COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Sia V uno spazio vettoriale sul campo reale e sia W un suo sottoinsieme. Cosa vuol dire che W è un sottospazio vettoriale di V? Dare un esempio di sottospazio vettoriale proprio (cioè diverso da tutto $\mathbb{R}^3$) di $\mathbb{R}^3$.

2. Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 3x - 3y + z - t = 0 \\ x - y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni di tale sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione e scriverne una base.

3. Sia V uno spazio vettoriale sul campo reale.

(i) Cosa vuol dire che V ha dimensione 3?

(ii) Se V ha dimensione 3 e $S = \{v, w, u, z\}$ è un sistema di vettori di V a due a due distinti, possiamo dire che S è linearmente dipendente? ◯ Si ◯ No Perché?

4. Calcolare una base del nucleo ed una base dell'immagine dell' applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ tale che $g(x, y, z, t) = (x - 2y, z - y, x - y - z)$.

5. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

6. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x, -y, x - z)$,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di f;

(ii) dire, giustificando la risposta, se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

7. Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dimostrare che le rette $r : (x, y) = t(1, 4) + (1, 0)$ e $s : x + 4y - 1 = 0$ sono ortogonali e calcolarne il punto di intersezione.

8. Fissato nello piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la circonferenza passante per i punti $P(1,1)$, $Q(1,9), R(-1,9)$ e calcolarne centro e raggio.

9. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il piano $\pi : x+y-z-1=0$, la retta $r : \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ 3x-3y+2z & = & 1 \end{array} \right.$ ed i punti $A(-1,1,0)$, $B(0,1,0)$. Si rappresentino

(i) la retta per A ortogonale a π;
(ii) il piano per A parallelo a r e ortogonale a π;
(iii) la sfera tangente a π in B passante per l'origine.