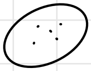
Geometria

Lez. 08/03

Insiemi



$A = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad <-> \quad$ $\{x \mid x$ è uno dei primi 4 numeri naturali dispari$\}$

$3 \in A \qquad A \ni 3$

$4 \notin A \qquad A \not\ni 4$

$\emptyset$

Siano A, B insiemi; allora:

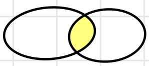
$A \subseteq B \iff \forall x \in A, \ x \in B$

$A = B \iff A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

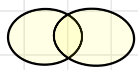
Prop 1 $\Rightarrow$ Prop 2

~~Prop 1~~ $\Leftarrow$ ~~Prop 2~~

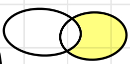
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



- $B \setminus A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$



A B

Siano ora $A \neq \emptyset \neq B$

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

$(a, b) \neq (b, a)$ se $a \neq b$

$\{a, b\} = \{b, a\}$

$(a, a) \neq \{a\}$

Sia $n \in \mathbb{N}$; una n-pla è nella forma:

- $A_1, A_2, \dots, A_n \qquad A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, \ m \in \mathbb{N}\}$ $\quad <-$ oppure $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R} = \{a . c_1 c_2 c_3 \dots \mid a \in \mathbb{Z} \wedge c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$

$\mathbb{C} = \{\alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Polinomi e Prodotto Cartesiano

$n \in \mathbb{N}$, n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$

- un termine è un prodotto di potenze di variabili: $x_1^3 x_4^7$
- un monomio è il prodotto di un numero per un termine: $\cdot 5 x_1^3 x_4^7$
- un polinomio è una somma finita di monomi.

$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] = \{$ polinomi in $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in $\mathbb{R}\}$

$$p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_i \qquad \tau_i \text{ termini}$$

$$p = x^2 + 2$$

Dalla nozione di prodotto cartesiano discendono due nozioni importanti:

- relazioni (di equivalenza);
- applicazioni.

$A, B \neq \emptyset$

DEF Una relazione o corrispondenza di A in B è un sottoinsieme $R \subseteq A \times B$ cioè (A, B, R) con $R \subseteq A \times B$

Esempio: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad B = \{x, y, z\}$

$R = \{(1, x), (1, y), (5, z), (7, y), (7, z)\}$

$1 \, R \, x \qquad 3 \not R \, x$

In generale:

$R \subseteq A \times B$, $a \in A$, $b \in B$ $\qquad a \, R \, b \iff (a, b) \in R$

DEF Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione. La relazione inversa di R è $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$

Esempio: $R^{-1} = \{(x, 1), (y, 1), (z, 5), (y, 7), (z, 7)\}$

Relazioni d'Equivalenza

$A = B \Rightarrow R \subseteq A \times A$ si dice <u>relazione in A</u>.

R è:

- riflessiva $\iff \forall x \in A,\ (x,x) \in R$
- simmetrica $\iff \forall x,y \in A,\ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \qquad [\, xRy \Rightarrow yRx \,]$
- transitiva $\iff \forall x,y,z \in A \quad (x,y),\ (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$$[\, xRy,\ yRz \Rightarrow xRz \,]$$

Esempio:

$A = \{1,3,5,7\} \qquad R = \{(1,1),(1,3),(3,1),(1,5),(5,1),(3,5),(5,3)\}$

NON è riflessiva $\quad (3,3)$ e $(7,7) \notin R$

sì è simmetrica

NON è transitiva $\quad (3,1) \wedge (1,3) \not\Rightarrow (3,3)$

DEF Una relazione $R \subseteq A \times A$ si dice d'equivalenza se è <u>riflessiva</u>, <u>simmetrica</u> e <u>transitiva</u>.

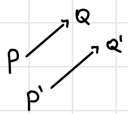
Esempi:

① $R \cup \{(3,3),(5,5),(7,7)\}$

② $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \ni (m,n)$

$R \subseteq A \times A \qquad R = \{ (\underbrace{(m,n),(m',n')}_{\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}}) \mid mn' = m'n \}$ dà origine a $\mathbb{Q}$

③ $A = \{ (P,Q) \mid P, Q$ punti dello spazio della geometria elementare $\}$



<u>Un vettore applicato</u> è un oggetto univocamente individuato da una direzione, un verso, una lunghezza e da un punto di applicazione.

$R \subseteq A \times A$

$R = \{ ((P,Q),(P',Q')) \mid (P,Q),(P',Q')$ hanno uguale $\begin{cases} \text{direzione} \\ \text{verso} \\ \text{lunghezza} \end{cases} \}$

Si tratta di una r. d'eq. detta equipollenza.

Classi d'Equivalenz

Sia $R \subseteq A \times A$ una rel. d'eq.

$a \in A \quad [a]_R \quad [a] = \{x \in A \mid x R a\}$ classi di equivalenza di a rispetto a R.

Lemma

(i) $a \in [a]$ <u>DIM</u> $a \in [a] \iff a R a \iff (a,a) \in R$ vero perché R riflessiva

(ii) $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$

<u>DIM</u> "$\subseteq$" $\left.\begin{array}{l} x \in [b] \Rightarrow x R b \\ hp: b R a \end{array}\right) \overset{\text{transitività}}{\Rightarrow} x R a \Rightarrow x \in [a]$

"$\supseteq$" $\left.\begin{array}{l} z \in [a] \Rightarrow z R a \\ hp: b R a \end{array}\right) \underset{\text{simm.}}{\Rightarrow} \left. a R b \right) \overset{\text{trans.}}{\Rightarrow} z R b \Rightarrow z \in [b]$

(iii) $a, b \in A, \quad [a] \cap [b] = \emptyset$ opp. $[a] = [b]$

<u>DIM</u> se esiste $y \in [a] \cap [b] \Rightarrow y \in [a] \wedge y \in [b]$

Per (ii) $[a] = [y] = [b]$ ✓

<u>OSS</u> $A = \bigcup_{a \in A} [a] \qquad A/_R = \{[a] \mid a \in A\}$ insieme quoziente

Esempio:

① $[1] = \{1, 3, 5\} = [3] = [5]$

$[7] = \{7\} \qquad A = [1] \cup [7] \qquad A/_R = \{[1], [7]\}$

② $A/_R = \mathbb{Q}$

③ $A/_R = \{$vettori liberi o geometrici$\} = \{\overrightarrow{PQ} \mid (P, Q)$ vettore applicato$\}$

$P \longrightarrow Q \qquad (P, Q) \neq (P', Q')$ vettori applicati diversi

$P' \longrightarrow Q' \qquad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ vettore libero

Applicazioni

Dal concetto di relazioni discende la nozione di applicazione.

$A, B \neq \emptyset$

DEF Una relazione $f \subseteq A \times B$ si dice applicazione di A in B e si denota $f: A \to B$ se:
$\forall x \in A \quad \exists!\, y \in B : y = f(x)$, cioè $x f a$

Se $X \subseteq A$ $\quad f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ $\quad$ funzione immagine di X

Se $Y \subseteq B$ $\quad f^{-1}(Y) = \{ a \in A \mid f(a) \in Y \}$ $\quad$ contro-immagine di Y