Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Automatentheorie und Formale Sprachen

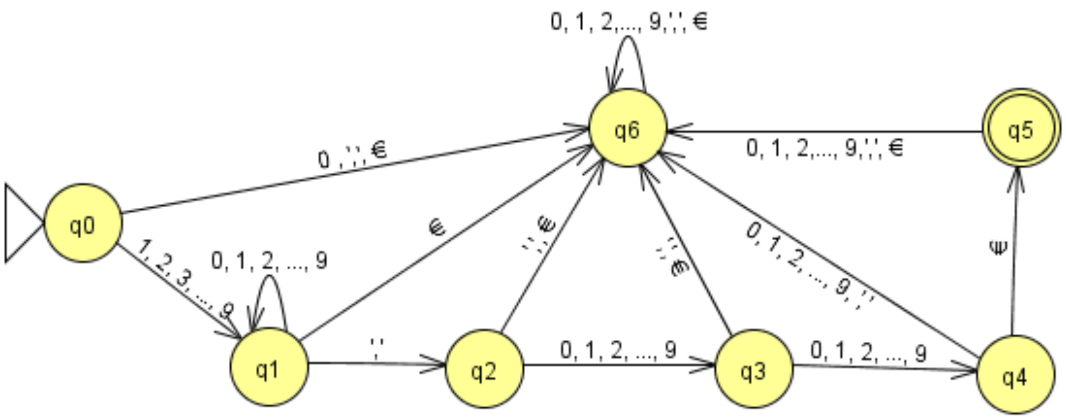
– Endliche Automaten –

Prof. Dr. Michael Neitzke
(leicht angepasst von Daniel Brönner)

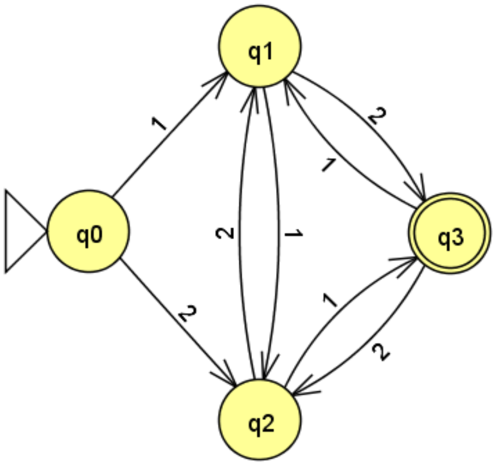
EA1: Deterministische endliche Automaten

- Beispiele für DEAs Beispiel Autoroute
- Formale Definition von DEAs
- Grundbegriffe: Alphabet, Zeichenreihe, Sprache
- Übergangsdiagramm, Übergangstabelle
- Erweiterte Übergangsfunktion
  -> Definition der Sprache eines DEAs
- Werkzeuge zum Üben

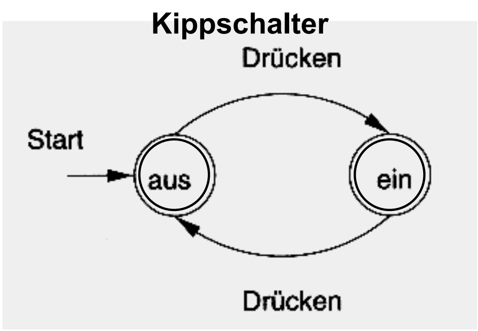
Automaten…



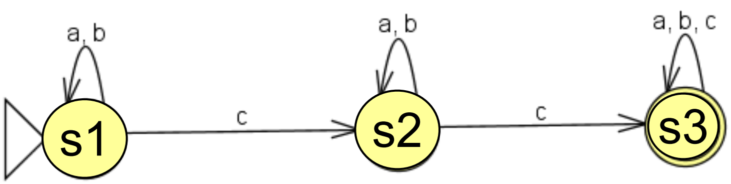
0, 1, 2,..., 9,',', €
q6
q5
0 ,',', €
0, 1, 2,..., 9,',', €
q0
1, 2, 3, ..., 9
0, 1, 2, ..., 9
€
',', €
',', €
0, 1, 2, ..., 9, ','
€
q1
','
q2
0, 1, 2, ..., 9
q3
0, 1, 2, ..., 9
q4



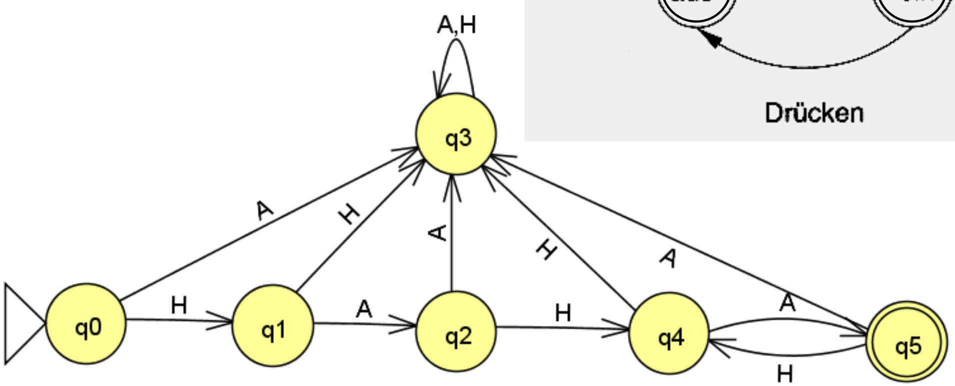
q1
q0
q3
q2
1
2
1
2
1
1
2
2



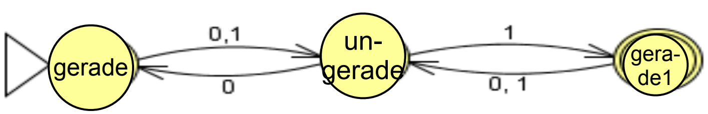
Kippschalter
Drücken
Start
aus
ein
Drücken



a, b
a, b
a, b, c
s1
c
s2
c
s3

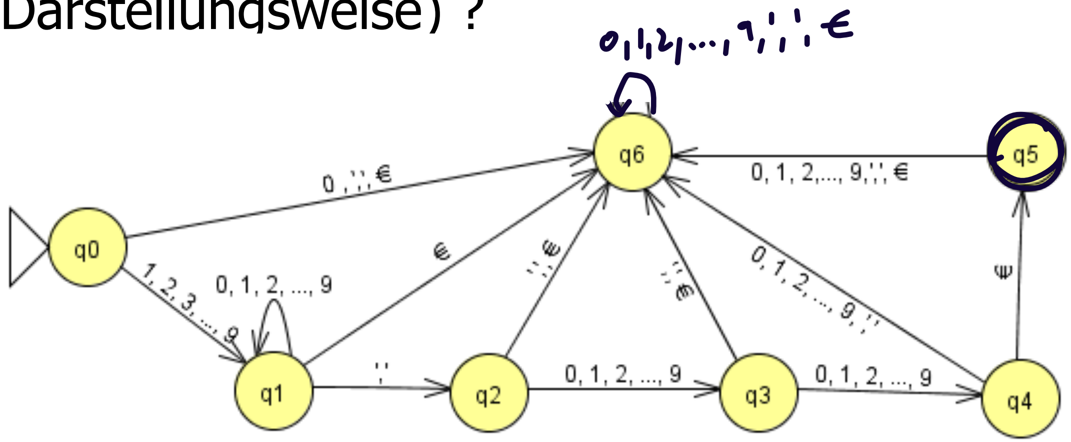


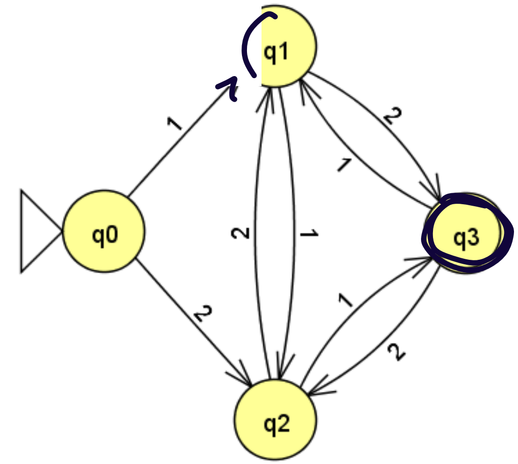
A,H
q3
A
H
A
H
A
q0
H
q1
A
q2
H
q4
A
q5
H

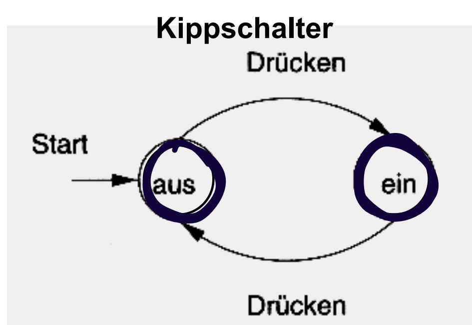


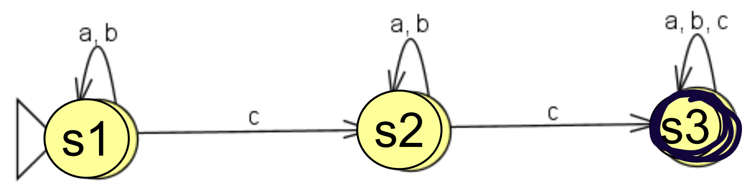
gerade
0,1
0
un-
gerade
1
0, 1
gera-
de1

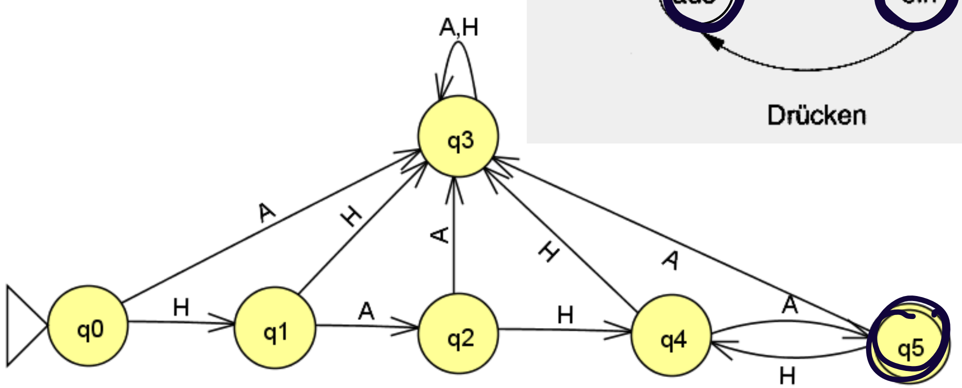
Welche Merkmale finden Sie bei einem Automaten? Versuchen Sie, geeignete allgemeine Bezeichnungen für diese Merkmale zu finden. Welche Unterschiede gibt es in der konkreten Notation (Darstellungsweise) ?

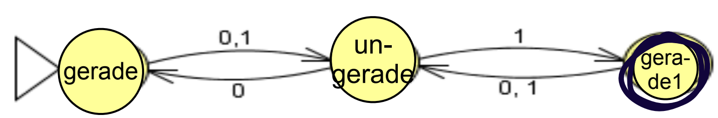










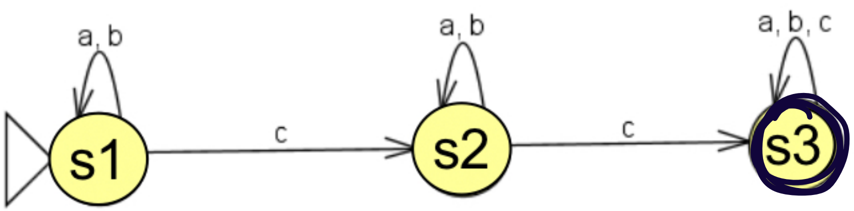


Wie könnte man EA formal beschreiben?

Sie haben Merkmale entdeckt, aus denen endliche Automaten bestehen. Überlegen Sie sich, wie man diese Merkmale mit mathematischen Konzepten beschreiben könnte.

Beispiele für Konzepte wären:

- Funktionen
- Relationen
- Kreuzprodukte
- Tupel
- Mengen
- Teilmengen
- Potenzmengen
- Elemente von Mengen



DEA

[HMU02], Kap. 2.2.1

Definition

Ein deterministischer endlicher Automat (DEA) besteht aus

1. Q_A - endliche Menge von Zuständen
2. Σ_A - endliche Menge von Eingabesymbolen, dem Alphabet
3. δ_A - der Übergangsfunktion; Signatur: $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$
4. q_0 - dem Startzustand
5. F_A - einer Teilmenge von Q von akzeptierenden Zuständen

Übliche Schreibweise: $A = (Q_A, \Sigma_A, \delta_A, q_0, F_A)$

Anmerkungen

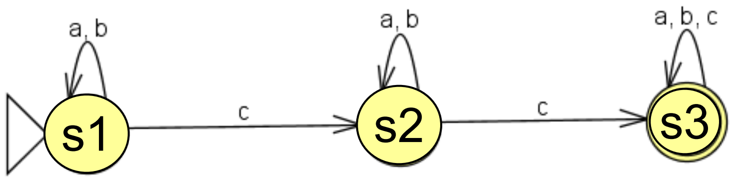
- Wenn im Zusammenhang klar ist von welchem Automaten die Rede ist, lassen wir die meist $_A$ weg.
- Für $\delta(q, a) = p$ schreiben wir auch $q \xrightarrow{a} p$

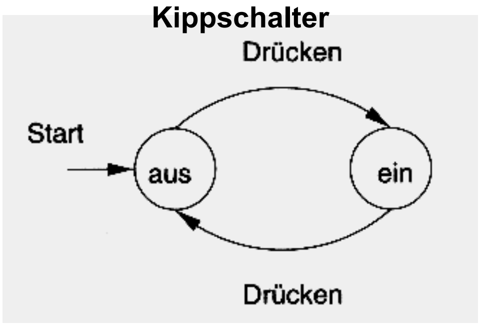
Beschreiben Sie den Automaten formal! Sie müssen dabei nicht alles vollständig aufschreiben, wenn Ihnen der Rest klar ist.

Ein deterministischer endlicher Automat (DEA) besteht aus

1. Q_A - endliche Menge von Zuständen
2. Σ_A - endliche Menge von Eingabesymbolen, dem Alphabet
3. δ_A - der Übergangsfunktion; Signatur: $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$
4. q_0 - dem Startzustand
5. F_A - einer Teilmenge von Q von akzeptierenden Zuständen

Übliche Schreibweise: $A = (Q_A, \Sigma_A, \delta_A, q_0, F_A)$





Beschreiben Sie den Automaten formal! Sie müssen dabei nicht alles vollständig aufschreiben, wenn Ihnen der Rest klar ist.

Ein deterministischer endlicher Automat (DEA) besteht aus

1. Q_A - endliche Menge von Zuständen
2. Σ_A - endliche Menge von Eingabesymbolen, dem Alphabet
3. δ_A - der Übergangsfunktion; Signatur: $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$
4. q_0 - dem Startzustand
5. F_A - einer Teilmenge von Q von akzeptierenden Zuständen

Übliche Schreibweise: $A = (Q_A, \Sigma_A, \delta_A, q_0, F_A)$

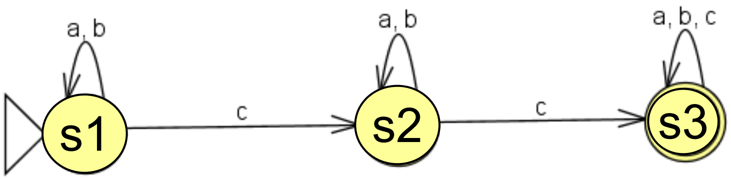
$Q = \{s_1, s_2, s_3\}$

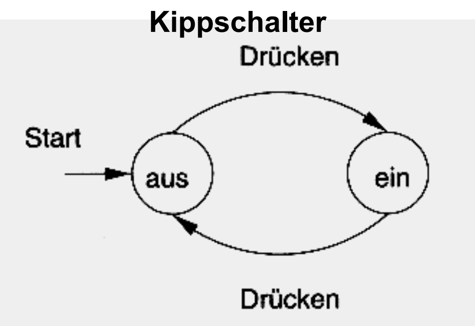
$\Sigma = \{a, b, c\}$

$\delta(s1, c) = s2$ (z.B.)

$F = \{s_3\}$

$A = (Q, \Sigma, \delta, s1, F)$

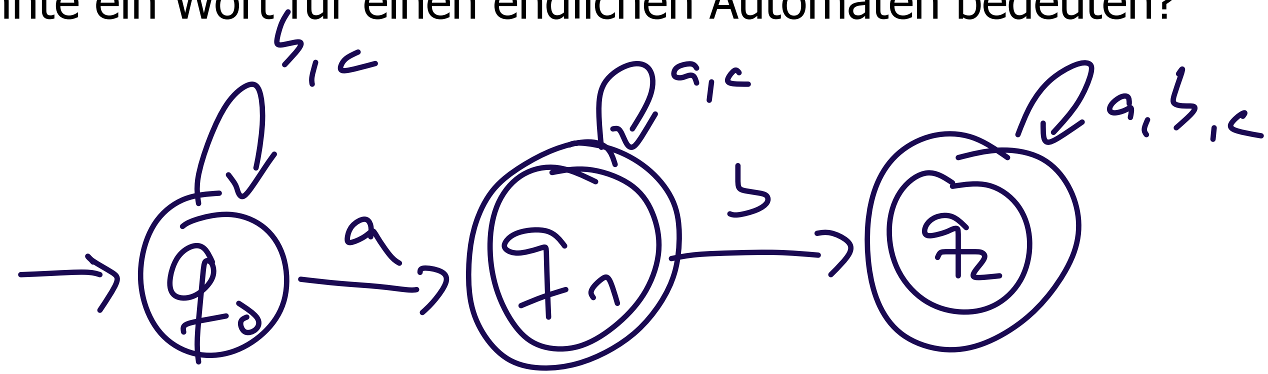




Grundbegriffe

In der Definition haben Sie den Begriff des **Alphabets** bereits kennengelernt.

- Wie könnte der Begriff **Wort** definiert sein?
- In welcher Beziehung stehen Alphabet und Wort in einer natürlichen Sprache?
- Was könnte ein Wort für einen endlichen Automaten bedeuten?



aac

Definition Alphabet, Wort

- **Alphabet**: nicht leere, endliche Menge von **Symbolen** (**Zeichen**, **Token**)
  - Beispiele
    - Binäres Alphabet: $\Sigma = \{0, 1\}$
    - Kleinbuchstaben: $\Sigma = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$
    - ASCII, EBCDIC, Unicode Zeichen

- **Zeichenreihe** (**Wort**, **String**): endliche Folge von Symbolen über einem Alphabet
  - Beispiele
    - 0, 1, 001, 110100 für Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$
    - hallo, zbefdzg für Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$
    - foo hallo für Alphabet $\Sigma = \{hallo, huhu, foo\}$

Definition Leeres Wort, Länge eines Wortes

- **Leere Zeichenreihe**, **leeres Wort**: ε

- **Länge einer Zeichenreihe** w : $|w|$
  - Beispiele für $\Sigma = \{0,1\}$
    - $|0| = 1$
    - $|111| = 3$
    - $|010| = 3$
    - $|\varepsilon| = 0$

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Wörter über einem Alphabet

- Wie viele Wörter gibt es für ein gegebenes Alphabet?
- Wie könnte man diese Wörter systematisch erzeugen?

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots\}$$

$$\{\varepsilon\} \neq \{\ \}$$

Wörter über einem Alphabet

- Wie viele Wörter gibt es für ein gegebenes Alphabet?
- Wie könnte man diese Wörter systematisch erzeugen?

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\left(P(\Sigma) = \{ \{\}, \{0\}, \{1\}, \{0,1\} \} \right)$

$\{ \varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots \}$

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Grundbegriffe - 3

[HMU02], Kap. 1.5.2

- Potenzen eines Alphabets
  Gruppen von jeweils gleich langen Zeichenreihen über dem Alphabet. Σ^0: alle Zeichenreihen der Länge 0, Σ^1: alle Zeichenreihen der Länge 1, dh aus einem Zeichen, Σ^2: alle Zeichenreihen der Länge 2, usw.

$\Sigma = \{0, 1\}$:

$$
\begin{aligned}
\Sigma^0 &= \{\varepsilon\} \\
\Sigma^1 &= \{0, 1\} \\
\Sigma^2 &= \{00, 01, 10, 11\} \\
\Sigma^3 &= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} \\
\Sigma^* &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \ldots \\
\Sigma^+ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^n = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \ldots
\end{aligned}
$$

Grundbegriffe

- Wie könnte der Begriff **Sprache** definiert sein?
- Was könnte die Sprache eines Automaten sein?

Grundbegriffe - 3

[HMU02], Kap. 1.5.3 u. 2.2.5

- Sprache
  - Eine Menge von Zeichenreihen über einem Alphabet
    Häufig informell beschrieben:

Die Menge aller Zeichenreihen über $\{0, 1\}$ die mit einer 1 anfangen:
$\{1, 10, 11, 100, 101, \ldots\}$
Die Menge aller Binärzahlen, deren Wert eine Primzahl ist:
$\{10, 11, 101, 1011, \ldots\}$ $= P$ $\quad 111 \in P$

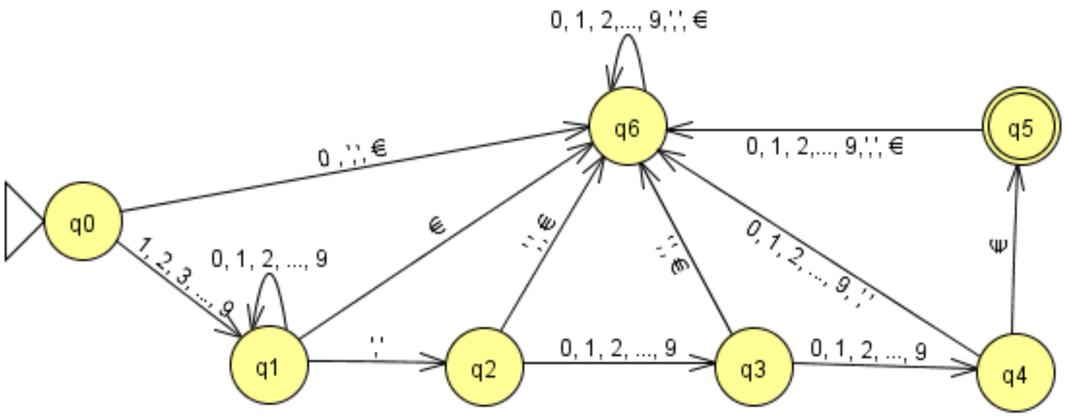
Oder als mathematische Menge:

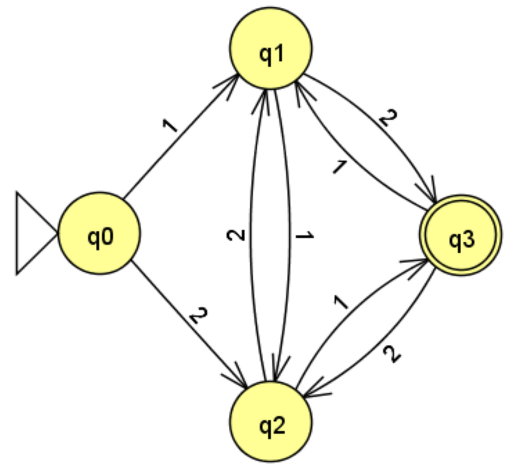
$$\{w \mid w \in \{0, 1\}^*, \mid w \mid = 2\} = \{00, 01, 10, 11\}$$

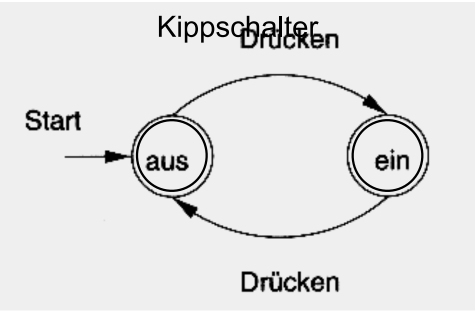
  - Spezielle Sprachen:
    Σ^* - Menge aller Zeichenreihen über Σ
    $\emptyset$ - die leere Sprache (keine Zeichenreihe darin enthalten)
    $\{\varepsilon\}$ - Die Sprache die nur die leere Zeichenreihe enthält
    Anmerkung: $\emptyset \neq \{\varepsilon\}$

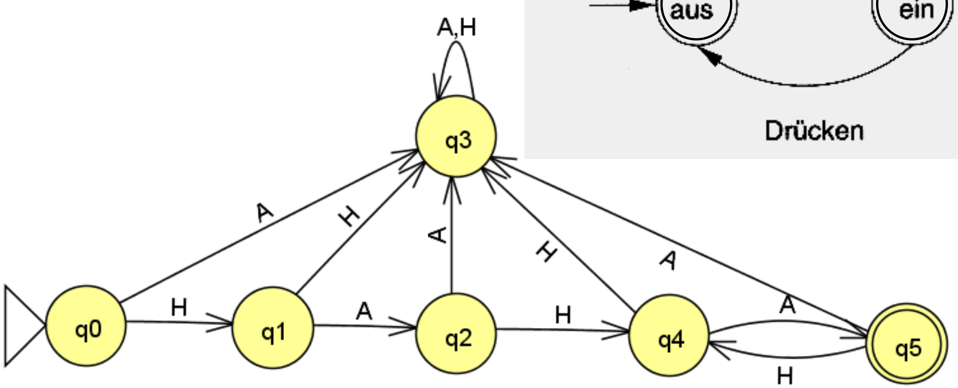
Übung

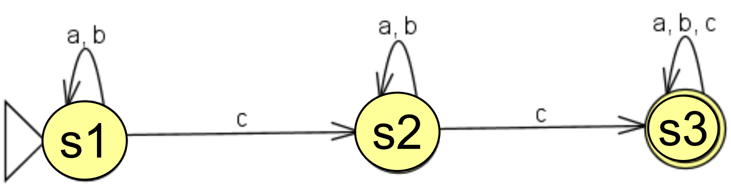
Welche Sprachen akzeptieren die Automaten aus den Beispielen?

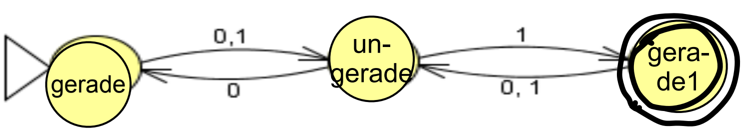












Übung

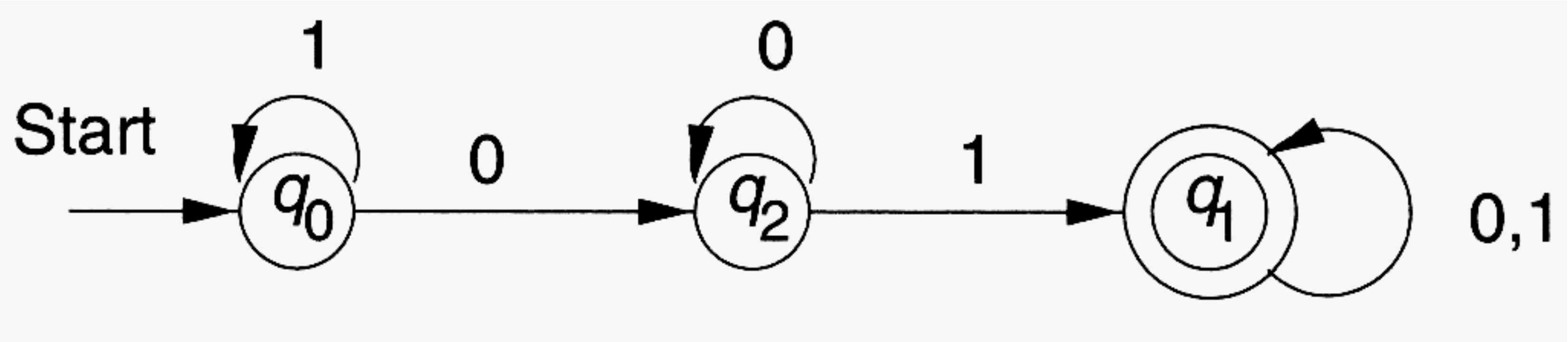
Entwickeln Sie einen Automaten, der alle Zeichenreihen aus Nullen und Einsen akzeptiert, die die Zeichenfolge "01" enthalten.

1) Einzelarbeit !
2) Austausch in der Gruppe

Binnendifferenzierung (BD):

„...an genau zwei Stellen die '01' enthalten"

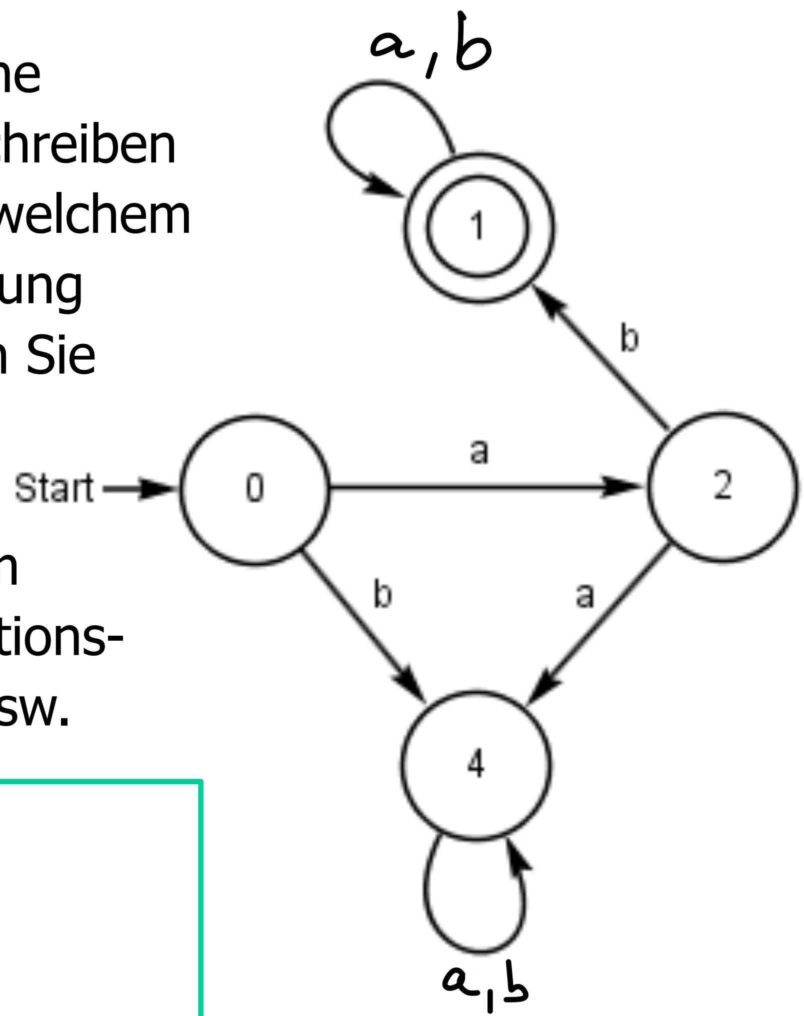
Übergangsdiagramm und -tabelle



δ	0	1
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
$* q_1$	q_1	q_1
q_2	q_2	q_1

Erweiterte Übergangsfunktion

Sie kennen aus der Definition für endliche Automaten die Übergangsfunktion. Beschreiben Sie mit Hilfe der Übergangsfunktion, in welchem Zustand sich der Automat nach Anwendung Wortes 'aba' befindet. Tipp: Beschreiben Sie dabei zuerst, in welchem Zustand er sich nach dem ersten Zeichen befindet, dann nach dem zweiten, indem sie die Übergangsfunktion auf den Funktions-wert für das erste Zeichen anwenden, usw.

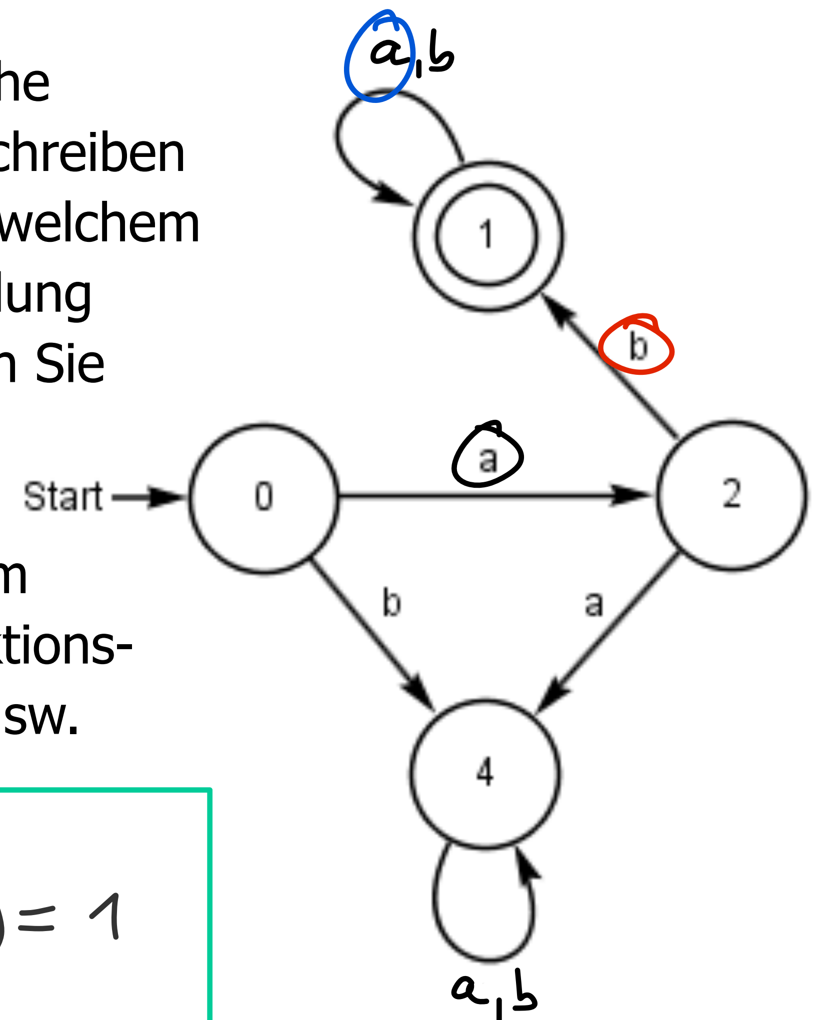


$$\delta(0, a) = \underline{\underline{2}}$$

$$\delta(\delta(0, a), \quad) =$$

Erweiterte Übergangsfunktion

Sie kennen aus der Definition für endliche Automaten die Übergangsfunktion. Beschreiben Sie mit Hilfe der Übergangsfunktion, in welchem Zustand sich der Automat nach Anwendung Wortes 'aba' befindet. Tipp: Beschreiben Sie dabei zuerst, in welchem Zustand er sich nach dem ersten Zeichen befindet, dann nach dem zweiten, indem sie die Übergangsfunktion auf den Funktions-wert für das erste Zeichen anwenden, usw.



$\delta(\delta(\delta(0,a),b),a)$

$= \delta(\delta(2,b),a) = \delta(1,a) = 1$

$= \hat{\delta}(0, aba)$

[HMU02], Kap. 2.2.4

Erweiterte Übergangsfunktion

Definition

Die erweiterte Übergangfunktion $\hat{\delta}$ eines DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist die sequentielle Anwendung von δ auf ein Wort w und ist rekursiv definiert durch

1. $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$
2. $\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$ falls $w = xa, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

Anmerkung

wenn wir den Automaten A explizit kenntlich machen wollen verwenden wir auch $\hat{\delta}_A$.

Wie wird $\hat{\delta}(q_0, w)$ für $w = abc$ berechnet?

Übung

1. $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$
2. $\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$ falls $w = xa, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

Wie wird $\hat{\delta}(q_0, w)$ für $w = abc$ berechnet?

$$\hat{\delta}(q_0, abc) =$$

$$\delta(\underline{\hat{\delta}(q_0, ab)}, c) =$$

$$\delta(\delta(\underline{\hat{\delta}(q_0, a)}, b), c) =$$

$$\delta(\delta(\delta(\underline{\hat{\delta}(q_0, \varepsilon)}, a), b), c) =$$

$$\delta(\delta(\delta(q_0, a), b), c)$$

Sprache eines DEA

[HMU02], Kap. 2.2.5

Definition

Die Sprache $L(A)$ eines DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist definiert als

$w \in \Sigma^*$

$$L(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

Drücken Sie in Ihren Worten anschaulich aus, wie die Sprache eines DEA definiert ist.

Diskussion

Betrachten Sie einen DEA als Black Box.

- Welche Art von Eingaben erhält diese Black Box?
- Wie sehen mögliche Ausgaben der Black Box aus?
- Was leistet also die Black Box? Worin besteht Ihre Funktion?

Ende V1

Übung

Definieren Sie einen DEA, der die Sprache L akzeptiert, wobei

L = { w | w enthält eine gerade Anzahl von Nullen und eine gerade Anzahl von Einsen (Nullen und Einsen in beliebiger Folge) }

Übung

Definieren Sie einen DEA, der die Sprache L akzeptiert, wobei

L = { w | w enthält eine gerade Anzahl von Nullen und eine gerade Anzahl von Einsen (Nullen und Einsen in beliebiger Folge) }

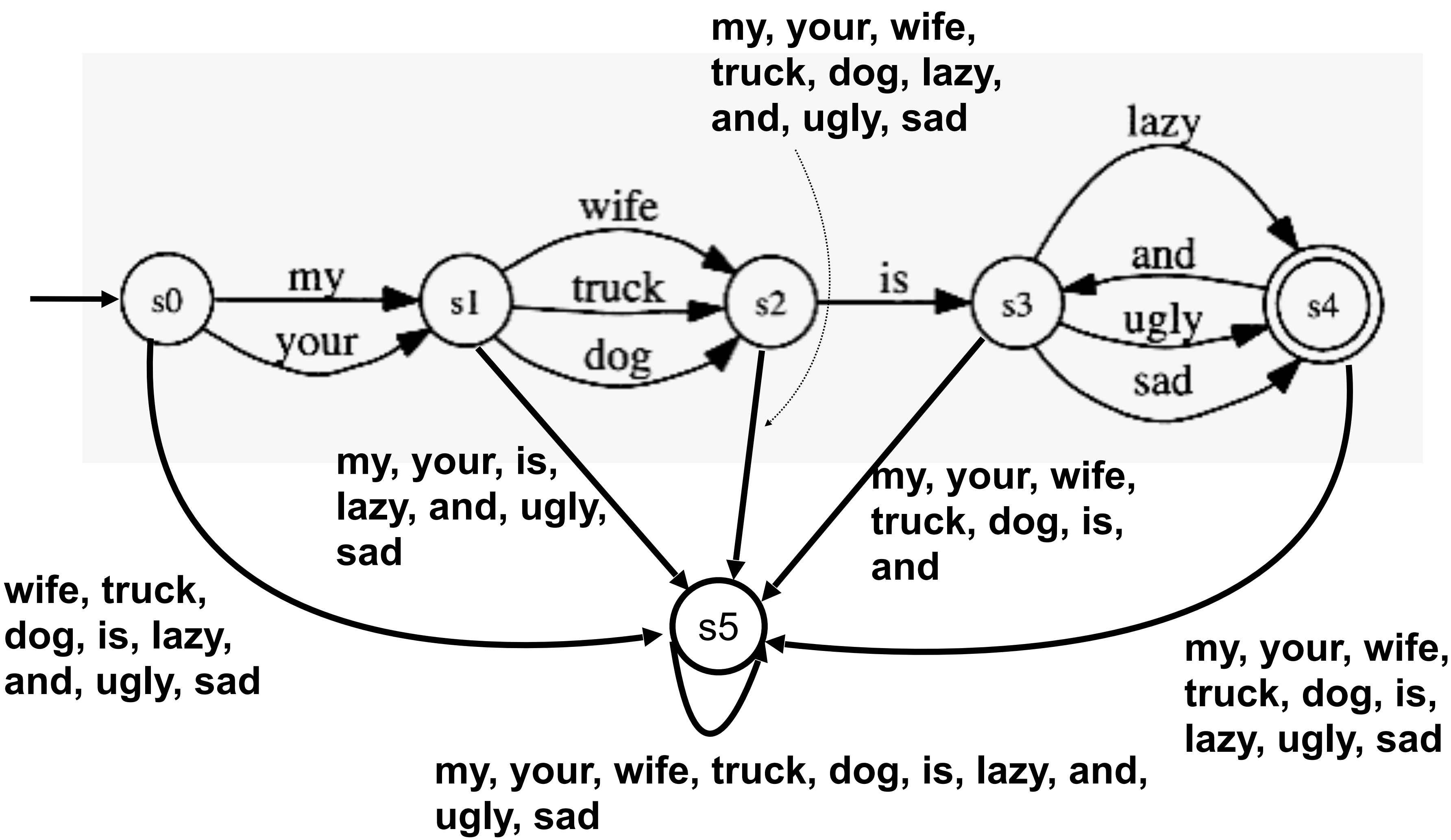
Tipp: Vier Zustände, einer bedeutet „Anzahl Einsen ungerade“

Übung

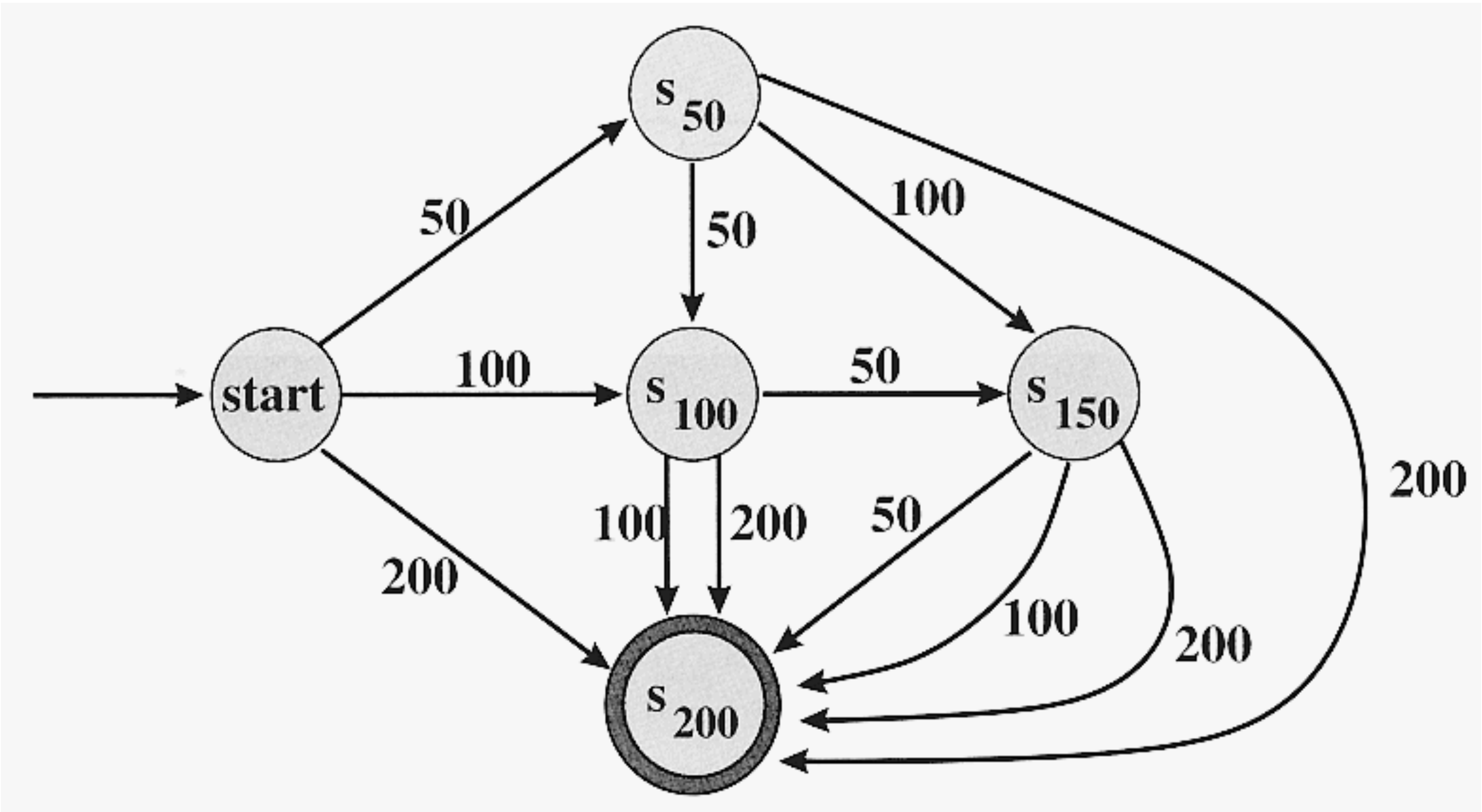
Definieren Sie einen DEA, der die Sprache L akzeptiert, wobei

L = { w | w enthält eine gerade Anzahl von Nullen und eine gerade Anzahl von Einsen (Nullen und Einsen in beliebiger Folge) }

DEA zur Erzeugung natürlich-sprachlicher Sätze



Beispiel: Schwimmbadautomat (unvollständig)



Werkzeuge zum Üben

- Exorciser: http://www.swisseduc.ch/informatik/exorciser/download.html ✓
- JFLAP: http://www.jflap.org/ (auch auf youtube) ✓
- Visual Automata Simulator ???
- DFA Simulator: http://automatonsimulator.com
- Prolog EA-Simulator (im Pub-Verzeichnis) ?

EA1: Blick auf die Lernziele

	EA1: DEAs
Kenntnis	Definitionen der rot hervorgehobenen Begriffe
Verständnis	DEAs formal beschreiben können und vorgegebene Modelle erklären können
Anwendung	Berechnungen mit der erweiterten Übergangsfunktion ausführen können
Analyse	DEAs aufgrund einer formalen Beschreibung oder auf Basis einer Anwendungssituation entwickeln können
Synthese	
Beurteilung	

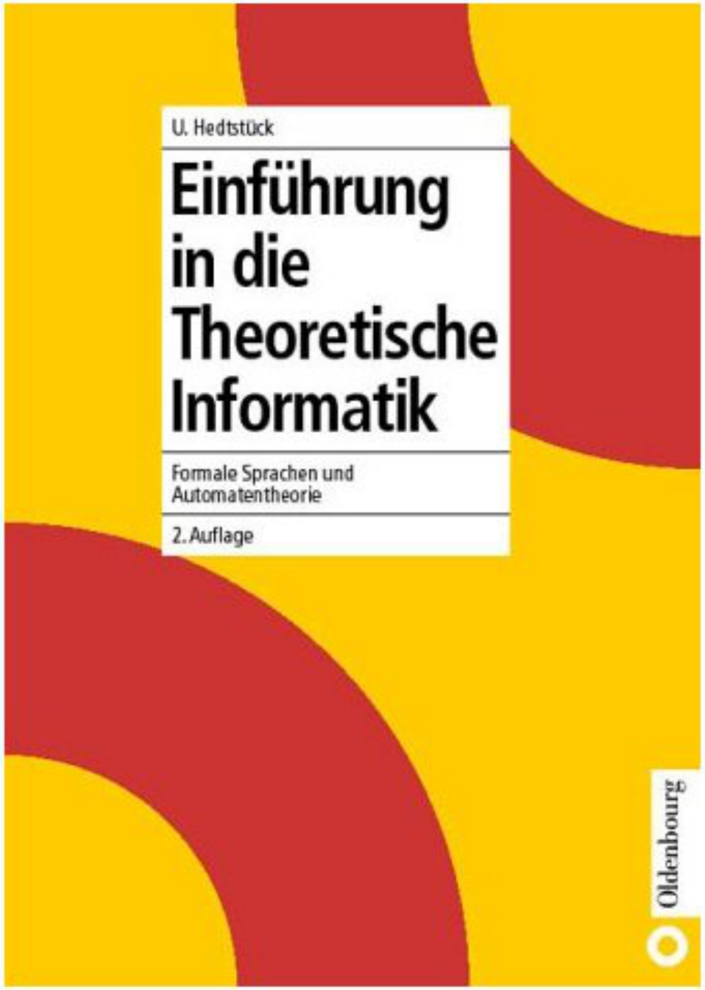
Der praktische Nutzen von DEAs

- Hardware Automaten (Fahrkartenautomaten,…)
- Software Automaten (UML-Diagramme, Workflow-Diagramme, Bestandteile von Parsern,…)
- Hidden Markov Modelle, z. B. zur Spracherkennung (Beispiel kommt später)

Literatur: Hopcroft, Motwani, Ullman [HMU02]

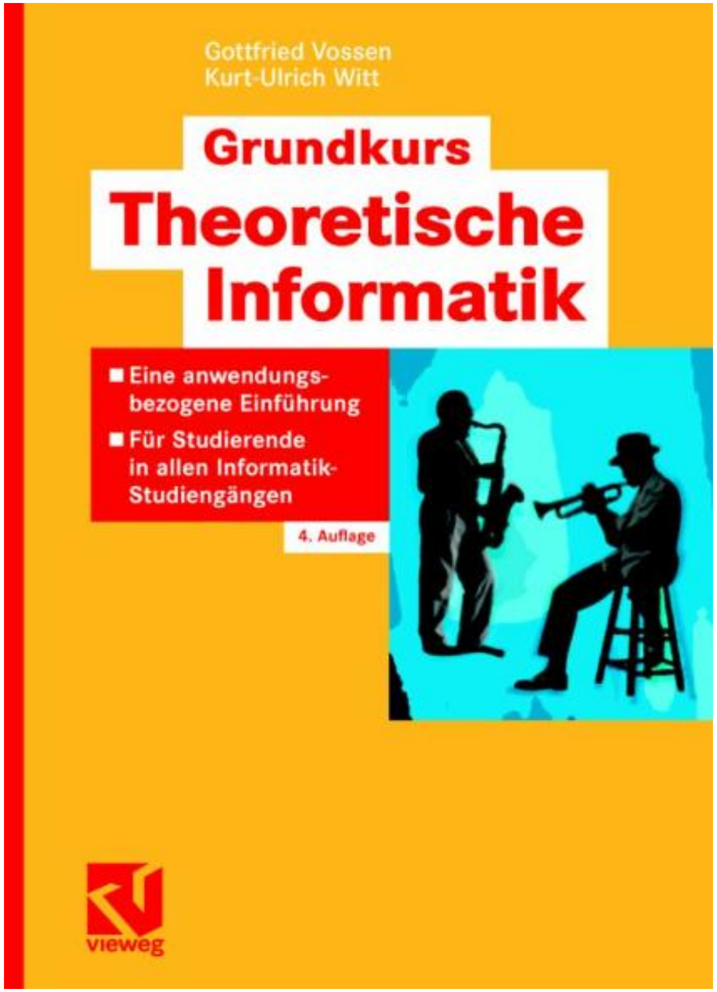
- Das Standardwerk
  - ausführlich
  - verständlich
  - Übungen
- Wichtigste Grundlage dieser Veranstaltung
  - Vorlesung orientiert sich eng am Buch
  - Referenzen auf die Kapitel
- Referenz: **[HMU02]**

Literatur: Hedtstück [Hed03]



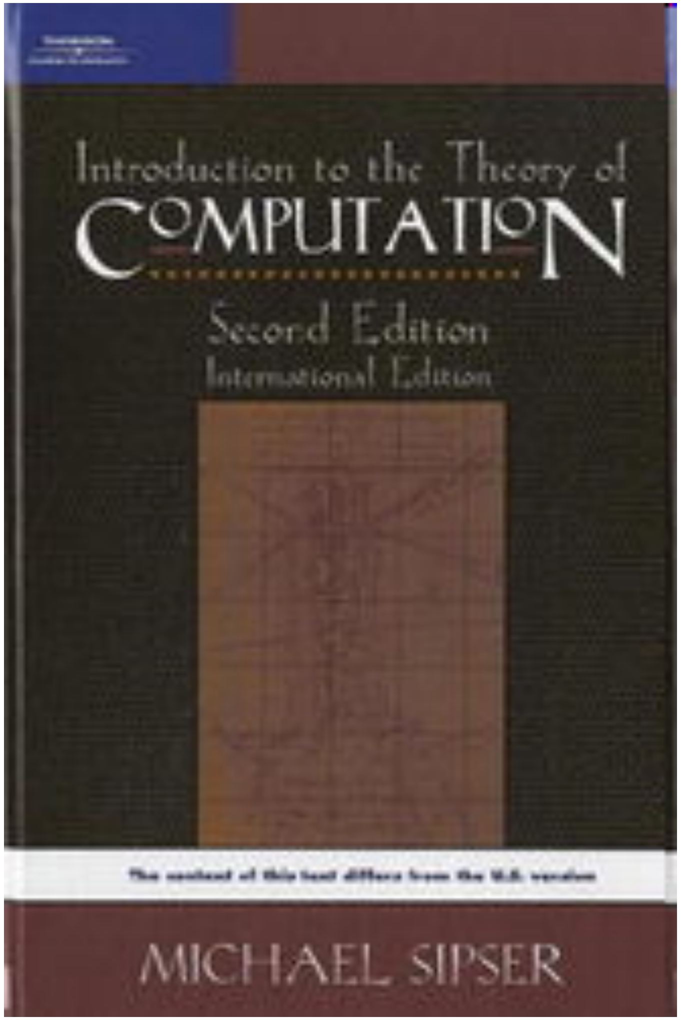
- Zum Einstieg und als Ergänzung
- Leicht verständlich
- Deckt nicht vollständig den Inhalt der Vorlesung ab
- Referenz: **[Hed03]**

Literatur: Vossen, Witt [VW04]



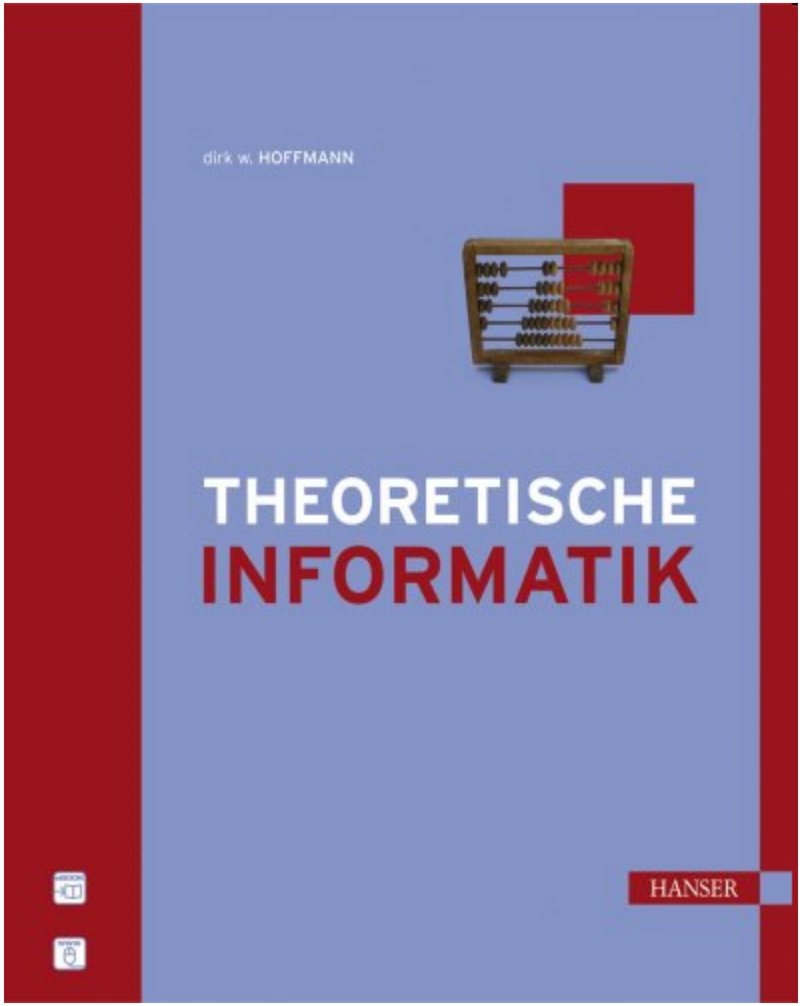
- Beschreibung von Anwendungen
- Referenz: **[VW04]** (3. Auflage)

Literatur: Sipser [Sip 06]



- Sehr gut lesbar
- Umfassend
- Teilweise etwas knapp

Literatur: Hoffmann [Hof 09]

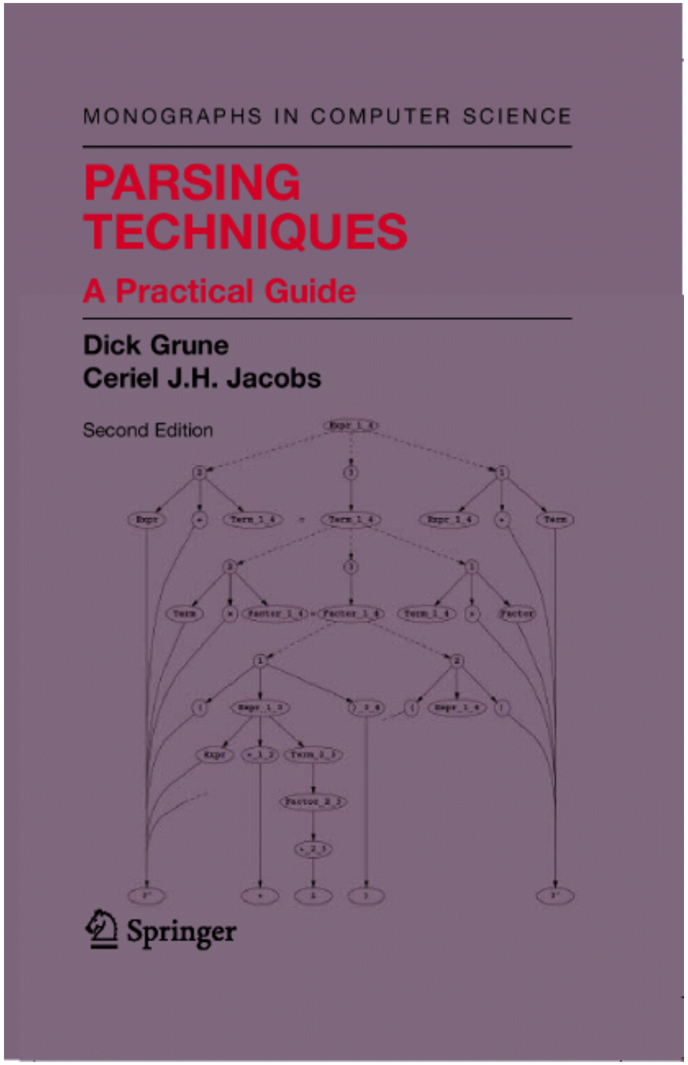


- Überaus gut lesbar
- Anschaulich und spannend geschrieben
- Interessante Zusatzinformationen
- Aus meiner Sicht das didaktisch beste Buch über Theoretische Informatik

Literatur: Aho, Sethi, Ullmann [ASU99]

- Das Standardwerk zum Compilerbau
- Referenz: **[ASU99]**

Literatur: Grune, Jacobs [GJ08]



- Leicht verständlich
- Sehr ausführlich
- Nicht mathematisch
- Referenz: **[GJ08]**

EA2: Nichtdeterministische endliche Automaten

- Beispiele für NEAs
- Arbeitsweise von NEAs
- Übergangsdiagramm, Übergangstabelle
- Vorteile von NEAs
- Formale Definition von NEAs
- Erweiterte Übergangsfunktion
  -> Definition der Sprache eines NEAs

Übung: Wortsuche in Texten "on the fly"

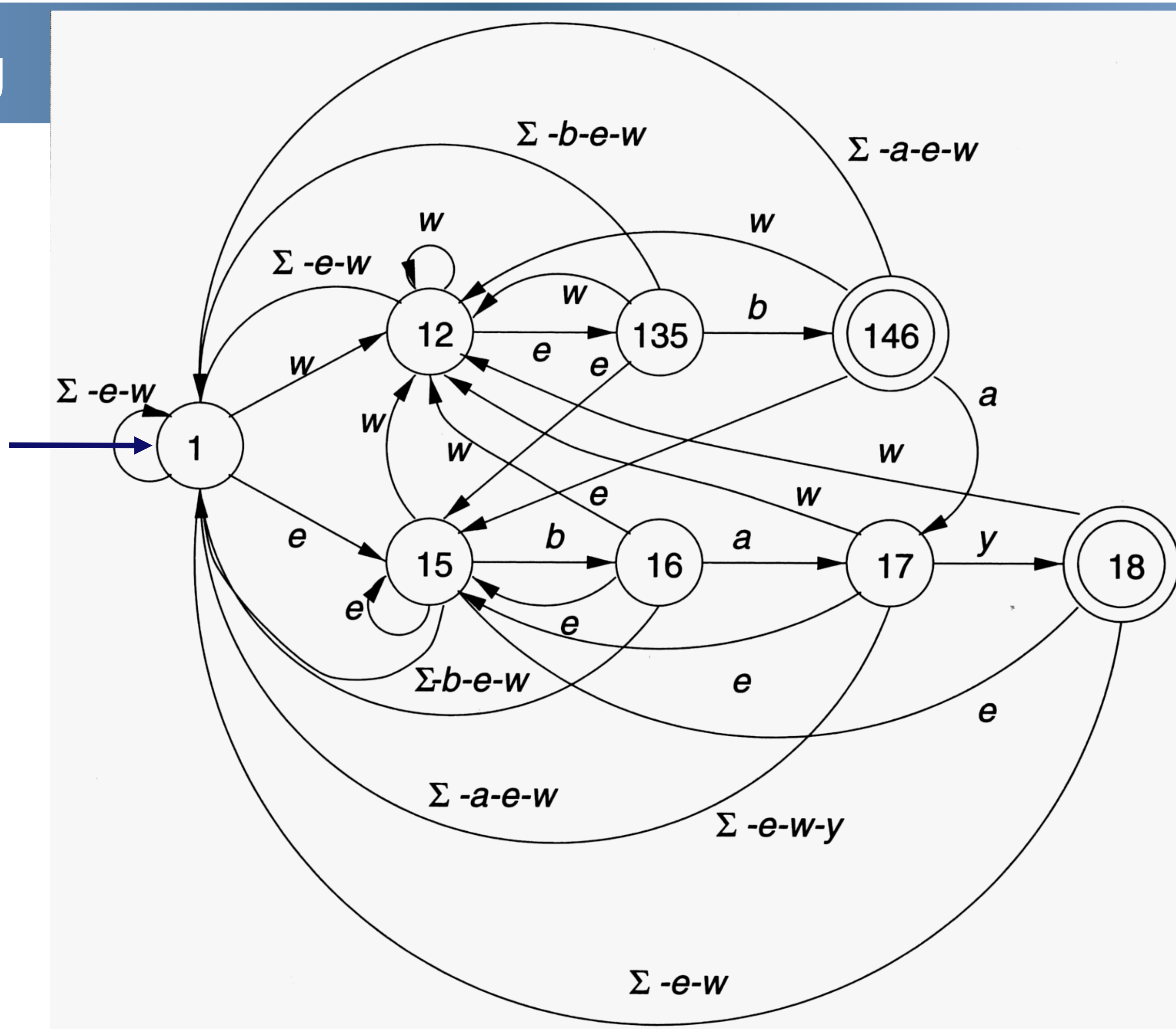
Definieren Sie einen DEA, der die Wörter web oder ebay in einer beliebig langen Zeichenkette findet.

- Der Einfachheit halber arbeitet der DEA mit dem Alphabet der Kleinbuchstaben
- Der DEA soll sich bei der Verarbeitung beliebig langer Zeichenketten immer nach den Teilketten 'web' oder 'ebay' in einem akzeptierenden Zustand befinden, aber von dort aus weiterlesen können
- Tipp: Wenn Sie ausdrücken möchten, dass ein Übergang für alle Zeichen außer "e" und "b" stattfindet, ist folgende Notation möglich: $\Sigma - e - b$

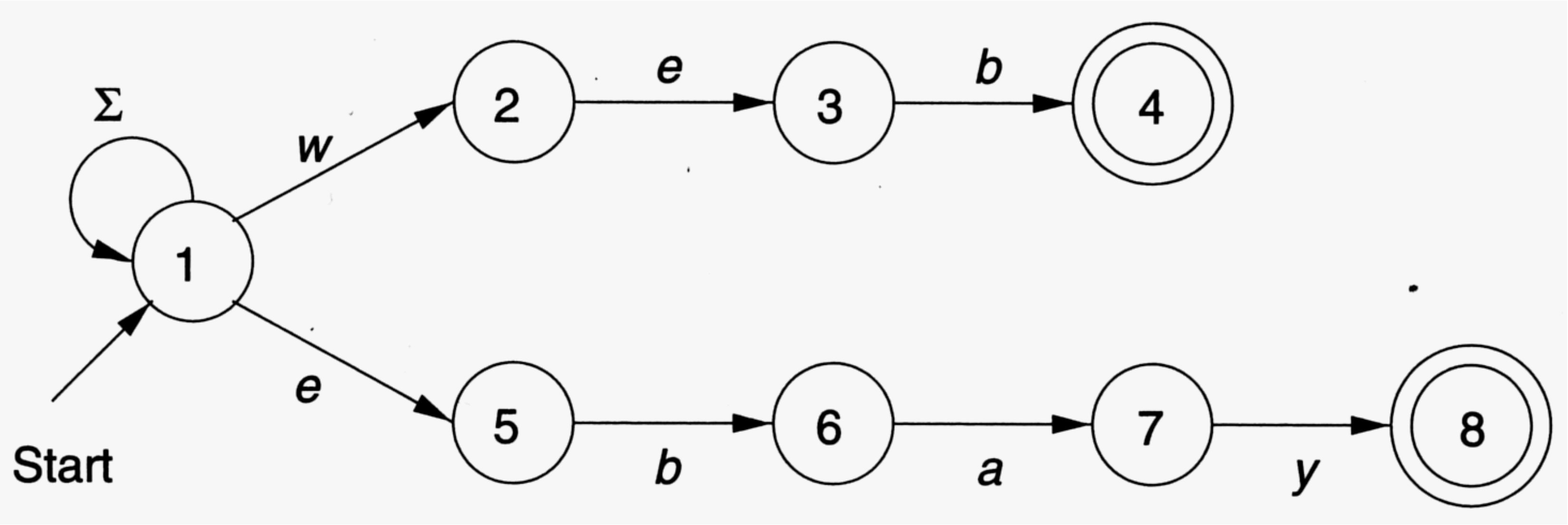
1) Einzelarbeit

2) Austausch innerhalb der Gruppe

Lösung


Σ -b-e-w
Σ -a-e-w
w
Σ -e-w
w
w
12
135
b
146
e
e
Σ -e-w
w
1
a
w
w
w
w
e
e
b
a
y
15
16
17
18
e
e
Σ-b-e-w
e
e
Σ -a-e-w
Σ -e-w-y
Σ -e-w

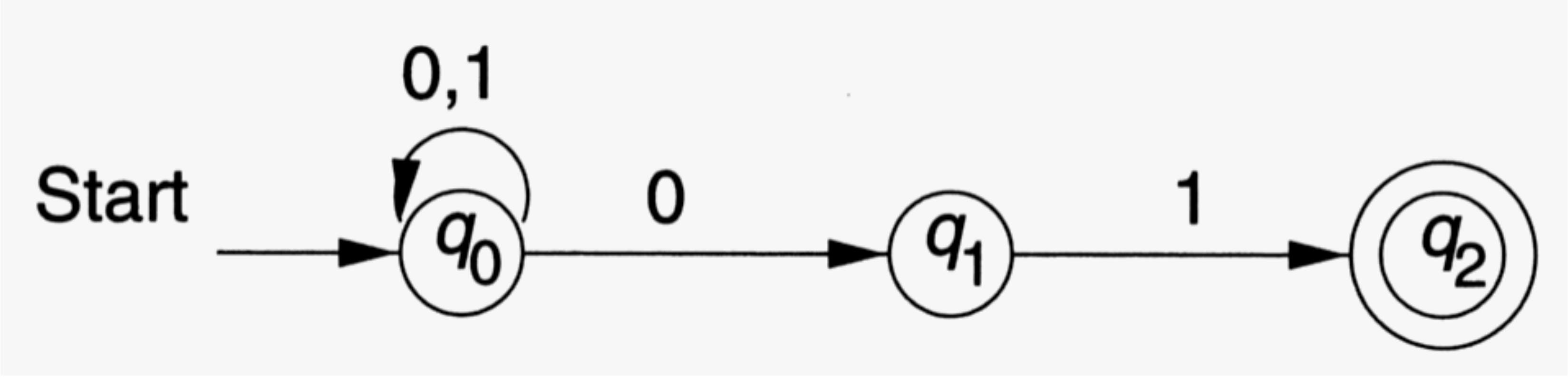
Der entsprechende NEA



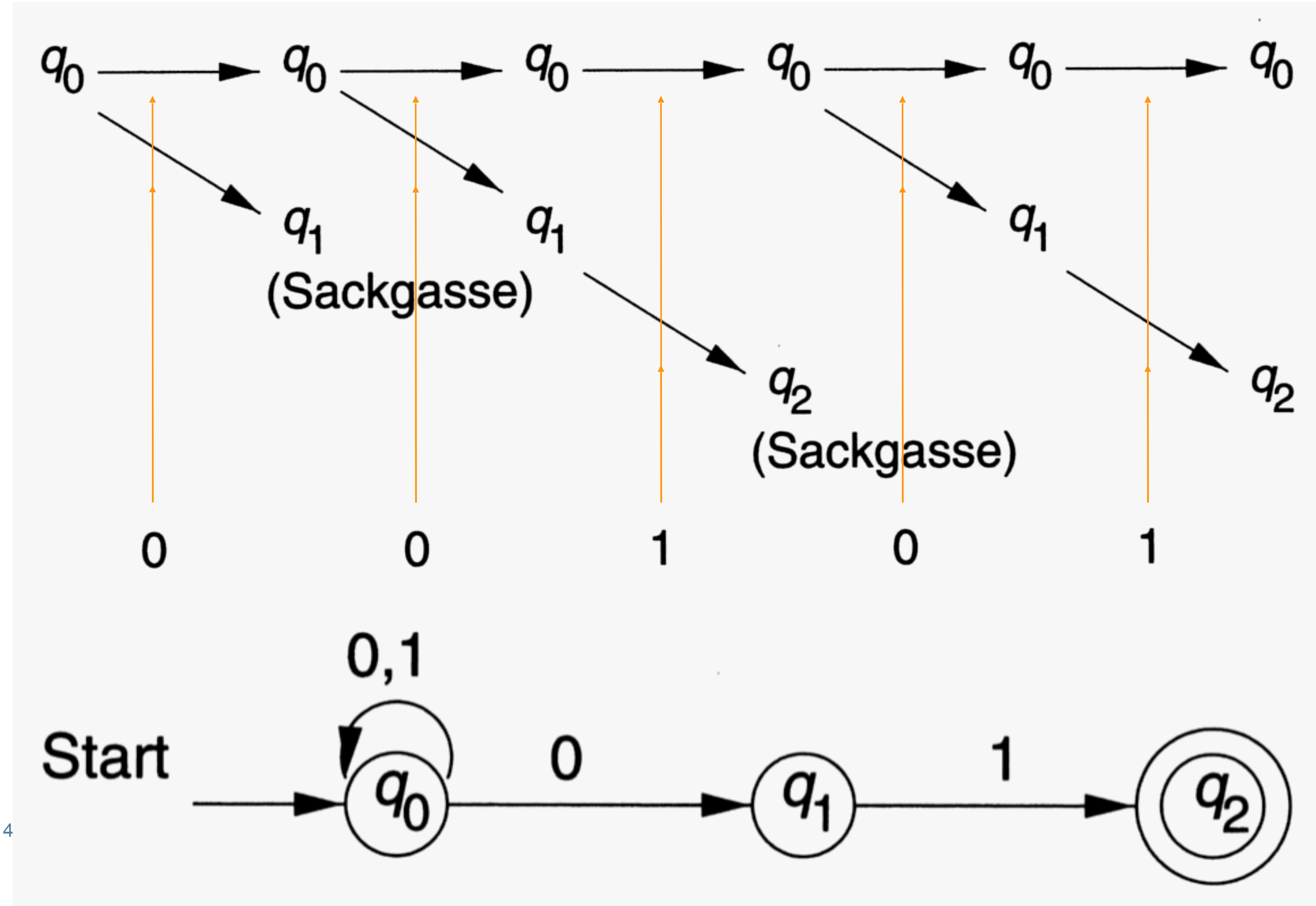
Übung: Grundverständnis NEA

Bei einem NEA kann es von einem Zustand für ein bestimmtes Zeichen mehrere Übergänge zu verschiedenen Folgezuständen geben. Der NEA verfolgt alle Wege parallel, kann sich also gleichzeitig in mehreren Zuständen befinden. Beim nächsten Zeichen werden daher alle Zustände, in denen sich der NEA derzeit befindet, berücksichtigt. Der NEA bewegt sich also von Zustandsmenge zu Zustandsmenge. Wenn es für das gerade verarbeitete Zeichen in einem Zustand keinen Übergang zu einem Folgezustand gibt, so stirbt dieser Zweig ab (Sackgasse).

- Notieren Sie die Folge von Zustandsmengen für das Wort '00101'!

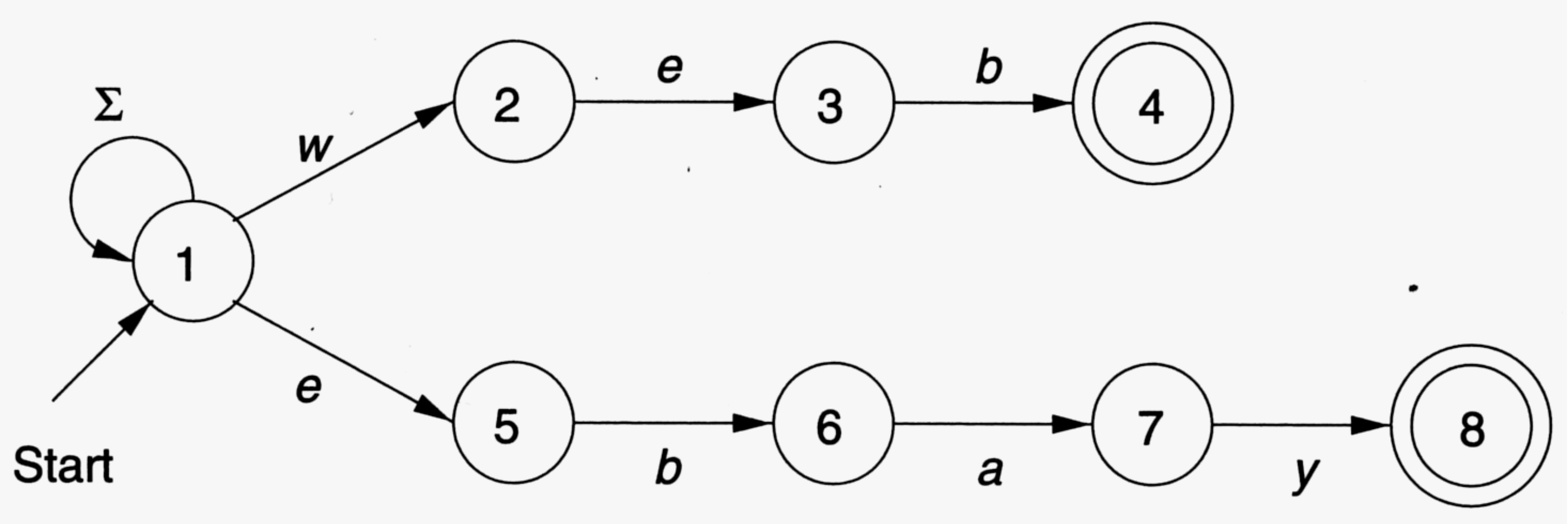


NEA-Bsp.: Übergänge bei Verarbeitung von 00101



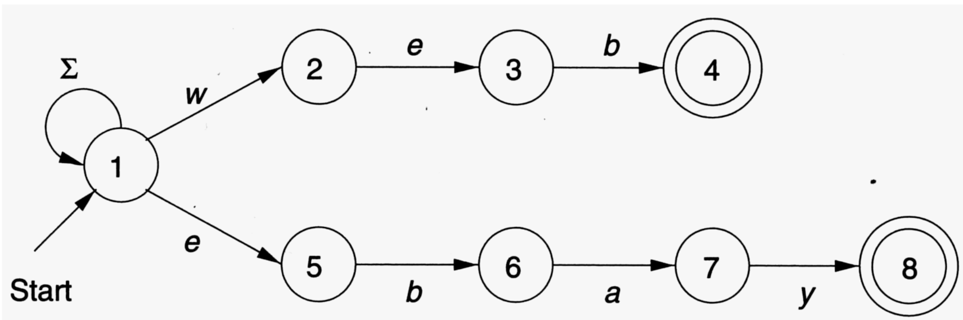
Übung: Grundverständnis NEA

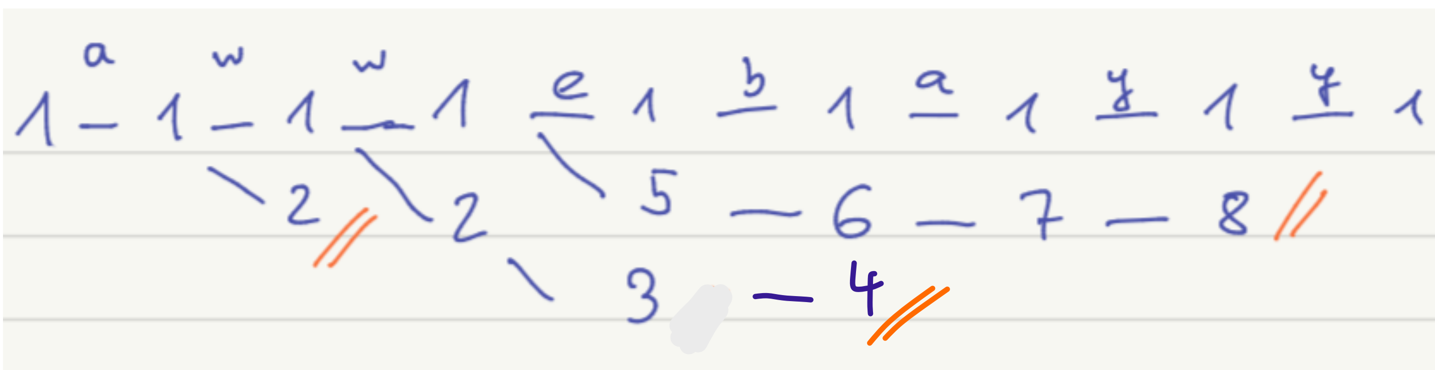
- Notieren Sie die Folge von Zustandsmengen für das Wort 'awwebayy'!



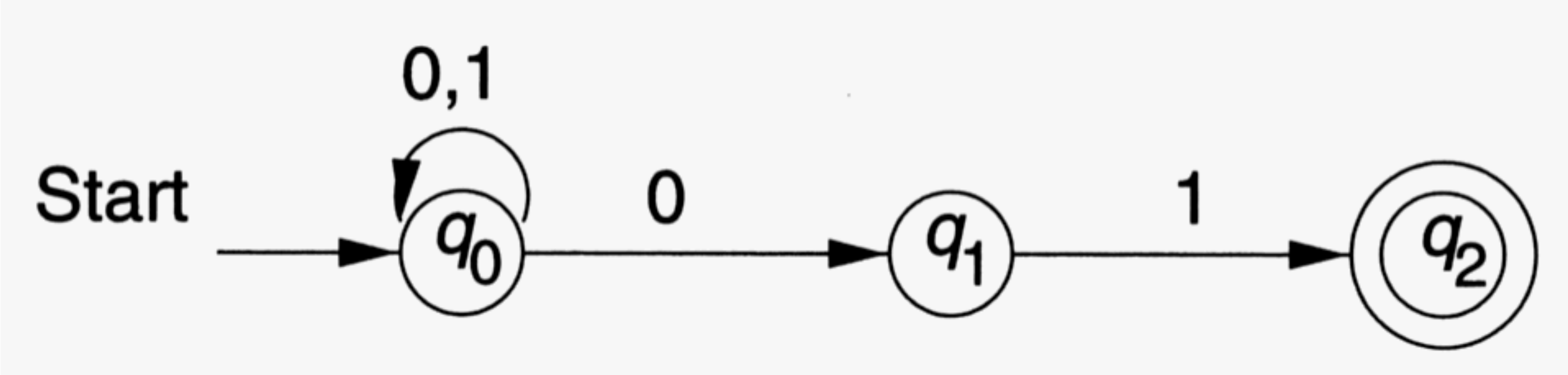
Übung: Grundverständnis NEA

- Notieren Sie die Folge von Zustandsmengen für das Wort 'awwebayy'!





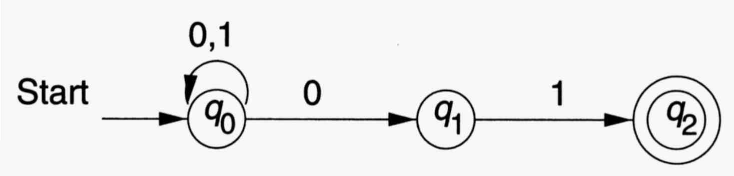
Diskussion: Übergangstabelle



Wie könnte die Übergangstabelle für einen NEA aussehen?

[HMU02], Kap. 2.3.2

NEA-Beispiel: Übergangstabelle



	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$* q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

Die Übergangstabelle repräsentiert die Übergangsfunktion!

Wie müsste die Übergangsfunktion für NEAs definiert sein?

Besondere Merkmale eines NEA

- Gleichzeitig mehrere Zustände
  - Mögliche Alternativen werden "parallel" betrachtet
  - Übergangsfunktion liefert **<u>Menge</u>** von Zuständen
    - Menge kann auch leer sein: Sackgasse

Diskussion

Wie müsste die formale Definition für einen NEA also lauten?

Als Anhaltspunkt die Definition eines DEA:

Definition

Ein deterministischer endlicher Automat (DEA) besteht aus

1. Q_A - endliche Menge von Zuständen
2. Σ_A - endliche Menge von Eingabesymbolen, dem Alphabet
3. δ_A - der Übergangsfunktion; Signatur: $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
4. q_0 - dem Startzustand
5. F_A - einer Teilmenge von Q von akzeptierenden Zuständen

Übliche Schreibweise: $A = (Q_A, \Sigma_A, \delta_A, q_0, F_A)$

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

NEA

(siehe [HMU02], Kap. 2.3.2)

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA) besteht aus

1. Q - endliche Menge von Zuständen
2. Σ - endliche Menge von Eingabesymbolen, dem Alphabet
3. δ - der Übergangsfunktion, Signatur: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$
4. q_0 - dem Startzustand
5. F - einer Teilmenge von Q von akzeptierenden Zuständen

Übliche Schreibweise: $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

δ

Erweiterte Übergangsfunktion für einen NEA

Ein NEA befinde sich im Zustand q. Wie lautet der Wert der erweiterten Übergangsfunktion für das leere Wort, also für $\hat{\delta}(q,\varepsilon)$?

Erweiterte Übergangsfunktion für einen NEA

Angenommen, nachdem, ausgehend von q, die Zeichenfolge x verarbeitet wurde, befindet sich der NEA in der Zustandsmenge $\{p_1, p_2, p_3\}$, also

$$\hat{\delta}(q,x) = \{p_1, p_2, p_3\}$$

Drücken Sie mit Hilfe der Übergangsfunktion δ aus (also nicht der erweiterten Übergangsfunktion), in welcher Zustandsmenge sich der NEA befindet, wenn jetzt nach der Zeichenfolge x noch ein weiteres Zeichen a verarbeitet wird.

Also: $\hat{\delta}(q,xa) = \ldots$

Erweiterte Übergangsfunktion ([HMU02], Kap. 2.3.3)

Definition

Die erweiterte Übergangfunktion $\hat{\delta}$ eines NEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist die sequentielle Anwendung von δ auf ein Wort w und ist induktiv definiert durch

1. $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$
2. $\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$ falls $w = xa, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$ und $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$

Welche Fragen haben Sie zu dieser Definition?

Vergleich der erweiterten Übergangsfunktionen

Definition

Die erweiterte Übergangfunktion $\hat{\delta}$ eines DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist die sequentielle Anwendung von δ auf ein Wort w und ist rekursiv definiert durch

1. $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$
2. $\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$ falls $w = xa, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

Definition

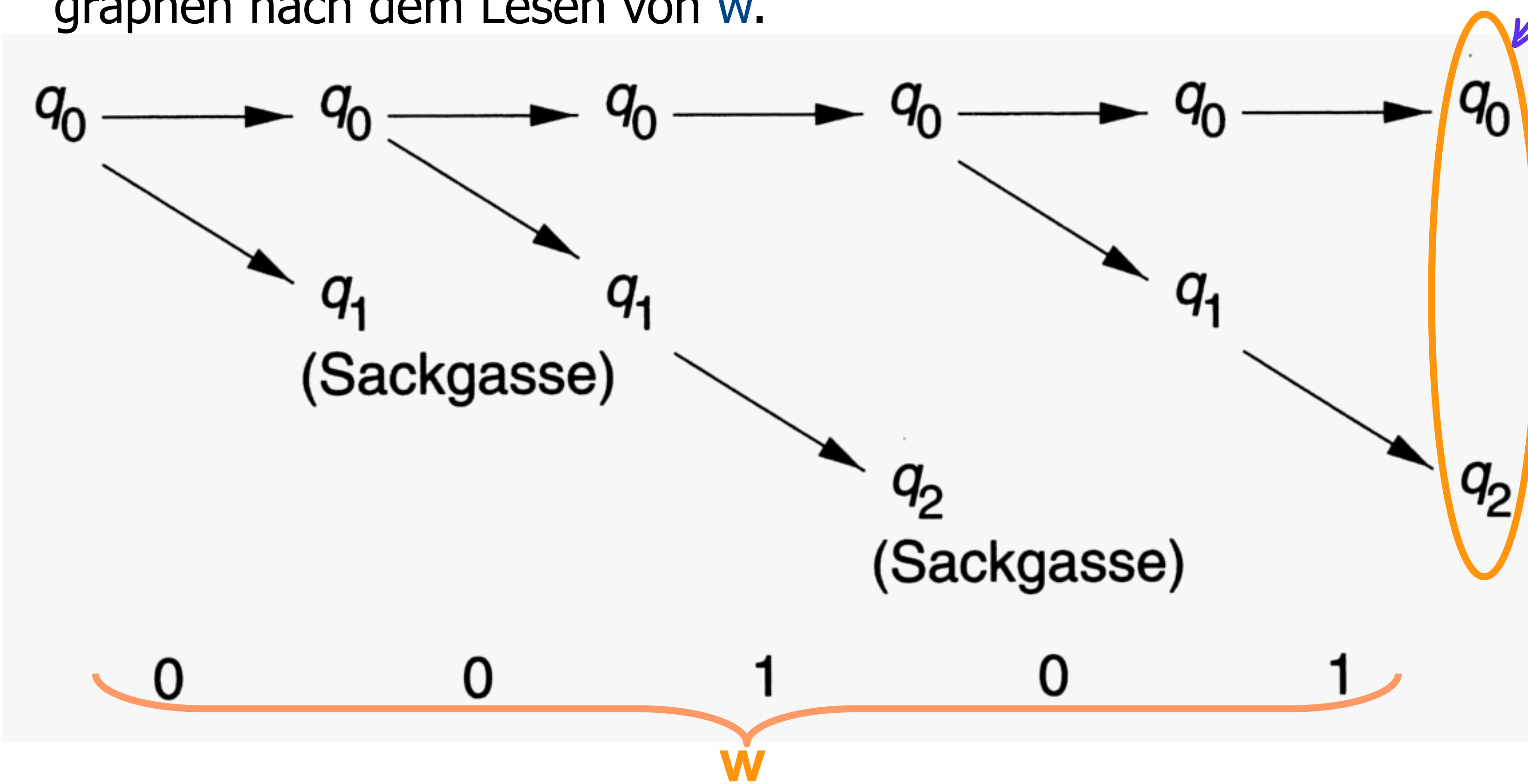
Die erweiterte Übergangfunktion $\hat{\delta}$ eines NEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist die sequentielle Anwendung von δ auf ein Wort w und ist induktiv definiert durch

1. $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$
2. $\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$ falls $w = xa, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$ und $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$

Erweiterte Übergangsfunktion: Veranschaulichung

$\hat{\delta}(q_0, 00101) = \{q_0, q_2\}$

- $\hat{\delta}(q, w)$ liefert Zustände aus der letzten Spalte im Übergangsgraphen nach dem Lesen von w.



Kleine Übungen **(nur bei Bedarf)**

1. Sei $N = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ mit δ definiert durch die folgende Übergangstabelle:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Bestimmen Sie $\hat{\delta}(q_0, 001)$ und $\hat{\delta}(q_0, 0001)$

Definition

Die erweiterte Übergangfunktion $\hat{\delta}$ eines NEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist die sequentielle Anwendung von δ auf ein Wort w und ist induktiv definiert durch

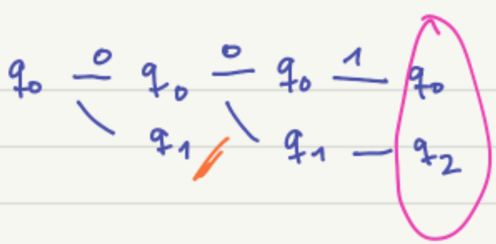
1. $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$
2. $\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$ falls $w = xa, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$ und $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$

Kleine Übungen **(nur bei Bedarf)**

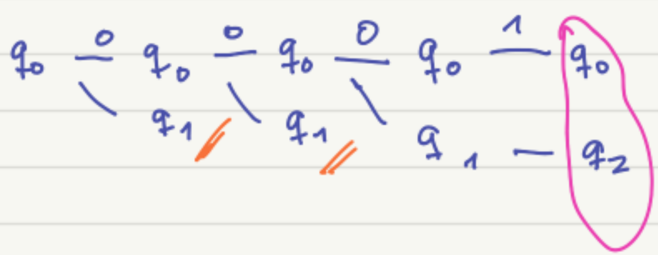
1. Sei $N = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ mit δ definiert durch die folgende Übergangstabelle:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Bestimmen Sie $\hat{\delta}(q_0, 001)$ und $\hat{\delta}(q_0, 0001)$



$\hat{\delta}(q_0, 001) = \{q_0, q_2\}$



$\hat{\delta}(q_0, 0001) = \{q_0, q_2\}$

Diskussion: Sprache eines NEA

Wie müsste die Sprache eines NEA definiert sein? Zum Vergleich noch einmal die Sprache eines DEA:

Definition

Die Sprache $L(A)$ eines DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist definiert als

$$L(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

Sprache eines NEA

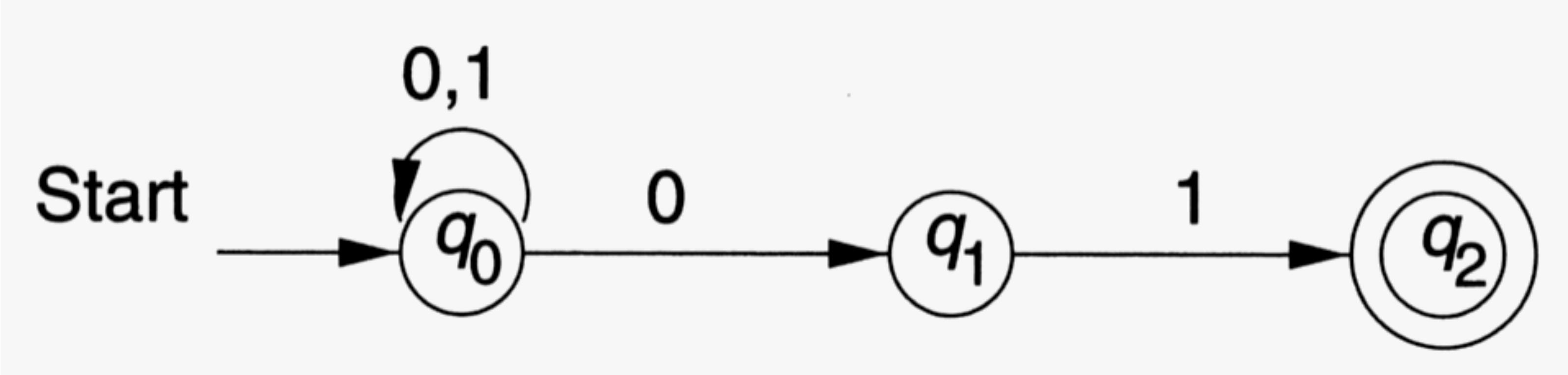
[HMU02], Kap. 2.3.4

Definition

Die Sprache $L(A)$ eines NEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist definiert als

$$L(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Übung: Was ist die Sprache dieses NEAs



Wozu sind NEAs gut?

- Für eine gegebene Aufgabenstellung ist es häufig wesentlich einfacher, einen NEA zu konstruieren als einen DEA.
- Jeder NEA lässt sich automatisch (!) in einen äquivalenten DEA überführen.
  - Das werden wir noch sehen.
- Letztendlich brauchen wir als konkrete Umsetzung einen DEA. Der NEA ist also eine Modellierungshilfe.

EA2: Blick auf die Lernziele

	EA2: NEAs
Kenntnis	Definitionen der rot hervorgehobenen Begriffe
Verständnis	NEAs formal beschreiben können und vorgegebene Modelle erklären können
Anwendung	Berechnungen mit der erweiterten Übergangsfunktion ausführen können
Analyse	NEAs aufgrund einer formalen Beschreibung oder auf Basis einer Anwendungssituation entwickeln können
Synthese	
Beurteilung	

Der praktische Nutzen von NEAs

- Modellierungshilfe für DEAs
  - DEAs haben hohe praktische Relevanz, wie wir gesehen haben.

EA3: Äquivalenz von DEA und NEA

- Beweiskonzept
- Teilmengenkonstruktion
  - Formal
  - Am Beispiel
- Übung Teilmengenkonstruktion (NEA -> DEA)

Diskussion: Äquivalenz

Was stellen Sie sich unter der Äquivalenz zweier Automaten vor?
Oder anders ausgedrückt: Wann sind zwei Automaten äquivalent?

Waren der DEA und der NEA für web/ebay äquivalent?

Äquivalenz determ. und nichtdeterm. Automaten

- Zwei Automaten sind also äquivalent, wenn sie dieselbe Sprache haben
- Satz umgangssprachlich:
  Für jede Sprache, die durch einen NEA beschrieben wird, gibt es einen DEA, der die Sprache ebenfalls akzeptiert. Und umgekehrt.
- Satz 2.12 aus [HMU02]:
  Eine Sprache L wird von einem DEA genau dann akzeptiert, wenn L von einem NEA akzeptiert wird.

Diskussion: Beweis der Äquivalenz von DEA und NEA

Wie könnte ein Beweis aufgebaut sein, der zeigt, dass es zu jedem DEA einen NEA mit derselben Sprache gibt und umgekehrt?

Aufbau des Beweises

- Transformation NEA → DEA und zeigen, dass der DEA die Sprache des NEA hat
- Transformation DEA → NEA und zeigen dass der NEA die Sprache des DEA hat

Diskussion: Wie kommt man vom DEA zum NEA?

Die deutlich leichtere Hälfte des Beweises!

DEA → NEA

Trivial:

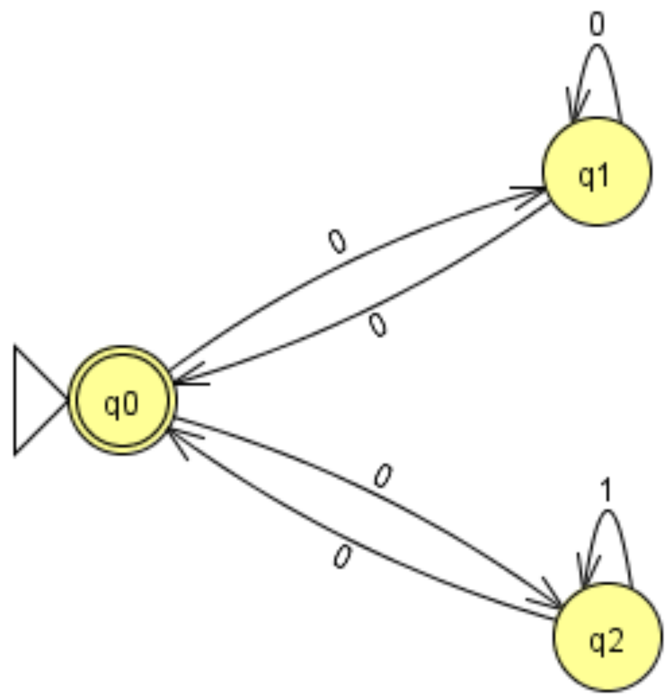
- Beide haben gleich viele Zustände
- Denselben Startzustand
- Dieselben Endzustände
- Dieselben Übergänge
- Die Diagramme sehen also komplett gleich aus!
- Einziger Unterschied: Die Übergangsfunktion des NEA liefert Mengen (mit nur einem Element)

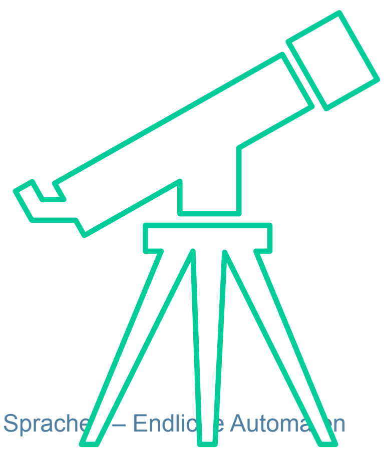
$$\hat{\delta}_N(q, w) = \{p\} \text{ wenn } \hat{\delta}_D(q, w) = p$$

Wenn $p \in F$, dann $\{p\} \cap F \neq \emptyset$, also dieselbe Sprache

Diskussion: Wie kommt man vom NEA zum DEA?

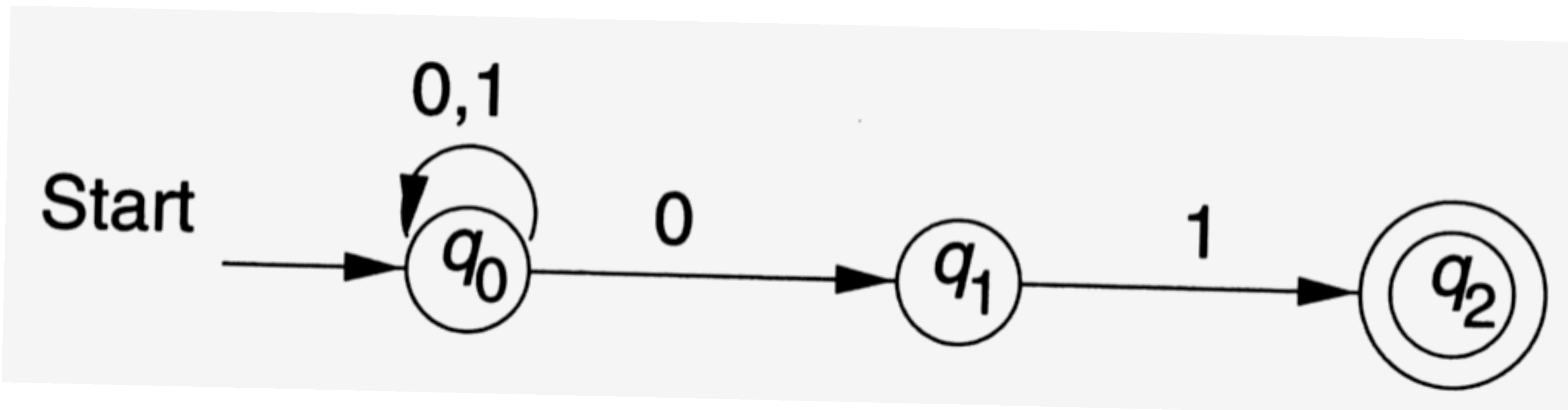
- In wie vielen unterschiedlichen Zuständen kann sich ein NEA im Allgemeinen befinden, der aus drei Zuständen besteht? Analysieren Sie hierzu das nebenstehende Beispiel im Hinblick auf mögliche Zustandsfolgen.
- Machen Sie sich die Mehrdeutigkeit des Begriffs „Zustand" klar.
- Wie müsste ein DEA aussehen, der dieselben Zustandsfolgen durchlaufen kann?





Übung

- Wie ist der DEA zu folgendem NEA definiert?
  - Erstellen Sie eine Tabelle mit je einer Spalte für NEA und DEA und folgenden Zeilen:
    - Menge der Zustände Q
    - 1) Alphabet Σ
    - 3) Übergangsfunktion
    - 2) Startzustand
    - Zielzustände



Übung

- Wie ist der DEA zu folgendem NEA definiert?
  - Erstellen Sie eine Tabelle mit je einer Spalte f
    folgenden Zeilen:
    - Menge der Zustände Q
    - Alphabet Σ
    - Übergangsfunktion
    - Startzustand
    - Zielzustände

NEA

Q q_0, q_1, q_2

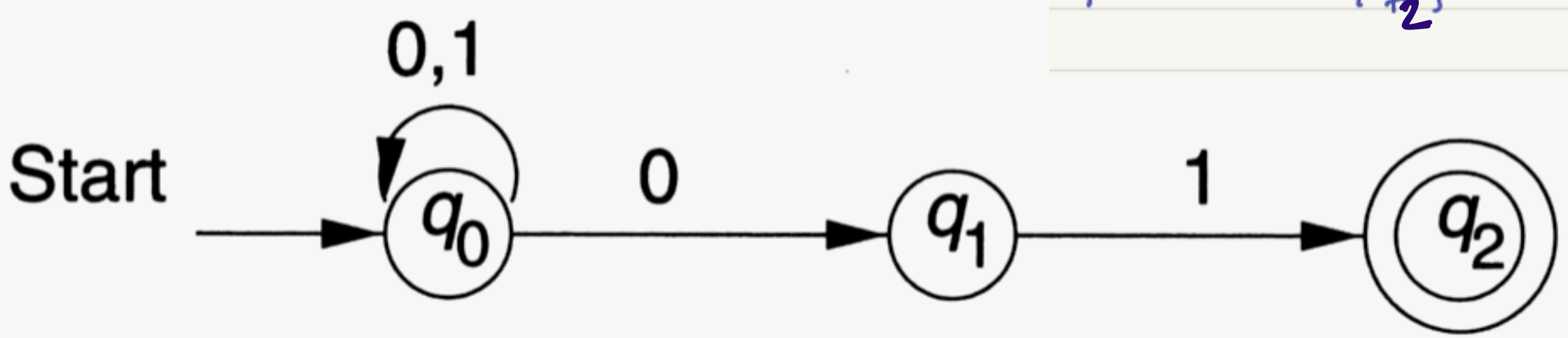
Σ $\{0, 1\}$

δ

	q_0	q_1	q_2
0	$\{q_0, q_1\}$	$\{\}$	$\{\}$
1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\{\}$

Start q_0

F $\{q_2\}$



Übung

- Wie ist der DEA zu f
  - Erstellen Sie eine folgenden Zeilen:
    - Menge der Z
    - Alphabet Σ
    - Übergangsfu
    - Startzustand
    - Zielzustände

(70)

	NEA	DEA
Q	q_0, q_1, q_2	q_0, q_{01}, q_{02}
Σ	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$
Start	q_0	q_0
F	$\{q_2\}$	$\{q_{02}\}$

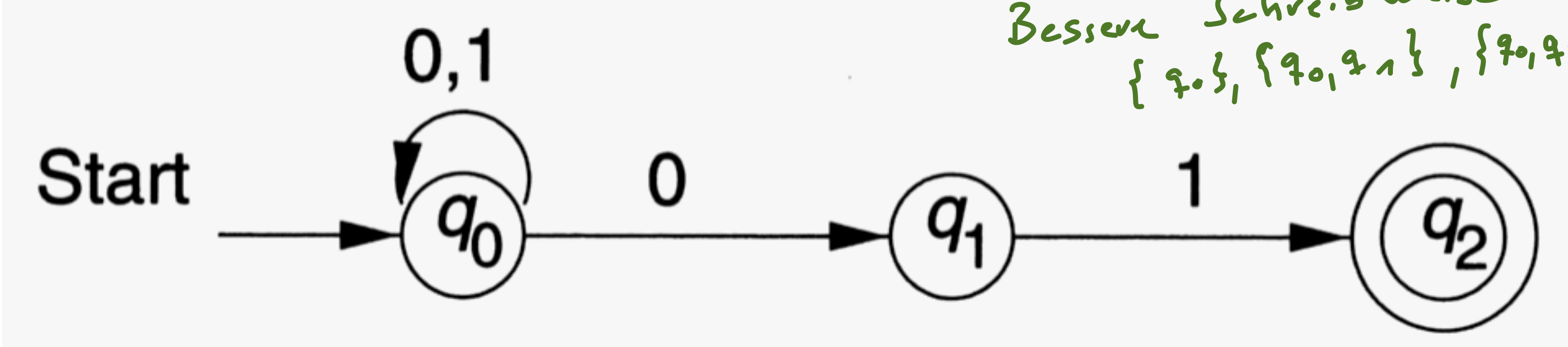
NEA δ:

δ	q_0	q_1	q_2
0	$\{q_0,q_1\}$	$\{\}$	$\{\}$
1	$\{q_0\}$	$\{q_2\}$	$\{\}$

DEA δ:

δ	q_0	q_{01}	q_{02}
0	q_{01}	q_{01}	q_{01}
1	q_0	q_{02}	q_0

Bessere Schreibweise: $\{q_0\}, \{q_0,q_1\}, \{q_0,q_2\}, \dots$



Diskussion: Formale Definition des konstruierten DEA

Ein DEA besteht aus fünf Komponenten. Wie können diese fünf Komponenten in Abhängigkeit der Komponenten des zugehörigen NEA definiert werden?

Tipp: Es macht nichts, wenn in der Definition des DEA auch Zustände auftreten, die mittels der Übergangsfunktion gar nicht erreicht werden können.

Äquivalenz von DEA und NEA (2) [HMU02], Kap. 2.3.5

Definition

Sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_n, q_0, F_N)$ ein NEA. Die Teilmengenkonstruktion konstruiert aus den Komponenten von N einen DEA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ mit

- $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
  – die Menge aller Teilmengen von Q_N
- $F_D = \{S \mid S \subseteq Q_N \land S \cap F_N \neq \emptyset\}$
  – die Menge aller Teilmengen von Q_N, die mindestens ein Element aus F_N enthalten
- $\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$ für $S \subseteq Q_N$ und $a \in \Sigma$

Äquivalenz von DEA und NEA (2)

[HMU02], Kap. 2.3.5

Bezogen auf Bsp

Definition

Sei $N = (Q_N, \Sigma, \delta_n, q_0, F_N)$ ein NEA. Die Teilmengenkonstruktion konstruiert aus den Komponenten von N einen DEA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ mit

- $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
  – die Menge aller Teilmengen von Q_N
- $F_D = \{S \mid S \subseteq Q_N \wedge S \cap F_N \neq \emptyset\}$
  – die Menge aller Teilmengen von Q_N, die mindestens ein Element aus F_N enthalten
- $\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$ für $S \subseteq Q_N$ und $a \in \Sigma$

$Q_N = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\{q_0, q_1\} \in P(Q_N)$

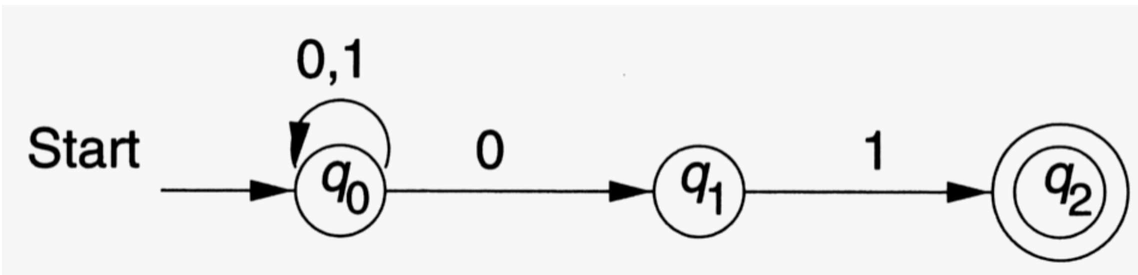
Nomenklatur Brünner

q_{02} im DEA

$P(Q_N) = \{ \{\}, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\} \}$

$F_D = \{ \{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\} \}$

Teilmengenkonstruktion am Beispiel



Nicht-erreichbare Zustände streichen

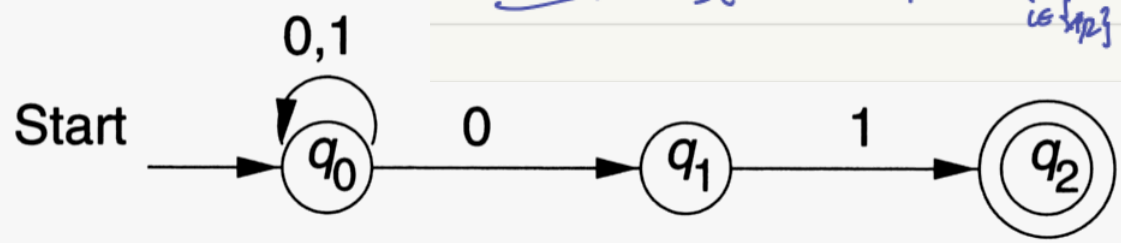
	0	1
~~$\{\}$~~	~~$\{\}$~~	~~$\{\}$~~
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
~~$\{q_1\}$~~	~~$\{\}$~~	~~$\{q_2\}$~~
~~$*\{q_2\}$~~	~~$\{\}$~~	~~$\{\}$~~
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
~~$*\{q_1, q_2\}$~~	~~$\{\}$~~	~~$\{q_2\}$~~
~~$*\{q_0, q_1, q_2\}$~~	~~$\{q_0, q_1\}$~~	~~$\{q_0, q_2\}$~~

	0	1
~~A~~	~~A~~	~~A~~
$\rightarrow B$	E	B
~~C~~	~~A~~	~~D~~
~~$*D$~~	~~A~~	~~A~~
E	E	F
$*F$	E	B
~~$*G$~~	~~A~~	~~D~~
~~$*H$~~	~~E~~	~~F~~

$P(\{q_0, q_1, q_2\})$ Potenzmenge

Teilmengenkonstruktion am Beispiel

z.B. $\delta_D(\{q_1, q_2\}, 1) = \bigcup_{i \in \{q_2\}} \delta_N(q_i, 1) = \{ q_2 \} \cup \{\} = \{q_2\}$



	0	1
~~$\{\}$~~	~~$\{\}$~~	~~$\{\}$~~
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
~~$\{q_1\}$~~	~~$\{\}$~~	~~$\{q_2\}$~~
~~$*\{q_2\}$~~	~~$\{\}$~~	~~$\{\}$~~
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
~~$*\{q_1, q_2\}$~~	~~$\{\}$~~	~~$\{q_2\}$~~
~~$*\{q_0, q_1, q_2\}$~~	~~$\{q_0, q_1\}$~~	~~$\{q_0, q_2\}$~~

	0	1
~~A~~	~~A~~	~~A~~
$\rightarrow B$	E	B
~~C~~	~~A~~	~~D~~
~~$*D$~~	~~A~~	~~A~~
E	E	F
$*F$	E	B
~~$*G$~~	~~A~~	~~D~~
~~$*H$~~	~~E~~	~~F~~

Diskussion

Was müsste man zeigen, um zu beweisen, dass ein NEA und der durch Teilmengenkonstruktion entwickelte DEA wirklich äquivalent sind?

Sprache des DEA ist gleich Sprache des NEA

- **Satz 2.11:**
  Wenn $D = (Q_D, \Sigma , \delta_D , \{q_0 \}, F_D)$ der DEA ist, der mithilfe der Teilmengenkonstruktion aus dem NEA $N =(Q_N, \Sigma , \delta_N , q_0, F_N)$ konstruiert wird, dann gilt $L (D) = L (N)$.

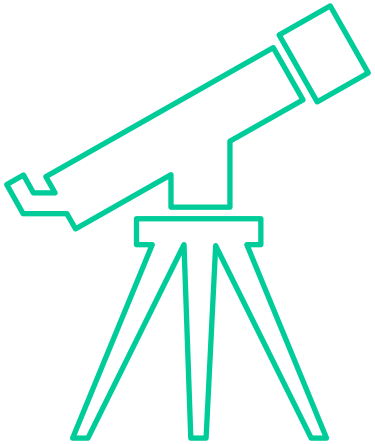
- **Beweis:**
  Es reicht zu zeigen, dass

  $\hat{\delta}_D (\{q_0 \}, w) = \hat{\delta}_N (q_0, w)$,

  denn D und N akzeptieren w nur genau dann, wenn in dieser Menge ein in F_N enthaltener Zustand vorkommt.

Vorüberlegungen zum Beweis

- Wie funktioniert vollständige Induktion?
- Was könnte in unserem Beweis "n" sein?



Fortsetzung: Beweis durch Induktion

- <u>Induktionsbeginn</u>:
  Die Aussage gilt für $|w| = 0$, denn $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, \varepsilon) = \hat{\delta}_N(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$

- <u>Induktionsschritt</u>:
  $|w| = n + 1$, d.h. $w = xa$, a sei das letzte Symbol von w

  Induktionsannahme: $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \hat{\delta}_N(q_0, x) = \{p_1, \ldots, p_k\}$

  Entsprechend Definition von $\hat{\delta}_N$ gilt: $\hat{\delta}_N(q_0, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$

  Wegen Teilmengenkonstr.: $\delta_D(\{p_1, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$

  Wg. ↑ u. Def. von $\hat{\delta}_D$ $= \delta_D(\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x), a) = \hat{\delta}_D(\{q_0\}, w)$ □

Anzahl der Zustände des äquivalenten DEA ?

- Bis zu 2^n Zustände möglich
  - passiert selten
  - häufig kaum mehr als der NEA
- [HMU02], Kap. 2.3.6, zeigt Beispiel für DEA mit 2^n Zuständen

Übung: Umwandlung NEA in DEA

	0	1
$\rightarrow p$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\{r\}$	$\{r\}$
r	$\{s\}$	$\emptyset$
$* s$	$\{s\}$	$\{s\}$

- Tipp: Keine unnötigen Zustände erzeugen

Übung: Umwandlung NEA in DEA

	0	1
$\rightarrow p$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\{r\}$	$\{r\}$
r	$\{s\}$	$\varnothing$
$* s$	$\{s\}$	$\{s\}$

81

	$\rightarrow\{p\}$	$\{p,q\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,r\}$	$*\{p,q,r,s\}$	$*\{p,q,s\}$
0	$\{p,q\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r,s\}$	$\{p,q,s\}$	$*\{p,q,r,s\}$	$*\{p,q,r,s\}$
1	$\rightarrow\{p\}$	$\{p,r\}$	$\{p,r\}$	$\rightarrow\{p\}$	$*\{p,r,s\}$	$*\{p,r,s\}$

	$*\{p,r,s\}$	$*\{p,s\}$
0	$*\{p,q,s\}$	$*\{p,q,s\}$
1	$*\{p,s\}$	$*\{p,s\}$

EA3: Rückblick auf die Ziele

	EA3: Äquivalenz von NEA und DEA
Kenntnis	Definitionen des Äquivalenzbegriffs
Verständnis	NEA und äquivalenten DEA in ihren Eigenschaften und Abläufen miteinander vergleichen können
Anwendung	Einen NEA in einen äquivalenten DEA transformieren können (und umgekehrt)
Analyse	
Synthese	
Beurteilung	

Der praktischer Nutzen: NEA –> DEA

- Überführung passiert automatisch
- Algorithmus kennen lernen

EA4: ε-NEAs

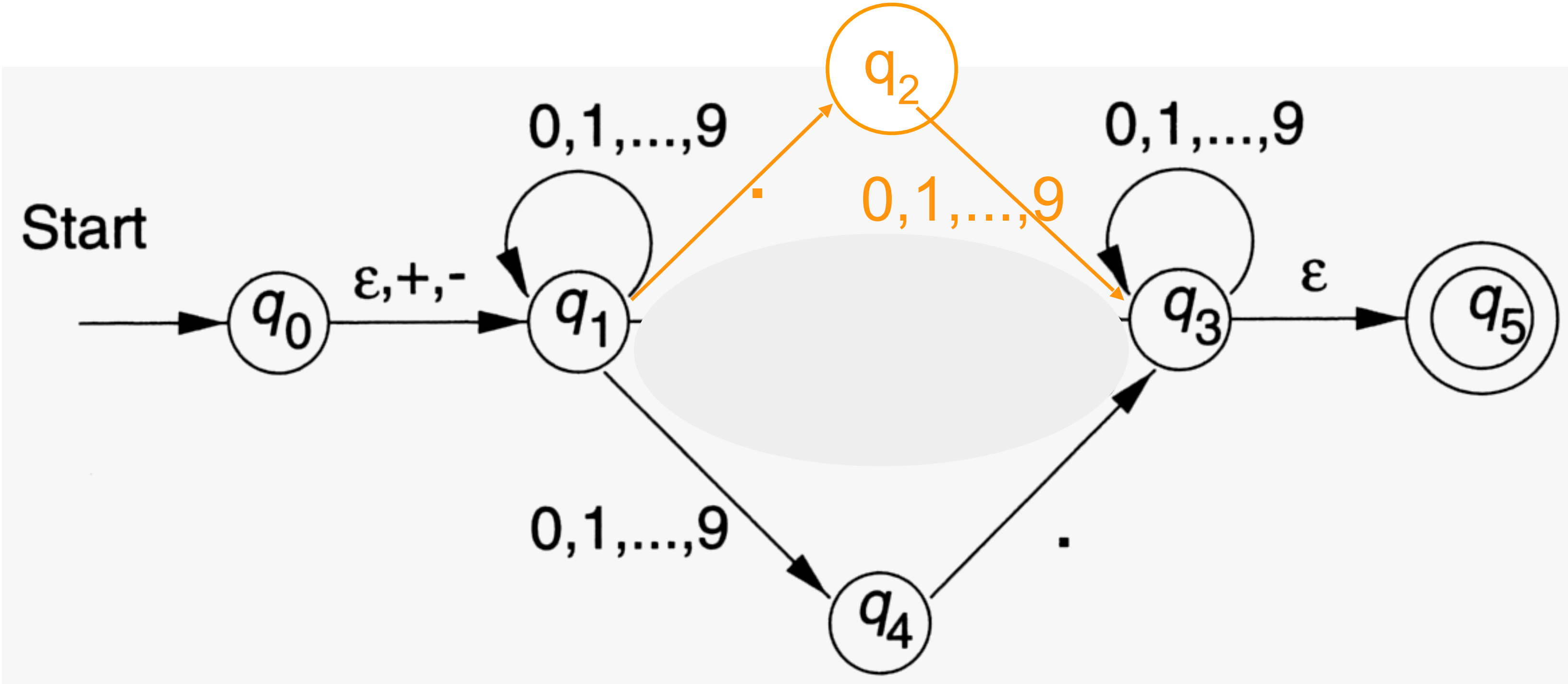
- ε-Übergänge
- Definition ε-NEA
- ε-Hülle
- Erweiterte Übergangsfunktion für den ε-NEA
- Sprache eines ε-NEAs
- Modifizierte Teilmengenkonstruktion

Übung

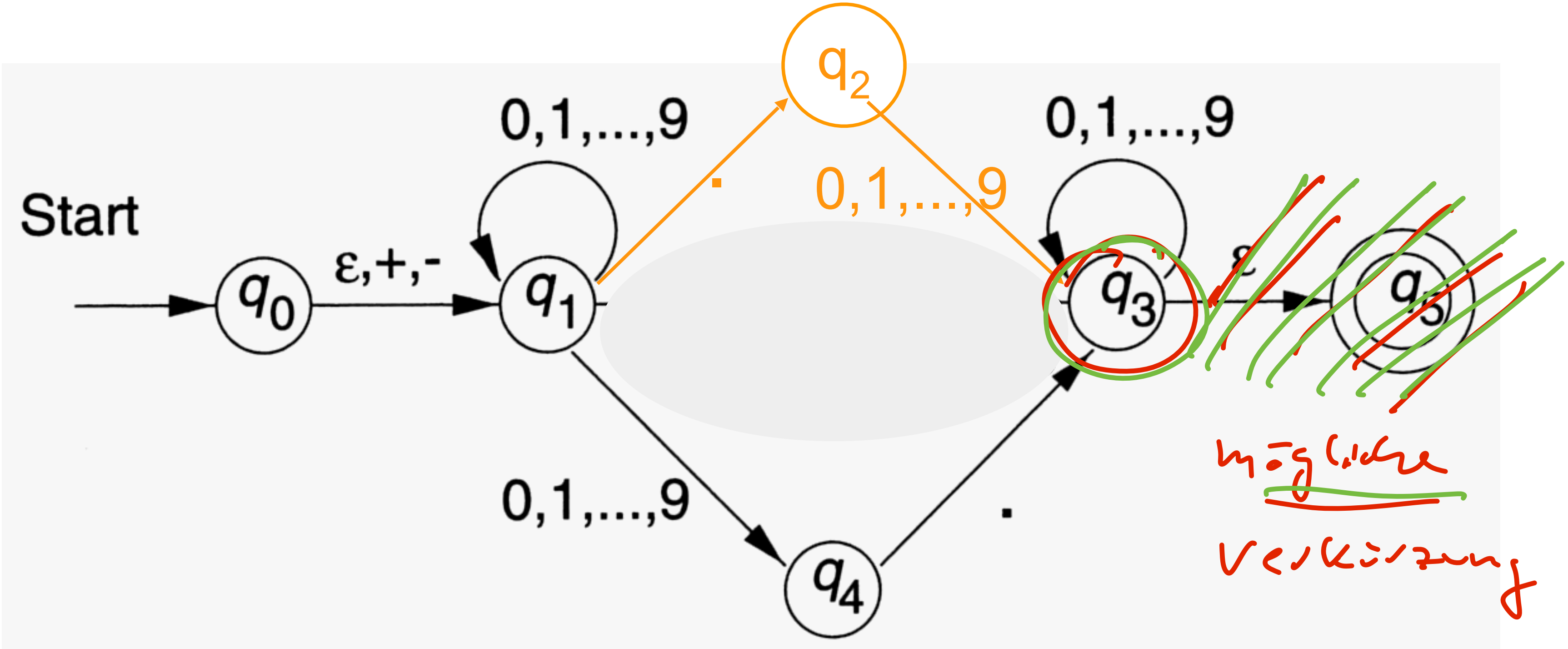
Entwickeln Sie einen NEA oder DEA, der Dezimalzahlen mit folgenden Bedingungen akzeptiert:

- Vor der Zahl darf ein Vorzeichen '+' oder '-' stehen.
- Die Zahl muss mindestens aus einer Ziffer und genau einem Punkt bestehen. Die Ziffer darf auch eine Null sein. Beispiele für kürzeste Wörter:
  - .0
  - 1.

ε-NEA, der Dezimalzahlen akzeptiert



ε-NEA, der Dezimalzahlen akzeptiert

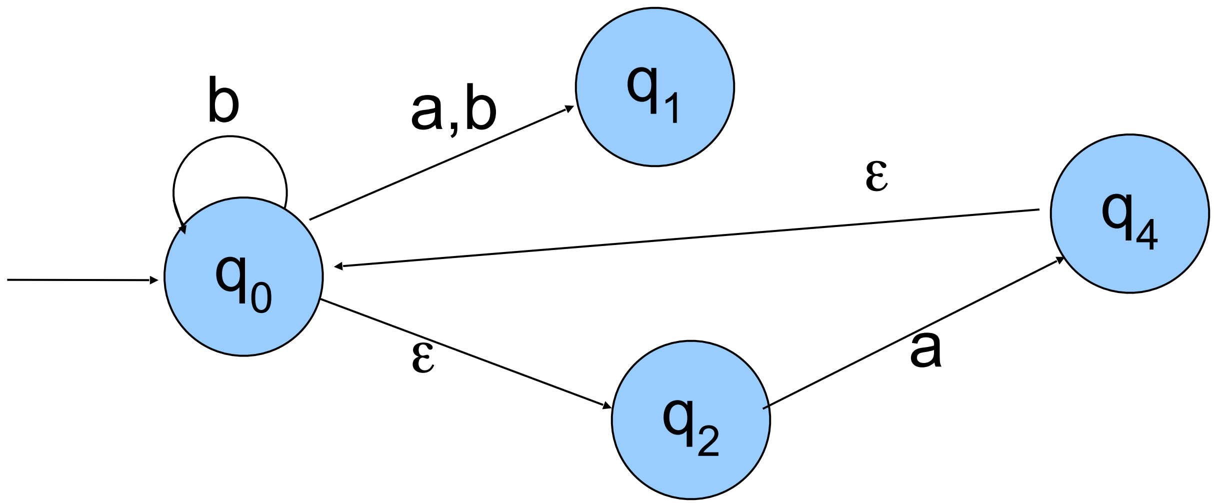


mögliche
Verkürzung

Ende V2

Übung: ε-Übergänge

In welcher Zustandsmenge befindet sich der ε-NEA nach Verarbeitung von 'a' bzw. nach Verarbeitung von 'b' ?



Diskussion

- Wie müsste die Übergangsfunktion für ε-NEAs definiert sein?
- Was bewirken ε-Übergänge? Was bedeutet es z.B., wenn ein Zustand durch einen ε-Übergang mit einem anderen Zustand verbunden ist und der wiederum mit einem dritten Zustand durch einen ε-Übergang verbunden ist?

Definition ε-NEA

- Ein ε-NEA ist im Wesentlichen ein NEA mit einer modifizierten Übergangsfunktion
  - nämlich einer, die ε-Übergänge erlaubt
  - $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$

ε-Hülle

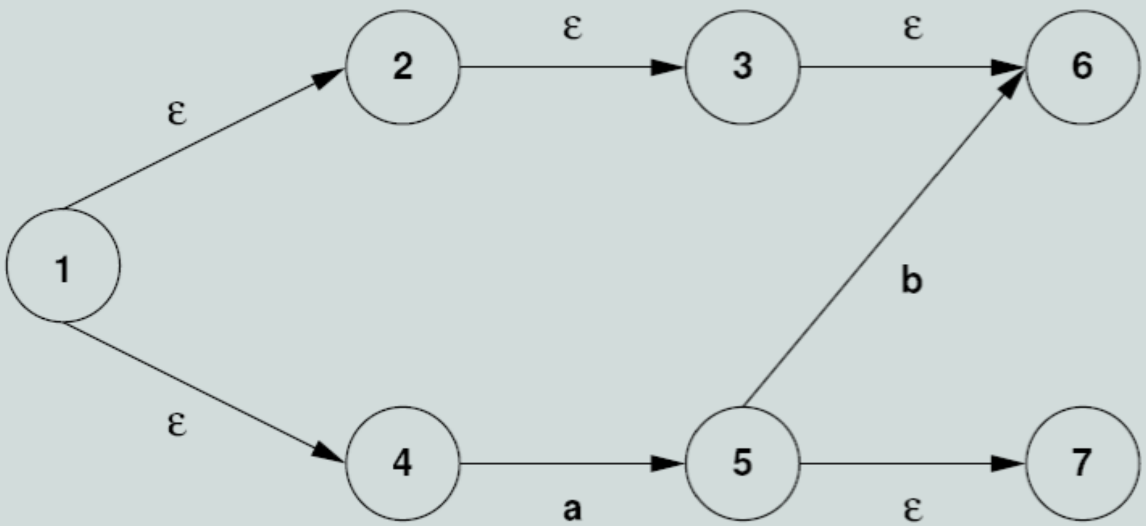
[HMU02], Kap. 2.5.3

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein ε-NEA. Die ε-Hülle eines Zustandes $q \in Q$ ist definiert durch

1. $q \in \varepsilon\text{-Hülle}(q)$
2. Ist $p \in \varepsilon\text{-Hülle}(q)$ und $p \xrightarrow{\varepsilon} r$, dann ist auch $r \in \varepsilon\text{-Hülle}(q)$

Bsp mit vielen ε



Es gilt zB: $\varepsilon\text{-Hülle}(1) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Diskussion: Erweiterte Übergangsfunktion

- Wiederholung: Wie ist die erweiterte Übergangsfunktion für einen NEA definiert?

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Diskussion: Erweiterte Übergangsfunktion

- Wiederholung: Wie ist die erweiterte Übergangsfunktion für einen NEA definiert?

Definition

Die erweiterte Übergangfunktion $\hat{\delta}$ eines NEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist die sequentielle Anwendung von δ auf ein Wort w und ist induktiv definiert durch

1. $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$
2. $\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$ falls $w = xa, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$ und $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$

- Wie könnte die erweiterte Übergangsfunktion eines NEA so ergänzt werden, dass sie auf einen ε-NEA zutrifft?

$\hat{\delta}(q,xa) =$

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Übergangsfunktion bei ε-NEA

[HMU02], Kap. 2.5.4

Damit definieren wir

Definition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein ε-NEA. Die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta}$ von A ist definiert durch

1. $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \varepsilon\text{-Hülle}(q)$
2. $\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{j=1}^{m} \varepsilon\text{-Hülle}(r_j)$ falls $w = xa, x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$,

   $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}, \bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$

Definition

Sei $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein ε-NEA. Dann ist die Sprache von E definiert als

$$L(E) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Zu jedem ε-NEA gibt es einen äquivalenten DEA

- DEA konstruieren
  - ähnlich wie beim NEA: Teilmengenkonstruktion modifiziert

- Zeigen, dass die akzeptierten Sprachen gleich sind:

  Satz 2.22 aus [HMU02]:
  Eine Sprache L wird genau dann von einem ε-NEA akzeptiert, wenn L von einem DEA akzeptiert wird.

  Beweis entfällt!

Diskussion

Wie könnte man vorgehen, um zu einem gegeben ε-NEA den äquivalenten DEA zu konstruieren?

Übungen

[HMU02], Kap. 2.5.6

E_1

	ε	a	b	c
$\rightarrow p$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$
$*r$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\{p\}$

E_2

	ε	a	b	c
$\rightarrow p$	$\{q,r\}$	$\emptyset$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{r\}$	$\{p,q\}$
$*r$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

1. Berechnen Sie die ε-Hülle der Zustände der obigen ε-NEAs
2. Geben Sie alle Worte der Sprache der obigen NEAs an, die drei oder weniger Zeichen haben.
3. Wandeln Sie die obigen ε-NEAs in äquivalente DEAs um
4. Geben Sie ε-NEAs an für folgende Sprachen **und DEA**
   - Zeichenreihen die null oder mehr Buchstaben a haben, gefolgt von null oder mehr Buchstaben b, gefolgt von null oder mehr Buchstaben c
   - Zeichenreichen die aus ein- oder mehrmaliger Wiederholung von 01 bestehen oder aus ein-oder mehrmaliger Wiederholung von 010
   - Zeichenreihen bei denen mindestens eine 1 unter den letzten 3 Stellen ist.

Diskussion

E_1

	ε	a	b	c
$\rightarrow p$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$
$*r$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\{p\}$

E_2

	ε	a	b	c
$\rightarrow p$	$\{q, r\}$	$\emptyset$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{r\}$	$\{p, q\}$
$*r$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

97 1 $\underline{\underline{E_1}}$ $\varepsilon H(p) = \{p\}$ $\varepsilon H(q) = \{p,q\}$ $\varepsilon H(r) = \{p,q,r\}$

$\underline{\underline{E_2}}$ $\varepsilon H(p) = \{p,q,r\}$ $\varepsilon H(q) = \{q\}$ $\varepsilon H(r) = \{r\}$

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

E_1

	ε	a	b	c
$\rightarrow p$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\{p\}$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$
$*r$	$\{q\}$	$\{r\}$	$\emptyset$	$\{p\}$

	a	b	c
$\rightarrow \{p\}$	$\{p\}$	$\{p,q\}$	$\{p,q,r\}$
$\{p,q\}$	$\{p,q\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$
$* \{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$	$\{p,q,r\}$

Übung: Formale Def. des äquivalenten DEAs

- Wie ist die Zustandsmenge definiert?
- Wie ist der Startzustand definiert?
- Wie sind die Endzustände definiert?
- Wie lautet das Alphabet?
- Wie lässt sich die Übergangsfunktion des DEAs in Abhängigkeit von der Übergangsfunktion des ε-NEAs beschreiben?

ε-Übergänge eliminieren [HMU02], Kap. 2.5.5

Sei $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ ein ε-NEA.
Ziel: Konstruktion eines DEA, der die $L(E)$ akzeptiert.
Konstruktion von $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ (modifizierte Teilmengenkonstruktion):

S ist

- $Q_D = \{S \mid S \subseteq Q_E, S = \varepsilon\text{-Hülle}(S)\}$ – Menge der ε-abgeschlossenen Teilmengen von Q_E
- $q_D = \varepsilon\text{-Hülle}(q_0)$
- $F_D = \{S \mid S \in Q_D, S \cap F_E \neq \emptyset\}$
- Ist $S = \{p_1, \ldots, p_k\}$ und $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a) = \{r_1, \ldots, r_m\}$, dann ist $\delta_D(S, a) = \bigcup_{j=1}^{m} \varepsilon\text{-Hülle}(r_j)$

Ist $|Q_D|$ größer, kleiner oder gleich im Vergleich zur Teilmengenkonstruktion beim normalen NEA ?

ε-Übergänge eliminieren

[HMU02], Kap. 2.5.5

Sei $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ ein ε-NEA.
Ziel: Konstruktion eines DEA, der die $L(E)$ akzeptiert.
Konstruktion von $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ (modifizierte Teilmengenkonstruktion):

- $Q_D = \{S \mid S \subseteq Q_E, S = \varepsilon\text{-Hülle}(S)\}$ – Menge der ε-abgeschlossenen Teilmengen von Q_E
- $q_D = \varepsilon\text{-Hülle}(q_0)$
- $F_D = \{S \mid S \in Q_D, S \cap F_E \neq \emptyset\}$
- Ist $S = \{p_1, \ldots, p_k\}$ und $\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a) = \{r_1, \ldots, r_m\}$, dann ist $\delta_D(S, a) = \bigcup_{j=1}^{m} \varepsilon\text{-Hülle}(r_j)$

Nennen Sie drei Beispiele für ε-abgeschlossene Zustands-Teilmengen beim zuletzt gezeigten ε-NEA und außerdem drei Gegenbeispiele !

E_2

	ε	a	b	c
$\rightarrow p$	$\{q, r\}$	$\emptyset$	$\{q\}$	$\{r\}$
q	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{r\}$	$\{p, q\}$
$*r$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

EA4: Rückblick auf die Ziele

	EA1 bis EA4
Kenntnis	Definitionen der rot hervorgehobenen Begriffe kennen
Verständnis	DEAs, NEAs und ε-NEAs formal beschreiben können und vorgegebene Modelle erklären können. Äquivalente DEAs, NEAs und ε-NEAs in ihren Eigenschaften und Abläufen miteinander vergleichen können.
Anwendung	Berechnungen mit der erweiterten Übergangsfunktion für DEAs, NEAs und ε-NEAs und der ε-Hülle für ε-NEAs ausführen können. Einen NEA oder einen ε-NEA in einen äquivalenten DEA transformieren können (und umgekehrt)
Analyse	DEAs, NEAs und ε-NEAs auf Basis einer formalen Beschreibung oder einer Anwendungssituation entwickeln können
Synthese	
Beurteilung	

Der praktische Nutzen von ε-NEAs

- DEAs haben hohe praktische Bedeutung
- ε-NEAs sind lediglich eine Modellierungshilfe, um DEAs zu erhalten
- Modifizierte Teilmengenkonstruktion wird praktisch eingesetzt für die Überführung ε-NEA → DEA

EA5: Minimierte DEAs

- Bisherige Beobachtung: Es gibt DEA mit unterschiedlich vielen Zuständen, die dieselbe Sprache akzeptieren.
- Es lassen sich dann Zustände zusammenfassen.
- DEAs, mit der geringstmöglichen Anzahl von Zuständen, also wenn keine Zustände mehr zusammengefasst werden können, heißen **minimiert** oder **reduziert**.

Diskussion: Äquivalenz von Zuständen

Zustände, die zusammengefasst werden können, sind offenbar **äquivalent**.

Was müsste die genaue Bedingung für die **Äquivalenz von Zuständen** sein?

Äquivalenz von Zuständen

- Äquivalent heißt "nicht unterscheidbar"

- Formale Definition:

  Zwei Zustände p und q sind **äquivalent**, wenn Folgendes gilt:

  - Für alle Eingabezeichenreihen w ist $\hat{\delta}(p, w)$ genau dann ein akzeptierender Zustand, wenn $\hat{\delta}(q, w)$ ein akzeptierender Zustand ist.

- Wichtig: $\hat{\delta}(p, w)$ und $\hat{\delta}(q, w)$ müssen nicht zu demselben Zustand führen!

Diskussion

Wie findet man äquivalente Zustände?

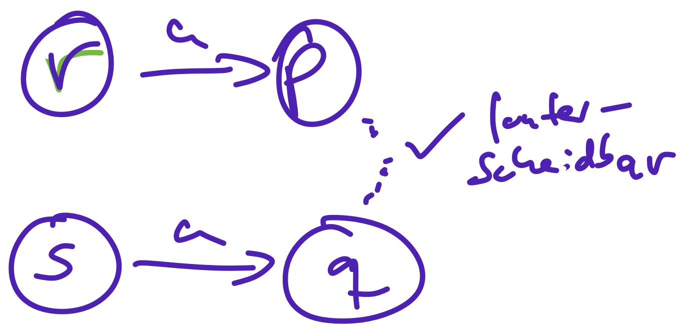
Wie findet man äquivalente Zustände?

- Man betrachtet alle Zustandspaare und stellt fest, welche Paare nicht äquivalent sind.
- Alle übrigen Paare müssen dann äquivalent sein.

[HMU02], Kap. 4.4.1

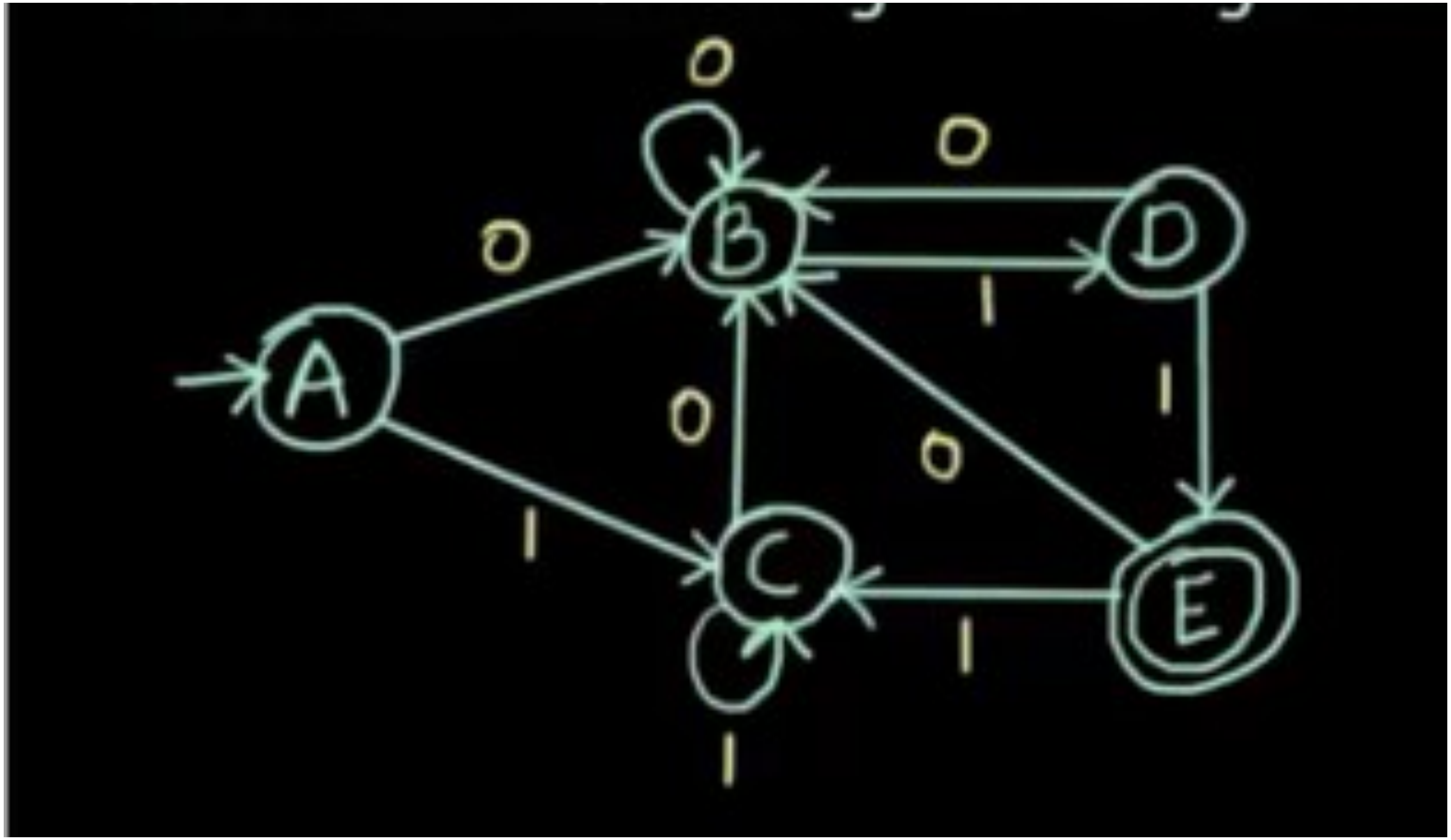
Welche Zustände sind nicht äquivalent?

- Wenn ein Zustand p akzeptierend ist und ein anderer Zustand q nicht akzeptierend ist, dann können p und q nicht äquivalent sein.
- Wenn ein Zustand r für das Eingabesymbol a einen Übergang zu einem Zustand p hat, also $\delta(r, a) = p$
  und ein Zustand s für dasselbe Eingabesymbol a einen Übergang zu einem Zustand q hat, also $\delta(s, a) = q$,
  und p und q nicht äquivalent sind
  dann sind r und s auch nicht äquivalent.



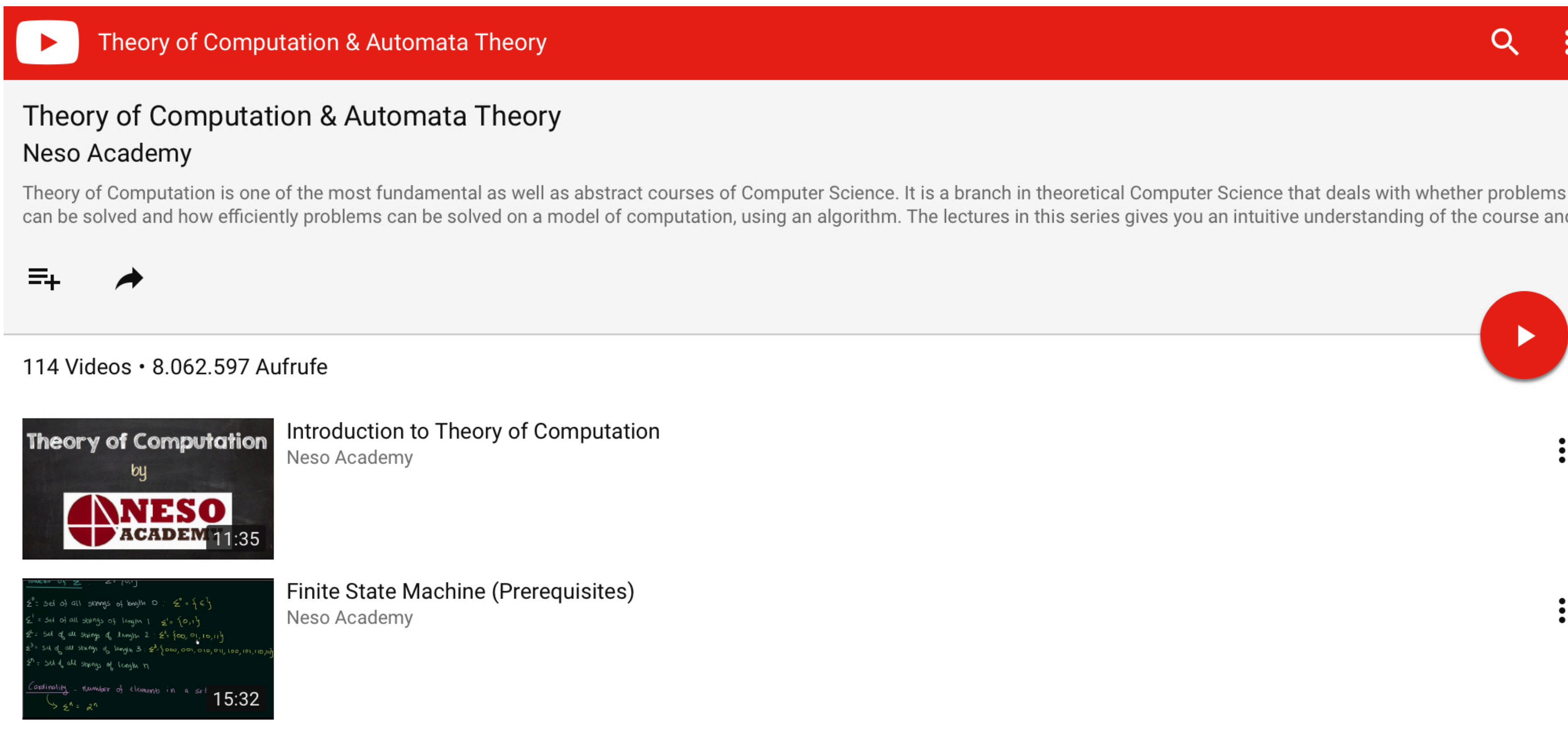
Diskussion

- Nennen Sie einige Zustandspaare, die nicht äquivalent sind.



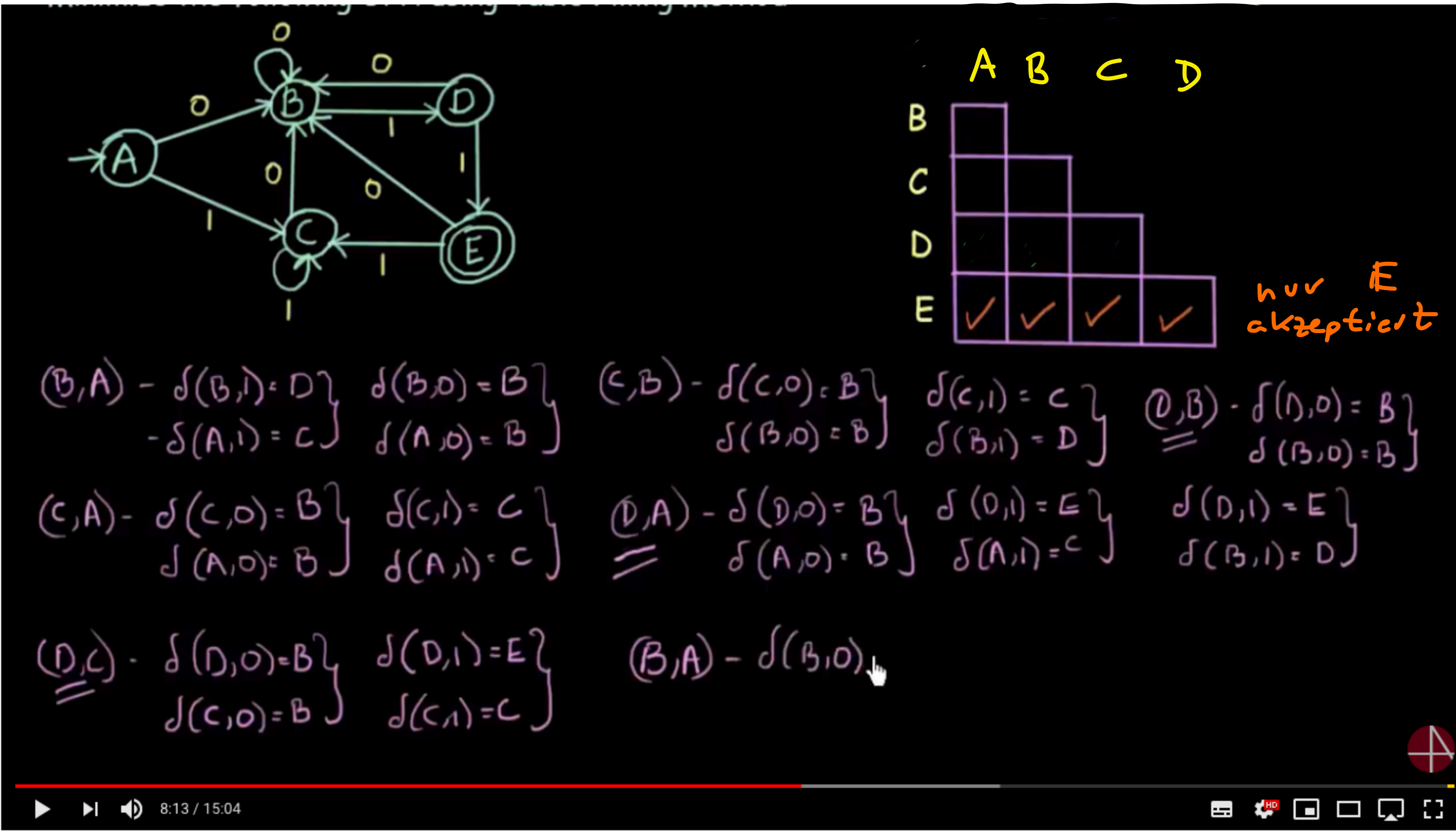
Quelle hier und später

- Neso Academy auf YouTube (allerdings: kleine Fehler ...)
- https://m.youtube.com/playlist?list=PLBlnK6fEyqRgp46KUv4ZY69yXmpwKOIev



[HMU02], Kap. 4.4.1

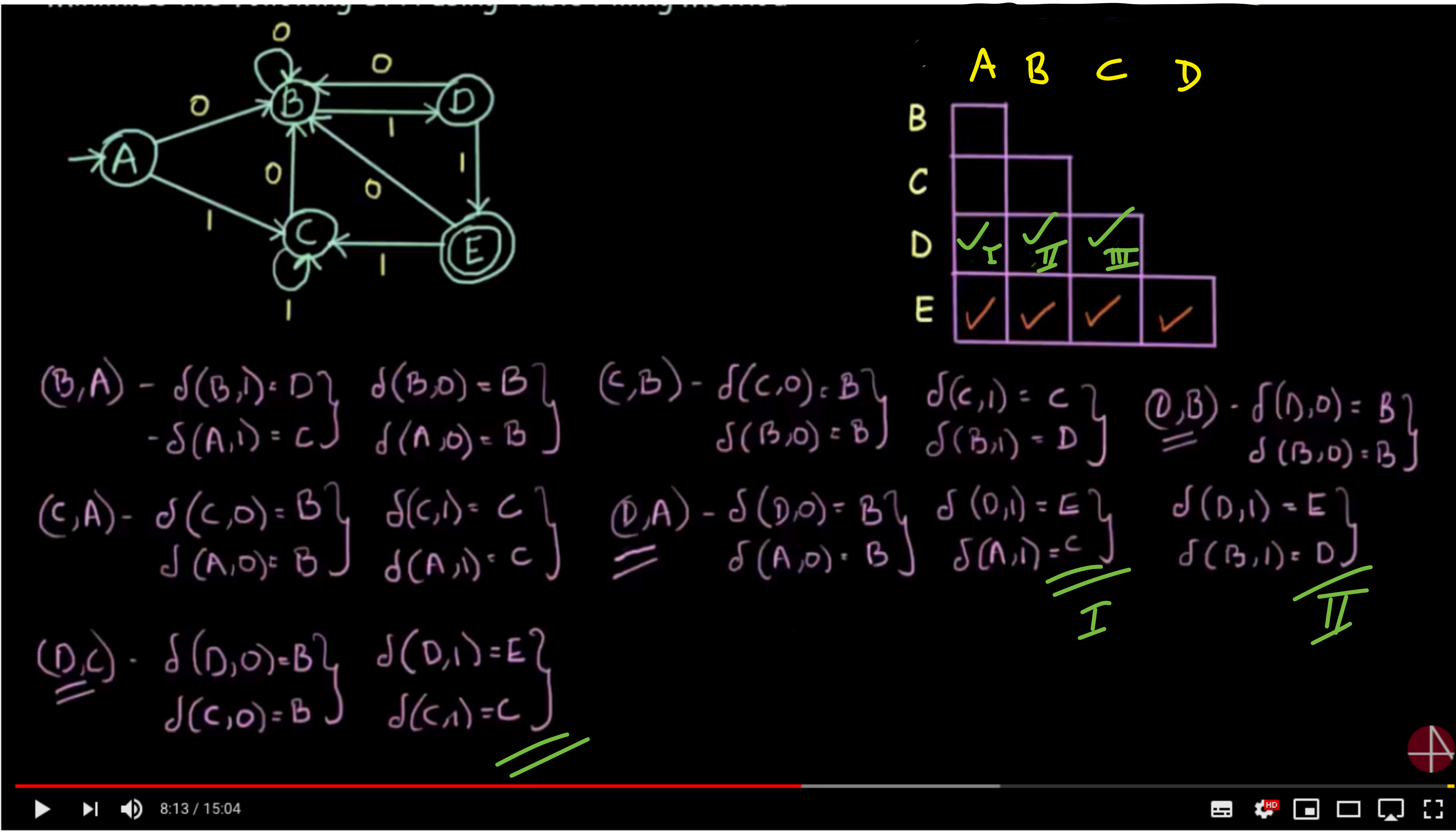
Table-filling Algorithmus



Minimization of DFA - Table Filling Method (Example)

[HMU02], Kap. 4.4.1

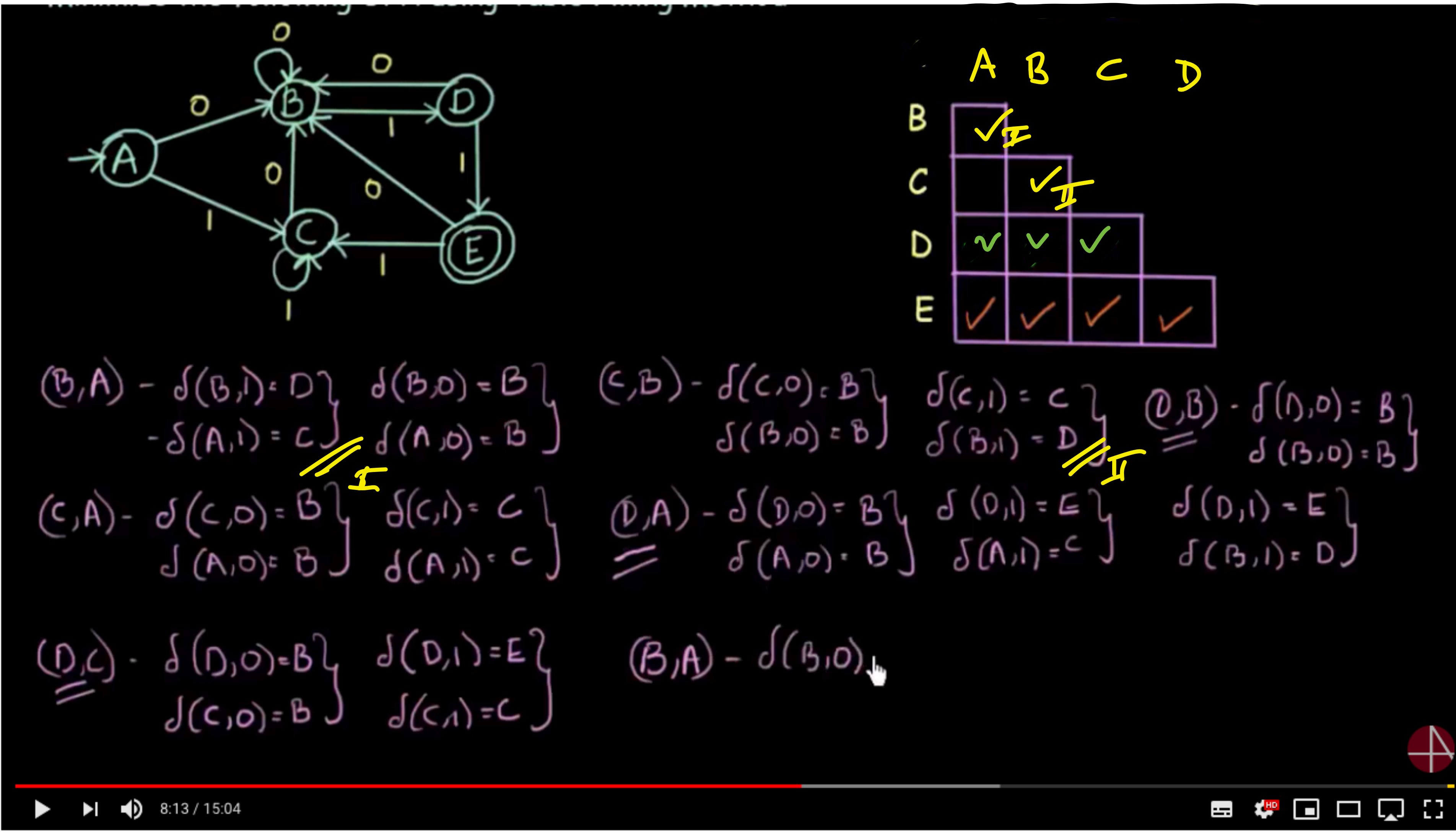
Table-filling Algorithmus



Minimization of DFA - Table Filling Method (Example)

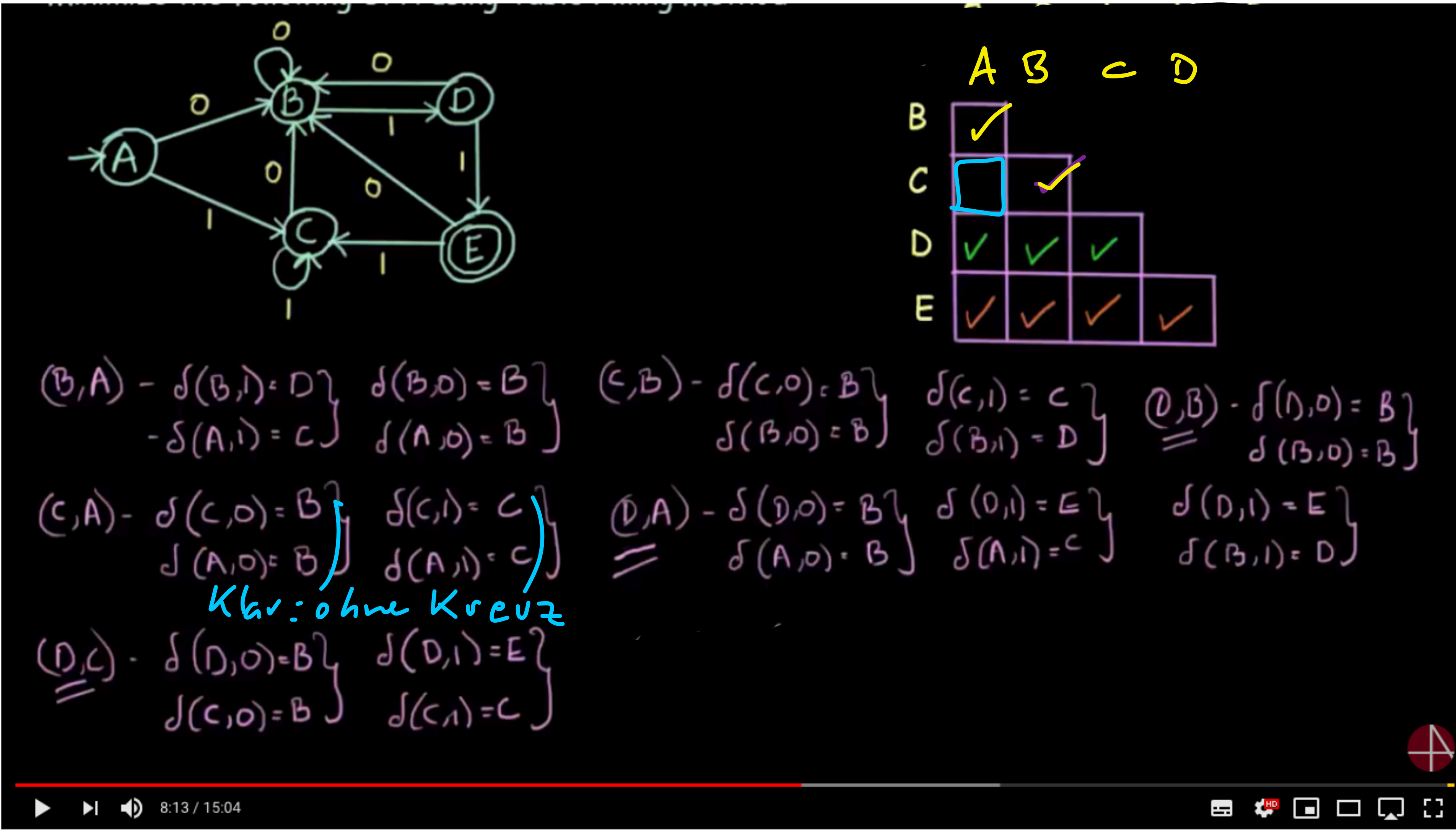
[HMU02], Kap. 4.4.1

Table-filling Algorithmus



Minimization of DFA - Table Filling Method (Example)

Table-filling Algorithmus

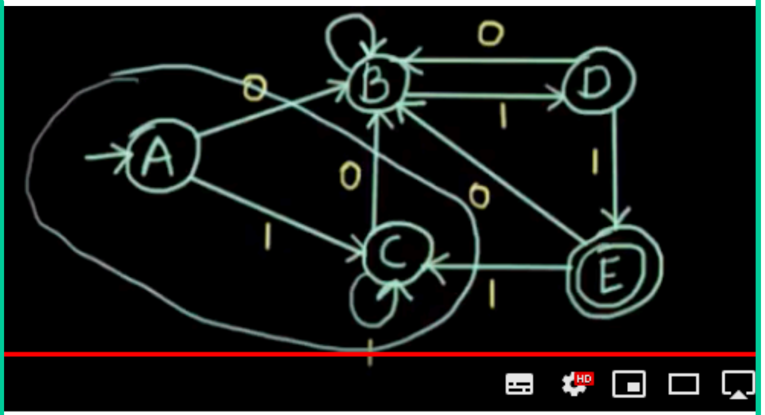


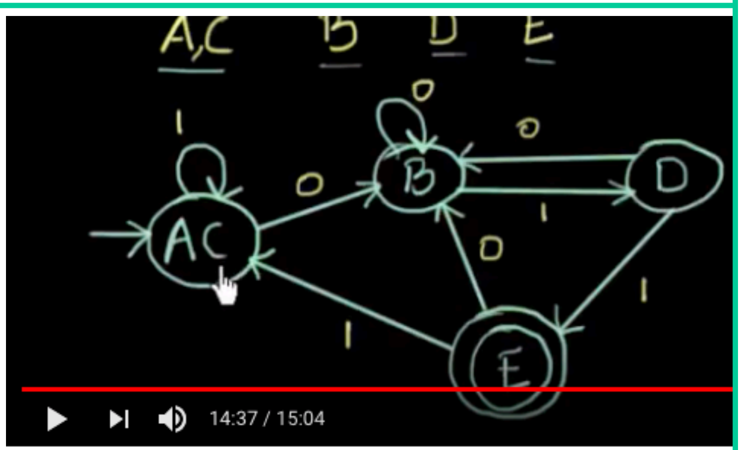
Minimization of DFA - Table Filling Method (Example)

Table-filling Algorithmus

A und C sind
„äquivalent ...

... und werden von
AC ersetzt

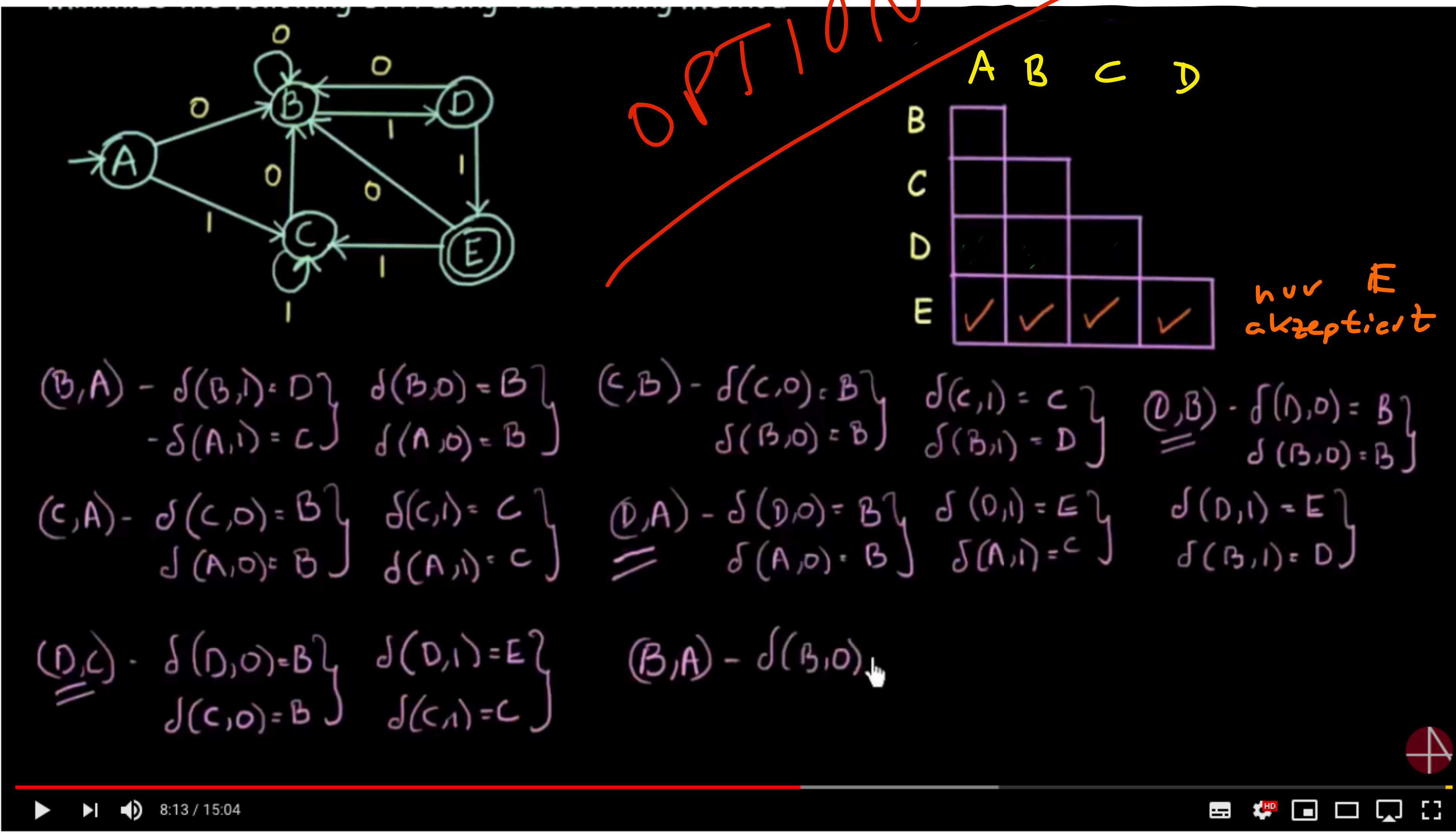




Minimization of DFA - Table Filling Method (Example)

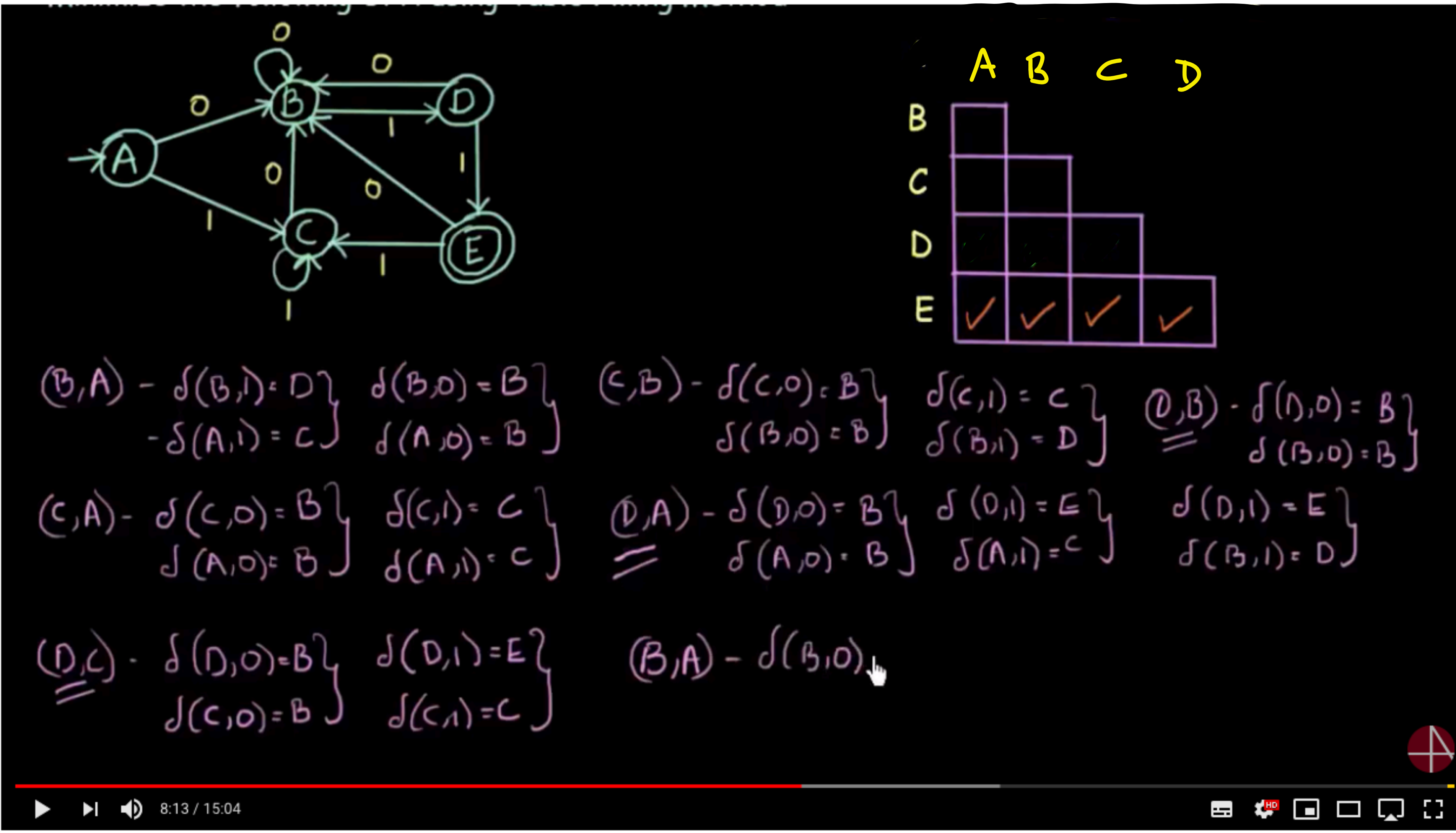
Table-filling Algorithmus

OPTIONAL



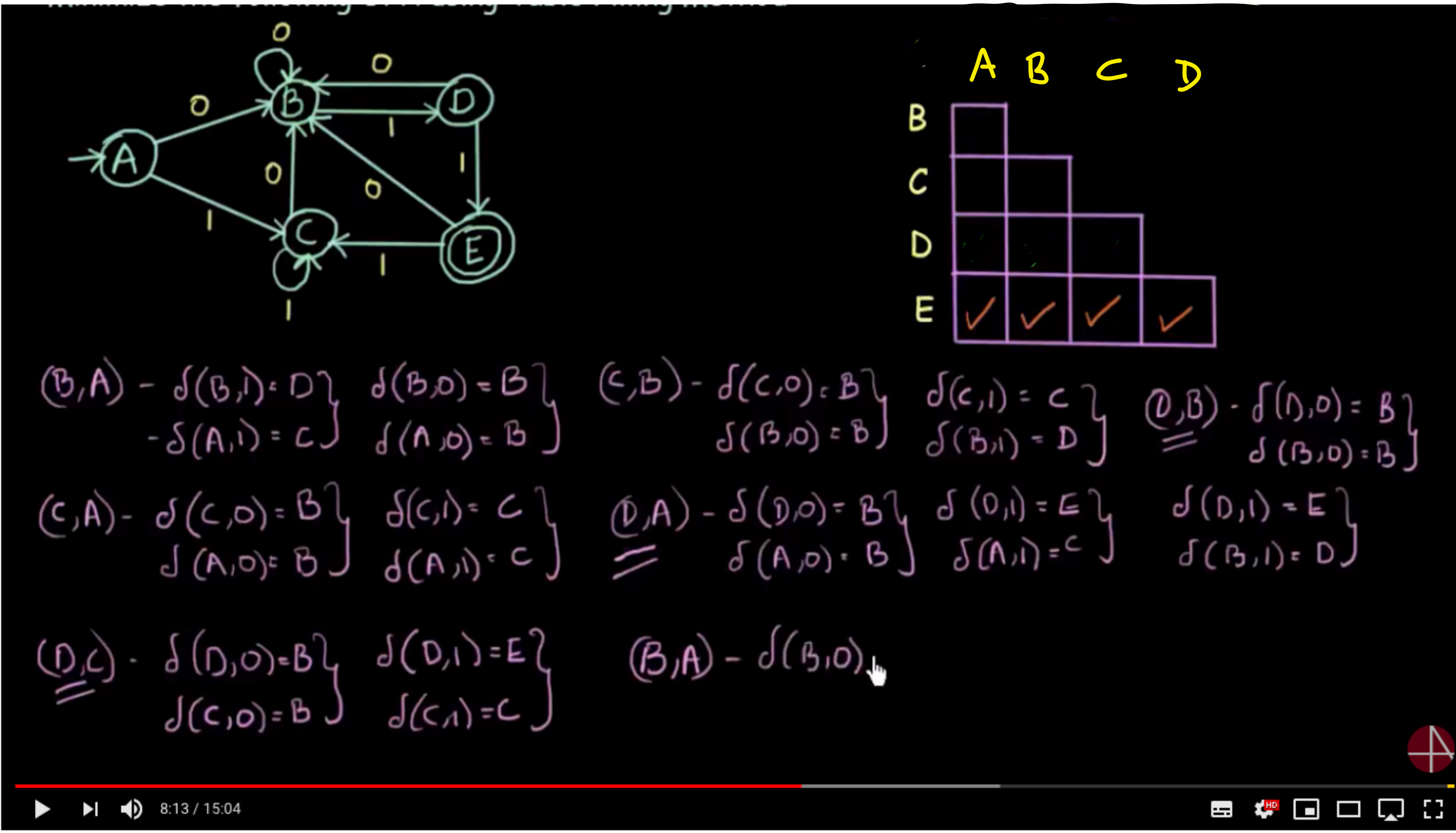
Minimization of DFA - Table Filling Method (Example)

Table-filling Algorithmus



Minimization of DFA - Table Filling Method (Example)

Table-filling Algorithmus



Minimization of DFA - Table Filling Method (Example)

Diskussion

OPTIONAL

- Nennen Sie einige Zustandspaare, die nicht äquivalent sind.

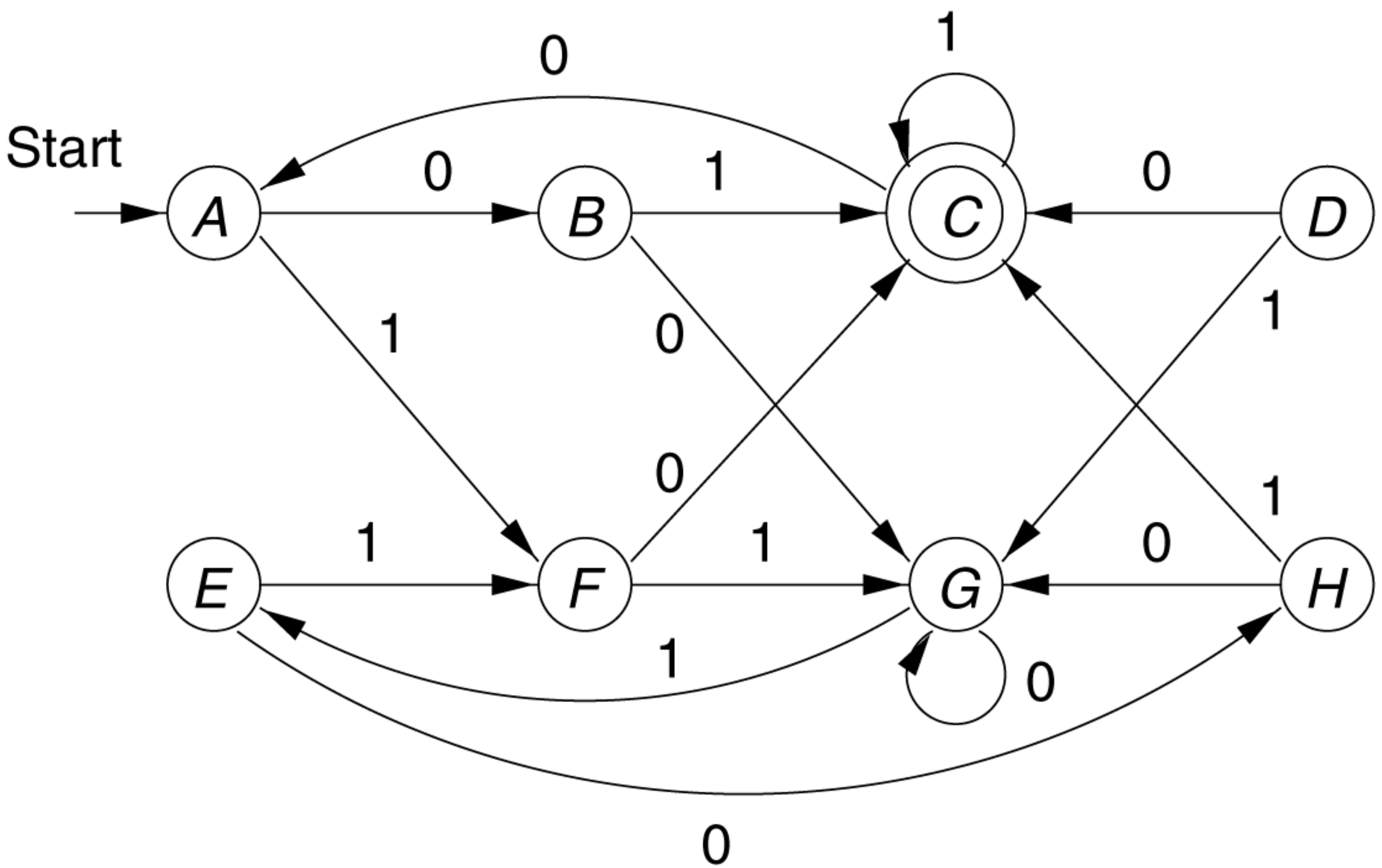
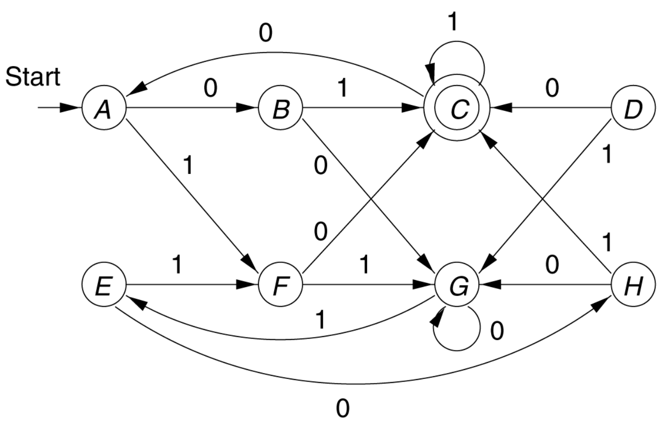


Table-filling Algorithmus

- Von C unterscheidbar
- C =δ (F, 0), H =δ (E, 0)
- F =δ (A, 1), E =δ (G, 1)
- In derselben Weise mit Bezug auf C und H
- Übrige Paare äquivalent

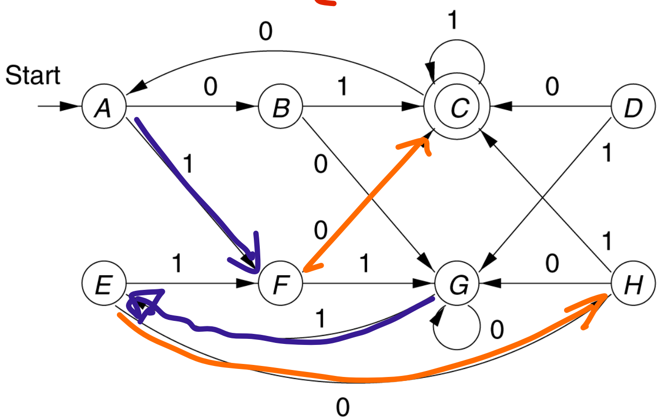


	A	B	C	D	E	F	G
B							
C							
D							
E							
F							
G							
H							

Kreuz ≙ nicht äquivalent
≙ unterscheidbar

Table-filling Algorithmus

- Von C unterscheidbar
- C =δ (F, 0), H =δ (E, 0)
- F =δ (A, 1), E =δ (G, 1)
- Alle unmarkierten so prüfen
- Wiederhole (ggfs.) ...



	A	B	C	D	E	F	G
B							
C	X	X					
D			X				
E			X				
F			X		X		
G	X		X				
H			X				

Zwischen-Ergebnis!

... dann

- Übrige Paare ohne Kreuz äquivalent

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Table-filling Algorithmus Vorgehensweise

- Alle Felder markieren, bei denen ein Zustand akzeptierend und der andere nicht akzeptierend ist.
  Formal:
  Alle Felder (p, q) mit $(p \in F \wedge q \notin F) \vee (p \notin F \wedge q \in F)$ markieren.

- Für alle unmarkierten Felder (r, s) überprüfen, ob es ein Eingabezeichen $a \in \Sigma$ gibt, für das es Kanten von r und s auf ein markiertes Feld gibt (also zu einem Paar nicht-äquivalenter Zustände).
  Formal:
  Wenn $(\delta(r,a), \delta(s,a))$ markiert, dann (r, s) markieren.

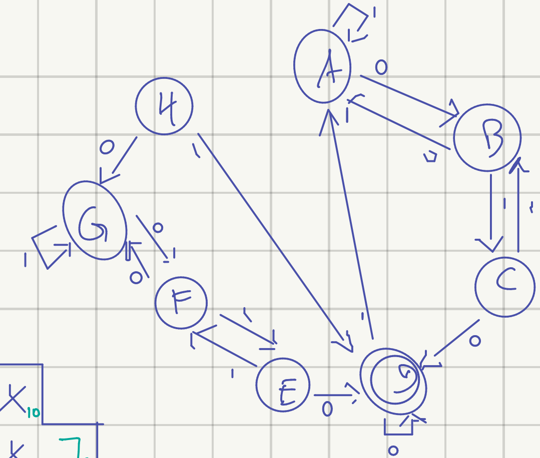
- Für alle unmarkierten Felder wiederholen, bis keine neuen Markierungen im gesamten Feld hinzukommen.

Übung

- Bilden Sie die Tabelle der unterscheidbaren Zustände für den nebenstehenden Automaten

	0	1
→ A	B	A
B	A	C
C	D	B
* D	D	A
E	D	F
F	G	E
G	F	G
H	G	D

123



B	1						
C	X_1	X					
D	X_4	X_2	X_6				
E	2_3	4		X_{10}			
F	3_5		X	X_8	7		
G		5	X	X_7	8_9	9_{11}	
H	4	6	X	X	7	10	11
	A	B	C	D	E	F	G

X akzeptierend / nichtakz.

X C führt mit 0 nach D, alle Zustände, die mit 0 nicht nach D (akzeptierend) verweisen, unterscheiden sich

1 $\delta(A,1)=A$ $\delta(B,1)=C$ wegen (AC) unterscheidbar

2 (DB) —"—

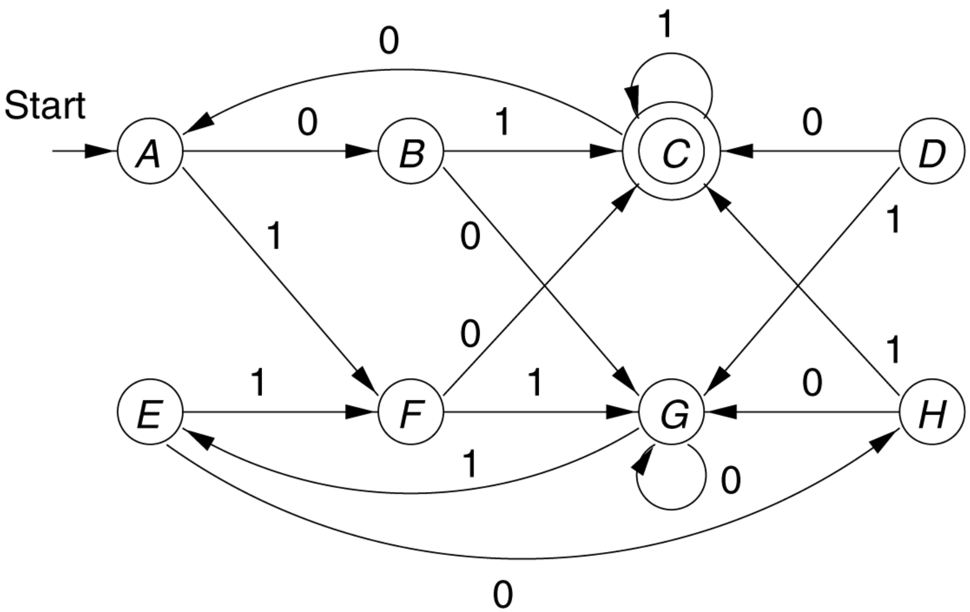
5 (Notation 3_5) wegen (AF) —"—

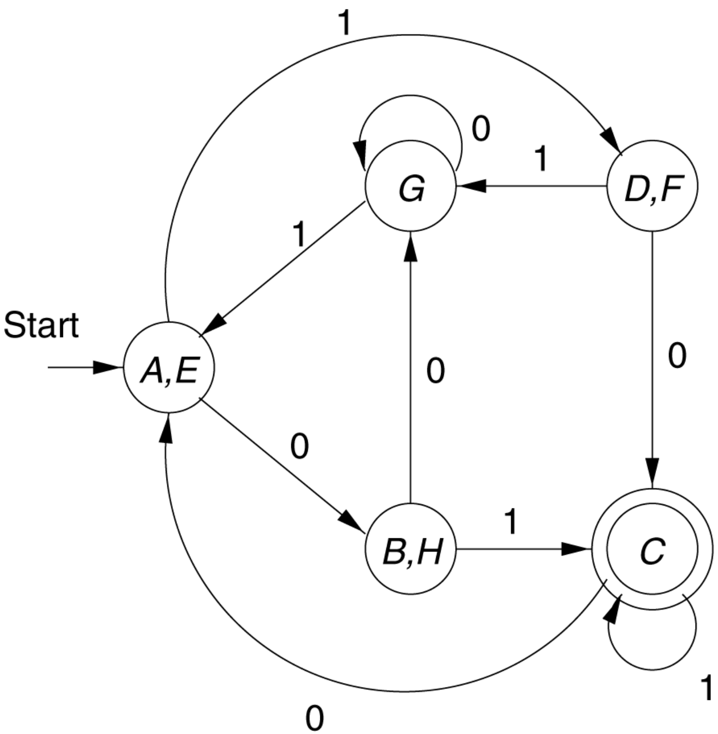
3. Kreuz ↗↑ begründet Kreuz 5

DANN: Keine weiteren Kreuze im nächsten Durchlauf => FERTIG :)

	0	1
→ A	B	A
B	A	C
C	D	B
* D	D	A
E	D	F
F	G	E
G	F	G
H	G	D

Minimierung





Mengen äquivalenter Zustände können zu einem Block, d.h. zu einem neuen Zustand zusammengefasst werden.

Minimierung im Detail (1)

- Äquivalenz von Zuständen ist transitiv
  - Wenn also (p, q) äquivalent (in der Tabelle nicht markiert) und außerdem (q, r) äquivalent (in der Tabelle auch nicht markiert), dann sind auch (p, r) äquivalent (in der Tabelle nicht markiert) und p, q und r werden zu einem neuen Zustand im minimierten DEA zusammengefasst.
- Ein durch Zusammenfassung äquivalenter Zustände entstandener Zustand heißt auch **Block**.
- Blöcke bilden eine **Partition** der Zustandsmenge
  - Anmerkung: Eine "Partition" ist eine Menge von Teilmengen, die aus einer Unterteilung der Gesamtmenge hervorgeht.

[HMU02], Kap. 4.4.4

Minimierung von DEAs (2)

- Ein minimaler DEA besteht also aus den Blöcken der Partition
- Für jedes Eingabesymbol a müssen die Übergänge von den Zuständen eines Blocks S zu solche Zuständen führen, die alle im selben Block liegen. Formal:
  - S sei ein Block
  - Dann muss es einen Block T geben (der identisch mit S sein darf), so dass für jeden Zustand q aus S und für ein beliebiges Eingabesymbol a $\delta(q,a)$ in T liegt.
- Startzustand ist der Block, der den Startzustand enthält
- Akzeptierende Zustände sind die Blöcke, die aus akzeptierenden Zuständen bestehen
  - (Es kann keinen Block geben, der akzeptierende und nicht-akzeptierende Zustände enthält.)

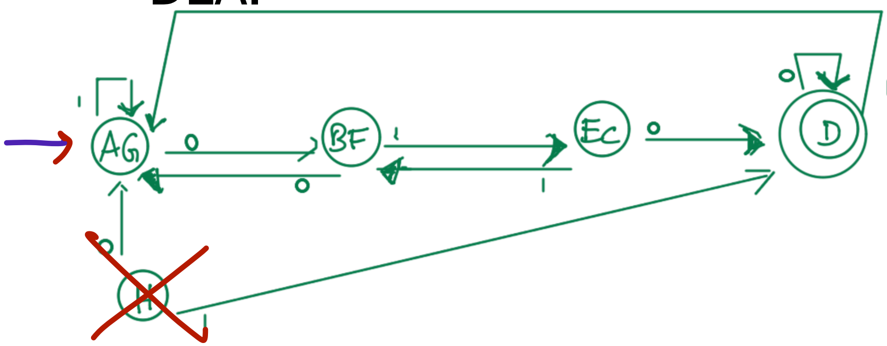
Übung

- Konstruieren Sie den minimalen äquivalenten DEA.

	0	1
→ A	B	A
B	A	C
C	D	B
* D	D	A
E	D	F
F	G	E
G	F	G
H	G	D

Übung

- Konstruieren Sie den minimalen äquivalenten DEA.



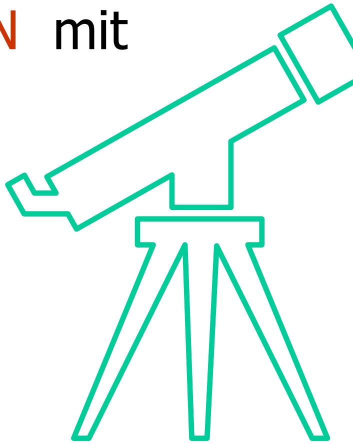
	0	1
→ A	B	A
B	A	C
C	D	B
* D	D	A
E	D	F
F	G	E
G	F	G
H	G	D

Zustände die nicht vom Startzustand erreichbar sind, sind noch zu streichen !

Ende VL(3.10)

[HMU02], Kap. 4.4.4

Eindeutigkeit minimaler DEAs



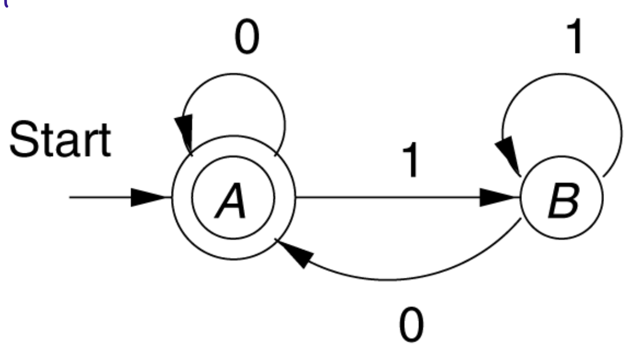
- Zu einem minimalen DEA M gibt es keinen anderen DEA N mit weniger Zuständen, der dieselbe Sprache akzeptiert
  - Beweis durch Widerspruch
  - Annahme: N existiert
  - Startzustände nicht unterscheidbar wg. L(M) = L(N)
  - Nachfolger der Startzustände nicht unterscheidbar für jedes Eingabesymbol a, weil Startzustände nicht unterscheidbar
  - Auf diese Weise, durch Zeichenreihen $a_1a_2,\ldots a_k$: Jeder Zustand von M ist von mindestens einem Zustand von N nicht unterscheidbar
  - (Weder M noch N haben nicht-erreichbare Zustände, sonst könnte man einfach den entsprechend verkleinerten DEA nehmen)
  - Da N weniger Zustände als M besitzt, gibt es mind. zwei Zustände in M, die von demselben Zustand in N nicht unterscheidbar sind. Daher auch untereinander nicht unterscheidbar. Widerspruch.
- Jeder zu M äquiv. DEA kann nur anders benannte Zustände haben

Frage

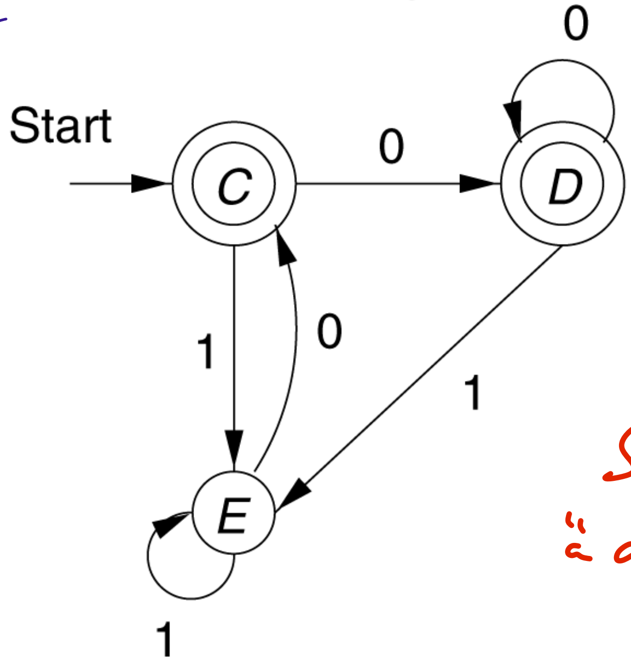
Wie würden Sie die Äquivalenz zweier DEAs überprüfen?

Beispiel: Äquivalente DEAs

M_1



M_2

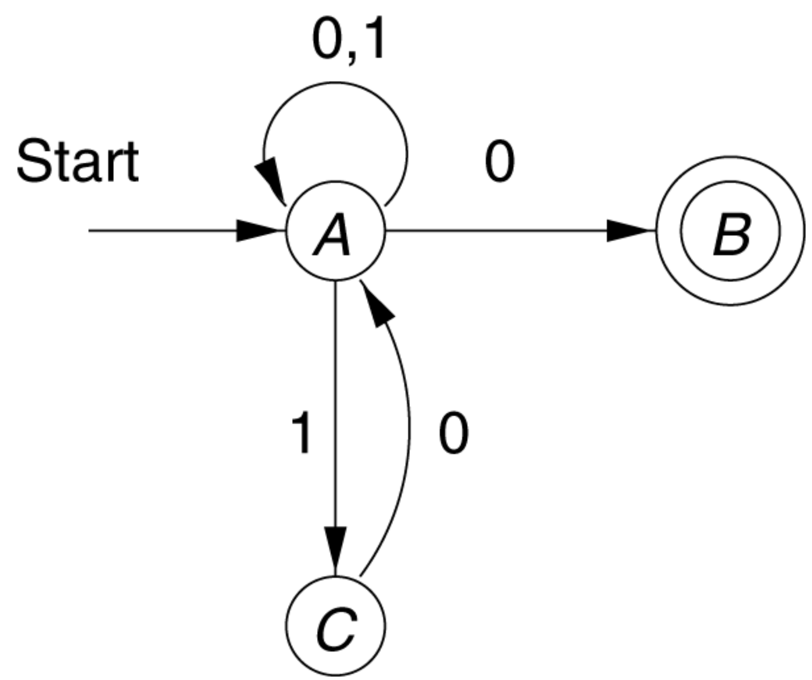


	A	B	C	D
B	x			
C		x		
D		x		
E	x		x	x

Startzustände (A,C) äquivalent $\Rightarrow$ M1, M2 äquivalent!

Minimierung von NEAs?

- Nicht durch Bildung äquivalenter Zustandsmengen



- C und A sind nicht äquivalent
- Aber: NEA ohne C akzeptiert dieselbe Sprache

EA5: Rückblick auf die Ziele

	EA5
Kenntnis	Definitionen der rot hervorgehobenen Begriffe kennen
Verständnis	Die Einsatzmöglichkeiten des Table Filling Algorithmus erklären können
Anwendung	Die Äquivalenz von Zuständen und DEAs feststellen und einen DEA in einen minimalen DEA transformieren können.
Analyse	
Synthese	
Beurteilung	

EA6: Automaten mit Ausgabe: Transduktoren

- Beispiel für Mealy-Maschine und Moore-Maschine
- Ausgabefunktionen
- Definitionen
- Mealy-Maschine in Moore-Maschine überführen (und umgekehrt)

Automaten mit Ausgabe: Transduktoren

- Die Ausgabe der bisher behandelten Automaten bestand aus Akzeptanz oder Nicht-Akzeptanz: **Akzeptoren**
- **Transduktoren** überführen eine Eingabesequenz in eine Ausgabesequenz

$50 \xrightarrow{100} 150$

- Hohe praktische Bedeutung
  - Entwurf von Schaltnetzen
  - Linguistik
- Ausgabesymbole müssen nicht den Eingabesymbolen entsprechen --> Ausgabe-Alphabet: Ω

Wann/Wobei könnte ein endlicher Automat ein Symbol ausgeben?

Zwei Typen von Transduktoren

- Ausgabe im Rahmen der Zustandsübergänge: **Mealy-Automat**

- Ausgabe beim Erreichen eines Zustands: **Moore-Automat**

- **Wovon hängt das Ausgabesymbol jeweils ab?**

Rückblick: Schwimmbadautomat

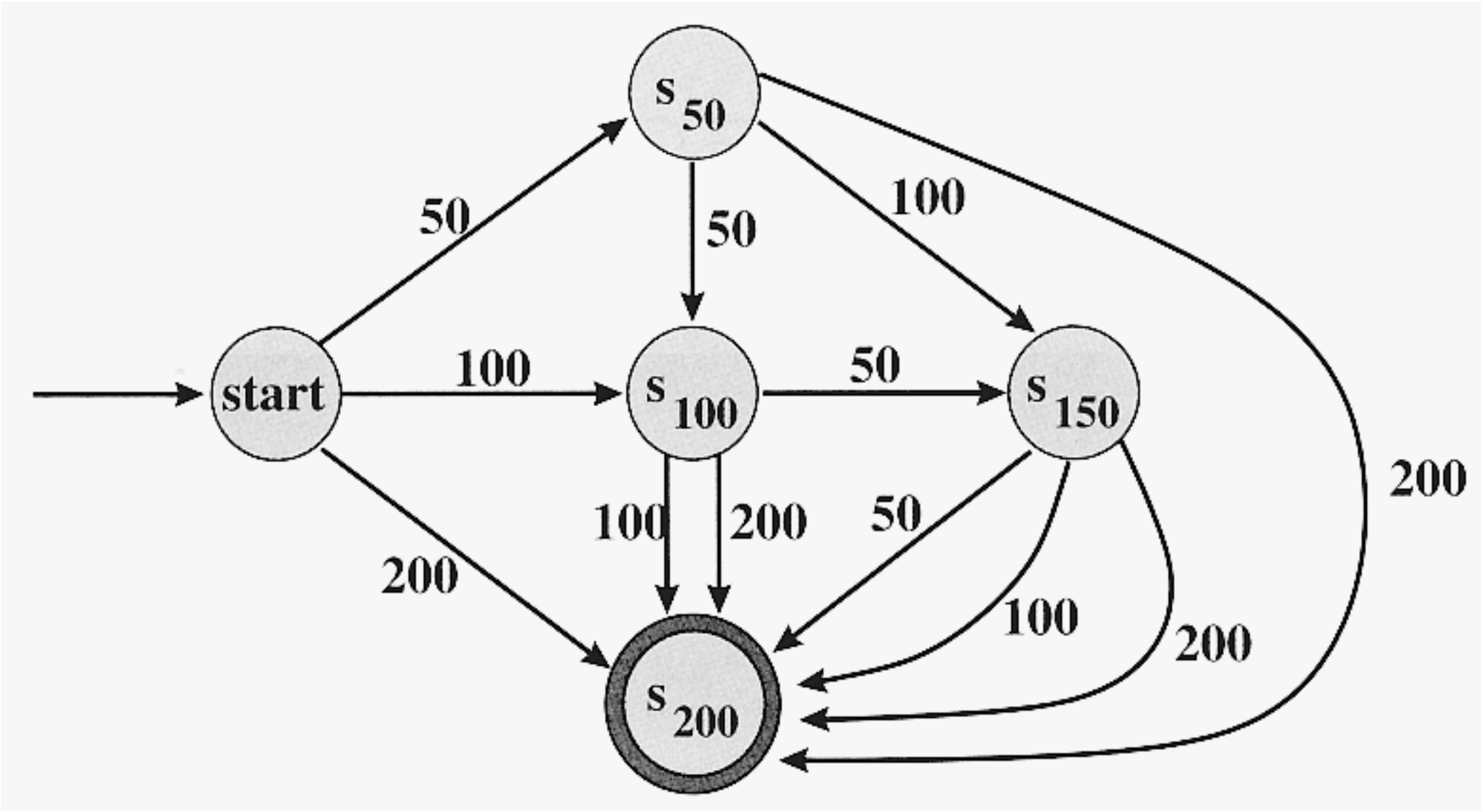
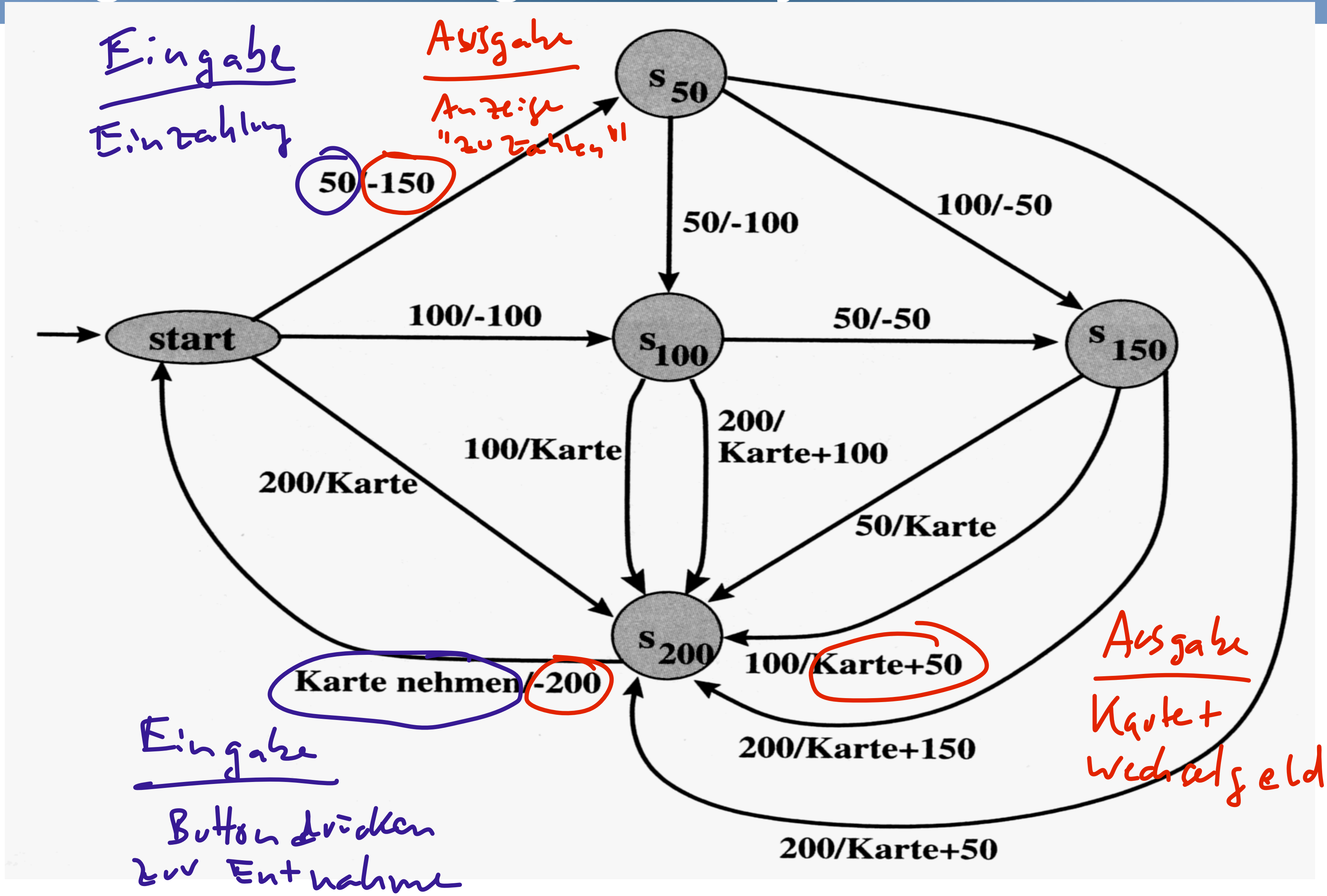


Diagramm mit Ausgabe: Mealy-Maschine



Übergangsfunktion für die Ausgabe

- Ausgabeverhalten:
  - Anzeige des noch fehlenden Geldbetrags
  - Herausgabe einer Karte
  - Herausgabe des Wechselgeldes

λ	$\underline{50}$	$\underline{100}$	$\underline{200}$	$\underline{KarteNehmen}$
$start$	$\underline{-150}$	$\underline{-100}$	$\underline{Karte}$	-
s_{50}	$\underline{-100}$	$\underline{-50}$	$\underline{Karte + 50}$	-
s_{100}	$\underline{-50}$	$\underline{Karte}$	$\underline{Karte + 100}$	-
s_{150}	$\underline{Karte}$	$\underline{Karte + 50}$	$\underline{Karte + 150}$	-
s_{200}	-	-	-	$\underline{-200}$

Mealy Automat

Definition

Ein Mealy-Automat kann als 7-Tupel $A = (Q, \Sigma, \Omega, \delta, \lambda, q_0, F)$ definiert werden:

- Q ist eine endliche Menge von Zuständen.
- Σ ist das endliche Eingabealphabet.
- Ω ist das endliche Ausgabealphabet.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ ist die Übergangsfunktion
- $\lambda : Q \times \Sigma \to \Omega$ definiert die Ausgabe:
- $q_0 \in Q$ ist der Startzustand.
- $F \subseteq Q$ ist eine (endliche) Menge möglicher akzeptierender Zustände (= Endzustandsmenge)

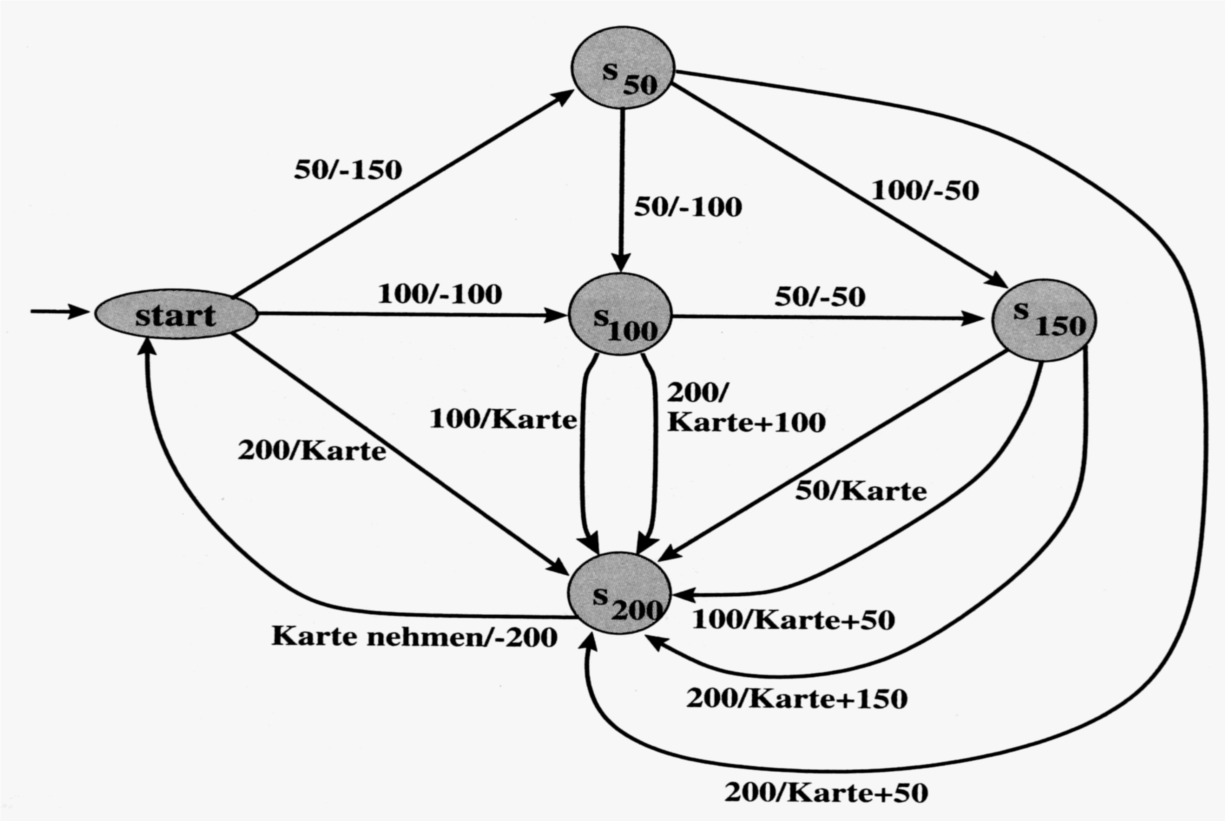
Wenn der Automat nach Lesen des Eingabewortes $w \in \Sigma^*$ in einem Zustand aus F hält, so gehört w zur Sprache $L(A)$.

Bemerkung:
bei keiner
Ausgabe:
ε

Diskussion: Moore-Maschine

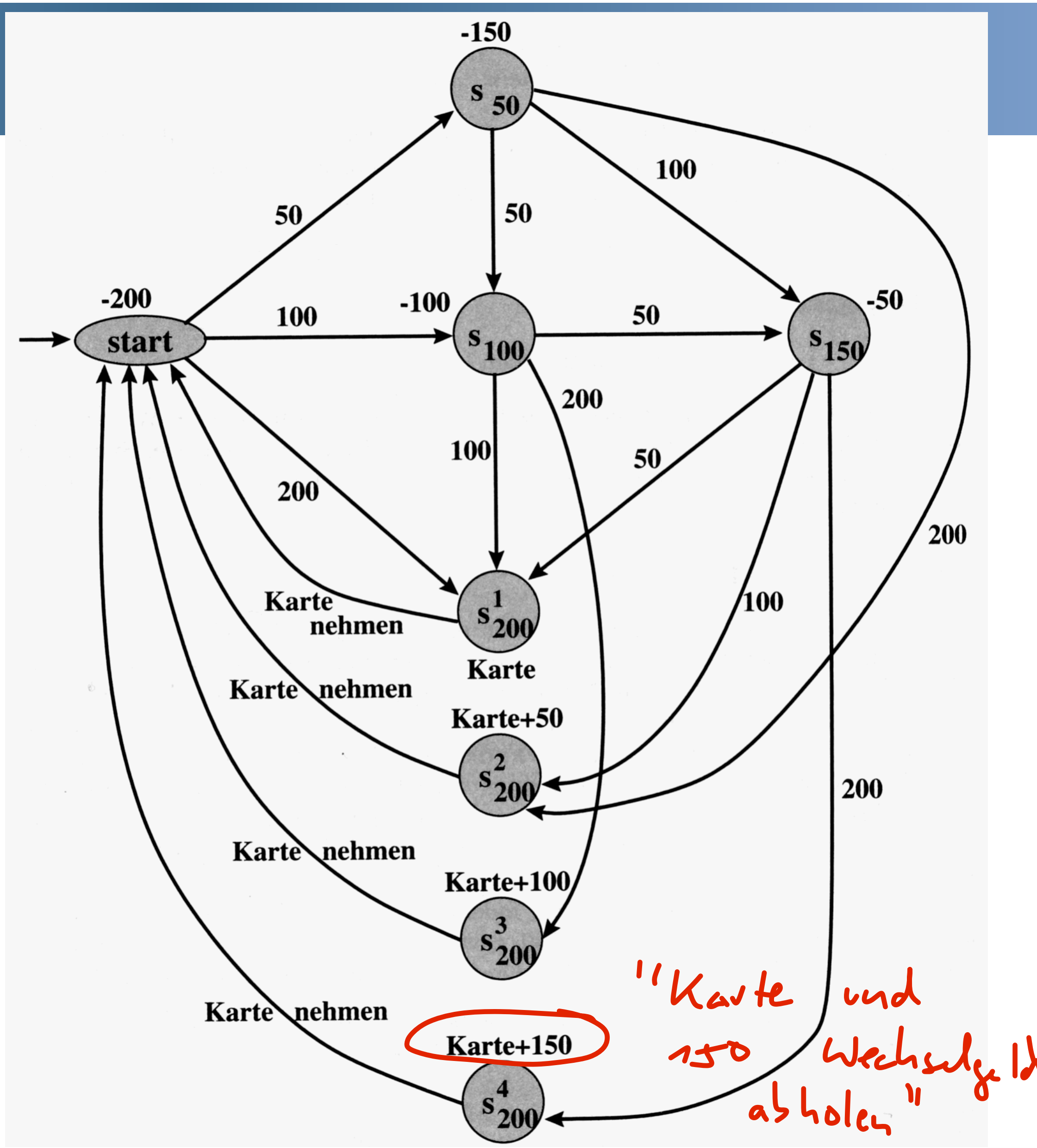
Wie müsste die Moore-Maschine für den Schwimmbad-Automaten aussehen? Vorab-Überlegungen: Was müsste ein Zustand repräsentieren?

Wie viele Zustände bräuchte man?



Moore-Maschine

- Ausgabe hängt vom Zustand ab
- Startzustand hat bereits eine Ausgabe
  - "-200"
- Zustände mit mehreren eingehenden Kanten müssen vervielfacht werden, so dass für jede Ausgabe ein eigener Zustand entsteht.



Moore Automat

Definition

Ein Moore-Automat ist ein endlicher Automat, dessen Ausgabe im Gegensatz zum Mealy-Automaten ausschließlich von seinem Zustand abhängt. Er kann als 7-Tupel $A = (Q, \Sigma, \Omega, \delta, \lambda, q_0, F)$ definiert werden:

- Q ist eine endliche Menge von Zuständen.
- Σ ist das endliche Eingabealphabet.
- Ω ist das endliche Ausgabealphabet.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ ist die Übergangsfunktion
- $\lambda : Q \to \Omega$ definiert die Ausgabe:
- $q_0 \in Q$ ist der Startzustand.
- $F \subseteq Q$ ist eine (endliche) Menge möglicher akzeptierender Zustände ($=$ Endzustandsmenge)

Wenn der Automat nach Lesen des Eingabewortes $w \in \Sigma^*$ in einem Zustand aus F hält, so gehört w zur Sprache $L(A)$.

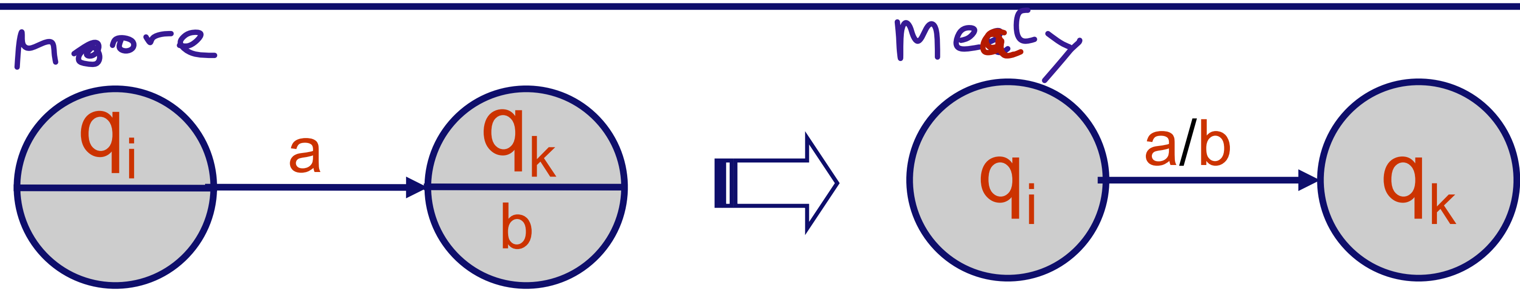
Äquivalenz von Mealy- und Moore-Maschine (1)

- <u>Satz</u>:

  Zu einer Moore-Maschine $M_o = (Q, \Sigma, \Omega, \delta, \lambda_{Mo}, q_0, F)$ existiert eine äquivalente Mealy-Maschine M_e .

- <u>Beweis</u>:

  Wir setzen $M_e = (Q, \Sigma, \Omega, \delta, \lambda_{Me}, q_0 , F)$ mit $\lambda_{Me}(q, a) = \lambda_{Mo}(\delta(q, a))$.



$\lambda_{Me}(q_i, a) = b = \lambda_{Mo}(q_k)$ $\delta(q_i, a) = q_k$

Von Mealy zu Moore

Definition

Transformation eines Mealy-Automaten in einen Moore-Automaten

1. Schreibe die Ausgabe in die Knoten
2. Spalten die Knoten auf - für jede eingehende Kante eine Kopie mit ihren zugehörigen Transitionen. Ziel: jedem Zustand ist nur noch ein Ausgabewert zugeordnet.
3. Vervielfache die ausgehenden Kanten entsprechend dem Ursprungsknoten

Beachte: bei einem Mealy-Automaten ist die Ausgabe um ein Zeichen kürzer als bei einem Moore-Automaten, da der Mealy-Automat für die leere Eingabe keine Ausgabe erzeugt, der Moore-Automat aber schon im Anfangszustand eine Ausgabe erzeugt.

↳ Das wird manchmal anders dargestellt!

Äquivalenz von Mealy- und Moore-Maschine (2)

- Satz:

  Zu einer Mealy-Maschine $M_e = (Q, \Sigma, \Omega, \delta_{Me}, \lambda_{Me}, q_0, F)$ existiert eine äquivalente Moore-Maschine M_o .

Kombinatorik bewirkt Zustandsvervielfachung !

- Beweis – IDEE

  $M_o = (Q \times \Omega, \Sigma, \Omega, \delta_{Mo}, \lambda_{Mo}, [q_0,b_0], F \times \Omega)$ mit b_0 beliebig aus Ω,

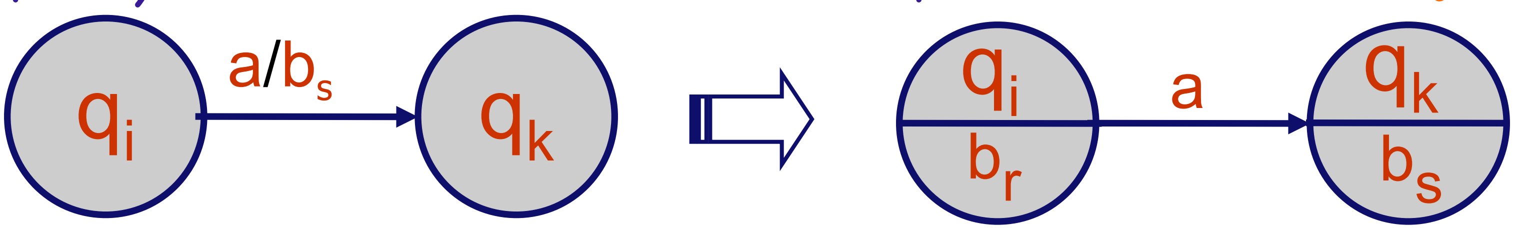
  $\delta_{Mo}([q, b], a) = [\delta_{Me}(q, a), \lambda_{Me}(q, a)]$, $\lambda_{Mo}([q,b]) = b$.

"Name" des Zustands ≙ Ausgabe

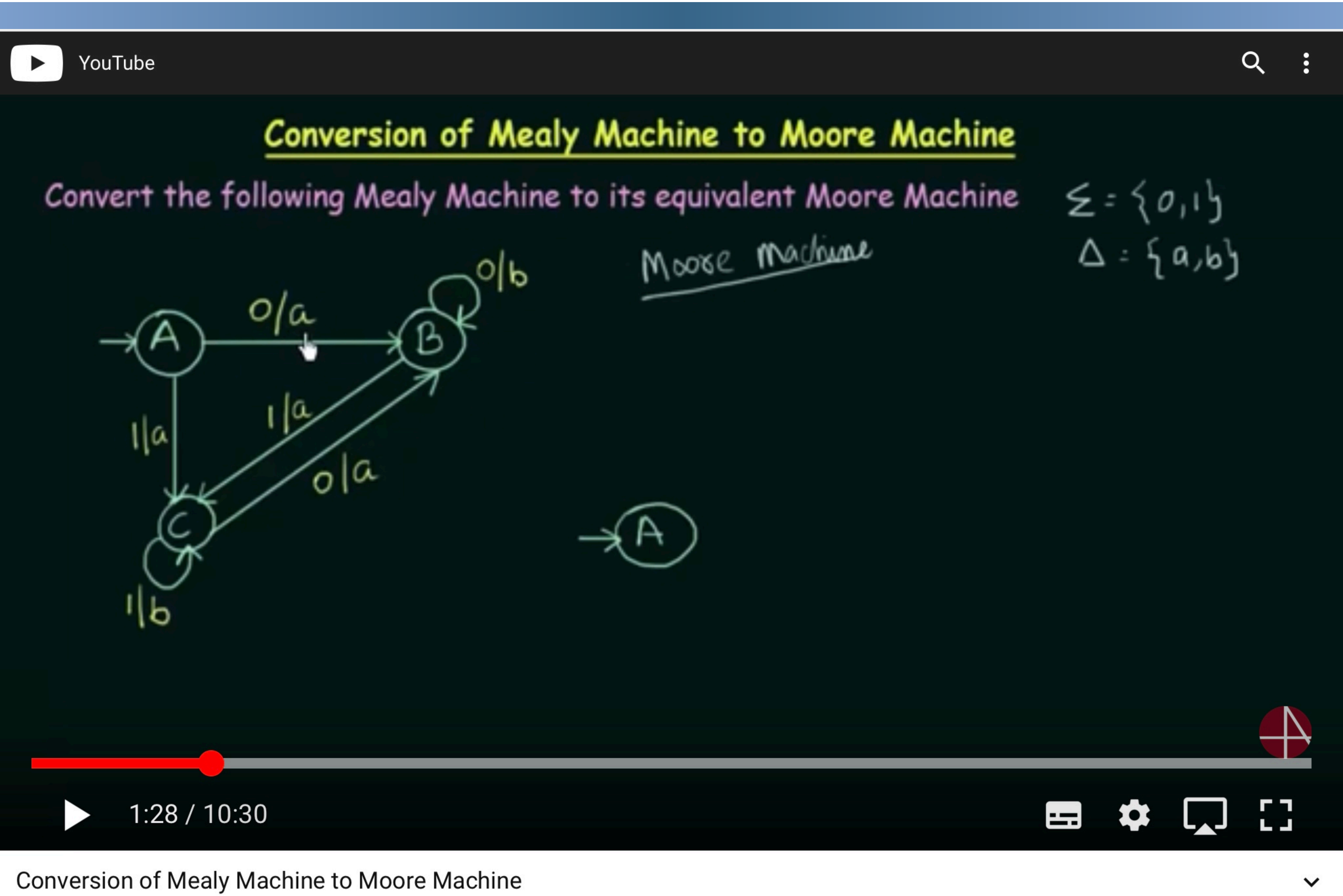
Für neuen Zustand nicht relevant

Mealy

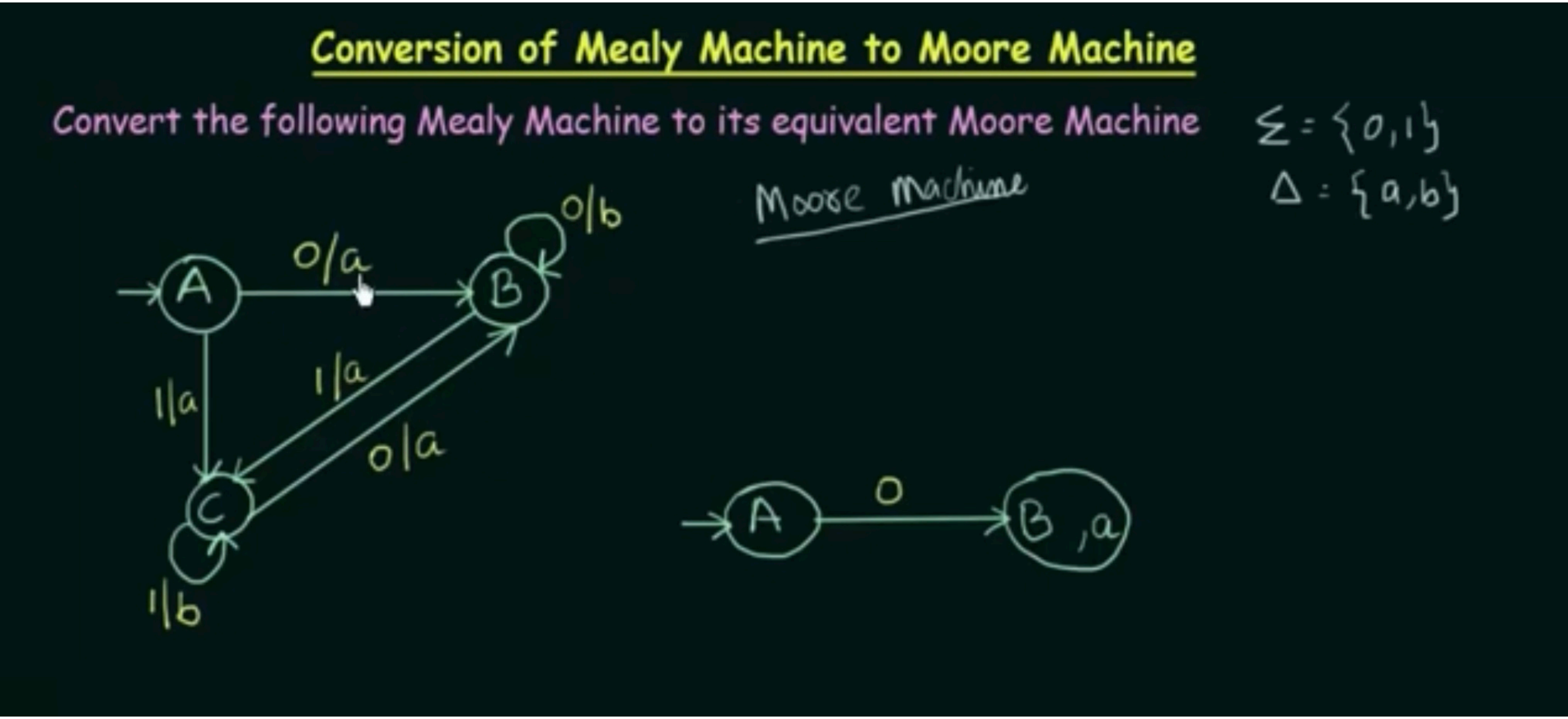
Moore



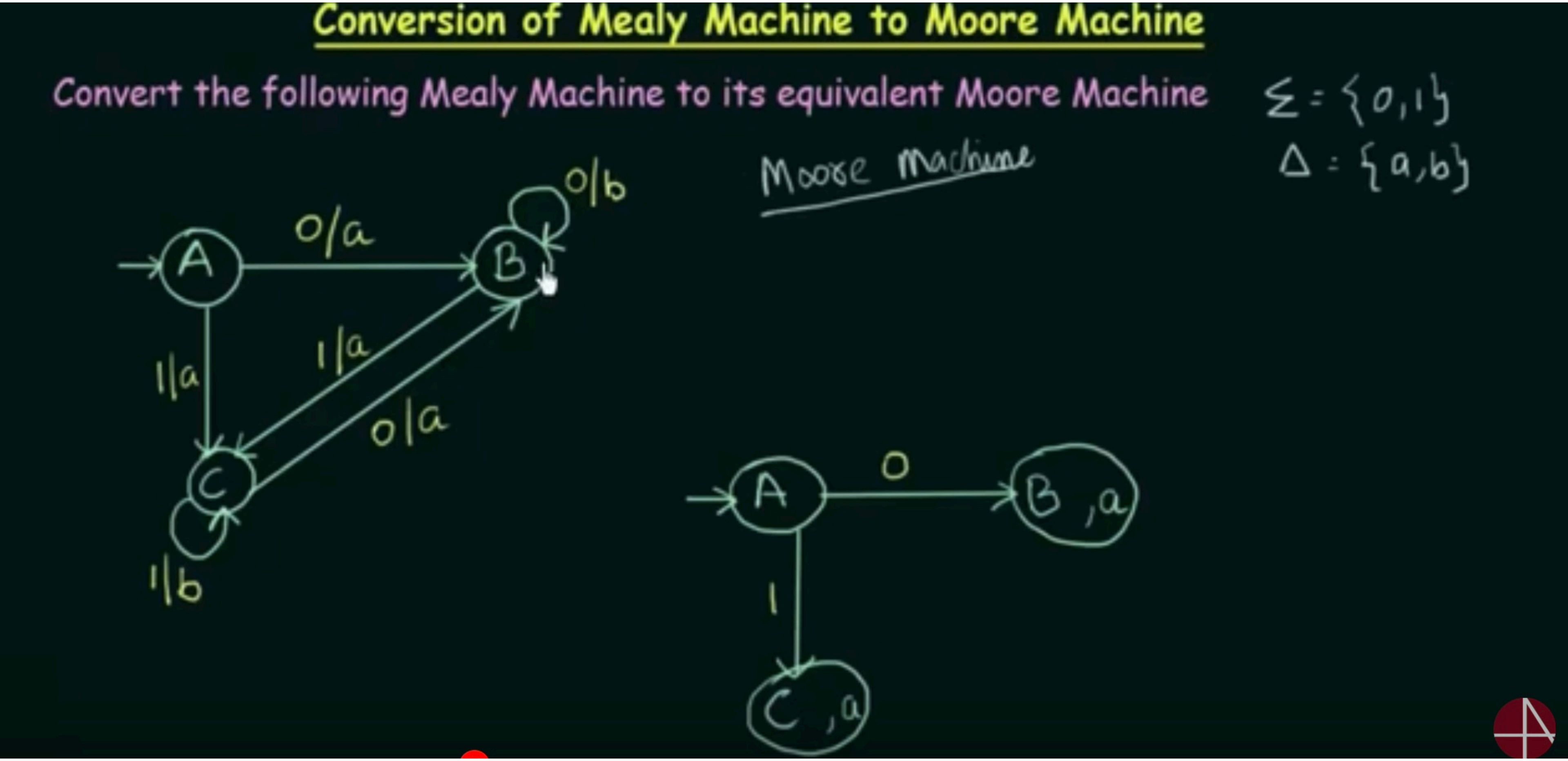
$$\delta_{Mo}([q_i, b_r], a) = [\delta_{Me}(q_i, a), \lambda_{Me}(q_i, a)] = [q_k, b_s]$$


YouTube
Conversion of Mealy Machine to Moore Machine
Convert the following Mealy Machine to its equivalent Moore Machine
$\Sigma = \{0,1\}$
$\Delta = \{a,b\}$
Moore Machine
A
B
C
0/a
0/b
1/a
1/a
0/a
1/b
A
1:28 / 10:30
Conversion of Mealy Machine to Moore Machine

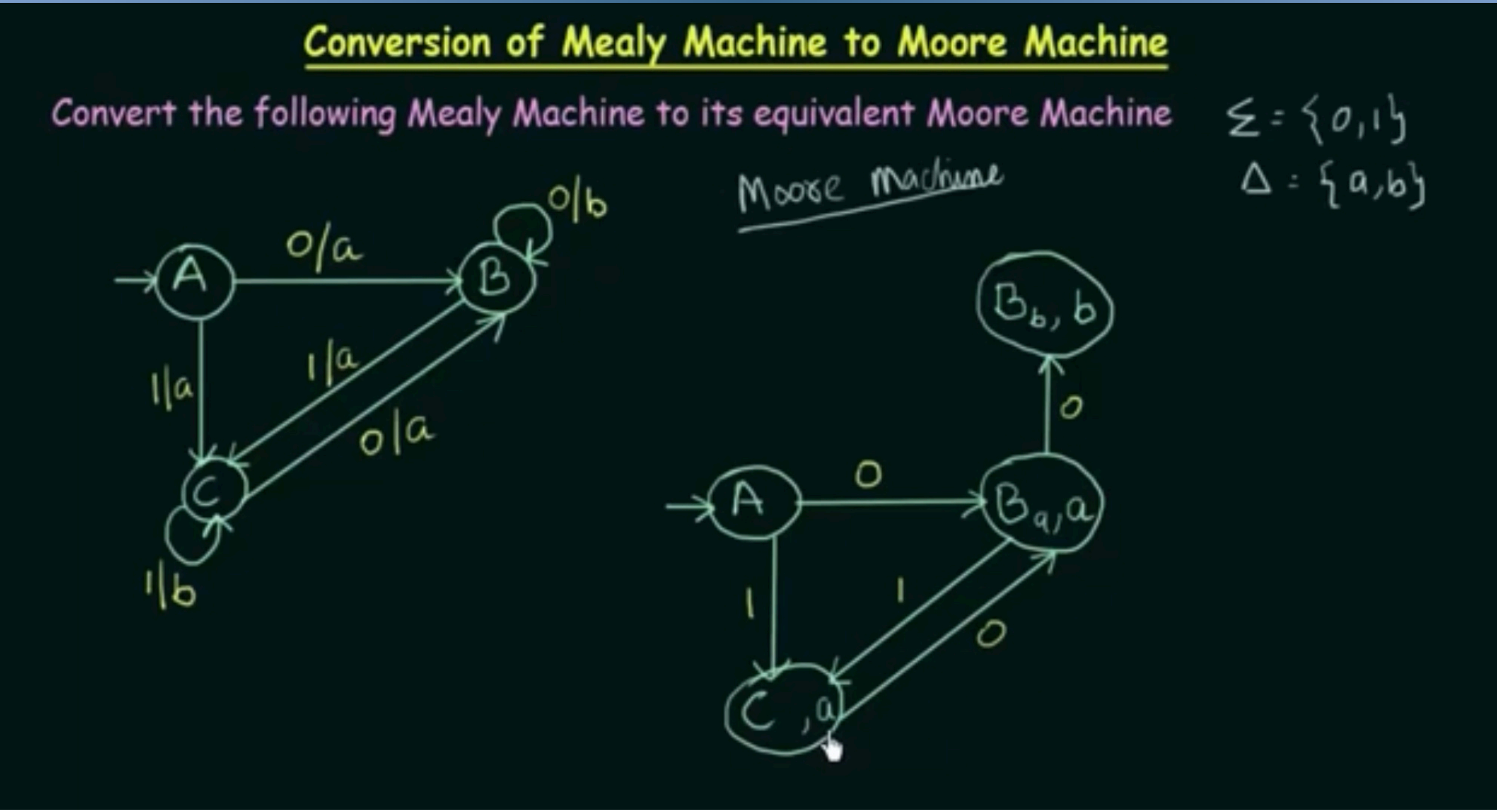
Übung: Mealy- nach Moore-Maschine



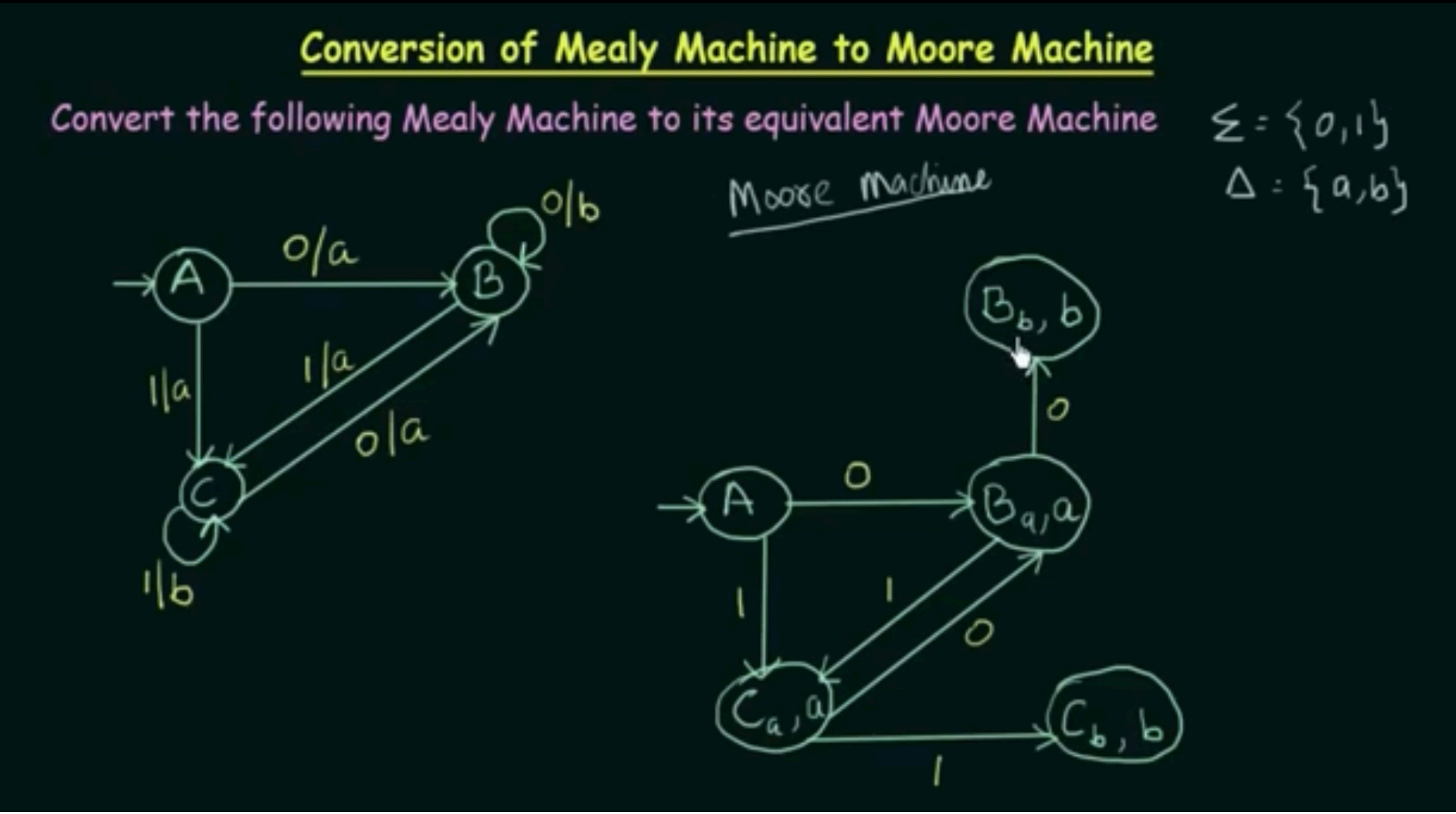
Übung: Mealy- nach Moore-Maschine



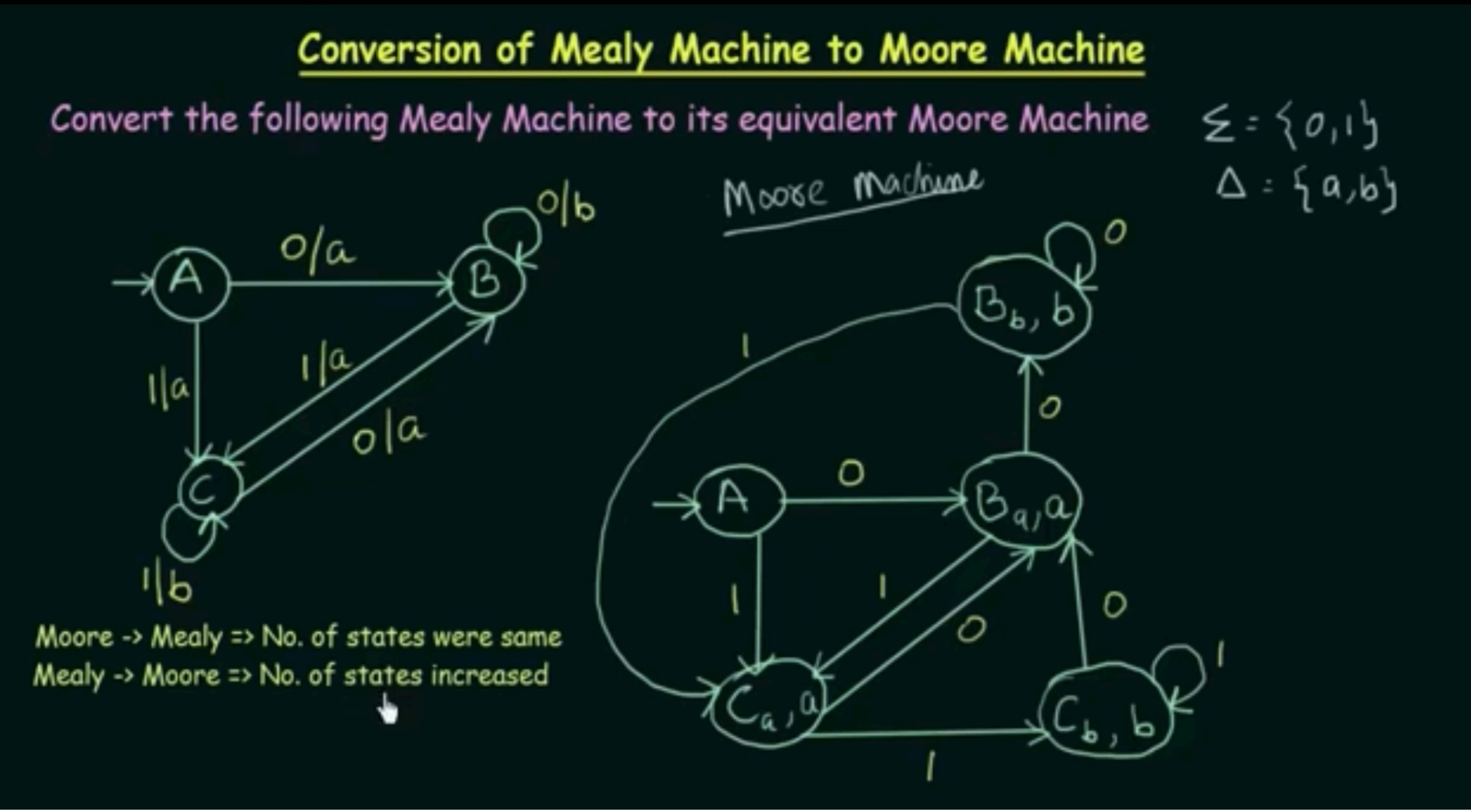
Übung: Mealy- nach Moore-Maschine



Übung: Mealy- nach Moore-Maschine



Übung: Mealy- nach Moore-Maschine



Übung

Geben Sie eine endliche Mealy-Maschine an mit $\Sigma = \Omega = \{ a, b, c \}$, die die Eingabe reproduziert bis die Gruppe abc auftritt. Danach wird nur noch das Symbol a ausgegeben.

- Beispiel-Eingabe: acbbbaac<u>abc</u>ccb
- Beispiel-Ausgabe: acbbbaac<u>abc</u>aaa
- Wandeln Sie die Mealy-Maschine in eine äquivalente Moore-Maschine um.

Übung

Geben Sie eine endliche Mealy-Maschine an mit $\Sigma = \Omega = \{ a, b, c \}$, die die Eingabe reproduziert bis die Gruppe abc auftritt. Danach wird nur noch das Symbol a ausgegeben.

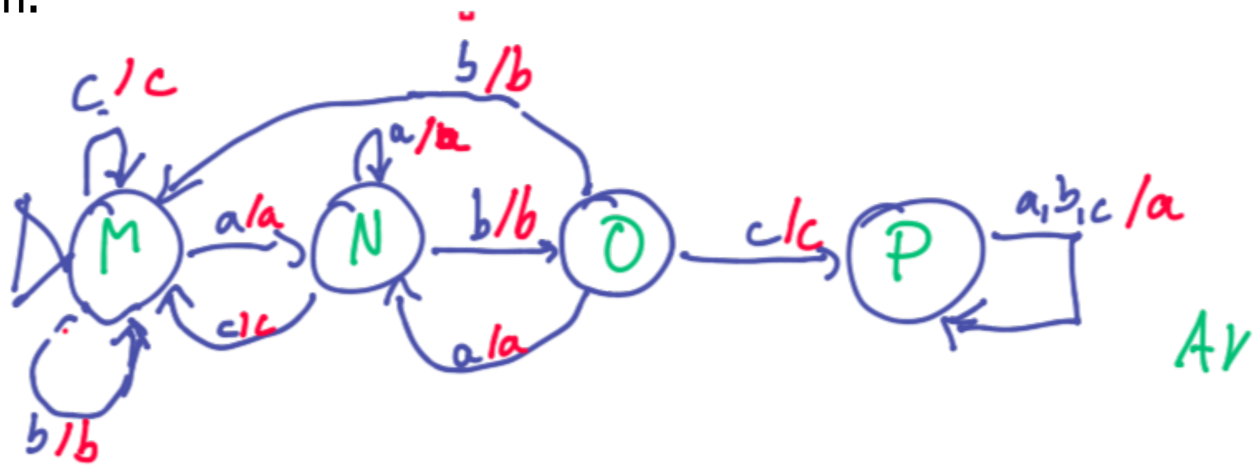
- Beispiel-Eingabe: acbbbaacabcccb
- Beispiel-Ausgabe: acbbbaacabcaaa
- Wandeln Sie die Mealy-Maschine in eine äquivalente Moore-Maschine um.

Tipp: Ein Zustand „weiß", dass die Teilzeichenkette „abc" gelesen wurde.

Übung

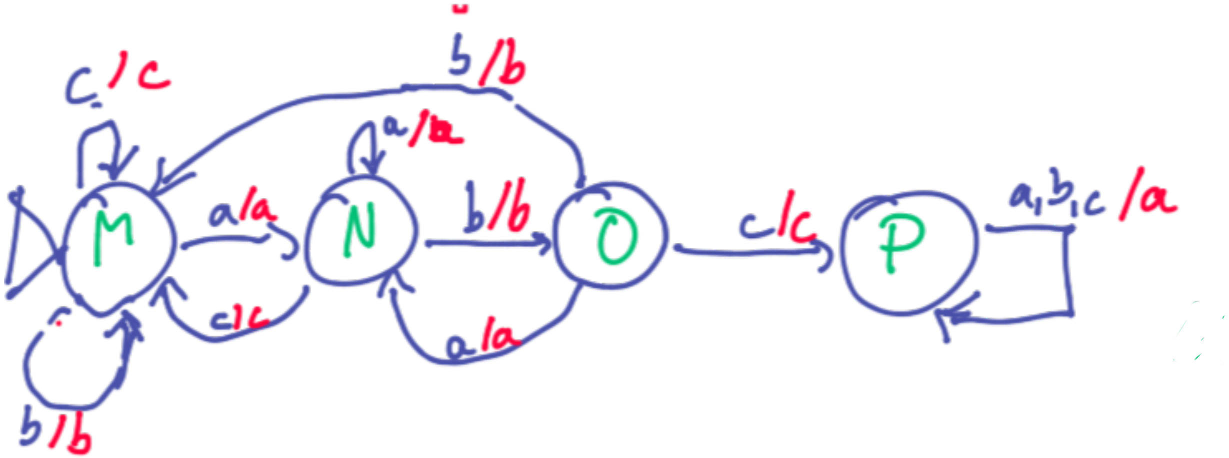
Geben Sie eine endliche Mealy-Maschine an mit $\Sigma = \Omega = \{ a, b, c \}$, die die Eingabe reproduziert bis die Gruppe abc auftritt. Danach wird nur noch das Symbol a ausgegeben.

- Beispiel-Eingabe: acbbbaacabcccb
- Beispiel-Ausgabe: acbbbaacabcaaa
- Wandeln Sie die Mealy-Maschine in eine äquivalente Moore-Maschine um.



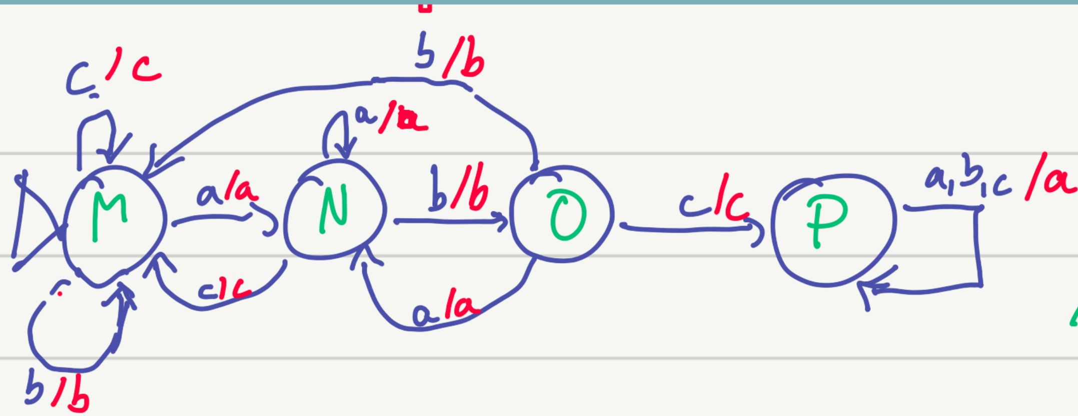
Übung

- Wandeln Sie die Mealy-Maschine in eine äquivalente Moore-Maschine um.



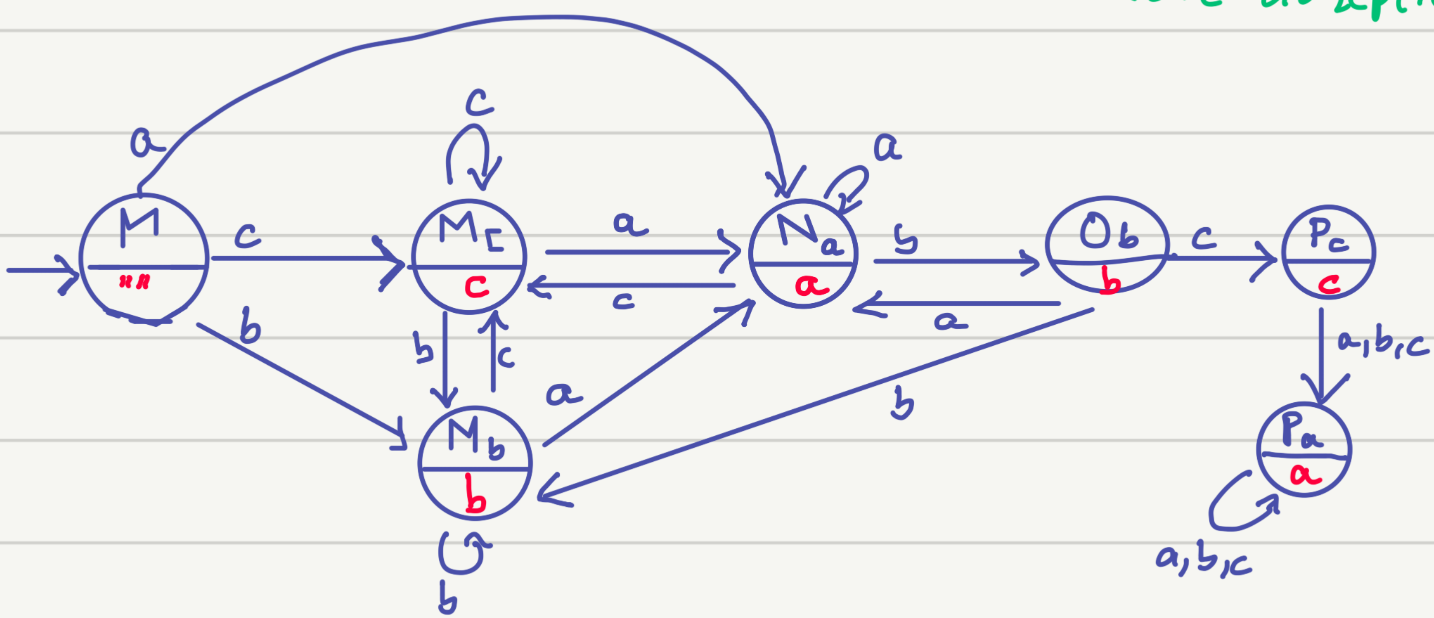
Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

154



Eingabe
Ausgabe

Akzeptierende Zustände hier nicht relevant (alle akzeptierend)



EA6: Rückblick auf die Ziele

	EA6
Kenntnis	Definitionen der rot hervorgehobenen Begriffe kennen
Verständnis	Mealy- und Moore-Automaten formal beschreiben können und vorgegebene Modelle erklären können. Äquivalente Mealy- und Moore-Automaten in ihren Eigenschaften und Abläufen miteinander vergleichen können.
Anwendung	Einen Mealy-Automaten in einen äquivalenten Moore-Automaten transformieren können (und umgekehrt)
Analyse	Mealy- und Moore-Automaten auf Basis einer formalen Beschreibung oder einer Anwendungssituation entwickeln können
Synthese	
Beurteilung	

Praktischer Nutzen von Mealy-, Moore-Maschinen

- Hardware-Automaten haben Ausgabe

Rückblick (1)

- Was sind endliche Automaten?
  - Beschreibung, Eigenschaften
  - Definition
  - Übergangsdiagramm
  - Übergangstabelle
- Grundbegriffe:
  - Alphabet, Zeichenreihe, Wort, Potenzen eines Alphabets, Sprache
- Erweiterte Übergangsfunktion
- NEA
  - Merkmale
  - Definition
- NEA -> DEA (Teilmengenkonstruktion)
  - Beweis der Äquivalenz

Rückblick (2)

- ε-NEA
  - ε-Hülle
  - ε-NEA -> DEA
- Mealy, Moore-Maschinen
  - Merkmale, Unterschiede
  - Definition
  - Überführung