COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Trombetti R. (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi F. (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Determinare una base del sottospazio vettoriale delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari in 5 incognite su $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

2. Dato uno spazio vettoriale V su un campo K e un insieme $S = \{v_1, \ldots, v_t\}$ di vettori di V, spiegare cosa vuol dire che S è linearmente indipendente ed esibire un insieme di tre vettori di $\mathbb{R}^4$ che sia linearmente indipendente.

3. Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali:
$W = \mathcal{L}((1,2,-1,-1),(2,2,1,-1),(0,-2,3,1),(0,1,0,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$;
$H = \{(a+c)+(a+b)x+(b-c)x^2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $f((x,y,z)) = (x-y, x+2z, 2x-y+2z, -x+y)$.
(i) Determinare una base di $Ker\ f$ e una base di $Im\ f$.
(ii) Dire se f è iniettiva o suriettiva.
(iii) Il vettore $(1,0,-1,1)$ appartiene a $Im\ f$? ∘ Sì ∘ No Perché?

5. Cosa è il rango di una matrice su un campo K? Esibire un esempio di matrice di tipo 3×4 che abbia rango 2.

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

(i) calcolare gli autovalori e gli autospazi di A;
(ii) stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, esibire una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

7. Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si consideri la retta $r : x + 2y - 1 = 0$.

(i) Rappresentare la retta s ortogonale a r e passante per il punto $A(1, 0)$.
(ii) Determinare una retta che abbia distanza $\sqrt{5}$ da r.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r : \begin{cases} x - y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & 0 \end{cases}$ e $s : (x, y, z) = (1, 2, 0) + (-1, 0, 1)t$.

(i) Stabilire se r e s sono sghembe.
(ii) Determinare il piano parallelo sia a r sia a s e passante per l'origine del riferimento.
(iii) Determinare una retta ortogonale a s e passante per il punto $P(1, 1, 0)$.