MAT2621 - MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Informações do curso

A imagem acima é uma representação razoavelmente precisa das técnicas e tópicos de estudo neste curso. Para tornar a representação ainda mais precisa, aumente a resolução (escolhendo quadrados menores).

Objetivo do curso

O objetivo principal deste curso é o estudo da medida de Lebesgue e da integral de Lebesgue. A integração de Lebesgue é um refinamento da teoria da integração de Riemann, proporcionando uma ferramenta mais fina para a matemática avançada.

Professor

Nome: Silvius Klein
Sala: L749
Email: silviusk [arroba] puc-rio [ponto] br

Aulas

Hora: segundas e quartas das 15h às 17h, pelo Zoom

Horário de atendimento

Hora: segundas e quartas depois das aulas

Bibliografia

[Tao-book] Terence Tao, *An introduction to measure theory*
[Tao-blogLRN] Terence Tao, artigo do blog https://tinyurl.com/taoblogLRN
[Tao-blogRMK] Terence Tao, artigo do blog https://tinyurl.com/taoblogRMK

Notas de aula serão disponibilizadas ao longo do semestre

Material de apoio

Outros livros relevantes (disponíveis para compra no IMPA):
[Isnard] Carlos Isnard, *Introdução à medida e integração.*
[Castro] A. Armando de Castro Jr., *Curso de teoria da medida.*

Avaliação

Listas de exercícios para entregar durante o semestre.
Dois exames escritos (um no meio do semestre e o outro no final).
Datas prováveis: 29 de setembro e 01 de dezembro.
Cálculo da nota final: 30% exercícios, 35% cada exame.

- Ementa do curso

1. A teoria de Jordan-Riemann-Darboux [Tao-book] 1.1

   1.1. O problema de mensurabilidade
   1.2. Medida elementar
   1.3. Medida de Jordan
   1.4. A integral de Riemann-Darboux

2. A medida de Lebesgue [Tao-book] 1.2

   2.1. A medida externa de Lebesgue: definição, exemplos, o truque $\frac{\epsilon}{2^n}$
   2.2. Conjuntos Lebesgue mensuráveis: definição via o primeiro princípio de Littlewood
   2.3. Propriedades da medida externa de Lebesgue
   2.4. Propriedades dos conjuntos Lebesgue mensuráveis
   2.5. O critério de mensurabilidade de Carathéodory
   2.6. Unicidade da medida de Lebesgue
   2.7. Exemplo de um conjunto não mensurável

3. A integral de Lebesgue [Tao-book] 1.3

   3.1. Uma prévia da integral de Lebesgue
   3.2. Integração de funções simples
   3.3. Funções mensuráveis
   3.4. A integral de Lebesgue de funções mensuráveis não-negativas (integral sem sinal) e integrabilidade absoluta
   3.5. Propriedades básicas da integral sem sinal: interpretação de área, linearidade e unicidade da integral de Lebesgue, compatibilidade com a integral de Riemann-Darboux
   3.6. Integrabilidade absoluta, os espaços L^p, a desigualdade de Markov
   3.7. O segundo princípio de Littlewood (o teorema de Lusin) e o terceiro princípio de Littlewood (o teorema de Egorov)

4. Espaços de medida abstratos [Tao-book] 1.4 e 1.5

4.1. σ-álgebras e espaços mensuráveis
4.2. Medidas abstratas
4.3. Funções mensuráveis
4.4. A integral de uma função mensurável num espaço de medida abstrato
4.5. Os teoremas de convergência: convergência monótona, o teorema de Tonelli, o lema de Borel-Cantelli, o lema de Fatou, o teorema de convergência dominada
4.6. Modos de convergência
4.7. Os espaços L^p

5. Construção abstrata de medidas, exemplos importantes [Tao-book] 1.7

5.1. Medidas externas e o teorema de extensão de Carathéodory
5.2. Pré-medidas e o teorema de extensão de Kolmogorov
5.3. A medida de Lebesgue-Stieljes
5.4. O teorema de diferenciação de Lebesgue em dimensão um: enunciado; prova no caso mais simples (de funções contínuas)
5.5. Os teoremas fundamentais do cálculo para a integral de Lebesgue: enunciado; prova no caso mais simples (de funções Lipschitz contínuas)
5.6. A medida produto

6. Tópicos avançados em teoria da medida [Tao-blogLRN] e [Tao-blogRMK]

6.1. Medidas com sinal; o teorema de decomposição de Hahn; o teorema de decomposição de Jordan
6.2. O teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym; o teorema de decomposição de Lebesgue para medidas
6.3. A função de distribuição acumulada de uma medida de Borel na reta real
6.4. O teorema de representação de Riesz–Markov–Kakutani (enunciado)