# Elettrotecnica

Silviu Filote

January 17, 2022

## Contents

# 1 Cariche elettriche

- Se ho una carica elettrica nello spazio circostante, ho un campo elettrico, sia che
  - la carica sia ferma
  - sia che la carica si muova.

  L'esistenza della carica da origine ai campi elettrici

- Le cariche che oltre ad esserci si muovono anche, modificano lo spazio che le circondano sia in termini di campo elettrico e di campo magnetico.

- Le cariche che si muovono sono le correnti, le correnti sono l'origine dei campi magnetici.

# 2 Tensione

- La tensione (simbolo: V) fra due punti è una misura dell'energia necessaria per muovere una carica elettrica unitaria dal punto più negativo in tensione (potenziale più basso) al punto più positivo (potenziale più alto);

- Quando si parla di tensione in un punto di un circuito, si intende la tensione fra quel punto e massa.

# 3 Corrente

- La corrente (simbolo: I) è il flusso di cariche elettriche nell'unità di tempo attraverso un punto di un circuito;

- Convenzionalmente, si considera che la corrente fluisca da un punto a tensione più positiva a un punto a tensione più negativa (anche se in questo modo il verso della corrente è opposto all'effettivo flusso degli elettroni).

# 4 Definizioni

- **Circuito elettrico:** un tubo di flusso del vettore densitá di corrente. Un qualsiasi cosa sostenga un tubo di flusso di qualsiasi materiale sia.

- **Rete elettrica:** L'unione di circuiti diversi.
- **Ramo o lato:** É un tubo di flusso della densit'a di corrente nel quale si pu'o considerare la corrente uguale in ogni sezione
- **Nodo:** punto in cui convergono 3 o piú rami
- **Maglia:** un qualunque percorso chiuso che partendo da un nodo, ritorni allo stesso nodo percorrendo rami diversi della rete, senza mai percorrere un ramo pú di una volta
- **Tensione a vuoto:** corrente nulla
- **Corrente di corto circuito:** tensione nulla

# 5 Teoria Regime stazionario

- **Legge di kirchhoff ad un percorso chiuso - alle maglie**

$$\sum V = 0$$

La somma algebrica delle tensione presenti sui lati di un percorso chiuso é uguale a 0.

- **Legge di kirchhoff alle superfici - ai nodi**

$$\sum I = 0$$

La somma algebrica delle correnti su una superficie chiusa é uguale a 0.

- **Convezioni**


Bipoli passivi e attivi

- **Bipoli**
  - Il corto circuito

$$V = 0 \qquad I = n \qquad R = 0$$

  - Il circuito aperto

$$V = n \qquad I = 0 \qquad R = \infty$$

  - La resistenza

$$V = R \cdot I$$

* Le resistenze *in serie* sono percorse della stessa corrente e la loro

$$Req = \sum R_i$$

* Le resistenze *in parallelo* sono soggette alla stessa tensione

$$Req = \frac{1}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}..}$$

$$Req = \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2}$$

**NB:**

* il parallelo tra un ctocto e una resistenza $\rightarrow R_{eq} = 0$ ossia ctocto;

$$R = \textit{0 (ctocto)} \parallel R = \textit{10} \Rightarrow \frac{0}{10} \Rightarrow 0$$

* la serie tra un aperto e una resistenza $\rightarrow R_{eq} = \infty$ aperto;

$$R = \infty \textit{ (aperto)} + R = \textit{10} \Rightarrow \infty + 10 \Rightarrow \infty$$

- **Generatore di tensione**
  - Il generatore ideale di tensione

$$V = E \qquad \textit{per qualsiasi } I$$

  - Il generatore reale di tensione

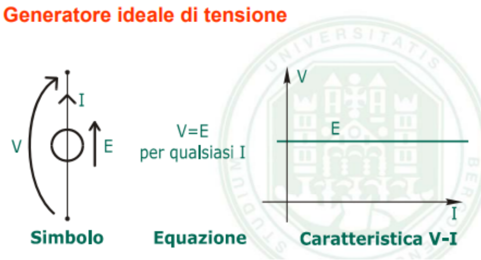
$$V = E - R \cdot I$$

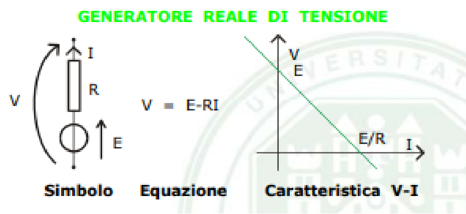
$$I = \frac{E - V}{R}$$

  - La serie di generatori é data da

$$E = \sum E_i$$

  - Non é possibile fare il parallelo di 2 generatori, questo perché in un parallelo i bipoli hanno la stessa tensione.




- **Generatore di corrente**
  - Il generatore ideale di corrente

$$I = A \qquad \textit{per qualsiasi } V$$

  - Il generatore reale di corrente

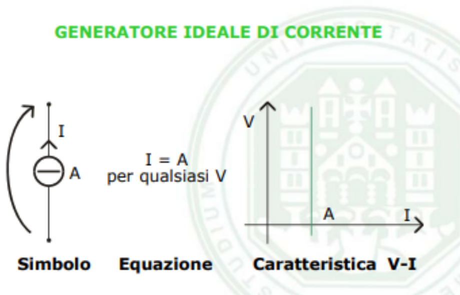
$$I = A - \frac{V}{R}$$

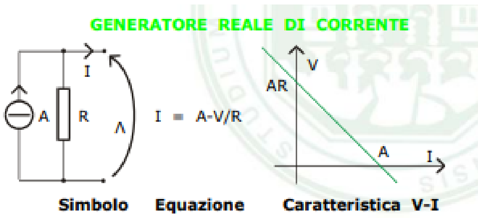
$$V = R \cdot A - R \cdot I$$

  - Il parallelo di generatori é data da

$$E = \sum E_i$$

  - Non é possibile fare la serie di 2 generatori, questo perché in serie i bipoli hanno la stessa corrente .



# 6 Metodi di risoluzione delle reti in regime stazionario

**Le derivate rispetto al tempo sono nulle, semplificazioni delle leggi di maxwell.**
I **lati** di un circuito partono da un nodo per poi terminare in uin'altro nodo diverso da quello di riferimento.
La **maglia** di un circuito parte da un nodo e termina nel medesimo.

$$Numero\ lati = L$$

$$Numero\ nodi = n$$

Chiarimenti:

- kirchhoff alle maglie si fa sulle **tensioni**
- kirchhoff ai nodi si fa sulle **correnti**
- Per i lati usiamo i numeri
- Per i nodi le lettere
- I versi delle correnti possono essere indicate a caso, tranne che per i generatori che indicano la direzione della corrente e della tensione concorde alla sua freccia
- Le tensioni derivano dalla scelta delle correnti, tranne per quelle dei generatori che sono concordi
- **Correnti entrante → postiva**
- **Senso orario → positivo**
- Queste convenzioni possono cambiare e posso scegliere di applicarne diverse per ogni nodo / maglia ma non cambia nulla, per cui utilizzeró queste.

## 6.1 Metodo delle correnti di lato

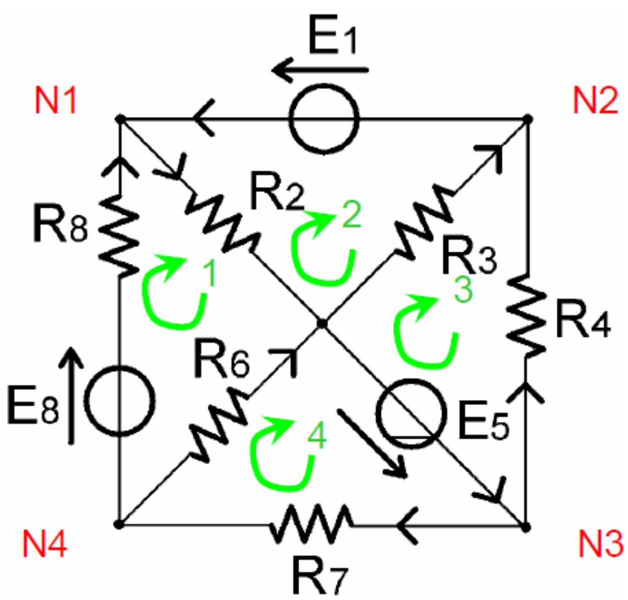
- Le incognite sono le correnti nei lati;
- Considero $n-1$ nodi e calcolo le correnti nei nodi rimanenti, **positive quelle in entrata, mentre negative quelle uscenti**;
- Calcolo secondo un verso prestabili nelle $(l-n+1)$ maglie ad **ad area minore** le equazioni delle tensioni;
- Equazioni da risolvere

$$(L-n+1)+(n-1)$$

- Sostituisco alle tensioni trovate la **legge di Ohm**

$$V = R \cdot I$$

esempio:



*Non viene considerato il nodo centrale e scrivo le equazioni*

*positive + le correnti entranti nel nodo*

*negative - le correnti uscenti nel nodo*

$$\begin{cases} N1 \rightarrow & +I1 + I8 - I2 = 0 \\ N2 \rightarrow & +I3 - I1 + I4 = 0 \\ N3 \rightarrow & +I5 - I4 - I7 = 0 \\ N4 \rightarrow & +I7 - I6 - I8 = 0 \end{cases}$$

*(L - n + 1 ) equazioni nelle maglie, decidendo il segno di percorrenza nella maglia*

$$\begin{cases} M1 \rightarrow & -V2 + V6 + V8 = 0 \\ M2 \rightarrow & +V2 - E1 + V3 = 0 \\ M3 \rightarrow & -V3 + V4 - E5 = 0 \\ M4 \rightarrow & -V6 + E5 - V7 = 0 \end{cases}$$

$$\textit{unisco le equazioni} \rightarrow (L - n + 1) + (n - 1)$$

$$\begin{cases} N1 \rightarrow & +I1 + I8 - I2 = 0 \\ N2 \rightarrow & +I3 - I1 + I4 = 0 \\ N3 \rightarrow & +I5 - I4 - I7 = 0 \\ N4 \rightarrow & +I7 - I6 - I8 = 0 \\ M1 \rightarrow & -V2 + V6 + V8 = 0 \\ M2 \rightarrow & +V2 - E1 + V3 = 0 \\ M3 \rightarrow & -V3 + V4 - E5 = 0 \\ M4 \rightarrow & -V6 + E5 - V7 = 0 \end{cases}$$

*Sostituisco le tensioni con la legge di ohm*

$$\begin{cases} N1 \rightarrow & +I1 + I8 - I2 = 0 \\ N2 \rightarrow & +I3 - I1 + I4 = 0 \\ N3 \rightarrow & +I5 - I4 - I7 = 0 \\ N4 \rightarrow & +I7 - I6 - I8 = 0 \\ M1 \rightarrow & -(R2 \cdot I2) + (R6 \cdot I6) + (E8 - R8 \cdot I3) = 0 \\ M2 \rightarrow & +(R2 \cdot I2) - E1 + (R3 \cdot I3) = 0 \\ M3 \rightarrow & -(R3 \cdot I3) + (R4 \cdot I4) - E5 = 0 \\ M4 \rightarrow & -(R6 \cdot I6) + E5 - (R7 \cdot I7) = 0 \end{cases}$$

## 6.2 Metodo delle tensioni di nodo

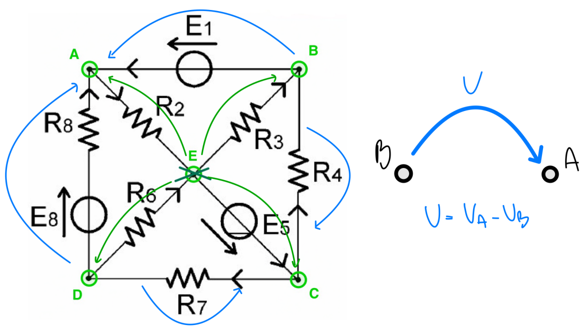
- Le incognite sono le tensioni di $n-1$ nodi, o superficie chiusa;
- Si considerano $n-1$ nodi e si calcolano nei nodi rimanenti le correnti, **positive quelle in entrata, mentre negative quelle uscenti**;
- Si esprimono le correnti come rapporto tra

$$I = \frac{V}{R}$$

- Si otterranno $n-1$ equazioni e **si dovranno aggiungere tante incognite quanti sono i generatori**;

<u>continuando l'esempio precedente:</u>

$$\begin{cases} A \rightarrow & +I1 + I8 - I2 = 0 \\ B \rightarrow & +I3 - I1 + I4 = 0 \\ C \rightarrow & +I5 - I4 - I7 = 0 \\ D \rightarrow & +I7 - I6 - I8 = 0 \end{cases}$$




*Esprimo le correnti in funzione delle tensioni di nodo esempio:*

$$I_2 = \frac{V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{E}}}{R_2} \rightarrow V_{\mathrm{E}} = 0 \rightarrow \frac{V_{\mathrm{a}}}{R_2}$$

$$I_7 = \frac{V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{D}}}{R_7}$$

$$V_8 = E_8 - R_8 \cdot I_8 \rightarrow I_8 = \frac{E_8 - V_8}{R_8} = \frac{E_8 - (V_A - V_D)}{R_8}$$

*Esprimo in questo modo tutte le correnti del circuito e ottengo*

$$\begin{cases} A \rightarrow & +I1 + I8 - I2 = 0 \\ B \rightarrow & +I3 - I1 + I4 = 0 \\ C \rightarrow & +I5 - I4 - I7 = 0 \\ D \rightarrow & +I7 - I6 - I8 = 0 \end{cases}$$

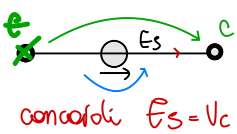
*Sostituendo ora alle correnti la legge di Ohm ottengo*

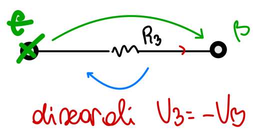
$$\begin{cases} A \rightarrow & +I1 + \frac{E_8-(V_D-V_B)}{R_8} - \frac{V_A}{R_2} = 0 \\ B \rightarrow & +\frac{0-V_B}{R_3} - I1 + \frac{V_C-V_B}{R_4} = 0 \\ C \rightarrow & +I5 - \frac{V_C-V_B}{R_4} - \frac{V_C-V_D}{R_7} = 0 \\ D \rightarrow & +\frac{V_C-V_D}{R_7} - \frac{V_D}{R_6} - \frac{E_8-(V_A-V_D)}{R_8} = 0 \end{cases}$$

*Si aggiungono in più le incognite delle correnti e la ddp*

$$\begin{cases} A \rightarrow & +I1 + \frac{E_8-(V_D-V_B)}{R_8} - \frac{V_A}{R_2} = 0 \\ B \rightarrow & +\frac{0-V_B}{R_3} - I1 + \frac{V_C-V_B}{R_4} = 0 \\ C \rightarrow & +I5 - \frac{V_C-V_B}{R_4} - \frac{V_C-V_D}{R_7} = 0 \\ D \rightarrow & +\frac{V_C-V_D}{R_7} - \frac{V_D}{R_6} - \frac{E_8-(V_A-V_D)}{R_8} = 0 \\ ddp_1 \rightarrow & V_A - V_B = E1 \\ ddp_5 \rightarrow & V_C - 0 = E_5 \end{cases}$$

*Ricorda che:*



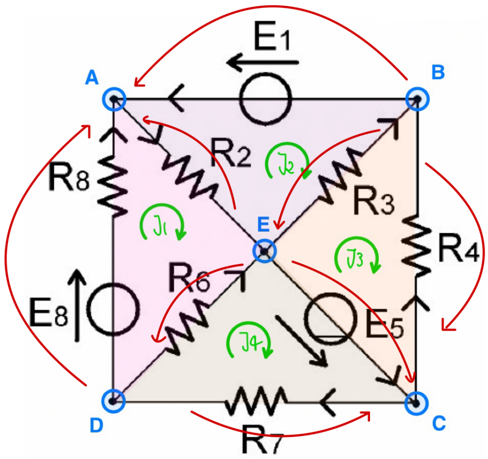



## 6.3 Metodo delle correnti di maglia

- $(l - n + 1 = k)$ prendo quindi le $k$ maglie ad area minore;
- Scelgo il verso di pecorre di percorrenza delle maglie che deve essere uguale per tutte;
- Calcolo le correnti $J$ in base al verso scelto;
- Scrivo le tensioni di tutte le maglie tenendo sempre conto del verso scelto;
- Sostituisco alle tensione la legge di ohm

$$V = R \cdot I$$

- Sostituisco alle correnti $I$ quelle calcolate seguendo il verso $J$




$$(l - n + 1) = 4 \rightarrow \textit{le maglie ad area minore}$$

*Calcolo ora le correnti $J$ scelto il verso orario*

$$\begin{cases} I_1 = \quad -J_2 \\ I_2 = J_1 - J_2 \\ I_3 = J_3 - J_2 \\ I_4 = \quad -J_3 \\ I_5 = J_4 - J_3 \\ I_6 = J_4 - J_1 \\ I_7 = \quad J_4 \\ I_8 = \quad J_1 \end{cases}$$

*Le correnti se sono concordi al segno sono positive altrimenti negative*

*Scrivo tensioni*

$$\begin{cases} M1 \rightarrow & -V2 + V6 + V8 = 0 \\ M2 \rightarrow & +V2 - E1 + V3 = 0 \\ M3 \rightarrow & -V3 + V4 - E5 = 0 \\ M4 \rightarrow & -V6 + E5 - V7 = 0 \end{cases}$$

*Sostituisco le tensioni con la legge Ohm*

$$\begin{cases} M1 \rightarrow & -(R2 \cdot I2) + (R6 \cdot I6) + (E8 - R8 \cdot I8) = 0 \\ M2 \rightarrow & +(R2 \cdot I2) - E1 + (R3 \cdot I3) = 0 \\ M3 \rightarrow & -(R3 \cdot I3) + (R4 \cdot I4) - E5 = 0 \\ M4 \rightarrow & -(R6 \cdot I6) + E5 - (R7 \cdot I7) = 0 \end{cases}$$

*Applico le correnti ricavate J*

$$\begin{cases} M1 \rightarrow & -(R2 \cdot (J_1 - J_2)) + (R6 \cdot (J_4 - J_1)) + (E8 - R8 \cdot J_1) = 0 \\ M2 \rightarrow & +(R2 \cdot (J_1 - J_2)) - E1 + (R3 \cdot (J_3 - J_2)) = 0 \\ M3 \rightarrow & -(R3 \cdot (J_3 - J_2)) + (R4 \cdot -J_3) - E5 = 0 \\ M4 \rightarrow & -(R6 \cdot (J_4 - J_1)) + E5 - (R7 \cdot J_4) = 0 \end{cases}$$

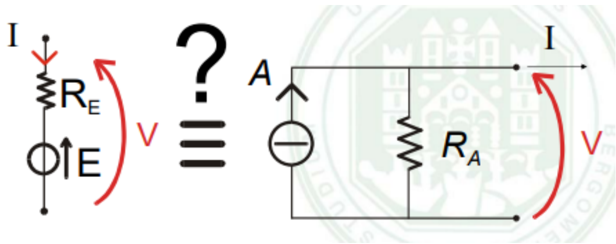
<u>NB:</u>

- La tensione del generatore detta il ramo così come la corrente;
- Se un ramo presenta un solo generatore di tensione senza alcuna resistenza
  - Metodo correnti di lato → Ok;
  - Metodo delle tensioni di nodo → manca l'espressione della corrente di quel lato, ma abbiamo la ddp di quel lato;
  - Metodo delle correnti di maglia → Ok;
- Se un ramo presenta un solo generatore di corrente senza alcuna resistenza

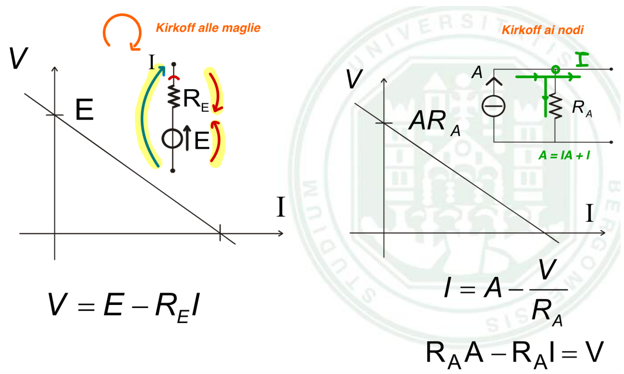
- Metodo correnti di lato $\rightarrow$ manca la tensione di quel lato ma è nota la corrente;
- Metodo delle tensioni di nodo $\rightarrow$ Ok;
- Metodo delle correnti di maglia $\rightarrow$ manca la tensione di quel lato, però è già compresa la corrente di quel lato;

# 7 Teoremi

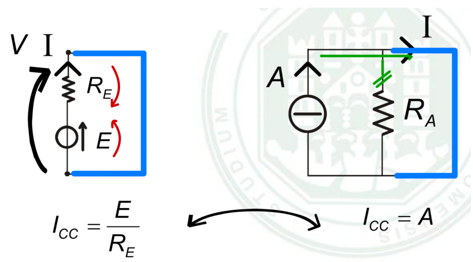
## 7.1 Generatori equivalenti




Per poter passare da un generatore all'altro bisogna riprodurre la stessa caratteristica tensione corrente, ossia avere 2 coordiate sul grafico.




- **Da generatore reale di tensione a reale di corrente**
  1. Determinare la corrente di ctocto $\Rightarrow V = 0$




*Basta fare kirkoff alle maglie, per la spiegazione*

$$E - VE = 0$$

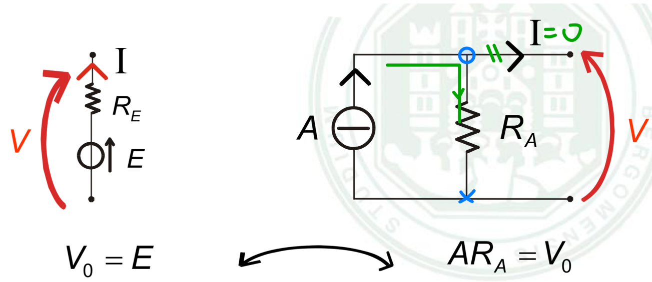
$$E - (R_E \cdot I) = 0$$

2. Stessa resistenza interna, rendendo passiva la rete

$$\textit{Generatore di tensione passivo} \Rightarrow \textit{corto circuito}$$
$$\textit{Generatore di corrente passivo} \Rightarrow \textit{circuito aperto}$$

- **Da generatore reale di corrente a reale di tensione**

1. Determinare la tensione a vuoto $\Rightarrow I = 0$

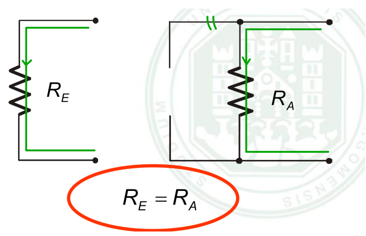



$$\textit{facendo kirkoff ai nodi uscirebbe}$$
$$A = I_A + 0$$
$$A = \frac{V}{R_A}$$
$$V = A \cdot R_A$$

$$\Rightarrow V_0 = A \cdot R_A$$
$$\Rightarrow E = V_0$$

2. Stessa resistenza interna, rendendo passiva la rete

$$\textit{Generatore di tensione passivo} \Rightarrow \textit{corto circuito}$$
$$\textit{Generatore di corrente passivo} \Rightarrow \textit{circuito aperto}$$



## 7.2 Sovrapposizione degli effetti

Data una rete ***lineare*** la soluzione si puó trovare risolvendo tante reti quanti sono i generatori, tenendono accesso uno per volta e sommandone gli effetti di ciascuno.

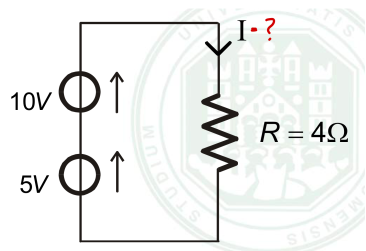
**Def:** Una rete é lineare se tutti i suoi bipoli sono lineari.

1. Si scelgono i versi di correnti e tensioni e quelli rimangono
2. Si rende passivo un generatore per volta e si calcolano le tensioni e correnti
3. Si sommano gli effetti che hanno portato i generatori

*Facendo opportunatamente attenzione ai segni*

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} I^i \Rightarrow I' + I'' + ... + I^n$$

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} V^i \Rightarrow V' + V'' + ... + V^n$$

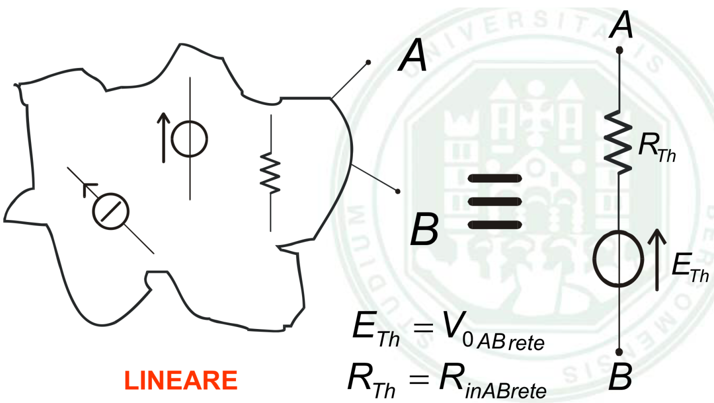



$$I = I' + I'' = \frac{5}{4} + \frac{10}{4} = \frac{15}{4} A$$

## 7.3 Teorema di Thevenin

Data una rete ***lineare*** qualsiasi, posso vederla equivalente ai morsetti esterni come :

**Def:** Una rete é lineare se tutti i suoi bipoli sono lineari.

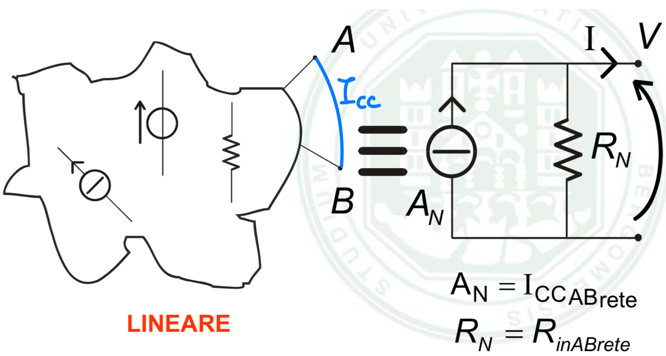



Passi:

- Calcolare la resistenza interna, rendendo passiva la rete $\Rightarrow R_{th}$
- Calcolare la tensione a vuoto della rete rispetto ai morsetti $A$ e $B$

$$I = 0$$

## 7.4 Teorema di Norton

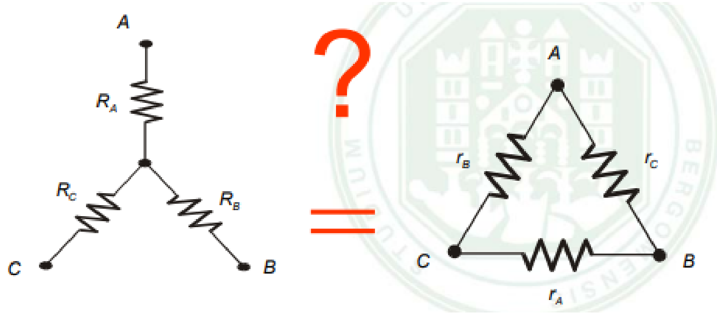



Passi:

- Calcolare la resistenza interna, rendendo passiva la rete $\Rightarrow R_{th}$
- Calcolare la corrente di ctocto della rete rispetto ai morsetti $A$ e $B$

$$V = 0$$

# 8 Equivalenza stella/triangolo




- Da stella a triangolo

$$\begin{cases} r_A = \dfrac{R_A \cdot R_B + R_A \cdot R_C + R_C \cdot R_B}{R_A} \\ r_B = \dfrac{R_A \cdot R_B + R_A \cdot R_C + R_C \cdot R_B}{R_B} \\ r_C = \dfrac{R_A \cdot R_B + R_A \cdot R_C + R_C \cdot R_B}{R_C} \end{cases} \tag{1}$$

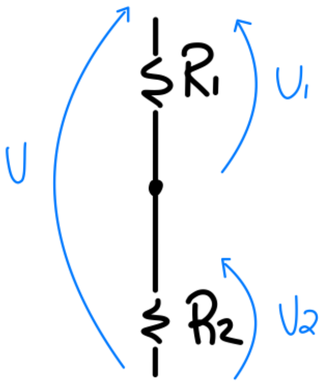
*Se le R sono tutte uguali:* $\quad r = 3 \cdot R$

- Da triangolo a stella

$$\begin{cases} R_A = \dfrac{r_B \cdot r_C}{r_A + r_B + r_C} \\ R_B = \dfrac{r_A \cdot r_C}{r_A + r_B + r_C} \\ R_C = \dfrac{r_A \cdot r_B}{r_A + r_B + r_C} \end{cases} \tag{2}$$

*Se le r sono tutte uguali:* $\quad R = \dfrac{r}{3}$

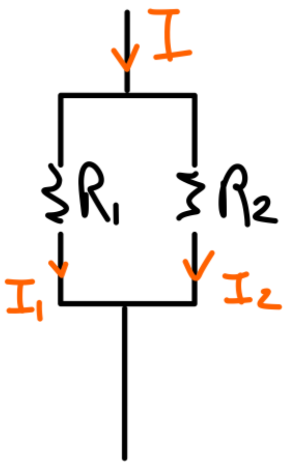
# 9 Partitori




**Partitore di tensione:**

$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

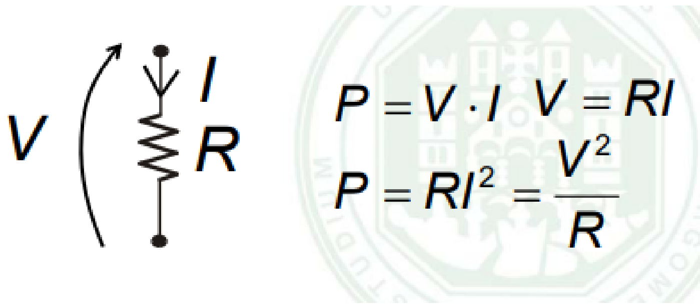


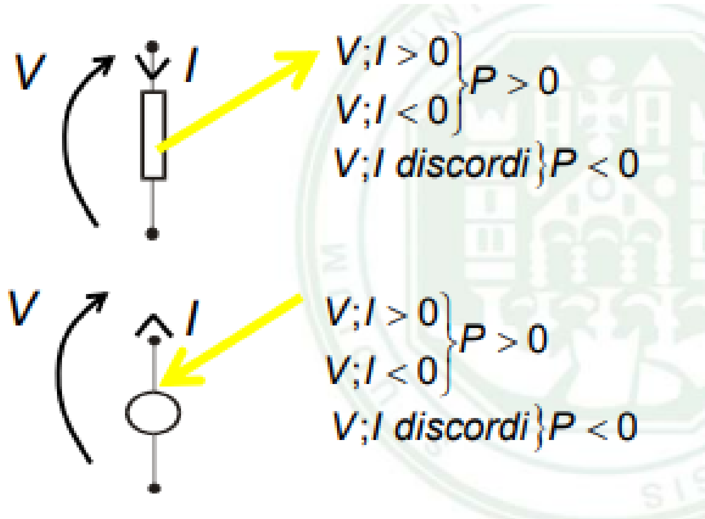

**Partitore di corrente**

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

# 10 Potenza




- Se $P > 0$ utilizzatori e generatori si comportano come tali;
- Se $P < 0$
  - Utilizzatore si comporta come generatore
  - Generatore si comporta da utilizzatore

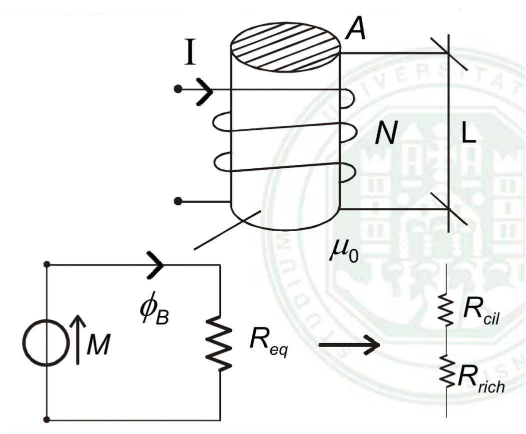
# 11 Circuiti magnetici

## 11.1 Premesse

- Un circuito magnetico viene alimentato da uno elettrico;
- Una spira percorsa da corrente genera un campo magnetico;
- Quindi il soledoine percorso da una corrente genera un generatore di tensione magnetica;
- Non esiste generatore di forza magneto motrice a vuoto, ossia se prendo un solenoide e lo alimento, genero un flusso che si disperde nell'aria;
  - Non esiste un isolante magnetico;
  - L'aria fa da conduttore del flusso magnetico;
  - Il flusso all'interno del cilindro si disperde nell'aria;
- La **riluttanza** misura l'opposizione di un materiale al transito di un flusso magnetico.
  - La riluttanza dipende dall'area;
  - Nel circuito connesso al cilindro si disperde:

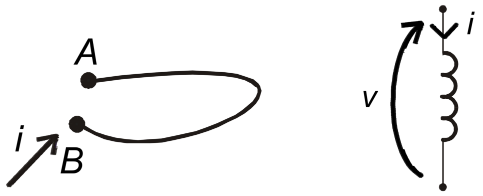
$$R_{rich} = 0 \Rightarrow A = \infty$$

$$R_{eq} = R_{cil}$$



## 11.2 Induzione elettromagnetica

Una spira percorsa da corrente genera un tensione, legge di Lenz.

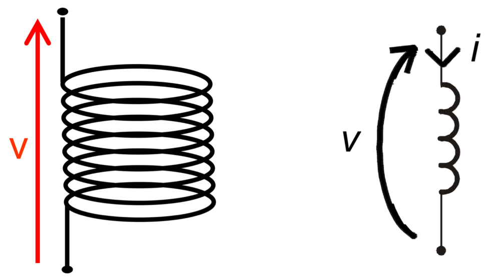



$$V_{AB} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

*Il meno scompare se prendiamo la tensione nel verso opposto, convenzione dei utilizzatori*

$$V_{AB} = \frac{d\Phi}{dt}$$

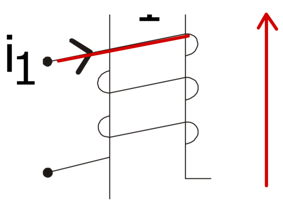
Quindi su ogni spira di un solenoide si viene a creare un tensione data dalla legge di Lenz.
Il bipolo che simula questo comportamento matematico prende il nome di **induttanza.**

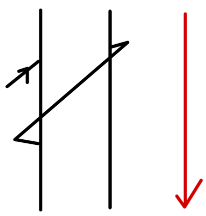



$$L = \frac{N^2}{R} \qquad v = L \cdot \frac{di}{dt} \quad H\ [Henry]$$

Il segno del flusso generato dall'induttore segue la regola della mano destra:

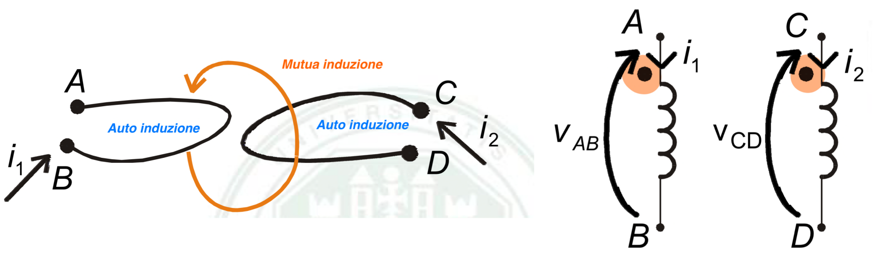
- si chiude il pugno nel verso degli avvolgimenti del solenoide;
- il pollice indicherá il verso del flusso nel ramo;



## 11.3 Mutua induzione

La mutua induttanza (o mutua induzione) è l'induttanza fra due circuiti elettricamente separati, quando il campo magnetico generato da uno esercita una forza elettromotrice sull'altro, e viceversa.




$$M_{12} = M_{21} = \frac{N_1 \cdot N_2}{R}$$

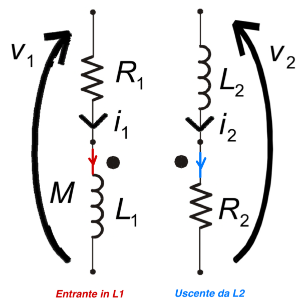
La tensione totale sulle induttanze sará cosí data:

$$V_{AB} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} \pm M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \pm M \cdot \frac{di_i}{dt}$$

Il segno della muta indizione:

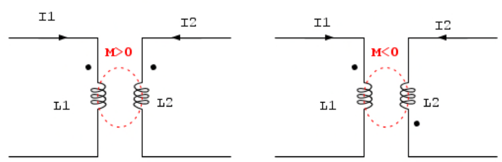
- Il pallino viene messo secondo la regola della mano destra;
- **positiva**, se le correnti sono entrambe uscenti o entranti nei pallini;
- **negativa**, se sono discorde;

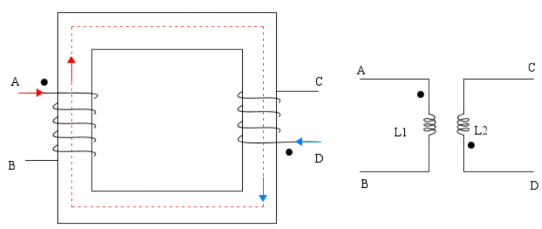



$$-M_{12} = -M_{21} = -\frac{N_1 \cdot N_2}{R}$$

$$V_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

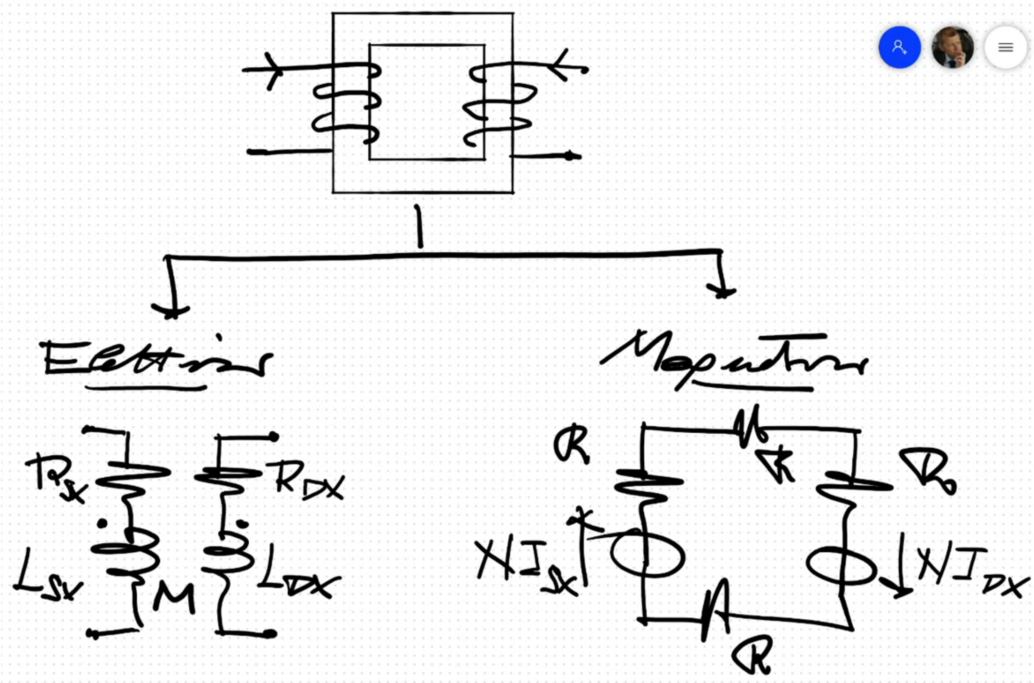
$$V_2 = R_2 \cdot i_2 + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M \cdot \frac{di_i}{dt}$$



## 11.4 Rappresentazione fisica

La rappresentazione fisica del circuito magnetico puó essere rappresentato in 2 mondi:



- **Mondo elettrico**
  - Resistenze le quali, devono essere calcolate con dati forniti da testo altrimenti nulle;
  - Autoinduttanza;
  - Mutua induttanza;

**NB:** La mutua e l'auto-induttanza sono proprietá del sistema, quindi esistono sempre indipendentemente se ci sia corrente o meno.

*Energia magnetica del campo generato dall'avvolgimento 1*

$$E1 = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot i_1^2$$

## 11.5 Formule

Sapendo che:

- $\mu_r$ é la permeabilitá relativa del materiale;
- $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$ é la permeabilitá del vuoto;
- $l$ é la lunghezza della sezione;
- $A$ area della sezione;
- $N$ numero spire nel solenoide;
- $Req_i$ riluttanza equivalente vista da $N_i \cdot i_i$;
- $\Phi_{12}$ flusso concatenato nel avvolgimento $N_1$ prodotto da $\Phi_2$;

Quindi:

- **Riluttanza circuito:** $R_i = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{l_i}{A_i}$
- **Riluttanza sezione vuota/aria:** $R_\delta = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_\delta}{A_\delta}$
- **Generatori:** $fem = N_i \cdot i_i$
- **Flusso:** $\Phi_i = \frac{N_i \cdot i_i}{Req}$
- **Flusso concatenato:** $\Phi_{C21} = N_2 \cdot \Phi_1$
- **Induttanza:** $L_i = \frac{\Phi_{Cii}}{i_i} = \frac{N_i^2}{Req}$ *Req vista da* $N_i i_i$
- **Mutua:** $M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_2}$ *fratto la corrente che lo ha prodotto*

| C. Elettrici | C. Magnetici |
|---|---|
| $I$ | $\Phi_B$ |
| $J$ | $B$ |
| $V, E, fem$ | $U, M, fmm$ |
| $\sum V = 0$ | $\sum U = 0$ |
| $\sum I = 0$ | $\sum \Phi_B = 0$ |
| $R = \rho \frac{l}{S}$ | $R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}$ |
| $V = RI$ | $U = R\Phi$ |

## 11.6 Risoluzione circuito:

1. Calcolo delle riduttanze su ogni ramo;
   - Sono rappresentabili come delle resistenze;
   - Sullo stesso ramo possono essere presenti 2 riluttanze del caso di una sezione aperta dove scorre aria
2. I solenoidi si sostituiscono con generatori di forza elettromotrice;
   - Il segno utilizzando la regola della mano destra partendo da dove entra corrente;
3. Semplificazione delle resistenze;
4. Calcolo auto-induttanze
   - Spegnere tutti i generatori;
   - Accendere il generatore di riferimento $N_1 i_1$
   - Calcolare la $Req_1$ vista dal generatore acceso;
   - Calcolare autoinduttanza come

$$L_1 = \frac{N_1^2}{Req_1}$$

5. Calcolo della mutua induttanza *(esempio $M_{23}$)*;
   - Spengo tutti i generatori;
   - Accendo il generatore $N_3 i_3$
   - Lascio il segno del flusso del generatore $N_2 i_2 \rightarrow \Phi$'
   - Se il verso dei flussi sono contrari $\Rightarrow$ segno negativo mutua induttanza;

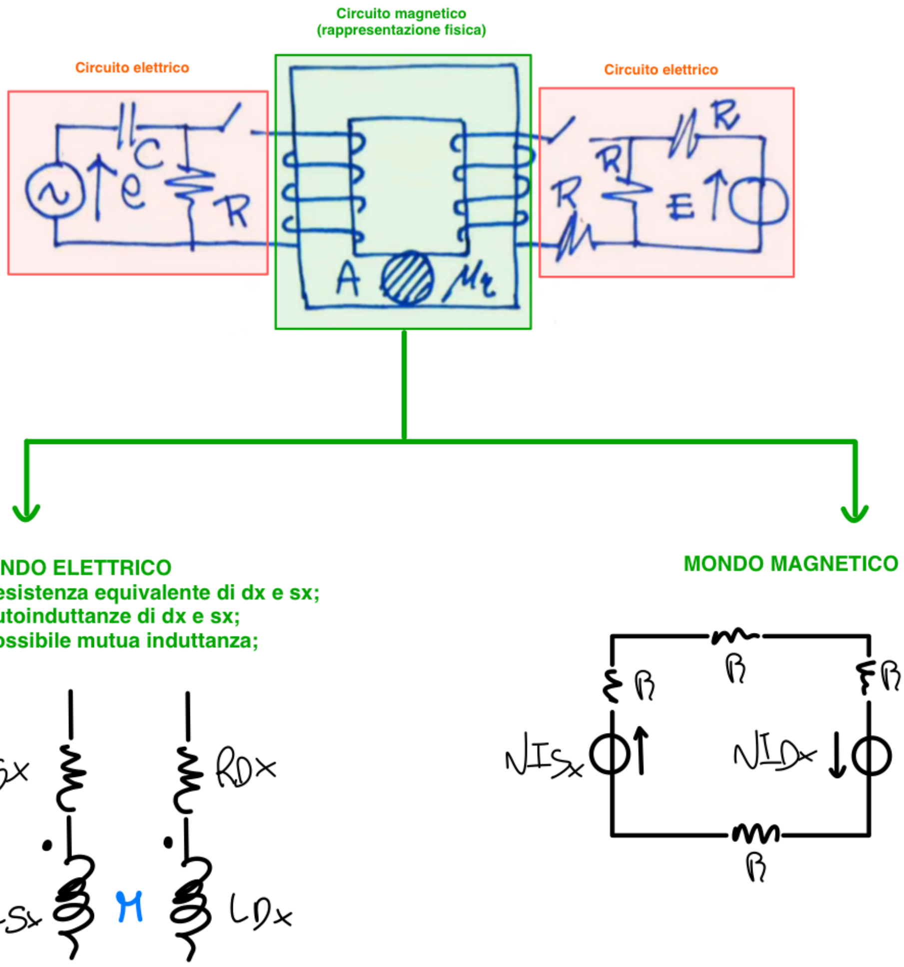
$$M_{23} = \frac{\Phi_{C23}}{i3} = \frac{N_2 \cdot \Phi'}{i_3}$$

$$\Phi' = \frac{N_3 i_3}{Req_3}$$

$$M_{23} = \frac{N_2 \cdot N_3 \cdot \cancel{i_3}}{Req_3 \cdot \cancel{i_3}}$$

**NB:** $\Phi' = \Phi_3$ é il flusso generato dal generatore $N_3 i_3$ che entra nel generatore $N_2 i_2$

## 11.7 Esercizio 18 esempio

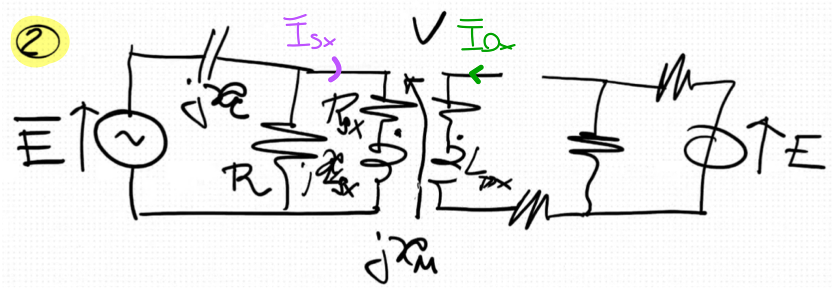



1. La riluttanza del circuito magnetico:

$$R_M = \frac{1}{\mu_r \cdot \mu_0} \cdot \frac{L}{A}$$

$$Req_M = 4 \cdot R$$

2. La corrente efficace nell'avvolgimento SX con int SX chiuso e DX aperto

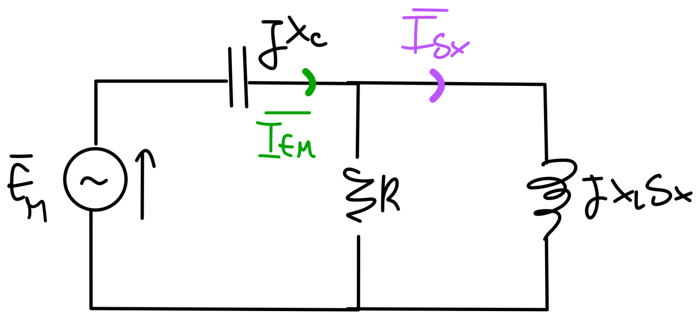


$$\bar{V} = \bar{I}_{sx} \cdot R_{sx} + jXL_{sx} \cdot \bar{I}_{sx} + jXM \cdot \bar{I}_{dx}$$

Dove $jXM$ é la muta induttanza ed é data da: $XM = w \cdot M$

- Il testo non ci fornisce la $R_{sx}$ per cui la ignoriamo → ctocto
- La corrente $I_{dx} = 0$ per cui → trascuro la mutua induttanza

$$\bar{V} = jXL_{sx} \cdot \bar{I}_{sx}$$



$$jXC = -\frac{j}{wC}$$

$$L_{sx} = \frac{N^2}{Req_M} \qquad \textit{calcolarla tramite il circuito magnetico}$$

$$jXL = jwL_{sx}$$

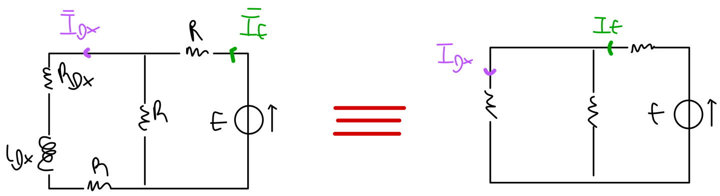
$$Req = jXC + (R \parallel jXL)$$

$$\bar{I}_{EM} = \frac{E_M}{Req}$$

$$\bar{I}_{sx} = \frac{\bar{I}_{EM} \cdot R}{R + jXL} = I_{sx} \cdot e^{j\varphi}$$

$$\textit{valore efficace é:} \quad I_{sx}$$

3. La corrente nell'avvolgimento DX con int DX chiuso e SX aperto



- No info su Rdx => ctocto
- Generatore continua Ldx => ctocto

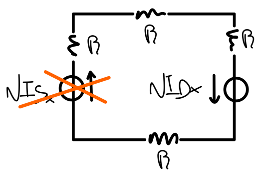
$$Req = R + \frac{R}{2}$$

$$I_E = \frac{E}{Req}$$

$$I_{dx} = \frac{I_E \cdot R}{R + R} = \frac{I_E}{2}$$

4. Il flusso nel circuito magnetico con int DX chiuso e SX aperto :

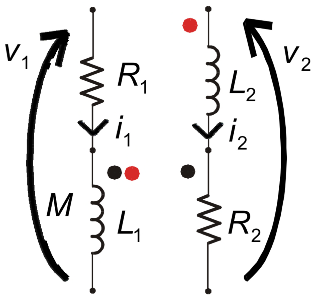
- Il generatore di SX sará spento $\rightarrow$ non vi circola corrente;
- La corrente che scorre nell'avvolgimento di DX é $I_{dx}$



$$\phi = \frac{N \cdot I_{dx}}{Req_M}$$

5. La corrente efficace nell'avvolgimento SX con int SX chiuso e DX chiuso:

Ora nell'avvolgimento di DX circola corrente e viene a generarsi un effetto di mutua induttanza ⇒ ma a DX siamo in continua per cui




Derivata di una costante = 0

$$V_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = R_2 \cdot i_2 + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_i}{dt}$$

$$\bar{V} = \cancel{\bar{I}_{sx} \cdot R_{sx}} + jXL_{sx} \cdot \bar{I}_{sx} + \cancel{jXM \cdot \bar{I}_{dx}}$$

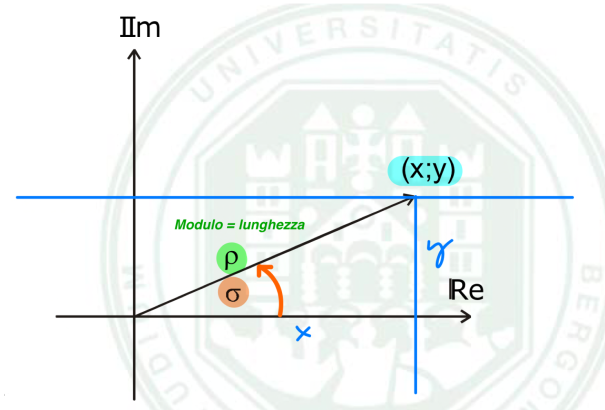
# 12 Regime PAS

## 12.1 Richiami sui numeri complessi

- *Rappresentazione rettangolare:* $x + jy$
- *Rappresentazione esponenziale:* $\rho \cdot e^{j\theta}$
- *Modulo, ossia la lunghezza:* $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
- *Ascissa:* $x = \rho \cdot cos(\theta)$
- *Ordinata:* $y = \rho \cdot sen(\theta)$
- *Angolo $\theta$, detta anche fase:* $\theta = arctan(\frac{y}{x})$

*Esprimono la medesima cosa*

$$x + jy = \rho \cdot e^{j\theta}$$

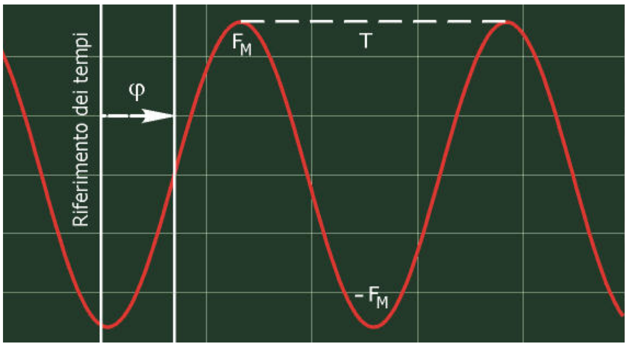



## 12.2 funzioni periodiche nel dominio del tempo

- *Periodo:* $T = \frac{1}{f}$
- *Pulsazione:* $\omega = 2 \cdot \pi f$
- *Funzione periodica:* $f(t) = F_M \cdot cos(\omega t + \varphi)$

$$sin(\alpha) = cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

**NB:** derivare ed integrare una funzione periodica $f(t)$ si ottine nuovamente una funzione sinusoidale con la **stessa pulsazione**



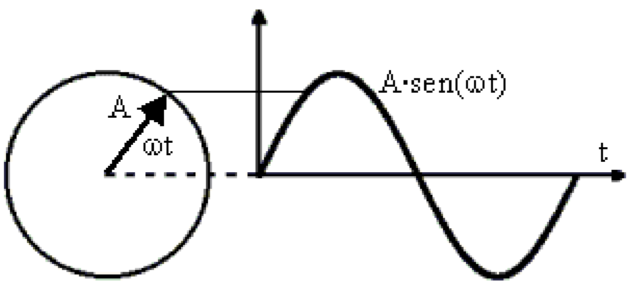

$$f(t)' \rightarrow \quad stessa\ \omega$$
$$\int f(t)dt \rightarrow \quad stessa\ \omega$$

Ogni famiglia di funzioni sinusoidali **isofrequenziali**, cioè alla stessa frequenza e quindi con pulsazione $\omega$ fissata, che rappresenti una generica grandezza $x(t)$:

$$x(t) = F_M \cdot cos(\omega t + \varphi)$$

**La formula di Eulero:** Si tratta di una relazione usata per rappresentare i numeri complessi in coordinate polari. La rappresentazione della funzione $e^{j\theta}$ nel piano complesso è un cerchio unitario e $\theta$ é l'angolo che si viene a creare.

Nel nostro caso utilizziamo tale formula per rappresentare la funzione sinusoidale attraverso vettori rotanti.




**Il fasore:** è un numero complesso rappresentabile come vettore nel piano complesso di una funzione sinusoidale di pulsazione ben definita. Una variabile fasoriale ha una barra sopra:

$$\bar{F}$$

I vari passaggi:

1. Viene rappresentata $f(t)$ nel dominio del tempo;
2. $f(t)$ viene rappresentata nel dominio dei vettori rotanti utilizzando le formule di Eulero;
3. Viene fatta una foto al vettore → fasore

## 12.3 Rappresentazione fasoriale

- *rapp. nel dominio del tempo* → $f(t) = \sqrt{2} \cdot \rho \cdot cos(\omega t + \varphi)$
- *rapp. fasoriale: in forma esponenziale* → $\bar{F} = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \varphi}$
- *rapp. fasoriale: in forma quadratica*
  - Sapendo che $modulo = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - $x = \rho \cdot cos(\varphi)$
  - $y = \rho \cdot sin(\varphi)$

  → $\bar{F} = x + jy$ *nota $\varphi$ possono tornare alla esponenziale*

**NB:** posso effettuare tutte le operazioni matematiche che voglio tra fasori **isofrequenziali**. Mentre, nel caso in cui abbiamo grandezze che presentano $\omega$ diverse possiamo effettuare le operazioni matematiche solo nel dominio del tempo.

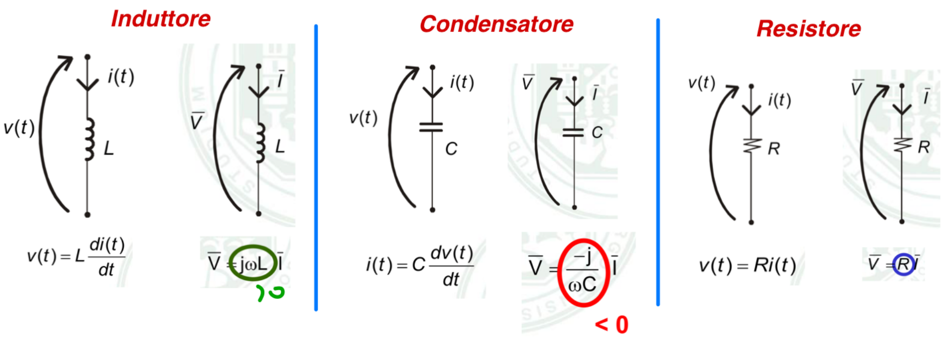
## 12.4 Bipoli passivi

- **Induttore:** $X_L = \omega \cdot L$
- **Condensatore:** $X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C}$
- **Resistenza:** $R$

Quando calcoliamo l'impedenza equivalente $\bar{Z_{eq}}$ mettere $j$ davanti alle reattanze

- $j \cdot X_C$
- $j \cdot X_L$

**NB:** le impendenze non sono fasori, sono solo numeri complessi.


## 12.5 Potenza

La potenza è pari al lavoro compiuto nell'unità di tempo (joule al secondo), e si misura in $W$.

$$V_{eff} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad I_{eff} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

**Potenza in tensione continua:**
La potenza si esprime in watt come prodotto tensione per corrente:

$$P = V \cdot I$$

**Potenza in tensione alternata:**
Si hanno tre potenze (attiva, reattiva e apparente), ognuna con un significato ben preciso.

- **Potenza attiva**
  La potenza attiva P è quella effettivamente assorbita e che viene trasformata in calore per effetto Joule o in lavoro utile. Si misura in watt e viene calcolata con la formula:

$$P = V \cdot I \cdot cos(\varphi)$$

- **Circuito puramente ohmico**
  In un circuito costituito da sole resistenze, tensione e corrente non risultano sfasate ($\varphi = 0° \Rightarrow cos(\varphi) = 1$)

$$P = V_{eff} \cdot I_{eff}$$

- **Circuito induttivo e capacitivo**
  Si ottiene il massimo sfasamento possibile ($\varphi = 90° \Rightarrow cos(\varphi) = 0$). Non si ha potenze attiva.

• **Potenza reattiva**
La potenza reattiva $Q$ riguarda l'energia che viene alternativamente assorbita e restituita dal campo magnetico (circuiti induttivi) o dal campo elettrico (circuiti capaciti). Si misura in **var**.

$$Q = V \cdot I \cdot sen(\varphi)$$

- **Circuito puramente ohmico**

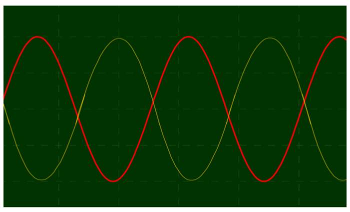
$$(\varphi = 0, sen(\varphi) = 0) \Rightarrow Q = 0$$

- **Circuito induttivo e capacitivo**

$$(\varphi = 90°, sen(\varphi) = 1)$$

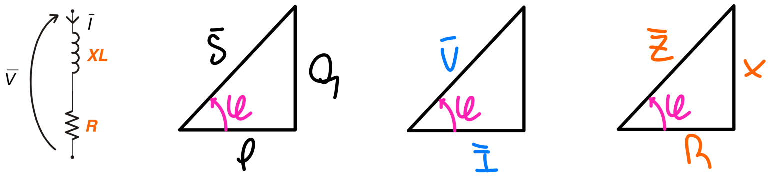
 $< 0$  $> 0$

$Q_C = -V_{eff} \cdot I_{eff}$ $Q_L = V_{eff} \cdot I_{eff}$



- **Potenza apparente**
  - Parte reale → potenza attiva
  - Parte immaginaria → potenza reattiva

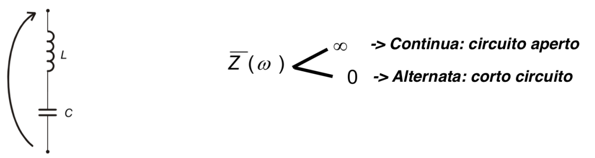
$$\bar{S} = P \pm jQ = \bar{V} \cdot \bar{I}^*$$
$$\textit{dove } \bar{I}^* \textit{ é corrente coniugata}$$

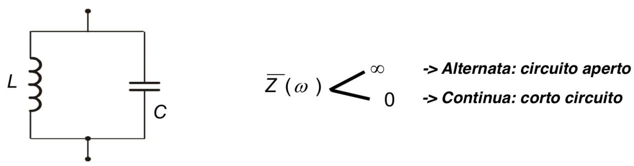



| GRANDEZZA | | UNITA' DI MISURA | |
|---|---|---|---|
| potenza attiva | P | watt | W |
| potenza reattiva | Q | voltampere reattivi | var |
| potenza apparente | Pa | voltampere | VA |

**NB:** $\varphi$ è l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente e **il fattore di potenza** é $cos(\varphi)$.

## 12.6 Risonanza



## 12.7 Rifasamento

Si definisce rifasamento qualsiasi provvedimento adoperato per aumentare (o come si dice comunemente migliorare) il fattore di potenza $cos(\varphi)$ (ovvero il coseno dell'angolo compreso tra il fasore di tensione e quello di corrente) di un dato carico, allo scopo di ridurre, a pari potenza attiva assorbita, il valore della corrente che circola nell'impianto.

Lo scopo del rifasamento è soprattutto quello di diminuire le perdite d'energia e di ridurre l'assorbimento di potenza reattiva.

Nelle utenze industriali, la maggior parte dei carichi è costituita da motori e trasformatori, che **generano un campo magnetico**. Questo fatto **introduce uno sfasamento tra tensione e corrente**, causando il consumo di potenza reattiva (espressa in $kVAR$). Questa potenza concorre al consumo di energia reattiva, misurata in $kVARh$ dall'ente erogatore.

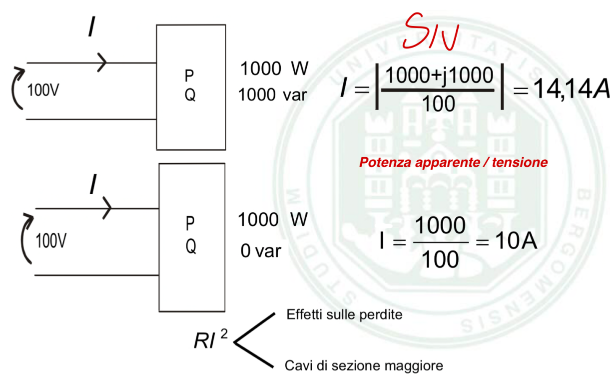
- La sola potenza "utile" (in grado, cioè, di trasformare l'energia elettrica in lavoro meccanico) è quella attiva;
- La potenza reattiva non solo non può essere trasformata in lavoro meccanico, ma causa anche il transito in rete di una maggiore corrente efficace rispetto a quella che si avrebbe consumando sola potenza attiva;

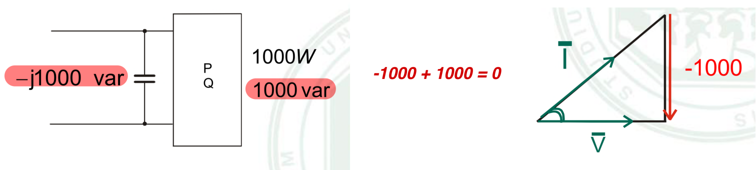
Problematiche:

- Poiché le perdite per effetto Joule lungo i cavi elettrici sono proporzionali al quadrato della corrente circolante, un aumento di quest'ultima, dovuto all'assorbimento di potenza reattiva, introduce una maggiore perdita di energia, a parità di potenza attiva fornita;
- La potenza reattiva-induttiva, quindi, costituisce un carico supplementare per i generatori;

Soluzione:

- Per ovviare a questo problema, si inseriscono in parallelo carichi capacitivi che contrastano l'effetto dei carichi induttivi, tendendo a riportare in "fase" tensione e corrente;
- Qualora la natura del carico fosse capacitiva, si può introdurre dei componenti induttivi per rifasare il circuito;


I
100V
P
Q
1000 W
1000 var
S/V
I = |1000+j1000 / 100| = 14,14A
Potenza apparente / tensione
I
100V
P
Q
1000 W
0 var
I = 1000 / 100 = 10A
RI 2
Effetti sulle perdite
Cavi di sezione maggiore

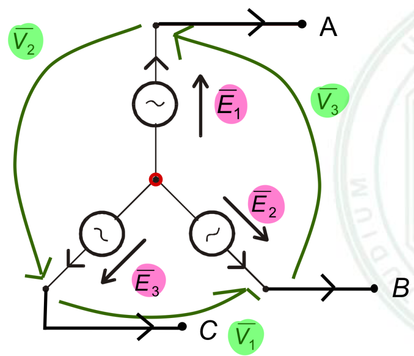

–j1000 var
P
Q
1000W
1000 var
-1000 + 1000 = 0
I
V
-1000

# 13 Reti elettriche trifase

## 13.1 Terne simmetriche

**Tensioni di fase:** $E_1, E_2, E_3$ (dal centro stella)

**Tensioni concatenate:** $V_1, V_2, V_3$ (tra i vertici della stella)




In questo caso i vettori che rappresentano le tensioni di fase, ossia i numeri complessi possiedono:

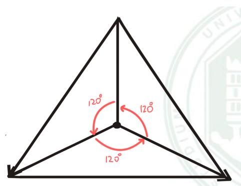
- lo **stesso modulo**;
- sono **sfasati** reciprocamente di $\frac{\pi}{3} = 120°$.

In questo caso le terne si dicono **simmetriche** per cui:

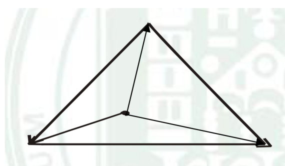
$$|V| = \sqrt{3} \cdot E$$

$$\textit{Terna di fase simmetrica} \Rightarrow \textit{terna concatenata simmetrica}$$

$$\textit{Terna di fase simmetrica} \not\Leftarrow \textit{terna concatenata simmetrica}$$




*Terna simmetrica*



*Terna non simmetrica*

Ovviamente per kirkoff alle maglie vale:

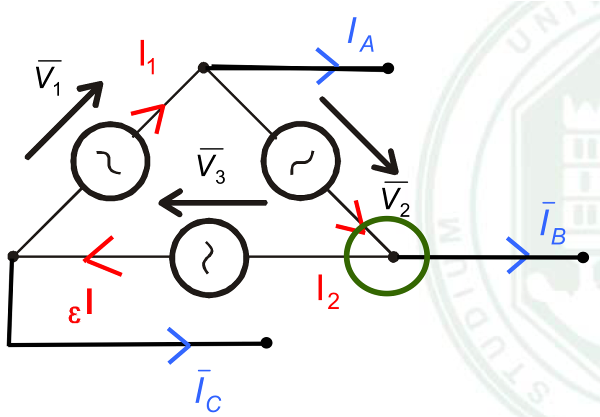
$$\bar{V_1} + \bar{V_2} + \bar{V_3} = 0$$

Non si puó dire nulla a proposito della somma delle $E_i$.

## 13.2 Terne equilibrate

**Correnti di linea:** $I_A, I_B, I_C$.

**Correnti di fase:** $I_1, I_2, I_3$.




In questo caso i vettori che rappresentano le correnti di fase, ossia i numeri complessi possiedono:

- lo **stesso modulo**;
- sono **sfasati** reciprocamente di $\frac{\pi}{3} = 120°$.

In questo caso le terne si dicono **equilibrate** per cui:

$$|I_{Linea}| = \sqrt{3} \cdot I_{Fase}$$

$$\textit{Terna di fase equilibrata} \Rightarrow \textit{terna di linea equilibrata}$$

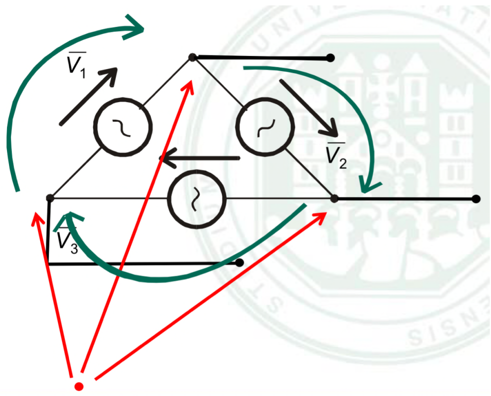
$$\textit{Terna di fase equilibrata} \not\Leftarrow \textit{terna di linea equilibrata}$$

Ovviamente per kirkoff ai nodi vale:

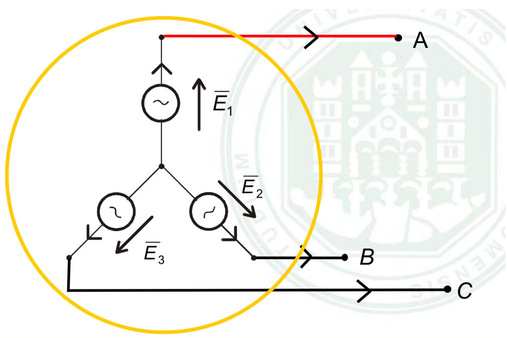
$$\bar{I_A} + \bar{I_B} + \bar{I_C} = 0$$

Non si puó dire nulla a proposito della somma delle correnti di fase.

## 13.3 Esempi



- *Le tensioni concatenate sono:* $V_1, V_2, V_3$
- *Le tensioni di fase (3 scuole di pensiero)*
  - Non esistono perché non esiste il centro stella;
  - Sono incidenti con quelle concatenate;
  - Esistono e ce sono infinite, perché sono tensioni di fase tutte le terne di tensione tra un unico punto preso come riferimento e i 3 vertici del trinagolo;




- *Le correnti di fase:* appartengono allo stesso ramo delle tensioni di fase;
- *Le correnti di linea: rami A, B, C*;

## 13.4 Definizioni sequenze

Il verso convenzionale é antiorario:

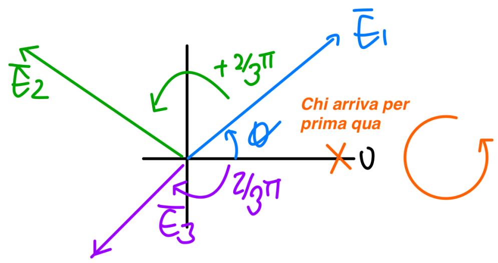
- **Sequenza diretta:** 1, 2, 3;
- **Sequenza inversa:** 3, 2, 1;

Operatori per rappresentare la sequenza delle terne:

- 1
- $\alpha = e^{j\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\alpha^2 = e^{-j\frac{2}{3}\pi}$

$$\textit{Sequenza diretta: } 1, \alpha^2, \alpha \equiv 1, \frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi$$

$$\textit{Sequenza inversa: } 1, \alpha, \alpha^2 \equiv 1, -\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi$$




$$\bar{E}_1 = Ee^{j\delta}$$
$$\bar{E}_2 = Ee^{j(\delta + \frac{2\pi}{3})}$$
$$\bar{E}_3 = Ee^{j(\delta - \frac{2\pi}{3})}$$

***In senso antiorario si legge: 1, alpha, alpha^2***

## 13.5 Metodo del monofase equivalente

1. Verifico se il circuito é **simmetrico** ed **equilibrato**;
    - Moduli uguali;
    - sfasati di $\frac{2}{3}\pi$;
2. Se le impedenze sono a 3 a 3 uguali di valore;
3. Trasformo i triangoli in stelle;

$$Z_i = \frac{Z_i}{3}$$

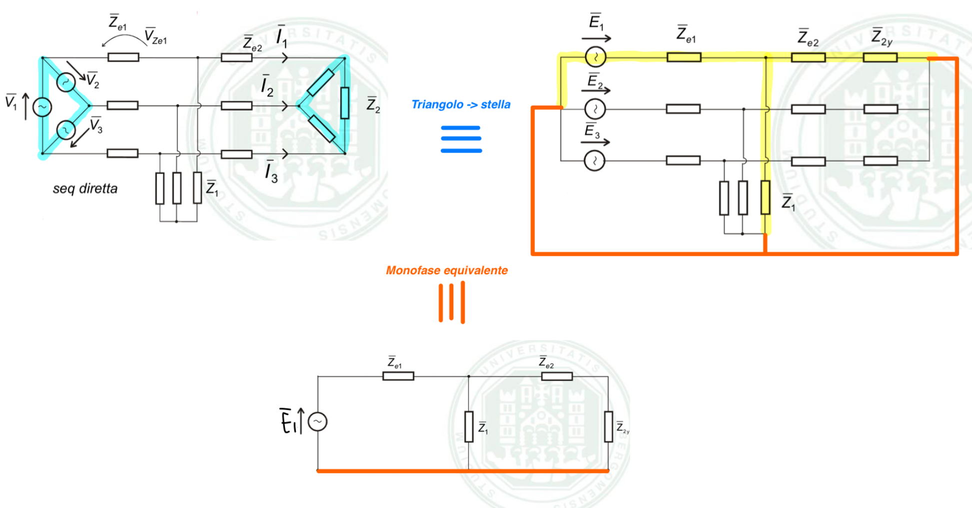
$$E_i = \frac{|V|}{\sqrt{3}}$$

4. Rappresento il circuito utilizzando la prima terna;

$$E_i = 230 \cdot e^{0j} V \Rightarrow 230$$

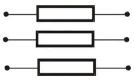
*utilizziamo il modulo essendo a fase nulla*

5. Poi aggiungere la fase giusta della sequenza nel caso si chieda una corrente di una terna diversa;



## 13.6 Mutui accoppiamenti

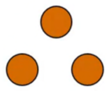
In un circuito trifase se i vari elementi che costituiscono delle varie fasi sono vicini, le mutue induttanze delle fasi si fanno sentire e **non possiamo utilizzare il metodo del monofase equivalente**.



$$\bar{E}_1 = R_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_{11} \cdot \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_2 + j\omega M_{13} \cdot \bar{I}_3$$
$$\bar{E}_2 = R_2 \cdot \bar{I}_2 + j\omega M_{212} \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_{22} \cdot \bar{I}_2 + j\omega M23 \cdot \bar{I}_3$$
$$\bar{E}_3 = R_3 \cdot \bar{I}_3 + j\omega M_{31} \cdot \bar{I}_1 + j\omega M_{32} \cdot \bar{I}_2 + j\omega L_{33} \cdot \bar{I}_3$$

Se nello spazio i 3 conduttori sono uguali e ai vertici di un triangolo equilatero presentano:

- mutua induttanza uguale;
- auto-induttanza uguale;



$$M_{12} = M_{21} = M_{13} = M_{31} = M_{23} = M_{32} = M_S$$
$$L_{11} = L_{22} = L_{33} = L_S$$

Posso riscrivere le mie equazioni nell'ipotesi che il mio circuito sia equilibrato come:

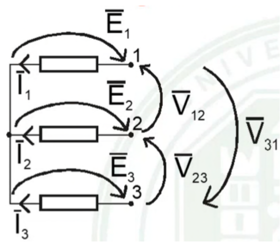
E quindi:

$$L = L_S - M_S \qquad \bar{E_K} = (R + j\omega L) \cdot \bar{I_K} \qquad k = 1, 2, 3$$

## 13.7 Potenze

- **Potenza con collegamente a stella**

  Voglia scrivere la potenza messa in gioco da questa terna

  Somma delle potenze prodotte da ciascun ramo

  $$\bar{S} = \bar{E}_1 \cdot \bar{I_1}^* + \bar{E}_2 \cdot \bar{I_2}^* + \bar{E}_3 \cdot \bar{I_3}^*$$

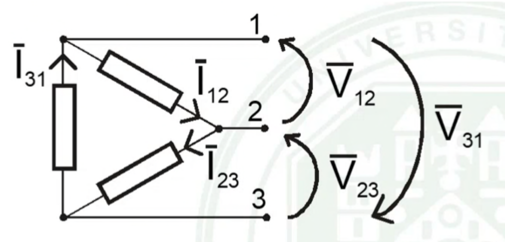
  **Se é simmetrico ed equilibrato**

  $$\bar{S} = 3 \cdot \bar{E} \cdot \bar{I}^* \qquad S = 3 \cdot E \cdot I$$

  Quello che succede su una fase é analogo sulle altre, tranne che é sfasato nel tempo di $\frac{2}{3}\pi$.

  $$E = \frac{V}{\sqrt{3}} \qquad S = \sqrt{3} \cdot V \cdot I$$

- **Potenza con collegamente a stella**




Somma delle potenze prodotte da ciascun ramo

$$\bar{S} = \bar{V_{12}} \cdot \bar{I_{12}}^* + \bar{V_{23}} \cdot \bar{I_{23}}^* + \bar{V_{31}} \cdot \bar{I_{31}}^*$$

**Se é simmetrico ed equilibrato**

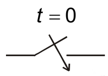
$$\bar{S} = 3 \cdot \bar{V} \cdot \bar{I_f}^* \qquad S = 3 \cdot V \cdot I_f$$

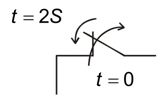
$$I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}} \qquad S = \sqrt{3} \cdot V \cdot I_f$$

# 14 Circuiti in regime transitorio

## 14.1 Considerazioni teoriche

- Interruttori




  - Nel primo caso l'interruttore si chiude al tempo $t = 0$;
  - Nel secondo caso l'interuttore é chiuso per $t < 0$, si apre a $t = 0$ e si chiude a $t = 2$

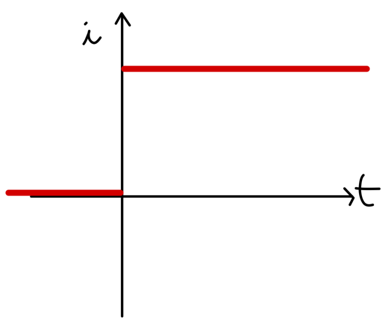
- Condensatori formule:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{i(t)}{C} dt \qquad i(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt}$$

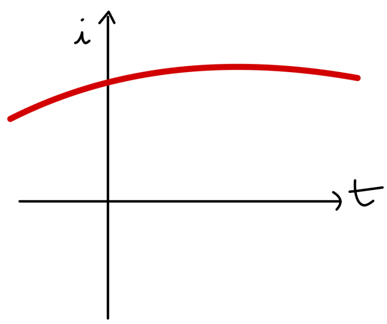
- Induttore formule:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{v(t)}{L} dt \qquad v(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

- Gli integrali che definiscono la tensione del condensatore e la corrente dell'induttore sono calcolate su funzioni continue nel tempo.
  Questo significa che da $t = 0^-$ a $t = 0^+$ il comportamento rimane il medesimo.




Comportamento non reale del condensatore / induttore




Comportamento reale

$\Rightarrow$ *Alla chiusura apertura dell'interruttore i valori di tensione e corrente nel condensatore e induttore non cambiano.*

*dove $t = 0^-$ indica il tempo prima dell'azionamento dell'interruttore*

- Le **condizioni iniziali di un condensatore** vanno espresse perché altrimenti non sappiamo nulla del suo funzionamente $\Rightarrow V_{C0}^-$

$$V_{C0}^- = V_{C0}^+ \Rightarrow V_{C0}$$

- Le **condizioni iniziali di un induttore** $\Rightarrow I_{L0}^-$

$$I_{L0}^- = I_{L0}^+ \Rightarrow I_{L0}$$

## 14.2 Analisi del circuito

*Sapendo che al tempo $t = 0$ viene azionato l'interruttore*

1. Determinare le condizioni inziali per $t < 0$;
2. Al tempo $t = 0$ viene azionato l'interruttore, per cui cambia la natura del circuito;
3. Al tempo $t > 0$ scrivo le equazioni utilizzando il metodo delle correnti di lato:
$$(n-1) \cdot (l - n + 1) = \textit{equazioni}$$
4. Risolvendo le equazioni del sistema otterremmo **un'equazione differenziale;**
5. Il comportamento del circuito é riassumibile nella seguente equazione:

*Si tratta di risolvere:*

$$\textit{integrale generale} = \sum_i K_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t} + \textit{ integrale particolare}$$

Ora vedremo come calcolare i vari pezzi e come comporli per trovare la soluzione.

## 14.3 Calcolare i $\lambda$ - OM

Per indentificare i $\lambda$ occorre risolvere l'integrale generale dell'omegenea associata all'equazione differenziale.
Ossia **pongo a 0 il termine noto dell'equazione differenziale** ottenuta dal sistema, derivo l'eq e la risolvo ottenendo cosí i $\lambda$.

- In questo pezzo non c'é l'influenza dei generatori;
- Il termine noto che viene posto a 0 é il generatore stesso;
- Il calcolo dei $\lambda$ **non dipende dalla natura dei generatori**.
- il calcolo dei $\lambda$ é determinata dall'influenza dei componenti passivi all'interno del circuito;
- Che il circuito sia in continua o alternata i $\lambda$ sono calcolati allo stesso modo;
- **L'ordine** dell'equazione differenziale é uguale al numero di **condensatori + gli induttori**;

$$\textit{condensatori} + \textit{induttori} = \textit{ordine } n$$

$$n \Rightarrow n \textit{ esponeziali} \Rightarrow \lambda_i \textit{ con } i = 1,....,n$$

- Solitamente non si ragiona in $\lambda$ bensí in $\tau$ chiamata **costante di tempo**;

$$\tau = -\frac{1}{\lambda}$$

  $\tau$ rappresenta come l'esponenziale tenda al suo valore asintotico, infatti l'unitá di misura di tau é in secondi.

  $\tau$ puó essere calcolata come Req vista dai morsetti del mio induttore/condensatore;

- Da un punto di vista matematico derivando l'equazione differenziale ottengo:

$$\textit{Esempio: } E = RC\dot{v} + v$$

$$\textit{Pongo } E = 0 \textit{ e derivando per } v \textit{ ottengo:}$$

$$0 = RC\lambda + 1$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

  $\lambda$ altro non é che la tangente (derivata).

**Calcolo dei $\lambda$**

*Calcolo OM: (termine noto = 0)*

$$eq.\ differenziale = 0$$
$$pongo\ \dot{v} = \lambda$$
$$derivo\ per\ la\ costante\ v$$
$$ricavo\ i\ \lambda$$

**NB: *i $\lambda$ devono essere per forza tutti negativi, altrimenti problema***

## 14.4 Calcolo dell'integrale particolare

Per il calcolo dell'integrale particolare analizziamo il circuito a $t = \infty$, ossia calcolare la **soluzione a regime**.

Se il generatore é in continua $E = V$:

- Il condensatore $\Rightarrow$ circuito aperto;
- L'induttore $\Rightarrow$ corto circuito;
- *Si tratta di risolvere il circuito e trovare le incognite*;

Se il generatore é in PAS $E = 10 \cdot sin(40t + \frac{\pi}{5})$:

- *Si tratta di risolvere il circuito nel regime pas e trovare le incognite;*

Avendo risolto il circuito per $t = \infty$ in continua/PAS poniamo:

$$integrale\ particolare = soluzione$$

**NB: *possiamo utilizzare lo stessa sistema per individuare le condizioni iniziali, ossia prima che l'interuttore si apra o si chiuda possiamo pensare che il sistema sia in quello stato da un* $t = \infty$ e fare le nostre ipotesi (attenzione al tipo di generatore.)**

## 14.5 Calcolo dei $K_i$

L'integrale generale altro non é che l'andamento della mia funzione incognita nel tempo.

$$\textit{integrale generale} = \sum_i K_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t} + \textit{ integrale particolare}$$

Vengono utilizzate le **condizioni inziali** $t = 0$ per il calcolo dei $K_i$:

$$V_{C0}, I_{L0}$$

Ponendo come esempio che l'incognita in questo caso sia la tensione sul condensatore, di cui noi sappiamo da problema la sua condizione inziale, possiamo quindi calcolare le $K_i$ come:

$$v_C(t) = \sum_i K_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t} + \textit{ integrale particolare}$$

$$v_C(t=0) = \sum_i K_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t} + \textit{ integrale particolare}$$

Conoscendo:

- *integrale particolare*;
- *OM*, dove gli esponenziali sono del tipo: $K_i \cdot e^{-\lambda t}$;
- $V_{C0}$;

Sostituisco nell'equazione per $t = 0$ i seguenti dati e ottengo:

$$V_{C0} = K_i \cdot e^{-\lambda t} + \textit{integrale particolare} \qquad t \to 0 \Rightarrow e^{-\lambda t} = 1$$

$$K_i = V_{C0} - \textit{integrale particolare}$$

**NB:**

- L'integrale generale é una funzione che dipende da un parametro;
- Dato **l'ordine *n*** dell'equazione differenzione, avremo $K_i$ con $i = 1, ..., n$ da determiare, quindi ci serviranno ***n* equazioni indipendenti (condensatori + induttori)**;
- Le ***n* equazioni indipendeti** vengono ricavate dalle **condizioni inziali**;
- Dobbiamo quindi riscrivere $V_{C0}, I_{L0}$ in funzione di una sola delle due;
- $V_{C0}$ viene data per forza dal problema, mentre $I_{L0}$ si puó anche ricavare dal circuito;

## 14.6 Risoluzione del circuito

- Per il calcolo dei $\lambda$:
  1. Si aziona l'interuttore;
  2. Rendo la rete passiva;
  3. La taglia in un punto;
  4. Calcolo la Req sapendo che:

$$resistenza = R$$

$$induttore = \lambda \cdot L$$

$$condensatore = \frac{1}{\lambda \cdot C}$$

  5. Calcolo le radici ($\lambda$) dell'equazione della Req.

$$Esempio:\ 6\lambda^2 + 3200\lambda + 1600 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \lambda_1 = -533,16 \\ \lambda_2 = -0.5 \end{cases}$$

- Calcolo l'integrale particolare per $t = \infty$, facendo attenzione al tipo di generatore;
- Calcolo i $K_i$ utilizzando le $\boldsymbol{i}$ equazioni indipendenti ricavate dai $\boldsymbol{i}$ componenti passivi (dove $\boldsymbol{i}$ = induttore + condensatore) utilizzando la loro condizione inziale;
  - le condizioni inziali devono essere riportare in un'unica incognita;
  - $\boldsymbol{i}$ = induttore + condensatore;

*Integrale completo, esempio*

$$i_2(t) = K_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} + .. + i_2(\infty)$$

***Integrale particolare:*** $t \to \infty$ $i_2(\infty)$ (ris. circuito continua o PAS)
***OM:*** *Metodo trucco* (ricavo i lambda = condensatori + induttori)
***Condizioni inziali:*** $t \to 0$ $i_2(0+)$ (dopo aver azionato l'interruttore)
***Rivaco i*** $K_i$ *a* $t = 0^+$*:* sostituendo tutti i valori trovati

$t \to \infty$

***INTEGRALE PARTICOLARE***
***Trovare le incognite risolvendo il circuito in:***
***- continua;***
***- pas;***

***Tipo generatori***

$$\boxed{\text{int.gen.}} = \sum_i K_i e^{\lambda_i t} \boxed{+\ \text{int}_p}$$

$t > 0$

***Generare un sistema tramite il metodo delle correnti di lato:***
***- (n - 1)(l - n +1) equazioni***

***Risolvendo otteniamo un'equazione differenziale di ordine n.***

***L'ordine n = somma di induttori + condensatori presenti nel circuito => n esponenziali.***

***OM***
***- Poniamo il termine noto dell'equazione differenziale***
***- Ossia generatore = 0 => (E = 0);***
***- Risolvere l'eq. differenziale.***

***oppure il metodo trucco.***

$t = 0$

***Per il calcolo dell'integrale genere che é una funzione continua della nostra incognita:***

***- Utilizzo le condizioni iniziali al tempo t = 0 (può cambiare) per il calcolo;***

***- le equazioni necessarie per il calcolo dei Ki devono essere i dove i = induttori + condensatori;***

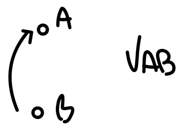
***- le i equazioni devono essere trascritte utilizzando le formule in un'unica variabile;***

***- sostituisco t nell'integrale e vedo come si comportano gli esponenziali; (t = 0 => e = 1)***

***- sostituisco tutti i valori e calcolo Ki;***

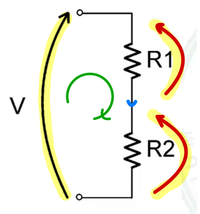
## 15 NOTE importanti

- $V_{AB} = V_A - V_B$




- Kirkoff alle maglie (é sempre un percorso chiuso):

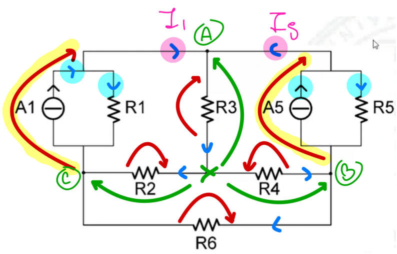
$$V - V_1 - V_2 = 0$$




- Come trovare corrente $I_1, I_5$, utilizzando metodo delle tensioni di nodo

$$I_1 = A_1 - \frac{V_A - V_C}{R1}$$

$$I_5 = A_5 - \frac{V_A - V_C}{R1}$$



- Se all'interno di un circuito PAS abbiamo piú generatori con pulsazione differente dobbiamo
  - Sovrapposizione degli effetti
  - Riportare nel dominio del tempo le le soluzioni

$$iR_1 = |\rho_1| \cdot \sqrt{2} \cdot cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)$$

$$iR_2 = |\rho_2| \cdot \sqrt{2} \cdot cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

  - Sommarle nel dominio del tempo

$$iR = iR_1 + iR_2$$

  - In matlab

$$\textbf{abs(}iR_1\textbf{)} = \ |\rho_1|$$

$$\textbf{angle(}iR_1\textbf{)} = \ \omega_1$$

- Le correnti e le tensioni prendono il segno in base a quelle segnate nel disegno, se la corrente é nel verso opposto prende un $-$ cosí come se la tensione é concorde con la corrente;

- Inoltre una volta scelto il segno di una corrente/tensione va mantenuto tale affinché la somma sia sensata;

- Per il calcolo della potenza attiva $P = \bar{V} \cdot \bar{I} = \bar{E} \cdot \bar{I}$
  - Potenza attiva = valor medio potenza istantanea

$$= \frac{1}{P} \int_0^P e_2(t) \cdot [i_2'(t) + i_2''(t)]dt$$

  - $\bar{V}$ fasoriale
  - $P_{e_2} = \bar{e_2} \cdot \bar{I_2} = e_2(t) \cdot [i_2(t)' + i_2(t)'']$
    - Se le correnti hanno la stessa pulsazione posso effettuare operazioni tra fasori

$$P_{e_2} = \bar{e_2} \cdot (\bar{I_2'} + \bar{I_2''})$$

  - Il valor medio di 2 correnti / tensioni non isofrequenziali (non stessa pulsazione) é uguale a 0

$$= \frac{1}{P} \int_0^P \rho_{e_2} \cdot cos(200t) \cdot [\rho_{i_2'} \cdot cos(100t - 1,95) + \rho_{i_2''} \cdot cos(200t)]dt$$

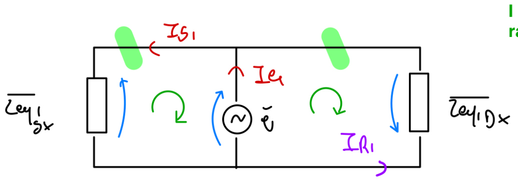
$$= \frac{1}{P} \int_0^P \rho_{e_2} \cdot cos(200t) \cdot [0 + \rho_{i_2''} \cdot cos(200t)]dt$$

$$P_{e_2} = \bar{e_2} \cdot \bar{I_2''}$$

$$P_{e_2} = Re(\bar{e_2} \cdot \bar{I_2''}^*)$$

  - In questo caso se le due correnti hanno la stessa pulsazione si sommano altrimenti utilizzo solo quella con la pulsazione uguale a quella del generatore $E2$

- Il generatore in quella posizione senza essere collegato a nulla mi disaccoppia la rete in due reti distinte ognunga che vive una vita propria.




I due rami sono in parallelo al generatore e hanno sui propri rami la tensione del generatore. Applicando kirkoff:

$$\begin{cases} \bar{V_e} + V_{\bar{Z}Dx} = 0 \rightarrow V_{\bar{Z}Dx} = -\bar{V_e} \\ V_{\bar{Z}Sx} - \bar{V_e} = 0 \rightarrow V_{\bar{Z}Sx} = \bar{V_e} \end{cases}$$

$$I_{R_1} = \frac{\bar{e}}{\overline{Z_{eq_1 Dx}}}$$

$$I_{S_1} = \frac{\bar{e}}{\overline{Z_{eq_1 Sx}}}$$

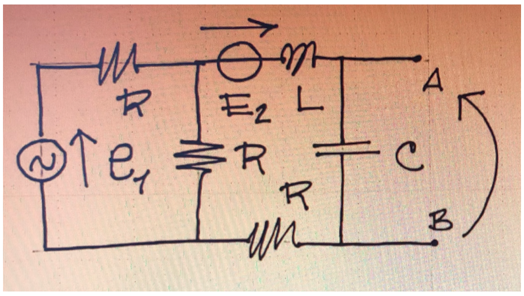
KIRKOFF:

$$I_{eq} + I_{R_1} - I_{S_1} = 0$$

$$I_{eq} = I_{S_1} - I_{R_1}$$

- Generatore alternata + generatore continua =
$V_{AB} = sinusoidale + costante$

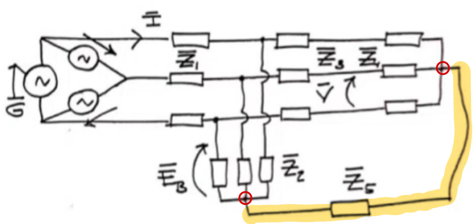
$$V_{AB} = \ \ sinusoide\ traslata\ di\ una\ costante$$



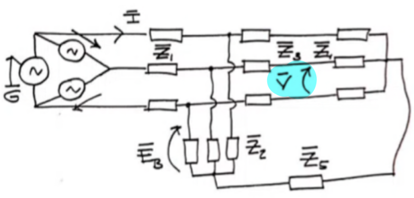

- potenza = Il prodotto tra una componente continua e una alternata = media nulla

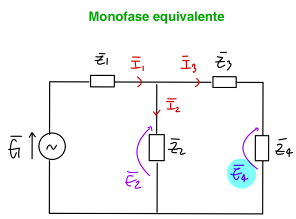
- $\bar{Z}_5$ unisce 2 centri stella, i centri stella sono equipotenziali, ossia presentano la stessa tensione (**sse il sistema é simmetrico ed equilibrato**) $\Rightarrow$ $\bar{Z}_5$ non é percorsa da corrente $\Rightarrow$ Ignoro $\bar{Z}_5$

$$\bar{V}_5 = \bar{Z}_5 \cdot \bar{I}_5 = 0$$



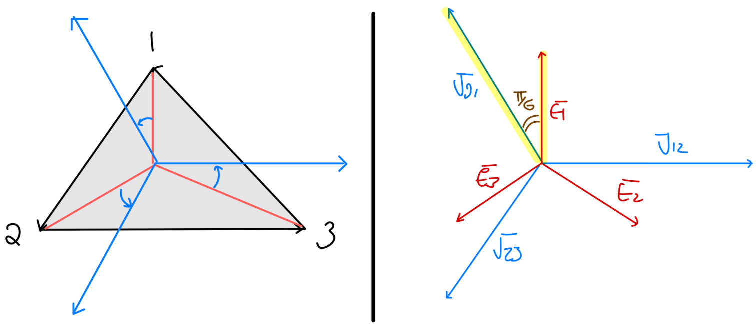

- Calcolo tensione concatenata $V$




$$\bar{V} = \bar{E}_4 \cdot \sqrt{3}$$

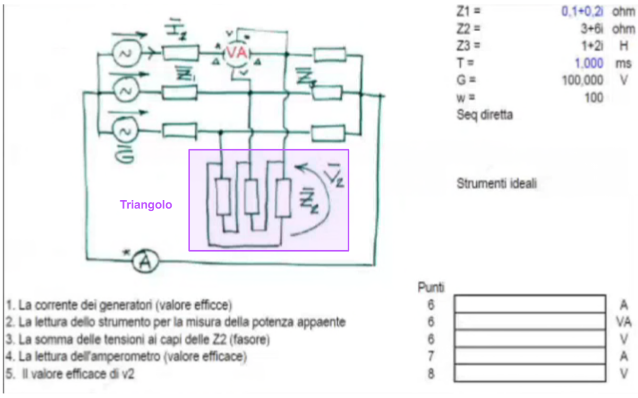
- Triangolo tensioni concatenate: le tensioni concatenate sono
  - Piú grandi di $\sqrt{3}$ di quelle di fase
  - E sfasate di $\pm\frac{\pi}{6}$
    - sequenza diretta $-\frac{\pi}{6}$
    - sequenza inversa $+\frac{\pi}{6}$



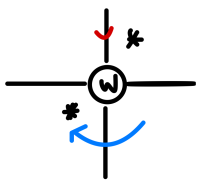

$$E1 = \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{\pi}{6}\cdot i}$$

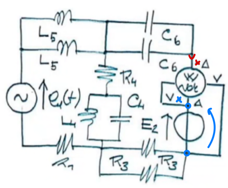
*moltiplico per lo sfsaemento quando eseguo una Sovrapposizione degli effetti*

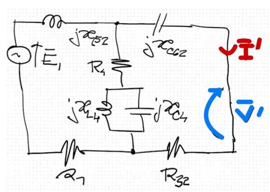
- Trifase esercizio
  - 4) Lettura amperometro = 0 A, se il sistema é simmetrico ed equilibrato si tratta di 2 centri stella alla **stessa tensione** per cui non passa corrente
  - 3) La somma delle tensioni in un percorso chiuso Kirkoff = 0 $\Rightarrow$ Siamo in un traingolo = 0




- Lettura wattmetro
  - amperometrica: dove c'é la stella corrente entrante
  - volumetrica: dove c'é la stella punta della tensione
  - I segni vanno sempre lasciati sul circuito in modo tale da calcolarli sempre



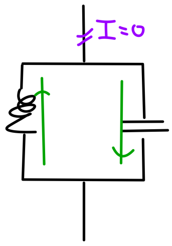




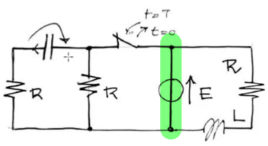
- Risonanza
  - Abbiamo risonanza quando le due unitá di misura sono uguali e opposte in segno

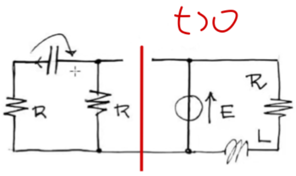
$$jXL5 = -50j \qquad jXC5 = +50j$$

  - Quando sono in parallelo abbiamo due correnti uguali in modulo ma opposte in segno

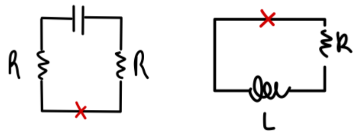


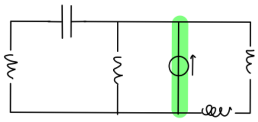

- Il Generatore posto in quella posizione divide il circuito in due parti indipendenti



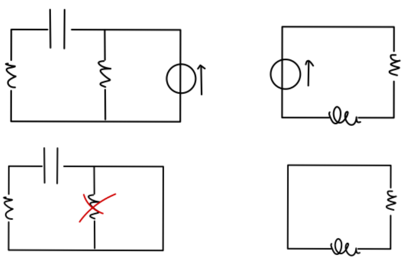




Metodo trucco



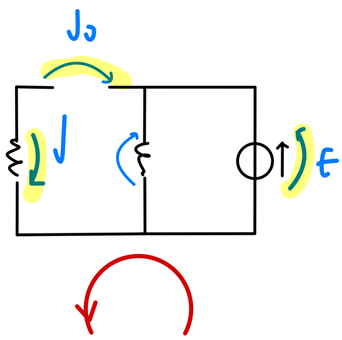



Metodo trucco



- Per kirkoff su un percorso chiuso (ho scelto quello piú esterno)

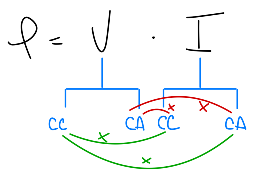
$$\begin{cases} E - V_0 + V = 0 \\ V = R \cdot I = R \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_0 = E \end{cases}$$



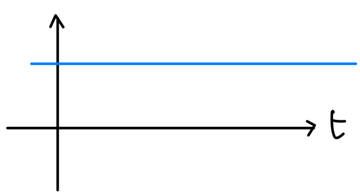

**Per kirkoff**

Somma delle tensioni in un percorso chiuso = 0

- Potenza
  - CA: corrente alternata
  - CC: corrente continua

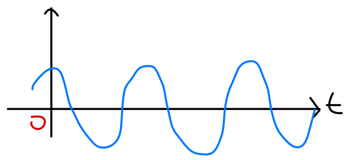



1. $CC \cdot CC$ = potenza (senza alcun aggettivo) costante nel tempo

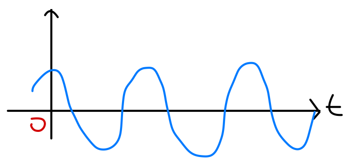


2. $CC \cdot CA =$ potenza alternata dove valor medio $= 0$

$$CC \cdot CA = 0$$



3. mentre $CA \cdot CC =$ uguale al 2 e $CA \cdot CA = Pas$



- Avendo in un circuito un generatore in alternata $e$ e uno in continua $E$ le potenze sono:
  - **Potenza reattiva:** $e + \cancel{E}$
  - **Potenza attiva:** $e + \cancel{E}$
  - **Potenza apparente:** $e + \cancel{E}$

  - **Potenza:** $E \cdot I$
    * Dove $I$ é solo in continua
- Se esercizio ci da $a(t) = AM \cdot cos(wt + FI)$

$$rappresentazione\ fasoriale = \frac{AM}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot FI}$$

$$una\ rappresentazione\ fasoriale\ ha\ il\ cappello\ ossia\ \bar{I}$$

  - Questo vuol dire che é gia stata divisa per $\sqrt{2}$
  - le rappresentazione fasoriali sono in forma quadratica ed esponenziale
  - Per riportarla nel dominio del tempo devo moltiplicare per $\sqrt{2}$

$$f(t) = \sqrt{2}\,10\cos(50t + \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \overline{F} = 10\,e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$e(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\overline{G} = 5 + j5 \text{ nota } \omega = 10\,\text{rad}\,s^{-1}$$

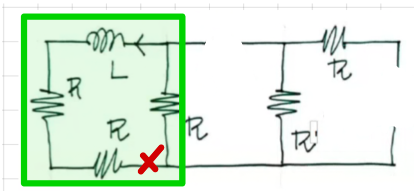
$$\overline{G} = \sqrt{50}\,e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\overline{E} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$$

$$\rightarrow g(t) = \underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}}_{10}\cos(10t + \frac{\pi}{4})$$

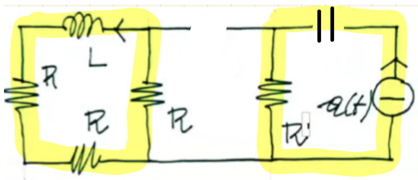
- Calcolo la costante di tempo
  - Il transitorio é presente in una sola maglia per cui guardo solo quella

$$3R + \lambda \cdot L = 0$$

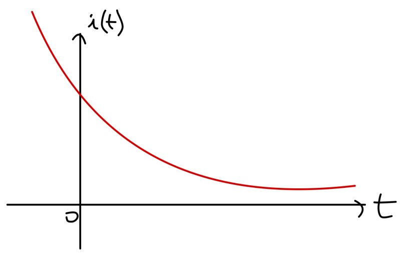



*in questo caso:*

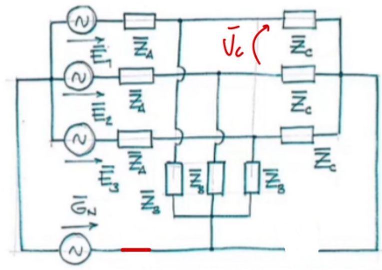
$$\begin{cases} 3R + \lambda \cdot L = 0 \\ R' + \frac{1}{\lambda \cdot C} \end{cases}$$



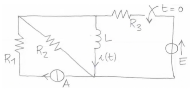
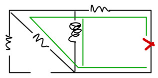

- integrale generale:
$$I(t) = K \cdot e^{\lambda t} + I(\infty)$$
  - L'integrale generale é la somma di correnti/tensioni, correnti in questo caso, ossia:
  $$I(t) = A \cdot e^{\lambda t} + I(\infty) \rightarrow \textit{ sono tutte correnti } K = A, \textit{ corrente}$$
  - L'integrale generale posso usarlo sempre per trovare il valore ad un tempo $t' \rightarrow I(t')$
    * basta avere tutte le ignote
  - L'integrale generale possiede per natura un $\lambda < 0$ per cui avremo il medesimo comportamento:
    * il valore massimo di $I(t)$ lo avremo per $t = 0$




- Se ho un generatore sul neutro, i centri stella non sono pú equipotenziali ⇒ no monofase equivalente (es 26)



- Calcolo costante di tempo: una volta tagliato il circuito mi devo ricondurre nel punto in cui ho tagliato

$$R_3 + (R_2 \parallel \lambda L) = 0$$

- Quando devo calcolare l'integrale generale: Ricalcolo sempre tutto per ogni fase

  - $0 < t < T$

$$Vc(0^-) = Vc(0^+) = x$$
$$Vc(\infty) = y$$
$$Vc(t) = k \cdot e^{\lambda \cdot t} + Vc(\infty)$$
$$Vc(t = 0) = k \cdot e^{\lambda \cdot 0} + Vc(\infty)$$

$$x = k + y \Rightarrow k = \frac{x}{y}$$

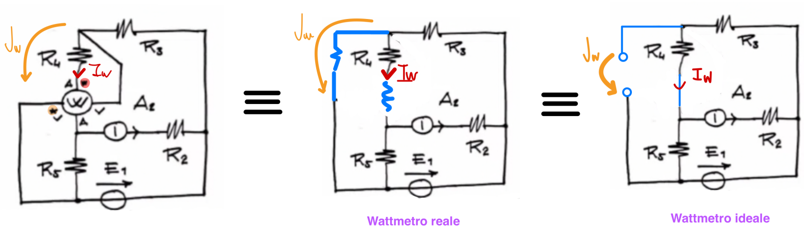
  - $t > T$

$$t' = t - T$$
$$Vc(t' = 0^-) = Vc(t' = 0^+) = x$$
$$Vc(\infty) = y$$
$$Vc(t) = k \cdot e^{\lambda \cdot t} + Vc(\infty)$$
$$Vc(t' = 0) = k \cdot e^{\lambda \cdot 0} + Vc(\infty)$$

$$x = k + y \Rightarrow k = \frac{x}{y}$$

- Lettura del wattmetro **reale** → sostituire con le resistenze interne

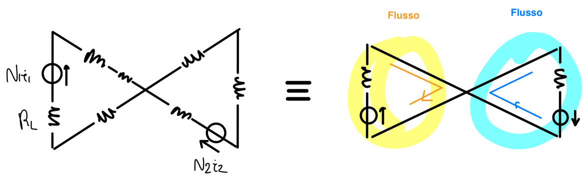
*Le resistenze interne del wattmetro vengono fornite da testo*



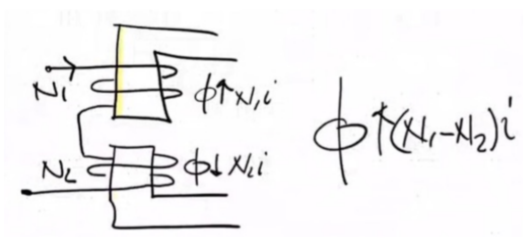

- Il flusso passa tutto nel corto

$$M12 = M21 = 0$$

NB: anche se non passa corrente esiste la mutua induttanza ⇒ proprietá del sistema che dipende dal che i flussi si intersecano. Se questo non accade ⇒ Mutua = 0




- Generatore equivalente



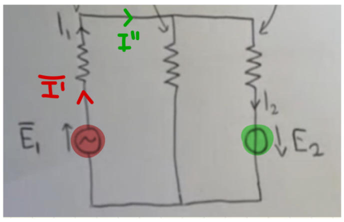
$$L = \frac{(N_1 + N_2)^2}{Req}$$

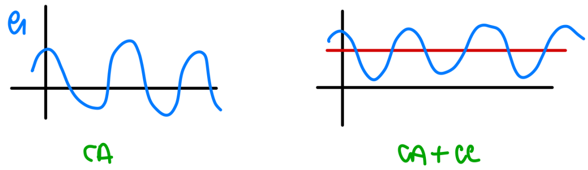
- Calcolo della potenza di $E_2$

$$P_2 = E_2 \cdot I$$

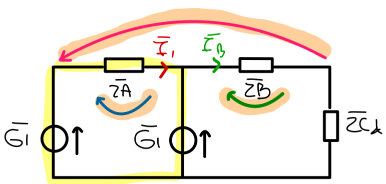
$$P_2 = E_2 \cdot (\bar{I}' + I'')$$

$$P_2 = E_2 \cdot (|I| \cdot \sqrt{2} \cdot (coswt + \varphi) + I'')$$




- Kirkoff in un percorso chiuso




KIRKOFF:

$\bar{G}_1 - \bar{G}_1 - \bar{V}_A = 0$

$\bar{V}_A = 0$

KIRKOFF: SOMMA DELLE TENSIONI DI UN PERCORSO CHIUSO = 0

$V_1 - V_A - V_B = 0$

$V_1 = V_A + V_B$

$V_1 = 0 + V_B$

$V_1 = V_B$