

Teoretická mechanika v klasické formulaci

Jiří Podolský

Studijní text k přednášce NOFY003
„Teoretická mechanika“

Ústav teoretické fyziky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova

Praha
březen 2020

© Jiří Podolský, 2020

Obsah

Předmluva a poděkování	4
Část I. MECHANIKA HMOTNÝCH BODŮ	7
1 Newtonovská mechanika	7
1.1 Hlavní pojmy, předpoklady a meze klasické mechaniky	7
1.2 Newtonovy pohybové zákony	7
1.3 Od Newtona k analytické mechanice	9
2 Newtonovy rovnice s vazbami	11
2.1 Vazby a jejich klasifikace	11
2.2 Lagrangeovy rovnice I. druhu	13
2.2.1 Více hmotných bodů a více vazeb	16
2.3 d'Alembertův princip mechaniky	17
2.4 Princip virtuální práce	20
3 Lagrangeův formalismus	21
3.1 Popis systému	21
3.1.1 Zavedení zobecněných souřadnic	21
3.1.2 Konfigurační prostor a zobecněné rychlosti	23
3.2 Odvození Lagrangeových rovnic II. druhu	23
3.2.1 Nejjednodušší situace	23
3.2.2 Nejobecnější situace	25
3.2.3 Potenciál a Lagrangeova funkce	26
3.2.4 Zobecněný potenciál	27
3.2.5 Příklad: částice v centrálním poli	28
3.3 Metody řešení pohybových rovnic a integrály pohybu	30
3.4 Pohyb v poli centrální síly	33
3.4.1 Pohyb planet aneb Keplerova úloha	34
3.4.2 Historická vsuvka z rudolfínské Prahy	36
3.4.3 Metoda efektivního potenciálu	37
3.4.4 Rozptyl nabitých částic	38
3.5 Problém dvou těles	40
3.6 Problém tří těles	41
4 Hamiltonův variační princip	43
4.1 Základy variačního počtu	43
4.1.1 Historické úlohy	43
4.1.2 Matematický aparát	44
4.1.3 Řešení historických úloh	46
4.2 Formulace Hamiltonova variačního principu	48
4.2.1 Hamiltonův variační princip v teorii pole	51

4.3	Teorém Emmy Noetherové	53
4.4	Kalibrační transformace a kalibrační pole	57
5	Hamiltonův formalismus	59
5.1	Základní pojmy Hamiltonova formalismu	59
5.1.1	Kanonická hybnost	59
5.1.2	Fázový prostor	59
5.1.3	Hamiltonova funkce	61
5.2	Hamiltonovy kanonické rovnice	62
5.3	Shrnutí a hlubší geometrický náhled	64
5.4	Klasické příklady	65
5.5	Poissonovy závorky	66
5.5.1	Definice a algebraické vlastnosti	66
5.5.2	Fundamentální Poissonovy závorky	67
5.5.3	Poissonovy závorky a integrály pohybu	68
5.6	Užití Hamiltonova formalismu ve fyzice	70
5.7	Kanonické transformace	73
5.7.1	Podmínky kanoničnosti transformace	74
5.7.2	Jak prakticky zjistit, zda transformace je kanonická	76
5.7.3	Důležité vlastnosti kanonických transformací	77
5.8	Hamiltonova–Jacobiho teorie	80
5.8.1	Shrnutí postupu, metody řešení a příklad	81
5.8.2	Některé teoretické aspekty Hamiltonovy–Jacobiho teorie	82
	Část II. MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA	86
6	Kinematika tuhého tělesa	87
6.1	Vektory a tenzory	87
6.2	Relativita otáčivého pohybu	89
6.3	Zavedení úhlové rychlosti	89
6.4	Eulerovy úhly a Eulerovy kinematické rovnice	92
6.5	Zrychlení v neinerciální soustavě	93
7	Dynamika tuhého tělesa	94
7.1	Tenzor setrvačnosti	94
7.2	Eulerovy dynamické rovnice	97
7.3	Odvození pomocí Lagrangeova formalizmu	97
8	Aplikace: setrvačníky	100
8.1	Volný setrvačník (bezsilový)	100
8.2	Těžký symetrický setrvačník s pevným bodem	102
	Část III. MECHANIKA KONTINUA	105
9	Rovnice struny a její řešení	106
9.1	Odvození rovnice pro příčné kmity struny	106
9.2	Lagrangeova funkce struny	107
9.3	Řešení rovnice struny	108
9.3.1	Metoda d'Alembertova	108
9.3.2	Metoda Bernoulliho–Fourierova	109
9.3.3	Příklad na Fourierovy řady	110
9.4	Další okrajové podmínky: volný konec, tření	111

10 Mechanika kontinua	114
10.1 Lagrangeův a Eulerův popis	114
10.2 Tekutý objem	116
10.3 Síly objemové a plošné, podmínky rovnováhy	117
10.4 Rovnice kontinuity a pohybová rovnice	118
10.5 Newtonovská a dokonalá tekutina	119
10.6 Nevířivé proudění dokonalé tekutiny a Bernoulliho rovnice	119
10.7 Vlny v dokonalé tekutině	120
10.8 Proudění vazké tekutiny, Navierova–Stokesova rovnice	121
10.9 Geometricky podobná proudění	121

Předmluva a poděkování

Tento text by nemohl vzniknout bez Jiřího Langer, mého skvělého učitele a nyní blízkého kolegy z Ústavu teoretické fyziky. Doc. RNDr. Jiří Langer, CSc., se výuce teoretické mechaniky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy věnuje šest desetiletí. Za tu dobu vychoval mnoho tisíc studentů.

Mezi nimi jsem se na podzim roku 1983 ocitl i já. Předmět *Teoretická mechanika* pro studenty 2. ročníku fyziky na Matfyzu mě doslova uhranul a 22. prosince jsem z něj úspěšně složil zkoušku (zápis v indexu mi doc. Langer provedl zeleným inkoustem, podobně jako v prvním ročníku prof. Kvasnica za *Proseminář matematické fyziky*). Nemohl jsem tehdy tušit, že se mi tento nádherný předmět stane celoživotním pedagogickým osudem. Jsem za to opravdu vděčný, a klíčovou roli v tom opět sehrál Jiří Langer. Když jsem v roce 1989 nastoupil na vědeckou aspiranturu na katedru matematické fyziky MFF UK (postupně se mohla zase vrátit k tradičnímu názvu Ústav teoretické fyziky), zvolil si mne jako jednoho z cvičících tohoto předmětu.

V roce 1990 jsem odjel studovat do USA a tam shodou okolností na University of New Mexico pomáhal jako Graduate Assistant výbornému pedagogovi prof. Charlesi Beckelovi s výukou kurzu *Analytical Mechanics*. Bylo velmi zajímavé a poučné na vlastní kůži zažít, jaký způsobem probíhá výuka teoretické mechaniky na amerických univerzitách a jaký je její obsah.

Po návratu do Prahy mne Jiří Langer podrobně vyzpovídal. Přemýšleli jsme potom, jak nejlépe zkombinovat tradiční středoevropský styl výuky s americkým, ve kterém se namísto cvičení jenom zadávají domácí úkoly a namísto písemného a ústního zkoušení jen píší testy. Tak vznikl náš „hybridní“ bodový systém,¹ který se opírá o pozitivní motivaci studentů a vede k jejich průběžné práci. Dost se nám osvědčil.

Krátce poté v roce 1995 mne Jiří Langer přizval, abych s ním kurz *Teoretická mechanika* přednášel. Za tuto jeho velkorysou nabídku, která pro mne byla jako z říše snů, jsem mu dodnes velmi zavázán. Tak jsem se jako začínající odborný asistent dostal k přednášení mechaniky na MFF UK. Nejprve jsem ze semestrálního kurzu převzal osm přednášek věnovaných hmotným bodům (až po Hamiltonovu–Jacobiho teorii), o čtyři roky později jsem přibral i dvě přednášky o mechanice tuhého tělesa. Od roku 2000 tak na kolegu Langer zbylo každoroční přednášení mechaniky kontinua. Inu, podal mi prst a přišel o skoro celou ruku. . .

Tolik můj osobní příběh. Pro zachování historické paměti snad bude zajímavé uvést i vážené předchůdce, přednášející tohoto předmětu na Matematicko-fyzikální fakultě od jejího osamostatnění v roce 1952. Podle osobních vzpomínek Jiřího Langer a některých mých (možná neúplných) podkladů bylo personální obsazení výuky následující:

Miroslav Brdička	zhruba do roku 1960
Arnošt Hladík	60. léta
Jiří Langer	cvičení a od roku 1964 části přednášek
Jiří Blank, Luboš Valenta	několikrát v 70. letech
Jiří Langer	zhruba od roku 1980
Jiří Podolský	od roku 1995

Uvedená jména dokládají, že je už dlouhou tradicí, aby výuku teoretické mechaniky zajišťovali členové Ústavu (katedry) teoretické (matematické) fyziky. Je to tradice nesmírně zavazující.

¹Během semestru lze získat až 100 bodů (10 bodů za každý ze 4 domácích úkolů a 60 bodů za napsání testu obsahujícího 3 úlohy). Kdo získá alespoň 60 bodů, dostane zápočet. Kdo získá alespoň 80 bodů, nemusí psát písemnou část zkoušky. Odměnou za 95 a více bodů je čokoládový bonbón.

Umocněná tím, že vydáme-li se hlouběji do minulosti výuky mechaniky na Univerzitě v Praze, setkáme se s profesory Trkalem, Záviškou, Kolářkem, Kučerou a Strouhalem. A ještě před nimi také s Ernstem Machem, který zde během téměř třicetiletého působení jako profesor experimentální fyziky napsal a v roce 1883 vydal vlivnou učebnici mechaniky *Die Mechanik in ihrer Entwicklung: historisch-kritisch dargestellt*. Toto pedagogicky skvěle podané dílo prezentuje téma z historického pohledu a obsahuje kritiku newtonovského konceptu absolutního prostoru a pohybu. Tento tzv. Machův princip se stal později velkou inspirací pro Alberta Einsteina. Je pozoruhodným faktem, že také Einstein sám působil o tři desetiletí později na téže (německé) Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze. Jako profesor teoretické fyziky zde během tří semestrů v letech 1911–1912 vyučoval *Mechaniku hmotných bodů* a *Mechaniku kontinua*.

Klasická Newtonova mechanika, která v historickém i obsahovém slova smyslu stojí k základech celé fyziky, je tu s námi již více než tři staletí. Před dvěma stoletími byla zásluhou Lagrangeho, Hamiltona a dalších oděna do velmi elegantního matematického hávu analytické mechaniky. Takto formulovaná teoretická mechanika tvoří východisko výuky fyziky na každé univerzitě. Bez jejího pochopení nelze postoupit dále k teorii relativistické ani kvantové. Knih, učebnic a skript teoretické mechaniky je proto v knihovnách světa doslova nepřehledné množství, ve všech světových jazycích i v bezpočtu jazyků lokálních.

Uveďme seznam významných českých učebnic teoretické mechaniky vzniklých a užívaných na Karlově univerzitě v Praze. První vydal profesor matematické fyziky a teoretické astronomie Augustin Seydler už v roce 1880, ve 20. století pak následovalo několik dalších:

Augustin Seydler	<i>Theoretická mechanika pro vysoké školy</i>	1880
Bohumil Kučera	<i>Základy mechaniky tuhých těles</i>	1921
Viktor Trkal	<i>Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa</i>	1956
Miroslav Brdička	<i>Mechanika kontinua</i>	1959
Miroslav Brdička, Arnošt Hladík	<i>Teoretická mechanika</i>	1987

Je vidět, že pražské univerzitní učebnice teoretické mechaniky v minulosti vznikaly s odstupem zhruba 30–40 let, tedy vždy po jedné až dvou generacích fyziků.

Z této perspektivy se zdá, že s odstupem více než 30 let od poslední „kanonické knihy“ Brdičky a Hladíka [1] možná nyní opět nadešel příhodný čas poskytnout studentům další učebnici, která by se pokusila reflektovat nedávné změny matematického formalizmu (použití abstraktního a účinného jazyka diferenciální geometrie), reagovala na vývoj oboru (posun ke studiu složitých dynamických systémů), modernizovala styl výkladu (efektivní stručnost při zachování adekvátní rigoróznosti), zvolila vhodnou formu prezentace (použití více obrázků a názorných schémat) i sazby (formát a velikost písma, přívětivá grafická podoba stránek).

Krátce po roce 2000 jsme se již dočkali moderních textů tohoto typu, zejména aktualizovaných vydání Brdičkovy *Mechaniky kontinua* [2] se spoluautory Samkem a Sopkem, a také velmi pěkné učebnice *Mechanika ve fyzice* od kolegů Horského, Novotného a Štefaníka z brněnské Masarykovy univerzity [3]. Tyto knihy nyní doporučujeme studentům na MFF UK jako referenční.

Nicméně již koncem 90. let jsme s Jiřím Langerem pojali záměr vypracovat vlastní studijní texty ušité přímo na míru našeho kurzu *Teoretické mechaniky*. S použitím svých v \TeX u vysázených podrobných příprav na přednášky jsem v roce 1999 sepsal studijní materiál z tuhého tělesa a kolega Langer koncipoval elegantní a kompaktní úvod do jím přednášené mechaniky kontinua a rovnice struny (přepřelováním a rozšířením tohoto Langerova textu nyní vznikla III. část předkládané učebnice). V roce 2000 jsme oba materiály dali volně k dispozici studentům. Během 20 let jsem pak postupně dopisoval další chybějící kapitoly (a průběžně opravoval a měnil ty již existující). Nejprve to byl Lagrangeův formalismus (2006), pak Hamiltonův (2016) a nakonec i dlouho odkládaná kapitola věnovaná Hamiltonovu variačnímu principu (2019). Nyní již tedy bylo možné učebnici dokončit a v ucelené formě předložit studentům. Snad bude k užítu.

Část I.

MECHANIKA
HMOTNÝCH BODŮ

Kapitola 1

Newtonovská mechanika

1.1 Hlavní pojmy, předpoklady a meze klasické mechaniky

Úkolem klasické newtonovské mechaniky je popsat pohyb objektů, které spolu interagují skrze silová působení. Klasická mechanika při tom pracuje s následujícími základními pojmy, o nichž činí tyto apriorní předpoklady:

- **prostor:** *spojitý, 3-dimenzionální, euklidovský, homogenní a izotropní*
- **čas:** *spojitý, 1-dimenzionální, synchronizovaný, rovnoměrně plynoucí, jednosměrný*
- **objekty:** *idealizovány soustavou rozlišitelných hmotných bodů*
- **stav:** *stav hmotného bodu určen jeho polohou a hybností.*

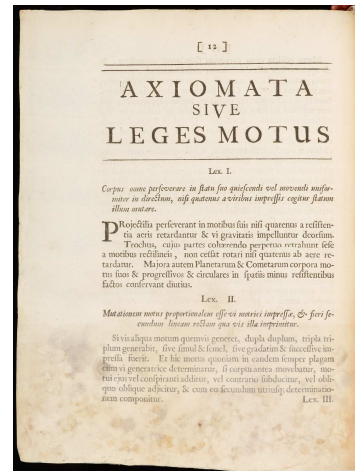
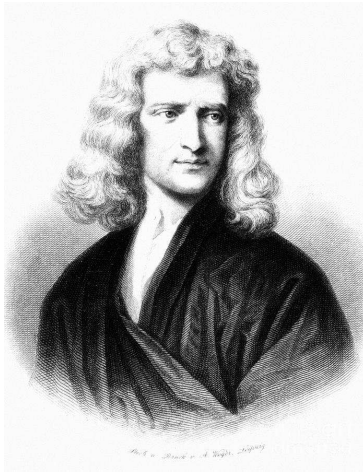
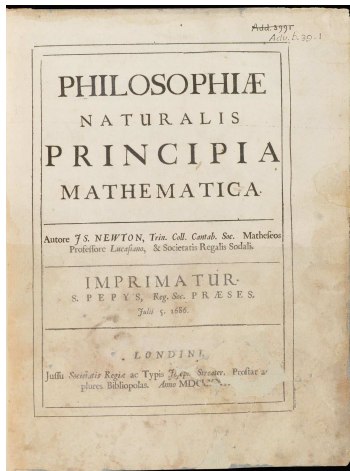
Z pohledu fyziky 21. století již víme, že většina těchto předpokladů ve skutečnosti neplatí, nicméně za běžných okolností jsou s velmi dobrou mírou přesnosti oprávněné. Například:

- podle obecné teorie relativity je prostoročas v přítomnosti gravitace neeuklidovský (ale ve sluneční soustavě je zakřivení protoročasu malé a odchylky tudíž zanedbatelné)
- podle teorie relativity má každý pozorovatel svůj vlastní čas (ale pro malé rychlosti a daleko od hmotných těles časy různých pozorovatelů splývají)
- v kvantové teorii jsou elektrony, fotony a další mikroobjekty principiálně nerozlišitelné (avšak pro makroskopická tělesa platí standardní statistika a kauzalita)
- v kvantové mechanice je stav dán např. jen polohou částice, a v tom případě je její hybnost libovolná (anebo naopak jen hybností částice, a v tom případě je její poloha libovolná). Lze určovat pouze pravděpodobnost, s jakou naměříme různé hodnoty fyzikálních veličin (nicméně makroskopická tělesa se za běžných teplot chovají klasicky a deterministicky, jejich vývoj je popsateľný spojitou trajektorií).

Můžeme tedy učinit praktický závěr, že předpoklady Newtonovy mechaniky sice v přírodě nejsou rigorózně splněny, ale platí s „velkou přesností“ ve většině „obvyklých“ situací — pokud mají studované objekty běžné rozměry, hmotnosti, teploty, malé rychlosti a podobně. Tehdy je možné (a pochopitelně výhodné) aplikovat relativně snadný aparát klasické newtonovské fyziky.

1.2 Newtonovy pohybové zákony

Isaac Newton (1643–1727) ve svém přelomovém díle *Philosophiæ naturalis principia mathematica* z roku 1687 položil základy matematicky pojaté přírodovědy. Zejména zformuloval následující zákony mechaniky:



- Lex. I. *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*
- Lex. II. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*
- Lex. III. *Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.*

V českém překladu tedy:

- zákon 1. *Každé těleso setrvává ve stavu klidu anebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, ledaže je donuceno svůj stav změnit v důsledku sil na něj působících.*
- zákon 2. *Změna hybnosti je úměrná působící síle a odehrává se ve stejném směru, ve kterém tato síla působí.*
- zákon 3. *Proti každé akci vždy působí stejně velká reakce, neboli: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.*

V našem textu se však nebudeme doslova držet těchto Newtonových původních formulací, které v různých obměnách známe již ze střední školy, viz též [1, 3]. Zákony místo toho preformulujeme do moderní podoby, která lépe vystihuje jejich fundamentální obsah a význam:

1. *Existuje vztažný systém (nazýváme ho inerciální), vůči němuž se každý izolovaný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře.*

Izolovaný hmotný bod je takový, který je odstíněný od všech „pravých“ sil. Toto odstínění lze v principu provést pro každou interakci, vyjma gravitace (proto se musíme při konstrukci globálního inerciálního systému omezit na situace, kdy se studovaný objekt nachází daleko od velkých hmot). Připomeňme, že existuje celá třída inerciálních systémů navzájem spojených *konstantním otočením* nebo *konstantní translací* nebo *Galileovou transformací* $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t$, kde \mathbf{x} je vektor polohy a \mathbf{V} je vektor rychlosti čárkovaného inerciálního systému vůči nečárkovanému. Právě v inerciálních vztažných systémech je formulace druhého Newtonova pohybového zákona pro hmotné body jednoduchá:

2. *Pro každý hmotný bod existuje konstanta m a vektorová funkce \mathbf{F} taková, že jeho pohyb vůči inerciálnímu systému je určen diferenciální rovnicí $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$.*

Druhý zákon je vlastně implicitní definicí setrvačné hmotnosti m hmotného bodu a současně též působící síly \mathbf{F} . Podstatné je, že tento zákon je *univerzální* v tom smyslu, že platí pro každý hmotný bod hmotnosti m a libovolnou klasickou sílu \mathbf{F} (a jejich kombinace).

Mechanika se sama o sobě „nestará“ o původ \mathbf{F} . To je úkolem ostatních oborů fyziky, např.

teorie gravitace, podle níž $\mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} (-\mathbf{n})$ Newtonův gravitační zákon (1687),

teorie elektromagnetizmu: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ Maxwell (1864), Lorentzova síla (1892),

atd.

Na charakter síly \mathbf{F} většinou klademe přirozené požadavky, například:

- *platí princip akce a reakce* (problematické v případě nestacionárních polí)
- *závislost jen na okamžitém stavu* (problémy s retardací při konečné rychlosti šíření pole)
- *platí princip superpozice* (neplatí v silných gravitačních ani elmag polích)

V situacích, kdy jsou rozměry studovaného systému mnohem menší než charakteristická vzdálenost daná součinem rychlosti šíření interakce a uvažovaného časového intervalu, lze výše uvedené problémy ignorovat.

Závěrem zdůrazníme, že Newton svůj druhý pohybový zákon zformuloval velmi obecně,

$$\boxed{\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}} \quad (1.1)$$

tedy že působící síla je rovna časové změně hybnosti tělesa, nikoli tedy jen součinu hmotnosti a zrychlení tělesa. Samozřejmě, v případě hmotného bodu či těles, které v průběhu děje nemění svou hmotnost m , platí $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{x}}$. Avšak při zkoumání *pohybu tělesa s proměnnou hmotností* (například startu rakety) je zapotřebí řešit obecnou Newtonovu rovnici (1.1). Jako první v historii fyziky takové úlohy formuloval a řešil v letech 1812–1815 hrabě Jiří Buquoy [4]–[6]. Jeho pozoruhodná práce však upadla v zapomnění a úlohy s proměnnou hmotností byly po mnoha desetiletích znovu nezávisle řešeny až dalšími fyziky [7]–[9].

Ještě zajímavější však je, že po formální stránce platí pohybová rovnice ve tvaru (1.1) dokonce i v Einsteinově *speciální teorii relativity*. V takovém případě však mají symboly poněkud jinou fyzikální interpretaci: \mathbf{p} , \mathbf{F} a \mathbf{v} již nejsou vektory v třírozměrném euklidovském prostoru ale čtyřvektory v Minkowského prostoročase, časová derivace se vztahuje k vlastnímu času τ pohybujícího se objektu a m je jeho klidová hmotnost.

1.3 Od Newtona k analytické mechanice

V tomto studijním textu se budeme postupně seznamovat s mnoha různými formulacemi klasické mechaniky. Již od základní školy dobře známe její běžnou „Newtonovu“ podobu, která jako fundamentální veličiny využívá vektory, především vektor polohy \mathbf{x} , vektor rychlosti \mathbf{v} , vektor zrychlení \mathbf{a} , vektor síly \mathbf{F} atd. Manipulace s vektorovými veličinami je však u složitějších úloh dosti obtížná (zejména vstoupí-li do hry též jejich vektorový součin).

Proto se v průběhu 18. a 19. století vynořila řada alternativních formulací klasické mechaniky, u jejichž zrodu stáli Leibniz, Bernoulli, Maupertuis, Euler, Lagrange, Laplace, Legendre, Poisson, Jacobi, Hamilton a mnozí další. Společným rysem těchto formulací je, že fundamentálními veličinami jsou specifické skaláry, například vhodná kombinace kinetické a potenciální energie (tzv. Lagrangeova funkce anebo Hamiltonova funkce), akční funkcionál atd. Ukazuje se, že stačí správným způsobem operovat pouze s nimi: například pohybové rovnice a jejich integrály (zachovávající se veličiny) získáme pouhým derivováním zmíněných skalárů podle vhodných proměnných, variovaním funkcionálů atd. Tyto modernější přístupy ke klasické mechanice se často označují jako tzv. *analytická mechanika*. Význam nových alternativních formulací mechaniky je četný, především:

- **otevívají cestu k popisu celé řady nemechanických jevů:**
lze je přímo zobecnit v teorii pole, v relativistických teoriích, v kvantových teoriích
- **jsou mohutnějším nástrojem výpočtů:**
užitečné prakticky pro řešení složitých úloh (exaktně, perturbačně i numericky)
- **využívají metod pokročilé matematiky:**
rozšiřují spektrum matematických znalostí (parciální diferenciální rovnice, variační počet)
- **jsou krásné a elegantní:**
patří do pokladnice lidského ducha a jejich poznáním se otevírá nový pohled na svět

Vydejme se tedy nyní na společnou cestu k novým obzorům.

Kapitola 2

Newtonovy rovnice s vazbami

Náš první krok směrem k analytické mechanice bude sice malý, ale důležitý. Začneme rozborem problému, jak řešit pohybové rovnice s dodatečnými vazbami. Stále ještě zůstaneme v původní „vektorové“ formulaci Newtonovy mechaniky a v kartézských souřadnicích. Zavedeme ale užitečný formalismus, který nám umožní řešit situace, kdy pohyb objektů již není volný, ale kromě působících „externích“ sil je navíc určitým předepsaným způsobem omezen. Například tím, že se těleso smí pohybovat jen po určité zakřivené ploše, že se musí kutálet bez prokluzování a podobně.

2.1 Vazby a jejich klasifikace

Newtonův pohybový zákon (1.1) určuje, jak se soustava hmotných bodů pohybuje pod vlivem působících sil, například gravitační či Lorentzovy, viz část 1.2. Tyto síly, které jsou explicitně zadány jako hladké funkce *polohy*, *rychlosti* a případně *času*, se v literatuře tradičně označují jako takzvané vtištěné síly a označují se symbolem \mathbf{F} . V takovém případě jsou pohybové rovnice z matematického hlediska soustava obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu. Tato soustava má obecně řešení, které je jednoznačně určeno počátečními podmínkami, tedy hodnotou polohy a rychlosti (resp. hybnosti) na počátku děje.

Pohybový zákon však můžeme užít i obráceně: je-li pohyb soustavy znám, tj. jsou-li souřadnice polohy dány jako konkrétní funkce času, můžeme přímočarým dvojím zderivováním a dosazením do (1.1) určit síly, které na soustavu v průběhu děje působily. Takovouto úlohu řešil již Newton v samých počátcích mechaniky, když z pohybu planet — z Keplerových zákonů — určil tvar gravitačního zákona.¹

Často se ale v mechanice setkáváme s úlohami, které jsou „tak něco mezi“ oběma těmito krajními situacemi. Pohyb objektů, na něž působí vtištěné síly \mathbf{F} , není zpočátku plně znám, ale je omezen tím, že jsou na něj položeny jisté *apriorní podmínky* — například že některé z hmotných bodů soustavy „kloužou“ anebo se „valí“ po zadaných plochách, body mohou být spojeny tuhými (nehmotnými) tyčemi a podobně. O těchto dodatečných podmínkách obecně hovoříme jako o vazbách. Jejich účinek na hmotné body můžeme technicky nahradit pomocnými silami, které přirozeně nazýváme vazbové síly a označujeme je \mathbf{R} . Vazbové síly však nejsou zpočátku *explicitně* zadány a musejí být odvozeny během hledání konzistentního řešení pohybových rovnic.

Vazby obecně mohou omezovat polohy i rychlosti bodů soustavy a mohou záviset na čase. Nejjednodušší a z hlediska fyzikálních aplikací i nejdůležitější typ vazeb lze zapsat jako implicitní rovnici nějaké *pevné hladké plochy v prostoru* s kartézskými souřadnicemi $(x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$:

$$\phi(x^1, x^2, x^3) = 0. \quad (2.1)$$

Z věty o implicitní funkci více proměnných plyne, že můžeme (alespoň lokálně) vyjádřit např. souřadnici x^3 jakožto funkci zbylých dvou souřadnic (x^1, x^2) . Předepsáním vazby (2.1) tedy omezujeme pohyb hmotných bodů v třírozměrném prostoru jen na hladký dvourozměrný *podprostor*

¹Je pozoruhodné, že toto odvození provedl pomocí čistě geometrických úvah. Podrobnosti viz například [10].

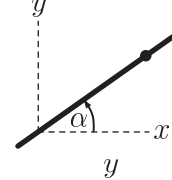
připustných poloh, takzvaný *konfigurační prostor*. Jeho dimenze je dána *počtem stupňů volnosti* soustavy, což je počet *nezávislých* souřadnic. Každá vazba (2.1) snižuje počet stupňů volnosti o jeden: původní tři stupně volnosti se vazbou efektivně zredukovaly na pouhé dva. Předepsáním další vazby by soustava měla už jen jeden stupeň volnosti (typicky by pak byl pohyb hmotných bodů omezen na křivku určenou průsečíkem příslušných hladkých ploch).

Příklady jednoduchých vazeb:

- *nakloněná přímka:*

$$\phi \equiv y - x \tan \alpha = 0. \quad (2.2)$$

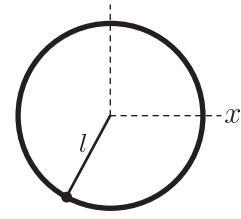
Bod o souřadnicích (x, y) se může pohybovat jen po přímce, úhel jejího sklonu je α , neboť $\tan \alpha = y/x$ (předpokládáme $z = 0$; pro z libovolné jde o nakloněnou rovinu).



- *matematické kyvadlo:*

$$\phi \equiv x^2 + y^2 - l^2 = 0. \quad (2.3)$$

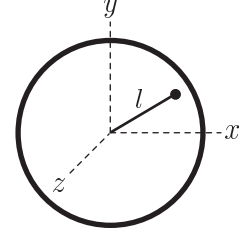
Bod o souřadnicích (x, y) se může pohybovat jen po kružnici, jejíž střed je v počátku a poloměr má l (předpokládáme $z = 0$).



- *sférické kyvadlo (pohyb po povrchu koule):*

$$\phi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (2.4)$$

Bod o souřadnicích (x, y, z) se může pohybovat jen po sféře, jejíž střed je v počátku a poloměr má l .



- *pohyb po zvětšující se kouli:*

$$\phi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0. \quad (2.5)$$

Bod o souřadnicích (x, y, z) se může pohybovat jen po sféře, její poloměr se mění jako *zadaná* funkce času $l(t)$.

Obecně mohou vazby záviset i na rychlosti hmotných bodů, případně mohou omezovat jejich pohyb nejen na zakřivené plochy, ale na celý poloprostor, jehož je zakřivená plocha hranicí. Pro přehlednost proto nyní provedeme klasifikaci vazeb a zavedeme terminologii běžnou v literatuře.

Klasifikace vazeb podle tří různých kritérií:

$$\text{vazba} \begin{cases} \text{oboustranná:} & \phi = 0 & \text{omezení na podprostor,} \\ \text{jednostranná:} & \phi \geq 0 & \text{omezení na poloprostor.} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\text{vazba} \begin{cases} \text{skleronomní:} & \phi(x^j) & \text{nezávislá na čase,} \\ \text{rheonomní:} & \phi(x^j, t) & \text{závislá na čase.} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\text{vazba} \begin{cases} \text{holonomní:} & \phi(x^j, t) & \text{nezávislá na rychlosti,} \\ \text{neholonomní:} & \phi(x^j, \dot{x}^j, t) & \text{závislá na rychlosti.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Vazba (2.1) je tedy oboustranná, skleronomní a holonomní. Také všechny čtyři vazby (2.2)–(2.5) jsou oboustranné a holonomní, přičemž první tři jsou skleronomní, zatímco poslední je rheonomní. Použité termíny jsou z řečtiny: *ho nomos* ($\delta \nu \acute{o} \mu \omicron \varsigma$) = zákon, *skléros* ($\sigma \kappa \lambda \eta \rho \acute{o} \varsigma$) = pevný, tvrdý, *rheó* ($\rho \acute{\epsilon} \omega$) = teču, plynu, *holos* ($\acute{o} \lambda \omicron \varsigma$) = celý.²

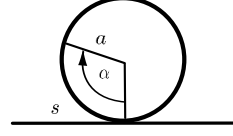
²Nemáme-li *sklerózu* a nejsme tedy *natvrdlí*, vzpomeneme si, že *rheologie* studuje *deformační* vlastnosti látek (anebo na Herakleitovo *panta rhei*, vše plyne).

K neholonomním vazbám je však nezbytné učinit ještě důležitou poznámku: *ne každá vazba obsahující rychlost je neholonomní*. Neholonomní je *pouze taková*, ve které se závislosti na rychlosti *nelze zbavit integrací*.

Příklad zdánlivě neholonomní vazby:

disk pohybující se bez prokluzování po vodorovné přímce
úloha má jen jeden stupeň volnosti

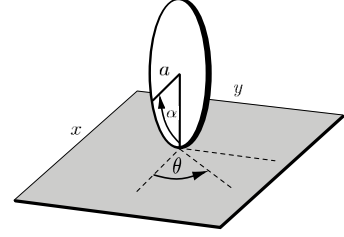
Vazba na neprokluzování zní $\dot{s} = a \dot{\alpha}$, což ale lze integrovat do podoby *holonomní vazby* $\phi \equiv s - a \alpha = 0$.



Příklad skutečně neholonomní vazby:

disk pohybující se bez prokluzování po vodorovné rovině
úloha má čtyři stupně volnosti (je-li disk stále svislý):
(x, y) bod dotyku, α úhel odvalení, θ úhel natočení disku

Vazby na neprokluzování jsou $\dot{x} = a \dot{\alpha} \cos \theta$ a $\dot{y} = a \dot{\alpha} \sin \theta$, což jsou dvě vazby tvaru $\phi(\dot{x}, \dot{y}, \alpha, \theta) = 0$, které však *nelze integrovat* do holonomních vazeb $\phi(x, y, \alpha, \theta) = 0$.



Důkaz tohoto tvrzení je zřejmý: vždy je totiž možné dostat se z počátečního stavu $x = 0 = y$, $\alpha = 0$ valením bez prokluzování do místa (x, y) s předepsaným úhlem odvalení $\alpha \geq \sqrt{x^2 + y^2}/a$ a s libovolným úhlem natočení disku θ . Stačí zvolit vhodnou trajektorii, která končí v bodě (x, y), má délku $s = a \alpha$ a tečna k trajektorii v koncovém bodě má směr θ . Všechny čtyři parametry jsou tedy zcela *nezávislé*, takže pro ně *nemůže* existovat vazba tvaru $\phi(x, y, \alpha, \theta) = 0$.

2.2 Lagrangeovy rovnice I. druhu

Vraťme se nyní k řešení úlohy, jak najít pohyb objektu podrobeného vazbě. V případě, že hmotnost objektu m je konstantní (například jde o hmotný bod), lze Newtonovu pohybovou rovnici (1.1) psát v obvyklém tvaru $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$, tedy v kartézských souřadnicích

$$m \ddot{x}_i = F_i(x^j, \dot{x}^j, t), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

přičemž $\ddot{x}_i = \ddot{x}^i$ jsou kartézské složky zrychlení.³ To je obecně soustava obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu pro hledanou trajektorii $x^i(t)$. Pokud jsou funkce $F_i = F^i$ vyjadřující kartézské složky působící *vtištěné síly* \mathbf{F} hladké funkce polohy a případně rychlosti a času, rovnice mají *jednoznačné řešení* určené *počátečními podmínkami*, tedy počáteční polohou x_0^i a rychlostí \dot{x}_0^i .

Předpokládejme nyní, že na soustavu naložíme jednu holonomní (oboustrannou) vazbu

$$\phi(x^j, t) = 0, \quad (2.10)$$

což je v každém okamžiku t implicitní rovnice (hladké) pevné plochy v třírozměrném euklidovském prostoru. Je zřejmé, že v obecném případě nebude řešení rovnic (2.9) podmínkám (2.10) vyhovovat.⁴ Zkoumejme tedy, jak musíme pohybové rovnice (2.9) pozměnit, aby jejich řešení vazbu (2.10) v každém čase splňovalo.

Přidejme na pravou stranu pohybové rovnice (2.9) vhodné funkce $R_i(x^j, \dot{x}^j, t)$, které můžeme interpretovat jako kartézské složky dodatečné *vazbové síly* \mathbf{R} , zapříčinené interakcí s vazbou. V každém okamžiku a v každém místě vazby $\phi = 0$ můžeme tuto sílu jednoznačně rozložit na sílu \mathbf{T} *tečnou* k vazbové ploše (2.10) a sílu \mathbf{N} k této ploše *kolmou*, tedy $\mathbf{R} = \mathbf{T} + \mathbf{N}$. Normálovou komponentu \mathbf{N} vazbové síly můžeme bez újmy na obecnosti psát ve složkách jako

$$N_i = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad (2.11)$$

³Obecně je mezi *vektory* (veličinami s kontravariantními složkami – horními indexy) a *1-formami* (veličinami s kovariantními složkami – dolními indexy) geometrický rozdíl. Protože však zde pracujeme v euklidovském prostoru v bázi *kartézských* souřadnic, jsou *hodnoty* odpovídajících si kovariantních a kontravariantních složek totožné.

⁴Uvažme například bezsilový pohyb hmotného bodu po povrchu kulové plochy. V takovém případě rovnice (2.9) určují, že pohyb je přímočarý, ale na kulové ploše popsané vazbou (2.10) žádné přímky neexistují.

kde koeficient λ je zatím neurčená funkce souřadnic, rychlostí a času, zatímco $\text{grad } \phi$ se složkami $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ je (obecně nejednotkový) vektor kolmý k ploše určené (2.10).⁵ Rovnice (2.9) spolu s vazbou (2.10) tím přejde na tvar

$$\boxed{m \ddot{x}_i = F_i + T_i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad \phi(x^j, t) = 0}, \quad (2.12)$$

kde T_i a λ jsou zatím neznámé funkce. Tato soustava rovnic jsou tzv. *Lagrangeovy rovnice I. druhu* (J. L. Lagrange, 1775) určující pohyb hmotného bodu podrobeného jedné holonomní vazbě.

Objasníme nyní fyzikální význam funkcí λ a T_i . Z výrazu (2.11) je vidět, že Lagrangeův koeficient λ určuje *velikost normálové složky vazbové síly* $\mathbf{N} = \lambda \text{grad } \phi$, tedy $N \equiv |\mathbf{N}| = |\lambda| |\text{grad } \phi|$, kde $|\text{grad } \phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^3}\right)^2}$. Naproti tomu T_i jsou kartézské složky silové interakce \mathbf{T} mezi vazbou a tělesem, které jsou k holonomní vazbě *tečné*. Reprezentují tedy například *třecí sílu* mezi tělesem a povrchem popsaným podmínkou $\phi(x^j, t) = 0$. Pokud je tento povrch dokonale hladký, tření vymizí a můžeme položit $T_i = 0$.

Ukažme nyní, že pro *holonomní a současně skleronomní* vazbu $\phi(x^j) = 0$ je možné vždy explicitně vyjádřit λ coby funkci okamžité polohy a okamžité rychlosti hmotného bodu, tedy $\lambda(x^j, \dot{x}^j, t)$: Hledané řešení je dáno jako $x^i = x^i(t)$. Dosadíme-li ho do vazbové podmínky, dostaneme složenou funkci $\phi(x^i(t))$ času t , jejíž hodnota *musí* být v každém čase také rovna nule. Dvojím derivováním podle času získáme tedy rovnice

$$\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \dot{x}^i = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \ddot{x}^i + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

Nyní vynásobíme Lagrangeovy rovnice (2.12) funkcemi $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$, sečteme je přes všechna tři i a do levé strany výsledné rovnice pak dosadíme z (2.13). Protože tečné složky vazbové síly T_i a gradientu $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ jsou navzájem kolmé, dostaneme výraz

$$-m \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^k = \sum_i \left(F_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right), \quad (2.14)$$

takže

$$\lambda(x^j, \dot{x}^j, t) = - \left(m \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^k + \sum_i F_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) / \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right)^2. \quad (2.15)$$

Protože první a druhé derivace vazby ϕ jsou známé funkce, je funkce λ plně určena normálovou složkou vtištěné síly F_i , složkami rychlosti \dot{x}^i hmotného bodu a jeho polohou v daném okamžiku. Dosadíme-li nyní λ z (2.15) do (2.12), dostaneme soustavu diferenciálních rovnic vyřešených k nejvyšším, tj. druhým derivacím, v nichž na pravé straně stojí plně určené funkce souřadnic, rychlostí a času. Jejich řešitelnost pro „slušné“ funkce na pravé straně (přesněji: funkce splňující Lipschitzovu podmínku) zaručuje věta o existenci a jednoznačnosti. Najdeme-li jejich řešení a dosadíme teď už známé funkce $x^i = x^i(t)$ do (2.15), určíme plně normálovou sílu působenou vazbou.

Naopak funkce T_i vazbou určeny nejsou. Fyzikálně představují holonomní vazby (2.10) omezení pohybu na povrch nějaké tělesa. Obvykle pro jednoduchost navíc předpokládáme, že toto těleso je *dokonale hladké*: tření zcela vymizí a v takovém případě klademe $T_i = 0$. Lagrangeovy rovnice (2.12) pak můžeme přepsat ve vektorovém tvaru

$$\boxed{m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \lambda \text{grad } \phi, \quad \phi(\mathbf{x}, t) = 0}. \quad (2.16)$$

⁵Uvažme dva blízké body o souřadnicích x^i resp. $x^i + dx^i$ na vazbové ploše. Zjevně platí $\phi(x^i) = 0$ a $\phi(x^i + dx^i) = 0$. Rozvineme-li druhou funkci do Taylorovy řady, dostaneme $\phi(x^i + dx^i) - \phi(x^i) = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i = 0$. Protože vektor se složkami dx^i leží v *tečné* rovině k ploše $\phi = 0$, musí být vektor $\text{grad } \phi$ se složkami $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ k této ploše *kolmý*, protože jejich skalární součin je nulový.

Při pohybu po povrchu *reálného tělesa* ale vždy působí tření, které má směr tečný k povrchu. Pokud chceme toto tření uvažovat, musíme je zahrnout mezi vtíštěné síly a určit je nějakým předpisem, který obecně závisí na tvaru vazbové plochy. Vezměme nejjednodušší příklad takzvaného *izotropního vlečného tření*. Odpovídající síla \mathbf{T} je úměrná kolmému tlaku na podložku a má směr opačný než rychlost, tedy $-(\text{koeficient vlečného tření } k) \times (\text{velikost normálové složky vazbové síly } N = |\lambda| |\text{grad } \phi|) \times (\text{jednotkový vektor ve směru rychlosti})$. Bude proto vystižena předpisem

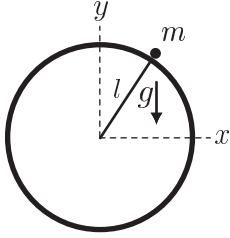
$$\mathbf{T} = -k N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{tedy} \quad T_i = -k |\lambda| \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right)^2} \frac{\dot{x}^i}{\sqrt{\sum_j (\dot{x}^j)^2}}. \quad (2.17)$$

Není-li pohyb jednorozměrný, tak díky odmocninám zpravidla nelze tyto rovnice analyticky řešit. Úloha je však dobře definovaná a řešení můžeme najít numericky.

Příklad:

Hmotný bod klouže v homogenním gravitačním poli po hladké kouli poloměru l .

Byl vypuštěn z klidu z vrcholu.⁶ Ve které výšce bod opustí povrch koule?



Ze symetrie úlohy je zjevné, že pohyb se bude odehrávat ve svislé rovině. Můžeme proto položit $z = 0$ a řešit problém jen ve dvourozměrném řezu se souřadnicemi x, y . Lagrangeovy rovnice I. druhu (2.16) tedy mají tvar

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ m \ddot{y} &= -mg + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \phi &\equiv x^2 + y^2 - l^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

kde vazba $\phi = 0$ je stejná jako vazba (2.3) pro matematické kyvadlo. Spočtením parciálních derivací funkce ϕ dostaneme z prvních dvou rovnic

$$m \ddot{x} = 2\lambda x, \quad (2.19)$$

$$m \ddot{y} = -mg + 2\lambda y. \quad (2.20)$$

Nyní vezmeme vazbu (2.18) vyčíslenou podél trajektorie a provedeme její 1. a 2. úplnou časovou derivaci:

$$\dot{\phi} = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 0, \quad \ddot{\phi} = 2[(x\ddot{x} + y\ddot{y}) + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] = 0.$$

Uvažíme, že $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$ je kvadrát rychlosti hmotného bodu, a dosadíme za \ddot{x}, \ddot{y} z (2.19), (2.20). Po úpravě užitím $x^2 + y^2 = l^2$ dostaneme

$$\lambda = \frac{m}{2l^2} (gy - v^2), \quad (2.21)$$

což je konkrétní realizace obecného výrazu (2.15) (přesvědčte se o tom!). Úlohu nyní dopočítáme užitím zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgl,$$

z něhož vyjádříme rychlost $v^2 = 2g(l - y)$ a dosadíme do (2.21), takže

$$\lambda = \frac{mg}{2l^2} (3y - 2l).$$

Hmotný bod evidentně opustí povrch koule v okamžiku, kdy vazbová síla vymizí, tedy $R = N = |\lambda| |\text{grad } \phi| = 2l |\lambda| = 0$ neboli $\lambda = 0$, což dává

$$y_0 = \frac{2}{3}l. \quad (2.22)$$

⁶Vrchol je (nestabilní) rovnovážná poloha, takže bod je nutno vypustit z velmi blízkého okolí vrcholu.

Při řešení úlohy jsme použili zákon zachování energie. Pokud jsou vazby *holonomní a současně skleronomní*, jako v tomto případě, je tento zákon *důsledkem pohybových rovnic* (nikoli dodatečným principem). Opravdu, sečteme-li první rovnici v (2.18) přenásobenou \dot{x} s druhou rovnicí v (2.18) přenásobenou \dot{y} , dostaneme $m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}) = -mg\dot{y} + \lambda(\frac{\partial\phi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\dot{y})$, což můžeme přepsat do tvaru $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -(mgy) + \lambda\dot{\phi}$. Protože $\dot{\phi} = 0$, lze tuto rovnici snadno integrovat: dostaneme

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \text{konst.}, \quad (2.23)$$

tedy zákon zachování mechanické energie.

2.2.1 Více hmotných bodů a více vazeb

Zobecníme nyní formalismus Lagrangeových rovnic I. druhu na soustavu N *hmotných bodů* a obecný počet v *vazeb*. Poloha hmotných bodů v třírozměrném euklidovském prostoru je přirozeně určena jejich *kartézskými souřadnicemi* x^i , tedy N trojicemi čísel. V analytické mechanice je výhodné formálně reprezentovat polohy *všech* těchto N bodů *jediným bodem v $3N$ -rozměrném euklidovském prostoru*, jehož souřadnice jsou dány průběžně očíslovanými kartézskými souřadnicemi jednotlivých hmotných bodů. Jinými slovy, souřadnice (x^1, x^2, x^3) tohoto fiktivního bodu tvoří souřadnice prvního hmotného bodu, (x^4, x^5, x^6) jsou souřadnice druhého hmotného bodu atd., až $(x^{3N-2}, x^{3N-1}, x^{3N})$ jsou souřadnice bodu N -tého. Časový vývoj soustavy N hmotných bodů je pak dán *trajektorií* $x^i(t)$ jediného fiktivního bodu v tomto formálním $3N$ -rozměrném kartézském prostoru se souřadnicemi x^i , kde $i = 1, 2, \dots, 3N$.

Rozšíření našeho postupu, jenž vedl k předchozím vztahům (2.12), na obecný problém pohybu N hmotných bodů podrobených $v < 3N$ hladkým ($T_i = 0$) holonomním vazbám $\phi_\nu = 0$ je vcelku přímočaré: vývoj je nyní popsán soustavou $3N$ Lagrangeových diferenciálních rovnic

$$m_i \ddot{x}^i = F_i + \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \dots, 3N, \quad (2.24)$$

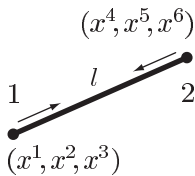
a v vazbových podmínkách

$$\phi_\nu(x^1, x^2, \dots, x^{3N}, t) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, v. \quad (2.25)$$

Celkem tedy máme $3N + v$ rovnic pro $3N + v$ neznámých funkcí $x^i(t)$ a $\lambda_\nu(t)$. Zdůrazněme, že na levé straně rovnic (2.24) přes index i *nesčítáme*, tedy nepoužíváme Einsteinovu sumační konvenci. Místo toho zde užíváme pravidlo, že hmotnost *prvního* bodu je $m_1 = m_2 = m_3$, hmotnost *druhého* bodu je $m_4 = m_5 = m_6$, a tak dále.

Příklad:

Příkladem vazby (2.25) může být skleronomní vazba



$$\phi \equiv (x^1 - x^4)^2 + (x^2 - x^5)^2 + (x^3 - x^6)^2 - l^2 = 0,$$

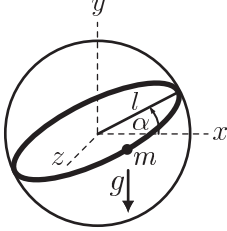
která říká, že vzdálenost mezi prvním hmotným bodem o souřadnicích (x^1, x^2, x^3) a druhým hmotným bodem, jenž má souřadnice (x^4, x^5, x^6) , zůstává konstantní a rovna l . Všimněte si, že příslušný vektor vazbové síly $\mathbf{R} = \mathbf{N}$ má 6 složek $\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$:

$$2\lambda((x^1 - x^4), (x^2 - x^5), (x^3 - x^6), -(x^1 - x^4), -(x^2 - x^5), -(x^3 - x^6)).$$

První tři složky určují vektor síly (akci), kterou působí druhý bod na první, zatímco zbylé tři složky naopak určují vektor síly (reakci), kterou působí první bod na druhý. Obě tyto síly evidentně působí podél spojnice obou bodů a jsou opačně orientované.

Příklad:

Hmotný bod klouže v homogenním gravitačním poli po průsečíku hladké koule poloměru l s nakloněnou rovinou sklonu α . Nalezněte obě vazbové síly.



Máme jeden hmotný bod hmotnosti m podrobený dvěma vazbám. První je identická s vazbou (2.4), zatímco druhá je identická s vazbou (2.2):

$$\phi_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \quad (2.26)$$

$$\phi_2 \equiv y - x \tan \alpha = 0. \quad (2.27)$$

Lagrangeovy rovnice I. druhu (2.24) proto mají tvar

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= 2\lambda_1 x - \lambda_2 \tan \alpha, \\ m \ddot{y} &= -mg + 2\lambda_1 y + \lambda_2, \\ m \ddot{z} &= 2\lambda_1 z. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nejprve tyto rovnice dosadíme do druhé časové derivace druhé vazby $\ddot{\phi}_2 = \ddot{y} - \ddot{x} \tan \alpha = 0$. Člen s λ_1 vypadne díky (2.27), takže

$$\lambda_2 = mg \cos^2 \alpha.$$

Nyní naopak dosadíme z (2.28) do druhé časové derivace první vazby $\ddot{\phi}_1 = 2[(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}) + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)] = 0$ a užijeme obě vazby (2.26), (2.27). Po úpravě dostaneme

$$\lambda_1 = \frac{m}{2l^2}(gy - v^2),$$

kde $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ je kvadrát rychlosti hmotného bodu. Všimněme si, že tento výraz je shodný s (2.21), jen rychlost nyní má i z -ovou složku. Nakonec spočítáme velikost obou vazbových sil $R_1 \equiv |\mathbf{R}_1| = |\lambda_1| |\text{grad } \phi_1|$ a $R_2 \equiv |\mathbf{R}_2| = |\lambda_2| |\text{grad } \phi_2|$, což dává

$$R_1 = \frac{m}{l} |gy - v^2|, \quad (2.29)$$

$$R_2 = mg |\cos \alpha|. \quad (2.30)$$

První vazbová síla \mathbf{R}_1 působí radiálně (kolmo na sférickou plochu) a skládá se z průmětu tíhové síly a z odstředivé síly. Druhá vazbová síla \mathbf{R}_2 působí kolmo na nakloněnou rovinu a je dána přímočarým průmětem tíhové síly. Pro vodorovnou rovinu ($\alpha = 0$) dostáváme $R_2 = mg$, zatímco pro svislou rovinu ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) je $R_2 = 0$.

2.3 d'Alembertův princip mechaniky

Nyní uvedeme alternativní formulaci dynamického zákona klasické mechaniky, určující pohyb soustavy hmotných bodů podrobených holonomním vazbám. Jedná se o tzv. d'Alembertův princip (Jean Le Rond d'Alembert, 1743) a v učebnicích se obvykle formuluje takto:

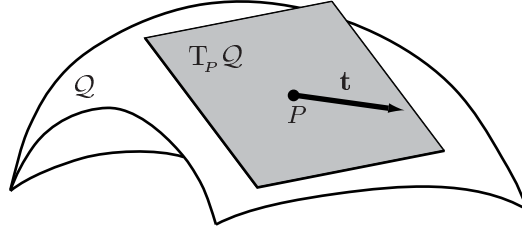
Soustava N hmotných bodů se vyvíjí takovým způsobem, že

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0 \quad (2.31)$$

pro každé virtuální posunutí δx^i , které je v souladu s vazbami.

Symbole zde mají stejný význam jako v předchozí části 2.2.1, tedy trojice x^i značí kartézské souřadnice hmotných bodů o hmotnostech m_i a F_i jsou příslušné složky výslednice vtištěných sil. Narozdíl od $3N$ Lagrangeových diferenciálních rovnic (2.24) má d' Alembertův princip mechaniky (2.31) formálně podobu *jediné rovnice*. Cenou za to však je, že musí být zaveden nový koncept takzvaných virtuálních posunutí δx^i .

V klasických učebnicích se uvádí, že *virtuální posunutí je nekonečně malé posunutí, které je v každém okamžiku v souladu se všemi holonomními vazbami* (2.25), tedy $\phi_\nu = 0$ pro $\nu = 1, 2, \dots, v$. Co přesně je ale míněno „nekonečně malým posunutím“? Odpověď dává až moderní *geometrická* definice: virtuální posunutí δx^i jsou kartézské složky libovolného vektoru \mathbf{t} , jenž leží v tečné rovině k vazbám v daném bodě a v daném čase, jak ukazuje následující obrázek:



Zde Q je hladká plocha reprezentující holonomní vazbu $\phi = 0$ neboli konfigurační prostor v jistém čase (obecně je to průsečík všech vazeb $\phi_\nu = 0$). Systém se v tento okamžik nachází v poloze popsané bodem $P \in Q$. Všechny možné *tečné vektory* \mathbf{t} k zakřivené ploše Q v místě P vytvářejí tzv. *tečný prostor*, který se označuje symbolem $T_P Q$. Uějeme-li pro určení bodu P kartézské souřadnice x^1, x^2, \dots, x^{3N} , pak libovolný tečný vektor $\mathbf{t} \in T_P Q$ bude mít kartézské složky $(\delta x^1, \delta x^2, \dots, \delta x^{3N})$, což jsou výše zmíněná „virtuální posunutí“.⁷

Proto můžeme d' Alembertův princip mechaniky přeformulovat do *ryze geometrické podoby* (kdy oproti (2.31) se již neodvoláváme na použité souřadnice a složky vektorů), totiž

$$(m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \text{pro všechna } \mathbf{t} \in T_P Q, \quad (2.32)$$

kde symbol \cdot značí skalární součin vektorů.

Ukážeme nyní důležitou větu:

d' Alembertův princip mechaniky je ekvivalentní Lagrangeovým rovnicím I. druhu a tedy Newtonovým pohybovým rovnicím s holonomními vazbami.

Důkaz provedeme nejprve z Lagrangeových rovnic I. druhu (2.24). Převědeme složky vtištěných sil F_i doleva a každou rovnici přenásobíme příslušnou složkou virtuálního posunutí, tedy

$$(m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \delta x^i, \quad i = 1, 2, \dots, 3N.$$

Všechny tyto rovnice (jichž je $3N$) sečteme a prohodíme pořadí sum na pravé straně:

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \delta x^i = \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \delta x^i.$$

Nyní už jen stačí uvědomit si, že $\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \delta x^i$ lze geometricky přepsat do podoby skalárního součinu vektorů $\text{grad } \phi_\nu \cdot \mathbf{t}$. Protože vektor $\text{grad } \phi_\nu$ je *kolmý* na vazbu (plochu Q), zatímco každý vektor \mathbf{t} je *tečný* ke všem vazbám, je jejich skalární součin nutně nulový, $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0$. d' Alembertův princip tedy plyne z Lagrangeových rovnic I. druhu.

⁷Dimenze tečného prostoru $T_P Q$ je stejná jako dimenze plochy Q , tedy v každém bodě P existuje $(3N - v)$ lineárně nezávislých tečných vektorů \mathbf{t} (neboť každá vazba snižuje počet stupňů volnosti systému o jeden). Každý z těchto tečných vektorů má ovšem $3N$ kartézských složek, tedy virtuální posunutí δx^i nejsou na sobě nezávislá.

Zbývá dokázat opačnou implikaci. Předpokládejme platnost d' Alembertova principu (2.31). Nejsou-li dány žádné vazby, všechna virtuální posunutí δx^i jsou na sobě *nezávislá* (neboli v rovnici (2.32) je \mathbf{t} zcela libovolný vektor) a tudíž musí vymizet závorka $(m_i \ddot{x}_i - F_i)$ pro každé i . Dostáváme tedy Newtonovy pohybové rovnice $m_i \ddot{x}_i = F_i$. V přítomnosti holonomních vazeb $\phi_\nu = 0$ již virtuální posunutí δx^i *nejdou* *nezávislá* (například pro jednoduchou vazbu $\phi \equiv x^1 + x^2 = 0$ evidentně dostáváme omezující podmínku $\delta x^1 = -\delta x^2$). Úlohu ale můžeme vyřešit trikem, který se nazývá *metoda Lagrangeových multiplikátorů*:⁸ k rovnici (2.31) d' Alembertova principu přičteme výraz $-\sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \delta x^i = -\sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \text{grad } \phi_\nu \cdot \mathbf{t}$, který je *nulový* (protože vektory $\text{grad } \phi_\nu$ a \mathbf{t} jsou na sebe kolmé), takže platí

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i - \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \right) \delta x^i = 0.$$

Nyní již můžeme formálně pokládat všechna virtuální posunutí δx^i za navzájem *nezávislá*, protože omezující podmínky dané vazbami $\phi_\nu = 0$ jsou přesunuty do Lagrangeových multiplikátorů λ_ν (každé vazbě přísluší jeden multiplikátor). Pokud úlohu konzistentně vyřešíme pro všechny funkce x_i a současně λ_ν , vymizí závorka $(m_i \ddot{x}_i - F_i - \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i})$ pro každé i . Dostáváme tedy Lagrangeovy rovnice I. druhu (2.24), čímž je důkaz dokončen.

□

Z geometrického tvaru d' Alembertova principu (2.32) lze odvodit další dva příbuzné principy. Za vektory \mathbf{t} totiž můžeme zvolit *libovolné tečné vektory*. V původním d' Alembertově principu je za \mathbf{t} zvolen *vektor malých posunutí*, jehož kartézské složky jsou virtuální posunutí δx^i . Je ale možno vzít jinou (ekvivalentní) sadu tečných vektorů, jmenovitě *vektor rychlosti* anebo *vektor tečného zrychlení*. Vyjádřeno v kartézských složkách tak dostáváme další dva principy známé z historie mechaniky:

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i = 0 \quad \text{Jourdainův princip,} \quad (2.33)$$

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta \dot{x}^i = 0 \quad \text{Gaussův princip.} \quad (2.34)$$

Geometricky jsou si tyto tři principy mechaniky ekvivalentní.

Výše uvedená formulace d' Alembertova principu platí pro tzv. *vrátná* virtuální posunutí. To jsou taková, kdy ke každému malému posunutí δx^i z bodu P je možné také *opačné* posunutí $-\delta x^i$ z téhož bodu P vazby. Tato vlastnost zjevně platí, pokud jsou vazby *oboustranné*. Naproti tomu pro vazby *jednostranné* neplatí. Nicméně i tehdy d' Alembertův princip použít, zobecníme-li ho pro *nevrátná* virtuální posunutí do podoby

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i \geq 0, \quad (2.35)$$

kde příslušné jednostranné holonomní vazby mají tvar $\phi_\nu \geq 0$ (a vektory se složkami δx^i míří do poloprostoru $\phi_\nu \geq 0$).

Na závěr této části ještě poznamenejme, že d' Alembertův princip je možno dále zobecnit i na neholonomní vazby, zejména v tom případě, kdy se jedná o vazby lineární v rychlostech. Příslušné výrazy lze najít v rozsáhlejších klasických učebnicích mechaniky, například [1].

⁸V matematické analýze se běžně používá k hledání extrémů funkce více proměnných s dodatečnou podmínkou.

2.4 Princip virtuální práce

Rozeberme ještě speciální případ d' Alembertova principu mechaniky, kdy se *neodehrává žádný pohyb*. V takovém případě je $\ddot{x}_i = 0$ a (2.31) přechází na velmi jednoduchý tvar

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x^i = 0. \quad (2.36)$$

Říkáme mu *princip virtuální práce*, protože výraz nalevo můžeme fyzikálně chápat jako skalární součin působících sil a vektoru virtuálního posunutí z daného bodu.⁹ Jedná se o základní princip *statiky*, oboru mechaniky zabývajícího se studiem podmínek, kdy je systém v rovnovážném stavu. Má důležité aplikace v inženýrství, zejména konstrukci mostů, budov a jiných staveb či strojů. Jako jeden z prvních ho formuloval J. Bernoulli (1717), ale zárodečnou formulaci můžeme najít již u Aristotela v souvislosti s jeho diskuzí rovnováhy na páce.

Slovně můžeme princip virtuální práce (2.36) vyjádřit takto:

Práce vykonaná při virtuální výchylce systému z rovnovážné polohy je nulová.

Situace se dále zjednodušuje v případě, kdy jsou působící síly *konzervativní*, neboli složky vtištěných sil F_i jsou (až na znaménko) složky gradientu příslušné potenciální energie V , $F_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}$. Potom má princip virtuální práce podobu

$$\delta V = 0. \quad (2.37)$$

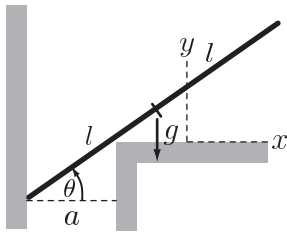
Důkaz je snadný:

$$\delta V = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x^i} \delta x^i = - \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x^i = 0.$$

Rovnovážná poloha konzervativního systému nastává tedy v *extrému potenciální energie*. Pokud se jedná o *minimum* V , je rovnovážná poloha *stabilní*. Jestliže naopak jde o *maximum* V , poloha je sice rovnovážná ale *nestabilní*.

Příklad:

Nalezněte rovnovážnou polohu tyčky délky $2l$ opřené o hladkou svislou stěnu a hranu stolu (hrana stolu je od stěny vzdálena a).



Jedinou vtištěnou silou je tíha $(0, -mg, 0)$ soustředěná v těžišti tyčky. Označíme-li kartézské souřadnice těžiště (x_T, y_T, z_T) , redukuje se princip virtuální práce (2.36) na $-mg \delta y_T = 0$ neboli

$$\delta y_T = 0.$$

Parametrizujme všechny možné polohy tyčky pomocí jejího sklonu, tedy úhlu θ . Z geometrie snadno odvodíme, že výška těžiště y_T je dána funkcí

$$y_T(\theta) = -a \tan \theta + l \sin \theta.$$

Odtud diferencováním dostaneme $\delta y_T \equiv y'_T \delta \theta = (-a \cos^{-2} \theta + l \cos \theta) \delta \theta$. Podmínka rovnováhy $\delta y_T = 0$ musí platit pro každé virtuální posunutí, tedy pro každé $\delta \theta$, takže rovnovážná poloha tyčky je dána podmínkou

$$\cos \theta_r = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Tato rovnovážná poloha je ale nestabilní, neboť $y''_T(\theta_r) = -3l \sin \theta_r < 0$.

⁹ „Virtuální“ práci vykonávají pouze vtištěné síly \mathbf{F} , protože při zanedbání tření jsou vazbové síly $\mathbf{R} = \mathbf{N}$ kolmé na virtuální posunutí (jež leží v rovině tečné k vazbám).

Kapitola 3

Lagrangeův formalismus

Tato kapitola je věnována hlavním pojmům a metodám Lagrangeova formalismu. Nejprve zavedeme efektivnější popis systému pomocí zobecněných souřadnic, a potom odvodíme dynamický pohybový zákon známý jako Lagrangeovy rovnice II. druhu. Uvedeme základní věty týkající se integrálů pohybu, jimiž lze tyto rovnice řešit. Užitečnost Lagrangeova přístupu budeme ilustrovat především na významném příkladě pohybu hmotného bodu v poli centrální síly (Keplerova úloha, rozptyl elementárních částic). Závěrem se budeme zabývat problémem pohybu dvou a více vzájemně interagujících těles.

Uvidíme, že Lagrangeův formalismus je velmi elegantní formulací mechaniky. Z jediné výchozí skalární Lagrangeovy funkce L dokáže přímočaře zkonstruovat pohybové rovnice v libovolných vhodných souřadnicích, a navíc implikuje některé triky umožňující nalézt jejich řešení. Neméně důležité je, že formalismus nachází četná zobecnění mimo mechaniku, například v teorii pole a v relativistických či kvantových teoriích.

3.1 Popis systému

Efektivita Lagrangeova formalismu spočívá zejména v tom, že k popisu studovaného mechanického systému používá tzv. zobecněné souřadnice standardně označované symbolem q^j . Jsou to *vhodně zvolené libovolné parametry, které jednoznačně popisují všechny možné konfigurace systému*.

Velká rozmanitost mechanických úloh znemožňuje aplikaci obecně použitelných „univerzálních“ souřadnic, které by *ideálně* popisovaly vývoj každého systému. Samozřejmě, vždy lze například zavést kartézské souřadnice x^i všech hmotných bodů a předepsat působící síly a vazby. Výsledné pohybové rovnice jsou ovšem velmi komplikované. Dokonce už v triviálním případě pohybu jediného hmotného bodu v poli centrální síly je použití kartézských souřadnic dosti nepraktické (příslušné diferenciální rovnice jsou složité), daleko výhodnější je užití sférických souřadnic, které přirozeně vystihují symetrii daného problému.

3.1.1 Zavedení zobecněných souřadnic

Lagrangeův přístup k popisu mechanických systémů je geniálně prostý: vhodné souřadnice „ušije na míru“ daného problému. Přitom eklekticky kombinuje různé typy souřadnic a parametrů — zpravidla vzdálenosti a úhly. Jejich volba přitom není *a priori* ničím předepsána, jediným omezením je, aby zvolené zobecněné souřadnice q^j jednoznačně popisovaly všechny možné polohy hmotných bodů systému, tzv. *konfigurace*.

Je zjevné, že zobecněných souřadnic musí být tolik, kolik je stupňů volnosti daného systému,

$$\boxed{q^1, q^2, \dots, q^n}, \quad (3.1)$$

kde $n = 3N - v$, přičemž N je počet hmotných bodů a v je počet vazeb (viz část 2.2 textu).

Lagrange tedy účinně používá tzv. *Occamovu břitvu*,¹ podle které „Je zbytečné užívat více tam, kde vystačíme s méně.“ Opravdu, je zbytečné užívat více zobecněných souřadnic, než je nezbytně nutno (tedy než je počet stupňů volnosti). A méně jich také nelze použít, protože počet parametrů by nebyl dostatečný k popisu všech možných konfigurací systému.

Jak jsme již uvedli, zobecněné souřadnice lze zavést „libovolně“, a proto je naším cílem volit je vždy co nejvhodněji. To vyžaduje trochu zkušenosti a intuice. Pár následujících příkladů ukáže přirozené volby zobecněných souřadnic pro jednoduché mechanické systémy:

Příklady:

matematické kyvadlo

$q^1 = \varphi$... výchylka z rovnovážné polohy

eliptické kyvadlo

$q^1 = x$... poloha horního tělesa

$q^2 = \varphi$... výchylka dolního ze svislé polohy

dvě pružiny

$q^1 = x_1$... výchylka prvního tělesa z rovnováhy

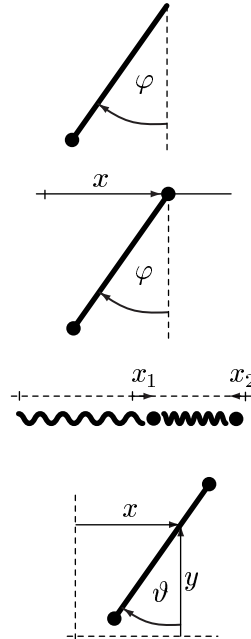
$q^2 = x_2$... výchylka druhého tělesa z rovnováhy

činka

$q^1 = x$... vodorovná poloha těžiště

$q^2 = y$... svislá poloha těžiště

$q^3 = \vartheta$... natočení činky



Obvykle předpokládáme, že existuje vztah mezi zobecněnými a kartézskými souřadnicemi

$$\boxed{x^i(q^1, \dots, q^n, t)} \quad i = 1, \dots, 3N \quad (3.2)$$

a že je regulární. Jinými slovy: z hodnot zobecněných souřadnic můžeme v každém okamžiku jednoznačně stanovit polohu všech hmotných bodů v prostoru pomocí přirozených kartézských souřadnic.

Příklad: pohyb mravence po povrchu koule

Úloha má 2 stupně volnosti. Ideální je zavést sférické úhly (zeměpisné souřadnice) $q^1 = \vartheta$, $q^2 = \varphi$, které jednoznačně určují polohu mravence. Má-li koule poloměr l , je vztah ke kartézským souřadnicím dán standardními rovnicemi

$$x^1 = l \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$x^2 = l \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$x^3 = l \cos \vartheta,$$

které identicky splňují vazbu $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = l^2$, viz (2.4). Každá hodnota zobecněných souřadnic $\vartheta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$ proto odpovídá možné poloze (konfiguraci) mravence na povrchu koule. Pokud by koule byla povrchem nafukujícího se balonku, jednalo by se o rheonorní vazbu, přičemž poloměr by byl konkrétní funkcí času, neboli $l(t)$. Pak by bylo $x^i(\vartheta, \varphi, t)$.

¹William Occam (1290–1349), anglický středověký teolog a filosof. Jeho slavný aforismus je často citován i používán. Například Bertrand Russell ve svém díle *History of Western Philosophy* na adresu Occamovy břitvy uvádí: „Shledal jsem toto býti nejpłodnějším principem logické analýzy.“

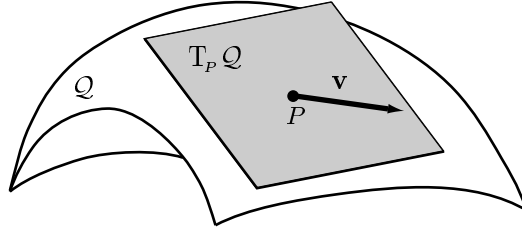
3.1.2 Konfigurační prostor a zobecněné rychlosti

Zobecněné souřadnice (q^1, \dots, q^n) vymezují takzvaný konfigurační prostor \mathcal{Q} všech možných poloh (konfigurací) systému. Řečeno geometricky přesněji, jedná se o tzv. konfigurační varietu, přičemž (q^1, \dots, q^n) jsou příslušné lokální souřadnice na ní. V předchozím příkladě je konfigurační varietou sféra \mathcal{S}^2 a ϑ, φ jsou lokální souřadnice na její obvyklé mapě, jež neobsahuje severní a jižní pól.

Důležité přitom je, že konfigurační prostor není prostorem fyzikálních stavů systému, protože vypovídá pouze o konfiguracích — tedy o *polohách* — všech hmotných bodů. Abychom získali úplnou informaci o fyzikálním stavu, je nutné znát *také jejich rychlosti*. Konfigurační prostor tedy musíme doplnit o tzv. zobecněné rychlosti $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. To jsou dodatečné rychlostní parametry, jež jsou obecně nezávislé na okamžité poloze. Formálně tedy můžeme psát

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j} = \delta_j^i, \quad \boxed{\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = 0}, \quad \boxed{\frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^j} = 0}. \quad (3.3)$$

Z hlediska exaktní formulace mechaniky v jazyce diferenciální geometrie představuje konfigurační prostor varietu \mathcal{Q} . Její libovolný bod $P \in \mathcal{Q}$ je popsán souřadnicovými parametry (q^1, \dots, q^n) určujícími polohu hmotných bodů systému. Jejich (možné) rychlosti \mathbf{v} jsou v daném místě P *tečné vektory* k varietě \mathcal{Q} , leží tedy v lineárním vektorovém tečném prostoru $T_P \mathcal{Q}$. Vektor rychlosti $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{Q}$ je v dané bázi určen složkami $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. Teprve spojením obou druhů informací o polohách i rychlostech vzniká prostor fyzikálních stavů daného systému: jedná se o tzv. *tečný bandl* $T\mathcal{Q}$, neboli *rychlostní fázový prostor*, dimenze $2n$ parametrizovaný souřadnicemi $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. Podrobnosti lze nalézt ve studijním textu k prosemináři TMF069.



Uvedená struktura rychlostního fázového prostoru poskytuje například přirozené vysvětlení tzv. *Zénónova paradoxu šípu*.² Paradox podle Zénóna spočívá v tom, že nelze navzájem odlišit letící a stojící šíp, když se oba právě nacházejí na stejném místě. Opravdu: z hlediska konfiguračního prostoru \mathcal{Q} mají oba stejné hodnoty zobecněných souřadnic q^j . Přesto ale představují odlišné fyzikální stavy určené jinými hodnotami zobecněných rychlostí \dot{q}^j : zatímco stojící šíp je určen nulovým vektorem $\mathbf{v} = 0 \in T_P \mathcal{Q}$, šíp letící stejným bodem P danou rychlostí je určen konkrétním nenulovým vektorem $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{Q}$.

3.2 Odvození Lagrangeových rovnic II. druhu

Nyní již můžeme přistoupit k vlastnímu odvození pohybových rovnic soustavy, jejíž konfigurace jsou vyjádřeny vhodnými zobecněnými souřadnicemi. Takové rovnice se nazývají Lagrangeovy rovnice II. druhu. Z pedagogických důvodů je nejdřív odvodíme pro nejjednodušší jednorozměrnou situaci (takže nebudeme muset psát žádné indexy) a potom rovnice přímočaře zobecníme na libovolný počet zobecněných souřadnic.

3.2.1 Nejjednodušší situace

Uvažujme pro jednoduchost nejprve jednorozměrný pohyb jediné částice hmotnosti m podél kartézské osy x . Nechť zobecněná souřadnice je q , přičemž vztah mezi ní a kartézskou polohou x je

²Zénón z Eleje (490–430 př. n. l.), proslulý řecký filosof a žák Parmenidův, se proslavil zejména svými aporiemi: „letící šíp je v klidu“, „Achilleus nikdy nedohání želvu“ a podobně.

obecně $x(q, t)$. Pro konkrétní trajektorii $q(t)$ odtud dostáváme

$$x(t) = x(q(t), t), \quad \text{takže} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Nyní můžeme snadno spočítat kinetickou energii částice, kterou budeme označovat symbolem T :

$$T(t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2. \quad (3.5)$$

Všechny tyto funkce závisí na čase, neboť je vyčísľujeme podél trajektorie $q(t)$. Protože však výraz (3.5) platí *pro každou trajektorii a v každém okamžiku* t_0 , musí v t_0 platit vztah

$$T(q, \dot{q}, t_0) = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial x}{\partial q}(q, t_0) \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}(q, t_0) \right)^2, \quad (3.6)$$

kde

$$q = q(t_0) \text{ je okamžitá poloha} \quad \text{a} \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt}(t_0) \text{ je okamžitá rychlost.}$$

Jestliže nyní budeme tuto zobecněnou souřadnici q a zobecněnou rychlost \dot{q} chápat jako *navzájem nezávislé parametry*, dostaneme parciálním derivováním (3.6) následující rovnice

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right), \quad (3.8)$$

které opět musí platit v každém okamžiku t_0 libovolné trajektorie $q(t)$. Proto můžeme získat časové vyjádření vývoje obou veličin (3.7), (3.8) prostým dosazením

$$q = q(t) \quad \text{a} \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt}(t),$$

tedy

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t) = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q} = m \frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial q}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q}(t) = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) = m \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{dx}{dt} \right), \quad (3.10)$$

kde v druhých rovnostech jsme uplatnili vztah (3.4). Odečteme-li nyní od úplné časové derivace prvního výrazu druhý výraz, dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} + m \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) - m \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{dx}{dt} \right) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q}, \quad (3.11)$$

protože druhý a třetí výraz se v důsledku záměnnosti pořadí derivací vůči q a t navzájem odečtou. Pravou stranu (3.11) lze pomocí Newtonova pohybového zákona již snadno vyjádřit

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} = F \frac{\partial x}{\partial q} \equiv Q, \quad (3.12)$$

kde Q je zobecněná síla, což je průmět obvyklé síly F do tečného směru k zobecněné souřadnici q . Tím jsme odvodili, že

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q}, \quad (3.13)$$

což je Lagrangeova rovnice II. druhu (Joseph Louis Lagrange, 1788). Je to vyjádření pohybového zákona klasické mechaniky v libovolných zobecněných souřadnicích. Výraz na levé straně přitom musíme chápat jako užitečnou zkratku pro operaci, která odpovídá výše uvedenému odvození, tedy postupu:

- vyjdeme z obvyklého „kartézského“ vztahu pro kinetickou energii $T = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$,
- vyjádříme ho pomocí zobecněných souřadnic a zobecněných rychlostí, viz (3.6),
- tento výraz $T(q, \dot{q}, t_0)$ parciálně zderivujeme podle nezávislých parametrů \dot{q} a q ,
- do těchto vztahů dosadíme za parametr q funkci $q(t)$ a za parametr \dot{q} funkci $\frac{dq}{dt}(t)$,
- první z takto získaných funkcí $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}(t)$ zderivujeme úplně podle času t ,
- odečteme od ní druhou funkci $\frac{\partial T}{\partial q}(t)$ a celý výraz položíme roven zobecněné síle Q .

Uvedenou procedurou dostaneme vztah (3.13), což je z matematického hlediska obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu pro hledanou funkci $q(t)$.

Příklad: *matematické kyvadlo*

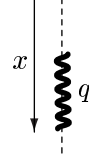
Vhodnou zobecněnou souřadnicí je úhel φ , přičemž $x(\varphi) = l \cos \varphi$ je kartézská souřadnice, jež míří svisle dolů do směru gravitační tíhy $F = mg$. Zobecněná síla tedy je $Q \equiv F \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi$. Kinetická energie je $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$, neboť rychlost kruhového pohybu je $v = l\dot{\varphi}$. Proto $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = ml^2\dot{\varphi}$ a $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0$, tudíž Lagrangeova rovnice II. druhu (3.13) je $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$ neboli

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Příklad: *kmity svislé pružiny padající v gravitačním poli g*

Za zobecněnou souřadnici zvolíme bezrozměrný parametr q takový, že pro kartézskou polohu jednoho konce pružiny bude platit vztah

$$x(q, t) = cq + \frac{1}{2}gt^2,$$



kde c je konstanta. Pro trajektorii $q(t)$ je pak kinetická energie (3.5) dána $T(t) = \frac{1}{2}m \left(c \frac{dq}{dt}(t) + gt\right)^2$. Vyjádřeno pomocí parametrů q a \dot{q} dostáváme $T = \frac{1}{2}m(c\dot{q} + gt)^2$, takže $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = mc(c\dot{q} + gt)$ a $\frac{\partial T}{\partial q} = 0$. Nyní za \dot{q} dosadíme $\frac{dq}{dt}(t)$ a další derivaci vyčíslíme $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = mc \left(c \frac{d^2q}{dt^2} + g \right)$. To je podle (3.13) rovno zobecněné síle $Q \equiv F \frac{\partial x}{\partial q} = cF$. Jestliže $F = -kcq + mg$, vedou Lagrangeovy rovnice na diferenciální rovnici harmonického oscilátoru $\ddot{q} + \frac{k}{m}q = 0$. Ta má obecné řešení $q(t) = q_0 \cos(\sqrt{k/m}t + \delta)$, kde q_0, δ jsou integrační konstanty.

3.2.2 Nejobecnější situace

Výše uvedený postup platný pro jeden hmotný bod m pohybující se podél jediné kartézské osy x lze snadno zobecnit na situaci, kdy se mechanický systém skládá z N *hmotných bodů*, jež se pohybují v třírozměrném prostoru. Ve standardním kartézském popisu tedy máme souřadnice x^1, x^2, x^3 , jež popisují polohu prvního hmotného bodu hmotnosti m^1 , souřadnice x^4, x^5, x^6 , jež popisují polohu druhého hmotného bodu hmotnosti m^2 , atd. Je užitečné zavést soustavu $3N$ konstant m_i předpisem $m_1 = m_2 = m_3 = m^1, m_4 = m_5 = m_6 = m^2$, atd. Díky tomuto formalismu lze celkovou kinetickou energii soustavy hmotných bodů vyjádřit

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2. \quad (3.14)$$

Nechť je tato soustava podrobená celkem v *holonomním vazbám* (na rychlosti nezávislým) tvaru $\phi_\nu(x^i, t) = 0, \nu = 1, 2, \dots, v$. Pripouštíme však časovou závislost (rheonomní vazby). Pak lze vždy (přínejmenším lokálně) zvolit zobecněné souřadnice $q^j, j = 1, 2, \dots, 3N - v$, tedy nezávislé parametry q^j takové, že pro libovolnou jejich hodnotu (z vhodného definičního oboru) jsou všechny holonomní vazby $\phi_\nu = 0$ identicky splněny. Z věty o implicitní funkci pak za předpokladu dostatečné hladkosti vazeb dostáváme, že musí existovat funkce (3.2) tedy $x^i = x^i(q^j, t)$. Odtud plyne

$$x^i(t) = x^i(q^j(t), t), \quad \text{takže} \quad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial t}, \quad (3.15)$$

kde používáme Einsteinovo sumační pravidlo v indexu k . Dosazením do výrazu (3.14) dostáváme

$$T(q^j, \dot{q}^j, t_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right)^2, \quad (3.16)$$

kde funkce $\frac{\partial x^i}{\partial q^k}$ a $\frac{\partial x^i}{\partial t}$ závisejí dle (3.2) jen na q^j a případně na t_0 . V tomto vyjádření, které zobecňuje (3.6), již vystupují zobecněné rychlosti \dot{q}^j a zobecněné souřadnice q^j jako *nezávislé* parametry, viz (3.3). Parciálními derivacemi (3.16) tedy dostáváme

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \rightarrow \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial q^j}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^l} \dot{q}^l + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \rightarrow \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{dx^i}{dt} \right), \quad (3.18)$$

kde šipka naznačuje proceduru „zpětného“ dosazení funkcí $q^k(t)$ za parametry q^k a funkcí $\frac{dq^k}{dt}(t)$ za parametry \dot{q}^k , a pak následné využití vztahu (3.15). Odtud již snadno plyne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[\frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} + \frac{dx^i}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) - \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{dx^i}{dt} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \equiv Q_j, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tím jsme odvodili Lagrangeovy rovnice II. druhu v jejich nejobecnějším tvaru

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j}. \quad (3.20)$$

Jedná se o vyjádření pohybových rovnic soustavy v libovolných zobecněných souřadnicích q^j . Matematicky jde o soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu pro n neznámých funkcí $q^j(t)$, jež popisují trajektorie částic. Dynamika je přitom určena jedinou skalární veličinou, totiž celkovou kinetickou energií T soustavy, a složkami působících zobecněných sil Q_j .

3.2.3 Potenciál a Lagrangeova funkce

Za příhodných okolností lze Lagrangeovy rovnice ještě více zjednodušit. Především ve fyzikálně důležitých situacích, kdy na hmotné body působí jen *konzervativní síly*,³ lze obecně komplikované složky zobecněných sil Q_j vyjádřit pomocí jediné skalární funkce, totiž potenciálu V (přesněji bychom měli říkat „potenciální energie“). Opravdu, v takovém případě je

$$\boxed{Q_j \equiv \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = - \frac{\partial V}{\partial q^j}}. \quad (3.21)$$

Když dosadíme toto vyjádření zobecněných sil na pravou stranu rovnice (3.20) a uvážíme-li, že členy $\frac{\partial V}{\partial q^j}$ jsou identicky nulové (síly jsou konzervativní a potenciál V proto nemůže záviset na zobecněných rychlostech), můžeme Lagrangeovy rovnice II. druhu přepsat do jednoduchého tvaru

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0}, \quad (3.22)$$

³Připomeňme, že silové pole \mathbf{F} je konzervativní právě tehdy, když vykonaná práce nezávisí na dráze (pouze na koncových bodech), neboli práce po libovolné uzavřené dráze je nulová. To je ekvivalentní podmínce, že $\text{rot } \mathbf{F} = 0$, což nastává právě tehdy, když existuje potenciál V takový, že $\mathbf{F} = -\text{grad } V$.

kde funkce $L(q^j, \dot{q}^j, t)$ je definována jako rozdiel kinetické a potenciální energie

$$L \equiv T - V \quad (3.23)$$

a nazývá se Lagrangeova funkce daného mechanického systému. Vidíme, že pohybové rovnice lze získat přímočarou kombinací (3.22) parciálních derivací z jediné skalární funkce L . V tom je užitečnost Lagrangeova formalismu: oproti obvyklému newtonovskému postupu již není třeba provádět složité rozklady působících sil do směrů jednotlivých souřadnic. Navíc automaticky dostaneme právě tolik rovnic, kolik je stupňů volnosti studovaného systému. Lagrangeovy rovnice (3.22) lze použít ve standardních situacích s konzervativním polem, zejména v *homogenním gravitačním poli* ($V = mgz$), v *centrálním gravitačním poli* ($V = \frac{c}{r}$), v případě *harmonického oscilátoru* ($V = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$) atd.

3.2.4 Zobecněný potenciál

Jednoduchý tvar (3.22) Lagrangeových rovnic II. druhu platí dokonce i v obecnějších situacích, kdy silové pole již není konzervativní, ale existuje takzvaný zobecněný potenciál. Tím myslíme situaci, kdy působící síla má takový charakter, že k ní existuje funkce $V(q^j, \dot{q}^j, t)$ taková, že

$$Q_j \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (3.24)$$

Zobecnění spočívá v tom, že připouštíme také závislost na zobecněných rychlostech a čase (obvyčejný potenciál smí záviset pouze na souřadnicích). Je zjevné, že dosazením (3.24) na pravou stranu obecných pohybových rovnic (3.20) opět dostaneme Lagrangeovy rovnice II. druhu ve tvaru (3.22), kde Lagrangeova funkce je dána $L = T - V = T(q^j, \dot{q}^j, t) - V(q^j, \dot{q}^j, t)$, tedy opět předpisem (3.23). Pro případ konzervativních sil se (3.24) samozřejmě redukuje na jednodušší vztah (3.21).

Zdálo by se, že zde popsany případ je umělý, neboť předpokládá platnost poměrně složitěho vztahu (3.24). Podivuhodná příroda ale kupodivu takovouto speciální možnost opravdu realizuje, například ve velmi důležitém případě elektromagnetické interakce. Opravdu, přímým výpočtem lze ukázat (viz cvičení), že pro elektromagnetickou Lorentzovu sílu $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ existuje zobecněný potenciál $V(q^j, \dot{q}^j, t)$ tvaru

$$V = e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (3.25)$$

kde φ je skalární (elektrický) potenciál, zatímco \mathbf{A} je vektorový potenciál. Souvislost vektorových elektromagnetických polí a příslušných potenciálů je dána známými vztahy $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ a $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Možnost popsat pohyb částic v obecném elektromagnetickém poli pomocí Lagrangeovy funkce je velmi vítaná po stránce teoretické i praktické a nachází své přirozené zobecnění také v relativistické či kvantové teorii.

Praktická „Lagrangeova kuchařka“ pro sestavení pohybových rovnic tedy zní takto:

1. Určíme počet stupňů volnosti n a zavedeme vhodné zobecněné souřadnice q^j , $j = 1, \dots, n$ (neboli n parametrů q^j jednoznačně popisujících pohyb soustavy v souladu s vazbami).
2. Vyjádříme kartézské souřadnice x^i pomocí zobecněných souřadnic q^j , t.j. určíme vztahy $x^i(q^j, t)$, kde $i = 1, \dots, 3N$, $j = 1, \dots, n$.
3. Vypočteme kartézské rychlosti $\frac{dx^i}{dt} \equiv \frac{d}{dt}[x^i(q^j(t), t)]$.
4. Dosazením do definice kinetické energie $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2$ získáme $T(q^j, \dot{q}^j, t)$.
5. Dosazením $x^i(q^j, t)$ do potenciální energie $V(x^i)$ vypočteme $V(q^j, t)$.
6. Stanovíme Lagrangeovu funkci $L = T - V$.
7. Jejím derivováním získáme Lagrangeovy pohybové rovnice $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$.

3.2.5 Příklad: částice v centrálním poli

Jako ilustraci zkoumejme pohyb hmotného bodu v poli centrální síly. Budeme postupovat podle výše uvedeného návodu:

1. Máme jediný hmotný bod ve třírozměrném prostoru a žádnou vazbu, takže $n = 3$. Síla v centrálním poli je vždy radiální a její velikost závisí pouze na vzdálenosti od centra. Za tři zobecněné souřadnice q^1, q^2, q^3 je tedy přirozené zvolit standardní sférické souřadnice r, ϑ, φ .
2. Vztahy $x^i(q^j)$ jsou obvyklá vyjádření kartézských souřadnic pomocí sférických, tedy

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ x^2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ x^3 &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

3. Kartézské složky rychlosti získáme úplnou časovou derivací (3.26):

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \cos \varphi - r \sin \vartheta \sin \varphi \dot{\varphi}, \\ \frac{dx^2}{dt} &= \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \sin \varphi + r \sin \vartheta \cos \varphi \dot{\varphi}, \\ \frac{dx^3}{dt} &= \dot{r} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \dot{\vartheta}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

4. Dosazením (3.27) do výrazu pro kinetickou energii $T = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt} \right)^2 \right]$ zjistíme, že řada členů vypadne a zbylé se zkombinují do jednoduchého výrazu pro kinetickou energii ve sférických souřadnicích:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2). \quad (3.28)$$

(Povšimněte si, že T je kvadratickou diagonální formou zobecněných rychlostí \dot{q}^j .)

5. Centrální silové pole je sféricky symetrické, a proto příslušná potenciální energie V nemůže záviset na úhlových zobecněných souřadnicích ϑ, φ . Proto je $V(r)$. Opravdu: provedením gradientu na tuto skalární funkci dostaneme, že příslušná síla má pouze radiální složku, přičemž její velikost závisí jen na vzdálenosti r od centra.
6. Lagrangeova funkce L ve sférických souřadnicích tedy je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - V(r). \quad (3.29)$$

7. Parciální derivace této Lagrangeovy funkce podle zobecněných rychlostí \dot{q}^j a zobecněných souřadnic q^j jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, & \frac{\partial L}{\partial r} &= m r \dot{\vartheta}^2 + m r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 - \frac{dV}{dr}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} &= m r^2 \dot{\vartheta}, & \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= m r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}, & \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Lagrangeovy rovnice II. druhu (3.22) jsou tedy explicitně:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - m r \dot{\vartheta}^2 - m r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 + \frac{dV}{dr} &= 0, \\ (m r^2 \dot{\vartheta})' - m r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 &= 0, \\ (m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi})' &= 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

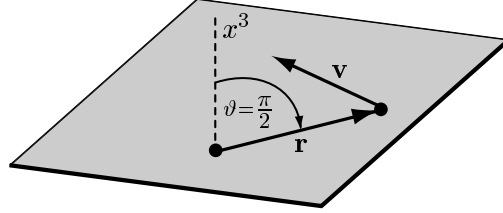
kde tečka zde značí úplnou časovou derivaci příslušné funkce. Z matematického hlediska je to tedy soustava tří obyčejných diferenciálních rovnic pro tři hledané funkce $r(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$.

Nyní obrátíme pozornost na řešení pohybových rovnic (3.31). Soustava vypadá dosti složitě: proměnné jsou navzájem provázány a rovnice jsou nelineární. Při bližším pohledu ovšem můžeme učinit důležitý exaktní závěr: pohyb částice v libovolném centrálním poli je nutně rovinný.

Důkaz této skutečnosti není těžký. Diferenciální rovnici (3.31) přepíšeme do explicitního tvaru

$$\ddot{\vartheta} = \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 - 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\vartheta}. \quad (3.32)$$

Bez újmy na obecnosti však můžeme předpokládat *počáteční podmínky* $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ a $\dot{\vartheta} = 0$ v čase $t = 0$. (Využijeme vlastně volnosti při zavádění sférických zobecněných souřadnic: stačí na počátku orientovat kartézskou osu x^3 v (3.26) tak, aby mířila kolmo na „rovníkovou rovinu“ definovanou vektorem polohy \mathbf{r} částice vůči centru a vektorem rychlosti \mathbf{v} této částice v počátečním čase $t = 0$.)



Při této volbě pak z diferenciální rovnice (3.32) ihned plyne, že v $t = 0$ je $\ddot{\vartheta} = 0$. To znamená, že složka zrychlení částice ve směru *mimo* rovinu $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ je nulová, a proto částice nemůže tuto rovníkovou rovinu nikdy opustit. Matematicky tento fakt plyne z *věty o jednoznačnosti řešení* rovnice (3.32) ve tvaru $\vartheta(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ pro dané počáteční podmínky.⁴

Pohyb v poli centrální síly je tedy nutně rovinný. Přestože jsme začali obecnou možností pohybu částice ve třírozměrném prostoru, její skutečný pohyb je efektivně jen dvourozměrný: omezuje se na jedinou rovinu. Později uvidíme, že z fyzikálního pohledu je tato skutečnost důsledkem zachování momentu hybnosti $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ částice v daném systému (moment síly $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ totiž vymizí, protože vektor \mathbf{F} je radiální, a tedy kolineární s polohovým vektorem \mathbf{r}).

☒

Bez újmy na obecnosti se tudíž naše úloha redukuje na *dvojrozměrný problém*. Je přirozené v rovině pohybu za zobecněné souřadnice q^1, q^2 zvolit standardní polární souřadnice r, φ , které s kartézskými souřadnicemi souvisejí vztahy

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \varphi, \\ x^2 &= r \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3.33)$$

(je to vlastně speciální případ (3.26) pro $\vartheta = \frac{\pi}{2}$). Když nyní aplikujeme kuchařku uvedenou v úvodu této části textu, dostaneme Lagrangeovu funkci ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (3.34)$$

a odtud získáme Lagrangeovy rovnice

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 &= -\frac{dV}{dr}, \\ (mr^2\dot{\varphi})' &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Rozborem jejich řešení se budeme zabývat v následující části 3.4.

⁴Podstatou důkazu je rozvinutí funkce $\vartheta(t)$ do Taylorova rozvoje, tedy $\vartheta(t) = \vartheta(0) + \dot{\vartheta}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\vartheta}(0)t^2 + \dots$, kde $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ a $\dot{\vartheta}(0) = 0$. V důsledku rovnice (3.32) je $\ddot{\vartheta}(0) = 0$, a v důsledku *derivací* této rovnice také v počátečním čase $t = 0$ vymizí všechny vyšší derivace funkce $\vartheta(t)$.

3.3 Metody řešení pohybových rovnic a integrály pohybu

Lagrangeovy rovnice II. druhu poskytují jasný a praktický algoritmus pro efektivní sestavení pohybových rovnic. Obecně existují tři možné přístupy, jak takto získané diferenciální rovnice vyřešit:

- **numerické řešení:** V dnešní době velmi výkonných počítačů není problém napsat tvar příslušné soustavy obyčejných diferenciálních rovnic do vhodného programovacího prostředí (např. MATHEMATICA, MAPLE, FAMULUS atd.) a po zvolení konkrétních počátečních podmínek odpovídající numerické řešení vykreslit. Je však třeba mít na paměti, že při numerickém řešení vyvstává problém spolehlivosti získaných výsledků. Nutně vznikají numerické chyby, které mohou v okolí nestabilních bodů rychle narůstat a získané řešení pak neodpovídá skutečnému. Vždy je proto užitečné mít teoretický vhled do charakteru řešení a výsledek pomocí něj pečlivě testovat, například vhodnými zachovávajícími se veličinami.
- **přibližné řešení:** Soustava pohybových rovnic je obecně složitá, a tak není snadné najít její přesné řešení. Největším problémem je, když jsou diferenciální rovnice *nelineární*, neboť pak neplatí princip superpozice elementárních řešení. V takovém případě obvykle namísto přesného řešení hledáme jen řešení přibližné: *zanedbáme nelineární členy* a pak standardním postupem řešíme příslušné aproximované lineární rovnice. Provedení správné linearizace je svého druhu „umění“, neboť teprve praxí lze získat zkušenost, které zanedbání členů je fyzikálně oprávněné a konzistentní.

Ilustrace linearizace: matematické kyvadlo

Je-li zobecněnou souřadnicí výchylka φ z rovnovážné polohy, má Lagrangeova funkce tvar $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$. Příslušná rovnice (3.22) pak je $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$. Tato nelineární diferenciální rovnice nemá jednoduché řešení, ale snadno můžeme provést její linearizaci pro malé výchylky $\varphi \ll 1$. Taylorův rozvoj říká, že v takovém případě $\sin \varphi \approx \varphi$, takže $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi \approx 0$. To je jednoduchá lineární rovnice známá jako rovnice harmonického oscilátoru: jejím řešením jsou harmonické kmity $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \delta)$, kde φ_0, δ jsou integrační konstanty odpovídající maximální amplitudě a fázi. Poznamenejme, že linearizovanou pohybovou rovnici lze získat předpisem (3.22) také z Lagrangeovy funkce rozvinuté do druhého řádu v proměnné φ , tedy z $L \approx \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \frac{1}{2}\varphi^2)$.

- **přesné řešení:** Je samozřejmě ideální, když se nám podaří najít exaktní řešení přesných pohybových rovnic. To je veskrze úloha matematická, při níž musíme uplatnit zručnost a zkušenosti získané v kurzech matematické analýzy. Doporučuje se použít také speciální literaturu a tabulky řešení diferenciálních rovnic.

Je přitom pozoruhodné, že Lagrangeův formalismus, který umožňuje efektivně sestavit pohybové rovnice, nám současně poskytuje *triky pro jejich řešení*! Jedná se především o konstruktivní postup nalezení tzv. integrálů pohybu (neboli „prvních integrálů pohybových rovnic“), což jsou speciální veličiny, které v průběhu pohybu nemění svoji hodnotu. Začneme jejich definicí a pak uvedeme několik základních vět:

Integrál pohybu je výraz tvaru $f(q^j, \dot{q}^j)$, který v každém čase t nabývá konstantní hodnoty, když ho vyčíslíme podél libovolné trajektorie $q^j(t)$ řešící pohybové rovnice daného systému.

Přesněji řečeno: jestliže do funkce f dosadíme za zobecněnou souřadnici q^j funkci $q^j(t)$ popisující skutečný pohyb, a za zobecněnou rychlost \dot{q}^j její časovou derivaci $\frac{dq^j(t)}{dt}$, dostaneme funkci $f(t) \equiv f(q^j(t), \dot{q}^j(t))$. Hodnota této funkce je konstantní, tedy na čase nezávislá (pro různé trajektorie $q^j(t)$ je ale příslušná hodnota $f(t) = \text{konst.}$ obecně různá). Pro integrál pohybu tedy platí

$$f(q^j(t), \dot{q}^j(t)) = \text{konst.} \quad \text{neboli} \quad \boxed{\frac{df(t)}{dt} = 0}. \quad (3.36)$$

Uvedmě nyní dvě významné věty:

Pokud Lagrangeova funkce L nezávisí na některé zobecněné souřadnici q^i (v takovém případě říkáme, že q^i je tzv. „cyklická souřadnice“), pak výraz $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ je integrálem pohybu.

Důkaz je snadný: z Lagrangeových rovnic II. druhu (3.22), kde $j = 1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n$, vezmeme právě i -tou, tedy $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$. Dle předpokladů věty vymizí druhý člen, takže

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0.$$

Porovnáním s (3.36) ihned vidíme, že $f \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ je integrál pohybu, čímž je důkaz dokončen. ☒

Příklady: Pro volnou částici je $V = 0$, a proto $L = T$, neboli v kartézských souřadnicích

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Všechny tři souřadnice jsou zjevně cyklické, a tak věta ihned implikuje tři integrály pohybu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} = a, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} = b, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z} = c, \end{aligned}$$

kde a, b, c jsou konstanty. Jedná se samozřejmě o zákon zachování hybnosti.

Kdybychom uvažovali částici v homogenním gravitačním poli, měli bychom Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

V tomto případě jsou cyklické pouze souřadnice x a y . Ve svislém směru souřadnice z zákon zachování hybnosti neplatí, protože veličina $m\dot{z}$ při volném pádu částice narůstá.

Pokud Lagrangeova funkce L nezávisí explicitně na čase t , pak výraz

$$h(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L \quad (3.37)$$

(tzv. „zobecněná energie“) je integrálem pohybu.

Důkaz: Přímo z definice dostaneme

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial t} \right],$$

přičemž v souladu s předpokladem věty již nepíšeme člen $-\frac{\partial L}{\partial t}$. Druhý a čtvrtý člen se navzájem vyruší a zbylé dva lze přepsat do tvaru

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right] \dot{q}^j.$$

Výraz v hranaté závorce je ovšem levá strana Lagrangeovy rovnice (3.22), která je pro skutečný pohyb rovna nule, a proto $\frac{dh}{dt} = 0$, takže h je integrálem pohybu.

☒

Příklad: Pro částici v kartézských souřadnicích je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z),$$

takže

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V = T + V.$$

V tomto případě se tedy v průběhu děje zachovává celková mechanická energie.

Není ale pravda že zachovávající se zobecněná energie h je vždy rovna součtu kinetické energie T a potenciální energie V . Například *rheonorní vazby soustavě energií dodávají nebo ji odebírají* (ilustrací je třeba korálek na drátu otáčejícím se konstantní úhlovou rychlostí).

Můžeme však vyslovit například následující jednoduchou větu:

Pokud jsou síly konzervativní a pokud jsou vazby holonomní a současně skleronomní, pak $h = T + V = \text{konst.}$ (celková mechanická energie soustavy se tedy zachovává).

Důkaz: Holonomní a skleronomní vazby mají tvar $\phi(x^i) = 0$, a tudíž $x^i = x^i(q^j)$, viz (3.2). Pak

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \dot{q}^r \right) \left(\sum_{s=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^s \right) = \sum_{r,s=1}^n \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^r \dot{q}^s$$

a definujeme-li (symetrickou) matici

$$A_{rs}(q^j) \equiv \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \frac{\partial x^i}{\partial q^s},$$

můžeme kinetickou energii soustavy vyjádřit

$$T = \sum_{r,s=1}^n A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s.$$

To je zjevně kvadratická funkce ve zobecněných rychlostech, a proto

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j = \sum_{j,r,s=1}^n (A_{rs} \delta_j^r \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \delta_j^s) \dot{q}^j = 2 \sum_{r,s=1}^n A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s = 2T$$

(ve skutečnosti jsme právě dokázali speciální případ tzv. Eulerovy věty o homogenních funkcích). Nyní už snadno pro potenciál nezávislý na rychlostech z definice (3.37) odvodíme, že

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L = 2T - T + V = T + V.$$

☒

V následující části nyní ukážeme aplikaci předchozích vět, a to na příkladě pohybu hmotného bodu v centrálním poli. Jak uvidíme, jedná se o fyzikálně důležitou úlohu, která souvisí nejen s pohybem planet, ale také například s rozptylem elementárních částic.

3.4 Pohyb v poli centrální síly

V předchozí části 3.2.5 jsme dokázali, že pohyb částice v centrálním poli je nutně rovinný, a proto postačuje zavést polární souřadnice r, φ v „rovině ekliptiky“. V těchto zobecněných souřadnicích má Lagrangeova funkce tvar (3.34), tedy $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$.

K nalezení možných pohybů s výhodou použijeme integrály pohybu:

- souřadnice φ je cyklická, takže veličina $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ je integrál pohybu. To konkrétně znamená, že

$$mr^2\dot{\varphi} = l = \text{konst.} \quad (3.38)$$

Jedná se zjevně o zákon zachování momentu hybnosti $l = |\mathbf{l}| = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}|$.

- Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase, takže se zachovává zobecněná energie, která je v tomto případě rovna celkové mechanické energii $T + V = E$, neboli

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E = \text{konst.} \quad (3.39)$$

Namísto řešení pohybových rovnic 2. řádu (3.35) tedy bez újmy na obecnosti stačí řešit jen integrály pohybu (3.38) a (3.39). To jsou dvě obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu (obsahující již dvě integrační konstanty l a E) pro hledané funkce $r(t)$ a $\varphi(t)$. Nabízí se z rovnice (3.38) vyjádřit

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} \quad (3.40)$$

a pak dosadit do rovnice (3.39); po úpravě tak dostaneme

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left[E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \right) \right]. \quad (3.41)$$

Po odmocnění lze tuto rovnici vyřešit separací proměnných:

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \left(V(r) + \frac{l^2}{2m} r^{-2} \right) \right]}}. \quad (3.42)$$

Stačí tedy najít tento jediný integrál (provést tzv. kvadraturu), a to například numericky. Pro obecný tvar potenciálu $V(r)$ je to analyticky obtížné, explicitně se dají vyčíslit jen jisté speciální případy, a i ty obvykle nejsou v explicitním nýbrž parametrickém tvaru. Teoreticky však lze takto integrovanou a invertovanou funkci $r(t)$ dosadit do rovnice (3.40) a po provedení další integrace separací proměnných získat funkci $\varphi(t)$, čímž je úloha nalézt trajektorii hmotného body v daném centrálním poli kompletně vyřešena.

Je zajímavé, že pro určení tvaru trajektorie v polárních souřadnicích $r(\varphi)$ není často nutné úlohu nejprve dle předchozího postupu vyřešit a následně pak vyloučit časovou závislost z funkcí $r(t)$ a $\varphi(t)$. Můžeme postupovat přímo užitím Binetova vzorce

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{dV}{du}}, \quad (3.43)$$

kde proměnná u je inverzní radiální vzdálenost

$$u = \frac{1}{r}. \quad (3.44)$$

Důkaz: Protože $r = \frac{1}{u(\varphi)}$, dostáváme časovou derivaci a užitím vztahu (3.40)

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u(\varphi(t))} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{l}{mr^2} = -\frac{l}{m} \frac{du}{d\varphi}.$$

Dosazením do rovnice (3.41) získáme

$$\frac{l^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{l^2}{m^2} u^2 = \frac{2}{m} [E - V(u)], \quad (3.45)$$

jehož derivací podle proměnné φ a zkrácení konstantami obdržíme

$$\frac{du}{d\varphi} \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \frac{du}{d\varphi} = -\frac{m}{l^2} \frac{dV}{du} \frac{du}{d\varphi}.$$

Pro případ $\frac{du}{d\varphi} \neq 0$ lze tímto společným faktorem vydělit, čímž opravdu dospějeme k (3.43).

⊗

Po zadání konkrétního potenciálu $V(r(u))$ do Binetova vzorce získáme obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu pro funkci $u(\varphi)$, jejíž inverzi $r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)}$ získáme hledaný tvar trajektorie.

3.4.1 Pohyb planet aneb Keplerova úloha

Důležitým příkladem pohybu v centrálním poli jsou trajektorie planet a jiných astronomických těles obíhajících v gravitačním poli Slunce. Ukážeme nyní, jak z výše uvedené Lagrangeovy formulace mechaniky snadno plynou Keplerovy zákony.

Gravitační pole Slunce hmotnosti M je dáno potenciálem

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = GMm \text{ je kladná konstanta.} \quad (3.46)$$

V reciproké souřadnici (3.44) má potenciál tvar $V = -\alpha u$ a jeho derivace je $\frac{dV}{du} = -\alpha$, takže Binetův vzorec (3.43) je nyní explicitně

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha m}{l^2}.$$

Ihned najdeme obecné řešení této lineární diferenciální rovnice s konstantní pravou stranou. Obecné řešení homogenní rovnice je $u_0 = C \cos \varphi$ (bez újmy na obecnosti můžeme položit počáteční fázi $\varphi_0 = 0$) a partikulární řešení úplné rovnice je zjevně $u_p = \frac{\alpha m}{l^2}$. Kompletní řešení tedy je $\frac{1}{r} = u = u_p + u_0 = \frac{\alpha m}{l^2} + C \cos \varphi = \frac{\alpha m}{l^2} (1 + \varepsilon \cos \varphi)$, kde konstanta ε nahrazuje C . Máme tedy

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}}, \quad (3.47)$$

kde konstanty jsou dány

$$p = \frac{l^2}{\alpha m} = \frac{l^2}{GMm^2}, \quad (3.48)$$

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2l^2 E}{\alpha^2 m} = \frac{2l^2 E}{G^2 M^2 m^3}. \quad (3.49)$$

Důkaz: Dosazením kompletního řešení (3.47), tedy $u = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, a z něj plynoucí derivace $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon}{p} \sin \varphi$ do rovnice (3.45) dostaneme

$$\frac{1}{p^2} (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + 1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi) = \frac{2m}{l^2} [E + \alpha u] = \frac{2m}{l^2} [E + \frac{\alpha}{p} (1 + \varepsilon \cos \varphi)],$$

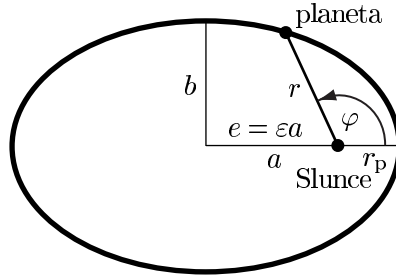
což po úpravě dává $1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi = \frac{2mp^2}{l^2} E + 2(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, a tedy $\varepsilon^2 - 1 = \frac{2mp^2}{l^2} E$. Důvod proč je integrační konstanta ε z Binetova vzorce takto jednoznačně učena spočívá v tom, že Binetova diferenciální rovnice 2. řádu (3.43) vznikla derivací původní rovnice (3.45) 1. řádu, kde jako fyzikální parametr vystupuje integrál pohybu E , který při derivování vypadl.

⊗

Dospěli jsme tak k pěknému výsledku: *tělesa se ve sluneční soustavě pohybují po kuželosečkách*, protože rovnice (3.47) není nic jiného než obvyklé vyjádření kuželoseček v polárních souřadnicích s ohniskem v počátku $r = 0$, kde je umístěno Slunce. V závislosti na parametru ε zvaném *numerická excentricita* totiž funkce (3.47) popisuje kružnici ($\varepsilon = 0$), elipsu ($0 < \varepsilon < 1$), parabolu ($\varepsilon = 1$) resp. hyperbolu ($\varepsilon > 1$). Podle (3.49) tyto čtyři možné situace odpovídají případům, kdy celková zachovávaná se mechanická energie je $E = E_{\min} \equiv -\frac{G^2 M^2 m^3}{2l^2} < 0$, $E < 0$, $E = 0$, resp. $E > 0$. Druhý parametr p , který určuje *velikost* kuželosečky, je podle (3.48) určen (kromě hmotností Slunce a obíhajícího tělesa) zachovávaným se momentem hybnosti l . Výše uvedeným postupem jsme tedy odvodili první z Keplerových zákonů:

1. Keplerův zákon: Planety se pohybují po elipsách se Sluncem v ohnisku.
2. Keplerův zákon: Spojnice Slunce a planety opisuje za stejné časové intervaly stejné plochy.
3. Keplerův zákon: Pro všechny planety je podíl $\frac{T^2}{a^3}$ stejná konstanta.

Důkaz: Celková mechanická energie E každé planety je záporná, a proto se nemůže vymanit z gravitačního potenciálu Slunce. Dle (3.49) je proto nucena obíhat kolem něj po eliptické orbitě (3.47) s $\varepsilon < 1$. Je to uzavřená trajektorie, která je 2π periodická.⁵



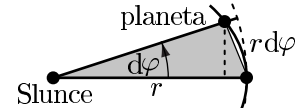
Perihelium (přisluní) nastává pro $\varphi = 0$ a má hodnotu $r_p = \frac{p}{1+\varepsilon}$. Naopak afelium (odsluní) nastává pro $\varphi = \pi$ a má hodnotu $r_a = \frac{p}{1-\varepsilon}$. Geometricky je elipsa určena hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b . Protože excentricita e je dána vztahem $e \equiv \varepsilon a$, můžeme z jednoduchého vztahu $r_p = a - e$ případně $r_a = a + e$ odvodit, že $p = a(1 - \varepsilon^2)$. Dosazením z (3.48) a (3.49) tak ihned dostáváme

$$a = \frac{GMm}{2|E|}. \quad (3.50)$$

Hlavní polosa eliptické dráhy a je tedy (kromě konstantních hmotností) určena celkovou energií planety E a *nezávisí* na jejím momentu hybnosti l .

Druhý Keplerův zákon je vlastně jen geometrickým vyjádřením zákona zachování momentu hybnosti (3.38). Plošná rychlost, tedy plocha dS opsaná spojnici Slunce s planetou za krátký časový interval dt , je dána výrazem $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$.

Opravdu, jak je vidět z vedlejšího obrázku, plochu dS lze dobře aproximovat plochou šedě vyznačeného trojúhelníka. Jeho základna je r a čárkovaně vyznačená výška je přibližně rovna $r d\varphi$, což je délka oblouku kružnice poloměru r se středovým úhlem $d\varphi$. Máme tedy $dS = \frac{1}{2}r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$. Užitím vztahu (3.40) tak ihned dostáváme



$$\frac{dS}{dt} = \frac{l}{2m}, \quad (3.51)$$

což je opravdu konstanta úměrná momentu hybnosti planety.

⁵Uzavřenost trajektorií je důsledkem newtonovského tvaru potenciálu. Pro jiné potenciály $V(r)$ nemá příslušné řešení Binetovy rovnice periodický charakter a dochází k posuvu perihelia. Podle tzv. *Bertrandova teoremu* pouze potenciály $V \sim 1/r$ a $V \sim r^2$ vedou na uzavřené periodické trajektorie.

Konečně třetí Keplerův zákon získáme přímou integrací druhého. Ze vztahu (3.51) tak plyne $S = \int dS = \int \frac{l}{2m} dt = \frac{l}{2m} T$, kde T je doba oběhu planety. Protože plocha elipsy je určena vzorcem $S = \pi ab$ a díky známému vztahu $a^2 = e^2 + b^2$ můžeme vyjádřit $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, dostáváme $T^2 = 4\pi^2 \frac{m^2}{l^2} a^4 (1 - \varepsilon^2) = 4\pi^2 \frac{m^2}{l^2} p a^3 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$, neboli

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}. \quad (3.52)$$

Podíl druhé mocniny oběžné doby planety a třetí mocniny hlavní polosy její eliptické dráhy je tedy (až na univerzální konstanty) dán pouze hmotností Slunce. Ze vztahu (3.52) lze tedy snadno stanovit hmotnost objektu budícího centrální gravitační pole: chceme-li například zjistit hmotnost Slunce, stačí do tohoto vztahu dosadit příslušné hodnoty T a a pro libovolnou planetu, chceme-li zjistit hmotnost Země, použijeme odpovídající hodnoty T a a Měsíce, chceme-li zjistit hmotnost planety, stačí dosadit oběžnou dobu a hlavní poloosu kterékoli její oběžnice (pochopitelně jen v případě, že lze zanedbat působení ostatních těles).

☒

3.4.2 Historická vsuvka z rudolfínské Prahy

Keplerovy zákony bez nadsázky stojí u kolébky fyziky a moderní přírodovědy, neboť právě z nich Newton vyvodil a v roce 1687 v *Principiích* v ucelené podobě prezentoval svůj gravitační zákon. Můžeme považovat za čest, že první dva z těchto zákonů zformuloval císařský matematik Johannes Kepler během svého plodného dvanáctiletého pobytu na dvoře císaře Rudolfa II. v Praze.



JOHANNES KEPLER
(* 27.12.1571 Weil, † 15.11.1630 Řezno)

Osmadvacetiletý Kepler přichází do Prahy v lednu roku 1600 a stává se asistentem věhlasného císařského astronoma Tychona Brahe. Tím začala, jak praví Z. Horský ve své výtečné monografii *Kepler v Praze* (Mladá fronta, Praha, 1980), „osobní spolupráce nejlepšího pozorovatele dané epochy s jejím nejlepším teoretikem“ (byť nebyla zcela bez problémů a trvala jen krátce do Brahovy smrti 24.10.1601). Kepler pak postupně utřídl a vyhodnotil Brahova pečlivá pozorování pohybu planet, zejména Marsu. Na základě těchto systematických dat dosud nebývalé přesnosti odvodil po četných peripetiích své tři geometrické zákony pohybu nebeských objektů. První a druhý Keplerův zákon byl publikován v rozsáhlém díle *Astronomia nova* (Nová astronomie) z roku 1609, třetí Keplerův zákon pak v roce 1619 v Linci v díle *Harmonice mundi* (Harmonie světa).

Především první Keplerův zákon přinesl podstatné vylepšení Koperníkova heliocentrického systému.⁶ Zásluhou Mikuláše Koperníka začal „vesmírný stroj“ pracovat v rozumném uspořádání,

⁶Koperníkovo fundamentální dílo *De revolutionibus orbium coelestium* (O obězích nebeských sfér) vyšlo r. 1543.

ale ještě ne dokonale. Stále bylo totiž nutné skládat kruhové pohyby epicyklů po deferentu vůči ekvantu, aby bylo dosaženo stejné přesnosti předpovědí, jaké dosahovala dosavadní Ptolemaiova geocentrická soustava. Kepler nahradil celý tento složitý systém kruhových pohybů jedinou elipsou. Inspirací mu přitom byly nejspíš jeho práce z optiky: Kepler teoreticky studoval odrazy světla na kuželosečkách a jako první zavedl pojem ohniska. Není však vyloučen ani nepřímý vliv z oboru architektury, konkrétně eliptický půdorys tzv. Vlašské kaple (dnes součást komplexu Klementina), nejstarší raně barokní stavby v Čechách budované v letech 1590–1597 italskými staviteli.

3.4.3 Metoda efektivního potenciálu

Vraťme se nyní ke vztahu (3.41), který popisuje trajektorie v obecném centrálním poli. Zavedeme užitečnou a jednoduchou metodu, pomocí níž lze provést správný *kvalitativní* rozbor možných pohybů, aniž bychom museli příslušnou diferenciální rovnici explicitně vyřešit.

Definujme pomocnou veličinu zvanou efektivní potenciál vztahem

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (3.53)$$

Vlastně jsme jen k potenciálu centrální síly $V(r)$ přičetli „odstředivý člen“, který souvisí se zákonem zachování momentu hybnosti l , viz substituce (3.40). Potom můžeme rovnici (3.41) přepsat

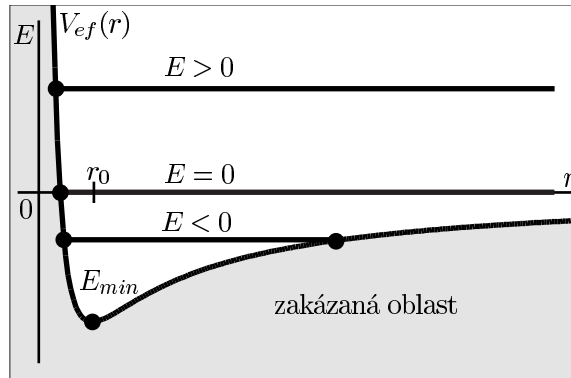
$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E - V_{ef}(r)], \quad (3.54)$$

kde konstanta E vyjadřuje zachovávanou celkovou mechanickou energii, zatímco \dot{r} je rychlost planety v *radiálním* směru. Podstata metody spočívá v následujícím triviální tvrzení:

Pohyb je možný jen pro taková r , kde $V_{ef}(r) \leq E$,

jinak by pravá strana (3.54) byla záporná, takže by nemohla být druhou mocninou reálné veličiny.

Uvedenou podmínku lze velmi dobře analyzovat graficky, jestliže vykreslíme graf efektivního potenciálu (pro daný moment hybnosti l). Například pro newtonovské gravitační pole (3.46) má efektivní potenciál tvar znázorněný na tomto obrázku (pro velké hodnoty r převládá Newtonův potenciál $\sim -\frac{1}{r}$, zatímco pro malé hodnoty r dominuje odstředivý člen $\sim +\frac{1}{r^2}$):



Pod grafem funkce $V_{ef}(r)$ se nachází *zakázaná oblast*, kam se planeta nikdy nemůže dostat, protože by byla porušena výše uvedená podmínka. Pro danou hodnotu energie E , kterou má těleso *stejnou pro každé r* (protože se zachovává), existují *body obratu určené průsečíkem* vodorovné přímky $E = \text{konst.}$ s grafem efektivního potenciálu. V bodech obratu je $E = V_{ef}(r)$, takže $\dot{r} = 0$, což znamená, že *radiální* rychlost je právě nulová: planeta (v daný okamžik) zastaví své přibližování ke Slunci anebo své vzdalování od něj (ocitne se v periheliu resp. afeliu). Počet bodů obratu a

tím i kvalitativní charakter pohybu pochopitelně závisí na hodnotě E . Z obrázku vidíme, že pro $E > 0$ existuje jen jeden bod obratu (perihelium) a že pohyb je neomezený — těleso může odletět do nekonečna, což je v souladu se vztahem (3.49), který v takovém případě vede na hyperbolický pohyb. Mezní (parabolický) případ nastává pro $E = 0$. Pokud $E < 0$, existují dva body obratu (perihelium i afelium), což odpovídá omezenému eliptickému pohybu planet. Vidíme také, že existuje unikátní kruhový pohyb na hodnotě poloměru $r_0 = p$, jenž je právě *minimum* efektivního potenciálu V_{ef} . Protože se jedná o minimum, je kruhová dráha zjevně *stabilní* orbitou.

Zde popsaná metoda efektivního potenciálu je velmi názorná a užitečná pro kvalitativní analýzu možných pohybů v obecných potenciálech $V(r)$, včetně rozboru stability drah. (Například kruhový pohyb v místě maxima příslušného efektivního potenciálu je nestabilní — to nastává např. pro pohyb objektu v blízkém okolí černé díry v kontextu Einsteinovy obecné teorie relativity.)

3.4.4 Rozptyl nabitých částic

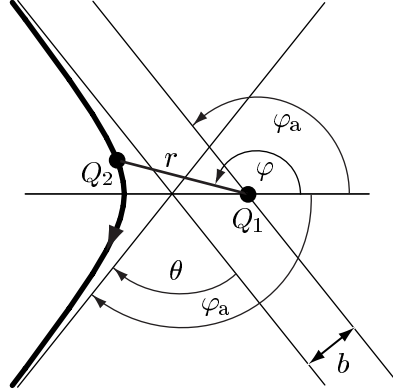
Jiným významným případem pohybu v centrálním poli je rozptyl částic v coulombickém poli. Tento problém sehrál klíčovou roli počátkem 20. století, kdy se fyzika vydala na cestu do mikrosvěta a začala zkoumat strukturu atomů.

Uvažujme dvě nabitě bodové částice, které se elektrostaticky odpuzují. Coulombický potenciál

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \text{ je záporná konstanta,} \quad (3.55)$$

má stejný tvar jako newtonovský gravitační potenciál (3.46) až na to, že konstanta α má nyní opačné znaménko. Předpokládejme, že částice s nábojem Q_1 je pevná (je to těžké „jádro atomu“), zatímco na ni nalétávající částice s nábojem Q_2 je mnohem lehčí (jde např. o „ α -částici“). Její trajektorii v centrálním poli již známe, neboť musí mít stejný tvar jako (3.47).⁷ Protože $E > 0$, podle (3.49) je $\varepsilon > 1$ — jde tedy o *hyperbolu*.

Zde nás zajímá především *směr* vstupní a výstupní asymptoty, které jsou dány podmínkou $r \rightarrow \infty$, což podle (3.47) odpovídá hodnotám $\cos \varphi_a = -\frac{1}{\varepsilon}$. Celková odchylka θ částice (úhel mezi vstupní a výstupní asymptotou) je dána podmínkou $90^\circ + \theta/2 = \varphi_a$, viz obrázek:



Jednoduchými úpravami a pak užitím vztahu (3.49) odtud plyne

$$\tan \frac{\theta}{2} = \tan(\varphi_a - 90^\circ) = -\frac{\cos \varphi_a}{\sin \varphi_a} = \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 m}{2l^2 E}}.$$

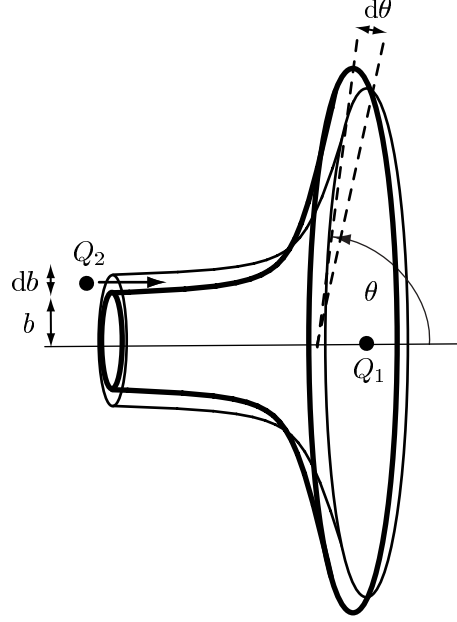
Když nyní dosadíme za α z (3.55) a vyjádříme zachovávané se veličiny E a l pomocí asymptotických hodnot $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$ a $l = bmv_\infty$, kde b je *impaktní parametr*, dostaneme nakonec

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \frac{1}{b}. \quad (3.56)$$

⁷Poznamenejme, že zde $\alpha < 0$, takže dle (3.48) je $p < 0$. Musí proto být $1 + \varepsilon \cos \varphi < 0$, neboli $\cos \varphi < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Tento vzorec udává velikost odchylky θ směru letu částice, jestliže nalétává na centrum „v kolmé vzdálenosti“ b . V limitním případě $b = \infty$ částice není centrálním polem vůbec ovlivněna, a tak je $\theta = 0$. Pokud naopak nalétává na centrum přímo (tedy radiálně), je $b = 0$ a vychází $\theta = 180^\circ$, což odpovídá jejímu odrazu zpět.

V typickém rozptylovém experimentu existuje proud mnoha nabitých částic, které při průletu terčem (např. tenkou kovovou fólií) individuálně interagují s příslušnými centry. Mají při tom různé impaktní parametry b , a tudíž i odpovídající úhly rozptylu θ dané vzorcem (3.56). Má-li částice impaktní parametr z intervalu $(b, b + db)$, rozptýlí se pod úhlem ležícím v intervalu $(\theta, \theta + d\theta)$, jak je naznačeno na tomto obrázku:



Obvykle definujeme tzv. účinný průřez rozptylu $d\sigma$ do intervalu $(\theta, \theta + d\theta)$ vztahem

$$nd\sigma = \frac{dN}{N},$$

kde N je celkový počet *nastřelených* částic, dN je počet částic, které se *odchýlí do intervalu* $(\theta, \theta + d\theta)$, a n je počet rozptylových center na 1 m^2 . Veličina $d\sigma$ má podle obrázku evidentně rozměr plochy: je to „efektivní“ plocha, kterou musí částice zasáhnout, aby se odchýlila do daného elementárního mezikruží kolem úhlu θ , t.j. $d\sigma = dS = 2\pi b db$. Dosazením z invertované funkce (3.56), tedy $b(\theta) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \cot \frac{\theta}{2}$, dostáváme⁸

$$d\sigma = \pi \left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (3.57)$$

Vyjádřeno pomocí prostorového úhlu $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ tedy platí

$$d\sigma = \left(\frac{Q_1 Q_2}{8\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (3.58)$$

což je slavný *Rutherfordův vztah* pro pružný rozptyl v coulombickém poli. Rutherford ho nejprve odvodil teoreticky a poté (v roce 1911) se svými spolupracovníky experimentálně ověřil rozptylem α -částice na atomech zlata. Experiment jasně prokázal, že dochází ke coulombickému rozptylu na *bodovém* kladně nabitém centru (nikoli například na rozptýleném nábojovém oblaku), čímž byl učiněn *objev atomového jádra* o velikosti řádově 10^{-15} m .

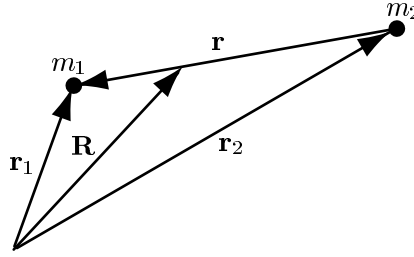
⁸po vypuštění znaménka „–“, což souvisí s tím, že $b(\theta)$ je *klesající* funkce

3.5 Problém dvou těles

Uvažujme nyní dva navzájem gravitačně interagující volné objekty (např. dvojhvězdný systém) o hmotnostech m_1 a m_2 . Oproti Keplerově úloze tedy již nepředpokládáme, že centrum je pevné. Máme proto celkem 6 stupňů volnosti. Ukážeme ale, že po vhodném rozseparování na 3+3 stupně volnosti lze tuto úlohu převést na problém pohybu v poli centrální síly, který jsme již vyřešili v části 3.4.

Trik spočívá v přechodu ke vhodným zobecněným souřadnicím: namísto polohových vektorů $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ obou objektů zavedeme polohu těžiště \mathbf{R} a relativní polohu \mathbf{r} , a to vztahy

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (3.59)$$



t.j. inverzně

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (3.60)$$

Lagrangeova funkce pak má tvar

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}|}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Vidíme, že tři souřadnice (složky vektoru) \mathbf{R} jsou cyklické, takže $(m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = \text{konst.}$ Platí tedy zákon zachování celkové hybnosti soustavy. Pohyb těžiště je proto rovnoměrný (bez zrychlení) a bez újmy na obecnosti můžeme přejít do těžišťového systému, kde $\mathbf{R} = 0$, neboli dle (3.60) platí $\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}$. V této těžišťové soustavě pak má Lagrangeova funkce (3.61) tvar

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{G m_1 m_2}{r}, \quad (3.62)$$

kde jsme zavedli veličinu

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.63)$$

zvanou redukovaná hmotnost. Porovnáme-li nyní tvar Lagrangeovy funkce (3.62) s (3.29), vidíme, že problém dvou těles byl efektivně převeden na předchozí problém pohybu jediné (fiktivní) částice hmotnosti μ v centrálním gravitačním poli pevného centra. Z předchozích výpočtů víme, že výsledný pohyb musí být nutně rovinný. Je tedy výhodné zavést polární souřadnice, ve kterých

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{G(m_1 + m_2)\mu}{r}, \quad (3.64)$$

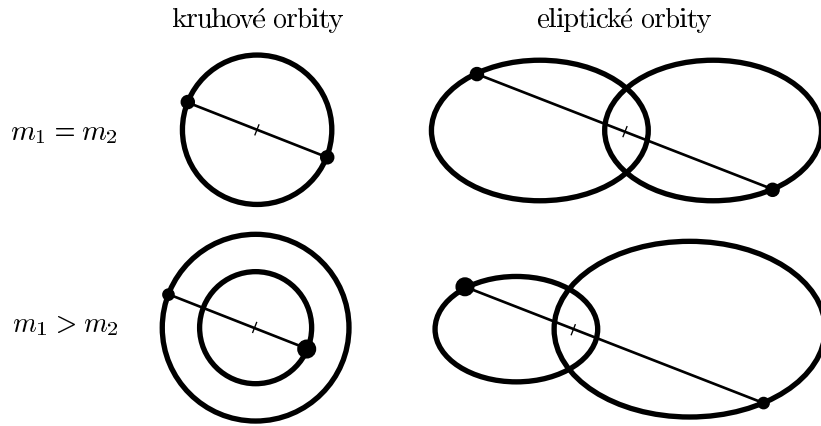
kde jsme využili ekvivalence $G m_1 m_2$ a $G(m_1 + m_2)\mu$. Pro případ $m_2 \ll m_1$ je zjevně $\mu \approx m_2$ a $\mathbf{r}_1 \approx 0$, $\mathbf{r}_2 \approx -\mathbf{r}$, limitně tedy dostáváme Keplerovu úlohu vyřešenou v části 3.4. V obecném případě srovnatelných hmotností obou hvězd postupujeme při řešení naprosto stejně jako v části

3.4.1, provedeme pouze formální substituci $M \rightarrow (m_1 + m_2)$ a $m \rightarrow \mu$. Například 3. Keplerův zákon (3.52) bude mít pro dvojhvězdy tvar

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \quad (3.65)$$

Tento výraz se v astronomii používá k určování hmotností dvojhvězd.

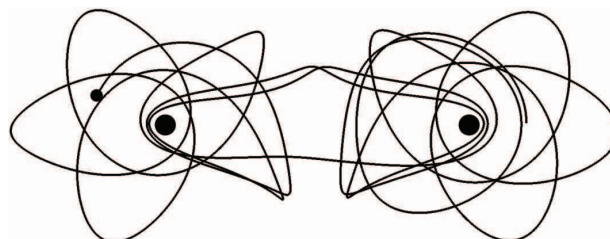
Víme, že orbity vázaného systému mohou být jen kruhové anebo eliptické. V prvním případě jsou obě hvězdy stále stejně daleko od sebe, ve druhém se navzájem přibližují a zase vzdalují dle „eliptického pravidla“. Výslednou dráhu obou těles ovšem musíme vykreslit tak, aby jejich těžiště zůstávalo stále na stejném místě. Pokud mají obě hvězdy naprosto stejnou hmotnost, budou obíhat po stejně velkých kružnicích resp. elipsách. Pokud je však $m_1 > m_2$, bude první hvězda obíhat po menší dráze než druhá hvězda, jak je naznačeno na následujícím obrázku:



3.6 Problém tří těles

Mohlo by se zdát, že přidáním dalšího hmotného bodu do gravitačně interagujícího systému se problém nalezení jeho pohybu příliš nezkomplikuje. Ukazuje se kupodivu, že tomu tak není. Problém tří těles (který má 9 stupňů volnosti) již není obecně analyticky řešitelný. Tím chceme říci, že neexistuje žádná metoda, kterou by se tato úloha dala — po vzoru předchozí části textu — redukovat například na tři jednočásticové situace nebo na jinou rozumnou, obecně řešitelnou soustavu rovnic. Poincaré již v roce 1889 dokázal, že neexistuje dostatečný počet integrálů pohybu umožňujících nalézt řešení kvadraturami t.j. převést problém tří těles na výpočet pouhých integrálů. Kromě některých speciálních explicitních periodických řešení nezbyvá tedy jiná možnost, než integrovat příslušné pohybové rovnice numericky anebo použít sofistikované aproximativní metody.

Dokonce ani tzv. *omezený problém tří těles* není obecně řešitelný. V něm se předpokládají dodatečné omezující podmínky: uvažuje se jen situace, kdy všechna tři tělesa obíhají ve stejné rovině, dále že dvě tělesa o hmotnostech M_1 a M_2 obíhají navzájem po kružnicích, a že třetí těleso má vůči nim zanedbatelnou hmotnost m , tedy že poruchy jím způsobené v pohybu obou těžkých těles jsou zanedbatelné. V takovém případě se úloha redukuje na pohyb jedné testovací částice v *daném* poli dvou přitažlivých center. Potenciálové pole je však netriviální a navíc se otáčí. Tím se do hry efektivně zapojují také neinerčiální síly, např. Coriolisova. Výsledkem je neintegrovatelný systém, pro nějž je typické složité „chaotické“ chování, viz následující obrázek:



Hovoříme v tomto případě o takzvaném *systému s deterministickým chaosem*: pohyb je sice matematicky jednoznačně určen soustavou (nelineárních) diferenciálních rovnic, příslušné řešení je ale obecně velmi komplikované. Jeho podstatnou vlastností je *extrémně citlivá závislost na volbě počátečních dat*. Takovýchto systémů existuje v teoretické mechanice celá řada (např. dvojkyvadlo, těžký nesymetrický setrvačnick atd.) a jejich studiem se zabývá rychle se rozvíjející moderní obor dynamiky nelineárních systémů. Více podrobností o této zajímavé problematice lze najít například v monografiích [11]–[16].

Kapitola 4

Hamiltonův variační princip

V této kapitole zformulujeme a vysvětlíme významný fyzikální princip, který překvapivě stručným a elegantním způsobem vyjadřuje evoluční zákony klasické mechaniky. Má podobu jediné prosté rovnice $\delta S = 0$, kterou čteme „variací akce je nulová“, přičemž čtyři uvedená slova odpovídají příslušným čtyřem symbolům v rovnici. Poslední dvě slova jsou každému jasná, ale první dva pojmy jsou nové a dosud jsme se s nimi nesetkali. Právě ty tvoří vlastní obsah Hamiltonova variačního principu. Definici a objasnění pojmů „variací funkcionálu“ a „funkcionál akce“ proto věnujeme podstatnou část této kapitoly.

Jak dále uvidíme, rovnice $\delta S = 0$ správně popisuje nejenom evoluci soustavy hmotných bodů, ale také kontinua, elektromagnetického a gravitačního pole, ba dokonce chování kvantových polí. Důsledkem jejích symetrií jsou navíc zákony zachování (hybnosti, momentu hybnosti, energie, náboje a tak dále). Mnozí proto pokládají Hamiltonův variační princip za nejhlubší, nejobecnější a nejdůležitější fyzikální zákon vůbec.

4.1 Základy variačního počtu

Abychom pochopili podstatu fyzikální rovnice $\delta S = 0$, musíme se nejprve seznámit s aparátem oboru matematické analýzy, který se nazývá *variační počet*. Tento obor se zabývá *minimalizací a maximalizací funkcionálů*, přičemž funkcionály jsou zobrazení z množiny funkcí do množiny reálných čísel a často mají podobu určitých integrálů obsahujících hledané funkce a jejich derivace.

4.1.1 Historické úlohy

Nejjednodušším příkladem takového problému je *hledání křivky nejkratší délky* spojující dva body. V rovině je to zjevně úsečka, ale na zakřiveném povrchu je řešení úlohy netriviální. Ukazuje se například, že nejkratší spojnice dvou bodů na povrchu koule je oblouk hlavní kružnice mezi nimi (proto mají optimální dálkové trasy letadel zobrazené na mapě tak „zvláštní“ tvary). Extremální spojnice v obecně zakřiveném prostoru libovolné dimenze se nazývají *geodetiky*. Geodetiky jsou i trajektoriemi volných těles v Einsteinově teorii gravitace (jeho obecná relativita z roku 1915 je geometrická teorie, gravitační interakci popisuje jako zakřivení čtyřrozměrného prostoročasu).

Příbuzný problém ve fyzikálním kontextu je obsahem *Fermatova principu geometrické optiky* (1662): světlo se mezi dvěma body šíří za „nejkratší čas“, po dráze s *nejkratší optickou délkou*, přičemž optická délka závisí na indexu lomu prostředí. Z tohoto principu lze odvodit zákon odrazu na zrcadle anebo Snellův zákon lomu na rozhraní s různými optickými vlastnostmi.

V mechanice je podobnou úlohou hledání takzvané *brachistochrony*, neboli *časově nejrychlejší spojnice dvou bodů v gravitačním poli* („brachistos chrónos“ ve staré řečtině znamená „nejkratší čas“). Tato úloha sehrála významnou roli v dějinách fyziky: byla to historicky první matematicky zformulovaná úloha variačního počtu. Svým kolegům ji předložil Johann Bernoulli v červnu roku 1696 ve vědeckém časopise *Acta Eruditorum*. Příslušné řešení pak následně (a téměř současně)

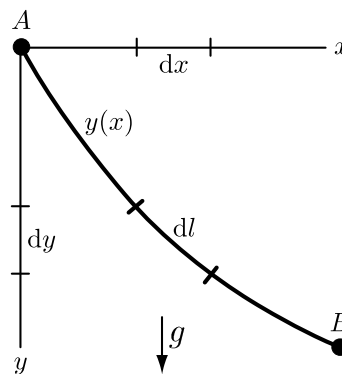
našli Newton, Johann a Jakob Bernoulli, Leibniz, von Tschirnhaus a l'Hôpital. Na ně navázali Leonhard Euler a Joseph-Louis Lagrange, zakladatelé ucelené teorie hledání extrémů funkcí, tedy variačního počtu. Kvůli své historické významnosti i pro svou názornost zformulujeme tuto úlohu explicitně:

Úloha o brachistochroně:

Hledejme hladkou funkci $y(x)$ takovou, aby objekt vypuštěný v homogenním gravitačním poli z klidu v bodě A dorazil do jiného bodu B po křivce $y(x)$ za nejkratší čas.

Čas, za který objekt proletí element křivky dl je dán běžným vztahem $dt = dl/v$, kde $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ a v je rychlostní funkce. Tu lze vyjádřit ze zákona zachování mechanické energie $\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0$ jako $v(y) = \sqrt{2gy}$. Pro celkový čas letu z bodu A do bodu B tedy platí vzorec

$$t = \int_A^B \frac{dl}{v} = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y(x)}} dx.$$



Pro každou zvolenou dráhu $y(x)$ dává tento určitý integrál jedno číslo, což je celý čas letu t . Naší úlohou je mezi všemi dráhami $y(x)$ najít tu, pro kterou je celkový čas t nejmenší možný.

Z abstraktního matematického hlediska jde o zobrazení, které každé *funkci* přiřazuje určité *číslo*. Takovému zobrazení říkáme *funkcionál*. Stojíme před úkolem najít jeho extrém na prostoru hladkých funkcí, neboli najít takovou unikátní funkci, aby jí přiřazená číselná hodnota byla extrémní.

4.1.2 Matematický aparát

Motivováni předchozím příkladem, uvažujme *abstraktní funkcionál* tvaru

$$I \equiv \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (4.1)$$

což je předpis ve tvaru určitého integrálu přes proměnnou x na intervalu $[a, b]$.¹ Předpokládáme zde, že výrazy $F(x, y, y')$ i $y(x)$ jsou dostatečně hladké funkce (v ideálním případě ze třídy C^∞) a $y'(x)$ značí derivaci funkce $y(x)$ podle x .

Funkcionál (4.1) je konkrétní předpis, který dané funkci $y(x)$ přiřazuje jedno reálné číslo I . Chceme-li explicitně zdůraznit, jakou funkci vyčíslujeme, používáme symbol $I[y(x)]$.

Abychom našli *extremálu*, tedy funkci $y(x)$ pro kterou číslo $I[y(x)]$ nabývá extrémní hodnoty, musíme ji *porovnat s jinými blízkými funkcemi* $y_b(x)$. Blízkost těchto sousedních funkcí je míněna například ve smyslu normy $\|y_b - y\| \equiv \max_{x \in [a, b]} |y_b(x) - y(x)|$ na prostoru funkcí C^∞ (nebo C^k) na intervalu $[a, b]$.

Ve variačním počtu zavádíme následující základní pojmy:

- variace funkce je funkce $\delta y(x) \equiv y_b(x) - y(x)$
- variace funkcionálu je číslo $\delta I \equiv I[y_b(x)] - I[y(x)]$ příslušející variaci funkce $\delta y(x)$
- aby $y(x)$ byla extrémála musí platit $\delta I[y(x)] = 0$ pro každou její malou variaci $\delta y(x)$

¹V souladu s notací běžnou v moderní mezinárodní literatuře a normou ISO 31-11 označujeme uzavřený interval hranatými závorkami $[a, b]$, nikoli lomenými $\langle a, b \rangle$, jak je zvykem v tradičních českých matematických textech.

Podmínka $\delta I[y(x)] = 0$ zjevně znamená, že $I[y(x)] = I[y_b(x)]$ neboli $I[y(x)] = I[y(x) + \delta y(x)]$ pro každou malou variaci $\delta y(x)$. To znamená, že číselná hodnota funkcionálu I se v blízkém okolí extrémů $y(x)$ nemění. Jinými slovy: funkcionál má v okolí extrémů *stacionární hodnotu*.

Stacionarita funkcionálu I daná podmínkou $\delta I = 0$ je analogická podmínce $f' = 0$ na nulovost derivace funkce $f(x)$, známé z matematické analýzy. Stejně jako nulovost f' identifikuje buď lokální maximum, minimum nebo inflexní bod x funkce f , tak nulovost δI analogicky identifikuje buď lokální maximum, minimum nebo pozastavení hodnoty funkcionálu I v okolí funkce $y(x)$.

Precizujme ještě charakter námi uvažovaných variací funkce $\delta y(x)$:

- *úloha s pevnými konci*: Předpokládáme $\delta y(a) = 0 = \delta y(b)$, neboli že hodnota funkce $y(x)$ i všech jí blízkých funkcí $y_b(x)$ je v $x = a$ i v $x = b$ pevně daná a nemůže se měnit.
- *izochronní variace*: Provádíme jenom takové variace $\delta y(x)$, kdy při porovnávání hodnot funkcí $y_b(x)$ a $y(x)$ uvažujeme stejnou hodnotu nezávislé proměnné x .
- *variace jsou „infinitesimálně malé“*: Předpokládáme $\delta y(x) \equiv \varepsilon \eta(x)$, kde $\eta(x)$ je libovolná hladká funkce a ε je malý parametr. Ve výrazech pak nakonec uvažujeme limitu $\varepsilon \rightarrow 0$. V této limitě je potom variace funkcionálu δI lineárním funkcionálem v proměnné δy .

Nyní již můžeme prezentovat *fundamentální větu variačního počtu*:

Nutnou podmínkou stacionarity ($\delta I = 0$) funkcionálu $I[y(x)]$ je, že příslušná funkce $y(x)$ řeší Eulerovu–Lagrangeovu rovnici

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

(4.2)

Podstata důkazu: Vyjádříme explicitně výraz pro variaci funkcionálu I a použijme $y_b = y + \delta y$:

$$\delta I \equiv I[y_b(x)] - I[y(x)] = \int_a^b [F(x, y_b, y'_b) - F(x, y, y')] dx = \int_a^b [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx.$$

Nyní můžeme provést Taylorův rozvoj prvního členu a odečíst od něj dominantní druhý člen. Protože δy a $\delta y'$ jsou malé variace, lze zanedbat členy vyššího řádu, takže zůstane jen

$$\delta I \doteq \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx.$$

Výraz $\delta y'$ znamená $\delta \left(\frac{dy}{dx} \right)$. Ale protože variace jsou izochronní (změny y se uvažují při pevném x), lze pořadí derivování podle x a variování podle y nazvájem prohodit, takže $\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y)$. Druhou část integrálu lze potom dále upravit pomocí pravidla *per partes*:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx}(\delta y) dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx.$$

Protože řešíme variační úlohu s pevnými konci, je $\delta y(a) = 0 = \delta y(b)$, díky čemuž je $\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b = 0$. Odvodili jsme tedy, že

$$\delta I \doteq \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0.$$

Nyní použijeme základní lemma variačního počtu (které lze dokázat sporem): Jestliže pro všechny funkce $g(x)$ je $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$, pak nutně $f(x) = 0$. V našem případě je $g(x)$ libovolná variace $\delta y(x)$, takže funkce $f(x)$, což je zde výraz v hranatých závorkách, musí být nulový pro každé x . Tím je podmínka (4.2) odvozena.

⊠

Integrální předpis (4.1) funkcionálu I lze různými způsoby rozšířit na *obecnější případy*:

- **více hledaných funkcí:**
$$I \equiv \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$
- **více nezávislých proměnných:**
$$I \equiv \int \dots \int_{\Omega} F\left(x_1, \dots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) dx_1 \dots dx_n$$
- **vyšší derivace:**
$$I \equiv \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$$
- **dodatečné vazby:** například
$$\int_a^b G(x, y, y') dx = \text{konst.}$$

Tato zobecnění lze samozřejmě navzájem kombinovat. Příslušné podmínky stacionarity $\delta I = 0$ jsou:

- **pro více hledaných funkcí $y_j(x)$:**
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0,$$
 kde $j = 1, \dots, n$, neboť variace δy_j jsou navzájem nezávislé
- **pro více nezávislých proměnných x_i :**
$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{,i}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$
 kde² $y_{,i} \equiv \frac{\partial y}{\partial x_i}$ (Eulerova–Ostrogradského rovnice)
- **pro vyšší derivace:**
$$-(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$
 (Eulerova–Poissonova rovnice)

Více podrobností lze najít v učebnici [1], konkrétně v Dodatku II *Základy variačního počtu* na stranách 505–564. Rigorózní zavedení aparátu variačního počtu se opírá o koncepty Fréchetova diferenciálu (zobecňující pojem úplného diferenciálu funkce) a Gâteauxovy derivace funkcionálu ve směru (zobecňující derivaci funkce ve směru). Spolu se specifikací všech předpokladů je lze najít ve specializované matematické literatuře, například [17].

4.1.3 Řešení historických úloh

Nyní se můžeme vrátit k historickým úlohám variačního počtu zmíněných v části 4.1.1 a vyřešit je.

- **geodetiky v rovině:** Nejkratší spojnice v rovině jsou dány podmínkou $\delta I = 0$, kde příslušný funkcionál vzdálenosti dvou bodů je

$$I = \int dl = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (4.3)$$

neboli $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Protože $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, Eulerovy–Lagrangeovy rovnice (4.2) dávají $\frac{\partial F}{\partial y'} = y' / \sqrt{1 + y'^2} = C = \text{konst.}$, neboli $y'^2 = C^2(1 + y'^2)$. Derivace extrémů je tedy všude konstantní, $y' = C_1$, takže $y(x) = C_1 x + C_2$, kde C_1, C_2 jsou konstanty. Geodetiky v rovině proto jsou přímkami.

²Dolní čárka s indexem se v teoretické fyzice používá jako velmi úsporná zkratka pro označení parciální derivace.

- **geodetiky na sféře:** Nejkratší spojnice na povrchu koule jsou opět dány podmínkou $\delta I = 0$, kde $I = \int dl$. Geometrie je ale nyní jiná, element křivky dl musíme vyjádřit ve sférických souřadnicích jako $dl^2 = (dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2)|_{r=\text{konst.}} = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$. Po zavedení parametrizace hledané křivky $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$ odtud dostáváme $dl = r\sqrt{\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2} dt$. Funkcionál má tedy tvar

$$I = r \int_a^b \sqrt{\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2} dt, \quad (4.4)$$

neboli $F(t, \vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = r\sqrt{\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2}$. Eulerovy–Lagrangeovy rovnice jsou nyní dvě, totiž $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \vartheta} = 0$ a $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$. Ze druhé rovnice díky cykličnosti φ máme ihned $\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} = r \frac{\sin^2 \vartheta \dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2}} = C = \text{konst.}$ Bez újmy na obecnosti lze ovšem natočit osu z tak, že výchozí bod A křivky leží na severním pólu sférických souřadnic, neboli $\vartheta(a) = 0$. Pak ale $\sin \vartheta(a) = 0$ a integrační konstanta C musí být nulová. V každém čase je tedy $\sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = 0$, a protože kdekoli mimo severní pól je $\vartheta \neq 0$, musí nutně platit $\dot{\varphi} = 0$. Dokázali jsme tedy, že extremály na sféře jsou právě poledníky $\varphi = \varphi_0$ zvoleného systému sférických souřadnic. Geodetiky na sféře proto jsou hlavní kružnice.

- **nalezení brachistochrony:** V části 4.1.1 jsme odvodili, že celkový čas t letu objektu po křivce dané funkcí $y(x)$ je (až na konstantu $1/\sqrt{2g}$) dán funkcionálem

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}. \quad (4.5)$$

Příslušná Eulerova–Lagrangeova rovnice pro extremálu ale vyjde docela složitá. K vyřešení úlohy proto s výhodou použijeme následující *trik*. Všimneme si, že Eulerovy–Lagrangeovy rovnice variačního počtu (4.2) jsou co do tvaru identické s Lagrangeovými rovnicemi II. druhu (3.22), stačí jen provést identifikaci $F = L$, $x = t$, $y = q$ a $y' = \dot{q}$ pro $n = 1$. V Lagrangeově formalismu jsme přitom dokázali větu (3.37) o zobecněné energii. Ta říká, že pokud funkce L nezávisí explicitně na t , pak je konstantní výraz $h = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L = \text{konst.}$ Protože F dané (4.5) nezávisí explicitně na x , musí analogicky platit, že

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = \text{konst.} \quad (4.6)$$

Dosazením ze (4.5) dostáváme explicitně

$$\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = \frac{y'^2 - (1+y'^2)}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \frac{-1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \text{konst.} \quad (4.7)$$

neboli

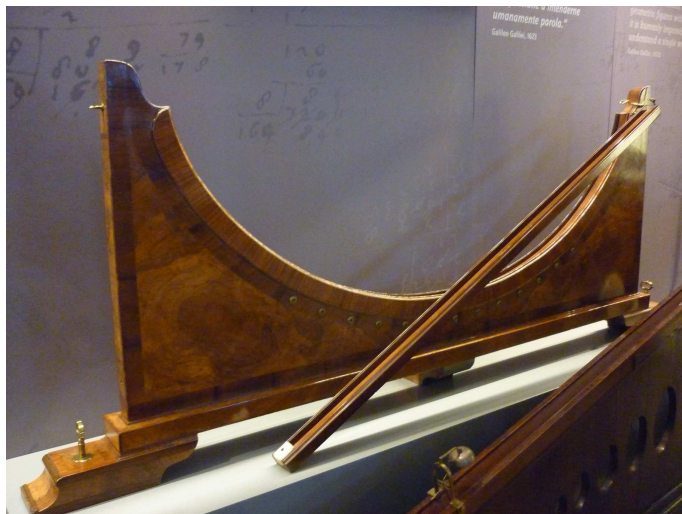
$$y(1+y'^2) = C. \quad (4.8)$$

Tato rovnice má parametrické řešení

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}C(\varphi - \sin \varphi), \\ y &= \frac{1}{2}C(1 - \cos \varphi). \end{aligned} \quad (4.9)$$

To lze ověřit tím, že (4.8) přepíšeme do diferenciálního tvaru $y(dx^2 + dy^2) = C dx^2$ neboli $y dy^2 = (C - y) dx^2$. Diferenciály funkcí (4.9) jsou $dx = \frac{1}{2}C(1 - \cos \varphi) d\varphi$, $dy = \frac{1}{2}C \sin \varphi d\varphi$, po dosazení a zkrácení zbyde podmínka $\sin^2 \varphi = (1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)$, která je vždy splněna.

Jak je známo z geometrie, parametrický vztah (4.9) definuje *cykloidu*. To je křivka, kterou opisuje pevný bod na kružnici, když se kružnice bez prokluzování valí po vodorovné přímce. Dokázali jsme tedy, že brachistochronou je právě cykloida.



Obrázek 4.1: Model brachistochrony v Galileově muzeu ve Florencii (autorem je Francesco Spighi, 2. polovina 18. století, inv. č. 966). Vypustíme-li v horním bodě A současně jednu kuličku po cykloidě a druhou po přímce, dorazí do libovolného dolního bodu B vždy dříve kulička po cykloidě.

4.2 Formulace Hamiltonova variačního principu

Aparát variačního počtu nám umožňuje zformulovat velmi významný fyzikální princip:

Pohyb soustavy se v časovém intervalu $t \in [t_1, t_2]$ děje tak, že

$$\boxed{\delta S = 0}. \quad (4.10)$$

Funkcionál S se nazývá akce a je definován pomocí integrálu

$$\boxed{S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) \, dt}, \quad (4.11)$$

kde L je příslušná Lagrangeova funkce systému.

Nazýváme ho Hamiltonův variační princip, a to na počest irského matematika a astronoma sira Williama Rowana Hamiltona (1805–1865), který rozvinul práce svých předchůdců (zejména Eulera a Lagrangeho) ohledně variační formulace mechanických dějů. V literatuře se také někdy uvádí jako *princip nejmenší akce* (anglicky pak *Hamilton's principle* resp. *principle of least action*, přesněji *principle of stationary action*).

Slovně můžeme fundamentální rovnici (4.10) vyjádřit tak, že

$\boxed{\text{Skutečná trajektorie } q^j(t) \text{ je taková, že akce } S \text{ pro ni nabývá stacionární hodnotu.}}$

Povšimněme si, že akce S (akční funkcionál) se měří *fyzikální jednotkou* J·s, protože je součinem Lagrangeovy funkce (která je dána energií s jednotkou joule) a času (s jednotkou sekunda). Z hlediska teoretické fyziky je velmi důležité, že stejnou jednotku má také Planckova konstanta \hbar , fundamentální parametr kvantové mechaniky. Z toho plyne, že jejich podíl S/\hbar je bezrozměrné číslo.

Toto bezrozměrné číslo hraje významnou roli v rovnicích kvantové mechaniky a hledání jejího vztahu ke klasické mechanice, viz například rovnice (5.51) a následná diskuze tohoto problému včetně Feynmanovy formulace kvantové mechaniky pomocí dráhového integrálu.

Odůvodnění Hamiltonova variačního principu:

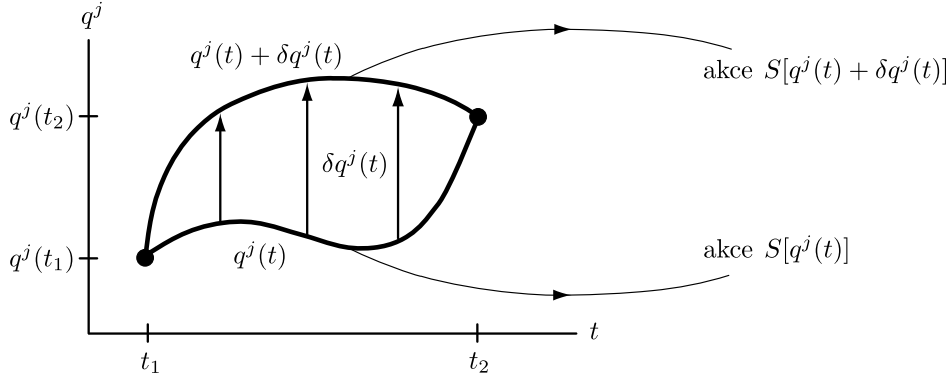
V části 4.1.2 jsme ukázali, že nutnou podmínkou stacionarity $\delta I = 0$ abstraktního funkcionálu (4.1) je Eulerova–Lagrangeova rovnice (4.2) variačního počtu. Ta se přímočaře zobecňuje pro případ více nezávislých funkcí $y_j(x)$ ve funkcionálu $I \equiv \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$, a to do podoby

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0, \quad \text{kde } j = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

V kontextu Hamiltonova variačního principu mají tyto abstraktní matematické proměnné fyzikální význam, konkrétně $I \equiv S$, $F \equiv L$, $x \equiv t$, $y_j \equiv q^j$, $y'_j \equiv \dot{q}^j$. V takovém případě jsou však Eulerovy–Lagrangeovy rovnice (4.12) zcela totožné s Lagrangeovými rovnicemi II. druhu (3.22). Lagrangeovy pohybové rovnice klasické mechaniky jsou tedy důsledkem rovnice $\delta S = 0$ vyjadřující podmínku stacionarity funkcionálu akce.

☒

Z didaktických důvodů provedme ještě důkaz tohoto tvrzení přímo ve fyzikálních proměnných, kdy funkcionálem je akce S definovaná (4.11) a hledanými extrémami jsou trajektorie $q^j(t)$ vývoje systému s n stupni volnosti, viz obrázek.



Přímé odvození: Podobně jako v důkazu (4.2) nejprve vyjádříme variaci funkcionálu akce S ,

$$\delta S \equiv S[q^j(t) + \delta q^j(t)] - S[q^j(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q^j(t) + \delta q^j(t), \dot{q}^j(t) + \delta \dot{q}^j(t), t) - L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) \right] dt.$$

Provedeme Taylorův rozvoj prvního členu a zanedbáme vyšší mocniny variací $\delta q^j(t)$ a $\delta \dot{q}^j(t)$,

$$\delta S \doteq \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j(t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j(t) \right] dt.$$

Pro izochronní variace platí $\delta \dot{q}^j = \frac{d}{dt}(\delta q^j)$ a užitím pravidla *per partes* lze pak vyjádřit:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j(t) dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j(t) dt.$$

Řešíme variační úlohu s pevnými konci, $\delta q^j(t_1) = 0 = \delta q^j(t_2)$, takže $\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j(t) \right]_{t_1}^{t_2} = 0$. Variace akce je tedy dána výrazem

$$\delta S \doteq \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j(t) - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j(t) \right] dt,$$

neboli

$$\delta S \doteq \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \right] \delta q^j(t) dt.$$

Hamiltonův variační princip $\delta S = 0$ vyžaduje, aby tento výraz byl nulový *pro každou variaci* $\delta q^j(t)$, které jsou nadto pro všechna j navzájem nezávislé. Podle základního lemmatu variačního počtu je to možné pouze v případě, když jsou všechny hranaté závorky nulové, a to v kterémkoli okamžiku t (jinak lze sporem dokázat neplatnost $\delta S = 0$). Stacionarita akce tedy nutně vyžaduje, aby platilo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \quad \text{pro každé } j = 1, \dots, n, \quad (4.13)$$

což jsou přesně Lagrangeovy rovnice II. druhu (3.22).

☒

Několik komentářů:

- Odvození Lagrangeových rovnic klasické mechaniky jako důsledek stacionarity akce $\delta S = 0$ jsme zde provedli za určitých matematických předpokladů na *hladkost příslušných funkcí*. Při výpočtu jsme také předpokládali *variační úlohu s pevnými konci*. A samozřejmě *existenci Lagrangeovy funkce* $L = T - V$, tedy existenci potenciálu anebo zobecněného potenciálu V . Hamiltonův variační princip lze ale zobecnit i pro nekonzervativní síly, viz například část 3.8.4 učebnice [1].
- V kontextu variačního principu lze *explicitně započítat také dodatečnou holonomní vazbu* $\phi(q^j, t) = 0$. Uděláme to tak, že namísto Lagrangeovy funkce L vezmeme funkci $L + \lambda \phi$ a variaci provedeme s dodatečnou podmínkou $\phi(q^j, t) = 0$. Tato vazba se započte vhodným Lagrangeovým multiplikátorem λ , takže variace δq^j lze opět pokládat za nezávislé. Hamiltonův variační princip pak má tvar $\delta S = \delta \int (L + \lambda \phi) dt = 0$, a příslušné Eulerovy–Lagrangeovy podmínky stacionarity jsou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (L + \lambda \phi)}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial (L + \lambda \phi)}{\partial q^j} = 0 \quad \text{neboli} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q^j}. \quad (4.14)$$

Zahrneme-li všechny vazby do vhodné volby zobecněných souřadnic, je efektivně $\lambda = 0$ a vztahy (4.14) se redukují na Lagrangeovy rovnice II. druhu.

Pokud naopak zůstaneme u kartézských souřadnic $q^j = x_j$, vliv vazby $\phi = 0$ se musí započítat pomocí multiplikátoru λ . V tom případě dostáváme z (4.14) Lagrangeovy rovnice I. druhu. Opravdu: pro $L = T - V = \frac{1}{2}m \sum \dot{x}_i^2 - V(x_i)$ se rovnice (4.14) redukují na

$$m \ddot{x}_j + \frac{\partial V}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_j},$$

tedy souřadnicový tvar vektorové rovnice $m \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} = \lambda \text{grad } \phi$, která je ekvivalentní (2.16).

- Hamiltonův princip lze zobecnit i pro neholonomní vazby, viz část 3.8.3 v [1].

Můžeme shrnout, že *Hamiltonův variační princip* $\delta S = 0$ je *nejelegantnější a nejstručnější formulace zákonů mechaniky*, navíc zcela nezávislá na volbě souřadnic. Měli bychom také zdůraznit jeho výjimečný koncepční statut: Zatímco v dosavadním výkladu jsme různé formulace pohybových zákonů *odvozovali* z Newtonova zákona, Hamiltonův variační princip je *postulován*. Lagrangeovy a Newtonovy rovnice se z něj získávají jako nutná podmínka stacionarity funkcionálu akce.

Je také pozoruhodné, že Hamiltonův variační princip platí nejen pro soustavu hmotných bodů a pohyb tuhého tělesa, ale i pro mechanické kontinuum. *Dokonce ho lze zobecnit i na nemechanické děje*, konkrétně pro případ teorií pole jako je Maxwellova elektrodynamika, Einsteinova teorie gravitace, Diracova teorie elektronů a tak dále. Věnujme tomuto zajímavému a významnému rozšíření Hamiltonova principu následující stručnou přehledovou část textu, přestože svým obsahem značně přesáhne rámec kurzu klasické mechaniky.

4.2.1 Hamiltonův variační princip v teorii pole

Mechanické kontinuum a klasická fyzikální pole chápeme jako *spojitá prostředí*. To znamená, že hodnota určité fyzikální veličiny je definována *v každém bodě*. Počet stupňů volnosti n systému tedy již není konečný, ale je nekonečný (dokonce spojitě nekonečný)!

Asi nejnázornější ilustrací jednodimenzionálního mechanického kontinua je *struna*. Můžeme si ji představit jako spojitou soustavu nekonečně mnoha hmotných bodů nataženou podél osy x . Díky vnitřnímu napětí je struna v klidovém stavu přímá. Když ji ale na některém místě vychýlíme z rovnovážné polohy (v příčném nebo podélném směru) a pak uvolníme, začnou se po ní šířit vlny a struna se postupně všude rozkmitá. Touto úlohou se budeme zabývat později v kapitole 9 *Rovnice struny a její řešení*.

Zde nám jde jenom o obecný koncepční přechod k takovéto soustavě s nekonečně mnoha stupni volnosti. Dosud jsme uvažovali soustavy s konečným počtem hmotných bodů, jejichž polohy byly určeny zobecněnými souřadnicemi q^j , kde $j = 1, 2, 3, \dots, n \in \mathbb{N}$. Jak ale identifikovat (tedy „pojmenovat“) všechny hmotné body spojitě struny? Přirozenou volbou je použít k tomu *jejich klidové polohy* na ose x . Zobecněnou souřadnici x -tého bodu struny (popisující její výchylku) tedy můžeme označit symbolem q^x , kde $x \in \mathbb{R}$ identifikuje, o který bod struny se jedná.

Časový vývoj spojitěho systému tedy již není dán n -ticí funkcí $q^j(t)$, ale x -ticí funkcí $q^x(t)$. Z konvenčních důvodů ale tyto funkce obvykle označujeme symbolem $q(x, t)$, tedy chápeme je jako *funkci 2 proměnných*, totiž (počáteční) polohy částice struny x a času t .

Koncept spojitěho jednodimenzionálního kontinua (struny) lze dále zobecnit na kontinuum ve třech prostorových dimenzích, například tekutiny či elastické prostředí. V tom případě pak pracujeme s polními veličinami typu $\Phi(x, y, z, t)$, které mohou být *skalární, vektorové či tenzorové povahy*. V případě mechaniky tekutin jsou to například hustotní pole $\rho(x, y, z, t)$, rychlostní pole $v_i(x, y, z, t)$, či pole tenzoru napětí $\tau_{ij}(x, y, z, t)$. V případě elektromagnetického pole jsou těmito veličinami například skalární a vektorový potenciál $\varphi(x, y, z, t)$ a $A_i(x, y, z, t)$.

U *relativistických polních teorií* pak pochopitelně přecházíme k jejich popisu ve čtyřrozměrném prostoročase, jehož události identifikujeme souřadnicemi $x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$, takže například obecné skalární pole pak má tvar funkce $\Phi(x^\mu)$. Podobně lze zapisovat i složitější elektromagnetická pole $\varphi(x^\mu)$ a $A_i(x^\mu)$. Navíc se ukazuje, že tyto potenciály lze spolu zkombinovat do jediného čtyřvektoru $A_\nu \equiv (-\varphi/c, A_x, A_y, A_z)$, takže *Maxwellovo elektromagnetické pole lze popsat čtyřvektorovou funkcí $A_\nu(x^\mu)$* . V *Einsteinově obecné teorii relativity* je *gravitační pole chápáno jako zakřivení prostoročasu, jehož geometrie je popsána metrickým tenzorovým polem $g_{\mu\nu}(x^\mu)$* .

Zde popsaný přechod od soustavy konečně mnoha hmotných bodů k popisu spojitěho prostředí a dále k teorii pole ve formalizmu teorie relativity lze schématicky shrnout:

$q^j(t)$	$j \in \mathbb{N}$
↓	spojité prostředí
$q^x(t) \equiv q(x, t)$	$x \in \mathbb{R}$
↓	více dimenzí prostoru
$\Phi(x, y, z, t)$	
↓	relativisticky
$\Phi(x^\mu)$	
↓	složitější pole
$A_\nu(x^\mu), \quad g_{\mu\nu}(x^\mu), \quad \text{atd.}$	
Maxwell	Einstein

V teorii kontinua a teorii pole nás samozřejmě zajímá protoročasný vývoj příslušných fyzikálních veličin. Ty jsou určeny pohybovými rovnicemi resp. evolučními rovnicemi pole. Je opravdu pozoruhodné, že tyto rovnice pole lze odvodit z variačního principu $\delta S = 0$.

Opravdu platí, že

$$\boxed{\text{Příroda realizuje takové pole, pro které je } \delta S = 0.}$$

Zde S je funkcionál akce daného systému, definovaný stejným vztahem (4.11) jako v mechanice, tedy $S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L dt$, kde L je příslušná Lagrangeova funkce. Ta ovšem nyní nezávisí jen na konečném počtu funkcí $q^j(t)$ a jejich časových derivacích $\dot{q}^j(t)$, ale na *spojitých veličinách* typu $q(x, t)$ a na jejich parciálních derivacích $q_{,t} \equiv \frac{\partial q}{\partial t}$ a $q_{,x} \equiv \frac{\partial q}{\partial x}$. Obecně závisí L na polních veličinách typu $\Phi(x^\mu)$ a všech jejich prostoročasových změnách, tedy derivacích $\Phi_{,\mu} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}$ podle souřadnic x^μ .

Navíc je přirozené přejít k hustotě Lagrangeovy funkce \mathcal{L} , určující „lokální hodnotu Lagrangeovy funkce v objemu“ v tom smyslu, že platí $L = \int_V \mathcal{L} dV$. Akce pole má tedy obecný tvar

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \equiv \int_{\Omega} \mathcal{L}(\Phi, \Phi_{,\mu}, x^\mu) d\Omega}, \quad (4.15)$$

kde $d\Omega \equiv dV dt$ je element objemu prostoročasu (v obecné relativitě je $d\Omega \equiv \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} dV dt$).

Lze ukázat, že Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro stacionaritu funkcionálu $\delta S = 0$ mají tvar

$$\boxed{\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0}. \quad (4.16)$$

Takové jsou správné evoluční rovnice studovaného fyzikálního systému.

Ilustrujme tuto pozoruhodnou skutečnost na pár důležitých příkladech:

struna

Příčné kmity struny lze popsat výchylkou $u(x, t)$. Příslušná hustota Lagrangeovy funkce je dána vzorcem (9.7) v části 9.2 kapitoly *Rovnice struny a její řešení*, tedy $\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} \rho (u_{,t})^2 - \frac{1}{2} \sigma (u_{,x})^2$. Eulerovy–Lagrangeovy rovnice (4.16) při identifikaci $\Phi \equiv u(x, t)$ mají v tomto případě tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,t}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,x}} \right) = \rho u_{,tt} - \sigma u_{,xx} = 0,$$

což je vlnová rovnice struny (9.9).

evoluční rovnice klíčových fyzikálních polí

Bez bližšího vysvětlení uveďme hustotu Lagrangeovy funkce \mathcal{L} teorie a z ní plynoucí polní rovnice, které mají obecný tvar (4.16), což je nutná podmínka stacionarity příslušné akce (4.15):

• Maxwell	$\mathcal{L} = -\frac{\varepsilon}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\nu A_\nu$	$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{\varepsilon c} j^\mu$
• Einstein	$\mathcal{L} = -\frac{c^3}{16\pi G} R + \frac{1}{c} \mathcal{L}_{\text{hmota}}$	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$
• Klein–Gordon	$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\Phi^{,\mu} \Phi_{,\mu} - \kappa^2 \Phi^2)$	$(\square + \kappa^2) \Phi = 0$
• Dirac	$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - \kappa) \psi$	$(i \gamma^\mu \partial_\mu - \kappa) \psi = 0$

Zavedení zde použitých veličin je předmětem pokročilých kurzů relativistické a kvantové fyziky.

4.3 Teorém Emmy Noetherové

V kontextu Lagrangeova formalismu a Hamiltonova variačního principu lze odvodit velmi hlubokou souvislost mezi matematickými symetriemi akce a fyzikálními zákony zachování:

Má-li systém (tedy jeho akce) nějakou spojitou symetrii, pak existuje jí odpovídající fyzikální veličina, která se zachovává.

Tuto klíčovou větu teoretické fyziky explicitně zformulovala a dokázala vynikající matematicka Amalie Emmy Noetherová (1882–1935) v roce 1915 a publikovala v roce 1918 [18]. Na její počest se nazývá teorém Emmy Noetherové.

Explicitně ho lze vyjádřit a dokázat následujícím způsobem:

Nejprve musíme zavést koncept *symetrie systému vůči spojitým transformacím*.

Uvažujme velmi obecnou třídu (diferencovatelných) transformací času a zobecněných souřadnic

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t'(t, q^j, \varepsilon), \\ q^j &\rightarrow q'^j(t, q^j, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.17)$$

tedy nová časová proměnná t' i nové souřadnice q'^j jsou funkcemi původních proměnných t a q^j . V transformačních vztazích (4.17) je navíc *jeden dodatečný reálný parametr* ε , který parametrizuje třídu transformací daného typu. Přirozeně předpokládáme, že pro hodnotu $\varepsilon = 0$ je to *identita*, tedy $t' = t$ a $q'^j = q^j$. Můžeme provést Taylorův rozvoj funkcí (4.17) podle tohoto parametru, čímž dostaneme vztah $t' = t'(\varepsilon = 0) + \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon}(\varepsilon = 0)\varepsilon + \frac{\partial^2 t'}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon = 0)\varepsilon^2 + \dots$, podobně lze vyjádřit q'^j . Když je *parametr ε malý*, lze zanedbat členy s jeho vyššími mocninami. Uvažovaná třída konečných transformací (4.17) se pak zjednoduší na příslušnou třídu takzvaných infinitesimálních transformací času a zobecněných souřadnic, které mají tvar

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = t + \varepsilon T(t, q^j), \\ q^j &\rightarrow q'^j = q^j + \varepsilon Q^j(t, q^j), \end{aligned} \quad (4.18)$$

kde hladké funkce $T(t, q^j)$ a $Q^j(t, q^j)$ jsou první derivace funkcí (4.17) podle ε , vyčíslené pro $\varepsilon = 0$. Říkáme jim generátory transformací.

Uvedme konkrétní příklady velmi důležitých transformací tohoto typu:

- **prostorová translace** neboli *posunutí v kartézském směru x*

$$\begin{aligned} t' &= t & T &= 0 \\ x' &= x + \varepsilon & Q^x &= 1 \\ y' &= y & Q^y &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

- **prostorová rotace** neboli *otočení kolem počátku polárních souřadnic*

$$\begin{aligned} t' &= t & T &= 0 \\ r' &= r & Q^r &= 0 \\ \varphi' &= \varphi + \varepsilon & Q^\varphi &= 1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

- **časová translace** neboli *posunutí v časovém směru t*

$$\begin{aligned} t' &= t + \varepsilon & T &= 1 \\ q'^j &= q^j & Q^j &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

V těchto případech jsou generátory transformací jen triviální konstanty 0 a 1, protože příslušné zobecněné souřadnice jsou adaptovány na danou symetrii. Díky tomu jsou také infinitesimální transformace (4.19), (4.20), (4.21) *shodné s konečnými* (4.17), neboli parametr ε v nich nemusí být malé číslo ale libovolně velké, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Obecně tomu tak samozřejmě není. Třeba prostorovou rotaci můžeme vyjádřit v kartézských souřadnicích. Konečná transformace, infinitesimální transformace a příslušné generátory se pak liší a mají složitější tvar

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon & x' &= x + \varepsilon y & Q^x &= y \\ y' &= -x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon & y' &= y - \varepsilon x & Q^y &= -x \end{aligned} \quad (4.22)$$

Poznamenejme ještě, že zmíněné třídy konečných transformací (translací, rotací) *tvorí grupu*. Jeden její konkrétní prvek je transformace s danou hodnotou ε . Jednotkový prvek grupy je identická transformace (s hodnotou $\varepsilon = 0$), inverzní prvek je inverzní transformace ($\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$) a binární grupovou operací je pochopitelně skládání dvou transformací ($\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$). Tyto jednoparametrické grupy transformací nejsou konečné, obsahují *spojitě nekonečně prvků*, které jsou indexovány parametrem $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Jsou to takzvané *Lieovy grupy*: grupy které jsou současně hladkými varietami. Lieovy grupy hrají klíčovou roli v moderní teoretické fyzice, podrobnosti o těchto matematických strukturách lze najít např. v učebnicích [19, 20].

Nyní již můžeme exaktně zformulovat, co myslíme pojmem spojitá symetrie systému.

Mějme mechanický systém popsaný Lagrangeovou funkcí L . Příslušný funkcionál akce (4.11) je

$$S[q^j(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) dt. \quad (4.23)$$

Provedme nyní transformaci času a souřadnic tvaru (4.17). V nových proměnných obecně dostaneme *jinou* Lagrangeovu funkci L' a akci

$$S'[q'^j(t')] \equiv \int_{t'_1}^{t'_2} L'(q'^j(t'), \dot{q}'^j(t'), t') dt'. \quad (4.24)$$

Systém má symetrii, když je hodnota akčního funkcionálu při dané transformaci invariantní, tedy

$$\boxed{S[q^j(t)] = S'[q'^j(t')]} \quad (4.25)$$

Navíc musí mít Lagrangeova funkce v nových proměnných zcela stejný tvar jako v původních, tedy co do formy platí $L' = L$, neboli přesněji

$$\boxed{L'(q'^j(t'), \dot{q}'^j(t'), t') = L(q^j(t'), \dot{q}^j(t'), t')} \quad (4.26)$$

Teorém Emmy Noetherové:

Jsou-li splněny předpoklady (4.25) a (4.26) symetrie systému, pak se zachovává fyzikální veličina

$$\boxed{\mathcal{Z} \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} (Q^j - \dot{q}^j T) + L T}, \quad (4.27)$$

kde $T(t, q^j)$ a $Q^j(t, q^j)$ jsou generátory transformace symetrie. Veličina \mathcal{Z} je tedy integrál pohybu, neboli $\frac{d}{dt} \mathcal{Z}(t) = 0$.

Důkaz: Kombinací podmínek (4.25) a (4.26) a definic funkcionálu akce (4.23) a (4.24) dostáváme

$$S' - S = \int_{t'_1}^{t'_2} L(q'^j(t'), \dot{q}'^j(t'), t') dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) dt = 0. \quad (4.28)$$

V prvním integrálu je t' jenom integrační proměnná, takže ji můžeme přeznačit na t ,

$$\int_{t'_1}^{t'_2} L(q'^j(t), \dot{q}'^j(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) dt = 0. \quad (4.29)$$

Nyní využijeme vztahy (4.18) pro infinitesimální transformace, $t' = t + \varepsilon T$ a $q'^j = q^j + \varepsilon Q^j$, kde ε je velmi malý parametr. V prvním určitém integrálu lze integrační meze rozepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \int_{t'_1}^{t'_2} L(t) dt &= \int_{t_1 + \varepsilon T_1}^{t_2 + \varepsilon T_2} L(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt + \int_{t_2}^{t_2 + \varepsilon T_2} L(t) dt + \int_{t_1 + \varepsilon T_1}^{t_1} L(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt + \varepsilon T_2 L(t_2) - \varepsilon T_1 L(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt + [\varepsilon L T]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dále upravíme integrand $L(t)$ Taylorovým rozvojem ve variačních proměnných $\delta q^j(t)$ a $\delta \dot{q}^j(t)$ ve *fixním* čase t , neboli použijeme izochronní variace, pro které platí vztah $\delta \dot{q}^j(t) = \frac{d}{dt} \delta q^j(t)$:

$$\begin{aligned} L(t) &\equiv L(q'^j(t), \dot{q}'^j(t), t) \equiv L(q^j(t) + \delta q^j(t), \dot{q}^j(t) + \delta \dot{q}^j(t), t) \\ &\doteq L(q^j, \dot{q}^j, t) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j \right), \end{aligned} \quad (4.31)$$

kde jsme zanedbali členy vyšších řádů. Dosazením výrazu (4.31) do (4.30) dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{t'_1}^{t'_2} L(q'^j(t), \dot{q}'^j(t), t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j \right) dt + [\varepsilon L T]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Z podmínky invariance (4.28) tedy plyne, že

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j \right) dt + [\varepsilon L T]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (4.33)$$

Pomocí Lagrangeových pohybových rovnic (4.13) můžeme první člen přepsat $\frac{\partial L}{\partial q^j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right)$, ve druhém členu je podobně $\delta \dot{q}^j = \frac{d}{dt} \delta q^j$. Výraz v závorce je tedy *úplná časová derivace*, konkrétně

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j \right) dt + [\varepsilon L T]_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (4.34)$$

takže lze explicitně provést integraci do tvaru

$$\left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j + \varepsilon L T \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (4.35)$$

Nakonec už jenom vyjádříme izochronní variaci $\delta q^j(t)$ pomocí generátorů infinitesimální transformace (4.18). Příslušnou *celou změnu* $q'^j - q^j = \varepsilon Q^j$ můžeme rozložit na izochronní *změnu polohy* δq^j a změnu polohy v důsledku *změny časové proměnné*, kterou lze vyjádřit $\dot{q}^j(t' - t) = \dot{q}^j \varepsilon T$. Platí tedy vztah $\varepsilon Q^j = \delta q^j + \dot{q}^j \varepsilon T$ neboli $\delta q^j = \varepsilon (Q^j - \dot{q}^j T)$, takže rovnici (4.35) lze přepsat

$$\left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} (Q^j - \dot{q}^j T) + L T \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (4.36)$$

Výraz v závorce je přesně veličina \mathcal{Z} definovaná vzorcem (4.27). Dokázali jsme tedy, že

$$\left[\mathcal{Z}(t) \right]_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (4.37)$$

neboli platí $\mathcal{Z}(t_2) = \mathcal{Z}(t_1)$. A protože koncový čas t_2 vývoje systému lze v těchto úvahách zvolit libovolně, znamená to, že funkce $\mathcal{Z}(t)$ má v každém okamžiku stejnou hodnotu jako v počátečním čase t_1 , neboli je to integrál pohybu. Tím je důkaz dokončen.

□

Aplikace teorému Emmy Noetherové na důležité případy symetrií:

- **invariance vůči prostorové translaci** neboli L se nemění při posunutí ve směru x

V tomto případě jde o transformaci (4.19), jejíž generátory jsou $T = 0$, $Q^x = 1$, $Q^y = 0$, takže příslušná zachovávající se veličina je

$$\mathcal{Z} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{konst.}$$

Například pro Lagrangeovu funkci $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(y)$ je $\mathcal{Z} = m\dot{x} = \text{konst.}$,
důsledkem prostorové homogenity je tedy zákon zachování hybnosti.

- **invariance vůči prostorové rotaci** neboli L se nemění při otočení ve směru φ

V tomto případě jde o transformaci (4.20), jejíž generátory jsou $T = 0$, $Q^r = 0$, $Q^\varphi = 1$, takže příslušná zachovávající se veličina je

$$\mathcal{Z} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{konst.}$$

Například pro Lagrangeovu funkci $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$ je $\mathcal{Z} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{konst.}$,
důsledkem prostorové izotropie je tedy zákon zachování momentu hybnosti.

- **invariance vůči časové translaci** neboli L se nemění při posunutí v čase t

V tomto případě jde o transformaci (4.21), jejíž generátory jsou $T = 1$, $Q^j = 0$. Příslušná zachovávající se veličina tedy má tvar

$$-\mathcal{Z} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L = \text{konst.}$$

To je ale přesně výraz (3.37) pro zachovávající se *zobecněnou energii* $h(q^i, \dot{q}^i)$,
důsledkem časové homogenity je tedy zákon zachování energie.

Ze spojitých symetrií Lagrangeovy funkce a akce tedy plynou hlavní fyzikální zákony zachování, přičemž teorém Emmy Noetherové dává explicitní předpis pro příslušné veličiny, jež jsou integrály pohybu. Teorém lze dále zobecnit do relativistické teorie pole (klasické i kvantové), kde nám umožňuje identifikovat netriviální zachovávající se veličiny, takzvané *náboje Noetherové*. Například hustota Lagrangeovy funkce $\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - \kappa) \psi$ generující Diracovu rovnici je zjevně invariantní vůči globálním kalibračním transformacím pole $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\varepsilon} \psi$. Důsledkem této spojitě symetrie je podle teorému Emmy Noetherové zákon zachování elektrického náboje.

4.4 Kalibrační transformace a kalibrační pole

Na závěr uveďme ještě jeden důsledek Hamiltonova variačního principu $\delta S = 0$, který souvisí s teorií kalibračních polí. Vychází z toho, že v zadání Lagrangeovy funkce L existuje netriviální volnost. Platí totiž následující věta:

$$\boxed{\text{Lagrangeova funkce } L + \frac{dF}{dt}, \text{ kde } F \text{ je libovolná hladká funkce,} \quad (4.38) \\ \text{dává stejné pohybové rovnice jako původní } L.}$$

Důkaz: Akce nové Lagrangeovy funkce je $S' \equiv \int_{t_1}^{t_2} (L + \frac{dF}{dt}) dt$. Snadno spočítáme její variaci $\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} (L + \frac{dF}{dt}) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \delta [F]_{t_1}^{t_2} = \delta S + \delta F(t_2) - \delta F(t_1)$. Máme variační úlohu s pevnými konci, takže je $\delta F(t_2) = 0 = \delta F(t_1)$, takže $\delta S' = \delta S$. Pohybové rovnice plynoucí z Hamiltonova variačního principu $\delta S' = 0$ jsou tedy stejné jako pohybové rovnice plynoucí z $\delta S = 0$.

☒

Pohybové rovnice se tedy nezmění, když k L přičteme úplnou časovou derivaci libovolné funkce F . Tato volnost v zadání L reprezentuje kalibrační transformaci.

Ilustrujme ji na pohybu nabité částice v elektromagnetickém poli:

Uvažujme nabitou částici v obecném elektromagnetickém poli. Interakce je popsána zobecněným potenciálem (3.25). Lagrangeova funkce $L = T - V$ tedy má tvar

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - e (\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (4.39)$$

kde φ je skalární a \mathbf{A} vektorový potenciál. Podle věty (4.38) se částice popsaná Lagrangeovou funkcí $\tilde{L} = L + \frac{dF}{dt}(t, x, y, z)$ bude pohybovat *zcela stejně*. Funkci \tilde{L} můžeme ale upravit:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= L + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} = L + \frac{\partial F}{\partial t} + \text{grad } F \cdot \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2} m v^2 - e \varphi + e \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } F \\ &= \frac{1}{2} m v^2 - e \left(\varphi - \frac{1}{e} \frac{\partial F}{\partial t} \right) + e \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{A} + \frac{1}{e} \text{grad } F \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Označíme-li nové potenciály výrazy

$$\tilde{\varphi} \equiv \varphi - \frac{1}{e} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (4.41)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A} + \frac{1}{e} \text{grad } F, \quad (4.42)$$

můžeme novou Lagrangeovu funkci (4.40) zapsat

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} m v^2 - e (\tilde{\varphi} - \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{A}}). \quad (4.43)$$

Vidíme, že má úplně stejný tvar jako výchozí funkce (4.39). Lagrangeova funkce (4.39) je tedy invariantní vůči transformaci potenciálů elektromagnetického pole $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$, $\mathbf{A} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}$. Invariance vůči této tzv. kalibrační transformaci (anglicky: *gauge transformation*) (4.41), (4.42) představuje vnitřní symetrii elektromagnetického pole.

Ještě elegantněji se kalibrační transformace elektromagnetického pole vyjádří v relativistickém formalismu, kde se zavádí čtyřpotenciál $A_\nu \equiv (-\varphi/c, \mathbf{A})$. Pak lze psát $A_\nu \rightarrow \tilde{A}_\nu = A_\nu + \frac{1}{e} F_{,\nu}$. Objemovou hustotu $\rho(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$ zobecněného potenciálu (3.25) lze také přepsat jednodušeji jako skalár $-j^\nu A_\nu$, kde j^ν je hustota čtyřproudu $j^\nu \equiv (c\rho, \mathbf{j})$, přičemž $\mathbf{j} \equiv \rho \mathbf{v}$. Přesně tento výraz je interakční člen v hustotě Lagrangeovy funkce \mathcal{L} Maxwellovy teorie uvedené v závěru části 4.2.1.

Podle věty (4.38) nemůže kalibrační transformace (4.41), (4.42) změnit pohyb nabitě částice v daném elektromagnetickém poli. Jde tedy jen o matematickou volnost (neboli symetrii) ve volbě potenciálů φ a \mathbf{A} , která se fyzikálně nijak neprojeví. Opravdu: do Lorentzovy síly $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ nevstupují přímo potenciály φ a \mathbf{A} ale vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} , které jsou dány známými vztahy $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ a $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Zjevně ale platí

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\text{grad } \tilde{\varphi} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi + \frac{1}{e} \text{grad } \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } F = \mathbf{E}, \quad (4.44)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} = \text{rot } \mathbf{A} + \frac{1}{e} \text{rot grad } F = \mathbf{B}. \quad (4.45)$$

Potenciály i po kalibrační transformaci dávají *stejně* elektromagnetické pole \mathbf{E} a \mathbf{B} , tedy stejnou sílu \mathbf{F} .

Tyto úvahy můžeme ovšem také otočit. Lze si položit otázku: *Jaký musí být tvar Lagrangeovy funkce, aby byla invariantní co do tvaru vůči zvolené kalibrační transformaci?*

Představme si, že začneme s *volnou* částicí, tedy s funkcí $L = \frac{1}{2} m v^2$, což je (4.39) s $\varphi = 0 = \mathbf{A}$. Kalibrační transformace (4.41), (4.42) ale vygeneruje *nenulové* potenciály $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ a nová Lagrangeova funkce bude (4.43). Tento výsledný tvar $\tilde{L} = \frac{1}{2} m v^2 - e(\tilde{\varphi} - \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{A}})$ je *jiný* než výchozí L . Jestliže ale L volné částice *doplníme* o zobecněný potenciál V , takový že má právě tvar (4.39), bude již tato Lagrangeova funkce invariantní vůči kalibrační transformaci elektromagnetického pole, viz (4.43). *Požadavek kalibrační symetrie* (tedy aby tvar L byl invariantní vůči jisté konkrétní lokální kalibrační transformaci) *si vynucuje specifickou modifikaci L pro volnou částici o dodatečné členy*. Ty obsahují „pomocná“ kalibrační pole (ve výše uvedeném příkladě jsou to potenciály φ a \mathbf{A}) v takové formě, že zmodifikovaná Lagrangeova funkce již je kalibračně invariantní.

Ukazuje se, že *takováto kalibrační pole zprostředkovávají fundamentální interakce částic*. Pomocí nich moderní fyzika zavádí fyzikální interakce mezi částicemi v kvantové teorii pole. Jde o *kvantovou elektrodynamiku* (QED), *elektroslabou interakci* (EWI) a *kvantovou chromodynamiku* (QCD). Interakční členy v Lagrangeově funkci se zavádějí postulováním unikátní Lieovy grupy lokálních symetrií, jež mají příslušná kalibrační pole splňovat. V případě QED jde o abelovskou (komutující) grupu $U(1)$, v případě EWI o neabelovskou (Yangova–Millsova) pole s grupou symetrií $U(1) \times SU(2)$ a v případě QCD o Yangova–Millsova kalibrační pole s grupou symetrií $SU(3)$. Hmotová pole (zejména elektrony a kvarky) jsou popsána jako *fermiony* splňující Diracovu rovnici (viz závěr části 4.2.1), zatímco kalibrační pole zavedená zmíněnými grupami symetrií reprezentují *interakční bosony* (foton, bosony W a Z , gluony).

Kapitola 5

Hamiltonův formalismus

Lagrangeův formalismus, kterým jsme se dosud zabývali, tvoří první hlavní pilíř klasické analytické mechaniky. Druhým jejím pilířem je Hamiltonův kanonický formalismus. Proto v této kapitole přejdeme od Lagrangeova popisu mechanických systémů k Hamiltonovu. Vysvětlíme jeho koncepční rámec, zavedeme hlavní pojmy (kanonicky sdružené proměnné, fázový prostor, hamiltonián) a odvodíme Hamiltonovy kanonické pohybové rovnice.

Potom se budeme věnovat dalším důležitým strukturám, které se v kontextu Hamiltonova formalismu přirozeně objevují, především algebře Poissonových závorek, jejich vztahu k integrálům pohybu, kanonickým transformacím a z nich plynoucí Hamiltonově–Jacobiho teorii, jež představuje další pozoruhodnou reformulaci zákonů klasické mechaniky. Neopomeneme přitom zmínit důležitou roli, kterou tyto nové pojmy hrají v kvantové teorii a ve statistické fyzice.

5.1 Základní pojmy Hamiltonova formalismu

Nejprve vybudujeme koncepční aparát nového formalismu. Začneme definicemi tří klíčových pojmů:

5.1.1 Kanonická hybnost

V Hamiltonově formalismu se i nadále používají zobecněné souřadnice q^j , viz (3.1), ale namísto zobecněných rychlostí \dot{q}^j se zavádějí nové nezávislé proměnné zvané kanonické hybnosti p_j . Pro systém s Lagrangeovou funkcí $L(q^j, \dot{q}^j, t)$ jsou kanonické hybnosti p_j definovány předpisem

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}. \quad (5.1)$$

Jak uvidíme z příkladů v části 5.4, kanonická hybnost může mít význam obvyklé hybnosti částice, ale také nemusí.

Protože index j v (5.1) nabývá hodnot $j = 1, \dots, n$ (n je počet stupňů volnosti systému), získáme celkem n kanonických hybností p_1, p_2, \dots, p_n , které jsou přiřazeny zobecněným souřadnicím q^1, q^2, \dots, q^n . Pro každé j tvoří dvojici kanonicky sdružených proměnných (q^j, p_j) . Jinými slovy: ke každé zobecněné souřadnici q^j je přidružena jí příslušející kanonická hybnost p_j , a naopak. Celkem tedy existuje n párů kanonicky sdružených proměnných, tedy $2n$ veličin.

5.1.2 Fázový prostor

Fázový prostor je formální matematický prostor, jehož body jsou určeny všemi zobecněnými souřadnicemi q^j a k nim přidruženými kanonickými hybnostmi p_j .¹ Jeho dimenze je zjevně rovna $2n$. Pro systém N částic v třírozměrném prostoru bez vazeb je dimenze fázového prostoru rovna $6N$.

¹Tento důležitý pojem klasické mechaniky a statistické fyziky pochází od amerického matematického fyzika a chemika Josiaha Willarda Gibbsa (1839–1903).

Fázový prostor je tedy parametrizován $2n$ nezávislými parametry $(q^1, q^2, \dots, q^n, p_1, p_2, \dots, p_n)$, kde první n -tici jsou zobecněné souřadnice určující polohy hmotných bodů, zatímco druhá n -tice specifikuje jejich kanonické hybnosti. Vzájemnou nezávislost všech parametrů lze vyjádřit vztahy

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_i^j, \quad \boxed{\frac{\partial p_i}{\partial q^j} = 0}, \quad \boxed{\frac{\partial q^i}{\partial p_j} = 0}. \quad (5.2)$$

Protože každý bod fázového prostoru obsahuje informaci jak o okamžité poloze tak o hybnostech všech hmotných bodů daného mechanického systému, zjevně platí následující tvrzení:

Bod ve fázovém prostoru určuje fyzikální stav klasického systému.

Jinými slovy: fázový prostor Hamiltonova formalismu je prostorem fyzikálních stavů, na rozdíl od konfiguračního prostoru \mathcal{Q} Lagrangeova formalismu, který je jen prostorem poloh (q^1, q^2, \dots, q^n) .

Příklad: Stojící šíp ze Zénónova paradoxu (viz část 3.1.2 textu) je reprezentován určitým bodem (q, p) ve fázovém prostoru, kde q určuje jeho konkrétní polohu a $p = 0$. Šíp letící tímtož bodem prostoru je reprezentován jiným bodem ve fázovém prostoru, kde q určuje stejnou polohu, ale $p \neq 0$ nyní určuje jeho okamžitou nenulovou hybnost. Právě díky ní bude letící šíp o chvíli později na jiném místě prostoru! A také z jiného místa prostoru q se dostane někam dál, do bodu tím vzdálenějšího, čím větší bude jeho okamžitá hybnost p .

Časový vývoj fyzikálního systému z daných počátečních podmínek lze tudíž znázornit unikátní trajektorií $(q^j(t), p_j(t))$ ve fázovém prostoru. Pro všechny (smysluplné) počáteční podmínky, dostaneme soustavu všech přípustných trajektorií vývoje systému. Tento fázový portrét systému, který je tvořen (hustou) soustavou všech trajektorií vývoje, kompletně popisuje studovaný dynamický systém. Znázorňuje totiž všechny jeho možné vývoje ze všech možných počátečních dat. Nalezením fázového portréту je úloha kompletně vyřešena, a to nejenom lokálně, ale i globálně.

Pro ilustraci nyní uvedme fázové portréty důležitých mechanických systémů s jedním stupněm volnosti ($n = 1$), jejichž fázový prostor (q, p) je dvourozměrný.

- **harmonický oscilátor:** $\boxed{L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2},$

tedy $q \equiv x$ a kanonická hybnost je $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$.

Trajektorie vývoje jsou křivky

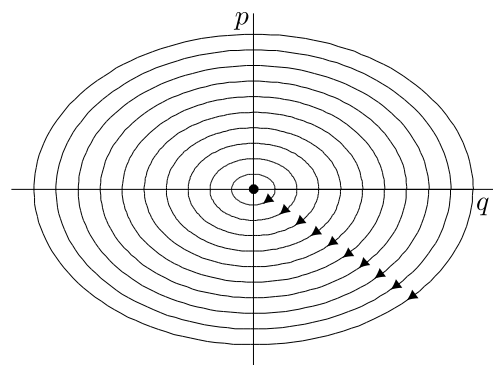
$$\begin{aligned} q(t) &= A \cos(\omega t + \delta), \\ p(t) &= -m\omega A \sin(\omega t + \delta), \end{aligned}$$

kde A a δ jsou integrační konstanty a $\omega = \sqrt{k/m}$. Pro různé počáteční podmínky dané A, δ vypadají trajektorie vývoje tvořící fázový portrét takto:

Vidíme, že se jedná o soustředné uzavřené křivky, a snadno dokážeme, že to jsou *elipsy*, neboť platí

$$\left(\frac{q(t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{p(t)}{m\omega A}\right)^2 = 1.$$

Čím větší amplituda oscilací A , tím větší je elipsa.



Elipsy jsou současně energetickými nadplochami $E = \text{konst}$, protože v důsledku zákona zachování mechanické energie je $E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{konst}$.

Všimněme si také, že každým bodem fázového prostoru prochází právě jedna trajektorie vývoje: křivky se nikde neprotínají, neboť vývoj systému je jednoznačný. Speciálním bodem je samotný počátek fázového prostoru $(q, p) = (0, 0)$, který zjevně odpovídá stojícímu oscilátoru s nulovou amplitudou $A = 0$ a tedy s nulovou energií $E = 0$. Protože to je nejnižší možná energie, představuje tento singulární bod fázového portréту stabilní rovnovážný stav systému.

- **tlumený oscilátor:**

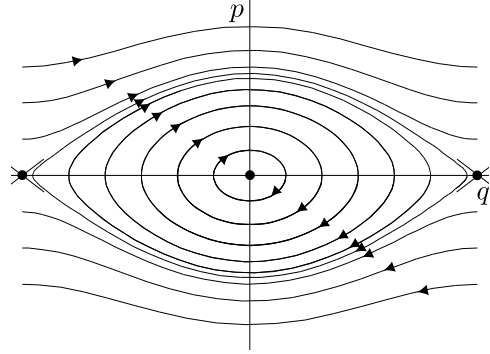
Pro tlumený oscilátor kvůli disipaci již neplatí zachování mechanické energie. Soustředné elipsy fázového portréty se proto změny na *neprotínající se spirály*, které se postupně blíží stabilnímu singulárnímu bodu v počátku fázového portréty $(q, p) = (0, 0)$. Protože tlumení je exponenciální funkce času, trajektorie by do tohoto singulárního bodu dospěly až v nekonečném čase $t \rightarrow \infty$.

- **matematické kyvadlo:** $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$,

tedy $q \equiv \varphi$ a kanonická hybnost je $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$

kde $\varphi \in [-\pi, +\pi]$ (krajní body jsou navzájem identifikovány). Protože příslušná pohybová rovnice je nelineární, musíme trajektorie vývoje získat numericky. Fázový portrét vypadá takto:

Uprostřed portréty vidíme soustředné uzavřené křivky čočkovitého tvaru (energetické nadplochy $E = \text{konst.}$), které se pro malé amplitudy výchylek blíží elipsám. Opravdu: víme, že *linearizace* matematického kyvadla vede na rovnici harmonického oscilátoru se stabilním singulárním bodem $(q, p) = (0, 0)$, kdy kyvadlo v klidu visí svisle dolů.



Vidíme také, že pro *větší výchylky* matematického kyvadla již portrét neodpovídá harmonickým oscilacím. S rostoucí amplitudou se *doba kmitů prodlužuje* (zatímco pro harmonický oscilátor je na amplitudě nezávislá), až pro určitou mezní hodnotu je nekonečná. To odpovídá takovým počátečním podmínkám, kdy kyvadlo (v nekonečném čase) *dospěje do nestabilní rovnovážné polohy*, v němž stojí svisle vzhůru. Ve fázovém portréty tomu odpovídá singulární bod $(q, p) = (\pi, 0)$, jenž je identický se singulárním bodem $(q, p) = (-\pi, 0)$.

Fázový portrét ale zachycuje i všechny situace, kdy se *kyvadlo „přetáčí“*, tedy nekoná kmity, ale jeho výchylka $\varphi(t)$ monotónně roste (horní část fázového portréty) či naopak monotónně klesá (dolní část fázového portréty). Kvůli zachování energie je pro spodní polohu kyvadla $q = \varphi = 0$ velikost hybnosti $|p|$ největší, zatímco pro horní polohu $q = \varphi = \pm\pi$ je nejmenší.

Ještě si můžeme všimnout, že mezní trajektorie vedoucí k horní nestabilní rovnovážné poloze odděluje kmitavé periodické pohyby (uprostřed fázového portréty) od přetáčivých (nahore a dole). Proto se v literatuře nazývá *separatrixa*. Separatrixy vedoucí k nestabilním rovnovážným stavům hrají důležitou roli v teorii dynamických systémů s deterministickým chaosem.

5.1.3 Hamiltonova funkce

Třetím klíčovým pojmem Hamiltonova formalismu je *Hamiltonova funkce H* , které se zkráceně také běžně říká *hamiltonián*. Je to *skalární funkce na fázovém prostoru*. Známe-li Lagrangeovu funkci L systému, tedy $L(q^j, \dot{q}^i, t)$, spočítáme příslušnou Hamiltonovu funkci pomocí definice

$$H(q^j, p_j, t) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - L. \quad (5.3)$$

Ale pozor! V tomto výrazu musíme ještě všechny zobecněné rychlosti \dot{q}^i Lagrangeova formalismu vyjádřit pomocí odpovídajících kanonických hybností p_j Hamiltonova formalismu. Konkrétně to znamená, že za každou zobecněnou rychlost \dot{q}^i je dosazena specifická funkce $\dot{q}^i(q^j, p_j, t)$:

$$\dot{q}^i \equiv \dot{q}^i(q^j, p_j, t) \text{ je inverzí vztahů } p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}(q^i, \dot{q}^i, t), \quad (5.4)$$

které definují kanonické hybnosti, viz (5.1).

Přesněji je tudíž Hamiltonova funkce dána výrazem

$$H(q^j, p_j, t) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i(q^j, p_j, t) - L(q^j, \dot{q}^i(q^j, p_j, t), t). \quad (5.5)$$

Shrňme tedy postup odvození Hamiltonovy funkce H z Lagrangeovy funkce L :

- spočítáme kanonické hybnosti p_j sdružené s q^j předpisem $p_j(q^i, \dot{q}^i, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$,
- tyto vztahy invertujeme, čímž získáme funkce $\dot{q}^i(q^j, p_j, t)$,
- spočítáme výraz $H \equiv \sum p_i \dot{q}^i - L(q^j, \dot{q}^i, t)$,
- za zobecněné rychlosti \dot{q}^i dosadíme funkce $\dot{q}^i(q^j, p_j, t)$, čímž dostaneme $H(q^j, p_j, t)$.

Ještě ale zůstává nezodpovězena otázka ekvivalence Lagrangeova a Hamiltonova popisu. Lze pro každý mechanický systém, jehož dynamika je popsána Lagrangeovou funkcí L , najít odpovídající Hamiltonovou funkci H popisující stejný vývoj (a naopak)? Odpověď zní: *nikoli*. Existují systémy, pro něž vzájemná ekvivalence obou popisů selhává. Lze nahlédnout, že problémem může být právě *neinvertovatelnost* výrazu $p_j(q^j, \dot{q}^i, t)$ do podoby $\dot{q}^i(q^j, p_j, t)$. Aby inverzní funkce existovala, musí být vztah mezi p a \dot{q} prostý. To je zaručeno, pokud $\frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \neq 0$ neboli $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0$. Jinými slovy: pokud Lagrangeova funkce jakožto funkce zobecněné rychlosti *nemá inflexní bod*. Pro více stupňů volnosti $n > 1$ je zobecněním této podmínky nenulovost hessiánu, což je determinant

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \right) \neq 0. \quad (5.6)$$

Ve velké většině případů je tato podmínka splněna, takže Lagrangeův a Hamiltonův formalismus jsou pro jejich popis plně ekvivalentní. Podobně lze totiž z Hamiltonovy funkce naopak odvodit příslušnou Lagrangeovu funkci pomocí vztahů duálních k (5.3) a (5.1), totiž

$$L(q^j, \dot{q}^j, t) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H \quad \text{kde} \quad \dot{q}^j \equiv \frac{\partial H}{\partial p_j}. \quad (5.7)$$

Na závěr si ještě povšimněme, že Hamiltonova funkce H definovaná (5.3) a (5.1) je vlastně zobecněná energie h zavedená v kontextu Lagrangeova formalismu vzorcem (3.37), jenom vyjádřená v jiných proměnných (zobecněné rychlosti \dot{q}^j jsou nahrazeny kanonickými hybnostmi p_j). Z věty (3.37) tedy plyne, že *nezávisí-li Hamiltonova funkce explicitně na čase, neboli $H(q^j, p_j)$, pak je integrálem pohybu a má význam zachovávací se (zobecněné) energie pro danou trajektorii*.

5.2 Hamiltonovy kanonické rovnice

Nyní již můžeme přepsat pohybové rovnice klasické mechaniky do Hamiltonova formalismu, tedy popsat dynamiku na fázovém prostoru fyzikálních stavů. Ukazuje se, že kanonické hybnosti p_j a Hamiltonova funkce H jsou zvoleny tak vhodným způsobem, že pomocí nich vyjádřené pohybové rovnice mají krásný, jednoduchý a symetrický tvar, totiž

$$\boxed{\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}}. \quad (5.8)$$

Tyto rovnice formuloval v roce 1834 slavný irský matematik, fyzik a astronom Sir William Rowan Hamilton (1805–1865). Pro svou unikátní a elegantní podobu se rovnice (5.8) často v literatuře nazývají kanonické pohybové rovnice.²

Všimněme si, že je to soustava obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu, přičemž jejich explicitní pravé strany se snadno získají pouhým derivováním dané Hamiltonovy funkce podle všech proměnných fázového prostoru: Časová derivace každé zobecněné souřadnice je rovna parciální derivaci hamiltoniánu podle sdružené kanonické hybnosti, a naopak — až na znaménko. Řešením těchto rovnic dostaneme trajektorii vývoje systému $(q^j(t), p_j(t))$ ve fázovém prostoru.

²Slovo *kanonický* znamená *stanovený za normu*, uzákoněný, vyhovující zákonům (církvním, právním).

Důkaz: Z pedagogických důvodů provedeme odvození Hamiltonových kanonických rovnic dvěma nezávislými způsoby, neboť je to poučná aplikace předchozích formalismů.

1. Přímo z definice H a p_j s použitím Lagrangeových rovnic II. druhu:

Parciálně zderivujeme hamiltonián (5.5), jehož argumenty nejprve přeznačíme na (q^k, p_k, t) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_j} &= \frac{\partial}{\partial p_j} \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i(q^k, p_k, t) - L(q^k, \dot{q}^i(q^k, p_k, t), t) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\delta_i^j \dot{q}^i + p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} \right] = \dot{q}^j + \sum_{i=1}^n \left[p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} - p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} \right] = \dot{q}^j = \frac{dq^j}{dt}, \\ \frac{\partial H}{\partial q^j} &= \frac{\partial}{\partial q^j} \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i(q^k, p_k, t) - L(q^k, \dot{q}^i(q^k, p_k, t), t) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = -\frac{\partial L}{\partial q^j} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = -\frac{dp_j}{dt}.\end{aligned}$$

Pochopitelně jsme při tom využili pravidel (5.2) a definici kanonické hybnosti (5.1). Všimněte se, že první sada Hamiltonových kanonických rovnic obsahující $\frac{\partial H}{\partial p_j}$ je čistě matematická rovnost. Zákony klasické mechaniky v podobě *pohybových rovnic Lagrangeova formalismu* vstupují do výpočtu až ve druhé sadě na samém závěru úprav výrazu $\frac{\partial H}{\partial q^j} \equiv -\frac{\partial L}{\partial q^j}$.

2. Z Hamiltonova variačního principu:

Elegantnější odvození Hamiltonových rovnic plyne z variačního principu $\delta S = 0$, kde však oproti jeho aplikaci v Lagrangeově formalismu nyní uvažujeme *nezávislé variace* δq^j a δp_j *ve fázovém prostoru*:

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - H \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left[\delta p_j \dot{q}^j + p_j \delta \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial q^j} \delta q^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right] dt.$$

I zde provádíme izochronní variace (proto $\frac{\partial H}{\partial t} \delta t = 0$) a máme úlohu s pevnými konci, tedy $\delta q^j(t_1) = 0 = \delta q^j(t_2)$, díky čemuž užitím pravidla *per partes* platí

$$\int_{t_1}^{t_2} p_j \delta \dot{q}^j dt = \int_{t_1}^{t_2} p_j \frac{d}{dt} (\delta q^j) dt = [p_j \delta q^j]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_j \delta q^j dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_j \delta q^j dt,$$

takže

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left[- \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q^j} \right) \delta q^j + \left(\dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j \right] dt = 0.$$

Protože všechny variace δq^j a δp_j jsou pro všechna $j = 1, \dots, n$ navzájem nezávislé, musí vymizet všechny kulaté závorky pro každé j ,³ tedy $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j}$ a současně $\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$, což jsme měli dokázat.

□

³Přesněji: druhá závorka je nulová identicky z definice H a p_j , viz první část přímého důkazu výše; jako důsledek $\delta S = 0$ pak musí vymizet i první závorka, což dává druhou sadu kanonických pohybových rovnic.

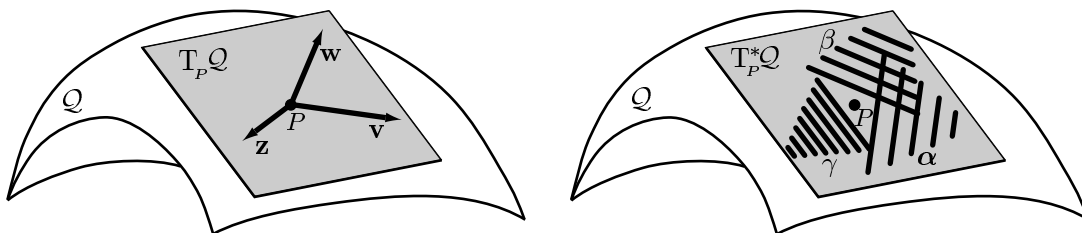
5.3 Shrnutí a hlubší geometrický náhled

Na první pohled vidíme, že nově zavedený *Hamiltonův kanonický formalismus* se od Lagrangeova liší tím, že pro popis systému používá *dvojnásobný počet proměnných* — sdružené páry zobecněných souřadnic q^j a kanonických hybností p_j . Jejich hodnoty jednoznačně určují bod ve *fázovém prostoru*, jenž reprezentuje fyzikální stav mechanického systému. Časový vývoj tohoto systému (jeho pohyb) je určen trajektorií $(q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ ve fázovém prostoru, kterou pro konkrétní *Hamiltonovu funkci* H získáme řešením Hamiltonových kanonických rovnic (5.8). Z matematického hlediska je to soustava *$2n$ obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu*.

Naproti tomu v původním *Lagrangeově formalismu* jsou výchozí pouze zobecněné souřadnice q^j , jichž je n , tedy tolik co stupňů volnosti. Jsou to souřadnice *konfiguračního prostoru* Q všech poloh (který sám o sobě není prostorem fyzikálních stavů systému). Dynamika je určena *Lagrangeovou funkcí* L , a to Lagrangeovými rovnicemi (3.22). Z matematického hlediska představují Lagrangeovy pohybové rovnice II. druhu soustavu *n obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu* pro hledané funkce $(q^1(t), \dots, q^n(t))$, jež popisují trajektorii pohybu dané soustavy.

Při hlubším pohledu ale vidíme, že rozdíl mezi Hamiltonovým a Lagrangeovým popisem je subtilnější. Připomeňme, že i Lagrangeův popis obsahuje n dodatečných proměnných, konkrétně zobecněné rychlosti \dot{q}^j . Spolu se souřadnicemi q^j tedy také má $2n$ parametrů, které jednoznačně určují fyzikální stav daného systému. Hovoříme o *rychlostním fázovém prostoru* TQ neboli *tečném bandlu* konfiguračního prostoru Q , přičemž TQ má souřadnice $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ a tedy dimenzi $2n$. Právě pomocí zobecněných rychlostí dokážeme např. rozlišit letící a stojící šíp (viz Zénónův paradox z části 3.1.2): z hlediska konfiguračního prostoru Q mají stejné hodnoty souřadnic q^j , ale reprezentují odlišné fyzikální stavy určené různými hodnotami \dot{q}^j . Zatímco šíp *stojící* v bodě $P \in Q$ je určen *nulovým* vektorem $\mathbf{v} \equiv (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = 0$ z $T_P Q$, šíp *letící* stejným bodem P prostoru je určen konkrétním *nenulovým* vektorem $\mathbf{v} \in T_P Q$.

Podobně je tomu také v Hamiltonově formalismu. Rozdíl je v tom, že oproti složkám *vektoru rychlosti* $\mathbf{v} \equiv (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ z $T_P Q$ se ve fázovém prostoru hamiltonovské mechaniky používají složky *1-formy kanonické hybnosti* $\alpha \equiv (p_1, \dots, p_n)$ z *duálního kotečného prostoru* $T_P^* Q$ v bodě $P \in Q$ konfiguračního prostoru Q . Opravdu: složky kanonické hybnosti se netransformují jako vektory, ale duálně jako 1-formy. Proto také mají dolní indexy, nikoli horní.



Z pohledu exaktní formulace mechaniky v jazyce diferenciální geometrie lze tedy shrnout, že *Lagrangeova mechanika* se odehrává *na tečném bandlu* TQ konfiguračního prostoru (variety) Q , zatímco *Hamiltonova mechanika* se odehrává *na kotečném bandlu* T^*Q téhož výchozího prostoru Q . Používají tudíž navzájem duální popisy („1-formy jsou duální k vektorům, a naopak“). Dynamika (časový vývoj) daného systému jsou pak určeny Lagrangeovou resp. Hamiltonovou funkcí, což jsou skalární funkce na různých prostorech:

Lagrange: L je funkce na TQ , což je rychlostní fázový prostor

Hamilton: H je funkce na T^*Q , což je (hybnostní) fázový prostor

Přechod od Lagrangeovy k Hamiltonově formulaci mechaniky (a naopak) tedy geometricky odpovídá tzv. *Legendreově duální transformaci* mezi tečným bandlem TQ a kotečným bandlem T^*Q , což je vzájemně jednoznačné zobrazení $TQ \leftrightarrow T^*Q$, které v každém bodě $P \in Q$ identifikuje vektor \mathbf{v} (se složkami \dot{q}^j) s odpovídající 1-formou α (se složkami p_j) v tomtéž bodě P . Tato identifikace se

explicitně provádí pomocí navzájem duálních vztahů

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}, \quad \dot{q}^j \equiv \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (5.9)$$

přičemž identifikace funkcí $L(q^j, \dot{q}^j, t) \leftrightarrow H(q^j, p_j, t)$ je dána relacemi

$$H \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - L, \quad L \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H. \quad (5.10)$$

I když jsou oba formalismy (pro nenulový hessián) ekvivalentní, Hamiltonův popis je prakticky i teoreticky výhodnější, neboť přirozeně respektuje *symplektickou strukturu* klasické mechaniky. Ta se odráží v elegantní podobě Hamiltonových kanonických rovnic, v algebře Poissonových závorek, v kanonických transformacích a tak dále. Více podrobností lze najít v Kapitole 7 „Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky“ studijního textu k prosemináři TMF069.

5.4 Klasické příklady

Ilustrujme nyní Hamiltonův formalismus na několika velmi důležitých příkladech.

Harmonický oscilátor

- Lagrangeova funkce $L = T - V$ je $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$
- kanonická hybnost (5.1) tudíž je $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- z (5.3) dostáváme $\sum_i p_i \dot{q}^i - L = p\dot{x} - L = p\dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$
- **Pozor!** Abychom získali Hamiltonovu funkci, nesmíme zapomenout ještě vyjádřit zobecněnou rychlost \dot{x} pomocí kanonické hybnosti p , a to tak, že provedeme substituci $\dot{x} = p/m$, což je inverze vztahu $p = m\dot{x}$. Po úpravě dostaneme

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}x^2. \quad (5.11)$$

Hamiltonova funkce harmonického oscilátoru je *kvadratickou funkcí* polohy x i hybnosti p .

- Hamiltonovy kanonické rovnice (5.8) jsou zde $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m}p$ a $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$
- dostali jsme tím *lineární soustavu dvou rovnic 1. řádu* $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}p$, $\frac{dp}{dt} = -kx$, kterou lze snadno integrovat numericky i analyticky
- soustavu lze ale také převést na jedinou rovnici 2. řádu $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{dp}{dt} = -\frac{k}{m}x$,
což je klasická rovnice harmonického oscilátoru $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ s frekvencí $\omega = \sqrt{k/m}$

Částice v třírozměrném prostoru s potenciálem V

- kartézsky:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \quad (5.12)$$

- cylindricky:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_R^2 + \frac{p_\Phi^2}{R^2} + p_z^2 \right) + V(R, \Phi, z) \quad (5.13)$$

- sféricky:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r, \vartheta, \varphi) \quad (5.14)$$

Nabitá částice v elektromagnetickém poli

- Lagrangeova funkce má tvar $L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$, viz zobecněný potenciál (3.25)
- uvažujeme-li kartézské komponenty vektorů $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ a $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, dostaneme celkem 3 kanonické hybnosti $p_x = m\dot{x} + eA_x$ a podobně p_y, p_z sdružené s x, y, z
- lze tedy psát $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}$: v tomto případě kanonická hybnost není rovna (pouze) $m\mathbf{v}$
- přímočarým ale trochu delším výpočtem (viz cvičení z Teoretické mechaniky) lze ukázat, že

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi, \quad (5.15)$$

kde kvadrát závorky je roven $\mathbf{p}^2 - 2e\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + e^2 \mathbf{A}^2$ přičemž $\mathbf{p}^2 \equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ atd.

5.5 Poissonovy závorky

V kontextu Hamiltonova formalismu hrají důležitou roli tzv. Poissonovy závorky. Jedná se o velmi zajímavou strukturu na fázovém prostoru, zřetelně vystihující fundamentální podstatu fázového prostoru coby *symplektické variety klasické mechaniky*. Poissonovy závorky navíc našly své významné zobecnění jako komutátory příslušných fyzikálních veličin v kvantové mechanice.

5.5.1 Definice a algebraické vlastnosti

Mějme dvě libovolné (diferencovatelné) funkce f a g na fázovém prostoru, závisející případně i na čase t , tedy $f(q^j, p_j, t)$ a $g(q^j, p_j, t)$. Definujme jejich Poissonovu závorku (Siméon Denis Poisson, 1809) jakožto *novou funkci na fázovém prostoru* jednoznačně určenou přepisem⁴

$$\{f, g\} \equiv \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^j} \right). \quad (5.16)$$

Jde tedy o specifickou kombinaci prvních partiálních derivací obou funkcí dle proměnných fázového prostoru. Všimněte si, že v každém členu se vyskytuje *součin prvních derivací podle kanonicky sdružených veličin* $(q^1, p_1), (q^2, p_2)$ atd. až (q^n, p_n) , kde n je počet stupňů volnosti systému.

Z definice hned vidíme, že Poissonova závorka je antisymetrická a bilineární operace v obou argumentech f a g . Navíc platí další pozoruhodné algebraické vztahy:

⁴Pozor na odlišné konvence, které se v literatuře také používají. Někde se místo složených závorek píšou hranaté, tedy $[f, g]$. Někde se Poissonovy závorky definují s opačným znaménkem.

1.	$\{f, g\} = -\{g, f\}$	antisymetrie	(5.17)
2.	$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\}$	(bi)linearita	
3.	$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$	Jacobiho identita	
4.	$\{f, f\} = 0$	důsledek antisymetrie	
5.	$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$	Leibnizovo pravidlo	
6.	$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \{\frac{\partial}{\partial t}f, g\} + \{f, \frac{\partial}{\partial t}g\}$	derivace dle parametru t	

kde f, g, h jsou funkce na fázovém prostoru, zatímco c_1, c_2 jsou konstanty. Připojme pár komentářů:

Vztah 1. říká, že *prohození argumentů mění znaménko*. Musíme tedy dávat pozor na pořadí.

Vztah 2. vystihuje *linearitu v prvním argumentu*. Díky antisymetrii (vztah 1.) však musí totéž platit i ve druhém argumentu, neboli $\{f, c_1 g_1 + c_2 g_2\} = c_1 \{f, g_1\} + c_2 \{f, g_2\}$ (opačná znaménka vlevo i vpravo se navzájem kompenzují). Proto mluvíme o *bilinearitě*.

V Jacobiho identitě (vztah 3.) se vyskytují Poissonovy závorky Poissonových závorek (což je opět funkce na fázovém prostoru). Když se sečtou tři takové členy, v nichž jsou argumenty (funkce f, g, h) postupně *prohozeny cyklickou záměnou*, dostaneme *vždy nulu*.

Vztah 4. je okamžitý důsledek antisymetrie Poissonových závorek, neboť pro *dvě stejné funkce* musí být díky 1. vztahu $\{f, f\} = -\{f, f\}$. Převedením pravé strany doleva dostáváme $2\{f, f\} = 0$.

Vztah 5. plyne z definice (5.16) aplikované na *součin dvou funkcí* v prvním argumentu, zde fg . Protože součin funkcí je komutativní, můžeme tento vztah psát také $\{fg, h\} = \{f, h\}g + \{g, h\}f$. Raději si ale zapamatujeme vztah 5., kde je f *vždy před* g . To se bude hodit později v kvantové mechanice: z funkcí budou operátory, jež obecně nekomutují, takže záleží na pořadí, v jakém ve vzorcích vystupují.

Parciální derivace dle časového parametru t (vztah 6.) rovněž plyne přímo z definice (5.16).

Uveďme ještě, že v matematice se definuje důležitý abstraktní koncept tzv. *Lieovy algebry* jako vektorový prostor doplněný o antisymetrickou bilineární operaci splňující Jacobiho identitu. Protože tyto tři podmínky jsou v našem případě splněny, viz 1., 2. a 3. vztah v (5.17), vidíme hned, že Poissonovy závorky tvoří Lieovu algebru na fázovém prostoru klasické mechaniky. Vektory jsou diferencovatelné funkce na fázovém prostoru.

5.5.2 Fundamentální Poissonovy závorky

Velmi důležité (a nejjednodušší) Poissonovy závorky jsou takové, kdy za funkce f a g bereme různé kombinace samotných proměnných fázového prostoru q^j a p_j . Příímým výpočtem z definice (5.16) užitím vztahů (5.2) dostáváme

$$\boxed{\{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i.} \quad (5.18)$$

Vidíme, že všechny fundamentální Poissonovy závorky identicky vymizí, *vyjma případu kanonicky sdružených veličin*, kdy $\{q^j, p_j\} = 1$.

Příklad: *kartézské souřadnice ve dvourozměrném prostoru*

V tomto případě máme zobecněné souřadnice x, y a k nim sdružené kanonické hybnosti p_x, p_y . Fundamentální Poissonovy závorky jsou

$$\begin{aligned} \{x, x\} &= 0, & \{y, y\} &= 0, & \{x, y\} &= 0, \\ \{p_x, p_x\} &= 0, & \{p_y, p_y\} &= 0, & \{p_x, p_y\} &= 0, \\ \{x, p_x\} &= 1, & \{y, p_y\} &= 1, & \{x, p_y\} &= 0, & \{y, p_x\} &= 0. \end{aligned}$$

Samozřejmě, závorky tvaru $\{f, f\}$ jsou identicky nulové díky 4. vztahu z (5.17).

Vztah ke komutátorům kvantové mechaniky:

V klasické mechanice je každá fyzikální veličina (poloha, hybnost, energie, moment hybnosti atd.) popsána spojitou funkcí ve fázovém prostoru stavů systému. V kvantové mechanice je každá z nich popsána určitým *operátorem* na abstraktním Hilbertově prostoru stavů. Operátory byly přitom historicky nalezeny tak, že *komutátory operátorů v kvantové mechanice odpovídají Poissonovým závorkám příslušných veličin v klasické mechanice* (tzv. Diracova kvantovací podmínka).

V kartézských souřadnicích $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ to konkrétně znamená, že základní operátory polohy \hat{x}_i a hybnosti \hat{p}_i jsou v kvantové mechanice zvoleny tak, aby jejich komutátory odpovídaly (až na konstantu $i\hbar$) fundamentálním Poissonovým závorkám (5.18), zejména $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad (5.19)$$

kde i je komplexní jednotka a \hbar je (redukováná) Planckova konstanta $\hbar \doteq 1,054589 \times 10^{-34}$ J s. Komutátor dvou operátorů \hat{A} a \hat{B} je definován vztahem $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

V učebnicích kvantové mechaniky najdeme tuto obvyklou volbu operátorů polohy a hybnosti:

$$\boxed{\text{operátor polohy: } \hat{x}_i \equiv x_i \quad \text{operátor hybnosti: } \hat{p}_i \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}}. \quad (5.20)$$

Pro jednoduchost uvažujeme jednorozměrnou situaci, abychom nemuseli psát indexy. Jediný netriviální komutátor pak je $[\hat{x}, \hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x\right)$. Jeho aplikací na libovolnou funkci $\psi(x)$ dostáváme $[\hat{x}, \hat{p}] \psi = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x\right) \psi = -i\hbar (x \psi' - (x \psi)') = -i\hbar (x \psi' - x \psi' - \psi) = i\hbar \psi$. To je pravda pro každou funkci ψ , takže platí operátorový vztah $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, což je požadovaná poslední komutační relace (5.19).

5.5.3 Poissonovy závorky a integrály pohybu

Mějme libovolnou funkci f na fázovém prostoru, tedy $f(q^j, p_j, t)$. Uvažujme hodnoty této funkce $f(t) \equiv f(q^j(t), p_j(t), t)$ *vyčíslené podél skutečné trajektorie* $q^j(t), p_j(t)$ řešící Hamiltonovy kanonické pohybové rovnice (5.8) pro systém s Hamiltonovou funkcí $H(q^j, p_j, t)$. Pak platí identita

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}}. \quad (5.21)$$

Důkaz provedeme snadno přímým výpočtem úplné časové derivace funkce $f(t) \equiv f(q^j(t), p_j(t), t)$:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{dq^j}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q^j} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t},$$

kde v první rovnosti jsme derivovali f jako složenou funkce více proměnných, ve druhé jsme aplikovali Hamiltonovy kanonické rovnice (5.8) a ve třetí užili definici Poissonových závorek (5.16).

□

Pomocí této užitečné identity můžeme nyní dokázat důležité věty týkající se *integrálů pohybu*. Připomeňme, viz vzorec (3.36), že funkce f je integrál pohybu, když v každém okamžiku t nabývá stejné konstantní hodnoty, vyčíslíme-li ji podél libovolné trajektorie řešící pohybové rovnice, tedy

$$f(t) = \text{konst.} \quad \text{neboli} \quad \boxed{\frac{df(t)}{dt} = 0}. \quad (5.22)$$

V Lagrangeově formalismu byl integrál pohybu funkcí $f(q^j, \dot{q}^j)$, zatímco v Hamiltonově formalismu je přirozeně funkcí na fázovém prostoru, tedy $f(q^j, p_j)$. Ve funkci $f(t) \equiv f(q^j(t), p_j(t), t)$ pochopitelně uvažujeme pouze funkce $q^j(t)$ a $p_j(t)$ řešící Hamiltonovy kanonické rovnice (5.8).

Uvedme nyní tři důležité věty:

$$\boxed{\text{Funkce } f(q^j, p_j) \text{ je integrálem pohybu právě tehdy, když } \{f, H\} = 0.} \quad (5.23)$$

Důkaz je triviální. Protože $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, redukuje se identita (5.21) na $\frac{df}{dt} = \{f, H\}$. Levá strana je nulová právě tehdy, když je nulová pravá strana, čímž je důkaz proveden.

☒

Protože díky obecnému 4. vztahu z (5.17) je $\{H, H\} = 0$, ihned vidíme, že

$$\boxed{\text{Hamiltonova funkce } H(q^j, p_j) \text{ nezávislá na čase je integrálem pohybu.}} \quad (5.24)$$

Ještě dokážeme zajímavou třetí větu, tzv. Poissonovu–Jacobiho:

$$\boxed{\text{Jsou-li dvě funkce } f \text{ a } g \text{ integrály pohybu, pak je i funkce } \{f, g\} \text{ integrálem pohybu.}} \quad (5.25)$$

Důkaz: Identita (5.21) samozřejmě platí i pro Poissonovu závorku $\{f, g\}$, neboť je to opět funkce na fázovém prostoru, tedy je

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\}.$$

Aplikací Jacobiho identity a pravidla pro derivaci Poissonovy závorky podle parametru t (konkrétně 3. a 6. vztahu z (5.17)) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= -\{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} + \{\frac{\partial}{\partial t}f, g\} + \{f, \frac{\partial}{\partial t}g\} \\ &= \{\{f, H\} + \frac{\partial}{\partial t}f, g\} + \{f, \{g, H\} + \frac{\partial}{\partial t}g\}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

kde jsme ve druhé rovnosti použili antisymetrii a linearitu Poissonových závorek. Když nyní opět uijeme identitu (5.21) pro funkci f a pro funkci g , vidíme, že musí platit

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\frac{df}{dt}, g\} + \{f, \frac{dg}{dt}\}.$$

Pokud jsou obě funkce f a g integrály pohybu, je $\frac{df}{dt} = 0 = \frac{dg}{dt}$ a tudíž $\frac{d}{dt}\{f, g\} = 0$, neboli také funkce $\{f, g\}$ je integrálem pohybu, což jsme měli dokázat.

☒

Zdalo by se tedy, že opakovaným použitím Poissonovy–Jacobiho věty dokážeme z páru integrálů pohybu vytvořit spoustu dalších. Ze dvou vytvoříme spočítáním jejich Poissonovy závorky třetí. Z těchto tří integrálů pohybu pak dalším vzájemným závorkováním získáme další tři, čímž bychom jich už měli šest. Tak by se dalo pokračovat dál a dál a v principu bychom získali *nekonečný počet integrálů pohybu* ... i přesto, že zkoumáme systém s konečným (často malým) počtem stupňů volnosti. Kde je chyba v naší úvaze? V tom, že Poissonova–Jacobiho věta je sice správná a Poissonova závorka nám vždy poskytne integrál pohybu, ale nezaručuje, že bude *nový*. Ve většině případů dostaneme buď triviální výsledek anebo funkci, která je prostou kombinací už známých integrálů pohybu. Často nám tedy věta nic nového nepřinese.

Existují však situace, kdy je věta prakticky užitečná, jako v následujícím důležitém případě:

Příklad: moment hybnosti

Uvažujme moment hybnosti částice $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ v kartézských souřadnicích $\mathbf{r} \equiv (x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ a k nim přidružených kanonických hybnostech $\mathbf{p} \equiv (p_x, p_y, p_z) \equiv (p_1, p_2, p_3)$, tedy

$$L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k, \quad (5.27)$$

kde ε_{ijk} je totálně antisymetrický Levi-Civitův symbol. Přímým výpočtem Poissonových závorek lze ukázat, že platí následující důležité vztahy

$$\boxed{\{x_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{p_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \quad \{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k}. \quad (5.28)$$

Tyto vztahy popisují/definují *algebru složek momentu hybnosti*. Přebírá je i kvantová mechanika, samozřejmě poté, co klasické funkce nahradí operátory a klasické Poissonovy závorky komutátory. Kvantová mechanika takto, mimo jiné, postuluje komutační relace pro operátor spinu částice $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k$.

Vraťme se ke klasické Poissonově–Jacobiho větě. Poslední vztah (5.28) říká, že $\{L_x, L_y\} = L_z$ (a také že $\{L_y, L_z\} = L_x$ a $\{L_z, L_x\} = L_y$). To ale znamená, že *pokud jsou dvě složky momentu hybnosti integrály pohybu* (např. L_x a L_y), *pak je integrálem pohybu také třetí složka* (zde L_z), tedy zachovává se *celý vektor* momentu hybnosti \mathbf{L} .

Na závěr této části textu použijeme ještě jednou identitu (5.21) k zajímavému přepisu Hamiltonových rovnic. Za funkci f zvolíme přímo proměnné fázového prostoru q^j a p_j . Protože evidentně $\frac{\partial q^j}{\partial t} = 0 = \frac{\partial p_j}{\partial t}$, musí platit

$$\boxed{\frac{dq^j}{dt} = \{q^j, H\}, \quad \frac{dp_j}{dt} = \{p_j, H\}}. \quad (5.29)$$

Tato další podoba pohybových rovnic vyjádřených pomocí Poissonových závorek se uplatňuje v Heisenbergově formulaci kvantové mechaniky, kde v souladu s Diracovou kvantovací podmínkou jsou funkce nahrazeny příslušnými operátory polohy, hybnosti a hamiltoniánu. Obecně z identity (5.21) plyne Heisenbergova evoluční rovnice $\frac{d}{dt}\hat{f}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}(t), \hat{H}] + \frac{\partial}{\partial t}\hat{f}(t)$ a pohybové rovnice klasické mechaniky (5.29) přecházejí na $\frac{d}{dt}\hat{x}_j = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}_j, \hat{H}]$ a $\frac{d}{dt}\hat{p}_j = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}_j, \hat{H}]$.

5.6 Užití Hamiltonova formalismu ve fyzice

V této části stručně zmíníme použití Hamiltonova formalismu v různých oborech fyziky (přičemž naším cílem samozřejmě není systematický a hlubší výklad celé problematiky). Pojmy a metody hamiltonovské mechaniky v nich nacházejí četné a významné uplatnění, například:

- **kvantová mechanika**

Hamiltonián H vystupuje ve *Schrödingerově rovnici*. To je rovnice pro *vlnovou funkci* $\psi(\mathbf{r}, t)$ určující pravděpodobnost p nalezení částice v okolí dV daného místa \mathbf{r} v daném čase t , a to vztahem $p(\mathbf{r}, t) = \psi\bar{\psi} dV = |\psi|^2 dV$. Konkrétně je tato komplexní funkce ψ řešením rovnice

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi,$$

kde \hat{H} je *operátor hamiltoniánu* (operátor energie). Získá se z klasické Hamiltonovy funkce $H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r})$, viz (5.12), formální substitucí $\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} \equiv -i\hbar \nabla$, tedy

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V.$$

Řešíme-li výskyt *nabité částice* v elektromagnetickém poli, musíme vyjít z hamiltoniánu $H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi + V$, viz (5.15), čímž dostaneme složitější vypadající operátor

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{ie\hbar}{m}\mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{ie\hbar}{2m}\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2 + e\varphi + V.$$

Dodatečné členy s vektorovým potenciálem \mathbf{A} magnetického pole pak způsobují specifické pozorovatelné efekty, například tzv. *Zeemanův jev* rozštěpení spektrálních čar atomů (umožňující měřit velikost magnetického pole na Slunci či hvězdách).

Mnohé experimenty, zejména slavný *Sternův–Gerlachův pokus* z roku 1922, nadto ukázaly, že elektron i další částice mají též vlastní *spin*, „vnitřní“ moment hybnosti, který může (vůči libovolnému směru) nabývat jen *dvou diskrétních hodnot*. Se spinem souvisí vlastní *magnetický moment* částice. Operátor \hat{H} proto musíme doplnit ještě o interakční člen $-\mu\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, kde $\mu = \frac{e\hbar}{2m}$ je velikost magnetického momentu elektronu, \mathbf{B} je intenzita magnetického pole, a $\boldsymbol{\sigma}$ jsou tři Pauliho matice dimenze 2×2 . Vlnovou funkci pak musíme chápat jako *dvojici* komplexních funkcí $\psi_1(\mathbf{r}, t)$, $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ reprezentující dva různé spinové stavy, uspořádané do dvouřádkového sloupce. Ze Schrödingerovy rovnice tím dostaneme *Pauliho rovnici* popisující elektron včetně jeho spinu. Podrobně viz učebnice kvantové mechaniky:

L. Skála: *Úvod do kvantové mechaniky*, Academia, Praha, 2005.

J. Formánek: *Úvod do kvantové teorie*, Academia, Praha, 1983.

• kvantové teorie pole

Hlavní úlohou relativistických kvantových teorií pole (jako je kvantová elektrodynamika QED, teorie elektroslabých interakcí EWI, či kvantová chromodynamika QCD popisující silné jaderné interakce), je explicitní počítání rozptylů, srážek a rozpadů částic. Tyto procesy jsou v teorii popsány operátorem tzv. *S-maticí*, jež určuje *pravděpodobnost přechodu* zkoumaného systému z daného počátečního stavu do stavu koncového. Stavy jsou definovány určitým počtem konkrétních druhů částic, jejich hybnostmi, spinem a polarizací. Označíme-li *počáteční stav* (initial state) symbolem $|i\rangle$ a *koncový stav* (final state) symbolem $|f\rangle$, je *amplituda pravděpodobnosti přechodu* ze stavu $|i\rangle$ do stavu $|f\rangle$ dána komplexní funkcí $S_{fi} \equiv \langle f|S|i\rangle$. Pravděpodobnost přechodu z $|i\rangle$ do $|f\rangle$ je číslo $|S_{fi}|^2$, která je normována sumou všech možných výsledků: $\sum_f |S_{fi}|^2 = 1$.

Výpočet amplitudy S_{fi} obvykle probíhá iterativě pomocí *Dysonova rozvoje* S-matice

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int T\{\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\dots\mathcal{H}_I(x_n)\} d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n,$$

kde integrace se provádí přes celý čtyřrozměrný Minkowského prostoročas, symbol $T\{\dots\}$ označuje operaci *časového uspořádání* součinu, a \mathcal{H}_I je *hustota interakčního hamiltoniánu*. Například v kvantové elektrodynamice QED má tvar

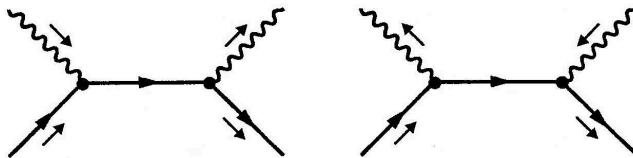
$$\mathcal{H}_I(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x),$$

kde e je elektrický náboj, $\psi(x)$ je Diracovo pole popisující částice spinu $\frac{1}{2}$ (zde elektron a pozitron), $A_\mu(x)$ je čtyřpotenciál elektromagnetického pole, a γ^μ jsou Diracovy matice dimenze 4×4 (přičemž $\mathcal{H}_I(x)$ je vyjádřeno v tzv. *normálním uspořádání* kreačních a anihilačních operátorů příslušných polí). Všimněte si, že výraz pro interakční hamiltonián $\mathcal{H}_I(x)$ je co do formy dosti podobný zobecněnému potenciálu (3.25) pro elektron, tedy $V = -e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$, čemuž v relativistickém zápise odpovídá hustota $\mathcal{V} = -j^\mu A_\mu$.

Výpočet amplitudy pravděpodobnosti S_{fi} přechodu z $|i\rangle$ do $|f\rangle$ se v poruchové teorii počítá aproximací do stále vyšších řádů rozvoje $n = 1, n = 2, \dots$. Namísto v konfiguračním prostoru poloh $x \equiv x^\mu$ se obvykle provádí v *hybnostním prostoru* $p \equiv p_\mu$, což odpovídá Fourierovým transformacím příslušných polí. Jednotlivé *členy poruchového rozvoje* (získané

pomocí tzv. *Wickovy věty*) se symbolicky reprezentují slavnými *Feynmanovými diagramy*, které velmi ulehčují konkrétní výpočty a usnadňují orientaci v celé složité problematice. Počet vrcholů diagramu je přitom roven řádu n poruchového rozvoje. Čím vyšší je řád, tím složitější diagramy s větším počtem vrcholů a vnitřních linií.

Jako ilustraci uvedme *Comptonův rozptyl*, což je pružná srážka fotonu s elektronem, tedy proces $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$. V nejnižším řádu poruchové teorie k němu přispívají Feynmanovy diagramy:



kde vlnovka reprezentuje foton, plná čára elektron a vnitřní plná čára „virtuální“ elektron. Podrobný výklad lze najít v učebnicích, například:

J. Formánek: *Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole* (část 2a), Karolinum, Praha, 2000.

F. Mandel and G. Shaw: *Quantum field theory*, John Wiley & Sons, Chichester, 1984.

• statistická fyzika

Statistická fyzika je obecný obor, umožňující z *podrobného mikroskopického popisu* složitého mnohočásticového systému pomocí klasické či kvantové mechaniky získat užitečný *makroskopický popis termodynamický*. Konkrétně z $6N$ veličin Hamiltonovy mechaniky q^j, p_j (což je typicky obrovské množství mikroskopických parametrů, například $\sim 10^{26}$) dovoluje přejít k pár příslušným globálním veličinám jako je teplota T , tlak p , entropie S , vnitřní energie U a tak dále. Činí tak *vhodným středováním* veličin *ve fázovém prostoru*. Klíčovou roli při tom hraje takzvaná *kanonická partiční funkce*

$$z \equiv C \int \dots \int \exp \left(- \frac{H(q^j, p_j)}{kT} \right) dq^1 \dots dq^{3N} dp_1 \dots dp_{3N},$$

kde H je Hamiltonova funkce, k je Boltzmannova konstanta a C je normovací konstanta. Připomeňme, že nezávisí-li H na čase, je integrálem pohybu a jeho hodnota

$$H(q^j, p_j) = E = \text{konst.}$$

reprezentuje energii (trajektorie vývoje systému leží na příslušné energetické nadploše).

Analogicky, invariantní tvar *operátoru partiční funkce* v kvantové mechanice je (Slater, 1931)

$$\hat{z} \equiv \text{Tr} \left[\exp \left(- \frac{\hat{H}}{kT} \right) \right],$$

kde Tr značí stopu (anglicky „trace“).

Hledané termodynamické veličiny a vztahy mezi nimi pak získáme pomocí již jednoduchých vzorců, zejména

$$\text{vnitřní energie: } U(V, S) = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln z),$$

$$\text{volná energie: } F(V, T) = -kT \ln z.$$

Protože $dF = -p dV - S dT$, dostaneme odtud

$$\text{tlak: } p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T, \quad \text{entropie: } S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V,$$

což umožňuje odvodit stavovou rovnici, atd. Podrobně viz učebnice statistické fyziky, např.:

J. Kvasnica: *Statistická fyzika*, Academia, Praha, 1983.

5.7 Kanonické transformace

Fázový prostor — prostor fyzikálních stavů v Hamiltonově formulaci mechaniky — je parametrizován zobecněnými souřadnicemi q^j a kanonickými hybnostmi p_j . Již z Lagrangeova formalismu ale víme, že zobecněné souřadnice nejsou pro zkoumaný systém určeny *a priori*: lze je volit prakticky libovolně. Při změně q^j se však současně mění dle definice (5.1) i sdružené kanonické hybnosti p_j . Vzniká tak přirozená otázka, jakým způsobem se musí měnit souřadnice a současně hybnosti na fázovém prostoru, aby tato změna neměla vliv na tvar Hamiltonových kanonických rovnic (5.8).

Zkousme proto změnu parametrizace fázového prostoru, neboli současnou transformaci zobecněných souřadnic a kanonických hybností tvaru⁵

$$\begin{aligned} Q^j &= Q^j(q^i, p_i, t), \\ P_j &= P_j(q^i, p_i, t), \end{aligned} \quad (5.30)$$

kde $i, j = 1, \dots, n$. Předpokládáme přitom regularitu vztahů (5.30) neboli nenulovost jacobíanu, což zaručuje existenci inverzní transformace. Řekneme, že:

Transformace (5.30) je kanonická, když zachovává tvar Hamiltonových kanonických rovnic (5.8),

to znamená, že existuje Hamiltonova funkce $H'(Q^j, P_j, t)$, pro kterou platí

$$\frac{dQ^j}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial Q^j}. \quad (5.31)$$

Snadno ukážeme, že zdaleka ne každá transformace fázového prostoru tvaru (5.30) je kanonická. Požadavek (5.31) na kanoničnost transformace je naopak značně restriktivní.

Příklad nekanonické transformace:

Uvažujme transformaci $Q = q^2$, $P = p$ a jednoduchý hamiltonián volné částice $H = \frac{1}{2m} p^2$.

Zjevně je $\frac{dQ}{dt} = 2q \frac{dq}{dt} = 2q \frac{\partial H}{\partial p} = 2q \frac{p}{m} = \frac{2}{m} \sqrt{Q} P$ a $\frac{dP}{dt} = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0$.

Neexistuje funkce $H'(Q, P)$, aby bylo $\frac{dQ}{dt} = \frac{2}{m} \sqrt{Q} P = \frac{\partial H'}{\partial P}$ a současně $\frac{dP}{dt} = 0 = -\frac{\partial H'}{\partial Q}$, neboť z druhé rovnice plyne nezávislost H' na Q , což je v rozporu s první rovnicí.

Příklad kanonické transformace:

Uvažujme transformaci $Q = q^2 + p$, $P = q^2 - q + p$ a hamiltonián volné částice $H = \frac{1}{2m} p^2$.

Inverzní transformace je $q = Q - P$, $p = Q - (Q - P)^2$, takže $H' = H = \frac{1}{2m} [Q - (Q - P)^2]^2$.

Platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= 2q \frac{dq}{dt} + \frac{dp}{dt} = 2q \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q} = 2q \frac{p}{m} - 0 = \frac{2}{m} p q = \frac{2}{m} [Q - (Q - P)^2] (Q - P) = \frac{\partial H'}{\partial P}, \\ \frac{dP}{dt} &= 2q \frac{dq}{dt} - \frac{dq}{dt} + \frac{dp}{dt} = (2q - 1) \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q} = (2q - 1) \frac{p}{m} - 0 \\ &= -\frac{1}{m} p (1 - 2q) = -\frac{1}{m} [Q - (Q - P)^2] [1 - 2(Q - P)] = -\frac{\partial H'}{\partial Q}. \end{aligned}$$

Hamiltonovy kanonické rovnice tudíž opravdu platí i v nových proměnných Q, P , což znamená, že přechod od sdružených veličin q, p k Q, P je kanonická transformace ve fázovém prostoru.

Jaká je naše *hlavní motivace* pro studium právě kanonických transformací? Pomocí vhodné transformace (5.30) můžeme najít jednodušší (či dokonce zcela triviální!) tvar Hamiltonovy funkce H' . A pokud bude tato transformace kanonická, budou pohybové rovnice (5.31) v nových proměnných také jednoduché (či dokonce zcela triviální!) a snadno je vyřešíme. Právě tato myšlenka je podstatou *Hamiltonovy–Jacobiho teorie*, kterou zavedeme v následující části 5.8 textu.

⁵ „Staré“ proměnné budeme označovat malými písmeny q, p , zatímco „nové“ proměnné velkými písmeny Q, P .

5.7.1 Podmínky kanoničnosti transformace

Pro hledání podmínek, za nichž je transformace kanonická, využijeme volnosti v určení příslušné Lagrangeovy funkce L . V kapitole 4 o Hamiltonově variačním principu (konkrétně v části věnované kalibračním transformacím) jsme zmínili důležitou větu (4.38):

$$\boxed{\text{Lagrangeova funkce } L + \frac{dF}{dt}, \text{ kde } F \text{ je libovolná hladká funkce,} \quad (5.32) \\ \text{dává stejné pohybové rovnice jako původní } L.}$$

Důkaz:

$$\delta S' \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{dF}{dt} \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \delta [F]_{t_1}^{t_2} \equiv \delta S + \delta F(t_2) - \delta F(t_1) = \delta S, \\ \text{protože } \delta F(t_2) = 0 = \delta F(t_1), \text{ neboť máme variační úlohu s pevnými konci.}$$

⊠

Funkci F vyskytující se v předchozí větě nazýváme generující funkce kanonické transformace (česky též vytvorující funkce). Předpokládáme přitom, že

$$\begin{aligned} &\text{generující funkce } F \text{ závisí na starých souřadnicích } q \text{ resp. hybnostech } p \\ &\quad \text{ i na nových souřadnicích } Q \text{ resp. hybnostech } P. \end{aligned}$$

Celkem existují 4 možnosti jejich vzájemných kombinací, totiž: $F(q, Q)$, $F(q, P)$, $F(p, Q)$, $F(p, P)$. Přidáme-li indexy a časovou závislost, máme proto 4 různé druhy generujících funkcí, které se standardně označují symboly

$$F_1(q^j, Q^j, t), \quad F_2(q^j, P_j, t), \quad F_3(p_j, Q^j, t), \quad F_4(p_j, P_j, t). \quad (5.33)$$

Nyní již můžeme uvést podmínky kanoničnosti transformace (5.30) v této přehledné tabulce:

generující funkce	podmínky kanoničnosti	podmínky integrability
$F_1(q^j, Q^j, t)$	$\frac{\partial F_1}{\partial q^i} = +p_i \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q^k} = -P_k$	$\frac{\partial p_i}{\partial Q^k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q^i}$
$F_2(q^j, P_j, t)$	$\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = +p_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = +Q^k$	$\frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial Q^k}{\partial q^i}$
$F_3(p_j, Q^j, t)$	$\frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q^i \quad \frac{\partial F_3}{\partial Q^k} = -P_k$	$\frac{\partial q^i}{\partial Q^k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}$
$F_4(p_j, P_j, t)$	$\frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q^i \quad \frac{\partial F_4}{\partial P_k} = +Q^k$	$\frac{\partial q^i}{\partial P_k} = -\frac{\partial Q^k}{\partial p_i}$

(5.34)

Zde indexy nabývají hodnot $i, j, k = 1, \dots, n$ a navíc platí vztah

$$\boxed{H'(Q^j, P_j, t) = H(q^j, p_j, t) + \left. \frac{\partial F_a}{\partial t} \right|_{\text{po dosazení}}} \quad (5.35)$$

pro všechny čtyři typy generujících funkcí, tedy $a = 1, 2, 3, 4$.

Jak si tyto vztahy zapamatovat?

- Definici (5.33), tedy 1. sloupec tabulky, je nutné se naučit. Pomáhá symetrie: v argumentu se vždy vyskytuje stará proměnná (q nebo p) a *současně* nová proměnná (Q nebo P).
- Podmínky kanoničnosti, tedy 2. sloupec tabulky, pak již získáme provedením *všech* *parciálních derivací* dané *generující funkce* podle jejích proměnných a užitím obecného pravidla

$$\frac{\partial F_a}{\partial \text{stará}} = \pm \text{sdužená stará}, \quad \frac{\partial F_a}{\partial \text{nová}} = \pm \text{sdužená nová}.$$

Je nutné si zapamatovat jen znaménka na pravé straně. Všimněte si, že se tam vždy vyskytuje kombinace $+p, -P, -q, +Q$.

- Konečně 3. sloupec je *důsledkem* 2. sloupce. Například derivováním podmínek kanoničnosti pro F_1 v prvním řádku podle komplementárních proměnných dostaneme

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q^k \partial q^i} = \frac{\partial p_i}{\partial Q^k} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial q^i \partial Q^k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q^i}.$$

Protože generující funkce je dle předpokladu hladká, lze pořadí druhých parciálních derivací zaměnit, tedy platí

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q^k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q^i}.$$

Provedme důkaz podmínek kanoničnosti transformace, uvedený ve 2. sloupci tabulky (5.34), a současně odvodíme vztah (5.35).

Důkaz pro F_1 : Užijeme faktu (5.32), totiž že obě Lagrangeovy funkce $L'(Q^j, P_j, t)$ a

$$L(q^j, p_j, t) = L'(Q^j, P_j, t) + \frac{d}{dt} F_1(q^j, Q^j, t) \quad (5.36)$$

dávají stejné pohybové rovnice. Pokud totiž (izochronní) variaci příslušných akcí provedeme ve *fázovém prostoru*, dostaneme *stejné Hamiltonovy pohybové rovnice* (viz 2. důkaz Hamiltonových kanonických rovnic (5.8) v části 5.2) *ve starých i nových proměnných*. Užitím definice Hamiltonovy funkce (5.10) tedy podmínka (5.36) kanoničnosti transformace zní

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q^j, p_j, t) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}^i - H'(Q^j, P_j, t) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_1}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \dot{Q}^i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t},$$

jejímž přerovnáním získáme

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i - \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \right) \dot{Q}^i \right] = H(q^j, p_j, t) - H'(Q^j, P_j, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Tato podmínka je zjevně *identicky splněna* pokud $\frac{\partial F_1}{\partial q^i} = p_i$, $\frac{\partial F_1}{\partial Q^i} = -P_i$ a $H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$.

Důkaz pro F_2 : Analogicky využijeme vztahu (5.32), tentokrát však pro

$$L(q^j, p_j, t) = L'(Q^j, P_j, t) + \frac{d}{dt} \left(F_2(q^j, P_j, t) - \sum_{i=1}^n P_i Q^i \right), \quad (5.37)$$

čímž dostaneme podmínku

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q^j, p_j, t) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}^i - H'(Q^j, P_j, t) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_2}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \left(\dot{P}_i Q^i + P_i \dot{Q}^i \right).$$

První a poslední člen na pravé straně se odečtou. Nyní již stačí obdobně jako v případě F_1 pouze přerovnat členy, čímž dostaneme podmínku

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i + \left(Q^i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right) \dot{P}_i \right] = H(q^j, p_j, t) - H'(Q^j, P_j, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t},$$

která bude *identicky splněna* když $\frac{\partial F_2}{\partial q^i} = p_i$, $\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q^i$ a $H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$.

Důkaz pro F_3 : Postupujeme stejně jako u F_2 , avšak s použitím

$$L(q^j, p_j, t) = L'(Q^j, P_j, t) + \frac{d}{dt} \left(F_3(p_j, Q^j, t) + \sum_{i=1}^n p_i q^i \right). \quad (5.38)$$

Důkaz pro F_4 : V tomto případě zvolíme

$$L(q^j, p_j, t) = L'(Q^j, P_j, t) + \frac{d}{dt} \left(F_4(p_j, P_j, t) - \sum_{i=1}^n P_i Q^i + \sum_{i=1}^n p_i q^i \right). \quad (5.39)$$

☒

5.7.2 Jak prakticky zjistit, zda transformace je kanonická

Poté, co jsme vybudovali teorii kanonických transformací, se nyní zaměříme na praktickou otázku, jakým způsobem ověřit, jestli daná transformace je kanonická či nikoli. Máme několik možností, z nichž zde uvedeme dvě nejužitečnější:

1. Přímo užitím podmínek integrability z tabulky

Máme 4 možnosti odpovídající čtyřem různým generujícím funkcím uvedeným ve čtyřech řádcích tabulky (5.34). Protože ověření podle kteréhokoli řádku jsou ekvivalentní, zvolíme *poslední sloupec v tom řádku, který je početně nejvýhodnější*.

2. Pomocí Poissonových závorek

Platí věta:

Transformace (5.30) je kanonická $\Leftrightarrow \{Q^i, P_j\} = \delta_j^i$ a $\{Q^i, Q^j\} = 0 = \{P_i, P_j\}$.

(5.40)

Důkaz: Užitím podmínek integrability z posledního sloupce tabulky (5.34) dostaneme:

$$\begin{aligned} \{Q^i, P_j\} &\equiv \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q^i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q^k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial Q^j} + \frac{\partial Q^i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q^j} \right) = \frac{\partial Q^i}{\partial Q^j} = \delta_j^i, \\ \{Q^i, Q^j\} &\equiv \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^k} \frac{\partial Q^j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q^i}{\partial p_k} \frac{\partial Q^j}{\partial q^k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{\partial Q^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial P_j} - \frac{\partial Q^i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial P_j} \right) = -\frac{\partial Q^i}{\partial P_j} = 0, \\ \{P_i, P_j\} &\equiv \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial P_i}{\partial q^k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q^k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial P_i}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial Q^j} + \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q^j} \right) = \frac{\partial P_i}{\partial Q^j} = 0. \end{aligned}$$

☒

Všimněte si, že pro identickou transformaci $Q^j = q^j$, $P_j = p_j$, (která je evidentně kanonická), se podmínky (5.40) redukuje na fundamentální Poissonovy závorky (5.18).

Příklad: Mějme lineární transformaci proměnných fázového prostoru

$$\begin{aligned} Q &= \alpha q + \beta p, \\ P &= \gamma q + \delta p. \end{aligned}$$

Pro jaké koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ je tato transformace kanonická?

1. Přímou užitím podmínek integrability z tabulky (5.34):

Zvolíme například 4. řádek odpovídající generující funkci $F_4(p, P)$. Prakticky to znamená, že nejprve musíme přepsat transformaci do podoby $q(p, P)$ a $Q(p, P)$. Přímoučarou úpravou:

$$q(p, P) = \frac{1}{\gamma}(P - \delta p) \quad \text{a} \quad Q(p, P) = \frac{\alpha}{\gamma}(P - \delta p) + \beta p = \frac{\alpha}{\gamma}P - \left(\frac{\alpha\delta}{\gamma} - \beta\right)p.$$

Podmínka integrability $\frac{\partial q}{\partial P} = -\frac{\partial Q}{\partial p}$ tedy v tomto případě je $\frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\gamma} - \beta$, z čehož plyne, že transformace je kanonická právě tehdy když $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Kdybychom navíc ještě chtěli explicitně najít generující funkci F_4 , integrovali bychom vztahy ze 2. sloupce 4. řádku, tedy $\frac{\partial F_4}{\partial p} = -q(p, P) = -\frac{1}{\gamma}P + \frac{\delta}{\gamma}p$ a $\frac{\partial F_4}{\partial P} = Q(p, P) = \frac{\alpha}{\gamma}P - \frac{1}{\gamma}p$.

To dává obecné řešení $F_4(p, P) = \frac{1}{2\gamma}(\delta p^2 + \alpha P^2 - 2pP) + C$.

2. Pomocí Poissonových závorek (5.40):

Podmínky $\{Q, Q\} = 0 = \{P, P\}$ jsou splněny identicky, takže zbývá jediná, totiž $\{Q, P\} = 1$.

Snadno spočítáme, že $\{Q, P\} \equiv \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$, což je stejná podmínka, jakou jsme získali prvním postupem z podmínek integrability.

5.7.3 Důležité vlastnosti kanonických transformací

Na závěr této části textu uvedme několik vět a poznámek týkajících se kanonických transformací fázového prostoru:

- Hledání generující funkce je analogické hledání potenciálu konzervativní síly.

Nejlépe je to vidět na generující funkci F_3 (u ostatních vstupují do hry opačná znaménka). Podmínky kanoničnosti ze třetího řádku tabulky jsou

$$q^i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q^k}.$$

Vidíme, že nalezení generující funkce $F_3(p_i, Q^k)$ je *matematicky* stejná úloha jako hledání potenciálu $V(x^i)$ konzervativního silového pole se složkami F_i , který je dán známým vzorcem

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}.$$

Navíc vidíme, že podmínka integrability z posledního sloupce tabulky,

$$\frac{\partial q^i}{\partial Q^k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i},$$

je analogická podmínce $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ na konzervativnost silového pole, což je ve složkách

$$\frac{\partial F_i}{\partial x^k} = \frac{\partial F_k}{\partial x^i}.$$

- Generující funkce F_a jsou navzájem spojeny Legendreovou duální transformací.

Obecně jsou všechny čtyři generující funkce téže kanonické transformace ekvivalentní, neboli každou z nich lze vyjádřit pomocí kterékoli ostatní. Vztah mezi nimi je docela jednoduchý:⁶

$$\begin{aligned} F_1(q, Q) \\ F_2(q, P) &= F_1 + \sum P_i Q^i \\ F_3(p, Q) &= F_1 - \sum p_i q^i \\ F_4(p, P) &= F_1 + \sum P_i Q^i - \sum p_i q^i \end{aligned}$$

Vidíme, že stačí jen přičíst (resp. odečíst) lineární kombinaci proměnných, tedy sumu, kde se v každém členu vyskytuje *součin nahrazované proměnné fázového prostoru a proměnné, za kterou ji nahrazujeme*. Tedy například v generující funkci F_2 zůstávají stejné proměnné q jako v F_1 , ale proměnné Q se mění na P , a proto se v transformaci objevuje suma $\sum_{i=1}^n P_i Q^i$. V generující funkci F_3 naopak zůstávají stejné proměnné Q jako v F_1 , ale proměnné q se mění na p : proto se objevuje suma $-\sum_{i=1}^n p_i q^i$. Protože při přechodu od F_1 k F_4 je třeba zaměnit oba typy proměnných, je nutno přidat obě sumy (snadno odtud získáme i vztahy mezi všemi ostatními dvojicemi generujících funkcí). Všimněte si, že sumy $\sum_{i=1}^n P_i Q^i$ a $\sum_{i=1}^n p_i q^i$ jsou právě ony dodatečné členy, které jsme v úplné časové derivaci přidávali k Lagrangeově funkci ve vzorcích (5.37), (5.38) a (5.39) v průběhu důkazu vztahů z tabulky (5.34).

Tomuto typu transformací „poloviny proměnných“ se říká *Legendreova duální transformace*. Obecně má tvar $(u, v) \rightarrow (u, w)$ a často se vyskytuje v matematice (při řešení diferenciálních rovnic) a ve fyzice. Legendreovou duální transformací je i přechod mezi Lagrangeovou a Hamiltonovou funkcí, viz vztahy (5.9), (5.10). S analogickou situací se setkáváme také u *termodynamických potenciálů*:

$$\begin{aligned} \text{vnitřní energie} \quad U(S, V) \\ \text{entalpie} \quad H(S, p) &= U + pV \\ \text{volná energie} \quad F(T, V) &= U - TS \\ \text{Gibbsův potenciál} \quad G(T, p) &= U + pV - TS \end{aligned}$$

kde S je entropie, V objem, p tlak a T teplota. Ryze *formální analogie* mezi generujícími funkcemi kanonických transformací v klasické mechanice a termodynamickými potenciály tedy je $F_1 \sim U$, $F_2 \sim H$, $F_3 \sim F$, $F_4 \sim G$ a $q^i \sim S$, $Q^i \sim V$, $p_i \sim T$, $P_i \sim p$.

- Množina všech kanonických transformací tvoří grupu.

Grupovou operací („součinem dvou prvků grupy“) je zde operace skládání. Jinými slovy: *složení dvou kanonických transformací je opět kanonická transformace*. Inverzním prvkem grupy je pochopitelně *inverzní transformace*. A jednotku grupy tvoří *identická transformace*.

Je přitom zajímavé, že *identickou transformaci nelze generovat funkcí $F_1(q^j, Q^j)$* (neboť $p_i \equiv \frac{\partial F_1}{\partial q^i}$ je funkce jen proměnných (q^j, Q^j) a nemůže být proto nikdy rovno P_i) ani $F_4(p_j, P_j)$. Identická transformace je naopak generována funkcí $F_2 = \sum_{j=1}^n q^j P_j$ (neboť $p_i \equiv \frac{\partial F_2}{\partial q^i} = P_i$ a $Q^k \equiv \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = q^k$) resp. $F_3 = -\sum_{j=1}^n Q^j p_j$.

Vidíme tedy, že generující funkce jsou obecně sice ekvivalentní prostřednictvím Legendreovy duální transformace, ale pro některé speciální kanonické transformace (například identitu, prostorovou inverzi atd.) nastává degenerace: některé generující funkce pro ně nelze najít.

⁶Pro větší přehlednost zde v argumentu generujících funkcí nepíšeme indexy proměnných a časovou závislost.

- Poissonovy závorky jsou invariantní vůči kanonickým transformacím.

To znamená, že Poissonova závorka libovolných funkcí f, g dá *stejný výsledek*, když k výpočtu použijeme proměnné fázového prostoru, které jsou navzájem spojeny kanonickou transformací. Zapsáno symbolicky tedy platí

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}. \quad (5.41)$$

Důkaz: Přepíšme Poissonovu závorku do podoby

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{q,p} &\equiv \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \left(\frac{\partial g}{\partial Q^i} \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} \left(\frac{\partial g}{\partial Q^i} \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q^j} \right) \right) \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial g}{\partial Q^i} \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \right) + \frac{\partial g}{\partial P_i} \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial P_i}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial P_i}{\partial q^j} \right) \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial Q^i} \{f, Q^i\}_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \{f, P_i\}_{q,p} \right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Tuto identitu nyní aplikujeme speciálně na funkci $f = Q^j$ a $f = P_j$ s využitím věty (5.40):

$$\{Q^j, g\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial Q^i} \{Q^j, Q^i\}_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \{Q^j, P_i\}_{q,p} \right) = \frac{\partial g}{\partial P_j},$$

$$\{P_j, g\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial Q^i} \{P_j, Q^i\}_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \{P_j, P_i\}_{q,p} \right) = -\frac{\partial g}{\partial Q^j}.$$

Záměnou g za f s užitím antisymetrie odtud plyne $\{f, Q^j\}_{q,p} = -\frac{\partial f}{\partial P_j}$ a $\{f, P_j\}_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial Q^j}$. Dosazením těchto výrazů do (5.42) po záměně sčítacích indexů i za j již snadno dostaneme

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_j \left(-\frac{\partial g}{\partial Q^j} \frac{\partial f}{\partial P_j} + \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial f}{\partial Q^j} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial Q^j} \frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q^j} \right) \equiv \{f, g\}_{Q,P}.$$

□

- Objem fázového prostoru je invariantní vůči kanonickým transformacím.

Důkaz pro $n = 1$: Protože pro jacobíán kanonické transformace (5.30) díky (5.40) platí

$$\text{Jac} \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \{Q, P\} = 1,$$

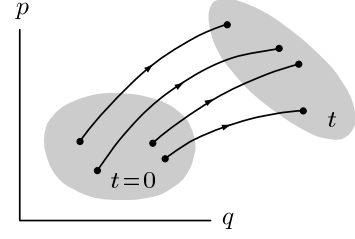
dostáváme ihned pro objem vymezené části fázového prostoru

$$V = \iint dQ dP = \iint |\text{Jac}| dp dq = \iint dq dp.$$

Důkaz pro obecné n je technicky náročnější (užívá pravidel pro operaci s jacobíány, které pak vyjádří pomocí generující funkce F_2). Lze ho najít v literatuře, např. v §46 prvního svazku slavného kurzu teoretické fyziky L.D. Landau a E.M. Lifšic: *Mechanika*, Moskva, 1958.

□

Tato důležitá věta implikuje takzvanou Liouvilleovu větu. Ukazuje se, že *vývoj mechanického systému lze chápat jako speciální kanonickou transformaci z počátečního do koncového stavu* (viz Brdička, Hladík str. 363). Proto se systém částic, jejichž okamžitý stav je reprezentován body ve fázovém prostoru, chová jako „deformovatelné těleso“, jehož tvar se při vývoji sice obecně mění, ale objem V zůstává beze změny. To je velmi důležité zejména ve statistické fyzice.



5.8 Hamiltonova–Jacobiho teorie

Nejdůležitější aplikací teorie kanonických transformací je tzv. Hamiltonova–Jacobiho teorie. Jde o další pozoruhodnou alternativní formulaci zákonů klasické mechaniky. Pohybové rovnice jsou v ní vyjádřeny v podobě *jediné parciální diferenciální rovnice*, nikoli soustavy obyčejných diferenciálních rovnic!

Hamiltonova–Jacobiho teorie stojí na pěti základních vztazích platných pro kanonické transformace generované funkcí $F_1(q^j, Q^j, t)$.⁷ Tyto vztahy jsme již odvodili v předchozí části kapitoly:

- 1) $\frac{\partial F_1}{\partial q^i} = p_i,$
- 2) $\frac{\partial F_1}{\partial Q^i} = -P_i,$
- 3) $H'(Q^j, P_j, t) = H(q^j, p_j, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t},$

přičemž v nových proměnných opět musí platit Hamiltonovy kanonické rovnice

- 4) $\frac{dQ^j}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_j},$
- 5) $\frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial Q^j}.$

Východiskem celé teorie je geniální trik:

Uvažujeme speciální funkci $S(q^j, Q^j, t) \equiv F_1$, která generuje kanonickou transformaci, po níž je $H' = 0$.

(5.43)

Pak jsou Hamiltonovy pohybové rovnice 4) a 5) nejjednodušší možné, totiž $\frac{dQ^j}{dt} = 0$ a $\frac{dP_j}{dt} = 0$. Okamžitě dávají triviální (!) řešení v podobě *konstantních nových proměnných* fázového prostoru:

$$\begin{aligned} Q^j &= \alpha_j \equiv \text{konst.}, \\ P_j &= -\beta_j \equiv \text{konst.}, \end{aligned}$$

a proto má vztah 2) tvar

$$\frac{\partial S(q^j, \alpha_j, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i.$$

Provedením těchto n parciálních derivací funkce S dle parametrů α_i a inverzí obdržených vztahů lze odtud získat řešení pro trajektorii vývoje systému

$$q^j(t) = q^j(\alpha_i, \beta_i, t).$$

⁷V literatuře se někdy vychází také z ekvivalentních vztahů generovaných $F_2(q^j, P_j, t)$.

To je báječné, zbývá jenom problém najít onu „zázračnou“ speciální generující funkci S , která se obvykle nazývá hlavní Hamiltonova funkce. Musí splňovat rovnici 3), tedy

$$0 = H(q^j, p_j, t) + \frac{\partial S(q^j, \alpha_j, t)}{\partial t}.$$

Ale pozor: sdružené proměnné p_j nejsou nezávislé. Musíme je vyjádřit pomocí posledního dosud nepoužitého vztahu 1), neboli dosadit místo nich funkce

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q^j}.$$

Tím je nová teorie dobudována a tvoří konzistentní systém.

5.8.1 Shrnutí postupu, metody řešení a příklad

Postup řešení pomocí Hamiltonovy–Jacobiho teorie tedy můžeme systematicky shrnout takto:

1. Spočítáme hamiltonián $H(q^j, p_j, t)$ daného systému.
2. Sestavíme Hamiltonovu–Jacobiho rovnici

$$\boxed{H\left(q^j, \frac{\partial S}{\partial q^j}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}, \quad (5.44)$$

a to tak, že v H všude namísto p_j napíšeme $\frac{\partial S}{\partial q^j}$, pak přičteme $\frac{\partial S}{\partial t}$ a položíme rovno nule.

3. Je to *jediná* parciální diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámou funkci $S(q^j, t)$ celkem $n + 1$ proměnných q^j a t .

Tuto rovnici řešíme. Hledáme tzv. *úplný integrál* (nikoli obecné řešení závislé na libovolné funkci — to nám ale stačí). Obecně je to složitý problém, ale lze použít *standardní triky*:

- Pokud H *nezávisí na čase* $t \Rightarrow S$ má tvar $S(q^j, t) = W(q^j) - Et$,
přičemž $E = \text{konst.}$ je Jacobiho integrál energie, neboť rovnice (5.44) dává $H = E$.
Funkce W se obvykle nazývá *charakteristická Hamiltonova funkce*.
- Pokud H *nezávisí na* $q^c \Rightarrow S$ má tvar $S(q^j, t) = \alpha_c q^c + S_c(q^1, \dots, q^{c-1}, q^{c+1}, \dots, q^n, t)$
tedy za každou cyklickou souřadnici máme integrační konstantu α_c (sdruženou hybnost).
- Obvykle se pokoušíme rovnici řešit *separací proměnných*: $S(q^j) = S_1(q^1) + \dots + S_n(q^n)$
Lze-li separovat, dostaneme n obyčejných dif. rov. 1. řádu, jež lze řešit kvadraturami.
Není-li separace úspěšná, zkusíme parametrizovat jinými souřadnicemi.

4. Řešení je tvaru $\boxed{S(q^j, \alpha_j, t)}$ a obsahuje $n + 1$ integračních konstant α_j (např. E, α_c atd.).
Jedna integrační konstanta je ale triviálně aditivní.

5. Derivací podle n netriviálních parametrů α_i dostáváme n rovnic

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i}, \quad (5.45)$$

kde β_i jsou *libovolné (integrační) konstanty*.

6. Tím dostáváme n implicitních rovnic řešení pohybových rovnic, které *po inverzi* dávají hledané trajektorie vývoje $q^j(\alpha_i, \beta_i, t)$ obsahující $2n$ integračních konstant α_i, β_i .

Ilustrujme tento postup na konkrétním jednoduchém příkladě.

volný pád: $\boxed{H = \frac{1}{2m} p^2 + V(x)}$, kde $\boxed{V(x) = -mgx}$, viz vzorec (5.12), osa x míří dolů.

Po dosazení $p = \frac{\partial S}{\partial x}$ má tedy Hamiltonova–Jacobiho rovnice (5.44) tvar

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (5.46)$$

Protože H nezávisí na čase t , vyřešíme ji předpokladem $S(x, t) = W(x) - Et$, což dává rovnici

$$\left(\frac{dW}{dx} \right)^2 = 2m [E - V(x)], \quad (5.47)$$

kteřou již snadno dořešíme separací proměnných

$$W(x) = \int dW = \int \sqrt{2m[E - V(x)]} dx = \int \sqrt{2m(E + mgx)} dx = \frac{1}{3m^2g} [2m(E + mgx)]^{\frac{3}{2}}.$$

Máme tedy explicitní řešení Hamiltonovy–Jacobiho rovnice

$$S(x, t) = \frac{1}{3m^2g} [2m(E + mgx)]^{\frac{3}{2}} - Et \quad (+ \text{aditivní konstanta}).$$

Integrační konstantou je (zachovávající se) energie E , takže vztah (5.45) zní $\frac{\partial S}{\partial E} = \beta$, což dává

$$\frac{1}{mg} \sqrt{2m(E + mgx)} - t = \beta$$

a po přímočaré inverzní úpravě dostaneme finální řešení úlohy

$$x(t) = \frac{1}{2} g (t + \beta)^2 - \frac{E}{mg}.$$

To je samozřejmě správný a všeobecně známý výsledek, který jsme zde uvedli jen jako pedagogickou ilustraci metody. Plná síla Hamiltonovy–Jacobiho teorie se uplatňuje naopak u složitých úloh. Často totiž umožňuje ve vhodných souřadnicích najít separaci úplný integrál, tedy vyjádřit řešení úlohy pomocí pouhých integrálů (přehled lze najít například v kurzu Landau, Lifšic, 1. svazek §48). To je velmi důležité i pro různé aproximační a numerické metody. Hamiltonova–Jacobiho teorie se stala mocným nástrojem zejména v *nebeské mechanice*.

5.8.2 Některé teoretické aspekty Hamiltonovy–Jacobiho teorie

Závěrem ještě zmíníme zajímavá teoretická fakta související s Hamiltonovou–Jacobiho rovnicí:

- Speciální generující funkci S v rovnici (5.44) lze chápat jako akční funkcionál $S(q^j(t), t) \equiv \int_{t_0}^t L dt$, který pro pevné t dává akci konkrétní trajektorie $q^j(t)$.

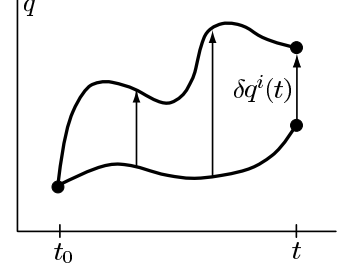
Důkaz: Derivací tohoto výrazu podle t dostáváme $\sum_i \frac{\partial S}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial t} = L$. Stačí tedy dokázat, že $\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i$, protože pak již je $\sum_i p_i \dot{q}^i - L + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ neboli $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$, tedy hlavní Hamiltonova funkce S opravdu řeší Hamiltonovu–Jacobiho rovnici.

Vztah $\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i$ dokážeme variací S za předpokladu pevného koncového t , připouštíme ale $\delta q^i(t) \neq 0$. Vlastně tedy zkoumáme změnu S pro různé skutečné trajektorie řešící pohybové rovnice začínající v t_0 na stejném místě, ale které v čase t končí v různých bodech — každá taková trajektorie je určena svou variací $\delta q^i(t)$. Je proto

$$\delta S = \delta S(q^i(t \text{ pevné}), t \text{ pevné}) = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q^i}(t) \delta q^i(t).$$

Z druhé strany pro variaci funkcionálu platí

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_0}^t L dt = \int_{t_0}^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt \\ &= \int_{t_0}^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i dt + \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_{t_0}^t, \end{aligned}$$



kde integrál vypadne, neboť jsou splněny Lagrangeovy rovnice II. druhu. Je tedy

$$\delta S = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(t) \delta q^i(t) = \sum_i p_i(t) \delta q^i(t).$$

Ze srovnání obou výrazů při uvážení nezávislosti $\delta q^i(t)$ opravdu dostáváme vztah $\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i$.

☒

- Funkce S je analogická eikonálu, pomocí něhož vlnová optika přechází na geometrickou.

Uvažujme hmotný bod m v poli potenciálu $V(\mathbf{r})$. Příslušná Hamiltonova funkce je (5.12). Nezávisí na t , takže Hamiltonova–Jacobiho rovnice (5.44) pro $S(\mathbf{r}, t) = W(x, y, z) - Et$ zní

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = 2m[E - V(x, y, z)], \quad (5.48)$$

což je třírozměrné zobecnění rovnice (5.47). Zavedme vektor

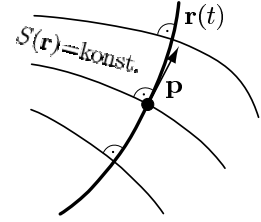
$$\mathbf{p} \equiv \text{grad } S \quad \text{se složkami} \quad p_i \equiv \frac{\partial S}{\partial x^i} = \frac{\partial W}{\partial x^i}. \quad (5.49)$$

Fyzikálně je to v libovolném místě *vektor hybnosti tečný k trajektorii* částice $\mathbf{r}(t)$. Zjevně

- směr \mathbf{p} je dle (5.49) normála k plochám $S(\mathbf{r}) = \text{konst.}$
- velikost je dle (5.48) $|\mathbf{p}|^2 = 2m[E - V(\mathbf{r})]$, tedy určená $V(\mathbf{r})$

Situaci lze tedy geometricky interpretovat podobně jako v optice:

- plochy konstantní fáze $S(\mathbf{r}) = \text{konst.}$ jsou vlnoplochy
- trajektorie ve směru \mathbf{p} jsou paprsky kolmé na tyto vlnoplochy



Hamiltonova–Jacobiho teorie tudíž ukazuje, že *klasickou mechaniku lze formulovat nejen v tradiční podobě trajektorií hmotných bodů, ale i v duální vlnové podobě.*

To je analogické optice, kde existuje obdobná souvislost mezi popisem pomocí vlnové a geometrické optiky. Geometrická optika je dobrou aproximací vlnové, tedy „fyzikální“ optiky popsané elektromagnetickým polem \mathbf{E} a \mathbf{H} , pokud je vlnová délka λ malá. Za těchto předpokladů se odvozuje eikónalová rovnice

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = n^2(x, y, z), \quad (5.50)$$

kde skalární funkce S je optický eikonál a n je index lomu nehomogenního prostředí, viz učebnice P. Malý: *Optika*, Karolinum, Praha, 2008. Hamiltonova–Jacobiho rovnice (5.48) klasické mechaniky je evidentně analogií eikónalové rovnice optiky (5.50).

- Klasická limita kvantové mechaniky: od Schrödingera k Hamiltonovi–Jacobimu.

V části 5.6 jsme již uvedli, že stav částice v mikrosvětě je popsán komplexní vlnovou funkcí $\psi(\mathbf{r}, t)$. Ta určuje pravděpodobnost jejího nalezení v okolí daného místa $p(\mathbf{r}, t) = \psi\bar{\psi} dV$. Vlnová funkce je řešením *Schrödingerovy rovnice* $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$, kde $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$, tedy

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \psi.$$

Hledejme její řešení ve tvaru

$$\psi(\mathbf{r}, t) = C \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(x, y, z, t) \right], \quad (5.51)$$

kde $\hbar \doteq 1,054572 \times 10^{-34}$ J·s je Planckova konstanta a C je normovací konstanta. Parciálním derivováním, dosazením a vydělením funkcí ψ dostáváme

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right) + V(\mathbf{r}),$$

t.j.

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V(\mathbf{r}) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \Delta S,$$

neboli

$$H \left(x^i, p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \Delta S.$$

Jasně vidíme, že pro $\hbar \rightarrow 0$ (respektive pro systémy s velkou hmotností m) se pravá strana blíží nule a rovnice přechází na Hamiltonovu–Jacobiho rovnici pro klasickou částici, z níž lze určit trajektorii $\mathbf{r}(t)$. V tomto smyslu dostáváme tedy klasickou limitu kvantové mechaniky. Lze navíc interpretovat, že plochy konstantní fáze $S = \text{konst.}$ vlnové funkce ψ (5.51) kvantové mechaniky jsou v této limitě kolmé ke klasickým trajektoriím.

Naznačený postup souvisí s kvaziklasickým přiblížením kvantové mechaniky v kontextu tzv. *WKB aproximace* (Wentzel, Kramers, Brillouin, 1926), které je přesnější aproximací, neboť ve vztahu (5.51) neomezuje, aby C byla konstanta ale obecná reálná funkce $C(x, y, z, t)$.

- Klasická limita z pohledu Feynmanovy formulace kvantové mechaniky.

V této závěrečné poznámce zmíníme ještě jednu pozoruhodnou souvislost mezi kvantovou a klasickou mechanikou, tentokrát však nahlédnutou jiným způsobem, a to z hlediska Feynmanovy formulace kvantové mechaniky, která se poprvé objevila v jeho disertační práci z roku 1942. V ní se nezavádí operátory, jejich vlastní funkce a hodnoty, Schrödingerova rovnice atd. Základním pojmem je tzv. amplituda pravděpodobnosti přechodu částice z \mathbf{r}_1 v t_1 do \mathbf{r}_2 v t_2 neboli propagátor, což je komplexní funkce označovaná symbolem

$$G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1).$$

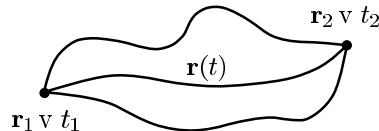
Hustota pravděpodobnosti přechodu z \mathbf{r}_1 v t_1 do \mathbf{r}_2 v t_2 je pak $G\bar{G}$.

Funkci G lze podle Feynmana spočítat takzvaným dráhovým integrálem

$$G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = N \int_{\forall \mathbf{r}(t)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{r}(t)] \right] \mathcal{D}\mathbf{r}(t)$$

kde

- N je normalizační koeficient,
- $S[\mathbf{r}(t)]$ je *klasická akce* pro trajektorii $\mathbf{r}(t)$,
- $\forall \mathbf{r}(t)$ znamená že „sčítáme“ (integrujeme) přes *všechny* trajektorie začínající v t_1 v \mathbf{r}_1 a končící v t_2 v \mathbf{r}_2 (i klasicky nemožné),
- započítáme je s *komplexní vahou* $\exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right]$,
- $\mathcal{D}\mathbf{r}(t)$ je *míra na prostoru drah* : to je největší potíž, protože ji lze matematicky rigorózně definovat jenom v některých speciálních případech (je to míra na nekonečněrozměrném prostoru funkcí). Prakticky ji však lze vyčíslit např. numericky v „mřížových teoriích“.



Standardní vlnovou funkci ψ lze pak již spočítat jednoduše pomocí Greenova vztahu:

$$\underbrace{\psi(\mathbf{r}, t)}_{\text{vyvinutý stav}} = \int G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \underbrace{\psi(\mathbf{r}', t')}_{\text{počáteční stav}} dV'.$$

Je možno ukázat, že takto získaná komplexní funkce ψ řeší Schrödingerovu rovnici. Jde tedy o ekvivalentní formulaci kvantové mechaniky.

Trajektorie blízké klasické trajektorii dávají prakticky stejnou hodnotu akce S neboť podle Hamiltonova variačního principu je pro každou klasickou trajektorii $\delta S = 0$, to znamená, že S se v jejím okolí příliš nemění — nastává konstruktivní interference. Naopak pro trajektorie vzdálené od klasické se S mění velmi rychle a příspěvky od těchto neklasických drah se efektivně vyruší kvůli destruktivní interferenci: započítáváme je totiž s rychle se měnící vahou $\sim \cos(S/\hbar)$, neboť argument kosinu je silně proměnlivý. Z toho plyne závěr, že k amplitudě pravděpodobnosti přechodu G přispívají nejvíce trajektorie v okolí klasické. Lze dokonce říci, že tím více, „čím menší by bylo \hbar “. Tímto způsobem se tedy vynořuje klasické chování částic z kvantové mechanického popisu.

Podobně se zavádí Feynmanův integrál i v teorii pole. Velmi užitečný jak z teoretického tak i praktického hlediska je zejména v případě takzvaných Yangových–Millsových polí, jež popisují fundamentální kvantové interakce.

Část II.

MECHANIKA
TUHÉHO TĚLESA

Kapitola 6

Kinematika tuhého tělesa

V Newtonově mechanice se *tuhým tělesem* rozumí soustava hmotných bodů navzájem pevně spojených: je tedy tvořeno body, jejichž relativní vzdálenosti se nemění. Tuhé těleso dobře aproximuje skutečný makroskopický objekt, jehož deformaci lze v průběhu děje zanedbat. Můžeme jej chápat jako soustavu vázanou holonomními skleronomními vazbami a tedy užívat obvyklou teorii soustavy hmotných bodů.

Obeční pohyb tuhého tělesa má *šest stupňů volnosti*, z nichž *tři reprezentují translační pohyb* jistého bodu, například těžiště, a *tři popisují rotaci* tělesa (tzv. *Chaslesova věta*).

Úkolem kinematiky tuhého tělesa je nalézt vhodný popis otáčení. Jak uvidíme, opírá se tento popis o matematický formalismus vektorového a tenzorového počtu. Předpokládáme, že čtenář jej dobře zná z lineární algebry. Přesto však považujeme za užitečné připomenout na tomto místě základní pojmy, vztahy a symboly, které budeme dále v textu používat.

6.1 Vektory a tenzory

- **vektor** \mathbf{w} : prvek vektorového prostoru V (zde $\dim V = 3$), je definováno $\alpha\mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$
- **báze** $\{\mathbf{e}_i\}$: pro $\forall \mathbf{w} \in V$ je $\mathbf{w} = w_i \mathbf{e}_i$, kde w_i jsou *složky* \mathbf{w} v dané bázi (užíváme Einsteinovu sumační konvenci pro $i = 1, 2, 3$)
- **skalární součin**: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \equiv v_i w_i = \delta_{ij} v_i w_j$, kde δ_{ij} je *Kroneckerův symbol*
- **vektorový součin**: $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ definován $(\mathbf{v} \times \mathbf{w})_i \equiv \varepsilon_{ijk} v_j w_k$, kde ε_{ijk} je *Levi-Civitův symbol*
 $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, při prohození sousedních indexů je hodnota -1 , jinak rovno 0
(hlavní užitečné identity: $\delta_{ii} = 3$, $\delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{iik} = 0$, $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$)
- **ortonormální báze**: $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ (tedy 3 kolmé jednotkové vektory)
- **rotace kolem počátku** je speciální transformace mezi ortonormálními bázemi $\{\mathbf{e}_i\}$ a $\{\mathbf{e}'_i\}$ daná $\mathbf{e}'_i = A_{ik} \mathbf{e}_k$, kde A_{ik} jsou prvky *transformační matice* A , jež je *ortogonální*, $A^t = A^{-1}$, neboli vyjádřeno po složkách platí *relace ortogonalit* $A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij}$ a $A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij}$
(Důkaz: $\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = A_{ik} \mathbf{e}_k \cdot A_{jl} \mathbf{e}_l = A_{ik} A_{jl} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = A_{ik} A_{jl} \delta_{kl} = A_{ik} A_{jk}$.
Druhá část: $\delta_{ji} = \delta_{ij}^t = (A_{ik} A_{jk})^t = A_{jk}^t A_{ik}^t = A_{kj} A_{ki}$)
- **některé důsledky**:
 $\det A = \pm 1$, neboť $(\det A)^2 = (\det A)(\det A^t) = \det(AA^t) = \det(AA^{-1}) = \det E = 1$
(volíme matice s $\det A = +1$, neboť pak obsahují identitu a soubor těchto matic tvoří grupu)
 $\mathbf{e}_j = A_{ij} \mathbf{e}'_i$, neboť $A_{ij} \mathbf{e}'_i = A_{ji}^t \mathbf{e}'_i = A_{ji}^{-1} A_{ik} \mathbf{e}_k = \delta_{jk} \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j$
 $w'_i = A_{ik} w_k$, neboť $w'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{w} = w_k \mathbf{e}_k = w_k A_{ik} \mathbf{e}'_i$
 $w_j = A_{ij} w'_i$, neboť $w_j \mathbf{e}_j = \mathbf{w} = w'_i \mathbf{e}'_i = w'_i A_{ij} \mathbf{e}_j$

- tenzor (2. řádu, v euklidovském prostoru):

klasické „fyzikální“ zavedení (pomocí transformačních vlastností):

„veličina s více složkami“ (pro 2 indexy je to matice T), které se při rotaci báze $\mathbf{e}'_i = A_{ik} \mathbf{e}_k$ transformují lineárně (jako vektor) v každém indexu:

$$T'_{ij} = A_{ik} A_{jl} T_{kl}$$

moderní abstraktní zavedení (elegantní, nezávislé na souřadnicích):

tenzor (2. řádu) T je bilineární zobrazení z $V \times V \rightarrow R$, tj.

$$T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \text{reálné číslo}$$

souvislost: zjevně platí $T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = T(v_i \mathbf{e}_i, w_j \mathbf{e}_j) = v_i w_j T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$

Definujeme-li tedy složky tenzoru T vůči bázi $\{\mathbf{e}_i\}$ jako matici čísel

$$T_{ij} \equiv T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j),$$

pak $T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_i w_j T_{ij}$. Ihned též dostáváme transformační vlastnosti složek:

$$T'_{ij} \equiv T(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = T(A_{ik} \mathbf{e}_k, A_{jl} \mathbf{e}_l) = A_{ik} A_{jl} T(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = A_{ik} A_{jl} T_{kl}$$

zobecnění je přímocará: tenzor n . řádu je multilineární zobrazení $T : V \times \dots \times V \rightarrow R$,

jež implikuje $T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$

- operace s tenzory:

sčítání: ve složkách přirozeně: $T_{ij} + U_{ij}$

úženy: vysčítání přes dva indexy: T_{ii} = skalár, neboť $T'_{kk} = A_{ki} A_{kj} T_{ij} = \delta_{ij} T_{ij} = T_{ii}$

rozklad na symetrickou a antisymetrickou část (je invariantní):

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \equiv T_{(ij)} + T_{[ij]} = s_{ij} + a_{ij}$$

symetrický tenzor $s_{ij} = s_{ji}$ má 6 nezávislých složek

antisymetrický tenzor $a_{ij} = -a_{ji}$ má 3 nezávislé složky:

pomocí Levi-Civita symbolu lze antisymetrickému tenzoru přiřadit (*pseudo*)vektor

$$a_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} a_{jk} \quad \text{a naopak} \quad a_{ij} \equiv \varepsilon_{ijk} a_k \quad \text{tj.} \quad a_1 = a_{23}, a_2 = a_{31} = -a_{13}, a_3 = a_{12},$$

$$\text{tedy} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{23} \\ -a_{13} \\ a_{12} \end{pmatrix} \quad \text{neboli} \quad \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jako důležitou aplikaci můžeme nyní například elegantně dokázat *d'Alembertovu–Eulerovu větu*:

Otočení tuhého tělesa kolem bodu lze nahradit otočením kolem osy procházející tímto bodem.

Důkaz: Každé otočení kolem bodu je popsáno transformací $x'_i = A_{ik} x_k$, kde x_k jsou souřadnice „původní“ polohy, x'_i jsou souřadnice „otočené“ polohy se společným počátkem a A je ortogonální matice, tj. $A^t = A^{-1}$ neboli $AA^t = E$. Stačí ukázat, že existuje invariantní směr určený x_i , který transformace zachovává, tedy že $x_i = x'_i = A_{ik} x_k$. Z lineární algebry je známo, že homogenní rovnice $A_{ik} x_k = x_i$ má netriviální řešení x_i , pokud je nulový determinant $\det(A - E)$. Pro každou ortogonální matici A však je $\det(A - E) = \det(A - AA^t) = \det(A(E - A^t)) = \det A \det(E - A^t) = 1 \cdot \det((E - A)^t) = \det(E - A) = -\det(A - E)$, takže opravdu platí, že $\det(A - E) = 0$.

⊗

Pro úplnost ještě učinme následující dvě poznámky ohledně zde použité konvence:

1. Protože se omezíme výhradně jen na *kartézské báze v plochém prostoru*, kde má metrika triviální tvar $g_{ij} \equiv g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, nemusíme rozlišovat „dolní a horní indexy“ veličin, protože příslušné kovariantní a kontravariantní složky tenzorů jsou číselně stejné. Pro zjednodušení zápisu tedy *všechny indexy budeme psát dole*. Einsteinova sumační konvence pro skalární součin pak je $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{ij} v_i w_j = v_i w_i \equiv \sum_{i=1}^3 v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$, atd.
2. V lineární algebře se někdy zavádí transformační vztah mezi otočenými ortonormálními bázemi ve formě $\mathbf{e}'_i = \mathcal{A}_{ki} \mathbf{e}_k$, kde \mathcal{A}_{ki} jsou prvky ortogonální *matice přechodu* \mathcal{A} . To je opačný vztah než naše konvence $\mathbf{e}'_i = A_{ik} \mathbf{e}_k$, kde A_{ik} jsou prvky ortogonální *transformační matice* A . Zjevně ale stačí identifikovat $A = \mathcal{A}^t$.

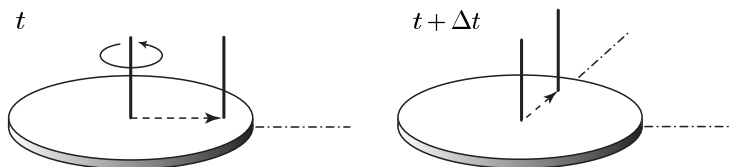
6.2 Relativita otáčivého pohybu

Nejenom v teorii relativity ale již v newtonovské mechanice nemá smysl mluvit o pohybu vzhledem k prázdnému „absolutnímu prostoru“: vždy musíme hovořit jen o pohybu *vzhledem k vztažnému systému*. V newtonovské mechanice je výhodné představit si vztažný systém jako „mříž“ tvořenou tuhými tyčemi jednotkové délky, která nám zároveň realizuje kartézský systém souřadnic. Trojice kolmých tyčí v každém bodě realizuje ortonormální bázi, tzn. že každý vektor lze psát jako lineární kombinaci těchto vektorů báze.

Vztažných systémů, které se vůči sobě navzájem pohybují, můžeme ovšem vytvořit nekonečně mnoho. Newtonovská dynamika mezi nimi vybírá speciální třídu tzv. *inerciálních systémů*, ve kterých pohybové zákony mají privilegovaně jednoduchý tvar.

Popis otáčivého pohybu tuhého tělesa omezíme zde na případ, kdy s tělesem lze spojit pevný bod, který splývá s počátkem některého inerciálního systému. Ortonormální bázi $\{\mathbf{e}_i\}$ v počátku tohoto inerciálního systému budeme v souladu s tradicí označovat jako „bázi pevnou v prostoru“. S tělesem samým současně spojíme obecně jinou trojici ortonormálních vektorů $\{\mathbf{e}'_i\}$, které určují pevné směry vzhledem k tělesu — ty tvoří tzv. „korotující bázi“. Poloha tělesa pak bude jednoznačně určena, bude-li určeno natočení korotující báze vzhledem k bázi pevné v prostoru. Jak jsme již uvedli, obě báze musí být navzájem spojeny ortogonální transformací, tj. poloha korotující báze vzhledem k pevné je v daném okamžiku určena ortogonální maticí A reprezentující zmíněnou transformaci. Každá ortogonální matice je přitom určena třemi parametry (neboť 9 prvků matice je svázáno 6 nezávislými relacemi ortogonality), například Eulerovými úhly, jež zavedeme v části 6.4. Vzájemné natočení bází se však mění, takže prvky matice A jsou funkcemi času.

Každý vektor \mathbf{w} lze vyjádřit v obou bázích, přičemž složky daného vektoru budou v obou bázích samozřejmě různé. Podobně jako nemůžeme mluvit o pohybu bodu aniž řekneme, vzhledem k čemu tento pohyb vztahujeme, nemůžeme hovořit ani o časové změně vektoru, aniž řekneme, vzhledem ke kterému vztažnému systému se změna odehrává. Například polohový vektor určitého bodu tělesa se *nemění* vzhledem ke korotující bázi, *mění* se ale vzhledem k bázi pevné v prostoru. Naopak bod v klidu vzhledem k bázi pevné k prostoru se vzhledem ke korotující bázi pohybuje:



Rychlost bodu vzhledem k inerciálnímu systému a jeho rychlost vzhledem k rotujícímu tělesu jsou tedy dva různé vektory, nikoli tentýž vektor ve dvou různých bázích! Každý z obou vektorů však můžeme vyjádřit v obou bázích. Totéž platí i pro obecné časové změny libovolného vektoru \mathbf{w} .

6.3 Zavedení úhlové rychlosti

Uvažujme nyní libovolný časově závislý vektor $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$. Tento vektor lze vyjádřit v obou již zmíněných přirozených ortonormálních bázích:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}_i\} & \dots \text{ báze pevná v prostoru} \\ \{\mathbf{e}'_i(t)\} & \dots \text{ báze spojená s tělesem (korotující)} \end{aligned}$$

Je tedy $\mathbf{w}(t) = w_i(t) \mathbf{e}_i = w'_i(t) \mathbf{e}'_i(t)$, přičemž obě ortonormální báze jsou navzájem jen pootočené, takže platí $\mathbf{e}'_i(t) = A_{ik}(t) \mathbf{e}_k$, resp. $\mathbf{e}_k = A_{jk}(t) \mathbf{e}'_j(t)$. Zde A_{ij} jsou prvky ortogonální matice A , takže $A^t = A^{-1}$, což ve složkách dává relace ortogonality $A_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}$. Časová derivace vektoru $\mathbf{w}(t)$ vzhledem k inerciálnímu systému — vyjádřená však v korotující bázi $\mathbf{e}'_i(t)$ — je potom vektor

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + w'_i \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + w'_i \frac{dA_{ik}}{dt} \mathbf{e}_k = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + w'_i \frac{dA_{ik}}{dt} A_{jk} \mathbf{e}'_j. \quad (6.1)$$

Je proto přirozené a výhodné definovat matici

$$\boxed{\Omega = \frac{dA}{dt} A^t} \quad \text{s prvky} \quad \boxed{\Omega_{ij} \equiv \frac{dA_{ik}}{dt} A_{jk}}, \quad (6.2)$$

takže

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + w'_i \Omega_{ij} \mathbf{e}'_j. \quad (6.3)$$

Protože na levé straně tohoto vztahu je vektor, musí být i napravo, takže matice Ω s prvky Ω_{ij} je tenzor 2. řádu: nazýváme ho tenzor úhlové rychlosti.

Derivováním relací ortogonality dostáváme vztah $\frac{dA_{ik}}{dt} A_{jk} = -\frac{dA_{jk}}{dt} A_{ik}$, takže $\boxed{\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}}$. Matice Ω je tudíž *antisymetrická*, má *jen tři nezávislé složky*, a proto k ní lze standardním způsobem přiřadit duálně sdružený (pseudo)vektor $\mathbf{\Omega}$ zvaný vektor úhlové rychlosti předpisem

$$\boxed{\Omega_k \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \Omega_{ij}}, \quad (6.4)$$

neboli $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \equiv (\Omega_{23}, \Omega_{31}, \Omega_{12})$. Vztah opačný k (6.4) evidentně je $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \Omega_k$.

Takto definované veličiny Ω_k jsou *složky vektoru $\mathbf{\Omega}$ vůči výchozí bázi \mathbf{e}_k* pevné v prostoru. Pro tenzor i vektor úhlové rychlosti ale platí další pozoruhodná věc: Při otočení daném ortogonální maticí $A(t)$ *mají stejné složky* jak vůči korotující bázi \mathbf{e}'_k , tak vůči pevné bázi \mathbf{e}_k !

Důkaz: Uvažme tenzor úhlové rychlosti příslušející *inverznímu otočení* danému maticí $A^{-1} = A^t$. Podle definice (6.2) tedy je

$$\Omega^{(A^{-1})} = \frac{d(A^{-1})}{dt} (A^{-1})^t = \frac{dA^t}{dt} (A^t)^t = \frac{dA^t}{dt} A = -A^t \frac{dA}{dt}, \quad (6.5)$$

kde poslední rovnost je důsledkem časové derivace relací ortogonality $A^t A = E$. Nyní využijeme faktu, že tenzor úhlové rychlosti $\Omega^{(A^{-1})}$ je *opačný* k tenzoru Ω^A , jenž přísluší matici A , neboli $\Omega^A = -\Omega^{(A^{-1})}$. Dosazením z (6.5) dostaneme vztah $\Omega^A = A^t \frac{dA}{dt}$, který zleva vynásobíme maticí A a zprava maticí A^t , takže $A \Omega^A A^t = A A^t \frac{dA}{dt} A^t = \frac{dA}{dt} A^t = \Omega^A$. Protože výraz $A \Omega^A A^t$ není nic jiného než transformace složek tenzoru Ω^A z pevné báze \mathbf{e}_k do korotující báze \mathbf{e}'_k (ve složkách $\Omega^{A'}_{ij} = A_{ik} A_{jl} \Omega^A_{kl}$), dokázali jsme, že opravdu platí $\Omega^{A'} = \Omega^A$ neboli $\Omega^{A'}_{ij} = \Omega^A_{ij}$, tedy $\Omega'_{ij} = \Omega_{ij}$. \square

Protože $\Omega'_{ij} = \Omega_{ij}$, z definice (6.4) ihned užitím faktu, že Levi-Civitův symbol je (pseudo)tenzor, který má stejné složky v obou bázích ($\varepsilon'_{kij} = \varepsilon_{kij}$), dostáváme

$$\boxed{\Omega'_k = \Omega_k}. \quad (6.6)$$

Složky (pseudo)vektoru $\mathbf{\Omega}$ vůči korotující bázi \mathbf{e}'_k jsou shodné s jeho složkami vůči pevné bázi \mathbf{e}_k . Z toho plyne, že vektor úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}$ definovaný (6.4) a (6.2) *míří do invariantní osy otáčení*.

Užitím vztahu $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \Omega_k = \varepsilon'_{ijk} \Omega'_k$ a identity $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{jki}$ lze nyní výraz (6.3) přepsat

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + \varepsilon'_{jki} \Omega'_k w'_i \mathbf{e}'_j = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{w})'_j \mathbf{e}'_j,$$

jenž explicitně vyjadřuje časovou derivaci libovolného vektoru \mathbf{w} vzhledem k pevnému inerciálnímu systému prostoru, vyjádřenou ovšem v bázi $\mathbf{e}'_i(t)$ pevně spojené s tělesem pomocí složek \mathbf{w} v téže bázi a pomocí vektoru úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}$. Platí-li však vztah mezi určitými vektory v jedné bázi, platí v každé bázi, a proto můžeme psát důležitý vektorový vztah

$$\boxed{\left. \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right|_{\text{prostor}} = \left. \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right|_{\text{těleso}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{w}}, \quad (6.7)$$

bez reference k určité bázi. Znovu ale zdůrazněme, že $\frac{d\mathbf{w}}{dt}|_{\text{prostor}}$ a $\frac{d\mathbf{w}}{dt}|_{\text{těleso}}$ jsou *dva různé vektory*, nikoli tentýž vektor ve dvou bázích. (Tento fakt lze opět demonstrovat na triviálním případě, kdy $\mathbf{w} = \mathbf{r}$, tj. poloha pevného bodu v tělese; pak $\frac{d\mathbf{r}}{dt}|_{\text{těleso}} = 0$, zatímco $\frac{d\mathbf{r}}{dt}|_{\text{prostor}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$.) Oba tyto vektory lze ovšem vyjádřit v obou bázích: první vektor se samozřejmě nejpřirozeněji vyjadřuje v pevné bázi ($\frac{d\mathbf{w}}{dt}|_{\text{prostor}} = \frac{dw_i}{dt} \mathbf{e}_i$), zatímco druhý vektor je naopak snadné vyjádřit v korotující bázi ($\frac{d\mathbf{w}}{dt}|_{\text{těleso}} = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i$).

Příklady:

Geometrický význam vektoru úhlové rychlosti je dobře vidět z následující jednoduché ilustrace: je-li x_3 osa otáčení a $\varphi(t)$ příslušný úhel otočení v daném čase, pak

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{dA}{dt} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

takže $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \dot{\varphi})$, což je zcela v souladu s intuitivní představou.

Méně elementárním příkladem je otáčení o úhel $\varphi(t)$ podél osy $x_1 = x_2, x_3 = 0$, pro které je

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \varphi & 1 - \cos \varphi & -\sqrt{2} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi & 1 + \cos \varphi & \sqrt{2} \sin \varphi \\ \sqrt{2} \sin \varphi & -\sqrt{2} \sin \varphi & 2 \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \sin \varphi & -\sqrt{2} \cos \varphi \\ \sin \varphi & -\sin \varphi & \sqrt{2} \cos \varphi \\ \sqrt{2} \cos \varphi & -\sqrt{2} \cos \varphi & -2 \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dot{\varphi} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & -\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{což dává} \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{\varphi}, \dot{\varphi}, 0). \quad (6.9)$$

Vektor úhlové rychlosti tedy i v tomto případě míří do invariantní osy otáčení, zde $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, a jeho velikost je $|\boldsymbol{\Omega}| = |\dot{\varphi}|$.

Pro další diskuzi je nutno ještě uvážit pravidla pro *skládání rotací a vektorů úhlových rychlostí*. Uvažujme dvě otočení: první je dáno ortogonální maticí A představující transformaci $\mathbf{e}'_i = A_{ik} \mathbf{e}_k$, druhé je dáno ortogonální maticí B a určuje transformaci $\mathbf{e}''_j = B_{ji} \mathbf{e}'_i$. Složení obou těchto otočení je dáno ortogonální maticí $C = BA$, neboť $\mathbf{e}''_j = B_{ji} A_{ik} \mathbf{e}_k = C_{jk} \mathbf{e}_k$. Nechť $\boldsymbol{\Omega}^A$ je vektor úhlové rychlosti příslušející první transformaci A , zatímco $\boldsymbol{\Omega}^B$ je vektor úhlové rychlosti příslušející druhé transformaci B . Vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}^C$ výsledného otočení $C = BA$ je dán prostým vztahem

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega}^C = \boldsymbol{\Omega}^B + \boldsymbol{\Omega}^A}. \quad (6.10)$$

Důkaz: Podle definice (6.2) je matice Ω^C dána

$$\Omega^C = \frac{dC}{dt} C^t = \frac{d(BA)}{dt} (BA)^t = \left(\frac{dB}{dt} A + B \frac{dA}{dt} \right) A^t B^t = \frac{dB}{dt} B^t + B \frac{dA}{dt} A^t B^t = \Omega^B + B \Omega^A B^t,$$

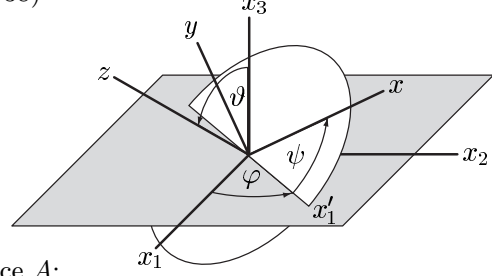
neboli ve složkách $\Omega^{C''}_{jk} = \Omega^{B''}_{jk} + B_{jl} B_{kn} \Omega^{A'}_{ln}$. Prvky $\Omega^{A'}_{ln}$ jsou složky matice vůči bázi \mathbf{e}'_i a $B_{jl} B_{kn} \Omega^{A'}_{ln}$ představuje transformaci těchto složek do báze \mathbf{e}''_j ($B_{jl} B_{kn} \Omega^{A'}_{ln} = \Omega^{A''}_{jk}$), v níž jsou vyjádřeny složky $\Omega^{C''}_{jk}$ a $\Omega^{B''}_{jk}$. Ve výsledné bázi tedy platí $\Omega^C = \Omega^B + \Omega^A$, což jsme měli dokázat.

□

6.4 Eulerovy úhly a Eulerovy kinematické rovnice

Ortogonalní matice A jednoznačně určující vztah mezi dvěma libovolně natočenými bázemi je určena pouhými 3 nezávislými parametry (matice 3×3 obsahuje obecně 9 prvků, relace ortogonalit však představují 6 vazeb). Libovolnou rotaci kolem počátku můžeme přitom realizovat třemi po sobě jdoucími jednoduchými rotacemi kolem vhodné pevné osy. Za úhlové parametry zmíněných tří jednoduchých rotací zvolil Euler (1738)

$\varphi \dots$ precesní úhel
 $\vartheta \dots$ nutační úhel
 $\psi \dots$ rotační úhel



Jejich význam plyne z následující konstrukce matice A :

1. Vyjdeme z báze \mathbf{e}_i pevné v prostoru a provedeme otočení kolem osy x_3 o úhel φ . Otočení je dáno maticí (6.8)

$$D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Následně provedeme otočení kolem osy x'_1 o úhel ϑ dané maticí

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

3. Nakonec provedeme otočení kolem osy x''_3 o úhel ψ dané maticí

$$B = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice A transformace od báze pevné v prostoru do báze korotující s tělesem je pak samozřejmě dána maticovým součinem $A = BCD$. Její tvar explicitně neuvádíme, neboť naším hlavním záměrem zde je vyjádřit celkový vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega}$ odpovídající transformaci A . Protože jsme dokázali vztah (6.10) o skládání vektorů úhlových rychlostí, je výsledný vektor $\boldsymbol{\Omega}$ dán součtem dílčích vektorů úhlových rychlostí odpovídajících transformacím D , C a B , přičemž z (6.8) je zřejmé, že $\boldsymbol{\Omega}^D = (0, 0, \dot{\varphi})$, $\boldsymbol{\Omega}^C = (\dot{\vartheta}, 0, 0)$, $\boldsymbol{\Omega}^B = (0, 0, \dot{\psi})$. Nesmíme ovšem zapomenout, že složky uvedených vektorů se vztahují vždy k příslušné výsledné bázi. Abychom tedy dostali všechny složky vyjádřené ve výsledné bázi korotující s tělesem (v níž je již vyjádřen vektor $\boldsymbol{\Omega}^B$), musíme přetransformovat složky vektoru $\boldsymbol{\Omega}^C$ maticí B a složky vektoru $\boldsymbol{\Omega}^D$ dokonce maticí BC , t.j. $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^B + B \boldsymbol{\Omega}^C + BC \boldsymbol{\Omega}^D$. Explicitním výpočtem dostáváme nyní již snadno tzv. Eulerovy kinematické rovnice (1760)

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi, \\ \Omega_y &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi, \\ \Omega_z &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}, \end{aligned} \tag{6.11}$$

kde jsme označili osy výsledného systému korotujícího s tělesem jako (x, y, z) .

Zavedení Eulerových úhlů je velmi přirozené, protože jejich *geometrický význam*, zřejmý z výše uvedeného obrázku, dovoluje názornou interpretaci. Rotační úhel ψ měří „vlastní rotaci“ tělesa

kolem jeho osy z , zpravidla ztotožněné s osou symetrie. Tato osa se ovšem sama natáčí kolem pevného bodu, přičemž její okamžitá poloha je jednoznačně určena nutačným úhlem ϑ určujícím odklon osy od svislého směru („zeměpisnou šířku“) a úhlem precesním φ hrajícím roli „zeměpisné délky“ (povšimněme si, že zavedení Eulerových úhlů ϑ a φ je totožné se standardním zavedením sférických souřadnic). Přesněji vzato měří φ natočení tzv. *uzlové přímky* x'_1 dané průsečíkem výchozí roviny (x_1, x_2) s rovinou kolmou k ose z tělesa $(x''_1, x''_2) \equiv (x, y)$; evidentně však platí, že úhel průmětu osy z do roviny (x_1, x_2) je $\varphi_{\text{osa}} = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

6.5 Zrychlení v neinerciální soustavě

Obecné identity (6.7) můžeme také s výhodou použít k rychlému odvození všech zrychlení, jež působí v neinerciální soustavě. Nejprve za vektor \mathbf{w} zvolíme polohový vektor \mathbf{r} libovolného bodu. Označíme-li rychlost jeho pohybu vůči prostoru symbolem $\mathbf{v}_p \equiv \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{\text{prostor}}$ a jeho rychlost vůči tělesu symbolem $\mathbf{v}_t \equiv \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{\text{těleso}}$, ihned dostáváme vztah $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_t + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$. Nyní aplikujme identitu (6.7) ještě jednou, tentokrát na vektor rychlosti \mathbf{v}_p , čímž vyjádříme zrychlení bodu vůči prostoru

$$\mathbf{a}_p \equiv \left. \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \right|_{\text{prostor}} = \left. \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \right|_{\text{těleso}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_p = \left. \frac{d\mathbf{v}_t}{dt} \right|_{\text{těleso}} + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{\text{těleso}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_t + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}).$$

Je přirozené označit zrychlení vůči tělesu symbolem $\mathbf{a}_t \equiv \left. \frac{d\mathbf{v}_t}{dt} \right|_{\text{těleso}}$ a časovou změnu úhlové rychlosti $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{\text{těleso}}$. Tím dostáváme vztah

$$\boxed{\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_t + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_t + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}, \quad (6.12)$$

který lze interpretovat takto: zrychlení \mathbf{a}_p libovolného bodu vůči prostoru je vektorový součet jeho zrychlení vůči tělesu \mathbf{a}_t plus Eulerovo zrychlení $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}$ způsobené časovou změnou $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ úhlové rychlosti otáčení tělesa plus Coriolisovo zrychlení $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_t$ plus odstředivé zrychlení $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ (spíše bychom však měli říkat „odosové zrychlení“).

Kapitola 7

Dynamika tuhého tělesa

Již tedy víme, jak výhodně popisovat kinematiku tuhého tělesa například pomocí Eulerových úhlů. Abychom mohli zformulovat dynamický zákon pro otáčející se těleso (pohybovou rovnici), je nutno zavést veličinu vystihující příslušné setrvačné vlastnosti tuhého tělesa. Podobně, jako hmotnost m tělesa je „mírou odporu tělesa vůči translačnímu urychlení“, je moment setrvačnosti I „mírou odporu tuhého tělesa vůči roztáčení“ kolem dané osy.

Ukazuje se však, že setrvačné vlastnosti tělesa při *obecném* roztáčení mají poněkud složitější strukturu, kterou nyní zcela popíšeme pomocí tzv. tenzoru setrvačnosti. Jak uvidíme, půjde o tenzor 2. řádu, který bude možné definovat „matematickým způsobem“, elegantně a invariantně (nezávisle na souřadnicích) jako bilineární zobrazení přiřazující dvojici vektorů jisté reálné číslo.

7.1 Tenzor setrvačnosti

Vyjdeme z momentu hybnosti \mathbf{L} tuhého tělesa

$$\mathbf{L} = \sum_a \mathbf{r}^a \times \mathbf{p}^a = \sum_a m^a \mathbf{r}^a \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a), \quad (7.1)$$

kde sumace probíhá přes všech N bodů tělesa, $a = 1, 2, \dots, N$, majících hmotnosti m^a v místech \mathbf{r}^a . Ve vzorci jsme použili vztah $\mathbf{v}^a = (d\mathbf{r}^a/dt)|_{\text{prostor}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a$, který plyne z (6.7), neboť rychlost bodů vůči tělesu je nulová. Směr vektoru \mathbf{L} je možné charakterizovat vůči jiným vektorům. Vezměme proto nyní *libovolný vektor* $\boldsymbol{\xi}$ a promítněme \mathbf{L} na $\boldsymbol{\xi}$,

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi} = \sum_a m^a \mathbf{r}^a \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) \cdot \boldsymbol{\xi} = \sum_a m^a (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}^a) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a), \quad (7.2)$$

kde v posledním vztahu jsme využili pravidlo o cyklické záměně ve smíšeném součinu vektorů \mathbf{r}^a , $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a)$ a $\boldsymbol{\xi}$. Je tedy přirozené pro dané těleso definovat funkci

$$\boxed{I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \sum_a m^a (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}^a) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi}}. \quad (7.3)$$

Funkce $I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega})$ definovaná tímto vztahem přiřazuje dvojici vektorů $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega})$ reálné číslo rovné $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi}$. Evidentně je lineární v obou argumentech a symetrická. Je to tedy podle „algebraické“ definice tenzor, navíc *symetrický*, a nazývá se tenzor setrvačnosti.

Dosadíme-li do (7.3) i za vektor $\boldsymbol{\xi}$ též vektor $\boldsymbol{\Omega}$, dostaneme

$$I(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_a m^a (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) = \sum_a m^a \mathbf{v}^a \cdot \mathbf{v}^a = 2T, \quad (7.4)$$

kde T je kinetická energie otáčejícího se tělesa.

Již jsme uvedli, že souvislost mezi „algebraickou“ a „složkovou“ definicí tenzoru najdeme, když vektory $\boldsymbol{\xi}$ a $\boldsymbol{\Omega}$ vyjádříme v bázi $\{\mathbf{e}_i\}$ a využijeme bilineárnosti tenzorového zobrazení,

$$I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}) = I(\xi_i \mathbf{e}_i, \Omega_j \mathbf{e}_j) = \xi_i \Omega_j I(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = I_{ij} \xi_i \Omega_j, \quad (7.5)$$

kde složky I_{ij} tenzoru I jsou definovány jako obrazy vektorů báze \mathbf{e}_i a \mathbf{e}_j ,

$$I_{ij} \equiv I(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_a m^a (\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}^a) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}^a). \quad (7.6)$$

Polohové vektory jednotlivých bodů tělesa lze ovšem také vyjádřit v bázi $\{\mathbf{e}_i\}$, $\mathbf{r}^a = x_i^a \mathbf{e}_i$, takže

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \sum_a m^a (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_l) x_k^a x_l^a = \sum_a m^a (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k)_r (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_l)_r x_k^a x_l^a \\ &= \sum_a m^a \varepsilon_{rik} \varepsilon_{rjl} x_k^a x_l^a = \sum_a m^a (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{kj}) x_k^a x_l^a = \sum_a m^a (\delta_{ij} x_k^a x_k^a - x_i^a x_j^a), \end{aligned}$$

resp. pro spojitě prostředí

$$I_{ij} = \int (\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j) \rho dV, \quad (7.7)$$

což je obvyklý tvar složek tenzoru setrvačnosti uváděný v učebnicích.

Z (7.5) a (7.3) pro složky momentu hybnosti ($L_i \xi_i = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi} = I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}) = I_{ij} \Omega_j \xi_i$) a z (7.4) pro kinetickou energii ($2T = I(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) = I_{ij} \Omega_i \Omega_j$) dostáváme velmi důležité vztahy

$$\begin{aligned} L_i &= I_{ij} \Omega_j, \\ T &= \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Z lineární algebry je známo, že každou symetrickou matici lze převést ortogonální transformací na diagonální tvar. Totéž samozřejmě platí i pro matici I_{ij} . V privilegované bázi reprezentující tzv. hlavní osy, ve které je tenzor setrvačnosti diagonální, se proto výraz pro moment hybnosti a kinetickou energii podstatně zjednoduší:

$$L_1 = I_1 \Omega_1, \quad L_2 = I_2 \Omega_2, \quad L_3 = I_3 \Omega_3, \quad T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2), \quad (7.9)$$

kde I_i značí diagonální členy tenzoru v této bázi, $I_{ij} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Diagonalizace se provádí standardním postupem nalezením *vlastních čísel* λ a *vlastních vektorů* \mathbf{v} matice I_{ij} (pro něž platí $I_{ij} v_j = \lambda v_i$). Vlastní čísla λ nalezneme řešením charakteristické rovnice $\det(I - \lambda E) = 0$, poté dopočítáme \mathbf{v}_i příslušející λ_i . Mezi vlastními vektory lze vybrat tři navzájem kolmé a jednotkové. Ty tvoří zmíněnou bázi hlavních os, ve které má matice I_{ij} diagonální tvar, přičemž na diagonále se nacházejí právě vlastní čísla, $I_i = \lambda_i$.

Označme nyní $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_n \mathbf{n}$, kde \mathbf{n} je jednotkový vektor ve směru okamžité osy otáčení. Porovnáním $T = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} n_i n_j \Omega^2$ se známým vzorcem $T = \frac{1}{2} I_n \Omega^2$ dostáváme

$$I_n = I_{ij} n_i n_j, \quad (7.10)$$

kde I_n je obvyklý moment setrvačnosti tělesa při otáčení kolem osy vedoucí zvoleným počátkem soustavy. Výraz je zjevně konzistentní s definicí $I_n \equiv I(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = I(n_i \mathbf{e}_i, n_j \mathbf{e}_j) = n_i n_j I(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = n_i n_j I_{ij}$. Navíc platí $I_n = I_{ij} n_i n_j = \int (x_k x_k n_i n_i - x_i n_i x_j n_j) \rho dV = \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2) \rho dV = \int r^2 (1 - \cos^2 \vartheta) \rho dV = \int r_{\perp}^2 dm$, kde $r_{\perp} = r \sin \vartheta$ je kolmá vzdálenost elementu hmotnosti dm od osy otáčení, což je známý vzorec.

Ze vztahu (7.10) je vidět, že i když má těleso sebesložitější tvar a i když je nehomogenní, stačí určit (třeba experimentálně) moment setrvačnosti I_n vůči šesti různým libovolným osám \mathbf{n} procházejícím těžištěm. Vyřešením lineární soustavy rovnic (7.10) pak dopočítáme tenzor setrvačnosti I_{ij} , který již kompletně určuje setrvačné vlastnosti daného tělesa, tj. moment setrvačnosti

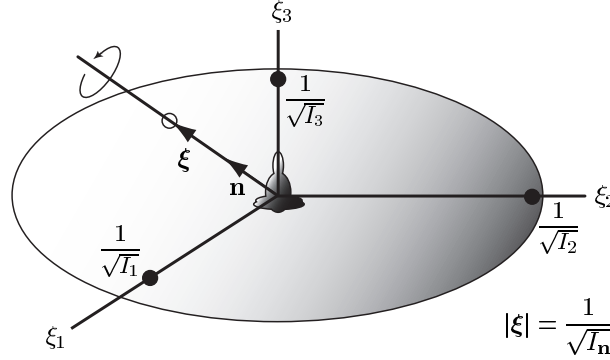
při otáčení vůči *libovolné* jiné ose procházející těžištěm. Formalismus je tedy i praktický a je z něj vidět pozoruhodná prediktivní síla teoretické mechaniky. Z výrazu (7.10) dále plyne, že

$$I_{ij} \frac{n_i}{\sqrt{I_{\mathbf{n}}}} \frac{n_j}{\sqrt{I_{\mathbf{n}}}} = 1 .$$

Označíme-li $\xi_i \equiv n_i / \sqrt{I_{\mathbf{n}}}$, pak v bázi hlavních os má podmínka tvar

$$I_{ij} \xi_i \xi_j = I_1 \xi_1^2 + I_2 \xi_2^2 + I_3 \xi_3^2 = 1 .$$

V prostoru parametrů (ξ_1, ξ_2, ξ_3) tato podmínka určuje povrch elipsoidu s osami $\frac{1}{\sqrt{I_1}}, \frac{1}{\sqrt{I_2}}, \frac{1}{\sqrt{I_3}}$, kterému říkáme *elipsoid setrvačnosti*. Zvolíme-li libovolný směr osy otáčení \mathbf{n} , je tím určen též směr vektoru $\boldsymbol{\xi} \sim \mathbf{n}$. Jeho délka $|\boldsymbol{\xi}|$ je jednoznačně určena průsečíkem daného směru s elipsoidem setrvačnosti. Odtud lze tedy již určit hodnotu momentu setrvačnosti $I_{\mathbf{n}}$ při otáčení podél dané osy pomocí vztahu $|\boldsymbol{\xi}| = |\mathbf{n}| / \sqrt{I_{\mathbf{n}}}$, neboli $I_{\mathbf{n}} = 1 / |\boldsymbol{\xi}|^2$.



Pokud má těleso jistou *symetrii*, pak se tenzor setrvačnosti dále zjednodušuje. Například pro osově symetrické tuhé těleso (podél 3. hlavní osy) bude $I_1 = I_2$, takže elipsoid setrvačnosti bude degenerován na rotační elipsoid. Ve výjimečných případech může být dokonce $I_1 = I_2 = I_3$, takže elipsoid setrvačnosti bude dále degenerován na sféru. Pro takové těleso je moment setrvačnosti stejný pro *všechny* osy procházející jeho těžištěm. To je případ nejen homogenní koule, ale (překvapivě) též krychle, pravidelného čtyřřtenu atd.

Na závěr této části ještě připomeňme transformační vlastnosti tenzoru setrvačnosti. Vůči *rotacím* se chová jakožto tenzor, tedy $I'_{ij} = A_{ik} A_{jl} I_{kl}$. Pokud jde o *translace*, tedy posuv počátku souřadnic o konstantní vektor \mathbf{a} bez otočení os, pak ze souřadnicové definice (7.7) substitucí $x_i = x_i^0 + a_i$, kde x_i^0 označuje *souřadnice vůči těžišti* a a_i složky vektoru posunutí \mathbf{a} vůči těžišti, můžeme přímým výpočtem odvodit, že $I_{ij} = I_{ij}^0 + (\delta_{ij} a_k a_k - a_i a_j) m + 2\delta_{ij} a_k \pi_k^0 - a_i \pi_j^0 - a_j \pi_i^0$, kde $I_{ij}^0 = \int (\delta_{ij} x_k^0 x_k^0 - x_i^0 x_j^0) \rho dV$ jsou složky tenzoru setrvačnosti vůči těžišti, $m = \int \rho dV$ je celková hmotnost tuhého tělesa a $\pi_i^0 = \int x_i^0 \rho dV$ je jeho hmotový dipólový moment vůči těžišti. Ten však dle definice těžiště musí být nulový, čímž jsme odvodili obecnou *tenzorovou Steinerovu větu*

$$I_{ij} = I_{ij}^0 + (\delta_{ij} a_k a_k - a_i a_j) m . \quad (7.11)$$

Přenosobením složkami $n_i n_j$ jednotkového vektoru \mathbf{n} a užitím (7.10) dostáváme $I_{\mathbf{n}} = I_{\mathbf{n}}^0 + a_{\perp}^2 m$, kde $I_{\mathbf{n}}^0$ je moment setrvačnosti vůči těžišti a $a_{\perp}^2 = a_k a_k - a_i n_i a_j n_j = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})^2$, tedy a_{\perp} je kolmá vzdálenost mezi paralelními osami otáčení.

7.2 Eulerovy dynamické rovnice

Nyní již můžeme zformulovat pohybové rovnice určující otáčivý pohyb tuhého tělesa. Vyjdeme ze známého Newtonova vzorce pro soustavu hmotných bodů, z 2. věty impulzové:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}.$$

Musíme však být opatrní. Moment působících sil je zde chápán jako působící v inerciálním systému „absolutního“ prostoru, tedy i levou stranu je nutno chápat jako časovou změnu vektoru \mathbf{L} vůči referenčnímu inerciálnímu systému $\{\mathbf{e}_i\}$, neboli $\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_{\text{prostor}} = \mathbf{M}$. Naproti tomu, \mathbf{L} lze nejlépe vyjádřit v neinerciální bázi *pevně spojené s tělesem*: pokud speciálně zvolíme tuto bázi $\{\mathbf{e}'_i\}$ ve směru hlavních os tenzoru setrvačnosti (x, y, z) , dostaneme z (7.8) vztahy

$$L_x = I_1\Omega_x, \quad L_y = I_2\Omega_y, \quad L_z = I_3\Omega_z, \quad (7.12)$$

přičemž složky I_i jsou *konstanty*. Proto lze velmi snadno spočítat časovou změnu \mathbf{L} vůči korotující bázi, tedy $\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_{\text{těleso}}$. Naštěstí však již máme k dispozici důležitý vztah (6.7), dávající do souvislosti časové změny vektoru vůči oběma bázím,

$$\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_{\text{prostor}} = \left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_{\text{těleso}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}.$$

Odtud okamžitě dostáváme

$$\begin{aligned} M_x &= I_1\dot{\Omega}_x + (\Omega_y L_z - \Omega_z L_y), \\ M_y &= I_2\dot{\Omega}_y + (\Omega_z L_x - \Omega_x L_z), \\ M_z &= I_3\dot{\Omega}_z + (\Omega_x L_y - \Omega_y L_x), \end{aligned}$$

neboli

$$\boxed{\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_x - (I_2 - I_3)\Omega_y\Omega_z &= M_x, \\ I_2\dot{\Omega}_y - (I_3 - I_1)\Omega_z\Omega_x &= M_y, \\ I_3\dot{\Omega}_z - (I_1 - I_2)\Omega_x\Omega_y &= M_z. \end{aligned}} \quad (7.13)$$

To jsou tzv. *Eulerovy dynamické rovnice* (1758). Z matematického hlediska představují soustavu tří nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Za $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ je totiž nutno dosadit z Eulerových kinematických rovnic (6.11) takže rovnice obsahují až 2. derivace Eulerových úhlů φ, ϑ, ψ . Složky momentu sil $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$ musí být rovněž vyjádřeny vůči *korotující* neinerciální bázi pevně spojené s tělesem. Zatímco \mathbf{M} má obvykle jednoduchý tvar v nerotujícím inerciálním systému, jeho promítnutí do báze spojené s otáčejícím se tělesem je složité a obecně je dáno funkcemi $M_i(\varphi, \vartheta, \psi)$.

Eulerovy dynamické rovnice lze s výhodou použít, když $M_x = M_y = M_z = 0$. To je situace příkladu řešeného v části 8.1, kde spočítáme charakter otáčivého pohybu Země případně gyroskopu v Cardanově závěsu, zanedbáme-li momenty sil na ně působící.

7.3 Odvození pomocí Lagrangeova formalizmu

Eulerovy dynamické rovnice lze odvodit i aplikací Lagrangeova formalizmu, tedy užitím Lagrangeových rovnic $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j$, kde za zobecněné souřadnice q^j vezmeme Eulerovy úhly φ, ϑ, ψ . Kinetická energie T rotujícího tuhého tělesa je dána obecným vzorcem (7.8), který se v bázi hlavních os (x, y, z) tenzoru setrvačnosti redukuje na výraz $T = \frac{1}{2}(I_1\Omega_x^2 + I_2\Omega_y^2 + I_3\Omega_z^2)$, viz (7.9). Díky Eulerovým kinematickým rovnicím (6.11) jsou složky vektoru úhlové rychlosti funkcemi $\Omega_i(\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi})$.

Nejprve vyčíslíme Lagrangeovu rovnici pro souřadnici ψ . Užitím relací $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_x = 0$, $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_y = 0$, $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_z = 1$ a $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_x = \Omega_y$, $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_y = -\Omega_x$, $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_z = 0$ plynoucích z (6.11) získáme pohybovou rovnici

$$I_3 \dot{\Omega}_z - (I_1 - I_2) \Omega_x \Omega_y = Q_\psi. \quad (7.14)$$

Lagrangeova rovnice pro zobecněnou souřadnici ϑ dává podobně užitím (6.11) rovnici

$$(I_1 \dot{\Omega}_x - I_2 \Omega_y \Omega_z) \cos \psi - (I_2 \dot{\Omega}_y + I_1 \Omega_x \Omega_z) \sin \psi + I_3 \Omega_z \dot{\vartheta} \sin \vartheta = Q_\vartheta, \quad (7.15)$$

a třetí Lagrangeova rovnice pro φ po úpravách, při nichž se opět využijí Eulerovy kinematické rovnice (6.11) a výraz $I_3 \dot{\Omega}_z$ se vyjádří pomocí (7.14), poskytuje vztah

$$(I_1 \dot{\Omega}_x - I_2 \Omega_y \Omega_z) \sin \psi + (I_2 \dot{\Omega}_y + I_1 \Omega_x \Omega_z) \cos \psi - I_3 \Omega_z \dot{\vartheta} = \frac{1}{\sin \vartheta} (Q_\varphi - Q_\psi \cos \vartheta). \quad (7.16)$$

Nyní stačí již jenom sečíst rovnici (7.15) přenásobenou $\cos \psi$ s rovnicí (7.16) přenásobenou $\sin \psi$, resp. rovnici (7.15) přenásobenou $-\sin \psi$ s rovnicí (7.16) přenásobenou $\cos \psi$, a dostaneme první dvě Eulerovy dynamické rovnice (7.13) [třetí rovnici je (7.14)]:

$$I_1 \dot{\Omega}_x - (I_2 - I_3) \Omega_y \Omega_z = Q_\vartheta \cos \psi + \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} (Q_\varphi - Q_\psi \cos \vartheta), \quad (7.17)$$

$$I_2 \dot{\Omega}_y - (I_3 - I_1) \Omega_z \Omega_x = -Q_\vartheta \sin \psi + \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} (Q_\varphi - Q_\psi \cos \vartheta). \quad (7.18)$$

Zbývá pouze dokázat, že pravé strany rovnic (7.17), (7.18), (7.14) jsou složky (M_x, M_y, M_z) momentu sil v korotující bázi. Nejprve vyjádříme zobecněné síly Q_j pomocí složek (M_1, M_2, M_3) v pevné bázi. K tomu použijeme explicitní vyjádření souřadnic (x_1, x_2, x_3) polohového vektoru v pevné bázi pomocí jeho složek (x, y, z) v bázi korotující s tělesem, jenž je dán inverzní maticí k transformační matici $A = BCD$ z části 6.4. Protože je ortogonální, platí $A^{-1} = D^t C^t B^t$, takže

$$\begin{aligned} x_1 &= f \cos \varphi - (g \cos \vartheta - h \sin \vartheta) \sin \varphi, & f &= x \cos \psi - y \sin \psi, \\ x_2 &= f \sin \varphi + (g \cos \vartheta - h \sin \vartheta) \cos \varphi, & \text{kde} \quad g &= x \sin \psi + y \cos \psi, \\ x_3 &= g \sin \vartheta + h \cos \vartheta, & h &= z, \end{aligned}$$

odkud plynou vztahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} &= -x_2, & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} &= x_1, & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} &= x_3 \sin \varphi, & \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta} &= -x_3 \cos \varphi, & \frac{\partial x_3}{\partial \vartheta} &= g \cos \vartheta - h \sin \vartheta, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \psi} &= -g \cos \varphi - f \cos \vartheta \sin \varphi, & \frac{\partial x_2}{\partial \psi} &= -g \sin \varphi + f \cos \vartheta \cos \varphi, & \frac{\partial x_3}{\partial \psi} &= f \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Užitím definice zobecněných sil $Q_j \equiv F_1 \frac{\partial x_1}{\partial q^j} + F_2 \frac{\partial x_2}{\partial q^j} + F_3 \frac{\partial x_3}{\partial q^j}$ a $M_i \equiv \varepsilon_{ijk} x_j F_k$ spočteme že

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= M_3, \\ Q_\vartheta &= M_1 \cos \varphi + M_2 \sin \varphi, \\ Q_\psi &= (M_1 \sin \varphi - M_2 \cos \varphi) \sin \vartheta + M_3 \cos \vartheta, \end{aligned}$$

(7.19)

neboli inverzně

$$\begin{aligned} M_1 &= Q_\vartheta \cos \varphi - \frac{Q_\varphi \cos \vartheta - Q_\psi}{\sin \vartheta} \sin \varphi, \\ M_2 &= Q_\vartheta \sin \varphi + \frac{Q_\varphi \cos \vartheta - Q_\psi}{\sin \vartheta} \cos \varphi, \\ M_3 &= Q_\psi. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Nakonec vyjádříme složky (M_x, M_y, M_z) momentu sil v korotující bázi pomocí složek (M_1, M_2, M_3) v pevné bázi aplikací transformační matice $A = BCD$. Navíc si můžeme z (7.20) všimnout, že složky (M_1, M_2, M_3) se získávají ze složek $(Q_\vartheta, (Q_\varphi \cos \vartheta - Q_\psi)/\sin \vartheta, Q_\varphi)$ aplikací ortogonální matice $D^t = D^{-1}$, takže od $(Q_\vartheta, (Q_\varphi \cos \vartheta - Q_\psi)/\sin \vartheta, Q_\varphi)$ k (M_x, M_y, M_z) se přechází aplikací matice $AD^t = BCDD^{-1} = BC$, což ihned dává

$$\begin{aligned} M_x &= Q_\vartheta \cos \psi + \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} (Q_\varphi - Q_\psi \cos \vartheta), \\ M_y &= -Q_\vartheta \sin \psi + \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} (Q_\varphi - Q_\psi \cos \vartheta), \\ M_z &= Q_\psi. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Právě to jsme ale měli dokázat, neboť jde o pravé strany rovnic (7.17), (7.18), (7.14) a nezávisle jsme tedy odvodili Eulerovy dynamické rovnice (7.13). Nadto jsme získali explicitní vyjádření (7.21) složek momentu sil $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$ v korotující bázi.

Závěrem připomeňme, že jsou-li *síly konzervativní*, existuje Lagrangeova funkce $L = T - V$, kde $V(\varphi, \vartheta, \psi)$ je příslušný potenciál, takže $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q^j}$. Složky momentu sil lze potom jednoduše psát

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - \cos \psi \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ M_y &= \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \sin \psi \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ M_z &= -\frac{\partial V}{\partial \psi}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Kapitola 8

Aplikace: setrvačníky

8.1 Volný setrvačník (bezsilový)

V případě bezsilového setrvačníku je moment \mathbf{M} nulový, takže Eulerovy dynamické rovnice (7.13) se redukují na nelineární rovnice 1. řádu v proměnných Ω_i . Pro *symetrický setrvačník* se dále velmi zjednodušují: je-li z (hlavní) osa symetrie axiálně symetrického tělesa, pak $I_1 = I_2$, takže

$$\begin{aligned}I_1 \dot{\Omega}_x &= (I_1 - I_3) \Omega_y \Omega_z, \\I_1 \dot{\Omega}_y &= (I_3 - I_1) \Omega_z \Omega_x, \\I_3 \dot{\Omega}_z &= 0.\end{aligned}$$

Odtud $\Omega_z = \omega_0^z = \text{konst.}$ a zbylé dvě rovnice dávají

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_x &= \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^z \Omega_y \equiv \omega_0 \Omega_y, \\ \dot{\Omega}_y &= \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_0^z \Omega_x \equiv -\omega_0 \Omega_x,\end{aligned}$$

kde $\omega_0 = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^z = \text{konst.}$ Zderivováním a dosazením získáme rovnici harmonického oscilátoru

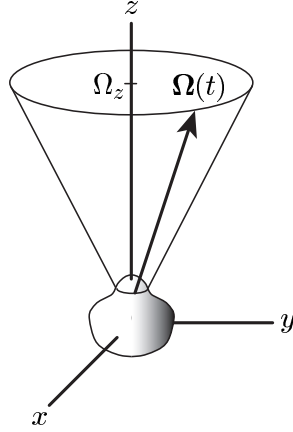
$$\ddot{\Omega}_x + \omega_0^2 \Omega_x = 0,$$

takže obecné řešení lze psát

$$\begin{aligned}\Omega_x &= A \sin(\omega_0 t + \delta), \\ \Omega_y &= A \cos(\omega_0 t + \delta), \\ \Omega_z &= \omega_0^z,\end{aligned}\tag{8.1}$$

kde A, δ, ω_0^z jsou tři libovolné integrační konstanty a $\omega_0 = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^z$ (ω_0 i ω_0^z mohou být i záporné či nulové). Eulerovy úhly pak již lze snadno dopočítat z (6.11): $\vartheta = \vartheta_0$, kde $\tan \vartheta_0 = \frac{I_1 A}{I_3 \omega_0^z}$, $\varphi = \frac{A}{\sin \vartheta_0} t + \varphi_0$, $\psi = \omega_0 t + \delta$. Získali jsme tedy úplné řešení úlohy, musíme jej však ještě interpretovat geometricky a fyzikálně.

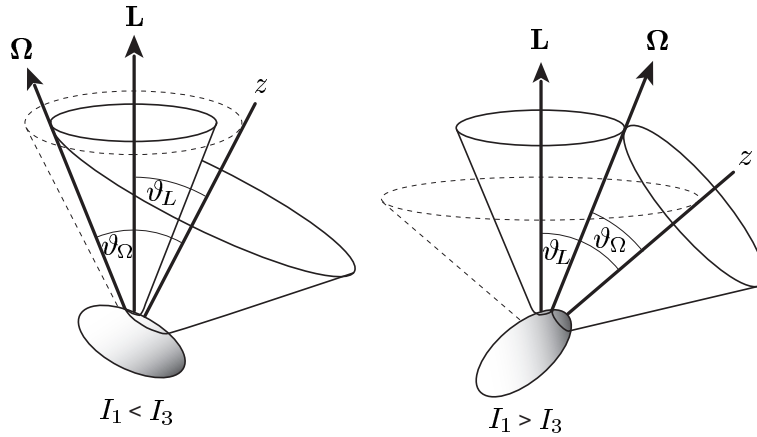
Protože $|\mathbf{\Omega}| = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2} = \sqrt{A^2 + (\omega_0^z)^2}$, vidíme, že $|\mathbf{\Omega}|$ i Ω_z se zachovávají. Lze tedy časový vývoj vektoru úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}(t)$ znázornit geometricky jako *pohyb po kuželi*, jehož osa je totožná s osou symetrie setrvačníku a jehož vrcholový (polo)úhel ϑ_Ω je dán $\tan \vartheta_\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2} / \Omega_z = A / \omega_0^z$. Protože směr $\mathbf{\Omega}$ určuje okamžitou osu otáčení, nezůstává osa otáčení tuhého tělesa konstantní v čase, ale opisuje vůči tělesu výše zmíněný kužel s úhlovou rychlostí ω_0 . Tento efekt se nazývá *regulární precese*. (Pro zajímavost: na povrchu Země je to nepravidelná trajektorie podobná kružnici, jež se od pólu nevzdaluje více než 5 metrů, a experimentálně zjištěná perioda precese činí průměrně 427 dní.) Samozřejmě, pro speciální volbu $\omega_0^z = 0$ nebo $A = 0$ nebo při $I_1 = I_3$ precese nenastává.



Zbývá ještě interpretovat pohyb okamžité osy rotace vůči pevnému *vnějšímu* inerciálnímu systému. Je třeba zvolit vhodný pevný směr, jímž může být například směr zachovávajícího se vektoru momentu hybnosti \mathbf{L} . Ze vztahů (7.12) vidíme, že vektory \mathbf{L} a $\boldsymbol{\Omega}$ nemíří stejným směrem, konkrétně

$$\begin{aligned} L_x &= AI_1 \sin(\omega_0 t + \delta), \\ L_y &= AI_1 \cos(\omega_0 t + \delta), \\ L_z &= I_3 \omega_0^z, \end{aligned} \quad (8.2)$$

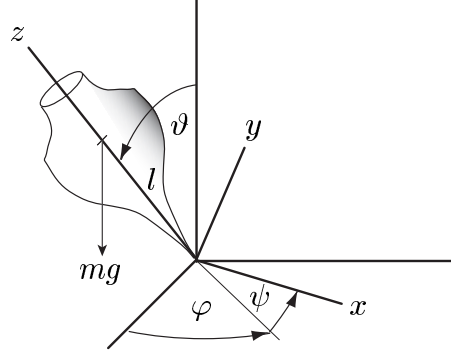
což popisuje pohyb \mathbf{L} po kuželi s vrcholovým (polo)úhlem ϑ_L vzhledem k osám spojeným s tělesem, přičemž $\tan \vartheta_L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}/L_z = I_1 A / (I_3 \omega_0^z)$ (všimněte si, že $\vartheta_L = \vartheta_0$). Vůči inerciálnímu systému však je \mathbf{L} fixován a uvedené vztahy naopak určují precesní pohyb os tělesa: kolem pevného směru vůči „hvězdám“ daného vektorem \mathbf{L} se tedy rovnoměrně otáčí osa z axiální symetrie tělesa a kolem této osy z koná precesi okamžitá osa otáčení určená $\boldsymbol{\Omega}$. Výsledek tedy není úplně jednoduchý, lze jej však hezky znázornit graficky. Z řešení (8.1) a (8.2) plyne vztah $\mathbf{L} = I_1 \boldsymbol{\Omega} + (I_3 - I_1) \Omega_z \mathbf{e}_z$. Vidíme, že vektory \mathbf{L} , $\boldsymbol{\Omega}$ a osa symetrie z tělesa leží v každém okamžiku vždy ve *stejně rovině* (jež se stáčí). Navíc platí $\tan \vartheta_L = \frac{I_1}{I_3} \tan \vartheta_\Omega$. Celou situaci lze tedy znázornit jako valení dvou kuželů po sobě, přičemž okamžitá přímka jejich dotyku určuje směr vektoru $\boldsymbol{\Omega}$. Pro případ $I_1 < I_3$ je $\vartheta_L < \vartheta_\Omega$ a kužel spojený s \mathbf{L} se valí uvnitř kužele spojeného s osou z , zatímco pro $I_1 > I_3$ je $\vartheta_L > \vartheta_\Omega$ a kužele se valí vně sebe.



8.2 Těžký symetrický setrvačnick s pevným bodem

V této části kapitoly chceme na konkrétním příkladu demonstrovat užitečnost alternativního přístupu k řešení dynamiky tuhého tělesa, totiž použití *Lagrangeova formalismu*. Ten je založen na sestavení Lagrangeovy funkce $L = T - V$ ve vhodných zobecněných souřadnicích, jimiž budou Eulerovy úhly.

Uvažujme tedy osově symetrické těleso hmotnosti m , které se může volně otáčet v homogenním gravitačním poli g kolem pevného bodu vzdáleného l od těžiště tělesa.



Kinetická energie rotujícího tělesa je dána $T = \frac{1}{2}I_{ij}\Omega_i\Omega_j$, viz (7.8). Zvolíme-li za kartézské osy rotujícího systému hlavní osy tenzoru setrvačnosti tělesa, vymizí deviační momenty ($I_{ij} = 0$ pro $i \neq j$); netriviální budou pouze složky I_3 a $I_1 = I_2$, takže $I_{zz} = I_3$ a (užitím Steinerovy věty) $I_{xx} = I_{yy} = I_1 + ml^2$. Kinetická energie je proto dána $T = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + \frac{1}{2}I_3\Omega_z^2$. Dosadíme-li za Ω_i z Eulerových kinematických rovnic (6.11) a uvažíme-li potenciální energii, dostáváme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2 - mgl \cos \vartheta. \quad (8.3)$$

Protože souřadnice ψ a φ jsou cyklické, dostáváme ihned dva integrály pohybu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= I_3(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi}) = L_\psi, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= [(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta + I_3 \cos^2 \vartheta] \dot{\varphi} + I_3 \cos \vartheta \dot{\psi} = L_\varphi, \end{aligned} \quad (8.4)$$

kde L_ψ a L_φ jsou konstanty. Protože navíc L nezávisí explicitně na čase a je kvadratický v rychlostech, zachovává se celková mechanická energie $E = T + V = \text{konst.}$,

$$\frac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2 + mgl \cos \vartheta = E. \quad (8.5)$$

Soustavu (8.4) lze rozřešit vzhledem k $\dot{\psi}$ a $\dot{\varphi}$,

$$\dot{\varphi} = \frac{L_\varphi - L_\psi \cos \vartheta}{(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta}, \quad \dot{\psi} = \frac{L_\psi}{I_3} - \cos \vartheta \frac{L_\varphi - L_\psi \cos \vartheta}{(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta}. \quad (8.6)$$

Dosazením (8.6) do (8.5) dostáváme po přímočarých úpravách

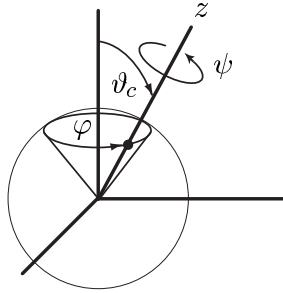
$$\frac{1}{2}(I_1 + ml^2) \dot{\vartheta}^2 = \tilde{E} - V_{ef}(\vartheta), \quad (8.7)$$

kde $\tilde{E} = E - L_\psi^2/(2I_3)$ a „efektivní potenciál“ $V_{ef}(\vartheta)$ je dán

$$V_{ef}(\vartheta) = \frac{(L_\varphi - L_\psi \cos \vartheta)^2}{2(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta} + mgl \cos \vartheta. \quad (8.8)$$

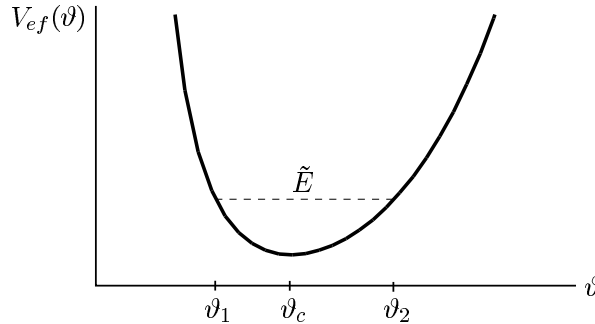
Integrací rovnice (8.7) a její inverzí obdržíme $\vartheta(t)$ a po dosazení do (8.6) lze dalšími dvěma integracemi získat $\psi(t)$ resp. $\varphi(t)$, čímž je úloha v principu vyřešena. Úplný rozbor a konkrétní výpočty (vedoucí na komplikovaná vyjádření pomocí eliptických integrálů) ovšem přesahují rámec tohoto krátkého studijního materiálu; lze je nalézt např. v knize V. Trkala, *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*, NČSAV, Praha, 1956. Zde se omezíme jen na hlavní zajímavé vlastnosti v chování studovaného setrvačnicku, které lze odvodit i bez znalosti explicitního řešení:

- 1) Existují speciální jednoduchá řešení $\vartheta = \vartheta_c = \text{konst.}$ V důsledku (8.6) pak je $\varphi(t) = \omega_\varphi t + \varphi_0$, $\psi(t) = \omega_\psi t + \psi_0$, kde ω_φ , ω_ψ , φ_0 , ψ_0 jsou konstanty. Setrvačnick rotuje kolem své osy symetrie konstantní úhlovou rychlostí ω_ψ , přičemž tato osa se rovnoměrně pohybuje po povrchu svislého kužele — setrvačnick koná regulární precesi. Pohyb se dá znázornit dráhou průsečíku osy symetrie s jednotkovou sférou opsanou kolem pevného bodu setrvačnicku,



Hodnota ϑ_c musí být extrémem efektivního potenciálu V_{ef} a musí platit $\tilde{E} = V_{ef}(\vartheta_c)$.

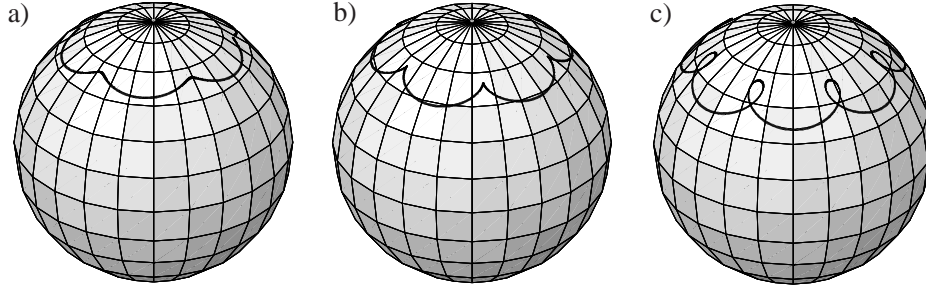
- 2) Obecně pro $|L_\varphi| \neq |L_\psi| \neq 0$ existují právě dvě řešení $\vartheta_1 < \vartheta_2$ rovnice $V_{ef}(\vartheta) = \tilde{E}$ představující body obratu při evoluci ϑ , což je zřejmé z průběhu $V_{ef}(\vartheta)$:



Nutační úhel $\vartheta(t)$ periodicky osciluje mezi hodnotami ϑ_1 a ϑ_2 představujícími nejmenší resp. největší odklon osy symetrie setrvačnicku od svislého směru. Vztah (8.6) pro $\dot{\varphi}$ navíc ukazuje, že nabyde-li $\vartheta(t)$ přesně hodnoty ϑ_s , kde $\cos \vartheta_s \equiv L_\varphi / L_\psi$, precese setrvačnicku se zastaví, neboť pak $\dot{\varphi} = 0$ (předpokládáme $L_\psi > 0$). Pro hodnoty $\vartheta(t) > \vartheta_s$ je $\dot{\varphi} > 0$, zatímco pro $\vartheta(t) < \vartheta_s$ je $\dot{\varphi} < 0$. Protože $\vartheta(t) \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$, mohou nastat následující případy:

- a) $\vartheta_s < \vartheta_1$: Pak je $\varphi(t)$ monotónně rostoucí funkcí času a dráha průsečíku osy symetrie s jednotkovou sférou má vzhled znázorněný na Obr. a).
- b) $\vartheta_s = \vartheta_1$: Funkce $\varphi(t)$ je nadále rostoucí, avšak v bodech $\vartheta(t) = \vartheta_1$ dochází k pozastavení precese; proto se tvar dráhy průsečíku zobrazený na Obr. b) vyznačuje špičkami na vrchní „rovnoběžce“ ϑ_1 .

- c) $\vartheta_1 < \vartheta_s < \vartheta_2$: Tvar dráhy průsečíku znázorněný na Obr. c) má podobu smyček, přičemž „rovnoběžka“ ϑ_s vymezuje ony body, v nichž přestává funkce $\varphi(t)$ růst a začne dočasně klesat (tedy „levý“ a „pravý“ kraj smyček).



- 3)** Pro $L_\varphi = 0 = L_\psi$ se rovnice (8.7) redukuje na $\frac{1}{2}(I_1 + ml^2)\dot{\vartheta}^2 + mgl \cos \vartheta = E$. Zavedením proměnné $\Theta = \pi - \vartheta$ a derivováním dostáváme přesnou rovnici matematického kyvadla ve tvaru $(I_1 + ml^2)\ddot{\Theta} + mgl \sin \Theta = 0$, takže osa symetrie setrvačníku *kývá jako matematické kyvadlo*. Linearizované řešení pro nutační úhel je samozřejmě $\vartheta = \pi - \Theta_0 \cos(\omega t + \delta)$, kde $\omega^2 = mgl/(I_1 + ml^2)$.

Část III.

MECHANIKA
KONTINUA

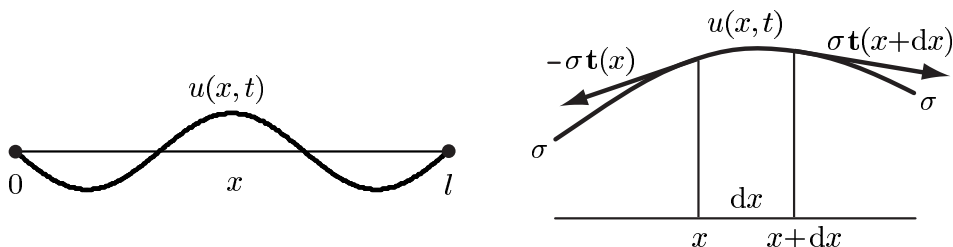
Kapitola 9

Rovnice struny a její řešení

V této kapitole prostudujeme příčný pohyb struny, jednorozměrného spojitého útvaru, na který působí vnitřní síly napětí. Nejprve odvodíme parciální diferenciální pohybovou rovnici struny a potom uvedeme dvě obecné metody jejího řešení, d'Alembertovu a Bernoulliovu–Fourierovu. Rozbor struny představuje důležitý přechod od mechaniky diskrétních hmotných bodů k mechanice spojitého kontinua, které se budeme věnovat v následující kapitole 10.

9.1 Odvození rovnice pro příčné kmity struny

Uvažujme strunu, jejíž konce jsou upevněny v bodech 0 a l na ose x . Předpokládejme, že struna je napjatá vnitřním napětím σ a její hmotnost je ve směru x rozložena s konstantní lineární hustotou ρ .



Nechť struna koná jen příčné kmity. Její výchylku z rovnovážné polohy popíšeme funkcí $u(x, t)$. Souřadnice x představuje vlastně spojitý index, který označuje jednotlivé body struny. Předpokládejme dále, že výchylky jsou malé ve smyslu, který vyplyne z přiblížení, jež v dalším použijeme. Při kmitech se sice mění délka struny a podle Hookova zákona i napětí v ní. Budeme však předpokládat, že tato změna napětí σ je zanedbatelná, což bude splněno například tehdy, když struna má velké základní předpětí.

Protože struna kmitá jen kolmo na osu x , je její zrychlení v příčném směru dáno veličinou $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t)$. Newtonova pohybová rovnice úseku struny délky dx o hmotnosti ρdx proto je

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_y. \quad (9.1)$$

Nyní musíme odvodit velikost kolmé síly F_y působící na daný úsek struny v důsledku napětí σ . Uvažme tedy obecnou výchylku struny popsanou v daném okamžiku funkcí $y(x) \equiv u(x, t = \text{konst.})$. To je rovinná křivka $x = x, y = y(x)$ s jednotkovým tečným vektorem $\mathbf{t}(x) = k(1, \frac{dy}{dx})$, kde normalizační faktor je $k = 1/\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$. Předpokládáme-li, že úhly, jež struna svírá s osou x , jsou malé, bude $k \doteq 1$. Na úsek struny mezi x a $x + dx$ tedy působí výsledná síla $\mathbf{F} = \sigma \mathbf{t}(x + dx) - \sigma \mathbf{t}(x)$, neboť směry napětí velikosti σ působící na obou koncích jsou dány příslušnými tečnými vektory.

Pro složku výsledné síly do příčného směru y můžeme tedy s užitím Taylorova rozvoje psát

$$F_y = \sigma \left[\frac{dy}{dx}(x+dx) - \frac{dy}{dx}(x) \right] \doteq \sigma \frac{d^2y}{dx^2}(x) dx. \quad (9.2)$$

Protože v libovolném fixním okamžiku t platí $y(x) = u(x, t)$, dostáváme z (9.1) a (9.2) na každém úseku dx pohybovou rovnici příčných kmitů struny

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9.3)$$

Tuto rovnici struny snadno upravíme do tvaru

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}, \quad (9.4)$$

což je jednorozměrná vlnová rovnice pro funkci $u(x, t)$, přičemž $\boxed{c = \sqrt{\sigma/\rho}}$ je, jak uvidíme, rychlost šíření vlny.

9.2 Lagrangeova funkce struny

Pohybovou rovnici struny (9.4) nyní odvodíme jiným způsobem, totiž z *Hamiltonova variačního principu* $\delta S = 0$ zobecněného na spojitě rozloženou hmotnost, viz část 4.2.1. Abychom získali příslušnou akci S , musíme ale nejprve najít příslušnou Lagrangeovu funkci L .

Protože struna kmitá jen kolmo na osu x , je její rychlost $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$. *Kinetická energie* úseku struny délky dx je $\frac{1}{2}\rho dx \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^2$, takže celková kinetická energie je

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right]^2 dx. \quad (9.5)$$

K nalezení *potenciální energie* V musíme zjistit, o kolik se prodloužila původní délka struny l . Aktuální celková délka struny se spočítá ze známého vzorce pro délku křivky

$$\lambda = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

kde $y(x) \equiv u(x, t)$ je výchylka struny v daném čase t . Jestliže struna svírá s osou x jen malé úhly, můžeme provést Taylorův rozvoj odmocniny, takže

$$\lambda \doteq \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] dx = l + \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Celková potenciální energie V je práce vykonaná silami vnitřního *napětí* σ struny (které pokládáme za konstantní) *vy násobené změnou délky* struny, což je $\lambda - l$. Dostáváme tedy

$$V = \int_0^l \frac{1}{2}\sigma \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right]^2 dx. \quad (9.6)$$

Lagrangeova funkce $L = T - V$ struny je tudíž díky (9.5), (9.6) dána výrazem

$$L = \int_0^l \left(\frac{1}{2}\rho (u_t)^2 - \frac{1}{2}\sigma (u_x)^2 \right) dx,$$

kde jsme zavedli $u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$ a $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ coby vhodné zkratky pro parciální derivace funkce $u(x, t)$. Je tudíž přirozené zavést funkci $\mathcal{L}(u_x, u_t)$ zvanou hustota Lagrangeovy funkce struny

$$\boxed{\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2}\rho (u_t)^2 - \frac{1}{2}\sigma (u_x)^2}. \quad (9.7)$$

Příslušný *funkcionál akce* pro příčné kmity struny je

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \mathcal{L}(u, u_x, u_t) \, dx \, dt,$$

Rovnice pohybu se nyní získá z *Hamiltonova principu* $\boxed{\delta S = 0}$. Připomeňme známý matematický výsledek variačního počtu: mějme obecný funkcionál dvou proměnných x a t tvaru

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(u, u_x, u_t, x, t) \, dx \, dt,$$

přičemž funkce $u(x, t)$ nabývá na hranici integrační oblasti pevných hodnot. Pak extrémála tohoto funkcionálu, pro níž $\delta S = 0$, musí řešit *Eulerovu–Lagrangeovu rovnici*, viz (4.16),

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0}. \quad (9.8)$$

Aplikujeme-li podmínku (9.8) na hustotu Lagrangeovy funkce struny (9.7), dostaneme ihned

$$\rho u_{,tt} - \sigma u_{,xx} = 0, \quad (9.9)$$

což je diferenciální rovnice struny (9.3), resp. (9.4).

9.3 Řešení rovnice struny

Nyní ukážeme dvě základní metody řešení jednorozměrné vlnové rovnice, tedy rovnice struny.

9.3.1 Metoda d'Alembertova

Transformace

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= x - ct, \\ \eta &= x + ct, \end{aligned}} \quad (9.10)$$

převeď rovnici (9.4) užitím relací $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$ a $\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta}$ na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Integrací podle ξ dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = g(\eta),$$

kde $g(\eta)$ je libovolná funkce η . Další integrace dá

$$u(\xi, \eta) = \int g(\eta) \, d\eta + F(\xi) = F(\xi) + G(\eta), \quad (9.11)$$

kde $F(\xi)$, $G(\eta)$ jsou libovolné funkce. Dosazením příslušných proměnných ze (9.10) dostaneme tedy obecné řešení ve tvaru

$$\boxed{u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)}, \quad (9.12)$$

přičemž F reprezentuje *profil vlny* šířící se rychlostí c směrem doprava, zatímco G profil vlny putující doleva. Konkrétní tvar řešení určují *počáteční podmínky*, které klademe na řešení. Všimneme si, jak dostaneme funkce F a G z počátečních podmínek v případě *nekonečné* struny.

Předpokládejme, že v čase $t = 0$ je zadána funkce u i její časová derivace,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \\ u_t(x, 0) &= v_0(x). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Podle (9.12) tedy platí

$$F(x) + G(x) = u_0(x), \quad (9.14)$$

$$-cF'(x) + cG'(x) = v_0(x). \quad (9.15)$$

Integrací (9.15) dostaneme

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{c}V_0(x), \quad (9.16)$$

kde $V_0(x) = \int v_0(x) dx$ je primitivní funkce k $v_0(x)$ (s libovolnou integrační konstantou). Z (9.14) a (9.16) pak vypočteme $F(x)$ a $G(x)$. Dosazením proměnných $\xi = x - ct$ do argumentu F a $\eta = x + ct$ do argumentu G dostaneme řešení vyhovující uvedeným počátečním podmínkám,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[u_0(x - ct) - \frac{1}{c}V_0(x - ct) + u_0(x + ct) + \frac{1}{c}V_0(x + ct) \right]. \quad (9.17)$$

Konstrukce řešení je jednoznačná (primitivní funkce V_0 je určena až na aditivní konstantu, která z výsledného řešení vypadne). Platí *věta o jednoznačnosti*, podle které je řešení vlnové rovnice jednoznačně určeno zadáním počátečních podmínek (9.13). Uvedené řešení se nazývá d'Alembertovo.

9.3.2 Metoda Bernoulliova–Fourierova

V principu lze výše uvedeného d'Alembertovo postupu užít i pro hledání řešení *konečné struny*, například s pevnými konci, které je navíc v každém okamžiku t omezeno okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \quad (9.18)$$

viz závěr části 9.4 textu. Výhodnější je však užít postupu Bernoulliova. Při něm se hledá řešení rovnice (9.4) v separovaném tvaru $u(x, t) = X(x)T(t)$. Dosazením do (9.4) a úpravou dostaneme

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad (9.19)$$

kde čárka označuje derivaci podle x a tečka derivaci podle t . Vztah vyjadřuje rovnost mezi dvěma funkcemi *různých proměnných*, která má být splněna pro *všechny* hodnoty x a t . To nastává jen tehdy, rovnají-li se obě strany téže separační konstantě $-\omega^2$, kde ω je reálné. (Pro nulové nebo imaginární ω nelze dané okrajové podmínky netriviálně splnit.)

Vztah (9.19) proto představuje dvě obyčejné lineární diferenciální rovnice pro $X(x)$ a $T(t)$. Rovnice pro X má obecné řešení

$$X(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right),$$

kde C_1, C_2 jsou konstanty. První okrajová podmínka (9.18) nyní zní $X(0) = 0$, což vyžaduje

$$C_1 = 0.$$

Druhá, $X(l) = 0$, pro $X(x) = C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)$ je $\sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0$, což lze splnit jen pro úhlové frekvence

$$\omega_n = n\pi \frac{c}{l}, \quad \text{kde } n = 1, 2, 3, \dots$$

Obdobně vyřešíme rovnici (9.19) pro $T(t)$, což dává $T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. Tedy

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]$$

je partikulárním řešením rovnice (9.4), které vyhovuje oběma okrajovým podmínkám (9.18).

Protože rovnice (9.4) je lineární, řeší ji i libovolná konečná superpozice funkcí u_n . Bude ji řešit i nekonečná řada

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) \right], \quad (9.20)$$

pokud ji lze derivovat člen po členu a stejnoměrně konverguje. To samozřejmě závisí na hodnotách koeficientů a_n, b_n , které určíme z počátečních podmínek (9.13)

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) = u_0(x), \quad (9.21)$$

$$u_{,t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\pi \frac{c}{l} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) = v_0(x); \quad (9.22)$$

$u_0(x)$ je spojitá funkce, která vymizí v koncových bodech a $v_0(x)$ je po částech spojitá funkce.

Z teorie Fourierových řad plyne, že koeficienty jsou určeny vztahy

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx, \\ b_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx, \end{aligned} \quad (9.23)$$

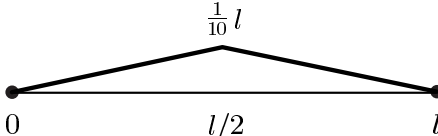
a s takto určenými koeficienty řada (9.20) stejnoměrně konverguje. Výrazy pro a_n, b_n se získají tak, že řada (9.21) resp. (9.22) se vynásobí funkcí $\sin(m\pi \frac{x}{l})$ a integruje přes x . Užitím identity $\sin(m\pi \frac{x}{l}) \sin(n\pi \frac{x}{l}) = \frac{1}{2} \cos((m-n)\pi \frac{x}{l}) - \frac{1}{2} \cos((m+n)\pi \frac{x}{l})$ se snadno zjistí, že platí

$$\int_0^l \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad (9.24)$$

takže po integraci řady člen po členu zůstane na levé straně pouze koeficient a_m resp. b_m vynásobený konstantou $l/2$ resp. $m\pi c/2$, načež stačí jen přeznačit m za n . Systém funkcí $\{\sin(n\pi \frac{x}{l})\}$ je navíc příkladem úplného ortogonálního systému funkcí s pevnými konci (9.18) na intervalu $(0, l)$ (připomeňme, že levá strana vztahu (9.24) představuje skalární součin m -tého a n -tého členu systému). Oprávněnost operací a důkaz úplnosti však vyžadují pečlivější matematické zkoumání.

9.3.3 Příklad na Fourierovy řady

Užitečnost a smysl právě odvozeného postupu řešení nyní ilustrujeme na konkrétním příkladě kmitů struny s pevnými konci. Uvažujme počáteční podmínky (9.13), kdy strunu uprostřed vychýlíme z rovnovážné polohy do vzdálenosti $\frac{1}{10}l$ a pak z klidu vypustíme, neboli počáteční poloha je

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{5}x & \text{pro } x \in [0, l/2], \\ u_0(x) &= \frac{1}{5}(l-x) & \text{pro } x \in [l/2, l], \end{aligned}$$


zatímco počáteční rychlost vymizí, $v_0(x) = 0$. Z (9.23) ihned plyne, že $b_n = 0$ pro všechna n a

$$a_n = \frac{2}{5l} \int_0^{l/2} x \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx + \frac{2}{5l} \int_{l/2}^l (l-x) \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx.$$

Integrály spočítáme metodou *per partes*,

$$a_n = \frac{2}{5n\pi} \left(\left[-x \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \right]_0^{l/2} + \int_0^{l/2} \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx - \left[(l-x) \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \right]_{l/2}^l - \int_{l/2}^l \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx \right),$$

kde členy v hranatých závorkách se navzájem odečtou, takže

$$a_n = \frac{2l}{5n^2\pi^2} \left(\left[\sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \right]_0^{l/2} - \left[\sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \right]_{l/2}^l \right) = \frac{4l}{5n^2\pi^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Pro všechna sudá n jsou tedy koeficienty a_n nulové, zatímco pro lichá n platí $\sin(n\frac{\pi}{2}) = \pm 1$. Kompletní řešení (9.20), tedy

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(n\pi \frac{ct}{l}\right),$$

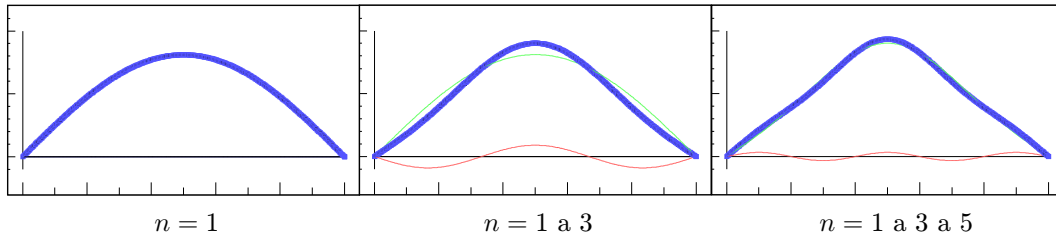
proto můžeme zapsat ve tvaru

$$u(x, t) = \frac{4l}{5\pi^2} \left[\sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(\pi \frac{ct}{l}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(3\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(3\pi \frac{ct}{l}\right) + \frac{1}{25} \sin\left(5\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(5\pi \frac{ct}{l}\right) - \dots \right]. \quad (9.25)$$

Jedná se vlastně o rozklad řešení do Fourierovy řady složené z „lichých harmonických módů“. Speciálně v počátečním čase $t = 0$ dostáváme rozklad „pilovité“ funkce $u_0(x)$ určující počáteční polohu do řady harmonických funkcí, jejichž amplituda s rostoucím n klesá jako $\sim 1/n^2$,

$$u_0(x) = \frac{4l}{5\pi^2} \left[\sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(3\pi \frac{x}{l}\right) + \frac{1}{25} \sin\left(5\pi \frac{x}{l}\right) - \dots \right]. \quad (9.26)$$

S přičtením každého dalšího členu této řady se základní mód daný hladkou funkcí $\sin(\pi \frac{x}{l})$ stále více blíží funkci $u_0(x)$, která má v bodě $x = l/2$ maximum $\frac{1}{10}l$ ve tvaru „špičky“:



9.4 Další okrajové podmínky: volný konec, tření

V předchozí části jsme vyřešili rovnici konečné struny délky l s pevnými konci, jež jsou dány okrajovou podmínkou (9.18), tedy

$$u(0, t) = 0, \quad \text{resp.} \quad u(l, t) = 0. \quad (9.27)$$

Nyní odvodíme okrajovou podmínku, jež naopak popisuje *volné konce* struny a situaci, kdy na konce působí *třecí síla úměrná rychlosti*.

K tomu je vhodné si představit, že na konec struny například v místě $x = l$ je připevněn malý *nehmotný kroužek* navlečený na rovné tyčce kolmé k ose x . V souladu s příčným pohybem celé struny se tedy i její konec může pohybovat pouze v příčném směru. Nyní napíšeme Newtonovu pohybovou rovnici pro kroužek obecné hmotnosti m a uvážíme obě síly na něj působící: $m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_y^l + F_{\text{tření}}$, kde F_y^l je příčná složka síly vnitřního napětí struny na konci $x = l$ daná vektorem $\mathbf{F} = -\sigma \mathbf{t}$, přičemž $\mathbf{t} \doteq (1, \frac{dy}{dx})$ je jednotkový tečný vektor (viz část 9.1 textu). Protože

$y(x) \equiv u(x, t = \text{konst.})$, dostáváme $F_y^l = -\sigma \frac{\partial}{\partial x} u$. Třetí síla mezi kroužkem a tyčkou je úměrná rychlosti pohybu kroužku, $F_{\text{tření}} = -b \frac{\partial}{\partial t} u$, kde $b > 0$ je konstantní parametr tření, takže

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial t},$$

Protože koncový kroužek je ve skutečnosti *nehmotný*, uvažujeme limitu $m \rightarrow 0$ a ihned dostáváme příslušnou okrajovou podmínku na konci $x = l$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = -b \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (9.28)$$

Na druhém konci $x = 0$ je působící síla vnitřního napětí struny $\mathbf{F} = +\sigma \mathbf{t}$, což dává podmínku

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (9.29)$$

V případě, že na koncích struny žádné tření nepůsobí, je $b = 0$ a z (9.28), (9.29) okamžitě dostáváme okrajovou podmínku na volné konce

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (9.30)$$

Při Bernoulliově řešení rovnice struny metodou separace pak namísto řady (9.20) dostaneme

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) \right]. \quad (9.31)$$

Na závěr ještě ukážeme, jaké důsledky má obecná okrajová podmínka (9.28) v kontextu d'Alembertova řešení (9.12), kdy $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. Dosazením do (9.28) dostaneme vztah $\sigma(F' + G') = bc(F' - G')$, kde $F' \equiv \frac{dF}{d\xi}$ a $G' \equiv \frac{dG}{d\eta}$, neboli po jednoduché úpravě

$$(\sigma + bc)G' = -(\sigma - bc)F'.$$

Na konci struny, kde je $x = l$, však platí

$$G' = \frac{1}{c} \frac{dG}{dt} \Big|_{x=l}, \quad F' = -\frac{1}{c} \frac{dF}{dt} \Big|_{x=l}.$$

Dosazením a časovou integrací tedy dostaneme vztah

$$G = \frac{\sigma - bc}{\sigma + bc} F. \quad (9.32)$$

Analogicky pro odraz na konci $x = 0$ dostáváme z podmínky (9.29) vztah

$$F = \frac{\sigma - bc}{\sigma + bc} G. \quad (9.33)$$

Připomeňme, že funkce F představuje profil vlny šířící se *doprava*, zatímco G popisuje vlnu putující *doleva*. Vzorce tedy popisují, co se děje s profilem vlny při odrazu na příslušném konci. Existují následující tři speciální případy v závislosti na velikosti tření popsaneho parametrem b :

- pevný konec je popsán $b \rightarrow \infty$ $\boxed{G = -F}$ odražená vlna má stejný profil jako vlna dopadající, ale je převrácená
- volný konec je popsán $b = 0$ $\boxed{G = +F}$ profil odražené vlny je úplně stejný
- speciální hodnota tření $b = \sigma/c$ $\boxed{G = 0 \text{ na } x = l}$ žádná vlna se neodráží, dopadající vlna $\boxed{F = 0 \text{ na } x = 0}$ je zcela absorbována! ¹

¹Podobná situace může nastat i v případě elektromagnetických vln. Jsou-li vhodnou volbou materiálu splněny speciální okrajové podmínky, elektromagnetická vlna se neodráží, ale absorbuje. To je podstatou technologií letadel typu *stealth*, například F-117, F-22 anebo B-2, které jsou pro radary „neviditelné“.

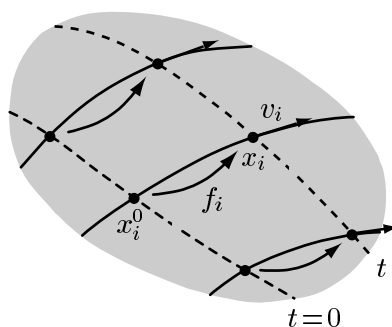
Kapitola 10

Mechanika kontinua

V této závěrečné kapitole zavedeme základní pojmy a odvodíme hlavní rovnice určující kinematiku a dynamiku tekutin, dokonalých i vazkých. Jedná se pouze o velmi stručný úvod do rozsáhlé problematiky. Podrobnosti lze najít ve speciálních učebnicích i odborné literatuře věnované tomuto tématu, především v rozsáhlé monografii [2].

10.1 Lagrangeův a Eulerův popis

Mechanické *kontinuum* obecně označuje spojitě hmotné prostředí. Speciálním případem je *tekutina* (společný název pro kapaliny a plyny). Toto prostředí se modeluje jako složené z „infinitesimálních objemů“, fiktivních „částic“ hmoty, které v daném okamžiku spojitě vyplňují danou oblast v E_3 . Tyto „částice“ se pohybují v každém okamžiku určitou rychlostí, která se bod od bodu spojitě mění (proto je nelze ztotožnit s molekulami tekutiny, konajícími chaotický tepelný pohyb). Rychlost fiktivních „částic“ je ve fenomenologické teorii kontinua dána střední rychlostí molekul v určitém infinitesimálním objemu, přičemž molekulární pohyb je zahrnut v termodynamických veličinách. V následujícím výkladu ale pro jednoduchost zahrneme tyto termodynamické aspekty pouze do stavové rovnice, určující vztah mezi tlakem a hustotou.



Pohyb tekutiny je formálně popsán *trajektorií* „částic“ kontinua, což je spojitá transformace

$$x_i = f_i(x_k^0, t), \quad (10.1)$$

která závisí na čase jako na parametru, přičemž $f_i(x_k^0, t = 0) = x_i^0$ je počáteční poloha. Transformace přiřazuje každému bodu o souřadnicích x_i^0 , kde se „částice“ nacházela v čase $t = 0$, bod x_i neboli její polohu v libovolném čase t . Parametry x_i^0 tedy identifikují příslušnou „částici“ tekutiny, neboť přiřazení souřadnic x_i^0 lze chápat jakožto „pojmenování“ všech „částic“ v počátečním čase.

Individuální rychlost dané „částice“ určené „jménem“ x_i^0 je pak přirozeně

$$v_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = \frac{df_i(x_k^0, t)}{dt} = v_i(x_k^0, t). \quad (10.2)$$

Píšeme zde obyčejnou derivaci podle času, přestože funkce $f_i(x_k^0, t)$ závisí též parametricky na souřadnicích x_k^0 (později podle nich budeme parciálně derivovat). Tomuto popisu kontinua říkáme Lagrangeův.

Vypočteme-li však ze vztahu (10.1) inverzí x_k^0 jako funkce x_j a t , dosazením do (10.2) pak dostaneme rychlost proudění jako funkci *okamžité polohy* „částic“, tedy

$$v_i = v_i(x_k^0(x_j, t), t) \equiv v_i(x_j, t). \quad (10.3)$$

Tomuto popisu pohybu kontinua pomocí pole rychlostí říkáme Eulerův. Zatímco rychlost určenou (10.2) měří pozorovatelé, kteří sledují individuální „částici“, rychlost (10.3) zjišťují pozorovatelé, stojící v pevném místě prostoru a měřící rychlost té „částice“, která je právě míjí. Vztah $x_k^0(x_j, t)$ lze tedy chápat jako „identifikační funkci“, která přiřazuje „původní jméno“ x_k^0 (zavedené v $t = 0$) té „částici“, která v t právě prochází bodem x_j . Při Eulerově popisu tedy představuje rychlost vektorové pole $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ v prostoru.

S Eulerovým popisem souvisí pojem proudnice. To jsou křivky, jejichž *tečny* jsou v každém bodě a v každém okamžiku *rovny vektoru rychlosti* kontinua (podobně jako tečny siločar vyjadřují směr a velikost elektrického nebo magnetického pole). Proudnice jsou tedy obrazem proudění tekutiny v daný okamžik, přičemž tento obraz se s časem může měnit. V případě časově neproměnného *stacionárního proudění* popsaného rychlostním polem $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, pro nějž $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = 0$, je obraz neměnný a proudnice splývají s trajektoriemi „částic“ tekutiny. Popíšeme-li proudnice parametrickými křivkami $\mathbf{r}(\lambda)$, pak jejich formální definicí je, že tečny k nim všude splňují podmínku

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (10.4)$$

Integrací této rovnice získáme soustavu proudnic ve zvolený okamžik t . Označíme-li elementy křivek $d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, dx_3)$, pak (10.4) můžeme ve složkách přepsat do podoby $dx_i = v_i d\lambda$, neboli vyloučením parametru λ

$$\frac{dx_1}{v_1(x_j, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_j, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_j, t)}.$$

Integrací této trojice diferenciálních rovnic nezávislých na parametru λ pak dostaneme vyjádření soustavy proudnic v čase t .

Nyní ještě určíme pole zrychlení kontinua v Eulerově popisu. K tomu stačí aktuální polohy x_j v (10.3) vzít jako funkce času určené (10.1), takže

$$a_i \equiv \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (10.5)$$

což v kompaktnějším vektorovém zápisu je

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}. \quad (10.6)$$

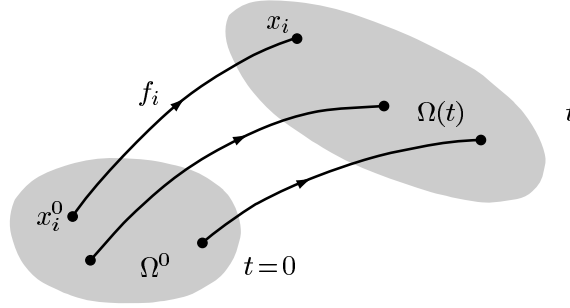
Ilustrace: Pro pochopení rozdílu mezi Lagrangeovým a Eulerovým popisem uvedme jednoduchý příklad. Nechť jednorozměrný pohyb tekutiny (10.1) je dán vztahem $x = f(x^0, t) = x^0 + \alpha x^0 t^2$, kde α je konstanta. Pak Lagrangeova rychlost a zrychlení jsou pouhými derivacemi f podle času, tedy $v_L = 2\alpha x^0 t$ a $a_L = 2\alpha x^0$. Při Eulerově popisu musíme vyloučit „jména částic“ x^0 a vyjádřit je pomocí okamžitých poloh x v daném čase, proto použijeme vztahu $x^0 = \frac{x}{1+\alpha t^2}$. Dosazením do v_L a a_L dostaneme Eulerovu rychlost $v_E = \frac{2\alpha x t}{1+\alpha t^2}$ a zrychlení $a_E = \frac{2\alpha x}{1+\alpha t^2}$. Snadno ověříme, že a_E lze opravdu spočítat z v_E užitím vztahu (10.5): $a_E = \frac{\partial v_E}{\partial t} + v_E \frac{\partial v_E}{\partial x} = \frac{2\alpha x(1-\alpha t^2)}{(1+\alpha t^2)^2} + \frac{4\alpha x^2 t^2}{(1+\alpha t^2)^2} = \frac{2\alpha x}{1+\alpha t^2}$. Všimněme si, že zatímco zrychlení každé individuální částice zůstává v Lagrangeově popisu konstantní s časem, $a_L = 2\alpha x^0$, Eulerovo zrychlení v *daném místě* x klesá, $a_E = \frac{2\alpha x}{1+\alpha t^2} \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$, protože s rostoucím t procházejí místem x částice vyslané v $t = 0$ čím dál bližšího okolí počátku, $x_0 \rightarrow 0$.

10.2 Tekutý objem

Uvažujme množinu „částic“ (infinitesimálních objemů), které v počátečním okamžiku $t = 0$ vyplňují oblast Ω^0 . Objem ΔV^0 této oblasti Ω^0 je dán objemovým integrálem

$$\Delta V^0 = \int_{\Omega^0} d^3 x^0.$$

V pozdějším čase t všechny „částice“ z Ω^0 zaplní jinou oblast $\Omega(t)$, na kterou transformace (10.1) zobrazí Ω^0 .



Velikost „tekutého objemu $\Delta V(t)$ “, tedy objemu oblasti $\Omega(t)$, je podle věty o substituci

$$\Delta V(t) = \int_{\Omega(t)} d^3 x = \int_{\Omega^0} |J| d^3 x^0, \quad (10.7)$$

kde J je jacobíán transformace (10.1). Derivací (10.7) podle času dostáváme

$$\frac{d}{dt} \Delta V(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega^0} |J| d^3 x^0 \right) = \int_{\Omega^0} \frac{\partial |J|}{\partial t} d^3 x^0. \quad (10.8)$$

Rozvinutím funkce f_i v (10.1) do Taylorovy řady podle t , $x_i = x_i^0 + v_i(x_k^0) t + \frac{1}{2} a_i(x_k^0) t^2 + \dots$, získáme prvky transformační matice

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k^0} = \delta_{ik} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k^0} t + \dots. \quad (10.9)$$

Determinant matice (10.9), což je jacobíán J , bude proto mít tvar ¹

$$J = 1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_i^0} t + \dots. \quad (10.10)$$

Dosadíme-li J z (10.10) do (10.8) a použijeme-li větu o střední hodnotě, dostaneme pro $t \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dt} \Delta V(t) = \int_{\Omega^0} \frac{\partial v_i}{\partial x_i^0} d^3 x^0 = \operatorname{div} \mathbf{v} \int_{\Omega^0} d^3 x^0 = \operatorname{div} \mathbf{v} \Delta V^0,$$

kde veličina $\operatorname{div} \mathbf{v}$ je vzata v určitém *vnitřním* bodě tekutého objemu. V infinitesimální limitě $\Delta V(t \rightarrow 0) = \Delta V^0$ odtud dostáváme důležitý vztah

$$\boxed{\frac{d}{dt} \Delta V = \operatorname{div} \mathbf{v} \Delta V}, \quad (10.11)$$

platný v každém okamžiku a v každém místě.

¹Z definice spočteme, že $J \equiv \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_2}{\partial x_j^0} \frac{\partial x_3}{\partial x_k^0} = \varepsilon_{ijk} \left[\delta_{1i} \delta_{2j} \delta_{3k} + (\delta_{1i} \delta_{2j} \frac{\partial v_3}{\partial x_k^0} + \delta_{2j} \delta_{3k} \frac{\partial v_1}{\partial x_i^0} + \delta_{3k} \delta_{1i} \frac{\partial v_2}{\partial x_j^0}) t + \dots \right] = \varepsilon_{123} + (\varepsilon_{12k} \frac{\partial v_3}{\partial x_k^0} + \varepsilon_{i23} \frac{\partial v_1}{\partial x_i^0} + \varepsilon_{1j3} \frac{\partial v_2}{\partial x_j^0}) t + \dots = 1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_i^0} t + \dots$

10.3 Síly objemové a plošné, podmínky rovnováhy

Síly objemovými se rozumí síly, které jsou v prostředí rozloženy s určitou *objemovou hustotou*. Nejdůležitějším příkladem je gravitace: síla na objemový element dV látky o hustotě ρ v gravitačním poli o intenzitě \mathbf{g} je dána výrazem $d\mathbf{F}^{\text{obj}} = \rho \mathbf{g} dV$. Hustota objemové síly tedy je $\rho \mathbf{g}$, neboli ve složkách $F_i = \rho g_i$.

Síly plošné jsou charakterizovány svým účinkem na *plošku určité orientace*. Je-li orientace plošky určena jednotkovým vektorem vnější normály \mathbf{n} , pak na tuto plošku velikosti $d\Sigma$ působí plošná síla $d\mathbf{F}^{\text{plo}} = \mathbf{T}^{(\mathbf{n})} d\Sigma$, přičemž příslušný vektor napětí $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ má složky

$$\boxed{T_i^{(\mathbf{n})} = \tau_{ji} n_j}, \quad (10.12)$$

kde τ_{ji} jsou složky *tenzoru napětí* (dle sumačního pravidla zde sčítáme přes index j).

Ukážeme nyní, že rozlišení mezi objemovými a plošnými silami je do určité míry formální.

Nejdříve intergrací spočteme *výslednou sílu*, působící na oblast Ω , pokud je uvnitř ní rozložena objemová síla $d\mathbf{F}^{\text{obj}}$ s hustotou F_i a na hranici $\partial\Omega$ působí plošná síla $d\mathbf{F}^{\text{plo}}$ s $T_i^{(\mathbf{n})}$ daným (10.12):

$$F_i^{\text{celk}} = \int_{\Omega} F_i dV + \int_{\partial\Omega} T_i^{(\mathbf{n})} d\Sigma = \int_{\Omega} F_i dV + \int_{\partial\Omega} \tau_{ji} n_j d\Sigma = \int_{\Omega} \left(F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) dV, \quad (10.13)$$

kde jsme k úpravě nakonec užili Gaussovu větu. Vidíme, že výslednice plošné síly je formálně stejná, jako kdyby v oblasti byla rozložena objemová síla s hustotou $\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$.

Výsledný moment sil působících na oblast Ω bude integrálem $\mathbf{r} \times d\mathbf{F}^{\text{obj}} + \mathbf{r} \times d\mathbf{F}^{\text{plo}}$, tedy

$$M_i^{\text{celk}} = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j T_k^{(\mathbf{n})} d\Sigma = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{lk} n_l d\Sigma.$$

Plošný integrál opět převedeme pomocí Gaussovy věty na objemový, takže

$$M_i^{\text{celk}} = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} \left(x_j F_k + \frac{\partial (x_j \tau_{lk})}{\partial x_l} \right) dV = \int_{\Omega} \left[\varepsilon_{ijk} x_j \left(F_k + \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_l} \right) + \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} \right] dV. \quad (10.14)$$

Má-li být kontinuum v rovnováze, musí být výsledná síla i výsledný moment na každou oblast nulové, tedy integrály (10.13) a (10.14) musí vymizet při libovolné volbě Ω . To nastane právě tehdy, platí-li podmínky rovnováhy kontinua

$$\boxed{\begin{aligned} F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} &= 0, \\ \tau_{ij} &= \tau_{ji}. \end{aligned}} \quad (10.15)$$

kde druhá rovnice plyne z podmínek $\varepsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0$. Tenzor napětí tedy musí být *symetrický*.

Zkusme nyní formálně nahradit klasickou *objemovou gravitační sílu silou plošnou*. Výsledná gravitační síla na hmotnost rozloženou s hustotou ρ v oblasti Ω je

$$\mathbf{F}^{\text{grav}} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} dV, \quad (10.16)$$

kde \mathbf{g} je intenzita gravitačního pole. Newtonovská teorie gravitace se v polním tvaru vyjádří rovnicemi obdobnými s rovnicemi elektrostatiky, tedy

$$\text{div } \mathbf{g} = -4\pi G \rho, \quad (10.17)$$

$$\text{rot } \mathbf{g} = 0. \quad (10.18)$$

Z (10.17) dosadíme do rovnice (10.16), zapíšeme ji ve složkách a postupně upravíme:

$$F_i^{\text{grav}} = -\frac{1}{4\pi G} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_j} \right) g_i dV = -\frac{1}{4\pi G} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (g_j g_i)}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) dV. \quad (10.19)$$

S užitím (10.18) však můžeme vyjádřit

$$g_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = g_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial (g_j g_j)}{\partial x_i},$$

takže (10.19) lze po přeznačení sčítacích indexů psát

$$F_i^{\text{grav}} = \int_{\Omega} \frac{\partial T_{ji}^{\text{grav}}}{\partial x_j} dV,$$

kde

$$T_{ij}^{\text{grav}} = -\frac{1}{4\pi G} (g_i g_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} g_k g_k). \quad (10.20)$$

Veličinu T_{ij} lze tedy interpretovat jako symetrický tenzor napětí gravitačního pole a výslednou gravitační sílu na oblast Ω vyjádřit naopak pomocí plošné síly s vektorem napětí $T_i^{(\text{n})} = T_{ji}^{\text{grav}} n_j$ působící na hranici oblasti Ω .

V elektrodynamice hraje obdobnou úlohu tzv. Maxwellův tenzor napětí elektromagnetického pole definovaný vztahem

$$T_{ij}^{\text{elmag}} = - (D_i E_j + B_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (D_k E_k + B_k H_k)), \quad (10.21)$$

který má v elektrostatickém případě (při standardní identifikaci $D_i = \varepsilon E_i$, $4\pi\varepsilon \leftrightarrow 1/G$, $E_i \leftrightarrow g_i$) stejný tvar jako (10.20). V 19. století byla skutečně snaha interpretovat elektromagnetické pole jako mechanická napětí v éteru. I z dnešního hlediska však vidíme, že plošné a objemové síly můžeme chápat jako dvojí možná matematická vyjádření téže entity.

10.4 Rovnice kontinuity a pohybové rovnice

Proudění tekutiny je určeno parciálními diferenciálními rovnicemi, které jsou důsledkem zákona zachování hmotnosti a 1. impulzové věty. Obě rovnice nyní odvodíme. Hmotnost $m = \rho \Delta V$ tekutého objemu musí být zachovávající se veličina, a proto s využitím (10.11) dostáváme

$$0 = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho \Delta V)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \Delta V + \rho \frac{d}{dt} \Delta V = \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \Delta V, \quad (10.22)$$

kde veličiny v závorce před ΔV jsou opět určeny v určitých vnitřních bodech tekutého objemu. Vztah musí platit pro libovolně malý objem, takže v každém bodě je

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0}, \quad (10.23)$$

což lze užitím $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho$ a $\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho$ přepsat

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0}. \quad (10.24)$$

Tato rovnice se nazývá rovnice kontinuity a vyjadřuje zákon zachování hmotnosti.

Podobně hybnost \mathbf{p} tekutého objemu je $m\mathbf{v}$, takže

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Delta V,$$

protože první člen vymizí v důsledku (10.22). Změna hybnosti je podle 1. impulzové věty rovna výslednici sil na tekutý objem, jejíž i -tou složku, jak bylo ukázáno při odvození podmínek rovnováhy (10.13), můžeme psát jako $(F_i + \partial \tau_{ji} / \partial x_j) \Delta V$, kde první člen představuje hustotu objemových sil a druhý odpovídá plošným silám na hranici objemu (výrazy jsou opět určeny v určitém vnitřním bodě tekutého objemu). Obdobnou úvahou jako u rovnice kontinuity s užitím (10.5) pak dospějeme k vektorové pohybové rovnici

$$\boxed{\rho \frac{dv_i}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}}. \quad (10.25)$$

10.5 Newtonovská a dokonalá tekutina

Aby rovnice (10.24) a (10.25) určovaly veličiny ρ a \mathbf{v} , potřebujeme navíc znát vztah mezi tenzorem napětí τ_{ij} a složkami rychlosti v_i , respektive jejich derivacemi. U takzvané newtonovské tekutiny se předpokládá lineární vztah

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (10.26)$$

kde λ a μ jsou parametry (v obecném případě funkce). Poznamenejme, že je to nejobecnější symetrický tenzor 2. řádu, který se dá vytvořit lineárně z prostorových derivací rychlosti.

Pokud je $\lambda = 0 = \mu$, mluvíme o dokonalé tekutině bez vazkosti,

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij}. \quad (10.27)$$

Chybí smyková napětí a plošné síly se uplatňují pouze jako izotropní tlak p . Pohybová rovnice (10.25) pak má jednoduchý tvar

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = G_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (10.28)$$

kde jsme zavedli hustotu síly na jednotku hmotnosti vztahem $G_i = F_i/\rho$. Tuto tzv. Eulerovu rovnici lze psát též ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (10.29)$$

Předpokládáme-li dále navíc, že tlak p je určen stavovou rovnicí jako funkce pouze hustoty, $p = p(\rho)$ (barotropní tekutina), máme celkem 4 parciální diferenciální rovnice (10.24) a (10.29) pro 4 neznámé, totiž hustotu ρ a 3 složky rychlosti \mathbf{v} . K jednoznačnému určení řešení musíme položit okrajovou podmínku na hranici oblasti zaujímané tekutinou, která v případě dokonalé tekutiny zní $v_n = 0$, kde v_n značí složku rychlosti kolmou k hranici (např. stěnám trubice, kterou tekutina protéká).

10.6 Nevířivé proudění dokonalé tekutiny a Bernoulliho rovnice

Rovnici (10.29) je možno identicky přepsat² do tzv. Gromekaova–Lambova tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (10.30)$$

Předpokládejme, že proudění tekutiny je navíc nevířivé, tedy

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (10.31)$$

Pak existuje skalární funkce ϕ , zvaná potenciál rychlosti taková, že $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$ (viz podobné vztahy z elektrostatiky).

Nechť objemová síla má potenciál, $\mathbf{G} = -\text{grad } U$. Také můžeme zavést tlakovou funkci P , a to integrálním vztahem

$$P(\mathbf{r}) = \int_0^{p(\mathbf{r})} \frac{dp'}{\rho(p')}, \quad (10.32)$$

²Platí $\left(\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} \right)_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j v_j) - \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} v_j \frac{\partial v_m}{\partial x_l} = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \frac{\partial v_m}{\partial x_l} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$

ze kterého plyne, že $\text{grad } P = \frac{dP}{dp} \text{grad } p = \rho^{-1} \text{grad } p$. Pak rovnice (10.30) nabude tvaru

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + P \right) = 0,$$

takže

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + P = c(t)}. \quad (10.33)$$

Integrační funkce c na pravé straně je pouze funkcí času. To je tzv. *Bernoulliho rovnice* pro nevířivé proudění dokonalé tekutiny. V případě *stacionárního* nevířivého proudění je člen $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ a c je konstanta.

Pokud je nevířivá tekutina navíc *nestlačitelná*, takže podle (10.23)

$$\boxed{\text{div } \mathbf{v} = 0}, \quad (10.34)$$

splňuje potenciál ϕ rychlosti $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$ rovnici $\text{div grad } \phi = 0$, tedy

$$\boxed{\Delta \phi = 0}. \quad (10.35)$$

Pole rychlosti lze pak určit jednoduše řešením Laplaceovy rovnice pro potenciál ϕ při okrajové podmínce $(\text{grad } \phi)_n = 0$ na hranici. Je to úloha zcela analogická úloze pro elektrostatický potenciál a výsledky elektrostatiky lze snadno „přeložit“ do řeči hydrodynamiky. Analogie kladného bodového náboje se nazývá *elementární zdroj*, záporného *propad* (nora, výtok), analogie dipólu *dublet* atd. Z pole rychlostí pak lze určit pomocí Bernoulliho rovnice pole tlaku.

10.7 Vlny v dokonalé tekutině

Předpokládejme, že tekutina v rovnovážném stavu má hustotu $\rho_0 = \text{konst}$. Uvažujme nyní malé poruchy hustoty $\rho = \rho_0 + \rho_1$ takové, že $\rho_1 \ll \rho_0$, které vyvolají malé změny pole rychlosti v tom smyslu, že $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \ll \frac{\partial v_i}{\partial t}$. Předpokládejme dále, že objemové síly \mathbf{G} vymizí. Pak pohybová rovnice (10.29) má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \doteq -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p \quad (10.36)$$

a rovnice kontinuity (10.24) je

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} \doteq 0, \quad (10.37)$$

když zanedbáme malé veličiny. Tlak $p(\rho)$ rozvineme podle Taylorovy věty kolem ρ_0 ,

$$p(\rho) = p(\rho_0 + \rho_1) = p(\rho_0) + \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho_0} \rho_1 + \dots$$

a dosadíme do (10.36). Pak na tuto rovnici aplikujeme operaci div , zatímco rovnici (10.37) derivujeme parciálně podle času a dosadíme z jedné do druhé. Zjistíme, že porucha hustoty ρ_1 musí být řešením vlnové rovnice

$$\boxed{\Delta \rho_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = 0}, \quad (10.38)$$

kde $c^2 = (dp/d\rho)|_{\rho_0}$. Rovnice připouští řešení ve tvaru rovinné vlny. Dosazením tohoto řešení do (10.36) a užitím vztahu $\text{grad } p(\rho) = (dp/d\rho) \text{grad } \rho$ zjistíme, že vektor \mathbf{v} je rovnoběžný s vlnovým vektorem. Jde tedy o zvukovou podélnou vlnu šířící se rychlostí c .

10.8 Proudění vazké tekutiny, Navierova–Stokesova rovnice

Je-li newtonovská tekutina vazká, jsou koeficienty λ a μ v (10.26) nenulové. Je-li však nestlačitelná,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0,$$

člen u λ vymizí a podle (10.23) je $\rho = \text{konst.}$ Ze stejných důvodů vymizí i člen $\partial^2 v_j / \partial x_j \partial x_i$, takže pohybová rovnice (10.25) bude mít tvar

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}}, \quad (10.39)$$

kde $\nu = \mu/\rho$ je tzv. *kinematická viskozita*. Toto je Navierova–Stokesova rovnice pro nestlačitelnou vazkou tekutinu. Okrajová podmínka pro vazkou tekutinu se klade $\mathbf{v} = 0$ na hranici. V jejím důsledku je proudění kromě triviálních případů vířivé a nelze proto zavést rychlostní potenciál.

10.9 Geometricky podobná proudění

Uvažujme stacionární ($\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = 0$) proudění nestlačitelné ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) vazké tekutiny v homogenním gravitačním poli intenzity \mathbf{g} . Rovnice (10.39) zapsaná ve složkách má v takovém případě tvar

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (10.40)$$

Napišme nyní

$$v_i \equiv v_0 w_i, \quad x_i \equiv a \xi_i, \quad g_i \equiv g \chi_i,$$

kde v_0 je kladná konstanta s rozměrem rychlosti, a je konstanta s rozměrem délky, g je velikost gravitačního zrychlení a w_i, χ_i, ξ_i jsou příslušné *bezrozměrné veličiny*. Dosazením do (10.40) a úpravou dostaneme

$$\boxed{w_j \frac{\partial w_i}{\partial \xi_j} = \frac{1}{F} \chi_i - \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_i} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_j \partial \xi_j}}, \quad (10.41)$$

kde

$$F \equiv \frac{v_0^2}{ag}, \quad \Pi \equiv \frac{p}{\rho v_0^2}, \quad R \equiv \frac{av_0}{\nu}. \quad (10.42)$$

Všechny veličiny v rovnici (10.41) jsou bezrozměrné. Konstanta R se nazývá Reynoldsovo číslo, zatímco F je Froudeovo číslo.

Předpokládejme, že najdeme řešení této rovnice při určitých hodnotách číselných parametrů R a F a okrajové podmínce $\mathbf{w} = 0$ na hranici určité oblasti popsané bezrozměrnými souřadnicemi ξ_i . Pokud pak zvolíme veličinu a určující geometrické rozměry skutečné oblasti, z F pak dostaneme odpovídající hodnotu veličiny $v_0 = \sqrt{agF}$ určující velikost rychlosti, z R kinematickou viskozitu $\nu = av_0/R$, a z veličiny Π dostaneme odpovídající hodnotu pole tlaku $p = \Pi \rho v_0^2 = \Pi F \rho ag$. Řešení odpovídající různým hodnotám a při stejných parametrech R a F se označují jako geometricky podobná. Tato skutečnost má praktický význam například při empirickém testování na zmenšených modelech. Všimněme si například, že chceme-li použít měření na zmenšeném hydrodynamickém modelu získané při stejném g , musíme užít tekutiny s jinou viskozitou (určenou R , protože z F je už jednoznačně určena hodnota v_0).

V řadě úloh nemá člen odpovídající vnější objemové síle podstatný vliv, kupříkladu při proudění vazké tekutiny dlouhou vodorovnou trubicí. Zkušenost ukazuje, že pro každou geometrickou konfiguraci je pro $R \leq R_{\text{krit}}$ proudění laminární, pro R větší, než Reynoldsovo kritické číslo je proudění turbulentní.

Literatura

- [1] M. Brdička, A. Hladík: *Teoretická mechanika*, Academia, Praha, 1987.
- [2] M. Brdička, L. Samek, B. Sopko: *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2000, 2005, 2011.
- [3] J. Horský, J. Novotný, M. Štefaník: *Mechanika ve fyzice*, Academia, Praha, 2001.
- [4] G. von Buquoy: *Analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht*, Breitkopf und Härtel, Leipzig, 1812.
- [5] G. von Buquoy: *Weitere Entwicklung und Anwendung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht*, Breitkopf und Härtel, Leipzig, 1814.
- [6] G. von Buquoy: *Exposition d'un nouveau principe général de dynamique, dont le principe des vitesses virtuelles n'est qu'un cas particulier*, V. Courcier, Paris, 1815.
- [7] P. G. Tait, W. L. Steele: *A Treatise on Dynamics of a Particle*, Macmillan, London, 1856.
- [8] I. V. Meščerskij: *Dinamika točki peremennoj massy*, Akademia nauk, Peterburskij universitet, 1897.
- [9] T. Levi-Civita: *Ancora sul moto di un corpo di massa variabile*, Rend. Accad. naz. Lincei Cl. sci. fis. etc. **11** (7) 626–632 (1930).
- [10] J. Podolský: *Od Newtona ke Keplerovi geometricky*. Sborník *Matematika, fyzika – minulost, současnost*, XII. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky, Velké Meziříčí, 2004, eds. A. Trojánek, J. Novotný a D. Hrubý, VUTIUM, 2006, pp. 51–60.
- [11] P. Andrlé: *Základy nebeské mechaniky*, Academia, Praha, 1971.
- [12] P. Andrlé: *Nebeská mechanika: Analytické metody*, Academia, Praha, 1987.
- [13] J. Horák, L. Krlín: *Deterministický chaos*, Academia, Praha, 1996.
- [14] V. I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New York, 1978.
- [15] A. J. Lichtenberg, M. J. Lieberman: *Regular and Stochastic Motion*, Springer, New York, 1983.
- [16] E. Ott: *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [17] S. Fučík, J. Nečas, V. Souček: *Úvod do variačního počtu* (skripta), SPN, Praha, 1972.
- [18] E. Noether: *Invariante Variationsprobleme*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1918), 235–257.
- [19] M. Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, Iris, Bratislava 2004.
- [20] B. F. Schutz: *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.