

LISTA 2. INDUÇÃO MATEMÁTICA

Exercício 1. Prove que para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$m + 0 = 0 + m.$$

Exercício 2. Prove que para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$n + s(m) = s(n) + m.$$

Exercício 3. Prove que para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$n + m = m + n.$$

Dica: Fixe $m \in \mathbb{N}$ e prove a afirmação por indução em n . Use os dois exercícios anteriores. Não é obrigatório usar esta dica, desde que você forneça uma solução correta para este exercício.

Exercício 4. Prove que se $m \cdot n = 0$ então $m = 0$ ou $n = 0$.

Dica: Fixe m e use indução em n .

Exercício 5. Prove que se $m \cdot p = n \cdot p$ e $p \neq 0$ então $m = n$.

Dica: Use a propriedade de ordenação total de \mathbb{N} ($m \leq n$ ou $n \leq m$) e o exercício anterior.

Exercício 6. Use indução para provar que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Exercício 7. Defina por indução 2^n e $n!$ e prove que

- (i) $n! > 2^n$ para todo $n \geq 4$,
- (ii) $2^n \geq n^2$ para todo $n \geq 4$.

Exercício 8. Prove que, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n \geq m$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ com $r < m$ tais que

$$n = m \cdot q + r.$$