COGNOME .... NOME .... MATRICOLA..........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare i valori reali del parametro λ per cui il seguente sistema lineare è compatibile:

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} \lambda x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & +\lambda x_3 & = & -1. \end{cases}$$

2. Cosa vuol dire che uno spazio vettoriale V è finitamente generato su un campo K? Cosa è la dimensione di V? Nell'ipotesi che V abbia dimensione 4, rispondere alle seguenti domande:

(a) È vero che un qualsiasi insieme di 5 vettori di V è linearmente *dipendente*? ○ Sì ○ No Perché?

(b) È vero che un qualsiasi insieme di 2 vettori di V è linearm. *indipendente*? ○ Sì ○ No Perché?

3. Nello spazio vettoriale dei vettori liberi del piano della geometria elementare, si considerino due vettori u_1, u_2 linearmente indipendenti.

(i) È vero che i vettori u_1 e u_2 non sono paralleli? ∘ Sì ∘ No Perché?

(ii) Posto $w = 4u_2 + 7u_2$, l'insieme $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente? ∘ Sì ∘ No Perché?

4. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, si considerino i sottospazi vettoriali $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$ e $Z = \mathcal{L}((1,1,1,1),(0,1,1,0))$.

(i) Dimostrare che $Z \subset W$.

(ii) Determinare una base di W e una base di Z.

(iii) Dire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che $Ker(f) = Z$ e $Im(f) = W$.

5. Siano V uno spazio vettoriale reale, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ un suo riferimento ed f l'endomorfismo di V tale che $f(v_1) = v_1 - v_2 + v_3,\ f(v_2) = 2v_2 + v_3,\ f(v_3) = v_2 - v_3$. Scrivere la matrice A associata a f nel riferimento $\mathcal{B}$ e dire se f è iniettiva.

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcolare autovalori ed autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

7. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la retta r per i punti $A(3,-2)$ e $B(2,-4)$ e calcolare la distanza tra r e la retta $s : \begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -3+2t \end{cases}$.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, siano date le rette $r : \begin{cases} x-y+z &= 0 \\ x+y-2z &= 1 \end{cases}$ e $s : (x,y,z) = (2,2,1) + t(1,1,1)$.

(i) Determinare il piano ortogonale a r e passante per il punto medio del segmento di estremi $A(1,2,3)$ e $B(-1,2,1)$.

(ii) Determinare un piano che contenga s e che sia parallelo alla retta r.