GEOMETRIA - Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z) Napoli, 12 settembre 2018

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan, determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K. Cosa vuole dire che di V è finitamente generato? Cosa è la dimensione di V?

3. Esibire un sottospazio vettoriale U di dimensione 2 e un sottospazio vettoriale W di dimensione 3 dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$. Può accadere che si abbia $U \cap W = \{\underline{0}\}$? ○ Sì ○ No Perché?

4. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $T((x, y, z)) = (x + z, -x + y + z, y + 2z, -2x + y)$,

(i) determinare nucleo e immagine di T;

(ii) determinare la matrice associata a T fissati il riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e il riferimento $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0, 0), (-1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^4$.

5. Cosa vuol dire che una matrice quadrata A su un campo K è invertibile? La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ è invertibile? ○ Sì ○ No Perché?

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

7. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si consideri la retta $r : 3x - 4y + 5 = 0$.

(i) Determinare la retta parallela a r e passante per il punto $A(1, 1)$.

(ii) Determinare la distanza tra r e il punto $B(2, -1)$.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si considerino il piano α : $2x - y + z - 2 = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x - y & = & 1 \\ z & = & 1 \end{cases}$.

(a) Rappresentare la retta parallela a r e passante per il punto $A(1, -2, 1)$.

(b) Le retta r e il piano α sono ortogonali? ◦ Si ◦ No Perché?

(c) Determinare una retta contenuta in α che sia ortogonale a r.