SEMINAR 1, SERIA 13

SPAȚII METRICE. ȘIRURI ÎN SPAȚII METRICE

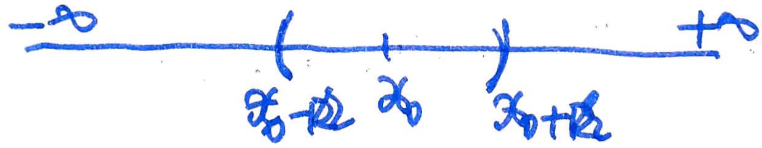
Exercițiul 1 Descrieți bilele deschise și bilele închise din spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$, unde $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $d(x,y) = |x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $d(x,y) = |x-y|$ distanța uzuală a lui $\mathbb{R}$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ și $r > 0$

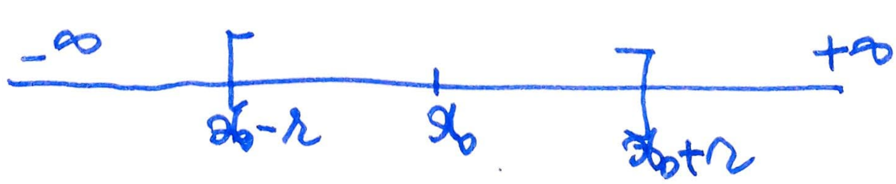
$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) < r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -r < x - x_0 < r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x < x_0 + r\} =$$
$$= (x_0 - R, x_0 + R)$$

$$\boxed{B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)}$$



$$B[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -r \leq x - x_0 \leq r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r \leq x \leq x_0 + r\} = [x_0 - r, x_0 + r]$$

$$\boxed{B[x_0, r] = [x_0 - r, x_0 + r]}$$



Exercițiul 2 Descrieți bilele deschise și bilele închise din spațiul metric $(\mathbb{R}^2, d_2)$, unde $d_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) =$

$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^n$.

Rezolvare $d_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) =$

$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ distanța uzuală a lui $\mathbb{R}^2$.

Fie $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ și $r>0$

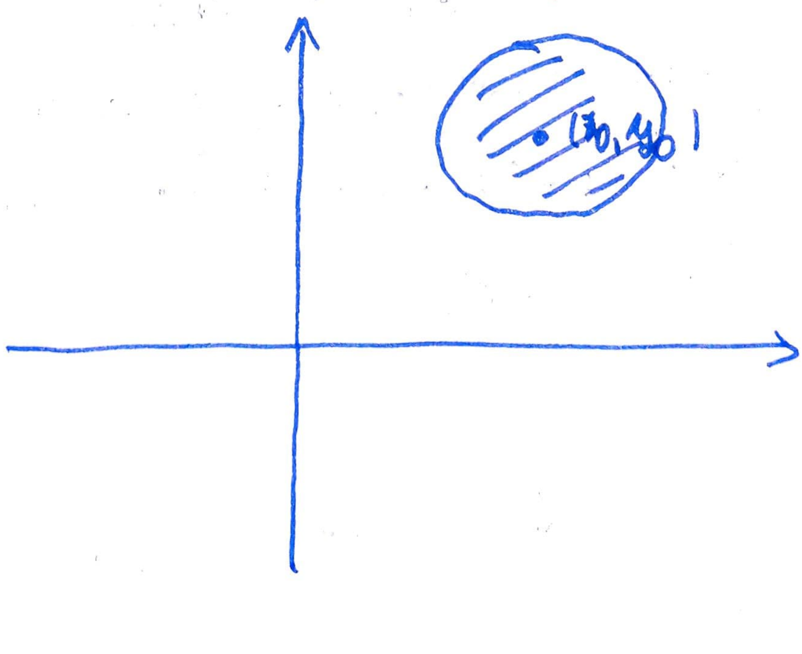
$B((x_0,y_0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_2((x,y),(x_0,y_0)) < r\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < r^2\} =$

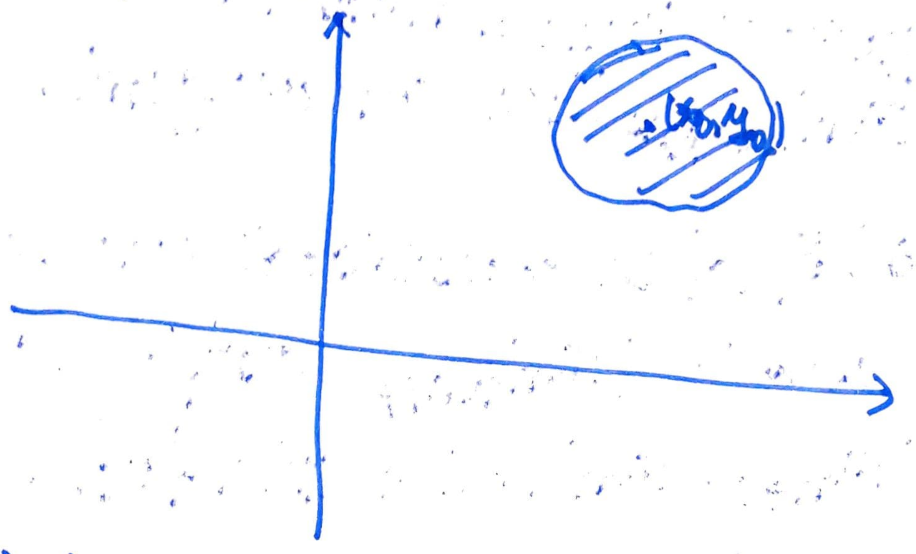
$= \operatorname{Int} \mathcal{C}((x_0,y_0),r)$.

$$\boxed{B(x_0,r) = \operatorname{Int} \mathcal{C}((x_0,y_0),r)}$$



$B[(x_0,y_0), r] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d_2((x,y),(x_0,y_0)) \le r\}$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le r^2\} = \mathcal{C}((x_0,y_0),r) \cup$
$\cup \operatorname{Int} \mathcal{C}((x_0,y_0),r)$

$$\boxed{B[(x_0,y_0),r] = \mathcal{C}((x_0,y_0),r) \cup \operatorname{Int} \mathcal{C}((x_0,y_0),r).}$$



Exercițiul 3 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^{n}}{n!}$, $a\in\mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^p+2^p+\dots+n^p}$, $p>0$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\dots+\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha<1$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{\ln n}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+2)}$.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$; $a, b>0$.

<u>Exercițiul 4</u> Se consideră $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>1$ și $x_n = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

<u>Exercițiul 5</u> a) Se consideră un șir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel ca $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = l \in \overline{\mathbb{R}}\setminus\{0\}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) Se consideră un șir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel ca $\exists \lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)x_{n+1}-nx_n] =$ $= l\in\overline{\mathbb{R}}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

<u>Rezolvare</u> a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = l \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{n+1-n} = l$

Alegem șirul $b_n = n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$b_{n+1}-b_n = 1>0$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow b_{n+1}>b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

Șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

Aplicăm Teorema lui l'Hospital și obținem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{b_n} = l$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

Se disting două cazuri:

1) $l > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \cdot n = +\infty$

2) $l < 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \cdot n = -\infty$

b) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} [(n+1)x_{n+1} - n x_n] = l \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)x_{n+1} - n x_n}{n+1-n} =$

$= l \in \overline{\mathbb{R}}$

Alegem $b_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$ și $a_n = n x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Aplicăm teorema lui l'Hospital și obținem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n x_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

<u>Exercițiul 6</u> Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin relația de recurență $x_{n+1} = \frac{n x_n}{n + x_n^2}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $x_1 > 0$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent și să se calculeze limita acestuia.

SEMINAR 1, SERIA 13

COMPLETARE

<u>Exercițiul 1</u> Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+2)}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\dots+\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha<1$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^n+\dots+n^n}{n^{n+1}}$

<u>Exercițiul 2</u> Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ din $\mathbb{Z}$ este convergent dacă și numai dacă $\exists n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $x_n = x_{n_0}\ \forall n\geq n_0$.

<u>Exercițiul 3</u> Se consideră șirul $x_n=\left\{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right\}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că șirul este mărginit, dar nu este și convergent!

<u>Exercițiul 4</u> Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin relația de recurență $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $x_1>0$. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

<u>Exercițiul 5</u> Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de elemente din $(0,1)$ astfel încât $x_n(1-x_{n+1})>\frac{1}{4}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Arătați că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și să se calculeze limita acestuia.

Exercițiul 6 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+$ care verifică inegalitatea $x_{n+1} \leq x_n^2 - x_n^3$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent și să se calculeze limita acestuia.

Exercițiul 7 Se consideră $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir mărginit din $\mathbb{R}$ care verifică inegalitatea $x_{n+1} \geq x_n - \frac{1}{2^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Exercițiul 8 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = l \in \mathbb{R}_+^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

SEMINAR 2, SERIA 13

Limita inferioară și superioară a unui șir de numere reale

<u>EXERCIȚIUL 1</u> Să se calculeze $\liminf x_n$ și $\limsup x_n$ în următoarele cazuri:

a) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi}{2}$

b) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos \frac{n\pi}{2}$

<u>REZOLVARE</u> a) Se identifică punctele limită ale șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și folosim formulele

$\limsup x_n = \sup \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \overline{\mathbb{R}}$

$\liminf x_n = \inf \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \overline{\mathbb{R}}$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$(-1)^{n+1} = \begin{cases} 1, & n = 2k+1 \\ -1, & n = 2k \end{cases}$$

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+3 \end{cases}$$

Se aleg subșirurile $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ și $(x_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}}$. Calculăm limitele acestor subșiruri și obținem punctele limită ale acestui șir.

$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1+(+1)}{2} + 1\cdot 0\right] = 1 \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\lim_{k\to+\infty} x_{4k+1} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1+(-1)}{2} + 1\right] = +1 \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\lim_{k\to+\infty} x_{4k+3} = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1+(-1)}{2} - 1\right] = -1 \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{-1, 1\} \Rightarrow \limsup x_n = 1$

$\liminf x_n = -1$

$\limsup x_n \neq \liminf x_n \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu are limită

$\limsup x_n, \liminf x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

b) $(-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases}$

$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ 1, & n = 4k \\ -1, & n = 4k+2 \end{cases}$

Se aleg subșirurile $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k})_{k\in\mathbb{N}}$ și $(x_{4k+2})_{k\in\mathbb{N}}$.

$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1}\left(\frac{1}{2}-1\right) + 0 =$

$= -\frac{1}{2}e \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\lim_{k\to+\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{4k}\right)^{4k}\left(\frac{1}{2}+1\right) + 1 = \frac{3}{2}e + 1 \in$

$\in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{4k+2} = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4k+2}\right)^{4k+2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-2 = \frac{3}{2}e-1 \in$
$\in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3e}{2}+1, \frac{3e}{2}-1\right\}$

$\limsup x_n = \frac{3e}{2}+1$
$\liminf x_n = -\frac{1}{2}$

$\limsup x_n \neq \liminf x_n \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu are limită

$\limsup x_n, \liminf x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

<u>EXERCIȚIUL 2</u> Se consideră $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir mărginit din $\mathbb{R}_+$. Să se arate că $\liminf (2-x_{n+1})x_n \le 1$.

<u>REZOLVARE</u> Pentru acest exercițiu folosim definiția limitei inferioare a unui șir de numere reale.

$\liminf y_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k\ge n} y_k\right)$.

Demonstrăm afirmația prin reducere la absurd. Presupun că $\liminf (2-x_{n+1})x_n > 1$
Există $l\in\mathbb{R}$ astfel încât $\liminf(2-x_{n+1})x_n > l > 1$.

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k\ge n}(2-x_{k+1})x_k\right) > l \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ a.î.

$\inf\limits_{k\ge n_0}(2-x_{k+1})x_k > l \Rightarrow (2-x_{k+1})x_k > l \;\; \forall k\ge n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_k - x_{k+1}x_k > l \;\; \forall k \ge n_0$ (1)

Știm că $(x_k-1)^2 \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow x_k^2 - 2x_k + 1 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2x_k}\ x_k^2 \geq 2x_k - 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$ ②

Adunăm inegalitățile ① și ② și obținem că

$x_k^2 - x_{k+1}x_k > l - 1 \ \forall k \geq n_0 \Rightarrow x_k(x_k - x_{k+1}) > l-1 > 0$

$\forall k \geq n_0$.

Cum $x_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, avem că $x_k - x_{k+1} > 0 \ \forall k \geq n_0$

$\Rightarrow x_{k+1} < x_k \ \forall k \geq n_0 \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \geq n_0}$ este strict descrescător.

Cum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este și mărginit, rezultă că este convergent.

Notăm $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} (2-x_{n+1})x_n =$

$= (2-l_1)l_1 = 2l_1 - l_1^2 \Rightarrow \underline{\lim}_n \inf (2-x_{n+1})x_n = 2l_1 - l_1^2$

Conform presupunerii făcute, avem că

$2l_1 - l_1^2 > l > 1 \Rightarrow 2l_1 - l_1^2 > 1 \Rightarrow l_1^2 - 2l_1 + 1 < 0$

$\Rightarrow (l_1 - 1)^2 < 0$ contradicție.

Presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow \underline{\lim}(2-x_{n+1})x_n \leq$

≤ 1.

SERII DE NUMERE REALE

EXERCIȚIUL 3 Să se studieze, folosind definiția, convergența următoarelor serii de numere reale:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

REZOLVARE a) $x_n = \frac{n}{(n+1)!}$, $n\in\mathbb{N}^*$

Pentru a studia convergența seriei de numere reale, folosind definiția este necesar să calculăm $\lim_{n\to\infty} s_n$, unde $s_n = x_1+\dots+x_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$= \frac{1}{1!} - \cancel{\frac{1}{2!}} + \cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\Big[1-\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{\to 0}\Big] = 1 \in\mathbb{R} \Rightarrow \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

este convergentă și are suma 1.

b) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n+2-n} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{k+2}}{2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{k}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n+2}}{2} - \frac{\sqrt{1}+\dots+\sqrt{n}}{2} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1}{n} = +\infty \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ este divergentă și are suma $+\infty$.

c) $x_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{n^2-1}{n^2} = \ln\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\ \forall n\geq 2.$

$s_n = \sum\limits_{k=2}^{n} x_k = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \ln\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$

$= \ln\left(\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) =$

$= \ln\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot n^2} =$

$= \ln\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3^2}\cdot\cancel{4^2}\cdot\ldots\cdot\cancel{(n-1)^2}\cdot\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2^2}\cdot\cancel{3^2}\cdot\ldots\cdot\cancel{n^2}} = \ln\frac{n+1}{2n}\ \forall n\geq 2$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{2n} = \ln\frac{1}{2}\in\mathbb{R} \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă și are suma $-\ln 2$.

<u>EXERCIȚIUL 4</u> Să se studieze convergența următoarelor serii de numere reale:

a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!+(n+1)!}$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+2)!}$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

SEMINAR 3

SERII DE NUMERE REALE

EXERCIȚIUL 1 Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{7^n+3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\right]^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n\, n!}{n^n}, a>0$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{\ln n}, a>0$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}, a>0$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sin\frac{\pi}{n}, \alpha \in \mathbb{R}$

g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-n+7}$

REZOLVARE a) $x_n = \frac{1}{7^n+3^n}, n \in \mathbb{N}$

$x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{7^{n+1}+3^{n+1}}}{\frac{1}{7^n+3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n+3^n}{7^{n+1}+3^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7^n\left(1+\left(\frac{3}{7}\right)^n\right)}{7^{n+1}\left(1+\left(\frac{3}{7}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1}{7}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă

b) $x_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{\alpha}, n \in \mathbb{N}^*$

$x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]^{\alpha} \cdot \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^{\alpha} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\alpha} = 1.$$

Nu putem să aplicăm criteriul raportului

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{\alpha} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{\alpha} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{1}{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{2n+1}}_{\downarrow \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{1}{2n+1}}}_{\downarrow \alpha} = \frac{\alpha}{2}$$

Cazul 1 $\alpha < 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} < 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este divergentă

Cazul 2 $\alpha > 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} > 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este convergentă

Cazul 3 $\alpha = 2$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2$$

Sunt adevărate inegalitățile

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{4n} < x_n < \frac{1}{2n}$$

$x_n > \frac{1}{4n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$ serie divergentă (2)

Din (1) și (2) rezultă că seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este divergentă

c) $x_n = \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{a^{n+1}}^{\,a} \cdot \cancel{(n+1)!}^{\,n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{a^n} \cdot \cancel{n!}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}$

Cazul 1 $a < e \Rightarrow \frac{a}{e} < 1 \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ este convergentă

Cazul 2 $a > e \Rightarrow \frac{a}{e} > 1 \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ este divergentă

Cazul 3 $a = e$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Știm că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \Rightarrow \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ este divergentă

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^{\ln n}$, $a > 0$

$x_n = a^{\ln n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{\ln(n+1)}}{a^{\ln n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\ln(n+1) - \ln n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} a^{\ln \frac{n+1}{n}} = a^0 = 1$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1}{\ln\frac{n}{n+1}}\cdot\ln\frac{n}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n}{n+1}\cdot\frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1}{\ln\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1}{\ln\frac{n}{n+1}}=\ln\frac{1}{e}\cdot\ln a=-\ln a$$

Cazul 1 $a<\frac{1}{e}\Rightarrow -\ln a>1\Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ este convergentă

Cazul 2 $a>\frac{1}{e}\Rightarrow -\ln a<1\Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ este divergentă

Cazul 3 $a=\frac{1}{e}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}x_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^1}$$ seria divergentă

e) $x_n=\frac{n!}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$, $a>0$

$x_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(a+1)\ldots(a+n+1)}\cdot\frac{(a+1)\ldots(a+n)}{n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a+n+1}=1$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{a}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+1}=a$$

Cazul 1 $a<1\Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ este divergentă

Cazul 2 $a>1\Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ este convergentă

Cazul 3 $a=1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}x_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n+1)}$$

$\sum\limits_{n=1} \frac{\dots}{(n+1)!} = \sum\limits_{n=1} \frac{1}{n+1} \overset{m=n+1}{=} \sum\limits_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} = \sum\limits_{m=2} \frac{1}{m^1}$ serie divergentă

f) $x_n = \frac{1}{n^\alpha} \sin\frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vom aplica criteriul de comparație cu limită.

Știm că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$.

Alegem șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \Leftrightarrow \frac{\pi}{n} x_n = y_n \sin\frac{\pi}{n} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \sin\frac{\pi}{n} = y_n \cdot \sin\frac{\pi}{n} \Leftrightarrow y_n = \frac{\pi}{n^{\alpha+1}}$

Fie $y_n = \frac{\pi}{n^{\alpha+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Din alegerea lui $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ obținem că

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1 \in (0, +\infty) \Rightarrow$ seriile $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ au aceeași natură.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{n^{\alpha+1}}$ → serie convergentă $\Leftrightarrow \alpha+1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$

→ serie divergentă $\Leftrightarrow \alpha+1 \le 1 \Leftrightarrow \alpha \le 0$

g) $x_n = \frac{1}{4n^2 - n + 7}$, $n \in \mathbb{N}$

$x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Știm că $n^2 - n + 7 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 4n^2 - n + 7 > 3n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{1}{4n^2 - n + 7} < \frac{1}{3n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Alegem șirul $y_n = \frac{1}{3n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Sunt adevarate inegalitatile

$0 < x_n < y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ serie convergentă (2)

Din (1) și (2) deducem că seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este convergentă

<u>EXERCITIUL 2</u> Să se studieze ~~con~~ natura seriei de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

<u>REZOLVARE</u> $x_n = \frac{\cos(nx)}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$

$x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (nu are neapărat semn constant)

Studiem absolut convergența seriei.

Fie $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos(nx)|}{n^2}$

$\frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ serie convergentă (2)

Din (1) și (2) obținem că seria $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ este convergentă

$\Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este absolut convergentă

$\Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este convergentă.

<u>EXERCITIUL 3</u> Să se studieze convergența seriei de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\frac{1}{n} \cos n}{n}$.

<u>INDICAȚIE</u> Se utilizează criteriul lui DIRICHLET pentru serii de numere reale.

EXERCIȚIUL 4 Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ din $\mathbb{R}_+^*$. Să se arate că seria de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ este divergentă.

REZOLVARE $x_n = \frac{a_1+\dots+a_n}{n}, n\in\mathbb{N}^*$

$x_n > 0 \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$x_n = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} > \frac{a_1}{n} \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Alegem $y_n = \frac{a_1}{n}, n\in\mathbb{N}^*$

$x_n > y_n \ \forall n\in\mathbb{N}^*$ (1)

$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1}{n} = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^1}$ serie divergentă (2)

Din (1) și (2) avem că $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este serie divergent

SEMINAR 4

Elemente de topologie generală. Topologia unui spațiu metric

• **Construcția topologiei asociată unei distanțe**

(X, d) spațiu metric

Distanței $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ i se asociază topologia

$\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \mid G \neq \emptyset, \forall x \in G\ \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq G\}$

Proprietăți a) $B(x, r) \in \tau_d\ \forall x \in X, \forall r > 0$.

b) Orice bilă închisă din X este mulțime închisă relativ la topologia τ_d.

c) $A \subseteq X$

$x_0 \in \mathring{A} \iff \exists r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \subseteq A$

d) $A \subseteq X$

$x_0 \in \bar{A} \iff \forall r > 0$ avem că $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$

e) $A \subseteq X$

$x_0 \in A' \iff \forall r > 0$ avem că $B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

f) $A \subseteq X$

$x_0 \in \operatorname{Izo} A \iff \exists r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$

• **Topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$**

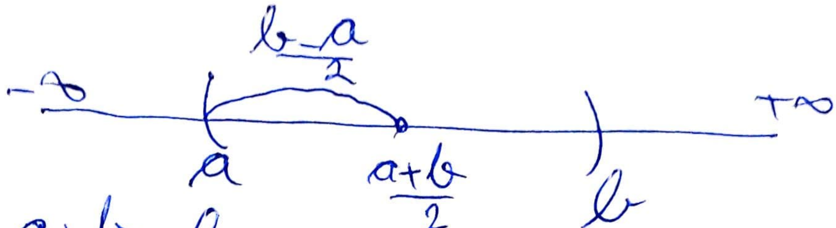
$(\mathbb{R}, d)$ spațiu metric

$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $d(x, y) = |x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ distanța uzuală

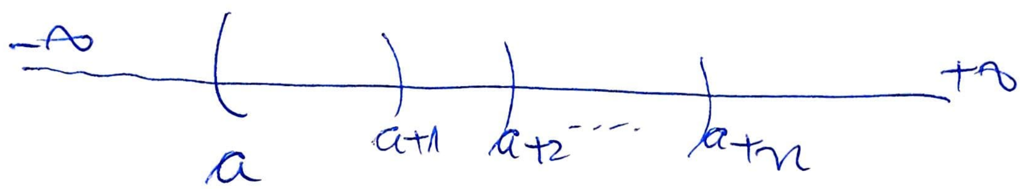
$\tau_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_d$ topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$.

Exercițiul 1 Să se arate că $(a,b)\in \tau_{\mathbb{R}}\ \forall a<b$, $(a,+\infty)\in\tau_{\mathbb{R}}\ \forall a\in\mathbb{R}$ și $(-\infty,b)\in\tau_{\mathbb{R}}\ \forall b\in\mathbb{R}$

REZOLVARE



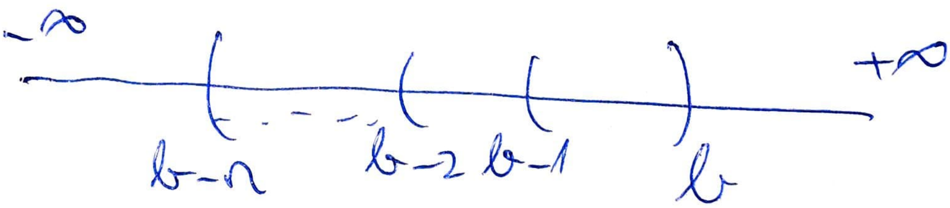
$$(a,b)=B\left(\frac{a+b}{2},\frac{b-a}{2}\right)\in\tau_{\mathbb{R}}\ \forall a<b$$



$$(a,+\infty)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(a,a+n)$$

$(a,a+n)\in\tau_{\mathbb{R}}\ \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(a,a+n)\in\tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,+\infty)\in\tau_{\mathbb{R}}$



$$(-\infty,b)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(b-n,b)$$

$(b-n,b)\in\tau_{\mathbb{R}}\ \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(b-n,b)\in\tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\infty,b)\in\tau_{\mathbb{R}}$.

Exercițiul 2 Să se arate că $[a,b]$ cu $a<b$, $[a,+\infty)$ și $(-\infty,b]$ sunt mulțimi închise în $\mathbb{R}$.

REZOLVARE

$C_{\mathbb{R}}[a,b] = \mathbb{R}\setminus[a,b] = (-\infty,a)\cup(b,+\infty)$

Conform exercițiului 1, avem că $(-\infty,a)\in\tau_{\mathbb{R}}$ și $(b,+\infty)\in\tau_{\mathbb{R}}$.

$$\left.\begin{array}{l}(-\infty,a)\in\tau_{\mathbb{R}}\\(b,+\infty)\in\tau_{\mathbb{R}}\end{array}\right\} \Rightarrow (-\infty,a)\cup(b,+\infty)\in\tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow C_{\mathbb{R}}[a,b]\in\tau_{\mathbb{R}}$$

$\overset{def}{\Longrightarrow}$ $[a,b]$ mulțime închisă din $\mathbb{R}$

Altă variantă de argumentare a faptului că $[a,b]$ este mulțime închisă în $\mathbb{R}$ este descrierea acestui interval ca o bilă închisă în $\mathbb{R}$.

$$[a,b] = B\left[\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$$

$C_{\mathbb{R}}[a,+\infty) = \mathbb{R}\setminus[a,+\infty) = (-\infty,a) \in \tau_{\mathbb{R}}$ (conform exercițiului 1)

$C_{\mathbb{R}}[a,+\infty)\in\tau_{\mathbb{R}} \overset{def}{\Longrightarrow} [a,+\infty)$ mulțime închisă în $\mathbb{R}$

$\cancel{C_{\mathbb{R}}[b,+\infty) = \mathbb{R}\setminus}$

$C_{\mathbb{R}}(-\infty,b] = \mathbb{R}\setminus(-\infty,b] = (b,+\infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$ (conform exercițiului 1)

$C_{\mathbb{R}}(-\infty,b] \in \tau_{\mathbb{R}} \overset{def}{\Longrightarrow} (-\infty,b]$ mulțime închisă din $\mathbb{R}$.

Exercițiul 3 Fie $a<b\in\mathbb{R}$. Să se arate că $[a,b)$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$ și că $[a,b)$ nu este mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

REZOLVARE

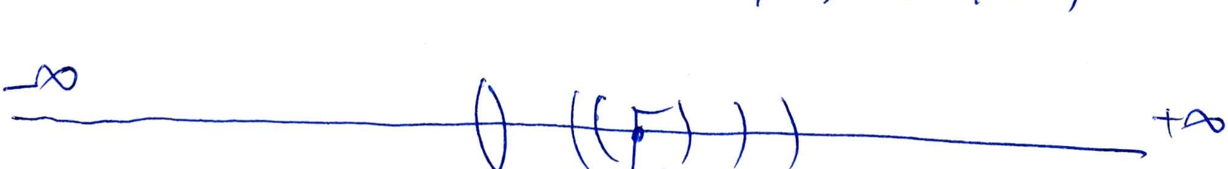
Alegem elementul $a\in[a,b)$

Se observă că $(a-r,a+r) \not\subset [a,b)\ \forall r>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(a,r)\not\subset[a,b)\ \forall r>0$.

Din definiția topologiei $\tau_{\mathbb{R}}$ deducem că $[a,b)\notin\tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow [a,b)$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

$C_{\mathbb{R}}[a,b) = \mathbb{R}\setminus[a,b) = (-\infty,a)\cup[b,+\infty)$



Fie $b\in C_{\mathbb{R}}[a,b)$

Se observă că $(b-r, b+r) \not\subseteq C_{\mathbb{R}}[a,b)$ $\forall r>0$

$\Rightarrow B(b,r) \not\subseteq C_{\mathbb{R}}[a,b)$ $\forall r>0 \Rightarrow C_{\mathbb{R}}[a,b) \notin \tau_{\mathbb{R}}$

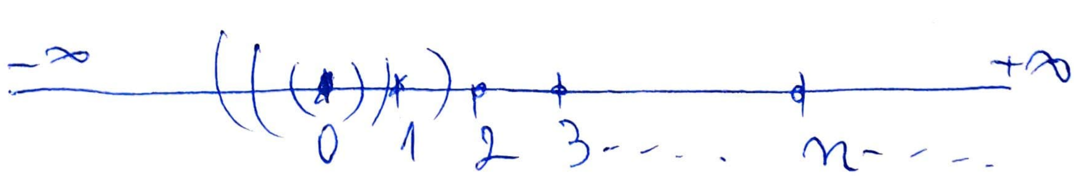
$\Rightarrow [a,b)$ nu este mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

<u>Exercițiul 4</u> Fie $a<b \in \mathbb{R}$. Să se arate că $(a,b]$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$ și că $(a,b]$ nu este mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

<u>Exercițiul 5</u> a) Să se arate că $\mathbb{N}$ este mulțime închisă în $\mathbb{R}$, dar nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$

b) Să se arate că orice mulțime finită $A \subseteq \mathbb{R}$ este închisă în $\mathbb{R}$, dar nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

<u>REZOLVARE</u>



Alegem elementul $0 \in \mathbb{N}$

Se observă că $(0-r, 0+r) \not\subseteq \mathbb{N}$ $\forall r>0 \Rightarrow B(0,r) \not\subseteq \mathbb{N}$ $\forall r>0$

$\Rightarrow \mathbb{N} \notin \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{N}$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

$C_{\mathbb{R}}\mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup \dots \cup (n,n+1) \cup \dots$

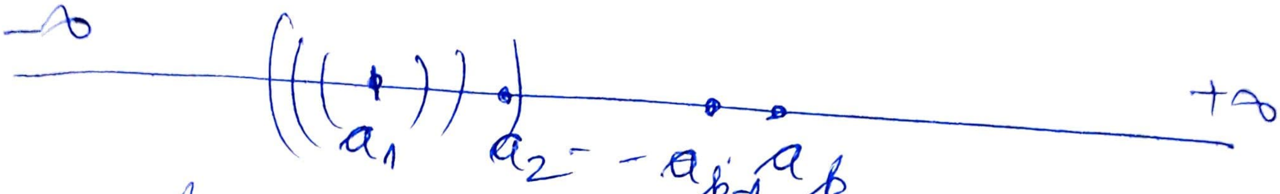
$= (-\infty,0) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n,n+1)$.

$(-\infty, 0) \in \tau_{\mathbb{R}}$

$(n, n+1) \in \tau_{\mathbb{R}} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1) \in \tau_{\mathbb{R}}$ $\Bigg\| \Rightarrow (-\infty, 0) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n+1) \in \tau_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow C_{\mathbb{R}} \mathbb{N} \in \tau_{\mathbb{R}} \xRightarrow{def} \mathbb{N}$ mulțime ~~deschisă~~ închisă în $\mathbb{R}$.

b) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}$



Alegem elementul $a_1 \in A$.

Se observă că $(a_1 - r, a_1 + r) \not\subseteq A \ \forall r > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow B(a_1, r) \not\subseteq A \ \forall r > 0 \Rightarrow A \notin \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow A$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

$C_{\mathbb{R}} A = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup \dots \cup (a_{k-1}, a_k) \cup (a_k, +\infty)$

$(-\infty, a_1) \in \tau_{\mathbb{R}}$

$(a_k, +\infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$

$(a_i, a_{i+1}) \in \tau_{\mathbb{R}} \ \forall 1 \le i \le k-1$

$\Bigg\| \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A \in \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow C_{\mathbb{R}} A \in \tau_{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow A$ mulțime închisă în $\mathbb{R}$

<u>Exercițiul 5</u> Să se demonstreze că $\mathbb{Z}$ este mulțime închisă în $\mathbb{R}$, dar nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

Exercițiul 6 Să se arate că $\mathbb{Q}$ nu este mulțime deschisă și mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

Rezolvare Demonstrăm prin reducere la absurd că $\mathbb{Q}$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

Presupun că $\mathbb{Q}$ este mulțime deschisă în $\mathbb{R} \overset{def}{\Longrightarrow}$
$\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists r > 0$ a.î. $(x-r, x+r) \subseteq \mathbb{Q}$

Fie $x = 0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists r > 0$ a.î. $(0-r, 0+r) \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow (-r, r) \subseteq \mathbb{Q}$

$-\frac{r}{2} \in (-r, r)$

$\frac{r}{2} \in (-r, r)$

Între numerele reale $-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}$ există cel puțin un număr irațional α.

$-\frac{r}{2} \leq \alpha \leq \frac{r}{2} \Rightarrow \alpha \in (-r, r)$
$(-r, r) \subseteq \mathbb{Q}$ $\Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$ contradicție

Presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow \mathbb{Q}$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

Demonstrăm prin reducere la absurd că $\mathbb{Q}$ nu este mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

Presupun că ~~$C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$~~ $\mathbb{Q}$ este mulțime închisă în $\mathbb{R} \Rightarrow C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ \exists r > 0$ a.î. $(x-r, x+r) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Fie $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \exists r > 0$ a.î. $(\sqrt{2}-r, \sqrt{2}+r) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Între numerele reale $\sqrt{2}-\frac{r}{2}$ și $\sqrt{2}+\frac{r}{2}$ există cel puțin un număr rațional β.

$\sqrt{2}-\frac{r}{2}\le \beta \le \sqrt{2}+\frac{r}{2} \Rightarrow \beta \in (\sqrt{2}-r, \sqrt{2}+r)$

$(\sqrt{2}-r, \sqrt{2}+r) \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\Rightarrow \beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. contradicție

Presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ nu este mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

Exercițiul 7 Să se arate că $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nu este mulțime deschisă și mulțime închisă în $\mathbb{R}$

Exercițiul 8 Fie $A=[a,b)\cup\{c\}$ cu $a<b<c$

a) Să se determine $\mathring{A}$, $\bar{A}$, $Fr\,A$, A' și $Izo\,A$.

b) Este A mulțime deschisă în $\mathbb{R}$?

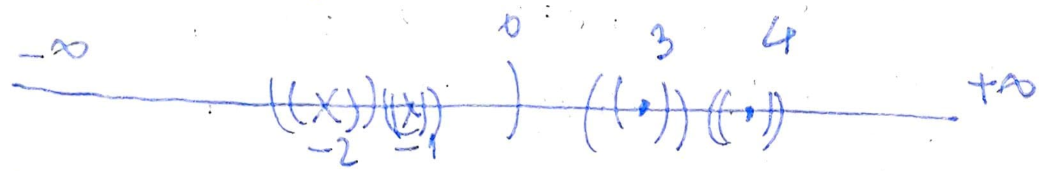
c) Este A mulțime închisă în $\mathbb{R}$?

SEMINAR 5

Topologia unui spațiu metric
Funcții continue

EXERCIȚIUL 1 Se consideră mulțimea $A=\left((-\infty,0)\setminus\{-1,-2\}\right)\cup\{3,4\}$. Să se determine $\mathring{A}$, $\bar{A}$, $\mathrm{Fr}\,A$, A' și $\mathrm{Izo}\,A$.

Rezolvare $\mathring{A}=?$



$$\left.\begin{array}{l} (-\infty,-2)\subseteq A \\ (-\infty,-2)\in\tau_{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow (-\infty,-2)\subseteq\mathring{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} (-1,0)\subseteq A \\ (-1,0)\in\tau_{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,0)\subseteq\mathring{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} (-2,-1)\in\tau_{\mathbb{R}} \\ (-2,-1)\subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow (-2,-1)\subseteq\mathring{A}$$

$\Rightarrow (-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,0)\subseteq\mathring{A}$

$\mathring{A}\subseteq A \Rightarrow \mathring{A}\subseteq\left((-\infty,0)\setminus\{-2,-1\}\right)\cup\{3,4\}$

Avem că

$(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,0)\subseteq\mathring{A}\subseteq\left((-\infty,0)\setminus\{-2,-1\}\right)\cup\{3,4\}$.

Se observă că $B(-2,r)\not\subseteq A\ \forall r>0 \Rightarrow 2\notin\mathring{A}$

Se observă că $B(-1,r)\not\subseteq A\ \forall r>0 \Rightarrow -1\notin\mathring{A}$

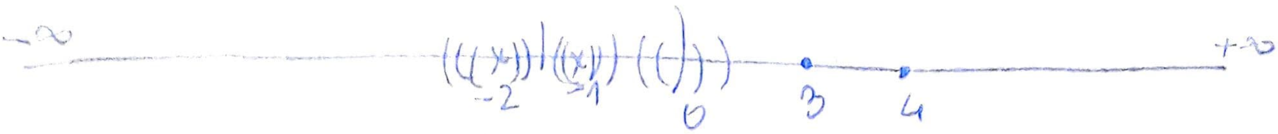
Se observă că $B(3,r)\not\subseteq A\ \forall r>0 \Rightarrow 3\notin\mathring{A}$

Se observă că $B(4,r)\not\subseteq A\ \forall r>0 \Rightarrow 4\notin\mathring{A}$

Așadar, $\mathring{A} = (-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,0)$

$A\neq\mathring{A} \Rightarrow A\notin\tau_{\mathbb{R}}$

$\bar{A} = ?$



$F = (-\infty, 0] \cup \{3,4\}$ mulțime închisă
$A \subseteq F$
$\Rightarrow \bar{A} \subseteq F \Rightarrow \bar{A} \subseteq (-\infty, 0] \cup \{3,4\}$

$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \big((-\infty, 0) \setminus \{-2,-1\}\big) \cup \{3,4\} \subseteq \bar{A}$

$\big((-\infty, 0) \setminus \{-2,-1\}\big) \cup \{3,4\} \subseteq \bar{A} \subseteq (-\infty, 0] \cup \{3,4\}$

Se observă că $B(-2,r) \cap A \neq \emptyset \ \forall r>0 \Rightarrow -2 \in \bar{A}$
Se observă că $B(-1,r) \cap A \neq \emptyset \ \forall r>0 \Rightarrow -1 \in \bar{A}$
Se observă că $B(0,r) \cap A \neq \emptyset \ \forall r>0 \Rightarrow 0 \in \bar{A}$

Concluzie: $\bar{A} = (-\infty, 0] \cup \{3,4\}$

$A = \bar{A} \Rightarrow$ A nu este mulțime închisă

$Fr\,A = ?$

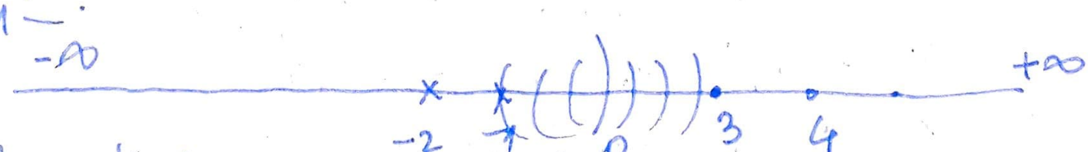
$Fr\,A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = (-\infty, 0] \cup \{3,4\} \setminus \big((-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,0)\big) =$
$= \{-2, -1, 0, 3, 4\}$

$A' = ?$

$A' \subseteq \bar{A} \Rightarrow A' \subseteq (-\infty, 0] \cup \{3,4\}$.

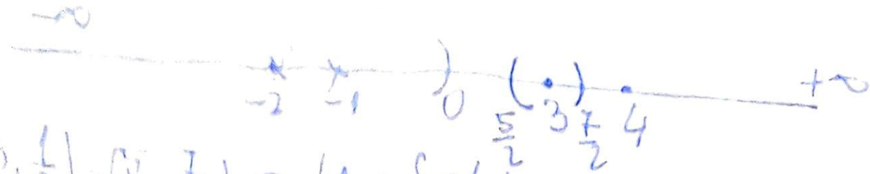
Căutăm punctele de acumulare ale mulțimii A printre punctele de aderență ale mulțimii A.

$0 \in A'$?



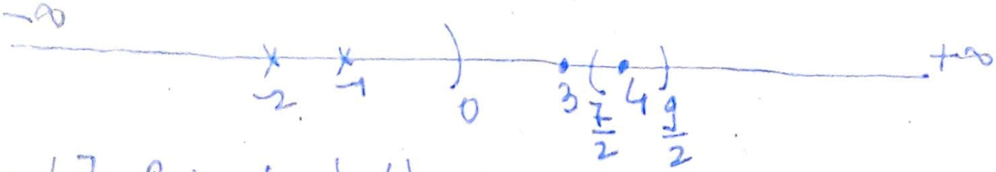
Se observă că $B(0,r) \cap (A \setminus \{0\}) \neq \emptyset \ \forall r>0 \Rightarrow 0 \in A'$

$3 \in A'$?



$B(3,\frac{1}{2})=(\frac{5}{2},\frac{7}{2})\cap(A\setminus\{3\})=\emptyset \Rightarrow 3\notin A'$

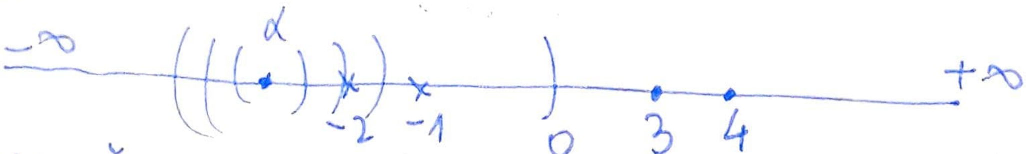
$4\in A'$?



$B(4,\frac{1}{2})=(\frac{7}{2},\frac{9}{2})\cap(A\setminus\{4\})=\emptyset \Rightarrow 4\notin A'$.

Fie $\alpha\in(-\infty,0)$.

$\alpha\in A'$?



Se observă că $B(\alpha,r)\cap A\setminus\{\alpha\}\neq\emptyset\ \forall r>0 \Rightarrow \alpha\in A'$

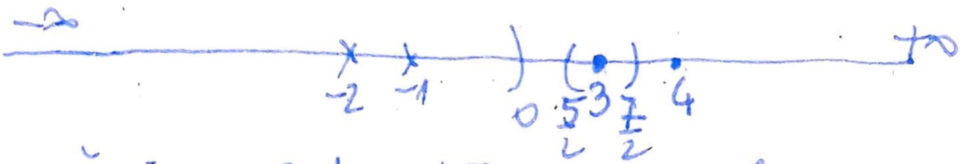
Concluzie: $A'=(-\infty,0]$.

$\operatorname{Izo} A = ?$

$\operatorname{Izo} A\subseteq A\setminus A' \Rightarrow \operatorname{Izo} A\subseteq((-\infty,0)\setminus\{-2,-1\})\cup\{3,4\}\setminus(-\infty,0]\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Izo} A\subseteq\{3,4\}$

$3\in \operatorname{Izo} A$?



Se observă că $B(3,\frac{1}{2})=(\frac{5}{2},\frac{7}{2})\cap A=\{3\}\Rightarrow 3\in \operatorname{Izo} A$.

$4\in \operatorname{Izo} A$?

$B(4,\frac{1}{2})\cap A=(\frac{7}{2},\frac{9}{2})\cap A=\{4\}\Rightarrow 4\in \operatorname{Izo} A$

Concluzie: $\text{Izo}\,A=\{3,4\}$

EXERCIȚIUL 2 Să se determine $\mathring{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}'$, $\text{Fr}\,\mathbb{Q}$ și $\text{Izo}\,\mathbb{Q}$.

Rezolvare Demonstrăm prin reducere la absurd că $\mathring{\mathbb{Q}}=\phi$.

Presupun că $\mathring{\mathbb{Q}}\neq\phi \Rightarrow \exists\, a\in\mathring{\mathbb{Q}} \Rightarrow \mathbb{Q}\in \underset{\mathbb{R}}{\mathcal{V}}(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, r>0$ a.î. $B(a,r)\subseteq\mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, r>0$ a.î. $(a-r, a+r)\subseteq\mathbb{Q}$.

Între $a-r$ și $a+r$ există cel puțin un număr irațional α.

$\left.\begin{array}{l}\alpha\in(a-r, a+r)\subseteq\mathbb{Q} \Rightarrow \alpha\in\mathbb{Q}\\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{array}\right\} \Rightarrow$ contradicție

$\Rightarrow \mathring{\mathbb{Q}}=\phi$

Știm din curs că $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$.

$\text{Fr}\,\mathbb{Q}=\overline{\mathbb{Q}}\setminus\mathring{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}\setminus\phi=\mathbb{R}$

$\text{Izo}\,\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Q}' \Rightarrow \text{Izo}\,\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}\setminus\mathbb{R} \Rightarrow \text{Izo}\,\mathbb{Q}\subseteq\phi \Rightarrow \text{Izo}\,\mathbb{Q}=\phi$.

EXERCIȚIUL 3 a) Să se determine $\mathring{\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}$, $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})'$, $\text{Fr}\,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $\text{Izo}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

b) Se consideră mulțimea $A=(-1,1]\cap\mathbb{Q}$. Să se determine $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\text{Fr}\,A$, A' și $\text{Izo}\,A$.

EXERCIȚIUL 4 Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\alpha^2-2\alpha x+\alpha^2}, & x\in[1,2]\\ \alpha x+3, & x>2\end{cases}$$

Să se determine parametrul real α, știind că f este continuă pe $[1,+\infty)$.

Rezolvare Este evident faptul că f este funcție continuă pe $[1,\infty)\setminus\{2\}$.

Cum f este continuă pe $[1,+\infty)$, rezultă că f este continuă în $x_0=2 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=$
$=f(2)$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \alpha x+3=2\alpha+3$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \sqrt{\alpha^2-2\alpha x+x^2}=\sqrt{\alpha^2-4\alpha+4}=\sqrt{(\alpha-2)^2}=|\alpha-2|$$

$f(2)=2\alpha-3$.

Obținem că $|\alpha-2|=2\alpha-3 \Rightarrow \alpha-2=2\alpha-3$ sau $-(\alpha-2)=$
$=2\alpha-3 \Rightarrow \alpha=1$ sau $\alpha=\frac{5}{3}$

EXERCIȚIUL 5 (Funcția lui DIRICHLET)

Fie $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții continue și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}g(x), & x\in\mathbb{Q}\\ h(x), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Să se demonstreze că f este continuă în x_0 dacă și numai dacă $h(x_0)=g(x_0)$

REZOLVARE "$\Rightarrow$" f continuă în x_0.

$x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și din $\mathbb{Q}$ și $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și din $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$.

~~$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$~~
h ~~continuă în x_0~~ $\Bigg\| \Rightarrow$ ~~$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$~~

$x_n \to x_0$
f continuă în x_0 $\Bigg\| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = f(x_0)$

$x_n \to x_0$
g continuă în x_0 $\Bigg\| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$

Avem că $f(x_0) = g(x_0)$ (1)

$y_n \to x_0$
f continuă în x_0 $\Bigg\| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} h(y_n) = f(x_0)$

$y_n \to x_0$
h continuă în x_0 $\Bigg\| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} h(y_n) = h(x_0)$

Avem că $f(x_0) = h(x_0)$ (2)

Din (1) și (2), obținem că $h(x_0) = g(x_0)$

"$\Leftarrow$" $h(x_0) = g(x_0) \Rightarrow f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$.

$$f(x) - f(x_0) = \begin{cases} g(x) - g(x_0), & x \in \mathbb{Q} \\ h(x) - h(x_0), & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \begin{cases} |g(x) - g(x_0)|, & x \in \mathbb{Q} \\ |h(x) - h(x_0)|, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Din descrierea lui $|f(x)-f(x_0)|$ obținem inegalitatea

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |g(x)-g(x_0)| + |h(x)-h(x_0)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

h, g continue în $x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} |g(x)-g(x_0)| =$
$= \lim_{x \to x_0} |h(x)-h(x_0)| = 0.$

Folosind criteriul cleștelui pentru limite de funcții, obținem că $\lim_{x \to x_0} |f(x)-f(x_0)| = 0$
$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ este continuă în x_0.

EXERCIȚIUL 6 Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Rezolvare a) Pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ f se scrie ca o "combinație" de funcții elementare $\Rightarrow f$ este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Studiem continuitatea în $(0,0)$ calculând

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Avem cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$.

În cazul limitelor funcțiilor de mai multe variabile reale nu se folosesc limitele laterale și regula lui L'Hospital, ca în cazul funcțiilor care depind de o singură variabilă reală. Metodele acceptate sunt criteriul cleștelui pentru limite de funcții, criteriul majorării pentru limite de funcții, limitele remarcabile de funcții adaptate la calculul limitelor cu mai multe variabile și metoda de justificare a nonexistenței limitei unei ~~limite de~~ funcții.

Testăm cu ajutorul a cel puțin două șiruri de vectori $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ existența limitei funcției.

$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+0} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ nu este continuă în $(0,0)$

b) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pentru că este o „combinație" de funcții elementare.

$(x_n, y_n) \Rightarrow \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 0$$

$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0$$

Egalitatea de mai sus nu ne demonstrează riguros că $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Ne sugerează acest lucru și afirmația se demonstrează folosind criteriul cleștelui pentru limite de funcții.

Evaluăm $|f(x,y) - f(0,0)|$.

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \le$$

$$\le \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2+y^2} = \frac{(|x|+|y|)(x^2 - |xy| + y^2)}{x^2+y^2}$$

$$|f(x,y) - f(0,0)| \le \frac{(|x|+|y|)(x^2 - |xy| + y^2)}{x^2+y^2} \le \frac{(|x|+|y|)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow 0 \le |f(x,y) - f(0,0)| \le |x| + |y| \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\underbrace{0 \le |x|+|y|}_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \to\, 0 \,\leftarrow}} \quad (x,y)\to(0,0)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0 \Rightarrow \exists \lim_{(x,y)} f(x,y) = f(0,0)$$

$\Rightarrow f$ funcție continuă în $(0,0)$

c) Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ca o combinație de funcții de funcții elementare.

$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = 0$

$(x_n, y_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$\lim_{n\to\infty} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+0}} = 0.$

$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = 0$ (neconcludent din punct de vedere al rigurozității afirmației $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$)

Evaluăm $|f(x,y) - f(0,0)|$

$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2}}$

$\Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{|xy|}{|x|} = |y| \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| \leq |y| \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \xleftarrow[(x,y)\to(0,0)]{}$

$\Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0 \Rightarrow \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow$ f este funcție continuă în $(0,0)$

Exercițiul 7 Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^2+y^4}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right); & y \neq 0, x \in \mathbb{R} \\ 0; & y = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Exercițiul 8 Să se demonstreze că nu există funcții continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(f(x)) = -x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 9 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că f este funcție constantă per.

Exercițiul 10 Fie $f: [a,b] \to [a,b]$ o funcție continuă. Să se arate că $\exists x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.

Exercițiul 11 Fie $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă care verifică proprietatea $f(x) = f(x^2)$ $\forall x \in [0,+\infty)$. Să se demonstreze că f este funcție constantă.

SEMINAR 6

Șiruri și serii de funcții

1) Să se studieze convergența simplă și uniformă a următoarelor șiruri de funcții:

a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$

b) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$ $\forall x \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
unde $0 < a < b$.

d) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ $\forall x \in [0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare a) Convergența simplă

Fie $x \in [0,1]$.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n(1-x^n) =$

$$= \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1(1-1) = 0, & x = 1. \end{cases}$$

$A = \{x \in [0,1] \mid \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\} = [0,1]$

$f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ $\forall x \in [0,1]$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$

Convergența uniformă

Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculăm sau evaluăm $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n(1-x^n) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1] \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x^n) \geq \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n \left[1-\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x^n) \geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)|\right) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)|\right) \neq 0 \Rightarrow f_n \underset{[0,1]}{\overset{u}{\not\to}} f.$$

b) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$

Fie $x \in [0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x} = \begin{cases} x, & x\in(0,+\infty) \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$A = [0,+\infty)$

$f_n : A \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x \ \forall x \in A$.

$$f_n \xrightarrow[{[0,+\infty)}]{s} f.$$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} \left| \frac{nx}{n+x} - {}^{n+x)}x \right| =$$

$$= \sup_{x\in[0,+\infty)} \left| \frac{nx - nx - x^2}{n+x} \right| = \sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{x^2}{n+x}$$

$$x = n \in [0,+\infty) \Rightarrow \sup_{x\in[0,+\infty)} \frac{x^2}{n+x} \geq \frac{n^2}{n+n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| \geq \frac{n}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)|\right) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-f(x)|\right) \neq 0$$

$$\Rightarrow f_n \underset{[0,\infty)}{\overset{u}{\not\to}} f$$

c) $f: [a,b] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{nx}{n+x}$

Fie $x \in [a,b]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x} = x$

$A = [a,b]$

$f: A \to \mathbb{R}, f(x) = x \ \forall x \in [a,b]$

$f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f$

Fie $n \in \mathbb{N}$.

$\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[a,b]} \frac{x^2}{n+x}$

$\frac{x^2}{n+x} \le \frac{b^2}{n+x} \le \frac{b^2}{n+a} \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \sup\limits_{x\in[a,b]} \frac{x^2}{n+x} \le$
$\le \frac{b^2}{n+a} \Rightarrow \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{b^2}{n+a} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Avem că $0 \le \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{b^2}{n+a} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$n\to\infty \qquad n\to\infty$

0

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$.

d) $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}} \ \forall x \in [0,1] \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $x \in [0,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

$A = [0,1]$

$f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$

Observăm că f nu este continuă în $x_0=1$ și că f_n este continuă în $x_0=1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicăm corolarul teoremei lui Weierstrass pentru șiruri de funcții și obținem că $f_n \not\xrightarrow[{[0,1]}]{u} f$

<u>Exercițiul 2</u> Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirurilor de funcții:

a) $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}}$ $\forall x \in [0,+\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercițiul 3</u> Să se arate că seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n(n+1)}$ este uniform și absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.

<u>Rezolvare</u> Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n(n+1)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n(n+1)}\right| = \frac{|\sin nx|}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

Notăm $a_n = \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Seria de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (1)

$|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Din (1) și (2), aplicând criteriul lui Weierstrass pentru șiruri de funcții, deducem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ este absolut și uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Exercițiul 4 Să se arate că seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$, dar nu este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $x \in \mathbb{R}$.

Studiem absolut convergența seriei de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+x^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$$

$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n+x^2}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow$ seriile de numere reale

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$ și $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ au aceeași natură

Seria $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ este convergentă $\Rightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$ este divergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ nu este absolut convergentă $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ nu este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2} = \frac{1}{n+x^2} \cdot (-1)^n$$

Notăm $g_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$h_n(x) = (-1)^n$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$f_n(x) = g_n(x) \cdot h_n(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Se demonstrează ușor că $g_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} 0$ (TEMĂ)

$$g_{n+1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n+1+x^2} - \frac{1}{n+x^2} = \frac{-1}{(n+1+x^2)(n+x^2)} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow g_{n+1}(x) \leq g_n(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow g_{n+1} \leq g_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$|h_1(x) + \dots + h_n(x)| = |(-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1)^n| =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Avem că $|h_1(x) + \dots + h_n(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicăm criteriul lui Dirichlet pentru serii de funcții și deducem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) h_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniform pe $\mathbb{R}$.

Exercițiul 5 Să se demonstreze că seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$ și uniform convergentă pe orice mulțime compactă $K \subseteq \mathbb{R}$

Rezolvare Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Fie $x \in \mathbb{R}$.

Studiem absolut convergența seriei de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ este convergentă $\Rightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$

Fie $K \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime compactă

Conform teoremei Heine-Borel, K este mulțime mărginită $\Rightarrow \exists R > 0$ a.î. $|x| \le R$ $\forall x \in K$.

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{R^n}{n!} \quad \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notăm $a_n = \frac{R^n}{n!}$

Seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R^n}{n!}$ este convergentă (vezi explicația anterioară) ①

$|f_n(x)| \leq a_n \ \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$ ②

Din ① și ②, aplicând criteriul lui Weierstrass pentru serii de funcții, obținem că seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ este uniform convergentă pe K.

Exercițiul 6 a) Să se arate că seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{arctg}(nx)}{n^2}$ este uniform și absolut convergentă pe $\mathbb{R}$

b) Să se arate că seriile de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sunt absolut convergente pe $\mathbb{R}$ și uniform convergente pe orice mulțime compactă $K \subseteq \mathbb{R}$.

SEMINAR 7

Funcții derivabile

EXERCIȚIUL 1 Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $x \le f(x) \le x + x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este derivabilă în 0 și că $f'(0) = 1$.

REZOLVARE $x \le f(x) \le x + x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$x = 0 \Rightarrow 0 \le f(0) \le 0 + 0^2 \Rightarrow f(0) = 0$

$x \le f(x) \le x + x^2 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \le f(x) - f(0) \le x + x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Împărțim inegalitățile cu numărul real x și se împart în două cazuri, în funcție de semnul lui x.

CAZUL 1 $x > 0$

$x \le f(x) - f(0) \le x + x^2 \ \forall x > 0 \ \Big| : x \Rightarrow 1 \le \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \le 1 + x \ \forall x > 0$

$$1 \le \frac{f(x) - f(0)}{x} \le 1 + x \ \forall x > 0 \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \Rightarrow$$

$$1 \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 1 \xleftarrow[x>0]{x\to 0} 1+x$$

$\Rightarrow f$ este derivabilă la dreapta în 0 și $f'_d(0) = 1$.

Cazul 2 $x < 0$

$x \le f(x) - f(0) \le x + x^2 \ \forall x < 0 \ \Big| : x \Rightarrow 1 + x \le \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \le 1 \ \forall x < 0$

$$1 + x \le \frac{f(x) - f(0)}{x} \le 1 \ \forall x < 0 \Rightarrow \exists \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

$$1+x \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 1 \xleftarrow[x<0]{x\to 0} 1$$

$\Rightarrow f$ este derivabilă la stânga în 0 și $f'_s(0) = 1$

$f'_d(0) = f'_s(0) = 1 \Rightarrow f$ este derivabilă în 0 și $f'(0)=1$.

EXERCIȚIUL 2 Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $x + \ln(1+x) \leq f(x) \leq x + e^x - 1$ $\forall x \in (-1, +\infty)$. Să se arate că f este derivabilă în 0 și că $f'(0) = 2$.

EXERCIȚIUL 3 Să se determine parametrul real $a > 0$ astfel ca $2^x + a^x \geq 3^x + 4^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare Se alege funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2^x + a^x - 3^x - 4^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

f funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ (1)

Din ipoteză deducem că $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(0) = 2^0 + a^0 - 3^0 - 4^0 = 1$

$\Rightarrow f(x) \geq f(0)$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x_0 = 0$ punct de minim global al funcției f. (2)

$\mathbb{R}$ mulțime deschisă $\Rightarrow x_0 = 0 \in \mathring{\mathbb{R}}$ (3)

Din (1), (2), (3), aplicând teorema lui FERMAT, obținem că ~~f este derivabilă în~~ $x_0 = 0$ este punct critic al funcției f, adică $f'(x_0) = 0$.

$f'(x) = 2^x \ln 2 + a^x \ln a - 3^x \ln 3 - 4^x \ln 4$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f'(0) = 2^0 \ln 2 + a^0 \ln a - 3^0 \ln 3 - 4^0 \ln 4 = \ln 2 + \ln a - \ln 3 - \ln 4 = \ln(2a) - \ln 12 = \ln \frac{2a}{12} = \ln \frac{a}{6}$

$f'(0) = 0 \Rightarrow \ln \frac{a}{6} = 0 \Rightarrow \frac{a}{6} = 1 \Rightarrow a = 6$

EXERCIȚIUL 4 Fie $a, b > 0$ astfel încât $a^x + b^x \geq 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Să se arate că $a \cdot b = 1$.

INDICAȚIE Se alege funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = a^x + b^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ și se demonstrează că $x_0 = 0$ este punct de minim global al funcției f.

EXERCIȚIUL 5 Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este funcție bijectivă și să se calculeze $(f^{-1})'(2)$.

REZOLVARE f funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = x^2 + 2x + 1 + 2x^2 = (x+1)^2 + 2x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este funcție strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ este funcție injectivă ①

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + +	+ + + + +	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Din tabelul de variație se observă că $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$
$\Rightarrow f$ este funcție surjectivă ②

Din ① și ② rezultă că f este funcție bijectivă.

$y_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = 2$.

f funcție bijectivă $\Rightarrow$ ecuația $f(x) = 2$ are soluție unică

Observăm că $f(0)=2 \Rightarrow$ ecuația $f(x)=2$ are soluția unică $x_0=0$.

f funcție bijectivă
f funcție strict crescătoare
f este derivabilă în $x_0=0$
$f'(0)=1\neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ este derivabilă în $y_0=2$

$(f^{-1})'(2)=(f^{-1})'(f(0))=\frac{1}{f'(0)}=1.$

EXERCIȚIUL 6 Fie $f:\mathbb{R}\to(1,+\infty)$ definită prin $f(x)=5^x+2^x+1\ \forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că f este funcție bijectivă și să se calculeze $(f^{-1})'(8)$.

EXERCIȚIUL 7 Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x^2e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

Rezolvare f funcție continuă pe $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=f(0)=0 \Rightarrow$ f este funcție continuă în $x_0=0 \Rightarrow$ f funcție continuă pe $\mathbb{R}$.

f funcție derivabilă pe $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Studiem derivabilitatea funcției în $x_0=0$ folosind un corolar al teoremei lui Lagrange.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2xe^{-x}-x^2e^{-x})=0 \Rightarrow \exists f'_d(0)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-1)=-1 \Rightarrow \exists f'_s(0)=-1$

$f'_s(0) \neq f'_d(0) \Rightarrow f$ nu este derivabilă în 0.

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \cancel{x^2} 2xe^{-x} - x^2e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 = 0, & x < 0 \\ xe^{-x}(2-x) = 0, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ singurul}$$

punct critic al funcției f

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - - -$	$\vert$ $++$	0	$- - - -$
$f(x)$	$\searrow$	0 $\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$

Din tabelul de variație se deduce că $x_0 = 0$ este punct de minim local al funcției f și că $x_1 = 2$ este punct de maxim local al funcției f.

EXERCIȚIUL 8 Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $(0, \infty)$ astfel ca $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

REZOLVARE Se utilizează teorema lui L'Hospital pentru rezolvarea acestui exercițiu.

Se aleg funcțiile $g, h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $g(x) = e^x f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ și $h(x) = e^x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} = f(x) + f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

g, h funcții derivabile pe $(0,\infty)$
$h'(x) = e^x \neq 0 \ \forall x \in (0,+\infty)$
$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g'(x)}{h'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+f'(x)) = l$
$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\Big\|\xrightarrow{L'H}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{h(x)} = l \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x f(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l.$

EXERCIȚIUL 9 Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea că $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + x f'(x)) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

EXERCIȚIUL 10 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că $\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n \leq \dfrac{x^n+y^n+z^n}{3} \ \forall x, y, z \in (0,\infty)$.

Rezolvare Inegalitatea este evidentă pentru $n=1$. Vom presupune că $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Alegem funcția $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^n \ \forall x \in (0,\infty)$.
f este funcție derivabilă de două ori pe $(0,+\infty)$.
$f'(x) = n x^{n-1} \ \forall x \in (0,\infty)$
$f''(x) = (n x^{n-1})' = n(n-1) x^{n-2} > 0 \ \forall x \in (0,+\infty)$
$(0,+\infty)$ interval în $\mathbb{R}$
$f''(x) > 0 \ \forall x \in (0,+\infty)$ $\Big\| \Rightarrow$ f funcție convexă pe $(0,+\infty)$

Folosim inegalitatea lui Jensen și, ținând cont că f este funcție convexă pe $(0,+\infty)$, obținem că $f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\le \alpha f(x)+\beta f(y)+\gamma f(z)$ $\forall x,y,z\in(0,\infty)$ și $\forall \alpha,\beta,\gamma\in(0,\infty)$ cu $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Alegem $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$

Avem că $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\le \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$ $\forall x,y,z>0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n \le \frac{x^n+y^n+z^n}{3} \quad \forall x,y,z\in(0,+\infty)$$

EXERCIȚIUL 11 Să se demonstreze că

$$e^{\frac{x+y}{2}} \le \frac{e^x+e^y}{2} \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

EXERCIȚIUL 12 Să se demonstreze inegalitatea

$$\sin x \le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} \quad \forall x\in[0,\pi).$$

Rezolvare Vom folosi pentru justificarea inegalității Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange.

Fie $f:[0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ $\forall x\in[0,\pi)$

f funcție indefinit derivabilă pe $[0,\pi)$

$f'(x)=\cos x$ $\forall x\in[0,\pi)$

$f''(x)=-\sin x$ $\forall x\in[0,\pi)$

$f'''(x)=-\cos x$ $\forall x\in[0,\pi)$

$f^{(4)}(x)=\sin x$ $\forall x\in[0,\pi)$

$f^{(5)}(x) = \cos x \quad \forall x \in [0, \pi)$
$f^{(6)}(x) = -\sin x \quad \forall x \in [0, \pi)$

Observăm că membrul drept al inegalității este un polinom de grad 5 de forma

$$P(x) = (x-0) - \frac{(x-0)^3}{6} + \frac{(x-0)^5}{120}.$$

De aceea considerăm că funcția este derivabilă de 6 ori pe $[0, \pi)$.

Elementul fixat din intervalul $[0, \pi)$ este $x_0 = 0$ (vezi descrierea polinomului P).

Aplicăm formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange.

$\forall x \in [0, \pi)$, cu $x \neq 0$ $\exists c \in [0, \pi)$ situat între 0 și x (adică $c \in (0, x)$) astfel încât

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x-0)^5 + \frac{f^{(6)}(c)}{6!}(x-0)^6$$

Avem că $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin c}{6!} x^6$

$\left.\begin{array}{l} x \in [0, \pi) \\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (0, \pi)$

$c \in (0, x) \Rightarrow c \in (0, \pi) \Rightarrow \sin c > 0 \Rightarrow \frac{\sin c}{6!} x^6 > 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \forall x \in (0, \pi).$

Pentru $x = 0$ inegalitatea din exercițiul propus este evidentă (avem chiar egalitate)!

Rezultă că $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \forall x \in [0, \pi).$

EXERCIȚIUL 13 Să se demonstreze inegalitatea
$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in [0, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCIȚIUL 14 Se consideră o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

i) $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că f este funcție constantă pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare Demonstrăm afirmația prin reducere la absurd. Presupunem că f este funcție neconstantă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f' este funcție nenulă pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $f'(x_0) \neq 0$.

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $f'(x_0) > 0$.

Aplicăm formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange.

$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0$ $\exists c \in \mathbb{R}$ situat între x și x_0 astfel încât $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$

$f''(c) \leq 0 \Rightarrow \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \leq 0$

$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_0$.

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = -\infty$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$

Din ipoteză știm că $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \geq 0$

$\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow f$ funcție constantă pe $\mathbb{R}$

SEMINAR 8

Serii de puteri

Serii de puteri remarcabile

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1,1)$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1,1)$

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

EXERCIȚIUL 1 Să se determine raza de convergență, mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri!

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$

Rezolvare a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$

Se identifică x_0 și coeficienții seriei de puteri a_n.

$x_0 = 0$

$a_0 = 0$

$a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Raza de convergență se calculează cu formula din teorema Cauchy-Hadamard

$R = \frac{1}{\rho} \in [0, +\infty]$

$\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$.

Aplicăm criteriul radicalului pentru șiruri de numere reale pozitive.

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \rho = 1$.

$\rho = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$.

Mulțimea de convergență A are următoarele proprietăți:

- $A \subseteq \mathbb{R}$ nevidă $(x_0 \in A)$
- $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$.

$(0-1, 0+1) \subseteq A \subseteq [0-1, 0+1] \Rightarrow (-1, 1) \subseteq A \subseteq [-1, 1]$.

Pentru a identifica corect mulțimea A trebuie să verificăm dacă $1 \in A$ și $-1 \in A$.

$1 \in A \Leftrightarrow$ seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{n} =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este convergentă

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^1}$ (seria armonică cu $\alpha=1$)
serie divergentă de numere reale $\Rightarrow$ $\underline{1 \notin A}$.

$-1 \in A \Leftrightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\| \xrightarrow[\text{Leibniz}]{\text{crit.}}$ seria alternată $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă $\Rightarrow$ $\underline{\underline{-1 \in A}}$

Așadar, $A = [-1, 1)$

Suma seriei de puteri $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ este funcția $f: A \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ $\forall x \in A$.

$f: [-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

f are următoarele proprietăți:

a) $f(x_0) = a_0$

b) $f|_{(x_0-R, x_0+R)}$ este indefinit derivabilă

$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n (x-x_0)^n\right)^{(k)}$ $\forall x \in (x_0-R, x_0+R)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int a_n (x-x_0)^n\,dx$, $x \in (x_0-R, x_0+R)$

c) Dacă $x_0 - R \in A$, atunci f este continuă în $x_0 - R$

d) Dacă $x_0+R \in A$, atunci f este continuă în x_0+R.

$f(x_0)=a_0 \Rightarrow f(0)=0$.

f este indefinit derivabilă pe $(-1,1)$

f este continuă în -1.

$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n}x^{n-1}}{\cancel{n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}\underline{\underline{m=n-1}}$

$=\sum_{m=0}^{+\infty}x^m=\frac{1}{1-x}\ \forall x\in(-1,1)$

$f'(x)=\frac{1}{1-x}\ \forall x\in(-1,1)\Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{1-x}dx=$

$=-\ln|1-x|+C=-\ln(1-x)+C\ \forall x\in(-1,1)$.

$f(x)=-\ln(1-x)+C\ \forall x\in(-1,1)\Rightarrow f(0)=-\ln 1+C=$

$=C$

$f(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=-\ln(1-x)\ \forall x\in(-1,1)$

f continuă în $-1 \Rightarrow f(-1)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}-\ln(1-x)$

$=-\ln 2$

$f:[-1,1)\to\mathbb{R}$

$f(x)=-\ln(1-x)\ \forall x\in[-1,1)$.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_0(x-x_0)^n$

$x_0=0$

$a_0=1$

$a_n=(n+1)\ \forall n\in\mathbb{N}$.

$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|n+1|}{|n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$

$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A \subseteq [x_0 - R, x_0 + R] \Rightarrow (-1,1) \subseteq A \subseteq [-1,1]$

$x = 1 \in A \Leftrightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)$ este convergentă

$\lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)$ serie divergentă

$\Rightarrow 1 \notin A$

$x = -1 \in A \Leftrightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-1)^n$ este convergentă.

$\lim_{k\to+\infty} (2k+1)(-1)^{2k} = +\infty$

$\lim_{k\to+\infty} (2k+2)(-1)^{2k+1} = -\infty$ $\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} (n+1)(-1)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ seria $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-1)^n$ este divergentă $\Rightarrow -1 \notin A$.

Așadar, $A = (-1,1)$

$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \ \forall x \in (-1,1)$

$f(x_0) = a_0 \Rightarrow f(0) = 1$

f indefinit derivabilă pe $(-1,1)$

$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int (n+1) x^n \,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} + C \overset{m=n+1}{=}$

$= \sum_{m=1}^{+\infty} x^m + C = \sum_{m=0}^{+\infty} x^m + C - 1 = \frac{1}{1-x} + C - 1 \ \forall x \in (-1,1)$

$\int f(x)dx = \frac{1}{1-x} + C-1 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{1-x} + C-1\right)' =$

$= -\frac{(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \; \forall x \in (-1,1)$

$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \; \forall x \in (-1,1)$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$

$x_0 = 0$

$a_0 = 0$

$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}.$

$a_{2n} = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$

$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|0|} = 0$ (1)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}}$

Știm că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ (vezi punctul (a)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}} = 1$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \sup\{0,1\} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

$(x_0-R, x_0+R) \subseteq A \subseteq [x_0-R, x_0+R] \Rightarrow (-1,1) \subseteq A \subseteq [-1,1]$

$x=-1 \in A \Leftrightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ este convergentă

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

$\frac{1}{2n+3}<\frac{1}{2n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$ $\Bigg\|\xrightarrow[\text{LEIBNIZ}]{\text{crit.}}$ seria alternată $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ este convergentă $\Rightarrow -1\in A$.

$1\in A \Leftrightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1^{2n+1}}{2n+1}=$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ este convergentă.

$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ serie convergentă $\Rightarrow$ $-1\in A$.

Așadar, $A=[-1,1]$.

$f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\ \forall x\in[-1,1]$.

$f(x_0)=a_0\Rightarrow f(0)=0$

f indefinit derivabilă pe $(-1,1)$

f continuă în -1 și în 1.

~~$\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int(-1)^n x$~~

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n},\ \forall x\in(-1,1)$$

Știm că $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}\ \forall x\in(-1,1)\xrightarrow{x\to x^2}$

$\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\ \forall x^2\in(-1,1)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ $\forall x\in(-1,1)$

$f(x)=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x+C\ \forall x\in(-1,1)$

$f(0)=\operatorname{arctg}0+C=C$
$f(0)=0$ $\Bigg\|\Rightarrow C=0$

$f(x) = \text{arctg}\, x \quad \forall x \in (-1,1)$

f continuă în $1 \Rightarrow f(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \text{arctg}\, x = \text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$

f continuă în $-1 \Rightarrow f(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \text{arctg}\, x = \text{arctg}(-1) =$
$= -\frac{\pi}{4}$

$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \ f(x) = \text{arctg}\, x \quad \forall x \in [-1,1]$

EXERCIȚIUL 2 Să se determine raza de convergență și mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n + 3^n}$

b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\, x^n}{n^2+1}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ (se calculează și suma seriei

d) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \cdot x^n$

e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$ (se calculează și suma seriei

f) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)\, x^n$ (se calculează și suma seriei).

SEMINAR 9

FUNCȚII DIFERENȚIABILE

EXERCIȚIUL 1 Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Să se studieze continuitatea și existența derivatelor parțiale în $(0,0)$.

REZOLVARE f funcție continuă pe $\mathbb{R}^2$ (compunere de funcții elementare) ⇒ f este continuă în $(0,0)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_1)-f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot(1,0))-f((0,0))}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((t,0))-f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \dfrac{|t|}{t} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \dfrac{-t}{t} = -1 \\ \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{|t|}{t} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{t}{t} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} \Rightarrow$$

⇒ f nu admite derivată parțială în raport cu variabila x în $(0,0)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_2)-f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1))-f((0,0))}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,t))-f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} \nexists \Rightarrow$$

⇒ f nu admite derivată parțială în raport cu variabila y în $(0,0)$

CONCLUZIE: Funcția este continuă în $(0,0)$, dar nu admite nicio derivată parțială în $(0,0)$

EXERCIȚIUL 2 Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

. Să se studieze continuitatea și existența derivatelor parțiale în $(0,0)$.

REZOLVARE $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_1) - f((0,0))}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f((t,0)) - f((0,0))}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0^2}{t^2+0^4} - 0}{0} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_2) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,t)) - f((0,0))}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t^2}{0^2+t^4} - 0}{t} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x,y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ (caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$).

Testăm existența limitei funcției în $(0,0)$ cu ajutorul șirurilor de vectori.

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{n^2+1}{n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \neq \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ nu este continuă în $(0,0)$.

CONCLUZIE: f admite toate derivatele parțiale în $(0,0)$, dar f nu este continuă în $(0,0)$.

OBSERVAȚIE Nu există nicio legătură între continuitatea unei funcții $f: D\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n\geq 2$ într-un punct $x_0 \in D\cap D'$ și existența derivatelor parțiale ale funcției f în punctul x_0

EXERCIȚIUL 3 Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ definită prin ~~f(x) = (x~~
$f(x) = (\sqrt{1-x}, \arcsin x)$ $\forall x \in [-1,1]$.

REZOLVARE $f: [-1,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\sqrt{1-x}, \arcsin x)$

"f este diferențiabilă în $x_0 \in D\cap D'$ $\Leftrightarrow$ f este derivabilă în $x_0 \in D\cap D'$"

Afirmația este valabilă în cazul în care $D\subseteq\mathbb{R}$ (funcția f depinde de o singură variabilă reală)

Vom studia derivabilitatea funcției f.

$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

$f_1, f_2 : [-1,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = \sqrt{1-x} \quad \forall x \in [-1,1]$

$f_2(x) = \arcsin x \quad \forall x \in [-1,1]$

f_1 este derivabilă pe $[-1,1)$
f_2 este derivabilă pe $(-1,1)$ $\Rightarrow$ f este derivabilă pe $(-1,1) \cap [-1,1) \Rightarrow f$ este derivabilă pe $(-1,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este diferențiabilă pe $(-1,1)$

Fie $x_0 \in (-1,1)$

$df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$df(x_0)(x) = x \cdot f'(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$df(x_0)(x) = x \cdot \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x_0}}, \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$df(x_0) = dx \cdot \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x_0}}, \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \right)$ (descrierea prescurtată a diferențialei funcției f în punctul $x_0 \in (-1,1)$)

<u>EXERCIȚIUL 4</u> Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f : [-2,2] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$f(x) = \left(\arcsin \frac{x}{2}, \frac{|1-x^2|}{x} \right) \quad \forall x \in [-2,2] \setminus \{0\}.$

Calculați $df\left(\frac{1}{2}\right)$ și $df\left(-\frac{3}{2}\right)$.

EXERCIȚIUL 5 Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Rezolvare • Se studiază continuitatea funcției

f funcție continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x,y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}}$$

$$= 0$$

$$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+0^2}} = 0$$

Demonstrăm că $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y) = l = 0$ cu ajutorul criteriului cleștelui pentru limite de funcții.

$$0 \le |f(x,y) - l| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2}} =$$

$$= \frac{|xy|}{|x|} = |y|$$

Avem că $\quad 0 \le |f(x,y) - l| \le |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^*$

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{0 \longrightarrow} \quad 0 \quad \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longleftarrow |y|}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - l| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l = 0$

$f(0,0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f$ este continuă în $(0,0)$.

f este continuă pe $\mathbb{R}^2$

- Se studiază existența derivatelor parțiale ale funcției f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{(xy)'_x\sqrt{x^2+y^2} - xy\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x}{x^2+y^2} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = \frac{(xy)'_y\sqrt{x^2+y^2} - xy\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y}{x^2+y^2} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x(x^2+y^2) - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \end{aligned}\right\rangle (1)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (2)

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mulțime deschisă (3)

Din (1), (2), (3) deducem că f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Rămâne să studiem diferențiabilitatea în $(0,0)$. Inițial, se studiază existența derivatelor parțiale în $(0,0)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_1) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot(1,0)) - f((0,0))}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((t,0)) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0}{\sqrt{t^2+0^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t e_2) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f((0,0))}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,t)) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t}{\sqrt{0^2+t^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

f admite toate derivatele parțiale în $(0,0)$. Mulțimea $\{(0,0)\}$ este închisă, dar nu este mulțime deschisă. Funcția f este continuă în $(0,0)$. În această situație, diferențiabilitatea se studiază în $(0,0)$ folosind definiția.

Fie $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T((x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y =$
$= 0\cdot x + 0\cdot y = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|_2} =$$

$$= \lim_{x,y\to 0} \frac{\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - T((x,y))\right|}{\|(x,y)\|_2} = \lim_{x,y\to 0} \frac{\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{x,y\to 0} \frac{|xy|}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \lim_{x,y\to 0} \frac{|xy|}{x^2+y^2}$$

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\cdot 0\right|}{\frac{1}{n^2}+0^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n}\cdot 0\right|}{\frac{1}{n^2}+0^2} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|_2}$$

$\Rightarrow f$ nu este diferențiabilă în $(0,0)$

<u>EXERCIȚIUL 6</u> Să se calculeze $df(x_0, y_0)$ în cazul $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ pentru funcția de la exercițiul 5.

<u>REZOLVARE</u> $(x_0, y_0) \neq (0,0) \overset{ex.5}{\Rightarrow} f$ este diferențiabilă în (x_0, y_0)

$df(x_0,y_0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$df(x_0,y_0)(x,y) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) =$

$= x \cdot \dfrac{y_0^3}{(x_0^2+y_0^2)\sqrt{x_0^2+y_0^2}} + y \cdot \dfrac{x_0^3}{(x_0^2+y_0^2)\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

$$df(x_0,y_0) = \frac{y_0^3}{(x_0^2+y_0^2)\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\,dx + \frac{x_0^3}{(x_0^2+y_0^2)\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\,dy.$$

<u>EXERCIȚIUL 7</u> Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln(x^2+y^2); & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

<u>EXERCIȚIUL 8</u> Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y,z) =$
$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

<u>Rezolvare</u> f este funcție continuă pe $\mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3-3xyz)'_x = 3x^2 - 3yz \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3-3xyz)'_y = 3y^2 - 3xz \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (x^3+y^3+z^3-3xyz)'_z = 3z^2 - 3xy \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ mulțime deschisă

Din toate afirmațiile precedente rezultă că f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$.

$df(x_0,y_0,z_0): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$df(x_0,y_0,z_0)(x,y,z) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) +$$
$$+ z\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = x(3x_0^2 - 3y_0z_0) + y(3y_0^2 - 3x_0z_0) +$$

$+z(3z_0^2-3x_0y_0)\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$$df(x_0,y_0,z_0)=(3x_0^2-3y_0z_0)dx+(3y_0^2-3x_0z_0)dy+$$
$$+(3z_0^2-3x_0y_0)dz$$

<u>EXERCIȚIUL 9</u> Să se determine punctele critice ale funcției $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x,y,z)=$ $=x^3+y^3+z^3-3xyz\ \ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

<u>REZOLVARE</u> Știm din exercițiul 8 că funcția f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$.

Pentru a identifica punctele critice trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0\end{cases}$$ pe mulțimea $\mathbb{R}^3$ (mulțimea unde funcția este diferențiabilă)

$$\begin{cases}3x^2-3yz=0\\ 3y^2-3xz=0\\ 3z^2-3xy=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-yz=0\ |\cdot 2\\ y^2-xz=0\ |\cdot 2\\ z^2-xy=0\ |\cdot 2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x^2-2yz=0\\ 2y^2-2xz=0\\ 2z^2-2xy=0\end{cases}\ \oplus$$

$$2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2xy-2xz=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0\Rightarrow x=y=z\in\mathbb{R}$$

Mulțimea punctelor critice este $\{(x,x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

EXERCIȚIUL 10 Să se determine punctele critice ale funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Rezolvare Se studiază diferențiabilitatea funcției $f(x)$ apoi se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$ pe mulțimea unde funcția este diferențiabilă.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 1)'_x = 4x^3 - 4x + 4y$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 1)'_y = 4y^3 + 4x - 4y$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

Din toate afirmațiile precedente deducem că f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

$$(\mathbb{R}^2) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

$4x^3 + 4y^3 = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow$

$x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x^3 = -y^3 \Rightarrow x = -y$

$4x^3 - 4x + 4y = 0 \Rightarrow -4y^3 + 4y + 4y = 0 \Rightarrow 8y - 4y^3 = 0$

$\Rightarrow 4y(2 - y^2) = 0$

$4y(2-y^2)=0 \Rightarrow y_1=0,\ y_2=\sqrt{2},\ y_3=-\sqrt{2}$

$y_1=0 \Rightarrow x_1=0$

$y_2=\sqrt{2} \Rightarrow x_2=-\sqrt{2}$

$y_3=-\sqrt{2} \Rightarrow x_3=\sqrt{2}$

$(0,0), (-\sqrt{2},\sqrt{2}), (\sqrt{2},-\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow C=\{(0,0), (\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\sqrt{2})\}$ este mulțimea punctelor critice.

EXERCIȚIUL 11 Să se determine punctele critice ale următoarelor funcții:

a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z)=x^2+2xy+y^2+z^2-1$

b) $f:(0,+\infty)\times(0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+2xy$

c) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y)=x^4+4x^2y^2+y^2$.

SEMINAR 10

Derivatele parțiale ale funcțiilor compuse. Puncte de extrem local

EXERCIȚIUL 1 Fie $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă și $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x,y)=g(xy,\ x^2+y^2)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției f.

REZOLVARE $f(x,y)=g(xy,\ x^2+y^2)=g(u(x,y),\ v(x,y))$, unde $u(x,y)=xy$ și $v(x,y)=x^2+y^2$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Considerăm că funcția g depinde de variabilele u și v.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(xy,\ x^2+y^2)\cdot(xy)'_x+\frac{\partial g}{\partial v}(xy,x^2+y^2)\cdot(x^2+y^2)'_x=$$

$$=y\frac{\partial g}{\partial u}(xy,\ x^2+y^2)+2x\frac{\partial g}{\partial v}(xy,\ x^2+y^2)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(xy,\ x^2+y^2)\cdot(xy)'_y+\frac{\partial g}{\partial v}(xy,x^2+y^2)(x^2+y^2)'_y=$$

$$=x\frac{\partial g}{\partial u}(xy,\ x^2+y^2)+2y\frac{\partial g}{\partial v}(xy,\ x^2+y^2)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

EXERCIȚIUL 2 Fie $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă și $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x,y)=g\left(xy,\ \frac{x}{y}\right)$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției f.

EXERCIȚIUL 3 Fie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = x\,g(x^2+y^2)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției f.

EXERCIȚIUL 4 Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

REZOLVARE f funcție continuă pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow D_f = \phi$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 12x^2\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 6y + 3\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ funcții continue pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ mulțime deschisă}\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ funcție diferențiabilă pe } \mathbb{R}^2$$

$D_1 = \phi$.

Determinăm punctele critice rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \text{ pe mulțimea } \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 12x^2 = 0 \\ 3y^2 - 6y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2(x-3) = 0 \\ 3(y^2 - 2y + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(x-3) = 0 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$

$(y-1)^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$

Sistemul are soluțiile $(0,1), (3,1)$

$(0,1), (3,1) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow C = \{(0,1), (3,1)\}$

Studiem diferențiabilitatea de ordin 2.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \left(4x^3 - 12x^2\right)'_x = 12x^2 - 24x$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \left(3y^2 - 6y + 3\right)'_x = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \left(4x^3 - 12x^2\right)'_y = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \left(3y^2 - 6y + 3\right)'_y = 6y - 6 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

f este funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow D_2 = \emptyset$.

Aplicăm criteriul lui Sylvester în punctele critice în care f este diferențiabilă de două ori

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = 0$

Nu ne putem pronunța în $(0,1)$ cu ajutorul criteriului lui Sylvester $\Rightarrow (0,1) \in D_4$

$$H_f(3,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 36 > 0$

$\Delta_2 = 0$

Nu ne putem pronunța în $(3,1)$ cu ajutorul criteriului lui Sylvester $\Rightarrow (3,1) \in D_4$

$D_3 = \phi$

$D_4 = \{(0,1), (3,1)\}$

verificăm cu ajutorul definiției dacă $(0,1)$ și $(3,1)$ sunt puncte de extrem local.

Evaluăm semnul diferenței $f(x,y) - f(0,1)$ când $(x,y) \in V$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(0,1)$.

$f(x,y) - f(0,1) = x^4 - 4x^3 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1$

$= x^3(x-4) + y(y^2 - 3y + 3) - 1$

$f(\frac{1}{n}, 1) - f(0,1) = \frac{1}{n^3}(\frac{1}{n} - 4) + 1 - 1 = \frac{1}{n^3}(\frac{1}{n} - 4) < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$f(-\frac{1}{n}, 1) - f(0,1) = -\frac{1}{n^3}(-\frac{1}{n} - 4) + 1 - 1 = \frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^3} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow (0,1)$ nu este punct de extrem local al funcției f

Evaluăm semnul diferenței $f(x,y) - f(3,1)$ când $(x,y) \in V$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(3,1)$

$f(x,y) - f(3,1) = x^3(x-4) + y(y^2 - 3y + 3) + 26$

$f(3, 1 + \frac{1}{n}) - f(3,1) = (1 + \frac{1}{n})^3 - 3(1 + \frac{1}{n})^2 + 3(1 + \frac{1}{n}) - 1 =$

$= (1 + \frac{1}{n} - 1)^3 = \frac{1}{n^3} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$f(3, 1 - \frac{1}{n}) - f(3,1) = (1 - \frac{1}{n})^3 - 3(1 - \frac{1}{n})^2 + 3(1 - \frac{1}{n}) - 1 =$

$= (1 - \frac{1}{n} - 1)^3 = -\frac{1}{n^3} < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$(3,1)$ nu este punct de extrem local al funcției f.

$E = \phi$

<u>EXERCIȚIUL 4</u> Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + x^2 + 2xy + y^2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

<u>EXERCIȚIUL 5</u> Să se arate că ecuația $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z - 8 = 0$ are o infinitate de soluții definite implicit sub forma $z = f(x,y)$ în vecinătatea punctului $(0,2,0)$. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}(0,2)$ și $\frac{\partial z}{\partial y}(0,2)$.

<u>REZOLVARE</u> Alegem funcția $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z - 8$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x - 8z \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4y \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 8x - 1 \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ mulțime deschisă

- f funcție de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$
- $f(0,2,0) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(0,2,0) = -1 \neq 0$

Aplicăm teorema funcțiilor implicite

$\exists r_1, r_2 > 0$ a.î. $B((0,2), r_1) \times B(0, r_2) \subseteq \mathbb{R}^3$,

$(\exists!)\ \varphi : B((0,2), r_1) \to B(0, r_2)$ funcție de clasă C^1

astfel încât

$$\begin{cases} \varphi(0,2) = 0 \\ f(x, y, \varphi(x,y)) = 0 \ \forall (x,y) \in B((0,2), r_1). \end{cases}$$

$f(x, y, \varphi(x,y)) = 0 \ \forall (x,y) \in B((0,2), r_1) \Rightarrow$ ecuația $f(x,y,z) = 0$ are o infinitate de soluții de forma $z = \varphi(x,y)$, cu $(x,y) \in B((0,2), r_1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,2,0)} = -\frac{0}{-1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,2) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,2,0)} = -\frac{8}{-1} = 8.$$

<u>EXERCIȚIUL 6</u> Să se arate că ecuația $x^2 - y^3 + 2xy + 2 = 0$ are o infinitate de soluții definite implicit sub forma $y = \varphi(x)$ în vecinătatea punctului $(1, -1)$. Să se calculeze $y'(1)$, $y''(1)$.

SEMINAR 11

Funcții integrabile RIEMANN

EXERCIȚIUL 1 Studiați integrabilitatea Riemann a următoarelor funcții:

a) $f : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - \cos x}{1+\sin 2x}, & x \in (0, \frac{\pi}{4}) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

b) $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

c) $f : [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,2] \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \\ 0, & \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \end{cases}$

REZOLVARE a) Studiem continuitatea funcției.

f funcție continuă pe $(0, \frac{\pi}{4})$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\sin 2x} = -1 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ nu este}$$

continuă în 0

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x<\frac{\pi}{4}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x<\frac{\pi}{4}}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\sin 2x} = 0 \\ &f(\tfrac{\pi}{4}) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ nu este}$$

continuă în $\frac{\pi}{4}$

Observăm că f este continuă pe $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

$D_f = \left\{0, \frac{\pi}{4}\right\}$

D_f mulțime finită $\Rightarrow D_f$ mulțime neglijabilă Lebesgue (1)

Studiem mărginirea funcției f.

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin x - \cos x}{1+\sin 2x}\right| = \frac{|\sin x - \cos x|}{1+\sin 2x} \leq |\sin x - \cos x|$$

$$\leq |\sin x| + |\cos x| \leq 2 \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

$f(0) = 0$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Așadar, f este funcție mărginită pe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (2)

Din (1) și (2), aplicând criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, rezultă că $f \in \mathcal{R}\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$.

b) f este continuă pe $(0,1)$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x-1} = -1 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ nu este continuă în } x_0 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty \\ &f(1) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ nu este continuă în } x_1 = 1.$$

$D_f = \{0,1\}$ mulțime finită $\Rightarrow D_f$ mulțime neglijabilă Lebesgue

Studiem mărginirea funcției

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty \Rightarrow f$ este nemărginită inferior (2)

f este funcție nemărginită inferior pe $[0,1] \Rightarrow$
$\Rightarrow$ f nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]$ (se aplică criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue)

c) Se observă că $0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x \in [0,2] \Rightarrow f$ este funcție mărginită pe $[0,2]$ (3)

Studiem continuitatea funcției.

f funcție continuă pe $[0,2] \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to \frac{1}{n}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{n}} x^2 = \frac{1}{n^2} \\ &f\left(\tfrac{1}{n}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ nu este continuă în } \frac{1}{n}.$$

$D_f = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ mulțime numărabilă
D_f mulțime neglijabilă Lebesgue (4)

Din (3) și (4), aplicând criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, rezultă că $f \in R[0,2]$.

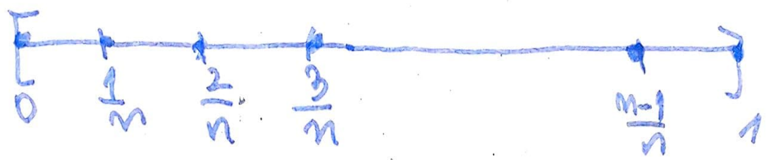
<u>EXERCIȚIUL 2</u> Să se arate că funcția $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]$.

<u>Rezolvare</u> Se observă că f este funcție mărginită pe $[0,1]$.

Pentru a justifica că $f \notin R([0,1])$ vom utiliza criteriul de integrabilitate al lui DARBOUX.

Construim un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ale intervalului $[0,1]$ cu $\lim_{n \to \infty} \|\Delta_n\| = 0$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} (S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)) \neq 0$.



$\Delta_n : 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{3}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$

$\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$

Fie $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = -1, \ \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = 1 \ \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

$S_{\Delta_n}(f) = M_0\left(\frac{1}{n} - 0\right) + M_1\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right) + \dots + M_{n-1}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) =$

$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1. \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$s_{\Delta_n}(f) = m_0\left(\frac{1}{n} - 0\right) + m_1\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right) + \dots + m_{n-1}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$

$= -\frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \dots - \frac{1}{n} = -1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f) = 1 - (-1) = 2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} (S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)) = 2 \neq 0 \Rightarrow f \notin R([0,1])$

EXERCIȚIUL 3 Fie $f : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin 2x}, & x \in (0, \frac{\pi}{4}) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$.

REZOLVARE Știm din exercițiul 1 că $f \in \mathcal{R}([0, \frac{\pi}{4}])$.

Fie $g : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin 2x}$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

g funcție continuă pe $[0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow g \in \mathcal{R}([0, \frac{\pi}{4}])$.

$A = \{x \in [0, \frac{\pi}{4}] \mid f(x) \neq g(x)\} = \{0, \frac{\pi}{4}\}$ mulțime finită

Din toate afirmațiile precedente deducem că

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin 2x}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}\,dx$$

$t = \sin x + \cos x$

$dt = -(\sin x - \cos x)\,dx \Rightarrow -dt = (\sin x - \cos x)\,dx$

$x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} -\frac{dt}{t^2} \cancel{dt} = -\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2} = +\frac{1}{t}\Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

EXERCIȚIUL 4 Fie $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\int_1^{x^2-2x}\sqrt{1+t^3}\,dt\ \forall x\in[1,+\infty)$. Să se calculeze derivata funcției f.

REZOLVARE Fie $\alpha,\beta:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definite prin $\alpha(x)=x^2-2x\ \forall x\in[1,\infty)$ și $\beta(x)=1\ \forall x\in[1,+\infty)$.

Alegem $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $g(t)=\sqrt{1+t^3}\ \forall t\in\mathbb{R}$.

$$f(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\,dt\ \forall x\in[1,+\infty).$$

g funcție continuă pe $\mathbb{R}$

α,β funcții derivabile pe $[1,+\infty)$ $\Rightarrow$ f este derivabilă pe $[1,\infty)$ și $f'(x)=g(\beta(x))\cdot\beta'(x)-g(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$ ~~$\forall x\in[1,\infty)$~~

$$f'(x)=\sqrt{1+(x^2-2x)^3}\cdot(x^2-2x)'-\sqrt{1+1^3}\cdot 1'=$$

$$=\sqrt{1+(x^2-2x)^3}\,(2x-2)\ \forall x\in[1,+\infty).$$

EXERCIȚIUL 5 Fie $f:[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=\int_1^{tg\,x} e^{t^2}dt$. Să se calculeze derivata funcției f și să se studieze monotonia funcției

EXERCIȚIUL 6 Să se calculeze următoarele limite de funcții:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\int_x^{2x}\frac{tg\,t}{t}\,dt$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^{2x} \frac{tg\,t}{t^2}\,dt$.

<u>REZOLVARE</u> a) Pentru calculul limitei de funcții de la punctul (a) folosim corolarul teoremei de medie pentru funcțiile integrabile Riemann.

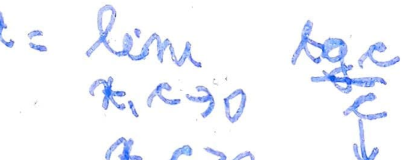
Fie $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{tg\,t}{t}$ $\forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

f funcție continuă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Fie $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Există $c\in(x,2x)$ astfel încât $\int_x^{2x} f(t)\,dt = f(c)(2x-x)$

$\Rightarrow \int_x^{2x} f(t)\,dt = \frac{tg\,c}{c}\cdot x$.



$\left.\begin{array}{l} x\to 0\\ x>0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c\to 0\\ c>0\end{array}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^{2x} f(t)\,dt = \lim_{\substack{x,c\to 0\\ x,c>0}} \underbrace{\frac{tg\,c}{c}}_{1}\cdot \underbrace{x}_{0} = 1\cdot 0 = 0.$$

b) Pentru a calcula limita respectivă vom utiliza teorema de medie pentru funcții integrabile Riemann.

$\frac{tg\,t}{t^2} = \frac{tg\,t}{t}\cdot\frac{1}{t}$

Fie $f, g: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definite prin $f(t) = \frac{tg\, t}{t}$ $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $g(t) = \frac{1}{t}$ $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

f, g funcții continue pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$g(t) \geq 0$ $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

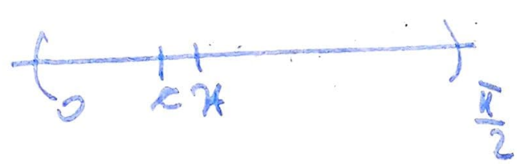
Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Există $c \in (x, 2x)$ astfel încât $\int_x^{2x} f(t)\, g(t)\, dt =$

$= f(c) \int_x^{2x} g(t)\, dt.$

$$\int_x^{2x} f(t)\, g(t)\, dt = \frac{tg\, c}{c} \cdot \int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt = \frac{tg\, c}{c} \cdot \ln|t| \Big|_x^{2x} =$$

$$= \frac{tg\, c}{c} \cdot \left(\ln(2x) - \ln x\right) = \frac{tg\, c}{c} \cdot \ln 2$$



$\begin{matrix} x \to 0 \\ x > 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c \to 0 \\ c > 0 \end{matrix}$

$$\int_x^{2x} \frac{tg\, t}{t^2}\, dt = \frac{tg\, c}{c} \cdot \ln 2 \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{tg\, t}{t^2}\, dt =$$

$$= \lim_{\substack{c, x \to 0 \\ c, x > 0}} \underbrace{\frac{tg\, c}{c}}_{\downarrow\, 1} \cdot \ln 2 = 1 \cdot \ln 2 = \ln 2.$$

EXERCIȚIUL 7 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.

REZOLVARE a) Alegem șirul de funcții $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\ln(1+x^n)$ $\forall x\in[0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

f_n funcție continuă pe $[0,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow f_n\in\mathcal{R}([0,1])$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ (1)

Studiem convergența simplă a șirului de funcții.

Fie $x\in[0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\ln(1+x^n)=\begin{cases}\ln 1, & x\in[0,1)\\ \ln 2, & x=1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ \ln 2, & x=1\end{cases}$$

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ \ln 2, & x=1.\end{cases}$ $\forall x\in[0,1]$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$ (2)

f funcție crescătoare pe $[0,1]$ $\Rightarrow f\in\mathcal{R}([0,1])$ (3)

Se studiază mărginirea uniformă a șirului de funcții.

$x \in [0,1] \Rightarrow x^n \in [0,1]\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 1+x^n \in [1,2]\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(1+x^n) \in [0, \ln 2]\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 \le \ln(1+x^n) \le \ln 2$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Am demonstrat că $0 \le f_n(x) \le \ln 2\ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow |f_n(x)| \le \ln 2\ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$ (4)

Din (1), (2), (3), (4), aplicând teorema convergenței mărginite pentru integrala Riemann, obținem că $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx =$

$= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

b) Alegem șirul de funcții $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$,

$f_n(x) = (1-x^2)^n\ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

f_n funcție continuă pe $[0,1]\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n \in \mathcal{R}([0,1])$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ (5)

Fie $x \in [0,1]$.

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1-x^2)^n = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \in (0,1] \end{cases}$

$f: [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \in (0,1] \end{cases}$

f funcție descrescătoare pe $[0,1] \Rightarrow f \in \mathcal{R}([0,1])$ (6)

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$ (7)

Studiem monotonia șirului de funcții.

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (1-x^2)^{n+1} - (1-x^2)^n = (1-x^2)^n[(1-x^2)-1] = (1-x^2)^n(-x^2) = -x^2(1-x^2)^n \leq 0 \; \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$

Avem că $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \; \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$ (8)

(șirul de funcții este descrescător).

Din (4), (5), (6), (7), (8), aplicând teorema convergenței monotone pentru integrala Riemann, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

<u>EXERCIȚIUL 8</u> Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\,dx$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx^2(1-x^2)^n\,dx$.

SEMINAR 11 - COMPLETARE

Funcții integrabile Riemann

EXERCIȚIUL 1 Să se studieze integrabilitatea Riemann a următoarelor funcții:

a) $f:[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x\{x\}$

b) $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1\\ \dfrac{1}{x-2}, & x\in(1,2)\\ 2, & x=2\end{cases}$

c) $f:[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}, & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ 1, & x=0\\ -1, & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

EXERCIȚIUL 2 Să se calculeze următoarele limite de funcții:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\displaystyle\int_{2x}^{5x}\frac{\cos t-1}{t^2}\,dt$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\displaystyle\int_{2x}^{5x}\frac{\cos t-1}{t^3}\,dt$

EXERCIȚIUL 3 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{x\cos nx}{n^2+2x^2}\,dx$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f(x^n)\,dx$, unde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 (2x-x^2)^n \, dx$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^n}{x^2+1} \, dx$.

EXERCIȚIUL 4 Să se calculeze următoarele limite de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{-t^2} \cos t \, dt}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x} t^n \sqrt{1+t^2} \, dt}{x^{n+2}}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\int_1^{tg x} e^{-t^2} \, dt}{\int_1^{ctg x} e^{t^2} \, dt}$