AULA 13: A INTEGRAL DE LEBESGUE DE FUNÇÕES MENSURÁVEIS SEM SINAL

Como vimos, toda função mensurável sem sinal pode ser aproximada por baixo por funções simples, para as quais já definimos o conceito de integração à Lebesgue. Podemos então definir a integral de Lebesgue de uma função mensurável sem sinal por meio dessa aproximação.

Definição 1. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Definimos sua integral à Lebesgue por

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mathrm{m} := \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} s \, d\mathrm{m} \colon s \leq f \text{ q.t.p., } s \text{ é simples e sem sinal} \right\}.$$

Observação 1. Obviamente, dada uma função mensurável sem sinal f, tem-se

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mathrm{m} \leq \infty \,.$$

Além disso, integração à Lebesgue é uma operação monótona:

$$\text{se } f \leq g \text{ q.t.p.,} \quad \text{então} \quad \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mathrm{m} \leq \int_{\mathbb{R}^d} g \, d\mathrm{m} \,,$$

já que, se s for uma função simples sem sinal tal que $s \leq f$ q.t.p., então também $s \leq g$ q.t.p..

Observação 2. Na definição da integral de Lebesgue de uma função mensurável sem sinal f, podemos nos restringir a tipos mais específicos de funções simples, a saber, aquelas que *moram numa caixa*, e que aproximam f por baixo em *todo* ponto:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mathrm{m} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} s \, d\mathrm{m} \colon s \leq f, \ s \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa} \right\}. \tag{1}$$

Obviamente, $\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mathrm{m}$ é maior do que ou igual ao lado direito da igualdade abaixo. Vamos provar a desigualdade oposta, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mathrm{m} \leq \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} s \, d\mathrm{m} \colon s \leq f, \ s \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa} \right\}.$$

Fixe uma função simples sem final s tal que $s \leq f$ q.t.p. e seja

$$\mathcal{Z} := \{x \colon s(x) > f(x)\},$$

então $\mathrm{m}(\mathcal{Z}) = 0$.

Escreva $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$, onde $\{E_i\}_{i \in [k]}$ são conjuntos mensuráveis disjuntos.

Para todo $i \in [k]$ e $n \geq 1$ definimos os truncamentos

$$c_{i,n} := \min\{c_i, n\} \quad \text{e} \quad E_{i,n} := E_i \cap [-n, n]^d \setminus \mathcal{Z},$$

e a função simples

$$s_n := \sum_{i=1}^k c_{i,n} \mathbf{1}_{E_{i,n}} \,.$$

Claramente, $s_n \geq 0$, $s_n \leq f$ em todo ponto e s_n mora na caixa $[-n, n]^d \times [0, n]$.

Além disso, para cada $i \in [k]$ tem-se

$$c_{i,n} \to c_i \quad \text{e} \quad E_{i,n} \nearrow E_i \setminus \mathcal{Z} \quad \text{quando } n \to \infty \,.$$

Pelo teorema de convergência monótona para conjuntos,

$$\mathrm{m}(E_{i,n}) \to \mathrm{m}(E_i \setminus \mathcal{Z}) = \mathrm{m}(E_i)\,.$$

Portanto, quando $n \to \infty$, temos que

$$\int s_n = \sum_{i=1}^{k} c_{i,n}\,\mathrm{m}(E_{i,n}) \to \sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathrm{m}(E_i) = \int s\,.$$

Para finalizar o argumento, consideramos separadamente os casos $\int f < \infty$ ou $\int f = \infty$. Se $\int f < \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe s simples, sem sinal, tal que $s \le f$ q.t.p. e

$$\int f \le \int s + \epsilon\,.$$

Considerando a sequência $\{s_n\}_{n\ge1}$ correspondente a s definida acima, como temos

$$\int s_n \to \int s \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int s \le \int s_N + \epsilon\,.$$

Concluímos que

$$\begin{aligned}\int f &\le \int s_N + 2\epsilon \\ &\le \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \sigma\, d\mathrm{m} \colon \sigma \le f,\ \sigma \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa}\right\} + 2\epsilon\,.\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon \to 0$, provamos a afirmação nesse caso.

Se $\int f = \infty$, então, para todo $M < \infty$, existe s simples, sem sinal, $s \le f$ q.t.p. tal que

$$\int s > M.$$

De novo, considerando a sequência $\{s_n\}_{n\ge1}$ correspondente a s definida acima, $\int s_n \to \int s$ quando $n \to \infty$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int s_N > M\,.$$

Portanto,

$$\sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \sigma\, d\mathrm{m} \colon \sigma \le f,\ \sigma \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa}\right\} \ge \int s_N > M \to \infty,$$

terminando a prova.

O próximo teorema, o primeiro resultado sobre a troca do limite com a integral de Lebesgue, é um dos mais importantes na teoria da medida, e exemplifica a vantagem da integração de Lebesgue sobre a de Riemann-Darboux. A sua demonstração também ilustra um raciocínio comum na teoria de probabilidades bem como na teoria da medida, a saber, *um argumento de tempos de parada.*

Teorema 1. *(de convergência monótona) Seja $\{f_n\}_{n\ge1}$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis à Lebesgue. Então, $f := \lim_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\ge1} f_n$ é mensurável e*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,.$$

Demonstração. Pela Proposição 1 da aula 12, a função limite f é, de fato, mensurável à Lebesgue. Além disso, pela monotonicidade da integral, já que, para todo $n \geq 1$, $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, segue que

$$\int f_n \leq \int f_{n+1} \leq \int f,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f\,.$$

Para provar a desigualdade oposta,

$$\int f \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n\,,$$

usando (1), basta considerar uma função simples sem sinal $s \leq f$, que mora numa caixa, e mostrar que

$$\int s \leq \sup_{n\geq 1} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,.$$

Podemos representar

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathbf{1}_{E_i}\,,$$

onde, para todo $i \in [k]$, $c_i \in (0, \infty)$ (os coeficientes c_i são finitos, pois s mora numa caixa, então é limitada) e os conjuntos E_i são mensuráveis e disjuntos.

Fixe $\epsilon > 0$. Dados $i \in [k]$ e $x \in E_i$ então $s(x) = c_i$ e

$$\sup_{n\geq 1} f_n(x) = f(x) \geq s(x) = c_i > (1-\epsilon) c_i\,.$$

Portanto, existe um *tempo limiar* $n_x \in \mathbb{N}$, tal que

$$f_n(x) > (1-\epsilon)c_i \quad \text{para todo} \quad n \geq n_x\,.$$

O problema é a falta da *uniformidade*: a taxa de convergência da sequência $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ para $f(x)$ depende de x, e a priori poderia variar muito, dependendo de x. Por isso, o limiar correspondente n_x também poderia variar muito. A ideia é usar um argumento de tempos de parada, onde impomos alguma uniformidade. Mais precisamente, dado um tempo $n \in \mathbb{N}$, seja

$$E_{i,n} := \{x \in E_i \colon f_n(x) > (1-\epsilon)c_i\}$$

o conjunto de elementos de E_i tendo o comportamento desejado no mesmo tempo dado n.

Como, para todo $x \in E_i$ temos $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, segue que $E_{i,n} \subset E_{i,n+1}$. Além disso, já que, eventualmente, todo ponto $x \in E_i$ possui um tempo limiar n_x após o qual o comportamento desejado $f_n(x) > (1-\epsilon)c_i$ acontece, concluímos que

$$\bigcup_{n\geq 1} E_{i,n} = E_i, \quad \text{logo} \quad E_{i,n} \nearrow E_i \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

Portanto, pelo teorema de convergência monótona *para conjuntos* (que já foi estabelecido),

$$\mathrm{m}(E_{i,n}) \to \mathrm{m}(E_i) \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,. \tag{2}$$

Claramente, dado um tempo $n \geq 1$, como $f_n \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e $i \in [k]$ tem-se

$$f_n(x) \geq (1-\epsilon)c_i\, \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x).$$

Como os conjuntos $E_{i,n} \subset E_i$, onde $i \in [k]$, são disjuntos, somando sobre $i \in [k]$ obtemos

$$f_n(x) \geq \sum_{i=1}^{k} (1-\epsilon)c_i\, \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x) = (1-\epsilon) \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x)\,.$$

Integrando em x temos

$$\begin{aligned}\int_{R^d} f_n(x)\, \mathrm{dm}(x) &\geq (1-\epsilon) \int_{R^d} \left(\sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x) \right) \mathrm{dm}(x) \\ &= (1-\epsilon) \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathrm{m}(E_{i,n}) \,.\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ e usando (2), concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq (1-\epsilon) \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathrm{m}(E_i) = (1-\epsilon) \int s \,.$$

Finalmente, passando $\epsilon \to 0$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geq \int s \,,$$

finalizando a prova. □

Observação 3. No teorema anterior, a hipótese que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência não decrescente (em todo ponto) pode ser enfraquecida para *quase* todo ponto, já que, trocando o valor de cada função para zero nos pontos onde a sequência não possui esse comportamento (então, em um conjunto negligenciável), não muda o valor da integral, então não afeta a conclusão.

Observação 4. Seja $\{E_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de conjuntos mensuráveis e suponha que

$$E_n \nearrow E \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Claramente as funções indicadoras correspondentes $\{\mathbf{1}_{E_n}\}_{n\geq 1}$ formam uma sequência não decrescente de funções mensuráveis, e $\mathbf{1}_{E_n} \to \mathbf{1}_E$ quando $n \to \infty$.

Teorema 1 então implica

$$\mathrm{m}(E_n) = \int \mathbf{1}_{E_n} \to \int \mathbf{1}_E = \mathrm{m}(E) \,.$$

Portanto, o teorema de convergência monótona para funções (Teorema 1) é uma extensão do teorema de convergência monótona para conjuntos (Teorema 1 da aula 9). Contudo, como vimos, o resultado mais fraco (para conjuntos) foi usado, de uma maneira essencial na prova do resultado mais forte (sobre funções).

O corolário a seguir nos permitirá no futuro, ao estabelecer certas propriedades (que são fechadas sob limites) de funções mensuráveis, reduzir à situação mais conveniente de uma função limitada ou de uma função com suporte limitado ou mesmo de uma função localizada em uma caixa.

Corolário 1. Seja $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ uma função mensurável.

(1) (Truncamento vertical) Para todo $n \geq 1$, considere o truncamento vertical da função f até o nível n, ou seja:

$$f_n := \min\{f, n\} \,.$$

Então, f_n é mensurável, limitada (por n) e $f_n \nearrow f$ quando $n \to \infty$, logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \to \int f \,.$$

(2) (Truncamento horizontal) Para todo $n \geq 1$, considere o truncamento horizontal da função f no domínio $\{|x| \leq n\}$, ou seja:

$$f_n := f \, \mathbf{1}_{\{|x| \leq n\}} \, .$$

Então, f_n é mensurável, possui suporte limitado (contido na caixa $[-n, n]^d$) e $f_n \nearrow f$ quando $n \to \infty$, logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \to \int f \, .$$

(3) (Localização numa caixa) Sejam $x_n \nearrow \infty$ e $y_n \nearrow \infty$ duas sequências de números (por exemplo, $x_n = y_n = n$ para todo $n \geq 1$). Considere a localização da função f dentro da caixa $B_n := [-x_n, x_n]^d \times [0, y_n]$, ou seja:

$$f_n := \min\{f, y_n\} \, \mathbf{1}_{\{|x| \leq x_n\}} \, .$$

Então, f_n é mensurável, f_n mora na caixa B_n e $f_n \nearrow f$ quando $n \to \infty$, logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \to \int f \, .$$