## AULA 13: FUNÇÕES MENSURÁVEIS À LEBESGUE (SEM SINAL)

Poderíamos pensar em uma função mensurável de duas maneiras: como uma função bem aproximável por funções simples ou, por analogia com o conceito de função contínua em topologia, como uma função para a qual a pré-imagem de qualquer conjunto relevante é mensurável.

Definimos o conceito de função mensurável à Lebesgue pela primeira maneira e depois provamos a equivalência entre essas abordagens.

**Definição 1.** Uma função  $f: \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$  é mensurável à Lebesgue se f for o limite pontual de uma sequência de funções simples sem sinais, ou seja, se existir uma sequência  $\{s_n\}_{n\geq 1}$  de funções simples sem sinais tal que

$$s_n(x) \to f(x)$$
 para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Vamos introduzir algumas notações úteis.

**Notação.** Dada uma função  $f: \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]$  e um subconjunto  $A \subset [-\infty, \infty]$ , denotamos por

$$\{f \in A\} := \{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$$

a preimagem de A pela função f.

Da mesma maneira, dado  $\lambda \in [-\infty, \infty]$ , seja

$$\{f > \lambda\} := \{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) > \lambda\} = f^{-1}((\lambda, \infty]).$$

Similarmente podemos definir  $\{f \ge \lambda\}$ ,  $\{f \le \lambda\}$  e  $\{f < \lambda\}$ .

Essas notações têm um sabor probabilístico, onde  $\{f \in A\}$  pode ser pensado como o evento que f pertença ao conjunto A.

A seguir caracterizamos a mensurabilidade de uma função sem sinal.

**Teorema 1.** Para uma função  $f: \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ , as seguintes afirmações são equivalentes.

- (1) f é mensurável à Lebesgue, ou seja, existe uma sequência  $\{s_n\}_{n\geq 1}$  de funções simples sem sinais tal que  $s_n(x) \to f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .
- (2) f é o limite em quase todo ponto de uma sequência de funções simples sem sinais, ou seja, existe uma sequência  $\{s_n\}_{n\geq 1}$  de funções simples sem sinais tal que  $s_n(x) \to f(x)$  para quase todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .
- (3) f é o limite de uma sequência não decrescente de funções simples, sem sinais, limitadas, com suportes limitados, ou seja, existe uma sequência

$$0 \le s_1(x) \le \ldots \le s_n(x) \le s_{n+1}(x) \le \ldots$$
 para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ 

tal que, para todo  $n \ge 1$ , a função  $s_n$  é simples, limitada,  $\mathrm{supp}(s_n)$  é limitado e

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x) \quad para \ todo \ \ x \in \mathbb{R}^d.$$

- (4) Para todo  $\lambda \in [0, \infty)$ , o conjunto  $\{f > \lambda\}$  é mensurável à Lebesgue.
- (5) Para todo  $\lambda \in [0, \infty)$ , o conjunto  $\{f \geq \lambda\}$  é mensurável à Lebesgue.
- (6) Para todo  $\lambda \in [0, \infty)$ , o conjunto  $\{f < \lambda\}$  é mensurável à Lebesgue.
- (7) Para todo  $\lambda \in [0, \infty)$ , o conjunto  $\{f \leq \lambda\}$  é mensurável à Lebesgue.
- (8) Para todo intervalo  $I \subset [0,\infty)$ , o conjunto  $\{f \in I\}$  é mensurável à Lebesgue.
- (9) Para todo aberto  $U \subset [0,\infty)$ , o conjunto  $\{f \in U\}$  é mensurável à Lebesgue.
- (10) Para todo fechado  $F \subset [0, \infty)$ , o conjunto  $\{f \in F\}$  é mensurável à Lebesgue.

**Alguns fatos técnicos.** Antes de começar a prova do teorema acima, vamos sujar as mãos, aprendendo alguns segredos de ganha-pão deste negócio.<sup>1</sup>

 $\blacksquare$  É evidente que para dois números reais x e y, temos

$$y \ge x \iff \forall \epsilon > 0, \ y > x - \epsilon \iff \forall m \ge 1, \ y > x - \frac{1}{m}$$
.

Portanto, dados uma função  $f: \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]$  e um número  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tem-se

(1a) 
$$\{f \ge \lambda\} = \bigcap_{m \ge 1} \left\{ f > \lambda - \frac{1}{m} \right\},\,$$

ou seja, o evento  $\{f \geq \lambda\}$ , dado por uma desigualdade estrita pode ser descrito por um processo enumerável envolvendo desigualdades não estritas.

Similarmente, o oposto também vale. Como, evidentemente,

$$y > x \iff \exists \epsilon > 0, \ y \ge x + \epsilon \iff \exists m \ge 1, \ y \ge x + \frac{1}{m},$$

segue que

(1b) 
$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m \ge 1} \left\{ f \ge \lambda + \frac{1}{m} \right\}.$$

Os eventos complementares  $\{f < \lambda\}$  e  $\{f \le \lambda\}$  podem ser caracterizados do mesmo modo (ou, diretamente via as leis de De Morgan).

■ Considere  $\{f_n \colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]\}_{n \geq 1}$  uma sequência de funções, e sejam  $\inf_{n \geq 1} f_n$  e  $\sup_{n \geq 1} f_n$  as funções ínfimo e supremo pontuais, respectivamente. Como para qualquer  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\inf_{n>1} f_n(x) \ge \lambda \iff \forall n \ge 1, f_n(x) \ge \lambda$$

e

$$\sup_{n \ge 1} f_n(x) \le \lambda \iff \forall n \ge 1, f_n(x) \le \lambda$$

tem-se

(2a) 
$$\left\{ \inf_{n \ge 1} f_n \ge \lambda \right\} = \bigcap_{n \ge 1} \left\{ f_n \ge \lambda \right\} \quad e$$

(2b) 
$$\left\{ \sup_{n \ge 1} f_n \le \lambda \right\} = \bigcap_{n \ge 1} \left\{ f_n \le \lambda \right\} .$$

Portanto, usando (??) e as leis de De Morgan, temos

$$\left\{ \sup_{n\geq 1} f_n \geq \lambda \right\} = \bigcap_{m\geq 1} \left\{ \sup_{n\geq 1} f_n > \lambda - \frac{1}{m} \right\} = \bigcap_{m\geq 1} \left\{ \sup_{n\geq 1} f_n \leq \lambda - \frac{1}{m} \right\}^{\complement} 
= \bigcap_{m\geq 1} \left( \bigcap_{n\geq 1} \left\{ f_n \leq \lambda - \frac{1}{m} \right\} \right)^{\complement} = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \left\{ f_n > \lambda - \frac{1}{m} \right\},$$

e outras relações similares.

Suponha que a sequência  $\{f_n\}_{n\geq 1}$  converge pontualmente. Então, como

$$\lim_{n \ge \infty} f_n = \limsup_{n \ge 1} f_n = \inf_{n \ge 1} \sup_{k > n} f_k,$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Pintar um quadro, além de escolher um bom assunto, de ter imaginação e talento, requer também reunir suas ferramentas, saber como diluir e combinar tinta, como preparar a tela e etc. Por enquanto, vamos preparar as tintas.

temos

(3) 
$$\left\{ \lim_{n \to \infty} f_n \ge \lambda \right\} = \left\{ \inf_{n \ge 1} \sup_{k \ge n} f_k \ge \lambda \right\} = \bigcap_{n \ge 1} \left\{ \sup_{k \ge n} f_k \ge \lambda \right\}$$
$$= \bigcap_{n \ge 1} \bigcap_{m \ge 1} \bigcup_{k \ge n} \left\{ f_k > \lambda - \frac{1}{m} \right\}.$$

Demonstração do Teorema ??. Considere uma função  $f: \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$  e seja  $\lambda \geq 0$ , A equivalência entre itens (4) e (5) segue das identidades (??),(??):

$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m > 1} \left\{ f \ge \lambda + \frac{1}{m} \right\} \quad \text{e} \quad \{f \ge \lambda\} = \bigcap_{m > 1} \left\{ f > \lambda - \frac{1}{m} \right\},$$

já que toda união e interseção enumerável de conjuntos mensuráveis é mensurável.

Ademais, um conjunto E é mensurável se e somente se seu complemento  $E^{\complement}$  é mensurável. Como

$$\{f < \lambda\} = \{f \ge \lambda\}^{\complement} \quad \text{e} \quad \{f \le \lambda\} = \{f > \lambda\}^{\complement},$$

temos que  $(6) \iff (5) e(7) \iff (4)$ .

Seja  $I \subset [0, \infty)$  um intervalo qualquer, por exemplo, I = [a, b). Então,

$$\{f \in I\} = \{f \in [a,b)\} = \{f \ge a\} \cap \{f < b\},\$$

portanto, (5) e (6) (que já são equivalentes), implicam (8). Obviamente, (8) implica (4).

Todo conjunto aberto  $U \subset [0, \infty)$  é uma união enumerável de intervalos. Portanto, (8) implica (9), que claramente implica (4).

Um conjunto  $F \subset [0, \infty)$  é fechado se e somente se seu complemento  $F^{\complement}$  é aberto. Além disso,

$$\{f \in F\}^{\complement} = \{f \in F^{\complement}\},$$

portanto, (9) e (10) são equivalentes.

Provamos, assim, que as afirmações de (4) até (10), a respeito da pré-imagem pela função f de vários tipos de conjuntos "relevantes" são, todas, equivalentes.

Evidentemente,  $(3) \implies (1) \implies (2)$ . Portanto, para fechar o ciclo de equivalências, basta provar que  $(2) \implies (4)$  e que  $(8) \implies (3)$ .

 $(2) \Longrightarrow (4)$  Considere uma função  $f: \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$  e suponha que exista uma sequência  $\{s_n\}_{n\geq 1}$  de funções simples sem sinais tal que  $s_n(x) \to f(x)$  para quase todo ponto  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência  $\{s_n\}_{n\geq 1}$  converge em todo ponto  $x \in \mathbb{R}^d$  (mas não necessariamente para f(x)). De fato, em todo ponto onde essa sequência não converge (isto é, para um conjunto negligenciável de pontos) podemos trocar o valor de cada função  $s_n(x)$  por 0; assim, a nova sequência converge em todo ponto, e ainda converge para f em quase todo ponto. Portanto, dado  $\lambda \geq 0$ ,

$$\{f \ge \lambda\} = \left\{x \colon f(x) \ge \lambda \text{ e } \lim_{n \to \infty} s_n(x) \ne f(x)\right\} \cup \left\{\lim_{n \to \infty} s_n \ge \lambda\right\}.$$

O primeiro conjunto na união acima é mensurável pois é negligenciável. Pela fórmula ??, o segundo conjunto pode ser descrito como

$$\left\{ \lim_{n \to \infty} s_n \ge \lambda \right\} = \bigcap_{n \ge 1} \bigcap_{m \ge 1} \bigcup_{k \ge n} \left\{ s_k > \lambda - \frac{1}{m} \right\},\,$$

ou seja, como o resultado de uma aplicação enumerável de uniões ou interseções de conjuntos do tipo  $\{s_k > t\}$  para alguns  $k \ge 1$  e  $t \in \mathbb{R}$ .

Portanto, para concluir que  $\{f \geq \lambda\}$  seja mensurável, basta provar o mesmo tipo de propriedade para funções simples. Sejam s uma função simples sem sinal e  $t \in [0, \infty)$ . Provaremos que o conjunto  $\{s > t\}$  é mensurável.

que o conjunto  $\{s > t\}$  é mensurável. Escrevemos  $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ , onde os conjuntos  $E_i$  são mensuráveis e disjuntos, enquanto os coeficientes  $c_i > 0$  podem ser considerados distintos (agrupando termos com coeficientes iguais).

Sem perda de generalidade, supomos que

$$c_0 := 0 < c_1 < c_2 < \dots c_k \le \infty$$
.

Então, existe um índice i, com  $0 \le i < k$ , tal que  $t \in [c_i, c_{i+1})$ , e daí,

$$\{x: s(x) > \lambda\} = \{x: s(x) > c_i\} = \{x: s(x) \in \{c_{i+1}, \dots, c_k\}\} = E_{i+1} \cup \dots \cup E_k,$$

que é um conjunto mensurável, assim finalizando a prova dessa implicação.

 $(8) \Longrightarrow (3)$  Seja  $f: \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$  e suponha que  $\{f \in I\}$  seja mensurável para todo intervalo  $I \subset [0, \infty)$ . Vamos construir uma sequência não decrescente de funções simples sem sinais  $\{s_n\}_{n\geq 1}$  tal que  $s_n \to f$  em todo ponto, e cada  $s_n$  é limitada e possui suporte limitado.

**Gíria:** Dizemos que uma função  $f: \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]$  "mora numa caixa" se for limitada e possuir suporte limitado, ou seja, se existirem  $A, B < \infty$  tais que  $|f(x)| \leq A$  para todo  $|x| \leq B$  e f(x) = 0 para todo |x| > B.

Fixe  $n \geq 1$  e considere a caixa  $B_n := [-n, n]^d \times [0, n] \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty]$ . Para "localizar" f dentro da caixa  $B_n$ , fazemos um truncamento vertical e um truncamento horizontal de f. Mais precisamente, definimos  $s_n(x)$  como 0 se |x| > n e como n se  $f(x) \geq n$ . Resta definir  $s_n(x)$  para pontos x com f(x) < n.

A ideia nova e profunda para construir uma função simples  $s_n$  aproximando f razoavelmente é considerar uma partição do contradomínio  $[0, \infty]$  da função f.<sup>2</sup>

Então, particionamos o intervalo [0, n) (o resto do contradomínio já foi abordado) em intervalos diádicos de comprimento  $\frac{1}{2^n}$  e definimos  $s_n(x)$  como o ponto extremo menor de cada tal intervalo, quando f(x) pertence a esse intervalo. Mais formalmente, seja

$$s_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > n \\ n & \text{se } f(x) \ge n \\ \frac{j}{2^n} & \text{se } f(x) \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right), \ j = 0, \dots, n \ 2^n - 1. \end{cases}$$
$$= \left( n \mathbf{1}_{\{f \ge n\}} + \sum_{j=1}^{n2^{n-1}} \frac{j}{2^n} \mathbf{1}_{\{f \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\}} \right) \mathbf{1}_{\{x : |x| \le n\}}.$$

Como, por hipótese,  $\{f \in I\}$  é mensurável para todo intervalo  $I \subset [0, \infty)$ , a função  $s_n$  definida acima é simples. Evidentemente, por construção,  $0 \le s_n \le f$  e  $s_n$  mora na caixa  $B_n$ . Usando a propriedade de encaixamento dos intervalos diádicos, não é difícil verificar que  $s_n \le s_{n+1}$  em todo ponto, e para todo n.

Resta provar que  $s_n(x) \to f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ . Fixe tal ponto x.

Se  $f(x) = \infty$ , então, para todo  $n \ge 1$ ,  $s_n(x) = n \to \infty = f(x)$ .

Se  $f(x) < \infty$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que f(x) < N e  $|x| \le N$ . Então, para todo  $n \ge N$ , temos que  $s_n(x) = \frac{j}{2^n}$  e  $f(x) \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$ , para algum  $j \in \{0, \dots, n \ 2^n - 1\}$ . Portanto,

$$|s_n(x) - f(x)| \le \frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0$$

mostrando que  $s_n(x) \to f(x)$ .

 $<sup>^2</sup>$ Ao contrário da integral de Darboux, onde consideramos partições do domínio da função e, em seguida, as funções escada correspondentes.

Em seguida, mostramos que o conjunto de funções mensuráveis à Lebesgue (sem sinais) é fechado sob várias operações.

**Proposição 1.** Seja  $\{f_n\}_{n\geq 1}$  uma sequência de funções mensuráveis à Lebesgue. Então,  $\inf_{n\geq 1} f_n$  e  $\sup_{n\geq 1} f_n$  são mensuráveis.

Ademais, se  $\bar{f}_n \to f$  em quase todo ponto, então f é mensurável também.

Demonstração. Seja  $\lambda \geq 0$ . Como, para todo  $n \geq 1$ ,  $f_n$  é mensurável, pelo teorema anterior, os conjuntos  $\{f_n \geq \lambda\}$  e  $\{f_n \leq \lambda\}$  são mensuráveis. Usando (??) e (??), temos que

$$\left\{ \inf_{n \ge 1} f_n \ge \lambda \right\} = \bigcap_{n \ge 1} \left\{ f_n \ge \lambda \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \sup_{n \ge 1} f_n \le \lambda \right\} = \bigcap_{n \ge 1} \left\{ f_n \le \lambda \right\} ,$$

o que prova a mensurabilidade das funções ínfimo e supremo.

A segunda afirmação, sobre a mensurabilidade do limite de uma sequência de funções mensuráveis segue da mesma forma usando (??):

$$\left\{\lim_{n\to\infty} f_n \ge \lambda\right\} = \bigcap_{n\ge 1} \bigcap_{m\ge 1} \bigcup_{k\ge n} \left\{f_k > \lambda - \frac{1}{m}\right\}.$$

**Proposição 2.** Sejam f e g duas funções mensuráveis sem sinais. Então, f+g e f g também são mensuráveis.

Demonstração. Como f g são mensuráveis, por definição, elas são limites pontuas de funções simples  $\{s_n\}_{n\geq 1}$  e, respectivamente  $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ . Como  $s_n+\sigma_n$  e  $s_n$   $\sigma_n$  são funções simples e

$$s_n + \sigma_n \to f + q$$
,  $s_n \sigma_n \to f q$ ,

concluímos que f + g e f g são mensuráveis.