GEOMETRIA Napoli, 26 gennaio 2016

Corso di laurea in Informatica, gruppo (H-Z) (Prof. F. Cioffi)

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

---

1. Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari in 5 incognite su $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & & = & 0 \\ & 3x_2 & & +3x_4 & +2x_5 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 2 \end{cases}$$

2. Sia $S = \{u_1, \dots, u_t\}$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale V su un campo K. Cosa vuol dire che S è *linearmente indipendente*? Esibire un esempio di sistema linearmente indipendente dello spazio vettoriale $R[x]_{\leq 3}$ dei polinomi di grado ≤ 3 in una variabile su $\mathbb{R}$.

3. Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:
$W = L((0,1,2,0,-1),(1,-1,-2,1,1),(1,0,0,1,0),(0,0,1,1,0))$
$H = L((0,0,0,0,0),(1,2,-1,-1,1),(2,0,1,0,1))$
$X = L((1,1,-1,2,1),(2,1,1,-1,0),(0,-1,1,0,1))$.

4. Si consideri l'applicazione $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x+y, x-z, y+z) \in \mathbb{R}^3$.
(i) Dimostrare che f è un'applicazione lineare.
(ii) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.
(iii) Il vettore $(1,0,1)$ appartiene all'immagine di f? Perché?

5. Per quali valori reali del parametro k la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & k & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & k & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ha rango 3?

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di A;

(ii) dire se A è diagonalizzabile e in caso di risposta positiva esibire una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori.

7. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, determinare la retta r passante per il punto $A(1,-1)$ e parallela alla retta $s: 2x-y=1$. Rappresentare una circonferenza che sia tangente a r nel punto A.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r: \begin{cases} x-2y &= 0 \\ x+2y-z &= -2 \end{cases}$ e $s: (x,y,z)=(1,-1,1)+t(1,0,1)$.

(i) Verificare che r e s *non* sono sghembe.
(ii) Determinare la retta ortogonale sia a r sia a s e passante per l'origine del riferimento.
(iii) Calcolare la distanza tra s e il punto $P(1,2,-1)$.