

AULA 11: UMA PRÉVIA DA INTEGRAL DE LEBESGUE

Seja $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Definiremos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\mathbf{m}(x) = \int f,$$

a integral de f com respeito a medida de Lebesgue, ou, simplesmente, a integral de Lebesgue.

Nem todas as funções podem ser integradas; aquelas que podem ser integradas são chamadas funções mensuráveis à Lebesgue.

O conceito de integração está relacionado ao da soma. Vamos considerar o conceito de somabilidade com mais atenção.

Somas infinitas (séries). Uma série infinita $\sum_{n \geq 1} c_n$ é somável se a sua sequência de somas parciais $S_N := \sum_{n=1}^N c_n$ converge. Vamos considerar duas situações especiais relevantes na construção da integral de Lebesgue.

■ **Soma infinita sem sinal**

Suponha que $c_n \in [0, \infty]$ para todo $n \geq 1$, isto é, $\sum_{n \geq 1} c_n$ é uma série infinita *sem sinal*. Neste caso, a soma desta série existe, embora possa ser infinita, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n = \sup \left\{ \sum_{n \in \mathcal{F}} c_n : \mathcal{F} \subset \mathbb{N} \text{ finito} \right\}.$$

■ **Soma infinita absolutamente somável**

Uma série $\sum_{n \geq 1} c_n$ é chamada *absolutamente somável* se a série sem sinal $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ é finita (o que, em particular, implica a somabilidade da série $\sum_{n \geq 1} c_n$).

Notação. Para um número $c \in \mathbb{R}$, denotamos por

$$c^+ := \begin{cases} c & \text{se } c \geq 0 \\ 0 & \text{se } c < 0 \end{cases} = \max\{c, 0\} \quad \text{e} \quad c^- := \begin{cases} 0 & \text{se } c \geq 0 \\ -c & \text{se } c < 0 \end{cases} = \max\{-c, 0\}.$$

Note que

$$c^+, c^- \geq 0, \quad c = c^+ - c^-, \quad |c| = c^+ + c^-.$$

Com essas notações, uma série $\sum_{n \geq 1} c_n$ é absolutamente somável se e somente se as séries sem sinais $\sum_{n \geq 1} c_n^+$ e $\sum_{n \geq 1} c_n^-$ são finitas. Neste caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^-.$$

Portanto, a somabilidade (absoluta) de séries pode ser reduzida ao caso de séries sem sinais.

Construção da integral de Lebesgue. Definiremos este conceito em vários passos.

1. Seja $f = \mathbf{1}_E$ a função indicadora de um conjunto mensurável E . Então,

$$\int_{R^d} f \, d\mathbf{m} := \mathbf{m}(E).$$

Mais geralmente, suponha que $f = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ seja uma combinação linear de funções indicadoras de conjuntos mensuráveis E_i , com coeficientes $c_i \geq 0$ para todo $i \in [k] := \{1, \dots, k\}$. Este tipo de função será chamada de função simples. Então,

$$\int_{R^d} f \, d\mathbf{m} := \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{m}(E_i).$$

Esta definição corresponde à nossa intuição geométrica da integral de uma função não negativa como o volume abaixo do gráfico da função. Também, por construção, é uma operação linear (como deveria ser).

2. Suponha que $f \geq 0$ possa ser aproximada (de uma maneira razoável) por funções *simples*. Chamamos tal função “mensurável à Lebesgue”. Então,

$$\int_{R^d} f \, d\mathbf{m} := \sup \left\{ \int_{R^d} s \, d\mathbf{m} : s \leq f, \, s \text{ é uma função simples} \right\}.$$

3. Seja $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, então $|f| \geq 0$. Escreva

$$f = f^+ - f^-,$$

onde

$$f^+(x) := f(x)^+ \quad \text{e} \quad f^-(x) := f(x)^-.$$

A função f é chamada *absolutamente integrável* se f^+ e f^- são funções mensuráveis (logo, $|f| = f^+ + f^-$ é mensurável também) e

$$\int_{R^d} |f| \, d\mathbf{m} < \infty.$$

Neste caso, defina

$$\int_{R^d} f \, d\mathbf{m} := \int_{R^d} f^+ \, d\mathbf{m} - \int_{R^d} f^- \, d\mathbf{m}.$$

A seguir, faremos uma apresentação detalhada de cada passo da construção acima.

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES SIMPLES

Começamos com a definição e as propriedades básicas de funções simples.

Definição 1. Uma função $s: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *simples* se

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i},$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ e E_i são conjuntos mensuráveis à Lebesgue para todo $i \in [k]$.

Ademais, $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ é uma função simples *sem sinal* se os coeficientes $c_i \in [0, +\infty]$ para todo $i \in [k]$.

Notação. Vamos fazer as seguintes *convenções* naturais sobre operações algébricas que envolvem $+\infty$.

$$\begin{aligned}\infty + \infty &= \infty \\ c \cdot \infty &= \infty, \text{ se } c > 0 \\ 0 \cdot \infty &= 0 \\ \infty \cdot c &= \infty, \text{ se } c > 0 \\ \infty \cdot 0 &= 0.\end{aligned}$$

Observação 1. Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples. Os conjuntos mensuráveis E_1, \dots, E_k não precisam ser disjuntos. Porém, se for conveniente, pode-se supor que eles são disjuntos e até mesmo, que eles formam uma *partição* do espaço \mathbb{R}^d .

De fato, se (por simplicidade) $k = 2$, logo $s = c_1 \mathbf{1}_{E_1} + c_2 \mathbf{1}_{E_2}$, como os dois conjuntos E_1 e E_2 determinam uma partição de espaço \mathbb{R}^d em quatro subconjuntos

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^d &= (E_1 \setminus E_2) \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_1 \cup E_2)^c \\ &= (E_1 \cap E_2^c) \sqcup (E_2 \cap E_1^c) \sqcup (E_1 \cap E_2) \sqcup (E_1^c \cap E_2^c),\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}s(x) &= c_1 \mathbf{1}_{E_1}(x) + c_2 \mathbf{1}_{E_2}(x) = \begin{cases} c_1 & \text{se } x \in E_1 \cap E_2^c \\ c_2 & \text{se } x \in E_2 \cap E_1^c \\ c_1 + c_2 & \text{se } x \in E_1 \cap E_2 \\ 0 & \text{se } x \in E_1^c \cap E_2^c \end{cases} \\ &= c_1 \mathbf{1}_{E_1 \cap E_2^c} + c_2 \mathbf{1}_{E_2 \cap E_1^c} + (c_1 + c_2) \mathbf{1}_{E_1 \cap E_2} + 0 \mathbf{1}_{E_1^c \cap E_2^c}.\end{aligned}$$

O mesmo argumento vale com qualquer número k de conjuntos E_i , $i \in [k]$.

Dado um conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$, vamos denotar por $E^+ := E$ e por $E^- := E^c$. Então, com estas notações, os conjuntos E_1, \dots, E_k determinam uma partição

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}$$

em 2^k conjuntos mensuráveis, e, claramente,

$$s = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \mathbf{1}_{E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}}$$

para alguns coeficientes $c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}$.

Note que se $c_1, \dots, c_k \in [0, \infty]$, então, claramente $c'_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} = c_1^{\alpha_1} + \dots + c_k^{\alpha_k} \in [0, \infty]$.

Proposição 1. (*propriedades básicas de funções simples*) Sejam s e σ duas funções simples e $c \in \mathbb{R}$. Então,

- (1) $s + \sigma$ e cs são funções simples.
- (2) $s \cdot \sigma$ é uma função simples.
- (3) $s^+, s^-, |s|$ são funções simples.

Demonstração. O primeiro item é óbvio. O segundo segue do fato de que $\mathbf{1}_E \mathbf{1}_F = \mathbf{1}_{E \cap F}$. Para provar o terceiro, seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$, onde os conjuntos mensuráveis E_i , $i \in [k]$ são *disjuntos*. Então, evidentemente,

$$s^\pm = \sum_{i=1}^k c_i^\pm \mathbf{1}_{E_i} \quad \text{e} \quad |s| = \sum_{i=1}^k |c_i| \mathbf{1}_{E_i},$$

que são funções simples. □

Definição 2. (da integral de Lebesgue de uma função simples)

Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples *sem sinal*, então $c_i \in [0, \infty]$ para todo $i \in [k]$. Definimos a integral de s por

$$\int_{\mathbb{R}^d} s \, d\mathbf{m} := \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{m}(E_i),$$

com as convenções acima mencionadas para operações com ∞ .

Ademais, uma função simples qualquer é dita *absolutamente integrável* se

$$\int_{\mathbb{R}^d} |s| \, d\mathbf{m} < \infty.$$

Neste caso, definimos a integral de s por

$$\int_{\mathbb{R}^d} s \, d\mathbf{m} := \int_{\mathbb{R}^d} s^+ \, d\mathbf{m} - \int_{\mathbb{R}^d} s^- \, d\mathbf{m}.$$

Observação 2. A integral de uma função simples sem sinal (e então também a de uma função absolutamente integrável) é bem definida. De fato, dadas duas representações da função simples sem sinal s ,

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{j=1}^l d_j \mathbf{1}_{F_j},$$

onde $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l \in [0, \infty]$, temos que

$$\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{m}(E_i) = \sum_{j=1}^l d_j \mathbf{m}(F_j).$$

Provamos isso em duas etapas. Em primeiro lugar, supomos que os conjuntos $\{E_i\}_{i \in [k]}$ e, respectivamente, $\{F_j\}_{j \in [l]}$ sejam disjuntos dois a dois. Portanto, $\{E_i \cap F_j\}_{(i,j) \in [k] \times [l]}$ também são disjuntos. Pela Observação 1, sem perda da generalidade, podemos supor que

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = \bigcup_{j=1}^l F_j = \mathbb{R}^d.$$

Portanto, para todo $i \in [k]$ e $j \in [l]$,

$$E_i = \bigsqcup_{j=1}^l (E_i \cap F_j) \quad \text{e} \quad F_j = \bigsqcup_{i=1}^k (E_i \cap F_j),$$

logo

$$\mathbf{m}(E_i) = \sum_{j=1}^l \mathbf{m}(E_i \cap F_j) \quad \text{e} \quad \mathbf{m}(F_j) = \sum_{i=1}^k \mathbf{m}(E_i \cap F_j).$$

Note que se $E_i \cap F_j \neq \emptyset$ e se x pertence a esta interseção, então $c_i = s(x) = d_j$. Por outro lado, se $E_i \cap F_j = \emptyset$, então $\mathbf{m}(E_i \cap F_j) = 0$. Logo, para todo $(i, j) \in [k] \times [l]$, tem-se

$$c_i \mathbf{m}(E_i \cap F_j) = d_j \mathbf{m}(E_i \cap F_j).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) &= \sum_{i=1}^k c_i \sum_{j=1}^l m(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_i m(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l d_j m(E_i \cap F_j) \\ &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k d_j m(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^l d_j \sum_{i=1}^k m(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^l d_j m(F_j). \end{aligned}$$

Se $\{E_i\}_{i \in [k]}$ não são disjuntos, podemos substituí-los por conjuntos disjuntos. De fato, pela Observação 1,

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i} \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} (c_1^{\alpha_1} + \dots + c_k^{\alpha_k}) \mathbf{1}_{E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}}. \end{aligned}$$

Ademais, como $c_i^- = 0$ para todo $i \in [k]$, pois $c_i \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} (c_1^{\alpha_1} + \dots + c_k^{\alpha_k}) m(E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}) &= \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} c_1^{\alpha_1} m(E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}) + \dots + \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} c_k^{\alpha_k} m(E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}) \\ &= \sum_{\alpha_1=+, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{+, -\}} c_1 m(E_1 \cap E_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap E_k^{\alpha_k}) + \dots \\ &+ \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \{+, -\}, \alpha_k=+} c_k m(E_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap E_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cap E_k) \\ &= c_1 m(E_1) + \dots + c_k m(E_k), \end{aligned}$$

assim estabelecendo que a integral de uma função simples sem sinal está bem definida.

Dizemos que uma propriedade $P(x)$ vale para quase todo ponto (abreviado q.t.p.) $x \in \mathbb{R}^d$ se

$$m\{x \in \mathbb{R}^d: P(x) \text{ não vale}\} = 0.$$

Por exemplo, dada uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, a afirmação $f = 0$ q.t.p. significa $f(x) = 0$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$, ou seja,

$$m\{x \in \mathbb{R}^d: f(x) \neq 0\} = 0.$$

Além disso, para duas funções f e g , a afirmação $f = g$ q.t.p. significa

$$m\{x \in \mathbb{R}^d: f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Filosofia de Lebesgue: Conjuntos de medida zero não importam em teoria da medida, ou seja, uma afirmação válida em q.t.p. é suficientemente boa.

Definição 3. O suporte (no sentido de teoria da medida) de uma função $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é o conjunto:

$$\text{supp}(f) := \{x \in \mathbb{R}^d: f(x) \neq 0\}.$$

O seguinte resultado resume as propriedades básicas da integral de uma função simples sem sinal.

Proposição 2. *Sejam $s, \sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ duas funções simples sem sinal, e seja $c \in [0, \infty]$. Então,*

(i) (linearidade)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (s + \sigma) \, d\mathbf{m} &= \int_{\mathbb{R}^d} s \, d\mathbf{m} + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma \, d\mathbf{m} \\ \int_{\mathbb{R}^d} (cs) \, d\mathbf{m} &= c \int_{\mathbb{R}^d} s \, d\mathbf{m}.\end{aligned}$$

(ii) (finitude)

$$\int_{\mathbb{R}^d} s \, d\mathbf{m} < \infty \quad \text{se e somente se} \quad s < \infty \text{ q.t.p. e } \mathbf{m}(\text{supp}(f)) < \infty.$$

(iii) (nulidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} s \, d\mathbf{m} = 0 \quad \text{se e somente se} \quad s = 0 \text{ q.t.p.}$$

(iv) (monotonicidade) Se $s \leq \sigma$ q.t.p., então $\int s \leq \int \sigma$.

(v) (equivalência) Se $s = \sigma$ q.t.p., então $\int s = \int \sigma$.

Demonstração. A linearidade é óbvia por definição.

[ii] Seja $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$ uma função simples sem sinal. Podemos supor que $c_i \in (0, \infty]$ para todo $i \in [k]$ e que os conjuntos $\{E_i\}_{i \in [k]}$ são disjuntos. Então,

$$\text{supp}(f) = \bigcup_{i=1}^k E_i.$$

Vamos começar com a implicação oposta.

Como $\mathbf{m}(\text{supp}(f)) < \infty$, temos que $\mathbf{m}(E_i) < \infty$ para todo $i \in [k]$.

Como $s < \infty$ q.t.p., se para algum $j \in [k]$, $c_j = \infty$, então $\mathbf{m}(E_j) = 0$, logo $c_j \mathbf{m}(E_j) = 0$.

Para todos os outros índices i , temos $c_i \mathbf{m}(E_i) < \infty$. Portanto, $\int s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{m}(E_i) < \infty$.

Provamos a implicação direta. Como $\int s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{m}(E_i) < \infty$, e como $c_i > 0$ para todo $i \in [k]$, necessariamente $\mathbf{m}(E_i) < \infty$, logo

$$\mathbf{m}(\text{supp}(f)) = \mathbf{m}\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k \mathbf{m}(E_i) < \infty.$$

Além disso, se para algum índice j temos $c_j = \infty$, como $c_j \mathbf{m}(E_j) \leq \int s < \infty$, então necessariamente $\mathbf{m}(E_j) = 0$. Portanto,

$$\{x: s(x) = \infty\} = \{x: \text{existe } j \in [k], x \in E_j \text{ e } c_j = \infty\} = \bigcup_{j: c_j = \infty} E_j,$$

logo

$$\mathbf{m}(\{x: s(x) = \infty\}) = 0.$$

iii) Como no item anterior, escrevemos $s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i}$, com $c_i > 0$ e E_i disjuntos, logo

$$\text{supp}(f) = \bigcup_{i=1}^k E_i.$$

Se $s = 0$ q.t.p., então $m(\text{supp}(f)) = 0$, logo $m(E_i) = 0$ para todo $i \in [k]$, e daí,

$$\int s = \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = 0.$$

Por outro lado, se

$$\int s = \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = 0,$$

para todo $i \in [k]$ temos que $c_i m(E_i) = 0$, e como $c_i > 0$, tem-se $m(E_i) = 0$, mostrando que

$$m(\text{supp}(f)) = \sum_{i=1}^k m(E_i) = 0,$$

isto é, $s = 0$ q.t.p.

iv) Suponha que $s \leq \sigma$ q.t.p.. Pela Observação 1, podemos representar essas funções como

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{E_i} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{j=1}^l d_j \mathbf{1}_{F_j},$$

onde $\{E_i\}_{i \in [k]}$ e, respectivamente, $\{F_j\}_{j \in [l]}$ são *partições* do espaço \mathbb{R}^d . Portanto, semelhante argumento ao da Observação 2, implica

$$\begin{aligned} \int s &= \sum_{i=1}^k c_i m(E_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l c_i m(E_i \cap F_j) \\ \int \sigma &= \sum_{j=1}^l d_j m(F_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l d_j m(E_i \cap F_j). \end{aligned}$$

Dados $i \in [k]$ e $j \in [l]$, ou $m(E_i \cap F_j) = 0$, e neste caso $c_i m(E_i \cap F_j) = d_j m(E_i \cap F_j)$, ou $m(E_i \cap F_j) > 0$, e neste caso, como $s \leq \sigma$ q.t.p., necessariamente temos $c_i \leq d_j$, logo $c_i m(E_i \cap F_j) \leq d_j m(E_i \cap F_j)$. Segue que $\int s \leq \int \sigma$.

Finalmente, item (v) é uma consequência imediata da monotonicidade da integral. \square

A seguir, apresentamos as propriedades básicas da integral de funções simples com sinal.

Proposição 3. Dadas $s, \sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ funções simples absolutamente integráveis e $c \in \mathbb{R}$, tem-se

(i) (linearidade)

$$\int_{\mathbb{R}^d} (s + \sigma) dm = \int_{\mathbb{R}^d} s dm + \int_{\mathbb{R}^d} \sigma dm \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^d} (cs) dm = c \int_{\mathbb{R}^d} s dm.$$

(ii) (monotonicidade) Se $s \leq \sigma$ q.t.p., então $\int s \leq \int \sigma$.

(iii) (equivalência) Se $s = \sigma$ q.t.p., então $\int s = \int \sigma$.

Demonstração. Exercício. \square