

COGNOME NOME MATRICOLA.....

☐ Gr. 1 Bader (A-G)☐ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Si consideri il sistema lineare :
$$\begin{cases} x - y + z - t &= 0 \\ 2x - 2y - z + t &= 0 \\ x - y - 2z + 2t &= 1 \end{cases}$$

Con il metodo di eliminazione di Gauss, dimostrare che il sistema è incompatibile, cioè che non ammette soluzioni.

2. (i) Cosa vuol dire che \mathbb{R}^3 ha dimensione 3 ?

(ii) Senza fare calcoli, perché possiamo dire che $\{(1, 1, 2), (1, 4, -3)\}$ non è un sistema di generatori di \mathbb{R}^3 ?

(iii) Esistono altri spazi vettoriali, diversi da \mathbb{R}^3 , che abbiano dimensione 3 ? (se si scrivere un esempio, se no dire perché).

3. Calcolare una base di ciascuno dei seguenti spazi vettoriali

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = y - 2z = 0\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = y - 2z = 0\}$$

4. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo reale e sia $f : V \mapsto W$ un'applicazione.

(i) Cosa vuol dire che f è lineare?

(ii) Dare la definizione di $\ker f$ (nucleo di f) e di $\operatorname{Im} f$ (immagine di f).

5. Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, verificando il risultato ottenuto.

6. Sia f un endomorfismo dello spazio vettoriale V . E' vero che se 0 e' autovalore di f allora $\ker f$ contiene almeno un vettore non nullo? (suggerimento : usare la definizione di autovalore).

- 7.** Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (-2y, -x + z, -x + z)$,
- (i) calcolare una base di $\ker f$ ed una base di $\operatorname{Im} f$;
 - (ii) calcolare autovalori ed autospazi di f ;
 - (iii) dire, giustificando la risposta, se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di f .

8. Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dimostrare che le rette $r : (x, y) = t(2, -1) + (0, 1)$ e $s : x + 2y - 1 = 0$ sono parallele e calcolarne la distanza.

9. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r : \begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$ e $s : (x, y, z) = (0, 1, 1) + t(2, 1, 1)$.

- (i) si dimostri che r ed s sono incidenti e si calcolino le coordinate del punto P di intersezione di r e s ;
- (ii) si rappresenti la retta per P ortogonale sia a r che a s ;
- (iii) si rappresenti il piano che contiene sia r che s .