COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan, determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -x_1 & & +x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 1. \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Cosa vuol dire che un insieme S di vettori di V è linearmente indipendente? Per quali valori del parametro reale α l'insieme di vettori $\{(\alpha, 2, 1), (0, 1, \alpha), (0, 1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente?

3. Completare in una base di $\mathbb{R}^4$ ciascuno dei seguenti sottoinsiemi che sia linearmente indipendente:
$S = \{(2, 1, 0, 3), (0, 1, 2, 5), (-1, 0, 1, 1)\}$
$T = \{(1, 0, -1, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, -1)\}$.

4. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $T((x, y, z)) = (x + z, x + y - z, 2x + y, y - 2z)$,

(i) determinare nucleo e immagine di T;

(ii) determinare la matrice associata a T fissati il riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e il riferimento $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0, 0), (-1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^4$.

5. Cosa è il rango di una matrice su un campo K? Esibire un esempio di matrice 3×3 che abbia rango 2.

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

7. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino i punti $A(2,3)$ e $B(1,-2)$.

(i) Determinare la retta passante per A e B.

(ii) Determinare una retta ortogonale al vettore $\overrightarrow{AB}$ e che abbia distanza 1 dal punto A.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si considerino le rette s : $\begin{cases} x-y+z = 1 \\ x+y+z = -1 \end{cases}$ e $r := (0,1,1) + (1,1,0)t$.

(a) Le rette s ed r sono sghembe? ○ Si ○ No Perché?

(b) Determinare una retta ortogonale sia a s sia a r.

(c) Determinare un piano parallelo sia a r sia a s.