6. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (x, -2y, x + z)$,

(i) dire (giustificando la risposta) se è iniettiva;

(ii) dopo aver dato la definizione di autovettore, dire (usando la definizione e senza utilizzare il polinomio caratteristico) quali tra i seguenti vettori sono autovettori di f e, per quelli che lo sono, determinare il corrispondente autovalore : $v = (0, 0, 2)$, $w = (1, 1, -1)$, $u = (0, 3, 0)$

(i) $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{cases} x=0 \\ -2y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ Quindi: $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$ e di conseguenza f è iniettiva

(ii) Un autovettore di f è un vettore $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tale che esiste uno scalare λ per cui $f(a) = \lambda a$.

Calcoliamo: $f(v) = f((0,0,2)) = (0,0,2) = 1 \cdot (0,0,2) \Rightarrow$ v è autovettore di autovalore $\lambda = 1$

$f(w) = f((1,1,-1)) = (1,-2,0) \neq \lambda (1,1,-1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

w non è autovettore

$f(u) = f((0,3,0)) = (0,-6,0) = -2\,(0,3,0) \Rightarrow$ u è autovettore di autovalore $\lambda = -2$

7. Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino i punti $A(-1, 2)$ e $B(2, 3)$ e la retta $r \; : \; 2x + y - 5 = 0$.

(i) Rappresentare la retta r_1 passante per A e parallela a r;

(ii) rappresentare la retta r_2 passante per B e ortogonale a r;

(iii) calcolare le coordinate del punto C di intersezione di r_1 e r_2;

(iv) calcolare l'area del triangolo (rettangolo) ABC.

retta r_1: $2x + y = 0$, perché $v(-1,2) /\!/ r$ e $v /\!/ r_1$; $(-1,2)$ è soluzione dell'equazione

retta r_2: $-x + 2y - 4 = 0$, perché $v(-1,2) /\!/ r$ e $v \perp r_2$; $(2,3)$ è soluzione dell'equazione

) C: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -2x \\ -x - 4x - 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{8}{5} \\ x = -\frac{4}{5} \end{cases}$ $C\left(\frac{-4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

) area $= \|AC\| \cdot \|BC\| / 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7}{10}$

$AC\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, $\|AC\| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$BC\left(-\frac{14}{5}, -\frac{7}{5}\right)$, $\|BC\| = \sqrt{\frac{4 \cdot 49}{25} + \frac{49}{25}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 49}{25}} = \frac{7}{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{7}{\sqrt{5}}$

area $= \frac{7}{10}$