COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Trombetti R. (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi F. (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Determinare un sistema di equazioni lineari in 4 incognite su $\mathbb{R}$ che abbia tra le sue soluzioni i vettori $(1, 2, -1, 1)$ e $(2, 2, 0, 1)$.

2. Dato uno spazio vettoriale V finitamente generato su un campo K, dire cosa è la dimensione di V ed esibire uno spazio vettoriale di dimensione 3.

2. Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti e completarli in una base di $\mathbb{R}^4$:
$S = \{(1,2,-1,1),(0,1,0,1),(1,1,-1,1)\}$
$T = \{(2,2,0,1),(1,0,0,1)\}$

4. Dire quali tra le seguenti applicazioni è un'applicazione lineare:
$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f_1(x,y) = (2x+y, -y-1)$
$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_2(x,y) = (2x-3y, x+y, x-y)$
$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f_3(x,y,z) = (xy, y-x)$

5. Dire cosa è il rango di una matrice reale ed esibire una matrice di tipo 3×4 che abbia rango 2.

6. Si consideri l'applicazione $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + 2y, x - z) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di g.

(ii) Determinare la matrice associata a g nei riferimenti $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((1, 1), (0, -1))$ di $\mathbb{R}^2$.

7. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di A;

(ii) dire se A è diagonalizzabile e in caso di risposta positiva esibire una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori.

8. Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, determinare la retta r passante per i punti $A(1,-1)$ e $B(-2,1)$ e determinare un punto C tale che il triangolo ABC sia rettangolo in B.

9. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino le rette $r : \begin{cases} x-y &= 0 \\ x+y-z &= -2 \end{cases}$ e $s : (x,y,z) = (1,-1,1) + t(1,0,1)$ e il punto $A(0,1,1)$.

(i) Determinare il piano parallelo a r e a s e passante per il punto A.
(ii) Determinare il piano π ortogonale s e passante per il punto A.
(iii) Determinare una sfera tangente nel punto A al piano π precedentemente determinato.