AULA 5: A EQUIVALÊNCIA ENTRE A INTEGRAL DE RIEMANN E A INTEGRAL DE DARBOUX

Teorema 1. *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, f é integrável à Riemann se e somente se f é integrável à Darboux. Neste caso,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \mathcal{D}\int_a^b f$.

Demonstração. $\boxed{\mathcal{R} \implies \mathcal{D}:}$ Seja $\epsilon > 0$. Como f é integrável à Riemann, existe $\delta > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ e para toda escolha de pontos intermediários $x_1^\star \in I_1$, $x_2^\star \in I_2$, $\dots$, $x_n^\star \in I_n$, se $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, então a soma de Riemann correspondente satisfaz

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k^\star)\, |I_k| - \int_a^b f \right| < \epsilon\,,$$

ou seja

$$\int_a^b f - \epsilon < \sum_{k=1}^n f(x_k^\star)\, |I_k| < \int_a^b f + \epsilon\,. \tag{1}$$

Denotando por

$$m_k := \inf\{f(x)\colon x \in I_k\}$$
$$M_k := \sup\{f(x)\colon x \in I_k\}$$

e definindo as funções escada

$$s := \sum_{k=1}^n m_k\, \mathbf{1}_{I_k} \quad \text{e} \quad \sigma := \sum_{k=1}^n M_k\, \mathbf{1}_{I_k}\,,$$

tem-se

$$s \le f \le \sigma$$

e

$$\int_a^b s = \sum_{k=1}^n m_k\, |I_k|\,, \qquad \int_a^b \sigma = \sum_{k=1}^n M_k\, |I_k|\,. \tag{2}$$

Tomando em (**??**) o ínfimo (e depois o supremo) em cada intervalo I_k sobre todos os pontos intermediários $x_k^* \in I_k$, obtemos o seguinte:

$$\int_a^b f - \epsilon \le \sum_{k=1}^n m_k\, |I_k| \le \sum_{k=1}^n M_k\, |I_k| \int_a^b f + \epsilon\,,$$

então, usando (**??**),

$$\int_a^b f - \epsilon \le \int_a^b s \le \int_a^b \sigma \le \int_a^b f + \epsilon\,.$$

Portanto,

$$\int_a^b \sigma - \int_a^b s \le \left(\int_a^b f + \epsilon\right) - \left(\int_a^b f - \epsilon\right) = 2\epsilon\,,$$

mostrando que f é integrável à Darboux.

$\boxed{\mathcal{D} \implies \mathcal{R}:}$ Sem perda de generalidade, podemos supor que $f \geq 0$. De fato, como f é limitada, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $-K \leq f \leq K$. Então, $f + K \geq 0$, e uma vez estabelecida a integrabilidade à Riemann de $f + K$, a de f segue imediatamente.

Assim, suporemos a partir de agora que $0 \leq f(x) \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Fixe $\epsilon > 0$.

Como f é integrável à Darboux, existem duas funções escada s e σ tais que

$$s \leq f \leq \sigma \quad \text{e} \quad \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon\,.$$

Como $f \geq 0$, sua a aproximação por baixo s também pode ser escolhida tal que $s \geq 0$.

Escrevemos

$$s = \sum_{k=1}^N c_k\, \mathbf{1}_{I_k}, \quad c_k \geq 0$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^N d_k\, \mathbf{1}_{I_k},$$

onde $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a, b]$.

Seja

$$\delta := \min\left\{ |I_k|\,, k = 1, \dots, N,\ \frac{\epsilon}{N^2\, K} \right\}\,.$$

Considere uma partição qualquer $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_m\}$ com $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, pontos intermediários $x_l^\star \in J_l$, para todo índice $l = 1, \dots, m$ e soma de Riemann correspondente

$$\sum_{l=1}^m f(x_l^\star)\, |J_l|\ .$$

Dado um índice $l \in \{1, \dots, m\}$, há duas possibilidades sobre o intervalo correspondente J_l:

- Existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que $J_l \subset I_k$. Neste caso, chamamos o índice l "bom".
- Não existe tal intervalo I_k. Neste caso, chamamos o índice l "ruim".

Vamos considerar primeiro o caso ruim. Como $\{I_1, \dots, I_k\}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$, existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que $J_l \cap I_k \neq \emptyset$. Mas como $J_l \not\subset I_k$, necessariamente J_l contém um ponto extremo do intervalo I_k (e também intersecta um outro intervalo $I_{k'}$). Já que

$$|J_l| \leq \Delta(\mathcal{P}) < \delta < |I_k|\ ,$$

segue que J_l contém exatamente um ponto extremo de um único intervalo I_k, com $k \in \{1, \dots, N\}$. Portanto,

$$\#\left\{ l \in \{1, \dots, m\} \colon J_l \text{ é ruim } \right\} \leq N \tag{3}$$

$$\sum_{l\colon \text{ruim}} |J_l| \leq N\, \delta\,. \tag{4}$$

Então, a parte da soma de Riemann correspondente aos índices ruins tem a cota

$$0 \leq \sum_{l\colon \text{ruim}} f(x_l^\star)\, |J_l| \leq N\, K\, \delta < \epsilon, \tag{5}$$

ou seja, tem uma contribuição pequena.

A seguir, vamos estimar a parte da soma de Riemann correspondente aos índices bons. Para fazer isso, note que se $x_l^\star \in J_l \subset I_k$, então, como $s \leq f \leq \sigma$, segue que

$$c_k = s(x_l^\star) \leq f(x_l^\star) \leq \sigma(x_l^\star) = d_k\,.$$

Começamos com a estimativa por cima:

$$\begin{aligned}\sum_{l\colon \text{bom}} f(x_l^\star)\,|J_l| &= \sum_{k=1}^m \sum_{l\colon J_l\subset I_k} f(x_l^\star)\,|J_l| \le \sum_{k=1}^m \sum_{l\colon J_l\subset I_k} d_k\,|J_l| \\ &= \sum_{k=1}^N d_k \sum_{l\colon J_l\subset I_k} |J_l| \le \sum_{k=1}^N d_k\,|I_k| = \int_a^b \sigma\,.\end{aligned}$$

Portanto, usando (??), concluímos que

$$\sum_{l=1}^m f(x_l^\star)\,|J_l| = \sum_{l\colon \text{bom}} f(x_l^\star)\,|J_l| + \sum_{l\colon \text{ruim}} f(x_l^\star)\,|J_l| \le \int_a^b \sigma + \epsilon\,. \tag{6}$$

A estimativa por baixo é similar, porém, mais sútil.

Note que dado qualquer $k \in \{1,\dots,N\}$, como $\{J_l\colon l=1,\dots,m\}$ e $\{I_k\colon k=1,\dots,N\}$ são partições de $[a,b]$, tem-se

$$\sum_{l\colon J_l\subset I_k} |J_l| = |I_k| - \sum_{l\colon J_l\cap I_k\neq\emptyset,\ J_l\not\subset I_k} |J_l| \ge |I_k| - \sum_{l\colon \text{ruim}} |J_l| \ge |I_k| - N\delta \tag{7}$$

onde a última desigualdade segue de (??).

Note também que $c_k \le$, já que todo c_k é um valor da função s, e $s \le f \le K$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^m f(x_l^\star)\,|J_l| &\ge \sum_{l\colon \text{bom}} f(x_l^\star)\,|J_l| \qquad (\text{já que } f\ge 0)\\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l\colon J_l\subset I_k} f(x_l^\star)\,|J_l| \ge \sum_{k=1}^N \sum_{l\colon J_l\subset I_k} c_k\,|J_l| \\ &= \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l\colon J_l\subset I_k} |J_l| \ge \sum_{k=1}^N c_k\,(|I_k| - N\delta) \qquad (\text{usando (??)})\\ &= \sum_{k=1}^N c_k\,|I_k| - \sum_{k=1}^N c_k N\delta = \int_a^b s - N\delta \sum_{k=1}^N c_k \\ &\ge \int_a^b s - N^2\delta K > \int_a^b s - \epsilon\,.\end{aligned}$$

Concluímos, junto com a estimativa por cima (??) que

$$\int_a^b s - \epsilon < \sum_{l=1}^m f(x_l^\star)\,|J_l| < \int_a^b \sigma + \epsilon\,.$$

Por outro lado, como $s \le f \le \sigma$, tem-se

$$\int_a^b s \le \mathcal{D}\int_a^b f \le \int_a^b \sigma\,.$$

Portanto,

$$\left|\sum_{l=1}^m f(x_l^\star)\,|J_l| - \mathcal{D}\int_a^b f\right| < \left(\int_a^b \sigma + \epsilon\right) - \left(\int_a^b s - \epsilon\right) = \left(\int_a^b \sigma - \int_a^b s\right) + 2\epsilon < 3\epsilon.$$

Isso mostra que f é integrável à Riemann e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{D}\int_a^b f$. □

A partir de agora, nos referiremos aos dois conceitos (equivalentes) de integração acima coma a integral de Riemann-Darboux.

A proposição seguinte estabelece maneira precisa, a bem conhecida interpretação geométrica da integral à Riemann como área de uma região.

Proposição 1. *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, e suponha que $f \geq 0$. Considere a região planar abaixo do gráfico de f e acima do eixo x:*

$$E := \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a,b] \quad e \quad 0 \leq t \leq f(x)\big\} \; .$$

Se f é integrável à Riemann-Darboux, então E é mensurável à Jordan (em $\mathbb{R}^2$) e

$$\mathrm{m}(E) = \int_a^b f \, .$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, sejam $0 \leq s \leq f \leq \sigma$ funções escada tais que

$$\int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon \, .$$

Escrevemos

$$s = \sum_{k=1}^N c_k \, \mathbf{1}_{I_k} \quad \text{e} \quad \sigma = \sum_{k=1}^N d_k \, \mathbf{1}_{I_k},$$

onde $d_k \geq c_k \geq 0$ e $\{I_1, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a,b]$.

Para cada índice k, considere as caixas em $\mathbb{R}^2$

$$Q_k := I_k \times [0, c_k], \quad \text{e} \quad R_k := I_k \times [0, d_k] \, ,$$

e os conjuntos elementares em $\mathbb{R}^2$

$$A := \bigcup_{k=1}^N Q_k, \quad \text{e} \quad B := \bigcup_{k=1}^N R_k \, .$$

Como $s \leq f \leq \sigma$, tem-se

$$A \subset E \subset B \, .$$

Note que

$$\int_a^b s = \sum_{k=1}^N c_k \, |I_k| = \sum_{k=1}^N |Q_k| = \mathrm{m}(A)$$

e similarmente,

$$\int_a^b \sigma = \sum_{k=1}^N d_k \, |I_k| = \sum_{k=1}^N |R_k| = \mathrm{m}(B) \, .$$

Segue que

$$\int_a^b s = \mathrm{m}(A) \leq \mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq \mathrm{m}^{\star,J}(E) \leq \mathrm{m}(B) = \int_a^b \sigma \, , \tag{8}$$

portanto,

$$\mathrm{m}^{\star,J}(E) - \mathrm{m}_{\star,J}(E) \leq \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon \, ,$$

o que mostra a mensurabilidade à Jordan do conjunto E.

Além disso, como $s \leq f \leq \sigma$, temos que $\int_a^b s \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sigma$, e junto com (**??**),

$$\left| \mathrm{m}(E) - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b \sigma - \int_a^b s < \epsilon \, ,$$

mostrando que $\mathrm{m}(E) = \int_a^b f$. □

Exercício 1. Seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções integráveis à Riemann-Darboux em $[a,b]$. Suponha que

$$f_n \to f \qquad \text{uniformemente.}$$

Prove que o limite uniforme f também é integrável à Riemann-Darboux e

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,.$$

Use a versão de Darboux do conceito de integrabilidade.

No que segue, exploraremos a relação entre a continuidade e a integrabilidade de uma função.

Teorema 2. *Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é continua, então f é integrável à Riemann-Darboux.*

Demonstração. Como f é contínua e $[a,b]$ é compacto, f é, automaticamente, limitada.

Além disso, f é uniformemente contínua. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, dados $x, y \in [a,b]$,

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \,. \tag{9}$$

Considere uma partição $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_N\}$ tal que $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$, e sejam

$$m_k := \inf_{x\in I_k} f(x) \quad \text{e} \quad M_k := \sup_{x\in I_k} f(x) \,.$$

Defina as funções escada

$$s := \sum_{k=1}^N m_k I_k \quad \text{e} \quad \sigma := \sum_{k=1}^N m_k I_k \,.$$

Então, $s \leq f \leq \sigma$ e

$$\int_a^b (\sigma - s) = \sum_{k=1}^N (M_k - m_K)\, |I_k| = \sum_{k=1}^N \omega_f(I_k)\, |I_k| \ ,$$

onde denotamos por $\omega_f(I)$ a *oscilação* da função f no intervalo I.

Dado qualquer índice $k \in \{1, \dots, N\}$, como $|I_k| \leq \Delta(\mathcal{P}) < \delta$, pela continuidade uniforme (**??**) de f, temos que $\omega_f(I_k) < \epsilon$. Portanto,

$$\int_a^b (\sigma - s) < \epsilon \sum_{k=1}^N |I_k| = \epsilon(b-a) \,,$$

o que estabelece a integrabilidade à Darboux da função f. □

Comentário 1. E se a função f tiver um (ou um número finito de) ponto(s) de descontinuidade, ele ainda é integrável (supondo que seja limitada)?

Seja $x_0 \in [a,b]$ e suponha que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seja limitada e contínua em $[a,b] \setminus \{x_0\}$. Com uma pequena modificação, o argumento anterior ainda é aplicável neste cenário. É suficiente isolar o ponto de descontinuidade x_0 em um intervalo suficientemente pequeno.

De fato, sejam $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq f \leq M$, fixe $\epsilon > 0$ e escolha $0 < \delta < \frac{\epsilon}{M-m}$. Então, f é contínua em $I_1 := [a, x_0 - \delta]$ e em $I_2 := [x_0 + \delta, b]$. Pelo teorema anterior, existem funções escada $s_j \leq f \leq \sigma_j$ em I_j, $j = 1, 2$, tais que

$$\int_{I_j} (\sigma_j - s_j) < \epsilon \,.$$

Vamos definir duas funções escada em $[a, b]$ como segue:

$$s := \begin{cases} s_1 & \text{em } I_1 \\ s_2 & \text{em } I_2 \\ m & \text{em } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \sigma := \begin{cases} \sigma_1 & \text{em } I_1 \\ \sigma_2 & \text{em } I_2 \\ M & \text{em } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \,. \end{cases}$$

Evidentemente, $s \leq f \leq \sigma$. Além disso,

$$\int_a^b (\sigma - s) = \int_{I_1} (\sigma - s) + \int_{I_2} (\sigma - s) + (M - m) \left|(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\right| < 3\epsilon \,,$$

provando assim a afirmação de que f é integrável à Riemann-Darboux.

O mesmo argumento é aplicável no caso de uma função com um número finito de pontos de descontinuidade. Um argumento similar, mas um pouco mais elaborado pode ser usado para tratar o caso de um conjunto de pontos de descontinuidade com medida de Jordan nula.

Exercício 2. Seja $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Suponha que o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tenha medida de Jordan zero. Prove que f é integrável à Riemann-Darboux.