

A TEORIA DE JORDAN-RIEMANN-DARBOUX

SILVIUS KLEIN

SUMÁRIO

1. O problema de mensurabilidade	2
2. A medida elementar	2
3. A medida de Jordan	6
Um truque comum em análise	7
4. A integral de Riemann-Darboux	10
4.1. A integral de Riemann	10
4.2. A integral de Darboux	11
4.3. A equivalência entre a integral de Riemann e a integral de Darboux	17
4.4. O teorema de Lebesgue (continuidade v. integrabilidade à Riemann-Darboux)	23
A oscilação de uma função	25

O objetivo principal deste texto é o estudo da medida de Lebesgue e da integral de Lebesgue.

Já estamos familiarizados com um outro tipo de integral, a integral de Riemann. No entanto, a integral de Riemann é insuficiente na análise matemática.

A integração de Lebesgue é um refinamento da teoria da integração de Riemann, proporcionando uma ferramenta mais fina para matemática avançada.

Exemplo 1. Considere a função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta função *não* é integrável à Riemann. De fato, dada qualquer partição

$$\mathcal{P} = (0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1)$$

de $[0, 1]$, como cada subintervalo $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ contém pontos racionais e irracionais, as somas de Darboux superior e inferior correspondentes são

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^n \sup_{x \in I_j} f(x) \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^n |I_j| = 1, \\ \underline{\mathcal{R}}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^n \inf_{x \in I_j} f(x) \cdot |I_j| = 0. \end{aligned}$$

Além disso, considere uma enumeração $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots\}$ de \mathbb{Q} e define, para todo $n \geq 1$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A sequência de funções $\{f_n\}_{n \geq 1}$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots f_n \leq f_{n+1} \leq \dots$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ para todo } x \in [0, 1]$$

$f_n(x)$ é integrável à Riemann para todo $n \geq 1$ (já que f_n possui um número *finito* de pontos de descontinuidade),

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

Contudo, a função f , que é o *limite* (pontual, monótono) da sequência de funções integráveis à Riemann $\{f_n\}_{n \geq 1}$, não é integrável à Riemann.

Portanto, precisamos de um conceito de integração mais flexível, que é fechado com respeito a tais limites.

1. O PROBLEMA DE MENSURABILIDADE

O espaço de referência é \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3, \dots$). O objetivo é definir um conceito de medida “física” aplicável a uma ampla coleção de conjuntos $E \subset \mathbb{R}^d$, a serem chamados de *conjuntos mensuráveis*.

Os conjuntos do espaço euclidiano mais fáceis de medir são *caixas* retangulares, para quais o volume (respectivamente, o comprimento em dimensão um ou área em dimensão dois) representa uma medida física natural.

Mais geralmente,

- (i) O que significa para um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ ser mensurável?
- (ii) Se E é mensurável, qual é a sua medida?
- (iii) Que propriedades básicas (ou axiomas) devem ser satisfeitas por uma medida? Por exemplo, se E é a reunião disjunta de dois conjuntos mensuráveis E_1 e E_2 , qual deveria ser a relação entre suas medidas?

Começamos com a medida de Jordan, relacionada à integral de Riemann; depois disso apresentaremos um conceito de medida mais refinado, a medida de Lebesgue, que nos permitirá definir a integral de Lebesgue.

2. A MEDIDA ELEMENTAR

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado, i.e. um intervalo do tipo $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ ou $(a, b]$. Defina o seu comprimento por $|I| := b - a$.

Uma *caixa* em \mathbb{R}^d é um produto cartesiano

$$B = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$$

de intervalos limitados. Defina seu volume por $|B| := |I_1| \cdot |I_2| \cdot \dots \cdot |I_d|$.

Definição 1. Um *conjunto elementar* $E \subset \mathbb{R}^d$ é qualquer união *finita* de caixas

$$E = B_1 \cup \dots \cup B_n.$$

Exercício 1. Se $E, F \subset \mathbb{R}^d$ são conjuntos elementares, então $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$, $E \triangle F$ são conjuntos elementares também.

Além disso, qualquer translação

$$E + a := \{x + a : x \in E\},$$

onde $a \in \mathbb{R}^d$ e E é um conjunto elementar, também é um conjunto elementar.

Lema 1. *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto elementar qualquer.*

(i) *E pode ser escrito como uma união disjunta de caixas.*

(ii) *Se $E = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n$ e $E = B'_1 \sqcup \dots \sqcup B'_m$ são duas representações de E como uniões disjuntas de caixas, então*

$$|B_1| + \dots + |B_n| = |B'_1| + \dots + |B'_m|.$$

Demonstração. Vamos fazer a prova em dimensão $d = 1$. O argumento em dimensão maior é similar (exercício).

(i) Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto elementar, isto é, uma união finita de intervalos limitados I_1, \dots, I_n . Então

$$\begin{aligned} E &= I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots \cup I_n \\ &= I_1 \sqcup (I_2 \setminus I_1) \sqcup (I_3 \setminus (I_1 \cup I_2)) \sqcup \dots \sqcup (I_n \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_{n-1})). \end{aligned}$$

Então basta provar a seguinte afirmação: dados quaisquer intervalos limitados I, I_1, \dots, I_k , o conjunto

$$I \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_k)$$

pode ser descrito como uma união finita de intervalos disjuntos.

Observe que a interseção entre um intervalo limitado e um intervalo qualquer é sempre um intervalo limitado. Além disso, o complemento de um intervalo limitado é uma união de dois intervalos disjuntos (não limitados).

Então, como

$$I \setminus I_1 = I \cap I_1^c$$

temos que $I \setminus I_1$ é uma união de dois (então finita) intervalos disjuntos e limitados.

Além disso,

$$I \setminus (I_1 \cup I_2) = I \cap (I_1 \cup I_2)^c = I \cap I_1^c \cap I_2^c = (I \cap I_1^c) \cap I_2^c$$

que, pelo argumento anterior, será uma união finita (de no máximo quatro) intervalos limitados disjuntos.

Por indução, concluímos que o conjunto $I \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_k)$ pode ser descrito como uma união finita de intervalos limitados disjuntos.

(ii) Vamos usar um argumento de discretização: dado qualquer intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$,

$$(1) \quad |I| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z})}{N},$$

onde

$$\frac{1}{N}\mathbb{Z} := \left\{ \frac{k}{N} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De fato, se $I = (a, b)$, para todo $N \geq 1$ sejam $k_N, l_N \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\frac{k_N}{N} \leq a < \frac{k_N + 1}{N} \quad \text{e} \quad \frac{l_N}{N} < b \leq \frac{l_N + 1}{N}.$$

Note que $\frac{k_N}{N} \rightarrow a$ e $\frac{l_N}{N} \rightarrow b$ quando $N \rightarrow \infty$.

Segue que

$$(a, b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{k_N + 1}{N}, \dots, \frac{l_N}{N} \right\},$$

então

$$\# \left((a, b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) = l_N - k_N.$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{\#(I \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z})}{N} &= \frac{\#((a, b) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z})}{N} \\ &= \frac{l_N - k_N}{N} = \frac{l_N}{N} - \frac{k_N}{N} \rightarrow b - a = |I| ,\end{aligned}$$

mostrando (1).

Seja $E = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n$. Como os intervalos I_1, \dots, I_n são disjuntos, dado qualquer $N \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned}\# \left(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) &= \# \left((I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n) \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) \\ &= \# \left(I_1 \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) + \dots + \# \left(I_n \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z} \right) .\end{aligned}$$

Dividindo os dois lados acima por N , passando ao limite quando $N \rightarrow \infty$ e usando (1), concluímos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z})}{N} = |I_1| + \dots + |I_n| .$$

A expressão

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(E \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z})}{N}$$

não depende da representação $E = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n$ de E como uma união disjunta de intervalos limitados, provando assim o nosso lema. \square

O lema anterior nos permite definir a medida de um conjunto elementar.

Definição 2. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto elementar, e seja $E = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n$ uma representação qualquer como união disjunta de caixas. Definimos a medida de E por

$$m(E) := |B_1| + \dots + |B_n| .$$

Lembramos que um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é dito *elementar* se pode ser escrito como união finita de caixas $E = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n$. Além disso, sempre é possível tomar caixas de forma que esta união seja disjunta. Considere o conjunto $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d) := \{E \subset \mathbb{R}^d : E \text{ elementar}\}$ e vamos definir a *medida elementar* como sendo a função $m : \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, $m(E) := |B_1| + \dots + |B_n|$.

Teorema 1. (*Propriedades básicas da medida elementar*) Sejam $E, F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ e m a medida elementar definida acima. São válidas:

- (1) (*positividade*) $m(E) \geq 0$, para todo E e $m(\emptyset) = 0$.
- (2) (*aditividade finita*) Se $E \cap F = \emptyset$ então $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$.
Por indução, $m(E_1 \sqcup \dots \sqcup E_k) = m(E_1) + \dots + m(E_k)$.
- (3) Se E é uma caixa então $m(E) = |E|$.
- (4) Se $E \subset F$ então $m(F \setminus E) = m(F) - m(E)$.
- (5) (*monotonicidade*) Se $E \subset F$ então $m(E) \leq m(F)$.
- (6) (*subaditividade finita*) $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$.
- (7) (*invariância à translação*) $m(E + a) = m(E)$ para todo $a \in \mathbb{R}^d$.

Demonstração. (1), (2), (3), (7) são evidentes e (5), (6) estão na Lista 1.

Vamos provar (4): Como $E \subset F$ então $F = E \sqcup (F \setminus E)$, em que E e $F \setminus E$ são conjuntos elementares. Assim, segue por (2) que

$$m(F) = m(E) + m(F \setminus E)$$

Portanto, $m(F \setminus E) = m(F) - m(E)$ \square

Teorema 2. (*Unicidade da medida elementar*) Suponha que $\lambda: \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) $\lambda(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$;
- (2) $\lambda(E \sqcup F) = \lambda(E) + \lambda(F)$, para todo $E, F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$;
- (3) $\lambda(E + a) = \lambda(E)$, para todo $a \in \mathbb{R}^d$ e $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$;
- (4) $\lambda([0, 1]^d) = 1$.

Então, $\lambda \equiv m$.

Demonstração. (em dimensão 1)

É fácil verificar que a aditividade e a positividade da função λ implicam sua monotonicidade. De fato, se $E \subset F$ então podemos escrever $F = E \sqcup (F \setminus E)$. Assim, pela aditividade de λ segue que $\lambda(F) = \lambda(E) + \lambda(F \setminus E)$ e como $\lambda(F \setminus E) \geq 0$ concluímos que $\lambda(E) \leq \lambda(F)$.

Passo 1. Provaremos que $\lambda([0, x]) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Temos que $[\frac{1}{2}, 1) = [0, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$, logo $\lambda[\frac{1}{2}, 1) = \lambda[0, \frac{1}{2})$. Como $[0, 1) = [0, \frac{1}{2}) \sqcup [\frac{1}{2}, 1)$, segue que

$$1 = \lambda[0, 1) = \lambda[0, \frac{1}{2}) + \lambda[\frac{1}{2}, 1) = 2\lambda[0, \frac{1}{2}).$$

Portanto $\lambda[0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Mais geralmente, para todo $n \geq 1$ e para todo $0 \leq k < n$, $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) = [0, \frac{1}{n}) + \frac{k}{n}$, então $\lambda[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) = \lambda[0, \frac{1}{n})$.

Note que $[0, 1) = \bigcup_{k=0}^{n-1} [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$. Logo

$$1 = \lambda[0, 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) = n \lambda[0, \frac{1}{n}),$$

mostrando que $\lambda[0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$. Além disso,

$$\lambda[0, \frac{k}{n}) = \lambda[0, \frac{1}{n}) + \lambda[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) + \dots + \lambda[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}) = \frac{k}{n}.$$

Seja $x > 0$ e note que para todo $n \geq 1$ existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{k_n}{n} \leq x < \frac{k_n+1}{n}$, então, em particular, $\frac{k_n}{n} \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, temos que $[0, \frac{k_n}{n}) \subset [0, x) \subset [0, \frac{k_n+1}{n})$. Pela monotonicidade da função λ ,

$$[0, \frac{k_n}{n}) \leq \lambda[0, x) \leq \lambda[0, \frac{k_n+1}{n}),$$

ou seja,

$$\frac{k_n}{n} \leq \lambda[0, x) \leq \frac{k_n}{n} + \frac{1}{n}.$$

Como $\frac{k_n}{n} \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$, concluímos que $\lambda[0, x) = x$.

Passo 2. Seja $[a, b) \subset \mathbb{R}$ com $a < b$. Como $[a, b) = [0, b-a) + a$,

$$\lambda[a, b) = \lambda[0, b-a) = b-a.$$

Observe que para todo $n \geq 1$ temos $\{0\} \subset [0, \frac{1}{n})$ e pela monotonicidade de λ segue que

$$0 \leq \lambda\{0\} \leq \lambda[0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, $\lambda\{0\} = 0$ e como $\{x\} = \{0\} + x$ segue que $\lambda\{x\} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Desta forma, concluímos que para todo intervalo limitado I , $\lambda(I) = |I|$.

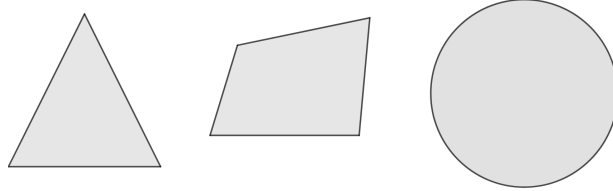
Passo 3. Seja $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $E = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n$. Como λ é aditiva concluímos que

$$\lambda(E) = \lambda(I_1) + \dots + \lambda(I_n) = |I_1| + \dots + |I_n| = m(E).$$

□

3. A MEDIDA DE JORDAN

Os conjuntos abaixo e o conjunto de Cantor (em \mathbb{R}) não são elementares.



Estederemos o conceito de medida a uma família maior de conjuntos, que contém esses exemplos.

Definição 3. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado. Definimos a

- *medida interior de Jordan* de E por

$$m_{*,J}(E) := \sup \{m(A) : A \subset E, A \text{ elementar}\};$$

- *medida exterior de Jordan* de E por

$$m^{*,J}(E) := \inf \{m(B) : E \subset B, B \text{ elementar}\}.$$

Observe que $0 \leq m_{*,J}(E) \leq m^{*,J}(E) < \infty$, para qualquer $E \subset \mathbb{R}^d$ limitado.

Definição 4. Se $m_{*,J}(E) = m^{*,J}(E) =: m(E)$, então dizemos que E é um conjunto *Jordan mensurável*. Neste caso, $m(E)$ é a *medida de Jordan* de E .

Observação 1. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado.

- (1) Se E é um conjunto elementar, então E é Jordan mensurável.
- (2) Se $m^{*,J}(E) = 0$ então E é Jordan mensurável e $m(E) = 0$.

Teorema 3. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ limitado. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) E é Jordan mensurável;
- (ii) Para todo $\epsilon > 0$, existem conjuntos elementares A e B tais que

$$A \subset E \subset B \text{ e } m(B \setminus A) < \epsilon;$$
- (iii) Para todo $\epsilon > 0$, existe A conjunto elementar tal que $m^{*,J}(A \Delta E) < \epsilon$.

Demonstração. A equivalência (ii) \Leftrightarrow (iii) está na Lista 1.

Vamos mostrar (i) \Leftrightarrow (ii). Suponha que E seja Jordan mensurável, então tem-se $m_{*,J}(E) = m^{*,J}(E) = m(E)$. Fixe $\epsilon > 0$. Como

$$m(E) = m^{*,J}(E) = \inf \{m(B) : B \supset E \text{ elementar}\},$$

existe $B \supset E$ conjunto elementar tal que

$$(2) \quad m(B) < m(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Além disso,

$$m(E) = m_{*,J}(E) = \sup \{m(A) : A \subset E \text{ elementar}\}.$$

Portanto existe $A \subset E$ conjunto elementar tal que

$$(3) \quad m(A) > m(E) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Desta forma, temos que $A \subset E \subset B$ em que A e B são conjuntos elementares e por (2) e (3) segue que

$$\begin{aligned} m(B \setminus A) &= m(B) - m(A) \\ &\leq m(E) + \frac{\epsilon}{2} - m(E) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, fixe $\epsilon > 0$ e suponha que existam A e B conjuntos elementares de modo que $A \subset E \subset B$ e $m(B) - m(A) = m(B \setminus A) < \epsilon$. Então, pelas definições das medidas exterior e interior de Jordan,

$$0 \leq m^{*,J}(E) - m_{*,J}(E) \leq m(B) - m(A) < \epsilon.$$

Como isso vale para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $m^{*,J}(E) - m_{*,J}(E) = 0$, ou seja, E é Jordan mensurável. \square

Um truque comum em análise.

- Para provar que $a = 0$ (onde $a \geq 0$) é suficiente mostrar que

$$a < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

- Para provar que $x = y$ é suficiente mostrar que $|y - x| = 0$, ou seja,

$$|y - x| < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

- Alternativamente, para provar que $x = y$ é suficiente mostrar que $x \leq y$ e $y \leq x$, ou seja, que

$$x < y + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \quad \text{e} \quad y < x + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

Exercício 2. Prove que a região delimitada por um triângulo é Jordan mensurável e também prove a fórmula da área (ou seja, a medida de Jordan) de um triângulo.

Teorema 4. (*Propriedades básicas da medida de Jordan*)

- (1) Se E e F são Jordan mensuráveis então $E \cup F$, $E \cap F$, $F \setminus E$, $E \setminus F$ e $E \Delta F$ são Jordan mensuráveis.
- (2) (positividade) $m(E) \geq 0$.
- (3) (aditividade) Se $E \cap F = \emptyset$ então $m(E \sqcup F) = m(E) + m(F)$.
- (4) (invariância à translação) $m(E + a) = m(E)$, para todo $a \in \mathbb{R}^d$.
- (5) (monotonicidade) Se $E \subset F$ então $m(E) \leq m(F)$.
- (6) (subaditividade) $m(E \sqcup F) \leq m(E) + m(F)$.

Demonstração. Faremos a prova do item (3), os demais são deixados como exercícios.

Inicialmente mostraremos que se E e F são Jordan mensuráveis então $E \cup F$ também é Jordan mensurável. Fixe $\varepsilon > 0$ e veja que existem A e B conjuntos elementares tais que

$$(4) \quad A \subset E \subset B, \quad m(B \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2},$$

e também existem C e D conjuntos elementares tais que

$$(5) \quad C \subset F \subset D, \quad m(D \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deste modo, observe que $A \cup C$ e $B \cup D$ são conjuntos elementares tais que $A \cup C \subset E \cup F \subset B \cup D$. Como evidentemente

$$(B \cup D) \setminus (A \cup C) \subset (B \setminus A) \cup (D \setminus C)$$

usando (4) e (5) temos que

$$\begin{aligned} m((B \cup D) \setminus (A \cup C)) &\leq m((B \setminus A) \cup (D \setminus C)) \\ &\leq m(B \setminus A) + m(D \setminus C) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $E \cup F$ é Jordan mensurável.

Sejam E e F dois conjuntos Jordan mensuráveis disjuntos. Queremos mostrar que

$$m(E \sqcup F) = m(E) + m(F).$$

Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário. Temos que

$$m(E) = m_{*,J}(E) = \sup \{m(A) : A \subset E, A \text{ elementar}\},$$

logo existe $A \subset E$ conjunto elementar de modo que

$$m(A) > m(E) - \varepsilon.$$

Similarmente, existe $C \subset F$ conjunto elementar tal que

$$m(C) > m(F) - \varepsilon.$$

Como $E \cap F = \emptyset$ segue que $A \cap C = \emptyset$. Desta forma, A e C são conjuntos elementares disjuntos, logo

$$\begin{aligned} m(A \cup C) &= m(A) + m(C) \\ &> m(E) - \varepsilon + m(F) - \varepsilon \\ &= m(E) + m(F) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Mas $A \cup C$ é elementar e $A \cup C \subset E \cup F$, então $m(E \cup F) \geq m(A \cup C)$ e portanto

$$m(E \cup F) \geq m(E) + m(F) - 2\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que $m(E \cup F) \geq m(E) + m(F)$.

Por outro lado, sabemos que

$$m(E) = m^{*,J}(E) = \inf \{m(B) : B \supset E, B \text{ elementar}\},$$

então existe $B \supset E$ conjunto elementar tal que

$$m(B) < m(E) + \varepsilon.$$

Similarmente, existe $D \supset F$ conjunto elementar de modo que

$$m(D) < m(F) + \varepsilon.$$

Portanto, temos que

$$(6) \quad m(B) + m(D) \leq m(E) + m(F) + 2\varepsilon.$$

Como B e D são elementares

$$(7) \quad m(B \cup D) \leq m(B) + m(D).$$

Mas $B \cup D \supset E \cup F$, com $B \cup D$ conjunto elementar. Então

$$(8) \quad m(E \cup F) \leq m(B \cup D).$$

Segue de (6), (7) e (8) que

$$m(E \cup F) \leq m(E) + m(F) + 2\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$. Portanto,

$$m(E \cup F) = m(E) + m(F).$$

□

Exemplo 2. O conjunto de Cantor \mathcal{C} é Jordan mensurável e $m(\mathcal{C}) = 0$.

Demonstração. De fato, basta mostrarmos que $m^{*,J}(\mathcal{C}) = 0$.

Observe que o conjunto de Cantor é construído indutivamente da seguinte forma.

No primeiro passo retiramos o intervalo $I_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ de $[0, 1]$, e denotamos por \mathcal{C}_1 o conjunto de pontos restantes, ou seja, $\mathcal{C}_1 := [0, 1] \setminus I_1$. Observe que \mathcal{C}_1 é um conjunto elementar e

$$m(\mathcal{C}_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

No segundo passo, vamos repetir esse processo nos dois intervalos de \mathcal{C}_1 , ou seja, retiramos os intervalos $I_2^1 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $I_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ de \mathcal{C}_1 . Considere $I_2 = I_2^1 \cup I_2^2$ e veja que $m(I_2) = 2 \cdot \frac{1}{3^2}$. Defina $\mathcal{C}_2 := [0, 1] \setminus (I_1 \cup I_2)$, e note que \mathcal{C}_2 é um conjunto elementar e

$$m(\mathcal{C}_2) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} \right).$$

Analogamente, no n -ésimo passo, retiramos o conjunto I_n de \mathcal{C}_{n-1} , em que

$$m(I_n) = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

Definimos $\mathcal{C}_n := [0, 1] \setminus (I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n)$. É fácil ver que é um conjunto elementar e

$$\begin{aligned} m(\mathcal{C}_n) &= 1 - \sum_{i=1}^n \frac{2^{i-1}}{3^i} \\ &= 1 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{3} \right)^{i-1} \\ &= 1 - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3} \right)^k \\ &= 1 - \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3} \right)^n. \end{aligned}$$

Por definição o conjunto de Cantor é $\mathcal{C} := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{C}_n$. Em particular, $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_n$ para todo $n \geq 1$ e todos os conjuntos \mathcal{C}_n são elementares, logo

$$m^{*,J}(\mathcal{C}) \leq m(\mathcal{C}_n) = \left(\frac{2}{3} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto, $m^{*,J}(\mathcal{C}) = 0$, mostrando que \mathcal{C} é Jordan mensurável, com medida zero. \square

Exercício 3. Seja E um conjunto limitado em \mathbb{R}^d . Denote por

- \overline{E} o fecho de E ;
- $\overset{\circ}{E}$ o interior de E ;
- ∂E a fronteira de E , ou seja, $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$.

Prove que

- (i) $m^{*,J}(E) = m^{*,J}(\overline{E})$.
- (ii) $m_{*,J}(E) = m_{*,J}(\overset{\circ}{E})$.
- (iii) E é Jordan mensurável se, e somente se, $m^{*,J}(\partial E) = 0$.

Exemplo 3. O conjunto $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ não é Jordan mensurável.

Demonstração. De fato, observe que $\overline{E} = [0, 1]$, logo

$$m^{*,J}(E) = m^{*,J}(\overline{E}) = m^{*,J}[0, 1] = 1.$$

Por outro lado temos que $\overset{\circ}{E} = \emptyset$ então

$$m_{*,J}(E) = m_{*,J}(\overset{\circ}{E}) = 0.$$

Logo $m^{*,J}(E) \neq m_{*,J}(E)$, mostrando que E não é Jordan mensurável. \square

4. A INTEGRAL DE RIEMANN-DARBOUX

Existem duas abordagens diferentes para definir o conceito clássico de *integração*, a saber, via somas de Riemann ou via somas de Darboux. Estas duas maneiras são na verdade equivalentes. Acontece que a abordagem via somas de Darboux seja mais facilmente generalizável, levando eventualmente ao conceito mais fino de integração Lebesgue.

4.1. A integral de Riemann. Sejam $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e

$$\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$$

uma escolha de pontos de amostragem tais que

$$x_j^* \in I_j, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

A norma (ou malha) da partição \mathcal{P} é dada por

$$\Delta(\mathcal{P}) := \max \{|I_j| : j = 1, \dots, n\}.$$

A soma de Riemann correspondente é definida como

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \bar{x}^*) := \sum_{j=1}^n f(x_j^*) |I_j|.$$

Definição 5. Uma função f é dita *Riemann integrável* se

$$(9) \quad \lim_{\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \bar{x}^*) \text{ existe.}$$

Neste caso, o valor do limite, $\mathcal{I}(f)$, é chamado de *integral de Riemann* de f .

Comentário 1. O significado formal do limite em (9) é o seguinte: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partição \mathcal{P} e todos pontos de amostragem \bar{x}^* ,

$$\text{se } \Delta(\mathcal{P}) < \delta \quad \text{então} \quad |\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \bar{x}^*) - \mathcal{I}(f)| < \varepsilon.$$

Lema 2. Se f é Riemann integrável então f é limitada.

Demonstração. Exercício. \square

Observação 2. Sejam $f \geq 0$, \mathcal{P} uma partição, $\bar{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ pontos de amostragem e

$$c_j := f(x_j^*).$$

Então a soma de Riemann correspondente

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \bar{x}^*) = \sum_{j=1}^n c_j |I_j|$$

representa a soma das áreas dos retângulos com base I_j e altura c_j , ou seja, uma aproximação da área abaixo do gráfico de f e acima do eixo x .

4.2. A integral de Darboux. Apresentamos o conceito de integrabilidade à Darboux de uma maneira ligeiramente diferente (mas equivalente) em comparação àquela usada em cursos básicos de análise real.

Definição 6. Uma função $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função *escada* se existem uma partição

$$[a, b] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n$$

e constantes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que $s(x) = c_j$ se $x \in I_j$ para algum $1 \leq j \leq n$.

Definição 7. A função indicadora de um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é definida por

$$\mathbf{1}_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Portanto uma função $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escada se e somente se

$$s = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{I_j}$$

onde $\{I_1, \dots, I_n\}$ é uma partição de $[a, b]$ e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Lembramos algumas propriedades básicas da função indicadora de um conjunto. Sejam $E, F \subset \mathbb{R}^d$.

- $\mathbf{1}_{E \cap F} = \mathbf{1}_E \cdot \mathbf{1}_F$,
- se $E \cap F = \emptyset$ então $\mathbf{1}_{E \sqcup F} = \mathbf{1}_E + \mathbf{1}_F$,
- $E \subset F$ se e somente se $\mathbf{1}_E \leq \mathbf{1}_F$.

Definição 8. Seja $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $s = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{I_j}$ uma função escada. A integral de Darboux de s é definida por:

$$\int_a^b s(x) dx := \sum_{j=1}^n c_j |I_j|.$$

Como alternativa, às vezes usaremos a notação simplificada $\int_a^b s$ para denotar a integral de Darboux da função s .

Observação 3. Este conceito é bem definido, no sentido que ele não depende da representação de s como combinação linear de funções indicadoras, ou seja: se $s = \sum_{k=1}^n c_k I_k = \sum_{l=1}^m d_l J_l$ então

$$\sum_{k=1}^n c_k |I_k| = \sum_{l=1}^m d_l |J_l|.$$

De fato,

$$\left\{ I_k \cap J_l : 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m, I_k \cap J_l \neq \emptyset \right\}$$

é uma partição mais fina de $[a, b]$.

Como $s = \sum_{k=1}^n c_k I_k = \sum_{l=1}^m d_l J_l$, se $x \in I_k \cap J_l$ então $s(x) = c_k$ e $s(x) = d_l$, portanto $c_k = d_l$.

Os intervalos $\{J_1, \dots, J_m\}$ formam uma partição de $[a, b]$. Em particular, para todo $1 \leq k \leq n$, tem-se

$$I_k = \bigsqcup_{l: I_k \cap J_l \neq \emptyset} (I_k \cap J_l) .$$

Similarmente, os intervalos $\{I_1, \dots, I_n\}$ formam uma partição de $[a, b]$, e em particular, para todo $1 \leq j \leq m$ tem-se

$$J_l = \bigsqcup_{k: I_k \cap J_l \neq \emptyset} (I_k \cap J_l) .$$

Segue-se que para todos os índices k e l temos

$$|I_k| = \sum_l |I_k \cap J_l| \quad \text{e} \quad |J_l| = \sum_k |I_k \cap J_l| .$$

Logo,

$$\sum_k c_k |I_k| = \sum_k c_k \sum_l |I_k \cap J_l| = \sum_{k, l: I_k \cap J_l \neq \emptyset} c_k |I_k \cap J_l| ,$$

e

$$\sum_l d_l |J_l| = \sum_l d_l \sum_k |I_k \cap J_l| = \sum_{k, l: I_k \cap J_l \neq \emptyset} d_l |I_k \cap J_l| .$$

Lembrando que $c_k = d_l$ sempre que $I_k \cap J_l \neq \emptyset$, a igualdade $\sum_k c_k |I_k| = \sum_l d_l |J_l|$ é assim estabelecida.

Observação 4. Acontece que sempre podemos escolher a *mesma* partição para representar duas (ou um número finito) de funções escada, o que será muito útil em vários argumentos.

De fato, se $s, \sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções escada, então podemos representá-las como

$$s = \sum_{k=1}^m c_k \mathbf{1}_{I_k}$$

e

$$\sigma = \sum_{l=1}^n d_l \mathbf{1}_{J_l} .$$

Considere a partição mais fina do intervalo $[a, b]$,

$$\left\{ I_k \cap J_l : 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m \right\} .$$

Como

$$I_k = \bigsqcup_l (I_k \cap J_l) ,$$

segue que

$$\mathbf{1}_{I_k} = \sum_l \mathbf{1}_{I_k \cap J_l} .$$

Similarmente,

$$J_l = \bigsqcup_k (I_k \cap J_l) ,$$

então

$$\mathbf{1}_{J_l} = \sum_k \mathbf{1}_{I_k \cap J_l}.$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} s &= \sum_k c_k \mathbf{1}_{I_k} = \sum_{k,l} c_k \mathbf{1}_{I_k \cap J_l}, \\ \sigma &= \sum_l d_l \mathbf{1}_{J_l} = \sum_{k,l} d_l \mathbf{1}_{I_k \cap J_l} \end{aligned}$$

ou seja, s, σ são representadas usando a mesma partição.

A seguir, apresentamos as propriedades básicas da integral de Darboux para funções escada.

Proposição 1. *Sejam $s, \sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções escada. Então*

(1) (linearidade) $s + \sigma$ é uma função escada e

$$\int_a^b (s + \sigma) = \int_a^b s + \int_a^b \sigma.$$

Se $c \in \mathbb{R}$ então cs é uma função escada e

$$\int_a^b cs = c \int_a^b s.$$

(2) (positividade) Se $s \geq 0$ então $\int_a^b s \geq 0$.

(3) (monotonicidade) Se $s \leq \sigma$ então $\int_a^b s \leq \int_a^b \sigma$.

(4) Se E é um conjunto elementar, então

$$\int_a^b \mathbf{1}_E = m(E).$$

Demonstração. (1) Começamos com a aditividade. Pela observação anterior, existe uma partição $\{I_1, \dots, I_n\}$ tal que

$$\begin{aligned} s &= \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{I_j}, \\ \sigma &= \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{1}_{I_j}, \\ \text{logo } s + \sigma &= \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) \mathbf{1}_{I_j}. \end{aligned}$$

Portanto $s + \sigma$ é uma função escada e

$$\begin{aligned} \int_a^b (s + \sigma) &= \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) |I_j| \\ &= \sum_{j=1}^n a_j |I_j| + \sum_{j=1}^n b_j |I_j| = \int_a^b s + \int_a^b \sigma. \end{aligned}$$

Vamos deixar as provas das outras afirmações como exercícios e mostrar apenas o item (4).

Seja $E = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n \subset [a, b]$ um conjunto elementar, representado como uma união finita de intervalos disjuntos. Então $[a, b] \setminus E$ também é elementar e seja

$$[a, b] \setminus E = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_m$$

sua representação como união finita de intervalos disjuntos.

Dessa forma, $\{I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_m\}$ é uma partição de $[a, b]$ e

$$\mathbf{1}_E = 1 \cdot \mathbf{1}_{I_1} + \dots + 1 \cdot \mathbf{1}_{I_n} + 0 \cdot \mathbf{1}_{J_1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{1}_{J_m}.$$

Então $\mathbf{1}_E$ é uma função escada e

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{1}_E &= 1 \cdot |I_1| + \dots + 1 \cdot |I_n| + 0 \cdot |J_1| + \dots + 0 \cdot |J_m| \\ &= |I_1| + \dots + |I_n| = m(E). \end{aligned}$$

□

Definição 9. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ um função limitada. Considere todas as funções escada $s \leq f$ e $\sigma \geq f$. Definimos

$$\int_a^b f(x) dx := \sup \left\{ \int_a^b s(x) dx : s \leq f \text{ função escada} \right\}$$

a integral de Darboux inferior de f e

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} := \inf \left\{ \int_a^b \sigma(x) dx : \sigma \geq f \text{ função escada} \right\}$$

a integral de Darboux superior de f .

Claramente, $\int_a^b f(x) dx \leq \overline{\int_a^b f(x) dx}.$

Definição 10. Uma função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de Darboux integrável se

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}.$$

Neste caso, o valor comum das integrais superior e inferior, denotado por $\int_a^b f(x)$ ou $\int_a^b f$ ou até por $\int f$ é chamado a integral de Darboux de f .

Uma caracterização simples e muito útil da integrabilidade à Darboux é dada pela seguinte proposição, cuja prova deixamos como exercício.

Proposição 2. Uma função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Darboux integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existem duas funções escada s e σ tais que $s \leq f \leq \sigma$ e

$$\int_a^b (\sigma - s) < \varepsilon.$$

A seguir, apresentamos as propriedades básicas da integral de Darboux.

Proposição 3. Sejam $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções e seja $c \in \mathbb{R}$.

(1) (linearidade) Se f_1, f_2 são integráveis à Darboux, então $f_1 + f_2$ e cf_1 também são e

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2,$$

$$\int_a^b (cf_1) = c \int_a^b f_1.$$

(2) (positividade) Se f_1 é integrável à Darboux e $f_1 \geq 0$ então $\int_a^b f_1 \geq 0$.

(3) (monotonicidade) Se f_1, f_2 são integráveis à Darboux e $f_1 \leq f_2$ então $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$.

(4) Um conjunto $E \subset [a, b]$ é Jordan mensurável se, e somente se, sua função indicadora $\mathbf{1}_E$ é Darboux integrável. Neste caso, $\int_a^b \mathbf{1}_E = m(E)$.

Demonstração. A segunda parte do item (i) e os itens (ii) e (iii) são deixados como exercícios.

Vamos provar a aditividade da integral. Como f_1, f_2 são Darboux integráveis, dado $\varepsilon > 0$, existem $s_i, \sigma_i, i = 1, 2$ funções escada tais que $s_i \leq f_i \leq \sigma_i$ e $\int \sigma_1 - \int s_1 < \varepsilon$. Segue que $s_1 + s_2$ e $\sigma_1 + \sigma_2$ são funções escada e

$$s_1 + s_2 \leq f_1 + f_2 \leq \sigma_1 + \sigma_2.$$

Além disso,

$$\int ((\sigma_1 + \sigma_2) - (s_1 + s_2)) = \int (\sigma_1 - s_1) + \int (\sigma_2 - s_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

então pela proposição anterior a função $f_1 + f_2$ é integral à Darboux.

Como $s_i \leq f_i \leq \sigma_i, i = 1, 2$, pela definição da integral de Darboux temos que

$$\int s_i \leq \int f_i \leq \int \sigma_i,$$

então

$$(10) \quad \int s_1 + \int s_2 \leq \int f_1 + \int f_2 \leq \int \sigma_1 + \int \sigma_2$$

Como $s_i \leq f_i \leq \sigma_i, i = 1, 2$ tem-se $s_1 + s_2 \leq f_1 + f_2 \leq \sigma_1 + \sigma_2$, então, de novo pela definição da integral de Darboux,

$$(11) \quad \int (s_1 + s_2) \leq \int (f_1 + f_2) \leq \int (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Mas s_1, s_2 e σ_1, σ_2 são funções escada, para as quais a aditividade da integral de Darboux já foi estabelecida, então

$$\int s_1 + \int s_2 = \int (s_1 + s_2)$$

$$\int \sigma_1 + \int \sigma_2 = \int (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Junto com (10) e (11) isso implica

$$\left| \int f_1 + \int f_2 - \int (f_1 + f_2) \right| \leq \left| \int (\sigma_1 + \sigma_2) - \int (s_1 + s_2) \right| \leq 2\varepsilon,$$

e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, prova a aditividade da integral.

Vamos provar o item (4). Seja $E \subset [a, b]$ um conjunto Jordan mensurável. Dado $\varepsilon > 0$, existem $A \subset E \subset B$ tais que A, B são elementares e $m(B) - m(A) < \varepsilon$.

Segue que $\mathbf{1}_A$ e $\mathbf{1}_B$ são funções escada, $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_E \leq \mathbf{1}_B$,

$$\int \mathbf{1}_A \leq \int \mathbf{1}_E \leq \int \mathbf{1}_B,$$

e $\int \mathbf{1}_B - \int \mathbf{1}_A = m(B) - m(A) < \varepsilon.$

Portanto, pela caracterização da integrabilidade à Darboux na Proposição 2, $\mathbf{1}_E$ é Darboux integrável. Além disso, como $A \subset E \subset B$, tem-se $m(A) \leq m(E) \leq m(B)$, então

$$\left| \int \mathbf{1}_E - m(E) \right| \leq m(B) - m(A) < \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluímos que $\int \mathbf{1}_E = m(E).$

Agora suponha que $\mathbf{1}_E$ seja integrável à Darboux. Vamos provar que E é Jordan mensurável.

Dado $\varepsilon > 0$, existem $s \leq \mathbf{1}_E \leq \sigma$ funções escada, tais que $\int \sigma - \int s < \varepsilon.$

Escrevemos $s = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{1}_{I_k}$, $\sigma = \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{1}_{I_k}$, e seja $\mathcal{N}_1 := \{k : c_k > 0\}.$

Observe que se $k \in \mathcal{N}_1$ então $I_k \subset E$ e $c_k \leq 1$. De fato, dado $x \in I_k$,

$$0 < c_k = s(x) \leq \mathbf{1}_E(x),$$

logo $\mathbf{1}_E(x)$ deve ser igual a 1 (a função indicadora de um conjunto só toma o valor 0 ou 1), mostrando que $x \in E$ e $c_k \leq 1$.

Seja $A := \bigsqcup_{k \in \mathcal{N}_1} I_k$. Então A é um conjunto elementar e $A \subset E$. Desse modo,

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{k \in \mathcal{N}_1} |I_k| = \sum_{k \in \mathcal{N}_1} \mathbf{1} \cdot |I_k| \\ &\geq \sum_{k \in \mathcal{N}_1} c_k |I_k| \\ &\geq \sum_{k=1}^n c_k |I_k| = \int s, \end{aligned}$$

já que $c_k \leq 0$ para todo $k \notin \mathcal{N}_1$.

Portanto A é um conjunto elementar com $A \subset E$ e $m(A) \geq \int s$.

Agora consideremos a função escada $\sigma = \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{1}_{I_k}$, onde $\sigma \geq \mathbf{1}_E \geq 0$, portanto $d_k \geq 0$ para todo k . Sejam

$$\mathcal{N}_2 := \{k : I_k \cap E \neq \emptyset\}$$

e $B := \bigsqcup_{k \in \mathcal{N}_2} I_k$. Então B é um conjunto elementar e $E \subset B$.

Além disso, se $k \in \mathcal{N}_2$ temos que $E \cap I_k \neq \emptyset$. Então existe $x \in E \cap I_k$ e assim

$$1 = \mathbf{1}_E(x) \leq \sigma(x) = d_k,$$

mostrando que neste caso $d_k \geq 1$. Segue que

$$\begin{aligned} m(B) &= \sum_{k \in \mathcal{N}_2} |I_k| = \sum_{k \in \mathcal{N}_2} 1 \cdot |I_k| \\ &\leq \sum_{k \in \mathcal{N}_2} d_k |I_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^n d_k |I_k| = \int \sigma. \end{aligned}$$

Portanto B é um conjunto elementar com $E \subset B$ e $m(B) \leq \int \sigma$.

Segue que $A \subset E \subset B$ onde A, B são conjuntos elementares e

$$m(B) - m(A) \leq \int \sigma - \int s < \varepsilon,$$

portanto, E é Jordan mensurável. \square

4.3. A equivalência entre a integral de Riemann e a integral de Darboux.

Teorema 5. *Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Então f é integrável à Riemann se e somente se f é integrável à Darboux. Neste caso, $\mathcal{J}(f) = \int_a^b f(x) dx$.*

Demonstração. $\boxed{\mathcal{R} \implies \mathcal{D}}$ Seja $\epsilon > 0$. Como f é integrável à Riemann, existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ e para toda escolha de pontos intermediários $x_1^* \in I_1, x_2^* \in I_2, \dots, x_n^* \in I_n$, se $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, então a soma de Riemann correspondente satisfaz

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k^*) |I_k| - \mathcal{J}(f) \right| < \epsilon,$$

ou seja

$$(12) \quad \mathcal{J}(f) - \epsilon < \sum_{k=1}^n f(x_k^*) |I_k| < \mathcal{J}(f) + \epsilon.$$

Denotando por

$$m_k := \inf \{f(x) : x \in I_k\}$$

$$M_k := \sup \{f(x) : x \in I_k\}$$

e definindo as funções escada

$$s := \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{1}_{I_k} \quad \text{e} \quad \sigma := \sum_{k=1}^n M_k \mathbf{1}_{I_k},$$

tem-se

$$s \leq f \leq \sigma$$

e

$$(13) \quad \int_a^b s = \sum_{k=1}^n m_k |I_k|, \quad \int_a^b \sigma = \sum_{k=1}^n M_k |I_k|.$$

Tomando em (12) o ínfimo (e depois o supremo) em cada intervalo I_k sobre todos os pontos intermediários $x_k^* \in I_k$, obtemos o seguinte:

$$\mathcal{J}(f) - \epsilon \leq \sum_{k=1}^n m_k |I_k| \leq \sum_{k=1}^n M_k |I_k| \leq \mathcal{J}(f) + \epsilon,$$

então, usando (13),

$$\mathcal{J}(f) - \epsilon \leq \int_a^b s \leq \int_a^b \sigma \leq \mathcal{J}(f) + \epsilon.$$

Portanto,

$$\int_a^b \sigma - \int_a^b s \leq (\mathcal{J}(f) + \epsilon) - (\mathcal{J}(f) - \epsilon) = 2\epsilon,$$

mostrando que f é integrável à Darboux.

$\boxed{\mathcal{D} \implies \mathcal{R}}$ Sem perda de generalidade, podemos supor que $f \geq 0$. De fato, como f é limitada, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $-K \leq f \leq K$. Então, $f + K \geq 0$, e uma vez estabelecida a integrabilidade à Riemann de $f + K$, a de f segue imediatamente.

Assim, suporemos a partir de agora que $0 \leq f(x) \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Fixe $\epsilon > 0$.

Como f é integrável à Darboux, existem duas funções escada s e σ tais que

$$s \leq f \leq \sigma \quad \text{e} \quad \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon.$$

Como $f \geq 0$, sua aproximação por baixo s também pode ser escolhida tal que $s \geq 0$.

Escrevemos

$$s = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{1}_{I_k}, \quad c_k \geq 0$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^N d_k \mathbf{1}_{I_k},$$

onde $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a, b]$.

Seja

$$\delta := \min \left\{ |I_k|, k = 1, \dots, N, \frac{\epsilon}{N^2 K} \right\}.$$

Considere uma partição qualquer $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_m\}$ com $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, pontos intermediários $x_l^* \in J_l$, para todo índice $l = 1, \dots, m$ e a soma de Riemann correspondente

$$\sum_{l=1}^m f(x_l^*) |J_l|.$$

Dado um índice $l \in \{1, \dots, m\}$, há duas possibilidades sobre o intervalo correspondente J_l .

- Existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que $J_l \subset I_k$. Neste caso, chamamos o índice l “bom”.
- Não existe tal intervalo I_k . Neste caso, chamamos o índice l “ruim”.

Vamos considerar primeiro o caso ruim. Como $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$, existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que $J_l \cap I_k \neq \emptyset$. Mas como $J_l \not\subset I_k$, necessariamente J_l contém um ponto extremo do intervalo I_k (e também intersecta um outro intervalo $I_{k'}$). Já que

$$|J_l| \leq \Delta(\mathcal{P}) < \delta < |I_k|,$$

segue que J_l contém exatamente um ponto extremo de um único intervalo I_k , com $k \in \{1, \dots, N\}$. Portanto,

$$(14) \quad \# \{l \in \{1, \dots, m\} : J_l \text{ é ruim} \} \leq N$$

$$(15) \quad \sum_{l: \text{ruim}} |J_l| \leq N \delta.$$

Então, a parte da soma de Riemann correspondente aos índices ruins tem a cota

$$(16) \quad 0 \leq \sum_{l: \text{ruim}} f(x_l^*) |J_l| \leq N K \delta < \epsilon,$$

ou seja, tem uma contribuição pequena.

A seguir, vamos estimar a parte da soma de Riemann correspondente aos índices bons. Para fazer isso, note que se $x_l^* \in J_l \subset I_k$, então, como $s \leq f \leq \sigma$, segue que

$$c_k = s(x_l^*) \leq f(x_l^*) \leq \sigma(x_l^*) = d_k.$$

Começamos com a estimativa por cima:

$$\begin{aligned} \sum_{l: \text{ bom}} f(x_l^*) |J_l| &= \sum_{k=1}^m \sum_{l: J_l \subset I_k} f(x_l^*) |J_l| \leq \sum_{k=1}^m \sum_{l: J_l \subset I_k} d_k |J_l| \\ &= \sum_{k=1}^N d_k \sum_{l: J_l \subset I_k} |J_l| \leq \sum_{k=1}^N d_k |I_k| = \int_a^b \sigma. \end{aligned}$$

Portanto, usando (16), concluímos que

$$(17) \quad \sum_{l=1}^m f(x_l^*) |J_l| = \sum_{l: \text{ bom}} f(x_l^*) |J_l| + \sum_{l: \text{ ruim}} f(x_l^*) |J_l| \leq \int_a^b \sigma + \epsilon.$$

A estimativa por baixo é similar, porém, mais sutil.

Note que dado qualquer $k \in \{1, \dots, N\}$, como $\{J_l: l = 1, \dots, m\}$ é uma partição de $[a, b]$, tem-se $I_k \subset [a, b] = \bigcup_{l=1}^m J_l$, então

$$\begin{aligned} I_k &= \bigcup_{l=1}^m (I_k \cap J_l) = \bigcup_{l: J_l \subset I_k} (I_k \cap J_l) \cup \bigcup_{l: J_l \cap I_k \neq \emptyset, J_l \not\subset I_k} (I_k \cap J_l) \\ &\subset \bigcup_{l: J_l \subset I_k} J_l \cup \bigcup_{l: \text{ ruim}} J_l. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|I_k| \leq \sum_{l: J_l \subset I_k} |J_l| + \sum_{l: \text{ ruim}} |J_l| \leq \sum_{l: J_l \subset I_k} |J_l| + N\delta,$$

onde a última desigualdade segue de (15).

Concluímos que

$$(18) \quad \sum_{l: J_l \subset I_k} |J_l| \geq |I_k| - N\delta.$$

Note também que $c_k \leq K$, já que todo c_k é um valor da função s , e $s \leq f \leq K$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m f(x_l^*) |J_l| &\geq \sum_{l: \text{ bom}} f(x_l^*) |J_l| \quad (\text{já que } f \geq 0) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l: J_l \subset I_k} f(x_l^*) |J_l| \geq \sum_{k=1}^N \sum_{l: J_l \subset I_k} c_k |J_l| \\ &= \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l: J_l \subset I_k} |J_l| \geq \sum_{k=1}^N c_k (|I_k| - N\delta) \quad (\text{usando (18)}) \\ &= \sum_{k=1}^N c_k |I_k| - \sum_{k=1}^N c_k N\delta = \int_a^b s - N\delta \sum_{k=1}^N c_k \\ &\geq \int_a^b s - N^2\delta K > \int_a^b s - \epsilon. \end{aligned}$$

Concluimos, junto com a estimativa por cima (17) que

$$\int_a^b s - \epsilon < \sum_{l=1}^m f(x_l^*) |J_l| < \int_a^b \sigma + \epsilon.$$

Por outro lado, como $s \leq f \leq \sigma$, tem-se

$$\int_a^b s \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sigma.$$

Portanto,

$$\left| \sum_{l=1}^m f(x_l^*) |J_l| - \int_a^b f \right| < \left(\int_a^b \sigma + \epsilon \right) - \left(\int_a^b s - \epsilon \right) = \left(\int_a^b \sigma - \int_a^b s \right) + 2\epsilon < 3\epsilon.$$

Isso mostra que f é integrável à Riemann e $\mathcal{J}(f) = \int_a^b f$. □

A partir de agora, nos referiremos aos dois conceitos (equivalentes) de integração acima como a integral de Riemann-Darboux.

A proposição seguinte estabelece de maneira precisa, a bem conhecida interpretação geométrica da integral de Riemann como área de uma região.

Proposição 4. *Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, e suponha que $f \geq 0$. Considere a região planar abaixo do gráfico de f e acima do eixo x :*

$$E := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b] \text{ e } 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

Se f é integrável à Riemann-Darboux, então E é mensurável à Jordan (em \mathbb{R}^2) e

$$m(E) = \int_a^b f.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, sejam $0 \leq s \leq f \leq \sigma$ funções escada tais que

$$\int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon.$$

Escrevemos

$$s = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{1}_{I_k} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{k=1}^N d_k \mathbf{1}_{I_k},$$

onde $d_k \geq c_k \geq 0$ e $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a, b]$.

Para cada índice k , considere as caixas em \mathbb{R}^2

$$Q_k := I_k \times [0, c_k], \quad \text{e} \quad R_k := I_k \times [0, d_k],$$

e os conjuntos elementares em \mathbb{R}^2

$$A := \bigcup_{k=1}^N Q_k, \quad \text{e} \quad B := \bigcup_{k=1}^N R_k.$$

Como $s \leq f \leq \sigma$, tem-se

$$A \subset E \subset B.$$

Note que

$$\int_a^b s = \sum_{k=1}^N c_k |I_k| = \sum_{k=1}^N |Q_k| = m(A)$$

e similarmente,

$$\int_a^b \sigma = \sum_{k=1}^N d_k |I_k| = \sum_{k=1}^N |R_k| = m(B).$$

Segue que

$$m(B) - m(A) = \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon,$$

o que mostra a mensurabilidade à Jordan do conjunto E .

Além disso, como $s \leq f \leq \sigma$, tem-se

$$\int_a^b s \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sigma,$$

e como $A \subset E \subset B$, tem-se

$$\int_a^b s = m(A) \leq m(E) \leq m(B) = \int_a^b \sigma.$$

Portanto

$$\left| m(E) - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon,$$

mostrando que $m(E) = \int_a^b f$. □

Exercício 4. Seja $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções integráveis à Riemann-Darboux em $[a, b]$. Suponha que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{uniformemente.}$$

Prove que o limite uniforme f também é integrável à Riemann-Darboux e

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Use a versão de Darboux do conceito de integrabilidade.

No que segue, exploraremos a relação entre a continuidade e a integrabilidade de uma função.

Teorema 6. Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável à Riemann-Darboux.

Demonstração. Como f é contínua e $[a, b]$ é compacto, f é, automaticamente, limitada.

Além disso, f é uniformemente contínua. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, dados $x, y \in [a, b]$,

$$(19) \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Podemos expressar (19) de forma equivalente como segue. Dado qualquer intervalo I no domínio da função f , definimos a *oscilação* de f em I por

$$\omega_f(I) := \sup_{x, y \in I} |f(x) - f(y)| = \sup_I f - \inf_I f.$$

Então (19) é equivalente ao seguinte: dado $I \subset [a, b]$,

$$|I| < \delta \implies \omega_f(I) \leq \epsilon.$$

Considere uma partição $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_N\}$ tal que $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, e sejam

$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x) \quad \text{e} \quad M_k := \sup_{x \in I_k} f(x).$$

Defina as funções escada

$$s := \sum_{k=1}^N m_k I_k \quad \text{e} \quad \sigma := \sum_{k=1}^N M_k I_k.$$

Então, $s \leq f \leq \sigma$ e

$$\int_a^b (\sigma - s) = \sum_{k=1}^N (M_k - m_k) |I_k| = \sum_{k=1}^N \omega_f(I_k) |I_k|.$$

Dado qualquer índice $k \in \{1, \dots, N\}$, como $|I_k| \leq \Delta(\mathcal{P}) < \delta$, pela continuidade uniforme (19) de f , temos que $\omega_f(I_k) \leq \epsilon$. Portanto,

$$\int_a^b (\sigma - s) < \epsilon \sum_{k=1}^N |I_k| = \epsilon(b - a),$$

o que estabelece a integrabilidade à Darboux da função f . \square

Comentário 2. E se a função f tiver um (ou um número finito de) ponto(s) de descontinuidade, ele ainda é integrável (supondo que seja limitada)?

Seja $x_0 \in [a, b]$ e suponha que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seja limitada e contínua em $[a, b] \setminus \{x_0\}$. Com uma pequena modificação, o argumento anterior ainda é aplicável neste cenário. É suficiente isolar o ponto de descontinuidade x_0 em um intervalo suficientemente pequeno.

De fato, sejam $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq f \leq M$, fixe $\epsilon > 0$ e escolha $0 < \delta < \frac{\epsilon}{M-m}$. Então f é contínua em $I_1 := [a, x_0 - \delta]$ e em $I_2 := [x_0 + \delta, b]$. Pelo teorema anterior, existem funções escada $s_j \leq f \leq \sigma_j$ em I_j , $j = 1, 2$, tais que

$$\int_{I_j} (\sigma_j - s_j) < \epsilon.$$

Vamos definir duas funções escada em $[a, b]$ como segue:

$$s := \begin{cases} s_1 & \text{em } I_1 \\ s_2 & \text{em } I_2 \\ m & \text{em } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases} \quad \text{e} \quad \sigma := \begin{cases} \sigma_1 & \text{em } I_1 \\ \sigma_2 & \text{em } I_2 \\ M & \text{em } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases}.$$

Evidentemente, $s \leq f \leq \sigma$. Além disso,

$$\int_a^b (\sigma - s) = \int_{I_1} (\sigma - s) + \int_{I_2} (\sigma - s) + (M - m) |(x_0 - \delta, x_0 + \delta)| < 3\epsilon,$$

provando assim a afirmação de que f é integrável à Riemann-Darboux.

O mesmo argumento é aplicável no caso de uma função com um número finito de pontos de descontinuidade. Um argumento similar, mas um pouco mais elaborado pode ser usado para tratar o caso de um conjunto de pontos de descontinuidade com medida de Jordan nula.

Exercício 5. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Suponha que o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tenha medida de Jordan zero. Prove que f é integrável à Riemann-Darboux.

4.4. O teorema de Lebesgue (continuidade v. integrabilidade à Riemann-Darboux).

O tópico principal desta seção é o teorema de Lebesgue sobre a relação entre a integrabilidade à Riemann-Darboux de uma função e sua continuidade. Mostraremos que uma função limitada é integrável à Riemann-Darboux se e somente se for contínua exceto por um conjunto “negligenciável” de pontos de descontinuidade.

Começamos com a definição formal do conceito de conjunto negligenciável.

Lembre-se que um conjunto limitado $E \subset \mathbb{R}$ possui medida de Jordan nula se e somente se a sua medida exterior de Jordan for zero, ou seja, se $m^{*,J}(E) = 0$. Equivalentemente, escrevemos: para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto elementar $B \supset E$ tal que $m(B) \leq \epsilon$.

Portanto, E tem medida de Jordan zero se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um número *finito* de intervalos I_1, \dots, I_N satisfazendo

$$E \subset \bigcup_{n=1}^N I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^N |I_n| \leq \epsilon.$$

Exemplos importantes de conjuntos com medida de Jordan zero são conjuntos finitos ou o conjunto de Cantor.

Vamos estender esse conceito para uma família maior de conjuntos. A maneira natural (e, na verdade, padrão na teoria da medida) para obter tal extensão é substituir processos finitos por processos *enumeráveis*.

Definição 11. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ é dito *negligenciável*, ou de medida (de Lebesgue) zero se para todo $\epsilon > 0$ existe uma família *enumerável* de intervalos $\{I_n\}_{n \geq 1}$ tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon.$$

O conjunto vazio é um intervalo, então tais famílias enumeráveis de intervalos incluem também famílias finitas de intervalos. Assim, todo conjunto com medida de Jordan zero é, automaticamente negligenciável.

Além disso note que se E é negligenciável e $F \subset E$, então F também é negligenciável.

Exemplo 4. Todo conjunto enumerável é negligenciável.

De fato, seja $E := \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$ um conjunto enumerável e fixe $\epsilon > 0$.

A seguir, é apresentado um primeiro exemplo do uso do “truque $\frac{\epsilon}{2^n}$ ”. Esta técnica, em suas várias manifestações, será usada repetidamente ao longo do curso.

Para cada índice $n \geq 1$, considere o intervalo

$$I_n := \left(x_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right).$$

Então, obviamente,

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon,$$

mostrando que E é negligenciável.

Em particular, note que o conjunto $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ é negligenciável, enquanto, como mostrado anteriormente, não é mensurável à Jordan (e, por isso, não possui medida de Jordan zero).

Exercício 6. Prove que uma união enumerável de conjuntos negligenciáveis é negligenciável. Use o truque $\frac{\epsilon}{2^n}$.

Comentário 3. Se for necessário, os intervalos $I_n, n \geq 1$ sempre podem ser escolhidos *abertos*.

De fato, sejam E um conjunto negligenciável e $\epsilon > 0$. Existe uma cobertura $I_n, n \geq 1$ de E por intervalos, tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon.$$

Supondo que os pontos extremos do intervalo I_n sejam a_n e b_n , e usando o mesmo truque $\frac{\epsilon}{2^n}$, considere os intervalos abertos

$$J_n := \left(a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, b_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right).$$

Então, para todo $n \geq 1$,

$$|J_n| = |I_n| + \frac{\epsilon}{2^n},$$

portanto

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} \leq 2\epsilon.$$

O mesmo argumento também mostra que os intervalos $I_n, n \geq 1$ podem ser escolhidos todos fechados, ou todos semiabertos, caso seja útil.

Observação 5. Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto *compacto*. Então, E é negligenciável se e somente se E possui medida de Jordan zero.

Em outras palavras, enquanto, em geral, ter medida de Jordan zero é uma propriedade mais forte, no caso de subconjuntos compactos, os dois conceitos são equivalentes.

Seja $\epsilon > 0$, e escolha uma cobertura $\{I_n\}_{n \geq 1}$ de E por intervalos *abertos*, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon.$$

Como E é compacto, existe uma subcobertura *finita* I_1, \dots, I_N de E , e, evidentemente,

$$\sum_{n=1}^N |I_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \epsilon.$$

Definição 12. Uma propriedade $P(x)$ vale em *quase todo ponto* (abreviado q.t.p.) se o conjunto

$$\{x : P(x) \text{ não vale}\}$$

é negligenciável.

Exemplo 5. Considere o conjunto $E := \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$ e a sua função indicadora $\mathbf{1}_E : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Observe que os pontos de descontinuidade da função $\mathbf{1}_E$ são exatamente 0 e $\frac{1}{n}, n \geq 1$, ou seja, um conjunto enumerável de pontos. Portanto, $\mathbf{1}_E$ é contínua em q.t.p.

Teorema 7 (de Lebesgue). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Então f é integrável à Riemann-Darboux se e somente se f é contínua em q.t.p.*

Antes de começar a demonstração do teorema, vamos estudar o conceito de *oscilação* de uma função, que é relacionado à sua continuidade.

A oscilação de uma função. Seja $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

Definição 13. Se $I \subset [a, b]$ é um intervalo, definimos a *oscilação de f em I* por

$$\begin{aligned}\omega_f(I) &:= \sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in I\} \\ &= \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x).\end{aligned}$$

Observe que $I \subset J \implies \omega_f(I) \leq \omega_f(J)$.

Definição 14. Se $x \in [a, b]$, definimos a *oscilação de f no ponto x* por

$$\omega_f(x) := \inf \{\omega_f(I \cap [a, b]) : I \text{ intervalo aberto com } x \in I\}.$$

Como a oscilação depende monotonicamente do intervalo, temos que

$$\omega_f(x) = \inf_{\delta > 0} \omega_f((x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]).$$

Exercício 7. Prove que f é uniformemente contínua se e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dado um intervalo $I \subset [a, b]$,

$$|I| < \delta \implies \omega_f(I) < \epsilon.$$

Além disso, prove que f é contínua no ponto x se e somente se $\omega_f(x) = 0$.

Em consequência, x é um ponto de descontinuidade de f se e somente se $\omega_f(x) > 0$.

Esta caracterização nos permite *quantificar* a descontinuidade de uma função em um ponto, ou seja, medir quão descontínua f é no ponto x , dependendo de quão grande seja a oscilação pontual $\omega_f(x)$.

Considere

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) = \{x : \omega_f(x) > 0\}$$

o conjunto de pontos de descontinuidade da função f .

Dado $r > 0$, definimos

$$\mathcal{D}_r := \{x : \omega_f(x) \geq r\}$$

o conjunto de pontos com uma “quantidade (ou nível) de descontinuidade” acima de r .

Observe que

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{D}_{1/n}.$$

Lema 3. Para todo $r > 0$, o conjunto \mathcal{D}_r é fechado e, portanto, compacto.

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{D}_r$ uma sequência tal que $x_n \rightarrow x$. Provaremos que $x \in \mathcal{D}_r$.

Suponha por contradição que $x \notin \mathcal{D}_r$, ou seja, $\omega_f(x) < r$. Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$\omega_f((x - \delta, x + \delta)) < r.$$

Como $x_n \rightarrow x$, existe $N \geq 1$ tal que $x_N \in (x - \delta, x + \delta)$. Ademais, existe um intervalo aberto J contendo x , e suficientemente pequeno tal que $J \subset (x - \delta, x + \delta)$. Portanto,

$$\begin{aligned}r &\leq \omega_f(x_N) = \inf \{\omega_f(I) : I \text{ intervalo aberto com } x_N \in I\} \\ &\leq \omega_f(J) \leq \omega_f((x - \delta, x + \delta)) < r,\end{aligned}$$

e temos uma contradição. □

Estamos aptos a começar a prova do resultado principal dessa seção.

Demonstração do Teorema 7. $\boxed{\Leftarrow}$ Suponha que \mathcal{D} seja negligenciável, e tome $\epsilon > 0$.

Escolha um nível de descontinuidade $r > 0$ pequeno, $r < \frac{\epsilon}{b-a}$ será suficiente. Como $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D}$, \mathcal{D}_r também é negligenciável. A ideia da prova é *isolar* os pontos com nível de descontinuidades acima ou igual a r em intervalos pequenos, e usar o resto do espaço, onde a oscilação de f é zero ou muito baixa para construir aproximações por funções escada, e, portanto, provar a integrabilidade de f .¹

Pelo Lema 3, \mathcal{D}_r é compacto, e pela Observação 5 existe uma cobertura finita por intervalos (que podem ser escolhidos disjuntos)

$$\mathcal{D}_r \subset \bigcup_{n=1}^N I_n \quad \text{com} \quad \sum_{n=1}^N |I_n| < \frac{\epsilon}{M-m},$$

onde $m := \inf f$ e $M := \sup f$.

O complemento dessa cobertura pode ser escrito como uma união disjunta de intervalos

$$[a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n =: J_1 \sqcup \dots \sqcup J_m.$$

Portanto, para cada índice $k = 1, \dots, m$, e para todo $x \in J_k$, a oscilação pontual de f satisfaz $\omega_f(x) < r$. Isso não necessariamente implica a mesma estimativa para a oscilação de f no intervalo J_k inteiro; porém, existe uma partição finita do intervalo J_k em intervalos menores para os quais a oscilação permanece abaixo de r , como mostra o seguinte lema.

Lema 4. *Seja $J = [c, d]$ um intervalo e suponha que $\omega_f(x) < r$ para todo $x \in J$. Então, existe uma partição $J = J^1 \sqcup \dots \sqcup J^p$ em intervalos satisfazendo*

$$\omega_f(J^i) < r \quad \text{para todo } i = 1, \dots, p.$$

Prova do lema. Usaremos um argumento simples de compacidade. Para cada $x \in J$, como $\omega_f(x) < r$, existe $\delta_x > 0$ tal que, denotando por $I_x := (x - \delta_x, x + \delta_x)$, temos que $\omega_f(I_x) < r$.

A família $\{I_x\}_{x \in J}$ é uma cobertura finita por intervalos abertos do compacto J , portanto existe uma subcobertura finita I_{x_1}, \dots, I_{x_q} .

¹(28 de março de 2020) Aliás, esta é a estratégia usada para a contenção do novo coronavírus pelos países que tiveram mais sucesso nessa luta (por exemplo na Coreia do Sul).

Considere a analogia “pessoas infectadas \rightsquigarrow pontos de descontinuidades”.

Com um número finito (isto é, relativamente pequeno) de pessoas infectadas, as autoridades públicas podem tomar medidas de isolamento *local*, em pequenas quadras contendo infectados (e suspeitos de estarem infectados devido à proximidade física). A vida pode continuar relativamente normal para o resto da cidade (ou do país). Mas com um número alto de infecções e um padrão de transmissão desconhecido, a alternativa é considerar todos potencialmente suspeitos de infecção, e, portanto, isolar a cidade inteira (ou o país inteiro).

No caso do nosso teorema, temos uma informação crucial: o conjunto de pontos de descontinuidade é bem pequeno, negligenciável. Portanto, isolamento local desses pontos funcionará, eventualmente garantindo a integrabilidade da função.

Infelizmente, por causa, pelo menos em parte, da falta total de *dados* sobre a distribuição das pessoas infectadas em países como Brasil (ou EUA), também por causa de outros problemas de ordem estrutural no sistema de saúde—tudo isso devido a uma falta crônica de preparação, à negação da análise científica, das recomendações apresentadas com *antecedência* por organizações de saúde respeitáveis, ou seja, por uma atitude irresponsável, então, criminal dos mais responsáveis para o bem público—hoje a solução restante é isolamento amplo (ou quase total).²

²(10 de setembro de 2025) As consequências dessas e de outras ações dos responsáveis levaram a mais de 400,000 mortes que poderiam ter sido evitadas; outras consequências ainda são sentidas, inclusive em relação à educação e ao bem-estar de nossos alunos. As autoridades daquela época ainda não foram responsabilizadas por esses crimes específicos contra o bem público.

Resta “tornar disjuntos” esses intervalos, o que pode ser obtido por meios já familiares. Por exemplo, escrevendo

$$[a, b] = ([a, b] \cap I_{x_1}) \sqcup ([a, b] \cap I_{x_2} \setminus I_{x_1}) \sqcup \dots \sqcup ([a, b] \cap I_{x_q} \setminus (I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_{q-1}})) ,$$

segue que cada conjunto da união disjunta acima pode ser particionado em um número finito de subintervalos disjuntos J^i . Cada um destes subintervalos está contido em um determinado intervalo I_{x_l} , portanto, $\omega_f(J^i) \leq \omega_f(I_{x_l}) < r$. \square

Voltando à demonstração do teorema, pelo lema anterior, e pelo isolamento em intervalos pequenos dos pontos de descontinuidade de f , temos uma partição de $[a, b]$ em intervalos

$$\{K_1, \dots, K_p; I_1, \dots, I_N\}$$

tais que

$$\omega_f(K_l) < r \quad \text{para todo } l = 1, \dots, p$$

e, além disso,

$$\sum_{n=1}^N |I_n| < \frac{\epsilon}{M - m} .$$

Dentamos por

$$m_l := \inf_{x \in K_l} f(x) \quad \text{e} \quad M_l := \sup_{x \in K_l} f(x)$$

e definimos duas funções escada em $[a, b]$ como segue:

$$s(x) := \begin{cases} m_l & \text{se } x \in K_l, \, l = 1, \dots, p \\ m & \text{se } x \in I_j, \, j = 1, \dots, N \end{cases} \quad \text{e} \quad \sigma(x) := \begin{cases} M_l & \text{se } x \in K_l, \, l = 1, \dots, p \\ M & \text{se } x \in I_j, \, j = 1, \dots, N . \end{cases}$$

Claramente $s \leq f \leq \sigma$ e temos

$$\begin{aligned} \int_a^b (\sigma - s) &= \sum_{l=1}^p (M_l - m_l) |K_l| + \sum_{j=1}^N (M - m) |I_j| \\ &= \sum_{l=1}^p \omega_f(K_l) |K_l| + (M - m) \sum_{j=1}^N |I_j| \\ &\leq r \sum_{l=1}^p |K_l| + (M - m) \frac{\epsilon}{M - m} \leq r(b - a) + \epsilon \leq 2\epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra a integrabilidade à Riemann-Darboux de f .

\Rightarrow Suponha que f seja integrável à Riemann-Darboux. Como $\mathcal{D} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{D}_{1/n}$, basta provar que \mathcal{D}_r é negligenciável para todo $r > 0$.

Fixe $r > 0$. Como \mathcal{D}_r é compacto, isso equivale a provar a existência de uma família finita de intervalos $\{I_k\}_{k \in \mathcal{F}}$ (onde \mathcal{F} é um conjunto finito de índices) satisfazendo

$$\mathcal{D}_r \subset \bigcup_{k \in \mathcal{F}} I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k| < \epsilon .$$

Como a função f é integrável à Darboux, então existem duas funções escada s e σ tais que $s \leq f \leq \sigma$ e

$$(20) \quad \int_a^b (\sigma - s) < \epsilon r .$$

Escrevemos

$$s = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{1}_{I_k} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{k=1}^N d_k \mathbf{1}_{I_k},$$

onde $c_k \leq d_k$ e $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a, b]$.

Seja

$$\mathcal{F} := \left\{ k \in \{1, \dots, N\} : \mathcal{D}_r \cap \overset{\circ}{I}_k \neq \emptyset \right\}.$$

Como $\mathcal{D}_r \subset [a, b] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_N$, temos que

$$\mathcal{D}_r \subset \bigcup_{k \in \mathcal{F}} I_k \cup \mathcal{N},$$

onde \mathcal{N} é o conjunto finito (portanto, negligenciável) dos pontos extremos dos intervalos I_k .

Resta provar que

$$\sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k| < \epsilon.$$

Fixe $k \in \mathcal{F}$ e seja $x \in \mathcal{D}_r \cap \overset{\circ}{I}_k$. Então, $\omega_f(x) \geq r$ e, ademais,

$$\omega_f(x) = \inf \{ \omega_f(J) : x \in J, J \text{ aberto} \} \leq \omega_f(\overset{\circ}{I}_k) = \sup_{\overset{\circ}{I}_k} f - \inf_{\overset{\circ}{I}_k} f \leq d_k - c_k,$$

onde a última desigualdade vale porque $x \in \overset{\circ}{I}_k$, então

$$\sup_{\overset{\circ}{I}_k} f \leq \sup_{\overset{\circ}{I}_k} \sigma = d_k \quad \text{e} \quad \inf_{\overset{\circ}{I}_k} f \geq \inf_{\overset{\circ}{I}_k} s = c_k.$$

Concluimos que

$$k \in \mathcal{F} \implies d_k - c_k \geq r.$$

Portanto, usando (20)

$$\begin{aligned} \epsilon r &> \int_a^b (\sigma - s) = \sum_{k \in \mathcal{F}} (d_k - c_k) |I_k| + \sum_{k \notin \mathcal{F}} (d_k - c_k) |I_k| \geq \sum_{k \in \mathcal{F}} (d_k - c_k) |I_k| \\ &\geq r \sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k|, \end{aligned}$$

o que mostra que

$$\sum_{k \in \mathcal{F}} |I_k| < \epsilon,$$

terminando assim a prova do teorema. □