ESPAÇOS DE MEDIDA ABSTRATOS

SILVIUS KLEIN

Sumário

Construímos uma família de subconjuntos do espaço euclidiano chamados de conjuntos Lebesgue mensuráveis e definimos a medida de tais conjuntos; introduzimos uma classes geral de funções no espaço euclidiano chamadas de funções Lebesgue mensuráveis e definimos um conceito de integração para tais funções.

O objetivo deste capítulo é desenvolver uma teoria semelhante em um cenário abstrato.

1. Sigma-álgebras e espaços mensuráveis

Definição 1. Dado um conjunto X, uma σ-álgebra sobre X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tal que

(1) $\varnothing \in \mathcal{B}$,
(2) se $E \in \mathcal{B}$ então $E^{\complement} \in \mathcal{B}$,
(3) se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{B}$.

Um par $(X, \mathcal{B})$, onde X é um conjunto (o espaço ambiente) e $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra sobre X é chamado de *espaço mensurável*.

Os elementos de $\mathcal{B}$ são ditos conjuntos $\mathcal{B}$-mensuráveis ou simplesmente, mensuráveis.

Observação 1. Note que o espaço ambiente $X = \varnothing^{\complement} \in \mathcal{B}$. Além disso, $\mathcal{B}$ é fechada também com respeito a interseções enumeráveis: se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então

$$\bigcap_{n\geq 1} E_n = \left(\bigcup_{n \geq 1} E_n^{\complement} \right)^{\complement} \in \mathcal{B}\,.$$

A seguir apresentamos alguns exemplos gerais de σ-álgebras.

Exemplo 1 (de σ-álgebras)**.** Seja X um espaço ambiente.

(1) A σ-álgebra trivial: $\mathcal{B} = \{\varnothing, X\}$.

(2) A σ-álgebra discreta: $\mathcal{B} = 2^X = \{E \colon E \subset X\}$.
(3) A σ-álgebra atômica. Dada uma partição

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$$

de X em “átomos”, seja

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{J}} A_\alpha \colon \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \right\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra (atômica). A prova deste fato é um exercício.

Note que a σ-álgebra trivial é atômica, que corresponde à partição

$$X = \varnothing \sqcup X,$$

enquanto a σ-álgebra discreta também é atômica, onde todos os singletons são átomos:

$$X = \bigsqcup_{x \in X} \{x\}.$$

(4) A σ-álgebra diádica de determinada geração. Dado $n \geq 0$, considere a partição de reta real $\mathbb{R}$ em intervalos diádicos de geração n,

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right)$$

e a σ-álgebra atômica $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ correspondente.

A mesma construção pode ser feita em $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, usando caixas diádicas em vez de intervalos diádicos.

1.1. **Geração de sigma-álgebras.** Dadas duas σ-álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, se $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ dizemos que $\mathcal{B}'$ é *mais fina* do que $\mathcal{B}$, ou que $\mathcal{B}$ é mais grosseira do que $\mathcal{B}'$.

Por exemplo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

É fácil verificar que a interseção de qualquer família $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ de σ-álgebras sobre X também é uma σ-álgebra sobre X, o que nos permite introduzir o seguinte conceito.

Definição 2. Dada uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um espaço ambiente X, seja

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{B} \colon \mathcal{B} \supset \mathcal{F},\, \mathcal{B} \text{ é uma } \sigma - \text{álgebra}\}.$$

Então $\sigma(\mathcal{F})$ é uma σ-álgebra sobre X chamada a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$. Ela é a menor (ou a mais grosseira) σ-álgebra que contém a coleção $\mathcal{F}$.

Note que $2^X \supset \mathcal{F}$ e como 2^X é uma σ-álgebra, a interseção de σ-álgebras acima é bem definida.

Definição 3 (a σ-álgebra de Borel)**.** Denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ a σ-álgebra gerada pela topologia do espaço euclidiano, ou seja,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma \left\{ U \subset \mathbb{R}^d \colon U \text{ aberto} \right\}.$$

Mais geralmente, dado um espaço topológico qualquer $(X, \mathcal{T})$,

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}) = \sigma \{U \subset X \colon U \text{ aberto}\}$$

é chamada a σ-álgebra de Borel do espaço $(X, \mathcal{T})$.

Os conjuntos $E \in \mathcal{B}(X)$ são chamados de conjuntos *borelianos*.

Exemplo 2 (de conjuntos borelianos)**.** Todos os conjuntos abertos, fechados, do tipo F_σ (i.e., uniões enumeráveis de conjuntos fechados), do tipo G_δ (i.e., interseções enumeráveis de conjuntos abertos) são conjuntos borelianos.

1.2. **O mecanismo padrão para conjuntos.** Considere uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é a σ-álgebra $\sigma(\mathcal{F})$ gerada por $\mathcal{F}$. Dada uma propriedade P sobre subconjuntos de X, para provar a afirmação

$$P(E) \text{ vale para todo } E \in \sigma(\mathcal{F})$$

basta provar que:

(1) $P(E)$ vale para todo $E \in \mathcal{F}$;
(2) A coleção
$$\mathcal{A} := \{E \subset X \colon P(E) \text{ vale}\}$$
é uma σ-álgebra, ou seja,
- $P(\varnothing)$ vale,
- se $P(E)$ vale, então $P(E^\complement)$ vale,
- se $P(E_n)$ vale para todo $n \geq 1$ então $P(\bigcup_{n\geq 1} E_n)$ vale.

Proposição 1. *Sejam X e Y dois espaços topológicos e seja $f \colon X \to Y$ uma função contínua. Então para todo conjunto boreliano $E \in \mathcal{B}(Y)$, sua pré-imagem $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$, i.e., ele é um conjunto boreliano em X.*

Demonstração. Para provar a afirmação

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{B}(Y)$$

usamos o mecanismo padrão para conjuntos, lembrando que $\mathcal{B}(Y)$ é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos em Y.

(1) Para todo conjunto aberto E in Y, como f é contínua, $f^{-1}(E)$ é aberto, então boreliano, ou seja, ele pertence a $\mathcal{B}(X)$.
(2) Seja
$$\mathcal{A} := \left\{E \in \mathcal{B}(Y) \colon f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)\right\} .$$
Tem-se
- $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{B}(X)$.
- Se $E \in \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$. Como $\mathcal{B}(x)$ é uma σ-álgebra, $f^{-1}(E)^\complement \in \mathcal{B}(X)$ também. Mas $f^{-1}(E^\complement) = f^{-1}(E)^\complement \in \mathcal{B}(X)$, mostrando que $E^\complement \in \mathcal{A}$.
- Se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ então $f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X)$ para todo $n \geq 1$. Como $\mathcal{B}(X)$ é uma σ-álgebra, segue que
$$f^{-1}(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \bigcup_{n\geq 1} f^{-1}(E_n) \in \mathcal{B}(X)\,,$$
mostrando que $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{A}$.

$\square$

Observação 2. A σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de conjuntos borelianos do espaço euclidiano é *estritamente* mais grosseira que a de todos os conjuntos mensuráveis à Lebesgue, ou seja

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{L}(R^d)\,.$$

De fato, todo conjunto aberto é Lebesgue mensurável, então a σ-álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ contém a σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ geradas pelos conjuntos abertos.

O exercício seguinte fornece um exemplo de conjunto não boreliano mas ainda mensurável à Lebesgue. A construção descrita abaixo, baseada no conjunto de Cantor e na função “escada do diabo” de Cantor, será usada para obter vários outros contraexemplos.

Exercício 1. Sejam $\mathcal{C} \subset [0,1]$ o conjunto de Cantor e $c\colon [0,1] \to [0,1]$ a função de Cantor, Considere a função

$$f\colon [0,1] \to [0,2], \quad f(x) = x + c(x)\,.$$

Então,

(i) f é uma função contínua, sobrejetiva e (estritamente) crescente, portanto é *bi-contínua.*

(ii) A imagem do conjunto de Cantor pela função f é mensurável e

$$\mathrm{m}(f(\mathcal{C})) = 1\,.$$

Por isso (usando um exercício anterior) existe um conjunto *não* mensurável $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{C})$.

(iii) Seja

$$E := f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C}\,.$$

Então E é mensurável à Lebesgue mas não é um conjunto boreliano.

Proposição 2. *Cada uma das seguintes famílias de conjuntos gera a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:*

(i) A família de conjuntos abertos.
(ii) A família de conjuntos fechados.
(iii) A família de conjuntos compactos.
(iv) A família de bolas abertas (ou fechadas).
(v) A família de caixas (ou de caixas diádicas).

Demonstração. Exercício. □

2. Medidas abstratas

Definição 4. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma função

$$\mu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$$

é chamada de *medida* (σ-aditiva) em $(X, \mathcal{B})$ se

(i) $\mu(\varnothing) = 0$ e

(ii) para toda coleção mensurável de conjuntos mensuráveis *disjuntos* $\{E_n\colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$, temos

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\,.$$

A tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$, consistindo em um conjunto X, uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ sobre X e uma medida μ em $(X, \mathcal{B})$ é chamada de *espaço de medida.*

Em seguida apresentamos alguns exemplos de espaços de medida.

Exemplo 3. O espaço da medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$. A medida m é também referida como a medida de volume.

Um outro exemplo comum é o espaço $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$ da medida de Borel, ou seja, o espaço de Borel munido com a restrição da medida de volume.

Exemplo 4. A medida trivial em $(X, \mathcal{B})$: $\mu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{B}$.

Exemplo 5 (a medida de Dirac)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável qualquer e seja $x \in X$ um ponto. A medida de Dirac com centro em x é dada por

$$\delta_x\colon \mathcal{B} \to [0, \infty), \quad \delta_x(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases} = \mathbf{1}_E(x)\,.$$

Note que a função δ_x é, de fato, uma medida:

(i) $\delta_x(\varnothing) = \mathbf{1}_\varnothing(x) = 0$.
(ii) Se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ são disjuntos, então

$$\delta_x\left(\bigsqcup_{n\geq 1} E_n\right) = \mathbf{1}_{\bigsqcup_{n\geq 1} E_n}(x)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(E_n)\,.$$

Exemplo 6 (soma de medidas de Dirac ou de pontos de massa)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Dados pontos $x_1, \dots, x_k \in X$ e números $c_1, \dots, c_k \in [0, \infty]$, seja

$$\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i \, \delta_{x_i}\,.$$

Então μ é uma medida em $(X, \mathcal{B})$ (exercício) chamada de soma de medidas de Dirac com massa concentrada em $x_1, \dots, x_k$ e pesos $c_1, \dots, c_k$.

A ideia é que além do volume (ou área, ou comprimento), a massa de um objeto também pode ser considerada como uma medida. Uma soma de medidas de Dirac corresponde ao caso de uma coleção *discreta* de centros de massa.

Exemplo 7. Mais geralmente, dada uma sequência $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ de medidas em $(X, \mathcal{B})$ e uma sequência $\{c_n\}_{n\geq 1}$ de números não negativos,

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \mu_n$$

é uma medida em $(X, \mathcal{B})$ (exercício).

Exemplo 8 (medida de contagem)**.** Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. A medida de contagem é a função $\# \colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$, $\#(E) =$ a cardinalidade de E se E for finito e $\#(E) = \infty$ se E for um conjunto infinito.

Em seguida listamos algumas propriedades básicas de uma medida. Começamos com uma notação útil.

Notação. Dada uma sequência $\{E_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos, usamos as seguintes notações:

- $E_n \nearrow E$ significa o seguinte: $\forall n \geq 1, E_n \subset E_{n+1}$ e $\bigcup_{n\geq 1} E_n = E$.
- $E_n \searrow E$ significa o seguinte: $\forall n \geq 1, E_n \supset E_{n+1}$ e $\bigcap_{n\geq 1} E_n = E$.

Proposição 3. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. As seguintes afirmações são válidas.*

(i) (monotonicidade) Sejam $E, F \in \mathcal{B}$. Se $E \subset F$ então $\mu(E) \leq \mu(F)$.
(ii) (σ-subaditividade) Se $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ então

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\,.$$

(iii) (convergência monótona para conjuntos) Sejam $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ e $E \in \mathcal{B}$.
- *Se $E_n \nearrow E$ então $\mu(E_n) \to \mu(E)$ quando $n \to \infty$.*
- *Se $E_n \searrow E$ e $\mu(E_1) < \infty$ então $\mu(E_n) \to \mu(E)$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. O argumento é idêntico ao da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$ e é deixado com exercício. □

Da mesma forma que no caso da medida de Lebesgue, introduzimos os seguintes conceitos.

Definição 5. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Um conjunto mensurável $E \in \mathcal{B}$ é chamado *μ-negligenciável*, ou de medida nula se $\mu(E) = 0$.

Uma propriedade $P(x)$ é válida para quase todo ponto $x \in X$ com respeito à medida μ, ou, de uma forma mais concisa, dizemos que $P(x)$ vale para μ-q.t.p. $x \in X$ se o conjunto

$$\{x \in X \colon P(x) \text{ não é válida}\}$$

é $\mathcal{B}$-mensurável e de medida nula.

Observação 3. Em geral, um subconjunto de um conjunto negligenciável *não* e necessariamente mensurável. Por exemplo, considerando o espaço da medida de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{m})$, o conjunto $E \subset \mathcal{C}$ do Exercício 1 não é boreliano, embora o conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ seja boreliano e $\mathrm{m}(\mathcal{C}) = 0$.

Esta observação motiva a seguinte definição.

Definição 6. Um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é dito *completo* se todo conjunto de um conjunto μ-negligenciável é mensurável, ou seja,

$$\text{se } E \in \mathcal{B},\ \mu(E) = 0 \text{ e } F \subset E \text{ então } F \in \mathcal{B}\,.$$

Por exemplo, $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$ é completo, mas $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m})$ não é completo.

3. Funções mensuráveis

Definição 7. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma função $f \colon X \to [0, \infty]$ é dita $\mathcal{B}$-mensurável (ou, simplesmente, mensurável) se para todo conjunto *aberto* $U \subset [0, \infty]$, temos

$$\{f \in U\} := f^{-1}(U) \in \mathcal{B},$$

ou seja, se para todo aberto U, $\{f \in U\}$ é mensurável.

Similarmente, uma função $f \colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável se $\{f \in U\} \in \mathcal{B}$ para todo aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Observação 4. Um conjunto $E \in \mathcal{B}$ se e somente se sua função indicadora $\mathbf{1}_E$ é mensurável.

De fato, como $E = \{\mathbf{1}_E \in (0, 2)\}$, se 1_E é mensurável, segue que $E \in \mathcal{B}$.

Por outro lado, supondo que E seja mensurável e dado $U \subset \mathbb{R}$ aberto, como

$$\{\mathbf{1}_E \in U\} = \begin{cases} X & \text{se } 0 \in U \text{ e } 1 \in U \\ \emptyset & \text{se } 0 \notin U \text{ e } 1 \notin U \\ E & \text{se } 0 \notin U \text{ e } 1 \in U \\ E^{\complement} & \text{se } 0 \in U \text{ e } 1 \notin U, \end{cases}$$

segue que $\{\mathbf{1}_E \in U\} \in \mathcal{B}$, monstrando a mensurabilidade de $\mathbf{1}_E$.

Proposição 4. *Seja $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então para todo conjunto* boreliano *$E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tem-se*

$$\{f \in E\} \in \mathcal{B}.$$

Demonstração. Utilizamos o mecanismo padrão para conjuntos. Seja

$$\mathcal{A} := \big\{\mathbb{E} \subset \mathbb{R} \colon \{f \in E\} \text{ é mensurável}\big\}.$$

Como a função f é mensurável, segue que $U \in \mathcal{A}$ para todo conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Por outro lado, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra. De fato,

- $\{f \in \emptyset\} = \emptyset \in \mathcal{A}$.
- Se $E \in \mathcal{A}$ então $\{f \in E\} \in \mathcal{B}$, e daí,

$$\{f \in E^{\complement}\} = \{f \in E\}^{\complement} \in \mathcal{B},$$

portanto $E^{\complement} \in \mathcal{A}$.

- Se $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ então $\{f \in E_n\} \in \mathcal{B}$ para todo $n \geq 1$. Como

$$\Big\{ f \in \bigcup_{n\geq 1} E_n \Big\} = \bigcup_{n\geq 1} \{f \in E_n\} \in \mathcal{B},$$

segue que $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{A}$.

Concluímos que $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, já que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a menor σ-álgebra contendo os conjuntos abertos. □

Observação 5. Em geral *não* é verdadeiro que dados um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$, uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$ e um conjunto (apenas) *Lebesgue* mensurável $S \subset \mathbb{R}$,

$$\{f \in S\} \in \mathcal{B}.$$

Por exemplo, considere a função do Exercício da aula passada, $f : [0, 1] \to [0, 2]$, $f(x) = x + c(x)$, onde c é a função de Cantor.

Seja $g : [0, 2] \to [0, 1]$ a inversa de f e note que g é mensurável pois é contínua. Considere, como no mesmo Exercício da aula passada, um conjunto *não* mensurável $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{C})$ e seja

$$E := g(\mathcal{N}) = f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C}.$$

Então E é Lebesgue mensurável, enquanto $\mathcal{N} = g^{-1}(E)$ não é Lebesgue mensurável.

Definição 8. Dados dois espaços mensuráveis $(X, \mathcal{B}_X)$ e $(Y, \mathcal{B}_Y)$, uma função $f : X \to Y$ é chamada de mensurável se $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_X$ para todo $E \in \mathcal{B}_Y$.

Observação 6. Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$ e uma função $f : X \to \mathbb{R}$, o contradomínio $\mathbb{R}$ é a priori munido com a σ-álgebra de Borel (em vez da Lebesgue). Desta forma, a noção de mensurabilidade da função $f : X \to \mathbb{R}$ é consistente com o conceito mais geral introduzido acima.

Definição 9. Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$, uma função $s : X \to [0, \infty]$ é chamada de função *simples sem sinal* se

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i},$$

para alguns números $c_i \in [0, \infty]$ e conjuntos $E_i \in \mathcal{B}$, $i \in [k]$.

Similarmente, $s : X \to \mathbb{R}$ é uma função *simples* (com sinal) se

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$$

onde $c_i \in \mathbb{R}, E_i \in \mathcal{B}$ para todo $i \in [k]$.

Observação 7. Toda função simples é mensurável. De fato, se $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{1}_{E_i}$, então dado qualquer aberto U (em $[0, \infty]$ ou $\mathbb{R}$),

$$\{s \in U\} = \bigcup \big\{E_i : c_i \in U, i \in [k]\big\},$$

então $\{s \in U\} \in \mathcal{B}$.

Além disso, note que somas e produtos de funções simples são funções simples também.

Os seguintes resultados básicos sobre funções mensuráveis $f : (X, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ são análogos aos resultados correspondentes sobre funções mensuráveis à Lebesgue $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. As demonstrações deles também são idênticas às demonstrações no contexto euclidiano; por isso, omitiremos os detalhes técnicos das provas.

Teorema 9. *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.*

(1) *Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ (ou $[0,\infty]$) é mensurável se e somente se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{f > \lambda\} \in \mathcal{B}$. Isto também é equivalente a $\{f \geq \lambda\} \in \mathcal{B}$ (ou $\{f < \lambda\} \in \mathcal{B}$, ou $\{f \leq \lambda\} \in \mathcal{B}$) para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(2) *Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se f^+ e f^- são mensuráveis, onde $f^+, f^-\colon X \to [0,\infty)$,*

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \text{ e}$$
$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

(3) *Se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções mensuráveis e $f_n \to f$ em todo ponto, então o limite f é mensurável.*

(4) *Se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\phi \circ f$ é mensurável.*

Demonstração. (1) O conjunto $\{f > \lambda\} = f^{-1}(\lambda, \infty)$ e (λ,∞) é aberto, portanto a implicação indireta segue.

Para justificar a implicação direta, note que todo aberto $U \subset \mathbb{R}$ pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos: $U = \bigcup_{n\geq 1}(a_n, b_n)$. Como

$$\{f \in U\} = \bigcup_{n\geq 1}\{f \in (a_n, b_n)\},$$

basta provar que $\{f \in (a,b)\} \in \mathcal{B}$ para todo intervalo (a,b). Mas

$$\{f \in (a,b)\} = \{f > a\} \cap \{f < b\}.$$

Além disso,

$$\{f < b\} = \{f \geq b\}^{\complement} = \Big\{\bigcap_{n\geq 1}\{f > b - \frac{1}{n}\}\Big\}^{\complement}$$

que pertence a $\mathcal{B}$. Logo, $\{f \in (a,b)\} \in \mathcal{B}$.

(2) A equivalência é uma consequência das seguintes identidades: para todo $\lambda \geq 0$,

$$\{f^+ > \lambda\} = \{f > \lambda\},$$
$$\{f^- > \lambda\} = \{-f > \lambda\} = \{f < -\lambda\},$$
$$\{f = 0\} = \{f^+ = 0\} \cap \{f^- = 0\}.$$

(3) Não é difícil verificar que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) > \lambda \;\text{ sse }\; \exists m \geq 1\ \exists N \geq 1\ \forall n \geq N\ f_n(x) > \lambda + \frac{1}{m}.$$

Portanto,

$$\{f > \lambda\} = \bigcup_{m\geq 1}\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N}\{f_n > \lambda + \frac{1}{m}\} \in \mathcal{B}.$$

(4) Se $U \subset \mathbb{R}$ é aberto, como ϕ é contínua, $\{\phi \in U\} = \phi^{-1}(U)$ é aberto. Portanto,

$$\{\phi \circ f \in U\} = (\phi \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\phi^{-1}(U))$$

é mensurável. □

Teorema 10. *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.*

(1) *Uma função $f\colon X \to [0,\infty]$ é mensurável se e somente se existe uma sequência não decrescente $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples sem sinal e finitas tal que $s_n \to f$ em todo ponto.*

(2) *Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável se e somente se existe uma sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funções simples (com sinal) e finitas tal que $s_n \to f$ em todo ponto.*

Demonstração. As implicações indiretas são consequências do Teorema 9 (3) e da Observação 7 (que toda função simples é mensurável).

A construção de uma sequência monótona de funções simples que convergem para f é idêntica a do caso da integral de Lebesgue no espaço euclidiano. De fato, dada $f\colon X \to [0, \infty]$ mensurável, para todo $n \geq 1$ seja

$$s_n := n\,\mathbf{1}_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=0}^{n\,2^n - 1} \frac{j}{2^n}\,\mathbf{1}_{\left\{f \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)\right\}}\,.$$

Não é difícil verificar que $s_n \leq s_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Além disso, se $f(x) = \infty$, então para todo $n \geq 1$, $s(x) = n \to \infty = f(x)$, enquanto se $f(x) < \infty$, para todo $n > f(x)$ tem-se

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0,$$

logo $s_n(x) \to f(x)$.

Finalmente, dada uma função mensurável com sinal $f\colon X \to \mathbb{R}$, como f^+, f^- são funções mensuráveis sem sinal, pelo argumento acima, existem sequências de funções simples $\{s_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ tal que $s_n \to f^+$ e $\sigma_n \to f^-$ em todo ponto. Portanto, para todo $n \geq 1$, a função $s_n - \sigma_n$ é simples e

$$s_n - \sigma_n \to f^+ - f^-\,.$$

□

Teorema 11. *Sejam $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável, $f\colon X \to \mathbb{R}$ e $g\colon X \to \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis. Então $f + g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis também.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, existem duas sequências de funções simples $\{s_n\}_{n\geq 1}$ e $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ tais que $s_n \to f$ e $\sigma_n \to g$ em todo ponto.

Então para todo $n \geq 1$, as funções $s_n + \sigma_n$ e $s_n \cdot \sigma_n$ são simples e evidentemente,

$$s_n + \sigma_n \to f + g,\ s_n \cdot \sigma_n \to f \cdot g,$$

mostrando, via Teorema 10, que $f + g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis. □

4. A integral de uma função mensurável

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. A construção da integral de uma função mensurável em X segue exatamente a mesma abordagem que a da integral de Lebesgue no espaço euclidiano.

(1) Seja $s\colon X \to [0, \infty]$,

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathbf{1}_{E_i}$$

uma função simples. Então,

$$\int_X s\,d\mu := \sum_{i=1}^{k} c_i\,\mu(E_i).$$

Resta mostrar que este conceito é bem definido, ou seja, se s possui duas representações do tipo

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\mathbf{1}_{E_i} = \sum_{j_1}^{l} d_j\,\mathbf{1}_{F_j},$$

então
$$\sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E_i) = \sum_{j_1}^{l} d_j \mu(F_j),$$
A prova deste fato é igual a do cenário de funções simples no espaço euclidiano.

(2) Seja $s\colon X \to \mathbb{R}$ uma função simples. Então, já que s pode ser representada como
$$\sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathbf{1}_{E_i}$$
onde os conjuntos mensuráveis $\{E_i\}_{i\in[k]}$ são disjuntos, segue que
$$s^{\pm} = \sum_{i=1}^{k} c_i^{\pm} \, \mathbf{1}_{E_i} \text{ e } |s| = \sum_{i=1}^{k} |c_i| \, \mathbf{1}_{E_i}$$
Portanto, s^+, s^-, $|s|$ são funções simples sem sinais.

A função s é dita absolutamente integrável se
$$\int_X |s| \, d\mu < \infty.$$
Neste caso, definimos
$$\int_X s \, d\mu := \int_X s^+ \, d\mu - \int_X s^- \, d\mu.$$

(3) Seja $f\colon X \to [0,\infty]$ uma função mensurável. Definimos
$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu \colon 0 \leq s \leq f, \, s \text{ é simples} \right\}.$$
Não é dificil ver que
$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X s \, d\mu \colon 0 \leq s \leq f, \, s \text{ é simples e finita} \right\},$$
e, de fato, outras restrições sobre s podem ser feitas, dependendo do contexto (por exemplo, em $\mathbb{R}^d$, s pode ser escolhida com suporte compacto).

(4) Seja $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então, como f é o limite pontual de uma sequência de funções simples, segue imediatamente que f^+, f^- e $|f|$ também são tais limites, logo são mensuráveis também.
Chamamos f de absolutamente integravel se
$$\int_X |f| \, d\mu < \infty$$
Neste caso,
$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

Teorema 12. *(propriedades básicas da integral)*
Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $f, g\colon X \to [0,\infty]$ (ou $f, g\colon X \to \mathbb{R}$) duas funções mensuráveis (ou, respectivamente, absolutamente integráveis). As seguintes valem:

(1) (monotonicidade e equivalência)
Se $f \le g$ *em* μ*-q.t.p então* $\int_X f\, d\mu \le \int_X g\, d\mu$.
Se $f = g$ *em* μ*-q.t.p então* $\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$.

(2) (linearidade)

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$$

$$\int_X cf\, d\mu = c \int_X f\, d\mu\,.$$

(3) (divisibilidade)
Se $E \in \mathcal{B}$ *então* $f\, \mathbf{1}_E$ *e* $f\, \mathbf{1}_{E^\complement}$ *são mensuráveis e*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\, \mathbf{1}_E\, d\mu + \int_X f\, \mathbf{1}_{E^\complement}\, d\mu\,.$$

Denotado por

$$\int_E f\, d\mu := \int_X f\, \mathbf{1}_E$$

temos

$$\int_X f\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_{E^\complement} f\, d\mu\,.$$

(4) (a desigualdade de Markov)
Se $f \colon X \to [0, \infty]$, *para todo* $\lambda > 0$ *tem-se*

$$\mu\,\{f \ge \lambda\} \le \frac{\int_X f\, d\mu}{\lambda}\,.$$

(5)

$$\int_X |f|\, d\mu = 0 \quad sse \quad f = 0 \;\; \mu - q.t.p.$$

$$Se \int_X |f|\, d\mu < \infty \;\; então \;\; |f| < \infty \;\; \mu - q.t.p.$$

Demonstração. O argumento é o mesmo que no caso da integral de Lebesgue. Desrevemos os passos principais.

(1) O primeiro passo é estabelecer a monotonicidade da integral para funções simples. O caso geral segue-se da definição
A equivalência é uma consequência imediata da monotonicidade.

(2) De novo, o primeiro passo é provar linearidade da integral para funções simples.
O caso geral segue-se do teorema de convergência monótona, que será tratado na seção seguinte.

(3) Produto de funções mensuráveis é mensurável, enquanto a função indicadora de um conjunto mensurável é mensurável. Portanto, $f\mathbf{1}_E$ e $f\mathbf{1}_{E^\complement}$ são mensuráveis.
Como

$$f = f\mathbf{1}_E + f\mathbf{1}_{E^\complement},$$

a divisibilidade segue da linearidade.

(4) Como $f \geq \lambda \, \mathbf{1}_{\{f \geq \lambda\}}$, a desigualdade de Markov é consequência da monotonicidade da integral:

$$\int_X f \, d\mu \geq \int_X \lambda \, \mathbf{1}_{\{f \geq \lambda\}} \, d\mu = \lambda \, \mu \, \{f \geq \lambda\} \, ,$$

Logo

$$\mu \, \{f \geq \lambda\} \leq \frac{\int_X f \, d\mu}{\lambda} \, .$$

(5) Claramente

$$\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ |f| \geq \frac{1}{n} \right\} .$$

Pela desigualdade de Markov, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu \, \{|f| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\int_X |f| \, d\mu}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} = 0.$$

Logo $\mu \left\{ |f| \geq \frac{1}{n} \right\} = 0$ para todo $n \geq 1$. Concluímos que $\mu \, \{f \neq 0\} = 0$, ou seja, $f = 0$ μ-q.t.p.

Finalmente,

$$\{|f| = \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{|f| \geq n\}$$

Pela desigualdade de Markov, para todo $n \geq 1$,

$$\mu \, \{|f| \geq n\} \leq \frac{\int_X |f| \, d\mu}{n} \to 0$$

pois $\int_X |f| \, d\mu < \infty$.

Como, evidentemente, a sequência de conjuntos $\{|f| \geq n\}_{n \geq 1}$ é não crescente, pelo teorema de convergência monótona para conjuntos tem-se

$$\mu \, \{|f| = \infty\} = \lim_{n \to \infty} \mu \, \{|f| \geq n\} = 0.$$

□

Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, seja

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \colon f \text{ é mensurável e } \int_X |f| \, d\mu < \infty \right\}$$

o espaço vetorial de funções absolutamente integraveis em X.

De fato, se $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, $f + g$ é mensurável (pois f e g são mensuráveis) e como

$$|f + g| \leq |f| + |g|,$$

tem-se

$$\int_X |f + g| \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \, d\mu < \infty,$$

logo $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Além disso, se $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$ então cf é mensurável e

$$\int_X |cf| \, d\mu = |c| \int_X |f| \, d\mu < \infty,$$

então $cf \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Definimos o espaço L^1 por

$$L^1(X, \mathcal{B}, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)/\sim$$

onde $f \sim g$ se $f = g$ em μ-q.t.p.

Como pelo Teorema 12 (5), dada uma função $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$,

$$\int_X |f| \, d\mu = 0 \text{ sse } f = 0 \ \mu - \text{q.t.p.}$$

acontece que

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu$$

é uma norma em $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Então, $(L^1(X, \mathcal{B}, \mu)\,, \|\cdot\|_1)$ é um espaço normado. Provaremos, no próximo capítulo que, na verdade, é um espaço de Banach.

Outras notações comuns deste espaço são $L^1(X)$, $L^1(d\mu)$, $L^1(X, \mu)$ e etc.

Ademais, dado um número real $1 \leq p < \infty$,

Seja

$$L^p(X, \mathcal{B}, \mu) := \left\{ f \colon X \to \mathbb{R} \colon f \text{ é mensurável e } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

módulo igualdade q.t.p.

Munido com

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

$\left(L^p(X, \mathcal{B}, \mu)\,, \|\cdot\|_p\right)$ também é um espaço normado. Essa afirmação será provada no próximo capítulo. Entretanto, vamos estabelecer a desigualdade de Chebyshev para funções L^p.

Teorema 13. *(a desigualdade de Chebyshev) Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. Então, para todo $\lambda > 0$ temos*

$$\mu\{|f| \geq \lambda\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

Demonstração. Aplicamos a desigualdade de Markov à função $|f|^p$.

Primeiro, como $f \colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|^p$ é contínua, segue que

$$\varphi \circ f = |f|^p$$

é mensurável (e sem sinal).

Como

$$|f| \geq \lambda \Leftrightarrow |f|^p \geq \lambda^p,$$

pela desigualdade de Markov,

$$\mu\{|f| \geq \lambda\} = \mu\{|f|^p \geq \lambda^p\} \leq \frac{\int_X |f|^p \, d\mu}{\lambda^p} = \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

□

5. Os teoremas de convergência

Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis sem sinais e f uma outra função mensurável sem sinal.

Suponha que

$$f_n \to f \quad \text{em q.t.p.}$$

Questão. Quando podemos concluir que

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu \quad ?$$

Ou seja, quando podemos trocar o limite com a integral?

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \stackrel{?}{=} \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu \, .$$

Uma situação especial, similar a da integral é apresentada na seguinte proposição.

Proposição 5 (convergência uniforme em um espaço de medida finita)**.** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida finita, i.e, $\mu(X) < \infty$. Sejam $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis sem sinais ou uma sequência de funções absolutamente integráveis e f uma outra função real.*

Se $f_n \to f$ uniformemente então

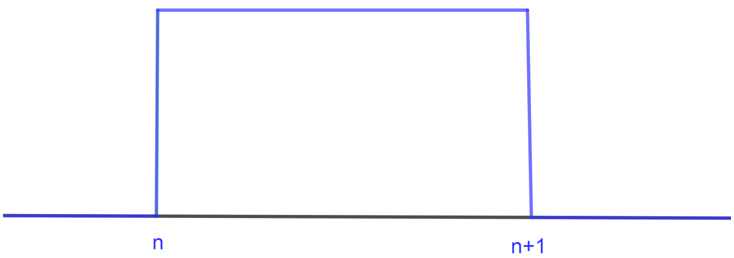
$$\int_X f_n \to \int_X f.$$

Demonstração. Exercício. □

O resultado anterior vale sob uma hipótese muito restritiva, a de convergência uniforme. Procuramos tais resultados de convergência da integral sob hipóteses sem mais gerais. Mas antes de enunciar estes resultados, notamos que há casos em que *não* podemos trocar o limite e a integral. Descrevemos três exemplos simples mas típicos de obstruções a essa propriedade, a saber, exemplos de funções "bump" em movimento.

Exemplo 14. Considere o espaço $X = \mathbb{R}$ munido com a medida $\mu = \mathrm{m}$, a medida de Lebesgue.

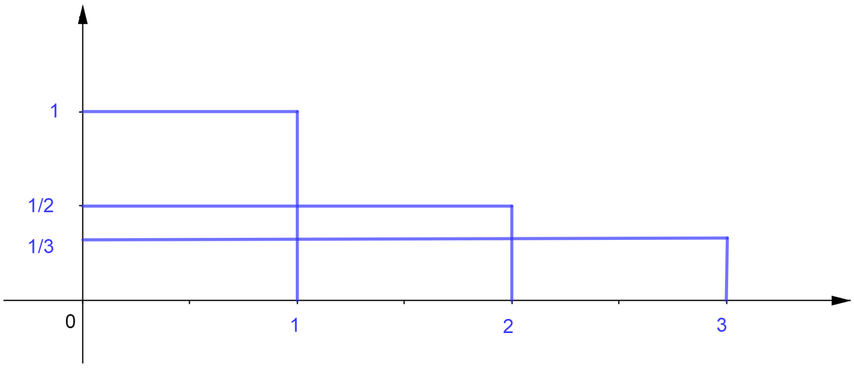
Seja $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$ para todo $n \geq 1$.



Então $f_n \to 0$ em todo ponto, mas

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mathrm{m} = \mathrm{m}\left([n, n+1]\right) = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mathrm{m} \, .$$

Exemplo 15. Considere o espaço $X = \mathbb{R}$ munido com a medida $\mu = \mathrm{m}$ de Lebesgue.
Para todo $n \geq 1$, seja $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}$.

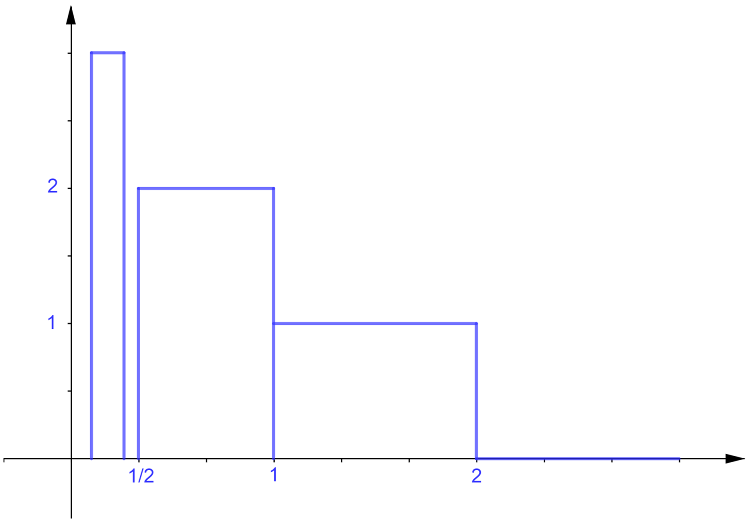


Como $|f_n| \leq \frac{1}{n} \to 0$, temos que $f_n \to 0$ uniformemente.
Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mathrm{m} = \frac{1}{n} \, m([0,n]) = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mathrm{m},$$

mostrando também que a hipótese $\mu(X) < \infty$ da Proposição 5 é necessária.

Exemplo 16. Considere o espaço $X = [0,2]$ munido com a medida $\mu = \mathrm{m}$ de Lebesgue restrita ao intervalo $[0,2]$. Para todo $n \geq 1$, seja $f_n := n\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]}$.



Então, $f_n \to 0$ em todo ponto, mas

$$\int_{[0,2]} f_n \, d\mathrm{m} = n \, \mathrm{m}\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) = 1 \not\to 0 = \int_{[0,2]} 0 \, d\mathrm{m}\,.$$

Teorema 17 (de convergência monótona)**.** *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e seja $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis sem sinais, i.e.*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Demonstração. A prova deste resultado é similar a do caso da integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$. Ela usa um argumento de tempos de parada para conseguir algum comportamento uniforme da sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$. Esboçamos o argumento abaixo.

Seja

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)\,.$$

Então, f é mensurável.

Pela monotonicidade da integral, já que $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, a sequência $\left\{\int_X f_n \, d\mu\right\}_{n\geq 1}$ é não decrescente, então $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ existe e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

Resta provar a desigualdade aposta:

$$\int_X f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Como

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X s \, d\mu \colon 0 \leq s \leq f,\ s \text{ é simples e finita} \right\},$$

basta provar que dada uma função simples e finita s tal que $0 \leq s \leq f$, temos que

$$\int_X s \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Então é suficiente provar que

$$(1-\epsilon) \int_X s \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Escrevemos

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathbf{1}_{E_i},$$

onde para todo $i \in [k]$, $c_i \in (0, \infty)$ e $E_i \in \mathcal{B}$ são conjuntos disjuntos.

Fixe $j \in [k]$. Se $x \in E_j$ então $s(x) = c_j$, logo

$$(1-\epsilon)c_j = (1-\epsilon)s(x) < f(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x).$$

Portanto, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$(1-\epsilon)c_j < f_{n_x}(x)\,. \tag{1}$$

Definimos, para todo $n \geq 1$,

$$E_{j,n} := \{x \in E_j \colon (1-\epsilon)c_j < f_n(x)\}\,.$$

Então $E_{j,n}$ é mensurável (já que f_n e E_j são mensuráveis) e claramente, usando (1) e a monotonicidade da sequência $\{f_n\}_{n\geq 1}$, segue que

$$E_{j,n} \nearrow E_j \text{ quando } n \to \infty.$$

Pelo teorema de convergência monótona para conjuntos, segue que

$$\mu(E_{j,n}) \to \mu(E_j) \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Para todo $n \geq 1$ definimos

$$s_n := \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon) c_j \, \mathbf{1}_{E_{j,n}} \, .$$

Não é difícil perceber que para todo $x \in X$, tem-se

$$s_n(x) \leq f_n(x).$$

Então,

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_X s_n \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon) c_j \, \mu(E_{j,n}).$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \sum_{j=1}^{k} (1-\epsilon) c_j \, \mu(E_j) = (1-\epsilon) \int_X s \, d\mu,$$

finalizando a prova do teorema. □

6. Consequências do teorema de convergência monótona

Teorema 18 (de Tonelli)**.** *Seja* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de funções mensuráveis* $f_n \colon X \to [0, \infty]$. *Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *é mensurável e*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Evidentemente, a sequência

$$s_n := f_1 + \ldots + f_n \; , \, n \geq 1$$

de somas parciais satisfaz as hipóteses do Teorema de convergência monótona (já que $f_n \geq 0$).

Portanto,

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} s_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_X f_k \, d\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

□

Lema 1 (de Borel-Cantelli)**.** *Seja* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *um espaço de medida e seja* $\{E_n \colon n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ *uma sequência de conjuntos mensuráveis. Suponha que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Então, μ*-q.t.p.* $x \in X$ *pertence apenas a um número* finito *de conjuntos* E_n*, ou seja, para* μ*-q.t.p.* $x \in X$,

$$\#\{n \in \mathbb{N} \colon x \in E_n\} < \infty.$$

Demonstração. Para todo $n \geq 1$, seja $\mathbf{1}_{E_n}$ a função indicadora do conjunto mensurável E_n. Note que, dado $x \in X$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x)$$

conta exatamente o número de conjuntos E_n onde x pertence, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x) = \#\{n \in \mathbb{N} : x \in E_n\}.$$

Pelo Teorema de Tonelli,

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n} \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

Portanto, pelo Teorema 1 (5) da aula 22,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n} < \infty \quad \mu\text{-q.t.p.},$$

assim mostrando que

$$\#\{n \in \mathbb{N} \colon x \in E_n\} < \infty$$

para μ-q.t.p. $x \in X$. □

Lema 2 (de Fatou)**.** *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $\{f_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n \colon X \to [0, \infty]$ (uma sequência não necessariamente monótona). Então,*

$$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu \;\leq\; \liminf_{n \to \infty} \int_X f \, d\mu$$

Demonstração. Seja

$$g := \liminf_{n \to \infty} g_n = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} f_k \,.$$

Para todo $n \geq 1$ denote por $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$. Então g_n é mensurável e

$$g_n \nearrow g \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Pelo teorema de convergência monótona, temos que

$$\int_X g_n \, d\mu \to \int_X g \, d\mu \quad \text{quando } n \to \infty$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_X \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu &= \int_X g \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X g_n \, d\mu \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_X \inf_{k \geq n} f_k \, d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} \int_X f_k \, d\mu \\ &= \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} \int_X f_k \, d\mu, \end{aligned}$$

onde a desigualdade acima é válida por causa da monotonicidade da integral.

De fato,

$$\inf_{k \geq n} f_n \;\leq\; f_k \text{ para todo } k \geq n$$

então

$$\int_X \inf_{k \geq n} f_n \, d\mu \;\leq\; \int_X f_k \, d\mu \text{ para todo } k \geq n,$$

logo

$$\int_X \inf_{k \geq n} f_n \, d\mu \;\leq\; \inf_{k \geq n} \int_X f_k \, d\mu.$$

□

Observação 8. A desigualdade no lema de Fatou pode ser estrita. Isso acontece por exemplo com alguns tipos de sequências de funções bump em movimento.

Para todo $n \geq 1$, seja $f_n := n\, \mathbf{1}_{(0, \frac{1}{n}]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Então $f_n \to 0$ em todo ponto e

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mu = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu.$$

Um outro exemplo é a sequência

$$f_n := \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0,n]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

de funções bump baixas e longas (em vez de altas e curtas).

Temos que $f_n \to 0$ uniformimente, enquanto $\int f_n = 1 \to 1 > 0 = \int 0$.

Observação 9. A condição $f_n \geq 0$ no lema de Fatou (ou, pelo menos, uma outra cota inferior apropriada) é necessária.

Por exemplo, consideremos, para todo $n \geq 1$,

$$f_n := -\frac{1}{n} \mathbf{1}_{[n,2n]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

temos que $f_n \to 0$ uniformimente, logo

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\mu = 0,$$

enquanto

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = -1 \to -1 < 0,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu > \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu.$$

Teorema 19 (de convergência dominada)**.** *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis, $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, e $f \colon X \to \mathbb{R}$ uma outra função tal que*

$$f_n \to f \text{ em } \mu - q.t.p.$$

Suponha que exista $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $\mu - q.t.p.$ e para todo $n \geq 1$ (ou seja, suponha que a sequência $\{f_n\}_{n\leq 1}$ seja dominada por uma função absolutamente integrável).

Então, $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ e

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

Demonstração. Como $f_n \to f$ e $|f| \leq g$ $\mu - q.t.p.$ para todo $n \geq 1$, seque que $|f| \leq g$ $\mu - q.t.p.$ Logo,

$$\int_X |f| \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu < \infty,$$

mostrando que $f \in L^1(X, B, \mu)$.

Como $|f_n| \leq g$ $\mu - q.t.p.$, temos que

$$-g \leq f_n \leq g \;\; \mu - q.t.p.,$$

então

$$\begin{cases} f_n + g \geq 0 & \mu - q.t.p. \\ g - f_n \geq 0 & \mu - q.t.p. \end{cases}$$

Portanto, podemos aplicar o lema de Fatou é aplicável às sequências $\{f_n+g\}_{n\geq 1}$ e $\{g-f_n\}_{n\geq 1}$.

- $$\int_X \liminf_{n\to\infty}(f_n+g)\,d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty}\int_X (f_n+g)\,d\mu.$$

Como
$$\int_X \liminf_{n\to\infty}(f_n+g)\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to n} f_n\,d\mu + \int_X g,$$
$$\liminf_{n\to\infty}\int_X (f_n+g)\,d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \,+\, \int_X g\,d\mu$$
e $\int_X g\,d\mu \in \mathbb{R}$, segue que

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu. \tag{2}$$

- $$\int_X \liminf_{n\to\infty}(g-f_n)\,d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty}\int_X (g-f_n)\,d\mu.$$

Como

$$\int_X \liminf_{n\to\infty}(g-f_n)\,d\mu \;=\; \int_X g\,d\mu \;+\; \int_X \liminf_{n\to\infty}(-f_n)\,d\mu \;=\; \int_X g\,d\mu \;-\; \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu,$$
$$\liminf_{n\to\infty}\int_X (g-f_n)\,d\mu \;=\; \int_X g\,d\mu \;+\; \liminf_{n\to\infty}\int_X (-f_n)\,d\mu \;=\; \int_X g\,d\mu \;-\; \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu,$$
segue que

$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu \;\geq\; \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu. \tag{3}$$

Combinando (2) e (3), tem-se
$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \;&\leq\; \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu\\ &\leq\; \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \;\leq\; \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu \;=\; \int_X f\,d\mu,\end{aligned}$$
logo $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$ existe e é igual a $\int_X f\,d\mu$. □

Corolário 1. Dada uma sequência de funções mensuráveis $\{f_n\colon X\to\mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ tal que $f_n\to f$ em μ-q.t.p. e $|f_n|\leq g$ para todo $n\geq 1$ e para alguma função $g\in L^1(X)$, segue que
$$f_n \to f \text{ em } L^1\,.$$

Demonstração. Como $|f_n|\leq g$ e $g\in L^1(X)$, tem-se

$$\int_X |f_n|\,d\mu \;\leq\; \int_X g\,d\mu < \infty,$$

logo $f_n\in L^1(X)$.

Já que $f_n\to f$ em μ-q.t.p.,
$$|f_n - f| \to 0 \quad \mu\text{-q.t.p.}$$
Além disso,
$$|f_n - f| \;\leq\; |f_n| + |f| \;\leq\; g + |f| \;\; \mu - q.t.p.$$

e
$$\int_X (g + |f|)\, d\mu = \int_X g\, d\mu + \int_X |f|\, d\mu < \infty,$$
portanto $g + |f| \in L^1(X)$.

Pelo teorema de convergência dominada aplicada à sequência $\{|f_n - f|\}_{n\geq 1}$, segue que
$$\|f_n - f\|_1 = \int_X |f_n - f|\, d\mu \to \int_X 0\, d\mu = 0,$$
mostrando que $f_n \to f$ com respeito a norma um (a norma L^1).

□

Exercício 2. Calcule
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{nx}\right) dx.$$

Solução. Para todo $n \geq 1$, definimos $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ por
$$f_n(x) = \begin{cases} n\,x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então f_n é contínua em $[0,1]$, logo é Rieman e Lebesgue integrável em $[0,1]$. Além disso,
$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_{[0,1]} f_n\, \mathrm{dm}.$$

Se $x \neq 0$, então
$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{nx})}{\frac{1}{nx}} \cdot x \to 1 \cdot x = x \quad \text{quando } n \to \infty\,.$$

Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Note que $f \in L^1\left([0,1], \mathrm{m}\right)$, pois
$$\int_{[0,1]} |f|\, \mathrm{dm} = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} < \infty.$$

Além disso, já que $|\frac{\operatorname{sen} t}{t}| \leq 1$ para todo $t \neq 0$, temos que $|f_n(x)| \leq x$ para todo $x \neq 0$. Então o teorema de convergência dominada é aplicável e temos que
$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_{[0,1]} f_n\, \mathrm{dm} \to \int_{[0,1]} x\, \mathrm{dm} = \frac{1}{2}\,.$$

□

7. Modos de convergência

Dados um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, uma sequência de funções mensuráveis $\{f_n\colon X \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ e uma outra função mensurável $f\colon X \to \mathbb{R}$, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ pode convergir para f de maneiras diferentes.

(1) Convergência pontual

(a) em todo ponto
$$f_n(x) \to f(x) \text{ para todo } x \in X.$$

(b) em q.t.p.: existe $W^c \in \mathcal{B}$,

$$\mu(W^c) = 0$$

t.q.

$$f_n(x) \to f(x) \text{ se } x \in W^c.$$

(2) Convergência uniforme

(c) no espaço inteiro: se $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$

$$t.q. \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X \text{ para } n \geq N_\varepsilon.$$

⋮

A ser continuado.

8. Os espaços L^p $(1 \leq p \leq \infty)$

Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $p \in [1, \infty]$. Vamos relembrar as definições dos espaços de funções $L^p(X)$.

- $1 \leq p < \infty$. Dizemos que $f \in L^p(X)$ se f é mensurável e $\displaystyle\int_X |f|^p \, d\,\mu < \infty$. Neste caso,

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $p = \infty$. Dizemos que $f \in L^\infty(X)$ se f é mensurável e existe $C < \infty$ tal que $|f(x)| \leq C$ para μ-q.t.p. $x \in X$. Neste caso,

$$\|f\|_\infty \coloneqq \inf \{ C \in \mathbb{R} \colon\ |f(x)| \leq C \quad \mu\text{-q.t.p.} \} .$$

Definição 10. Dois números $p, q \in [1, \infty]$ são (Hölder) conjugados se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Por exemplo, 2 e 2 são Hölder conjugados, e também 1 e ∞.

Lema 3 (a desigualdade de Young)**.** *Se $a, b \geq 0$, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} .$$

Demonstração. A função $\log \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é côncava. Então,

$$\log \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right) \geq \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) = \log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

□

Teorema 20 (a desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $p, q \in [1, \infty]$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$ então $f\,g \in L^1(\mu)$ e $\|f\,g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$.*

Exercício 3. Pelo teorema anterior, se $f, g \in L^2(X)$ então $f \cdot g \in L^1(X)$. Encontre um exemplo mostrando que o produto $f \cdot g$ não necessariamente pertence a $L^1(X)$ se $f, g \in L^1(X)$.

Além disso, mostre que se $\mu(X) < \infty$ então $L^\infty(X) \subset L^2(X) \subset L^1(X)$. Mais geralmente, se $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ então $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$.

Demonstração (da desigualdade de Hölder).

■ $p = 1$ e $q = \infty$ (ou vice versa). Temos $g \in L^\infty(X)$. Seja $C < \infty$ tal que $|g(x)| \le C$ para μ-q.t.p. $x \in X$. Então $|f(x)\, g(x)| \le C\, |f(x)|$ para μ-q.t.p. $x \in X$. Integrando em x segue que

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg|\, d\,\mu \le \int_X C\, |f|\, d\,\mu = C\, \|f\|_1 < \infty\,.$$

Portanto $fg \in L^1(X)$ e, se $|g(x)| \le C$ μ-q.t.p. $x \in X$ então $\|fg\|_1 \le C\, \|f\|_1$.

Se $\|f\|_1 \ne 0$, então $\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_1} \le C$, e tomando o ínfimo sobre todos tais C, concluímos que

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_1} \le \|g\|_\infty\,,$$

mostrando a afirmação.

Se $\|f\|_1 = 0$ então $f = 0$ μ-q.t.p., portanto $fg = 0$ μ-q.t.p. e a afirmação é evidente.

■ $p, q \in (1, \infty)$. Se $\|f\|_p = 0$ (argumento similar se $\|g\|_q = 0$) tem-se

$$\int |f|^p\, d\,\mu = 0 \implies |f|^p = 0 \ \mu\text{-q.t.p.} \implies f = 0 \ \mu\text{-q.t.p.} \implies fg = 0 \ \mu\text{-q.t.p.}.$$

Neste caso, a desigualdade é evidente.

Logo, podemos supor que $\|f\|_p \ne 0, \|g\|_q \ne 0$. Fixe $x \in X$ e denote por

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

Pela desigualdade de Young,

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\, \|g\|_q} \le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

A desigualdade acima vale para todo $x \in X$, integrando em x temos:

$$\int_X \frac{|fg|}{\|f\|_p\, \|g\|_q}\, d\,\mu \le \frac{1}{p}\frac{\int |f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Concluímos que

$$\frac{\int |fg|\, d\mu}{\|f\|_p\, \|g\|_q} \le 1,$$

logo $\|fg_1\| = \displaystyle\int |fg|\, d\,\mu \le \|f\|_p\, \|g\|_q$. □

Teorema 21. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Então $L^p(X)$ é um espaço vetorial para todo $1 \le p \le \infty$.*

Demonstração. Se $f \in L^p(X), c \in \mathbb{R}$, é fácil verificar que $cf \in L^p(X)$. Logo, basta provar que se $f, g \in L^p(X)$ $(1 \le p \le \infty)$ então $\|f + g\|_p < \infty$.

■ O caso $p = \infty$ é exercício.

■ Suponha que $1 \le p < \infty$.

Se $a, b \ge 0$ então a seguinte desigualdade vale:

$$(a + b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)\,.$$

De fato, se $p \ge 1$, a função $[0, \infty) \ni x \mapsto x^p$ é convexa. Então,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}\, a^p + \frac{1}{2}\, b^p\,,$$

logo

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)\,.$$

Portanto,

$$|f(x)+g(x)|^p \le (\,|f(x)| + |g(x)|\,)^p \le 2^{p-1}(\,|f(x)|^p + |g(x)|^p\,).$$

Integrando em x, temos que

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p \le 2^{p-1}\left(\int |f|^p + \int |g|^p\right) = 2^{p-1}(\,\|f\|_p^p + ||g_p^p\,) < \infty\,,$$

mostrando que $f+g \in L^p(X)$. □

Teorema 22. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Então, $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ é um espaço normado para todo $1 \le p \le \infty$.*

Demonstração.

▪ O caso $p = \infty$ é exercício.

▪ Suponha que $1 \le p < \infty$. O único axioma da norma que precisamos verificar é a desigualdade triangular:

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{(a desigualdade de Minkowski).}$$

Temos que

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p \, d\mu = \int |f+g|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu \le \int |f|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu + \int |g|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu$$

Seja q o conjugado à Hölder de p, logo, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, portanto $(p-1)q = p$. Daí,

$$(\,|f+g|^{p-1}\,)^q = |f+g|^p$$

e pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int |f|\,|f+g|^{p-1} &= ||f\ |f+g|^{p-1}\,||_1 \\
&\le \|f\|_p\ ||\ |f+g|^{p-1}\,||_q \\
&= \|f\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \left(\int |f+g|^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \left(\int |f+g|^{p}\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{q}} \\
&= \|f\|_p\,\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

Logo, mostramos que

$$\int |f|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu \le \|f\|_p\ \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}\,.$$

Similarmente,

$$\int |g|\,|f+g|^{p-1} \, d\mu \le \|g\|_p\ \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}\,.$$

Portanto,

$$\|f+g\|_p^p \le (\|f\|_p + \|g\|_p)\ \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Como $p - \frac{p}{q} = 1$, segue que $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$. □

Teorema 23 (Riesz-Fischer). *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. Então $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$ (i.e espaços normados completos).*

Demonstração.

- O caso $p = \infty$.

Seja $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset L^\infty(X)$ uma sequência de Cauchy (com respeito à norma L^∞). Para todo $n \geq 1$ existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k - f_l\|_\infty < \frac{1}{m} \quad \forall k, l \geq n_m \,.$$

Logo, existe $W_{k,l,m} \in \mathcal{B}, \mu(W_{k,l,m}) = 0$ tal que

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \frac{1}{m} \quad \forall x \in W_{k,l,m}^{\complement} \,.$$

Seja $W = \bigcup_{k,l,m} W_{k,l,m}$ união enumerável. Então, $W \in \mathcal{B}$ e $\mu(W) = 0$. Afirmamos que se $x \in W^{\complement}$ então $\{f_n(x)\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ é Cauchy. De fato, para todo $x \in W^{\complement}$ e $m \geq 1$ temos

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \frac{1}{m} \quad \forall k, l \geq n_m \tag{4}$$

Seja

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) & \text{se} \quad x \in W^{\complement} \\ 0 & \text{se} \quad x \in W \end{cases}$$

Logo, f é mensurável. Na desigualdade (4), tomando $l \to \infty$, segue que para todo $x \in W^{\complement}$,

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \forall k \geq n_m, \tag{5}$$

já que $f(x) = \lim\limits_{l \to \infty} f_l(x)$.

Em particular,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f_k(x) + f_k(x)| \\ &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| \\ &\leq \frac{1}{m} + |f_k(x)| \,, \end{aligned}$$

e como f_k é essencialmente limitada, f também é essencialmente limitada, i.e, $f \in L^\infty(X)$.

Pela desigualdade (5) temos que $f_k \to f$ uniformemente em $W^{\complement}$. Como $\mu(W) = 0$, concluímos que $f_k \to f$ em L^∞, portanto a sequência de Cauchy $\{f_k\}_{k \geq 1} \subset L^\infty(X)$ possui um limite $f \in L^\infty(X)$, mostrando a completude do espaço $L^\infty(X)$

- O caso $1 \leq p < \infty$. Usaremos o seguinte resultado.

Lema 4. *Seja $\{g_n\}_{n \geq 1} \subset L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p < \infty$, então existe $g \in L^p(X)$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n = g$ μ-q.t.p. em $L^p(X)$.*

Vamos usar o lema para provar que dada $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset L^p(X)$ uma sequência de Cauchy existe $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ subsequência convergente. Como $\{f_n\}_{n \geq 1}$ é Cauchy em $L^p(X)$,

$$\|f_n - f_m\|_p \to 0 \;\text{ quando } n, m \to \infty \,.$$

Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tal que

$$\left\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\right\|_p < \frac{1}{2^k} \text{ para todo } k \geq 1\,.$$

Seja $g_k \coloneqq f_{n_k} - f_{n_{k+1}}$. Como $\|g_k\|_p < \dfrac{1}{2^k}$ temos que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} < \infty$. Então pelo lema anterior $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge em $L^p(X)$ para uma função $g \in L^p(X)$. Temos

$$\sum_{k=1}^{m} g_k = f_{n_1} - f_{n_2} + f_{n_2} - f_{n_3} + \ldots + f_{n_m} - f_{n_{m+1}} = f_{n_1} - f_{n_{m+1}}\,.$$

Então,

$$f_{n_{m+1}} = f_{n_1} - \sum_{k=1}^{m} g_k.$$

Concluímos que $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ converge em $L^p(X)$ para $f \coloneqq f_{n_1} - g$. Não é difícil concluir que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ mesmo é convergente. De fato, dado $\epsilon > 0$, como $\{f_n\}_{n\geq 1}$ é Cauchy em $L^p(X)$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon.$$

Ainda, $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ é convergente em $L^p(X)$, então existe $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_{n_k} - f\|_p < \epsilon \quad \forall k \geq k_\epsilon.$$

Então, para todo n suficientemente grande,

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

$\square$

Demonstração do lema. Considere a sequência de funções mensuráveis $\{|g_n|\}_{n\geq 1}$. Pelo teorema de Tonelli, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ é mensurável e

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \, d\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |g_n| \, d\,\mu$$

Sejam $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |g_k|$ (a soma parcial) e $h = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|$ (a soma da série). Então $h_n \nearrow h$ em todo ponto. Em particular, $h_n^p \nearrow h^p$ em todo ponto. Portanto, pelo TCM, $\displaystyle\int_X h_n^p \to \int_X h^p$. Então,

$$\left(\int_X h_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|h_n\|_p = ||\sum_{k=1}^{n} |g_k|\; ||_p \leq \sum_{k=1}^{n} |\,|g_k|\,|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\,|g_k|\,|_p < \infty\,.$$

Concluímos que

$$\|h\|_p = \left(\int_X h^p \, d\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\,|g_k|\,|_p < \infty,$$

ou seja, $h \in L^p(X)$. Em particular, $h(x) < \infty$ para μ-q.t.p. $x \in X$ onde $h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$.

Então, a série $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ é absolutamente convergente μ-q.t.p. Seja $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, então g é mensurável. Resta provar que $g \in L^p(X)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = g$ em $L^p(X)$. Como $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ μ-q.t.p., temos que $|g| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| = h \in L^p$, logo, pela monotonicidade da integral, $g \in L^p(X)$. As somas parciais $\sum_{k=1}^{n} g_k \to g$ μ-q.t.p., logo $\left|\sum_{k=1}^{n} g_k - g\right|^p \to 0$ μ-q.t.p.

Então,

$$\left|g - \sum_{k=1}^{n} g_k\right|^p \leq \left(|g| + \sum_{k=1}^{n} |g_k|\right)^p \leq (h+h)^p = 2^p h^p \in L^1(X)\,.$$

Portanto, o teorema da convergência dominada é aplicável e implica

$$\int_X \left|g - \sum_{k=1}^{n} g_k\right|^p d\,\mu \to 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} g_k \to g \;\text{ em } L^p(X)\,.$$

□

9. Construção abstrata de medidas

Lembre-se da construção da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$:

- consideramos caixas (ou conjuntos elementares) para os quais já tínhamos uma medida natural (o volume):

$$m(B) = |B|$$

$$m(B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_N) = \sum_{i=1}^{N} |B_i|$$

  "pré-medida em $\mathbb{R}^d$ ".
- definimos um conceito mais primitivo de medida : "a medida exterior "de Lebesgue. Se $E \subset \mathbb{R}^d$,

$$m^*(E) \coloneqq \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,\ B_k \text{ são caixas ou conjuntos elementares}\right\}$$

- definimos "conjuntos mensuráveis "via o primeiro princípio de Littlewood, que é equivalente ao princípio de Carathéodory:

$$E \subset \mathbb{R}^d \text{ é mensurável } \Leftrightarrow \forall A \subset \mathbb{R}^d, m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

  Neste caso, $m(E) \coloneqq m^*(E)$.

9.1. **Medida exterior e o teorema de extensão de Carathéodory.**

Definição 11. Dado um conjunto X, uma função $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ é chamada de medida exterior se

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Se $E \subset F$ então $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$

- $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

Exemplo 24. m^*, a medida exterior de Lebesgue é uma medida exterior.

Definição 12. Seja μ^* uma medida exterior em X. Um conjunto $E \subset X$ é chamado mensurável (à Carathéodory) com respeito a μ^* se para todo $A \subset X$, temos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\complement})$$

Observação 10. Por causa da subaditividade de $\mu^*, E \subset X$ é mensurável se e somente se $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\complement})$.

Observação 11. Se $\mu^*(E) = 0$ então E é mensurável.

Teorema 25 (da extensão de Carathéodory)**.** *Seja μ^* uma medida exterior em X, e seja $\mathcal{B} := \{E \subset X \colon E$ mensurável à Carathéodory$\}$. Então,*

- *$\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra*
- *$\mu \colon \mathcal{B} \to [0, \infty], \mu(E) := \mu^*(E)$ é uma medida.*

Portanto, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de medida.

Demonstração. Evidentemente $\emptyset \in \mathcal{B}$, e como $(E^{\complement})^{\complement} = E$, temos que $E \in \mathcal{B}$ implica $E^{\complement} \in \mathcal{B}$. Sejam $E, F \in \mathcal{B}$. Vamos provar que $E \cup F \in \mathcal{B}$, ou seja, que dado $A \subset X$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \cap (E \cup F)^{\complement}) \tag{6}$$

Sejam

$$\begin{aligned}
A_{00} &:= A \cap (E \cup F)^{\complement} = A \cap E^{\complement} \cap F^{\complement} \\
A_{10} &:= (A \setminus F) \cap E = A \cap E \cap F^{\complement} \\
A_{01} &:= (A \setminus E) \cap F = A \cap E^{\complement} \cap F \\
A_{11} &:= A \cap E \cap F
\end{aligned}$$

Temos que (1) é equivalente a

$$\mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) = \mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) + \mu^*(A_{00}) \tag{7}$$

Como $E \in \mathcal{B}$, temos que $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$ se e somente se

$$\mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) = \mu^*(A_{10} \cup A_{11}) + \mu^*(A_{01}) \tag{8}$$

De novo, usando o fato que $E \in \mathcal{B}$,

(9)

$$\mu^*(A_{10} \cup A_{11} \cup A_{01}) = \mu^*(A_{10} \cup A_{11} \cup A_{01} \cap E) + \mu^*(A_{10} \cup A_{11} \cup A_{01} \cap E^{\complement}) = \mu^*(A_{10} \cup A_{11}) + \mu^*(A_{01})$$

Como $F \in \mathcal{B}$, temos que

$$\mu^*(A_{00} \cup A_{01}) = \mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cap F) + \mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cap F^{\complement}) = \mu^*(A_{01}) + \mu^*(A_{00}) \tag{10}$$

É simples ver que (3) + (4) + (5) implica (2). De fato,

$$\begin{aligned}
\mu^*(A_{00} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) &=^{(3)} \mu^*(A_{11} \cup A_{10}) + \mu^*(A_{00} \cup A_{01}) \\
&=^{(4)} (\mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) - \mu^*(A_{01})) + \mu^*(A_{00} \cup A_{01}) \\
&=^{(5)} \mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11}) - \mu^*(A_{01}) + \mu^*(A_{00}) + \mu^*(A_{01}) \\
&= \mu^*(A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11})\mu^*(A_{00}),
\end{aligned}$$

mostrando que $E \cup F \in \mathcal{B}$. Por indução, se $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{B}$, então $E_1 \cup \ldots \cup E_n \in \mathcal{B}$ $\square$