GEOMETRIA Napoli, 26 febbraio 2018

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

◯ Gr. 1 - R. Trombetti (A-G) ◯ Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Si consideri il seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$, al variare del parametro reale λ:

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} -x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & +\lambda x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +\lambda x_2 & +3x_3 & = & -1 \end{cases} .$$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, calcolarne le soluzioni quando $\lambda = 1$.

(ii) Esiste un valore di λ per cui il sistema Σ_λ è incompatibile? ∘ Sì ∘ No Perché?

2. Sia V uno spazio vettoriale V su un campo K e $S = \{v_1, \ldots, v_t\}$ un insieme di t vettori di V. Cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Quale dei seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente?

$S_1 = \{(1, 2, -1), (1, 0, -2), (0, 2, 1)\}$
$S_2 = \{(1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -1, 0), (0, 1, 1)\}$
$S_3 = \{(1, -1, 1), (0, 1, 2)\}$

3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base ordinata (e_1, e_2, e_3).

(i) Esibire una base di V che contenga i vettori $e_1 - e_3$ e $e_1 + 2e_3$.

(ii) Esibire un sottospazio vettoriale di V che abbia dimensione 2.

4. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T((x, y, z, t)) = (2x + y + t, 2x + z + t, z - y - t)$.

(i) Determinare una base di $Ker\ T$ e una base di $Im\ T$ e dire se T è iniettiva e suriettiva.

(ii) Determinare la matrice associata all'applicazione lineare T nei riferimenti $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}' = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Cosa è il rango di una matrice su un campo K? Quale matrice ha rango 0?

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

7. Fissato un riferimento cartesiano del piano della geometria elementare, si considerino il punto $A(-2,3)$ e la retta $r: 2x-3y+2=0$.

(i) Determinare la retta passante per A e parallela a r.
(ii) Determinare un punto che abbia distanza 2 da r.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio della geometria elementare, si considerino la retta $r: \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y+2z &= 0 \end{cases}$ e il piano $\alpha: 2x+2y-z+2=0$.

(a) La retta r e il piano α sono paralleli? ○ Si ○ No Perché?
(b) Determinare la distanza tra r e α.
(c) Determinare un piano ortogonale a α.