1 Kalkulus jedné proměnné

Lemma 1.1. *Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 vlastní limitu. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že $f(x)$ je omezená na určitém $P(x_0; \delta)$.*

Důkaz. Vynecháváme. ∎

Tvrzení 1.2. *Nechť f a g jsou reálné funkce. Potom platí*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{2}$$

za předpokladu, že existují obě strany a jsou konečné.

Důkaz. Postupně:

(1) Nejprve si napišme definice jednotlivých limit a upravme si omezující epsilon tak, abychom došli k „hezkému" závěru:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_f > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_f \implies |L_f - f(x)| < \frac{\epsilon}{2|g(x)|},$$
$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_g > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_g \implies |L_g - g(x)| < \frac{\epsilon}{2|L_f|}.$$

Cíl důkazu:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |L_f L_g - f(x)g(x)| < \epsilon.$$

Pomocí elementárních úprav (např. přidáním nulového členu $L_f g(x) - L_f g(x)$) lze výraz v absolutní hodnotě vyjádřit ve tvaru

$$L_f L_g - f(x)g(x) = L_f[L_g - g(x)] + g(x)[L_f - f(x)],$$

jehož majorantu nalezneme pomocí trojúhelníkové nerovnosti jako

$$|L_f[L_g - g(x)] + g(x)[L_f - f(x)]| < |L_f(L_g - g(x))| + |g(x)(L_f - f(x))| =$$
$$= |L_f| \underbrace{|(L_g - g(x))|}_{<\epsilon/(2|L_f|)} + |g(x)| \underbrace{|(L_f - f(x))|}_{<\epsilon/(2|g(x)|)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(2) Jde o velice podobný postup, přičemž jedinými modifikacemi jsou absolutní omezení jednotlivých limit (obě mají tentokrát majorantu $\epsilon/2$) a tvar finální limity, tedy cíl důkazu:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |(L_f + L_g) - (f(x) + g(x))| < \epsilon.$$

V tomto jednodušším případě přecházíme přímo k omezení

$$|(L_f - f(x)) + (L_g - g(x))| < |L_f - f(x)| + |L_g - g(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

∎

Tvrzení 1.3 (3). *Pokud L je konečně generovaný lineární prostor, pak z každé jeho množiny generátorů lze vybrat bázi.*

Důkaz. Pokud $G = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je množina generátorů, pak platí $L = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n)$.

(a) $n = 0:$

(b) $n \geq 1:$

$\blacksquare$