

CAPÍTULO 5. SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

SUMÁRIO

1. Sequências de números reais	1
Outros exemplos de sequências	3
2. Limite de uma sequência	3

1. SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Intuitivamente, uma sequência de números reais é uma lista enumerável infinita com possíveis repetições

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

onde $x_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Formalmente, uma sequência de números reais é uma função

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Denotamos $x(n)$ por x_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, também escrevemos

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Por exemplo, a sequência

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

é formalmente dada pela função

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Acontece que essa sequência também pode ser descrita por uma fórmula fechada,

$$x(n) = (-1)^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Observação 1.1. Uma sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é representada pela lista enumerável infinita

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

e não pela sua imagem, que é o conjunto

$$x(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

No exemplo anterior, em que

$$x(n) = (-1)^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

a lista correspondente é

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

onde 1 e -1 são alternadamente repetidos um número infinito de vezes, enquanto a imagem de x é simplesmente o conjunto $\{1, -1\}$.

Definição 1.1. Uma sequência $(x_n)_{n \geq 0}$ é limitada superiormente se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_n \leq b \text{ para todo } n \geq 0.$$

Similarmente, $(x_n)_{n \geq 0}$ é limitada inferiormente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \leq x_n \text{ para todo } n \geq 0.$$

A sequência $(x_n)_{n \geq 0}$ é limitada se ela é limitada superiormente e inferiormente, i.e., se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a \leq x_n \leq b \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Observação 1.2. Uma sequência $(x_n)_{n \geq 0}$ é limitada se e somente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x_n| \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De fato, se $|x_n| \leq M$ então

$$-M \leq x_n \leq M,$$

logo $(x_n)_{n \geq 0}$ é limitada.

Por outro lado, se $a \leq x_n \leq b$, como

$$b \leq |b| \text{ e } -a \leq |a|,$$

então $-|a| \leq a$, temos que

$$-|a| \leq x_n \leq |b|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $M = \max\{|a|, |b|\}$. Então $|b| \leq M$ e $|a| \leq M$, então

$$-M \leq x_n \leq M, \text{ logo } -M \leq x_n \leq M,$$

ou $|x_n| \leq M$.

Definição 1.2. Uma sequência $(x_n)_{n \geq 0}$ é crescente se $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \geq 0$, isto é, se

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots.$$

Similarmente, (x_n) é decrescente se $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \geq 0$, isto é, se

$$x_0 > x_1 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots.$$

Além disso, $(x_n)_n$ é não decrescente se $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \geq 0$ e não crescente se $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \geq 0$. Uma sequência com uma dessas propriedades é dita monótona.

Exemplo 1.1. A sequência $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é claramente crescente, enquanto $x_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$ é decrescente. A sequência $x_n = (-1)^n$ não é monótona.

Definição 1.3. Seja $(x_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de números reais. Dada uma sequência crescente de números naturais

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

a sequência

$$y_k = x_{n_k}, \quad k \geq 1$$

é chamada uma subsequência de $(x_n)_n$.

Exemplo 1.2. Dada uma sequência $(x_n)_{n \geq 0}$,

$$x_0, x_2, x_4, \cdots, x_{2n}, \cdots$$

é a subsequência dos termos de índices pares. Similarmente,

$$x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{2n+1}, \cdots$$

é a subsequência dos termos ímpares. Outros exemplos de subsequências são:

$$x_1, x_2, x_4, x_8, \cdots, x_{2^n}, \cdots$$

ou

$$x_1, x_4, x_7, x_{10}, \dots, x_{n+3}, \dots$$

ou, mais geralmente, dado $k \in \mathbb{N}$,

$$(x_{k+n})_{n \in \mathbb{N}}$$

é a subsequências dps termos começando com o índice k .

Outros exemplos de seqüências.

- $x_n = \frac{1}{n}$ para $n \geq 1$, ou seja,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Limitada por 0 e 1, decrescente.

- $x_n = a^n$ para $n \geq 0$, ou seja, $a \in (0, 1)$

$$1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$$

Limitada, decrescente.

- Dado $a \in (0, 1)$, para todo $n \geq 0$

$$x_n = 1 + a + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Note que se $a \in (0, 1)$, então $a^{n+1} \in (0, 1)$. Logo

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{1 - a},$$

então a seqüência é limitada e estritamente crescente.

- Dado $R > 1$, $x_n = R^n$ para $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$1, R, R^2, \dots, R^n, \dots$$

Não limitada, crescente.

- $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ limitada por 3, crescente.

2. LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA

Sejam $(x_n)_n$ uma seqüência de números reais e $a \in \mathbb{R}$.

Intuitivamente, $(x_n)_n$ converge para a se os termos x_n da seqüência se aproximam arbitrariamente perto de a se n é suficientemente grande.

Em outras palavras, dada qualquer ordem de proximidade ε , por exemplo $\varepsilon = 0,001$ ou $\varepsilon = 0,0000001$, eventualmente (a partir de um certo limiar n_0), todos os termos x_n se tornam mais próximos do que ε de a . Formalmente,

Definição: Dizemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_\varepsilon \text{ implica } |x_n - a| \leq \varepsilon$$

Exemplo 2.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Pelo fato de ser arquimediato, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Então para todo $n \geq n_\varepsilon$ tem-se $n > \frac{1}{\varepsilon}$,

e daí $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Logo,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_\varepsilon,$$

mostrando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Outras notações:

Neste caso dizemos também que a sequência $(x_n)_n$ é convergente e seu limite é a .

Exemplo 2.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

De fato, por indução temos que

$$2^n \geq n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, como existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ com $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$, segue que para todo $n \geq n_\varepsilon$,

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon,$$

e daí

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Exemplo 2.3. A sequência $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ também converge para 0.

De fato,

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

se $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Teorema 2.4. Se existir, o limite de uma sequência é único, isto é, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \text{ então } a = b.$$

Demonstração. Suponha por contradição que $a \neq b$ e seja $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, para este ε existe n_1 t.q.

Se $n \geq n_1$, então $|x_n - a| < \varepsilon$.

Similarmente, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, existe n_2 t.q.

Se $n \geq n_2$ então $|x_n - b| < \varepsilon$.

Seja $N = \max\{n_1, n_2\}$.

Logo $N \geq n_1$ e $N \geq n_2$, e daí, $|x_N - a| < \varepsilon$ e $|x_N - b| < \varepsilon$.

Portanto, pela desigualdade triangular,

$$|a - b| = |a - x_N + x_N - b| \leq |a - x_N| + |x_N - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|,$$

que implica o fato absurdo de que $|a - b| < |a - b|$.

Concluimos que $a = b$. □

Teorema 2.5. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ então toda subsequência de $(x_n)_n$ converge para a .

Demonstração. Seja $(x_{n_k})_k$ uma subsequência de $(x_n)_n$, então os números naturais índices

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$$

formam uma sequência crescente de números naturais.

Por indução (fixa o argumento), tem-se

$$n_k \geq k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } k \geq n(\varepsilon) \text{ então } |x_k - a| < \varepsilon.$$

Logo, para todo $k \geq n(\varepsilon)$, como $n_k \geq k \geq n(\varepsilon)$, tem-se

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

provando que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. □

Exemplo 2.6. A sequência $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ não converge.

De fato, a subsequência $x_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, $n \in \mathbb{N}$ é constante, portanto converge para 1.

Similarmente, a subsequência $x_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ é constante -1 , portanto converge para -1 .

Se a sequência $(x_n)_n$ convergisse, qualquer subsequência dela convergiria para o mesmo limite, o que não é o caso, já que $1 \neq -1$.

Portanto $(x_n)_n$ não converge. □

Teorema 2.7. *Toda sequência convergente é limitada. A recíproca não é verdadeira (veja o exemplo acima).*

Demonstração. Sejam $(x_n)_n$ uma sequência, $a \in \mathbb{R}$ e suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Para $\varepsilon = 1$ existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < 1$$

$$\Rightarrow x_n \in (a - 1, a + 1).$$

Considere o conjunto finito de números reais consistindo nos primeiros n_1 termos da sequência (x_n) e nos pontos extremos $a - 1$ e $a + 1$, isto é, seja

$$F = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_1-1}, a - 1, a + 1\}.$$

Então F possui um máximo M e um mínimo m (sendo finito).

Consequentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$m \leq x_n \leq M,$$

mostrando que $(x_n)_n$ é limitada. □

Teorema 2.8. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Mais precisamente, se $(x_n)_n$ é não decrescente e limitada superiormente, então $(x_n)_n$ é convergente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Similarmente, se $(x_n)_n$ é não crescente ($x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$) e limitada inferiormente, então $(x_n)_n$ é convergente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstração. Consideremos o primeiro caso, o segundo sendo similar (exercício).

$(x_n)_n$ satisfaz $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $b = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Vamos provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$.

Seja $\varepsilon > 0$. Então $b - \varepsilon < b$, e como b é a menor cota superior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe $n_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ tal que $b - \varepsilon < x_{n_{(\varepsilon)}}$.

Se $n \geq n_{(\varepsilon)}$, como $(x_n)_n$ é não decrescente, tem-se $x_n \geq x_{n_{(\varepsilon)}}$. Portanto,

$$b - \varepsilon < x_{n_{(\varepsilon)}} \leq x_n \quad \text{para todo } n \geq n_{(\varepsilon)}.$$

Por outro lado, b é uma cota superior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, logo

$$x_n \leq b < b + \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Concluimos que

$$b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$$

para todo $n \geq n(\varepsilon)$

$$\Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon,$$

provando que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. □

Corolário 2.9. *Seja $(x_n)_n$ uma sequência monótona. Se $(x_n)_n$ possui uma subsequência convergente, então $(x_n)_n$ é convergente.*

Demonstração. Vamos tratar o caso de uma sequência não crescente, $x_n \geq x_{n+1} \forall n$.

Seja $(x_{n_k})_k$ uma subsequência convergente, então limitada, logo existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{n_k} \leq M \quad \text{para todo } k.$$

Mas $n_k \geq k \forall k \in \mathbb{N}$, então $x_{n_k} \geq x_k \forall k \in \mathbb{N}$

Logo $x_k \leq x_{n_k} \leq M \forall k \in \mathbb{N}$, ou seja, a sequência $(x_k)_k$ é limitada superiormente. Sendo monótona por cima, pelo teorema anterior é convergente. □