LISTA 3: O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA, INVERSA, O TEOREMA DO POSTO E APLICAÇÕES

Exercício 1. Considere a equação
$$x\, e^y + y\, e^x = 0.$$

(i) Observe que não há como determinar uma solução explícita $y = \phi(x)$ da equação acima em uma vizinhança do ponto $(0, 0)$.
(ii) Por que, no entanto, existe uma solução suave $y = \phi(x)$ dessa equação perto de $(0, 0)$?
(iii) Qual é a sua derivada em $x = 0$? Qual é a segunda derivada em $x = 0$?
(iv) O que isso lhe diz sobre o gráfico da solução?
Então, está mais claro o cerne do teorema da função implícita?

Exercício 2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto contendo o ponto $(0, 0)$ e $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1.
Suponha que $(\partial_y f)(0, 0)$ seja invertível e considere $\phi \colon B(0, \epsilon_2) \subset \mathbb{R}^n \to B(0, \epsilon_1) \subset \mathbb{R}^m$ a função implícita correspondente. Prove as seguintes afirmações.

(i) ϕ é contínua. Na verdade, dado $x_0 \in B(0, \epsilon_2)$, existe $L < \infty$ tal que
$$\|\phi(x) - \phi(x_0)\| \le L\, \|x - x_0\|$$
para todo x suficientemente perto de x_0.
(ii) Prove que ϕ é diferenciável e estabeleça a fórmula da sua derivada.

Exercício 3. Seja $\mathrm{GL}(n)$ o conjunto de matrizes invertíveis n por n.

(i) Prove que $\mathrm{GL}(n)$ é um subconjunto aberto em $\mathrm{Mat}(n, n)$.
(ii) Prove que $\mathrm{GL}(n)$ é um grupo (chamado o grupo linear geral).
(iii) Prove que o operador de inversão $\mathrm{Inv} \colon \mathrm{GL}(n) \to \mathrm{GL}(n)$, dado por
$$\mathrm{Inv}(A) := A^{-1}$$
é um homeomorfismo.
(iv) Prove que Inv é um difeomorfismo suave, e mostre que a sua derivada em A é a transformação linear $T \colon \mathrm{Mat}(n, n) \to \mathrm{Mat}(n, n)$ dada por
$$T(X) := -A^{-1} \circ X \circ A^{-1}.$$
(v) Relacione esta fórmula com a derivada ordinária de $\frac{1}{x}$ em $x = a$.

Exercício 4. Suponha que $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tenha posto k. Lembre-se que existe $\delta > 0$ tal que para toda transformação linear S com $\|S - T\| < \delta$, tem-se que $\operatorname{rank} S \ge k$.

(i) Dê um exemplo específico em que o posto de S pode ser estritamente maior do que o posto de T, para qualquer $\delta > 0$.
(ii) Dê exemplos de transformações lineares com posto k para cada k satisfzendo $0 \le k \le \min\{n, m\}$.

Exercício 5. Desenhe figuras de todas as formas possíveis de $T(\mathbb{S}^2)$ onde $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear e $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ é a esfera bidimensional.
Não esqueça dos casos em que T tem posto < 3.

Exercício 6. Prove que a terra é localmente plana.
Dica: Comece com a equação da terra:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k$$

para algumas constantes $A, B, C, k > 0$.

Exercício 7. Resolva de maneira rigorosa o seguinte problema prático.
Imagine que a terra seja uma esfera de raio 1 e que estamos tentando determinar onde colocar um centro de distribuição para minimizar os custos de transporte para os três mercados a seguir:

$$P_1\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, 0\right),\ P_2\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}, 0\right),\ P_3\left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right).$$

Determine as coordenadas deste centro de distribuição.