

LISTA 3: O TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA, O TEOREMA DO POSTO E APLICAÇÕES

Exercício 1. Seja $GL(n)$ o conjunto de matrizes invertíveis n por n .

- (i) Prove que $GL(n)$ é um subconjunto aberto em $Mat(n, n)$.
- (ii) Prove que $GL(n)$ é um grupo (chamado o grupo linear geral).
- (iii) Prove que o operador de inversão $Inv: GL(n) \rightarrow GL(n)$, dado por

$$Inv(A) := A^{-1}$$

é um homeomorfismo.

- (iv) Prove que Inv é um difeomorfismo suave, e mostre que a sua derivada em A é a transformação linear $T: Mat(n, n) \rightarrow Mat(n, n)$ dada por

$$T(X) := -A^{-1} \circ X \circ A^{-1}.$$

- (v) Relacione esta fórmula com a derivada ordinária de $\frac{1}{x}$ em $x = a$.

Exercício 2. Suponha que $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tenha posto k . Lembre-se que existe $\delta > 0$ tal que para toda transformação linear S com $\|S - T\| < \delta$, tem-se que $\text{rank } S \geq k$.

- (i) Dê um exemplo específico em que o posto de S pode ser estritamente maior do que o posto de T , para qualquer $\delta > 0$.
- (ii) Dê exemplos de transformações lineares com posto k para cada k satisfazendo $0 \leq k \leq \min\{n, m\}$.

Exercício 3. Desenhe figuras de todas as formas possíveis de $T(\mathbb{S}^2)$ onde $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear e $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ é a esfera bidimensional.

Não esqueça dos casos em que T tem posto < 3 .

Exercício 4. Prove que a terra é localmente plana.

Dica: Comece com a equação da terra:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k$$

para algumas constantes $A, B, C, k > 0$.

Exercício 5. Resolva de maneira rigorosa o seguinte problema prático.

Imagine que a terra seja uma esfera de raio 1 e que estamos tentando determinar onde colocar um centro de distribuição para minimizar os custos de transporte para os três mercados a seguir:

$$P_1 \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, 0 \right), P_2 \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}, 0 \right), P_3 \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13} \right).$$

Determine as coordenadas deste centro de distribuição.