COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x - y - z + t &= 0 \\ 2x - 2y + z - t &= 0 \\ x - y + 2z - 2t &= 1 \end{cases}$

Con il metodo di eliminazione di Gauss, dimostrare che il sistema è incompatibile, cioè che non ammette soluzioni.

2. (i) Cosa vuol dire che $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3 ?

(ii) Senza fare calcoli, perché possiamo dire che $\{(1,2,1),(1,-3,4)\}$ non è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$?

(iii) Esistono altri spazi vettoriali, diversi da $\mathbb{R}^3$, che abbiano dimensione 3 ? (se si scrivere un esempio, se no dire perché).

3. Calcolare una base di ciascuno dei seguenti spazi vettoriali
$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x = 0\}$
$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ y - x = x - 2z = 0\}$
$S_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ y - x = x - 2z = 0\}$

4. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo reale e sia $f : V \mapsto W$ un'applicazione.
(i) Cosa vuol dire che f è lineare?

(ii) Dare la definizione di $ker f$ (nucleo di f) e di $Im f$ (immagine di f).

5. Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, verificando il risultato ottenuto.

6. Sia f un endomorfismo dello spazio vettoriale V. E' vero che se 0 e' autovalore di f allora $ker f$ contiene almeno un vettore non nullo? (suggerimento : usare la definizione di autovalore).

7. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (6y, x + z, x + z)$,

(i) calcolare una base di $ker f$ ed una base di $Im f$;
(ii) calcolare autovalori ed autospazi di f;
(iii) dire, giustificando la risposta, se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

8. Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dimostrare che le rette $r : (x, y) = t(-1, 2) + (1, 0)$ e $s : 2x + y - 1 = 0$ sono parallele e calcolarne la distanza.

9. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r : \begin{cases} x + y & = & 1 \\ x - y + z & = & 2 \end{cases}$ e $s \;:\; (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 2, 1)$.

(i) si dimostri che r ed s sono incidenti e si calcolino le coordinate del punto P di intersezione di r e s;

(ii) si rappresenti la retta per P ortogonale sia a r che a s;

(iii) si rappresenti il piano che contiene sia r che s.