Příklady pro týden 2

Martin Šimák

Příklad 1: Tři bodové náboje jsou umístěny v bodech $\boldsymbol{r_1} = [0,0,0]$, $\boldsymbol{r_2} = [a,0,0]$ a $\boldsymbol{r_3} = [b,0,0]$, kde $b > a > 0$. Náboje mají popořadě velikosti Q_1, Q_2 a $4Q_1$. Určete náboj Q_2 a jeho pozici tak, aby celková elektrostatická síla působící na každý z nábojů byla nulová.

Řešení: Podmínky silové rovnováhy můžeme matematicky zapsat jako

$$\boldsymbol{F_1} = \boldsymbol{F_{12}} + \boldsymbol{F_{13}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2\,(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2})}{|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 4Q_1\,(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_3})}{|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_3}|^3} = 0,$$

$$\boldsymbol{F_2} = \boldsymbol{F_{21}} + \boldsymbol{F_{23}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2 Q_1\,(\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1})}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2 4Q_1\,(\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_3})}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_3}|^3} = 0,$$

$$\boldsymbol{F_3} = \boldsymbol{F_{31}} + \boldsymbol{F_{32}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Q_1 Q_1\,(\boldsymbol{r_3} - \boldsymbol{r_1})}{|\boldsymbol{r_3} - \boldsymbol{r_1}|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Q_1 Q_2\,(\boldsymbol{r_3} - \boldsymbol{r_2})}{|\boldsymbol{r_3} - \boldsymbol{r_2}|^3} = 0,$$

kde $\boldsymbol{F_1}$ je výslednice elektrostatických sil působících na bod $\boldsymbol{r_1}$ a $\boldsymbol{F_{12}}, \boldsymbol{F_{23}}$ silová působení na $\boldsymbol{r_1}$ od bodů $\boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}$ respektive. Ostatní síly analogicky dle indexů. Třetí rovnice nám zde však neposkytne žádnou výhodu při řešení soustavy, takže ji můžeme vypustit. Dále vektory $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{r_3}$ mají stejný směr (ve směru osy x). Můžeme tedy psát $\boldsymbol{r_2}/r_2 = \boldsymbol{r}_3/r_3 = \hat{\mathbf{x}}$, analogicky i pro lineární kombinace těchto vektorů (s ohledem na fakt, že $b > a > 0$, je tedy např. $(\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2})/(r_1 - r_2) = -\hat{\mathbf{x}}$). Můžeme tedy dále psát

$$\begin{aligned} -\frac{Q_2}{a^2}\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{4Q_1}{b^2}\,\hat{\mathbf{x}} &= 0 \\ \frac{\hat{\mathbf{x}}}{a^2} - \frac{4\,\hat{\mathbf{x}}}{(b-a)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Problém dále tedy můžeme redukovat na obyčejnou soustavu lineárních rovnice v jedné dimensi.

$$\frac{Q_2}{a^2} = -\frac{4Q_1}{b^2}$$
$$\frac{1}{a^2} = \frac{4}{(b-a)^2}$$

Z druhé rovnice tedy získáme postupně

$$(b-a)^2 = 4a^2 \iff b-a = 2a \iff a = \frac{b}{3}\,.$$

Při úpravě jsme využili faktu $b - a > 0$, $a > 0$, takže jsme mohli rovnici odmocnit bez konsekvencí v podobě absolutních hodnot. Následovným zpětným dosazením do první rovnice získáváme

$$Q_2\,b^2 = -4Q_1\frac{b^2}{9} \iff Q_2 = -\frac{4}{9}Q_1$$

Závěr:

$$a = \frac{b}{3}\,, \quad Q_2 = -\frac{4}{9}Q_1$$

Příklad 2: Pomocí vztahu

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{l'} \frac{\tau(\boldsymbol{r'})(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3}\,\mathrm{d}l'$$

vypočítejte elektrické pole podél osy z vytvořené liniovým nábojem rozloženým na kružnici o poloměru R. Kružnice má střed v počátku a leží v rovině x-y. Náboj je na kružnici rozložen podle předpisu

$$\tau(\varphi) = \left| \begin{array}{c} \tau_0, \varphi \in [0,\pi) \\ -\tau_0, \varphi \in (\pi, 2\pi] \end{array} \right.$$

Nábojová hustota má tedy hustotu τ_0 pro $y > 0$ a hodnotu $-\tau_0$ pro $y < 0$.

Řešení: Integrál budeme řešit v cylindrickém souřadném systému na dvou segmentech (po intervalech stejných jako je zadána funkce $\tau(\varphi)$).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{l'} \frac{\tau(\boldsymbol{r'})(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3}\,\mathrm{d}l' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\tau_0\,[(0,0,z)-(R\cos(\varphi), R\sin(\varphi), 0)]}{(R^2\cos^2(\varphi)+R^2\sin^2(\varphi)+z^2)^{3/2}} R\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int\limits_0^{\pi} \frac{\tau_0\,(-R\cos(\varphi), -R\sin(\varphi), z)}{(R^2+z^2)^{3/2}} R\,\mathrm{d}\varphi + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{-\tau_0\,(-R\cos(\varphi), -R\sin(\varphi), z)}{(R^2+z^2)^{3/2}} R\,\mathrm{d}\varphi \right) \\
&= \frac{\tau_0 R}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} \left(\int\limits_0^{\pi} (-R\cos(\varphi), -R\sin(\varphi), z)\,\mathrm{d}\varphi - \int\limits_{\pi}^{2\pi} (-R\cos(\varphi), -R\sin(\varphi), z)\,\mathrm{d}\varphi \right) \\
&= \frac{\tau_0 R}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} [(0,-2R,\pi z)-(0,2R,\pi z)] \\
&= -\frac{\tau_0 R^2}{\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

Během výpočtu jsme několikrát využili skutečnosti, že integrace probíhá pouze přes φ, takže jsme mohli vytknout mnoho členů, což nám ulehčilo samotnou integraci. Předposlední rovnost platí díky znalosti goniometrických funkcí:

$$\int\limits_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_\pi^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 2$$
$$\int\limits_0^\pi \cos(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\pi^{2\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Závěr:

$$\boldsymbol{E(r)} = -\frac{\tau_0 R^2}{\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{y}}$$