A MEDIDA DE LEBESGUE

SILVIUS KLEIN

Sumário

Introduzimos o conceito de medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$, um refinamento da medida de Jordan.

1. A medida de Lebesgue exterior

Lembre-se do conceito de medida de Jordan exterior. Se $E \subset \mathbb{R}^d$ é um conjunto limitado, então

$$\mathrm{m}^{\star,J}(E) = \inf \{\mathrm{m}(B) \colon E \subset B, B \text{ elementar}\}.$$

Se E é ilimitado, podemos também definir sua medida de Jordan exterior como $+\infty$.

Como um conjunto elementar é uma união finita de caixas, concluímos que

$$\mathrm{m}^{\star,J}(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_n, \text{ onde } B_1, \dots, B_N \text{ são caixas} \right\}. \tag{1}$$

Em outras palavras, a medida de Jordan exterior de E é o custo ínfimo necessário para cobrir E por um número *finito* de caixas.

Como já mencionamos, ao fim de generalizar alguns conceitos clássicos, trocamos processos finitos por processos enumeráveis, um procedimento padrão na teoria da medida.

Definição 1. Dado um conjunto qualquer $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^d$, definimos sua *medida exterior de Lebesgue* por

$$m^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ onde } \{B_n\}_{n\geq 1} \text{ são caixas} \right\},$$

isto é, o custo ínfimo necessário para cobrir E por uma união *enumerável* de caixas.

Observação 1. Note que $0 \leq m^*(E) \leq +\infty$ para todo $E \subset \mathbb{R}^d$.

Além disso, "pagando mais um ϵ", as caixas B_n na definição anterior podem ser escolhidas todas *abertas* (ou todas fechadas, ou todas semi fechadas).

Definição 2. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é chamado *negligenciável* se $m^*(E) = 0$.

Note que E é negligenciável se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe uma família de caixas (todas abertas, ou todas fechadas, ou todas semi fechadas) tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon\,.$$

Exemplo 1. $m^*(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

De fato, considere uma cobertura enumerável de $\mathbb{R}^n$ por caixas abertas: $\mathbb{R}^d \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Para cada $t > 0$, o cubo $[0,t]^d$ é um compacto coberto pelas caixas abertas $\{B_n : n \geq 1\}$. Então existe uma subcobertura finita, ou seja, existe $N < \infty$ tal que $[0,t]^d \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_n$.

Concluímos que para todo $t > 0$ tem-se

$$t^d = \mathrm{m}\left([0,t]^d\right) \leq \sum_{n=1}^{N} |B_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|\,,$$

então, tomando t indo para ∞,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \infty.$$

Como a escolha da cobertura enumerável do espaço $\mathbb{R}^d$ por caixas foi arbitrária, segue que $m^*(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

Exemplo 2. $m_2^*(\mathbb{R}) = 0$, onde m_2^* refere-se à medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$, e a reta real é vista como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\mathbb{R} \equiv \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.

De fato, dado $\epsilon > 0$, considere as caixas

$$B_n := [-n, n] \times \left[-\frac{\epsilon}{2n\,2^n}, \frac{\epsilon}{2n\,2^n}\right], \quad n \geq 1\,.$$

Então,

$$|B_n| = \frac{\epsilon}{2^{n-1}}, \quad \mathbb{R} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = 2\epsilon,$$

portanto, $m_2^*(\mathbb{R}) = 0$.

Exemplo 3. Todo conjunto enumerável tem medida exterior de Lebesgue zero.

De fato, seja

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \bigcup_{n\geq 1} \{x_n\}$$

um conjunto enumerável.

Como um singleton é uma caixa (trivial), com volume zero, segue que

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\{x_n\}| = 0.$$

Proposição 1. *(os "axiomas" da medida exterior de Lebesgue)*

(i) (conjunto vazio) $m^*(\emptyset) = 0$.

(ii) (monotonicidade) Se $E \subset F$ *então* $m^*(E) \leq m^*(F)$.

(iii) (sub aditividade enumerável) Seja $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ *uma família enumerável de conjuntos. Então,*

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)\,. \tag{2}$$

Demonstração. As primeiras duas afirmações são evidentes. Vamos provar a terceira.

Se um dos conjuntos E_n tem medida exterior $+\infty$, então a desigualdade (2) é óbvia (o lado direito seria igual a $+\infty$). Então, vamos supor que $m^*(E_n) < \infty$ para todo $n \geq 1$.

Seja $\epsilon > 0$. Vamos criar mais um ϵ de folga; também usaremos o truque $\frac{\epsilon}{2^n}$, já que estamos lidando com uma família enumerável de conjuntos.

Para cada $n \geq 1$ existe uma família enumerável $\{B_n^k\}_{k \geq 1}$ de caixas tal que

$$E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_n^k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|B_n^k\right| < m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \,.$$

Portanto,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n,k \geq 1} B_n^k \,,$$

que é uma família enumerável de caixas, e

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n,k \geq 1} \left|B_n^k\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|B_n^k\right| < \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \epsilon \,.$$

Como ϵ é arbitrário, a desigualdade (2) é satisfeita. □

O próximo resultado mostra a relação entre as medidas exterior e interior de Jordan, e a medida exterior de Lebesgue.

Lema 1. *Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado. Então,*

$$\mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq m^*(E) \leq \mathrm{m}^{\star,J}(E) \,.$$

Demonstração. A segunda desigualdade acima é óbvia: $m^*(E)$ é o custo ínfimo total de todas as coberturas enumeráveis (então, inclusive finitas) por caixas, enquanto $m^{\star,J}(E)$ é o ínfimo do custo total das coberturas finitas.

Vamos estabelecer a primeira desigualdade. Seja $\epsilon > 0$. Então existe um conjunto elementar e compacto (por quê?) $K \subset E$ tal que

$$\mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq \mathrm{m}(K) + \epsilon. \tag{3}$$

Considere qualquer família $\{B_n\}_{n \geq 1}$ de caixas abertas tal que $E \subset \bigcup_{n \geq 1} B_n$.

Então $\{B_n\}_{n \geq 1}$ é uma cobertura aberta do conjunto compacto K, e por isso, existe $N < \infty$ tal que $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_n$. Segue que

$$\mathrm{m}(K) \leq \sum_{k=1}^{N} |B_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_n| \,.$$

Portanto,

$$m_{\star,J}(E) \leq \mathrm{m}(K) + \epsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_n| + \epsilon \,,$$

e tomando o ínfimo sobre todas as famílias de caixas $\{B_n\}_{n \geq 1}$ que cobrem E, concluímos o seguinte:

$$m_{\star,J}(E) \leq m^*(E) + \epsilon \,,$$

o que implica a desigualdade desejada, já que ϵ é arbitrário. □

2. Conjuntos mensuráveis à Lebesgue: definição, exemplos

Existem várias definições (equivalentes) do conceito de mensurabilidade à Lebesgue em $\mathbb{R}^d$. Escolhemos a definição mais direta, via o "primeiro princípio de Littlewood", que nos permite chegar mais rapidamente a resultados fundamentais sobre a estrutura do espaço de tais conjuntos.

Definição 3. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é dito *mensurável à Lebesgue* se E é "quase aberto", no sentido que para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto aberto U tal que $U \supset E$ e $m^*(U \setminus E) < \epsilon$.

Vamos comparar este conceito com o conceito de mensurabilidade à Jordan.

Exercício 1. Seja $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto Jordan mensurável. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto elementar e aberto U (ou seja, uma união *finita* de caixas abertas) tal que $U \supset E$ e $\mathrm{m}^{\star,J}(U \setminus E) < \epsilon$.

Portanto, usando esse exercício, se E é Jordan mensurável, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $U \supset E$ elementar e aberto tal que $\mathrm{m}^{\star,J}(U \setminus E) < \epsilon$. Mas pelo Lema 1, $m^*(U \setminus E) \le \mathrm{m}^{\star,J}(U \setminus E) < \epsilon$, mostrando que E é quase aberto, isto é, Lebesgue mensurável. O contrário *não* é verdade (como veremos em breve).

Além disso, de novo pelo Lema 1,

$$\mathrm{m}_{\star,J}(E) \le m^*(E) \le \mathrm{m}^{\star,J}(E)\,,$$

e como E é mensurável à Jordan, $\mathrm{m}_{\star,J}(E) = \mathrm{m}^{\star,J}(E) = m(E)$.

Concluímos que um conjunto mensurável à Jordan E também é mensurável à Lebesgue e

$$m(E) = m^*(E),$$

ou seja, a medida de Jordan de E é igual a sua medida exterior de Lebesgue.

Portanto, obtemos uma extensão de um conceito mais básico substituindo um processo finito por um enumerável.

Para um conjunto *mensurável* à Lebesgue, chamaremos sua medida exterior $m^*(E)$ simplesmente de sua medida (de Lebesgue), e usaremos a notação simplificada $\mathrm{m}(E)$ (os comentários acima garantem a consistência desta terminologia e notação).

Observação 2. Todo conjunto aberto é, obviamente, mensurável à Lebesgue.

Observação 3. Todo conjunto negligenciável (isto é, com medida exterior de Lebesgue zero) é mensurável à Lebesgue. Em particular, todo subconjunto de uma conjunto negligenciável é mensurável. Ademais, todo conjunto enumerável é mensurável.

De fato, dados $E \subset \mathbb{R}^d$ com $m^*(E) = 0$ e $\epsilon > 0$, existe uma família enumerável de caixas abertas $\{B_n\}_{n\ge 1}$ tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon\,.$$

Então, $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ é aberto, $U \supset E$ e como $U \setminus E \subset U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$,

$$m^*(U \setminus E) \le \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \epsilon\,,$$

mostrando que E é quase aberto.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de conjuntos mensuráveis à Lebesgue que não são mensuráveis à Jordan.

Exemplo 4. O conjunto $E := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ é enumerável, então, pela observação anterior é mensurável à Lebesgue. Por outro lado, como já vimos, não é mensurável à Jordan, apesar de ser limitado.

Exemplo 5. O exemplo anterior é, de certa forma, trivial. Na verdade, existem conjuntos topologicamente mais interessantes que são Lebesgue mas não Jordan mensuráveis. Vamos construir um tal conjunto aberto (e limitado) e a seguir um compacto.

A ideia é "engrossar"o conjunto

$$E := \mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\}$$

do exemplo anterior.

De fato, para cada $n \geq 1$, considere o intervalo aberto

$$I_n := \left(q_n - \frac{r}{2^n}, q_n + \frac{r}{2^n}\right) ,$$

onde $0 < r < \frac{1}{2}$ é uma constante. Defina

$$U := \bigcup_{n \geq 1} I_n.$$

Então, U é aberto (e em particular, Lebesgue mensurável) e claramente limitado, por exemplo $U \subset [-1,2]$, mas não é Jordan mensurável. De fato, temos

$$\mathrm{m}^{\star,J}(U) = m^{\star,J}(\overline{U}) \geq m^{\star,J}(\overline{E}) = m^{\star,J}([0,1]) = 1,$$

enquanto, por outro lado temos

$$\mathrm{m}_{\star,J}(U) \leq m^*(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = 2r < 1 \leq \mathrm{m}^{\star,J}(U)\,,$$

então $\mathrm{m}^{\star,J}(U) \neq \mathrm{m}_{\star,J}(U)$.

Ademais, seja $K := [-1,2] \setminus U$. Então K é um conjunto compacto, portanto Lebesgue mensurável (ainda não provamos isso, vamos aceitá-lo por enquanto). Por outro lado, K não pode ser Jordan mensurável, pois, caso contrário, $U = [-1,2] \setminus K$ seria Jordan mensurável também.

Comentário 1. Uma pergunta natural é por que não definir o conceito de mensurabilidade à Lebesgue seguindo exatamente o mesmo padrão do conceito de mensurabilidade à Jordan, considerando um conceito de medida interior.

Vamos *tentar* a seguir esse caminho, definindo, analogamente à medida interior de Jordan, a medida interior de Lebesgue de um conjunto E por

$$\mathrm{m}_{\star}(E) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : \{B_n\}_{n \geq 1} \text{ caixas, } \bigcup_{n \geq 1} B_n \subset E \right\} ,$$

e a mensurabilidade de E pelo fato de que as suas medidas exterior $m^*(E)$ e interior $\mathrm{m}_{\star}(E)$ sejam iguais.

Considere o conjunto

$$F := [0,1] \setminus \mathbb{Q}\,.$$

Este conjunto *deveria* ser mensurável, como diferença de dois conjuntos mensuráveis (um intervalo é um conjunto enumerável). Mas, como F não contém intervalos, sua medida interior $\mathrm{m}_{\star}(F) = 0$, enquanto, por outro lado, sua medida exterior deve ser $m^*(F) = 1$. Isto é porque, como $F \subset [0,1] \subset F \cup \mathbb{Q}$, temos

$$1 = m^*([0,1]) \leq m^*(F) + m^*(\mathbb{Q}) = m^*(F) \leq 1.$$

Portanto, essa abordagem não funciona com sucesso. Uma explanação mais especulativa é que o espaço euclidiano possui subconjuntos densos *enumeráveis*, então trocando processos finitos por processos enumeráveis abre amplamente as portas, permitindo a entrada de conjuntos muito mais gerais, cuja medida interior não capta bem seus tamanhos.

A partir de agora, salvo indicação ao contrário, mensurabilidade se refere a mensurabilidade por Lebesgue.

2.1. **Regularidade exterior.** Lembre-se que a medida exterior de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é dada por

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \text{ onde } B_n \text{ são caixas} \right\} .$$

O seguinte resultado se refere à aproximação por cima da medida exterior de um conjunto qualquer por conjuntos abertos.

Proposição 2. *(regularidade exterior) Dado $E \subset \mathbb{R}^d$, temos*

$$m^*(E) = \inf \{ m^*(U) \colon U \text{ aberto}, \ U \supset E \} .$$

Demonstração. Como a medida exterior é monótona, temos que $m^*(E) \le m^*(U)$ para todo conjunto aberto $U \supset E$. Assim, $m^*(E) \le \inf \{ m^*(U) \colon U \text{ aberto}, \ U \supset E \}$.

Vamos provar a desigualdade oposta. Seja $\epsilon > 0$. Pela definição de medida exterior, existem caixas $\{B_n\}_{n \ge 1}$ tais que

$$E \subset \bigcup_{n \ge 1} B_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \le m^*(E) + \epsilon .$$

Pague mais um ϵ para supor que as caixas $\{B_n\}_{n \ge 1}$ são abertas. Então, o conjunto

$$U := \bigcup_{n \ge 1} B_n$$

é aberto, $E \subset U$ e, pela definição de medida exterior aplicada a U,

$$m^*(U) \le \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \le m^*(E) + \epsilon .$$

Tomado $\epsilon \to 0$, concluímos que $\inf \{ m^*(U) \colon U \text{ aberto}, \ U \supset E \} \le m^*(E)$. □

3. O espaço de conjuntos mensuráveis

Os próximos resultados técnicos serão usados para estabelecer a existência de uma grande classe de conjuntos mensuráveis.

3.1. **Caixas quase disjuntas.** Enquanto os intervalos $(0, 1]$ e $[1, 2]$ da reta $\mathbb{R}$ não são disjuntos, a interseção deles, o conjunto $\{0\} \subset \mathbb{R}$ é trivial do ponto de vista da teoria da medida. Similarmente, caixas em $\mathbb{R}^2$ que se intersectam somente ao longo do um lado, enquanto não são tecnicamente disjuntas, para todos os fins práticos, se comportam como se fossem disjuntas. Vamos formalizar esta ideia na seguinte definição.

Definição 4. Duas caixas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$ são ditas *quase disjuntas* se seus interiores são disjuntos.

Lema 2. *Se $B_1, \dots, B_N$ são caixas quase disjuntas duas à duas, então*

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \sum_{n=1}^{N} |B_n| \ .$$

Demonstração. Tem-se

$$\bigcup_{n=1}^{N} B_n = \bigcup_{n=1}^{N} \mathrm{int}\,(B_n) \cup \mathcal{Z},$$

onde $\mathcal{Z} \subset \bigcup_{n=1}^{N} \partial B_n$, então $\mathcal{Z}$ é negligenciável. Portanto

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \sum_{n=1}^{N} |\mathrm{int}\,(B_n)| + \mathrm{m}(\mathcal{Z}) = \sum_{n=1}^{N} |B_n| \,.$$

□

Lema 3. *Se $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, onde $\{B_n\}_{n\geq 1}$ são caixas quase disjuntas duas à duas, então*

$$m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \ . \tag{4}$$

Em particular, se

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n' \,,$$

onde as caixas $\{B_n\}_{n\geq 1}$ e $\{B_n'\}_{n\geq 1}$ são, respectivamente, quase disjuntas duas à duas, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |B_n'| \ .$$

Demonstração. Pela definição da medida exterior,

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \ .$$

Vamos provar a desigualdade oposta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |B_n| \ .$$

Seja $N \geq 1$ e considere a união finita $\bigcup_{n=1}^{N} B_n \subset E$. Então, pelo lema anterior,

$$\sum_{n=1}^{N} |B_n| = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) \leq m^*(E) \,.$$

Portanto, para todo $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} |B_n| \leq m^*(E) \,,$$

e tomando $N \to \infty$, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \leq m^*(E) \,,$$

assim finalizando a prova do lema. □

Exemplo 6. Como $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n, n+1)$, temos (o fato já estabelecido por outro meio) que

$$m^*(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1 = +\infty.$$

Lema 4. *Todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ pode ser escrito como uma união enumerável de caixas quase disjuntas e fechadas $\{B_n\}_{n\geq 1}$.*

Demonstração. A ideia é usar a malha diádica do espaço euclidiano. Vamos considerar o caso unidimensional $d = 1$. O caso multidimensional pode ser tratado analogamente.

Defina os intervalos diádicos

$$Q_{i,n} := \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] \quad n \geq 0,\, i \in \mathbb{Z}\,,$$

onde o índice n será referido como "a geração"a qual $Q_{i,n}$ pertence.

Note que $|Q_{i,n}| = \frac{1}{2^n}$. Então, dado $n \geq 0$, a família

$$\{Q_{i,n} \colon i \in \mathbb{Z}\}$$

de intervalos diádicos de geração n representa a malha diádica de tamanho $\frac{1}{2^n}$.[1]

Note também que a família

$$\{Q_{i,n} \colon i \in \mathbb{Z},\, n \geq 1\}$$

de todos os intervalos diádicos, de quaisquer geração, é enumerável.

As seguintes propriedades dos intervalos diádicos serão usadas na prova do lema, e são fáceis de verificar.

(1) Dado $n \geq 0$, os intervalos diádicos $\{Q_{i,n} \colon i \in \mathbb{Z}\}$ de geração n são quase disjuntos, fechados e cobrem o espaço $\mathbb{R}$.

(2) Cada intervalo diádico de geração $n \geq 1$ está contido em um intervalo "pai"de geração $n - 1$.

(3) Se Q, Q' são quaisquer intervalos diádicos, de quaisquer gerações, então, ou eles são quase disjuntos, ou um deles contém o outro (isto é, um é o "antepassado"do outro).

Afirmamos que dado um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^d$, tem-se

$$U = \bigcup \{Q \colon Q \text{ intervalo diádico}, Q \subset U\}\ . \tag{5}$$

De fato, evidentemente, a união no lado direito está contida em U, então basta provar a inclusão oposta.

Seja $x \in U$. Como U é aberto, existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subset U$. Já que $\frac{1}{2^n} \to 0$ quando $n \to \infty$, segue que existe N tal que $\frac{1}{2^N} < r$. Usaremos a malha diádica de tamanho $\frac{1}{2^N}$, isto é, pensaremos em $\{Q_{i,N} \colon i \in \mathbb{Z}\}$ como uma régua com unidade de medida $\frac{1}{2^N}$.

Mais precisamente, os intervalos diádicos de geração N cobrem o espaço $\mathbb{R}$ inteiro, então existe Q, um intervalo diádico de geração N tal que $x \in Q$. Mas como $|Q| = \frac{1}{2^N} < r$, segue que $Q \subset (x - r, x + r)$. Então, $x \in Q \subset (x - r, x + r) \subset U$, estabelecendo assim (5).

A representação do conjunto U dada por (5) ainda não é o que precisamos, pois os intervalos incluídos não são quase disjuntos: com cada intervalo diádico $Q \subset U$, incluímos também todos os seus descendentes. A solução é, então, considerar apenas os intervalos diádicos maximais que estão contidos em U.

[1] Em dimensão maior, a malha considerada consiste em produtos cartesianos de intervalos diádicos.

De fato, chamamos um intervalo diádico $Q^\star$ *maximal* em relação à inclusão se, sempre que $Q^\star \subset Q \subset U$, onde Q é diádico, temos $Q^\star = Q$.

Pelo Lema de Zorn, para todo intervalo diádico $Q \subset U$, existe um intervalo diádico maximal $Q^\star \subset U$ tal que $Q \subset Q^\star$. Note também que se $Q_1^\star, Q_2^\star \subset U$ são intervalos diádicos maximais, então, ou eles são quase disjuntos, ou são iguais.

Concluímos o seguinte

$$U = \bigcup \{Q^\star \colon Q^\star \text{ intervalo diádico maximal} \subset U\} ,$$

que, de fato, é uma união enumerável de intervalos fechados e quase disjuntos. □

O seguinte exercício é uma amostra relativamente simples de uma propriedade bem mais geral e forte da medida (exterior) de Lebesgue. O resultado enunciado neste exercício será utilizado em breve como uma ferramenta técnica.

Exercício 2. Sejam $K, L \subset \mathbb{R}^d$ dois conjuntos compactos e disjuntos. Então,

$$m^*(K \cup L) = m^*(K) + m^*(L) .$$

O próximo teorema estabelece a existência de uma coleção bem ampla e topologicamente rica de conjuntos mensuráveis à Lebesgue.

Teorema 1. *(existência de conjuntos mensuráveis)*

(i) Cada conjunto aberto é mensurável à Lebesgue.
(ii) Cada conjunto fechado é mensurável à Lebesgue.

(iii) Cada conjunto negligenciável é mensurável à Lebesgue.

(iv) O conjunto vazio $\emptyset$ é mensurável à Lebesgue.
(v) Se $E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável à Lebesgue, então $E^\complement = \mathbb{R}^d \setminus E$ também é mensurável.
(vi) Se $\{E_n\}_{n\ge1}$ são mensuráveis à Lebesgue, então $\bigcup_{n\ge1} E_n$ também é mensurável.

(vii) Se $\{E_n\}_{n\ge1}$ são mensuráveis à Lebesgue, então $\bigcap_{n\ge1} E_n$ também é mensurável.

Demonstração. Itens (i) é (iv) são óbvios, item (iii) já foi provado, e item (vii) é uma consequência dos itens (v) e (vi) e das leis de Morgan. Portanto, resta provar itens (ii), (v) e (vi). Seguiremos a ordem (vi), depois (ii) e finalmente (v).[2]

$\boxed{\text{(vi)}}$ Considere uma família $\{E_n\}_{n\ge1}$ de conjuntos mensuráveis e seja $\epsilon > 0$. Usaremos o truque $\frac{\epsilon}{2^n}$. Para cada $n \ge 1$, existe um conjunto aberto $U_n \supset E_n$ tal que

$$m^*(U_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n} .$$

Defina

$$U := \bigcup_{n\ge1} U_n .$$

Então, U é aberto, $U \supset \bigcup_{n\ge1} E_n$ e, como

$$U \setminus \left(\bigcup_{n\ge1} E_n\right) = \left(\bigcup_{n\ge1} U_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\ge1} E_n\right) \subset \bigcup_{n\ge1} (U_n \setminus E_n) ,$$

[2] Item (ii) teria sido uma consequência dos itens (i) e (v), se conseguíssemos provar (v) diretamente.

usando a subaditividade da medida exterior, tem-se

$$m^*\left(U \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(U_n \setminus E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon\,,$$

mostrando que $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ é quase aberto, ou seja, mensurável.

$\boxed{\text{ii}}$ Todo conjunto fechado é mensurável à Lebesgue.
Seja $F \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto fechado. Para cada $n \geq 1$, seja

$$F_n := F \cap [-n, n]^d\,.$$

Note que os conjuntos F_n, $n \geq 1$ são compactos e $F = \bigcup_{n\geq 1} F_n$. Portanto, basta provar que todo conjunto compacto K é mensurável.

Seja $\epsilon > 0$. Pela regularidade exterior da medida externa, existe U aberto tal que $U \supset K$ e

$$m^*(U) \leq m^*(K) + \epsilon\,.$$

O objetivo é provar que $m^*(U \setminus K) \leq \epsilon$, o que vai finalizar a prova.[3]

Como $U \setminus K = U \cap K^\complement$ é aberto, pelo Lema 3 da aula passada, $U \setminus K$ pode ser escrito como uma união enumerável de caixas fechadas (então compactas) e quase disjuntas: $U \setminus K = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Pelo Lema 2 da aula passada,

$$m^*(U \setminus K) = \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n|\,.$$

Portanto, basta provar que para todo $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} |Q_n| \leq \epsilon\,. \tag{6}$$

Fixe $N \geq 1$ e considere a união finita de caixas

$$Q_1 \cup \ldots \cup Q_N =: L\,.$$

Então, L é compacto, $L \subset U \setminus K$ e assim,

$$K \cap L = \emptyset \quad \text{e} \quad K \cup L \subset U\,.$$

Pelo Exercício 1 e pelo Lema 1 da aula passada,

$$m^*(K \cup L) = m^*(K) + m^*(L) = m^*(K) + \sum_{n=1}^{N} |Q_n|\,. \tag{7}$$

Além disso,

$$m^*(K \cup L) \leq m^*(U) \leq m^*(K) + \epsilon\,. \tag{8}$$

Combinando (7) e (8) segue que

$$m^*(K) + \sum_{n=1}^{N} |Q_n| \leq m^*(K) + \epsilon\,,$$

que implica (6) e finaliza a prova.

$\boxed{\text{vi}}$ Se $E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável à Lebesgue, então $E^\complement = \mathbb{R}^d \setminus E$ também é mensurável.

[3]Enquanto a posteriori isso se tornará verdade, por enquanto, não sabemos que $m^*(U \setminus K) = m^*(U) - m^*(K)$.

A ideia da prova é "quase preencher"o conjunto complementar $E^{\complement}$ por conjuntos fechados. Como E é Lebesgue mensurável, para todo $n \geq 1$ existe um conjunto aberto U_n tal que

$$E \subset U_n \quad \text{e} \quad m^*(U_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}\,.$$

Temos, claramente, que para todo $n \geq 1$, o conjunto $F_n := U_n^{\complement} \subset E^{\complement}$ e F_n é fechado (portanto, mensurável). Seja

$$F := \bigcup_{n \geq 1} F_n\,.$$

Então, F é mensurável e $F \subset E^{\complement}$. Vamos provar que $E^{\complement} \setminus F$ é negligenciável.

Como, para todo $n \geq 1$, $F_n \subset F$, temos

$$E^{\complement} \setminus F \subset E^{\complement} \setminus F_n = E^{\complement} \setminus U_n^{\complement} = U_n \setminus E\,,$$

segue que

$$0 \leq m^*\left(E^{\complement} \setminus F\right) \leq m^*\left(U_n \setminus E\right) \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty\,.$$

Portanto, $m^*\left(E^{\complement} \setminus F\right) = 0$, e em particular, $E^{\complement} \setminus F$ é mensurável. Mas

$$E^{\complement} = F \cup \left(E^{\complement} \setminus F\right)\,,$$

monstrando a mensurabilidade de $E^{\complement}$. □

3.2. **Critérios para mensurabilidade.** Seja $2^{\mathbb{R}^d} := \left\{A \colon A \subset \mathbb{R}^d\right\}$ a família dos todos os subconjuntos do espaço $\mathbb{R}^d$. Note que as seguintes propriedades valem para conjuntos $A, B, C \in 2^{\mathbb{R}^d}$:

$A \bigtriangleup A = \emptyset$.
$A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$.
$A \bigtriangleup B \subset (A \bigtriangleup C) \cup (C \bigtriangleup B)$.

Portanto, a diferença simétrica $\bigtriangleup$ parece uma "distância"em $2^{\mathbb{R}^d}$.

Exercício 3. Prove que

$$d(A, B) := m^*(A \bigtriangleup B)$$

é uma pseudo[4] métrica em $2^{\mathbb{R}^d}$.

Teorema 2. *(critérios para mensurabilidade) Seja $E \subset \mathbb{R}^d$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) E é Lebesgue mensurável, ou seja, E é quase aberto por fora*: $\forall \epsilon > 0$ existe $U \supset E$ aberto tal que $m^*(U \setminus E) < \epsilon$.*

(ii) E está perto de um aberto*: $\forall \epsilon > 0$ existe U aberto tal que $m^*(U \bigtriangleup E) < \epsilon$.*

(iii) E é quase fechado por dentro*: $\forall \epsilon > 0$, existe $F \subset E$ fechado tal que $m^*(E \setminus F) < \epsilon$.*

(iv) E está perto de um fechado*: $\forall \epsilon > 0$ existe F fechado tal que $m^*(F \bigtriangleup E) < \epsilon$.*

(v) E está perto de um mensurável*: $\forall \epsilon > 0$ existe A mensurável tal que $m^*(A \bigtriangleup E) < \epsilon$.*

[4] No sentido que $d(A, B) = 0$ não necessariamente implica $A = B$.

Demonstração. A implicação (i) $\Longrightarrow$ (ii) é evidente, já que se $U \subset E$, então $U \triangle E = U \setminus E$. A implicação oposta é exercício. Idem a equivalência (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv), enquanto (iv) $\Longrightarrow$ (v) também é evidente. Então, resta provar as implicações (i) $\Longrightarrow$ (iii) e (v) $\Longrightarrow$ (ii).

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(iii)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Como E é mensurável, $E^{\complement}$ também é mensurável, então existe um conjunto aberto $U \supset E^{\complement}$ tal que $m^*(U \setminus E^{\complement}) < \epsilon$.

Seja $F := U^{\complement}$. Então, F é fechado e $F \subset \left(E^{\complement}\right)^{\complement} = E$. Por outro lado,

$$E \setminus F = \left(E^{\complement}\right)^{\complement} \setminus U^{\complement} = U \setminus E^{\complement},$$

então

$$m^*(E \setminus F) = m^*(U \setminus E^{\complement}) < \epsilon,$$

mostrando que E é quase fechado por dentro.

$\boxed{\text{(v)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Seja $\epsilon > 0$. Existe A mensurável tal que $m^*(A \triangle E) < \epsilon$. Como A é quase aberto, pelo item (ii) A está perto de um aberto: existe U aberto tal que $m^*(U \triangle A) < \epsilon$.

Portanto, pela desigualdade triangular na pseudo métrica $(A, B) \mapsto m^*(A \triangle B)$, temos que

$$m^*(U \triangle E) \le m^*(U \triangle A) + m^*(A \triangle E) < 2\epsilon,$$

monstrando que E está perto de um aberto. $\square$

Comentário 2. Denotamos por

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) := \left\{E \subset \mathbb{R}^d \colon E \ \text{ é Lebesgue mensurável}\right\}$$

a família de conjuntos mensuráveis à Lebesgue. Provamos que

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

(ii) Se $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ então $E^{\complement} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

(iii) Se $\{E_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, então $\bigcup_{n\ge1} E_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Assim, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ é uma *σ-álgebra.*

Este conceito será abstratído na segunda parte do curso: diz-se que uma família de subconjuntos de um espaço qualquer é uma σ-álgebra se contiver o conjunto vazio e se for fechada sob a operação complemento e sob uniões enumeráveis.
Consequentemente, uma σ-álgebra também é fechada sob interseções enumeráveis.

Ademais, provamos que $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ contém todos os conjuntos abertos e fechados.

3.3. **Os axiomas da medida.** A restrição da medida exterior de Lebesgue à família $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis, ou seja, a função $\mathrm{m} \colon \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$,

$$\mathrm{m}(E) := m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \ B_n \text{ são caixas} \right\}$$

é chamada de *medida de Lebesgue* no espaço $\mathbb{R}^d$.

Outras notações comuns da medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^d$ são $\lambda(E)$, $|E|$, $\mathrm{Leb}(E)$ e etc.

O teorema seguinte mostra as propriedades básicas da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$, o que no contexto abstrato de uma σ-álgebra qualquer irão representar a definição de uma medida.

Teorema 3. *(os "axiomas"da medida)*

(1) $\mathrm{m}(\emptyset) = 0$

(2) (σ-aditividade) Se $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ *são disjuntos, então*

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)\,.$$

Antes de começar a prova deste teorema, vamos notar os seguintes fatos.

1. (monotonicidade) Se E, F são mensuráveis e $E \subset F$, então
$$\mathrm{m}(E) \leq \mathrm{m}(F)\,.$$
Isso é evidente, já que a função m coincide com a medida exterior m^* em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, e a medida exterior é monótona.

2. (aditividade finita para compactos) Se K, L são conjuntos compactos (assim, mensuráveis) e disjuntos, então
$$\mathrm{m}(K \cup L) = \mathrm{m}(K) + \mathrm{m}(L)\,.$$
De novo, esta propriedade (aditividade para dois compactos) vale para a medida exterior m^* que é igual a medida m em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.
Ademais, por indução, se $K_1, \ldots, K_N$ são compactos disjuntos, então
$$\mathrm{m}\left(K_1 \cup \ldots \cup K_N\right) = \mathrm{m}(K_1) + \ldots + \mathrm{m}(K_n)\,.$$

Demonstração do Teorema 3. Já sabemos que

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) \quad \text{(pela sub aditividade da medida exterior)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)\,.$$

Então, basta mostrar a desigualdade oposta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \leq \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\,. \tag{9}$$

Caso 1: Todos os conjuntos $\{E_n\}_{n\geq 1}$ são *compactos*. Neste caso, para todo $N \geq 1$, usando a aditividade finita para compactos, e depois a monotonicidade, temos que

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{m}(E_n) = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) \leq \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\,.$$

Tomando $N \to \infty$, obtemos (9).

Caso 2: Todos os conjuntos $\{E_n\}_{n\geq 1}$ são *limitados* (mas não necessariamente compactos). Seja $\epsilon > 0$. Para cada $n \geq 1$, E_n é mensurável, então quase fechado por dentro; portanto, existe $F_n \subset E_n$ fechado (logo limitado, e assim, compacto) tal que

$$m^*(E_n \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Pela sub aditividade da medida exterior, temos

$$m^*(E_n) = m^*\left(F_n \cup (E_n \setminus F_n)\right) \leq m^*(F_n) + m^*(E_n \setminus F_n) < m^*(F_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Somado sobre todo $n \geq 1$ segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(F_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(F_n) + \epsilon \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(F_n) + \epsilon = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) + \epsilon \quad \text{(pelo Caso 1, pois } F_n \text{ são compactos)} \\
&\leq \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + \epsilon \quad \text{(pela monotonicidade da medida).}
\end{aligned}
$$

Tomando $\epsilon \to 0$ mostramos (9) neste caso.

Caso 3: O caso geral. Todo conjunto do espaço euclidiano pode ser escrito como uma união disjunta enumerável de conjuntos limitados (por quê?).

Então escreva, para todo $n \geq 1$, $E_n = \bigcup_{m \geq 1} E_{n,m}$, onde $\{E_{n,m} \colon m \geq 1\}$ são conjuntos limitados e disjuntos entre si.

Portanto,

$$
\bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{n,m \geq 1} E_{n,m},
$$

que é uma união disjunta enumerável de conjuntos limitados.

Pelo Caso 2, temos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{m}\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) &= \mathrm{m}\left(\bigcup_{n,m \geq 1} E_{n,m}\right) \\
&= \sum_{n,m \geq 1} \mathrm{m}(E_{n,m}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_{n,m})\right) \quad \text{(pelo teorema de Fubini-Tonelli)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) \quad \text{(de novo, pelo Caso 2),}
\end{aligned}
$$

assim finalizando a prova. $\square$