

# Lezione 1. Introduzione

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 1

1

## 1. Che cos'è l'Automatica? A cosa serve?

Insieme di **discipline** che forniscono **strumenti** (matematici e tecnologici) per la *specifica*, l'*analisi*, il *progetto* e la *gestione* di

### sistemi automatici di controllo

L'Automatica si occupa di (definire e) risolvere i  
**problemi di controllo**

- 1) Quali discipline?
- 2) Quali strumenti?
- 3) Cos'è un problema di controllo?

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 1

3

## Schema

1. Che cos'è l'Automatica? A cosa serve?
  - *Il problema del controllo*
  - *Modellistica del sistema (relazioni causa-effetto)*
  - *Controllo in anello chiuso e in anello aperto*
  - *Disturbi e incertezza*
2. Dov'è l'Automatica?

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 1

2

### problema di controllo

Si ha un problema di controllo ogni volta che si desidera **imporre** ad un **sistema** un **comportamento desiderato**.

- 1) Che cosa intendi per sistema?
- 2) E cos'è un "comportamento desiderato"?

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 1

4

## Esempio

### Controllo della velocità di un'autovettura

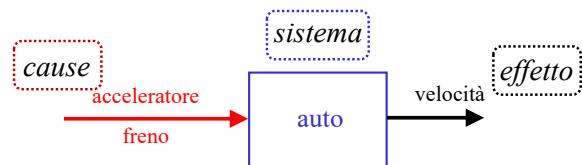
Si desidera **imporre** ad un'auto (è un sistema!) un'andatura a **velocità costante** (il comportamento desiderato!).



Per mantenere una velocità costante possiamo agire sui pedali di freno ed acceleratore.

Ho individuato una **relazione causa-effetto**.

Dove è possibile individuare una relazione causa-effetto, lì c'è un **sistema** (nel senso dell'Automatica).



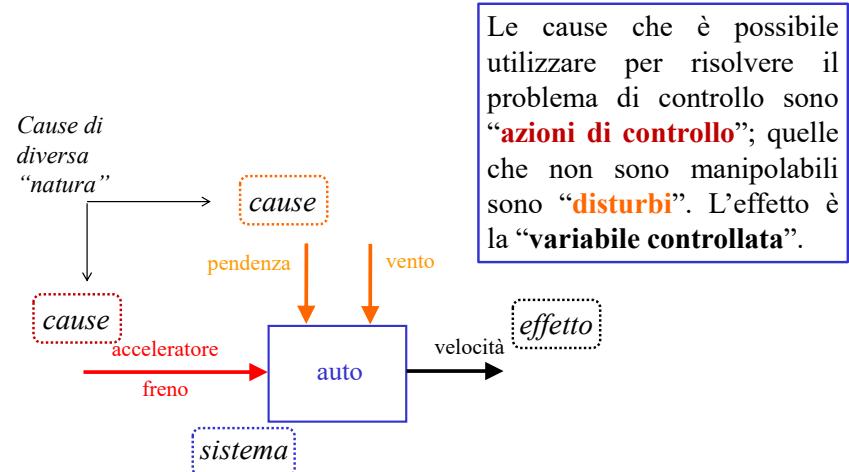
E' una rappresentazione schematica.  
Il sistema è un "blocco", le cause frecce entranti (ingressi),  
gli effetti frecce uscenti (uscite).  
Formalizzeremo più avanti questo strumento [schema a blocchi]

Un autoveicolo è un esempio di **sistema**.

Mantenere una velocità costante è un esempio di **comportamento desiderato** (che si vuole imporre al sistema).

Più specificamente il comportamento desiderato del sistema viene "trasformato/tradotto" in un **andamento desiderato per una (o più) variabile** (quella che rappresenta tale comportamento), detta **variabile di riferimento**.

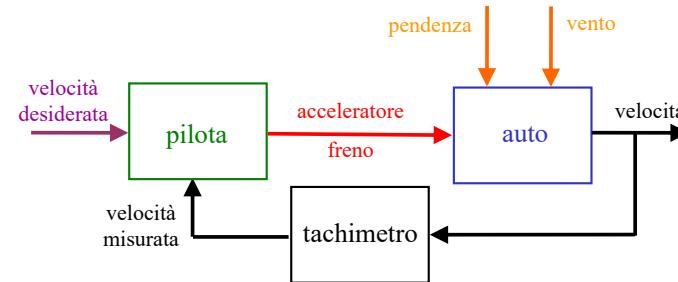
E' facile individuare le cause giuste? Non sempre...  
Inoltre: acceleratore e freno non sono le uniche cause di variazione  
di velocità. Per es. anche la pendenza della strada, il vento,...



Mantenere costante la velocità del veicolo a 75 mph (circa 130 km/h) guardando il tachimetro non è difficile...



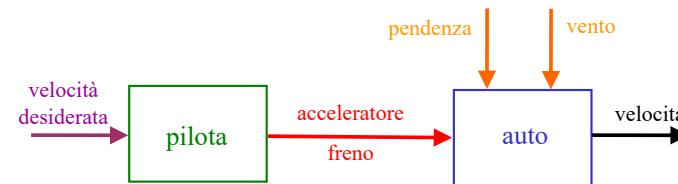
Mantenere costante la velocità senza guardare il tachimetro è decisamente più difficile ...



Mantenere costante la velocità a 75 mph è l'**andamento desiderato**, il **requisito** del problema di controllo.

Per risolvere il problema di controllo è sufficiente decidere una **strategia di controllo**, per es. basata sul **confronto tra velocità desiderata e velocità misurata**: se la velocità è bassa, schiaccio l'acceleratore; se è alta rilascio l'acceleratore o freno.

E' anche possibile compensare l'effetto di eventuali **disturbi** (ne conosco gli effetti sulla velocità, perchè la misuro).



L'**azione di controllo** è funzione solo della **velocità desiderata**, non si dispone più della misura.

E' necessario conoscere il legame tra l'azione sui pedali e la velocità del veicolo (è indispensabile un **modello (matematico) del sistema**).

Infatti il **pilota** deve invertire il modello, cioè dalla relazione causa-effetto tra pedali e velocità, ottenere la relazione inversa effetto(desiderato)-causa.

E' molto più difficile compensare l'effetto dei **disturbi** (bisognerebbe misurare anche loro...)

Prima lezione imparata dall'esempio. ..

Un **problema di controllo** si pone quando si desidera imporre un **comportamento desiderato ad un sistema**.

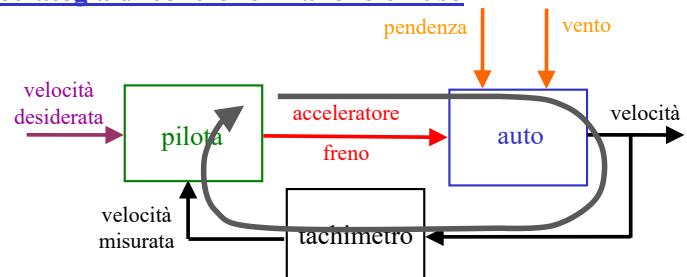
Concretamente ciò si ottiene facendo in modo che alcune **variabili** (dette **variabili controllate**) abbiano un **determinato andamento** (nel tempo) definito dall'andamento (nel tempo) di **variabili di riferimento**.

Seconda lezione imparata dall'esempio. ..

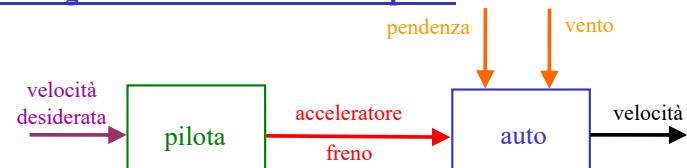
Esistono due principali strategie di controllo, una delle quali sfrutta le **misure**.

Disponendo della **misura** delle variabili controllate è possibile utilizzare una **strategia di controllo in anello chiuso** (in **retroazione**, in **feedback**).

### Strategia di controllo in anello chiuso



### Strategia di controllo in anello aperto



Terza lezione imparata dall'esempio. ..

Per risolvere il problema di controllo è necessario individuare delle variabili (**azioni di controllo**) su cui agire per ottenere l'andamento desiderato delle **variabili controllate** (serve una **relazione causa-effetto**).

Concretamente, è necessario disporre di un **modello (matematico) del sistema da controllare**, una descrizione matematica della relazione causa-effetto.

Quarta lezione impara dall'esempio...

Sul sistema possono agire **disturbi**.

La strategia di controllo in anello chiuso è (intrinsicamente) in grado di tenere conto della presenza di disturbi e, se opportunamente congegnata, è in grado di compensarne/ridurne gli effetti.

Il pilota è un controllore, ma non certo automatico!!

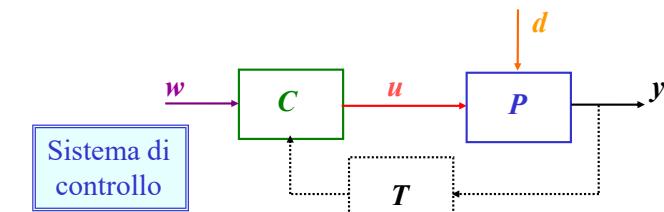
Il **controllore** deve essere dotato di **intelligenza**.

Ripensando all'esempio, il pilota deve decidere:

- 1) se aumentare o diminuire la velocità;
- 2) quanto spingere sul pedale dell'acceleratore per aumentare la velocità (e viceversa per diminuirla);
- 3) se usare anche il pedale del freno per diminuirla.

E' possibile scrivere un **algoritmo** che esegua queste operazioni in modo corretto ed adeguato a seconda della situazione. Tale algoritmo si dice **legge di controllo** ed è il cuore del **controllore automatico**.

Riordiniamo (almeno un poco...) la terminologia...



**P** sistema sotto controllo (processo, impianto)

**C** controllore (regolatore)

**T** trasduttore (misuratore, sensore)

**y** variabile controllata (uscita)

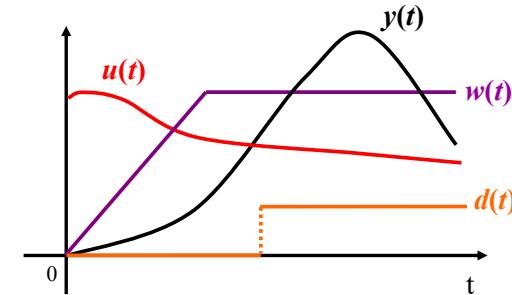
**u** azione di controllo (ingresso manipolabile)

**d** disturbo (ingresso non manipolabile)

**w** variabile di riferimento (andamento desiderato)

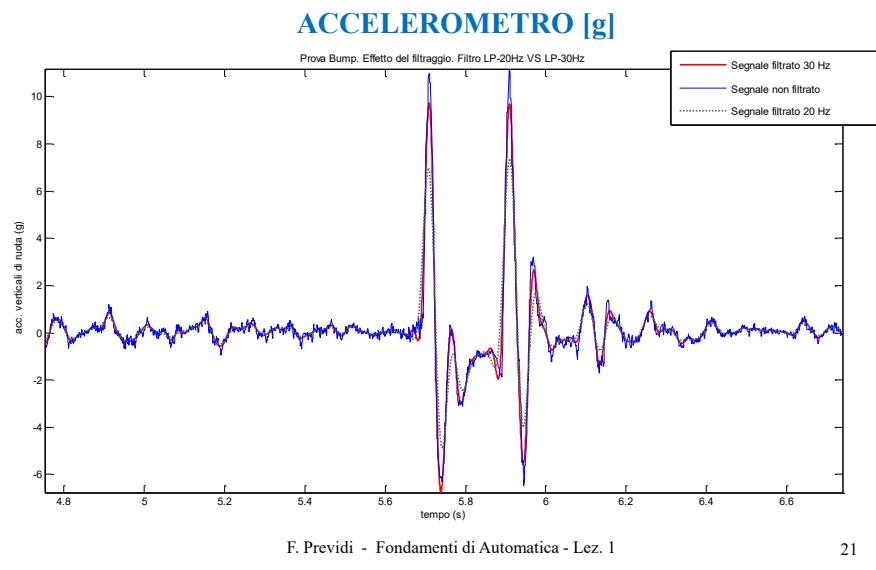
Cosa sono i segnali, le variabili in gioco?

Le variabili **y**, **u**, **d**, **w** sono descritte da **funzioni reali** della **variabile reale t** (indice temporale)

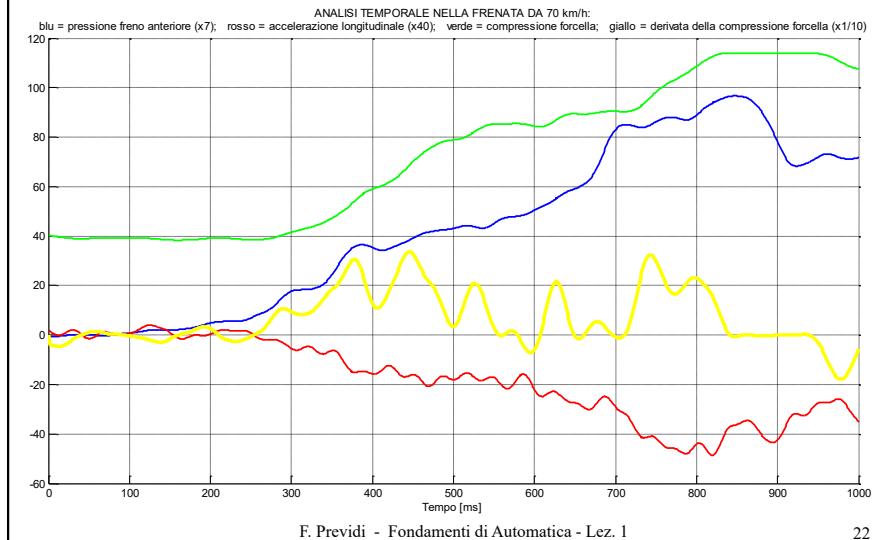


Un **segnale** descrive l'**andamento temporale** di una variabile (in generale misurabile).

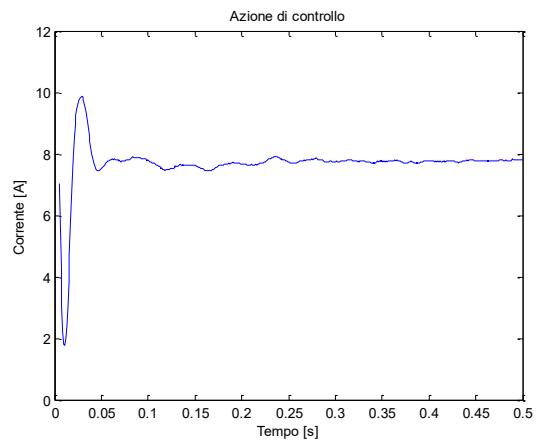
### Esempi di segnali



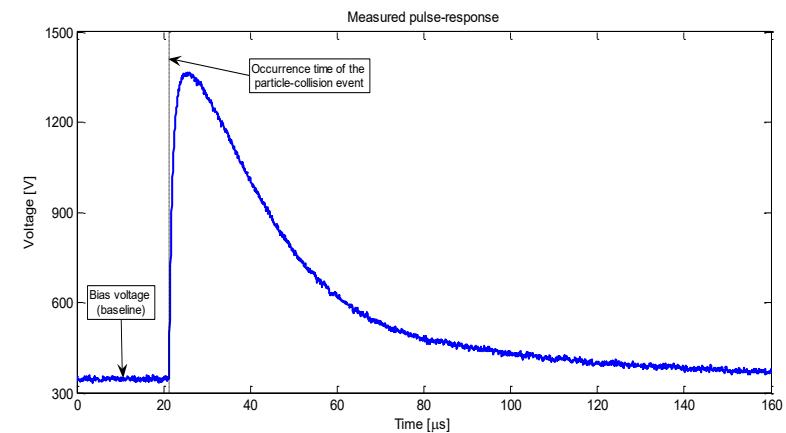
#### SENSORE DI PRESSIONE [bar] – ACCELEROMETRO [g] – ESTENSIMETRO [mm]



#### CORRENTE [A]

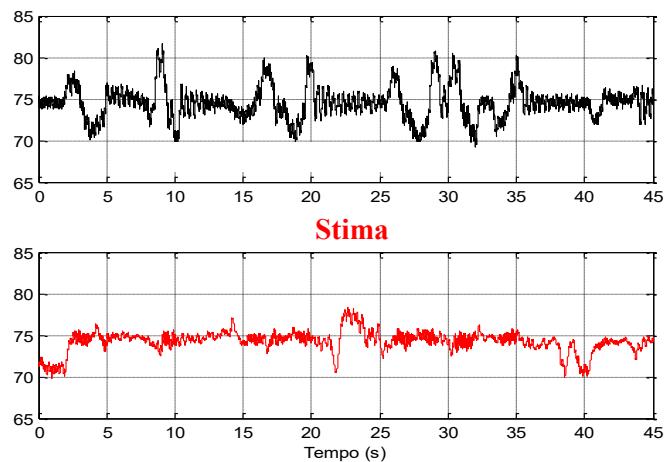


#### TENSIONE [V]

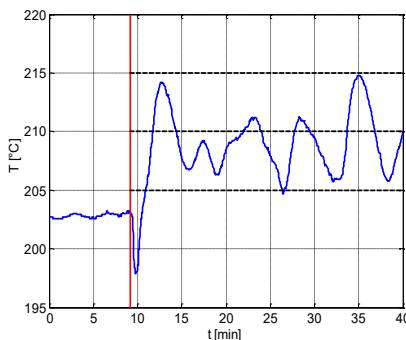


### FORZA [kgp] (Cella di carico)

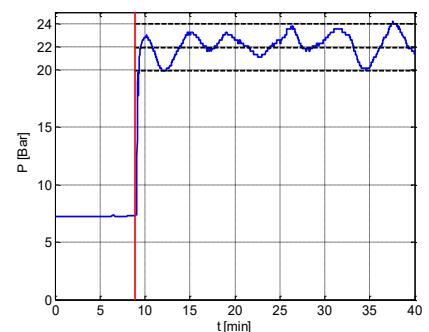
Misura



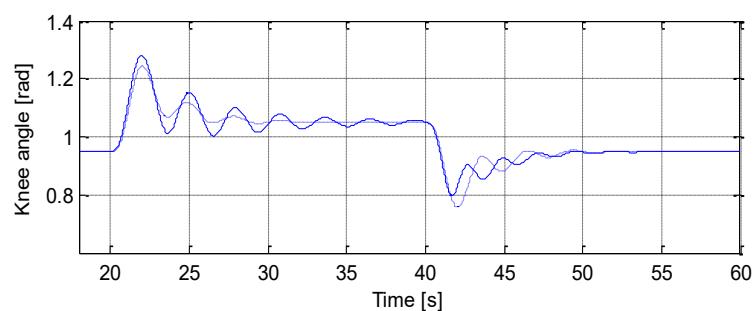
### TEMPERATURA [°C]



### PRESSEIONE [bar]



### ANGOLO [rad]



L'Automatica è un insieme di discipline  
(e non una sola) ...

Per risolvere il problema del controllo può essere necessario risolvere altri problemi, ciascuno dei quali è oggetto di una specifica disciplina, perché fa riferimento a contesti e strumenti anche molto diversi tra loro.

Il denominatore comune è la possibilità di impostare un problema di controllo (o una sua parte).

Un approccio comune a problemi differenti...

## Di cosa si occupa l'automatica?

**Control system design** – progettazione degli algoritmi di controllo  
**System theory** – modellistica, simulazione e analisi dei sistemi  
**System Identification** – modellistica dai dati dei sistemi da controllare e stima; sensori sw  
**Mechatronics** – modellistica e controllo di sistemi meccanici  
**Robotics** – robotica, controllo dei manipolatori industriali e dei sistemi autonomi/intelligenti.  
**Fault diagnosis & supervision** – diagnostica ed isolamento dei guasti; supervisione di sistemi complessi  
**Automation, manufacturing and logistics** – controllo e coordinamento di macchine in impianti manifatturieri; logistica  
**Process control** – controllo di particolari processi produttivi industriali (chimici, petroliferi, minerari, farmaceutici,...)

## 2. Dov'è l'Automatica?

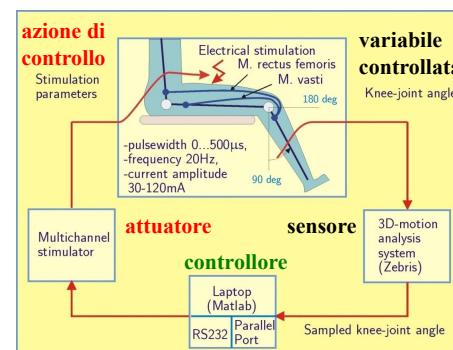
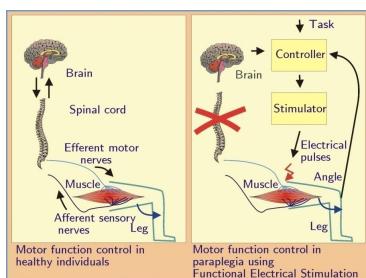
L'automatica è stata definita la “**hidden technology**”. Difficile da vedere, ma (veramente) onnipresente. Si trovano soluzioni “automatiche” a problemi nei settori scientifici ed industriali più vari (oltre che nella vita quotidiana):

- Automotive (sospensioni elettroniche, trasmissioni)
- Biomedicale (riabilitazione)
- Fisica Nucleare
- Industria di processo (lavorazione della plastica)
- Industria alimentare (lavorazione dello zucchero)
- Logistica industriale (AGV)
- Finanza (mercato del credito)
- Materiali biologici (caratterizzazione meccanica)
- Industria tessile (telai)
- ...

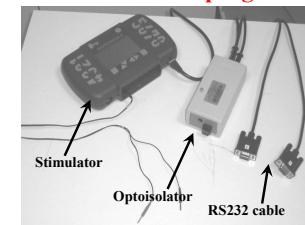
## Controllo della Stimolazione Elettrica Funzionale - esempio

Riabilitazione di soggetti paraplegici

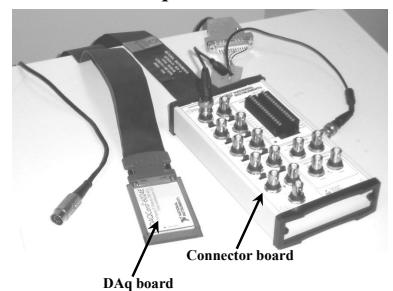
**Problema di controllo:** sviluppare il sistema di controllo della posizione del ginocchio



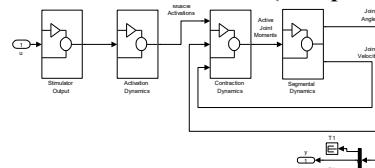
### Attuatore Elettrostimolatore programmabile



### Sistema di acquisizione del sensore

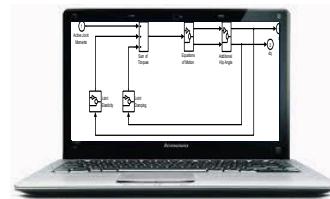


### Codice SW di controllo (esemplificativo)



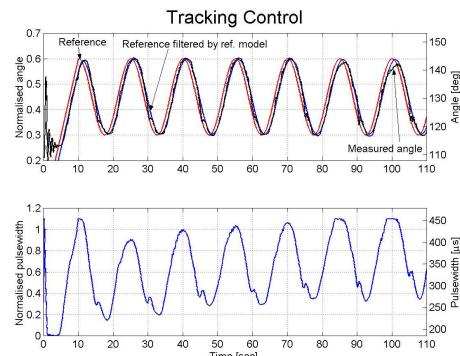
... dov'è l'Automatica?...

### Controllore





Tracking di una sinusoida



Si noti l'effetto della fatica (compensato dal controllore)



### 3. Conclusioni (?)

#### Control systems are ubiquitous

Control systems are ubiquitous, essential, and largely invisible to the general public. Products ranging from the paper that we use, the beer, wine, or water that we drink, the newspapers that we read, to the drugs that treat our diseases depend on automatic controllers for their uniformity and consistency.

Our homes are full of automatic control systems. There are thermostats to regulate the temperature of the house, the refrigerator, the dishwasher, the clothes washer and dryer, the oven, and the hot water heater. Many household controllers are less obvious. These include the automatic controllers that regulate the flow of fuel to the furnace, those inside the TV, radio, CD and DVD players and any other electronic devices in the house and those that insure that our coffee maker and microwave oven work properly.

The modern automobile is full of automatic controllers. Pollution is reduced, fuel is saved, and comfort is enhanced by automatic controllers in the car. Stability and control augmentation systems make nearly every modern vehicle easier for the human to control and safer. These systems work with the human operator to make him or her perform better. An excellent example is ABS brakes.

The members of the animal kingdom are also full of automatic controllers. The temperature of our body, the movements of our limbs, our heart rate and blood pressure, the amount of glucose in our blood, and our weight are all regulated by feedback controllers within our bodies. There are serious diseases that result from improper operation of these controllers. Automatically controlled insulin pumps and more and more sophisticated controlled prostheses are helping to mitigate these problems. **Improvements in many aspects of our lives will depend on improved control systems.**

<https://www.youtube.com/watch?v=XJLMW61303g>

## Lezione 2. Sistemi dinamici a tempo continuo

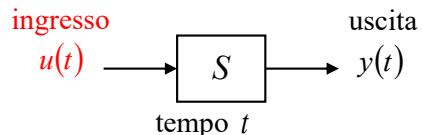
## Schema della lezione

1. Cos'è un sistema dinamico ?
2. Modelli di sistemi dinamici
3. Il concetto di dinamica
4. Variabili di stato
5. Rappresentazione in variabili di stato di un sistema dinamico
6. Classificazione dei sistemi dinamici
7. Scelta delle variabili di stato

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

2

## 2. Modelli di sistemi dinamici



Sistemi a tempo continuo  
tempo variabile reale

Sistemi digitali (o a tempo discreto)  
tempo variabile intera relativa

Sistemi a eventi discreti  
non c'è il tempo

IMAD+Controlli Aut  
12 cfu (I sem – I anno LS)

Ing Sistemi di Controllo  
6 cfu

Automazione Industriale  
6 cfu (I sem – III anno)

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

4

## 1. Cos'è un sistema dinamico?



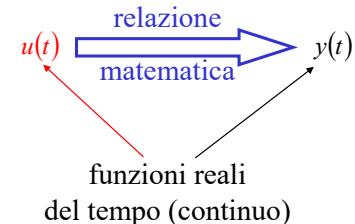
Un **sistema dinamico** è un oggetto (o insieme di oggetti tra loro interconnessi) che interagisce col mondo circostante mediante:

- **ingressi** (azioni compiute sul sistema da agenti esterni)
- **uscite** (descrivono la risposta del sistema agli stimoli)

E' indispensabile disporre di **modelli matematici** dei sistemi dinamici per descrivere il loro comportamento

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

3



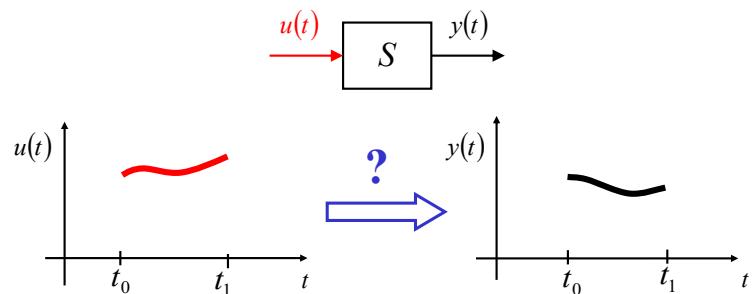
Che tipo di relazioni matematiche servono ?

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

5

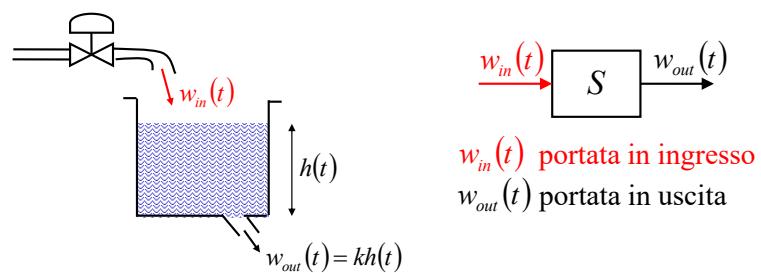
### 3. Il concetto di dinamica

Cosa significa l'aggettivo “**dinamico**”?



La conoscenza del valore delle variabili di ingresso al tempo  $t$  non è sufficiente a determinare univocamente il valore delle variabili di uscita al medesimo tempo  $t$

### Esempio

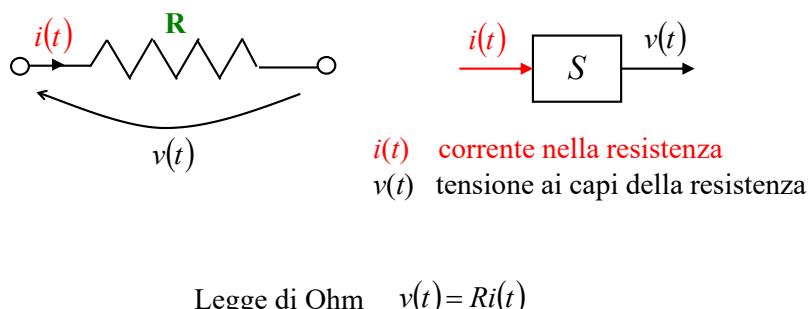


Per determinare  $w_{out}$  bisogna conoscere (oltre a  $w_{in}$ ) il **livello iniziale del serbatoio**

$$\left. \begin{array}{l} w_{in}(t), t \in [t_0, t_1] \\ h(t_0) \end{array} \right\} \longrightarrow w_{out}(t), t \in [t_0, t_1]$$

**E' un sistema dinamico**

### Esempio



Basta conoscere  $i(t)$  per determinare univocamente  $v(t)$

**E' un sistema NON dinamico**

- Bisogna conoscere **qualcosa di più** oltre al semplice andamento delle variabili di ingresso (condizioni iniziali a.t.c.)
- Serve “**memoria**” per sapere in che condizioni, **in che stato si trova il sistema** nell’istante in cui si comincia ad applicare l’ingresso
- La ragione non è puramente matematica (Se uso eq.differenziali devo conoscere le condizioni iniziali)

## 4. Variabili di stato

Variabili **interne** del sistema la cui conoscenza al tempo  $t_0$  costituisce la minima informazione necessaria per determinare  $y(t)$ , per tutti i  $t \geq t_0$ , in conseguenza di  $u(t)$ , per tutti i  $t \geq t_0$

$$x_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

**vettore di stato**

$$\left. \begin{array}{l} u(t), t \geq t_0 \\ \mathbf{x}(t_0) \end{array} \right\} \quad \longrightarrow \quad y(t), t \geq t_0$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

10

$w_{in}(t) \rightarrow u(t)$  ingresso (causa)

$h(t) \rightarrow x(t)$  stato

$w_{out}(t) \rightarrow y(t) = kx(t)$  uscita (effetto)

$$A\dot{h}(t) = w_{in}(t) - w_{out}(t) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} A\dot{x}(t) = u(t) - kx(t) \\ y(t) = kx(t) \end{cases}$$

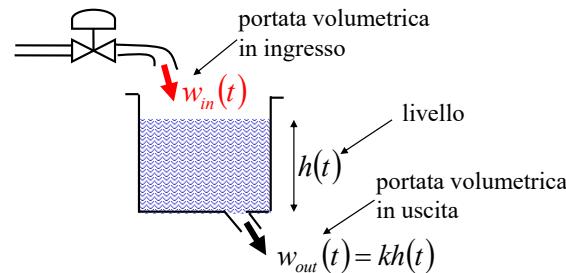
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{k}{A}x(t) + \frac{1}{A}u(t) \\ y(t) = kx(t) \end{cases}$$

Equazione differenziale del 1° ordine, lineare, a coefficienti costanti  
Equazione d'uscita

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

13

## Esempio



L'area di base è  $A$ , quindi il volume è  
 $V(t) = Ah(t)$

## Conservazione del volume

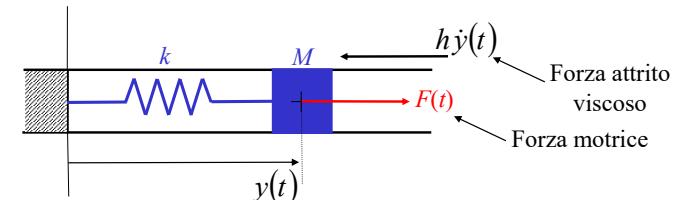
$$\frac{dV(t)}{dt} = w_{in}(t) - w_{out}(t) \quad \longrightarrow \quad A\dot{h}(t) = w_{in}(t) - w_{out}(t)$$

Equazione differenziale del 1° ordine, lineare, a coefficienti costanti

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

12

## Esempio



$F(t) \rightarrow u(t)$  ingresso (causa)

$y(t) \rightarrow x_1(t)$  stato (due variabili)

$\dot{y}(t) \rightarrow x_2(t)$  stato (due variabili)

$y(t) \rightarrow y(t)$  uscita (effetto)

Equazione differenziale del 2° ordine, lineare, a coefficienti costanti

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

14

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = \frac{1}{M}(u(t) - kx_1(t) - hx_2(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{h}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$

*Sistema di 2 equazioni differenziali del 1° ordine, lineari, a coefficienti costanti*  
*Equazione d'uscita*

Il sistema di equazioni differenziali può essere scritto anche in forma vettoriale/matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

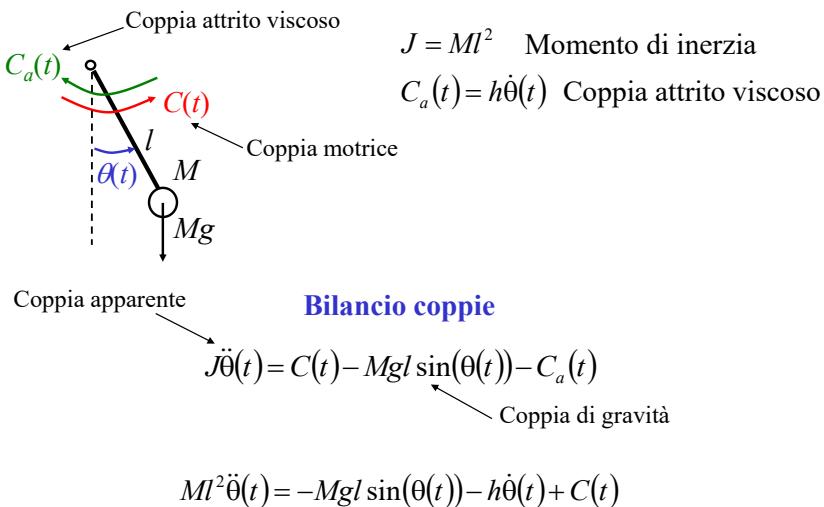
$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Definendo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

## Esempio



$C(t) \rightarrow u(t)$  ingresso (causa)

$\theta(t) \rightarrow x_1(t)$  stato (due variabili)

$\dot{\theta}(t) \rightarrow x_2(t)$  uscita (effetto)

$$Ml^2\ddot{\theta}(t) = -Mgl \sin(\theta(t)) - h\dot{\theta}(t) + C(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \equiv \dot{\theta}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \equiv \ddot{\theta}(t) = -\frac{Mgl}{Ml^2} \sin(x_1(t)) - \frac{h}{Ml^2} x_2(t) + \frac{1}{Ml^2} u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

*Sistema di 2 equazioni differenziali del 1° ordine, NON lineari, a coefficienti costanti*

N.B. Non si può mettere in forma matriciale.

## 5. Rappresentazione di stato (sistemi SISO stazionari)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

**equazione di stato**  
**trasformazione di uscita**  
**stato iniziale**

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad u(t) \in \mathbb{R} \quad y(t) \in \mathbb{R}$$

vettore      scalare      scalare

$\mathbf{f}(\cdot)$  è una funzione vettoriale a valori in  $\mathbb{R}^n$

$g(\cdot)$  è una funzione scalare a valori in  $\mathbb{R}$

### Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) \\ y(t) = 3x_1(t) \\ x_1(0) = 1; x_2(0) = 2 \end{cases}$$

$t_0 = 0$

La trasformazione d'uscita non dipende esplicitamente da  $u(t)$

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow$  L'ordine del sistema è  $n=2$

$$u(t) \in \mathbb{R} \quad \text{sono scalari}$$

$$y(t) \in \mathbb{R}$$

### Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) - u(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$t_0 = 0$

$$x(t) \in \mathbb{R}$$

$u(t) \in \mathbb{R}$  sono tutti scalari

$$y(t) \in \mathbb{R}$$

$f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  sono funzioni (scalari) lineari di  $u$  ed  $x$

L'ordine del sistema è  $n=1$

## 6. Classificazione dei sistemi dinamici

### Sistema strettamente proprio

Non c'è dipendenza esplicita dell'uscita  $y(t)$  dall'ingresso  $u(t)$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Non compare  $u(t)$

Altrimenti, si dice **proprio** (non strettamente)

## Sistema SISO (Single Input Single Output)

Ingresso ed uscita sono **scalari**, cioè  $u(t) \in \mathbb{R}$   $y(t) \in \mathbb{R}$

In questo corso non saranno trattati i sistemi  
**MIMO (Multiple Input Multiple Output)**

## Sistema lineare

$f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  sono funzioni lineari di  $u$  e di  $x$

Altrimenti, si dice **non lineare**

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- Ingresso ed uscita sono scalari, cioè  $u(t) \in \mathbb{R}$   $y(t) \in \mathbb{R}$   $\rightarrow$  **SISO**
- Non c'è dipendenza esplicita dell'uscita  $y(t)$  dall'ingresso  $u(t)$   $\rightarrow$  **Strettamente proprio**
- Non c'è presenza esplicita della variabile tempo  $\rightarrow$  **Tempo invariante**
- $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  sono funzioni lineari di  $u$  e di  $x$   $\rightarrow$  **Lineare**

Esistono anche **sistemi tempo-varianti**

C'è presenza esplicita della variabile tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Compare esplicitamente  $t$

In questo corso si useranno solo sistemi  
**tempo-invarianti** (o **stazionari**)

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x^2(t) + \sin(t)u(t) \\ y(t) = 2x(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- Ingresso ed uscita sono scalari, cioè  $u(t) \in \mathbb{R}$   $y(t) \in \mathbb{R}$   $\rightarrow$  **SISO**
- Non c'è dipendenza esplicita dell'uscita  $y(t)$  dall'ingresso  $u(t)$   $\rightarrow$  **Strettamente proprio**
- **C'è** presenza esplicita della variabile tempo  $\rightarrow$  **Tempo variante**
- $f(\cdot)$  **non** è funzione lineare di  $u$  e di  $x$   $\rightarrow$  **Non lineare**

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + u_1(t) - 3u_2(t) \\ y(t) = 2x(t) + u_1(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- L'ingresso **non** è uno scalare, infatti  $u(t) \in \mathbb{R}^2$  ➡ **MIMO**
- C'è dipendenza esplicita dell'uscita  $y(t)$  dall'ingresso  $u(t)$  ➡ **Proprio**
- Non c'è presenza esplicita della variabile tempo ➡ **Tempo invariante**
- $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  sono funzioni lineari di  $u$  e di  $x$  ➡ **Lineare**

## Criterio matematico

Sistema descritto da un'equazione differenziale di ordine  $n$  nell'incognita  $y(t)$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t), u(t)\right)$$

Scegliere come variabili di stato l'incognita e le sue prime  $n-1$  derivate

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \\ \vdots & \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \varphi(x_n(t), \dots, x_2(t), x_1(t), u(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

## 7. Scelta delle variabili di stato

Come si scelgono  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  ?

- Esistono criteri generali per la scelta delle variabili di stato? **SI**
- La scelta è univoca? **NO**
- L'ordine del sistema è fissato? **SI**

## Esempio

$$\ddot{y}(t) = \sqrt{2y(t)\dot{y}(t)} + \frac{5u(t)}{1 + \dot{y}(t)^2}$$

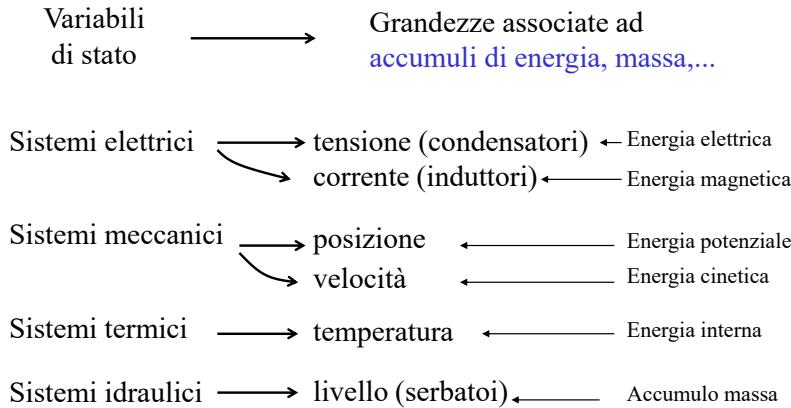
Scegliere

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ x_3(t) &= \ddot{y}(t) \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \sqrt{2x_1(t)x_2(t)} + \frac{5u(t)}{1 + x_2(t)^2} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

## Criterio fisico



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

31

## L'ordine del sistema è univocamente fissato

- L'ordine del sistema è fissato a parità di complessità e accuratezza usate nel descrivere i fenomeni modellizzati
- Maggiore è l'accuratezza con cui desidero descrivere i fenomeni, maggiore sarà il numero di variabili di stato da usare

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

33

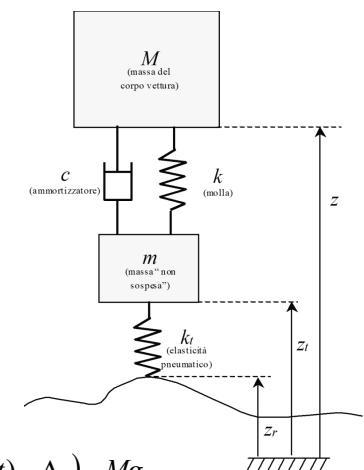
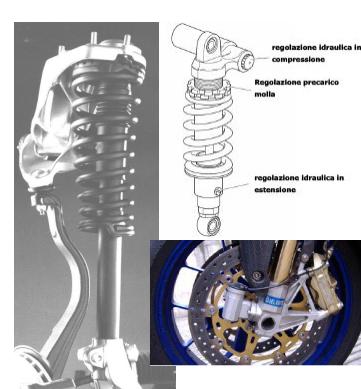
## La scelta delle variabili di stato non è univoca

- Non è obbligatorio scegliere le variabili di stato affidandosi ai criteri visti
- Fare scelte "originali" può essere svantaggioso (o vantaggioso!) in termini di complessità della rappresentazione matematica (anche se il sistema è lo stesso!)
- Mediante trasformazione lineare è comunque possibile passare da una rappresentazione all'altra.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

32

## Esempio – Modellistica di una sospensione a smorzamento controllato

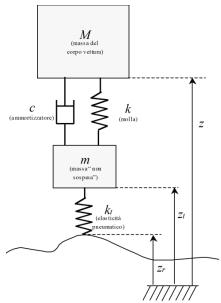


$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \end{cases}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 2

34

$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t)) - \Delta_s - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \end{cases}$$

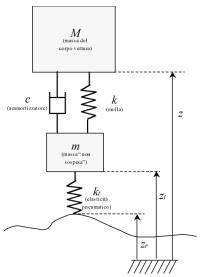


$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ z_t \\ \dot{z}_t \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} z_r \\ c \end{bmatrix} \quad y = [z]$$

Sistema MIMO, del 4° ordine ( $n=4$ ), non-lineare, tempo-invariante, strettamente proprio.

N.B.  $z_r$  è un disturbo

Posso descrivere anche la dinamica  
dello smorzamento (dinamica dell'attuatore) ...

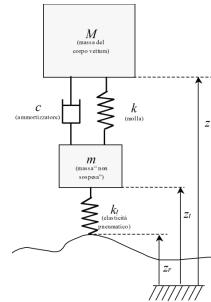


$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t)) - \Delta_s - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \\ \dot{c}(t) = -\beta c(t) + \beta c_{in}(t) \quad c_{min} \leq c_{in}(t) \leq c_{max} \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ z_t \\ \dot{z}_t \\ c \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} z_r \\ c_{in} \end{bmatrix} \quad y = [z]$$

Sistema MIMO, del 5° ordine ( $n=5$ ), non-lineare, tempo-invariante, strettamente proprio

$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t)) - \Delta_s - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \end{cases}$$

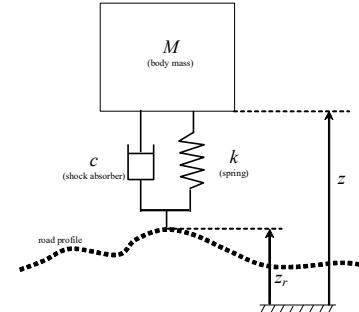
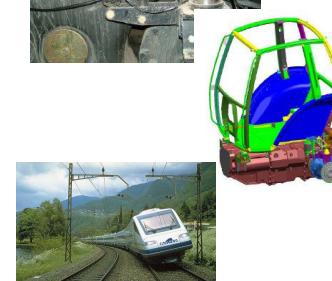


$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ z_t \\ \dot{z}_t \end{bmatrix} \quad u = [z_r] \quad y = [z]$$

Sistema SISO, del 4° ordine ( $n=4$ ), lineare, tempo-variante, strettamente proprio.

E' lo stesso sistema di prima! Le stesse equazioni!

... ma anche alternativamente NON descrivere la dinamica  
dello pneumatico!



$$M\ddot{z}(t) = -c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_r(t)) - k(z(t) - z_r(t) - \Delta_s) - Mg$$

## Rappresentazione di stato (completa)

approfondimento

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

equazione di stato  
trasformazione di uscita  
stato iniziale

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$$

$\mathbf{f}(\cdot)$  è una funzione vettoriale a valori in  $\mathbb{R}^n$

$\mathbf{g}(\cdot)$  è una funzione vettoriale a valori in  $\mathbb{R}^p$

$\mathbf{f}(\cdot)$  e  $\mathbf{g}(\cdot)$  possono dipendere esplicitamente dal tempo

# Lezione 3. Movimento ed Equilibrio

## Schema della lezione

1. Movimento dello stato e dell'uscita (generale)
2. (Movimento di) Equilibrio (generale)
3. Sistemi LTI
4. Equilibrio di sistemi LTI
5. Movimento di sistemi LTI
6. Movimento libero e movimento forzato di sistemi LTI
7. Matlab

## 1. Movimento dello stato e dell'uscita

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \text{ stato iniziale} \end{cases}$$

Sia assegnato l'ingresso  $\mathbf{u}(t)$ ,  $t \geq t_0$

### Problema fondamentale della teoria dei sistemi

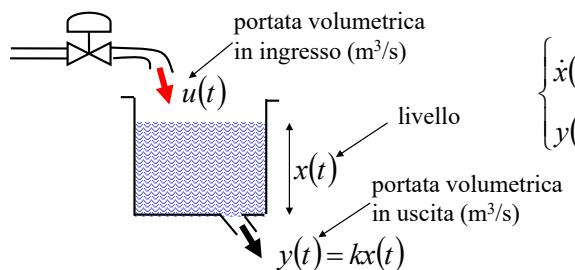
Integrando l'equazione  
di stato si ottiene

Sostituendo il risultato nella  
trasformazione d'uscita si ha

$\mathbf{x}(t)$ ,  $t \geq t_0$   
**movimento dello stato**

$\mathbf{y}(t)$ ,  $t \geq t_0$   
**movimento dell'uscita**

### Esempio



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{k}{A}x(t) + \frac{1}{A}u(t) \\ y(t) = kx(t) \end{cases}$$

$$A = 1 \text{ m}^2 \quad k = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

4

Quindi, si moltiplichino entrambi i membri dell'equazione per  $e^t \neq 0$

$$e^t \dot{x}(t) = -e^t x(t) + 2e^t \quad \Rightarrow \quad e^t \dot{x}(t) + e^t x(t) = 2e^t \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^t x(t)) = 2e^t$$

$$e^t x(t) - x(0) = \int_0^t 2e^\tau d\tau \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-t} x(0) + \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau$$

Sfruttando la condizione iniziale:  $x(0) = 5$

$$x(t) = 5e^{-t} + \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 5e^{-t} + 2e^{-t} \int_0^t e^\tau d\tau =$$

$$= 5e^{-t} + 2e^{-t} [e^\tau]_0^t = 5e^{-t} + 2e^{-t} (e^t - 1) = 5e^{-t} + 2 - 2e^{-t} = 3e^{-t} + 2$$

Il **movimento dello stato** è  $x(t) = 3e^{-t} + 2, t \geq 0$

Il **movimento dell'uscita** è  $y(t) = x(t) = 3e^{-t} + 2, t \geq 0$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

6

Sia assegnato l'ingresso  $u(t) = 2, t \geq 0$  con livello iniziale  $x(0) = 5$

Per trovare il **movimento dello stato**, cioè l'andamento nel tempo del livello, partendo da 5 m ed erogando una portata costante di 2 m<sup>3</sup>/s, bisogna risolvere l'equazione differenziale lineare del primo ordine (cfr Analisi Matematica)

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2$$

con la condizione iniziale  $x(0) = 5$

Innanzitutto si ricordi che:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} [e^\tau x(\tau)] d\tau = e^t x(t) - x(0)$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

5

## 2. (Movimento di) Equilibrio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = \bar{x} \text{ stato iniziale} \\ u(t) = \bar{u}, t \geq t_0 \text{ ingresso costante} \end{cases}$$

### Stato di equilibrio

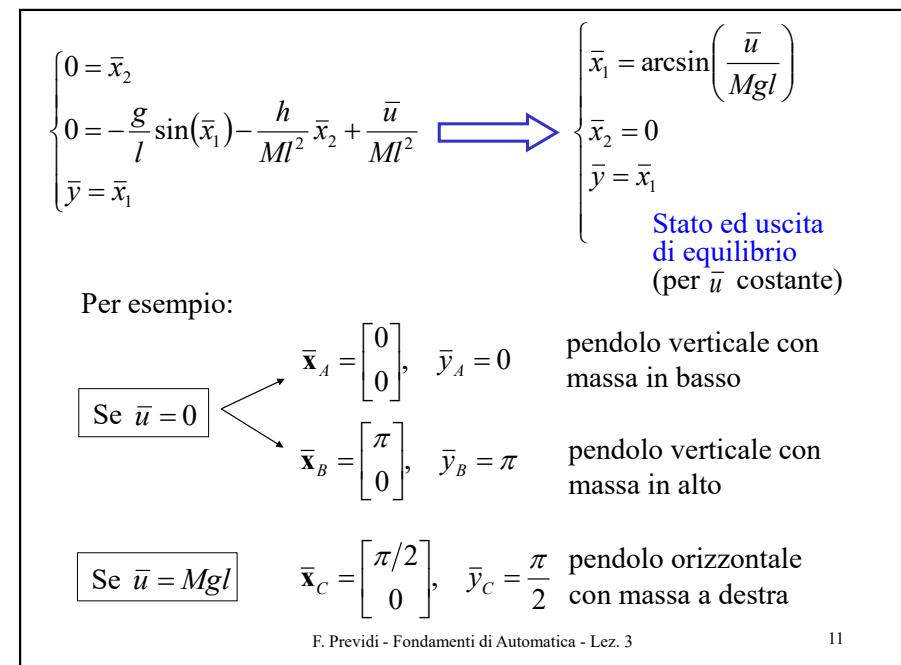
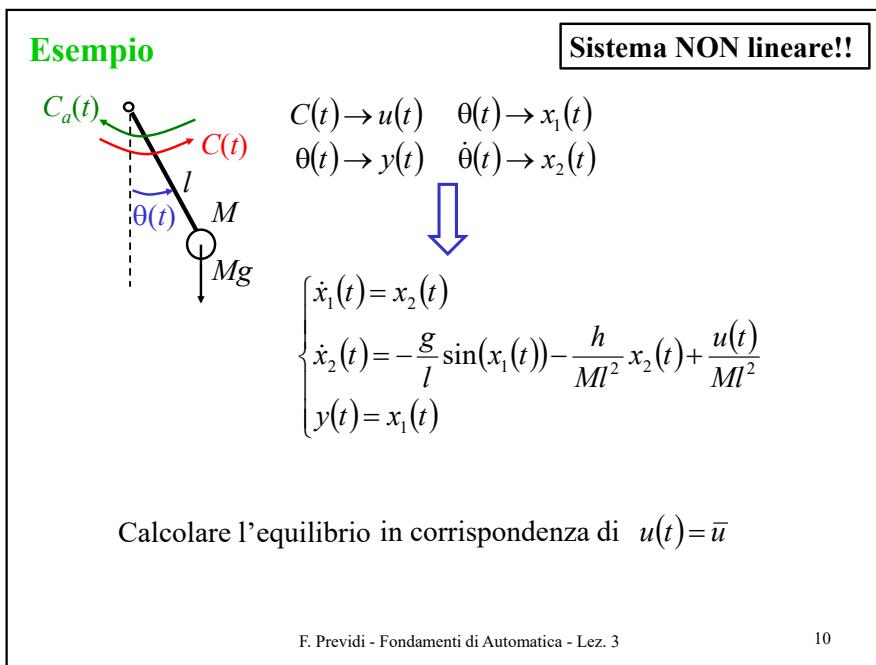
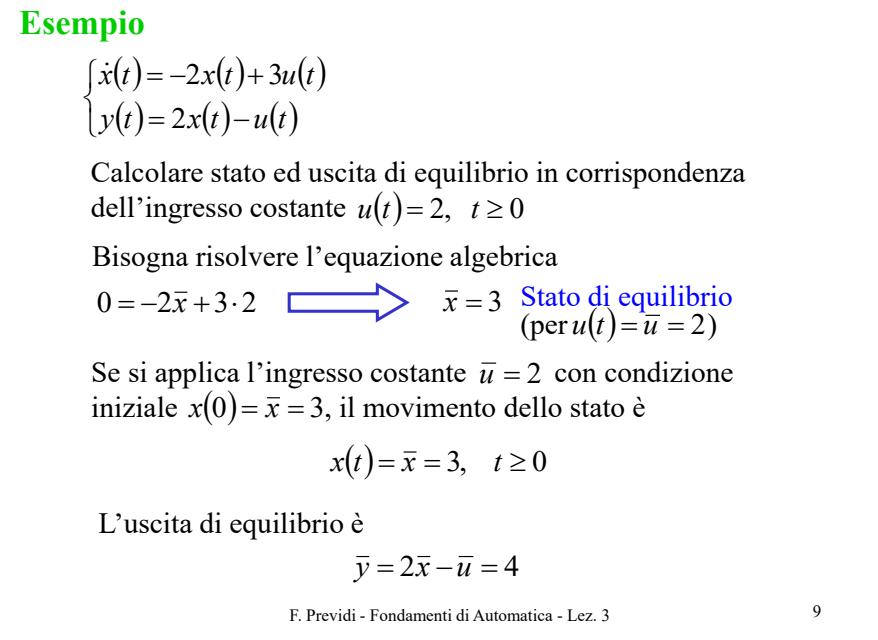
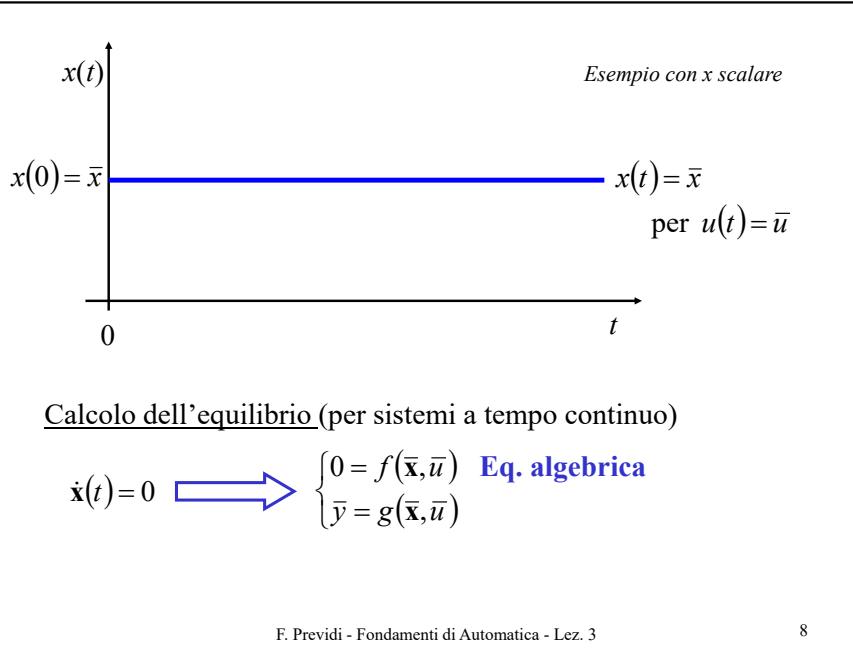
Movimento dello stato  $x(t) = \bar{x}$  costante nel tempo in corrispondenza di  $u(t) = \bar{u}$

### Uscita di equilibrio

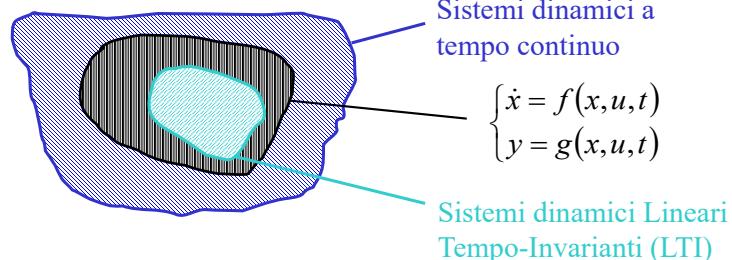
Movimento dell'uscita  $y(t) = \bar{y}$  costante nel tempo in corrispondenza di  $u(t) = \bar{u}$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

7



### 3. Sistemi dinamici Lineari Tempo-Invarianti (LTI)



I sistemi LTI hanno una struttura semplice e sono disponibili molti risultati teorici per il loro studio (e per il progetto di controllori)

Inoltre, molti sistemi dinamici sono descrivibili mediante sistemi LTI (almeno in prima approssimazione)

Raggruppando i coefficienti in matrici e vettori

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]_{1 \times n} \quad D = [d]_{1 \times 1}$$



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

### Sistemi LTI: notazione matriciale (caso SISO)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{cases} \quad \text{con } \mathbf{f}(\cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot) \text{ lineari}$$

Ricordando che  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

è possibile scrivere esplicitamente le relazioni in forma lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \\ y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) + du(t) \end{cases}$$

### Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) - 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t) + 3u(t) \\ y(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t) + 2u(t) \end{cases} \quad \mathbf{f}(\cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot) \text{ sono lineari}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{il sistema è di ordine 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = [2 \ -3] \quad D = 2$$

## 4. Equilibrio di sistemi LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

In corrispondenza di  $u(t) = \bar{u}$  si imponga  $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$

$$0 = A\bar{\mathbf{x}} + B\bar{u} \quad \rightarrow \quad A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$$

**Se**  $\det A \neq 0$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= -A^{-1}B\bar{u} \\ \bar{y} &= C\bar{\mathbf{x}} + D\bar{u} = \underbrace{(-CA^{-1}B + D)\bar{u}}_{\mu} \\ \mu &= \frac{\bar{y}}{\bar{u}} \quad \text{guadagno statico} \end{aligned}$$

**Se**  $\det A = 0$

Il sistema  $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$  può avere **infinite** o **nessuna** soluzione.

### Esempio

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio ed il guadagno statico in corrispondenza dell'ingresso  $u(t) = \bar{u} = 2$

$$\det A = 1 \neq 0$$

$$\bar{\mathbf{x}} = -A^{-1}B\bar{u} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = C\bar{\mathbf{x}} + D\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 6 \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = 3$$

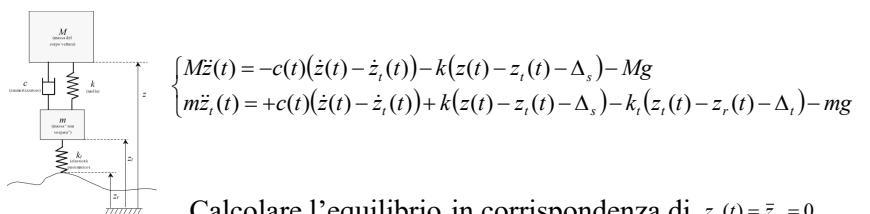
Un sistema LTI può avere (in corrispondenza di un dato  $\bar{u}$ ):

➤ un solo stato di equilibrio (Se  $\det A \neq 0$ )

➤ infiniti stati di equilibrio (Se  $\det A = 0$  e  $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$  ha infinite soluzioni)

➤ nessuno stato di equilibrio (Se  $\det A = 0$  e  $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$  non ha nessuna soluzione)

### Esempio – Sospensione

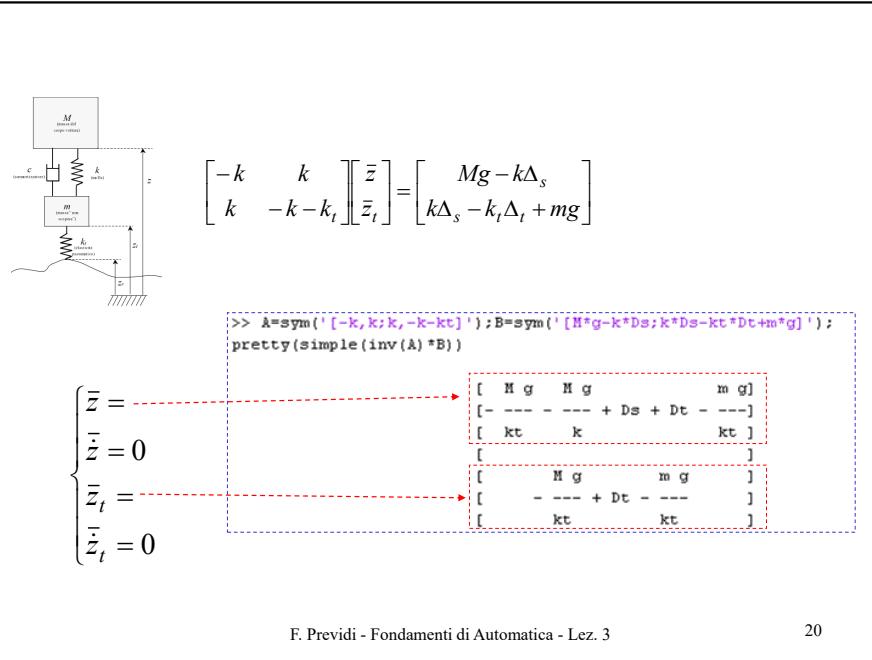


Calcolare l'equilibrio in corrispondenza di  $z_r(t) = \bar{z}_r = 0$

$$\begin{cases} -k(\bar{z} - \bar{z}_t - \Delta_s) - Mg = 0 \\ k(\bar{z} - \bar{z}_t - \Delta_s) - k_t(\bar{z}_t - \bar{z}_r - \Delta_t) - mg = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k - k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mg - k\Delta_s \\ k\Delta_s - k_t\Delta_t + mg \end{bmatrix}$$

**NB: vale qualunque sia  $c(t)$**



## 5. Movimento di sistemi LTI SISO

Si consideri un sistema SISO del I ordine ( $n=1$ , stato scalare)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases}$$

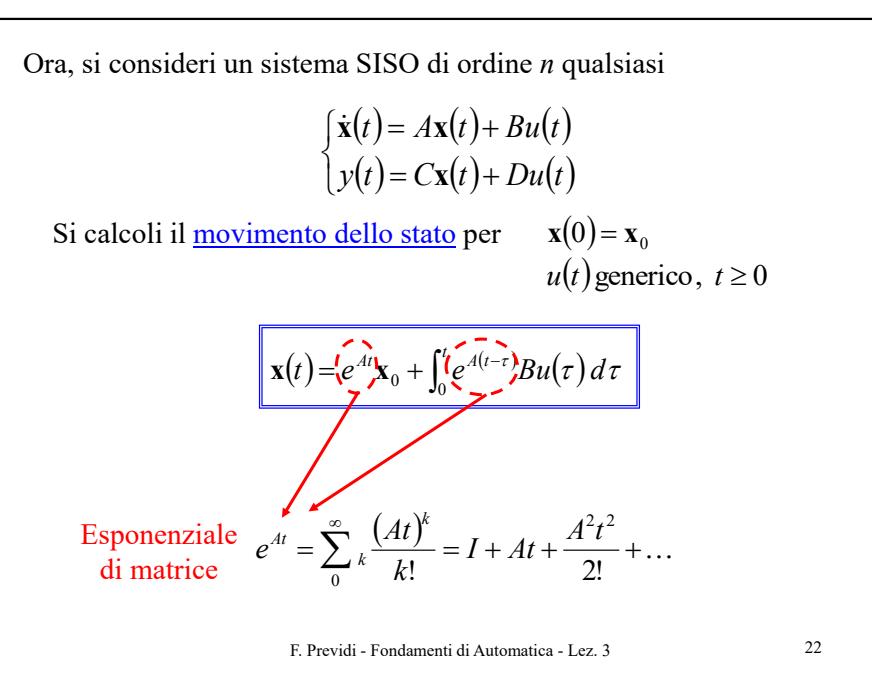
Si calcoli il movimento dello stato per  $x(0) = x_0$   
 $u(t)$  generico,  $t \geq 0$



$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

21



## Formule di Lagrange (per il calcolo del movimento di sistemi LTI)

### Movimento dello stato

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

### Movimento dell'uscita

$$y(t) = C e^{At} \mathbf{x}_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

23

## 6. Movimento libero e movimento forzato

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{At} \mathbf{x}_0}_{\mathbf{x}_l(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{\mathbf{x}_f(t)}$$

Movimento libero dello stato      Movimento forzato dello stato

$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) \\ y(t) = y_l(t) \end{cases}$   
 per  $u(t) = 0$   
**Dipende solo dalla condizione iniziale**

$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) \\ y(t) = y_f(t) \end{cases}$   
 per  $x_0 = 0$   
**Dipende solo dall'ingresso**

$$y(t) = \underbrace{C e^{At} \mathbf{x}_0}_{y_l(t)} + \underbrace{C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{y_f(t)} + D u(t)$$

Movimento libero dell'uscita      Movimento forzato dell'uscita

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

24

### Esempio

```
>> A=[-1 3; -2 -7]; B=[2 1]'; C=[1 1]; D=1;
>> Sistema=ss(A,B,C,D)
```

Sistema =

```
A =
    x1  x2
x1   -1   3
x2   -2  -7
```

```
B =
    u1
x1   2
x2   1
```

```
C =
    x1  x2
y1   1   1
```

```
D =
    u1
y1   1
```

Continuous-time state-space model.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

26

## 7. Matlab

**ss** Construct state-space model or convert model to state space.

Construction:

**SYS = ss(A,B,C,D)** creates an object SYS representing the continuous-time state-space model  

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
  

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Con questo comando si crea un sistema dinamico LTI.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

25

**lsim** Simulate time response of dynamic systems to arbitrary inputs.

**lsim(SYS,U,T)** plots the time response of the dynamic system SYS to the input signal described by U and T. The time vector T is expressed in the time units of SYS and consists of regularly spaced time samples.  
For example,  
 $t = 0:0.01:5;$     $u = \sin(t);$     $lsim(sys,u,t)$   
simulates the response of a single-input model SYS to the input  $u(t)=\sin(t)$  during 5 time units.

**lsim(SYS,U,T,X0)** specifies the initial state vector X0 at time T(1) (for state-space models only). X0 is set to zero when omitted.

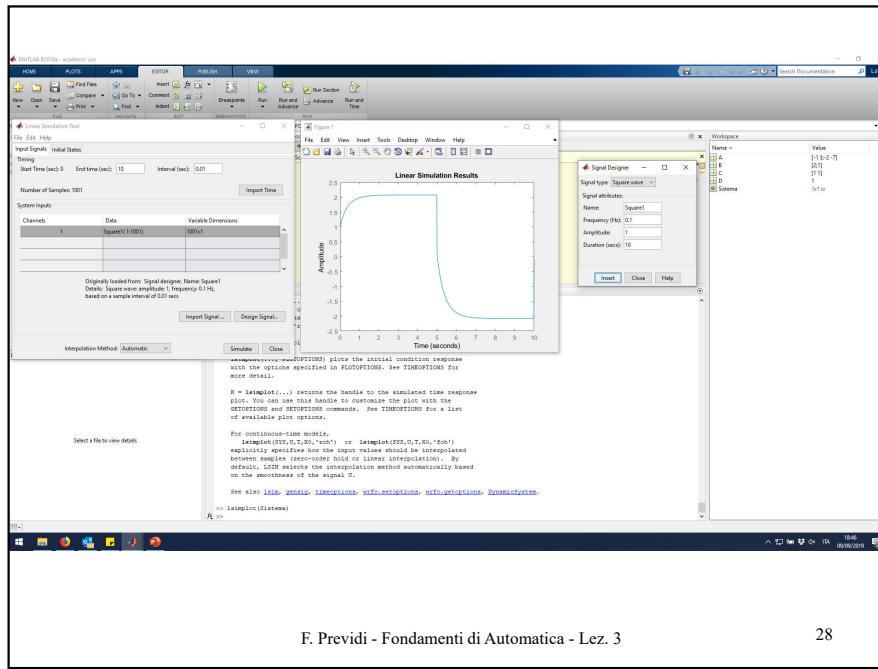
**Y = lsim(SYS,U,T)** returns the output history Y.

**lsimplot(SYS)** opens the Linear Simulation Tool for the dynamic system SYS, which enables interactive specification of the driving input(s), time vector, and initial state.

Con questo comando si può calcolare (non analiticamente) il movimento di un sistema LTI a partire da una data **condizione iniziale** e con un assegnato **ingresso**.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

27



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

28

Questo comando serve per calcolare il solo **movimento libero** di un sistema.

**initial** Initial condition response of state-space models.

**initial(SYS,X0)** plots the undriven response of the state-space model SYS (created with SS) with initial condition X0 on the states. This response is characterized by the equations

Continuous time:  $\dot{x} = Ax$ ,  $y = Cx$ ,  $x(0) = x_0$

When invoked with left hand arguments,

**[Y,T,X] = initial(SYS,X0)**

returns the output response Y, the time vector T used for simulation, and the state trajectories X

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

29

## Principio di sovrapposizione degli effetti

**approfondimento**

Consideriamo un sistema SISO (eventualmente tempo-variante) di ordine  $n$  qualsiasi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

30

## Teorema

**approfondimento**

Siano  $x'(t)$  e  $y'(t)$  i movimenti dello stato e dell'uscita generati dall'ingresso  $u'(t)$  con stato iniziale  $x_0'$ .

Siano  $x''(t)$  e  $y''(t)$  i movimenti dello stato e dell'uscita generati dall'ingresso  $u''(t)$  con stato iniziale  $x_0''$ .

Allora per ogni  $\alpha, \beta$  scalari i movimenti dello stato  $x'''(t)$  e dell'uscita  $y'''(t)$  generati dall'ingresso  $u'''(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t)$  con stato iniziale  $x_0''' = \alpha x_0' + \beta x_0''$  sono:

$$x'''(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t) \quad e \quad y'''(t) = \alpha y'(t) + \beta y''(t)$$

cioè:

$$u'(t), x_0' \rightarrow x'(t), y'(t)$$

$$u''(t), x_0'' \rightarrow x''(t), y''(t)$$

$$u'''(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t)$$

$$x_0''' = \alpha x_0' + \beta x_0'' \qquad \qquad \qquad x'''(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t)$$

$$y'''(t) = \alpha y'(t) + \beta y''(t)$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 3

31

Quindi:

il **movimento libero** di un sistema lineare a partire da una combinazione lineare di condizioni iniziali è la combinazione lineare dei movimenti liberi generati a partire dalle singole condizioni iniziali

$$x_0' \rightarrow x_l'(t) \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad x_0''' = \alpha x_0' + \beta x_0'' \rightarrow \\ x_0'' \rightarrow x_l''(t) \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \rightarrow x_l'''(t) = \alpha x_l'(t) + \beta x_l''(t)$$

il **movimento forzato** di un sistema lineare a partire da una combinazione lineare di ingressi è la combinazione lineare dei movimenti forzati generati a partire dai singoli ingressi

$$u'(t) \rightarrow x_f'(t) \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad u'''(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t) \rightarrow \\ u''(t) \rightarrow x_f''(t) \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \rightarrow x_f'''(t) = \alpha x_f'(t) + \beta x_f''(t)$$

approfondimento

## Sistemi LTI MIMO (cenni)

approfondimento

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$$

$$A \text{ matrice } n \times n \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$$C \text{ matrice } p \times n \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

## Equilibrio

approfondimento

In corrispondenza di  $u(t) = \bar{u}$

$$0 = A\bar{x} + B\bar{u} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad A\bar{x} = -B\bar{u}$$

Se  $\det A \neq 0$

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u}$$

Matrice  $p \times m$

Matrice dei  
guadagni statici

Se  $\det A = 0$

Il sistema  $A\bar{x} = -B\bar{u}$  può avere  
infinte o nessuna soluzione.

## Movimento

approfondimento

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\underbrace{x_f(t)}_{n \times 1} = \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{n \times n} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

$$B = [B_1 | B_2 | \cdots | B_m]_{n \times m}$$

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \sum_{j=1}^m B_j u_j(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^m \int_0^t e^{A(t-\tau)} B_j u_j(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^m x_{fj}(t)$$

Il movimento forzato è la somma dei movimenti forzati dovuti alle componenti dell'ingresso

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Due ingressi, due uscite,  
del secondo ordine

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + u_1(t) - 2u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 3x_2(t) - u_1(t) + u_2(t) \\ y_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u_1(t) \\ y_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

**approfondimento**

Si calcoli l'equilibrio in corrispondenza di  $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\det A = 1 \neq 0$$

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} = -\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu = -CA^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

## Rappresentazioni equivalenti

**approfondimento**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Cambiamento di variabili di stato

$$\tilde{x}(t) = Tx(t) \quad \text{con } \det T \neq 0$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = T\dot{x}(t) = T(Ax(t) + Bu(t)) = TAT^{-1}\tilde{x}(t) + TBu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) = CT^{-1}\tilde{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \tilde{B} = TB, \tilde{C} = CT^{-1}, \tilde{D} = D$$

$$(A, B, C, D) \sim (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$$

$$(A, B, C, D) \sim (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$$

**approfondimento**

stesso sistema

(diversa rappresentazione di stato ma stesso legame ingresso-uscita)

## Equilibrio

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \det \tilde{A} \neq 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\mu} = \mu$$

## Movimento

stesso movimento dell'uscita  $y(t)$   
in corrispondenza del medesimo ingresso e  
della condizione iniziale  $\tilde{x}_0 = Tx_0$

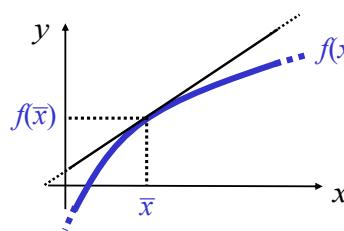
# Lezione 4.

## Linearizzazione di sistemi non lineari

### Schema

1. Introduzione
2. Linearizzazione vicino all'equilibrio
3. Sistema lineare tangente
4. Simulazioni

### 1. Introduzione



Vicino a  $\bar{x}$   $f(x)$  può essere approssimata usando la sua tangente:

$$y \equiv f(\bar{x}) + \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})$$

“Vicino a  $\bar{x}$ ” significa che  $(x - \bar{x})$  è piccolo

### 2. Linearizzazione vicino ad un equilibrio

Si consideri un sistema SISO **non lineare stazionario**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

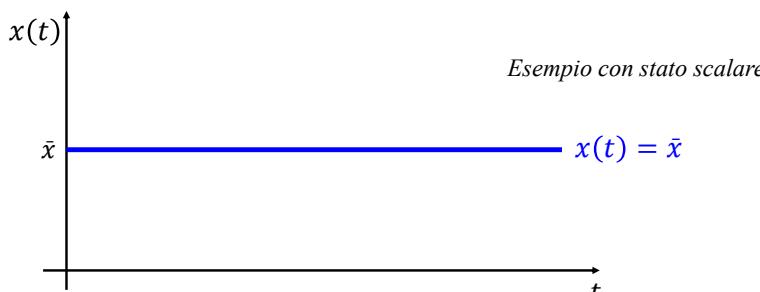
Si supponga che questo sistema abbia uno stato di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  in corrispondenza di un ingresso costante  $\bar{u}$  cioè:

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = 0$$

Si vuole trovare un **sistema lineare** che **approssimi** il comportamento dinamico del sistema non lineare vicino all'equilibrio.

Se  $(\bar{x}, \bar{u})$  è un equilibrio allora il movimento dello stato ottenuto con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$  e ingresso  $u(t) = \bar{u}$ ,  $t \geq 0$  è  $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}, t \geq 0$

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}, t \geq 0$$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 4

5

$x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$  è il movimento dello stato con ingresso  $u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$  e quindi deve soddisfare l'equazione di stato  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ .

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{d}{dt} (\bar{x} + \delta x(t)) = \dot{\delta x}(t)$$

$$f(x(t), u(t)) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (u(t) - \bar{u}) + \text{altro}$$

- Sviluppo in serie di Taylor di  $f(x(t), u(t))$  intorno a  $(\bar{x}, \bar{u})$  -

Nel problema che stiamo affrontando si ha:

- $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$  perché siamo all'equilibrio
- $x(t) - \bar{x} = \delta x(t)$  e  $u(t) - \bar{u} = \delta u(t)$  è il movimento considerato

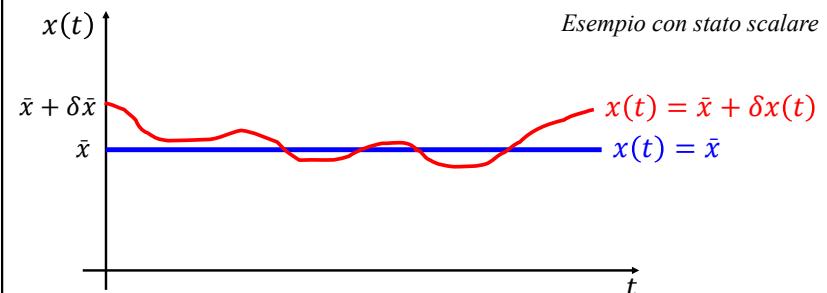
Quindi:  $f(x(t), u(t)) \cong \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u(t)$

$$\dot{\delta x}(t) \cong f_x(\bar{x}, \bar{u}) \delta x(t) + f_u(\bar{x}, \bar{u}) \delta u(t)$$

7

Si perturbi sia la condizione iniziale sia l'ingresso. Se le perturbazioni sono **piccole** (e sotto opportune ipotesi di regolarità del sistema) si può descrivere il movimento dello stato come perturbazione del movimento di equilibrio

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u} + \delta u(t), t \geq 0 \\ \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x} \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}(t), t \geq 0$$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 4

6

Questo movimento deve soddisfare anche l'**equazione di uscita**

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Anche il movimento dell'uscita si può esprimere come somma dell'uscita di equilibrio e di una perturbazione

$$y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$$

$$g(x(t), u(t)) = g(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (u(t) - \bar{u}) + \text{altro}$$

- Sviluppo in serie di Taylor di  $g(x(t), u(t))$  intorno a  $(\bar{x}, \bar{u})$  -

Nel problema che stiamo affrontando si ha:

- $g(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{y}$  perché siamo all'equilibrio
- $x(t) - \bar{x} = \delta x(t)$  e  $u(t) - \bar{u} = \delta u(t)$  è il movimento considerato

Quindi  $g(x(t), u(t)) \cong \bar{y} + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u(t)$

$$\delta y(t) \cong g_x(\bar{x}, \bar{u}) \delta x(t) + g_u(\bar{x}, \bar{u}) \delta u(t)$$

8

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) \cong f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \\ \delta y(t) \cong g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \end{cases}$$

**Sistema  
SISO**

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$$

matrice  $A$   $n \times n$

$$f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u \\ \vdots \\ \partial f_n / \partial u \end{bmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$$

vettore  $B$   $n \times 1$

$$g_x(\bar{x}, \bar{u}) = [\partial g / \partial x_1 \dots \partial g / \partial x_n]_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$$

vettore  $C$   $1 \times n$

$$g_u(\bar{x}, \bar{u}) = \partial g / \partial u \Big|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}$$

scalare  $D$

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t)u(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) - x_2(t)u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante

$$u(t) = \bar{u} = 1 \quad \text{per } t \geq 0$$

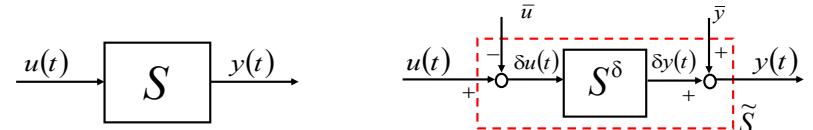
$$\begin{cases} 0 = -\bar{x}_2 + 1 \\ 0 = -\bar{x}_2 + \bar{x}_1 \\ 0 = -\bar{x}_3 - \bar{x}_2 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{x}_3 = -\bar{x}_2 = -1 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 = 1 \end{cases} \text{ ovvero } \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \bar{y} = 1$$

## 3. Sistema lineare tangente

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad S^\delta : \begin{cases} \dot{\delta x}(t) \cong f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \\ \delta y(t) \cong g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \end{cases}$$



$\tilde{S}$  è l'approssimazione di  $S$  nell'intorno del punto di equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$

$S^\delta$  viene spesso indicato (più correttamente) con il nome di **sistema lineare tangente**

$\tilde{S}$  viene spesso indicato anche con il nome di **approssimazione (o modello) locale**

Linearizzare il sistema intorno all'equilibrio trovato

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) \cong f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \\ \delta y(t) \cong g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \end{cases}$$

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \partial f_1 / \partial x_3 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \partial f_2 / \partial x_3 \\ \partial f_3 / \partial x_1 & \partial f_3 / \partial x_2 & \partial f_3 / \partial x_3 \end{bmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{u} & 0 \\ \bar{u} & -1 & 0 \\ 0 & -\bar{u} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u \\ \partial f_2 / \partial u \\ \partial f_3 / \partial u \end{bmatrix}_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} = \begin{bmatrix} -\bar{x}_2 + 1 \\ \bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$g_x(\bar{x}, \bar{u}) = [\partial g / \partial x_1 \quad \partial g / \partial x_2 \quad \partial g / \partial x_3]_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

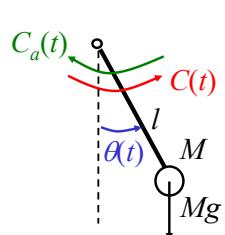
$$g_u(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

$$S^\delta : \begin{cases} \dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \dot{\delta y}(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0] \quad D = 0$$

### Esempio



$$\text{Equilibrio } (\bar{x}, \bar{u}) = \left( \begin{bmatrix} \arcsin\left(\frac{\bar{u}}{Mgl}\right) \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u} \right)$$

con  $\bar{u}$  qualsiasi

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) & f_1(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{h}{Ml^2} x_2(t) + \frac{u(t)}{Ml^2} & f_2(x(t), u(t)) \\ y(t) = x_1(t) & g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

$$f_1(x, u) = x_2$$

$$f_2(x, u) = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{h}{Ml^2} x_2 + \frac{u}{Ml^2}$$

$$\left. \frac{df_1(x, u)}{dx_1} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 0$$

$$\left. \frac{df_1(x, u)}{dx_2} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 1$$

$$\left. \frac{df_2(x, u)}{dx_1} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = -\frac{g}{l} \cos(\bar{x}_1)$$

$$\left. \frac{df_2(x, u)}{dx_2} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = -\frac{h}{Ml^2}$$

$$A = f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\bar{x}_1) & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

$$f_1(x, u) = x_2$$

$$f_2(x, u) = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{h}{Ml^2} x_2 + \frac{u}{Ml^2}$$

$$\left. \frac{df_1(x, u)}{du} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 0$$

$$\left. \frac{df_2(x, u)}{du} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \frac{1}{Ml^2}$$

$$B = f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

$$g(x,u) = x_1(t)$$

$$\frac{dg(x,u)}{dx_1} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 1 \quad \frac{dg(x,u)}{dx_2} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 0$$

$$C = g_x(\bar{x}, \bar{u}) = [1 \ 0]$$

$$g(x,u) = x_1(t)$$

$$\frac{dg(x,u)}{du} \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 0$$

$$D = g_u(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 4

17

#### 4. Simulazioni Matlab

$$M = 1 \text{ kg}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$h = 0.5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Equilibrio  $\bar{u} = 0$

$$\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 4

19

$$S^\delta : \begin{cases} \dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \dot{\delta y}(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\bar{x}_1) & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad D = 0$$

Si considerino i seguenti tre equilibri

$$\bar{u} = 0 \quad \bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad A_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = 0 \quad \bar{x}_B = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = Mgl \quad \bar{x}_C = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 4

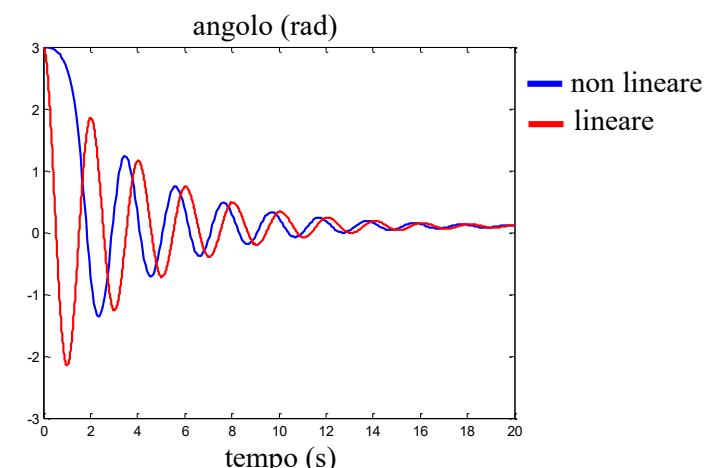
18

$$u(t) = 0 + \delta u(t) = 1, \quad t \geq 0$$

“piccola” perturbazione  
dell’ingresso

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

“grande” perturbazione della c.i.



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 4

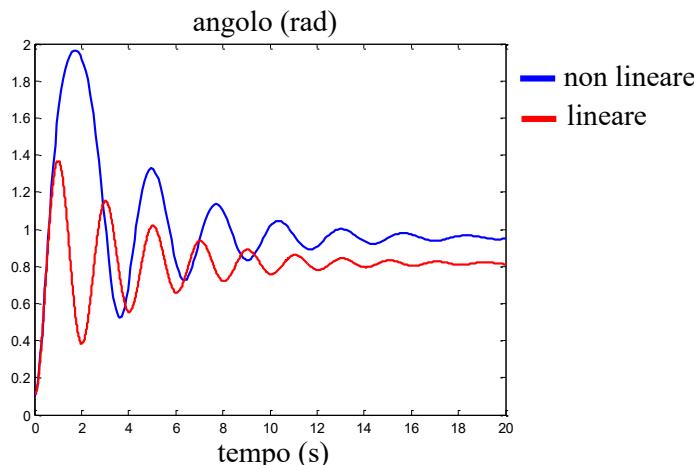
20

$$u(t) = 0 + \delta u(t) = 8, \quad t \geq 0$$

“grande” perturbazione  
dell’ingresso

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \bar{x} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

“piccola” perturbazione della c.i.



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 4

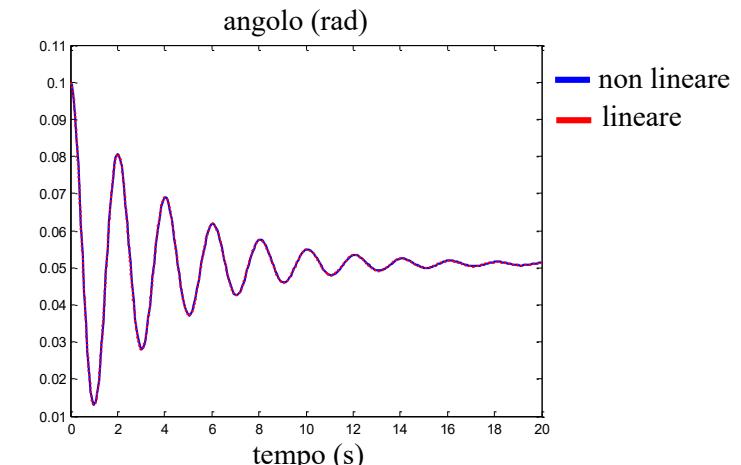
21

$$u(t) = 0 + \delta u(t) = 0.5, \quad t \geq 0$$

“piccola” perturbazione  
dell’ingresso

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \bar{x} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

“piccola” perturbazione della c.i.



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 4

22

## Lezione 5. Stabilità dei sistemi dinamici

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 5

1

### Schema della lezione

1. Introduzione
2. Stabilità dell’equilibrio
3. Stabilità dell’equilibrio nei sistemi LTI
4. Classificazione dei sistemi LTI
5. Proprietà dei sistemi LTI as. stabili

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 5

2

## 1. Introduzione

Due equilibri



Nella teoria dei sistemi dinamici si parla di:

- Stabilità di un movimento
- Stabilità di un equilibrio
- Stabilità del sistema (per sistemi lineari)

• La stabilità è quella proprietà per cui un sistema, dopo una perturbazione, tende a tornare nella situazione preesistente la perturbazione.

• La stabilità è una proprietà locale (in generale), cioè si riferisce al comportamento del sistema in seguito a perturbazioni "piccole".

• Non tutte le grandezze di un sistema sono note con precisione: la **condizione iniziale** è spesso non nota.

Teoria di Lyapunov

## 2. Stabilità dell'equilibrio

Sia  $(\bar{x}, \bar{u})$  un equilibrio per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \rightarrow x(t) = \bar{x} \quad \text{movimento nominale}$$

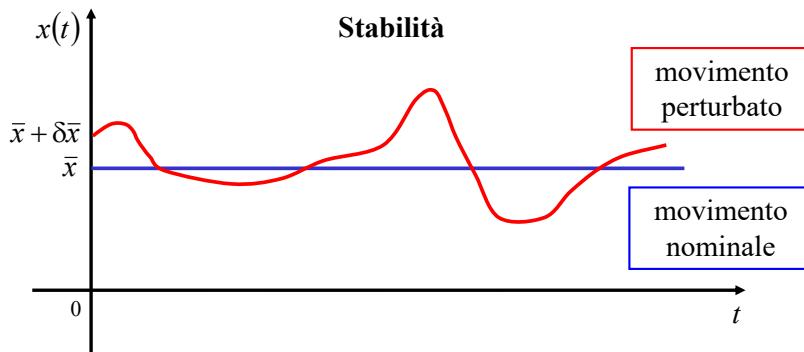
$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta \bar{x} \end{cases} \rightarrow x(t) = \bar{x} + \delta x(t) \quad \text{movimento perturbato}$$

(Stesso ingresso, c.i. differente)

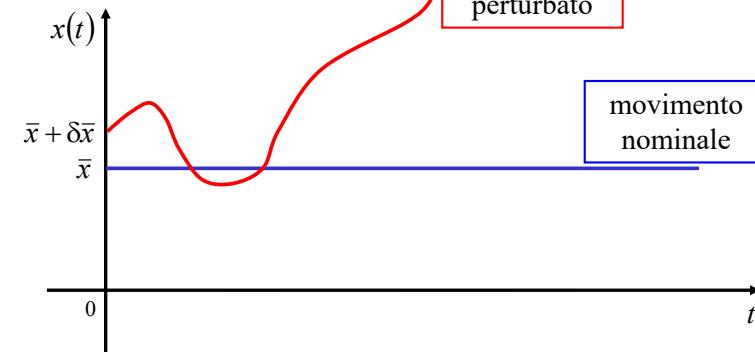
perturbazione della  
condizione iniziale

perturbazione  
del movimento

Per un sistema del primo ordine è possibile visualizzare graficamente in modo semplice il concetto di stabilità.



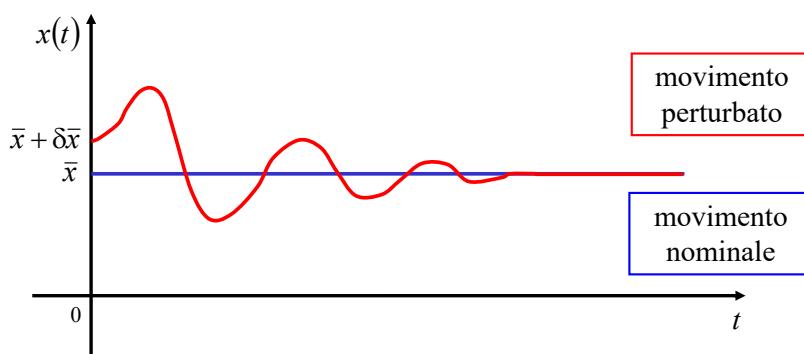
**Instabilità**



**approfondimento**

E' possibile esprimere i precedenti concetti in modo rigoroso ricorrendo alla topologia.

**Asintotica stabilità**



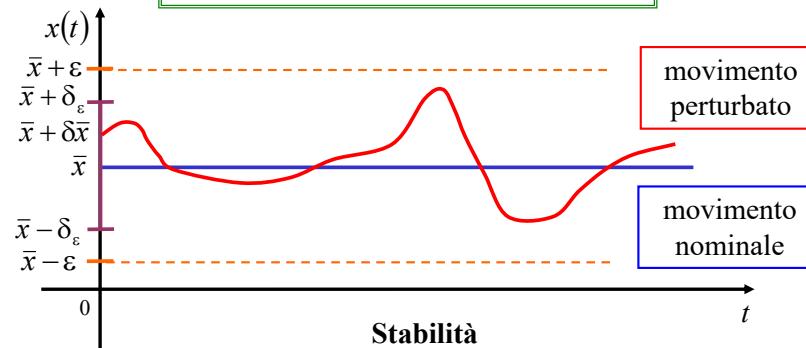
Un equilibrio  $\bar{x}$  si dice stabile se

**approfondimento**

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  tale che

$\forall \delta\bar{x}$  che soddisfa  $\|\delta\bar{x}\| < \delta_\varepsilon$

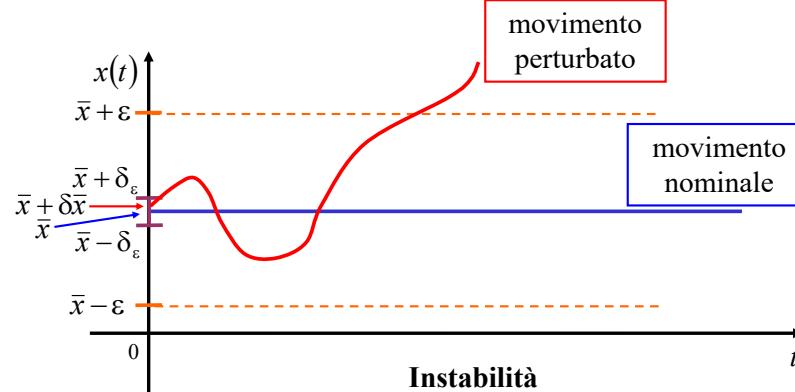
risulti  $\|\delta x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$



**Stabilità**

Un equilibrio  $\bar{x}$  si dice instabile se non è stabile.

**approfondimento**

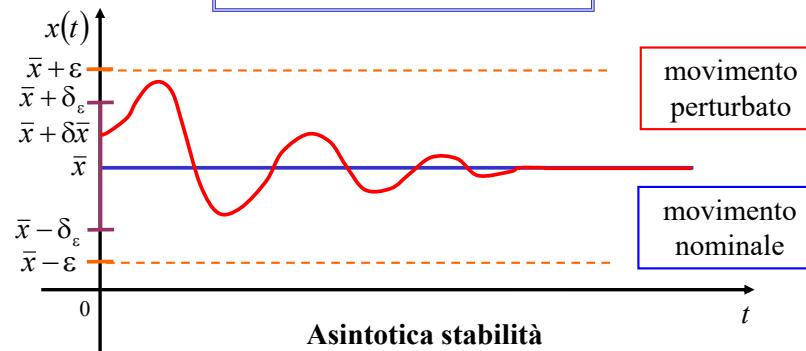


**Instabilità**

Un equilibrio  $\bar{x}$  si dice asintoticamente stabile se è stabile ed inoltre

**approfondimento**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta x(t)\| = 0$$



**Asintotica stabilità**

### 3. Stabilità dell'equilibrio nei sistemi LTI

Consideriamo un sistema LTI SISO

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Sia  $(\bar{x}, \bar{u})$  un equilibrio per il sistema.

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} \end{cases}$$

**movimento nominale**

$$x(t) = \bar{x}, t \geq 0$$

Usando la formula di Lagrange

**movimento nominale**

$$x(t) = e^{At} \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau = \bar{x}$$

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta\bar{x} \end{cases}$$

perturbazione della condizione iniziale

Usando la formula di Lagrange

movimento perturbato

$$x(t) = e^{At} (\bar{x} + \delta\bar{x}) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau = \\ = e^{At} \bar{x} + e^{At} \delta\bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau = \\ = (e^{At} \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau) + e^{At} \delta\bar{x}$$

movimento nominale

perturbazione del movimento

Utilizzando la definizione di stabilità dell'equilibrio vista (intuitivamente) si può dedurre che

Asintotica stabilità  $\iff \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$

Instabilità  $\iff e^{At}$  diverge per  $t \rightarrow \infty$

Stabilità  $\iff e^{At}$  limitata  $\forall t$

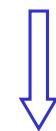
N.B.  $e^{At}x_0$  è il movimento libero!!!

Quindi:

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x} = e^{At} \delta \bar{x}$$

perturbazione del movimento

perturbazione della condizione iniziale



La perturbazione del movimento che si ottiene in seguito ad una perturbazione della condizione iniziale:

- non dipende dal particolare stato di equilibrio quindi si può parlare di stabilità del sistema
- dipende solo dalla matrice  $e^{At}$  da studiare accuratamente
- la stabilità (nei sistemi lineari) è una proprietà "globale" (non dipende dall'entità della perturbazione)

### Esempio esplicativo (caso scalare)

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

$a < 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = 0 \iff$  Asintotica stabilità

$a > 0 \iff e^{at}$  diverge per  $t \rightarrow \infty \iff$  Instabilità

$a = 0 \iff e^{at}$  limitata  $\forall t \iff$  Stabilità

Per esempio

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -2x(t) + u(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

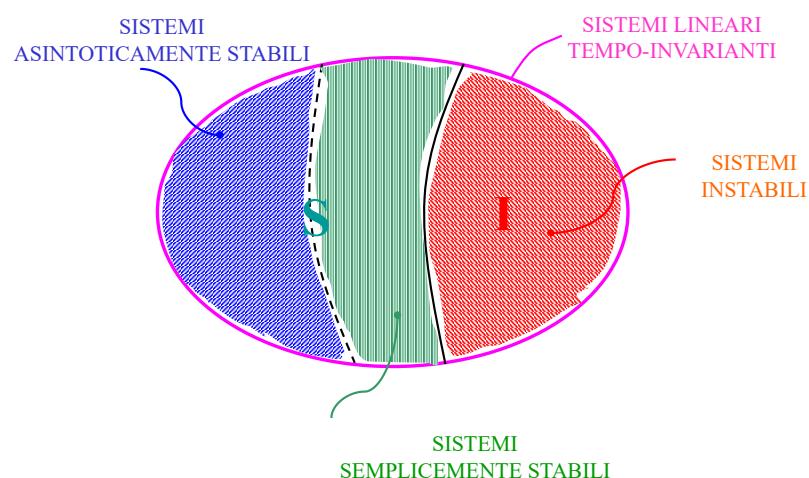
$$e^{-2t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{Asintotica stabilità}$$

Per esempio

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 2x(t) + u(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

$$e^{2t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \quad \text{Instabilità}$$

#### 4. Classificazione dei sistemi LTI (per la stabilità)



#### 5. Proprietà dei sistemi LTI as. stabili

##### Proprietà 1

Un sistema LTI as. stabile “spostato” dall’equilibrio, tende a tornarci spontaneamente.

Sia  $(\bar{u}, \bar{x})$  un equilibrio. Se si cambia la condizione iniziale, ma si applica lo stesso ingresso, il movimento dello stato di un sistema LTI as. stabile tende sempre allo stesso equilibrio.

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta \bar{x} \end{cases} \quad \xrightarrow{\quad} \quad x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \bar{x}$$

Modificando la condizione iniziale, modifio solo il movimento libero che nei sistemi as.stabili si annulla asintoticamente.

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Lo stato di equilibrio in corrispondenza di  
 $\bar{u} = 1$  è  $\bar{x} = 1$   
 $x(0) = 1$

Quindi applicando l'ingresso costante  $\bar{u} = 1$  con c.i.  $x(0) = 1$  si ottiene il movimento (costante) dello stato  $x(t) = 1$  per tutti i  $t \geq 0$

$$\begin{cases} u(t) = 1, t \geq 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad x(t) = 1, t \geq 0$$

movimento nominale

Si cambi lo stato iniziale, mantenendo lo stesso ingresso:

$$\begin{cases} u(t) = 1, t \geq 0 \\ x(0) = 1 + \delta\bar{x} \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad x(t) = 1 + \delta x(t)$$

movimento perturbato

## Proprietà 2

Fissato  $u(t) = \bar{u}$ , lo stato di equilibrio  $\bar{x}$  di un sistema LTI as. stabile è unico.

(Cfr. Lez. 3 pag. 17)

Si supponga per assurdo che  $\bar{x} \neq \bar{x}$  sia un altro stato di equilibrio per il sistema. Allora, con condizione iniziale  $x(0) = \bar{x}$  il movimento dello stato sarebbe  $x(t) = \bar{x}$  e non tenderebbe asintoticamente a  $\bar{x}$  contro la Proprietà 1.

Sistema  
as. stabile  $\xrightarrow{\hspace{2cm}} \bar{x}$  unico  $\xleftrightarrow{\hspace{2cm}} \det A \neq 0$   
 (per un dato  $\bar{u}$ )  
 (fatto già noto: cfr.  
Lez. 3 pagg. 15-16)

Qual'è l'espressione del movimento perturbato?

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau = \\ &= e^{-t} (1 + \delta\bar{x}) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau + e^{-t} \delta\bar{x} = \\ &= e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^\tau d\tau + e^{-t} \delta\bar{x} = e^{-t} + e^{-t} (e^t - 1) + e^{-t} \delta\bar{x} = \\ &= 1 + e^{-t} \delta\bar{x} \end{aligned}$$

$\delta x(t)$

perturbazione  
dell'equilibrio

$$e^{-t} \delta\bar{x} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{qualsiasi sia } \delta\bar{x}$$

La perturbazione del movimento tende ad annullarsi, qualsiasi sia l'entità della perturbazione della condizione iniziale.

## Proprietà 3

Il movimento dello stato di un sistema LTI as. stabile dipende asintoticamente solo dall'ingresso  $u(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_l(t) + x_f(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x_f(t) \\ &\xrightarrow{\hspace{2cm}} e^{At} x(0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Cioè: in un sistema as. stabile il movimento non risente (asintoticamente) delle condizioni iniziali.

### Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} u(t) = \sin(t), t \geq 0 \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

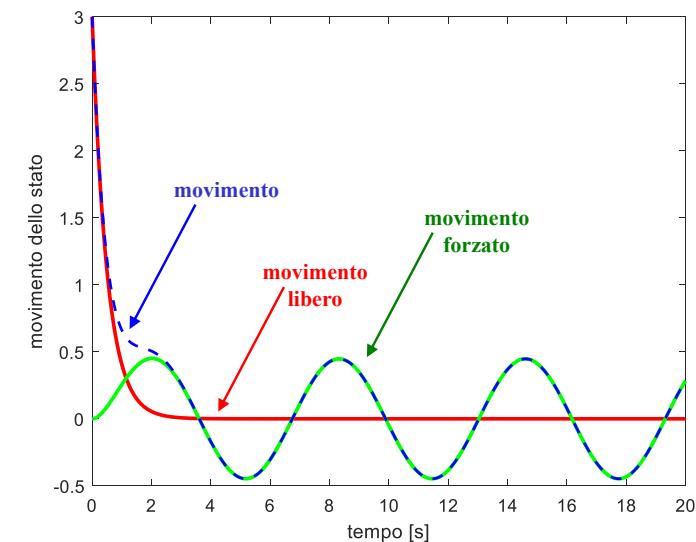
Il movimento dello stato è:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = 3e^{-2t} + e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} \sin(\tau)d\tau =$$

*movimento libero*      *movimento forzato*

$$= 3e^{-2t} + \frac{1}{5}(e^{-2t} - \cos(t)) + \frac{2}{5}\sin(t)$$

per  $t \rightarrow \infty$



### Proprietà 4

Se  $u(t) = 0$  allora il movimento dello stato di un sistema LTI as. stabile tende asintoticamente a zero.

$$\text{Se } u(t) = 0 \longrightarrow x_f(t) = 0$$

$$x(t) = x_l(t)$$

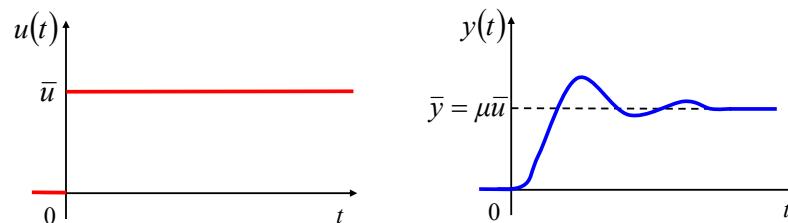
$\longrightarrow e^{At}x(0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

### Proprietà 5

Se  $u(t) = \bar{u}$  allora l'uscita di un sistema LTI as. stabile tende al valore di regime

$$\bar{y} = \mu\bar{u} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u}$$

(Cfr. Lez. 3 pag. 16)



## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + 2u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} u(t) = 2, t \geq 0 \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

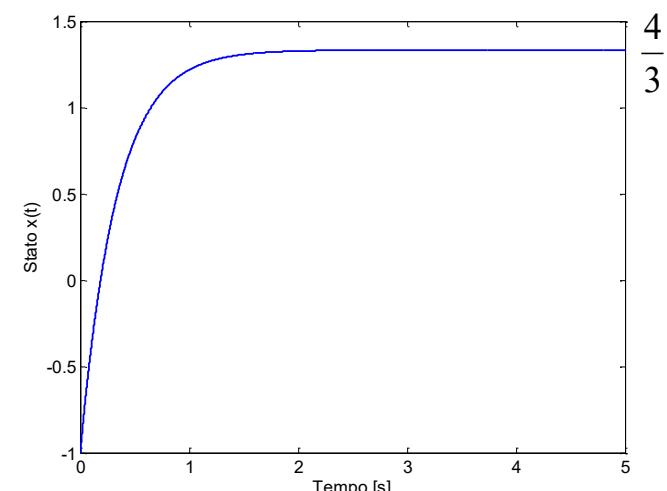
Il movimento dello stato è:

$$x(t) = e^{-3t}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = -e^{-3t} + e^{-3t} \int_0^t 4e^{3\tau}d\tau = \frac{4}{3} - \frac{7}{3}e^{-3t}$$

$$y(t) = \frac{4}{3} - \frac{7}{3}e^{-3t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{4}{3}$$

Infatti

$$\bar{y} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u} = \left(-1\left(-\frac{1}{3}\right)2 + 0\right)2 = \frac{4}{3}$$



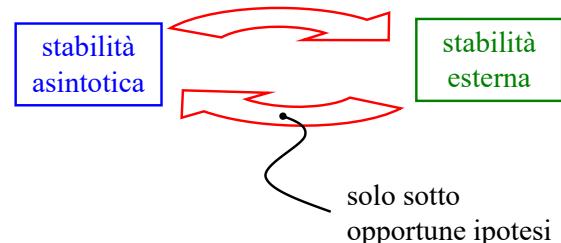
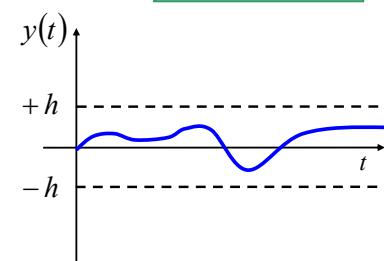
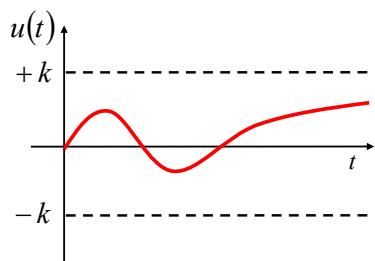
## Proprietà 6

Se si applica ad un sistema LTI as. stabile un ingresso limitato, allora l'uscita è limitata.

Se  $u(t)$ ,  $t \geq 0$  è tale che  $|u(t)| \leq k$ ,  $t \geq 0$

allora  $\exists h : |y(t)| \leq h$ ,  $t \geq 0$

stabilità esterna  
(BIBO)



# Lezione 6. Stabilità e matrice A nei sistemi LTI

F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 6

1

## 1. Studio della matrice $e^{At}$ per $t \rightarrow \infty$

Asintotica stabilità  $\iff \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$

Instabilità  $\iff e^{At}$  diverge per  $t \rightarrow \infty$

Stabilità  $\iff e^{At}$  limitata  $\forall t$

F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 6

3

## Schema della lezione

1. Studio della matrice  $e^{At}$  per  $t \rightarrow \infty$
2. Teoremi sulla stabilità dei sistemi LTI
3. Regione di asintotica stabilità
4. Criteri di stabilità basati sulla matrice A
5. Criteri di stabilità basati sul polinomio caratteristico
6. Matlab

F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 6

2

Come si può capire il comportamento di  $e^{At}$  per  $t \rightarrow \infty$  nei seguenti casi?

- A diagonale
- A con autovalori reali distinti (diagonalizzabile)
- A con autovalori complessi coniugati distinti (diagonalizzabile)
- A con autovalori multipli (diagonalizzabile oppure no)

F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 6

4

### A diagonale

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & s_2 & \ddots \\ 0 & \cdots & s_n \end{bmatrix} \quad s_i, i=1,\dots,n \text{ sono gli autovalori (reali)}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & e^{s_2 t} & \ddots \\ 0 & \cdots & e^{s_n t} \end{bmatrix} \quad \text{contiene solo termini del tipo } e^{s_i t} \text{ (solo sulla diagonale)}$$

I termini  $e^{s_i t}$  si dicono **modi** del sistema.

### Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + 3u(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

La matrice  $A$  è:  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Gli autovalori sono (reali) negativi  $\Rightarrow$  Il sistema è as. stabile

Infatti (prova):

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Asintotica stabilità**  $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0 \Leftrightarrow s_i < 0, \forall i$

**Instabilità**  $\Leftrightarrow e^{At}$  diverge per  $t \rightarrow \infty \Leftrightarrow \exists i : s_i > 0$

**Stabilità**  $\Leftrightarrow e^{At}$  limitata  $\forall t \Leftrightarrow s_i \leq 0, \forall i$

### A con autovalori reali distinti

Se  $A$  ha autovalori reali e distinti allora  $A$  è diagonalizzabile, cioè esiste  $M$  tale che  $\tilde{A} = M^{-1}AM$

dove  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{bmatrix} \quad s_i, i=1,\dots,n$   
sono gli autovalori (reali e distinti)

Allora:

$$e^{At} = e^{M\tilde{A}M^{-1}t} = Me^{\tilde{A}t}M^{-1} = M \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{s_n t} \end{bmatrix} M^{-1}$$

(Si può dimostrare che è vero!)

$e^{At}$  contiene solo combinazioni lineari di modi del tipo  $e^{s_i t}$   
(non solo sulla diagonale!)

**Asintotica stabilità**  $\iff \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0 \iff s_i < 0, \forall i$

**Instabilità**  $\iff e^{At}$  diverge per  $t \rightarrow \infty \iff \exists i : s_i > 0$

**Stabilità**  $\iff e^{At}$  limitata  $\forall t \iff s_i \leq 0, \forall i$

Identico a prima!

### Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 3x_1(t) \end{cases}$$

La matrice  $A$  è:  $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s+2)(s+1) = 0 \implies \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

Gli autovalori sono reali negativi e distinti  $\implies$  Il sistema è as. stabile

Infatti (**prova**):

Si calcoli la trasformazione  $M$  che diagonalizza  $A$ . Per fare ciò si calcolino gli autovettori di  $A$ .

$$Av_1 = -v_1 \implies \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -2\alpha + 2\beta = -\alpha \\ -\beta = -\beta \end{cases} \implies v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Av_2 = -2v_2 \implies \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ -2\beta \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -2\alpha + 2\beta = -2\alpha \\ -\beta = -2\beta \end{cases} \implies v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = Me^{\tilde{A}t}M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### A con autovalori complessi distinti

Gli autovalori complessi compaiono sempre a coppie  $\begin{cases} s_1 = \sigma + j\omega \\ s_2 = \sigma - j\omega \end{cases}$

Si dimostra che  $e^{At}$  contiene termini del tipo  $\gamma e^{(\sigma+j\omega)t} + \bar{\gamma} e^{(\sigma-j\omega)t}$  con  $\gamma = \alpha + j\beta$  costante complessa

$$\begin{aligned} \gamma e^{(\sigma+j\omega)t} + \bar{\gamma} e^{(\sigma-j\omega)t} &= \gamma e^{\sigma t} e^{j\omega t} + \bar{\gamma} e^{\sigma t} e^{-j\omega t} \\ &= \gamma e^{\sigma t} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) + \bar{\gamma} e^{\sigma t} (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) = \\ &= e^{\sigma t} ((\gamma + \bar{\gamma}) \cos(\omega t) + j(\gamma - \bar{\gamma}) \sin(\omega t)) = \\ &= e^{\sigma t} (2\alpha \cos(\omega t) - 2\beta \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

**funzione limitata per  $t \rightarrow \infty$**

la convergenza dipende dal segno della parte reale  $\sigma$

$$= e^{\sigma t} (2\alpha \cos \omega t - 2\beta \sin \omega t)$$

0 se  $\sigma < 0$   
 $t \rightarrow \infty$   
 $\exists$  se  $\sigma = 0$   
 (ma è limitato)  
 $\infty$  se  $\sigma > 0$

<b>Asintotica stabilità</b>	$\iff$	$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$	$\iff$	$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i$
<b>Instabilità</b>	$\iff$	$e^{At}$ diverge per $t \rightarrow \infty$	$\iff$	$\exists i : \operatorname{Re}(s_i) > 0$
<b>Stabilità</b>	$\iff$	$e^{At}$ limitata $\forall t$	$\iff$	$\operatorname{Re}(s_i) \leq 0, \forall i$

*Identico a prima!*

### Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2u(t) \end{cases}$$

La matrice  $A$  è:  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -1 + j \\ s_2 = -1 - j \end{cases}$$

Gli autovalori sono complessi coniugati  $\Rightarrow$  Il sistema è as. stabile con parte reale negativa

### $A$ con autovalori multipli (reali per fissare le idee)

✓ Se  $A$  è diagonalizzabile

$e^{At}$  contiene solo termini del tipo  $e^{s_i t}$  (cfr. caso precedente)

✓ Se  $A$  non è diagonalizzabile

Sia  $s_i$  un autovalore multiplo.

Allora gli elementi di  $e^{At}$  contengono termini del tipo  $e^{s_i t}, te^{s_i t}, t^2 e^{s_i t}, \dots$

😊 Se  $s_i < 0$  il sistema è as. stabile.

⚡ Se  $s_i = 0$  il sistema è instabile!

**Attenzione agli autovalori multipli con parte reale nulla !!**

## 2. Teoremi sulla stabilità dei sistemi LTI

### Teorema 1

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori della matrice  $A$  hanno parte reale negativa

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i \quad \text{Asintotica stabilità}$$

### Teorema 2

Un sistema LTI è **instabile** se la matrice  $A$  ha almeno un **autovalore con parte reale positiva**.

$$\exists i^* : \operatorname{Re}(s_{i^*}) > 0 \quad \text{Instabilità}$$

### Teorema 3

Un sistema LTI è **stabile** se la matrice  $A$  ha tutti gli autovalori con parte reale negativa ed uno solo nullo (o una sola coppia c.c. con parte reale nulla).

$$\operatorname{Re}(s_i) \leq 0, \forall i \\ \exists! i^* : \operatorname{Re}(s_{i^*}) = 0 \quad \text{Stabilità}$$

### Osservazione 1 (sul Teorema 3)

Una coppia di autovalori complessi coniugati “conta” come uno solo. Quindi, un sistema con una sola coppia di autovalori complessi coniugati a parte reale nulla (e tutti gli altri con parte reale negativa) è stabile (semplicemente).

### Osservazione 2 (sui Teoremi 2 & 3)

Ci sono sistemi con più di un autovalore con parte reale nulla (e tutti gli altri con parte reale negativa) che sono **stabili (semplicemente)** ed altri sistemi con più di un autovalore con parte reale nulla (e tutti gli altri con parte reale negativa) che sono **instabili**.

### Schema riassuntivo per autovalori con parte reale nulla

$$\operatorname{Re}(s_i) \leq 0, \forall i \\ \exists i : \operatorname{Re}(s_i) = 0 \quad \text{non asintoticamente stabile} \\ (\text{ma stabile o instabile?})$$



• **singolo** autovalore con  $\operatorname{Re}(s_i) = 0$   $\rightarrow$  **semplicemente stabile**  
(o una sola coppia di autovalori immaginari)

**semplicemente stabile**

• **più** autovalori con  $\operatorname{Re}(s_i) = 0$   $\rightarrow$  **instabile**

? *Non affrontiamo questo caso*

### Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -6 & s+4 & 0 \\ 6 & -3 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(s+4)(s+1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -1 \\ s_3 = -4 \end{cases}$$

Tutti gli autovalori sono reali e negativi.

Il sistema con  $A$  come matrice dinamica è certamente **as. stabile!**

N.B.  $A$  ha un autovalore multiplo, ma non con parte reale nulla!

### Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -6 & s-4 & 0 \\ 6 & -3 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(s-4)(s+1) = 0$$

$\longrightarrow \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -1 \\ s_3 = +4 \end{cases}$

$A$  ha un autovalore reale positivo.

Il sistema con  $A$  come matrice dinamica è certamente **instabile!**

### Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ -2 & -3 & s-4 \end{bmatrix} = s^2(s-4) = 0 \quad \longrightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = +4 \end{cases}$$

Ha un autovalore nullo doppio ed uno positivo.

Il sistema con  $A$  come matrice dinamica è certamente **instabile!**

### Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -6 & s+3 & 0 \\ 6 & -3 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(s+3)s = 0$$

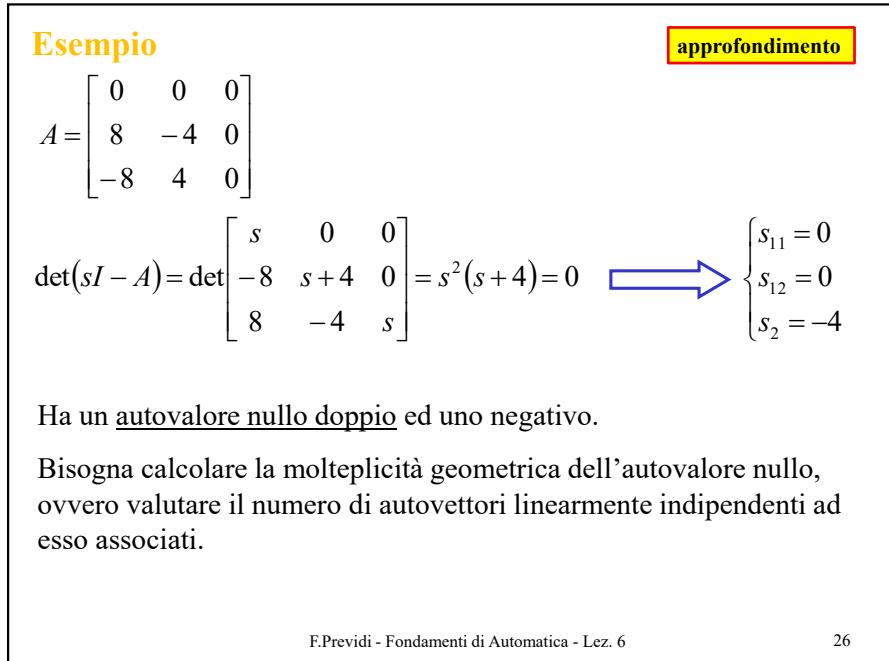
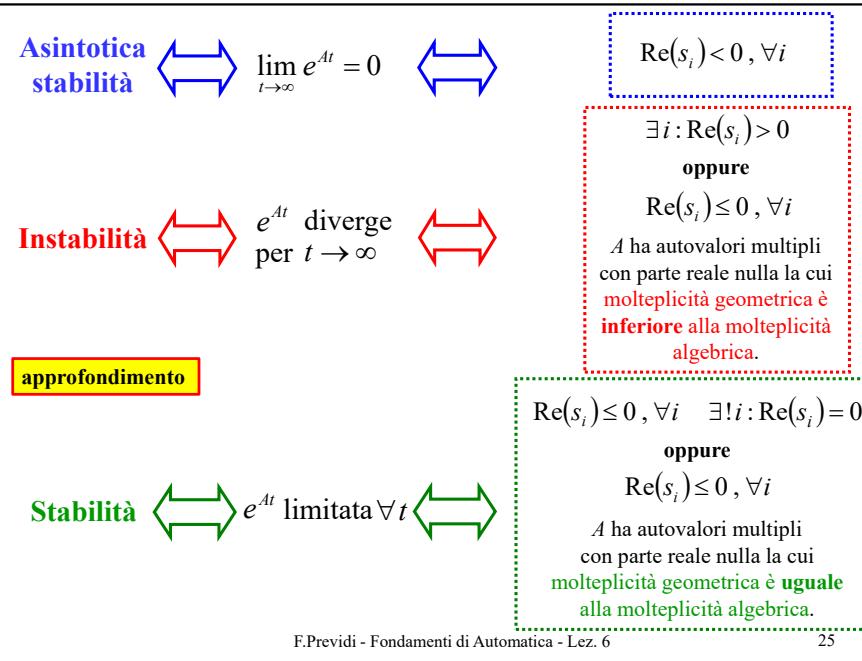
$\longrightarrow \begin{cases} s_1 = -3 \\ s_2 = -1 \\ s_3 = 0 \end{cases}$

$A$  ha un solo autovalore nullo e tutti gli altri reali negativi.

Il sistema con  $A$  come matrice dinamica è **stabile** (non as.).

### approfondimento

In particolare, un sistema è instabile se gli autovalori multipli con parte reale nulla hanno molteplicità geometrica inferiore alla molteplicità algebrica.



Si calcolino gli autovettori associati all'autovalore 0. approfondimento

$$Av_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \alpha \text{ qualsiasi} \\ \beta = 2\alpha \\ \gamma \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

$$v_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'autovalore nullo ha molteplicità geometrica 2 perché ha due autovettori linearmente indipendenti associati.

Quindi il sistema è **stabile (non as.)**.

F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 6 27

Infatti è possibile diagonalizzare la matrice  $A$ . approfondimento

Si calcoli l'autovettore associato all'autovalore  $-4$

$$Av_2 = -4v_2 \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 0 = -4\alpha \\ 8\alpha - 4\beta = -4\beta \\ -8\alpha + 4\beta = -4\gamma \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \text{ qualsiasi} \\ \gamma = -\beta \end{cases} \iff v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \iff M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 6 28

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2e^{-4t} & e^{-4t} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-2e^{-4t} & e^{-4t} & 0 \\ -2+2e^{-4t} & 1-e^{-4t} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{è limitata}$$

$e^{At}$  limitata  $\forall t \iff \text{Stabilità (semplice)}$

approfondimento

approfondimento

### Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ -2 & -3 & s+4 \end{bmatrix} = s^2(s+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = -4 \end{cases}$$

Ha un autovalore nullo doppio ed uno negativo.

Bisogna calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore nullo, ovvero valutare il numero di autovettori linearmente indipendenti ad esso associati.

Si calcolino gli autovettori associati all'autovalore 0. approfondimento

$$Av_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = 0 \\ \gamma \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'autovalore nullo ha molteplicità geometrica 1 perché ha un solo autovettore associato.

Quindi il sistema è **instabile**.

approfondimento

Infatti (prova):

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2} & -\frac{5}{8}e^{-4t} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2}t & 1 & e^{-4t} \end{bmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \quad \text{NON è limitata}$$

$e^{At}$  diverge per  $t \rightarrow \infty \iff \text{Instabilità}$

## Teoremi sulla stabilità dei sistemi LTI

[approfondimento](#)

### Teorema 1

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori della matrice  $A$  hanno parte reale negativa

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i \quad \text{Asintotica stabilità}$$

### Teorema 2

Un sistema LTI è **instabile** se la matrice  $A$  ha almeno un **autovalore con parte reale positiva** oppure se ha tutti gli autovalori con parte reale negativa o nulla e questi ultimi sono **multipli e con molteplicità geometrica inferiore alla loro molteplicità algebrica**.

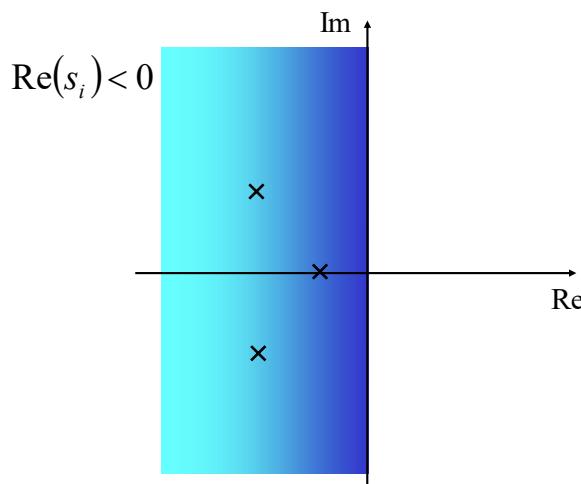
### Teorema 3

Un sistema LTI è **stabile** se la matrice  $A$  ha tutti gli autovalori con parte reale negativa o nulla e questi ultimi hanno **molteplicità geometrica uguale alla loro molteplicità algebrica**.

F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 6

33

## 3. Regione di asintotica stabilità



F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 6

35

## Schema riassuntivo per autovalori con parte reale nulla

[approfondimento](#)

$$\operatorname{Re}(s_i) \leq 0, \forall i$$

$$\exists i : \operatorname{Re}(s_i) = 0$$



**non asintoticamente stabile**  
(ma stabile o instabile?)



● **singolo** autovalore con  $\operatorname{Re}(s_i) = 0$  **semplicemente stabile**  
(o una sola coppia di autovalori immaginari)

**semplicemente stabile**  
(se molt. geometrica **uguale** alla algebrica)

● **più** autovalori con  $\operatorname{Re}(s_i) = 0$  **instabile**  
(se molt. geometrica **inferiore** alla algebrica)

F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 6

34

## 4. Criteri di stabilità basati sulla matrice $A$

● Per discutere la stabilità non serve calcolare esplicitamente gli autovalori della matrice  $A$ . E' sufficiente conoscere il segno della loro parte reale.

● Esistono criteri che consentono di giudicare la stabilità **senza calcolare esplicitamente gli autovalori**. Essi consentono di determinare il segno della parte reale degli autovalori **per ispezione della struttura della matrice  $A$** .

F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 6

36

### Criterio 1

Se  $A$  è triangolare  $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Delta} \end{bmatrix}$   $A = \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

$$\text{asintotica stabilità} \iff \operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i \iff a_{ii} < 0, \forall i$$

(gli elementi sulla diagonale sono negativi)

Infatti in questo caso gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale  $s_i = a_{ii}$

### Criterio 3

Il determinante di una matrice è il prodotto degli autovalori.

$$\det A = \prod_{i=1}^n s_i$$

$$\text{asintotica stabilità} \iff \operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i \implies \det A \neq 0$$

(Condizione solo necessaria)

### Criterio 2

La traccia di una matrice è la somma degli elementi sulla diagonale principale.

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

La traccia di una matrice è uguale alla somma dei suoi autovalori

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(s_i)$$

$$\text{asintotica stabilità} \iff \operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i \implies \operatorname{tr} A < 0$$

(Condizione solo necessaria)

$$\text{instabilità} \iff \exists i : \operatorname{Re}(s_i) > 0 \implies \operatorname{tr} A > 0$$

(Condizione sufficiente)

## 5. Criteri di stabilità basati sul polinomio caratteristico

Sono criteri basati sulla possibilità di conoscere il segno della parte reale degli autovalori solo ispezionando il polinomio caratteristico (senza calcolarli direttamente)

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n$$

$\operatorname{Re}(s_i)$   
?

#### Criterio 4

Solo per  $n=2$

**Condizione Necessaria & Sufficiente** per l'asintotica stabilità di un sistema del secondo ordine è che il suo polinomio caratteristico abbia coefficienti non nulli e concordi in segno

asintotica stabilità  $\iff \text{Re}(s_i) < 0, i = 1, 2 \iff \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$   
diversi da zero e concordi in segno

$$\text{Infatti } \varphi(s) = \varphi_0 s^2 + \varphi_1 s + \varphi_2 = \varphi_0 (s - s_1)(s - s_2)$$

$$\begin{cases} s_1 s_2 = \varphi_2 / \varphi_0 \\ -(s_1 + s_2) = \varphi_1 / \varphi_0 \end{cases}$$

#### Criterio 5

Per  $n \geq 3$  qualsiasi

**Condizione Necessaria** per l'asintotica stabilità di un sistema è che il suo polinomio caratteristico abbia coefficienti non nulli e concordi in segno

asintotica stabilità  $\iff \text{Re}(s_i) < 0, i = 1, \dots, n \implies \varphi_i$  diversi da zero e concordi in segno  
(Condizione solo necessaria)

Quindi:

$$\varphi_i \text{ nulli o discordi in segno} \implies \exists i^*: \text{Re}(s_{i^*}) \geq 0$$

#### Esempio

$\varphi(s) = s^2 + 3s + 1$  è il polinomio caratteristico della matrice  $A$   
 $n=2$  di un sistema asintoticamente stabile

$\varphi(s) = s^2 - 3s + 1$  è il polinomio caratteristico della matrice  $A$   
 $n=2$  di un sistema non as. stabile

#### Esempio

$\varphi(s) = s^3 + 2s^2 - 3s + 1$  è il polinomio caratteristico della matrice  $A$   
 $n=3$  di un sistema non as. stabile

$\varphi(s) = s^3 + 4s^2 + 1$  è il polinomio caratteristico della matrice  $A$   
 $n=3$  di un sistema non as. stabile

$\varphi(s) = s^3 + 4s^2 + 4s + 1$  è il polinomio caratteristico della matrice  $A$   
 $n=3$  di un sistema di cui nulla si può dire a priori riguardo la stabilità

## Criterio 6 (Criterio di Routh)

$$\varphi(s) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \varphi_2 s^{n-2} + \varphi_3 s^{n-3} \dots + \varphi_n$$

**Tabella di Routh**

n+1 righe	$\varphi_0$	$\varphi_2$	$\varphi_4$	...	0	← Coefficienti pari
1	$\varphi_1$	$\varphi_3$	$\varphi_5$	...	0	← Coefficienti dispari
2	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$i-2$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	...	0	
$i-1$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	...	0	
$i$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	...	0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	

**Regola di calcolo**

$$l_j = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{j+1} \\ k_1 & k_{j+1} \end{bmatrix}$$

## Esempio

$$\varphi(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + k$$

Per quali valori di  $k$  è asintoticamente stabile?

Per il criterio 5 C.N. è  $k > 0$

Tabella di Routh

1	11	$k$
6	6	0
10	$k$	0
$6 - \frac{3}{5}k$	0	0
$k$	0	0

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 - \frac{3}{5}k > 0 \\ k > 0 \end{array} \right. \rightarrow 0 < k < 10$$

## Criterio di Routh

asintotica  
stabilità

Elementi della prima colonna della tabella di Routh diversi da zero e concordi in segno

## 6. Matlab

**eig** Eigenvalues and eigenvectors.

**E = eig(A)** produces a column vector E containing the eigenvalues of a square matrix A.

**[V,D] = eig(A)** produces a diagonal matrix D of eigenvalues and a full matrix V whose columns are the corresponding eigenvectors so that  $A*V = V*D$ .

Con questo comando si calcolano autovalori ed autovettori di matrici quadrate.

### Esempio

```
>> A=[-1 3; -2 -7];  
>> [V,D] = eig(A)
```

V = **autovettori**

$$\begin{bmatrix} 0.9211 & -0.5354 \\ -0.3893 & 0.8446 \end{bmatrix}$$

D = **autovalori**

$$\begin{bmatrix} -2.2679 & 0 \\ 0 & -5.7321 \end{bmatrix}$$

Sistema asintoticamente stabile

## Lezione 7. Stabilità dell'equilibrio nei sistemi non lineari

Funziona anche per sistemi con autovalori complessi coniugati

```
>> A=[1 -1; 1 1];  
>> [V,D] = eig(A)
```

V = **autovettori**

$$\begin{bmatrix} 0.7071 + 0.0000i & 0.7071 + 0.0000i \\ 0.0000 - 0.7071i & 0.0000 + 0.7071i \end{bmatrix}$$

D = **autovalori**

$$\begin{bmatrix} 1.0000 + 1.0000i & 0.0000 + 0.0000i \\ 0.0000 + 0.0000i & 1.0000 - 1.0000i \end{bmatrix}$$

Sistema instabile

## 1. Stabilità dell'equilibrio di un sistema non lineare

Si consideri un sistema non lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Si supponga che questo sistema abbia uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  in corrispondenza di un ingresso costante  $\bar{u}$  cioè:

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

Cosa si può dire della stabilità di questo equilibrio?

**N.B.** Per i sistemi non lineari è sensato discutere la stabilità dell'equilibrio (non ha senso parlare di stabilità del sistema).

Si consideri il sistema lineare tangente relativo all'equilibrio di cui si vuole studiare la stabilità

$$S^\delta : \begin{cases} \dot{\delta x}(t) \equiv f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \\ \dot{\delta y}(t) \equiv g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \end{cases}$$

In particolare, si considerino gli autovalori  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  della sua matrice di stato  $f_x(\bar{x}, \bar{u})$

- I Teoremi 1 & 2 si riferiscono ad un **equilibrio**!!  
Non al sistema!! (non lineare!!)

- Si osservi che la condizione del Teorema 1 è solo sufficiente.

### Teorema 1 (non lineare)

Un **equilibrio** di un sistema non lineare è **asintoticamente stabile** se tutti gli autovalori della matrice di stato del relativo sistema lineare tangente hanno parte reale negativa.

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i$$



L'equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$  è asintoticamente stabile

### Teorema 2 (non lineare)

Un **equilibrio** di un sistema non lineare è **instabile** se almeno un autovalore della matrice di stato del relativo sistema lineare tangente ha parte reale positiva.

$$\exists i^* : \operatorname{Re}(s_{i^*}) > 0$$



L'equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$  è instabile

### Nota Bene (sistema non lineare)

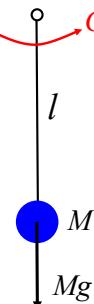
$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i \neq i^* \\ \exists i^* : \operatorname{Re}(s_{i^*}) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (\bar{x}, \bar{u}) ?$$

Se  $f_x(\bar{x}, \bar{u})$  ha anche solo un autovalore a parte reale nulla, **niente si può dire della stabilità dell'equilibrio**. Per giudicare la stabilità occorrono strumenti di analisi più potenti (e complicati).

## Esempio

Si consideri l'equilibrio A  $(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{pmatrix} [0] \\ 0 \end{pmatrix}, 0$

$$C(t)=u(t)=0$$



La matrice di stato del sistema lineare tangente è

$$A_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

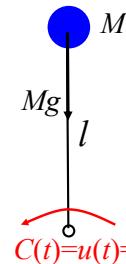
Il suo polinomio caratteristico è

$$\varphi(s) = s^2 + \frac{h}{Ml^2}s + \frac{g}{l}$$

$$\varphi_i > 0 \quad \underset{\text{Criterio 4}}{\iff} \quad \underset{i=1,2}{\text{Re}(s_i) < 0} \quad \underset{\text{Teorema 1}}{\Rightarrow} \quad \text{Equilibrio as. stabile}$$

[Criterio 4](#)      [Teorema 1  
\(non lineare\)](#)

Si consideri l'equilibrio B  $(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{pmatrix} [\pi] \\ 0 \end{pmatrix}, 0$



La matrice di stato del sistema lineare tangente è

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$\varphi(s) = s^2 + \frac{h}{Ml^2}s - \frac{g}{l}$$

$\varphi_i$  discordi e non nulli  $\underset{\text{Criterio 4}}{\Rightarrow} \exists i^*: \text{Re}(s_{i^*}) > 0 \underset{\text{Teorema 2  
(non lineare)}}{\Rightarrow}$  Equilibrio instabile

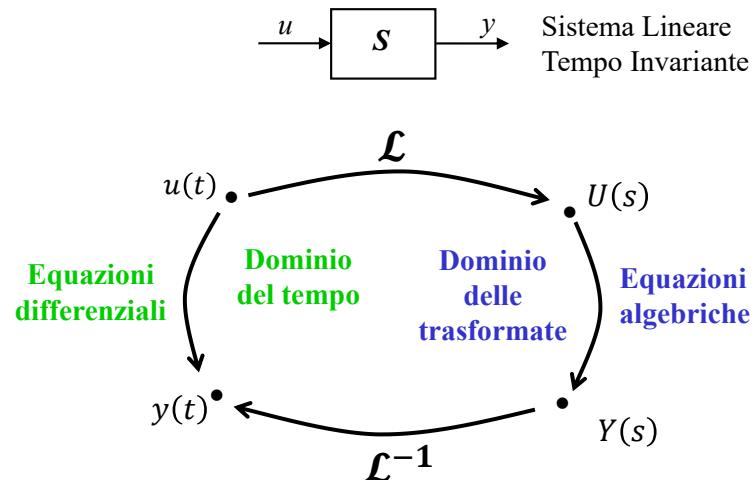
Nulla si può dire del terzo equilibrio.

## Lezione 8. Trasformazione di Laplace

## Schema della lezione

1. Introduzione
2. Definizione di trasformazione di Laplace
3. Legame tra scalino ed impulso
4. Proprietà della trasformazione di Laplace
5. Poli e zeri di una trasformata

## 1. Introduzione



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

3

## Osservazioni

- $\mathcal{L}[f(t)]$  è una funzione reale di variabile complessa
- $\mathcal{L}[f(t)]$  non dipende dai valori assunti da  $f(t)$  con  $t < 0$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

5

## 2. Definizione di trasformazione di Laplace

$$\begin{array}{ccc} f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & \text{Segnale a tempo continuo} \\ \downarrow \mathcal{L} & & \\ F(s): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} & & \text{dove } s \in \mathbb{C} \end{array}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

4

## Esempio

### Trasformata dello scalino

Lo scalino (di ampiezza unitaria) è la seguente funzione del tempo:

$$\text{sca}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

La trasformata di Laplace dello scalino è:

$$\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

6

## Esempio

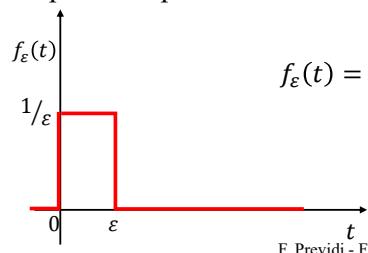
### Trasformata dell'impulso

L'impulso è la funzione del tempo definita dalle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \text{imp}(t) = 0, t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{imp}(t) dt = 1 \end{cases} \quad ?$$

Cosa significano (insieme) queste due relazioni?

E' possibile pensare ad una funzione  $f_\varepsilon(t)$  definita come segue:



$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0, t > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{per } 0 \leq t \leq \varepsilon \end{cases}$$

e dire che:  
 $\text{imp}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t)$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

7

Quindi calcolare la trasformata di Laplace dell'impulso:

$$\text{imp}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[\text{imp}(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}[f_\varepsilon(t)]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_\varepsilon(t)] &= \int_0^\infty f_\varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \frac{1}{\varepsilon} \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\varepsilon = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon s} [e^{-\varepsilon s} - 1] = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\text{imp}(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}[f_\varepsilon(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} \stackrel{H}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s e^{-\varepsilon s}}{s} = 1$$

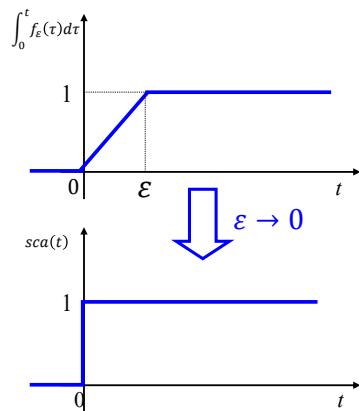
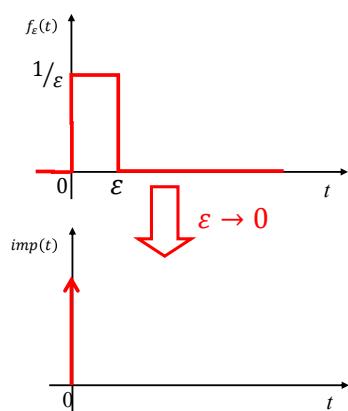
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

8

### 3. Legame tra scalino e impulso

$$\text{sca}(t) = \int_0^t \text{imp}(\tau) d\tau$$

$$\text{imp}(t) = \frac{d}{dt} \text{sca}(t)$$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

9

### 4. Trasformazione di Laplace: proprietà

#### 4.1 Linearità

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] \quad F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

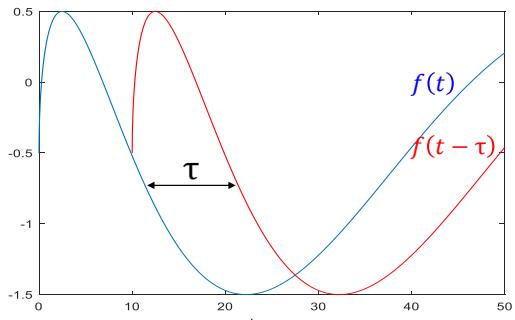
10

## 4.2 Traslazione nel dominio del tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad f(t) = 0, t < 0$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s)}$$

$$\tau > 0$$



Potremmo parlare di trasformata del "ritardo"

11

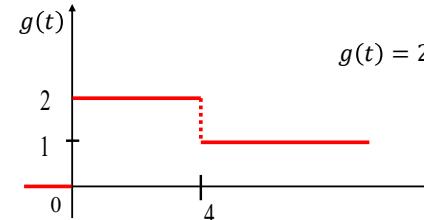
## 4.3 Traslazione nel dominio delle trasformate

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{\lambda t} f(t)] = F(s - \lambda)}$$

## Esempio

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s)$$



$$g(t) = 2\text{sca}(t) - \text{sca}(t - 4)$$

$$G(s) = 2\mathcal{L}[\text{sca}(t)] - \mathcal{L}[\text{sca}(t - 4)] = 2\frac{1}{s} - e^{-4s}\frac{1}{s} = \frac{2}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

Ricorda

$$\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s)}$$

## Esempio

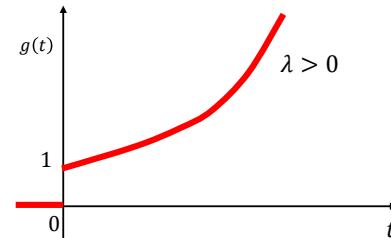
$$\boxed{\mathcal{L}[e^{\lambda t} f(t)] = F(s - \lambda)}$$

$$f(t) = \text{sca}(t)$$

Ricorda

$$\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \text{sca}(t)] = \frac{1}{s - \lambda}$$



Dal momento che, per la definizione di trasformata di Laplace,  
 $\mathcal{L}[e^{\lambda t}] = \mathcal{L}[e^{\lambda t} \text{sca}(t)]$ ,  
possiamo dire che scrivere  
 $g(t) = e^{\lambda t} \text{sca}(t)$   
è equivalente a scrivere  
 $g(t) = e^{\lambda t}, t \geq 0$

Potremmo parlare di trasformata del "modo"

## Esempio

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin(\omega t)] &= \mathcal{L}[\sin(\omega t) \operatorname{sca}(t)] = \\&= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2j}\mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \frac{1}{2j}\mathcal{L}[e^{-j\omega t}] = \\&= \frac{1}{2j} \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{1}{s+j\omega} = \frac{2j\omega}{2j(s^2 + \omega^2)} = \\&= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

15

## Esempio

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$f(t) = e^{\lambda t}$$

Ricorda

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{\lambda t}] = \frac{1}{s-\lambda}$$

$$\mathcal{L}[te^{\lambda t}] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{\lambda t}] = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-\lambda} = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

17

## 4.4 Derivazione nel dominio delle trasformate

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

16

## 4.5 Derivazione nel dominio del tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$$

L'operatore di derivazione è trasformato nell'operatore di moltiplicazione per  $s$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 8

18

## Esempio

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos \omega t] &= \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \sin \omega t\right] = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \sin \omega t\right] = \frac{1}{\omega}(s \mathcal{L}[\sin \omega t] - \sin(0)) = \\ &= \frac{1}{\omega}\left[s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Essendo  $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

## 4.6 Integrazione nel dominio del tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)}$$

Se la derivazione è trasformata in moltiplicazione per  $s$ , l'integrazione deve per forza essere trasformata in divisione per  $s$ !

## Estensione a derivate di ordine superiore

### ▪ Ordine 2

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] &= s\mathcal{L}[\dot{f}(t)] - \dot{f}(0) = s(sF(s) - f(0)) - \dot{f}(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)\end{aligned}$$

### ▪ Ordine n

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0}$$

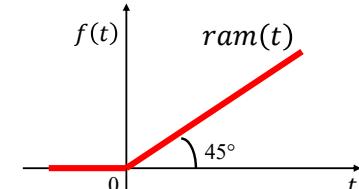
## Esempio

$$f(t) = t \text{sca}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ram}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ t & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che

$$\text{ram}(t) = \int_0^t \text{sca}(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{L}[\text{ram}(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \frac{1}{s^2}$$



## 5. Poli e zeri di una trasformata

**Poli:** valori di  $s$  per cui  $F(s) = \infty$

**Zeri:** valori di  $s$  per cui  $F(s) = 0$

### Caso notevole

Se  $F(s)$  razionale, cioè  $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  con  $N(s)$  e  $D(s)$  polinomi in  $s$

**Poli:** radici di  $D(s) = 0$

**Zeri:** radici di  $N(s) = 0$

## Trasformata di un vettore

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[x_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[x_n(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}$$

### Proprietà

1.  $\mathcal{L}[A\mathbf{x}(t)] = A\mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = A\mathbf{X}(s)$

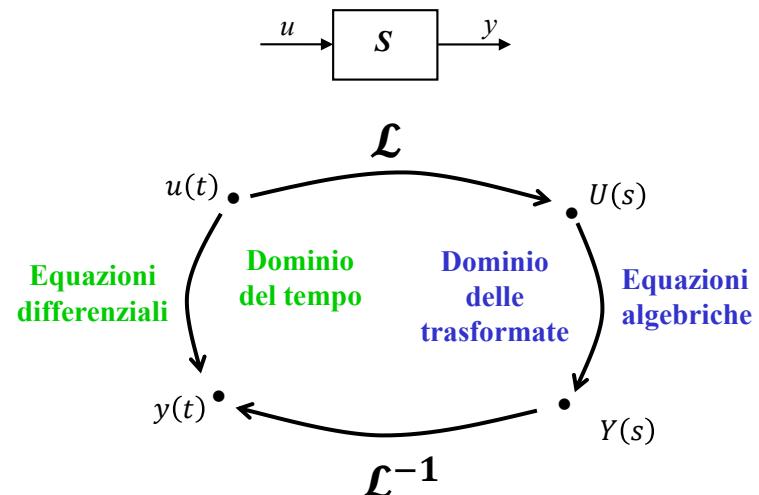
2.  $\mathcal{L}[\dot{\mathbf{x}}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[\dot{x}_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[\dot{x}_n(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix} = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0)$

# Lezione 9. Calcolo dell'antitrasformata di Laplace

## Schema della lezione

1. Introduzione
2. Antitrasformazione di Laplace
3. Strumenti per l'antitrasformazione
4. Teorema del valore iniziale
5. Teorema del valore finale
6. Antitrasformazione mediante sviluppo di Heaviside

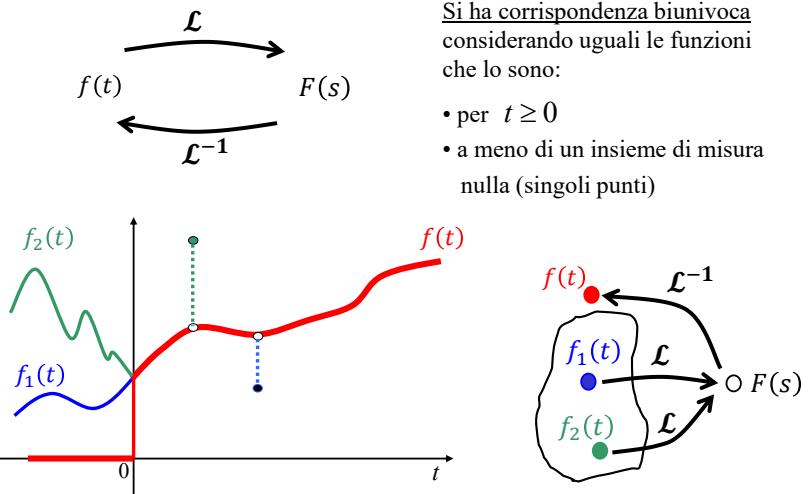
## 1. Introduzione



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 9

3

## 2. Antitrasformazione di Laplace



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 9

4

## 3. Strumenti per l'antitrasformazione di Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

- ✓ ~~Formula esplicita~~
- ✓ Teorema del valore iniziale  $\rightarrow f(0)$
- ✓ Teorema del valore finale  $\rightarrow f(\infty)$
- ✓ Sviluppo di Heaviside  
(solo per  $F(s)$  razionale)

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 9

5

## 4. Teorema del valore iniziale

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \quad \text{se esiste finito}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 9

6

## Esempio

$$f(t) = \cos(\omega t) \implies F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Applichiamo il teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = 1$$

E se volessimo conoscere anche  $\dot{f}(0)$ ?

Sappiamo che

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0) = s \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 1 = \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

$$\dot{f}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2} = 0$$

## Esempio

➤  $F(s) = \mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Poli in  $\pm j\omega$  ➤ il Teorema del valore finale non è applicabile!

➤  $F(s) = \mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \frac{1}{s}$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} = 1$$

## 5. Teorema del valore finale

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Ipotesi  $F(s)$  ha solo:

- poli con parte reale negativa
- poli nulli, cioè in  $s = 0$

$$f(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \quad \text{se esiste finito}$$

## 6. Antitrasformazione mediante sviluppo di Heaviside

Applicabile solo per  $F(s)$  razionali

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad m \leq n$$

L'idea è scomporre  $F(s)$  nella somma di elementi per i quali è nota l'antitrasformata.

$$\begin{aligned} F(s) &= (F_1(s)) + (F_2(s)) + \dots \\ &\downarrow \mathcal{L}^{-1} \quad \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ f_1(t) + f_2(t) + \dots &= f(t) \end{aligned}$$

Si considerano solo i seguenti casi:

- $F(s)$  con poli reali distinti
- $F(s)$  con poli reali multipli
- $F(s)$  con poli complessi coniugati
- $F(s)$  con grado del denominatore uguale al grado del numeratore ( $m = n$ )

### Poli reali distinti

$$D(s) = a_0(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)$$

poli in  $-p_i$  con  $p_i \neq p_j, i \neq j$

$$F(s) = \frac{\alpha_1}{s + p_1} + \frac{\alpha_2}{s + p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s + p_n}$$

$\mathcal{L}^{-1}$        $\mathcal{L}^{-1}$        $\mathcal{L}^{-1}$

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-p_i t}, t \geq 0$$

### Esempio

Calcolare l'antitrasformata di  $F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)}$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+6} + \frac{\alpha_3}{s+1} \\ &= \frac{\alpha_1(s+6)(s+1) + \alpha_2 s(s+1) + \alpha_3 s(s+6)}{s(s+6)(s+1)} = \\ &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)s^2 + (7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3)s + 6\alpha_1}{s(s+6)(s+1)} \end{aligned}$$

Devono essere uguali

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ 6\alpha_1 = 2 \end{array} \right.$$

Bisogna risolvere un sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ 6\alpha_1 = 2 \end{cases} \xrightarrow{\quad} \begin{cases} \frac{1}{3} + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \frac{7}{3} + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\quad}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_3 - \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} - \alpha_3 - \frac{1}{3} + 6\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\quad} \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_3 - \frac{1}{3} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{5} \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\quad} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{3} \\ \alpha_2 = -\frac{2}{15} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{s} - \frac{\frac{2}{15}}{s+6} - \frac{\frac{1}{5}}{s+1}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{1/3}{s} + \frac{2/15}{s+6} + \frac{1/5}{s+1}$$

$$f(t) = \frac{1}{3}\text{sca}(t) + \frac{2}{15}e^{-6t} + \frac{1}{5}e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Si può scrivere anche così:

$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^{-6t} - \frac{1}{5}e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

### Poli reali multipli

$$D(s) = \cdots (s+p)^k \cdots \quad k > 1$$

$$F(s) = \cdots + \frac{\beta_1}{s+p} + \frac{\beta_2}{(s+p)^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{(s+p)^k} + \cdots$$

$$\mathcal{L}^{-1} \quad \mathcal{L}^{-1} \quad \mathcal{L}^{-1}$$

$$\beta_1 e^{-pt} \quad \beta_2 t e^{-pt} \quad \beta_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-pt}$$

### Esempio

Calcolare l'antitrasformata di

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)} = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{12}}{s^2} + \frac{\alpha_2}{s+1} =$$

$$= \frac{\alpha_{11}s(s+1) + \alpha_{12}(s+1) + \alpha_2 s^2}{s^2(s+1)} =$$

$$= \frac{(\alpha_{11} + \alpha_2)s^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{12})s + \alpha_{12}}{s^2(s+1)}$$

Devono essere uguali

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -1 \\ \alpha_{12} = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} = 1 \\ \alpha_{12} = 2 \end{cases}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

$$f(t) = -\text{sca}(t) + 2\text{ram}(t) + e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Si può scrivere anche così:

$$f(t) = -1 + 2t + e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

## Poli complessi coniugati

$$D(s) = \cdots \underbrace{(s - \sigma - j\omega)(s - \sigma + j\omega)}_{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \cdots \quad \text{poli in } \sigma \pm j\omega$$

$$F(s) = \cdots + \frac{\beta s + \gamma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \cdots$$

$$\frac{\beta s + \gamma - \beta\sigma + \beta\sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} = \beta \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{\gamma + \beta\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$$

$\mathcal{L}^{-1}$        $\mathcal{L}^{-1}$

$$\frac{\gamma + \beta\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \rightarrow e^{\sigma t} \cos \omega t$$

$$\frac{\gamma + \beta\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \rightarrow e^{\sigma t} \sin \omega t$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 9

19

$$F(s) = \cdots + \frac{\beta s + \gamma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \cdots$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$f(t) = \cdots + \beta(e^{\sigma t} \cos \omega t) + \frac{\gamma + \beta\sigma}{\omega} (e^{\sigma t} \sin \omega t) + \cdots, \quad t \geq 0$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 9

20

## Esempio

Calcolare l'antitrasformata di  $F(s) = \frac{3s - 4}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)}$

$$F(s) = \frac{3s - 4}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)} = \frac{\alpha}{s + 2} + \frac{\beta s + \gamma}{s^2 + 2s + 5} =$$

$$= \frac{\alpha(s^2 + 2s + 5) + (\beta s + \gamma)(s + 2)}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)} =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)s^2 + (2\alpha + 2\beta + \gamma)s + (5\alpha + 2\gamma)}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)}$$

Devono essere uguali

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 3 \end{array} \right. \quad \longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma = 3 \\ 5\alpha + 2\gamma = -4 \end{array} \right.$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 9

21

Si ha quindi la seguente scomposizione:

$$F(s) = -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+5}$$

Non ha un'antitrasformata immediata

$$f(t) = -2e^{-2t} + \dots$$

?

E' però possibile riscrivere il denominatore del secondo termine in modo differente:

$$F(s) = -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+5} = -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+1+4} =$$

$$= -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{(s+1)^2+4}$$

Qual è l'antitrasformata ?

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 9

22

Pro memoria

$$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \rightarrow e^\sigma \sin(\omega t) \quad \text{per } t \geq 0$$

$$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \rightarrow e^\sigma \cos(\omega t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Quindi:

$$\frac{2s+3}{(s+1)^2 + 4} = k_1 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + k_2 \frac{2}{(s+1)^2 + 4} =$$

$$= \frac{k_1 s + k_1 + 2k_2}{(s+1)^2 + 4} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_1 + 2k_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s) = -\frac{2}{s+2} + 2 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$

$$f(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-t} \cos(2t) + \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \quad \text{per } t \geq 0$$

### Grado relativo nullo ( $m=n$ )

Se il numeratore  $N(s)$  e il denominatore  $D(s)$  hanno lo stesso grado, nella scomposizione di  $F(s)$  bisogna aggiungere un termine costante.

$$F(s) = \dots + \alpha_0$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$f(t) = \dots + \alpha_0 \text{imp}(t)$$

### Esempio

$$\text{Calcolare l'antitrasformata di } F(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \alpha_0 =$$

$$= \frac{\alpha_1(s+1) + \alpha_2 s + \alpha_0 s(s+1)}{s(s+1)} =$$

$$= \frac{\alpha_0 s^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_0)s + \alpha_1}{s(s+1)}$$

Devono essere uguali

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_0 = 4 \\ \alpha_1 = 4 \end{array} \right.$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s) = \frac{4}{s} - \frac{1}{s+1} + 1 =$$

$$f(t) = 4\text{sca}(t) - e^{-t} + \text{imp}(t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Si può scrivere anche così:

$$f(t) = 4 - e^{-t} + \text{imp}(t) \quad \text{per } t \geq 0$$

### Esempio esplicativo

(Trasformazione di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali)

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t) + u(t) & Y(s) &= \mathcal{L}[y(t)] & sY(s) - y(0) &= \\ U(s) &= \mathcal{L}[u(t)] & U(s) &= \mathcal{L}[u(t)] & = -Y(s) + U(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Con } u(t) &= \text{sca}(t) & sY(s) - y(0) &= -Y(s) + U(s) \\ y(0) &= 4 & (s+1)Y(s) &= 4 + \frac{1}{s} \\ & & Y(s) &= \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)} \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\begin{aligned} 4e^{-t} &\downarrow & \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} &\downarrow \\ y(t) &= 4e^{-t} + 1 - e^{-t} = & & \text{sca}(t) - e^{-t} \\ &= 3e^{-t} + 1 & & \end{aligned}$$

$y(t) = 3e^{-t} + 1 \quad \text{per } t \geq 0$

## Lezione 10. Funzione di trasferimento

## Schema della lezione

1. Definizione
2. Dimensioni della funzione di trasferimento
3. Interpretazione della funzione di trasferimento
4. Struttura della funzione di trasferimento
5. Rappresentazione interna ed esterna
6. Poli e zeri di una funzione di trasferimento
7. Proprietà di poli e zeri
8. Parametrizzazioni di una funzione di trasferimento
9. Relazione tra guadagno statico e guadagno della funzione di trasferimento
10. Matlab

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

2

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Sostituendo lo stato nella trasformazione d'uscita si ottiene

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

quando  $x(0) = 0$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$



$G(s) \equiv C(sI - A)^{-1}B + D$

### Funzione di trasferimento

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

4

## 1. Definizione

Si consideri un sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Si esegua la trasformazione di Laplace dell'equazione di stato

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$



$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$



$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Si trasformi infine la trasformazione d'uscita

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

3

## 2. Dimensioni della funzione di trasferimento

Sistema SISO ingresso ed uscita sono scalari

$$G(s) \equiv \underset{1 \times n}{C} \underset{n \times n}{(sI - A)^{-1}} \underset{n \times 1}{B} + \underset{1 \times 1}{D} \quad \text{è (una funzione di } s\text{) scalare}$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

**La funzione di trasferimento è il rapporto tra le trasformate di uscita ed ingresso**

(con condizione iniziale nulla per lo stato)

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

5

## Dimensioni della funzione di trasferimento

(caso generale MIMO)

**approfondimento**

$p$ : dim. vettore uscita

$m$ : dim. vettore ingresso

$n$ : dim. vettore stato

$$G(s) \equiv C \underbrace{(sI - A)^{-1}}_{p \times n} \underbrace{B}_{n \times m} + D \underbrace{D}_{p \times m}$$

E' una matrice  $p \times m$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_i(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{ii}(s) & \dots & G_{im}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}_{p \times m} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$

La  $i$ -esima componente del vettore di uscita è quindi

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^m G_{ij}(s)U_j(s) = G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \dots + G_{im}(s)U_m(s)$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

6

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -10 & -12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Calcolare la funzione di trasferimento del sistema

$$\begin{aligned} G(s) &\equiv C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+10 & 12 \\ -2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s(s+10)+24} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -12 \\ 2 & s+10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2+10s+24} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-12 \\ s+12 \end{bmatrix} = \frac{2s}{s^2+10s+24} \end{aligned}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

8

## 3. Interpretazione della funzione di trasferimento

Si consideri un sistema SISO con funzione di trasferimento  $G(s)$

Siano

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{imp}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 1 \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

Allora

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

**La funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso del sistema**

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

7

Calcolare la risposta all'impulso del sistema a partire da condizioni iniziali nulle.

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{imp}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 1 \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) = \frac{2s}{s^2+10s+24} = \frac{2s}{(s+6)(s+4)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

9

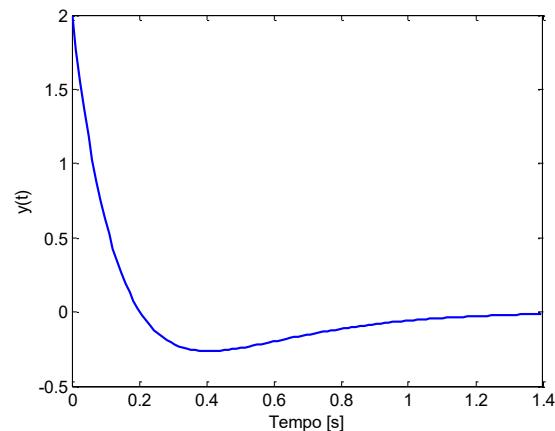
$$\frac{2s}{(s+6)(s+4)} = \frac{\alpha}{(s+4)} + \frac{\beta}{(s+6)} = \frac{\alpha s + 6\alpha + \beta s + 4\beta}{(s+6)(s+4)} = \frac{(\alpha+\beta)s + (6\alpha+4\beta)}{(s+6)(s+4)}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 6\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \xrightarrow{\quad} \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{-4}{(s+4)} + \frac{6}{(s+6)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-4}{(s+4)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s+6)}\right] =$$

$$y(t) = -4e^{-4t} + 6e^{-6t} \quad \text{per } t \geq 0$$



#### 4. Struttura della funzione di trasferimento (per sistemi SISO)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Analisi della struttura fattore per fattore

Il primo fattore è

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & s - a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}^{-1}$$

La sua espressione è

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} K(s) \quad \text{dove } K(s) \text{ è la matrice } n \times n \text{ dei complementi algebrici della trasposta di } sI - A$$

•  $\det(sI - A) = \varphi(s)$  è un polinomio in  $s$  di grado  $n$   
(è il polinomio caratteristico di  $A$ !)

•  $k_{ij}(s)$  (elemento di  $K(s)$ ) è un polinomio in  $s$  di grado  $< n$

Moltiplicando  $(sI - A)^{-1}$  a sinistra per  $C$  e a destra per  $B$  si ha

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{\det(sI - A)} C \underbrace{K(s)}_{(n \times n)} \underbrace{B}_{(n \times 1)} = \frac{M(s)}{\varphi(s)}$$

E' un sistema SISO

- $M(s)$  è un polinomio in  $s$  di grado  $< n$

### Riassumendo

$$G(s) \text{ è razionale} \iff G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- $D(s) = \varphi(s) = \det(sI - A)$  è un polinomio in  $s$  di grado  $n$  (è il polinomio caratteristico di  $A$ !)
- $N(s)$  è un polinomio in  $s$  :
  - ✓ di grado  $n$  se  $D \neq 0$
  - ✓ di grado  $< n$  se  $D = 0$

Salvo cancellazioni

Infine, si somma  $D$

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{M(s)}{\varphi(s)} + D = \\ &= \frac{M(s) + D\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \end{aligned}$$

- Se  $D \neq 0$  (cioè il sistema è proprio)
  - $N(s)$  è un polinomio in  $s$  di grado  $n$
- Se  $D = 0$  (cioè il sistema è strettamente proprio)
  - $N(s) = M(s)$  è un polinomio in  $s$  di grado  $< n$

### In caso di cancellazioni

- $D(s)$  è un fattore di  $\varphi(s)$  di grado  $r < n$
- $N(s)$  ha grado  $v < n$  ( $v = r$  solo se  $D$  è diverso da zero)

Una cancellazione in  $G(s)$  è un indicatore dell'esistenza di **parti "nascoste"** (**non raggiungibili** e/o **non osservabili**) del sistema (cioè che esistono nella rappresentazione di stato e che "si perdono" passando alla rappresentazione mediante funzione di trasferimento).

## Cancellazioni

### Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x \end{cases}$$

$$G(s) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} [1 \ 1] \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s+1)} [s+2 \ s-1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

Qual è il significato di questa cancellazione?

## 5. Rappresentazione di un sistema LTI

La funzione di trasferimento è detta **rappresentazione esterna** del sistema, mentre quella in variabili di stato è detta **rappresentazione interna**. In generale, però, non hanno il medesimo contenuto informativo (la rappresentazione di stato ci dice sempre tutto, la funzione di trasferimento solo se non ci sono cancellazioni)

### Rappresentazione interna

$$(A, B, C, D) \quad \longrightarrow \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & Y(s) &= G(s)U(s) \\ y &= Cx + Du & \text{con } x(0) &= 0 \end{aligned}$$

“realizzazione”

Si esplicitino le equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Si osservi che per  $x_1(0) = 0$  allora  $x_1(t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$

Quindi, quando si ha condizione iniziale  $x_1(0) = 0$ , il sistema, dal punto di vista ingresso/uscita, è identico a

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s+1}$$

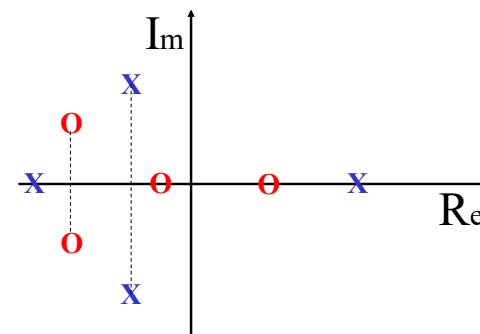
Il fatto che ci sia una cancellazione nella funzione di trasferimento consiste nel fatto che una variabile di stato “non si veda” nella rappresentazione ingresso/uscita.

## 6. Funzione di trasferimento : poli e zeri

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

O Zeri : radici di  $N(s) = 0$

X Poli : radici di  $D(s) = 0$



## 7. Poli e zeri

- I poli sono tutti autovalori di  $A$
- Un autovalore di  $A$  può non essere un polo in caso di cancellazioni
- La stabilità dipende dai poli

As. stabilità   $\text{Re}(\text{poli}) < 0$   
(salvo cancellazioni)

- Numero di zeri  $\leq$  numero di poli

### Osservazione – Relazione tra la 2 e la 3

$$\begin{aligned} G(s) &= \rho \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_i (s - p_i)} = \frac{\rho}{s^g} \frac{\prod_i z_i \left( \frac{s}{z_i} - 1 \right)}{\prod_i p_i \left( \frac{s}{p_i} - 1 \right)} = \\ &= \frac{1}{s^g} \rho \frac{\prod_i (-z_i)}{\prod_i (-p_i)} \frac{\prod_i \left( 1 - \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_i \left( 1 - \frac{s}{p_i} \right)} = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s T_i)}{\prod_i (1 + s \tau_i)} \end{aligned}$$

dove  $-\frac{1}{z_i} = T_i$     $-\frac{1}{p_i} = \tau_i$

$\mu$

## 8. Funzione di trasferimento : parametrizzazioni

1.  $G(s) = \frac{\beta_m s^m + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$  parametri:  $\beta_i, \alpha_i$

2.  $G(s) = \rho \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \rho \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$

parametri:  $\rho$  costante di trasferimento  
 $z_i$  zeri    $p_i$  poli

3.  $G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s T_i)}{\prod_i (1 + s \tau_i)}$  parametri:  $\mu$  guadagno della FdT  
 $T_i, \tau_i$  costanti di tempo  
 $g$  tipo

### Esempio

$$G(s) = \frac{5s^2 + 35s + 50}{s^2 + 10s + 21} \quad \text{è nella forma 1} \quad \begin{cases} \beta_0 = 50, \beta_1 = 35, \beta_2 = 5 \\ \alpha_0 = 21, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Calcolando poli e zeri è possibile metterla nella forma 2

$$G(s) = \frac{5s^2 + 35s + 50}{s^2 + 10s + 21} = \frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)} \quad \begin{cases} \rho = 5 \\ z_1 = -2, z_2 = -5 \\ p_1 = -3, p_2 = -7 \end{cases}$$

Raccogliendo  $z_i$  e  $p_i$  si può passare alla forma 3

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2 \left( \frac{1}{2}s + 1 \right) \left( \frac{1}{5}s + 1 \right)}{3 \cdot 7 \left( \frac{1}{3}s + 1 \right) \left( \frac{1}{7}s + 1 \right)} = \frac{50 \left( 1 + \frac{1}{2}s \right) \left( 1 + \frac{1}{5}s \right)}{\left( 1 + \frac{1}{3}s \right) \left( 1 + \frac{1}{7}s \right)} \\ &\mu = \frac{50}{21}, T_1 = \frac{1}{2}, T_2 = \frac{1}{5}, \tau_1 = \frac{1}{3}, \tau_2 = \frac{1}{7}, g = 0 \end{aligned}$$

## 9. Guadagno statico e guadagno di una FdT

**$g = 0$**

### Guadagno statico

Se il sistema non ha poli nell'origine allora la matrice  $A$  è invertibile e si ha

$$\mu = -CA^{-1}B + D$$

Inoltre si osservi che, essendo  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  allora

$$\mu = -CA^{-1}B + D = G(0)$$

### Guadagno della funzione di trasferimento

Se  $g = 0$  allora  $G(s) = \mu \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+st_i)}$  e quindi anche

$$\mu = G(0)$$

Quindi il **guadagno statico** è uguale al **guadagno della funzione di trasferimento**

26

**$g \neq 0$**

### Guadagno della funzione di trasferimento

Dal momento che  $G(s) = \mu \frac{1}{s^g} \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+st_i)}$  allora sarà

$$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$$

Il **guadagno statico** non ha nessuna relazione con il **guadagno della funzione di trasferimento** che in questo caso prende il nome di **guadagno generalizzato**

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

27

tipo	guadagno statico	guadagno della FdT
$g = 0$	$\mu = -CA^{-1}B + D = G(0)$	<del><math>\mu = G(0)</math></del>
$g < 0$	$\mu = -CA^{-1}B + D = G(0)$	<del><math>\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)</math></del>
$g > 0$	non def.	$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

28

### Esempio

#### Sistema 1

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0.75] \quad D = 0$$

Si calcoli il **guadagno statico** del sistema

$$\mu = -CA^{-1}B + D = \frac{3}{20}$$

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2 + 9s + 20} \xrightarrow{\text{forma 2}} G(s) = \frac{s+3}{(s+4)(s+5)} \xrightarrow{\text{forma 3}} G(s) = \frac{\left(1 + \frac{1}{3}s\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}s\right)\left(1 + \frac{1}{5}s\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{guadagno statico} \\ = \\ \text{guadagno della funzione} \\ \text{di trasferimento} \end{aligned}$$

$$\mu$$

**guadagno della funzione di trasferimento**

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

29

### Sistema 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -14 & -10 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [-3 \quad -5] \quad D = 4$$

Si calcoli il **guadagno statico** del sistema

$$\mu = -CA^{-1}B + D = \mathbf{0}$$

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{4s^2 + 32s}{s^2 + 14s + 40} \xrightarrow{\text{forma 2}} G(s) = \frac{4s(s+8)}{(s+4)(s+10)} \xrightarrow{\text{forma 3}} G(s) = \frac{\overset{\wedge}{\mu} \frac{4}{5}s^{-1}}{(1+\frac{1}{4}s)(1+\frac{1}{10}s)} \quad g < 0$$

**guadagno della funzione di trasferimento**

$$\text{Infatti: } \mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s) = \frac{4}{5}$$

## 10. Matlab

Con questo comando possiamo definire una funzione di trasferimento nella «forma 1» (specificando i coefficienti dei polinomi a numeratore e a denominatore).

**tf** Construct transfer function or convert to transfer function.

Construction:

**SYS = tf(NUM,DEN)** creates a continuous-time transfer function SYS with numerator NUM and denominator DEN. SYS is an object of type **tf** when NUM,DEN are numeric arrays.

Conversion:

**SYS = tf(SYS)** converts any dynamic system SYS to the transfer function representation. The resulting SYS is always of class **tf**.

Con questo comando possiamo definire una funzione di trasferimento nella «forma 2» (specificando i poli, gli zeri e la costante di trasferimento).

**zpk** Constructs zero-pole-gain model or converts to zero-pole-gain format.

Construction:

**SYS = zpk(Z,P,K)** creates a continuous-time zero-pole-gain (zpk) model SYS with zeros Z, poles P, and gains K. SYS is an object of class **@zpk**.

Conversion:

**SYS = zpk(SYS)** converts any dynamic system SYS to the zpk representation. The resulting SYS is of class **@zpk**.

### Sistema 3

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 4] \quad D = 0$$

Non si può calcolare il **guadagno statico** del sistema perché A non è invertibile.

$$\det A = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$$

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

**g > 0**

$$G(s) = \frac{4s + 32}{s^2 + 4s} \xrightarrow{\text{forma 2}} G(s) = \frac{4(s+8)}{s(s+4)} \xrightarrow{\text{forma 3}} G(s) = \frac{\overset{\wedge}{\mu} \frac{8}{1}s^{-1}}{s(1+\frac{1}{4}s)} \quad g > 0$$

**guadagno della funzione di trasferimento**

$$\text{Infatti: } \mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s) = 8$$

```
>> Sistema1=tf([1 1],[1 5 6])
```

Sistema1 =

$$\frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> Sistema2=zpk([-1],[-2 -3],1)
```

Sistema2 =

$$\frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

```
>> dcgain(Sistema2)
```

ans =

$$0.1667$$

← **Attenzione!**

```

>> A=[-4 1; 3 -5]; B=[1 1]'; C=[1 1]; D=0;
>> Sistema=ss(A,B,C,D);

>> tf(Sistema)

ans =

 2 s + 13
 -----
 s^2 + 9 s + 17

Continuous-time transfer function.

>> zpk(Sistema)

ans =

 2 (s+6.5)
 -----
 (s+2.697) (s+6.303)

Continuous-time zero/pole/gain model.

```

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

34

Per curiosità...

```

>> Sistema=tf([1 1],[1 4 0])
Sistema =
  s + 1
  -----
  s^2 + 4 s

Continuous-time transfer function.

>> dcgain(Sistema)
ans =
 Inf

```

```

>> Sistema=tf([1 4 0],[1 5 6])
Sistema =
  s^2 + 4 s
  -----
  s^2 + 5 s + 6

Continuous-time transfer function.

>> dcgain(Sistema)
ans =
 0

```

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

36

Applicando il comando **ss** ad una funzione di trasferimento otteniamo la realizzazione in variabili di stato del sistema.

```

>> Sistema=tf([1 1],[1 5 6])
Sistema =
  s + 1
  -----
  s^2 + 5 s + 6

Continuous-time transfer function.

```

Una verifica

```

>> eig([-5 -3; 2 0])
ans =
 -3.0000
 -2.0000

```

```

>> ss(Sistema)
ans =
 A =
   x1  x2
 x1  -5  -3
 x2   2   0

B =
   u1
 x1   1
 x2   0

C =
   x1  x2
 y1   1  0.5

D =
   u1
 y1   0

Continuous-time state-space model.

```

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.10

35

## Lezione 11. Schemi a blocchi

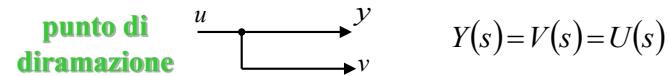
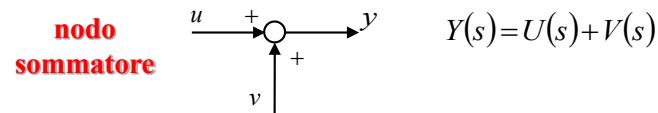
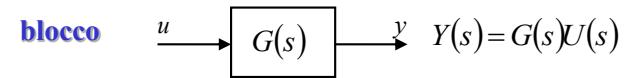


F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

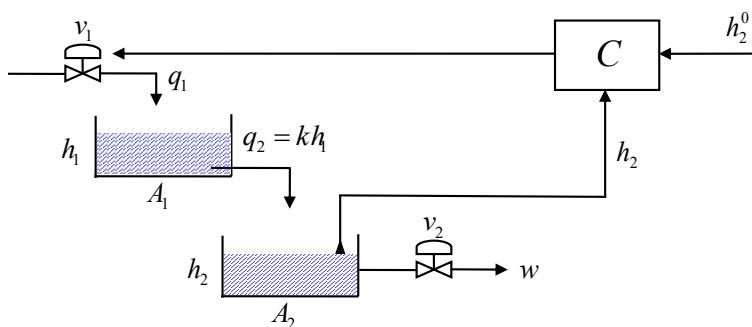
## Schema della lezione

1. Elementi base di uno schema a blocchi
2. Esempio esplicativo
3. Regole di elaborazione  
serie, parallelo, retroazione
4. Stabilità  
serie, parallelo, retroazione
5. Matlab
6. Simulink

## 1. Elementi base di un schema a blocchi

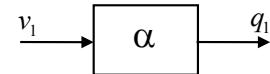


## 2. Esempio esplicativo



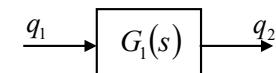
### Valvola 1

$$q_1(t) = \alpha v_1(t)$$



### Serbatoio 1

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = q_1(t) - kh_1(t) \\ q_2(t) = kh_1(t) \end{cases}$$

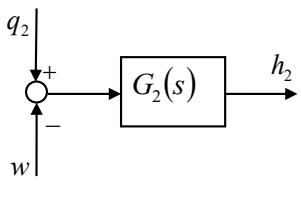


$$G_1(s) = \frac{k}{A_1 s + k}$$

### Serbatoio 2

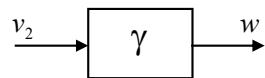
$$A_2 \dot{h}_2(t) = q_2(t) - w(t)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{A_2 s} (Q_2(s) - W(s))$$



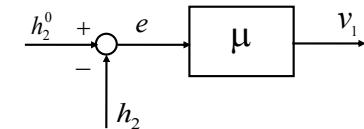
### Valvola 2

$$w(t) = \gamma v_2(t)$$



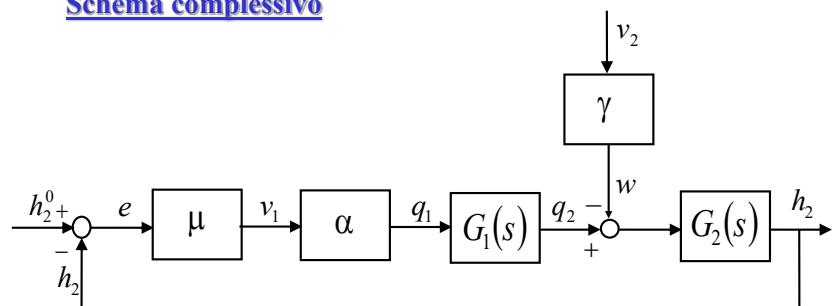
### Controllore

$$v_1(t) = \mu \underbrace{(h_2^0(t) - h_2(t))}_{e(t)}$$



Controllore proporzionale

### Schema complessivo



FdT tra  $h_2^0$  e  $h_2$  ?

FdT tra  $v_2$  e  $h_2$  ?

FdT tra  $v_2$  e  $e$  ?

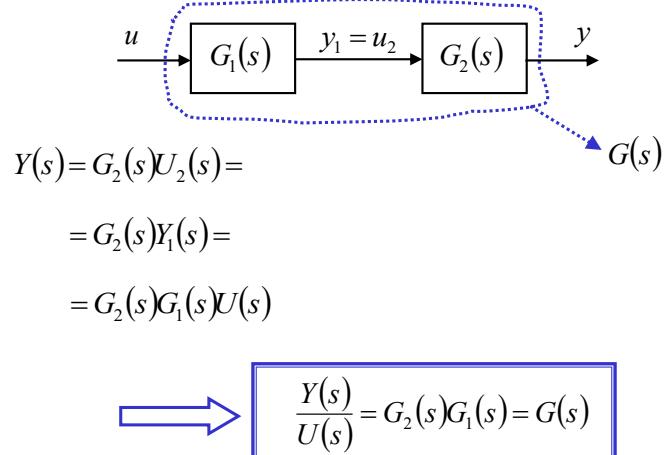
... altre FdT ?

### **3. Schemi a blocchi : regole di elaborazione**

Blocchi

- in serie
- in parallelo
- in retroazione

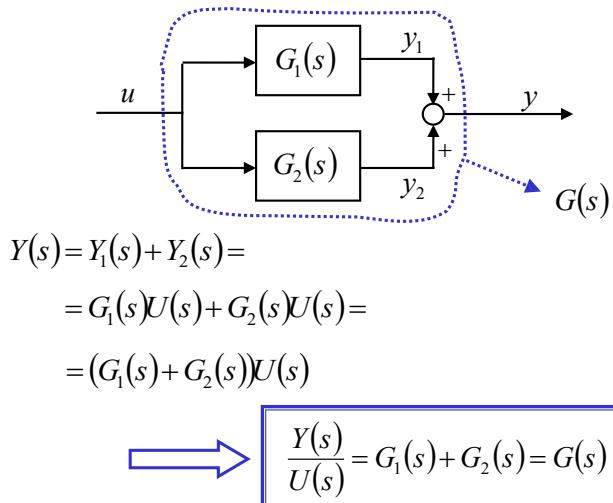
### Blocchi in serie



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

10

### Blocchi in parallelo

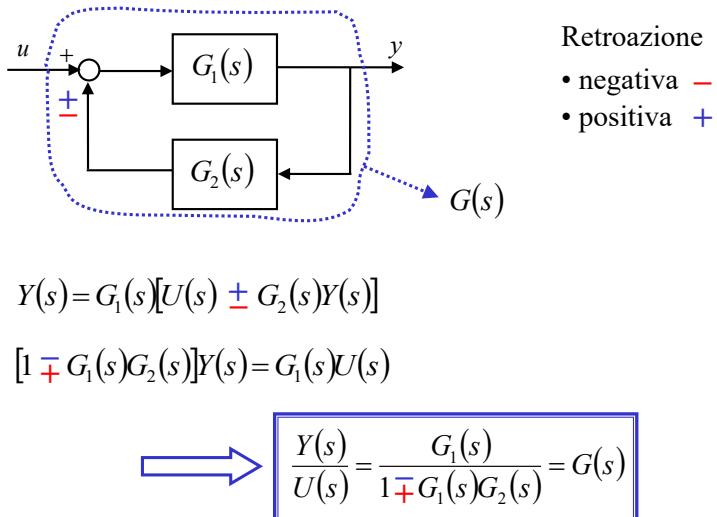


F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11



11

### Blocchi in retroazione



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

12

$$G(s) = \frac{\text{FdT "in andata"}^{\color{green}}}{1 \mp \text{FdT "d'anello"}^{\color{orange}}}$$

- Retroazione  
• negativa  
• positiva

#### FdT "in andata" :

prodotto delle FdT da  $u$  a  $y$  in anello aperto

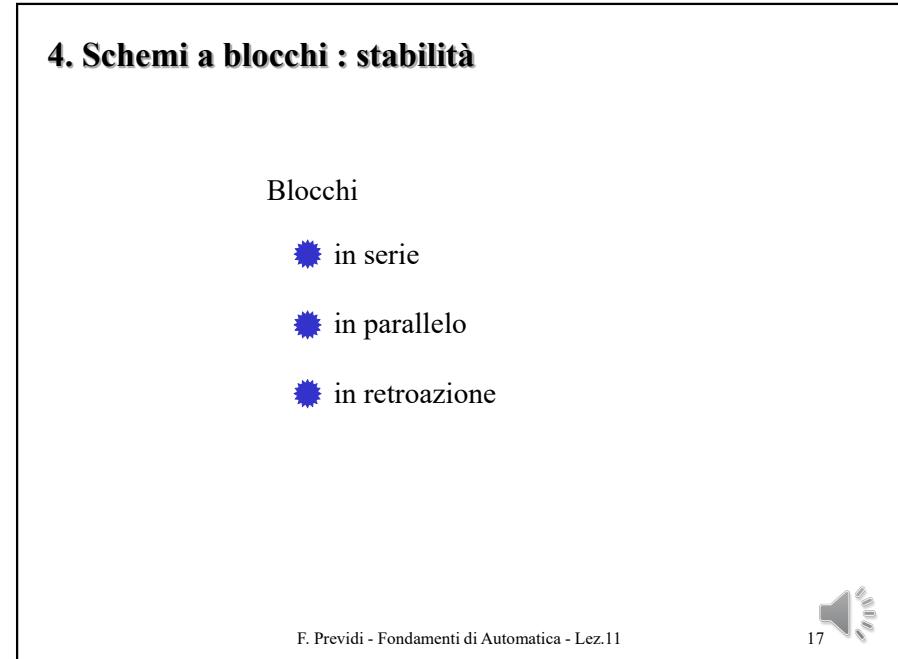
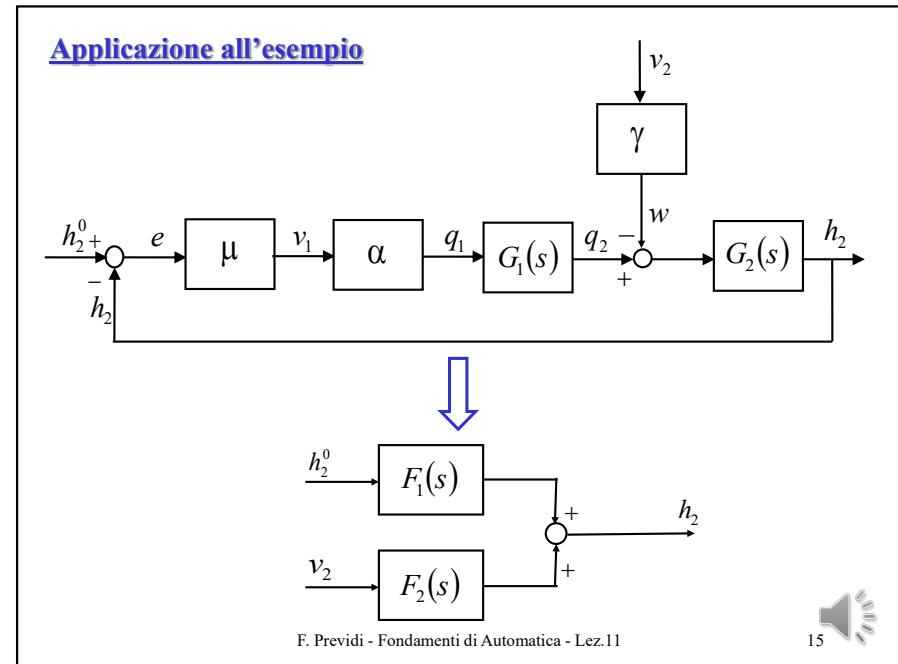
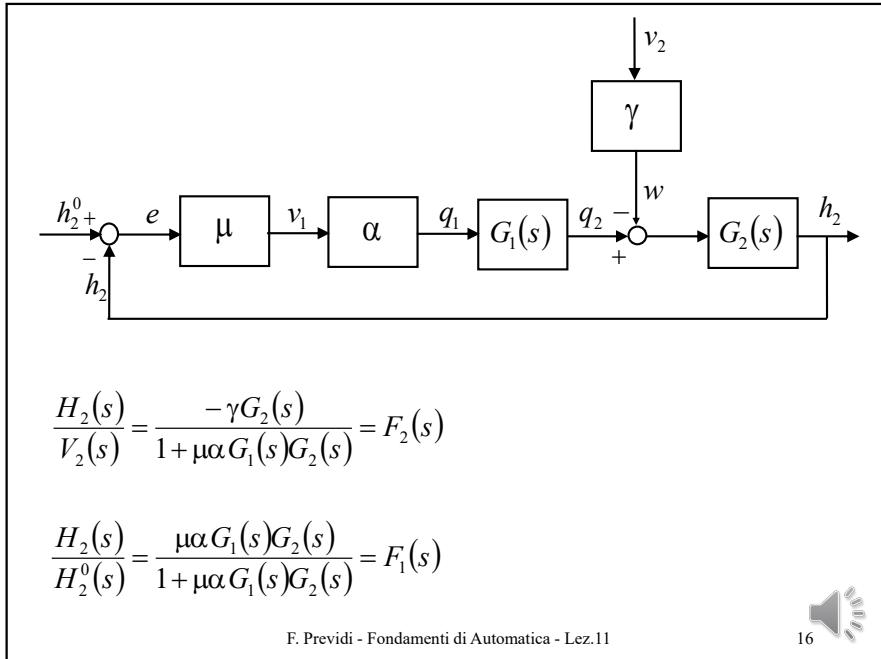
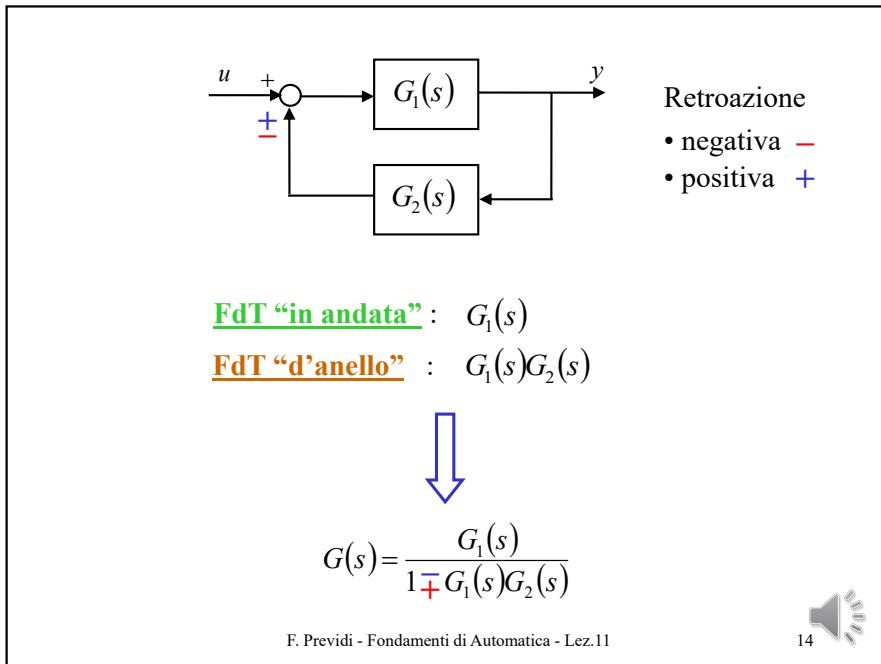
#### FdT "d'anello" :

prodotto delle FdT lungo l'anello.

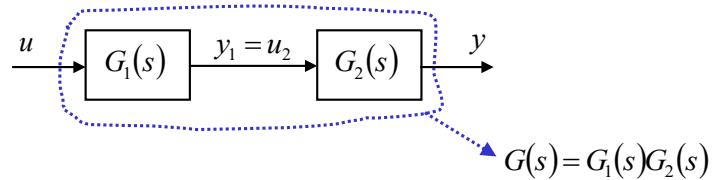
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11



13



### Blocchi in serie



$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$G(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11



18

### Esempio

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\quad G_1(s) \quad} & \xrightarrow{\quad G_2(s) \quad} y \\ & & \\ & & G_1(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad \text{as.} \\ & & G_2(s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{stabili} \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\quad G(s) \quad} & y \\ & & \\ & & G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \quad \text{as.} \end{array}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11



20

### Senza cancellazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G(s) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_1(s) \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_2(s) \end{array} \right\}$$

$$G(s) \xrightarrow{\substack{\text{As.} \\ \text{stabili}}} \longleftrightarrow G_1(s), G_2(s) \xrightarrow{\substack{\text{As.} \\ \text{stabili}}}$$

### Con cancellazioni

- cancellazioni con  $\text{Re} < 0$  dinamica "nascosta" as. stabile

- cancellazioni con  $\text{Re} \geq 0$  dinamica "nascosta" non as. stabile

Il sistema non è as. stabile anche se  $G(s)$  non lo mostra

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

19



### Esempio

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\quad G_1(s) \quad} & \xrightarrow{\quad G_2(s) \quad} y \\ & & \\ & & G_1(s) = \frac{s+2}{s-1} \quad \text{instabile} \\ & & G_2(s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{as. stabile} \end{array}$$



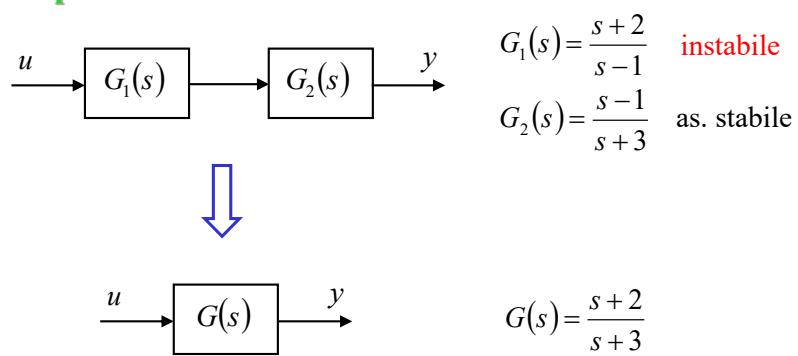
$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\quad G(s) \quad} & y \\ & & \\ & & G(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s+3)} \quad \text{instabile} \end{array}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11



21

## Esempio



C'è stata una **cancellazione polo/zero instabile!**

Il sistema è **instabile!**

(anche se dalla funzione di trasferimento non si capisce, perché la parte instabile del sistema è "nascosta" nella rappresentazione esterna)

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

22



## Senza cancellazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G(s) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_1(s) \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_2(s) \end{array} \right\}$$

$$G(s) \underset{\text{stabile}}{\text{As.}} \iff G_1(s), G_2(s) \underset{\text{stabili}}{\text{As.}}$$

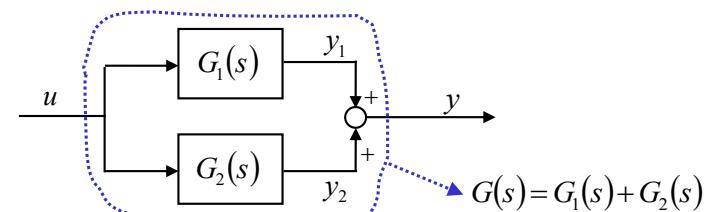
## Con cancellazioni

- cancellazioni con  $\text{Re} < 0$  dinamica "nascosta"   
  $\text{as. stabile}$
  - cancellazioni con  $\text{Re} \geq 0$  dinamica "nascosta"   
  $\text{non as. stabile}$
- Il sistema non è as. stabile anche se  $G(s)$  non lo mostra

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

24

## Blocchi in parallelo



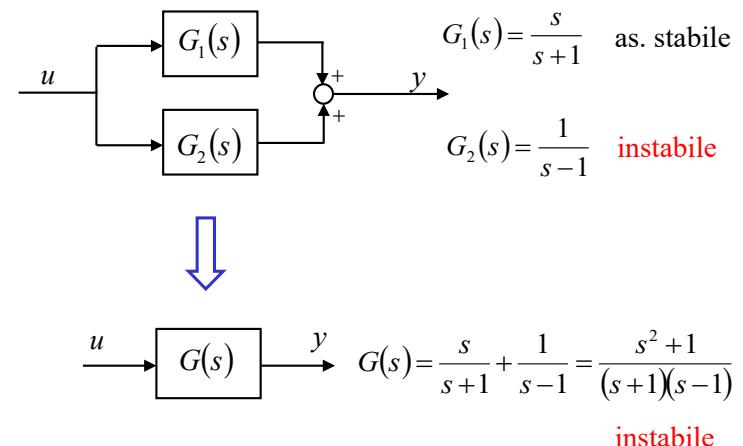
$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11



## Esempio

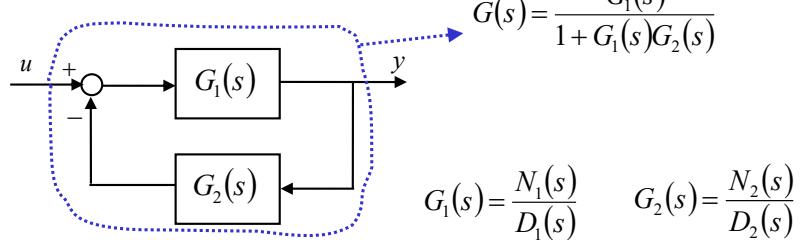


F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11



25

### Blocchi in retroazione



$$G(s) = \frac{\cancel{N_1(s)}/D_1(s)}{1 + \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11



26

### Senza cancellazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G(s) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{radici di} \\ D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s) = 0 \end{array} \right\}$$

Asintotica stabilità  
sistema complessivo

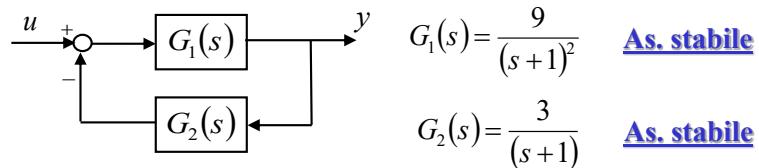
$G(s)$  As. stabile

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11



27

### Esempio



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\frac{9}{(s+1)^2}}{1 + \frac{3}{(s+1)}} = \frac{9(s+1)}{(s+1)^3 + 27}$$

poli in  $-4, \frac{1}{2} \pm j\frac{3\sqrt{3}}{2}$

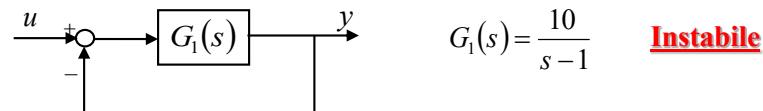
Instabile

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11



28

### Esempio



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\frac{10}{s-1}}{1 + \frac{10}{s-1}} = \frac{10}{s+9}$$

polo in  $-9$

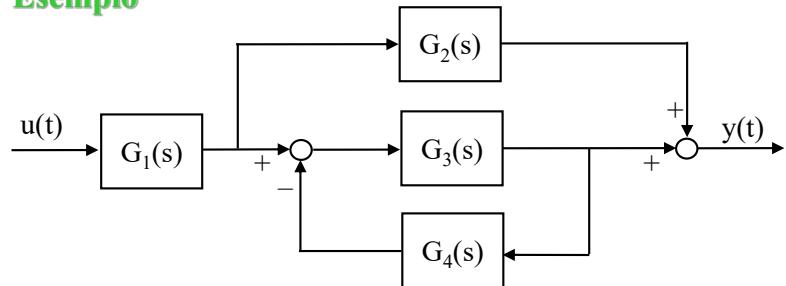
As. stabile

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11



29

## Esempio



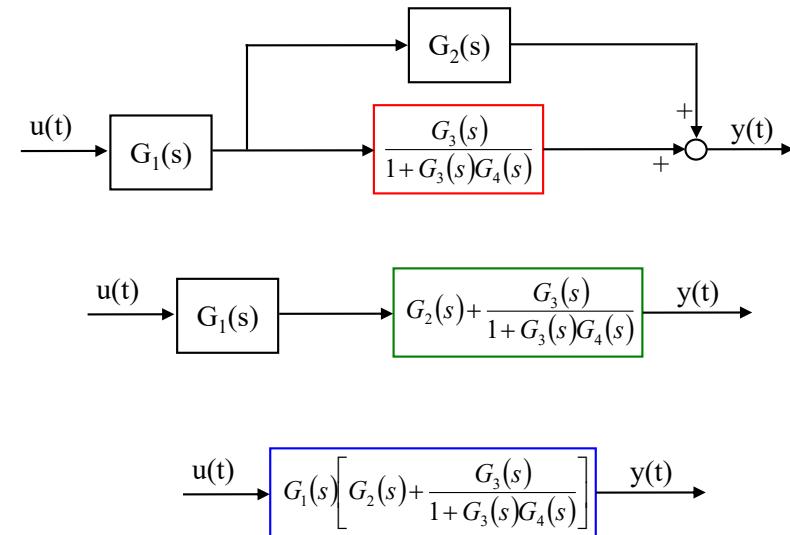
Calcolare la funzione di trasferimento da  $u(t)$  ad  $y(t)$

$G_3$  e  $G_4$  sono in retroazione (negativa). Il risultato della loro connessione è in parallelo a  $G_2$ . Il risultato è in serie a  $G_1$ .



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

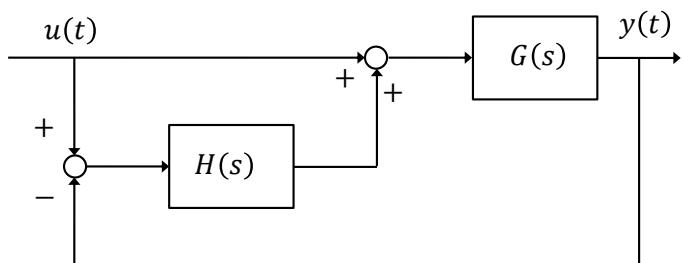
30



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

31

## Esempio



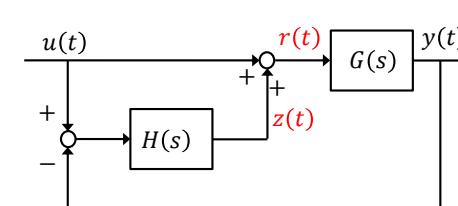
Calcolare la funzione di trasferimento da  $u(t)$  ad  $y(t)$ .

Esistono altri modi per analizzare schemi a blocchi «complessi». Uno di questi prevede di attribuire dei nomi alle altre variabili in gioco e calcolare la funzione di trasferimento complessiva in modo diretto.



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

32



Chiamo  $r(t)$  e  $z(t)$  i due segnali senza nome.

$$Y(s) = G(s)R(s)$$

$$Y(s) = G(s)(U(s) + Z(s)) = G(s)U(s) + G(s)Z(s)$$

$$Y(s) = G(s)U(s) + G(s)H(s)(U(s) - Y(s))$$

$$Y(s) = G(s)U(s) + G(s)H(s)U(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = (G(s) + G(s)H(s))U(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

$$(1 + G(s)H(s))Y(s) = (G(s) + G(s)H(s))U(s)$$

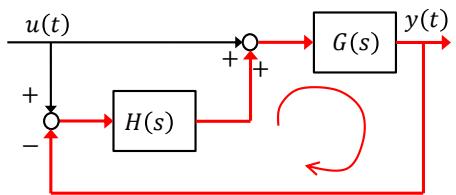
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)(1 + H(s))}{1 + G(s)H(s)}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

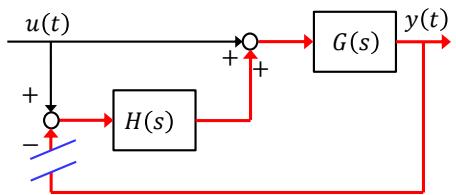
33

E' ovviamente possibile risolvere questo schema con il metodo «standard».

1) E' un sistema retroazionato ed evidenzio l'anello.



2) apro l'anello di retroazione.



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

34

4) Calcolo la funzione di trasferimento complessiva.

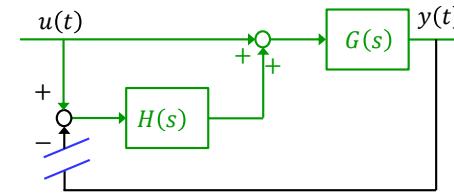
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{FdT \text{ d'andata}}{1 + FdT \text{ d'anello}} = \frac{(1 + H(s))G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Il risultato è (ovviamente) identico al precedente.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

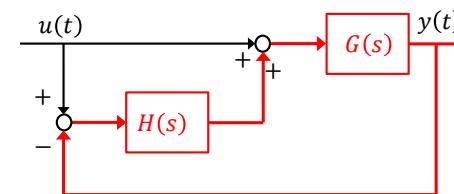
36

3) Calcolo la **funzione di trasferimento d'andata** (nota che ci sono due percorsi in parallelo).



$$A(s) = (1 + H(s))G(s)$$

3) Calcolo la **funzione di trasferimento d'anello**.



$$L(s) = H(s)G(s)$$

35

## 5. Matlab

Matlab dispone di comandi per risolvere semplici schemi a blocchi in serie, parallelo o in retroazione.

```
>> M = feedback(M1, M2);
>> M = series(M1, M2)
>> M = parallel(M1, M2)
```

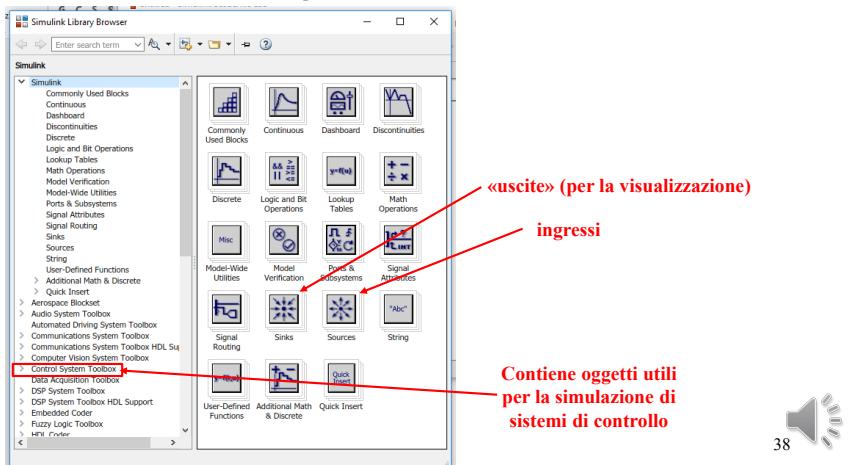
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

37

## 6. Simulink

Simulink è un ambiente di calcolo matematico e simulazione basato sul paradigma degli schemi a blocchi.

Consente di creare modelli (model) utilizzando relazioni matematiche predefinite (anche non lineari!) e blockset/toolbox su diversi ambiti specifici.



Definiamo nel Matlab Workspace una funzione di trasferimento

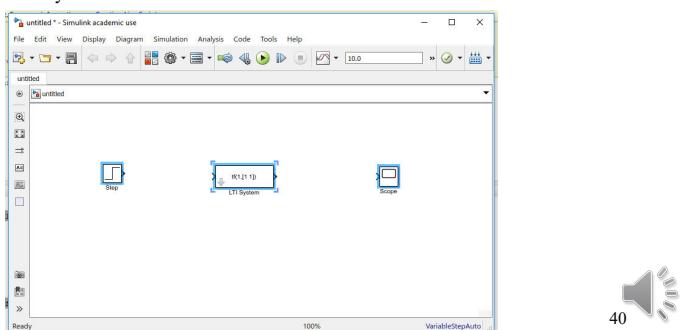
```
>> s=tf('s');
>> G=24*(s-0.1)/(s^2+2*s+100)
```

G =

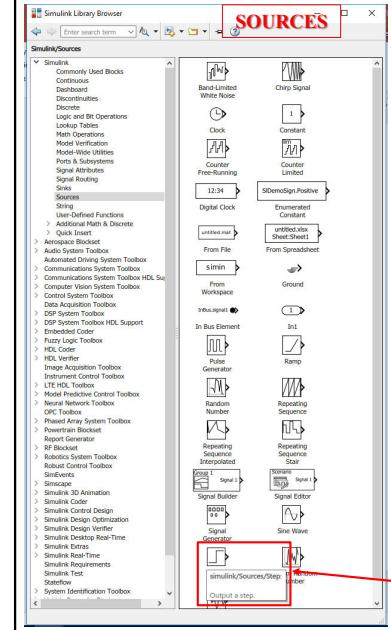
$$\frac{24 s - 2.4}{s^2 + 2 s + 100}$$

Continuous-time transfer function.

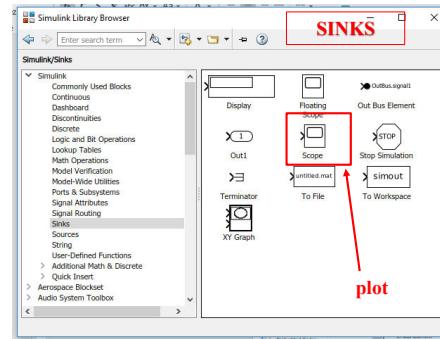
Creiamo un modello Simulink ed inseriamo una Source (per esempio Step), un Sink (per esempio Scope) ed un LTI model dal Control System Toolbox.



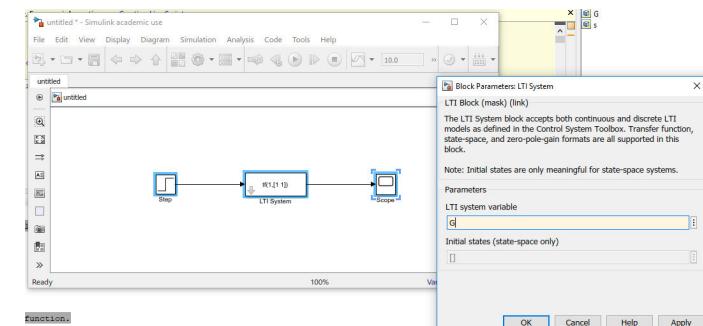
### SOURCES



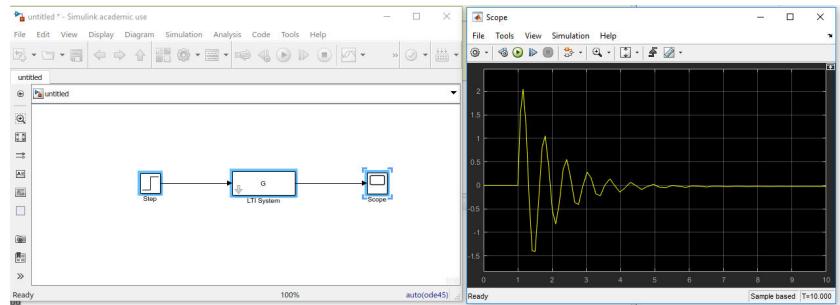
### SINKS



Li collegiamo tra loro ed inseriamo nel LTI model la fdt G.



Apriamo la Scope e premiamo il pulsante Start.



E' possibile interconnettere (sotto)-sistemi semplici per ottenere sistemi complessi a piacere.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

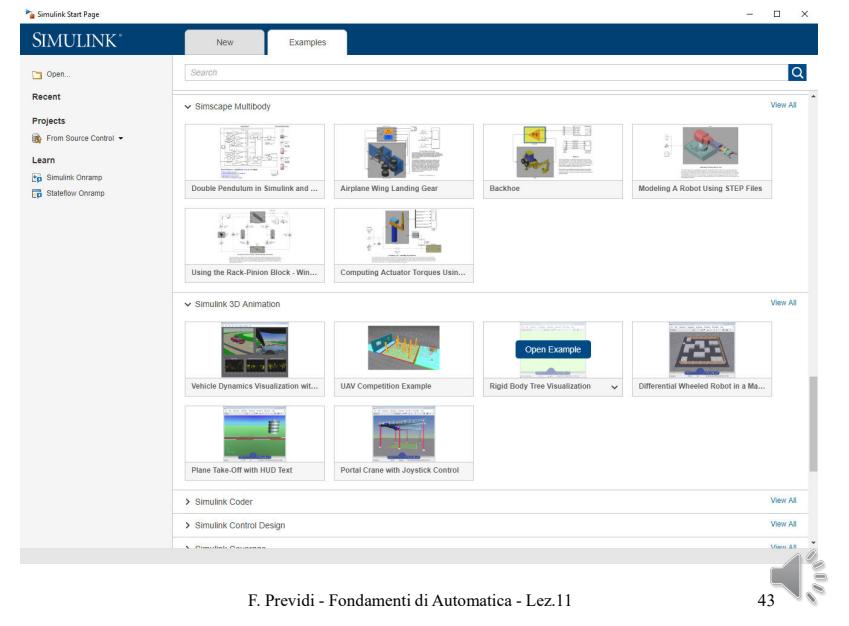
42



## Lezione 12. Risposta allo scalino

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

1



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.11

43

## Schema della lezione

1. Introduzione
2. Relazione tra le risposte ad ingressi canonici
3. Parametri caratteristici della risposta allo scalino
4. Sistemi del I ordine strettamente proprio
5. Sistemi del I ordine non strettamente proprio
6. Sistemi del II ordine con poli reali distinti
7. Sistemi del II ordine con poli reali distinti ed uno zero
8. Sistemi del II ordine con due poli complessi coniugati
9. Pulsazione naturale e smorzamento
10. Sistemi di ordine superiore al secondo
11. Approssimazione a poli dominanti
12. Matlab

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

2

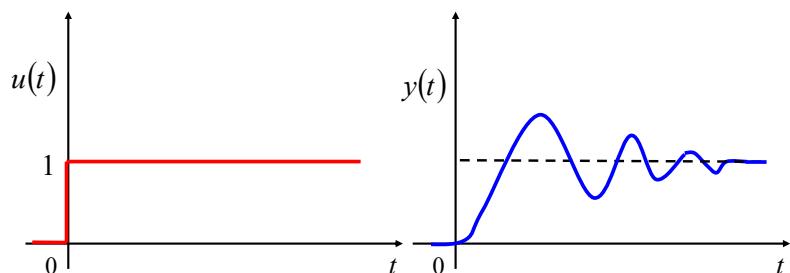
## 1. Introduzione

$$u \rightarrow S \rightarrow y$$

$$u(t) = \text{sca}(t)$$

$$x(0) = 0$$

Sistema asintoticamente stabile



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

3

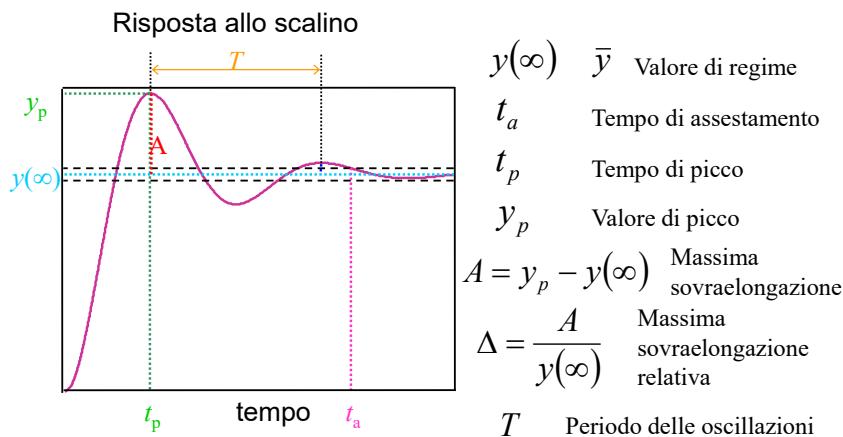
## 2. Relazione tra le risposte a ingressi canonici

$\text{imp}(t)$	$\text{sca}(t)$	$\text{ram}(t)$
$\frac{d}{dt} \text{sca}(t)$		$\int_0^t \text{sca}(\tau) d\tau$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$
Risposta all'impulso	Risposta alla rampa	
$\frac{d}{dt} \left[ \begin{array}{l} \text{risposta} \\ \text{allo scalino} \end{array} \right]$	$\int_0^t \left[ \begin{array}{l} \text{risposta} \\ \text{allo scalino} \end{array} \right] d\tau$	

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

4

## 3. Parametri caratteristici della risposta allo scalino



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

5

## 4. Sistemi del primo ordine strettamente propri

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + s\tau}$$

Strettamente proprio

$$\tau > 0 \quad \text{Sistema as. stabile}$$

$$\mu > 0$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

6

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{(1+s\tau)} \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s(1+s\tau)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\mu}{\tau}}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} - \frac{\mu}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$y(t) = \mu(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

$$y(0^+) = 0$$

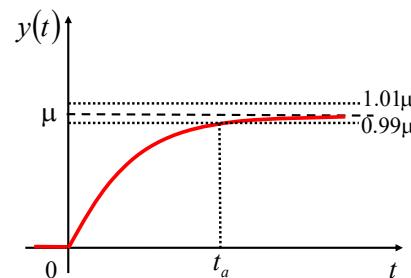
$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sY(s) - y(0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{\mu}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{\mu}{\tau}$$

$$y(\infty) = \mu$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

7

### Valutazione del tempo di assestamento



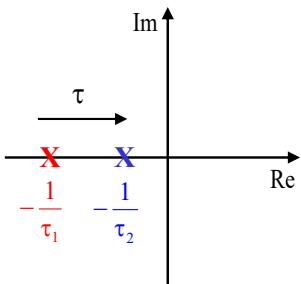
$$\begin{aligned} y(t_a) &= 0.99\mu \\ \mu(1 - e^{-\frac{t_a}{\tau}}) &= 0.99\mu \\ 1 - e^{-\frac{t_a}{\tau}} &= 0.99 \\ e^{-\frac{t_a}{\tau}} &= 0.01 \\ -\frac{t_a}{\tau} &= \ln 0.01 \\ \frac{t_a}{\tau} &= \ln 100 \\ t_a &\cong 4.6\tau \end{aligned}$$

$$t_a \cong 5\tau$$

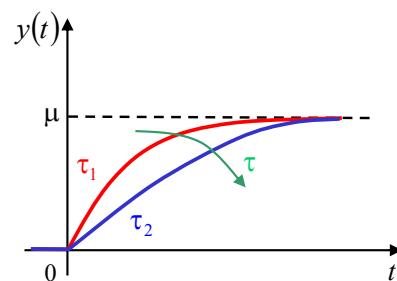
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

8

### Posizione del polo e velocità della risposta



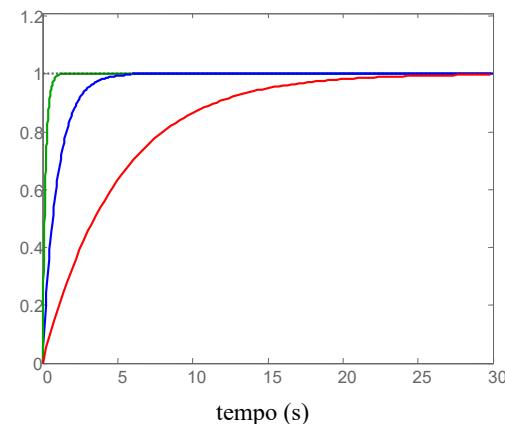
Più vicino è il polo all'asse immaginario, più grande è la costante di tempo associata, più lenta è la risposta.



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

9

### Esempio



$$G(s) = \frac{1}{1+s\tau}$$

$$\tau = 0.2 \text{ s}$$

$$\tau = 1 \text{ s}$$

$$\tau = 5 \text{ s}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

10

## 5. Sistemi del primo ordine non strettamente propri

$$G(s) = \frac{\mu(1+sT)}{1+s\tau}$$

Non strettamente proprio

$\tau > 0$  Sistema as. stabile  
 $\mu > 0 \quad T \neq \tau$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu(1+sT)}{1+s\tau} \frac{1}{s} =$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu(1+sT)}{s(1+s\tau)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\mu T}{\tau}(s + \frac{1}{T})}{s(s + \frac{1}{\tau})}\right] =$$

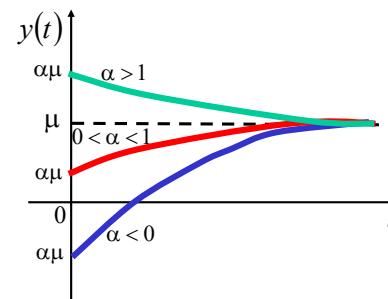
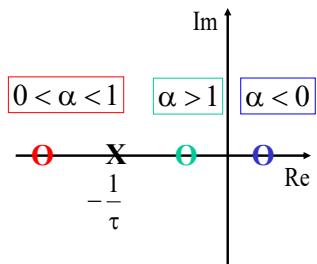
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} + \frac{\frac{\mu(T-\tau)}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}\right] = \mu\left(1 + \frac{T-\tau}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0$$

ponendo  $T = \alpha\tau$

$$y(t) = \mu\left(1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad t \geq 0$$

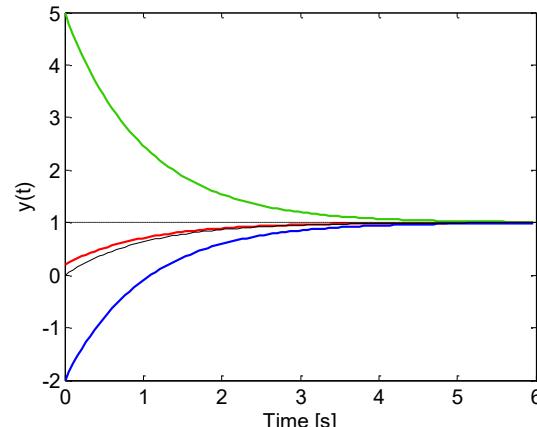
$$y(0^+) = \mu \frac{T}{\tau} \neq 0 \quad \text{non inizia da 0!}$$

$$y(\infty) = \mu$$



Tempo di assestamento  $t_a \cong 5\tau$

## Esempio



$$G(s) = \frac{1+sT}{1+s}$$

$$\begin{aligned} T = -2 \text{ s} \quad \alpha = -2 \\ T = 5 \text{ s} \quad \alpha = 5 \\ T = 0.2 \text{ s} \quad \alpha = 0.2 \\ T = 0 \text{ s} \quad \alpha = 0 \end{aligned}$$

Se la costante di tempo dello zero è molto più piccola (in valore assoluto) di quella del polo allora la risposta non differisce molto dalla risposta del solo polo.

## 6. Sistemi del secondo ordine con poli reali distinti

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \quad \begin{aligned} \tau_1 &\neq \tau_2 \quad \mu > 0 \\ \tau_1 &> \tau_2 > 0 \end{aligned} \quad \text{as stabile}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\mu}{\tau_1\tau_2}}{s\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)\left(s+\frac{1}{\tau_2}\right)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} - \frac{\mu\tau_1}{\tau_1-\tau_2} + \frac{\mu\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\right] \end{aligned}$$

$$y(t) = \mu \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \quad t \geq 0$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

15

$t_a$  è una funzione non semplice di  $\tau_1$  e  $\tau_2$ .

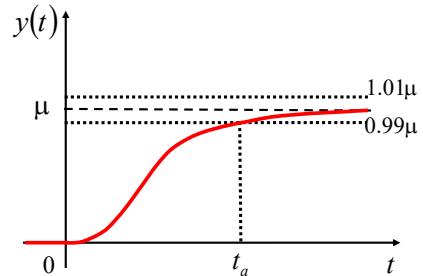
Si osservi però che se  $\tau_1 \gg \tau_2$  allora  $e^{-t/\tau_1} \gg e^{-t/\tau_2}$

$$y(t) = \mu \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \cong \mu \left( 1 - e^{-t/\tau_1} \right)$$

Il polo  $-\frac{1}{\tau_1}$  si dice **polo dominante**.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

17



$$y(0^+) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sY(s) - y(0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{\frac{\mu}{\tau_1\tau_2}}{s\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)\left(s+\frac{1}{\tau_2}\right)} = 0$$

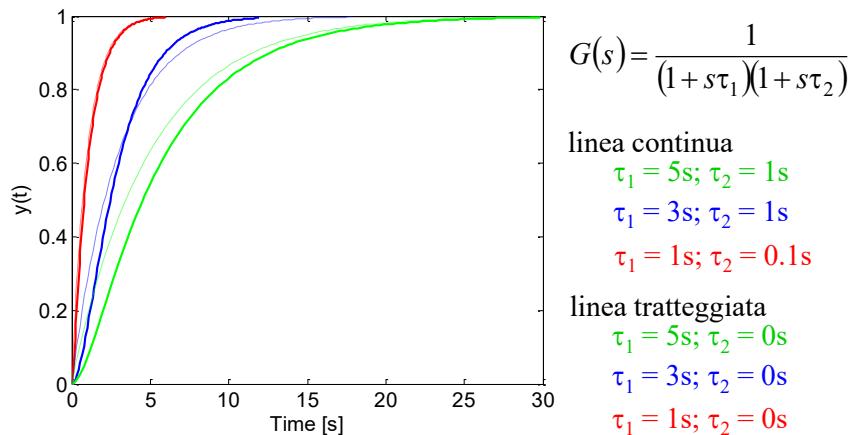
$$y(\infty) = \mu > 0$$

derivata iniziale nulla!

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

16

## Esempio



La costante di tempo più grande (il polo lento) è la più importante nel determinare la forma della risposta allo scalino (ed in particolare il tempo di assestamento)

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

18

## 7. Sistema del secondo ordine con poli reali distinti ed uno zero

$$G(s) = \frac{\mu(1+sT)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \quad \begin{aligned} \tau_1 &\neq \tau_2 \neq T \quad \mu > 0 \\ \tau_1 &> \tau_2 > 0 \end{aligned} \quad \text{as stabile}$$

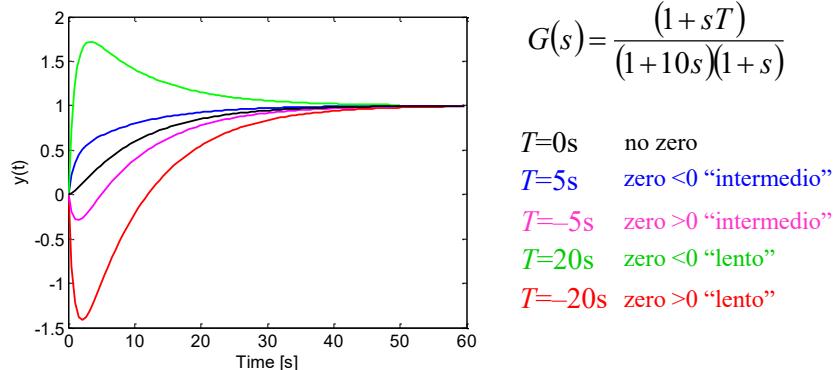
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right]$$

$$y(t) = \mu \left( 1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \quad t \geq 0$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

19

### Esempio



Riassumendo.

Zero a dx: sempre sottoelongazione, tanto maggiore quanto più lo zero è piccolo (cioè "lento") rispetto al polo dominante (in modulo).

Zero a sx: sovraelongazione solo se lo zero è piccolo rispetto al polo dominante (in modulo).

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

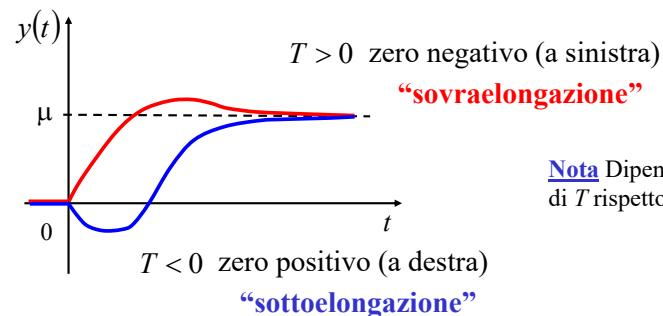
21

$$y(0^+) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \frac{\mu T}{\tau_1 \tau_2} = \begin{cases} > 0 & \text{se } T > 0 \\ < 0 & \text{se } T < 0 \end{cases}$$

$$y(\infty) = \mu > 0$$

Il segno della derivata iniziale dipende dal segno dello zero!



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

20

## 8. Sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\rho}{(s - \sigma + j\omega)(s - \sigma - j\omega)} & \text{guadagno} \\ &= \frac{\rho}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} & \mu = G(0) = \frac{\rho}{\sigma^2 + \omega^2} \quad \rho > 0 \\ & & \text{poli } \sigma \pm j\omega \quad \sigma < 0 \\ & & \text{as stabile} \end{aligned}$$

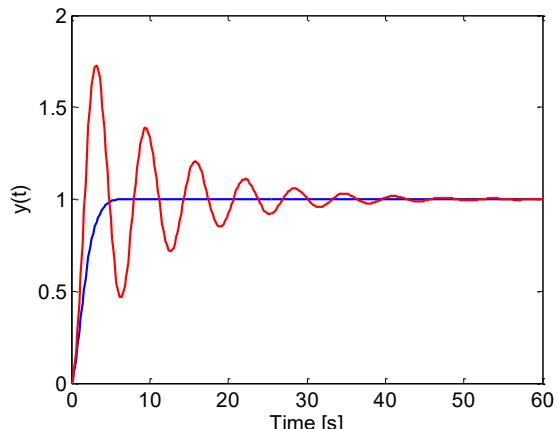
$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\rho}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} + \frac{-\mu s + 2\sigma\mu}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}\right] \\ &= \mu \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s - \sigma - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}\right] = \mu \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}\right] \\ &\quad \uparrow \quad \uparrow \\ &\quad e^{\sigma t} \cos \omega t \quad e^{\sigma t} \sin \omega t \end{aligned}$$

$$y(t) = \mu \left[ 1 - e^{\sigma t} \cos \omega t + \frac{\sigma}{\omega} e^{\sigma t} \sin \omega t \right] \quad t \geq 0$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

22

## Esempio



$$s_{1,2} = -0.9 \pm j0.4359$$

$$s_{1,2} = -0.1 \pm j0.9950$$

Come faccio a capire (in modo semplice) se la risposta presenta oscillazioni o no?

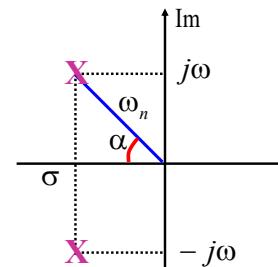
Una funzione di trasferimento con due poli complessi coniugati si può quindi esprimere usando **pulsazione naturale** e **smorzamento**:

$$G(s) = \frac{\rho}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} = \frac{\rho}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2} = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\sigma = -\omega_n \xi$   
 $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$

$$G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

## 9. Pulsazione naturale e smorzamento



$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

**pulsazione naturale**

$$\xi = \cos \alpha = \frac{-\sigma}{\omega_n}$$

**smorzamento**

Relazioni inverse

$$\sigma = -\omega_n \xi \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

## Esempio

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 13}$$

poli in  $s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm j3$

$\sigma = -2$     $\omega = 3$

Usando la definizione:  $\omega_n = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

## Esempio (esula dal problema della risposta allo scalino)

$$G(s) = \frac{10}{s^2 - 4s + 13}$$

poli in  $s_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm j3$

$\sigma = 2$     $\omega = 3$

Usando la definizione:  $\omega_n = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

### Casi notevoli

$$\text{Essendo } \xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

#### In particolare

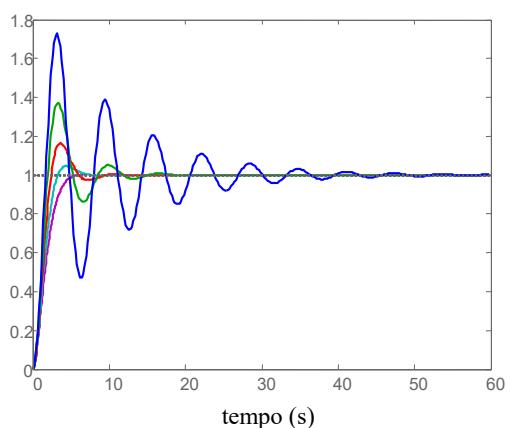
- $\xi = 1$  se  $\begin{cases} \omega = 0 \\ \sigma < 0 \end{cases}$  Poli reali coincidenti as. stabili in  $-\omega_n$

$$\text{Infatti } G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{(s + \omega_n)^2}$$

- $\xi = -1$  se  $\begin{cases} \omega = 0 \\ \sigma > 0 \end{cases}$  Poli reali coincidenti instabili in  $+\omega_n$

$$\text{Infatti } G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 - 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{(s - \omega_n)^2}$$

### Esempio



$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2}$$

$$\mu = 1 \quad \omega_n = 1$$

$\xi = 0.1$   
 $\xi = 0.3$   
 $\xi = 0.5$   
 $\xi = 0.7$   
 $\xi = 0.9$

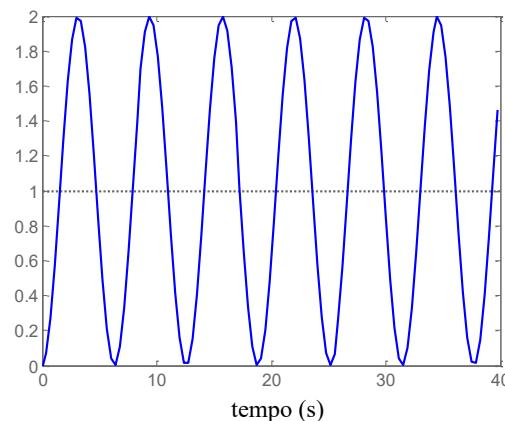
- $\xi = 0$  se  $\sigma = 0$  Poli immaginari coniugati in  $\pm j\omega_n$

$$\text{Infatti } G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 + \omega_n^2}$$

#### In generale

- $0 < \xi < 1$  se  $\sigma < 0$  Poli complessi coniugati as. stabili
- $-1 < \xi < 0$  se  $\sigma > 0$  Poli complessi coniugati instabili

$\xi = 0$



### Parametri caratteristici della risposta allo scalino (in funzione di $\omega_n$ e $\xi$ )

$$t_a \approx \frac{5}{\sigma} = \frac{5}{\xi \omega_n}$$

tempo d'assestamento

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

periodo di eventuali oscillazioni

$$t_p = \frac{1}{2} T = \frac{\pi}{\omega}$$

tempo dell'eventuale primo picco

$$y_p = \mu \left[ 1 + e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega}} \right] = \mu \left[ 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right]$$

ampiezza dell'eventuale  
primo picco

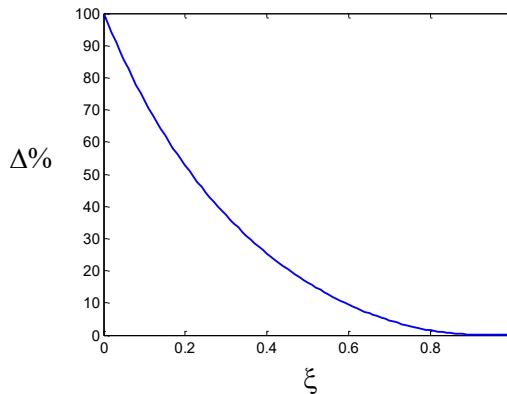
$$\Delta\% = 100 \frac{A}{\bar{y}} = 100 e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega}} = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \%$$

massima sovraelongazione  
relativa percentuale

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

31

### Massima sovraelongazione percentuale



$$\Delta\% = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \%$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

32

### **10. Risposta allo scalino di sistemi di ordine superiore al secondo**

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1+sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1+s\tau_i)}$$

as stabile   $\operatorname{Re}(\tau_i) > 0$   
 $g \leq 0$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

33

### Teorema valore iniziale (con $g=0$ )

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{G(s)}{s} \begin{cases} 0 & \text{se } m < n \\ \neq 0 & \text{se } m = n \end{cases}$$

str. proprio  
non str. proprio

In generale: 
$$\begin{cases} \frac{d^i y}{dt^i}(0^+) = 0 & \text{per } i = 0, \dots, r-1 \\ \frac{d^i y}{dt^i}(0^+) \neq 0 & \text{per } i \geq r \end{cases}$$
 dove  $r = n-m$  è il  
**grado relativo**

### Teorema valore finale

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} \begin{cases} \mu & \text{se } g = 0 \\ 0 & \text{se } g < 0 \end{cases}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez.12

34

## 11. Approssimazione a poli dominanti

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1+sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1+s\tau_i)}$$

as.stabile  $\Leftrightarrow g \leq 0$

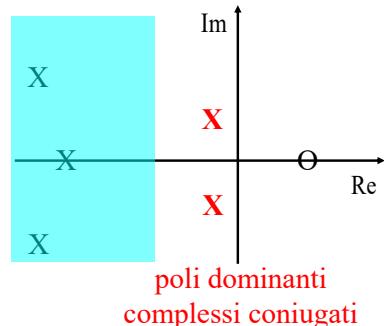
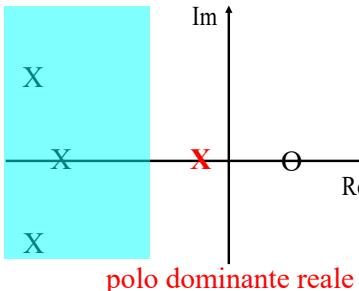
Ipotesi: poli reali distinti  $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{1+s\tau_1} + \frac{\alpha_2}{1+s\tau_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{1+s\tau_n}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \quad \mathcal{L}^{-1} \quad \mathcal{L}^{-1} \quad \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\alpha_2}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

I poli dominanti sono quelli più vicini all'asse immaginario (poli "lenti")



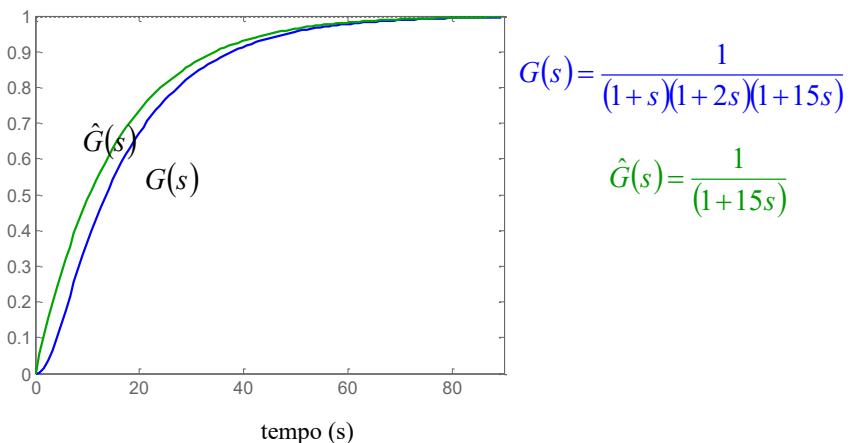
L'approssimazione a poli dominanti consiste nel considerare solo i poli dominanti (preservando il guadagno ed eventualmente il comportamento iniziale)

Se fosse  $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$

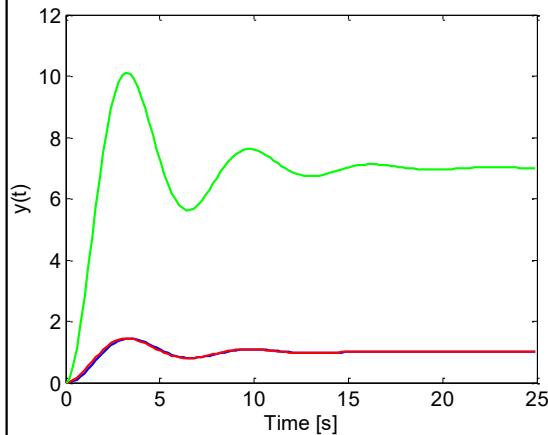
$$y(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \cancel{\frac{\alpha_2}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}} + \dots + \cancel{\frac{\alpha_n}{\tau_n} e^{-\frac{t}{\tau_n}}}$$

E' possibile approssimare la risposta allo scalino con quella di un sistema del I ordine con costante di tempo la più lenta fra tutte le costanti di tempo del sistema.

### Esempio



## Esempio



E' possibile anche calcolare la **risposta all'impulso**.

**impulse** Impulse response of dynamic systems.

**impulse(SYS)** plots the impulse response of the dynamic system SYS.

## 12. Matlab

**step** Step response of dynamic systems.

**[Y,T] = step(SYS)** computes the step response Y of the dynamic system SYS.

For state-space models,

**[Y,T,X] = step(SYS)**

also returns the state trajectory X.

**stepplot** Plot step response of linear systems.

stepplot, an extension of STEP, provides a command line interface for customizing the plot appearance.

**stepplot(SYS)** plots the step response of the dynamic system SYS.

Con questi comandi si può calcolare e tracciare la **risposta allo scalino** di un sistema.

## Lezione 13. Risposta in frequenza

## Schema della lezione

1. Risposta alla sinusoide
2. Teorema della risposta in frequenza
3. Risposta in frequenza
4. Matlab

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 13

2

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Siccome il sistema è asintoticamente stabile

$$\text{Per } t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad y_1(t) \rightarrow 0$$

Quindi

$$\text{Per } t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad y(t) \cong y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)]$$

Asintoticamente resta solo la risposta forzata

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 13

4

## 1. Risposta alla sinusoide

$$u(t) \xrightarrow{\quad} G(s) \xrightarrow{\quad} y(t)$$

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)} \quad \text{As. stabile}$$

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha_1}{1+s\tau_1} + \frac{\alpha_2}{1+s\tau_2} + \dots +}_{Y_1(s)} \underbrace{\frac{\beta s + \gamma}{s^2 + \omega^2}}_{Y_2(s)}$$

risposta libera

risposta forzata

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 13

3

$$Y_2(s) = \frac{\beta s + \gamma}{s^2 + \omega^2} = \beta \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{\gamma}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y_2(t) = \beta \cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t$$

Esiste questa formula

$$\color{green}X\cos\theta + Y\sin\theta = \sqrt{X^2 + Y^2} \sin\left(\theta + \tan\left(\frac{Y}{X}\right)\right)$$

Da cui si ottiene

$$y_2(t) = \sqrt{\beta^2 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}} \sin\left(\omega t + \tan\left(\frac{\beta\omega}{\gamma}\right)\right)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\beta^2 \omega^2 + \gamma^2} \sin\left(\omega t + \tan\left(\frac{\beta\omega}{\gamma}\right)\right)$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 13

5

Riprendiamo la trasformata dell'uscita

$$Y(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = Y_1(s) + \frac{\beta s + \gamma}{s^2 + \omega^2}$$

Moltiplicando ambo i membri per  $s^2 + \omega^2$

$$G(s)A\omega = (s^2 + \omega^2)Y_1(s) + \beta s + \gamma$$

Valutiamo questa identità per  $s = j\omega$

$$G(j\omega)A\omega = j\beta\omega + \gamma$$

e scriviamo l'identità per il modulo e per la fase

$$|G(j\omega)A\omega| = |G(j\omega)|A\omega = |j\beta\omega + \gamma| = \sqrt{\beta^2\omega^2 + \gamma^2} \quad \text{Modulo}$$

$$\angle(G(j\omega)A\omega) = \angle G(j\omega) = \angle(j\beta\omega + \gamma) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta\omega}{\gamma}\right) \quad \text{Fase}$$

### Riassumendo

$$\begin{aligned} u(t) = A\sin\omega t &\xrightarrow{\quad} U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \\ Y(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} &= Y_1(s) + Y_2(s) \quad \text{asintoticamente} \\ &\downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ y_2(t) &= |G(j\omega)|A\sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \end{aligned}$$

**La sinusoide  $y_2(t)$  è completamente caratterizzata dal modulo e dalla fase del numero complesso  $G(j\omega)$**

Quindi si ha

$$|G(j\omega)|A\omega = \sqrt{\beta^2\omega^2 + \gamma^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta\omega}{\gamma}\right)$$

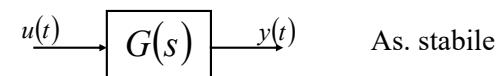
Precedentemente avevamo trovato che

$$y_2(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\beta^2\omega^2 + \gamma^2} \sin\left(\omega t + \tan^{-1}\frac{\beta\omega}{\gamma}\right)$$

Sostituendo le espressioni precedenti si ha

$$y_2(t) = |G(j\omega)|A\sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

### 2. Teorema della risposta in frequenza



As. stabile

$$u(t) = A\sin(\bar{\omega}t)$$

Allora a transitorio esaurito (al lato pratico per  $t > t_a$ )

$$y(t) \approx B\sin(\bar{\omega}t + \varphi)$$

$$\text{dove: } B = |G(j\bar{\omega})|A$$

$$\varphi = \angle G(j\bar{\omega})$$

indipendentemente dalle condizioni iniziali del sistema

### Esempio

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

$$u_1(t) = \sin(0.5t) \quad \omega_1 = 0.5 \text{ rad/s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |G(j0.5)| = \frac{1}{|1+j0.5|} = 0.89 \\ \angle G(j0.5) = -\text{atan}(0.5) = -26.6^\circ \end{cases}$$

$$u_2(t) = \sin(5t) \quad \omega_2 = 5 \text{ rad/s} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |G(j5)| = \frac{1}{|1+j5|} = 0.20 \\ \angle G(j5) = -\text{atan}(5) = -78.6^\circ \end{cases}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 13

10

### 3. Risposta in frequenza

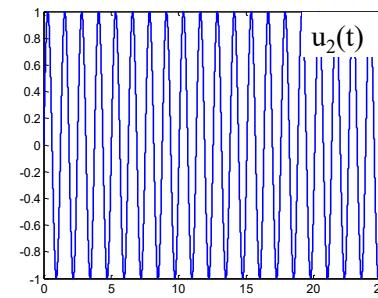
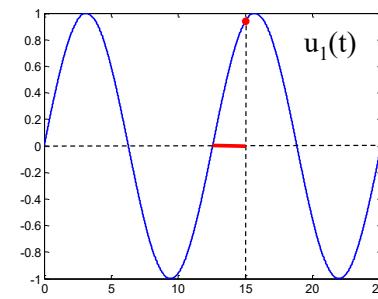
$$G(j\omega) \quad \text{per tutti gli } \omega \geq 0$$

Funzione complessa di variabile reale

$$\omega \longrightarrow G(j\omega)$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 13

12

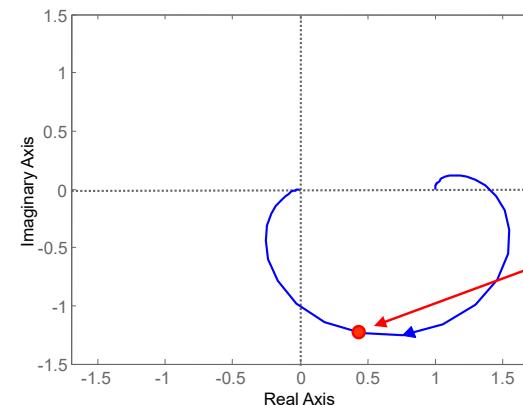


F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 13

11

### Esempio

$$G(s) = \frac{1+s}{\left(1+\frac{1}{3}s\right)\left(1+\frac{1}{5}s\right)^2} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1+j\omega}{\left(1+\frac{1}{3}j\omega\right)\left(1+\frac{1}{5}j\omega\right)^2}$$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 13

13

$$G(j5) \approx 0.44 - 1.23j$$

$$\begin{aligned} |G(j5)| &\approx \sqrt{0.44^2 + 1.23^2} = \\ &= 1.7065 \\ \arg G(j5) &\approx \text{atan} \frac{1.23}{0.44} \approx \\ &\approx -70^\circ,3 \end{aligned}$$

## 4. Matlab

`[H, W] = freqresp(SYS)`

restituisce la risposta in frequenza calcolata in valori di pulsazione predefiniti W.

## Lezione 14.

# Rappresentazione grafica della risposta in frequenza

## Schema della lezione

1. Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza
2. Diagramma di Bode del modulo: convenzioni
3. Diagramma di Bode del modulo: tracciamento
4. Diagramma asintotico di Bode del modulo: regole per il tracciamento
5. Diagramma di Bode della fase: convenzioni
6. Argomento di un numero complesso
7. Diagramma di Bode della fase: tracciamento
8. Diagramma asintotico di Bode della fase: regole per il tracciamento
9. Sistemi a fase minima
10. Diagramma polare
11. Matlab

## 1. Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza

La risposta in frequenza  $G(j\omega)$  è una funzione a valori **complessi** della variabile reale (positiva)  $\omega$ . Quindi, per ogni valore reale positivo di  $\omega$  avrò un punto del piano complesso.

### Esempio

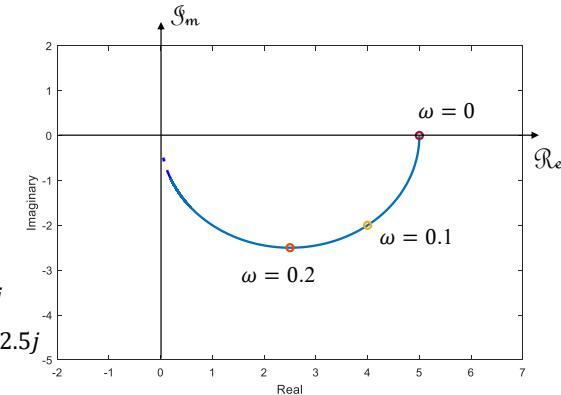
$$G(s) = \frac{5}{1+5s}$$
$$G(j\omega) = \frac{5}{1+5j\omega}$$

Calcoliamo qualche punto

$$G(j0) = \frac{5}{1+5j0} = 5$$

$$G(j0.1) = \frac{5}{1+5j0.1} = 4 - 2j$$

$$G(j0.2) = \frac{5}{1+5j0.2} = 2.5 - 2.5j$$



La rappresentazione nel piano complesso della risposta in frequenza si dice **diagramma polare**.

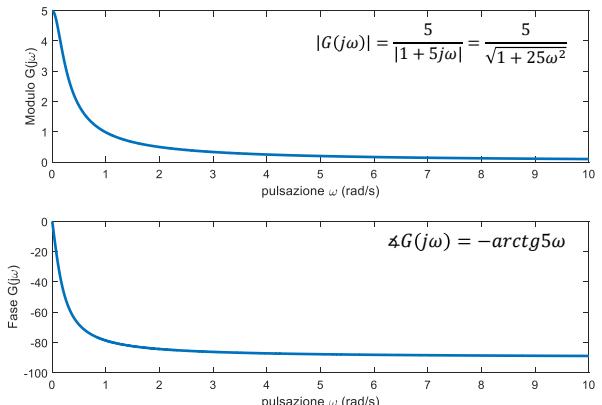
E' possibile rappresentare in **due grafici separati** il **modulo** e la **fase** della risposta in frequenza.

Sia il modulo  $|G(j\omega)|$  che la fase  $\angle G(j\omega)$  sono funzioni a valori reali della variabile reale (positiva)  $\omega$ .

### Esempio

$$G(s) = \frac{5}{1+5s}$$

$$G(j\omega) = \frac{5}{1+5j\omega}$$



Le rappresentazioni di modulo e fase della risposta in frequenza in funzione della pulsazione sono **diagramma cartesiani**.

Ovviamente, il contenuto informativo dei diagrammi cartesiani è il medesimo del diagramma polare.

$$\Re e \quad G(j0) = \frac{5}{1+5j0} = 5$$

$$G(j0.1) = \frac{5}{1+5j0.1} = 4 - 2j$$

$$G(j0.2) = \frac{5}{1+5j0.2} = 2.5 - 2.5j$$

$$|G(j0)| = 5$$

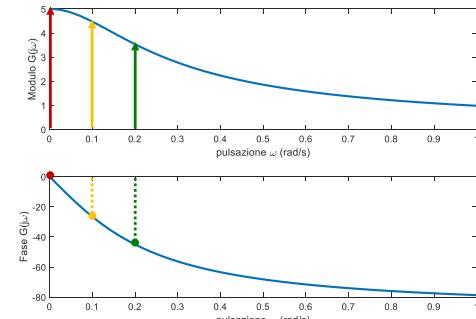
$$|G(j0.1)| = \sqrt{20} \cong 4.47$$

$$|G(j0.2)| = \sqrt{12.5} \cong 3.54$$

$$\angle G(j0) = 0^\circ$$

$$\angle G(j0.1) = -\arctg 0.5 = -26.6^\circ$$

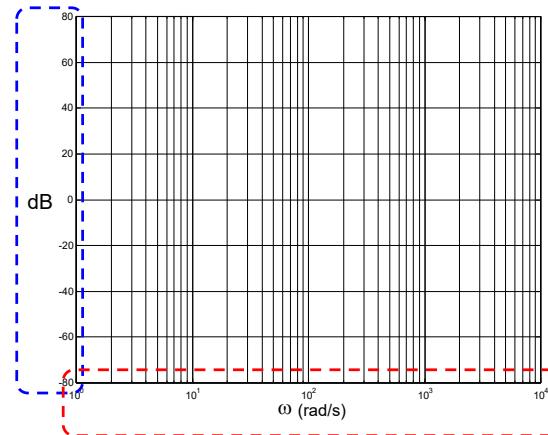
$$\angle G(j0.2) = -\arctg 1 = -45^\circ$$



## 2. Diagramma di Bode del modulo : convenzioni

**Ordinata in dB**

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$



$$\text{Ascissa in scala logaritmica} \quad \log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

N.B. Logaritmo in base 10

### Nota Bene

#### Scala lineare



$d = x_2 - x_1 = x_4 - x_3$  Punti alla stessa distanza: uguale **differenza** delle ascisse.

#### Scala logaritmica



$$d = \log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \omega_4 - \log \omega_3 \\ = \log \frac{\omega_2}{\omega_1} = \log \frac{\omega_4}{\omega_3}$$

Punti alla stessa distanza: uguale **rapporto** delle ascisse.

### 3. Diagramma di Bode del modulo : tracciamento

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + sT_i)}{s^g \prod_i (1 + s\tau_i)}$$

funzione di trasferimento

$$|G(j\omega)| = \frac{|\mu| \prod_i (1 + j\omega T_i)}{|j\omega|^g \prod_i (1 + j\omega \tau_i)}$$

modulo della risposta in frequenza

modulo della risposta in frequenza in dB

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} &= 20 \log |\mu| - 20 \log |j\omega|^g + \\ &+ \sum_i 20 \log |1 + j\omega T_i| + \\ &- \sum_i 20 \log |1 + j\omega \tau_i| \end{aligned}$$

guadagno

poli o zeri nell'origine

zeri (reali & complessi coniugati)

poli (reali & complessi coniugati)

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

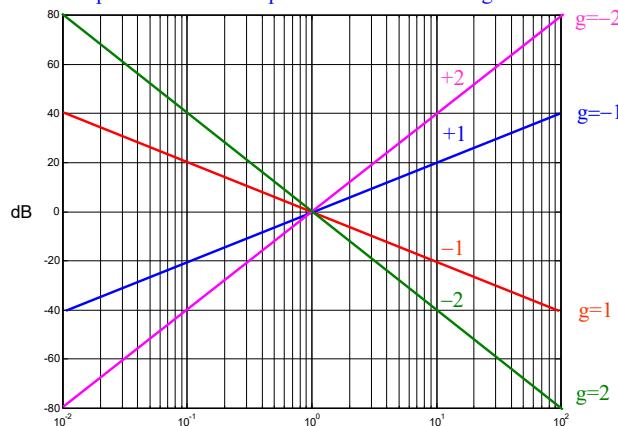
8

### 3.2 Poli o zeri nell'origine

$$-20 \log |j\omega|^g = -20g \log \omega \quad \text{retta con pendenza } -20g \text{ dB per decade}$$

passante per 0 dB in  $\omega = 1$

per convenzione la pendenza si indica con  $-g$

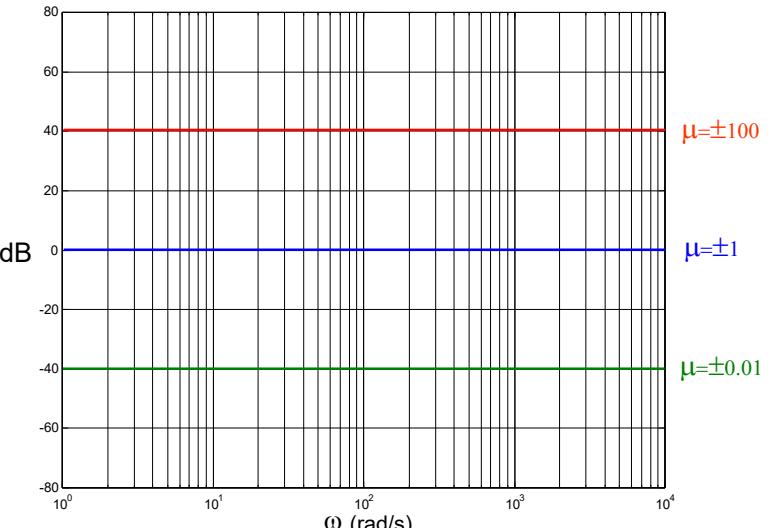


F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

10

### 3.1 Guadagno

$$20 \log |\mu| \rightarrow \text{retta costante}$$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

9

### Esempio esplicativo

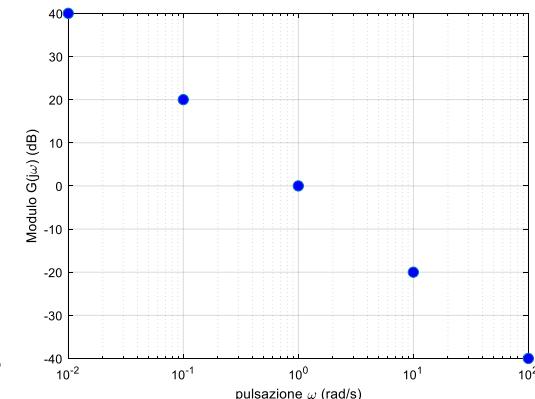
$$G(s) = \frac{1}{s} \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

funzione di trasferimento

risposta in frequenza

modulo della risposta in frequenza

$\omega$	$ G(j\omega)  = \frac{1}{\omega}$
0.01	$100 \rightarrow 40 \text{ dB}$
0.1	$10 \rightarrow 20 \text{ dB}$
1	$1 \rightarrow 0 \text{ dB}$
10	$0.1 \rightarrow -20 \text{ dB}$
100	$0.01 \rightarrow -40 \text{ dB}$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

11

### 3.3.a Zero reale

$$20 \log|1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad T \text{ reale}$$

Il disegno di questa funzione di  $\omega$  non è facile.

Si può trovare un'approssimazione ragionevole guardando il comportamento ad alte e basse pulsazioni.

#### Basse $\omega$

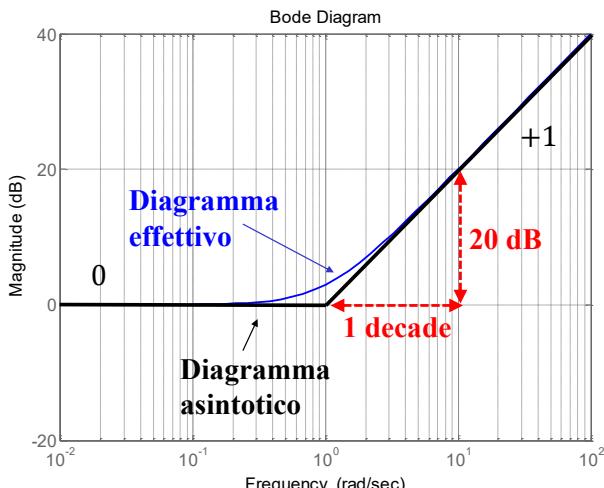
➤ se  $\omega^2 T^2 \ll 1$ , cioè  $\omega \ll \frac{1}{|T|}$  ➔  $20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong 0 \text{ dB}$

#### Alte $\omega$

➤ se  $\omega^2 T^2 \gg 1$ , cioè  $\omega \gg \frac{1}{|T|}$  ➔  $20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong 20 \log \omega |T| \cong 20 \log \omega + 20 \log |T|$

### Zero reale (esempio)

$$G(s) = 1 + s$$



### Approssimazione asintotica

#### Basse $\omega$

➤ per  $\omega < \frac{1}{|T|}$  ➔ retta costante a 0 dB

#### Alte $\omega$

➤ per  $\omega > \frac{1}{|T|}$  ➔ retta passante per 0 dB in  $\omega = \frac{1}{|T|}$  con pendenza +1

Infatti, si può calcolare l'intersezione con l'asse delle ascisse:

$$20 \log \omega + 20 \log |T| = 0$$

$$20 \log \omega = -20 \log |T|$$

$$20 \log \omega = 20 \log \frac{1}{|T|}$$

$$\omega = \frac{1}{|T|}$$

### Valutazione dell'errore massimo

Si consideri  $G(s) = 1 + sT$

L'errore in  $\omega = \frac{1}{|T|}$  vale:

$$\begin{aligned} E &= 20 \log|1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = \\ &= 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{T^2}} = 20 \log \sqrt{2} \cong 3 \text{ dB} \end{aligned}$$

L'errore massimo che si commette usando il diagramma asintotico è pari a 3 dB (per ogni zero), in corrispondenza della pulsazione dello zero.

### 3.3.b Zeri complessi coniugati

$$20 \log|1 + j\omega T| + 20 \log|1 + j\omega \bar{T}| \quad T \text{ complesso}$$

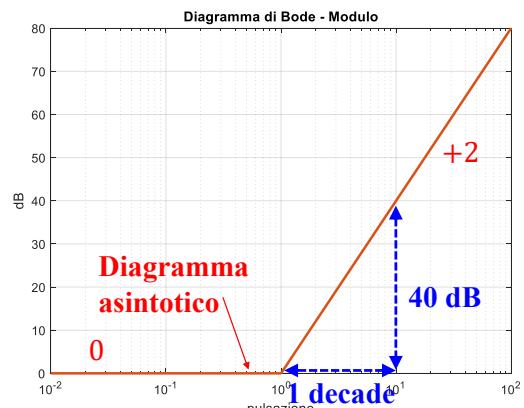
Usiamo l'espressione con smorzamento e pulsazione naturale

$$\tilde{G}(s) = 1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \quad \text{funzione di trasferimento}$$

$$\tilde{G}(j\omega) = 1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \quad \text{risposta in frequenza}$$

### Zeri complessi coniugati (esempio)

$$\tilde{G}(s) = 1 + s + s^2 \quad \omega_n = 1 \quad \xi = 0.5$$



Il modulo (in dB) vale

$$|\tilde{G}(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Cerchiamo l'approssimazione asintotica:

**Basse  $\omega$**

➤ per  $\omega \ll \omega_n$  ➔ retta costante a **0 dB**

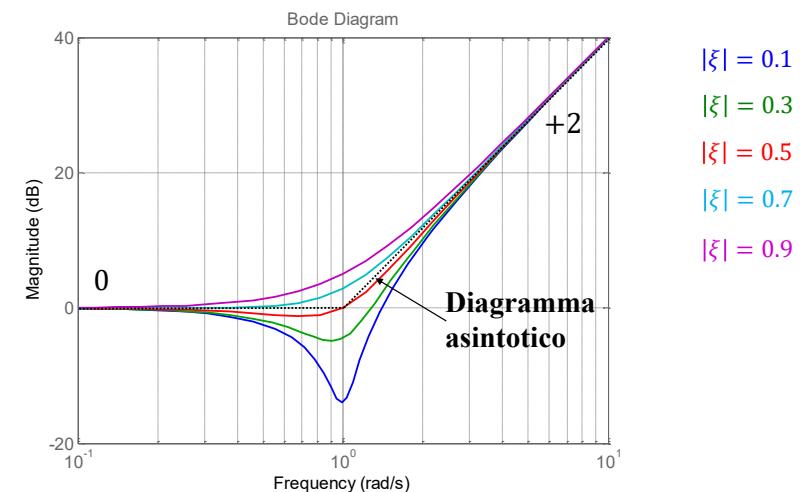
**Alte  $\omega$**

➤ per  $\omega > > \omega_n$  ➔  $|\tilde{G}(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} =$   
 $= 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} = 40 \log \omega - 40 \log \omega_n$

retta passante per 0 dB in  $\omega = \omega_n$   
 con pendenza +2

### Zeri complessi coniugati (esempio)

$$\tilde{G}(s) = 1 + 2\xi s + s^2 \quad \omega_n = 1$$



### Valutazione dell'errore massimo

L'errore in  $\omega = \omega_n$  **dipende da  $\xi$**

$$E = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \Big|_{\omega=\omega_n} = 20 \log \sqrt{4\xi^2} = 20 \log(2|\xi|)$$

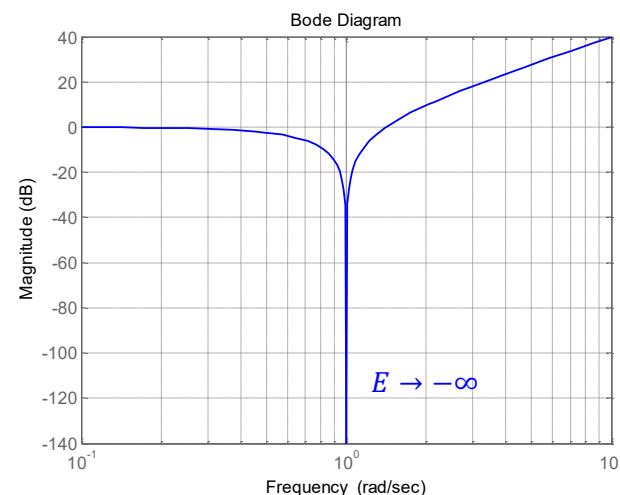
se  $|\xi| = 1$      $E = 20 \log 2 \cong 6 \text{ dB}$  (2 poli reali coincidenti!)

se  $\xi \rightarrow 0$      $E \rightarrow -\infty$

Per i **poli** i diagrammi sono uguali a quelli degli zeri con il segno cambiato

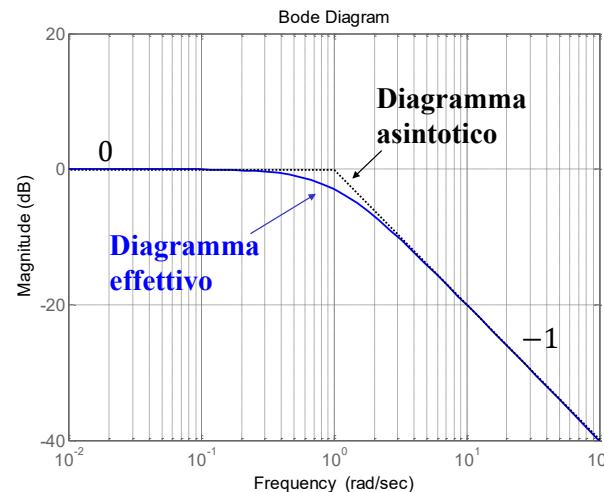
### Zeri immaginari coniugati (esempio)    $\tilde{G}(s) = 1 + s^2$    $\omega_n = 1$

$$\xi = 0$$

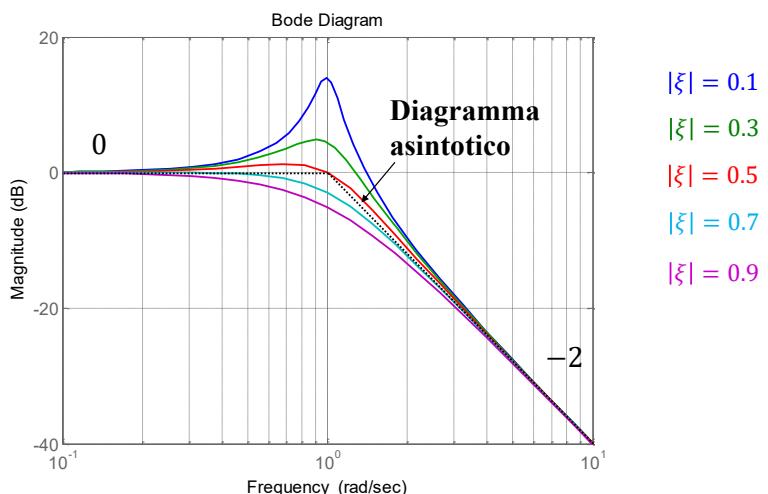


### Polo reale (esempio)

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$



Poli complessi coniugati (esempio)  $G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2}$   $\omega_n = 1$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

24

### Esempio esplicativo

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$$

Proviamo a disegnare i singoli contributi e poi sommiamoli

Guadagno  $\mu = 10$

Un polo nell'origine  $\frac{1}{s}$

Uno zero reale in  $-1 \rightarrow (1+s)$

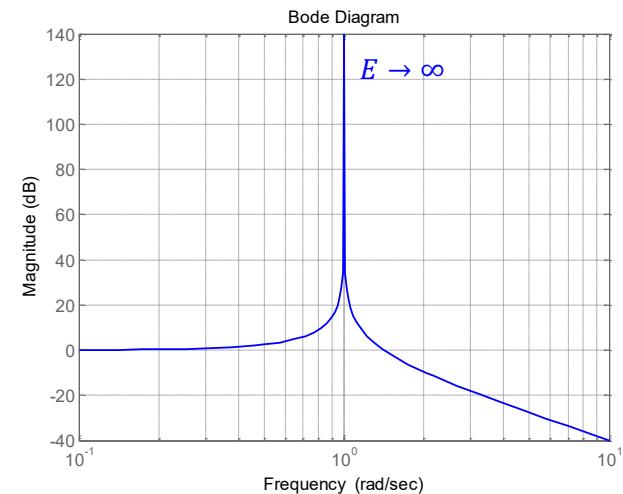
Un polo reale in  $-10 \rightarrow (1+0.1s)$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

26

Poli immaginari coniugati (esempio)  $G(s) = \frac{1}{1 + s^2}$   $\omega_n = 1$

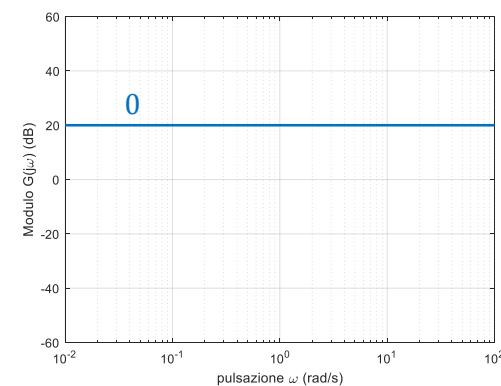
$\xi = 0$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

25

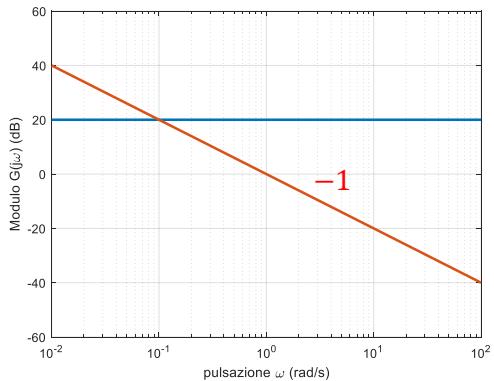
Guadagno  $\mu = 10 \rightarrow$  retta costante a 20 dB



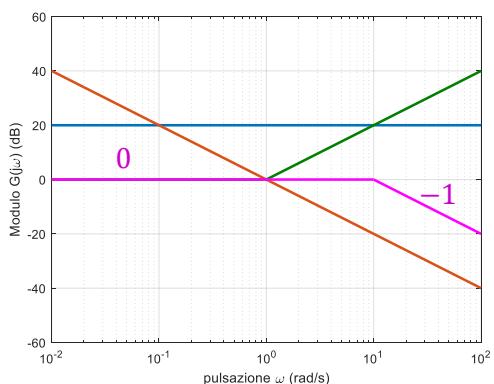
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

27

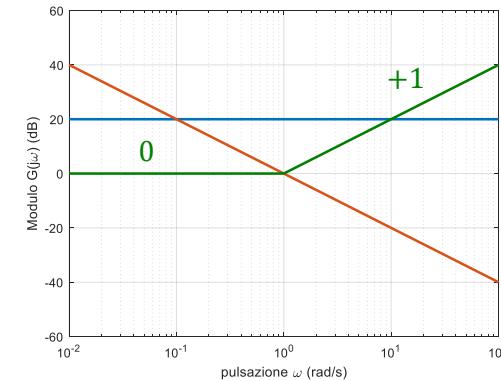
Un polo nell'origine  $\frac{1}{s}$  → retta con pendenza  $-1$  per  $\omega = 1 \text{ rad/s}$



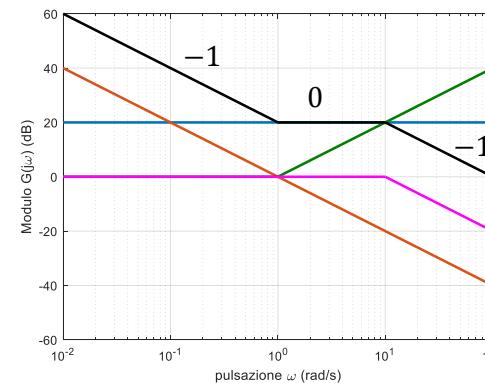
Un polo reale  $\frac{1}{(1+0.1s)}$  → 0 dB fino ad  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  e poi retta con pendenza  $-1$



Uno zero reale  $(1+s)$  → 0 dB fino ad  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  e poi retta con pendenza  $+1$



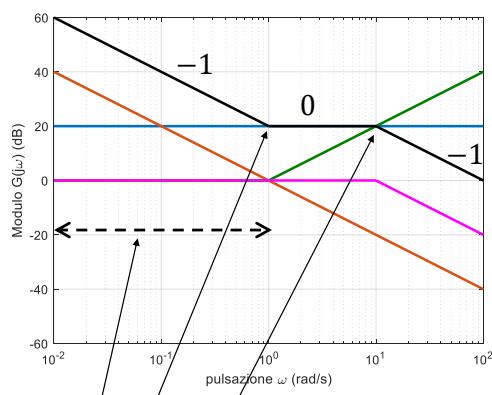
Sommendo le 4 curve si ottiene il diagramma



Guadagno 10  
Polo nell'origine  
Zero in  $-1$   
Polo in  $-10$

**Totale**

E' un metodo un po' laborioso...



In questa zona il **polo in  $-10$**  e lo **zero in  $-1$**  non danno contributo.

Contano solo il **polo nell'origine** ed il **guadagno**.

Qui «interviene» lo **zero in  $-1$**  provocando un cambiamento di pendenza +1 e la pendenza passa da  $-1$  a 0.

Qui «interviene» il **polo in  $-10$**  provocando un cambiamento di pendenza  $-1$  e la pendenza passa da 0 a  $-1$ .

32

#### 4. Diagramma asintotico di Bode del modulo : regole per il tracciamento

1. la pendenza iniziale vale  $-g$
2. il tratto iniziale passa in  $|μ|_{dB}$  per  $ω = 1 \text{ rad/s}$
3. cambi di pendenza in corrispondenza di poli ( $-1$ ) e zeri ( $+1$ )

##### Osservazione

La pendenza finale (per  $ω \rightarrow \infty$ ) è data da :

$$n^{\circ} \text{ zeri} - n^{\circ} \text{ poli} \leq 0$$

(= 0 solo se  $G(s)$  è non strett. propria)

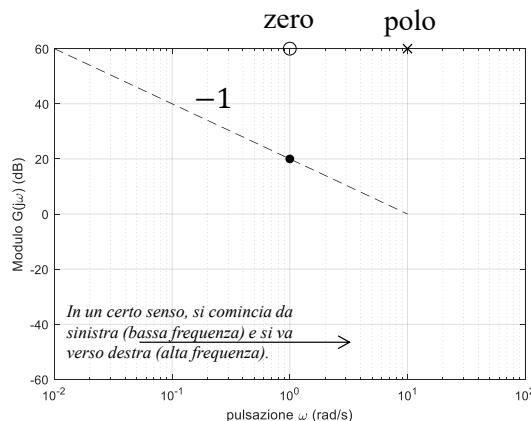
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

33

#### Esempio

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$$

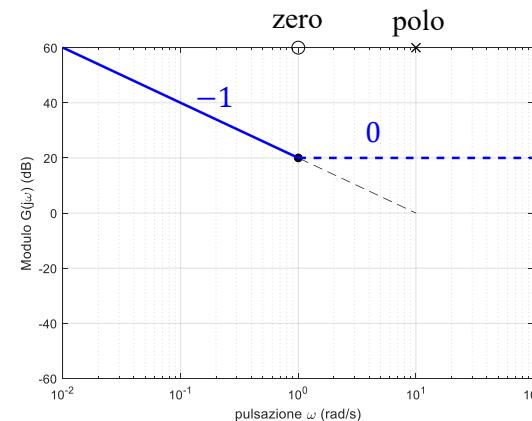
1. la pendenza iniziale vale  $-1$
2. il tratto iniziale passa in  $20 \text{ dB}$  per  $ω = 1 \text{ rad/s}$



34

3. cambi di pendenza in corrispondenza di poli ( $-1$ ) e zeri ( $+1$ )

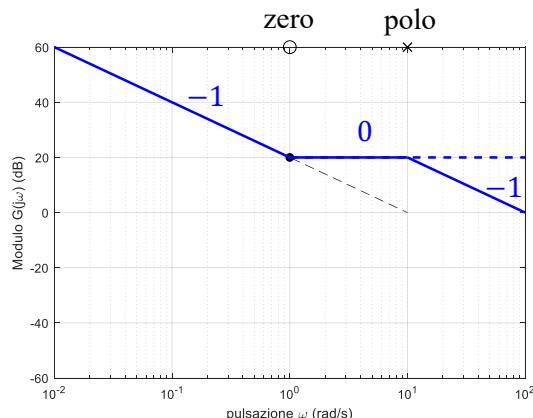
Il primo che incontro (da sx a dx) è lo zero.



35

### 3. cambi di pendenza in corrispondenza di poli (-1) e zeri (+1)

Poi incontro il polo (sempre da sx a dx).



36

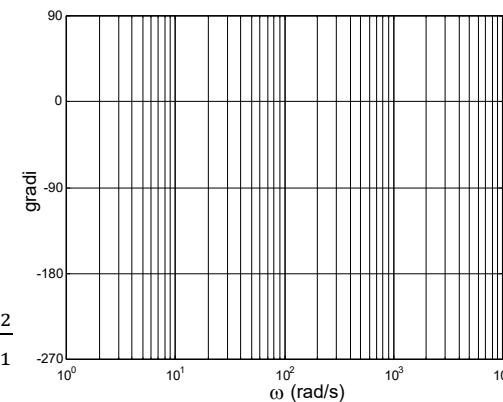
### 5. Diagramma di Bode della fase : convenzioni

➤ Ordinata in gradi

$$\angle G(j\omega)$$

➤ Ascissa in scala logaritmica

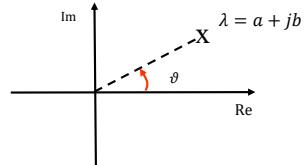
$$\log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1}$$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

37

### 6. Argomento o fase di un numero complesso



Convenzione:

- $-180^\circ \leq \angle \lambda < 180^\circ$
- La fase di un numero reale negativo è  $-180^\circ$

Calcolo della fase

• se  $a \geq 0$   $\Rightarrow \angle \lambda = \text{atan} \frac{b}{a}$   $(-90^\circ \leq \angle \lambda \leq +90^\circ)$

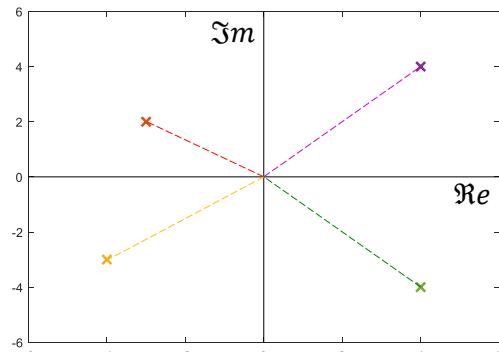
• se  $a < 0$   
 $b > 0$   $\Rightarrow \angle \lambda = \text{atan} \frac{b}{a} + 180^\circ$   $(+90^\circ < \angle \lambda < +180^\circ)$

• se  $a < 0$   
 $b \leq 0$   $\Rightarrow \angle \lambda = \text{atan} \frac{b}{a} - 180^\circ$   $(-180^\circ \leq \angle \lambda < -90^\circ)$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

38

### Esempi



$$z_1 = +4 + j4$$

$$z_2 = -3 + j2$$

$$z_3 = -3 - j4$$

$$z_4 = +4 - j4$$

$$\arg z_1 = \text{arctg} \left( \frac{4}{4} \right) = 45^\circ$$

$$\arg z_2 = \text{arctg} \left( \frac{2}{-3} \right) + 180^\circ = -33^\circ.7 + 180^\circ = +146^\circ.3$$

$$\arg z_3 = \text{arctg} \left( \frac{-4}{-3} \right) - 180^\circ = 53^\circ.1 - 180^\circ = -126^\circ.9$$

$$\arg z_4 = \text{arctg} \left( \frac{-4}{4} \right) = -45^\circ$$

39

## **7. Diagramma di Bode della fase : tracciamento**

#### **Fase della risposta in frequenza (in gradi)**

$$\angle G(j\omega) = \cancel{\zeta\mu} - \cancel{\zeta(j\omega)^g} + \sum_i \zeta(1+j\omega T_i) - \sum_i \zeta(1+j\omega\tau_i)$$

guadagno      poli o zeri nell'origine

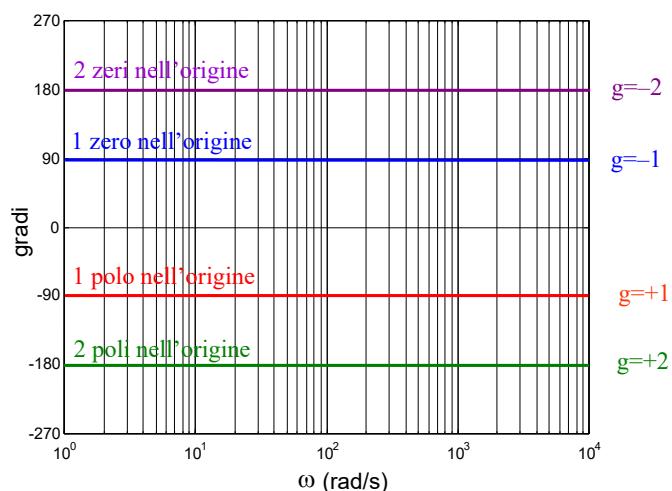
zeri (reali & complessi coniugati)      poli (reali & complessi coniugati)

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

40

## 7.2 Poli & zeri nell'origine

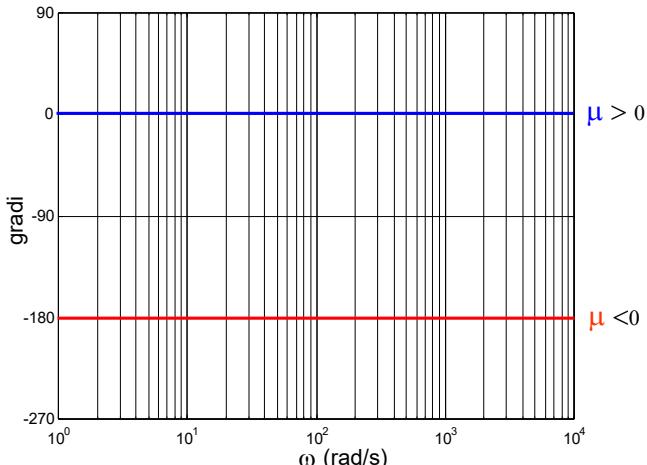
$$-\zeta(j\omega)^g = -g\zeta(j\omega) = -g90^\circ \quad \rightarrow \quad \text{retta costante}$$



42

## 7.1 Guadagno

$$\Delta\mu = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \mu > 0 \\ -180^\circ & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$



**Due sole  
opzioni!**

4

### 7.3.a Zero reale

$$\varphi(1 + j\omega T) = \text{atan}(\omega T) \quad T \text{ reale}$$

Il disegno di questa funzione di  $\omega$  è facile, ma si può comunque trovare un'approssimazione valida per alte e basse pulsazioni.

Basse  $\omega$

per  $\omega \rightarrow 0$    $\text{atan}(\omega T) \longrightarrow 0^\circ$

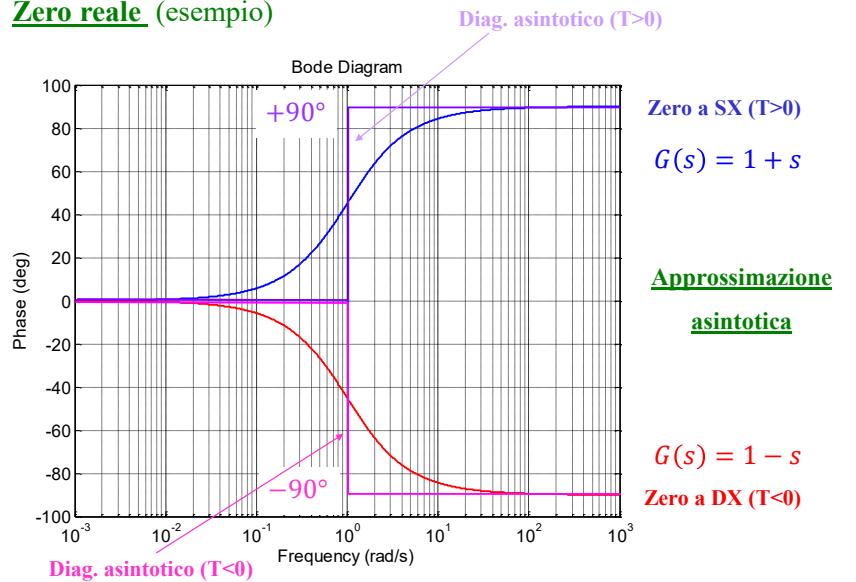
Alte ♂

→ per  $\omega \rightarrow \infty$  →  $\text{atan}(\omega T)$  ↗  $-90^\circ$  se  $T < 0$  (zero a dx)

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

43

### Zero reale (esempio)



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

44

### 7.3.b Zeri complessi coniugati

Usiamo l'espressione con smorzamento e pulsazione naturale

$$\tilde{G}(s) = 1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \quad \text{funzione di trasferimento}$$

$$\tilde{G}(j\omega) = 1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \quad \text{risposta in frequenza}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

45

$$\angle \tilde{G}(j\omega) = \angle \left( \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

Basse  $\omega$

$$\xrightarrow{\text{per } \omega \rightarrow 0} \angle \tilde{G}(j\omega) = \angle 1 = 0^\circ$$

(+180° se  $\xi > 0$ )

Alte  $\omega$

$$\xrightarrow{\text{per } \omega \rightarrow \infty} \angle \tilde{G}(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctg \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \pm 180^\circ$$

↑  
(-180° se  $\xi < 0$ )

$$\text{Ma } \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctg \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = 0^\circ$$

Quindi

$$\angle \tilde{G}(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{per } \omega \rightarrow 0 \\ +180^\circ \text{ se } \xi > 0 & (\text{zeri a sx}) \\ -180^\circ \text{ se } \xi < 0 & (\text{zeri a dx}) \end{cases}$$

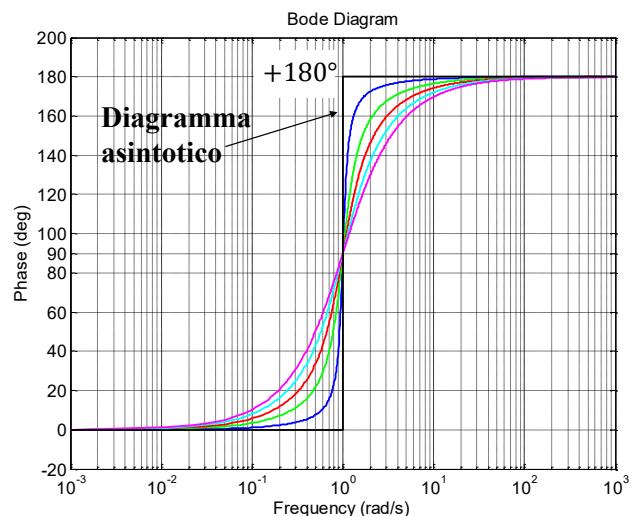
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

46

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

47

Zeri complessi coniugati (esempio)  $G(s) = 1 + 2\xi s + s^2$   $\omega_n = 1$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

48

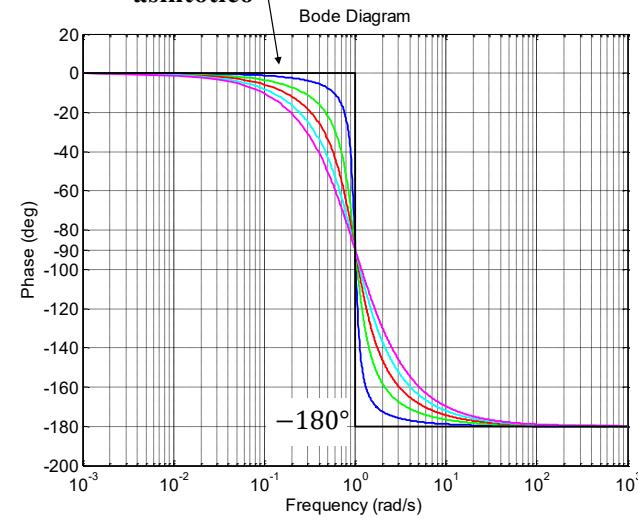
Per i poli valgono i medesimi ragionamenti,  
fatto salvo il segno

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

50

$G(s) = 1 + 2\xi s + s^2$   $\omega_n = 1$

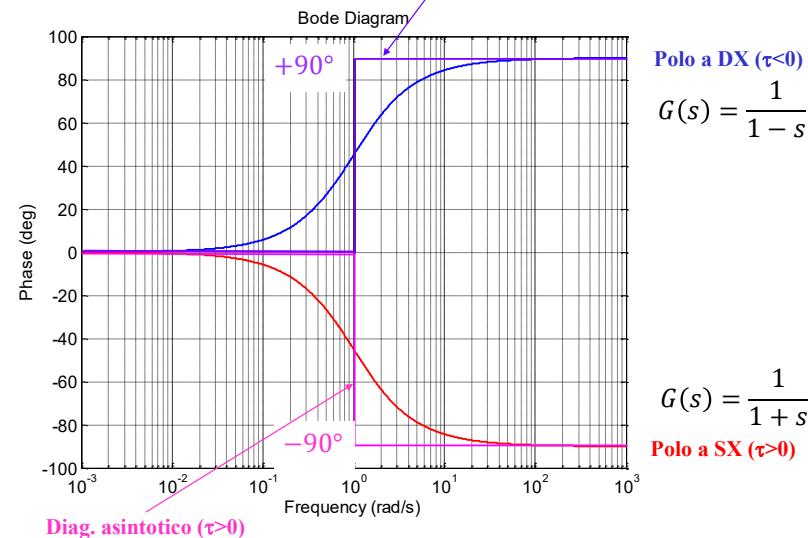
**Diagramma asintotico**



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

49

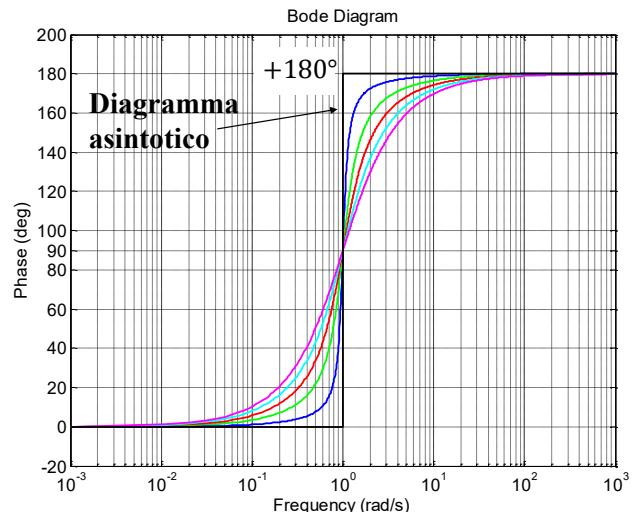
Polo reale (esempio) **Diag. asintotico ( $\tau < 0$ )**



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

51

Poli complessi coniugati (esempio)  $G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2}$   $\omega_n = 1$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

52

**Poli a DX**

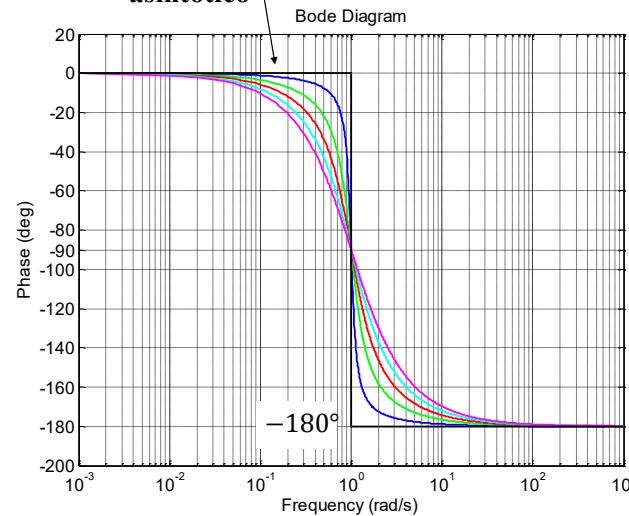
$\xi = -0.1$   
 $\xi = -0.3$   
 $\xi = -0.5$   
 $\xi = -0.7$   
 $\xi = -0.9$

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2} \quad \omega_n = 1$$

**Poli a SX**

$\xi = 0$   
 $\xi = 0.1$   
 $\xi = 0.3$   
 $\xi = 0.5$   
 $\xi = 0.7$   
 $\xi = 0.9$

**Diagramma asintotico**



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

53

## 8. Diagramma asintotico di Bode della fase : regole per il tracciamento

guadagno  $\mu$       poli o zeri nell'origine

1. valore iniziale  $\angle \mu - g90^\circ$
2. cambi di valore in corrispondenza di poli e zeri

	semipiano sinistro	semipiano destro
poli	$-90^\circ$	$+90^\circ$
zeri	$+90^\circ$	$-90^\circ$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

54

## Esempio

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$$

Guadagno  $\mu = 10$

Un polo nell'origine  $\frac{1}{s}$

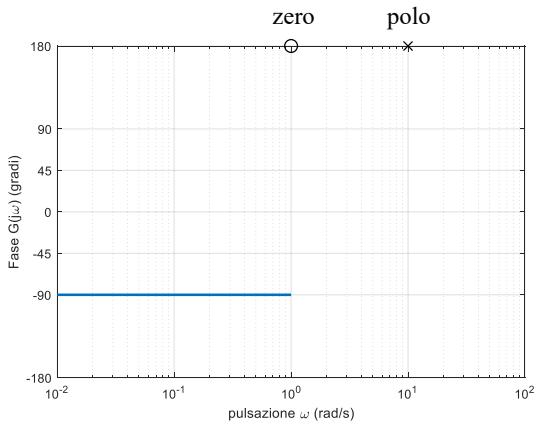
Uno zero reale in  $-1 \rightarrow (1+s)$

Un polo reale in  $-10 \rightarrow (1+0.1s)$

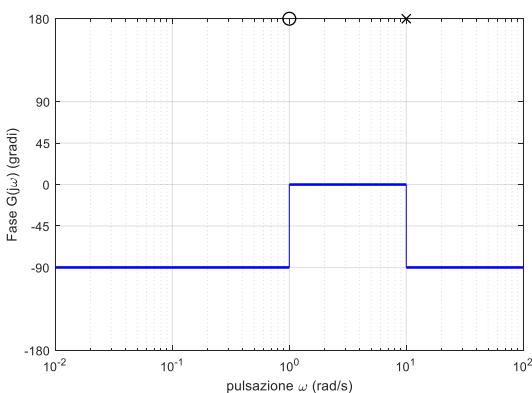
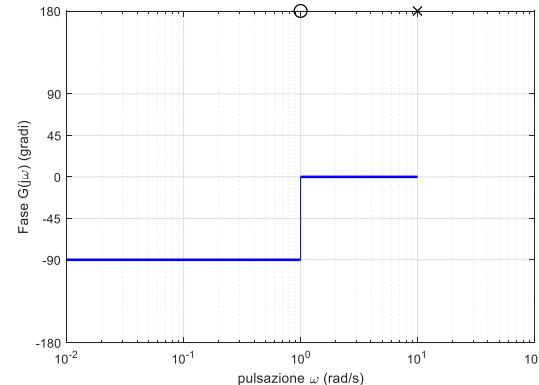
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

55

Il guadagno è positivo e quindi dà contributo  $0^\circ$ .  
 Il polo nell'origine dà contributo  $-90^\circ$ .  
 Comincio a tracciare da SX e mi fermo quando incontro lo zero.



Lo zero è negativo e quindi dà contributo  $+90^\circ$ .  
 Continuo a tracciare e mi fermo ancora quando incontro il polo.



## 9. Sistemi a fase minima

### Definizione

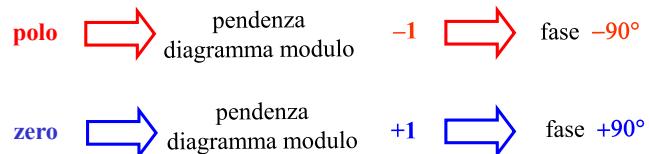
Un sistema dinamico LTI a tempo continuo si dice **a fase minima** se ha:

- guadagno positivo
- tutti i poli e gli zeri con parte reale negativa o nulla

E' quindi possibile dedurre in modo univoco il diagramma della fase da quello del modulo (in generale non è possibile senza conoscere a priori il segno del guadagno e delle singolarità).

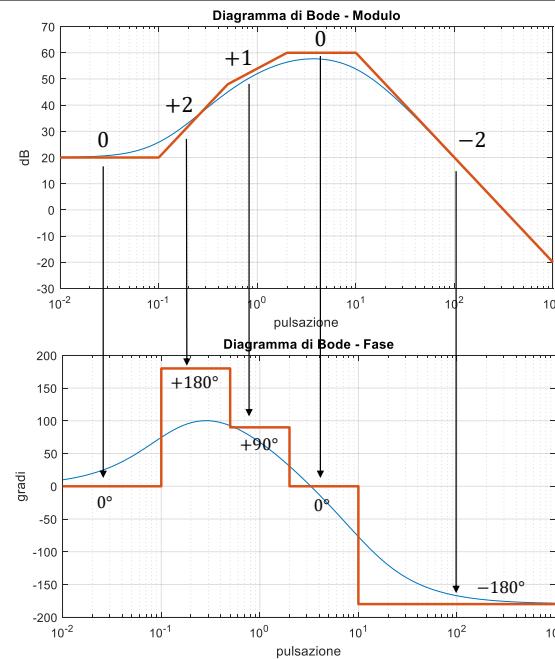
Tutti i poli sfasano  $-90^\circ$ , tutti gli zeri sfasano  $+90^\circ$  ed il guadagno non introduce sfasamento.

Quindi, dove il diagramma del modulo ha pendenza  $-1$ , il diagramma della fase vale  $-90^\circ$  e similmente dove il diagramma del modulo ha pendenza  $+1$ , il diagramma della fase vale  $+90^\circ$ .

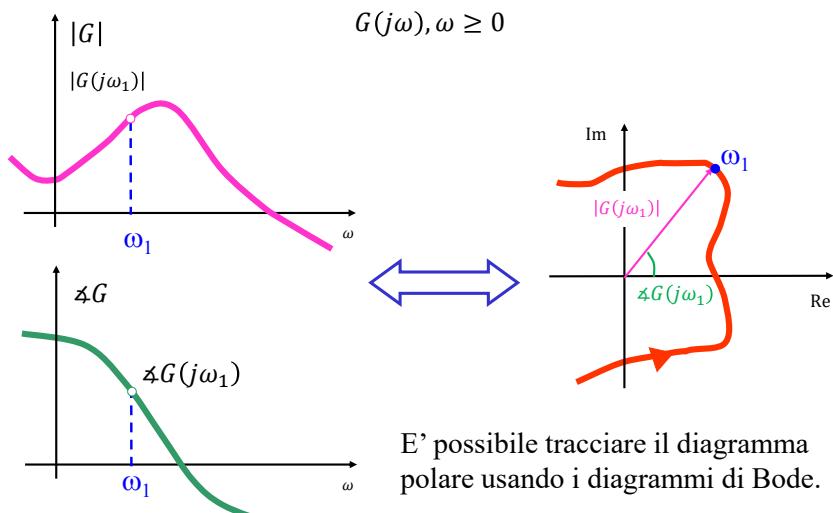


In generale, a pendenza del diagramma del modulo  $-k$ , corrisponde valore del diagramma della fase  $-k90^\circ$ .

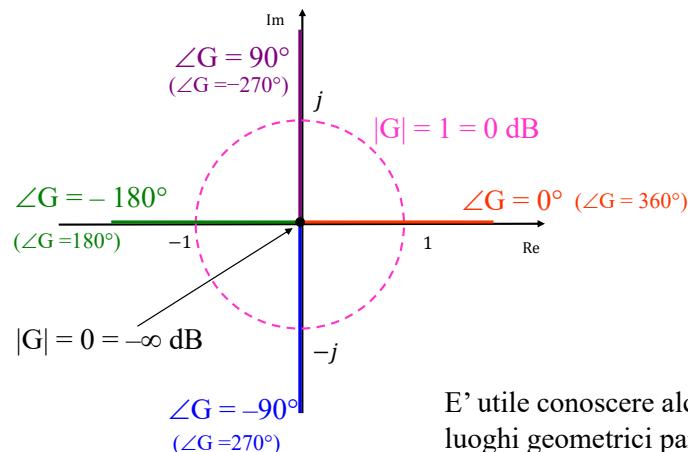
**Sistema  
a fase  
minima**



## 10. Diagramma polare



## Punti e curve salienti del piano complesso



E' utile conoscere alcuni luoghi geometrici particolari del piano complesso.

## Metodo

- 1) Traccio i diagrammi di Bode del modulo e della fase
- 2) Individuo alcuni punti salienti dai due diagrammi, usando anche l'espressione della risposta in frequenza, per esempio:
  - $G(j0)$  (dove inizia il grafico, per  $\omega = 0$ , spesso è un valore reale)
  - $G(j\infty)$  (dove termina il grafico, per  $\omega \rightarrow \infty$ , spesso è 0)
  - $\angle G(j\infty)$  (da che lato il grafico arriva nel punto finale)
  - Se attraversa gli assi (individuo sul diagramma della fase punti con fase multipla di  $90^\circ$  e leggo sul diagramma del modulo il valore alla pulsazione corrispondente)
  - Se attraversa il cerchio unitario (individuo sul diagramma del modulo il punto in cui attraversa l'asse a 0 dB e leggo sul diagramma della fase il valore alla pulsazione corrispondente).
- 3) Un discorso a parte meritano i sistemi con tipo  $g \neq 0$ .

$$\text{Per } \omega = 0 \quad G(j0) = \frac{10}{(1 + j10 \cdot 0)} = 10$$

$$\text{Per } \omega \rightarrow \infty \quad G(j\infty) = \frac{10}{(1 + j10 \cdot \infty)} = 0$$

Il diagramma polare inizia in 10 ed arriva nell'origine. Ci si poteva arrivare anche dai diagrammi di Bode.

Inoltre, osservando i diagrammi di Bode si nota che:

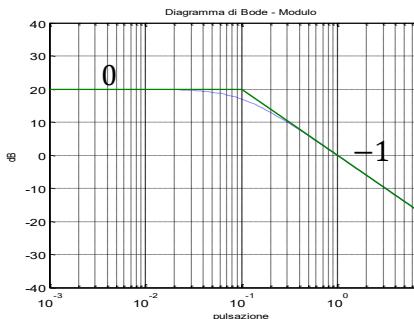
- il modulo "parte" dal valore 10 e decresce monotonamente verso 0;
- la fase "parte" dal valore  $0^\circ$  e decresce monotonamente fino a raggiungere il valore di  $-90^\circ$ .

## Esempio

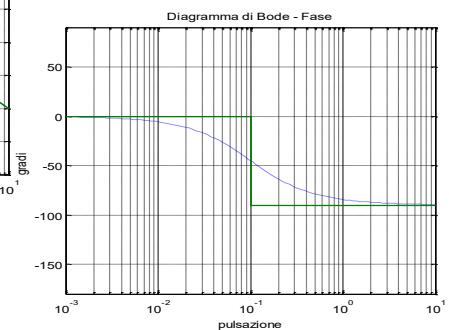
$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)}$$

$$\mu = 10 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \begin{cases} \text{Modulo 10 (=20 dB)} \\ \text{Fase } 0^\circ \end{cases}$$

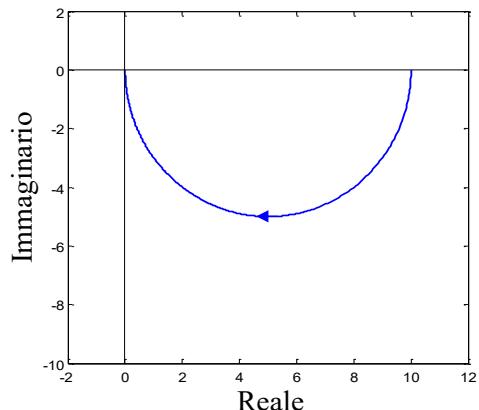
$$\tau = 10 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \omega = 0.1$$



$$G(j\omega) = \frac{10}{(1 + j10\omega)}$$



E "in mezzo" che succede?



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

68

$$\text{per } \omega = 0 \quad G(j0) = -10$$

Il diagramma polare parte da  $-10$  ed arriva nell'origine (cfr diagrammi di Bode).

$$\text{per } \omega \rightarrow \infty \quad G(j\infty) = 0$$

Inoltre, osservando i diagrammi di Bode si nota che:

- il modulo parte dal valore  $10$  e decresce monotonicamente verso  $0$ ;
- la fase parte dal valore  $-180^\circ$  e decresce monotonicamente fino a raggiungere  $-360^\circ$ ;
- la fase vale  $-270^\circ$  per  $\omega \approx 0.2$  ed in corrispondenza di questa pulsazione il modulo vale circa  $12 \text{ dB}$  cioè circa  $4$ . Ciò significa che il diagramma polare attraversa il semiasse immaginario positivo nel punto  $+4j$ ;
- il diagramma del modulo attraversa l'asse a  $0 \text{ dB}$  per  $\omega \approx 0.7$  ed in corrispondenza di questa pulsazione la fase vale circa  $-310^\circ$ . Quindi il diagramma polare attraversa la circonferenza di raggio unitario in un punto che forma un angolo di circa  $50^\circ$  con il semiasse reale positivo.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

70

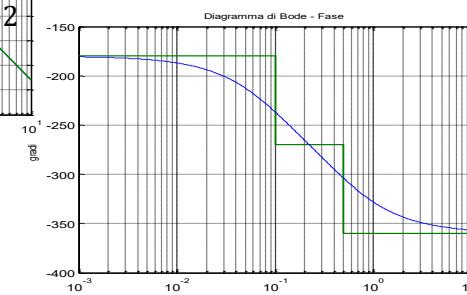
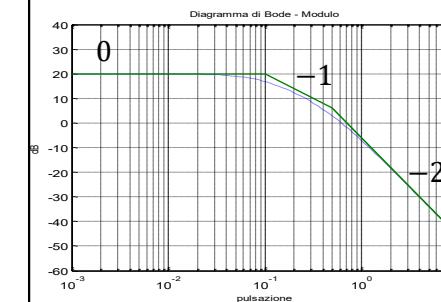
### Esempio

$$G(s) = \frac{-10}{(1+10s)(1+2s)}$$

$$\begin{aligned} \mu &= -10 && \xrightarrow{\quad} \left\{ \begin{array}{l} \text{Modulo } 10 (=20 \text{ dB}) \\ \text{Fase } -180^\circ \end{array} \right. \\ \tau_1 &= 10 && \xrightarrow{\quad} \omega_1 = 0.1 \\ \tau_2 &= 2 && \xrightarrow{\quad} \omega_2 = 0.5 \end{aligned}$$

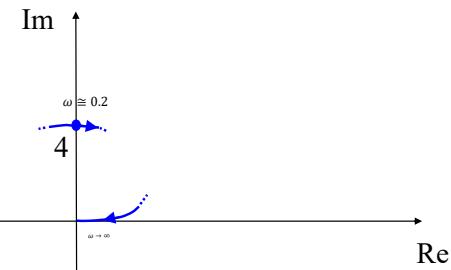
**Attenzione!**  
Guadagno negativo!!

$$G(j\omega) = \frac{-10}{(1+j10\omega)(1+j2\omega)}$$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

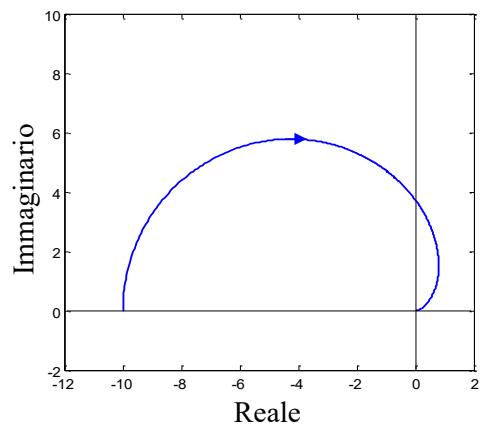
69



E “in mezzo” che succede?

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

71



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

72

Per  $\omega \rightarrow 0$   $|G(j\omega)| \rightarrow \infty$   
 $\angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ$

C'è un asintoto verticale!

Per  $\omega \rightarrow \infty$   $G(j\omega) \rightarrow 0$

Il diagramma polare termina nell'origine.

La posizione dell'asintoto si ottiene risolvendo il seguente limite:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}(G(j\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\left(\frac{10 + j\omega}{-\omega^2 + j\omega}\right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\left(\frac{(10 + j\omega)(-\omega^2 - j\omega)}{\omega^4 + \omega^2}\right) = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-9\omega^2}{\omega^4 + \omega^2} = -9 \end{aligned}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

74

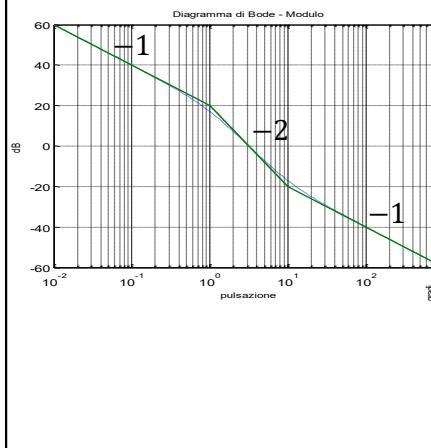
### Esempio

$$G(s) = \frac{10(1 + 0.1s)}{s(1 + s)}$$

$$\begin{aligned} \mu &= 10 & \xrightarrow{\quad} & \begin{cases} \text{Modulo } 10 (=20 \text{ dB}) \\ \text{Fase } 0^\circ \end{cases} \\ T &= 0.1 & \xrightarrow{\quad} & \omega = 10 \\ \tau &= 1 & \xrightarrow{\quad} & \omega = 1 \end{aligned}$$

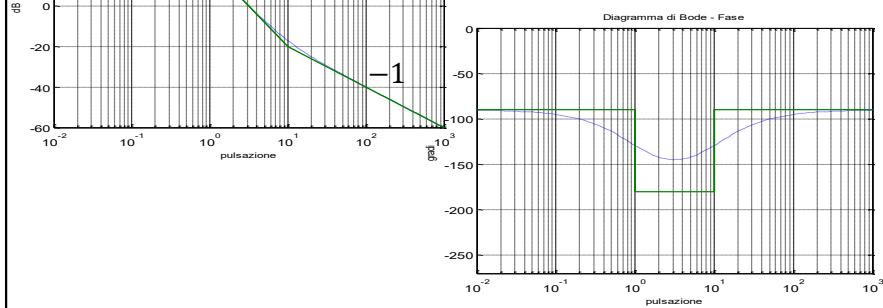
tipo g=1

$$G(j\omega) = \frac{10(1 + 0.1j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)}$$



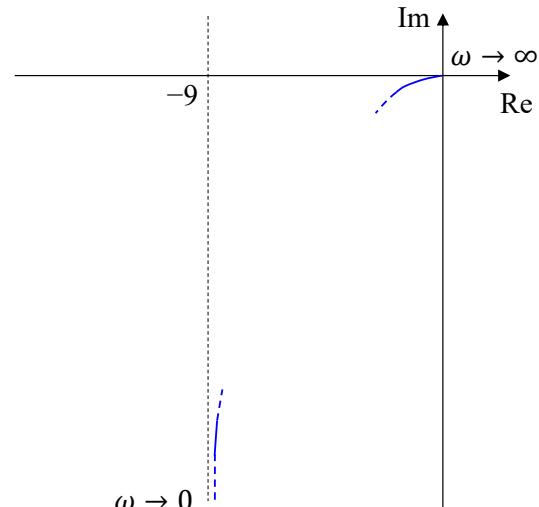
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

73



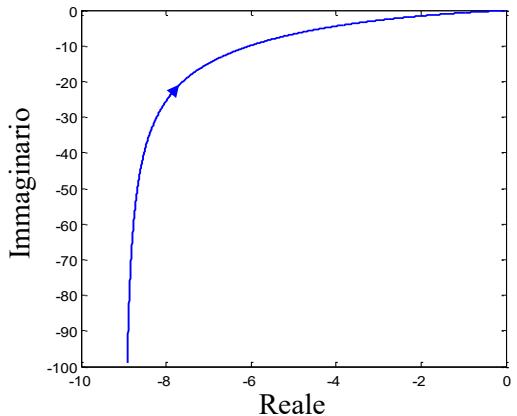
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

73



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

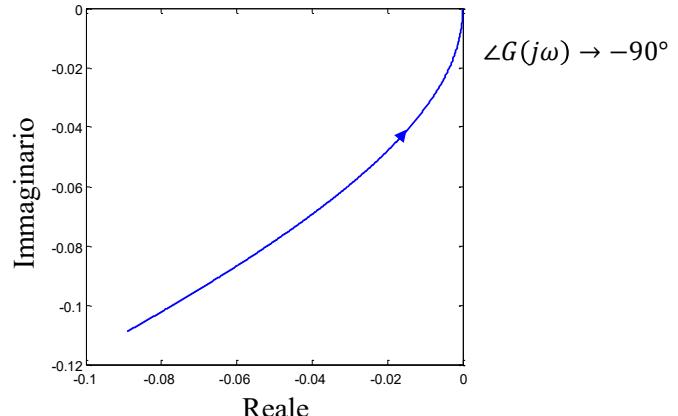
75



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

76

Per  $\omega \rightarrow \infty$  la fase vale  $90^\circ$  e quindi il diagramma polare dovrebbe arrivare nell'origine con quella fase, cioè «dal basso». E infatti è così (ma si vede solo su una «scala» più piccola)



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

77

## 11. Matlab

**bode (SYS)** Traccia i diagrammi di Bode di modulo e fase del sistema descritto da SYS.

**bodemag (SYS)** Traccia il solo diagramma del modulo.

Questi comandi hanno alcune opzioni utili: specificare il range di frequenze, restituire i valori di modulo e fase della risposta in frequenza per ulteriori manipolazioni, etc... (cfr **bodeoptions**).

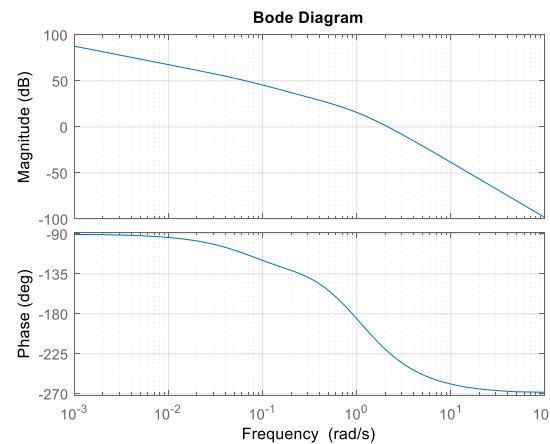
### Esempio

```
>> s=tf('s');
>> G=24*(1+5*s) / (s*(1+10*s)*(1+s)^2)
G =
  120 s + 24
  -----
  10 s^4 + 21 s^3 + 12 s^2 + s
Continuous-time transfer function.

>> bode(G)
>> grid
```

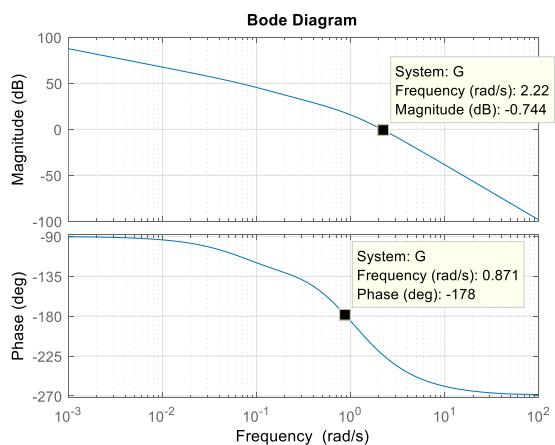
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

78



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 14

79



Con i «datatip» si possono evidenziare alcuni punti interessanti (in modo approssimativo).

**atan2(Y,X)** è il comando per il calcolo dell'arcotangente su quattro quadranti, dove X ed Y rappresentano ascissa ed ordinata del punto rispettivamente,  $-\pi \leq \text{atan2}(Y,X) \leq \pi$ .

### Esempio

Calcoliamo la fase dei due numeri complessi  $z_1 = 3 + 3j$  e  $z_2 = -3 - 3j$ . Se calcolassi la fase usando semplicemente l'arctg otterrei il medesimo risultato per entrambi i numeri. Infatti:

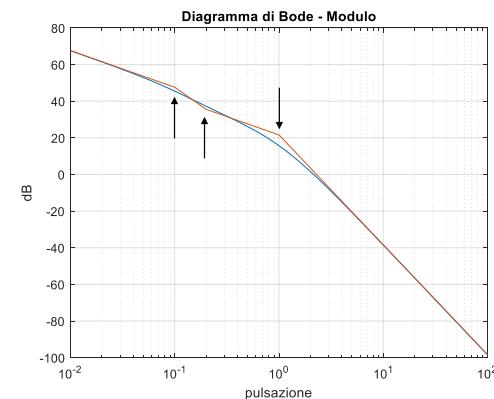
$$\arg z_1 = \arctg \left( \frac{3}{3} \right) = \arctg \left( \frac{-3}{-3} \right) = \arg z_2$$

Invece, usando il comando corretto

```
>> (180/pi)*atan2(3,3)
ans =
    45
>> (180/pi)*atan2(-3,-3)
ans =
   -135
```

**bodeasin(num,den,wmin,wmax,tipo)** è una funzione (creata da Alberto Leva di PoliMi) per il tracciamento dei diagrammi asintotici.

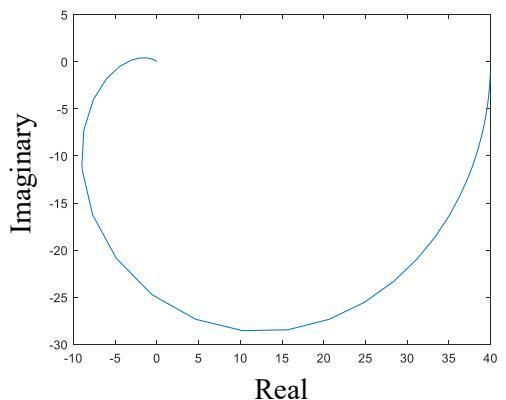
```
>> bodeasin([120 24], [10 21 12 1 0], 1e-2, 1e2, 'mod')
```



Non esiste un singolo comando Matlab per disegnare il diagramma polare. Si può usare **freqresp** e disegnare il risultato.

```
>> G=40*(1+s)/((1+10*s)^3)
G =
    40 s + 40
    -----
    1000 s^3 + 300 s^2 + 30 s + 1
Continuous-time transfer function.

>> [H,w]=freqresp(G);
>> H2=squeeze(H);
>> plot(H2)
```

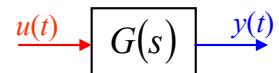


## Lezione 15. Azione filtrante dei sistemi dinamici

### Schema della lezione

1. Introduzione
2. Filtro passa-basso
3. Filtro passa-alto
4. Risonanza

### 1. Introduzione



$u(t)$  : segnale trasmesso

$y(t)$  : segnale ricevuto

$G(s)$  : modello lineare del canale di trasmissione

Sia, per esempio  $u(t) = A_u \sin(\bar{\omega}t + \varphi_u)$

Allora, per il teorema della risposta in frequenza, l'uscita a transitorio esaurito è

$$y(t) = \underbrace{A_y |G(j\bar{\omega})|}_{A_y} \sin(\bar{\omega}t + \underbrace{\varphi_y + \angle G(j\bar{\omega})}_{\varphi_y})$$

Quindi, conoscendo  $A_u$  e  $\varphi_u$ , sapendo quali sono i valori desiderati per  $A_y$  e  $\varphi_y$ , è possibile progettare le caratteristiche del canale  $G(j\omega)$ .

#### Nota

In generale, però, i segnali non sono semplici sinusoidi caratterizzate da singoli valori di ampiezza e fase.



#### Teoria dei Segnali

#### Banda passante di un filtro passabasso

E' l'insieme dei valori di  $\omega$  per cui vale la seguente condizione

$$-3 \text{ dB} \leq |G(j\omega)|_{dB} - |G(j0)|_{dB} \leq +3 \text{ dB}$$

Ovvero

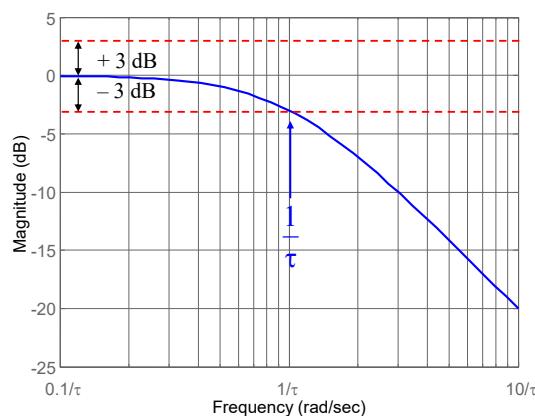
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2}$$

#### 2. Filtro passa-basso

Lascia passare inalterate, o al più amplificate di un valore costante, le armoniche del segnale in ingresso con pulsazione inferiore od uguale ad un valore  $\bar{\omega}$  ed elimina le armoniche con pulsazione superiore.

L'intervallo di pulsazioni  $[0, \bar{\omega}]$  si dice banda passante.

#### Esempio



$$G(s) = \frac{1}{1+s\tau} \quad \tau > 0$$

Banda passante

$$\omega \in \left[ 0, \frac{1}{\tau} \right]$$

Velocità di risposta

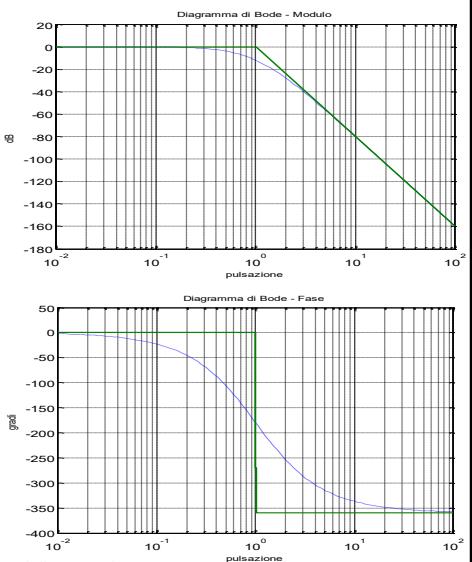


Aampiezza della banda passante

### Esempio (Effetto di un filtro passabasso)

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^4}$$

Banda passante  $\omega \approx [0,1]$



N.B. Attenzione allo sfasamento!

### 3. Filtro passa-alto

Lascia passare inalterate, o al più amplificate di un valore costante, le armoniche del segnale in ingresso con pulsazione superiore od uguale ad un valore  $\bar{\omega}$  ed elimina le armoniche con pulsazione inferiore.

L'intervallo di pulsazioni  $[\bar{\omega}, \infty]$  si dice [banda passante](#).

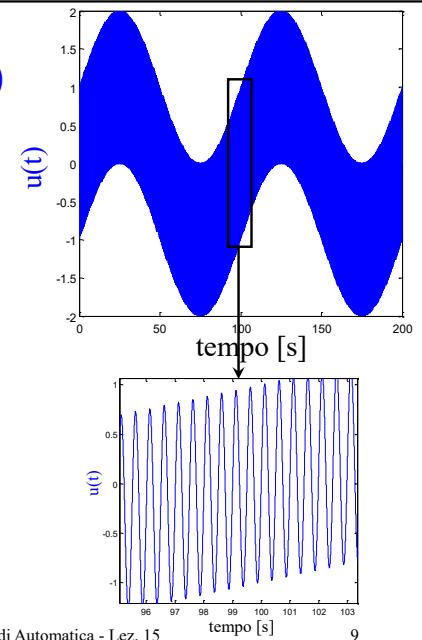
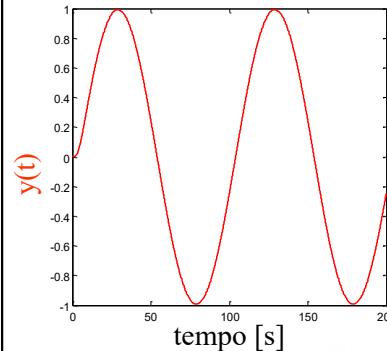
In generale si tratta di [sistemi non strettamente propri](#) (perchè si vuole  $|G(j\infty)| \neq 0$ ).

Ingresso

$$u(t) = \sin(2\pi \cdot 0.01 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t)$$

Uscita

$$y(t) \cong \sin(2\pi \cdot 0.01 \cdot t)$$



### Banda passante di un filtro passa-alto

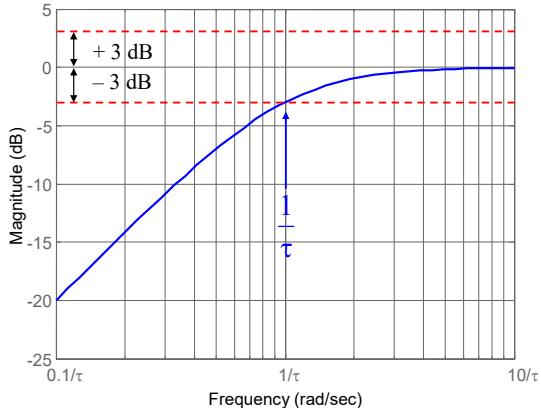
E' l'insieme dei valori di  $\omega$  per cui vale la seguente condizione

$$-3 \text{ dB} \leq |G(j\omega)|_{dB} - |G(j\infty)|_{dB} \leq +3 \text{ dB}$$

Ovvero

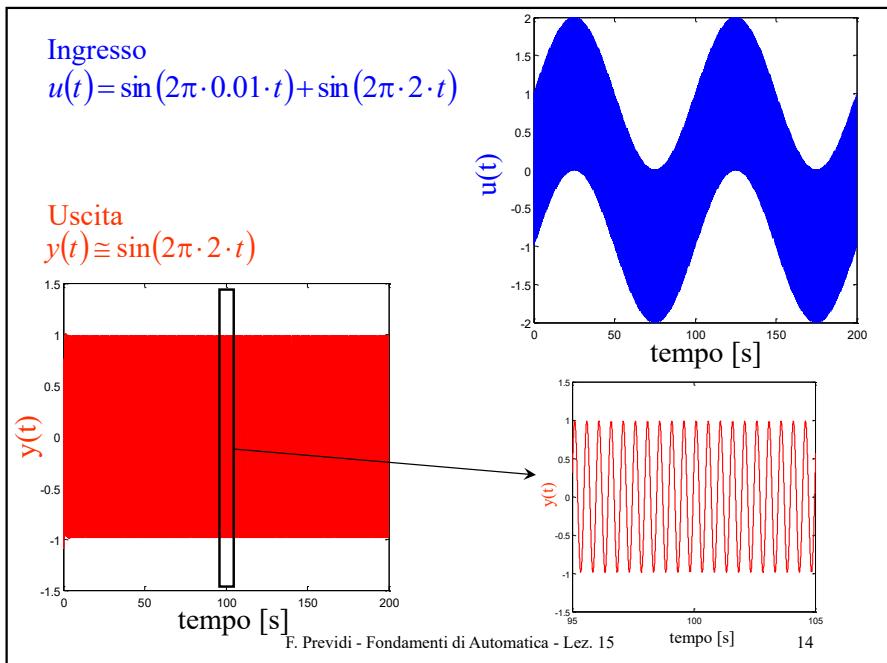
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\infty)|} \leq \sqrt{2}$$

## Esempio



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 15

12



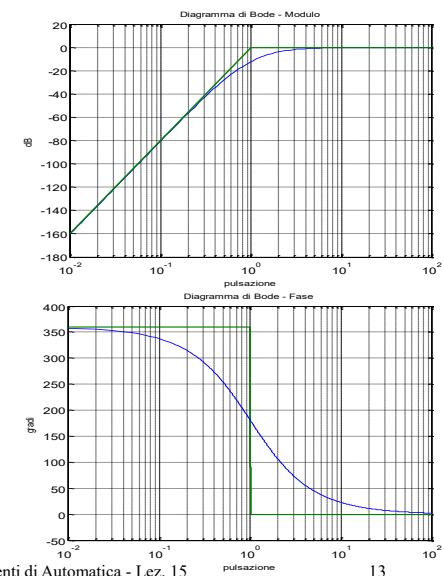
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 15

14

## Esempio (Effetto di un filtro passa-alto)

$$G(s) = \frac{s^4}{(1+s)^4}$$

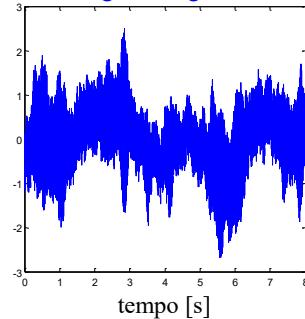
Banda passante  $\omega \approx [1, \infty]$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 15

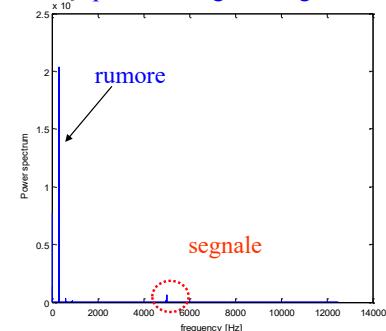
## Esempio (Filtraggio passa-banda)

Segnale originale



```
>>load Lez15
>>sound(m1, 25000)
```

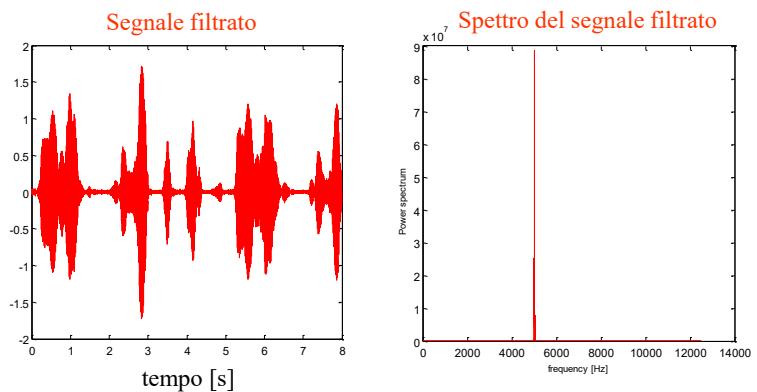
Spettro del segnale originale



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 15

15

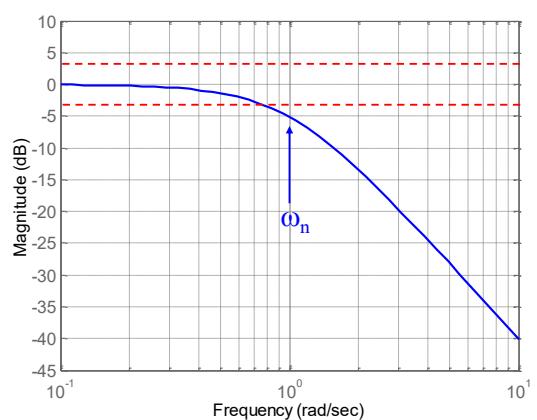
Filtraggio passabanda  
(passabasso+passaalto)  
a banda "stretta" (4.8 kHz–5.2 kHz)



>>sound(m1f,25000)

Per  $\xi \geq 0.4 \div 0.5$

E' un filtro passabasso con banda passante  $\omega \approx [0, \omega_n]$



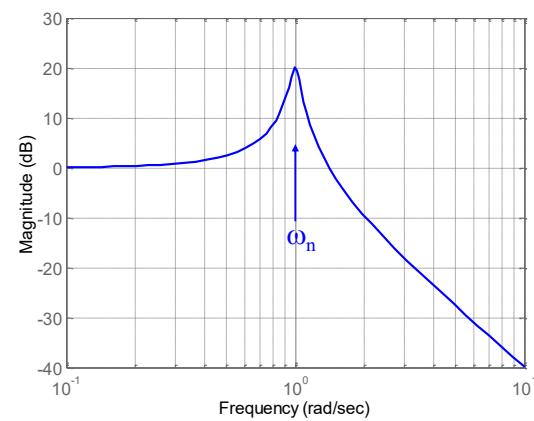
#### 4. Risonanza

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

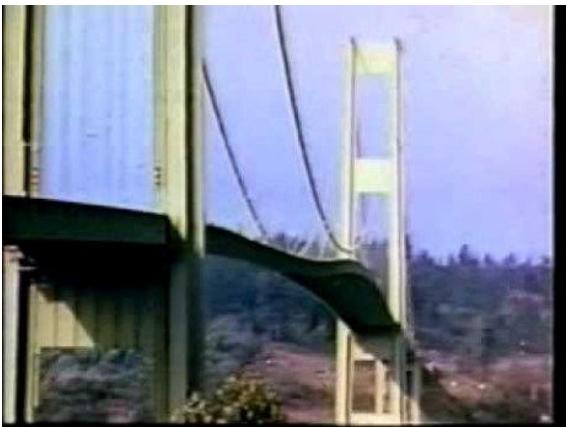
Per bassi valori dello smorzamento, le componenti armoniche del segnale in ingresso con pulsazione vicina a  $\omega_n$  vengono amplificate.

Per  $\xi < 0.4$

Si ha risonanza (amplificazione selettiva)



## Effetti catastrofici della risonanza (Tacoma Bridge, USA)



Il ponte collassò nel 1940.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 15

20

Aerodynamic instability was responsible for the failure of the Tacoma Narrows Bridge in 1940. The magnitude of the oscillations depends on the structure shape, natural frequency, and damping. The oscillations are caused by the **periodic shedding of vortices** on the leeward side of the structure, a vortex being shed first from the upper section and then the lower section.

*Wind Forces on Buildings and Structures,*  
E. Houghton and N. Carruthers, 1976.

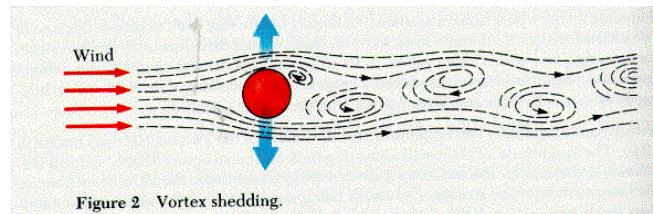


Figure 2 Vortex shedding.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 15

21

## 6. Matlab

Esiste una GUI per studiare le proprietà dei sistemi lineari tempo invarianti.

**ltiview** Opens the LTI Viewer GUI.

`ltiview` opens an empty LTI Viewer. The LTI Viewer is an interactive graphical user interface (GUI) for analyzing the time and frequency responses of linear systems and comparing such systems.

**ltiview(PLOTTYPE)** further specifies which responses to plot in the LTI Viewer.

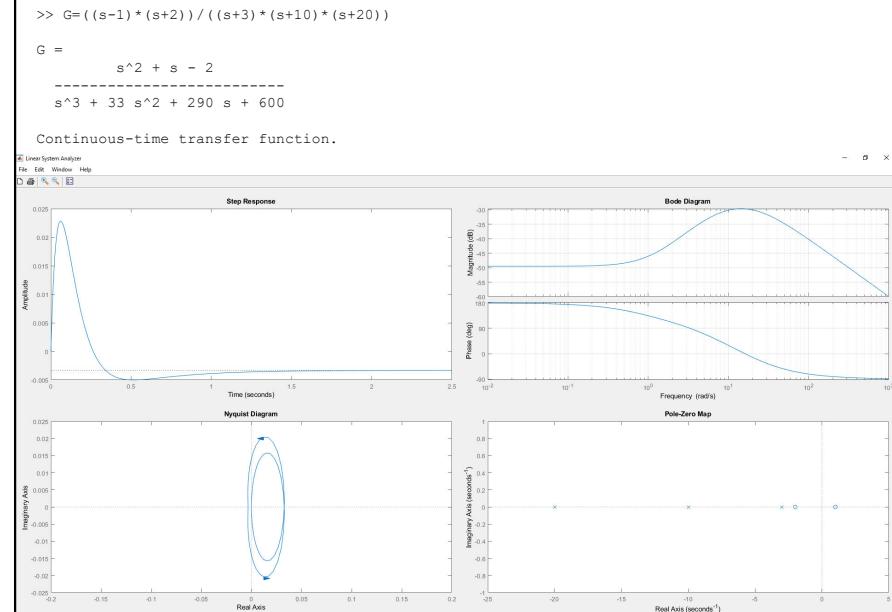
Per esempio

```
ltiview({'step','bode','nyquist','pzmap'})
```

Consente di aprire 4 grafici (risposta a scalino, diagrammi di Bode, diagramma di Nyquist e mappa poli/zeri).

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 16

8



9

# Lezione 17.

## Introduzione ai sistemi di controllo

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

1

### Schema

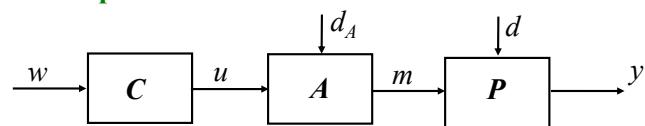
1. Sistemi di controllo in anello aperto ed in anello chiuso
2. Requisiti di un sistema di controllo
3. Analisi e sintesi di un sistema di controllo
4. Sistema di controllo in anello aperto
  - 4.1 Progetto “ideale”
  - 4.2 Limiti della strategia in anello aperto
  - 4.3 Compensazione in anello aperto di disturbi “in andata”
5. Sistemi di controllo in anello chiuso
  - 5.1 Analisi di sistemi retroazionati

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

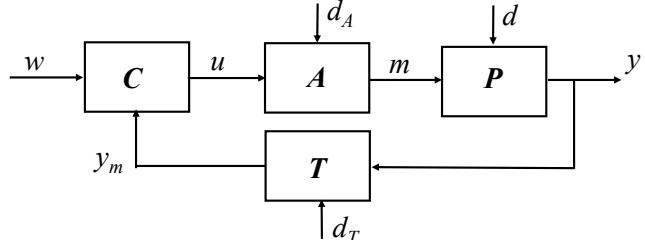
2

### 1. Sistemi di controllo in anello aperto ed in anello chiuso

#### in anello aperto



#### in anello chiuso



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

3

### 2. Requisiti di un sistema di controllo

- stabilità indipendenza asintotica dalle condizioni iniziali, stabilità esterna
- precisione statica  $y \sim w$  in condizioni di equilibrio
- precisione dinamica  $y \sim w$  durante i transitori
- attenuazione disturbi  $y \sim w$  anche in presenza di disturbi
- moderazione  $u$  “piccola” in tutte le situazioni di interesse
- robustezza garanzia delle precedenti proprietà anche in presenza di incertezza sul modello

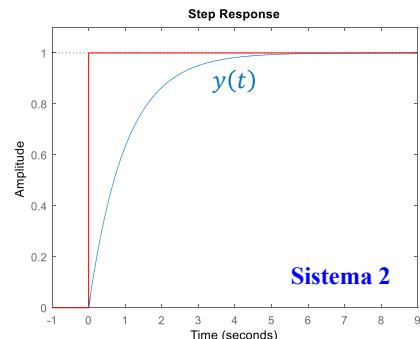
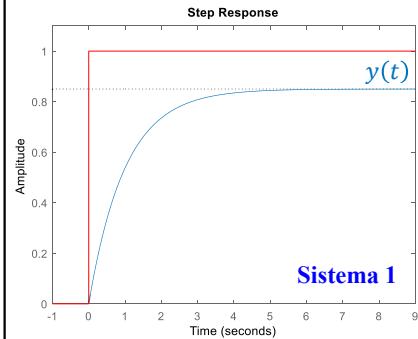
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

4

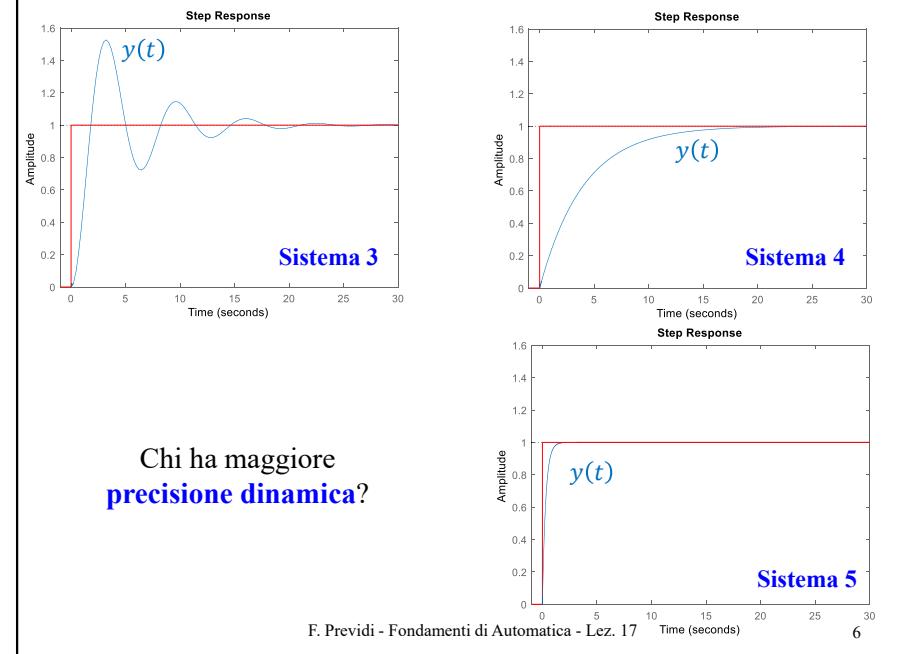
### Nota su precisione statica e precisione dinamica

Consideriamo le **risposte allo scalino unitario** di alcuni **sistemi di controllo**.

$$w(t) = sca(t)$$



Chi ha maggiore **precisione statica**?



### 3. Analisi e sintesi di un sistema di controllo

#### Problema di analisi

dati i modelli di  $P, A, T, C$  valutare le prestazioni

#### Problema di sintesi

dati i modelli di  $P, A, T$   
+ determinare il controllore  $C$   
specifiche di progetto

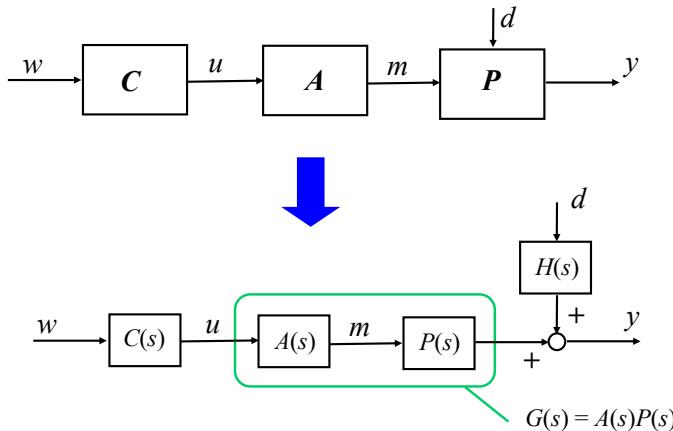
#### Ipotesi

Tutti i componenti del sistema di controllo ( $P, A, T, C$ ) sono descritti da modelli lineari, cioè da

**sistemi dinamici lineari invarianti (a tempo continuo)**

eventualmente ottenuti per **linearizzazione** intorno ad uno stato di equilibrio prefissato

#### 4. Sistema di controllo in anello aperto



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

9

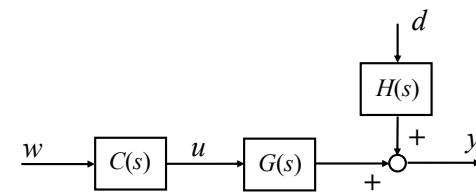
#### 4.1 Progetto ideale (in anello aperto)

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s) = 1 \quad \rightarrow \quad C(s) = G(s)^{-1}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s) \quad \rightarrow \quad \text{Non si può fare nulla}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

11



prestazioni ideali

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s) \quad \begin{cases} \sim 1 & \text{"passa-tutto"} \\ \sim 0 & \text{"passa-niente"} \end{cases}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s) \quad \begin{cases} \sim 1 & \text{"passa-tutto"} \\ \sim 0 & \text{"passa-niente"} \end{cases}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

10

#### 4.2 Limitazioni (in anello aperto)

##### 1. Cancellazioni poli/zeri con $Re \geq 0$

###### Esempio

$$G(s) = \frac{1+s}{1-s} \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

cancellazione illegittima (dinamica "nascosta" instabile)



E' impossibile stabilizzare un sistema instabile  
usando una strategia in anello aperto

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

12

## 2. Realizzabilità

Discussiamo questo problema mediante alcuni esempi

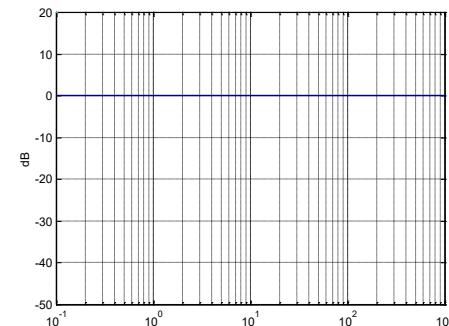
### Esempio 1

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)} \rightarrow C_0(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{1+s}$$

**non realizzabile** (2 zeri e 1 polo)

$$F_0(s) = C_0(s)G(s) = 1$$

**passa-tutto**



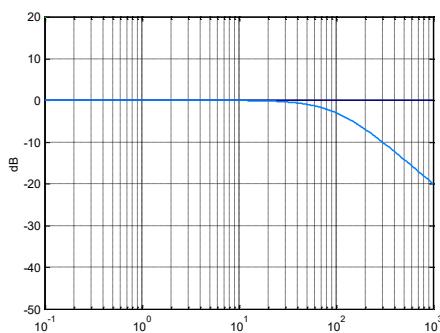
### Esempio 2

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)} \rightarrow C_1(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{(1+s)(1+0.01s)}$$

**realizzabile**

$$F_1(s) = C_1(s)G(s) = \\ = \frac{1}{1+0.01s}$$

**passa-basso con  $B \cong [0,100]$**



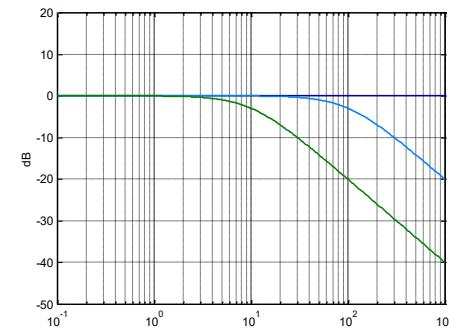
### Esempio 3

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)} \rightarrow C_2(s) = \frac{0.1(1+2s)}{(1+s)}$$

**realizzabile**

$$F_2(s) = C_2(s)G(s) = \\ = \frac{1}{1+0.1s}$$

**passa-basso con  $B \cong [0,10]$**



#### Esempio 4

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

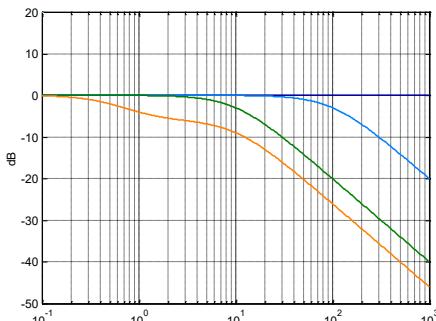


$$C_3(s) = 0.1$$

realizzabile

$$F_3(s) = C_3(s)G(s) = \frac{(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

passa-basso con  $B \cong [0, 0.5]$



Si può ottenere un controllore realizzabile riducendo la banda passante, cioè:

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s)$$

ma solo fino ad una certa  $\omega_{BP}$

#### 3. Scarsa robustezza

Discussiamo questo problema mediante un esempio

#### Esempio

incertezza

$$G(s) = \frac{(10 \pm \Delta)(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)} \quad C_3(s) = 0.1$$

$$F_3(s) = C_3(s)G(s) = (1 \pm 0.1\Delta) \frac{(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

guadagno diverso da 1

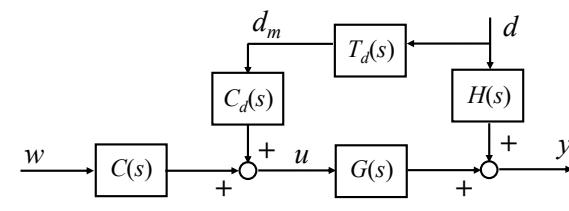
Se c'e' incertezza si corre il rischio di non ottenere le prestazioni ideali qualunque sia la banda di frequenza desiderata

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s) \quad | \sim 1 \quad \text{"passa-tutto"}$$

Mai!

Nemmeno "a pulsazione nulla"

#### 4.3 Compensazione in anello aperto del disturbo

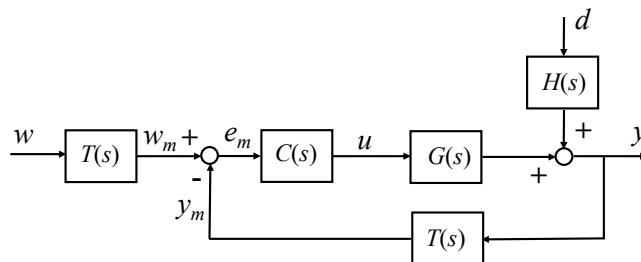
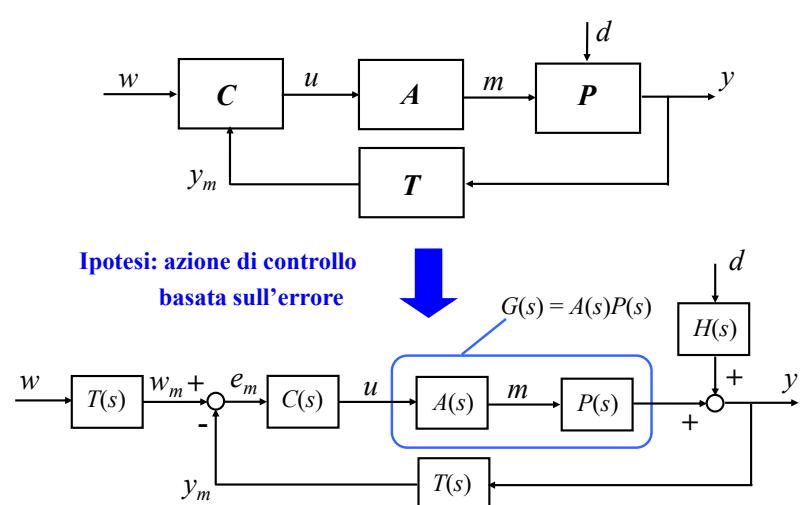


$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s) + T_d(s)C_d(s)G(s) \quad | \sim 0 \quad \text{"passa-niente"}$$

$$\rightarrow C_d(s) = -H(s)G(s)^{-1}T_d(s)^{-1}$$

limitazioni analoghe alle precedenti

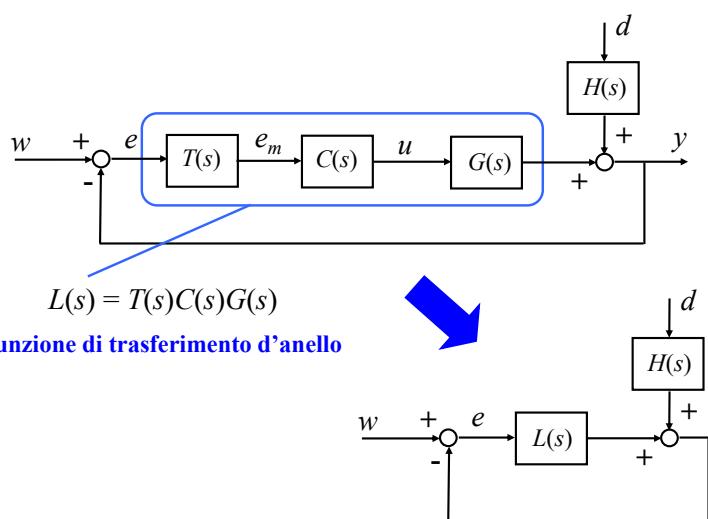
#### 5. Sistema di controllo in anello chiuso



$$E_m(s) = W_m(s) - Y_m(s) = T(s)(W(s) - Y(s))$$

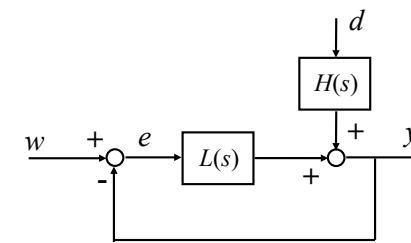
errore apparente

E(s)  
errore effettivo



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

25



prestazioni ideali

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$\sim 1$  "passa-tutto"

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s)}{1 + L(s)}$$

$\sim 0$  "passa-niente"

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

26

Ottenere queste prestazioni ideali in senso stretto è impossibile. Ma ...

Se  $L(s) \gg 1$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \sim 1 \text{ "passa-tutto"}$$

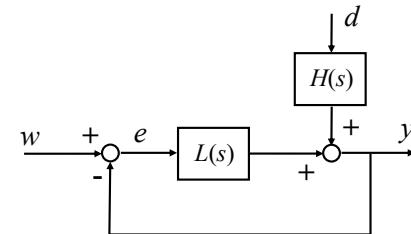
Se  $L(s) \gg H(s)$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s)}{1 + L(s)} \sim 0 \text{ "passa-niente"}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

27

## 5.1 Analisi di sistemi retroazionati



stabilità di  $H(s)$

• asintotica stabilità  $\rightarrow$  + stabilità di  $\frac{L(s)}{1 + L(s)}$

• prestazioni  $\rightarrow$  studio di  $\frac{Y(s)}{W(s)}$  e  $\frac{Y(s)}{D(s)}$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 17

28

# Lezione 18.

## Stabilità di sistemi retroazionati

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 18

1

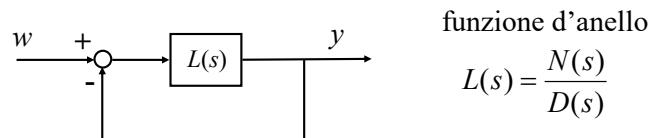
### Schema

1. Stabilità di sistemi retroazionati
2. Diagramma di Nyquist
3. Criterio di Nyquist
4. Estensioni del Criterio di Nyquist

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 18

2

### 1. Stabilità di sistemi retroazionati



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$$

polinomio caratteristico  
in anello chiuso

asintotica stabilità      tutte le radici di  
hanno  $\text{Re} < 0$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 18

3

➤ Questo modo di procedere non ci è utile per capire come cambia la proprietà di stabilità al variare degli elementi che costituiscono la funzione di trasferimento d'anello (controllore e plant).

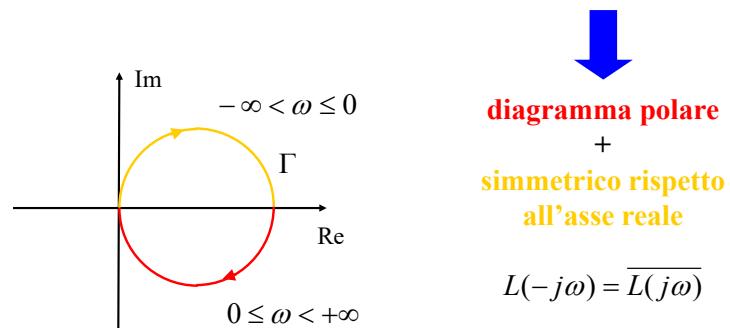
➤ Servono strumenti (grafici) e metodi utili anche per la fase di progetto.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 18

4

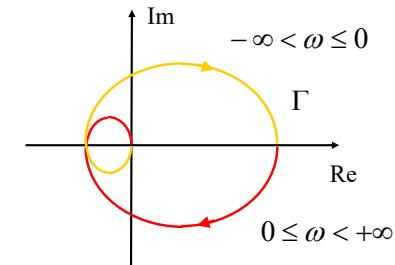
## 2. Diagramma di Nyquist

Il diagramma di Nyquist  $\Gamma$  di  $L(s)$  è la curva chiusa, nel piano complesso, di  $L(j\omega)$  per  $-\infty < \omega < +\infty$ , orientato per  $\omega$  crescenti



## Esempio 1

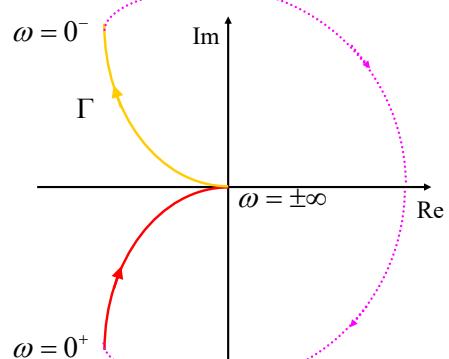
$$L(s) = \frac{100}{(1+s)^3}$$



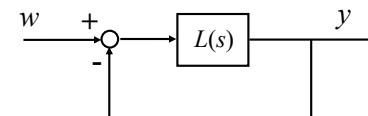
## Esempio 2

$$L(s) = \frac{100}{s(1+s)}$$

Convenzione:  
chiusura all'infinito  
in senso **orario**



## 3. Criterio di Nyquist



$\Gamma$  diagramma di Nyquist associato a  $L(s)$

$N$  numero di giri antiorari di  $\Gamma$  intorno al punto  $-1$

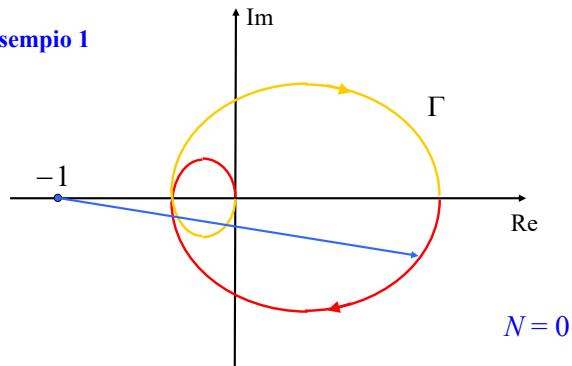
$P$  numero di poli di  $L(s)$  con  $\text{Re} > 0$

asintotica stabilità  
(del sistema retroazionato)  $\iff \begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$

### Osservazione 1

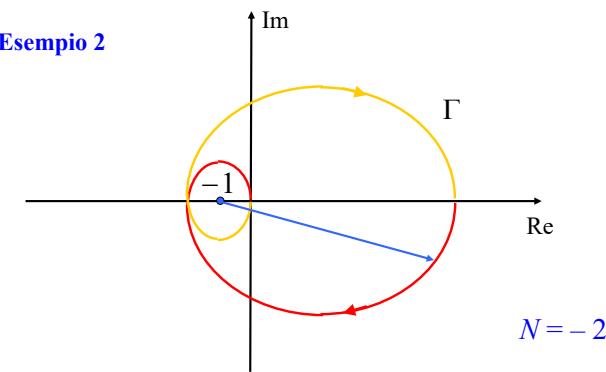
Come si valuta  $N$ ?

#### Esempio 1



$$N = 0$$

#### Esempio 2

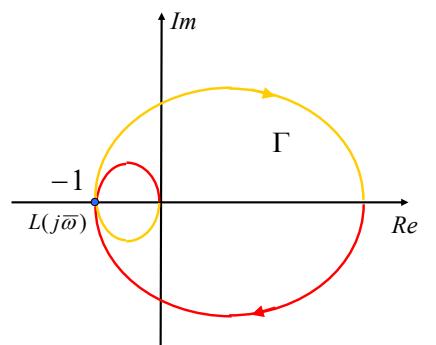


$$N = -2$$

### Osservazione 2

$N$  non ben definito  $\Rightarrow$  non asintoticamente stabile

#### Dimostrazione



$N$  non ben definito

$$\exists \bar{\omega} : L(j\bar{\omega}) = -1$$

$$1 + L(j\bar{\omega}) = 0$$

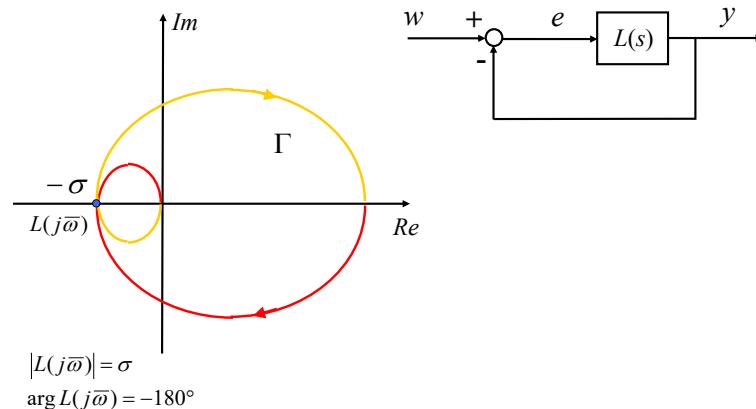
$1 + L(s)$  ha una radice in  $j\bar{\omega}$

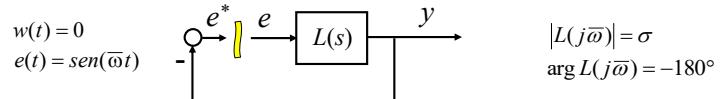
$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$
 ha un polo in  $j\bar{\omega}$

$F(s)$  non è asintoticamente stabile

### Osservazione 3

Giustificazione intuitiva del criterio nel caso  $P = 0$





$$y(t) = |L(j\bar{\omega})| \sin(\bar{\omega}t + \arg L(j\bar{\omega})) = \\ = \sigma \sin(\bar{\omega}t - 180^\circ) = -\sigma \sin(\bar{\omega}t) \\ e^*(t) = -y(t) = \sigma \sin(\bar{\omega}t)$$

$N \neq P = 0$	$\sigma > 1$	instabilità
$N = P = 0$	$\sigma < 1$	asintotica stabilità
$N$ non definito	$\sigma = 1$	semplice stabilità (solo in questo caso)

#### Osservazione 4

$N < 0$  instabile

cioè, giri orari intorno a  $-1$

#### Dimostrazione

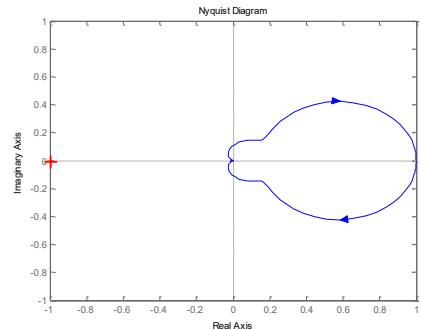
poiché  $P$  è un numero positivo o nullo  
necessariamente risulta  $N \neq P$

#### Esempio 1

Funzione d'anello

$$L(s) = \frac{1+s}{(1+0.1s)^2(1+5s)}$$

$$\textcolor{blue}{P = 0}$$



Dal grafico

$$\textcolor{blue}{N = 0}$$

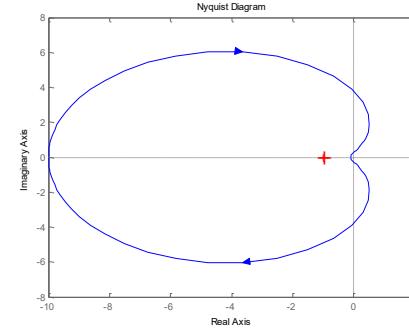
$N$  ben definito Sistema (in anello chiuso)  
asintoticamente stabile

#### Esempio 2

Funzione d'anello

$$L(s) = \frac{-0.1(1+10s)^2}{(1+s)^2}$$

$$\textcolor{blue}{P = 0}$$

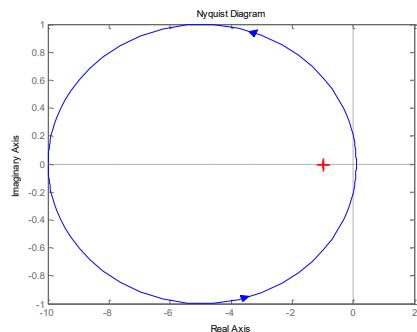


Dal grafico

$$\textcolor{blue}{N = -1}$$

Sistema (in anello chiuso)  
instabile

### Esempio 3



Funzione d'anello

$$L(s) = \frac{0.1(1+10s)^2}{(1+s)(1-s)}$$

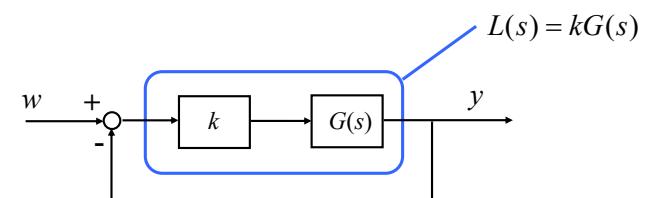
$$P = 1$$

Dal grafico

$$N = 1$$

$N$  ben definito  $\leftrightarrow$  Sistema (in anello chiuso) asintoticamente stabile

### 4. Estensioni del criterio di Nyquist

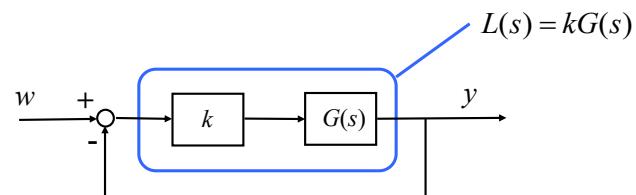


$\Gamma_L$  diagramma di Nyquist associato a  $L(s)$

$N_L$  numero di giri antiorari di  $\Gamma_L$  intorno al punto  $-1$

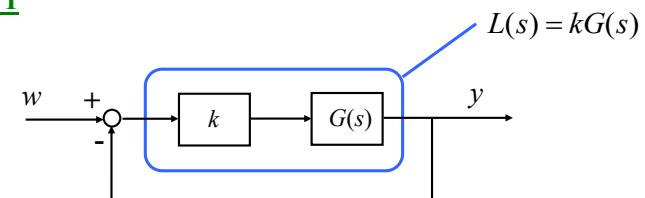
$P_L$  numero di poli di  $L(s)$  con  $\text{Re} > 0$

asintotica stabilità  $\leftrightarrow$   $\begin{cases} N_L \text{ ben definito} \\ N_L = P_L \end{cases}$



- Il diagramma di Nyquist associato a  $L(s)$  è identico a quello associato a  $G(s)$  a meno del fattore di scala  $k$
- I poli di  $L(s)$  coincidono con quelli di  $G(s)$

### Estensione 1



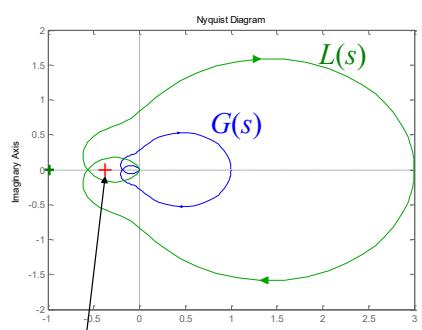
$\Gamma$  diagramma di Nyquist associato a  $(G(s))$

$N$  numero di giri antiorari di  $\Gamma$  intorno al punto  $(-1/k)$

$P$  numero di poli di  $(G(s))$  con  $\text{Re} > 0$

asintotica stabilità  $\leftrightarrow$   $\begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$

### Esempio



Funzione d'anello

$$L(s) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(s^2 + 0.5s + 1)(10s + 1)}$$

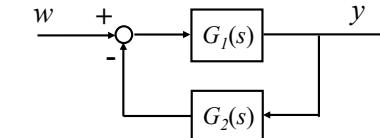
$P = 0$

Dal grafico

$N = 0$

$$-\frac{1}{k}$$

$N$  ben definito     $\leftrightarrow$     Sistema (in anello chiuso)  
asintoticamente stabile

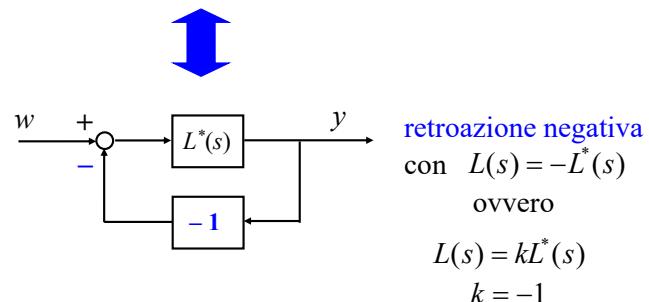
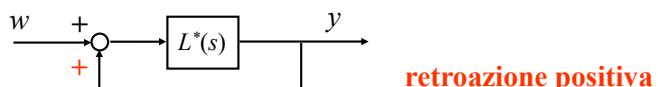


$$\frac{Y(s)}{W(s)} = F(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

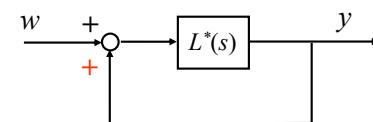
$L(s)$

$\rightarrow$  tutto invariato, con riferimento a  $L(s)$

Si consideri il seguente sistema



### Estensione 3



retroazione positiva

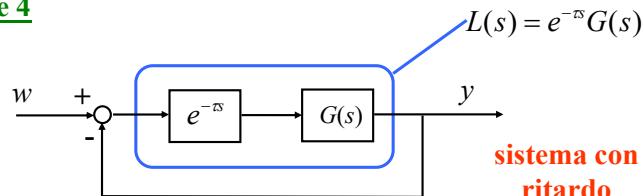
$\Gamma$  diagramma di Nyquist associato a  $L^*(s)$

$N$  numero di giri antiorari di  $\Gamma$  intorno al punto  $(+1)$

$P$  numero di poli di  $L^*(s)$  con  $\text{Re} > 0$

asintotica stabilità     $\leftrightarrow$      $\begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$

#### Estensione 4



$\Gamma$  diagramma di Nyquist associato a  $L(s)$

$N$  numero di giri antiorari di  $\Gamma$  intorno al punto  $-1$

$P$  numero di poli di  $G(s)$  con  $\text{Re } s > 0$

$$\text{stabilità esterna} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$$

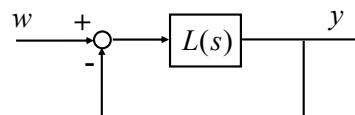
## Lezione 19. Stabilità robusta

### Schema

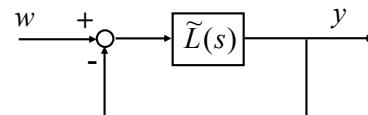
1. Stabilità & incertezza
2. Indicatori di stabilità robusta
3. Margine di guadagno
4. Margine di fase
5. Criterio di Bode
6. Sistemi a fase minima

### 1. Stabilità di sistemi retroazionati incerti

modello nominale



modello "vero"



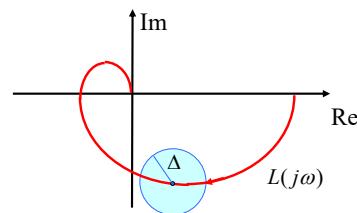
in generale  $\tilde{L}(s) \neq L(s)$

**stabilità robusta** = garanzia di stabilità anche in presenza di incertezza

## Esempi di tipici modelli dell'incertezza

- incertezza additiva limitata in modulo

$$\tilde{L}(s) = L(s) + \delta L(s) \quad |\delta L(j\omega)| \leq \Delta$$

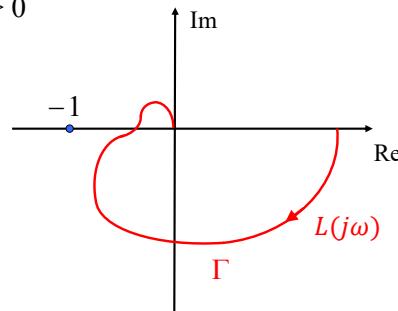


- incertezza sul guadagno della funzione d'anello

$$\tilde{L}(s) = kL(s) \quad \bar{k}_1 < k \leq \bar{k}_2$$

## Ipotesi

- modello nominale asintoticamente stabile in anello chiuso
- $L(s)$  non ha poli con  $\text{Re} > 0$



Per il Criterio di Nyquist

asintotica stabilità  $\iff N = 0$

## 2. Indicatori di stabilità robusta

Sono parametri che misurano:

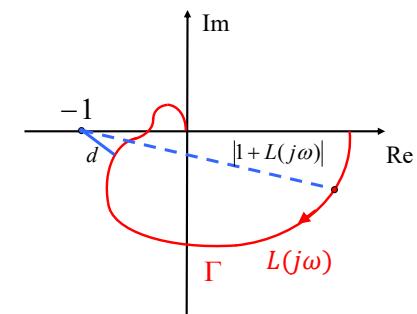
- l'ampiezza delle perturbazioni per cui è garantita la stabilità
- la "distanza" del modello nominale dall'instabilità

## Un indicatore di robustezza

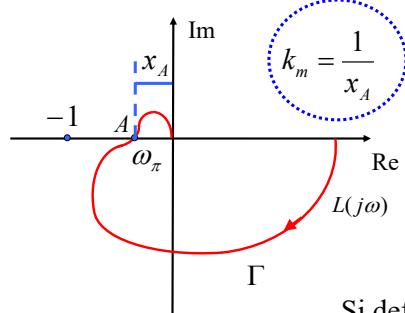
### Margine di stabilità vettoriale

$d$  distanza di  $\Gamma$  dal punto  $-1$

$$d = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$$



### 3. Margine di guadagno



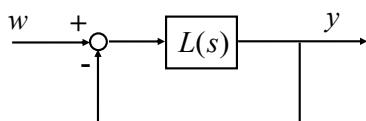
Sia  $\omega_\pi$  la pulsazione per cui  
 $\angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$   
Allora  $x_A = |L(j\omega_\pi)|$

Si definisce **margine di guadagno**

$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

Se  $k_m > 1$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile

### Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3}$$

Calcolare analiticamente il margine di guadagno

Si calcoli  $\omega_\pi$

$$\angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ \quad \rightarrow -3\text{arctg}(\omega_\pi) = -180^\circ$$

$$\rightarrow \omega_\pi = \text{tg}(60^\circ) = \sqrt{3} \text{ rad/s}$$

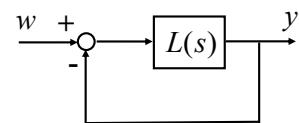
Si valuti il margine di guadagno

$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \frac{|1+j\omega_\pi|^3}{10} = \frac{(\sqrt{1+3})^3}{10} = \frac{4}{5}$$

$k_m < 1$   
Sistema instabile

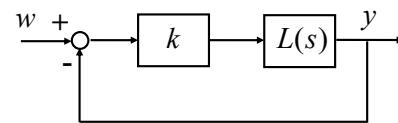
### Interpretazione

modello nominale



$k_m > 1$   
(quindi  $x_A < 1$ )

modello "vero"

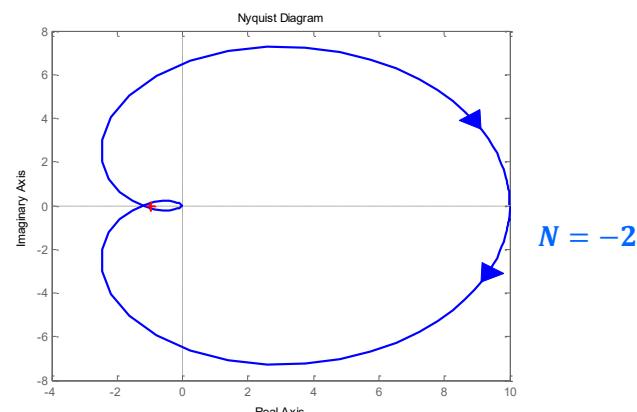


E' asintoticamente stabile  
per tutti i valori di  $k$  tali che  
 $0 < k < k_m$

Infatti bisogna guardare i giri intorno  
a  $-1/k$  e si ha che  $\frac{1}{k} > \frac{1}{k_m} = x_A$

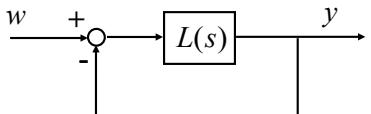
$k_m$  è un indicatore di robustezza rispetto a  
incertezze sul guadagno d'anello

Tracciando il diagramma di Nyquist si può avere conferma del risultato ottenuto.



$N = -2$

### Esempio

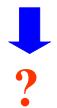


$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+5s)(1+15s)}$$

Calcolare analiticamente il margine di guadagno

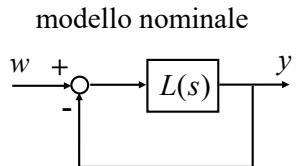
Si calcoli  $\omega_\pi$

$$\angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ \rightarrow -\arctg(\omega_\pi) - \arctg(5\omega_\pi) - \arctg(15\omega_\pi) = -180^\circ$$

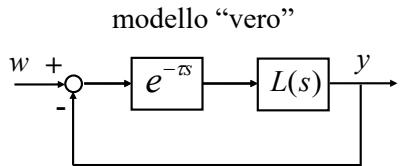


**Non è sempre possibile calcolare analiticamente  
il margine di guadagno**

### Interpretazione



$$\varphi_m > 0^\circ$$



$$\text{asintoticamente stabile se } \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} < \varphi_m$$

$$\text{ovvero } \tau < \frac{\varphi_m}{\omega_c} \frac{\pi}{180^\circ}$$

$\varphi_m$  è un indicatore di robustezza rispetto a  
**incertezze sul ritardo d'anello**

### 4. Margine di fase

Sia  $\omega_c$  la pulsazione per cui  
 $|L(j\omega_c)| = 1$

$\omega_c$  si dice **pulsazione critica**

Sia  $\varphi_c = \angle L(j\omega_c)$

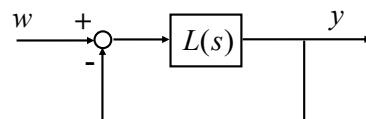
$\varphi_c$  si dice **fase critica**

Se  $\varphi_m > 0^\circ$  il sistema  
retroazionato è  
asintoticamente stabile

Si definisce **margine di fase**

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$$

### Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+2s)}$$

Calcolare analiticamente il margine di fase

Si calcoli  $\omega_c$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \frac{10}{|1+j\omega_c||1+j2\omega_c|} = 1 \rightarrow \sqrt{1+\omega_c^2} \sqrt{1+4\omega_c^2} = 10$$

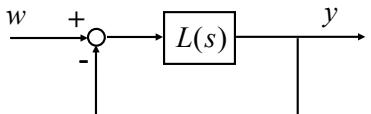
$$\rightarrow 4\omega_c^4 + 5\omega_c^2 + 1 = 100 \rightarrow \omega_c \approx 2.095 \text{ rad/s}$$

Si valuti il margine di fase

$$\varphi_c = \angle L(j\omega_c) = -\arctg(\omega_c) - \arctg(2\omega_c) \approx -64.5^\circ - 76.6^\circ = -141.1^\circ$$

$\varphi_m = 38.9^\circ$  Sistema asintoticamente stabile

### Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3(1+5s)}$$

Calcolare analiticamente il margine di fase

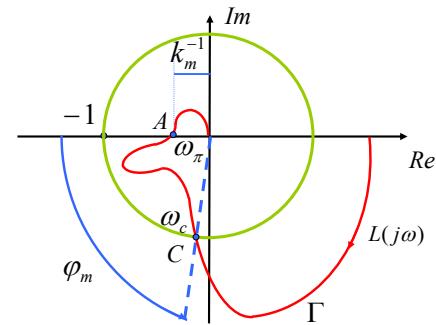
Si calcoli  $\omega_c$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \frac{10}{|1+j\omega_c|^3|1+j5\omega_c|} = 1 \rightarrow (\sqrt{1+\omega_c^2})^3 \sqrt{1+25\omega_c^2} = 10$$

$$\rightarrow (\omega_c^2 + 1)^3 (25\omega_c^2 + 1) = 100 \rightarrow ?$$

**Non è sempre possibile calcolare analiticamente  
il margine di fase**

### Caso particolare 1

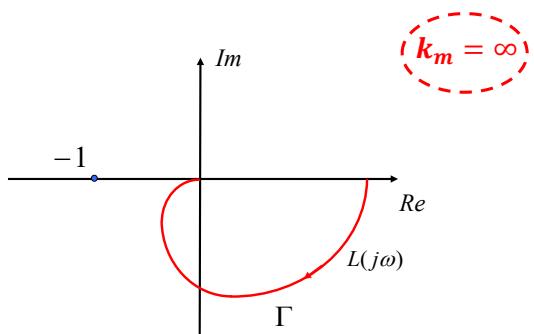


$$k_m \gg 1$$

ma il sistema è assai poco robusto

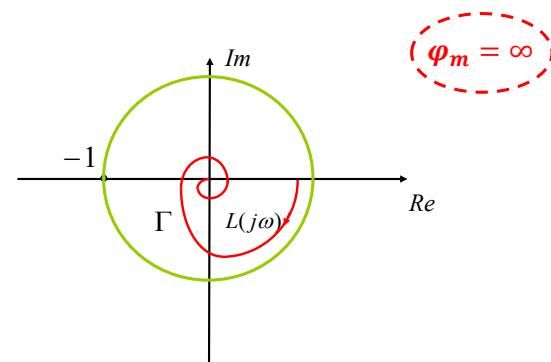
$$\varphi_m \gg 0^\circ$$

### Caso particolare 2



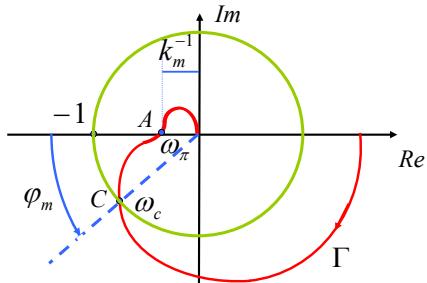
$$|\angle L(j\omega)| < 180^\circ, \forall \omega$$

### Caso particolare 3



$$|L(j\omega)| < 1, \forall \omega$$

## Riassumendo



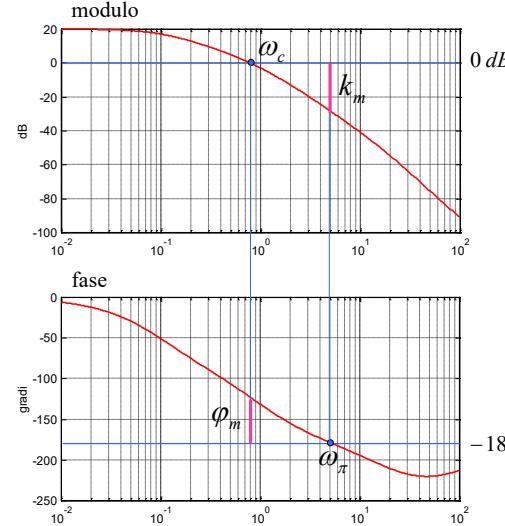
**margine di guadagno**  $k_m = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$        $\angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$

**margine di fase**  $\varphi_m = 180^\circ - |\angle L(j\omega_c)|$        $|L(j\omega_c)|_{dB} = 0 \text{ dB}$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 19

20

## Valutazione dai diagrammi di Bode



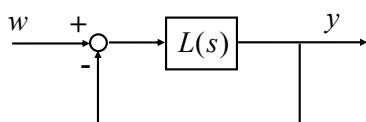
$$\begin{aligned}\text{margine di guadagno} \\ \omega_\pi &\cong 5 \text{ rad/s} \\ k_m &\cong 30 \text{ dB} = \\ &= 10^{20} \cong 32\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{margine di fase} \\ \omega_c &\cong 0.8 \text{ rad/s} \\ \varphi_m &\cong 60^\circ\end{aligned}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 19

21

## Esempio

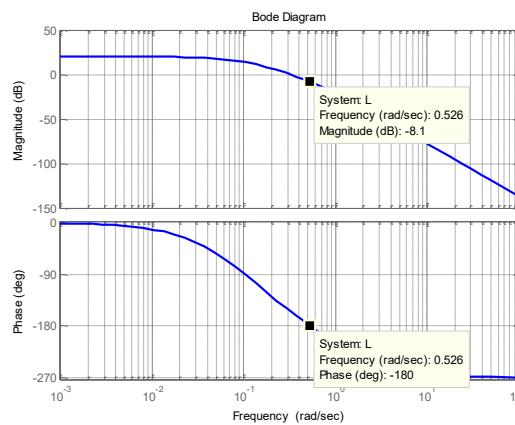


$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+5s)(1+15s)}$$

Usando i diagrammi di Bode, valutare approssimativamente il **margine di guadagno** del sistema retroazionato.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 19

22

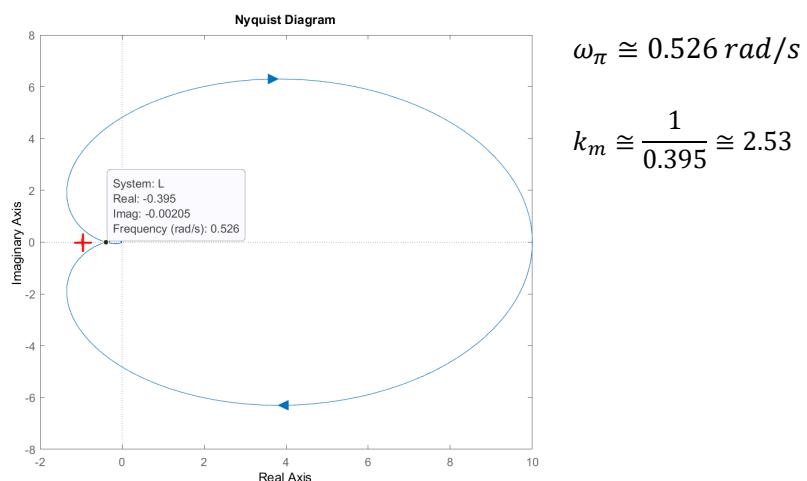


$$\begin{aligned}\omega_\pi &\cong 0.526 \text{ rad/s} \\ k_m &\cong 8.1 \text{ dB} \cong 2.54\end{aligned}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 19

23

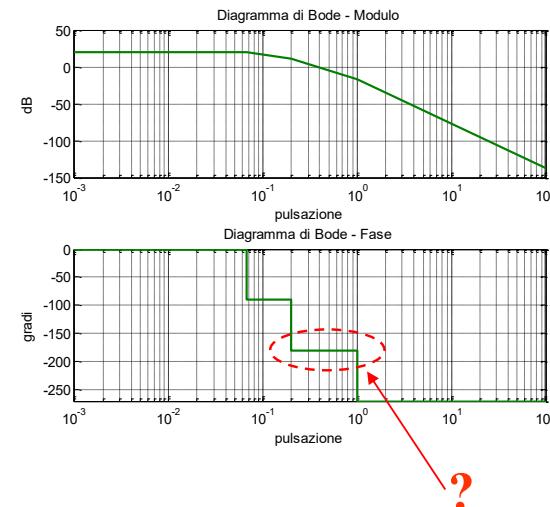
Tracciando il diagramma di Nyquist si può avere conferma del risultato ottenuto.



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 19

24

Ripetere il calcolo usando i diagrammi di Bode asintotici.

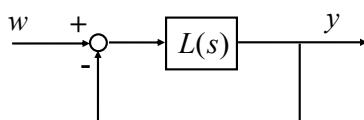


E' difficile ricavare il  
valore di  $\omega_\pi$  dal  
diagramma asintotico

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 19

25

### Esempio

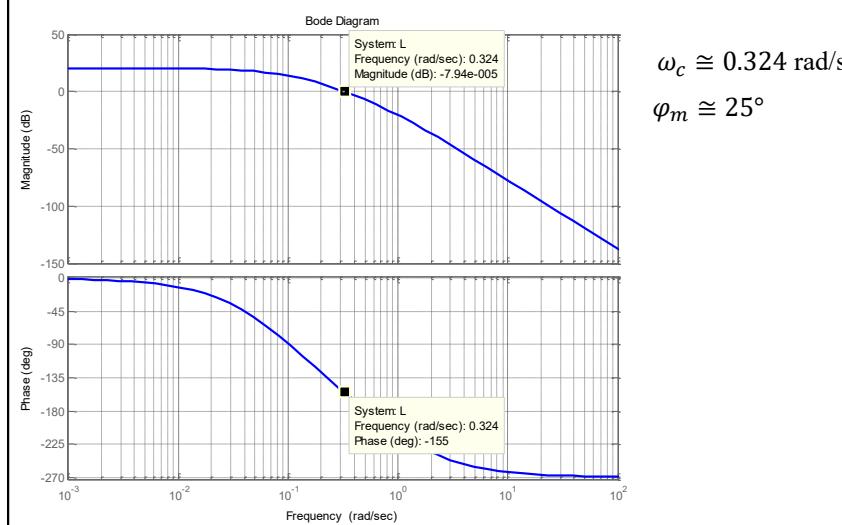


$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+5s)(1+15s)}$$

Usando i diagrammi di Bode, valutare approssimativamente il margine di fase del sistema retroazionato.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 19

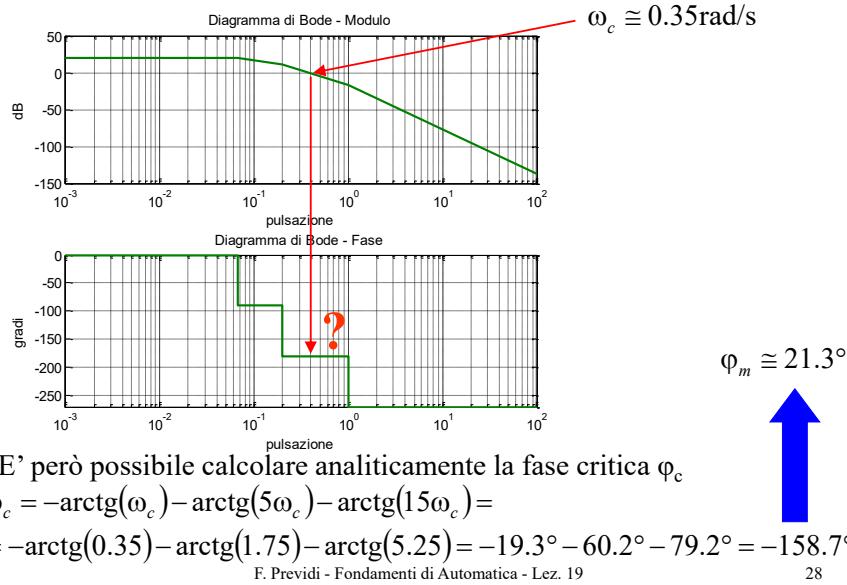
26



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 19

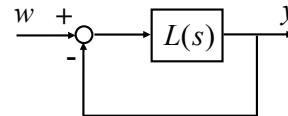
27

Ripetere il calcolo usando i diagrammi di Bode asintotici.



## 5. Criterio di Bode

### Condizioni di applicabilità



$P = 0$

il diagramma di Bode del modulo associato a  $L(s)$  attraversa una sola volta l'asse a 0 dB

$\varphi_m$  margine di fase

$\mu$  guadagno d'anello

asintotica stabilità  
del sistema retroazionato

$$\begin{cases} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0^\circ \end{cases}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 19

29

### Dimostrazione

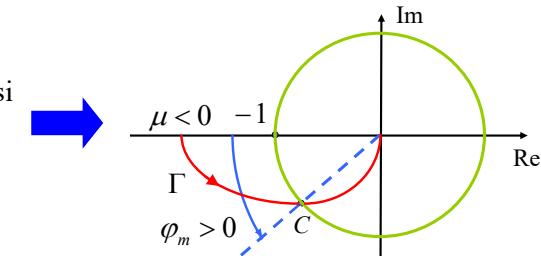
$$\text{nelle condizioni date } \left. \begin{array}{l} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0 \end{array} \right\} \leftrightarrow N = 0 = P \leftrightarrow \text{asintotica stabilità}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 19

30

Perché  $\mu > 0$ ?

Per escludere casi  
di questo tipo



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 19

31

## 6. Utilizzo del criterio di Bode per sistemi a fase minima

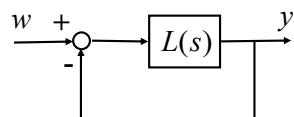
$L(s)$  a fase minima

- poli e zeri hanno parte reale negativa
- il guadagno  $\mu$  è positivo



- la condizione  $\mu > 0$  è soddisfatta
- i diagrammi asintotici di Bode di modulo e fase hanno forti legami  
(dove il modulo ha pendenza  $-k$  la fase vale circa  $-k 90^\circ$ )

### Esempio



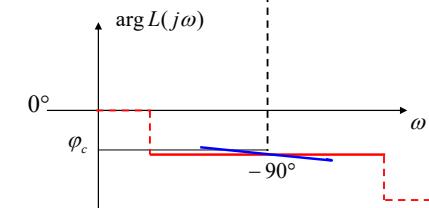
$$L(s) = \frac{10}{(1+5s)(1+s)(1+0.2s)}$$

Giudicare la stabilità mediante il criterio di Bode (se applicabile).

- $P = 0$
- il diagramma di Bode del modulo associato a  $L(s)$  attraversa una sola volta l'asse a  $0 \text{ dB}$

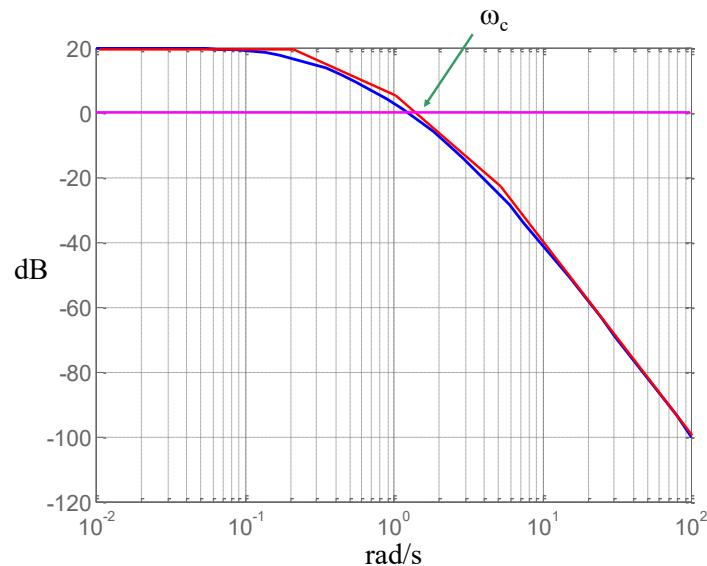
Il criterio di Bode è applicabile.

se l'attraversamento dell'asse a  $0 \text{ dB}$  avviene con pendenza  $-1$   
(e se il tratto con tale pendenza è sufficientemente lungo)



$$\varphi_c \approx -90^\circ$$

$$\varphi_m \approx 90^\circ$$



Dal grafico  $\omega_c \approx 1.4$  rad/s

$$\begin{aligned}\varphi_c &= -\text{atan}(5\omega_c) - \text{atan}(\omega_c) - \text{atan}(0.2\omega_c) = \\ &= -\text{atan}(5 \cdot 1.4) - \text{atan}(1.4) - \text{atan}(0.2 \cdot 1.4) = \\ &= -\text{atan}(7) - \text{atan}(1.4) - \text{atan}(0.28) = \\ &= -81.9^\circ - 54.5^\circ - 15.6^\circ = -152^\circ\end{aligned}$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |-152^\circ| = 28^\circ$$

asintotica stabilità  $\iff \begin{cases} \mu = 10 > 0 \\ \varphi_m = 28^\circ > 0 \end{cases}$

Valori esatti :  $\omega_c = 1.2$  rad/s  
 $\varphi_m = 35.1^\circ$

# Lezione 20. Analisi delle prestazioni di sistemi retroazionati (a)

## Introduzione

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 20

1

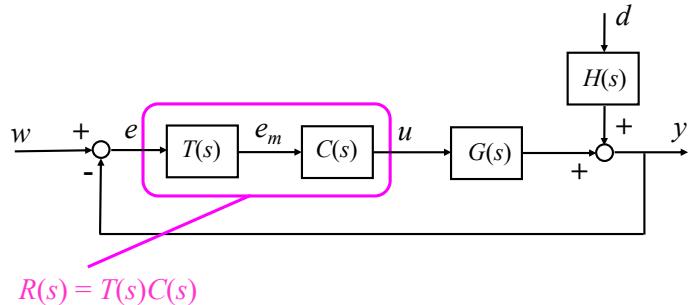
## Schema

1. Funzioni di trasferimento in anello chiuso
2. Funzioni di sensitività
3. Rappresentazioni equivalenti
4. Esempio

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 20

2

### 1. Funzioni di trasferimento in anello chiuso

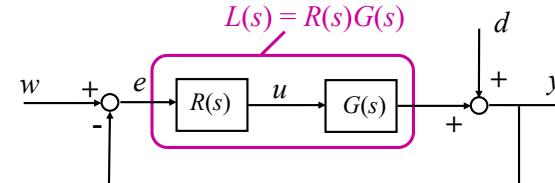


per il momento supponiamo  $H(s) = 1$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 20

3

$$L(s) = R(s)G(s)$$



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s)$$

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s)$$

$$\frac{U(s)}{W(s)} = \frac{R(s)}{1 + L(s)} = Q(s)$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s)$$

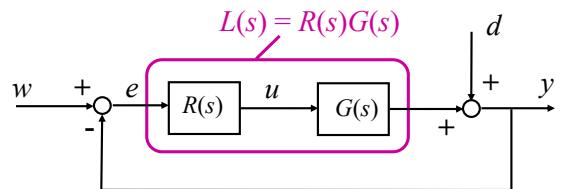
$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{1 + L(s)} = -S(s)$$

$$\frac{U(s)}{D(s)} = \frac{-R(s)}{1 + L(s)} = -Q(s)$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 20

4

## 2. Funzioni di sensitività



$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

funzione di sensitività complementare

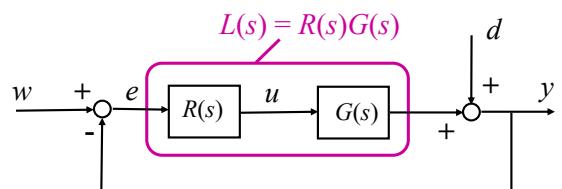
$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

funzione di sensitività

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

funzione di sensitività del controllo

## Esempio



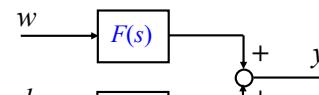
$$R(s) = \frac{10}{s}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$



$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

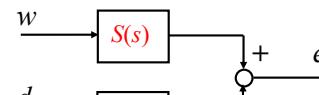
## 3. Rappresentazioni equivalenti



$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

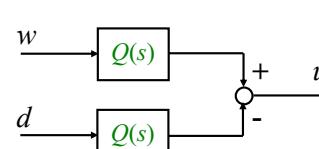
prestazioni  
ideali

~ 1



$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

~ 0



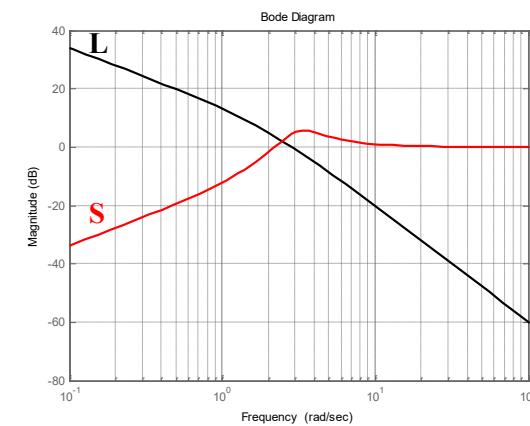
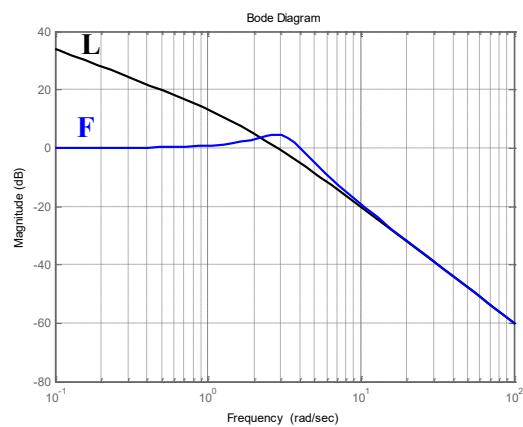
$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

~ 0

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+2)}}{1 + \frac{10}{s(s+2)}} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \frac{10}{s(s+2)}} = \frac{s(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{10}{s}}{1 + \frac{10}{s(s+2)}} = \frac{10(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$



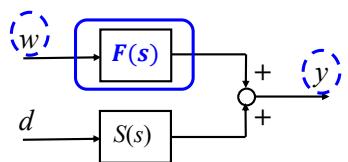
## Lezione 21. Analisi delle prestazioni di sistemi retroazionati (b)

Sensitività complementare

### Schema

1. Analisi statica di  $F(s)$
2. Poli e zeri di  $F(s)$
3. Risposta in frequenza di  $F(s)$
4. Poli dominanti di  $F(s)$   
(valutazione approssimata dello smorzamento dei poli dominanti)
5. Esempi

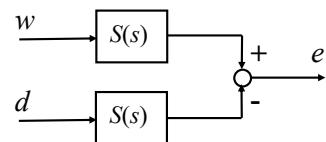
## Funzione di sensitività complementare



prestazioni  
ideali

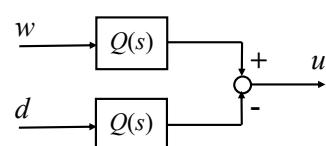
$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$\sim 1$



$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$\sim 0$



$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

$\sim 0$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 21

3

## 2. Poli e zeri di $F(s)$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}$$

$$F(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s) + N_L(s)}$$

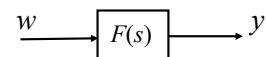


- gli zeri di  $F(s)$  sono gli zeri di  $L(s)$
- i poli di  $F(s)$  sono le radici di  $D_L(s) + N_L(s) = 0$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 21

5

## 1. Analisi statica di $F(s)$



$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_i (1 + sT_i)}$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$w(t) = Asca(t)$

Valore di regime della risposta allo scalino

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \frac{A}{s} = A \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} =$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{s^g + \mu} = \begin{cases} A & g > 0 \quad \Rightarrow \mu_F = 1 \\ A \frac{\mu}{1 + \mu} & g = 0 \quad \Rightarrow \mu_F \approx 1 \\ 0 & g < 0 \end{cases}$$

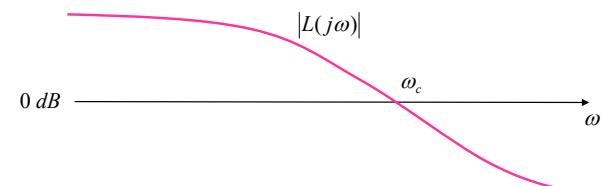
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 21

4

## 3. Risposta in frequenza di $F(s)$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

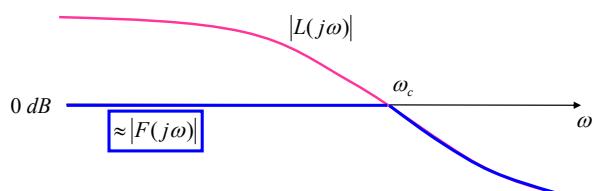
$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 21

6

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \approx \begin{cases} 1 & \overbrace{|L(j\omega)|}^{>>1} \\ |L(j\omega)| & \overbrace{|L(j\omega)|}^{<<1} \\ & \omega > \omega_c \end{cases}$$



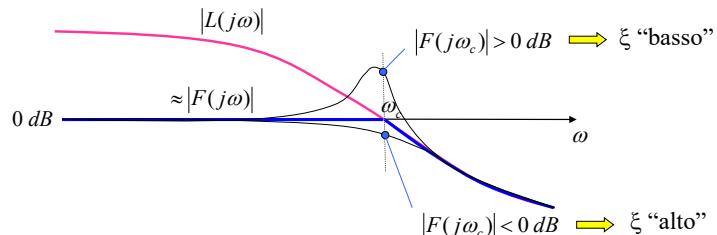
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 21

7

#### 4. Poli dominanti di $F(s)$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad \text{i poli dominanti di } F(s) \text{ cadono in corrispondenza di } \omega_c$$

? reali o complessi?  
se complessi, smorzamento?



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 21

9

#### Conclusioni (dei punti 1,2,3)

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

✓  $F(s)$  è un **filtro passa-basso**

- ✓ la banda passante di  $F(s)$  è  $B_F \cong [0, \omega_c]$
- ✓ il guadagno di  $F(s)$  è  $\mu_F \cong 1$  in realtà  $\begin{cases} \mu_F = 1 & \text{se } g > 0 \\ \mu_F = \frac{\mu}{1+\mu} & \text{se } g = 0 \end{cases}$
- ✓ i poli dominanti di  $F(s)$  cadono in corrispondenza di  $\omega_c$

? **poli dominanti reali o complessi?  
se complessi, qual è il loro smorzamento?**

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 21

8

Nota preliminare:  $L(j\omega_c)$  ha modulo unitario e fase pari alla fase critica

$$\begin{cases} |L(j\omega_c)| = 1 \\ \angle L(j\omega_c) = \varphi_c \end{cases} \xrightarrow{\quad} L(j\omega_c) = e^{j\varphi_c}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 21

10

### Primo passo

➤ Calcoliamo il valore esatto di  $|F(j\omega_c)|$

$$L(j\omega_c) = e^{j\varphi_c}$$

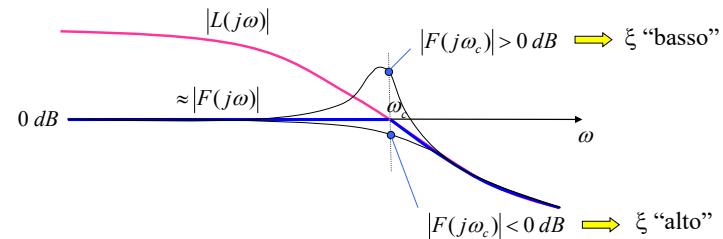
$$|F(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{|1 + \cos \varphi_c + j \sin \varphi_c|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos \varphi_c)^2 + \sin^2 \varphi_c}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_m)}}$$

$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$

$$\cos \varphi_m = \cos^2 \left( \frac{\varphi_m}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\varphi_m}{2} \right)$$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_m)}} = \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \left( \frac{\varphi_m}{2} \right)}} = \boxed{\frac{1}{2 \sin \left( \frac{\varphi_m}{2} \right)}}$$



Come posso correlare questa quantità allo smorzamento di due poli complessi coniugati con pulsazione naturale  $\omega_c$ ?

### Secondo passo

➤ Se  $F(s)$  avesse due poli dominanti complessi coniugati in  $\omega_c$ :

$$F(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2}$$

Il valore di  $|F(j\omega_c)|$  sarebbe:

$$|F(j\omega_c)| = \left| \frac{\omega_c^2}{(j\omega_c)^2 + 2\xi\omega_c j\omega_c + \omega_c^2} \right| = \frac{\omega_c^2}{|2j\xi\omega_c^2|} = \boxed{\frac{1}{2\xi}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2 \sin \left( \frac{\varphi_m}{2} \right)}}$$



$$\boxed{\frac{1}{2\xi}}$$

Valutazione approssimata

Calcolo esatto

### Conclusioni (del punto 4)

Valutazione approssimata dello smorzamento dei poli dominanti di  $F(s)$

Lo **smorzamento dei poli dominanti di  $F(s)$**  vale

$$\xi \cong \sin \left( \frac{\varphi_m}{2} \right)$$

o anche, con ulteriori approssimazioni, per piccoli valori di  $\varphi_m$

$$\xi \cong \sin \left( \frac{\varphi_m}{2} \right) \cong \frac{\varphi_m}{2} \frac{\pi}{180^\circ} \cong \frac{\varphi_m}{100}$$

$$\boxed{\xi \cong \frac{\varphi_m}{100}}$$

E se non fossero complessi coniugati?

### Regola empirica

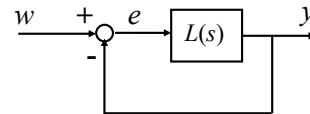
$\varphi_m \lesssim 75^\circ$   poli dominanti complessi con

$$\begin{aligned}\omega_n &\cong \omega_c \\ \xi &\cong \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)\end{aligned}$$

$\varphi_m \gtrsim 75^\circ$   polo dominante reale con

$$\tau \cong \frac{1}{\omega_c}$$

### **Esempio 1**



$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

Per verificare i risultati, si calcoli la  $F$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+2)}}{1 + \frac{10}{s(s+2)}} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{1}{1 + 0.2s + 0.1s^2}$$

### Analisi statica

Risposta allo scalino  $w(t) = A \text{sgn}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g = 1 \quad \Rightarrow \quad y(\infty) = A \quad (\text{cioè } \mu_F = 1)$$

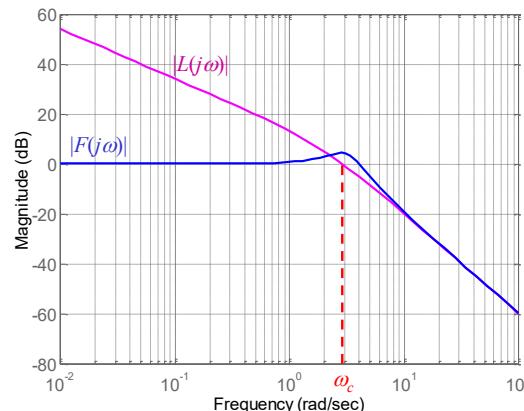
Verifica  $\mu_F = F(0) = 1$

### Poli & zeri

$$\begin{aligned}L(s) &= \frac{10}{s(s+2)} & N_L(s) &= 10 \\ D_L(s) &= s(s+2) \\ N_L(s) + D_L(s) &= s(s+2) + 10 = s^2 + 2s + 10\end{aligned}$$

$$\text{Verifica } F(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{N_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)}$$

### Risposta in frequenza



Dal grafico ricavo  $\omega_c \cong 2.9 \text{ rad/sec}$  e  
calcolo  $\varphi_c \cong -145^\circ$ .4 da cui  $\varphi_m \cong 34^\circ.6$

Posso quindi ricavare dei valori approssimati per pulsazione naturale  $\omega_n$  e smorzamento  $\xi$  dei poli dominanti in anello chiuso

$$\omega_n \cong \omega_c \cong 2.9 \text{ rad/sec}$$

$$\xi \cong \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \cong 0.30$$

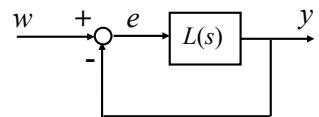
$$\xi \cong \frac{\varphi_m}{100} \cong 0.35$$

### Valori esatti

$$\xi = 0.32$$

$$\omega_n = 3.16 \text{ rad/sec}$$

## Esempio 2



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)}$$

Per verificare i risultati, si calcoli la  $F$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{10}{(1+s)(1+0.01s)}}{1+\frac{10}{(1+s)(1+0.01s)}} = \\ &= \frac{10}{11+1.01s+0.01s^2} = \frac{1000}{s^2 + 101s + 1100} \end{aligned}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 21

19

## Analisi statica

Risposta allo scalino  $w(t) = Asca(t)$

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)} \quad g = 0 \quad \Rightarrow \quad y(\infty) = A \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{10}{11} A$$

$$\text{Verifica } \mu_F = F(0) = \frac{10}{11}$$

## Poli & zeri

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)} \quad N_L(s) = 10 \quad D_L(s) = (1+s)(1+0.01s)$$

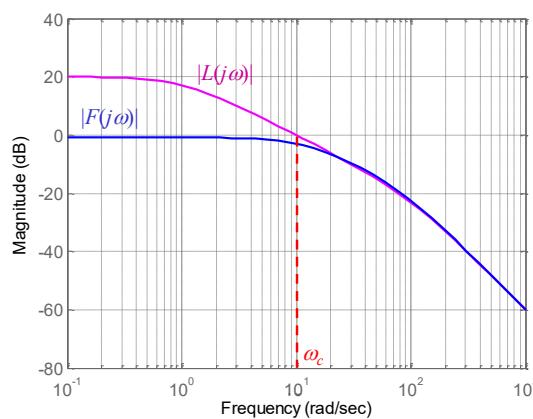
$$N_L(s) + D_L(s) = (1+s)(1+0.01s) + 10 = 11 + 1.01s + 0.01s^2$$

$$\text{Verifica } F(s) = \frac{10}{11 + 1.01s + 0.01s^2} = \frac{N_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 21

20

## Risposta in frequenza



Dal grafico ricavo  $\omega_c \cong 10 \text{ rad/s}$  e  
calcolo  $\varphi_c \cong -90^\circ$  da cui  $\varphi_m \cong 90^\circ$

Posso quindi ricavare  
un valore approssimato  
per la posizione del  
polo dominante reale in  
anello chiuso

$$\tau \cong \frac{1}{\omega_c} \cong 0.1 \text{ s}$$

## Valori esatti

$$\begin{aligned} \text{I poli della } F(s) \text{ sono in} \\ s_1 = -12.4 \\ s_2 = -88.6 \end{aligned}$$

Il polo in  $s_1 = -12.4$  è  
il polo dominante e la  
sua costante di tempo è  
 $\tau = \frac{1}{12.4} \cong 0.08 \text{ s}$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 21

21

## Lezione 22. Analisi delle prestazioni di sistemi retroazionati (c)

### Sensitività

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 22

1

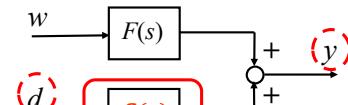
## Schema

1. Analisi statica di  $S(s)$  (risposta allo scalino)
2. Analisi statica di  $S(s)$  (risposta alla rampa)
3. Tabelle valori di regime di uscita ed errore
4. Poli e zeri di  $S(s)$
5. Risposta in frequenza di  $S(s)$
6. Esempio

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 22

2

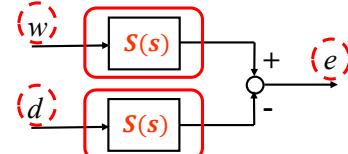
## Funzione di sensitività



$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

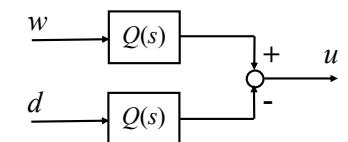
prestazioni  
ideali

$\sim 1$



$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$\sim 0$



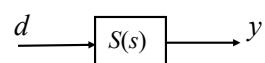
$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

$\sim 0$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 22

3

## 1. Analisi statica di $S(s)$ – risposta allo scalino



$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_i (1 + sT_i)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \text{dashed red box around } d(t) = \text{Asca}(t)$$

Valore di regime della risposta allo scalino

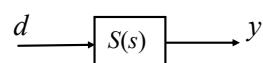
$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{A}{s} = A \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} =$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{s^g + \mu} = \begin{cases} 0 & g > 0 \\ A \frac{1}{1 + \mu} & g = 0 \quad \Rightarrow \mu_s \equiv 0 \\ A & g < 0 \quad \Rightarrow \mu_s = 1 \end{cases}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 22

4

## 2. Analisi statica di $S(s)$ – risposta alla rampa



$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_i (1 + sT_i)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \text{dashed red box around } d(t) = \text{A ram}(t)$$

Valore di regime della risposta alla rampa

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{A}{s^2} = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S(s)}{s} = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1 + L(s))} =$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-1}}{s^g + \mu} = \begin{cases} 0 & g > 1 \\ \frac{A}{\mu} & g = 1 \\ \infty & g < 1 \end{cases}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 22

5

### 3.a Tabella riassuntiva: uscita

Valore di regime  $y(\infty)$  in risposta a  $d(t)$

	$A \text{ sca}(t)$	$A \text{ ram}(t)$	$A \text{ par}(t)$
$g = 0$	$\frac{A}{1 + \mu}$	$\infty$	$\infty$
$g = 1$	0	$\frac{A}{\mu}$	$\infty$
$g = 2$	0	0	$\frac{A}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

### 3.b Tabella riassuntiva: errore

Valore di regime  $|e(\infty)|$  in risposta a  $w(t)$  oppure a  $d(t)$

	$A \text{ sca}(t)$	$A \text{ ram}(t)$	$A \text{ par}(t)$
$g = 0$	$\frac{A}{1 + \mu}$	$\infty$	$\infty$
$g = 1$	0	$\frac{A}{\mu}$	$\infty$
$g = 2$	0	0	$\frac{A}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

### 4. Poli e zeri di $S(s)$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}$$

$$S(s) = \frac{D_L(s)}{D_L(s) + N_L(s)}$$

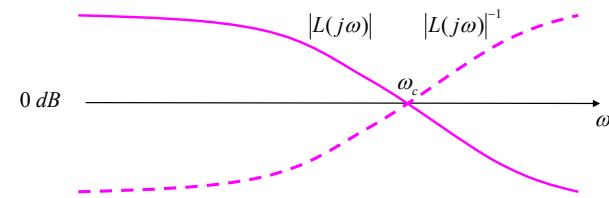


- gli zeri di  $S(s)$  sono i poli di  $L(s)$
- i poli di  $S(s)$  sono le radici di  $D_L(s) + N_L(s) = 0$ 
  - già studiate

### 5. Risposta in frequenza di $S(s)$

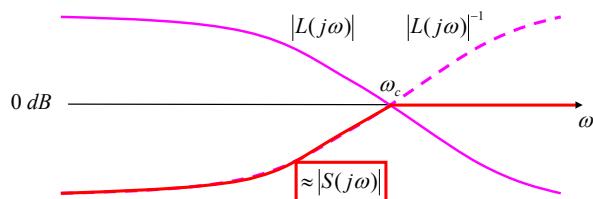
$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & |L(j\omega)| \gg 1 \\ 1 & |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$



$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1+L(j\omega)|} \cong \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & |L(j\omega)| \gg 1 \\ 1 & = 0 \text{ dB} \\ \frac{1}{|L(j\omega)|} & |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

$\omega < \omega_c$   
 $\omega > \omega_c$

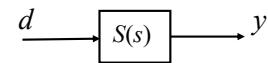


F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 22

10

### Conclusioni

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$



✓  $S(s)$  è un **filtro passa-alto**

✓ la banda passante di  $S(s)$  è  $B_S \cong [\omega_c, \infty]$



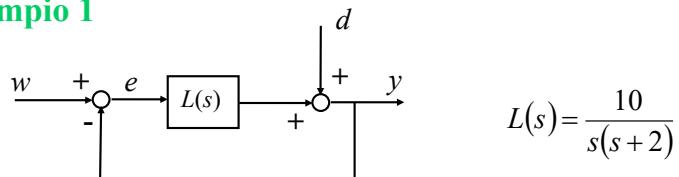
✓ il disturbo  $d$  viene attenuato solo in  $[0, \omega_c]$

✓ l'attenuazione in questa banda è circa uguale a  $\frac{1}{|L(j\omega)|}$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 22

11

### Esempio 1



$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+\frac{10}{s(s+2)}} = \frac{s^2+2s}{s^2+2s+10} = \frac{0.2s(1+0.5s)}{1+0.2s+0.1s^2}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 22

12

### Analisi statica

Risposta allo scalino  $d(t) = A \text{asca}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g=1 \quad \Rightarrow \quad y(\infty) = 0 \quad |e(\infty)| = 0$$

Verifica  $\mu_s = S(0) = 0$

Risposta alla rampa  $d(t) = A \text{aram}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g=1 \quad \Rightarrow \quad y(\infty) = \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5} \quad |e(\infty)| = \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 22

13

Risposta allo scalino  $w(t) = A \text{scal}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g=1 \quad \Rightarrow |e(\infty)| = 0$$

Verifica  $\mu_s = S(0) = 0$

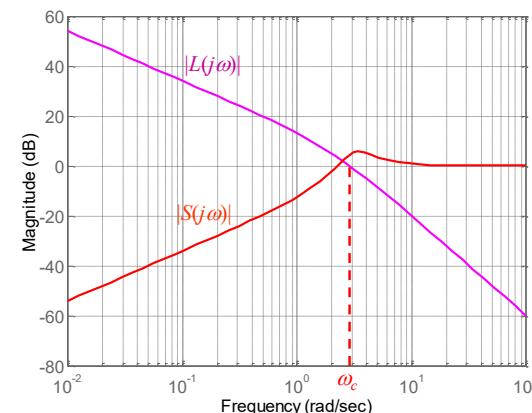
Risposta alla rampa  $w(t) = A \text{ram}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g=1 \quad \Rightarrow |e(\infty)| = \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5}$$

## Lezione 23. Analisi delle prestazioni di sistemi retroazionati (d)

Sensitività del controllo

### Risposta in frequenza



Per  $\omega \leq 0.4$   $\Rightarrow$  attenuazione di almeno 20 dB

$$d(t) = \sin(\omega t)$$

$$|S(j\omega)|$$

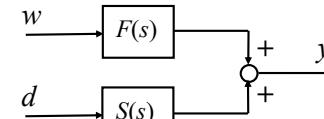
ampiezza a regime di  $y(t)$  e di  $e(t)$

$$w(t) = \sin(\omega t)$$

$$|S(j\omega)|$$

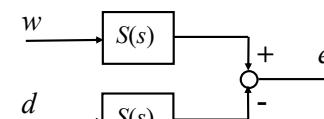
ampiezza a regime di  $e(t)$

### Funzione di sensitività del controllo



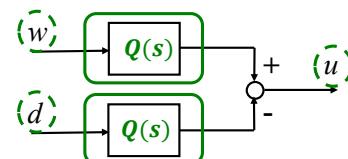
$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

prestazioni ideali  
~ 1



$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

~ 0



$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

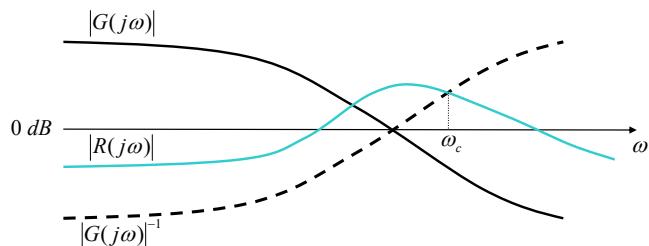
$\sim 0$

utile per valutare la **moderazione**

## Risposta in frequenza di $Q(s)$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)} \quad L(s) = R(s)G(s)$$

$$|Q(j\omega)| = \frac{|R(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \cong \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} = -|G(j\omega)|_{dB} & |L(j\omega)| \gg 1 \\ |R(j\omega)| & |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

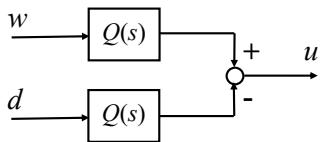


F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 23

3

## Conclusioni

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)}$$



per avere **buona moderazione** occorre avere

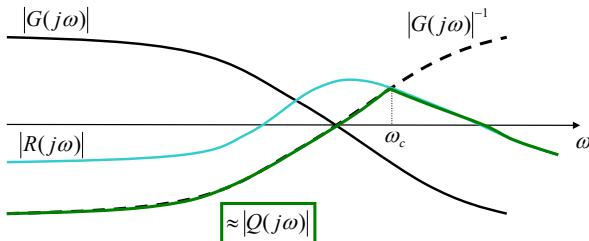
➤  $|G(j\omega)|$  "grande" per  $\omega < \omega_c$

➤  $|R(j\omega)|$  "piccolo" per  $\omega > \omega_c$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 23

5

$$|Q(j\omega)| = \frac{|R(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \cong \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} = -|G(j\omega)|_{dB} & |L(j\omega)| \gg 1 \\ |R(j\omega)| & |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

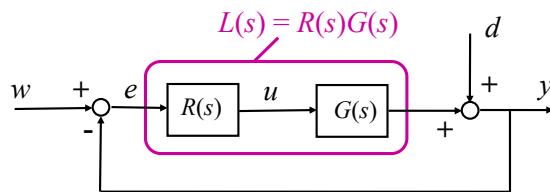


In banda di controllo la funzione di sensitività del controllo è il modello inverso!

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 23

4

## Esempio



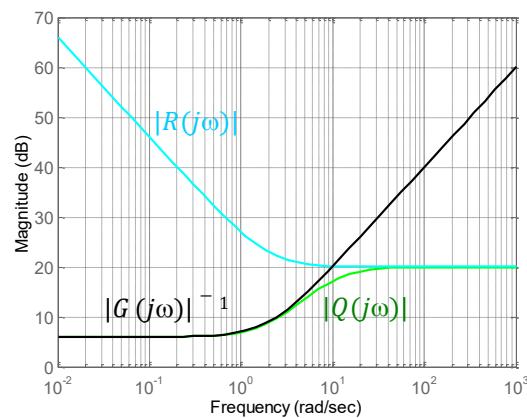
$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad R(s) = \frac{10(s+2)}{s} \quad \Rightarrow \quad L(s) = \frac{10}{s}$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{10(s+2)}{s}}{1+\frac{10}{s}} = \frac{10(s+2)}{s+10} = \frac{2(1+0.5s)}{1+0.1s}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 23

6

## Risposta in frequenza

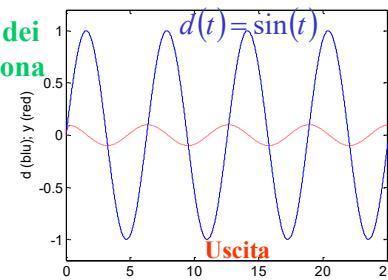


Ingressi con componenti armoniche a pulsazioni superiori a 40 rad/s vengono amplificate di 20 dB.

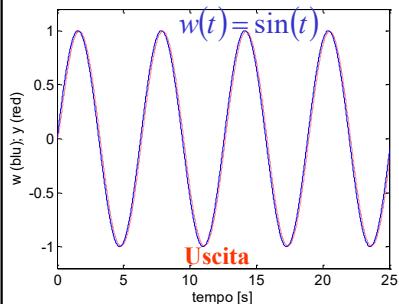
Per "andar veloce" devo usare azioni di controllo intense con i problemi connessi (costo attuatori, saturazione attuatori, etc...)

## In banda di controllo [0,10]

### Reiezione dei disturbi buona



### Tracking ottimo

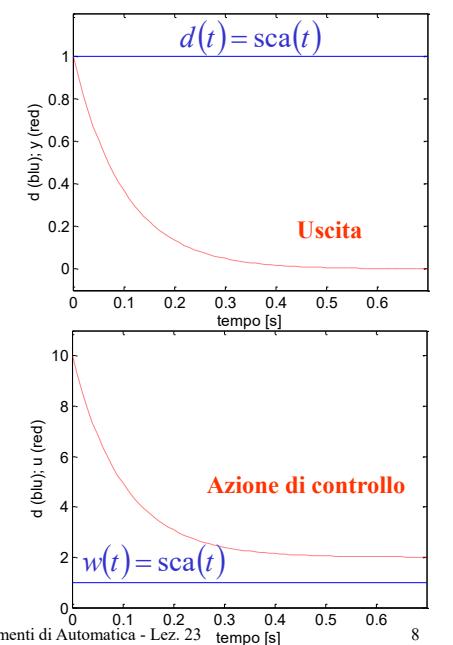
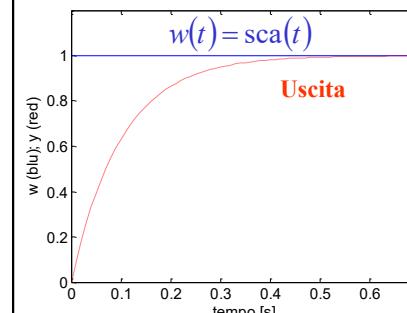


### Moderazione del controllo "buona"

## Esempio riassuntivo

### Analisi statica

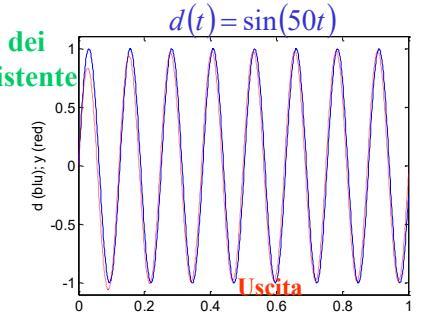
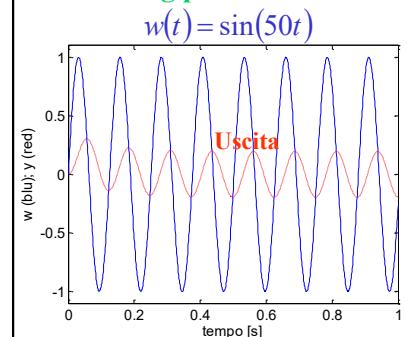
#### Precisione statica ottima



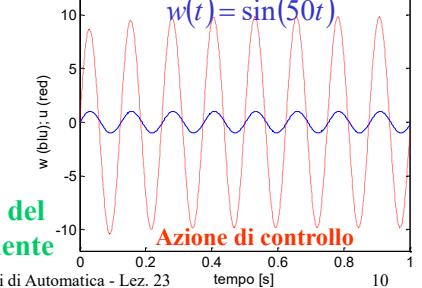
## Fuori banda di controllo [10, ∞)

### Reiezione dei disturbi inesistente

#### Tracking pessimo



#### Moderazione del controllo scadente



# Lezione 24. Estensioni dell'analisi di sistemi retroazionati

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

1

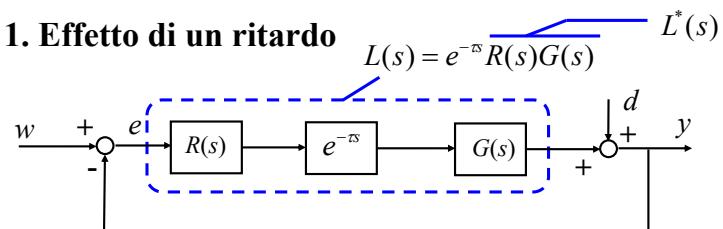
## Schema

1. Effetto di un ritardo
2. Blocchi in anello aperto
3. Disturbi sull'attuatore
4. Disturbi sul trasduttore

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

2

### 1. Effetto di un ritardo



- non modifica le prestazioni statiche       $\lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} L^*(s)$
- non modifica  $\omega_c$        $|L(j\omega)| = |L^*(j\omega)|$
- fa diminuire  $\varphi_m$   
 $\varphi_c = \arg L(j\omega_c) = \arg L^*(j\omega_c) - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi}$   
 $\varphi_m = \varphi_m^* - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi}$   
↓  
 diminuisce lo smorzamento  
 dei poli in anello chiuso
- può influenzare la stabilità      vedi criteri Nyquist e Bode

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

3

### Esempio

$$L^*(s) = \frac{0.1}{s(s^2 + s + 1)}$$

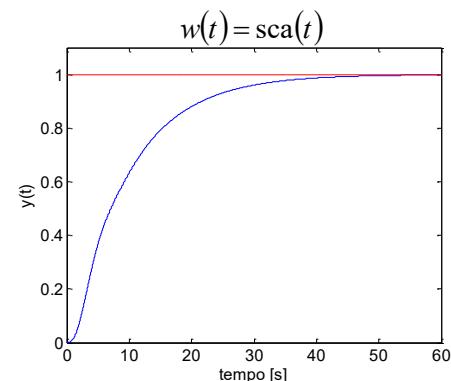
$$\omega_c = 0.101 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m^* = 84.2^\circ$$

Tempo di assestamento  
 della risposta allo scalino  
 in anello chiuso

$$t_a \cong \frac{5}{\omega_c} \cong \frac{5}{0.101} \cong 50 \text{ s}$$

(polo dominante reale)



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

4

Introducendo un **ritardo di 8 s**  $L(s) = \frac{0.1}{s(s^2 + s + 1)} e^{-8s}$

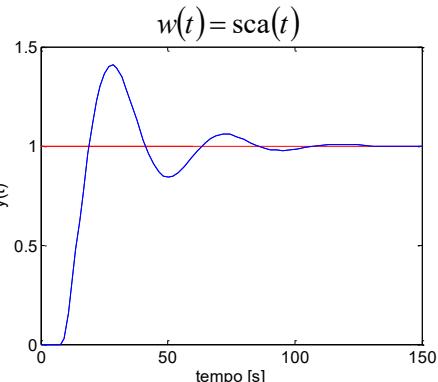
$\omega_c = 0.101 \text{ rad/s}$

$\varphi_m = 84.2^\circ - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 0.101 \cdot 8 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 46.3^\circ = 37.9^\circ$

Tempo di assestamento  
della risposta allo scalino  
in anello chiuso

$t_a \cong \frac{5}{\xi \omega_n} \cong \frac{5}{\frac{\varphi_m}{100} \omega_c} \cong \frac{500}{\varphi_m \omega_c} \cong 130 \text{ s}$

(poli dominanti complessi)



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

5

**Instabile!**

Introducendo un **ritardo di 20 s**  $L(s) = \frac{0.1}{s(s^2 + s + 1)} e^{-20s}$

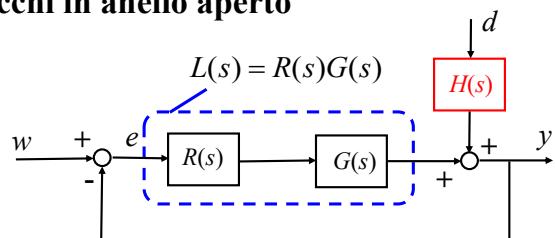
$\omega_c = 0.101 \text{ rad/s}$

$\varphi_m = 84.2^\circ - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 0.101 \cdot 20 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 115.7^\circ = -31.5^\circ$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

6

## 2. Blocchi in anello aperto



$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s)}{1 + L(s)} = \frac{H(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{H(s)}{1 + H(s)S(s)} \\ &= H(s)S(s) \end{aligned}$$

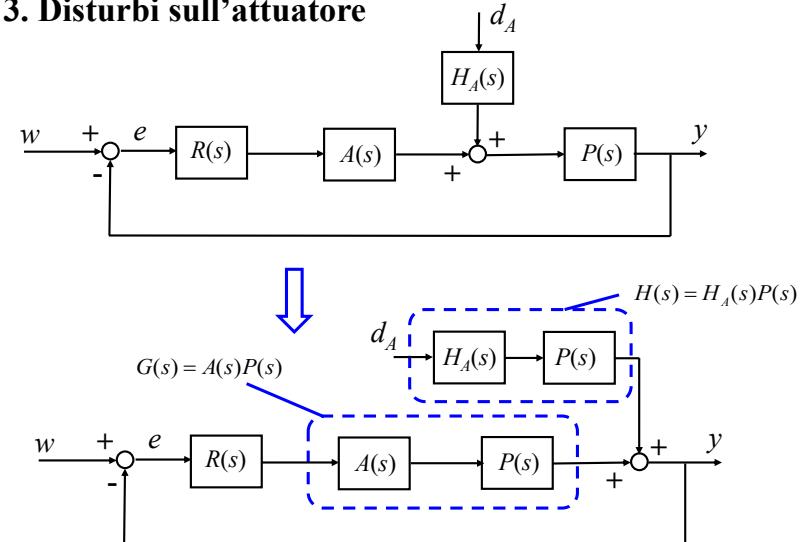
ad esempio  $\mu_M = \mu_H \mu_S$

 $|M(j\omega)| = |H(j\omega)| |S(j\omega)|$ 
 $|M(j\omega)|_{dB} = |H(j\omega)|_{dB} + |S(j\omega)|_{dB}$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

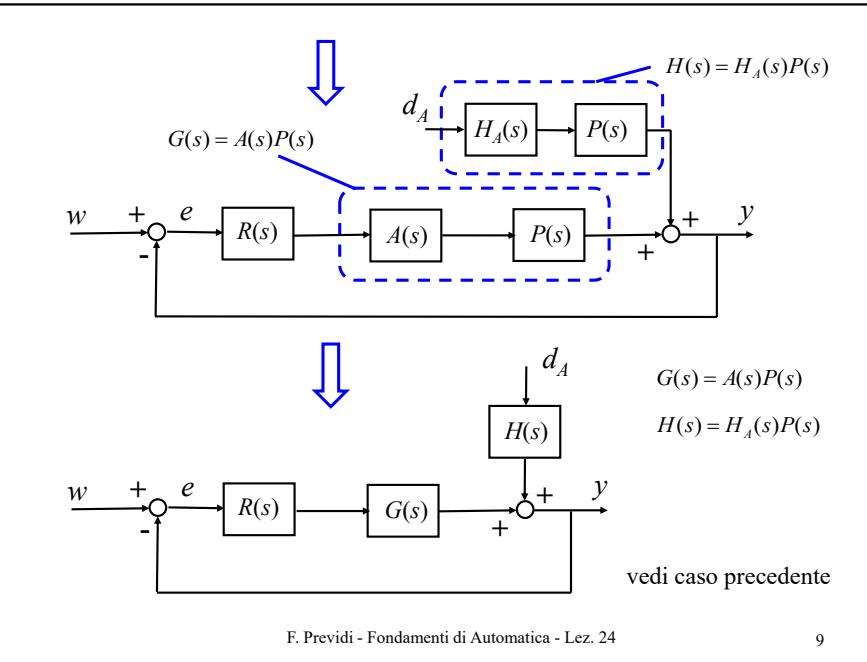
7

## 3. Disturbi sull'attuatore



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

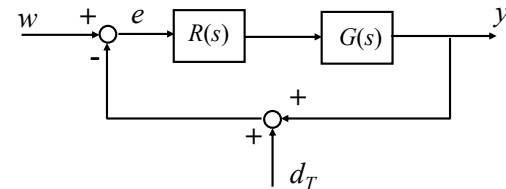
8



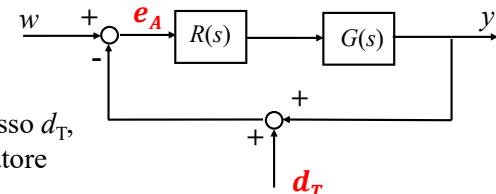
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

9

#### 4. Disturbi sul trasduttore



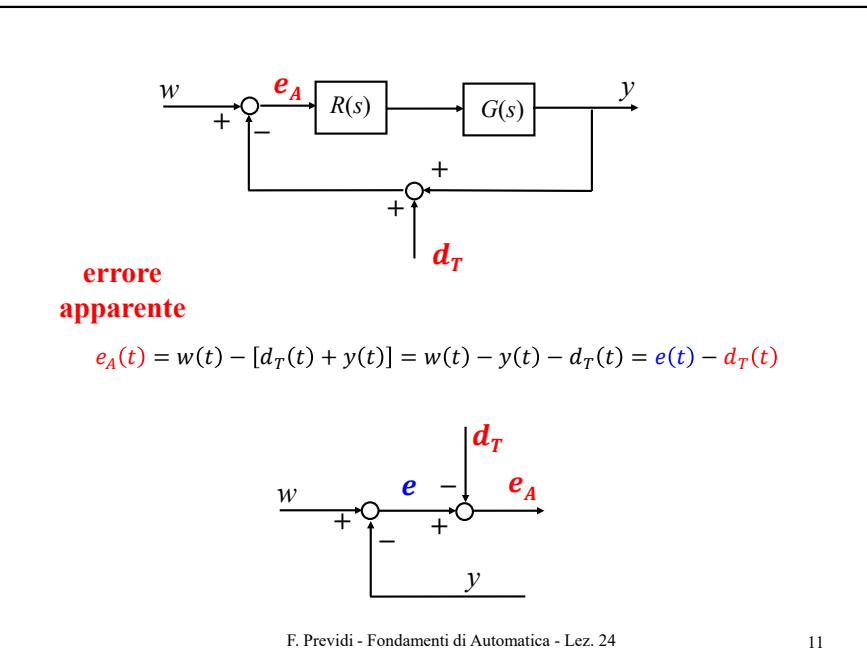
Qual'è la funzione di trasferimento da  $d_T$  a  $e_A$ ?



Quando è attivo l'ingresso  $d_T$ ,  
a valle del nodo sommatore  
non c'è l'errore!

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

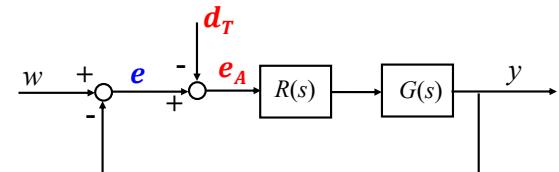
10



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

11

Come si può calcolare la funzione di trasferimento da  $d_T$  a  $e$ ?



$$\frac{E(s)}{D_T(s)} = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s)$$

$$\frac{Y(s)}{D_T(s)} = \frac{-R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = -\frac{L(s)}{1 + L(s)} = -F(s)$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 24

12

Della funzione di trasferimento  $F(s)$  sappiamo già tutto

E' un filtro passa-basso con banda passante  $B_F \cong [0, \omega_c]$

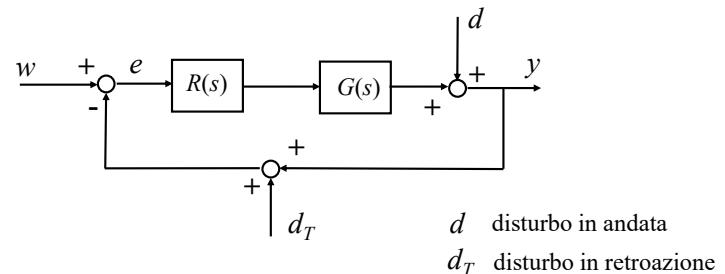
- il disturbo  $d_T$  viene attenuato solo in  $[\omega_c, \infty]$
- l'attenuazione in questa banda è circa uguale a  $|L(j\omega)|$

➡ attenzione ai disturbi "lenti" sul trasduttore!

(Il controllore elimina automaticamente il "rumore" sul sensore,  
ma non può compensare un "offset" – cattiva taratura etc...)

## Lezione 25. Introduzione al progetto

### Riepilogo sull'attenuazione dei disturbi



il sistema di controllo è capace di attenuare

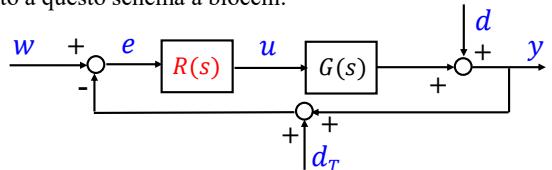
- le componenti "lente" di  $d$       ( $\omega < \omega_c$ )
- le componenti "veloci" di  $d_T$       ( $\omega > \omega_c$ )

### Schema

1. Il problema del progetto
2. Specifiche di progetto
3. Formulazione delle specifiche
4. Loop shaping
5. Progetto statico
6. Progetto dinamico

## 1. Il problema del progetto

Per presentare i metodi di progettazione dei sistemi di controllo, faremo riferimento a questo schema a blocchi.



$G(s)$  è la funzione di trasferimento del sistema sotto controllo (NOTA)

$R(s)$  è la funzione di trasferimento del controllore (NON NOTA).

L'obiettivo è determinare  $R(s)$  in modo che il sistema retroazionato soddisfi alcune specifiche assegnate a fronte di andamenti assegnati degli ingressi.

Nel seguito si assumerà che la funzione di trasferimento d'anello

$$L(s) = R(s)G(s)$$

soddisfi le condizioni di applicabilità del criterio di Bode.

- ✓ Precisione statica →  $g > 0$  e/o  $\mu$  elevato
- ✓ Precisione dinamica
  - velocità →  $\omega_c$  elevata
  - smorzamento →  $\varphi_m$  elevato
- ✓ Attenuazione disturbi in andata →  $|L(j\omega)| \gg 0$  dB per  $\omega < \omega_c$  ( $\omega_c$  elevata)
- ✓ Attenuazione disturbi in retroazione →  $|L(j\omega)| \ll 0$  dB per  $\omega > \omega_c$  ( $\omega_c$  non elevata)
- ✓ Realizzabilità del regolatore →  $R(s)$  almeno propria

## 2. Specifiche di Progetto

Facendo riferimento alla funzione d'anello  $L(s)$  ed in particolare:

- al suo **guadagno  $\mu$** ,
- al suo **tipo  $g$** ,
- alla sua **pulsazione critica  $\omega_c$**
- al **margine di fase  $\varphi_m$**  ed al **margine di guadagno  $k_m$**  del sistema retroazionato

✓ As. stabilità del sistema retroazionato  
(in condizioni nominali)

→ Criterio di Bode  
 $\mu > 0$  &  $\varphi_m > 0^\circ$

✓ Stabilità robusta

→  $\varphi_m$  e/o  $k_m$  elevati

## 3. Formulazione delle specifiche di progetto

### Specifiche statiche

$|e(\infty)| \leq \bar{e}$  con  $w(t)$ ,  $d(t)$  e (a volte)  $d_T(t)$  assegnati  
 $e(\infty) = 0$  (di solito scalini e/o rampe)

### Specifiche dinamiche

✓  $\omega_{\min} \leq \omega_c \leq \omega_{\max}$  → specifica di velocità  
 ✓  $\varphi_m \geq \bar{\varphi}_m$  → specifica di robustezza  
 ✓  $k_m \geq \bar{k}_m$  → specifica di guadagno

Altre formulazioni delle specifiche possono essere trasformate nelle precedenti.

### Specifiche dinamica di velocità

- ✓ Tempo di assestamento della risposta allo scalino del sistema retroazionato  $t_a < \bar{t}$

□ Se  $F(s)$  ha poli dominanti complessi  $\rightarrow \omega_c > \frac{500}{\bar{\varphi}_m \bar{t}}$

$$\text{Infatti } t_a \cong \frac{5}{\xi \omega_n} \cong \frac{500}{\bar{\varphi}_m \omega_c} < \bar{t} \rightarrow \omega_c > \frac{500}{\bar{\varphi}_m \bar{t}}$$

Quale valore per  $\varphi_m$ ?

Se c'è una specifica di robustezza ( $\varphi_m \geq \bar{\varphi}_m$ ) si sceglie il limite di tale specifica.

□ Se  $F(s)$  ha polo dominante reale  $\rightarrow \omega_c > \frac{5}{\bar{t}}$

$$\text{Infatti } t_a \cong \frac{5}{\omega_c} < \bar{t} \rightarrow \omega_c > \frac{5}{\bar{t}}$$

### Esempio

Progettare un controllore  $R(s)$  per una assegnata  $G(s)$  in modo che:

- ✓ la risposta allo scalino del sistema retroazionato abbia tempo di assestamento  $t_a < 5$  s
- ✓ il margine di fase del sistema retroazionato sia  $\varphi_m \geq 30^\circ$

La specifica sul tempo di assestamento si può tradurre nella seguente

$$\omega_c > \frac{500}{\bar{\varphi}_m \bar{t}} = \frac{500}{30 \cdot 5} = \frac{10}{3} \text{ rad/s}$$

### Specifiche dinamica di robustezza

- ✓ Massima sovraelongazione percentuale  $S\% < \bar{S}$

$$\text{Infatti } S\% = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \& \quad \xi \cong \frac{\varphi_m}{100}$$

$$\varphi_m > \frac{100 \ln\left(\frac{100}{\bar{S}}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{100}{\bar{S}}\right)\right)^2}}$$

E' possibile dare specifiche più precise per la reiezione dei disturbi. Per esempio è possibile richiedere uno specifico valore di attenuazione (**N dB**) di disturbi in una certa banda  $[\omega_1, \omega_2]$ .

- Disturbo sulla **linea di andata** nella banda  $[\omega_1, \omega_2]$  attenuato di almeno  $N$  dB

$$|L(j\omega)| \geq N \text{ dB} \quad \text{per } \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (\text{con } \omega_c \geq \omega_2)$$

- Disturbo sulla **linea di retroazione** nella banda  $[\omega_1, \omega_2]$  attenuato di almeno  $N$  dB

$$|L(j\omega)| \leq -N \text{ dB} \quad \text{per } \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (\text{con } \omega_c \leq \omega_1)$$

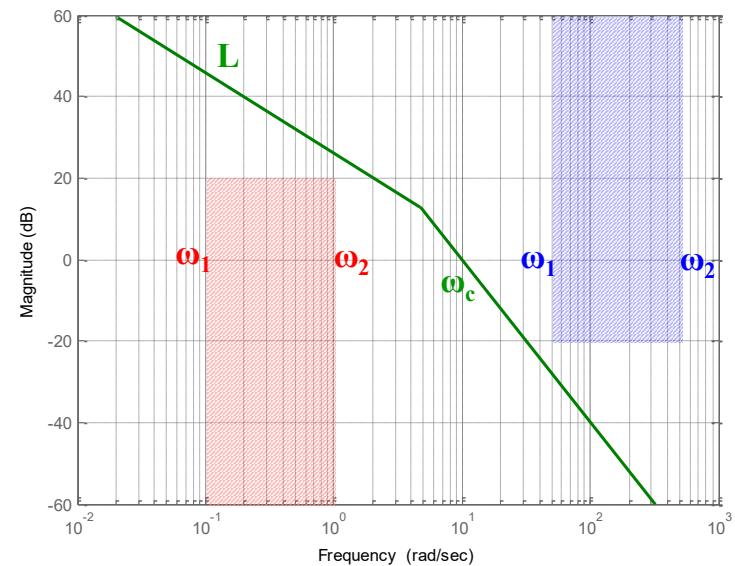
## Esempio

Progettare un controllore  $R(s)$  per una assegnata  $G(s)$  in modo tale che:

- attenui un disturbo **in andata** con banda  $[0.1, 1]$  di almeno 20 dB;
- attenui un disturbo **in retroazione** con banda  $[50, 500]$  di almeno 20 dB.

Come deve essere fatta la  $L(s)$ ?

Dove è ragionevole cercare di mettere la  $\omega_c$ ?



## 4. Loop Shaping

1. Trasformare le specifiche di progetto in vincoli su  $L(s)$ .
2. Progetto statico (rispetto delle specifiche statiche)
3. Progetto dinamico (rispetto delle specifiche dinamiche)
  - a. Si procede per tentativi
  - b. Al termine di ogni tentativo si verifica se il controllore scelto rispetta le specifiche dinamiche

## Progetto statico e progetto dinamico

La funzione di trasferimento del controllore viene fattorizzata

$$R(s) = R_1(s)R_2(s)$$

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r}$$

Parte statica

↓  
Progetto statico

(soddisfare le specifiche statiche)

$$R_2(s) = \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$$

Parte dinamica  
(rete stabilizzatrice)

↓

Progetto dinamico

(soddisfare le specifiche dinamiche)

## 5. Progetto statico

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \quad \text{Parte statica}$$

La specifica statica viene formulata mediante valori desiderati per l'**errore a transitorio esaurito**  $e(\infty)$ .

Bisogna garantire la specifica statica **a fronte di andamenti assegnati per gli ingressi** (nel nostro caso il riferimento  $w(t)$  e, principalmente, il disturbo sulla linea di andata  $d(t)$ ).

L'obiettivo è **scegliere il tipo del controllore  $r$**  ed eventualmente, se necessario, **calcolare il valore di  $\mu_R$**  minimo per il rispetto delle specifiche (applicando il teorema del valore finale o le «tabelline» delle lezioni precedenti).

Di norma, nell'ambito dei problemi presentati in questo corso, si procede come segue.

1) Si calcola la funzione di trasferimento d'anello con  $G(s)$  nota e  $R(s)$  non nota

$$\begin{aligned} L(s) = R(s)G(s) &= R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+st_i)} G(s) = \\ &= \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\mu_G}{s^m} \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+st_i)} \frac{\prod_k(1+sT_k)}{\prod_k(1+st_k)} \end{aligned}$$

dove

$\mu = \mu_R \mu_G$  è il **guadagno d'anello** (con  $\mu_G$  noto e  $\mu_R$  da scegliere)

$g = r + m$  è il **tipo della funzione d'anello** (con  $m$  noto e  $r$  da scegliere)

L'errore a transitorio esaurito, per il principio di sovrapposizione degli effetti, è dato dalla somma dei contributi dovuti agli ingressi (riferimento e, più spesso, disturbo sulla linea di andata)

$$e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$$

Di norma, per avere un po' di margine, ci si mette nel caso pessimo, per cui vale sempre la seguente diseguaglianza

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty) + e_d(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

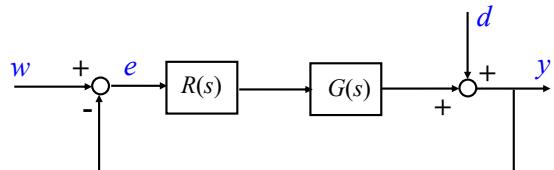
Ci si riconduce quindi a **calcolare i valori del modulo dell'errore a transitorio esaurito dovuti a ciascun ingresso**. Tali valori si possono leggere nelle tabelle delle lezioni precedenti oppure calcolare applicando il teorema del valore finale.

2) Ai fini del progetto statico è utile solo la parte statica della funzione d'anello, (la parte dinamica non conta, siamo nel limite per  $s \rightarrow 0$ !) e quindi, sulla base delle caratteristiche degli ingressi (**riferimento** e **disturbo sulla linea di andata**), si sceglieranno i valori più opportuni per il **tipo dell'anello  $g$**  (e di conseguenza per  $r$ , dal momento che  $m$  è noto) e **per il guadagno d'anello  $\mu$**  (e di conseguenza per  $\mu_R$  dal momento che  $\mu_G$  è noto) utilizzando le «tabelline» o applicando il teorema del valore finale.

3) Nel caso ci fossero altri ingressi, per esempio disturbi di carico o disturbi sulla linea di retroazione, bisogna calcolare anche il loro contributo (di norma applicando il teorema del valore finale).

## Alcuni esempi

Gli esempi qui presentati faranno sempre riferimento a questo schema di controllo.



Le funzioni di trasferimento sono

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{\mu_R \prod_i (1+sT_i)}{s^r \prod_i (1+s\tau_i)} \quad \text{Non NOTA}$$

$$G(s) = \frac{\mu_G \prod_k (1+sT_k)}{s^m \prod_k (1+s\tau_k)} \quad \text{NOTA}$$

Riprendiamo la «tabellina» che ci fornisce il valore del modulo dell'errore a regime a fronte di ingressi a scalino e rampa.

	$A \text{ sca}(t)$	$A \text{ ram}(t)$
Valore di regime $ e(\infty) $	$\frac{A}{1+\mu}$	$\infty$
in risposta a $w(t)$ oppure a $d(t)$	$0$	$\frac{A}{\mu}$
$g=2$	$0$	$0$
$g=3$	$0$	$0$



Gli ingressi sono scalini, quindi guardo la **prima colonna**.

## Esempio 1

Sistema sotto controllo

$$G(s) = \frac{10(1+0.1s)}{(1+s)^2}$$

Quindi, guadagno del sistema  $\mu_G = 10$  e tipo del sistema  $m = 0$ .

Specifiche statiche:

$$|e(\infty)| \leq 0.1 \quad \text{per } w(t) = sca(t) \text{ e } d(t) = -2sca(t)$$

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R \prod_i (1+sT_i)}{s^r \prod_i (1+s\tau_i)} \frac{10(1+0.1s)}{(1+s)^2} = \\ &= \frac{10\mu_R \prod_i (1+sT_i)}{s^r \prod_i (1+s\tau_i)} \frac{(1+0.1s)}{(1+s)^2} \end{aligned}$$

Il **guadagno d'anello** è  $\mu = 10\mu_R$ .

Il **tipo dell'anello** è  $g = r$ .

Scegliendo  $g = r = 0$  (prima riga) avrò

$$|e_w(\infty)| = \frac{1}{1 + 10\mu_R}$$

$$|e_d(\infty)| = \frac{2}{1 + 10\mu_R}$$

Per rispettare la specifica deve essere

$$|e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| \leq 0.1$$

cioè

$$\frac{3}{1 + 10\mu_R} \leq 0.1$$

da cui

$$\mu_R \geq 2.9$$

Quindi il progetto statico si conclude con le scelte di  $r = 0$  e di un valore di  $\mu_R$  che rispetti il vincolo  $\mu_R \geq 2.9$  (per esempio  $\mu_R = 4$ ).

Scegliendo  $g = r = 1$  (seconda riga) avrò

$$e_w(\infty) = 0$$

$$e_d(\infty) = 0$$

per qualsiasi valore del guadagno d'anello  $\mu = 10\mu_R$ .

**La presenza di un integratore nell'anello mi garantisce errore nullo a transitorio esaurito a fronte di andamento a scalino (di qualunque ampiezza) degli ingressi (riferimento e disturbo sulla linea di andata).**

La specifica

$$|e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| \leq 0.1$$

è quindi sempre rispettata per qualunque valore di  $\mu_R$  si voglia scegliere.

Quindi il progetto statico si conclude con la scelta di  $r = 1$ .

Il guadagno del controllore  $\mu_R$  verrà scelto durante il progetto dinamico (è una «carta in più da giocare» dopo).

## Esempio 2

Sistema sotto controllo

$$G(s) = \frac{8(1 + 0.5s)}{s(1 + 2s)(1 + 0.1s)}$$

Quindi, guadagno del sistema  $\mu_G = 8$  e tipo del sistema  $m = 1$ .

**Specifiche statiche:**

$$|e(\infty)| < 0.05 \quad \text{per } w(t) = 4sca(t) \text{ e } d(t) = sca(t)$$

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$\begin{aligned} L(s) = R(s)G(s) &= R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R \prod_i (1 + sT_i)}{s^r \prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{8(1 + 0.5s)}{s(1 + 2s)(1 + 0.1s)} = \\ &= \frac{8\mu_R \prod_i (1 + sT_i)}{s^{r+1} \prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{(1 + 0.5s)}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} \end{aligned}$$

Il **guadagno d'anello** è  $\mu = 8\mu_R$ .

Il **tipo dell'anello** è  $g = r + 1$ .

Quindi, concludendo, ci sono due possibili scelte per il progettista.

### Progetto statico A

$$r = 0 \quad \& \quad \mu_R = 4$$

$$R_1(s) = 4$$

### Progetto statico B

$$r = 1$$

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

Riprendiamo la «tabellina» che ci fornisce il valore del modulo dell'errore a regime a fronte di ingressi a scalino e rampa.

	$A \text{ sca}(t)$	$A \text{ ram}(t)$
$g = 0$	$\frac{A}{1 + \mu}$	$\infty$
$g = 1$	0	$\frac{A}{\mu}$
$g = 2$	0	0
$g = 3$	0	0



Gli ingressi sono scalini, quindi guardo la **prima colonna**.

Però so che  $g = r + 1$  e quindi **è sufficiente scegliere  $r = 0$  per avere un integratore nell'anello (seconda riga)** ed avere quindi valori nulli per i contributi all'errore a regime dovuti ad entrambi gli ingressi.

Quindi il progetto statico si conclude con la scelta di  $r = 0$ , mentre il guadagno del controllore  $\mu_R$  verrà scelto durante il progetto dinamico.

Quindi, concludendo, il progetto statico si conclude con la scelta

$$R_1(s) = \mu_R$$

Riprendiamo la «tabellina» che ci fornisce il valore del modulo dell'errore a regime a fronte di ingressi a scalino e rampa.

	$A \text{ sca}(t)$	$A \text{ ram}(t)$
Valore di regime $ e(\infty) $	$\frac{A}{1+\mu}$	$\infty$
in risposta a $w(t)$ oppure a $d(t)$	0	$\frac{A}{\mu}$
$g = 2$	0	0
$g = 3$	0	0



Gli ingressi sono scalini, quindi guardo la **prima colonna**.

La specifica statica mi impone  $e(\infty) = 0$  e quindi **sono obbligato ad inserire un integratore nell'anello (seconda riga)**, sono obbligato a scegliere  $g = r = 1$  se voglio contributi nulli all'errore a regime.

Quindi il progetto statico si conclude con la scelta di  $r = 1$ , mentre il guadagno del controllore  $\mu_R$  verrà scelto durante il progetto dinamico.

### Esempio 3

Sistema sotto controllo

$$G(s) = \frac{22}{(1+5s)(1+0.1s)^2}$$

Quindi, guadagno del sistema  $\mu_G = 22$  e tipo del sistema  $m = 0$ .

Specifiche statiche:

$$e(\infty) = 0 \quad \text{per } w(t) = 3\text{sca}(t) \text{ e } d(t) = \pm\text{sca}(t)$$

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$\begin{aligned} L(s) = R(s)G(s) &= R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R \prod_i (1+sT_i)}{s^r \prod_i (1+st_i)} \frac{22}{(1+5s)(1+0.1s)^2} = \\ &= \frac{22\mu_R \prod_i (1+sT_i)}{s^r \prod_i (1+st_i)} \frac{1}{(1+5s)(1+0.1s)^2} \end{aligned}$$

Il **guadagno d'anello** è  $\mu = 22\mu_R$ .

Il **tipo dell'anello** è  $g = r$ .

Quindi, concludendo, il progetto statico si conclude con la scelta

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

## 6. Progetto dinamico

$$R_2(s) = \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)} \quad \text{Parte dinamica}$$

La scelta della parte dinamica avviene per tentativi e di norma il primo tentativo è

$$R_2(s) = 1$$

cioè non si inserisce una parte dinamica.

Si verifica quindi se le specifiche dinamiche sono rispettate e, in caso negativo, si procede ad inserire poli e zeri cercando di ottenere una funzione d'anello che rispetti le specifiche date, avendo cura di rispettare sempre le seguenti condizioni:

1) Non modificare la parte statica del controllore

(cioè il guadagno  $\mu_R$ , se scelto precedentemente, ed il tipo  $r$ ).

2) Il controllore  $R(s)$  ottenuto deve essere almeno proprio

(non può avere più zeri che poli)

# Lezione 26. Progetto per sistemi a fase minima

Dal momento che, di solito, le specifiche dinamiche riguardano la pulsazione critica  $\omega_C$  ed il margine di fase  $\varphi_m$ , per verificare se esse sono rispettate:

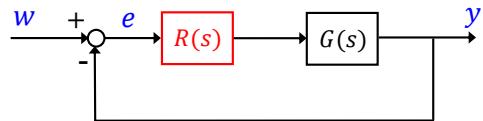
- 1) si traccia il **diagramma di Bode del modulo** della risposta in frequenza della funzione d'anello  $L(s)$  e, dopo aver individuato sul grafico la pulsazione critica  $\omega_C$ ,
- 2) si calcola la fase critica  $\varphi_C$  ed infine il margine di fase  $\varphi_m$ .

## Introduzione

Il progetto di controllori mediante “loop shaping” lascia al progettista molti gradi di libertà, in particolare nella scelta della parte dinamica del controllore.

In questa lezione saranno presentate alcune strategie e delle linee guida attraverso esempi (senza alcuna pretesa di esaustività).

## Esempio 1 – cancellazione del polo dominante



$$G(s) = \frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

- Specifiche di progetto
- $e(\infty) = 0$  a fronte di variazioni a scalino del riferimento di ampiezza qualunque.
  - $\omega_C \geq 10 \text{ rad/s}$
  - $\varphi_m \geq 30^\circ$

### La scelta è obbligata.

Solo introducendo un polo nell'origine nella funzione d'anello si può avere errore nullo a regime a fronte di variazioni a scalino del riferimento.

Scegliendo  $r = 1$  si avrà errore nullo a transitorio esaurito a fronte di variazioni a scalino (di qualunque ampiezza) degli ingressi (riferimento e disturbo in andata, che in questo esempio non c'è)

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s} \quad \mu_R \text{ verrà scelto dopo parte statica}$$

## Progetto statico

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R \prod_i (1+sT_i)}{s^r \prod_i (1+sT_i)} \frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)} = \\ &= \frac{10\mu_R \prod_i (1+sT_i)}{s^r \prod_i (1+sT_i)} \frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)} \end{aligned}$$

Il guadagno d'anello è  $\mu = 10\mu_R$ .

Il tipo dell'anello è  $g = r$ .

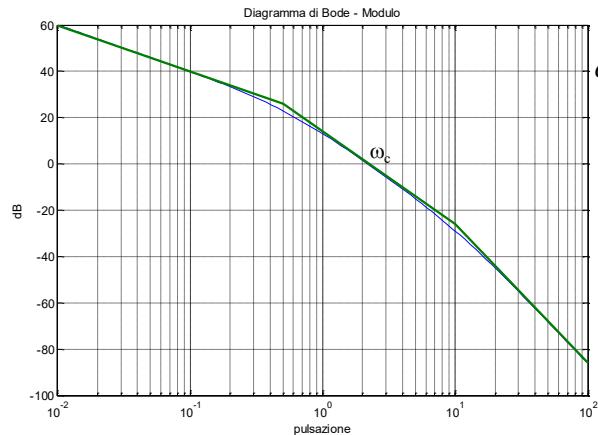
## Progetto dinamico

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s} R_2(s) \frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)} = \\ &= \frac{10\mu_R}{s} R_2(s) \frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)} \end{aligned}$$

Primo tentativo  $R_2(s) = 1 \quad \mu_R = 1$

$$L'(s) = \frac{10}{s(1+2s)(1+0.1s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L'(j\omega)$

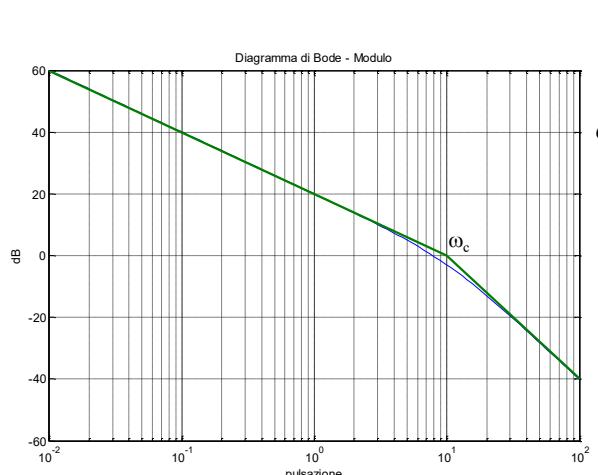


$$\omega_c \approx 2.2 \text{ rad/s} \text{ no!}$$

Fase critica sicuramente no!  
 $\varphi_c < -150^\circ$

$$\varphi_c = -90^\circ - \text{atan}(2 \cdot 2.2) - \text{atan}(0.1 \cdot 2.2) = \rightarrow \varphi_m = 0.3^\circ$$

$$= -90^\circ - 77.2^\circ - 12.5^\circ = -179.7^\circ$$



$$\omega_c \approx 10 \text{ rad/s} \checkmark$$

Fase critica  
 $\varphi_c = -135^\circ$

$$\varphi_m \approx 45^\circ \checkmark$$

$$R(s) = \frac{1+2s}{s}$$

Non serve scegliere un valore del guadagno del regolatore  $\mu_R$  diverso da 1. Quindi la soluzione è

**Secondo tentativo**  $R_2(s) = 1 + 2s$   $\mu_R = 1$

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s} R_2(s) \frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)} =$$

$$= \frac{10\mu_R}{s} R_2(s) \frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

$$L''(s) = \frac{10}{s} (1+2s) \frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)} = \frac{10}{s(1+0.1s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L''(j\omega)$

#### Nota bene

E' lecito scegliere uno zero soltanto come parte dinamica del regolatore?

Sì perché c'è un polo (nell'origine) nella parte statica e quindi il regolatore sarà proprio (un polo ed uno zero).

#### Nota bene (per i "puristi")

Ai fini delle attività didattiche fa fede il diagramma asintotico.

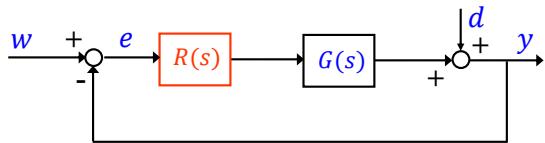
E' però evidente che la pulsazione critica effettiva sarà inferiore a 10 rad/s.

E' quindi lecito (per i "puristi", appunto) correggere il progetto scegliendo un valore del guadagno del regolatore  $\mu_R$  tale che la pulsazione critica effettiva sia superiore a 10 rad/s.

Il valore minimo necessario perché ciò accada è (ovviamente)

$$\mu_R = 3 \text{ dB} \rightarrow \mu_R = 1.41$$

## Esempio 2 – raccordi in AF e BF



$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Specifiche di progetto

$$\begin{cases} \triangleright |e(\infty)| \leq 0.1 \text{ con } w(t) = \text{sca}(t) \\ \quad \quad \quad d(t) = 5\text{sca}(t) \\ \triangleright \omega_c \geq 0.2 \text{ rad/s} \\ \triangleright \varphi_m \geq 60^\circ \end{cases}$$

F. Previdi – Fondamenti di Automatica - Lez. 26

11

Ricordiamo che si applica la diseguaglianza di «caso pessimo»

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty) + e_d(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

I singoli contributi valgono (vedi prima colonna della tabellina)

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \frac{1}{1+10\mu_R} & \text{se } r=0 \\ 0 & \text{se } r>0 \end{cases}$$

$$|e_d(\infty)| = \begin{cases} \frac{5}{1+10\mu_R} & \text{se } r=0 \\ 0 & \text{se } r>0 \end{cases}$$

F. Previdi – Fondamenti di Automatica - Lez. 26

13

## Progetto statico

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$\begin{aligned} L(s) = R(s)G(s) &= R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+sT_i)} \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)} = \\ &= \frac{10\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+sT_i)} \frac{1}{(1+10s)(1+5s)(1+s)} \end{aligned}$$

Il guadagno d'anello è  $\mu = 10\mu_R$ .

Il tipo dell'anello è  $g = r$ .

F. Previdi – Fondamenti di Automatica - Lez. 26

12

- scegliendo  $r = 1$

$$e(\infty) = 0 \Rightarrow R_1(s) = \frac{\mu_R}{s} \quad \mu_R \text{ verrà scelto dopo}$$

- scegliendo  $r = 0$

$$|e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| \leq 0.1$$

da cui

$$\frac{6}{1+10\mu_R} \leq 0.1 \Rightarrow \mu_R \geq 5.9$$

Scegliamo

$$\begin{cases} r = 0 \\ \mu_R = 10 \end{cases}$$

Quindi

$$R_1(s) = 10$$

Scegliamo di proseguire con questa seconda opzione

F. Previdi – Fondamenti di Automatica - Lez. 26

14

## Progetto dinamico

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = 10R_2(s) \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

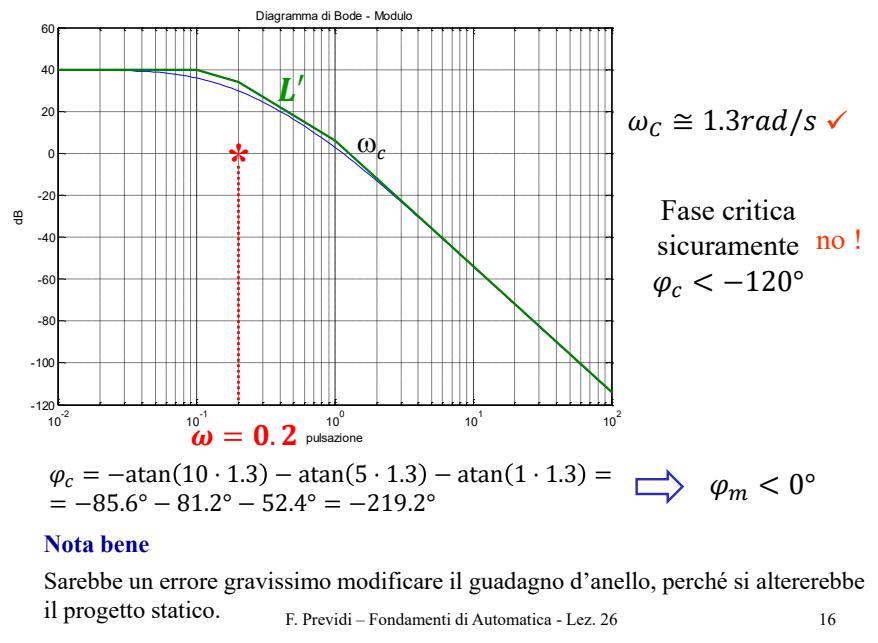
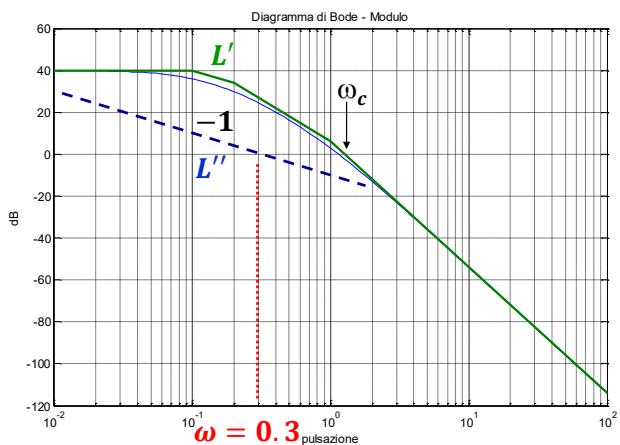
Primo tentativo  $R_2(s) = 1$

$$L'(s) = \frac{100}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L'(j\omega)$

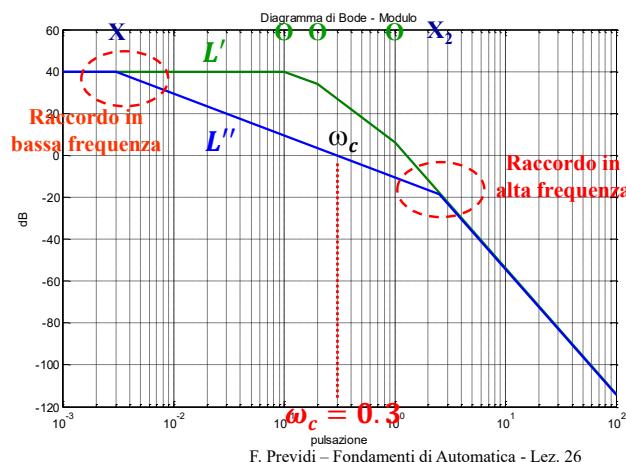
## Secondo tentativo

Costruire  $L''(s)$  in modo che  $|L''(j\omega)|$  tagli l'asse a 0 dB in  $\omega_c \cong 0.3$  con pendenza  $-1$  ( $-20 \text{ dB/dec}$ )



Ciò si può ottenere:

- ✓ cancellando (con tre zeri) i tre poli di  $G(s)$
- ✓ raccordando il diagramma di  $|L''(j\omega)|$  con il diagramma di  $|L'(j\omega)|$  in bassa frequenza ed in alta frequenza, mediante l'introduzione in  $L''(s)$  di tre poli in posizioni opportune.



Quindi:

$$R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+\tau_{bf}s)(1+\tau_{af}s)^2}$$

La posizione dei poli di raccordo si desume dal grafico:

- il polo in bassa frequenza non può che essere in 0.003;
- la coppia di poli in alta frequenza è in circa 2.5.

Cioè:

$$R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+333s)(1+0.4s)^2}$$



$$L''(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = 10 \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+333s)(1+0.4s)^2} \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)} = \\ = \frac{100}{(1+333s)(1+0.4s)^2}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L''(j\omega)$

Nel progetto statico era possibile un'altra scelta, cioè inserire un integratore nell'anello scegliendo  $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$ . Vediamo come sarebbe cambiato il progetto dinamico.

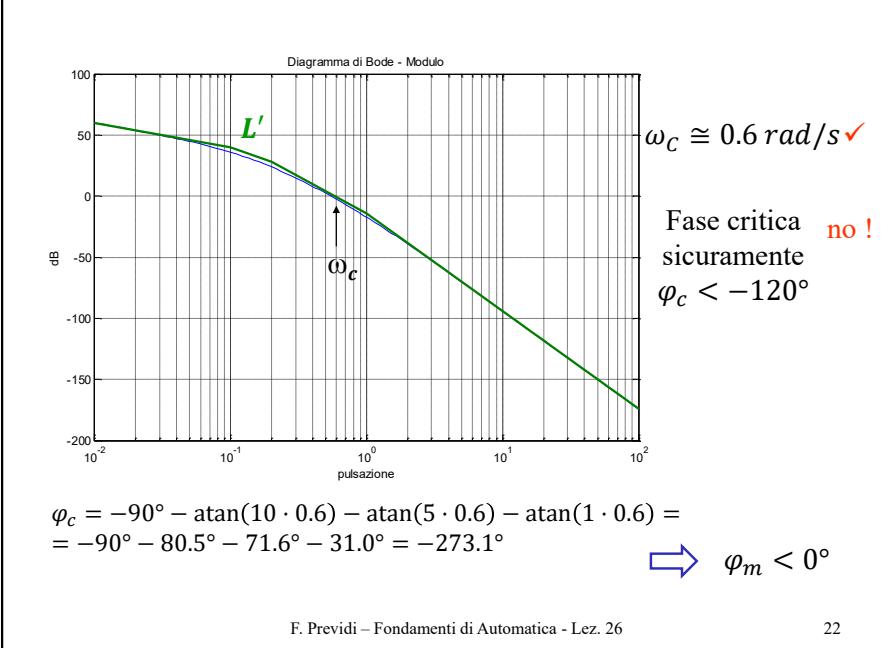
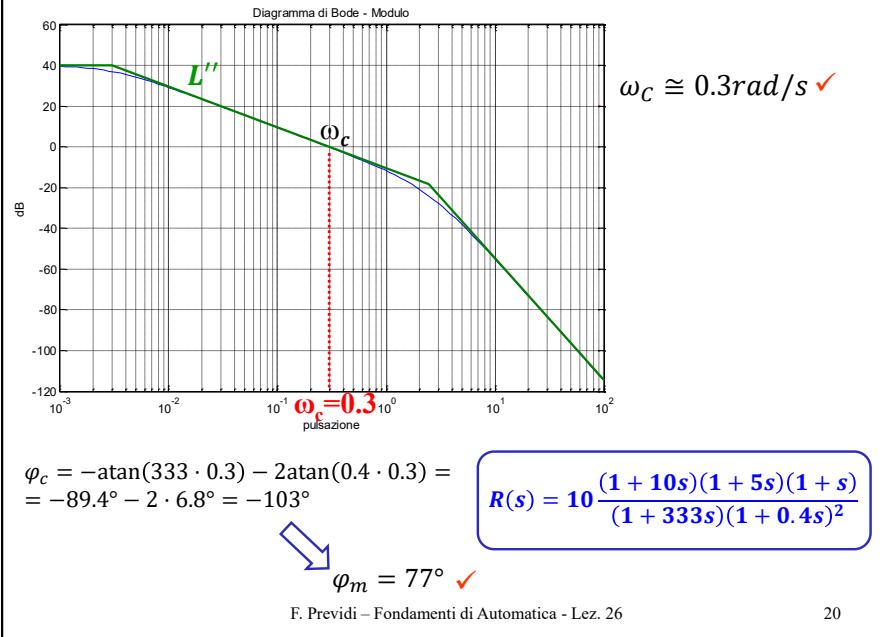
### Progetto dinamico (seconda opzione)

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s} R_2(s) \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

**Primo tentativo**  $R_2(s) = 1 \quad \mu_R = 1$

$$L'(s) = \frac{10}{s(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L'(j\omega)$



### Secondo tentativo $R_2(s) = 1 + 10s \quad \mu_R = 1$

Questa scelta corrisponde ad eliminare il polo dominante.

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{1}{s} (1 + 10s) \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

da cui si ottiene

$$L''(s) = \frac{10}{s(1 + 5s)(1 + s)}$$

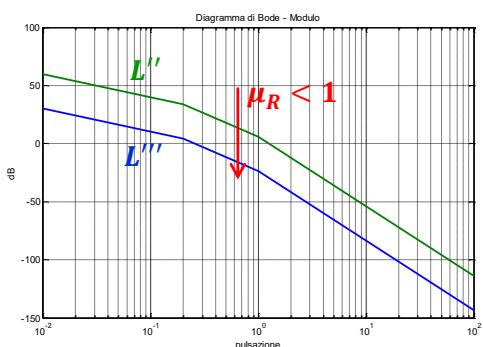
Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L''(j\omega)$

#### Nota bene

E' lecito scegliere uno zero soltanto come parte dinamica del regolatore?

Sì perché c'è un polo (nell'origine) nella parte statica e quindi il regolatore sarà proprio (un polo ed uno zero).

Ora bisogna decidere se **cancellare un altro polo oppure scegliere un valore del guadagno del controllore  $\mu_R$**  tale che le specifiche siano rispettate.

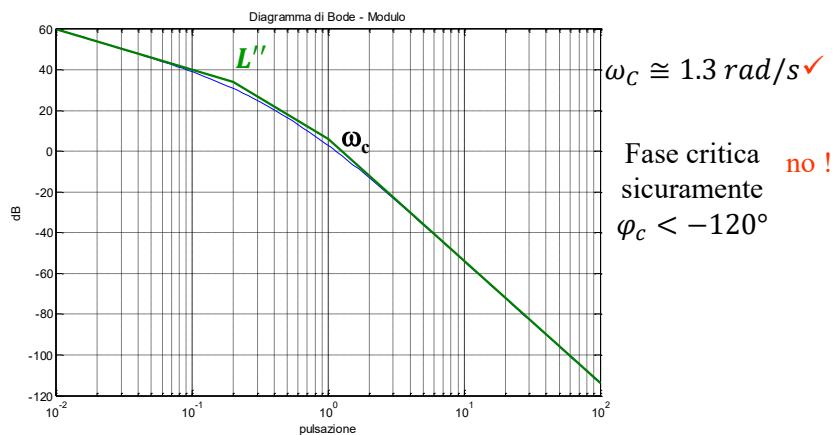


Supponiamo di scegliere  $\mu_R$  tale che  $\omega_c = 0.2 \text{ rad/s}$  che è esattamente il limite della specifica.

Quanto vale il margine di fase?

$$\varphi_c = -90^\circ - \operatorname{arctg}(5 \cdot 0.2) - \operatorname{arctg}(1 \cdot 0.2) = -90^\circ - 45^\circ - 11.3^\circ = -146.3^\circ$$

$$\varphi_m = 33.7^\circ < 60^\circ$$



### Terzo tentativo $R_2(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)}{1 + s} \quad \mu_R = 1$

Introducendo uno zero nel controllore si cancella un secondo polo della  $G(s)$ . Però, perché il controllore  $R(s)$  sia proprio, è necessario introdurre nel controllore, oltre allo zero, anche un altro polo.

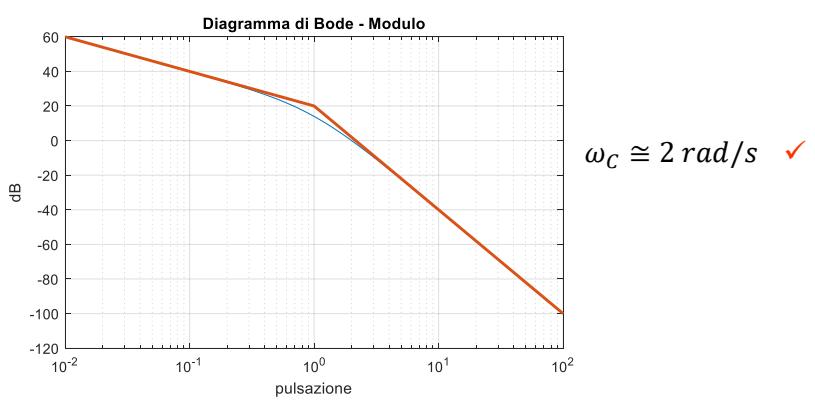
Questo secondo polo, il cui scopo è solo quello di avere nel controllore lo stesso numero di poli e zeri, può essere posizionato (abbastanza) liberamente e conviene sceglierlo in alta frequenza (oltre la pulsazione critica  $\omega_c$ ) in modo che esso dia un contributo piccolo alla fase critica.

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{1 (1 + 10s)(1 + 5s)}{s (1 + s)} \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

da cui si ha

$$L'''(s) = \frac{10}{s(1 + s)^2}$$

Si traccino i diagrammi di Bode di  $L'''(j\omega)$



Scegliendo  $\mu_R = 0.025$  si ha  $\omega_c = 0.25 \text{ rad/s}$ .

Infatti si ha che

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s)$$

$$= \frac{0.025}{s} \frac{(1+10s)(1+5s)}{1+s} \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

da cui si ha

$$L^{iv}(s) = \frac{0.25}{s(1+s)^2}$$

Quarto tentativo  $R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)}{1+s}$   $\mu_R$  da scegliere

Ora possiamo scegliere un valore di  $\mu_R$  (se esiste) tale da rispettare le specifiche. Quale valore scegliere?

Osserviamo che con  $L'''(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$  per avere  $\varphi_m > 60^\circ$ , cioè  $\varphi_c > -120^\circ$ , deve valere questa relazione

$$\varphi_c = \Delta L'''(j\omega_c) = -90^\circ - 2\arctg(\omega_c) > -120^\circ$$

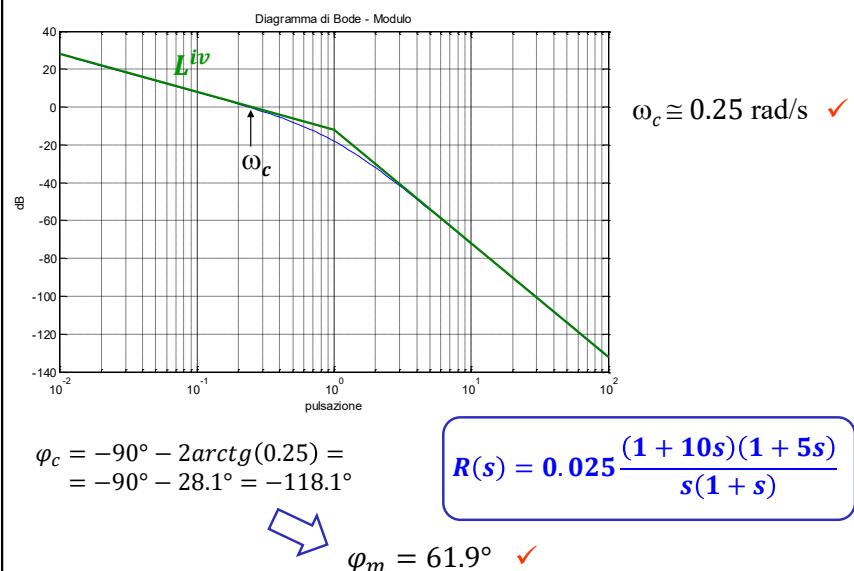
da cui si ottiene

$$\arctg(\omega_c) < 15^\circ$$

cioè

$$\omega_c < 0.27 \text{ rad/s}$$

Quindi bisogna scegliere  $\mu_R$  tale che la pulsazione critica sia inferiore a questo valore.



# Lezione 27.

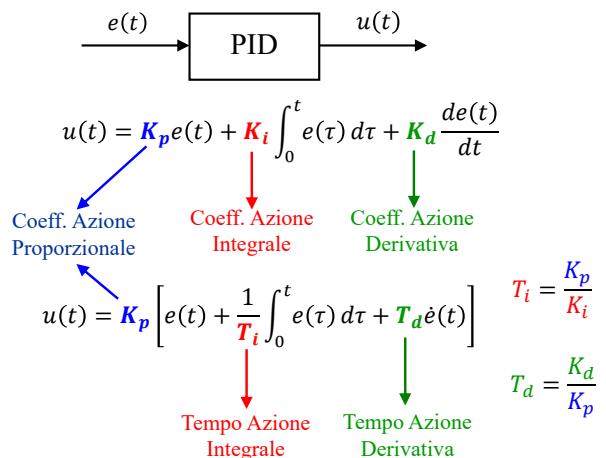
## Legge di controllo PID

### Schema

1. Definizione
2. Funzione di trasferimento di un PID “ideale”
3. Funzione di trasferimento di un PID “reale”
4. Diagrammi di Bode di un PID “reale”
5. Casi particolari
6. Metodi di taratura per un controllore PID
  - 6.1 Procedura di progetto teorica
  - 6.2 Metodi di taratura empirica
    - 6.2.1 Metodo di Ziegler & Nichols in anello chiuso
    - 6.2.2 Metodo di Ziegler & Nichols in anello aperto
7. Limitazione dell’azione derivativa
8. Saturazione dell’azione integrale (wind up) e implementazione “anti-windup”
9. Matlab

### 1. Definizione

Controllori **PID** → ad azione **Proporzionale**, **Integrale**, **Derivativa**.



### Interpretazione delle tre azioni

**P** → entità dell’errore  
più errore più controllo

**I** → valor medio dell’errore  
polarizzazione (storia passata)

**D** → tendenza dell’errore  
errore crescente più controllo (storia futura)

## 2. Funzione di trasferimento di un PID “ideale”

L’azione di controllo nel dominio del tempo è

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}(t) \right]$$

Derivatore ideale

Applicando la trasformazione di Laplace si ha

$$U(s) = K_p \left[ E(s) + \frac{1}{T_i s} E(s) + T_d s E(s) \right]$$

da cui

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{T_i s} = K_i \frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{s}$$

Se  $T_i^2 - 4T_i T_d \geq 0$  cioè se  $T_i \geq 4T_d$  i due zeri sono reali e quindi

$$R(s) = K_i \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}{s}$$

Funzione di trasferimento del PID “ideale”

- ✓ un polo nell’origine  $\Rightarrow$  precisione statica
- ✓ due zeri  $\Rightarrow$  precisione dinamica
- ✓ guadagno  $\Rightarrow$  guadagno d’anello

5

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{T_i s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right) + \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right) + T_i T_d s^2}{T_i s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right)} = \\ &= K_i \frac{1 + \left(\frac{T_d}{N} + T_i\right) s + \left(\frac{1}{N} + 1\right) T_i T_d s^2}{s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right)} \end{aligned}$$

$$R(s) = K_i \frac{(1 + s\bar{\tau}_1)(1 + s\bar{\tau}_2)}{s(1 + s\bar{\tau}_3)}$$

Funzione di trasferimento del PID “reale”

Con una scelta opportuna di  $N$  (grande) :

$\bar{\tau}_3 \ll \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_3 \ll \bar{\tau}_2$  **polo in alta frequenza**

$\bar{\tau}_1 \approx \tau_1, \bar{\tau}_2 \approx \tau_2$  **zeri prossimi a quelli del PID “ideale”**

## 3. Funzione di trasferimento di un PID “reale”

□ azione derivativa “ideale”  $\rightarrow T_d s$  Non realizzabile

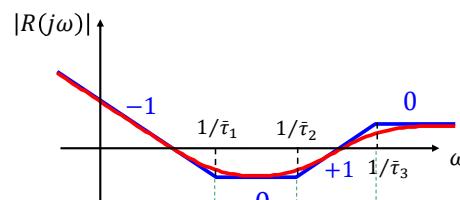
□ azione derivativa “reale”  $\rightarrow \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s}$  Realizzabile

$$s = -\frac{N}{T_d}, N = 5 \div 20$$

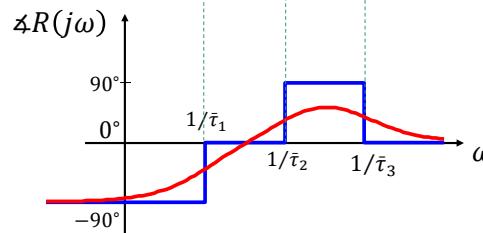
$$U(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{\frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s}}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right] E(s)$$

Derivatore reale

## 4. Diagrammi di Bode di un PID “reale”



Rete “a sella” o  
Rete a ritardo e anticipo



## 5. Casi particolari

P : controllore proporzionale

$$R(s) = K_p$$

I : controllore integrale

$$R(s) = \frac{K_i}{s}$$

PI : controllore proporzionale-integrale

$$R(s) = K_i \frac{(1 + sT_i)}{s}$$

PD : controllore proporzionale-derivativo  $R(s) = K_p \left[ 1 + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right]$

### 6.1 Procedura di progetto teorica

#### Esempio

Tarare un controllore PI per un sistema con fdt  $G(s) = \frac{100}{1+s}$  in modo tale da avere  $1 \leq \omega_c \leq 10$ .

La funzione di trasferimento del controllore è:

$$R(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p \frac{1 + sT_i}{T_i s} = \frac{K_p}{T_i} \frac{1 + sT_i}{s} = K_i \frac{1 + sT_i}{s}$$

Quindi la funzione d'anello è:

$$L(s) = R(s)G(s) = K_i \frac{1 + sT_i}{s} \frac{100}{1 + s}$$

La scelta è “obbligata”: si usa lo zero del controllore per cancellare il polo dominante del sistema. Scelgo  $T_i = 1$  da cui ottengo

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{100K_i}{s}$$

## 6. Metodi per la taratura di un controllore PID

PID:  $K_p, T_i, Td$

6.1 **Teorica** (loop shaping)

6.2 **Empirica** (taratura basata su esperimenti, in assenza di informazioni a priori sul sistema) → utile per taratura automatica

*Ad autosintonia* (self tuning)

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{100K_i}{s} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = 100K_i \text{ rad/s}$$

Per esempio, per avere  $\omega_c = 5$  rad/s bisogna scegliere  $K_i = 0.05$ .  
Essendo  $K_i = \frac{K_p}{T_i}$  si avrà  $K_p = K_i T_i = 0.05$ .

## 6.2 Metodi di taratura empirica

Il PID è un regolatore “semplice” (con pochi gradi di libertà) e quindi può tenere conto solo delle principali caratteristiche dinamiche del processo.

Ciò significa però che si può fare un progetto adeguato anche senza una conoscenza profonda del sistema sotto controllo.

I metodi di taratura empirica si basano sui risultati di opportuni esperimenti presupponendo nessuna conoscenza sul sistema sotto controllo oppure la conoscenza di un modello molto semplice.

Due esempi sono:

### Regola di Ziegler-Nichols in anello aperto

### Regola di Ziegler-Nichols in anello chiuso

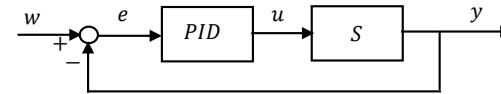
	$K_p$	$T_I$	$T_D$
<b>P</b>	<b><math>0.5\bar{K}_p</math></b>		
<b>PI</b>	<b><math>0.45\bar{K}_p</math></b>	<b><math>0.8\bar{T}</math></b>	
<b>PID</b>	<b><math>0.6\bar{K}_p</math></b>	<b><math>0.5\bar{T}</math></b>	<b><math>0.125\bar{T}</math></b>

Nel caso del controllore PID si ha che  $T_I = 4T_D$ . Di conseguenza la funzione di trasferimento del controllore ha 2 zeri coincidenti in  $\frac{-4}{\bar{T}}$ .

La scelta dei parametri porta sistemi a fase minima ad avere la massima pulsazione critica  $\omega_c$  possibile compatibilmente con un margine di fase  $\varphi_m$  di (circa)  $30^\circ$ .

Più che regole rigide vanno intese come procedure per individuare valori indicativi dei parametri (intorno ai quali operare una taratura manuale fine).

## 6.2.1 Regola di Ziegler-Nichols in anello chiuso



- (i) inserire il controllore con  $K_i = K_d = 0$  e  $K_p$  “piccolo”
- (ii) osservare la risposta a  $w(t) = sca(t)$
- (iii) aumentare  $K_p$  finché  $y(t)$  presenti oscillazioni permanenti di periodo  $\bar{T}$  in corrispondenza del valore  $\bar{K}_p$  detto **guadagno critico**
- (iv) si determinano  $K_p, T_i, T_d$  in funzione di  $\bar{T}, \bar{K}_p$  consultando un'apposita tabella

### Interpretazione

◊  $\bar{K}_p \equiv k_m = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|}$

**Il guadagno critico è il margine di guadagno**, cioè: trovare  $\bar{K}_p$  corrisponde a trovare  $|G(j\omega_\pi)|$

◊  $\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega_\pi}$

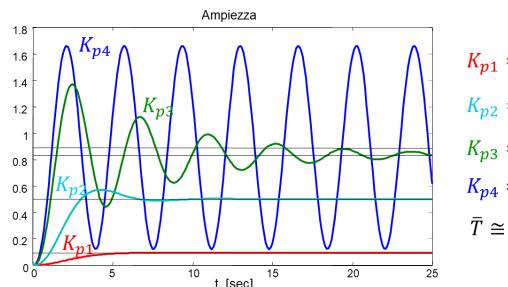
Le oscillazioni hanno pulsazione  $\omega_\pi$ , cioè: trovare  $\bar{T}$  corrisponde a trovare la pulsazione  $\omega_\pi$

◊ Quindi  $\bar{K}_p, \bar{T}$  mi forniscono il punto  $G(j\omega_\pi)$  della risposta in frequenza.

**Nota.** La procedura non è applicabile quando:

- non si raggiunge mai il limite di stabilità ( $k_m = \infty$ )
- la presenza di oscillazioni può danneggiare l'impianto

## Esempio



$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$\begin{aligned} K_{p1} &= 0.1 \\ K_{p2} &= 1 \\ K_{p3} &= 5 \\ K_{p4} &= 8 = \bar{K}_p \\ \bar{T} &\cong 3.6 \text{ s} \end{aligned}$$

PID “ideale”  $\begin{cases} K_p = 0.6\bar{K}_p = 4.8 \\ T_i = 0.5\bar{T} = 1.8138 \\ T_d = 0.125\bar{T} = 0.4534 \end{cases} \quad \omega_c \cong 1.6, \varphi_m \cong 37^\circ$

### Prova

I poli in anello chiuso con  $K_p = \bar{K}_p$ ,  $K_I = K_D = 0$  saranno dati da

$$(s+1)^3 + \bar{K}_p = 0$$

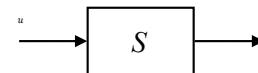
Perché ci siano oscillazioni permanenti dovrà esserci una coppia di poli immaginaria coniugata, cioè

$$(s+\alpha)(s^2 + \bar{\omega}^2) = 0$$

Se  $\bar{K}_p = 8$  allora  $\alpha = 3$  e quindi,  $\bar{\omega}^2 = 3$  da cui si ottiene  $\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = 3.63$  s

17

## 6.2.2 Regola di Ziegler-Nichols in anello aperto



(i) Applicare  $u(t) = U sca(t)$

(ii) Registrare la risposta  $y(t)$  e ricavare alcuni parametri caratteristici (**metodo della tangente**)

$\tau$  : ritardo equivalente

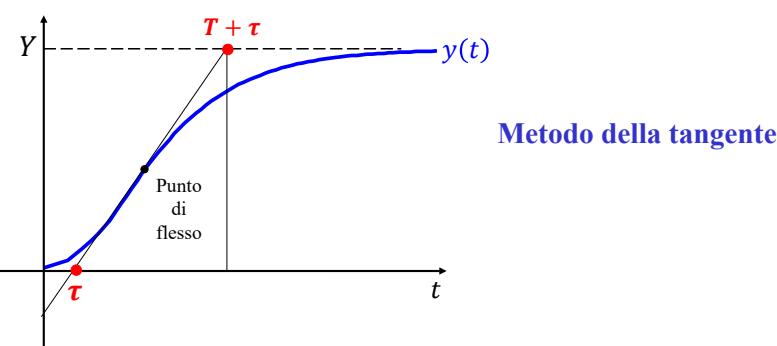
$T$  : costante di tempo equivalente

$\mu = \frac{Y}{U}$  : guadagno ( $Y$  è il valore di regime di  $y(t)$ )

(iii) Determinare  $K_p, T_i, T_d$  in funzione di  $\mu, \tau, T$  consultando un’apposita tabella.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 27

18



Modello del sistema ricavato dalla risposta allo scalino

$$\hat{G}(s) = \frac{\mu}{1 + TS} e^{-\tau s} \quad \text{con } \mu = \frac{Y}{U}$$

Altri metodi:

- metodo delle aree
- metodo dei momenti

**E’ un metodo di identificazione!**

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 27

19

	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<i>P</i>	$T/\mu\tau$		
<i>PI</i>	$0.9 T/\mu\tau$	$3\tau$	
<i>PID</i>	$1.2 T/\mu\tau$	$2\tau$	$0.5\tau$

Nel caso del controllore PID si ha che  $T_I = 4T_D$ . Di conseguenza la funzione di trasferimento del controllore ha 2 zeri coincidenti in  $\frac{-4}{T}$ .

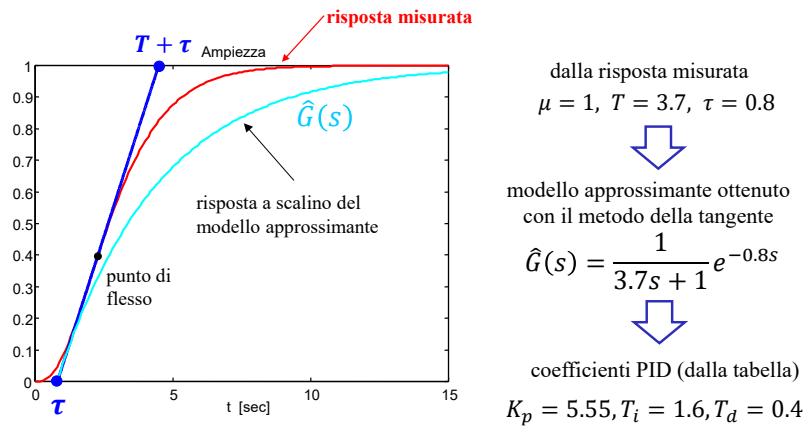
Anche in questo caso la scelta dei parametri porta sistemi a fase minima ad avere la massima pulsazione critica  $\omega_c$  possibile compatibilmente con un margine di fase  $\varphi_m$  di circa  $30^\circ$ .

Più che regole rigide vanno intese come procedure per individuare valori indicativi dei parametri (intorno ai quali operare una taratura manuale fine).

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 27

20

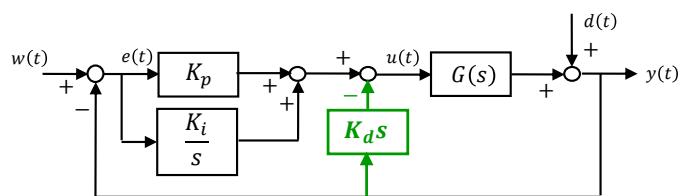
## Esempio



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 27

21

## Schema a derivazione dell'uscita



- ❑ La funzione di trasferimento da  $d(t)$  a  $y(t)$  non cambia.
- ❑ Nella funzione di trasferimento da  $w(t)$  a  $y(t)$  cambiano solo gli zeri.
- ❑ Non cambiano le proprietà di stabilità e il comportamento statico.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 27

23

## 7. Limitazione dell'azione derivativa

$$u(t) = \dots + K_d \frac{de(t)}{dt} = \dots + K_d \frac{d}{dt} (w(t) - y(t))$$

Se  $w(t) = \text{sca}(t)$   $\Rightarrow u(t) = \dots + K_d \frac{d}{dt} (\text{sca}(t) - y(t)) = \dots + K_d \left( \text{imp}(t) - \frac{d}{dt} y(t) \right)$

Indesiderabile!

Alternativa: derivare solo l'uscita

$$u(t) = \dots + K_d \frac{d}{dt} (w(t) - y(t)) = \dots - K_d \frac{dy(t)}{dt}$$

La fdt d'anello è un filtro passa-basso.  
 Quindi l'uscita non ha mai variazioni a scalino!

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 27

22

## Generalizzazione

E' possibile usare quantità diverse dall'errore nelle tre azioni

$$U(s) = K_p E_p(s) + \frac{K_i}{s} E(s) + K_d s E_d(s)$$

dove

$$E(s) = W(s) - Y(s)$$

$$E_p(s) = \alpha W(s) - Y(s)$$

$$E_d(s) = \beta W(s) - Y(s)$$

Se  $\alpha = \beta = 1$  si ha il controllore PID standard

Se  $\alpha = \beta = 0$  si ha un controllore PID con azione derivativa e proporzionale calcolate solo sulla base di  $y(t)$

I parametri  $\alpha$  e  $\beta$  non influiscono sulla stabilità e sul comportamento statico del sistema in anello chiuso.

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 27

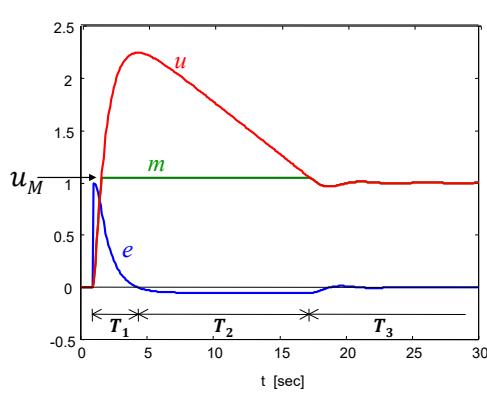
24

## 8. Saturazione dell'azione integrale (wind-up)

Tutti gli attuatori hanno dei limiti sull'azione di controllo che possono esercitare sul sistema sotto controllo.

Tali limiti sono ben modellabili mediante **saturazione**.

Quando la legge di controllo contiene un'**azione integrale**, la presenza della saturazione può causare un effetto indesiderato noto come **wind-up**.



### Intervallo $T_1$

$e(t) > 0$  :  $u(t)$  cresce senza limiti mentre  $m(t)$  cresce solo fino a  $u_M$ .

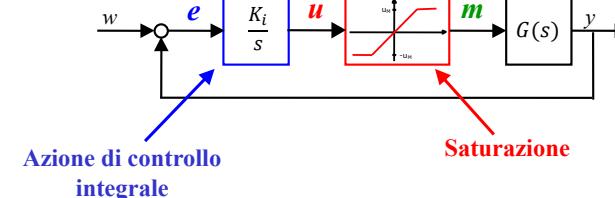
### Intervallo $T_2$

$e(t) < 0$  :  $m(t)$  dovrebbe diminuire, ma bisogna prima attendere che  $u(t)$  decresca fino a  $u_M$ .

### Intervallo $T_3$

Quando finalmente  $u(t)$  raggiunge la soglia  $u_M$  allora anche  $m(t)$  può diminuire.

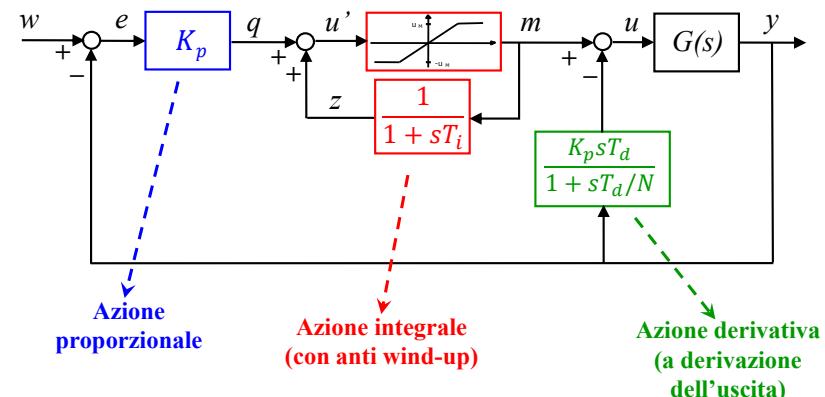
Si noti che basta un breve transitorio per portare  $e(t)$  ad annullarsi.



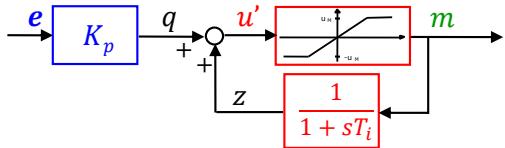
### Equazione della saturazione

$$m(t) = \begin{cases} -u_M & u(t) < -u_M \\ u(t) & |u(t)| \leq u_M \\ u_M & u(t) > u_M \end{cases}$$

### Implementazione anti wind-up (a derivazione dell'uscita)



Implementazione antiwindup di un controllore PI



Quando il controllore opera nella zona lineare della saturazione si ha  $m(t) = u'(t)$ .

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \frac{1}{1 - \frac{1}{1+sT_i}} = K_p \left( \frac{1+sT_i}{sT_i} \right) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad \text{Controllore PI}$$

Si supponga di operare in saturazione nelle seguenti condizioni:

$$m(t) = u_M \text{ con } e(t) > 0 \text{ e } q(t) > 0$$

Dopo un transitorio si ha  $z(t) = u_M$ .

Però, appena l'errore cambia segno si ha:

$$e(t) < 0, q(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad u'(t) = q(t) + u_M < u_M$$

e si torna nella zona lineare.

29

## 9. Matlab

**pid** Create a pid controller in parallel form.

Construction:

**SYS = pid(Kp,Ki,Kd,Tf)** creates a continuous-time pid controller in **parallel form** with a first-order derivative filter:

$$K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d * s}{T_f * s + 1}$$

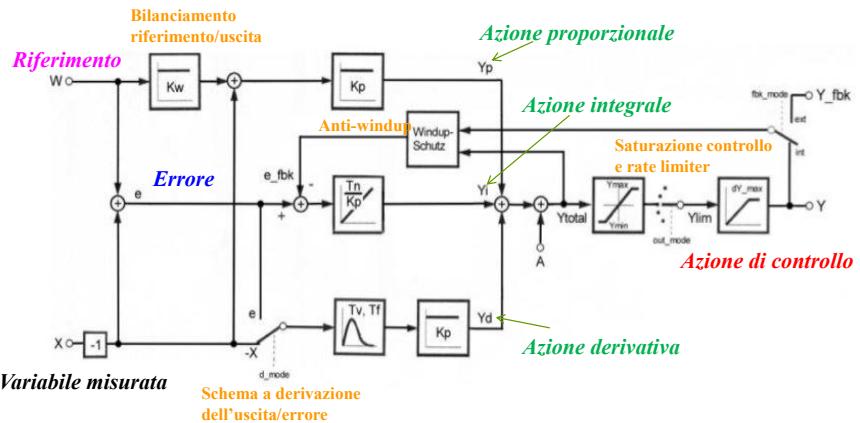
The scalars  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ , and  $T_f$  specify the proportional gain, integral gain, derivative gain, and filter time constant. The  $T_f$  value must be nonnegative for stability.

**pidstd** Create a PID controller in standard form.

Construction:

**SYS = pidstd(Kp,Ti,Td,N)** creates a continuous-time PID controller in **standard form** with a first order derivative filter:

$$K_p * \left( 1 + \frac{1}{Ti * s} + \frac{Td * s}{(Td/N) * s + 1} \right)$$

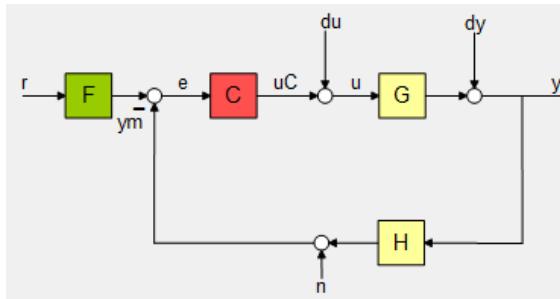


Esiste una GUI per la progettazione di sistemi di controllo retroazionati SISO.

**sisotool** SISO Design Tool.

sisotool opens the SISO Design Tool. This Graphical User Interface lets you design single-input/single-output (SISO) compensators by graphically interacting with the root locus, Bode, and Nichols plots of the open-loop system. To import the plant data into the SISO Tool, select the **Import** item from the **File menu**.

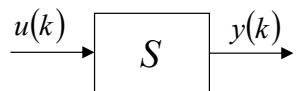
Questa è l'architettura di riferimento



# Lezione 28.

## Sistemi dinamici a tempo discreto (approccio in variabili di stato)

### 1. Introduzione



Esprimono relazioni causa/effetto (come i sistemi a tempo continuo) tra **segnali discreti**.

Ingresso ed uscita dipendono **dall'indice (temporale) discreto  $k$** .

Essi sono definiti mediante **equazioni alle differenze**.

### Schema

1. Introduzione
2. Segnali a tempo discreto
3. Rappresentazione di stato
4. Classificazione
5. Movimento
6. Equilibrio (per sistemi tempo invarianti)
7. Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI) (caso SISO)
8. Equilibrio di sistemi LTI (caso SISO)
9. Movimento di sistemi LTI (caso SISO)
10. Linearizzazione di sistemi non lineari
11. Stabilità dell'equilibrio nei sistemi LTI
12. Stabilità dei sistemi LTI

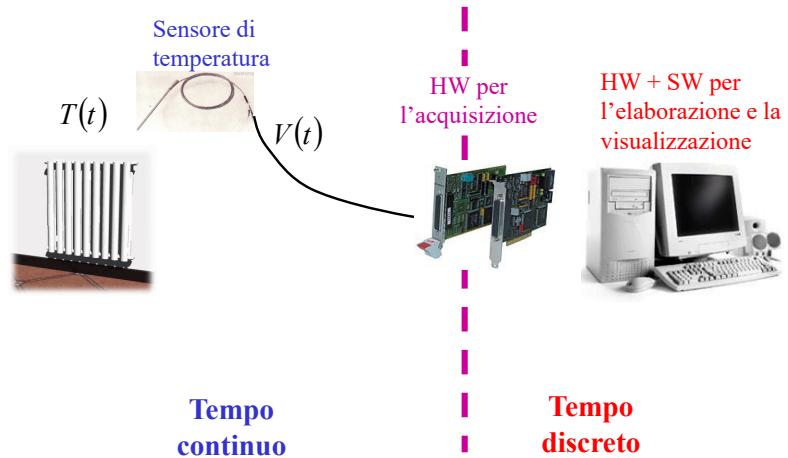
### 2. Segnali a tempo discreto

Il tempo evolve **con continuità**. Ciò significa che non è possibile definire un intervallo di tempo minimo: sarà sempre possibile concepire un intervallo di tempo più breve.

Coerentemente con questo fatto è stata definita e studiata la teoria dei sistemi a tempo continuo, dove le variabili in gioco (ingresso, stato, uscita) sono funzioni del tempo continuo, cioè: ad ogni istante  $t$  reale è possibile definire e assegnare il valore della variabile in quell'istante.

E' possibile definire delle **variabili che assumono valori solo in corrispondenza di un indice discreto**.

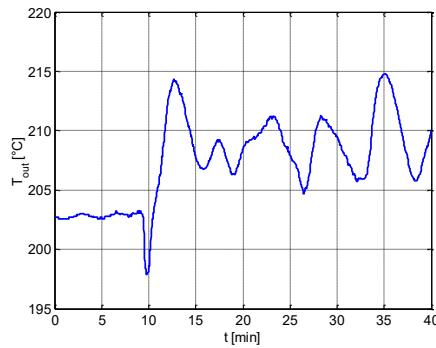
C'è una motivazione molto forte (per le applicazioni di natura ingegneristica) che richiede l'uso di variabili che assumono valori solo in corrispondenza di precisi istanti di tempo.



F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 28

5

### Andamento temporale continuo della temperatura



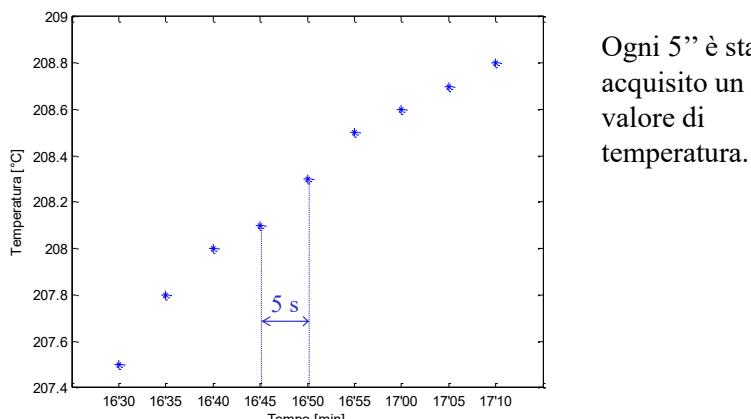
ACQUISIZIONE

### Valori numerici acquisiti

Tempo [min]	T [°C]
...	...
16'30"	207.5
16'35"	207.8
16'40"	208.0
16'45"	208.1
16'50"	208.3
16'55"	208.5
17'00"	208.6
17'05"	208.7
17'10"	208.8
...	...

F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 28

6



Ogni 5" è stato acquisito un valore di temperatura.

Il segnale di temperatura che è stato acquisito e memorizzato nel calcolatore assume valori solo ogni 5 s. E' un **segnale campionato**.

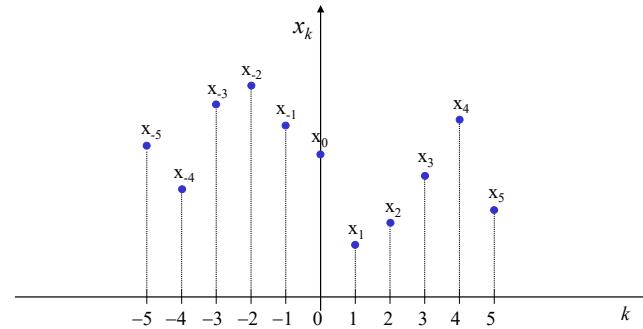
F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 28

7

I **segnali a tempo discreto** sono sequenze di valori reali, ordinate secondo un indice (temporale) intero (relativo).

Vengono usati (come si vedrà) anche per descrivere segnali campionati.

$$x_k : Z \rightarrow \mathfrak{R}$$



F.Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 28

8

Normalmente l'indice temporale parte da 0, cioè  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

Sono utilizzate ugualmente le seguenti due notazioni:

$x_k \ u_k \ y_k$

$x(k) \ u(k) \ y(k)$

### 3. Rappresentazione di stato (sistemi SISO tempo invarianti)

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) & \text{equazione di stato} \\ y(k) = g(\mathbf{x}(k), u(k)) & \text{trasformazione di uscita} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 & \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}, y(k) \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Un sistema dinamico a tempo discreto è descritto da **equazioni alle differenze**.

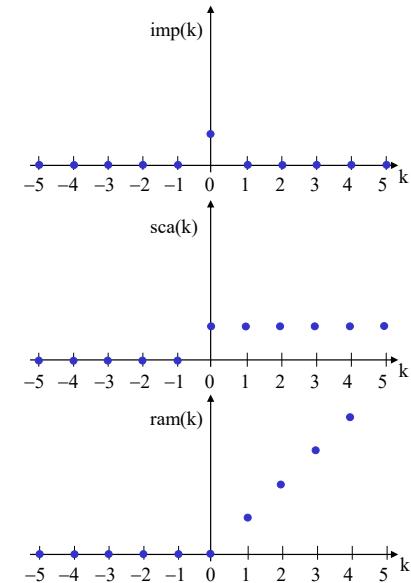
In un'equazione alle differenze, il valore delle variabili all'indice  $k+1$  viene calcolato sulla base del valore delle variabili a valori precedenti dell'indice  $k$ .

### Segnali canonici

$$\text{imp}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

$$\text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ram}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k & k \geq 0 \end{cases}$$



### Esempio

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 3x_1(k) - x_2^2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -\log x_1(k) + x_2(k) - 2u(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

$$\text{con } \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$$

## 4. Classificazione

Sistema tempo invariante  $f$  e  $g$  non dipendono esplicitamente dalla variabile temporale  $k$

Sistema lineare  $f$  e  $g$  sono lineari in  $x(k)$  e  $u(k)$

Sistema strettamente proprio  $g$  non dipende esplicitamente da  $u(k)$

Sistema SISO l'ingresso e l'uscita sono scalari

## Esempio

Si consideri un problema di gestione delle scorte di un magazzino. Le variabili in gioco sono le seguenti:

$s(k)$  scorte all'inizio del mese  $k$ -esimo

$v(k)$  vendite nel mese  $k$ -esimo

$p(k)$  produzione nel mese  $k$ -esimo

$\alpha$  tasso mensile di deperimento della merce

Le scorte all'inizio del mese  $k+1$ -esimo sono date dalla seguente equazione:

$$s(k+1) = s(k) - \alpha s(k) - v(k) + p(k)$$

$s(k+1)$

scorte all'inizio  
del mese  $k$

scorte deperite  
nel mese  $k$

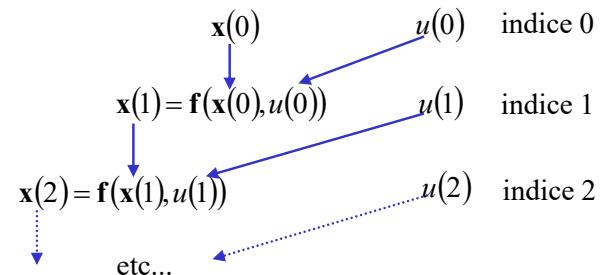
merce venduta  
nel mese  $k$

merce prodotta  
nel mese  $k$

## 5. Movimento

$\{x(0), u(k), k \geq 0\} \xrightarrow{\quad} x(k), k \geq 0$  Movimento dello stato  
 $y(k), k \geq 0$  Movimento dell'uscita

Il movimento dello stato può essere calcolato iterativamente. Per esempio, considerando un sistema tempo invariante con  $k_0=0$ :



La produzione durante il mese  $k$  dipende dalle vendite durante il mese precedente:

$$p(k) = \beta v(k-1)$$

Da cui si ottiene:

$$s(k+1) = (1-\alpha)s(k) - v(k) + \beta v(k-1)$$

Si scelgano le seguenti variabili di stato

$$\begin{cases} x_1(k) = s(k) \\ x_2(k) = v(k-1) \end{cases}$$

Si scelgano come ingresso ed uscita, rispettivamente

$$\begin{cases} u(k) = v(k) \\ y(k) = s(k) \end{cases}$$

Si ottiene quindi il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1-\alpha)x_1(k) + \beta x_2(k) - u(k) \\ x_2(k+1) = u(k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

Lineare, Tempo-Invariante, Strett. Proprio, SISO,  $n=2$

Per iterazioni successive otteniamo i valori delle variabili di stato e dell'uscita ad ogni istante di tempo (cioè i movimenti dello stato e dell'uscita).

$$\begin{cases} x_1(1) = 0.9x_1(0) + 2x_2(0) - u(0) = 0.9 \cdot 5 + 2 \cdot 0 - 0 = 4.5 \\ x_2(1) = u(0) = 0 \\ y(0) = x_1(0) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(2) = 0.9x_1(1) + 2x_2(1) - u(1) = 0.9 \cdot 4.5 + 2 \cdot 0 - 0 = 4.05 \\ x_2(2) = u(1) = 0 \\ y(1) = x_1(1) = 4.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(3) = 0.9x_1(2) + 2x_2(2) - u(2) = 0.9 \cdot 4.05 + 2 \cdot 0 - 4 = -1.355 \\ x_2(3) = u(2) = 4 \\ y(2) = x_1(2) = 4.05 \end{cases}$$

etc... etc...

Si fissi per esempio:  $\alpha = 0.1, \beta = 2$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.9x_1(k) + 2x_2(k) - u(k) \\ x_2(k+1) = u(k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

E' possibile calcolare il movimento dello stato e dell'uscita a partire da condizioni iniziali assegnate, noto l'andamento dell'ingresso:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(k) = 4\text{sca}(k-2) - 3\text{sca}(k-7)$$

## 6. Equilibrio (sistemi SISO tempo invarianti)

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) \\ y(k) = g(\mathbf{x}(k), u(k)) \end{cases}$$

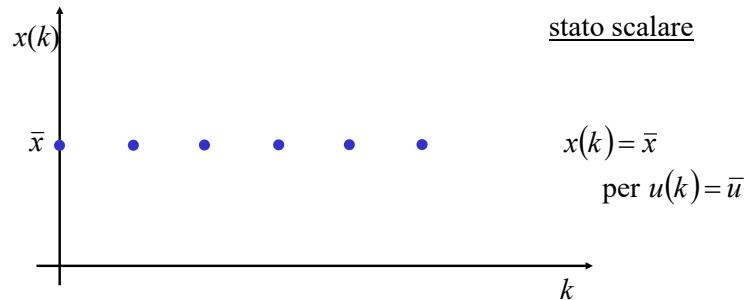
$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$  stato iniziale  
 $u(k) = \bar{u}, k \geq 0$  ingresso costante

### Stato di equilibrio

Movimento dello stato  $\mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{x}}$  costante nel tempo in corrispondenza di  $u(k) = \bar{u}$

### Uscita di equilibrio

Movimento dell'uscita  $y(k) = \bar{y}$  costante nel tempo in corrispondenza di  $u(k) = \bar{u}$



Calcolo dell'equilibrio (per sistemi a tempo discreto)

$$x(k+1) = x(k) = \bar{x} \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad \begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases} \quad \text{Eq. algebrica}$$

### Esempio

$$\begin{cases} x(k+1) = -0.5x(k) + 0.25u(k) \\ y(k) = 3x(k) - u(k) \end{cases}$$

Calcolare stato ed uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante  $u(k) = 2$ ,  $k \geq 0$

Bisogna risolvere l'equazione algebrica

$$\bar{x} = -0.5\bar{x} + 0.25 \cdot 2 \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad \bar{x} = \frac{1}{3} \quad \text{Stato di equilibrio} \quad (\text{per } \bar{u} = 2)$$

Se si applica l'ingresso costante  $\bar{u} = 2$  con condizione

iniziale  $x(0) = \bar{x} = \frac{1}{3}$ , il movimento dello stato è

$$x(k) = \bar{x} = \frac{1}{3}, \quad k \geq 0$$

L'uscita di equilibrio è  $\bar{y} = 3\bar{x} - \bar{u} = -1$

### Esempio

Si consideri nuovamente il problema della gestione delle scorte di un magazzino e si calcoli l'uscita di equilibrio (cioè le scorte all'equilibrio) in corrispondenza di un ingresso costante (cioè vendite costanti).

$u(k) = \bar{u}$  Ingresso (vendite) costante

All'equilibrio si ha:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = (1-\alpha)\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2 - \bar{u} \\ \bar{x}_2 = \bar{u} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{\beta-1}{\alpha}\bar{u} \\ \bar{x}_2 = \bar{u} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 = \frac{\beta-1}{\alpha}\bar{u} \end{cases}$$

### 7. Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI) (caso SISO)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]_{1 \times n} \quad D = [d]_{1 \times 1}$$

Nota Frequentemente si trovano  $F, G, H, D$

## 8. Equilibrio di sistemi LTI (caso SISO)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

In corrispondenza di  $u(k) = \bar{u}$  si imponga  $x(k+1) = x(k) = \bar{x}$

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad \rightarrow \quad (I - A)\bar{x} = B\bar{u}$$

**Se  $\det(I - A) \neq 0$**

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (I - A)^{-1}B\bar{u} \\ \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u} = \underbrace{(C(I - A)^{-1}B + D)}_{\mu} \bar{u} \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} \quad \text{guadagno statico}$$

**Se  $\det(I - A) = 0$**

Il sistema  $(I - A)\bar{x} = B\bar{u}$  può avere infinte o nessuna soluzione.

Per calcolare il movimento dell'uscita basta inserire l'espressione del movimento dello stato nella trasformazione d'uscita.

$$y(k) = \underbrace{CA^k x_0}_{y_l(k)} + \underbrace{C \sum_{j=1}^k A^{k-j} B u(j-1) + Du(k)}_{y_f(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Movimento libero  
dell'uscita

Movimento forzato  
dell'uscita

## 9. Movimento di sistemi LTI (caso SISO)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & x(0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) & u(k), k \geq 0 \end{cases}$$

Iterando l'equazione di stato:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Ax_0 + Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A(Ax_0 + Bu(0)) + Bu(1) = A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1)$$

$$\begin{aligned} x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A(A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1)) + Bu(2) = \\ &= A^3x_0 + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \end{aligned}$$

$$x(k) = \underbrace{A^k x_0}_{x_l(k)} + \underbrace{\sum_{j=1}^k A^{k-j} B u(j-1)}_{x_f(k)} \quad k = 1, 2, \dots$$

Movimento libero  
dello stato

Movimento forzato  
dello stato

## 10. Linearizzazione di sistemi non lineari (caso SISO)

Si consideri un sistema non lineare stazionario

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) \\ y(k) = g(\mathbf{x}(k), u(k)) \end{cases}$$

Si supponga che questo sistema abbia uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  in corrispondenza di un ingresso costante  $\bar{u}$  cioè:

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}$$

E' possibile definire un **sistema lineare** che **approssimi** il comportamento dinamico del sistema non lineare vicino all'equilibrio sfruttando la medesima logica usata per i sistemi a tempo continuo.

Definendo le "piccole variazioni":  $\delta \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) - \bar{x}$   
 $\delta u(k) = u(k) - \bar{u}$

Si può scrivere il seguente sistema lineare approssimante:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{x}(k+1) \cong \mathbf{f}_x(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \delta \mathbf{x}(k) + \mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \delta u(k) \\ \delta y(k) \cong g_x(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \delta \mathbf{x}(k) + g_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \delta u(k) \end{cases}$$

$$\mathbf{f}_x(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} \quad \mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u \\ \vdots \\ \partial f_n / \partial u \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

matrice  $A$   $n \times n$

vettore  $B$   $n \times 1$

$$g_x(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = [\partial g / \partial x_1 \ \dots \ \partial g / \partial x_n]_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}} \quad g_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \partial g / \partial u \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

vettore  $C$   $1 \times n$

scalare  $D$   $1 \times 1$

$$\begin{cases} u(k) = \bar{u}, k \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta \bar{x} \end{cases}$$

perturbazione della condizione iniziale

Usando l'espressione del movimento dello stato

$$\begin{aligned} \text{movimento perturbato} \quad x(k) &= A^k (\bar{x} + \delta \bar{x}) + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u} \\ &= A^k \bar{x} + A^k \delta \bar{x} + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u} = \\ &= A^k \bar{x} + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u} + A^k \delta \bar{x} \end{aligned}$$

perturbazione del movimento

movimento nominale

## 11. Stabilità dell'equilibrio nei sistemi LTI

Consideriamo un sistema LTI SISO

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Sia  $(\bar{x}, \bar{u})$  un equilibrio per il sistema.

$$\begin{cases} u(k) = \bar{u}, k \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad \begin{array}{l} \text{movimento nominale} \\ x(k) = \bar{x}, k \geq 0 \end{array}$$

Usando l'espressione del movimento dello stato

$$\begin{array}{l} \text{movimento nominale} \\ x(k) = A^k \bar{x} + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u} = \bar{x} \quad k = 1, 2, \dots \end{array}$$

Quindi:

$$\delta x(k) = x(k) - \bar{x} = A^k \delta \bar{x}$$

perturbazione del movimento

perturbazione della condizione iniziale

La perturbazione del movimento che si ottiene in seguito ad una perturbazione della condizione iniziale:

- non dipende dal particolare stato di equilibrio  
quindi si può parlare di stabilità del sistema
- dipende solo dalla matrice  $A^k$
- la stabilità (nei sistemi lineari) è una proprietà “globale”  
(non dipende dall'entità della perturbazione)

Si può quindi dedurre che

$$\text{Asintotica stabilità} \iff \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$$

$$\text{Instabilità} \iff A^k \text{ diverge per } k \rightarrow \infty$$

$$\text{Stabilità} \iff A^k \text{ limitata } \forall k$$

E' possibile ripetere l'analisi modale della matrice  $A$  in stretta analogia con quanto fatto per i sistemi a tempo continuo (di cui saranno mostrate le sole conclusioni).

## 12. Stabilità dei sistemi LTI

Siano  $\lambda_i$  gli autovalori della matrice  $A$ .

E' possibile discutere la stabilità sfruttando considerazioni simili a quelle fatte per i sistemi dinamici a tempo continuo.

### Teorema 1

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori della matrice  $A$  hanno **modulo strettamente minore di 1**.

$$|\lambda_i| < 1, \forall i \iff \text{Asintotica stabilità}$$

### Teorema 2

Un sistema LTI è **instabile** se la matrice  $A$  ha almeno un autovalore con **modulo strettamente maggiore di 1**.

$$\exists i^* : |\lambda_{i^*}| > 1 \Rightarrow \text{Instabilità}$$

### Teorema 3

Un sistema LTI è **stabile** se la matrice  $A$  ha tutti gli autovalori con **modulo strettamente minore di 1 ed uno solo con modulo unitario** (o una sola coppia c.c. con modulo unitario).

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i \quad \exists! i^* : |\lambda_{i^*}| = 1 \Rightarrow \text{Stabilità}$$

### Osservazione 1 (sul Teorema 3)

Una coppia di autovalori complessi coniugati "conta" come uno solo. Quindi, un sistema con una sola coppia di autovalori complessi coniugati con modulo unitario (e tutti gli altri con modulo inferiore ad 1) è stabile (semplicemente).

### Osservazione 2 (sui Teoremi 2 & 3)

Quel che si deduce dall'Osservazione 1 è che ci sono sistemi con più di un autovalore con modulo unitario (e tutti gli altri con modulo inferiore ad 1) che sono **stabili (semplicemente)** ed altri sistemi con più di un autovalore con modulo unitario (e tutti gli altri con modulo inferiore ad 1) che sono **instabili**.

### Schema riassuntivo per autovalori con modulo unitario

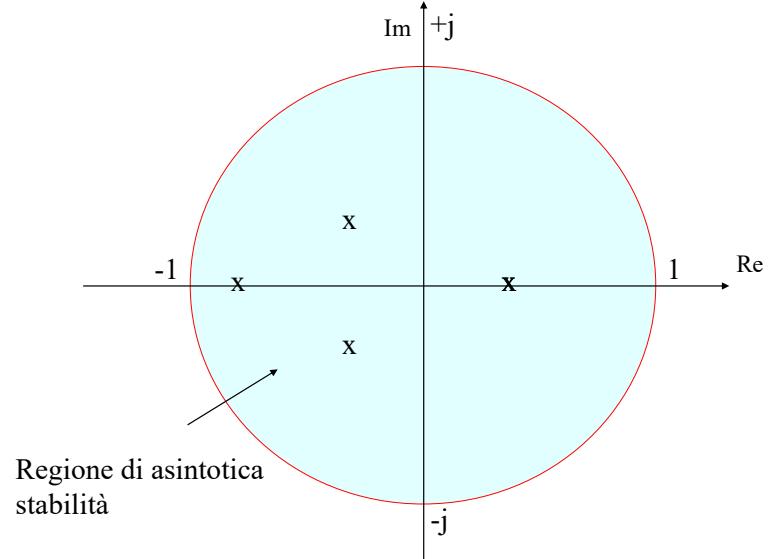
$|\lambda_i| \leq 1, \forall i$   
 $\exists i^*: |\lambda_{i^*}| = 1$  **non asintoticamente stabile**  
 (ma stabile o instabile?)



**singolo** autovalore con  $|\lambda_i| = 1$  **semplicemente stabile**  
 (o una sola coppia di autovalori complessi coniugati con modulo unitario)

**semplicemente stabile**

**più** autovalori con  $|\lambda_i| = 1$  ? *Non affrontiamo questo caso* **instabile**



Asintotica stabilità

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$$



$$|\lambda_i| < 1, \forall i$$

Instabilità  $A^k$  diverge per  $k \rightarrow \infty$

approfondimento

Stabilità  $A^k$  limitata  $\forall k$

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i \quad \exists i: |\lambda_i| = 1$$

oppure

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i$$

### Esempio

Si consideri nuovamente il problema della gestione delle scorte di un magazzino e se ne discuta la stabilità.

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \alpha \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |\lambda_i| < 1 \quad \text{per } i = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema As. stabile}$$

# Lezione 29.

## Trasformazione $\mathcal{Z}$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 29

1

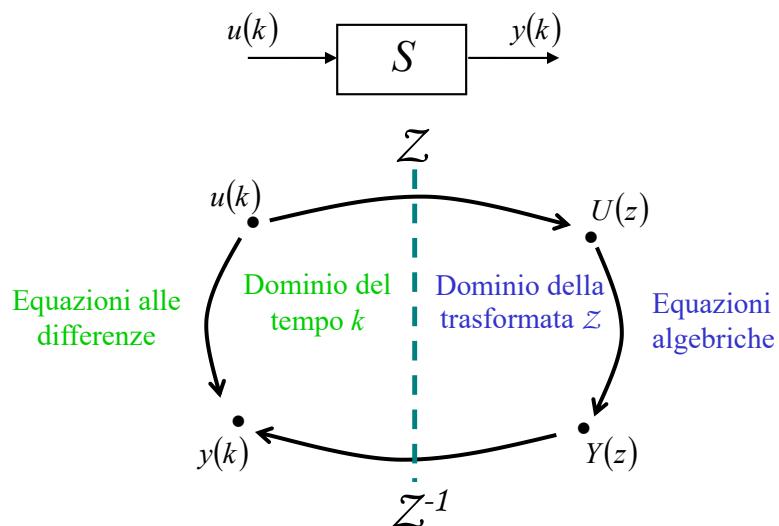
### Schema

1. Introduzione
2. Definizione
3. Proprietà
4. Calcolo dell'antitrasformata  $\mathcal{Z}$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 29

2

### 1. Introduzione



F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 29

3

### 2. Definizione

$$\begin{array}{c} f(k): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ \downarrow \mathcal{Z} \\ F(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

Trasforma una funzione reale di variabile intera in una funzione complessa di variabile complessa.

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 29

4

### Esempio - Trasformata dello scalino

$$f(k) = \text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 29

5

### Esempio - Trasformata dell'impulso

$$f(k) = \text{imp}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) = 1$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 29

6

### Esempio - Trasformata dell'esponenziale

$$f(k) = \lambda^k$$

$$F(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda z^{-1})^k = \frac{1}{1-\lambda z^{-1}} = \frac{z}{z-\lambda}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 29

7

## 3. Proprietà

### 3.1 Linearità

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

$$G(z) = \mathcal{Z}[g(k)]$$

$$\boxed{\mathcal{Z}[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z)} \quad \forall \alpha, \beta \in C$$

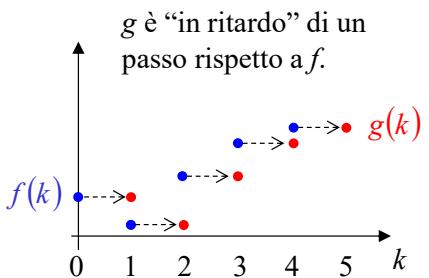
F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 29

8

### 3.2 Ritardo

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

Sia  $g(k) = f(k-1)$



Allora

$$G(z) = z^{-1}F(z)$$

Infatti:

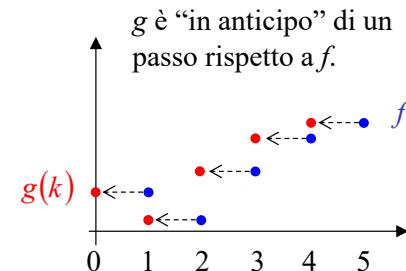
$$\begin{aligned} G(z) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-k} = f(-1) + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots = \\ &= 0 + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots = z^{-1}(f(0) + f(1)z^{-1} + \dots) = \\ &= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = z^{-1}F(z) \end{aligned}$$

9

### 3.3 Anticipazione

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

Sia  $g(k) = f(k+1)$   
con  $f(0) = 0$



Allora

$$G(z) = zF(z)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} G(z) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k} = f(1) + f(2)z^{-1} + f(3)z^{-2} + \dots \\ &= z(f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots) = z \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = zF(z) \end{aligned}$$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 29

10

### Tabella trasformate notevoli

$\text{imp}(k)$	1
$\text{sca}(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$\text{ram}(k)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\text{par}(k)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^k \text{sca}(k)$	$\frac{z}{z-a}$
$\sin(\vartheta k) \text{sca}(k)$	$\frac{z \sin(\vartheta)}{z^2 - 2 \cos(\vartheta)z + 1}$
$\cos(\vartheta k) \text{sca}(k)$	$\frac{z(z - \cos(\vartheta))}{z^2 - 2 \cos(\vartheta)z + 1}$

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 29

11

### 4. Calcolo dell'antitrasformata

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$$

- ✓ ~~Formula esplicita~~
  - ✓ Teorema del valore iniziale  $\xrightarrow{\quad} f(0)$
  - ✓ Teorema del valore finale  $\xrightarrow{\quad} f(\infty)$
  - ✓ Sviluppo di Heaviside
  - ✓ Lunga divisione
- new!**
- } (solo per  $F(z)$  razionali)

F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 29

12

#### 4.1 Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Infatti:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots \xrightarrow{z \rightarrow \infty} f(0)$$

#### 4.2 Teorema del valore finale

**Ipotesi:** i poli di  $F(z)$  devono avere tutti modulo  $< 1$  oppure essere in  $z=1$

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z)$$

#### Esempio

$$F(z) = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 + 2z + 2}$$

$$\begin{array}{r} 4z^2 - z + 2 \\ - 4z^2 - 8z - 8 \\ \hline - 9z - 6 \\ \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad 9z + 18 + 18z^{-1} \\ \hline \quad \quad \quad 12 + 18z^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{r} z^2 + 2z + 2 \\ \hline 4 - 9z^{-1} + 12z^{-2} + \dots \\ \quad \quad \quad | \\ \quad \quad \quad f(1) = -9 \\ \quad \quad \quad f(2) = 12 \\ \quad \quad \quad f(0) = 4 \end{array}$$

#### 4.3 Antitrasformata $\mathcal{Z}$ mediante lunga divisione

Si consideri una  $F(z)$  razionale

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0} \text{ con } n \leq m$$

Facendo la divisione di polinomi si ottengono tanti campioni di  $f(k)$  quanti sono i "colpi" di lunga divisione che si fanno.

Infatti:

$$\begin{array}{c} N(z) \Big| D(z) \\ \hline f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \end{array}$$

Con la lunga divisione non si ottiene un'espressione analitica di  $f(k)$ , ma solo i suoi primi campioni.

#### 4.4 Sviluppo di Heaviside

Si consideri il problema dell'antitrasformazione della funzione razionale

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

con grado di  $N(z)$  inferiore od uguale a quello di  $D(z)$ .

L'obiettivo è scomporre  $F(z)$  in una somma di termini di cui conosco la trasformata. Osservando la tabella delle trasformate notevoli si nota che tutte hanno un fattore  $z$  al numeratore.

Quindi, si applicherà il metodo di Heaviside a  $\frac{F(z)}{z}$

Si consideri il caso in cui  $F(z)$  abbia **tutti i poli distinti e non nulli**, cioè:

$$D(z) = \prod_{i=1}^n (z - p_i) \quad p_i \neq p_j \quad p_i \neq 0 \quad \forall i$$

Si scomponga  $\frac{F(z)}{z}$  come segue:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{(z - p_1)} + \frac{\alpha_2}{(z - p_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{(z - p_n)}$$

da cui:

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{(z - p_1)} + \alpha_2 \frac{z}{(z - p_2)} + \dots + \alpha_n \frac{z}{(z - p_n)}$$

E quindi infine

$$f(k) = \alpha_0 \text{imp}(k) + \alpha_1 p_1^k + \alpha_2 p_2^k + \dots + \alpha_n p_n^k \quad k \geq 0$$

### Esempio

$$F(z) = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 - 0.75z + 0.125} \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad F(z) = \frac{4z^2 - z + 2}{(z - 0.25)(z - 0.5)}$$

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{z} &= \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{(z - 0.25)} + \frac{\alpha_2}{(z - 0.5)} = \frac{\alpha_0(z - 0.25)(z - 0.5) + \alpha_1 z(z - 0.5) + \alpha_2 z(z - 0.25)}{z(z - 0.25)(z - 0.5)} = \\ &= \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)z^2 + (-0.75\alpha_0 - 0.5\alpha_1 - 0.25\alpha_2)z + 0.125\alpha_0}{z(z - 0.25)(z - 0.5)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ 0.75\alpha_0 + 0.5\alpha_1 + 0.25\alpha_2 = 1 \\ 0.125\alpha_0 = 2 \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad \begin{cases} \alpha_0 = 16 \\ \alpha_1 = -32 \\ \alpha_2 = 20 \end{cases}$$

$$F(z) = 16 - 32 \frac{z}{(z - 0.25)} + 20 \frac{z}{(z - 0.5)}$$

$$f(k) = 16 \text{imp}(k) - 32 \cdot (0.25)^k + 20(0.5)^k \quad k \geq 0$$

## Lezione 30.

### Sistemi dinamici a tempo discreto (approccio ingresso/uscita)

### Schema

1. Funzione di trasferimento
2. Ricorsione
3. Filtri FIR
4. Metodi di rappresentazione di un sistema LTI SISO a tempo discreto

## 1. Funzione di trasferimento

Si consideri un sistema LTI  $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$

Eseguendo la trasformazione  $\mathcal{Z}$  si ottiene a partire da condizioni iniziali nulle si ottiene:

$$\begin{cases} zX(z) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

Infine:

$$Y(z) = \underbrace{\left[ C(zI - A)^{-1}B + D \right]}_{G(z)} U(z)$$

**Funzione di trasferimento**

## 1.2 Proprietà

$$G(z) \text{ è razionale} \quad \longrightarrow \quad G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- $D(z) = \varphi(z) = \det(zI - A)$  è un polinomio in  $z$  di grado  $n$  (è il polinomio caratteristico!)

- $N(z)$  è un polinomio in  $z$ :
  - ✓ di grado  $n$  se  $D$  è diverso da zero
  - ✓ di grado  $< n$  se  $D$  è nullo

**Salvo cancellazioni**

## 1.1 Interpretazione della funzione di trasferimento (per sistemi SISO)

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento  $G(z)$

Siano

$$\begin{aligned} u(k) &= \text{imp}(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} U(z) = 1 \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

Allora

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z)$$

La funzione di trasferimento è la trasformata  $\mathcal{Z}$  della risposta all'impulso del sistema

## In caso di cancellazioni

- $D(z)$  è un fattore di  $\varphi(z)$  di grado  $r < n$
- $N(z)$  ha grado  $v < n$  ( $v = r$  solo se  $D$  è diverso da zero)

Una cancellazione in  $G(z)$  è un indicatore dell'esistenza di **parti "nascoste"** (**non raggiungibili** e/o **non osservabili**) del sistema (cioè che esistono nella rappresentazione di stato e che "si perdono" passando alla rappresentazione ingresso/uscita).

### 1.3 Poli e zeri di una funzione di trasferimento

- I poli sono tutti autovalori
- Un autovalore può non essere un polo in caso di cancellazioni
- La stabilità dipende dai poli

As. stabilità   $|\lambda_i| < 1$   
(salvo cancellazioni)

- Numero di zeri  $\leq$  numero di poli

Se invece la matrice  **$I-A$  non è invertibile**, ovvero la matrice  $A$  ha autovalori in  $z=1$ , cioè  $G(z)$  ha poli in  $z=1$ , è possibile definire un **guadagno generalizzato** della funzione di trasferimento:

$$\mu = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^g G(z)$$

dove  $g$  è il tipo di  $G(z)$  ovvero il numero di poli in  $z=1$  ( $g>0$ ) oppure il numero di zeri in  $z=1$  ( $g<0$ ).

### 1.4 Guadagno statico e funzione di trasferimento

Si consideri un sistema LTI  $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$

Se la matrice  **$I-A$  è invertibile**, ovvero la matrice  $A$  non ha autovalori in  $z=1$ , cioè  $G(z)$  non ha poli in  $z=1$ , il **guadagno statico** del sistema è

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = (C(I-A)^{-1}B + D)$$

E' facile verificare che

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = (C(I-A)^{-1}B + D) \equiv G(1)$$

## 2. Equazione ricorsiva

I sistemi a tempo discreto hanno una rappresentazione ingresso/uscita alternativa alla funzione di trasferimento, detta equazione ricorsiva.

La rappresentazione ricorsiva è molto utilizzata nell'Identificazione di Modelli (IMAD).

L'equazione ricorsiva consente di calcolare rapidamente i primi campioni delle risposte tipiche (all'impulso ed allo scalino) di un sistema dinamico LTI a tempo discreto.

## Esempio illustrativo

Si consideri un sistema LTI con ingresso  $u(k)$  ed uscita  $y(k)$  descritto mediante la seguente funzione di trasferimento

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 + 2z + 2}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} Y(z)(z^2 + 2z + 2) &= (4z^2 - z + 2)U(z) \\ z^2Y(z) + 2zY(z) + 2Y(z) &= 4z^2U(z) - zU(z) + 2U(z) \end{aligned}$$

Antitrasformando e ricordando la proprietà di anticipo:

$$y(k+2) + 2y(k+1) + 2y(k) = 4u(k+2) - u(k+1) + 2u(k)$$

Da cui:

$$y(k+2) = -2y(k+1) - 2y(k) + 4u(k+2) - u(k+1) + 2u(k)$$

$$y(k) = -2y(k-1) - 2y(k-2) + 4u(k) - u(k-1) + 2u(k-2)$$

$$u(k) = \text{imp}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow \quad y(k) = -\frac{1}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2) + u(k) + u(k-1) + u(k-2)$$

$k$	$u(k)$	$y(k)$
0	1	$y(0) = -\frac{1}{4}y(-1) - \frac{1}{8}y(-2) + u(0) + u(-1) + u(-2) = 1$
1	0	$y(1) = -\frac{1}{4}y(0) - \frac{1}{8}y(-1) + u(1) + u(0) + u(-1) = \frac{3}{4}$
2	0	$y(2) = -\frac{1}{4}y(1) - \frac{1}{8}y(0) + u(2) + u(1) + u(0) = -\frac{3}{16} - \frac{1}{8} + 1 = \frac{11}{16}$
3	0	$y(3) = -\frac{1}{4}y(2) - \frac{1}{8}y(1) + u(3) + u(2) + u(1) = -\frac{11}{64} - \frac{3}{32} = -\frac{17}{64}$

## Esempio

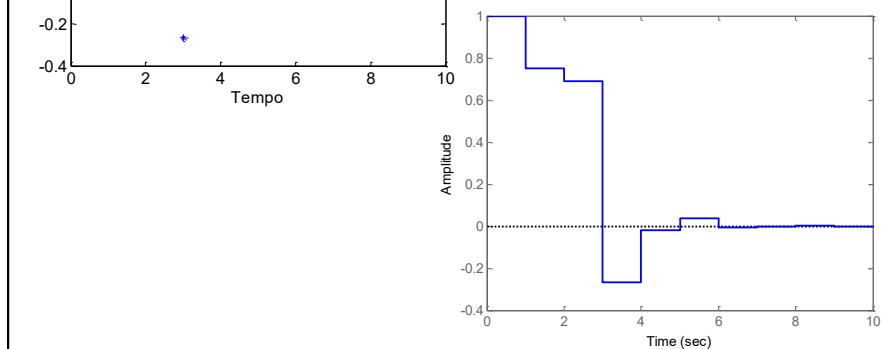
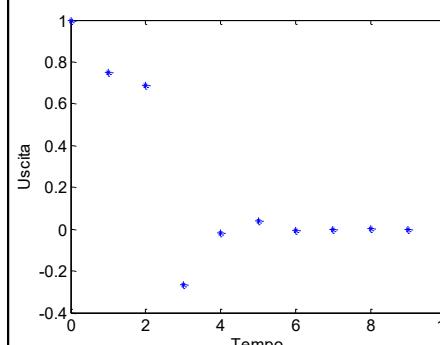
Calcolare  $y(0), y(1), y(2), y(3)$  della risposta impulsiva del sistema con funzione di trasferimento  $W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$

Si scriva l'equazione ricorsiva

$$\left( z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8} \right) Y(z) = (z^2 + z + 1) U(z)$$

$$y(k+2) + \frac{1}{4}y(k+1) + \frac{1}{8}y(k) = u(k+2) + u(k+1) + u(k)$$

$$y(k) = -\frac{1}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2) + u(k) + u(k-1) + u(k-2)$$



### 3. Sistemi FIR (Finite Impulse Response)

Sono sistemi dinamici LTI a tempo discreto con **tutti e soli i poli nell'origine**.

Questi sistemi hanno la caratteristica che **la loro risposta allo scalino raggiunge il valore di regime in un tempo finito**. In particolare, se  $n$  è l'ordine del sistema, il valore di regime viene raggiunto dopo  $n$  passi.

Tale proprietà non vale per i sistemi LTI a tempo continuo, la cui risposta a scalino non raggiunge mai il valore di regime, ma vi tende asintoticamente.

Si calcoli la risposta allo scalino:

$$u(k) = \text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

$$y(0) = b_n u(0) = b_n$$

$$y(1) = b_n u(1) + b_{n-1} u(0) = b_n + b_{n-1}$$

$$y(2) = b_n u(2) + b_{n-1} u(1) + b_{n-2} u(0) = b_n + b_{n-1} + b_{n-2}$$

⋮

$$y(n) = b_n u(n) + b_{n-1} u(n-1) + \dots + b_1 u(1) + b_0 u(0) = b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu$$

$$y(n+1) = b_n u(n+1) + b_{n-1} u(n) + \dots + b_1 u(2) + b_0 u(1) = b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu$$

⋮

$$y(n+m) = b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu \quad \forall m \geq 1$$

Un sistema FIR di ordine  $n$  è quindi definito dalla seguente funzione di trasferimento:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n}$$

$$z^n Y(z) = (b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0) U(z)$$

$$y(k+n) = b_n u(k+n) + b_{n-1} u(k+n-1) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

$$y(k) = b_n u(k) + b_{n-1} u(k-1) + \dots + b_1 u(k-n+1) + b_0 u(k-n)$$

L'uscita al tempo  $k$  dipende dai campioni dell'ingresso fino al più al tempo  $k-n$ .

### Esempio

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + \frac{5}{4}z + \frac{3}{8}}{z^3}$$

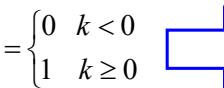
$$z^3 Y(z) = \left( z^2 + \frac{5}{4}z + \frac{3}{8} \right) U(z)$$

$$y(k+3) = u(k+2) + \frac{5}{4}u(k+1) + \frac{3}{8}u(k)$$

$$y(k) = u(k-1) + \frac{5}{4}u(k-2) + \frac{3}{8}u(k-3)$$

$k$	$u(k)$	$y(k)$
0	1	$y(0) = 0 + \frac{5}{4} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 0 = 0$

$$u(k) = \text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$



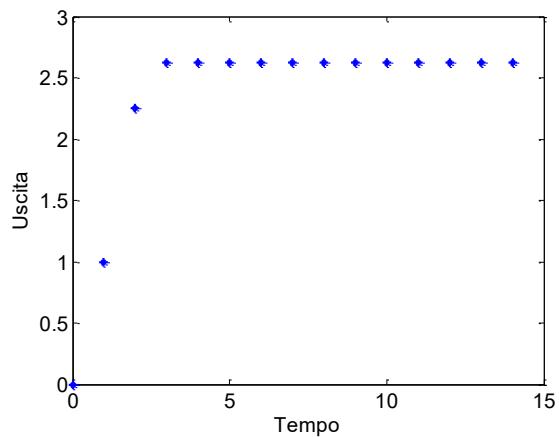
Calcolare i primi quattro campioni della risposta allo scalino del sistema.

1	1	$y(1) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 0 = 1$
---	---	--

2	1	$y(2) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 0 = \frac{9}{4}$
---	---	--

3	1	$y(3) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{21}{8}$
---	---	---

4	1	$y(4) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{21}{8}$
---	---	---



approfondimento

#### 4. Metodi di rappresentazione di sistemi LTI SISO a tempo discreto

- 1 Funzione di trasferimento

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

- 2 Equazione ricorsiva

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a) + b_0 u(k-n_k) + \dots + b_{n_b} u(k-n_k-n_b)$$

$n_k \geq 0$  ritardo puro

- 3 Rappresentazione di stato

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Come si passa da una rappresentazione all'altra?



approfondimento

Funzione di trasferimento

$$G(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]$$



approfondimento

Funzione di trasferimento

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a) + b_0 u(k-n_k) + \dots + b_{n_b} u(k-n_k-n_b)$$

$$Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} Y(z) + b_0 z^{-n_k} U(z) + \dots + b_{n_b} z^{-n_k-n_b} U(z)$$

$$Y(z)(1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}) = z^{-n_k} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b-1} z^{-n_b+1} + b_{n_b} z^{-n_b}) U(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-n_k} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b-1} z^{-n_b+1} + b_{n_b} z^{-n_b})}{1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}} =$$

$$= z^{n_a - n_b - n_k} \frac{b_0 z^{n_b} + b_1 z^{n_b-1} + \dots + b_{n_b-1} z + b_{n_b}}{z^{n_a} - a_1 z^{n_a-1} - \dots - a_{n_a}}$$

### Esempio

approfondimento

$$y(k) = 0.25y(k-1) + 0.25y(k-3) + u(k-3) + 0.5u(k-4) + 0.75u(k-5)$$

$$Y(z) = 0.25z^{-1}Y(z) + 0.25z^{-3}Y(z) + z^{-3}U(z) + 0.5z^{-4}U(z) + 0.75z^{-5}U(z)$$

$$(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3})Y(z) = z^{-3}(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2})U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-3}(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2})}{(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3})}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(z^2 + 0.5z + 0.75)}{z^2(z^3 - 0.25z^2 - 0.25)}$$

$$-(n_a - n_k - n_b) \quad n_a$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + 0.5z + 0.75}{z^5 - 0.25z^4 - 0.25z^2}$$

### Esempio

approfondimento

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + 0.5z + 0.75}{z^5 - 0.25z^4 - 0.25z^2}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2})}{z^5(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3})}$$

$$m_b - m_a = -n_k$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-3}(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2})}{(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3})}$$

$$(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3})Y(z) = z^{-3}(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2})U(z)$$

$$Y(z) - 0.25z^{-1}Y(z) - 0.25z^{-3}Y(z) = z^{-3}U(z) + 0.5z^{-4}U(z) + 0.75z^{-5}U(z)$$

$$y(k) - 0.25y(k-1) - 0.25y(k-3) = u(k-3) + 0.5u(k-4) + 0.75u(k-5)$$

$$y(k) = 0.25y(k-1) + 0.25y(k-3) + u(k-3) + 0.5u(k-4) + 0.75u(k-5)$$

1

approfondimento

2

Funzione di trasferimento

Equazione ricorsiva

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0z^{m_b} + b_1z^{m_b-1} + \dots + b_{m_b-1}z + b_{m_b}}{z^{m_a} - a_1z^{m_a-1} - \dots - a_{m_a}} = \quad m_a \geq m_b$$

$$= \frac{z^{m_b}(b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{m_b-1}z^{-n_b+1} + b_{m_b}z^{-n_b})}{z^{m_a}(1 - a_1z^{-1} - \dots - a_{m_a}z^{-n_a})}$$

$$Y(z)(1 - a_1z^{-1} - \dots - a_{m_a}z^{-n_a}) = z^{m_b - m_a}(b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{m_b-1}z^{-n_b+1} + b_{m_b}z^{-n_b})U(z)$$

$m_b - m_a = -n_k \leq 0$  Ritardo puro

$$y(k) = a_1y(k-1) + \dots + a_{n_a}y(k-n_a) + b_0u(k-n_k) + \dots + b_{n_b}u(k-n_k - n_b)$$

3

approfondimento

2

Rappresentazione di stato

Equazione ricorsiva

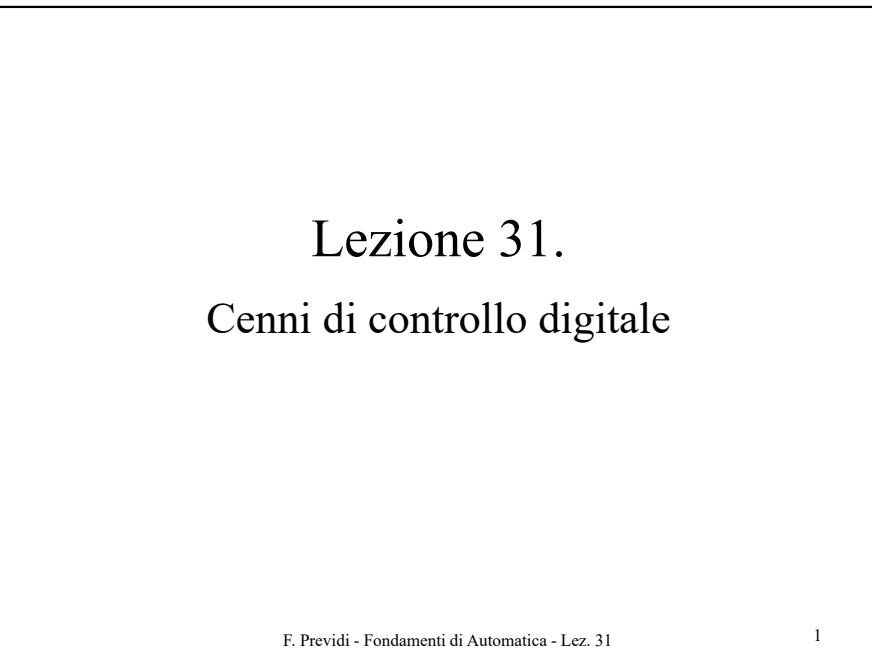
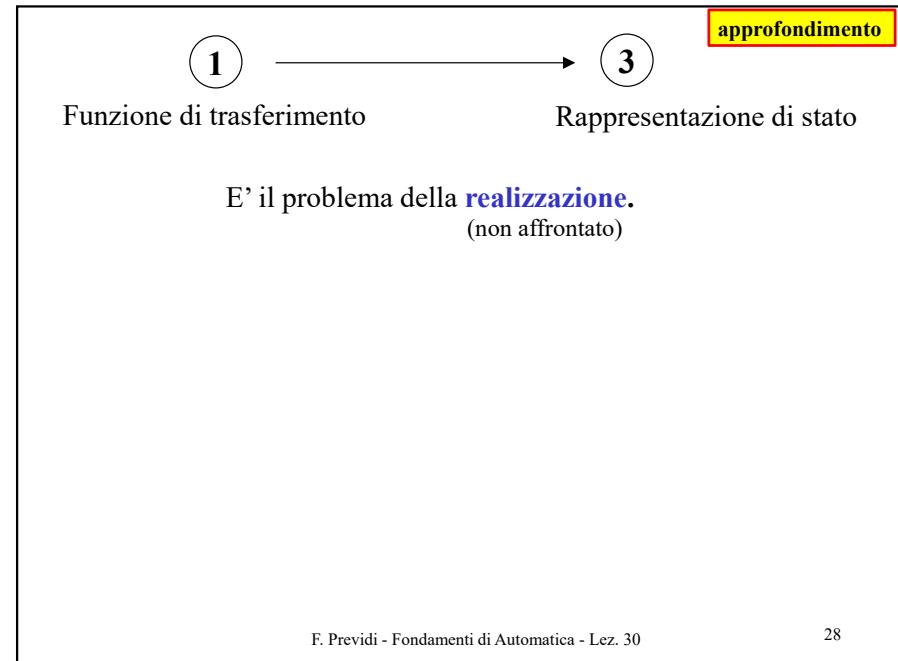
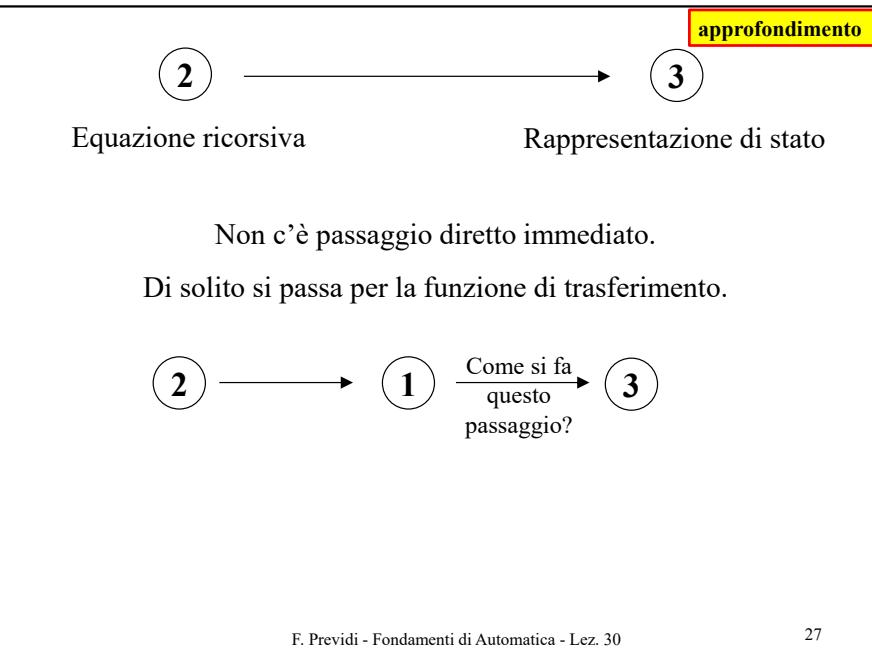
Non c'è passaggio diretto immediato.

Di solito si passa per la funzione di trasferimento.

3

1

2



- Schema**
1. Introduzione
  2. Campionamento e Tenuta
  3. Aliasing
  4. Teorema del campionamento
  5. Progetto mediante discretizzazione di controllori analogici
- F. Previdi - Fondamenti di Automatica - Lez. 31      2

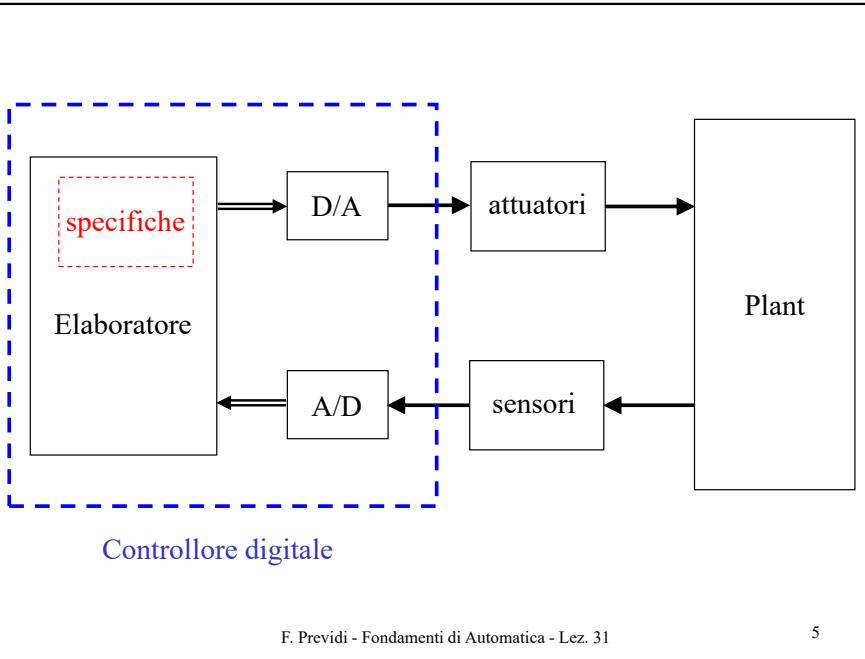
## 1. Introduzione

I moderni sistemi di controllo sono ormai tutti basati su elaboratori elettronici per (ovvie) ragioni:

- Costi (bassi)
- Flessibilità (indipendenti dalla tecnologia del sistema)
- Algoritmi (possibilità di utilizzarne di molto complicati)
- Integrazione con supervisione e diagnostica

Lo schema tipico di un sistema di controllo in retroazione è il seguente:

- i **sensori** trasformano le variabili misurate sul plant in variabili elettriche facilmente manipolabili (tipicamente tensioni);
- queste variabili vengono **campionate** (convertite in segnali a tempo discreto) e trasmesse ad un elaboratore;
- l'**elaboratore** è la sede dell'algoritmo di controllo che, note le specifiche (riferimento), sulla base dei segnali misurati, genera i segnali di controllo (tipicamente tensioni o correnti);
- i **segnali di controllo** vengono **convertiti in segnali analogici** (a tempo continuo), eventualmente amplificati, ed inviati agli attuatori;
- gli **attuatori** trasformano le variabili generate dal controllo nelle azioni di controllo da esercitare sul plant.



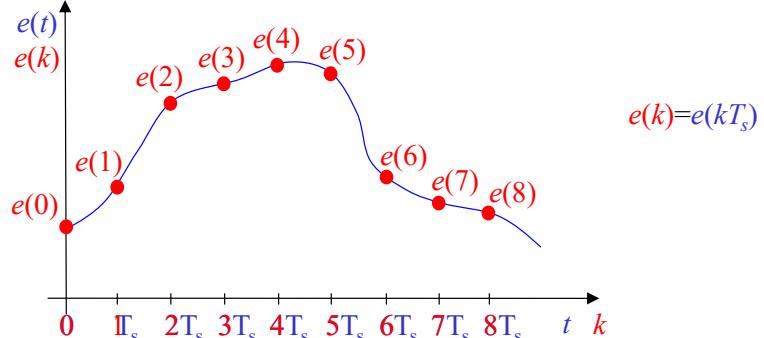
## 2. Campionamento e tenuta

Il **campionamento** è l'operazione che trasforma un segnale a tempo continuo (analogico) in un segnale a tempo discreto (digitale/numerico). Il "blocco" che effettua tale operazione è il **campionatore** (convertitore A/D).

La **tenuta** è l'operazione che trasforma un segnale a tempo discreto in un segnale a tempo continuo. Il "blocco" che effettua tale operazione è il **mantenitore** (convertitore D/A).

E' importante disporre di **modelli** che descrivano tali operazioni.

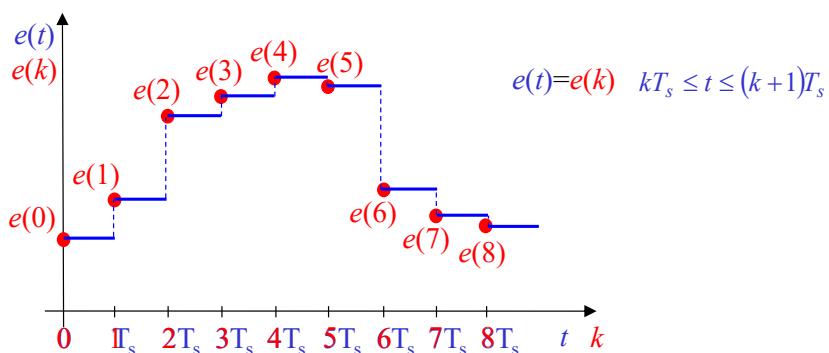
### Campionatore (Convertitore A/D)



$e(k)$  è un numero reale per ogni  $k$

$T_s$  è il periodo (o tempo) di campionamento

### Mantenitore (Convertitore D/A)



Mantenitore di ordine zero

Zero Order Holder (ZOH)

### Note

- E' evidente che l'operazione di campionamento comporta una perdita di informazione.

- Si parla di **campionatore ideale**, perché si suppone che i campioni siano **numeri reali**. In realtà, sono numeri rappresentati in codice binario con un numero finito di bit. Ciò comporta una ulteriore perdita di informazione rappresentata dal cosiddetto **errore (o rumore) di quantizzazione**.

- Frequenza di campionamento  $f_s = \frac{1}{T_s}$

- Pulsazione di campionamento  $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$

### Note

- Il ZOH è il prototipo dei mantenitori polinomiali.

- Il mantenitore deve essere sempre sincronizzato con il campionatore (e con il regolatore).

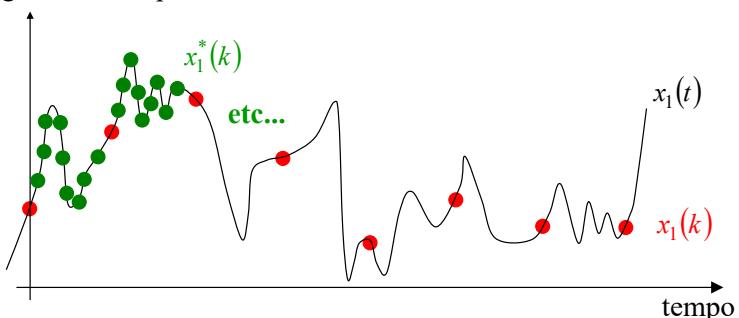
### 3. Aliasing

E' evidente che l'operazione di campionamento comporta una **perdita di informazione** perchè "pretende" di concentrare l'infomazione di infiniti numeri reali (una porzione di un segnale a tempo continuo) in un numero finito di numeri reali (i campioni del corrispondente segnale campionato).

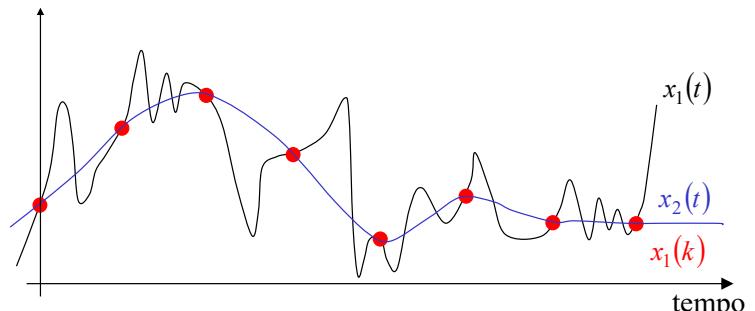
Tale perdita di informazione può essere "sostanziale" cioè: nel passaggio dal continuo al discreto si perdono alcune "caratteristiche essenziali del segnale". In questo caso non è possibile ricostruire il segnale continuo originale partendo dai suoi campioni.

Il risultato ottenuto non sorprende: per quei campioni passano infinite funzioni continue "molto regolari".

E' stato commesso un errore nel campionamento: è stato usato un periodo di campionamento troppo lungo rispetto alla "variabilità" del segnale  $x_1$  da campionare. E' evidente che il tempo di campionamento vada scelto in base a "quanto rapidamente varia" il segnale da campionare.



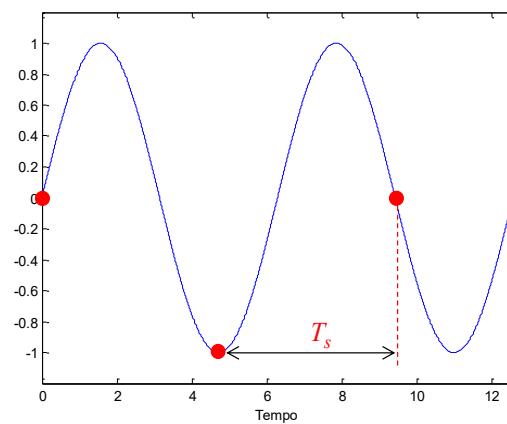
### Introduzione "intuitiva"



Si eseguano le seguenti operazioni:

- campionare  $x_1(t)$  ottenendo i campioni  $x_1(k)$
- interpolare i campioni con una curva continua  $x_2(t)$  "la più regolare possibile" (per esempio con un certo numero di derivate continue)

### Esempio illustrativo



Si consideri il segnale  

$$x(t) = \sin(\bar{\omega}t)$$

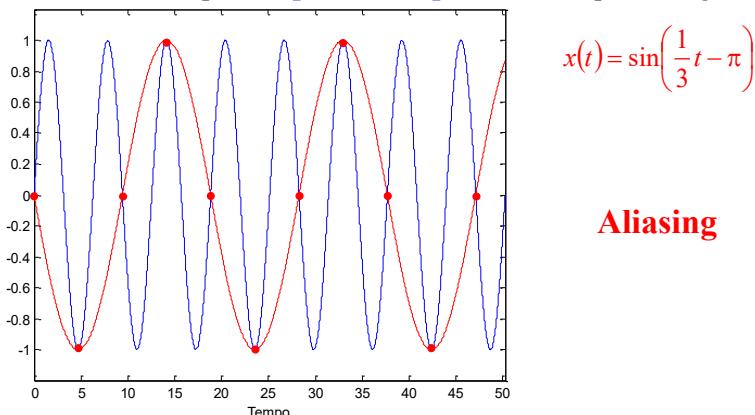
Esso ha periodo  $P = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$

Si scelga il periodo di campionamento

$$T_s = \frac{3}{4}P$$

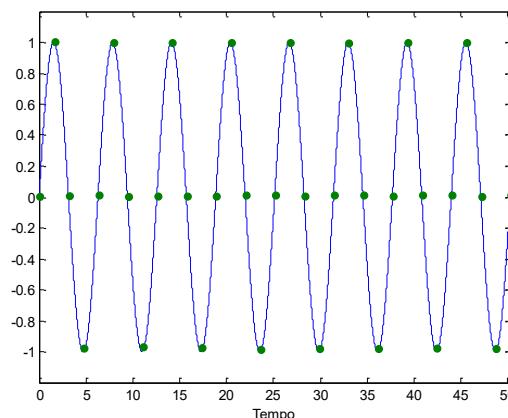
$$\text{In figura: } x(t) = \sin(t) \rightarrow P = 2\pi \rightarrow T_s = \frac{3}{2}\pi$$

Cercando di tornare dalla sinusoide campionata ad una sinusoide a tempo continuo, si nota che esiste una sinusoide che passa per i medesimi campioni **a pulsazione più bassa** di quella originale.



Se il periodo di campionamento è troppo lungo rispetto al periodo della sinusoide da campionare si ha **aliasing**.

**Contromisura:** campionare con periodo di campionamento più breve.



$$\text{Scegliendo } T_s = \frac{1}{4} P$$

si può osservare che non esiste una sinusoide a pulsazione inferiore a quella che ha generato i campioni.

#### 4. Teorema del campionamento

Sia  $x(t)$  un segnale a banda limitata con pulsazione massima  $\omega_{\max}$  (cioè un segnale con spettro nullo per  $\omega > \omega_{\max}$ ).

Si campioni  $x(t)$  con tempo di campionamento  $T_s$ .

Sia  $\omega_N = \frac{\omega_s}{2} \equiv \frac{\pi}{T_s}$  la **pulsazione di Nyquist**.

Se  $\omega_N > \omega_{\max}$  allora è possibile ricostruire il segnale a tempo continuo a partire dai suoi campioni (mediante la formula di ricostruzione di Shannon).

#### Nota

Il segnale in ingresso viene spesso “forzato” ad essere a banda limitata mediante **filtri antialiasing** (realizzati con elettronica analogica)

#### 5. Progetto di controllori digitali mediante discretizzazione di controllori analogici

La progettazione segue i seguenti passi:

- Definizione di un modello a tempo continuo per il plant ✓
- Progettazione del controllore analogico mediante metodi ✓ a tempo continuo (noti)
- Scelta del tempo di campionamento
- Discretizzazione della legge di controllo a tempo continuo

## 6.1 Scelta del periodo di campionamento

E' necessario tenere conto dei seguenti fattori:

### 1. Costo dei dispositivi

Più breve è il periodo di campionamento, più elevato è il costo dei dispositivi (con il rischio di dover ricorrere a tecnologie non standard).

### 2. Problemi numerici

Più breve è il periodo di campionamento, più elevato è l'errore dovuto alla quantizzazione.

### 3. Banda passante

La pulsazione di campionamento va scelta tenendo conto della banda passante ( $\omega_c$ ) del sistema retroazionato. La pulsazione critica può identificare efficacemente il limite di banda di tutti i segnali circolanti nell'anello di controllo.

### 4. Teorema del campionamento

Se i segnali in gioco nel sistema di controllo sono a banda limitata a  $\omega_c$  allora vanno campionati a  $\omega_s > 2\omega_c$ .

### Nota

Il criterio precedentemente esposto è (giustamente) basato sulla **velocità del sistema retroazionato**. Tanto più veloce è il sistema ad anello chiuso, tanto maggiore sarà la pulsazione critica e quindi tanto più piccolo dovrà essere scelto il periodo di campionamento.

Per meglio comprendere il legame con la velocità del sistema, si supponga di avere un sistema retroazionato ben smorzato (poli dominanti ad anello chiuso con  $\xi \approx 0.7$ ). Il tempo di assestamento della risposta allo scalino unitario sarà dunque (approssimativamente)

$$t_a \approx \frac{5}{\xi \omega_c} \rightarrow t_a \approx \frac{5}{0.7 \omega_c} \rightarrow t_a \approx \frac{7}{\omega_c} \rightarrow \omega_c \approx \frac{7}{t_a}$$

$$\text{Scegliendo } \frac{1}{10\omega_c} \leq T_s \leq \frac{1}{\omega_c} \rightarrow \frac{t_a}{70} \leq T_s \leq \frac{t_a}{7}$$

**Bisogna scegliere il periodo di campionamento in modo tale da avere un numero sufficiente di campioni in un transitorio.**

Un criterio empirico per la scelta del periodo di campionamento può quindi essere formalizzato come segue:

$$\alpha \omega_c \leq \omega_s \leq 10\alpha \omega_c \quad \text{con } \alpha \approx 5 \div 10$$

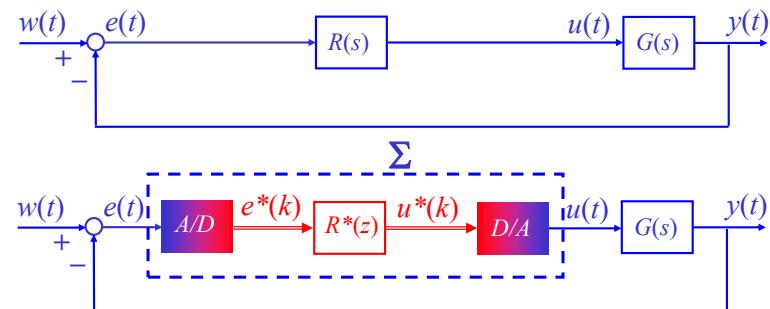
Rispettare il teorema del campionamento con un po' di margine

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \rightarrow \alpha \omega_c \leq \frac{2\pi}{T_s} \leq 10\alpha \omega_c \rightarrow \frac{2\pi}{10\alpha \omega_c} \leq T_s \leq \frac{2\pi}{\alpha \omega_c}$$

$$\text{Per es. scegliendo } \alpha = 2\pi \quad \text{si ha} \quad \frac{1}{10\omega_c} \leq T_s \leq \frac{1}{\omega_c}$$

**N.B.** Questo criterio va opportunamente modificato nel caso sia presente un filtro anti-aliasing oppure vi siano significativi ritardi di conversione e/o elaborazione.

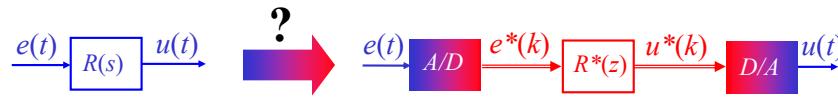
## 6.2 Discretizzazione della legge di controllo a tempo continuo



Il procedimento di discretizzazione consiste nel calcolare la funzione di trasferimento a tempo discreto  $R^*(z)$  in modo tale che il sistema  $\Sigma$  mostri un comportamento I/O approssimativamente uguale a quello di  $R(s)$ , progettata a tempo continuo.

In questa sede si presenta il metodo della trasformazione bilineare.

### Metodo della trasformazione bilineare

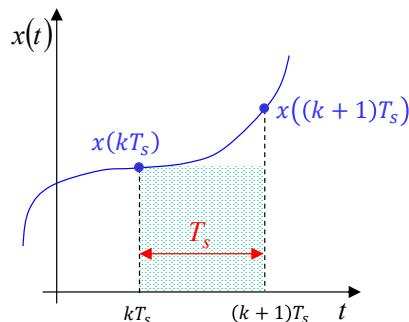


$$R(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + be(t) \\ u(t) = cx(t) + de(t) \end{cases}$$

Il controllore a tempo discreto sarà descritto mediante equazioni alle differenze. E' quindi sensato provare ad usare **metodi di integrazione numerica**.

Si approssimino gli integrali mediante il metodo di integrazione di **Eulero in avanti**.



Si approssima l'integrale con l'area del rettangolo evidenziato.

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x(t) dt \cong T_s x(kT_s)$$

Si integri l'equazione di stato lungo un tempo pari al tempo di campionamento.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + be(t)$$

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \dot{x}(t) dt = \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} Ax(t) dt + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} be(t) dt$$

$$x((k+1)T_s) - x(kT_s) = A \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x(t) dt + b \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e(t) dt$$

Questi integrali vanno calcolati in modo approssimato con un metodo numerico

$$x((k+1)T_s) - x(kT_s) = A \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x(t) dt + b \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e(t) dt$$

Integrando con il metodo di Eulero in avanti

$$x((k+1)T_s) - x(kT_s) \cong AT_s x(kT_s) + bT_s e(kT_s)$$

Si osservi che, con campionamento ideale, si ha:

$$x((k+1)T_s) \equiv x(k+1) \quad x(kT_s) \equiv x(k) \quad e(kT_s) \equiv e(k)$$

$$x(k+1) - x(k) \cong AT_s x(k) + bT_s e(k) \rightarrow \begin{cases} x(k+1) = (I + AT_s)x(k) + bT_s e(k) \\ u(k) = cx(k) + de(k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}x(k+1) &= (I + AT_s)x(k) + bT_s e(k) \\u(k) &= cx(k) + de(k)\end{aligned}$$

Calcolando la funzione di trasferimento si ha

$$R^*(z) = c[zI - (I + AT_s)]^{-1}bT_s + d = c\left(\frac{z-1}{T_s}I - A\right)^{-1}b + d$$

La funzione di trasferimento a tempo continuo di partenza è:  $R(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$

Quindi:

$$R^*(z) = R\left(\frac{z-1}{T_s}\right)$$

Discretizzazione  
mediante  
Eulero in avanti

Scegliendo differenti metodi di integrazione approssimata, si ottengono differenti relazioni tra la funzione di trasferimento a tempo discreto e la sua corrispondente a tempo continuo.

In generale:

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x(t)dt \cong ((1-\alpha)x(kT_s) + \alpha x((k+1)T_s))T_s$$

con  $0 \leq \alpha \leq 1$

$\alpha = 0$  Eulero in avanti

$\alpha = 1$  Eulero indietro

$\alpha = \frac{1}{2}$  Trapezio (metodo di Tustin)

In generale:

$$s \rightarrow \frac{1}{T_s} \frac{z-1}{az + (1-\alpha)}$$

$$\alpha = 0 \quad s \rightarrow \frac{1}{T_s}(z-1) \quad \text{Eulero in avanti}$$

$$\alpha = 1 \quad s \rightarrow \frac{1}{T_s} \frac{z-1}{z} \quad \text{Eulero indietro}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad s \rightarrow \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad \text{Trapezio (metodo di Tustin)}$$

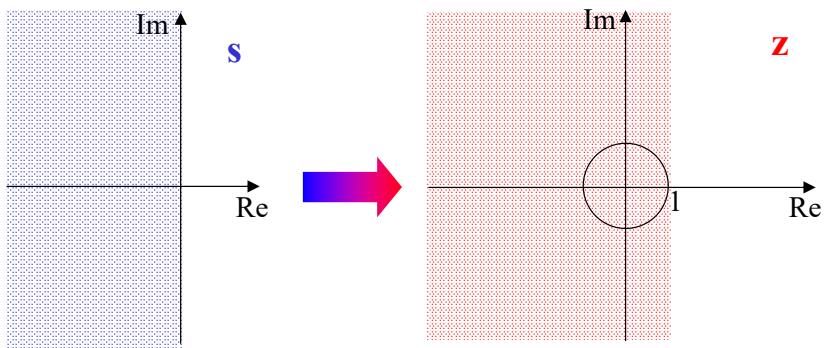
### Nota

- Queste relazioni trasformano funzioni di trasferimento razionali in funzioni di trasferimento razionali.
- Si può dimostrare che se  $R(s)$  ha  $n$  poli, anche  $R^*(z)$  ha  $n$  poli. Ma dove finiscono i poli? In particolare: dove finiscono i poli a parte reale negativa di  $R(s)$ ?

### Posizione dei poli: Eulero in avanti

Il semipiano reale negativo nel dominio  $s$ , cioè  $\Re(s) < 0$

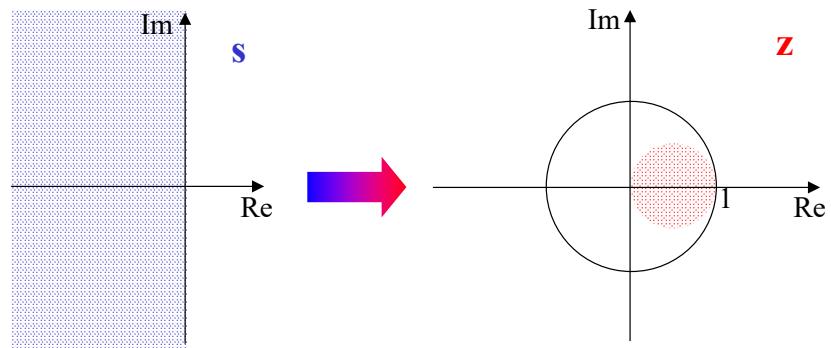
viene trasformato nel semipiano  $\Re(z) < 1$



### Posizione dei poli: Eulero indietro

Il semipiano reale negativo nel dominio  $s$ , cioè  $\Re(s) < 0$

viene trasformato nel cerchio di raggio 0.5 e centro 0.5



### Posizione dei poli: Tustin

Il semipiano reale negativo nel dominio  $s$ , cioè  $\Re(s) < 0$

viene trasformato nel cerchio di raggio 1 e centro l'origine

