

LISTA 2: FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS NOÇÕES BÁSICAS E TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

Exercício 1. Definimos a *conorma* de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ como

$$m(T) := \inf \left\{ \frac{\|Tv\|}{\|v\|} : v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0 \right\}.$$

- (i) Se T é um isomorfismo, prove que $m(T) > 0$. A recíproca é verdadeira?
- (ii) Se $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $m(T) > 0$ prove que T é um isomorfismo.
- (iii) O que acontece quando $\|T\| = m(T)$?

Exercício 2. Sejam $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ duas transformações lineares. Prove as seguintes afirmações:

- (i) $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$.
- (ii) $m(S \circ T) \geq m(S) m(T)$.

Exercício 3. Lembre-se que uma função $R: B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita *sublinear* se $R(0) = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{\|x\|} = 0.$$

- (i) Explique porque R é contínua e também diferenciável no ponto 0.
- (ii) Considere duas funções sublineares $R_1: B(0, \epsilon_1) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B(0, \epsilon_2) \subset \mathbb{R}^m$ e $R_2: B(0, \epsilon_2) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. Prove que $R_2 \circ R_1$ é sublinear.

Exercício 4. Mostre que ambas as derivadas parciais da função

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

existem na origem, mas a função não é diferenciável na origem.

Exercício 5. Seja $B \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ uma transformação bilinear e defina $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$\phi(x) := B(x, x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

- (i) Prove que ϕ é diferenciável de ordem dois e $(D^2\phi)_p = 2 \operatorname{Sim}(B)$ em todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$, onde

$$\operatorname{Sim}(B)(v, w) := \frac{1}{2} (B(v, w) + B(w, v)) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

- (ii) Prove que $(D^3\phi)_p = 0$ em todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 6. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e *conexo* e seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função.

- (i) Suponha que f seja diferenciável e $(Df)_x = 0$ para todo $x \in U$. Prove que f é uma função constante.
- (ii) Suponha que f seja diferenciável de ordem dois e $(D^2f)_x = 0$ para todo $x \in U$. Prove que f é uma função afim (linear + constante).

Exercício 7. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $p \in U$ um ponto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função, escrita em coordenadas como $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Suponha que cada coordenada f_i é diferenciável em p . Prove que f é diferenciável em p e expresse a derivada de f em termos das derivadas de suas coordenadas f_i .

Exercício 8. Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

(i) Suponha que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Prove que $\frac{1}{f}$ é diferenciável e determine a sua derivada.

(ii) Prove que e^f é diferenciável e determine a sua derivada.

Explique todos os passos de uma maneira detalhada.

Exercício 9. Considere a equação

$$x e^y + y e^x = 0.$$

(i) Observe que não há como determinar uma solução explícita $y = \phi(x)$ da equação acima em uma vizinhança do ponto $(0, 0)$.

(ii) Por que, no entanto, existe uma solução suave $y = \phi(x)$ dessa equação perto de $(0, 0)$?

(iii) Qual é a sua derivada em $x = 0$? Qual é a segunda derivada em $x = 0$?

(iv) O que isso lhe diz sobre o gráfico da solução?

Então, está mais claro o cerne do teorema da função implícita?

Exercício 10. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto contendo o ponto $(0, 0)$ e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 .

Suponha que $(\partial_y f)(0, 0)$ seja invertível e considere $\phi: B(0, \epsilon_2) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B(0, \epsilon_1) \subset \mathbb{R}^m$ a função implícita correspondente. Prove as seguintes afirmações.

(i) ϕ é contínua. Na verdade, dado $x_0 \in B(0, \epsilon_2)$, existe $L < \infty$ tal que

$$\|\phi(x) - \phi(x_0)\| \leq L \|x - x_0\|$$

para todo x suficientemente perto de x_0 .

(ii) Prove que ϕ é diferenciável e estabeleça a fórmula da sua derivada.