GEOMETRIA Napoli, 18 febbraio 2013

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Scrivere la definizione di *sottospazio* dello spazio vettoriale V. Inoltre, per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale R^2, dire se si tratta di un sottospazio ed in caso affermativo scriverne una base:
(i) l'insieme U delle coppie (x, y) che sono coordinate di punti sulla circonferenza unitaria, cioè $U = \{\ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
(ii) $W = \{\ (a, \sqrt{2}a) \mid a \in R\}$.

2. Sia V uno spazio vettoriale, e siano v, w, z vettori di V; che vuol dire che v è *combinazione lineare* di w e z ?

3. Nello spazio vettoriale $M_2(R)$ delle matrici reali 2 x 2, è vero che $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è *combinazione lineare* di $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e di $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$? (Se si scrivere la combinazione lineare, se no dire perché)

4. Si consideri l'applicazione lineare $f : R^2 \mapsto R^3, (x, y) \mapsto (x - 2y, y - 3x, 0)$.
(i) È vero che $(1, 1, 1) \in Imf$? ◯ Si ◯ No Perché?

(ii) È vero che $(1, 1, 0) \in Imf$? ◯ Si ◯ No Perché?

5. Esistono valori di $h \in R$ per i quali la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & h \end{pmatrix}$ è invertibile?

6. Enunciare il teorema della dimensione (nullità + rango) e dimostrare, come corollario, che nessuna applicazione lineare $f : R^4 \mapsto R^3$ può essere iniettiva.

7. Scrivere la definizione di *autovettore* e di relativo *autovalore* di una matrice (reale, quadrata) A, dire cosa significa che A è *diagonalizzabile*.

8. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcolarne autovalori ed autospazi e stabilire se è diagonalizzabile.

9. Scrivere la definizione di *rette parallele* dello piano della geometria elementare.

10. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare :

(1) la retta parallela a $x + y = 1$ passante per l'origine;
(2) la retta parallela a $x + y = 1$ passante per (1,0);
(3) la retta parallela all'asse x passante per (-1,0).

11. Scrivere la definizione di *rette ortogonali* dello spazio tridimensionale della geometria elementare. Dire, giustificando la risposta, se due rette ortogonali possono essere sghembe.

12. Fissato nello spazio tridimensionale della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano dati la retta $r \ : \ (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(-1, 1, -1)$ ed il piano $\pi \ : \ x - y + z + 1 = 0$.

(1) calcolare le coordinate dell'unico punto P su r avente ascissa 1;
(2) calcolare le coordinate dell'unico punto Q su r avente ordinata 1;
(3) calcolare le distanze di P e di Q da π e dedurne la posizione relativa di r e π.