LISTA 6 (OPCIONAL): A FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Exercício 1. (Lema de cobertura do tipo Vitali) Seja $B_1, B_2, \dots, B_n$ uma coleção finita de bolas abertas em $\mathbb{R}^d$ que *não* são necessariamente disjuntas. Então existe uma subcoleção $B_{m_1}, B_{m_2}, \dots, B_{m_k}$ de bolas *disjuntas*, tal que

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset \bigcup_{j=1}^{k} 3\, B_{m_j},$$

onde para uma bola B, denotamos por $3\,B$ a bola cujo centro coincide com o centro de B e cujo raio é 3 vezes o raio de B. Em particular, pela subaditividade finita, temos:

$$\lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) \le 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{m_j}).$$

Dica: use um algoritmo "ganancioso" para selecionar bolas de raio máximo que sejam disjuntas das bolas selecionadas anteriormente.

O contexto para os problemas a seguir é o seguinte. Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ o espaço de medida em $\mathbb{R}$ onde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ e λ denota a medida de Lebesgue. Seja μ uma medida boreliana *finita* em $\mathbb{R}$ e denote por F_μ a sua função de distribuição acumulada.

O teorema fundamental do cálculo parte II (TFC II), o teorema de extensão de Hahn-Kolmogorov e o teorema de decomposição de Lebesgue-Radon-Nikodym (L-R-N) serão úteis na solução desses problemas.

Exercício 2. Prove que F_μ é contínua à direita e que $\lim_{x \to -\infty} F_\mu(x) = 0$.

Exercício 3. Prove que F_μ é contínua no ponto a se e somente se $\mu(\{a\}) = 0$. Depois conclua que μ é uma medida contínua se e somente se a sua função de distribuição F_μ é contínua.

Dica: use o teorema de convergência monótona para conjuntos.

Exercício 4. (a) Prove que $\mu \ll \lambda$ se e somente se F_μ é uma função absolutamente contínua.

(b) Supondo que $\mu \ll \lambda$, e como sabemos que uma função absolutamente contínua é diferenciável em quase todo ponto, é natural perguntar qual é a derivada de F_μ.

Prove que F'_μ é exatamente a derivada de Radon-Nikodym de μ com respeito a λ:

$$\frac{dF_\mu}{dx} = \frac{d\mu}{d\lambda} \quad \text{em q.t.p.}$$

Em outras palavras, se $\mu = \lambda_f$, prove que $F'_\mu(x) = f(x)$ para λ-q.t.p. x.

Dica para parte (b): inicialmente, perceba que o que você realmente tem que provar é que

$$\mu(E) = \int_E F'_\mu(x)\, d\lambda(x)$$

é valido para todo conjunto boreleano E.

Para tanto, verifique que a igualdade acima é válida: quando E é um intervalo (é quando você precisa o TFC II); depois quando E é um conjunto elementar; e finalmente quando E é o complemento de um conjunto elementar. Em outras palavras, mostra que isso vale para a álgebra booleana de todos os conjuntos elementares e os seus complementares.
Termine usando a unicidade do teorema de extensão de Hahn-Kolmogorov.

Exercício 5. Prove que $\mu \perp \lambda$ se e somente se $F'_\mu(x) = 0$ para λ-q.t.p. $x \in \mathbb{R}$.

Dica: inicialmente prove a direção " $\Longrightarrow$ ". Depois use essa implicação combinada com o teorema de L-R-N (aplicado a μ) para provar " $\Longleftarrow$ ".