MATEMATICKÁ ANALÝZA PRO FYZIKY II

Jimmy Found

Obsah

Předmluva

Tento text vzniká jako přehled látka předmětu *Matematická analýza II* pro první ročník bakalářského studia oboru *Obecná fyzika* na Matematicko-fyzikální fakultě University Karlovy v Praze.

Látka zde je vykládána tak, že zahrnuje sylabus předmětu. Jedná se tedy o následující kapitoly:

- Určitý integrál a jeho aplikace
- Řady a mocninné řady
- Diferenciální rovnice
- Obecné metrické prostory, normované vektorové prostory
- Funkce více proměnných

Hlavním zdrojem při psaní tohoto souboru vědomostí jsou stránky s uveřejněnými skripty docenta Dalibora Pražáka, který přednáší předmět na universitě.

Kapitola 1

Určitý integrál a jeho aplikace

Předpokládáme již znalosti Riemmanova integrálu, tato kapitola se věnuje pouze Newtonovu integrálu. Prvně si připomeneme několik základních definic, které bychom měli znát.

Definice A Nechť $F(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$. Toto zobrazení nazýváme reálnou funkcí jedné reálné proměnné x. Nechť $(\forall x \in (a, b))\,(\exists F'(x))$. Potom funkci $F(x)$, pro kterou platí, že $(\forall x \in (a, b))\,(F'(x) = f(x))$ nazveme funkci primitivní k funkci $f(x)$.

Definice B Nechť $F(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$. Definujme následující výrazy:

$$F(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} F(x)$$
$$F(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} F(x)$$

Definice C Nechť $f(x) : V \to W$ je zobrazení. f nazveme lineárním právě tehdy, když platí

$$(\forall x \in V)\,(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(f(\alpha x) = \alpha f(x))$$
$$(\forall x, y \in V)\,(f(x + y) = f(x) + f(y))$$

Nyní se již můžeme pustit do základních definic pro Newtonův integrál. Důležitá bude definice zobecněného přírůstku a podmínky jeho existence. Pomocí zobecněného přírůstku poté definujeme i Newtonův integrál.

1.1 Teorie k Newtonově integrálu

Definice 9.1 [Zobecněný přírůstek] Nechť $F(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$. Pokud má výraz $F(b-) - F(a+)$ smysl, definujeme jej jako zobecněný přírůstek funkce $F(x)$. Značíme:

$$[F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+) = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

Je nyní důležité uvědomit si, kdy má výraz smysl, kdy je tedy definován zobecněný přírůstek.

Zobecněný přírůstek bude definován, pokud výraz, jímž je definován má smysl - je sám definován. Řekneme tedy, že zobecněný přírůstek má smysl právě tehdy, když má smysl výraz $F(b-) - F(a+)$. Tento výraz nemá smysl, pokud nastává jedna z následujících tří možností:

- $F(b-) - F(a+) = \pm(\infty - \infty)$
- Neexistuje $F(b-)$ nebo $F(a+)$
- Bereme-li funkci $F(x)$ jako primitivní funkci k $f(x)$, potom nemá výraz smysl, když neexistuje $F(x)$

Nyní se podívejme na definici Newtonova integrálu:

Definice 9.2 [Newtonův integrál] Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ a $F(x)$ je primitivní funkce vůči $f(x)$ v I. Newtonův integrál definujeme jako zobrazení

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b,$$

má-li výraz na pravé straně smysl.

Nyní bychom si měli rozmyslet, zda je tato definice korektní. Víme, že zobrazení funkce na její primitivní funkci, tedy zobrazení $L : f(x) \to \int f(x)dx$ není jednoznačné, existuje totiž nekonečně mnoho funkcí, které mohou být primitivní funkcí k $f(x)$ [*věta prvního semestru, již se dokázala dříve, nyní se bere za samozřejmou*].

Měli bychom tedy ověřit, že je jedno, zda děláme zobecněný přírůstek jedné či druhé primitivní funkce k $f(x)$. K tomu nám poslouží následující Lemma.

Lemma 9.1 [O nulové derivaci] Lemma rozdělíme do dvou částí:
(i) Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ a nechť existuje $f'(x)$ v každém bodě I, který je otevřeným intervalem. Nechť $(\forall x \in I)\,(f'(x) = 0)$. Řekneme, že funkci je konstantní v celém intervalu I
(ii) Nechť $F(x), G(x)$ jsou primitivní funkce k $f(x)$, potom řekneme, že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že bude platit $F(x) = G(x) + c$.

Důkaz: Řekneme, že pro jedno libovolné x_0 ležící ve vnitřku intervalu I je $f(x_0) = c$. Nyní využijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Jako krajní body dáme bod x_0 a poté libovolný bod x různý od x_0. Takto to uděláme pro každé x_0, tedy pro každý vnitřní bod intervalu I. Matematicky toto tedy zapíšeme jako:

$$(\forall x, x_0 \in I)\,(\exists \xi \in I)\left(f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right).$$

Jelikož víme, že pro každý vnitřní bod intervalu je derivace rovna nule, potom i pro každý bod zúženého intervalu (x, x_0) bude derivace rovna nule, tedy i pro každé ξ bude derivace rovna nule. Z toho automaticky vyplývá:

$$(\forall x, x_0 \in I)\,(f(x) = f(x_0) = c)\,,$$

kde c je konstanta definovaná na začátku důkazu. Tímto jsme dokázali první část lemmatu, jelikož výraz, který jsme dostali, jest přímou definicí funkce, která je konstantní.

Nyní si uvědomme, že existuje $f(x)$ a k ní dvě primitivní funkce $F(x), G(x)$. platí tedy $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pro každé x z intervalu I. Vycházejme tedy z tohoto vzorce. Nyní definujme funkci $\phi(x) = F(x) - G(x)$. Víme, že pro každé x je hodnota $\phi'(x) = 0$. To platí z následujícího důvodu:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= F(x) - G(x) \\ \phi'(x) &= F'(x) - G'(x), \end{aligned}$$

jelikož derivace je lineární zobrazení (viz důkaz věty o aritmetice derivací z prvního semestru) a víme, že $F'(x) = G'(x)$ z předpokladů lemmatu. Z první části Lemmatu již víme, že taková funkce (tedy $\phi(x)$) musí být konstantní. Platí tedy, že $F(x) = G(x) + c$.

□

Díky tomuto lemmatu a jeho důkazu si můžeme uvědomit, že je jedno, jakou použijeme primitivní funkci, jelikož se vždy liší jen o konstantu, kterou můžeme odečíst bez ohledu na proměnnou x. Za x totiž „dosazujeme“ hodnoty a, b, tudíž by nám v Newtonově integrálu již záleželo na volbě primitivní funkce, pokud by výraz, o který se dvě primitivní funkce liší, byl závislý na x. Jak však vidíme, na volbě primitivní funkce nezáleží. Z dobrého důvodu se volí funkce bez konstant - konstanty se stejně odečtou. Je proto daleko snazší počítat bez nich.

Nyní budeme chtít větě, jak s integrály pracovat. Nejprve si rozmyslíme aditivitu, linearitu a monotónnost integrálu, poté si ukážeme, jak pracovat se součinem funkcí a jak používat substituci.

Definice D Množinu všech funkcí, ke kterým existuje Newtonův integrál na intervalu (a, b) označme $\mathcal{N}^*(a, b)$. Množinu funkcí z této množiny, pro které je navíc Newtonův integrál reálné číslo, označme jako $\mathcal{N}(a, b)$.

Věta 9.1.1 [Linearita integrálu] Nechť $f(x), g(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ a nechť existuje derivace v každém bodě intervalu (a, b). Potom platí:

$$(\forall x \in (a, b)) \, (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \left(\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \right)$$

Důkaz: Vycházejme z definice Newtonova integrálu a vlastnosti linearity zobrazení $\phi : f(x) \to \int f(x) dx$. Víme tedy, že primitivní funkce k funkci $\phi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ je funkce $\Phi(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$. Tedy platí:

$$\int_a^b \phi(x) dx = [\Phi(x)]_a^b = [\alpha F(x) + \beta G(x)]_a^b.$$

Pokud rozepíšeme zobecněný přírůstek dle definice na limity, pak dostáváme dle věty o aritmetice limit

$$\alpha \left(\lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x) \right) + \beta \left(\lim_{x \to b^-} G(x) - \lim_{x \to a^+} G(x) \right),$$

což je z definic

$$\alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

□

Věta 9.1.2 [Intervalová aditivita integrálu] Nechť $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ a nechť je $f(x)$ spojitá $\forall c \in (a, b)$. Pak řekneme, že

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Důkaz: Nejprve si označme primitivní funkci k $f(x)$ v intervalu (a, c) jako $F_1(x)$ a v intervalu (c, b) jako $F_2(x)$. Chceme dokázat, že

$$[F(x)]_a^b = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b = F(b-) - F(a+) + F(c-) - F(c+).$$

To pro nás znamená, že potřebujeme dokázat, že $F(c-) = F(c+)$. Tato rovnost může platit pouze tehdy, je-li $F(x)$ spojitá v bodě c, není-li oboustrannou limitou $\pm\infty$. Předpokládáme, že $f(x)$ je spojitá v bodě c, to znamená, že $f(c) \in \mathbb{R}$ a také $f(c-) = f(c+) = f(c)$.

Zároveň můžeme říci, že je-li funkce spojitá, pak

$$(\exists K > 0)(\exists \delta > 0) \left((\forall x \in U(c, \delta)) \right) (|f(x)| \leq K)$$

.

□

Věta 9.2 [Per partes] Nechť $f(x), g(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ a nechť existuje $f'(x), g'(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Potom řekneme, že

$$\int_a^b f'(x) g(x) = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

Důkaz: Důkaz si můžeme rozmyslet pomocí ekvivalentních úprav. Nejprve převedeme integrál na levou stranu a díky dokázané linearitě integrálu můžeme říci, že

$$\int_a^b [f(x)g(x)]' dx = [f(x)g(x)]_a^b.$$

Víme, že $f(x)g(x)$ je primitivní funkce k $[f(x)g(x)]'$ a také víme, že nezáleží na konstantě - čili na integrační konstantě, tedy je tato funkce korektně dána. Potom tedy z definice Newtonova integrálu platí, že

$$\int_a^b c(x)dx = [C(x)]_a^b$$
$$\int_a^b [f(x)g(x)]' dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

□

Věta 9.3 [O substituci] Nechť $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ a nechť $\phi(t) : (\alpha, \beta) \to (a,b)$ vzájemně jednoznačně. Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu (a,b). Potom

$$\int_a^b f(\phi(t))|\phi'(t)| dx = [F(x)]_a^b.$$

Důkaz: Prvně si uvědomme, že $\phi(t) = x$ tak, že vezmeme-li $t \in (\alpha, \beta)$, potom dostaneme $x \in (a,b)$. Jelikož se jedná o vzájemně jednoznačné zobrazení, potom víme, funkci $\phi(t)$ můžeme používat jako x.

Máme tedy funkci $f(x) = (F(x))' = (F(\phi(t)))' = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$.

Nyní je nejzásadnější otázkou, proč bychom se měli zabývat absolutní hodnotou. Máme určenou monotonní funkci $\phi(t)$, avšak nevíme, zda je rostoucí nebo klesající. Byla-li by klesající, potom by byla záporná derivace této funkce v každém $t \in (\alpha, \beta)$. Na základě úvahy, že by nemělo záležet na $\phi(t)$, pak bude platit následující:

Kapitola 2

Řady

V této kapitole se budeme zabývat řadami - tj. nekonečnými součty. Pro přesnější ukázku toho, co je řada, si ukažme definici:

2.1 Základní teorie k řadám

Definice 10.1 [Řada] Nechť $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \in \mathbb{R})$, potom řadou rozumíme součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2.1}$$

Definujme dále n-tý částečný součet řady jako člen posloupnosti s_n

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Součet řady definujeme jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Říkáme, že řada konverguje právě tehdy, když její součet je konečné číslo. Říkáme, že řada diverguje, pokud je jejím součtem $\pm\infty$ nebo její součet neexistuje, tj. neexistuje limita s_n pro $n \to \infty$.

Je vidět, znak Σ značí sčítání prvků přes index n resp. k. Cílem této kapitoly je znalost toho, zda řada konverguje či ne. Toto můžeme zjistit pomocí několika kritérií. Nejprve si však ujasněme, kdy řada bude konvergovat.

Z logiky vyplývá, že má-li řada konvergovat, musíme přičítat stále menší a menší čísla tak, že v nekonečnu bychom již přičítali nulu. Zformulujme tedy tvrzení:

Věta 10.1 [Nutná podmínka konvergence řady] Nechť je dána řada (2.1) a nechť platí, že řada konverguje. Potom platí, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz: Uvažme, že n-tý člen posloupnosti a_n můžeme vyjádřit jako rozdíl součtu n členů a součtu $(n-1)$ členů. Ukažme si, že toto platí:

$$s_n - s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_n - \sum_{k=1}^{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$$

Pokud také řada konverguje, pak víme, že

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s \in \mathbb{R}.$$

Nyní již stačí dosadit za a_n do zkoumané limity:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

□

Je také třeba si uvědomit, proč toto neplatí pro řadu, jež diverguje. Celý postup by byl stejný, avšak ve finále bychom nedostali $s - s$, nýbrž $\pm(\infty - \infty)$ nebo by výraz vůbec neexistoval.

Máme dvě řady ve tvaru (2.1) pro a_n, b_n. Řekneme, že řady se liší pouze v konečně mnoha členech. Má toto vliv na konvergenci? Toť otázka pro další tvrzení:

Lemma 10.1 [Vliv konečně mnoha členů na konvergenci] Nechť jsou dány dvě řady, které se liší pouze v konečně mnoha členech. Potom jedna řada konverguje právě tehdy, když konverguje druhá řada.

Důkaz: Uvědomme si, že máme řady, které se liší jen v konečně mnoha členech, tudíž musí platit, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})((\forall n \geq n_0)(a_n = b_n)).$$

Řekněme tedy, že součet

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = c.$$

Součty pro a_n od 1 do n_0 označme c_a a pro b_n stejně c_b. Víme také, že součet konečně konečných členů posloupností jsou konečná čísla. Tedy $c_a, b_c \in \mathbb{R}$. Pokud je tedy c konečné (ať už konverguje první nebo druhá řada), budou konečné i celkové součty obou řad. Matematicky zapsáno:

$$c_a + c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c_a, c \in \mathbb{R}$$
$$c_b + c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c_b, c \in \mathbb{R}$$

□

Nyní si ještě musíme uvědomit, že posloupnost s_n by měla být omezená, bude-li řada konvergovat. Začínat by měla v bodě a_1 a končit by měla v součtu řady. Není toto formulujme jako tvrzení:

Lemma 10.2 [Omezenost částečných součtů s_n] Nechť je dána řada (2.1) a všechny její členy jsou nezáporné. Potom je posloupnost částečných součtů omezená právě tehdy, když řada konverguje.

Důkaz: Jelikož víme, že všechny členy jsou nezáporné, pak víme, že posloupnost s_n je neklesající. Pokud by byla konstantní, nemusíme úlohu řešit a víme, že posloupnost je omezená (každá konstantní posloupnost je omezená).

Víme, že je-li posloupnost monotónní a rostoucí (neklesající), potom platí, že $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ je omezená.

□

Jednou z dalších věcí, kterou bychom si měli promyslet, je sčítání dvou řad a násobení řady číslem. Mohli bychom chtít tvrdit, že pokud vynásobíme řadu číslem, je to stejné, jako když vynásobíme každý její člen číslem (platí-li distributivnost reálných čísel). To tedy znamená, že bychom chtěli říci, že zobrazení $\phi(n) : a_n \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je lineární.

Věta 10.2 [O aritmetice řad] Nechť $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n, b_n \in \mathbb{R})$, nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a nechť řady se členy a_n, b_n konvergují, potom platí, že

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

a výsledné řady taktéž konvergují.

Důkaz: Nejprve si označíme následující hodnoty:

$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$	$t_n = \sum_{k=1}^n b_k$	$u_n = \sum_{k=1}^n c_k$
$s_n \to s$	$t_n \to t$	$u_n \to u$

Nyní předpokládejme, že $c_n = \alpha a_n$. Chceme dokázat, že $u = \alpha s$. Z vlastností reálných čísel víme, že lze vytknout číslo ze součtu, pokud je konečný, tj. platí $\sum_{k=1}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k$. Z této vlastnosti můžeme napsat, že $u_n = \alpha s_n$. Pošleme-li $n \to \infty$, potom $u = \alpha s$.

Pokud bylo $c_k = a_k + b_k$, potom se dá z vlastnosti reálných čísel říci, že díky komutativnosti sčítání můžeme pro n prvků c_k být schopni udělat n prvků a_k, b_k. Tedy by platilo $u_n = s_n + t_n$. Opět pro limitu v nekonečnu platí $u = s + t$.

□

Je výhodné do budoucna si uvědomit, že z vlastnosti reálných čísel jsme udělali pravidlo nekonečně mnoho čísel.

2.2 Lehká kritéria konvergence řad

Nyní je dobré začít se zajímat o konvergenci řad. Je užitečné umět určit, zda řada konverguje či ne - můžeme pomocí znalosti konvergence například dokázat, že pro každou čtvercovou matici $A_{n\times n}$ existuje $\exp A$. Znalost této vlastnosti se nám hodí kupříkladu při řešení soustavy diferenciálních rovnic.

Prvně se budeme zajímat o porovnání dvou řad.

Věta 10.3 [Srovnávací verze 1.] Nechť jsou dány řady (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde $a_n, b_n \geq 0$. Nechť $\exists c \in \mathbb{R}^+$, že $a_n \leq c b_n$ pro každé $n > n_0$. Potom
(i)Pokud řada (1) diverguje, pak diverguje i řada (2)
(ii) Pokud řada (2) konverguje, pak konverguje i řada (1)

Důkaz: Víme, že pro částečné součty platí $s_n \leq c t_n$, tedy pro celkový součet platí $s \leq ct$. Vidíme, že je-li $s = \infty$, potom musí být i $t = \infty$. Naopak je-li $t \in \mathbb{R}$, pak i $s \in \mathbb{R}$.

□

Zřejmě nemá smysl zde již více komentovat další věty, budeme se zajímat o kritéria konvergence, tedy následující seznam vět je seznam lehčích kritérií pro konvergenci.

Věta 10.4 [Podílové kritérium] Je dána řada o členech $a_n > 0$. Potom definujme

$$q := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Poté řekneme, že pokud je $q < 1$, tak řada konverguje. Dále je-li $q > 1$, pak řada nekonverguje.

Důkaz: Uvažme nejdřív, že $q > 1$. Řekneme tedy, že

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n,$$

což při skutečnosti, že členy jsou všechny kladné, znamená, že řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence, řada tedy nekonverguje.

Druhou částí důkazu je uvažovat, že $q < 1$. Pokud je q ostře menší než jedna, potom musí existovat nějaké $\varepsilon > 0$ takové, že $q + \varepsilon = \eta < 1$. Z definice limity platí, že musí být

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon.$$

Z toho tedy můžeme předpokládat, že $a_{n+1} < \eta a_n$, jelikož jsou členy a_n kladné pro každé n. Z této nerovnosti vyplývá série nerovností:

$$a_k < \eta a_{k-1} < \eta^2 a_{k-2} < \cdots < n^{k-1} a_1 = \frac{a_1}{\eta} \eta^k$$

Víme, že $\frac{a_1}{\eta}\eta^k$ konverguje, a tudíž dle srovnávacího kritéria (věta 10. 3) konverguje i řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

□

Věta 10.5 [Odmocninové kritérium] Nechť platí předpoklady věty 10.4, tedy nechť $a_n > 0$ a nechť je dána řada s těmito členy. Potom definujme

$$q := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Řekneme, že pokud je $q < 1$, potom řada konverguje. Pokud je $q > 1$, potom řada nekonverguje.

Důkaz: Postupujeme jako u důkazu věty 10.4. Z definice tedy určíme, že

$$a_n < \eta^n.$$

Pokud je tedy $\eta < 1$, potom opět dle srovnávacího kritéria - věty 10.3 - víme, že řada se členy a_n bude konvergovat.

Pokud naopak bude $q > 1$, potom bude platit, že $a_n > 1$ pro každé n [vychází opět ze stejného postupu jako u 10.4], tedy řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

□

Věta 10. 6 [Integrální kritérium] Nechť je dána řada (2.1), kde $a_k \geq 0$ a nechť existuje funkce $f(x)$ nerostoucí a nechť platí, že $(\forall k \in \mathbb{N})(f(k) = a_k)$. Potom řekneme, že řada (2.1) konverguje resp. diverguje právě tehdy, když konverguje resp. diverguje Newtonův integrál funkce $f(x)$ na rozmezí $a = 1, b = +\infty$.

Důkaz: Víme, následující tvrzení: vyplývá, pokud si nakreslíte obrázek:

$$\sum_{k=1}^{n} a_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$$
$$\sum_{k=2}^{n} a_n \leq \int_1^{n+1} f(x)dx$$

Z těchto dvou nerovností nám vyplývá, že

$$s - a_1 \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq s \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Z toho nám vyplývá důkaz - je-li konvergující řada, pak je konvergující i integrál, protože jeho hodnota musí ležet v intervalu $[s - a_1, s]$. Bude-li naopak konvergovat integrál, potom bude konvergovat i řada, jelikož součet řady musí ležet v intervalu $[c, a_1 + c]$, kdy c označíme hodnotu integrálu od jedné do nekonečna.

□

Přece jen se nyní na chvilku ještě zdržíme povídáním. V této části bude důležité vědět, co je to řádová rovnost a co jsou to Bolzano-Cauchyho podmínky konvergence posloupnosti a řady. Následující tři definice jsou tedy na místě.

Definice 10.2 [řádová rovnost] Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou dvě reálné posloupnosti. Řekneme, že posloupnost a_n je řádově rovna posloupnosti b_n, tj. $a_n \sim b_n$, právě tehdy, když platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = x \in \mathbb{R}.$$

Definice 10.3 [B.C.] Řekneme, že posloupnost splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence posloupnosti (je Cauchyovská) právě tehdy, když

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)(|a_n - a_m| < \varepsilon).$$

Definice 10. 4 [B.C. - ř] Řekneme, že řada (2.1) splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence řady (B.C. - ř) právě tehdy, když

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)\left(\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_n\right| < \varepsilon\right).$$

Můžeme také rozepsat $m = n + p$ a říci, že vztah platí pro libovolné p přirozené.

Nyní se můžeme opět vrátit ke zkoumání kritérií konvergence řad.

Věta 10.7 [Srovnávací verze 2] Nechť jsou dány řady (1), (2) z věty 10.3, nechť $a_n, b_n > 0$ a nechť navíc platí, že $a_n \sim b_n$. Potom platí, že řada (1) konverguje právě tehdy, když konverguje řada (2).

Důkaz: Podívejme se na to, jak vypadá člen a_n. Můžeme ho samozřejmě napsat jako

$$a_n = a_n \frac{b_n}{b_n}.$$

Označme nyní $\frac{a_n}{b_n} = c_n$ a dostáváme vyjádření $a_n = c_n b_n$. Jelikož je c_n omezená (má limitu konečné nenulové číslo), pak víme, že $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall k \in \mathbb{N})(c_k < c)$. Můžeme tedy napsat, že pro libovolné reálné číslo c, pro které toto platí, je $a_n = c_n b_n < cb_n$, z čehož vyplývá nerovnost $a_n < cb_n$. Pro zápis pomocí věty o aritmetice řad víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} < c\sum_{n=1}^{\infty}$. Z věty 10.3 (srovnávací verze 1) víme, že bude-li konvergovat b_n, potom musí konvergovat i a_n. Opačně pokud diverguje a_n, pak diverguje i b_n.

Nyní se podíváme na opačný příklad. Budeme zjišťovat, zda platí i opačná implikace. Napišme $b_n = \frac{1}{c_n} a_n$. Víme tedy, že pro každé n přirozené platí, že existuje ξ takové, že $\xi > \frac{1}{c_n}$. Díky tomu opět platí, že $b_n < \xi a_n$. Z toho opět vyplývají (díky větě 10.3) vlastnosti konvergence a divergence.

□

Věta 10.8 [Raabeho kritérium] Nechť je dána řada (2.1), nechť $a_n > 0$ pro každé n přirozené. Definujme číslo

$$p := \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

. Řekneme, že je-li $p > 1$, pak řada konverguje. Je-li $p < 1$, pak řada diverguje.

Důkaz: Uvažujme, že existuje takové $\eta = p + \varepsilon$. Z definice limity dostáváme zápis, kde $p > 1$:

$$\left| n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right| - |p| \leq \left| n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - p \right| < \varepsilon$$

Jelikož jsou všechny členy kladné, můžeme napsat následující nerovnici (po odstranění absolutních hodnot):

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &< \eta \\ na_n - na_{n+1} &< \eta a_{n+1} \\ na_n - (n+1)a_{n+1} &< (\eta - 1)a_{n+1} \end{aligned}$$

Nyní na obě straně rovnice použijme součet od 1 do $k - 1$.

$$\sum_{n=1}^{k-1} (na_n - (n+1)a_{n+1}) < (\eta - 1) \sum_{n=1}^{k-1} a_{n+1}$$

Na levé straně dostáváme teleskopickou řadu (ověření rozepsáním po členech). Výsledně dostáváme pro levou stranu L a pravou stranu P:

$$\begin{aligned} L &= a_1 - 2a_2 + 2a_2 - 3a_3 + 3a_3 - \cdots - ka_k = a_1 - ka_k \\ P &= (\eta - 1)(s_k - a_1) \end{aligned}$$

Tímto se nám zjednodušil vztah na

$$\begin{aligned} (\eta - 1)(s_k - a_1) &< a_1 - ka_k \\ s_k &< a_1 + \frac{a_1 - ka_k}{\eta - 1} = \frac{a_1 \eta - ka_k}{\eta - 1} \end{aligned}$$

Nyní, jelikož víme, že $ka_k > 0$, můžeme napsat následující nerovnost:

$$s_k < \frac{a_1 \eta - ka_k}{\eta - 1} \leq a_1 \frac{\eta}{\eta - 1}$$

Díky tomu, že $p > 1$, pak i $\eta > 1$, tudíž zlomek vyjde kladný. A vidíme, že řada má omezené částečné součty. Díky Lemmatu 10.2 tedy řada konverguje.

□

Věta 10.9 [Leibnitzovo kritérium] Nechť $a_n \geq 0$ pro každé n přirozené a nechť $a_n > a_{n+1} \to 0$ pro $k \to \infty$. Potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konverguje.

Důkaz: Důkaz této věty budeme provádět pomocí zkoumání posloupnosti částečných součtů. Pokus si nakreslíte obrázek částečných součtů, zjistíte, že posloupnost s_{2n} - tj. posloupnost sudých členů s_n - by měla být nerostoucí. Oproti tomu posloupnost lichých členů - tj. posloupnost s_{2n-1} by měla být neklesající. Nejprve tedy ověříme, že toto platí. Poté dokážeme, že limity obou pod-posloupností se rovnají.

Nejprve tedy uvažujeme

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n}.$$

Výslednou nerovnost si můžeme dovolit napsat díky tomu, že víme, že $a_{n+1} - a_{n+2} > 0$ Obdobně pro pod-posloupnost lichých členů dostáváme $s_{2n-1} \leq s_{2n+1}$. Pro ověření si stačí rozepsat posloupnost stejně jako pro sudé členy.

Nyní dokážeme, že s_{2n} je zdola omezená. To můžeme udělat jednoduše pomocí vztahu $s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} \leq s_{2n}$. Společně s tím, že s_{2n+1} je neklesající, dostáváme, že $s_{2n} > -a_1$ pro každé n, tedy s_{2n} je omezená a monotonní, tedy $(\exists c \in \mathbb{R})(\lim_{n\to\infty} s_{2n} = c)$.

Nyní už stačí jen dokázat, že $\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = c$. Člen s_{n-1} můžeme vyjádřit jako $s_{2n-1} = s_{2n} - (-1)^{2n-1}a_{2n-1}$. Nyní využijeme poslední z předpokladů a to ten, že $a_n \to 0$. Můžeme tedy napsat, že

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = c.$$

Tedy platí, že existuje společná limita.

□

2.3 Hlubší pozorování řad

Nyní se pozastavíme a zopakujeme si důležitou vlastnost posloupností. Také si objasníme pár dalších vět, které se týkají řad. I v této části nalezneme dvě kritéria konvergence řad - Abelovo a Dirichletovo kritérium.

Prvně si zopakujme větu z prvního semestru - nebudeme ji nyní dokazovat.

Věta A (10.10) [B.C.] Řekneme, že posloupnost je konvergentní právě tehdy, když pro ni platí Bolzano-Cauchyho podmínka, tj. když platí, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)(|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

□

Na základě této věty postavíme další větu:

Věta 10.11 [B.C. - ř] Řada konverguje právě tehdy, když je pro ni splněna Bolzano-Cauchyho podmínka konvergence řady [definice 10.4].

Důkaz: Vycházíme z toho, že součet řady je dám limitou částečných součtů v nekonečnu. Tedy platí, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)(|s_n - s_m| < \varepsilon)$$

Nyní stačí říci, že BÚNO $m > n$ a potom $(\exists p \in \mathbb{N})(m = n + p)$. můžeme tedy tvrzení rozepsat na

$$s_n - s_{n+p} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

Pokud nyní dosadíme za $s_n - s_m$ do původní věty o konvergenci posloupnosti částečných součtů, dostaneme příslušnou definici B.C. - ř. Je na první pohled vidět, že se jedná o ekvivalenci.

□

Nyní se budeme chtít podívat na vlastnost, co se stane s řadou, když každý člen vynásobíme členem jiné posloupnosti. Zkoumání takových řad bude klíčové pro určování konvergence některých řad, ve kterých se objeví kupříkladu $\sin(kx)$ nebo $\cos(kx)$.

Prvně si vyjasníme tzv. Abelovo sčítací Lemma.

Lemma 10.3 [Abelovo sumační lemma] Nechť $a_n \in \mathbb{C}$ a nechť

$$(\exists K \in \mathbb{R}) \left(\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq K \right).$$

Nechť také je b_k posloupnost pouze s kladnými členy a platí, že $b_k > b_{k+1}$ pro každé k přirozené. Potom

$$\left(\left| \sum_{k=1}^{n} b_k a_k \right| \leq b_1 K \right).$$

Důkaz: Nejprve si uvědomíme již dlouho omílanou věc: $a_n = s_n - s_{n-1}$. Následující úpravy bez pochyby platí:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k b_{k+1}$$

Dále jsme schopni „vypreparovat“ veškeré věci tak, abychom mohli dostat jednu řadu:

$$\sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) - s_n b_n.$$

Nyní uvažme, že $|s_n| < K$ a také $|s_n| \geq |s_k|$, to bude určitě platit pro každý součet s_k, kdy $k < n$. Tedy můžeme napsat, že

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) - s_n b_n \right| \leq K \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) - b_n$$

Řada, která se nám utvořila, je teleskopická (zůstane jen první a poslední člen). Poslední člen ještě po vytčení s_n můžeme odečíst, a tudíž dostáváme vztah:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq K b_1$$

□

Věta 10.12 [Dirichletovo kritérium] Je dána řada (2.1). Nechť má omezené částečné součty. Nechť existuje posloupnost b_n, která je od jistého indexu monotonní a platí, že $b_k \to 0$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Důkaz: Říkáme, že řada má omezené částečné součty, tedy

$$(\exists K > 0)(|s_n| < K).$$

Víme také, že platí

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |s_{n+p} - s_n| \leq |s_{n+p}| - |s_n| < 2K$$

a víme, že toto platí pro každé $n, p \in \mathbb{N}$. Nyní pomocí Abelova sčítacího lemmatu jsme schopni říci následující nerovnost:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < b_{n+1} 2K$$

Díky Lemmatu 10.3 víme, že nezáleží, od kterého indexu sčítáme, první člen tedy není b_1, ale b_{n+1}. Jelikož $b_n \to 0$, potom můžeme určitě najít takové n, že $b_n < \varepsilon$. Z toho tedy vyplývá, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) \left(\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < \varepsilon \right)$$

□

Nyní bychom se rádi podívali, jak je to s posloupnostmi $\sin(kx), \cos(kx)$ pro parametr $x \in \mathbb{R}$. Předpokládáme, že $x \neq 2k\pi$ - na konci odvození (důkazu) pochopíme proč.

Lemma 10.4 [O omezenosti $\mathbf{sin(kx), cos(kx)}$] Nechť $x \neq 2k\pi$, potom platí, že

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

Důkaz: Předně již vidíme, že kdyby $x = 2k\pi$, pak nám ve jmenovateli vyšla nula, dostali bychom tedy nedefinovaný výraz. Budeme vycházet z komplexního čísla:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} e^{ix^k}$$

Toto je geometrická řada s koeficientem $q = e^{ix}$. Součet tedy bude

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ix^k} = \frac{1 - e^{ix^{n+1}}}{1 - e^{ix}} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

Následným vytčením dostáváme předpis

$$e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\frac{1}{2i}(e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x})}{\frac{1}{2i}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})} = e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}(\cos\frac{n}{2}x + i\sin\frac{n}{2}x)$$

□

Tímto jsme si ověřili, že výše uvedené řady mají omezené částečné součty. Posloupnost částečných součtů však nemusí být a také není monotónní, nemůžeme tedy říci, že daná řada konverguje. Stačí však vynásobit jeden z výrazů libovolnou posloupností, která jde k nule a řada bude konvergovat.

Nyní se podívejme na jinou skutečnost - co se stane, když máme konvergující řadu a její člen a_n vynásobíme členem posloupnosti b_n, která je od určitého indexu monotonní.

Věta 10.13 [Abelovo kritérium] Nechť je dána řada (2.1) a nechť konverguje. Nechť je dále dána posloupnost b_n monotonní a omezená od určitého indexu. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Důkaz: Nejprve uvažme, že b_n je omezená a monotonní od určitého indexu, potom $(\exists b \in \mathbb{R})(\lim_{n\to\infty} b_n = b)$. Důležité bude rozdělit si člen řady $a_k b_k$ tak, abychom byli schopni určit konvergenci. Bez pochyb (po ověřením roznásobením) platí, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(b_k - b) - a_k b)$$

Víme, že jelikož je řada (2.1) konvergující, potom musí mít omezené částečné součty a také víme, že posloupnost $(b_k - b) \to 0$. Dle Dirichletova kritéria tedy řada konverguje. Nyní musíme ještě ověřit konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} ba_k$. Vidíme však na první pohled, že b je konstanta a řada (2.1) konverguje. Tím jsme využili všechny předpoklady a dokázali Abelovo kritérium

□

Dozvěděli jsme se tedy o jedné implikaci. Dalo by se však tvrdit, že při daných předpokladech může nastat i ekvivalence, to nám objasní následující lemma.

Lemma 10.5 [O násobení řady monotonní posloupností] Nechť je dána řada (2.1) a nechť je dána posloupnost b_n monotonní a omezená. Pak řekneme, že řada (2.1) konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Důkaz: První implikaci jsme již dokázali - jedná se o Abelovo kritérium. Nyní tedy dokážeme i opačnou implikaci.

Uvažujme tedy, že $a_k = a_k b_k \frac{1}{b_k}$, víme, že $a_k b_k$ konverguje. Také víme, že posloupnost b_k je omezená a tedy i posloupnost $\frac{1}{b_k}$ musí být omezená. Zároveň víme, že $b_k \to b$ a tedy $1/b_k \to 1/b$. Tedy dle Abelova kritéria (nebo první části tohoto lemmatu) řada (2.1) musí také konvergovat.

□

Tím jsme již dořešili všechna kritéria řad, která jsme v rámci tohoto kurzu chtěli probrat. Nyní si vysvětlíme ještě pojem absolutní a neabsolutní konvergence, kterou budeme chtít vyšetřovat u různých řad.

Nejprve budeme chtít ověřit jednu vlastnost konvergence řady:

Věta 10.14 [O absolutní konvergenci řady] Nechť je dána řada se členy a_k. Potom platí, že pokud konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, potom konverguje i řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Důkaz: Budeme vycházet z pouhé Bolzano-Cauchyho podmínky pro konvergenci řady. Řekneme, že musí platit, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)(m > n) \left(\left| \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon \right).$$

Z trojúhelníkové nerovnosti víme, že

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon,$$

a tím jsme větu dokázali.

□

Nyní již víme, že pokud konverguje řada se členy v absolutní hodnotě, konverguje řada i bez členů v absolutní hodnoty. Tato vlastnost je jednou z věcí, které budeme často vyšetřovat při počítání příkladů. Následující definice tuto konvergenci objasní.

Definice 10.5 [Absolutně konvergující řada] Nechť je dána řada (2.1). Konverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, pak řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně. Konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, ale nekonverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, potom řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně.

2.4 Finále řad - přerovnání a Cauchy

V této poslední subkapitole budeme chtít zjistit, co to je přerovnání řady, jaký má význam pro konvergenci řady a co to je tzv. Cauchyův součin řad. Prvně si tedy definujme přerovnání řady.

Definice 10.6 [Přerovnání řady] Nechť je dána posloupnost a_n a vzájemně jednoznačné zobrazení (posloupnost) $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Nechť $b_n = a_{\phi_n}$. Potom řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je přerovnáním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Nyní si rozmyslíme, jaký vliv může mít přerovnání na konvergenci řad. Snažím se vlastně dokázat, že komutativnost sčítání můžeme používat i pro nekonečně mnoho členů.

Věta 10.15 [Přerovnání kladné nebo absolutně konv. řady] Nechť je dána řada (2.1) a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je její libovolné přerovnání. Nechť dále platí, že $a_n > 0$ a nebo řada konverguje absolutně. Potom platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz: Nejprve si označme následující symboly:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k; t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k; s = \lim_{n\to\infty} s_n; \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, b_k = a_{\phi(k)}.$$

My chceme dokázat, že $\lim_{n\to\infty} t_n = s$. Uvažujme, že řada konverguje absolutně (pokud má všechny kladné členy a konverguje, pak vždy konverguje absolutně - stojí za zamyšlení, proč by to tak mělo být, tvrzení je však triviální).

Chceme tedy dokázat z definice limity, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(|t_n - s| < \varepsilon).$$

Díky B.C. - ř víme, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon).$$

Uvažujme tedy situaci pro minimum hodnot, pro které toto platí, tedy pro n_0. Víme také, že existuje n_1, že $|s_{n_1} - s| < \varepsilon$.

Máme tedy zobrazení $\phi(k) : [1, n_0] \cap \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Označme si nejvyšší index jako $m_0 := \max\{\phi(k); k = 1, \ldots, n_0\}$. Celkový součet $\sum_{k=1}^{m_0} b_k$ se tedy určitě bude skládat ze všech prvků $a_1, \ldots, a_{n_0}$. Můžou v něm ale být i další prvky, obecně musí platit, že $m_0 \geq n_0$. Označme $l = \phi(k)$ a napišme součet t_n jako rozdělení na prvky a_k, kde $k \leq n_0$ a na a_k, kde $k > n_0$. Volíme také $n > m_0$.

$$t_n = \sum_{l=1}^{n} b_l = \sum_{\left\{\substack{l \leq n \\ \phi_{-1}(l) \leq n_0}\right\}} b_l + \sum_{\left\{\substack{l \leq n \\ \phi_{-1}(l) > n_0}\right\}} b_l = t_n^{(1)} + t_n^{(2)}$$

Nyní se můžeme podívat na každou část zvláště. Jako první se podívejme na $t_n^{(1)}$. Množina takových a_k, kde $k \leq n_0$ nám dává množinu $\{a_k; k = 1, \ldots, n_0$. Schválně jsme definovali m_0 a určili $n > m_0$, abychom vždy dostali všechna tato čísla. Tedy $t_n^{(1)} = s_n$.

Pro druhý součet bude platit, že $t_n^{(2)} < \varepsilon$, naschvál jsme zvolil n_0 tak velké, aby toto platilo (viz absolutní konvergence řady).

Nyní si tedy dosadíme do definice a uvidíme, zda jsme skutečně něco dokázali.

$$|t_n - s| = |t_n^{(1)} - s + t_n^{(2)}| \leq |t_n^{(1)} - s| + |t_n^{(2)}| < 2\varepsilon \sim \varepsilon$$

□

Nyní se podíváme na věc, která nemusí být na první pohled zřejmá. Je to ta věc, že neabsolutně konvergující řada má součet kladných členů $+\infty$ a součet všechny záporných členů $-\infty$.

Na to si budeme muset definovat, co to je kladná a záporná část každého čísla. Každé číslo můžeme napsat jako rozdíl jeho kladné a záporné části. Následující definice je také jednou z možných představ definice celých čísel.

Definice 10.7 [Kladná a záporná část čísla] Nechť $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $a = a^+ - a^-$, když $a^+ = a$ pro každé $a > 0$, jindy definujeme $a^+ = 0$. Opačně definujeme $a^- = -a$ pro každé $a < 0$ a jinak definujeme $a^- = 0$.

V následujícím lemmatu si ověříme již zmíněnou vlastnost neabsolutně konvergující řady. Lemma bude důležité pro důkaz další věty.

Lemma 10.6 [O rozdělení součtů neabsolutně konv. řady] Nechť je dána řada (2.1) a nechť konverguje neabsolutně. Potom platí, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty.$$

Důkaz: Nejprve si označme součty jednotlivých řad:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad u_n = \sum_{k=1}^n a_k^+ \quad v_n = \sum_{k=1}^n a_k^-.$$

Z vlastnosti komutativnosti konečného počtu čísel víme, že $s_n = u_n + v_n$ a také víme, že $|s_n| \notin \mathbb{R}$. Další z věcí, kterou známe, jest vlastnost $a_k^+, a_k^- \geq 0$, tedy u_n, v_n musí být neklesající.

Nyní uvažujme, že by u_n, v_n byli konečné. Potom by řada nutně konvergovala absolutně, touto situací se tedy zabývat nechceme. Pokud by byl jeden součet konečným číslem a druhé číslo by bylo ∞, potom by řada divergovala. Zbývá nám poslední případ, uvážit, když budou obě čísla rovna ∞ a $s = \infty - \infty$ bude nedefinovaným výrazem. Toto je námi hledaná neabsolutní konvergence. Uvažme to.

Platí přece, že $\infty - \infty$ je nedefinované a může to být prakticky jakékoliv číslo z $\mathbb{R}$. Zároveň také v absolutní hodnotě bychom dostali $\infty + \infty$, jelikož pro absolutní hodnotu platí $|a_n| = a_k^+ + a_k^-$.

□

Věta 10.16 [O přerovnání neabsolutně konvergentní řady] Nechť je dána řada (2.1) a nechť konverguje neabsolutně. Potom řekneme, že $(\forall s \in \mathbb{R}^*)$ existuje přerovnání řady takové, že $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$.

Důkaz: Při sčítání uděláme takové přeřazení, abychom vždy mohli opakovat následující kroky:

- Sčítáme kladné členy tak, abychom přesáhli číslo s
- Začneme přičítat záporné členy, abychom se dostali zpět pod číslo s

Nekonečné opakování těchto kroků nám dovoluje nekonečné množství členů a také rovnost $s_{a^+} = s_{a^-}$ (Lemma 10.6). Navíc víme, že $a_k \to 0$ a to znamená jediné - existuje konečný počet čísel, pro která platí, že $|a_k| \geq \varepsilon$, když ε je nějaké předem dané kladné číslo. Od určitého okamžiku již půjdou přidávat pouze čísla $|a_k| < \varepsilon$ a poté $s_n \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. Díky podmínce $a_k \to 0$ platí, že postupně se $s_n \to s$.

□

Kapitola 3

Mocninné řady

V této kapitole si objasníme pojem *mocninné řady*, zjistíme, k čemu jsou dobré a také zjistíme, zda lze prohazovat operátory $\sum$, $\frac{d}{dx}$. Prvně si ukažme, co máme na mysli pod mocninou řadou.

3.1 Úvod - poloměr konvergence, výpočet R

Definice 11.1 [Mocninná řada] Mocninou řadou máme na mysli zápis $f(z)$ ve tvaru

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{3.1}$$

kde $a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$. a_k označujeme jako k-átý člen mocninné řady (koeficient mocninné řady), z označujeme komplexní proměnnou a z_0 označujeme střed mocninné řady.

Mocninou řadu si můžeme představit jako zobecněný polynom. Jedná se vlastně o řadu s komplexním parametrem z. Tento polynom můžeme označit jako funkci proměnné z - tak jsme v definici také udělali, označili jsme mocninou řadu jako funkci $f(z)$. Takové zobrazení můžeme zapsat jako $f : M \subset \mathbb{C} \to N \subset \mathbb{C}$ respektive $f : z \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$.

I u mocninných řad bychom rádi věděli, zda konvergují či nekonvergují. Samozřejmě budeme muset vyšetřovat konvergenci vzhledem k parametru z. U mocninných řad však bude existovat přímočarý postup, jak zjistit konvergenci vůči parametru - resp. vůči $(z - z_0)$.

Nejprve si řekneme, že existuje něco jako poloměr konvergence apod.

Definice 11.2 [Poloměr konvergence] Řekněme, že existuje číslo $R\mathbb{R}^+$ takové, že je-li $|z-z_0| > R$, pak řada diverguje a je-li $|z - z_0| < R$, pak řada konverguje.

Je zřejmě nezodpovědné definovat něco, co ani nevím, zda existuje. Správně bychom měli nejdřív dokázat, že takové číslo existuje a poté ho definovat. My to však uděláme obráceně - tento způsob by mohl být názornější, nejprve si uvědomíme z definice, že by něco takového mohlo existovat a poté budeme zkoumat, zda to opravdu existuje.

Věta 11.1 [Existence poloměru konvergence] Nechť je dána mocninná řada (3.1). Potom existuje $R \in \mathbb{R}^+$ takové, že je-li $|z - z_0| < R$, pak řada konverguje, a je-li $|z - z_0| > R$, pak řada diverguje.

Důkaz: Uvažujme, že máme zadanou mocninou řadu (3.1) a uvažujme, že existuje množina $\Xi = \{\xi; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^k \text{ konverguje }\}$. Nyní označíme $R = \sup \Xi$.

Nyní můžeme jistojistě provést následující ekvivalentní úpravy:

$$a_k (z - z_0)^k = a_k \rho^k \left(\frac{z - z_0}{\rho} \right)^k.$$

Zvolme nyní za $|z - z_0| < R$ a $\rho = R$, potom bude platit, že $a_k R^k$ je omezená a $\left(\frac{|z-z_0|}{R}\right)^k$ můžeme označit jako koeficient geometrické řady, když víme, že $q < 1$, jelikož víme, že $|z - z_0| < R$. Řada tedy bude konvergovat.

Zvolíme-li opačně, že $|z - z_0| > R$, pak dostáváme, že $|a_k||z - z_0|^k$ není omezená - také z předchozího postupu bychom viděli, že $q > 1$, proto tedy řada diverguje.

□

Nyní se pokusíme zjistit poloměr konvergence. To můžeme udělat dvěma snadnými metodami, které popisují následující dvě věty:

Věta 11.2 [R - pomocí podílu] Nechť je dána mocninná řada (3.1). Definujme číslo $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Potom poloměr konvergence $R = 1/r$ s dohodou, že $1/\infty = 0, 1/0 = \infty$.

Důkaz: Označme si člen posloupnosti $b_k = |a_k(z - z_0)^k|$. Nyní vyšetřeme konvergenci podílovým kritériem:

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = |z - z_0| \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|.$$

Víme, že aby řada konvergovala, musí být výraz na pravé straně rovnice menší než 1. Toho docílíme právě tak, že $|z - z_0| < \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}$. Opačně bude řada divergovat, když pravá strana bude větší než 1. Tak jako tak docházíme k tomu, že $R = \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}$.

□

Věta 11.3 [R - pomocí odmocniny] Nechť je dána mocninná řada (3.1). Definujme $r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Potom poloměr konvergence $R = 1/r$.

Důkaz: Označme si opět $b_k = |a_k(z - z_0)^k|$ a proveďme nyní úpravy odpovídající odmocninovému kritériu:

$$r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_k} = |z - z_0| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Opět musí být výraz napravo menší než 1, a tudíž dostáváme, že $R = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$.

□

3.2 O derivaci mocninné řady

O konvergenci mocninné řady a poloměru konvergence jsme si již řekli vše, co nyní potřebujeme. Nyní bude naším hlavním úkolem dokázat, že platí následující rovnost:

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_k(z - z_0)^k.$$

Snažím se tedy zobecnit derivaci součtu na nekonečně mnoho sčítanců. Nejdříve si rozmyslíme, zda se bude měnit poloměr konvergence.

Lemma 11.1 [Zachování poloměru konvergence] Nechť jsou dána řady (3.1) a mocninná řada $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z - z_0)^{k-1}$. Tyto řady mají stejný poloměr konvergence.

Důkaz: Jednou z možností je postupovat podílovým kritériem pro člen $b_k = |ka_k(z - z_0)^k|$.

Věta 11.4 [O derivace mocninné řady] Nechť je dána mocninná řada (3.1) a nechť mají obě následující řady stejný poloměr konvergence. Potom platí, že

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}$$

pro každé $z \in \mathbb{U}; \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z-z_0| < R\}$.

Důkaz: To, že řady mají stejný poloměr konvergence, jsme se již dozvěděli v lemmatu 11.1. Nyní si budeme chtít rozmyslet derivaci mocninné řady. Z definice derivace víme, že musí platit

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(z+h)-f(z))$$

Budeme uvažovat, že $z_0 = 0$, abychom si práci trochu usnadnili. Potom tedy budeme mít:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$
$$f(z+h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+h)^k$$

Toto nyní dosadíme do definice derivace a vyjde nám:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z+h)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty} a_k((z+h)^k - z^k)$$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}z^{k-j}h^j - z^k\right).$$

Nyní nás budou zajímat pouze dva členy z binomického rozvoje. Prvním bude první člen, kdy $j=0$. Tento člen se odečte, bude to $z^k - z^k$. Druhý člen bude obsahovat $\frac{h}{h}kz^{k-1}$, tento člen nám tedy zůstane. Každý další člen rozvoje obsahuje h ve vyšší mocnině než v první, a tudíž se nezkrátí s h ve jmenovateli, všechno další bude tedy nulové. Zůstal nám tedy jediný člen rozvoje a to:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty} a_k k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}.$$

Důkaz můžeme zobecnit jednoduše tím, že bychom místo z dosazovali $z - z_0$. V binomickém rozvoji bychom poté používali $(z-z_0) = a$.

□

Důsledkem této věty je to, že můžeme prohazovat operátory derivace a sčítání. Je dobré si uvědomit, že když jsme zkoumali větu o aritmetice derivací, dokázali jsme, že můžeme derivovat jednotlivé členy zvláště. Nyní jsme si to samé ověřili i pro nekonečně mnoho sčítanců.

Můžeme také definovat primitivní funkci komplexní proměnné. K funkci (3.1) bude primitivní funkce

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}.$$

Absolutní člen nemusíme brát vůbec v úvahu, protože je to pouze konstanta, o níž se všechny primitivní funkce liší. Proto si můžeme dovolit psát $\frac{a_k}{k+1}$ a sčítat až od $k=0$.

Pojďme si nyní rozmyslet, jak bude vypadat l-tá derivace funkce $f(z)$. Zřejmě bude obsahovat člen $(z-z_0)^{k-l}$ a také člen a_k. Koeficient mocninné řady bude ještě vynásoben $k(k-1)\cdots(k-l+1)$.

To bychom mohli efektně zapsat pomocí podílu faktoriálu. K samostatnému zamyšlení nechme, že můžeme l-tou derivaci zapsat následovně:

$$f^{(l)}(z) = \sum_{k=l}^{\infty} \frac{k!}{(k-l)!} a_k (z-z_0)^{k-l}$$

Tato úvaha o l-té derivaci nám mnohonásobně usnadní následující větu.

Věta 11.5 [O l-té derivaci mocninné řady] Nechť je dána mocninná řada (3.1) a nechť je poloměr konvergence $R > 0$. Potom platí, že $f^{(l)}(z_0) = l!a_l$, když $l \in \mathbb{N}$.

Důkaz: Vidíme, že jsme si již usnadnili práci, když známe předpis

$$f^{(l)}(z) = \sum_{k=l}^{\infty} \frac{k!}{(k-l)!} a_k (z-z_0)^{k-l}.$$

Když dosadíme za $z = z_0$, dostaneme pro všechny členy mimo prvního nulový výraz, jelikož $z_0 - z_0 = 0$. Proto tedy platí, že $f^{(l)}(z_0) = \frac{l!}{1} a_l$, tedy $f^{(l)}(z_0) = l!a_l$.

□

Věta 11.6 [O rovnosti koeficientů řady] Nechť jsou dány řady $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$. Nechť mají obě řady kladný poloměr konvergence a nechť platí pro nějaké kruhové okolí bodu z_0, že $f(z) = g(z)$. Potom platí, že $(\forall k \in \mathbb{U}(z_0))(a_k = b_k)$.

Důkaz: Nejprve si uvědomme, jak vypadá $f(z_0), g(z_0)$. Opět zbude pouze první člen: $f(z_0) = a_0, g(z_0) = b_0$. Pokud $f(z) = g(z)$ na okolí bodu z_0, potom $a_0 = b_0$. Stejné musí být nutně i jejich první derivace. Dostáváme nakonec obecné vyjádření, že

$$(\forall l \in \mathbb{N})(f^{(l)}(z_0) = g^{(l)}(z_0)).$$

To znamená, že $l!a_l = l!b_l$ a toto platí pro každé l přirozené, tedy $a_l = b_l$ pro každé l.

□

U mocninných řada bychom touto větou již mohli skončit, pojďme si však ještě uvědomit několik věcí, které se týkají některých speciálních funkcí. Funkci e^x bychom mohli také zapsat jako mocninou řadu

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Vidíme také, proč platí, že $e^x = (e^x)'$. Zderivujeme-li každý člen zvláště (díky větě 11.4 víme, že můžeme), pak dostaneme opět tu samou řadu.

Dobrým cvičením je utvořit si vzorce pro $\sin x, \cos x$. Myslíme tím, odvodit si následující vztahy:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Návodem k tomuto odvození je následující rada: Rozepište si z definice e^x vztah e^{ix} a hledejte v dané řadě součet dvou dalších řad, konkrétně řad

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Také bychom si zde mohli nyní odvodit větu, kterou určitě potkáte i v lineární algebře - tam ji pouze najdete pro matice.

Věta A Nechť $x, y \in \mathbb{C}$ a nechť je dána exponenciála $f(x) = e^x = \exp x$. Potom platí, že $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Důkaz: Důkaz takovéto věty se dělá čistě přes definici:

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!j!} \frac{1}{k!} x^{k-j} y^j$$

Odůvodnění, proč je toto důkaz, již necháme na čtenáři. Tato věta není důležité pro náš výklad, ale určitě ji znát musíte!

$\square$

Kapitola 4

Diferenciální rovnice

V této kapitole se budeme zabývat tzv. řešením diferenciálních rovnic. Také si samozřejmě řekneme, co to diferenciální rovnice jsou a k čemu jsou dobré. Pro některé způsoby řešení budeme také využívat mocninných řad a jejich derivací.

Nejprve si tedy vyjasněme, co je to diferenciální rovnice a co máme na mysli pod jejím řešením:

Definice 12.1 [ODR] Nechť $f(x, y, z_1, \ldots, z_n)$ je funkcí $n+2$ proměnných a je nekonstantní vůči z_n, tedy se z_n bude určitě vyskytovat v zápise funkce. Potom definujme, že $z_i = y^{(i)}$ a rovnici

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{4.1}$$

nazveme **obyčejnou diferenciální rovnicí** (ODR) funkce y a proměnné x. Řešením rovnice (4.1) máme na mysli funkci $y(x) : I \to \mathbb{R}$, pro kterou existují derivace až do řádu n a platí, že

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Již tedy víme, co je obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu - je to rovnice, v níž se vyskytuje x, y a poté derivace y až do n-té derivace, přičemž koeficient násobící $y^{(n)}$ musí být nenulový. Později zjistíme, že pro daný interval I může existovat i více řešení, některá mohou být prodloužením či restrikcí jiných řešení, tyto pojmy si osvětlíme v následující definici.

Definice 12.2 [prodloužení, restrikce] Nechť $y_1(x), y_2(x)$ jsou obě řešením rovnice (4.1). $y_1(x)$ je řešením v intervalu I_1 a $y_2(x)$ je řešením v intervalu I_2. Nechť platí, že $I_1 \subset I_2$ a také $y_1(x) = y_2(x)$ pro každé $x \in I_1$. Potom řekneme, že $y_1(x)$ je restrikcí $y_2(x)$ a opačně $y_2(x)$ je prodloužením $y_1(x)$.

Obecně se řešení diferenciálních rovnic hledá těžce a někdy ani nejde najít jinak než numerickou metodou pomocí počítače. V následující části se však zaměříme na ty nejzákladnější diferenciální rovnice - zvláště na rovnice prvních řádů a na lineární ODR.

4.1 Řešení rovnic prvního řádu

Nejprve si ujasníme, co máme na mysli pod rovnicí prvního řádu. Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu je rovnice ve tvaru $F(x, y, y') = 0$, když $F(x, y, y')$ je nekonstantní vůči y'. Řešením takové rovnice rozumíme funkci $y(x) : I \to \mathbb{R}$, kdy $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ pro každé $x \in I$.

Rovnice prvního řádu můžeme mít v několika tvarech. My se zaměříme na následujících několik druhů:

$$y'(x) + a(x)y = b(x) \tag{4.2}$$

$$y'(x) = f(x)g(y) \tag{4.3}$$

$$y'(x) = f(x, y) \tag{4.4}$$

Definice 12.3 [lineární ODR, separované proměnné] Rovnici (4.2) nazveme lineární ODR (L-ODR) prvního řádu. Rovnici (4.3) nazveme rovnici se separovanými proměnnými.

Věta 12.1 [Řešení L-ODR prvního řádu] Nechť je dána rovnice (4.2) tj. rovnice

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Označme dále $A(x) = \int a(x)dx$ a $B(x) = \int b(x)e^{A(x)}dx$. Potom řešením rovnice (4.2) bude funkce

$$y(x) = \exp[-A(x)][B(x) + c].$$

Důkaz: Důležitým uvědoměním si v důkazu této věty je fakt, že hledáme rozklad $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Budeme se snažit dostat pravou stranu této rovnice, kterou bychom poté mohli upravit na levou stranu.

Zdá se, že pomoci by mohla funkce $e^{A(x)}$, jelikož $\left(e^{A(x)}\right)' = a(x)e^{A(x)}$. Vynásobme, tedy celou rovnici následujícím faktorem (nazvěme tento faktor integračním):

$$\begin{aligned} y'(x)\exp A(x) + a(x)\exp A(x)y(x) &= b(x)\exp A(x) \\ (y(x)\exp A(x))' &= b(x)\exp A(x) \\ y(x)\exp A(x) &= B(x) + c \\ y(x) &= \exp -A(x)[B(x) + c] \end{aligned}$$

□

Další z rovnic, které budeme řešit, jsou rovnice se separovanými proměnnými. Rovnice se separovanými proměnnými je typicky rovnice (4.3).

Věta 12.2 [Řešení rovnice se separovanými proměnnými] Nechť je dána rovnice (4.3), tj. rovnice se separovanými proměnnými, kdy $f(x)$ je spojitá v I a $g(y)$ je spojitá v J. Nechť $F(x), G(y)$ jsou primitivní funkce k $f(x)$, $\frac{1}{g(y)}$ v I, J. Označme $G_{-1}(z)$ inverzní funkci k $G(y)$. Nechť je dán interval $A \subset I$, kdy pro každé x je $F(x) + c$ v definičním oboru $G_{-1}(z)$. Potom řekneme, že řešením rovnice (4.3) je funkce

$$y(x) = G_{-1}\left(F(x) + c\right)$$

pro každé $x \in A$.

Důkaz: Uvažujme následující úpravy:

$$\begin{aligned} y' &= f(x)g(y) \\ \frac{y'}{g(y)} &= f(x) \\ \int \frac{y'}{g(y)}dx &= \int f(x)dx \\ G(y) &= F(x) + c \\ y &= G_{-1}\left(F\left(x\right) + c\right) \end{aligned}$$

□

Všechny kroky vyplývají z předpokladů věty. Především poslední krok platí pouze pro $x \in A$, to je třeba si uvědomit. K řešení tedy vždy musíme připsat interval, ve kterém je řešení platné.

Vraťme se na chvilku k metodě řešení rovnice pomocí integračního faktoru (věta 12.1). Mějme následující větu:

Věta B [Bernoulliho rovnice] Nechť je dána rovnice $y' + a(x)y = b(y)y^{\alpha}$, kdy $\alpha \neq 0, 1$. Tuto rovnici nazveme Bernoulliho diferenciální rovnicí a provedeme substituci $z = y^{1-\alpha}$. Touto substitucí dostaneme rovnici, kterou jsme schopni vyřešit pomocí věty 12.1.

Důkaz: Důkaz této věty je triviální, nechť si ho čtenář zkusí sám (stačí si vyjádřit $y = f(z)$ a poté $y' = f'(z)$, kdy derivace jsou myšleny dle x. Poté toto dosadíme do původní rovnice a vyjde nám obyčejná lineární rovnice prvního řádu.

$\square$

Nyní se více zaměříme na řešení rovnice (4.4), to znamená na řešení rovnice $y' = f(x, y)$. Nejprve však budeme chtít zjistit něco o tzv. napojování řešení.

Lemma 12.1 [O napojování řešení] Nechť jsou dány řešení rovnice (4.4) $y_1(x) : (a, x_0) \to \mathbb{R}, y_2(x) : (x_0, b) \to \mathbb{R}$. A nechť je $f(x, y)$ spojitá v bodě (x_0, y_0) a nechť $\lim_{x\to x_0^-} y_1(x) = \lim_{x\to x_0^+} y_2(x) = y_0$. Potom pro každé $x \in (a, b)$ platí, že řešením rovnice (4.4) je funkce

$$y(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} y_1(x) & , & x \in (a, x_0) \\ y_2(x) & , & x \in (x_0, b) \\ y_0 & , & x = x_0 \end{array} \right| .$$

Důkaz: Pro body $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ je řešení jasné. Funkce $y_1(x), y_2(x)$ v tomto intervalu řeší danou diferenciální rovnici. Jediný rozporuplným bodem jest bod x_0. Uvažujme $y'(x) = f(x, y)$, tedy rovnici (4.4), kterou řešíme. Chceme dokázat, že $y' = f(x_0, y_0)$.

$$y'(x_0) = \lim_{x\to x_0} y'(x) = \lim_{x\to x_0} f(x, y(x)) = f(x_0, y_0)$$

$\square$

Když nyní již víme, co to je napojování řešení, měli bychom si ještě vysvětlit pojem *větvení v bodě*. Větvením v bodě máme na mysli, že daným bodem prochází dvě řešení, ale na žádném okolí si nejsou rovna. Přesněji definujme.

Definice 12.4 [Větvení] Nechť je dána rovnice (4.4). Řešení této rovnice tedy rozumíme funkci $y(x)$ takovou, že $x_0 \in D_y$ a také $y(x_0) = y_0$. Řekneme, že v bodě x_0 nastává větvení, pokud jím procházejí alespoň dvě řešení taková, že $(\forall\delta > 0)(\exists\xi \in U(x_0, \delta))(y_1(\xi) \neq y_2(\xi))$.

Nyní bude důležité uvědomit si, že rovnice (4.2), (4.3) jsou speciálními výrazy rovnice (4.4). Co platí pro rovnici (4.4) tedy platí i pro obě předešlé rovnice. Nyní se budeme zajímat tím, zda existuje řešení, řekneme si, co je to maximální řešení atd.

Následující dvě věty uvedeme bez důkazů. Když i v příští době uvedeme větu bez důkazu, nebudeme na to již upozorňovat, ale budeme každou větu bez důkazu označovat *Věta x.y.

***Věta 12.3 [o existenci řešení]** Nechť je dána rovnice (4.4) a nechť $f(x, y)$ je spojitá v $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Potom bodem (x_0, y_0) prochází řešení rovnice (4.4), tj. existuje řešení $y(x) : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, že $y(x_0) = y_0$.

***Věta 12.4 [o jednoznačnosti řešení]** Nechť je dána rovnice (4.4), nechť $f(x, y)$ a $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ jsou spojité v $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Potom bodem (x_0, y_0) prochází právě jedno řešení, tj. pro každé řešení platí, že na δ okolí bodu x_0 je $y_1(x) = y_2(x) = \cdots = y_n(x)$ pro každé x z tohoto okolí.

Definice 12.5 [maximální řešení] Maximálním řešením nazveme řešení, které již nelze více prodloužit, tj. neexistuje žádné řešení, pro které je maximální řešení restrikcí.

Nyní se budeme chtít zaměřit na to, jak najít všechny maximální řešení rovnice (4.4). Budeme-li mít rovnici (4.4) a $f(x, y), \frac{\partial}{\partial y}$ budou spojité v celé množině Ω, potom víme, že jsme našli všechna maximální řešení, jelikož každým bodem množiny Ω prochází lokálně jednoznačné řešení.

Zaměřme se nyní, jak rovnice počítat. Již víme, jak počítat rovnice ve tvaru (4.2) a (4.3). Občas jsme schopni se k takovým rovnicím dostat. Jednou z důležitých věcí bude definice homogenní rovnice.

Definice 12.6 [Homogenní rovnice prvního řádu] Nechť je dána rovnice (4.4). Rovnici nazveme homogenní rovnicí, pokud platí $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$ pro každé $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Máme-li tedy rovnici ve tvaru (4.4) a je homogenní, nemůžeme ji vyřešit substitucí $xz(x) = y(x)$. Poté řekneme, že $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Postupně nahradíme v rovnici y', y a dostaneme rovnici se separovanými proměnnými.

Postup při Bernoulliho rovnici jsme si již ukázali - Věta B.

4.1.1 Rekapitulace

Jelikož je tato kapitola delší, je nutné hlubší pochopení základů, které jsme si nyní vysvětlili. Naučili jsme se následující

- Co je to ODR n-tého řádu a její řešení.
- Jak vypadá lineární ODR 1. řádu a jak se řeší.
- Co je to rovnice se separovanými proměnnými a jak se řeší.
- Řekli jsme si o existenci a jednoznačnosti řešení v bodě množiny při daných podmínkách.
- Jak vypadá řešení Bernoulliho a homogenní rovnice.
- Jak napojovat řešení, prodlužovat a řekli jsme si, co je to větvení.

V další části této kapitoly si ukážeme, že lze převádět rovnici n-tého řádu na n rovnice prvního řádu.

4.2 Systém rovnic a rovnice n-tého řádu

Nyní se podíváme na to, jak vypadá systém rovnic a jeho řešení. Prvně si musíme nadefinovat, co to je systém (soustava) ODR prvního řádu.

Definice 12.7 [Systém n ODR 1. řádu] Systémem n ODR prvního řádu máme na mysli

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}). \tag{4.5}$$

Tento zápis je vektorový. uvažujeme, že $y = (y_1, \ldots, y_n)$, tedy se jedná o n rovnic n neznámých funkcí. Platí, že $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n$ a $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Přirozenou počáteční podmínkou definujme vektor

$$\eta = \mathbf{y}(x_0).$$

Zapsáno ve složkách jako $y_i(x_0) = \eta_i$.

Soustavu takových rovnic můžeme řešit například pomocí exponenciály matice. Více o řešení takové soustavy se dozvíte v lineární algebře, kde se na soustavách ODR bude procvičovat exponenciála matice.

Definice 12.8 [rovnice řešená vůči n-té derivaci] Nechť je dána ODR n-tého řádu, tj. rovnice (4.1). Vyjádřeme ji jako rovnici ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{4.6}$$

Tuto rovnici nazveme rovnici n-tého řádu vyřešenou vůči nejvyšší derivaci.

Nyní se podívejme, jak vyřešit rovnici (4.6) pomocí systému n rovnic.

Veta 12.5 [převod rovnice (4.6) na systém (4.5)] Nechť je dána rovnice (4.6). Řekneme, že řešením je funkce $y(x) : I \to \mathbb{R}$, pokud existuje funkce $\mathbf{z} : I \to \mathbb{R}^n$, která splňuje, že $z_i = y^{(i-1)}(x)$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ a pokud tato funkce z řeší systém ODR $z_i' = z_{i+1}$ pro každé $i = 1, \ldots, (n-1)$ a $z_n = f(x, z_1, \ldots, z_{n-1})$.

Počáteční podmínky $\mathbf{z}(x_0) = \eta$ pak odpovídá $\eta_i = y^{(i-1)}(x_0)$.

Důkaz: Chceme dokázat, že pokud $y(x)$ řeší (4.6), potom z splňuje uvedené podmínky. Definujme tedy $z_1 = y(x)$. Máme nadefinováno

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Nyní uvažujme, že $z_1(x) = y(x)$ a $z_2(x) = y'(x)$. Z toho rovnou vidíme, že $z_2 = z_1'$. Takto dojdeme až k $z_n = z_{n-1}'$. Finálně víme, že $z_n = y^{(n-1)}$, tedy

$$z_n' = y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

□

Nyní tedy víme další věc - že rovnici řešenou vůči n-té derivaci můžeme nahradit soustavou n diferenciálních rovnic, která se dá vyřešit pomocí exponenciály matice. Řešení pomocí exponenciály matice, jak již bylo řečeno, že se dozvíte v algebře, se provádí pomocí metody $\left(e^{Ax}\right)' = Ae^{Ax}$, kdy A je matice $n \times n$. Z toho vyplývá, že $\mathbf{y}(x) = \exp(tA)\mathbf{y}(x_0)$.

4.3 Lineární ODR

V další podkapitole se podíváme na to, jak se řeší lineární ODR n-tého řádu. Nejprve si však musíme definovat, jak taková rovnice vypadá. Po její definici se podíváme na vlastnosti jejích řešení a pak si opět ukážeme, jak se takové rovnice řeší.

Definice 12.9 [Lineární ODR n-tého řádu] Lineární ODR n-tého řádu máme na mysli rovnici

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)} = a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \tag{4.7}$$

kdy $a_k(x)$ nazýváme koeficienty rovnice a $f(x)$ označujeme jako pravou stranu rovnice.

Nyní ještě budeme chtít vědět, že nějaká funkce má první, druhou nebo n-tou derivaci. Abychom mohli v předpokladech lehce uvádět, že nějaká funkce má n-tou derivaci, pak budeme značit, že $y(x) \in C^n(I)$. Toto znamená, že fce $y(x)$ má až n-tou derivaci pro každý prvek z množiny I.

Klíčový předpoklad Když nadále budeme psát, že platí P, pak to znamená, že všechny koeficienty $a_k(x)$ jsou spojitými funkcemi proměnné x.

Nyní budeme chtít zjistit nějaké vlastnosti řešení takové rovnice, která splňuje P.

***Věta 12.6 [Jednoznačnost řešení L-ORD]** Nechť je dána rovnice (4.7) a nechť platí P. Nechť je dále $x_0 \in I$ a nechť je dána počáteční podmínka $\eta \in \mathbb{R}^n$. Potom existuje právě jedna funkce $y(x) \in C^n(I)$, která je řešením rovnice (4.7) na celém intervalu I a splňuje počáteční podmínky $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})(y^{(i-1)}(x_0) = \eta_i)$.

Pro další postup budeme používat označení

$$\mathcal{L}(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}.$$

Také si označme, že homogenní úlohou v druhém slova smyslu bude rovnice (4.7) v situaci, kdy $f(x) = 0$, tedy platí, že $\mathcal{L}(y) = 0$.

Věta 12.7 [prostor řešení homogenní úlohy] Nechť je dána homogenní rovnice $\mathcal{L}(y) = 0$ a nechť platí P. Potom množina všech řešení homogenní úlohy tvoří lineární podprostor dimenze n v prostoru $C^n(I)$.

Důkaz: Máme tedy zobrazení $\mathcal{L} : y \to \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)}$. Tvrdíme, že množina všech $y(x)$ tvoří lineární prostor, tedy zobrazení musí být lineární. Důkaz tohoto provedeme dosazením podle definice lineárního zobrazení:

$$\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)(y_1 + y_2)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) y_1^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) y_2^{(n-k)}$$

$$\mathcal{L}(\alpha y) = \sum_{k=0} \alpha a_k(x) y^{(n-k)} = \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(n-k)}$$

Využíváme linearity derivace - $(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'$.

Dále definujme prostor

$$\mathcal{H} = \{y \in C^n(I); \mathcal{L}(y) = 0\} = \ker(\mathcal{L})$$

Jádro zobrazení $\mathcal{L}$ tvoří také vektorový prostor - díky větě známé z lineární algebry. Nyní musíme dokázat, že $\dim(\mathcal{H}) = n$ tedy dimenze jádra $\mathcal{L}$ je n. Ukažme tedy, že $\phi : \mathbb{R}^n \to C^n(I)$ je izomorfismem - zobrazení je prosté a surjektivní - bijektivní. To poté znamená, že $\dim R^n = \dim \mathcal{H} = n$.

Máme tedy zobrazení $\phi : \mathbb{R}^n \to C^n(I)$. Můžeme si zvolit x_0 libovolně z I, potom bude platit $\phi : \eta \to y(x)$.

!!!DOKONČIT DŮKAZ!!!

$\square$

Definice 12.10 [F.S.] Fundamentálním systémem (dále jen F.S.) máme na mysli libovolnou bázi prostoru $\mathcal{H}$.

Věta 12.8 [množina všech řešení L-ORD] Nechť je dána rovnice (4.7) a nechť platí P. Pak množinu všech řešení můžeme zapsat jako

$$\mathcal{N}_f = \{y_p + y | y \in \mathcal{H}\},$$

kdy y_p je tzv. partikulární (pevně zvolené) řešení rovnice (4.7).

Důkaz: Uvažme, že máme množinu všech řešení, takovou množinu můžeme zapsat následovně:

$$Y = \{y \in C^n(I) | \mathcal{L}(y) = f\}.$$

Nyní chceme dokázat, že $Y = \mathcal{N}_f$. Důkaz rovnosti množin se dělá pomocí dvou inkluzí $\subset, \supset$. Máme tedy rovnici

$$\{y \in C^n(I) | \mathcal{L}(y) = f\} = \{y_p + y | y \in \mathcal{H}\}$$

Nejprve uvažujme, že máme $\overline{y} \in \mathcal{N}_f$. Potom $\mathcal{L}(\overline{y}) = \mathcal{L}(y_p) + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(y_p)$. Víme, že $\mathcal{L}(y_p) = f$, jelikož y_p je partikulární řešení a $\mathcal{L}(y)$ je pro každé $y \in \ker \mathcal{L}$ rovno nule.

Nyní uvažujeme, že $\overline{y} \in Y$. Naším cílem je nyní ukázat, že při pevně daném y_p vždy najdeme $y \in \ker \mathcal{L}$, aby $\mathcal{L}(y) = f$. Definujme si tedy $y := \overline{y} - y_p$ a naším cílem bude dokázat, že zobrazení takového y bude vždy nulové. $\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\overline{y}) - \mathcal{L}(y_p) = f - f = 0$, tedy naše hypotéza se ukázala jako správná, jelikož takové $y \in \mathcal{H}$.

□

Z této věty nám krásně vyplývá, že je-li y_p partikulárním řešením, pak obecné řešení rovnice můžeme napsat jako

$$y(x) = y_p(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k y_k(x),$$

když $y_k(x) \in \mathcal{H}$ a zároveň a_k jsou jakékoliv libovolné konstanty.

4.4 Jak řešit obecnou L-ODR, když známe F.S.

Tato podkapitola bude krátká. Ukážeme si zde řešení pomocí variace konstant.

Lemma 12.2 [O regulárnosti matice U] Nechť je dána homogenní úloha $\mathcal{L}(y) = 0$, nechť platí P a nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je libovolný fundamentální systém této úlohy. Definujme matici pro $x \in I$

$$U(x) = \{U_i j(x)\}_{i,j=1}^{n},$$

když platí, že

$$U_i j(x) = y_j^{(i-1)}(x).$$

Potom tato matice je regulární pro každé $x \in I$.

Důkaz:

DODĚLAT DŮKAZ!!!

□

Věta 12.9 [Variace konstant] Je dána rovnice (4.7) a platí P. Nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je F.S. Nechť $c_1(x), \dots, c_n(x)$ splňují soustavu

$$\begin{aligned}
c_1'(x)y_1(x) + c_1'(x)y_2(x) + \dots + c_1'(x)y_3(x) &= 0\\
c_1'(x)y_1'(x) + c_1'(x)y_2'(x) + \dots + c_1'(x)y_3'(x) &= 0\\
&\vdots\\
c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_1'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \dots + c_1'(x)y_3^{(n-2)}(x) &= 0\\
c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_1'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_1'(x)y_3^{(n-1)}(x) &= \frac{f(x)}{a_0(x)}.
\end{aligned}$$

Potom je řešením rovnice (4.7) funkce

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x).$$

DODĚLAT DŮKAZ!!!

□

4.5 L-ODR s konstantními koeficienty

V této subkapitole si ukážeme, co je to rovnice s konstantními koeficienty a jak takovou rovnici řešit. Prvně si takovou rovnici nadefinujme:

Definice 12.11 [L-ODR s konstantními koeficienty] Nechť a_k jsou konstanty. Rovnici

$$\mathcal{K}(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)} = f(x) \tag{4.8}$$

nazveme lineární ODR s konstantními koeficienty Odpovídající homogenní úloha poté vypadá

$$\mathcal{K}(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)} = 0. \tag{4.9}$$

Důležitou myšlenkou, proč zavádět rovnici s konstantními koeficienty, je možnost nalézání řešení v podobě $y(x) = \exp(\lambda x)$, kdy λ je nějaké číslo. Je vidět, že

$$\mathcal{K}\left(e^{\lambda x}\right) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k}.$$

Definice 12.12 [Charakteristický polynom rovnice] Charakteristickým polynomem rovnice (4.8) nazveme polynom

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k}.$$

Je vidět, že bude-li λ_0 kořenem charakteristického polynomu, potom to znamená, že funkce $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ je řešením rovnice (4.9). Množinu všech kořenů charakteristického polynomu bychom mohli nazvat fundamentálním systémem. Znamená to tedy, že dimenze řešení rovnice bude vždy maximálně n.

Lemma 12.3 [Lemma pro $x^l e^{\lambda x}$] Nechť je dán operátor $\mathcal{K}(y)$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Potom $(\forall l \in \mathbb{N}_0)$

$$\mathcal{K}\left(x^l e^{\lambda x}\right) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} p^{(k)}(\lambda) x^{l-k}.$$

Důkaz: Stačí dosadit - použít operátor na funkci $e^{\lambda x}$:

$$\mathcal{K}\left(e^{\lambda x}\right) = p(\lambda) e^{\lambda x}$$

Nyní rovnici zderivujeme l krát dle λ. Na levé straně dostaneme

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l \mathcal{K}\left(e^{\lambda x}\right) = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l \sum_{k=0}^{n} a_k \left(e^{\lambda x}\right)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l e^{\lambda x}\right)^{(n-k)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^l e^{\lambda x}\right)^{(n-k)} = \mathcal{K}\left(x^l e^{\lambda x}\right)$$

Nyní zderivujme i pravou stranu.

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l e^{\lambda x} p(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} p^{(i)}(\lambda) x^{l-i} e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(\lambda) x^{l-i}$$

Rozepsání l-té derivace součinu jsme udělali dle Leibnitzova pravidla pro l-tou derivaci součinu.

□

Lemma 12.4 [O nulových koeficientech] Nechť λ_i jsou pro všechna i navzájem různá čísla a nechť $q_i(x)$ jsou pro všechna i polynomy. Jestliže poté $\sum_{k=0}^{n} q_k(x) e^{\lambda_k x} = 0$, tak potom $(\forall i = 1, \ldots, n)(q_i(x) = 0)$.

DODĚLAT DŮKAZ!!!

□

Nyní jsme si připravili půdu pro zjištění fundamentálního systému pro rovnici s konstantními koeficienty.

Věta 12.10 [F.S. pro $\mathcal{K}(y) = 0$] Nechť je dán operátor $\mathcal{K}(y)$ a nechť $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Nechť λ_j, když $j = 1, \ldots, s$ jsou jeho kořena a n_j jsou odpovídající násobnosti kořenů. Potom všechny funkce

$$x^l e^{\lambda_j x}, j = 1, \ldots, s; l = 0, \ldots, (n_j - 1)$$

tvoří fundamentální systém homogenní úlohy (4.9).

DODĚLAT DŮKAZ!!!

□

4.6 Rovnice se speciální pravou stranou

V této poslední části kapitoly o diferenciálních rovnicích se budeme zabývat rovnicí se speciální pravou stranou. Ukážeme si, že v případě takových rovnic lze nalézt řešení daleko snáze než u obyčejné lineární rovnice n-tého řádu.

Definice 12.12 [Rovnice se speciální pravou stranou] Nechť je dán operátor $\mathcal{K}(y)$ a nechť $q(x)$ je polynom. Potom rovnici

$$\mathcal{K}(y) = q(x) e^{\lambda_0 x} \tag{4.10}$$

nazveme rovnicí se speciální pravou stranou.

Věta 12.11 [Řešení rovnice se speciální pravou stranou] Nechť je dána úloha (4.10) a označme stupeň polynomu $q(x)$ jako m. Mocnost vlastního čísla λ_0 označme k. Potom existuje polynom $r(x)$ stupně m takový, že řešením rovnice je funkce $y(x) = x^k r(x) e^{\lambda_0 x}$.

DODĚLAT DŮKAZ!!!

□

Kapitola 5

Metrické prostory

V této kapitole se budeme chtít seznámit s tím, co jsou to metrické prostory, jak napovídá název kapitoly. Prvně si budeme muset určit, co to je metrika a poté budeme zkoumat vlastnosti množin v metrických a normovaných vektorových prostorech. Poté budeme chtít zjistit vlastnosti funkcí, které zobrazují obecně jednu množinu z metrického prostoru na jinou množinu jiného metrického prostoru. V poslední části se podíváme na vlastnosti prostoru $\mathbb{R}^n$.

5.1 Úvod do metrických prostorů

Nejprve si ukažme, co to je metrika. Metrikou myslíme obecně něco, čím měříme vzdálenost mezi dvěma prvky nějaké množiny. Metrickým prostorem pak budeme myslet zřejmě právě množinu, na které budeme moci používat metriku. Více nám to objasní následující definice.

Definice 13.1 [Metrický prostor] Metrickým prostorem máme na mysli dvojici (X, ρ), kdy X je nějaká libovolná množina a funkce $(x, y) \to \rho(x, y)$ nazýváme metrikou, pro kterou platí:

- $(\forall x, y \in X)(\rho(x, y) \geq 0)$ s tím, že $(\rho(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$
- $(\forall x, y \in X)(\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- $(\forall x, y, z \in X)\,(\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y))$

Dále definujme normovaný metrický prostor jako prostor, kdy je metrikou norma, tedy $\rho(x, y) = \|x-y\|$. Normovaným vektorovým prostorem označíme metrický prostor, kdy metrikou je norma a množinou X je vektorový prostor.

Máme tedy již definovaný metrický (normovaný) prostor i vektorový normovaný prostor. Definovali jsme si metriku. V normovaných prostorech máme metriku definovanou jako normu. Dobré je uvědomit si, že norma může být vyjádřena různými způsoby. Zřejmě nejznámější je Eukleidovská norma

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2},$$

když $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$. Uvažujeme, že $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Jinou normou může být například „supremová“ norma pro $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\}.$$

5.2 Množiny v metrických prostorech

V této kapitole si ukážeme, jak pracovat s množinami, které nejsou pouze podmnožinou reálných čísel. Jistě všichni již pochopili, že klíčovým pojmem je *okolí bodu*. Budeme-li mít nějaký bod z množiny, kupříkladu $x \in X$, budeme chtít určitě okolí bodu x.

Jelikož již známe metriku a pohybujeme se v metrickém prostoru, můžeme vyslovit následující definici. Pozor ale, mimo metrický prostor tato definice nemá smysl.

Definice 13.2 [okolí bodu] Nechť je dán metrický prostor (X, ρ) a nechť je dán bod $x \in X$. Potom kruhovým δ-okolím bodu x definujme množinu

$$U_X(x, \delta) = \{y \in X | \rho(x, y) < \delta\}$$

a prstencovým δ-okolím bodu x rozumíme množinu

$$P_X(x, \delta) = \{y \in X | 0 < \rho(x, y) < \delta\}.$$

S pojmem okolí nyní můžeme nadefinovat různé druhy množin. Prvně si objasníme, co jsou to otevřené a uzavřené množiny. Již z dřívějších dob je všem jistě znám pojem otevřený či uzavřený interval. Jak však definovat něco podobného u obecné množiny? To objasní další definice.

Definice 13.3 [otevřená, uzavřená množina] Nechť je dán metrický prostor (X, ρ) a nechť je dána podmnožina $A \subset X$. Řekneme, že množina je otevřená, pokud

$$(\forall x \in A)(\exists \delta > 0)(U_X(x, \delta) \subset A).$$

Množinu A označíme za uzavřenou právě tehdy, když platí, že doplněk množiny A, tedy $A^c = X \setminus A$, je otevřenou množinou.

Říkáme, že prázdná množina je otevřenou i uzavřenou množinou - z definice si zkuste rozmyslet sami, proč tomu tak je. Nyní se pojďme podívat na vlastnosti otevřených a uzavřených množin.

Věta 13.1.a [vlastnosti otevřených množin] Nechť je dán metrický prostor (X, ρ). Potom

(1) $X, \emptyset$ jsou otevřené množiny

(2) A_α jsou otevřené $\forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ je otevřená

(3) $A_1, \ldots, A_n$ jsou otevřené $\Rightarrow \bigcap_{k=1}^n A_k$ je otevřená

DODĚLAT DŮKAZ!!!

$\square$

Věta 13.1.b [vlastnosti uzavřených množin] Nechť je dán metrický prostor (X, ρ). Potom

(1) $X, \emptyset$ jsou uzavřené množiny

(2) $A_1, \ldots, A_n$ jsou uzavřené $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k$ je uzavřená

(3) A_α jsou uzavřené $\forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ je uzavřená

DODĚLAT DŮKAZ!!!

□

Nyní bychom chtěli definovat uzavřenou množinu i jinak než jen tím, že její doplněk je otevřená množina. To uděláme ekvivalentní definicí - pomocí posloupnosti. Nejprve si nadefinujme limitu posloupnosti a poté tedy určeme ekvivalentní definicí, jaké vlastnosti náleží uzavřené množině.

Definice 13.4 [Limita posloupnosti] Nechť (X, ρ) je metrický prostor a nechť $x_n \in X$ pro každé n přirozené. Řekneme, že posloupnost x_n má limitu v bodě x_0 právě tehdy, když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(x_n \in U_X(x_0, \varepsilon))$$

Věta 13.2 [uzavřená množina pomocí posloupnosti] Nechť je (X, ρ) metrický prostor a nechť $F \subset X$. Potom je ekvivalentní, že F je uzavřená množina právě tehdy, když pro $x_n \in F$, že $x_n \to x_0$ platí, že $x_0 \in F$.

Důkaz: Budeme ověřit ekvivalenci, tedy musíme ověřit implikace z obou dvou stran.

Prvně uvažujeme sporem, že F je uzavřená a chceme dokázat, že pokud $x_n \in F$, potom $x_0 \in F^c$. Víme, že pokud $x_0 \in F^c$, potom $(\exists \delta > 0)(U_X(x_0, \delta) \subset F^c)$, jelikož F^c je otevřená množina. Pro toto δ musí také platit, že $U_X(x_0, \delta) \cap F = \emptyset$. Z definice limity víme, že $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow x_n \in U_X(x_0, \delta)$. Toto musí platit pro každé δ, a proto nemůže platit, že $U_X(x_0, \delta) \cap F = \emptyset$. Tím jsme došli ke sporu, čili jsme dokázali první implikaci.

Druhou implikaci budeme řešit obratem. Tedy místo (2) $\Rightarrow$ (1) dokážeme $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$. Tedy dokážeme, že pokud F není uzavřená, potom $x_0 \notin F$, když $x_n \to x_0$. Když $x_0 \notin F$, tak potom $x_0 \in F^c$.

DODĚLAT DŮKAZ!!!

□

Definice 13.4 [uzávěr a hranice množiny] Nechť (X, ρ) je metrický prostor a nechť $A \subset X$. Řekneme, že uzávěrem množiny A rozumíme množinu

$$\overline{A} = \{x \in X | (\forall \delta > 0)(U_X(x, \delta) \cap A \neq \emptyset)\}.$$

Hranicí uzávěru rozumíme množinu

$$\partial A = \{x \in X | (\forall \delta > 0)((U_X(x, \delta) \cap A \neq \emptyset) \wedge (U_X(x, \delta) \cap A^c \neq \emptyset))\}.$$

Věta 13.3 [Vlastnosti uzávěru] Nechť (X, ρ) je metrický prostor a nechť $A, B \subset X$. Potom platí:

(1) $(A \subset B) \Rightarrow (\overline{A} \subset \overline{B})$ a $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $\overline{A}$ je uzavřená množina

(3) $A \subset \overline{A}$ a $A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ je uzavřená

(4) $\exists x_0 \in \overline{A}$ takové, že pro $x_n \in A$ platí $x_n \to x_0$, když $n \to \infty$

Důkaz: Důkaz rozdělíme dle znění věty na čtyři části:

DODĚLAT DŮKAZ!!!

□

Věta 13.4 [Vlastnosti hranice] Nechť platí, že (X, ρ) je metrický prostor a nechť $A \subset X$. Potom

(1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} \Rightarrow \partial A = \partial A^c$

(2) ∂A je uzavřená množina - $\overline{A} = A \cup \partial A$

(3) A je uzavřená $\Leftrightarrow \partial A \subset A$, A je otevřená $\Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$

DODĚLAT DŮKAZ!!!

$\square$

Definice 13.5 [vnitřek, vnějšek množiny] Nechť (X, ρ) je metrický prostor a nechť $A \subset X$. Potom vnitřek definujeme jako

$$\mathbf{int}A = \{x \in X | (\forall \delta > 0)(U_X(x, \delta) \subset A)\}$$

a vnějšek jako

$$\mathbf{ext}A = \{x \in X | (\exists \delta > 0)(U_X(x, \delta) \cap A = \emptyset)\}.$$

5.3 Funkce v metrických prostorech

V této sekci se budeme zabývat vlastnostmi funkcí, které se většinou zapsat jako $f : X \to Y$, kdy $(X, \rho), (Y, \sigma)$ jsou metrické prostory.

Nejprve si zadefinujeme spojitou funkci a pak se podíváme na vlastnosti zobrazení spojité funkce. Obecně budeme studovat spojitost funkce na metrickém prostoru. Poté si nadefinujeme i limitu a budeme zkoumat vztahy mezi spojitostí a limitou funkce.

Definice 13.6 [spojitost funkce v bodě] Nechť $(X, \rho), (Y, \sigma)$ jsou dva metrické prostory a nechť je definována funkce $f : X \to Y$. Řekneme, že funkce je spojitá v bodě $x_0 \in X$ právě tehdy, kdy

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_X(x_0, \delta))(f(x) \in U_Y(f(x_0), \varepsilon))$$

Řekneme, že funkce je spojitá na intervalu $I \in X$, pokud je spojitá v každém bodě intervalu I.

Jen krátce si nyní připomeneme, co máme na mysli, když mluvíme o vzoru množiny. Máme zavedené označení pro inverzní funkci f_{-1} k funkci f, bude důležité, aby se toto značení nepletlo s funkcí f^{-1}. Dejme tomu, že máme funkci $f : X \to Y$ a řekneme, že vzorem množiny $B \in Y$ je množina

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}.$$

Kupříkladu vzorem pro funkci $y = f(x) = x^2$ na množině $[0, 1)$ je množina $(-1, 1)$. Znalost vzoru budeme potřeboval v další větě.

Věta 13.5 [vzory spojité funkce] Nechť $(X, \rho), (Y, \sigma)$ jsou metrické prostory a nechť $f : X \to Y$. Potom je ekvivalentní:

(1) f je spojitá

(2) Pro každou $G \in Y$ otevřenou je $f^{-1}(G) \in X$ také otevřená množina

(3) Pro každou $H \in Y$ uzavřenou je $f^{-1}(H) \in X$ také uzavřená množina

Důkaz: Prvně uvažujeme, že f je spojitá a chceme ukázat, že vzor otevřené množiny je také otevřená množina, tj. implikace (1) $\Rightarrow$ (2). Definujme si $A := f^{-1}(G)$. Poté musí platit, že $(\forall x_0 \in A)(y_0 = f(x_0) \in G)$. Víme, že v každém x_0 je f spojitá, tedy

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_X(x_0, \delta))(f(x) \in U_Y(f(x_0), \varepsilon))$$

Také víme, že G je otevřená, a tedy musí platit, že $(\forall f(x_0) \in G)(\exists \varepsilon > 0)(U_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset G)$. Z toho ihned vyplývá (díky spojitosti), že vždy existuje $\delta > 0$ taková, že $U_X(x_0, \delta) \subset A$, což je definice otevřené množiny. Množina $A := f^{-1}(G)$ je tedy otevřená.

Nyní bychom se chtěli zabývat opačnou implikací, tedy implikací (2) $\Rightarrow$ (1). Víme tedy, že množina G i množina $A := f^{-1}(G)$ jsou otevřené. Tedy platí, že $(\forall x_0 \in A)(\exists \delta > 0)(U_X(x_0, \delta) \subset A)$ a také $(\forall f(x_0) \in A)(\exists \varepsilon > 0)(U_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset G)$. Z toho vyplývá, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(U_X(x_0, \delta) \subset A \Rightarrow f(U_X(x_0, \delta)) \subset G)$$
$$\Downarrow$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in U_X(x_0, \delta) \subset A \Rightarrow f(x) \in f(U_X(x_0, \delta)) \subset G)$$

Tímto jsme dokázali ekvivalenci (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Kapitola 6

Funkce více proměnných

V této kapitole se budeme věnovat funkcím více proměnných. Obecně budeme studovat funkce $f(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, které chápeme jako m funkcí n proměnných.

Pro obecné k kladné uvažujeme, že $(\mathbb{R}^k, \rho)$ je metrický prostor daný metrikou $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Prvky prostoru $\mathbb{R}^k$ jsou vektory o k složkách - $\mathbb{R}^k$ je prostor s dimenzí k. Pro takové prvky metrického prostoru uvažujeme implicitně Eukleidovskou normu

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$$

V této kapitole se budeme především věnovat diferenciálnímu počtu funkcí více proměnných.

Definice 14.1 [Parciální derivace, derivace ve směru] Nechť $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a nechť $f : U(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}$. Parciální derivací v bodě $\mathbf{a}$ dle proměnné x_i rozumíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(\mathbf{a} - te^i) - f(\mathbf{a}) \right),$$

když $\mathbf{e}$ je vektor definovaný jako $e^j = 0$ pro $j \neq i$ a $e^j = 1$ pro $j = i$. Nechť je dále vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, potom derivací ve směru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$ máme na mysli

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(\mathbf{a} - t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) \right).$$

Vidíme, že parciální derivace je speciální případ pro derivaci ve směru. Parciální derivace se vlastně počítají tak, že všechny proměnné mimo tu, dle které derivujeme, považujeme za konstanty. Můžeme tak derivovat jednoduše jako podle jedné proměnné. Při derivaci ve směru již musíme využívat definici - limitu, když chceme zjistit, jaká je derivace ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Definice 14.2 [gradient funkce] Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Gradientem funkce f definuje matici $M \times N$

$$\nabla \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{\left\{ \substack{j=1,\dots,m \\ i=1,\dots,n} \right\}}$$

Definice 14.3 [totální diferenciál Nechť je dána funkce $\mathbf{f}U(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}^M$, kde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Totálním diferenciálem funkce funkce $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{a}$ rozumíme lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, které splňuje

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{1}{\mathbf{h}} \left(\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h}) \right) = \mathbf{0}$$

a značíme $L = d\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Ekvivalentně tedy definujeme totální diferenciál jako zobrazení L, které splňuje

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{h}) + z(\mathbf{h}),$$

$$z(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|).$$

Nyní se podíváme na důsledky existence totálního diferenciálu. Poté se více podíváme na vlastnosti parciálních derivací.

Věta 14.1 [Důsledky existence tot. diferenciálu] Nechť $\mathbf{f} : U(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}^m$, kdy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Nechť v bodě $\mathbf{a}$ existuje totální diferenciál. Potom (1) je funkce v bodě $\mathbf{a}$ spojitá a také (2) existují směrové derivace pro každý směr a platí, že $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = [d\mathbf{f}(\mathbf{a})]\mathbf{v}$ pro každý $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz: Nejdříve chceme dokázat spojitost v bodě $\mathbf{a}$. Víme, že funkce je spojitá, pokud platí, že $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. Toto platí právě tehdy, když platí, že

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$$

Víme, že má-li funkce v bodě $\mathbf{a}$ totální diferenciál, potom platí, že

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{h}) + z(\mathbf{h}).$$

Pošleme-li $\mathbf{h}$ k nule, potom $L(\mathbf{0}) = 0$, jelikož L je lineární. Když dále pošleme $\mathbf{h}$ do nuly, potom $\frac{z(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}\|\mathbf{h}\| \to 0$, jelikož $z(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|)$. Proto pravá strana rovnice

$$P.S. = f(\mathbf{a}).$$

Tedy bod (1) jsme dokázali.

Nyní chceme dokázat, že existuje směrová derivace. Následující slet ekvivalentních úprav nám ukáže přímý důkaz:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) &= f(\mathbf{a}) + L(t\mathbf{v}) + z(t\mathbf{v}) \\
\frac{1}{t}[f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})] &= \frac{1}{t}[L(t\mathbf{v}) + z(t\mathbf{v})] \\
\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})] &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}L(t\mathbf{v}) + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}z(t\mathbf{v})] \\
\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})] &= L(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

□

Věta 14.2 [omezené a spojité parciální derivace] Nechť $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, nechť $a \in \mathbb{R}^n$. Potom

(1) Jsou-li parciální derivace omezené na určitém $U(\mathbf{a})$, pak je $\mathbf{f}$ v $\mathbf{a}$ spojitá

(2) Jsou-li parciální derivace v bodě $\mathbf{a}$ spojité, potom v tomto bodě existuje totální diferenciál

Důkaz:

DODĚLAT DŮKAZ!!!

□

Věta 14.3 [totální diferenciál součtu a superpozice] Nechť jsou dány funkce $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a nechť platí, že $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, resp $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$. Potom

(1) $\exists d(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{a}) = d\mathbf{f}(\mathbf{a}) + d\mathbf{g}(\mathbf{a})$

(2) $\exists d(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) = d\mathbf{g}(\mathbf{a}) \circ d\mathbf{f}(\mathbf{a})$

Důkaz:

DODĚLAT DŮKAZ!!!

□