AULA 14: AS PROPRIEDADES DA INTEGRAL DE LEBESGUE DE FUNÇÕES MENSURÁVEIS SEM SINAIS

Apresentaremos uma coleção das propriedades mais comuns da integral de Lebesgue de funções mensuráveis sem sinais.

Teorema 1. *(propriedades básicas da integral de Lebesgue sem sinal) Sejam* $f, g \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ *funções mensuráveis.*

(1) (monotonicidade) Se $f \le g$ *em q.t.p. então* $\displaystyle\int f \le \int g$.

(2) (equivalência) Se $f = g$ *em q.t.p. então* $\displaystyle\int f = \int g$.

(3) (linearidade) $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$ *e, para todo* $c \in [0, \infty]$, $\displaystyle\int c\, f = c \int f$.

(4) (divisibilidade) Seja E *um conjunto mensurável. Então,* $f\, \mathbf{1}_E$ *e* $f\, \mathbf{1}_{E^\complement}$ *são mensuráveis e*

$$\int f = \int f\, \mathbf{1}_E + \int f\, \mathbf{1}_{E^\complement} .$$

Notação. Denotando, para um conjunto mensurável E,

$$\int_E f := \int_{R^d} f\, \mathbf{1}_E ,$$

a divisibilidade da integral de Lebesgue torna-se

$$\int_{R^d} f = \int_E f + \int_{E^\complement} f .$$

Além disso, uma função $f \colon E \to [0, \infty]$ é dita mensurável se $\tilde{f}$, a sua extensão por zero em $E^\complement$, for mensurável. Neste caso, definimos $\int_E f := \int_{R^d} \tilde{f}$.

Demonstração do Teorema 1. A monotonicidade da integral já foi estabelecida (segue imediatamente da definição). A equivalência é uma consequência da monotonicidade, já que $f = g$ em q.t.p. se e somente se $f \le g$ em q.t.p. e $g \le g$ em q.t.p.

Quanto a linearidade, pelo Teorema 1 (3) da aula 12, existem sequências *não decrescentes* de funções simples sem sinais $\{s_n\}_{n\ge1}$ e $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ tais que $s_n \to f$ e $\sigma_n \to g$ em todo ponto.

Então, claramente, $s_n + \sigma_n \nearrow f + g$ em todo ponto. Aplicando o teorema de convergência monótona para cada uma das sequências $\{s_n\}_{n\ge1}$, $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ e $\{s_n + \sigma_n\}_{n\ge1}$, temos que

$$\int s_n \to \int f, \quad \int \sigma_n \to \int g, \quad \int (s_n + \sigma_n) \to \int (f+g) . \tag{1}$$

Mas a integral de Lebesgue já foi demonstrado ser linear para funções simples, logo

$$\int (s_n + \sigma_n) = \int s_n + \int \sigma_n .$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ e usando (1), concluímos que

$$\int (f+g) = \int f + \int g .$$

Ademais, se $c \in [0, \infty]$ e $s_n \nearrow f$, então $c\, s_n \nearrow cf$. Pelo teorema de convergência monótona e a linearidade da integral de funções simples, temos

$$\int c\, f = \lim_{n\to\infty} \int c\, s_n = c \lim_{n\to\infty} \int s_n = c \int f\,.$$

Finalmente, produto de funções mensuráveis é mensurável, logo $f\, \mathbf{1}_E$ e $f\, \mathbf{1}_{E^\complement}$ são mensuráveis. Além disso,

$$f = f\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} = f\, \mathbf{1}_E + f\, \mathbf{1}_{E^\complement},$$

portanto, a divisibilidade é uma consequência da linearidade. □

O próximo resultado fornece uma estimativa por cima para a medida do conjunto $\{f \geq \lambda\}$, onde f é uma função mensurável sem sinal e $\lambda > 0$.

Teorema 2. *(a desigualdade de Markov) Sejam $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ uma função mensurável e $\lambda > 0$. Então,*

$$\mathrm{m}\{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int f}{\lambda}\,.$$

Demonstração. Seja $E := \{f \geq \lambda\}$. Como f é mensurável, o conjunto E é mensurável. Usando a divisibilidade da integral de Lebesgue, temos que

$$\begin{aligned}
\int f &= \int_E f + \int_{E^\complement} f \geq \int_E f \qquad \left(\text{já que } \int_{E^\complement} f = \int f\, \mathbf{1}_{E^\complement} \geq 0\right) \\
&= \int f\, \mathbf{1}_E \geq \int \lambda\, \mathbf{1}_E \qquad (\text{já que } f \geq \lambda\, \mathbf{1}_E,\ \text{pois } f(x) \geq \lambda \text{ quando } x \in E) \\
&= \lambda\, \mathrm{m}(E)\,.
\end{aligned}$$

□

Mesmo que a estimativa acima pareça grosseira, ela representa uma das mais importantes ferramentas usadas na teoria das probabilidades, na teoria da medida, na análise e etc. Nas mãos do matemático certo (por exemplo, Sergei Bernstein), ela pode ser bastante refinado de apenas uma faca velha para um bisturi afiado.

Apresentamos dois corolários simples da desigualdade de Markov.

Corolário 1. $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ uma função mensurável à Lebesgue. Então, $\displaystyle\int f = 0$ se e somente se $f = 0$ em q.t.p.

Demonstração. Claramente, $f = 0$ em q.t.p. se e somente se $\mathrm{m}(\mathrm{supp}(f)) = 0$. Mas

$$\mathrm{supp}(f) = \{x\colon f(x) \neq 0\} = \{f > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Portando, supondo que $\displaystyle\int f = 0$, pela desigualdade de Markov, para todo $\lambda > 0$, temos

$$\mathrm{m}\{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int f}{\lambda} = 0\,,$$

logo,

$$\mathrm{m}(\mathrm{supp}(f)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\} = 0\,.$$

□

Corolário 2. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ uma função mensurável. Se $\displaystyle\int f < \infty$, então $f < \infty$ em q.t.p. A recíproca não é verdadeira.

Demonstração. Claramente, $f(x) = \infty$ se e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $f(x) \geq n$. Além disso, $\{f \geq n\} \supset \{f \geq n+1\}$. Portanto,

$$\{f \geq n\} \searrow \{f = \infty\}\,.$$

Como, pela desigualdade de Markov,

$$\mathrm{m}\{f \geq 1\} \leq \int f < \infty\,,$$

o teorema de convergência monótona de baixo para conjuntos é aplicável e implica o seguinte:

$$\mathrm{m}\{f = \infty\} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\{f \geq n\}\,.$$

De novo, pela desigualdade de Markov, para todo $n \geq 1$, temos

$$\mathrm{m}\{f \geq n\} \leq \frac{\int f}{n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,,$$

já que $\displaystyle\int f < \infty$. Portanto, $\mathrm{m}\{f = \infty\} = 0$, mostrando que $f < \infty$ em q.t.p.

A função constante $f = 1 < \infty$ em todo ponto, mas $\displaystyle\int f = \infty$, logo a recíproca é falsa. □

Em seguida, consideramos a interpretação geométrica da integral de Lebsgue sem sinal, que é o análogo natural da de Riemann-Darboux.

Teorema 3. *(interpretação geométrica da integral sem sinal) Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ uma função mensurável à Lebesgue. Então, a região sob o gráfico de f,*

$$A_f := \left\{(x,t)\colon x \in \mathbb{R}^d \quad e \quad 0 \leq t < f(x)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}\right\}\,,$$

é mensurável à Lebesgue (em $\mathbb{R}^{d+1}$) e a sua medida no espaço ambiente é

$$\mathrm{m}(A_f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mathrm{m}(x)\,.$$

Precisaremos saber algo sobre o produto cartesiano de conjuntos mensuráveis.

Exercício 1. Sejam $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ e $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ dois conjuntos mensuráveis em seus respectivos espaços euclidianos ambientes. Então, $E_1 \times E_2$ é mensurável em $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ e

$$\mathrm{m}(E_1 \times E_2) = \mathrm{m}(E_1)\,\mathrm{m}(E_2).$$

Demonstração do Teorema 3. Primeiro provamos a afirmação para uma função simples sem sinal. Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i\, \mathbf{1}_{E_i}$ tal função, onde os conjuntos mensuráveis $E_i \subset \mathbb{R}^d$, $i \in [k]$ são disjuntos. Claramente, a região sobe o gráfico de s é

$$A_s := \bigcup_{i\in[k]} E_i \times [0, c_i)\,.$$

A união acima consiste em conjuntos disjuntos e (pelo exercício anterior) mensuráveis em $\mathbb{R}^{d+1}$, logo, A_s é mensurável e

$$\mathrm{m}(A_s) = \sum_{i=1}^k \mathrm{m}\left(E_i \times [0,c_i)\right) = \sum_{i=1}^k \mathrm{m}\left(E_i\right)\, \mathrm{m}\left([0,c_i)\right) = \sum_{i=1}^k c_i\, \mathrm{m}\left(E_i\right) = \int s\,,$$

provando a afirmação para a função s.

O caso geral, de uma função mensurável sem sinal f segue usando aproximação por funções simples. Seja $\{s_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções simples sem sinal tal que $s_n \nearrow f$ quando $n \to \infty$. Não é difícil ver que as regiões sob os gráficos correspondentes satisfazem a mesma propriedade de monotonicidade para cima, ou seja,

$$A_{s_n} \nearrow A_f \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

De fato, dados $x \in \mathbb{R}^d$ e $n \in \mathbb{N}$, se $t < s_n(x)$ então $t < s_{n+1}(x)$, logo $A_{s_n} \subset A_{s_{n+1}}$. Além disso, se $(x, t) \in A_f$, então $0 \leq t < f(x) = \sup_{n\geq 1} s_n(x)$, portanto, existe $N \in \mathbb{N}$ para qual $t < s_N(x)$, mostrando que $(x, t) \in A_{s_N}$.

Concluímos o seguinte: A_f é mensurável (já que os conjuntos A_{s_n} são mensuráveis, pois s_n são funções simples) e

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}(A_{s_n}) \to \mathrm{m}(A_f) &\quad \text{(pelo teorema de convergência monótona para conjuntos)}\\
\int s_n \to \int f &\quad \text{(pelo teorema de convergência monótona para funções)}\\
\mathrm{m}(A_{s_n}) = \int s_n &\quad \text{(já que } s_n \text{ são funções simples),}
\end{aligned}$$

portanto $\mathrm{m}(A_f) = \displaystyle\int f$. □

Vale notar que o gráfico de uma função mensurável, como conjunto de co-dimensão 1 no espaço ambiente, é negligenciável.

Exercício 2. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ uma função mensurável à Lebesgue. Então, o seu gráfico,

$$G_f := \{(x, y)\colon x \in \mathbb{R}^d \;\text{ e }\; y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}\,,$$

é negligenciável.

O enunciado acima pode ser obtido usando-se adequadamente o teorema anterior, em relação à região sob o gráfico de uma função. Segue que, no final, a desigualdade estrita na definição do conjunto A_f no teorema anterior pode ser trocada por uma desigualdade não estrita.