Kapitola 1

Tenzorový součin

Pro dobré chápání tenzorového součinu dvou objektů je potřeba nejprve zopakovat základní vlastnosti vektorových prostorů a prostorů všech lineárních funkcionálů nad vektorovými prostory. Tato látka je bázová a může pomoci v elementárním pochopení fyzikálních zákonů, které je často požadované psát v tenzorovém tvaru. Proč? To bude zřejmě na konci tohoto textu.

1.1 Vektorové prostory

Velice neformálně řečeno, vektorové prostory jsou množiny uzavřené na sčítání a násobení číslem, tedy platí

$$v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$$
$$v \in V, \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha v \in V.$$

Pro každý vektorový prostor, jehož prvky se nazývají vektory, lze zkonstruovat bázi, tedy jakoukoliv množinu lineárně nezávislých vektorů, pomocí nichž lze zkonstruovat každý z prvků daného prostoru. Volba báze není jednoznačná. Proto pokud vezmeme dvě báze $\{e_i\}, \{f_i\}$, získáme

$$v = \sum_{i=1}^{\dim V} v^i e_i = \sum_{i=1}^{\dim V} \hat{v}^i f_i,$$

kde v^i, resp. $\hat{v}^i$ jsou souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $\{e_i\}$, resp. $\{f_i\}$ a $\dim V$ je dimenze vektorového prostoru, tedy počet prvků jakékoliv báze. Dimenze prostoru je dána jednoznačně. *Souřadnice vektoru píšeme s indexy nahoře a bázi číslujeme s indexy dole*. Využít můžeme také tzv. Einsteinova sumační pravidla, které říká, že vidím-li ve výrazu dva indexy, jeden nahoře a jeden dole, které jsou stejné, automaticky přes ně sčítám, tedy platí

$$v = v^i e_i = \hat{v}^i f_i.$$

Je patrné, že mezi oběma sadami souřadnic musí existovat nějaký vztah. Tento vztah je reprezentován tzv. maticí přechodu od jedné báze ke druhé. Pro účely našeho textu však není matice přechodu tolik důležitá. Je však podstatné vědět, že lze pracovat s libovolnou bází a systém souřadnic je pak už pro konkrétní vektor jednoznačně určen.

1.2 Duální prostory

Představme si, že vezmeme vektor $v \in V$ a spočteme jeho velikost pomocí skalárního součinu

$$\text{velikost}(v) = v^\mathsf{T} \cdot \mathbf{g} \cdot v,$$

kde v^T je transponovaný vektor v do řádku a $\mathbf{g}$ je matice skalárního součinu, tzn. *metrika*. Je očividné, že tato funkce vezme jakýkoliv vektor a přiřadí mu reálné (komplexní) číslo. Budeme odteď místo $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ psát těleso $\mathbb{T}$ a předpokládat, že se jedná o reálná či komplexní čísla. Velikost vektoru je ve zvyku nazývat normou a značit jako

$$\|v\| \in \mathbb{T}.$$

Ovšem toto zobrazení není lineární. Aby bylo lineární, muselo by platit

$$\|v_1 + v_2\| = \|v_1\| + \|v_2\| \qquad \text{a} \qquad \|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|,$$

kde $\alpha \in \mathbb{T}, v_1, v_2 \in V$. Formulujme tedy koncept pouze lineárních zobrazení, pro něž toto platí. Tzn. lineárním zobrazením $\varphi : V \to \mathbb{T}$ máme na mysli takové zobrazení, pro které platí

$$\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2),$$

přičemž $v_1, v_2 \in V$ jsou vektory a $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ jsou čísla. Prostoru všech lineárních zobrazení nad vektorovým prostorem V říkáme *duální prostor* k prostoru V a značíme jej V^*. Prvky tohoto duálního prostoru nazýváme *kovektory*, lineární funkcionály nebo lineární formy.

Ukazuje se, že duální prostor splní všechny axiomy vektorového prostoru. Pokud jsou totiž φ a α prvky duálního prostoru, je prvkem duálního prostoru i $\varphi + \alpha$, násobení číslem je také splněno. To znamená, že duální prostor V^* všech kovektorů je také vektorovým prostorem. Ten má stejnou dimenzi jako původní vektorový prostor V a lze zkonstruovat jakoukoliv jeho bázi.

My často volíme bázi duálního prostoru $\{\epsilon^i\}$ tak, aby platilo

$$\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j,$$

tedy množina $\{\epsilon^i\}$ je množina $n = \dim V$ kovektorů, které jsou komplementární k nějaké zavedené bázi na vektorovém prostoru V. Každou lineární formu lze zapsat rozkladem do báze

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\dim V^*} \varphi_i \epsilon^i = \varphi_i \epsilon^i,$$

přičemž <u>pro kovektory píšeme indexy souřadnic dole a indexy prvků báze nahoře</u>. Lze ukázat, že při volbě konkrétní báze lze počítat pouze se souřadnicemi, neboť bude platit

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{\dim V^*} \varphi_i \epsilon^i(v) = \varphi_i \epsilon^i(v).$$

Jelikož je ale ϵ^i lineárně, lze rozložit v do dané báze a získat

$$\varphi(v) = \varphi_i \epsilon^i(v^j e_j) = \varphi_i v^j \epsilon^i(e_j) = \varphi_i v^j \delta^i_j = \varphi_i v^i.$$

Neustále využíváme Einsteinovo sčítací pravidlo, neboť zápis je pak o hodně kompaktnější.

Kovektor je tedy zobrazení

$$\varphi : V \to \mathbb{T}.$$

1.3 Tenzorový součin dvou kovektorů

Nechť existují dva kovektory $\alpha, \beta \in \mathbb{V}^*$ a vektory u, v, potom definujeme jejich tenzorový součin následovně

$$\alpha \otimes \beta : V \times V \to \mathbb{T}, \qquad (\alpha \otimes \beta)(u,v) = \alpha(u)\beta(v) = \alpha_i u^i \beta_j v^j.$$

Jedná se tedy o jakési složení dvou kovektorů, které každý působí na jeden vektor. Jak nám napovídá fakt, že se jedná o zobrazení typu $V \times V \to \mathbb{T}$, vezme takový tenzorový součin dva vektory a udělá z nich číslo.

Napišme nyní $T = \alpha \otimes \beta$, potom lze psát $T = T(u,v)$, tedy tento tenzorový součin dvou kovektorů se chová jako „funkce“ dvou proměnných.

Příklad Nechť jsou dána dvě lineární zobrazení $\alpha(u) = u_x + u_y + u_z$ a $\beta(v) = v_x + v_y$. Nalezněte hodnotu jejich tenzorového součinu pro vektory $u = (1\ 2\ 0)^\mathsf{T}, v = (1\ 1\ 1)^\mathsf{T}$.

Řešení: *Nejprve musíme formulovat, jak vypadá tenzorový součin obou zobrazení. Píšeme jej skrze působení na obecné vektory*

$$(\alpha \otimes \beta)(u,v) = \alpha(u)\beta(v) = (u_x + u_y + u_z)(v_x + v_y).$$

Konkrétně tedy vyčíslíme tuto hodnotu pro dva vstupní vektory ze zadání

$$(\alpha \otimes \beta)(u,v) = (1 + 2 + 0)(1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Takovému tenzorovému součinu říkáme *bilineární forma*, neboť se jedná o zobrazení, které má dva argumenty a v každém z nich je lineární. Pokud si uvědomíme, že jsme již výše ukázali, že v souřadnicovém zápise platí $\alpha(u) = \alpha_i u^i$, analogicky tomu $\beta(v) = \beta_i v^i$, můžeme psát

$$(\alpha \otimes \beta)(u,v) = \alpha_i u^i \beta_j v^j,$$

kde si akorát musíme dát pozor na to, že sčítací indexy musejí být různé, aby se vzájemně nepletly. Ve fyzice potom nikdy v tomto typu zápisů nemáme rovnice, kde by byly více než dva stejné indexy. Pokud nyní vezmeme náš výsledek, lze jej přeorganizovat, neboť na pravé straně jsou čtyři čísla, která komutují, proto píšeme

$$(\alpha \otimes \beta)(u,v) = \underbrace{\alpha_i \beta_j}_{T_{ij}} u^i v^j = T_{ij} u^i v^j.$$

Souřadnice tenzorového součinu $(\alpha \otimes \beta)$ jsme si označili jako T_{ij}. Jakou bázi ale bude mít takový prostor? Aby měl bázi, musí to být vektorový prostor. Ukazuje se, že prostor všech bilineárních forem skutečně vektorovým prostorem je. Jelikož α a β byly vyjádřeny vůči nějaké bázi ϵ^i, můžeme psát, že báze tohoto vektorového prostoru bilineárních forem je

$$\{\epsilon^i \otimes \epsilon^j\}_{i,j}.$$

tedy báze je množina daná tenzorovým součinem všech variací bázových prvků duálního prostoru V^*.

Jak by vypadal tenzorový součin pěti kovektorů? Velice podobně

$$(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \otimes \delta \otimes \epsilon)\,(u, v, w, x, y) = \alpha(u)\beta(v)\gamma(w)\delta(x)\epsilon(y) = T_{ijklm} u^i v^j w^k x^l y^m.$$

Takto bychom mohli napsat tenzorový součin obecně N forem, které působí na N vektorů

$$\left(\bigotimes_{k=1}^{N} \alpha^{(i)}\right)(u_{(1)}, \dots, u_{(N)}) = T_{i_1,\dots,i_N} u^{i_1}_{(1)} \dots u^{i_N}_{(N)},$$

kde se samozřejmě sčítá přes všechny indexy $i_1, \dots, i_N$ podle Einsteinova pravidla.

1.4 Tenzorový součin dvou vektorů

Pokud lze aplikovat tenzorový součin na kovektory, musí být aplikovatelný i na vektory. Vektory původního vektorového prostoru V jsou totiž lineární funkcionály na duálním prostoru V^*. Pokud forma α působila na vektor u, psali jsme, že výsledkem je číslo $\alpha(u)$. Pokud vektor u působí na formu α, existuje jediný způsob, jak „hezky“ získat číslo, a to je opět ve tvaru $\alpha(u)$. Můžeme tedy zapsat tenzorový součin dvou vektorů, který působí na dva kovektory, ve tvaru

$$u \otimes v : V^* \times V^* \to \mathbb{T}, \qquad\qquad (u \otimes v)(\alpha, \beta) = \alpha(u)\beta(v) = \alpha_i u^i \beta_j v^j.$$

Tentokrát jsou však proměnné, které zadáváme v souřadnicovém tvaru α_i a β_j, proto složky tenzorového součinu vektorů budou mít indexy nahoře

$$(u \otimes v)(\alpha, \beta) = u^i v^j \alpha_i \beta_j = T^{ij} \alpha_i \beta_j.$$

Takto odlišíme, jestli tenzorový součin působil na dva vektory či kovektory. Od vektorů pochází indexy nahoře (kontravariantní indexy), od kovektorů indexy dole (kovariantní indexy).

1.5 Tenzorový součin vektoru a kovektoru

Poslední fází před objevením toho, co jsou to tenzory, je uvědomit si, že tenzorový součin může působit i napříč více prostory. Pokud vezmeme tenzorový součin vektoru u a kovektoru α, bude platit

$$u \otimes \alpha : V \times V^* \to \mathbb{T}, \qquad\qquad (u \otimes \alpha)(\beta, v) = T^i{}_j \beta_i v^j,$$

přičemž v souřadnicích musíme dodržovat pořadí indexů. Někdo píše T^i_j, ovšem to je ve zvyku pouze tehdy, pokud je symbol v indexech (i, j) symetrický, tedy platí $T^i{}_j = T^j{}_i$.

1.6 Tenzory a obecný tenzorový součin

Tenzorový součin se ukázal jako velice užitečnou věcí při konstrukci složitějších lineárních zobrazení, které tvoří vektorový prostor. Lze proto vzít úplně nejobecnější multilineární zobrazení.

Tenzor řádu (k, l), který je k-krát kontravariantní a l-krát kovariantní, je multilineární zobrazení

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-krát}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l\text{-krát}} \to \mathbb{T},$$

které je generováno tenzorovým součinem.

Typickým tenzorem je tedy např. metrický tenzor (který jsme doposud nepřesně nazývali maticí skalárního součinu), neboť platí

$$u \cdot v = g(u, v) = g_{ij} u^j v^j$$

a výraz $g(u, v)$ je lineární v obou členech (pokud jsme tentokrát nad reálnými čísly). Ve fyzice se často pohybujeme nad $\mathbb{R}$, a proto i nadále uvažujme $\mathbb{T} \equiv \mathbb{R}$. Často (mimo obecnou relativitu) bývá metrický tenzor diagonální, tj. $g_{ij} \sim \delta_{ij}$ a platí tedy

$$u \cdot v = g_{11} u^1 v^1 + \cdots + g_{nn} u^n v^n,$$

kde n je dimenze vektorového prostoru, nad kterým stavíme. V klasické fyzice je často tato dimenze rovna třem a platí tak, že velikost vektoru lze spočítat skrz vztah

$$\|u\|^2 = g(u,u) = g_{11} u_1^2 + g_{22} u_2^2 + g_{33} u_3^2,$$

kde g_{ii} odpovídá volbě báze vektorového prostoru, jak jsme viděli. Např. pro volbu kartézské báze je $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$. Pro sférický souřadnice naopak platí $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2 \sin^2(\theta)$. Velikost vektoru ve sférických souřadnicích je proto

$$\|u\|^2 = u_r^2 + r^2 u_\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) u_\phi^2.$$

Metrika je jeden z nejdůležitějších tenzorů, neboť pomocí ní snižujeme a zvyšujeme indexy jiným tenzorům. Pokud chceme z V^i udělat V_i, tedy z vektoru vytvořit formu, zapíšeme

$$V_i = g_{ij} V^j.$$

Dále definujeme inverzní tenzor metriky, tedy tenzor g^{ij}, který splní

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k,$$

přičemž tenzor Kroneckerovo δ je symetrický, a proto můžeme psát indexy pod sebe. Tímto vztahem je inverzní metrika g^{ij} určena jednoznačně a můžeme pomocí ní zase zvyšovat indexy. Ukažme si, proč tuto podmínku chceme:

$$V^i = g^{ij} V_j = g^{ij} g_{jk} V^k = \delta^i_k V^k,$$

neboť musí platit, že $V^i = V^i$.

Celou dobu mluvíme o *tenzorech*, ale přitom používáme pouze jejich souřadnice (ty s indexy). Ukažme si, že stejně lze zapsat i formu V pomocí vektoru V

$$V(u) = g(V, u).$$

Takto z vektoru V vytvoříme formu V. Jelikož je ale situace nepřehledná bez indexů, máme tendenci i zde psát indexy a říkat: „Z vektoru V^i vytvoříme formu V_i.“ Indexy zde nesymbolizují souřadnice, ale jen informaci o tom, zda se jedná o kovariantní či kontravariantní typ tenzoru. Těmto indexům tak říkáme *abstraktní indexy*.

1.7 Příklady tenzorů ve fyzice

1.7.1 Teorie relativity

Ve fyzice se s tenzory setkáváme dnes a denně. Celá speciální a obecná relativita je založená na tzv. tečných tenzorech, což jsou tenzory, které leží v tečných strukturách časoprostoru. Např. souřadnicovou transformaci zapisujeme ve tvaru

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu},$$

kde Λ je tenzor Lorentzovy transformace. Řecké indexy zde symbolizují, že se sčítá jak přes prostor, tak přes čas.

Aby však někdo neřekl, že by tentýž vztah šlo zapsat i maticově (což lze), přejděme k zakřivenému časoprostoru. V této teorii lze přenést vektor V^{μ} po dvou různých křivkách z jednoho bodu do druhého. Uvažujme, že jej nejprve posuneme o $\mathrm{d}x^{\mu}$ a potom o $\mathrm{d}y^{\mu}$. Pokud to uděláme obráceně, získáme jiný vektor. Jinak řečeno pokud posouváme vektor po dvou různých křivkách, které začínají a končí ve stejném místě, získáme ve výsledku jiný vektor. To je efekt zakřivení časoprostoru. Rovnice pro zjištění, jak moc je časoprostor zakřivený (jak velký je rozdíl mezi přeneseními) má tvar

$$\Delta V^{\mu} = R^{\mu}{}_{\nu\kappa\lambda} V^{\nu} \mathrm{d}x^{\kappa} \mathrm{d}y^{\lambda}.$$

Pro plochý prostoročas můžeme přenášet vektory, jak je libo, a nikdy nezískáme žádný rozdíl. Proto je nulová hodnota $R^{\mu}{}_{\nu\kappa\lambda}$. Naopak při zakřivení časoprostoru jsou tyto hodnoty nenulové. Tomuto symbolu se říká *Riemannův tenzor křivosti* a je to jeden z nejdůležitějších tenzorů obecné relativity.

1.7.2 Teorie kontinua

Člověk nemusí chodit do zakřivených časoprostorů, aby se setkal s tenzory. V teorii pevnosti a pružnosti se vyskytují hned tři tenzory. První z nich se jmenuje tenzor deformace, druhý tenzor napětí a třetí je Hookův tenzor.

Uvažujme, že máme nějaké kontinuum (tekutinu nebo i deformovatelnou pevnou látku), v níž jsou dvě částice. První má souřadnice $\boldsymbol{x}$ a druhá $\boldsymbol{y}$. Vektor, který určuje jejich vzdálenost je $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$. Po nějakém časovém úseku $\mathrm{d}t$ se změní pozice první na $\boldsymbol{x} + \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ a druhé na $\boldsymbol{y} + \mathrm{d}\boldsymbol{y}$. Vektor určující jejich vzdálenost se také změní na $\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\boldsymbol{u}$. Víme, že vektorově lze zapsat $\mathrm{d}vecy = \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \mathrm{d}\boldsymbol{u}$ a odtud lze získat

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = 2\epsilon_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j,$$

kde tenzor ϵ_{ij} je tenzor deformace tělesa a má hodnotu

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^j}\right).$$

Dále lze formulovat tenzor napětí σ_{ij}, který určuje, jak moc je na těleso z vnějšku působeno silou. Na diagonále tohoto tenzoru se určuje tah či tlak, mimo-diagonální složky určují působení smykového charakteru.

Ukazuje se, že mezi silou, která působí na těleso, a deformací tělesa je vztah (to by asi čekal každý). V lineárním přiblížení závisí napětí na deformaci lineárně, a právě lineární (či multilineární) zobrazení jsou právě tenzory. Lze tedy napsat výsledný lineární Hookův zákon ve tvaru

$$\sigma_{ij} = {C_{ij}}^{kl} \epsilon_{kl},$$

kde ${C_{ij}}^{kl}$ je tenzor elastických koeficientů, které pro daný materiál určují, jak velký tlak je potřeba k určité deformaci. Nejtriviálnější výsledek plynoucí z této teorie napětí a deformace říká, že pokud se těleso ještě nedeformuje a je v elastickém režimu, lze psát elastickou sílu

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r},$$

jak jsme zvyklí psát pro pružinu. Dokud nezatáhneme velkou silou, abychom pružinu zničili, bude platit Hookův zákon a deformace bude lineárně úměrná napětí. A to je důvod, proč i lineárně závisí síla na poloze. Toto platí obecně pro každý materiál, ovšem pružinu lze natáhnou na daleko větší vzdálenosti než třeba stůl, aby ještě nedošlo k nevratitelné, tj. k neelastické deformaci.

1.7.3 Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti I je ve skutečnosti také tenzor a bylo by správné zapisovat jej ve tvaru I_{ij}. Jedná se o tenzor, který vezme dva vektory a zobrazí je na reálné číslo, tedy matematicky zapsáno $I : V \times V \to \mathbb{R}$.

Definice momentu setrvačnosti je poněkud komplikovaná, neboť vyžaduje hlubší znalosti tenzorového počtu. Můžeme si však říct důsledek, který plyne z celé teorie rotace tuhého tělesa, a tím je rotační kinetická energie. Pokud těleso rotuje úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$, která míří ve směru osy otáčení a její velikost je $\omega = v/r$, kde v je rychlost atomů ve vzdálenosti r od osy otáčení, potom lze psát

$$T = \frac{1}{2} I(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}).$$

Tento výsledek je obecný a platí pro dané těleso pro libovolnou osu otáčení. Ovšem moment setrvačnosti I typicky počítáme vůči osám v různých směrech, které ale prochází těžištěm. V praxi je moment setrvačnosti symetrický $I_{ij} = I_{ji}$, a proto má pouze šest nezávislých složek (dimenze vektorového prostoru je 3). Obecný návod tedy je najít těchto šest složek momentu setrvačnosti, potom lze najít kinetickou energii vůči ose procházející těžištěm ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} I(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} I_{ij} \omega^i \omega^j,$$

a vůči osám, které neprochází těžištěm použít Steinerovu větu.