CAPÍTULO 1. TEORIA ELEMENTAR DOS CONJUNTOS

Sumário

Introdução ao curso

O objetivo deste curso é fornecer uma introdução à análise real.

Análise real é a disciplina matemática que estuda números reais, sequências de números reais, funções com domínio e valores reais e suas propriedades.

A maioria dos conceitos considerados nesse curso são familiares (dos cursos de Cálculo). No entanto, o foco será no estudo formal e rigoroso destes conceitos, ao invés da abordagem mais computacional e aplicada das matérias anteriores.

Assim, vamos responder a perguntas do tipo:

- Como comparar a cardinalidade de vários conjuntos?
- O que é um número real?
- O que é e quando existe o limite de uma sequência de números reais? Como somar uma série infinita de números reais?
- O que é uma função contínua? Qual é o comportamento de uma função contínua em intervalos ou em outros tipos de conjuntos?

Por que estudar análise, por que cálculo não é suficiente?

Há muitas razões, uma delas é que uma compreensão mais profunda dos conceitos de cálculo nos impede de cometer erros graves, mesmo quando se trata de problemas práticos.

Exemplo 1 (Séries divergentes)**.** Considere a série infinita

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Então

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2 + S$$

Logo, $S = 2$ (que, por acaso, é a resposta correta).

No entanto, se aplicarmos a mesma lógica à série

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots ,$$

temos que

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = S - 1,$$

o que implica o resultado absurdo $S = -1$.

Um outro exemplo:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

pode ser escrita como

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots) = 1 - S,$$

levando a $S = \frac{1}{2}$, mas também como

$$\begin{aligned} S &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + \cdots = 1, \end{aligned}$$

absurdo (S não pode ser igual a $\frac{1}{2}$ e a 1 no mesmo tempo).

Exemplo 2 (Sequências divergentes)**.** Seja x um número real qualquer e seja

$$L = \lim_{n\to\infty} x^n$$

Evidentemente $n + 1 \to \infty$ quando $n \to \infty$, logo

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = L$$

Mas $x^{n+1} = x \cdot x^n$, então temos a relação $L = xL$.

Isso implica $x = 1$ ou $L = 0$. Mas claramente se $x = 2$, a sequência 2^n não pode convergir a 0 quando $n \to \infty$. Em outras palavras, há um error grave no nosso raciocínio.

1. Conjuntos e operações entre conjuntos

Definição 1. Um conjunto A é uma coleção (não ordenada) de objetos chamados elementos de A.

A notação $x \in A$ significa "x pertence a A".
A notação $x \notin A$ significa "x não pertence a A".

Exemplo 3. Se A = $\{1,\ 7,\ 6\}$ então $7 \in A$ mas $9 \notin A$.

Exemplo 4. Se A é o conjunto de todos os triângulos retângulos no plano, então um triângulo com lados $3, 4, 5$ pertence a A, mas um triângulo com lados $2, 3, 4$ não pertence a A.

Observação 1. Conjuntos podem ser objetos (elementos) também. Por exemplo, dado um conjunto A, temos

$$A \in \{3, A, x\}.$$

Definição 2. Dois conjuntos A e B são iguais ($A = B$) se todo elemento de A também é um elemento de B e vice-versa, ou seja:
$A = B$ se e somente se ($x \in A \Rightarrow x \in B$ e $x \in B \Rightarrow x \in A$).

1.1. **Revisão de algumas noções de lógica.** Usaremos a abreviação *sse* para a frase (extremamente comum neste curso) "se e somente se".

Se P e Q são duas sentenças (ou afirmações ou proposições), então a notação $P \Rightarrow Q$ significa "P implica Q", ou, em outras palavras, "se P vale então Q vale".

A nova proposição $P \Rightarrow Q$ é equivalente à proposição (não P ou Q). Logo, ela é verdadeira sse P é falsa ou Q é verdadeira.

Lembre-se que em matemática, a palavra "ou" é geralmente inclusiva (no sentindo que a afirmação "A vale ou B vale" *inclui* a possibilidade do que A *e* B valham).

Ademais, a proposição $P \Rightarrow Q$ é equivalente à proposição "não $Q \Rightarrow$ não P", o que representa a base para argumentos/provas *por contradição.* Isto é, às vezes ao fim de provar que $P \Rightarrow Q$, supomos que a afirmação (conclusão, neste cenário) Q seja falsa, e mostramos que a proposição (hipótese, neste cenário) P seja falsa também, uma contradição.

Duas proposições P e Q são equivalentes, e escrevemos $P \iff Q$, se elas têm o mesmo valor lógico, ou seja, são verdadeiras ou falsas no mesmo tempo.
Segue que $P \iff Q$ sse ($P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$).

Em particular, se A e B são dois conjuntos, então
$A = B$ sse $\forall x$ temos que $x \in A \iff x \in B$.

O símbolo $\forall$ significa "para todo". Além disso, o símbolo $\exists$ significa "existe". Eles são chamados de *quantificadores lógicos.*

Axioma. (um axioma é um fato matemático aceito sem prova, um "dogma")
Existe um conjunto $\emptyset$, chamado do conjunto vazio, que não contém nenhum elemento, ou seja, $\forall x$ temos $x \notin \emptyset$.

Definição 3. Sejam A e B dois conjuntos. A união de A e B é o conjunto $A \cup B$ que consiste em todos os elementos que pertencem a A ou a B (ou aos ambos conjuntos), ou seja,

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Portanto $x \in A \cup B$ sse ($x \in A$ ou $x \in B$).

Exemplo 5. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

Proposição 1. *Se A, B, C são conjuntos, então*
$A \cup B = B \cup A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cup \emptyset = A$.

Demonstração. Exercício. □

Definição 4. Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A é um subconjunto de B, e escrevemos $A \subset B$ se todo elemento de A também é um elemento de B, ou seja,
$\forall x$, $x \in A \Rightarrow x \in B$.
Além disso, A é um subconjunto próprio de B se $A \subset B$ e $A \neq B$. Neste caso escrevemos $A \subsetneq B$.

Proposição 2. *Sejam A, B, C conjuntos.*

- *Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.*
- *$A = B$ sse $A \subset B$ e $B \subset A$.*

Demonstração. Exercício. □

Subconjuntos são muitas vezes definidos por uma propriedade específica, ou seja, dado um conjunto A e uma propriedade $P(x)$ sobre um objeto x, existe um conjunto B dos elementos de A que satisfazem a propriedade $P(x)$, ou seja,

$$B = \{x \in A \colon P(x) \text{ vale }\}.$$

Também usamos a notação

$$B = \{x \in A \,|\, P(x) \text{ vale }\}.$$

Exemplo 6. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $P(x)$ a propriedade de x ser par.
Então $B = \{x \in A : P(x) \text{ é verdadeira}\} = \{2, 4\}$.

Definição 5. Sejam A e B dois conjuntos. A interseção de A e B é o conjunto $A \cap B$ de elementos que pertencem a ambos conjuntos, ou seja,

$$A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Portanto, $x \in A \cap B$ sse ($x \in A$ e $x \in B$).

Definição 6. Dois conjuntos A e B são disjuntos se eles não têm nenhum elemento em comum, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$.

Definição 7. Sejam A e B dois conjuntos. A diferença de A e B é o conjunto $A \setminus B$ de elementos em A que não pertencem a B, ou seja,

$$A \setminus B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Portanto, $x \in A \setminus B$ sse ($x \in A$ e $x \notin B$).

Proposição 3. *Sejam A, B, C conjuntos. Então*

- $A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap A = A.$
- $A \cap B = B \cap A.$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
- $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$

Demonstração. Vamos provar a propriedade $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (as outras são exercícios). Vale a seguinte série de equivalências:

$\boxed{x \in A \cap (B \cup C)}$
sse $x \in A$ e $x \in (B \cup C)$
sse $x \in A$ e ($x \in B$ ou $x \in C$)
sse ($x \in A$ e $x \in B$) ou ($x \in A$ e $x \in C$)
sse $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$
sse $\boxed{x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
o que prova a igualdade dos conjuntos $A \cap (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. □

Seja X um conjunto que será visto como "universo" (por exemplo X é o conjunto de números reais).

Neste contexto, se $A \subset X$, denotamos o complemento de A (relativamente a X) por

$$A^c = X \setminus A.$$

Logo, $X = A \cup A^c$ e $A \cap A^c = \emptyset$.

Proposição 4. *(relações de de Morgan) Sejam $A, B \subset X$. Então*
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Demonstração. Para todo x teme-se
$\boxed{x \in (A \cup B)^c}$
sse $x \notin (A \cup B)$
sse ($x \notin A$ e $x \notin B$)
sse ($x \in A^c$ e $x \in B^c$)
sse $\boxed{x \in A^c \cap B^c}$,
mostrando que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Além disso,
$\boxed{x \in (A \cap B)^c}$
sse $x \notin A \cap B$
sse ($x \notin A$ ou $x \notin B$)
sse ($x \in A^c$ ou $x \in B^c$)
sse $\boxed{x \in A^c \cup B^c}$,

mostrando que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. □

Descrevemos outras propriedades do conjunto complementar na seguinte proposição.

Proposição 5. *Sejam A, $B \subset X$. Então*
- $(A^c)^c = A$
- *Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$*
- $A \backslash B = A \cap B^c$.

Demonstração. Exercício. □

Definição 8. Dado um conjunto X, denotamos por
$$\mathcal{P}(X) = 2^X = \{A : A \subset X\}$$
o conjunto de todos os subconjuntos de X.

Definição 9. Dados dois conjuntos A e B, seu produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$, ou seja,
$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Um par ordenado pode ser visto como um conjunto com dois elementos onde existe uma escolha do qual é o primeiro elemento (ou coordenada), neste caso a, e o qual é o segundo elemento (ou coordenada), neste caso b.

Temos que
$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ e } b = b'.$$
Em particular, $(2, 3) \neq (3, 2)$.

Exemplo 7. Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 7\}$ então $A \times B = \{(1, 0), (1, 7), (2, 0), (2, 7)\}$.

2. Funções

Intuitivamente, uma função de A para B é uma regra que permite associar a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor de f em x.

A definição formal é a seguinte.

Definição 10. Uma função é uma tripla $f = (A, B, G)$, que consiste em três conjuntos:
- A (domínio da função),
- B (contradomínio da função), e
- $G \subset A \times B$ (o gráfico da função)

onde G satisfaz a seguinte propriedade:

para todo $x \in A$ existe um único elemento $y \in B$, denotado por $f(x)$, tal que $(x, y) \in G$.

(Esta propriedade é chamada o teste da reta vertical.)

Em vez de $f = (A, B, G)$ usamos a notação mais sugestiva $f \colon A \to B$.

Exemplo 8. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos polígonos no plano e seja $f \colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ a função (regra) que associa a cada polígono $P \in \mathcal{P}$ a sua área, ou seja, $f(P) = $ área de P.

Formalmente, $f = (\mathcal{P}, \mathbb{R}, G)$, onde $G = \{(P, \text{área de } P) \colon P \text{ polígono}\}$.

Exemplo 9. Gostaríamos de definir a função que associa a cada número racional x, seu inverso multiplicativo, $\frac{1}{x}$. Temos que excluir $x = 0$ do domínio, então $f \colon \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Definição 11. Uma função $f : A \to B$ é injetiva se entradas diferentes têm valores diferentes, ou seja, se $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Equivalentemente, $f : A \to B$ é injetiva se dados $x_1, x_2 \in A$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exemplo 10. O exemplo mais simples de uma função injetiva é a inclusão. Se $A \subset B$, definimos $i : A \to B$ por

$$i(x) = x.$$

Então claramente i é injetiva.

Outros exemplos: qualquer função linear, por exemplo

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = 7x + 3.$$

De fato, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $7x_1+3 = 7x_2+3$, logo $7x_1 = 7x_2$, ou seja, $x_1 = x_2$, mostrando a injetividade de f.

Exemplo 11. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2$$

não é injetiva. De fato, $7 \neq -7$ mas $f(7) = f(-7) = 49$.

Definição 12. Uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva se todo elemento do contradomínio é um valor, ou seja, se para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 12. O exemplo mais simples de uma função sobrejetiva é uma projeção. De fato, dados dois conjuntos A e B, sejam

$$\pi_1 : A \times B \to A, \quad \pi_1(x, y) = x$$

e

$$\pi_2 : A \times B \to B, \quad \pi_2(x, y) = y$$

as projeções na primeira e respectivamente na segunda coordenada.

Dado $x \in A$, para qualquer $y \in B$ temos que $(x, y) \in A \times B$ e $\pi(x, y) = x$, logo π_1 é sobrejetiva. Similarmente para π_2.

Um outro exemplo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 7x + 3.$$

Claramente, se $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \frac{y-3}{7}$ tal que $f(x) = y$, então f é sobrejetiva.

Exemplo 13. A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva.

De fato, $f(x) = x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, então nenhum $y \in \mathbb{Q}$ com $y < 0$ é um valor de f, ou seja, se $y \in \mathbb{Q}$, $y < 0$, não existe nenhum $x \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = y$.

Definição 13. Uma função $f : A \to B$ é bijetiva se ela é tanto injetiva quanto sobrejetiva.

Exemplo 14. A função linear $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$,

$$f(x) = 7x + 3$$

é bijetiva, pois já mostramos que ela é injetiva e sobrejetiva.

Definição 14. Uma função $f : A \to B$ é bijetiva (ou uma bijeção) quando é injetiva e sobrejetiva.

Exemplo 15. A função identidade $id : A \to A$, $id(x) = x$ é claramente bijetiva.

A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 7x + 3$ é bijetiva.

Exemplo 16. A função $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ não é sobrejetiva, então não é bijetiva.

A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$ não é injetiva, então não é bijetiva, onde $\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$.

A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = x^2$ não é bijetiva (nem injetiva, nem sobrejetiva).

2.1. **A imagem de um conjunto.** Sejam $f : A \to B$ uma função e $X \subset A$ um subconjunto. Definimos a imagem do conjunto X pela função f como sendo o conjunto de valores de f em pontos de X, ou seja,

$$\begin{aligned} f(X) &= \{f(x) : x \in X\} \\ &= \{y \in B : \text{ existe } x \in X, y = f(x)\}\,. \end{aligned}$$

Claramente $f : A \to B$ é sobrejetiva sse $f(A) = B$.

Proposição 6. *Sejam $f : A \to B$ e $X_1, X_2 \subset A$. Então*
(i) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$,
(ii) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$,
(iii) $X_1 \subset X_2 \Rightarrow f(X_1) \subset f(X_2)$,
(iv) $f(\emptyset) = \emptyset$.

Demonstração. (i) Se $y \in f(X_1 \cup X_2)$ então existe $x \in X_1 \cup X_2$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in X_1 \cup X_2$, tem-se
$x \in X_1$, e neste caso $y = f(x) \in f(X_1)$,
ou $x \in X_2$, e neste caso $y = f(x) \in f(X_2)$.

Logo, $y = f(x)$ pertence a $f(X_1)$ ou a $f(X_2)$, então $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.

Reciprocamente, seja $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Então $y \in f(X_1)$ ou $y \in f(X_2)$.

No primeiro caso, existe $x_1 \in X_1$ tal que $y = f(x_1) \in f(X_1)$.

No segundo caso, existe $x_2 \in X_2$ tal que $y = f(x_2) \in f(X_2)$.

De qualquer forma, $y \in f(X_1)$ ou $y \in f(X_2)$, então $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.
Concluímos que $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
Deixemos as provas das outras afirmações como exercício. $\square$

Observação: A segunda afirmação da proposição anterior afirma apenas que

$$f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2).$$

A inclusão poderia ser estrita, ou seja, em geral,

$$f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2).$$

De fato, se $f : A \to B$ não é injetiva, existem $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

Sejam $X_1 = \{x_1\}$ e $X_2 = \{x_2\}$.
Portanto $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $f(\emptyset) = \emptyset$ mas $f(X_1) = \{f(x_1)\} = \{y\}$ e $f(X_2) = \{f(x_2)\} = \{y\}$.
Então $f(X_1) \cap f(X_2) = \{y\} \neq \emptyset$.
Se, por outro lado, f é injetiva, a igualdade vale.

Proposição 7. *Sejam $f : A \to B$ e $X_1, X_2 \subset A$. Se f é injetiva então*

$$f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2).$$

Demonstração. Se $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$ então $y \in f(X_1)$ e $y \in f(X_2)$. Logo, existem $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$ t.q. $y = f(x_1)$ e $y = f(x_2)$. Portanto $f(x_1) = f(x_2)$, mas como f é injetiva, temos $x_1 = x_2$.

Por outro lado, $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, e como $x_1 = x_2$, concluímos que $x_1 = x_2 \in X_1 \cap X_2$, logo $y = f(x_1) = f(x_2) \in f(X_1 \cap X_2)$, ou seja, $f(X_1) \cap f(X_2) \subset f(X_1 \cap X_2)$. $\square$