Cvičení 1 - Bonus - B2M31AEDA

1) Fibonacciho posloupnost

Fibonacciho posloupnost vypadá následovně:

$$F = 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$$

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ldots$$

Napište funkci, která bude brát jediný, libovolný, kladný, celočíselný vstup `N`, a bude generovat na výstupu příslušnou `N`-tou hodnotu Fibonacciho posloupnosti.

```
function Fn = myFibonacci(N)
    if ~isnumeric(N)
        error("Invalid input: Not a number!")
    elseif N < 2
        if N < 0
            error("Invalid input: Negative number!")
        else
            Fn = N;
        end
    else
        Fn_2 = 0;
        Fn_1 = 1;
        for n = 2:N
            Fn = Fn_1 + Fn_2;
            Fn_2 = Fn_1;
            Fn_1 = Fn;
        end
    end
end
```

Vydělením dvou sousedících prvků Fibonacciho posloupnosti pro N >> 1 (např. 1000), vám vyjde přibližná hodnota Zlatého řezu phi.

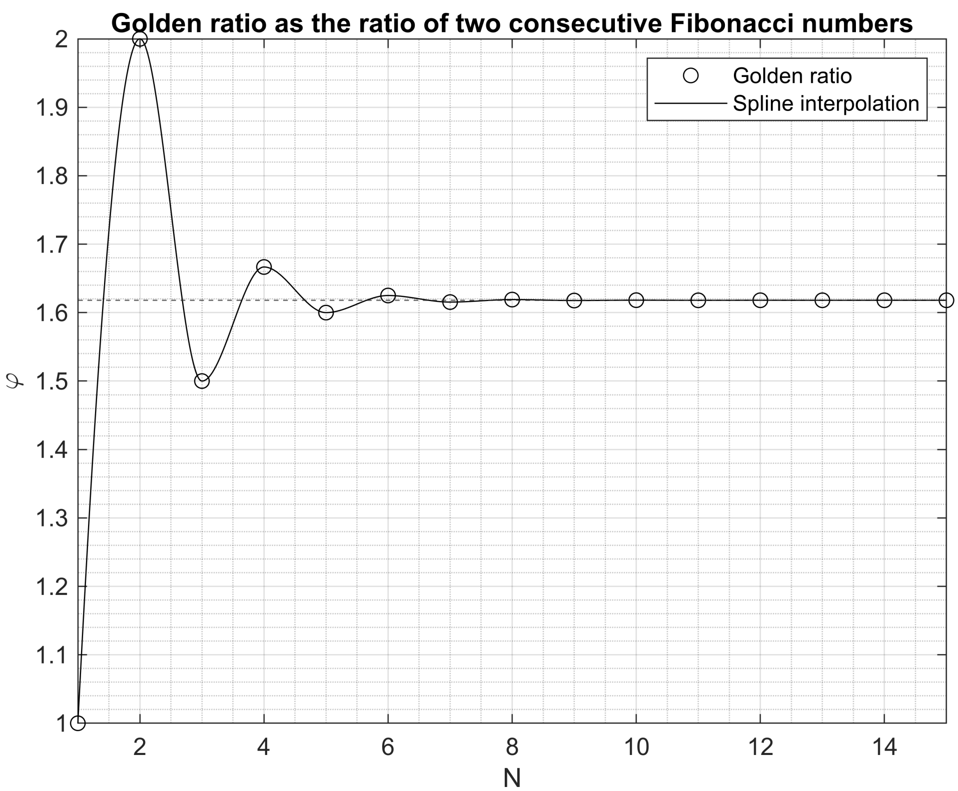
$$\hat{\varphi} = \frac{F_N}{F_{N-1}}; N > 1$$

Čím větší bude `N`, tím bude hodnota blíže skutečné hodnotě phi. Ilustrujte pomocí grafu, jak se výpočet zlatého řezu pomocí Fibonacciho čísel blíží jeho skutečné hodnotě. Vyneste do grafu hodnoty aproximací pro tolik `N`, kolik uznáte za vhodné (dokud se hodnota dostatečně nepřibližší) a konstantní čáru reprezentující skutečnou hodnotu. Nezapomeňte popsat osy, aktivovat mřížku, dodat legendu atd.

```
N = 16;
nRange = 1:N-1;
goldenRatio = zeros(1,N-1);
for n = nRange
    goldenRatio(n) = myFibonacci(n+1)/myFibonacci(n);
end
```

```
fineRange = 1:1e-2:N-1;
interpolation = pchip(nRange, goldenRatio, fineRange);

figure("Name", "Golden ratio")
plot(nRange, goldenRatio, 'o', 'Color', 'k')
hold on
plot(fineRange, interpolation, '-', 'Color', 'k')
yline((1+sqrt(5))/2, '--')
axis tight
grid on
grid minor
xlabel("N")
ylabel({'$\varphi$'},'Interpreter','latex')
legend("Golden ratio", "Spline interpolation")
title("Golden ratio as the ratio of two consecutive Fibonacci numbers")
hold off
```



Otázky:

- Slovy napište minimálně 3 případy, kde se Fibonacciho posloupnost vyskytuje v přírodě.

1. Logaritmické spirály: Mnohé objekty tvaru spirály, na které člověk v přírodě narazí (např. šnečí ulita nebo galaxie), jsou logaritmickými spirálami, jejichž faktorem růstu je zlatý řez.

2. Hudba: Napříč historií hudby různí renesanční i post-renesanční skladatelé komponovali hudbu po vzoru Fibonacciho posloupnosti, což mělo často za výsledek (pro lidské ucho) melodicky příjemné a harmonické sekvence.
3. Botanická uspořádání: Mnoho rostlin vykazují podobnost uspořádání s Fibonacciho posloupností. Toto uspořádání může být například rozložení listů na stonku, tvar šišek či semen v květu.
4. Populace zvířat: Jako jeden z nejstarších a nejznámnějších výskytů Fibonacciho posloupnosti se s ní můžeme setkat jako s rychlostí růstu populace některých druhů zvěře (originálně králíků) ve specificky ideálních podmínkách pro rozmnožování.

2) Pascalova matice

Napište funkci, která bude generovat Pascalovu matici. Funkce bude mít jeden celočíselný, kladný vstup `N`, a na výstupu bude generovat matici `P` o velikosti `N×N`, která bude symetrická a bude obsahovat hodnoty binomiálních koeficientů (více info v návodu ke cvičení).

Matice bude iniciovaná jako matice jedniček, a dále se budou hodnoty matice vypočítávat tak, aby každý prvek byl dán součtem prvků které jsou o jeden řádek výše a jeden sloupec vlevo:

$P(i, j) = P(i-1, j) + P(i, j-1) \,; 1 \le i, j \le N$

```
function P = myPascal(N)
    if ~isnumeric(N)
        error("Invalid input: Not a number!")
    elseif N < 0
        error("Invalid input: Negative number!")
    else
        P = ones(N);
        for i = 2:N
            for j = 2:N
                P(i,j) = P(i-1,j) + P(i,j-1);
            end
        end
    end
end

disp(myPascal(10))
```

```
     1     1     1     1     1     1     1     1     1
     1     2     3     4     5     6     7     8     9
     1     3     6    10    15    21    28    36    45
     1     4    10    20    35    56    84   120   165
     1     5    15    35    70   126   210   330   495
     1     6    21    56   126   252   462   792  1287
     1     7    28    84   210   462   924  1716  3003
     1     8    36   120   330   792  1716  3432  6435
     1     9    45   165   495  1287  3003  6435 12870
     1    10    55   220   715  2002  5005 11440 24310
```

Otázky:

- Slovy odpovězte, jakým způsobem byste mohli z Pascalovy matice získat čísla Fibonacciho posloupnosti.

Z n-tého řádku Pascalovy matice, resp. Pascalova trojůhelníku, lze získat n-tý člen Fibonacciho posloupnosti jako součet prvků při diagonálním průchodu Pascalova trojúhelníku počínaje prvkem 1 na oné (n-té) řádce směrem nahoru. Platí tedy

$$F_n = \sum_{k,1+k \leq n-k} P_{n-k,1+k}$$

tj. dokud druhý index $1+k$ nepřesahne počet prvků v řádku trojúhelníka.

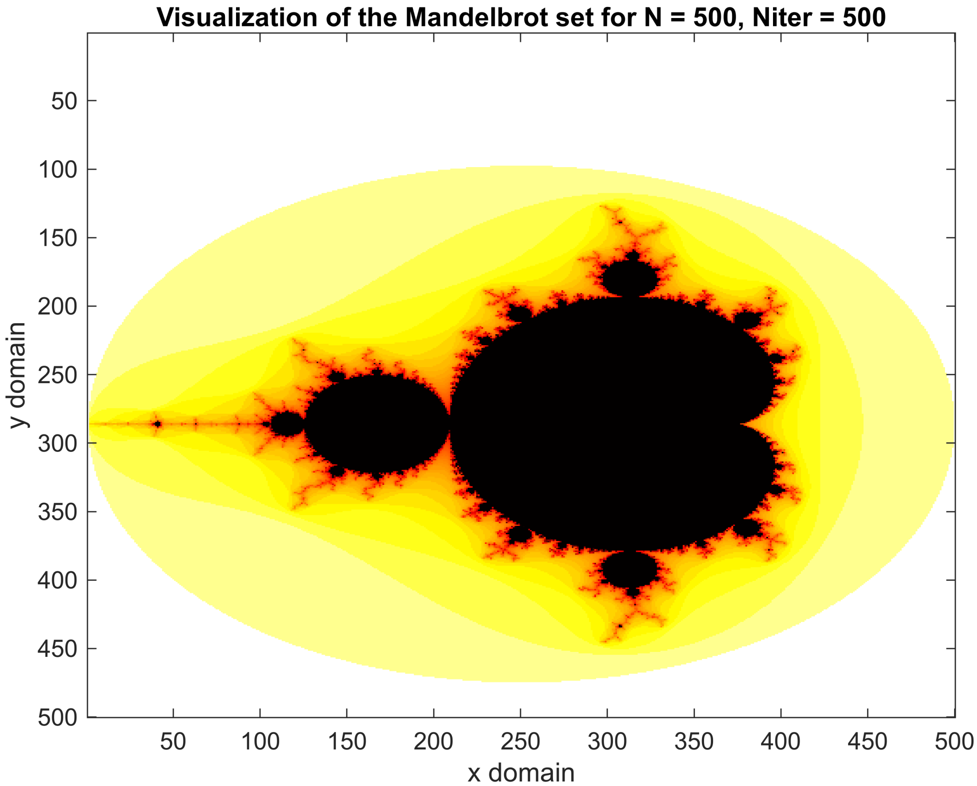
3) Mandelbrotova množina

Pomocí návodu si naprogramujte výpočet Mandelbrotovy množiny a zobrazte si jí. Postup naleznete v návodu ke cvičení.

```
N = 500;
Niter = 500;
x = repmat(linspace(-2, 1, N), N, 1);
y = repmat(linspace(-2, 1.5, N)', 1, N);
z0 = x + 1i*y;
mandelbrot = ones(N);
z = z0;
for n = 1:Niter
    z = z.*z + z0;
    for i = 1:N
        for j = 1:N
            if abs(z(i,j)) < 2
                mandelbrot(i,j) = mandelbrot(i,j) + 1;
            end
        end
    end
end
mandelbrot = log(mandelbrot);

figure("Name", "Mandelbrot set visualization")
imagesc(mandelbrot)
xlabel("x domain")
ylabel("y domain")
title(['Visualization of the Mandelbrot set for N = ' num2str(N) ', Niter = '
num2str(Niter)])

colormap(flipud(hot))
```


Visualization of the Mandelbrot set for N = 500, Niter = 500
y domain
x domain
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500