

# MAT2621 - MEDIDA E INTEGRAÇÃO

## Informações do curso



A imagem acima é uma representação razoavelmente precisa das técnicas e tópicos de estudo neste curso. Para tornar a representação ainda mais precisa, aumente a resolução (escolhendo quadrados menores).

## ■ Objetivo do curso

O objetivo principal deste curso é o estudo da medida de Lebesgue e da integral de Lebesgue. A integração de Lebesgue é um refinamento da teoria da integração de Riemann, proporcionando uma ferramenta mais fina para a matemática avançada.

O curso também oferece uma base sólida para o estudo de temas de pesquisa em sistemas dinâmicos, probabilidades, análise de Fourier, EDP, dentre outros.

## ■ Pré-requisitos

Análise real e análise no espaço  $\mathbb{R}^n$ .

## ■ Professor

Nome: Silvius Klein

Sala: L749

Email: silviusk [arroba] puc-rio [ponto] br

## ■ Aulas

Hora: terças e quintas das 11h às 13h.

Local: L856

Horário de atendimento: depois de cada aula.

## ■ Bibliografia

[Tao-book] Terence Tao, *An introduction to measure theory*, AMS, Graduate Studies in Mathematics.

[Tao-blogLRN] Terence Tao, artigo do blog <https://tinyurl.com/taoblogLRN>

[Tao-blogRMK] Terence Tao, artigo do blog <https://tinyurl.com/taoblogRMK>

[Stein] Elias M. Stein & Rami Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces*, Princeton Lectures in Analysis, vol III, Princeton University Press.

Notas de aula serão disponibilizadas ao longo do semestre

## ■ Avaliação

Listas de exercícios para entregar durante o semestre.

Dois exames escritos (um no meio do semestre e o outro no final).

Datas: 17 de outubro e 2 de dezembro.

Cálculo da nota final: 30% exercícios, 35% cada exame.

## ■ Ementa do curso

1. A teoria de Jordan-Riemann-Darboux [Tao-book] 1.1
  - 1.1. O problema de mensurabilidade
  - 1.2. Medida elementar
  - 1.3. Medida de Jordan
  - 1.4. A integral de Riemann-Darboux
  
2. A medida de Lebesgue [Tao-book] 1.2
  - 2.1. A medida externa de Lebesgue: definição, exemplos, o truque  $\frac{\epsilon}{2^n}$
  - 2.2. Conjuntos Lebesgue mensuráveis: definição via o primeiro princípio de Littlewood
  - 2.3. Propriedades da medida externa de Lebesgue
  - 2.4. Propriedades dos conjuntos Lebesgue mensuráveis
  - 2.5. O critério de mensurabilidade de Carathéodory
  - 2.6. Unicidade da medida de Lebesgue
  - 2.7. Exemplo de um conjunto não mensurável
  
3. A integral de Lebesgue [Tao-book] 1.3
  - 3.1. Uma prévia da integral de Lebesgue
  - 3.2. Integração de funções simples
  - 3.3. Funções mensuráveis
  - 3.4. A integral de Lebesgue de funções mensuráveis não-negativas (integral sem sinal) e integrabilidade absoluta
  - 3.5. Propriedades básicas da integral sem sinal: interpretação de área, linearidade e unicidade da integral de Lebesgue, compatibilidade com a integral de Riemann-Darboux
  - 3.6. Integrabilidade absoluta, os espaços  $L^p$ , a desigualdade de Markov
  - 3.7. O segundo princípio de Littlewood (o teorema de Lusin) e o terceiro princípio de Littlewood (o teorema de Egorov)

#### 4. Espaços de medida abstratos

[Tao-book] 1.4 e 1.5

- 4.1.  $\sigma$ -álgebras e espaços mensuráveis
- 4.2. Medidas abstratas
- 4.3. Funções mensuráveis
- 4.4. A integral de uma função mensurável num espaço de medida abstrato
- 4.5. Os teoremas de convergência: convergência monótona, o teorema de Tonelli, o lema de Borel-Cantelli, o lema de Fatou, o teorema de convergência dominada
- 4.6. Modos de convergência
- 4.7. Os espaços  $L^p$
- 4.8. O teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym; o teorema de decomposição de Lebesgue para medidas [Tao-blogLRN]
- 4.9. O teorema de representação de Riesz–Markov–Kakutani (enunciado) [Tao-blogRMK]

#### 5. Construção abstrata de medidas, exemplos importantes

[Tao-book] 1.7

- 5.1. Medidas externas e o teorema de extensão de Carathéodory
- 5.2. Pré-medidas e o teorema de extensão de Kolmogorov
- 5.3. A medida de Lebesgue-Stieljes
- 5.4. A medida produto