Předmět B2M31DSP/Př.

PS

Přednáška 4 (doplněná verze): Koherenční funkce

Obsah

Koherenční funkce

Definice koherenční funkce - normovaná CPSD

$$\gamma_{yx}(f) = \frac{S_{yx}(f)}{\sqrt{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}}$$

Koherence je komplexní funkce kterou lze využít např. pro měření zpoždění mezi signály šířícími se v disperzním prostředí. Jedná se o normovanou vzájemnou spektrální hustotu

Poznámka: koherenční funkce odpovídá korelačnímu koeficientu[1]

$$r_{yx} = \frac{\sigma_{yx}}{\sqrt{\sigma_x^2}\sqrt{\sigma_y^2}},$$

kde $\sigma_{yx} = E[yx] - E[x]E[y]$, $\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x]$, $\sigma_y^2 = E[y^2] - E^2[y]$

[1] S rozdílem, že $\gamma_{yx} \in \mathbb{C}$, $r_{yx} \in \mathbb{R}$ a korelační koeficent není funkcí frekvence

Modul kvadrátu koherenční funkce – MSC

Pro vyjádření míry korelace signálů často používáme modul kvadrátu koherenční funkce označovaný jako MSC (Magnitude squared coherence)

Definice MSC

$$C_{yx}(f) = MSC_{yx}(f) = |\gamma_{yx}(f)|^2 = \frac{|S_{yx}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)} \in < 0, 1 >$$

MSC je normovaný kvadrát modulu vzájemné spektrální hustoty a je funkcí frekvence

Kvadrát korelačního koeficientu[2]

$$r_{yx}^2 = \frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \in < 0, 1 >$$

není funkce frekvence, nicméně jeho tvar je opět podobný MSC

[2] Normovaný kvadrát vzájemného rozptylu (energie)

Výpočet MSC

Výpočet se provede z **vyhlazených**[3] **odhadů** vlastní $S_{xx}(f), S_{yy}(f)$ a vzájemné $S_{xy}(f)$ spektrální hustoty signálů x a y

$$S_{yx}(f) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} Y_k(f)X_k^*(f)$$

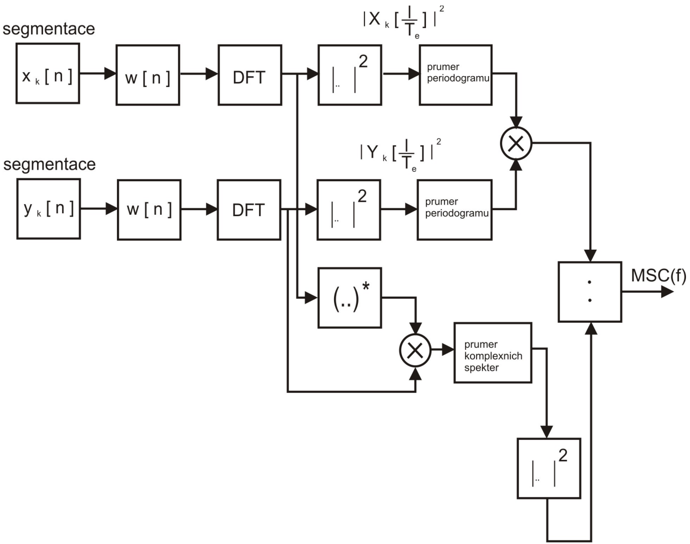
$$S_{xx}(f) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} |X_k(f)|^2$$

$$S_{yy}(f) = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} |Y_k(f)|^2$$

[3] Nevyhlazené odhady spekter poskytnou hodnotu MSC=1

Výpočet MSC

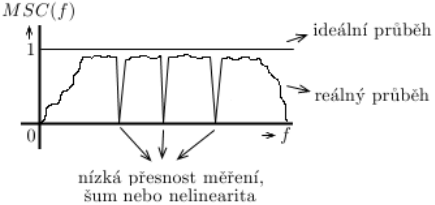
Blokové schéma výpočtu MSC



Použití MSC

MSC je používána

- pro detekci signálu v šumu (např. řeči v šumu)
- pro kontrolu přesnosti měření $H(f)$[4]



Poznámky: MSC lze samozřejmě průměrovat přes vybrané frekvenční pásmo a získat tím jedinou hodnotu. Segmentací signálu lze rovněž získat časový vývoj MSC či jejího průměru[5]. Právě časový vývoj MSC se používá pro detekci signálu v šumu.

[4] Ilustrace MSC na obrázku - tam, kde je hodnota MSC nízká, nelze změřené frekv. charakteristice příliš věřit

[5] „Kohergram“

Vlastnosti MSC

Vlastnosti MSC

- MSC nabývá hodnot z intervalu $< 0, 1 >$
- MSC vypovídá o podobnosti (korelaci) signálů v jednotlivých frekvenčních pásmech (obdoba koeficientu korelace)
- udává míru přesnosti výpočtu frekvenční charakteristiky $H(f)$: relativní chyba měření $\epsilon(|S_{yx}|) = \frac{1}{\sqrt{L.MSC}}$, L je počet realizací pro výpočet PSD S_{xx}, S_{yy} a CPSD S_{yx}
- příčiny nízké hodnoty MSC
  - chyba odhadu = nízký počet průměrovaných realizací nebo nízké spektrální rozlišení[6]
  - podobnost signálů v daném frekvenčním pásmu je nízká[7]
  - systém je nelineární (neex. lin. závislost mezi x a y)
  - při měření je přítomen šum na vstupu či výstupu soustavy
  - jedná se o systém s více vstupy/výstupy (MIMO systém)

[6] Způsobené krátkým oknem

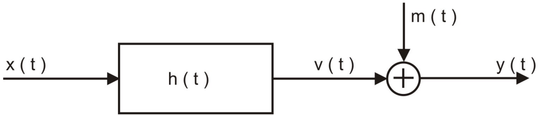
[7] Potom je ale též je nízká přesnost měření frekvenční charakteristiky

Vlastnosti MSC - vliv šumu

Šum na výstupu LTI soustavy

$$y(t) = x(t) * h(t) + m(t) = v(t) + m(t),$$

kde $m(t)$ je šum nekorelovaný se signálem $x(t)$: $E[x(t)m(t+\tau)] = 0$



Vlastnosti MSC - vliv šumu

Šum na výstupu LTI soustavy

Platí[8] (viz Př.1)

$S_v = S_x|H|^2$, kde $H = \frac{S_{yx}}{S_x} = \frac{S_{vx}}{S_x}$

Rovnost $S_{yx} = S_{vx}$ plyne z rovnosti[9] $R_{yx} = R_{vx}$, která platí, je-li šum $m(t)$ nekorelovaný se signálem $x(t)$

Dosazením za $|H|^2$ získáme

$S_v = |\frac{S_{yx}}{S_x}|^2 S_x = MSC_{yx} S_y$ … tedy S_v je ta část S_y, která vzniká působením $x(t)$

a podobně[10]

$S_m = S_y - S_v = S_y(1 - MSC_{yx})$ … S_m je část S_y vznikající působením šumu $m(t)$

Úpravou předchozí rovnice získáme vztah pro MSC: $MSC_{yx}(f) = 1 - \frac{S_m(f)}{S_y(f)}$

[8] Vynecháme argument funkcí, tedy místo $S_v(f)$ použijeme S_v, apod.

[9] Důkaz: $E[y(t+\tau)x(t)] = E[x(t)(v(t+\tau) + m(t+\tau)] = E[x(t)v(t+\tau)]$

[10] Samozřejmě platí $S_y = S_v + S_m$

Vlastnosti MSC - vliv šumu

Šum na výstupu LTI soustavy

$\boxed{MSC_{yx}(f) = 1 - \frac{S_m(f)}{S_y(f)}}$ ... šum na výstupu tedy snižuje hodnotu MSC, neboť pro $S_m(f) = 0$ je $y(t) = v(t) = x(t) * h(t)$ a $MSC_{yx}(f) = 1$

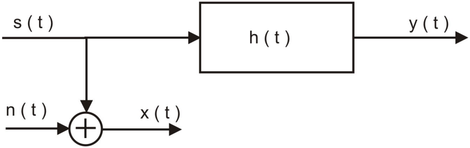
Tento výsledek mimo jiné ukazuje, že hodnota MSC signálu mezi vstupem $x(t)$ a výstupem $y(t)$ LTI filtru není filtrací změněna[11]

[11] Tvrzení platí za předpokladu, že filtr neobsahuje nuly na jednotkové kružnici - pak je v MSC patrná hřebenová struktura

Vlastnosti MSC - vliv šumu

Šum na vstupu LTI soustavy

$y(t) = s(t) * h(t)$, ale $s(t)$ neznáme a měříme pouze $x(t) = s(t) + n(t)$



vede na vztah[12]

$$\boxed{MSC(f) = 1 - \frac{S_n(f)}{S_x(f)}}$$ … a tedy též ke snížení hodnoty MSC

[12] Odvození je podobné předchozímu případu

Vlastnosti MSC - vliv šumu

Šum na vstupu i výstupu LTI soustavy

$x(t) = s(t) + n(t)$, kde $x(t)$ je měřitelný signál, vstupem LTI je signál $s(t)$
$y(t) = v(t) + m(t)$, kde $y(t)$ je měřitelný výstup LTI systému buzeného signálem $s(t)$, neměřitelný výstup je $v(t)$

Teoretická MSC je rovna

$$MSC_{vs}(f) = \frac{|S_{vs}(f)|^2}{S_s(f)S_v(f)}$$

Měřitelná MSC je

$$MSC_{yx}(f) = \frac{MSC_{vs}(f)}{1 + \frac{S_n(f)}{S_s(f)} + \frac{S_m(f)}{S_v(f)} + \frac{S_n(f)S_m(f)}{S_s(f)S_v(f)}} < MSC_{vs}(f)$$

Závěr: snížení hodnoty MSC indikuje přítomnost šumu na vstupu nebo výstupu soustavy

Dodatek - koherence v MISO systémech

MISO[13] systém:

- vstupy $x_j(t),\ j = 1, 2, \dots M$
- impulsové odezvy $h_j(t),\ j = 1, 2, \dots M$
- výstup $y(t) = \sum_{j=1}^{M} h_j(t) * x_j(t),\ j = 1, 2, \dots M$

$$S_{yx_i}(f) = \sum_{j=1}^{M} H_j(f) S_{x_i x_j}(f)$$

Pro nekorelované vstupy platí

$S_{x_i x_j}(f) = 0$, pro $i \neq j$ a tedy $S_{yx_i}(f) = H_i(f) S_{x_i}(f)$

[13] Systém s více vstupy a jedním výstupem

Koherence v MISO systémech

Protože platí
$S_{yx_i}(f) = H_i(f) S_{x_i}(f)$
lze pro součet dílčích koherenčních funkcí získat

$$\sum_{j=1}^{M} MSC_{yx_i}(f) = 1$$

$MSC_{yx_i}(f)$ je koherenční funkce mezi $i-$tým vstupem a výstupem - při jejím výpočtu se ostatní vstupy $x_j,\ i \neq j$ jeví jako šumové zdroje

Závěry:

- vstupní signály v MISO systémech snižují hodnotu MSC - snížení hodnoty MSC tedy indikuje přítomnost dalších signálů
- v případě, kdy chceme vyloučit vliv dalších vstupních signálů se používá parciální koherence - opět souvisí s parciálním korelačním koeficientem

Parciální korelační koeficient

Statistika zná pojem parciální korelační koeficient - používá se v případech, kdy existuje více náhodných proměnných, které se navzájem ovlivňují a my požadujeme sledovat vliv dvou proměných mezi sebou a vyloučit vliv zbylých proměnných

Parciální korelační koeficient[14] $r_{yx.z}$

$$r_{yx.z} = \frac{r_{yx} - r_{xz} r_{yz}}{\sqrt{1 - r_{xz}^2}\sqrt{1 - r_{yz}^2}}$$

Příklad Nechť korelační koeficienty mezi dvojicemi náhodných proměnných mají hodnoty $r_{yx} = 0.15$, $r_{xz} = 0.75$, $r_{yz} = -0.4$. Pokud uzavřeme šetření vztahu tvrzením, že korelace mezi y a x je nízká (zde 0.15), pak se dopouštíme chyby, neboť výpočet „očištěného vztahu“ mezi y a x poskytne hodnotu $r_{yx.z} = 0.74$
Jak je patrné, vliv vyloučené proměnné může mít až devastující vliv na vztah mezi zkoumanými proměnnými (nebo signály).

[14] Korelace mezi x-y s vyloučením vlivu z

Parciální koherence

Podobně se v systémech s více vstupy/výstupy pro analýzu vazby mezi dvěma procesy s vyloučením vlivu dalšího procesu na tuto vazbu používá

Parciální koherenční funkce[15] $\gamma_{yx.z}$

$$\gamma_{yx.z} = \frac{\gamma_{yx} - \gamma_{xz}\gamma_{yz}}{\sqrt{1-\gamma_{xz}^2}\sqrt{1-\gamma_{yz}^2}}$$

od jejího vlivu
podobně jako parciální korelační koeficient umožňuje vyloučit vliv třetí proměnné a „očistit výsledek" od jejího vlivu

[15] Tato funkce se využívá např. při určování vazeb mezi mozkovými centry nebo při detekci závad mechanických systémů

Literatura

Kniha: Uhlíř, Sovka: Číslicové zpracování signálů, Vyd. ČVUT, Praha 1995 a 2002
Skripta: Sovka, Pollák: Vybrané metody číslicového zpracování signálů, ČVUT v Praze, 2001 - v elektronické podobě na MOODLE