Elektrodynamická seance o evanescentních vlnách

23. března 2021 Martin Šimák

1 Konsolidace znalostí

Maxwellovy rovnice

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \rho_{\text{free}}(\boldsymbol{r}, t), \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}(\boldsymbol{r}, t), \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{J}_{\text{free}}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}(\boldsymbol{r}, t). \tag{4}$$

Nesmíme zapomenout na materiálové vztahy,[1] tj.

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \epsilon(t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t), \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu(t)\left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t)\right]. \tag{5}$$

Někdy se také může hodit Ohmův zákon popisující diferenciální proudovou hustotu v lineárním materiálu indukovanou vnějším elektrickým polem

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) = \sigma(t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t). \tag{6}$$

Matematicky budeme nadále také využívat Fourierovy transformace

$$\hat{f}(k_x, t) \equiv \mathcal{F}_x\left[f(x, t)\right](k_x) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x) e^{-ik_x x}\, \mathrm{d}x, \tag{7}$$

$$f(x, t) \equiv \mathcal{F}^{-1}_{k_x}\left[\hat{f}(k_x, t)\right](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k_x, t) e^{ixk_x}\, \mathrm{d}k_x, \tag{8}$$

přičemž spodní index u operátoru integrální transformace značí proměnnou, přes kterou transformujeme pro případ funkcí více proměnných. Například tedy budeme psát

$$\mathcal{F}^{-1}_{k_x,k_y,\omega}\left[\hat{\boldsymbol{E}}(k_x, k_y, z, \omega)\right](x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_x,k_y,\omega} \hat{\boldsymbol{E}}(k_x, k_y, z, \omega) e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)}\, \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}\omega.$$

2 Analýza Maxwellových rovnic

Budeme-li uvažovat výše uvedený aparát, můžeme například na rovnice 2 a 4 aplikovat materiálové vztahy (včetně Ohmova zákona) a plnou Fourierovu transformaci (přes všechny 4 proměnné). Získáme tak vztahy

$$i\boldsymbol{k} \times \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega) = -i\omega\mu(\omega)\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{k}, \omega),$$

$$i\boldsymbol{k} \times \hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{k}, \omega) = (\sigma(\omega) + i\omega\epsilon(\omega))\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega).$$

[1] Dovolil jsem si zahrnout předpoklad nekonečných homogenních materiálů, tzn. permitivita, permeabilita i vodivost jsou vše funkce pouze času a nikoliv polohy.

Další úprava může být například ta, že si z první rovnice vyjádřáme $\hat{\boldsymbol{H}}$ a dosadíme do druhé:

$$
\begin{aligned}
i\boldsymbol{k} \times (i\boldsymbol{k} \times \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega)) &= -i\omega\mu(\omega)[\sigma(\omega) + i\omega\epsilon(\omega)]\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega), \\
\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega)) &= i\omega\mu(\omega)[\sigma(\omega) + i\omega\epsilon(\omega)]\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega).
\end{aligned}
$$

Nadále můžeme využít známé *BAC CAB* matematické identity pro úpravu levé strany rovnice a dostáváme tak

$$
\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega)) = \underbrace{(\boldsymbol{k} \cdot \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega))}_{0}\boldsymbol{k} - k^2\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega).
$$

Výše uvedenou rovnici tedy můžeme napsat jako

$$
-k^2\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega) = i\omega\mu(\omega)[\sigma + i\omega\epsilon(\omega)]\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega).
$$

Vidíme, že na obou stranách se vyskytuje vektor $\hat{\boldsymbol{E}}$. Skaláry se tedy musí samozeřjmě rovnat a dostáváme tak první důležitý výsledek, a to materiálovou disperzní relaci elektromagnetických vln v lineárních materiálech

$$
\boxed{k^2 = -i\omega\mu(\omega)[\sigma + i\omega\epsilon(\omega)].} \tag{9}
$$

Analogickou manipulací s Maxwellovými rovnicemi samozřejmě také můžeme dostat přímočaré relace mezi veličinami $\hat{\boldsymbol{E}}$ a $\hat{\boldsymbol{H}}$. Konkrétně

$$
\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega\epsilon(\omega) - i\sigma(\omega)} \times \hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{k}, \omega), \tag{10}
$$

$$
\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{k}, \omega) = -\frac{\boldsymbol{k}}{\omega\mu(\omega)} \times \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega). \tag{11}
$$

3 Evanescentní vlny

Z předchozího jsme zjistili, že složky elektromagnetických vln jsou ve frekvenční doméně velice specificky svázány a že vektory $\boldsymbol{k}$, $\hat{\boldsymbol{H}}$ a $\hat{\boldsymbol{E}}$ jsou na sebe navzájem kolmé (to odpovídá, neboť jsme vlastně obecnou elektromagnetickou vlnu Fourierovsky rozložili na superpozici rovinných vln). Taktéž jsme mimo jiné došli ke specifickému vyjádření vlnového vektoru $\boldsymbol{k}$ pomocí úhlové frekvence ω. To ale znamená, že vektorové funkce $\hat{\boldsymbol{E}}$ a $\hat{\boldsymbol{H}}$ nejsou ve skutečnosti funkce čtyř nezávislých proměnných, neboť můžeme jednu eliminovat.[2] Pojďme například fixovat složku vlnového vektoru k_z (standardní volba, lze volit jakoukoli jinou), tj.

$$
\begin{aligned}
k_z^2 &= k^2 - k_x^2 - k_y^2, \\
k_z &= \pm\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2},
\end{aligned}
$$

kde k^2 je dříve odvozený vztah 9. Narazili jsme na duální řešení, a tak nadále budeme psát místo vektoru $\hat{\boldsymbol{F}}$ lineární kombinaci $\hat{\boldsymbol{F}}^+ + \hat{\boldsymbol{F}}^-$ odpovídající těmto řešením, kde index $\pm$ koresponduje volbě k_z a $\hat{\boldsymbol{F}}$ je zástupný symbol pro $\hat{\boldsymbol{E}}$ nebo $\hat{\boldsymbol{H}}$, neboť následující odvození se týká libovolné z těchto veličin.

Pro vyjádření veličiny $\boldsymbol{F}$ stačí samozejmě aplikovat inverzní Fourierovu transformaci na výše uvedenou lineární kombinaci řešení ve frekvenční doméně, tentokrát již jen přes tři proměnné,

[2] Matematicky jde o aplikaci věty o implicitní funkci, která nám tuto manipulaci dovoluje alespoň lokálně na okolí zkoumaného bodu funkce.

neboť jednu jsme „fixovali“ na začátku této sekce. Můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_x,k_y,\omega} \hat{\boldsymbol{F}}^{+}(k_x,k_y,\omega)e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)}e^{ik_z z}\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}\omega + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_x,k_y,\omega} \hat{\boldsymbol{F}}^{-}(k_x,k_y,\omega)e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)}e^{-ik_z z}\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}\omega.$$

Povšimněme si ale faktu, že číslo k^2 je komplexní. Argument exponenciály

$$\pm ik_z z = \pm i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}z$$

tedy má reálnou a imaginární část, a tak samotnou exponenciálu můžeme rozdělit na součin komplexní a reálné. Pišme tedy

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_x,k_y,\omega} \hat{\boldsymbol{F}}^{+}(k_x,k_y,\omega)e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)}e^{i\,\mathrm{Re}(k_z)z}e^{-\,\mathrm{Im}(k_z)z}\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}\omega + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_x,k_y,\omega} \hat{\boldsymbol{F}}^{-}(k_x,k_y,\omega)e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)}e^{-i\,\mathrm{Re}(k_z)z}e^{\mathrm{Im}(k_z)z}\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}\omega,$$

kde

$$\mathrm{Re}(k_z) = \sqrt{|k_z^2|}\cos\left(\frac{1}{2}\arg\left(k_z^2\right)\right), \qquad \mathrm{Im}(k_z) = \sqrt{|k_z^2|}\sin\left(\frac{1}{2}\arg\left(k_z^2\right)\right).$$

Vidíme, že s rostoucí vzdáleností od zdroje ($z \to \pm\infty$) nám amplituda $\boldsymbol{F}$ vždy díky jednomu z řešení $\hat{\boldsymbol{F}}^{\pm}$ diverguje, kdežto druhé řešení se tlumí. To je samozřejmě fyzikálně nemožné. Bude tedy nutné volit jednotlivá řešení $\hat{\boldsymbol{F}}^{\pm}$ v závislosti na konkrétní vlně (pravděpodobně to bude matematicky přímo vyplývat z počátečních podmínek), abychom zajistili vždy pouze tlumení celkové vlny.

Jelikož z analýzy rovinných elektromagentických vln[3] již existuje konvence $\mathrm{Im}(k_z) < 0$, držme se jí také zde. Přepišme si tedy vztahy do finální podoby

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_x,k_y,\omega} \hat{\boldsymbol{F}}^{+}(k_x,k_y,\omega)e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)}e^{i\,\mathrm{Re}(k_z)z}e^{|\,\mathrm{Im}(k_z)|z}\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}\omega + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{k_x,k_y,\omega} \hat{\boldsymbol{F}}^{-}(k_x,k_y,\omega)e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)}e^{-i\,\mathrm{Re}(k_z)z}e^{-|\,\mathrm{Im}(k_z)|z}\,\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}\omega,$$

neboli

$$\boxed{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = \mathcal{F}^{-1}_{k_x,k_y,\omega}\left[\hat{\boldsymbol{F}}^{+}(k_x,k_y,\omega)e^{i\,\mathrm{Re}(k_z)z}e^{|\,\mathrm{Im}(k_z)|z} + \hat{\boldsymbol{F}}^{-}(k_x,k_y,\omega)e^{-i\,\mathrm{Re}(k_z)z}e^{-|\,\mathrm{Im}(k_z)|z}\right](t)\,.}$$

Nyní jsme již pouhý krůček od toho učinit závěr, že $\hat{\boldsymbol{F}}^{+}$ odpovídá vlnám šířícím se v grafu závislosti $|\boldsymbol{F}|(z)$ doleva od zdroje (v $z \to -\infty$ exponenciála tlumí), kdežto $\hat{\boldsymbol{F}}^{-}$ vlnám šířícím se doprava od zdroje (tentokrát tlumí pro $z \to \infty$).

Výsledek. Z finálního tvaru vyjádření intenzity složek elektromagnetického pole můžeme vidět, že imaginární složka vlnového vektoru ve směru šíření je odpovědná za tlumení celkové vlny.[4] To ale samozřejmě znamená, že pokud se exponenciály nezbavíme, bude se vlna ve vzdálenosti od zdroje - v praxi se ukazuje, že vcelku rychle - tlumit. Takové vlny lze obecně charakterizovat požadavkem $\mathrm{Im}(k_z) \neq 0$ a říkáme jim vlny *evanescentní*.[5] Vlny splňující specifickou opačnou podmínku $\mathrm{Im}(k_z) = 0$ nazýváme *propagující*.

[3] Přesně si nepamatuju, kde to vzniká, ale taky se člověk dobere někde k duálnímu řešení, a tak musí vybrat znaménko. Standardně se bere $\mathrm{Im}(k_z) < 0$.

[4] Někdo by mohl namítnout, že exponenciála se ve vyjádření objevuje v integrandu. Integrace ale vždycky exponenciálu zachová ve všech členech potenciálního výsledku integrace.

[5] Z latinského slova *evanescens,* v překladu *mizivý* či *prchavý*.