COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi appositi** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni del seguente sistema lineare in 5 incognite sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. L'insieme $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$? ○ Si ○ No Perché?

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & -3x_4 & -x_5 & = & -1 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 1 \end{cases}$$

2. Siano V uno spazio vettoriale su un campo K e $S = \{u_1, \ldots, u_t\}$ un insieme di t vettori di V. Cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Per quali valori del parametro reale α il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ $\{(-1, \alpha, 2), (\alpha, \alpha, 0), (0, -\alpha, \alpha)\}$ è linearmente indipendente?

3. Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi che risulta sottospazio vettoriale del suo spazio ambiente:

$Y = \{(2,1,-2) + \alpha(1,0,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$Z = \{\alpha(2,1,-2) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,1,-3) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

4. Data l'applicazione lineare $T : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to (a_0 + a_1, 2a_0 - a_2) \in \mathbb{R}^2$,

(i) determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di T e spiegare se T è iniettiva e/o suriettiva;

(ii) scrivere la matrice associata a T nelle basi ordinate $(1, x, x^2)$ e $((1,-2),(2,-1))$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e di $\mathbb{R}^2$, rispettivamente. Che rango ha questa matrice?

5. Cosa vuol dire che una matrice quadrata su un campo K è invertibile? Verificare se la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile e, in caso di risposta affermativa, determinarne l'inversa.

6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base ordinata (e_1, e_2, e_3). Determinare autovalori e autovettori dell'endomorfismo $T : \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \in V \to (\alpha - \beta)e_1 - \beta e_2 + (\alpha + \gamma)e_3 \in V$. Inoltre, stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, esibire una base spettrale di V rispetto a T.

7. In uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione n, cosa è la distanza tra due punti? Fissato un riferimento cartesiano in un piano euclideo, si considerino i punti $A(3,-5)$ e $B(-1,-2)$. Determinare:

(i) la distanza tra i punti A e B

(ii) la distanza tre la retta passante per i punti A e B a la retta ad essa parallela e passante per l'origine del riferimento.

8. Fissato un riferimento cartesiano dello spazio euclideo di dimensione 3, si considerino il piano $\mathcal{H}: \ 2x - y + 3z = 4$ e il punto $Q(-1,2,1)$. Rappresentare

(a) sia in forma parametrica sia in forma cartesiana una retta parallela ad $\mathcal{H}$ e passante per Q

(b) un piano ortogonale a $\mathcal{H}$ e passante per Q.