CAPÍTULO 3. NÚMEROS RACIONAIS

Sumário

1. O conjunto de números racionais

Números racionais são intuitivamente quocientes de números inteiros $\frac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$.

Observe que Os quocientes $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{-6}{-9}$ etc representam o mesmo número racional.

Vamos formalizar este conceito.

Primeiro, dado um conjunto X e uma relação de equivalência $\sim$ em X, se $x \in X$ denotamos por

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

o conjunto de todos os elementos de X equivalentes a x, ou seja, a classe de equivalência de x.

Observe que todo elemento de X pertence à sua própria classe de equivalência:

$$x \sim x, \text{ então } x \in [x]$$

Além disso, se $x \sim y$ então $y \sim x$ e $[x] = [y]$.

Denotamos por $X/\sim$ o conjunto de todas as classes de equivalência (o conjunto quociente), ou seja,

$$X/\sim := \{[x] \colon x \in X\}.$$

No produto cartesiano

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\},$$

definimos a relação

$$(m, n) \sim (m', n') \text{ se } m \cdot n' = n \cdot m'$$

Por exemplo:

$(2, 3) \sim (4, 6)$ porque $2 \times 6 = 3 \times 4$

$(4, 6) \sim (-6, -9)$ porque $4 \times (-9) = 6 \times (-6)$.

Acontece que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Denotamos o conjunto de classes de equivalência

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim \text{ por } \mathbb{Q},$$

e o chamamos do conjunto dos números racionais.

Denotamos a classe de equivalência $[(m, n)] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\frac{m}{n}$.

Assim, um número racional é uma relação de equivalência de pares de números inteiros (m, n) que são proporcionais.

Exemplo 1.1. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ porque $2 \times 6 = 3 \times 4$.
Similarmente, $\frac{4}{6} = \frac{-6}{-9}$ porque $4 \times (-9) = 6 \times (-6)$.

Definimos as operações algébricas entre números racionais como seguinte.

- **Adição.**

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \overset{\text{def}}{=} \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q}.$$

A adição é bem definida, no sentido que se $(m, n) \sim (m', n')$ e $(p, q) \sim (p', q')$ então

$$(m \cdot q + n \cdot p, n \cdot q) \sim (m' \cdot q' + n' \cdot p', n' \cdot q').$$

- **Multiplicação.**

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}.$$

A multiplicação é bem definida, no sentido que se $(m, n) \sim (m', n')$ e $(p, q) \sim (p', q')$ então

$$(m \cdot p, n \cdot q) \sim (m' \cdot p', n' \cdot q').$$

De fato,
$(m, n) \sim (m', n') \Rightarrow m \cdot n' = n \cdot m'$
$(p, q) \sim (p', q') \Rightarrow p \cdot q' = q \cdot p'$
Multiplicando as duas identidades acima, tem-se

$$(m \cdot n') \cdot (p \cdot q') = (n \cdot n') \cdot (q \cdot p')$$

Usando as propriedades básicas das operações com números inteiros, concluímos que

$$(m \cdot p) \cdot (n' \cdot q') = (n \cdot q) \cdot (n' \cdot p'),$$

mostrando que $(m \cdot p, n \cdot q) \sim (m' \cdot p', n' \cdot q')$.

A adição e multiplicação de números racionais satisfazem as propriedades conhecidas (comutatividade, associatividade, elemento neutro e inverso, distributividade), então $\mathbb{Q}$ é um *corpo*.

Além disso, definimos

$$\frac{m}{n} \geq 0 \text{ se } m \cdot n \geq 0,$$

e

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \text{ se } \frac{p}{q} - \frac{m}{n} \geq 0.$$

Então "$\leq$" é uma relação de ordem total em $\mathbb{Q}$ compatível com as operações algébricas, tornando $\mathbb{Q}$ um *corpo ordenado*.

Lema 1.2. *$\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável infinito.*

Demonstração. Como $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^*$ são enumeráveis, o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ também é enumerável.
Dado um número racional r, seja $\frac{m}{n}$ sua representação como quociente tal que $n > 0$ e m, n não têm nenhum divisor em comum.
Por exemplo, para o número $-\frac{9}{6}$ escolhemos a representação $\frac{-3}{2}$.

A função $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dada por $f(r) = (m, n)$, onde $\frac{m}{n}$ é a representação de r descrita acima, é claramente injetiva.

Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável, por um teorema anterior, $\mathbb{Q}$ também é. $\square$

2. Corpos

Um conjunto não vazio K, munido de duas operações binárias $+$ e $\cdot$, chamadas de adição e multiplicação, é um corpo se as seguintes propriedades (ou axiomas) são satisfeitas:

Axiomas da adição:

1) Associatividade: para todo $x, y, z \in K$,
$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

2) Comutatividade: para todo $x, y \in K$,
$$x + y = y + x$$

3) Elemento neutro: existe um elemento $0 \in K$ tal que
$$x + 0 = x \quad \text{para todo } x \in K$$

4) Elemento inverso (ou simétrico): para todo $x \in K$ existe um elemento $-x \in K$ tal que
$$x + (-x) = 0$$

Axiomas da multiplicação:

5) Associatividade: para todo $x, y, z \in K$,
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

6) Comutatividade: para todo $x, y \in K$,
$$x \cdot y = y \cdot x.$$

7) Elemento neutro: existe um elemento $1 \in K$ tal que
$$x \cdot 1 = x \quad \text{para todo } x \in K.$$

8) Inverso multiplicativo: para todo $x \in K$ existe um elemento $x^{-1} \in K$ tal que
$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

9) Axioma da distributividade: para todo $x, y, z \in K$,
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Observação. Os elementos neutros para adição e multiplicação são únicos.
De fato, se $x + 0 = x$ e $x + 0' = x$ para todo $x \in K$, então
$$0' + 0 = 0'$$
e
$$0 + 0' = 0$$
Mas $0' + 0 = 0 + 0'$, logo $0' = 0$.

Similarmente para multiplicação.

Observação. $x \cdot 0 = 0$ para todo $x \in K$.
De fato, $0 + 0 = 0$, então para todo $x \in K$,

$$x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$$

logo

$$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$$

Somando $-x \cdot 0$ nos dois lados,

$$(-x \cdot 0 + x \cdot 0) + x \cdot 0 = -x \cdot 0 + x \cdot 0$$
$$\Rightarrow 0 + x \cdot 0 = 0$$
$$\Rightarrow x \cdot 0 = 0$$

Observação. O inverso aditivo e multiplicativo são únicos.

De fato, se $x + y = 0$ e $x + z = 0$, então
$z + (x + y) = z + 0$
$\Rightarrow (z + x) + y = z$
$\Rightarrow (x + z) + y = z$
$\Rightarrow 0 + y = z$
$\Rightarrow y = z$.
Similarmente para produto.

Observação. Se $x \cdot y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.

De fato, se $x \neq 0$, então x tem um inverso multiplicativo x^{-1}. Logo
$x \cdot y = 0 \Rightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0$
$\Rightarrow (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 0$
$\Rightarrow 1 \cdot y = 0$
$\Rightarrow y = 0$