# Příklady pro týden 9 - Martin Šimák

## Zadání

Vně a uvnitř myšlené koule o poloměru $R$ je umístěna stacionární proudová hustota $\boldsymbol{J}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})$ a $\boldsymbol{J}_{\text{int}}(\boldsymbol{r})$. Vše je umístěno ve vakuu. Určete obecný vztah pro průměr magnetického pole přes objem této koule, tedy hodnotu

$$\langle \boldsymbol{B} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

---

### Značení

V přůběhu výpočtu budeme používat následující značení:

- $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$ (resp. $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$) $= \mathrm{d}V$ (resp. $\mathrm{d}V'$),
- $\Sigma = \partial V$.

## Řešení

Nejprve započneme s úpravou celého vztahu pro $\langle \boldsymbol{B} \rangle$, se kterým budeme dále pracovat

$$\langle \boldsymbol{B} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \frac{1}{V} \int_V \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = -\frac{1}{V} \oint_\Sigma \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi V} \oint_\Sigma \int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\|} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \oint_\Sigma \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\|} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'.$$

Pro výpočet magnetického pole uvnitř koule se nám bude hodit multipólový rozvoj

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\|} = \sum_n \frac{\min^n\{r, r'\}}{\max^{n+1}\{r, r'\}} P_n(\cos(\alpha)),$$

kde $\alpha$ je úhel svíraný vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{r}'$, jehož roli v našem symetrickém případě (kouli centrujeme v počátku[1], kvůli zjednodušení výpočtu) zastupuje azimutální sférická souřadnice $\theta$, a $P_n(\cos(\theta))$ jsou Legendreovy polynomy. Zároveň jelikož v plošném integrálu integrujeme přes nečárkované souřadnice po kouli, můžeme položit $r = R$, kde $R$ je poloměr uvažované koule.

[1] Vlastně se nejedná o žádný specifický případ, pouze jsme si úlohu zjednodušili kvůli výpočtu, což můžeme udělat vždy vhodnou transformací souřadnic tak, aby byla koule centrována v počátku.

### Řešení uvnitř koule

Aplikujeme-li tedy multipólový rozvoj na náš výpočet (uvnitř koule platí $r \geq r'$), dostaneme

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{B}_{\text{int}} \rangle &= -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \oint_\Sigma \frac{1}{R} \sum_n \left( \frac{r'}{R} \right)^n P_n(\cos(\theta)) R^2 \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{e}_r = \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \sum_n \frac{(r')^n}{R^{n-1}} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \sin(\theta) P_n(\cos(\theta)) \, \boldsymbol{e}_r = \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \sum_n \frac{(r')^n}{R^{n-1}} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, P_n(\cos(\theta)) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \begin{pmatrix} \sin^2(\theta)\cos(\phi) \\ \sin^2(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} = \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \sum_n \frac{(r')^n}{R^{n-1}} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \sin(2\theta) P_n(\cos(\theta)) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dále aplikujeme skutečnost, že $\sin(2\theta) P_n(\cos(\theta))$ jsou ortogonální funkce na intervalu $I = [0, \pi]$ pro všechna $n \neq 1$, tj. jediný polynom, který zůstane po integraci je $P_1$, jehož integrál přes $I$ je $4/3$.

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{B}_{\text{int}} \rangle &= -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \sum_n \frac{(r')^n}{R^{n-1}} \frac{4}{3} \pi \delta_{1n} \, \boldsymbol{e}_z = \\
&= -\frac{\mu_0}{3V} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times r' \boldsymbol{e}_z.
\end{aligned}$$

Výsledek získáme využitím definičního vztahu pro magnetický dipólový moment

$$\boldsymbol{m}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r},$$

který se našemu vztahu příliš nepodobá ($\boldsymbol{r}' \neq r' \boldsymbol{e}_z$), ale tato drobná odlišnost je způsobena tím, že jsme již dříve tuto polovinu vektorového součinu integrovali přes polární souřadnici $\phi$, čímž jsme odstranili $x$-ovou a $y$-ovou složku vektoru $\boldsymbol{r}'$, s nímž bychom zde chtěli pracovat. V našem integrálu tedy hraje $r' \boldsymbol{e}_z$ stejnou roli jako $\boldsymbol{r}'$. Můžeme tedy rovnou přistoupit k výslednému vztahu pro střední hodnotu magnetického pole přes objem koule způsobeného vnitřní stacionární proudovou hustotou $\boldsymbol{J}_{\text{int}}(\boldsymbol{r})$ jako

$$\boxed{\langle \boldsymbol{B}_{\text{int}} \rangle = \frac{2\mu_0}{3V} \boldsymbol{m}_{\text{int}}.}$$

### Řešení vně koule

I v tomto případě aplikujeme multipólový rozvoj, musíme však pamatovat na to, že situace je zde opačná ($r' \geq r$). Píšeme v tomto případě tedy

$$\langle \boldsymbol{B}_{\text{ext}} \rangle = -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \oint_\Sigma \frac{1}{r'} \sum_n \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos(\theta)) R^2 \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{e}_r =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \sum_n \frac{R^{n+2}}{(r')^{n+1}} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \sin(\theta) P_n(\cos(\theta)) \, \boldsymbol{e}_r =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \sum_n \frac{R^{n+2}}{(r')^{n+1}} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, P_n(\cos(\theta)) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \begin{pmatrix} \sin^2(\theta)\cos(\phi) \\ \sin^2(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \sum_n \frac{R^{n+2}}{(r')^{n+1}} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \sin(2\theta) P_n(\cos(\theta)) \end{pmatrix}.$$

Jak vidíme, postup je velice analogický, proto ho není již potřeba tolik komentovat. Stejně jako v případě řešení uvnitř koule, se na základě ortogonality eliminují všechny Legendreovy polynomy kromě polynomu $P_1$ (vizme předchozí argumentace).

$$\langle \boldsymbol{B}_{\text{ext}} \rangle = -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \sum_n \frac{R^{n+2}}{(r')^{n+1}} \frac{4}{3}\pi \delta_{1n} \, \boldsymbol{e}_z =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi V} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \, \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \frac{R^3}{(r')^2} \frac{4}{3}\pi \, \boldsymbol{e}_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{e}_z}{(r')^2} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \frac{-\boldsymbol{e}_z}{(r')^2}$$

Nyní je řešení ve tvaru Biot-Savartova zákona vyjádřeného v pozorovacím bodě $\boldsymbol{o}$ (počátek souřadné soustavy), což odpovídá našemu přepokladu během výpočtu, že koule je centrována v počátku (úhel $\alpha$ svíraný vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{r}'$ byl roven azimutální sférické souřadnici $\theta$). Pokud chceme finální vztah pro obecné centrum koule $\boldsymbol{r}_{\text{center}}$, můžeme vztah ještě generalizovat do finální podoby ($\boldsymbol{e}_z$ znovu jako i v případě řešení unvitř koule hraje roli jednotkového vektoru $\boldsymbol{e}_{r'}$) jako

$$\boxed{\langle \boldsymbol{B}_{\text{ext}} \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \frac{(\boldsymbol{r}_{\text{center}} - \boldsymbol{e}_z)}{(r')^2} = \boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}_{\text{center}}).}$$

### Závěr

Nyní, když jsme spočítali kontribuce k magnetickému poli od obou proudových hustot $\boldsymbol{J}_{\text{int}}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{J}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})$, můžeme řešení shrnout do jednoho vztahu pomocí principu superposice, čímž získáváme již finální obecný vztah

$$\boxed{\langle \boldsymbol{B} \rangle = \frac{2\mu_0}{3V} \boldsymbol{m}_{\text{int}} + \boldsymbol{B}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}_{\text{center}}).}$$