A INTEGRAL DE LEBESGUE

SILVIUS KLEIN

Sumário

Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Definiremos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mathrm{m}(x) = \int f\,,$$

a integral de f com respeito a medida de Lebesgue, ou, simplesmente, a integral de Lebesgue.

Nem todas as funções podem ser integradas; aquelas que podem ser integradas são chamadas funções mensuráveis à Lebesgue.

1. Uma prévia da integral de Lebesgue

O conceito de integração está relacionado ao de somabilidade. Vamos começar considerarando o conceito de somabilidade com mais atenção.

1.1. Somas infinitas (séries). Uma série infinita $\sum_{n\ge1} c_n$ é somável se a sua sequência de somas parciais $S_N := \sum_{n=1}^N c_n$ converge. Vamos considerar duas situações especiais relevantes na construção da integral de Lebesgue.

- Soma infinita sem sinal

Suponha que $c_n \in [0,\infty]$ para todo $n \ge 1$, isto é, $\sum_{n\ge1} c_n$ é uma série infinita *sem sinal*. Neste caso, a soma desta série existe, embora possa ser infinita, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n = \sup\left\{ \sum_{n\in\mathcal{F}} c_n \colon \mathcal{F} \subset \mathbb{N} \text{ finito} \right\}.$$

▪ Soma infinita absolutamente somável

Uma série $\sum_{n\geq 1} c_n$ é chamada *absolutamente somável* se a série sem sinal $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ é finita (o que, em particular, implica a somabilidade da série $\sum_{n\geq 1} c_n$).

Notação. Para um número $c \in \mathbb{R}$, denotamos por

$$c^+ := \begin{cases} c & \text{se } c \geq 0 \\ 0 & \text{se } c < 0 \end{cases} = \max\{c, 0\} \quad \text{e} \quad c^- := \begin{cases} 0 & \text{se } c \geq 0 \\ -c & \text{se } c < 0 \end{cases} = \max\{-c, 0\}\,.$$

Note que

$$c^+,\, c^- \geq 0, \quad c = c^+ - c^-, \quad |c| = c^+ + c^-\,.$$

Com essas notações, uma série $\sum_{n\geq 1} c_n$ é absolutamente somável se e somente se as séries sem sinais $\sum_{n\geq 1} c_n^+$ e $\sum_{n\geq 1} c_n^-$ são finitas. Neste caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^-\,.$$

Portanto, a somabilidade (absoluta) de séries pode ser reduzida ao caso de séries sem sinais.

1.2. **A construção da integral de Lebesgue.** Definiremos este conceito em vários passos.

1. Seja $f = \mathbf{1}_E$ a função indicadora de um conjunto mensurável E. Então,

$$\int_{R^d} f\, d\mathrm{m} := \mathrm{m}(E)\,.$$

Mais geralmente, suponha que $f = \sum_{i=1}^{k} c_1 \mathbf{1}_{E_i}$ seja uma combinação linear de funções indicadoras de conjuntos mensuráveis E_i, com coeficientes $c_i \geq 0$ para todo $i \in [k] := \{1, \ldots, k\}$. Este tipo de função será chamada de função simples. Então,

$$\int_{R^d} f\, d\mathrm{m} := \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathrm{m}(E_i)\,.$$

Esta definição corresponde à nossa intuição geométrica da integral de uma função não negativa como o volume abaixo do gráfico da função. Também, por construção, é uma operação linear (como deveria ser).

2. Suponha que $f \geq 0$ possa ser aproximada (de uma maneira razoável) por funções *simples*. Chamamos tal função "mensurável à Lebesgue". Então,

$$\int_{R^d} f\, d\mathrm{m} := \sup\left\{ \int_{R^d} s\, d\mathrm{m} \colon s \leq f,\ s \text{ é uma função simples} \right\}\,.$$

3. Seja $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, então $|f| \geq 0$. Escreva

$$f = f^+ - f^-\,,$$

onde

$$f^+(x) := f(x)^+ \quad \text{e} \quad f^-(x) := f(x)^-\,.$$

A função f é chamada *absolutamente integrável* se f^+ e f^- são funções mensuráveis (logo, $|f| = f^+ + f^-$ é mensurável também) e

$$\int_{R^d} |f|\, d\mathrm{m} < \infty\,.$$

Neste caso, defina

$$\int_{R^d} f\, d\mathrm{m} := \int_{R^d} f^+\, d\mathrm{m} - \int_{R^d} f^-\, d\mathrm{m}\,.$$

A seguir, faremos uma apresentação detalhada de cada passo da construção acima.

2. Integração de funções simples

Começamos com a definição e as propriedades básicas de funções simples.

Definição 1. Uma função $s\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é dita *simples* se

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}\,,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ e E_i são conjuntos mensuráveis à Lebesgue para todo $i \in [k]$.

Ademais, $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$ é uma função simples *sem sinal* se os coeficientes $c_i \in [0, +\infty]$ para todo $i \in [k]$.

Notação. Vamos fazer as seguintes *convenções* naturais sobre operações algébricas que envolvem $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\infty + \infty &= \infty \\
c \cdot \infty &= \infty, \text{ se } c > 0 \\
0 \cdot \infty &= 0 \\
\infty \cdot c &= \infty, \text{ se } c > 0 \\
\infty \cdot 0 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Observação 1. Seja $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples. Os conjuntos mensuráveis $E_1, \dots, E_k$ não precisam ser disjuntos. Porém, se for conveniente, pode-se supor que eles são disjuntos e até mesmo, que eles formam uma *partição* do espaço $\mathbb{R}^d$.

De fato, se (por simplicidade) $k = 2$, logo $s = c_1 \mathbf{1}_{E_1} + c_2 \mathbf{1}_{E_2}$, como os dois conjuntos E_1 e E_2 determinam uma partição de espaço $\mathbb{R}^d$ em quatro subconjuntos

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^d &= (E_1 \setminus E_2) \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_1 \cup E_2)^{\complement} \\
&= (E_1 \cap E_2^{\complement}) \sqcup (E_2 \cap E_1^{\complement}) \sqcup (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_1^{\complement} \cap E_2^{\complement})\,,
\end{aligned}$$

segue que

$$s(x) = c_1 \mathbf{1}_{E_1}(x) + c_2 \mathbf{1}_{E_2}(x) = \begin{cases} c_1 & \text{se } x \in E_1 \cap E_2^{\complement} \\ c_2 & \text{se } x \in E_1 \cap E_2^{\complement} \\ c_1 + c_2 & \text{se } x \in E_1 \cap E_2 \\ 0 & \text{se } x \in E_1^{\complement} \cap E_2^{\complement} \end{cases}$$

$$= c_1\, \mathbf{1}_{E_1 \cap E_2^{\complement}} + c_2\, \mathbf{1}_{E_2 \cap E_1^{\complement}} + (c_1 + c_2)\, \mathbf{1}_{E_1 \cap E_2} + 0\, \mathbf{1}_{E_1^{\complement} \cap E_2^{\complement}}\,.$$

O mesmo argumento vale com qualquer número k de conjuntos E_i, $i \in [k]$.

Dado um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$, vamos denotar por $E^+ := E$ e por $E^- := E^{\complement}$. Então, com estas notações, os conjuntos $E_1, \dots, E_k$ determinam uma partição

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+,-\}} E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}$$

em 2^k conjuntos mensuráveis, e, claramente,

$$s = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+,-\}} c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}\, \mathbf{1}_{E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}}$$

para alguns coeficientes $c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}$.

Note que se $c_1, \dots, c_k \in [0, \infty]$, então, claramente $c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} = c_1^{\alpha_1} + \ldots + c_k^{\alpha_k} \in [0, \infty]$.

Proposição 1. *(propriedades básicas de funções simples) Sejam s e σ duas funções simples e $c \in \mathbb{R}$. Então,*

(1) $s+\sigma$ e cs são funções simples.
(2) $s \cdot \sigma$ é uma função simples.
(3) $s^+, s^-, |s|$ são funções simples.

Demonstração. O primeiro item é óbvio. O segundo segue do fato de que $\mathbf{1}_E\,\mathbf{1}_F = \mathbf{1}_{E\cap F}$. Para provar o terceiro, seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$, onde os conjuntos mensuráveis E_i, $i \in [k]$ são *disjuntos*. Então, evidentemente,

$$s^{\pm} = \sum_{i=1}^k c_i^{\pm}\,\mathbf{1}_{E_i} \quad \text{e} \quad |s| = \sum_{i=1}^k |c_i|\,\mathbf{1}_{E_i}\,,$$

que são funções simples. $\square$

Definição 2. (da integral de Lebesgue de uma função simples)

Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples *sem sinal*, então $c_i \in [0,\infty]$ para todo $i \in [k]$. Definimos a integral de s por

$$\int_{R^d} s\,d\mathrm{m} := \sum_{i=1}^k c_i\,\mathrm{m}(E_i)\,,$$

com as convenções acima mencionadas para operações com ∞.

Ademais, uma função simples qualquer é dita *absolutamente integrável* se

$$\int_{R^d} |s|\;d\mathrm{m} < \infty\,.$$

Neste caso, definimos a integral de s por

$$\int_{R^d} s\,d\mathrm{m} := \int_{R^d} s^+\,d\mathrm{m} - \int_{R^d} s^-\,d\mathrm{m}\,.$$

Observação 2. A integral de uma função simples sem sinal (e então também a de uma função absolutamente integrável) é bem definida. De fato, dadas duas representações da função simples sem sinal s,

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{j=1}^l d_j \mathbf{1}_{F_j}\,,$$

onde $c_1,\dots,c_k,d_1,\dots,d_l \in [0,\infty]$, temos que

$$\sum_{i=1}^k c_i\,\mathrm{m}(E_i) = \sum_{j=1}^l d_j\,\mathrm{m}(F_j)\,.$$

Provamos isso em duas etapas. Em primeiro lugar, supomos que os conjuntos $\{E_i\}_{i\in[k]}$ e, respectivamente, $\{F_j\}_{j\in[l]}$ sejam disjuntos dois a dois. Portanto, $\{E_i \cap F_j\}_{(i,j)\in[k]\times[l]}$ também são disjuntos. Pela Observação 1, sem perda da generalidade, podemos supor que

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = \bigcup_{j=1}^l F_j = \mathbb{R}^d\,.$$

Portanto, para todo $i \in [k]$ e $j \in [l]$,

$$E_i = \bigsqcup_{j=1}^l (E_i \cap F_j) \quad \text{e} \quad F_j = \bigsqcup_{i=1}^k (E_i \cap F_j)\,,$$

logo

$$\mathrm{m}(E_i) = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{m}(E_i \cap F_j) \quad \text{e} \quad \mathrm{m}(F_j) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}(E_i \cap F_j)\,.$$

Note que se $E_i \cap F_j \neq \emptyset$ e se x pertence a esta interseção, então $c_i = s(x) = d_j$. Por outro lado, se $E_i \cap F_j = \emptyset$, então $\mathrm{m}(E_i \cap F_j) = 0$. Logo, para todo $(i, j) \in [k] \times [l]$, tem-se

$$c_i\, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = d_j\, \mathrm{m}(E_i \cap F_j)\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathrm{m}(E_i) &= \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{l} \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} c_i\, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} d_j\, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} d_j\, \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{l} d_j \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{l} d_j\, \mathrm{m}(F_j)\,.\end{aligned}$$

Se $\{E_i\}_{i\in[k]}$ não são disjuntos, podemos substituí-los por conjuntos disjuntos. De fato, pela Observação 1,

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i} \\ &= \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \{+,-\}} \left(c_1^{\alpha_1} + \ldots + c_k^{\alpha_k}\right)\, \mathbf{1}_{E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}}\,.\end{aligned}$$

Ademais, como $c_i^- = 0$ para todo $i \in [k]$, pois $c_i \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \{+,-\}} \left(c_1^{\alpha_1} + \ldots + c_k^{\alpha_k}\right)\, \mathrm{m}\left(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right) = \\ &\qquad = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \{+,-\}} c_1^{\alpha_1}\, \mathrm{m}\left(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right) + \ldots + \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \{+,-\}} c_k^{\alpha_k}\, \mathrm{m}\left(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right) \\ &\qquad = \sum_{\alpha_1=+,\, \alpha_2,\ldots,\alpha_k \in \{+,-\}} c_1\, \mathrm{m}\left(E_1 \cap E_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\right) + \ldots \\ &\qquad + \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1} \in \{+,-\},\, \alpha_k=+} c_k\, \mathrm{m}\left(E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cap E_k\right) \\ &\qquad = c_1\, \mathrm{m}\Big(\bigcup_{\alpha_2,\ldots,\alpha_k \in \{+,-\}} E_1 \cap E_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap E_k^{\alpha_k}\Big) + \ldots \\ &\qquad + c_k\, \mathrm{m}\Big(\bigcup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1} \in \{+,-\}} E_1^{\alpha_1} \cap \ldots \cap E_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cap E_k\Big) \\ &\qquad = c_1 \mathrm{m}(E_1) + \ldots + c_k \mathrm{m}(E_k)\,,\end{aligned}$$

assim estabelecendo que a integral de uma função simples sem sinal está bem definida.

Dizemos que uma propriedade $P(x)$ vale para quase todo ponto (abreviado q.t.p.) $x \in \mathbb{R}^d$ se

$$\mathrm{m}\left\{x \in \mathbb{R}^d \colon P(x) \text{ não vale}\right\} = 0\,.$$

Por exemplo, dada uma função $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, a afirmação $f = 0$q.t.p. significa $f(x) = 0$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$, ou seja,

$$\mathrm{m}\left\{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \neq 0\right\} = 0\,.$$

Além disso, para duas funções f e g, a afirmação $f = g$q.t.p. significa

$$\mathrm{m}\left\{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \neq g(x)\right\} = 0\,.$$

Filosofia de Lebesgue: Conjuntos de medida zero não importam em teoria da medida, ou seja, uma afirmação válida em q.t.p. é suficientemente boa.

Definição 3. O suporte (no sentido de teoria da medida) de uma função $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é o conjunto:

$$\operatorname{supp}(f) := \{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \neq 0\}\,.$$

O seguinte resultado resume as propriedades básicas da integral de uma função simples sem sinal.

Proposição 2. *Sejam $s, \sigma \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ duas funções simples sem sinal, e seja $c \in [0, \infty]$. Então,*

(i) (linearidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} (s + \sigma)\, d\mathrm{m} = \int_{\mathbb{R}^d} s\, d\mathrm{m} + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma\, d\mathrm{m}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (cs)\, d\mathrm{m} = c \int_{\mathbb{R}^d} s\, d\mathrm{m}\,.$$

(ii) (finitude)

$$\int_{\mathbb{R}^d} s\, d\mathrm{m} < \infty \quad \textit{se e somente se} \quad s < \infty \textit{q.t.p. e } \mathrm{m}\left(\operatorname{supp}(f)\right) < \infty\,.$$

(iii) (nulidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} s\, d\mathrm{m} = 0 \quad \textit{se e somente se} \quad s = 0 \textit{q.t.p.}$$

(iv) (monotonicidade) Se $s \leq \sigma$q.t.p., então $\displaystyle\int s \leq \int \sigma$.

(v) (equivalência) Se $s = \sigma$q.t.p., então $\displaystyle\int s = \int \sigma$.

Demonstração. A linearidade é óbvia por definição.

$\boxed{\text{ii}}$ Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples sem sinal. Podemos supor que $c_i \in (0, \infty]$ para todo $i \in [k]$ e que os conjuntos $\{E_i\}_{i \in [k]}$ são disjuntos. Então,

$$\operatorname{supp}(f) = \bigcup_{i=1}^k E_i\,.$$

Vamos começar com a implicação oposta.

Como $\mathrm{m}\left(\operatorname{supp}(f)\right) < \infty$, temos que $\mathrm{m}(E_i) < \infty$ para todo $i \in [k]$.

Como $s < \infty$q.t.p., se para algum $j \in [k]$, $c_j = \infty$, então $\mathrm{m}(E_j) = 0$, logo $c_j \mathrm{m}(E_j) = 0$.

Para todos os outros índices i, temos $c_i\, \mathrm{m}(E_i) < \infty$. Portanto, $\displaystyle\int s = \sum_{i=1}^k c_i \mathrm{m}(E_i) < \infty$.

Provamos a implicação direta. Como $\displaystyle\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathrm{m}(E_i) < \infty$, e como $c_i > 0$ para todo $i \in [k]$, necessariamente $\mathrm{m}(E_i) < \infty$, logo

$$\mathrm{m}\left(\operatorname{supp}(f)\right) = \mathrm{m}\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}(E_i) < \infty\,.$$

Além disso, se para algum índice j temos $c_j = \infty$, como $c_j\,\mathrm{m}(E_j) \leq \displaystyle\int s < \infty$, então necessariamente $\mathrm{m}(E_j) = 0$. Portanto,

$$\{x\colon s(x) = \infty\} = \{x\colon \text{ existe } \ j \in [k]\,,\ x \in E_j \ \text{ e } \ c_j = \infty\} = \bigcup_{j\colon c_j = \infty} E_j\,,$$

logo

$$\mathrm{m}\left(\{x\colon s(x) = \infty\}\right) = 0\,.$$

$\boxed{\text{iii}}$ Como no item anterior, escrevemos $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$, com $c_i > 0$ e E_i disjuntos, logo

$$\operatorname{supp}(f) = \bigcup_{i=1}^{k} E_i\,.$$

Se $s = 0$q.t.p., então $\mathrm{m}(\operatorname{supp}(f)) = 0$, logo $\mathrm{m}(E_i) = 0$ para todo $i \in [k]$, e daí,

$$\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathrm{m}(E_i) = 0\,.$$

Por outro lado, se

$$\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathrm{m}(E_i) = 0\,,$$

para todo $i \in [k]$ temos que $c_i\,\mathrm{m}(E_i) = 0$, e como $c_i > 0$, tem-se $\mathrm{m}(E_i) = 0$, mostrando que

$$\mathrm{m}(\operatorname{supp}(f)) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{m}(E_i) = 0\,,$$

isto é, $s = 0$q.t.p.

$\boxed{\text{iv}}$ Suponha que $s \leq \sigma$q.t.p.. Pela Observação 1, podemos representar essas funções como

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{j=1}^{l} d_j \mathbf{1}_{F_j} \,,$$

onde $\{E_i\}_{i\in[k]}$ e, respectivamente, $\{F_j\}_{j\in[l]}$ são *partições* do espaço $\mathbb{R}^d$. Portanto, um argumento similar ao da Observação 2 implica

$$\int s = \sum_{i=1}^{k} c_i \,\mathrm{m}(E_i) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} c_i \,\mathrm{m}(E_i \cap F_j)$$

$$\int \sigma = \sum_{j=1}^{l} d_j \,\mathrm{m}(F_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} d_j \,\mathrm{m}(E_i \cap F_j) \,.$$

Dados $i \in [k]$ e $j \in [l]$, ou $\mathrm{m}(E_i \cap F_j) = 0$, e neste caso $c_i \,\mathrm{m}(E_i \cap F_j) = d_j \,\mathrm{m}(E_i \cap F_j)$, ou $\mathrm{m}(E_i \cap F_j) > 0$, e neste caso, como $s \leq \sigma$q.t.p., necessariamente temos $c_i \leq d_j$, logo $c_i \,\mathrm{m}(E_i \cap F_j) \leq d_j \,\mathrm{m}(E_i \cap F_j)$. Segue que $\displaystyle\int s \leq \int \sigma$.

Finalmente, item (v) é uma consequência imediata da monotonicidade da integral. $\square$

A seguir, apresentamos as propriedades básicas da integral de funções simples *com* sinal.

Proposição 3. *Dadas $s, \sigma \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funções simples absolutamente integráveis e $c \in \mathbb{R}$, tem-se*

(i) (linearidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} (s + \sigma) \,d\mathrm{m} = \int_{\mathbb{R}^d} s \,d\mathrm{m} + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma \,d\mathrm{m} \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^d} (cs) \,d\mathrm{m} = c \int_{\mathbb{R}^d} s \,d\mathrm{m} \,.$$

(ii) (monotonicidade) Se $s \leq \sigma$ q.t.p., então $\displaystyle\int s \leq \int \sigma$.

(iii) (equivalência) Se $s = \sigma$ q.t.p., então $\displaystyle\int s = \int \sigma$.

Demonstração. Exercício. $\square$

3. Funções mensuráveis à Lebesgue (sem sinal)

Podemos pensar em uma função mensurável de duas maneiras: como uma função bem aproximável por funções simples ou, por analogia com o conceito de função contínua em topologia, como uma função para a qual a pré-imagem de qualquer conjunto relevante é mensurável.

Definimos o conceito de função mensurável à Lebesgue pela primeira maneira e depois provamos a equivalência entre essas abordagens.

Definição 4. Uma função $f \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ é mensurável à Lebesgue se f for o limite pontual de uma sequência de funções simples sem sinais, ou seja, se existir uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que

$$s_n(x) \to f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^d \,.$$

Vamos introduzir algumas notações úteis.

Notação. Dada uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]$ e um subconjunto $A \subset [-\infty, \infty]$, denotamos por

$$\{f \in A\} := \{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$$

a preimagem de A pela função f.

Da mesma maneira, dado $\lambda \in [-\infty, \infty]$, seja

$$\{f > \lambda\} := \{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) > \lambda\} = f^{-1}\left((\lambda, \infty]\right) .$$

Similarmente podemos definir $\{f \geq \lambda\}$, $\{f \leq \lambda\}$ e $\{f < \lambda\}$.

Essas notações têm um sabor probabilístico, onde $\{f \in A\}$ pode ser pensado como o evento que f pertença ao conjunto A.

A seguir caracterizamos a mensurabilidade de uma função sem sinal.

Teorema 1. *Para uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(1) f é mensurável à Lebesgue, ou seja, existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que $s_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

(2) f é o limite em quase todo ponto de uma sequência de funções simples sem sinais, ou seja, existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que $s_n(x) \to f(x)$ para quase *todo $x \in \mathbb{R}^d$.*

(3) f é o limite de uma sequência não decrescente *de funções simples, sem sinais, limitadas, com suportes limitados, ou seja, existe uma sequência*

$$0 \leq s_1(x) \leq \ldots \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq \ldots \quad \text{para todo} \;\; x \in \mathbb{R}^d$$

tal que, para todo $n \geq 1$, a função s_n é simples, limitada, $\operatorname{supp}(s_n)$ é limitado e

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \quad \text{para todo} \;\; x \in \mathbb{R}^d .$$

(4) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f > \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.

(5) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f \geq \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.

(6) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f < \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.

(7) Para todo $\lambda \in [0, \infty)$, o conjunto $\{f \leq \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.

(8) Para todo intervalo $I \subset [0, \infty)$, o conjunto $\{f \in I\}$ é mensurável à Lebesgue.

(9) Para todo aberto $U \subset [0, \infty)$, o conjunto $\{f \in U\}$ é mensurável à Lebesgue.

(10) Para todo fechado $F \subset [0, \infty)$, o conjunto $\{f \in F\}$ é mensurável à Lebesgue.

Alguns fatos técnicos. Antes de começar a prova do teorema acima, vamos sujar as mãos, aprendendo alguns segredos de ganha-pão deste negócio.[1]

- É evidente que para dois números reais x e y, temos

$$y \geq x \iff \forall \epsilon > 0,\; y > x - \epsilon \iff \forall m \geq 1,\; y > x - \frac{1}{m} .$$

Portanto, dados uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]$ e um número $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\{f \geq \lambda\} = \bigcap_{m\geq 1} \left\{ f > \lambda - \frac{1}{m} \right\} , \tag{1a}$$

ou seja, o evento $\{f \geq \lambda\}$, dado por uma desigualdade não estrita pode ser descrito por um processo enumerável envolvendo desigualdades estritas.

[1] Pintar um quadro, além de escolher um bom assunto, de ter imaginação e talento, requer também reunir suas ferramentas, saber como diluir e combinar tinta, como preparar a tela e etc. Por enquanto, vamos preparar as tintas.

Similarmente, o oposto também vale. Como, evidentemente,

$$y > x \iff \exists \epsilon > 0,\ y \geq x + \epsilon \iff \exists m \geq 1,\ y \geq x + \frac{1}{m}\,,$$

segue que

(1b) $$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m \geq 1} \left\{ f \geq \lambda + \frac{1}{m} \right\}.$$

Os eventos complementares $\{f < \lambda\}$ e $\{f \leq \lambda\}$ podem ser caracterizados do mesmo modo (ou, diretamente via as leis de De Morgan).

■ Considere $\left\{ f_n \colon \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty] \right\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções, e sejam $\inf_{n \geq 1} f_n$ e $\sup_{n \geq 1} f_n$ as funções ínfimo e supremo pontuais, respectivamente. Como para qualquer $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\inf_{n \geq 1} f_n(x) \geq \lambda \iff \forall n \geq 1, f_n(x) \geq \lambda$$

e

$$\sup_{n \geq 1} f_n(x) \leq \lambda \iff \forall n \geq 1, f_n(x) \leq \lambda$$

tem-se

(2a) $$\left\{ \inf_{n \geq 1} f_n \geq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \geq \lambda\} \quad \text{e}$$

(2b) $$\left\{ \sup_{n \geq 1} f_n \leq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f_n \leq \lambda\}.$$

Portanto, usando (1a) e as leis de De Morgan, temos

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n \geq \lambda \right\} &= \bigcap_{m \geq 1} \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n > \lambda - \frac{1}{m} \right\} = \bigcap_{m \geq 1} \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n \leq \lambda - \frac{1}{m} \right\}^{\complement} \\ &= \bigcap_{m \geq 1} \left(\bigcap_{n \geq 1} \left\{ f_n \leq \lambda - \frac{1}{m} \right\} \right)^{\complement} = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \left\{ f_n > \lambda - \frac{1}{m} \right\}, \end{aligned}$$

e outras relações similares.

Suponha que a sequência $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge pontualmente. Então, como

$$\lim_{n \geq \infty} f_n = \limsup_{n \geq 1} f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k,$$

temos

(3) $$\begin{aligned} \left\{ \lim_{n \to \infty} f_n \geq \lambda \right\} &= \left\{ \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k \geq \lambda \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ \sup_{k \geq n} f_k \geq \lambda \right\} \\ &= \bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq n} \left\{ f_k > \lambda - \frac{1}{m} \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 1. Considere uma função $f \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ e seja $\lambda \geq 0$,

A equivalência entre itens (4) e (5) segue das identidades (1a),(1b):

$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m \geq 1} \left\{ f \geq \lambda + \frac{1}{m} \right\} \quad \text{e} \quad \{f \geq \lambda\} = \bigcap_{m \geq 1} \left\{ f > \lambda - \frac{1}{m} \right\},$$

já que toda união e interseção enumerável de conjuntos mensuráveis é mensurável.

Ademais, um conjunto E é mensurável se e somente se seu complemento $E^{\complement}$ é mensurável. Como

$$\{f < \lambda\} = \{f \geq \lambda\}^{\complement} \quad \text{e} \quad \{f \leq \lambda\} = \{f > \lambda\}^{\complement},$$

temos que (6) $\iff$ (5) e (7) $\iff$ (4).

Seja $I \subset [0, \infty)$ um intervalo qualquer, por exemplo, $I = [a, b)$. Então,

$$\{f \in I\} = \{f \in [a, b)\} = \{f \geq a\} \cap \{f < b\},$$

portanto, (5) e (6) (que já são equivalentes), implicam (8). Obviamente, (8) implica (4).

Todo conjunto aberto $U \subset [0, \infty)$ é uma união enumerável de intervalos. Portanto, (8) implica (9), que claramente implica (4).

Um conjunto $F \subset [0, \infty)$ é fechado se e somente se seu complemento $F^{\complement}$ é aberto. Além disso,

$$\{f \in F\}^{\complement} = \{f \in F^{\complement}\},$$

portanto, (9) e (10) são equivalentes.

Provamos, assim, que as afirmações de (4) até (10), a respeito da pré-imagem pela função f de vários tipos de conjuntos "relevantes"são, todas, equivalentes.

Evidentemente, (3) $\implies$ (1) $\implies$ (2). Portanto, para fechar o ciclo de equivalências, basta provar que (2) $\implies$ (5) e que (8) $\implies$ (3).

$\boxed{(2) \implies (5)}$ Considere uma função $f \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ e suponha que exista uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que $s_n(x) \to f(x)$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ converge em *todo* ponto $x \in \mathbb{R}^d$ (mas não necessariamente para $f(x)$). De fato, em todo ponto onde essa sequência não converge (isto é, para um conjunto *negligenciável* de pontos) podemos trocar o valor de cada função $s_n(x)$ por 0; assim, a nova sequência converge em todo ponto, e ainda converge para f em quase todo ponto. Portanto, dado $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\{f \geq \lambda\} &= \{f \geq \lambda \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} s_n \neq f\} \cup \{f \geq \lambda \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} s_n = f\} \\ &= \{f \geq \lambda \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} s_n \neq f\} \cup \left\{\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lambda\right\}.\end{aligned}$$

O primeiro conjunto na união acima é mensurável pois é negligenciável. Pela fórmula 3, o segundo conjunto pode ser descrito como

$$\left\{\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lambda\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \left\{s_k > \lambda - \frac{1}{m}\right\},$$

ou seja, como o resultado de uma aplicação enumerável de uniões ou interseções de conjuntos do tipo $\{s_k > t\}$ para alguns $k \geq 1$ e $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, para concluir que $\{f \geq \lambda\}$ seja mensurável, basta provar o mesmo tipo de propriedade para funções simples. Sejam s uma função simples sem sinal e $t \in [0, \infty)$. Provaremos que o conjunto $\{s > t\}$ é mensurável.

Escrevemos $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$, onde os conjuntos E_i são mensuráveis e disjuntos, enquanto os coeficientes $c_i > 0$ podem ser considerados distintos (agrupando termos com coeficientes iguais).

Sem perda de generalidade, supomos que

$$c_0 := 0 < c_1 < c_2 < \ldots c_k \leq \infty.$$

Então, existe um índice i, com $0 \leq i < k$, tal que $t \in [c_i, c_{i+1})$, e daí,

$$\{x \colon s(x) > \lambda\} = \{x \colon s(x) > c_i\} = \{x \colon s(x) \in \{c_{i+1}, \ldots, c_k\}\} = E_{i+1} \cup \ldots \cup E_k,$$

que é um conjunto mensurável, assim finalizando a prova dessa implicação.

$\boxed{(8) \implies (3)}$ Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ e suponha que $\{f \in I\}$ seja mensurável para todo intervalo $I \subset [0,\infty)$. Vamos construir uma sequência não decrescente de funções simples sem sinais $\{s_n\}_{n\geq 1}$ tal que $s_n \to f$ em todo ponto, e cada s_n é limitada e possui suporte limitado.

Gíria: Dizemos que uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to [-\infty,\infty]$ "mora numa caixa"se for limitada e possuir suporte limitado, ou seja, se existirem $A, B < \infty$ tais que $|f(x)| \leq A$ para todo $|x| \leq B$ e $f(x) = 0$ para todo $|x| > B$.

Fixe $n \geq 1$ e considere a caixa $B_n := [-n,n]^d \times [0,n] \subset \mathbb{R}^d \times [0,\infty]$. Para "localizar" f dentro da caixa B_n, fazemos um truncamento vertical e um truncamento horizontal de f. Mais precisamente, definimos $s_n(x)$ como 0 se $|x| > n$ e como n se $f(x) \geq n$. Resta definir $s_n(x)$ para pontos x com $f(x) < n$.

A ideia nova e profunda para construir uma função simples s_n aproximando f razoavelmente é considerar uma *partição do contradomínio* $[0,\infty]$ da função f.[2]

Então, particionamos o intervalo $[0,n)$ (o resto do contradomínio já foi abordado) em intervalos diádicos de comprimento $\frac{1}{2^n}$ e definimos $s_n(x)$ como o ponto extremo menor de cada tal intervalo, quando $f(x)$ pertence a esse intervalo. Mais formalmente, seja

$$\begin{aligned} s_n(x) &:= \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > n \\ n & \text{se } f(x) \geq n \\ \frac{j}{2^n} & \text{se } f(x) \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right),\ j = 0, \ldots, n\,2^n - 1\,. \end{cases} \\ &= \left(n\,\mathbf{1}_{\{f\geq n\}} + \sum_{j=1}^{n2^n-1} \frac{j}{2^n}\,\mathbf{1}_{\left\{f\in\left[\frac{j}{2^n},\frac{j+1}{2^n}\right)\right\}} \right) \mathbf{1}_{\{x\colon |x|\leq n\}}\,. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\{f \in I\}$ é mensurável para todo intervalo $I \subset [0,\infty)$, a função s_n definida acima é simples. Evidentemente, por construção, $0 \leq s_n \leq f$ e s_n mora na caixa B_n. Usando a propriedade de encaixamento dos intervalos diádicos, não é difícil verificar que $s_n \leq s_{n+1}$ em todo ponto, e para todo n.

Resta provar que $s_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Fixe tal ponto x.

Se $f(x) = \infty$, então, para todo $n \geq 1$, $s_n(x) = n \to \infty = f(x)$.

Se $f(x) < \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < N$ e $|x| \leq N$. Então, para todo $n \geq N$, temos que $s_n(x) = \frac{j}{2^n}$ e $f(x) \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$, para algum $j \in \{0, \ldots, n\,2^n - 1\}$. Portanto,

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0\,,$$

mostrando que $s_n(x) \to f(x)$. $\square$

Em seguida, mostramos que o conjunto de funções mensuráveis à Lebesgue (sem sinais) é fechado sob várias operações.

Proposição 4. *Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis à Lebesgue. Então, $\inf_{n\geq 1} f_n$ e $\sup_{n\geq 1} f_n$ são mensuráveis.*

Ademais, se $f_n \to f$ em quase todo ponto, então f é mensurável também.

Demonstração. Seja $\lambda \geq 0$. Como, para todo $n \geq 1$, f_n é mensurável, pelo teorema anterior, os conjuntos $\{f_n \geq \lambda\}$ e $\{f_n \leq \lambda\}$ são mensuráveis. Usando (2a) e (2b), temos que

$$\left\{\inf_{n\geq 1} f_n \geq \lambda\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \{f_n \geq \lambda\} \quad \text{e} \quad \left\{\sup_{n\geq 1} f_n \leq \lambda\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \{f_n \leq \lambda\}\,,$$

o que prova a mensurabilidade das funções ínfimo e supremo.

[2] Ao contrário da integral de Darboux, onde consideramos partições do *domínio* da função e, em seguida, as funções escada correspondentes.

A segunda afirmação, sobre a mensurabilidade do limite de uma sequência de funções mensuráveis segue da mesma forma usando (3):

$$\left\{\lim_{n\to\infty} f_n \geq \lambda\right\} = \bigcap_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{k\geq n}\left\{f_k > \lambda - \frac{1}{m}\right\}.$$

□

Proposição 5. *Sejam f e g duas funções mensuráveis sem sinais. Então, $f+g$ e $f\,g$ também são mensuráveis.*

Demonstração. Como f g são mensuráveis, por definição, elas são limites pontuas de funções simples $\{s_n\}_{n\geq 1}$ e, respectivamente $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$. Como $s_n + \sigma_n$ e $s_n\,\sigma_n$ são funções simples e

$$s_n + \sigma_n \to f+g, \quad s_n\,\sigma_n \to f\,g\,,$$

concluímos que $f+g$ e $f\,g$ são mensuráveis. □

4. A integral de Lebesgue de funções mensuráveis sem sinal

Como vimos, toda função mensurável sem sinal pode ser aproximada por baixo por funções simples, para as quais já definimos o conceito de integração à Lebesgue. Podemos então definir a integral de Lebesgue de uma função mensurável sem sinal por meio dessa aproximação.

Definição 5. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ uma função mensurável. Definimos sua integral à Lebesgue por

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mathrm{m} := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} s\,d\mathrm{m}\colon\, s \leq f \text{q.t.p.},\ s \text{ é simples e sem sinal}\right\}.$$

Observação 3. Obviamente, dada uma função mensurável sem sinal f, tem-se

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mathrm{m} \leq \infty\,.$$

Além disso, integração à Lebesgue é uma operação monótona:

$$\text{se } f \leq g \text{q.t.p.}, \quad \text{então} \quad \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mathrm{m} \leq \int_{\mathbb{R}^d} g\,d\mathrm{m}\,,$$

já que, se s for uma função simples sem sinal tal que $s \leq f$ q.t.p., então também $s \leq g$ q.t.p..

Observação 4. Na definição da integral de Lebesgue de uma função mensurável sem sinal f, podemos nos restringir a tipos mais específicos de funções simples, a saber, aquelas que *moram numa caixa*, e que aproximam f por baixo em *todo* ponto:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mathrm{m} = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} s\,d\mathrm{m}\colon\, s \leq f,\ s \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa}\right\}. \tag{4}$$

Obviamente, $\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mathrm{m}$ é maior do que ou igual ao lado direito da igualdade abaixo. Vamos provar a desigualdade oposta, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mathrm{m} \leq \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} s\,d\mathrm{m}\colon\, s \leq f,\ s \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa}\right\}.$$

Fixe uma função simples sem final s tal que $s \leq f$q.t.p. e seja

$$\mathcal{Z} := \{x\colon\, s(x) > f(x)\},$$

então $\mathrm{m}(\mathcal{Z}) = 0$.

Escreva $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$, onde $\{E_i\}_{i\in[k]}$ são conjuntos mensuráveis disjuntos.

Para todo $i \in [k]$ e $n \geq 1$ definimos os truncamentos

$$c_{i,n} := \min\{c_i, n\} \quad \text{e} \quad E_{i,n} := E_i \cap [-n,n]^d \setminus \mathcal{Z},$$

e a função simples

$$s_n := \sum_{i=1}^{k} c_{i,n} \mathbf{1}_{E_{i,n}}\,.$$

Claramente, $s_n \geq 0$, $s_n \leq f$ em todo ponto e s_n mora na caixa $[-n,n]^d \times [0,n]$.

Além disso, para cada $i \in [k]$ tem-se

$$c_{i,n} \to c_i \quad \text{e} \quad E_{i,n} \nearrow E_i \setminus \mathcal{Z} \quad \text{quando } n \to \infty\,.$$

Pelo teorema de convergência monótona para conjuntos,

$$\mathrm{m}(E_{i,n}) \to \mathrm{m}(E_i \setminus \mathcal{Z}) = \mathrm{m}(E_i)\,.$$

Portanto, quando $n \to \infty$, temos que

$$\int s_n = \sum_{i=1}^{k} c_{i,n}\, \mathrm{m}(E_{i,n}) \to \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathrm{m}(E_i) = \int s\,.$$

Para finalizar o argumento, consideramos separadamente os casos $\int f < \infty$ ou $\int f = \infty$.

Se $\int f < \infty$, dado $\epsilon > 0$, existe s simples, sem sinal, tal que $s \leq f$q.t.p. e

$$\int f \leq \int s + \epsilon\,.$$

Considerando a sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ correspondente a s definida acima, como temos

$$\int s_n \to \int s \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int s \leq \int s_N + \epsilon\,.$$

Concluímos que

$$\begin{aligned}\int f &\leq \int s_N + 2\epsilon \\ &\leq \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \sigma\, d\mathrm{m} \colon \sigma \leq f,\ \sigma \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa}\right\} + 2\epsilon\,.\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon \to 0$, provamos a afirmação nesse caso.

Se $\int f = \infty$, então, para todo $M < \infty$, existe s simples, sem sinal, $s \leq f$q.t.p. tal que

$$\int s > M.$$

De novo, considerando a sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ correspondente a s definida acima, $\int s_n \to \int s$ quando $n \to \infty$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int s_N > M\,.$$

Portanto,

$$\sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \sigma\, d\mathrm{m} \colon \sigma \leq f,\ \sigma \text{ é simples, sem sinal e mora numa caixa}\right\} \geq \int s_N > M \to \infty,$$

terminando a prova.

O próximo teorema, o primeiro resultado sobre a troca do limite com a integral de Lebesgue, é um dos mais importantes na teoria da medida, e exemplifica a vantagem da integração de Lebesgue sobre a de Riemann-Darboux. A sua demonstração também ilustra um raciocínio comum na teoria de probabilidades bem como na teoria da medida, a saber, *um argumento de tempos de parada.*

Teorema 2. *(de convergência monótona) Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis à Lebesgue. Então, $f := \lim_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} f_n$ é mensurável e*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,.$$

Demonstração. Pela Proposição 1 da aula 13, a função limite f é, de fato, mensurável à Lebesgue. Além disso, pela monotonicidade da integral, já que, para todo $n \geq 1$, $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, segue que

$$\int f_n \leq \int f_{n+1} \leq \int f,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \sup_{n\geq 1} \int f_n \leq \int f \,.$$

Para provar a desigualdade oposta,

$$\int f \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n \,,$$

usando (4), basta considerar uma função simples sem sinal $s \leq f$, que mora numa caixa, e mostrar que

$$\int s \leq \sup_{n\geq 1} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,.$$

Podemos representar

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathbf{1}_{E_i} \,,$$

onde, para todo $i \in [k]$, $c_i \in (0, \infty)$ (os coeficientes c_i são finitos, pois s mora numa caixa, então é limitada) e os conjuntos E_i são mensuráveis e disjuntos.

Fixe $\epsilon > 0$. Dados $i \in [k]$ e $x \in E_i$ então $s(x) = c_i$ e

$$\sup_{n\geq 1} f_n(x) = f(x) \geq s(x) = c_i > (1-\epsilon) c_i \,.$$

Portanto, existe um *tempo limiar* $n_x \in \mathbb{N}$, tal que

$$f_n(x) > (1-\epsilon) c_i \quad \text{para todo} \quad n \geq n_x \,.$$

O problema é a falta da *uniformidade*: a taxa de convergência da sequência $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ para $f(x)$ depende de x, e a priori poderia variar muito, dependendo de x. Por isso, o limiar correspondente n_x também poderia variar muito. A ideia é usar um argumento de tempos de parada, onde impomos alguma uniformidade. Mais precisamente, dado um tempo $n \in \mathbb{N}$, seja

$$E_{i,n} := \{x \in E_i \colon f_n(x) > (1-\epsilon) c_i\}$$

o conjunto de elementos de E_i tendo o comportamento desejado no mesmo tempo dado n.

Como, para todo $x \in E_i$ temos $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, segue que $E_{i,n} \subset E_{i,n+1}$. Além disso, já que, eventualmente, todo ponto $x \in E_i$ possui um tempo limiar n_x após o qual o comportamento desejado $f_n(x) > (1-\epsilon) c_i$ acontece, concluímos que

$$\bigcup_{n\geq 1} E_{i,n} = E_i, \quad \text{logo} \quad E_{i,n} \nearrow E_i \quad \text{quando} \quad n \to \infty \,.$$

Portanto, pelo teorema de convergência monótona *para conjuntos* (que já foi estabelecido),

$$\mathrm{m}(E_{i,n}) \to \mathrm{m}(E_i) \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,. \tag{5}$$

Claramente, dado um tempo $n \geq 1$, como $f_n \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e $i \in [k]$ tem-se

$$f_n(x) \geq (1-\epsilon) c_i\, \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x).$$

Como os conjuntos $E_{i,n} \subset E_i$, onde $i \in [k]$, são disjuntos, somando sobre $i \in [k]$ obtemos

$$f_n(x) \geq \sum_{i=1}^{k} (1-\epsilon) c_i\, \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x) = (1-\epsilon) \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x)\,.$$

Integrando em x temos

$$\begin{aligned}\int_{R^d} f_n(x)\, d\mathrm{m}(x) &\geq (1-\epsilon) \int_{R^d} \left(\sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathbf{1}_{E_{i,n}}(x) \right) d\mathrm{m}(x) \\ &= (1-\epsilon) \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathrm{m}(E_{i,n})\,.\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ e usando (5), concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mathrm{m} \geq (1-\epsilon) \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mathrm{m}(E_i) = (1-\epsilon) \int s\, d\mathrm{m}\,.$$

Finalmente, passando $\epsilon \to 0$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mathrm{m} \geq \int s\, d\mathrm{m}\,,$$

finalizando a prova. □

Observação 5. No teorema anterior, a hipótese que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência não decrescente (em todo ponto) pode ser enfraquecida para *quase* todo ponto, já que, trocando o valor de cada função para zero nos pontos onde a sequência não possui esse comportamento (então, em um conjunto negligenciável), não muda o valor da integral, então não afeta a conclusão.

Observação 6. Seja $\{E_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de conjuntos mensuráveis e suponha que

$$E_n \nearrow E \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Claramente as funções indicadoras correspondentes $\{\mathbf{1}_{E_n}\}_{n\geq 1}$ formam uma sequência não decrescente de funções mensuráveis, e $\mathbf{1}_{E_n} \to \mathbf{1}_E$ quando $n \to \infty$.

Teorema 2 então implica

$$\mathrm{m}(E_n) = \int \mathbf{1}_{E_n} \to \int \mathbf{1}_E = \mathrm{m}(E)\,.$$

Portanto, o teorema de convergência monótona para funções (Teorema 2) é uma extensão do teorema de convergência monótona para conjuntos (Teorema 1 da aula 9). Contudo, como vimos, o resultado mais fraco (para conjuntos) foi usado, de uma maneira essencial na prova do resultado mais forte (sobre funções).

O corolário a seguir nos permitirá no futuro, ao estabelecer certas propriedades (que são fechadas sob limites) de funções mensuráveis, reduzir à situação mais conveniente de uma função limitada ou de uma função com suporte limitado ou mesmo de uma função localizada em uma caixa.

Corolário 3. *Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ uma função mensurável.*

(1) *(Truncamento vertical) Para todo $n \geq 1$, considere o truncamento vertical da função f até o nível n, ou seja:*

$$f_n := \min\{f, n\}\,.$$

Então, f_n é mensurável, limitada (por n) e $f_n \nearrow f$ quando $n \to \infty$, logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \to \int f\,.$$

(2) *(Truncamento horizontal) Para todo $n \geq 1$, considere o truncamento horizontal da função f no domínio $\{|x| \leq n\}$, ou seja:*

$$f_n := f\,\mathbf{1}_{\{|x|\leq n\}}\,.$$

Então, f_n é mensurável, possui suporte limitado (contido na caixa $[-n, n]^d$) e $f_n \nearrow f$ quando $n \to \infty$, logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \to \int f\,.$$

(3) *(Localização numa caixa) Sejam $x_n \nearrow \infty$ e $y_n \nearrow \infty$ duas sequências de números (por exemplo, $x_n = y_n = n$ para todo $n \geq 1$). Considere a localização da função f dentro da caixa $B_n := [-x_n, x_n]^d \times [0, y_n]$, ou seja:*

$$f_n := \min\{f, y_n\}\,\mathbf{1}_{\{|x|\leq x_n\}}\,.$$

Então, f_n é mensurável, f_n mora na caixa B_n e $f_n \nearrow f$ quando $n \to \infty$, logo, pelo teorema de convergência monótona,

$$\int f_n \to \int f\,.$$

5. As propriedades da integral de Lebesgue de funções mensuráveis sem sinal

Apresentaremos uma coleção das propriedades mais comuns da integral de Lebesgue de funções mensuráveis sem sinais.

Teorema 4. *(propriedades básicas da integral de Lebesgue sem sinal) Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ funções mensuráveis.*

(1) *(monotonicidade) Se $f \leq g$ em q.t.p. então $\displaystyle\int f \leq \int g$.*

(2) *(equivalência) Se $f = g$ em q.t.p. então $\displaystyle\int f = \int g$.*

(3) *(linearidade) $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$ e, para todo $c \in [0, \infty]$, $\displaystyle\int c\,f = c \int f$.*

(4) *(divisibilidade) Seja E um conjunto mensurável. Então, $f\,\mathbf{1}_E$ e $f\,\mathbf{1}_{E^\complement}$ são mensuráveis e*

$$\int f = \int f\,\mathbf{1}_E + \int f\,\mathbf{1}_{E^\complement}\,.$$

Notação. Denotando, para um conjunto mensurável E,

$$\int_E f := \int_{R^d} f\,\mathbf{1}_E\,,$$

a divisibilidade da integral de Lebesgue torna-se

$$\int_{R^d} f = \int_E f + \int_{E^\complement} f\,.$$

Além disso, uma função $f\colon E \to [0,\infty]$ é dita mensurável se $\tilde{f}$, a sua extensão por zero em $E^{\complement}$, for mensurável. Neste caso, definimos $\int_E f := \int_{R^d} \tilde{f}$.

Demonstração do Teorema 4. A monotonicidade da integral já foi estabelecida (segue imediatamente da definição). A equivalência é uma consequência da monotonicidade, já que $f = g$ em q.t.p. se e somente se $f \le g$ em q.t.p. e $g \le g$ em q.t.p.

Quanto a linearidade, pelo Teorema 1 (3) da aula 12, existem sequências *não decrescentes* de funções simples sem sinais $\{s_n\}_{n\ge 1}$ e $\{\sigma_n\}_{n\ge 1}$ tais que $s_n \to f$ e $\sigma_n \to g$ em todo ponto.

Então, claramente, $s_n + \sigma_n \nearrow f + g$ em todo ponto. Aplicando o teorema de convergência monótona para cada uma das sequências $\{s_n\}_{n\ge 1}$, $\{\sigma_n\}_{n\ge 1}$ e $\{s_n + \sigma_n\}_{n\ge 1}$, temos que

$$\int s_n \to \int f, \quad \int \sigma_n \to \int g, \quad \int (s_n + \sigma_n) \to \int (f+g)\,. \tag{6}$$

Mas a integral de Lebesgue já foi demonstrado ser linear para funções simples, logo

$$\int (s_n + \sigma_n) = \int s_n + \int \sigma_n\,.$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ e usando (6), concluímos que

$$\int (f+g) = \int f + \int g\,.$$

Ademais, se $c \in [0,\infty]$ e $s_n \nearrow f$, então $c\, s_n \nearrow cf$. Pelo teorema de convergência monótona e a linearidade da integral de funções simples, temos

$$\int c\, f = \lim_{n\to\infty} \int c\, s_n = c \lim_{n\to\infty} \int s_n = c \int f\,.$$

Finalmente, produto de funções mensuráveis é mensurável, logo $f\,\mathbf{1}_E$ e $f\,\mathbf{1}_{E^{\complement}}$ são mensuráveis. Além disso,

$$f = f\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} = f\,\mathbf{1}_E + f\,\mathbf{1}_{E^{\complement}},$$

portanto, a divisibilidade é uma consequência da linearidade. $\square$

O próximo resultado fornece uma estimativa por cima para a medida do conjunto $\{f \ge \lambda\}$, onde f é uma função mensurável sem sinal e $\lambda > 0$.

Teorema 5. *(a desigualdade de Markov) Sejam $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ uma função mensurável e $\lambda > 0$. Então,*

$$\mathrm{m}\{f \ge \lambda\} \le \frac{\int f}{\lambda}\,.$$

Demonstração. Seja $E := \{f \ge \lambda\}$. Como f é mensurável, o conjunto E é mensurável. Usando a divisibilidade da integral de Lebesgue, temos que

$$\begin{aligned} \int f &= \int_E f + \int_{E^{\complement}} f \ge \int_E f \qquad \left(\text{já que } \int_{E^{\complement}} f = \int f\,\mathbf{1}_{E^{\complement}} \ge 0\right) \\ &= \int f\,\mathbf{1}_E \ge \int \lambda\,\mathbf{1}_E \qquad (\text{já que } f \ge \lambda\,\mathbf{1}_E,\ \text{pois } f(x) \ge \lambda \text{ quando } x \in E) \\ &= \lambda\,\mathrm{m}(E)\,. \end{aligned}$$

$\square$

Mesmo que a estimativa acima pareça grosseira, ela representa uma das mais importantes ferramentas usadas na teoria das probabilidades, na teoria da medida, na análise e etc. Nas mãos do matemático certo (por exemplo, Sergei Bernstein), ela pode ser bastante refinada de apenas uma faca velha para um bisturi afiado.

Apresentamos dois corolários simples da desigualdade de Markov.

Corolário 6. *Seja* $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ *uma função mensurável à Lebesgue. Então,* $\displaystyle\int f = 0$ *se e somente se* $f = 0$ *em q.t.p.*

Demonstração. Claramente, $f = 0$ em q.t.p. se e somente se $\mathrm{m}(\mathrm{supp}(f)) = 0$. Mas

$$\mathrm{supp}(f) = \{x\colon f(x) \neq 0\} = \{f > 0\} = \bigcup_{n\geq 1} \left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\} .$$

Portando, supondo que $\displaystyle\int f = 0$, pela desigualdade de Markov, para todo $\lambda > 0$, temos

$$\mathrm{m}\{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int f}{\lambda} = 0 \,,$$

logo,

$$\mathrm{m}(\mathrm{supp}(f)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m} \left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\} = 0 \,.$$

$\square$

Corolário 7. *Seja* $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ *uma função mensurável. Se* $\displaystyle\int f < \infty$*, então* $f < \infty$ *em q.t.p. A recíproca não é verdadeira.*

Demonstração. Claramente, $f(x) = \infty$ se e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $f(x) \geq n$. Além disso, $\{f \geq n\} \supset \{f \geq n+1\}$. Portanto,

$$\{f \geq n\} \searrow \{f = \infty\} \,.$$

Como, pela desigualdade de Markov,

$$\mathrm{m}\{f \geq 1\} \leq \int f < \infty \,,$$

o teorema de convergência monótona de baixo para conjuntos é aplicável e implica o seguinte:

$$\mathrm{m}\{f = \infty\} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}\{f \geq n\} \,.$$

De novo, pela desigualdade de Markov, para todo $n \geq 1$, temos

$$\mathrm{m}\{f \geq n\} \leq \frac{\int f}{n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty \,,$$

já que $\displaystyle\int f < \infty$. Portanto, $\mathrm{m}\{f = \infty\} = 0$, mostrando que $f < \infty$ em q.t.p.

A função constante $f = 1 < \infty$ em todo ponto, mas $\displaystyle\int f = \infty$, logo a recíproca é falsa. $\square$

Em seguida, consideramos a interpretação geométrica da integral de Lebsgue sem sinal, que é o análogo natural da de Riemann-Darboux.

Teorema 8. *(interpretação geométrica da integral sem sinal) Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ uma função mensurável à Lebesgue. Então, a região sob o gráfico de f,*

$$A_f := \big\{(x,t)\colon x\in\mathbb{R}^d \;\text{ e }\; 0\le t< f(x)\big\}\subset\mathbb{R}^{d+1}\,,$$

é mensurável à Lebesgue (em $\mathbb{R}^{d+1}$) e a sua medida no espaço ambiente é

$$\mathrm{m}(A_f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{dm}(x)\,.$$

Precisaremos saber algo sobre o produto cartesiano de conjuntos mensuráveis.

Exercício 1. Sejam $E_1\subset\mathbb{R}^{d_1}$ e $E_2\subset\mathbb{R}^{d_2}$ dois conjuntos mensuráveis em seus respectivos espaços euclidianos ambientes. Então, $E_1\times E_2$ é mensurável em $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ e

$$\mathrm{m}(E_1\times E_2)=\mathrm{m}(E_1)\,\mathrm{m}(E_2).$$

Demonstração do Teorema 8. Primeiro provamos a afirmação para uma função simples sem sinal. Seja $s=\sum_{i=1}^k c_i\,\mathbf{1}_{E_i}$ tal função, onde os conjuntos mensuráveis $E_i\subset\mathbb{R}^d$, $i\in[k]$ são disjuntos. Claramente, a região sobe o gráfico de s é

$$A_s := \bigcup_{i\in[k]} E_i\times[0,c_i)\,.$$

A união acima consiste em conjuntos disjuntos e (pelo exercício anterior) mensuráveis em $\mathbb{R}^{d+1}$, logo, A_s é mensurável e

$$\mathrm{m}(A_s)=\sum_{i=1}^k \mathrm{m}\left(E_i\times[0,c_i)\right)=\sum_{i=1}^k \mathrm{m}\left(E_i\right)\,\mathrm{m}\left([0,c_i)\right)=\sum_{i=1}^k c_i\,\mathrm{m}\left(E_i\right)=\int s\,,$$

provando a afirmação para a função s.

O caso geral, de uma função mensurável sem sinal f segue usando aproximação por funções simples. Seja $\{s_n\}_{n\ge1}$ uma sequência de funções simples sem sinal tal que $s_n\nearrow f$ quando $n\to\infty$. Não é difícil ver que as regiões sob os gráficos correspondentes satisfazem a mesma propriedade de monotonicidade para cima, ou seja,

$$A_{s_n}\nearrow A_f \quad\text{quando}\;\; n\to\infty\,.$$

De fato, dados $x\in\mathbb{R}^d$ e $n\in\mathbb{N}$, se $t<s_n(x)$ então $t<s_{n+1}(x)$, logo $A_{s_n}\subset A_{s_{n+1}}$. Além disso, se $(x,t)\in A_f$, então $0\le t<f(x)=\sup_{n\ge1}s_n(x)$, portanto, existe $N\in\mathbb{N}$ para qual $t<s_N(x)$, mostrando que $(x,t)\in A_{s_N}$.

Concluímos o seguinte: A_f é mensurável (já que os conjuntos A_{s_n} são mensuráveis, pois s_n são funções simples) e

$$\mathrm{m}(A_{s_n})\to\mathrm{m}(A_f)\quad\text{(pelo teorema de convergência monótona para conjuntos)}$$

$$\int s_n\to\int f\quad\text{(pelo teorema de convergência monótona para funções)}$$

$$\mathrm{m}(A_{s_n})=\int s_n\quad\text{(já que s_n são funções simples),}$$

portanto $\mathrm{m}(A_f)=\displaystyle\int f$. ☐

Vale notar que o gráfico de uma função mensurável, como conjunto de co-dimensão 1 no espaço ambiente, é negligenciável.

Exercício 2. Seja $f\colon\mathbb{R}^d\to[0,\infty]$ uma função mensurável à Lebesgue. Então, o seu gráfico,

$$G_f := \{(x,y)\colon x\in\mathbb{R}^d \;\text{ e }\; y=f(x)\}\subset\mathbb{R}^{d+1}\,,$$

é negligenciável.

O enunciado acima pode ser obtido usando-se adequadamente o teorema anterior, em relação à região sob o gráfico de uma função. Segue que, no final, a desigualdade estrita na definição do conjunto A_f no teorema anterior pode ser trocada por uma desigualdade não estrita.

6. Funções mensuráveis à Lebesgue com sinal

Começamos com a definição do conceito.

Definição 6. Uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é chamada mensurável à Lebesgue se existir uma sequência de funções simples $\{s_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ tal que $s_n \to f$ em q.t.p.

Observação 7. Lembre-se que dado $c \in \mathbb{R}$, denotamos por

$$c^+ \coloneqq \max\{c, 0\} \quad \text{e} \quad c^- \coloneqq \max\{-c, 0\}$$

Então,

$$c^+, c^- \geq 0, \quad c = c^+ - c^-, \quad |c| = c^+ + c^-$$

e

$$c = 0 \Leftrightarrow c^+ = c^- = 0$$

Além disso, dada uma sequência de números $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, temos

$$x_n \to x \quad \text{se e somente se} \quad x_n^+ \to x^+ \quad \text{e} \quad x_n^- \to x^-$$

Ademais, se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções, então

$$f_n \to f \quad \text{em q.t.p. se e somente se} \quad f_n^+ \to f^+ \quad \text{em q.t.p e} \quad f_n^- \to f^- \quad \text{em q.t.p.}$$

O seguinte teorema fornece uma caracterização do conceito de mensurabilidade para funções com sinal, análogo ao Teorema 1 da aula 13.

Teorema 9. *Considere uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f é mensurável à Lebesgue, ou seja, existe uma sequência de funções simples com sinal $\{s_n\}_{n\geq 1}$ tal que $s_n \to f$ em q.t.p.
(2) f^+ e f^- são mensuráveis à Lebesgue.
(3) Para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\{f \in I\}$ é mensurável à Lebesgue.
(4) Para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\{f \in U\}$ é mensurável à Lebesgue.
(5) Para todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\{f \in F\}$ é mensurável à Lebesgue.
(6) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{f > \lambda\}$ é mensurável à Lebesgue.

As outras afirmações do tipo $\{f \geq \lambda\}, \{f < \lambda\}$ ou $\{f \leq \lambda\}$ mensuráveis também são equivalentes às afirmações acima.

Demonstração do Teorema 9. A prova da equivalência entre as afirmações de (3) até (6) é completamente análoga à do Teorema 1 da aula 13.

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\{s_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções simples (com sinais) tal que $s_n \to f$ em q.t.p. Pela observação anterior, $s_n^+ \to f^+$ e $s_n^- \to f^-$ em q.t.p. Como s_n^+, s_n^- são funções simples (sem sinais), segue que f^+ e f^- são mensuráveis

(2) $\Rightarrow$ (1) Existem duas sequências de funções simples sem sinais, $s_n \to f_n^+$ e $\sigma_n \to f^-$. Podemos supor que para todo $n \geq 1$, s_n e σ_n moram em caixas, então são finitas em todo ponto. Portanto, a função $s_n - \sigma_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é simples e

$$s_n - \sigma_n \to f^+ - f^- = f,$$

provando que f é mensurável.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Vamos considerar separadamente os casos $0 \notin I$ e $0 \in I$.

- Se $0 \notin I$, como I é conexo, ou $I \subset (0, \infty)$ ou $I \subset (-\infty, 0)$. Não é difícil ver que se $I \subset (0, \infty)$ então
$$\{f \in I\} = \{f^+ \in I\}$$
que é mensurável, pois f^+ é mensurável. Similarmente, se $I \subset (-\infty, 0)$, que equivale a $-I \subset (0, \infty)$, temos
$$\{f \in I\} = \{f^- \in -I\}$$
que também é mensurável, pois f^- é mensurável e $-I$ é um intervalo.
- Se $0 \in I$, então
$$I = I^+ \cup I^- \cup \{0\}$$
onde
$$I^+ := I \cap (0, \infty) \quad \text{e} \quad I^- := I \cap (-\infty, 0)\,.$$
Portanto,
$$\{f \in I\} = \{f \in I^+\} \cup \{f \in I^-\} \cup \{f = 0\}\,.$$
Pelo caso anterior, $\{f \in I^+\}$ e $\{f \in I^-\}$ são mensuráveis, enquanto
$$\{f = 0\} = \{f^+ = 0\} \cap \{f^- = 0\}$$
que também é mensurável. Portanto, em todos os caso, $\{f \in I\}$ é, de fato, mensurável.

(6) $\Rightarrow$ (2) Seja $\lambda \geq 0$. Temos que
$$\{f^+ > \lambda\} = \{f > \lambda\},$$
pois $f^+(x) = f(x)$ sempre que $f(x) > 0$ e $f^+(x) = 0$ no caso contrário. Como $\{f > \lambda\}$ é mensurável e $\lambda \geq 0$ é arbitrário, segue que f^+ é mensurável. Similarmente, dado $\lambda \geq 0$,
$$\{f^- > \lambda\} = \{f < -\lambda\},$$
que é um conjunto mensurável, logo f^-é uma função mensurável. □

A seguir, apresentamos exemplos básicos de funções mensuráveis.

Teorema 10. *As seguintes valem:*

(1) *Toda função contínua $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é mensurável.*

(2) *Se $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\phi \circ f$ é mensurável.*

(3) *Toda função simples é mensurável.*

(4) *Se $f = g$ em q.t.p e f é mensurável, então g é mensurável.*

(5) *Se $\{f_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência pontualmente limitada de funções mensuráveis, então $\sup_{n \geq 1} f_n$ e $\inf_{n \geq 1} f_n$ são mensuráveis.*

(6) *Se $\{f_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de funções mensuráveis e $f_n \to f$ em q.t.p, então f é mensurável.*

(7) *Se f, g são mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$, então $f + g$, cf, $f\,g$ são mensuráveis.*

(8) *Se f é mensurável, então $|f|$ é mensurável também.*

Demonstração do Teorema 10.

(1) Dado qualquer conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$, como f é contínua,
$$\{f \in U\} = f^{-1}(U)$$
é aberto, logo mensurável, mostrando que a função f é mensurável.

(2) Dado $U \subset \mathbb{R}$ aberto, $\phi^{-1}(U)$ é aberto, pois ϕ é contínua. Mas
$$\{\phi \circ f \in U\} = \{f \in \phi^{-1}(U)\},$$
que é mensurável, pois f é mensurável. Logo, $\phi \circ f$ é mensurável.

(3) Seja $s\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função simples. A sequência constante $s_n = s$ para todo $n \geq 1$ converge para s, logo s é mensurável.

(4) Como f é mensurável, existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples tal que $s_n \to f$ q.t.p. Mas como $g = f$ em q.t.p. segue que $s_n \to g$ q.t.p., provando a mensurabilidade de g.

(5) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,
$$\{\sup_{n\geq 1} f_n \leq \lambda\} = \bigcap_{n\geq 1} \{f_n \leq \lambda\} \quad \text{e} \quad \{\inf_{n\geq 1} f_n \geq \lambda\} = \bigcap_{n\geq 1} \{f_n \geq \lambda\}$$
Como os conjuntos $\{f_n \leq \lambda\}, \{f_n \geq \lambda\}$ são mensuráveis para todo $n \geq 1$, pois f_n são funções mensuráveis, segue que $\sup_{n\geq 1} f_n$ e $\inf_{n\geq 1} f_n$ são funções mensuráveis.

(6) Se $f_n \to f$ em q.t.p, então
$$f_n^+ \to f^+ \quad \text{e} \quad f_n^- \to f^- \quad \text{em q.t.p}$$
Pelo Teorema 9, paro todo $n \geq 1$, as funções sem sinais f_n^+ e f_n^- são mensuráveis, portanto f^+ e f^- também são mensuráveis. Pelo teorema anterior, f é mensurável.

(7) Existem sequências de funções simples $s_n \to f$ e $\sigma_n \to g$. Então, para todo $n \geq 1$,
$$s_n + \sigma_n, \quad cs_n \quad \text{e} \quad s_n \cdot \sigma_n$$
são simples e
$$s_n + \sigma_n \to f + g, \quad cs_n \to cf, \quad s_n \cdot \sigma_n \to f \cdot g$$
provando a mensurabilidade de $f + g$, cf e $f\,g$.

(8) Pelo Teorema 9, as funções f^+ e f^-1 são mensuráveis, então $|f| = f^+ + f^-$ é mensurável também.

□

7. Funções absolutamente integráveis

Definição 7. Uma função $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é chamada absolutamente integrável à Lebesgue se f é mensurável à Lebesgue e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f| \, dm < \infty$. Neste caso, definimos
$$\int_{R^d} f \, dm := \int_{\mathbb{R}^d} f^+ \, dm - \int_{\mathbb{R}^d} f^- \, dm \,.$$

Observação 8. Como $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$, pela monotonicidade da integral sem sinal, tem-se
$$0 \leq \int f^+, \int f^- \leq \int |f| < \infty$$
logo $\displaystyle\int f^+, \int f^- \in \mathbb{R}$, então
$$\int f = \int f^+ - \int f^- \in \mathbb{R}$$
Assim, a integral de Lebesgue de uma função absolutamente integrável é bem definida.

Observação 9. Suponha que $f = f_1 - f_2$ seja uma representação de f como uma diferença de funções mensuráveis sem sinais f_1 e f_2, onde $\int f_1, \int f_2 < \infty$. Então, $\int f = \int f_1 - \int f_2$.

De fato, como $f_1 - f_2 = f = f^+ - f^-$, temos

$$f_1 + f^- = f^+ + f_2,$$

onde f_1, f^-, f^+, f_2 são funções mensuráveis *sem* sinais. Pela aditividade da integral sem sinal, tem-se

$$\int f_1 + \int f^- = \int f^+ + \int f_2\,,$$

logo,

$$\int f_1 - \int f_2 = \int f^+ - \int f^- = \int f\,.$$

A maioria das propriedades da integral sem sinal também vale para funções absolutamente integráveis.

Teorema 11. *Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funções absolutamente integráveis e $c \in \mathbb{R}$*

(1) (linearidade) $f + g$ e cf são absolutamente integráveis e $\int (f + g) = \int f + \int g$, $\int cf = c \int f$.

(2) (monotonicidade) Se $f \le g$ em q.t.p, então $\int f \le \int g$.

(3) (a desigualdade triangular) $\left|\int f\right| \le \int |f|$.

(4) (divisibilidade) Se E é um conjunto mensurável, então $f \cdot \mathbf{1}_E$ e $f \cdot \mathbf{1}_{E^{\complement}}$ são absolutamente integráveis e $\int f = \int f \cdot \mathbf{1}_E + \int f \cdot \mathbf{1}_{E^{\complement}}$.

Demonstração do Teorema 11.

(1) Por um teorema anterior, $f+g$ e cf são mensuráveis. Além disso, como $|f + g| \le |f|+|g|$ e $|f + g|$, $|f|$, $|g|$ são funções mensuráveis sem sinal, pela monotonicidade e linearidade da integral sem sinal temos

$$\begin{aligned}\int |f + g| &\le \int (|f| + |g|) \\ &= \int |f| + \int |g| < \infty\end{aligned}$$

mostrando a integrabilidade absoluta de $f + g$.

Como $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$, temos que

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),\ (f^+ + g^+) \text{ e } (f^- + g^-)$$

são funções mensuráveis sem sinais e, pela observação anterior,

$$\begin{aligned}\int (f + g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) \\ &= \left(\int f^+ + \int g^+\right) - \left(\int f^- + \int g^-\right) \quad \text{(pela linearidade da integral sem sinal)} \\ &= \left(\int f^+ - \int f^-\right) + \left(\int g^+ - \int g^-\right) \\ &= \int f + \int g\,.\end{aligned}$$

A prova da identidade $\displaystyle\int cf = c\int f$ é exercício.

(2) $f \leq g$ em q.t.p implica $g - f \geq 0$ q.t.p. Portanto, $\displaystyle\int (g-f) \geq 0$. Mas $g = f + (g-f)$ e, pela aditividade da integral,

$$\int g = \int f + \int (g-f) \geq \int f\,.$$

(3) Temos que $f \leq |f|$ e $-f \leq |f|$. Pela monotonicidade da integral,

$$\int f \leq \int |f| \qquad \text{e} \qquad \int (-f) \leq \int |f|$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left|\int f\right| &= \max\left\{\int f, -\int f\right\}\\ &= \max\left\{\int f, \int(-f)\right\} \leq \int |f|\,.\end{aligned}$$

(4) Como $\mathbf{1}_E$ e $\mathbf{1}_{E^\complement}$ são funções simples, logo mensuráveis, pelo Teorema 10, $f \cdot \mathbf{1}_E$ e $f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$ são mensuráveis. Além disso, $|f \cdot \mathbf{1}_E| \leq |f|$ então $\displaystyle\int |f \cdot \mathbf{1}_E| \leq \int |f| < \infty$, mostrando que $f \cdot \mathbf{1}_E$ é absolutamente integrável. O mesmo vale para $f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$. Claramente,

$$f = f \cdot \mathbf{1}_E + f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}$$

e usando a linearidade da integral, segue que

$$\int f = \int f \cdot \mathbf{1}_E + \int f \cdot \mathbf{1}_{E^\complement}\,.$$

□

Observação 10. Dados uma função absolutamente integrável $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e um conjunto mensurável E, denotamos por

$$\int_E f \, d\mathrm{m} \coloneqq \int f \cdot \mathbf{1}_E \, d\mathrm{m}\,.$$

A propriedade da divisibilidade se torna

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_E f + \int_{E^\complement} f\,.$$

Ademais, uma função $f \colon E \to \mathbb{R}$ é dita mensurável (respetivamente absolutamente integrável) se a extensão dela por 0, $\tilde{f} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in E \\ 0 & \text{se} \quad x \notin E\,. \end{cases}$$

for mensurável (respetivamente absolutamente integrável). Neste caso, $\displaystyle\int_E f \, d\mathrm{m} \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f} \, d\mathrm{m}\,.$

8. A compatibilidade da integral de Lebesgue com a integral de Riemann-Darboux

O objetivo da construção da integral de Lebesgue foi obter um conceito mais geral e mais flexível. Provamos que, de fato, a integral de Lebesguq é uma extensão da integral de Riemann-Darboux.

Exercício 3. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função contínua em q.t.p.. Então f é mensurável à Lebesgue.

Observação 11. Seja $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função mensurável localizada em uma caixa. Então f é absolutamente integrável.

De fato, se $[-K, K] \times [-M, M]$ é a caixa onde f mora, isto é, se

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\quad \text{para todo } \|x\| > K \text{ e} \\ |f(x)| \le M &\quad \text{para todo } \|x\| \le K, \end{aligned}$$

então

$$|f| \le M\, \mathbf{1}_{[-K,K]^d},$$

logo

$$\int |f|\, d\mathrm{m} \le \int M\, \mathbf{1}_{[-K,K]^d}\, d\mathrm{m} \le M(2K)^d < \infty.$$

Teorema 12. *Seja $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann-Darboux. Então f é absolutamente integrável e*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f\, d\mathrm{m}.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Lebesgue para funções integráveis à Riemann, f é contínua em quase todo ponto. Pelo exercício anterior f é mensurável.

Além disso, f é limitada, o suporte dela, o intervalo $[a, b]$, é limitado, então f mora em uma caixa. Pela observação anterior f é absolutamente integrável.

Para provar a igualdade entre as integrais de Riemann-Darboux e a de Lebesgue, consideramos no início uma função escada

$$s = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{1}_{I_k}.$$

Pela definição da integral de Darboux,

$$\int_a^b s(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} c_k\, |I_k|\,.$$

Uma função escada também é simples, então

$$\int_{[a,b]} s\, d\mathrm{m} = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathrm{m}(I_k) = \sum_{k=1}^{N} c_k\, |I_k|\,.$$

Vamos considerar o caso geral de uma função integrável a Riemann-Darboux qualquer.

Dado $\epsilon > 0$, como f é Darboux integrável, existem duas funções escada $s \le f \le \sigma$ tais que

$$\int_a^b \sigma - \int_a^b s \le \epsilon.$$

Pela definição da integral de Darboux,

$$\int_a^b s \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sigma.$$

Por outro lado, toda função escada também é simples, e pela monotonicidade da integral de Lebesgue,

$$\int_{[a,b]} s \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} \sigma.$$

Como os conceitos de integrabilidade já coincidem para funções escada, concluímos que

$$\int_a^b s \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sigma \quad \text{e}$$
$$\int_a^b s \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_a^b \sigma.$$

Portanto,

$$\left| \int_a^b f - \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon.$$

Como ϵ foi arbitrário, segue que

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f.$$

□

Exercício 4. Se a integral imprópria f em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é convergente, então f é absolutamente integrável e sua integral de Lebesgue coincide com sua integral de Riemann imprópria.

Essa formulação é um pouco vaga, parte do exercício é esclarecê-la.

9. O espaço $L^1(\mathbb{R}^d)$

Seja $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ o conjunto de todas as funções absolutamente integráveis à Lebesgue. Então $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ é um espaço vetorial e a integral de Lebesgue é uma transformação linear neste espaço. O objetivo é definir uma norma em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Note que, dada f em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, se $\int |f| \, d\mathrm{m} = 0$, então $|f| = 0$ em q.t.p., logo $f = 0$ em q.t.p. (mas não necessariamente em todo ponto). Então, $\int |f| \, d\mathrm{m} = 0$ não implica $f = 0$.

A relação

$$f \sim g \quad \text{se} \quad f = g \quad \text{em} \quad \text{q.t.p.}$$

é uma equivalência em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Seja

$$L^1(\mathbb{R}^d) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) / \sim$$

o espaço quociente correspondente.

Sempre identificamos uma classe de equivalência, ou seja, um elemento do espaço $L^1(\mathbb{R}^d)$ com qualquer representante dela. Portanto, dizemos "Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ uma função" em vez de "Seja $[f] \in L^1(\mathbb{R}^d)$, onde f é um representante desta classe de equivalência".

Isso é consistente com a filosofia de Lebesgue que afirma que conjuntos de medida zero não importam nesta teoria.

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definimos

$$\|f\|_1 = \|f\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}^d} |f| \, d\mathrm{m}.$$

A função $\|\cdot\|_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ é uma norma.

- $\|f\|_1 = \int |f| \geq 0$ e se $\int |f| = 0$, então $f = 0$ em q.t.p., ou seja $f \sim 0$ (a função constante 0).
- se $c \in \mathbb{R}$ então
$$\|cf\|_1 = \int |cf| = \int |c|\,|f| = |c| \int |f| = |c|\,\|f\|_1 .$$
- se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ então f e g são absolutamente integráveis, logo $f + g$ também é absolutamente integrável e
$$|f + g| \leq |f| + |g|$$
em todo ponto.

  Pela monotonicidade da integral,
$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| \leq \int \big(|f| + |g| \big) = \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1 ,$$
mostrando a desigualdade triangular.

Concluímos que $L^1(\mathbb{R}^d)$ munido com $\|\cdot\|_1$, chamada "a norma um", é um espaço normado. Provaremos mais tarde que é, na verdade um espaço de Banach.

A seguir re-enunciaremos a desigualdade de Markov no contexto de funções absolutamente integráveis.

Teorema 13 (a desigualdade de Chebyshev)**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ então para todo $\lambda > 0$ temos*
$$\mathrm{m}\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

Demonstração. A função $|f|$ é mensurável e sem sinal, logo, pela desigualdade de Markov,
$$\mathrm{m}\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\int |f|\, d\mathrm{m}}{\lambda} = \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$
□

Para finalizar, vamos provar a invariância por translações da integral de Lebesgue. A prova usa um argumento muito comum na teoria da medida, que chamamos do "mecanismo padrão".

Teorema 14 (invariância por translações)**.** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^d$, seja $f_a \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,*
$$f_a(x) := f(x + a)$$
a translação de f por a. Então f_a é absolutamente integrável e
$$\int f(x + a) d\mathrm{m} = \int f(x) d\mathrm{m}.$$

Demonstração. A prova do teorema consiste em alguns passos.

Passo 1: A função f é a função indicadora de um conjunto mensurável:
$$f = \mathbf{1}_E.$$
Então,
$$f_a(x) = f(x + a) = \mathbf{1}_E(x + a) = \mathbf{1}_{E-a}(x).$$
Pela invariância por translação da medida de Lebesgue, o conjunto $E - a$ é mensurável e
$$\mathrm{m}(E - a) = \mathrm{m}(A),$$
provando a mensurabilidade de f_a e também que
$$\int f_a d\mathrm{m} = \int \mathbf{1}_{E-a} d\mathrm{m} = \mathrm{m}(E - a) = \mathrm{m}(E) = \int \mathbf{1}_E d\mathrm{m} = \int f d\mathrm{m}.$$

Passo 2: A função f é uma função simples, ou seja,

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_1},$$

onde E_i são conjuntos mensuráveis.

Pelo passo anterior e a linearidade da integral, neste caso

$$f_a = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i - a}$$

também é simples e

$$\int f_a d\mathrm{m} = \int f d\mathrm{m}.$$

Passo 3: Suponha que $f \colon \mathbb{R}^d \to [a, b]$ seja uma função mensurável sem sinal. Então existe uma sequência não decrescente $\{s_n\}_{n \geq 1}$ de funções simples sem sinais tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$s_n \to f(x) \text{ quando } n \to \infty.$$

Então,

$$s_n(x + a) \to f(x + a) \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto, f_a é mensurável e, pelo teorema da convergência monótona,

$$\int f(x + a) d\mathrm{m} = \lim_{n \to \infty} \int s_n(x + a) d\mathrm{m} = \lim_{n \to \infty} \int s_n(x) d\mathrm{m} = \int f(x) d\mathrm{m}.$$

Passo 4: Finalmente, dada uma função absolutamente integrável $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, considerando a sua representação

$$f = f^+ - f^-, \text{ onde } f^+, f^- \geq 0,$$

pelo passo anterior segue que f_a^+, f_a^- são mensuráveis, logo f_a é mensurável e

$$\int f_a = \int f_a^+ - \int f_a^- = \int f^+ - \int f^- = \int f\,.$$

□

O *mecanismo padrão* pode ser usado para provar afirmações do tipo

"para toda função mensurável, vale uma certa propriedade".

O argumento consiste em estabelecer essa propriedade passo a passo, para:

(1) Funções indicadoras de conjuntos mensuráveis. Neste caso, a propriedade se torna uma afirmação sobre conjuntos mensuráveis.
(2) Funções simples. Neste caso, usamos a possível linearidade da propriedade a ser estabelecida.
(3) Funções simples sem sinais. Neste caso, usamos a aproximação de funções mensuráveis por funções simples e, possivelmente, alguns teoremas de limite para a integral de Lebesgue.
(4) Funções absolutamente integráveis. Usamos a representação $f = f^+ - f^-$ de tal função e a linearidade da propriedade dada.

10. Os três princípios de Littlewood

Os princípios de Littlewood transmitem a intuição básica da teoria da medida de Lebesgue.

O primeiro: Todo conjunto mensurável é “quase”aberto.

Além disso, todo conjunto mensurável com medida finita está perto de um conjunto elementar (isto é, de uma união finita de caixas).

O segundo: Toda função absolutamente integrável é “quase” contínua.

O terceiro: Toda sequência de funções mensuráveis, convergente em q.t.p. é “quase”uniformemente convergente.

Em outras palavras, o conceito tangível, real (a mensurabilidade de um conjunto, de uma função, ou de convergência pontual de uma sequência de funções mensuráveis) pode ser visto como “quase” o conceito ideal correspondente (de conjunto aberto ou elementar, de função contínua, de convergência uniforme).

Porém, o diabo está nos detalhes.

10.1. O primeiro princípio de Littlewood.

Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ é mensurável à Lebesgue se para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto aberto U tal que

$$U \supset E \quad \text{e} \quad m^*(U \setminus E) < \epsilon.$$

Esta afirmação foi escolhida como nossa definição do conceito de conjunto mensurável. Como já vimos, ela é equivalente a outras definições, por exemplo a de Carathéodory (que será usada em contextos mais abstratos).

Além disso, provamos que se $E \subset \mathbb{R}^d$ for mensurável e $\mathrm{m}(E) < \infty$, então para todo $\epsilon > 0$ existe um conjunto elementar $B = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_k$ tal que $m^*(E \triangle B) < \epsilon$.

As caixas $B_1, \ldots, B_k$ podem ser escolhidas como caixas diádicas (da mesma geração).

10.2. O segundo princípio de Littlewood.

Teorema 15. *(de Lusin) Seja $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente integrável. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $E \subset \mathbb{R}^d$ mensurável tal que*

$$\mathrm{m}(E^\complement) \le \epsilon \quad \text{e} \quad f|_E \quad \text{é contínua.}$$

Observação 12. A informação de que $f|_E$ é contínua *não* significa que f é contínua em E.

De fato, dado $x_0 \in E$, $f|_E$ é contínua no ponto x_0 significa

$$\lim_{x \in E,\, x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

embora f contínua no ponto x_0 significa

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Por exemplo, a função $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é contínua em *nenhum* ponto, mas $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}|_{\mathbb{Q}} \equiv 0$ que é, evidentemente, contínua em todo ponto do seu domínio.

A prova do teorema de Lusin usa um resultado de aproximação em $L^1(\mathbb{R}^d)$, útil em si.

Definição 8. Uma função $s \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é chamada de função *escada* se

$$s = \sum_{j=1}^{k} c_j \, \mathbf{1}_{B_j},$$

onde $c_j \in \mathbb{R}$ e B_j é uma *caixa* para todo $j \in [k]$.

Em particular, toda função escada é simples e mora numa caixa.

Teorema 16. *(aproximação de uma função absolutamente integrável) Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\epsilon > 0$.*

(1) Existe uma função simples s, que mora numa caixa, tal que $\|f - s\|_1 < \epsilon$.
(2) Existe uma função escada σ tal que $\|f - \sigma\|_1 < \epsilon$.
(3) Existe uma função contínua g, com suporte compacto tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$.

Observação 13. Pela Observação 1 da Aula 18, toda função mensurável que mora numa caixa é absolutamente integrável, ou seja, pertence ao espaço $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Denotamos por $C_c(\mathbb{R}^d)$ o espaço vetorial de funções contínuas com suportes compactos. Tais funções são claramente também limitadas (e mensuráveis). Então toda função $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ é mensurável e mora numa caixa, logo $C_c(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$.

Portanto, o teorema de aproximação acima pode ser reformulado do seguinte modo: cada um dos espaços de funções

(1) o espaço de funções simples,
(2) o espaço de funções escada,
(3) o espaço $C_c(\mathbb{R}^d)$ de funções contínuas com suporte compacto

é *denso* em $L^1(\mathbb{R}^d)$ com respeito à sua norma $\|\cdot\|_1$.

Demonstração do Teorema 16. (1) Consideramos primeiro o caso $f \geq 0$. Como

$$\int f \, d\mathrm{m} = \sup \Big\{ \int s \, d\mathrm{m} \colon 0 \leq s \leq f, \quad s \text{ é simples e mora numa caixa} \Big\},$$

e como $\int f d\mathrm{m} = \|f\|_1 < \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe uma função simples s que mora numa caixa tal que

$$0 \leq s \leq f \quad \text{e} \quad \int f \, d\mathrm{m} < \int s \, d\mathrm{m} + \epsilon.$$

Segue que

$$\|f - s\|_1 = \int |f - s| \; dm = \int (f - s) \, dm = \int f \, d\mathrm{m} - \int s \, d\mathrm{m} < \epsilon.$$

Considerando agora uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ qualquer, escrevemos $f = f^+ - f^-$, onde $f^+, f^- \geq 0$ e $\int f^+ \, d\mathrm{m}, \int f^- \, dm < \infty$. Pelo caso anterior, existem duas funções simples que moram em caixas, s_1 e s_2, tais que

$$\left\|f^+ - s_1\right\|_1 < \epsilon \quad \text{e} \quad \left\|f^- - s_2\right\|_1 < \epsilon.$$

Logo, a função $s := s_1 - s_2$ é simples, mora em uma caixa e

$$\begin{aligned} \|f - s\|_1 &= \left\|(f^+ - f^-) - (s_1 - s_2)\right\|_1 = \left\|(f^+ - s_1) - (f^- - s_2)\right\|_1 \\ &\leq \left\|f^+ - s_1\right\|_1 + \left\|f^- - s_2\right\|_1 < 2\epsilon, \end{aligned}$$

mostrando a densidade em $L^1(\mathbb{R}^d)$ do espaço de funções simples e localizadas em caixas.

(2) Pelo item anterior, baixa provar que toda função simples s, que mora em uma caixa, pode ser aproximada em $L^1(\mathbb{R}^d)$ por funções escada. Sejam $\epsilon > 0$ e

$$s = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{1}_{E_j}$$

onde, para todo $j \in [k]$, $c_j \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{m}(E_j) < \infty$ (s tem suporte limitado, então de medida finita). Pelo primeiro princípio de Littlewood, para cada $j \in [k]$, existe um conjunto *elementar* B_j tal que

$$\mathrm{m}(E_j \bigtriangleup B_j) < \frac{\epsilon}{M},$$

onde $M := \sum_{j=1}^{k} |c_k| < \infty$.

Como $\left|\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\right| = \mathbf{1}_{E_j \triangle B_j}$, temos que

$$\left\|\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\right\|_1 = \int \left|\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\right| = \int \mathbf{1}_{E_j \triangle B_j} = \mathrm{m}(E_j \triangle B_j) < \frac{\epsilon}{M}\,.$$

Seja

$$\sigma := \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{1}_{B_j}\,.$$

Então σ é uma função escada (já que B_j, $j \in [k]$ são conjuntos elementares, então podem ser representados como uniões de caixas).

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|f - \sigma\|_1 &= \left\| \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{1}_{E_j} - \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{1}_{B_j} \right\|_1 \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{k} c_j \left(\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\right) \right\|_1 \\
&\le \sum_{j=1}^{k} |c_j| \left\|\mathbf{1}_{E_j} - \mathbf{1}_{B_j}\right\|_1 < M\,\frac{\epsilon}{M} = \epsilon\,.
\end{aligned}$$

(3) Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\epsilon > 0$. Pelo item (2), existe uma função escada

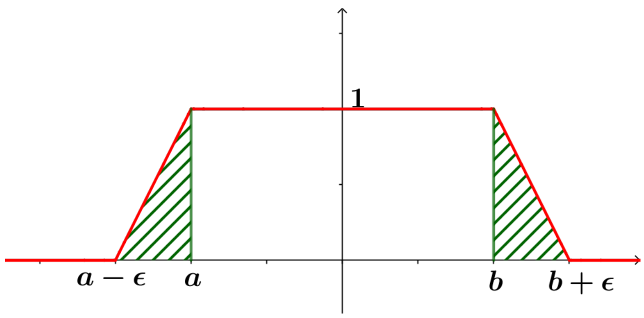
$$\sigma := \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{1}_{B_j} \quad \text{tal que} \quad \|f - \sigma\|_1 < \epsilon\,,$$

onde, para todo $j \in [k]$, $c_j \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0$ e B_j é uma caixa.

Dada uma caixa $B \subset \mathbb{R}^d$ e dado $\epsilon > 0$, existe $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\|\mathbf{1}_B - h\|_1 \le \epsilon\,.$$

Isso é fácil de ver em dimensão $d = 1$. De fato, se $B = [a, b] \subset \mathbb{R}$, h pode ser escolhida como uma função linear por partes, veja abaixo.



Então h é contínuas, $\mathrm{supp}(h) \subset [a - \epsilon, b + \epsilon]$ e

$$\|\mathbf{1}_B - h\|_1 = \int |\mathbf{1}_B - h| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

Em dimensão maior, se $B = I_1 \times \ldots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$ é uma caixa, para cada intervalo I_j, $j \in [d]$, considere uma função $h_j \in C_c(\mathbb{R})$ como acima e defina $h \colon R^d \to \mathbb{R}$,

$$h(x_1, \ldots, x_d) := h_1(x_1) \cdot \ldots \cdot h_d(x_d)\,.$$

Já que

$$\mathbf{1}_B(x_1, \ldots, x_d) = \mathbf{1}_{I_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{1}_{I_d}(x_d),$$

é fácil concluir que

$$\|\mathbf{1}_B - h\|_1 \le d\,\epsilon.$$

Voltando à função escada

$$\sigma := \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{1}_{B_j}\,,$$

onde B_j, $j \in [k]$ são caixas, pelo argumento apresentado acima, existem funções $g_1, \dots, g_k \in C_c(\mathbb{R}^d)$ tais que

$$\left\|\mathbf{1}_{B_j} - g_j\right\|_1 < \frac{\epsilon}{M}\,,$$

para todo $j \in [k]$, onde $M := \sum_{j=1}^{k} |c_j| < \infty$.

Definindo

$$g := \sum_{j=1}^{k} c_j g_j\,,$$

segue que $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ e

$$\begin{aligned}
\|\sigma - g\|_1 &= \left\| \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{1}_{E_j} - \sum_{j=1}^{k} c_j g_j \right\|_1 \\
&\le \sum_{j=1}^{k} |c_j| \left\|\mathbf{1}_{E_j} - g_j\right\|_1 \\
&< M\,\frac{\epsilon}{M} = \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\|f - g\|_1 \le \|f - \sigma\|_1 + \|\sigma - g\|_1 < 2\epsilon,$$

o que finaliza a prova do teorema.

□

Estamos prontos para provar o teorema de Lusin.

Demonstração do Teorema 15. Fixe $\epsilon > 0$. Pelo teorema de aproximação em $L^1(\mathbb{R}^d)$, para todo $n \ge 1$ existe $g_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\|f - g_n\|_1 < \frac{\epsilon}{4^n},$$

ou seja, *em média*, g_n está perto de f.

Pela desigualdade de Chebyshev, isto implica a proximidade *pontual* entre g_n e f, exceto por um conjunto de pontos com media relativamente pequena. De fato, para todo $n \ge 1$, o conjunto

$$F_n := \left\{ |f - g_n| > \frac{1}{2^n} \right\}$$

é mensurável e

$$\mathrm{m}(F_n) \le \frac{\|f - g_n\|_1}{1/2^n} < \frac{\epsilon}{4^n}\,2^n = \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Seja $F := \bigcup_{n\ge1} F_n$.

Então, F é mensurável e

$$\mathrm{m}(F) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(F_n) = \epsilon\,.$$

Finalmente, seja $E := F^{\complement}$. Então E é mensurável, $\mathrm{m}(E^{\complement}) = \mathrm{m}(F) \le \epsilon$ e, como veremos, $f|_E$ é contínua.

Para estabelecer a continuidade de $f|_E$, basta verificar que

$$g_n|_E \to f|_E \quad \text{uniformemente},$$

já que as funções g_n são contínuas em $\mathbb{R}^d$, então são contínuas quando restritas ao conjunto E.

De fato, se $x \in E = F^{\complement} = \bigcap_{n\ge 1} F_n^{\complement}$, então $x \notin F_n$ para todo $n \ge 1$, logo

$$|f(x) - g_n(x)| \le \frac{1}{2^n} \to 0$$

mostrando a convergência uniforme de $g_n|_E$ para $f|_E$, e portanto a continuidade de $f|_E$. $\square$

10.3. **O terceiro princípio de Littlewood.**

Definição 9. Sejam $E \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto mensurável e $\{f_n \colon E \to \mathbb{R}\}_{n\ge 1}$ uma sequência de funções. Dizemos que

$$f_n \to f \quad \text{localmente uniformemente em } E$$

se para todo ponto $x \in E$ existe $r > 0$ tal que

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente em } E \cap B(x, r).$$

Observação 14. Não é difícil verificar a equivalência das seguintes afirmações:
- (i) $f_n \to f$ localmente uniformemente em E;
- (ii) $f_n \to f$ uniformemente em $E \cap K$ para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^d$;
- (iii) $f_n \to f$ uniformemente em $E \cap L$ para todo conjunto limitado $L \subset \mathbb{R}^d$;
- (iv) $f_n \to f$ uniformemente em $E \cap B(0, R)$ para todo $R > 0$.

O terceiro princípio de Littlewood é formalmente expresso pelo teorema de Egorov.

Teorema 17 (de Egorov)**.** *Seja* $\left\{f_n \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\right\}_{n\ge 1}$ *uma sequência de funções mensuráveis tal que*

$$f_n \to f \quad \textit{pontualmente em q.t.p.}$$

Seja $\epsilon > 0$. *Então existe um conjunto mensurável* $E \subset \mathbb{R}^d$ *tal que* $\mathrm{m}(E^{\complement}) < \epsilon$ *e*

$$f_n \to f \quad \textit{localmente uniformemente em } E.$$

Demonstração. Para tornar uma afirmação *pontual* em uma afirmação algo *uniforme*, o procedimento comum é usar um argumento de tempos de parada.

Como $f_n \to f$ em quase todo ponto, existe um conjunto $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^d$ com $\mathrm{m}(\mathcal{Z}) = 0$ tal que

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{Z}.$$

Então, para todo $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{Z}$ e para todo $m \ge 1$, existe $N(x, m) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{m} \quad \text{para todo } n \ge N(x, m). \tag{7}$$

Para todo $m, N \in \mathbb{N}$ definimos o "evento favorável"

$$G_{m,N} := \left\{ |f_n - f| \le \frac{1}{m} \quad \forall n \ge N \right\}.$$

Fixe $m \ge 1$. Então $G_{m,N}$ é mensurável e, claramente, pela equação (7),

$$G_{m,N} \nearrow \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{Z} \quad \text{quando } N \to \infty.$$

Definimos o evento complementar (então não favorável)

$$F_{m,N} := G_{m,N}^{\complement}\,.$$

Temos que

$$F_{m,N} \searrow \mathcal{Z} \quad \text{quando } N \to \infty \quad \text{e} \quad \mathrm{m}(\mathcal{Z}) = 0\,.$$

Não podemos concluir que $\mathrm{m}(F_{m,N}) \to 0$ quando $N \to \infty$ já que os conjuntos $F_{m,N}$ podem ter medida infinita. O truque, então, é localizar $F_{m,N}$ dentro de uma bola determinada, por exemplo $B(0, m)$.

De fato, $F_{m,1} \cap B(0, m)$ tem medida finita pois é um conjunto limitado,

$$F_{m,N} \cap B(0, m) \searrow \mathcal{Z} \cap B(0, m) \quad \text{quando } N \to \infty,$$

e $\mathcal{Z} \cap B(0, m) \subset \mathcal{Z}$ tem medida zero. Logo, pelo teorema de convergência monótona para conjuntos, tem-se

$$\mathrm{m}\left(F_{m,N} \cap B(0, m)\right) \to 0 \quad \text{quando} \quad N \to \infty\,.$$

Segue que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{m}\left(F_{m,N_m} \cap B(0, m)\right) < \frac{\epsilon}{2^m}\,.$$

Seja

$$F := \bigcup_{m \geq 1} \left(F_{m,N_m} \cap B(0, m)\right)\,.$$

Então F é mensurável e $\mathrm{m}(F) \leq \epsilon$. Seja

$$\begin{aligned} E := F^{\complement} &= \bigcap_{m \geq 1} \left(F_{m,N_m} \cap B(0, m)\right)^{\complement} \\ &= \bigcap_{m \geq 1} G_{m,N_m} \cup B(0, m)^{\complement}\,. \end{aligned}$$

Resta provar que $f_n \to f$ localmente uniformemente em E. Fixe uma bola $B(0, R)$. Vamos provar que $f_n \to f$ uniformemente em $E \cap B(0, R)$.

Seja $m \geq R$. Então, como $B(0, R) \subset B(0, m)$, dado $x \in E \cap B(0, R) \subset B(0, m)$, tem-se $x \in G_{m,N_m}$. Logo

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \text{para todo} \quad n \geq N_m\,.$$

Como a escolha da escala de tempo N_m *não* depende do ponto $x \in E \cap B(0, R)$, segue que, de fato, $f_n \to f$ uniformemente em $E \cap B(0, R)$. $\square$