GEOMETRIA - Gr. 2 - F. Cioffi (H-Z) Napoli, 25 giugno 2018

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Considerato il seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$:

$$\Sigma : \begin{cases} -x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & -1 \end{cases},$$

(i) con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, calcolarne l'insieme delle soluzioni;
(ii) è vero che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$? ◦ Sì ◦ No Perché?

2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Cosa è un sistema di generatori di V?

3. Determinare una base per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$ che sia un sottospazio vettoriale:
$X = \{\alpha(2,1,0,3,3) + \beta(0,1,2,5,5) + \gamma(-1,0,1,1,1) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$
$Y = \{(a+b, 2b+a-2, b-a+2, a, b) \in \mathbb{R}^5 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

4. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T((x,y,z,t)) = (2x-y+t, x+3z+t, x-y-3z)$.

(i) T è iniettiva? È suriettiva?

(ii) Determinare la matrice associata a T nei riferimenti $\mathcal{B} = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}' = ((1,0,1), (0,1,1), (0,0,1))$ di $\mathbb{R}^3$.

5. Spiegare cosa è un autovalore di un endomorfismo T di uno spazio vettoriale V su un campo K.

6. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata A nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ e, nel caso in cui A sia diagonalizzabile, esibire una matrice che diagonalizza A.

7. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino le rette $r : -2x + y + 5 = 0$ e $s : x - 2y - 4 = 0$.

(i) Le rette r e s sono parallele? ○ Si ○ No Perché?

(ii) Determinare una retta che sia incidente r e ortogonale a s.

8. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si consideri il piano α : $2x - y + z - 3 = 0$ e la retta $r : \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & -1 \\ x & -2y & -z & = & 2 \end{array} \right.$. Rappresentare

(i) una retta s parallela a r e contenuta in α, se esiste;

(ii) la retta ortogonale ad α e passante per l'origine del riferimento,

(iii) la distanza tra α ed r.