Leis de médias em análise

Silvius Klein

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

A lei dos grandes números: enunciado informal

O valor esperado teórico de um experimento pode ser aproximado pela média de um número grande de amostras independentes.

$$\boxed{\text{valor esperado teórico} \approx \text{média empírica}}$$

A lei dos grandes números (LGN)

Seja

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

uma sequência de cópias
independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.)
de uma variável aleatória escalar X.
Suponha que X seja absolutamente integrável, com
esperança μ.

Defina o processo de somas parciais

$$S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Então o processo de médias

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

A lei dos grandes números: enunciado formal

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com a mesma esperanca μ.

Considere $S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ o processo de somas parciais correspondentes. Então

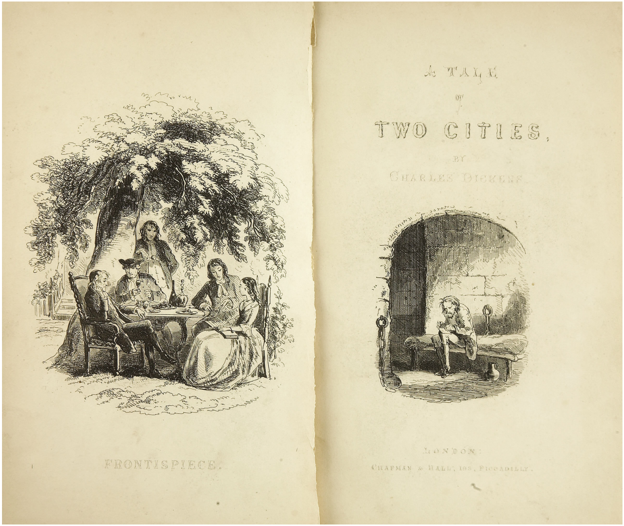
1. (LGN fraca) $\dfrac{S_n}{n} \to \mu$ em probabilidade.

   Ou seja, para todo $\epsilon > 0$,

   $$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\} \to 0 \quad \text{quando } \; n \to \infty.$$

2. (LGN forte) $\dfrac{S_n}{n} \to \mu$ quase certamente.

It was the best of times, it was the worst of times.
(Foi o melhor dos tempos, foi o pior dos tempos.)



Charles Dickens, A tale of two cities (Um conto de duas cidades)

Aplicação da LGN: o teorema do macaco infinito

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. sorteados uniformemente de um alfabeto finito.

Então quase certamente, toda frase finita (i.e. sequência finita de símbolos do alfabeto) aparece (uma infinidade de vezes) na sequência $X_1 X_2 X_3 \ldots$

Aplicação da LGN: o teorema do macaco infinito

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. sorteados uniformemente de um alfabeto finito.

Então quase certamente, toda frase finita (i.e. sequência finita de símbolos do alfabeto) aparece (uma infinidade de vezes) na sequência $X_1X_2X_3\ldots$

yskpw,qol,all/alkmas;'.a ma;;lal;,qwmswl,;q;[;' lkle'78623rhbkbads m ,q l;,';f.w, ' fwe It was the best of times, it was the worst of times. jllkasjllmk,a s.„,qjwejhns;.2;oi0ppk;q,Qkjkqhjnqnmnmmasi[oqw— qqnkm,sa;l;[ml/w/'q

Aplicação da LGN: o teorema do macaco infinito

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d. sorteados uniformemente de um alfabeto finito.

Então quase certamente, toda frase finita (i.e. sequência finita de símbolos do alfabeto) aparece (uma infinidade de vezes) na sequência $X_1 X_2 X_3 \ldots$

yskpw,qol,all/alkmas;'.a ma;;lal;,qwmswl,;q;[;' lkle'78623rhbkbads m ,q l;,';f.w, ' fwe It was the best of times, it was the worst of times. jllkasjllmk,a s.„,qjwejhns;.2;oi0ppk;q,Qkjkqhjnqnmnmmasi[oqw— qqnkm,sa;l;[ml/w/'q

$\square$

A prova formal do teorema do macaco infinito

Divida toda realização das sequência infinitas de símbolos no alfabeto

$$X_1 X_2 X_3 \ldots X_n \ldots$$

em sequências finitas $S_1, S_2, \ldots$ de comprimento 52 cada.

Seja E_n o evento para o qual a frase

It was the best of times, it was the worst of times.

é exatamente a n-ésima sequência finita S_n.

Esses eventos são independentes.
Cada evento tem a mesma probabilidade $p > 0$ de ocorrer.

Aplique a lei forte dos grandes números às variáveis aleatórias $X_k := \mathbb{1}_{E_k}$.

A lei dos grandes números

Vimos que se

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

é uma sequência de cópias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) de uma variável aleatória escalar X, e se denortamos o processo de soma correspondente por

$$S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

então, quase certamente, o processo de médias

$$\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}\, X \quad \text{quando} \;\; n \to \infty.$$

Um sistema bastante determinístico: rotação do círculo

Seja $\mathbb{S}$ o círculo unitário no plano (complexo).

Existe uma medida natural λ em $\mathbb{S}$ (i.e. a extensão do comprimento de arco).

Seja $2\pi\alpha$ um ângulo, e denote por R_α a rotação por α em $\mathbb{S}$.

Ou seja, considere a transformação

$$R_\alpha \colon \mathbb{S} \to \mathbb{S},$$

que a cada $z = e^{2\pi i x} \in \mathbb{S}$ associa

$$R_\alpha(z) = e^{2\pi i (x+\alpha)} = z \cdot \omega,$$

onde denota-se $\omega := e^{2\pi i \alpha}$.

Note que R_α preserva a medida λ.

Iterações da rotação do círculo

Seja $2\pi\alpha$ um ângulo.
Comece com um ponto $z = e^{2\pi i x} \in \mathbb{S}$ e considere aplicações sucessivas da transformação de rotação R_α:

$$\begin{aligned}
R_\alpha^1(z) &= R_\alpha(z) && = e^{2\pi i (x+\alpha)} \\
R_\alpha^2(z) &= R_\alpha \circ R_\alpha(z) && = e^{2\pi i (x+2\alpha)} \\
&\vdots \\
R_\alpha^n(z) &= R_\alpha \circ \ldots \circ R_\alpha(z) && = e^{2\pi i (x+n\alpha)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

As transformações R_α^1, $R_\alpha^2, \ldots, R_\alpha^n, \ldots$ são as iterações de R_α.

Dado um ponto $z \in \mathbb{S}$, o conjunto

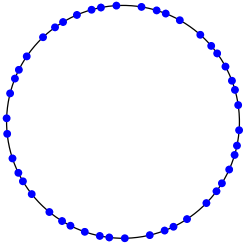
$$\{R_\alpha^1(z),\, R_\alpha^2(z),\, \ldots, R_\alpha^n(z), \ldots\}$$

é dito a órbita de z.

Uma órbita da rotação do círculo

Seja R_α a rotação do círculo pelo ângulo $2\pi\alpha$, onde α é um número irracional.

Escolha um ponto z no círculo $\mathbb{S}$.

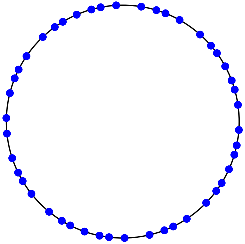


A órbita de z (ou ainda um subconjunto dela).

Uma órbita da rotação do círculo

Seja R_α a rotação do círculo pelo ângulo $2\pi\alpha$, onde α é um número irracional.

Escolha um ponto z no círculo $\mathbb{S}$.



A órbita de z (ou ainda um subconjunto dela).

A órbita de cada ponto é densa no círculo.

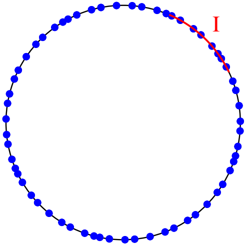
Essa transformação satisfaz uma forma muito fraca de independência dita ergodicidade.

Oberváveis no círculo unitário

Qualquer função mensurável $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ é dita um observável (escalar) do espaço de medidda $(\mathbb{S}, \mathcal{B}, \lambda)$.

Consideraremos observáveis absolutamente integráveis.

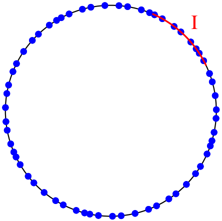
Um exemplo básico de um observável: $f = \mathbb{1}_I$, onde I é um arco (ou qualquer conjunto mensurável) do círculo.



“Observações"de pontos de uma órbita da rotação do círculo.

Número médio de pontos de uma órbita visitando um arco

Seja R_α a rotação do círculo pelo ângulo $2\pi\alpha$, onde α é um número irracional. Seja I um arco no círculo.



Os primeiros n pontos de uma órbita de R_α e suas visitas à I.

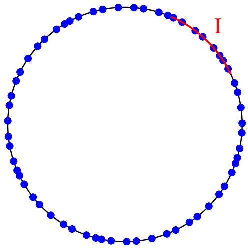
O número médio de visitas à I:

$$\frac{\#\left\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} :\ R_\alpha^j(z) \in I\right\}}{n}$$

O que ocorre com estes números médios para n suficientemente grande?

Número médio de pontos de uma órbita visitando um arco

Seja R_α a rotação do círculo pelo ângulo $2\pi\alpha$, onde α é um número irracional. Seja I um arco no círculo.



Os primeiros n pontos de uma órbita de R_α e suas visitas à I.

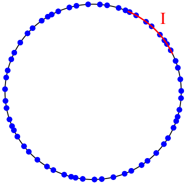
Quando $n \to \infty$, o número médio de visitas à I:

$$\frac{\#\left\{ j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \; R_\alpha^j(z) \in I \right\}}{n} \to \lambda(I)\,,$$

para todo ponto $z \in \mathbb{S}$.

Número médio de pontos de uma órbita visitando um arco

Seja R_α a rotação do círculo pelo ângulo $2\pi\alpha$, onde α é um número irracional. Seja I um arco no círculo.



Os primeiros n pontos de uma órbita de R_α e suas visitas à I.

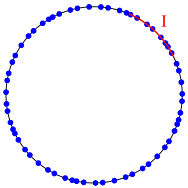
$$\#\left\{ j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \; R_\alpha^j(z) \in I \right\} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_I \left(R_\alpha^j(z)\right).$$

Então o número médio de visitas à I pode ser escrito como:

$$\frac{\mathbb{1}_I \left(R_\alpha^1(z)\right) + \mathbb{1}_I \left(R_\alpha^2(z)\right) + \ldots + \mathbb{1}_I \left(R_\alpha^n(z)\right)}{n} \to \lambda(I)$$

Número médio de pontos de uma órbita visitando um arco

Seja R_α a rotação do círculo pelo ângulo $2\pi\alpha$, onde α é um número irracional. Seja I um arco no círculo.



Os primeiros n pontos de uma órbita de R_α e suas visitas à I.

$$\#\left\{ j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \; R_\alpha^j(z) \in I \right\} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_I \left(R_\alpha^j(z)\right).$$

Então o número médio de visitas à I pode ser escrito como:

$$\frac{\mathbb{1}_I \left(R_\alpha^1(z)\right) + \mathbb{1}_I \left(R_\alpha^2(z)\right) + \ldots + \mathbb{1}_I \left(R_\alpha^n(z)\right)}{n} \to \lambda(I) = \int_{\mathbb{S}} \mathbb{1}_I \, d\lambda \, .$$

Sistemas dinâmicos que preservam medida

Um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$
juntamente com uma transformação $T\colon X \to X$
definem um sistema dinâmico que preserva medida se T é mensurável e preserva a medida de qualquer conjunto $\mathcal{B}$-mensurável:

$$\mu(T^{-1}A) = \mu(A) \quad \text{for all } A \in \mathcal{B}.$$

Sistema dinâmico ergódico. Dado qualquer conjunto $\mathcal{B}$-mensurável A, com $\mu(A) > 0$, as iterações

$$T^{-1}A,\ T^{-2}A,\ \ldots,\ T^{-n}A, \ldots$$

preenchem o espaço todo X, exceto, possivelmente, por um conjunto de medida zero.

Ergodicidade, então, conduz à uma forma muitíssimo fraca de independência.

Alguns exemplos de sistemas dinâmicos ergódicos

1. O deslocamento de Bernoulli,
   que codifica sequências de variáveis aleatórias independentes e identicamente distrubuídas.

2. A rotação do círculo por um ângulo irracional.

3. Transformações expansoras lineares, por exemplo

$$T\colon [0,1] \to [0,1], \quad Tx = 10x \mod 1.$$

$$\vdots$$

O teorema ergódico pontual de Birkhoff

Dados:

um sistema dinâmico ergódico $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$,

e um observável absolutamente integrável $f \colon X \to \mathbb{R}$,

defina a n-ésima soma de Birkhoff por

$$S_n f(x) := f(Tx) + f(T^2 x) + \ldots + f(T^n x).$$

Então quando $n \to \infty$, a média de Birkhoff

$$\frac{1}{n} S_n f(x) \to \int_X f \, d\mu \quad \text{para } \mu \text{ - q.t.p. } x \in X.$$

A lei dos grandes números

Vimos que se

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

é uma sequência de cópias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) de uma variável aleatória escalar X, e se denortamos o processo de soma correspondente por

$$S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

então quando $n \to \infty$, o processo de médias

$$\frac{1}{n} S_n \to \int X \quad \text{quase certamente} .$$

Uma aplicação imediata do teorema ergódico

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ um sistema dinâmico ergódico.
Tome $x \in X$, e considere sua órbita

$$Tx,\ T^2x,\ \dots,\ T^nx,\ \dots$$

Equidistribuição de pontos da órbita. Para qualquer conjunto $\mathcal{B}$-mensurável A, o número médio de pontos da órbita que visitam A, converge quando $n \to \infty$.

$$\frac{\#\left\{j \in \{1, 2, \dots, n\} :\ T^j x \in A\right\}}{n} \to \mu(A)\,.$$

para μ quase todo ponto $x \in X$.

Prova. Simplesmente aplique o teorema ergódico pontual ao observável

$$f = \mathbb{1}_A\,,$$

e note que a contagem de pontos da órbita acima é igual a n-ésima soma de Birkhoff desse observável.

Outra simples aplicação do teorema ergódico

Considere a representação decimal de um número real $x \in [0, 1)$.

$$x = 0.\, x_1\, x_2\, \ldots\, x_n\, \ldots\, ,$$

onde os dígitos $x_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Questão. Qual é a frequência (ocorrência média) de cada dígito na representação decimal de um número real "típico" $x \in [0, 1]$?

Outra simples aplicação do teorema ergódico

Considere a representação decimal de um número real $x \in [0, 1)$.

$$x = 0.\, x_1\, x_2\, \ldots\, x_n\, \ldots\,,$$

onde os dígitos $x_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Questão. Qual é a frequência (ocorrência média) de cada dígito na representação decimal de um número real "típico" $x \in [0, 1]$?

$$\frac{\#\left\{ j \in \{1, 2, \ldots, n\} :\; x_j = 7 \right\}}{n} \approx ? \quad \text{quando} \;\; n \to \infty\,.$$

Outra simples aplicação do teorema ergódico

Questão. Qual é a frequência (ocorrência média) de cada dígito na representação decimal de um número real "típico" $x \in [0, 1]$?

$$\frac{\#\left\{ j \in \{1, 2, \dots, n\} : \ x_j = 7 \right\}}{n} \approx ? \quad \text{quando} \ \ n \to \infty \, .$$

Solução. Considere o sistema dinâmico dado pela transformação: $T \colon [0, 1) \to [0, 1), \quad Tx = 10x \mod 1.$ Seja $f \colon [0, 1) \to \mathbb{R}$ o observável definido por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 = 7 \\ 0 & \text{caso contrário} \, . \end{cases}$$

A lei dos grandes números

Vimos que se

$$X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n,\, \ldots$$

é uma sequência de variáveis aleatórias escalares, independentes e identicamente distribuídas, e se denotamos o processo de soma correspondente por

$$S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

então as médias aritméticas

$\dfrac{1}{n}\, S_n$ convergem quase certamente quando $n \to \infty$.

Matrizes aleatórias e médias geométricas

Considere a sequência

$$M_1,\, M_2,\, \ldots,\, M_n,\, \ldots$$

de matrizes aleatórias.
Suponha que esta sequência é independente e identicamente distribuída.

Considere o processo de produtos parciais:

$$\Pi_n = M_n \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \ .$$

Matrizes aleatórias e médias geométricas

Considere a sequência

$$M_1,\, M_2,\, \ldots,\, M_n,\, \ldots$$

de matrizes aleatórias.
Suponha que esta sequência é independente e identicamente distribuída.

Considere o processo de produtos parciais:

$$\Pi_n = M_n \cdot \ldots \cdot M_2 \cdot M_1 \ .$$

O teorema de Furstenberg-Kesten. Quase certamente, quando $n \to \infty$, as "médias geométricas"

$$\frac{1}{n} \log \|\Pi_n\| \quad \text{convergem para uma constante.}$$

Essa constante é chamada o expoente de Lyapunov do processo multiplicativo.

Se gostaram disso . . .

. . . então o nosso departamento tem
vários cursos e programas relacionados.

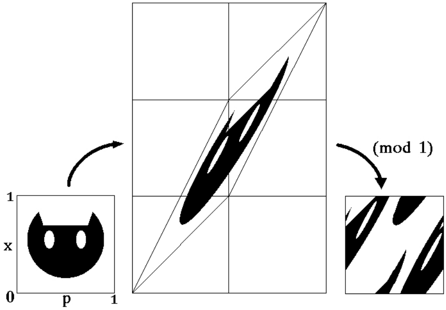
Teoria das probabilidades: MAT2303, 2304, 2305

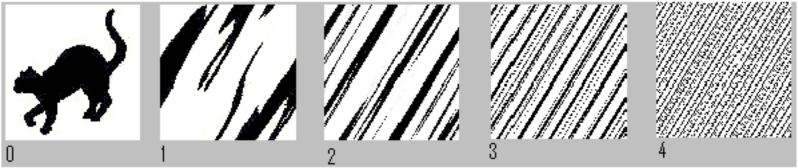
Um macaco digitando palavras aleatórias.

Teoria de medida: MAT2621 e outros cursos de análise

Um dos principais objetivos do curso é entender essa imagem.

Sistemas dinâmicos e teoria ergódica: MAT2920, MAT2921, MAT2922, MAT2923





A transformação de gato.