GEOMETRIA - Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z) Napoli, 13 ottobre 2017

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Se il seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$ è compatibile, calcolarne l'insieme delle soluzioni con il metodo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & +2x_4 & & = & 2 \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Cosa è un sistema i generatori di V? Quale dei seguenti insiemi è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$?

$S = \{(2,1),(-2,-1)\}$, $\quad T = \{(1,1),(0,0),(2,2)\}$, $\quad X = \{(1,1),(0,0),(-1,1)\}$.

3. Determinare una base e la dimensione per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ che risulta essere un sottospazio vettoriale.

$S = \{\alpha(1,-2,1,0) + \beta(0,2,1,1) + (-1,1,1,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$T = \{(a, ab, b, c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = c + d = 0\}$

$U = \{\alpha(1,-2,1,0) + \beta(0,2,1,1) + \gamma(1,1,2,1) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

4. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che $T(x, y, z) = (2y - z, x + y - z, x - y, x + y)$.

(i) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(T)$ e una base di $\mathrm{Im}(T)$.

(ii) Scrivere la matrice associata a T nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e nel riferimento di $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{B}' = ((1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$.

5. Per quali valori reali del parametro t la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile?

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una base di autovettori di T.

7. Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale nel piano della geometria elementare, si consideri la retta $r : x + 2y - 2 = 0$.

(i) Determinare la retta parallela a r e passante per il punto $P(1, -1)$.

(ii) Determinare la distanza tra la retta r e la retta $s : -3x - 2y + 4 = 0$.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si consideri il piano $\pi : 2x - y + 3z - 3 = 0$ e il punto $A(1, 1, -1)$.

(i) Determinare la retta ortogonale a π e passante per A.

(ii) Determinare il piano parallelo al piano π e passante per A.

(iii) Determinare la retta parallela sia a π sia al piano $\alpha : x + y - 2z + 2 = 0$ e passante per A.