COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 - R. Trombetti (A-G) ◯ Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare compatibile Σ. In che modo si possono modificare i termini noti per trasformare Σ in un sistema incompatibile?

$$\Sigma : \begin{cases} \quad x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_5 = -1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

2. Dato uno spazio vettoriale V finitamente generato su un campo K, cosa è una base di V? Esibire una base dello spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine due su $\mathbb{R}$.

3. Calcolare una base del sottospazio vettoriale $U = \mathcal{L}((1,2,1,4),(2,0,2,4),(0,1,0,1))$ di $\mathbb{R}^4$ e determinare un sistema lineare omogeneo il cui insieme delle soluzioni sia U.

4. Spiegare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

$f_1 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow (2x_1 + x_2 - x_3 + 2, -x_1 + x_3) \in \mathbb{R}^2$,

$f_2 : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow (a_0 - a_1 - a_1, -a_1 + a_2, 2a_0 + a_2) \in \mathbb{R}^3$,

$f_3 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x_2, -x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \in \mathbb{R}^3$.

5. Cos'è il rango di una matrice A su un campo K? Perché il rango di una matrice B equivalente ad A (ossia, ottenuta da A mediante un numero finito di operazioni elementari) è uguale al rango di A?

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, (i) calcolare una base per il nucleo ed una base per l'immagine dell'applicazione lineare a cui essa è associata nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$; (ii) calcolare autovalori ed autospazi di A; (iii) stabilire se A è diagonalizzabile.

7. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la retta r per $A(-1,2)$ ortogonale alla retta passante per A e per l'origine del riferimento e scrivere una (qualsiasi) delle due rette a distanza 1 da r.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano date le rette $r: \begin{cases} x - y &= 0 \\ 3y - 2z &= 3 \end{cases}$ e $s: (x, y, z) = (2, 2, 1) + t(1, 1, 1)$.

(i) Dimostrare che r e s sono complanari e rappresentare il piano che le contiene.

(ii) Spiegare perché *non* esiste un piano contenente s e parallelo al piano $\pi : x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$.