

Určení polohy v družicové navigaci, přesnost určení polohy

Rovnice pro výpočet polohy a činitelé DOP

Přijímač GNSS provádí výpočet polohy na základě změřených pseudovzdáleností. Výpočet je založen na řešení následující soustavy nelineárních rovnic.

$$d_i = \sqrt{(r - s_i)^T (r - s_i)} + c \tau_0 + w_i$$

kde $d_i = c \tau_i$ jsou pseudovzdálenosti vypočtené ze změřených zpoždění k sledovaným družicím odlišeným indexem i , τ_0 je chyba časové základny přijímače, w_i reprezentuje chybu měření, \mathbf{r} je hledaná poloha přijímače a \mathbf{s}_i jsou polohy družic.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

Jednou z možností řešení dané soustavy je linearizace pomocí Taylorovy řady v okolí bodu se souřadnicemi \mathbf{r}_0 . Dostaneme soustavu lineárních rovnic.

$$\Delta d_i = d_i - d_{i0} \simeq \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}_i)^T}{d_{i0}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + c \tau_0 + w_i$$

Kde d_{i0} je vzdálenost mezi bodem \mathbf{r}_0 a danou družicí. Soustavu můžeme vyjádřit maticovou rovnicí:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{b}$$

Kde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \\ c \tau_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \Delta d_1 \\ \vdots \\ \Delta d_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}_1)^T}{d_{10}} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}_n)^T}{d_{n0}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \alpha_n & \cos \beta_n & \cos \gamma_n & 1 \end{bmatrix}$$

Matici \mathbf{A} nazýváme maticí směrových kosinů.

Za předpokladu nekorelovaných chyb měření vzdálenosti se stejným rozptylem σ_d^2 pro měření ke všem družicím, je odhad:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Kovarianční matice chyby určení polohy v místní souřadné soustavě (osa z je normálou k povrchu Země):

$$\sigma_d^2 \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & r_{xy} & r_{xz} & r_{xt} \\ r_{yx} & \sigma_y^2 & r_{yz} & r_{yt} \\ r_{zx} & r_{zy} & \sigma_z^2 & r_{zt} \\ r_{tx} & r_{ty} & r_{tz} & \sigma_t^2 \end{bmatrix} = \sigma_d^2 (A^T A)^{-1}$$

Z kovarianční matice můžeme vypočítat činitele DOP

$$\begin{aligned} \text{PDOP} &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \\ \text{HDOP} &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \\ \text{VDOP} &= \sqrt{\sigma_z^2} \end{aligned}$$

Protokol NMEA

Rozhraní GPS přijímačů je často navrženo dle normy NMEA 0183. Normu je možné zakoupit na stránkách společnosti [NMEA](http://www.nmea.org) (National Marine Electronics Association), ale pro naše účely bude dostačovat neoficiální popis tohoto protokolu na webových stránkách <http://www.gpsinformation.org/dale/nmea.htm>, <http://freenmea.net/docs/nmea0183> [1],[2].

Komunikace dle tohoto protokolu je založena na posílání a příjmu řádků (dále je budeme nazývat věty). Každá věta začíná znakem \$, následuje dvouznaková identifikace zdrojového zařízení („GP“ pro GPS), tři znaky definující druh zprávy, vlastní datový obsah v ASCII kódu s čárkami pro oddělení bloků dat, volitelně je před koncem zprávy znak „*“ následovaný kontrolním součtem a věta vždy končí dvojicí <CR><LF>.

Úkol řešený v rámci semináře: Máte k dispozici soubor se záznamem výstupu GPS přijímače ve formátu NMEA 0183. Zvolte si určitý čas a porovnejte hodnoty činitelů DOP obsažené ve větě „GSA“ s hodnotami ke kterým dospějete výpočtem z uvedených azimutů a elevací použitých družic z vět(y) „GSV“.

Výpočet polohy

Přijímače GNSS obvykle používají pro výpočet polohy algoritmus nazývaný Kalmanova filtrace. Vysvětlení tohoto algoritmu je mimo časové možnosti tohoto cvičení.

Je možné si ukázat jednodušší řešení problému výpočtu polohy pomocí výše uvedených vzorců pro linearizaci soustavy rovnic v okolí daného bodu. Algoritmus spočívá ve volbě počátečního bodu pro linearizaci rovnic. Tento bod bude pravděpodobně vzdálený od hledané polohy a to způsobí velkou chybu řešení linearizované soustavy. Nepřesný odhad polohy $\hat{\mathbf{r}}$ je možné použít jako nový bod \mathbf{r}_0 a řešením soustavy dostaneme přesnější odhad polohy. V další iteraci použijeme opět tento odhad jako nový bod \mathbf{r}_0 . Uvedený algoritmus poměrně rychle konverguje a tak získáme v několika krocích odhad polohy s dostatečnou přesností.

Úkol řešený v rámci semináře: Máte k dispozici skript v Matlabu pro výpočet polohy prostřednictvím iteračního algoritmu s linearizací polohových rovnic, popsany výše.

- Prozkoumejte, jakou má přesnost počátečního odhadu vliv na rychlost konvergence polohového algoritmu.
- Prozkoumejte, jak se projeví velikost kroku iterace na stabilitě konvergence algoritmu.

Reference

- [1] Dale DePriest, NMEA data. [online]. <<https://www.gpsinformation.org/dale/nmea.htm>> [cit. 13.3. 2019]
- [2] Freenmea.net, Standard NMEA-0183 sentences description. [online]. <<http://freenmea.net/docs/nmea0183>>. [cit. 13.3.2019]