COGNOME .... NOME .... MATRICOLA..........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Con il metodo di Gauss-Jordan, verificare che il seguente sistema lineare in 5 variabili su $\mathbb{R}$ è compatibile e determinarne l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni. È vero che $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale? ○ Si ○ No Perché?

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K che ha una base ordinata $B = (e_1, \dots, e_n)$.

(i) Cosa è il vettore delle componenti di un vettore u di V in B?

(ii) Determinare il vettore delle componenti di $(3, -5) \in \mathbb{R}^2$ in $B = ((1, -1), (-1, 2))$.

3. Quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti e perché? Completare i sottoinsiemi linearmente indipendenti in una base di $\mathbb{R}^4$.

$T = \{(3,1,0,1),(1,0,-3,-3),(2,1,3,4)\}$
$S = \{(1,2,0,-2),(1,0,1,-2)\}$
$X = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 0\}$

4. Data l'applicazione lineare $T : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to (x+y, 2x-y, y, x+z) \in \mathbb{R}^4$,

(i) dire se l'applicazione T è iniettiva e suriettiva;
(ii) determinare il sottospazio vettoriale $\mathrm{Im}(T)$ e un sistema lineare omogeneo di cui esso è l'insieme delle soluzioni.
(iii) È vero che il vettore $(1,0,1,1)$ appartiene a $\mathrm{Im}(T)$?

5. Cosa è il rango di una matrice su un campo K? Esibire una matrice di tipo 4×3 con rango 2.

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -6 & -8 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$. La matrice A è diagonalizzabile?

7. Fissato un riferimento cartesiano del piano euclideo, si considerino la retta $r : 2x + 3y - 5 = 0$ e il punto $A(3, -2)$.

(i) Rappresentare la retta ortogonale a r e passante per A.
(ii) Determinare una retta s cha abbia distanza 2 dal punto A.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio euclideo di dimensione 3, si consideri il piano $\mathcal{H} : 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2 = 0$.

(a) Determinare la giacitura del piano $\mathcal{H}$.
(b) Determinare una retta contenuta nel piano $\mathcal{H}$ e passante per il punto $A(0, -1 - 1)$, se esiste.
(c) Determinare una piano ortogonale a $\mathcal{H}$.