Geometria

Lez. 15/03

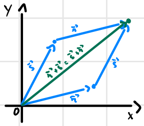
Operazioni interne : proprietà

Sia $\perp$ un operazione $A \times A \to A$.
Tale op.:

- è **commutativa** $\iff \forall a, b \in A \quad a \perp b = b \perp a$
- è **associativa** $\iff \forall a, b, c \in A \quad a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c$
- ammette **neutro** $\iff \exists\, e \in A \quad \forall x \in A : x \perp e = x = e \perp x$
- se ammette neutro e, y si dice **simmetrico** di $x \iff \forall x \in A \quad \exists y \in A : x \perp y = e = y \perp x$

Esempio:

$E(O) = \{ (O, P) \mid P$ punto dello spazio della geometria elementare $\}$
La somma tra due vettori gode di tutte le proprietà di cui sopra.



Il neutro altri non è che il vettore nullo, di lunghezza 0.
Il simmetrico di un generico vettore $\vec{r}$ è se stesso, ma con verso opposto, $-\vec{r}$. $(\vec{r} + (-\vec{r}) = 0)$

PROP $\quad \perp : A \times A \to A$

(i) se $\perp$ ammette el. neutro, allora esso è unico.

(ii) se $\perp$ ammette el. neutro e e $\perp$ assoc., allora: se $x \in A$ ha simmetrico y, y è unico, non ha altri simmetrici.

(iii) se $\perp$ ammette el. neutro e e $\perp$ assoc., allora: se x e x' hanno simmetrico y e y' rispettivamente, allora $x \perp x'$ ha simmetrico $y' \perp y$.

DIM

(i) Siano e e e' due elementi neutri.
Allora $e \overset{\text{neutro dx}}{=} e \perp e' \overset{\text{neutro sx}}{=} e'$.

(ii) Siano y e z simmetrici di $x \in A$.

$$y = y \perp e = y \perp (x \perp z) =$$
$$(y \perp x) \perp z = e \perp z = z$$

(iii)
$$(y' \perp y) \perp (x \perp x') = e$$
$$(x \perp x') \perp (y' \perp y) = e$$
$$(y' \perp y) \perp (x \perp x') = y' \perp (y \perp (x \perp x'))$$
$$= y' \perp \underbrace{(y \perp x)}_{e} \perp x' = y' \perp x' = e$$

Strutture Algebriche

Una <u>struttura algebrica</u> è una n-pla costituita da insiemi non vuoti e operazioni definite su di essi.

$(\mathrm{Hom}(A), \circ) \qquad (V, \mathbb{R}, \cdot) \qquad (V, \mathbb{R}, \cdot, +)$

$(A, \perp) \qquad \perp : A \times A \to A$

DEF Si dice **gruppo** se l'op. $\perp$ è <u>associativa</u>, ammette <u>neutro</u>, e $\forall x \in A$ esiste il <u>simmetrico</u>.

Si dice gruppo **abeliano** se è anche <u>commutativo</u>.

Esempi:

$\mathrm{Hom}(A) = \{ f : A \to A \mid f \text{ appl.} \}$

$(\mathrm{Hom}(A), \circ)$ non è un gruppo.

Lo diventa se considero:

$G(A) = \{ f : A \to A \mid f \text{ biett.} \} \subseteq \mathrm{Hom}(A)$

$(G(A), \circ)$ gruppo non abeliano.

$(\mathbb{R}, \cdot)$ non è un gruppo, ma $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano

DEF $K \neq \emptyset$, $\quad + : K \times K \to K \qquad \cdot : K \times K \to K$

$(K, +, \cdot)$ si dice **campo** se:

- $(K, +)$ è un gruppo abeliano, con 0 come neutro;
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano;
- $\forall a, b, c \in K \quad a \cdot (b + c) = ab + ac \qquad (a + b) \cdot c = ac + bc$.

Alternativamente, se:

$(K, +, \cdot)$ è un <u>anello</u> unitario, commutativo, ogni el. non nullo ammette simm. rispetto a $\cdot$.

$(K, +)$ è un gruppo abeliano, $\cdot$ è assoc. e distr.

Esempi: $(\mathbb{Q}, +, \cdot) \qquad (\mathbb{R}, +, \cdot) \qquad (\mathbb{C}, +, \cdot)$

PROP Siano $a, b \in K$.

$ab = 0 \implies a = 0 \lor b = 0$

DIM Pongo $a \neq 0 \implies \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1$.

$b = 1 \cdot b = (a \cdot a^{-1}) b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(0) = 0$

$K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ campo

$+ : K \times K \to K$

$(0, 0) \mapsto 0$

$(0, 1) \mapsto 1$

$(1, 0) \mapsto 1$

$(1, 1) \mapsto 0$

$\cdot : K \times K \to K$

$(0, 0) \mapsto 0$

$(0, 1) \mapsto 0$

$(1, 0) \mapsto 0$

$(1, 1) \mapsto 1$

Spazio Vettoriale

$V \neq \emptyset \qquad (K, +, \cdot)$ campo

$\boxplus : V \times V \to V \qquad \boxdot : K \times V \to V$

$\underset{+}{\boxplus} \qquad \underset{\cdot}{\boxdot}$

$\boxed{\text{scalare} \times \text{vettore} \to \text{vettore}}$

$(V, K, \boxplus, \boxdot)$ si dice spazio vettoriale su K :<=>

0. $(V, \boxplus)$ gruppo abeliano
1. $\forall \alpha \in K, \ \forall u, v \in V : \ \alpha \boxdot (u \boxplus v) = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\alpha \boxdot v)$
2. $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall u \in V : \ (\alpha + \beta) \boxdot u = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\beta \boxdot u)$
3. $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall u \in V : \ (\alpha \cdot \beta) \boxdot u = \alpha \boxdot (\beta \boxdot u)$
4. $\underset{\text{neutro risp. a } \cdot}{1 \in K}, \ \forall u \in V : \ 1 \boxdot u = u$

Esempi:

- $E(O) = \{ (O, P) \mid P$ punto dello spazio della geometria elementare $\}$

  $+ : E(O) \times E(O) \to E(O)$ vettori applicati

  $\cdot : \mathbb{R} \times E(O) \to E(O)$

- $+ : V \times V \to V$ vettori liberi

  $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

Sono esempi tipici di due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$

Polinomi su campi

$(K, +, \cdot)$ campo

$K[x] = \{\underbrace{a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n}_{p(x)} \mid a_0, \dots, a_n \in K\}$

grado $(p(x)) = \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}, & \text{se } p(x) \neq 0 \\ -1 \text{ opp. qualsiasi grado}, & \text{se } p(x) = 0 \end{cases}$

$\boxplus = + : K[x] \times K[x] \to K[x]$

$(3+2x-x^3, -2+x^2+2x^3+x^4) \mapsto 1+2x+x^2-x^3+x^4$

$\boxdot = \cdot : K[x] \times K[x] \to K[x]$

$(3+2x, -2+x^2) \mapsto -6-4x+3x^2+2x^3$

$(K, +, \cdot)$ campo $\quad n \in \mathbb{N}^* \quad K^n = \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ volte}}$

$\boxplus : K^n \times K^n \to K^n$

$((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \mapsto (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$

$\boxdot : K \times K^n \to K^n$

$(\alpha, (a_1, \dots, a_n)) \mapsto (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$

PROP $(K^n, K, \boxplus, \boxdot)$ è spazio vettoriale su K.

DIM per $n=2$

0. $(K^2, \boxplus)$ gr. abeliano

comm. $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$

$(a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2) = (b_1+a_1, b_2+a_2) = (b_1, b_2) \boxplus (a_1, a_2)$ ✓

assoc. $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in K^2$ Come per la commutatività, si ricava da $+$. ✓

neutro $(0,0)$: $\forall (a_1, a_2) \in K^2$, $(a_1, a_2) \boxplus (0,0) = (a_1, a_2) = (0,0) \boxplus (a_1, a_2)$ ✓

simmet. $\forall (a_1, a_2), \exists (a_1', a_2') \in K^2$ $(a_1, a_2) \boxplus (a_1', a_2') = (a_1+a_1', a_2+a_2') = (a_1+(-a_1), a_2+(-a_2)) = (0,0)$ ✓

1. $\forall \alpha \in K, \forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$

$\alpha \boxdot ((a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2)) \overset{\text{def}}{=} \alpha \boxdot (a_1+b_1, a_2+b_2) \overset{\text{def}}{=} (\alpha(a_1+b_1), \alpha(a_2+b_2)) \overset{\text{distr.}}{=} (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha a_2 + \alpha b_2) \overset{\text{def}}{=}$

$= (\alpha a_1, \alpha a_2) \boxplus (\alpha b_1, \alpha b_2) \overset{\text{def}}{=} (\alpha \boxdot (a_1, a_2)) \boxplus (\alpha \boxdot (b_1, b_2))$ ✓

2. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall (a_1, a_2) \in K^2$

$(\alpha+\beta) \boxdot (a_1, a_2) \overset{\text{def}}{=} ((\alpha+\beta) \cdot a_1, (\alpha+\beta) \cdot a_2) \overset{\text{distr.}}{=} (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2) \overset{\text{def}}{=} (\alpha a_1, \alpha a_2) \boxplus (\beta a_1, \beta a_2) \overset{\text{def}}{=}$

$= (\alpha \boxdot (a_1, a_2)) \boxplus (\beta \boxdot (a_1, a_2))$ ✓

3. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall (a_1, a_2) \in K^2$

$(\alpha \cdot \beta) \boxdot (a_1, a_2) \overset{\text{def}}{=} (\alpha\beta a_1, \alpha\beta a_2) \overset{\text{def e assoc.}}{=} \alpha \boxdot (\beta a_1, \beta a_2) \overset{\text{def}}{=} \alpha \boxdot (\beta \boxdot (a_1, a_2))$ ✓

4. $1 \in K, \forall (a_1, a_2) \in K^2$

$1 \boxdot (a_1, a_2) \overset{\text{def}}{=} (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2) \overset{\text{neutro molt.}}{=} (a_1, a_2)$ ✓ ▨