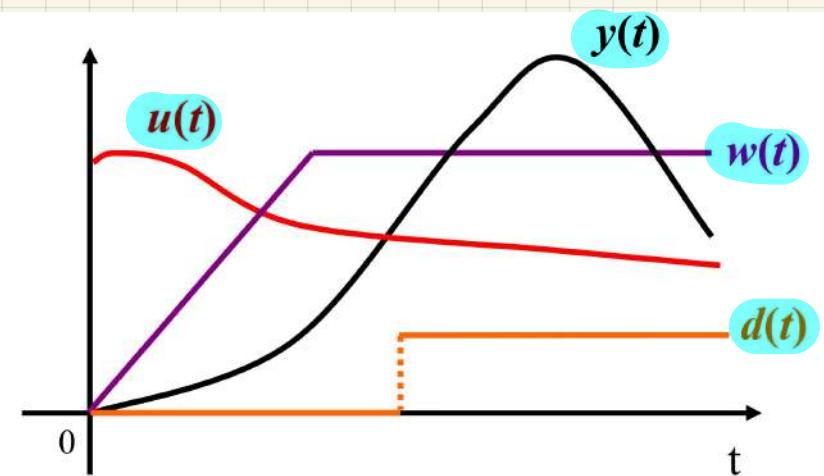
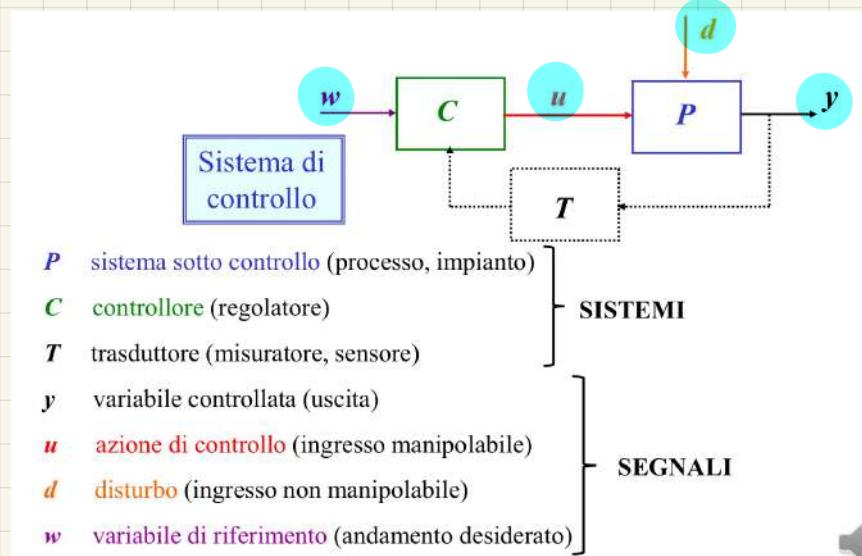
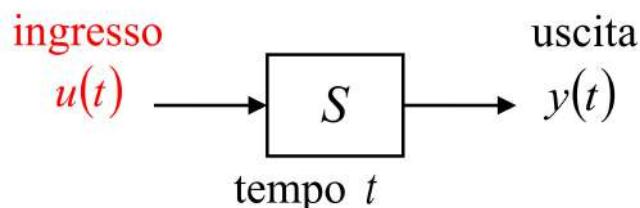



CAP I



Le variabili sono descritte da funzioni reali della variabile reale t

CAP II



Modelli dinamici:
Non basta conoscere il solo ingresso per determinare l'uscita ci serve qualcosa di più.

↳ VARIABILI DI STATO

Le variabili di stato si indicano con la x_i

$$x_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

n è l'ordine del sistema

Il grassetto = vettore

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

vettore di stato

Nei sistemi dinamici:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ingressi} \\ \text{Stato iniziale} \end{array} \right\} u(t), t \geq t_0, \mathbf{x}(t_0) \longrightarrow y(t), t \geq t_0$$

Rappresentazione di stato (sistema SISO stazionari)

$f(\cdot)$ vettoriale

$g(\cdot)$ scalare

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

equazione di stato

trasformazione di uscita

stato iniziale

$$\mathbf{x}(t) \in \Re^n$$

vettore

$$u(t) \in \Re$$

scalare

$$y(t) \in \Re$$

scalare

Sono funzioni che dipendono dal vettore di stato e dall'ingresso

Questo riesco a farlo perché conosco lo stato iniziale \Rightarrow sistema dinamico

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) \\ y(t) = 3x_1(t) \end{cases}$$

In questo caso

$x_1(0) = 1; x_2(0) = 2$

$t_0 = 0$

La trasformazione d'uscita non dipende esplicitamente da $u(t)$

$\mathbf{x}(t) \in \Re^2 \rightarrow$ L'ordine del sistema è $n=2$

$u(t) \in \Re$ sono scalari
 $y(t) \in \Re$

Ordine sistema $n = \#$
var. di stato

Classificazione dei sistemi dinamici

Sistema strettamente proprio:
l'uscita non dipende dall'ingresso

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) \in g(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Non compare $u(t)$

Sistema proprio / non strettamente:
L'uscita dipende dall'ingresso

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Sistema SISO (Single Input Single Output):
Ingresso e uscita sono scalari $u(t)$ e $y(t)$

$$u(t) \in \mathbb{R} \quad y(t) \in \mathbb{R}$$

Sistema lineare:
 $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ sono funzioni lineari di u e di x

$$\begin{aligned} f(x(+), u(+)) \\ g(x(-), u(+)) \end{aligned}$$

altrimenti



Sistema non lineare

altrimenti



Sistema a tempo - variante:
C'è presenza esplicita della variabile tempo

Sistema tempo - invariante o stazionario

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t), t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Compare
esplicitamente t

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- Ingresso ed uscita sono scalari, cioè $u(t) \in \mathbb{R}$ $y(t) \in \mathbb{R}$ \rightarrow **SISO**
- Non c'è dipendenza esplicita dell'uscita $y(t)$ dall'ingresso $u(t)$ \rightarrow **Strettamente proprio**
- Non c'è presenza esplicita della variabile tempo \rightarrow **Tempo invariante**
- $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ sono funzioni lineari di u e di x \rightarrow **Lineare**

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + u_1(t) - 3u_2(t) \\ y(t) = 2x(t) + u_1(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

u(t) è vettoriale

- L'ingresso **non** è uno scalare, infatti $u(t) \in \mathbb{R}^2$ \rightarrow **MIMO**
- **C'è** dipendenza esplicita dell'uscita $y(t)$ dall'ingresso $u(t)$ \rightarrow **Proprio**
- Non c'è presenza esplicita della variabile tempo \rightarrow **Tempo invariante**
- $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ sono funzioni lineari di u e di x \rightarrow **Lineare**

Scelta delle variabili di stato

Sistema descritto da un'equazione differenziale di ordine n nell'incognita $y(t)$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t), u(t)\right)$$

Criterio matematico

Scegliere come variabili di stato l'incognita e le sue prime $n-1$ derivate

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \\ \vdots & \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \varphi(x_n(t), \dots, x_2(t), x_1(t), u(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\ddot{y}(t) = \sqrt{2y(t)\dot{y}(t)} + \frac{5u(t)}{1+\dot{y}(t)^2}$$

Scegliere

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

$$x_3(t) = \ddot{y}(t)$$

È meccanico

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \sqrt{2x_1(t)x_2(t)} + \frac{5u(t)}{1+x_3(t)^2} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Criterio fisico

Variabili di stato



Grandezze associate ad accumuli di energia, massa,...

CAP III

Movimento dello stato e dell'uscita

Equazione di stato $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))$

Trasformazione di uscita $y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t))$

$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ stato iniziale

Sia assegnato l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$

Problema fondamentale della teoria dei sistemi

Integrando l'equazione
di stato si ottiene

$\mathbf{x}(t)$, $t \geq t_0$

movimento dello stato

Sostituendo il risultato nella
trasformazione d'uscita si ha

$y(t)$, $t \geq t_0$

movimento dell'uscita

Movimento di equilibrio

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \bar{\mathbf{x}} \quad \text{stato iniziale} \\ u(t) = \bar{u}, \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

ingresso costante

Abbiamo una determinata situazione iniziale

Ingresso segnato costante per tutti i tempi

Stato di equilibrio

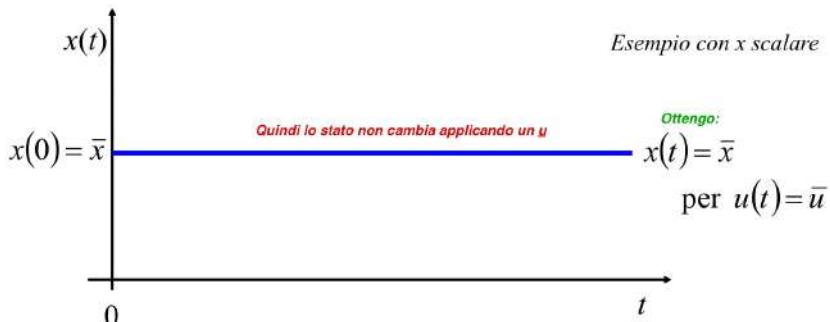
Movimento dello stato $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ costante nel tempo in corrispondenza di $u(t) = \bar{u}$

Uscita di equilibrio

Movimento dell'uscita $y(t) = \bar{y}$ costante nel tempo in corrispondenza di $u(t) = \bar{u}$

Dato un ingresso costante il vettore di stato non cambia

Dato un ingresso costante l'uscita non cambia



Calcolo dell'equilibrio (per sistemi a tempo continuo)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) & \text{Eq. algebrica} \\ \bar{y} = g(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) & \text{Incognita Dato} \end{cases}$$

Derivate dello stato = 0

Se l'uscita rimane costante dato un ingresso costante le derivate di una costante $\Rightarrow 0$

Sistemi dinamici Lineari Tempo-Invarianti (LTI)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{cases} \quad \text{con } \mathbf{f}(\cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot) \text{ lineari}$$

Ricordando che $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ *n ordine del sistema (n variabili di stato)*

è possibile scrivere esplicitamente le relazioni in forma lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \\ y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) + du(t) \end{cases}$$

Raggruppando i coefficienti in matrici e vettori

Coeff. Variabili di stato = nell' eq di stato

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Coeff. Variabili di stato = eq di uscita

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]_{1 \times n} \quad D = [d]_{1 \times 1}$$

Coeff. Ingressi = eq di uscita



$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}}$$

$(n \times 1)$ $(n \times n)(n \times 1)$ $(n \times 1)(1 \times 1)$
 (1×1) $(1 \times n)(n \times 1)$ $(1 \times 1)(1 \times 1)$

Equilibrio di sistemi LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

In corrispondenza di $u(t) = \bar{u}$ si imponga $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$

$$0 = A\bar{\mathbf{x}} + B\bar{u} \quad \rightarrow \quad A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$$

Primo passo da fare

Se $\det A \neq 0$

$$\bar{\mathbf{x}} = -A^{-1}B\bar{u}$$

$$\bar{y} = C\bar{\mathbf{x}} + D\bar{u} = \underbrace{(-CA^{-1}B + D)}_{\text{guadagno statico}}\bar{u}$$

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

($1 \times n$) ($n \times n$) ($n \times 1$) + (1×1) = scalare

Se $\det A = 0$

Il sistema $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$ può avere infinite o nessuna soluzione.

$\det(A) \neq 0$

Un sistema LTI può avere (in corrispondenza di un dato \bar{u}):

- un solo stato di equilibrio (Se $\det A \neq 0$)
- infiniti stati di equilibrio (Se $\det A = 0$ e $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$ ha infinite soluzioni)
- nessuno stato di equilibrio (Se $\det A = 0$ e $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$ non ha nessuna soluzione)

$\det(A) = 0$

Movimento di sistemi LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Consideriamo un sistema SISO
di ordine n qualsiasi

Considerando che:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ u(t) &\text{ generico, } t \geq 0 \end{aligned}$$

Movimento dello stato

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Movimento dell'uscita

$$y(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Dipende solo dallo stato iniziale e non dall'ingresso
Dipende solo dall'ingresso e non dalla condizione iniziale

Movimento dello stato

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Esponenziale
di matrice

$$e^{At} = \sum_0^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$$

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{At}\mathbf{x}_0}_{\mathbf{x}_l(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\mathbf{x}_f(t)}$$

Movimento libero
dello stato

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) \\ y(t) = y_l(t) \end{cases} \text{ per } u(t) = 0$$

Dipende solo
dalla condizione
iniziale

Movimento forzato
dello stato

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) \\ y(t) = y_f(t) \end{cases} \text{ per } x_0 = 0$$

Stato = 0 ho solo
movimento forzato

Movimento libero
dell'uscita

$$y_l(t)$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}\mathbf{x}_0}_{y_l(t)} + \underbrace{C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau} + Du(t)$$

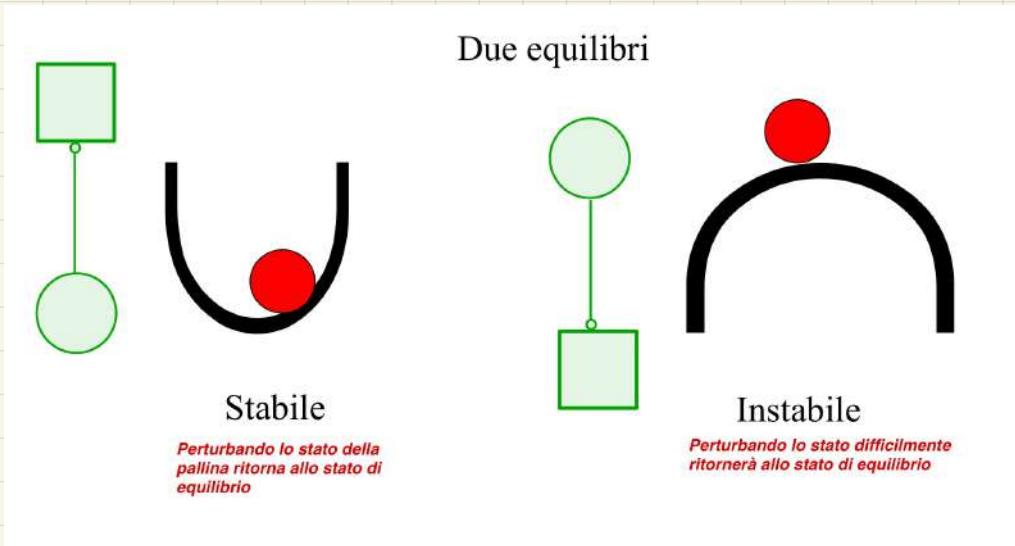
Movimento forzato
dell'uscita

$$y_f(t)$$

CAP II

wam credo
perver ola
jeodere in coad

CAP V



- La stabilità è quella proprietà per cui un sistema, dopo una perturbazione, tende a tornare nella situazione preesistente la perturbazione.
- La stabilità è una proprietà locale (in generale), cioè si riferisce al comportamento del sistema in seguito a perturbazioni “piccole”.
- Non tutte le grandezze di un sistema sono note con precisione: la **condizione iniziale** è spesso non nota.

Teoria di Lyapunov



Stabilità dell'equilibrio

Sia (\bar{x}, \bar{u}) un equilibrio per il sistema

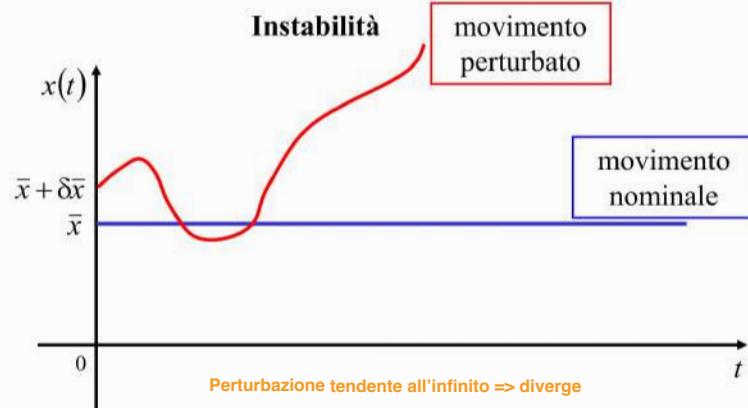
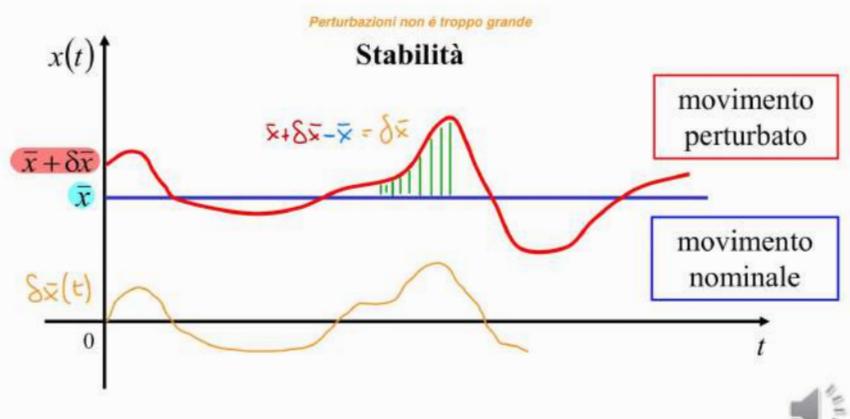
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ \dot{y}(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \rightarrow x(t) = \bar{x} \quad \text{movimento nominale}$$

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta\bar{x} \end{cases} \rightarrow x(t) = \bar{x} + \delta x(t) \quad \text{movimento perturbato}$$

perturbazione della condizione iniziale

perturbazione del movimento



Stabilità dell'equilibrio nei sistemi LTI

Facciamo la stessa cosa di prima ma perturbando la condizione iniziale

Consideriamo un sistema LTI SISO

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Sia (\bar{x}, \bar{u}) un equilibrio per il sistema.

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{movimento nominale} \\ x(t) = \bar{x}, t \geq 0 \end{array}$$

Usando la formula di Lagrange

$$\text{movimento nominale } x(t) = e^{At} \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau = \bar{x}$$

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta \bar{x} \end{cases}$$

perturbazione della condizione iniziale

Usando la formula di Lagrange

$$\begin{aligned} \text{movimento perturbato } x(t) &= e^{At} (\bar{x} + \delta \bar{x}) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau = \\ &= e^{At} \bar{x} + e^{At} \delta \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau = \\ &= (e^{At} \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau) + e^{At} \delta \bar{x} \end{aligned}$$

movimento nominale

perturbazione del movimento

Quindi:

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x} = e^{At} \delta \bar{x}$$

perturbazione del movimento

perturbazione della condizione iniziale

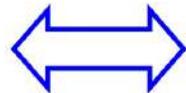


La perturbazione del movimento che si ottiene in seguito ad una perturbazione della condizione iniziale:

- non dipende dal particolare stato di equilibrio
quindi si può parlare di stabilità del sistema
- dipende solo dalla matrice e^{At}
da studiare accuratamente
- la stabilità (nei sistemi lineari) è una proprietà “globale”
(non dipende dall'entità della perturbazione)

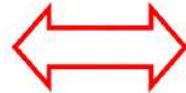


**Asintotica
stabilità**



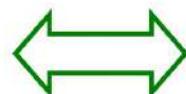
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$

Instabilità



e^{At} diverge per $t \rightarrow \infty$

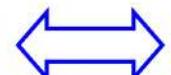
Stabilità



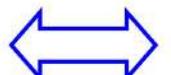
e^{At} limitata $\forall t$

N.B. $e^{At}x_0$ è il movimento libero!!!

$$a < 0$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = 0$$



**Asintotica
stabilità**

Caso scalare

$$a > 0$$



e^{at} diverge per $t \rightarrow \infty$



Instabilità

$$a = 0$$



e^{at} limitata $\forall t$



Stabilità

Proprietà dei sistemi LTI as. stabili

Proprietà 1

Un sistema LTI as. stabile "spostato" dall'equilibrio, tende a tornarci spontaneamente.

Sia (\bar{u}, \bar{x}) un equilibrio. Se si cambia la condizione iniziale, ma si applica lo stesso ingresso, il movimento dello stato di un sistema LTI as. stabile tende sempre allo stesso equilibrio.

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta \bar{x} \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \bar{x}$$

Modificando la condizione iniziale, modifio solo il movimento libero che nei sistemi as.stabili si annulla asintoticamente.

Proprietà 2

Fissato $u(t) = \bar{u}$, lo stato di equilibrio \bar{x} di un sistema LTI as. stabile è unico.

Si supponga per assurdo che $\bar{x} \neq \bar{x}$ sia un altro stato di equilibrio per il sistema. Allora, con condizione iniziale $x(0) = \bar{x}$ il movimento dello stato sarebbe $x(t) = \bar{x}$ e non tenderebbe asintoticamente a \bar{x} contro la Proprietà 1.

$$\text{Sistema as. stabile} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \bar{x} \text{ unico} \quad (\text{per un dato } \bar{u}) \quad \xleftrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \det A \neq 0$$

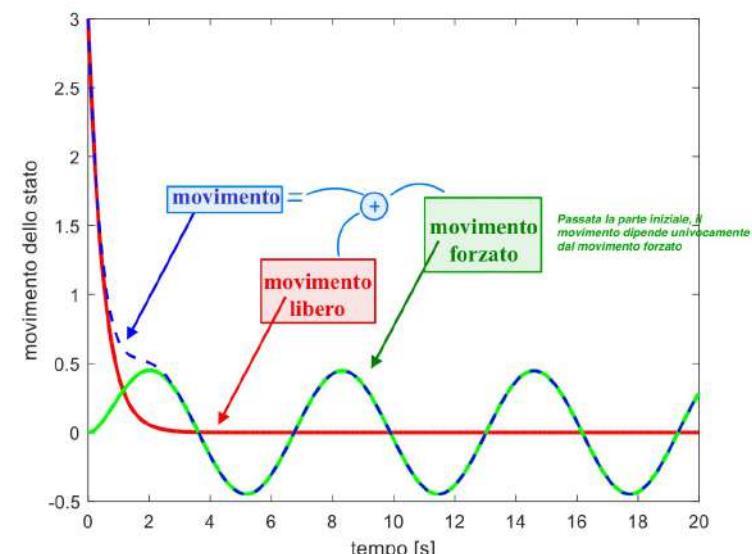
Proprietà 3

Il movimento dello stato di un sistema LTI as. stabile dipende asintoticamente solo dall'ingresso $u(t)$

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x_f(t)$$

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} e^{At} x(0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

Cioè: in un sistema as. stabile il movimento non risente (asintoticamente) delle condizioni iniziali.



Proprietà 4

Se $u(t) = 0$ allora il movimento dello stato di un sistema LTI as. stabile tende asintoticamente a zero.

$$\text{Se } u(t) = 0 \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad x_f(t) = 0$$

$$x(t) = x_l(t)$$

$$\xrightarrow{\hspace{2cm}} e^{At}x(0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

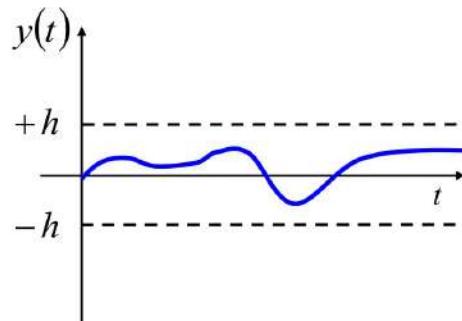
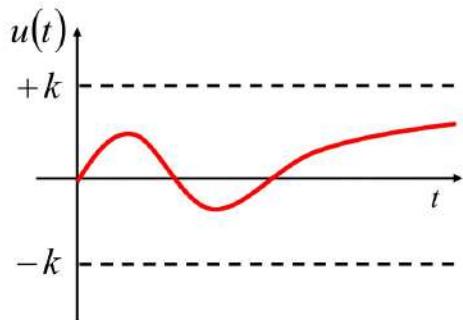
Proprietà 6

Se si applica ad un sistema LTI as. stabile un ingresso limitato, allora l'uscita è limitata.

Se $u(t), t \geq 0$ è tale che $|u(t)| \leq k, t \geq 0$

allora $\exists h : |y(t)| \leq h, t \geq 0$

stabilità esterna
(BIBO)

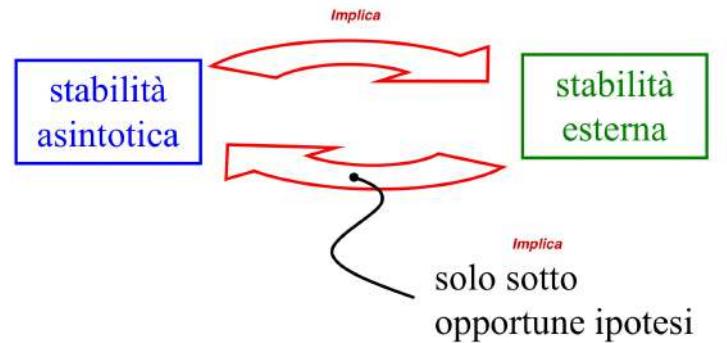
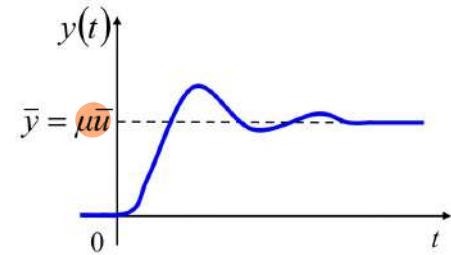
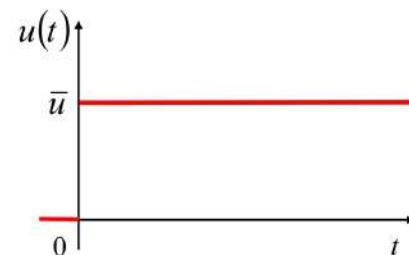


Proprietà 5

Se $u(t) = \bar{u}$ allora l'uscita di un sistema LTI as. stabile tende al valore di regime

$$\bar{y} = \mu \bar{u} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u}$$

Guadagno statico



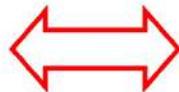
Studio della matrice e^{At} per $t \rightarrow \infty$

**Asintotica
stabilità**



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$

Instabilità



e^{At} diverge per $t \rightarrow \infty$

Stabilità



e^{At} limitata $\forall t$

Casistiche

- A diagonale
- A con autovalori reali distinti (diagonalizzabile)
- A con autovalori complessi coniugati distinti (diagonalizzabile)
- A con autovalori multipli (diagonalizzabile oppure no)

A diagonale

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & & \cdots & 0 \\ & s_2 & & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & s_n \end{bmatrix}$$

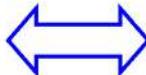
$s_i, i=1,\dots,n$
sono gli autovalori (reali)

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & & \cdots & 0 \\ & e^{s_2 t} & & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & e^{s_n t} \end{bmatrix}$$

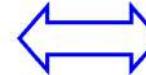
contiene solo termini del tipo $e^{s_i t}$
(solo sulla diagonale)

I termini $e^{s_i t}$ si dicono **modi** del sistema.

Asintotica stabilità



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$



Autovalori negativi
 $s_i < 0, \forall i$

Instabilità



e^{At} diverge per $t \rightarrow \infty$



Se esiste un solo autovalore positivo
 $\exists i: s_i > 0$

Stabilità



e^{At} limitata $\forall t$



Tutti gli autovalori sono ≤ 0
 $s_i \leq 0, \forall i$

A con autovalori reali distinti

Se A ha autovalori reali e distinti allora A è diagonalizzabile, cioè esiste M tale che $\tilde{A} = M^{-1}AM$

$$\text{dove } \tilde{A} = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{bmatrix}$$

$s_i, i=1,\dots,n$
sono gli autovalori (reali e distinti)

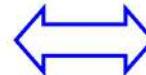
Allora:

$$e^{At} = e^{M\tilde{A}M^{-1}t} = Me^{\tilde{A}t}M^{-1} = M \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{s_n t} \end{bmatrix} M^{-1}$$

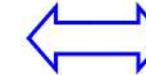
↑
(Si può dimostrare che è vero!)

e^{At} contiene solo combinazioni lineari di modi del tipo $e^{s_i t}$
(non solo sulla diagonale!)

Asintotica stabilità



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$



$s_i < 0, \forall i$

Instabilità



e^{At} diverge per $t \rightarrow \infty$



$\exists i: s_i > 0$

Stabilità



e^{At} limitata $\forall t$



$s_i \leq 0, \forall i$

Passi:
1. Calcolo gli autovalori di A
2. Calcolo gli autovettori di A
3. Costruisco M usando gli autovettori di A
4. Calcolo M^{-1})

=> A tilde è la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori della matrice A

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 3x_1(t) \end{cases}$$

La matrice A è:

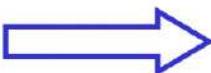
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Triangolare

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s+2)(s+1) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

Gli autovalori sono
reali negativi e
distinti



Il sistema è as. stabile

$$\mathfrak{S}\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \mathfrak{s} & & & \\ & \mathfrak{s} & & \\ & & \mathfrak{s} & \\ & & & \ddots & \mathfrak{s} \end{bmatrix}$$

A con autovalori complessi distinti

Gli autovalori complessi compaiono sempre a coppie

$$\begin{cases} s_1 = \sigma + j\omega \\ s_2 = \sigma - j\omega \end{cases}$$

Parte reale Parte immaginaria

A reale ($n \times n$)
polinomio card.
 $\varphi(\lambda) =$ reale
di grado n
 $\Rightarrow n$ radici (reali o complesse)

Si dimostra che e^{At} contiene termini del tipo $\gamma e^{(\sigma+j\omega)t} + \bar{\gamma} e^{(\sigma-j\omega)t}$

con $\gamma = \alpha + j\beta$ costante complessa

Modi

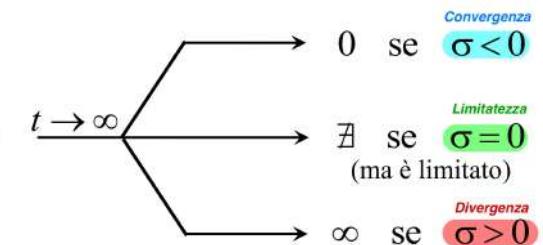
$$\begin{aligned} \gamma e^{(\sigma+j\omega)t} + \bar{\gamma} e^{(\sigma-j\omega)t} &= \gamma e^{\sigma t} e^{j\omega t} + \bar{\gamma} e^{\sigma t} e^{-j\omega t} \\ &= \gamma e^{\sigma t} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) + \bar{\gamma} e^{\sigma t} (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) = \\ &= e^{\sigma t} ((\gamma + \bar{\gamma}) \cos(\omega t) + j(\gamma - \bar{\gamma}) \sin(\omega t)) = \\ &= e^{\sigma t} (2\alpha \cos(\omega t) - 2\beta \sin(\omega t)) \end{aligned}$$

funzione limitata per $t \rightarrow \infty$

la convergenza dipende dal segno della parte reale σ

Sigma parte reale della coppia complessa coniugata

$$= e^{\sigma t} (2\alpha \cos \omega t - 2\beta \sin \omega t)$$



Convergenza

0 se $\sigma < 0$

Limitatezza

\exists se $\sigma = 0$

(ma è limitato)

Divergenza

∞ se $\sigma > 0$

Asintotica stabilità



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$



$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i$$

Instabilità



e^{At} diverge per $t \rightarrow \infty$



$$\exists i : \operatorname{Re}(s_i) > 0$$

Stabilità



e^{At} limitata $\forall t$



$$\operatorname{Re}(s_i) \leq 0, \forall i$$

A con autovalori multipli (reali per fissare le idee)

Ossia ripetizione dello stesso autovalore

✓ Se A è diagonalizzabile

e^{At} contiene solo termini del tipo $e^{s_i t}$ (cfr. caso precedente)

✓ Se A non è diagonalizzabile

Sia s_i un autovalore multiplo.

Allora gli elementi di e^{At} contengono termini del tipo $e^{s_i t} \quad te^{s_i t} \quad t^2 e^{s_i t} \dots$

☺ Se $s_i < 0$ il sistema è as. stabile.

⚡ Se $s_i = 0$ il sistema è instabile!

Attenzione agli autovalori multipli con parte reale nulla !!

2. Teoremi sulla stabilità dei sistemi LTI

Teorema 1

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa

$$\text{Re}(s_i) < 0, \forall i \quad \begin{array}{l} \xleftarrow{\hspace{1cm}} \\ \text{Asintotica stabilità} \end{array}$$

Teorema 2

Un sistema LTI è **instabile** se la matrice A ha almeno un **autovalore con parte reale positiva**.

$$\exists i^* : \text{Re}(s_{i^*}) > 0 \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \text{Instabilità} \end{array}$$

Teorema 3

Un sistema LTI è **stabile** se la matrice A ha tutti gli autovalori con parte reale negativa ed uno solo nullo (o una sola coppia c.c. con parte reale nulla).

$$\begin{array}{l} \text{Re}(s_i) \leq 0, \forall i \\ \exists i^* : \text{Re}(s_{i^*}) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \text{Stabilità} \end{array}$$

Osservazione 1 (sul Teorema 3)

Una coppia di autovalori complessi coniugati “conta” come uno solo. Quindi, un sistema con una sola coppia di autovalori complessi coniugati a parte reale nulla (e tutti gli altri con parte reale negativa) è stabile (semplicemente).

Osservazione 2 (sui Teoremi 2 & 3)

Ci sono sistemi con più di un autovalore con parte reale nulla (e tutti gli altri con parte reale negativa) che sono **stabili** (semplicemente) ed altri sistemi con più di un autovalore con parte reale nulla (e tutti gli altri con parte reale negativa) che sono **instabili**.

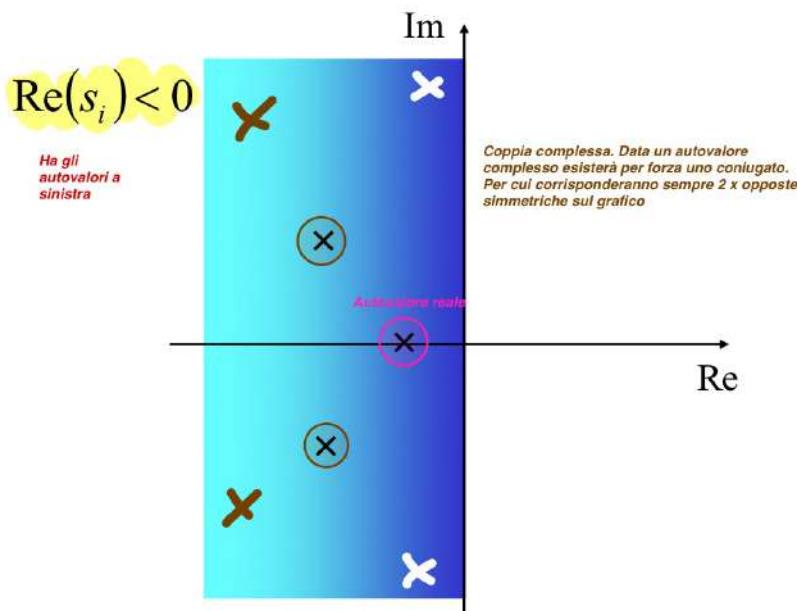
Schema riassuntivo per autovalori con parte reale nulla

$$\begin{array}{l} \text{Re}(s_i) \leq 0, \forall i \\ \exists i : \text{Re}(s_i) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \text{non asintoticamente stabile} \end{array} \quad \text{(ma stabile o instabile?)} \quad \downarrow$$

● **singolo** autovalore con $\text{Re}(s_i) = 0$ $\quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \text{semplicemente stabile} \end{array}$
 (o una sola coppia di autovalori immaginari)

● **più** autovalori con $\text{Re}(s_i) = 0$ $\quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{semplicemente stabile} \\ ? \quad \text{Non affrontiamo questo caso} \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{instabile} \end{array}$

Regione di asintotica stabilità



Criteri di stabilità basati sulla matrice A

- Per discutere la stabilità non serve calcolare esplicitamente gli autovalori della matrice A . E' sufficiente conoscere il segno della loro parte reale.
- Esistono criteri che consentono di giudicare la stabilità senza calcolare esplicitamente gli autovalori. Essi consentono di determinare il segno della parte reale degli autovalori per ispezione della struttura della matrice A .

Criterio 1

Se A è triangolare $A = \begin{bmatrix} 0 \\ \triangle \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} \triangle & 0 \\ 0 & \triangle \end{bmatrix}$

asintotica stabilità $\iff \text{Re}(s_i) < 0, \forall i \iff a_{ii} < 0, \forall i$
(gli elementi sulla diagonale sono negativi)

Infatti in questo caso gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale $s_i = a_{ii}$

Criterio 2

La traccia di una matrice è la somma degli elementi sulla diagonale principale.

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

La traccia di una matrice è uguale alla somma dei suoi autovalori

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n \text{Re}(s_i)$$

asintotica stabilità $\iff \text{Re}(s_i) < 0, \forall i \implies \text{tr}A < 0$
(Condizione solo necessaria)

instabilità $\iff \exists i : \text{Re}(s_i) > 0 \iff \text{tr}A > 0$
(Condizione sufficiente)



Criterio 3

Il determinante di una matrice è il prodotto degli autovalori.

$$\det A = \prod_{i=1}^n s_i$$

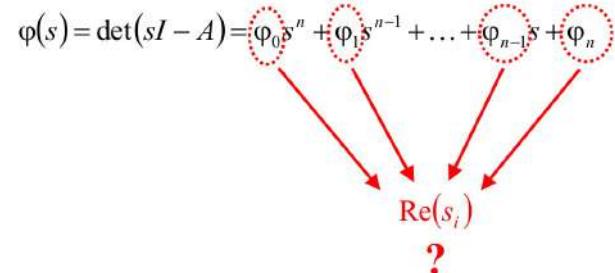
asintotica
stabilità

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i \quad \Rightarrow \begin{aligned} \det A &\neq 0 \\ (-1)^n \det A &> 0 \end{aligned}$$

(Condizione solo necessaria)

Criteri di stabilità basati sul polinomio caratteristico

Sono criteri basati sulla possibilità di conoscere il segno della parte reale degli autovalori solo ispezionando il polinomio caratteristico (senza calcolarli direttamente)

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n$$


Criterio 4

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$$

Solo per $n=2$

$$A = 2 \times 2$$

Condizione Necessaria & Sufficiente per l'asintotica stabilità di un sistema del secondo ordine è che il suo polinomio caratteristico abbia coefficienti non nulli e concordi in segno

asintotica
stabilità

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(s_i) < 0, i = 1, 2 \Leftrightarrow \begin{aligned} \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \\ \text{diversi da zero e} \\ \text{concordi in segno} \end{aligned}$$

Infatti $\varphi(s) = \varphi_0 s^2 + \varphi_1 s + \varphi_2 = \varphi_0 (s - s_1)(s - s_2)$

$$\begin{cases} s_1 s_2 = \varphi_2 / \varphi_0 \\ -(s_1 + s_2) = \varphi_1 / \varphi_0 \end{cases}$$



Esempio

$\varphi(s) = s^2 + 3s + 1$ è il polinomio caratteristico della matrice A di un sistema asintoticamente stabile

$\varphi(s) = s^2 - 3s + 1$ è il polinomio caratteristico della matrice A di un sistema non as. stabile

Criterio 5

$$\varphi(s) = s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma$$

Per $n \geq 3$ qualsiasi

$$A(3 \times 3)$$

Condizione Necessaria per l'asintotica stabilità di un sistema è che il suo polinomio caratteristico abbia coefficienti non nulli e concordi in segno

asintotica stabilità $\iff \text{Re}(s_i) < 0, i=1,\dots,n \iff \varphi_i$ diversi da zero e concordi in segno
(Condizione solo necessaria)

Quindi:

φ_i nulli o discordi in segno $\implies \exists i^*: \text{Re}(s_{i^*}) \geq 0$

Criterio 6 (Criterio di Routh)

$$A(m \times m) \rightarrow \varphi(s) = \det(SI - A)$$

$$\varphi(s) = \boxed{\varphi_0} s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \varphi_2 s^{n-2} + \varphi_3 s^{n-3} \dots + \varphi_n$$

Tabella di Routh

n+1 righe	φ_0	φ_2	φ_4	\dots	0	\leftarrow Coefficienti pari
	φ_1	φ_3	φ_5	\dots	0	\leftarrow Coefficienti dispari
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots		
$i-2$	h_1	h_2	h_3	\dots	0	
$i-1$	k_1	k_2	k_3	\dots	0	
i	l_1	\textcircled{l}_2	l_3	\dots	0	
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots		

Regola di calcolo

$$l_j = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{j+1} \\ k_1 & k_{j+1} \end{bmatrix}$$

A $(3 \times 3) \Rightarrow 4$ righe
delle quali la 5th sarà solo 0

Esempio

$\varphi(s) = s^3 + 2s^2 - 3s + 1$ è il polinomio caratteristico della matrice A di un sistema **non as. stabile**
 $n=3$

$\varphi(s) = s^3 + 4s^2 + 1$ è il polinomio caratteristico della matrice A di un sistema **non as. stabile**
 $n=3$

$\varphi(s) = s^3 + 4s^2 + 4s + 1$ è il polinomio caratteristico della matrice A di un sistema di cui nulla si può dire a priori riguardo la stabilità
 $n=3$

Criterio di Routh

asintotica stabilità $\iff \text{Re}(s_i) < 0, \forall i \iff$ Elementi della prima colonna della tabella di Routh diversi da zero e concordi in segno

$$\varphi(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 1$$

1	1	$\textcolor{brown}{K}$	0	$\textcolor{red}{\Delta} = -\frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = 10$
6	6	0	0	$\textcolor{pink}{\star} = -\frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & K \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = K$
$\textcolor{red}{\star}$	$\textcolor{pink}{\star}$	$\textcolor{green}{X}$		$\textcolor{green}{X} = -\frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = 0$
Δ	\square			

$$\Delta = -\frac{1}{10} \det \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 10 & n \end{bmatrix} = -\frac{1}{10} (6n - 60) = \frac{60 - 6n}{10} = 6 - \frac{3}{5} n$$

$$\square = -\frac{1}{10} \det \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\textcolor{blue}{\star} = \frac{10}{6n-60} \left[\begin{array}{cc} 10 & n \\ 60-6n & 0 \end{array} \right] =$$

CAP III

Stabilità dell'equilibrio di un sistema non lineare

Si consideri un sistema non lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Si supponga che questo sistema abbia uno stato di equilibrio \bar{x} in corrispondenza di un ingresso costante \bar{u} cioè:

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

Cosa si può dire della stabilità di questo equilibrio?

N.B. Per i sistemi non lineari è sensato discutere la stabilità dell'equilibrio (non ha senso parlare di stabilità del sistema).

● I Teoremi 1 & 2 si riferiscono ad un **equilibrio!!**
Non al sistema!! (non lineare!!)

● Si osservi che la condizione del Teorema 1 è solo sufficiente.

Teorema 1 (non lineare)

Un **equilibrio** di un sistema non lineare è **asintoticamente stabile** se tutti gli autovalori della matrice di stato del relativo sistema lineare tangente hanno parte reale negativa.

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}}$$

L'equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) è asintoticamente stabile

Teorema 2 (non lineare)

Un **equilibrio** di un sistema non lineare è **instabile** se almeno un autovalore della matrice di stato del relativo sistema lineare tangente ha parte reale positiva.

$$\exists i^*: \operatorname{Re}(s_{i^*}) > 0 \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}}$$

L'equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) è instabile

Nota Bene (sistema non lineare)

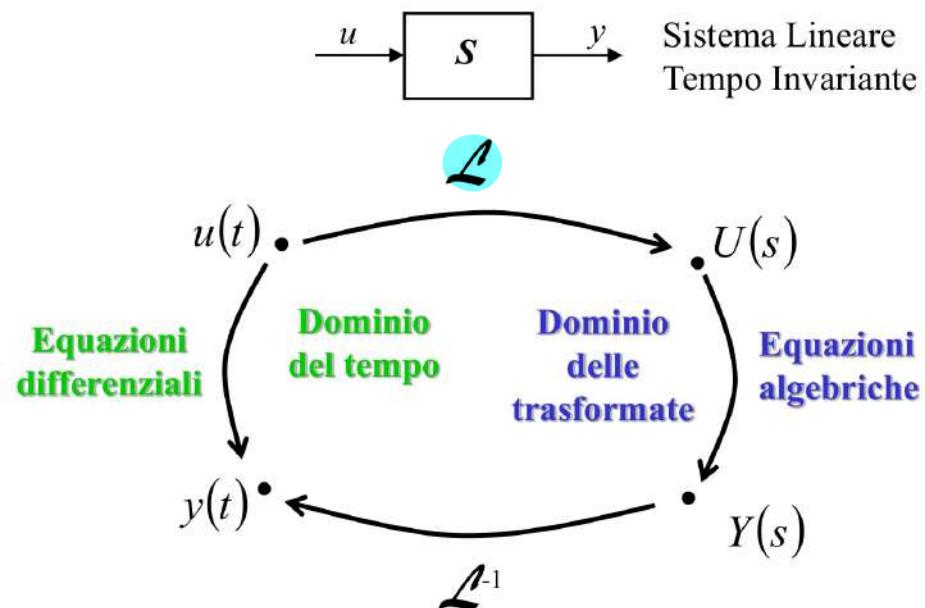
$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i \neq i^* \\ \exists! i^* : \operatorname{Re}(s_{i^*}) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\hspace{2cm}} (\bar{x}, \bar{u}) ?$$

Se $f_x(\bar{x}, \bar{u})$ ha anche solo un autovalore a parte reale nulla, **niente si può dire della stabilità dell'equilibrio**.

Per giudicare la stabilità occorrono strumenti di analisi più potenti (e complicati).

CAP III

Introduzione



Definizione di trasformazione di Laplace

$f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Segnale a tempo continuo

$\downarrow \mathcal{L}$

$F(s): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ dove $s \in \mathbb{C}$ Da complesso a reale

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Osservazioni

- $\mathcal{L}[f(t)]$ è una funzione reale di variabile complessa

- $\mathcal{L}[f(t)]$ non dipende dai valori assunti per $f(t)$ $t < 0$

Guardare integrale

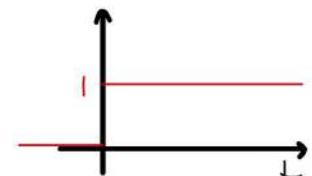
Esempio

Trasformata dello scalino

Lo scalino (di ampiezza unitaria) è la seguente funzione del tempo:

Perché facciamo un salto di 1

$$\text{sca}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

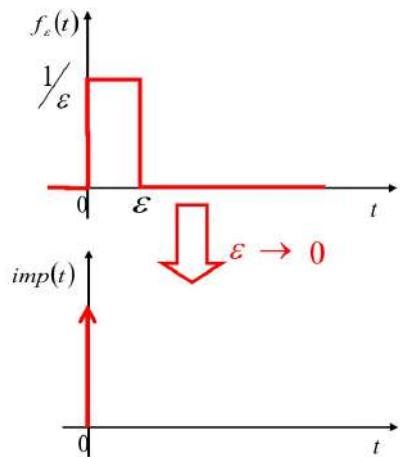


La trasformata di Laplace dello scalino è:

$$\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

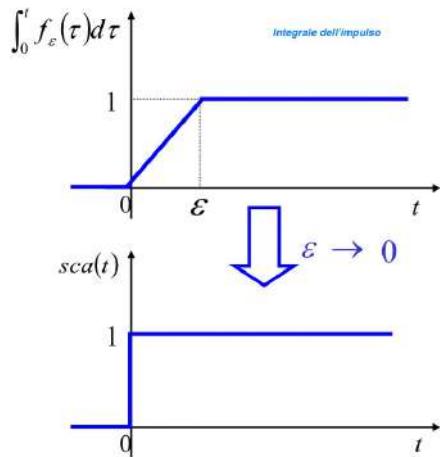
Legame tra scalino e impulso

$$\text{sca}(t) = \int_0^t \text{imp}(\tau) d\tau$$



- Lo scalino è l'integrale dell'impulso;
- L'impulso è la derivata dello scalino;

$$\text{imp}(t) = \frac{d}{dt} \text{sca}(t)$$



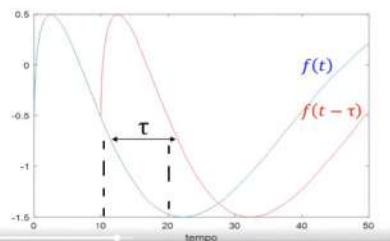
4.2 Traslazione nel dominio del tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad f(t) = 0, t < 0$$

Moltiplicare per tau significa ritardare il segnale di tau secondi



$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s), \tau > 0$$



$$\tau = 10/\alpha$$

Potremmo parlare di trasformata del "ritardo"

Trasformazione di Laplace: proprietà

4.1 Linearità

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] \quad F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

La laplace della combinazione lineare di 2 segnali => la combinazione lineare delle trasformate

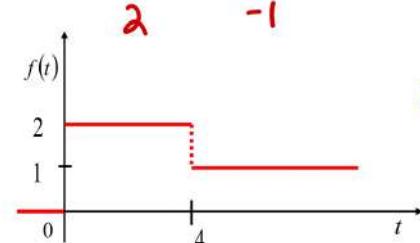
Esempio

$$f(t) = 2\text{sca}(t) - \text{sca}(t-4)$$

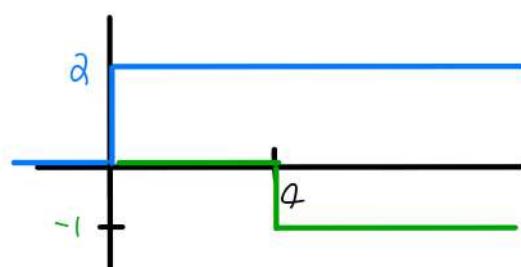
2

-1

Come se al t=4 fosse lo zero



$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}$$



4.3 Traslazione nel dominio delle trasformate

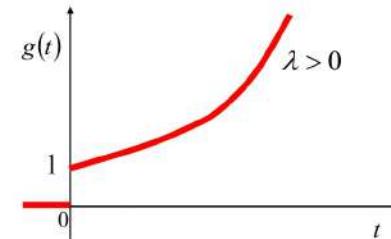
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} f(t)] = F(s - \lambda)$$

Esempio

$$f(t) = \text{sca}(t) \rightarrow F(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} f(t)] = F(s - \lambda) = \frac{1}{s - \lambda}$$



Come dire che tutto quello che c'è $t < 0$ lo elimina

$$g(t) = e^{\lambda t} \text{sca}(t)$$

e' un modo per dire

$$g(t) = e^{\lambda t}, t \geq 0$$

Potremmo parlare di
trasformata del "modo"

4.4 Derivazione nel dominio delle trasformate

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Moltiplicare per il tempo equivale a
derivare nel dominio delle derivate

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

4.5 Derivazione nel dominio del tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$



$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$$

L'operatore di derivazione è trasformato
nell'operatore di moltiplicazione per s

Estensione a derivate di ordine superiore

▪ Ordine 2

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] &= s\mathcal{L}[\dot{f}(t)] - \dot{f}(0) = s(sF(s) - f(0)) - \dot{f}(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)\end{aligned}$$

▪ Ordine n

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0}$$

. Poli e zeri di una trasformata

Polí: valori di s per cui $F(s) = \infty$

Zeri: valori di s per cui $F(s) = 0$

Caso notevole

Se $F(s)$ razionale, cioè $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ con $N(s)$ e $D(s)$ polinomi in s

Polí: radici di $D(s) = 0$

Zeri: radici di $N(s) = 0$

4.6 Integrazione nel dominio del tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$



Se la derivazione è trasformata in moltiplicazione per s , l'integrazione deve per forza essere trasformata in divisione per s !

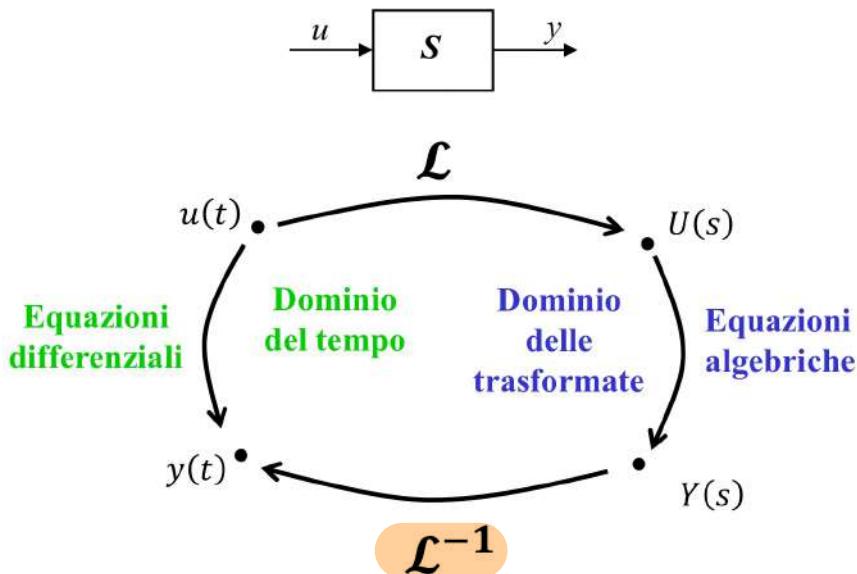
Trasformata di un vettore

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[x_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[x_n(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}$$

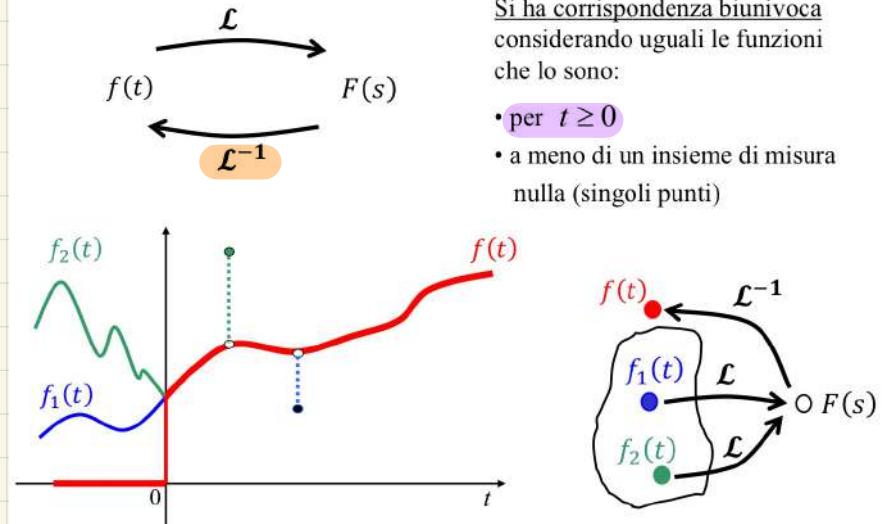
Proprietà

1. $\mathcal{L}[A\mathbf{x}(t)] = A\mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = A\mathbf{X}(s)$
2. $\mathcal{L}[\dot{\mathbf{x}}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[\dot{x}_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[\dot{x}_n(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix} = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0)$

CAP IX



1. Antitrasformazione di Laplace



Strumenti per l'antitrasformazione di Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

- ✓ ~~Formula esplicita~~
- ✓ Teorema del valore iniziale $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ $f(0)$
- ✓ Teorema del valore finale $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ $f(\infty)$
- ✓ Sviluppo di Heaviside
(solo per $F(s)$ razionale)

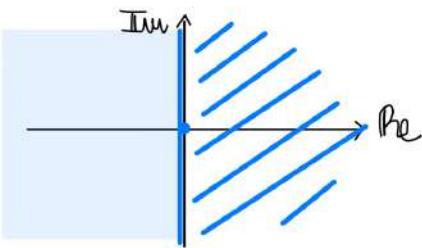
Teorema del valore iniziale

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \quad \text{se esiste finito}$$

Teorema del valore finale

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$



Ipotesi $F(s)$ ha solo:

- poli con parte reale negativa
- poli nulli, cioè in $s = 0$

$$f(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

se esiste finito

Si considerano solo i seguenti casi:

- $F(s)$ con poli reali distinti
- $F(s)$ con poli reali multipli
- $F(s)$ con poli complessi coniugati
- $F(s)$ con grado del denominatore uguale al grado del numeratore ($m = n$)

Antitrasformazione mediante sviluppo di Heaviside

Applicabile solo per $F(s)$ razionali

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad m \leq n$$

L'idea è scomporre $F(s)$ nella somma di elementi per i quali è nota l'antitrasformata.

$$\begin{aligned} F(s) &= (F_1(s)) + (F_2(s)) + \dots \\ &\downarrow \mathcal{L}^{-1} \quad \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ f_1(t) + f_2(t) + \dots &= f(t) \end{aligned}$$

Poli reali distinti

$$D(s) = a_0(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)$$

poli in $-p_i$ con $p_i \neq p_j, i \neq j$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\alpha_1}{s + p_1} + \frac{\alpha_2}{s + p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s + p_n} \\ &\downarrow \mathcal{L}^{-1} \quad \downarrow \mathcal{L}^{-1} \quad \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ (\alpha_1 e^{-p_1 t}) + (\alpha_2 e^{-p_2 t}) + \dots + (\alpha_n e^{-p_n t}) & \end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-p_i t}, \quad t \geq 0$$

Esempio

Calcolare l'antitrasformata di $F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)}$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+6} + \frac{\alpha_3}{s+1} = \\ &= \frac{\alpha_1(s+6)(s+1) + \alpha_2 s(s+1) + \alpha_3 s(s+6)}{s(s+6)(s+1)} = \\ &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)s^2 + (7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3)s + 6\alpha_1}{s(s+6)(s+1)} \end{aligned}$$

Devono essere uguali

\downarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ 6\alpha_1 = 2 \end{array} \right.$$

Bisogna risolvere un sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ 6\alpha_1 = 2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \frac{7}{3} + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = -\alpha_3 - \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} - \alpha_3 - \frac{1}{3} + 6\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = -\alpha_3 - \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} - \alpha_3 - \frac{1}{3} + 6\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = -\alpha_3 - \frac{1}{3} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{5} \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{3} \\ \alpha_2 = -\frac{2}{15} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{5} \end{array} \right.$$

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{s} - \frac{\frac{2}{15}}{s+6} - \frac{\frac{1}{5}}{s+1}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{s} - \frac{\frac{2}{15}}{s+6} - \frac{\frac{1}{5}}{s+1} \\ f(t) &= \frac{1}{3} \text{sca}(t) - \frac{2}{15} e^{-6t} - \frac{1}{5} e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0 \end{aligned}$$

Si può scrivere anche così:

$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{2}{15} e^{-6t} - \frac{1}{5} e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Poli reali multipli

$$D(s) = \dots (s + p)^k \dots \quad k > 1$$

$$F(s) = \dots + \frac{\beta_1}{s + p} + \frac{\beta_2}{(s + p)^2} + \dots + \frac{\beta_k}{(s + p)^k} + \dots$$

\mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}^{-1}

Esponenti crescenti

$\beta_1 e^{-pt}$

$\beta_2 t e^{-pt}$

$\beta_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-pt}$

Esempio

Calcolare l'antitrasformata di

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

3 poli 3 addendi

$$= \frac{\alpha_{11} + \frac{\alpha_{12}}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1}}{s^2(s+1)} =$$

$$= \frac{\alpha_{11}s(s+1) + \alpha_{12}(s+1) + \alpha_2 s^2}{s^2(s+1)} =$$

$$= \frac{(\alpha_{11} + \alpha_2)s^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{12})s + \alpha_{12}}{s^2(s+1)}$$

$$\frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

+ o s²

Devono essere uguali

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -1 \\ \alpha_{12} = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} = 1 \\ \alpha_{12} = 2 \end{cases}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

$f(t) = -\text{sca}(t) + 2\text{ram}(t) + e^{-t}$ per $t \geq 0$

Si può scrivere anche così:

$$f(t) = -1 + 2t + e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Poli complessi coniugati

$$D(s) = \cdots \underbrace{(s - \sigma - j\omega)(s - \sigma + j\omega)}_{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \cdots \quad \text{poli in } \sigma \pm j\omega$$

$$F(s) = \cdots + \frac{\beta s + \gamma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \cdots$$

$$\frac{\beta s + \gamma - \beta\sigma + \beta\sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} = \beta \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{\gamma + \beta\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$$

\mathcal{L}^{-1}

$$e^{\sigma t} \cos \omega t$$

\mathcal{L}^{-1}

$$e^{\sigma t} \sin \omega t$$

Esempio

Calcolare l'antitrasformata di $F(s) = \frac{3s - 4}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)}$

$$F(s) = \frac{3s - 4}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)} = \frac{\alpha}{s + 2} + \frac{\beta s + \gamma}{s^2 + 2s + 5} =$$

$$= \frac{\alpha(s^2 + 2s + 5) + (\beta s + \gamma)(s + 2)}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)} =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)s^2 + (2\alpha + 2\beta + \gamma)s + (5\alpha + 2\gamma)}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)}$$

Devono essere uguali

$$\begin{aligned} s^2 + 2s + 5 &= \\ &= s^2 + 2s + 1 + 4 \\ &= (s + 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 3 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma = 3 \\ 5\alpha + 2\gamma = -4 \end{cases}$$

$$F(s) = \cdots + \frac{\beta s + \gamma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \cdots$$

\mathcal{L}^{-1}

$$f(t) = \cdots + \beta(e^{\sigma t} \cos \omega t) + \frac{\gamma + \beta\sigma}{\omega} (e^{\sigma t} \sin \omega t) + \cdots, \quad t \geq 0$$

Si ha quindi la seguente scomposizione:

$$F(s) = -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+5}$$

Non ha un'antitrasformata immediata

$$f(t) = -2e^{-2t} + \dots$$

?

E' però possibile riscrivere il denominatore del secondo termine in modo differente:

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+5} = -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+1+4} = \\ &= -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{(s+1)^2+4} \end{aligned}$$

Qual è l'antitrasformata ?

Pro memoria

$$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \rightarrow e^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad \text{per } t \geq 0$$

$$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \rightarrow e^{\sigma t} \cos(\omega t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Quindi:

$$\frac{2s+3}{(s+1)^2 + 4} = k_1 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + k_2 \frac{2}{(s+1)^2 + 4} =$$

$$= \frac{k_1 s + k_1 + 2k_2}{(s+1)^2 + 4} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_1 + 2k_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s) = -\frac{2}{s+2} + 2 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$

$$f(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-t} \cos(2t) + \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Grado relativo nullo ($m=n$)

Se il numeratore $N(s)$ e il denominatore $D(s)$ hanno lo stesso grado, nella scomposizione di $F(s)$ bisogna aggiungere un termine costante.

$$F(s) = \dots + \alpha_0$$

\mathcal{L}^{-1}

$$f(t) = \dots + (\alpha_0 \text{imp}(t))$$

Esempio

$$\text{Calcolare l'antitrasformata di } F(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \alpha_0 =$$

$$= \frac{\alpha_1(s+1) + \alpha_2 s + \alpha_0 s(s+1)}{s(s+1)} =$$

$$= \frac{\alpha_0 s^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_0)s + \alpha_1}{s(s+1)}$$

Devono essere uguali

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_0 = 4 \\ \alpha_1 = 4 \end{cases}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s) = \frac{4}{s} - \frac{1}{s+1} + 1 =$$

$$f(t) = 4\text{sca}(t) - e^{-t} + \text{imp}(t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Si può scrivere anche così:

$$f(t) = 4 - e^{-t} + \text{imp}(t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Esempio esplicativo

(Trasformazione di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali)

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t) + u(t) \\ Y(s) &= \mathcal{L}[y(t)] \\ U(s) &= \mathcal{L}[u(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sY(s) - y(0) &= \\ &= -Y(s) + U(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Con } u(t) &= \text{sca}(t) \\ y(0) &= 4 \end{aligned}$$

$$sY(s) - y(0) = -Y(s) + U(s)$$

$$(s+1)Y(s) = 4 + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= 4e^{-t} + 1 - e^{-t} = \\ &= 3e^{-t} + 1 \end{aligned}$$

per $t \geq 0$

CAP X

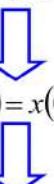
Definizione

Si consideri un sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Si esegua la trasformazione di Laplace dell'equazione di stato

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$



$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$



$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Si trasformi infine la trasformazione d'uscita

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$



Dimensioni della funzione di trasferimento

Sistema SISO ingresso ed uscita sono scalari

$$G(s) \equiv \underset{1 \times n}{C} \underset{n \times n}{(sI - A)^{-1}} \underset{n \times 1}{B} + \underset{1 \times 1}{D} \quad \text{è (una funzione di } s\text{) scalare}$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

La funzione di trasferimento è il rapporto tra le trasformate di uscita ed ingresso

(con condizione iniziale nulla per lo stato)

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Sostituendo lo stato nella trasformazione d'uscita si ottiene

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

quando $x(0) = 0$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$



$$G(s) \equiv C(sI - A)^{-1}B + D$$

Funzione di trasferimento

Interpretazione della funzione di trasferimento

Si consideri un sistema SISO con funzione di trasferimento $G(s)$

Siano

$$u(t) = \text{imp}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 1$$

$$x(0) = 0$$

Allora

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

La funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso del sistema



Struttura della funzione di trasferimento (per sistemi SISO)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

Analisi della struttura fattore per fattore

Moltiplicando $(sI - A)^{-1}$ a sinistra per C e a destra per B si ha

$$C(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{\det(sI - A)} \underbrace{C}_{(1 \times n)} \underbrace{K(s)}_{(n \times n)} \underbrace{B}_{(n \times 1)} = \frac{M(s)}{\varphi(s)}$$

E' un sistema SISO
 1×1

- $M(s)$ è un polinomio in s di grado $< n$

Il primo fattore è

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & s - a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}^{-1}$$

La sua espressione è

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} K(s)$$

dove $K(s)$ è la matrice $n \times n$ dei complementi algebrici della trasposta di $sI - A$

- $\det(sI - A) = \varphi(s)$ è un polinomio in s di grado n
(è il polinomio caratteristico di A !)
- $k_{ij}(s)$ (elemento di $K(s)$) è un polinomio in s di grado $< n$

Infine, si somma D

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1} B + D = \frac{M(s)}{\varphi(s)} + D = \\ &= \frac{M(s) + D\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \end{aligned}$$

Uscita dipende dall'ingresso

- Se $D \neq 0$ (cioè il sistema è proprio)

$N(s)$ è un polinomio in s di grado n

Stesso grado tra numeratore e denominatore

- Se $D = 0$ (cioè il sistema è strettamente proprio)

$N(s) = M(s)$ è un polinomio in s di grado $< n$

Numeratore $< n$
Denominatore $= n$

Riassumendo

Rapporto tra 2 polinomi

$$G(s) \text{ è razionale} \iff G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- $D(s) = \varphi(s) = \det(sI - A)$ è un polinomio in s di grado n (è il polinomio caratteristico di A !)

- $N(s)$ è un polinomio in s :

- ✓ di grado n se $D \neq 0$
- ✓ di grado $< n$ se $D = 0$

Salvo cancellazioni

Numeratore e denominatore hanno un fattore comune e si semplificano. Essendo il polinomio caratteristico di grado N se vede che è inferiore di N c'è stata una cancellazione.

5. Rappresentazione di un sistema LTI

La funzione di trasferimento è detta **rappresentazione esterna** del sistema, mentre quella in variabili di stato è detta **rappresentazione interna**. In generale, però, non hanno il medesimo contenuto informativo (la rappresentazione di stato ci dice sempre tutto, la funzione di trasferimento solo se non ci sono cancellazioni)

Rappresentazione interna

$$(A, B, C, D) \implies G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Rappresentazione esterna

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

?

“realizzazione”



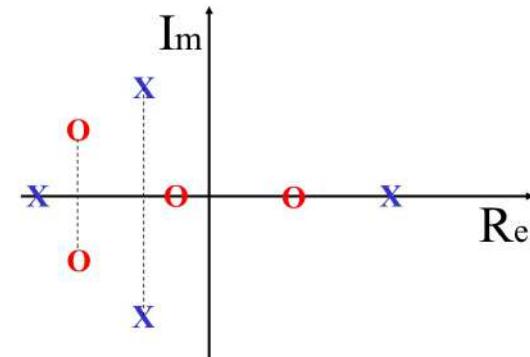
Una cancellazione in $G(s)$ è un indicatore dell'esistenza di **parti “nascoste” (non raggiungibili e/o non osservabili)** del sistema (cioè che esistono nella rappresentazione di stato e che “si perdono” passando alla rappresentazione mediante funzione di trasferimento).

Funzione di trasferimento : poli e zeri

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

O Zeri : radici di $N(s) = 0$

X Poli : radici di $D(s) = 0$



7. Poli e zeri

- I poli sono tutti autovalori di A
- Un autovalore di A può non essere un polo in caso di cancellazioni
- La stabilità dipende dai poli

As. stabilità $\Leftrightarrow \text{Re}(\text{poli}) < 0$
(salvo cancellazioni)

- Numero di zeri \leq numero di poli

8. Funzione di trasferimento : parametrizzazioni

1. $G(s) = \frac{\beta_m s^m + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$ parametri: β_i, α_i

Le diverse forme di parametrizzazione

2. $G(s) = \rho \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \rho \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$

parametri: ρ costante di trasferimento
 z_i zeri p_i poli

3. $G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$

parametri: μ guadagno della FdT
 T_i, τ_i costanti di tempo
 g tipo Indica se ci sono poli nell'origine

Esempio

$$G(s) = \frac{5s^2 + 35s + 50}{s^2 + 10s + 21} \quad \text{è nella forma 1} \quad \begin{cases} \beta_0 = 50, \beta_1 = 35, \beta_2 = 5 \\ \alpha_0 = 21, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Calcolando poli e zeri è possibile metterla nella **forma 2**

$$G(s) = \frac{5s^2 + 35s + 50}{s^2 + 10s + 21} = \frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)} \quad \begin{cases} \rho = 5 \\ z_1 = -2, z_2 = -5 \\ p_1 = -3, p_2 = -7 \end{cases}$$

S2 deve avere come coeff. 1

Raccogliendo z_i e p_i si può passare alla **forma 3**

$$G(s) = \frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2 \left(\frac{1}{2}s + 1 \right) \left(\frac{1}{5}s + 1 \right)}{3 \cdot 7 \left(\frac{1}{3}s + 1 \right) \left(\frac{1}{7}s + 1 \right)} = \frac{50}{21} \left(1 + \frac{1}{2}s \right) \left(1 + \frac{1}{5}s \right)$$

Il termine noto deve essere unitario

$$\mu = \frac{50}{21}, T_1 = \frac{1}{2}, T_2 = \frac{1}{5}, \tau_1 = \frac{1}{3}, \tau_2 = \frac{1}{7}, g = 0$$

Guadagno statico e guadagno di una FdT

se $g = 0$ allora $\mu = G(0) = -CA^{-1}B + D$

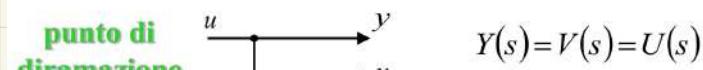
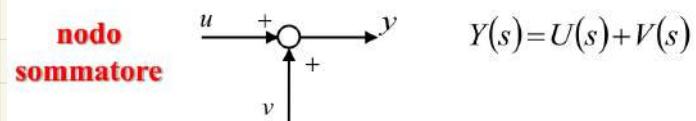
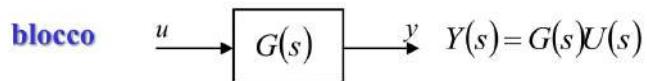
cioè è uguale al guadagno statico del sistema

se $g \neq 0$ allora $\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$

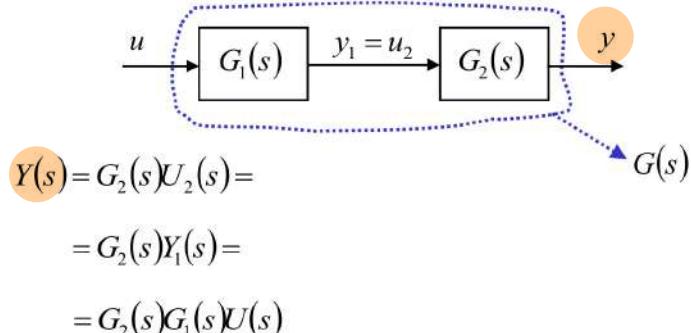
si dice guadagno "generalizzato" di una FdT

tipo	guadagno statico	guadagno della FdT
$g = 0$	$\mu = -CA^{-1}B + D = G(0)$	$\mu = G(0)$
$g < 0$	$\mu = -CA^{-1}B + D = G(0)$	$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$
$g > 0$	non def.	$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$

Elementi base di un schema a blocchi



Blocchi in serie



Funzione di trasferimento

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_2(s)G_1(s) = G(s)$$

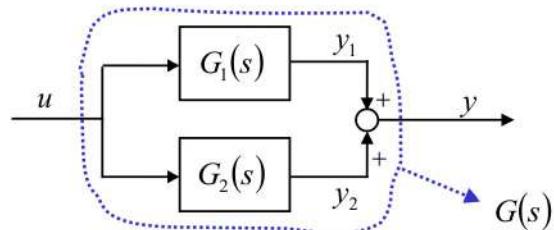
Prodotto funzioni di trasferimento

Schemi a blocchi : regole di elaborazione

Blocchi

- in serie
- in parallelo
- in retroazione

Blocchi in parallelo



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) =$$

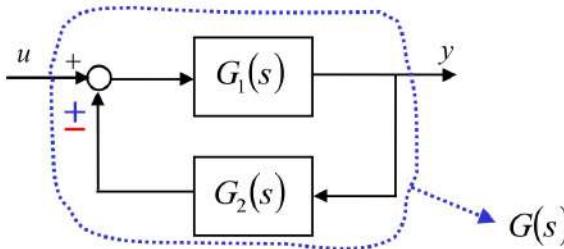
$$= G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) =$$

$$= (G_1(s) + G_2(s))U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) = G(s)$$

Somma funzioni di trasferimento

Blocchi in retroazione

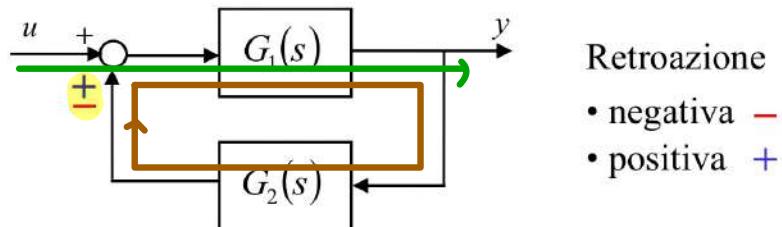


Retroazione
 • negativa -
 • positiva +

$$Y(s) = G_1(s)[U(s) \pm G_2(s)Y(s)]$$

$$[1 \mp G_1(s)G_2(s)]Y(s) = G_1(s)U(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)} = G(s)$$



Retroazione
 • negativa -
 • positiva +

FdT "in andata" : $G_1(s)$

FdT "d'anello" : $G_1(s)G_2(s)$



$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}$$

Se è + diventa - e viceversa

$$G(s) = \frac{\text{FdT "in andata"}}{1 \mp \text{FdT "d'anello"}}$$

Retroazione
 • negativa -
 • positiva +

FdT "in andata" :

prodotto delle FdT da u a y in anello aperto

FdT "d'anello" :

prodotto delle FdT lungo l'anello.

Schemi a blocchi : stabilità

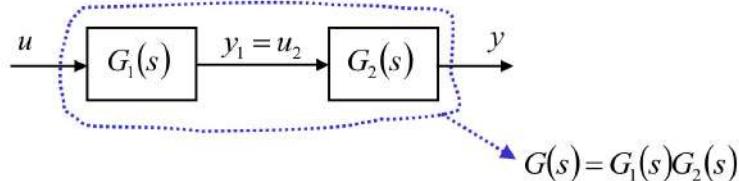
Blocchi

● in serie

● in parallelo

● in retroazione

Blocchi in serie



$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$G(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

Senza cancellazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G(s) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_1(s) \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_2(s) \end{array} \right\}$$

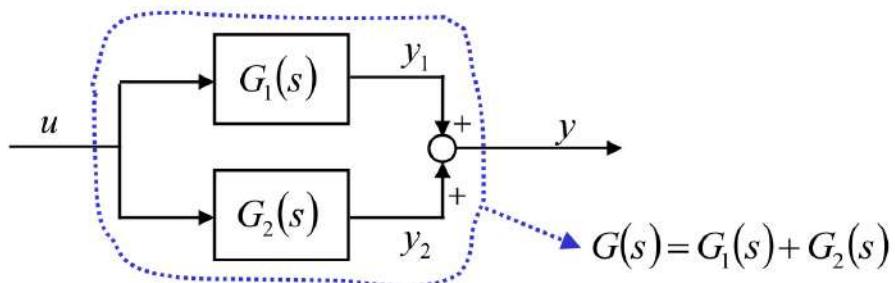
$$G(s) \xrightarrow{\text{As.}} \text{stabile} \iff G_1(s), G_2(s) \xrightarrow{\text{As.}} \text{stabili}$$

Con cancellazioni

- cancellazioni con $\text{Re} < 0 \rightarrow$ dinamica "nascosta" as. stabile

- cancellazioni con $\text{Re} \geq 0 \rightarrow$ dinamica "nascosta" non as. stabile
Il sistema non è as. stabile anche se $G(s)$ non lo mostra

Blocchi in parallelo



$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

Senza cancellazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G(s) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_1(s) \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_2(s) \end{array} \right\}$$

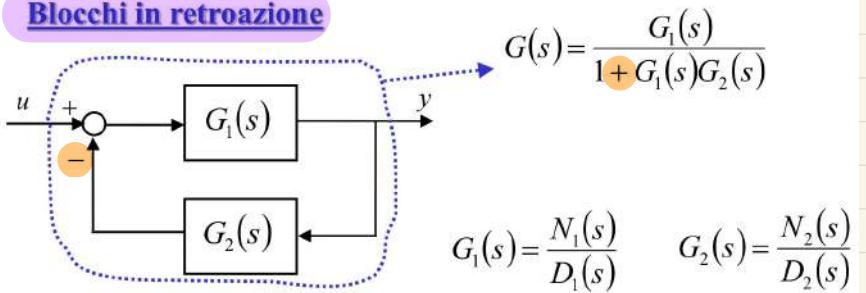
$$G(s) \xrightarrow{\text{As.}} \text{stabile} \iff G_1(s), G_2(s) \xrightarrow{\text{As.}} \text{stabili}$$

Con cancellazioni

- cancellazioni con $\text{Re} < 0 \rightarrow$ dinamica "nascosta" as. stabile

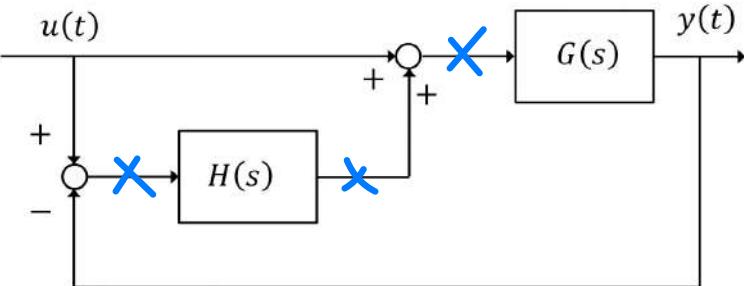
- cancellazioni con $\text{Re} \geq 0 \rightarrow$ dinamica "nascosta" non as. stabile
Il sistema non è as. stabile anche se $G(s)$ non lo mostra

Blocchi in retroazione



$$G(s) = \frac{\cancel{N_1(s)}}{1 + \frac{\cancel{N_1(s)N_2(s)}}{D_1(s)D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

Esempio



Calcolare la funzione di trasferimento da $u(t)$ ad $y(t)$.

Esistono altri modi per analizzare schemi a blocchi «complessi». Uno di questi prevede di attribuire dei nomi alle altre variabili in gioco e calcolare la funzione di trasferimento complessiva in modo diretto.

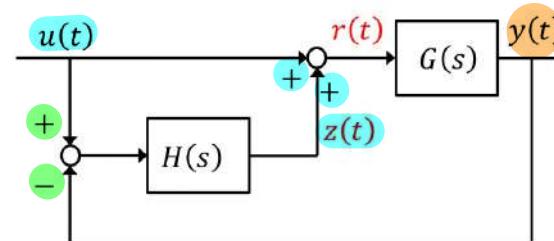
Senza cancellazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{poli di } G(s) \\ \text{radici di } D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s) = 0 \end{array} \right\}$$

Bisogna calcolarsi tutto a mano perché dati G_1 as. Stabile e G_2 as. Stabile può generare un sistema non stabile

Asintotica stabilità
sistema complessivo Asintotica stabilità
sottosistemi

$G(s)$ $G_1(s), G_2(s)$
As. stabile As. stabili



Chiamo $r(t)$ e $z(t)$ i due segnali
senza nome.

$$Y(s) = G(s)R(s) \quad \text{Parallelo}$$

$$Y(s) = G(s)(U(s) + Z(s)) = G(s)U(s) + G(s)Z(s)$$

$$Y(s) = G(s)U(s) + G(s)H(s)(U(s) - Y(s))$$

$$Y(s) = G(s)U(s) + G(s)H(s)U(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

$$Y(s) = (G(s) + G(s)H(s))U(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

$$(1 + G(s)H(s))Y(s) = (G(s) + G(s)H(s))U(s)$$

I modo

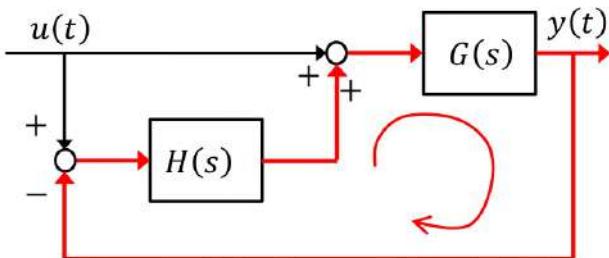
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)(1 + H(s))}{1 + G(s)H(s)}$$

La funzione di trasferimento è
scritta solo da blocchi. I segnali
che noi aggiungiamo sono per
semplificare

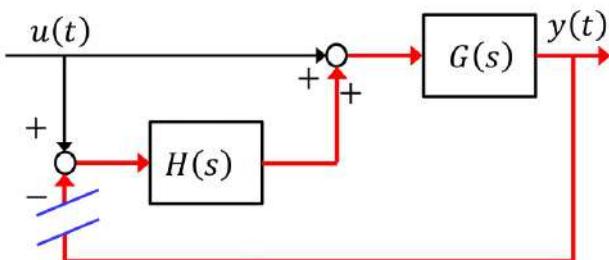


1) E' un **sistema retroazionato** ed evidenzio l'anello.

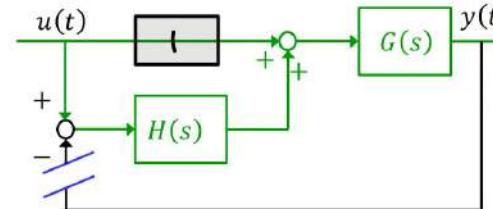
Il modo



2) apro l'anello di retroazione.

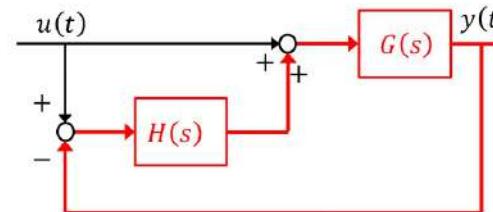


3) Calcolo la **funzione di trasferimento d'andata** (nota che ci sono due percorsi in parallelo).



$$A(s) = (1 + H(s))G(s)$$

3) Calcolo la **funzione di trasferimento d'anello**.



$$L(s) = H(s)G(s)$$



35

4) Calcolo la funzione di trasferimento complessiva.

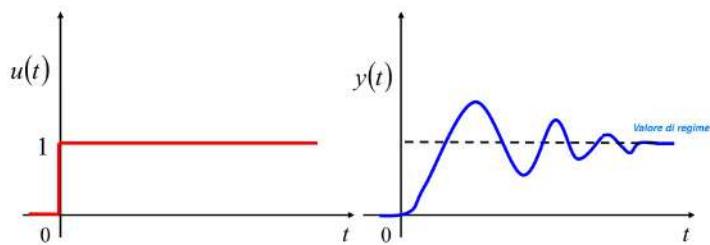
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{FdT d'andata}}{1 + \text{FdT d'anello}} = \frac{(1 + H(s))G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Il risultato è (ovviamente) identico al precedente.

1. Introduzione

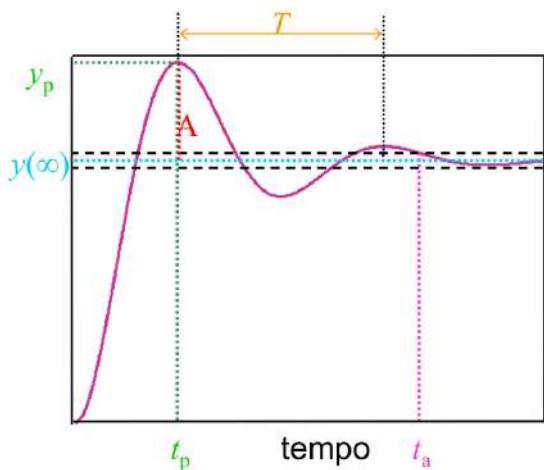
$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\quad S \quad} & y \\ u(t) = \text{sca}(t) & & \\ x(0) = 0 & & \end{array}$$

Sistema asintoticamente stabile



3. Parametri caratteristici della risposta allo scalino

Risposta allo scalino



$y(\infty)$	\bar{y}	Valore di regime
t_a		Tempo di assestamento
t_p		Tempo di picco
y_p		Valore di picco
$A = y_p - y(\infty)$		Massima sovraelongazione
$\Delta = \frac{A}{y(\infty)}$		Massima sovraelongazione relativa
T		Periodo delle oscillazioni

Si imposta una banda +/- 1% del valore del regime

2. Relazione tra le risposte a ingressi canonici

imp(t)	sca(t)	ram(t)
$\frac{d}{dt} \text{sca}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$
1		
Risposta all'impulso	Risposta alla rampa	
$\frac{d}{dt} \left[\begin{matrix} = \\ \text{risposta} \\ \text{allo scalino} \end{matrix} \right]$	$\int_0^t \left[\begin{matrix} = \\ \text{risposta} \\ \text{allo scalino} \end{matrix} \right] d\tau$	

Def: il tempo trascorso il quale la risposta allo scalino entra definitivamente in questa banda e non vi esce più.

Ai fini pratici ci indica in quanto tempo si esaurisce il transitorio ai fini pratici. Perché sappiamo che andrà al valore di regime per t che tende all'infinito, ma ai fini pratici ci va trascorso il tempo di assestamento.

4. Sistemi del primo ordine strettamente propri

$$G(s) = \frac{\mu}{1+s\tau} \quad \text{Strettamente proprio}$$

$\tau > 0$ Sistema as. stabile
 $\mu > 0$ Solo per comodità

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{(1+s\tau)} \frac{1}{s} \quad \text{Risposta allo scalino}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s(1+s\tau)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\mu}{\tau}}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} - \frac{\mu}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0$$

$$y(t) = \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad t \geq 0$$

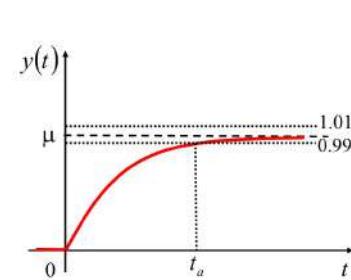
$$y(0^+) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sY(s) - y(0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{\frac{\mu}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{\mu}{\tau} \quad \begin{matrix} \text{Teorema del} \\ \text{valore iniziale} \end{matrix}$$

$$y(\infty) = \mu \quad \text{Teorema del valore finale, ossia il valore a regime dell'uscita}$$

7

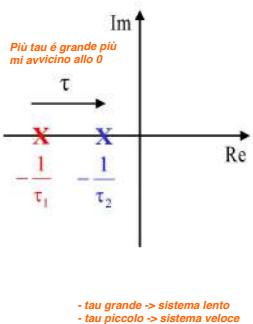
Valutazione del tempo di assestamento



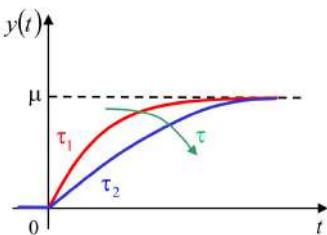
$$\begin{aligned} y(t_a) &= 0.99\mu \\ \mu(1 - e^{-\frac{t_a}{\tau}}) &= 0.99\mu \\ 1 - e^{-\frac{t_a}{\tau}} &= 0.99 \\ e^{-\frac{t_a}{\tau}} &= 0.01 \\ -\frac{t_a}{\tau} &= \ln 0.01 \\ \frac{t_a}{\tau} &= \ln 100 \\ t_a &\cong 4.6\tau \end{aligned}$$

$$t_a \cong 5\tau$$

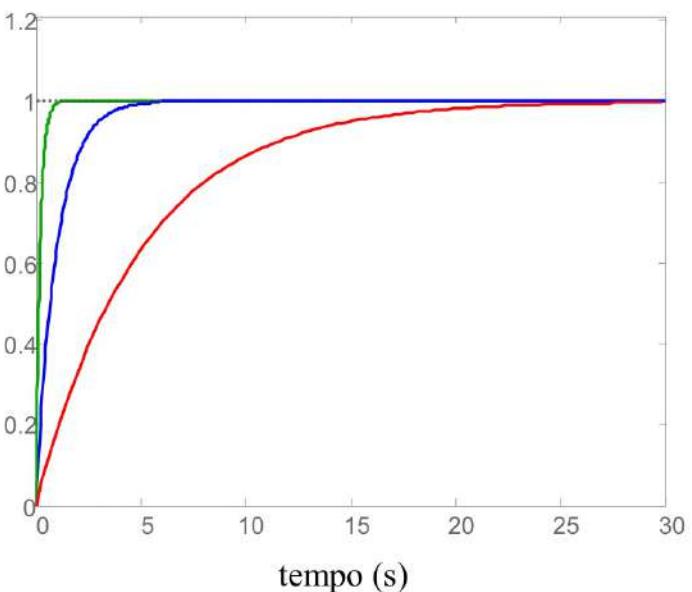
Posizione del polo e velocità della risposta



Più vicino è il polo all'asse immaginario, più grande è la costante di tempo associata, più lenta è la risposta.



Esempio



$$G(s) = \frac{1}{1+s\tau}$$

$$\tau = 0.2 \text{ s}$$

$$\tau = 1 \text{ s}$$

$$\tau = 5 \text{ s}$$

Sistemi del primo ordine non strettamente propri

Grado numeratore = grado denominatore

$$G(s) = \frac{\mu(1+sT)}{1+s\tau}$$

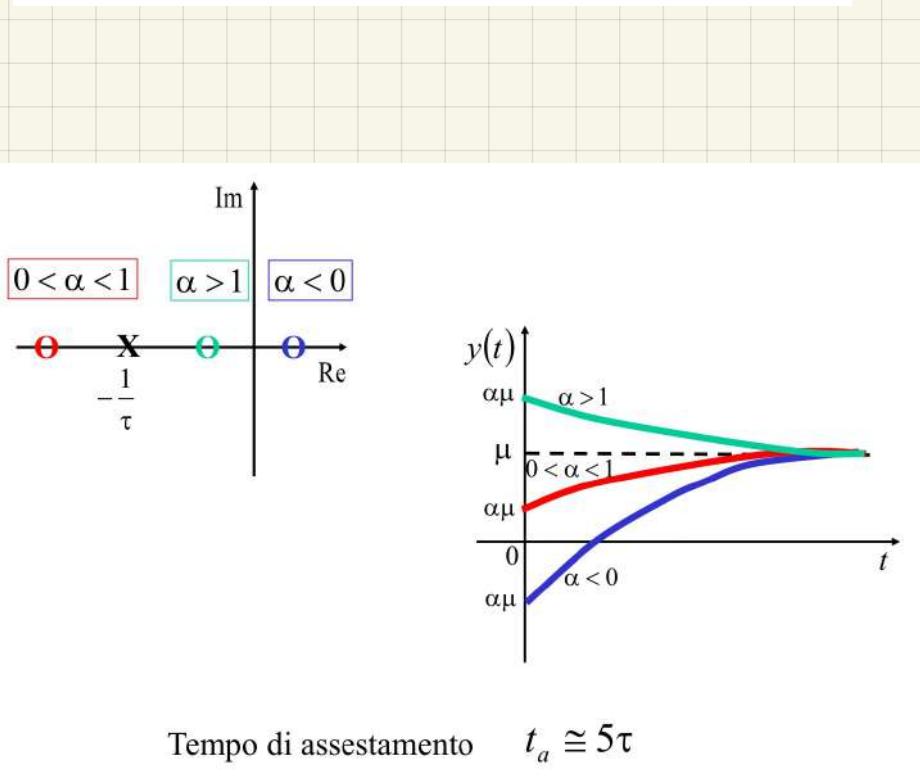
Non strettamente proprio

$\tau > 0$ Sistema as. stabile

$\mu > 0 \quad T \neq \tau$

Per comodità

Se fosse uguale:
Posso raccoglierli e semplificare



$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu(1+sT)}{1+s\tau} \frac{1}{s} =$$

Risposta allo scalino

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu(1+sT)}{s(1+s\tau)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\mu T}{\tau}\left(s + \frac{1}{T}\right)}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}\right] =$$

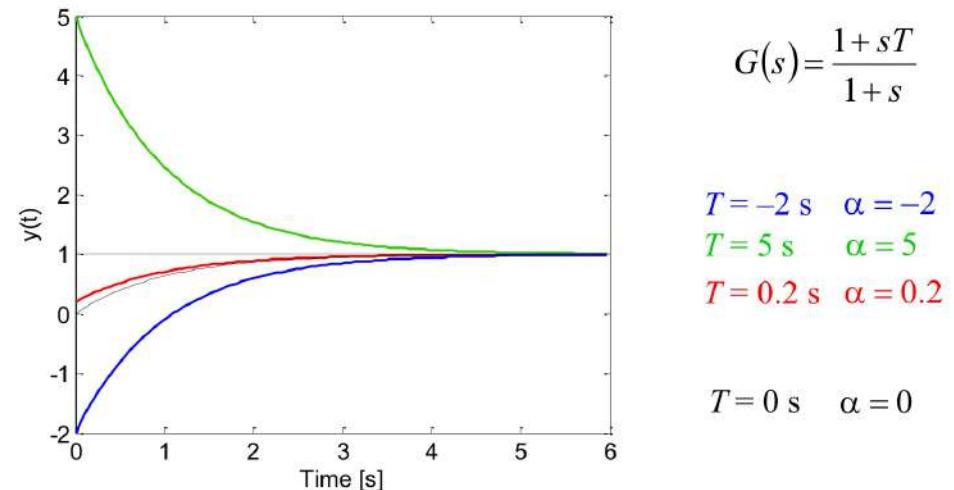
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} + \frac{\frac{\mu(T-\tau)}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}\right] = \mu\left(1 + \frac{T-\tau}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0$$

ponendo $(T = \alpha\tau)$ $y(t) = \mu(1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{\tau}})$ $t \geq 0$

$$y(0^+) = \mu \frac{T}{\tau} \neq 0 \quad \text{non inizia da 0!}$$

$$y(\infty) = \mu$$

Esempio



Se la costante di tempo dello zero è molto più piccola (in valore assoluto) di quella del polo allora la risposta non differisce molto dalla risposta del solo polo.

6. Sistemi del secondo ordine con poli reali distinti

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \quad \begin{matrix} \tau_1 \neq \tau_2 & \mu > 0 \\ \tau_1 > \tau_2 > 0 \end{matrix} \quad \text{as stabile}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\mu}{\tau_1\tau_2}}{s\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)\left(s+\frac{1}{\tau_2}\right)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} - \frac{\mu\tau_1}{\tau_1-\tau_2} + \frac{\mu\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\right] \end{aligned}$$

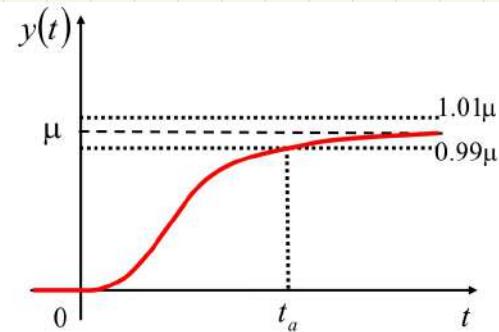
$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \quad t \geq 0$$

t_a è una funzione non semplice di τ_1 e τ_2 .

Si osservi però che se $\tau_1 \gg \tau_2$ allora $e^{-t/\tau_1} \gg e^{-t/\tau_2}$

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \cong \mu \left(1 - e^{-t/\tau_1} \right)$$

Il polo $-\frac{1}{\tau_1}$ si dice **polo dominante**.

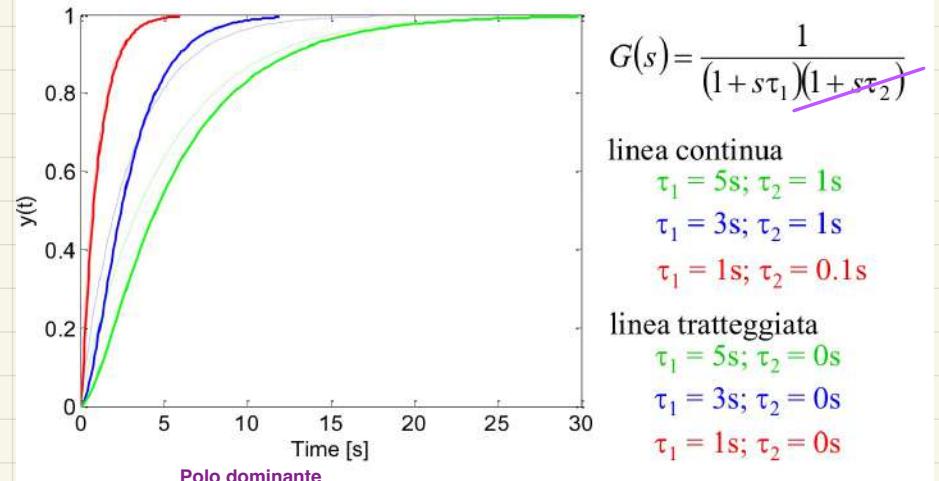


$$y(0^+) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s[sY(s) - y(0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{\frac{\mu}{\tau_1\tau_2}}{s\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)\left(s+\frac{1}{\tau_2}\right)} = 0 \\ y(\infty) &= \mu > 0 \end{aligned}$$

δ³ ↑
derivata iniziale nulla!

Esempio



La costante di tempo più grande (il polo lento) è la più importante nel determinare la forma della risposta allo scalino (ed in particolare il tempo di assestamento)

7. Sistema del secondo ordine con poli reali distinti ed uno zero

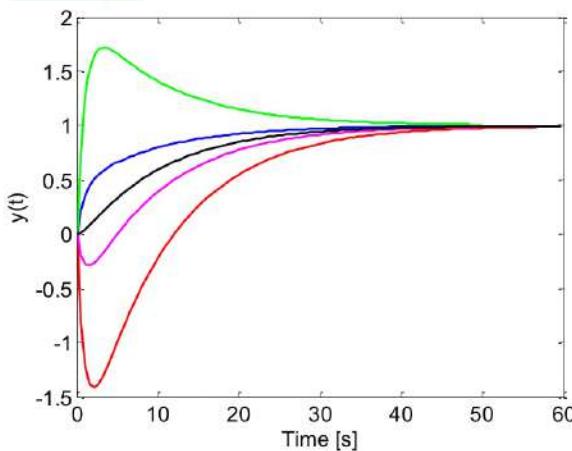
$$G(s) = \frac{\mu(1+sT)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \quad \tau_1 \neq \tau_2 \neq T \quad \mu > 0$$

$\tau_1 > \tau_2 > 0$  as.stabile

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right]$$

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \quad t \geq 0$$

Esempio



$$G(s) = \frac{(1+sT)}{(1+10s)(1+s)}$$

- $T=0$ s no zero
- $T=5$ s zero < 0 "intermedio"
- $T=-5$ s zero > 0 "intermedio"
- $T=20$ s zero < 0 "lento"
- $T=-20$ s zero > 0 "lento"

Riassumendo.

Zero a dx: sempre sottoelongazione, tanto maggiore quanto più lo zero è piccolo (cioè "lento") rispetto al polo dominante (in modulo).

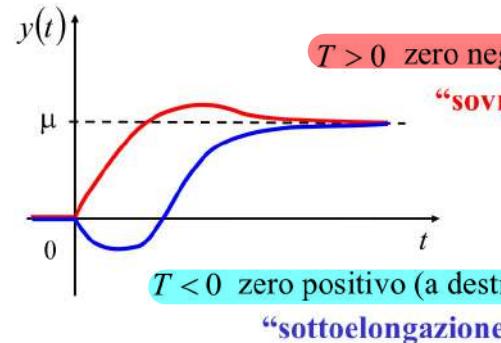
Zero a sx: sovraelongazione solo se lo zero è piccolo rispetto al polo dominante (in modulo).

$$y(0^+) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \frac{\mu T}{\tau_1 \tau_2} = \begin{cases} > 0 & \text{se } T > 0 \\ < 0 & \text{se } T < 0 \end{cases}$$

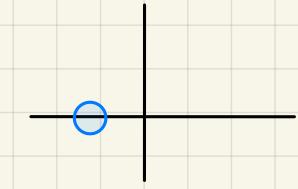
Costante di tempo dello zero
Il segno della derivata iniziale dipende dal segno dello zero!

$$y(\infty) = \mu > 0$$

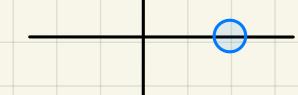


Nota Dipende dal valore di T rispetto a τ_1, τ_2

- $T > 0 \Rightarrow \text{zero} < 0$



- $T < 0 \Rightarrow \text{zero} > 0$



8. Sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati

$$G(s) = \frac{\rho}{(s - \sigma + j\omega)(s - \sigma - j\omega)}$$

guadagno
 $\mu = G(0) = \frac{\rho}{\sigma^2 + \omega^2}$ $\rho > 0$

$$= \frac{\rho}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$$

poli $\sigma \pm j\omega$ $\sigma < 0$
as.stabile

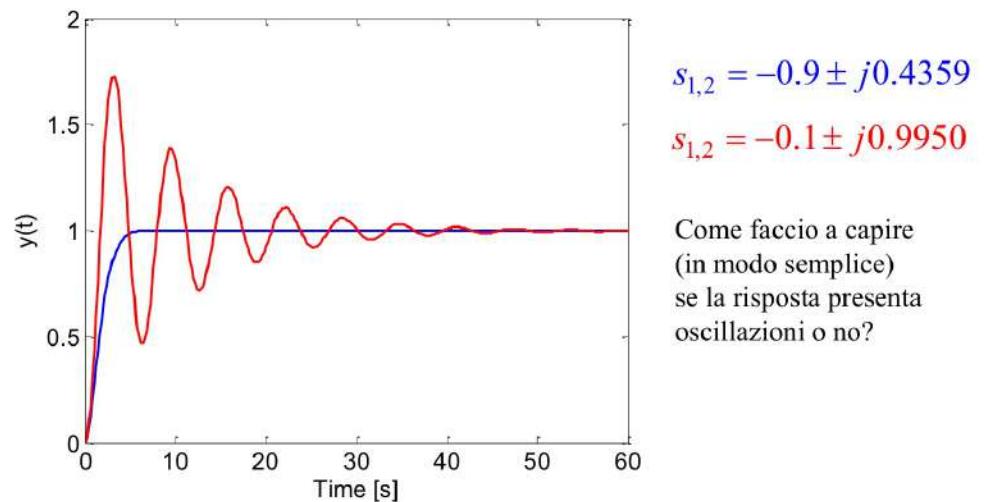
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\rho}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} + \frac{-\mu s + 2\sigma\mu}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}\right]$$

$$= \mu \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s - \sigma - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}\right] = \mu \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}\right]$$

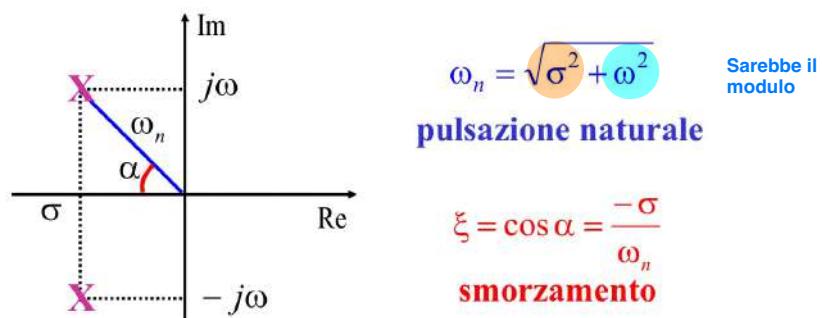
$e^{\sigma t} \cos \omega t$ $e^{\sigma t} \sin \omega t$

$$y(t) = \mu \left[1 - e^{\sigma t} \cos \omega t + \frac{\sigma}{\omega} e^{\sigma t} \sin \omega t \right] \quad t \geq 0$$

Esempio



9. Pulsazione naturale e smorzamento



Relazioni inverse

$$\sigma = -\omega_n \xi \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Una funzione di trasferimento con due poli complessi coniugati si può quindi esprimere usando **pulsazione naturale** e **smorzamento**:

$$G(s) = \frac{\rho}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} = \frac{\rho}{s^2 - 2\sigma s + \underbrace{\sigma^2 + \omega^2}_{\omega_n^2}} = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \underbrace{\omega_n^2}_{\omega_n^2}}$$

$\sigma = -\omega_n \xi$
 $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$

$$G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

Esempio

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 13} \quad \text{poli in } s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm j3$$

$\sigma = -2 \quad \omega = 3$

Usando la definizione: $\omega_n = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Esempio (esula dal problema della risposta allo scalino)

$$G(s) = \frac{10}{s^2 - 4s + 13} \quad \text{poli in } s_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm j3$$

$\sigma = 2 \quad \omega = 3$

Usando la definizione: $\omega_n = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

↑

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= 13 \\ \omega_n &= \sqrt{13} \\ 2\xi\omega_n &= 4\sqrt{13} \\ \xi &= \frac{4}{2\omega_n} = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Casi notevoli

Essendo $\xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$ $\Rightarrow -1 \leq \xi \leq 1$

In particolare

- $\xi = 1$ se $\begin{cases} \omega = 0 \\ \sigma < 0 \end{cases}$ Poli reali coincidenti as. stabili in $-\omega_n$

Infatti $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{(s + \omega_n)^2}$

- $\xi = -1$ se $\begin{cases} \omega = 0 \\ \sigma > 0 \end{cases}$ Poli reali coincidenti instabili in $+\omega_n$

Infatti $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 - 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{(s - \omega_n)^2}$

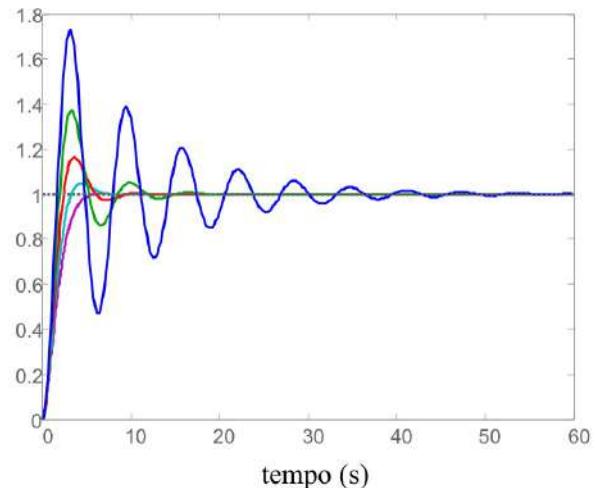
- $\xi = 0$ se $\sigma = 0$ Poli immaginari coniugati in $\pm j\omega_n$

Infatti $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 + \omega_n^2}$ **Semplicemente stabile**

In generale

- $0 < \xi < 1$ se $\sigma < 0$ Poli complessi coniugati as. stabili
- $-1 < \xi < 0$ se $\sigma > 0$ Poli complessi coniugati instabili

Esempio



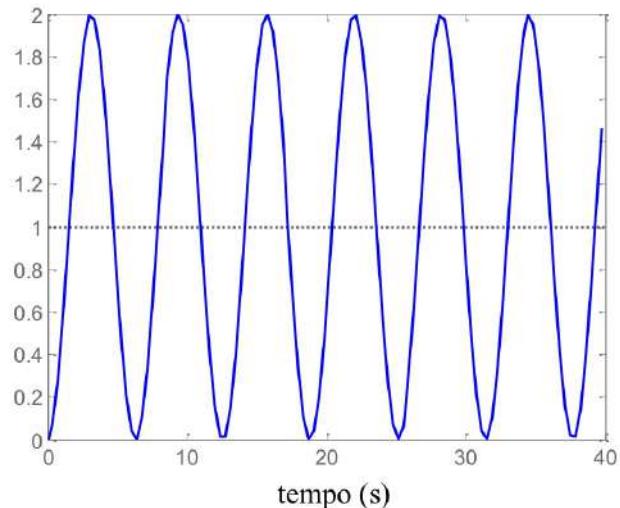
$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2}$$

$$\mu = 1 \quad \omega_n = 1$$

$\xi = 0.1$
 $\xi = 0.3$
 $\xi = 0.5$
 $\xi = 0.7$ Soglia
 $\xi = 0.9$

$$\xi = 0$$

- Poli immaginari, sistema semplicemente stabile;
- oscillazioni permanenti;



Parametri caratteristici della risposta allo scalino (in funzione di ω_n e ξ)

$$t_a \cong \frac{5}{\sigma} = \frac{5}{\xi \omega_n} \quad \text{tempo d'assestamento}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{periodo di eventuali oscillazioni}$$

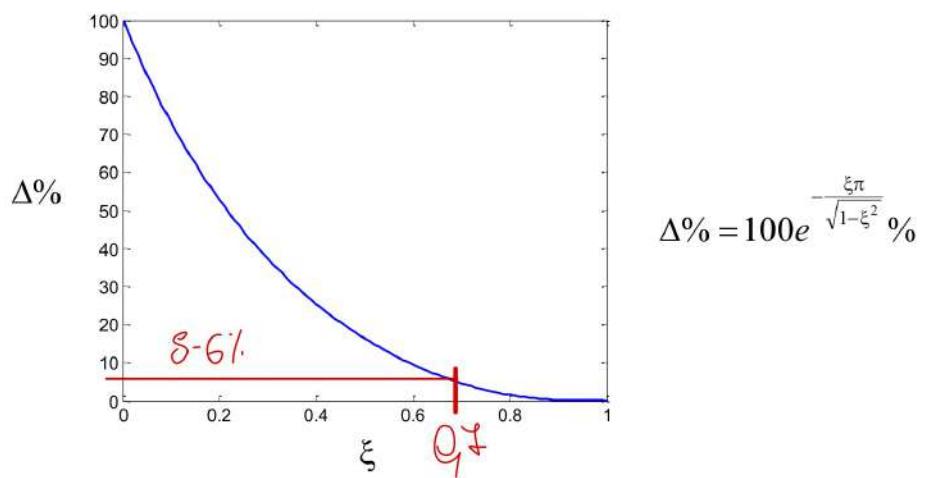
$$t_p = \frac{1}{2} T = \frac{\pi}{\omega} \quad \text{tempo dell'eventuale primo picco}$$

$$y_p = \mu \left[1 + e^{-\frac{\sigma \pi}{\omega}} \right] = \mu \left[1 + e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right] \quad \text{ampiezza dell'eventuale primo picco}$$

$$\Delta \% = 100 \frac{A}{\bar{y}} = 100 e^{-\frac{\sigma \pi}{\omega}} = 100 e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \% \quad \text{massima sovraelongazione relativa percentuale}$$

Dipende solo dallo smorzamento

Massima sovraelongazione percentuale



10. Risposta allo scalino di sistemi di ordine superiore al secondo

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1+sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1+s\tau_i)}$$

as stabile $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(\tau_i) > 0 \\ g \leq 0 \end{cases}$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

Teorema valore iniziale (con $g=0$)

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{G(s)}{s} \begin{cases} 0 & \text{se } m < n \\ \neq 0 & \text{se } m = n \end{cases}$$

str. proprio
non str. proprio

In generale:

$$\begin{cases} \frac{d^i y}{dt^i}(0^+) = 0 & \text{per } i = 0, \dots, r-1 \\ \frac{d^i y}{dt^i}(0^+) \neq 0 & \text{per } i \geq r \end{cases}$$

dove $r = n-m$ è il
grado relativo

Teorema valore finale

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} \begin{cases} \mu & \text{se } g = 0 \\ 0 & \text{se } g < 0 \end{cases}$$

11. Approssimazione a poli dominanti

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1+sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1+s\tau_i)}$$

as stabile $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(\tau_i) > 0 \\ g \leq 0 \end{cases}$

Ipotesi: poli reali distinti $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{1+s\tau_1} + \frac{\alpha_2}{1+s\tau_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{1+s\tau_n}$$

$$y(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\alpha_2}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

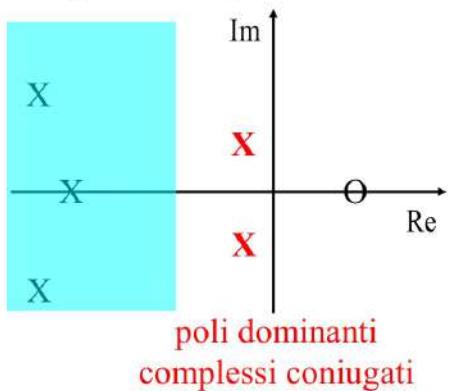
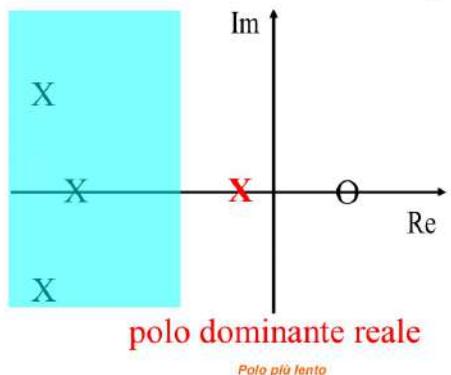
Se fosse $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$

$$y(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\alpha_2}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

E' possibile approssimare la risposta allo scalino con quella di un sistema del I ordine con costante di tempo la più lenta fra tutte le costanti di tempo del sistema.

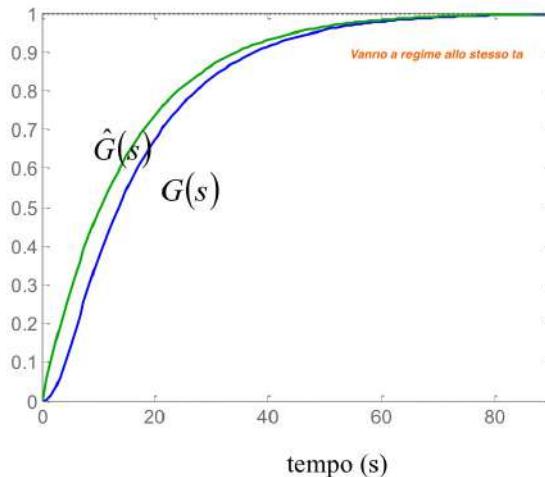
Polo dominante

I poli dominanti sono quelli più vicini all'asse immaginario (poli "lenti")



L'approssimazione a poli dominanti consiste nel considerare solo i poli dominanti (preservando il guadagno ed eventualmente il comportamento iniziale)

Esempio



$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+2s)(1+15s)}$$

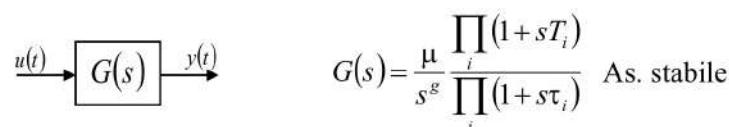
$$\hat{G}(s) = \frac{1}{(1+15s)}$$

Polo dominante

CAP XIII

1. Risposta alla sinusoide

O in frequenza



$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad \longrightarrow \quad U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \downarrow$$

$$y_2(t) = \beta \cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t$$

Esiste questa formula

$$X\cos\theta + Y\sin\theta = \sqrt{X^2 + Y^2} \sin\left(\theta + \text{atan}\left(\frac{Y}{X}\right)\right)$$

Da cui si ottiene

$$y_2(t) = \sqrt{\beta^2 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}} \sin\left(\omega t + \arctan \frac{\beta \omega}{\gamma}\right)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\beta^2 \omega^2 + \gamma^2} \sin \left(\omega t + \arctan \frac{\beta \omega}{\gamma} \right)$$

$$\begin{array}{c} Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \\ \downarrow \mathcal{L}^{-1} \\ y(t) = y_1(t) + y_2(t) \end{array}$$

Siccome il sistema è asintoticamente stabile

Per $t \rightarrow \infty$ $\Rightarrow y_1(t) \rightarrow 0$

Quindi

$$\text{Per } t \rightarrow \infty \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad y(t) \cong \textcolor{red}{y_2(t)} = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)]$$

Asintoticamente resta solo la risposta forzata

Riprendiamo la trasformata dell'uscita

$$Y(s) = G(s) \left(\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = Y_1(s) + \left(\frac{\beta s + \gamma}{s^2 + \omega^2} \right) \quad y_2(s)$$

Moltiplicando ambo i membri per $s^2 + \omega^2$

$$G(s)A\omega \equiv (s^2 + \omega^2)Y_1(s) + \beta s + \gamma$$

*Prodotto = somma delle fasi
Ai numeri reali - forma angolo = 0*

Valutiamo questa identità per $s = j\omega$

$$G(j\omega)A\omega = j\beta\omega + \gamma$$

e scriviamo l'identità per il modulo e per la fase

$$|G(j\omega)A\omega| = |G(j\omega)|A\omega = |j\beta\omega + \gamma| = \sqrt{\beta^2\omega^2 + \gamma^2} \quad \text{Modulo}$$

$$\varphi(G(j\omega)A\omega) = \varphi G(j\omega) = \varphi(j\beta\omega + \gamma) = \text{atan}\left(\frac{\beta\omega}{\gamma}\right) \quad \text{Fase}$$

Quindi si ha

$$|G(j\omega)|A\omega = \sqrt{\beta^2\omega^2 + \gamma^2}$$

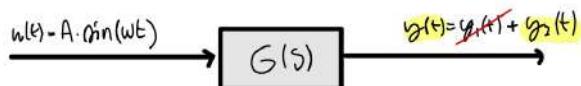
$$\angle G(j\omega) = \text{atan}\left(\frac{\beta\omega}{\gamma}\right)$$

Precedentemente avevamo trovato che

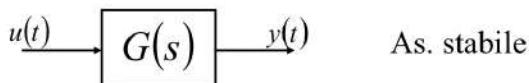
$$y_2(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\beta^2\omega^2 + \gamma^2} \sin\left(\omega t + \text{atan}\frac{\beta\omega}{\gamma}\right)$$

Sostituendo le espressioni precedenti si ha

$$y_2(t) = |G(j\omega)|A \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$



2. Teorema della risposta in frequenza



$$u(t) = A \sin(\bar{\omega}t)$$

Allora a transitorio esaurito (al lato pratico per $t > t_a$)

$$y(t) \cong B \sin(\bar{\omega}t + \varphi)$$

$$\text{dove: } B = |G(j\bar{\omega})|A$$

$$\varphi = \angle G(j\bar{\omega})$$

indipendentemente dalle condizioni iniziali del sistema

Riassumendo

$$u(t) = A \sin(\omega t) \longrightarrow U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = Y_1(s) + Y_2(s) \quad \text{asintoticamente}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \downarrow \quad \begin{array}{l} \text{A transitorio esaurito } Y_1 = 0 \\ \text{Y_2(t) = } \end{array}$$

$$y_2(t) = |G(j\omega)|A \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

La sinusode $y_2(t)$ è completamente caratterizzata dal modulo e dalla fase del numero complesso $G(j\omega)$

Esempio

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

$$u_1(t) = \sin(0.5t) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} |G(j0.5)| = \frac{1}{\sqrt{1+0.25}} = 0.89 \\ \angle G(j0.5) = -\text{atan}(0.5) = -26.6^\circ \end{cases}$$

$$u_2(t) = \sin(5t) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} |G(j5)| = \frac{1}{\sqrt{1+25}} = 0.20 \\ \angle G(j5) = -\text{atan}(5) = -78.6^\circ \end{cases}$$

3. Risposta in frequenza

$$G(j\omega) \quad \text{per tutti gli } \omega \geq 0$$

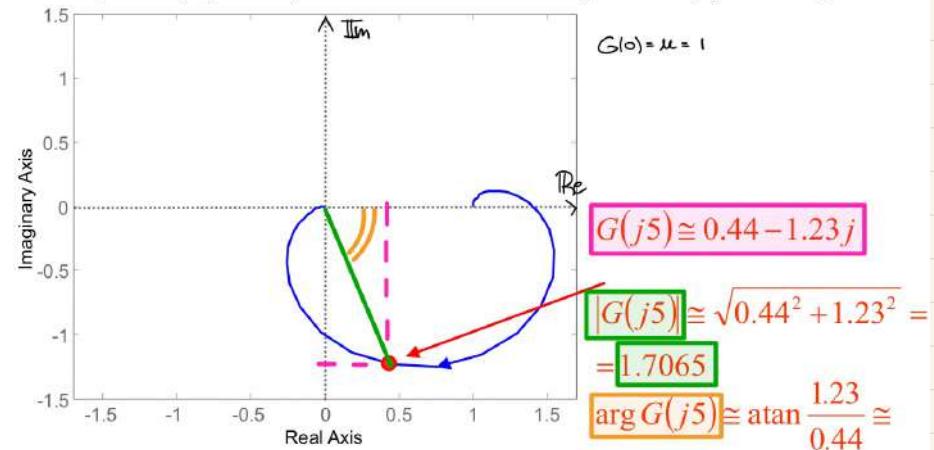
Funzione complessa di variabile reale

$$\omega \longrightarrow G(j\omega)$$

Esempio

Funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+s}{\left(1+\frac{1}{3}s\right)\left(1+\frac{1}{5}s\right)^2} \rightarrow G(j\omega) = \frac{1+j\omega}{\left(1+\frac{1}{3}j\omega\right)\left(1+\frac{1}{5}j\omega\right)^2}$$



CAP XIII

1. Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza

La risposta in frequenza $G(j\omega)$ è una funzione a valori complessi della variabile reale (positiva) ω . Quindi, per ogni valore reale positivo di ω avrò un punto del piano complesso.

Esempio

$$G(s) = \frac{5}{1+5s}$$

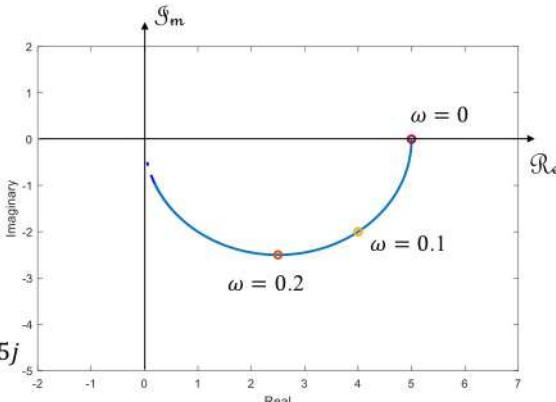
$$G(j\omega) = \frac{5}{1+5j\omega}$$

Calcoliamo qualche punto

$$G(j0) = \frac{5}{1+5j0} = 5$$

$$G(j0.1) = \frac{5}{1+5j0.1} = 4 - 2j$$

$$G(j0.2) = \frac{5}{1+5j0.2} = 2.5 - 2.5j$$

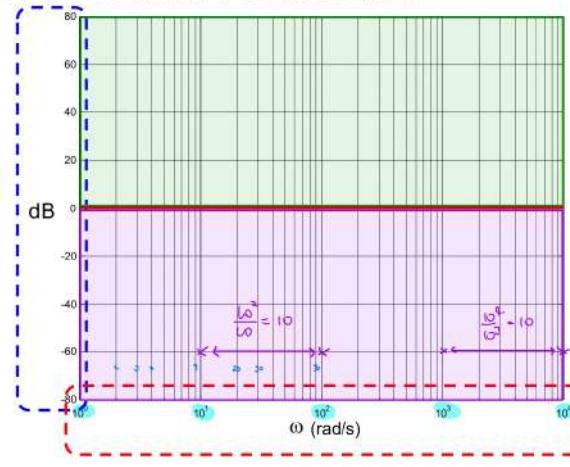


La rappresentazione nel piano complesso della risposta in frequenza si dice **diagramma polare**.

2. Diagramma di Bode del modulo : convenzioni

Ordinata in dB

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$



Ascissa in scala logaritmica $\log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1}$

N.B. Logaritmo in base 10

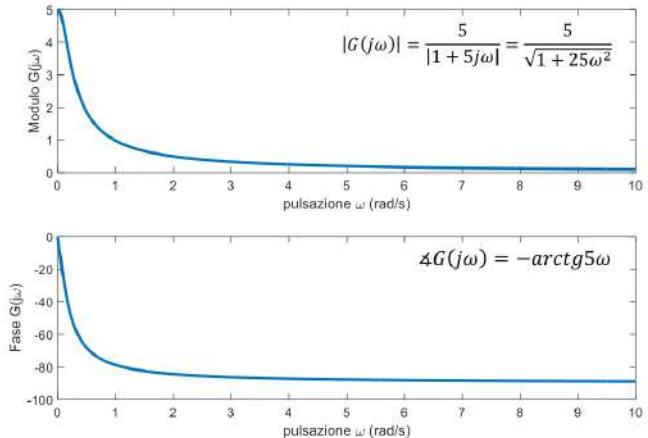
E' possibile rappresentare in **due grafici separati il modulo e la fase della risposta in frequenza**.

Sia il modulo $|G(j\omega)|$ che la fase $\angle G(j\omega)$ sono funzioni a valori reali della variabile reale (positiva) ω .

Esempio

$$G(s) = \frac{5}{1+5s}$$

$$G(j\omega) = \frac{5}{1+5j\omega}$$



Le rappresentazioni di modulo e fase della risposta in frequenza in funzione della pulsazione sono **diagramma cartesiani**.

$$M(t) = A \cdot \sin(\omega t)$$

$$\gamma(t) = |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

Re:

- $|G(j\omega)| = 1$ ormai \Rightarrow
- $|G(j\omega)| > 1$ ormai multipli licenzi
- $|G(j\omega)| < 1$ ormai otteniamo

Sempre: 20%^{to}

$$|G(iw)| = 10 \rightarrow |G(iw)|_{dy} = 20$$

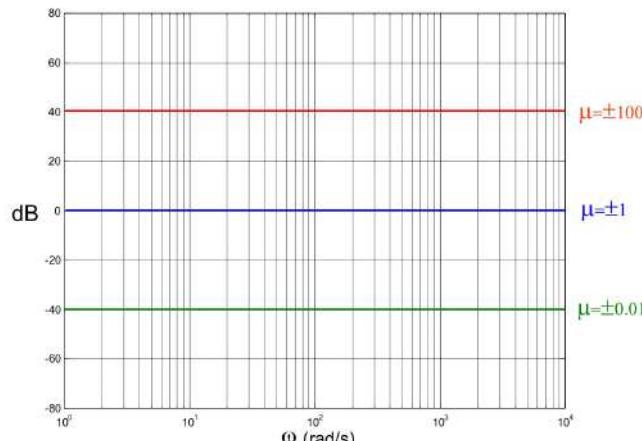
$$10^x = 10$$

$$x = 1$$

$$20 \cdot x = 20$$

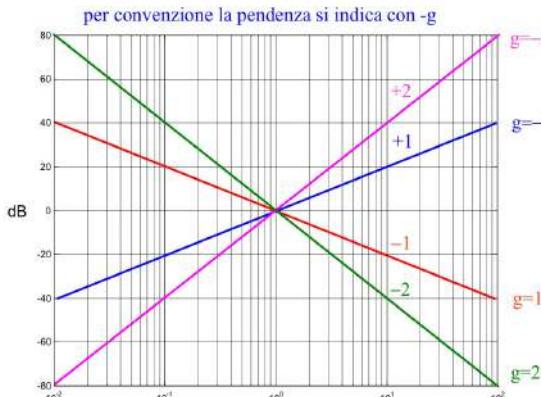
3.1 Guadagno

$20 \log|\mu|$  retta costante



3.2 Poli o zeri nell'origine

$$-20 \log|j\omega|^g = -20g \log \omega \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{retta con pendenza} \\ -20g \text{ dB per decade} \\ \text{passante per } 0 \text{ dB in } \omega = 1 \end{array}$$



3. Diagramma di Bode del modulo : tracciamento

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \quad \longrightarrow \quad |G(j\omega)| = \frac{|\mu|}{|j\omega|^g} \frac{\prod_i (1 + j\omega T_i)}{\prod_i (1 + j\omega \tau_i)}$$

funzione di trasferimento

$$|G(j\omega)| = \frac{|\mu|}{|j\omega|^g} \frac{\prod_i (1 + j\omega T_i)}{\prod_i (1 + j\omega \tau_i)}$$

modulo della risposta in frequenz

Differenza = sottrazione
Prodotto = somma
=> Logaritmi

modulo della risposta in frequenza in dB

$$|G(j\omega)|_{dB} = \underbrace{20 \log |\mu|}_{\text{guadagno}} - \underbrace{20 \log |j\omega|^g}_{\text{poli o zeri nell'origine}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^m 20 \log |1 + j\omega T_i| +$$

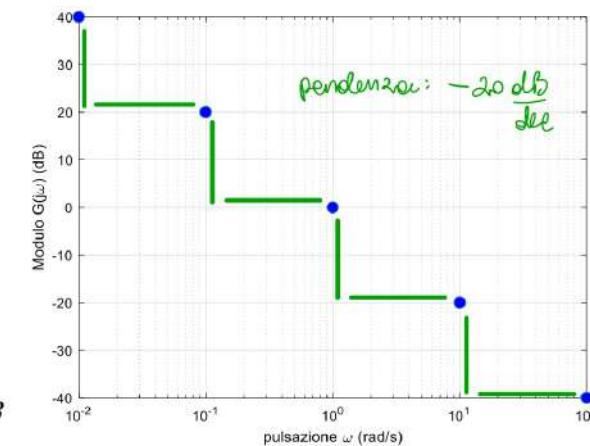
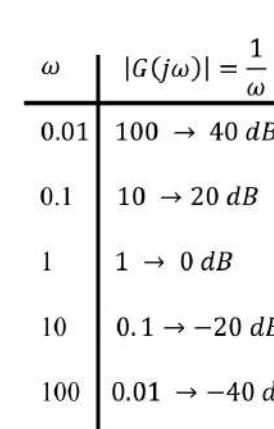
zeri (reali & complessi coniugati)

$$- \sum_{i=1}^n 20 \log |1 + j\omega \tau_i|$$

poli (reali & complessi coniugati)

Esempio esplicativo

$$G(s) = \frac{1}{s} \xrightarrow{\text{funzione di trasferimento}} G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \xrightarrow{\text{risposta in frequenza}} |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \xrightarrow{\text{modulo della risposta in frequenza}}$$



3.3.a Zero reale

$$20 \log|1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad T \text{ reale}$$

Il disegno di questa funzione di ω non è facile.

Si può trovare un'approssimazione ragionevole guardando il comportamento ad alte e basse pulsazioni.

Basse ω

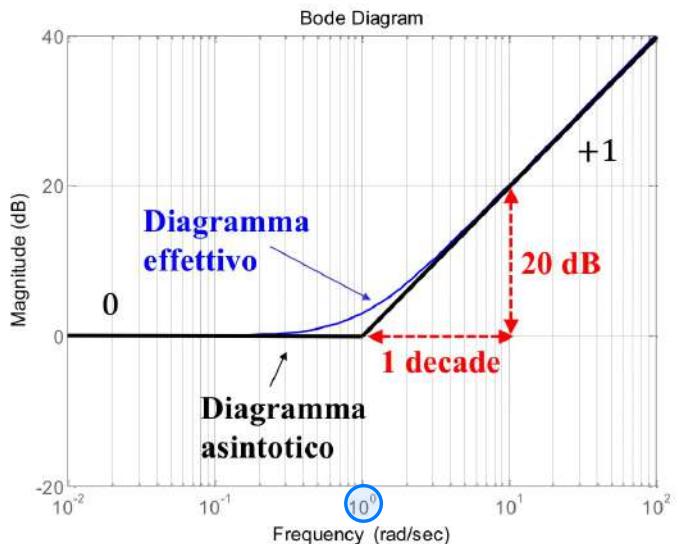
➤ se $\omega^2 T^2 \ll 1$, cioè $\omega \ll \frac{1}{|T|}$ ➔ $20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong 0 \text{ dB}$

Alte ω

➤ se $\omega^2 T^2 \gg 1$, cioè $\omega \gg \frac{1}{|T|}$ ➔ $20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong 20 \log \omega |T| \cong 20 \log \omega + 20 \log |T|$

Zero reale (esempio)

$$G(s) = 1 + sT$$



T costante dello zero

Approssimazione asintotica

Basse ω
➤ per $\omega < \frac{1}{|T|}$ ➔ retta costante a 0 dB

Prima dello zero è una retta

Alte ω
➤ per $\omega > \frac{1}{|T|}$ ➔ retta passante per 0 dB in $\omega = \frac{1}{|T|}$ con pendenza +1

Infatti, si può calcolare l'intersezione con l'asse delle ascisse:

$$20 \log \omega + 20 \log |T| = 0$$

$$20 \log \omega = -20 \log |T|$$

$$20 \log \omega = 20 \log \frac{1}{|T|}$$

$$\omega = \frac{1}{|T|}$$

Valutazione dell'errore massimo

Si consideri $G(s) = 1 + sT$

L'errore in $\omega = \frac{1}{|T|}$ vale:

$$E = 20 \log|1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = \\ = 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{T^2}} T^2 = 20 \log \sqrt{2} \cong 3 \text{ dB}$$

$\omega = T$

In prossimità
dello zero

L'errore massimo che si commette usando il diagramma asintotico è pari a 3 dB (per ogni zero), in corrispondenza della pulsazione dello zero.

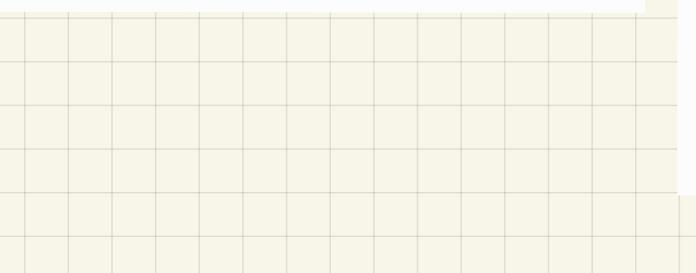
3.3.b Zeri complessi coniugati

$$20 \log|1 + j\omega T| + 20 \log|1 + j\omega \bar{T}| \quad T \text{ complesso}$$

Usiamo l'espressione con smorzamento e pulsazione naturale

$$\tilde{G}(s) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \quad \text{funzione di trasferimento}$$

$$\tilde{G}(j\omega) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \quad \text{risposta in frequenza}$$



Zeri complessi coniugati (esempio) $\tilde{G}(s) = 1 + 2\xi s + s^2 \quad \omega_n = 1$

Il modulo (in dB) vale

$$|\tilde{G}(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Cerchiamo l'approssimazione asintotica:

Basse ω

per $\omega \ll \omega_n$ \Rightarrow retta costante a 0 dB

Alte ω

$$|\tilde{G}(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} = \\ = 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} = 40 \log \omega - 40 \log \omega_n$$

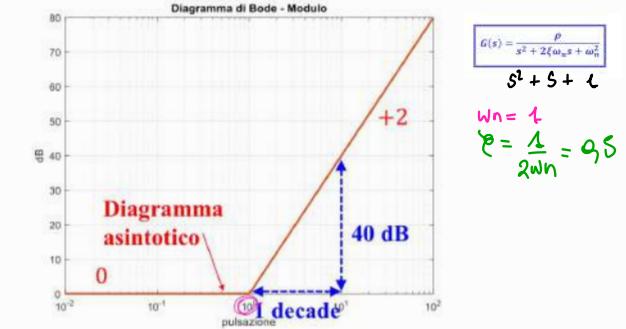
Retta, pendenza = 40 dB/dec

retta passante per 0 dB in $\omega = \omega_n$
con pendenza +2

Zeri complessi coniugati (esempio)

$$\tilde{G}(s) = 1 + s + s^2 \quad \begin{matrix} \omega_n = 1 \\ \xi = 0.5 \end{matrix}$$

Diagramma di Bode - Modulo



Valutazione dell'errore massimo

L'errore in $\omega = \omega_n$ dipende da ξ

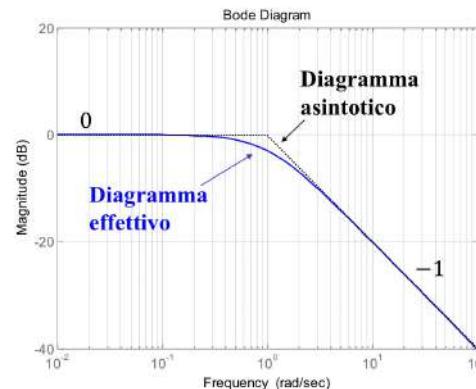
$$E = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \Big|_{\omega=\omega_n} = 20 \log \sqrt{4\xi^2} = 20 \log(2|\xi|)$$

$$\text{se } |\xi| = 1 \quad E = 20 \log 2 \cong 6 \text{ dB} \quad (\text{2 poli reali coincidenti!})$$

$$\text{se } \xi \rightarrow 0 \quad E \rightarrow -\infty$$

Per i **poli** i diagrammi sono uguali a quelli degli zeri con il segno cambiato

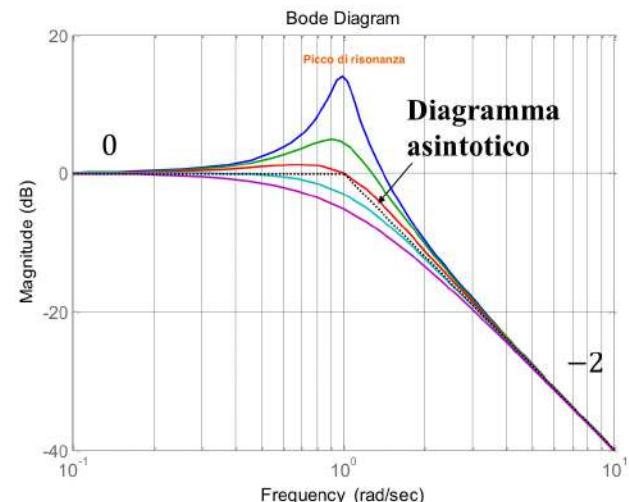
Polo reale (esempio)



$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

Per ogni polo reale
pendenza -1

Poli complessi coniugati (esempio) $G(s) = \frac{1}{1+2\xi s + s^2}$ $\omega_n = 1$



- $|\xi| = 0.1$
- $|\xi| = 0.3$
- $|\xi| = 0.5$
- $|\xi| = 0.7$
- $|\xi| = 0.9$

Per polo
complesso
coniugato
pendenza -2

Esempio esplicativo

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$$

Proviamo a disegnare i singoli contributi e poi sommiamoli

Guadagno $\mu = 10$

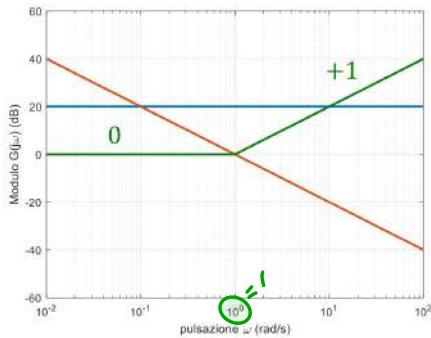
Un polo nell'origine $\frac{1}{s}$

Uno zero reale in $-1 \rightarrow (1+s)$

Un polo reale in $-10 \rightarrow (1+0.1s)$

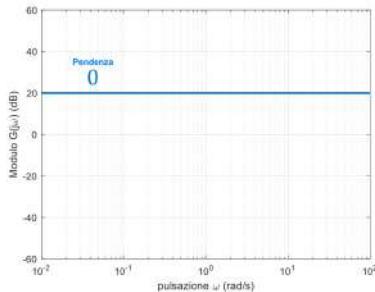
Uno zero reale $(1+s) \rightarrow 0$ dB fino ad $\omega = 1$ rad/s e poi retta con pendenza +1

$$S=1-1=1$$



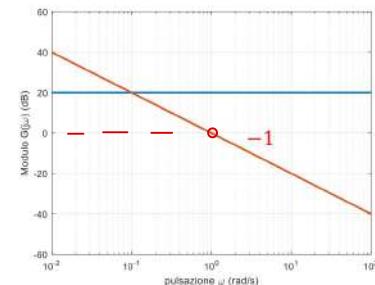
Guadagno $\mu = 10 \rightarrow$ retta costante a 20 dB

$$20 \log_{10} x = 10 \quad x = 10 \quad \lambda = 1 \quad 20 \cdot 1 = 20$$



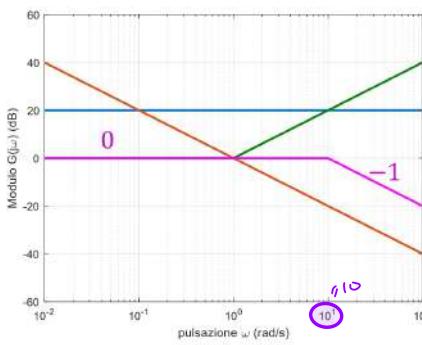
Un polo nell'origine $\frac{1}{s} \rightarrow$ retta con pendenza -1 per $\omega = 1$ rad/s

$$-20f \quad \text{Pendenza passante per 0}$$



Un polo reale $\frac{1}{(1+0.1s)} \rightarrow 0$ dB fino ad $\omega = 10$ rad/s e poi retta con pendenza -1

$$\delta = 10$$



4. Diagramma asintotico di Bode del modulo :

regole per il tracciamento

Poli nell'origine: -1
2 poli nell'origine: -2
Zero nell'origine: +1
2 zeri nell'origine: +2

- la pendenza iniziale vale $-g$
- il tratto iniziale passa in $|\mu|_{dB}$ per $\omega = 1 \text{ rad/s}$
- cambi di pendenza in corrispondenza di poli (-1) e zeri (+1)

Osservazione

La pendenza finale (per $\omega \rightarrow \infty$) è data da :

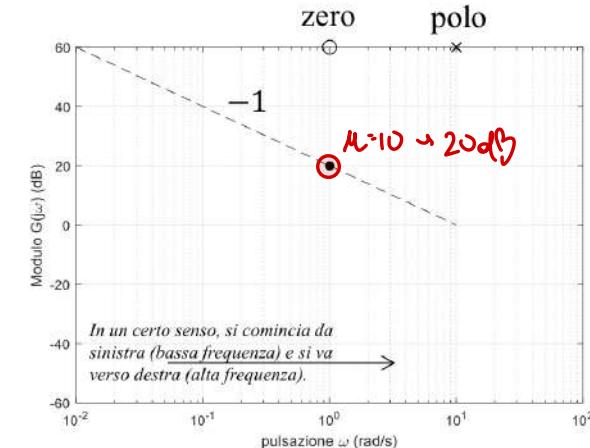
$$n^{\circ} \text{ zeri} - n^{\circ} \text{ poli} \leq 0$$

(= 0 solo se $G(s)$ è non strett. propria)

Esempio

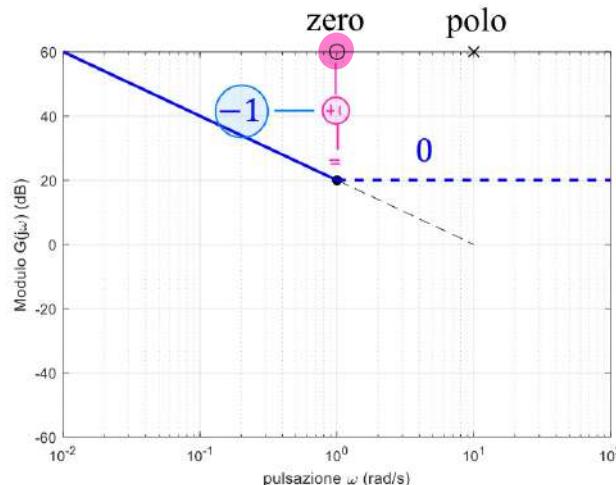
$$G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$$

- la pendenza iniziale vale -1 -10 dB
- il tratto iniziale passa in 20 dB per $\omega = 1 \text{ rad/s}$



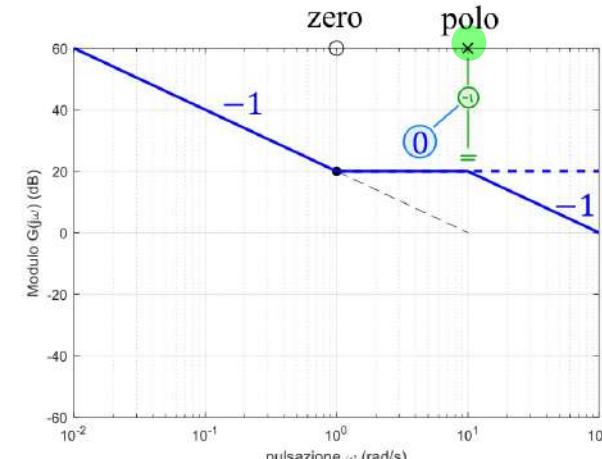
- cambi di pendenza in corrispondenza di poli (-1) e zeri (+1)

Il primo che incontro (da sx a dx) è lo zero.



- cambi di pendenza in corrispondenza di poli (-1) e zeri (+1)

Poi incontro il polo (sempre da sx a dx).



5. Diagramma di Bode della fase : convenzioni

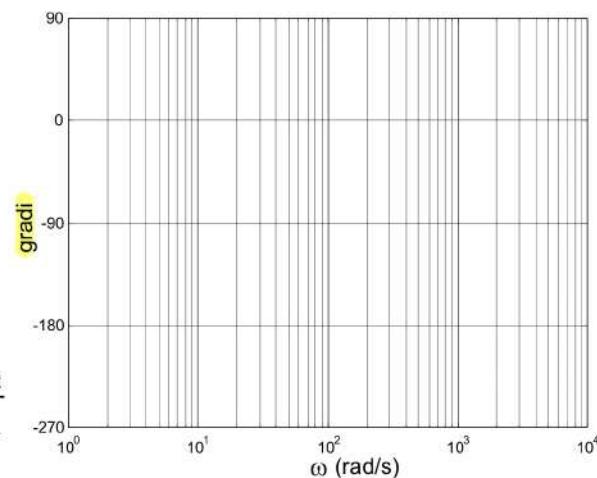
➤ Ordinata in gradi

$$\angle G(j\omega)$$

➤ Ascissa in

scala logaritmica

$$\log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1}$$



La fase viene descritta in radianti mentre il grafico in gradi:

$$180 : \pi = \text{gradi} : \text{rad}$$

7. Diagramma di Bode della fase : tracciamento

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)}$$

Funzione di trasferimento

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1+j\omega T_i)}{\prod_i (1+j\omega \tau_i)}$$

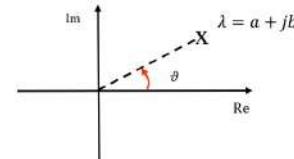
Risposta in frequenza

Fase della risposta in frequenza (in gradi)

$$\angle G(j\omega) = \cancel{\angle \mu} - \cancel{\angle (j\omega)^g} + \sum_i \cancel{\angle (1 + j\omega T_i)} - \sum_i \cancel{\angle (1 + j\omega \tau_i)}$$

guadagno poli o zeri nell'origine
 zeri (reali & complessi coniugati) poli (reali & complessi coniugati)

6. Argomento o fase di un numero complesso



Convenzione:

$$-180^\circ \leq \angle \lambda < 180^\circ$$

La fase di un numero reale negativo è -180°

Calcolo della fase

- se $a \geq 0$ $\Rightarrow \angle \lambda = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ $(-90^\circ \leq \angle \lambda \leq +90^\circ)$

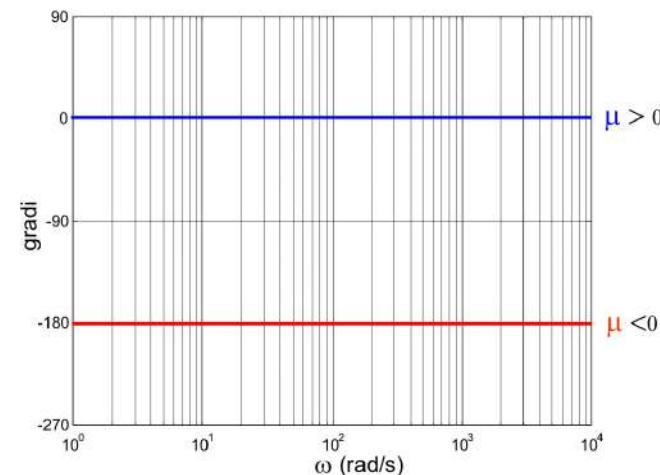
- se $a < 0, b > 0$ $\Rightarrow \angle \lambda = \tan^{-1} \frac{b}{a} + 180^\circ$ $(+90^\circ < \angle \lambda < +180^\circ)$

- se $a < 0, b \leq 0$ $\Rightarrow \angle \lambda = \tan^{-1} \frac{b}{a} - 180^\circ$ $(-180^\circ \leq \angle \lambda < -90^\circ)$

7.1 Guadagno

$$\angle \mu = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \mu > 0 \\ -180^\circ & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$

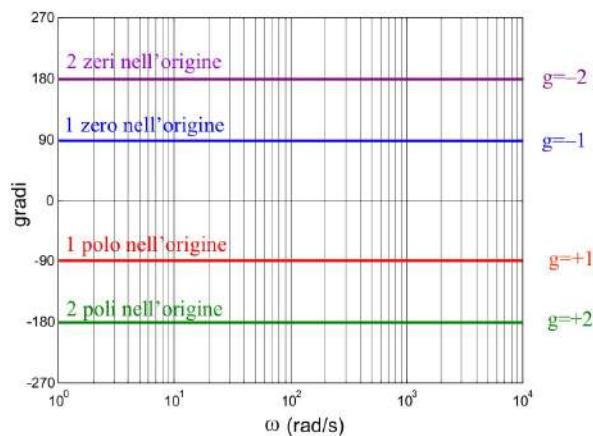
Costante positiva o negativa



Due sole opzioni!

7.2 Poli & zeri nell'origine

$$-\zeta(j\omega)^g = -g\zeta(j\omega) = -g90^\circ \quad \Rightarrow \text{retta costante}$$



42

7.3.a Zero reale

$$\zeta(1 + j\omega T) = \tan(\omega T) \quad T \text{ reale}$$

Il disegno di questa funzione di ω è facile, ma si può comunque trovare un'approssimazione valida per alte e basse pulsazioni.

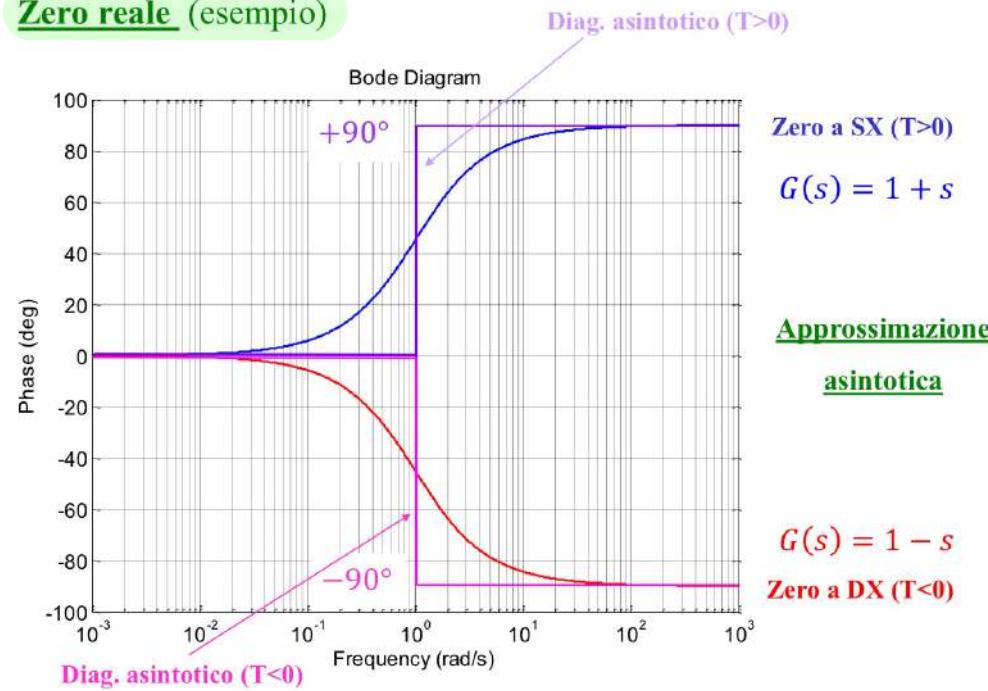
Basse ω

$$\xrightarrow{\text{per } \omega \rightarrow 0} \tan(\omega T) \longrightarrow 0^\circ$$

Alte ω

$$\xrightarrow{\text{per } \omega \rightarrow \infty} \tan(\omega T) \begin{cases} +90^\circ & \text{se } T > 0 \text{ (zero a sx)} \\ -90^\circ & \text{se } T < 0 \text{ (zero a dx)} \end{cases}$$

Zero reale (esempio)



7.3.b Zeri complessi coniugati

Usiamo l'espressione con smorzamento e pulsazione naturale

$$\tilde{G}(s) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \quad \text{funzione di trasferimento}$$

$$\tilde{G}(j\omega) = 1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} \quad \text{risposta in frequenza}$$

Parte reale Parte immaginaria

$$z\tilde{G}(j\omega) = z\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

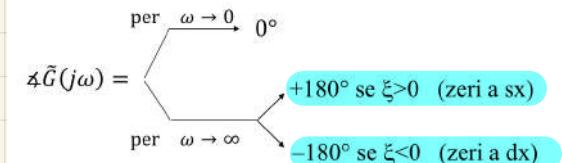
Basse ω per $\omega \rightarrow 0$ $\arg \tilde{G}(j\omega) = \arg 1 = 0^\circ$

Alte ω per $\omega \rightarrow \infty$ $\arg \tilde{G}(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctg \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \pm 180^\circ$

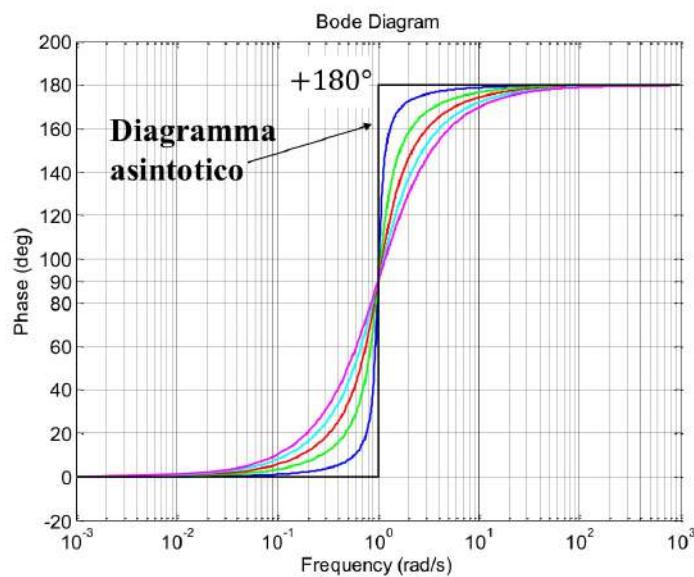
$(+180^\circ \text{ se } \xi > 0)$
 $(-180^\circ \text{ se } \xi < 0)$

$$\text{Ma } \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctg \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = 0^\circ$$

Quindi

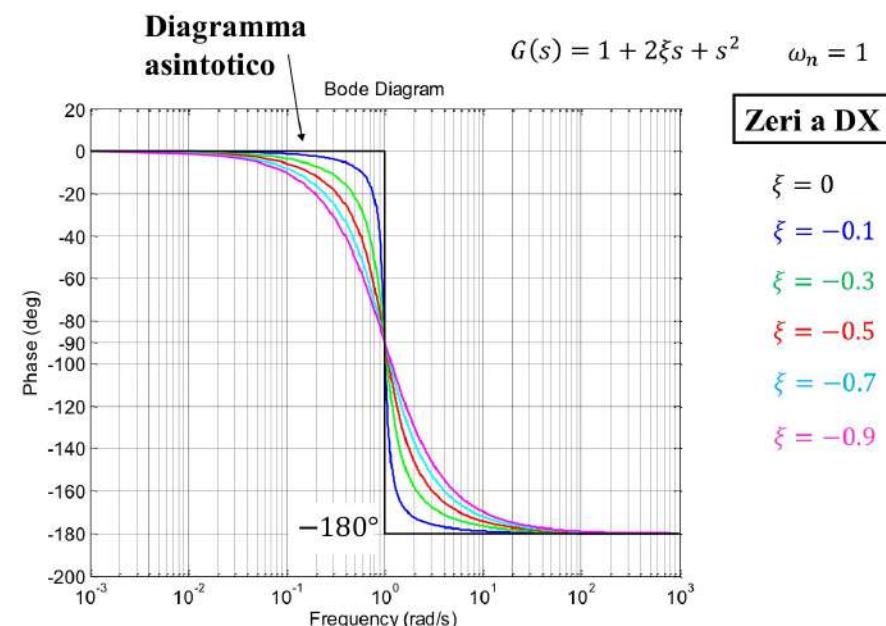


Zeri complessi coniugati (esempio) $G(s) = 1 + 2\xi s + s^2 \quad \omega_n = 1$



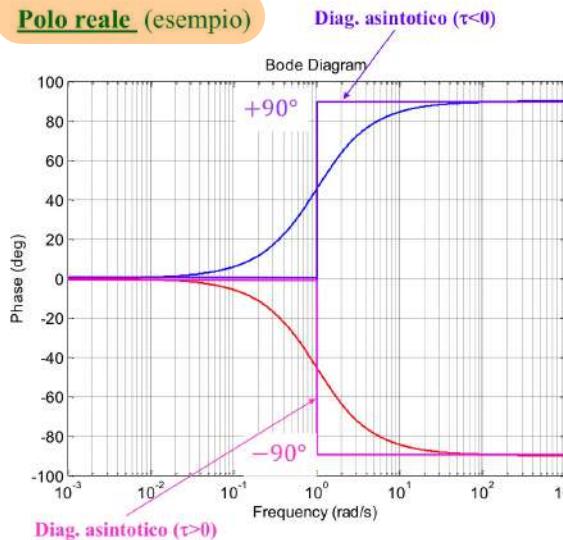
Zeri a SX

- $\xi = 0.1$
- $\xi = 0.3$
- $\xi = 0.5$
- $\xi = 0.7$
- $\xi = 0.9$



Per i poli valgono i medesimi ragionamenti,
fatto salvo il segno

Polo reale (esempio)

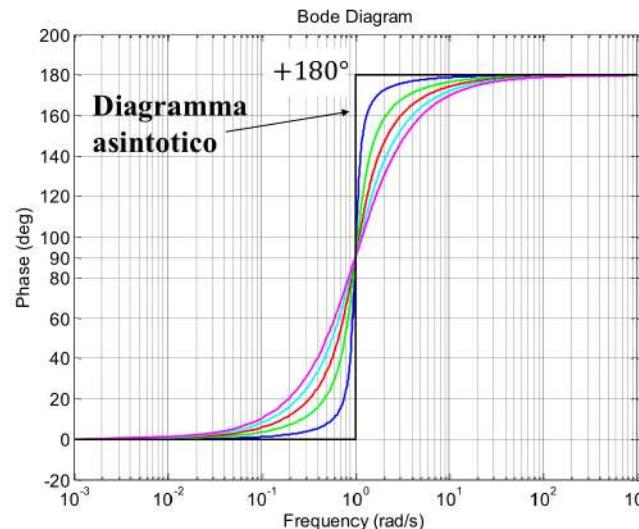


$$G(s) = \frac{1}{1-s}$$

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

Poli complessi coniugati (esempio)

$$G(s) = \frac{1}{1+2\xi s + s^2} \quad \omega_n = 1$$



Poli a DX

$$\xi = -0.1$$

$$\xi = -0.3$$

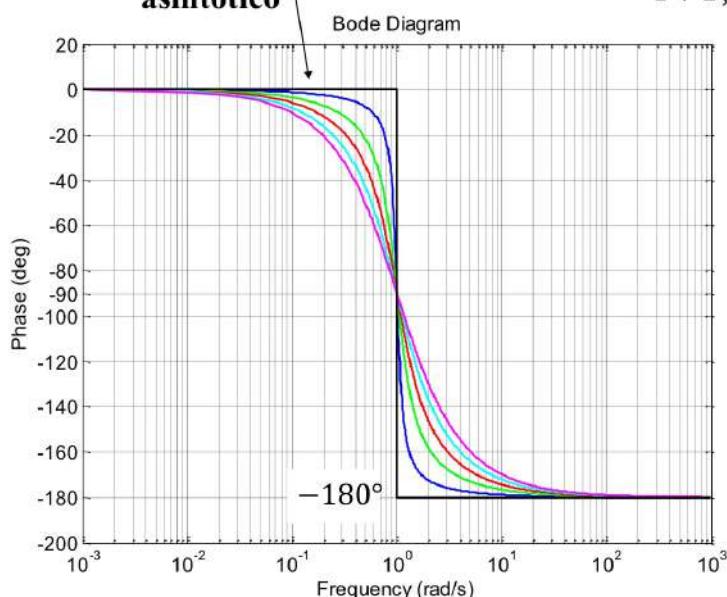
$$\xi = -0.5$$

$$\xi = -0.7$$

$$\xi = -0.9$$

$$G(s) = \frac{1}{1+2\xi s + s^2} \quad \omega_n = 1$$

Diagramma asintotico



Poli a SX

$$\xi = 0$$

$$\xi = 0.1$$

$$\xi = 0.3$$

$$\xi = 0.5$$

$$\xi = 0.7$$

$$\xi = 0.9$$

8. Diagramma asintotico di Bode della fase :

regole per il tracciamento

guadagno poli o zeri nell'origine

1. valore iniziale $\mu - 90^\circ$

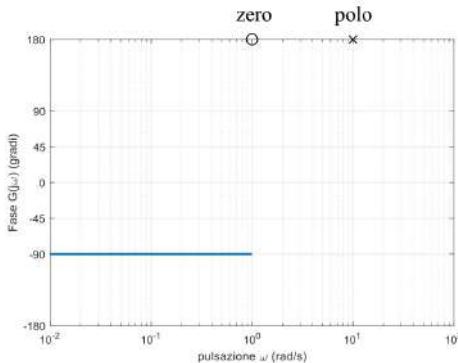
2. cambi di valore in corrispondenza di poli e zeri

	semipiano sinistro	semipiano destro
poli	-90°	$+90^\circ$
zeri	$+90^\circ$	-90°

Il guadagno è positivo e quindi dà contributo 0° .

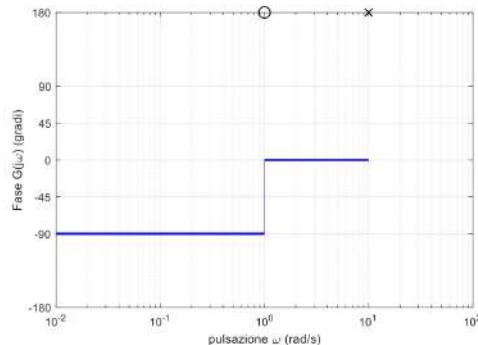
Il polo nell'origine dà contributo -90° .

Comincio a tracciare da SX e mi fermo quando incontro lo zero.



Lo zero è negativo e quindi dà contributo $+90^\circ$.

Continuo a tracciare e mi fermo ancora quando incontro il polo.



Esempio

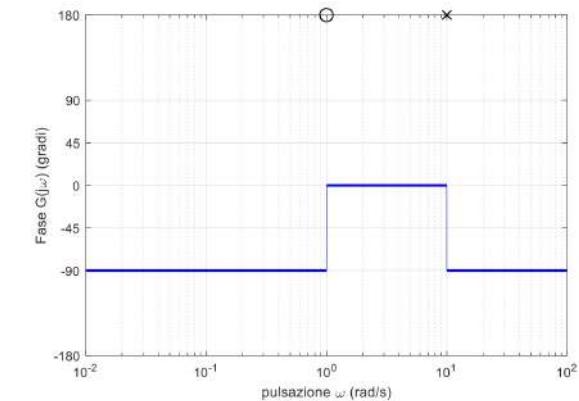
$$G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$$

Guadagno $\mu = 10$

Un polo nell'origine $\frac{1}{s}$

Uno zero reale in $-1 \rightarrow (1+s)$

Un polo reale in $-10 \rightarrow (1+0.1s)$



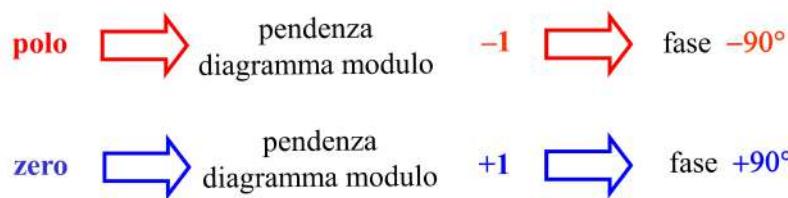
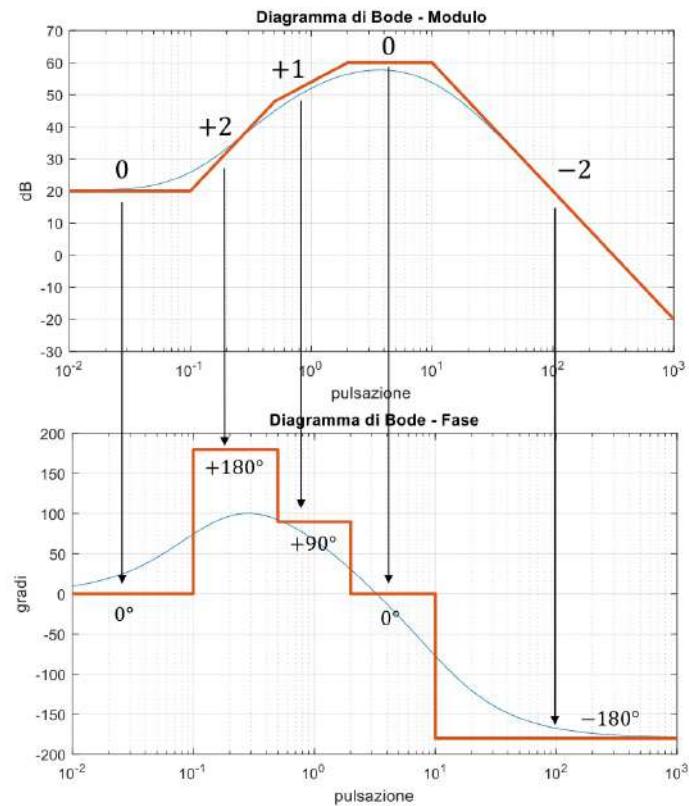
9. Sistemi a fase minima

Definizione

Un sistema dinamico LTI a tempo continuo si dice **a fase minima** se ha:

- guadagno positivo No sfasamento = 0 gradi
- tutti i poli e gli zeri con parte reale negativa o nulla
 $+90^{\circ}$ -90°

Sistema a fase minima



Dove fanno i poli?

CAP 5J

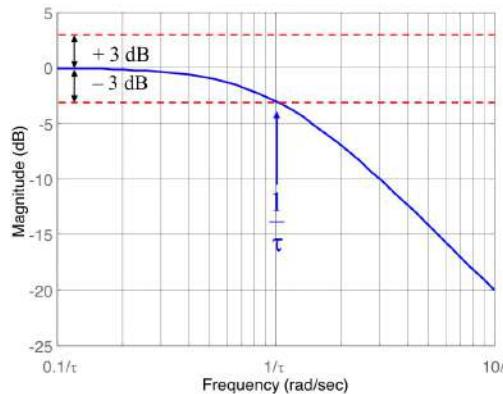
Filtro passa-basso

Lascia passare inalterate, o al più amplificate di un valore costante, le armoniche del segnale in ingresso con pulsazione inferiore od uguale ad un valore $\bar{\omega}$ ed elimina le armoniche con pulsazione superiore.

Frequenza di taglio

L'intervallo di pulsazioni $[0, \bar{\omega}]$ si dice banda passante.

Esempio



$$G(s) = \frac{1}{1+s\tau} \quad \tau > 0$$

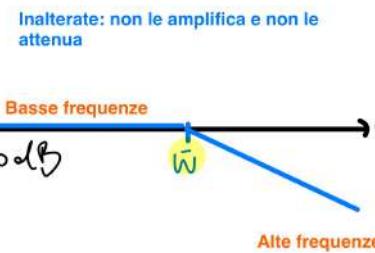
Banda passante

$$\omega \in \left[0, \frac{1}{\tau} \right]$$

Velocità di risposta



Aampiezza della banda passante



Banda passante di un filtro passabasso

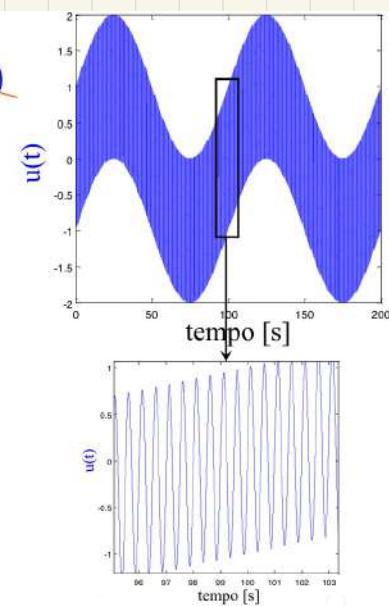
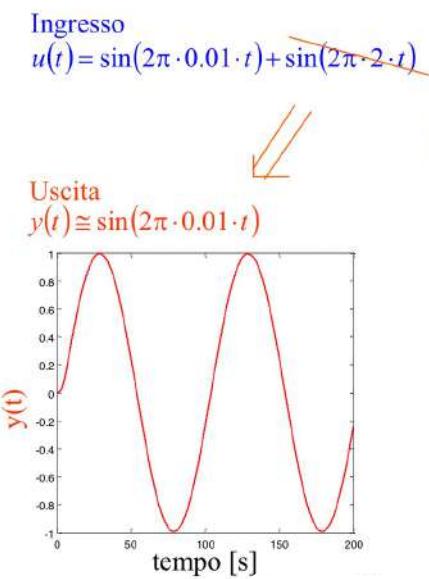
E' l'insieme dei valori di ω per cui vale la seguente condizione

$$-3 \text{ dB} \leq |G(j\omega)|_{dB} - |G(j0)|_{dB} \leq +3 \text{ dB}$$

Dipende dal valore del modulo nel tempo rispetto alla condizione iniziale

Ovvero

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2}$$



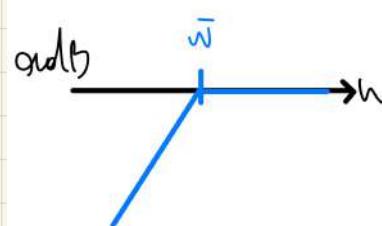
Filtro passa-alto

Lascia passare inalterate, o al più amplificate di un valore costante, le armoniche del segnale in ingresso con pulsazione superiore od uguale ad un valore $\bar{\omega}$ ed elimina le armoniche con pulsazione inferiore.

L'intervallo di pulsazioni $[\bar{\omega}, \infty]$ si dice banda passante.

In generale si tratta di sistemi non strettamente propri (perchè si vuole $|G(j\infty)| \neq 0$).

Poli = zeri



Banda passante di un filtro passa-alto

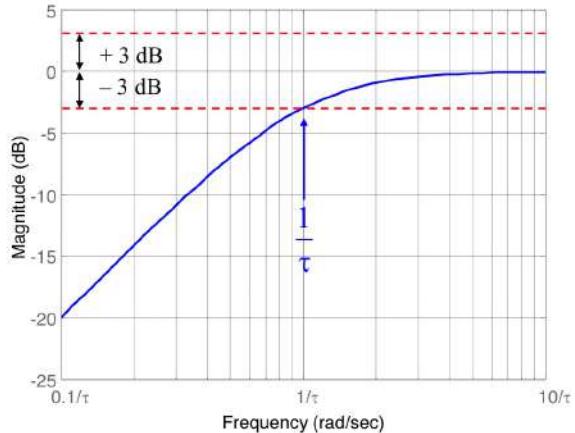
E' l'insieme dei valori di ω per cui vale la seguente condizione

$$-3 \text{ dB} \leq |G(j\omega)|_{dB} - |G(j\infty)|_{dB} \leq +3 \text{ dB}$$

Ovvero

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\infty)|} \leq \sqrt{2}$$

Esempio



1 polo = 1 zero

$$G(s) = \frac{s\tau}{1+s\tau} \quad \tau > 0$$

$$\mathcal{Z}_s = \frac{1}{s\tau}$$

Tipo lavora nella fase iniziale
 $-g20$

Banda passante

$$\omega \in \left[\frac{1}{\tau}, \infty \right]$$

1

0

-1

-2

-3

-4

-5

-6

-7

-8

-9

-10

-11

-12

-13

-14

-15

-16

-17

-18

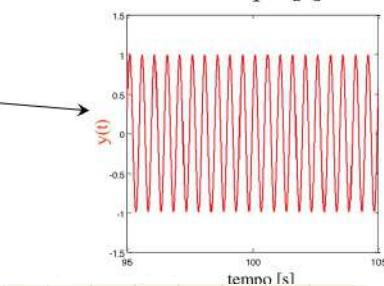
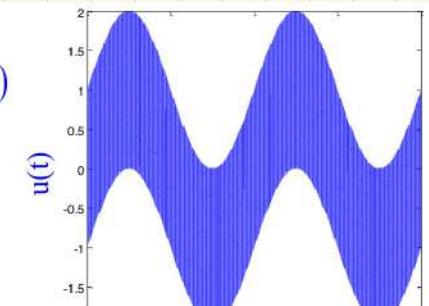
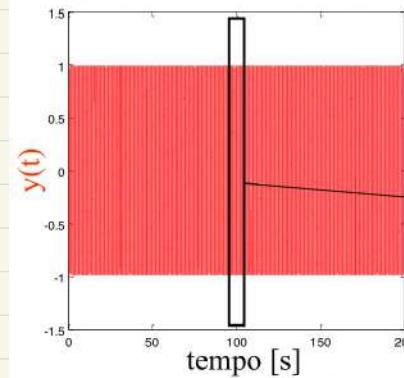
-19

-20

Esempio

Ingresso
 $u(t) = \sin(2\pi \cdot 0.01 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t)$

Uscita
 $y(t) \cong \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t)$



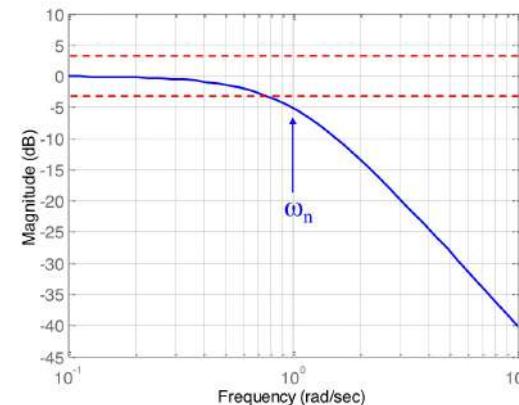
4. Risonanza

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Per bassi valori dello smorzamento, le componenti armoniche del segnale in ingresso con pulsazione vicina a ω_n vengono amplificate.

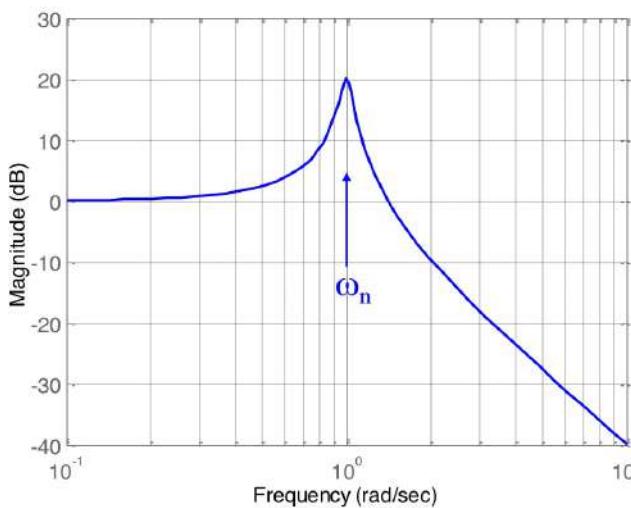
Per $\xi \geq 0.4 \div 0.5$

E' un filtro passabasso con banda passante $\omega \cong [0, \omega_n]$

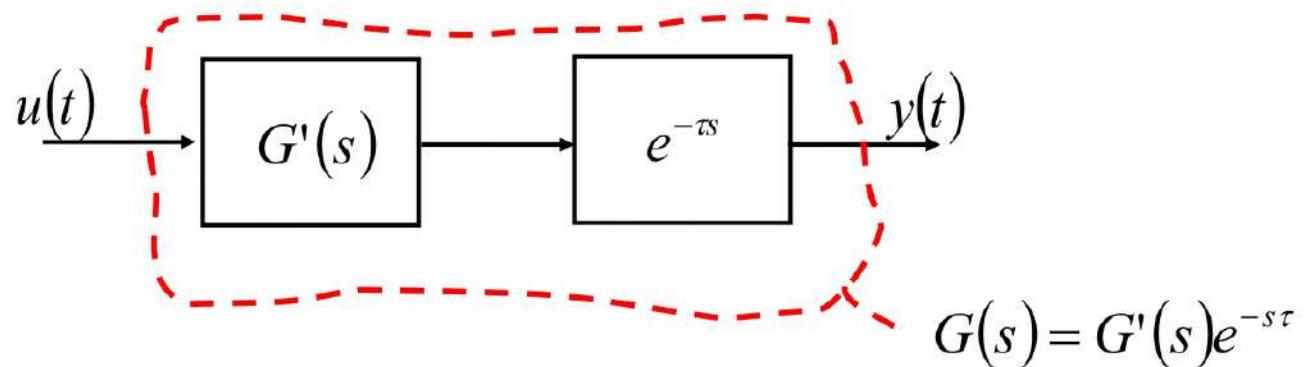


Per $\xi < 0.4$

Si ha risonanza (amplificazione selettiva)



Sistemi con ritardo



modulo

$$|G(j\omega)| = |G'(j\omega)| |e^{-j\omega\tau}| = |G'(j\omega)| \quad \text{Non altera il modulo}$$

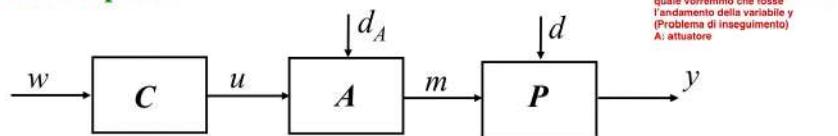
fase

$$\angle G(j\omega) = \angle G'(j\omega) - \omega\tau \frac{180}{\pi}$$

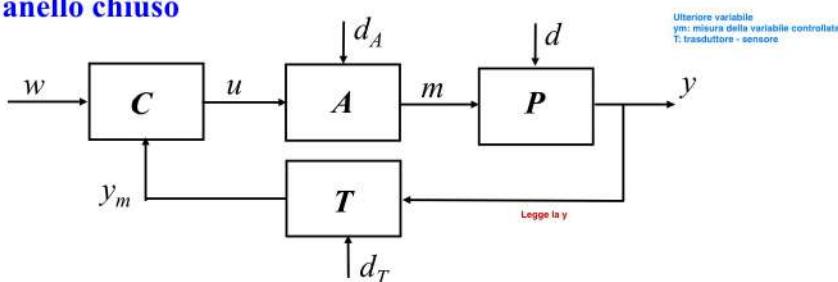
CAF XVII

Sistemi di controllo in anello aperto ed in anello chiuso

in anello aperto



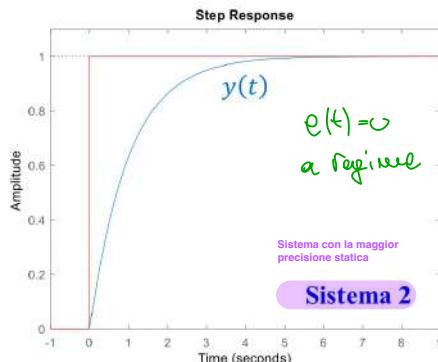
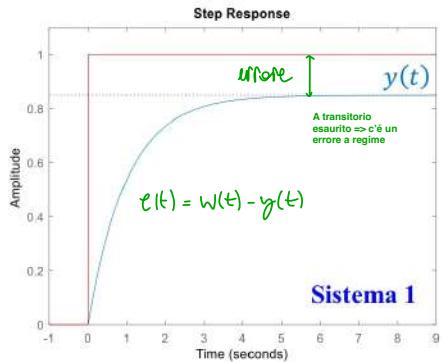
in anello chiuso



Nota su precisione statica e precisione dinamica

Consideriamo le **risposte allo scalino unitario** di alcuni **sistemi di controllo**.

$$w(t) = sca(t)$$

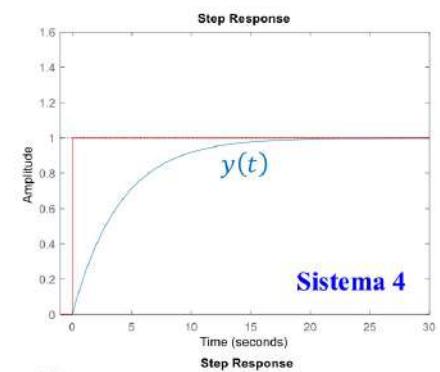
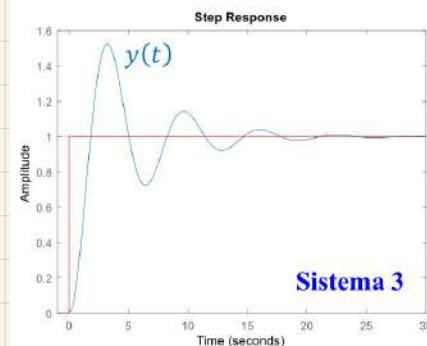


Chi ha maggiore **precisione statica**?

2. Requisiti di un sistema di controllo

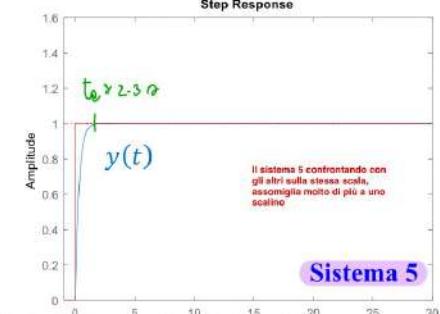
- stabilità indipendenza asintotica dalle condizioni iniziali, stabilità esterna
- precisione statica $y \sim w$ in condizioni di equilibrio
- precisione dinamica $y \sim w$ durante i transitori
- attenuazione disturbi $y \sim w$ anche in presenza di disturbi
- moderazione u "piccola" in tutte le situazioni di interesse
- robustezza garanzia delle precedenti proprietà anche in presenza di incertezza sul modello

Insegue, si avvicina a, assomiglia a



Chi ha maggiore precisione dinamica?

Validazione durante il transitorio:
- velocità (tempo assorbimento)
- smorzamento
Il migliore è il sistema 5



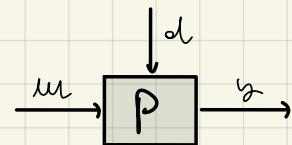
3. Analisi e sintesi di un sistema di controllo

Problema di analisi

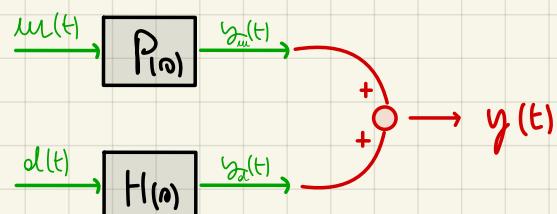
dati i modelli di P, A, T, C
 1 2 3 4 → valutare le prestazioni
 5

Problema di sintesi

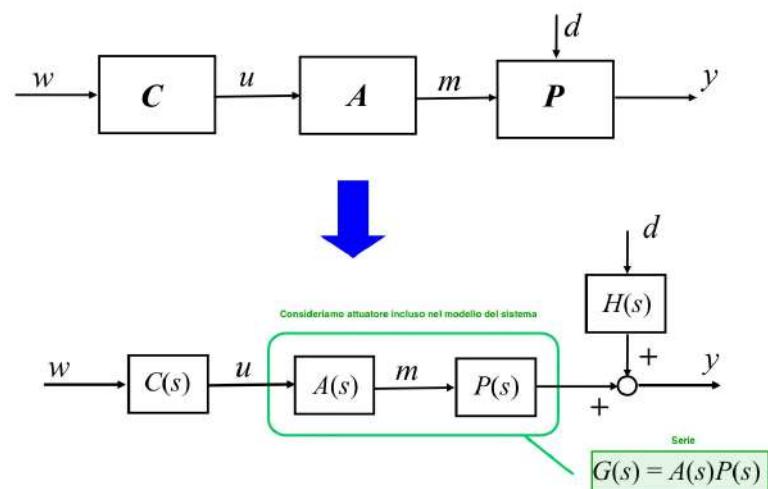
dati i modelli di P, A, T
 + 1 2 3 → determinare il controllore C
 specifiche di progetto
 4
 5



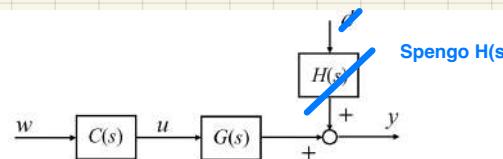
Se io presuppongo che le relazioni tra gli ingressi e le uscite siano descritte da modelli LTI ⇒ applico il principio di sovrapposizione degli effetti



4. Sistema di controllo in anello aperto



Sovrapposizione degli effetti



$$y = w$$

Funzione di trasferimento

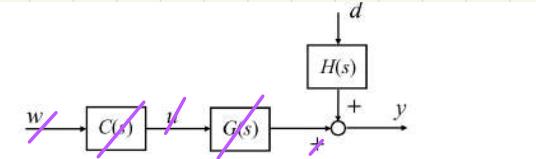
$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s)$$

prestazioni ideali

~ 1 "passa-tutto"

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s)$$

~ 0 "passa-niente"



$$\gamma = \dots$$

Disturbo

prestazioni ideali

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s)$$

~ 1 "passa-tutto"

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s)$$

~ 0 "passa-niente"

4.1 Progetto ideale (in anello aperto)

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s) = 1$$



$$C(s) = G(s)^{-1}$$

Modello inverso

$$G(s)^{-1}G(s) = 1$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s)$$



Non si può fare nulla

4.2 Limitazioni (in anello aperto)

1. Cancellazioni poli/zeri con $Re \geq 0$

Esempio

$$G(s) = \frac{1+s}{1-s} \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

cancellazione illecita (dinamica "nascosta" instabile)



E' impossibile stabilizzare un sistema instabile
usando una strategia in anello aperto

2. Realizzabilità

Discussiamo questo problema mediante alcuni esempi

Esempio 1

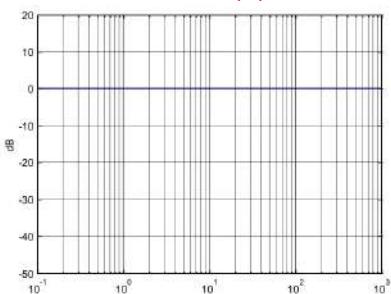
$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)} \rightarrow C_0(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{1+s}$$

non realizzabile (2 zeri e 1 polo)

Sistema improprio

$$F_0(s) = C_0(s)G(s) = 1$$

passa-tutto



Esempio 2

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)} \rightarrow C_1(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{(1+s)(1+0.01s)}$$

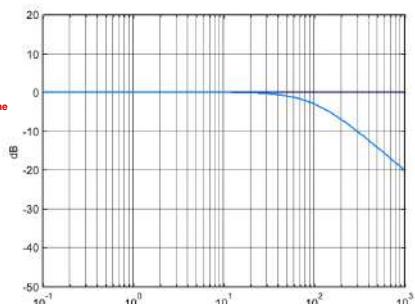
Aggiungiamo un polo in alta frequenza

$$F_1(s) = C_1(s)G(s) =$$

$$= \frac{1}{1+0.01s}$$

Sopravvive il polo che abbiamo introdotto

passa-basso con $B \cong [0, 100]$



Esempio 3

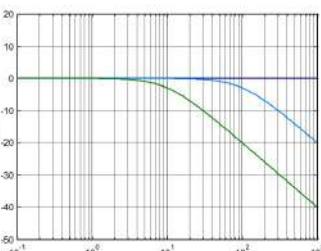
Inserisco solo quello che voglio cancellare

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)} \rightarrow C_2(s) = \frac{0.1(1+2s)}{(1+s)}$$

realizzabile

$$F_2(s) = C_2(s)G(s) = \frac{1}{1+0.1s}$$

passa-basso con $B \cong [0, 10]$



Esempio 4

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)} \rightarrow C_3(s) = 0.1$$

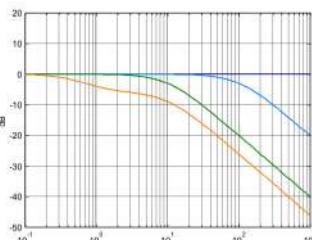
Adatto solo il guadagno

$$C_3(s) = 0.1$$

realizzabile

$$F_3(s) = C_3(s)G(s) = \frac{(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

passa-basso con $B \cong [0, 0.5]$



Si può ottenere un controllore realizzabile riducendo la banda passante, cioè:

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s) \sim 1 \text{ "passa-tutto"}$$

ma solo fino ad una certa ω_{BP}

Riusciamo ad avere come guadagno 1 solo fino a una certa frequenza di taglio

3. Scarsa robustezza

Discussiamo questo problema mediante un esempio

Esempio

$$G(s) = \frac{(10 \pm \Delta)(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

C₃(s) = 0.1

$$F_3(s) = C_3(s)G(s) = (1 \pm 0.1\Delta) \frac{(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

guadagno diverso da 1

Se c'e' incertezza si corre il rischio di non ottenere le prestazioni ideali qualunque sia la banda di frequenza desiderata

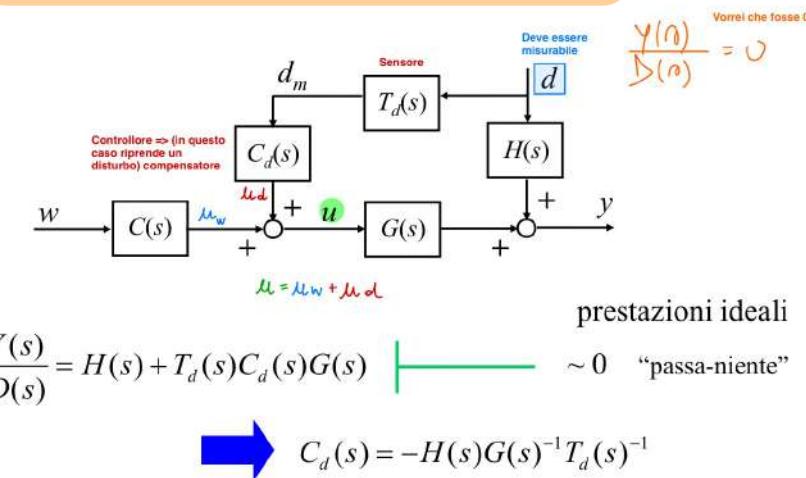
$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s)$$

|————— ~ 1 “passa-tutto”

Mai!

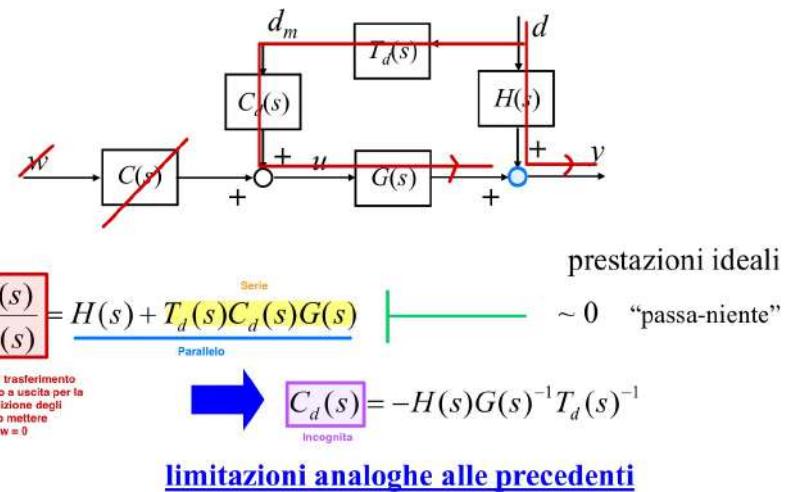
Nemmeno “a pulsazione nulla”

4.3 Compensazione in anello aperto del disturbo



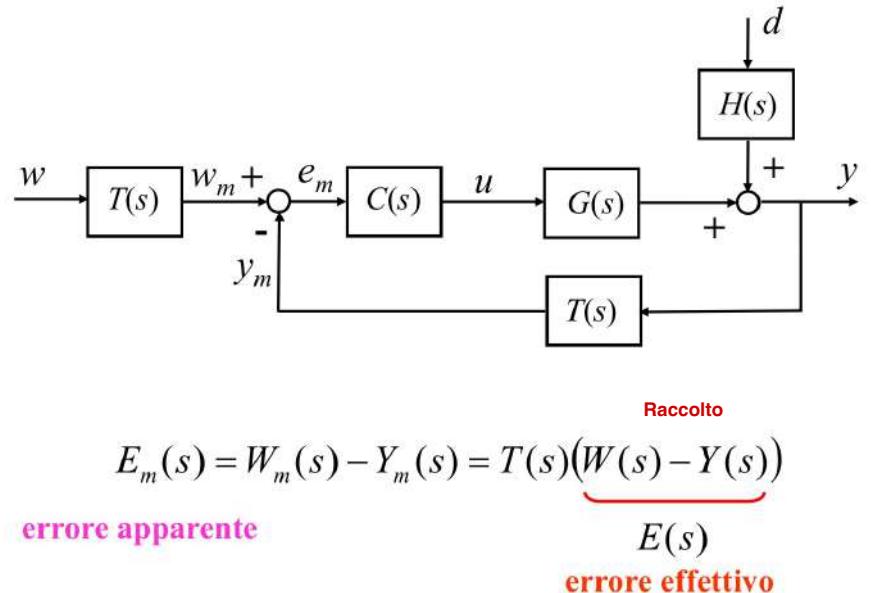
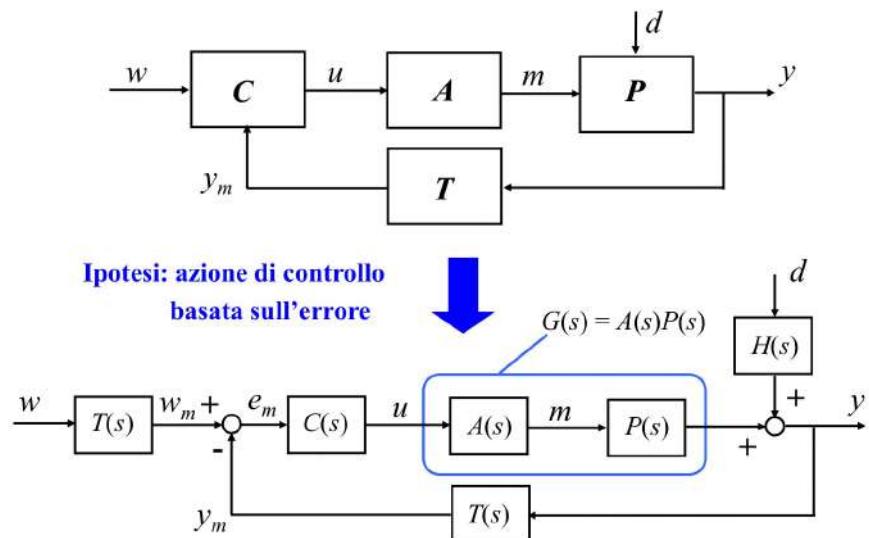
limitazioni analoghe alle precedenti

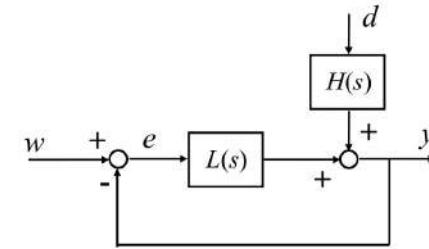
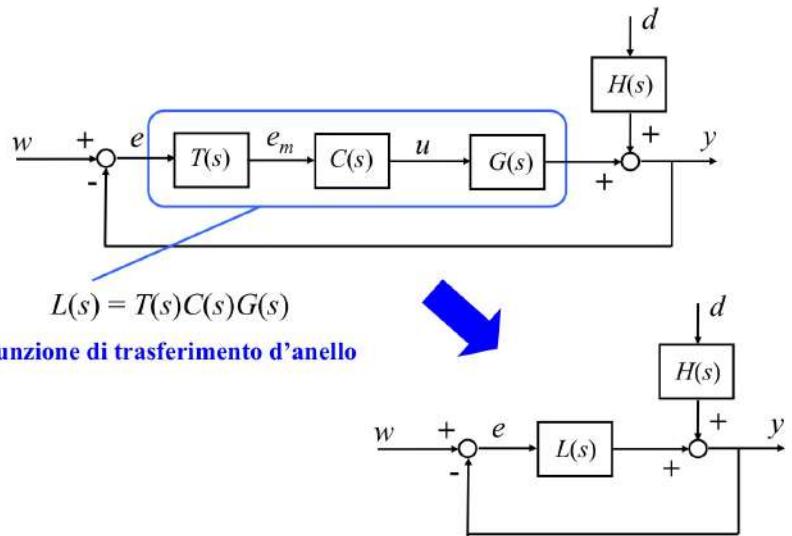
4.3 Compensazione in anello aperto del disturbo



limitazioni analoghe alle precedenti

5. Sistema di controllo in anello chiuso





prestazioni ideali

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

~ 1 "passa-tutto"

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s)}{1+L(s)}$$

~ 0 "passa-niente"

Ottenere queste prestazioni ideali in senso stretto è impossibile. Ma ...

$$\frac{x}{1+x} = 1$$

Se $L(s) \gg 1$

$$|L(j\omega)|_{dB} \gg 0 dB$$

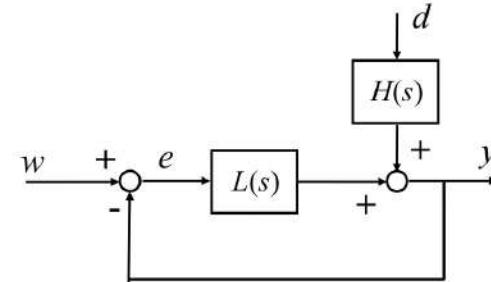
$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} \sim 1 \text{ "passa-tutto"}$$

Non avremo mai 1 ma per valori molto grandi di L(s) ci avviciniamo a 1

Se $L(s) \gg H(s)$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s)}{1+L(s)} \sim 0 \text{ "passa-niente"}$$

5.1 Analisi di sistemi retroazionati



stabilità di $H(s)$

• asintotica stabilità

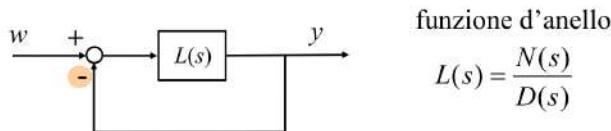
+ stabilità di $\frac{L(s)}{1+L(s)}$

• prestazioni

→ studio di $\frac{Y(s)}{W(s)}$ e $\frac{Y(s)}{D(s)}$

CAP XVIII

1. Stabilità di sistemi retroazionati



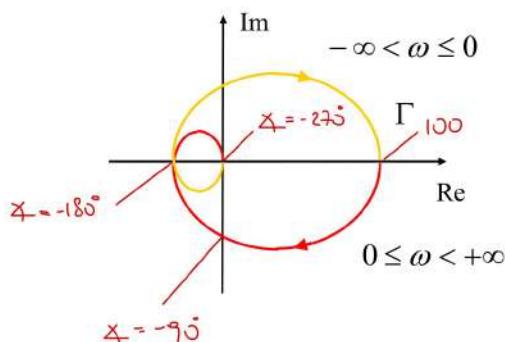
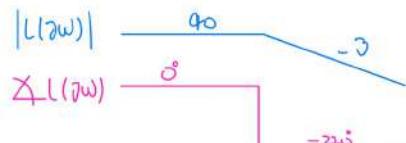
$$\frac{Y(s)}{W(s)} = F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$$

polinomio caratteristico
in anello chiuso

asintotica stabilità \leftrightarrow tutte le radici di
 $D(s) + N(s) = 0$
 hanno $\text{Re} < 0$

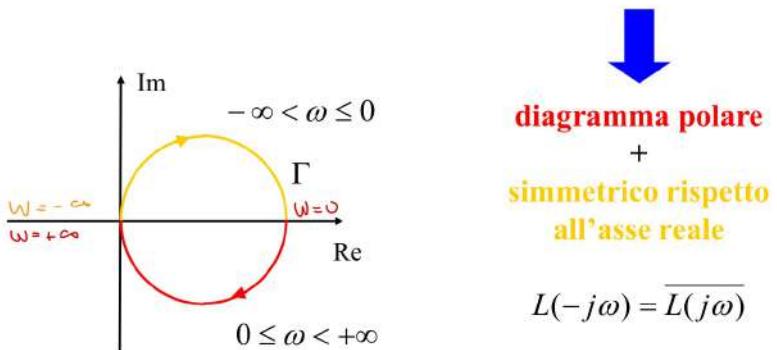
Esempio 1

$$L(s) = \frac{100}{(1+s)^3}$$

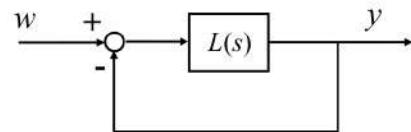


2. Diagramma di Nyquist

Il diagramma di Nyquist Γ di $L(s)$ è la curva chiusa, nel piano complesso, di $L(j\omega)$ per $-\infty < \omega < +\infty$, orientato per ω crescenti



3. Criterio di Nyquist



Γ diagramma di Nyquist associato a $L(s)$

N numero di giri antiorari di Γ intorno al punto -1

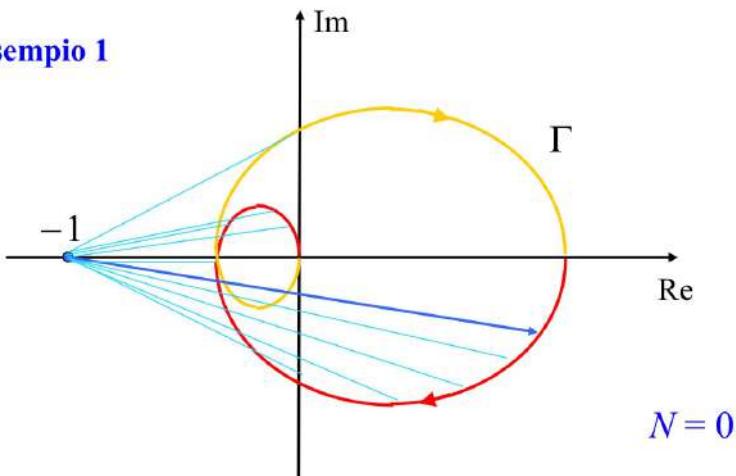
P numero di poli di $L(s)$ con $\text{Re} > 0$

asintotica stabilità
(del sistema retroazionato) \leftrightarrow $\begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$

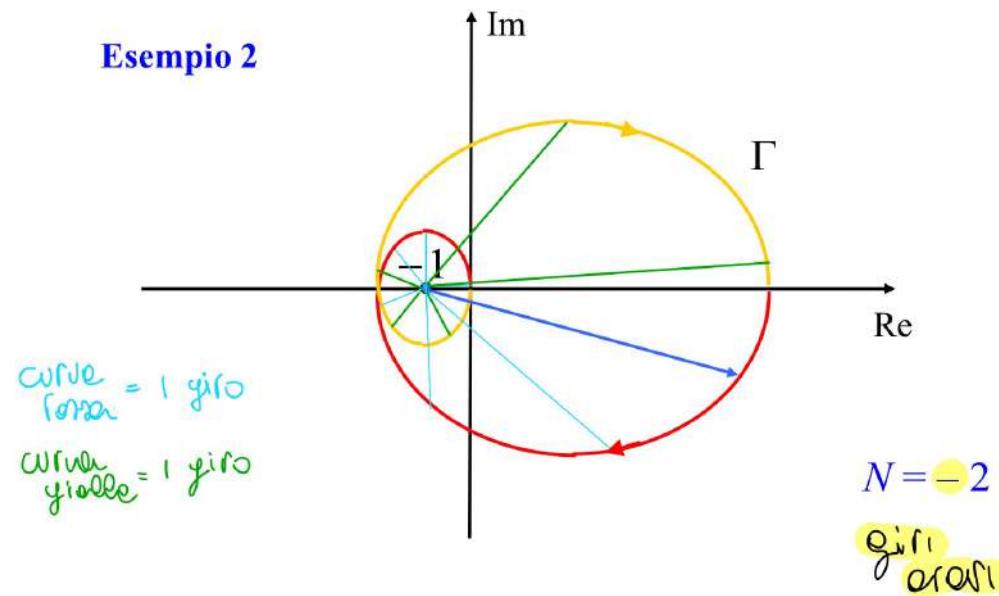
Osservazione 1

Come si valuta N ?

Esempio 1



Esempio 2

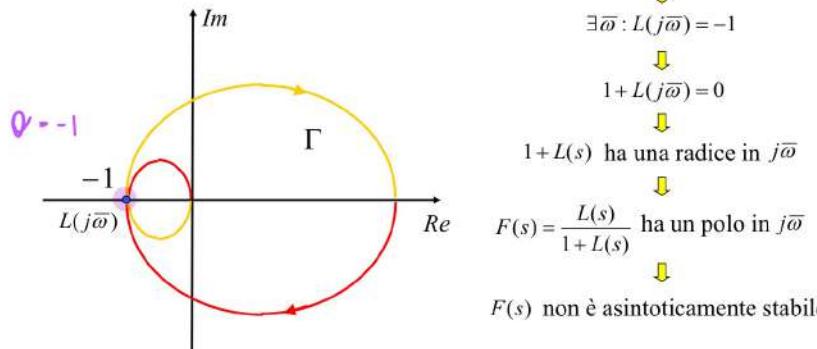


Osservazione 2

N non ben definito \Rightarrow non asintoticamente stabile

-1 non sta né dentro né fuori ma viene attraversato dalla curva

Dimostrazione



N non ben definito

$$\exists \bar{\omega} : L(j\bar{\omega}) = -1$$

$$1 + L(j\bar{\omega}) = 0$$

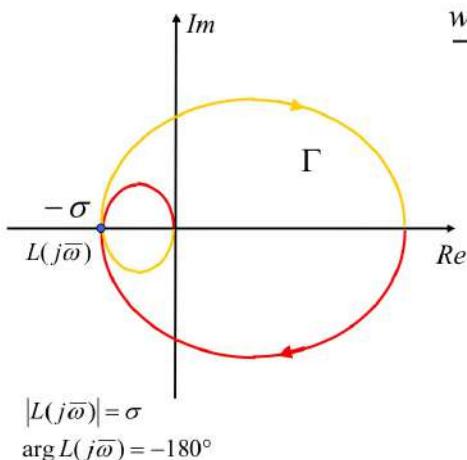
$1 + L(s)$ ha una radice in $j\bar{\omega}$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$F(s)$ non è asintoticamente stabile

Osservazione 3

Giustificazione intuitiva del criterio nel caso $P = 0$



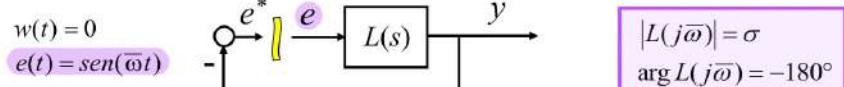
$$\begin{aligned} -\sigma &= \text{modulo} \\ \vartheta &= -1 \end{aligned}$$

Osservazione 4

$N < 0$ instabile
cioè, giri orari intorno a -1

Dimostrazione

poiché P è un numero positivo o nullo
necessariamente risulta $N \neq P$

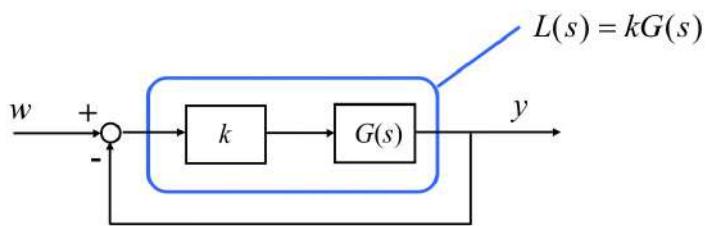


$$\begin{aligned} y(t) &= |L(j\bar{\omega})| \sin(\bar{\omega}t + \arg L(j\bar{\omega})) = \\ &= \sigma \sin(\bar{\omega}t - 180^\circ) = -\sigma \sin(\bar{\omega}t) \end{aligned}$$

$e^*(t) = -y(t) = \sigma \sin(\bar{\omega}t)$

$N \neq P = 0$	$\sigma > 1$	instabilità
$N = P = 0$	$\sigma < 1$	asintotica stabilità
N non definito	$\sigma = 1$	semplificata stabilità (solo in questo caso)

4. Estensioni del criterio di Nyquist

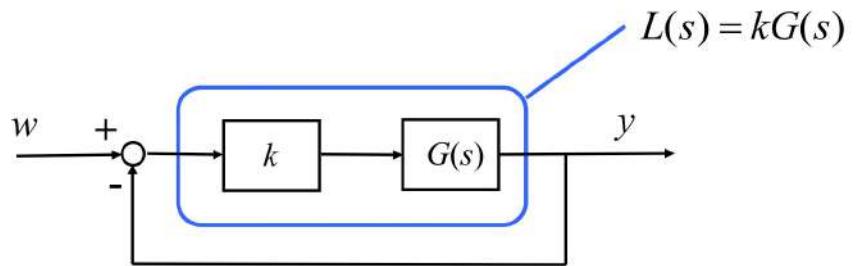


Γ_L diagramma di Nyquist associato a $L(s)$

N_L numero di giri antiorari di Γ_L intorno al punto -1

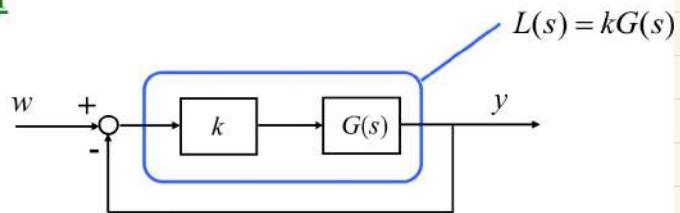
P_L numero di poli di $L(s)$ con $\text{Re} > 0$

$$\text{asintotica stabilità} \iff \begin{cases} N_L \text{ ben definito} \\ N_L = P_L \end{cases}$$



- Il diagramma di Nyquist associato a $L(s)$ è identico a quello associato a $G(s)$ a meno del fattore di scala k
- I poli di $L(s)$ coincidono con quelli di $G(s)$

Estensione 1



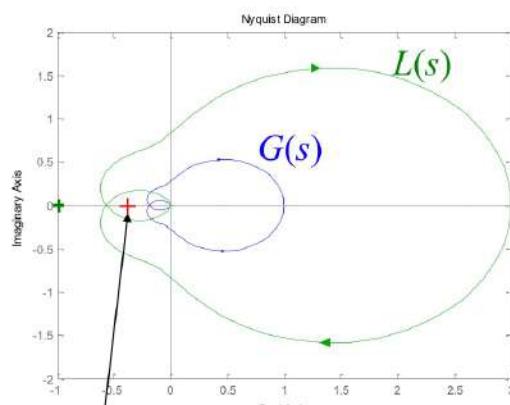
Γ diagramma di Nyquist associato a $(G(s))$

N numero di giri antiorari di Γ intorno al punto $(-1/k)$

P numero di poli di $(G(s))$ con $\text{Re} > 0$

$$\text{asintotica stabilità} \iff \begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$$

Esempio



$$-\frac{1}{k}$$

Funzione d'anello

$$L(s) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(s^2 + 0.5s + 1)(10s + 1)}$$

$$P = 0$$

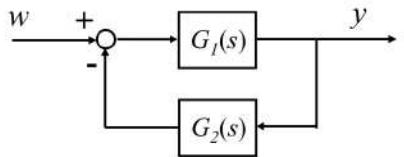
Dal grafico

$$N = 0$$

$$\begin{aligned} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{aligned}$$

Sistema (in anello chiuso)
asintoticamente stabile

Estensione 2

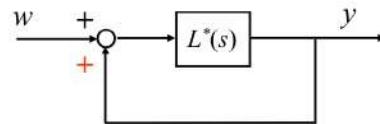


$$\frac{Y(s)}{W(s)} = F(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

$\underbrace{}_{L(s)}$

→ tutto invariato, con riferimento a $L(s)$

Estensione 3



retroazione positiva

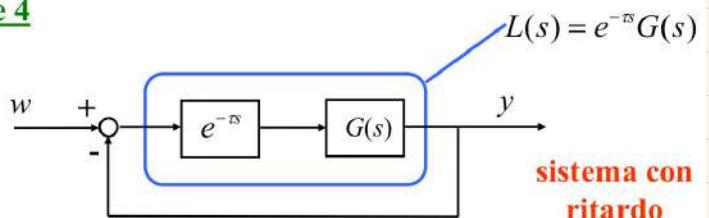
Γ diagramma di Nyquist associato a $L^*(s)$

N numero di giri antiorari di Γ intorno al punto $(+1)$

P numero di poli di $L^*(s)$ con $\operatorname{Re} > 0$

asintotica stabilità $\iff \begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$

Estensione 4



sistema con ritardo

Γ diagramma di Nyquist associato a $L(s)$

N numero di giri antiorari di Γ intorno al punto -1

P numero di poli di $G(s)$ con $\operatorname{Re} > 0$

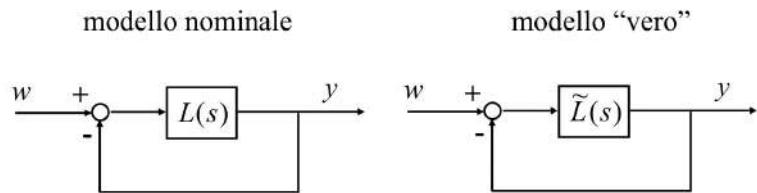
Ci da solo la stabilità esterna e non l'asintotica stabilità

stabilità esterna

Uscite limitate a fronte di ingressi limitati

→ $\begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$

1. Stabilità di sistemi retroazionati incerti



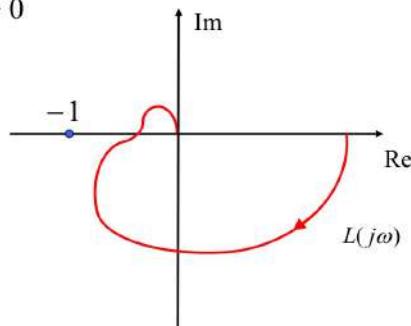
in generale $\tilde{L}(s) \neq L(s)$

stabilità robusta = garanzia di stabilità anche
in presenza di incertezza

Anche se ci sono
incertezze =>
asintoticamente stabile

Ipotesi

- modello nominale asintoticamente stabile in anello chiuso
- $L(s)$ non ha poli con $\text{Re} > 0$



Per il Criterio di Nyquist

asintotica stabilità $\leftrightarrow N = 0$

2. Indicatori di stabilità robusta

Sono parametri che misurano:

- l’ampiezza delle perturbazioni per cui è garantita la stabilità
- la “distanza” del modello nominale dall’instabilità

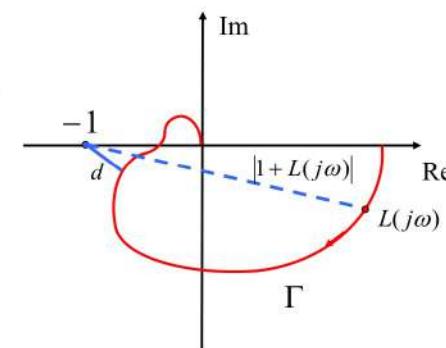
Un indicatore di robustezza

Margine di stabilità vettoriale

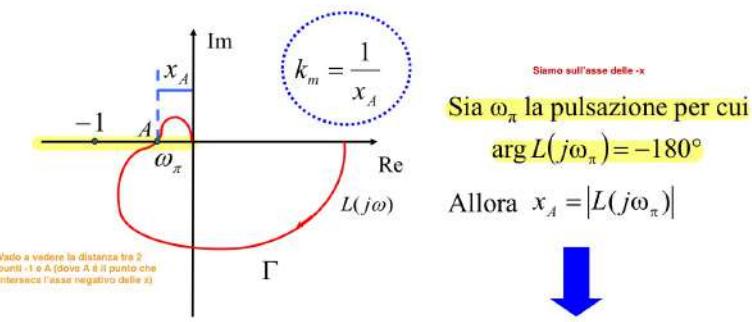
d distanza di Γ dal punto -1

$$d = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$$

Distanza minima. Più d è grande maggiore sarà la robustezza di questa stabilità



3. Margine di guadagno

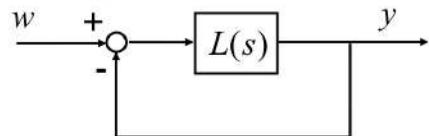


Se $k_m > 1$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

Henry

Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3}$$

Calcolare analiticamente il margine di guadagno

Si calcoli ω_π

$$\arg L(j\omega_n) = -180^\circ$$

$$\rightarrow -3\arctg(\omega_{\pi}) = -180^\circ$$

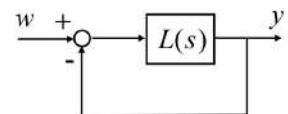
$$\omega_{\pi} = \tan(60^\circ) = \sqrt{3} \text{ rad/s}$$

Si valuti il margine di guadagno

$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \frac{|1 + j\omega_\pi|^3}{10} = \frac{(\sqrt{1+3})^3}{10} = \frac{4}{5} \quad k_m < 1 \quad \text{Sistema instabile}$$

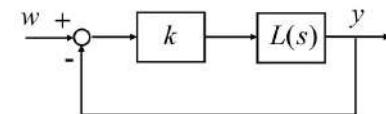
Interpretazione

modello nominale



$$\begin{array}{l} k_m > 1 \\ \text{(quindi } x_A < 1\text{)} \end{array}$$

modello “vero”



E' asintoticamente stabile per tutti i valori di k tali che

$$0 < k < k_m$$

(infatti bisogna guardare i giri intorno
 $a -\frac{1}{k}$ e $\frac{1}{k} > \frac{1}{k_-} = x_A$)

k_m è un indicatore di robustezza rispetto a incertezze sul guadagno d'anello

$$L(s) = \frac{1}{(1+s)^s} \quad \longrightarrow \quad L(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^s}$$

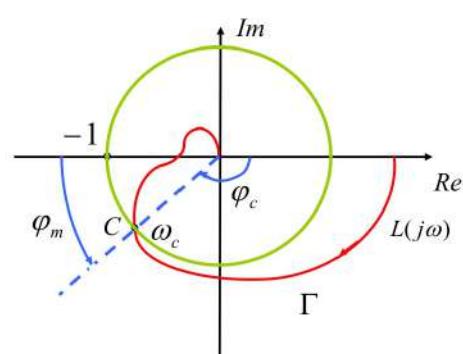
FASE !

$$\begin{aligned} X_L(j\omega) &= X(0) - \frac{1}{j} (1 + j\omega)^3 \\ &= 0 - \frac{1}{j} (1 + j\omega) \\ &= -\frac{1}{j} (1 + j\omega) \end{aligned}$$

option $\left(\frac{Im}{Re} \right)$

Non è sempre possibile calcolare analiticamente il margine di guadagno

4. Margine di fase



Se $\varphi_m > 0^\circ$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile

Sia ω_c la pulsazione per cui $|L(j\omega_c)| = 1$
 ω_c si dice **pulsazione critica**

Sia $\varphi_c = \angle L(j\omega_c)$
 φ_c si dice **fase critica**

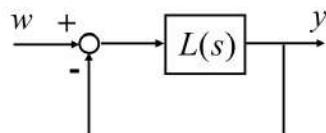
Si definisce **margine di fase**

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$$

Angolo complementare

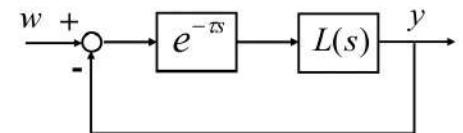
Interpretazione

modello nominale



$$\varphi_m > 0^\circ$$

modello "vero"



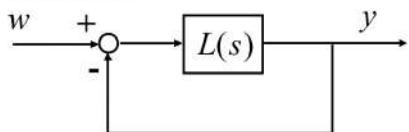
asintoticamente stabile se

$$\omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} < \varphi_m$$

$$\text{ovvero } \tau < \frac{\varphi_m}{\omega_c} \frac{\pi}{180^\circ}$$

φ_m è un indicatore di robustezza rispetto a incertezze sul ritardo d'anello

Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+2s)}$$

Calcolare analiticamente il margine di fase

Si calcoli ω_c

$$|L(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \frac{10}{|1 + j\omega_c||1 + j2\omega_c|} = 1 \rightarrow \sqrt{1 + \omega_c^2} \sqrt{1 + 4\omega_c^2} = 10$$

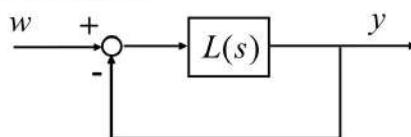
$$\rightarrow 4\omega_c^4 + 5\omega_c^2 + 1 = 100 \rightarrow \omega_c \approx 2.095 \text{ rad/s}$$

Si valuti il margine di fase

$$\varphi_c = \angle L(j\omega_c) = -\arctg(\omega_c) - \arctg(2\omega_c) \approx -64.5^\circ - 76.6^\circ = -141.1^\circ$$

$\varphi_m = 38.9^\circ$ Sistema asintoticamente stabile

Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3(1+5s)}$$

Calcolare analiticamente il margine di fase

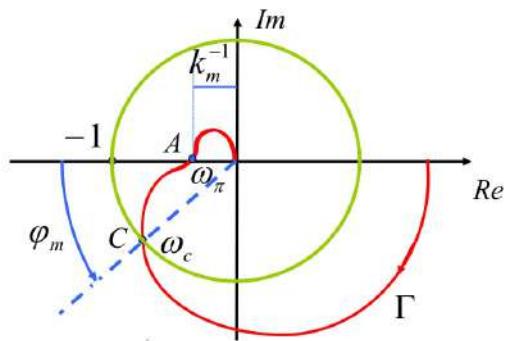
Si calcoli ω_c

$$|L(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \frac{10}{|1 + j\omega_c|^3 |1 + j5\omega_c|} = 1 \rightarrow \left(\sqrt{1 + \omega_c^2}\right)^3 \sqrt{1 + 25\omega_c^2} = 10$$

$$\rightarrow (\omega_c^2 + 1)^3 (25\omega_c^2 + 1) = 100 \rightarrow ?$$

Non è sempre possibile calcolare analiticamente il margine di fase

Riassumendo



Devono intersecare il grafico in:

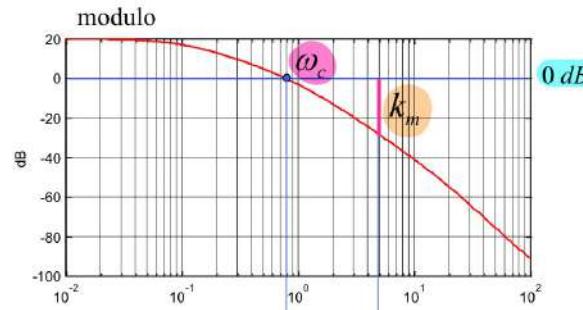
margine di guadagno $k_m = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$

$$\Im L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

margine di fase $\varphi_m = 180^\circ - |\Im L(j\omega_c)|$

$$|L(j\omega_c)|_{dB} = 0 \text{ dB}$$

Valutazione dai diagrammi di Bode



margine di guadagno

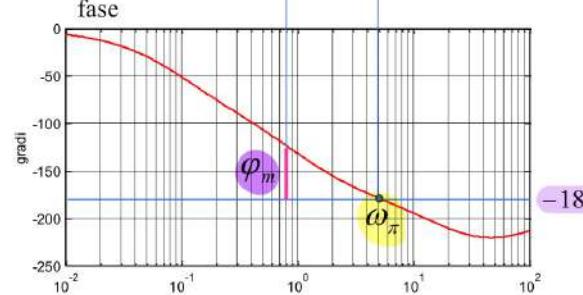
$$\omega_c \approx 5 \text{ rad/s}$$

$$k_m \approx 30 \text{ dB} = \frac{30}{10} = 10^{20} \approx 32$$

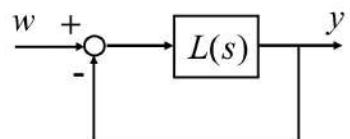
margine di fase

$$\omega_c \approx 0.8 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m \approx 60^\circ$$



5. Criterio di Bode



φ_m margine di fase

μ guadagno d'anello

Condizioni di applicabilità

- $P = 0$ Per forza
- il diagramma di Bode del **modulo** associato a $L(s)$ attraversa una sola volta l'asse a **0 dB**

Se non vengono soddisfatte devo applicare altro

asintotica stabilità
del sistema retroazionato

$$\begin{array}{l} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0^\circ \end{array}$$

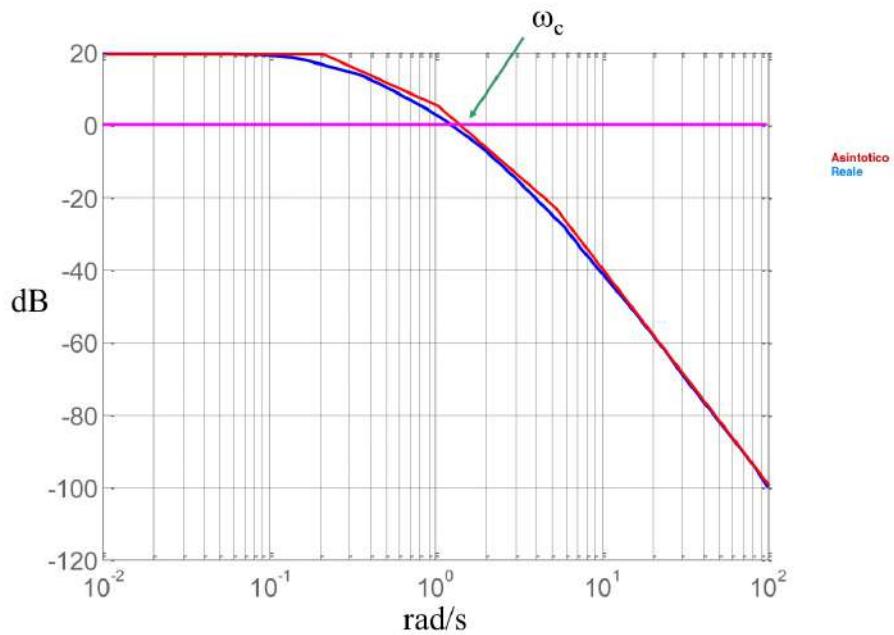
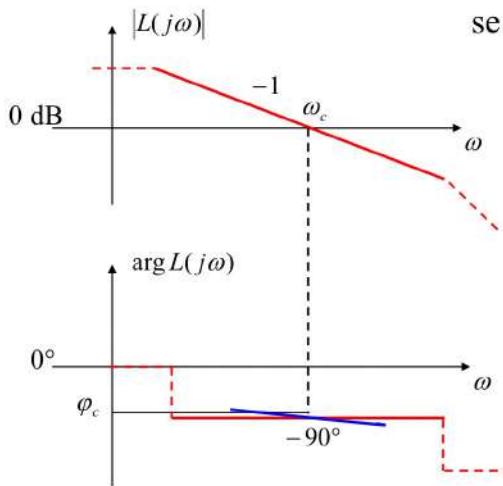
6. Utilizzo del criterio di Bode per sistemi a fase minima

$L(s)$ a fase minima

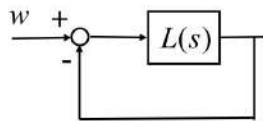
- poli e zeri hanno parte reale negativa
- il guadagno μ è positivo



- la condizione $\mu > 0$ è soddisfatta
- i diagrammi asintotici di Bode di modulo e fase hanno forti legami (dove il modulo ha pendenza $-k$ la fase vale circa $-k 90^\circ$)



Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+5s)(1+s)(1+0.2s)}$$

Giudicare la stabilità mediante il criterio di Bode (se applicabile).

- $P = 0$
- il diagramma di Bode del modulo associato a $L(s)$ attraversa una sola volta l'asse a 0 dB

Il criterio di Bode è applicabile.

Dal grafico $\omega_c \approx 1.4$ rad/s

$$\begin{aligned} \varphi_c &= -\text{atan}(5\omega_c) - \text{atan}(\omega_c) - \text{atan}(0.2\omega_c) = \\ &= -\text{atan}(5 \cdot 1.4) - \text{atan}(1.4) - \text{atan}(0.2 \cdot 1.4) = \\ &= -\text{atan}(7) - \text{atan}(1.4) - \text{atan}(0.28) = \\ &= -81.9^\circ \quad -54.5^\circ \quad -15.6^\circ = -152^\circ \end{aligned}$$

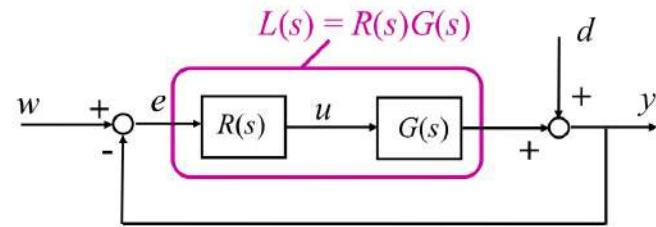
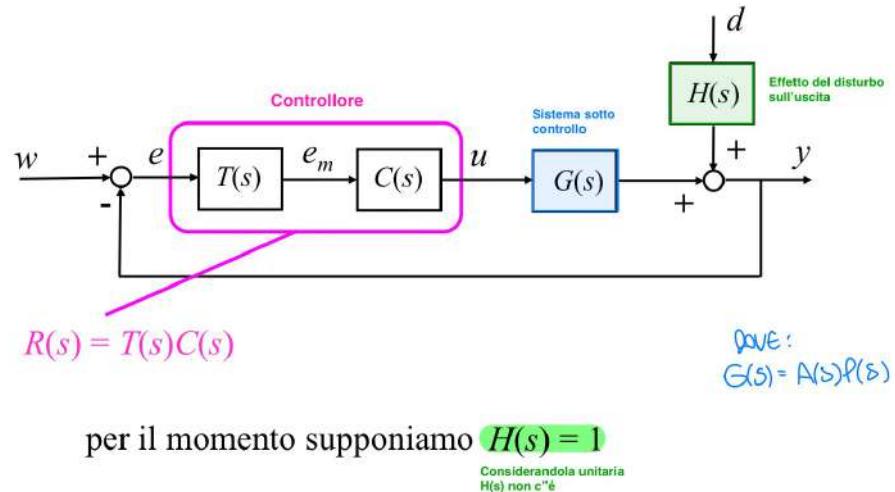
$$\varphi_m = 180^\circ - |-152^\circ| = 28^\circ$$

asintotica stabilità $\longleftrightarrow \begin{cases} \mu = 10 > 0 \\ \varphi_m = 28^\circ > 0 \end{cases}$

Valori esatti : $\omega_c = 1.2$ rad/s
 $\varphi_m = 35.1^\circ$

Cap XX

1. Funzioni di trasferimento in anello chiuso



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s)$$

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s)$$

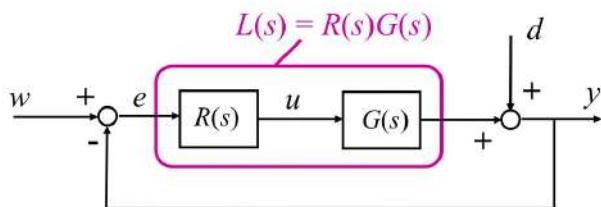
$$\frac{U(s)}{W(s)} = \frac{R(s)}{1 + L(s)} = Q(s)$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s)$$

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{1 + L(s)} = -S(s)$$

$$\frac{U(s)}{D(s)} = \frac{-R(s)}{1 + L(s)} = -Q(s)$$

2. Funzioni di sensitività



$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

funzione di sensitività complementare

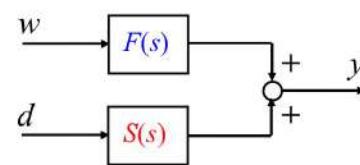
$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

funzione di sensitività

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

funzione di sensitività del controllo

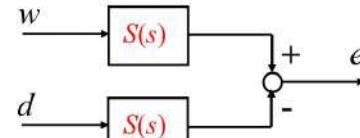
3. Rappresentazioni equivalenti



$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

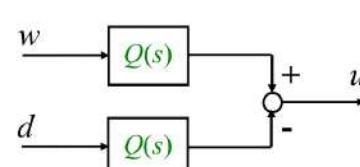
prestazioni
ideali

~ 1



$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

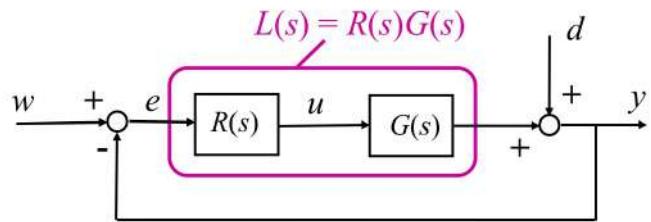
~ 0



$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

~ 0

Esempio



$$R(s) = \frac{10}{s}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$



$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

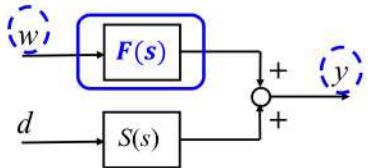
$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+2)}}{1+\frac{10}{s(s+2)}} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+\frac{10}{s(s+2)}} = \frac{s(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{10}{s}}{1+\frac{10}{s(s+2)}} = \frac{10(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$

CAP XXI

Funzione di sensitività complementare



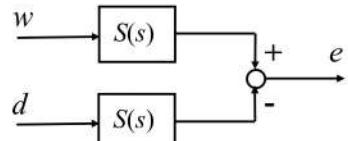
Lega il riferimento all'uscita, ci fornisce le prestazioni di inseguimento del sistema

prestazioni ideali

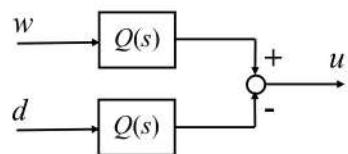
$$\sim 1$$

Vogliamo che y sia uguale a w

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$



$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \sim 0$$



$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \quad \sim 0$$

A transitorio finito l'uscita e riferimento sono uguali uguali

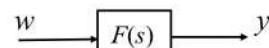
$$y(\infty) \Rightarrow \gamma = \omega$$

Con un mu molto grande \gg possiamo dire che il guadagno è all'incirca 1

Quando entro con uno scalino di ampiezza A l'uscita va a 0. Ho un derivatore

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{s^g + \mu} = \begin{cases} A & g > 0 \quad \Rightarrow \mu_F = 1 \\ A \frac{\mu}{1 + \mu} & g = 0 \quad \Rightarrow \mu_F \approx 1 \text{ se } \mu \gg 1 \\ 0 & g < 0 \end{cases}$$

1. Analisi statica di $F(s)$



$$L(s) = \frac{\mu}{s^g \prod_i (1 + s\tau_i)}$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad \text{Ingresso scalino} \quad w(t) = Asca(t)$$

Valore di regime della risposta allo scalino

Theo. valore finale

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \frac{A}{s} = A \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\mu}{1 + \mu}$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{s^g + \mu} = \begin{cases} A & g > 0 \quad \Rightarrow \mu_F = 1 \\ A \frac{\mu}{1 + \mu} & g = 0 \quad \Rightarrow \mu_F \approx 1 \text{ se } \mu \gg 1 \\ 0 & g < 0 \end{cases}$$

2. Poli e zeri di $F(s)$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}$$

$$F(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s) + N_L(s)}$$



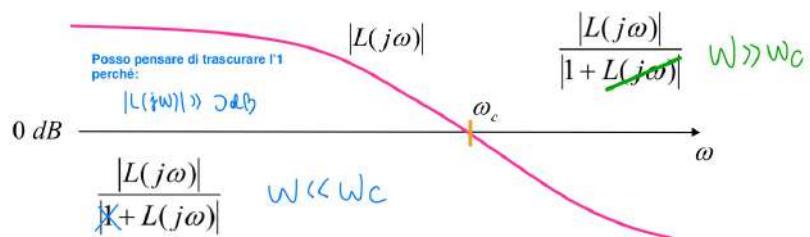
- gli zeri di $F(s)$ sono gli zeri di $L(s)$

- i poli di $F(s)$ sono le radici di $D_L(s) + N_L(s) = 0$

3. Risposta in frequenza di $F(s)$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & |L(j\omega)| \gg 1 \text{ = } 0 \text{ dB} \\ |L(j\omega)| & |L(j\omega)| \ll 1 \text{ = } 0 \text{ dB} \end{cases}$$



Conclusioni (dei punti 1,2,3)

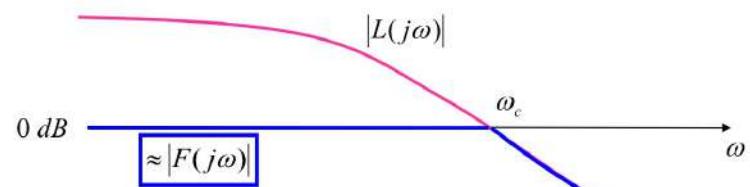
$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

- ✓ $F(s)$ è un **filtro passa-basso**
- ✓ la banda passante di $F(s)$ è $B_F \cong [0, \omega_c]$
- ✓ il guadagno di $F(s)$ è $\mu_F \cong 1$ in realtà $\begin{cases} \mu_F = 1 & \text{se } g > 0 \\ \mu_F = \frac{\mu}{1+\mu} & \text{se } g = 0 \end{cases}$
- ✓ i poli dominanti di $F(s)$ cadono in corrispondenza di ω_c

?

**poli dominanti reali o complessi?
se complessi, qual è il loro smorzamento?**

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & |L(j\omega)| \ll 1 \\ \omega > \omega_c \end{cases}$$

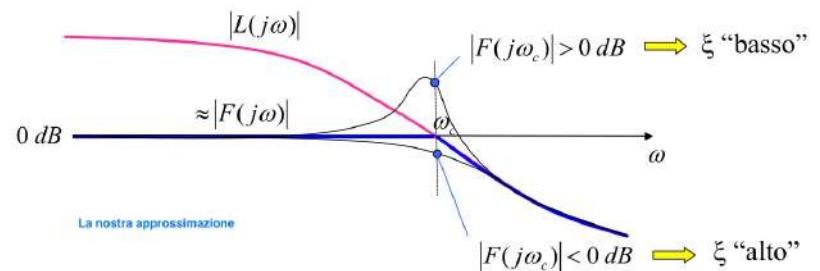


4. Poli dominanti di $F(s)$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad \text{i poli dominanti di } F(s) \text{ cadono in corrispondenza di } \omega_c$$

?

reali o complessi?
se complessi, smorzamento?



Conclusione (del punto 4)

Valutazione approssimata dello smorzamento dei poli dominanti di $F(s)$

Lo **smorzamento** dei poli dominanti di $F(s)$ vale

$$\xi \cong \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)$$

o anche, con ulteriori approssimazioni, per piccoli valori di φ_m

$$\xi \cong \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \cong \frac{\varphi_m}{2} \frac{\pi}{180^\circ} \cong \frac{\varphi_m}{100}$$

$$\xi \cong \frac{\varphi_m}{100}$$

E se non fossero complessi coniugati?

Regola empirica

$$\varphi_m \lesssim 75^\circ$$



poli dominanti complessi con

$$\omega_n \cong \omega_c$$

$$\xi \cong \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)$$

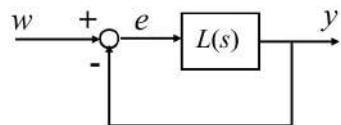
$$\varphi_m \gtrsim 75^\circ$$



polo dominante reale con

$$\tau \cong \frac{1}{\omega_c}$$

Esempio 1



$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

Per verificare i risultati, si calcoli la F

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+2)}}{1+\frac{10}{s(s+2)}} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{1}{1 + 0.2s + 0.1s^2}$$

Analisi statica

Risposta allo scalino $w(t) = A \text{ sca}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g=1 \quad \Rightarrow \quad y(\infty) = A \quad (\text{cioè } \mu_F = 1)$$

Verifica $\mu_F = F(0) = 1$

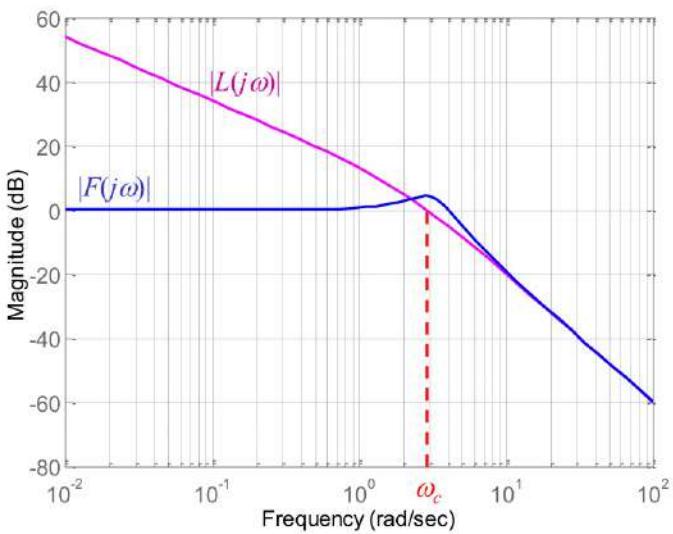
Poli & zeri

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad N_L(s) = 10 \quad D_L(s) = s(s+2)$$

$$N_L(s) + D_L(s) = s(s+2) + 10 = s^2 + 2s + 10$$

$$\text{Verifica} \quad F(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{N_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)}$$

Risposta in frequenza



Dal grafico ricavo $\omega_c \cong 2.9 \text{ rad/s}$ e
calcolo $\varphi_c \cong -145^\circ.4$ da cui $\varphi_m \cong 34^\circ.6$

Posso quindi ricavare dei valori approssimati per pulsazione naturale ω_n e smorzamento ξ dei poli dominanti in anello chiuso

$$\omega_n \cong \omega_c \cong 2.9 \text{ rad/s}$$

$$\xi \cong \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \cong 0.30$$

$$\xi \cong \frac{\varphi_m}{100} \cong 0.35$$

Valori esatti

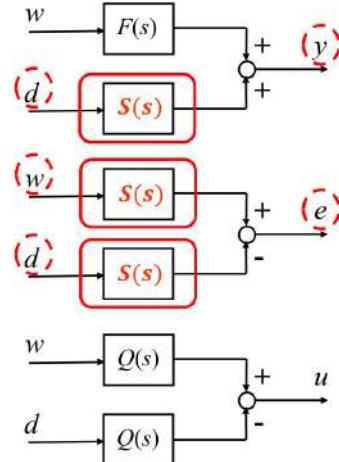
$$\xi = 0.32$$

$$\omega_n = 3.16 \text{ rad/s}$$

CAP XXII

Funzione di sensitività

Esprime l'effetto del disturbo sull'uscita, oppure gli effetti dei ingressi sull'errore



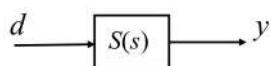
prestazioni
ideali

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad \sim 1$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \quad \sim 0$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)} \quad \sim 0$$

2. Analisi statica di $S(s)$ – risposta alla rampa



$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1+s\tau_i)}{\prod_i (1+sT_i)}$$

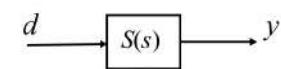
$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \quad \text{dashed box: } d(t) = A \text{ ram}(t)$$

Valore di regime della **risposta alla rampa**

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{A}{s^2} = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S(s)}{s} = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1+L(s))} =$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-1}}{s^g + \mu} = \begin{cases} 0 & g > 1 \\ \frac{A}{\mu} & g = 1 \\ \infty & g < 1 \end{cases}$$

1. Analisi statica di $S(s)$ – risposta allo scalino



$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1+s\tau_i)}{\prod_i (1+sT_i)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \quad \text{dashed box: } d(t) = A \text{ sca}(t)$$

Valore di regime della **risposta allo scalino**

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{A}{s} = A \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+L(s)} = \frac{\mu}{\delta}$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{s^g + \mu} = \begin{cases} 0 & g > 0 \\ A \frac{1}{1+\mu} & g = 0 \quad \text{if } \mu_s \approx 0 \\ A & g < 0 \quad \text{if } \mu_s = 1 \end{cases}$$

3.a Tabella riassuntiva: uscita

Valore di regime $y(\infty)$ in risposta a $d(t)$

	$A \text{ sca}(t)$	$A \text{ ram}(t)$	$A \text{ par}(t)$
$g = 0$	$\frac{A}{1+\mu}$	∞	∞
$g = 1$	0	$\frac{A}{\mu}$	∞
$g = 2$	0	0	$\frac{A}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

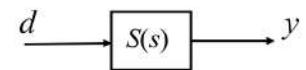
3.b Tabella riassuntiva: errore

Valore di regime $|e(\infty)|$ in risposta a $w(t)$ oppure a $d(t)$

	$A \text{ sca}(t)$	$A \text{ ram}(t)$	$A \text{ par}(t)$
$g = 0$	$\frac{A}{1 + \mu}$	∞	∞
$g = 1$	0	$\frac{A}{\mu}$	∞
$g = 2$	0	0	$\frac{A}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

Conclusioni

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$



- ✓ $S(s)$ è un **filtro passa-alto**
- ✓ la banda passante di $S(s)$ è $B_s \cong [\omega_c, \infty]$

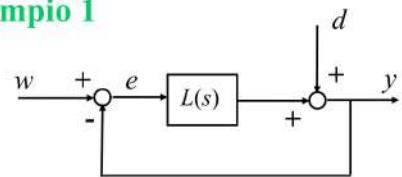


- ✓ il disturbo d viene attenuato solo in $[0, \omega_c]$

- ✓ l'attenuazione in questa banda è circa uguale a $\frac{1}{|L(j\omega)|}$

Banda di controllo

Esempio 1



$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+\frac{10}{s(s+2)}} = \frac{s^2+2s}{s^2+2s+10} = \frac{0.2s(1+0.5s)}{1+0.2s+0.1s^2}$$

Analisi statica

Risposta allo scalino $d(t) = A \text{scal}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g=1 \quad \Rightarrow \quad y(\infty) = 0 \quad |e(\infty)| = 0$$

$$\text{Verifica} \quad \mu_s = S(0) = 0$$

Risposta allo scalino $w(t) = A \text{scal}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g=1 \quad \Rightarrow \quad |e(\infty)| = 0$$

$$\text{Verifica} \quad \mu_s = S(0) = 0$$

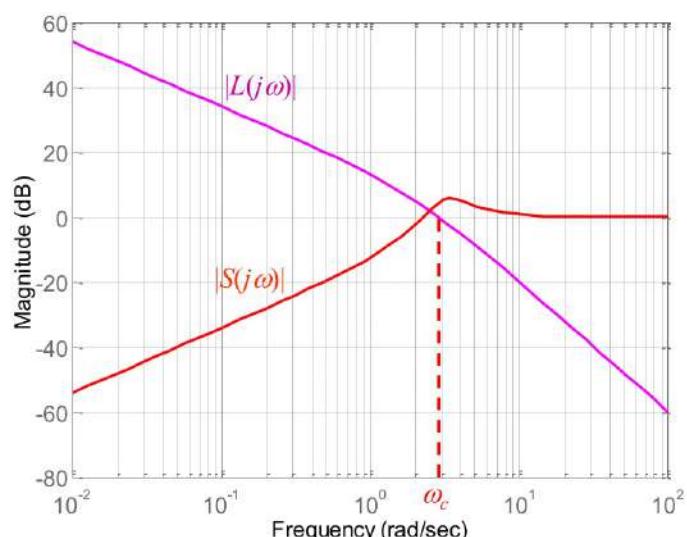
Risposta alla rampa $d(t) = A \text{ram}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g=1 \quad \Rightarrow \quad y(\infty) = \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5} \quad |e(\infty)| = \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5}$$

Risposta alla rampa $w(t) = A \text{ram}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g=1 \quad \Rightarrow \quad |e(\infty)| = \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5}$$

Risposta in frequenza



Per $\omega \leq 0.4$ \Rightarrow attenuazione di almeno 20 dB

$$d(t) = \sin(\omega t)$$

$$|S(j\omega)|$$

ampiezza a regime
di $y(t)$ e di $e(t)$

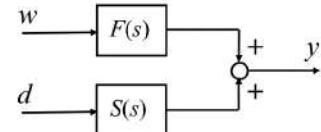
$$w(t) = \sin(\omega t)$$

$$|S(j\omega)|$$

ampiezza a regime
di $e(t)$

CAP XXII

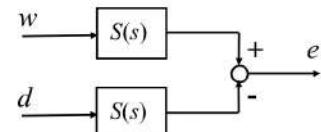
Funzione di sensitività del controllo



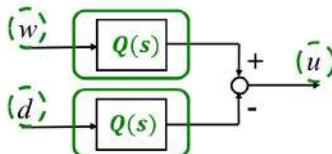
Quante intense sono le azioni ci controllo che devo esercitare per ottenere i miei obiettivi di controllo.
Quali sono gli effetti degli ingressi sull'azione di controllo.

prestazioni
ideali

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad \sim 1$$



$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \sim 0$$

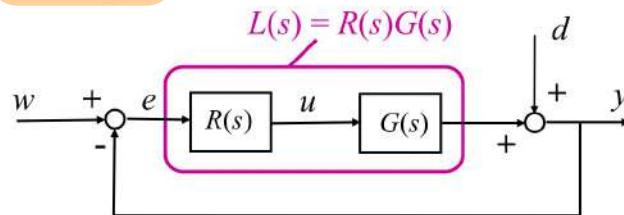


Vorremmo spendere poco per ottenere i nostri obiettivi di controllo.

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \quad \sim 0$$

utile per valutare la **moderazione**

Esempio

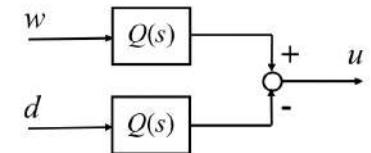


$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad R(s) = \frac{10(s+2)}{s} \quad \Rightarrow \quad L(s) = \frac{10}{s}$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{10(s+2)}{s}}{1 + \frac{10}{s}} = \frac{10(s+2)}{s+10} = \frac{2(1+0.5s)}{1+0.1s}$$

Conclusioni

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

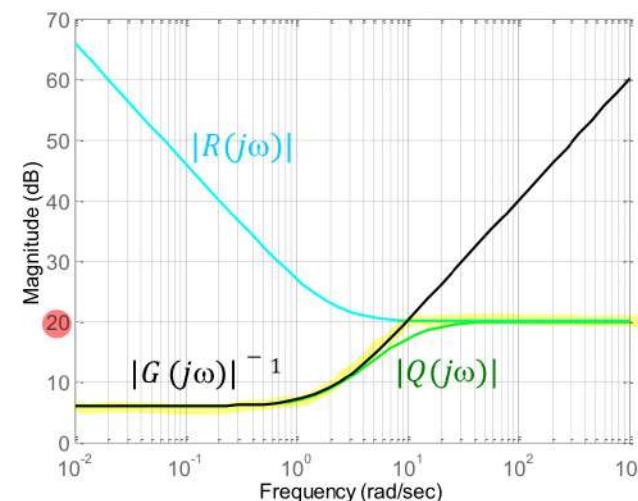


per avere **buona moderazione** occorre avere

> $|G(j\omega)|$ "grande" per $\omega < \omega_c$
Questo non lo controlliamo noi è un nostro dato

> $|R(j\omega)|$ "piccolo" per $\omega > \omega_c$

Risposta in frequenza

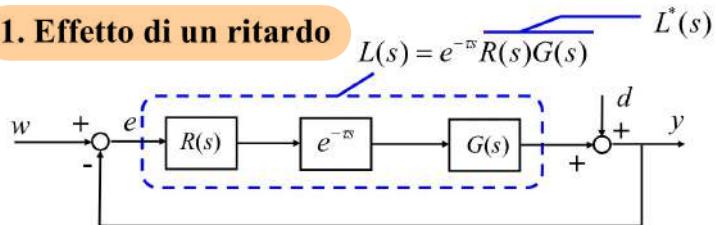


Ingressi con componenti armoniche a pulsazioni superiori a 40 rad/s vengono amplificate di 20 dB.

Per "andar veloce" devo usare azioni di controllo intense con i problemi connessi (costo attuatori, saturazione attuatori, etc...)

CAP XIV

1. Effetto di un ritardo



- non modifica le prestazioni statiche

$$\lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} L^*(s)$$

- non modifica ω_c

$$|L(j\omega)| = |L^*(j\omega)|$$

- fa diminuire φ_m



diminuisce lo smorzamento
dei poli in anello chiuso

- può influenzare la stabilità

vedi criteri Nyquist e Bode

Esempio

$$L^*(s) = \frac{0.1}{s(s^2 + s + 1)}$$

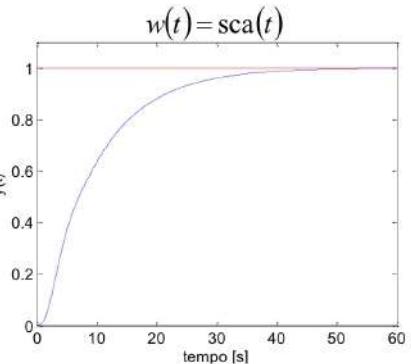
$$\omega_c = 0.101 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m^* = 84.2^\circ$$

Tempo di assestamento
della risposta allo scalino
in anello chiuso

$$t_a \cong \frac{5}{\omega_c} \cong \frac{5}{0.101} \cong 50 \text{ s}$$

(polo dominante reale)



Introducendo un **ritardo di 8 s** $L(s) = \frac{0.1}{s(s^2 + s + 1)} e^{-8s}$

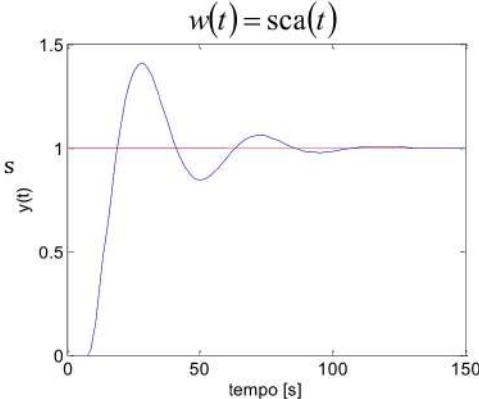
$$\omega_c = 0.101 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m = 84.2^\circ - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 0.101 \cdot 8 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 46.3^\circ = 37.9^\circ$$

Tempo di assestamento
della risposta allo scalino
in anello chiuso
in anello chiuso

$$t_a \cong \frac{5}{\xi \omega_n} \cong \frac{5}{\varphi_m \omega_c} \cong \frac{500}{\varphi_m \omega_c} \cong 130 \text{ s}$$

(poli dominanti complessi)



Introducendo un **ritardo di 20 s** $L(s) = \frac{0.1}{s(s^2 + s + 1)} e^{-20s}$

$$\omega_c = 0.101 \text{ rad/s}$$

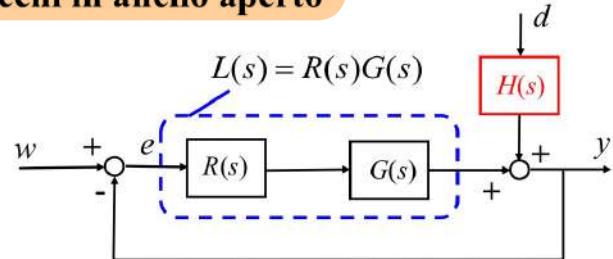
$$\varphi_m = 84.2^\circ - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 0.101 \cdot 20 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 115.7^\circ = -31.5^\circ$$

Instabile!

Infatti, calcolando il massimo ritardo
d'anello ammissibile τ_{\max} si ha:

$$\omega_c \tau_{\max} \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{\pi}{180^\circ} \frac{1}{0.101} 84.2^\circ \cong 14.55 \text{ s}$$

2. Blocchi in anello aperto



$$M(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s)}{1 + L(s)} = H(s)S(s)$$

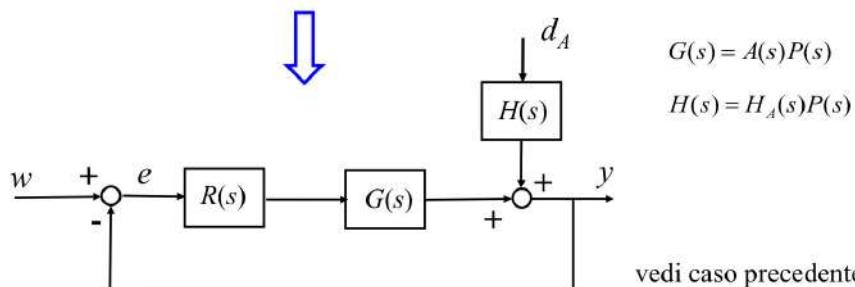
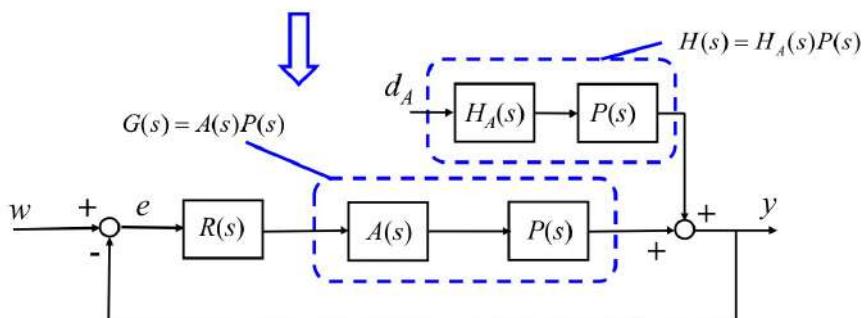
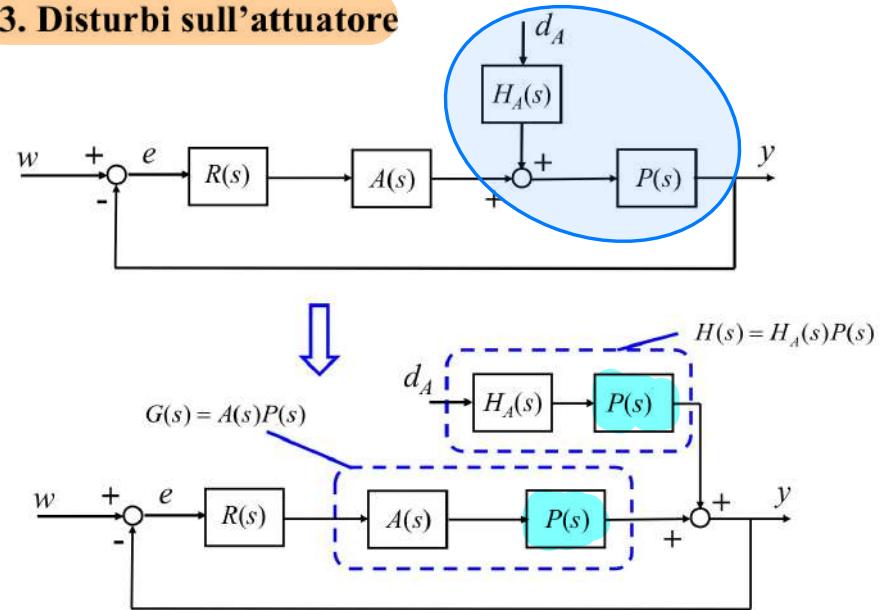
ad esempio

$$\mu_M = \mu_H \mu_S$$

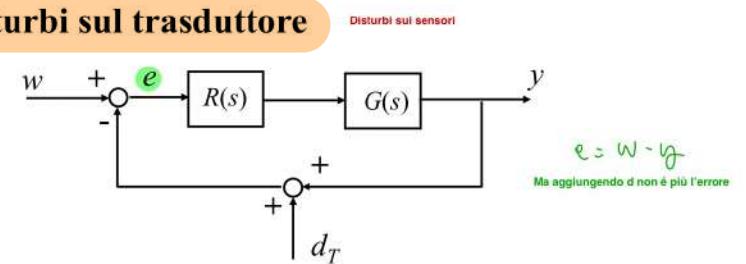
$$|M(j\omega)| = |H(j\omega)| |S(j\omega)|$$

$$|M(j\omega)|_{dB} = |H(j\omega)|_{dB} + |S(j\omega)|_{dB}$$

3. Disturbi sull'attuatore

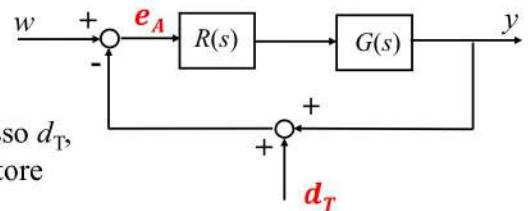


4. Disturbi sul trasduttore

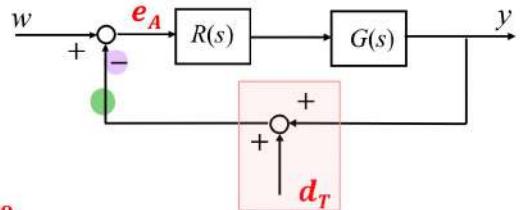


Qual'è la funzione di trasferimento da d_T a e_A ?

Errore apparente

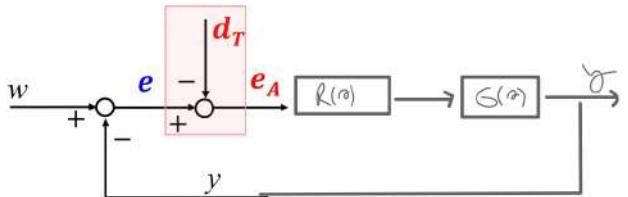


Quando è attivo l'ingresso d_T ,
a valle del nodo sommatore
non c'è l'errore!



errore
apparente

$$e_A(t) = w(t) - [d_T(t) + y(t)] = w(t) - y(t) - d_T(t) = e(t) - d_T(t)$$



Della funzione di trasferimento $F(s)$ sappiamo già tutto

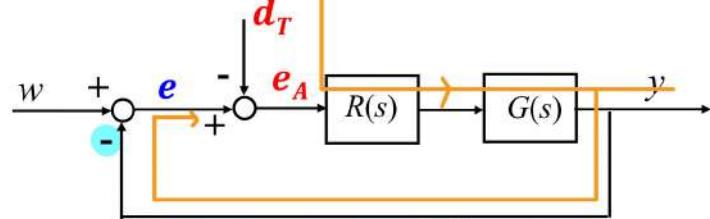
E' un filtro passa-basso con banda passante $B_F \cong [0, \omega_c]$

- il disturbo d_T viene attenuato solo in $[\omega_c, \infty]$
- l'attenuazione in questa banda è circa uguale a $|L(j\omega)|$

→ attenzione ai disturbi "lenti" sul trasduttore!

(Il controllore elimina automaticamente il "rumore" sul sensore, ma non può compensare un "offset" – cattiva taratura etc...)

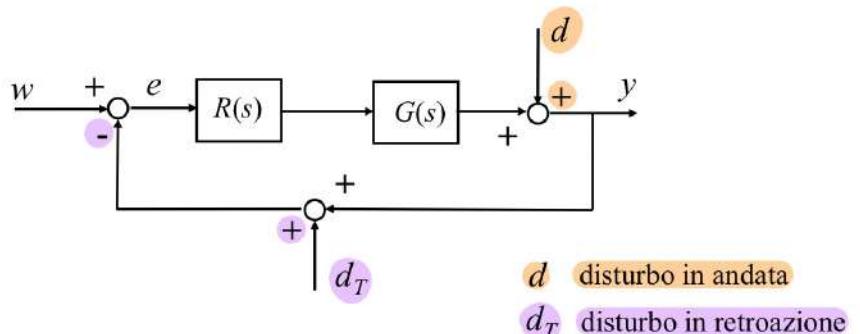
Come si può calcolare la funzione di trasferimento da d_T a e ?



$$\frac{E(s)}{D_T(s)} = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s)$$

$$\frac{Y(s)}{D_T(s)} = \frac{-R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = -\frac{L(s)}{1 + L(s)} = -F(s)$$

Riepilogo sull'attenuazione dei disturbi

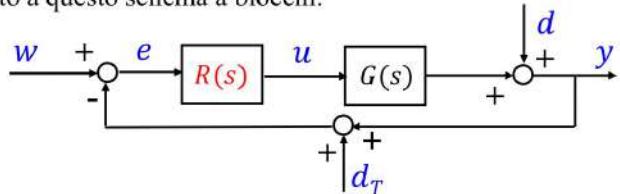


il sistema di controllo è capace di attenuare

- le componenti "lente" di d Disturbi sull'attuatore ($\omega < \omega_c$)
- le componenti "veloci" di d_T Disturbi sui sensori ($\omega > \omega_c$)

1. Il problema del progetto

Per presentare i metodi di progettazione dei sistemi di controllo, faremo riferimento a questo schema a blocchi.



$G(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema sotto controllo (NOTA)

$R(s)$ è la funzione di trasferimento del controllore (NON NOTA).

L'obiettivo è determinare $R(s)$ in modo che il sistema retroazionato soddisfi alcune specifiche assegnate a fronte di andamenti assegnati degli ingressi.

Nel seguito si assumerà che la funzione di trasferimento d'anello

$$L(s) = R(s)G(s)$$

soddisfi le condizioni di applicabilità del criterio di Bode.

✓ Precisione statica

$$\rightarrow g > 0 \text{ e/o } \mu \text{ elevato}$$

✓ Precisione dinamica

- velocità

- smorzamento

$$\rightarrow \begin{array}{l} \omega_c \text{ elevata} \\ \varphi_m \text{ elevato} \end{array}$$

✓ Attenuazione disturbi in andata

$$\rightarrow |L(j\omega)| \gg 0 \text{ dB} \quad \text{per } \omega < \omega_c \quad (\omega_c \text{ elevata})$$

✓ Attenuazione disturbi in retroazione

$$\rightarrow |L(j\omega)| \ll 0 \text{ dB} \quad \text{per } \omega > \omega_c \quad (\omega_c \text{ non elevata})$$

✓ Realizzabilità del regolatore

$$\rightarrow R(s) \text{ almeno propria}$$

2. Specifiche di Progetto

Facendo riferimento alla funzione d'anello $L(s)$ ed in particolare:

- al suo **guadagno μ** ,
- al suo **tipo g** ,
- alla sua **pulsazione critica ω_c**
- al **margine di fase φ_m** ed al **margine di guadagno k_m** del sistema retroazionato

✓ As. stabilità del sistema retroazionato
(in condizioni nominali)

→ Criterio di Bode
 $\mu > 0$ & $\varphi_m > 0^\circ$

✓ Stabilità robusta

→ φ_m e/o k_m elevati

3. Formulazione delle specifiche di progetto

Specifiche statiche

Errore a transitorio esaurito deve essere minore di un certo valore e segnato.
Module => non ci interessa il segno.

$$|e(\infty)| \leq \bar{e}$$

$$e(\infty) = 0$$

con $w(t)$, $d(t)$ e (a volte) $d_T(t)$ assegnati
(di solito scalini e/o rampe)

Specifiche dinamiche

Valori scelti in determinati limiti

$$\checkmark \omega_{\min} \leq \omega_c \leq \omega_{\max} \longrightarrow \text{specifica di velocità}$$

$$\checkmark \varphi_m \geq \bar{\varphi}_m \longrightarrow \text{specifica di robustezza}$$

$$\checkmark k_m \geq \bar{k}_m \longrightarrow \text{specifica di robustezza}$$

Altre formulazioni delle specifiche possono essere trasformate nelle precedenti.

Specifiche dinamica di velocità

- ✓ Tempo di assestamento della risposta allo scalino del sistema retroazionato $t_a < \bar{t}$

☐ Se $F(s)$ ha poli dominanti complessi $\Rightarrow \omega_c > \frac{500}{\varphi_m \bar{t}}$ Margine di fase < 75 gradi

Infatti $t_a \cong \frac{5}{\xi \omega_n} \cong \frac{500}{\varphi_m \omega_c} < \bar{t} \Rightarrow \omega_c > \frac{500}{\varphi_m \bar{t}}$ I segnali lo possiedono, ma non possiedono il margine di fase.

Quale valore per φ_m ?

Se c'è una specifica di robustezza ($\varphi_m \geq \bar{\varphi}_m$) si sceglie il limite di tale specifica.

☐ Se $F(s)$ ha polo dominante reale $\Rightarrow \omega_c > \frac{5}{\bar{t}}$ Margine di fase > 75 gradi

Infatti $t_a \cong \frac{5}{\omega_c} < \bar{t} \Rightarrow \omega_c > \frac{5}{\bar{t}}$

Progetto statico e progetto dinamico

La funzione di trasferimento del controllore viene fattorizzata

$$R(s) = R_1(s)R_2(s)$$

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r}$$

Parte statica



Progetto statico

(soddisfare le specifiche statiche)

$$R_2(s) = \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$$

Parte dinamica
(rete stabilizzatrice)



Progetto dinamico

(soddisfare le specifiche dinamiche)

4. Loop Shaping

Dare la forma più opportuna alla funzione di trasferimento ad anello

1. Trasformare le specifiche di progetto in vincoli su $L(s)$.
2. Progetto statico (rispetto delle specifiche statiche)
3. Progetto dinamico (rispetto delle specifiche dinamiche)
 - a. Si procede per tentativi
 - b. Al termine di ogni tentativo si verifica se il controllore scelto rispetta le specifiche dinamiche

Errore a transitorio finito
In bassa frequenza
- guadagno
- tipo

5. Progetto statico

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \quad \text{Parte statica}$$

La specifica statica viene formulata mediante valori desiderati per l'**errore a transitorio esaurito** $e(\infty)$.

Bisogna garantire la specifica statica **a fronte di andamenti assegnati per gli ingressi** (nel nostro caso il riferimento $w(t)$ e, principalmente, il disturbo sulla linea di andata $d(t)$).

L'obiettivo è **scegliere il tipo del controllore r** ed eventualmente, se necessario, **calcolare il valore di μ_R** minimo per il rispetto delle specifiche (applicando il teorema del valore finale o le «tabelline» delle lezioni precedenti).

Dobbiamo scegliere 2 numeri

Di norma, nell'ambito dei problemi presentati in questo corso, si procede come segue.

1) Si calcola la funzione di trasferimento d'anello con $G(s)$ nota e $R(s)$ non nota

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)} G(s) = \\ = \frac{\mu_R \mu_G}{s^r s^m} \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)} \frac{\prod_k(1+sT_k)}{\prod_k(1+s\tau_k)}$$

dove

$\mu = \mu_R \mu_G$ è il guadagno d'anello (con μ_G noto e μ_R da scegliere)

$g = r + m$ è il tipo della funzione d'anello (con m noto e r da scegliere)

2) Ai fini del progetto statico è utile solo la parte statica della funzione d'anello, (la parte dinamica non conta, siamo nel limite per $s \rightarrow 0$!) e quindi, sulla base delle caratteristiche degli ingressi (riferimento e disturbo sulla linea di andata), si sceglieranno i valori più opportuni per il tipo dell'anello g (e di conseguenza per r , dal momento che m è noto) e per il guadagno d'anello μ (e di conseguenza per μ_R dal momento che μ_G è noto) utilizzando le «tabelline» o applicando il teorema del valore finale.

3) Nel caso ci fossero altri ingressi, per esempio disturbi di carico o disturbi sulla linea di retroazione, bisogna calcolare anche il loro contributo (di norma applicando il teorema del valore finale).

6. Progetto dinamico

$$R_2(s) = \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)} \quad \text{Parte dinamica}$$

La scelta della parte dinamica avviene per tentativi e di norma il primo tentativo è

$$R_2(s) = 1$$

cioè non si inserisce una parte dinamica.

Si verifica quindi se le specifiche dinamiche sono rispettate e, in caso negativo, si procede ad inserire poli e zeri cercando di ottenere una funzione d'anello che rispetti le specifiche date, avendo cura di rispettare sempre le seguenti condizioni:

1) Non modificare la parte statica del controllore

(cioè il guadagno μ_R , se scelto precedentemente, ed il tipo r).

2) Il controllore $R(s)$ ottenuto deve essere almeno proprio

(non può avere più zeri che poli)

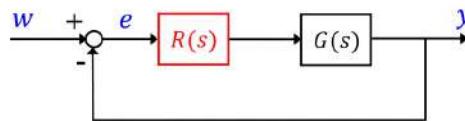
Dal momento che, di solito, le specifiche dinamiche riguardano la pulsazione critica ω_c ed il margine di fase φ_m , per verificare se esse sono rispettate:

- 1) si traccia il diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza della funzione d'anello $L(s)$ e, dopo aver individuato sul grafico la pulsazione critica ω_c ,
- 2) si calcola la fase critica φ_c ed infine il margine di fase φ_m .

Introduzione

Il progetto di controllori mediante "loop shaping" lascia al progettista molti gradi di libertà, in particolare nella scelta della parte dinamica del controllore.

In questa lezione saranno presentate alcune strategie e delle linee guida attraverso esempi (senza alcuna pretesa di esaustività).

Esempio 1 – cancellazione del polo dominante

$$G(s) = \frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

tau1 polo dominante
=> quello più lento

$$\zeta_1=2 \quad \zeta_2=0.1$$

Specifiche di progetto

- $e(\infty) = 0$ a fronte di variazioni a scalino del riferimento di ampiezza qualunque.
- $\omega_c \geq 10 \text{ rad/s}$
- $\varphi_m \geq 30^\circ$

Progetto statico

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R \prod_i (1+sT_i)}{s^r \prod_i (1+s\tau_i)} \frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)} = \\ &= \frac{10\mu_R \prod_i (1+sT_i)}{s^r \prod_i (1+s\tau_i)} \frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)} \end{aligned}$$

Il guadagno d'anello è $\mu = 10\mu_R$.

Il tipo dell'anello è $g = r$.

La scelta è obbligata.

Solo introducendo un polo nell'origine nella funzione d'anello si può avere errore nullo a regime a fronte di variazioni a scalino del riferimento.

Scegliendo $r = 1$ si avrà errore nullo a transitorio esaurito a fronte di variazioni a scalino (di qualunque ampiezza) degli ingressi (riferimento e disturbo in andata, che in questo esempio non c'è)

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s} \quad \mu_R \text{ verrà scelto dopo parte statica}$$

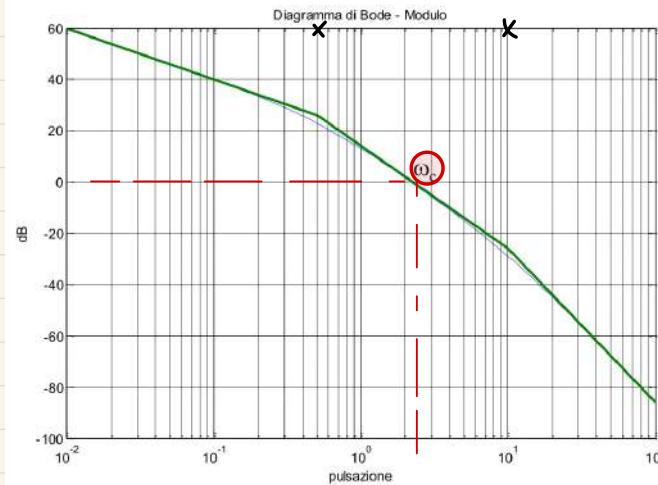
Progetto dinamico

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s}R_2(s) \frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)} = \\ = \frac{10\mu_R}{s}R_2(s) \frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

Primo tentativo $R_2(s) = 1$ $\mu_R = 1$

$$L'(s) = \frac{10}{s(1+2s)(1+0.1s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L'(j\omega)$



Ma deve essere ≥ 10
 $\omega_c \cong 2.2 \text{ rad/s}$ no !

Fase critica sicuramente no !
 $\varphi_c < -150^\circ$

Secondo tentativo $R_2(s) = 1 + 2s$ $\mu_R = 1$

Cancello il polo dominante

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s}R_2(s) \frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)} =$$

$$= \frac{10\mu_R}{s}R_2(s) \frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

1 polo
1 zero
Grado relativo = 1 - 1 = 0

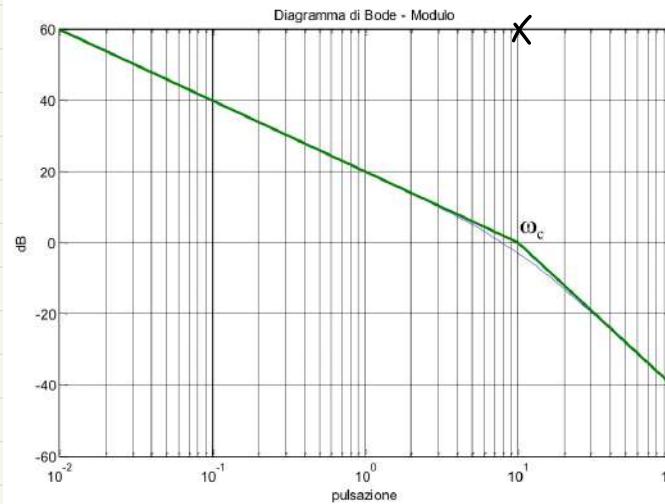
$$L''(s) = \frac{10}{s} \cancel{(1+2s)} \frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)} = \frac{10}{s(1+0.1s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L''(j\omega)$

Nota bene

E' lecito scegliere uno zero soltanto come parte dinamica del regolatore?

Si perché c'è un polo (nell'origine) nella parte statica e quindi il regolatore sarà proprio (un polo ed uno zero).



$\omega_c \cong 10 \text{ rad/s}$ ✓

Fase critica
 $\varphi_c = -135^\circ$

$\varphi_m \cong 45^\circ$ ✓

$\varphi_c = -90^\circ - 90^\circ$
 $= -180^\circ$

$R(s) = \frac{1+2s}{s}$

Non serve scegliere un valore del guadagno del regolatore μ_R diverso da 1. Quindi la soluzione è

Nota bene (per i "puristi")

Ai fini delle attività didattiche fa fede il diagramma asintotico.

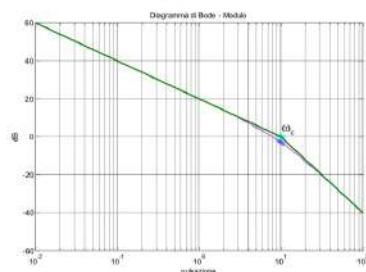
Però quello reale risulta essere più basso in w.c.

E' però evidente che la pulsazione critica effettiva sarà inferiore a 10 rad/s.

E' quindi lecito (per i "puristi", appunto) correggere il progetto scegliendo un valore del guadagno del regolatore μ_R tale che la pulsazione critica effettiva sia superiore a 10 rad/s.

Il valore minimo necessario perché ciò accada è (ovviamente)

$$\mu_R = 3 \text{ dB} \quad \Rightarrow \quad \mu_R = 1.41$$



Progetto statico

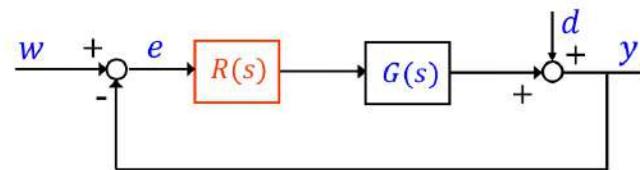
Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R \prod_i (1+sT_i)}{s^r \prod_i (1+st_i)} \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)} = \\ = \frac{10\mu_R \prod_i (1+sT_i)}{s^r \prod_i (1+st_i)} \frac{1}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Il guadagno d'anello è $\mu = 10\mu_R$.

Il tipo dell'anello è $g = r$.

Esempio 2 – raccordi in AF e BF



$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

- Specifiche di progetto
- $|e(\infty)| \leq 0.1$ con $w(t) = \text{sca}(t)$ Specifiche statiche
 - $\omega_C \geq 0.2 \text{ rad/s}$ Specifiche dinamiche
 - $\varphi_m \geq 60^\circ$

Ricordiamo che si applica la diseguaglianza di «caso pessimo»

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty) + e_d(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

I singoli contributi valgono (vedi prima colonna della tabellina)

$ e_w(\infty) =$	$\begin{cases} \frac{1}{1+10\mu_R} & \text{se } r=0 \\ 0 & \text{se } r>0 \end{cases}$	A 1 riga tabella
$ e_d(\infty) =$	$\begin{cases} \frac{5}{1+10\mu_R} & \text{se } r=0 \\ 0 & \text{se } r>0 \end{cases}$	A 2 riga tabella

- scegliendo $r = 1$

$$e(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1(s) = \frac{\mu_R}{s} \quad \mu_R \text{ verrà scelto dopo}$$

- scegliendo $r = 0$

$$|e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| \leq 0.1$$

da cui

$$\frac{6}{1 + 10\mu_R} \leq 0.1 \quad \Rightarrow \quad \mu_R \geq 5.9$$

Scegliamo

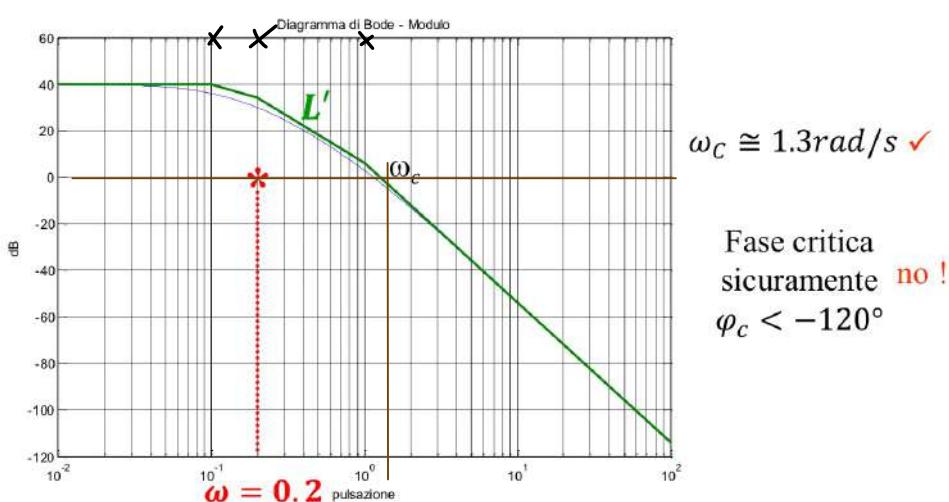
$$\begin{aligned} r &= 0 \\ \mu_R &= 10 \end{aligned}$$

Quindi

Abuso = numero tondo

$$R_1(s) = 10$$

\Leftarrow Scegliamo di proseguire con questa seconda opzione



$$\varphi_c = -\text{atan}(10 \cdot 1.3) - \text{atan}(5 \cdot 1.3) - \text{atan}(1 \cdot 1.3) = -85.6^\circ - 81.2^\circ - 52.4^\circ = -219.2^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi_m < 0^\circ$$

Nota bene

Sarebbe un errore gravissimo modificare il guadagno d'anello, perché si altererebbe il progetto statico.

Progetto dinamico

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = 10R_2(s) \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

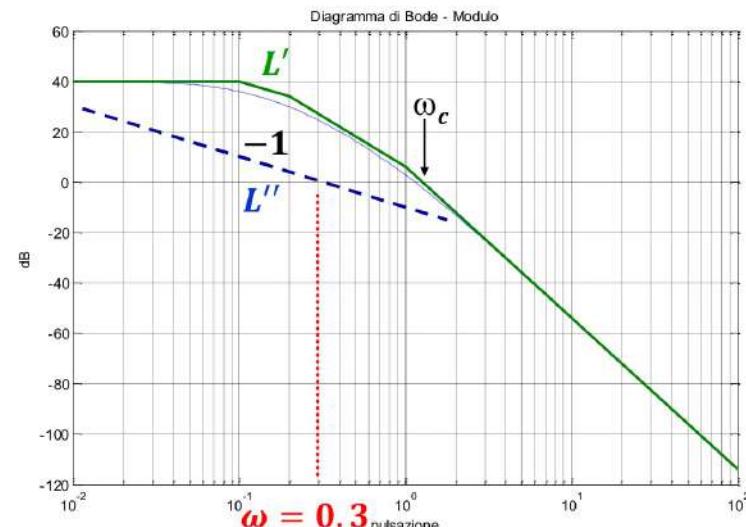
Primo tentativo $R_2(s) = 1$

$$L'(s) = \frac{100}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L'(j\omega)$

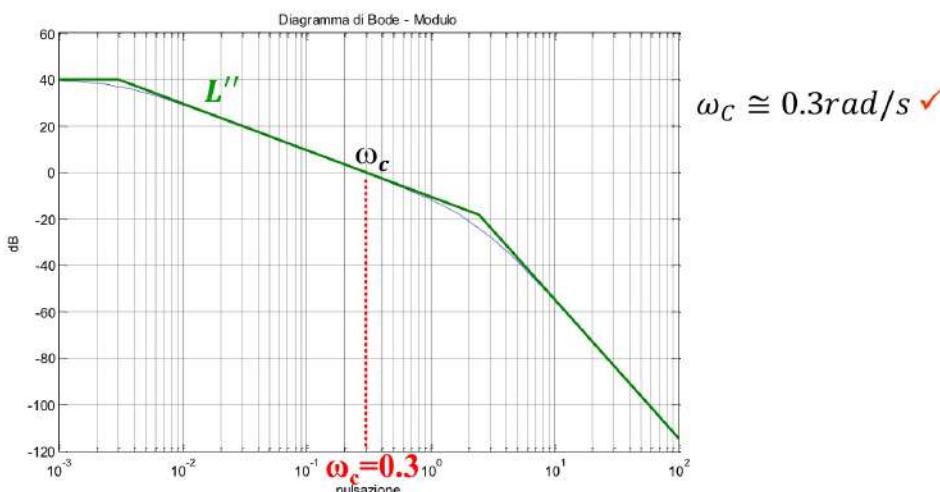
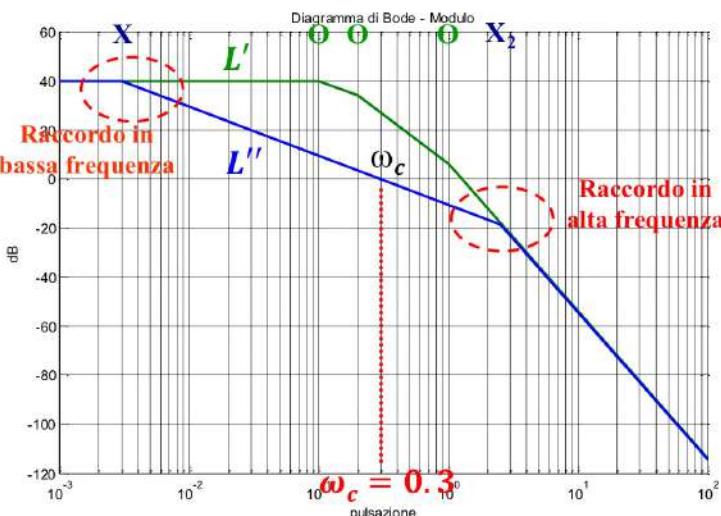
Secondo tentativo

Costruire $L''(s)$ in modo che $|L''(j\omega)|$ tagli l'asse a 0 dB in $\omega_C \cong 0.3$ con pendenza -1 (-20 dB/dec)



Ciò si può ottenere:

- ✓ cancellando (con tre zeri) i tre poli di $G(s)$
- ✓ raccordando il diagramma di $|L''(j\omega)|$ con il diagramma di $|L'(j\omega)|$ in bassa frequenza ed in alta frequenza, mediante l'introduzione in $L''(s)$ di tre poli in posizioni opportune.



$$\varphi_c = -\text{atan}(333 \cdot 0.3) - 2\text{atan}(0.4 \cdot 0.3) = \\ = -89.4^\circ - 2 \cdot 6.8^\circ = -103^\circ$$

$$R(s) = 10 \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+333s)(1+0.4s)^2}$$

$$\varphi_m = 77^\circ \checkmark$$

Quindi:

$$R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+\tau_{bf}s)(1+\tau_{af}s)^2}$$

La posizione dei poli di raccordo si desume dal grafico:

- il polo in bassa frequenza non può che essere in 0.003;
- la coppia di poli in alta frequenza è in circa 2.5.

Cioè:

$$R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+333s)(1+0.4s)^2}$$

$$L''(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = 10 \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+333s)(1+0.4s)^2} \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)} = \\ = \frac{100}{(1+333s)(1+0.4s)^2} \quad S=0.3 \quad \beta=2.5$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L''(j\omega)$

Nel progetto statico era possibile un'altra scelta, cioè inserire un integratore nell'anello scegliendo $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$. Vediamo come sarebbe cambiato il progetto dinamico.

Progetto dinamico (seconda opzione)

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s} R_2(s) \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Primo tentativo $R_2(s) = 1 \quad \mu_R = 1$

$$L'(s) = \frac{10}{s(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L'(j\omega)$

Secondo tentativo $R_2(s) = 1 + 10s$ $\mu_R = 1$

Questa scelta corrisponde ad eliminare il polo dominante.

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{1}{s} \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

da cui si ottiene

$$L''(s) = \frac{10}{s(1+5s)(1+s)}$$

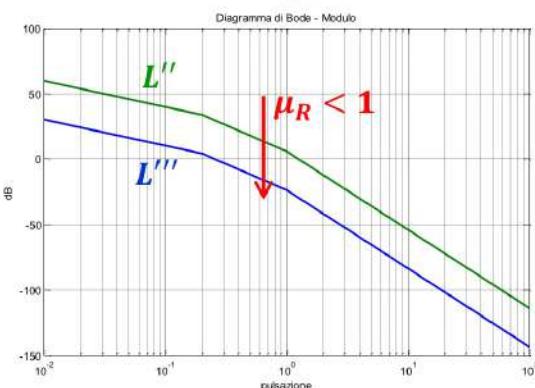
Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L''(j\omega)$

Nota bene

E' lecito scegliere uno zero soltanto come parte dinamica del regolatore?

Si perché c'è un polo (nell'origine) nella parte statica e quindi il regolatore sarà proprio (un polo ed uno zero).

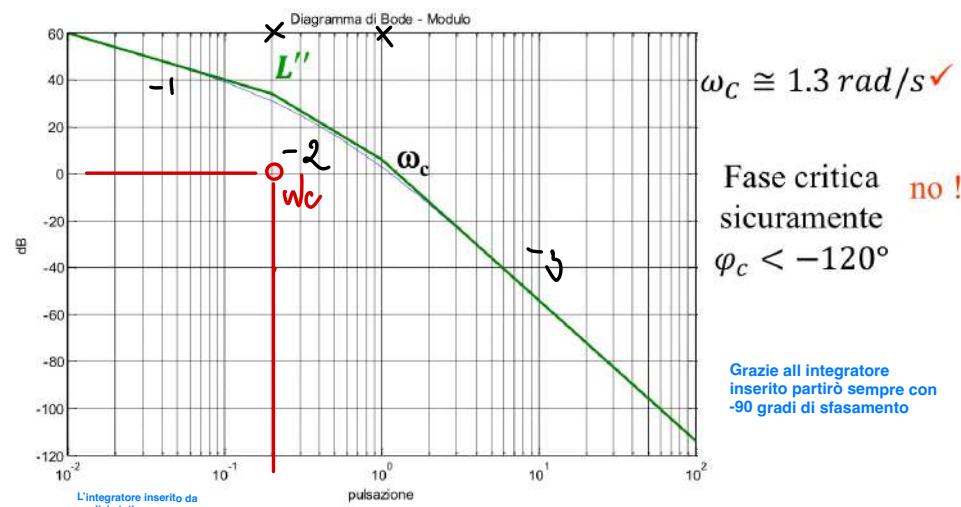
Ora bisogna decidere se **cancellare un altro polo** oppure **scegliere un valore del guadagno del controllore μ_R** tale che le specifiche siano rispettate.



$$\varphi_c = -90^\circ - arctg(5 \cdot 0.2) - arctg(1 \cdot 0.2) = -90^\circ - 45^\circ - 11.3^\circ = -146.3^\circ$$

$$\varphi_m = 33.7^\circ < 60^\circ$$

Non è possibile rispettare le specifiche modificando solo il guadagno.



$$\begin{aligned} \varphi_c &= -90^\circ - arctg(5 \cdot 1.3) - arctg(1 \cdot 1.3) = \\ &= -90^\circ - 81.2^\circ - 52.4^\circ = -223.6^\circ \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \varphi_m < 0^\circ$$

IIS

F. Previdi – Fondamenti di Automatica - Lez. 26

24

Terzo tentativo $R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)}{1+s}$ $\mu_R = 1$

Introducendo uno zero nel controllore si cancella un secondo polo della $G(s)$. Però, perché il controllore $R(s)$ sia **proprio**, è necessario introdurre nel controllore, oltre allo zero, anche un altro polo.

Questo secondo polo, il cui scopo è solo quello di avere nel controllore lo stesso numero di poli e zeri, può essere posizionato (abbastanza) liberamente e conviene sceglierlo in alta frequenza (oltre la pulsazione critica ω_c) in modo che esso dia un contributo piccolo alla fase critica.

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) =$$

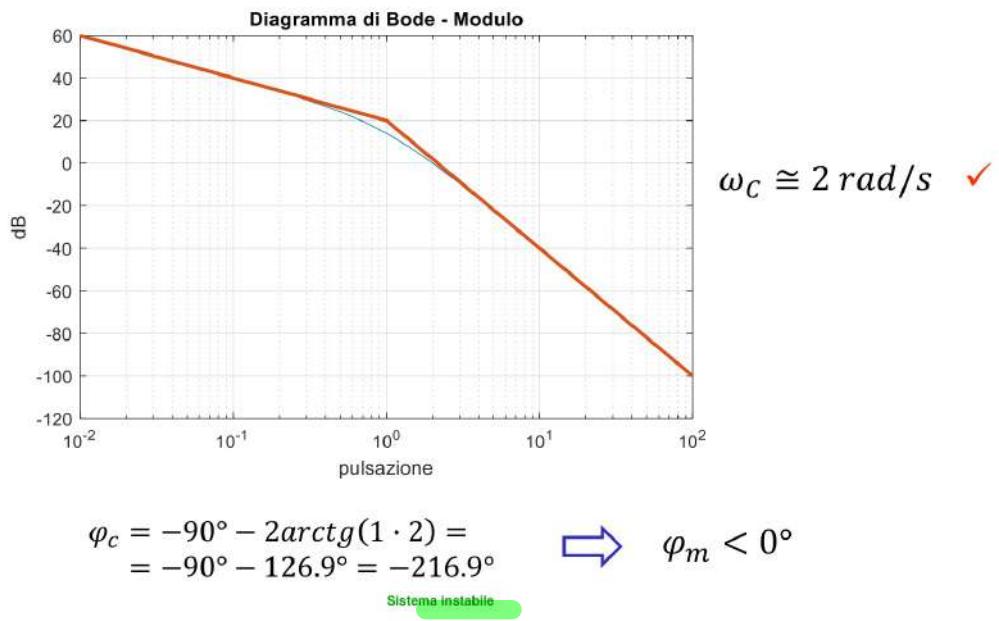
$$= \frac{1}{s} \frac{(1+10s)(1+5s)}{1+s} \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Scelta prudente,
aggiungere un polo non
troppo in alta frequenza

da cui si ha

$$L'''(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$$

Si traccino i diagrammi di Bode di $L'''(j\omega)$



Scegliendo $\mu_R = 0.025$ si ha $\omega_c = 0.25 \text{ rad/s}$.

Infatti si ha che

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s)$$

$$= \frac{0.025}{s} \frac{(1+10s)(1+5s)}{1+s} \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

da cui si ha

$$L^{iv}(s) = \frac{0.25}{s(1+s)^2}$$

Quarto tentativo $R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)}{1+s}$ μ_R da scegliere

Ora possiamo scegliere un valore di μ_R (se esiste) tale da rispettare le specifiche. Quale valore scegliere?

Osserviamo che con $L'''(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$ per avere $\varphi_m > 60^\circ$, cioè $\varphi_c > -120^\circ$, deve valere questa relazione

$$\varphi_c = 4L'''(j\omega_c) = -90^\circ - 2\arctg(\omega_c) > -120^\circ$$

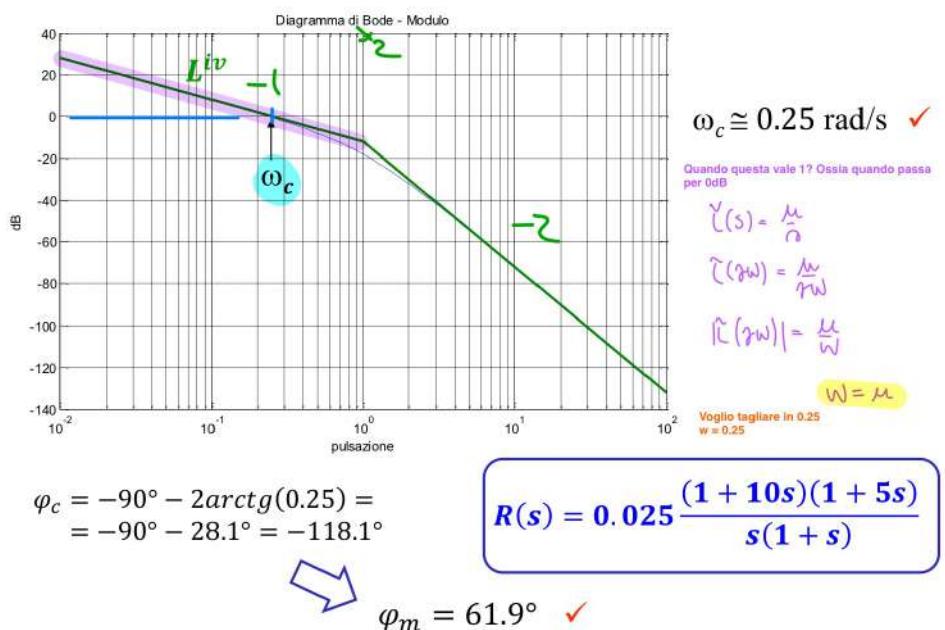
da cui si ottiene

cioè

$$\arctg(\omega_c) < 15^\circ$$

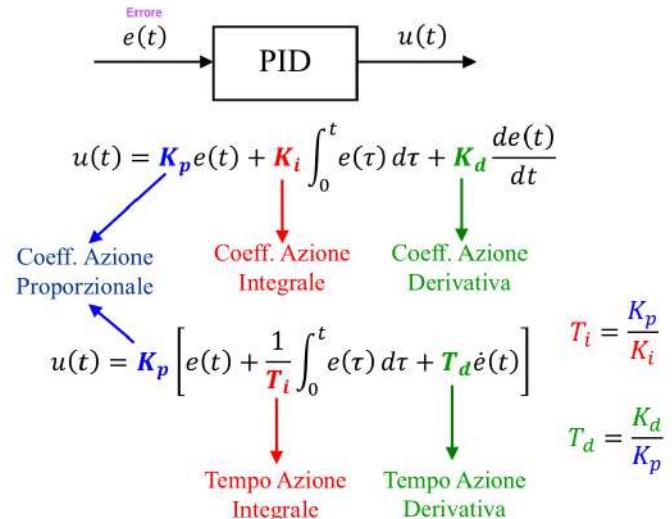
$$\omega_c < 0.27 \text{ rad/s}$$

Quindi bisogna scegliere μ_R tale che la pulsazione critica sia inferiore a questo valore.



1. Definizione

Controllori **PID** → ad azione **Proporzionale**, **Integrale**, **Derivativa**.



2. Funzione di trasferimento di un PID “ideale”

L’azione di controllo nel dominio del tempo è

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}(t) \right]$$

Applicando la trasformazione di Laplace si ha

$$U(s) = K_p \left[E(s) + \frac{1}{T_i s} E(s) + T_d s E(s) \right]$$

da cui

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{T_i s} = K_i \frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{s}$$

Se $T_i^2 - 4T_i T_d \geq 0$ cioè se $T_i \geq 4T_d$ i due zeri sono reali e quindi

$$R(s) = K_i \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{s}$$

Funzione di trasferimento del PID “ideale”

- ✓ un polo nell’origine ⇒ precisione statica
- ✓ due zeri ⇒ precisione dinamica
- ✓ guadagno ⇒ guadagno d’anello

Interpretazione delle tre azioni

P → entità dell’errore
più errore più controllo

I → valor medio dell’errore
polarizzazione (storia passata)

D → tendenza dell’errore
errore crescente più controllo (storia futura)

3. Funzione di trasferimento di un PID “reale”

□ azione derivativa “ideale” $T_d s$ Non realizzabile

□ azione derivativa “reale” $\frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}}$ Realizzabile polo in alta frequenza

$$s = -\frac{N}{T_d}, N = 5 \div 20$$

$$U(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right] E(s)$$

Derivatore reale

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{T_i s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right) + \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right) + T_i T_d s^2}{T_i s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right)} =$$

$$= K_i \frac{1 + \left(\frac{T_d}{N} + T_i\right) s + \left(\frac{1}{N} + 1\right) T_i T_d s^2}{s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right)}$$

2 zeri 2 poli

Polo nell'origine
Polo in alta frequenza
del derivatore ideale

$$R(s) = K_i \frac{(1 + s\bar{\tau}_1)(1 + s\bar{\tau}_2)}{s(1 + s\bar{\tau}_3)}$$

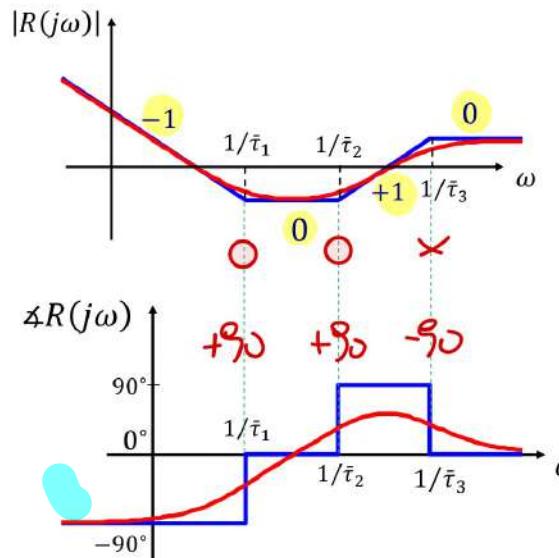
Funzione di trasferimento del PID "reale"

Con una scelta opportuna di N (grande) : $R(s) = K_i \frac{1 + (\bar{\tau}_1 + T_i)s + (\bar{\tau}_2 + 1)T_i T_d s^2}{s(1 + \frac{T_d}{N}s)}$

$\bar{\tau}_3 \ll \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_3 \ll \bar{\tau}_2$ polo in alta frequenza

$\bar{\tau}_1 \cong \tau_1, \bar{\tau}_2 \cong \tau_2$ zeri prossimi a quelli del PID "ideale"

4. Diagrammi di Bode di un PID "reale"



Rete "a sella" o
Rete a ritardo e anticipo

5. Casi particolari

P : controllore proporzionale

$$R(s) = K_p$$

I : controllore integrale

$$R(s) = \frac{K_i}{s}$$

PI : controllore proporzionale-integrale

$$R(s) = K_i \frac{(1 + sT_i)}{s}$$

PD : controllore proporzionale-derivativo $R(s) = K_p \left[1 + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right]$

6. Metodi per la taratura di un controllore PID

PID: K_p, T_i, T_d

6.1 **Teorica** (loop shaping)

6.2 **Empirica** (taratura basata su esperimenti, in assenza di informazioni a priori sul sistema) → utile per taratura automatica

Ad autosintonia (self tuning)

6.1 Procedura di progetto teorica

Esempio

Tarare un controllore PI per un sistema con fdt $G(s) = \frac{100}{1+s}$ in modo tale da avere $1 \leq \omega_c \leq 10$.

La funzione di trasferimento del controllore è:

$$R(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K_p \frac{1 + s T_i}{T_i s} = K_i \frac{1 + s T_i}{s}$$

Quindi la funzione d'anello è:

$$L(s) = R(s)G(s) = K_i \frac{1 + s T_i}{s} \frac{100}{1 + s}$$

La scelta è "obbligata": si usa lo zero del controllore per cancellare il polo dominante del sistema. Scelgo $T_i = 1$ da cui ottengo

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{100 K_i}{s}$$

6.2 Metodi di taratura empirica

- lo zero utilizziamo per cancellare il polo dominante del sistema
- il guadagno per aggiustare la pulsazione critica e quindi la velocità del sistema
- integratore ci dà le proprietà statiche

Il PID è un regolatore "semplice" (con pochi gradi di libertà) e quindi può tenere conto solo delle principali caratteristiche dinamiche del processo.

Ciò significa però che si può fare un progetto adeguato anche senza una conoscenza profonda del sistema sotto controllo.

I metodi di taratura empirica si basano sui risultati di opportuni esperimenti presupponendo nessuna conoscenza sul sistema sotto controllo oppure la conoscenza di un modello molto semplice.

Due esempi sono:

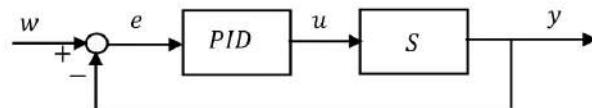
Regola di Ziegler-Nichols in anello aperto

Regola di Ziegler-Nichols in anello chiuso

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{100 K_i}{s} \rightarrow \omega_c = 100 K_i \text{ rad/s}$$

Per esempio, per avere $\omega_c = 5$ rad/s bisogna scegliere $K_i = 0.05$. Essendo $K_i = \frac{K_p}{T_i}$ si avrà $K_p = K_i T_i = 0.05$.

6.2.1 Regola di Ziegler-Nichols in anello chiuso



- (i) inserire il controllore con $K_i = K_d = 0$ e K_p "piccolo"
- (ii) osservare la risposta a $w(t) = sca(t)$
- (iii) aumentare K_p finché $y(t)$ presenta oscillazioni permanenti di periodo \bar{T} in corrispondenza del valore \bar{K}_p detto **guadagno critico** Porto il sistema al limite della stabilità
- (iv) si determinano K_p, T_i, Td in funzione di \bar{T}, \bar{K}_p consultando un'apposita tabella

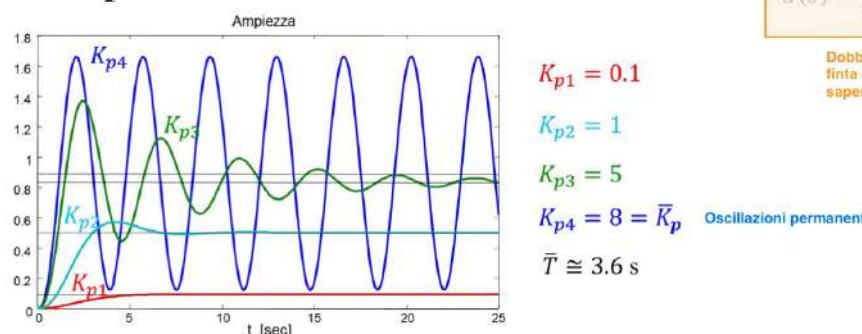
	K_p	T_I	T_D
P	$0.5\bar{K}_p$		
PI	$0.45\bar{K}_p$	$0.8\bar{T}$	
PID	$0.6\bar{K}_p$	$0.5\bar{T}$	$0.125\bar{T}$

Nel caso del controllore PID si ha che $T_I = 4T_D$. Di conseguenza la funzione di trasferimento del controllore ha 2 zeri coincidenti in $\frac{-4}{\bar{T}}$.

La scelta dei parametri porta sistemi a fase minima ad avere la massima pulsazione critica ω_c possibile compatibilmente con un margine di fase φ_m di almeno 30° .

Più che regole rigide vanno intese come procedure per individuare valori indicativi dei parametri (intorno ai quali operare una taratura manuale fine).

Esempio



I poli in anello chiuso con $K_p = \bar{K}_p$, $K_I = K_D = 0$ saranno dati da

$$(s+1)^3 + \bar{K}_p = 0$$

Perché che ci siano oscillazioni permanenti dovrà esserci una coppia di poli immaginaria coniugata, cioè

$$(s+\alpha)(s^2 + \bar{\omega}^2) = 0$$

Se $\bar{K}_p = 8$ allora $\alpha = 3$ e quindi, $\bar{\omega}^2 = 3$ da cui si ottiene $\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = 3.63 \text{ s}$

PID "ideale"

$$\begin{cases} K_p = 0.6\bar{K}_p = 4.8 \\ T_i = 0.5\bar{T} = 1.8138 \\ T_d = 0.125\bar{T} = 0.4534 \end{cases} \quad \omega_c \cong 1.6, \varphi_m \cong 37^\circ$$

Interpretazione

◊ $\bar{K}_p \equiv k_m = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|}$ Limite di stabilità

Il guadagno critico è il margine di guadagno, cioè: trovare \bar{K}_p corrisponde a trovare $|G(j\omega_\pi)|$

◊ $\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega_\pi}$

Le oscillazioni hanno pulsazione ω_π , cioè: trovare \bar{T} corrisponde a trovare la pulsazione ω_π

◊ Quindi \bar{K}_p, \bar{T} mi forniscono il punto $G(j\omega_\pi)$ della risposta in frequenza.

Nota. La procedura non è applicabile quando:

- non si raggiunge mai il limite di stabilità ($k_m = \infty$)
- la presenza di oscillazioni può danneggiare l'impianto

6.2.2 Regola di Ziegler-Nichols in anello aperto



(i) Applicare $u(t) = Usca(t)$

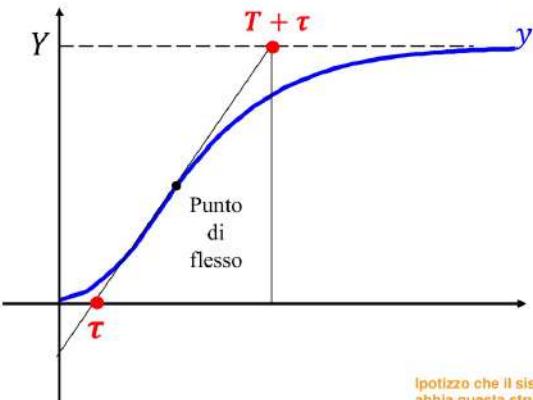
(ii) Registrare la risposta $y(t)$ e ricavare alcuni parametri caratteristici (metodo della tangente)

τ : ritardo equivalente

T : costante di tempo equivalente

$\mu = \frac{Y}{U}$: guadagno (Y è il valore di regime di $y(t)$)

(iii) Determinare K_p, T_I, T_D in funzione di μ, τ, T consultando un'apposita tabella.



Metodo della tangente

Modello del sistema ricavato
dalla risposta allo scalino

Ipotizzo che il sistema sotto controllo
abbia questa struttura

$$\hat{G}(s) = \frac{\mu}{1+Ts} e^{-\tau s}$$

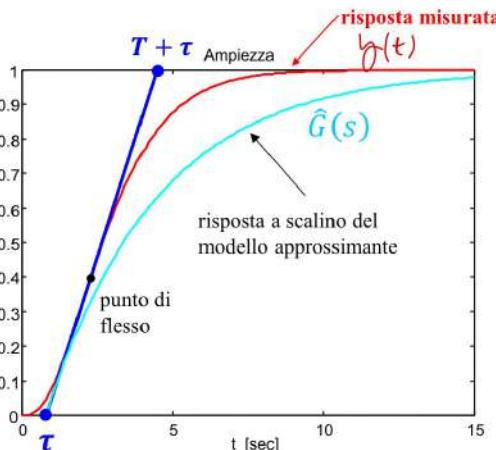
con $\mu = \frac{Y}{U}$

Altri metodi:

- metodo delle aree
- metodo dei momenti

E' un metodo di
identificazione!

Esempio



$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

dalla risposta misurata

$$\mu = 1, T = 3.7, \tau = 0.8$$

modello approssimante ottenuto
con il metodo della tangente

Stima

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{3.7s+1} e^{-0.8s}$$

coefficienti PID (dalla tabella)
 $K_p = 5.55, T_i = 1.6, T_d = 0.4$

Con questa scelta si ottiene
 $\omega_c \approx 1.5 \text{ rad/s}, \varphi_m \approx 22^\circ$

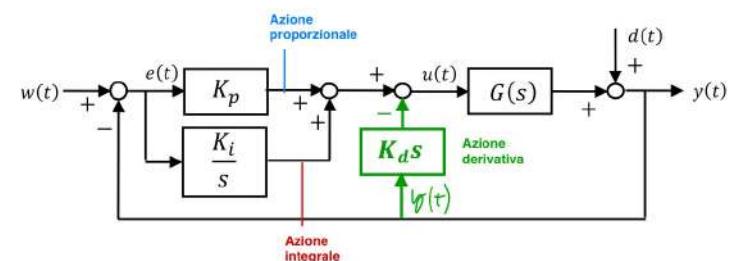
	K_p	T_I	T_D
P	$T/\mu\tau$		
PI	$0.9T/\mu\tau$	3τ	
PID	$1.2T/\mu\tau$	2τ	0.5τ

Nel caso del controllore PID si ha che $T_I = 4T_D$. Di conseguenza la funzione di trasferimento del controllore ha 2 zeri coincidenti in $\frac{-4}{T}$.

Anche in questo caso la scelta dei parametri porta sistemi a fase minima ad avere la massima pulsazione critica ω_c possibile compatibilmente con un margine di fase φ_m di almeno 30° .

Più che regole rigide vanno intese come procedure per individuare valori indicativi dei parametri (intorno ai quali operare una taratura manuale fine).

Schema a derivazione dell'uscita



- La funzione di trasferimento da $d(t)$ a $y(t)$ non cambia.
- Nella funzione di trasferimento da $w(t)$ a $y(t)$ cambiano solo gli zeri.
- Non cambiano le proprietà di stabilità e il comportamento statico.

Generalizzazione

E' possibile usare quantità diverse dall'errore nelle tre azioni

$$U(s) = K_p E_p(s) + \frac{K_i}{s} E(s) + K_d s E_d(s)$$

Proporzionale Integrale Derivativa

dove

$$E(s) = W(s) - Y(s)$$

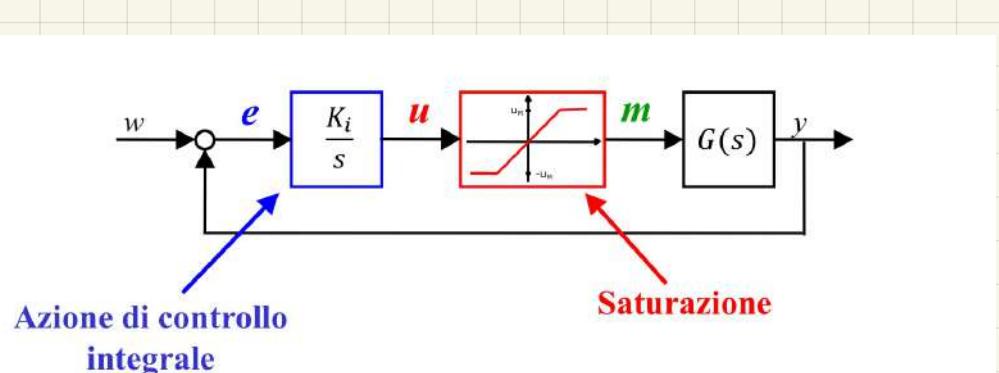
$$E_p(s) = \alpha W(s) - Y(s)$$

$$E_d(s) = \beta W(s) - Y(s)$$

Se $\alpha = \beta = 1$ si ha il controllore PID standard

Se $\alpha = \beta = 0$ si ha un controllore PID con azione derivativa e proporzionale calcolate solo sulla base di $y(t)$

I parametri α e β non influiscono sulla stabilità e sul comportamento statico del sistema in anello chiuso.



Equazione della saturazione

$$m(t) = \begin{cases} -u_M & u(t) < -u_M \\ u(t) & |u(t)| \leq u_M \\ u_M & u(t) > u_M \end{cases}$$

Satura

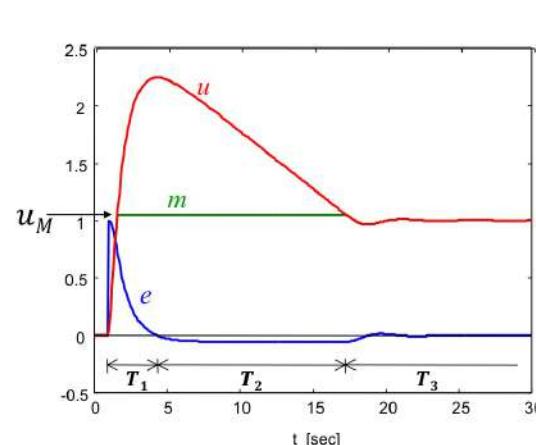
$-U_M \leq W(t) \leq U_M$

8. Saturazione dell'azione integrale (wind-up)

Tutti gli attuatori hanno dei limiti sull'azione di controllo che possono esercitare sul sistema sotto controllo.

Tali limiti sono ben modellabili mediante **saturazione**.

Quando la legge di controllo contiene un'**azione integrale**, la presenza della saturazione può causare un effetto indesiderato noto come **wind-up**.



Intervallo T_1

$e(t) > 0$: $u(t)$ cresce senza limiti mentre $m(t)$ cresce solo fino a u_M .

Intervallo T_2

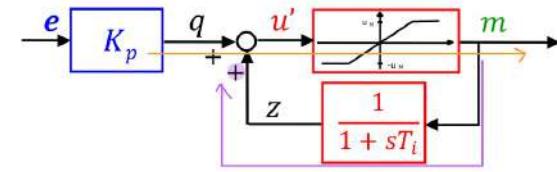
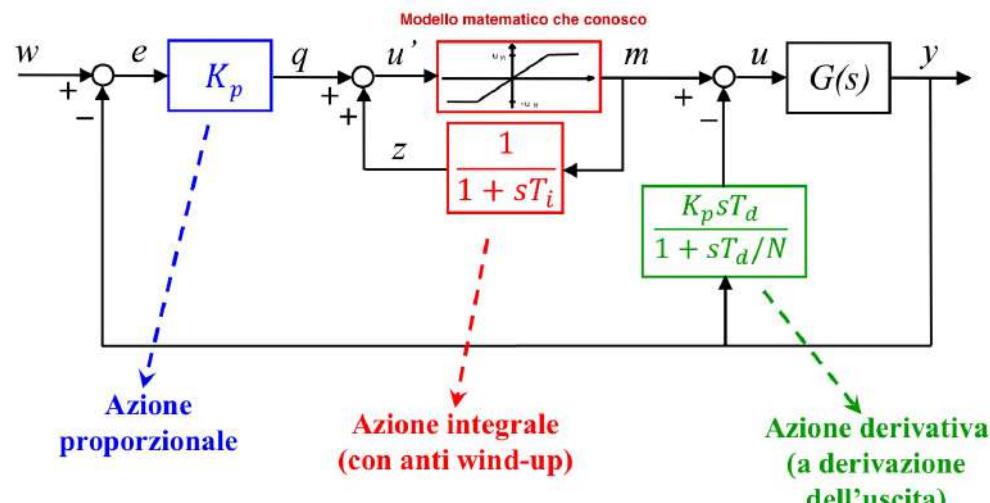
$e(t) < 0$: $m(t)$ dovrebbe diminuire, ma bisogna prima attendere che $u(t)$ decresca fino a u_M .

Intervallo T_3

Quando finalmente $u(t)$ raggiunge la soglia u_M allora anche $m(t)$ può diminuire.

Si noti che basta un breve transitorio per portare $e(t)$ ad annullarsi.

Implementazione anti wind-up (a derivazione dell'uscita)



Quando il controllore opera nella **zona lineare** della saturazione si ha $m(t) = u'(t)$.

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \frac{1}{1 - \frac{1}{1+sT_i}} = K_p \left(\frac{1+sT_i}{sT_i} \right) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad \text{Controllore PI}$$

Si supponga di **operare in saturazione** nelle seguenti condizioni:

$$m(t) = u_M \text{ con } e(t) > 0 \text{ e } q(t) > 0$$

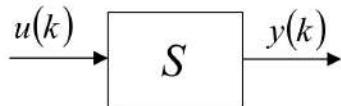
Dopo un transitorio si ha $z(t) = u_M$.

Però, appena l'errore cambia segno si ha:

$$e(t) < 0, q(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad u'(t) = q(t) + u_M < u_M$$

e si torna nella **zona lineare**.

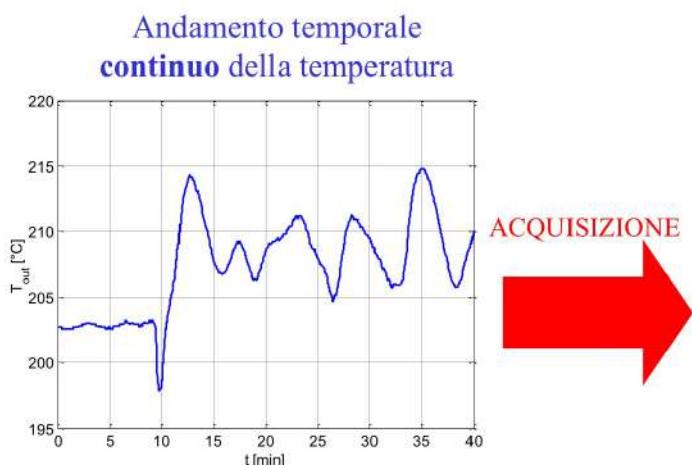
1. Introduzione



Esprimono relazioni causa/effetto (come i sistemi a tempo continuo) tra **segnali discreti**.

Ingresso ed uscita dipendono **dall'indice (temporale) discreto k** .

Essi sono definiti mediante **equazioni alle differenze**.



Valori numerici acquisiti

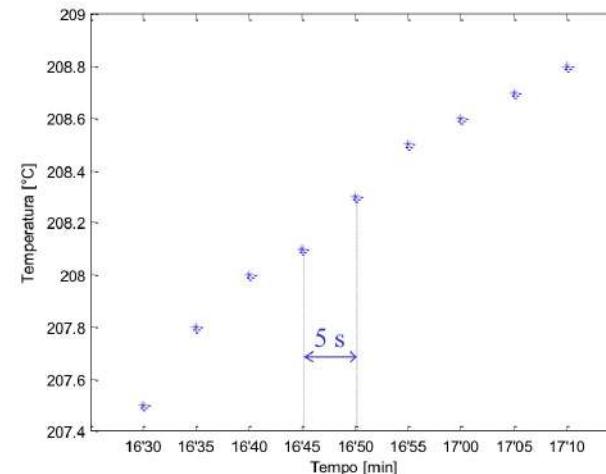
Tempo [min]	T [°C]
...	...
16'30"	207.5
16'35"	207.8
16'40"	208.0
16'45"	208.1
16'50"	208.3
16'55"	208.5
17'00"	208.6
17'05"	208.7
17'10"	208.8
...	...

2. Segnali a tempo discreto

Il tempo evolve **con continuità**. Ciò significa che non è possibile definire un intervallo di tempo minimo: sarà sempre possibile concepire un intervallo di tempo più breve.

Coerentemente con questo fatto è stata definita e studiata la teoria dei sistemi a tempo continuo, dove le variabili in gioco (ingresso, stato, uscita) sono funzioni del tempo continuo, cioè: ad ogni istante t reale è possibile definire e assegnare il valore della variabile in quell'istante.

E' possibile definire delle **variabili che assumono valori solo in corrispondenza di un indice discreto**.



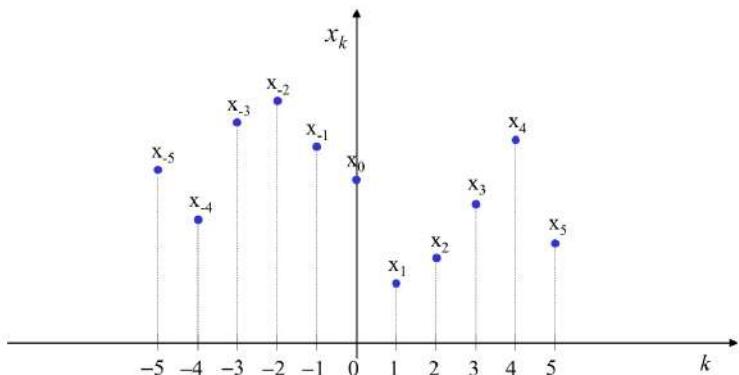
Ogni 5" è stato acquisito un valore di temperatura.

Il segnale di temperatura che è stato acquisito e memorizzato nel calcolatore assume valori solo ogni 5 s. E' un **segnale campionato**.

I **segnali a tempo discreto** sono sequenze di valori reali, ordinate secondo un indice (temporale) intero (relativo).

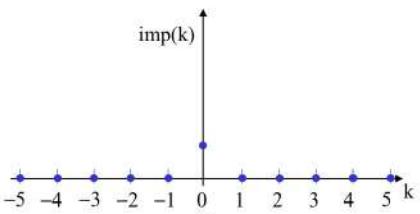
Vengono usati (come si vedrà) anche per descrivere segnali campionati.

$$x_k : Z \rightarrow \Re$$

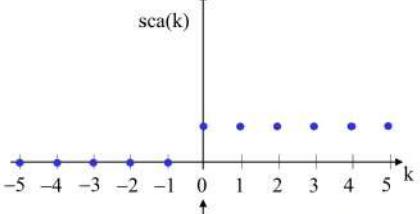


Segnali canonici

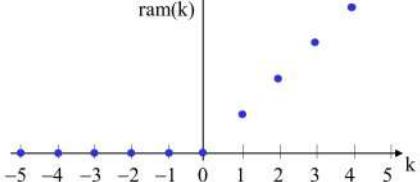
$$\text{imp}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$



$$\text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{ram}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k & k \geq 0 \end{cases}$$



Normalmente l'indice temporale parte da 0, cioè $k \in \mathbb{Z}^+$.

Sono utilizzate ugualmente le seguenti due notazioni:

$$x_k \ u_k \ y_k$$

$$x(k) \ u(k) \ y(k)$$

3. Rappresentazione di stato (sistemi SISO tempo invarianti)

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) \\ y(k) = g(\mathbf{x}(k), u(k)) \end{cases}$$

equazione di stato
trasformazione di uscita

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

condizione iniziale

$$\mathbf{x}(k) \in \Re^n, u(k) \in \Re, y(k) \in \Re$$

$$\mathbf{f} : \Re^n \times \Re \rightarrow \Re^n$$

$$g : \Re^n \times \Re \rightarrow \Re$$

Un sistema dinamico a tempo discreto è descritto da **equazioni alle differenze**.

In un'equazione alle differenze, il valore delle variabili all'indice $k+1$ viene calcolato sulla base del valore delle variabili a valori precedenti dell'indice k .

Esempio

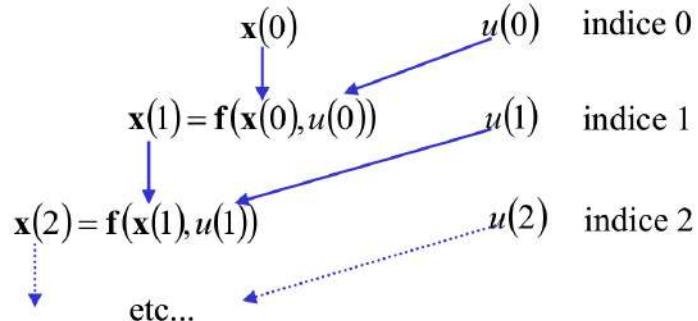
$$\begin{cases} x_1(k+1) = 3x_1(k) - x_2^2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -\log x_1(k) + x_2(k) - 2u(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

con $\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$

5. Movimento

$\mathbf{x}(0)$
 $u(k), k \geq 0 \}$  $\mathbf{x}(k), k \geq 0$ Movimento dello stato
 $y(k), k \geq 0$ Movimento dell'uscita

Il movimento dello stato può essere calcolato iterativamente.
 Per esempio, considerando un sistema tempo invariante con $k_0=0$:



4. Classificazione

Sistema tempo invariante

f e g non dipendono esplicitamente dalla variabile temporale k

Sistema lineare

f e g sono lineari in $x(k)$ e $u(k)$

Sistema strettamente proprio g non dipende esplicitamente da $u(k)$

Sistema SISO

l'ingresso e l'uscita sono scalari

6. Equilibrio (sistemi SISO tempo invarianti)

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) \\ y(k) = g(\mathbf{x}(k), u(k)) \end{cases}$$

$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$ stato iniziale

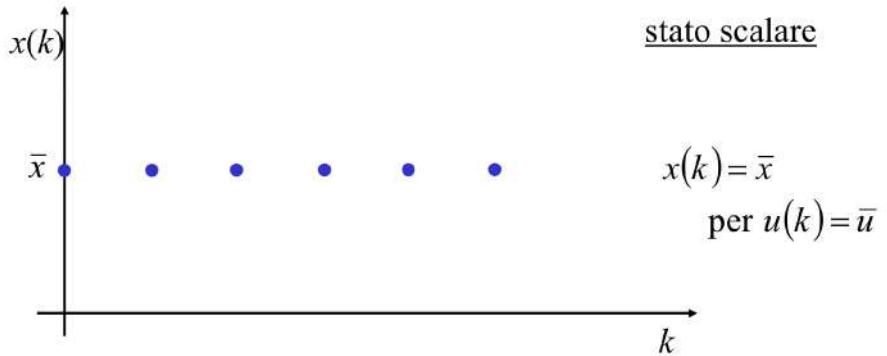
$u(k) = \bar{u}, k \geq 0$ ingresso costante

Stato di equilibrio

Movimento dello stato $\mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{x}}$ costante nel tempo in corrispondenza di $u(k) = \bar{u}$

Uscita di equilibrio

Movimento dell'uscita $y(k) = \bar{y}$ costante nel tempo in corrispondenza di $u(k) = \bar{u}$



Calcolo dell'equilibrio (per sistemi a tempo discreto)

$$x(k+1) = x(k) = \bar{x} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases} \quad \text{Eq. algebrica}$$

Esempio

$$\begin{cases} x(k+1) = -0.5x(k) + 0.25u(k) \\ y(k) = 3x(k) - u(k) \end{cases}$$

Calcolare stato ed uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante $u(k) = 2, k \geq 0$

Bisogna risolvere l'equazione algebrica

$$\bar{x} = -0.5\bar{x} + 0.25 \cdot 2 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \bar{x} = \frac{1}{3} \quad \text{Stato di equilibrio} \quad (\text{per } \bar{u} = 2)$$

Se si applica l'ingresso costante $\bar{u} = 2$ con condizione iniziale $x(0) = \bar{x} = \frac{1}{3}$, il movimento dello stato è

$$x(k) = \bar{x} = \frac{1}{3}, \quad k \geq 0$$

L'uscita di equilibrio è $\bar{y} = 3\bar{x} - \bar{u} = -1$

7. Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI) (caso SISO)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]_{1 \times n} \quad D = [d]_{1 \times 1}$$

Nota Frequentemente si trovano F, G, H, D

8. Equilibrio di sistemi LTI (caso SISO)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

In corrispondenza di $u(k) = \bar{u}$ si imponga $x(k+1) = x(k) = \bar{x}$

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad (I - A)\bar{x} = B\bar{u}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } \det(I - A) \neq 0 \quad \bar{x} &= (I - A)^{-1}B\bar{u} \\ \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u} = \underbrace{(C(I - A)^{-1}B + D)}_{\mu} \bar{u} \\ \mu &= \frac{\bar{y}}{\bar{u}} \quad \text{guadagno statico} \end{aligned}$$

Il sistema $(I - A)\bar{x} = B\bar{u}$ può avere infinite o nessuna soluzione.

9. Movimento di sistemi LTI (caso SISO)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & x(0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) & u(k), k \geq 0 \end{cases}$$

Iterando l'equazione di stato:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Ax_0 + Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A(Ax_0 + Bu(0)) + Bu(1) = A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1)$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A(A^2 x_0 + ABu(0) + Bu(1)) + Bu(2) = \\ = A^3 x_0 + A^2 Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

10. Linearizzazione di sistemi non lineari (caso SISO)

Si consideri un sistema non lineare stazionario

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) \\ y(k) = g(\mathbf{x}(k), u(k)) \end{cases}$$

Si supponga che questo sistema abbia uno stato di equilibrio \bar{x} in corrispondenza di un ingresso costante \bar{u} cioè:

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \bar{\mathbf{x}}$$

E' possibile definire un **sistema lineare** che **approssimi** il comportamento dinamico del sistema non lineare vicino all'equilibrio sfruttando la medesima logica usata per i sistemi a tempo continuo.

Definendo le "piccole variazioni":

Per calcolare il movimento dell'uscita basta inserire l'espressione del movimento dello stato nella trasformazione d'uscita.

$$y(k) = \underbrace{CA^k x_0 + C \sum_{j=1}^k A^{k-j} B u(j-1)}_{y_l(k)} + Du(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Movimento libero dell'uscita

Movimento forzato dell'uscita

Si può scrivere il seguente sistema lineare approssimante:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{x}(k+1) \cong \mathbf{f}_x(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\delta \mathbf{x}(k) + \mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\delta u(k) \\ \delta y(k) \cong g_x(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\delta \mathbf{x}(k) + g_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})\delta u(k) \end{cases}$$

$$\mathbf{f}_x(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$$

matrice A $n \times n$

$$\mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u \\ \vdots \\ \partial f_n / \partial u \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

vettore $B \in n \times 1$

$$g_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{u}) = [\partial g / \partial x_1 \quad \cdots \quad \partial g / \partial x_n]_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

vettore C $1 \times n$

$$g_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \partial g / \partial u \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

scalare $D \ 1 \times 1$

11. Stabilità dell'equilibrio nei sistemi LTI

Consideriamo un sistema LTI SISO

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Sia (\bar{x}, \bar{u}) un equilibrio per il sistema.

$$\begin{cases} u(k) = \bar{u}, k \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad \text{movimento nominale}$$

$$x(k) = \bar{x}, k \geq 0$$

Usando l'espressione del movimento dello stato

$$\text{movimento nominale} \quad x(k) = A^k \bar{x} + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u} = \bar{x} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} u(k) = \bar{u}, k \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta \bar{x} \end{cases}$$

perturbazione della condizione iniziale

Usando l'espressione del movimento dello stato

movimento perturbato

$$x(k) = A^k (\bar{x} + \delta \bar{x}) + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u}$$

$$= A^k \bar{x} + A^k \delta \bar{x} + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u} = \\ = A^k \bar{x} + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u} + A^k \delta \bar{x}$$

movimento nominale

perturbazione del movimento

Quindi:

$$\delta x(k) = x(k) - \bar{x} = A^k \delta \bar{x}$$

perturbazione del movimento

perturbazione della condizione iniziale

La perturbazione del movimento che si ottiene in seguito ad una perturbazione della condizione iniziale:

- non dipende dal particolare stato di equilibrio quindi si può parlare di stabilità del sistema
- dipende solo dalla matrice A^k
- la stabilità (nei sistemi lineari) è una proprietà "globale" (non dipende dall'entità della perturbazione)

Si può quindi dedurre che

Asintotica stabilità $\iff \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$

Instabilità $\iff A^k$ diverge per $k \rightarrow \infty$

Stabilità $\iff A^k$ limitata $\forall k$

E' possibile ripetere l'analisi modale della matrice A in stretta analogia con quanto fatto per i sistemi a tempo continuo (di cui saranno mostrate le sole conclusioni).

12. Stabilità dei sistemi LTI

Siano λ_i gli autovalori della matrice A .

E' possibile discutere la stabilità sfruttando considerazioni simili a quelle fatte per i sistemi dinamici a tempo continuo.

Teorema 1

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori della matrice A hanno **modulo strettamente minore di 1**.

$$|\lambda_i| < 1, \forall i \iff \text{Asintotica stabilità}$$

Teorema 2

Un sistema LTI è **instabile** se la matrice A ha almeno un autovalore con **modulo strettamente maggiore di 1**.

$$\exists i^*: |\lambda_{i^*}| > 1 \rightarrow \text{Instabilità}$$

Teorema 3

Un sistema LTI è **stabile** se la matrice A ha tutti gli autovalori con **modulo strettamente minore di 1 ed uno solo con modulo unitario** (o una sola coppia c.c. con modulo unitario).

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i \quad \exists! i^*: |\lambda_{i^*}| = 1 \rightarrow \text{Stabilità}$$

Osservazione 1 (sul Teorema 3)

Una coppia di autovalori complessi coniugati "conta" come uno solo. Quindi, un sistema con una sola coppia di autovalori complessi coniugati con modulo unitario (e tutti gli altri con modulo inferiore ad 1) è stabile (semplicemente).

Osservazione 2 (sui Teoremi 2 & 3)

Quel che si deduce dall'Osservazione 1 è che ci sono sistemi con più di un autovalore con modulo unitario (e tutti gli altri con modulo inferiore ad 1) che sono **stabili (semplicemente)** ed altri sistemi con più di un autovalore con modulo unitario (e tutti gli altri con modulo inferiore ad 1) che sono **instabili**.

Schema riassuntivo per autovalori con modulo unitario

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i \quad \exists i^*: |\lambda_{i^*}| = 1 \rightarrow \text{non asintoticamente stabile} \\ (\text{ma stabile o instabile?})$$



• **singolo** autovalore con $|\lambda_i| = 1$ \rightarrow **semplicemente stabile**
(o una sola coppia di autovalori complessi coniugati con modulo unitario)

• **più** autovalori con $|\lambda_i| = 1$

semplicemente stabile
?
 instabile
Non affrontiamo questo caso

Asintotica stabilità $\iff \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$

Instabilità $\iff A^k$ diverge per $k \rightarrow \infty$

approfondimento

Stabilità $\iff A^k$ limitata $\forall k$

$$|\lambda_i| < 1, \forall i$$

$$\exists i : |\lambda_i| > 1 \\ \text{oppure}$$

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i$$

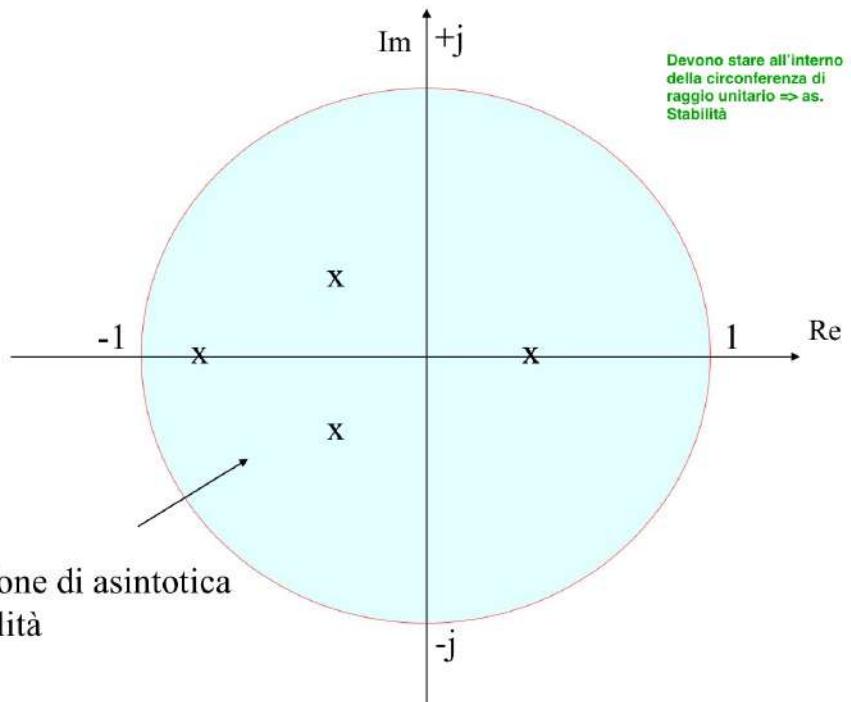
A ha autovalori multipli con modulo unitario la cui molteplicità geometrica è **inferiore** alla molteplicità algebrica.

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i \quad \exists ! i : |\lambda_i| = 1$$

oppure

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i$$

A ha autovalori multipli con modulo unitario la cui molteplicità geometrica è **uguale** alla molteplicità algebrica.



Esempio

Si consideri nuovamente il problema della gestione delle scorte di un magazzino e se ne discuta la stabilità.

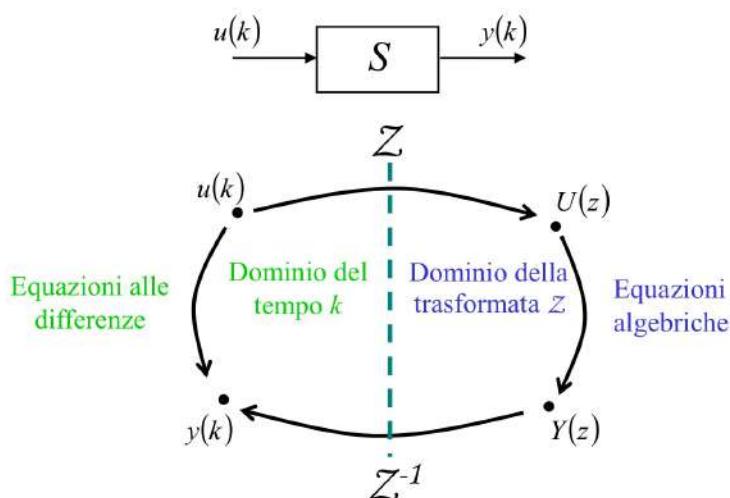
$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 0 < \alpha < 1$$

$$C = [1 \ 0] \quad D = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \alpha \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \implies |\lambda_i| < 1 \text{ per } i = 1, 2 \implies \text{Sistema As. stabile}$$

CAP XXIX

1. Introduzione



2. Definizione

$$\begin{array}{ccc} f(k): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ \downarrow Z \\ F(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

Trasforma una funzione reale di variabile intera in una funzione complessa di variabile complessa.

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

Esempio - Trasformata dello scalino

$$f(k) = \text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Per k positivo = 1

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Esempio - Trasformata dell'impulso

$$f(k) = \text{imp}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) = 1$$

Unico addendo
che rimane della
serie

Esempio - Trasformata dell'esponenziale

$$f(k) = \lambda^k, \quad \lambda > 0$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda z^{-1})^k = \frac{1}{1-\lambda z^{-1}} = \frac{z}{z-\lambda}$$

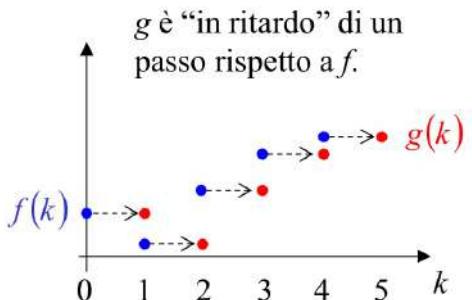
Serie geometrica

3.2 Ritardo

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

$$\text{Sia } g(k) = f(k-1)$$

Il segnale $g(k)$ è in ritardo di un passo rispetto al segnale $f(k)$.
Il segnale $g(k)$ assume esattamente lo stesso valore del segnale $f(k)$ ma un campione dopo.



Allora

$$G(z) = z^{-1}F(z)$$

Ritardo

Infatti:

$$\begin{aligned} G(z) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-k} = f(-1) + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots = \\ &= 0 + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots = z^{-1}(f(0) + f(1)z^{-1} + \dots) = \\ &= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = z^{-1}F(z) \end{aligned}$$

La f a tempi negativi è nulla

3. Proprietà

3.1 Linearità

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

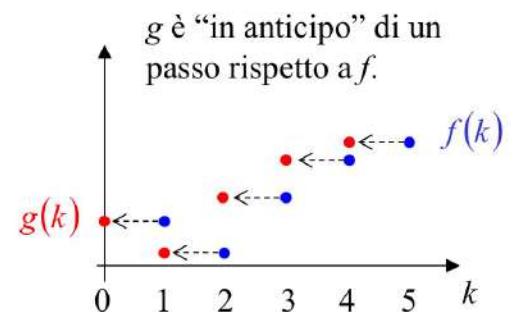
$$G(z) = \mathcal{Z}[g(k)]$$

$$\mathcal{Z}[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z) \quad \forall \alpha, \beta \in C$$

3.3 Anticipo

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

$$\text{Sia } g(k) = f(k+1) \\ \text{con } f(0) = 0$$



Allora

$$G(z) = zF(z)$$

Anticipare

Infatti:

$$\begin{aligned} G(z) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k} = f(1) + f(2)z^{-1} + f(3)z^{-2} + \dots \\ &= z(f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots) = z \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = zF(z) \end{aligned}$$

Tabella trasformate notevoli

$\text{imp}(k)$	1
$\text{sca}(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$\text{ram}(k)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\text{par}(k)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^k \text{sca}(k)$	$\frac{z}{z-a}$
$\sin(\vartheta k) \text{sca}(k)$	$\frac{z \sin(\vartheta)}{z^2 - 2 \cos(\vartheta)z + 1}$
$\cos(\vartheta k) \text{sca}(k)$	$\frac{z(z - \cos(\vartheta))}{z^2 - 2 \cos(\vartheta)z + 1}$

4. Calcolo dell'antitrasformata

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$$

- ✓ Formula esplicita
 - ✓ Teorema del valore iniziale $\rightarrow f(0)$
 - ✓ Teorema del valore finale $\rightarrow f(\infty)$
 - ✓ Sviluppo di Heaviside
 - ✓ Lunga divisione new!
- } (solo per $F(z)$ razionali)

4.1 Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Inversa scalino

Infatti:

$$F(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots \xrightarrow[z \rightarrow \infty]{} f(0)$$

Rimane solo

4.3 Antitrasformata \mathcal{Z} mediante lunga divisione

Si consideri una $F(z)$ razionale

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0} \quad \text{con } n \leq m$$

Facendo la divisione di polinomi si ottengono tanti campioni di $f(k)$ quanti sono i "colpi" di lunga divisione che si fanno.

Infatti:

$$\begin{array}{c|l} N(z) & D(z) \\ \hline & f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \end{array}$$

Con la lunga divisione non si ottiene un'espressione analitica di $f(k)$, ma solo i suoi primi campioni.

4.2 Teorema del valore finale

Ipotesi: i poli di $F(z)$ devono avere tutti modulo < 1 oppure essere in $z=1$

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z)$$

Esempio

$$F(z) = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 + 2z + 2}$$

$$\begin{array}{r} 4z^2 - z + 2 \\ -4z^2 - 8z - 8 \\ \hline -9z - 6 \\ 9z + 18 + 18z^{-1} \\ \hline 12 + 18z^{-1} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} z^2 + 2z + 2 \\ 4 - 9z^{-1} + 12z^{-2} + \dots \\ f(2) = 12 \\ f(1) = -9 \\ f(0) = 4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{4z^2}{z^2} - 4 \\ + \cdot (z^2 + 2z + 2) \\ \text{Cambiando di segno} \end{array}$$

Si consideri il caso in cui $F(z)$ abbia **tutti i poli distinti e non nulli**, cioè:

$$D(z) = \prod_{i=1}^n (z - p_i) \quad p_i \neq p_j \quad p_i \neq 0 \quad \forall i$$

Si scomponga $\frac{F(z)}{z}$ come segue:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{(z - p_1)} + \frac{\alpha_2}{(z - p_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{(z - p_n)}$$

da cui:

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{(z - p_1)} + \alpha_2 \frac{z}{(z - p_2)} + \dots + \alpha_n \frac{z}{(z - p_n)}$$

E quindi infine

$$f(k) = \alpha_0 \text{imp}(k) + \alpha_1 p_1^k + \alpha_2 p_2^k + \dots + \alpha_n p_n^k \quad k \geq 0$$

4.4 Sviluppo di Heaviside

Si consideri il problema dell'anttrasformazione della funzione razionale

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

con grado di $N(z)$ inferiore od uguale a quello di $D(z)$.

L'obiettivo è scomporre $F(z)$ in una somma di termini di cui conosco la trasformata. Osservando la tabella delle trasformate notevoli si nota che tutte hanno un fattore z al numeratore.

Quindi, si applicherà il metodo di Heaviside a $\frac{F(z)}{z}$

Esempio

Aggiungo un z

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 - 0.75z + 0.125} \quad \rightarrow \quad F(z) = \frac{4z^2 - z + 2}{(z - 0.25)(z - 0.5)} \cdot \cancel{z} \\ F(z) &= \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{(z - 0.25)} + \frac{\alpha_2}{(z - 0.5)} = \frac{\alpha_0(z - 0.25)(z - 0.5) + \alpha_1 z(z - 0.5) + \alpha_2 z(z - 0.25)}{z(z - 0.25)(z - 0.5)} = \\ &= \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)z^2 + (-0.75\alpha_0 - 0.5\alpha_1 - 0.25\alpha_2)z + 0.125\alpha_0}{z(z - 0.25)(z - 0.5)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ 0.75\alpha_0 + 0.5\alpha_1 + 0.25\alpha_2 = 1 \\ 0.125\alpha_0 = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_0 = 16 \\ \alpha_1 = -32 \\ \alpha_2 = 20 \end{cases} \quad \frac{F(z)}{z} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{(z - 0.25)} + \frac{\alpha_2}{(z - 0.5)}$$

$$F(z) = 16 - 32 \frac{z}{(z - 0.25)} + 20 \frac{z}{(z - 0.5)}$$

$$f(k) = 16 \text{imp}(k) - 32 \cdot (0.25)^k + 20(0.5)^k \quad k \geq 0$$

1. Funzione di trasferimento

Si consideri un sistema LTI $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$

Eseguendo la trasformazione \mathcal{Z} si ottiene a partire da condizioni iniziali nulle si ottiene:

$$\begin{cases} zX(z) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

Infine:

$$Y(z) = \underbrace{\left[C(zI - A)^{-1}B + D \right]}_{G(z)} U(z)$$

Funzione di trasferimento

1.1 Interpretazione della funzione di trasferimento (per sistemi SISO)

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento $G(z)$

Siano

$$u(k) = \text{imp}(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} U(z) = 1$$

$$x(0) = 0$$

Allora

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z)$$

La funzione di trasferimento è la trasformata \mathcal{Z} della risposta all'impulso del sistema

1.2 Proprietà

$$G(z) \text{ è razionale} \longrightarrow G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- $D(z) = \varphi(z) = \det(zI - A)$ è un polinomio in z di grado n (è il polinomio caratteristico!)

- $N(z)$ è un polinomio in z :
 - ✓ di grado n se D è diverso da zero
 - ✓ di grado $< n$ se D è nullo

Salvo cancellazioni

In caso di cancellazioni

- $D(z)$ è un fattore di $\varphi(z)$ di grado $r < n$
- $N(z)$ ha grado $v < n$ ($v = r$ solo se D è diverso da zero)

Una cancellazione in $G(z)$ è un indicatore dell'esistenza di **parti "nascoste"** (non raggiungibili e/o non osservabili) del sistema (cioè che esistono nella rappresentazione di stato e che "si perdono" passando alla rappresentazione ingresso/uscita).

1.3 Poli e zeri di una funzione di trasferimento

- I poli sono tutti autovalori
- Un autovalore può non essere un polo in caso di cancellazioni
- La stabilità dipende dai poli

As. stabilità  $|\lambda_i| < 1$
(salvo cancellazioni)

- Numero di zeri \leq numero di poli

Z = 1 gioca il ruolo che **s = 0** ha a tempo continuo.
È dove si annulla il denominatore dello scalino

Se invece la matrice **I-A non è invertibile**, ovvero la matrice **A** ha autovalori in $z=1$, cioè $G(z)$ ha poli in $z=1$, è possibile definire **un guadagno generalizzato** della funzione di trasferimento:

$$\mu = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^g G(z)$$

dove g è il tipo di $G(z)$ ovvero il numero di poli in $z=1$ ($g>0$) oppure il numero di zeri in $z=1$ ($g<0$).

1.4 Guadagno statico e funzione di trasferimento

Si consideri un sistema LTI $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$

Se la matrice **I-A è invertibile**, ovvero la matrice **A** non ha autovalori in $z=1$, cioè $G(z)$ non ha poli in $z=1$, il **guadagno statico** del sistema è

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = (C(I - A)^{-1}B + D)$$

E' facile verificare che

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = (C(I - A)^{-1}B + D) \equiv G(1)$$

2. Equazione ricorsiva

I sistemi a tempo discreto **hanno una rappresentazione ingresso/uscita alternativa alla funzione di trasferimento**, detta **equazione ricorsiva**.

La rappresentazione ricorsiva è molto utilizzata nell'Identificazione di Modelli (IMAD).

L'equazione ricorsiva **consente di calcolare rapidamente i primi campioni delle risposte tipiche** (all'impulso ed allo scalino) di un **sistema dinamico LTI a tempo discreto**.

Esempio illustrativo

Si consideri un sistema LTI con ingresso $u(k)$ ed uscita $y(k)$ descritto mediante la seguente funzione di trasferimento

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 + 2z + 2}$$

$$\mathcal{Z}[y(k)] = Y(z)$$

$$\mathcal{Z}[y(k+1)] = z \cdot y(z)$$

$$\mathcal{Z}[y(k+2)] = z^2 \cdot y(z)$$

Si ha quindi:

$$Y(z)(z^2 + 2z + 2) = (4z^2 - z + 2)U(z)$$

$$z^2 Y(z) + 2z Y(z) + 2Y(z) = 4z^2 U(z) - zU(z) + 2U(z)$$

Antitrasformando e ricordando la proprietà di anticipo:

$$y(k+2) + 2y(k+1) + 2y(k) = 4u(k+2) - u(k+1) + 2u(k)$$

Da cui:

$$y(k+2) = -2y(k+1) - 2y(k) + 4u(k+2) - u(k+1) + 2u(k)$$

$$y(k) = -2y(k-1) - 2y(k-2) + 4u(k) - u(k-1) + 2u(k-2)$$

Forma normale:
Porto tutto a
destra e a sinistra
lascio il tempo più
avanzato.
Depois che
trasferisco il tempo
avanzato in $y(k)$

$$u(k) = \text{imp}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

$$y(k) = -\frac{1}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2) + u(k) + u(k-1) + u(k-2)$$

Tempo che
voglio
calcolare

k	u(k)	y(k)
0	1	$y(0) = -\frac{1}{4}y(-1) - \frac{1}{8}y(-2) + u(0) + u(-1) + u(-2) = 1$
1	0	$y(1) = -\frac{1}{4}y(0) - \frac{1}{8}y(-1) + u(1) + u(0) + u(-1) = \frac{3}{4}$
2	0	$y(2) = -\frac{1}{4}y(1) - \frac{1}{8}y(0) + u(2) + u(1) + u(0) = -\frac{3}{16} - \frac{1}{8} + 1 = \frac{11}{16}$
3	0	$y(3) = -\frac{1}{4}y(2) - \frac{1}{8}y(1) + u(3) + u(2) + u(1) = -\frac{11}{64} - \frac{3}{32} = -\frac{17}{64}$

Esempio

Calcolare $y(0), y(1), y(2), y(3)$ della risposta impulsiva del sistema con funzione di trasferimento $W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$

Si scriva l'equazione ricorsiva

$$\left(z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8} \right) Y(z) = (z^2 + z + 1) U(z)$$

$$y(k+2) + \frac{1}{4}y(k+1) + \frac{1}{8}y(k) = u(k+2) + u(k+1) + u(k)$$

$$y(k) = -\frac{1}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2) + u(k) + u(k-1) + u(k-2)$$

3. Sistemi FIR (Finite Impulse Response)

Sono sistemi dinamici LTI a tempo discreto con tutti e soli i poli nell'origine.

Questi sistemi hanno la caratteristica che la loro risposta allo scalino raggiunge il valore di regime in un tempo finito. In particolare, se n è l'ordine del sistema, il valore di regime viene raggiunto dopo n passi.

Tale proprietà non vale per i sistemi LTI a tempo continuo, la cui risposta a scalino non raggiunge mai il valore di regime, ma vi tende asintoticamente.

Un sistema FIR di ordine n è quindi definito dalla seguente funzione di trasferimento:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n}$$

$$z^n Y(z) = (b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0) U(z)$$

$$y(k+n) = b_n u(k+n) + b_{n-1} u(k+n-1) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

$$y(k) = b_n u(k) + b_{n-1} u(k-1) + \dots + b_1 u(k-n+1) + b_0 u(k-n) \quad \text{Dipende solo dall'ingresso}$$

L'uscita al tempo k dipende dai campioni dell'ingresso fino al più al tempo $k-n$.

L'uscita al tempo $k \Leftrightarrow y(k)$ è una combinazione lineare dei soli valori passati dell'ingresso

Esempio

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + \frac{5}{4}z + \frac{3}{8}}{z^3}$$

$$z^3 Y(z) = \left(z^2 + \frac{5}{4}z + \frac{3}{8} \right) U(z)$$

$$y(k+3) = u(k+2) + \frac{5}{4}u(k+1) + \frac{3}{8}u(k)$$

$$y(k) = u(k-1) + \frac{5}{4}u(k-2) + \frac{3}{8}u(k-3)$$

$$u(k) = \text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

Si calcoli la risposta allo scalino:

$$u(k) = \text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

$$y(0) = b_n u(0) = b_n$$

$$y(1) = b_n u(1) + b_{n-1} u(0) = b_n + b_{n-1}$$

$$y(2) = b_n u(2) + b_{n-1} u(1) + b_{n-2} u(0) = b_n + b_{n-1} + b_{n-2}$$

⋮

$$y(n) = b_n u(n) + b_{n-1} u(n-1) + \dots + b_1 u(1) + b_0 u(0) = b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu$$

$$y(n+1) = b_n u(n+1) + b_{n-1} u(n) + \dots + b_1 u(2) + b_0 u(1) = b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu$$

⋮

$$y(n+m) = b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu \quad \forall m \geq 1$$

$$\mu = F(1) = \frac{1 + \frac{5}{4} + \frac{3}{8}}{1} = \frac{21}{8}$$

Calcolare i primi quattro campioni della risposta allo scalino del sistema.

$$\mu = \frac{21}{8}$$

k	$u(k)$	$y(k)$
0	1	$y(0) = 0 + \frac{5}{4} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 0 = 0$
1	1	$y(1) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 0 = 1$
2	1	$y(2) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 0 = \frac{9}{4}$
3	1	$y(3) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{21}{8}$
4	1	$y(4) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{21}{8}$

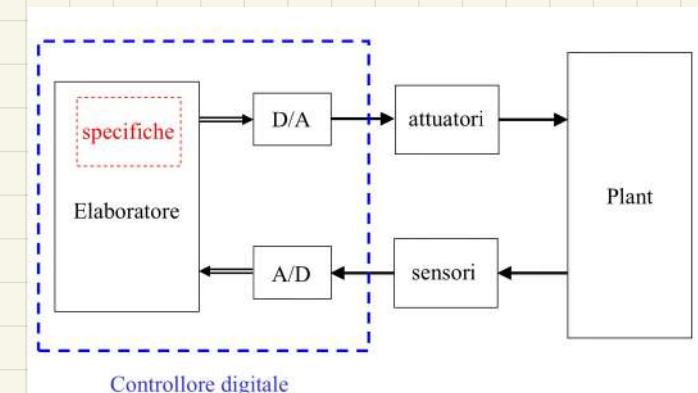
1. Introduzione

I moderni sistemi di controllo sono ormai tutti basati su elaboratori elettronici per (ovvie) ragioni:

- Costi (bassi)
- Flessibilità (indipendenti dalla tecnologia del sistema)
- Algoritmi (possibilità di utilizzarne di molto complicati)
- Integrazione con supervisione e diagnostica

Lo schema tipico di un sistema di controllo in retroazione è il seguente:

- i **sensori** trasformano le variabili misurate sul plant in variabili elettriche facilmente manipolabili (tipicamente tensioni);
- queste variabili vengono **campionate** (convertite in segnali a tempo discreto) e trasmesse ad un elaboratore;
- l'**elaboratore** è la sede dell'algoritmo di controllo che, note le specifiche (riferimento), sulla base dei segnali misurati, genera i segnali di controllo (tipicamente tensioni o correnti);
- i **segnali di controllo** vengono **convertiti in segnali analogici** (a tempo continuo), eventualmente amplificati, ed inviati agli attuatori;
- gli **attuatori** trasformano le variabili generate dal controllo nelle azioni di controllo da esercitare sul plant.



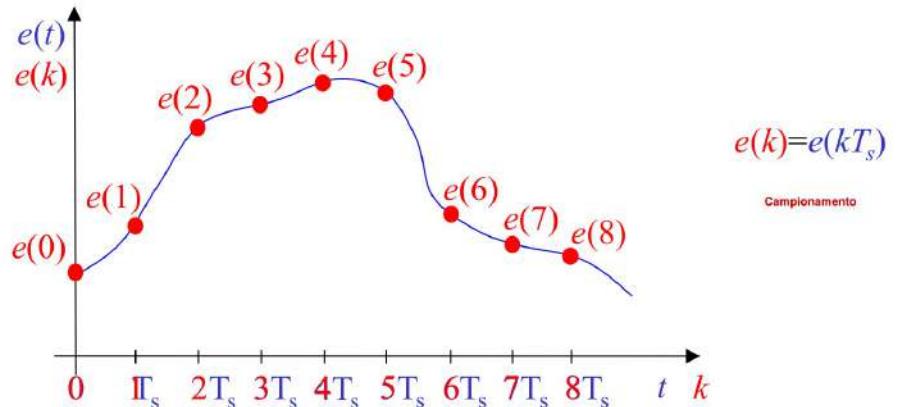
2. Campionamento e tenuta

Il **campionamento** è l'operazione che trasforma un segnale a tempo continuo (analogico) in un segnale a tempo discreto (digitale/numerico). Il "blocco" che effettua tale operazione è il **campionatore** (convertitore A/D).

La **tenuta** è l'operazione che trasforma un segnale a tempo discreto in un segnale a tempo continuo. Il "blocco" che effettua tale operazione è il **mantenitore** (convertitore D/A).

E' importante disporre di **modelli** che descrivano tali operazioni.

Campionatore (Convertitore A/D)



$e(k)$ è un numero reale per ogni k

T_s è il periodo (o tempo) di campionamento

Note

- E' evidente che l'operazione di campionamento comporta una perdita di informazione.
- Si parla di **campionatore ideale**, perchè si suppone che i campioni siano **numeri reali**. In realtà, sono numeri rappresentati in codice binario con un numero finito di bit. Ciò comporta una ulteriore perdita di informazione rappresentata dal cosiddetto **errore (o rumore) di quantizzazione**.

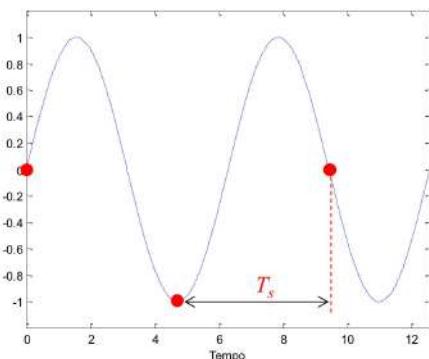
- Frequenza di campionamento $f_s = \frac{1}{T_s}$
- Pulsazione di campionamento $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$

3. Aliasing

E' evidente che l'operazione di campionamento comporta una **perdita di informazione** perchè "pretende" di concentrare l'informazione di infiniti numeri reali (una porzione di un segnale a tempo continuo) in un numero finito di numeri reali (i campioni del corrispondente segnale campionato).

Tale perdita di informazione può essere "sostanziale" cioè: nel passaggio dal continuo al discreto si perdono alcune "caratteristiche essenziali del segnale". In questo caso non è possibile ricostruire il segnale continuo originale partendo dai suoi campioni.

Esempio illustrativo



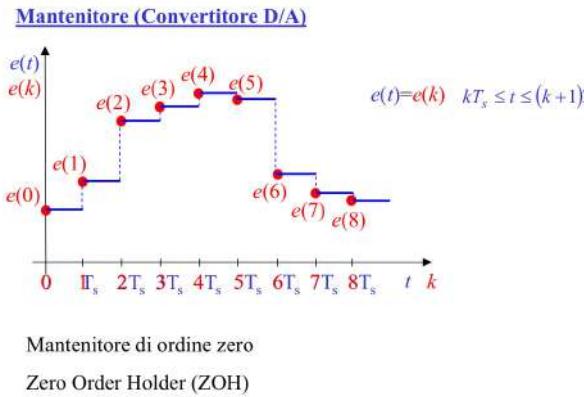
$$\text{In figura: } x(t) = \sin(t) \rightarrow P = 2\pi \rightarrow T_s = \frac{3}{2}\pi$$

Si consideri il segnale
 $x(t) = \sin(\bar{\omega}t)$

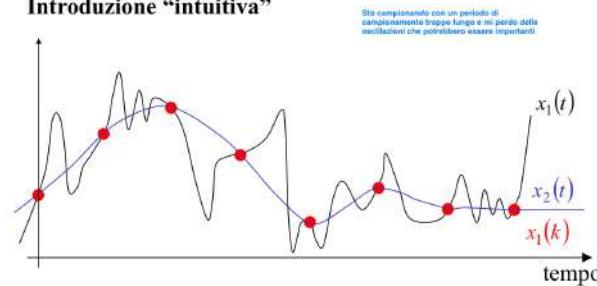
Esso ha periodo $P = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$

Si scelga il periodo di campionamento

$$T_s = \frac{3}{4}P$$



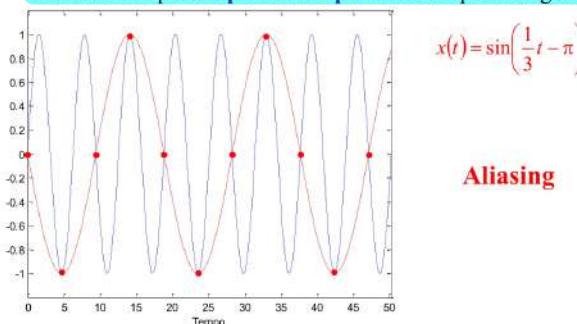
Introduzione "intuitiva"



Si eseguono le seguenti operazioni:

- campionare $x_1(t)$ ottenendo i campioni $x_1(k)$
- interpolare i campioni con una curva continua $x_2(t)$ "la più regolare possibile" (per esempio con un certo numero di derivate continue)

Cercando di tornare dalla sinusoide campionata ad una sinusoide a tempo continuo, si nota che esiste una sinusoide che passa per i medesimi campioni a pulsazione più bassa di quella originale.



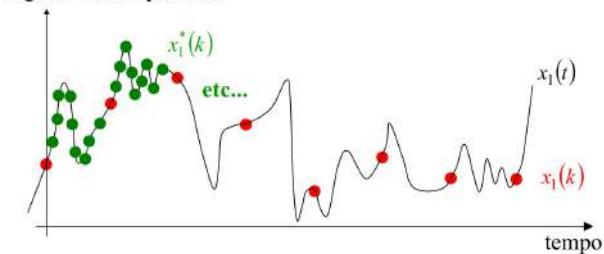
Se il periodo di campionamento è troppo lungo rispetto al periodo della sinusoide da campionare si ha **aliasing**.

Note

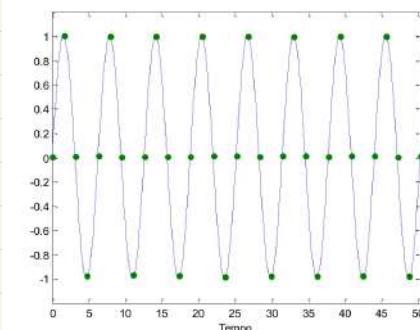
- Il ZOH è il prototipo dei mantenitori polinomiali.
- Il mantenitore deve essere sempre sincronizzato con il campionatore (e con il regolatore).

Il risultato ottenuto non sorprende: per quei campioni passano infinite funzioni continue "molto regolari".

E' stato commesso un errore nel campionamento: è stato usato un periodo di campionamento troppo lungo rispetto alla "variabilità" del segnale x_1 da campionare. E' evidente che il tempo di campionamento vada scelto in base a "quanto rapidamente varia" il segnale da campionare.



Contromisura: campionare con periodo di campionamento più breve.



Scegliendo $T_s = \frac{1}{4}P$ si può osservare che non esiste una sinusoide a pulsazione inferiore a quella che ha generato i campioni.

4. Teorema del campionamento

Sia $x(t)$ un segnale a banda limitata con pulsazione massima ω_{\max} (cioè un segnale con spettro nullo per $\omega > \omega_{\max}$).

Si campioni $x(t)$ con tempo di campionamento T_s .

Sia $\omega_N = \frac{\omega_s}{2} \equiv \frac{\pi}{T_s}$ la **pulsazione di Nyquist**.

Se $\omega_N > \omega_{\max}$ allora è possibile ricostruire il segnale a tempo continuo a partire dai suoi campioni (mediante la formula di ricostruzione di Shannon).

Nota

Il segnale in ingresso viene spesso "forzato" ad essere a banda limitata mediante **filtri antialiasing** (realizzati con elettronica analogica)

6.1 Scelta del periodo di campionamento

E' necessario tenere conto dei seguenti fattori:

1. Costo dei dispositivi

Più breve è il periodo di campionamento, più elevato è il costo dei dispositivi (con il rischio di dover ricorrere a tecnologie non standard).

2. Problemi numerici

Più breve è il periodo di campionamento, più elevato è l'errore dovuto alla quantizzazione.

3. Banda passante

La pulsazione di campionamento va scelta tenendo conto della banda passante (ω_c) del sistema retroazionato. La pulsazione critica può identificare efficacemente il limite di banda di tutti i segnali circolanti nell'anello di controllo.

4. Teorema del campionamento

Se i segnali in gioco nel sistema di controllo sono a banda limitata a ω_c allora vanno campionati a $\omega_s > 2\omega_c$.

5. Progetto di controllori digitali mediante discretizzazione di controllori analogici

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow G(s)$$

La progettazione segue i seguenti passi:

- Definizione di un modello a tempo continuo per il plant ✓
- Progettazione del controllore analogico mediante metodi ✓
 $L(\infty) = 0$
 $\omega_c > \dots$
 $\omega_{\text{ru}} \dots$
- Scelta del tempo di campionamento
- Discretizzazione della legge di controllo a tempo continuo

Da continuo a discreto

Un criterio empirico per la scelta del periodo di campionamento può quindi essere formalizzato come segue:

$$\alpha\omega_c \leq \omega_s \leq 10\alpha\omega_c \quad \text{con } \alpha \approx 5 \div 10$$

Rispettare il teorema del campionamento con un po' di margine

Non usare una pulsazione di campionamento troppo elevata.

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \rightarrow \alpha\omega_c \leq \frac{2\pi}{T_s} \leq 10\alpha\omega_c \rightarrow \frac{2\pi}{10\alpha\omega_c} \leq T_s \leq \frac{2\pi}{\alpha\omega_c}$$

Per es. scegliendo $\alpha = 2\pi$ si ha $\frac{1}{10\omega_c} \leq T_s \leq \frac{1}{\omega_c}$

N.B. Questo criterio va opportunamente modificato nel caso sia presente un filtro anti-aliasing oppure vi siano significativi ritardi di conversione e/o elaborazione.

Nota

Il criterio precedentemente esposto è (giustamente) basato sulla **velocità del sistema retroazionato**. Tanto più veloce è il sistema ad anello chiuso, tanto maggiore sarà la pulsazione critica e quindi tanto più piccolo dovrà essere scelto il periodo di campionamento.

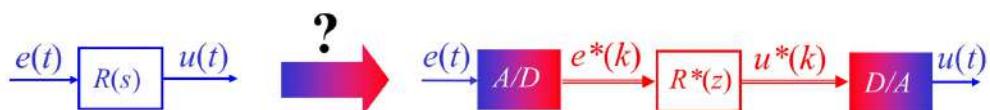
Per meglio comprendere il legame con la velocità del sistema, si supponga di avere un sistema retroazionato ben smorzato (poli dominanti ad anello chiuso con $\xi \approx 0.7$). Il tempo di assestamento della risposta allo scalino unitario sarà dunque (approssimativamente)

$$t_a \approx \frac{5}{\xi \omega_c} \rightarrow t_a \approx \frac{5}{0.7 \omega_c} \rightarrow t_a \approx \frac{7}{\omega_c} \rightarrow \omega_c \approx \frac{7}{t_a}$$

$$\text{Scegliendo } \frac{1}{10\omega_c} \leq T_s \leq \frac{1}{\omega_c} \rightarrow \frac{t_a}{70} \leq T_s \leq \frac{t_a}{7}$$

Bisogna scegliere il periodo di campionamento in modo tale da avere un numero sufficiente di campioni in un transitorio.

Metodo della trasformazione bilineare

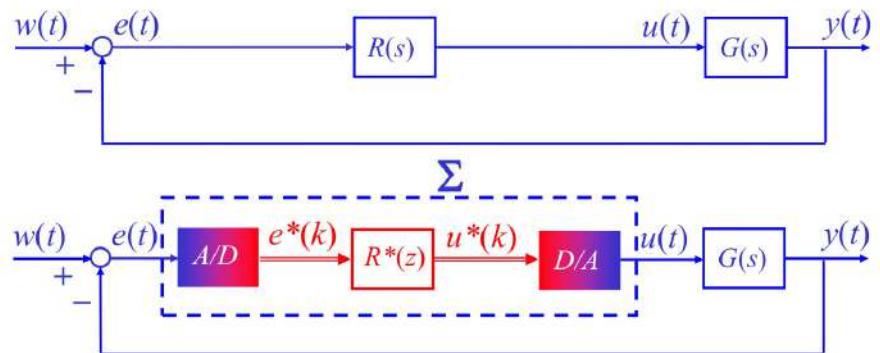


$$R(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + be(t) \\ u(t) = cx(t) + de(t) \end{cases}$$

Il controllore a tempo discreto sarà descritto mediante equazioni alle differenze. E' quindi sensato provare ad usare **metodi di integrazione numerica**.

6.2 Discretizzazione della legge di controllo a tempo continuo



Il procedimento di discretizzazione consiste nel calcolare la funzione di trasferimento a tempo discreto $R^*(z)$ in modo tale che il sistema Σ mostri un comportamento I/O approssimativamente uguale a quello di $R(s)$, progettata a tempo continuo.

In questa sede si presenta il metodo della trasformazione bilineare.

Si integri l'equazione di stato lungo un tempo pari al tempo di campionamento.

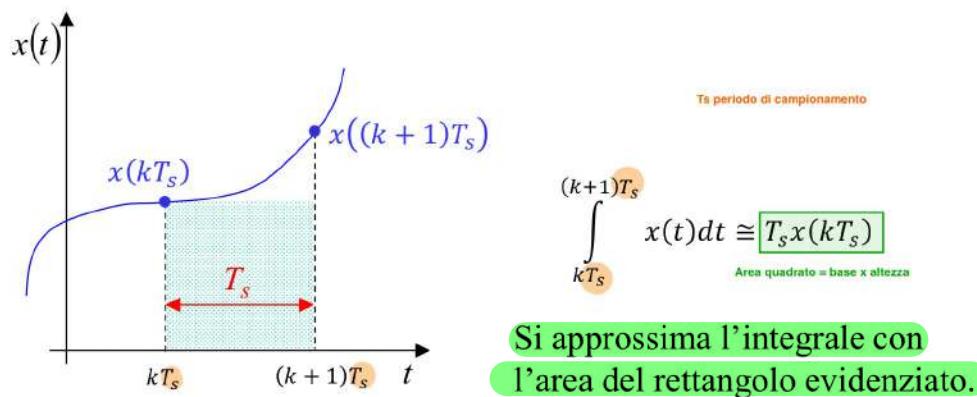
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + be(t)$$

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \dot{x}(t) dt = \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} Ax(t) dt + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} be(t) dt$$

$$x((k+1)T_s) - x(kT_s) = A \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x(t) dt + b \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e(t) dt$$

Questi integrali vanno calcolati in modo approssimato con un metodo numerico

Si approssimino gli integrali mediante il metodo di integrazione di Eulero in avanti.



$$\begin{cases} x(k+1) = (I + AT_s)x(k) + bT_s e(k) \\ u(k) = cx(k) + de(k) \end{cases}$$

Calcolando la funzione di trasferimento si ha

$$R^*(z) = c[zI - (I + AT_s)]^{-1}bT_s + d = c\left(\frac{z-1}{T_s}I - A\right)^{-1}b + d$$

La funzione di trasferimento a tempo continuo di partenza è: $R(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$

Quindi:

$$R^*(z) = R\left(\frac{z-1}{T_s}\right)$$

Discretizzazione
mediante
Eulero in avanti

$$x((k+1)T_s) - x(kT_s) = A \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x(t) dt + b \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e(t) dt$$

Integrando con il metodo di Eulero in avanti

$$x((k+1)T_s) - x(kT_s) \cong AT_s x(kT_s) + bT_s e(kT_s)$$

Si osservi che, con campionamento ideale, si ha:

$$x((k+1)T_s) \equiv x(k+1) \quad x(kT_s) \equiv x(k) \quad e(kT_s) \equiv e(k)$$

$$x(k+1) - x(k) \cong AT_s x(k) + bT_s e(k) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x(k+1) = (I + AT_s)x(k) + bT_s e(k) \\ u(k) = cx(k) + de(k) \end{cases}$$

Scegliendo differenti metodi di integrazione approssimata, si ottengono differenti relazioni tra la funzione di trasferimento a tempo discreto e la sua corrispondente a tempo continuo.

In generale:

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x(t) dt \cong ((1-\alpha)x(kT_s) + \alpha x((k+1)T_s))T_s$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$

$\alpha = 0$ Eulero in avanti

$\alpha = 1$ Eulero indietro

$\alpha = \frac{1}{2}$ Trapezio (metodo di Tustin)

In generale:

$$s \rightarrow \frac{1}{T_s} \frac{z - 1}{\alpha z + (1 - \alpha)} \quad R(s)$$

$$\alpha = 0 \quad s \rightarrow \frac{1}{T_s} (z - 1) \quad \text{Eulero in avanti} \Rightarrow R^*(z)$$

$$\alpha = 1 \quad s \rightarrow \frac{1}{T_s} \frac{z - 1}{z} \quad \text{Eulero indietro} \Rightarrow R^*(z)$$

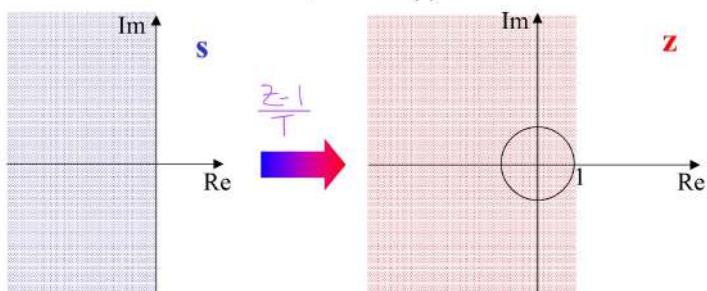
$$\alpha = \frac{1}{2} \quad s \rightarrow \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{Trapezio (metodo di Tustin)} \\ = R^*(z)$$

Nota

- Queste relazioni trasformano funzioni di trasferimento razionali in funzioni di trasferimento razionali.
- Si può dimostrare che se $R(s)$ ha n poli, anche $R^*(z)$ ha n poli. Ma dove finiscono i poli? In particolare: dove finiscono i poli a parte reale negativa di $R(s)$?

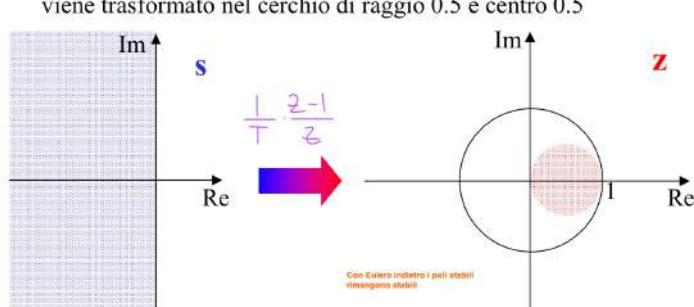
Posizione dei poli: Eulero in avanti

Il semipiano reale negativo nel dominio s , cioè $\Re(s) < 0$ viene trasformato nel semipiano $\Re(z) < 1$



Posizione dei poli: Eulero indietro

Il semipiano reale negativo nel dominio s , cioè $\Re(s) < 0$ viene trasformato nel cerchio di raggio 0.5 e centro 0.5



Posizione dei poli: Tustin

Il semipiano reale negativo nel dominio s , cioè $\Re(s) < 0$ viene trasformato nel cerchio di raggio 1 e centro l'origine

