

## CAPÍTULO 6. SÉRIES DE NÚMEROS REAIS

## SUMÁRIO

1. Séries sem sinal	4
2. Séries absolutamente convergentes	5
3. Séries alternadas	11

Seja

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

uma sequência infinita de números reais.

O objetivo é definir a soma infinita (ou a série)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Consideramos as somas finitas:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

chamadas de *somas parciais*.

A soma infinita

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

será o limite das somas finitas  $s_n$  quando  $n \rightarrow \infty$ , se o limite existir. Mais formalmente,

**Definição 1.** A série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  é **convergente** se a sequência de somas parciais

$$s_n = a_1 + \dots + a_n, \quad \forall n \geq 1$$

é convergente. Neste caso, a soma da série é

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

**Exemplo 0.1.** Seja  $a \in (0, 1)$  e considere a série geométrica

$$\sum_{n \geq 0} a^n.$$

Como as somas parciais têm uma fórmula fechada,

$$s_n = 1 + a + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1},$$

e como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ , já que  $a \in (0, 1)$ , concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{0 - 1}{a - 1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Portanto, a série  $\sum_{n \geq 0} a^n$  converge e

$$\sum_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1 - a}.$$

**Exemplo 0.2.** A série

$$1 + 1 + 1 + \dots = \sum_{n \geq 0} 1$$

não converge (diverge), já que suas somas parciais

$$s_n = 1 + \dots + 1 = n$$

formam uma sequência divergente para  $+\infty$ .

Além disso, a série geométrica

$$\sum_{n \geq 0} a^n, \quad \text{com } a > 1,$$

também diverge, já que

$$s_n = 1 + a + \dots + a^n \geq 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ , tem-se que  $s_n$  não converge.

**Exemplo 0.3.** A série

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

diverge. Isto é porque suas somas parciais com índice par

$$s_{2n} = 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) = 0,$$

logo a subsequência  $s_{2n} \rightarrow 0$ , enquanto

$$s_{2n+1} = 1 + (-1) + \dots + 1 = 1 \rightarrow 1.$$

**Teorema 0.4.** Se  $\sum_{n \geq 1} a_n$  é uma série convergente, então  $a_n \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* Observe que as somas parciais são

$$s_n = a_1 + \dots + a_n,$$

$$s_{n-1} = a_1 + \dots + a_{n-1}.$$

Logo,  $a_n = s_n - s_{n-1}$ .

Como  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge, existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S \in \mathbb{R}$ .

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0. \quad \square$$

$\square$

**Corolário 0.5.** Se a sequência  $(a_n)_{n \geq 1}$  não converge para 0, então a série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  é divergente.

Isso mostra imediatamente que as séries  $\sum_{n \geq 0} a^n$  com  $a \geq 1$ ,  $\sum 1$ ,  $\sum (-1)^n$  são divergentes.

**Exemplo 0.6.** A série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  é convergente.

De fato, observe que

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Portanto, as somas parciais

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

E daí,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1.$$

Portanto, a série converge e

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

**Exemplo 0.7.** A série harmônica

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

é divergente.

Para verificar essa afirmação, consideramos as somas parciais com índices potências de 2, ou seja,

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Vamos considerar os primeiros termos dessa sequência:

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Desse modo é fácil perceber que, em geral,

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + n \cdot \frac{1}{2} \right) = \infty$  e  $s_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}$ , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty.$$

Portanto, a sequência de somas parciais  $(s_n)_{n \geq 1}$  não pode convergir (possui uma subsequência divergente), logo a série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

diverge.

## 1. SÉRIES SEM SINAL

Vamos considerar o caso especial (mas muito importante) de séries

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

com termos não negativos (ou sem sinal), i.e.  $a_n \geq 0 \forall n \geq 1$ .

Observe que as somas parciais satisfazem

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} \\ &= s_n + a_{n+1} \geq s_n. \end{aligned}$$

Ou seja,  $s_{n+1} \geq s_n$  para todo  $n \geq 1$ .

Portanto, a sequência  $(s_n)_{n \geq 1}$  é não decrescente.

Lembre-se que uma sequência não decrescente é convergente sse é limitada superiormente, sse possui uma subsequência limitada superiormente.

Portanto, uma série sem sinal

$$\sum_{n \geq 1} a_n \quad (a_n \geq 0 \forall n)$$

converge sse existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq M \quad \forall n \geq 1.$$

**Teorema 1.1** (Critério de comparação). *Sejam  $\sum_{n \geq 1} a_n$  e  $\sum_{n \geq 1} b_n$  duas séries sem sinal, e suponha que*

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq 1.$$

(i) *Se  $\sum_{n \geq 1} b_n$  é convergente, então  $\sum_{n \geq 1} a_n$  é convergente também.*

(ii) *Se  $\sum_{n \geq 1} a_n$  é divergente, então  $\sum_{n \geq 1} b_n$  é divergente também.*

*Demonstração.* Sejam

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n, \quad \sigma_n = b_1 + \cdots + b_n$$

as somas parciais das duas séries. Como  $a_n \leq b_n \forall n \geq 1$ , tem-se

$$s_n \leq \sigma_n \quad \forall n \geq 1.$$

Se  $\sum_{n \geq 1} b_n$  converge, então  $(\sigma_n)_n$  é limitada superiormente. Logo,  $(s_n)_n$  também é limitada superiormente, então  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge.  $\square$

De modo análogo, se  $\sum_{n \geq 1} a_n$  diverge, então  $(s_n)_n$  não é limitada superiormente, então  $(\sigma_n)_n$  não é limitada superiormente, e então  $\sum_{n \geq 1} b_n$  diverge.

**Exemplo 1.2.** Vamos considerar a  $p$ -série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p},$$

onde  $p > 0$ .

Vamos mostrar que a série diverge se  $p \leq 1$  e converge se  $p > 1$ .

■  $p \leq 1$ : Para todo  $n \geq 1$ , tem-se  $n^p \leq n^1 = n$ , então

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}.$$

Como  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge, pelo critério de comparação,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$$

diverge também.

- $p > 1$ : Vamos mostrar que a subsequência  $(s_{2^n-1})_{n \geq 1}$  é limitada superiormente. Como já vimos, isso será suficiente para concluirmos a convergência da série.

De fato,

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p} \\ &< 1 + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left( \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p}. \end{aligned}$$

Logo,

$$s_{2^n-1} < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^p} + 4 \cdot \frac{1}{4^p} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^p}.$$

Isto é,

$$s_{2^n-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^k.$$

Seja  $a = \frac{1}{2^{p-1}}$ .

Como  $p > 1$ , tem-se  $p-1 > 0$ , então  $2^{p-1} > 1$ , e logo

$$a = \frac{1}{2^{p-1}} < 1.$$

Logo, a série

$$\sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^n = \sum_{n \geq 0} a^n$$

converge, então suas somas parciais formam uma sequência convergente, logo limitada superiormente.

Como

$$s_{2^n-1} < \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^k,$$

concluimos que  $(s_{2^n-1})_{n \geq 1}$  é limitada superiormente.

## 2. SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Começamos com um critério geral de convergência para séries com (ou sem) sinal, a saber, o critério de Cauchy.

**Teorema 2.1** (Critério de Cauchy). *Uma série*

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

*é convergente se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq n_\varepsilon$  e  $p \in \mathbb{N}$ ,*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

*Demonstração.* A série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge se, e somente se, suas somas parciais  $(s_n)$  formam uma sequência convergente.

Pelo critério de Cauchy,  $(s_n)$  converge se, e somente se,  $(s_n)$  é uma sequência de Cauchy, isto é, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n \geq n_\varepsilon$  e  $p \geq 1$ , então

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon.$$

Mas claramente

$$\begin{aligned} s_{n+p} - s_n &= (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) - (a_1 + \cdots + a_n) \\ &= a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}, \end{aligned}$$

logo  $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq \varepsilon$ . □

**Definição 2.** Uma série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  é absolutamente convergente se a série dos valores absolutos

$$\sum_{n \geq 1} |a_n|$$

é convergente.

**Teorema 2.2.** *Se a série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  é absolutamente convergente, então ela é convergente. Em outras palavras, se*

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| \text{ converge, então } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge também.}$$

*Demonstração.* Como  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  converge, pelo critério de Cauchy, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq n_\varepsilon$  e  $p \geq 1$ ,

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Mas

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|,$$

logo  $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$ , mostrando, via o critério de Cauchy, que a série

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

é convergente. □

**Observação 2.1.** Vemos ver que a série

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é convergente. Porém,

$$\sum_{n \geq 1} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

é a série harmônica, uma série divergente. Portanto,

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

é convergente, mas não absolutamente convergente.

**Teorema 2.3** (O teste da raiz). *Seja*

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

*uma série de números reais e suponha que o limite abaixo exista.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$$

- (i) *Se  $a < 1$ , então a série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge absolutamente.*
- (ii) *Se  $a > 1$ , então a série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  diverge.*
- (iii) *Se  $a = 1$ , o teste é inconclusivo (não fornece nenhuma informação sobre a convergência da série).*

*Demonstração.* (i) Seja  $\sigma \in (a, 1)$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a < \sigma$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sigma \quad \text{para todo } n \geq n_\varepsilon.$$

Logo,  $|a_n| \leq \sigma^n$  para todo  $n \geq 1$ .

A série geométrica  $\sum_{n \geq 1} \sigma^n$  converge, já que  $\sigma < 1$ . Pelo critério de comparação,  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  converge também (pois  $|a_n| \geq 0$ ). Logo,  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge absolutamente.

(ii) Seja agora  $R \in (1, a)$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a > R$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq R \quad \text{para todo } n \geq n_1,$$

isto é,  $|a_n| \geq R^n$  para  $n \geq n_1$ .

Mas  $\sum_{n \geq 1} R^n$  diverge, já que  $R > 1$ . Portanto,  $\sum_{n \geq 1} a_n$  diverge.  $\square$

Como  $R > 1$ , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R^n = \infty.$$

Mas  $|a_n| \geq R^n$  para  $n \geq n_1$ , logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty.$$

Em particular,  $a_n \not\rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , logo  $\sum a_n$  diverge.

(iii) A série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge. Seja  $a_n = \frac{1}{n}$ , então

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge, e quanto a ela

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, existem séries  $\sum a_n$  com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

que são convergentes, e também que são divergentes.

**Exemplo 2.4.** Considere a série

$$\sum_{n \geq 1} na^n = a + 2a^2 + 3a^3 + \dots$$

(onde  $a \in \mathbb{R}$ ). Vamos verificar sua convergência.

De fato, seja  $a_n = na^n$ . Então

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a|^n} = \sqrt[n]{n} |a|.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  (isso deve ser explicado!) segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot |a| = |a|.$$

Se  $|a| < 1$ , concluímos que  $\sum_{n \geq 1} na^n$  converge. Se  $|a| > 1$ ,  $\sum_{n \geq 1} na^n$  diverge.

Se  $|a| = 1$ , então  $a = 1$  ou  $a = -1$ .

Se  $a = 1$ , a série se torna  $\sum n$ , que evidentemente diverge. Similarmente, se  $a = -1$ ,  $\sum n(-1)^n$  diverge, já que  $n(-1)^n \not\rightarrow 0$ .

**Teorema 2.5** (o teste da razão). *Seja  $\sum_{n \geq 1} a_n$  uma série de números reais  $a_n \neq 0 \forall n$ . Suponha que exista o limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c.$$

- (i) *Se  $c < 1$  então a série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge absolutamente.*
- (ii) *Se  $c > 1$  então a série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  diverge.*
- (iii) *Se  $c = 1$  o teste é inconclusivo.*

*Demonstração.* (i) Suponha que  $c < 1$  e seja  $\sigma \in (c, 1)$ . Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < \sigma,$$

existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &\leq \sigma \\ \Rightarrow |a_{n+1}| &\leq \sigma |a_n|. \end{aligned}$$

Por indução,

$$|a_{n_0+k}| \leq \sigma^k |a_{n_0}| \quad \forall k \geq 0.$$

Daí,

$$|a_{n_0+k}| \leq \sigma^k |a_{n_0}| = \sigma^k \frac{|a_{n_0}|}{\sigma^{n_0}}.$$

Seja  $A = \frac{|a_{n_0}|}{\sigma^{n_0}}$ . Concluimos que

$$|a_m| \leq A \sigma^m \quad \forall m \geq n_0.$$

Como a série

$$\sum_{m \geq n_0} A \sigma^m = A \sum_{m \geq n_0} \sigma^m$$

é convergente, já que  $\sigma \in (0, 1)$ , pelo critério de comparação,

$$\sum_{n \geq n_0} |a_n|$$

é convergente também.

Logo  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  é convergente, portanto  $\sum_{n \geq 1} a_n$  é absolutamente convergente.

(ii) Suponha que  $c > 1$  e seja  $R \in (1, c)$ . Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c > R,$$

existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &\geq R \\ \Rightarrow |a_{n+1}| &\geq R |a_n|. \end{aligned}$$

Por indução, para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $n \geq n_0$ .

$$|a_{n+k}| \geq R^k |a_n|.$$

Como  $R > 1$  e  $a_{n_0} \neq 0$ , tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R^k |a_{n_0}| = \infty,$$

logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_0+k}| = \infty.$$

Em particular,  $a_n \not\rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , logo  $\sum a_n$  diverge.

(iii) A série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge e a razão

$$\frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, a série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge, enquanto a razão

$$\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto quando  $c = 1$ , a série pode ser convergente ou divergente.  $\square$

**Exemplo 2.6.** Vamos considerar a série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

onde  $x \in \mathbb{R}$ .

Seja

$$a_n = \frac{x^n}{n!}.$$

Então

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

independentemente do valor de  $x \in \mathbb{R}$ .

Como  $0 < 1$ , pelo teste da razão concluímos que a série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

converge absolutamente.

Vamos examinar a relação entre o teste da raiz e o teste da razão.

**Teorema 2.7.** *Seja  $(a_n)$  uma sequência de números positivos. Se existe*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$$

*então também existe*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c.$$

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon > 0$ . Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c,$$

existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - c \right| &< \varepsilon \\ \Rightarrow c - \varepsilon &< \frac{a_{n+1}}{a_n} < c + \varepsilon \\ \Rightarrow a_n(c - \varepsilon) &< a_{n+1} < a_n(c + \varepsilon). \end{aligned}$$

Por indução, para todo  $k \geq 1$  e  $n \geq n_\varepsilon$ ,

$$a_n(c - \varepsilon)^k < a_{n+k} < a_n(c + \varepsilon)^k,$$

logo

$$\frac{a_n}{(c - \varepsilon)^n} (c - \varepsilon)^{n+k} < a_{n+k} < \frac{a_n}{(c + \varepsilon)^n} (c + \varepsilon)^{n+k}.$$

Denotamos  $m = n_\varepsilon + k$ ,  $A = \frac{a_{n_\varepsilon}}{(c-\varepsilon)^{n_\varepsilon}}$ ,  $B = \frac{a_{n_\varepsilon}}{(c+\varepsilon)^{n_\varepsilon}}$ . Então para todo  $m \geq n_\varepsilon$ ,

$$A(c-\varepsilon)^m \leq a_m \leq B(c+\varepsilon)^m.$$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{A}(c-\varepsilon) \leq \sqrt[m]{a_m} \leq \sqrt[m]{B}(c+\varepsilon).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \liminf_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{A}(c-\varepsilon) &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m}, \\ \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{B}(c+\varepsilon). \end{aligned}$$

Mas

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{A} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{B} = 1.$$

Logo,

$$c - \varepsilon \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m},$$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} \leq c + \varepsilon.$$

Daí, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$c - \varepsilon \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} \leq c + \varepsilon.$$

Logo, passando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \liminf_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} = c \\ \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} &= c. \end{aligned}$$

□

A prova acima usou o seguinte resultado.

**Lema 2.8.** *Seja  $A > 0$ . Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A} = 1.$$

*Demonstração.* Se  $A > 1$ , por indução ( $\sqrt[n]{A}$ ) é não crescente e  $\sqrt[n]{A} \geq 1$ . Logo existe

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A}$$

com  $\ell \geq 1$ .

Por outro lado,

$$\sqrt[n]{A} = (\sqrt[2n]{A})^2$$

Logo

$$\ell = \ell^2 \Rightarrow \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = 1.$$

Como  $\ell \geq 1$  segue  $\ell = 1$ .

O caso  $A < 1$  é similar.

□

**Exemplo 2.9.** Vamos usar o teorema anterior para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

De fato, seja  $a_n = \frac{1}{n!}$ . Então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0.$$

## 3. SÉRIES ALTERNADAS

Vamos mostrar que embora a série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

seja divergente, a série alternada

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

é convergente.

Vamos começar com um resultado bem mais geral.

**Teorema 3.1** (Teste de Dirichlet). *Seja  $\sum_{n \geq 1} a_n$  uma série (não necessariamente convergente)*

*cujas somas parciais  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  formam uma sequência limitada.*

*Seja  $(b_n)_{n \geq 1}$  uma sequência não crescente com  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  (abreviamos  $b_n \downarrow 0$ ).*

*Então a série  $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$  é convergente.*

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n \\ &= a_1(b_1 - b_2) + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n \\ &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2) b_3 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n \\ &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) \\ &\quad + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + \dots + (a_1 + \dots + a_n) b_n \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + s_3(b_3 - b_4) + \dots + s_n b_n \\ &= \sum_{k \geq 1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n. \end{aligned}$$

Como a sequência  $(s_n)_{n \geq 1}$  é limitada, existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$|s_n| \leq M \quad \forall n \geq 1.$$

Além disso,  $b_k \geq b_{k+1}$  então  $|b_k - b_{k+1}| = (b_k - b_{k+1})$ . Portanto

$$\sum_{k \geq 1} |s_k(b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k \geq 1} (b_k - b_{k+1}).$$

Sendo uma soma telescópica, e como  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , tem-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 - b_n) = b_1.$$

Pelo critério da comparação,  $\sum s_k(b_{k-1} - b_k)$  converge (absolutamente).

Finalmente, como a sequência  $(s_n)_{n \geq 1}$  é limitada e  $b_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n b_n = 0.$$

Concluimos que a série

$$\sum_{n \geq 1} a_n b_n = \sum_{n \geq 1} s_n(b_n - b_{n+1}) + s_n b_n$$

converge. □

**Corolário 3.2** (Abel). Se  $\sum a_n$  converge e  $b_n \downarrow 0$  então  $\sum a_n b_n$  converge.

A afirmação é evidente, já que se  $\sum a_n$  converge, então suas somas parciais formam uma sequência convergente, logo limitada, e o teorema anterior é imediatamente aplicável.

**Corolário 3.3** (Leibniz). Se  $b_n \downarrow 0$  então  $\sum (-1)^{n+1} b_n$  converge.

*Demonstração.* De fato, seja  $a_n = (-1)^{n+1}$ , então

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \pm 1 = 0 \quad \text{ou } 1,$$

dependendo da paridade de  $n$ . De qualquer forma,  $|s_n| \leq 1$ , então o teorema de Dirichlet é aplicável e a conclusão segue.  $\square$

**Definição 3.** Uma série convergente mas não absolutamente convergente se chama condicionalmente convergente.

Por exemplo  $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$  é condicionalmente convergente.

**Questão:** Seja  $\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  uma série de números.

A ordem na qual somamos os termos da série importa?

(Observe-se que no caso de uma soma finita, a ordem não importa, a adição é comutativa.)

A resposta é: para séries sem sinal, não importa.

Mas para séries com sinal, importa.

Na verdade, dada uma série condicionalmente convergente  $\sum a_n$ , podemos mudar a ordem dos seus termos para obter uma série convergente para qualquer número dado.