

# Tensor algebra

## 1 Revision

Let  $V, W$  be two vector spaces over  $\mathbb{F}$ ,  $f : V \rightarrow W$  linear mapping,  $B = (v_i)_1^n$  basis of  $V$ ,  $C = (w_i)_1^n$  basis of  $W$ . Then we call the matrix

$$[f]_B^C := \left( [f(v_1)]^C \mid [f(v_2)]^C \mid \dots \mid [f(v_n)]^C \right)$$

a *representation of linear mapping  $f$  with respect to bases  $B$  and  $C$* .

Specially, for the instance of arithmetic vector spaces  $K_n, K_m$  and a linear mapping  $F_A$  between them, the matrix  $A$  of mapping  $F_A$  is identical to the representation  $[F_A]_{K_n}^{K_m}$  of mapping  $F_A$  with respect to canonical bases. This observation is clear from the following

$$[F_A]_{K_n}^{K_m} = \left( [f(e_1)]^{K_m} \mid [f(e_2)]^{K_m} \mid \dots \mid [f(e_n)]^{K_m} \right) = (f(e_1) \mid f(e_2) \mid \dots \mid f(e_n))$$

Furthermore, it is true that

$$[f(v)]^C = [f]_B^C [v]^B,$$

where  $[ \ ]^B : V \rightarrow \mathbb{F}$ , called *representation of vector with respect to basis  $B$* , is a linear mapping which if vector  $v = \sum_{i=1}^n r^i v_i \in V$ , then  $[v]^B := (r_1, r_2, \dots, r_n)^T \in \mathbb{F}^n$ .

Using the above-stated fact where  $f = \text{Id} : V \rightarrow V$ , we get

$$[v]^C = [\text{Id}]_B^C [v]^B.$$

This equation relates the representation of vector  $v$  with respect to basis  $C$  to the representation of the same vector with respect to basis  $B$ . Matrix  $[\text{Id}]_B^C \in \mathbb{F}^{n \times n}$  is called the *transition matrix from basis  $C$  to basis  $B$* .

Last but not least, let us endorse the convention, where

- $e_i$  is the  $i$ -th vector of canonical basis in  $\mathbb{F}^n$  (so-called *arithmetic* vector),
- $e_i$  is the  $i$ -th vector of basis  $B$  in  $V$  (so-called *abstract* vector),
- $e^i$  is the  $i$ -th vector of the dual basis  $B^*$  in  $V^*$  (i.e. linear form).

Further, we'll be using the Einstein's summation notation, where we'll be assuming a sum in places, where we see a pair of the same index; once in the superscript, once in the subscript. For example if  $v \in V$  is a vector with representation  $[v]^B = (v^1, \dots, v^n)^T$ , we can write

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i =: v^i e_i.$$

For that exact reason, we'll be also writing vector coordinates always in the superscript. The rule is exactly opposite when working with elements of dual spaces as we will see later.

## 2 Dual spaces and tensors

Let  $V$  be a vector space of finite dimension  $n$  and  $B = (e_i)_1^n$  its basis. Then  $1 \times n$  matrix  $[\phi]_B^{K_1} = (\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))$  represents  $\phi$  with respect to bases  $B$  in  $V$  and  $K_1 = (1)$  in  $\mathbb{F}^1$ . It is a row vector, which we will label simply as  $[\phi]_B$ . For  $v \in V$  is true that

$$\phi(v) = [\phi]_B^{K_1} [v]^B = [\phi]_B [v]^B.$$

**Definition 2.1.** Vector space  $\text{Hom}(V, \mathbb{F})$  of all linear forms over  $V$  is called a *dual space* of  $V$  and is denoted as  $V^*$ . If  $\dim V = n$  and  $B = (e_i)_1^n$  is basis of  $V$ , then the sequence  $B^* := (e^i)_1^n \subset V^*$ , where  $[e^i]_B := e_i^T$  (i.e.  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ ), is called a *dual basis* of  $B$ .

*Remark.* Starting with the definition above, I would like to endorse the aforementioned notation of superscripts and subscripts.

**Observation.** It is true for the elements of the dual basis  $B^*$  that

$$e^i(v) = e^i(v^j e_j) = v^j e^i(e_j) = v^j \delta_j^i = v^i$$

**Lemma 2.1.** If  $V$  is a vector space over  $\mathbb{F}$  of dimension  $n$  and  $B = (e_i)_1^n$  its basis, the sequence  $B^* := (e^i)_1^n$  is the basis of a dual space  $V^*$  and for all  $\alpha \in V^*$  is true that

$$[\alpha]^{B^*} = (\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_n))^T = ([\alpha]_B)^T =: (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T.$$

The lemma above basically states that for arbitrary basis  $B$  in  $V$  its dual basis  $B^*$  actually is the basis of a dual space  $V^*$ . Furthermore it states that the coordinates of a linear form  $\alpha$  with respect to  $B^*$  is equal to its values on elements of  $B$ , i.e. it is formed by a  $1 \times n$  matrix  $[\alpha]_B$  of the linear mapping  $\alpha$  with respect to bases  $B$  and  $K_1$ . It also solidifies our convention about writing the coordinates  $\alpha_i$  of a covector  $\alpha$  with a subscript (instead of a superscript as we use it for vector coordinates).

*Důkaz.* For arbitrary  $v \in V$  is true that

$$\alpha(v) = [\alpha]_B [v]^B = \alpha_i v^i = \alpha_i e^i(v) = (\alpha_i e^i)(v).$$

Thus the elements  $\alpha$  and  $\alpha_i e^i$  from  $\text{Hom}(V, \mathbb{F})$  are equal and covector  $\alpha$  belongs to the linear span of a sequence of covectors  $(e^1, \dots, e^n)$ . Therefore  $B^*$  generates  $V^*$ . Further because  $\dim V^* = \dim \text{Hom}(V, \mathbb{F}) = n$  according to an important theorem about dimensions of homomorphism spaces, dual basis  $B^*$  must be a basis of  $V^*$ .  $\square$

**Example.** Let  $V = \mathbb{F}^n$ ,  $K$  its canonical basis with elements  $\epsilon_i = e_i$  and  $K^* := \{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$  a basis dual to  $K$ . Mapping  $\epsilon^i$  thus assigns any vector  $x \in V$  its  $i$ -th component.

If  $B$  and  $B'$  are two bases of  $V$  and  $R := [Id]_{B'}^B$  is a transition matrix from  $B$  to  $B'$ , then

$$e'_j = \sum_{i=1}^n e_i(R)_{ij} =: R_j^i e_i,$$

where the first equation comes from the definition of a transition matrix and the second expands our summation convention. We add over the row index of the transition matrix and the subscript of the basis vector  $e_i$ . From now on let us write the row index of any matrix in the superscript position and leave out the sum over  $i$ . Column index will be left in the subscript position, because

it corresponds to the superscript position of the basis vector  $e'_j$  on the left side. The defining equation of the transition matrix  $[v]^B = [\text{Id}]_{B'}^B [v]^{B'}$  then looks as follows

$$v^j = \sum_{i=1}^n (R)_{ji} v'^i \equiv R_i^j v'^i,$$

or

$$v'^j = (R^{-1})_i^j v^i.$$

**Lemma 2.2.** Let  $B^* = (e^i)_1^n$  and  $B'^* = (e'^i)_1^n$  be bases of  $V^*$  dual to bases  $B, B'$  of  $V$ . Further let  $R$  be transition matrix from  $B$  to  $B'$  and  $\alpha \in V^*$ . Then

$$\begin{aligned} e'^i &= (R^{-1})_j^i e^j, \\ \alpha'^i &= R_i^j \alpha_j. \end{aligned}$$

*Důkaz.* If  $v \in V$ , then  $v'^i = (R^{-1})_j^i v^j$ . Since  $v^j = e^j(v)$ ,  $v'^i = e'^i(v)$ , we get

$$e'^i(v) = (R^{-1})_j^i e^j(v) = ((R^{-1})_j^i e^j)(v),$$

which directly shows the equality of mappings  $e'^i = (R^{-1})_j^i e^j$ . Similarly

$$\alpha'_i = \alpha(e'_i) = R_i^j \alpha(e_j) = R_i^j \alpha_j.$$

□

### 3 Czech version

**Lemma 3.1.** Necht  $M^* = \{e^1, \dots, e^n\}, M'^* = \{e'^1, \dots, e'^n\}$  jsou báze  $V^*$  duální k bázím  $M, M'$ ,  $A$  je matice přechodu od  $M$  k  $M'$ ,  $\alpha \in V^*$ . Potom

$$e'^i = (A^{-1})_j^i e^j, \quad \alpha'_i = A_i^j \alpha_j. \quad (1)$$

*Důkaz.* Ať  $v \in V$  je libovolný vektor. Pro prvky bází platí  $e'_i = A_i^j e_j$ . Jelikož vektor se transformací báze nemění, můžeme psát<sup>1</sup>

$$v = v^j e_j = v'^j e'_j = v'^j A_j^p e_p = v'^p A_p^j e_j.$$

Aby byla rovnost dodržena, musí platit  $v^j = v'^p A_p^j$ . Jelikož matice přechodu je vždy regulární (existuje inverse), můžeme ekvivalentně psát

$$v^j (A^{-1})_j^i = v'^p A_p^j (A^{-1})_j^i = v'^p \delta_p^i = v'^i.$$

Pro každý vektor  $v \in V$  platí  $v^i = e^i(v)$  a  $v'^i = e'^i(v)$ , speciálně  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ . Výše ukázanou rovnost lze tedy přepsat jako  $e'^i(v) = (A^{-1})_j^i e^j(v)$  neboli rovnost zobrazení

$$e'^i = (A^{-1})_j^i e^j.$$

---

<sup>1</sup>Během důkazu mnohokrát zaměňuji indexy, abych došel ke kýženým vztahům ve stejném tvaru. Písmeno indexu je samozřejmě otevřené volbě.

Podobně pro libovolné  $\alpha \in V^*$  platí

$$\alpha(v) = \alpha_j e^j(v) = \alpha'_j e'^j(v) = \alpha'_j (A^{-1})^j_i e^i(v) = \alpha'_p (A^{-1})^p_j e^j(v),$$

platí tedy nutně  $\alpha_j = (A^{-1})^p_j \alpha'_p$ , tudíž ekvivalentně  $A^j_i \alpha_j = A^j_i (A^{-1})^p_j \alpha'_p = \delta^p_i \alpha'_p = \alpha'_i$ . Závěrem tedy

$$\alpha'_i = A^j_i \alpha_j.$$

□

*Remark.* Doposud odvozené vztahy pro transformace můžeme shrnout do tabulky:

transformace	maticově	tensorově
prvky báze $V$	$e'_r = \sum_b e_b(A)_{br}$	$e'_r = A^b_r e_b$
prvky báze $V^*$	$e'^r = \sum_b (A^{-1})_{rb} e^b$	$e'^r = (A^{-1})^r_b e^b$
souřadnice vektoru	$(v)^T_{M'} = (v)^T_M (A^{-1})^T$	$v'^r = (A^{-1})^r_b v^b$
souřadnice kovektoru	$(\alpha)^T_{M'} = (\alpha)^T_M A$	$\alpha'_r = A^b_r \alpha_b$

Z tabulky je vidět, že objekty s indexem dole se transformují pomocí matice  $A$ , tzn. *kovariantně*, kdežto objekty s indexy nahoře se transformují pomocí matice  $A^{-1}$ , tzn. *kontravariantně*.

**Definition 3.1.** Necht'  $V, W$  jsou dva vektorové prostory a  $\phi : V \rightarrow W$  je homomorfismus. Potom zobrazení  $\phi^* : W^* \rightarrow V^*$ , definované vztahem

$$\phi^*(\alpha) = \alpha \circ \phi, \quad (2)$$

nazveme *duální homomorfismus* k homomorfismu  $\phi$ .

**Lemma 3.2.** Necht'  $\phi : V \rightarrow W$  je homomorfismus,  $M \subseteq V, N \subseteq W$  jsou báze,  $B = (\phi)_{NM}$  je matice homomorfismu. Potom  $(\phi^*)_{M^*N^*} = B^T$ , a tudíž hodnoty  $\phi$  a  $\phi^*$  jsou stejné.

*Důkaz.* Označme  $M = \{e_i\}$ ,  $N = \{f_a\}$ . Matice  $B$  je definována předpisem

$$\phi(e_i) = \sum_{a=1}^n (B)_{ai} f_a \equiv B^a_i f_a.$$

Z definice duálního homomorfismu dále plyne

$$[\phi^*(f^j)](e_i) = f^j(\phi(e_i)) = B^a_i f^j(f_a) = B^a_i \delta^j_a = B^j_i,$$

ale zároveň platí

$$(B^j_k e^k)(e_i) = B^j_k e^k(e_i) = B^j_k \delta^k_i = B^j_i.$$

Kovektory  $\phi^*(f^j)$  a  $B^j_k e^k$  mají stejné hodnoty na bázi  $M$  a tudíž jsou si rovny (opět využíváme věty o zadání homomorfismů hodnotami na bázi). V tradiční formě tedy přepis

$$\phi^*(f^j) = B^j_k e^k \equiv \sum_{k=1}^n (B^T)_{kj} e^k$$

jasně udává rovnost  $(\phi^*)_{M^*N^*} = B^T$ .

□

## 4 Tensorový součin

**Definition 4.1.** Necht'  $X, Y$  jsou množiny a  $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{F}$  dvě funkce na těchto množinách. Jejich *tensorovým součinem* rozumíme funkci

$$\begin{aligned} f \otimes g : X \times Y &\rightarrow \mathbb{F}; \\ &: (x, y) \mapsto f(x)g(y). \end{aligned}$$

*Remark.* Tensorový součin není komutativní, tedy  $f(x)g(y) \neq f(y)g(x)$  (dokonce opačná operace ani nemusí být definována, pokud  $X \neq Y$ ).

Tensorový součin je komutativní, platí tedy  $((f \otimes g) \otimes h)(x, y, z) = (f \otimes (g \otimes h))(x, y, z)$ , tudíž má smysl psát  $f \otimes g \otimes h$ .

Pro tensorový součin platí

$$((r_1 f_1 + r_2 f_2) \otimes g)(x, y) = r_1 f_1(x)g(y) + r_2 f_2(x)g(y) = r_1(f_1 \otimes g)(x, y) + r_2(f_2 \otimes g)(x, y),$$

tedy že je bilineární<sup>2</sup> (v druhé složce zcela analogicky).

**Example.** Tensorový součin dvou lineárních forem  $\phi : V \rightarrow \mathbb{F}$  a  $\psi : V \rightarrow \mathbb{F}$  je bilineární forma  $\phi \otimes \psi$  splňující

$$(\phi \otimes \psi)(v, w) = \phi(v)\psi(w).$$

Jsou-li  $\phi = e^i$  a  $\psi = e^j$  prvky báze  $M^*$ , pak

$$(e^i \otimes e^j)(v, w) = v^i w^j.$$

**Example.** Je-li  $A \in M_n(\mathbb{F})$  matice, pak

$$(a_{ij} e^i \otimes e^j)(v, w) = a_{ij} v^i w^j$$

je bilineární forma, jejíž matice vzhledem k bázi  $M$  je  $A$ . Jak si můžeme povšimnout, poprvé se setkáváme s výrazem, kde jsou dvojice indexů, přes které se sčítá. Narozdíl od matice přechodu, u níž nás konvence „donutila“ psát řádkový index jako horní a sloupcový jako dolní, u matice bilineární formy musíme psát oba indexy dole.

Tensorový součin  $k$  lineárních forem je  $k$ -lineární forma. Množinu všech  $k$ -lineárních forem na vektorovém prostoru  $V$  označme symbolem  $T_k(V)$ . Pak tensorový součin definuje také zobrazení

$$\otimes : T_p(V) \times T_q(V) \rightarrow T_{p+q}(V).$$

**Lemma 4.1.** Necht'  $M = \{e_1, \dots, e_n\}$  je báze  $V$ . Označme

$$e^{a \dots b} := \underbrace{e^a \otimes \dots \otimes e^b}_q \in T_q(V).$$

Množina

$$(M^*)^q := \{e^{a \dots b} \mid a, \dots, b \in \{1, \dots, n\}\}$$

tvoří bázi prostoru  $T_q(V)$  a  $\forall T \in T_q(V)$  platí

$$T = T_{a \dots b} e^{a \dots b},$$

---

<sup>2</sup>V obecném případě (rozšíření na více činitelů) je tensorový součin multilineární

kde

$$T_{a\dots b} = T(e_a, \dots, e_b)$$

jsou souřadnice  $T$  vzhledem k  $(M^*)^q$ . Pokud  $M' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$  a  $A$  je matice přechodu od  $M$  k  $M'$ , pak

$$\begin{aligned} e'^{a\dots b} &= (A^{-1})^a_r \dots (A^{-1})^b_s e^{r\dots s}, \\ T'_{a\dots b} &= A^r_a \dots A^s_b T_{r\dots s}. \end{aligned}$$

*Důkaz.* Dle definice tensorového součinu

$$e^{a\dots b}(v, \dots, w) = v^a \dots w^b.$$

Pak ale

$$T(v, \dots, w) = T(v^a e_a, \dots, w^b e_b) = T_{a\dots b} v^a \dots w^b = (T_{a\dots b} e^{a\dots b})(v, \dots, w).$$

Vztah platí pro libovolnou  $q$ -tici vektorů  $v, \dots, w$  z  $V$ , takže  $T = T_{a\dots b} e^{a\dots b}$ . Odtud zároveň plyne, že  $(M^*)^q$  generuje  $T_q(V)$ . Pokud by existovala čísla  $S_{a\dots b}$ , pro něž by platilo  $S_{a\dots b} e^{a\dots b} = 0$ , pak po dosazení vektorů  $e_r, \dots, e_s$  od levé strany plyne

$$S_{a\dots b} e^{a\dots b}(e_r, \dots, e_s) = S_{a\dots b} \delta^a_r \dots \delta^b_s = 0,$$

čili všechny koeficienty musí být nulové a  $(M^*)^q$  je také lineárně nezávislá. Z multilinearity tensorového součinu plyne

$$e'^{a\dots b} \equiv e'^a \otimes \dots \otimes e'^b = (A^{-1})^a_r e^r \otimes \dots \otimes (A^{-1})^b_s e^s = (A^{-1})^a_r \dots (A^{-1})^b_s e^{r\dots s}$$

a poslední tvrzení plyne z

$$T'_{a\dots b} = T(e'_a, \dots, e'_b) = T(A^r_a e_r, \dots, A^s_b e_s) = A^r_a \dots A^s_b T_{r\dots s}.$$

□

*Remark.* Pokud  $T_{ab\dots k}$  a  $S_{li\dots t}$  jsou souřadnice  $T \in T_p(V)$  a  $S \in T_q(V)$  vůči  $M$ , pak

$$(T \otimes S)_{ab\dots t} = T_{ab\dots k} S_{li\dots t}$$

jsou souřadnice  $T \otimes S \in T_{p+q}(V)$  vůči stejné bázi.

**Example.** Pokud  $\alpha$  je kovektor, pak se jeho souřadnice transformují jako  $\alpha'_a = A^r_a \alpha_r$ , neboli maticově  $(\alpha)_{M'}^T = (\alpha)_M^T A$ , kde  $(\alpha)_M^T$  je *řádkový* vektor souřadnic  $\alpha$  vůči  $M$ . Srovnáme s transformací souřadnic vektorů  $(v)_M = A(v)_{M'}$ , tedy  $(v)_{M'}^T = (v)_M^T (A^{-1})^T$ . Matici  $(A^{-1})^T$  se říká matice kontragradientní k  $A$ .

**Example.** Pokud  $g$  je bilineární forma, pak se její souřadnice transformují podle vztahu

$$g'_{ab} = A^r_a A^s_b g_{rs}$$

neboli maticově

$$G' = A^T G A,$$

kde interpretujeme souřadnice  $G = (g_{ab})$  jako matici bilineární formy vzhledem k  $M$ .

**Example.** Souřadnice  $T_{abc}$  trilineární formy  $T$  můžeme interpretovat buď jako  $n \times n \times n$  krychličku čísel, nebo jako řádkový vektor matic

$$(T_{1bc}, T_{2bc}, \dots, T_{nbc}) =: (((T_1)_{bc}), ((T_2)_{bc}), \dots, ((T_n)_{bc})).$$

Transformační vztah  $T'_{abc} = A_a^r A_b^s A_c^t T_{rst}$  se pak dá přepsat jako

$$(T'_1, \dots, T'_n) = \left( \sum_{i=1}^n a_{i1} A^T T_i A, \sum_{i=1}^n a_{i2} A^T T_i A, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} A^T T_i A \right).$$

Volba toho, který bude mít „vektorový“ index (ostatní dva mají indexy „maticové“), je samozřejmě volná a záleží pouze na nás, který zvolíme. Zavedení matic  $T_i$  je jenom početní a notační pomůcka, což je zdůrazněno i tím, že jsme v posledním vztahu nepoužili sumační konvenci a zapsali elementy  $a_{ij}$  matice  $A$  tak, jak jsme zvyklí z dřívějších.

## 5 Kovariantní a kontravariantní tenzory

**Theorem 5.1** [Duál duálu]. Nechť  $V$  je vektorový prostor konečné dimenze nad  $\mathbb{F}$ . Pak existuje isomorfismus  $V$  a  $(V^*)^*$ , který nezávisí na volbě báze  $V$ .

*Důkaz.* Nechť  $v \in V$ . Dále definujme homomorfismus  $f_v : V^* \rightarrow \mathbb{F}$  tak, že pro všechna  $\alpha \in V^*$  platí  $f_v(\alpha) = \alpha(v)$ . Platí, že  $f_v$  je lineární forma na  $V^*$ , protože pro všechna  $\alpha, \beta \in V^*$  a pro všechna  $r, s \in \mathbb{F}$  platí

$$f_v(r\alpha + s\beta) = (r\alpha + s\beta)(v) = r\alpha(v) + s\beta(v) = rf_v(\alpha) + sf_v(\beta).$$

Můžeme tedy také definovat zobrazení

$$\begin{aligned} \Phi : V &\rightarrow (V^*)^*; \\ &: v \mapsto f_v, \end{aligned}$$

kteří je též homomorfismem, neboť pro všechny  $v, w \in V$ , pro všechna  $r, s \in \mathbb{F}$  a pro libovolné  $\alpha \in V^*$  platí

$$\begin{aligned} [\Phi(rv + sw)](\alpha) &= f_{rv+sw}(\alpha) = \alpha(rv + sw) \\ &= r\alpha(v) + s\alpha(w) = rf_v(\alpha) + sf_w(\alpha) \\ &= r[\Phi(v)](\alpha) + s[\Phi(w)](\alpha). \end{aligned}$$

Hodnoty zobrazení  $\Phi(rv + sw)$  a  $r\Phi(v) + s\Phi(w)$  se rovnají pro všechna  $\alpha \in V^*$ , musí tedy být totožná.

Dále ověříme, že zobrazení  $\Phi$  je prosté. Podle definic

$$\text{Ker } \Phi = \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\} = \{v \in V \mid \forall \alpha \in V^* : f_v(\alpha) = 0\} = \{v \in V \mid \forall \alpha \in V^* : \alpha(v) = 0\}.$$

Pro každý nenulový vektor  $v$  ale existuje lineární forma  $\alpha$ , pro kterou  $\alpha(v) \neq 0$ . Definujme zobrazení  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{F}$  tak, že  $u + rv \mapsto r$ , kde  $u \in V \setminus \{v\}_l$  a  $r \in \mathbb{F}$ , tedy  $rv \in \{v\}_l$ . Pro tuto formu pro každá  $(u + rv), (w + rv) \in V \setminus \{v\}_l$  a  $s, t \in \mathbb{F}$  platí

$$\begin{aligned} \alpha(s[u + rv] + t[w + rv]) &= \alpha([su + tw] + r(s + t)v) = r(s + t), \\ s\alpha(u + rv) + t\alpha(w + rv) &= sr + tr = r(s + t), \\ \therefore \alpha(s[u + rv] + t[w + rv]) &= s\alpha(u + rv) + t\alpha(w + rv). \end{aligned}$$

Tato identita platí pro všechny hodnoty  $\alpha$ , tudíž  $\alpha$  je homomorfismus z  $V$  do  $\mathbb{F}$ , tj. lineární forma. Ověřili jsme tedy, že pro každý nenulový vektor  $v$  ale existuje lineární forma  $\alpha$ , pro kterou  $\alpha(v) \neq 0$ . Proto  $\text{Ker } \Phi$  musí být nulový podprostor.

Díky větě o dimenzi jádra a obrazu  $\Phi$  víme, že  $\dim V = \dim V^* = \dim(V^*)^*$ . To znamená, že zobrazení  $\Phi$  je isomorfismus. Zobrazení bylo definováno bez výběru báze, čímž je tvrzení dokázáno.  $\square$

*Remark.* Zobrazení  $\Phi$  použité v důkazu předchozí věty se nazývá *kanonický isomorfismus*  $V$  a  $V^*$ . Umožňuje ztotožnit vektory (prvky  $V$ ) a „ko-kovektory“ (prvky  $(V^*)^*$ ) a v jistém smyslu vyhlásit rovnoprávnost vektorů a kovektorů: kovektor je forma na vektorech, vektor je forma na kovektorech. To lze vidět zavedením zobrazení

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* &\rightarrow \mathbb{F}; \\ (v, \alpha) &\mapsto \langle v, \alpha \rangle := \alpha(v) = [\Phi(v)](\alpha) \equiv v(\alpha), \end{aligned}$$

kterému se obvykle říká *párování* vektorů a kovektorů. Přirozená báze  $(M^*)^*$  ve  $(V^*)^*$  je ztotožněná přímo s bází  $M = \{e_1, \dots, e_n\}$  a definici duální báze můžeme pomocí párování zapsat jako

$$\langle e_j, e^i \rangle = \delta_j^i.$$

V souřadnicích se pak párování vektoru  $v$  a kovektoru  $\alpha$  vyjádří vztahem

$$\langle v, \alpha \rangle = \langle v^i e_i, \alpha_j e^j \rangle = v^i \alpha_j \langle e_i, e^j \rangle = v^i \alpha_j \delta_i^j = \alpha^i \alpha_i.$$

*Remark.* Prostory  $V$  a  $V^*$  jsou také isomorfní, protože mají stejnou dimensi. Jeden takový isomorfismus by mohl být: zvolme ve  $V$  bází  $M$  a vektoru  $v \in V$  přiřaďme kovektor  $\alpha \in V^*$ , jehož souřadnice  $(\alpha)_M$  jsou rovny  $(v)_M$ . Takový isomorfismus je však pro každou volbu báze různý, a proto neexistuje žádný kanonický isomorfismus mezi  $V$  a  $V^*$ .

*Remark.* V nekonečné dimenzi není obecně zobrazení  $\Phi$  surjektivní, máme tedy pouze *kanonické vnoření*  $V$  do  $V^*$ .

Chápeme-li vektory jako lineární formy na kovektorech, můžeme definovat prostor  $T^q(V)$  všech  $q$ -lineárních forem na kovektorech, tzv. *multivektorů*. Lze tedy vyřknout obdobu lemmatu 1.2.1 pro případ  $k$ -lineárních forem.

**Lemma 5.2.** Necht'  $M = \{e_1, \dots, e_n\}$  je báze  $V$ . Označme

$$e_{a\dots b} := \underbrace{e_a \otimes \dots \otimes e_b}_q \in T^q(V).$$

Množina

$$M^q := \{e_{a\dots b} \mid a, \dots, b \in \{1, \dots, n\}\}$$

tvoří bázi prostoru  $T^q(V)$  a  $\forall T \in T^q(V)$  platí

$$T = T^{a\dots b} e_{a\dots b},$$

kde

$$T^{a\dots b} = T(e^a, \dots, e^b)$$

jsou souřadnice  $T$  vzhledem k  $M^q(V)$ . Pokud  $M' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$  a  $A$  je matice přechodu od  $M$  k  $M'$ , pak

$$\begin{aligned} e'_{a\dots b} &= A^r_a \dots A^s_b e_{r\dots s}, \\ T'^{a\dots b} &= ((A)^{-1})^a_r \dots ((A)^{-1})^b_s T^{r\dots s}. \end{aligned}$$

**Example.** To be continued