

PŘEDMĚT B2M31DSP/PŘ. 1

PS

Přednáška 1: Modelování signálů - průchod šumu LTI soustavou

OBSAH

- 1 ÚVOD
- 2 MOTIVACE A TYPY ÚLOH
- 3 MOTIVACE A TYPY ÚLOH
- 4 MODELOVÁNÍ SIGNÁLŮ
- 5 POPIS MODELOVÁNÍ - ČASOVÁ OBLAST
- 6 POPIS MODELOVÁNÍ - SPEKTRÁLNÍ OBLAST
- 7 POPIS MODELOVÁNÍ - KORELAČNÍ OBLAST
- 8 POPIS MODELOVÁNÍ - VZÁJEMNÉ SPEKTRUM A KORELACE
- 9 STATISTICKÝ POPIS MODELOVÁNÍ
- 10 TYPY PROCESŮ
- 11 TYPICKÉ TVARY PSD
- 12 PŘÍKLADY PROCESŮ
- 13 DODATEK - ŠÍŘKA PÁSMA
- 14 POUŽITÉ PRAMENY

Cíl přednášky:

modelování signálů s použitím LTI filtrů a jejich popis
v časové, korelační i spektrální oblasti

MOTIVACE A TYPY ÚLOH

Vybrané příklady motivace pro modelování signálů:

- 1 ověřování a optimalizace algoritmů, např. spektrální analýzy, komprese dat, potlačování šumů, separace signálů, koherenční analýzy
- 2 konstrukce předpovědí (extrapolace) řad, např. předpovědi ekonomických ukazatelů, spotřeby energie v elektrorozvodných sítích, úrovně znečištění ovzduší
- 3 syntéza řeči z textu, syntéza řeči po předchozí analýze a kompresi (mobilní telefonie, hlásky v ústřednách, systémy komunikace člověk - stroj).

MOTIVACE A TYPY ÚLOH

Definice modelování

Modelováním signálů rozumíme použití LTI filtrů s přenosem ve tvaru racionální lomené funkce¹ na jejichž vstup přivedeme deterministický signál s konstatním spektrem nebo náhodný signál s konstatní výkonovou hustotou (PSD)

Cílem filtrace je získání výstupního signálu s danými charakteristikami (korelace nebo spektrum). Tento signál (nebo filtr, který jej generuje) označujeme jako model příslušný reálnému signálu.

¹Lineární časově invariantní filtre s danými parametry (koeficienty)

MOTIVACE A TYPY ÚLOH

Pro generování signálu je ovšem třeba znát parametry LTI filtru.

V praxi jsou parametry filtru typicky získávány dvěma přístupy:

- pomocí fyzikálního modelu úlohy - existují dvě základní zadání²
 - určíme předpis pro generování náhodného signálu s nulovou střední hodnotou a danou autokorelační funkcí, např. $R_x[k] = \sigma^2 \alpha^{|k|}$, kde $0 < \alpha < 1$
 - určíme předpis pro generování náhodného signálu s nulovou střední hodnotou pro dané šířky pásma a frekvence
- analýzou reálného signálu - např. mobilní telefonie - parametry použité pro generování signálu (např. řeči) jsou předem neznámé a jsou získávány analýzou řeči na straně kódování, následně přeneseny a použity pro zpětnou syntézu signálu

²Např. používaná při generování řeči

MODELOVÁNÍ SIGNÁLŮ

Pro LTI systémy s racionální přenosovou funkcí lze tedy modelování signálů chápat jako generování signálů průchodem determinovaného signálu nebo šumu LTI filtrem s danými koeficienty

Odvození bude provedeno pro diskrétní systémy - nicméně výsledné vztahy lze použít i pro soustavy spojité v čase

MODELOVÁNÍ SIGNÁLŮ

A. Deterministický případ

Buzení

- jednotkový impulz $v[n] = \delta[n]$
- periodická posloupnost jednotkových impulzů

$$v[n] = \sum_{k=0}^P \delta[n - kL]$$

L je požadovaná perioda výstupního signálu
generování znělých úseků řeči: aproximace glotálních impulzů

- posloupnost neekvidistantně rozmístěných jednotkových impulzů s různou amplitudou d_k

$$v[n] = \sum_{k=0}^P d_k \delta[n - n_k]$$

POPIS MODELOVÁNÍ - ČASOVÁ OBLAST

Pro výstupní signál $x[n]$ platí konvoluční vztah

$$x[n] = v[n] * h[n] = \sum_{l=0}^{\infty} h[l]v[n-l]$$

nebo diferenční rovnice

$$x[n] = \sum_{l=0}^q b_l v[n-l] - \sum_{k=1}^p a_k x[n-k]$$

a_k a b_l jsou koeficienty LTI filtru s impulzovou odezvou $h[n]$

POPIS MODELOVÁNÍ - - SPEKTRÁLNÍ OBLAST

Z-transformací diferenční rovnice získáme

$$X(z) = \sum_{l=0}^q b_l V(z) z^{-l} - \sum_{k=1}^p a_k X(z) z^{-k}$$

$$X(z) = V(z)H(z)$$

kde $H(z)$ je přenosová funkce použitého LTI filtru

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^q b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

POPIS MODELOVÁNÍ - - SPEKTRÁLNÍ OBLAST

Pro energetické spektrum platí

$$\begin{aligned} C_x(e^{j\Theta}) &= \left| X(e^{j\Theta}) \right|^2 = X(e^{j\Theta})X^*(e^{j\Theta}) = V(e^{j\Theta})H(e^{j\Theta})V^*(e^{j\Theta})H^*(e^{j\Theta}) \\ &= |V(e^{j\Theta})|^2 |H(e^{j\Theta})|^2 = C_v(e^{j\Theta}) |H(e^{j\Theta})|^2 \end{aligned}$$

Je-li $v[n] = \delta[n]$, potom $|V(e^{j\Theta})|^2 = 1$, a tedy

$$C_x(e^{j\Theta}) = |X(e^{j\Theta})|^2 = |H(e^{j\Theta})|^2$$

Energetické spektrum výstupního signálu je určeno pouze frekvenční charakteristikou LTI filtru

Parafráze: „amplitudové frekvenční vlastnosti LTI filtru se obtisknou do spektra signálu“

POPIS MODELOVÁNÍ - - KORELAČNÍ OBLAST

Pro vztah mezi energetickým spektrem a korelací platí

$$C_x(e^{j\Theta}) = \mathcal{DTFT}\{R_x[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x[k]e^{-jk\Theta}$$

Proto lze pomocí inverzní Fourierovy transformace psát

$$R_x[k] = R_v[k] * R_h[k]$$

Pro autokorelační funkci $R_v[k]$ jednotkového impulsu $\delta[k]$ platí $R_v[k] = \delta[k]$, a proto

$$R_x[k] = R_h[k]$$

Parafráze: „autokorelační funkce impulzové odezvy soustavy obtiskne do signálu“

POPIS MODELOVÁNÍ - VZÁJEMNÉ SPEKTRUM

Vzájemné spektrum mezi výstupem $x[n]$ filtru a jeho buzením $v[n]$ je

$$C_{xv}(e^{j\Theta}) = X(e^{j\Theta})V^*(e^{j\Theta}) = X(e^{j\Theta})V(e^{-j\Theta})$$

zároveň platí

$$X(e^{j\Theta}) = V(e^{j\Theta})H(e^{j\Theta})$$

a tedy

$$\begin{aligned} C_{xv}(e^{j\Theta}) &= V(e^{j\Theta})V^*(e^{j\Theta})H(e^{j\Theta}) \\ &= V(e^{-j\Theta})V(e^{j\Theta})H(e^{j\Theta}) = C_v(e^{j\Theta})H(e^{j\Theta}) \end{aligned}$$

POPIS MODELOVÁNÍ - VZÁJEMNÉ SPEKTRUM

Pro spektrum $C_v(e^{j\Theta})$ jednotkového impulzu platí

$$C_v(e^{j\Theta}) = 1$$

a proto

$$C_{xv}(e^{j\Theta}) = H(e^{j\Theta})$$

To znamená, že při modelování signálu $x[n]$ impulzovou odezvou LTI filtru bude vzájemné spektrum mezi buzením a výstupem jednoznačně určeno komplexní frekvenční charakteristikou $H(e^{j\Theta})$ LTI filtru

Opět platí, že forma $H(e^{j\Theta})$ „vyřezává“ ze spektra $C_v(e^{j\Theta})$ výsledné komplexní spektrum $C_{xv}(e^{j\Theta})$ - obsahuje informaci o fázových vlastnostech LTI filtru X $C_x(e^{j\Theta})$ neobsahuje informaci o fázových vlastnostech LTI filtru

POPIS MODELOVÁNÍ - VZÁJEMNÁ KORELACE

Pro vzájemnou korelaci platí

$$R_{xv}[k] = R_v[k] * h[k]$$

pro jednotkový impulz jako buzení LTI filtru získáme

$$R_{xv}[k] = h[k]$$

Vzájemná korelační funkce plně a jednoznačně určena impulzovou odezvou LTI filtru!!

STATISTICKÝ POPIS MODELOVÁNÍ

B. Buzení LTI soustavy širokopásmovým šumem

Popis modelování – postup obdobný jako pro determinované signály, ale nyní je nutné pro přechod od časové oblasti do spektrální použít definici spektrální výkonové hustoty (PSD) pro stacionární proces

$$S_x(e^{j\Theta}) = \mathcal{DTFT}(R_x[k]) = \lim_{N \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{N} X_N(e^{j\Theta}) X_N^*(e^{j\Theta})\right],$$

kde $X_N(e^{j\Theta})$ je DTFT signálu konečné délky o N vzorcích

a $R_x[k] = E[x[n+k]x^*[n]]$ je korelační funkce³

³Podobně vzájemná korelační funkce $R_{xu}[k] = E[x[n+k]u^*[n]]$

STATISTICKÝ POPIS MODELOVÁNÍ

Pro buzení bílým šumem $u[n]$ získáme následující výsledky⁴

$$S_x(e^{j\Theta}) = \sigma_u^2 |H(e^{j\Theta})|^2$$

$$S_{xu}(e^{j\Theta}) = \sigma_u^2 H(e^{j\Theta})$$

$$R_x[k] = \sigma_u^2 R_h[k]$$

$$R_{xu}[k] = \sigma_u^2 h[k]$$

⁴Tyto vztahy formálně korespondují se vztahy pro deterministické signály, kdy vstupem byl jednotkový impuls - zde se navíc objevuje rozptyl šumu σ_u^2

TYPY PROCESŮ

Podle typu LTI soustavy rozlišujeme tři typy procesů:

ARMA - autoregresní proces klouzavých součtů $ARMA(p, q)$ generovaný LTI IIR filtrem

$$x[n] = \sum_{l=0}^q b_l u[n-l] - \sum_{k=1}^p a_k x[n-k],$$

s přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{l=0}^q b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = z^{p-q} \frac{\sum_{l=0}^q b_l z^{q-l}}{z^p + \sum_{k=1}^p a_k z^{p-k}}$$

TYPY PROCESŮ

MA proces klouzavých součtů $MA(q)$, generovaný FIR filtrem řádu q

$$x[n] = \sum_{l=0}^q b_l u[n-l]$$

s polynomiální přenosovou funkcí

$$H(z) = B(z) = \sum_{l=0}^q b_l z^{-l} = \frac{\sum_{l=0}^q b_l z^{q-l}}{z^q}$$

Tento model má q -násobný pól v počátku z -roviny a q nulových bodů, jejichž poloha je určena polynomem $B(z)$

TYPY PROCESŮ

AR autoregresní proces $AR(p)$, generovaný IIR filtrem řádu p , který nemá dopředné vazby

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] + u[n]$$

Přenosová funkce tohoto filtru

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = \frac{z^p}{z^p + \sum_{k=1}^p a_k z^{p-k}}$$

má p násobný nulový bod v počátku a p reálných nebo komplexně sdružených pólů určených polynomem $A(z)$

TYPICKÉ TVARY PSD PROCESŮ

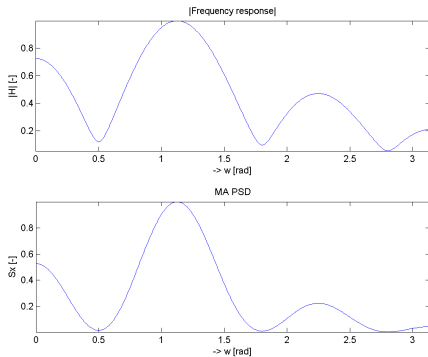
Typické vlastnosti PSD podle typu filtru modelujícího signál

- MA spektrum vykazuje ostrá údolí a plochá maxima (kopce)
- AR spektrum vykazuje ostrá maxima (kopce) a mělká údolí
- ARMA spektrum vykazuje ostrá⁵ maxima i ostrá údolí

⁵ Jak je tvar ostrý závisí samozřejmě na vzdálenosti nul a pólů od jednotkové kružnice

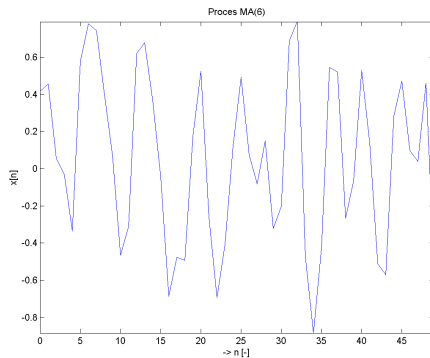
PŘÍKLAD MA PROCESU

PŘENOSOVÁ FUNKCE $H(z)$ A PSD PROCESU MA(6)



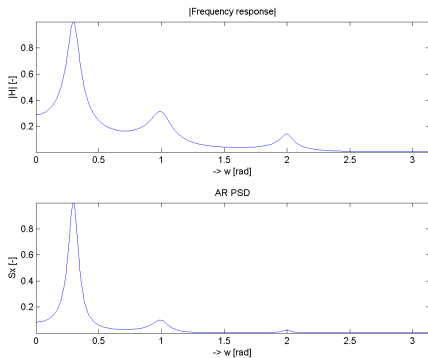
PŘÍKLAD MA PROCESU

PROCES MA(6), ROZPTYL=0.2



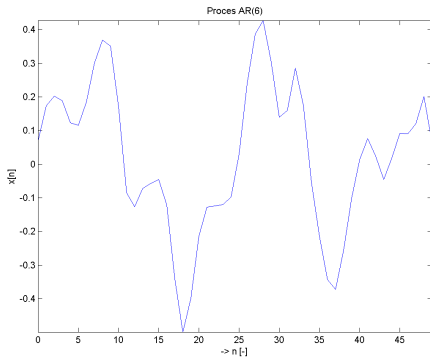
PŘÍKLAD AR PROCESU

PŘENOSOVÁ FUNKCE $H(z)$ A PSD PROCESU AR(6)



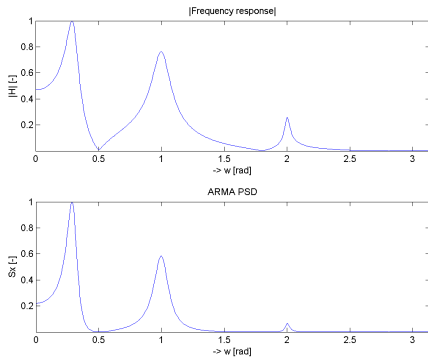
PŘÍKLAD AR PROCESU

PROCES AR(6), ROZPTYL=0.05



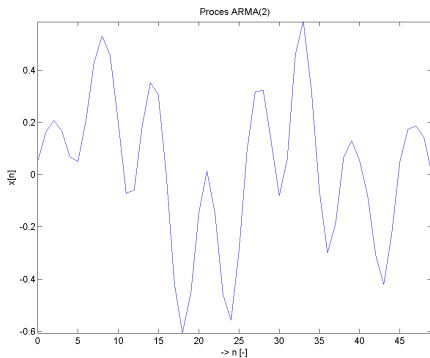
PŘÍKLAD ARMA PROCESU

PŘENOSOVÁ FUNKCE $H(z)$ A PSD PROCESU ARMA(6)



PŘÍKLAD ARMA PROCESU

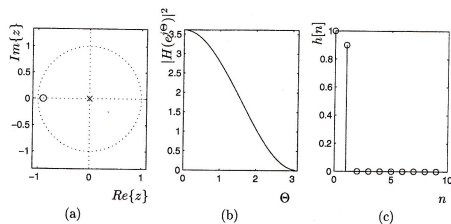
PROCES ARMA(6), ROZPTYL=0.085



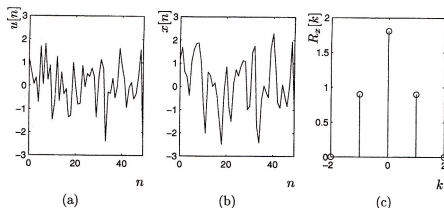
MA PROCES

134

KAPITOLA 7. PARAMETRICKÉ MODELOVÁNÍ - GENEROVÁNÍ SIGNÁLŮ



Obrázek 7.4: Charakteristiky filtru generujícího MA(1) proces: (a) diagram nulových bodů a pólů, (b) kvadrát zisku filtru, (c) impulzová odezva

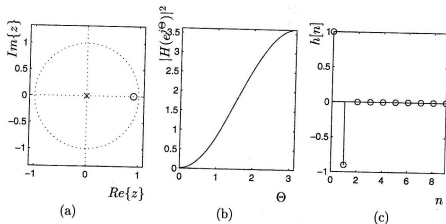


Obrázek 7.5: Časová realizace a korelace MA(1) procesu: (a) průběh šumu, (b) průběh výstupního signálu, (c) autokorelace výstupního signálu

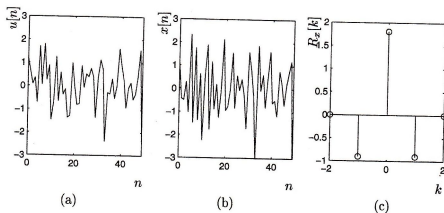
MA PROCES

7.7. VYBRANÉ PŘÍKLADY GENEROVÁNÍ SIGNÁLŮ

135

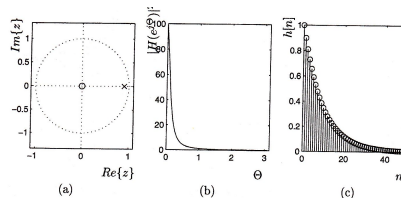


Obrázek 7.6: Charakteristiky filtru generujícího MA(1) proces: (a) diagram nulových bodů a pólů, (b) kvadrát zisku filtru, (c) impulzová odezva

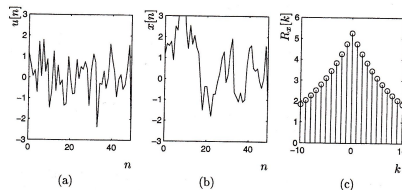


Obrázek 7.7: Časová realizace a korelace MA(1) procesu: (a) průběh šumu, (b) průběh výstupního signálu, (c) autokorelace výstupního signálu

AR PROCES

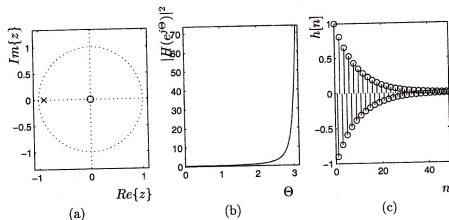


Obrázek 7.9: Charakteristiky filtru generujícího AR(1) proces: (a) diagram nulových bodů a pólů, (b) kvadrát zisku filtru, (c) impulsová odezva

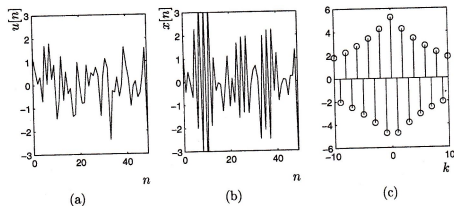


Obrázek 7.10: Časová realizace a korelace AR(1) procesu: (a) průběh šumu, (b) průběh výstupního signálu, (c) autokorelace výstupního signálu

AR PROCES



Obrázek 7.11: Charakteristiky filtru generujícího AR(1) proces: (a) diagram nulových bodů a pólů, (b) kvadrát zisku filtru, (c) impulzní odezva



Obrázek 7.12: Časová realizace a korelace AR(1) procesu: (a) průběh šumu, (b) průběh výstupního signálu, (c) autokorelace výstupního signálu

ŠÍŘKA PÁSMO

Vztahy pro šířku pásma B pro izolovaný pól⁶

1. Pro izolovaný pól analogového filtru platí vztah $B = 2\sigma$ [rad/s] obecně.

2. Pro izolovaný pól diskretního filtru platí obecně vztahy

$$BW = -2 \ln r \text{ [rad]}$$

$$B = -2/T \ln r \text{ [rad/s]}$$

$$B_f = -f_s/\pi \ln r \text{ [Hz]}^7, T = 1/f_s \text{ je vzorkovací krok}$$

3. Pro izolovaný pól diskretního filtru platí vztah $BW = 2(1 - r)$ [rad], kde $(1 - r)$ je vzdálenost pólu od jednotkové kružnice, pouze tehdy, je-li $(1 - r) \ll 1$ ⁸

⁶ σ je hodnota reálné části pólu v rovině s , r je modul pólu v rovině z

⁷Odvozeno pomocí diskretizace impulsovou invariancí – Sovka, Pollák: Vybrané metody číslicového zpracování signálů, ČVUT v Praze, 2001

⁸Není-li tato podmínka splněna, je lépe použít obecný vztah $BW = -2 \ln r$ [rad] – viz položka 2

ŠÍŘKA PÁSMÁ

Pomocí vztahů pro šířku pásma B lze snadno spočítat koeficienty filtru prvního řádu nebo filtru druhého řádu s komplexními koeficienty (tlumeného rezonátoru), zadáme-li rezonanční frekvenci a požadovanou šířku pásma

Přenosová funkce AR(2) procesu s komplexně sdruženými póly s modulem r a normovanou frekvencí Θ_0 má tvar

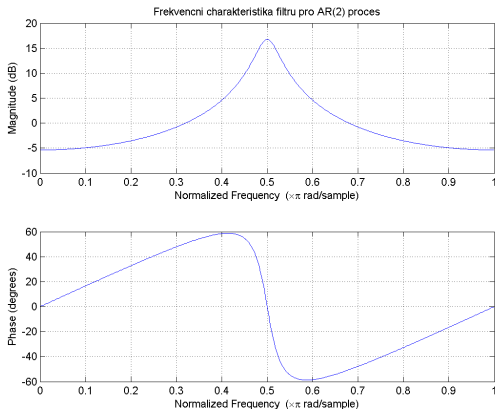
$$H(z) = \frac{1}{z^2 + a_1 z + a_2},$$

kde $a_1 = -2r \cos(\Theta_0)$, $a_2 = r^2$, $r = e^{-B_s \pi / f_s}$, $\Theta_0 = 2\pi f_0 / f_s$

ŠÍŘKA PÁSMÁ

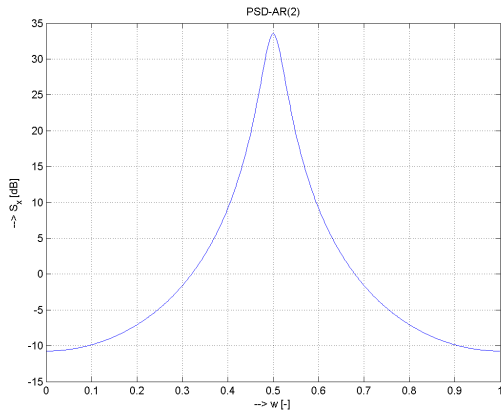
PRO $f_s = 400$ Hz, $f_0 = 100$ Hz A $B_f = 10$ Hz, ZÍSKÁME PŘENOS VE TVARU

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + 0.8546},$$



ŠÍŘKA PÁSMÁ

TVAR PŘÍSLUŠNÉ PSD



POUŽITÉ PRAMENY - ČESKÁ LITERATURA

kniha: Uhlíř, Sovka: Číslicové zpracování signálů, Vyd. ČVUT, Praha 1995 a 2002

kniha: Jan, J.: Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů, Vyd. VUT, Brno 1997

skripta: Sovka, Pollák: Vybrané metody číslicového zpracování signálů, ČVUT v Praze, 2001