

LISTA 5. O CORPO DE NÚMEROS REAIS

Exercício 1. Prove que o conjunto

$$B = \{r \in \mathbb{Q}: r > 0, r^2 > 5\}$$

não possui ínfimo em \mathbb{Q} .

Exercício 2. Prove que existe um único número real $b > 0$ tal que

$$b^2 = 5.$$

Exercício 3. Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 1$. Prove que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a^n > x.$$

Exercício 4. Seja $r \in (0, 1)$. Prove que

$$\inf \{r^n: n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Exercício 5. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois conjuntos de números reais tais que $a \leq b$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Prove que $\sup A$ existe, $\inf B$ existe e

$$\sup A \leq \inf B.$$