# Příklady pro týden 10 - Martin Šimák

## Zadání

Čtvercová smyčka z tenkého vodiče má délku hrany $\ell$ a nachází se v blízkosti nekonečně dlouhého přímého vodiče. Hrana smyčky je rovnoběžná s osou vodiče a je vzdálena $d$ od něj. Přímým vodičem protéká konstantní proud $I_0$. Celkový odpor smyčky je $R$ a její vlastní indukčnost je $L$. V čase $t = t_0$ se smyčka začne od přímého vodiče vzdalovat konstantní rychlostí $v_0$ (ve směru kolmo od vodiče). Určete celkovou energii, která se pro $t \in [t_0, \infty)$ spálila v rezistoru v teplo. Úlohu řešte nerelativisticky.

(Numerické hodnoty pro integrál: $v_0 = 100\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\ell = 1\,\mathrm{m}$; $I_0 = 1000\,\mathrm{A}$; $d = 10\,\mathrm{mm}$; $R = 1\,\Omega$; $L = 50\,\mathrm{mH}$; $t_0 = 0\,\mathrm{s}$)

---

## Řešení

Zvolme si souřadnicovou soustavu tak, aby tenký vodič nesoucí proud byl orientován jako osa $z$ (proud $I_0$ teče ve směru růstu $z$). Z tohoto předpokladu vyplývá, že smyčka leží v rovině kolmé k rovině $x, y$. Zbývá již tedy jen určit matematickou orientaci křivky $\Gamma$ odpovídající smyčce. Zvolme tedy (zápornou) orientaci ve směru hodinových ručiček (jednotkový normálový vektor plochy je tedy vektor $\boldsymbol{e}_\varphi$).
K výpočtu budeme dozajista potřebovat kvantitativní vyjádření magnetického pole generovaného proudem ve svislém vodiči. Toto magnetické pole spočteme lehce pomocí Ampérovy věty jako

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho}\,\boldsymbol{e}_\varphi,$$

kde $\rho$ je cylindrická radiální souřadnice, $\varphi$ cylindrická polární souřadnice a integraci jsme nejlehčeji provedli po kružnici kolem vodiče.
Pro průtok magnetického pole $\Phi$ skrz vnitřek smyčky (matematicky $\Omega \equiv \mathrm{Int}(\Gamma)$) tedy můžeme psát

$$\Phi = \int_\Omega \boldsymbol{B}(\rho) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\Omega \boldsymbol{B}(\rho) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z = \int\limits_{z=z_0}^{z=z_0+\ell} \int\limits_{\rho=d+v_0 t}^{d+\ell+v_0 t} \boldsymbol{B}(\rho) \cdot \boldsymbol{e}_\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 \ell}{2\pi} \int\limits_{d+v_0 t}^{\ell+d+v_0 t} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 I_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{\ell + d + v_0 t}{d + v_0 t}\right).$$

Průtok magnetického pole smyčkou nám dává možnost přímo vypočítat indukované veličiny ve smyčce jako

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{(Faradayův indukční zákon)}$$

$$I_i = \frac{\Phi}{L}. \qquad \text{(Definice indukčnosti)}$$

Indukčnost smyčky je dána, takže můžeme přistoupit k jednoduššímu z výpočtů a to k indukovanému proudu $I_i$ :

$$I_i = \frac{\Phi}{L} = \frac{\mu_0 I_0 \ell}{2\pi L} \ln\left(\frac{\ell + d + v_0 t}{d + v_0 t}\right).$$

Jouleovo teplo při průchodu indukovaného proudu $I_i$ rezistorem (smyčkou) je definováno

$$P = U_i I_i = R I_i^2 = R \left(\frac{\mu_0 I_0 \ell}{2\pi L}\right)^2 \ln^2\left(\frac{\ell + d + v_0 t}{d + v_0 t}\right).$$

Z definičního vztahu pro výkon (zde Jouleovo teplo) můžeme pro energii spálenou v rezistoru psát

$$W_{\mathrm{lost}} = \int\limits_0^\infty R \left(\frac{\mu_0 I_0 \ell}{2\pi L}\right)^2 \ln^2\left(\frac{\ell + d + v_0 t}{d + v_0 t}\right) \mathrm{d}t \approx 4.74 \cdot 10^{-7} J = 0.474\,\mu\mathrm{J}.$$