## LISTA 1: A TEORIA DE JORDAN-RIEMANN-DARBOUX

**Exercício 1.** Prove que a medida elementar é mónotona e sub-aditiva. Em outras palavras, mostre que a função  $m: \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$  satifaz:

- (i) Dados conjuntos elementares  $E \in F$ , se  $E \subset F$  então  $m(E) \leq m(F)$ .
- (ii) Para  $E \in F$  conjuntos elementares tem-se  $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$ .

Explique o porquê de tais propriedades serem válidas para a medida de Jordan.

**Exercício 2.** Prove que se E e F são conjuntos Jordan mensuráveis então  $E \cap F$ ,  $E \setminus F$  e  $E \triangle F$  também são Jordan mensuráveis .

Dica: Use a caracterização de mensurabilidade de Jordan em termos dos conjuntos elementares que aproximam por dentro e por fora. O problema se reduz a algumas operações (boleanas) com conjuntos.

**Exercício 3.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto limitado. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) E é Jordan mensurável.
- (ii) E é "quase elementar" no sentido de que: para todo  $\epsilon > 0$  existe um conjunto elementar B tal que  $E \subset B$  e  $m^{*,J}(B \setminus E) < \epsilon$ .
- (iii) Para todo  $\epsilon > 0$  existe um conjunto elementar A satisfazendo  $m^{*,J}(E\triangle A) < \epsilon$ .

**Exercício 4.** Mostre que uma região determinada por um triângulo é Jordan mensurável em  $\mathbb{R}^2$  e prove a fórmula para calcular a área do triângulo que você aprendeu no jardim de infância.

**Exercício 5.** Mostre que a união enumarável de conjuntos Jordan mensuráveis pode não ser Jordan mensurável. Então mostre que a intersecção enumerável de conjuntos Jordan mensuráveis pode não ser Jordan mensurável.

Dica: Busque por um exemplo de um conjunto que não seja Jordan mensurável, mas que possa ser subdivido em uma quantidade enumerável de conjuntos Jordan mensuráveis. Para a segunda parte do problema, na intersec cão, considere os complementares desses subconjuntos relativos a alguma caixa suficientemente grande.

**Exercício 6.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto limitado. Prove o seguinte:

- (a)  $m^{*,J}(\overline{E}) = m^{*,J}(E)$ , onde  $\overline{E}$  denota o fecho de E.
- (b)  $m_{*,J}(\mathring{E}) = m_{*,J}(E)$ , onde  $\mathring{E}$  denota o interior de E.
- (c) E é Jordan mensurável se, e somente se,  $m^{*,J}(\partial E) = 0$ , onde  $\partial E$  denota o bordo de E.

Dica: Parte (c) é um pouco complicada. A dificuldade é mostrar que se  $m^{*,J}(\partial E) = 0$  então E é Jordan mensurável. Segue a dica.

Já que  $m^{*,J}(\partial E) = 0$ , dado  $\epsilon > 0$  existe um conjunto elementar D com  $\partial E \subset D$  e  $m(D) < \epsilon$ . Podemos supor que D seja um conjunto aberto (por quê?). Então temos  $\overline{E} \setminus D$  compacto (por quê?).

Note que  $\overline{E}\setminus D\subset \mathring{E},$  e por compacidade podemos encontrar um conjunto elementar B satisfazendo

$$\overline{E} \setminus D \subset B \subset \mathring{E}$$
.

Isso implica  $\overline{E} \subset B \cup D$ . Como  $B \cup D$  é um conjunto elementar, temos  $m^{*,J}(\overline{E}) \leq m_{*,J}(\mathring{E}) + \epsilon$ . Dado  $\epsilon \to 0$ , use as partes (a) e (b) para concluir que E é Jordan mensuráel.

Naturalmente, este é apenas um esquema da prova, você precisa preencher com os detalhes.

**Exercício 7.** Prove que se f e g são funções Darboux integráveis em [a,b], então f+g é Darboux integrável e temos

$$\int_{a}^{b} (f+g) = \int_{a}^{b} f + \int_{a}^{b} g.$$

Dica: Use a caracterização de integrabilidade de Darboux integrability em termos de "boas" funções escada (que aproximem por baixo e por cima).

**Exercício 8.** Obtenha uma função  $f: [0,1] \to \mathbb{R}$  que possua um conjunto de descontinuidades  $n\tilde{a}o$  enumerável, mas que ainda seja integrável.

Dica: Use o conjunto de Cantor.