COGNOME .... NOME .... MATRICOLA...........................

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare una base del sottospazio vettoriale delle soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari in 5 incognite su $\mathbb{R}$:

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

(i) Determinare una base del sottospazio vettoriale $W = \mathbf{L}(e_1 + e_3, e_2 + e_3, e_1 - e_2)$.

(ii) È vero che i sottospazi $X = \mathbf{L}(2e_1 + e_4, e_2 - e_1)$ e $Y = \mathbf{L}(e_1 + e_4 + e_2, 2e_2 + e_4)$ sono uguali?

3. Completare in una base quelli tra i seguenti sottoinsiemi di vettori che risultano essere linearmente indipendenti:

$S = \{(1,-2,2),(2,0,1),(1,2,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

$T = \{1+x, x-x^2-2x^3\} \subseteq \mathbb{R}^3[x]$;

$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$

4. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $T((x,y,z,t)) = (x+y-2z+t, 2x-y-z, x-2y+z-t)$.

(i) Determinare $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

(ii) Dato il sottospazio vettoriale $W = \mathbf{L}((2,1,0,1),(1,0,-1,1))$, determinare $T(W)$.

5. Dire cosa è il rango di una matrice su un campo ed esibire una matrice reale di tipo 4×3 che abbia rango 2.

6. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con matrice associata nel riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(i) Cosa sono autovettori e autovalori di T?
(ii) Determinare autovalori e autospazi di T.
(iii) Se T è diagonalizzabile, esibire una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T.

7. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico ortogonale,

(i) rappresentare due rette distinte che siano tra loro parallele;

(ii) determinare una circonferenza di raggio 2 che sia tangente alla retta $r : 2x - y + 3 = 0$.

8. Fissato nello spazio della geometria elementare un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, si considerino la rette $r : \begin{cases} x - 2y + z & = & 1 \\ 2x - y + 2z & = & -1 \end{cases}$ e il piano $\alpha : x - 2y + 2z - 3 = 0$.

(i) Determinare la distanza tra r e α.

(ii) Determinare *una* retta parallela al piano α e incidente alla retta r.