COGNOME .... NOME .... MATRICOLA..........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan, determinare la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo in 4 variabili su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} & -x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & & -2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & & +2x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Cosa vuol dire che un insieme $X = \{u_1, \ldots, u_t\}$ di t vettori di V è linearmente indipendente?

3. Si consideri il sottospazio vettoriale $W = ((1,0,1,-2),(1,2,0,-2),(-1,2,-2,2))$ dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$. Determinare

(i) una base di W;
(ii) una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga una base di W;
(iii) un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che abbia dimensione 2 e intersezione nulla con W.

4. Data l'applicazione lineare $T : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (x+y, 2x-y, y) \in \mathbb{R}^3$,

(i) dire se l'applicazione T è iniettiva e suriettiva;
(ii) determinare la matrice associata a T nei riferimenti $\mathcal{B}$ canonico di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = ((1,1,0),(-1,2,1),(0,0,1))$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

6. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino la retta $r : 2x + 3y - 5 = 0$ e il punto $A(2, -1)$.

(i) Rappresentare la retta parallela a r e passante per A.

(ii) Determinare la circonferenza che sia tangente a r e abbia centro in A.

7. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si determini un piano parallelo alla retta $r : \begin{cases} 2x - 2y + z & = & 1 \\ x - y - z & = & -1 \end{cases}$.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si considerino le rette $s : (x, y, z) = (1, 1, 0) + (2, -1, 1)t$ e $r : \begin{cases} x + 2y & = & 1 \\ y + z & = & 1 \end{cases}$.

(a) cosa vuol dire che due rette sono sghembe? Le rette r e s sono sghembe?
(b) Determinare la distanza tra r e s.
(c) Determinare un piano ortogonale sia a r sia a s, se esiste.