LISTA 4: O CONCEITO DE INTEGRABILIDADE

Exercício 1. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ um bloco n-dimensional.

(i) Prove que uma função limitada $f\colon B \to \mathbb{R}$ é integrável segundo Darboux se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}$ de B tal que

$$\bar{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \epsilon\,.$$

(ii) Seja $f\colon B \to \mathbb{R}$ uma função integrável segundo Riemann. Prove que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dada qualquer partição $\mathcal{P}$ de B,

$$\text{se} \quad \Delta(\mathcal{P}) < \delta, \quad \text{então} \quad \sum_{P \in \mathcal{P}} \omega_f(P) \cdot |P| < \epsilon\,.$$

Exercício 2. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ um bloco n-dimensional e denote por

$$\mathcal{R}(B) := \{f\colon B \to \mathbb{R} \;\big|\; f \ \text{ é Riemann integrável }\}\,.$$

Seja $\mathcal{I}\colon \mathcal{R}(B) \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{I}(f) := \int_B f(x)\, dx\,.$$

Prove as seguintes afirmações:

(i) O conjunto $\mathcal{R}(B)$ é um espaço vetorial e a função $\mathcal{I}$ é uma transformação linear.

(ii) Se $f \in \mathcal{R}(B)$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in B$, então $\int_B f \geq 0$.

(iii) Se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in B$, então

$$m \cdot |B| \leq \int_B f \leq M \cdot |B|\,.$$

Exercício 3. Seja $f\colon B \to \mathbb{R}$ uma função integrável segundo Riemann e seja $\mathcal{F} \subset B$ um conjunto finito. Suponha que $g\colon B \to \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$f(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \in B \setminus \mathcal{F}\,.$$

Prove (*sem* usar o teorema de Riemann-Lebesgue) que g é Riemann integrável e

$$\int_B f = \int_B g\,.$$

Exercício 4. Sejam $f\colon B \to \mathbb{R}$ uma função e $x \in B$ um ponto.
Prove que f é contínua no ponto x se, e somente se, $\omega_f(x) = 0$.

Exercício 5. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ um bloco n-dimensional. Prove as seguintes afirmações:

(i) Se $f, g\colon B \to \mathbb{R}$ são funções integráveis, então $f \cdot g$ é integrável também.

(ii) Se $f\colon B \to \mathbb{R}$ é integrável e se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\left|f(x)\right| \geq \epsilon_0$ para todo $x \in B$, então a função $\frac{1}{f}$ é integrável também.

(iii) Se $f\colon B \to I \subset \mathbb{R}$ é integrável e $g\colon I \to \mathbb{R}$ é contínua, então $g \circ f$ é integrável.

(iv) Se $E \subset B$ é um conjunto com fronteira negligenciável, então a função indicadora correspondente $\mathbf{1}_E$ é integrável.