Domácí úkol A8B37SAS - 18.3.2020

---

1 Příklad 1

1.1 1a

Naším úkolem je nalézt koeficienty Fourierovy řady

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}. \tag{1}$$

Pro náš signál tedy můžeme psát (pro $n \neq 0$)

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{T_0}\left(\int_{-T_0/4}^{T_0/4} \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\underbrace{\int_{-T_0/4}^{T_0/4} \sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t}_{0}\right) = \tag{2}$$

$$= \frac{2A}{T_0} \int_{0}^{T_0/4} \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{2A}{T_0 n\omega_0}\Bigg[\sin(n\omega_0 t)\Bigg]_0^{T_0/4} = \frac{A}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right). \tag{3}$$

Pro $n = 0$ koeficient lehce dopočítáme jako

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{A}{2}. \tag{4}$$

Dohromady tedy máme

$$c_n = \begin{cases} \frac{A}{\pi n}\sin(n\frac{\pi}{2}), & \text{pro } n \neq 0, \\ \frac{A}{2}, & \text{pro } n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1.2 1b

Postupujeme analogicky jako v 1a:

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/6}^{T_0/6} A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{2A}{T_0}\int_0^{T_0/6}\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{A}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right), \tag{6}$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)\,\mathrm{d}t = \cdots = \frac{A}{3}, \tag{7}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{A}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right), & \text{pro } n \neq 0, \\ \frac{A}{3}, & \text{pro } n = 0. \end{cases} \tag{8}$$

1.3 Porovnání koeficientů

1.3.1 Hodnoty maxim

$$\max\nolimits_a(c_n) = \Big| n = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \Big| = \frac{A}{\pi}, \tag{9}$$
$$\max\nolimits_b(c_n) = \Big| n = \frac{3}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z} \Big| = \frac{2}{3}\frac{A}{\pi}, \tag{10}$$
$$\max\nolimits_a(c_n) = \frac{3}{2}\max\nolimits_b(c_n). \tag{11}$$

Signál a má o třetinu vyšší maximální hodnotu koeficientů.

1.3.2 Četnost nulových koeficientů

$$c_a = 0 \Leftrightarrow n = 2k, k \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$
$$c_b = 0 \Leftrightarrow n = 3k, k \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Signál a má o polovinu vyšší četnost nulových koeficientů.

2 Příklad 2

2.1 2a

$s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$
Postup je defacto analogický příkladu 1, takže opakované kroky nemusíme komentovat.

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)e^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\cos\left(n\omega_0 t\right)\,\mathrm{d}t = \tag{14}$$
$$= \cdots = \frac{n\sin(\pi n)}{\pi(1-n^2)}, \quad n \neq \pm 1, \tag{15}$$
$$c_{\pm 1} = \frac{T_0}{2}. \tag{16}$$
$$c_n = \begin{cases} \frac{n\sin(\pi n)}{\pi(1-n^2)}, & \text{pro } |n| \neq 1, \\ \frac{T_0}{2}, & \text{pro } |n| = 1. \end{cases} \tag{17}$$

Koeficienty zachovaly sudou symetrii cosinu, tj. platí $c_{-n} = c_n$.

2.2 2b

$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\sin\left(n\omega_0 t\right)}_{\text{sudá funkce}} = \cdots = \frac{\sin(\pi n)}{\pi(n^2-1)}, \quad n \neq \pm 1, \tag{18}$$

$$c_{\pm 1} = \frac{T_0}{2}. \tag{19}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{\sin(\pi n)}{\pi(n^2-1)}, & \text{pro } |n| \neq 1, \\ \frac{T_0}{2}, & \text{pro } |n| = 1. \end{cases} \tag{20}$$

Koeficienty zachovaly lichou symetrii sinu, tj. platí $c_{-n} = -c_n$.

3 Příklad 3

$s(t) = s_{1a}(t)s_{2a}(t)$.

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} A\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = A\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi(1-n^2)}, \quad n \neq \pm 1, \tag{21}$$

$$c_{\pm 1} = \frac{A}{4}, \tag{22}$$

$$c_n = \begin{cases} A\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi(1-n^2)}, & \text{pro } |n| \neq 1, \\ \frac{A}{4}, & \text{pro } |n| = 1. \end{cases} \tag{23}$$