A MEDIDA DE LEBESGUE

SILVIUS KLEIN

Sumário

Introduzimos o conceito de medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$, um refinamento da medida de Jordan.

1. A medida de Lebesgue exterior

Lembre-se do conceito de medida de Jordan exterior. Se $E \subset \mathbb{R}^d$ é um conjunto limitado, então

$$\mathrm{m}^{\star,J}(E) = \inf \left\{ \mathrm{m}(B) \colon E \subset B, B \text{ elementar} \right\}.$$

Se E é ilimitado, podemos também definir sua medida de Jordan exterior como $+\infty$.

Como um conjunto elementar é uma união finita de caixas, concluímos que

$$\mathrm{m}^{\star,J}(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_n, \text{ onde } B_1, \dots, B_N \text{ são caixas} \right\}. \tag{1}$$

Em outras palavras, a medida de Jordan exterior de E é o custo ínfimo necessário para cobrir E por um número *finito* de caixas.

Como já mencionamos, ao fim de generalizar alguns conceitos clássicos, trocamos processos finitos por processos enumeráveis, um procedimento padrão na teoria da medida.

Definição 1. Dado um conjunto qualquer $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^d$, definimos sua *medida exterior de Lebesgue* por

$$m^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ onde } \{B_n\}_{n \ge 1} \text{ são caixas} \right\},$$

isto é, o custo ínfimo necessário para cobrir E por uma união *enumerável* de caixas.

Observação 1. Note que $0 \leq m^*(E) \leq +\infty$ para todo $E \subset \mathbb{R}^d$.

Além disso, "pagando mais um ϵ", as caixas B_n na definição anterior podem ser escolhidas todas *abertas* (ou todas fechadas, ou todas semi fechadas).

Definição 2. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é chamado *negligenciável* se $m^*(E) = 0$.

Note que E é negligenciável se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe uma família de caixas (todas abertas, ou todas fechadas, ou todas semi fechadas) tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon\,.$$

Exemplo 1. $m^*(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

De fato, considere uma cobertura enumerável de $\mathbb{R}^n$ por caixas abertas: $\mathbb{R}^d \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Para cada $t > 0$, o cubo $[0, t]^d$ é um compacto coberto pelas caixas abertas $\{B_n \colon n \geq 1\}$. Então existe uma subcobertura finita, ou seja, existe $N < \infty$ tal que $[0, t]^d \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_n$.

Concluímos que para todo $t > 0$ tem-se

$$t^d = \mathrm{m}\left([0, t]^d\right) \leq \sum_{n=1}^{N} |B_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|\,,$$

então, tomando t indo para ∞,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \infty.$$

Como a escolha da cobertura enumerável do espaço $\mathbb{R}^d$ por caixas foi arbitrária, segue que $m^*(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

Exemplo 2. $m_2^*(\mathbb{R}) = 0$, onde m_2^* refere-se à medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$, e a reta real é vista como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\mathbb{R} \equiv \{(x, 0) \colon x \in \mathbb{R}\}$.

De fato, dado $\epsilon > 0$, considere as caixas

$$B_n := [-n, n] \times \left[-\frac{\epsilon}{2n\, 2^n}, \frac{\epsilon}{2n\, 2^n}\right], \quad n \geq 1\,.$$

Então,

$$|B_n| = \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \quad \mathbb{R} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = 2\epsilon,$$

portanto, $m_2^*(\mathbb{R}) = 0$.

Exemplo 3. Todo conjunto enumerável tem medida exterior de Lebesgue zero.

De fato, seja

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}$$

um conjunto enumerável.

Como um singleton é uma caixa (trivial), com volume zero, segue que

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\{x_n\}| = 0.$$

Proposição 1. *(os "axiomas" da medida exterior de Lebesgue)*

(i) (conjunto vazio) $m^*(\emptyset) = 0$.

(ii) (monotonicidade) Se $E \subset F$ *então* $m^*(E) \leq m^*(F)$.

(iii) (sub aditividade enumerável) Seja $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ uma família enumerável de conjuntos. Então,

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\,. \tag{2}$$

Demonstração. As primeiras duas afirmações são evidentes. Vamos provar a terceira.

Se um dos conjuntos E_n tem medida exterior $+\infty$, então a desigualdade (2) é óbvia (o lado direito seria igual a $+\infty$). Então, vamos supor que $m^*(E_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$.

Seja $\epsilon > 0$. Vamos criar mais um ϵ de folga; também usaremos o truque $\frac{\epsilon}{2^n}$, já que estamos lidando com uma família enumerável de conjuntos.

Para cada $n \geq 1$ existe uma família enumerável $\{B_n^k\}_{k\geq 1}$ de caixas tal que

$$E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_n^k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |B_n^k| < m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Portanto,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n,k\geq 1} B_n^k\,,$$

que é uma família enumerável de caixas, e

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\leq \sum_{n,k\geq 1} |B_n^k| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |B_n^k| < \sum_{n=1}^{\infty}\left(m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \epsilon\,. \end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, a desigualdade (2) é satisfeita. □

O próximo resultado mostra a relação entre as medidas exterior e interior de Jordan, e a medida exterior de Lebesgue.

Lema 1. *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado. Então,*

$$\mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq m^*(E) \leq \mathrm{m}^{\star,J}(E)\,.$$

Demonstração. A segunda desigualdade acima é óbvia: $m^*(E)$ é o custo ínfimo total de todas as coberturas enumeráveis (então, inclusive finitas) por caixas, enquanto $m^{\star,J}(E)$ é o ínfimo do custo total das coberturas finitas.

Vamos estabelecer a primeira desigualdade. Seja $\epsilon > 0$. Então existe um conjunto elementar e compacto (por quê?) $K \subset E$ tal que

$$\mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq \mathrm{m}(K) + \epsilon. \tag{3}$$

Considere qualquer família $\{B_n\}_{n\geq 1}$ de caixas abertas tal que $E \subset \bigcup_{n\geq 1} B_n$.

Então $\{B_n\}_{n\geq 1}$ é uma cobertura aberta do conjunto compacto K, e por isso, existe $N < \infty$ tal que $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_n$. Segue que

$$\mathrm{m}(K) \leq \sum_{k=1}^{N} |B_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_n|\,.$$

Portanto,

$$m_{\star,J}(E) \leq \mathrm{m}(K) + \epsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_n| + \epsilon\,,$$

e tomando o ínfimo sobre todas as famílias de caixas $\{B_n\}_{n\geq 1}$ que cobrem E, concluímos o seguinte:

$$m_{\star,J}(E) \leq m^*(E) + \epsilon\,,$$

o que implica a desigualdade desejada, já que ϵ é arbitrário. □

2. Conjuntos mensuráveis à Lebesgue: definição, exemplos

Existem várias definições (equivalentes) do conceito de mensurabilidade à Lebesgue em $\mathbb{R}^d$. Escolhemos a definição mais direta, via o "primeiro princípio de Littlewood", que nos permite chegar mais rapidamente a resultados fundamentais sobre a estrutura do espaço de tais conjuntos.

Definição 3. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é dito *mensurável à Lebesgue* se E é "quase aberto", no sentido que para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto aberto U tal que $U \supset E$ e $m^*(U \setminus E) < \epsilon$.

Vamos comparar este conceito com o conceito de mensurabilidade à Jordan.

Exercício 1. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto Jordan mensurável. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto elementar e aberto U (ou seja, uma união *finita* de caixas abertas) tal que $U \supset E$ e $\mathrm{m}^{\star,J}(U \setminus E) < \epsilon$.

Portanto, usando esse exercício, se E é Jordan mensurável, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $U \supset E$ elementar e aberto tal que $\mathrm{m}^{\star,J}(U \setminus E) < \epsilon$. Mas pelo Lema 1, $m^*(U \setminus E) \leq \mathrm{m}^{\star,J}(U \setminus E) < \epsilon$, mostrando que E é quase aberto, isto é, Lebesgue mensurável. O contrário *não* é verdade (como veremos em breve).

Além disso, de novo pelo Lema 1,

$$\mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq m^*(E) \leq \mathrm{m}^{\star,J}(E)\,,$$

e como E é mensurável à Jordan, $\mathrm{m}_{\star,J}(E) = \mathrm{m}^{\star,J}(E) = m(E)$.

Concluímos que um conjunto mensurável à Jordan E também é mensurável à Lebesgue e

$$m(E) = m^*(E),$$

ou seja, a medida de Jordan de E é igual a sua medida exterior de Lebesgue.

Portanto, obtemos uma extensão de um conceito mais básico substituindo um processo finito por um enumerável.

Para um conjunto *mensurável* à Lebesgue, chamaremos sua medida exterior $m^*(E)$ simplesmente de sua medida (de Lebesgue), e usaremos a notação simplificada $\mathrm{m}(E)$ (os comentários acima garantem a consistência desta terminologia e notação).

Observação 2. Todo conjunto aberto é, obviamente, mensurável à Lebesgue.

Observação 3. Todo conjunto negligenciável (isto é, com medida exterior de Lebesgue zero) é mensurável à Lebesgue. Em particular, todo subconjunto de uma conjunto negligenciável é mensurável. Ademais, todo conjunto enumerável é mensurável.

De fato, dados $E \subset \mathbb{R}^d$ com $m^*(E) = 0$ e $\epsilon > 0$, existe uma família enumerável de caixas abertas $\{B_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon\,.$$

Então, $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ é aberto, $U \supset E$ e como $U \setminus E \subset U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$,

$$m^*(U \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon \,,$$

mostrando que E é quase aberto.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de conjuntos mensuráveis à Lebesgue que não são mensuráveis à Jordan.

Exemplo 4. O conjunto $E := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ é enumerável, então, pela observação anterior é mensurável à Lebesgue. Por outro lado, como já vimos, não é mensurável à Jordan, apesar de ser limitado.

Exemplo 5. O exemplo anterior é, de certa forma, trivial. Na verdade, existem conjuntos topologicamente mais interessantes que são Lebesgue mas não Jordan mensuráveis. Vamos construir um tal conjunto aberto (e limitado) e a seguir um compacto.

A ideia é "engrossar"o conjunto

$$E := \mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$$

do exemplo anterior.

De fato, para cada $n \geq 1$, considere o intervalo aberto

$$I_n := \left(q_n - \frac{r}{2^n}, q_n + \frac{r}{2^n} \right) \,,$$

onde $0 < r < \frac{1}{2}$ é uma constante. Defina

$$U := \bigcup_{n \geq 1} I_n .$$

Então, U é aberto (e em particular, Lebesgue mensurável) e claramente limitado, por exemplo $U \subset [-1,2]$, mas não é Jordan mensurável. De fato, temos

$$\mathrm{m}^{\star,J}(U) = m^{\star,J}(\overline{U}) \geq m^{\star,J}(\overline{E}) = m^{\star,J}([0,1]) = 1,$$

enquanto, por outro lado temos

$$\mathrm{m}_{\star,J}(U) \leq m^*(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = 2r < 1 \leq \mathrm{m}^{\star,J}(U) \,,$$

então $\mathrm{m}^{\star,J}(U) \neq \mathrm{m}_{\star,J}(U)$.

Ademais, seja $K := [-1,2] \setminus U$. Então K é um conjunto compacto, portanto Lebesgue mensurável (ainda não provamos isso, vamos aceitá-lo por enquanto). Por outro lado, K não pode ser Jordan mensurável, pois, caso contrário, $U = [-1,2] \setminus K$ seria Jordan mensurável também.

Comentário 1. Uma pergunta natural é por que não definir o conceito de mensurabilidade à Lebesgue seguindo exatamente o mesmo padrão do conceito de mensurabilidade à Jordan, considerando um conceito de medida interior.

Vamos *tentar* a seguir esse caminho, definindo, analogamente à medida interior de Jordan, a medida interior de Lebesgue de um conjunto E por

$$\mathrm{m}_{\star}(E) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : \{B_n\}_{n \geq 1} \;\text{ caixas, }\; \bigcup_{n \geq 1} B_n \subset E \right\} \,,$$

e a mensurabilidade de E pelo fato de que as suas medidas exterior $m^*(E)$ e interior $\mathrm{m}_\star(E)$ sejam iguais.

Considere o conjunto

$$F := [0,1] \setminus \mathbb{Q}\,.$$

Este conjunto *deveria* ser mensurável, como diferença de dois conjuntos mensuráveis (um intervalo é um conjunto enumerável). Mas, como F não contém intervalos, sua medida interior $\mathrm{m}_\star(F) = 0$, enquanto, por outro lado, sua medida exterior deve ser $m^*(F) = 1$. Isto é porque, como $F \subset [0,1] \subset F \cup \mathbb{Q}$, temos

$$1 = m^*\left([0,1]\right) \le m^*(F) + m^*(\mathbb{Q}) = m^*(F) \le 1.$$

Portanto, essa abordagem não funciona com sucesso. Uma explanação mais especulativa é que o espaço euclidiano possui subconjuntos densos *enumeráveis*, então trocando processos finitos por processos enumeráveis abre amplamente as portas, permitindo a entrada de conjuntos muito mais gerais, cuja medida interior não capta bem seus tamanhos.

A partir de agora, salvo indicação ao contrário, mensurabilidade se refere a mensurabilidade por Lebesgue.

2.1. **Regularidade exterior.** Lembre-se que a medida exterior de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é dada por

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ onde } B_n \text{ são caixas} \right\}.$$

O seguinte resultado se refere à aproximação por cima da medida exterior de um conjunto qualquer por conjuntos abertos.

Proposição 2. *(regularidade exterior) Dado $E \subset \mathbb{R}^d$, temos*

$$m^*(E) = \inf \left\{ m^*(U) \colon U \text{ aberto}, \ U \supset E \right\}.$$

Demonstração. Como a medida exterior é monótona, temos que $m^*(E) \le m^*(U)$ para todo conjunto aberto $U \supset E$. Assim, $m^*(E) \le \inf \left\{ m^*(U) \colon U \text{ aberto}, \ U \supset E \right\}$.

Vamos provar a desigualdade oposta. Seja $\epsilon > 0$. Pela definição de medida exterior, existem caixas $\{B_n\}_{n\ge1}$ tais que

$$E \subset \bigcup_{n\ge1} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \le m^*(E) + \epsilon\,.$$

Pague mais um ϵ para supor que as caixas $\{B_n\}_{n\ge1}$ são abertas. Então, o conjunto

$$U := \bigcup_{n\ge1} B_n$$

é aberto, $E \subset U$ e, pela definição de medida exterior aplicada a U,

$$m^*(U) \le \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \le m^*(E) + \epsilon\,.$$

Tomado $\epsilon \to 0$, concluímos que $\inf \left\{ m^*(U) \colon U \text{ aberto}, \ U \supset E \right\} \le m^*(E)$. □

3. O espaço de conjuntos mensuráveis à Lebesgue

Os próximos resultados técnicos serão usados para estabelecer a existência de uma grande classe de conjuntos mensuráveis.

3.1. **Caixas quase disjuntas.** Enquanto os intervalos $(0,1]$ e $[1,2]$ da reta $\mathbb{R}$ não são disjuntos, a interseção deles, o conjunto $\{0\} \subset \mathbb{R}$ é trivial do ponto de vista da teoria da medida. Similarmente, caixas em $\mathbb{R}^2$ que se intersectam somente ao longo do um lado, enquanto não são tecnicamente disjuntas, para todos os fins práticos, se comportam como se fossem disjuntas. Vamos formalizar esta ideia na seguinte definição.

Definição 4. Duas caixas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ são ditas *quase disjuntas* se seus interiores são disjuntos.

Lema 2. *Se $B_1, \ldots, B_N$ são caixas quase disjuntas duas à duas, então*

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \sum_{n=1}^{N} |B_n| \; .$$

Demonstração. Tem-se

$$\bigcup_{n=1}^{N} B_n = \bigcup_{n=1}^{N} \mathrm{int}\,(B_n) \cup \mathcal{Z},$$

onde $\mathcal{Z} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \partial B_n$, então $\mathcal{Z}$ tem medida de Jordan zero. Portanto

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \sum_{n=1}^{N} |\mathrm{int}\,(B_n)| + \mathrm{m}(\mathcal{Z}) = \sum_{n=1}^{N} |B_n| \, .$$

□

Lema 3. *Se $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, onde $\{B_n\}_{n\geq 1}$ são caixas quase disjuntas duas à duas, então*

$$m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \; . \tag{4}$$

Em particular, se

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n \, ,$$

onde as caixas $\{B_n\}_{n\geq 1}$ e $\{B'_n\}_{n\geq 1}$ são, respectivamente, quase disjuntas duas à duas, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |B'_n| \; .$$

Demonstração. Pela definição da medida exterior,

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \; .$$

Vamos provar a desigualdade oposta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |B_n| \; .$$

Seja $N \geq 1$ e considere a união finita $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} B_n \subset E$. Então, pelo lema anterior,

$$\sum_{n=1}^{N} |B_n| = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) \leq m^*(E) \, .$$

Portanto, para todo $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} |B_n| \leq m^*(E)\,,$$

e tomando $N \to \infty$, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \leq m^*(E)\,,$$

assim finalizando a prova do lema. □

Exemplo 6. Como $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1)$, temos (o fato já estabelecido por outro meio) que

$$m^*(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1 = +\infty.$$

Lema 4. *Todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ pode ser escrito como uma união enumerável de caixas quase disjuntas e fechadas $\{B_n\}_{n\geq 1}$.*

Demonstração. A ideia é usar a malha diádica do espaço euclidiano. Vamos considerar o caso unidimensional $d = 1$. O caso multidimensional pode ser tratado analogamente.

Defina os intervalos diádicos

$$Q_{i,n} := \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] \quad n \geq 0,\, i \in \mathbb{Z}\,,$$

onde o índice n será referido como "a geração"a qual $Q_{i,n}$ pertence.

Note que $|Q_{i,n}| = \frac{1}{2^n}$. Então, dado $n \geq 0$, a família

$$\{Q_{i,n} \colon i \in \mathbb{Z}\}$$

de intervalos diádicos de geração n representa a malha diádica de tamanho $\frac{1}{2^n}$.[1]

Note também que a família

$$\{Q_{i,n} \colon i \in \mathbb{Z},\, n \geq 1\}$$

de todos os intervalos diádicos, de quaisquer geração, é enumerável.

As seguintes propriedades dos intervalos diádicos serão usadas na prova do lema, e são fáceis de verificar.

(1) Dado $n \geq 0$, os intervalos diádicos $\{Q_{i,n} \colon i \in \mathbb{Z}\}$ de geração n são quase disjuntos, fechados e cobrem o espaço $\mathbb{R}$.

(2) Cada intervalo diádico de geração $n \geq 1$ está contido num intervalo "pai"de geração $n-1$.

(3) Se Q, Q' são quaisquer intervalos diádicos, de quaisquer gerações, então, ou eles são quase disjuntos, ou um deles contém o outro (isto é, um é o "antepassado"do outro).

Afirmamos que dado um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^d$, tem-se

$$U = \bigcup \{Q \colon Q \text{ intervalo diádico}, Q \subset U\}\;. \tag{5}$$

De fato, evidentemente, a união no lado direito está contida em U, então basta provar a inclusão oposta.

[1] Em dimensão maior, a malha considerada consiste em produtos cartesianos de intervalos diádicos.

Seja $x \in U$. Como U é aberto, existe $r > 0$ tal que $(x-r, x+r) \subset U$. Já que $\frac{1}{2^n} \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que existe N tal que $\frac{1}{2^N} < r$. Usaremos a malha diádica de tamanho $\frac{1}{2^N}$, isto é, pensaremos em $\{Q_{i,N} \colon i \in \mathbb{Z}\}$ como uma régua com unidade de medida $\frac{1}{2^N}$.

Mais precisamente, os intervalos diádicos de geração N cobrem o espaço $\mathbb{R}$ inteiro, então existe Q, um intervalo diádico de geração N tal que $x \in Q$. Mas como $|Q| = \frac{1}{2^N} < r$, segue que $Q \subset (x-r, x+r)$. Então, $x \in Q \subset (x-r, x+r) \subset U$, estabelecendo assim (5).

A representação do conjunto U dada por (5) ainda não é o que precisamos, pois os intervalos incluídos não são quase disjuntos: com cada intervalo diádico $Q \subset U$, incluímos também todos os seus descendentes. A solução é, então, considerar apenas os intervalos diádicos maximais que estão contidos em U.

De fato, chamamos um intervalo diádico $Q^\star$ *maximal* em relação à inclusão se, sempre que $Q^\star \subset Q \subset U$, onde Q é diádico, temos $Q^\star = Q$.

Pelo Lema de Zorn, que é aplicável neste contexto (por quê?), para todo intervalo diádico $Q \subset U$, existe um intervalo diádico maximal $Q^\star \subset U$ tal que $Q \subset Q^\star$. Note também que se $Q_1^\star$, $Q_2^\star \subset U$ são intervalos diádicos maximais, então, ou eles são quase disjuntos, ou são iguais.

Concluímos o seguinte

$$U = \bigcup \{Q^\star \colon Q^\star \text{ intervalo diádico maximal} \subset U\} \,,$$

que, de fato, é uma união enumerável de intervalos fechados e quase disjuntos. □

3.2. **A ampla disponibilidade de conjuntos mensuráveis à Lebesgue.** O seguinte exercício é uma amostra relativamente simples de uma propriedade bem mais geral e forte da medida (exterior) de Lebesgue. O resultado enunciado neste exercício será utilizado em breve como uma ferramenta técnica.

Exercício 2. Sejam $K, L \subset \mathbb{R}^d$ dois conjuntos compactos e disjuntos. Então,

$$m^*(K \cup L) = m^*(K) + m^*(L) \,.$$

O próximo teorema estabelece a existência de uma coleção bem ampla e topologicamente rica de conjuntos mensuráveis à Lebesgue.

Teorema 1. *(existência de conjuntos mensuráveis)*

(i) Todo conjunto aberto é mensurável à Lebesgue.

(ii) Todo conjunto fechado é mensurável à Lebesgue.

(iii) Todo conjunto negligenciável é mensurável à Lebesgue.

(iv) O conjunto vazio $\emptyset$ é mensurável à Lebesgue.

(v) Se $E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável à Lebesgue, então $E^{\complement} = \mathbb{R}^d \setminus E$ também é mensurável.

(vi) Se $\{E_n\}_{n \geq 1}$ são mensuráveis à Lebesgue, então $\bigcup_{n \geq 1} E_n$ também é mensurável.

(vii) Se $\{E_n\}_{n \geq 1}$ são mensuráveis à Lebesgue, então $\bigcap_{n \geq 1} E_n$ também é mensurável.

Demonstração. Itens (i) é (iv) são óbvios, item (iii) já foi provado, e item (vii) é uma consequência dos itens (v) e (vi) e das leis de Morgan. Portanto, resta provar itens (ii), (v) e (vi). Seguiremos a ordem (vi), depois (ii) e finalmente (v).[2]

[2] Item (ii) teria sido uma consequência dos itens (i) e (v), se conseguíssemos provar (v) diretamente.

$\boxed{\text{(vi)}}$ Considere uma família $\{E_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos mensuráveis e seja $\epsilon > 0$. Usaremos o truque $\frac{\epsilon}{2^n}$. Para cada $n \geq 1$, existe um conjunto aberto $U_n \supset E_n$ tal que

$$m^*(U_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Defina

$$U := \bigcup_{n\geq 1} U_n\,.$$

Então, U é aberto, $U \supset \bigcup_{n\geq 1} E_n$ e, como

$$U \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \left(\bigcup_{n\geq 1} U_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \subset \bigcup_{n\geq 1} (U_n \setminus E_n)\ ,$$

usando a subaditividade da medida exterior, tem-se

$$m^*\left(U \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(U_n \setminus E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon\,,$$

mostrando que $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ é quase aberto, ou seja, mensurável.

$\boxed{\text{ii}}$ Todo conjunto fechado é mensurável à Lebesgue.

Seja $F \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto fechado. Para cada $n \geq 1$, seja

$$F_n := F \cap [-n, n]^d\,.$$

Note que os conjuntos F_n, $n \geq 1$ são compactos e $F = \bigcup_{n\geq 1} F_n$. Portanto, basta provar que todo conjunto compacto K é mensurável.

Seja $\epsilon > 0$. Pela regularidade exterior da medida exterior, existe U aberto tal que $U \supset K$ e

$$m^*(U) \leq m^*(K) + \epsilon\,.$$

O objetivo é provar que $m^*(U \setminus K) \leq \epsilon$, o que finalizará a prova.[3]

Como $U \setminus K = U \cap K^{\complement}$ é aberto, pelo Lema 4, $U \setminus K$ pode ser escrito como uma união enumerável de caixas fechadas (então compactas) e quase disjuntas: $U \setminus K = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Pelo Lema 3,

$$m^*(U \setminus K) = \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n|\ .$$

Portanto, basta provar que para todo $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} |Q_n| \leq \epsilon\,. \tag{6}$$

Fixe $N \geq 1$ e considere a união finita de caixas fechadas

$$Q_1 \cup \ldots \cup Q_N =: L\,.$$

Então, L é compacto, $L \subset U \setminus K$ e assim,

$$K \cap L = \emptyset \quad \text{e} \quad K \cup L \subset U\,.$$

[3]Enquanto a posteriori isso se tornará verdade, por enquanto, não sabemos que $m^*(U \setminus K) = m^*(U) - m^*(K)$.

Pelo Exercício 2 e pelo Lema 2,

$$m^*(K \cup L) = m^*(K) + m^*(L) = m^*(K) + \sum_{n=1}^{N} |Q_n| \,. \tag{7}$$

Além disso,

$$m^*(K \cup L) \le m^*(U) \le m^*(K) + \epsilon \,. \tag{8}$$

Combinando (7) e (8) segue que

$$m^*(K) + \sum_{n=1}^{N} |Q_n| \le m^*(K) + \epsilon \,,$$

que implica (6) e finaliza a prova, já que a medida exterior de qualquer conjunto compacto, portanto limitado, é finita.

$\boxed{\text{vi}}$ Se $E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável à Lebesgue, então $E^{\complement} = \mathbb{R}^d \setminus E$ também é mensurável.

A ideia da prova é "quase preencher"o conjunto complementar $E^{\complement}$ por conjuntos fechados. Como E é Lebesgue mensurável, para todo $n \ge 1$ existe um conjunto aberto U_n tal que

$$E \subset U_n \quad \text{e} \quad m^*(U_n \setminus E) \le \frac{1}{n} \,.$$

Temos, claramente, que para todo $n \ge 1$, o conjunto $F_n := U_n^{\complement} \subset E^{\complement}$ e F_n é fechado (portanto, mensurável). Seja

$$F := \bigcup_{n \ge 1} F_n \,.$$

Então, F é mensurável e $F \subset E^{\complement}$. Vamos provar que $E^{\complement} \setminus F$ é negligenciável.

Como, para todo $n \ge 1$, $F_n \subset F$, temos

$$E^{\complement} \setminus F \subset E^{\complement} \setminus F_n = E^{\complement} \setminus U_n^{\complement} = U_n \setminus E \,,$$

segue que

$$0 \le m^* \left(E^{\complement} \setminus F\right) \le m^* \left(U_n \setminus E\right) \le \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty \,.$$

Portanto, $m^* \left(E^{\complement} \setminus F\right) = 0$, e em particular, $E^{\complement} \setminus F$ é mensurável. Mas

$$E^{\complement} = F \cup \left(E^{\complement} \setminus F\right) \,,$$

monstrando a mensurabilidade de $E^{\complement}$. □

4. Critérios para mensurabilidade à Lebesgue

Seja $2^{\mathbb{R}^d} := \left\{A \colon A \subset \mathbb{R}^d\right\}$ a família dos todos os subconjuntos do espaço $\mathbb{R}^d$. Note que as seguintes propriedades valem para conjuntos $A, B, C \in 2^{\mathbb{R}^d}$:

$A \triangle A = \emptyset$.
$A \triangle B = B \triangle A$.
$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.

Portanto, a diferença simétrica $\triangle$ parece uma "distância"em $2^{\mathbb{R}^d}$.

Exercício 3. Prove que

$$d(A, B) := m^*(A \triangle B)$$

é uma pseudo[4] métrica em $2^{\mathbb{R}^d}$.

[4] No sentido que $d(A, B) = 0$ não necessariamente implica $A = B$.

4.1. **Caracterização da mensurabilidade à Lebesgue.** A mensurabilidade de um conjunto no espaço euclidiano, definida como sendo quase aberto, pode ser caracterizada como sendo quase fechado, ou pela sua proximidade, relativamente à pseudo-métrica acima, a um outro conjunto aberto, ou fechado, ou simplesmente mensurável.

Teorema 2. *(critérios para mensurabilidade) Seja $E \subset \mathbb{R}^d$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E é Lebesgue mensurável, ou seja, E é quase aberto por fora*: $\forall \epsilon > 0$ existe $U \supset E$ aberto tal que $m^*(U \setminus E) < \epsilon$.*

(ii) E está perto de um aberto*: $\forall \epsilon > 0$ existe U aberto tal que $m^*(U \triangle E) < \epsilon$.*

(iii) E é quase fechado por dentro*: $\forall \epsilon > 0$, existe $F \subset E$ fechado tal que $m^*(E \setminus F) < \epsilon$.*

(iv) E está perto de um fechado*: $\forall \epsilon > 0$ existe F fechado tal que $m^*(F \triangle E) < \epsilon$.*

(v) E está perto de um mensurável*: $\forall \epsilon > 0$ existe A mensurável tal que $m^*(A \triangle E) < \epsilon$.*

Demonstração. A implicação (i) $\Longrightarrow$ (ii) é evidente, já que se $U \subset E$, então $U \triangle E = U \setminus E$. A implicação oposta é exercício. Idem a equivalência (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv), enquanto (iv) $\Longrightarrow$ (v) também é evidente. Então, resta provar as implicações (i) $\Longrightarrow$ (iii) e (v) $\Longrightarrow$ (ii).

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(iii)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Como E é mensurável, $E^\complement$ também é mensurável, então existe um conjunto aberto $U \supset E^\complement$ tal que $m^*(U \setminus E^\complement) < \epsilon$.

Seja $F := U^\complement$. Então, F é fechado e $F \subset \left(E^\complement\right)^\complement = E$. Por outro lado,

$$E \setminus F = \left(E^\complement\right)^\complement \setminus U^\complement = U \setminus E^\complement,$$

então

$$m^*(E \setminus F) = m^*(U \setminus E^\complement) < \epsilon,$$

mostrando que E é quase fechado por dentro.

$\boxed{\text{(v)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Existe A mensurável tal que $m^*(A \triangle E) < \epsilon$. Logo, pela implicação (i) $\Longrightarrow$ (ii), A está perto de um aberto: existe U aberto tal que $m^*(U \triangle A) < \epsilon$.

Portanto, pela desigualdade triangular na pseudo métrica $(A, B) \mapsto m^*(A \triangle B)$, temos que

$$m^*(U \triangle E) \le m^*(U \triangle A) + m^*(A \triangle E) < 2\epsilon,$$

monstrando que E está perto de um aberto. □

Comentário 2. Denotamos por

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) := \left\{E \subset \mathbb{R}^d \colon E \ \text{ é Lebesgue mensurável}\right\}$$

a família de conjuntos mensuráveis à Lebesgue. Provamos que

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

(ii) Se $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ então $E^\complement \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

(iii) Se $\{E_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, então $\displaystyle\bigcup_{n\ge1} E_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Assim, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ é uma *σ-álgebra.*

Este conceito será abstratído na segunda parte do curso: diz-se que uma família de subconjuntos de um conjunto de referência qualquer é uma σ-álgebra se contiver o conjunto vazio e se for fechada sob a operação complemento e sob uniões enumeráveis.
Consequentemente, uma σ-álgebra também é fechada sob interseções enumeráveis.

Ademais, provamos que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ contém todos os conjuntos abertos e fechados.

4.2. **Os axiomas da medida.** A restrição da medida exterior de Lebesgue à família $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis, ou seja, a função $\mathrm{m}\colon \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$,

$$\mathrm{m}(E) := m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,\ B_n \text{ são caixas} \right\}$$

é chamada de *medida de Lebesgue* no espaço $\mathbb{R}^d$.

Outras notações comuns da medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^d$ são $\lambda(E)$, $|E|$, $\mathrm{Leb}(E)$ e etc.

O teorema seguinte mostra as propriedades básicas da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$, o que no contexto abstrato de uma σ-álgebra qualquer irão representar a definição de uma medida.

Teorema 3. *(os "axiomas"da medida)*

(1) $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$

(2) (σ-aditividade) Se $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ são disjuntos, então

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)\,.$$

Antes de começar a prova deste teorema, vamos notar os seguintes fatos.

1. (monotonicidade) Se E, F são mensuráveis e $E \subset F$, então
$$\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(F)\,.$$
Isso é evidente, já que a função m coincide com a medida exterior m^* em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, e a medida exterior é monótona.

2. (aditividade finita para compactos) Se K, L são conjuntos compactos (assim, mensuráveis) e disjuntos, então
$$\mathrm{m}(K \cup L) = \mathrm{m}(K) + \mathrm{m}(L)\,.$$
De novo, esta propriedade (aditividade para dois compactos) vale para a medida exterior m^* que é igual a medida m em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.
Ademais, por indução, se $K_1, \dots, K_N$ são compactos disjuntos, então
$$\mathrm{m}\left(K_1 \cup \ldots \cup K_N\right) = \mathrm{m}(K_1) + \ldots + \mathrm{m}(K_n)\,.$$

Demonstração do Teorema 3. Já sabemos que

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) \quad \text{(pela sub aditividade da medida exterior)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)\,.$$

Então, basta mostrar a desigualdade oposta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \le \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right). \tag{9}$$

Caso 1. Todos os conjuntos $\{E_n\}_{n\ge1}$ são *compactos*. Neste caso, para todo $N \ge 1$, usando a aditividade finita para compactos, e depois a monotonicidade, temos que

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{m}(E_n) = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) \le \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Tomando $N \to \infty$, obtemos (9).

Caso 2. Todos os conjuntos $\{E_n\}_{n\ge1}$ são *limitados* (mas não necessariamente compactos). Seja $\epsilon > 0$. Para cada $n \ge 1$, E_n é mensurável, então quase fechado por dentro; portanto, existe $F_n \subset E_n$ fechado (logo limitado, e assim, compacto) tal que

$$m^*(E_n \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Pela subaditividade da medida exterior, temos

$$m^*(E_n) = m^*\left(F_n \cup (E_n \setminus F_n)\right) \le m^*(F_n) + m^*(E_n \setminus F_n) < m^*(F_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Somado sobre todo $n \ge 1$ segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(F_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(F_n) + \epsilon \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(F_n) + \epsilon = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) + \epsilon \quad \text{(pelo Caso 1, pois } F_n \text{ são compactos)} \\
&\le \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \epsilon \quad \text{(pela monotonicidade da medida).}
\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon \to 0$ mostramos (9) neste caso.

Caso 3. O caso geral. Todo conjunto do espaço euclidiano pode ser escrito como uma união disjunta enumerável de conjuntos limitados (por quê?). Então escreva, para todo $n \ge 1$, $E_n = \bigcup_{m\ge1} E_{n,m}$, onde $\{E_{n,m} \colon m \ge 1\}$ são conjuntos limitados e disjuntos entre si. Portanto,

$$\bigcup_{n\ge1} E_n = \bigcup_{n,m\ge1} E_{n,m},$$

que é uma união disjunta enumerável de conjuntos limitados.

Pelo Caso 2, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}\left(\bigcup_{n\ge1} E_n\right) &= \mathrm{m}\left(\bigcup_{n,m\ge1} E_{n,m}\right) \\
&= \sum_{n,m\ge1} \mathrm{m}(E_{n,m}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_{n,m})\right) \quad \text{(pelo teorema de Fubini-Tonelli)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \quad \text{(de novo, pelo Caso 2),}
\end{aligned}$$

assim finalizando a prova. □

5. Propriedades fundamentais da medida de Lebesgue

Nesta seção vamos apresentar algumas propriedades fundamentais da medida de Lebesgue no espaço euclidiano.

5.1. **Convergência monótona para conjuntos.**

Começamos com um teorema de convergência monótona para conjuntos, útil em si, e também uma prévia de um resultado muito importante na teoria de integração.

Introduzimos algumas notações acerca do "limite"de uma sequências $\{E_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos.

- $E_n \nearrow E$ significa $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$, ou seja, $\{E_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência não decrescente de conjuntos e $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$.
- $E_n \searrow E$ significa $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \ldots$, ou seja, $\{E_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência não crescente de conjuntos e $E = \bigcap_{n\geq 1} E_n$.

Teorema 4. *(convergência monótona para conjuntos) Seja $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ uma sequência de conjuntos mensuráveis.*

(1) (convergência monótona para cima) Se $E_n \nearrow E$ então $\mathrm{m}(E_n) \to \mathrm{m}(E)$ quando $n \to \infty$.
(2) (convergência monótona para baixo) Se $E_n \searrow E$ e se $\mathrm{m}(E_1) < \infty$, então $\mathrm{m}(E_n) \to \mathrm{m}(E)$ quando $n \to \infty$. A hipótese $\mathrm{m}(E_1) < \infty$ é necessária.

Demonstração. Observe que se $E \subset F$ então $F = E \sqcup (F \setminus E)$, logo $\mathrm{m}(F) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(F \setminus E)$. Portanto, se $\mathrm{m}(E) < \infty$, tem-se $\mathrm{m}(F \setminus E) = \mathrm{m}(F) - \mathrm{m}(E)$.

(1) Se $\mathrm{m}(E_N) = \infty$ para algum $N \geq 1$, então, como a sequência $\{E_n\}_{n\geq 1}$ é não decrescente, pela monotonicidade da medida, segue que $\mathrm{m}(E_n) = \infty$ para todo $n \geq N$ e também $\mathrm{m}(E) = \infty$, mostrando a afirmação neste caso.

Se $\mathrm{m}(E_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$, como $E_n \subset E_{n+1}$ temos que

$$\mathrm{m}(E_{n+1} \setminus E_n) = \mathrm{m}(E_{n+1}) - \mathrm{m}(E_n)\,.$$

Além disso, a união $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ pode ser escrita como uma união disjunta como segue:

$$\bigcup_{n\geq 1} E_n = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup \ldots \sqcup (E_{n+1} \setminus E_n) \sqcup \ldots$$

Portanto, pela σ-aditividade da medida,

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}\left(\cup_{n\geq 1} E_n\right) &= \mathrm{m}(E_1) + \mathrm{m}(E_2 \setminus E_1) + \ldots + \mathrm{m}(E_{n+1} \setminus E_n) + \ldots \\
&= \mathrm{m}(E_1) + \mathrm{m}(E_2) - \mathrm{m}(E_1) + \ldots + \mathrm{m}(E_{n+1}) - \mathrm{m}(E_n) + \ldots \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_n)\,.
\end{aligned}$$

(2) Considere os intervalos $E_n := [n, \infty) \subset \mathbb{R}$. Então, claramente $E_n \searrow \emptyset$, $\mathrm{m}(E_n) = \infty$, mas $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$, mostrando a necessidade da hipótese $\mathrm{m}(E_N) < \infty$ para algum $N \geq 1$.

Suponha que $\mathrm{m}(E_1) < \infty$ e considere os complementos dos conjuntos $\{E_n\}_{n\geq 1}$ relativamente a E_1, ou seja, considere os conjuntos $F_n := E_1 \setminus E_n$, $n \geq 1$.

Como $\{E_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência não crescente, $\{F_n\}_{n\geq 1}$ é não decrescente e $F_n \nearrow F$, onde

$$F = \bigcup_{n\geq 1} F_n = \bigcup_{n\geq 1} (E_1 \setminus E_n) = E_1 \setminus \bigcap_{n\geq 1} E_n = E_1 \setminus E\,.$$

Pelo item (1), $\mathrm{m}(F) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(F_n)$, portanto,

$$\mathrm{m}(E_1) - \mathrm{m}(E) = \mathrm{m}(F) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(F_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{m}(E_1) - \mathrm{m}(E_n)\right) = \mathrm{m}(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_n)\,,$$

mostrando que $\mathrm{m}(E) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_n)$, dado que $\mathrm{m}(E_1) < \infty$. $\square$

5.2. **A regularidade da medida de Lebesgue.** A seguir, mostraremos a compatibilidade entre a medida de Lebesgue e a estrutura topológica do espaço $\mathbb{R}^d$.

Teorema 5. *(regularidade interior) Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto mensurável. Então*

$$\mathrm{m}(E) = \sup \{\mathrm{m}(K) \colon K \subset E,\ K \text{ conjunto compacto}\} .$$

Observação 4. Já provamos a regularidade exterior da medida exterior de Lebesgue. Em particular, nesse contexto de um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^d$, a regularidade exterior afirma que

$$\mathrm{m}(E) = \inf \{\mathrm{m}(U) \colon U \supset E,\ U \text{ conjunto aberto}\} .$$

Devido às propriedades de regularidade (interior e exterior), ou seja, à compatibilidade da medida de Lebesgue com a topologia do espaço ambiente, chamamos a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ de medida de Radon.

Demonstração do Teorema 5. A desigualdade $\mathrm{m}(E) \geq \sup \{\mathrm{m}(K) \colon K \subset E,\ K \text{compacto}\}$ vale pela monotonicidade da medida. Vamos provar a desigualdade oposta. Seja $\epsilon > 0$. Basta provar que existe $K \subset E$ compacto tal que

$$\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(K) + \epsilon .$$

Como E é mensurável, pelo Teorema 1, item (iii) da aula 9, E é quase fechado por dentro, ou seja, existe $F \subset E$ fechado tal que

$$\mathrm{m}(E \setminus F) \leq \epsilon .$$

Portanto,

$$\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}\left(F \sqcup (E \setminus F)\right) = \mathrm{m}(F) + \mathrm{m}(E \setminus F) \leq \mathrm{m}(F) + \epsilon .$$

Todo conjunto fechado é o limite para cima de uma sequência de conjuntos compactos. De fato, para todo $n \geq 1$, denotando por

$$K_n := F \cap [-n, n]^d ,$$

temos que os conjuntos K_n são fechados e limitados, logo compactos, e $K_n \nearrow F$.

Pelo item (i) do Teorema 4, $\mathrm{m}(K_n) \to \mathrm{m}(F)$ quando $n \to \infty$, então existe N tal que

$$\mathrm{m}(F) \leq \mathrm{m}(K_N) + \epsilon .$$

Concluímos que o conjunto compacto K_N satisfaz $K_N \subset F \subset E$ e

$$\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(F) + \epsilon \leq \mathrm{m}(K_N) + 2\epsilon ,$$

finalizando a prova do teorema. □

5.3. **A unicidade da medida de Lebesgue.** A medida de Lebesgue $\mathrm{m} \colon \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ é invariante por translação, ou seja, para todo conjunto mensurável E e para todo $x \in \mathbb{R}^d$, temos

$$\mathrm{m}(E + x) = \mathrm{m}(E).$$

De fato, a invariância por translação vale para o volume de caixas e a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável é expressa em termos de volumes de caixas que o cobrem.

Acontece que módulo um fator de escala, a medida de Lebesgue é a única medida no espaço euclidiano, invariante por translação.

Teorema 6. *(unicidade da medida de Lebesgue) Seja $\mu \colon \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ uma função tal que*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) $\mu\left(\bigsqcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ *para toda sequência* $\{E_n\}_{n \geq 1}$ *de conjuntos mensuráveis e disjuntos.*

(3) $\mu(E+x) = \mu(E)$ *para todo conjunto mensurável* E *e para todo* $x \in \mathbb{R}^d$.

(4) $\mu\left([0,1]^d\right) = 1$.

Então, $\mu \equiv m$.

Demonstração. O objetivo é provar que $\mu(E) = \mathrm{m}(E)$ para todo conjunto mensurável E. Como μ é σ-aditiva, também é aditiva, então pela unicidade da medida elementar, Teorema 2 do capítulo 1, $\mu(B) = \mathrm{m}(B)$ vale para toda caixa B. Usando Lemas 4 e 3, prova-se que $\mu(U) = \mathrm{m}(U)$ vale para todo conjunto aberto U; usando isso é fácil deduzir que $\mu(K) = \mathrm{m}(K)$ vale para todo conjunto compacto K. Em seguida, a regularidade exterior e interior da medida de Lebesgue podem ser usadas para mostrar que $\mu(E) = \mathrm{m}(E)$ para todo conjunto mensurável e limitado E. Finalmente, todo conjunto mensurável é uma união enumerável disjunta de conjuntos mensuráveis limitados.

Deixamos os detalhes como exercício (que vale a pena fazer). □

5.4. **Critérios de medida finita.** Um conjunto limitado automaticamente tem medida exterior finita. O contrário não é verdade. Por exemplo, pode ser mostrado (exercício) que o conjunto

$$E := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ 0 \le y \le \frac{1}{x^2} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

é mensurável à Lebesgue, possui medida finita, mas claramente não é limitado.

O teorema seguinte caracteriza conjuntos mensuráveis com medida finita.

Teorema 7. *(critérios para medida finita) Seja* $E \subset \mathbb{R}^d$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E *é Lebesgue mensurável e* $\mathrm{m}(E) < \infty$.

(ii) E *é quase aberto por fora com medida finita:* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $U \supset E$ *aberto tal que* $\mathrm{m}(U) < \infty$ *e* $m^*(U \setminus E) < \epsilon$.

(iii) E *está perto de um aberto limitado:* $\forall \epsilon > 0$ *existe um conjunto aberto e limitado* U *tal que* $m^*(U \triangle E) < \epsilon$.

(iv) E *é quase compacto por dentro:* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $K \subset E$ *compacto tal que* $m^*(E \setminus K) < \epsilon$.

(v) E *está perto de um compacto:* $\forall \epsilon > 0$ *existe um compacto* K *tal que* $m^*(K \triangle E) < \epsilon$.

(vi) E *está perto de um conjunto mensurável e limitado:* $\forall \epsilon > 0$ *existe um conjunto mensurável e limitado* A *tal que* $m^*(A \triangle E) < \epsilon$.

(vii) E *está perto de um conjunto mensurável com medida finita:* $\forall \epsilon > 0$ *existe um conjunto mensurável* A *tal que* $\mathrm{m}(A) < \infty$ *e* $m^*(A \triangle E) < \epsilon$.

(viii) E *está perto de um conjunto elementar:* $\forall \epsilon > 0$ *existe um conjunto elementar* B *tal que* $m^*(B \triangle E) < \epsilon$.

(ix) E parece pixelado *(em escala suficientemente fina):* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $m \in \mathbb{N}$ *e existe* D, *uma união finita de caixas diádicas de geração* m *(ou seja, de comprimento lateral ou escala* $\frac{1}{2^m}$*), tal que* $m^*(D \triangle E) < \epsilon$.

Demonstração. $\boxed{\text{(i)} \implies \text{(ii)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Pela definição da mensurabilidade, E é quase aberto, logo existe $U \supset E$ aberto tal que $m^*(U \setminus E) \leq \epsilon$. Segue que U deve ter medida finita:

$$\mathrm{m}(U) = \mathrm{m}\left(E \sqcup (U \setminus E)\right) = \mathrm{m}(E) + \mathrm{m}(U \setminus E) = \mathrm{m}(E) + m^*(U \setminus E) \leq \mathrm{m}(E) + \epsilon < \infty\,.$$

$\boxed{\text{(ii)} \implies \text{(i)}}$ Esta implicação é óbvia: E é quase aberto, logo, mensurável, e pela monotonicidade da medida, se $E \subset U$, onde U é aberto com medida finita, então $\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(U) < \infty$.

$\boxed{\text{(iii)} \implies \text{(i)}}$ Já sabemos (veja Teorema 2 (ii)) que todo conjunto E que está (arbitrariamente) perto de abertos, necessariamente é mensurável.

Resta provar que E possui medida finita. Sejam $\epsilon > 0$ e U aberto e limitado tais que $\mathrm{m}(U \bigtriangleup E) < \epsilon$. Como

$$E \subset (E \setminus U) \cup U \subset (E \bigtriangleup U) \cup U\,,$$

temos que

$$\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(E \bigtriangleup U) + \mathrm{m}(U) \leq \epsilon + \mathrm{m}(U) < \infty.$$

$\boxed{\text{(ii)} \implies \text{(viii)}}$ Sejam $\epsilon > 0$ e U aberto tais que

$$U \supset E, \quad \mathrm{m}(U) < \infty, \quad m^*(U \setminus E) < \epsilon.$$

Pelo Lema 4, o conjunto aberto U pode ser escrito como uma união enumerável de caixas quase disjuntas e fechadas $\{B_n\}_{n\geq 1}$. Pelo Lema 3,

$$\mathrm{m}(U) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|\,.$$

Mas como $\mathrm{m}(U) < \infty$, a série infinita acima é convergente, portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que sua cauda satisfaz

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |B_n| < \epsilon\,.$$

Seja

$$B := \bigcup_{n=1}^{N} B_n \,.$$

Então, B é um conjunto elementar (uma união finita de caixas), $B \subset U$ e

$$U \bigtriangleup B = U \setminus B \subset \bigcup_{n \geq N+1} B_n \,.$$

Segue que

$$m^*(U \bigtriangleup B) \leq m^* \left(\bigcup_{n \geq N+1} B_n \right) = \sum_{n=N+1}^{\infty} |B_n| < \epsilon \,.$$

Por outro lado,

$$m^*(U \bigtriangleup E) = m^*(U \setminus E) < \epsilon,$$

portanto,

$$m^*(B \bigtriangleup E) \leq m^*(B \bigtriangleup U) + m^*(U \bigtriangleup E) < 2\epsilon,$$

monstrando a afirmação.

$\boxed{\text{(viii)} \implies \text{(iii)}}$ Dado qualquer $\epsilon > 0$, o conjunto E está ϵ-perto de um conjunto elementar (logo, limitado) B. Pagando mais um ϵ, podemos supor que B seja aberto. Mais precisamente, ampliando ligeiramente cada caixa que compõe B, obtemos um conjunto aberto (e ainda limitado) $B' \supset B$ tal que $\mathrm{m}(B' \setminus B) < \epsilon$, logo B' está ϵ-perto de B, que já estava ϵ-perto de E, o que prova a afirmação.

Assim acabamos de provar as equivalências (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (viii). As equivalências (ii) $\iff$ (iv) $\iff$ (v) $\iff$ (vi) $\iff$ (vii) são similares e são deixadas como exercícios.

Claramente, a priori (ix) é mais forte do que (viii): parecer pixelado significa estar (arbitrariamente) perto de uma união finita de caixas diádicas de mesma geração, que obviamente é um conjunto elementar. Então, resta provar a implicação (viii) $\implies$ (ix), que é a afirmação mais interessante do teorema.

$\boxed{\text{(viii)} \implies \text{(ix)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Existe um conjunto elementar $B = B_1 \cup \ldots \cup B_N$ tal que $m^*(B \bigtriangleup E) < \epsilon$, onde $B_1, \ldots, B_N$ são caixas, que podem ser escolhidas fechadas.

A ideia é pixelizar cada caixa B_n, $1 \leq n \leq n$.

Então, seja B_0 uma caixa fechada qualquer. Vamos provar que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que B_0 parece pixelizada na escala $\frac{1}{2^{m_0}}$. Para cada $m \geq 0$, considere a união de todas caixas diádicas $Q_{i,m}$ de geração m que intersectam B_0:

$$D_m := \bigcup \left\{ Q_{i,m} \colon Q_{i,m} \cap B_0 \neq \emptyset, \; i \in \mathbb{Z} \right\} \,.$$

Como, para cada geração m, temos $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} Q_{i,m} = \mathbb{R}^d$, segue que $B_0 \subset D_m$, portanto,

$$B_0 \subset \bigcap_{m \geq 0} D_m \,.$$

Além disso, pela propriedade de encaixamento das caixas diádicas (toda caixa de geração $m+1$ está contida em uma caixa de geração m), temos que $D_{m+1} \subset D_m$, ou seja, a sequência $\{D_m\}_{m \geq 0}$ é não decrescente.

Vamos mostrar que módulo um conjunto negligenciável, $\bigcap_{m \geq 0} D_m$ é, na verdade, igual a B_0.

Seja

$$x \in \Big(\bigcap_{m \geq 0} D_m \Big) \setminus B_0 \,.$$

Como B_0 é fechado e $x \notin B_0$, existe V aberto tal que $x \in V$ e $V \cap B_0 = \emptyset$. Para m suficientemente pequeno, existe uma caixa diádica $Q_{j,m}$ de geração m tal que $x \in Q_{j,m} \subset V$. Portanto,

$$x \in Q_{j,m} \quad \text{e} \quad Q_{j,m} \cap B_0 = \emptyset\,.$$

Por outro lado, $x \in D_m = \bigcup \{Q_{i,m} \colon Q_{i,m} \cap B_0 \neq \emptyset,\ i \in \mathbb{Z}\}$, portanto existe uma caixa diádica $Q_{i,m}$ de geração m tal que

$$x \in Q_{i,m} \quad \text{e} \quad Q_{i,m} \cap B_0 \neq \emptyset\,.$$

Segue que $x \in Q_{j,m} \cap Q_{i,m}$ e $i \neq j$ (essas duas caixas são diferentes). Mas duas caixas diádicas de mesma geração são iguais ou quase disjuntas. Portanto, x pertence à *fronteira* de uma caixa diádica, que é um conjunto *negligenciável* (porque a fronteira de uma caixa consiste em seus lados, que são caixas de dimensão menor do que a do espaço ambiente). A família de caixas diádicas é enumerável. Portanto, $\left(\bigcap_{m \geq 0} D_m\right) \setminus B_0$ está contido em um conjunto negligenciável (uma união enumerável de conjuntos negligenciáveis), logo, é negligenciável também.

Concluímos que, para algum conjunto $\mathcal{Z}$ de medida zero, temos

$$\bigcap_{m \geq 0} D_m = B_0 \cup \mathcal{Z},$$

portanto,

$$D_m \searrow B_0 \cup \mathcal{Z}.$$

Pelo item (i) do Teorema 4, segue que

$$\mathrm{m}(B_0) = \mathrm{m}(B_0 \cup \mathcal{Z}) = \lim_{m \to \infty} \mathrm{m}(D_m),$$

portanto existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \geq m_0$,

$$\mathrm{m}(D_m) < \mathrm{m}(B_0) + \frac{\epsilon}{N}\,,$$

logo,

$$\mathrm{m}(D_m \setminus B_0) = \mathrm{m}(D_m) - \mathrm{m}(B_0) < \frac{\epsilon}{N}\,.$$

Vamos aplicar a conclusão acima a cada caixa B_n, $1 \leq n \leq N$. Existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que B_n parece pixelizada na escala $\frac{1}{2^m}$ para todo $m \geq m_n$; mais precisamente, existe D_m^n, uma união finita de caixas diádicas de geração m, tal que

$$\mathrm{m}(D_m^n \setminus B_n) < \frac{\epsilon}{N}\,.$$

Seja $\underline{m} := \max\{m_n \colon 1 \leq n \leq N\}$. Então, na escala $\frac{1}{2^{\underline{m}}}$ todas as caixas B_n, $1 \leq n \leq N$ parecem pixelizadas, no sentido que

$$\mathrm{m}(D_{\underline{m}}^n \setminus B_n) < \frac{\epsilon}{N}\,.$$

Seja

$$D := \bigcup_{n=1}^{N} D_{\underline{m}}^n\,.$$

Então, D é uma união finita de caixas diádicas de mesma geração $\underline{m}$ e $D \supset B = \bigcup_{n=1}^{N} B_n$. Além disso,

$$D \setminus B = \left(\bigcup_{n=1}^{N} D_{\underline{m}}^n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{N} \left(D_{\underline{m}}^n \setminus B_n\right)\,,$$

portanto,

$$\mathrm{m}(D \triangle B) = \mathrm{m}(D \setminus B) \le \sum_{n=1}^{N} \mathrm{m}\left(D^n_{\underline{m}} \setminus B_n\right) < N\,\frac{\epsilon}{N} = \epsilon\,.$$

Provamos que B parece pixelado, ou seja, está ϵ-perto de D, que está ϵ-perto de E, finalizando a prova do teorema. □

6. Conjuntos patológicos e não patológicos

Começamos com o problema de existência de conjuntos não mensuráveis à Lebesgue.

O paradoxo de Banach-Tarski afirma que dada uma bola sólida unitária B em dimensão 3 ou maior, B pode ser desmontada em um número finito de conjuntos, que podem ser remontados (depois de serem transformados por algumas rotações e translações[5]) em *duas* bolas unitárias, dobrando assim o seu volume.

A prova deste resultado usa de maneira essencial o axioma da escolha. Os conjuntos resultados são muito *patológicos*, "dispersões infinitas de pontos". Necessariamente, eles não são mensuráveis.

Solovay, em 1970, provou a existência de um modelo de teoria dos conjuntos, *sem* o axioma da escolha, para qual *todos* os conjuntos em $\mathbb{R}$ são mensuráveis à Lebesgue.

Portanto, a existência de conjuntos não mensuráveis no espaço Euclidiano depende do sistema axiomático considerado. Neste curso, sempre supomos a validade do axioma da escolha (logo, do lema de Zorn e suas outras consequências). Portanto, em nosso cenário, existem conjuntos não mensuráveis, o que mostraremos abaixo.

Exemplo 7. (de conjunto não mensurável à Lebesgue em $\mathbb{R}$) Considere a relação de equivalência em $\mathbb{R}$ dada por

$$x \sim y : \quad x - y \in \mathbb{Q}\,.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, sejam

$$x + \mathbb{Q} = \{x + r \colon r \in \mathbb{Q}\}$$

a classe de equivalência de x e

$$\mathbb{R}/\sim = \{x + \mathbb{Q} \colon x \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto quociente correspondente.

Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, sua classe de equivalência $x + \mathbb{Q}$ também é densa em $\mathbb{R}$, portanto

$$(x + \mathbb{Q}) \cap [0,1] \ne \emptyset\,.$$

Pelo axioma da escolha, existe uma função $\mathbb{R}/\sim \ni c \mapsto x_c \in [0,1]$ tal que

$$x_c \in (x + \mathbb{Q}) \cap [0,1] \quad \text{para todo } c \in \mathbb{R}/\sim\,.$$

Considere o conjunto

$$E := \{x_c \colon c \in \mathbb{R}/\sim\} \subset [0,1]\,.$$

Provaremos que E não é mensurável. Precisaremos das seguintes propriedades.

- Valem as inclusões de conjuntos

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]} (E + q) \subset [-1,2]\,. \tag{10}$$

[5]Ou seja, por transformações rígidas, que não mudam o volume de conjuntos mensuráveis.

De fato, dado $y \in [0,1]$, como as classes de equivalência particionam o espaço $\mathbb{R}$, ou seja como

$$\mathbb{R} = \bigcup_{c \in \mathbb{R}/\sim} c \,,$$

existe $c \in \mathbb{R}/\sim$ tal que $y \in c$.

Por outro lado, por definição (ou melhor, por escolha) $x_c \in (x + \mathbb{Q}) \cap [0,1]$. Então, y e x_c pertencem a mesma classe de equivalência c, logo, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$y = x_c + q \in E + q \,.$$

Além disso, $q = y - x_c$, então $|q| = |y - x_c| \le 1$, portanto $y \in E + q$, com $q \in [-1,1]$.

Ademais, como $E \subset [0,1]$, seque que para todo $q \in [-1,1]$, temos $E + q \subset [-1,2]$, finalizando a prova de (10).

- Se $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ são diferentes, então os conjuntos $E + q_1$ e $E + q_2$ são disjuntos.

De fato, se $z \in E + q_1 \cap E + q_2$, então existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}/\sim$ tais que

$$z = x_{c_1} + q_1 = x_{c_2} + q_2 \,.$$

Logo, $x_{c_1} - x_{c_2} = q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}$, ou seja, x_{c_1} e x_{c_2} pertencem a mesma classe de equivalência. Assim, $c_1 = c_2$, então $x_{c_1} = x_{c_2}$, e daí, $q_1 = q_2$.

Suponha por contradição que E seja mensurável. Então, para todo $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ (que é um conjunto enumerável infinito), $E + q$ também é mensurável, e $\mathrm{m}(E + q) = \mathrm{m}(E)$.

Além disso, a união enumerável $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (E + q)$ é mensurável e, pela propriedade (10), sua medida satisfaz as desigualdades

$$0 < 1 = \mathrm{m}\left([0,1]\right) \le \mathrm{m}\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (E + q) \Big) \le \mathrm{m}\left([-1,2]\right) = 3 < \infty \,,$$

que está em contradição com

$$\mathrm{m}\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (E + q) \Big) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathrm{m}(E) = 0 \text{ ou } +\infty \,,$$

dependendo de $\mathrm{m}(E)$ ser zero ou positivo.

Concluímos que E não pode ser mensurável.

6.1. **O critério de Carathéodory.** Acabamos o capítulo sobre conjuntos mensuráveis à Lebesgue com o critério de mensurabilidade de Carathéodory. Intuitivamente, este critério afirma que um conjunto é mensurável se e somente se não é patológico, no sentido que não contém subconjuntos que podem "ampliar a medida" de outros conjuntos (como acontece no paradoxo de Banach-Tarski).

Teorema 8. *(o critério de mensurabilidade de Carathéodory) Seja $E \subset \mathbb{R}^d$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E é mensurável à Lebesgue.

(ii) Para toda caixa B, temos

$$|B| = m^*(B \cap E) + m^*(B \setminus E) \,.$$

(iii) Para todo conjunto elementar A, temos

$$\mathrm{m}(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \,.$$

(iv) Para todo conjunto aberto U, temos

$$\mathrm{m}(U) = m^*(U \cap E) + m^*(U \setminus E) \,.$$

(v) Para todo conjunto S, temos

$$m^*(S) = m^*(S \cap E) + m^*(S \setminus E)\,.$$

Demonstração. Como a medida exterior de Lebesgue é subaditiva, para todo conjunto S, sempre temos

$$m^*(S) \leq m^*(S \cap E) + m^*(S \setminus E)\,,$$

então, somente as desigualdades " $\geq$ " são relevantes neste contexto.

$\boxed{\text{(i)} \implies \text{(ii)}}$ Como E é mensurável e B é uma caixa (então, é um conjunto mensurável), $B \cap E$, $B \setminus E$ também são mensuráveis. Além disso, $B = (B \cap E) \sqcup (B \setminus E)$, logo

$$|B| = \mathrm{m}(B) = m^*(B \cap E) + m^*(B \setminus E)\,.$$

$\boxed{\text{(ii)} \implies \text{(iii)}}$ Seja A um conjunto elementar. Então, A pode ser escrito como uma união finita de caixas (quase) disjuntas:

$$A = \bigcup_{n=1}^{N} B_n, \quad \text{logo} \quad \mathrm{m}(A) = \sum_{n=1}^{N} |B_n|\,.$$

Portanto, para todo $1 \leq n \leq N$,

$$|B_n| = m^*(B_n \cap E) + m^*(B_n \setminus E)\,,$$

e somando por n,

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(A) &= \sum_{n=1}^{N} |B_n| = \sum_{n=1}^{N} m^*(B_n \cap E) + \sum_{n=1}^{N} m^*(B_n \setminus E) \\ &\geq m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{N} B_n \cap E\Big) + m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{N} B_n \setminus E\Big) \quad \text{pela subaditividade da medida exterior} \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(iii)} \implies \text{(iv)}}$ A prova é similar a anterior. Seja U um conjunto aberto. Pelo Lema 4, U pode ser escrito como uma união enumerável de caixas quase disjuntas:

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\,.$$

Pelo Lema 3,

$$\mathrm{m}(U) = \sum_{n=1}^{N} |B_n|\,.$$

Portanto, para todo $n \geq 1$,

$$|B_n| = m^*(B_n \cap E) + m^*(B_n \setminus E)\,,$$

e somando por n,

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(U) &= \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n \setminus E) \\ &\geq m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap E\Big) + m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus E\Big) \quad \text{pela } \sigma\text{-subaditividade da medida exterior} \\ &= m^*(U \cap E) + m^*(U \setminus E)\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(iv)} \implies \text{(v)}}$ Seja $S \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto qualquer. Pela regularidade da medida exterior,

$$m^*(S) = \inf\{\mathrm{m}(U) \colon U \supset S \text{ aberto}\}\,.$$

Para cada aberto $U \supset S$, temos que

$$\begin{aligned} m^*(U) &= m^*(U \cap E) + m^*(U \setminus E) \\ &\geq m^*(S \cap E) + m^*(S \setminus E) \quad \text{pela monotonicidade da medida exterior.} \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todo tal aberto U, concluímos que

$$m^*(S) \geq m^*(S \cap E) + m^*(S \setminus E)\,.$$

$\boxed{\text{(v)} \implies \text{(i)}}$ Supomos, por enquanto, que E seja limitado; então, em particular, sua medida exterior é finita: $m^*(E) < \infty$.

Vamos provar que E é quase aberto. Seja $\epsilon > 0$. Usando a regularidade da medida exterior, existe $U \supset E$ aberto tal que

$$m^*(U) \leq m^*(E) + \epsilon\,.$$

Como, por hipótese,

$$m^*(U) = m^*(U \cap E) + m^*(U \setminus E) = m^*(E) + m^*(U \setminus E)\,,$$

e como $m^*(E) < \infty$, concluímos que

$$m^*(U \setminus E) = m^*(U) - m^*(E) \leq \epsilon\,,$$

mostrando que E é quase aberto, logo mensurável.

Um conjunto não necessariamente limitado E pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos limitados

$$E = \bigcup_{n \geq 1} E_n, \quad \text{onde} \quad E_n := E \cap [-n, n]^d\,.$$

Verificamos que o argumento anterior é aplicável ao conjunto E_n, ou seja, que E_n satisfaz

$$m^*(F) \geq m^*(F \cap E_n) + m^*(F \setminus E_n)$$

para todo conjunto $F \subset \mathbb{R}^d$. Temos o seguinte:

$$\begin{aligned} m^*(F) &= m^*(F \cap [-n, n]^d) + m^*(F \setminus [-n, n]^d) \quad (\text{já que } [-n, n]^d \text{ é mensurável}) \\ &= m^*(F \cap [-n, n]^d \cap E) + m^*(F \cap [-n, n]^d \setminus E) + m^*(F \setminus [-n, n]^d) \\ &\qquad (\text{pela hipótese sobre } E, \text{ com } S := F \cap [-n, n]^d) \\ &\geq m^*\big(F \cap ([-n, n]^d \cap E)\big) + m^*\big(F \setminus ([-n, n]^d \cap E)\big) \\ &= m^*(F \cap E_n) + m^*(F \setminus E_n)\,. \end{aligned}$$

A última desigualdade segue da subaditividade da medida exterior e da identidade geral entre conjuntos

$$(A \cap B \setminus C) \cup (A \setminus B) = A \setminus (B \cap C)\,.$$

O caso de conjuntos limitados é assim aplicável a cada conjunto E_n, provando a sua mensurabilidade, e com isso, a mensurabilidade de $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$. □

O critério de Carathéodory será muito importante para estender a construção da medida de Lebesgue em outros contextos, ou seja, para abstrair este procedimento.

A ideia é, dado um espaço ambiente X qualquer, escolher seus subconjuntos mensuráveis *básicos* (análogos a caixas no espaço Euclidiano) e definir uma medida natural para estes conjuntos.

A medida exterior de qualquer subconjunto pode ser posteriormente definida como o custo ínfimo necessário para cobri-lo por uma união enumerável de conjuntos básicos.

E finalmente, o critério de Carathéodory pode ser usado como definição do conceito de mensurabilidade, por exemplo, $E \subset X$ é mensurável se item (ii) do teorema anterior vale para todo conjunto básico B em X.