COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Trombetti R. (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi F. (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari in 5 incognite su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & -1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +3x_4 & -2x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & -2x_5 & = & 1. \end{cases}$$

(i) Calcolarne le soluzioni con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.
(ii) Spiegare perché l'insieme delle soluzioni di tale sistema *non* è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$.

2. Dato uno spazio vettoriale V finitamente generato su un campo K,
(i) dire cosa è una base di V;
(ii) se $\{u, v, w\}$ è una base di V, spiegare perché $\{u + w, v + w\}$ è linearmente indipendente.

3. Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottoinsiemi che risulta essere un sottospazio vettoriale:

$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ ab & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R});$

$Y = \{a + bx + (2a+b)x^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2};$

$Z = \{(1,2,0) + h(0,0,1) \mid h \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$

4. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(x,y,z) = (x-2y, y-x)$,

(i) determinare una base di $Kerf$ e una base di Imf e stabilire se f è iniettiva e suriettiva;

(ii) esibire un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ diversa da f che abbia lo stesso nucleo e la stessa immagine.

5. Verificare che la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e calcolarne l'inversa.

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(i) calcolare gli autovalori e gli autospazi di A;

(ii) spiegare perché A è diagonalizzabile, dopo aver ricordato cosa vuole dire che una matrice è diagonalizzabile.

7. Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino la retta $r : x - 2y - 2 = 0$ e il punto $A(-1, 1)$.

(i) Rappresentare la retta s parallela a r e passante per il punto A.
(ii) Determinare la distanza tra A e r.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino la retta $r : \begin{cases} x - y + z &= 1 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases}$ e il piano $\pi : x - y + z + 2 = 0$.

(i) Verificare che r e π sono paralleli e determinare la loro distanza.
(ii) Determinare il piano parallelo a π contenente r.
(iii) Il piano π è esterno, secante oppure tangente alla sfera $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 1 = 0$?