COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari in 5 incognite su $\mathbb{R}$:

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1. \end{cases}$$

2. Cosa vuol dire che un insieme di vettori $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ di uno spazio vettoriale V su un campo K è un sistema di generatori di V? Rispondere anche alle seguenti domande:
(a) È vero che $\{(1,0,2),(1,1,1)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$? ∘ Sì ∘ No Perché?
(b) Quale dei seguenti insiemi è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$? (i) $\{(1,1),(2,2)\}$; (ii) $\{(1,1),(0,1),(2,2)\}$.

3. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali? Perché?

$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = y + z = 0\}$;

$Y = \{\alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) + (1, -1, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;

$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che $f((1, 0, 0)) = (2, 1)$, $f((0, 1, 0)) = (1, 1)$, $f((0, 0, 1)) = (1, 1)$.

(i) Determinare la matrice associata a f nei riferimenti $\mathcal{B} = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, 2))$ di $\mathbb{R}^2$.

(ii) Dire se f è iniettiva e se f è suriettiva.

(iii) È vero che il vettore $(1, -1, 0)$ appartiene al nucleo di f? Sì $\circ$ No Perché?

5. Dire cosa sono autovettori e autovalori di un endomorfismo $f : V \to V$.

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcolare autovalori ed autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

7. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare in forma parametrica e in forma cartesiana non parametrica la retta r con vettore direzionale $v(3,-4)$ e passante per il punto $A(-2,1)$. Determinare un punto che abbia distanza 2 da r.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino la rette $r: \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ x-y-2z &= 1 \end{cases}$ e il piano $\alpha: 2x-y+z+3=0$.

(i) Determinare una delle infinite rette parallele al piano α e incidenti r.
(ii) Determinare *una* retta ortogonale al piano α e sghemba con la retta r.