Příklady pro týden 8 - Martin Šimák

Zadání

Dvě rovinné elektrody rovnoběžné s rovinnou $z = 0$ nesou plošný proud o velikosti K_0. Roviny jsou vzdáleny d ve směru osy z. Střed systému je ve středu souřadné soustavy. Elektroda na pozici $z = d/2$ nese proud ve směru $\boldsymbol{e}_x$. Elektroda na pozici $z = -d/2$ nese proud ve směru $-\boldsymbol{e}_x$.

Řešení

Řešení budeme hledat nejprve přes Poissonovu rovnici, přičemž si můžeme uvěděomit, že vektorový potenciál magnetického pole $\boldsymbol{A}$ si můžeme zjednodušit pouze na jeho složku A_x, ostatní budou nulové, neboť má stejný směr jako plošný proud $\boldsymbol{K} = \pm K_0 \boldsymbol{e}_x$. Dále díky symetriím (invariance úlohy ve směrech x, y) bude záviset pouze na z. Protože proudová hustota $\boldsymbol{J}$ je kromě oblasti elektrod nulová, můžeme psát

$$\Delta \boldsymbol{A} = 0,$$

$$\Delta A_x = 0,$$

$$A_x = Cz + D.$$

Pro jednotlivé oblasti tedy dostáváme

$$z \geq d/2: \quad A_x = Cz + D \implies B = C,$$

$$z \in (-d/2, d/2): \quad A_x = Ez + F \implies B = E,$$

$$z \leq -d/2: \quad A_x = Gz + H \implies B = G,$$

kde B je vektor magnetického pole se směrem $\boldsymbol{e}_y$, jelikož rotace vektorového potenciálu[1] $\nabla \times A = \partial_z A_x \boldsymbol{e}_y$. Z prosté fyzikální intuice však také víme, že magnetické pole v nekonečnu bude nulové ($\lim_{z\to\infty} B = 0$), tudíž automaticky $C = 0$, $G = 0$. Dále abychom získali konkrétní hodnoty parametrů, budeme se snažit vyhovět okrajovým podmínkám skokového rozdílu B a spojitosti A na elektrodách, tedy

$$\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = \mu_0 \boldsymbol{K}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2. \tag{2}$$

Začněme tedy s podmínkou 1, kdy B_1 je magnetické pole venkovní a B_2 vnitřní na rozhraní $z = d/2$. Pro náš případ můžeme psát

$$\boldsymbol{e}_z \times (0 - E)\boldsymbol{e}_y = \mu_0 K_0 \boldsymbol{e}_x,$$

$$-\boldsymbol{e}_x(-E) = \mu_0 K_0 \boldsymbol{e}_x,$$

$$E = \mu_0 K_0.$$

[1] kompaktní značení $\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ zapůjčené z diferenciální geometrie

Pro spojitost vektorových potenciálů 2 můžeme na horním rozhraní stanovit

$$A_1(d/2) = A_2(d/2),$$

$$E\frac{d}{2} + F = D$$

a na dolním rozhraní

$$A_1(-d/2) = A_2(-d/2),$$

$$-E\frac{d}{2} + F = H. \tag{*}$$

Spojením výsledných rovností tedy dostáváme

$$2F = D + H,$$

$$H = 2F - D. \tag{**}$$

Dosazením ** do * získáváme

$$-E\frac{d}{2} + F = 2F - D,$$

$$E\frac{d}{2} - F + D = 0,$$

$$F = \mu_0 K_0 \frac{d}{2} + D.$$

Vektorové potenciály a magnetická pole rozdělená dle z můžeme tedy již nyní přepsat s konkrétními hodnotami jako

$$\begin{aligned} z \geq d/2: &\quad \boldsymbol{A} = D\,\boldsymbol{e}_x \implies \boldsymbol{B} = \boldsymbol{o}, \\ z \in (-d/2, d/2): &\quad \boldsymbol{A} = (\mu_0 K_0(z + d/2) + D)\,\boldsymbol{e}_x \implies \boldsymbol{B} = \mu_0 K_0 \boldsymbol{e}_y, \\ z \leq -d/2: &\quad \boldsymbol{A} = (D + \mu_0 K_0 d)\,\boldsymbol{e}_x \implies \boldsymbol{B} = \boldsymbol{o}. \end{aligned}$$

Jako stručné ověření výsledku můžeme použít (v tomto případě) značně jednodušší výpočet problému přes Ampérův zákon

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

Pro horní desku lehce nalezneme magnetické pole (Ampérovskou smyčku kreslíme paralelně s rovinou y, z) jako

$$\oint_C \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2B_1 l = \mu_0 I = \mu_0 K_0 l,$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\mu_0 K_0,$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{cases} +(\mu_0/2)K_0 \boldsymbol{e}_y, & \text{pro } z < d/2 \\ -(\mu_0/2)K_0 \boldsymbol{e}_y, & \text{pro } z > d/2 \end{cases},$$

kde vektorový charakter přímo vyplývá z Biot-Savartova zákona, který kvalitativně přímo zaručuje, že vektor magnetického pole musí být kolmý na procházející proud (čili nutně $B_x = 0$), a z faktu, že jakýkoli příspěvek k integraci ve směru z v $+y$ je automaticky vykompenzovám přesně opačným příspěvkem v $-y$ (tím pádem tedy také nutně $B_z = 0$).
V oblasti mimo desky je jasné, že $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{o}$, protože tam je uzavřený proud nulový pro libovolnou smyčku.
Stejně nenáročně lze zjistit i příspěvěk k celkovému magnetickému poli od spodní desky jako

$$\oint_C \boldsymbol{B}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2B_2 l = \mu_0 I = \mu_0 K_0 l,$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\mu_0 K_0,$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{cases} -(\mu_0/2)K_0\boldsymbol{e}_y, & \text{pro } z < -d/2 \\ +(\mu_0/2)K_0\boldsymbol{e}_y, & \text{pro } z > -d/2 \end{cases}.$$

Superpozicí tedy dostáváme i přes Ampérův zákon (jak jsme samozřejmě očekávali) stejný výsledek

$$z \in (-\infty, -d/2) \cup (d/2, \infty): \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{o},$$

$$z \in (-d/2, d/2): \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 K_0 \boldsymbol{e}_y.$$