CAPÍTULO 2. O SISTEMA DE NÚMEROS NATURAIS

Sumário

1. Axiomas de Peano 1

Intuitivamente, os números naturais são: 0, o que vem a seguir de 0 chamado 1, depois de 1 a seguir é 2, ... e assim por diante ...
Formalmente, o conjunto de números naturais é definido pelos axiomas de Peano.

1. Axiomas de Peano

Um conjunto $\mathbb{N}$, junto com uma função $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (chamada sucessor) representa um sistema de números naturais se as seguintes propriedades (axiomas) são satisfeitas:

P1. Existe um único elemento, denotado por 0, que não é o sucessor de nenhum outro elemento, ou seja,
$$s(n) \neq 0 \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N},$$
$$\text{e para todo } \ m \neq 0 \ \text{ existe } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ s(n) = m.$$

P2. s é injetiva, ou seja, se $s(m) = s(n)$ então $m = n$. Em outras palavras, dois números que têm o mesmo sucessor são iguais.

P3. (Princípio da indução) Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que:
- $0 \in X$,
- se para todo $n \in X$ tem-se também que $s(n) \in X$

então $X = \mathbb{N}$.

Lema 1.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $s(n) \neq n$, ou seja, todo número natural é diferente do seu sucessor.*

Demonstração. Seja
$$X = \{n \in \mathbb{N} : s(n) \neq n\}.$$
- $0 \in X$ já que 0 não é o sucessor de nenhum número, e em particular, $s(0) \neq 0$.
- Suponha que $n \in X$, ou seja, $s(n) \neq n$.
  Como S é injetiva, segue que
  $$s(s(n)) \neq s(n),$$
  portanto $s(n) \in X$.

Pelo princípio da indução, $X = \mathbb{N}$, ou seja, $s(n) \neq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Observação 1.1. O princípio da indução pode ser enunciado da seguinte maneira equivalente.
Seja $P(n)$ uma propriedade que se refere aos números naturais. Suponha que as seguintes afirmações sejam válidas:
- Base de indução (ou 1º passo)
  $P(0)$ é verdadeira
- Passo indutivo
  Suponha que $P(n)$ seja verdadeira (hipótese de indução).
  A partir dessa hipótese, prova-se que $P(s(n))$ seja verdadeira.

Então pelo princípio da indução, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, se definimos

$$X = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é verdadeira}\},$$

tem-se:

- $0 \in X$
- Se $n \in X$ então $s(n) \in X$.

Logo, pelo princípio da indução, $X = \mathbb{N}$, ou seja, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.2. Prove que se $x \neq 1$,

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, prove que a propriedade/fórmula $P(n)$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Usamos o princípio da indução.

- 1^{o} passo, ou seja, o caso $n = 0$.

A propriedade $P(0)$ significa $1 = \dfrac{x-1}{x-1}$, que é claramente válida se $x \neq 1$.

- Passo indutivo.

Suponha que $P(n)$ valha, ou seja

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Vamos provar que $P(n+1)$ vale também. Tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} \quad \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + \frac{x^{n+1}(x-1)}{x - 1} \\
&= \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1} \\
&= \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1},
\end{aligned}$$

provando que $P(n+1)$ é válida.

Pelo princípio da indução, a fórmula $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Observação 1.2. Pelo princípio da indução, dada uma propriedade $P(n)$ que se refere aos números naturais, para provar que ela seja verdadeira para todo $n \geq 7$ basta provar as seguintes afirmações:

1) Base de indução: $P(7)$ é verdadeira.

2) Passo indutivo: Suponha que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \geq 7$. Então $P(s(n))$ é verdadeira.

De fato, podemos definir o conjunto

$$X = \{m \in \mathbb{N} : P(7+m) \text{ é verdadeira}\}$$

Temos que:

- $0 \in X$ já que $P(7)$ é verdadeira.
- Se $m \in X$, então para $n := 7 + m$ temos que $P(n) = P(7+m)$ é verdadeira. Então $P(n+1) = P(7+m+1)$ é verdadeira, ou seja, $m + 1 \in X$.

Logo, $X = \mathbb{N}$, ou seja, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 7$.

Claramente 7 pode ser substituído por qualquer outro número.