# ESPAÇOS DE MEDIDA ABSTRATOS

SILVIUS KLEIN

## Sumário



Construímos uma família de subconjuntos do espaço euclidiano chamados de conjuntos Lebesgue mensuráveis e definimos a medida de tais conjuntos; introduzimos uma classes geral de funções no espaço euclidiano chamadas de funções Lebesgue mensuráveis e definimos um conceito de integração para tais funções.

O objetivo deste capítulo é desenvolver uma teoria semelhante em um cenário abstrato.

## 1. Sigma-álgebras e espaços mensuráveis

**Definição 1.** Dado um conjunto $X$, uma $\sigma$-álgebra sobre $X$ é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X$ tal que

(1) $\varnothing \in \mathcal{B}$,
(2) se $E \in \mathcal{B}$ então $E^{\complement} \in \mathcal{B}$,
(3) se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{B}$.

Um par $(X, \mathcal{B})$, onde $X$ é um conjunto (o espaço ambiente) e $\mathcal{B}$ é uma $\sigma$-álgebra sobre $X$ é chamado de *espaço mensurável*.

Os elementos de $\mathcal{B}$ são ditos conjuntos $\mathcal{B}$-mensuráveis ou simplesmente, mensuráveis.

**Observação 1.** Note que o espaço ambiente $X = \varnothing^{\complement} \in \mathcal{B}$. Além disso, $\mathcal{B}$ é fechada também com respeito a interseções enumeráveis: se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então

$$\bigcap_{n\geq 1} E_n = \left( \bigcup_{n\geq 1} E_n^{\complement} \right)^{\complement} \in \mathcal{B}\,.$$

A seguir apresentamos alguns exemplos gerais de $\sigma$-álgebras.

**Exemplo 1** (de $\sigma$-álgebras)**.** Seja $X$ um espaço ambiente.

(1) A $\sigma$-álgebra trivial: $\mathcal{B} = \{\varnothing, X\}$.
(2) A $\sigma$-álgebra discreta: $\mathcal{B} = 2^X = \{E \colon E \subset X\}$.

(3) A $\sigma$-álgebra atômica. Dada uma partição

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$$

de $X$ em "átomos", seja

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} A_\alpha \colon \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \right\} .$$

Então $\mathcal{B}$ é uma $\sigma$-álgebra (atômica). A prova deste fato é um exercício.

Note que a $\sigma$-álgebra trivial é atômica, que corresponde à partição

$$X = \varnothing \sqcup X,$$

enquanto a $\sigma$-álgebra discreta também é atômica, onde todos os singletons são átomos:

$$X = \bigsqcup_{x \in X} \{x\} .$$

(4) A $\sigma$-álgebra diádica de determinada geração. Dado $n \geq 0$, considere a partição de reta real $\mathbb{R}$ em intervalos diádicos de geração $n$,

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right)$$

e a $\sigma$-álgebra atômica $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ correspondente.

A mesma construção pode ser feita em $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, usando caixas diádicas em vez de intervalos diádicos.

1.1. **Geração de sigma-álgebras.** Dadas duas $\sigma$-álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, se $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ dizemos que $\mathcal{B}'$ é *mais fina* do que $\mathcal{B}$, ou que $\mathcal{B}$ é mais grosseira do que $\mathcal{B}'$.

Por exemplo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

É fácil verificar que a interseção de qualquer família $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ de $\sigma$-álgebras sobre $X$ também é uma $\sigma$-álgebra sobre $X$, o que nos permite introduzir o seguinte conceito.

**Definição 2.** Dada uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um espaço ambiente $X$, seja

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{B} \colon \mathcal{B} \supset \mathcal{F},\, \mathcal{B} \text{ é uma } \sigma - \text{álgebra}\} .$$

Então $\sigma(\mathcal{F})$ é uma $\sigma$-álgebra sobre $X$ chamada a $\sigma$-álgebra gerada por $\mathcal{F}$. Ela é a menor (ou a mais grosseira) $\sigma$-álgebra que contém a coleção $\mathcal{F}$.

Note que $2^X \supset \mathcal{F}$ e como $2^X$ é uma $\sigma$-álgebra, a interseção de $\sigma$-álgebras acima é bem definida.

**Definição 3** (a $\sigma$-álgebra de Borel)**.** Denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a $\sigma$-álgebra gerada pela topologia do espaço euclidiano, ou seja,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma \left\{ U \subset \mathbb{R}^d \colon U \text{ aberto} \right\} .$$

Mais geralmente, dado um espaço topológico qualquer $(X, \mathcal{T})$,

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}) = \sigma \{U \subset X \colon U \text{ aberto}\}$$

é chamada a $\sigma$-álgebra de Borel do espaço $(X, \mathcal{T})$.

Os conjuntos $E \in \mathcal{B}(X)$ são chamados de conjuntos *borelianos.*

**Exemplo 2** (de conjuntos borelianos)**.** Todos os conjuntos abertos, fechados, do tipo $F_\sigma$ (i.e., uniões enumeráveis de conjuntos fechados), do tipo $G_\delta$ (i.e., interseções enumeráveis de conjuntos abertos) são conjuntos borelianos.

1.2. **O mecanismo padrão para conjuntos.** Considere uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $X$ é a $\sigma$-álgebra $\sigma(\mathcal{F})$ gerada por $\mathcal{F}$. Dada uma propriedade $P$ sobre subconjuntos de $X$, para provar a afirmação

$$P(E) \text{ vale para todo } E \in \sigma(\mathcal{F})$$

basta provar que:

(1) $P(E)$ vale para todo $E \in \mathcal{F}$;
(2) A coleção
$$\mathcal{A} := \{E \subset X \colon P(E) \text{ vale}\}$$
é uma $\sigma$-álgebra, ou seja,
- $P(\varnothing)$ vale,
- se $P(E)$ vale, então $P(E^\complement)$ vale,
- se $P(E_n)$ vale para todo $n \geq 1$ então $P(\bigcup_{n\geq 1} E_n)$ vale.

**Proposição 1.** *Sejam $X$ e $Y$ dois espaços topológicos e seja $f\colon X \to Y$ uma função contínua. Então para todo conjunto boreliano $E \in \mathcal{B}(Y)$, sua pré-imagem $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$, i.e., ele é um conjunto boreliano em $X$.*

*Demonstração.* Para provar a afirmação

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}(Y)$$

usamos o mecanismo padrão para conjuntos, lembrando que $\mathcal{B}(Y)$ é a $\sigma$-álgebra gerada pelos conjuntos abertos em $Y$.

(1) Para todo conjunto aberto $E$ in $Y$, como $f$ é contínua, $f^{-1}(E)$ é aberto, então boreliano, ou seja, ele pertence a $\mathcal{B}(X)$.
(2) Seja
$$\mathcal{A} := \left\{E \in \mathcal{B}(Y) \colon f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)\right\} .$$
Tem-se
- $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{B}(X)$.
- Se $E \in \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$. Como $\mathcal{B}(x)$ é uma $\sigma$-álgebra, $f^{-1}(E)^\complement \in \mathcal{B}(X)$ também. Mas $f^{-1}(E^\complement) = f^{-1}(E)^\complement \in \mathcal{B}(X)$, mostrando que $E^\complement \in \mathcal{A}$.
- Se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X)$ para todo $n \geq 1$. Como $\mathcal{B}(X)$ é uma $\sigma$-álgebra, segue que
$$f^{-1}\big(\bigcup_{n\geq 1} E_n\big) = \bigcup_{n\geq 1} f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X)\,,$$
mostrando que $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{A}$.

□

**Observação 2.** A $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de conjuntos borelianos do espaço euclidiano é *estritamente* mais grosseira que a de todos os conjuntos mensuráveis à Lebesgue, ou seja

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(R^d)\,.$$

De fato, todo conjunto aberto é Lebesgue mensurável, então a $\sigma$-álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ contém a $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ geradas pelos conjuntos abertos.

O exercício seguinte fornece um exemplo de conjunto não boreliano mas ainda mensurável à Lebesgue. A construção descrita abaixo, baseada no conjunto de Cantor e na função "escada do diabo" de Cantor, será usada para obter vários outros contraexemplos.

**Exercício 1.** Sejam $\mathcal{C} \subset [0,1]$ o conjunto de Cantor e $c\colon [0,1] \to [0,1]$ a função de Cantor, Considere a função

$$f\colon [0,1] \to [0,2], \quad f(x) = x + c(x)\,.$$

Então,

(i) $f$ é uma função contínua, sobrejetiva e (estritamente) crescente, portanto é *bi-contínua.*

(ii) A imagem do conjunto de Cantor pela função $f$ é mensurável e

$$\mathrm{m}(f(\mathcal{C})) = 1\,.$$

Por isso (usando um exercício anterior) existe um conjunto *não* mensurável $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{C})$.

(iii) Seja

$$E := f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C}\,.$$

Então $E$ é mensurável à Lebesgue mas não é um conjunto boreliano.

**Proposição 2.** *Cada uma das seguintes famílias de conjuntos gera a $\sigma$-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:*

*(i) A família de conjuntos abertos.*
*(ii) A família de conjuntos fechados.*
*(iii) A família de conjuntos compactos.*
*(iv) A família de bolas abertas (ou fechadas).*
*(v) A família de caixas (ou de caixas diádicas).*

*Demonstração.* Exercício. $\square$

## 2. Medidas abstratas

**Definição 4.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma função

$$\mu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$$

é chamada de *medida* ($\sigma$-aditiva) em $(X, \mathcal{B})$ se

(i) $\mu(\varnothing) = 0$ e

(ii) para toda coleção mensurável de conjuntos mensuráveis *disjuntos* $\{E_n\colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$, temos

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\,.$$

A tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$, consistindo em um conjunto $X$, uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}$ sobre $X$ e uma medida $\mu$ em $(X, \mathcal{B})$ é chamada de *espaço de medida.*

Em seguida apresentamos alguns exemplos de espaços de medida.

**Exemplo 3.** O espaço da medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$. A medida $\mathrm{m}$ é também referida como a medida de volume.

Um outro exemplo comum é o espaço $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$ da medida de Borel, ou seja, o espaço de Borel munido com a restrição da medida de volume.

**Exemplo 4.** A medida trivial em $(X, \mathcal{B})$: $\mu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{B}$.

**Exemplo 5** (a medida de Dirac)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável qualquer e seja $x \in X$ um ponto. A medida de Dirac com centro em $x$ é dada por

$$\delta_x\colon \mathcal{B} \to [0, \infty), \quad \delta_x(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases} = \mathbf{1}_E(x)\,.$$

Note que a função $\delta_x$ é, de fato, uma medida:

(i) $\delta_x(\varnothing) = \mathbf{1}_\varnothing(x) = 0$.
(ii) Se $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ são disjuntos, então

$$\delta_x\left(\bigsqcup_{n\geq 1} E_n\right) = \mathbf{1}_{\bigsqcup_{n\geq 1} E_n}(x)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(E_n)\,.$$

**Exemplo 6** (soma de medidas de Dirac ou de pontos de massa)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Dados pontos $x_1, \dots, x_k \in X$ e números $c_1, \dots, c_k \in [0, \infty]$, seja

$$\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i\, \delta_{x_i}\,.$$

Então $\mu$ é uma medida em $(X, \mathcal{B})$ (exercício) chamada de soma de medidas de Dirac com massa concentrada em $x_1, \dots, x_k$ e pesos $c_1, \dots, c_k$.

A ideia é que além do volume (ou área, ou comprimento), a massa de um objeto também pode ser considerada como uma medida. Uma soma de medidas de Dirac corresponde ao caso de uma coleção *discreta* de centros de massa.

**Exemplo 7.** Mais geralmente, dada uma sequência $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ de medidas em $(X, \mathcal{B})$ e uma sequência $\{c_n\}_{n\geq 1}$ de números não negativos,

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \mu_n$$

é uma medida em $(X, \mathcal{B})$ (exercício).

**Exemplo 8** (medida de contagem)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. A medida de contagem é a função $\# \colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$, $\#(E) =$ a cardinalidade de $E$ se $E$ for finito e $\#(E) = \infty$ se $E$ for um conjunto infinito.

Em seguida listamos algumas propriedades básicas de uma medida. Começamos com uma notação útil.

**Notação.** Dada uma sequência $\{E_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos, usamos as seguintes notações:

- $E_n \nearrow E$ significa o seguinte: $\forall n \geq 1, E_n \subset E_{n+1}$ e $\bigcup_{n\geq 1} E_n = E$.
- $E_n \searrow E$ significa o seguinte: $\forall n \geq 1, E_n \supset E_{n+1}$ e $\bigcap_{n\geq 1} E_n = E$.

**Proposição 3.** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. As seguintes afirmações são válidas.*

*(i) (monotonicidade) Sejam $E, F \in \mathcal{B}$. Se $E \subset F$ então $\mu(E) \leq \mu(F)$.*
*(ii) ($\sigma$-subaditividade) Se $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então*

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\,.$$

*(iii) (convergência monótona para conjuntos) Sejam $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ e $E \in \mathcal{B}$.*

- *Se $E_n \nearrow E$ então $\mu(E_n) \to \mu(E)$ quando $n \to \infty$.*
- *Se $E_n \searrow E$ e $\mu(E_1) < \infty$ então $\mu(E_n) \to \mu(E)$ quando $n \to \infty$.*

*Demonstração.* O argumento é idêntico ao da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ e é deixado com exercício. □

Da mesma forma que no caso da medida de Lebesgue, introduzimos os seguintes conceitos.

**Definição 5.** Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto mensurável $E \in \mathcal{B}$ é chamado *$\mu$-negligenciável*, ou de medida nula se $\mu(E) = 0$.

Uma propriedade $P(x)$ é válida para quase todo ponto $x \in X$ com respeito à medida $\mu$, ou, de uma forma mais concisa, dizemos que $P(x)$ vale para $\mu$-q.t.p. $x \in X$ se o conjunto

$$\{x \in X \colon P(x) \text{ não é válida}\}$$

é $\mathcal{B}$-mensurável e de medida nula.

**Observação 3.** Em geral, um subconjunto de um conjunto negligenciável *não* e necessariamente mensurável. Por exemplo, considerando o espaço da medida de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{m})$, o conjunto $E \subset \mathcal{C}$ do Exercício 1 não é boreliano, embora o conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ seja boreliano e $\mathrm{m}(\mathcal{C}) = 0$.

Esta observação motiva a seguinte definição.

**Definição 6.** Um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é dito *completo* se todo conjunto de um conjunto $\mu$-negligenciável é mensurável, ou seja,

$$\text{se } E \in \mathcal{B},\ \mu(E) = 0 \text{ e } F \subset E \text{ então } F \in \mathcal{B}\,.$$

Por exemplo, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$ é completo, mas $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$ não é completo.

## 3. Funções mensuráveis

**Definição 7.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma função $f \colon X \to [0, \infty]$ é dita $\mathcal{B}$-mensurável (ou, simplesmente, mensurável) se para todo conjunto *aberto* $U \subset [0, \infty]$, temos

$$\{f \in U\} := f^{-1}(U) \in \mathcal{B},$$

ou seja, se para todo aberto $U$, $\{f \in U\}$ é mensurável.

Similarmente, uma função $f \colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável se $\{f \in U\} \in \mathcal{B}$ para todo aberto $U \subset \mathbb{R}$.

**Observação 4.** Um conjunto $E \in \mathcal{B}$ se e somente se sua função indicadora $\mathbf{1}_E$ é mensurável.

De fato, como $E = \{\mathbf{1}_E \in (0, 2)\}$, se $1_E$ é mensurável, segue que $E \in \mathcal{B}$.

Por outro lado, supondo que $E$ seja mensurável e dado $U \subset \mathbb{R}$ aberto, como

$$\{\mathbf{1}_E \in U\} = \begin{cases} X & \text{se } 0 \in U \text{ e } 1 \in U \\ \emptyset & \text{se } 0 \notin U \text{ e } 1 \notin U \\ E & \text{se } 0 \notin U \text{ e } 1 \in U \\ E^{\complement} & \text{se } 0 \in U \text{ e } 1 \notin U, \end{cases}$$

segue que $\{\mathbf{1}_E \in U\} \in \mathcal{B}$, monstrando a mensurabilidade de $\mathbf{1}_E$.

**Proposição 4.** *Seja $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então para todo conjunto* boreliano *$E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\{f \in E\} \in \mathcal{B}.$$

*Demonstração.* Utilizamos o mecanismo padrão para conjuntos. Seja

$$\mathcal{A} := \big\{\mathbb{E} \subset \mathbb{R} \colon \{f \in E\} \text{ é mensurável}\big\}.$$

Como a função $f$ é mensurável, segue que $U \in \mathcal{A}$ para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Por outro lado, $\mathcal{A}$ é uma $\sigma$-álgebra. De fato,

- $\{f \in \emptyset\} = \emptyset \in \mathcal{A}$.
- Se $E \in \mathcal{A}$ então $\{f \in E\} \in \mathcal{B}$, e daí,

$$\{f \in E^{\complement}\} = \{f \in E\}^{\complement} \in \mathcal{B},$$

portanto $E^{\complement} \in \mathcal{A}$.

- Se $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ então $\{f \in E_n\} \in \mathcal{B}$ para todo $n \geq 1$. Como
$$\Big\{f \in \bigcup_{n\geq 1} E_n\Big\} = \bigcup_{n\geq 1} \{f \in E_n\} \in \mathcal{B},$$
segue que $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{A}$.

Concluímos que $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, já que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a menor $\sigma$-álgebra contendo os conjuntos abertos. □

**Observação 5.** Em geral *não* é verdadeiro que dados um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$, uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$ e um conjunto (apenas) *Lebesgue* mensurável $S \subset \mathbb{R}$,
$$\{f \in S\} \in \mathcal{B}.$$

Por exemplo, considere a função do Exercício da aula passada, $f : [0, 1] \to [0, 2]$, $f(x) = x + c(x)$, onde $c$ é a função de Cantor.

Seja $g : [0, 2] \to [0, 1]$ a inversa de $f$ e note que $g$ é mensurável pois é contínua. Considere, como no mesmo Exercício da aula passada, um conjunto *não* mensurável $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{C})$ e seja
$$E := g(\mathcal{N}) = f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C}.$$

Então $E$ é Lebesgue mensurável, enquanto $\mathcal{N} = g^{-1}(E)$ não é Lebesgue mensurável.

**Definição 8.** Dados dois espaços mensuráveis $(X, \mathcal{B}_X)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y)$, uma função $f : X \to Y$ é chamada de mensurável se $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_X$ para todo $E \in \mathcal{B}_Y$.

**Observação 6.** Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$ e uma função $f : X \to \mathbb{R}$, o contradomínio $\mathbb{R}$ é a priori munido com a $\sigma$-álgebra de Borel (em vez da Lebesgue). Desta forma, a noção de mensurabilidade da função $f : X \to \mathbb{R}$ é consistente com o conceito mais geral introduzido acima.

**Definição 9.** Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$, uma função $s : X \to [0, \infty]$ é chamada de função *simples sem sinal* se
$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i},$$
para alguns números $c_i \in [0, \infty]$ e conjuntos $E_i \in \mathcal{B}$, $i \in [k]$.

Similarmente, $s : X \to \mathbb{R}$ é uma função *simples* (com sinal) se
$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$$
onde $c_i \in \mathbb{R}, E_i \in \mathcal{B}$ para todo $i \in [k]$.

**Observação 7.** Toda função simples é mensurável. De fato, se $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$, então dado qualquer aberto $U$ (em $[0, \infty]$ ou $\mathbb{R}$),
$$\{s \in U\} = \bigcup \big\{E_i : c_i \in U, i \in [k]\big\},$$
então $\{s \in U\} \in \mathcal{B}$.

Além disso, note que somas e produtos de funções simples são funções simples também.

Os seguintes resultados básicos sobre funções mensuráveis $f : (X, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ são análogos aos resultados correspondentes sobre funções mensuráveis à Lebesgue $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. As demonstrações deles também são idênticas às demonstrações no contexto euclidiano; por isso, omitiremos os detalhes técnicos das provas.

**Teorema 9.** *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.*

*(1) Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ (ou $[0,\infty]$) é mensurável se e somente se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{f > \lambda\} \in \mathcal{B}$. Isto também é equivalente a $\{f \geq \lambda\} \in \mathcal{B}$ (ou $\{f < \lambda\} \in \mathcal{B}$, ou $\{f \leq \lambda\} \in \mathcal{B}$) para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

*(2) Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se $f^+$ e $f^-$ são mensuráveis, onde $f^+, f^-\colon X \to [0,\infty)$,*

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \text{ e}$$
$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

*(3) Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções mensuráveis e $f_n \to f$ em todo ponto, então o limite $f$ é mensurável.*

*(4) Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\phi \circ f$ é mensurável.*

*Demonstração.* (1) O conjunto $\{f > \lambda\} = f^{-1}(\lambda,\infty)$ e $(\lambda,\infty)$ é aberto, portanto a implicação indireta segue.

Para justificar a implicação direta, note que todo aberto $U \subset \mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos: $U = \bigcup_{n\geq 1}(a_n, b_n)$. Como

$$\{f \in U\} = \bigcup_{n\geq 1}\{f \in (a_n, b_n)\},$$

basta provar que $\{f \in (a,b)\} \in \mathcal{B}$ para todo intervalo $(a,b)$. Mas

$$\{f \in (a,b)\} = \{f > a\} \cap \{f < b\}\,.$$

Além disso,

$$\{f < b\} = \{f \geq b\}^{\complement} = \Big\{\bigcap_{n\geq 1}\{f > b - \frac{1}{n}\}\Big\}^{\complement}$$

que pertence a $\mathcal{B}$. Logo, $\{f \in (a,b)\} \in \mathcal{B}$.

(2) A equivalência é uma consequência das seguintes identidades: para todo $\lambda \geq 0$,

$$\begin{gathered}\{f^+ > \lambda\} = \{f > \lambda\},\\ \{f^- > \lambda\} = \{-f > \lambda\} = \{f < -\lambda\},\\ \{f = 0\} = \{f^+ = 0\} \cap \{f^- = 0\}.\end{gathered}$$

(3) Não é difícil verificar que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) > \lambda \;\text{ sse }\; \exists m \geq 1\ \exists N \geq 1\ \forall n \geq N\ f_n(x) > \lambda + \frac{1}{m}.$$

Portanto,

$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N}\{f_n > \lambda + \frac{1}{m}\} \in \mathcal{B}.$$

(4) Se $U \subset \mathbb{R}$ é aberto, como $\phi$ é contínua, $\{\phi \in U\} = \phi^{-1}(U)$ é aberto. Portanto,

$$\{\phi \circ f \in U\} = (\phi \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\phi^{-1}(U))$$

é mensurável. □

**Teorema 10.** *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.*

*(1) Uma função $f\colon X \to [0,\infty]$ é mensurável se e somente se existe uma sequência não decrescente $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinal e finitas tal que $s_n \to f$ em todo ponto.*

*(2) Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples (com sinal) e finitas tal que $s_n \to f$ em todo ponto.*

*Demonstração.* As implicações indiretas são consequências do Teorema 9 (3) e da Observação 7 (que toda função simples é mensurável).

A construção de uma sequência monótona de funções simples que convergem para $f$ é idêntica a do caso da integral de Lebesgue no espaço euclidiano. De fato, dada $f\colon X \to [0, \infty]$ mensurável, para todo $n \geq 1$ seja

$$s_n := n\, \mathbf{1}_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=0}^{n\, 2^n - 1} \frac{j}{2^n}\, \mathbf{1}_{\left\{f \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right\}} .$$

Não é difícil verificar que $s_n \leq s_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Além disso, se $f(x) = \infty$, então para todo $n \geq 1$, $s(x) = n \to \infty = f(x)$, enquanto se $f(x) < \infty$, para todo $n > f(x)$ tem-se

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0,$$

logo $s_n(x) \to f(x)$.

Finalmente, dada uma função mensurável com sinal $f\colon X \to \mathbb{R}$, como $f^+, f^-$ são funções mensuráveis sem sinal, pelo argumento acima, existem sequências de funções simples $\{s_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ tal que $s_n \to f^+$ e $\sigma_n \to f^-$ em todo ponto. Portanto, para todo $n \geq 1$, a função $s_n - \sigma_n$ é simples e

$$s_n - \sigma_n \to f^+ - f^- .$$

□

**Teorema 11.** *Sejam $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável, $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis. Então $f + g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis também.*

*Demonstração.* Pelo teorema anterior, existem duas sequências de funções simples $\{s_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ tais que $s_n \to f$ e $\sigma_n \to g$ em todo ponto.

Então para todo $n \geq 1$, as funções $s_n + \sigma_n$ e $s_n \cdot \sigma_n$ são simples e evidentemente,

$$s_n + \sigma_n \to f + g,\ \ s_n \cdot \sigma_n \to f \cdot g,$$

mostrando, via Teorema 10, que $f + g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis. □

## 4. A integral de uma função mensurável

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. A construção da integral de uma função mensurável em $X$ segue exatamente a mesma abordagem que a da integral de Lebesgue no espaço euclidiano.

(1) Seja $s\colon X \to [0, \infty]$,

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathbf{1}_{E_i}$$

uma função simples. Então,

$$\int_X s\, d\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mu(E_i).$$

Resta mostrar que este conceito é bem definido, ou seja, se s possui duas representações do tipo

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{j_1}^{l} d_j\, \mathbf{1}_{F_j},$$

então

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E_i) = \sum_{j_1}^{l} d_j \mu(F_j),$$

A prova deste fato é igual a do cenário de funções simples no espaço euclidiano.

(2) Seja $s\colon X \to \mathbb{R}$ uma função simples. Então, já que $s$ pode ser representada como

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathbf{1}_{E_i}$$

onde os conjuntos mensuráveis $\{E_i\}_{i\in[k]}$ são disjuntos, segue que

$$s^{\pm} = \sum_{i=1}^{k} c_i^{\pm}\, \mathbf{1}_{E_i} \text{ e } |s| = \sum_{i=1}^{k} |c_i|\, \mathbf{1}_{E_i}$$

Portanto, $s^+$, $s^-$, $|s|$ são funções simples sem sinais.

A função $s$ é dita absolutamente integrável se

$$\int_X |s|\, d\mu < \infty.$$

Neste caso, definimos

$$\int_X s\, d\mu := \int_X s^+\, d\mu - \int_X s^-\, d\mu.$$

(3) Seja $f\colon X \to [0,\infty]$ uma função mensurável. Definimos

$$\int_X f\, d\mu := \sup\left\{\int_X s\, d\mu \colon 0 \le s \le f,\ s \text{ é simples}\right\}.$$

Não é dificil ver que

$$\int_X f\, d\mu := \sup\left\{\int_X s\, d\mu \colon 0 \le s \le f,\ s \text{ é simples e finita}\right\},$$

e, de fato, outras restrições sobre $s$ podem ser feitas, dependendo do contexto (por exemplo, em $\mathbb{R}^d$, $s$ pode ser escolhida com suporte compacto).

(4) Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então, como $f$ é o limite pontual de uma sequência de funções simples, segue imediatamente que $f^+$, $f^-$ e $|f|$ também são tais limites, logo são mensuráveis também.
Chamamos $f$ de absolutamente integravel se

$$\int_X |f|\, d\mu < \infty$$

Neste caso,

$$\int_X f\, d\mu := \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu.$$

**Teorema 12.** *(propriedades básicas da integral)*
*Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $f, g\colon X \to [0,\infty]$ (ou $f, g\colon X \to \mathbb{R}$) duas funções mensuráveis (ou, respectivamente, absolutamente integráveis). As seguintes valem:*

*(1) (monotonicidade e equivalência)*
*Se* $f \leq g$ *em* $\mu$*-q.t.p então* $\displaystyle\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$.
*Se* $f = g$ *em* $\mu$*-q.t.p então* $\displaystyle\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$.

*(2) (linearidade)*

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$$
$$\int_X cf\, d\mu = c\int_X f\, d\mu\,.$$

*(3) (divisibilidade)*
*Se* $E \in \mathcal{B}$ *então* $f\, \mathbf{1}_E$ *e* $f\, \mathbf{1}_{E^\complement}$ *são mensuráveis e*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\, \mathbf{1}_E\, d\mu + \int_X f\, \mathbf{1}_{E^\complement}\, d\mu\,.$$

*Denotado por*

$$\int_E f\, d\mu := \int_X f\, \mathbf{1}_E$$

*temos*

$$\int_X f\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_{E^\complement} f\, d\mu\,.$$

*(4) (a desigualdade de Markov)*
*Se* $f\colon X \to [0,\infty]$, *para todo* $\lambda > 0$ *tem-se*

$$\mu\{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int_X f\, d\mu}{\lambda}\,.$$

*(5)*

$$\int_X |f|\, d\mu = 0 \quad sse \quad f = 0 \ \mu - q.t.p.$$
$$Se \ \int_X |f|\, d\mu < \infty \ então \ |f| < \infty \ \mu - q.t.p.$$

*Demonstração.* O argumento é o mesmo que no caso da integral de Lebesgue. Desrevemos os passos principais.

(1) O primeiro passo é estabelecer a monotonicidade da integral para funções simples. O caso geral segue-se da definição
A equivalência é uma consequência imediata da monotonicidade.

(2) De novo, o primeiro passo é provar linearidade da integral para funções simples.
O caso geral segue-se do teorema de convergência monótona, que será tratado na seção seguinte.

(3) Produto de funções mensuráveis é mensurável, enquanto a função indicadora de um conjunto mensurável é mensurável. Portanto, $f\mathbf{1}_E$ e $f\mathbf{1}_{E^\complement}$ são mensuráveis.
Como

$$f = f\mathbf{1}_E + f\mathbf{1}_{E^\complement},$$

a divisibilidade segue da linearidade.

(4) Como $f \geq \lambda\,\mathbf{1}_{\{f\geq\lambda\}}$, a desigualdade de Markov é consequência da monotonicidade da integral:

$$\int_X f\,d\mu \geq \int_X \lambda\,\mathbf{1}_{\{f\geq\lambda\}}\,d\mu = \lambda\,\mu\,\{f \geq \lambda\}\,,$$

Logo

$$\mu\,\{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int_X f\,d\mu}{\lambda}\,.$$

(5) Claramente

$$\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\} = \bigcup_{n\geq 1} \left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}\,.$$

Pela desigualdade de Markov, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu\,\{|f| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\int_X |f|\,d\mu}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} = 0.$$

Logo $\mu\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\} = 0$ para todo $n \geq 1$. Concluímos que $\mu\,\{f \neq 0\} = 0$, ou seja, $f = 0$ $\mu$-q.t.p.

Finalmente,

$$\{|f| = \infty\} = \bigcap_{n\geq 1} \{|f| \geq n\}$$

Pela desigualdade de Markov, para todo $n \geq 1$,

$$\mu\,\{|f| \geq n\} \leq \frac{\int_X |f|\,d\mu}{n} \to 0$$

pois $\int_X |f|\,d\mu < \infty$.

Como, evidentemente, a sequência de conjuntos $\{|f| \geq n\}_{n\geq 1}$ é não crescente, pelo teorema de convergência monótona para conjuntos tem-se

$$\mu\,\{|f| = \infty\} = \lim_{n\to\infty} \mu\,\{|f| \geq n\} = 0.$$

□

Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, seja

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \colon f \text{ é mensurável e } \int_X |f|\,d\mu < \infty \right\}$$

o espaço vetorial de funções absolutamente integraveis em $X$.

De fato, se $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, $f + g$ é mensurável (pois $f$ e $g$ são mensuráveis) e como

$$|f + g| \leq |f| + |g|,$$

tem-se

$$\int_X |f + g|\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu + \int_X |g|\,d\mu < \infty,$$

logo $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Além disso, se $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$ então $cf$ é mensurável e

$$\int_X |cf|\,d\mu = |c| \int_X |f|\,d\mu < \infty,$$

então $cf \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ .

Definimos o espaço $L^1$ por

$$L^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)/\sim$$

onde $f \sim g$ se $f = g$ em $\mu$-q.t.p.

Como pelo Teorema 12 (5), dada uma função $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$,

$$\int_X |f| \, d\mu = 0 \text{ sse } f = 0 \ \mu - \text{q.t.p.}$$

acontece que

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu$$

é uma norma em $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Então, $(L^1(X, \mathcal{B}, \mu), \|\cdot\|_1)$ é um espaço normado. Provaremos, no próximo capítulo que, na verdade, é um espaço de Banach.

Outras notações comuns deste espaço são $L^1(X)$, $L^1(d\mu)$, $L^1(X, \mu)$ e etc.

Ademais, dado um número real $1 \le p < \infty$,

Seja

$$L^p(X, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \colon f \text{ é mensurável e } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

módulo igualdade q.t.p.

Munido com

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

$\left(L^p(X, \mathcal{B}, \mu), \|\cdot\|_p\right)$ também é um espaço normado. Essa afirmação será provada no próximo capítulo. Entretanto, vamos estabelecer a desigualdade de Chebyshev para funções $L^p$.

**Teorema 13.** *(a desigualdade de Chebyshev) Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $1 \le p < \infty$ e $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. Então, para todo $\lambda > 0$ temos*

$$\mu\{|f| \ge \lambda\} \le \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

*Demonstração.* Aplicamos a desigualdade de Markov à função $|f|^p$.

Primeiro, como $f\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|^p$ é contínua, segue que

$$\varphi \circ f = |f|^p$$

é mensurável (e sem sinal).

Como

$$|f| \ge \lambda \Leftrightarrow |f|^p \ge \lambda^p,$$

pela desigualdade de Markov,

$$\mu\{|f| \geq \lambda\} = \mu\{|f|^p \geq \lambda^p\} \leq \frac{\int_X |f|^p \, d\mu}{\lambda^p} = \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

□

## 5. Os teoremas de convergência

Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis sem sinais e $f$ uma outra função mensurável sem sinal.

Suponha que

$$f_n \to f \quad \text{em q.t.p.}$$

**Questão.** Quando podemos concluir que

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu \quad ?$$

Ou seja, quando podemos trocar o limite com a integral?

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \stackrel{?}{=} \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu \, .$$

Uma situação especial, similar a da integral é apresentada na seguinte proposição.

**Proposição 5** (convergência uniforme em um espaço de medida finita)**.** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida finita, i.e, $\mu(X) < \infty$. Sejam $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis sem sinais ou uma sequência de funções absolutamente integráveis e $f$ uma outra função real.*

*Se $f_n \to f$ uniformemente então*

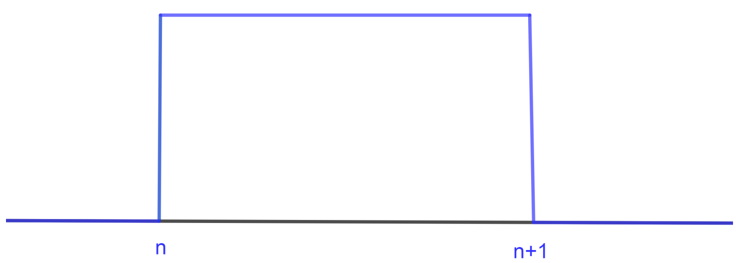
$$\int_X f_n \to \int_X f.$$

*Demonstração.* Exercício. □

O resultado anterior vale sob uma hipótese muito restritiva, a de convergência uniforme. Procuramos tais resultados de convergência da integral sob hipóteses sem mais gerais. Mas antes de enunciar estes resultados, notamos que há casos em que *não* podemos trocar o limite e a integral. Descrevemos três exemplos simples mas típicos de obstruções a essa propriedade, a saber, exemplos de funções “bump” em movimento.

**Exemplo 14.** Considere o espaço $X = \mathbb{R}$ munido com a medida $\mu = \mathrm{m}$, a medida de Lebesgue.

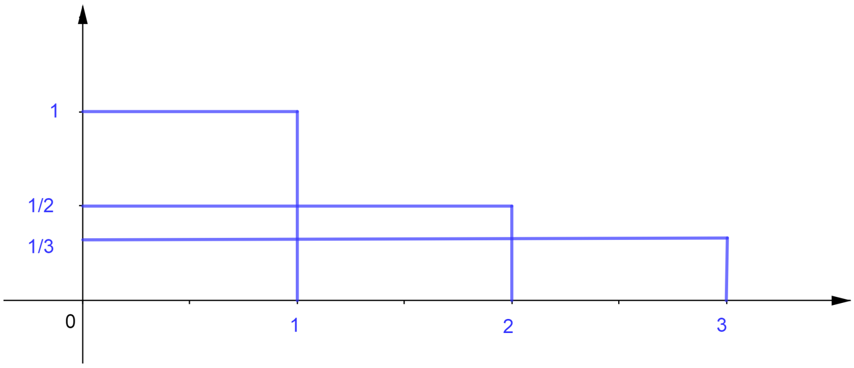
Seja $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$ para todo $n \geq 1$.




Então $f_n \to 0$ em todo ponto, mas

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mathrm{m} = \mathrm{m}\left([n, n+1]\right) = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mathrm{m} \, .$$

**Exemplo 15.** Considere o espaço $X = \mathbb{R}$ munido com a medida $\mu = \mathrm{m}$ de Lebesgue.
Para todo $n \geq 1$, seja $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$.

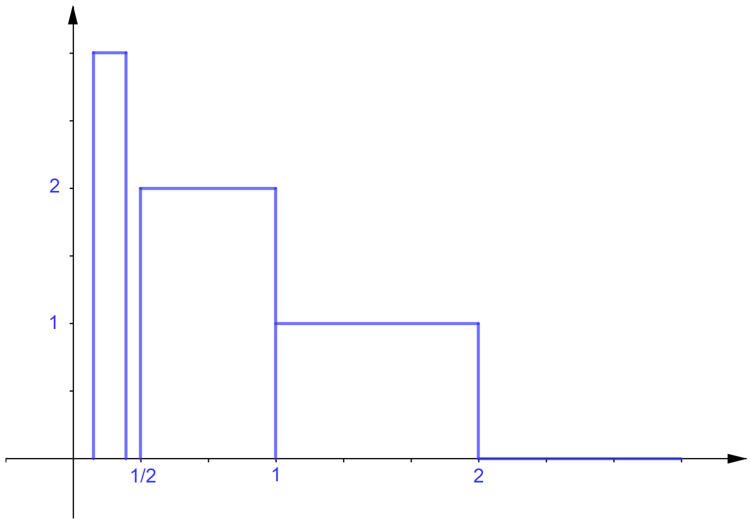



Como $|f_n| \leq \frac{1}{n} \to 0$, temos que $f_n \to 0$ uniformemente.
Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mathrm{m} = \frac{1}{n} \, m([0,n]) = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mathrm{m},$$

mostrando também que a hipótese $\mu(X) < \infty$ da Proposição 5 é necessária.

**Exemplo 16.** Considere o espaço $X = [0,2]$ munido com a medida $\mu = \mathrm{m}$ de Lebesgue restrita ao intervalo $[0,2]$. Para todo $n \geq 1$, seja $f_n := n\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]}$.




Então, $f_n \to 0$ em todo ponto, mas

$$\int_{[0,2]} f_n \, d\mathrm{m} = n \, \mathrm{m}\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) = 1 \not\to 0 = \int_{[0,2]} 0 \, d\mathrm{m} \, .$$

**Teorema 17** (de convergência monótona)**.** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis sem sinais, i.e.*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

*Então,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

*Demonstração.* A prova deste resultado é similar a do caso da integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$. Ela usa um argumento de tempos de parada para conseguir algum comportamento uniforme da sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$. Esboçamos o argumento abaixo.

Seja

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)\,.$$

Então, $f$ é mensurável.

Pela monotonicidade da integral, já que $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, a sequência $\left\{\int_X f_n\, d\mu\right\}_{n\geq 1}$ é não decrescente, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\mu$ existe e

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu.$$

Resta provar a desigualdade aposta:

$$\int_X f\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\mu.$$

Como

$$\int_X f\, d\mu = \sup\left\{\int_X s\, d\mu \colon 0 \leq s \leq f,\ s \text{ é simples e finita}\right\},$$

basta provar que dada uma função simples e finita $s$ tal que $0 \leq s \leq f$, temos que

$$\int_X s\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\mu.$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Então é suficiente provar que

$$(1-\epsilon)\int_X s\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\mu.$$

Escrevemos

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathbf{1}_{E_i},$$

onde para todo $i \in [k]$, $c_i \in (0,\infty)$ e $E_i \in \mathcal{B}$ são conjuntos disjuntos.

Fixe $j \in [k]$. Se $x \in E_j$ então $s(x) = c_j$, logo

$$(1-\epsilon)c_j = (1-\epsilon)s(x) < f(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x).$$

Portanto, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$(1-\epsilon)c_j < f_{n_x}(x)\,. \tag{1}$$

Definimos, para todo $n \geq 1$,

$$E_{j,n} := \{x \in E_j \colon (1-\epsilon)c_j < f_n(x)\}\,.$$

Então $E_{j,n}$ é mensurável (já que $f_n$ e $E_j$ são mensuráveis) e claramente, usando (1) e a monotonicidade da sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$, segue que

$$E_{j,n} \nearrow E_j \text{ quando } n \to \infty.$$

Pelo teorema de convergência monótona para conjuntos, segue que

$$\mu(E_{j,n}) \to \mu(E_j) \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Para todo $n \geq 1$ definimos

$$s_n := \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon) c_j \, \mathbf{1}_{E_{j,n}} \, .$$

Não é difícil perceber que para todo $x \in X$, tem-se

$$s_n(x) \leq f_n(x).$$

Então,

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_X s_n \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon) c_j \, \mu(E_{j,n}).$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon) c_j \, \mu(E_j) = (1-\epsilon) \int_X s \, d\mu,$$

finalizando a prova do teorema. □

## 6. Consequências do teorema de convergência monótona

**Teorema 18** (de Tonelli)**.** *Seja* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de funções mensuráveis* $f_n \colon X \to [0, \infty]$. *Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *é mensurável e*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

*Demonstração.* Evidentemente, a sequência

$$s_n := f_1 + \ldots + f_n \;, \; n \geq 1$$

de somas parciais satisfaz as hipóteses do Teorema de convergência monótona (já que $f_n \geq 0$).

Portanto,

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} s_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \, d\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

□

**Lema 1** (de Borel-Cantelli)**.** *Seja* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de medida e seja* $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ *uma sequência de conjuntos mensuráveis. Suponha que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

*Então,* $\mu$*-q.t.p.* $x \in X$ *pertence apenas a um número* finito *de conjuntos* $E_n$*, ou seja, para* $\mu$*-q.t.p.* $x \in X$*,*

$$\#\{n \in \mathbb{N} \colon x \in E_n\} < \infty.$$

*Demonstração.* Para todo $n \geq 1$, seja $\mathbf{1}_{E_n}$ a função indicadora do conjunto mensurável $E_n$. Note que, dado $x \in X$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x)$$

conta exatamente o número de conjuntos $E_n$ onde $x$ pertence, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x) = \#\{n \in \mathbb{N} : x \in E_n\}.$$

Pelo Teorema de Tonelli,

$$\int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n} \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Portanto, pelo Teorema 1 (5) da aula 22,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n} < \infty \quad \mu\text{-q.t.p.},$$

assim mostrando que

$$\#\{n \in \mathbb{N} \colon x \in E_n\} < \infty$$

para $\mu$-q.t.p. $x \in X$. □

**Lema 2** (de Fatou)**.** *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n \colon X \to [0, \infty]$ (uma sequência não necessariamente monótona). Então,*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int_X f \, d\mu$$

*Demonstração.* Seja

$$g := \liminf_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k \, .$$

Para todo $n \geq 1$ denote por $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$. Então $g_n$ é mensurável e

$$g_n \nearrow g \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Pelo teorema de convergência monótona, temos que

$$\int_X g_n \, d\mu \;\to\; \int_X g \, d\mu \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu &= \int_X g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \inf_{k\geq n} f_k \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \int_X f_k \, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \int_X f_k \, d\mu,
\end{aligned}$$

onde a desigualdade acima é válida por causa da monotonicidade da integral.

De fato,

$$\inf_{k\geq n} f_n \;\leq\; f_k \text{ para todo } k \geq n$$

então

$$\int_X \inf_{k\geq n} f_n \, d\mu \;\leq\; \int_X f_k \, d\mu \;\text{ para todo } k \geq n,$$

logo

$$\int_X \inf_{k\geq n} f_n \, d\mu \;\leq\; \inf_{k\geq n} \int_X f_k \, d\mu.$$

□

**Observação 8.** A desigualdade no lema de Fatou pode ser estrita. Isso acontece por exemplo com alguns tipos de sequências de funções bump em movimento.

Para todo $n \geq 1$, seja $f_n := n\, \mathbf{1}_{(0, \frac{1}{n}]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Então $f_n \to 0$ em todo ponto e

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mu = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu.$$

Um outro exemplo é a sequência

$$f_n := \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0,n]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

de funções bump baixas e longas (em vez de altas e curtas).

Temos que $f_n \to 0$ uniformimente, enquanto $\int f_n = 1 \to 1 > 0 = \int 0$.

**Observação 9.** A condição $f_n \geq 0$ no lema de Fatou (ou, pelo menos, uma outra cota inferior apropriada) é necessária.

Por exemplo, consideremos, para todo $n \geq 1$,

$$f_n := -\frac{1}{n} \mathbf{1}_{[n,2n]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

temos que $f_n \to 0$ uniformimente, logo

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mu = 0,$$

enquanto

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = -1 \to -1 < 0,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu > \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu.$$

**Teorema 19** (de convergência dominada)**.** *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis, $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, e $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma outra função tal que*

$$f_n \to f \text{ em } \mu - q.t.p.$$

*Suponha que exista $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $\mu - q.t.p.$ e para todo $n \geq 1$ (ou seja, suponha que a sequência $\{f_n\}_{n\leq 1}$ seja dominada por uma função absolutamente integrável).*

*Então, $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e*

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

*Demonstração.* Como $f_n \to f$ e $|f| \leq g \ \mu - q.t.p.$ para todo $n \geq 1$, seque que $|f| \leq g \ \mu - q.t.p.$ Logo,

$$\int_X |f| \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu < \infty,$$

mostrando que $f \in L^1(X, B, \mu)$.

Como $|f_n| \leq g \ \mu - q.t.p.$, temos que

$$-g \leq f_n \leq g \ \mu - q.t.p.,$$

então

$$\begin{cases} f_n + g \geq 0 & \mu - q.t.p. \\ g - f_n \geq 0 & \mu - q.t.p. \end{cases}$$

Portanto, podemos aplicar o lema de Fatou é aplicável às sequências $\{f_n+g\}_{n\geq 1}$ e $\{g-f_n\}_{n\geq 1}$.

- $$\int_X \liminf_{n\to\infty}(f_n+g)\,d\mu \,\leq\, \liminf_{n\to\infty}\int_X (f_n+g)\,d\mu.$$

Como
$$\int_X \liminf_{n\to\infty}(f_n+g)\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to n} f_n\,d\mu + \int_X g,$$
$$\liminf_{n\to\infty}\int_X (f_n+g)\,d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \,+\, \int_X g\,d\mu$$
e $\int_X g\,d\mu \in \mathbb{R}$, segue que

(2) $$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \,\leq\, \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

- $$\int_X \liminf_{n\to\infty}(g-f_n)\,d\mu \,\leq\, \liminf_{n\to\infty}\int_X (g-f_n)\,d\mu.$$

Como

$$\int_X \liminf_{n\to\infty}(g-f_n)\,d\mu \,=\, \int_X g\,d\mu \,+\, \int_X \liminf_{n\to\infty}(-f_n)\,d\mu \,=\, \int_X g\,d\mu \,-\, \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu,$$
$$\liminf_{n\to\infty}\int_X (g-f_n)\,d\mu \,=\, \int_X g\,d\mu \,+\, \liminf_{n\to\infty}\int_X (-f_n)\,d\mu \,=\, \int_X g\,d\mu \,-\, \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu,$$
segue que

(3) $$\int_X \lim_{n\to\infty}\sup f_n\,d\mu \,\geq\, \lim_{n\to\infty}\sup\int_X f_n\,d\mu.$$

Combinando (2) e (3), tem-se
$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \,&\leq\, \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \\ &\leq\, \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \,\leq\, \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu \,=\, \int_X f\,d\mu,\end{aligned}$$
logo $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$ existe e é igual a $\int_X f\,d\mu$. □

**Corolário 1.** Dada uma sequência de funções mensuráveis $\{f_n\colon X\to\mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ tal que $f_n\to f$ em $\mu$-q.t.p. e $|f_n|\leq g$ para todo $n\geq 1$ e para alguma função $g\in\, L^1(X)$, segue que
$$f_n \to f \text{ em } L^1\,.$$

*Demonstração.* Como $|f_n|\leq g$ e $g\in\, L^1(X)$, tem-se

$$\int_X |f_n|\;d\mu \,\leq\, \int_X g\,d\mu < \infty,$$

logo $f_n\in\, L^1(X)$.

Já que $f_n\to f$ em $\mu$-q.t.p.,
$$|f_n\,-\,f| \to 0 \quad \mu\text{-q.t.p.}$$
Além disso,
$$|f_n\,-\,f| \,\leq\, |f_n| \,+\, |f| \,\leq\, g \,+\, |f| \;\; \mu - q.t.p.$$

e
$$\int_X (g + |f|)\, d\mu = \int_X g\, d\mu + \int_X |f|\, d\mu < \infty,$$
portanto $g + |f| \in L^1(X)$.

Pelo teorema de convergência dominada aplicada à sequência $\{|f_n - f|\}_{n\geq 1}$, segue que
$$\|f_n - f\|_1 = \int_X |f_n - f|\, d\mu \to \int_X 0\, d\mu = 0,$$
mostrando que $f_n \to f$ com respeito a norma um (a norma $L^1$).

□

**Exercício 2.** Calcule
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{nx}\right) dx.$$

*Solução.* Para todo $n \geq 1$, definimos $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por
$$f_n(x) = \begin{cases} n\, x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então $f_n$ é contínua em $[0,1]$, logo é Rieman e Lebesgue integrável em $[0,1]$. Além disso,
$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_{[0,1]} f_n\, \mathrm{dm}.$$

Se $x \neq 0$, então
$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{nx})}{\frac{1}{nx}} \cdot x \to 1 \cdot x = x \quad \text{quando } n \to \infty\,.$$

Seja $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Note que $f \in L^1\left([0,1], \mathrm{m}\right)$, pois
$$\int_{[0,1]} |f|\, \mathrm{dm} = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} < \infty.$$

Além disso, já que $|\frac{\operatorname{sen} t}{t}| \leq 1$ para todo $t \neq 0$, temos que $|f_n(x)| \leq x$ para todo $x \neq 0$ . Então o teorema de convergência dominada é aplicável e temos que
$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_{[0,1]} f_n\, \mathrm{dm} \to \int_{[0,1]} x\, \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\,.$$

□

## 7. Modos de convergência

Dados um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, uma sequência de funções mensuráveis $\{f_n \colon X \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ e uma outra função mensurável $f \colon X \to \mathbb{R}$, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ pode convergir para $f$ de maneiras diferentes.

(1) Convergência pontual

(a) em todo ponto
$$f_n(x) \to f(x) \text{ para todo } x \in X.$$

(b) em q.t.p.: existe $W^c \in \mathcal{B}$,

$$\mu(W^c) = 0$$

t.q.

$$f_n(x) \to f(x) \text{ se } x \in W^c.$$

(2) Convergência uniforme

(c) no espaço inteiro: se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon$

$$t.q. \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\forall x \in X \text{ para } n \geq N_\varepsilon.$$

## 8. Os espaços $L^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$

Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $p \in [1, \infty]$. Vamos relembrar as definições dos espaços de funções $L^p(X)$.

- $1 \leq p < \infty$. Dizemos que $f \in L^p(X)$ se $f$ é mensurável e $\displaystyle\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$. Neste caso,

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $p = \infty$. Dizemos que $f \in L^\infty(X)$ se $f$ é mensurável e existe $C < \infty$ tal que $|f(x)| \leq C$ para $\mu$-q.t.p. $x \in X$. Neste caso,

$$\|f\|_\infty := \inf \{ C \in \mathbb{R} \colon \; |f(x)| \leq C \quad \mu\text{-q.t.p.} \}.$$

**Definição 10.** Dois números $p, q \in [1, \infty]$ são (Hölder) conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Por exemplo, 2 e 2 são Hölder conjugados, e também 1 e $\infty$.

**Lema 3** (a desigualdade de Young)**.** *Se $a, b \geq 0$, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Demonstração.* A função $\log \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é côncava. Então,

$$\log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \geq \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) = \log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

□

**Teorema 20** (a desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $p, q \in [1, \infty]$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$ então $f\,g \in L^1(\mu)$ e $\|f\,g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$.*

**Exercício 3.** Pelo teorema anterior, se $f, g \in L^2(X)$ então $f \cdot g \in L^1(X)$. Encontre um exemplo mostrando que o produto $f \cdot g$ não necessariamente pertence a $L^1(X)$ se $f, g \in L^1(X)$.

Além disso, mostre que se $\mu(X) < \infty$ então $L^\infty(X) \subset L^2(X) \subset L^1(X)$. Mais geralmente, se $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ então $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$.

*Demonstração (da desigualdade de Hölder).*

- $p = 1$ e $q = \infty$ (ou vice versa). Temos $g \in L^\infty(X)$. Seja $C < \infty$ tal que $|g(x)| \leq C$ para $\mu$-q.t.p. $x \in X$. Então $|f(x)\, g(x)| \leq C \; |f(x)|$ para $\mu$-q.t.p. $x \in X$. Integrando em $x$ segue que

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \; d\mu \leq \int_X C \; |f| \; d\mu = C \; \|f\|_1 < \infty.$$

Portanto $fg \in L^1(X)$ e, se $|g(x)| \leq C$ $\mu$-q.t.p. $x \in X$ então $\|fg\|_1 \leq C \; \|f\|_1$.

Se $\|f\|_1 \neq 0$, então $\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_1} \leq C$, e tomando o ínfimo sobre todos tais $C$, concluímos que

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_1} \leq \|g\|_\infty ,$$

mostrando a afirmação.

Se $\|f\|_1 = 0$ então $f = 0$ $\mu$-q.t.p., portanto $fg = 0$ $\mu$-q.t.p. e a afirmação é evidente.

▪ $p, q \in (1, \infty)$. Se $\|f\|_p = 0$ (argumento similar se $\|g\|_q = 0$) tem-se

$$\int |f|^p \, d\mu = 0 \implies |f|^p = 0 \ \mu\text{-q.t.p.} \implies f = 0 \ \mu\text{-q.t.p.} \implies fg = 0 \ \mu\text{-q.t.p.}.$$

Neste caso, a desigualdade é evidente.

Logo, podemos supor que $\|f\|_p \neq 0, \|g\|_q \neq 0$. Fixe $x \in X$ e denote por

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

Pela desigualdade de Young,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

A desigualdade acima vale para todo $x \in X$, integrando em $x$ temos:

$$\int_X \frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \, d\mu \leq \frac{1}{p} \frac{\int |f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Concluímos que

$$\frac{\int |fg| \, d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq 1,$$

logo $\|fg_1\| = \int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$ . □

**Teorema 21.** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Então $L^p(X)$ é um espaço vetorial para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

*Demonstração.* Se $f \in L^p(X), c \in \mathbb{R}$, é fácil verificar que $cf \in L^p(X)$. Logo, basta provar que se $f, g \in L^p(X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ então $\|f + g\|_p < \infty$.

▪ O caso $p = \infty$ é exercício.

▪ Suponha que $1 \leq p < \infty$.

Se $a, b \geq 0$ então a seguinte desigualdade vale:

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) .$$

De fato, se $p \geq 1$, a função $[0, \infty) \ni x \mapsto x^p$ é convexa. Então,

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2} a^p + \frac{1}{2} b^p ,$$

logo

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) .$$

Portanto,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (\,|f(x)| + |g(x)|\,)^p \leq 2^{p-1}(\,|f(x)|^p + |g(x)|^p\,).$$

Integrando em $x$, temos que

$$\|f + g\|_p^p = \int |f + g|^p \leq 2^{p-1}\left(\int |f|^p + \int |g|^p\right) = 2^{p-1}(\,\|f\|_p^p + ||g_p^p\,) < \infty ,$$

mostrando que $f+g \in L^p(X)$. $\square$

**Teorema 22.** *Seja* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de medida. Então,* $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ *é um espaço normado para todo* $1 \leq p \leq \infty$.

*Demonstração.*

▪ O caso $p = \infty$ é exercício.

▪ Suponha que $1 \leq p < \infty$. O único axioma da norma que precisamos verificar é a desigualdade triangular:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{(a desigualdade de Minkowski)}.$$

Temos que

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p \, d\mu = \int |f+g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \int |f| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu + \int |g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu$$

Seja $q$ o conjugado à Hölder de $p$, logo, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, portanto $(p-1)q = p$. Daí,

$$(\,|f+g|^{p-1}\,)^q = |f+g|^p$$

e pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int |f| \, |f+g|^{p-1} &= ||f \ |f+g|^{p-1}\,||_1 \\
&\leq \|f\|_p \ || \ |f+g|^{p-1}\,||_q \\
&= \|f\|_p \left( \int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \left( \int |f+g|^{p} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \left( \int |f+g|^{p} \right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}} \\
&= \|f\|_p \, \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

Logo, mostramos que

$$\int |f| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \|f\|_p \ \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Similarmente,

$$\int |g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu \leq \|g\|_p \ \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Portanto,

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \ \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Como $p - \frac{p}{q} = 1$, segue que $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. $\square$

**Teorema 23** (Riesz-Fischer)**.** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Então $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$ (i.e espaços normados completos).*

*Demonstração.*
▪ O caso $p = \infty$.

Seja $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^\infty(X)$ uma sequência de Cauchy (com respeito à norma $L^\infty$). Para todo $n \geq 1$ existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k - f_l\|_\infty < \frac{1}{m} \quad \forall k, l \geq n_m .$$

Logo, existe $W_{k,l,m} \in \mathcal{B}, \mu(W_{k,l,m}) = 0$ tal que

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \frac{1}{m} \quad \forall x \in W^{\complement}_{k,l,m} .$$

Seja $W = \bigcup_{k,l,m} W_{k,l,m}$ união enumerável. Então, $W \in \mathcal{B}$ e $\mu(W) = 0$. Afirmamos que se $x \in W^{\complement}$ então $\{f_n(x)\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ é Cauchy. De fato, para todo $x \in W^{\complement}$ e $m \geq 1$ temos

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \frac{1}{m} \quad \forall k, l \geq n_m \tag{4}$$

Seja

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) & \text{se} \quad x \in W^{\complement} \\ 0 & \text{se} \quad x \in W \end{cases}$$

Logo, $f$ é mensurável. Na desigualdade (4), tomando $l \to \infty$, segue que para todo $x \in W^{\complement}$,

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \forall k \geq n_m, \tag{5}$$

já que $f(x) = \lim\limits_{l\to\infty} f_l(x)$.

Em particular,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f_k(x) + f_k(x)| \\ &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| \\ &\leq \frac{1}{m} + |f_k(x)| , \end{aligned}$$

e como $f_k$ é essencialmente limitada, $f$ também é essencialmente limitada, i.e, $f \in L^\infty(X)$.

Pela desigualdade (5) temos que $f_k \to f$ uniformemente em $W^{\complement}$. Como $\mu(W) = 0$, concluímos que $f_k \to f$ em $L^\infty$, portanto a sequência de Cauchy $\{f_k\}_{k\geq 1} \subset L^\infty(X)$ possui um limite $f \in L^\infty(X)$, mostrando a completude do espaço $L^\infty(X)$

▪ O caso $1 \leq p < \infty$. Usaremos o seguinte resultado.

**Lema 4.** *Seja $\{g_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p < \infty$, então existe $g \in L^p(X)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = g$ $\mu$-q.t.p. em $L^p(X)$.*

Vamos usar o lema para provar que dada $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(X)$ uma sequência de Cauchy existe $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ subsequência convergente. Como $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é Cauchy em $L^p(X)$,

$$\|f_n - f_m\|_p \to 0 \text{ quando } n, m \to \infty .$$

Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tal que

$$\left\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\right\|_p < \frac{1}{2^k} \text{ para todo } k \geq 1\,.$$

Seja $g_k := f_{n_k} - f_{n_{k+1}}$. Como $\|g_k\|_p < \dfrac{1}{2^k}$ temos que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} < \infty$. Então pelo lema anterior $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge em $L^p(X)$ para uma função $g \in L^p(X)$. Temos

$$\sum_{k=1}^{m} g_k = f_{n_1} - f_{n_2} + f_{n_2} - f_{n_3} + \ldots + f_{n_m} - f_{n_{m+1}} = f_{n_1} - f_{n_{m+1}}\,.$$

Então,

$$f_{n_{m+1}} = f_{n_1} - \sum_{k=1}^{m} g_k.$$

Concluímos que $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ converge em $L^p(X)$ para $f := f_{n_1} - g$. Não é difícil concluir que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ mesmo é convergente. De fato, dado $\epsilon > 0$, como $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é Cauchy em $L^p(X)$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon.$$

Ainda, $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ é convergente em $L^p(X)$, então existe $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_{n_k} - f\|_p < \epsilon \quad \forall k \geq k_\epsilon.$$

Então, para todo $n$ suficientemente grande,

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

□

*Demonstração do lema.* Considere a sequência de funções mensuráveis $\{|g_n|\}_{n\geq 1}$. Pelo teorema de Tonelli, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ é mensurável e

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \, d\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |g_n| \, d\,\mu$$

Sejam $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |g_k|$ (a soma parcial) e $h = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ (a soma da série). Então $h_n \nearrow h$ em todo ponto. Em particular, $h_n^p \nearrow h^p$ em todo ponto. Portanto, pelo TCM, $\displaystyle\int_X h_n^p \to \int_X h^p$. Então,

$$\left(\int_X h_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|h_n\|_p = ||\sum_{k=1}^{n} |g_k|\;||_p \leq \sum_{k=1}^{n} |\,|g_k|\,|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\,|g_k|\,|_p < \infty\,.$$

Concluímos que

$$\|h\|_p = \left(\int_X h^p \, d\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\,|g_k|\,|_p < \infty,$$

ou seja, $h \in L^p(X)$. Em particular, $h(x) < \infty$ para $\mu$-q.t.p. $x \in X$ onde $h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$ .

Então, a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ é absolutamente convergente $\mu$-q.t.p. Seja $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, então $g$ é mensurável. Resta provar que $g \in L^p(X)$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k = g$ em $L^p(X)$. Como $g = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ $\mu$-q.t.p., temos que $|g| \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| = h \in L^p$, logo, pela monotonicidade da integral, $g \in L^p(X)$. As somas parciais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k \to g$ $\mu$-q.t.p., logo $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k - g\right|^p \to 0$ $\mu$-q.t.p.

Então,

$$\left|g - \sum_{k=1}^{n} g_k\right|^p \leq \left( |g| + \sum_{k=1}^{n} |g_k| \right)^p \leq (h+h)^p = 2^p h^p \in L^1(X)\,.$$

Portanto, o teorema da convergência dominada é aplicável e implica

$$\int_X \left|g - \sum_{k=1}^{n} g_k\right|^p d\,\mu \to 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} g_k \to g \ \text{ em } L^p(X)\,.$$

□