ESEMPIO DI SOLUZIONE

GEOMETRIA Napoli, 4 novembre 2014

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............

○ Gr. 1 Bader (A-G) ○ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Si considerino i sistemi lineari : $S = \begin{cases} x+y = 0 \\ 2x+3y = 0 \\ x+y-z+t = 0 \end{cases}$ e $S' = \begin{cases} x+y = 1 \\ 2x+3y = 2 \\ x+y-z+t = 2 \end{cases}$

Per ciascuno di essi,

(i) con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, scriverne una base.

Per S: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_2 \to a_2 - 2a_1 \\ a_3 \to a_3 - a_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$ $\mathcal{S} = \{(0,0,t,t) / t \in \mathbb{R}\}$ insieme delle soluzioni

$\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ perchè S è un sistema di equazioni lineari omogenee. Una base è $\{(0,0,1,1)\}$

Per S': $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_2 \to a_2 - 2a_1 \\ a_3 \to a_3 - a_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x+y=1 \\ y=0 \\ -z+t=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=t-1 \end{cases}$

$\mathcal{S}' = \{(1,0,t-1,t) / t \in \mathbb{R}\}$ insieme delle soluzioni

$\mathcal{S}'$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ perchè S è un sistema di equazioni lineari NON omogenee.

2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo reale e sia $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ un sistema di vettori di V. Cosa vuol dire che B è una base di V?

Il sistema B è una base di V se B è linearmente indipendente (ossia l'unica combinazione lineare dei vettori di B uguale al vettore nullo è quella con scalari tutti nulli) e se B è un sistema di generatori di V (ossia V coincide con l'insieme di tutte e sole le combinazioni lineari dei vettori di B).