GEOMETRIA Napoli, 18 giugno 2014

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x - y - z + t = 1 \\ 2x - 2y + z - t = 2 \\ -x + y - 2z + 2t = -1 \end{cases}$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;
(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni di tale sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

2. Siano V e W spazi vettoriali sul campo reale. Cosa vuol dire che l'applicazione $T : V \mapsto W$ è lineare?

3. In $\mathbb{R}^3$, per ciascuno dei seguenti sistemi di vettori $S_1 = \{(1,0,1),(0,-1,0)\}$, $S_2 = \{(0,1,-1),(0,1,-1)\}$, $S_3 = \{(0,1,1),(-1,1,1),(2,0,0),(3,1,0)\}$
stabilire, giustificando le risposte,

(i) se è linearmente dipendente o indipendente;
(ii) se è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$;
(iii) se è una base di $\mathbb{R}^3$;
(iv) se è possibile completarlo ad una base di $\mathbb{R}^3$ e, in caso affermativo, esibirne un completamento.

4. Sia h l'ultima cifra del Suo numero di matricola. Scrivere un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ tale che $(1,h,0)$ appartenga al nucleo di T.

5. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se è invertibile ed in caso affermativo calcolarne l'inversa;
(ii) dire (giustificando la risposta e senza calcolare il polinomio caratteristico di A) se $(1, 3, -2)$ è autovettore di A ed in caso affermativo calcolarne il relativo autovalore.

6. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x + 2z, 3y, 2x + z)$,

(i) determinare una base di $Ker\ f$ e una base di $Im\ f$;
(ii) dire se f è un automorfismo, cioe' un endomorfismo biettivo;
(iii) calcolare autovalori ed autospazi di f;
(iv) dire se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

7. Fissato in un piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, scrivere una retta parallela all'asse x ed una retta ortogonale alla retta $x - 2y + 3 = 0$. Calcolare il punto di intersezione di tali rette.

8. Cosa vuol dire che le rette r ed s sono sghembe? Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si scriva una retta che sia sghemba con l'asse y.

9. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il piano $\pi \; : \; x + 3y - 3 = 0$ ed il punto $A(-1, 2, 0)$. Si rappresentino

(i) la retta per A ortogonale a π;
(ii) la sfera avente centro in A e tangente π.