COGNOME .... NOME .... MATRICOLA..........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, determinare l'insieme delle soluzioni $\mathcal{S}$ del seguente sistema di equazioni lineari in 5 variabili su $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -2x_4 & & = & 0 \end{cases}$

È vero che $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$? ∘ Sì ∘ No Perché?

2. Dato uno spazio vettoriale V su un campo K, cosa è un suo sistema di generatori? Esibire un sistema di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale di 2 nella variabile x.

3. Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali:
$Y = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : a_1 - 2a_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$
$Z = \{\alpha(1, -1, 1, 2) + \beta(0, 1, 0, 1) + \gamma(1, -1, 1, 0) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

4. Data l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T((x_1, x_2)) = (x_1 + 3x_2, 2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$,

(i) determinare nucleo e immagine di T e spiegare se T è iniettiva e suriettiva

(ii) determinare la matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Cosa vuol dire che una matrice quadrata su un campo K è invertibile? Per quali valori del parametro reale h la seguente matrice è invertibile?

$$\begin{pmatrix} h & 1 & -1 \\ 1 & h & h \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$. La matrice A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, esibire una matrice che diagonalizza A.

7. Fissato un riferimento cartesiano in uno spazio euclideo di dimensione 2, si considerino le rette $s : 2x - 4y = 3$ ed $r : 2x + y = 1$. Dire se esse sono incidenti, parallele, sghembe, ortogonali. Nel caso in cui siano incidenti, calcolarne l'intersezione.

8. Fissato un riferimento cartesiano in uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino le due rette $r : \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ e $r' : \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 1 + t' \\ z = t' \end{cases}$

(i) E' vero che r ed r' sono sghembe? Determinare una retta perpendicolare ad entrambe.

(ii) Rappresentare un piano che sia parallelo sia a r sia a r'.