COGNOME .... NOME .... MATRICOLA............

◯ Gr. 1 Bader (A-G) ◯ Gr. 2 Cioffi (H-Z)

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.
NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

1. Sia V uno spazio vettoriale sul campo reale e sia U un suo sottoinsieme. Cosa vuol dire che U è un sottospazio vettoriale di V? Dare un esempio di sottospazio vettoriale proprio (cioè diverso da tutto $\mathbb{R}^2$) di $\mathbb{R}^2$.

2. Si consideri il sistema lineare : $\begin{cases} x - y + z + t &= 0 \\ 3x - 3y - z - t &= 0 \\ x - y + 2z + 2t &= 0 \end{cases}$

(i) Con il metodo di eliminazione di Gauss, calcolarne le soluzioni;

(ii) dire (giustificando la risposta) se l'insieme delle soluzioni di tale sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione e scriverne una base.

3. Sia V uno spazio vettoriale sul campo reale.

(i) Cosa vuol dire che V ha dimensione 2?

(ii) Se V ha dimensione 2 e $S = \{v, w, u\}$ è un sistema di vettori di V a due a due distinti, possiamo dire che S è linearmente dipendente? ○ Si ○ No Perché?

4. Calcolare una base del nucleo ed una base dell'immagine dell' applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ tale che $g(x, y, z, t) = (x - 2z, z - y, x - y - z)$.

5. Calcolare il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

6. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (-x, y, x + z)$,

(i) calcolare autovalori ed autospazi di f;

(ii) dire, giustificando la risposta, se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

7. Fissato nel piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, dimostrare che le rette $r : (x, y) = t(4, 1) + (0, 1)$ e $s : 4x + y - 1 = 0$ sono ortogonali e calcolarne il punto di intersezione.

8. Fissato nello piano della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, rappresentare la circonferenza passante per i punti $P(1,1)$, $Q(9,1), R(9,-1)$ e calcolarne centro e raggio.

9. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino il piano $\pi : x+y-z-1=0$, la retta $r : \begin{cases} x-y-z = 0 \\ 3x-3y-2z = -1 \end{cases}$ ed i punti $A(1,-1,0)$, $B(1,0,0)$. Si rappresentino

(i) la retta per A ortogonale a π;
(ii) il piano per A parallelo a r e ortogonale a π;
(iii) la sfera tangente a π in B passante per l'origine.