

LISTA 5: CONSTRUÇÃO ABSTRATA DE MEDIDAS, OUTROS TÓPICOS

Exercício 1. Sejam (Ω, \mathcal{F}, m) um espaço de medida positiva e $f \in L^1(m)$. Defina a função $m_f: \mathcal{F} \rightarrow [-\infty, \infty]$ por

$$m_f(E) := \int_E f \, dm = \int_{\Omega} f \mathbf{1}_E \, dm \quad \text{para todo } E \in \mathcal{F}.$$

- (a) Prove que m_f é uma medida com sinal em (Ω, \mathcal{F}) .
- (b) Prove que para toda função \mathcal{F} -mensurável $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, temos

$$\int_{\Omega} g \, dm_f = \int_{\Omega} g f \, dm.$$

- (c) Encontre dois conjuntos P e N , representando a decomposição de Hahn da medida com sinal m_f .

Exercício 2. Sejam (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável e μ uma medida *com sinal* em (Ω, \mathcal{F}) . Para cada conjunto \mathcal{F} -mensurável E , mostre que:

- (a) $|\mu(E)| \leq |\mu|(\Omega)$.
- (b) Se $\Omega = P \sqcup N$ é a decomposição de Hahn de μ , então $|\mu|(E) = \mu(E \cap P) - \mu(E \cap N)$.
Em particular, $|\mu|(\Omega) = \mu(P) - \mu(N)$.
- (c) $|\mu|(E) = \max \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(E_k)| : E_1, E_2, \dots \text{ são disjuntos e } E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right\}.$

Exercício 3. Sejam (Ω, \mathcal{F}) um espaço mensurável e μ uma medida *com sinal* em (Ω, \mathcal{F}) . Denote por \mathcal{M} o espaço de todas as medidas finitas com sinal em (Ω, \mathcal{F}) . Se $\mu \in \mathcal{M}$, definimos

$$\|\mu\| := |\mu|(\Omega).$$

- (a) Prove que $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.
Na verdade, este é um espaço de Banach (você pode tentar provar isso também).
Dica: a parte mais difícil é verificar a desigualdade triangular $\|\mu_1 + \mu_2\| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$. Comece considerando uma decomposição de Hahn $\Omega = P \sqcup N$ da medida com sinal $\mu := \mu_1 + \mu_2$. Use o Exercício 2 parte (b) para μ e depois parte (a) para μ_1 e μ_2 .
- (b) Dada $f \in L^1(m)$, considere a medida com sinal associada m_f e prove que a sua norma (de variação total) é simplesmente a norma de f em $L^1(m)$, ou seja,

$$\|m_f\| = \int_{\Omega} |f| \, dm.$$