AULA 20: ESPAÇOS DE MEDIDA ABSTRATOS

Construímos uma família de subconjuntos do espaço euclidiano chamados de conjuntos Lebesgue mensuráveis e definimos a medida de tais conjuntos; introduzimos uma classes geral de funções no espaço euclidiano chamadas de funções Lebesgue mensuráveis e definimos um conceito de integração para tais funções.

O objetivo deste capítulo é desenvolver uma teoria semelhante em um cenário abstrato.

σ-ÁLGEBRAS E ESPAÇOS MENSURÁVEIS

Definição 1. Dado um conjunto X, uma σ-álgebra sobre X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tal que

(1) $\varnothing \in \mathcal{B}$,
(2) se $E \in \mathcal{B}$ então $E^{\complement} \in \mathcal{B}$,
(3) se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{B}$.

Um par $(X, \mathcal{B})$, onde X é um conjunto (o espaço ambiente) e $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra sobre X é chamado de *espaço mensurável*.

Os elementos de $\mathcal{B}$ são ditos conjuntos $\mathcal{B}$-mensuráveis ou simplesmente, mensuráveis.

Observação 1. Note que o espaço ambiente $X = \varnothing^{\complement} \in \mathcal{B}$. Além disso, $\mathcal{B}$ é fechada também com respeito a interseções enumeráveis: se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então

$$\bigcap_{n\geq 1} E_n = \left(\bigcup_{n\geq 1} E_n^{\complement} \right)^{\complement} \in \mathcal{B}\,.$$

A seguir apresentamos alguns exemplos gerais de σ-álgebras.

Exemplo 1 (de σ-álgebras)**.** Seja X um espaço ambiente.

(1) A σ-álgebra trivial: $\mathcal{B} = \{\varnothing, X\}$.
(2) A σ-álgebra discreta: $\mathcal{B} = 2^X = \{E \colon E \subset X\}$.
(3) A σ-álgebra atômica. Dada uma partição

$$X = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha$$

de X em "átomos", seja

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} A_\alpha \colon \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \right\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra (atômica). A prova deste fato é um exercício.

Note que a σ-álgebra trivial é atômica, que corresponde à partição

$$X = \varnothing \sqcup X,$$

enquanto a σ-álgebra discreta também é atômica, onde todos os singletons são átomos:

$$X = \bigsqcup_{x\in X} \{x\}\,.$$

(4) A σ-álgebra diádica de determinada geração. Dado $n \geq 0$, considere a partição de reta real $\mathbb{R}$ em intervalos diádicos de geração n,

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right)$$

e a σ-álgebra atômica $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ correspondente.

A mesma construção pode ser feita em $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, usando caixas diádicas em vez de intervalos diádicos.

Geração de σ-álgebras

Dadas duas σ-álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, se $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ dizemos que $\mathcal{B}'$ é *mais fina* do que $\mathcal{B}$, ou que $\mathcal{B}$ é mais grosseira do que $\mathcal{B}'$.

Por exemplo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

É fácil verificar que a interseção de qualquer família $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ de σ-álgebras sobre X também é uma σ-álgebra sobre X, o que nos permite introduzir o seguinte conceito.

Definição 2. Dada uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um espaço ambiente X, seja

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{B} \colon \mathcal{B} \supset \mathcal{F}, \, \mathcal{B} \text{ é uma } \sigma - \text{álgebra}\} \, .$$

Então $\sigma(\mathcal{F})$ é uma σ-álgebra sobre X chamada a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$. Ela é a menor (ou a mais grosseira) σ-álgebra que contém a coleção $\mathcal{F}$.

Note que $2^X \supset \mathcal{F}$ e como 2^X é uma σ-álgebra, a interseção de σ-álgebras acima é bem definida.

Definição 3 (a σ-álgebra de Borel)**.** Denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a σ-álgebra gerada pela topologia do espaço euclidiano, ou seja,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma \left\{ U \subset \mathbb{R}^d \colon U \text{ aberto} \right\} \, .$$

Mais geralmente, dado um espaço topológico qualquer $(X, \mathcal{T})$,

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}) = \sigma \{ U \subset X \colon U \text{ aberto} \}$$

é chamada a σ-álgebra de Borel do espaço $(X, \mathcal{T})$.

Os conjuntos $E \in \mathcal{B}(X)$ são chamados de conjuntos *borelianos.*

Exemplo 2 (de conjuntos borelianos)**.** Todos os conjuntos abertos, fechados, do tipo F_σ (i.e., uniões enumeráveis de conjuntos fechados), do tipo G_δ (i.e., interseções enumeráveis de conjuntos abertos) são conjuntos borelianos.

O mecanismo padrão para conjuntos. Considere uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é a σ-álgebra $\sigma(\mathcal{F})$ gerada por $\mathcal{F}$. Dada uma propriedade P sobre subconjuntos de X, para provar a afirmação

$$P(E) \text{ vale para todo } E \in \sigma(\mathcal{F})$$

basta provar que:

(1) $P(E)$ vale para todo $E \in \mathcal{F}$;

(2) A coleção

$$\mathcal{A} := \{ E \subset X \colon P(E) \text{ vale} \}$$

é uma σ-álgebra, ou seja,

- $P(\varnothing)$ vale,
- se $P(E)$ vale, então $P(E^{\complement})$ vale,
- se $P(E_n)$ vale para todo $n \geq 1$ então $P(\bigcup_{n \geq 1} E_n)$ vale.

Proposição 1. *Sejam X e Y dois espaços topológicos e seja $f\colon X \to Y$ uma função contínua. Então para todo conjunto boreliano $E \in \mathcal{B}(Y)$, sua pré-imagem $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$, i.e., ele é um conjunto boreliano em X.*

Demonstração. Para provar a afirmação

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}(Y)$$

usamos o mecanismo padrão para conjuntos, lembrando que $\mathcal{B}(Y)$ é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos em Y.

(1) Para todo conjunto aberto E in Y, como f é contínua, $f^{-1}(E)$ é aberto, então boreliano, ou seja, ele pertence a $\mathcal{B}(X)$.

(2) Seja

$$\mathcal{A} := \left\{E \in \mathcal{B}(Y)\colon f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)\right\} .$$

Tem-se

- $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{B}(X)$.
- Se $E \in \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$. Como $\mathcal{B}(x)$ é uma σ-álgebra, $f^{-1}(E)^{\complement} \in \mathcal{B}(X)$ também. Mas $f^{-1}(E^{\complement}) = f^{-1}(E)^{\complement} \in \mathcal{B}(X)$, mostrando que $E^{\complement} \in \mathcal{A}$.
- Se $\{E_n\colon n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X)$ para todo $n \geq 1$. Como $\mathcal{B}(X)$ é uma σ-álgebra, segue que

$$f^{-1}(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \bigcup_{n\geq 1} f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X)\,,$$

mostrando que $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{A}$.

$\square$

Observação 2. A σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de conjuntos borelianos do espaço euclidiano é *estritamente* mais grosseira de a de todos os conjuntos mensuráveis à Lebesgue, ou seja

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(R^d)\,.$$

De fato, todo conjunto aberto é Lebesgue mensurável, então a σ-álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ contém a σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ geradas pelos conjuntos abertos.

O exercício seguinte fornece um exemplo de conjunto não boreliano mas ainda mensurável à Lebesgue. A construção descrita abaixo, baseada no conjunto de Cantor e na função “escada do diabo” de Cantor, será usada para obter vários outros contraexemplos.

Exercício 1. Sejam $\mathcal{C} \subset [0,1]$ o conjunto de Cantor e $c\colon [0,1] \to [0,1]$ a função de Cantor, Considere a função

$$f\colon [0,1] \to [0,2], \quad f(x) = x + c(x)\,.$$

Então,

(i) f é uma função contínua, sobrejetiva e (estritamente(crescente, portanto é *bi-contínua.*

(ii) A imagem do conjunto de Cantor pela função f é mensurável e

$$\mathrm{m}(f(\mathcal{C})) = 1\,.$$

Por isso (usando um exercício anterior) existe um conjunto *não* mensurável $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{C})$.

(iii) Seja

$$E := f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C}\,.$$

Então E é mensurável à Lebesgue mas não é um conjunto boreliano.

Proposição 2. *Cada uma das seguintes famílias de conjuntos gera a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:*

(i) A família de conjuntos abertos.
(ii) A família de conjuntos fechados.
(iii) A família de conjuntos compactos.

(iv) A família de bolas abertas (ou fechadas).
(v) A família de caixas (ou de caixas diádicas).

Demonstração. Exercício. □