Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli spazi appositi con indicazione dei calcoli effettuati e fornendo spiegazioni chiare ed essenziali.

1. Determinare l'insieme \mathcal{S} delle soluzioni del seguente sistema lineare in 5 incognite sul campo dei numeri reali \mathbb{R} . L'insieme \mathcal{S} è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 ? \circ Si \circ No Perché?

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & -3x_4 & -x_5 & = & -1 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1 \end{cases}$$

2. Siano V uno spazio vettoriale su un campo K e $S = \{u_1, \ldots, u_t\}$ un insieme di t vettori di V. Cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Per quali valori del parametro reale α il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 $\{(-1, \alpha, 2), (\alpha, \alpha, 0), (0, -\alpha, \alpha)\}$ è linearmente indipendente?

3. Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi che risulta sottospazio vettoriale del suo spazio ambiente:

Y =
$$\{(2, 1, -2) + \alpha(1, 0, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

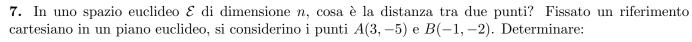
Z = $\{\alpha(2, 1, -2) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, 1, -3) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$
T = $\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- **4.** Data l'applicazione lineare $T: a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_0+a_1,2a_0-a_2) \in \mathbb{R}^2$,
 - (i) determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di T e spiegare se T è iniettiva e/o suriettiva;
 - (ii) scrivere la matrice associata a T nelle basi ordinate $(1, x, x^2)$ e ((1, -2), (2, -1)) di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e di \mathbb{R}^2 , rispettivamente. Che rango ha questa matrice?

5. Cosa vuol dire che una matrice quadrata su un campo K è invertibile? Verificare se la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

6. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} con base ordinata (e_1, e_2, e_3) . Determinare autovalori e autovettori dell'endomorfismo $T: \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \in V \to (\alpha - \beta)e_1 - \beta e_2 + (\alpha + \gamma)e_3 \in V$. Inoltre, stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, esibire una base spettrale di V rispetto a T.



- (i) la distanza tra i punti $A \in B$
- (ii) la distanza tre la retta passante per i punti A e B a la retta ad essa parallela e passante per l'origine del riferimento.

- 8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio euclideo di dimensione 3, si considerino il piano $\mathcal{H}:\ 2x-y+3z=4$ e il punto Q(-1,2,1). Rappresentare
 - (a) sia in forma parametrica sia in forma cartesiana una retta parallela ad $\mathcal H$ e passante per Q
 - (b) un piano ortogonale a \mathcal{H} e passante per Q.