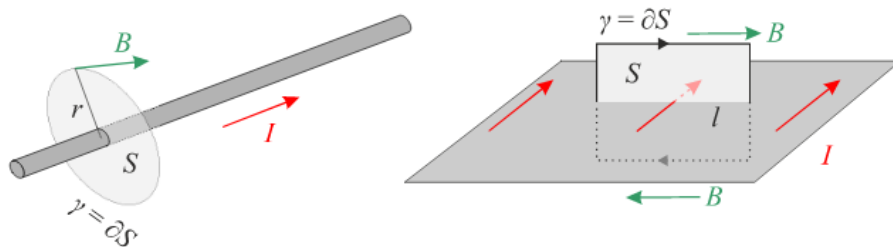


Magnetické pole

Disclaimer. Obrázky nejsou mojí tvorbou, jsou vypůjčeny ze souboru seminářů od prof. Kulhánka.

Podobnou roli Gaussovu zákonu elektrostatiky v magnetostatice hraje zákon Ampérův. Jedná se o velice mocný výpočetní nástroj, který může z výpočtu, který by byl jinak pracný, učinit jednořádkovou trivialitu. Má však stejné hranice jako v elektrostatiice zákon Gaussův, což jsou symetrie. Ampérův zákon nám značně zjednodušuje práci v magnetostatických polích, ale pouze v případě symetrických úloh. Pro obecné úlohy musíme použít vztahů obecnějších, jako například Biot-Savartův zákon. Takovými nepříjemnostmi my se však dnes zabývat nebudeme a vystačíme si s Ampérovým zákonem, jakožto s jednou z Maxwellových rovnic¹ v integrálním tvaru.



Obrázek 1: Ilustrační obrázek k příkladům 1 a 3

Příklad 1. Určete velikost magnetického pole v okolí dlouhého přímého vodiče protékaného elektrickým proudem I .

Řešení. Z Maxwellových rovnic víme

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Můžeme tedy učinit úvahu, že siločáry magnetického pole jsou vždy uzavřené (nebo nekonečné). Mohli bychom tedy kreslit libovolný tvar magnetického pole okolo vodiče, ale rotační symetrie válcového vodiče nám diktuje jediný možný tvar takovýchto uzavřených siločar a to jsou kružnice.² Napišme tedy Ampérův zákon v integrálním tvaru

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I,$$

kde za integrační křivku (vizte obrázek 1 vlevo) bereme výhodně kružnici souosou s vodičem. Výhodnost volby spočívá v tom, že, jak jsme právě určili, takto zvolená křivka bude mít v každém bodě tečný vektor kolineární s vektorem magnetické indukce. Původně složitý integrál vektorového pole se nám zjednoduší na integraci skalární funkce a můžeme tak psát

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_\gamma B d\ell = B \oint_\gamma d\ell = B\ell = B2\pi r.$$

¹V Maxwellových rovnicích bychom tento zákon našli ještě rozšířený o časovou derivaci elektrického pole, kterou tam přidal právě až Maxwell. Jelikož my se však zabýváme čistě magnetostatikou (časové derivace polí jsou tedy nulové), nemusíme tento elektrodynamický vliv do našich výpočtů zahrnovat.

²Tuto úvahu není samozřejmě třeba pokaždé dělat, člověk toto zná již ze střední školy z Ampérova zákona pravé ruky. Zde je však pouze pěkné vysvětlení. Ampérovo pravidlo pravé ruky dále udává směr otáčení těchto siločar, což již vyplývá kvalitativně z Biot-Savartova zákona.

Můžeme tedy psát rovnou výsledek

$$B2\pi r = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Přidáním vektorového charakteru magnetického pole do výsledku, který jsme získali úvahou, můžeme psát

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi,$$

kde \mathbf{e}_φ je jednotkový vektor ve směru růstu polární souřadnice φ .

Příklad 2. Vypočítejte indukci magnetického pole buzeného dvěma přímými nekonečně dlouhými rovnoběžnými vodiči, které jsou od sebe vzdáleny d a teče jimi proud I stejným směrem ve vzdálenosti a od prvního vodiče na společné kolmé spojnici obou vodičů. Vodiče jsou umístěny ve vakuu.

Řešení. Díky námi odvozenému vztahu pro magnetické pole (tzv. magnetickou indukci) v okolí přímého vodiče se jedná téměř o pouhé dosazení do vzorce. Pouze tentokrát se jedná o situaci, kdy máme dva vodiče souhlasného proudu, takže provedeme superposici příspěvků od obou vodičů. Z naší předchozí úvahy (Ampérovo pravidlo pravé ruky) pro jednotlivé přímé vodiče vyplývá, že směry jimi generovaných magnetických polí budou opačné, tudíž musíme jejich příspěvky odečíst. Dostáváme tedy

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-a)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right).$$

Příklad 3. Určete magnetické pole v okolí plochy protékané elektrickým proudem.

Řešení. V případě roviny protékané proudem, bude magnetické pole (znovu dle Ampérova pravidla pravé ruky) rovnoběžný s plochou, jak je znázorněno na obrázku 1 vpravo. Zvolme tedy jako integrační křivku obdélník kolmý na rovinu a směr proudu. Díky tomu se nám zjednoduší integrál na

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\mathcal{I}_{\parallel} + 2\mathcal{I}_{\perp},$$

kde \mathcal{I}_{\parallel} je úsek integrace rovnoběžný s plochou (a tedy i se siločarami pole) a \mathcal{I}_{\perp} je kolmý úsek. Díky vlastnostem skalárního součinu $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ s takto definovanou křivkou můžeme tedy psát

$$2\mathcal{I}_{\parallel} + 2\mathcal{I}_{\perp} = 2B\ell + 0 = 2B\ell.$$

Můžeme tedy psát již závěr, jedinou změnou bude vyjádření celkového protékaného proudu pomocí proudové hustoty jako $I = i\ell$. Konečně tedy

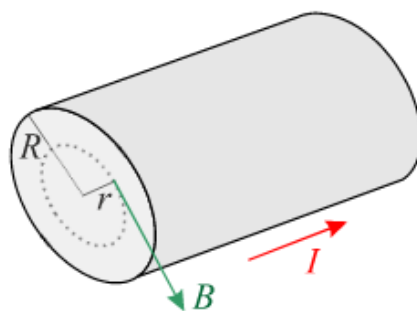
$$2B\ell = \mu_0 i\ell,$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}.$$

Přidáme-li do výsledku námi zvažovaný vektorový charakter, dostáváme výsledek ve tvaru

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mathbf{e}_x(\mu_0 i)/2, & \text{pro } z > 0, \\ -\mathbf{e}_x(\mu_0 i)/2, & \text{pro } z < 0, \end{cases}$$

kde \mathbf{e}_x je znovu jednotkový vektor ve směru růstu, tentokrát kartézské, souřadnice x .



Obrázek 2: Ilustrační obrázek k příkladu 4

Příklad 4. Určete magnetické pole uvnitř i vně vodiče, jehož průřezem protéká konstantní proudová hustota. Vodič je natolik dlouhý, že lze zanedbat okrajové efekty.

Řešení. Zde vlastně dořešíme první úlohu i uvnitř vodiče, přičemž ke konsolidaci využijeme již dříve získaného vztahu pro vnější pole. Tentokrát však při využití Ampérovovy věty využijeme poměrného proudu I_r , který (jak je vidět z obrázku 2) omezuje celkový proud I volbou integrační kružnice o poloměru $r < R$ ve stejném poměru jako poměry uzavřených ploch, tedy $I_r = I(S_r/S_R)$.

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \mu_0 I_r, \\ B 2\pi r &= \mu_0 I \frac{S_r}{S_R}, \\ B 2\pi r &= \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}, \\ B &= \mu_0 I \frac{r}{2\pi R^2}.\end{aligned}$$

Spojíme-li výsledek s řešením prvního příkladu, můžeme pro magnetické pole generované vodičem psát

$$B = \begin{cases} \mu_0 I \frac{r}{2\pi R^2}, & \text{pro } r \leq R, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & \text{pro } r > R. \end{cases}$$