Úvod do variačního počtu

---

1 Opakování

Definice 1.1. Zobrazení $\Phi : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$, kde X je obecný vektorový prostor (mnohdy nekonečné dimenze), se nazývá *funkcionál.*

Definice 1.2. X se nazve *normovaný prostor*, jestliže X je vektorový prostor (pro nás nad $\mathbb{R}$) a každému prvku $x \in X$ je přiřazena norma $\|x\|$ tak, že platí

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|ax\| = |a| \, \|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

pro každé $x, y \in X$ a $a \in \mathbb{R}$.

Definice 1.3. Definujeme *okolí*

$$
\begin{aligned}
U(x_0, \delta) &\coloneqq \{x \in X \mid \|x - x_0\| < \delta\}, \\
P(x_0, \delta) &\coloneqq U(x_0, \delta) \setminus x_0.
\end{aligned}
$$

Definice 1.4. Funkcionál $\Phi : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$ je *spojitý* právě tehdy, když

$$(\forall x_0 \in \mathcal{M})\,(\forall \epsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,[x \in U(x_0, \delta) \cap \mathcal{M} \implies |\Phi(x) - \Phi(x_0)| < \epsilon]\,.$$

Definice 1.5. Nechť $\Phi : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$ je funkcionál, kde X je normovaný prostor.

1. Nechť $x_0, h \in X$. Limita (pokud existuje)

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)\right]$$

   se nazývá *Gâteauxův diferenciál* Φ v bodě x_0 ve směru h. Značí se $D\Phi(x_0; h)$. Ekvivalentně je $D\Phi(x_0; h) = \varphi'(0)$, kde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována jako $\varphi(t) = \Phi(x_0 + th)$.

2. Nechť $x_0 \in X$. Existuje-li spojité lineární zobrazení $A : X \to \mathbb{R}$, splňující

$$\Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0) + A(h) + o(\|h\|), \quad h \to 0,$$

   podrobněji

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists \delta > 0) \left[h \in P(0, \delta) \implies \left|\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - A(h)}{\|h\|}\right| < \epsilon\right],$$

   nazývá se *Fréchetův diferenciál* Φ v bodě x_0. Značí se $\Phi'(x_0)$.

Definice 1.6. Nechť $\Phi : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$. Bod $x_0 \in \mathcal{M}$ nazveme:

1. globální minimum, jestliže $(\forall x \in \mathcal{M})\,[\Phi(x) \geq \Phi(x_0)]$,

2. lokální minimum, jestliže $(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in U(x_0;\delta) \cap \mathcal{M})\,[\Phi(x) \geq \Phi(x_0)]$,

3. ostré lokální minimum, jestliže $(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in U(x_0;\delta) \cap \mathcal{M})\,[\Phi(x) > \Phi(x_0)]$.

Analogicky definujeme pomocí obrácených nerovností maxima.

Definice 1.7. *Nosič* funkce f definujeme jako

$$\operatorname{supp} f \coloneqq \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Definice 1.8. Nechť $k \geq 0$ celé, $a < b \in \mathbb{R}$. Definujeme

$$\begin{aligned} C^k\left([a,b]\right) &\coloneqq \left\{ \tilde{y}|_{[a,b]} \mid \tilde{y} \in C^k(\mathbb{R}) \right\}, \\ C_0^1\left([a,b]\right) &\coloneqq \left\{ y \in C^1([a,b]) \mid y(a) = y(b) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

2 Variační počet

Definice 2.1. *Základní úlohou variačního počtu* rozumíme nalezení extrémů $\Phi : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$, kde $X = C^1([a,b])$,

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, \mathrm{d}x, \\ \mathcal{M} &= \{y \in C^1([a,b]) \mid y(a) = A, y(b) = B\}. \end{aligned} \tag{U}$$

Prostor $C^1([a,b])$ je opatřen normou $\|y\| = \sup_{x\in[a,b]}\{|y(x)| + |y'(x)|\}$.

Věta 2.1. Nechť $\Phi : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$ má v $x_0 \in \mathcal{M}$ lokální extrém. Nechť $h \in X$ je takové, že $D\Phi(x_0;h)$ existuje. Potom $D\Phi(x_0;h) = 0$.

Důkaz. Využijeme pomocné skalární funkce $\varphi(t) \coloneqq \Phi(x_0 + th)$. Díky existenci Gâteauxova diferenciálu $D\Phi(x_0;h)$ můžeme prohlásit, že

$$(\exists t_m > 0) : t \in (-t_m, t_m) \implies x_0 + th \in \mathcal{M}.$$

Dále však předpokládáme, že Φ má v x_0 extrém, tzn.

$$\varphi'(0) = D\Phi(x_0;h) = 0.$$

□

Věta 2.2. Je dána úloha U. Nechť $y_0 \in \mathcal{M}$, $h \in C_0^1([a,b])$ jsou libovolná. Dále předpokládejme, že $f \in C^1$. Potom existuje $D\Phi(y_0;h)$ a platí

$$D\Phi(y_0;h) = \int_a^b \left[f_y(x, y_0(x), y_0'(x))h(x) + f_z(x, y_0(x), y_0'(x))h'(x) \right] \mathrm{d}x, \tag{1}$$

kde $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$ a $f_z \equiv \frac{\partial f}{\partial z}$.

Poznámka. Proměnné y a z funkce f jsou pouhá označení druhé a třetí proměnné.

Důkaz. Opět využijeme pomocné funkce $\varphi(t) \coloneqq \Phi(y_0(x) + th(x))$, $\varphi'(0) = D\Phi(y_0; h)$, konkrétně

$$\varphi(t) = \Phi(y_0 + th) = \int_a^b \underbrace{f(x, \overbrace{y_0(x) + th(x)}^{y(t,x)}, \overbrace{y_0'(x) + th'(x)}^{z(t,x)})}_{g(t,x)} \,\mathrm{d}x.$$

Pro její derivaci tedy musí platit

$$\varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^b g(t, x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \,\mathrm{d}x,$$

přičemž ohledně práva poslední úpravy tiše předpokládáme, že funkce splňuje Lebesgueovu větu. Dále tedy můžeme postupovat na základě znalosti derivace funkcí více proměnných jako

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = f_y(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x))h(x) +& \\ + f_z(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x))h'(x)&.\end{aligned}$$

To ovšem pro $\varphi'(0)$, neboli pro $D\Phi(y_0; h)$, znamená

$$\varphi'(0) = D\Phi(y_0; h) = \int\limits_a^b \left[f_y(x, y_0(x), y_0'(x))h(x) + f_z(x, y_0(x), y_0'(x))h'(x)\right] \,\mathrm{d}x.$$

□

Poznámka (Diracova funkce δ). Jedná se o jakousi neopodstatněnou konstrukci splňující dvě vlastnosti: 1. $\forall x \neq 0,\ \delta(x) = 0$, 2. $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) \,\mathrm{d}x = 1$. Taková funkce samozřejmě v kontextu tradičních funkcí a integrálu neexistuje. Její aplikace jsou však velice užitečné, a tak se pokusme si zkonstruovat funkci podobných vlastností.

Lemma 2.3. Nechť $\zeta(x)$ je libovolná omezená s omezeným nosičem a platí $\int_{\mathbb{R}} \zeta = 1$. Nechť funkce f je spojitá v x_0. Potom platí

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x_0 + y)\zeta_\epsilon(y) \,\mathrm{d}y = f(x_0), \tag{2}$$

kde $\zeta_\epsilon(y) = \zeta(y/\epsilon)/\epsilon$.

Důkaz. Nejprve si ověřme, že také platí $\int_{\mathbb{R}} \zeta_\epsilon = 1$, neboť v předpokladech je tato identita zaručena pouze pro ζ. Pišme tedy

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta_\epsilon(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon}\zeta\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \zeta\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \,\mathrm{d}\frac{x}{\epsilon} = \int_{\mathbb{R}} \zeta(y) \,\mathrm{d}y = 1.$$

Funkce ζ je omezená a má omezený nosič, tzn. pro funkce ζ a ζ_ϵ můžeme napsat

$$\begin{aligned} |\zeta(x)| &\leq K, & |\zeta_\epsilon(x)| &\leq \frac{K}{\epsilon}, \\ \operatorname{supp} \zeta &\subset [-K, K], & \operatorname{supp} \zeta_\epsilon &\subset [-\epsilon K, \epsilon K]. \end{aligned}$$

Snažíme se dokázat

$$(\forall \eta > 0)\, (\exists \xi > 0) : \epsilon \in (0, \xi) \implies \left| \int_{\mathbb{R}} f(x_0 + y)\zeta_\epsilon(y) \,\mathrm{d}y - f(x_0) \right| < \eta.$$

Ze spojitosti funkce f v bodě x_0 můžeme napsat

$$(\forall \eta > 0)\,(\exists \xi > 0) : \forall x \in U(x_0, K\xi) \implies |f(x_0) - f(x)| < \frac{\eta}{2K^2}.$$

Pomocí pár úprav a základních vět o integrálu můžeme postupovat

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} f(x_0+y)\zeta_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y - f(x_0)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x_0+y)\zeta_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y - f(x_0)\int_{\mathbb{R}} \zeta_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y\right| = \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} \left[f(x_0+y) - f(x_0)\right]\zeta_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y\right| = \left|\begin{matrix} y = \epsilon x \\ \mathrm{d}y = \epsilon \mathrm{d}x \end{matrix}\right| = \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} \left[f(x_0+\epsilon x) - f(x_0)\right]\zeta(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\left[f(x_0+\epsilon x) - f(x_0)\right]\zeta(x)\right|\,\mathrm{d}x \leq \\
&\leq K\int_{-K}^{K} |f(x_0+\epsilon x) - f(x_0)|\,\mathrm{d}x \leq \\
&\leq K \cdot 2K \cdot \frac{\eta}{2K^2} = \eta,
\end{aligned}$$

přičemž po substituci v integrálu dostáváme $f(x_0 + \epsilon x)$, z čehož získáváme přesně levou stranu kýžené implikace $\epsilon \in (0, \xi)$ jakožto požadavek, aby $x_0 + \epsilon x \in U(x_0; K\xi)$. □

Důsledek 2.3.1. Funkce f je spojitá v x_0:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int\limits_{x_0}^{x_0+\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0), \qquad \zeta(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1), \\ 0 & \text{jinde}, \end{cases}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int\limits_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0), \qquad \zeta(x) = \begin{cases} 1/2 & x \in (-1,1), \\ 0 & \text{jinde}. \end{cases}$$

Poznámka. Jedna z konkrétních konstrukcí výše zkoumané shlazovací funkci (molifiéru) může například být

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1, \\ C\exp^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1. \end{cases}$$

Tato funkce pak i vizuálně v limitě dobře aproximuje chování Diracovy „funkce“ δ. Funkci můžeme centrovat do libovolného zkoumaného bodu, tj.

$$\zeta_{x_0,\epsilon}(x) = \frac{1}{\epsilon}\zeta\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right).$$

Lemma 2.4 [Slabá forumulace diferenciální rovnice]**.**

1. Nechť $u \in C([a,b])$. Potom $u \equiv 0$ na $[a,b]$ právě tehdy, když

$$\int\limits_a^b u(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a,b]). \tag{3}$$

2. Nechť $w \in C^1([a,b])$, $v \in C([a,b])$. Potom $-w' + v \equiv 0$ na $[a,b]$ právě tehdy, když

$$\int\limits_a^b \left[w(x)h'(x) + v(x)h(x)\right]\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a,b]). \tag{4}$$

Důkaz.

1. (i) „ $\Longrightarrow$ “ očividné.
   (ii) „ $\Longleftarrow$ “ volme $x_0 \in (a,b)$ libovolné, $h(x) = \zeta((x-x_0)/\epsilon)/\epsilon$. Pro takovou funkci jistě platí $h \in C_0^1([a,b])$ pro malá ϵ. Dále $\operatorname{supp} h = [x_0-\epsilon, x_0+\epsilon] \subset [a,b]$.

$$0 = \int_a^b u(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} u(x)\frac{1}{\epsilon}\zeta\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} y = x - x_0 \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \end{vmatrix} =$$
$$= \int\limits_{-\epsilon}^{\epsilon} u(y+x_0)\zeta_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} u(x_0).$$

   Díky libovůli $x_0 \in (a,b)$ můžeme prohlást $u \equiv 0$ na $[a,b]$ (v krajních bodech dostáváme tvrzení díky spojitosti u a platnosti na vnitřku intervalu).

2. Jako první si upravíme první integrál pomocí metody *per-partes* jako

$$\int_a^b w(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{[w(x)h(x)]_a^b}_{0} - \int_a^b w'(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Přepišme si tedy cílené trvzení jako

$$\int_a^b \left[w(x)h'(x) + v(x)h(x)\right]\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\int_a^b \left[-w'(x)h(x) + v(x)h(x)\right]\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\int_a^b \left[-w'(x) + v(x)\right]h(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

   tj. dle prvního tvrzení $-w' + v \equiv 0$ na $[a,b]$.

$\square$

Věta 2.5 [Euler-Lagrange]**.** Je dána úloha U. Nechť $y \in \mathcal{M}$ je lokální extrém. Předpokládejme navíc, že $y \in C^2$ a $f \in C^2$. Potom y splňuje na $[a,b]$ rovnici

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z(x, y(x), y'(x)) + f_y(x, y(x), y'(x)) = 0. \tag{E.L.}$$

Důkaz. Dle věty 2.2

$$\exists D\Phi(y;h) = \int_a^b \left[f_y(x,y(x),y'(x))h(x) + f_z(x,y(x),y'(x))h'(x)\right]\,\mathrm{d}x.$$

Dále dle věty 2.1:

$$D\Phi(y;h) = 0 \quad \forall h \in C_0^1([a,b]).$$

To ovšem dle lemmatu 2.4 znamená

$$\int_a^b \left[f_y(x,y(x),y'(x))h(x) + f_z(x,y(x),y'(x))h'(x)\right]\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$-f_z' + f_y \equiv 0 \text{ na } [a,b].$$

$\square$

Grand Finále. Položíme-li pouze v předchozí větě $f = L$ a $y = q$, dostáváme jednorozměrný případ monumentálního fyzikálního objektu, a to Lagrangeových rovnic II. druhu, tj.

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Definice 2.2. Rovnice z předchozí věty se nazývá *Euler-Lagrangeova rovnice funkcionálu* Φ. Každé její řešení, náležící $\mathcal{M}$ (tj. splňující okrajové podmínky $y(a) = A$, $y(b) = B$), nazýváme *extremálou* úlohy U.

Věta 2.6 [Legendre]**.** Je dána úloha U. Nechť $y \in \mathcal{M}$ je C^2, $f \in C^2$. Potom

1. je-li y lokální minimum, je $f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \geq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$;
2. je-li y lokální maximum, je $f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \leq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Důkaz. Využijme znovu pomocné funkce $\varphi(t) \coloneqq \Phi(y + th)$, kde h určíme později.[1] Předpokládejme, že funkcionál Φ má v y lokální minimum, tj. φ má lokální minimum v $t = 0$. Z reálné analýzy jedné proměnné víme, že potom musí platit

$$\varphi'(0) = 0, \qquad\qquad \varphi''(0) \geq 0.$$

Tvar φ' jsme odvodili v důkazu věty 2.2. Můžeme tedy psát

$$\varphi'(t) = \int_a^b \left[f_y(x, y + th, y' + th)h + f_z(x, y + th, y' + th')h'\right] \,\mathrm{d}x.$$

Odvození tvaru φ'' lze provést ve řízení, pišme tedy rovnou

$$\begin{aligned}\varphi''(t) = \int_a^b \big[&f_{yy}(x, y + th, y' + th)h^2 + f_{yz}(x, y + th, y' + th)hh' + \\ &+ f_{zy}(x, y + th, y' + th)h'h + f_{zz}(x, y + th, y' + th)[h']^2\big] \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Díky předpokladu, že $f \in C^2$ ovšem platí rovnost $f_{yz} = f_{zy}$. Pro $\varphi''(0)$ můžeme tedy zjednodušit vyjádření do tvaru

$$\varphi''(0) = \int_a^b \left[f_{yy}(x, y, y')h^2 + 2f_{yz}(x, y, y')hh' + f_{zz}(x, y, y')[h']^2\right] \,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Nyní uvažujme $x_0 \in (a, b)$ a

$$h(x) = h_\epsilon(x) = \begin{cases} \epsilon - |x - x_0| & x \in U(x_0, \epsilon), \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Můžeme tedy uvažovat

$$0 \leq \frac{1}{2\epsilon}\varphi''(0) \equiv I_1(\epsilon) + I_2(\epsilon) + I_3(\epsilon).$$

Dále díky předpokladu $f \in C^2$ můžeme na základě spojtosti psát, že

$$|f_{yy}(x, y(x), y'(x))| \leq K, \qquad\qquad |f_{yz}(x, y(x), y'(x))| \leq K.$$

[1] V této části důkazu u funkcí y, y' a h vynecháváme argument x v zájmu estetiky sazby textu. Formálně je tam samozřejmě stále uvažujeme.

Mimo to také určitě platí

$$|h_\epsilon(x)| \begin{cases} \leq \epsilon & x \in U(x_0, \epsilon), \\ = 0 & \text{jinde}, \end{cases} \qquad |h'_\epsilon(x)| = \begin{cases} 1 & x \in U(x_0, \epsilon), \\ 0 & \text{jinde}. \end{cases}$$

Pro první dva integrály tedy můžeme psát odhad

$$|I_1(\epsilon)| \leq \frac{1}{2\epsilon} \int\limits_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \underbrace{|f_{yy}(x, y(x), y'(x))|}_{\leq K} \underbrace{\left|h^2(x)\right|}_{\leq \epsilon^2} \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2\epsilon} 2\epsilon K \epsilon^2 \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0,$$

$$|I_1(\epsilon)| \leq \frac{1}{2\epsilon} \int\limits_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \underbrace{|f_{yz}(x, y(x), y'(x))|}_{\leq K} \underbrace{|h(x)|}_{\leq \epsilon} \underbrace{|h'(x)|}_{1} \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2\epsilon} 2\epsilon K \epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0,$$

kde refukce (a, b) na $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ proběhla na základě definice $h = h_\epsilon$. Jako poslední odhadneme absolutní hodnotu třetího integrálu, tedy výrazu

$$I_3(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon} \int\limits_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f_{zz}(x, y(x), y'(x))[h']^2(x) \,\mathrm{d}x.$$

Funkce f_{zz} je ovšem v bodě x_0 spojitá a také platí $\int_{\mathbb{R}} [h']^2/(2\epsilon) = 1$. Jsou tedy splněny předpoklady lemmatu 2.3, které dává výsledek

$$I_3(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \to 0} f_{zz}(x, y(x_0), y'(x_0)).$$

Vrátíme-li tedy výsledky jednotlivých integrálů do původní nerovnosti, dostáváme

$$0 \leq I_1(\epsilon) + I_2(\epsilon) + I_3(\epsilon),$$

neboli v limitě $\epsilon \to 0$ konečně

$$f_{zz}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) \geq 0,$$

kde $x_0 \in (a, b)$ je libovolné. Důkaz probíhá analogicky pro případ, kdy y je lokální maximum. □

Poznámka. Během důkazu jsme odvodili tvar druhého Gâteauxova diferenciálu

$$D^2(\Phi; h, h) = \int_a^b \left[f_{yy}(x, y, y')h^2 + 2f_{yz}(x, y, y')hh' + f_{zz}(x, y, y')[h']^2 \right] \,\mathrm{d}x.$$

Lemma 2.7. Nechť f nezávisí explicitně na x, tj. $f = f(y, z)$. Potom každé řešení E.L. rovnice řeší také rovnici

$$-y' f_z(y, y') + f(y, y') = K, \tag{5}$$

kde K je vhodná reálná konstanta.

Důkaz. Označme si $Y \equiv -y' f_z(y, y') + f(y, y')$. Potom jistě $Y = K \iff Y' = 0$ v (a, b). Pro Y' ale platí

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[-y(x)' f_z(y(x), y'(x)) + f(y(x), y'(x)) \right] \\ &= -y''(x) f_z(y(x), y'(x)) - y'(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[f_z(y(x), y'(x)) \right] + \\ &\quad + f_y(y(x), y'(x))y'(x) + f_z(y(x), y'(x))y''(x) \\ &= y' \Bigg[\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(f_z(y(x), y'(x)) \right) + f_y(y(x), y'(x))y'(x)}_{E.L.} \Bigg]. \end{aligned}$$

□

Definice 2.3. Nechť $y \in \mathcal{M}$ je extremála úlohy U. Označme

$$P(x) \equiv f_{zz}(x, y(x), y'(x)), \tag{6}$$
$$Q(x) \equiv f_{yy}(x, y(x), y'(x)) - [f_{yz}(x, y(x), y'(x))]'. \tag{7}$$

Rovnice

$$[P(x)u'(x)]' - Q(x)u(x) = 0 \tag{J}$$

pro neznámou funkci $u = u(x)$ se nazývá *Jacobiho rovnice*, příslušná dané extremále.

Bod $\tilde{x} \in (a, b]$ se nazve *konjugovaný bod* rovnice J, pokud existuje netriviální (tj. ne identicky nulové) řešení $u(x)$ takové, že $u(a) = u(\tilde{x}) = 0$.

Věta 2.8 [Jacobiho]**.** Nechť $y \in C^2([a, b])$ je extremálou úlohy U, nechť $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$. Nechť J je příslušná Jacobiho rovnice, přičemž $P(x) > 0$ v $[a, b]$.

1. Je-li y lokální maximum, pak rovnice J nemá v intervalu (a, b) konjugovaný bod.
2. Jestliže rovnice J nemá v intervalu $(a, b]$ konjugovaný bod, je y ostré lokální minimum.

Zrcadlová verze: $P(x) < 0$ v $[a, b]$, maximum místo minimum.

Opakování [Vázané extrémy]**.** Nechť $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid G(x) = c\}$ a x je lokální extrém $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na množině M. Nechť vektor $\nabla G(x)$ je nenulový. Potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\nabla F(x) - \lambda \nabla G(x) = \mathbf{0}.$$

Definice 2.4. *Variační úlohou s vazbou* rozumíme nalezení extrémů Φ na množině $\mathcal{M}$, kde

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x, \\ \mathcal{M} &= \left\{ y \in C_0^1([a, b]) \mid y(y) = c \right\}, \\ \Psi(y) &= \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{V}$$

Věta 2.9 [Lagrangeův multiplikátor]**.** Nechť $y \in \mathcal{M}$ je lokální extrém úlohy V. Předpokládejme, že $y \in C^2$, $f \in C^2$, $g \in C^2$, navíc $D\Psi(y; h) \neq 0$ alespoň pro jedno $h \in C_0^1([a, b])$. Potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$D\Phi(y; h) - \lambda D\Psi(y; h) = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a, b]). \tag{L}$$

Použití L na úlohu V. Rovnice L tvrdí nulovost Gâteauxova diferenciálu pro funkcionál

$$\chi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) - \lambda g(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x,$$

tedy extrémy V řeší odpovídající E.L. rovnici

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_z(x, y, y') - \lambda g(x, y, y')\right) + f_y(x, y, y') - \lambda g_y(x, y, y') = 0. \tag{8}$$

Poznámka. Poslední dvě věty ponecháváme bez důkazu.