Domácí úkol A8B37SAS - 5.3.2020

---

1 Rozklad signálu

Jsou dány signály (vektory) $\{\zeta_i(t)\}_{i=1}^3$

$$\begin{aligned}\zeta_1(t) &= 1 - t,\\ \zeta_2(t) &= -\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t,\\ \zeta_3(t) &= \frac{22}{3} - 8t + 2t^2\end{aligned}$$

a signál

$$s(t) = -2t^2 + 5$$

na intervalu $I = \langle 1, 3\rangle$.

1.1 Ortogonalita

Zadání Ukažte, že signály $\{\zeta_i(t)\}_{i=1}^3$ jsou ortogonální na intervalu $I = \langle 1, 3\rangle$.

Řešení

1. Ortogonalita $\zeta_1(t), \zeta_2(t)$ na I:

$$\begin{aligned}\langle \zeta_1(t), \zeta_2(t)\rangle &= \int_1^3 \zeta_1(t)\zeta_2^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^3 (1-t)\left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t\right)\,\mathrm{d}t =\\ &= \int_1^3 -\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t + \frac{7}{4}t - \frac{3}{4}t^2\,\mathrm{d}t = \int_1^3 -\frac{7}{4} + \frac{10}{4}t - \frac{3}{4}t^2\,\mathrm{d}t =\\ &= \left[-\frac{7}{4}t + \frac{10}{8}t^2 - \frac{3}{12}t^3\right]_1^3 = \left(-\frac{21}{4} + \frac{90}{8} - \frac{81}{12}\right) - \left(-\frac{7}{4} + \frac{10}{8} - \frac{3}{12}\right) =\\ &= 0.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Signály $\zeta_1(t), \zeta_2(t)$ jsou ortogonální na I.

2. Ortogonalita $\zeta_2(t), \zeta_3(t)$ na I:

$$\begin{aligned}\langle \zeta_2(t), \zeta_3(t)\rangle &= \int_1^3 \zeta_2(t)\zeta_3^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^3 \left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t\right)\left(\frac{22}{3} - 8t + 2t^2\right)\,\mathrm{d}t =\\ &= \int_1^3 -\frac{77}{6} + 14t - \frac{7}{2}t^2 + \frac{11}{2}t - 6t^2 + \frac{3}{2}t^3 =\\ &= \int_1^3 -\frac{77}{6} + \frac{39}{2}t - \frac{19}{2}t^2 + \frac{3}{2}t^3\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{77}{6}t + \frac{39}{4}t^2 - \frac{19}{6}t^3 + \frac{3}{8}t^4\right]_1^3\\ &= \left(-\frac{77}{2} + \frac{351}{4} - \frac{513}{6} + \frac{243}{8}\right) - \left(-\frac{77}{6} + \frac{39}{4} - \frac{19}{6} + \frac{3}{8}\right) = 0.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Signály $\zeta_2(t), \zeta_3(t)$ jsou ortogonální na I.

3. Ortogonalita $\zeta_1(t), \zeta_3(t)$ na I:

$$\begin{aligned}
\langle \zeta_1(t), \zeta_3(t) \rangle &= \int_1^3 \zeta_1(t)\zeta_3^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^3 (1-t)\left(\frac{22}{3} - 8t + 2t^2\right)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_1^3 \frac{22}{3} - 8t + 2t^2 - \frac{22}{3}t + 8t^2 - 2t^3\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_1^3 \frac{22}{3} - \frac{46}{3}t + 10t^2 - 2t^3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{22}{3}t - \frac{23}{3}t^2 + \frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^3\right]_1^3 = \\
&= \left(22 - 69 + 90 - \frac{81}{2}\right) - \left(\frac{22}{3} - \frac{23}{3} + \frac{10}{3} - \frac{1}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Signály $\zeta_1(t), \zeta_3(t)$ jsou ortogonální na I.

4. Ortogonalita je relace symetrická (stejně jako skalární součin je symetrická operace), tudíž nemusíme testovat ortogonalitu signálů v permutovaném pořadí.

1.2 Rozklad signálu

Zadání Rozložte signál $s(t)$ pomocí signálů $\{\zeta_i(t)\}_{i=1}^3$ na intervalu $I = \langle 1, 3 \rangle$, tj. najděte koeficienty rozkladu.

Řešení Pokud hledáme koeficienty (v tomto případě ortogonálního) rozkladu, hledáme tak, obecně komplexní, čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tak, aby splňovaly rovnost

$$\begin{aligned}
s(t) = -2t^2 + 5 &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \zeta_i(t) = \alpha_1\zeta_1(t) + \alpha_2\zeta_2(t) + \alpha_3\zeta_3(t) = \\
&= \alpha_1(1-t) + \alpha_2\left(-\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t\right) + \alpha_3\left(\frac{22}{3} - 8t + 2t^2\right) \\
&= \left(\alpha_1 - \frac{7}{4}\alpha_2 + \frac{22}{3}\alpha_3\right) + \left(-\alpha_1 + \frac{3}{4}\alpha_2 - 8\alpha_3\right)t + (2\alpha_3)\,t^2.
\end{aligned}$$

Jelikož polynomy t, t^2, t^3 jsou nad prostorem funkcí lineárně nezávislé, dostáváme následující 3 nezávislé rovnice:

$$\alpha_1 - \frac{7}{4}\alpha_2 + \frac{22}{3}\alpha_3 = 5, \tag{1}$$

$$-\alpha_1 + \frac{3}{4}\alpha_2 - 8\alpha_3 = 0, \tag{2}$$

$$2\alpha_3 = -2. \tag{3}$$

Z rovnice (3) vidíme rovnou hodnotu třetího koeficientu $\alpha_3 = -1$. Zbývají nám tedy již pouze 2 rovnice, které můžeme dosazením hodnoty α_3 a přenásobením dvanácti přepsat do tvaru

$$12\alpha_1 - 21\alpha_2 = 148, \tag{1a}$$

$$-4\alpha_1 + 3\alpha_2 = -32. \tag{2a}$$

Dále provedením kroku (1a) $+ 3 \times$ (2a) rovnice sloučíme do jedné

$$-12\alpha_2 = 52.$$

Z této poslední rovnosti vyplývá fakt, že $\alpha_2 = -13/3$. Konečně koeficient α_1 získáme zpětným dosazením např. do rovnice (2a)

$$-4\alpha_1 = -19,$$

odkud vyplývá, že $\alpha_1 = 19/4$. Zjistili jsme tedy takto koeficienty rozkladu[1]:

$$\boxed{\operatorname{coord}_{(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)}(s(t)) = \left(\frac{19}{4}, -\frac{13}{3}, -1\right).}$$

[1]Značení ve finálním výsledku vyjadřuje souřadnice vektoru vůči uspořádané bázi, např. $\operatorname{coord}_{(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)}(\boldsymbol{v})$ značí souřadnice vektoru $\boldsymbol{v}$ vůči uspořádané bázi $(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)$.