

# Příklady pro týden 5

Martin Šimák

Martin je bačkora. Píše totiž vektory jako  $\mathbf{u}_0$ , když stačí psát  $u_0$ .

$$Z = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \int_{\mathbb{R}^6} e^{-\beta\mathcal{H}(\mathbf{x},\mathbf{p})} d\mathbf{x} d\mathbf{p} \quad (\text{kuchevnik})$$

Ty vole v rovnici ([kuchevnik](#)) není jedinej vlas suchej.

## Zadání

Bodový náboj o velikosti  $q$  leží vně koule o poloměru  $R$ . Koule je z dokonalého vodiče a je nabitá nábojem  $q$ . Předpokládejte, že zvolíme potenciál v nekonečnu rovený nule. V takovém případě má uvedená úloha jediné řešení. Nalezněte toto řešení. Dále určete práci, kterou musí konat síla působící na tento bodový náboj, aby ho z nekonečna přesunula na určitou pozici vně koule. Závislost této práce vykreslete. Fyzikálně interpretně její průběh. Bodový náboj i koule mají stejný náboj. Přitahují se, či odpuzují?

---

## Řešení

Nejprve vyřešíme lehčí úlohu, kdy budeme prozatím ignorovat náboj samotné koule (zůstává však dokonalým vodičem), čímž získáme potenciál  $\varphi'$  (metodou zrcadlení) a až potom k tomuto výsledku přičteme i působení nabitě koule.

### Značení:

- náboj s čarou vole  $q' \equiv -qR/r_q$ ,
- bod pozorování  $\mathbf{r} = r \mathbf{r}_0$  ( $\mathbf{r}_0$  je jednotkový vektor ve směru pozorování),
- bodový náboj je na souřadnici  $\mathbf{r}_q = r_q \mathbf{r}_{0q}$  ( $\mathbf{r}_{0q}$  je jednotkový vektor ve směru bodového náboje  $q$ ),

- zrcadlový obraz bodového náboje  $q'$  je na souřadnici,  $\mathbf{r}_{q'} = r_{q'} \mathbf{r}_{0q'}$  ( $\mathbf{r}_{0q'}$  je jednotkový vektor ve směru zrcadlového obrazu  $q'$  a  $r_{q'} = R^2/r_q$ )
- $\alpha \equiv r/R$
- $\beta \equiv R/r_q$

**Výpočet potenciálu:**

$$\begin{aligned}
 \varphi'(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q\|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'}|} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|r\mathbf{r}_0 - r_q\mathbf{r}_{0q}|} - \frac{qR/r_q}{|r\mathbf{r}_0 - R^2/r_q\mathbf{r}_q|} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{1}{|\alpha\mathbf{r}_0 - 1/\beta\mathbf{r}_{0q}|} - \frac{\beta}{|\alpha\mathbf{r}_0 - \beta\mathbf{r}_q|} \right) \\
 \varphi'(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'}|} \right).
 \end{aligned}$$

Nyní jsme tedy stanovili potenciál, který představuje situaci bodového náboje vně dokonale vodivé, však nenabitě koule. Jelikož koule se vně vlastního objemu v dostatečné vzdálenosti jeví jako bodový náboj, můžeme její příspěvek snadno přičíst k dosavadnímu výsledku, tedy

$$\varphi = \varphi' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{1}{|\alpha\mathbf{r}_0 - 1/\beta\mathbf{r}_{0q}|} - \frac{\beta}{|\alpha\mathbf{r}_0 - \beta\mathbf{r}_q|} + \frac{1}{\alpha} \right), \quad (1a)$$

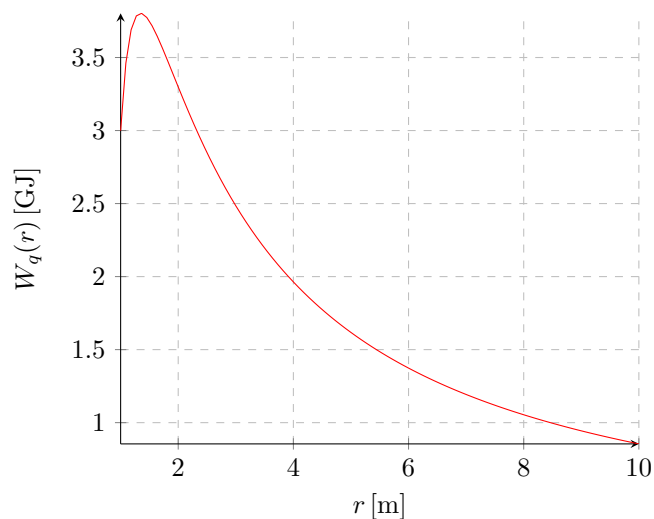
$$Z = -\text{fujky fuj} + \text{komiko} \quad (1b)$$

**Výpočet práce (energie):** Práci vykonanou při přesunu bodového náboje z nekonečna (místo nulového potenciálu) na určitou posici vně koule můžeme interpretovat také jako elektrostatickou energii náboje ve výsledné poloze. Spočteme ji pomocí námi dříve určeného potenciálu, do kterého nebudeme započítávat první člen v závorce, protože náboj sám na sebe elektrostatickou silou nepůsobí.

$$W_q = q(\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\infty)) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{R}{r_q} - \frac{R/r_q}{|r_q/R\mathbf{r}_q - R/r_q\mathbf{r}_q|} \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \beta - \frac{\beta}{1/\beta - \beta} \right)$$

$$W_q = \frac{q^2\beta}{4\pi\epsilon_0 R} \left( 1 - \frac{\beta}{1 - \beta^2} \right)$$

**Visualisace práce v grafu:** Práci jako funkci radiální vzdálenosti od středu koule, kterou jsme umístili do počátku souřadnicové soustavy, můžeme nanést do 2-D grafu. Pro účely visualisace jsme jako referenční hodnoty zvolili  $q = 1, R = 0.5$  a graf znázorňujeme v hodnotách 1:10 (hodnoty vzdálenosti blíží se poloměru koule příliš zkreslují graf silným působením elektrostatických sil na krátkou vzdálenost).



Z grafů vidíme, že práce vychází kladně, což implikuje fakt, že se koule s nábojem odpuzují.