

COGNOME NOME MATRICOLA.....

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare in 4 incognite sul campo dei numeri reali

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & -2 \end{cases} .$$

2. Cosa è un sistema di generatori di uno spazio vettoriale V su un campo K ? Quale dei seguenti insiemi è un sistema di generatori di \mathbb{R}^3 ?

$$S_1 = \{(1, 2, -1), (1, 0, -2), (0, 2, 1)\}$$

$$S_2 = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

$$S_3 = \{(1, -1, 1), (0, 1, 2), (-1, 2, 1), (0, 0, 0)\}$$

3. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}((1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, -1, 0, 0))$.

- (i) Determinare una base di W .
- (ii) Il vettore $(2, -1, 1, 1)$ appartiene a W ? o Si o No Perché?

4. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $T((x, y)) = (2x - y, 2x + y, 4x + y)$.

- (i) Determinare una base di $\text{Ker } T$ e una base di $\text{Im } T$ e dire se T è iniettiva e suriettiva.
- (ii) Determinare la matrice associata all'applicazione lineare T nei riferimenti $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ di \mathbb{R}^2 e $\mathcal{B}' = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ di \mathbb{R}^3 .

5. Dato un endomorfismo $T : V \rightarrow V$ di uno spazio vettoriale V su un campo K , cosa è un autovettore di T ? È vero che un autovettore di T è autovettore della funzione composta $T \circ T$?
◦ Si ◦ No Perché?

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo

T di \mathbb{R}^3 con matrice associata A nel riferimento canonico di \mathbb{R}^3 e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una base di autovettori di T .

7. Fissato un riferimento cartesiano del piano della geometria elementare, si considerino i punti $A(1, 2)$ e $B(-1, 3)$.

- (i) Determinare la retta passante per A e B .
- (ii) Determinare una retta ortogonale al segmento AB .

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si considerino le rette

$$s : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \quad \text{e } r := (0, 0, 1) + (1, 1, 0)t.$$

- (a) Le rette s ed r sono sghembe? \circ Si \circ No Perché?
- (b) Determinare la comune perpendicolare a s ed r .
- (c) Determinare un piano parallelo sia a r sia a s .