GEOMETRIA Napoli, 18 giugno 2013

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x+y-z-t &= 0 \\ 2x+2y+z-3t &= 0 \\ -x-y-2z+2t &= 0 \end{cases}$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni di tale sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, scriverne una base.

2. Cosa vuol dire che il sistema di vettori $S = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ dello spazio vettoriale V è un *sistema linearmente dipendente*?

3. Dire (senza dimostrarlo) quale dei seguenti sottoinsiemi è sottospazio e, per quelli che lo sono, calcolarne la dimensione e scriverne una base:
(1) $W_1 = \{ax^2 - a \mid a \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}_2[x]$.
(2) $W_2 = \{(1,1), (0,0), (-1,-1)\}$ in $\mathbb{R}^2$;
(3) $L(\ (1,2,-3), (1,-1,0), (0,1,-1)\ )$ in $\mathbb{R}^3$.

4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, scrivere la matrice di passaggio dal riferimento $\mathcal{R} = ((1,0),(1,-1))$ al riferimento $\mathcal{R}' = ((1,2),(1,1))$.

5. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile.

6. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x + 2y, x - z, y + z)$,

(i) determinare una base di $Ker\ f$ e una base di $Im\ f$;
(ii) dire se f è un automorfismo, cioe' un endomorfismo biettivo;
(iii) calcolare autovalori ed autospazi di f;
(iv) dire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

7. Verificare, senza calcolare il polinomio caratteristico, che $(3, 2, 5)$ non è autovettore di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

8. Fissato in un piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si consideri la retta $r: \ 4x + y - 3 = 0$; rappresentare in forma parametrica ed in forma cartesiana la retta parallela a r e passante per l'origine.

9. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si rappresenti il piano passante per il punto $(1, 1, 2)$ parallelo alla retta $r: \begin{cases} z &= 0 \\ y &= 1 \end{cases}$ e ortogonale al piano $\pi: \ x - 2y + 5z = 1$

10. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si rappresenti il piano tangente alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3 = 0$ nel punto $A(-1, 2, 0)$.