AULA 19: OS TEOREMAS DE CONVERGÊNCIA

Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis sem sinais e f uma outra função mensurável sem sinal.

Suponha que

$$f_n \to f \quad \text{em q.t.p.}$$

Questão. Quando podemos concluir que

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu \quad ?$$

Ou seja, quando podemos trocar o limite com a integral?

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \stackrel{?}{=} \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu \, .$$

Uma situação especial, similar a da integral é apresentada na seguinte proposição.

Proposição 1 (convergência uniforme em um espaço de medida finita)**.** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida finita, i.e, $\mu(X) < \infty$. Sejam $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis sem sinais ou uma sequência de funções absolutamente integráveis e f uma outra função real.*

Se $f_n \to f$ uniformemente então

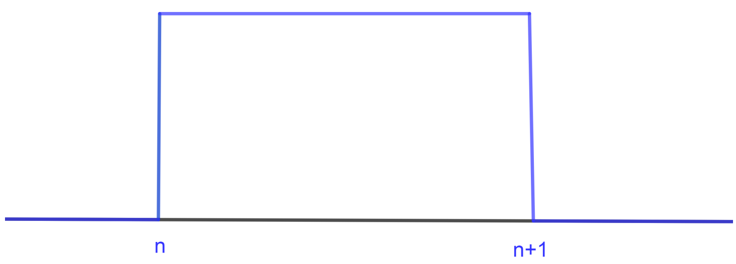
$$\int_X f_n \to \int_X f.$$

Demonstração. Exercício. □

O resultado anterior vale sob uma hipótese muito restritiva, a de convergência uniforme. Procuramos tais resultados de convergência da integral sob hipóteses sem mais gerais. Mas antes de enunciar estes resultados, notamos que há casos em que *não* podemos trocar o limite e a integral. Descrevemos três exemplos simples mas típicos de obstruções a essa propriedade, a saber, exemplos de funções "bump" em movimento.

Exemplo 1. Considere o espaço $X = \mathbb{R}$ munido com a medida $\mu = \mathrm{m}$, a medida de Lebesgue.

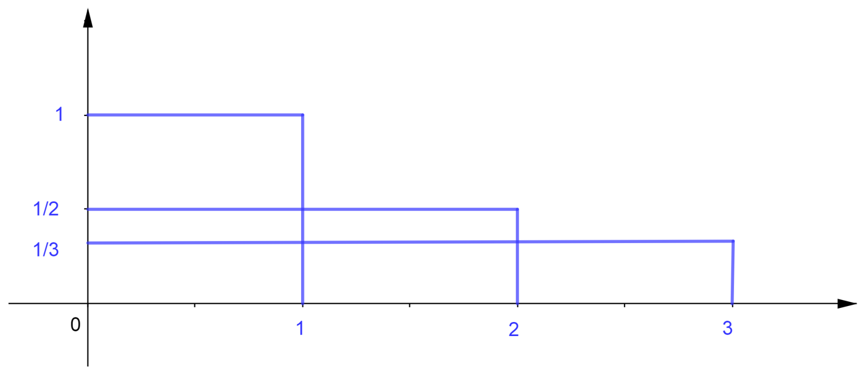
Seja $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$ para todo $n \geq 1$.



Então $f_n \to 0$ em todo ponto, mas

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mathrm{m} = \mathrm{m}\left([n, n+1]\right) = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mathrm{m} \, .$$

Exemplo 2. Considere o espaço $X = \mathbb{R}$ munido com a medida $\mu = \mathrm{m}$ de Lebesgue.
Para todo $n \geq 1$, seja $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$.

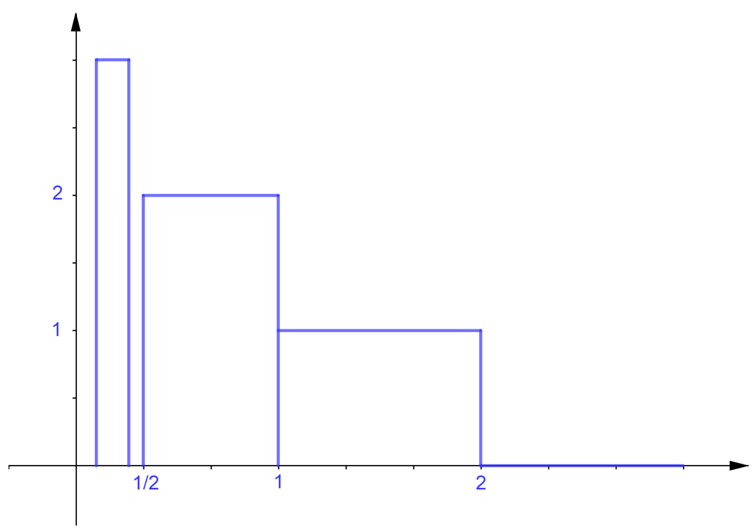


Como $|f_n| \leq \frac{1}{n} \to 0$, temos que $f_n \to 0$ uniformemente.
Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mathrm{m} = \frac{1}{n}\, m([0,n]) = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mathrm{m},$$

mostrando também que a hipótese $\mu(X) < \infty$ da Proposição 1 é necessária.

Exemplo 3. Considere o espaço $X = [0,2]$ munido com a medida $\mu = \mathrm{m}$ de Lebesgue restrita ao intervalo $[0,2]$. Para todo $n \geq 1$, seja $f_n := n\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$.



Então, $f_n \to 0$ em todo ponto, mas

$$\int_{[0,2]} f_n \, d\mathrm{m} = n\,\mathrm{m}\left(\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]\right) = 1 \not\to 0 = \int_{[0,2]} 0 \, d\mathrm{m}\,.$$

Teorema 4 (de convergência monótona)**.** *Seja* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de medida e seja* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência não decrescente de funções mensuráveis sem sinais, i.e.*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Demonstração. A prova deste resultado é similar a do caso da integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$. Ela usa um argumento de tempos de parada para conseguir algum comportamento uniforme da sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$. Esboçamos o argumento abaixo.

Seja

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)\,.$$

Então, f é mensurável.

Pela monotonicidade da integral, já que $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, a sequência $\left\{\int_X f_n \, d\mu\right\}_{n\geq 1}$ é não decrescente, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ existe e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

Resta provar a desigualdade aposta:

$$\int_X f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Como

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X s \, d\mu \colon 0 \leq s \leq f,\ s \text{ é simples e finita} \right\},$$

basta provar que dada uma função simples e finita s tal que $0 \leq s \leq f$, temos que

$$\int_X s \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Então é suficiente provar que

$$(1-\epsilon) \int_X s \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Escrevemos

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathbf{1}_{E_i},$$

onde para todo $i \in [k]$, $c_i \in (0, \infty)$ e $E_i \in \mathcal{B}$ são conjuntos disjuntos.

Fixe $j \in [k]$. Se $x \in E_j$ então $s(x) = c_j$, logo

$$(1-\epsilon)c_j = (1-\epsilon)s(x) < f(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x).$$

Portanto, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$(1-\epsilon)c_j < f_{n_x}(x)\,. \tag{1}$$

Definimos, para todo $n \geq 1$,

$$E_{j,n} := \{x \in E_j \colon (1-\epsilon)c_j < f_n(x)\}\,.$$

Então $E_{j,n}$ é mensurável (já que f_n e E_j são mensuráveis) e claramente, usando (1) e a monotonicidade da sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$, segue que

$$E_{j,n} \nearrow E_j \text{ quando } n \to \infty.$$

Pelo teorema de convergência monótona para conjuntos, segue que

$$\mu(E_{j,n}) \to \mu(E_j) \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Para todo $n \geq 1$ definimos

$$s_n := \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon) c_j \, \mathbf{1}_{E_{j,n}} \, .$$

Não é difícil perceber que para todo $x \in X$, tem-se

$$s_n(x) \leq f_n(x).$$

Então,

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_X s_n \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon) c_j \, \mu(E_{j,n}).$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon) c_j \, \mu(E_j) = (1-\epsilon) \int_X s \, d\mu,$$

finalizando a prova do teorema. □

Consequências do Teorema de convergência monótona

Teorema 5 (de Tonelli)**.** *Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n \colon X \to [0, \infty]$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é mensurável e*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Evidentemente, a sequência

$$s_n := f_1 + \ldots + f_n \; , \; n \geq 1$$

de somas parciais satisfaz as hipóteses do Teorema de convergência monótona (já que $f_n \geq 0$).

Portanto,

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} s_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \, d\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

□

Lema 1 (de Borel-Cantelli)**.** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e seja $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ uma sequência de conjuntos mensuráveis. Suponha que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Então, μ-q.t.p. $x \in X$ pertence apenas a um número finito *de conjuntos E_n, ou seja, para μ-q.t.p. $x \in X$,*

$$\#\{n \in \mathbb{N} \colon x \in E_n\} < \infty.$$

Demonstração. Para todo $n \geq 1$, seja $\mathbf{1}_{E_n}$ a função indicadora do conjunto mensurável E_n. Note que, dado $x \in X$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x)$$

conta exatamente o número de conjuntos E_n onde x pertence, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x) = \#\{n \in \mathbb{N} : x \in E_n\}.$$

Pelo Teorema de Tonelli,

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n} \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Portanto, pelo Teorema 1 (5) da aula 22,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n} < \infty \quad \mu\text{-q.t.p.},$$

assim mostrando que

$$\#\{n \in \mathbb{N} \colon x \in E_n\} < \infty$$

para μ-q.t.p. $x \in X$. $\square$

Lema 2 (de Fatou)**.** *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n \colon X \to [0, \infty]$ (uma sequência não necessariamente monótona). Então,*

$$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu \;\leq\; \liminf_{n \to \infty} \int_X f \, d\mu$$

Demonstração. Seja

$$g := \liminf_{n \to \infty} g_n = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} f_k \,.$$

Para todo $n \geq 1$ denote por $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$. Então g_n é mensurável e

$$g_n \nearrow g \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Pelo teorema de convergência monótona, temos que

$$\int_X g_n \, d\mu \;\to\; \int_X g \, d\mu \quad \text{ quando } n \to \infty$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu &= \int_X g \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X g_n \, d\mu \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_X \inf_{k \geq n} f_k \, d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} \int_X f_k \, d\mu \\ &= \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} \int_X f_k \, d\mu, \end{aligned}$$

onde a desigualdade acima é válida por causa da monotonicidade da integral.

De fato,

$$\inf_{k \geq n} f_n \;\leq\; f_k \text{ para todo } k \geq n$$

então

$$\int_X \inf_{k \geq n} f_n \, d\mu \;\leq\; \int_X f_k \, d\mu \text{ para todo } k \geq n,$$

logo

$$\int_X \inf_{k\geq n} f_n \, d\mu \;\leq\; \inf_{k\geq n} \int_X f_k \, d\mu.$$

□

Observação 1. A desigualdade no lema de Fatou pode ser estrita. Isso acontece por exemplo com alguns tipos de sequências de funções bump em movimento.

Para todo $n \geq 1$, seja $f_n := n \, \mathbf{1}_{(0,\frac{1}{n}]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Então $f_n \to 0$ em todo ponto e

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mu = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu.$$

Um outro exemplo é a sequência

$$f_n := \frac{1}{n} \, \mathbf{1}_{[0,n]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

de funções bump baixas e longas (em vez de altas e curtas).

Temos que $f_n \to 0$ uniformimente, enquanto $\int f_n = 1 \to 1 > 0 = \int 0$.

Observação 2. A condição $f_n \geq 0$ no lema de Fatou (ou, pelo menos, uma outra cota inferior apropriada) é necessária.

Por exemplo, consideremos, para todo $n \geq 1$,

$$f_n := -\frac{1}{n} \, \mathbf{1}_{[n,2n]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

temos que $f_n \to 0$ uniformimente, logo

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mu = 0,$$

enquanto

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = -1 \to -1 < 0,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu > \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu.$$

Teorema 6 (de convergência dominada)**.** *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis, $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, e $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma outra função tal que*

$$f_n \to f \text{ em } \mu - q.t.p.$$

Suponha que exista $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $\mu - q.t.p.$ e para todo $n \geq 1$ (ou seja, suponha que a sequência $\{f_n\}_{n\leq 1}$ seja dominada por uma função absolutamente integrável).
Então, $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e

$$\int_X f_n \, d\mu \;\to\; \int_X f \, d\mu.$$

Demonstração. Como $f_n \to f$ e $|f| \leq g \;\, \mu - q.t.p.$ para todo $n \geq 1$, seque que $|f| \leq g \;\, \mu - q.t.p.$
Logo,

$$\int_X |f| \, d\mu \;\leq\; \int_X g \, d\mu \;<\infty,$$

mostrando que $f \in L^1(X, B, \mu)$.

Como $|f_n| \leq g \ \mu - q.t.p.$, temos que

$$-g \leq f_n \leq g \ \mu - q.t.p.,$$

então

$$\begin{cases} f_n + g \geq 0 & \mu - q.t.p. \\ g - f_n \geq 0 & \mu - q.t.p. \end{cases}$$

Portanto, podemos aplicar o lema de Fatou é aplicável às sequências $\{f_n+g\}_{n\geq 1}$ e $\{g-f_n\}_{n\geq 1}$.

- $$\int_X \liminf_{n\to\infty}(f_n + g)\, d\mu \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \int_X (f_n + g)\, d\mu.$$

Como

$$\int_X \liminf_{n\to\infty}(f_n + g)\, d\mu = \int_X \liminf_{n\to n} f_n\, d\mu + \int_X g,$$
$$\liminf_{n\to\infty} \int_X (f_n + g)\, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \ + \int_X g\, d\mu$$

e $\int_X g\, d\mu \in \mathbb{R}$, segue que

(2)
$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

- $$\int_X \liminf_{n\to\infty}(g - f_n)\, d\mu \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n)\, d\mu.$$

Como

$$\int_X \liminf_{n\to\infty}(g - f_n)\, d\mu \ = \int_X g\, d\mu \ + \int_X \liminf_{n\to\infty}(-f_n)\, d\mu \ = \int_X g\, d\mu \ - \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\, d\mu,$$
$$\liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n)\, d\mu \ = \int_X g\, d\mu \ + \liminf_{n\to\infty} \int_X (-f_n)\, d\mu \ = \int_X g\, d\mu \ - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu,$$

segue que

(3)
$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\, d\mu \ \geq \ \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Combinando (2) e (3), tem-se

$$\begin{aligned}\int_X f\, d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \ &\leq \ \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \\ &\leq \ \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \ \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\, d\mu \ = \int_X f\, d\mu,\end{aligned}$$

logo $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$ existe e é igual a $\int_X f\, d\mu$. □

Corolário 1. Dada uma sequência de funções mensuráveis $\{f_n \colon X \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ tal que $f_n \to f$ em μ-q.t.p. e $|f_n| \leq g$ para todo $n \geq 1$ e para alguma função $g \in L^1(X)$, segue que

$$f_n \to f \text{ em } L^1.$$

Demonstração. Como $|f_n| \leq g$ e $g \in L^1(X)$, tem-se

$$\int_X |f_n| \ d\mu \ \leq \int_X g\, d\mu < \infty,$$

logo $f_n \in L^1(X)$.

Já que $f_n \to f$ em μ-q.t.p.,

$$|f_n - f| \to 0 \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

Além disso,

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + |f| \ \ \mu - q.t.p.$$

e

$$\int_X (g + |f|)\, d\mu = \int_X g\, d\mu + \int_X |f|\, d\mu < \infty,$$

portanto $g + |f| \in L^1(X)$.

Pelo teorema de convergência dominada aplicada à sequência $\{|f_n - f|\}_{n\geq 1}$, segue que

$$\|f_n - f\|_1 = \int_X |f_n - f|\, d\mu \to \int_X 0\, d\mu = 0,$$

mostrando que $f_n \to f$ com respeito a norma um (a norma L^1).

□

Exercício 1. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{nx}\right)\, dx.$$

Solução. Para todo $n \geq 1$, definimos $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} n\, x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então f_n é contínua em $[0,1]$, logo é Rieman e Lebesgue integrável em $[0,1]$. Além disso,

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_{[0,1]} f_n\, d\mathrm{m}.$$

Se $x \neq 0$, então

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{nx})}{\frac{1}{nx}} \cdot x \to 1 \cdot x = x \quad \text{quando } n \to \infty\,.$$

Seja $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Note que $f \in L^1\left([0,1], \mathrm{m}\right)$, pois

$$\int_{[0,1]} |f|\, d\mathrm{m} = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} < \infty.$$

Além disso, já que $|\frac{\operatorname{sen} t}{t}| \leq 1$ para todo $t \neq 0$, temos que $|f_n(x)| \leq x$ para todo $x \neq 0$. Então o teorema de convergência dominada é aplicável e temos que

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_{[0,1]} f_n\, d\mathrm{m} \to \int_{[0,1]} x\, d\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,.$$

□