LISTA 3. CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Exercício 1. Seja X um conjunto com n elementos. Use indução para provar que o conjunto de bijeções (ou permutações) $f : X \to X$ tem $n!$ elementos.

Exercício 2. Sejam X e Y conjuntos finitos. Prove que

$$\text{card }(X \cup Y) = \text{card }(X) + \text{card }(Y) - \text{card }(X \cap Y).$$

Exercício 3. Prove que se X é infinito enumerável, o conjunto das partes finitas de X também é infinito enumerável.

Exercício 4. Prove que a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(n, k) = \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} + (k+1)$$

é uma bijeção.

Exercício 5. Seja X um conjunto de referência. Para todo subconjunto $A \subset X$, define sua função indicadora (ou característica)

$$\mathbf{1}_A : X \to \mathbb{N}, \quad \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Prove as seguintes propriedades:

(i) Se $A \subset B$ então $\mathbf{1}_A(x) \leq \mathbf{1}_B(x)$ para todo $x \in X$,
(ii) $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$,
(iii) $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot 1_B$,
(iv) Se $A \cap B = \emptyset$ então $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.