COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Dire, giustificando la risposta, se il seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$ è compatibile o incompatibile e calcolarne l'insieme delle soluzioni:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 2 \\ & 5x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ un insieme di vettori di V. Cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Esibire un insieme di tre vettori di $\mathbb{R}^4$ che sia linearmente indipendente.

3. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 2, 1)$, $u_3 = (3, 1, 0, 3)$.

(i) Determinare la dimensione e una base di U.

(ii) Si dica per quale valore del parametro reale t il vettore $v = (t, 1 + t, 1, t)$ appartiene a U.

4. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $T((1, 1, 0, 0)) = (1, 2, 0)$, $T((0, 1, 1, 0)) = (0, 1, -1)$, $T((0, 0, 1, 1)) = (1, 1, 1)$, $T((0, 0, 0, 1)) = (0, 0, 0)$.

(i) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(T)$ e una base di $\mathrm{Im}(T)$.

(ii) Scrivere la matrice associata a T nei riferimenti canonici di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$.

5. Verificare che la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ è invertibile e determinare la sua inversa.

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una base di autovettori di T.

7. Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale nel piano della geometria elementare, si consideri la retta $r : 3x + 2y - 3 = 0$.

(i) Determinare la retta parallela a r e passante per il punto $P(1, 1)$.

(ii) Determinare la distanza tra la retta r e la retta $s : -3x - 2y + 4 = 0$.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si consideri il piano $\pi : 2x - y + 3z - 3 = 0$.

(i) Determinare *un* piano ortogonale a π e passante per il punto $A(1, 1, -1)$.

(ii) Determinare *una* retta r parallela al piano π e passante per il punto $B(1, -1, 0)$. È vero che r è contenuta in π?