Návrh a Konstrukce Antén

A0M17NKA

Elektricky malé antény I.

Principální limity

Milan Polívka

ČVUT v Praze, FEL

B2: 639, l.2270

polivka@fel.cvut.cz

zima 2023/24

Osnova

- Motivace
- Definice elektricky malých antén
- Činitel jakosti *Q* a šířka pásma *BW*
- Principiální omezení *Q* elektricky malých antén
  - přehled vybraných přístupů
- Principiální omezení zisku
- Topologie efektivních malých antén
- Shrnutí

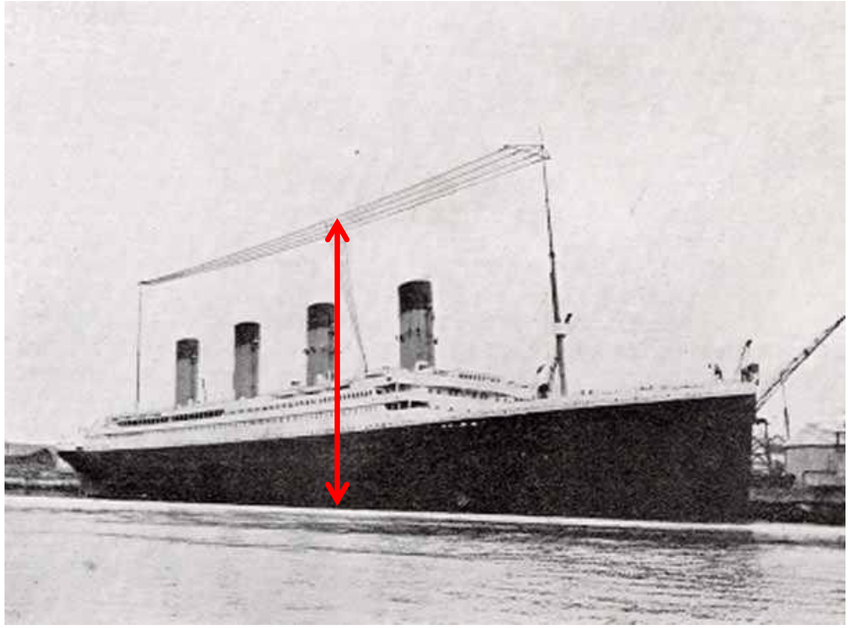
Motivace

Kdysi (Titanic, 1912) ..

- Fyzicky velké avšak el. malé antény pro přenos signálu v pásmu kHz vln

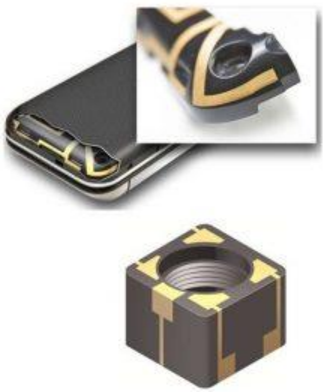
$f = 500$ kHz ($\lambda = 600$ m)

$h \sim 60$ m nad vodní hladinou ($h/\lambda = 1/10$)



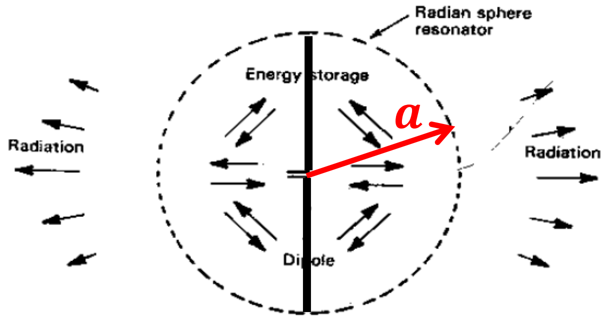
Dnes (20xx) ..

- Miniaturizované antény v pouzdrech malých přenosných bezdrátových zařízení (mobilní telefony, notebooky, USB klíčenky, ..)
- Umístění antén na DPS: integrace v blízkosti součástek a vodivých ploch



Definice elektricky malých antén

Wheeler (1947) - elektricky malá anténa je taková, jejíž největší rozměr je menší než „radián-délka“ $\lambda/2\pi$ (*radian-length*)



$$2a < \lambda/2\pi \;\text{ tj. }\; a < \frac{\lambda}{4\pi}\left(\sim\frac{\lambda}{12}\right)$$

=> $\boldsymbol{ka < 0,5}$

k = 2π/λ - vlnové číslo,

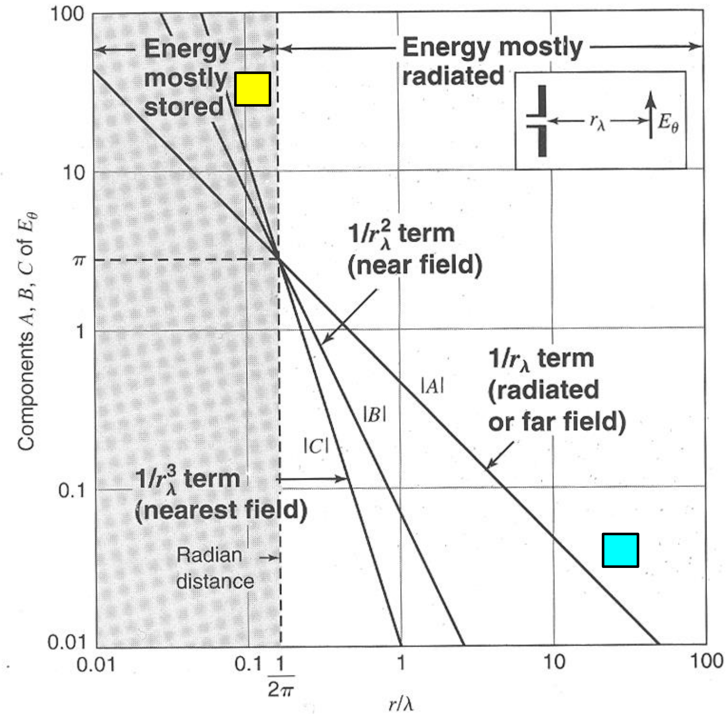
a - poloměr koule opsaný anténě

Složky intenzit elektrického a magnetického pole el. dipólu (teorie EM pole):

$$E_r = \frac{2}{\omega\varepsilon}\cos\theta\left(\frac{j}{r^2} + \frac{1}{\boldsymbol{kr^3}}\right)e^{-jkr}$$

$$E_\theta = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\sin\theta\left(-\frac{jk}{\boldsymbol{r}} - \frac{1}{r^2} + \frac{j}{\boldsymbol{kr^3}}\right)e^{-jkr}$$

$$H_\varphi = \sin\theta\left(\frac{j}{kr^2} - \frac{1}{\boldsymbol{r}}\right)e^{-jkr}$$

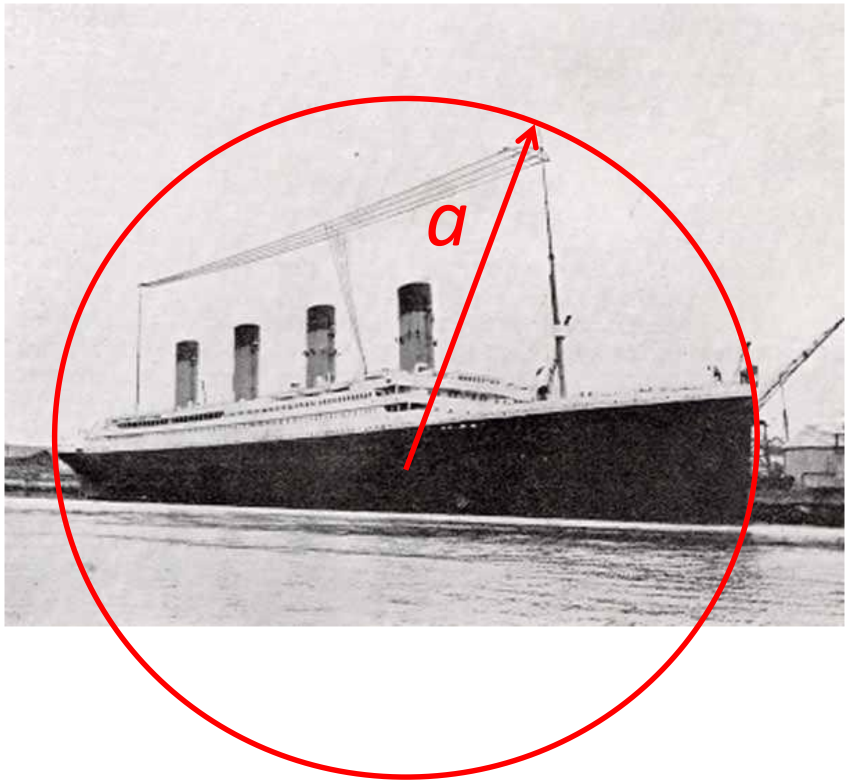


Wheeler, H. A., Fundamental Limitations of Small Antennas, Proc. IRE, pp. 1479-1488, 1947.
Kraus, Marhefka, Antennas, McGraw Hill, 2002.

Elektricky malé antény

Poloměr opsané koule – nutno uvažovat i vodivou (zemní) desku antény (tečou po ní proudy)

$\boldsymbol{ka < 0,5}$



Wheeler, H. A., Fundamental Limitations of Small Antennas, Proc. IRE, pp. 1479-1488, 1947.

Činitel jakosti

Činitel jakosti se používá pro popis kvality obvodu jako rezonátoru. Fyzikální definice

$$Q = 2\pi \frac{W_{ak}}{W_{ztr}} \text{ resp. } Q = \omega \frac{W_{ak}}{P_{ztr}}$$

W_{ak} - střední hodnota akumulované energie oscilující soustavy (EM pole: $W_{ak} = W_e + W_m$)

W_{ztr} - střední hodnota ztracené energie resp. P_{ztr} je ztracený výkon za periodu

Pro antény se používá upravený vztah

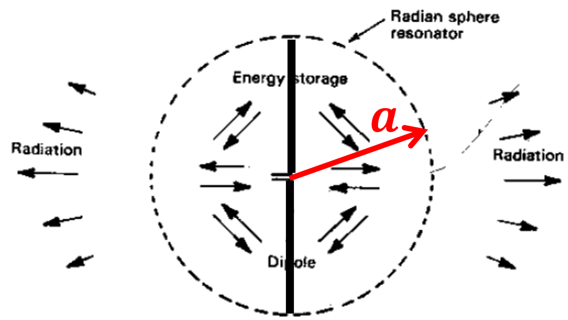
$$\boxed{Q = \begin{cases} \dfrac{2\omega W_e}{P_{vyz}}, W_e > W_m \\ \dfrac{2\omega W_m}{P_{vyz}}, W_m > W_e \end{cases}}$$

k doladění antén do rezonance:

elektrického typu (dipóly) - indukčnost L

magnetického typu (smyčky) - kapacita C

W_e resp. W_m – střední hodnota akumulované (nešířící se) energie elektrického resp. magnetického pole,
P_{vyz} vyzářený výkon.
U antén požadujeme co největší vyzářenou energii,
tj. malou hodnotu činitele jakosti.



Činitel jakosti a šířka pásma

Činitel jakosti Q se používá k odhadu šířky pásma antény *BW*:

$$BW \approx \frac{1}{Q} \quad \text{pro} \quad Q \gg 1$$

kde BW je relativní šířka pásma (fractional bandwidth), tj. $BW = \frac{2(f_2 - f_1)}{f_2 + f_1}$

Uvažujeme-li u antén vyzařovací účinnost η, pak

$$BW\eta \approx \frac{1}{Q}$$

Vztah zohledňující poměr stojatých vln *PSV* (Yaghjian, Best, 2005)

$$\boxed{BW \approx \frac{PSV - 1}{Q\sqrt{PSV}}}$$

pro $PSV = 5{,}828$ (pokles na ½ výkonu)

$$BW_{3\mathrm{dB}} \approx \frac{2}{Q} \qquad \text{pro} \quad Q \gg 1$$

A. D. Yaghjian, S. Best, Impedance, Bandwidth, and Q of Antennas, *Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. 53, No.4, 2005

Principiální omezení elektricky malých antén

Fyzikální význam principiálního limitu - pro elektricky malou anténu daného rozměru a objemu (tvaru) existuje **fyzikální omezení** na maximální šířku pásma resp. minimální činitel jakosti, které nemůže být překročeno.

Přístupy:

- náhradní RLC obvod (1948 Chu, 2006 Thal),
- intenzity polí (1964 Collin a Rothschild, 1996 McLean)
  obojí uvažují kulovou geometrii zářiče, **nezohledňují** vliv **tvaru** zářiče na mezní limit

vs.

- zdrojové veličiny (2003 Geyi, 2007-09 Gustafsson, 2010 Vandenbosh):
  polarizovatelnost, nábojové/proudové hustoty – pracují s konkrétním **tvarem** zářiče, umožňují dokonce určit **optimální proudové (nábojové) rozložení**

Používaná **zjednodušení**:

- zářič je malý vzhledem k vlnové délce (*ka* -> 0),
- uvažuje se jedna (základní) rezonance,
- TM (dipól) nebo TE (smyčka) mód příp. oba.

elmag.org

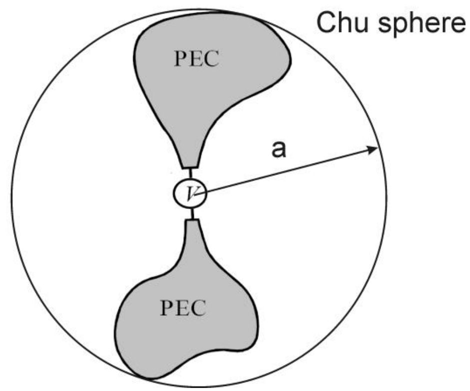
Principiální omezení elektricky malých antén

Chu (1948) odvodil dolní mez vyzařovacího činitele jakosti *Q.* Uvažoval:

- **kouli** o **poloměru *a*** obklopující malou všesměrovou vertikálně polarizovanou anténu
- reaktivní pole **uvnitř** koule považoval **nulové** *(Chuova* anténa).

Složky pole vně koule se šířících TM_{n0} vln vyjádřil pomocí sférických (r, θ, φ) vlnových funkcí.

$$
\begin{aligned}
H_\varphi &= \sum_n A_n P_n^1(\cos\theta)\, h_n^{(2)}(kr) \\
E_r &= -jZ_0 \sum_n A_n n(n+1) P_n(\cos\theta) \frac{h_n^{(2)}(kr)}{kr} \\
E_\theta &= jZ_0 \sum_n A_n P_n^1(\cos\theta) \frac{1}{kr}\frac{d}{dr}\left(h_n^{(2)}(kr)\right)
\end{aligned}
$$



A_n - konstanty určené zdrojovými veličinami

$P^1{}_n(\cos\theta)$ – Legenderův polynom řádu $m = 1$, stupně n

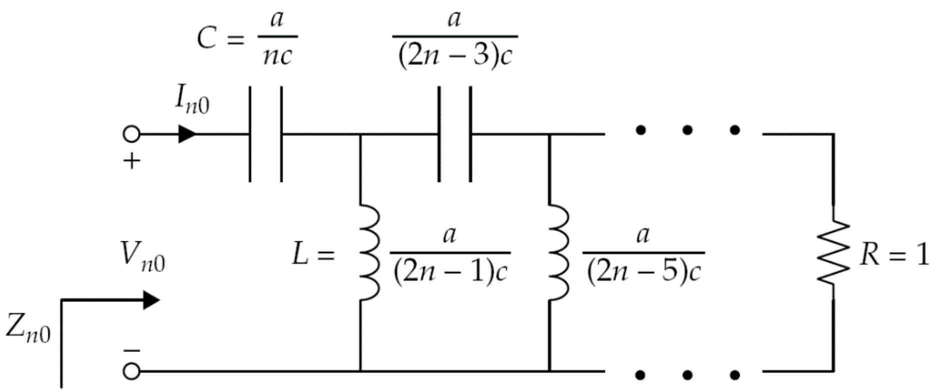
$h_n^{(2)}(kr)$ - sférická Hankelova funkce druhého druhu

$Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ - vlnová impedance volného prostoru (resp. prostředí s μ, ε)

Chu, L. J., Physical Limitations of Omni-Directional Antennas, J. Appl. Phys., vol. 19, pp. 1163-1175, 1948.

Principiální omezení elektricky malých antén

Rozvoji sférických vlnových funkcí přiřadil náhradní obvod – kaskádní zapojení normovaných sériových kapacitorů a paralelních induktorů zatížených (normovanou) impedancí volného prostoru



z něj odvodil normovanou vstupní impedanci odpovídající normované vlnové impedanci TM_{n0} vln pomocí rekurentního vztahu

$$Z_{n0} = \frac{j\left(ka h_n^{(2)}(ka)\right)'}{ka h_n^{(2)}(ka)} = \frac{n}{jka} + \cfrac{1}{\cfrac{2n-1}{jka} + \cfrac{1}{\cfrac{2n-3}{jka} + \cfrac{\ddots}{\cfrac{1}{\cfrac{3}{jka} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{jka} + 1}}}}}$$

Principiální omezení elektricky malých antén

Chu vyjádřil Q módů TM_{n0} jako sumu

$$Q = \frac{2\omega W_e}{P_r} = \frac{\sum_{n=\text{liché}} |A_n|^2 \frac{n(n-1)}{2n+1} Q_n}{\sum_{n=\text{liché}} |A_n|^2 \frac{n(n-1)}{2n+1}}$$

kterou lze aproximovat výrazem

$$\boxed{Q_{min,\mathrm{TMn0}} = \frac{1 + 2(ka)^2}{(ka)^3 (1 + 2(ka)^2)} \approx \frac{1}{(ka)^3}}$$

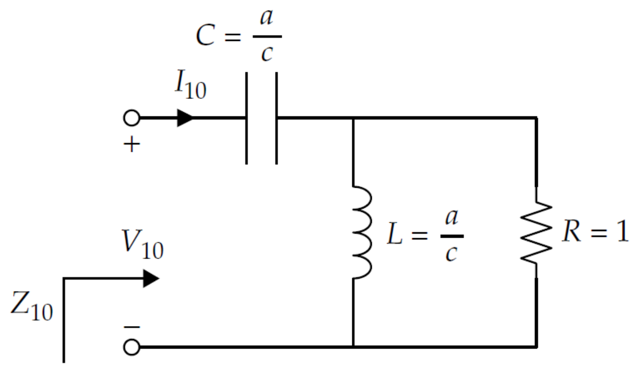
pro $ka \to 0\ (a \ll \lambda)$

Pro základní mód TM_{10} ($n = 1$) lze Q odvodit z elektrické energie akumulované v obvodu a výkonu ztraceného v rezistoru (McLean, 1996)

$$\tilde{W}_e = \frac{1}{2} C \mid V_C \mid^2 = \frac{1}{2\omega ka}$$

$$P_{rad} = \frac{1}{2} \mid I_R \mid^2 R = \frac{(ka)^2}{1 + (ka)^2}$$

$$\boxed{Q_{Chu,\,\mathrm{TM}_{10}} = \frac{2\omega \tilde{W}_e}{P_{rad}} = \frac{1}{(ka)^3} + \frac{1}{ka}}$$



McLean, J. S., A Re-examination of the Fundamental Limits on the Radiation Q of Electrically Small Antennas, *IEEE Trans AP*, vol. 44, pp. 672-675, May 1996.

Principiální omezení elektricky malých antén

McLean (1996)

odvodil Q_{min} ze složek intenzit elektrického a magnetického pole krátkého dipólu

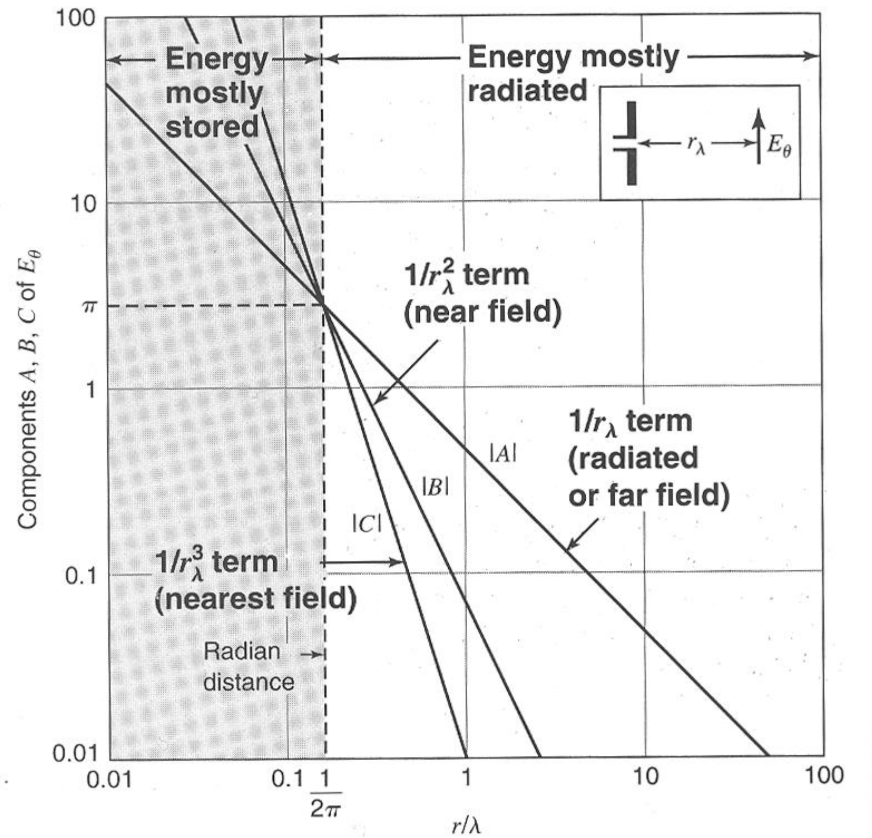
uvažoval základní mód TM_{01} nebo TE_{01}

Pro TM_{01} (dipól):

$$E_r = \frac{2}{\omega\varepsilon}\cos\theta\left(\frac{j}{r^2}+\frac{1}{kr^3}\right)e^{-jkr}$$

$$E_\theta = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\sin\theta\left(-\frac{jk}{r}-\frac{1}{r^2}+\frac{j}{kr^3}\right)e^{-jkr}$$

$$H_\varphi = \sin\theta\left(\frac{j}{kr^2}-\frac{1}{r}\right)e^{-jkr}$$



McLean, J. S., A Re-examination of the Fundamental Limits on the Radiation Q of Electrically Small Antennas, IEEE Trans AP, vol. 44, pp. 672-675, May 1996.

Principiální omezení elektricky malých antén

McLean (1996)

pro TM_{01} mód (dipól) vypočetl akumulovanou hustotu el. energie $\widetilde{w}_e$

odečtením výkonové hustoty $w_e^{zář}$ zářivých složek intenzit polí ($\sim {}^1/_r$) od hustoty el. energie w_e všech složek ($\sim {}^1/_r, {}^1/_{r^2}, {}^1/_{r^3}$)

$$\widetilde{w}_e = w_e - w_e^{zář}$$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\left|E_\theta\right|^2 + \left|E_r\right|^2\right) = .. = \frac{1}{2\omega}Z_0\left[(\sin\theta)^2\left(\frac{1}{k^3r^6} - \frac{1}{kr^4} + \frac{k}{r^2}\right) + 4(\cos\theta)^2\left(\frac{1}{k^3r^6} + \frac{1}{kr^4}\right)\right]$$

$$w_e^{zář} = \frac{1}{2}\varepsilon\left|E_\theta^{zář}\right|^2 = .. = \frac{{Z_0}^2}{r^2}(\sin\theta)^2$$

$$\widetilde{W}_e = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty} \widetilde{w}_e r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = .. = \frac{4\pi Z_0}{3\omega}\left(\frac{1}{(ka)^3} + \frac{1}{ka}\right)$$

$$\boxed{Q_{min} = \frac{2\omega \widetilde{W}_e}{P_{zář}} = \frac{1}{(ka)^3} + \frac{1}{ka}}$$

$$P_{zář} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Re(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = .. = \frac{8\pi}{3}Z_0$$

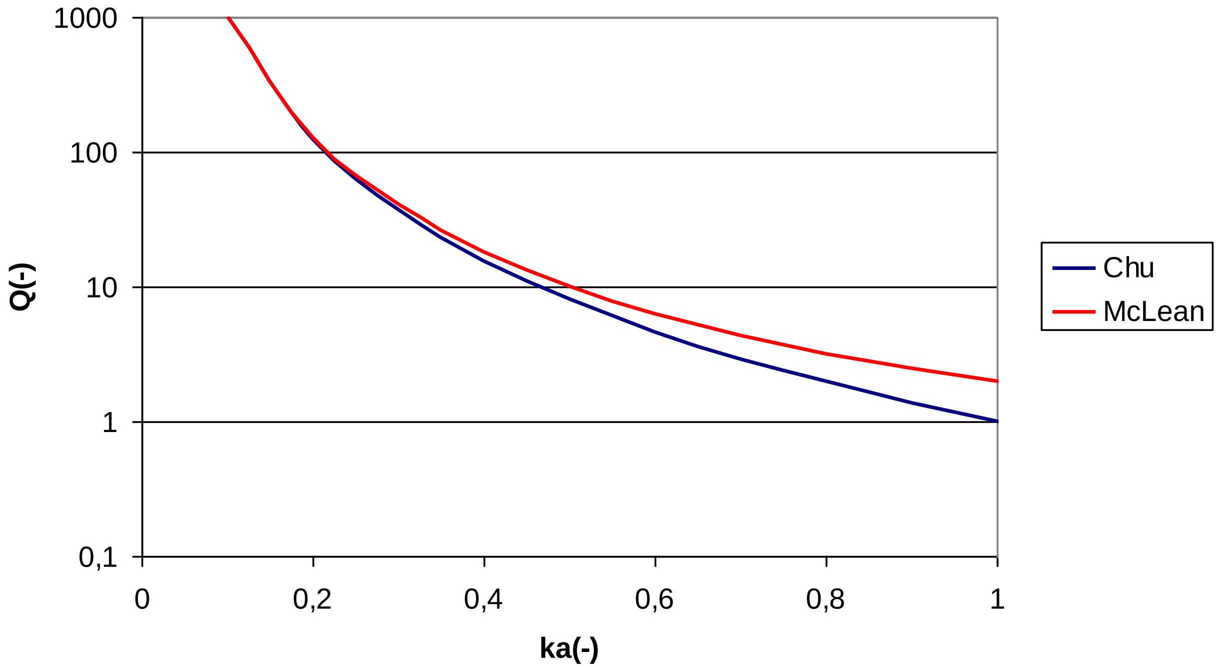
McLean, J. S., A Re-examination of the Fundamental Limits on the Radiation Q of Electrically Small Antennas, IEEE Trans AP, vol. 44, pp. 672-675, May 1996.

Principiální omezení elektricky malých antén

Pro velmi malé *ka* se výraz shoduje s výrazem odvozeným Chuem,
pro *ka* = 1 je chyba 100 % ($Q_{McLean} = 2Q_{Chu}$)

$$Q_{McLean} = \frac{1}{(ka)^3} + \frac{1}{ka} \approx \frac{1}{(ka)^3}, \quad ka \langle\langle 1$$

$$Q_{Chu} = \frac{1 + 2(ka)^2}{(ka)^3(1 + 2(ka)^2)} \approx \frac{1}{(ka)^3}$$



Principiální omezení elektricky malých antén

Yaghjian, Best (2005) odvodili vztah mezi *BW* a *Q* s uvážením konkrétní hodnoty poměru stojatých vln *PSV*

$$Q(\omega) \approx \frac{PSV - 1}{BW\sqrt{PSV}}$$

Dále odvodili vztah pro určení *Q* z frekvenčního průběhu vstupní impedance $Z_{in}(\omega)$ získané např. EM simulátorem či měřením

$$\boxed{\begin{aligned} Q(\omega) &\approx \frac{\omega}{2R_{in}(\omega)}\left|Z'_{in}(\omega)\right| \\ \left|Z'_{in}(\omega)\right| &= \sqrt{R'_{in}(\omega)^2 + \left(X'_{in}(\omega) + \frac{X_{in}(\omega)}{\omega}\right)^2} \end{aligned}}$$

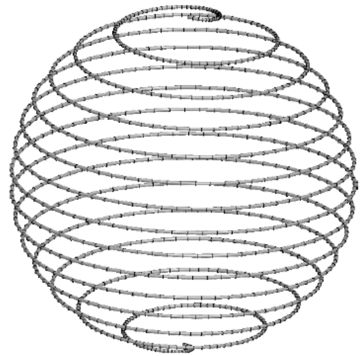
A.D. Yaghjian, S. Best, Impedance, Bandwidth, and Q of Antennas, *Trans. on Antennas and Propagation*, Vol. 53, No.4, 2005

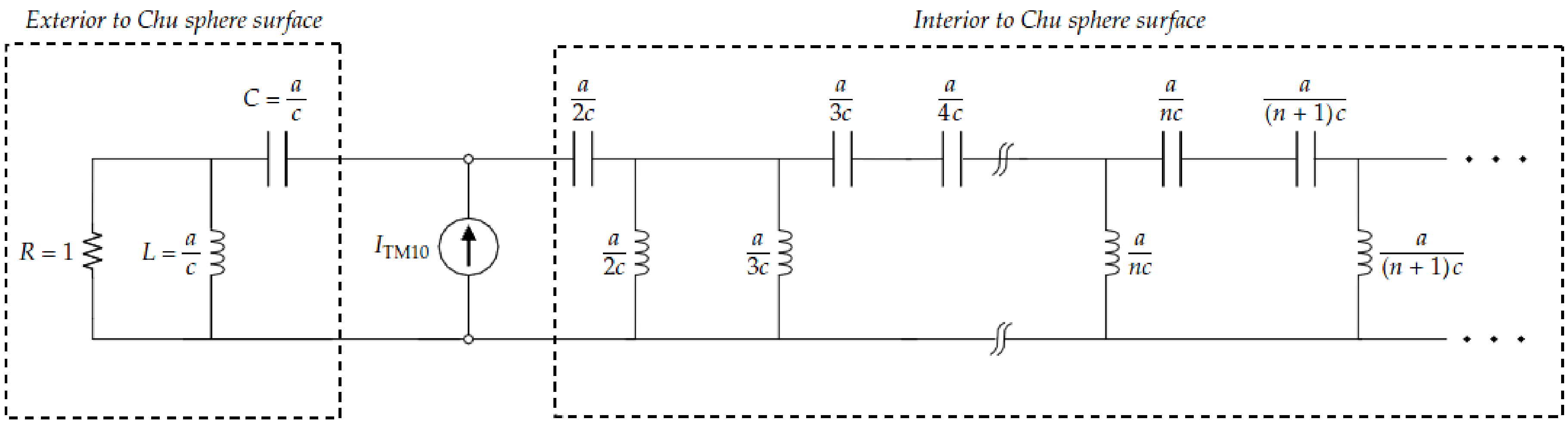
Principiální omezení elektricky malých antén

Thal (2006) uvažoval speciální případ - kulové drátové antény
zahrnul **nenulovou akumulovanou energii uvnitř** objemu **koule**;
z náhradního obvodu odvodil vztah (po aproximaci)

$$\boxed{Q_{Thal} \approx \frac{1.5}{(ka)^3} + \frac{0.6}{ka}}$$ TM_{10} mód (dipól)

$$\boxed{Q_{Thal} \approx \frac{3}{(ka)^3} + \frac{3}{ka}}$$ TE_{10} mód (smyčka)





Thal, H.L., New radiation Q limits for spherical wire antennas, *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, Vol. 54, No. 10, Oct. 2006.

Principiální omezení elektricky malých antén

Gustafsson a kol. (2007, 2009) odvodili mezní limit pro *D*/*Q* z rozptylové teorie malých částic.

Konečný výraz zohledňuje vliv tvaru zářiče na Q resp. BW.

Výchozím vztahem je rovnost (*sum rule*, *scattering identity*)

$\int_0^\infty \sigma_{ext}(\lambda) d\lambda = \pi^2 \left(\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_e \cdot \hat{\boldsymbol{e}} + (\widehat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{e}}) \cdot \boldsymbol{\gamma}_m \cdot (\widehat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{e}}) \right)$, kde

σ_{ext} - extinkční průřez (extinction cross section) = (rozptýlený + absorbovaný výkon)/dopadající výkon

$\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{E}_0 / |\boldsymbol{E}_0|$ - polarizace vlny dopadající na malou částici (anténu)

$\widehat{\boldsymbol{k}}$ - směr šíření rozptýlené/vyzařované vlny

$\boldsymbol{\gamma}_e, \boldsymbol{\gamma}_m$ - elektrická resp. magnetická polarizovatelnost

El. polarizovatenost - převodní veličina mezi dipól. momentem a dopadajícím el. polem $\boldsymbol{p} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\gamma}_e \cdot \boldsymbol{E}_0$

Dále platí (převedeme na anténní veličiny)

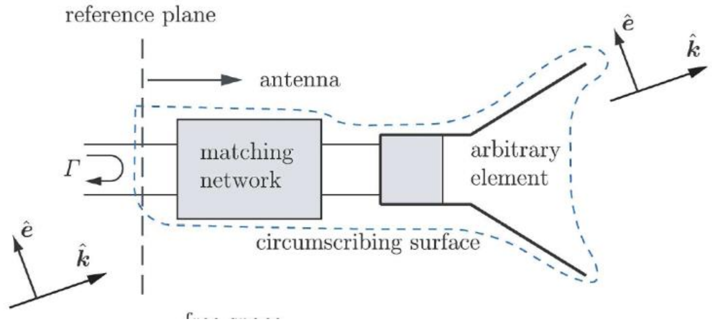
$\sigma_{ext} = \frac{1}{\eta} \sigma_a = \frac{1}{\eta} (1 - |\Gamma|^2) \sigma_{a0} = \frac{1}{4\pi\eta} (1 - |\Gamma|^2) \lambda^2 G$

η - absorpční účinnost ($0 < \eta \leq 1$)

σ_{a0} - odpovídá efektivní ploše A_{ef} ideálně přizp. antény

Γ - koeficient odrazu

G - zisk antény ($G = 4\pi / \lambda^2 A_{ef}$)



Gustafsson M., Sohl C., Kristensson G. Physical limitations on antennas of arbitrary shape Proc. R. Soc., 2007
Gustafsson, M. et al., Illustrations of new physical bounds on linearly polarized antennas, *IEEE Trans. AP.*, May 2009.

Principiální omezení elektricky malých antén

Uvažujme relativní frekvenční šířku pásma $BW = 2\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}$, pak levá strana rovnice

$$\int_0^\infty \sigma_{ext}(\lambda)d\lambda \geq \frac{1}{\eta}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sigma_a(\lambda)d\lambda = \frac{1}{4\pi\eta}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}(1-|\Gamma|^2)G\lambda^2 d\lambda = \frac{1}{4\pi\eta}min\{(1-|\Gamma|^2)G\}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\lambda^2 d\lambda$$

kde $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\lambda^2 d\lambda = .. = \lambda^3\, BW\left(1+\frac{BW^2}{12}\right) \approx \lambda^3 BW$ pro aplikace, v nichž je $BW \ll 2$

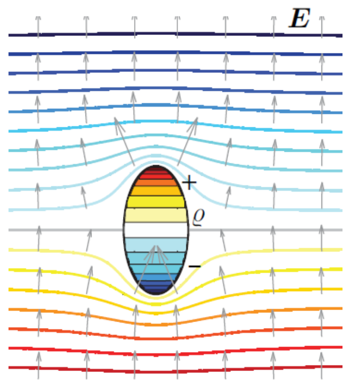
Dosazením do původního vztahu dostaneme nerovnost

$$min\{(1-|\Gamma|^2)G\}BW \leq \eta\frac{4\pi^3}{\lambda^3}\left(\hat{\boldsymbol{e}}\cdot\boldsymbol{\gamma}_\infty\cdot\hat{\boldsymbol{e}} + (\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{e}})\cdot\boldsymbol{\gamma}_\infty\cdot(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{e}})\right),\text{ kde}$$

$\boldsymbol{\gamma}_\infty$ je vysoce-kontrastní polarizovatelnost (*high-contrast polarizability)* obklopujících geometrií - horní mez $\boldsymbol{\gamma}_e, \boldsymbol{\gamma}_m$; matice 3x3 se třemi reálnými vlastními hodnotami $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$.

$\boldsymbol{\gamma}_\infty\cdot\hat{\boldsymbol{e}} = \int_S \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{dS}$, kde **integrál** představuje dipólový moment,

$\rho(\boldsymbol{r})$ je povrchová nábojová hustota vybuzená jednotkovým vnějším polem $\boldsymbol{E}_0 = 1$



Dále lze upravit

$$min\{(1-|\Gamma|^2)G\}BW \leq \eta\frac{4\pi^3}{\lambda^3}(\gamma_1+\gamma_2)$$

Za předpokladů $BW \approx 2/Q$ a základní rezonance dostaneme

$$\boxed{\frac{D}{Q} \leq \eta\frac{k^3}{2\pi}(\gamma_1+\gamma_2)}$$

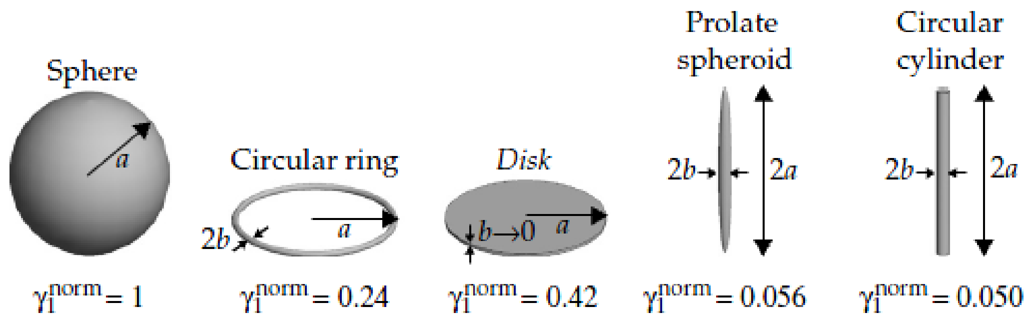
elmag.org

Principiální omezení elektricky malých antén

Použití pro (elektricky) malé antény:

- dokonale vodivé (PEC) a nemagnetické materiály ($\gamma_m = 0$ resp. γ_2= 0)
- normovaná vlastní hodnota polarizovatelnosti $\gamma_{1,\mathrm{norm}} = \gamma_1/(4\pi a^3)$
- *D* = 1,5 pro zářiče se (jednou) základní rezonancí
- *η* = 0,5 (absorpční účinnost) , numericky ověřená na mnoha případech malých antén

$$\boxed{Q_{\min} = \frac{1{,}5}{(ka)^3 \gamma_{1,\mathrm{norm}}}}$$



Hodnoty polarizovatelnosti γ pro základní 3D geometrické tvary existují v analytickém tvaru.

Př. sférická geometrie: $\gamma_1 = 4\pi a^3$ => $\gamma_1^{\mathrm{norm}} = 1$

$$Q_{\min} = \frac{1{,}5}{(ka)^3}$$

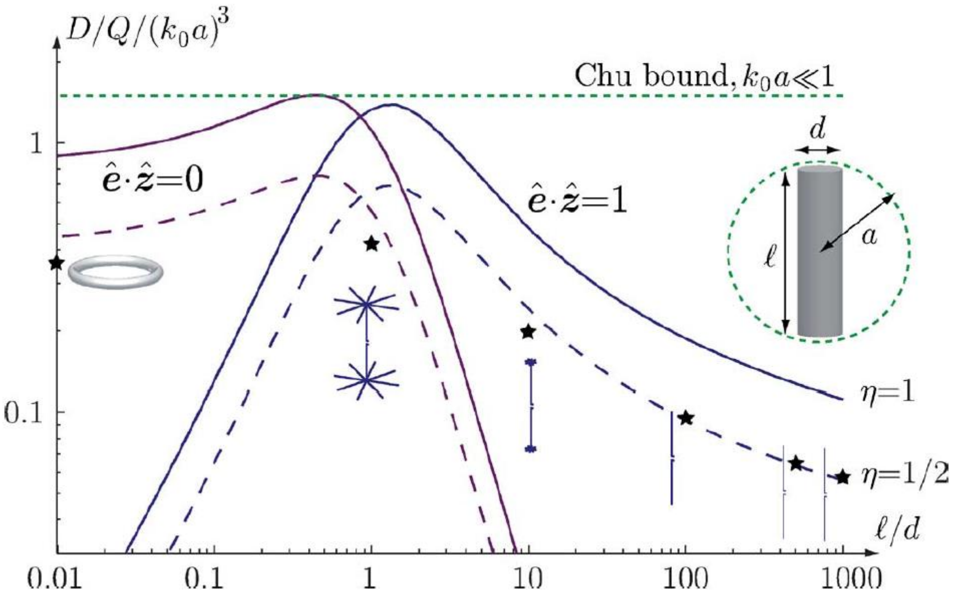
- shoduje se s výrazem Thala pro $ka \to 0$ ($a \ll \lambda$)
- pro tenký dipól je $Q_{\min}$ až 20x větší, tj. $BW_{\max}$ 20x menší

Gustafsson, M. et al., Illustrations of new physical bounds on linearly polarized antennas, *IEEE Trans. AP.*, May 2009.

Principiální omezení elektricky malých antén

Použití Gustafssonova limitu pro základní geometrické tvary zářičů

- válcová geometrie, $\hat{\boldsymbol{z}}$ - osa symetrie



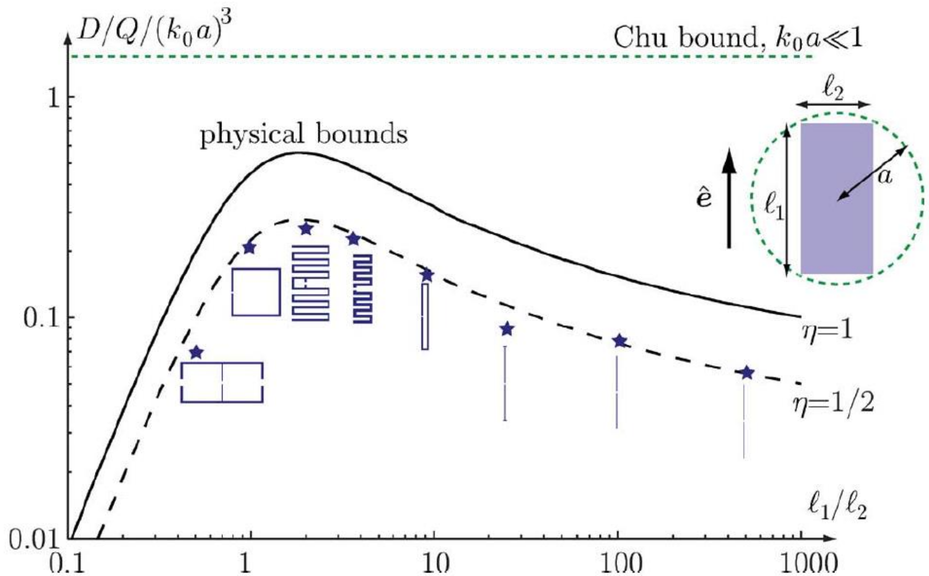
ℓ/d	0.01	1	10	100	500	1000
$\gamma_{\rho\rho}/a^3$	4.2	1.7	0.01	0.00	0.00	0.00
γ_{zz}/a^3	0.00	5.1	2.3	1.2	0.81	0.71
γ_1/γ_c	0.75	0.62	0.75	1	1	1
$k_0 a$	1.08	0.63	1.17	1.48	1.51	1.51
D	2.30	1.50	1.61	1.64	1.64	1.64
η	0.51	0.50	0.51	0.51	0.51	0.51
Q_{imp}	5	14	5	5	7	8
Q_{prg}	5	14	5	5	7	8
Q_{Chu}	1.3	5.5	1.5	1	1	1

Gustafsson, M. et al., Illustrations of new physical bounds on linearly polarized antennas, *IEEE Trans. AP.*, May 2009.

Principiální omezení elektricky malých antén

Použití Gustafssonova limitu pro základní geometrické tvary zářičů

- planární geometrie



ℓ_1/ℓ_2	0.5	1	2	3.6	9	25	100	500
γ_1/a^3	1.1	2.4	3.3	2.9	1.9	1.1	1.0	0.7
γ_2/a^3	2.7	2.4	1.1	0.4	0.1	0.0	0.0	0.0
γ_1/γ_r	0.89	0.89	0.95	0.97	0.94	0.76	1	1
$k_0 a$	0.82	1.30	0.48	0.72	1.44	1.43	1.49	1.51
D	1.39	2.23	1.54	1.55	1.47	1.63	1.65	1.64
η	0.41	0.51	0.48	0.49	0.48	0.51	0.51	0.51
Q_{imp}	36	5	55	18	3	6	6	8
Q_{prg}	36	5	56	18	3	6	6	8
Q_{Chu}	3	1	11	2	1	1	1	1

Gustafsson, M. et al., Illustrations of new physical bounds on linearly polarized antennas, *IEEE Trans. AP.*, May 2009.

Principiální omezení elektricky malých antén

Vandenbosh (2009-10) určil W_e, W_m, P_{rad} a odvodil mezní limit Q_{lim} jako funkce proudové (nábojové) hustoty pro libovolné tvary zářičů

$$\begin{aligned}\tilde{W}_e^{vac} &= \frac{1}{16\pi\omega^2\varepsilon_0}\Big(\int_V\int_V \nabla_1\cdot\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}_1\right)\nabla_2\cdot\boldsymbol{J}^\star\left(\boldsymbol{r}_2\right)\frac{\cos\left(kr_{21}\right)}{r_{21}}\mathrm{d}V_1\mathrm{d}V_2\\ &- \frac{k}{2}\int_V\int_V\left(k^2\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}_1\right)\cdot\boldsymbol{J}^\star\left(\boldsymbol{r}_2\right)-\nabla_1\cdot\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}_1\right)\nabla_2\cdot\boldsymbol{J}^\star\left(\boldsymbol{r}_2\right)\right)\sin\left(kr_{21}\right)\mathrm{d}V_1\mathrm{d}V_2\Big)\end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}\tilde{W}_m^{vac} &= \frac{1}{16\pi\omega^2\varepsilon_0}\Big(k\int_V^2\int_V J\left(\boldsymbol{r}_1\right)\cdot\boldsymbol{J}^\star\left(\boldsymbol{r}_2\right)\frac{\cos\left(kr_{21}\right)}{r_{21}}\mathrm{d}V_1\mathrm{d}V_2\\ &- \frac{k}{2}\int_V\int_V\left(k^2\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}_1\right)\cdot\boldsymbol{J}^\star\left(\boldsymbol{r}_2\right)-\nabla_1\cdot\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}_1\right)\nabla_2\cdot\boldsymbol{J}^\star\left(\boldsymbol{r}_2\right)\right)\sin\left(kr_{21}\right)\mathrm{d}V_1\mathrm{d}V_2\Big)\end{aligned} \tag{1.45}$$

$$P_{rad}^{vac} = \frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_0}\Big(\int_V\int_V\left(k^2\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}_1\right)\cdot\boldsymbol{J}^\star\left(\boldsymbol{r}_2\right)-\nabla_1\cdot\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}_1\right)\nabla_2\cdot\boldsymbol{J}^\star\left(\boldsymbol{r}_2\right)\right)\frac{\sin\left(kr_{21}\right)}{r_{21}}\mathrm{d}V_1\mathrm{d}V_2\Big) \tag{1.46}$$

Pozn. Rovnice kontinuity: $\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -j\omega\rho$

detailněji v přednášce doc. Hazdry

Vandenbosh, G. A., *IEEE Trans. AP*, 2010.

Přehled principiálních limitů pro Q_{min}

pro $ka \to 0$

Q_{min}	Autor	**Pozn.**
$\dfrac{1}{(ka)^3} + \dfrac{1}{ka}$	Chu, McLean	TM (dipól) nebo TE (smyčka) mód
$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(ka)^3} + \dfrac{2}{ka}\right)$	McLean	TM a TE mód elementárního dipólu
$\dfrac{1.5}{(ka)^3}$	Thal	Proud na povrchu Chuovy koule, TM mód
$\dfrac{3}{(ka)^3}$	Thal	Proud na povrchu Chuovy koule, TE mód
$\dfrac{1}{(ka)^3}$	Thal	Proud na povrchu Chuovy koule, TE a TM mód
$\dfrac{1{,}5}{(ka)^3 \gamma_{1,\mathrm{norm}}}$	Gustafsson	Směrovost D = 1,5; absorpční účinnost η = 0,5; normovaná vlastní hodnota polarizovatelnosti $\gamma_{1,\mathrm{norm}} = \gamma_1/(4\pi a^3)$ zohledňuje nekulový tvar

Q versus V/λ^3 antén

- Objem antény V (místo ka) lze vztáhnout k šířce pásma BW a normovat k λ^3

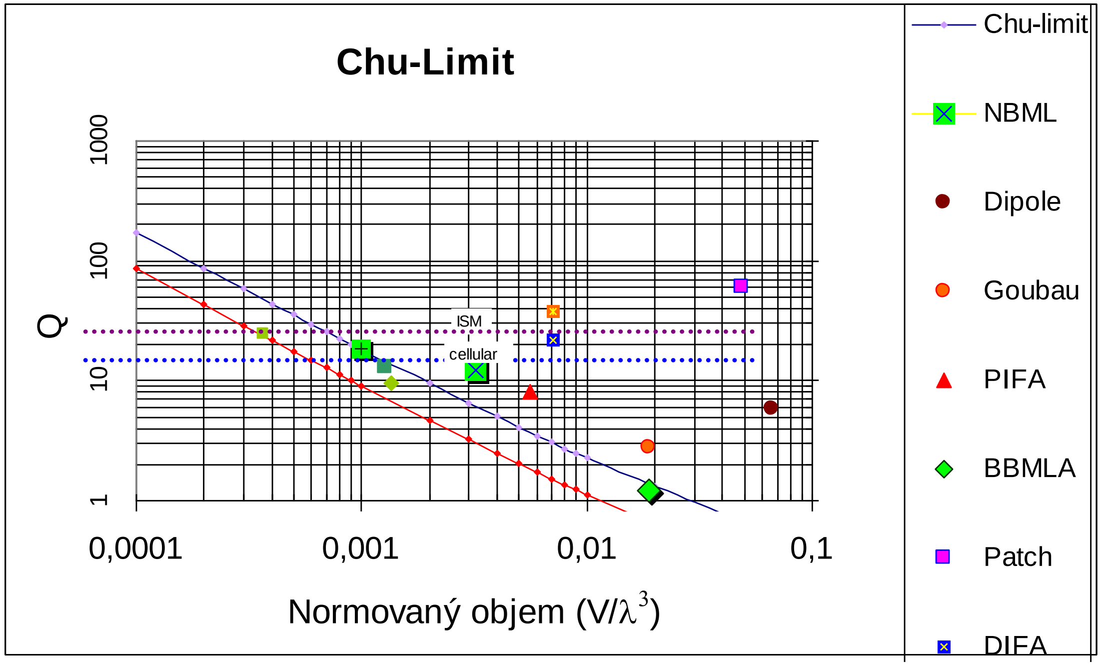
$$\boxed{Q = \frac{1}{BW} = \frac{1}{6\pi^2 V/\lambda^3} + \frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} V^{1/3}}}$$

- Q antén se 100% účinností (bezeztrátové) je nad Chuovým limitem

- Nižší účinnost η < 100 %
  - umožňuje dosáhnout větší šířky pásma při dané velikosti antény

    nebo
  - umožňuje zmenšit anténu při dané šířce pásma

$$BW\eta \approx \frac{1}{Q}$$



Mezní/minimální objem pro anténu o požadované *BW*

- Šířka pásma PCS: 1850-1990 MHz
  BW = 1990 - 1850 = 140 MHz

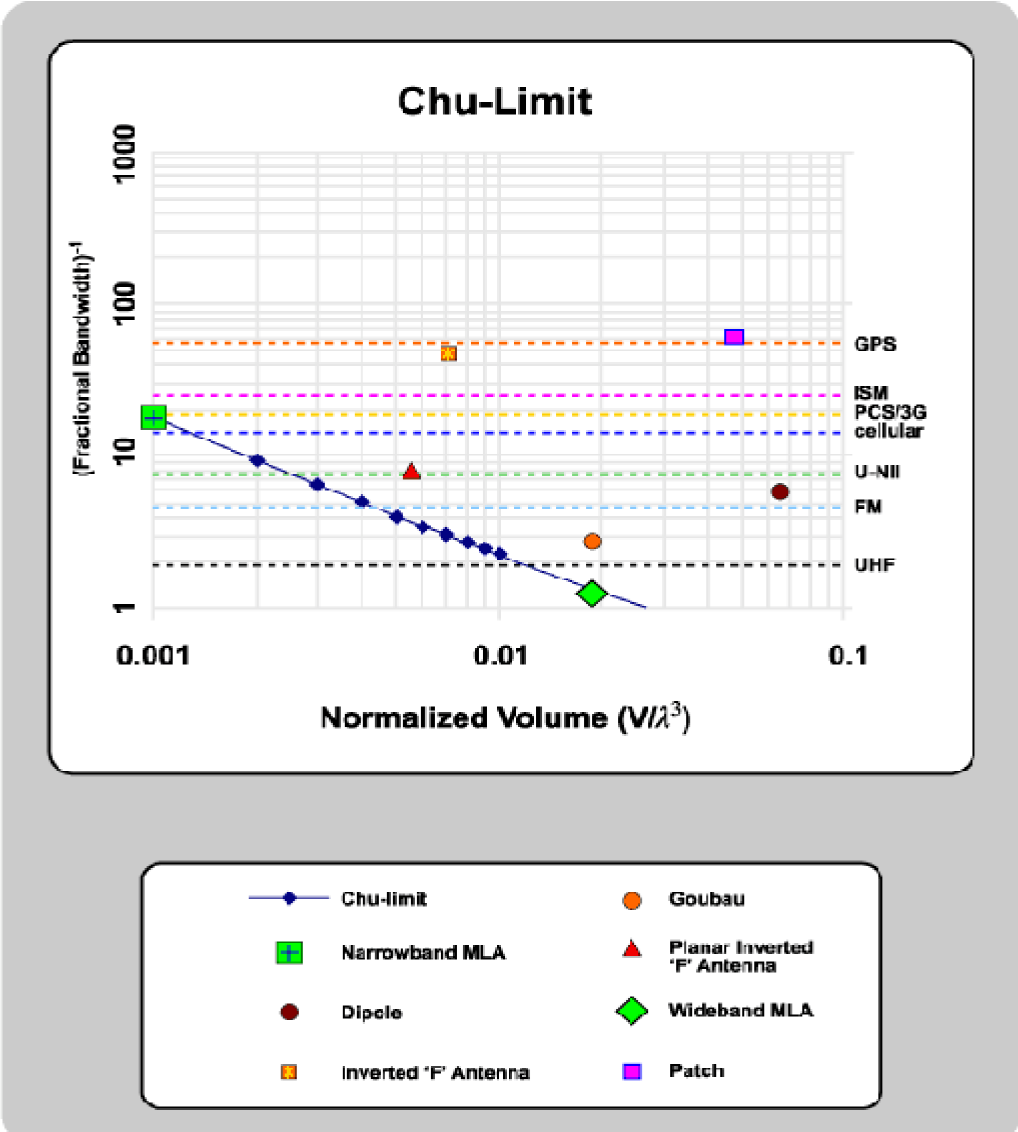
- $Q \sim 1/BW = 1/(\frac{2(f_2-f_1)}{f_2+f_1}) =$

  $= (1990+1850)/2/140 = 13{,}7$

- Nejmenší potřebný relativní objem pro dané Q pro 100 % účinnost z grafu:
  $V_{min}/\lambda^3 = 0{,}0015$
  $(\lambda = 3\text{x}10^8/1920\ \text{x}10^6 = 156\ \text{mm})$

- V_{min} ~ 5600 mm^3 nebo koule o poloměru 11 mm

- Objem antény při účinnosti η = 77 %
  V = 25 x 20 x 8 mm = 4000 mm^3



elmag.org

Principiální omezení zisku

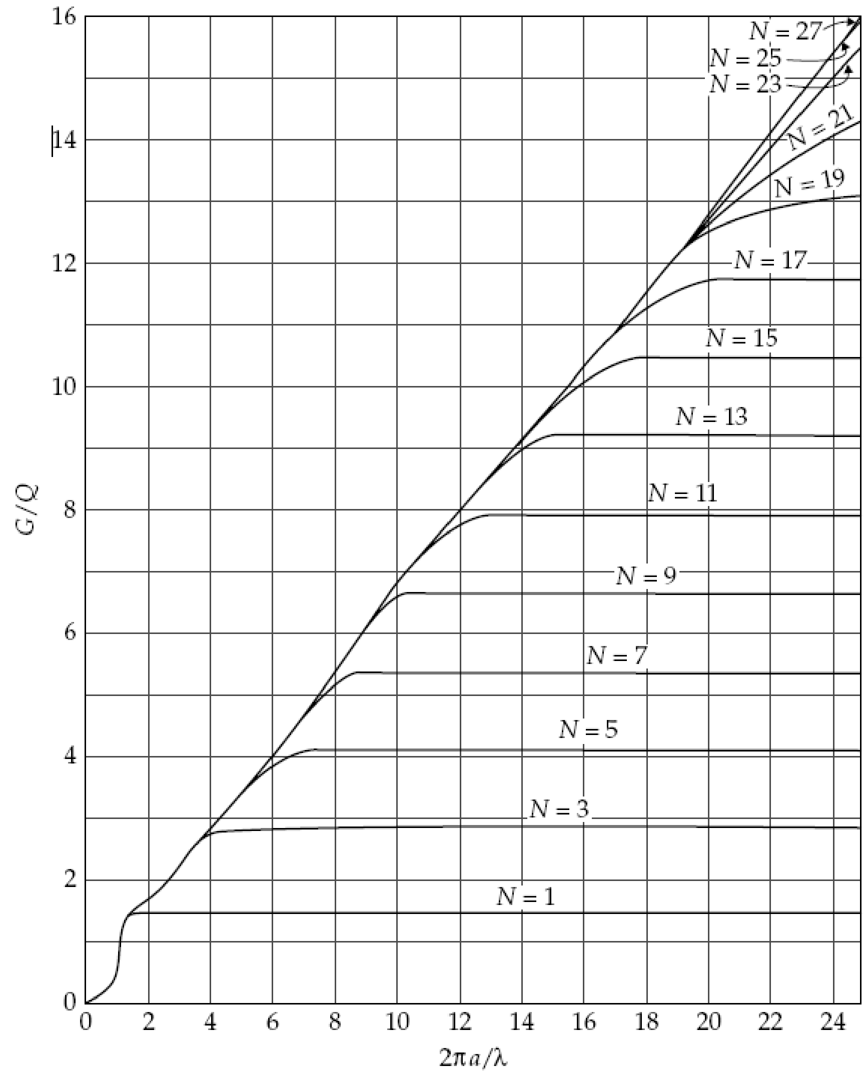
Chu (1948) – vyšetřoval limit *G/Q*, výsledek: sumační vztah + grafické znázornění

$$G\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)=\left.\frac{4\,\pi\,|E_\theta|^2}{\int\int|E_\theta|^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\left|\sum_{n=1,odd}^{N}A_n(-1)^{\frac{n+1}{2}}P_n^1(0)\right|^2}{\sum_{n=1,odd}^{N}|A_n|^2\frac{n(n+1)}{2n+1}}$$

$$Q_n\sum_{n=1,odd}^{N}|A_n|^2\frac{n(n+1)}{2n+1}=\sum_{n=1,odd}^{N}\left\{|A_n|^2\frac{n(n+1)}{2n+1}Q_n\right\}$$

N	1	3	5 -------------------- N
G_{max} ($\theta = \pi/2$)	1.5	3.81	4.10 -------------------- $2N/\pi$



Chu, L. J., Physical Limitations of Omni-Directional Antennas, J. Appl. Phys., vol. 19, pp. 1163-1175, 1948.

Principiální omezení zisku/směrovosti

Harrington (1960) – použil Chuův sférický rozvoj vlnových funkcí pro určení limitu pro zisk v závislosti na *ka*

$$\boxed{G = (ka)^2 + 2ka}$$

Gustafsson (2007, 2009) – mezní limit pro *D/Q* z rozptylové teorie malých částic

$$\boxed{\frac{D}{Q} \leq \eta \frac{k^3}{2\pi}(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

η - absorpční účinnost ($0 < \eta \leq 1$)

$\gamma_1, \ \gamma_2$ - vlastní hodnoty polarizovatelnosti (elektrická, magnetická)

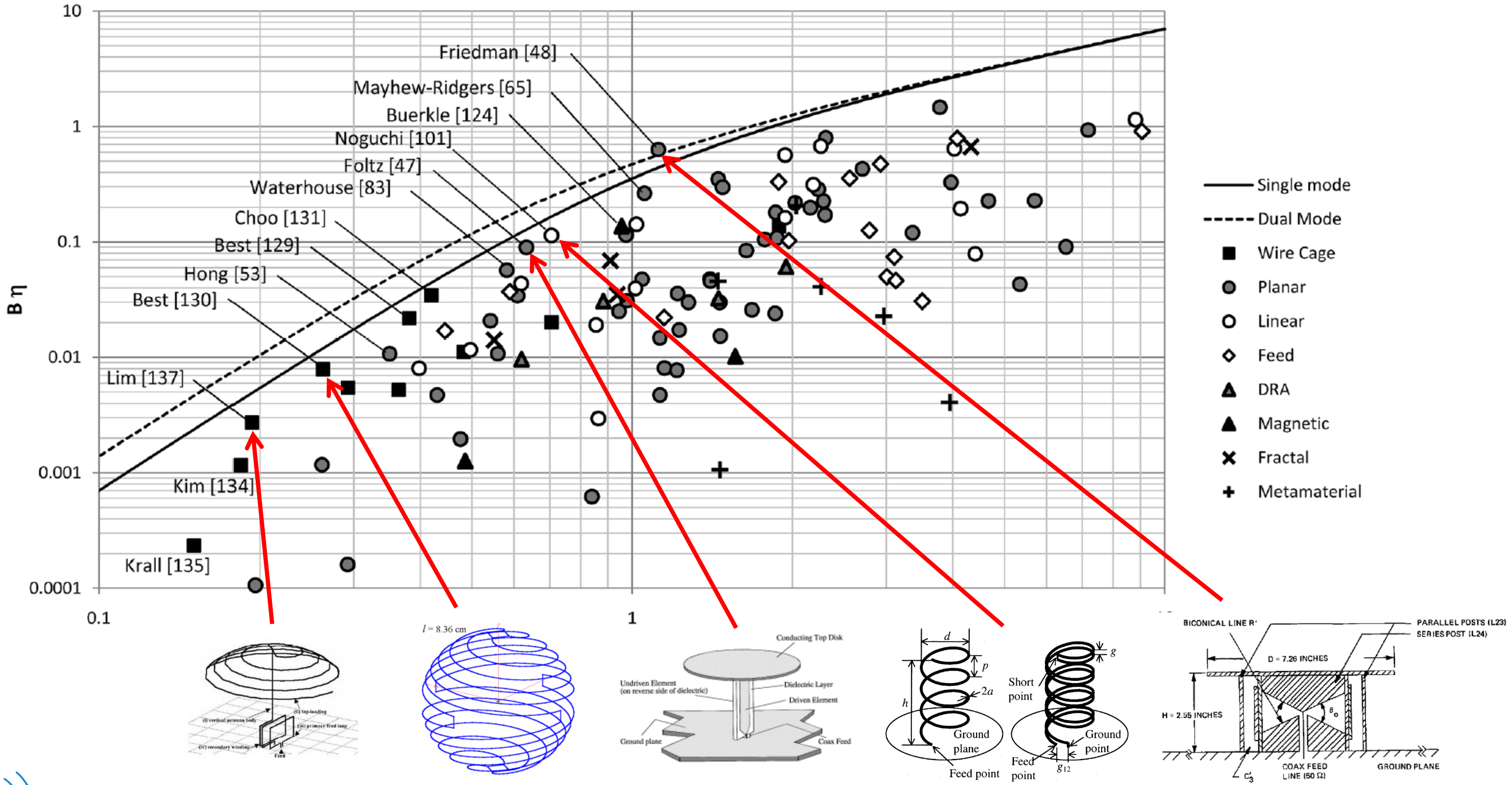
k – vlnové číslo

Harrington, R., Effects of Antenna Size on Gain, Bandwidth, and Efficiency, *J. Nat. Bur. Stand.*, 64-D, pp. 1-12, 1960.
Gustafsson M., Sohl C., Kristensson G., Physical limitations on antennas of arbitrary shape, *Proc. R. Soc.*, 2007

Efektivní malé antény

Sievenpiper a kol. (2012)

studie 110 malých antén publikovaných do konce r. 2010 v *IEEE TAP*

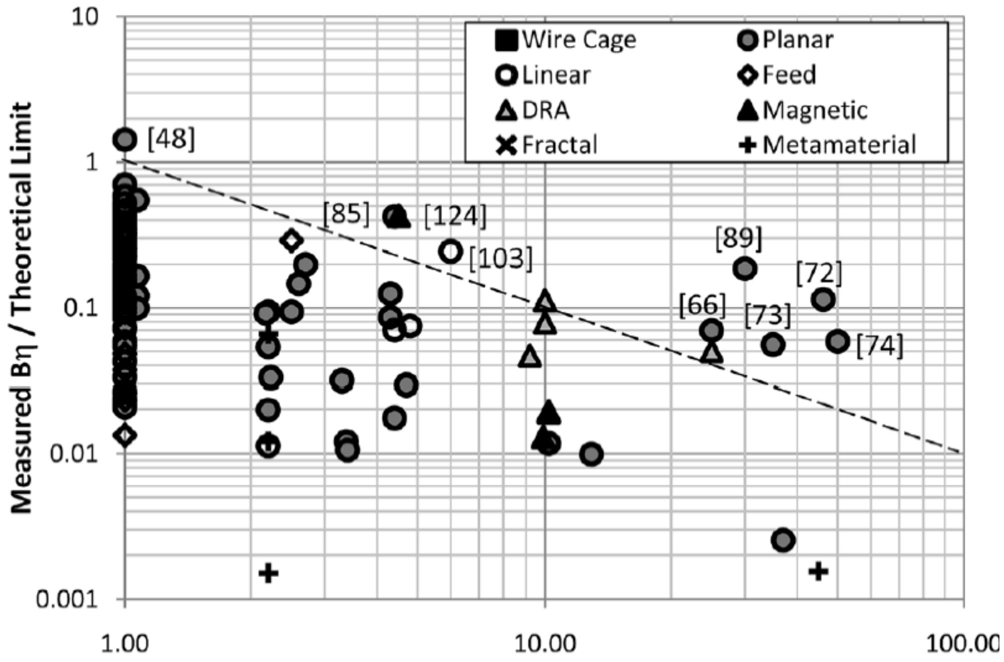


D. F. Sievenpiper, D. C. Dawson, M. M. Jacob, T. Kanar, S. Kim, J. Long, and R. G. Quarfoth, Experimental validation of performance limits and design guidelines for small antennas, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation,* 2012.

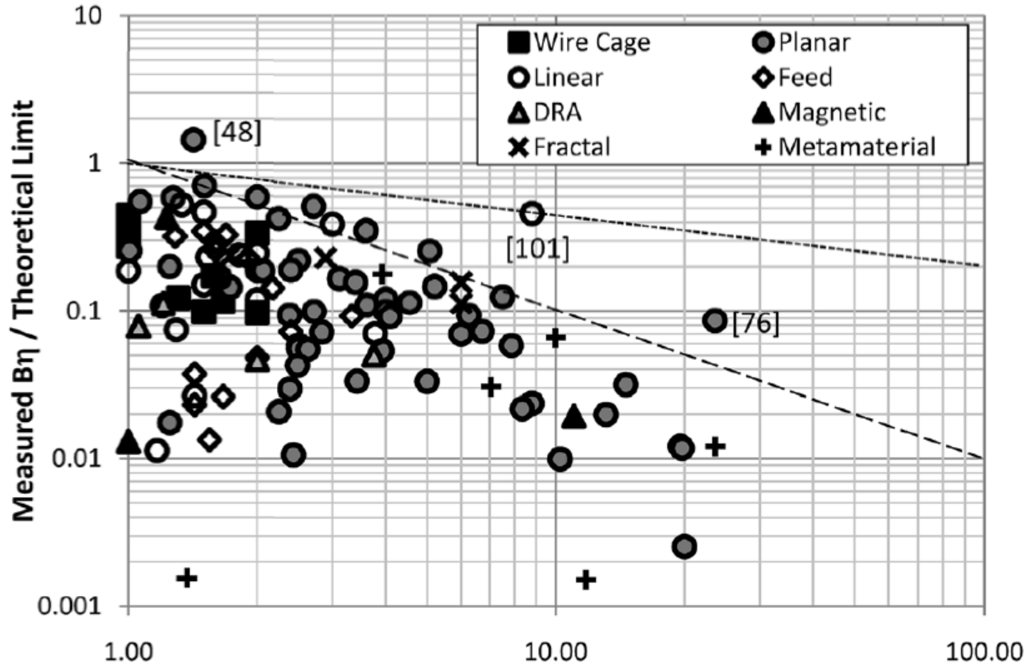
Efektivní malé antény

Sievenpiper a kol. (2012)

studie 110 malých antén publikovaných do konce r. 2010 v *IEEE TAP*



relativní permitivita



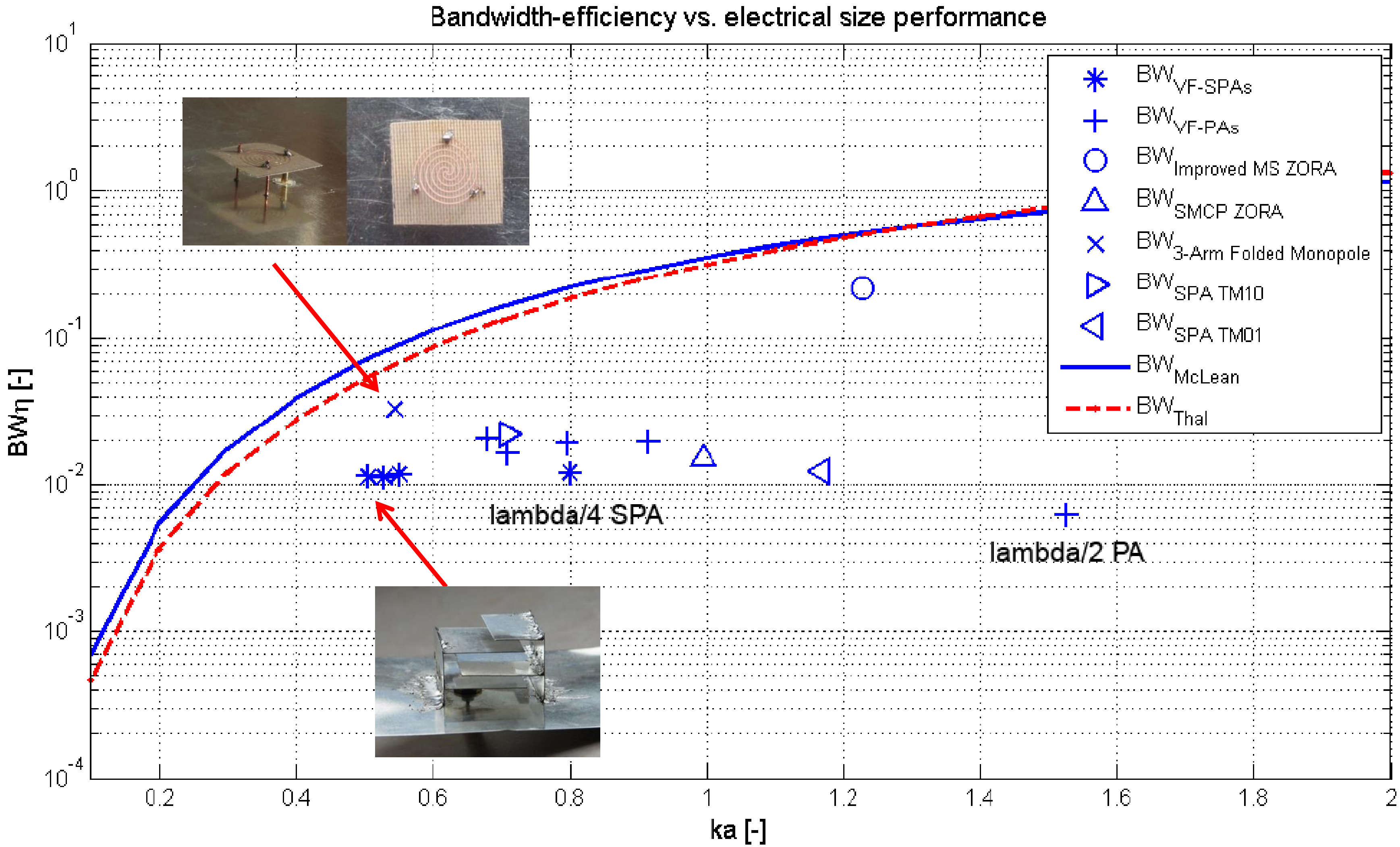
poměr stran

- Tvary zářičů typu „wire cage“ (drátěná klec) vykazovaly nižší *Q* (vyšší *BW*)
- Dielectrické rezonátorové antény vykazovaly horší *BWη*
- Fraktálové a metamateriálové antény nevykazují žádné výhodnější vlastnosti než konvenční antény

D. F. Sievenpiper, D. C. Dawson, M. M. Jacob, T. Kanar, S. Kim, J. Long, and R. G. Quarfoth, Experimental validation of performance limits and design guidelines for small antennas, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation,* 2012.

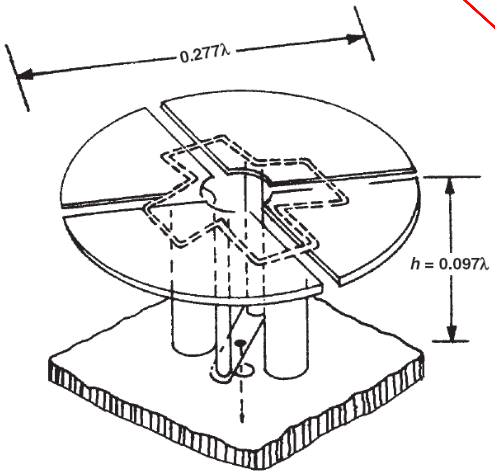
Efektivní malé antény

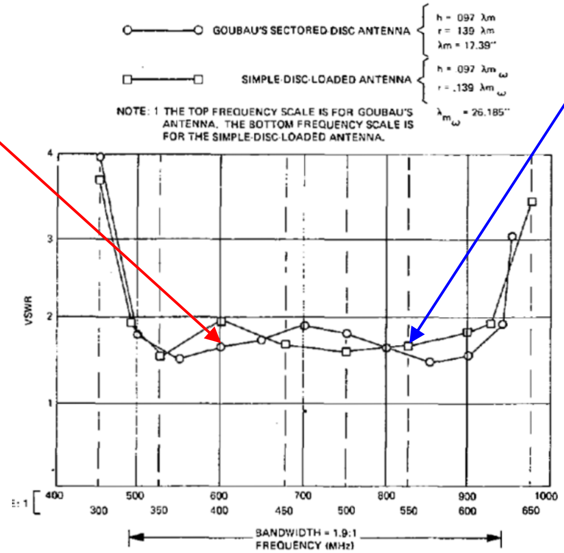
Polívka, Holub, Vrba (2009 - 2012)



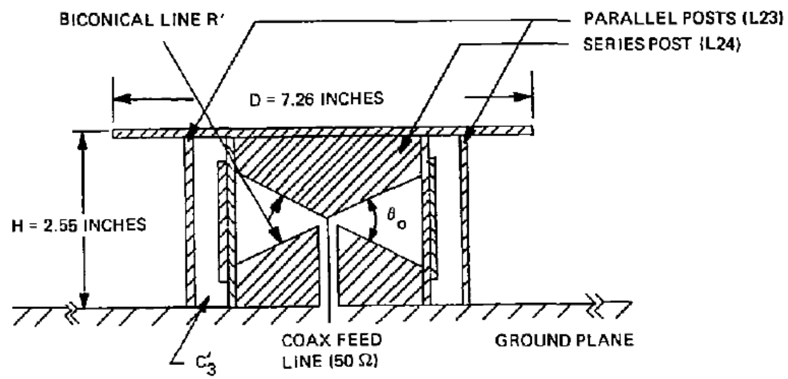
Efektivní malé antény

Goubau (1976)

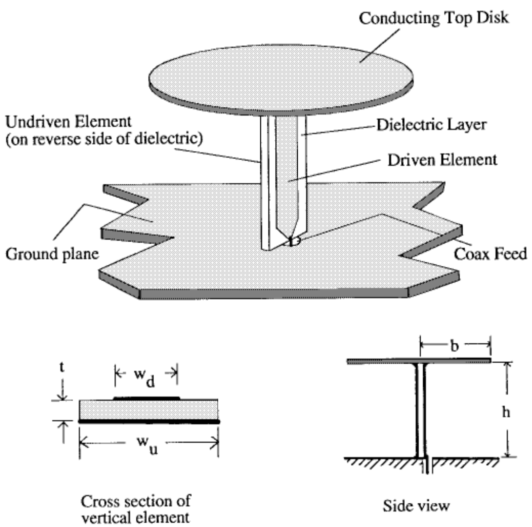




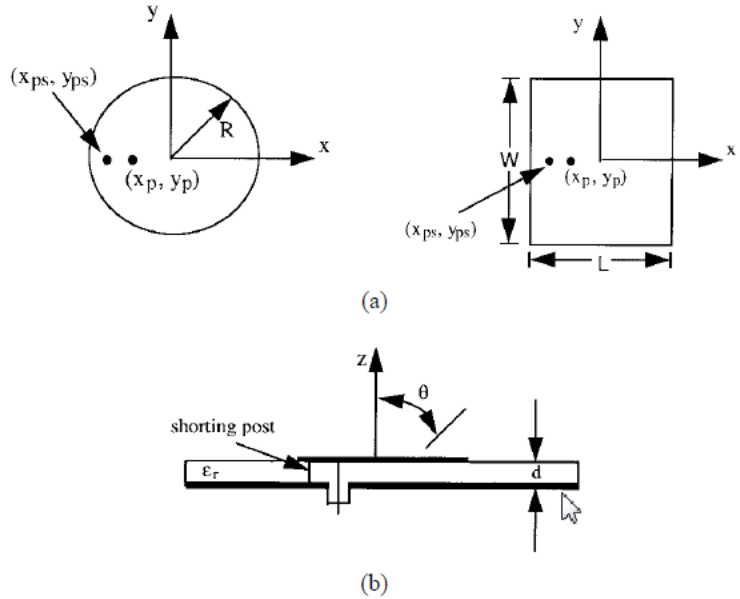
Friedman (1985)



Foltz (1998)

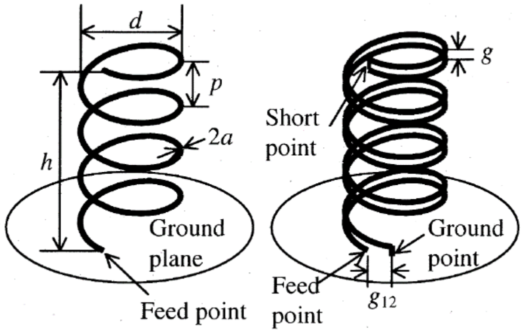


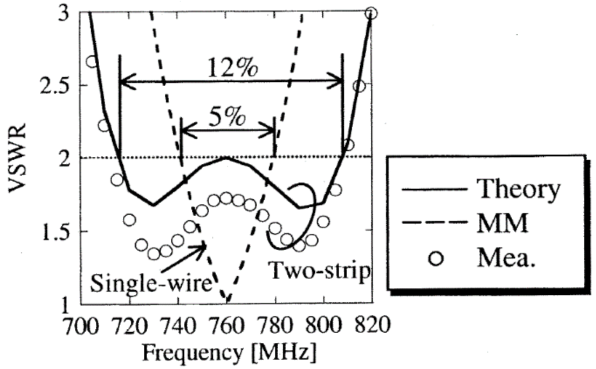
Waterhouse (1998)



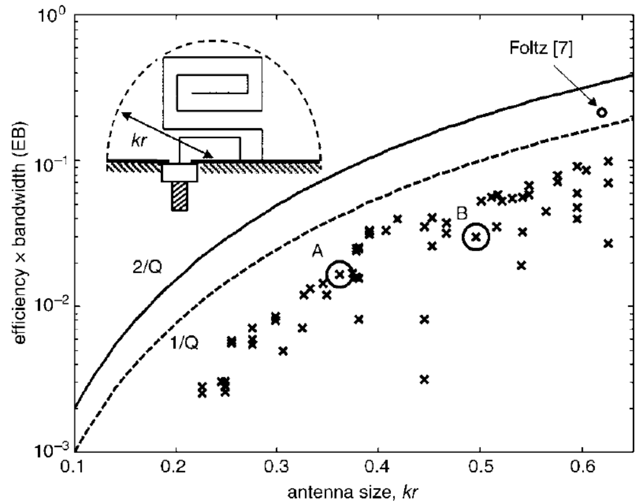
Efektivní malé antény

Noguchi (2003)

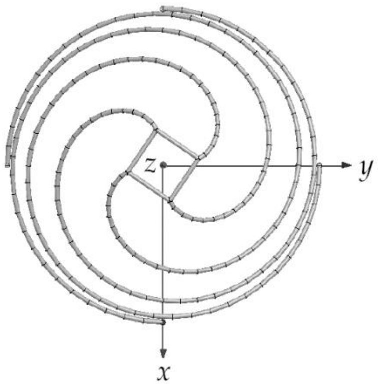


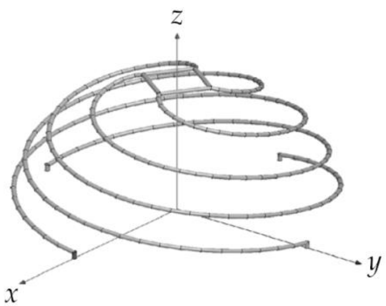


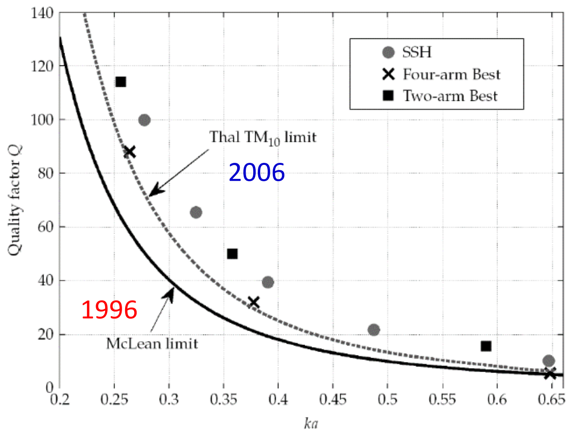
Choo (2003)

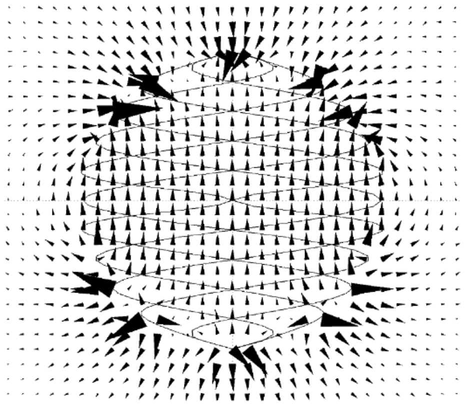


Best (2004)









Shrnutí (části I.)

Doporučení pro návrh topologie (elektricky) malých antén:

- Pro přiblížení k Q_{min} je nejlepší kulová geometrie příp. kvádr/válec s poměrem $h/s \sim 1\ až\ 2$;
- Větší štíhlost útvaru výrazně zvyšuje *Q* (snižuje *BW*)
- Proudy/náboje „vytlačte“ ideálně k povrchu daného útvaru (Bestova sférická šroubovice)
- Pro realističtější odhad dosažitelného Q_{min} resp. BW_{max} jiných než kulových geometrií (krychle, kvádr, válec, ..) používejte přístupy založené použití zdrojových veličin (polarizovatelnost, proudová/nábojová hustota)
- Vybuzení módu TM_{10} (dipól) dává o něco nižší *Q* než mód TE_{10} (smyčka); vybuzení obou módů dává nižší *Q* než v případě jednoho módu
- Pro rozšíření *BW* lze použít vícemódových zářičů (s pasivně vázanými prvky, viz Goubau, Choo)
- Pro antény zhotovené z nemagnetických materiálů používejte Thalův limit (zohledňuje pole uvnitř), je pro módy TM_{10} a TE_{10} cca 1,5x resp. 3x vyšší než absolutní Chuův limit $1/(ka)^3+1/ka$
- Teoretický (Chuův) limit poskytuje dobrý odhad mezní šířky pásma i pro antény střední i větší velikosti ($ka > 0{,}5$)

elmag.org

Další literatura

- Hansen, R. C., *Electrically small, superdirective, and superconducting antennas,* Hoboken, N. J.: Wiley-Interscience, 2006.
- Miron, D., *Small antenna design*, Oxford: Elsevier, 2006
- Volakis, J. L., Chen, C. C., Fujimoto, K., *Small antennas: miniaturization techniques & applications*, New York: McGraw-Hill, 2010
- IEEEXplore – archív vědeckých článků