Domácí úkol A8B37SAS - 26.3.2020

Ověření 66/122

Během výpočtu zde používáme součtu konečné geometrické řady (zkrácený výpočet, protože jde většinou pouze o úpravy do chtěného tvaru geometrické řady)

$$d_n = \frac{1}{N_0}\sum_{0}^{N_1-1} Ae^{-in\Omega_0 k} = \frac{A}{N_0}\frac{1-e^{-in\Omega_0 N_1}}{1-e^{in\Omega_0}} = \frac{A}{N_0}\frac{1-e^{-in2\pi\frac{N_1}{N_0}}}{1-e^{in2\pi\frac{1}{N_0}}}, \quad \text{pro } n \neq mN_0, \tag{1}$$

$$d_n = \frac{A}{N_0}N_1, \quad \text{pro } n = mN_0. \tag{2}$$

Ověření 79/122

Tento výpočet je podobný (znovu použijeme součet geometrické řady)

$$S(\Omega) = \sum_{m\in\mathrm{Z}} s[k]e^{-i\Omega k} = \sum_{-N_1}^{N_1} Ae^{-i\Omega k} = A\sum_{1}^{2N_1+1} e^{-i\Omega(k-N_1-1)} = \tag{3}$$

$$= Ae^{i\Omega N_1}e^{i\Omega}e^{-i\Omega}\frac{1-e^{-i\Omega(2N_1+1)}}{1-e^{-i\Omega}} = Ae^{i\Omega N_1}\frac{1-e^{-i(2N_1+1)\Omega}}{1-e^{-i\Omega}}. \tag{4}$$

Ověření 90/122

Z přednášky víme:

$$\mathrm{DtFT}\{A\} = 2\pi A\sum_{m\in\mathrm{Z}}\delta(\omega-2\pi m),$$
$$\mathrm{DtFT}\{A\cos(\Omega_0 k) = \pi A\sum_{m\in\mathrm{Z}}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi m)+\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi m)\},$$
$$\Omega_0 \equiv \frac{2\pi}{N_0}.$$

Na základě toho můžeme psát

$$S(\Omega) = 2\pi A(\delta(\Omega)+\frac{1}{2}\delta(\Omega-\Omega_0)+\frac{1}{2}\delta(\Omega+\Omega_0)). \tag{5}$$

Ověření 103/122

Jde o přímý výpočet koeficientů Fourierovy řady

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) e^{-in\omega_0 t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_1} e^{-in\omega_0 t}\, \mathrm{d}t = \frac{A}{T_0} \left[\frac{e^{-in\frac{2\pi}{T_0}t}}{-in\frac{2\pi}{T_0}} \right]_0^{T_1} = \tag{6}$$

$$= \frac{A\left(1 - e^{-i\frac{2\pi n T_1}{T_0}}\right)}{i2\pi n} = \frac{A}{i2\pi n}\left(1 - e^{-i\frac{2\pi n T_1}{T_0}}\right), \quad \text{pro } n \neq 0, \tag{7}$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} s(t)\, \mathrm{d}t = \frac{A}{T_0} \cdot \mathrm{lenght}(\langle 0, T_1 \rangle) = \frac{AT_1}{T_0}, \quad \text{pro } n = 0. \tag{8}$$

Ověření 115/122

Jde o přímý výpočet Fourierovy transformace

$$S(\omega) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{i\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{T_1} A e^{i\omega t}\, \mathrm{d}t = A \left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \right]_0^{T_1} = \frac{A}{i\omega}\left(e^{iT_1\omega} - 1\right) \tag{9}$$