COGNOME .... NOME .... MATRICOLA..........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Applicare il metodo di Gauss-Jordan per determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $\mathcal{S}$ delle soluzioni del seguente sistema lineare in 6 incognite sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & +x_5 & -x_6 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & & +x_6 & = & 0 \\ -x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +x_4 & -x_5 & & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & & +2x_4 & -x_5 & +x_6 & = & 0 \end{cases}$$

2. Siano V uno spazio vettoriale su un campo K e $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ una sua base ordinata. Cosa sono le componenti di un vettore v di V in $\mathcal{B}$? Determinare le componenti di $v = (-4, 7)$ nella base ordinata $\mathcal{B} = ((-2, 1), (1, 3))$ di $\mathbb{R}^2$.

3. Completare ciascuno dei seguenti sottoinsiemi che risulti essere linearmente indipendente in una base del suo spazio ambiente.

$Y = \{(2,1,-2) + \alpha(1,0,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$Z = \{(2,1,-2), (1,0,1), (1,1,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

4. Data l'applicazione lineare $T : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a - b + c, -2a + b - c, a + c, a - b, -b - c) \in \mathbb{R}^5$,

(i) spiegare se T è iniettiva e suriettiva

(ii) rappresentare l'immagine di T, ossia determinare un sistema di equazioni lineari il cui insieme delle soluzioni coincida con l'immagine di T.

5. Cosa è un autovalore di un endomorfismo di uno spazio vettoriale V su un campo K?

6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base ordinata (e_1, e_2, e_3). Determinare autovalori e autovettori dell'endomorfismo $T : \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \in V \to (\beta + \gamma)e_1 + (2\alpha + 2\gamma)e_2 + (-2\alpha + 2\beta)e_3 \in V$. Inoltre, stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, esibire una base spettrale di V rispetto a T.

7. Fissato un riferimento cartesiano in un piano euclideo, si considerino i punti $A(1,-5)$ e $B(-1,1)$.

(i) Rappresentare la retta per A e B sia in forma parametrica sia in forma cartesiana.

(ii) Rappresentare la retta per l'origine dl riferimento che sia parallela alla retta passante per i punti A e B.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio euclideo di dimensione 3, si considerino le rette $r : (x, y, z) = (1, 0, 1) + (2, 1, 1)t$ e $r' : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2x - y + 3z = -2 \end{cases}$

(i) Verificare se le rette sono parallele incidenti o sghembe.

(ii) Rappresentare, se esiste, la retta incidente sia r sia r' e passante per il punto $A(0, 1, 1)$.

(iii) Rappresentare il piano per l'origine del riferimento che sia ortogonale a r.