

## AULA 19: OS TRÊS PRINCÍPIOS DE LITTLEWOOD

Os princípios de Littlewood transmitem a intuição básica da teoria da medida de Lebesgue.

**O primeiro:** Todo conjunto mensurável é “quase” aberto.

Além disso, todo conjunto mensurável com medida finita está perto de um conjunto elementar (isto é, de uma união finita de caixas).

**O segundo:** Toda função absolutamente integrável é “quase” contínua.

**O terceiro:** Toda sequência de funções mensuráveis, convergente em q.t.p. é “quase” uniformemente convergente.

Em outras palavras, o conceito tangível, real (a mensurabilidade de um conjunto, de uma função, ou de convergência pontual de uma sequência de funções mensuráveis) pode ser visto como “quase” o conceito ideal correspondente (de conjunto aberto ou elementar, de função contínua, de convergência uniforme).

Porém, o diabo está nos detalhes.

### O PRIMEIRO PRINCÍPIO DE LITTLEWOOD

Um conjunto  $E \subset \mathbb{R}^d$  é mensurável à Lebesgue se para todo  $\epsilon > 0$  existe um conjunto aberto  $U$  tal que

$$U \supset E \quad \text{e} \quad m^*(U \setminus E) < \epsilon.$$

Esta afirmação foi escolhida como nossa definição do conceito de conjunto mensurável. Como já vimos, ela é equivalente a outras definições, por exemplo a de Carathéodory (que será usada em contextos mais abstratos).

Além disso, provamos que se  $E \subset \mathbb{R}^d$  for mensurável e  $m(E) < \infty$ , então para todo  $\epsilon > 0$  existe um conjunto elementar  $B = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_k$  tal que  $m^*(E \triangle B) < \epsilon$ .

As caixas  $B_1, \dots, B_k$  podem ser escolhidas como caixas diádicas (da mesma geração).

### O SEGUNDO PRINCÍPIO DE LITTLEWOOD

**Teorema 1.** (de Lusin) *Seja  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  uma função absolutamente integrável. Então, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $E \subset \mathbb{R}^d$  mensurável tal que*

$$m(E^c) \leq \epsilon \quad \text{e} \quad f|_E \quad \text{é contínua.}$$

**Observação 1.** A informação de que  $f|_E$  é contínua *não* significa que  $f$  é contínua em  $E$ .

De fato, dado  $x_0 \in E$ ,  $f|_E$  é contínua no ponto  $x_0$  significa

$$\lim_{x \in E, x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

embora  $f$  contínua no ponto  $x_0$  significa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Por exemplo, a função  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  não é contínua em *nenhum* ponto, mas  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}|_{\mathbb{Q}} \equiv 0$  que é, evidentemente, contínua em todo ponto do seu domínio.

A prova do teorema de Lusin usa um resultado de aproximação em  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , útil em si.

**Definição 1.** Uma função  $s: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de função *escada* se

$$s = \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{B_j},$$

onde  $c_j \in \mathbb{R}$  e  $B_j$  é uma *caixa* para todo  $j \in [k]$ .

Em particular, toda função escada é simples e mora numa caixa.

**Teorema 2.** (*aproximação de uma função absolutamente integrável*) Sejam  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e  $\epsilon > 0$ .

- (1) Existe uma função simples  $s$ , que mora numa caixa, tal que  $\|f - s\|_1 < \epsilon$ .
- (2) Existe uma função escada  $\sigma$  tal que  $\|f - \sigma\|_1 < \epsilon$ .
- (3) Existe uma função contínua  $g$ , com suporte compacto tal que  $\|f - g\|_1 < \epsilon$ .

**Observação 2.** Pela Observação 1 da Aula 18, toda função mensurável que mora numa caixa é absolutamente integrável, ou seja, pertence ao espaço  $L^1(\mathbb{R}^d)$ .

Denotamos por  $C_c(\mathbb{R}^d)$  o espaço vetorial de funções contínuas com suportes compactos. Tais funções são claramente também limitadas (e mensuráveis). Então toda função  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$  é mensurável e mora numa caixa, logo  $C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ .

Portanto, o teorema de aproximação acima pode ser reformulado do seguinte modo: cada um dos espaços de funções

- (1) o espaço de funções simples,
- (2) o espaço de funções escada,
- (3) o espaço  $C_c(\mathbb{R}^d)$  de funções contínuas com suporte compacto

é *denso* em  $L^1(\mathbb{R}^d)$  com respeito à sua norma  $\|\cdot\|_1$ .

*Demonstração do Teorema 2.* (1) Consideramos primeiro o caso  $f \geq 0$ . Como

$$\int f \, dm = \sup \left\{ \int s \, dm : 0 \leq s \leq f, \quad s \text{ é simples e mora numa caixa} \right\},$$

e como  $\int f \, dm = \|f\|_1 < \infty$ , dado  $\epsilon > 0$  existe uma função simples  $s$  que mora numa caixa tal que

$$0 \leq s \leq f \quad \text{e} \quad \int f \, dm < \int s \, dm + \epsilon.$$

Segue que

$$\|f - s\|_1 = \int |f - s| \, dm = \int (f - s) \, dm = \int f \, dm - \int s \, dm < \epsilon.$$

Considerando agora uma função  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  qualquer, escrevemos  $f = f^+ - f^-$ , onde  $f^+, f^- \geq 0$  e  $\int f^+ \, dm, \int f^- \, dm < \infty$ . Pelo caso anterior, existem duas funções simples que moram em caixas,  $s_1$  e  $s_2$ , tais que

$$\|f^+ - s_1\|_1 < \epsilon \quad \text{e} \quad \|f^- - s_2\|_1 < \epsilon.$$

Logo, a função  $s := s_1 - s_2$  é simples, mora em uma caixa e

$$\begin{aligned} \|f - s\|_1 &= \|(f^+ - f^-) - (s_1 - s_2)\|_1 = \|(f^+ - s_1) - (f^- - s_2)\|_1 \\ &\leq \|f^+ - s_1\|_1 + \|f^- - s_2\|_1 < 2\epsilon, \end{aligned}$$

mostrando a densidade em  $L^1(\mathbb{R}^d)$  do espaço de funções simples e localizadas em caixas.

- (2) Pelo item anterior, basta provar que toda função simples  $s$ , que mora em uma caixa, pode ser aproximada em  $L^1(\mathbb{R}^d)$  por funções escada. Sejam  $\epsilon > 0$  e

$$s = \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{E_j}$$

onde, para todo  $j \in [k]$ ,  $c_j \in \mathbb{R}$  e  $m(E_j) < \infty$  (s tem suporte limitado, então de medida finita). Pelo primeiro princípio de Littlewood, para cada  $j \in [k]$ , existe um conjunto *elementar*  $B_j$  tal que

$$m(E_j \triangle B_j) < \frac{\epsilon}{M},$$

onde  $M := \sum_{j=1}^k |c_j| < \infty$ .

Como  $|\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}| = \mathbf{1}_{E_j \triangle B_j}$ , temos que

$$\|\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\|_1 = |\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}| = \int \mathbf{1}_{E_j \triangle B_j} = m(E_j \triangle B_j) < \frac{\epsilon}{M}.$$

Seja

$$\sigma := \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{B_j}.$$

Então  $\sigma$  é uma função escada (já que  $B_j$ ,  $j \in [k]$  são conjuntos elementares, então podem ser representados como uniões de caixas).

Além disso,

$$\begin{aligned} \|f - \sigma\|_1 &= \left\| \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{E_j} - \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{B_j} \right\|_1 \\ &= \left\| \sum_{j=1}^k c_j (\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}) \right\|_1 \\ &\leq \sum_{j=1}^k |c_j| \|\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\|_1 < M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon. \end{aligned}$$

(3) Sejam  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  e  $\epsilon > 0$ . Pelo item (2), existe uma função escada

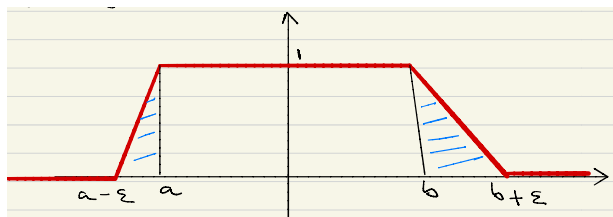
$$\sigma := \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{B_j} \quad \text{tal que} \quad \|f - \sigma\|_1 < \epsilon,$$

onde, para todo  $j \in [k]$ ,  $c_j \in \mathbb{R}$ ,  $c_j \neq 0$  e  $B_j$  é uma caixa.

Dada uma caixa  $B \subset \mathbb{R}^d$  e dado  $\epsilon > 0$ , existe  $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$  tal que

$$\|\mathbf{1}_B - h\|_1 \leq \epsilon.$$

Isso é fácil de ver em dimensão  $d = 1$ . De fato, se  $B = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $h$  pode ser escolhida como uma função linear por partes, veja abaixo.



Então  $h$  é contínua,  $\text{supp}(h) \subset [a - \epsilon, b + \epsilon]$  e

$$\|\mathbf{1}_B - h\|_1 = \int |\mathbf{1}_B - h| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Em dimensão maior, se  $B = I_1 \times \dots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$  é uma caixa, para cada intervalo  $I_j$ ,  $j \in [d]$ , considere uma função  $h_j \in C_c(\mathbb{R})$  como acima e defina  $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h(x_1, \dots, x_d) := h_1(x_1) \cdot \dots \cdot h_d(x_d).$$

Já que

$$\mathbf{1}_B(x_1, \dots, x_d) = \mathbf{1}_{I_1}(x_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{1}_{I_d}(x_d),$$

é fácil concluir que

$$\|\mathbf{1}_B - h\|_1 \leq d\epsilon.$$

Voltando à função escada

$$\sigma := \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{B_j},$$

onde  $B_j, j \in [k]$  são caixas, pelo argumento apresentado acima, existem funções  $g_1, \dots, g_k \in C_c(\mathbb{R}^d)$  tais que

$$\|\mathbf{1}_{B_j} - g_j\|_1 < \frac{\epsilon}{M},$$

para todo  $j \in [k]$ , onde  $M := \sum_{j=1}^k |c_j| < \infty$ .

Definindo

$$g := \sum_{j=1}^k c_j g_j,$$

segue que  $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$  e

$$\begin{aligned} \|\sigma - g\|_1 &= \left\| \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{1}_{B_j} - \sum_{j=1}^k c_j g_j \right\|_1 \\ &\leq \sum_{j=1}^k |c_j| \|\mathbf{1}_{B_j} - g_j\|_1 \\ &< M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\|f - g\|_1 \leq \|f - \sigma\|_1 + \|\sigma - g\|_1 < 2\epsilon,$$

o que finaliza a prova do teorema. □

Estamos prontos para provar o teorema de Lusin.

*Demonstração do Teorema 1.* Fixe  $\epsilon > 0$ . Pelo teorema de aproximação em  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , para todo  $n \geq 1$  existe  $g_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$  tal que

$$\|f - g_n\|_1 < \frac{\epsilon}{4^n},$$

ou seja, em média,  $g_n$  está perto de  $f$ .

Pela desigualdade de Chebyshev, isto implica a proximidade *pontual* entre  $g_n$  e  $f$ , exceto por um conjunto de pontos com medida relativamente pequena. De fato, para todo  $n \geq 1$ , o conjunto

$$F_n := \left\{ |f - g_n| > \frac{1}{2^n} \right\}$$

é mensurável e

$$m(F_n) \leq \frac{\|f - g_n\|_1}{1/2^n} < \frac{\epsilon}{4^n} 2^n = \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Seja  $F := \bigcup_{n \geq 1} F_n$ .

Então,  $F$  é mensurável e

$$m(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(F_n) = \epsilon.$$

Finalmente, seja  $E := F^c$ . Então  $E$  é mensurável,  $m(E^c) = m(F) \leq \epsilon$  e, como veremos,  $f|_E$  é contínua.

Para estabelecer a continuidade de  $f|_E$ , basta verificar que

$$g_n|_E \rightarrow f|_E \text{ uniformemente,}$$

já que as funções  $g_n$  são contínuas em  $\mathbb{R}^d$ , então são contínuas quando restritas ao conjunto  $E$ .

De fato, se  $x \in E = F^c = \bigcap_{n \geq 1} F_n^c$ , então  $x \notin F_n$  para todo  $n \geq 1$ , logo

$$|f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

mostrando a convergência uniforme de  $g_n|_E$  para  $f|_E$ , e portanto a continuidade de  $f|_E$ .  $\square$

### O TERCEIRO PRINCÍPIO DE LITTLEWOOD

**Definição 2.** Sejam  $E \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto mensurável e  $\{f_n: E \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$  uma sequência de funções. Dizemos que

$$f_n \rightarrow f \text{ localmente uniformemente em } E$$

se para todo ponto  $x \in E$  existe  $r > 0$  tal que

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente em } E \cap B(x, r).$$

**Observação 3.** Não é difícil verificar a equivalência das seguintes afirmações:

- (i)  $f_n \rightarrow f$  localmente uniformemente em  $E$ ;
- (ii)  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $E \cap K$  para todo conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^d$ ;
- (iii)  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $E \cap L$  para todo conjunto limitado  $L \subset \mathbb{R}^d$ ;
- (iv)  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $E \cap B(0, R)$  para todo  $R > 0$ .

O terceiro princípio de Littlewood é formalmente expresso pelo teorema de Egorov.

**Teorema 3** (de Egorov). *Seja  $\{f_n: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$  uma sequência de funções mensuráveis tal que*

$$f_n \rightarrow f \text{ pontualmente em q.t.p.}$$

*Seja  $\epsilon > 0$ . Então existe um conjunto mensurável  $E \subset \mathbb{R}^d$  tal que  $m(E^c) < \epsilon$  e*

$$f_n \rightarrow f \text{ localmente uniformemente em } E.$$

*Demonstração.* Veja as notas da próxima aula.  $\square$