AULA 1

Introdução

O objetivo deste curso é fornecer uma introdução à análise real.

Análise real é a disciplina matemática que estuda números reais, sequências de números reais, funções com domínio e valores reais e suas propriedades.

A maioria dos conceitos considerados nesse curso são familiares (dos cursos de Cálculo). No entanto, o foco será no estudo formal e rigoroso destes conceitos, ao invés da abordagem mais computacional e aplicada das matérias anteriores.

Assim, vamos responder a perguntas do tipo:

- Como comparar a cardinalidade de vários conjuntos?
- O que é um número real?
- O que é e quando existe o limite de uma sequência de números reais? Como somar uma série infinita de números reais?
- O que é uma função contínua? Qual é o comportamento de uma função contínua em intervalos ou em outros tipos de conjuntos?

Por que estudar análise, por que cálculo não é suficiente?

Há muitas razões, uma delas é que uma compreensão mais profunda dos conceitos de cálculo nos impede de cometer erros graves, mesmo quando se trata de problemas práticos.

Exemplo 1 (Séries divergentes)**.** Considere a série infinita

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Então

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2 + S$$

Logo, $S = 2$ (que, por acaso, é a resposta correta).

No entanto, se aplicarmos a mesma lógica à série

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots ,$$

temos que

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = S - 1,$$

o que implica o resultado absurdo $S = -1$.

Um outro exemplo:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

pode ser escrita como

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots) = 1 - S,$$

levando a $S = \frac{1}{2}$, mas também como

$$\begin{aligned} S &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + \cdots = 1, \end{aligned}$$

absurdo (S não pode ser igual a $\frac{1}{2}$ e a 1 no mesmo tempo).

Exemplo 2 (Sequências divergentes)**.** Seja x um número real qualquer e seja

$$L = \lim_{n\to\infty} x^n$$

Evidentemente $n+1 \to \infty$ quando $n \to \infty$, logo

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = L$$

Mas $x^{n+1} = x \cdot x^n$, então temos a relação $L = xL$.

Isso implica $x = 1$ ou $L = 0$. Mas claramente se $x = 2$, a sequência 2^n não pode convergir a 0 quando $n \to \infty$. Em outras palavras, há um error grave no nosso raciocínio.

Conjuntos e operações entre conjuntos

Definição 1. Um conjunto A é uma coleção (não ordenada) de objetos chamados elementos de A.

A notação $x \in A$ significa "x pertence a A".
A notação $x \notin A$ significa "x não pertence a A".

Exemplo 3. Se A = $\{1,\ 7,\ 6\}$ então $7 \in A$ mas $9 \notin A$.

Exemplo 4. Se A é o conjunto de todos os triângulos retângulos no plano, então um triângulo com lados $3, 4, 5$ pertence a A, mas um triângulo com lados $2, 3, 4$ não pertence a A.

Observação 1. Conjuntos podem ser objetos (elementos) também. Por exemplo, dado um conjunto A, temos

$$A \in \{3, A, x\}.$$

Definição 2. Dois conjuntos A e B são iguais (A = B) se todo elemento de A também é um elemento de B e vice-versa, ou seja:
$A = B$ se e somente se ($x \in A \Rightarrow x \in B$ e $x \in B \Rightarrow x \in A$).

Revisão de algumas noções de lógica. Usaremos a abreviação *sse* para a frase extremamente comum neste curso "se e somente se".

Se P e Q são duas sentenças (ou afirmações ou proposições), então a notação $P \Rightarrow Q$ significa "P implica Q", ou, em outras palavras, "se P vale então Q vale".

A nova proposição $P \Rightarrow Q$ é equivalente à proposição (não P ou Q). Logo, ela é verdadeira sse P é falsa ou Q é verdadeira.

Lembre-se que em matemática, a palavra "ou" é geralmente inclusiva (no sentindo que a afirmação "A vale ou B vale" *inclui* a possibilidade do que A *e* B valham).

Ademais, a proposição $P \Rightarrow Q$ é equivalente à proposição "não $Q \Rightarrow$ não P", o que representa a base para argumentos/provas *por contradição.* Isto é, às vezes ao fim de provar que $P \Rightarrow Q$, supomos que a afirmação (conclusão, neste cenário) Q seja falsa, e mostramos que a proposição (hipótese, neste cenário) P seja falsa também, uma contradição.

Duas proposições P e Q são equivalentes, e escrevemos $P \iff Q$, se elas têm o mesmo valor lógico, ou seja, são verdadeiras ou falsas no mesmo tempo.

Segue que $P \iff Q$ sse ($P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$).

Em particular, se A e B são dois conjuntos, então
$A = B$ sse $\forall x$ temos que $x \in A \iff x \in B$.

O símbolo $\forall$ significa "para todo". Além disso, o símbolo $\exists$ significa "existe". Eles são chamados de *quantificadores lógicos.*

Axioma. (um axioma é um fato matemático aceito sem prova, um "dogma")

Existe um conjunto $\emptyset$, chamado do conjunto vazio, que não contém nenhum elemento, ou seja, $\forall x$ temos $x \notin \emptyset$.

Definição 3. Sejam A e B dois conjuntos. A união de A e B é o conjunto $A \cup B$ que consiste em todos os elementos que pertencem a A ou a B (ou aos ambos conjuntos), ou seja,

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Portanto $x \in A \cup B$ sse ($x \in A$ ou $x \in B$).

Exemplo 5. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

Proposição 1. *Se A, B, C são conjuntos, então*
$A \cup B = B \cup A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cup \emptyset = A$.

Demonstração. Exercício. □

Definição 4. Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A é um subconjunto de B, e escrevemos $A \subset B$ se todo elemento de A também é um elemento de B, ou seja,
$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$.

Além disso, A é um subconjunto próprio de B se $A \subset B$ e $A \neq B$. Neste caso escrevemos $A \subsetneq B$.

Proposição 2. *Sejam A, B, C conjuntos.*

- *Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.*
- *Se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$.*

Demonstração. Exercício. □

Subconjuntos são muitas vezes definidos por uma propriedade específica, ou seja, dado um conjunto A e uma propriedade $P(x)$ sobre um objeto x, existe um conjunto B dos elementos de A que satisfazem a propriedade $P(x)$, ou seja,

$$B = \{x \in A \colon P(x) \text{vale}\}.$$

Também usamos a notação

$$B = \{x \in A \,|\, P(x) \text{vale}\}.$$

Exemplo 6. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $P(x)$ a propriedade de x ser par.
Então $B = \{x \in A : P(x) \text{ é verdadeira}\} = \{2, 4\}$.

Definição 5. Dado um conjunto X conjunto, denotamos por

$$\mathcal{P}(X) = 2^X = \{A : A \subset X\}$$

o conjunto de todos os subconjuntos de X.

Definição 6. Sejam A e B dois conjuntos. A interseção de A e B é o conjunto $A \cap B$ de elementos que pertencem a ambos conjuntos, ou seja,

$$A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Portanto, $x \in A \cap B$ sse ($x \in A$ e $x \in B$).

Definição 7. Dois conjuntos A e B são disjuntos se eles não têm nenhum elemento em comum, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$.

Definição 8. Sejam A e B dois conjuntos. A diferença de A e B é o conjunto $A \setminus B$ de elementos em A que não pertencem a B, ou seja,

$$A \setminus B = \{x \colon x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Portanto, $x \in A \setminus B$ sse ($x \in A$ e $x \notin B$).

Proposição 3. *Sejam A, B, C conjuntos. Então*

- $A \cap \emptyset = \emptyset A, \quad A \cap A = A.$
- $A \cap B = B \cap A.$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
- $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$

Seja X um conjunto que será visto como "universo" (por exemplo X é o conjunto de números reais).

Neste contexto, se $A \subset X$, denotamos o complemento de A (relativamente a X) por

$$A^c = X \setminus A.$$

Logo, $X = A \cup A^c$ e $A \cap A^c = \emptyset$.

Proposição 4. *(relações de de Morgan) Sejam $A, B \subset X$. Então*
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Demonstração. Para todo x teme-se
$x \in (A \cup B)^c$
sse $x \notin (A \cup B)$
sse ($x \notin A$ e $x \notin B$)
sse ($x \in A^c$ e $x \in B^c$)
sse $x \in A^c \cap B^c$,
mostrando que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Além disso,
$x \in (A \cap B)^c$
sse $x \notin A \cap B$
sse ($x \notin A$ ou $x \notin B$)
sse ($x \in A^c$ ou $x \in B^c$)
sse $x \in A^c \cup B^c$,
mostrando que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. □