Multilineární algebra

Poznámkový text vyšší algebry pro teoretickou fyziku

Obsah

1. Duální prostor a tensory

„Tenser, said the Tensor. Tension, apprehension, and dissension have begun.“

ALFRED BESTER

V první kapitole se budeme zabývat duálními prostory (nebo zkráceně duály) k vektorovým prostorům. Základními poznatky, na kterých budeme stavět tedy budou pojmy jako *vektorový prostor, báze, dimense a matice přechodu.* Některé ze základních pojmů si tedy zopakujme.

Konvence. V tomto textu se budeme držet standardu, tedy že v případě vektorů[1] budeme zapisovat souřadnice indexy nahoře, kdežto u bázových vektorů budeme psát indexy dolů. Dále budeme dodržovat Einsteinovu sumační konvenci: V takovéto representaci vektoru - jakožto lineární kombinace bázových vektorů - dále vynecháváme sumační znak Σ.

Opakování. Lineárně nezávislé množině generátorů $\{e_i\}$ vektorového prostoru V říkáme *báze* prostoru V. Pokud bázi $\{e_i\}$ vektorového prostoru V napíšeme jako seznam (e_i), mluvíme o *uspořádané bázi.*
Dále lze ukázat, že báze prostoru není dána jednoznačně, ale její počet prvků ano. Každá báze prostoru V má tedy vždy stejný počet prvků, jenž nazýváme *dimense* prostoru V a značíme jej $\dim V$.
To znamená, že libovolný vektor v z vektorového prostoru V s bází $M = \{e_1, \dots, e_n\}$ můžeme napsat jako

$$v = \sum_{i=1}^{\dim V} v^i e_i = v^i e_i,$$

kde v poslední rovnosti využíváme Einsteinovy sumační konvence v indexu i.
Nechť máme dvě báze $M = \{e_1, \dots, e_n\}$, $M' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ vektorového prostoru V dimense n. *Matice přechodu* od M k M', pro kterou platí[2]

$$\begin{aligned} e'_j &= \sum_{i=1}^{n} e_i (A)_{ij} =: A^i{}_j e_i, \\ v^j &= \sum_{i=1}^{n} (A)_{ji} v'^i \equiv A^j{}_i v'^i, \\ v'^j &= (A^{-1})^j{}_i v^i. \end{aligned}$$

1.1 Lineární formy

Definice 1.1.1. Nechť V je vektorový prostHomor nad tělesem $\mathbb{F}$. Definujme prostor $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ všech lineárních forem (také lineárních funkcionálů, kovektorů) na V. Tento prostor se nazývá *duální prostor* k prostoru V.

Poznámka. Podle věty o dimensi prostoru homomorfismů[3] víme, že $\dim V^* = \dim V$.

[1] V případě kovektorů je konvence přesně opačná.
[2] První rovnost pochází z definice, kdežto druhá je triviálním tvrzením o maticích přechodu a třetí je ekvivalentní druhé, neboť $(A^{-1})^j{}_i v^i = (A^{-1})^j{}_i A^i{}_k v'^k = \delta^j{}_k v'^k = v'^j$.
[3] Věta říká, že dimense prostoru $\mathrm{Hom}(V, W)$ všech homomorfismů mezi prostory V, W dimense n, m v uvedeném pořadí, je $\dim(\mathrm{Hom}(V, W)) = n \cdot m$.

Definice 1.1.2. Necht jsou dány báze $M = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$ a $M^* = \{e^1, \dots, e^n\} \subseteq V^*$. Potom tyto báze nazveme *vzájemně duální*, pokud platí, že $\forall i \in \{1, \dots, n\} : e^i(e_j) = \delta^i_j$.

Poznámka. Zajímá-li nás, jak vypadá, když nějaká i-tá forma působí na nějaký vektor v, odpověď je vcelku snadná:

$$e^i(v) = e^i(v^j e_j) = v^j e^i(e_j) = v^i. \tag{1.1}$$

Lemma 1.1.1. Nechť $M = \{e_1, \dots, e_n\}$ je báze V, $\alpha \in V^*$. Pak čísla

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv (\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n))$$

jsou rovny souřadnicím kovektoru α vzhledem k M^*.

Důkaz. Pokud $\alpha \in V^*$ je kovektor, pak pro libovolný vektor $v \in V$ a $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\alpha(v) = \alpha(v^i e_i) = \alpha(e_i)v^i = \alpha(e_i)e^i(v) = (\alpha(e_i)e^i)(v) =: (\alpha_i e^i)(v). \tag{1.2}$$

Díky větě o zadání homomorfismu hodnotami na bázi[4] je kovektor α čísly $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jednoznačně zadán, tedy zobrazení α a $\alpha_i e^i$ z $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ jsou si rovna. □

Příklad. Nechť $V = \mathbb{R}^2$ s bází $B = \{e_1, e_2\}$, kde $e_1 = (3, 2)$ a $e_2 = (4, 3)$. Najděme bázi duáního prostoru V^*.

Řešení. Prvky duálního prostoru vždy můžeme vyjádřit ve tvar $e^1 = a\epsilon^1 + b\epsilon^2, e^2 = c\epsilon^1 + d\epsilon^2$, kde $\epsilon^k(v) = v^k$ vzhledem ke kanonické bázi. Potom musí ale platit

$$\begin{aligned} e^1(e_1) &= 3a + 2b = 1, \\ e^1(e_2) &= 4a + 3b = 0, \\ e^2(e_1) &= 3c + 2d = 0, \\ e^2(e_2) &= 4c + 3d = 1. \end{aligned}$$

Abychom uspokojili platnost nutného vztahu, stačí vyřešit systém čtyř rovnic o čtyřech neznámých. Toto řešení je

$$\begin{aligned} e^1 &= 3\epsilon^1 - 4\epsilon^2, \\ e^2 &= 3\epsilon^2 - 2\epsilon^1. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.1.2. Nechť $M^* = \{e^1, \dots, e^n\}, M'^* = \{e'^1, \dots, e'^n\}$ jsou báze V^* duální k bázím M, M', A je matice přechodu od M k $M', \alpha \in V*$. Potom

$$e'^i = (A^{-1})^i{}_j e^j, \qquad \alpha'_i = A^j{}_i \alpha_j. \tag{1.3}$$

Důkaz. Ať $v \in V$ je libovolný vektor. Pro prvky bází platí $e'_i = A^j{}_i e_j$. Jelikož vektor se transformací báze nemění, můžeme psát[5]

$$v = v^j e_j = v'^j e'_j = v'^j A^p{}_j e_p = v'^p A^j{}_p e_j.$$

[4] V plném znění: Nechť V W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{F}$, $N = \{e_1, \dots, e_n\}$ je báze V a $w_1, \dots, w_n$ je n-tice vektorů z W. Pak existuje právě jedno zobrazení $f : V \to W$, pro které $\forall i \in \{1, \dots, n\} : f(v_i) = w_i$.

[5] Během důkazu mnohokrát zaměňuji indexy, abych došel ke kýženým vztahům ve stejném tvaru. Písmeno indexu je samozřejmě otevřené volbě.

Aby byla rovnost dodržena, musí platit $v^j = v'^p A^j_{\ p}$. Jelikož matice přechodu je vždy regulární (existuje inverse), můžeme ekvivalentně psát

$$v^j (A^{-1})^i_{\ j} = v'^p A^j_{\ p} (A^{-1})^i_{\ j} = v'^p \delta^i_p = v'^i.$$

Pro každý vektor $v \in V$ platí $v^i = e^i(v)$ a $v'^i = e'^i(v)$, speciálně $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Výše ukázanou rovnost lze tedy přepsat jako $e'^i(v) = (A^{-1})^i_{\ j} e^j(v)$ neboli rovnost zobrazení

$$e'^i = (A^{-1})^i_{\ j} e^j.$$

Podobně pro libovolné $\alpha \in V^*$ platí

$$\alpha(v) = \alpha_j e^j(v) = \alpha'_j e'^j(v) = \alpha'_j (A^{-1})^j_{\ i} e^i(v) = \alpha'_p (A^{-1})^p_{\ j} e^j(v),$$

platí tedy nutně $\alpha_j = (A^{-1})^p_{\ j} \alpha'_p$, tudíž ekvivalentně $A^j_{\ i} \alpha_j = A^j_{\ i} (A^{-1})^p_{\ j} \alpha'_p = \delta^p_i \alpha'_p = \alpha'_i$. Závěrem tedy

$$\alpha'_i = A^j_{\ i} \alpha_j.$$

□

Poznámka. Doposud odvozené vztahy pro transformace můžeme shrnout do tabulky:

transformace	**maticově**	**tensorově**
prvky báze V	$e'_r = \sum_b e_b (A)_{br}$	$e'_r = A^b_{\ r} e_b$
prvky báze V^*	$e'^r = \sum_b (A^{-1})_{rb} e^b$	$e'^r = (A^{-1})^r_{\ b} e^b$
souřadnice vektoru	$(v)^T_{M'} = (v)^T_M (A^{-1})^T$	$v'^r = (A^{-1})^r_{\ b} v^b$
souřadnice kovektoru	$(\alpha)^T_{M'} = (\alpha)^T_M A$	$\alpha'_r = A^b_{\ r} \alpha_b$

.

Z tabulky je vidět, že bjekty s indexem dole se transformují pomocí matice A, tzn. *kovariantně*, kdežto objekty s indexy nahoře se transformují pomocí matice A^{-1}, tzn. *kontravariantně*.

Definice 1.1.3. Nechť V, W jsou dva vektorové prostory a $\phi : V \to W$ je homomorfismus. Potom zobrazení $\phi^* : W^* \to V^*$, definované vztahem

$$\phi^*(\alpha) = \alpha \circ \phi, \tag{1.4}$$

nazveme *duální homomorfismus* k homomorfismu ϕ.

Lemma 1.1.3. Nechť $\phi : V \to W$ je homomorfimus, $M \subseteq V, N \subseteq W$ jsou báze, $B = (\phi)_{NM}$ je matice homomorfismu. Potom $(\phi^*)_{M^*N^*} = B^T$, a tudíž hodnosti ϕ a ϕ^* jsou stejné.

Důkaz. Označme $M = \{e_i\}$, $N = \{f_a\}$. Matice B je definována předpisem

$$\phi(e_i) = \sum_{a=1}^{n} (B)_{ai} f_a \equiv B^a_{\ i} f_a.$$

Z definice duálního homomorfismu dále plyne

$$\left[\phi^*(f^j)\right](e_i) = f^j(\phi(e_i)) = B_i^{\ a} f^j(f_a) = B_i^{\ a} \delta^j_a = B_i^{\ j},$$

ale zároveň platí

$$(B_k^{\ j} e^k)(e_i) = B_k^{\ j} e^k(e_i) = B_k^{\ j} \delta^k_i = B_i^{\ j}.$$

Kovektory $\phi^*(f^j)$ a $B_k^{\ j} e^k$ mají stejné hodnoty na bázi M a tudíž jsou si rovny (opět využíváme věty o zadání homomorfismů hodnotami na bázi). V tradiční formě tedy přepis

$$\phi^*(f^j) = B_k^{\ j} e^k \equiv \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{kj} e^k$$

jasně udává rovnost $(\phi^*)_{M^*N^*} = B^T$. □

1.2 Tensorový součin

Definice 1.2.1. Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \to \mathbb{F}$, $g : Y \to \mathbb{F}$ dvě funkce na těchto množinách. Jejich *tensorovým součinem* rozumíme funkci

$$\begin{aligned} f \otimes g : X \times Y \to \mathbb{F}; \\ : (x, y) \mapsto f(x)g(y). \end{aligned}$$

Poznámka. Tensorový součin není komutativní, tedy $f(x)g(y) \neq f(y)g(x)$ (dokonce opačná operace ani nemusí být definována, pokud $X \neq Y$).
Tensorový součin je komutativní, platí tedy $((f \otimes g) \otimes h)(x, y, z) = (f \otimes (g \otimes h))(x, y, z)$, tudíž má smysl psát $f \otimes g \otimes h$.
Pro tensorový součin platí

$$((r_1 f_1 + r_2 f_2) \otimes g)(x, y) = r_1 f_1(x)g(y) + r_2 f_2(x)g(y) = r_1(f_1 \otimes g)(x, y) + r_2(f_2 \otimes g)(x, y),$$

tedy že je bilineární[6] (v druhé složce zcela analogicky).

Příklad. Tensorový součin dvou lineárních forem $\phi : V \to \mathbb{F}$ a $\psi : V \to \mathbb{F}$ je bilineární forma $\phi \otimes \psi$ splňující

$$(\phi \otimes \psi)(v, w) = \phi(v)\psi(w).$$

Jsou-li $\phi = e^i$ a $\psi = e^j$ prvky báze M^*, pak

$$(e^i \otimes e^j)(v, w) = v^i w^j.$$

Příklad. Je-li $A \in M_n(\mathbb{F})$ matice, pak

$$(a_{ij} e^i \otimes e^j)(v, w) = a_{ij} v^i w^j$$

je bilineární forma, jejíž matice vzhledem k bázi M je A. Jak si můžeme povšimnout, poprvé se setkáváme s výrazem, kde jsou dvojice indexů, přes které se sčítá. Narozdíl od matice přechodu, u níž nás konvence „donutila“ psát řádkový index jako horní a sloupcový jako dolní, u matice bilineární formy musíme psát oba indexy dole.

Tensorový součin k lineárních forem je k-lineární forma. Množinu všech k-lineárích forem na vektorovém prostoru V označme symbolem $T_k(V)$. Pak tensorový součin definuje také zobrazení

$$\otimes : T_p(V) \times T_q(V) \to T_{p+q}(V).$$

Lemma 1.2.1. Něchť $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ je báze V. Označme

$$e^{a \ldots b} := \underbrace{e^a \otimes \cdots \otimes e^b}_{q} \in T_q(V).$$

Množina

$$(M^*)^q := \{e^{a \ldots b} \,|\, a, \ldots, b \in \{1, \ldots, n\}\}$$

tvoří bázi prostoru $T_q(V)$ a $\forall T \in T_q(V)$ platí

$$T = T_{a \ldots b} e^{a \ldots b},$$

[6] V obecném případě (rozšíření na více činitelů) je tensorový součin multilineární

kde

$$T_{a\dots b} = T(e_a, \dots, e_b)$$

jsou souřadnice T vzhledem k $(M^*)^q$. Pokud $M' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ a A je matice přechodu od M k M', pak

$$\begin{aligned} e'^{a\dots b} &= (A^{-1})^a{}_r \dots (A^{-1})^b{}_s e^{r\dots s}, \\ T'_{a\dots b} &= A^r{}_a \dots A^s{}_b T_{r\dots s}. \end{aligned}$$

Důkaz. Dle definice tensorového součinu

$$e^{a\dots b}(v, \dots, w) = v^a \dots w^b.$$

Pak ale

$$T(v, \dots, w) = T(v^a e_a, \dots, w^b e_b) = T_{a\dots b} v^a \dots w^b = (T_{a\dots b} e^{a\dots b})(v, \dots, w).$$

Vztah platí pro libovolnou q-tici vektorů $v, \dots, w$ z V, takže $T = T_{a\dots b} e^{a\dots b}$. Odtud zároveň plyne, že $(M^*)^q$ generuje $T_q(V)$. Pokud by existovala čísla $S_{a\dots b}$, pro něž by platilo $S_{a\dots b} e^{a\dots b} = 0$, pak po dosazení vektorů $e_r, \dots, e_s$ od levé strany plyne

$$S_{a\dots b} e^{a\dots b}(e_r. \dots, e_s) = S_{a\dots b} \delta^a_r \dots \delta^b_s = 0,$$

čili všechny koeficienty musí být nulové a $(M^*)^q$ je také lineárně nezávislá.
Z multilinearity tensorového součinu plyne

$$e'^{a\dots b} \equiv e'^a \otimes \dots \otimes e'^b = (A^{-1})^a{}_r e^r \otimes \dots \otimes (A^{-1})^b{}_s e^s = (A^{-1})^a{}_r \dots (A^{-1})^b{}_s e^{r\dots s}$$

a poslední tvrzení plyne z

$$T'_{a\dots b} = T(e'_a, \dots, e'_b) = T(A^r_a e_r, \dots, A^s_b e_s) = A^r_a \dots A^s_b T_{r\dots s}.$$

□

Poznámka. Pokud $T_{ab\dots k}$ a $S_{li\dots t}$ jsou souřadnice $T \in T_p(V)$ a $S \in T_q(V)$ vůči M, pak

$$(T \otimes S)_{ab\dots t} = T_{ab\dots k} S_{li\dots t}$$

jsou souřadnice $T \otimes S \in T_{p+q}(V)$ vůči stejné bázi.

Příklad. Pokud α je kovektor, pak se jeho souřadnice transformují jako $\alpha'_a = A^r{}_a \alpha_r$, neboli maticově $(\alpha)^T_{M'} = (\alpha)^T_M A$, kde $(\alpha)^T_M$ je *řádkový* vektor souřadnic α vůči M.
Srovnejme s transformací souřadnic vektorů $(v)_M = A(v)_{M'}$, tedy $(v)^T_{M'} = (v)^T_M (A^{-1})^T$. Matici $(A^{-1})^T$ se říká *matice kontragradientní* k A.

Příklad. Pokud g je bilineární forma, pak se její souřadnice transformují podle vztahu

$$g'_{ab} = A^r{}_a A^s{}_b g_{rs}$$

neboli maticově

$$G' = A^T G A,$$

kde interpretujeme souřadnice $G = (g_{ab})$ jako matici bilineární formy vzhledem k M.

Příklad. Souřadnice T_{abc} trilineární formy T můžeme interpretovat buď jako $n \times n \times n$ krychličku čísel, nebo jako řádkový vektor matic

$$(T_{1bc}, T_{2bc}, \dots, T_{nbc}) =: (((T_1)_{bc}), ((T_2)_{bc}), \dots, ((T_n)_{bc})).$$

Transformační vztah $T'_{abc} = A^r_a A^s_b A^t_c T_{rst}$ se pak dá přepsat jako

$$(T'_1, \dots, T'_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} A^T T_i A, \sum_{i=1}^{n} a_{i2} A^T T_i A, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} A^T T_i A \right).$$

Volba toho, který bude mít „vektorový“ index (ostatní dva mají indexy „maticové“), je samozřejmě volná a záleží pouze na nás, který zvolíme. Zavedení matic T_i je jenom početní a notační pomůcka, což je zdůrazeněno i tím, že jsme v posledním vztahu nepoužili sumační konvenci a zapsali elementy a_{ij} matice A tak, jak jsme zvyklí z dřívějška.

1.3 Kovariantní a kontravariantní tensory

Věta 1.3.1 [Duál duálu]**.** Nechť V je vektorový prostor konečné dimense nad $\mathbb{F}$. Pak existuje isomorfismus V a $(V^*)^*$, který nezávisí na volbě báze V.

Důkaz. Nechť $v \in V$. Dále definujme homomorfismus $f_v : V^* \to \mathbb{F}$ tak, že pro všechna $\alpha \in V^*$ platí $f_v(\alpha) = \alpha(v)$. Platí, že f_v je lineární forma na V^*, protože pro všechna α, $\beta \in V^*$ a pro všechna r, $s \in \mathbb{F}$ platí

$$f_v(r\alpha + s\beta) = (r\alpha + s\beta)(v) = r\alpha(v) + s\beta(v) = rf_v(\alpha) + sf_v(\beta).$$

Můžeme tedy také definovat zobrazení

$$\begin{aligned} \Phi : V &\to (V^*)^*; \\ : v &\mapsto f_v, \end{aligned}$$

které je též homomorfismem, neboť pro všechny v, $w \in V$, pro všechna r, $s \in \mathbb{F}$ a pro libovolné $\alpha \in V^*$ platí

$$\begin{aligned} [\Phi(rv + sw)](\alpha) &= f_{rv+sw}(\alpha) = \alpha(rv + sw) \\ &= r\alpha(v) + s\alpha(w) = rf_v(\alpha) + sf_w(\alpha) \\ &= r[\Phi(v)](\alpha) + s[\Phi(w)](\alpha). \end{aligned}$$

Hodnoty zobrazení $\Phi(rv + sw)$ a $r\Phi(v) + s\Phi(w)$ se rovnají pro všechna $\alpha \in V^*$, musí tedy být totožná.
Dále ověříme, že zobrazení Φ je prosté. Podle definic

$$\operatorname{Ker} \Phi = \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\} = \{v \in V \mid \forall \alpha \in V^* : f_v(\alpha) = 0\} = \{v \in V \mid \forall \alpha \in V^* : \alpha(v) = 0\}.$$

Pro každý nenulový vektor v ale existuje lineární forma α, pro kterou $\alpha(v) \neq 0$. Definujme zobrazení $\alpha : V \to \mathbb{F}$ tak, že $u + rv \mapsto r$, kde $u \in V \backslash \{v\}_l$ a $r \in \mathbb{F}$, tedy $rv \in \{v\}_l$. Pro tuto formu pro každá $(u + rv)$, $(w + rv) \in V \backslash \{v\}_l$ a s, $t \in \mathbb{F}$ platí

$$\begin{aligned} \alpha(s[u + rv] + t[w + rv]) &= \alpha([su + tw] + r(s + t)v) = r(s + t), \\ s\alpha(u + rv) + t\alpha(w + rv) &= sr + tr = r(s + t), \\ \therefore \alpha(s[u + rv] + t[w + rv]) &= s\alpha(u + rv) + t\alpha(w + rv). \end{aligned}$$

Tato identita platí pro všechny hodnoty α, tudíž α je homomorfismus z V do $\mathbb{F}$, tj. lineární forma. Ověřili jsme tedy, že pro každý nenulový vektor v ale existuje lineární forma α, pro kterou $\alpha(v) \neq 0$. Proto $\operatorname{Ker}\Phi$ musí být nulový podprostor.
Díky větě o dimensi jádra a obrazu Φ víme, že $\dim V = \dim V^* = \dim(V^*)^*$. To znamená, že zobrazení Φ je isomorfismus. Zobrazení bylo definováno bez výběru báze, čímž je tvrzení dokázáno. □

Poznámka. Zobrazení Φ použité v důkazu předchozí věty se nazývá *kanonický isomorfismus* V a V^*. Umožňuje ztotožnit vektory (prvky V) a „ko-kovektory“ (prvky $(V^*)^*$) a v jistém smyslu vyhlásit rovnoprávnost vektorů a kovektorů: kovektor je forma na vektorech, vektor je forma na kovektorech. To lze vidět zavedením zobrazení

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle &: V \times V^* \to \mathbb{F}; \\ &: (v,\alpha) \mapsto \langle v,\alpha\rangle := \alpha(v) = [\Phi(v)](\alpha) \equiv v(\alpha), \end{aligned}$$

kterému se obvykle říká *párovaní* vektorů a kovektorů. Přirozená báze $(M^*)^*$ ve $(V^*)^*$ je ztotožněná přímo s bází $M = \{e_1, \dots, e_n\}$ a definici duální báze můžeme pomocí párování zapsat jako

$$\langle e_j, e^i\rangle = \delta^i_j.$$

V souřadnicích se pak párování vektoru v a kovektoru α vyjádří vztahem

$$\langle v,\alpha\rangle = \langle v^i e_i, \alpha_j e^j\rangle = v^i\alpha_j\langle e_i, e^j\rangle = v^i\alpha_j\delta^j_i = \alpha^i\alpha_i.$$

Poznámka. Prostory V a V^* jsou také isomorfní, protože mají stejnou dimensi. Jeden takový isomorfismus by mohl být: zvolme ve V bází M a vektoru $v \in V$ přiřaďme kovektor $\alpha \in V^*$, jehož souřadnice $(\alpha)_M$ jsou rovny $(v)_M$. Takový isomorfismus je však pro každou volbu báze různý, a proto neexistuje žádný kanonický isomorfismus mezi V a V^*.

Poznámka. V nekonečné dimensi není obecně zobrazení Φ surjektivní, máme tedy pouze *kanonické vnoření* V do V^*.

Chápeme-li vektory jako lineární formy na kovektorech, můžeme definovat prostor $T^q(V)$ všech q-lineárních forem na kovektorech, tzv. *multivektorů*. Lze tedy vyřknout obdobu lemmatu 1.2.1 pro případ k-lineárních forem.

Lemma 1.3.2. Nechť $M = \{e_1, \dots, e_n\}$ je báze V. Označme

$$e_{a\dots b} := \underbrace{e_a \otimes \cdots \otimes e_b}_{q} \in T^q(V).$$

Množina

$$M^q := \{e_{a\dots b} \,|\, a, \dots, b \in \{1, \dots, n\}\}$$

tvoří bázi prostoru $T^q(V)$ a $\forall T \in T^q(V)$ platí

$$T = T^{a\dots b} e_{a\dots b},$$

kde

$$T^{a\dots b} = T(e^a, \dots, e^b)$$

jsou souřadnice T vzhledem k $M^q(V)$. Pokud $M' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ a A je matice přechodu od M k M', pak

$$\begin{aligned} e'_{a\dots b} &= A^r{}_a \dots A^s{}_b e_{r\dots s}, \\ T'^{a\dots b} &= ((A)^{-1})^a{}_r \dots ((A)^{-1})^b{}_s T^{r\dots s}. \end{aligned}$$

Příklad. To be continued