3. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e, per quelli che lo sono, calcolarne la dimensione :

(i) $W_1 = \{(x, y, z) \mid x = 3y\}$;
(ii) $W_2 = \{(x, y, z) \mid x + 2y = x - 3y = x - z = 0\}$;
(iii) $W_3 = \{(x, y, 0) \mid x < y\}$.

(i) W_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché è l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee.
Una base di W_1 è $\{(3,1,0), (0,0,1)\}$ per cui $\dim W_1 = 2$.

(ii) W_2 è un sottospazio vett. di $\mathbb{R}^3$ per lo stesso motivo di W_1.
Si osservi che $W_2 = \{\underline{0}\}$ per cui una base di W_2 è l'insieme vuoto e $\dim W_2 = 0$

(iii) W_3 non è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$, perchè pur essendo non vuoto (es: $(1,2,0) \in W_3$) non è chiuso rispetto al prodotto esterno.
Esempio: $(1,2,0) \in W_3$
ma $(-3)\cdot(1,2,0) = (-3,-6,0) \notin W_3$

4. Calcolare una base del nucleo ed una base dell'immagine dell' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z, t) = (2z, z, y - z - t)$.

Nucleo: $(x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} 2z = 0 \\ z = 0 \\ y - z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = t \end{cases}$

Una base del nucleo è $\{(1,0,0,0), (0,1,0,1)\}$

Immagine: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}(\underbrace{(0,0,0), (0,0,1), (2,1,-1), (0,0,-1)}_{\text{immagini dei vettori della base canonica di } \mathbb{R}^4}) =$

$= \operatorname{Span}((0,0,1), (2,1,-1))$
Una base di $\operatorname{Im} f$ è $\{(0,0,1), (2,1,-1)\}$

5. Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. $|A| = 1 \neq 0$

$A_{11} = 1$
$A_{12} = -\sqrt{3}$
$A_{21} = 0$
$A_{22} = 1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$