

**LISTA 1: A TEORIA DE JORDAN-RIEMANN-DARBOUX**

**Exercício 1.** Prove que a medida elementar é mónotona e sub-aditiva. Em outras palavras, mostre que a função  $m: \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz:

- (i) Dados conjuntos elementares  $E$  e  $F$ , se  $E \subset F$  então  $m(E) \leq m(F)$ .
- (ii) Para  $E$  e  $F$  conjuntos elementares tem-se  $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$ .

Explique o porquê de tais propriedades serem válidas para a medida de Jordan.

**Exercício 2.** Prove que se  $E$  e  $F$  são conjuntos Jordan mensuráveis então  $E \cap F$ ,  $E \setminus F$  e  $E \triangle F$  também são Jordan mensuráveis .

*Dica:* Use a caracterização de mensurabilidade de Jordan em termos dos conjuntos elementares que aproximam por dentro e por fora. O problema se reduz a algumas operações (booleanas) com conjuntos.

**Exercício 3.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto limitado. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $E$  é Jordan mensurável.
- (ii)  $E$  é “quase elementar” no sentido de que: para todo  $\epsilon > 0$  existe um conjunto elementar  $B$  tal que  $E \subset B$  e  $m^{*,J}(B \setminus E) < \epsilon$ .
- (iii) Para todo  $\epsilon > 0$  existe um conjunto elementar  $A$  satisfazendo  $m^{*,J}(E \triangle A) < \epsilon$ .

**Exercício 4.** Mostre que uma região determinada por um triângulo é Jordan mensurável em  $\mathbb{R}^2$  e prove a fórmula para calcular a área do triângulo que você aprendeu no jardim de infância.

**Exercício 5.** Mostre que a união enumerável de conjuntos Jordan mensuráveis pode não ser Jordan mensurável. Então mostre que a intersecção enumerável de conjuntos Jordan mensuráveis pode não ser Jordan mensurável.

*Dica:* Busque por um exemplo de um conjunto que não seja Jordan mensurável, mas que possa ser subdividido em uma quantidade enumerável de conjuntos Jordan mensuráveis. Para a segunda parte do problema, na intersecção, considere os complementares desses subconjuntos relativos a alguma caixa suficientemente grande.

**Exercício 6.** Seja  $E \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto limitado. Prove o seguinte:

- (a)  $m^{*,J}(\overline{E}) = m^{*,J}(E)$ , onde  $\overline{E}$  denota o fecho de  $E$ .
- (b)  $m_{*,J}(\overset{\circ}{E}) = m_{*,J}(E)$ , onde  $\overset{\circ}{E}$  denota o interior de  $E$ .
- (c)  $E$  é Jordan mensurável se, e somente se,  $m^{*,J}(\partial E) = 0$ , onde  $\partial E$  denota o bordo de  $E$ .

*Dica:* Parte (c) é um pouco complicada. A dificuldade é mostrar que se  $m^{*,J}(\partial E) = 0$  então  $E$  é Jordan mensurável. Segue a dica.

Já que  $m^{*,J}(\partial E) = 0$ , dado  $\epsilon > 0$  existe um conjunto elementar  $D$  com  $\partial E \subset D$  e  $m(D) < \epsilon$ . Podemos supor que  $D$  seja um conjunto aberto (por quê?). Então temos  $\overline{E} \setminus D$  compacto (por quê?).

Note que  $\overline{E} \setminus D \subset \overset{\circ}{E}$ , e por compacidade podemos encontrar um conjunto elementar  $B$  satisfazendo

$$\overline{E} \setminus D \subset B \subset \overset{\circ}{E}.$$

Isso implica  $\overline{E} \subset B \cup D$ . Como  $B \cup D$  é um conjunto elementar, temos  $m^{*,J}(\overline{E}) \leq m_{*,J}(\overset{\circ}{E}) + \epsilon$ . Dado  $\epsilon \rightarrow 0$ , use as partes (a) e (b) para concluir que  $E$  é Jordan mensurável.

Naturalmente, este é apenas um esquema da prova, você precisa preencher com os detalhes.

**Exercício 7.** Prove que se  $f$  e  $g$  são funções Darboux integráveis em  $[a, b]$ , então  $f + g$  é Darboux integrável e temos

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

*Dica:* Use a caracterização de integrabilidade de Darboux integrability em termos de “boas” funções escada (que aproximem por baixo e por cima).

**Exercício 8.** Obtenha uma função  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  que possua um conjunto de descontinuidades não enumerável, mas que ainda seja integrável.

*Dica:* Use o conjunto de Cantor.