

CAPÍTULO 6. SÉRIES DE NÚMEROS REAIS

SUMÁRIO

1. Séries sem sinal	4
2. Séries absolutamente convergentes	5
3. Séries alternadas	11

Seja

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

uma sequência infinita de números reais.

O objetivo é definir a soma infinita (ou a série)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Consideramos as somas finitas:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

chamadas de *somas parciais*.

A soma infinita

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

será o limite das somas finitas s_n quando $n \rightarrow \infty$, se o limite existir. Mais formalmente,

Definição 1. A série $\sum_{n \geq 1} a_n$ é **convergente** se a sequência de somas parciais

$$s_n = a_1 + \dots + a_n, \quad \forall n \geq 1$$

é convergente. Neste caso, a soma da série é

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Exemplo 0.1. Seja $a \in (0, 1)$ e considere a série geométrica

$$\sum_{n \geq 0} a^n.$$

Como as somas parciais têm uma fórmula fechada,

$$s_n = 1 + a + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1},$$

e como $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$, já que $a \in (0, 1)$, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{0 - 1}{a - 1} = \frac{1}{1 - a}.$$

Portanto, a série $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge e

$$\sum_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1 - a}.$$

Exemplo 0.2. A série

$$1 + 1 + 1 + \dots = \sum_{n \geq 0} 1$$

não converge (diverge), já que suas somas parciais

$$s_n = 1 + \dots + 1 = n$$

formam uma sequência divergente para $+\infty$.

Além disso, a série geométrica

$$\sum_{n \geq 0} a^n, \quad \text{com } a > 1,$$

também diverge, já que

$$s_n = 1 + a + \dots + a^n \geq 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, tem-se que s_n não converge.

Exemplo 0.3. A série

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

diverge. Isto é porque suas somas parciais com índice par

$$s_{2n} = 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) = 0,$$

logo a subsequência $s_{2n} \rightarrow 0$, enquanto

$$s_{2n+1} = 1 + (-1) + \dots + 1 = 1 \rightarrow 1.$$

Teorema 0.4. Se $\sum_{n \geq 1} a_n$ é uma série convergente, então $a_n \rightarrow 0$.

Demonstração. Observe que as somas parciais são

$$s_n = a_1 + \dots + a_n,$$

$$s_{n-1} = a_1 + \dots + a_{n-1}.$$

Logo, $a_n = s_n - s_{n-1}$.

Como $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S \in \mathbb{R}$.

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0. \quad \square$$

□

Corolário 0.5. Se a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ não converge para 0, então a série $\sum_{n \geq 1} a_n$ é divergente.

Isso mostra imediatamente que as séries $\sum_{n \geq 0} a^n$ com $a \geq 1$, $\sum 1$, $\sum (-1)^n$ são divergentes.

Exemplo 0.6. A série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente.

De fato, observe que

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Portanto, as somas parciais

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

E daí,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1.$$

Portanto, a série converge e

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Exemplo 0.7. A série harmônica

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

é divergente.

Para verificar essa afirmação, consideramos as somas parciais com índices potências de 2, ou seja,

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Vamos considerar os primeiros termos dessa sequência:

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Desse modo é fácil perceber que, em geral,

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n \cdot \frac{1}{2}) = \infty$ e $s_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty.$$

Portanto, a sequência de somas parciais $(s_n)_{n \geq 1}$ não pode convergir (possui uma subsequência divergente), logo a série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

diverge.

1. SÉRIES SEM SINAL

Vamos considerar o caso especial (mas muito importante) de séries

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

com termos não negativos (ou sem sinal), i.e. $a_n \geq 0 \forall n \geq 1$.

Observe que as somas parciais satisfazem

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} \\ &= s_n + a_{n+1} \geq s_n. \end{aligned}$$

Ou seja, $s_{n+1} \geq s_n$ para todo $n \geq 1$.

Portanto, a sequência $(s_n)_{n \geq 1}$ é não decrescente.

Lembre-se que uma sequência não decrescente é convergente se e só se é limitada superiormente, e se possui uma subsequência limitada superiormente.

Portanto, uma série sem sinal

$$\sum_{n \geq 1} a_n \quad (a_n \geq 0 \forall n)$$

converge se e só se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq M \quad \forall n \geq 1.$$

Teorema 1.1 (Critério de comparação). *Sejam $\sum_{n \geq 1} a_n$ e $\sum_{n \geq 1} b_n$ duas séries sem sinal, e suponha que*

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq 1.$$

- (i) Se $\sum_{n \geq 1} b_n$ é convergente, então $\sum_{n \geq 1} a_n$ é convergente também.
- (ii) Se $\sum_{n \geq 1} a_n$ é divergente, então $\sum_{n \geq 1} b_n$ é divergente também.

Demonstração. Sejam

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n, \quad \sigma_n = b_1 + \cdots + b_n$$

as somas parciais das duas séries. Como $a_n \leq b_n \forall n \geq 1$, tem-se

$$s_n \leq \sigma_n \quad \forall n \geq 1.$$

Se $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge, então $(\sigma_n)_n$ é limitada superiormente. Logo, $(s_n)_n$ também é limitada superiormente, então $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. \square

De modo análogo, se $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge, então $(s_n)_n$ não é limitada superiormente, então $(\sigma_n)_n$ não é limitada superiormente, e então $\sum_{n \geq 1} b_n$ diverge.

Exemplo 1.2. Vamos considerar a p -série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p},$$

onde $p > 0$.

Vamos mostrar que a série diverge se $p \leq 1$ e converge se $p > 1$.

- $p \leq 1$: Para todo $n \geq 1$, tem-se $n^p \leq n^1 = n$, então

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}.$$

Como $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, pelo critério de comparação,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$$

diverge também.

■ $p > 1$: Vamos mostrar que a subsequência $(s_{2^n-1})_{n \geq 1}$ é limitada superiormente. Como já vimos, isso será suficiente para concluirmos a convergência da série.

De fato,

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p} \\ &< 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p}. \end{aligned}$$

Logo,

$$s_{2^n-1} < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^p} + 4 \cdot \frac{1}{4^p} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^p}.$$

Isto é,

$$s_{2^n-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k.$$

Seja $a = \frac{1}{2^{p-1}}$.

Como $p > 1$, tem-se $p-1 > 0$, então $2^{p-1} > 1$, e logo

$$a = \frac{1}{2^{p-1}} < 1.$$

Logo, a série

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n = \sum_{n \geq 0} a^n$$

converge, então suas somas parciais formam uma sequência convergente, logo limitada superiormente.

Como

$$s_{2^n-1} < \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k,$$

concluímos que $(s_{2^n-1})_{n \geq 1}$ é limitada superiormente.

2. SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Começamos com um critério geral de convergência para séries com (ou sem) sinal, a saber, o critério de Cauchy.

Teorema 2.1 (Critério de Cauchy). *Uma série*

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

é convergente se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_\varepsilon$ e $p \in \mathbb{N}$,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstração. A série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge se, e somente se, suas somas parciais (s_n) formam uma sequência convergente.

Pelo critério de Cauchy, (s_n) converge se, e somente se, (s_n) é uma sequência de Cauchy, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_\varepsilon$ e $p \geq 1$, então

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon.$$

Mas claramente

$$\begin{aligned}s_{n+p} - s_n &= (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) - (a_1 + \cdots + a_n) \\ &= a_{n+1} + \cdots + a_{n+p},\end{aligned}$$

logo $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq \varepsilon$. □

Definição 2. Uma série $\sum_{n \geq 1} a_n$ é absolutamente convergente se a série dos valores absolutos

$$\sum_{n \geq 1} |a_n|$$

é convergente.

Teorema 2.2. Se a série $\sum_{n \geq 1} a_n$ é absolutamente convergente, então ela é convergente. Em outras palavras, se

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| \text{ converge, então } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge também.}$$

Demonstração. Como $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ converge, pelo critério de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_\varepsilon$ e $p \geq 1$,

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Mas

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|,$$

logo $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$, mostrando, via o critério de Cauchy, que a série

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

é convergente. □

Observação 2.1. Vemos ver que a série

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

é convergente. Porém,

$$\sum_{n \geq 1} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

é a série harmônica, uma série divergente. Portanto,

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

é convergente, mas não absolutamente convergente.

Teorema 2.3 (O teste da raiz). *Seja*

$$\sum_{n \geq 1} a_n$$

uma série de números reais e suponha que o limite abaixo exista.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$$

(i) Se $a < 1$, então a série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge absolutamente.

(ii) Se $a > 1$, então a série $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge.

(iii) Se $a = 1$, o teste é inconclusivo (não fornece nenhuma informação sobre a convergência da série).

Demonstração. (i) Seja $\sigma \in (a, 1)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a < \sigma$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sigma \quad \text{para todo } n \geq n_\varepsilon.$$

Logo, $|a_n| \leq \sigma^n$ para todo $n \geq 1$.

A série geométrica $\sum_{n \geq 1} \sigma^n$ converge, já que $\sigma < 1$. Pelo critério de comparação, $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ converge também (pois $|a_n| \geq 0$). Logo, $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge absolutamente.

(ii) Seja agora $R \in (1, a)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a > R$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq R \quad \text{para todo } n \geq n_1,$$

isto é, $|a_n| \geq R^n$ para $n \geq n_1$.

Mas $\sum_{n \geq 1} R^n$ diverge, já que $R > 1$. Portanto, $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge. \square

Como $R > 1$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R^n = \infty.$$

Mas $|a_n| \geq R^n$ para $n \geq n_1$, logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty.$$

Em particular, $a_n \not\rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, logo $\sum a_n$ diverge.

(iii) A série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Seja $a_n = \frac{1}{n}$, então

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, e quanto a ela

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{n^2} \right)^{1/n} \rightarrow 1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, existem séries $\sum a_n$ com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

que são convergentes, e também que são divergentes.

Exemplo 2.4. Considere a série

$$\sum_{n \geq 1} na^n = a + 2a^2 + 3a^3 + \dots$$

(onde $a \in \mathbb{R}$). Vamos verificar sua convergência.

De fato, seja $a_n = na^n$. Então

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a|^n} = \sqrt[n]{n} |a|.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (isso deve ser explicado!) segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot |a| = |a|.$$

Se $|a| < 1$, concluímos que $\sum_{n \geq 1} na^n$ converge. Se $|a| > 1$, $\sum_{n \geq 1} na^n$ diverge.

Se $|a| = 1$, então $a = 1$ ou $a = -1$.

Se $a = 1$, a série se torna $\sum n$, que evidentemente diverge. Similarmente, se $a = -1$, $\sum n(-1)^n$ diverge, já que $n(-1)^n \not\rightarrow 0$.

Teorema 2.5 (o teste da razão). *Seja $\sum_{n \geq 1} a_n$ uma série de números reais $a_n \neq 0 \forall n$. Suponha que existe o limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c.$$

- (i) Se $c < 1$ então a série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge absolutamente.
- (ii) Se $c > 1$ então a série $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge.
- (iii) Se $c = 1$ o teste é inconclusivo.

Demonastração. (i) Suponha que $c < 1$ e seja $\sigma \in (c, 1)$. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < \sigma,$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &\leq \sigma \\ \Rightarrow |a_{n+1}| &\leq \sigma |a_n|. \end{aligned}$$

Por indução,

$$|a_{n_0+k}| \leq \sigma^k |a_{n_0}| \quad \forall k \geq 0.$$

Daí,

$$|a_{n_0+k}| \leq \sigma^k |a_{n_0}| = \sigma^k \frac{|a_{n_0}|}{\sigma^{n_0}}.$$

Seja $A = \frac{|a_{n_0}|}{\sigma^{n_0}}$. Concluímos que

$$|a_m| \leq A \sigma^m \quad \forall m \geq n_0.$$

Como a série

$$\sum_{m \geq n_0} A \sigma^m = A \sum_{m \geq n_0} \sigma^m$$

é convergente, já que $\sigma \in (0, 1)$, pelo critério de comparação,

$$\sum_{n \geq n_0} |a_n|$$

é convergente também.

Logo $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ é convergente, portanto $\sum_{n \geq 1} a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Suponha que $c > 1$ e seja $R \in (1, c)$. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c > R,$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &\geq R \\ \Rightarrow |a_{n+1}| &\geq R |a_n|. \end{aligned}$$

Por indução, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$.

$$|a_{n+k}| \geq R^k |a_n|.$$

Como $R > 1$ e $a_{n_0} \neq 0$, tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R^k |a_{n_0}| = \infty,$$

logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_0+k}| = \infty.$$

Em particular, $a_n \not\rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, logo $\sum a_n$ diverge.

(iii) A série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge e a razão

$$\frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, a série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, enquanto a razão

$$\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto quando $c = 1$, a série pode ser convergente ou divergente. \square

Exemplo 2.6. Vamos considerar a série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

onde $x \in \mathbb{R}$.

Seja

$$a_n = \frac{x^n}{n!}.$$

Então

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

independentemente do valor de $x \in \mathbb{R}$.

Como $0 < 1$, pelo teste da razão concluímos que a série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

converge absolutamente.

Vamos examinar a relação entre o teste da raiz e o teste da razão.

Teorema 2.7. Seja (a_n) uma sequência de números positivos. Se existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$$

então também existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = c.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c,$$

existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - c \right| &< \varepsilon \\ \Rightarrow c - \varepsilon &< \frac{a_{n+1}}{a_n} < c + \varepsilon \\ \Rightarrow a_n(c - \varepsilon) &< a_{n+1} < a_n(c + \varepsilon). \end{aligned}$$

Por indução, para todo $k \geq 1$ e $n \geq n_\varepsilon$,

$$a_n(c - \varepsilon)^k < a_{n+k} < a_n(c + \varepsilon)^k,$$

logo

$$\frac{a_n}{(c - \varepsilon)^n} (c - \varepsilon)^{n+k} < a_{n+k} < \frac{a_n}{(c + \varepsilon)^n} (c + \varepsilon)^{n+k}.$$

Denotamos $m = n_\varepsilon + k$, $A = \frac{a_{n_\varepsilon}}{(c-\varepsilon)^{n_\varepsilon}}$, $B = \frac{a_{n_\varepsilon}}{(c+\varepsilon)^{n_\varepsilon}}$. Então para todo $m \geq n_\varepsilon$,

$$A(c-\varepsilon)^m \leq a_m \leq B(c+\varepsilon)^m.$$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{A}(c-\varepsilon) \leq \sqrt[m]{a_m} \leq \sqrt[m]{B}(c+\varepsilon).$$

Portanto

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{A}(c-\varepsilon) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m},$$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{B}(c+\varepsilon).$$

Mas

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{A} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{B} = 1.$$

Logo,

$$c - \varepsilon \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m},$$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} \leq c + \varepsilon.$$

Daí, para todo $\varepsilon > 0$,

$$c - \varepsilon \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} \leq c + \varepsilon.$$

Logo, passando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} = \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} = c$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} = c.$$

□

A prova acima usou o seguinte resultado.

Lema 2.8. Seja $A > 0$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A} = 1.$$

Demonstração. Se $A > 1$, por indução ($\sqrt[n]{A}$) é não crescente e $\sqrt[n]{A} \geq 1$. Logo existe

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A}$$

com $\ell \geq 1$.

Por outro lado,

$$\sqrt[n]{A} = (\sqrt[2n]{A})^2$$

Logo

$$\ell = \ell^2 \Rightarrow \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = 1.$$

Como $\ell \geq 1$ segue $\ell = 1$.

O caso $A < 1$ é similar.

□

Exemplo 2.9. Vamos usar o teorema anterior para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

De fato, seja $a_n = \frac{1}{n!}$. Então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0.$$

3. SÉRIES ALTERNADAS

Vamos mostrar que embora a série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

seja divergente, a série alternada

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

é convergente.

Vamos começar com um resultado bem mais geral.

Teorema 3.1 (Teste de Dirichlet). *Seja $\sum_{n \geq 1} a_n$ uma série (não necessariamente convergente) cujas somas parciais $s_n = a_1 + \dots + a_n$ formam uma sequência limitada.*

Seja $(b_n)_{n \geq 1}$ uma sequência não crescente com $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ (abreviamos $b_n \downarrow 0$).

Então a série $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ é convergente.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n \\ &= a_1(b_1 - b_2) + a_2(b_2 - b_3) + a_3(b_3 - b_4) + \dots + a_n(b_n - b_{n+1}) \\ &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + \dots + a_n(b_n - b_{n+1}) \\ &= a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) \\ &\quad + (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_4) + \dots + (a_1 + \dots + a_n)(b_n - b_{n+1}) \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + s_3(b_3 - b_4) + \dots + s_n(b_n - b_{n+1}). \end{aligned}$$

Como a sequência $(s_n)_{n \geq 1}$ é limitada, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|s_n| \leq M \quad \forall n \geq 1.$$

Além disso, $b_k \geq b_{k+1}$ então $|b_k - b_{k+1}| = (b_k - b_{k+1})$. Portanto

$$\sum_{k \geq 1} |s_k(b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k \geq 1} (b_k - b_{k+1}).$$

Sendo uma soma telescópica, e como $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, tem-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 - b_n) = b_1.$$

Pelo critério da comparação, $\sum s_k(b_{k-1} - b_k)$ converge (absolutamente).

Finalmente, como a sequência $(s_n)_{n \geq 1}$ é limitada e $b_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n b_n = 0.$$

Concluímos que a série

$$\sum_{n \geq 1} a_n b_n = \sum_{n \geq 1} s_n(b_n - b_{n+1}) + s_n b_n$$

converge. \square

Corolário 3.2 (Abel). *Se $\sum a_n$ converge e $b_n \downarrow 0$ então $\sum a_n b_n$ converge.*

A afirmação é evidente, já que se $\sum a_n$ converge, então suas somas parciais formam uma sequência convergente, logo limitada, e o teorema anterior é imediatamente aplicável.

Corolário 3.3 (Leibniz). *Se $b_n \downarrow 0$ então $\sum (-1)^{n+1} b_n$ converge.*

Demonstração. De fato, seja $a_n = (-1)^{n+1}$, então

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \pm 1 = 0 \quad \text{ou } 1,$$

dependendo da paridade de n . De qualquer forma, $|s_n| \leq 1$, então o teorema de Dirichlet é aplicável e a conclusão segue. \square

Definição 3. Uma série convergente mas não absolutamente convergente se chama condicionalmente convergente.

Por exemplo $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ é condicionalmente convergente.

Questão: Seja $\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ uma série de números.

A ordem na qual somamos os termos da série importa?

(Observe-se que no caso de uma soma finita, a ordem não importa, a adição é comutativa.)

A resposta é: para séries sem sinal, não importa.

Mas para séries com sinal, importa.

Na verdade, dada uma série condicionalmente convergente $\sum a_n$, podemos mudar a ordem dos seus termos para obter uma série convergente para qualquer número dado.