Aula 22: A integral de uma função mensurável.

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. A construção da integral de uma função mensurável em X segue exatamente a mesma abordagem que a da integral de Lebesgue no espaço euclidiano.

(1) Seja $s : X \to [0, \infty]$,

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \, 1_{E_i}$$

uma função simples. Então,

$$\int_X s \, d\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mu(E_i) .$$

Resta mostrar que este conceito é bem definido, ou seja, se s possui duas representações do tipo

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \, 1_{E_i} = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \, 1_{F_j} ,$$

então

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \, \mu(E_i) = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \, \mu(F_j) .$$

A prova deste fato é igual a do cenário de funções simples no espaço euclidiano.

(2) Seja $s : X \to \mathbb{R}$ uma função simples. Então, já que s pode ser representada como

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i 1_{E_i} ,$$

onde os conjuntos mensuráveis $\{E_i\}_{i \in [k]}$ são disjuntos, segue que

$$s^{\pm} = \sum_{i=1}^{k} c_i^{\pm} 1_{E_i} \quad e \quad |s| = \sum_{i=1}^{k} |c_i| 1_{E_i} .$$

Portanto, s^+, s^-, $|s|$ são funções simples sempre.

s é dita absolutamente integrável se

$$\int_X |s| \, d\mu < \infty .$$

Neste caso, definimos

$$\int_X s \, d\mu := \int_X s^+ d\mu - \int_X s^- d\mu .$$

(3) Seja $f: X \to [0,\infty]$ uma função mensurável. Definimos

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, \; s \text{ é simples} \right\}.$$

Não é difícil ver que

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, \; s \text{ simples, finita} \right\},$$

e, de fato, outras restrições sobre s podem ser feitas, dependendo do contexto (por exemplo, em $\mathbb{R}^d$, s pode ser escolhida com suporte compacto).

(4) Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então, como f é o limite pontual de uma sequência de funções simples, segue imediatamente que f^+, f^- e $|f|$ também são tais limites, logo são mensuráveis também.

Chamamos f de absolutamente integrável

Se $$\int_X |f| \, d\mu < \infty .$$

Neste caso,
$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu .$$

<u>Teorema</u> (propriedades básicas da integral)

Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $f, g : X \to [0, \infty]$ (ou $f, g : X \to \mathbb{R}$) duas funções mensuráveis (ou, respetivamente, absolutamente integráveis). As seguintes valem:

(1) (monotonicidade e equivalência)

Se $f \le g$ em μ-q.t.p. então $\int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu$.

Se $f = g$ em μ-q.t.p. então $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

(2) (linearidade)
$$\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$
$$\int_X c f \, d\mu = c \int_X f \, d\mu .$$

(3) (divisibilidade)

Se $E \in \mathcal{B}$ então $f 1_E$ e $f 1_{E^c}$ são mensuráveis e

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f 1_E \, d\mu + \int_X f 1_{E^c} \, d\mu.$$

Denotando por $\int_E f \, d\mu := \int_X f 1_E \, d\mu$,

temos
$$\int_X f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_{E^c} f \, d\mu.$$

(4) (a desigualdade de Markov) Se $f : X \to [0, \infty]$, para todo $\lambda > 0$ tem-se

$$\mu\{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int_X f \, d\mu}{\lambda}.$$

(5) $\int_X |f| \, d\mu = 0$ sse $f = 0$ μ-qtp.

Se $\int_X |f| \, d\mu < \infty$ então $|f| < \infty$ μ-qtp.

Demonstração. O argumento é o mesmo que no caso da integral de Lebesgue. Descrevemos os passos principais.

(1) O primeiro passo é estabelecer a monotonicidade da integral para funções simples. O caso geral segue-se da definição.

A equivalência é uma consequência imediata da monotonicidade.

(2) De novo, o primeiro passo é provar a linearidade da integral para funções simples.

O caso geral segue-se do teorema de convergência monótona, que será tratado na seção seguinte.

(3) Produto de funções mensuráveis é mensurável, enquanto a função indicadora de um conjunto mensurável é mensurável. Portanto, $f 1_E$ e $f 1_{E^c}$ são mensuráveis.

Como
$$\int f = \int f 1_E + \int f 1_{E^c},$$

a divisibilidade segue da linearidade.

(4) Como $f \geq \lambda \, 1_{\{f \geq \lambda\}}$, a desigualdade de Markov é uma consequência da monotonicidade da integral:

$$\int_X f \, d\mu \geq \int_X \lambda \, 1_{\{f \geq \lambda\}} \, d\mu$$

$$= \lambda \, \mu\{f \geq \lambda\},$$

logo

$$\mu\{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int_X f \, d\mu}{\lambda}.$$

(5) $\{ f \neq 0 \} = \{ |f| > 0 \} = \bigcup_{n \geq 1} \{ |f| \geq \frac{1}{n} \}.$

Pela desigualdade de Markov, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu\{|f| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\int_X |f| \, d\mu}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} = 0,$$

logo $\mu\{|f| \geq \frac{1}{n}\} = 0$ para todo $n \geq 1$.

Concluímos que

$\mu\{f \neq 0\} = 0$, ou seja, $f = 0$ μ-q.t.p.

Finalmente,

$$\{|f| = \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{|f| \geq n\}$$

Pela desigualdade de Markov, para todo $n \geq 1$,

$$\mu\{|f| \geq n\} \leq \frac{\int_X |f| \, d\mu}{n} \longrightarrow 0$$

pois $\int_X |f| \, d\mu < \infty$.

Como, evidentemente, a sequência de conjuntos $\{|f| \geq n\}_{n \geq 1}$ é não crescente,

pelo teorema de convergência monótona para conjuntos tem-se

$$\mu\{|f| = \infty\} = \lim_{n \to \infty} \mu\{|f| \geq n\} = 0.$$

$\square$

Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, seja

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \int_X |f| d\mu < \infty \}$$

o espaço vetorial de funções absolutamente integráveis em X.

De fato, se $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, $f+g$ é mensurável (pois f e g são mensuráveis) e como

$$|f+g| \leq |f| + |g|,$$

tem-se

$$\int_X |f+g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < \infty,$$

logo $f+g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Além disso, se $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$ então cf é mensurável e

$$\int_X |cf| d\mu = |c| \int_X |f| d\mu < \infty,$$

então $cf \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Definimos o espaço L^1 por

$$L^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu) / \sim$$

onde $f \sim g$ se $f = g$ em qtp.

Como pelo Teorema 1 (5), dada uma função $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$,

$$\int_X |f| \, d\mu = 0 \quad \text{sse} \quad f = 0 \text{ em qtp}$$

acontece que

$$\|f\|_{L^1} := \int_X |f| \, d\mu$$

é uma norma em $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Então, $\left(L^1(X, \mathcal{B}, \mu), \|\cdot\|_{L^1} \right)$ é um espaço normado. Provaremos, no próximo capítulo que, na verdade, é um espaço de Banach.

Outras notações comuns deste espaço são $L^1(X)$, $L^1(d\mu)$, $L^1(X, \mu)$ e etc.

Ademais, dado um número real $1 \leq p < \infty$, seja

$$L^p(X, \mathcal{B}, \mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \},$$

módulo igualdade em qtp.

Munido com

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

$L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço normado.

Essa afirmação será provada no próximo capítulo. Entretanto, vamos estabelecer a desigualdade de Chebyshev para funções L^p.

<u>Teorema</u> (a desigualdade de Chebyshev)
Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. Então, para todo $\lambda > 0$ temos

$$\mu\{ |f| \geq \lambda \} \leq \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

<u>Demonstração.</u> Aplicamos a desigualdade de Markov à função $|f|^p$.

Primeiro, como $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|^p$ é contínua, segue que

$$\varphi \circ f = |f|^p$$

é mensurável (e sem sinal).

Como

$$|f| \geq \lambda \iff |f|^p \geq \lambda^p,$$

pela desigualdade de Markov,

$$\mu\{|f| \geq \lambda\} = \mu\{|f|^p \geq \lambda^p\}$$

$$\leq \frac{\int_X |f|^p \, d\mu}{\lambda^p}$$

$$= \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

$\square$

Os teoremas de convergência

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis sem sinais e f uma outra função mensurável sem sinal.

Suponha que

$$f_n \to f \text{ em q.t.p.}$$

Questão: Quando podemos concluir que

$$\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu \quad ?$$

Ou seja, quando podemos trocar o limite com a integral?

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \stackrel{?}{=} \int_X \lim_{n \to \infty} f_n \, d\mu .$$

Uma situação especial, similar a da integral de Riemann-Darboux na reta real é apresentada na seguinte proposição.

Proposição (convergência uniforme em um espaço de medida finita)

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida finita, i.e., $\mu(X) < \infty$.

Seja $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis sem sinais, ou uma sequência de funções absolutamente integráveis. Seja f uma outra função real.

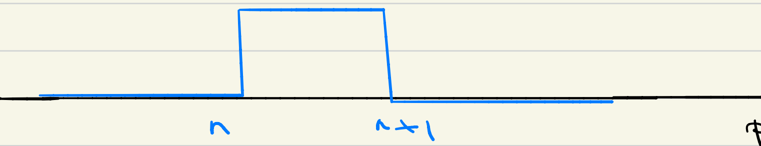
Se $f_n \longrightarrow f$ uniformemente

então $$\int_X f_n \longrightarrow \int_X f.$$

Demonstração: Exercício.

O resultado anterior vale sob uma hipótese muito restritiva, a de convergência uniforme. Procuramos tais resultados de convergência da integral sob hipóteses bem mais gerais. Mas antes de enunciar estes resultados, notamos que há casos em que não podemos trocar o limite e a integral. Descreveremos três exemplos simples mas típicos de obstruções a essa propriedade, a saber, exemplos de funções "bump" em movimento.

<u>Exemplo 1</u> Considere o espaço $X = \mathbb{R}$ munido com a medida $\mu = m$, a medida de Lebesgue.

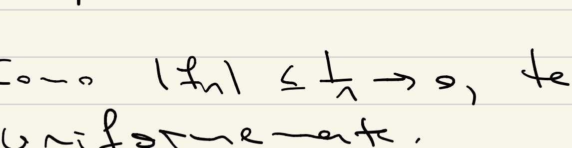


Seja $f_n = 1_{[n, n+1]}$ para todo $n \geq 1$.

Então $f_n \to 0$ em todo ponto, mas

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = m[n, n+1] = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, dm$$

<u>Exemplo 2</u> Considere o espaço $X = \mathbb{R}$ munido com a medida $\mu = m$ de Lebesgue.



Para todo $n \geq 1$, seja

$$f_n = \frac{1}{n} 1_{[0, n]} .$$

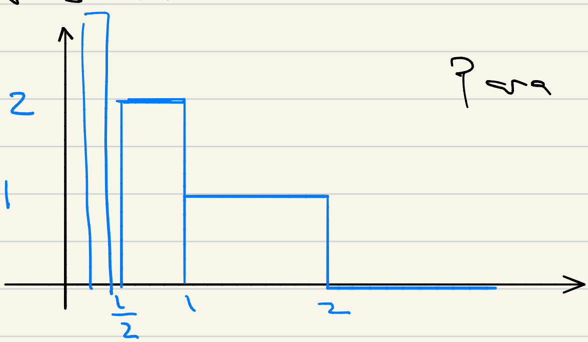
Como $|f_n| \leq \frac{1}{n} \to 0$, temos que $f_n \to 0$ uniformemente.

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm = \frac{1}{n} \, m[0,n] = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, dm,$$

mostrando que a hipótese $\mu(X) < \infty$ da Proposição 1 é necessária.

<u>Exemplo 3</u> Considere o espaço $X = [0,2]$ munido com a medida μ de Lebesgue restrita ao intervalo $[0,2]$.



Para todo $n \geq 1$, seja

$$f_n := n \, 1_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}.$$

Então, $f_n \to 0$ em todo ponto, mas

$$\int_{[0,2]} f_n \, dm = n \, m\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] = 1 \not\to 0 = \int_{[0,2]} 0 \, dm.$$