

COGNOME NOME MATRICOLA.....

☐ Gr. 1 Bader (A-G)☐ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Sia $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ un sistema di t vettori di uno spazio vettoriale V su \mathbb{R} .

(i) Cosa vuol dire che S è un sistema di generatori di V ?

(ii) Se S è un sistema di generatori di V , l'affermazione “la dimensione di V è $t + 1$ ” è corretta? ☐ Sì ☐ No Perché?

2. Si consideri il sottospazio $H = L((1, -1, 2, 1), (0, 2, 1, -1), (1, 1, 3, 0), (2, 0, 0, 1))$ di \mathbb{R}^4 .

(i) Determinare la dimensione e una base di H .

(ii) Il vettore $(1, 0, 0, 0)$ appartiene ad H ? ☐ Sì ☐ No Perché?

3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_4, x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3)$.

(a) Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di f .

(b) Scrivere la matrice associata a f nei riferimenti:

$$\mathcal{R} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)) \quad e \quad \mathcal{R}' = ((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)).$$

4. Un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ può essere iniettiva?

☐ Sì ☐ No Perché? (Suggerimento: ricordare il teorema della dimensione)

5. Data una matrice quadrata A di ordine n su \mathbb{R} , cosa è un autovettore di A ?

6. Si consideri la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
È diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No Perché?

È invertibile? ☐ Sì ☐ No Perché?

7. Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale del piano della geometria elementare. Determinare:

(i) un vettore parallelo e uno ortogonale a $v(2, -5)$;

(ii) la retta per i punti $A(1, -1)$ e $B(2, -1)$;

(iii) la circonferenza di centro l'origine e tangente alla retta $s : x + y = 2$.

8. Sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare.

(i) Le rette $r : (x, y, z) = (1, -2, 1) + t(1, 0, -1)$ e $r' : \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ sono parallele, incidenti o sghembe?

(ii) Determinare il piano π ortogonale a r e passante per $A(1, -2, 1)$ e la distanza di π dal punto $P(1, -5, 3)$.