# Geometria

Lez. 10/03

# Applicazioni

Sia $f: A \to B$ un'app. [ $A$ dominio di $f$ ; $B$ codominio di $f$ ]

- $f$ si dice iniettiva $\iff \forall x,y \in A \ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$
  oppure $(x = y \Leftarrow f(x) = f(y))$

Esempio:

$A = \{1,2,3\}$ $B = \{x,y\}$ $f: B \to A$, $x \mapsto 1$, $y \mapsto 2$ ✓

- $f$ si dice suriettiva $\iff \forall b \in B, \ \exists a \in A : f(a) = b$

Esempio:

$A = \{1,2,3\}$ $B = \{x,y\}$ $f: A \to B$, $1 \mapsto x$, $2 \mapsto x$, $3 \mapsto y$ ✓

- $f$ si dice biettiva o biunivoca $\iff$ $f$ è sia iniettiva che suriettiva, cioè:
  $\forall b \in B, \ \exists! \, a \in A : f(a) = b$

Esempio:

$\mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}$

$a \mapsto \begin{cases} -\frac{a+1}{2}, & \text{se } a \text{ dispari} \\ \frac{a}{2}, & \text{se } a \text{ pari} \end{cases}$ è biettiva. ✓

Si dice che $A$ e $B$ sono due insiemi equipotenti se esiste un'app. biettiva $f: A \to B$ e che $A$ e $B$ hanno la stessa cardinalità o potenza.

$|A| = |B|$ $\quad |\emptyset| = 0 \quad \mathbb{N}_n = \{1,2,\dots,n\} \quad n \in \mathbb{N} \quad |\mathbb{N}_n| = n$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad f: \mathbb{N}_n \to A$, $1 \mapsto a_1$, $2 \mapsto a_2$, $\vdots$, $n \mapsto a_n$ app. biettiva

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{0\}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$

$\aleph_0$ aleph-zero

# Insieme delle parti

Sia $A$ un insieme. $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ insieme delle parti di $A$.

$A = \{1,2,3\}$

$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

$\{1,2\} \in P(A) \qquad \{1,2\} \subseteq A$

$|P(A)| = 2^{|A|}$ si può dimostrare per induzione.

$f: A \to B$

$f = \{(a,b) \mid f(a) = b\} \qquad f^{-1} = \{(b,a) \mid f(a) = b\}$

$f^{-1}$ è un'app. $\iff \underbrace{\forall b \in B,\ \exists!\, a \in A}_{\Updownarrow}: b\, f^{-1}\, a$ cioè $(b,a) \in f^{-1}$

$f$ è biettiva

# Funzione composta

Siano $f: A \to B$ $\quad g: B \to C$ app.

$g \circ f: A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$a \mapsto f(a) \mapsto g(f(a))$

$\forall a \in A$

L'applicazione composta è associativa: $h: C \to D \qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

N.B. $g \circ f \neq f \circ g$ generalmente

$f: A \to A$
$1 \mapsto 2$
$2 \mapsto 3$
$3 \mapsto 2$

$g: A \to A$
$1 \mapsto 3$
$2 \mapsto 1$
$3 \mapsto 2$

$g \circ f: A \to A \to A$
$1 \mapsto 2 \mapsto 1$
$2 \mapsto 3 \mapsto 2$
$3 \mapsto 2 \mapsto 1$

$\neq$

$f \circ g: A \to A \to A$
$1 \mapsto 3 \mapsto 2$
$2 \mapsto 1 \mapsto 2$
$3 \mapsto 2 \mapsto 3$

# Invertibilità

DEF $f$ si dice invertibile $\iff$ esiste: $f': B \to A$ : $\quad id_B = f \circ f'$, $\quad id_A = f' \circ f$

Quindi, $f$ è invertibile $\iff$ $f$ è biettiva

$f: A \to B$ biett. $\iff f^{-1}: B \to A$ biett.

# Principio d'induzione

$P(n)$ = "affermazione"

$|A| = n$

$P(n) = \quad |P(A)| = n$ "ipotesi"

(i) $\exists b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $P(b)$ è vera "base di induzione"

(ii) $\forall n \geq b$, $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ è vera "passo induttivo"

Se (i) e (ii) valgono, allora $P(n)$ vera $\forall n \geq b$

Esempio:

(1) $b = 0 \quad A = \emptyset \quad |A| = 0$

$P(A) = \{\emptyset\} \quad |P(A)| = 1 = 2^0$

Hp:

$A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \qquad |P(A_n)| = 2^n$

Th:

$A_{n+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\} \qquad |P(A_{n+1})| = 2^{n+1}$

$$P(A_{n+1}) = \underbrace{P(A_n)}_{2^n} \dot{\cup} \underbrace{\{X \cup \{a_{n+1}\} \mid X \in P(A_n)\}}_{2^n}$$

$|P(A_{n+1})| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

# Ristrette e Ridotte

$A, B \neq \emptyset \quad f: A \to B$

$X \subsetneq A \quad f_{|X}: X \to B$

$\qquad\qquad a \mapsto f(a)$

Esempio:

$f: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$

$\quad x \mapsto x+1$

$D = \{ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n \text{ dispari} \}$

$P = \{ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n \text{ pari} \}$

$f_{|D}: D \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x+1$ ristretta

$f_{|D}: D \to P$, $x \mapsto x+1$ NON ammesso

Se $Y \subseteq B : f(X) \subseteq Y$ posso ridurre anche il codominio.

Esempio:

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ $\qquad g: \mathbb{Q}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ristretta e ridotta

# Operazioni

$A, B, C \neq \emptyset$

Un'app. $\perp : A \times B \to C$ si dice operazione.

Si dice interna se $A = B = C$ $\qquad \perp A \times A \to A$

$\qquad (a', a') \mapsto \perp(a, a') \qquad a \perp a'$

Si dice esterna con operatori in $A$ se $B = C$

$V = \{ \vec{PQ} \mid P, Q \text{ punti dello spazio della geometria elementare} \}$

$\mathbb{R} \times V \to V$

$(\alpha, \vec{PQ}) \mapsto \alpha \cdot \vec{PQ}$

Se $\alpha = 0$, allora $0 \cdot \vec{PQ} = \vec{PP} = 0$

Se $\alpha > 0$, allora $\alpha \cdot \vec{PQ}$ è il vettore libero con direzione e verso uguali a quelli di $\vec{PQ}$ e lunghezza $|\alpha| |\vec{PQ}|$

Se $\alpha > 0$, allora $\alpha \cdot \vec{PQ}$ è il vettore libero con direzione uguale ma verso opposto a quello di $\vec{PQ}$ e lunghezza $|\alpha| |\vec{PQ}|$

# Strutture Algebriche

Una **strutture algebrica** è una n-pla costituita da insiemi non vuoti e operazioni definite su di essi.

$(Hom(A), \circ) \qquad (\mathbb{V}, \mathbb{R}, \cdot) \qquad (\mathbb{V}, \mathbb{R}, \cdot, +)$