SOLUÇÕES DO SEGUNDO EXAME

Número total de pontos: 80.

Exercício 1. (15 pontos) Sejam K um corpo ordenado e $x, y \in K$.

(i) Prove que se $x > 0$ e $y < 0$ então $x \cdot y < 0$.

(ii) Prove que se $x > 0$ então $x^{-1} > 0$.

(iii) Prove que se $0 < x \leq y$ então $y^{-1} \leq x^{-1}$.

Demonstração. (i) Como $y < 0$, temos $-y > 0$. Além disso, como $x > 0$,

$$x \cdot (-y) > 0.$$

Mas $x \cdot (-y) = -x \cdot y$, então $-x \cdot y > 0$, e daí, $x \cdot y < 0$.

(ii) Temos que $x \cdot x^{-1} = 1$ e $1 > 0$, logo $x \cdot x^{-1} > 0$, portanto $x^{-1} > 0$.
Caso contrário, se $x^{-1} < 0$, como $x > 0$, usando (i) teríamos que $x \cdot x^{-1} < 0$, contradição.

(iii) Como $0 < x \leq y$, usando (ii) temos que $x^{-1} > 0$ e $y^{-1} > 0$.
Logo,

$$\begin{aligned} x \leq y &\Rightarrow x \cdot x^{-1} \leq y \cdot x^{-1} \\ &\Rightarrow 1 \leq y \cdot x^{-1} \\ &\Rightarrow y^{-1} \leq y^{-1} \cdot y \cdot x^{-1} \\ &\Rightarrow y^{-1} \leq 1 \cdot x^{-1} \\ &\Rightarrow y^{-1} \leq x^{-1}. \end{aligned}$$

□

Exercício 2. (10 pontos) (i) Defina os conceitos de supremo e ínfimo de um conjunto de números reais.

(ii) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois conjuntos de números reais tais que

$$a \leq b \quad \text{para todo } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Prove que $\sup A \leq \inf B$.

Demonstração. (i) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio.
O supremo de X é a menor cota superior de X, ou seja, $b = \sup X$ se

$$b \geq x \quad \text{para todo } x \in X,$$

$$\text{e se } c \geq x \quad \text{para todo } x \in X, \text{ então } c \geq b.$$

O ínfimo de X é a maior cota inferior de X, ou seja, $a = \inf X$ se

$$a \leq x \quad \text{para todo } x \in X,$$

$$\text{e se } c \leq x \quad \text{para todo } x \in X, \text{ então } c \leq a.$$

(ii) Seja $b \in B$ um elemento qualquer. Como $a \leq b$ para todo $a \in A$, segue que b é uma cota superior de A. Logo, $\sup A \leq b$.
Como $b \in B$ é arbitrário, segue que $\sup A$ é uma cota inferior de B, logo $\sup A \leq \inf B$. □

Exercício 3. (25 pontos) (i) Prove que não existe nenhum número *racional* r tal que $r^2 = 7$.

(ii) Considere o conjunto de números reais

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 7 \right\}.$$

Prove que A possui supremo em $\mathbb{R}$.

(iii) Seja $b = \sup A$. Prove que $b^2 = 7$.

Demonstração. (i) Suponha por contradição que exista $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 7$.

Seja $r = \frac{m}{n}$ uma representação de r como fração completamente reduzida, ou seja, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e m, n não têm divisores comuns (além de ± 1). Então,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = r^2 = 7$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 7$$

$$\Rightarrow m^2 = 7n^2$$

$$\Rightarrow 7 \mid m^2.$$

Como 7 é um número primo, segue que $7 \mid m$, ou seja, $m = 7k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Então

$$m^2 = 7n^2$$

$$\Rightarrow (7k)^2 = 7n^2$$

$$\Rightarrow 49k^2 = 7n^2$$

$$\Rightarrow 7k^2 = n^2$$

$$\Rightarrow 7 \mid n^2 \Rightarrow 7 \mid n.$$

Então 7 é um divisor comum de m e n, uma contradição.

(ii) O conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 7\}$$

é limitado superiormente por exemplo por 3 (já que $3^2 = 9 > 7$). Além disso, $1^2 < 7 \Rightarrow 1 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$. Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, A possui supremo.

(iii) Seja $b = \sup A$. Temos três possibilidades: $b^2 < 7$, $b^2 > 7$ ou $b^2 = 7$. Vamos provar que as primeiras duas não são possíveis, o que implica a conclusão de que $b^2 = 7$.

- Se $b^2 < 7$ vamos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $(b + \varepsilon)^2 < 7$.

De fato, se $\varepsilon \in (0, 1)$, então

$$\begin{aligned} (b + \varepsilon)^2 &= b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &< b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon \\ &= b^2 + \varepsilon(2b + 1) < 7 \end{aligned}$$

desde que

$$\varepsilon < \frac{7 - b^2}{2b + 1},$$

o que é possível já que $b^2 < 7$, então $7 - b^2 > 0$, então $\frac{7-b^2}{2b+1} > 0$.

Portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(b + \varepsilon)^2 < 7,$$

o que implica $b + \varepsilon \in A$.

Mas $b + \varepsilon > b$, uma contradição: $b = \sup A$ então b deve ser uma cota superior de A.

- Se $b^2 > 7$ vamos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $(b-\varepsilon)^2 > 7$.

De fato, para $\varepsilon > 0$,
$$(b-\varepsilon)^2 = b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \geq b^2 - 2b\varepsilon > 7$$
desde que
$$\frac{b^2-7}{2b} > \varepsilon,$$
o que é possível já que $b^2 > 7$, então $\frac{b^2-7}{2b} > 0$.

Como $(b-\varepsilon)^2 > 7$ e $x^2 < 7$ para todo $x \in A$, segue que $b-\varepsilon$ é uma cota superior de A, uma contradição: $b - \varepsilon < b$ enquanto $b = \sup A$ é a *menor* cota superior de A. □

Exercício 4. (15 pontos) (i) Defina o conceito de limite para uma sequência de números reais.

(ii) Defina o conceito de sequência monótona e enuncie o teorema (critério) sobre a existência do limite para uma sequência monótona.

Demonstração. (i) Seja $(x_n)_n$ uma sequência de números reais. Temos
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que
$$\text{se } n \geq n_\varepsilon \text{ então } |x_n - a| < \varepsilon.$$

(ii) Toda sequência monótona e limitada é convergente.
Mais precisamente, se $(x_n)_n$ é não decrescente ($x_n \leq x_{n+1}\ \forall n$) e limitada superiormente, então
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$
Similarmente, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não crescente ($x_n \geq x_{n+1}\ \forall n$) e limitada inferiormente, então
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$
□

Exercício 5. (15 pontos) Definimos por recorrência (ou indução) a sequência
$$x_1 = 2,$$
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

(i) Prove que se $a \geq 1$ então $\sqrt{a} \geq 1$.

(ii) Use (i) pra provar que $x_n \geq 1$ para todo $n \geq 1$.

(iii) Prove que a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é não crescente.

(iv) Conclua que a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é convergente e determine seu limite.

Demonstração. (i) Se $\sqrt{a} \leq 1$ então $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} \leq 1\cdot 1$, logo $a \leq 1$, contradição. Portanto $\sqrt{a} \geq 1$.

(ii) $x_1 = 2 > 1$.
Suponha que $x_n \geq 1$. Então, usando (i), $x_{n+1} = \sqrt{x_n} \geq 1$.
Por indução, $x_n \geq 1\ \forall n \geq 1$.

(iii) Vamos provar que $x_{n+1} \leq x_n\ \forall n$.
De fato, $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ e $\sqrt{x_n} \leq x_n \Leftrightarrow x_n \leq x_n^2 \Leftrightarrow 1 \leq x_n$, o que vale usando (ii).

(iv) A sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ é não crescente e limitada inferiormente por 1. Logo ela é convergente.

Seja
$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$
Como $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$, temos que
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a},$$
logo $a = \sqrt{a}$, e daí $a = 0$ ou $a = 1$.

Como $x_n \geq 1$ $\forall n$, tem-se $a \geq 1$, então a não pode ser 0. Portanto, $a = 1$. $\square$