Příklady pro týden 11

Zadání Rovinná vlna o frekvenci $f = 1$ má amplitudu elektrického pole $E_0 = 100\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. Vlna se šíří mořskou vodou ($\mu_r = 1$; $\epsilon_r = 80$; $\sigma = 4\ \mathrm{S} \cdot \mathrm{m}^{-1}$). Určete amplitudu intenzity elektrického a magnetického pole poté, co vlna prošla 1 cm vodního prostředí. Určete dále časově střední výkon v kvádru o průřezu 1 m^2, který se na této dráze mění v teplo. Výpočet tepla proveďte jak z

$$\int_V \sigma \left\| \boldsymbol{E} \right\|^2 \, \mathrm{d}V,$$

tak z

$$\oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Řešení Řešení příkladu započneme výpočtem vlnového čísla k a impedance prostředí Z

$$k = \sqrt{-\mathrm{i}\omega\mu(\sigma + \mathrm{i}\omega\epsilon)} \approx 202,927 - 77.8178\mathrm{i},$$
$$Z = \frac{\omega\mu}{k} \approx 33.9207 + 13.0078\mathrm{i},$$

přičemž při výpočtu jsme samozřejmě využili lineárních vlastností rovinné vlny, umožňujících psát

$$\mu = \mu_r \mu_0,$$
$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0.$$

Dále jelikož v našem případě se jedná o elektromagnetickou vlnu šířící se stejným prostředím (uvažujme například, ve směru osy x), pro velikosti intenzit elektromagnetických polí tedy platí

$$E(x) = \left| E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \right|,$$
$$H(x) = \frac{E(x)}{|Z|}.$$

Můžeme již tedy podle zadání lehce vypočítat intenzity elektromagnetických polí jako

$$|\hat{E}| = E(0.01) = \left| E_0 \mathrm{e}^{-0.01\mathrm{i}k} \right| \approx \underline{46\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}},$$
$$|\hat{H}| = H(0.01) = \left| \frac{E_0 \mathrm{e}^{-0.01\mathrm{i}k}}{Z} \right| \approx \underline{1.3\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1}}.$$

Dále, přistoupíme-li k výpočtu výkonu ztraceného v teplo, můžeme ho spočítat přímou metodou jako Jouleovo teplo

$$P = \int_V \sigma |\hat{E}|^2 \, \mathrm{d}V = \frac{\sigma}{2} \int_0^{0.01} E^2(x) \, \mathrm{d}x \approx \underline{100\ \mathrm{W}}.$$

Druhá metoda je přes Poyntingův vektor, který je v našem případě kolineární se směrem propagace vlny, tudíž v integrálu dochází ke značnému zjednodušení (nemusíme integrovat, snačí odečíst koncové hodnoty Poyntingova vektoru):

$$P = \oint_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \|\boldsymbol{E}(0) \times \boldsymbol{H}(0)\| - \|\boldsymbol{E}(d) \times \boldsymbol{H}(d)\| \approx \underline{100\ \mathrm{W}},$$

kde Poyntingův vektor počítáme jako

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*\right].$$