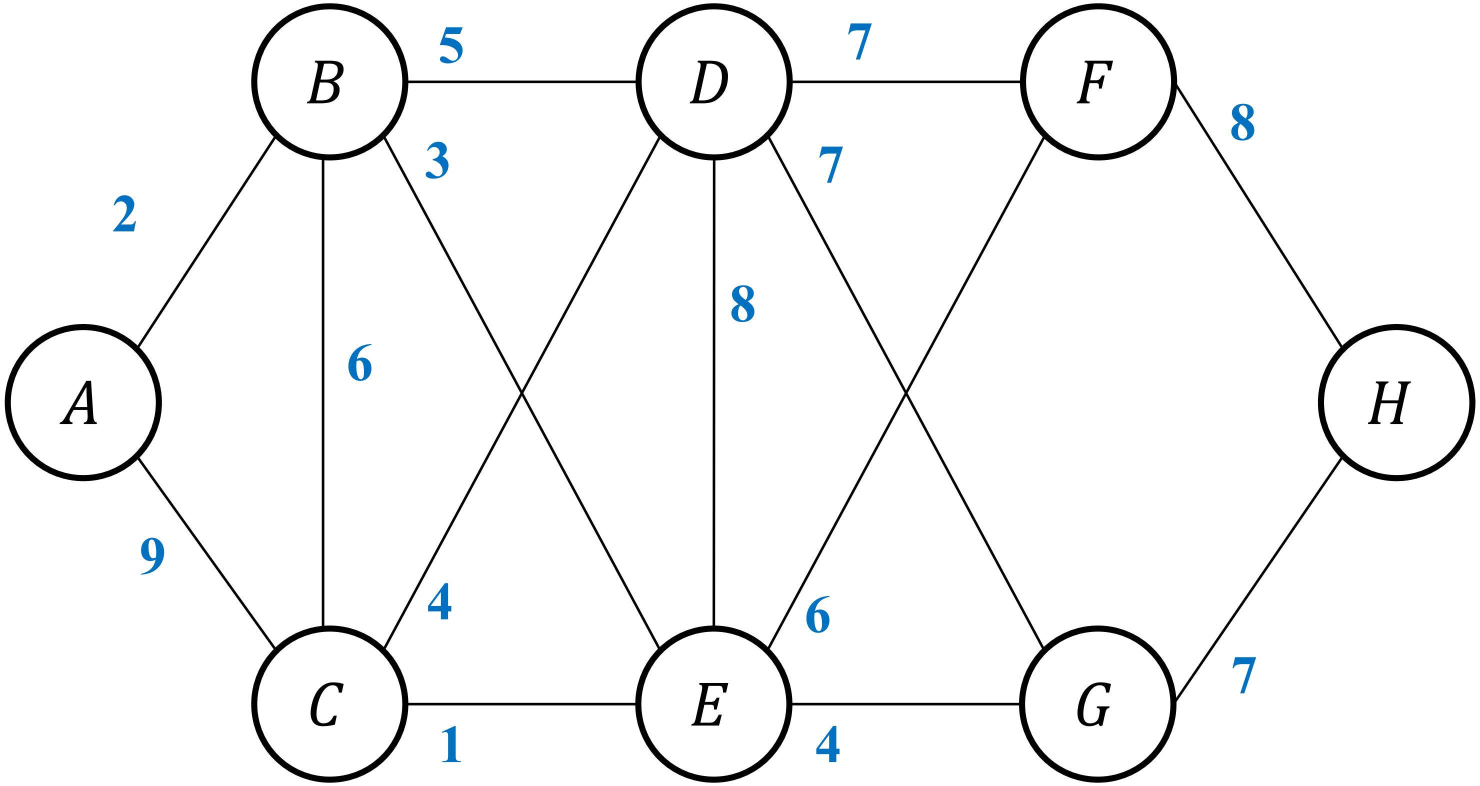
Costo minimo: 27



Lato	Costo
(C,E)	1
(A,B)	2
(B,E)	3
(C,D)	4
(E,G)	4
(B,D)	5
(B,C)	6
(E,F)	6
(D,F)	7
(D,G)	7
(G,H)	7
(D,E)	8
(F,H)	8
(A,C)	9

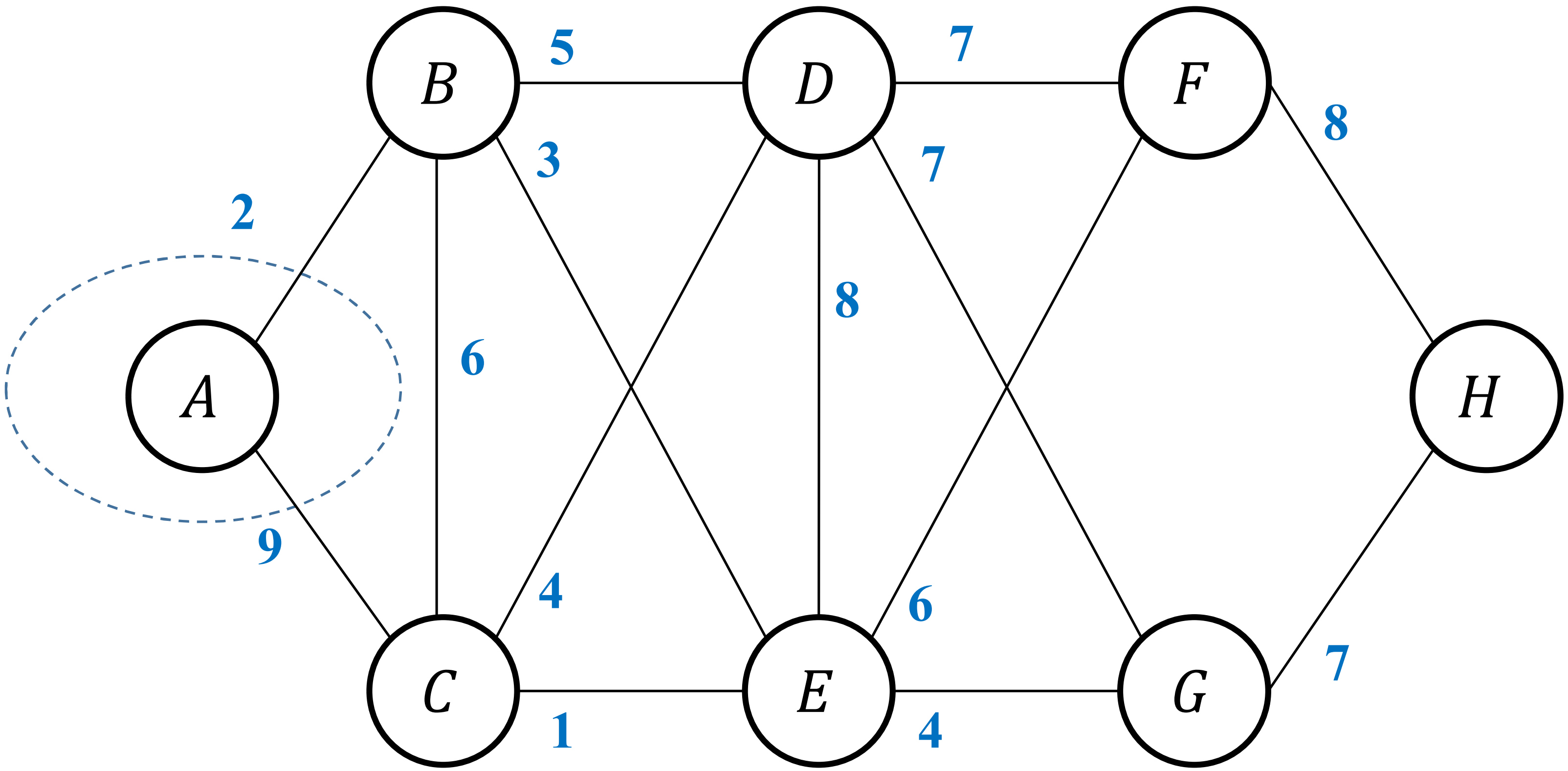
Esercizio E

Grafo Iniziale



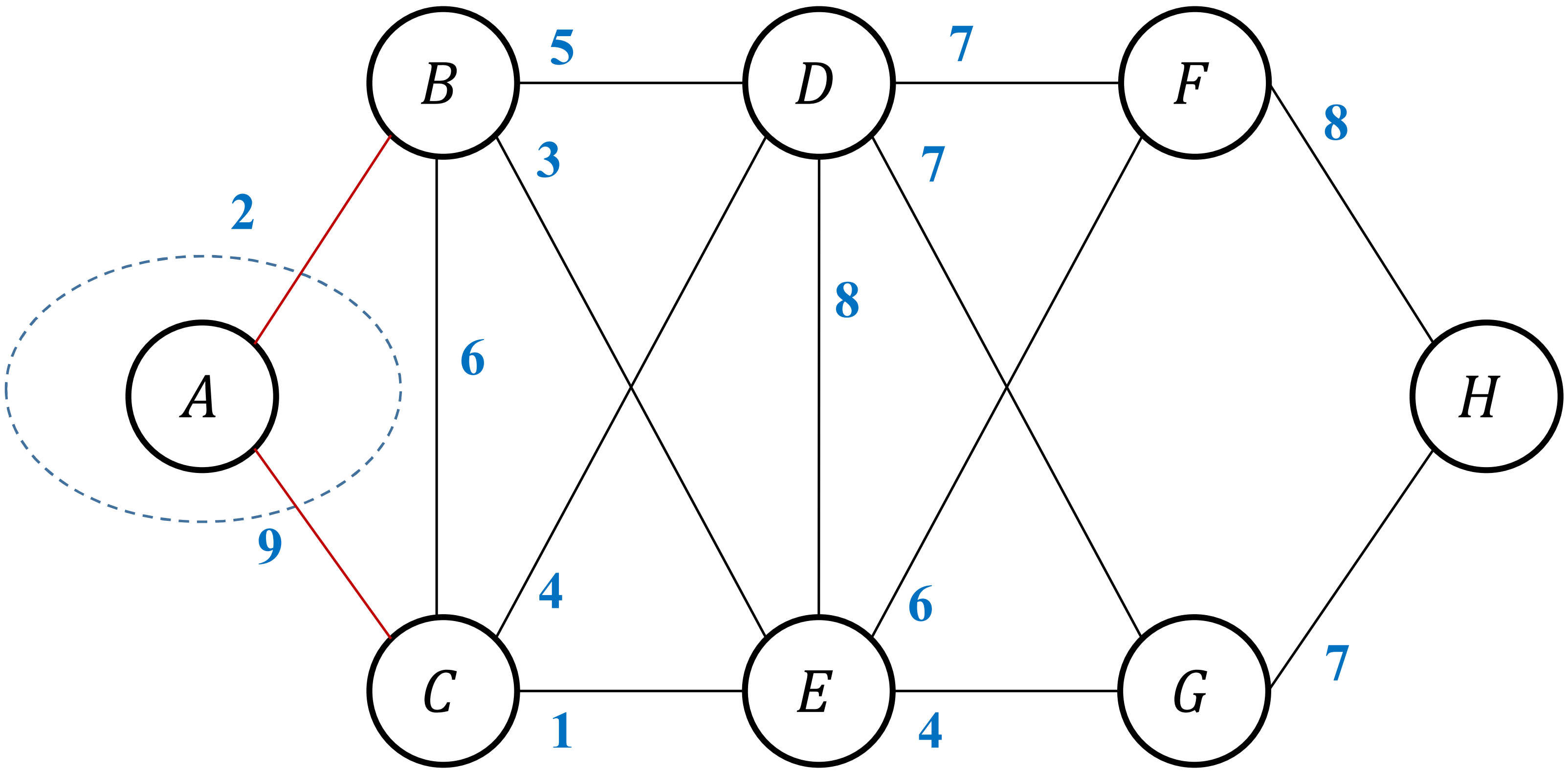
Esercizio E

Inizializzazione $S = \{A\}$ $T = \{\}$



Lati di taglio

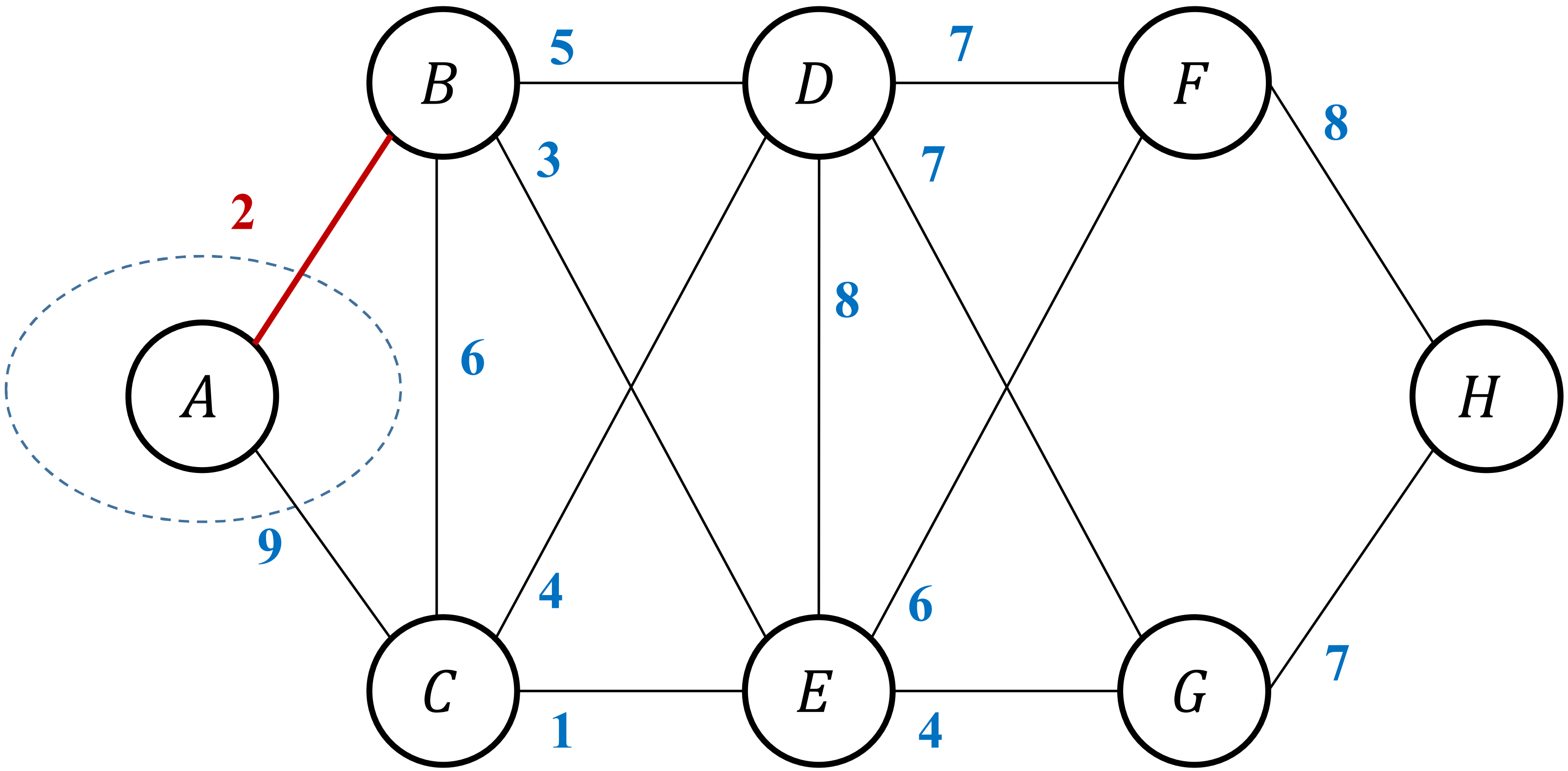
$S = \{A\} \qquad T = \{\}$



Esercizio E

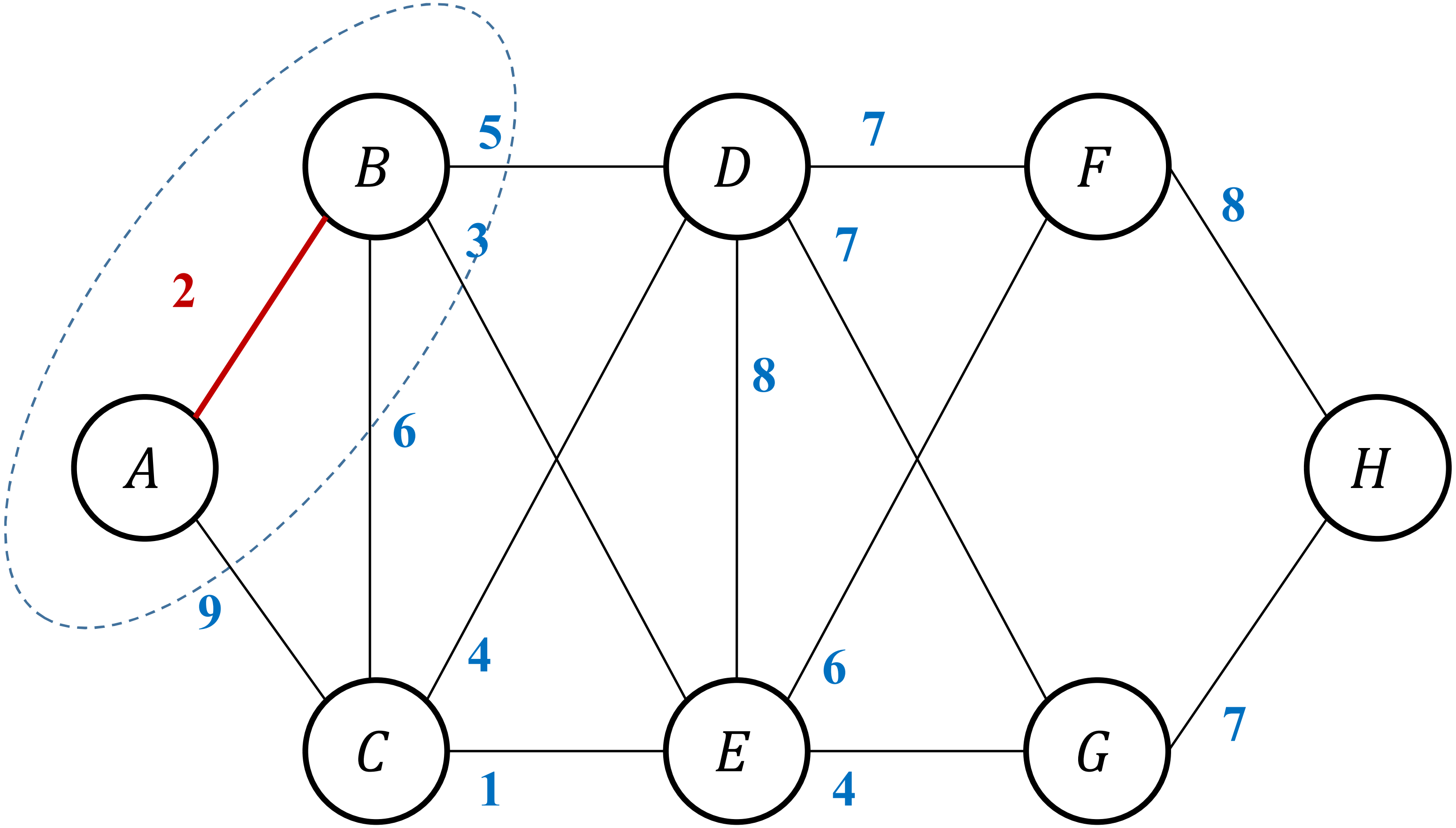
Lati di taglio

$S = \{A\} \qquad T = \{\}$



Esercizio E

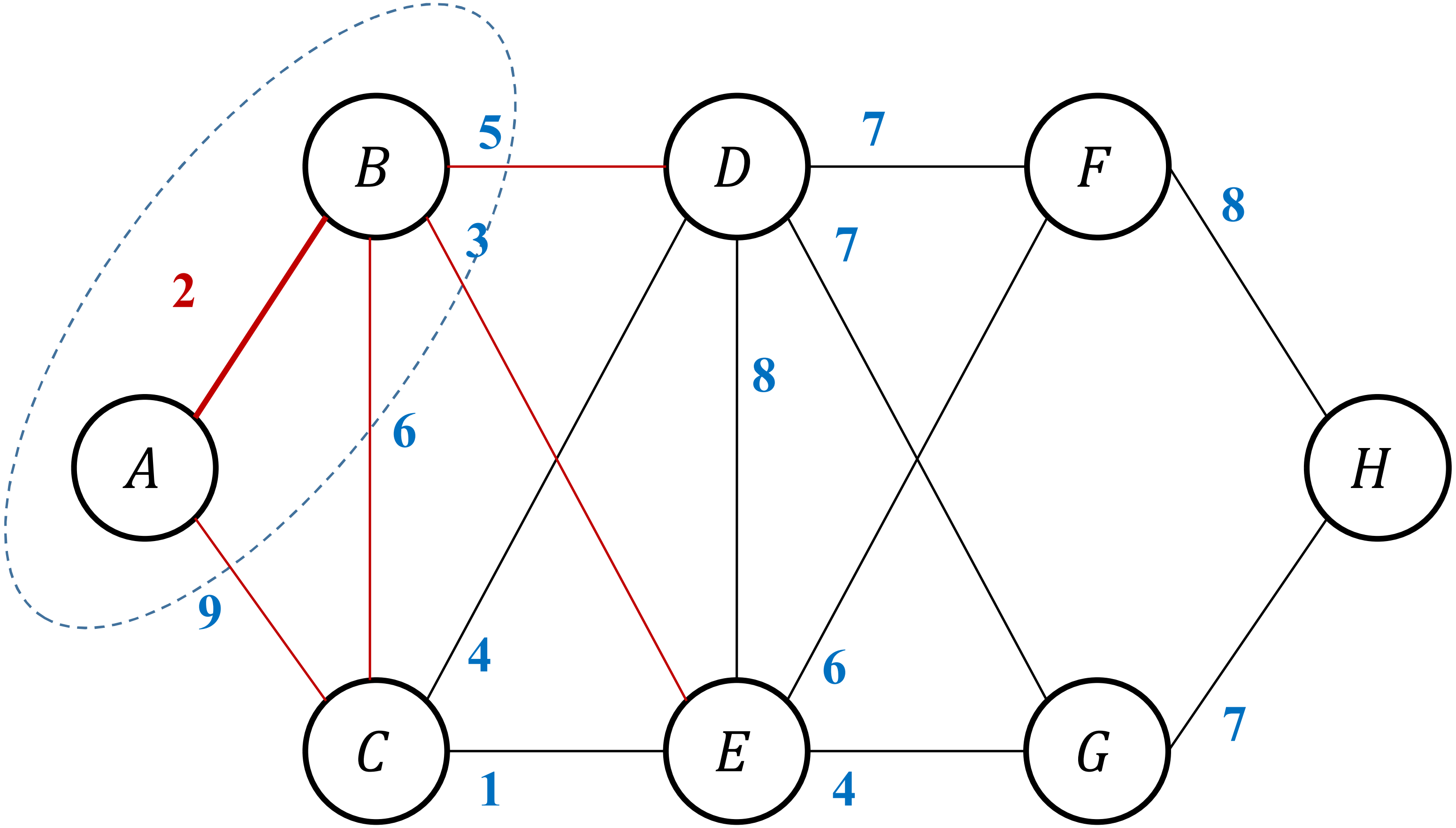
Aggiornamento $S = \{A, B\}$ $T = \{(A, B)\}$



Esercizio E

Lati di taglio

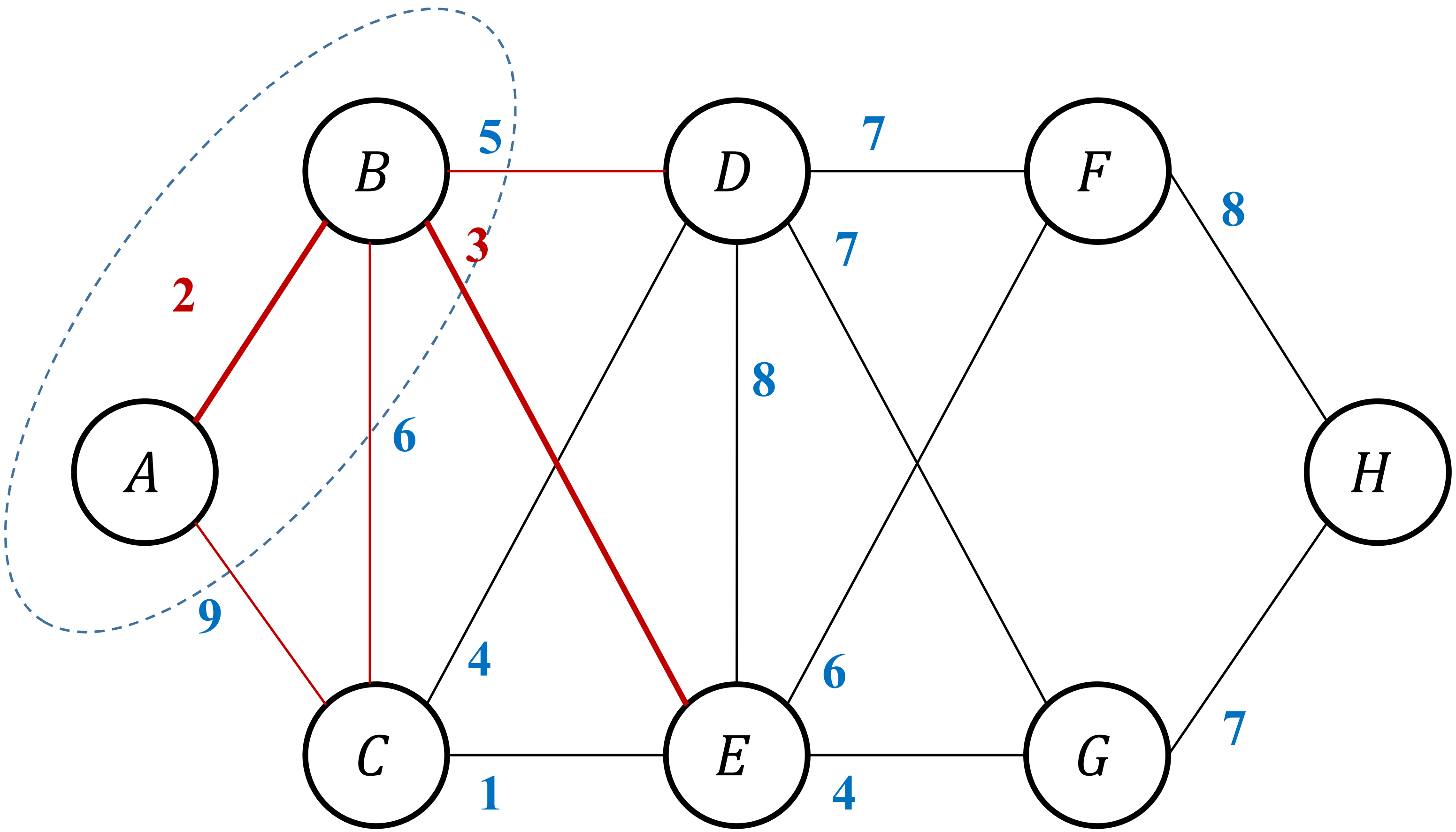
$S = \{A, B\}$ $\quad$ $T = \{(A, B)\}$



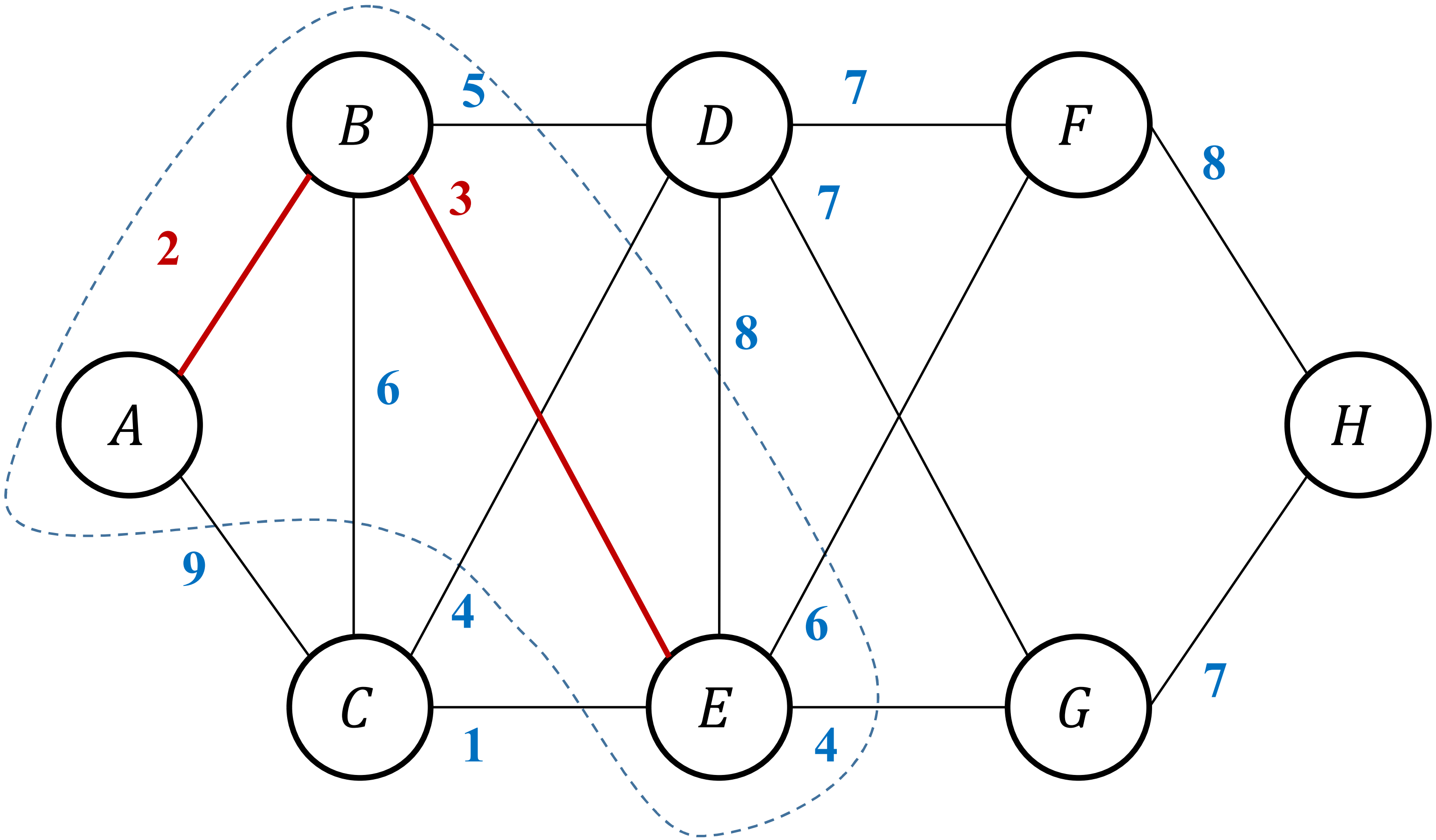
Esercizio E

Lati di taglio

$S = \{A, B\}$ $T = \{(A, B)\}$

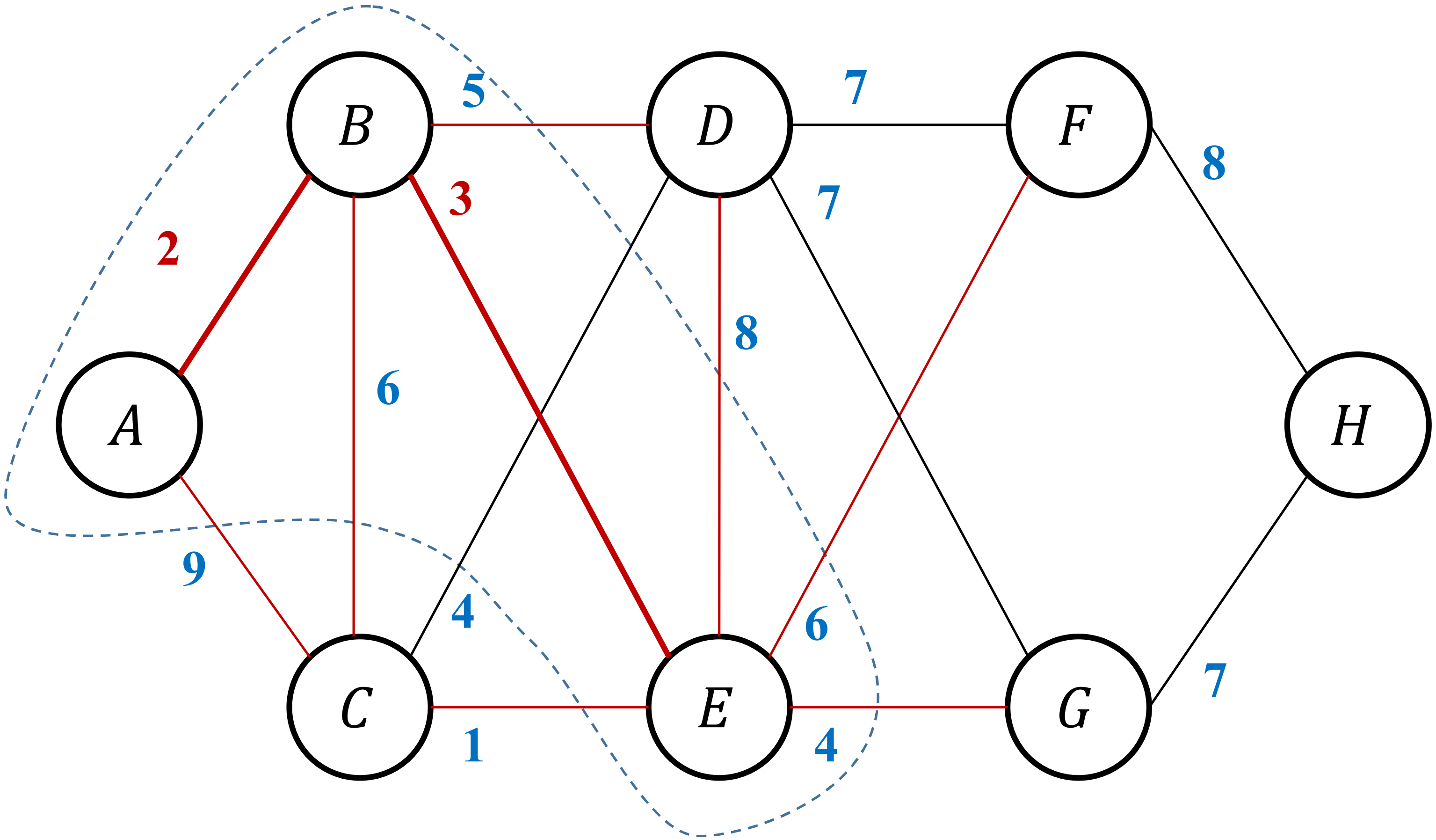


Aggiornamento $S = \{A, B, E\}$ $T = \{(A, B), (B, E)\}$



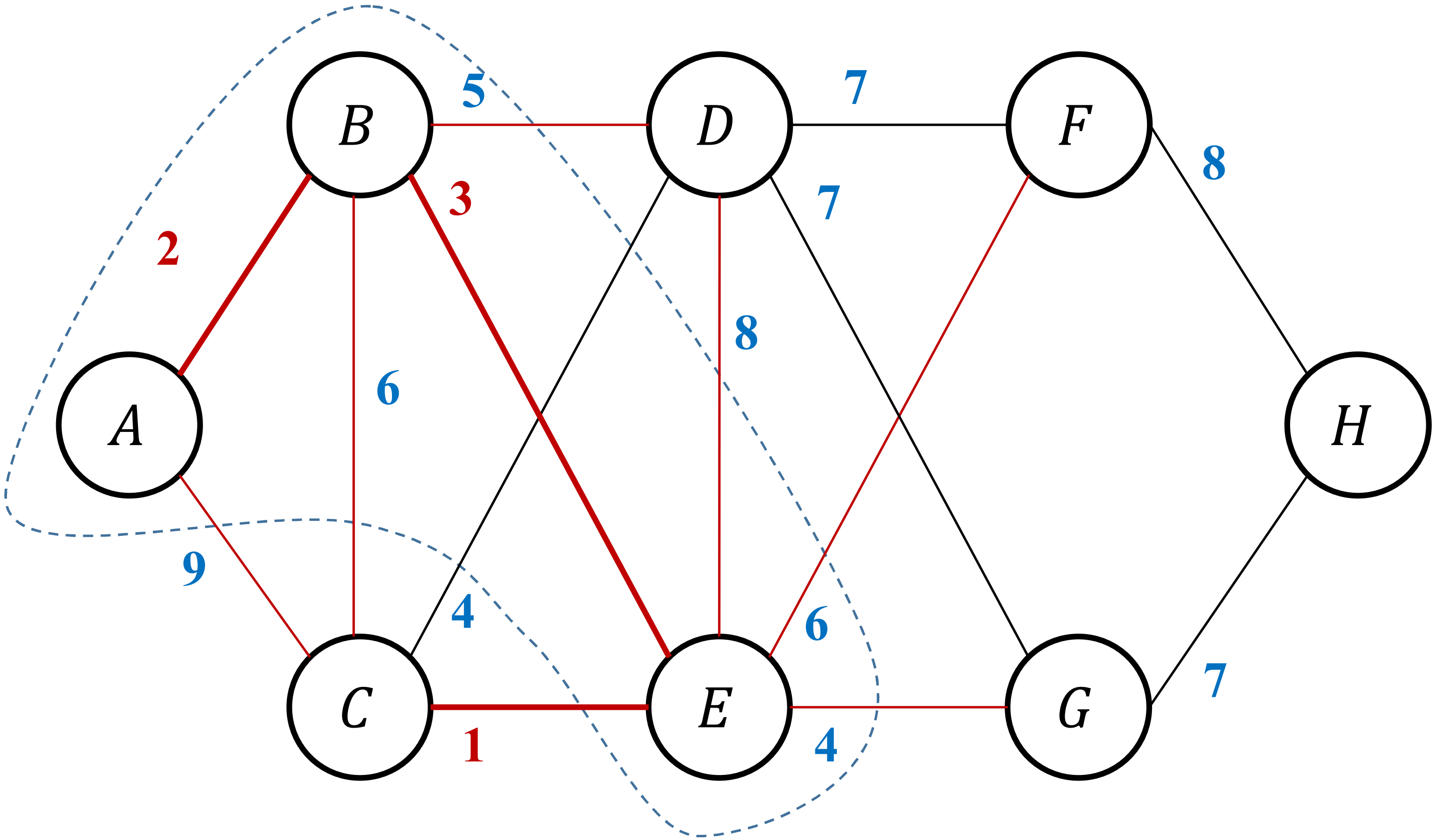
Lati di taglio

$S = \{A, B, E\}$ $T = \{(A, B), (B, E)\}$

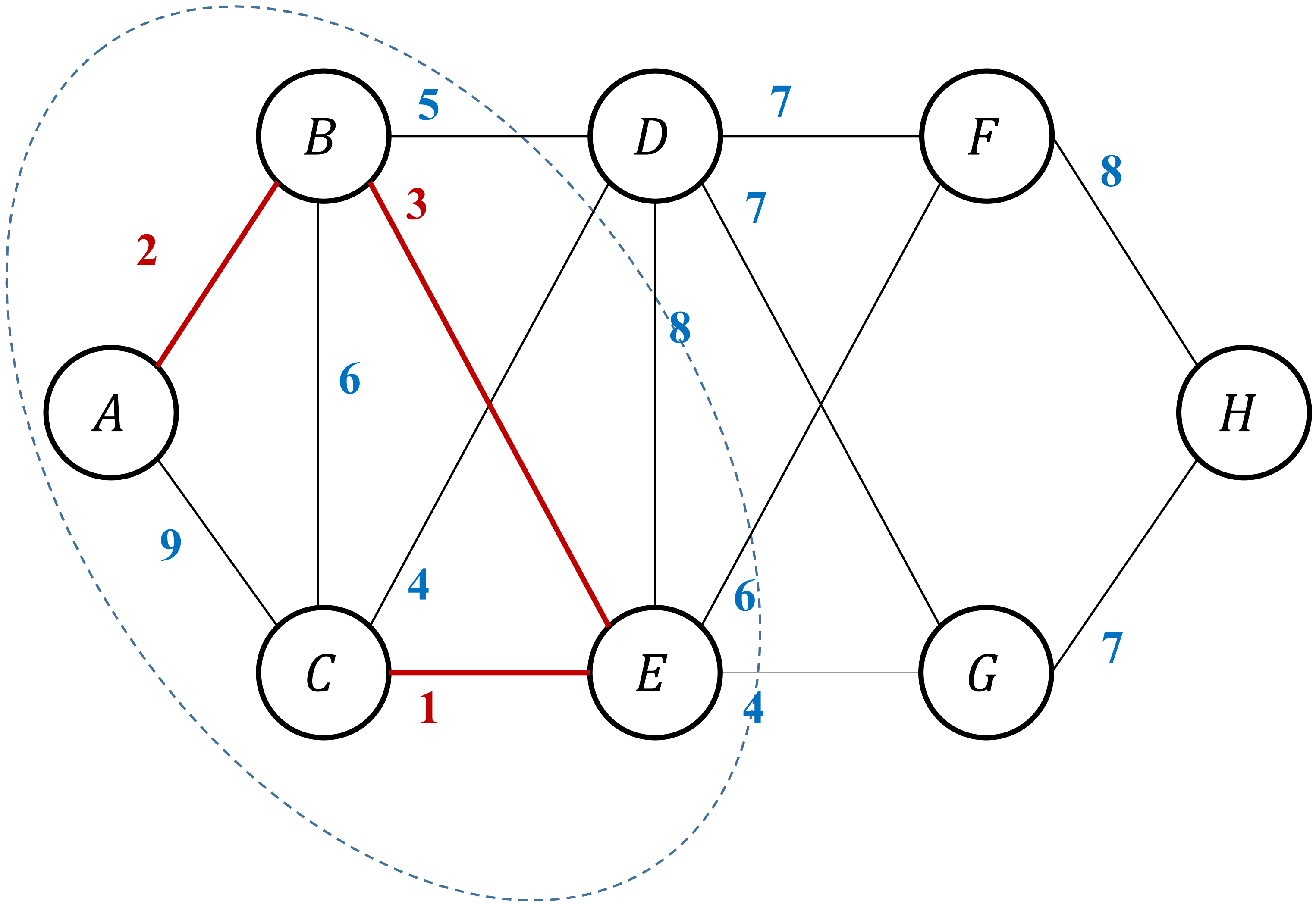


Lati di taglio

$S = \{A, B, E\}$ $\quad T = \{(A, B), (B, E)\}$

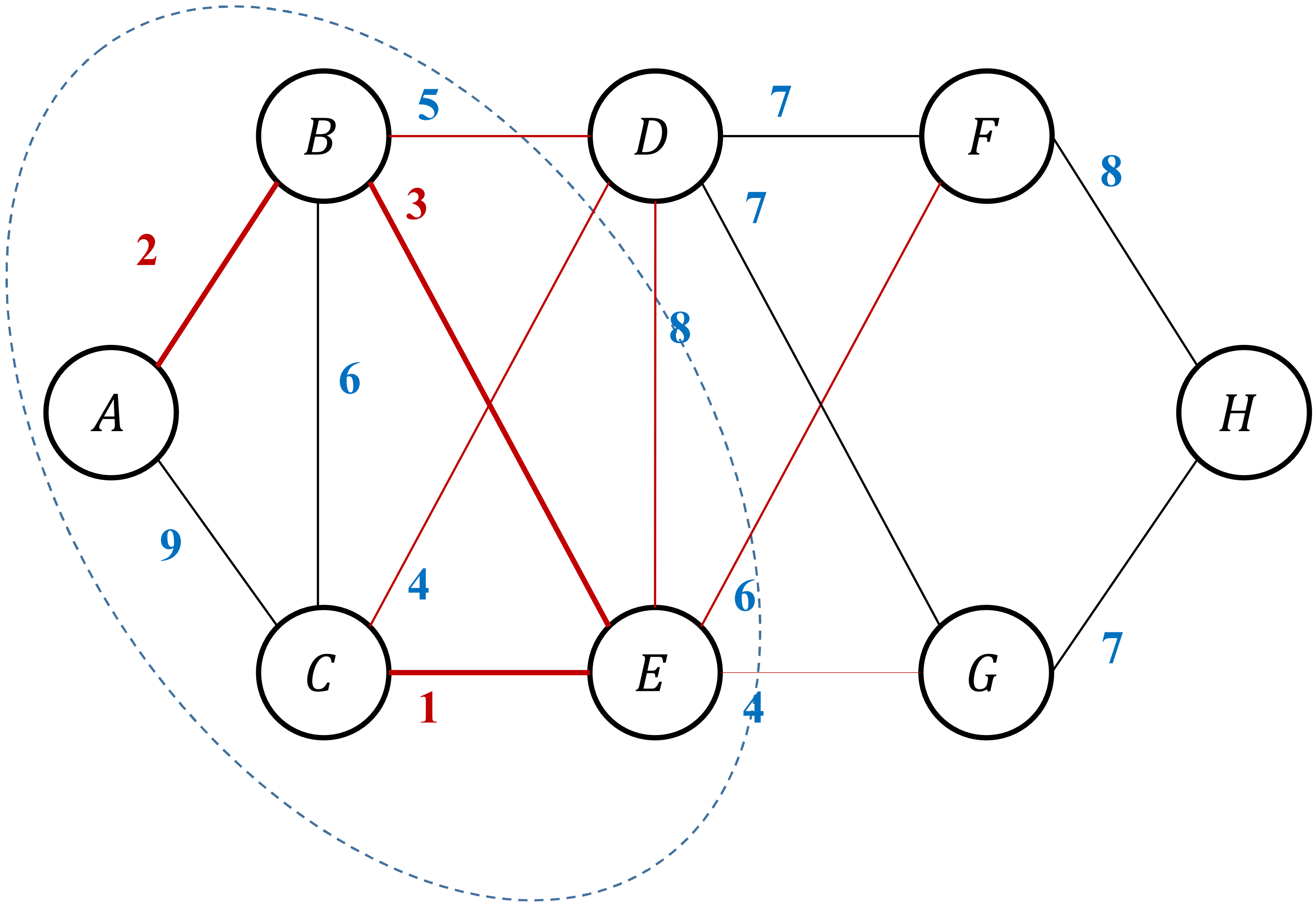


Aggiornamento $S = \{A, B, C, E\}$ $T = \{(A, B), (B, E), (E, C)\}$



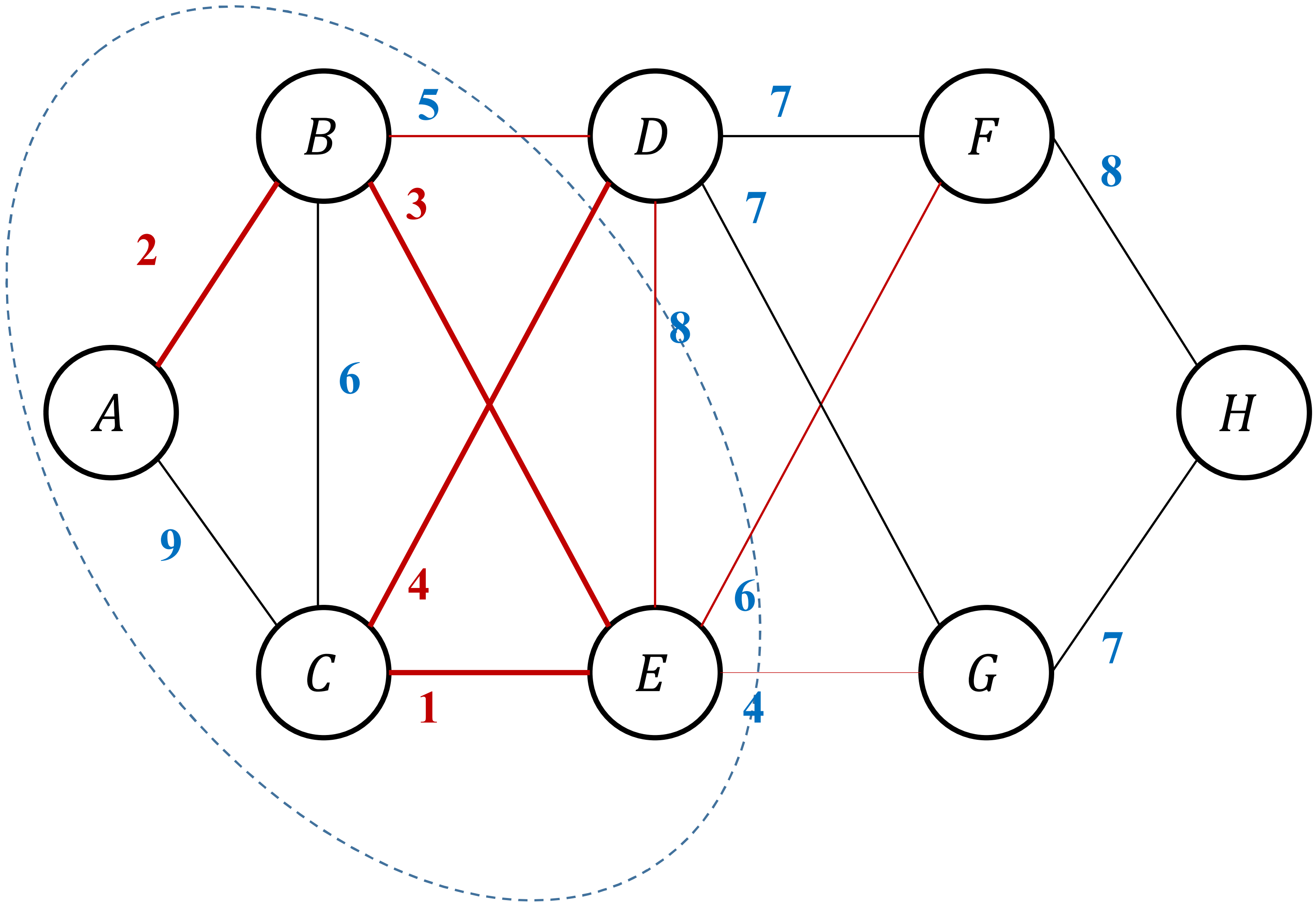
Esercizio E

Lati di taglio $\qquad S = \{A, B, C, E\} \qquad T = \{(A, B), (B, E), (E, C)\}$

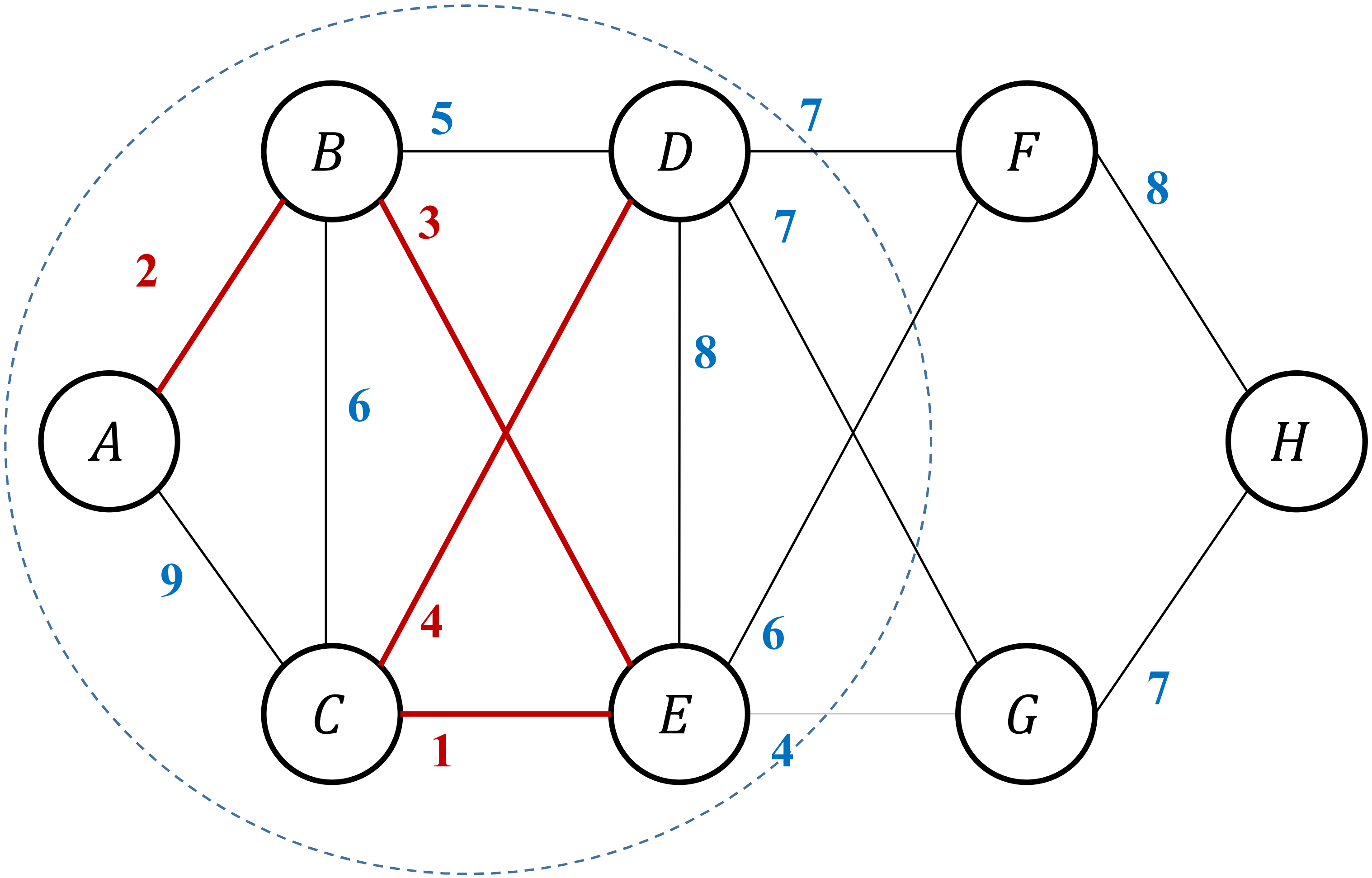


Esercizio E

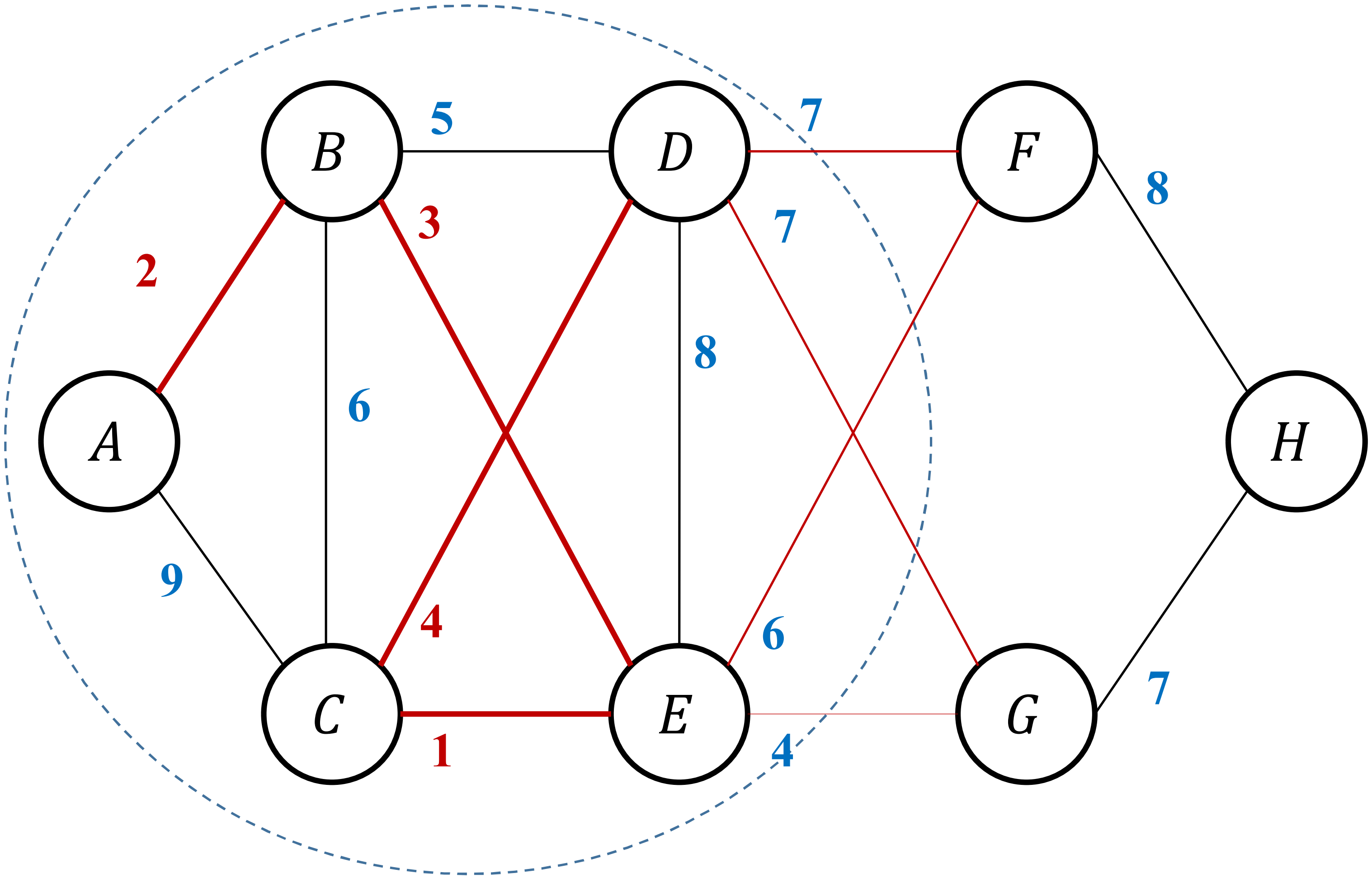
Lati di taglio $\quad S = \{A, B, C, E\} \quad T = \{(A, B), (B, E), (E, C)\}$



Aggiornamento $S = \{A, B, C, D, E\}$ $T = \{(A, B), (B, E), (E, C), (C, D)\}$

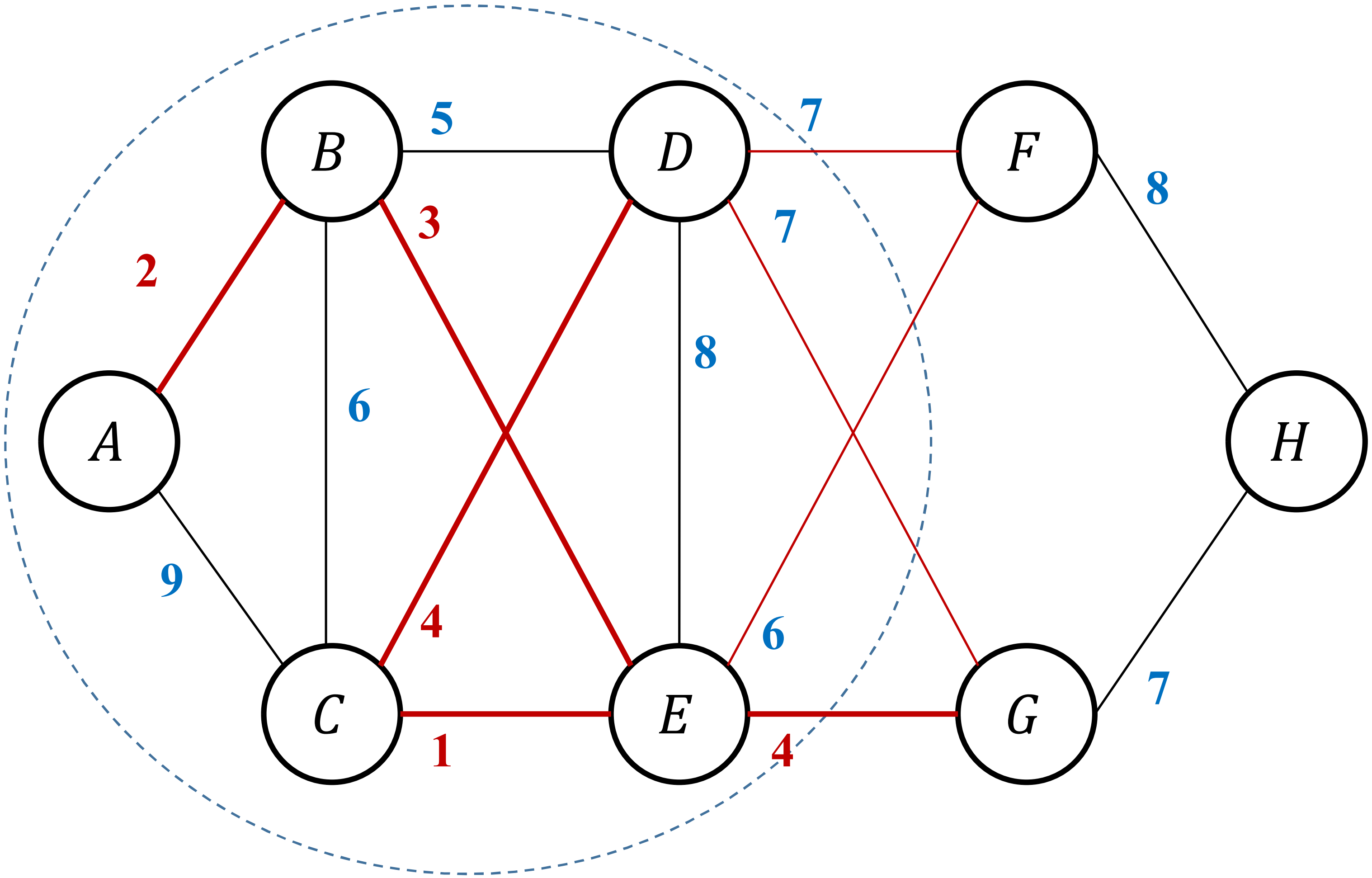


Lati di taglio $S = \{A, B, C, D, E\}$ $T = \{(A,B),(B,E),(E,C),(C,D)\}$

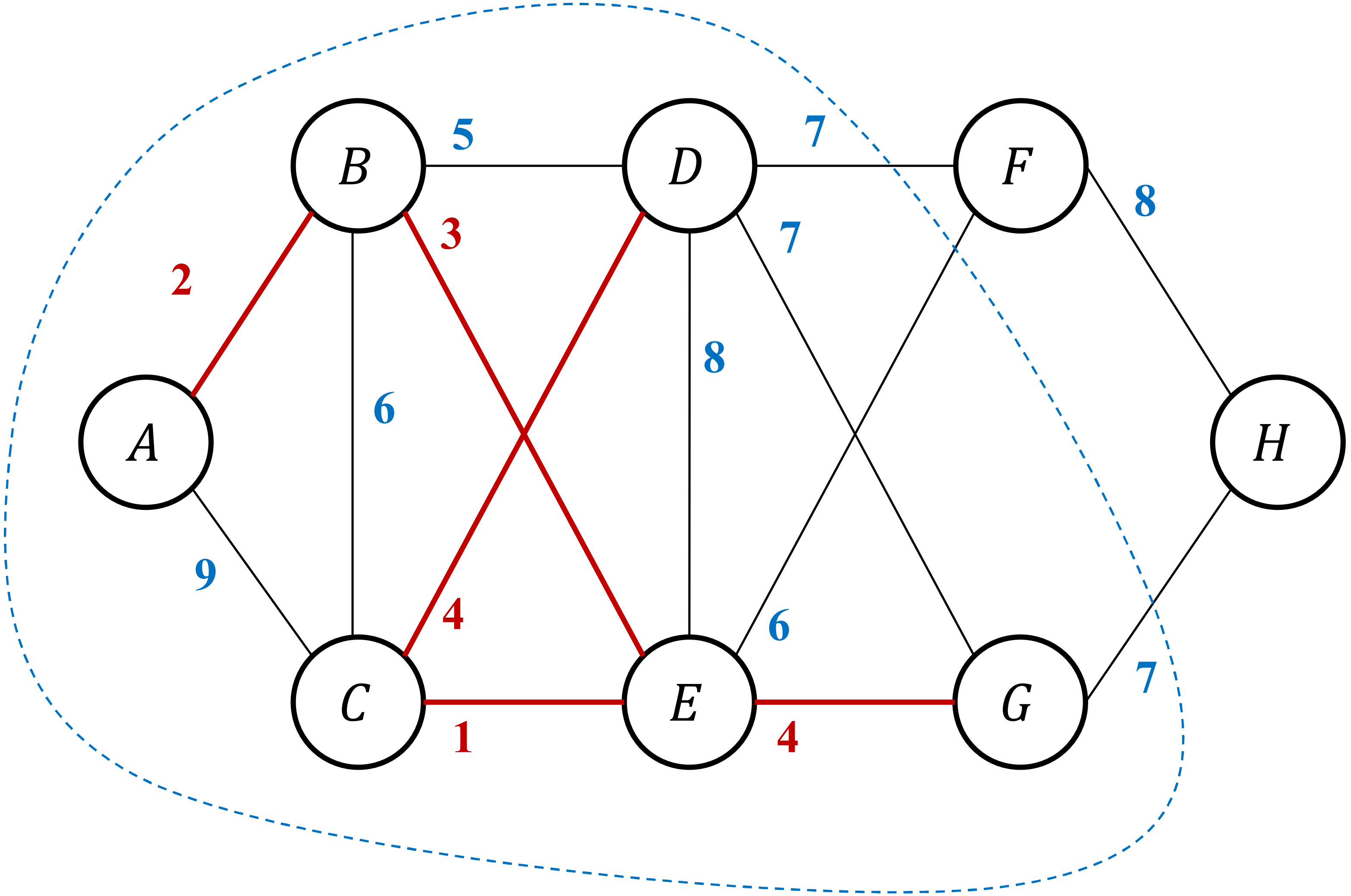


Esercizio E

Lati di taglio $S = \{A, B, C, D, E\}$ $T = \{(A, B), (B, E), (E, C), (C, D)\}$

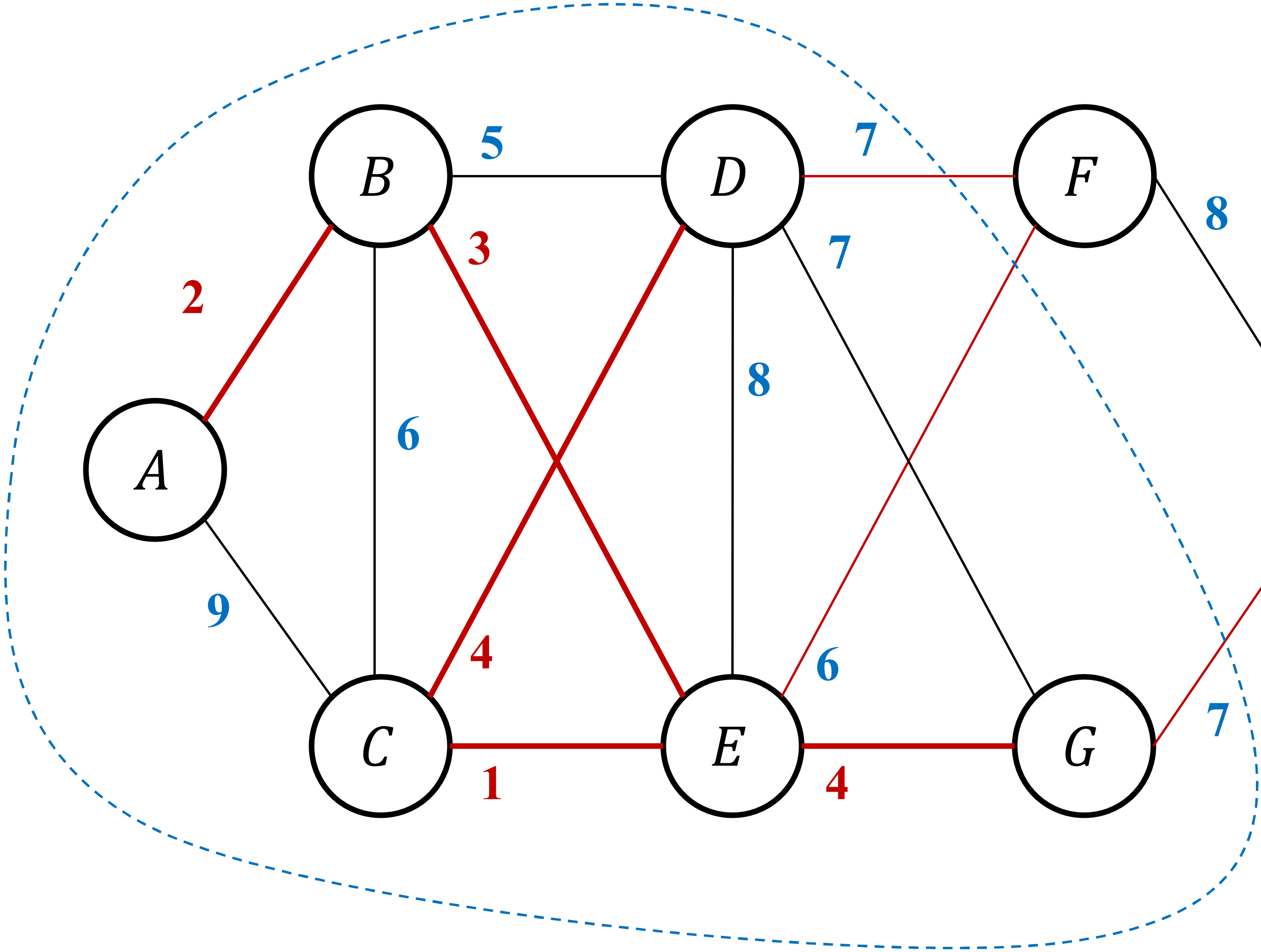


Aggiornamento $S = \{A, B, C, D, E, G\}$ $T = \{(A, B), (B, E), (E, C), (C, D), (E, G)\}$



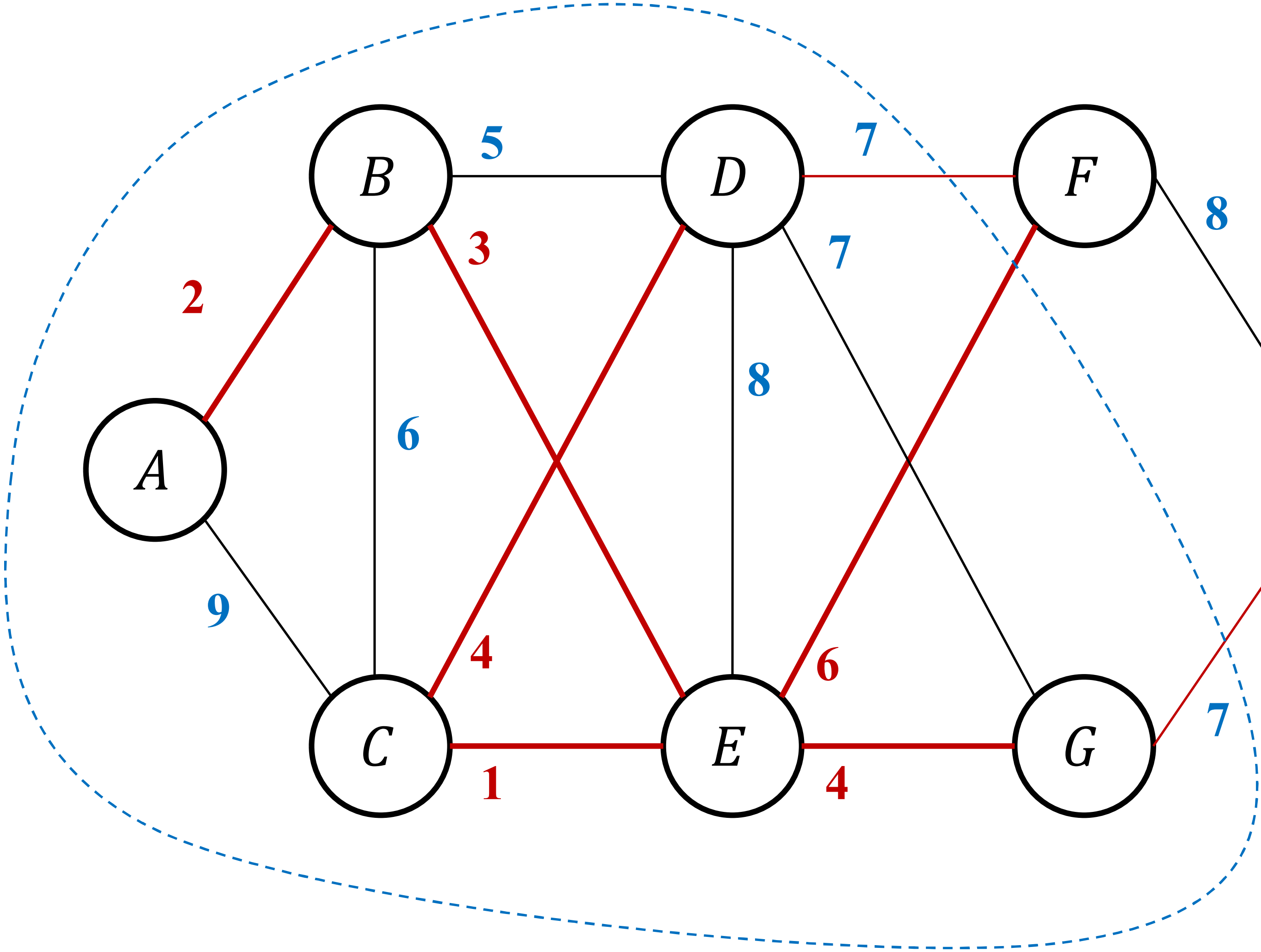
Lati di taglio

$S = \{A, B, C, D, E, G\}$ $T = \{(A, B), (B, E), (E, C), (C, D), (E, G)\}$



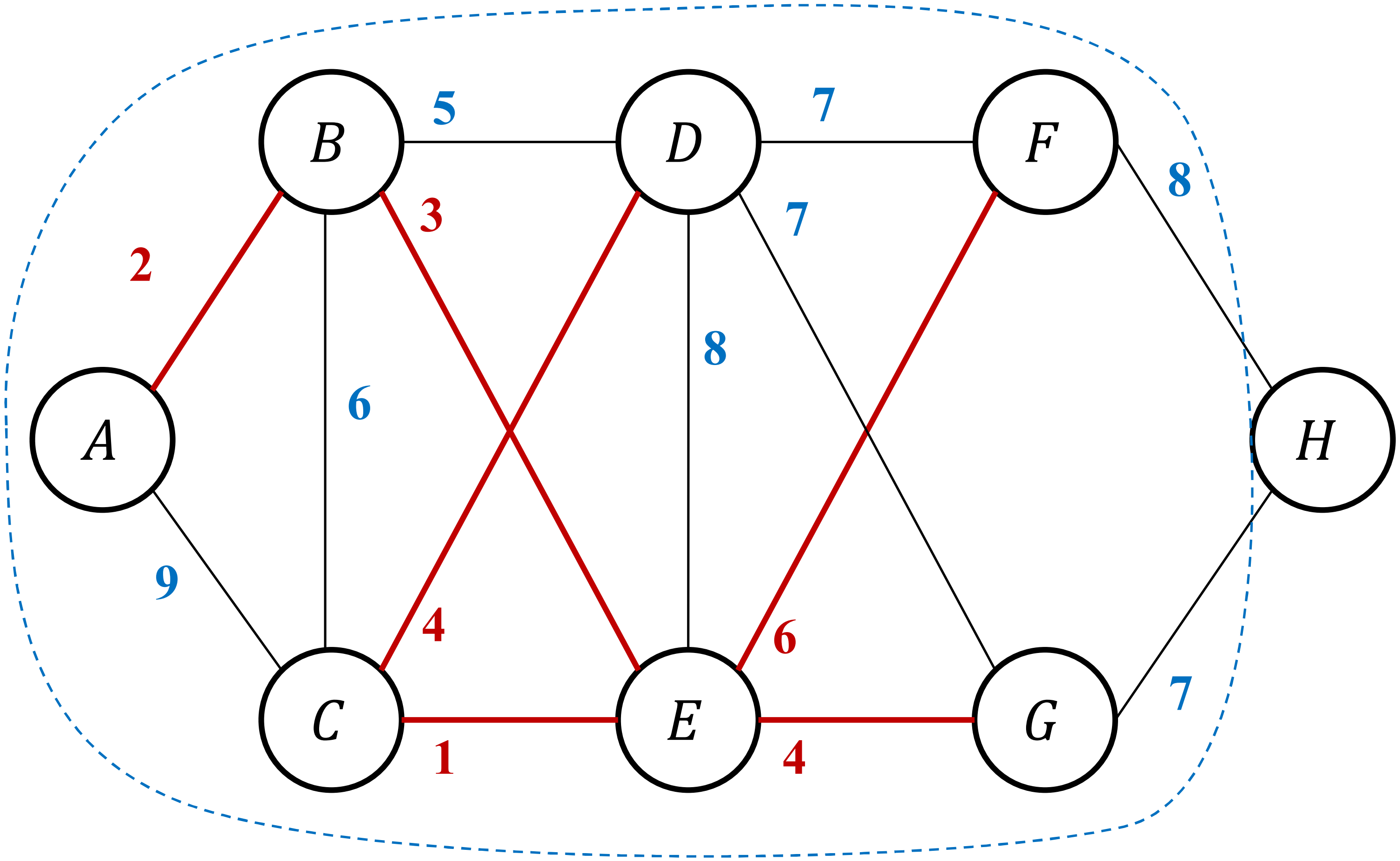
Esercizio E

Lati di taglio $S = \{A, B, C, D, E, G\}$ $T = \{(A,B), (B,E), (E,C), (C,D), (E,G)\}$

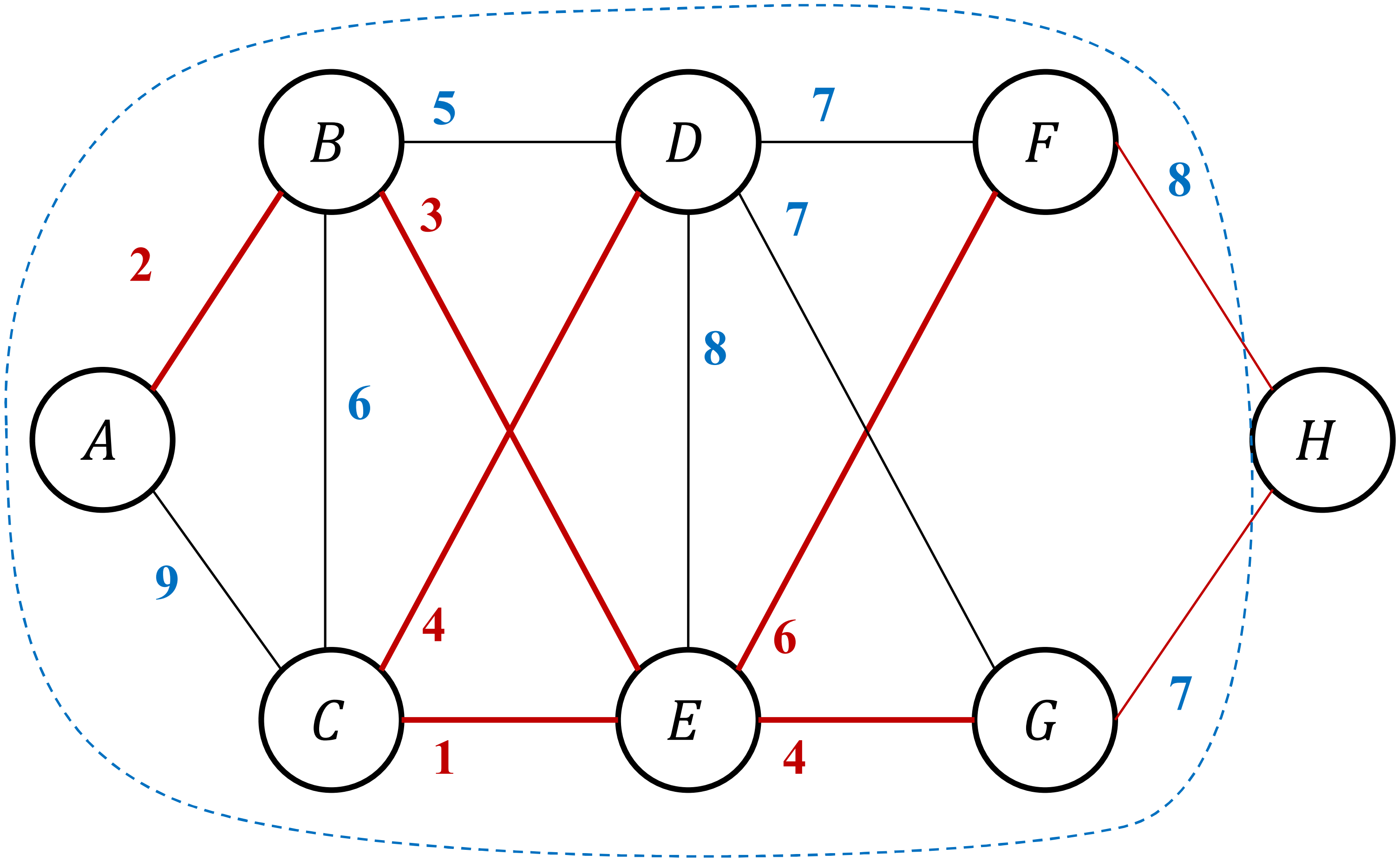


Esercizio E

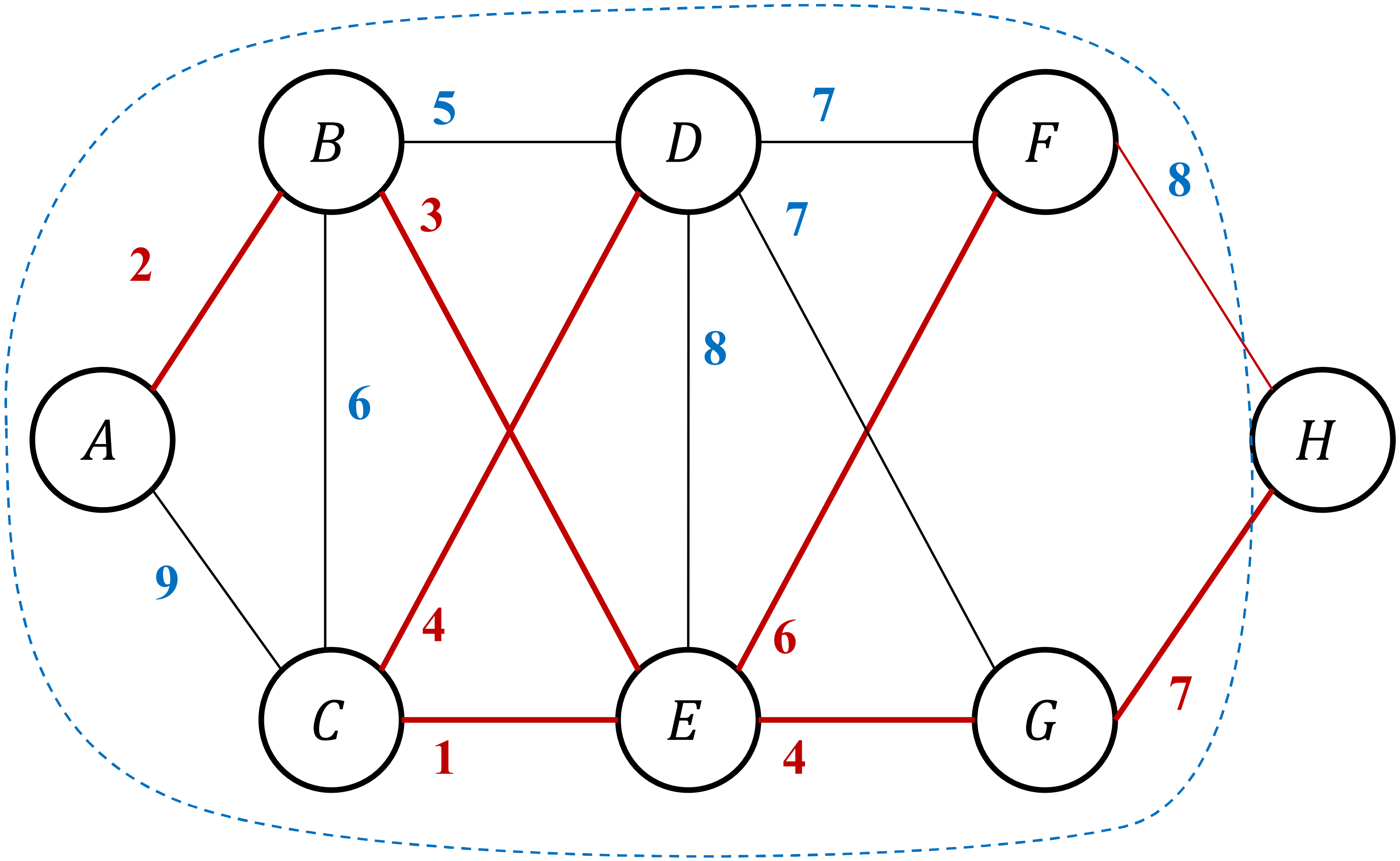
Aggiornamento $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ $T = \{(A, B), (B, E), (E, C), (C, D), (E, G), (E, F)\}$



Lati di taglio $S=\{A,B,C,D,E,F,G\}$ $T=\{(A,B),(B,E),(E,C),(C,D),(E,G),(E,F)\}$

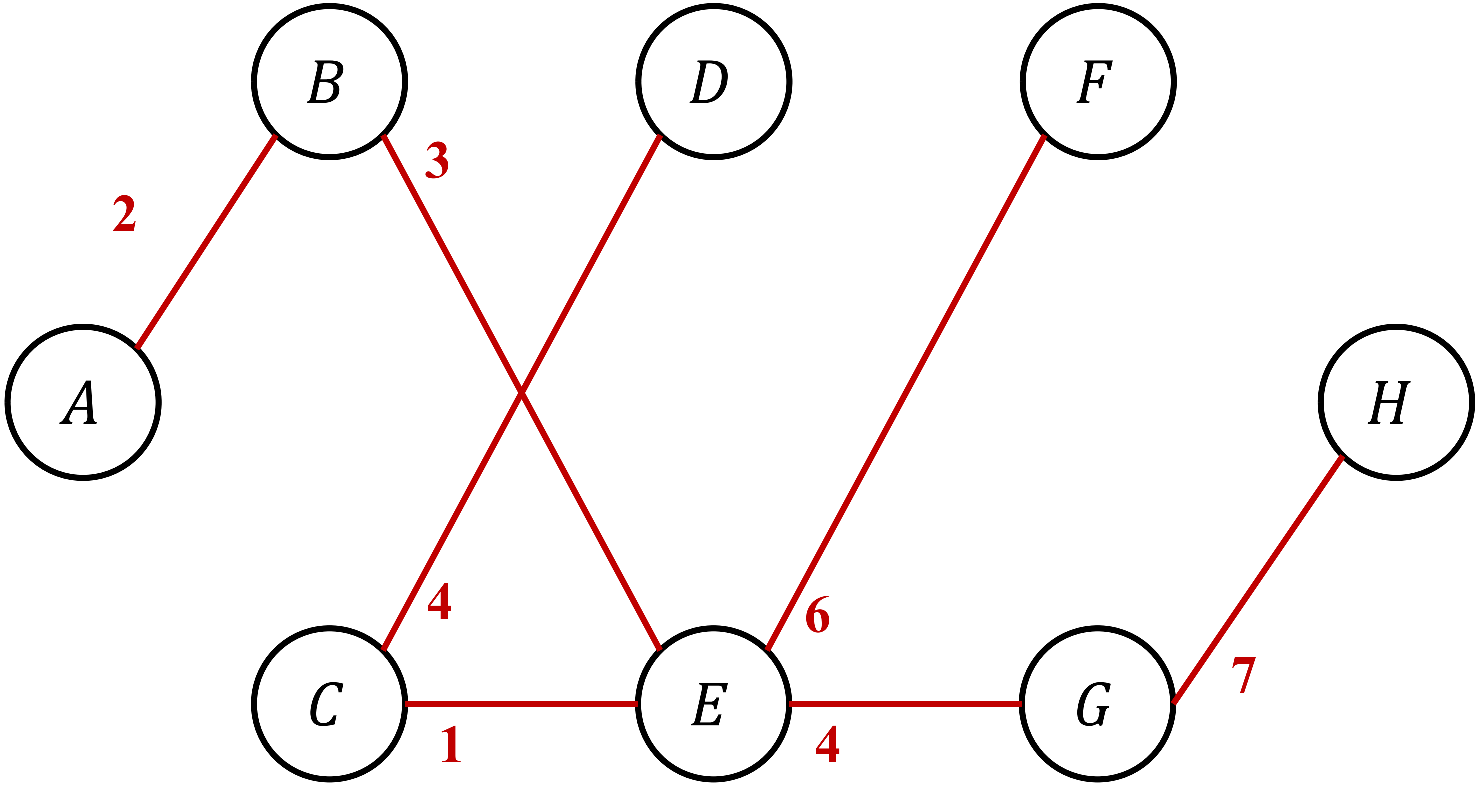


Lati di taglio $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ $T = \{(A, B), (B, E), (E, C), (C, D), (E, G), (E, F)\}$



Lati di taglio

Costo minimo: 27



Takeaway

1. Massimo flusso e taglio di capacità minima
2. Requisiti applicativi degli algoritmi per cammini minimi
3. Differenze tra algoritmi di Kruskal e Prim

1. Massimo flusso e taglio di capacità minima

- Teorema max flow – min cut

  ✓ Data una rete di flusso $G = (N,A)$ il valore del flusso massimo coincide con la capacità minima dei tagli $s - t$.

Takeaway

2. Requisiti applicativi degli algoritmi per cammini minimi

- Floyd-Warshall sempre applicabile (determina i cammini minimi in grafi senza cicli di costo negativo);
- Dijkstra applicabile in grafi con archi di costo non-negativo;
- Etichette applicabile in grafi ordinati topologicamente.

3. Differenze tra algoritmi di Kruskal e Prim

- Entrambi gli algoritmi determinano l'albero di supporto di costo minimo.
- Prim costruisce dei sottografi parziali nelle iterazioni intermedie connessi, a differenza di Kruskal.

Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2020/2021

RICERCA OPERATIVA

Modellazione in GAMS

Giovanni Micheli

- Insiemi
  - ✓ J : insieme delle tipologie di abitazioni

$$J = \{1,2,3,4\}$$

- Dati - Vettori
  - Tax_j Tassa [K$] riscossa da un'abitazione di tipo j
  - S_j Spazio [acri] occupato da un'abitazione di tipo j
  - cc_j Costo di costruzione [k$] dell'abitazione di tipo j

- Dati - Scalari

N_{max}	Numero massimo di vecchie abitazioni demolibili	**300**
$S0$	Spazio occupato da una vecchia abitazione [acri]	**0.25**
cd	Costo di demolizione [k$]	**2**
qs	Quota di spazio da destinare a strade e servizi	**0.15**
p_{34}	Percentuale minima di trilocali e quadrilocali	**0.25**
p_1	Percentuale minima di monolocali	**0.2**
p_2	Percentuale minima di bilocali	**0.1**
B	Budget a disposizione [k$]	**15 000**

Esercizio 1

- Variabili Decisionali
  - x_j Numero di abitazioni di tipo j costruite
  - y Numero di vecchie abitazioni demolite
  - z Variabile obiettivo : tasse totali riscosse [k$]

Esercizio 1

- Funzione obiettivo

$$\max\ z = \sum_j Tax_j \cdot x_j$$

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Demolizioni

    Limite al numero di edifici che possono essere demoliti

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Demolizioni

$$y \leq N_{max}$$

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Demolizioni

$$y \leq N_{max}$$

  - ✓ Spazio

Lo spazio occupato dai nuovi edifici non deve eccedere lo spazio ottenuto demolendo i vecchi edifici, al netto della quota non edificabile

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Demolizioni

$$y \leq N_{max}$$

  - ✓ Spazio

Spazio occupato dai nuovi edifici

$$\sum_j S_j \cdot x_j$$

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Demolizioni

$$y \leq N_{max}$$

  - ✓ Spazio

Spazio occupato dai nuovi edifici

$$\sum_j S_j \cdot x_j \leq \boxed{S0 \cdot y(1 - qs)}$$

Spazio utilizzato non solo per la costruzione di edifici ma anche di strade

Spazio ottenuto dalla demolizione e disponibile a fini residenziali

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Lower bound su trilocali e quadrilocali

Presenza di una percentuale minima di trilocali e quadrilocali tra tutte le abitazioni costruite

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Lower bound su trilocali e quadrilocali

$$\frac{x_3 + x_4}{\sum_j x_j} \geq p_{34}$$

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Lower bound su trilocali e quadrilocali

Non linearità ←

$$\frac{x_3 + x_4}{\sum_j x_j} \geq p_{34}$$

Vincolo non lineare non c'occuperemo mai di prodotti o rapporti tra variabili decisionali

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Lower bound su trilocali e quadrilocali

Non linearità ←

$$\frac{x_3 + x_4}{\sum_j x_j} \geq p_{34}$$

↓

$$(x_3 + x_4) \geq p_{34} \sum_j x_j$$

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Lower bound su monolocali

$$x_1 \geq p_1 \sum_j x_j$$

  - ✓ Lower bound su bilocali

$$x_2 \geq p_2 \sum_j x_j$$

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Budget

    I costi totali sostenuti non devono eccedere il budget a disposizione

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Budget

$$\sum_j cc_j \cdot x_j$$

Costo di costruzione dei nuovi edifici

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Budget

Costo di demolizione dei vecchi edifici

$$\sum_j cc_j \cdot x_j + \boxed{cd \cdot y}$$

Costo di costruzione dei nuovi edifici

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Budget

Costo di demolizione dei vecchi edifici

$$\sum_j cc_j \cdot x_j + \boxed{cd \cdot y} \leq B$$

Costo di costruzione dei nuovi edifici

Budget totale a disposizione

Esercizio 1

- Vincoli sulle variabili decisionali

  - $x_j \geq 0 \quad \forall j$
  - $y \geq 0$

  $\longrightarrow$ LP

- Programmazione lineare
- Quando lavoriamo con variabili non negative siamo nella classe di programmazione lineare quindi LP

Data l'esecuzione del codice come otteniamo dei risultati frazionarie con, ma visto il tipo di problema che stiamo affrontando dove vi è la costruzione di un N numero di casi è necessario avere i dati interi ossia non frazionari

- variabili intere => integers
- LP lavora con variabili continue => MIP perché abbiamo variabili intere

Games non fornisca per default la soluzione ottima a problemi di programmazione lineare mista intera ma di solito si accontenta di trovare un sub-ottimo, dobbiamo dunque imporre:

- Gap di ottimalita assoluto pari a zero => Urban.optca = 0 - Differenza tra ottimale - quella ottenuta
- Gap di ottimalita relativo pari a zero => Urban.optcr = 0 - Differenza in percentuale

Esercizio 1

- Vincoli sulle variabili decisionali

  - $x_j \geq 0 \quad \forall j$
  - $y \geq 0$

  $\longrightarrow$ LP

  - $x_j \in \mathbb{N} \quad \forall j$
  - $y \in \mathbb{N}$

  $\longrightarrow$ MIP $\longrightarrow$ Controllo del gap di ottimalità

Esercizio 2

- Insiemi

  ✓ T : insieme dei mesi dell'orizzonte di pianificazione

$$T = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Esercizio 2

- Dati - Vettori

  - D_t Domanda al mese t
  - cp_t Costo unitario di produzione [$] al mese t

Esercizio 2

- Dati - Scalari
  - cs Costo unitario di stoccaggio [$] **8**
  - I_0 Giacenza iniziale del magazzino **50**
  - I_{max} Capacità massima del magazzino **100**

Esercizio 2

- Variabili Decisionali
  - x_t Produzione al mese t
  - I_t Livello del magazzino alla fine del mese t
  - z Variabile obiettivo : costi totali [$]

Esercizio 2

- Funzione obiettivo

Costo di stoccaggio

$$\min\ z = \underbrace{\sum_t cp_t \cdot x_t}_{\text{Costo di produzione}} + cs \sum_t I_t$$

Esercizio 2

- Vincoli

✓ Bilancio

In **ogni** mese la quantità resa disponibile deve eguagliare la quantità utilizzata

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Bilancio
    - Mese 1 $I_0 + x_1 = D_1 + I_1$

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Bilancio
    - Mese 1 $I_0 + x_1 = D_1 + I_1$
    - Mese 2 $I_1 + x_2 = D_2 + I_2$

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Bilancio
    - Mese 1 $I_0 + x_1 = D_1 + I_1$
    - Mese 2 $I_1 + x_2 = D_2 + I_2$
    - $\vdots$ $\vdots$
    - Mese 6 $I_5 + x_6 = D_6 + I_6$

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Bilancio

$$I_{t-1} + \underline{\underline{I_0|_{t=1}}} + x_t = D_t + I_t \quad \forall t$$

Considerare questo
operatore solo per t = 0

GAMS: I0$(ord(t)=1)

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Bilancio

$$I_{t-1} + I_0|_{t=1} + x_t = D_t + I_t \quad \forall t$$

Variabile decisionale (definita solo per $t > 1$)

Parametro in input (da includere nell'equazione solo per $t = 1$)

Esercizio 2

- Vincoli sulle variabili decisionali
  - $x_t \geq 0 \quad \forall t$
  - $I_t \geq 0 \quad \forall t$

$\longrightarrow$ LP

  - $x_t \in \mathbb{N} \quad \forall t$
  - $I_t \in \mathbb{N} \quad \forall t$

$\longrightarrow$ MIP $\longrightarrow$ Controllo del gap di ottimalità

Esercizio 2

- Vincoli addizionali
  - ✓ Livello finale del magazzino

$$I_6 = I_0$$

  - ✓ Livello massimo del magazzino

$$I_t \leq I_{max} \quad \forall t$$

Esercizio 3

- Insiemi
  - ✓ J : insieme dei prodotti

$$J = \{P1, P2, P3, P4\}$$

  - ✓ I : insieme dei reparti

$$I = \{A, B, C, D\}$$

Esercizio 3

- Dati - Vettori
  - Pr_j Profitto unitario [$] del prodotto j
  - Pen_j Penalità unitaria [$] del prodotto j
  - D_j Domanda del prodotto j
  - C_i Capacità [h] del reparto i

Esercizio 3

- Dati - Matrici
  - $tl_{i,j}$ Tempo di lavorazione [h] del prodotto j nel reparto i

Esercizio 3

- Variabili Decisionali
  - x_j Quantità del prodotto j realizzata
  - s_j Quantità di domanda del prodotto j non soddisfatta
  - z Variabile obiettivo : profitti totali [$]

Esercizio 3

- Funzione obiettivo

Penalità per il non soddisfacimento della domanda

$$\max\ z = \underbrace{\sum_j Pr_j \cdot x_j}_{\text{Ricavi derivanti dal soddisfacimento della domanda}} - \overbrace{\sum_j Pen_j \cdot s_j}$$

Ricavi derivanti dal soddisfacimento della domanda

Esercizio 3

- Vincoli
  - ✓ Capacità

    Il tempo di lavorazione di **ogni** reparto non deve eccedere la rispettiva capacità produttiva

Esercizio 3

- Vincoli
  - ✓ Capacità

$$\sum_j tl_{i,j} \cdot x_j \leq C_i \quad \forall i$$

Esercizio 3

- Vincoli
  - ✓ Capacità

$$\sum_j tl_{i,j} \cdot x_j \leq C_i \quad \forall i$$

  - ✓ Domanda

    La domanda di **ciascun** prodotto è pari alla quota soddisfatta più la quota non soddisfatta

Esercizio 3

- Vincoli
  - ✓ Capacità

$$\sum_j tl_{i,j} \cdot x_j \leq C_i \quad \forall i$$

  - ✓ Domanda

$$x_j + s_j = D_j \quad \forall j$$

Esercizio 3

- Vincoli sulle variabili decisionali
  - $x_j \geq 0 \quad \forall j$
  - $s_j \geq 0 \quad \forall j$

  $\longrightarrow$ LP

  - $x_j \in \mathbb{N} \quad \forall j$
  - $s_j \in \mathbb{N} \quad \forall j$

  $\longrightarrow$ MIP $\longrightarrow$ Controllo del gap di ottimalità

Takeaway

1. Linearità dei modelli

2. Utilizzo di variabili intere

Takeaway

1. Linearità dei modelli

   - Tutti i modelli formulati nelle nostre applicazioni dovranno soddisfare la condizione di linearità di vincoli e funzione obiettivo
     - ✓ Non saranno mai ammessi prodotti tra variabili decisionali.

Takeaway

2. Utilizzo di variabili intere

   - Per ottenere risultati interi non è sufficiente modificare l'attributo Positive Variables in Integer Variables
     - ✓ Va controllato l'upper bound
     - ✓ Va modificata la classe di ottimizzazione (MIP)
     - ✓ Va controllato il gap di ottimalità

Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2020/2021

RICERCA OPERATIVA

Le Variabili Binarie

Giovanni Micheli

Introduzione

- Nei modelli di ottimizzazione le variabili binarie vengono utilizzate per
  1. Rappresentare scelte dicotomiche
  2. Trattare alcune funzioni obiettivo non lineari
     - Discontinue
  3. Modellare minimi tecnici
  4. Esprimere condizioni logiche

Esercizio 1

- Insiemi
  - ✓ I : insieme degli equipaggi

$$I = \{1,2,3,4,5\}$$

  - ✓ J : insieme dei servizi di linea

$$J = \{1,2,3,4,5\}$$

Esercizio 1

- Dati - Matrici
  - $C_{i,j}$ Costo di assegnamento dell'equipaggio i al servizio di linea j

Esercizio 1

- Variabili Decisionali
  - $y_{i,j}$ Binaria: 1 se l'equipaggio i è assegnato al servizio di linea j – 0 altrimenti
  - z Variabile obiettivo : costi totali di assegnamento

Esercizio 1

- Funzione obiettivo

Costi di assegnamento

$$\min\ z = \boxed{\sum_i \sum_j C_{i,j} y_{i,j}}$$

Esercizio 1

- Vincoli

✓ Assegnamento degli equipaggi

Ogni equipaggio deve essere assegnato ad una e una sola rotta

Esercizio 1

- Vincoli

✓ Assegnamento degli equipaggi

$$\sum_j y_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Assegnamento degli equipaggi

$$\sum_j y_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

  - ✓ Assegnamento dei servizi di linea

    Ogni servizio di linea deve essere assegnato ad uno e un solo equipaggio

Esercizio 1

- Vincoli
  - ✓ Assegnamento degli equipaggi

$$\sum_j y_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

  - ✓ Assegnamento dei servizi di linea

$$\sum_i y_{i,j} = 1 \quad \forall j$$

Esercizio 1

- Vincoli sulle variabili decisionali
  - $y_{i,j} \in \{0;1\} \quad \forall i, \forall j \longrightarrow$ MIP

Esercizio 1

- Vincoli sulle variabili decisionali
  - $y_{i,j} \in \{0;1\} \quad \forall i, \forall j \longrightarrow$ MIP
  - $y_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \longrightarrow$ LP

Una matrice Unimodulare vuol dire che il determinante di una qualsiasi sotto matrice estratta posso andare solo tre valori:
- 0
- +1
- -1

$\downarrow$

La totale unimodularità della matrice dei vincoli garantisce l'ottenimento di una soluzione intera pur lavorando con la PL

Se i dati in input sono dei dati interi allora anche la soluzione che otteniamo a una soluzione intero turno richiedendolo esplicitamente

Funzioni obiettivo discontinue

- Nella produzione del bene j, in caso di presenza, oltre al costo variabile c_j, di un costo fisso F_j (indipendente dalla quantità prodotta), la funzione di costo diventa

$$z_j(x_j) = \begin{cases} F_j + c_j x_j & \text{se } x_j > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

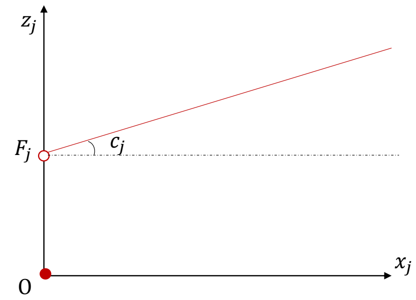
Produzione di un bene

Funzioni obiettivo discontinue

- Nella produzione del bene j, in caso di presenza, oltre al costo variabile c_j, di un costo fisso F_j (indipendente dalla quantità prodotta), la funzione di costo diventa

Costo di produzione del prodotto xj

$$z_j(x_j) = \begin{cases} F_j + c_j x_j & \text{se } x_j > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Funzione discontinua nell'orgine

Funzioni obiettivo discontinue

- Utilizzando le sole variabili x_j non è possibile risolvere la non linearità nell'origine indotta dalla presenza di costi fissi.

- Si introduce una variabile binaria y_j, a cui attribuire il seguente significato:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- La funzione di costo può quindi essere riscritta in forma lineare:

$$z_j(x_j, y_j) = F_j y_j + c_j x_j$$

Dipendenza da 2 variabili

Funzioni obiettivo discontinue

- Perché la modellazione sia corretta devono essere garantite le seguenti condizioni logiche:
  - se $x_j > 0$, allora $y_j = 1$
  - se $x_j = 0$, allora $y_j = 0$

- Queste condizioni logiche sono soddisfatte introducendo un maggiorante M_j e imponendo il seguente **vincolo di coerenza**:

$$\boxed{x_j \leq M_j y_j \quad \forall j}$$

Funzioni obiettivo discontinue

- Perché la modellazione sia corretta devono essere garantite le seguenti condizioni logiche:
  - se $x_j > 0$, allora $y_j = 1$
  - se $x_j = 0$, allora $y_j = 0$

Limite superiore

- Queste condizioni logiche sono soddisfatte introducendo un maggiorante M_j e imponendo il seguente **vincolo di coerenza**:

$$\boxed{x_j \le M_j y_j \quad \forall j}$$

Se $x_j > 0$ → $y_j = 1$

Funzioni obiettivo discontinue

- Perché la modellazione sia corretta devono essere garantite le seguenti condizioni logiche:
  - se $x_j > 0$, allora $y_j = 1$
  - se $x_j = 0$, allora $y_j = 0$
- Queste condizioni logiche sono soddisfatte introducendo un maggiorante M_j e imponendo il seguente **vincolo di coerenza**:

Ogni volta che introduciamo una variabile binario all'interno del nostro problema che sono presenti dalla variabile continua non basta introdurre la variabile binaria ma abbiamo bisogno di un collegamento che viene realizzato tramite il vincolo di coerenza

$$\boxed{x_j \le M_j y_j \quad \forall j}$$

Se $x_j > 0$ → $y_j = 1$

Se $x_j = 0$
- $y_j = 0$
- $y_j = 1$

Funzioni obiettivo discontinue

- Perché la modellazione sia corretta devono essere garantite le seguenti condizioni logiche:
  - se $x_j > 0$, allora $y_j = 1$
  - se $x_j = 0$, allora $y_j = 0$
- Queste condizioni logiche sono soddisfatte introducendo un maggiorante M_j e imponendo il seguente **vincolo di coerenza**:

$$\boxed{x_j \le M_j y_j \quad \forall j}$$

Se $x_j > 0$ → $y_j = 1$

Se $x_j = 0$
- $y_j = 0$
- $y_j = 1$

Alternativa dominante: minori costi in f.o.

Esercizio 2

- Insiemi
  - ✓ J : insieme delle compagnie telefoniche

$$J = \{A, B, C\}$$

Esercizio 2

- Dati - Vettori
  - F_j Canone mensile fisso [$] offerto dalla compagnia telefonica j
  - c_j Costo variabile [$/minuto] offerto dalla compagnia telefonica j
- Dati - Scalari
  - D Domanda mensile [minuti] **250**

Esercizio 2

- Variabili Decisionali
  - x_j Utilizzo [minuti] della compagnia j
  - y_j Binaria: 1 se la compagnia j è utilizzata – 0 altrimenti
  - z Variabile obiettivo : costi telefonici totali [$]

Esercizio 2

- Funzione obiettivo

$$\min\ z = \sum_j \left(F_j y_j + c_j x_j\right)$$

Esercizio 2

- Vincoli

✓ Utilizzo mensile

L'utilizzo complessivo delle compagnie telefoniche deve eguagliare la domanda mensile

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Utilizzo mensile

$$\sum_j x_j = D$$

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Utilizzo mensile

$$\sum_j x_j = D$$

  ✓ Coerenza

  Creazione della corrispondenza logica tra variabili binarie e continue → le binarie sono attive quando le rispettive variabili continue sono positive

Esercizio 2

- Vincoli

  ✓ Utilizzo mensile

$$\sum_j x_j = D$$

  ✓ Coerenza

$$x_j \leq D y_j \quad \forall j$$

Maggiorante più stretto

Esercizio 2

- Vincoli sulle variabili decisionali

  - $x_j \geq 0 \quad \forall j$
  - $y_j \in \{0; 1\} \quad \forall j$

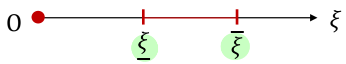
→ MIP

Controllo del gap di ottimalità

Minimo Tecnico

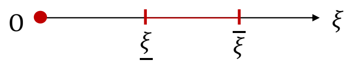
Posso selezionare o 0 oppure tutti i valori tra un intervallo => funzione discontinua

$$\xi \in \{0 \cup [\underline{\xi};\overline{\xi}]\}$$



Minimo Tecnico

$$\xi \in \{0 \cup [\underline{\xi};\overline{\xi}]\}$$

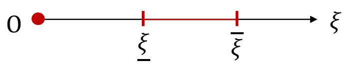


$$y \in \{0\,;1\}$$

$$\boxed{\underline{\xi}y \le \xi \le \overline{\xi}y}$$

Minimo Tecnico

$$\xi \in \{0 \cup [\underline{\xi};\overline{\xi}]\}$$



$$y \in \{0\,;1\}$$

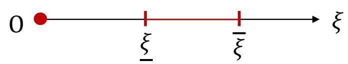
$$\boxed{\underline{\xi}y \le \xi \le \overline{\xi}y}$$

$y = 0$

$\xi = 0$

Minimo Tecnico

$$\xi \in \{0 \cup [\underline{\xi};\overline{\xi}]\}$$



$$y \in \{0\,;1\}$$

$$\boxed{\underline{\xi}y \le \xi \le \overline{\xi}y}$$

$y = 0$ $\qquad$ $y = 1$

$\xi = 0$ $\qquad$ $\xi \in [\underline{\xi};\overline{\xi}]$

Esercizio 3

- Insiemi
  - ✓ I : insieme dei sili

$$I = \{1,2,3,\dots,6\}$$

  - ✓ J : insieme delle fattorie

$$J = \{1,2,3,\dots,7\}$$

Esercizio 3

- Dati - Vettori
  - D_j Domanda giornaliera [quintali] di foraggio della fattoria j
  - Q_i Massima quantità giornaliera [quintali] di foraggio per il silo i
  - f_i Costi fissi [€] del silo i
  - cs_i Costo unitario giornaliero di stoccaggio [€/quintale] del silo i

Esercizio 3

- Dati - Matrici
  - $dist_{i,j}$ Distanza [km] del silo i dalla fattoria j
- Dati - Scalari
  - c Costo unitario di trasporto **0.06** [€/km·quintale]

Esercizio 3

- Calcolo dei parametri di costo
  - $ct_{i,j}$ Costo di trasporto [€/quintale] dal silo i alla fattoria j

$$ct_{i,j} = 2dist_{i,j} \cdot c$$

Rielaborazione nostra non ci viene fornita dal testo

Esercizio 3

- Variabili Decisionali
  - $x_{i,j}$ Quantità trasportata [quintali] dal silo i alla fattoria j ($x_{i,j} \geq 0$)
  - y_i Binaria: 1 se il silo i è attivato – 0 altrimenti
  - z Variabile obiettivo : costi totali [€]

Esercizio 3

- Funzione obiettivo

$$\min\ z = \underbrace{\boxed{\sum_i f_i y_i}}_{\text{Costi fissi}} + \overbrace{\boxed{\sum_i cs_i \sum_j x_{i,j}}}^{\text{Costi di stoccaggio}} + \underbrace{\boxed{\sum_i \sum_j ct_{i,j}\, x_{i,j}}}_{\text{Costi di trasporto}}$$

Esercizio 3

- Vincoli

✓ Domanda

La domanda di **ogni** fattoria deve essere soddisfatta

Esercizio 3

- Vincoli

✓ Domanda

$$\sum_i x_{i,j} = D_j \quad \forall j$$

Esercizio 3

- Vincoli
  - ✓ Domanda

$$\sum_i x_{i,j} = D_j \quad \forall j$$

  - ✓ Numero di sili attivati

    È necessario attivare almeno 4 sili

Esercizio 3

- Vincoli
  - ✓ Domanda

$$\sum_i x_{i,j} = D_j \quad \forall j$$

  - ✓ Numero di sili attivati

$$\sum_i y_i \geq 4$$

Esercizio 3

- Vincoli
  - ✓ Capacità di stoccaggio

    Per **ogni** silo attivato, è necessario rispettare i limiti minimi e massimi di stoccaggio

Esercizio 3

- Vincoli
  - ✓ Capacità di stoccaggio

$$0.5Q_i y_i \leq \sum_j x_{i,j} \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

Esercizio 3

- Vincoli
  - ✓ Capacità di stoccaggio

$$0.5Q_i y_i \leq \sum_j x_{i,j} \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

  - ✓ Condizione logica
    Il silo 3 può essere attivato solo in caso di attivazione del silo 1

Esercizio 3

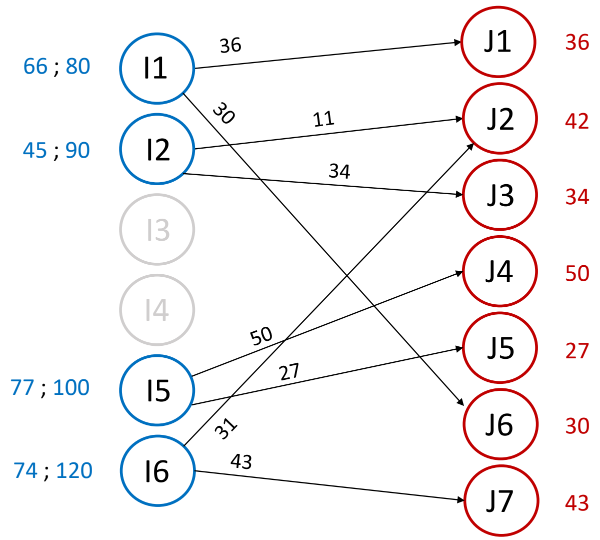
- Vincoli
  - ✓ Capacità di stoccaggio

$$0.5Q_i y_i \leq \sum_j x_{i,j} \leq Q_i y_i \quad \forall i$$

  - ✓ Condizione logica

$$y_3 \leq y_1$$

Esercizio 3



Takeaway

1. Utilizzo di variabili binarie
2. Corrispondenza logica tra variabili binarie e continue

Takeaway

1. Utilizzo di variabili binarie

- Nei modelli di ottimizzazione le variabili binarie vengono utilizzate per
  - ✓ Rappresentare scelte dicotomiche
  - ✓ Modellare costi fissi
  - ✓ Modellare minimi tecnici
  - ✓ Esprimere condizioni logiche

Takeaway

2. Corrispondenza logica tra variabili binarie e continue

- Va imposta, tramite vincoli lineari, una corrispondenza logica tra variabili binarie e continue:
  - ✓ $x_j \leq M_j y_j$
  - ✓ $m_j y_j \leq x_j \leq M_j y_j$

Università degli studi di Bergamo

Anno Accademico 2020/2021

RICERCA OPERATIVA

Modelli Riassuntivi

Giovanni Micheli

Esercizio 1

- Insiemi
  - ✓ I : insieme degli stabilimenti

    $I = \{Milano, Cremona\}$
  - ✓ J : insieme dei depositi

    $J = \{Bergamo, Pavia, Piacenza, Mantova\}$
  - ✓ C : insieme dei clienti

    $C = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6\}$

Esercizio 1

- Dati - Vettori
  - Pro_i Capacità produttiva [ton] dello stabilimento i
  - Cap_j Capacità di stoccaggio [ton] del deposito j
  - D_c Domanda [ton] del cliente c

Esercizio 1

- Dati - Matrici
  - $ct^1_{i,j}$ Costi di trasporto [€/ton] dallo stabilimento i al deposito j
  - $ct^2_{i,c}$ Costi di trasporto [€/ton] dallo stabilimento i al cliente c
  - $ct^3_{j,c}$ Costi di trasporto [€/ton] dal deposito j al cliente c

Esercizio 1

- Variabili Decisionali
  - $x_{i,j}$ Quantità trasportata [ton] dallo stabilimento i al deposito j
  - $t_{i,c}$ Quantità trasportata [ton] dallo stabilimento i al cliente c
  - $k_{j,c}$ Quantità trasportata [ton] dal deposito j al cliente c
  - z Variabile obiettivo : costi di trasporto totali [€]

Esercizio 1

- Funzione obiettivo

$$\min\ z = \sum_i \sum_j ct^1_{i,j}\, x_{i,j} + \sum_i \sum_c ct^2_{i,c}\, t_{i,c} + \sum_j \sum_c ct^3_{j,c}\, k_{j,c}$$

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Capacità produttiva

  Per **ogni** stabilimento, la produzione totale non deve eccedere la capacità produttiva

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Capacità produttiva

$$\sum_j x_{i,j} + \sum_c t_{i,c} \le Pro_i \quad \forall i$$

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Capacità produttiva

$$\sum_j x_{i,j} + \sum_c t_{i,c} \le Pro_i \quad \forall i$$

  ✓ Capacità di stoccaggio

  Per **ogni** deposito, la quantità complessivamente stoccata non deve eccedere la capacità di stoccaggio

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Capacità produttiva

$$\sum_j x_{i,j} + \sum_c t_{i,c} \le Pro_i \quad \forall i$$

  ✓ Capacità di stoccaggio

$$\sum_i x_{i,j} \le Cap_j \quad \forall j$$

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Bilancio ai depositi

  Per **ogni** deposito, la quantità complessivamente in ingresso dagli stabilimenti deve essere uguale alla quantità totale in uscita verso i clienti

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Bilancio ai depositi

$$\sum_i x_{i,j} = \sum_c k_{j,c} \quad \forall j$$

Esercizio 1

- Vincoli

  ✓ Bilancio ai depositi

$$\sum_i x_{i,j} = \sum_c k_{j,c} \quad \forall j$$

  ✓ Domanda

  La domanda di **ogni** cliente deve essere soddisfatta dagli stabilimenti o dai depositi

Esercizio 1

- Vincoli

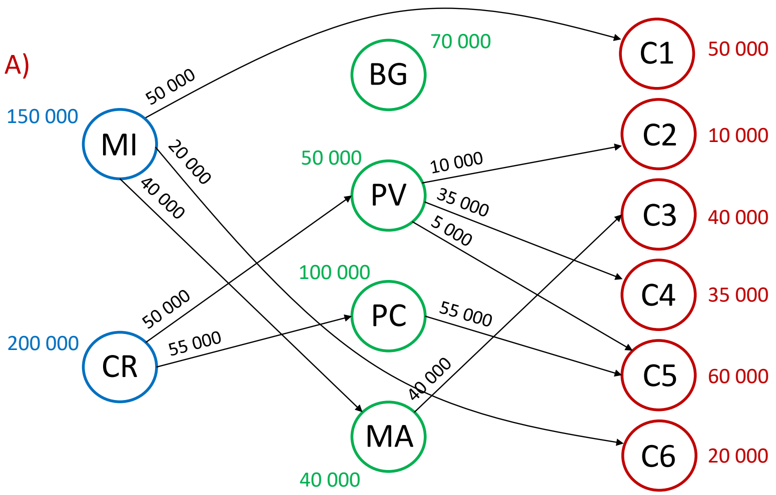
  ✓ Bilancio ai depositi

$$\sum_i x_{i,j} = \sum_c k_{j,c} \quad \forall j$$

  ✓ Domanda

$$\sum_i t_{i,c} + \sum_j k_{j,c} = D_c \quad \forall c$$

Esercizio 1



Esercizio 1

- Modifiche al punto B)

  ✓ Aggiunta del vettore

  - R_j Risparmio mensile [€] derivante dalla chiusura del deposito j

Esercizio 1

- Modifiche al punto B)
  - ✓ Aggiunta della variabile decisionale
    - y_j Binaria: 1 se il deposito j è chiuso – 0 altrimenti

Esercizio 1

- Modifiche al punto B)
  - ✓ Nuova funzione obiettivo

$$\min\ z = \sum_i \sum_j ct^1_{i,j}\, x_{i,j} + \sum_i \sum_c ct^2_{i,c}\, t_{i,c} + \sum_j \sum_c ct^3_{j,c}\, k_{j,c} - \sum_j R_j y_j$$

Esercizio 1

- Modifiche al punto B)
  - ✓ Vincolo di coerenza

    Creazione della corrispondenza logica tra variabili binarie e continue → la chiusura dei depositi comporta l'impossibilità di stoccaggio

Esercizio 1

- Modifiche al punto B)
  - ✓ Vincolo di coerenza

$$\sum_i x_{i,j} \leq (1 - y_j)Cap_j \quad \forall j$$

Esercizio 1

- Modifiche al punto B)
  - ✓ Vincolo di coerenza

$$\sum_i x_{i,j} \le (1 - y_j)Cap_j \quad \forall j$$

Se $y_j = 1$

$$x_{i,j} = 0 \quad \forall i$$

Esercizio 1

- Modifiche al punto B)
  - ✓ Vincolo di coerenza

$$\sum_i x_{i,j} \le (1 - y_j)Cap_j \quad \forall j$$

Se $y_j = 1$

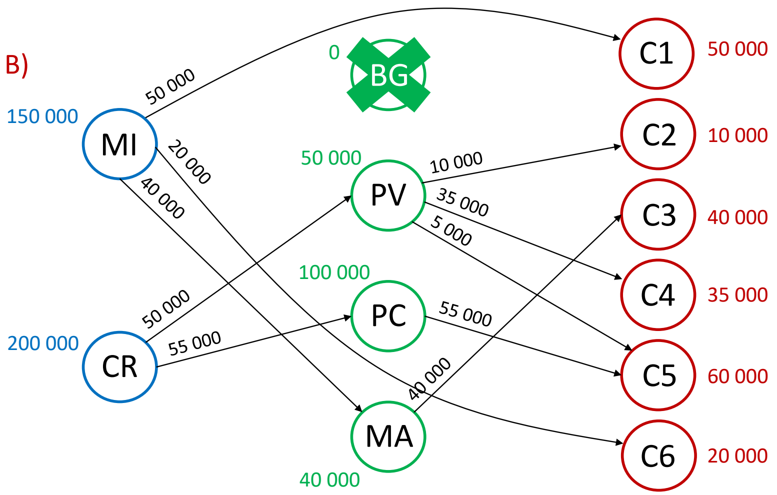
$$x_{i,j} = 0 \quad \forall i$$

Se $y_j = 0$

$$\sum_i x_{i,j} \le Cap_j$$

Esercizio 1

B)



Esercizio 2

- Insiemi
  - ✓ I : insieme dei bancali

$$I = \{1, 2, \dots, 12\}$$

  - ✓ T : insieme delle stive

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Esercizio 2

- Dati - Vettori
  - p_i Peso [ton] del bancale i
  - C_j Capacità [ton] della stiva j
  - CM_j Costo di manutenzione [€] della stiva j
- Dati - Scalari
  - N Numero massimo di bancali imbarcabili in una stiva **4**

Esercizio 2

- Variabili Decisionali
  - $x_{i,j}$ Binaria: 1 se il bancale i è imbarcato nella stiva j – 0 altrimenti
  - y_j Binaria: 1 se la stiva j è utilizzata – 0 altrimenti
  - z Variabile obiettivo : costi totali [€] di manutenzione

Esercizio 2

- Funzione obiettivo

$$\min\ z = \sum_j CM_j y_j$$

Esercizio 2

- Vincoli

✓ Assegnamento bancali

Ogni bancale deve essere assegnato ad un'unica stiva

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Assegnamento bancali

$$\sum_j x_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Assegnamento bancali

$$\sum_j x_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

  - ✓ Numero bancali

    Ogni stiva non può ospitare più di 4 bancali

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Assegnamento bancali

$$\sum_j x_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

  - ✓ Numero bancali

$$\sum_i x_{i,j} \leq N \quad \forall j$$

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Capacità stive

    Per **ogni** stiva, il peso complessivo imbarcato è
    - Nullo se la stiva non è utilizzata
    - Limitata dalla capacità se la stiva è utilizzata

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Capacità stive

$$\sum_i p_i x_{i,j} \le C_j y_j \quad \forall j$$

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Capacità stive

$$\sum_i p_i x_{i,j} \le C_j y_j \quad \forall j$$

Se $y_j = 0$

$\downarrow$

$x_{i,j} = 0 \quad \forall i$

Esercizio 2

- Vincoli
  - ✓ Capacità stive

$$\sum_i p_i x_{i,j} \le C_j y_j \quad \forall j$$

Se $y_j = 0$ $\rightarrow$ $x_{i,j} = 0 \quad \forall i$

Se $y_j = 1$ $\rightarrow$ $\sum_i p_i x_{i,j} \le C_j$

Esercizio 2

- Vincoli

$$\sum_j x_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{i,j} \le N \quad \forall j$$

$$\sum_i p_i x_{i,j} \le C_j y_j \quad \forall j$$

Esercizio 2

- Vincoli

$$\sum_j x_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{i,j} \leq N y_j \quad \forall j$$

$$\sum_i p_i x_{i,j} \leq C_j \quad \forall j$$