Osnova k výuce přípravných kurzů fyziky

18. února 2021 Martin Šimák

Přednáška první

Kinematika

- Pojem poloha - funkce času $x(t)$, nakreslit obecný graf pohybu hmotného bodu v 1D.
- Rychlost $v(t)$ a zrychlení $a(t)$. Obecně se taky mohou měnit s časem - taktéž funkce času.

Příklady.

1. Bod A má souřadnici $x_A = 2$ m a bod B je od něj vzdálen 3 metry. Jakou má souřadnici bod B? $[x_B \in \{-1\text{ m}, 5\text{ m}\}]$. Nakreslit.
2. Přesun do 2D: Body A a B mají souřadnice $\boldsymbol{r}_A = (1,1)^{\mathrm{T}}$ m a $\boldsymbol{r}_B = (4,-3)^{\mathrm{T}}$ m. Jaká je jejich vzájemná vzdálenost?
$$\|\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B\| = \left\|(-3,4)^{\mathrm{T}}\right\| = \sqrt{9+16} = 5.$$
3. Jaké má souřadnice bod B, jestliže bod A má souřadnice $(1,2)$ a jejich vzájemná vzdálenost je 3? Nekonečno řešení, museli bychom zadat vektor vzájemné vzdálenosti pro jednoznačnost.

- Rovnoměrný pohyb: zrychlení $a(t) = 0$, tj. $v(t) = s/t \in \mathbb{R}$ (konstanta). Můžeme potom psát, že okamžitá poloha je $x(t) = x_0 + vt$ pro $t_0 = 0$, jinak $x(t) = x_0 + v(t - t_0)$, kde $x_0 = x(t_0)$, a dráha $s(t) = vt$.
- Vysvětlit rozdíl mezi s a x. Poloha $x(t) = x_0 + vt$, kdežto dráha $s(t) = vt$ jakožto vzájemná vzdálenost dvou bodů.
- Pro rovnoměrný pohyb je okamžitá rychlost v každém čase rovna průměrné rychlosti na libovolném časovém úseku.
$$\bar{v}(t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}.$$

Příklady.

1. Pepa jede za Karlem z Prahy do Brna (vzdálenost $s = 200$ km), což mu zabere zhruba $t = 2$ h. Jakou rychlostí (za předpokladu pohybu rovnoměrného) Pepa jel?
$$v = \frac{s}{t} = \frac{200\text{ km}}{2\text{ h}} = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 100 \cdot \frac{1000}{3600}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{100}{3,6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 28\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$
2. Hmotný bod se souřadnicí $x_0 = 2$ m se pohybuje konstantní rychlostí $v = 3$ m/s. Jaká bude jeho souřadnice za 4 s. $[x(t = 4\text{ s}) = x_0 + 4v = 2 + 4 \cdot 3\text{ m} = 14\text{ m}]$

3. Obdoba ve 2D: Chodec nacházející se v čase $t_0 = 0$ s v bodě $\boldsymbol{r}_0 = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$ m jde rychlostí $v = 2$ m/s ve směru vektoru $\boldsymbol{e}_v = (0, 1)^{\mathrm{T}}$. Jaká bude jeho poloha za 3 s?

$$\boldsymbol{r}(t = 3\text{ s}) = \boldsymbol{r}_0 + 3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_0 + 3v\boldsymbol{e}_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} -1 + 6 \cdot 0 \\ 0 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ m}.$$

- Rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru R: úhlová rychlost $\omega = \varphi/t = 2\pi/T$, perioda T, frekvence $f = 1/T$, obvodová rychlost $v = 2\pi R/T = R\omega$.

- Rovnoměrně zrychlený pohyb: zrychlení $a(t) = v/t \in \mathbb{R}$ (konstanta). Potom pro rychlost platí $v(t) = v_0 + at$, pro polohu $x(t) = x_0 + v_0 t + 1/2at^2$, pro dráhu $s(t) = v_0 t + 1/2at^2$.
- Pro rovnoměrně zrychlený pohyb je okamžité zrychlení v každém čase rovno průměrnému zrychlení na libovolném časovém úseku.

$$\bar{a}(t) = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t}.$$

Příklady.

1. Auto dokáže zrychlit za rovnoměrného zrychlení z 0 km/h na 100 km/h za 5 s. Jakou dráhu za tuto dobu urazí?

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{v_1 - v_0}{t} = \frac{v_1}{t}, \\ s(t) &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + \frac{1}{2}\frac{v_1}{t}t^2 = \frac{1}{2}v_1 t = 70 \text{ m}, \quad v \approx 28\ \frac{\text{m}}{\text{s}},\ t = 5 \text{ s}. \end{aligned}$$

2. Auto zastaví z rychlosti 64,8 km/h rovnoměrně zrychleným (zpomaleným) pohybem za 9 sekund. Spočítejte dráhu uraženou za tuto dobu.

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{v_1 - v_0}{t} = -\frac{v_0}{t}, \\ s(t) &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t - \frac{1}{2}v_0 t = \frac{1}{2}v_0 t = \frac{1}{2}\frac{64,8}{3,6}9 \text{ m} = 81 \text{ m}. \end{aligned}$$

3. Dvě auta jedou ze stejného místa týmž směrem. První z klidu se zrychlením o velikosti 3 ms^{-2}. Druhé rovnoměrným pohybem rychlostí o velikosti 54 km/h. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od startu (místo startu nepočítáme) se auta setkají?

$$\begin{aligned} s_1(t) &= v_{0,1}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{1}{2}a_1 t^2, \\ s_2(t) &= v_{0,2}t + \frac{1}{2}a_2 t^2 = v_{0,2}t, \end{aligned}$$

První dožene v čase t_k druhé:

$$\begin{aligned} s_1(t_k) &= s_2(t_k), \\ \frac{1}{2}a_1 t_k^2 &= v_{0,2}t_k, \\ a_1 t_k^2 - 2v_{0,2}t_k &= 0, \quad v_{0,2} = \frac{54}{3,6} \text{ m/s} = 15 \text{ m/s}, \\ t_k(3t_k - 30) &= 0, \quad t_k \neq 0, \\ t_k &= 10 \text{ s}. \end{aligned}$$

Uraženou dráha za čas t_k:

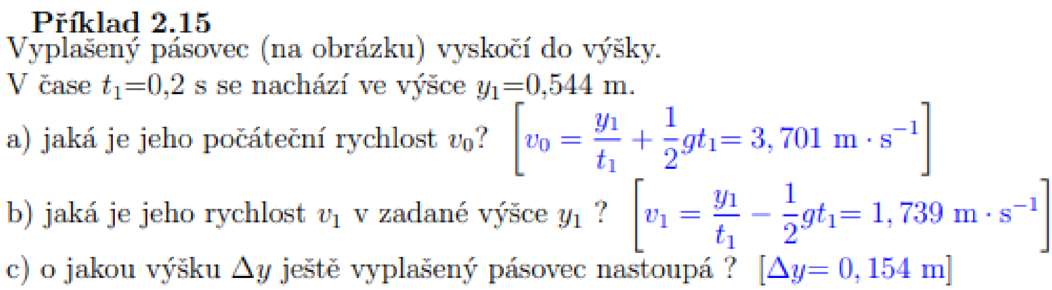
$$s(t_k) = s_1(t_k) = v_{0,2}t_k = 15 \cdot 10 \text{ m} = 150 \text{ m}.$$
$$= s_2(t_k) = \frac{1}{2}a_1 t_k^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^2 \text{ m} = 150 \text{ m}.$$

4. Těleso snížilo rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem svoji rychlost ze 72 km/h na 18 km/h za 10 s. Jakou dráhu urazilo?

$$v_1 = \frac{72}{3,6} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s},$$
$$v_2 = \frac{18}{3,6} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s},$$
$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t + \frac{1}{2}(v_1 - v_0)t = 20 \cdot 10 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 \text{ m} = 125 \text{ m}.$$

5. Výpravčí stojí na peróně na začátku prvního vagónu stojícího vlaku. Vlak se dá do rovnoměrně zrychleného pohybu takovým způsobem, že první vagón míjí výpravčího po dobu Δt_1. Jakou dobu Δt_n míjí výpravčího n-tý vagón?
Označme délku vagónu ℓ a celkový uplynulý čas při míjení výpravčího n-tým vagónem t_n. Potom

$$\ell = \frac{1}{2}a\Delta t_1^2,$$
$$n\ell = \frac{1}{2}at_n^2 \implies t_n = \sqrt{\frac{2n\ell}{a}} = \sqrt{\frac{2na\Delta t_1^2}{2a}} = \Delta t_1 \sqrt{n},$$
$$\Delta t_n = t_n - t_{n-1} = \Delta t_1 \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right).$$



Příklad 2.15
Vyplašený pásovec (na obrázku) vyskočí do výšky.
V čase t_1=0,2 s se nachází ve výšce y_1=0,544 m.
a) jaká je jeho počáteční rychlost v_0? $\left[v_0 = \frac{y_1}{t_1} + \frac{1}{2}gt_1 = 3,701 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$
b) jaká je jeho rychlost v_1 v zadané výšce y_1 ? $\left[v_1 = \frac{y_1}{t_1} - \frac{1}{2}gt_1 = 1,739 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$
c) o jakou výšku Δy ještě vyplašený pásovec nastoupá ? $[\Delta y = 0,154 \text{ m}]$

Obrázek 1: Příklad 6

Loď se pohybuje rychlostí 12 $m.s^{-1}$. Kormidelník pozorující moře spatří ve vzdálenosti 390 m před sebou ledovou kru pohybující se proti nim rychlostí 0,5 $m.s^{-1}$. V ten samý okamžik začne loď zpomalovat (a = 0,2 $m.s^{-2}$). Srazí se loď s ledovou krou? Pokud ano, tak za jak dlouho. ~~Řešte graficky i výpočtem~~.

Obrázek 2: Příklad 7

Jaké rychlosti dosáhne rampouch padající se střechy z výšky 15 metrů a jak dlouho tento pád bude trvat. ~~Řešte výpočtem i graficky~~. Odpor prostředí zanedbejte. (g = 10 $m.s^{-2}$)

Obrázek 3: Příklad 8

Kapitán Joseph W. Kittinger 16. srpna 1960 seskočil s balónu ve výšce 31330 m a bez otevření padáku proletěl 25820 m. Po seskoku dosáhl za určitý čas rychlosti 1000 $km.h^{-1}$. Vypočtěte v jaké výšce nad povrchem země této rychlosti dosáhl, jakou dráhu urazil a za jak dlouho této rychlosti dosáhl. ~~Danou situaci znázorněte graficky~~. Pro tyto výšky můžeme zanedbat odporovou sílu. (g = 10 $m.s^{-2}$)

Řešení:

$h_1 = 31330$ m

$h_2 = 25820$ m

$h_3 = h_1 - h_2 = 5510$ m

$v = 1000\ km.h^{-1} = 278\ m.s^{-1}$

$g = 10\ m.s^{-2}$

$\underline{h = ?\ ;\ s = ?\ ;\ t = ?}$

$$v = gt$$

$$t = \frac{v}{g}$$

$$t = \frac{278}{10} = \mathbf{27{,}8\ s}$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

$$s = \frac{1}{2}g\frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g}$$

$$s = \frac{278^2}{2 \cdot 10} = \mathbf{3864\ m}$$

$$h = h_1 - s$$

$$h = 31330 - 3864 = \mathbf{27466\ m}$$

Obrázek 4: Příklad 9

Přednáška druhá

- Udělat vlak z minula a třeba ještě jeden, podle času.
- Jimmy mluví, já jen kreslím a mam příklady na rovnoměrný pohyb po kružnici.

Příklady.

1. Jakou obvodovou rychlostí se pohybuje bod na kružnici, je-li poloměr kružnice R desetinásobkem periody T.

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 10|T|}{|T|}\ \mathrm{ms}^{-1} = 20\pi\ \mathrm{ms}^{-1}.$$

2. Jaká je úhlová a obvodová rychlost otáčení Země kolem vlastní osy na rovníku? Jaké jsou tyto rychlosti pro Českou republiku? Uvažujte, že Česká republika leží na 50. stupni severní zeměpisné šířky ($\varphi = 50°$). Poloměr Země R_Z uvažujte 6400 km.

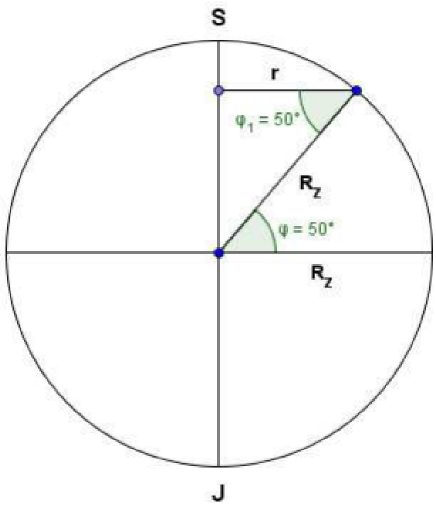
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24}\ \mathrm{h}^{-1} \approx 7,27 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$$

(a)

$$R = R_Z = 6400\ \mathrm{km} = 6,4 \cdot 10^6\ \mathrm{m},$$
$$v = \omega R \approx 465,42\ \mathrm{ms}^{-1}.$$

(b)

$$R = R_Z \cos(\varphi),$$
$$v = \omega R_Z \cos(\varphi) \approx 299,08\ \mathrm{ms}^{-1}.$$



Obrázek 5: Ilustrace k příkladu 2-b)

3. O kolik hertzů je frekvence bodu pohybujícího se rovnoměrným pohybem po kružnici obvodovou rychlostí $v_1 = 3\ \mathrm{ms}^{-1}$ větší, než frekvence bodu pohybujícího se rovnoměrným pohybem po stejné kružnici obvodovou rychlostí $v_2 = 2\ \mathrm{ms}^{-1}$. Poloměr kružnice je $R = 0,5$ m.

$$
\begin{aligned}
v &= 2\pi f R,\\
f &= \frac{v}{2\pi R},\\
\Delta f = f_1 - f_2 &= \frac{v_1 - v_2}{2\pi R} \approx 0,32\ \mathrm{Hz}.
\end{aligned}
$$

4. Náboj vystřelený z pušky letí přímým směrem rychlostí $v = 300\ \mathrm{ms}^{-1}$ a zároveň se otáčí kolem své podélné osy úhlovou rychlostí $\omega = 0,175\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. O jaký úhel se otočí po uražení dráhy $s = 100$ m? Předpokládejme, že rychlost náboje se nemění.
Z definic:

$$
v = \frac{s}{t}, \quad \omega = \frac{\varphi}{t},
$$

čas uplynul stejný, musí proto platit

$$
\begin{aligned}
\frac{\varphi}{\omega} &= \frac{s}{v},\\
\varphi &= \omega\frac{s}{v} \approx 0,058 \approx 3,34^\circ.
\end{aligned}
$$

5. Automobil projíždí zatáčkou o poloměru $R = 50$ m rychlostí o stálé velikosti $v = 36\ \mathrm{kmh}^{-1}$. Jak velké je normálové zrychlení automobilu v zatáčce?

$$
\begin{aligned}
v &= 10\ \mathrm{ms}^{-1},\\
a_n &= \frac{v^2}{R} = 2\ \mathrm{ms}^{-2}.
\end{aligned}
$$