Obsah

1	Opakovani Fyziky I	2
2	Rovnovážná termodynamika	5
3	Vlnění	16

Opakování Fyziky 1

V rámci opakování Fyziky 1 řekněte, jak se dá pomocí základních jednotek SI zapsat jednotka elektrického napětí.

Řešení: Jedná se o triviální uvědomění si definice napětí

$$U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\ell} = \frac{1}{q} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{\ell} = \frac{W}{q},$$

odkud lze zapsat

$$1V = 1 \frac{J}{C} = 1 \frac{\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}}{\text{A s}} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ A}^{-1} \text{ s}^{-3}.$$

Pomocí vnějšího součinu nalezněte Jakobián polárních souřadnic.

Řešení: Vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi má tvar

$$x = r\cos(\phi),$$
 $y = r\sin(\phi),$
 $dx = \cos(\phi)dr - r\sin(\phi)d\phi,$ $dy = \sin(\phi)dr + r\cos(\phi)d\phi.$

Dále použijeme vlastnosti součinu $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, tedy $dr \wedge dr = 0$, $d\phi \wedge d\phi = 0$ a dále $d\phi \wedge dr = -dr \wedge d\phi$, odtud

$$dx \wedge dy = r \cos^2(\phi) dr \wedge d\phi - r \sin^2(\phi) d\phi \wedge dr = r dr \wedge d\phi,$$

$$odtud\ tedy\ J=|(x,y)\to (r,\phi)|=r.$$

Dvouatomová molekula má potenciální energii $V(r) = V_0(1 - e^{-\alpha(r-r_0)})$. Rozhodněte, kdy bude moci vykonávat vibrační pohyb a nalezněte jeho frekvenci.

Řešení: Vibrační pohyb je takový pohyb, kdy souřadnice r, odpovídající vzdálenosti dvou atomů v molekule, vykonává kmitání. Cílem je tedy zjistit, jestli náhodou nemá potenciální energie minimum, okolo něhož by mohla souřadnice r kmitat. Minimum najdeme typicky skrze základní poučky z matematické analýzy. Je vidět, že extrém potenciální energie je vždy v $r = r_0$ a jeho hodnota je V_0 . Druhá derivace v tomto bodě vyjde rovna 2α , a proto minimum bude existovat tehdy, bude-li $\alpha > 0$. Toto je tedy naše podmínka pro minimum. Dále provedeme Taylorův rozvoj a srovnáme s potenciálem LHO

$$V(r) \approx V(r_0) + \frac{1}{2}V''(r_0)(r - r_0)^2 = \frac{1}{2}(2\alpha)(r - r_0)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(r - r_0)^2,$$

kde využíváme vlastnosti $V(r_0) = 0$ a zároveň $V'(r_0) = 0$. Z poslední rovnosti získáme frekvenci kmitů $\omega = \sqrt{2\alpha/m}$.

Jak vypadá divergence pole bodového elektrického náboje?

Řešení: Vyjít můžeme z Gaussova zákona div $\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. Hustota elektrického náboje je nulová všude mimo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, přičemž místo \mathbf{r}_0 je místo, kde se nachází náš bodový náboj, jehož elektrické pole má tím pádem tvar

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\|^2} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\|}.$$

Pokud bychom spočítali divergenci pomocí její definice div $\mathbf{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$ a uvažovali tento tvar, kdy $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$, potom bychom získali skutečně nulu (ověřte si samostatně).

Nyní musíme uvážit integrální definici hustoty elektrického náboje

$$q = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}V,$$

kde q je celkové množství náboje v oblasti Ω . V našem případě tedy musí Ω obsahovat bod \mathbf{r}_0 , kde bodový náboj leží. Naopak pokud by \mathbf{r}_0 neležel v oblasti, musí být $\int \rho \mathrm{d}V = 0$. Jak tedy musí tato funkce ρ pro bodový náboj vypadat? Víme, že $\rho(\mathbf{r}) = 0$ všude, kde $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$, ale integrál přes obalst obsahující \mathbf{r}_0 musí dát q. Známe funkci podobných vlastností, kdy integrál přes oblast dá 1, nazývá se Diracova funkce. Zde tedy bude její q-násobek

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0).$$

Jelikož víme, jak elektrické pole vypadá, můžeme rovnici upravit a najít užitečnou matematickou identitu

$$\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\|^3} = 4\pi \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0),$$

ovšem my navíc víme, že vektor v divergenci je gradientem skalárního elektrostatického potenciálu, proto máme identitu pro Laplaceův operátor $\Delta = \text{div grad}$

$$\Delta\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0).$$

Nalezněte rovnici pro elektrické pole ve vakuu

Řešení: Vyjdeme z Maxwellových rovnic ve vakuu

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}.$$

Využijeme vektorové identity rot rot = grad div $-\Delta$ a provedeme rotaci na rovnici s rotací elektrického pole. Děláme tak proto, že díky tomu získáme v rovnici rot \boldsymbol{B} , kterou umíme nahradit z jiné rovnice za elektrické pole

rot rot
$$E = \text{grad div } E - \Delta E = \text{grad } 0 - \Delta E = -\Delta E =$$

= $-\partial_t \text{rot } B = -\mu_0 \epsilon_0 \partial_{tt} E$,

tedy získáváme rovnici pro elektrické pole $\Box E = 0$, $kde \Box = \Delta - \mu_0 \epsilon_0 \partial_{tt}$.

Nalezněte nějaké řešení rovnice elektrického pole ve vakuu

Řešení: Elektrické pole splní rovnici $\Box E = 0$. Můžeme si povšimnout toho, že operátor \Box je rozdílem druhých parciálních derivací Δ a ∂_{tt} . Pokusme se tedy v nějakém smyslu najít řešení rovnice skrze separaci proměnných. Tím nezískáme samozřejmě všechna řešení, navíc bude záležet na proměnných. Jelikož operátor Δ známe pouze pro kartézské souřadnice

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz},$$

budeme pracovat v nich. Separaci proměnných provedeme položením $\mathbf{E} = X(x)Y(y)Z(z)T(t)\mathbf{n}$, tím pádem lze rovnice přepsat ve tvaru

$$X''YZT + XY''ZT + XYZ''T - \mu_0\epsilon_0XYZT'' = 0,$$

rovnici nyní vydělíme funkcí $\sqrt{E \cdot E} = XYZT$, odtud plyne

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{T''}{T} = 0,$$

přičemž je patrné, že každý z podílů je funkcí pouze své dané proměnné, tudíž lze přisoudit každému podílu konstantu, které se bude rovnat, která nebude závislá na žádné z proměnných. Např. $T''/T = -\omega^2$, potom platí $X''/X + Y''/Y + Z''/Z = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2$ a tuto konstantu můžeme označit $-k^2$, získáme tedy $k = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \omega$. Pokud prostorovým souřadnicím přiřkneme vektor \mathbf{k} , pro který bude platit $\|\mathbf{k}\| = k$, máme $X''/X = -k_x^2$ a stejně pro ostatní dvě souřadnice. Získáváme tedy čtyři rovnice, které je potřeba řešit

$$\begin{split} X'' + k_x^2 X &= 0, & X(x) = e^{ik_x x}, \\ Y'' + k_y^2 Y &= 0, & Y(y) = e^{ik_y y}, \\ Z'' + k_z^2 Z &= 0, & Z(z) = e^{ik_z z}, \\ T'' + \omega^2 T &= 0, & T(t) = e^{i\omega t}, \end{split}$$

Jelikož je ω i k obecně komplexní, ztrácíme poněkud intuici v tom, co naše řešení může znamenat. To je však věc, kterou budeme řešit později. Nyní víme, že řešením rovnice je např. funkce

$$E(r,t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t)}\mathbf{n}, \qquad A \in \mathbb{C},$$

kde n je námi libovolně zvolený vektor a A je integrační konstanta rovnice.

Rovnovážná termodynamika

4 Hliníkový váleček o hmotnosti m_h zahřátý na teplotu T_h byl vhozen do kádinky obsahující m_v vody. Vypočeítejte, na jaké teplotě T se soustava ustálí, jestliže počáteční teploty kádinky s vodou je T_0 . Uvažujme měrnou tepelnou kapacitu válečku c_h , vody c_v a tepelnou kapacitu kádinky C.

Řešení: Během výpočtu budeme muset uvažovat i další veličiny, např. tepelné kapacity nebo hmotnost samotné kádinky. Celkové teplo v zahřátém válečku, vodě s kádinkou je

$$Q_h = m_h c_h T_h,$$
 $Q_{v+k} = m_v c_v T_0 + C_k T_0 = (m_v c_V + C) T_0,$

což lze v tomto tvaru vyjádřit pouze v termodynamické stupnici pomocí teploty v Kelvinech. Celkové množství tepla je $Q=Q_h+Q_{v+k}$. Po smíchání se musí toto teplo rovnoměrně rozložit do celého systému (princip konvergence do termodynamické rovnováhy). To vyjádříme jednotnou teplotou T celého systému, jehož teplo je tím pádem

$$Q = m_h c_h T + m_v c_v T + CT = m_h c_h T + (m_v c_v + C)T$$

a uvažujeme, že hmotnost se při různých teplotách nemění (jsme v režimu klasické fyziky). Srovnáním obou tepel získáme

$$m_h c_h T_h + (m_v c_V + C) T_0 = (m_h c_h + m_v c_v + C) T$$
,

odkud vidíme, že teplotu jednoduše vyjádříme jako

$$T = \frac{m_h c_h T_h + (m_v c_v + C) T_0}{m_h c_h + m_v c_v + C}.$$

Na závěr poznamenejme, že tento postup není úplně správný ideově. Teplo Q jako funkce je ve skutečnosti problematické chápat v nějakém absolutním smyslu. V našem případě musíme situaci interpretovat tak, že celkově dodané teplo $Q = m_h c_h T_h + (m_v c_v + C) T_0$ je teplo, které odlišuje náš rovnovážný stav od stavu, který je na teplotě absolutní nuly. Reálně samozřejmě taková věc jako distribuce tepla vůči absolutní nule nebude, vznikne tepelný tok, který vyrovná teploty mezi T_h a T_0 . V teoretické rovině však můžeme počítat i tímto způsobem a neztratíme žádnou obecnost.

Na závěr ještě zmiňme rozměrovou analýzu. Ve výsledném vztahu pro teplotu T můžeme zadat teplotu v libovolných jednotkách. Potom ale musíme příslušné (měrné) tepelné kapacity c_v, c_h, C vyjádřit coby (měrné) teplo na jeden dílek udané teplotní stupnice. Velikost dílku termodynamické a Celsiovy teploty je stejná, a proto zadané hodnoty pro termodynamickou teplotu lze používat i pro hodnoty Celsiovy teploty.

5 Automobil o hmotnosti M brzděním zastavil z rychlosti v_0 . Jak se zvýšila teplota každého ze čtyř železných brzdových bubnů o hmotnosti m, můžeme-li předpokládat, že veškeré teplo generované třením brzd se akumulovalo v brzdových bubnech? Měrná tepelná kapacita železa je c.

Řešení: Celkovou práci, kterou izolovaný systém vykonal, je dána původní kinetickou energií vozidla

$$W = -\frac{1}{2}Mv_0^2.$$

kde znaménko mínus symbolizuje fakt, že se jedná o práci, kterou jsme nedodali systému, ale kterou vykonal systém (používáme konvenci dU = dW + dQ) Změna vnitřní energie izolovaného systému je nulová, proto teplo, které přešlo do brzdových bubnů musí splnit

$$0 = W + Q \qquad \qquad \Rightarrow \qquad \qquad Q = \frac{1}{2}Mv_0^2 = 4mc\Delta T,$$

kde celková hmotnost materiálu, do nějž se předalo teplo, je 4m. Odtud získáme

$$\Delta t = \Delta T = \frac{Mv_0^2}{8mc}.$$

6 Ponorný vařič má příkon P. Za jakou dobu ohřeje objem V vody z teploty T_1 na teplotu T_2 , jestliže má voda hustotu ρ , měrnou tepelnou kapacitu c_v a únik tepla můžeme zanedbat?

Řešení: Výkon je daný coby časová derivace práce. Jelikož je výkon vařiče konstantní, platí P=W/t. Vykonaná práce se mění na teplo a změna vnitřní energie systému "vařič + voda" je nulový. Veškerá práce tedy přejde v teplo. Zajímá-li nás množství, řešíme rovnici |Pt|=|Q|=Q. Na situaci také můžeme pohlížet jako na dva systémy. První z nich koná práci W=-P/t<0 a druhý získává teplo Q>0. Tak či tak získáváme odpověď na naši otázku

$$t = -\frac{W}{P} = \frac{Q}{P} = \frac{mc_v(T_2 - T_1)}{P} = \frac{\rho V c_v(T_2 - T_1)}{P}.$$

7 Vypočítejte hustotu vodíku za atmosferického tlaku p při teplotě T v okolí nuly stupňů Celsia.

Řešení: Vodík se při teplotách okolo bodu tuhnutí vody chová jako ideální plyn a platí pro něj tedy stavová rovnice ideálního plynu

$$pV = NkT = pm/\rho$$
 \Rightarrow $\rho = NkT/\rho m$.

Co ovšem neznáme je počet částic a hmotnost. Tušíme však, že hmotnost vodíku je nějak úměrná počtu částic, a to konkrétně lineárně. Proto podíl N/m bude konstantní pro libovolné množství. Zvolíme tedy jeden mol látky, který je dobře tabulkově zaznamenaný pomocí počtu částic N_A a pomocí molární hmotnosti M_{H_2} , tedy $N/m = N_A/M_{H_2}$. Pokud nevidíme tuto úměru rovnou, můžeme využít definici látkového množství $n = N/N_A = m/M_m$, odkud je již vidět poměr N/m. Užitím $M_{H_2} = 2A_H$ získáme

$$\rho = \frac{N_A kT}{p M_{H_2}} = \frac{N_A kT}{2p A_H},$$

8 Vnitřek kosmické lodi má objem V a teplotu T, v lodi je vakuum. Jaký bude v lodi tlak vodních par, pokud do ní z prasklého potrubí pronikne kapička vody o hmotnosti m?

Řešení: Opět využijeme stavovou rovnici ideálního plynu. Její platnost v takových podmínkách můžeme začít zpochybňovat, avšak lze ji použít, pokud platí $V \gg m/\rho$, kde ρ byla hustota vody před tím, než unikla. Máme tak

$$p = \frac{NkT}{V} = \frac{mN_AkT}{VM_{H_2O}} = \frac{mRT}{V(2A_H + A_O)}.$$

9 Jaký objem a hustotu bude mít plynný oxid uhličitý po úplné sublimaci suchého ledu o hmotnosti m při teplotě T za atmosferického tlaku p?

Řešení: Předpoklady termodynamické rovnováhy nám říkají, že tlak a teplota okolí budou stejné jako tlak a teplota daného systému umístěného v tomto prostředí. Stavová rovnice oxidu uhličitého je tedy

$$pV = NkT$$
,

kde p,T jsou zadané parametry. Počet částic se nezmění od suchého ledu (stejná látka – oxid uhličitý v pevném skupenství) a lze jej tedy vyjádřit skrze Avogadrovu konstantu a látkové množství. Tím získáme

$$V = \frac{mN_AkT}{p(A_C + 2A_O)}, \qquad \qquad \rho = \frac{p(A_C + 2A_O)}{N_AkT},$$

přičemž uvažujeme, že hmotnost se sublimací nezmění, proto si dovolíme definovat $\rho=m/V$.

10 TODO

13 Ve vratně pracujícím tepelném stroji bylo izobaricky ohřáto n molů ideálního plynu s molární tepelnou kapacitou C_V z teploty T_1 na teplotu T_2 . Jakou práci W plyn vykonal? Jak se změnila jeho vnitřní energie ΔU a jaké teplo bylo plynu dodáno?

Řešení: Nejprve si ujasníme konvenci, abychom měli naprosto jasně určené, co počítáme. První termodynamický zákon píšeme ve tvaru

$$dU = dW + dQ,$$

tedy dQ je práce dodávaná do systému a dQ je teplo dodávané do systému. Pokud tedy klesá vnitřní energie, systém koná práci (a tím ztrácí energii) a nebo předává teplo okolí. První zákon můžeme taktéž zapsat skrze mechanickou práci systému

$$dU = -pdV + dQ,$$

 $kde \, dW = -p dV \, odpovídá \, naší \, konvenci, že pokud plyn koná práci (expanduje \, dV > 0),$ je práce dodávaná do systému záporná (tlak je vždy kladný). Ptáme-li se, jakou práci systém vykonal, potom se ptáme na $d\hat{W} = -dW$, a tedy pdV integrováno přes daný proces

$$\hat{W} = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = p(V_2 - V_1) = Nk(T_2 - T_1) = nR(T_2 - T_1).$$

Změnu vnitřní energie spočteme z druhé stavové rovnice ideálního plynu

$$U = nC_V T$$
 \Rightarrow $\Delta U = nC_V (T_2 - T_1).$

Teplo dodané do systému získáme skrze první termodynamický zákon

$$Q = \Delta U - W = \Delta U + \hat{W} = n(C_V + R)(T_2 - T_1) = nC_p(T_2 - T_1).$$

V tomto příkladě jsme zavedli notaci \hat{W} pro práci, kterou vykoná systém. Stříškou tedy značíme ty veličiny, které koná systém. Analogicky $\hat{Q} = -Q$ by bylo teplo dadné systémem do okolí.

14 Ve vratně pracujícím tepelném stroji bylo izotermicky při teplotě T stlačeno n moldů ideálního plynu z objemu V_1 na objevm V_2 . Jakou práci plyn vykonal? Jak se změnila vnitřní energie a jaké teplo plyn vykonal?

Řešení: Postupovat budeme naprosto analogicky předchozímu příkladu. Ihned víme, že změna vnitřní energie při izotermickém procesu je nulová, neboť vnitřní energie ideálního plynu závisí pouze na teplotě systému, která se nemění. Veškeré dodané teplo Q systému se tak přemění na práci Ŵ, kterou systém vykoná. Máme tedy

$$Q = -W = \hat{W} = \int_{V_1}^{V_2} p \, \mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \, \mathrm{d}V = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Opět si dáváme pozor na znaménka, neboť i sbírka příkladů má jinou konvenci, než kterou používáme my. Vidíme, že ve výsledcích ve sbírce je naše \hat{W} označováno za W. Tamější termodynamický zákon má totiž tvar $\Delta U = Q - W$. My se budeme ale chtít držet konvence "Dovnitř plynu kladně, z plynu záporně".

15 Ve vratně pracujícím tepelném stroji byl izochoricky snížen tlak n molů plynu o teplotě T_1 z hodnoty p_2 na p_2 , přičemž teplota se samozřejmě procesem změnila. Jakou práci vykonal plyn? Jak se změnila vnitřní energie a jaké teplo bylo plynu dodáno?

Řešení: V tomto případě byla vykonaná práce nulová $\hat{W}=W=0$, neboť se nezměnila žádná sdružená síla – nezměnil se počet částic nebo objem plynu. Změnu vnitřní energie dokážeme určit ze stavové rovnice

$$\Delta U = nC_V(T_2 - T_1).$$

Neznáme však finální teplotu T_2 , pouze tlak, na který se dostala. Proto použijeme i druhou stavovou rovnici, abychom našli T_2

$$T_2 = \frac{p_2 V}{nR} = p_2 \frac{V}{nR} = p_2 \frac{1}{p_1} \underbrace{\frac{p_1 V}{nRT_1}}_{-1} T_1 = T_1 \frac{p_2}{p_1},$$

a díky tomuto vztahu můžeme zapsat

$$\Delta U = Q = nC_V T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right).$$

16 Cyklus vratně pracujícího tepelného stroje tvoří izobarická expanze $V_1 \to V_2$ při tlaku p_1 , izochorické snížení tlaku $p_1 \to p_2$, následně izobarická komprese $V_2 \to V_1$ a finálně izochorické zvýšení tlaku $p_2 \to p_1$. Jakou práci stroj vykoná během jednoho cyklu?

Řešení: Během izochorických procesů stroj nekoná žádnou práci, pouze mění svou vnitřní energii. Při izobarické expanzi stroj vykoná práci $\hat{W}_e = p_1(V_2 - V_1)$. Při izobarické kompresi naopak koná práci $\hat{W}_k = p_2(V_1 - V_2)$, která je záporná (vidíme, že nyní do systému práci dodáváme). Výsledná práce cyklu je tedy

$$\hat{W} = \oint p(V) \, dV = p_1(V_2 - V_1) + p_2(V_1 - V_2) = (p_1 - p_2)(V_2 - V_1).$$

19 Jakou práci je třeba vykonat na adiabatické stlačení ideálního plynu na n-tinu původního objevu V_0 při tlaku p_0 ?

Řešení: Adiabatický proces je obecný polytropický děj, jehož polytropický koeficient je Poissonova konstanta $\kappa = c_p/c_V = 1 + R/c_V > 1$, potom platí $pV^{\kappa} = \text{const.}$ Tento vztah použijeme pro vyjádření tlaku v integrálu práce

$$W = -\int_{V_0}^{V_0/n} p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa} dV = -p_0 V_0^{\kappa} \left[\frac{V^{-\kappa+1}}{-\kappa+1}\right]_{V_0}^{V_0/n} = \frac{p_0 V_0^{\kappa}}{\kappa-1} \left[\left(\frac{V_0}{n}\right)^{1-\kappa} - V_0^{1-\kappa}\right] = \frac{p_0 V_0}{\kappa-1} \left(\frac{1}{n^{1-\kappa}} - 1\right) = p_0 V_0 \frac{n^{\kappa-1} - 1}{\kappa-1}.$$

Všimněme si, že vzorečky udávané ve sbírce neřeší orientaci práce W. My jsme nyní věděli, že počítáme W a nikoliv \hat{W} , tedy znaménko mínus bylo potřeba přidat, abychom mluvili o práci potřebné na stlačení. Ve sbírce tedy výsledek označený písmenem W není ta samá fyzikální veličina, kterou je W v předchozích příkladech.

20 Vratný Carnotův motor pracuje s účinností η_0 . O kolik stupňů Celsia zvýšit teplotu ohřívače z T_h na T, abychom účinnosti zvýšili na η při stejné teplotě chladiče T_c ?

Řešení: Nejprve z účinnosti Carnotova cyklu

$$\eta_0 = 1 - \frac{T_c}{T_h}, \eta \qquad = 1 - \frac{T_c}{T}$$

vyjádříme T_h a T, neboť chceme spočítat rozdíl $T - T_h$. Odtud získáváme

$$T - T_h = T_c \left(\frac{1}{1 - \eta} - \frac{1}{1 - \eta_0} \right) = \frac{\eta - \eta_0}{(1 - \eta)(1 - \eta_0)} T_c.$$

Speciální pozor si nyní musíme dát na dosazování jednotek. Pokud dosadíme T_c ve stupních Celsia, nevyjde nám správný výsledek. Levá strana $T-T_h$ je samozřejmě nezávislá na tom, zda použijeme Kelviny nebo stupně Celsia. Ovšem na pravé straně musíme nutně použít termodynamickou stupnici. To plyne z toho, že ve vztahu pro účinnost η se objevuje podíl teplot, nikoliv rozdíl. A při podílu teplot neplatí, že v Kelvinově a Celsiově stupnici dostaneme stejný výsledek.

21 Vratně pracujícímu Carnotovu motoru je v průběhu každého cyklu dodáno teplo Q_H z rezervoáru o teplotě T_H . Jestliže pro teplotu studeného rezervoáru platí $T = T_S$, vypočítejte účinnost motoru a množství odpadního tepla odcházejícího v každém cyklu.

Řešení: Začneme opět rozpravou na téma jednotek teploty. Opět musíme použít termodynamickou stupnici, neboť zde máme podíl teplot. Dosazovat tak nemůže ve stupních Celsia. Účinnost potom spočteme jednoduše dosazením do vzorce pro účinnost Carnotova cyklu

$$\eta = 1 - \frac{T_S}{T_H}.$$

Zároveň víme, že tento vztah lze díky vztahu tepla a teploty (skrze entropii) přepsat do tvaru

$$\eta = 1 - \frac{T_S}{T_H} = 1 - \frac{Q_S}{Q_H},$$

kde naše odpadní teplo je Q_S . Není stačí vyjádřit Q_S na termodynamických teplotách

$$\frac{T_S}{T_H} = \frac{Q_S}{Q_H} \qquad \Rightarrow \qquad Q_S = Q_H \frac{T_S}{T_H}.$$

22 Vypočítejte minimální příkon P tepelného čerpadla, které má vytápět dům na teplotu T_H , jestliže z domu uniká teplo rychlostí k_W a venkovní teplota je T_S .

Řešení: Minimální příkon musí přesně vyvážit odchod tepla. Rychlost úniku k_W je výkon, který uniká pryč. Příkon $P = k_W/\eta$, odtud

10

$$P = \frac{k_W}{1 - \frac{T_S}{T_H}} = \frac{k_W}{\frac{T_H - T_S}{T_H}} = \frac{k_W T_H}{T_H - T_S}.$$

- 24 Vratný tepelný stroj vykonávající tzv. Ottův cyklus pracuje ve čtyřech fázích:
 - 1. adiabaticky expanduje $V_1 \to V_2$ a teplota se mění $T_1 \to T_2$,
 - 2. izochoricky se ochladí $T_3 \to T_3$,
 - 3. adiabaticky je komprimován na $V_2 \rightarrow V_1$ a teplota $T_3 \rightarrow T_4$
 - 4. a finálně je izochoricky přiveden na původní teplotu $T_4 \to T_1$.

Jaká je účinnost tohoto cyklu?

Řešení: Účinnost definujeme v úplné obecnosti skrze slovní vztah

$$\eta = \frac{Energie \ vyu\check{z}it\acute{a} \ na \ to, \ co \ chceme.}{Celkov\check{e} \ dodan\acute{a} \ energie \ do \ syst\acute{e}mu.}$$

V našem případě nás zajímá práce, kterou stroj vykoná, tu chceme. To, co do systému dodáváme, je teplo během izochorického ohřání. Ztráta při ochlazení nás v této rovině nezajímá, ale i tak ji použijeme k výpočtu. Víme totiž, že změna vnitřní energie je během cyklu nulová, neboť systém koná cyklický děj. Práce, kterou stroj vykoná, je tedy daná teplem, které ze systému odejde, tedy

$$\hat{W} = -W = Q = Q_i - Q_o,$$

 $kde Q_i$ je teplo dodané do systému a Q_o teplo, které jde pryč ze systému, odtud můžeme psát

$$\eta = \frac{\hat{W}}{Q_i} = \frac{Q_i - Q_o}{Q_i} = 1 - \frac{Q_o}{Q_i}.$$

Dodané~i~odpadní~teplo~můžeme~spočítat~standardním~způsobem~skrze~molární~tepelnou~kapacitu

$$Q_i = nC_V(T_1 - T_4), \qquad \Rightarrow \qquad Q_o = nC_V(T_3 - T_2), \Rightarrow \qquad \eta = 1 - \frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_4}.$$

Nyní je potřeba najít rozdíly teplot. Víme, že $pV^{\kappa}=const.$ během adiabatického procesu, zároveň se jedná o ideální plyn, a proto platí pV=nRT. Během adiabatických procesů tedy můžeme psát

$$pV^{\kappa} = nRTV^{\kappa - 1} = nRC,$$

kde C je nějaká konstanta (různá pro různé adiabatické děje). Během expanze tedy platí $T_1V_1^{\kappa-1} = T_2V_2^{\kappa-1}$ a během komprese $T_3V_2^{\kappa-1} = T_4V_1^{\kappa-1}$. Odečteme-li od sebe tyto rovnice, získáme

$$(T_1 - T_4)V_1^{\kappa - 1} = (T_2 - T_3)V_2^{\kappa - 1}$$
 \Rightarrow $\frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_4} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa - 1}$.

Üčinnost Ottova cyklu je tedy

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa - 1}.$$

Za zajímavost můžeme považovat fakt, že účinnost nezávisí na ničem jiném než na objemu.

26 Jak se změní entropie kyslíku o hmotnosti m, pokud jej ve vratně pracujícím tepelném stroji ochladíme z teploty T_2 na teplotu T_2 izochoricky nebo izobaricky?

Řešení: Rozepíšeme si první termodynamický zákon pro případ konstantního počtu částic a vyjádříme entropii

$$dU = dQ + dW = TdS - pdV, dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV.$$

Pro izochorický děj je dV = 0, tím pádem dS = dU/T. Pro děj izobarický platí v ideálním plynu stavová rovnice V = (nR/p)T, kde nR/p je konstanta. Tím pádem dV = (nR/p) dT. Využijeme také druhou rovnici $dU = nC_V dT$, odkud můžeme psát

$$\Delta S_{i-ch} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{nC_V}{T} dT = nC_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right),$$

$$\Delta S_{i-b} = \int_{T_1}^{T_2} \left(nC_V + p\frac{nR}{p}\right) \frac{dT}{T} = nC_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

Finálně můžeme molární kapacity C_k vyjádřit pomocí měrných kapacit a počet molů n pomocí hmotnosti a molární hmotnosti. Toto jednoduché cvičení již čtenář zvládne jistě sám.

27 Vypočítejte, jak se změní entropie, smícháme-li m_1 vody o teplotě T_1 a m_2 vody o teplotě T_2 . Užijeme měrnou tepelnou kapacitu vody c.

Řešení: Idea je spočítat entropii při změně teploty. Entropie má (zřejmě přednáška nebo zdroj tento příklad) v takovém případě tvar

$$S(T) = \int_{-T}^{T} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) dT = mc \ln T,$$

kde \int^T symbolizuje primitivní funkci, u níž nás nezajímá aditivní konstanta S_0 , které se pro změny entropie odečte. Pokládáme tak $S_0 = 0$. Entropie na počátku je proto

$$S_i = m_1 c \ln(T_1) + m_2 c \ln(T_2),$$

neboť tato veličina je aditivní. Na konci bude mít entropie tvar

$$S_f = (m_1 + m_2)c \ln \left(\frac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2}\right),$$

kde jsme použili vztah pro výslednou teplotu směsi $T = (m_1T_1 + m_2T_2)/(m_1 + m_2)$. Změna entropie je proto

$$\Delta S = S_f - S_i = m_1 c \ln \left(\frac{T}{T_1} \right) + m_2 c \ln \left(\frac{T}{T_2} \right).$$

Mohli bychom ještě přejít k novému značení $m=m_1+m_2$ a podílům $\mu_i=m_i/m$. Potom lze výsledek přepsat do tvaru

$$\Delta S = \mu_1 mc \ln \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{T_2}{T_1} \right) + \mu_2 mc \ln \left(\mu_1 \frac{T_1}{T_2} + \mu_2 \right).$$

29 Mosazná a hliníková tyč mají při teplotě T_1 stejnou délku ℓ . Jaký je rozdíl jejich délek $\delta\ell$ při teplotě T_2 , pokud jejich délkové roztažnosti jsou zachyceny v koeficientech α_m a α_h ?

Řešení: Víme, že rozdíl délky nějaké tyče při změně teploty ΔT je dán coby přírůstek $\ell_f - \ell_i = \alpha \ell_i \Delta T$. To víme z definice koeficientu

$$\alpha = \frac{1}{\ell} \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}T}.$$

Odtud náš rozdíl spočteme jako rozdíl přírůstků tyče

$$\delta \ell = \ell \alpha_m \Delta T - \ell \alpha_h \Delta T = \ell (\alpha_m - \alpha_h) \Delta T.$$

30 Z minulého semestru si možná pamatujete, že když zavěsíte homogenní tyč délky ℓ_0 za jeden konec, bude se po vychýlení kývat s dobou kyvu

$$\tau_0 = \pi \sqrt{\frac{2\ell_0}{3g}}.$$

Pokud hodiny s takovým kyvadlem vyrobeným z materiálu o délkové roztažnosti α jdou přesně při teplotě T_1 , jak se změní doba jejich kyvu při teplotě T_2 ?

Řešení: Víme, že teplotní délková roztažnost materiálu je definována vztahem

$$\alpha = \frac{1}{\ell_0} \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}T},$$

což nás vede na přírůstek délky tyče $d\ell = \alpha \ell_0 dT$. Výsledná délka kyvadla bude tedy

$$\ell = \ell_0 \left(1 + \alpha \Delta T \right)$$
.

Tuto délku tedy dosadíme do vzorečku pro dobu kyvu a nalezneme délku kyvu jedné sekundy pro známý vzorec

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{2\ell_0}{3g} (1 + \alpha \Delta T)} = \tau_0 \sqrt{1 + \alpha \Delta T}.$$

34 Jakou rychlostí musí být vystřelena olověná kulka o teplotě T_1 do terče, aby se po nárazu roztavila? Uvažujme, že celková kinetická energie se přemění na teplo.

Řešení: Kinetická energie kulky je dána její hmotností $E = 1/2mv^2 = Q$. Potřebujeme teplotu tání olova, kterou si označíme jako T_o . Část získaného tepla se spotřebuje na zahřání kulky na teplotu tání. Zbytek tepla se musí stát skupenským teplem tání $L_t = ml_t$. Odtud získáme

13

$$\frac{1}{2}mv^2 = mc(T_o - T_1) + ml_t, v = \sqrt{2c(T_0 - T_1) + 2l_t}.$$

40 Pro Maxwell-Boltzmannovo rozdělení velikostí rychlostí molekul ideálního plynu můžeme psát $f(v) = Av^2 \exp(-mv^2/2kT)$. Jaká je hodnota konstanty A?

Řešení: Maxwell-Boltzmannovo rozdělení velikostí rychlostí je distribuční funkce nad nějakým statistickým souborem. Budeme tedy funkci normovat na pravděpodobnost, tj. $\int f = 1$. Jednoduchá odpověď na otázku je tedy

$$A = \left(\int v^2 e^{-mv^2/2kT} \, \mathrm{d}v\right)^{-1}.$$

Dobrou otázkou však je, zda tento integrál vůbec konverguje a jak jej případně spočítat, pokud nám jej nikdo nezadá. Vůči integraci je $m/2kT =: \alpha$ konstanta, proto ji tak označíme a až na konci dosadíme. Jedná se o 1D integrál, k jehož výpočtu využijeme trik prohození derivace a integrálu. Použijeme parciální derivaci vůči nově zavedenému parametru α , uvědomíme si rovnost

$$\partial_{\alpha} e^{-\alpha v^2} = -v^2 e^{-\alpha v^2},$$

a tento vztah použijeme při výpočtu integrálu

$$\int_{\mathbb{R}} v^2 e^{-\alpha v^2} \, \mathrm{d}v = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha v^2} \, \mathrm{d}v \equiv -\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{G}(\alpha) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \mathcal{G}(1).$$

Zbylý integrál $\mathcal{G}(1)$ je obyčejný Gaussovský integrál. Budeme však pro naše účely předpokládat, že jej čtenář doposud nikdy nepočítal, a pokusíme se jej spočítat nějakým trikem. Při počítání tohoto integrálu snadno narazíme na plno různých obtíží. Prvně byť se jedná o 1D integrál, očividně nepůjde spočítat přímou cestou skrze jednoduchou substituci či per partes. Trik k použití tohoto integrálu je spočtení kvadrátu stejného integrálu a využití polárních souřadnic

$$\mathcal{G}(1)\mathcal{G}(1) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\phi$$
$$= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{r}{2r} e^{-\eta} d\eta = \pi \int_0^{\infty} e^{-\eta} d\eta = \pi \left[-e^{-\eta} \right]_0^{\infty} = \pi,$$

kde jsme použili nejprve přechod k polárním souřadnicím na rovině \mathbb{R}^2 a poté substituci $r^2 = \eta$, tedy $2r \, \mathrm{d}r = \mathrm{d}\eta$. Odtud můžeme psát $\mathcal{G}(\alpha) = \sqrt{\pi/\alpha}$. Můžeme se tedy pustit do derivace dle α

$$\int_{\mathbb{R}} v^2 e^{-\alpha v^2} \, \mathrm{d}v = -\sqrt{\pi} \, \frac{\partial \alpha^{-1/2}}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}.$$

Nyní si však uvědomíme fyzikální význam písmenka v. Jedná se o velikost rychlosti, tedy může být pouze kladná. Náš integrál tedy musíme počítat pouze na intervalu $(0,\infty)$. Vidíme však, že funkce pod integračním znaménkem je sudá, a proto výsledek bude jednoduše polovina z již známého výsledku

$$\int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2} \, \mathrm{d}v = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8\pi k^3 T^3}{m^3}} = \sqrt{\frac{\pi k^3 T^3}{2m^3}}, \qquad \Rightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{2m^3}{\pi k^3 T^3}}.$$

41 Z Maxwellova rozdělení velikostí rychlostí odvoďte nejpravděpodobnější hodnotu velikosti rychlosti molekul. Řešení:

Nejpravděpodobnější hodnota rychlost je ta, která maximalizuje pravděpodobnostní hustotu f(v)dv, tedy distribuci f(v). Jedná se o funkci $v^2e^{-\alpha v^2}$. Její maximum nalezneme derivací

$$derivace = 2v(1 - v^2\alpha)e^{-\alpha v^2n} = 0.$$

Nulovou derivaci tak dostaneme pro $v = \sqrt{1/\alpha} = \sqrt{2kT/m}$.

42 – Z Maxwellova rozdělení velikostí rychlostí odvoďte střední hodnotu velikosti rychlost molekul.

Řešení: $Střední hodnota rychlosti \langle v \rangle$ je definována vztahem

$$\langle v \rangle = \int v f(v) \, dv = \dots = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Zde několik teček znamená spočítat triviální integrál. Čtenář může využít některé znalosti integrálu z příkladu 40.

Vlnění

44 Pohybová rovnice pro vlny na tuhé struně má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha^2 c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$$

kde u je výchylka struny a koeficienty c, α jsou konstantní. Najděte disperzní relaci, fázovou rychlost těchto vln.

Řešení: Použijeme Fourierovu transformaci û funkce u na danou rovnici. Fourierova transformace je definována vztahem

$$\hat{u}(\xi,\tau) = \int u(x,t)e^{-i(\xi x - \omega t)} dx dt.$$

Naším cílem tedy bude násobit příslušnou rovnici exponenciálou a následně ji integrovat. Pomocí per partes můžeme ukázat, jak vypadá Fourierova transformace derivace funkce u

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)e^{-i\xi x + i\omega t} dx dt = i\xi \int u(x,t)e^{-i(\xi x - \omega t)} dx dt = i\xi \hat{u}(\xi,\tau),$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-i\xi x + i\omega t} dx dt = -i\omega \int u(x,t)e^{-i(\xi x - \omega t)} dx dt = -i\omega \hat{u}(\xi,\tau),$$

přičemž člen $[]_a^b$ vypadne, neboť předpokládáme specifické okrajové podmínky funkce u, např. že vymizí na hranici dané integrační oblasti. Obecně bychom mohli ukázat, že při Fourierově transformaci lze psát

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \mapsto (i\xi)^n \hat{u},$$
$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} \mapsto (-i\omega)^n \hat{u}.$$

Dosazením tohoto pravidla do naší rovnice získáme

$$(-i\omega)^{2} = c^{2}(i\xi)^{2} - \alpha^{2}c^{2}(i\xi)^{4}$$
$$-\omega^{2} = -c^{2}\xi^{2} - \alpha^{2}c^{2}\xi^{4},$$
$$\omega^{2} = c^{2}\xi^{2} + \alpha^{2}c^{2}\xi^{4}.$$

Zde se odlišujeme od symbolismu ve sbírce, kdy používáme ξ místo k. Tímto se snažíme ukázat, že disperzní relace je vztah mezi dvěma proměnnými ve Fourierově obraze, jejich interpretace coby frekvence a vlnové číslo k přichází až později z příslušných vlastností vln. Fázovou rychlost můžeme nyní zjistit coby podíl

$$v_f = \omega/\xi = c\sqrt{1 + \alpha^2 \xi^2}.$$

45 Vypočítejte fázovou a grupovou rychlost vln na hluboké vodě, pro něž platí disperzní relace $\omega = \sqrt{gk}$.

Řešení: Stačí dosadit do definice fázové a grupové rychlosti

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{g/k},$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{g} \frac{1}{2} k^{-1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{g/k}.$$

46 Pro fázovou rychlost příčných vln v pružné tyči platí $v_f = a/\lambda$, kde a je konstanta. Jaká je grupová rychlost těchto vln?

Řešení: Využijeme vztahu $v_f = \omega/k$, odkud víme, že $\omega = v_f k$. Můžeme tedy najít grupovou rychlost

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(v_f k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\frac{ka}{2\pi}k = \frac{a}{2\pi}2k = \frac{ak}{\pi} = 2v_f.$$

47 Vypočítejte fázovou a grupovou rychlost kapilárních vln na povrchu kapaliny, pro něž platí disperzní relace $\omega = \sqrt{\alpha k^3/\rho}$.

Řešení: Klasicky využijeme definic jednotlivých veličin

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\alpha k}{\rho}},$$
 $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} k^{3/2} = \frac{3}{2} v_f.$

48 Pro vlny šířící se plazmatem můžeme psát disperzní relaci $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$, kde c je rychlost světla ve vakuu a ω_p je konstantní plazmová frekvence. Jaká je fázová a grupová rychlost vln v plazmatu?

Řešení: Opět spočteme veličiny přímo z definice

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_p}{ck}\right)^2},$$
 $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_f}.$

49 Stojatá vlna vznikla interferencí dvou proti sobě jdoucích vln o frekvenci f. Vzdálenost dvou sousedních uzlů je ℓ . Jaká je fázová rychlost vln v prostředí, v němž se vlny šíří?

Řešení: Víme, že vzdálenost sousedních uzlů odpovídá polovině vlnové délky $\lambda = 2\ell$. Z vlnové délky a frekvenci dokážeme získat fázovou rychlost vln $v = \lambda f = 2\ell f$.

17

90 Vypočtěte, jakou povrchovou teplotu má Slunce a jaký celkový výkon vyzařuje, jestliže vyzařuje jako AČT s maximem na vlnové délce λ_m . Poloměr Slunce je R_S .

Řešení: Využijeme vztahu pro maximální vlnovou délku $\lambda_m = b/T$, kde b je Wienova konstanta. Odtud spočteme teplotu snadno $T = b/\lambda_m$. Celkově vyzářený výkon spočteme ze Stefan-Boltzmannova zákona $P = S\sigma T^4 = 4\pi R_S^2 \sigma (b/\lambda_m)^4$.

91 Hvězda Sirius má povrchovou teplotu T_i a poloměr $R_i = nR_s$, kde R_s je poloměr Slunce. Kolikrát větší výkon vyzařuje Sirius oproti Slunce, víte-li, že Slunce vyzařuje s maximem na vlnové délce λ_m ?

Řešení: Využijeme Znalost celkového výkonu vyzářeného Sluncem z minulého příkladu

$$P_S = 4\pi R_s^2 \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4.$$

Výkon vyzáření Siriem bude

$$P_i = 4\pi n^2 R_s^2 \sigma T_i^4,$$

odkud již získáme hledaný podíl

$$\frac{P_i}{P_s} = n^2 \left(\frac{T_i \lambda_m}{b}\right)^4.$$

92 Vypočítejte, jaký proud by měl protékat kovovým vláknem o průměru d umístěným ve vakuu, aby se jeho teplota ustálila na T. Uvažujte měrný odpor vlákne ρ .

Řešení: Vodič délky ℓ bude na teplotě T zářit coby černé těleso svým povrchem $S=2\pi r\ell=\pi d\ell$. Celkový výkon odevzdaný do záření bude $P_-=\sigma T^4 2\pi r\ell$. Neuvažujeme-li ztráty v elektrickém zapojení, přejde veškerá elektrická energie do zahřátí vlákna, nikoliv do okolí, tím pádem se výkon dodaný zdrojem

$$P_{+} = UI = RI^{2} = \rho \frac{\ell}{S}I^{2} = \frac{\rho\ell}{\pi r^{2}}I^{2} = \frac{4\rho\ell}{\pi d^{2}}I^{2},$$

kde U a I jsou efektivní hodnoty veličin v obvodu bez fázového posunu napětí vůči proudu. V ideálním případě se tedy veškerý dodaný výkon přemění na tepelné záření a získáme

$$P_{-} = P_{+} \qquad \rightarrow \qquad \frac{4\rho\ell}{\pi d^{2}} I^{2} = \sigma T^{4} 2\pi r\ell, \qquad \rightarrow \qquad I = \frac{\pi d^{3/2} T^{2}}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}.$$

93 Prahová vlnové délka pro fotoelektrickou emisi u wolframu je λ_0 . Jakou vlnovou délku dopadjícího světla musíme použít, aby vyletovaly elektrony s maximální kinetickou energií E_m ?

Řešení: Maximální energie fotonů při vnějším fotoelektrickém jevu je daná vztahem $E_m = \hbar\omega - \hbar\omega_0$, kde ω_0 je prahová frekvence. Tento vztah lze upravovat

$$E_m = hf - hf_0 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0},$$

a odtud již jednoduše získáme

$$\left(E_m - \frac{hc}{\lambda_0}\right) = \frac{hc}{\lambda},$$
 $\lambda = \frac{hc}{E_m - \frac{hc}{\lambda_0}} = \frac{hc\lambda_0}{E_m\lambda_0 - hc}.$

94 Výstupní práce pro sodík je W_i . Jaká maximální vlnová délka dopadajícího světla ještě způsobí fotoelektrickou emisi?

Řešení: Mezní fotoefekt nastane v případě, kdy dopadající energie přesně odpovídá výstupní práci, tedy $\hbar\omega = W_i$. Víme také, že $\hbar\omega = hc/\lambda$, a proto $\lambda = hc/W_i$.

95 Zdroj světla s jakoukoliv vlnovou délkou λ osvětluje kovový povrch a způsobuje fotoemisi elektronů s maximální kinetickou energií E_m . Použijeme-li zdroj světla s poloviční vlnovou délkou, mají fotoelektrony maximální kinetickou energii E_M . Jaká je výstupní práce kovového povrchu?

Řešení: Jistě víme, že bude platit $E_m = hc/\lambda - hc/\lambda_0$ a také $E_M = hc/\lambda' - hc/\lambda_0$. Z těch rovnic chceme zjistit, kolik je λ_0 , pomocí nějž spočteme výstupní práci. Potřebujeme však dvě rovnice, protože neznáme hodnotu λ a $\lambda' = \lambda/2$.

$$2E_m = \frac{2hc}{\lambda} - \frac{2hc}{\lambda_0}$$
$$E_M = \frac{2hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0},$$

odtud odečtením první rovnice od druhé získáme

$$E_M - 2E_m = \frac{hc}{\lambda_0}, \qquad W_i = \frac{hc}{\lambda_0} = E_M - 2E_m.$$

96 Jakou vlnovou délku musí mít foton, aby jeho hmotnost odpovídala klidové hmotnosti elektronu?

Řešení: Lehce triková otázka. Hmotnost fotonu získáme ze vztahů $E = mc^2$ a $E = h\nu$, tj. $m = h\nu/c^2 = h/\lambda c$, a proto $\lambda = h/mc$. Je potřeba, aby si nikdo nemyslel, že foton má nulovou hmotnost (má pouze nulovou klidovou hmotnost).

97 Určete energii, hybnost a hmotnost fotonu rentgenového záření s vlnovou délkou λ .

Řešení: Příklad vyřešíme jednoduše $E = hc/\lambda$, $p = h/\lambda$ a $m = h/\lambda c$. Jedná se v podstatě o definiční vzorečky, případně jejich jednoduché úpravy.

98 Laserové ukazovátko vyzařuje svazek světla o vlnové délce λ a výkonu P. Kolik fotonů ukazovátko emituje každou sekundu?

Řešení: Počet částic vyřešíme coby podíl celkové energie a energie na jednu částici. Ptáme se na energii za jednu sekundu, to je v podstatě definice výkonu $W = P \cdot 1s$. Odtud můžeme psát $N = P \cdot 1s \lambda/hc$.

99 Svazek rentgenových paprsků se rozptyluje na volných elektronech. Paprsky odchýlené o úhel φ od původního směru mají vlnovou délku λ' . Jaká je vlnová délka dopadjících paprsků?

Řešení: Samotný ohyb paprsků do různých úhlů nasvědčuje tomu, že dopadjící světlo je dostatečně energické, má tedy krátkou vlnovou délku. To odpovídá modelu Comptonova rozptylu, pro nějž platí

$$\lambda - \lambda' = \lambda_c \left(1 - \cos(\varphi) \right),\,$$

kde $\lambda_c = h/m_e c$ je Comptonova vlnová délka. Získat λ' je nyní úloha pro cvičenou opici.

100 Foton rentgenového záření o vlnové délce λ se čelně srazil s volným elektronem, který byl v klidu, a odrazil se zpět. Jaká je vlnová délka fotonu a kinetická energie elektronu po srážce?

Řešení: Pokud se foton odrazil zpět, je $\varphi = \pi$, a tím pádem $\lambda' = \lambda - 2\lambda_c$. Odtud můžeme spočítat, jak se změnila energie tohoto fotonu

$$\Delta E_{\gamma} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda - 2\lambda_c}.$$

Tato změna energie je použita na vykonání práce k urychlení elektronu. Jedná se tedy o kinetickou energii letícího elektronu $T_e = \Delta E_{\gamma}$.

 ${f 102}$ Jakou kinetickou energii musí mít elektron letící vodou s indexem lomu n, aby se stal zdrojem Čerenkovova záření?

Řešení: Protože o systému vůbec nic nevíme, začneme relativistickou úvahou, že kinetická enerqie elektronu letícího rychlostí v je

$$T_e = mc^2 - m_0c^2 = (\gamma - 1) m_0c^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{1 - v^2/c^2}} - 1\right) m_0c^2.$$

Aby byl elektron zdrojem Čerenkovova záření, musí se pohybovat v daném prostředí rychlosti než světlo. To se v prostředí o indexu lomu n pohybuje rychlostí $v_{\gamma}=c/n$. Proto píšeme

$$T_e = \left(\sqrt{\frac{1}{1 - 1/n^2}} - 1\right) m_0 c^2.$$

Zde je vidět, že $v^2/c^2=1/n^2$, což je hodnota, která není zanedbatelná. Zkuste samostatně příklad spočítat nerelativisticky s $T_e=1/2m_0v^2$ a uvidíte, zda je výsledek přibližně správný či nikoliv.

104-105 Vypočtěte rychlost a de Broglieho vlnovou délku elektronu, který byl urychlen napětím U.

Řešení: Pokud je získaná energie nízká, lze použít klasickou fyziku. Uvažujme ovšem obecnější případ, kdy napětí může být vysoké a klasická fyzika již přestává platit, použijeme tedy speciální relativitu. Kinetickou energii fotonu, která se zvýšila o energii eU, tedy T = eU, můžeme nyní napsat jako rozdíl celkové a statické energie

$$eU = mc^2 - m_0c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2,$$
 $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$

Tato energie nám bude nápomocna, neboť chceme-li de Broglieho vlnovou délku λ , musíme znát hybnost elektronu, neboť

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda},$$
 \rightarrow $\lambda = \frac{h}{p}.$

Hybnost je veličina, jejíž velikost je i ve speciální relativitě rovna p = mv, kde hmotnost splní $m = \gamma m_0$. Faktor γ nám tedy poslouží, abychom našli rychlost v. Pojdme na to

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{eU}{m_0 c^2} = \frac{m_0 c^2 + eU}{m_0 c^2},$$

rovnici nyní převrátíme a umocníme na druhou

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^4}{(m_0 c^2 + eU)^2},$$

$$v^2 = c^2 \frac{2m_0 c^2 eU + e^2 U^2}{(m_0 c^2 + eU)^2},$$

$$v = c \frac{\sqrt{2m_0 c^2 eU + e^2 U^2}}{m_0 c^2 + eU}.$$

V jedné z předchozích rovnic můžeme vidět, že $m_0c^2 + eU = mc^2$, tím pádem můžeme rovnici vynásobit m a získat hybnost

$$p = mv = \frac{\sqrt{2m_0c^2eU + e^2U^2}}{c}.$$

Vlnová délka elektronu je tedy

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2m_0c^2eU + e^2U^2}}.$$

Samostatně spočtěte případ, kdy je napětí nízké a stačí použít klasická mechanika. Váš výsledek by měl být jednoduší a měl by vyjít $h/\sqrt{2meU}$. Ověřte, že se jedná o limitu nízkých v pro relativistický vzorec.

106 Stanovte neurčitosti rychlostí elektronu a protonu, pokud jsou tyto částice uzavřeny v oblasti s lineárním rozměrem Δx .

Řešení: V podstatě libovolné. Víme, že musí platit $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 = h/4\pi$. Odtud lze získat

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \ge \frac{h}{4\pi m \Delta x}.$$

Uvažujeme-li, že nevíme o poloze nic mimo to, že je elektron v dané oblasti, položíme místo nerovnosti rovnost, neboť tím pádem máme maximální neznalost v oblasti, a dostaneme minimální odchylku v rychlosti. Elektron a proton potom budou mít různé hmotnosti, proto vyjde jejich odchylka různě.

118-119 Částice o hmotnosti m se nachází v jednorozměrné, nekonečně hluboké, pravoúhlé potenciálové jámě šířky a. Řešením stacionární Schrödingerovy rovncie najděte energie, které může částice mít. Nalezněte vhodné vlastní vektory.

Řešení: Začneme tím, si uvědomíme, co chceme počítat. Nečasová (či stacionární) Schrödingerova rovnice je v podstatě hledání vlastních čísel energie, zapsáno v Diracově notaci

$$\mathcal{H}|E\rangle = E|E\rangle$$
,

kde \mathcal{H} je operátor energie - Hamiltonián. Tento operátor se skládá z kinetické a potenciální části (obecně). Potenciální energie v nekonečně hluboké jámě je nulová, zůstane tedy pouze kinetická část $\mathcal{H} = p^2/2m$. Odtud tedy

$$\frac{p^2}{2m} |E\rangle = E |E\rangle.$$

Přejdeme-li do Schrödingerovy vlnové reprezentace, potom $\mathbf{p}=-\hbar\nabla$, odkud získáme $p^2=-\hbar^2\Delta$. Vlastní vektory označíme jako $|E\rangle=\psi(x)$. Jelikož jsme jen v jedné dimenzi, bude se Δ chovat jako druhá derivace dle jediné proměnné

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi, \qquad \qquad \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0,$$

což je rovnice s jednoduchým řešením (zavedeme $k=\sqrt{2mE}/\hbar=p/\hbar)$

$$\psi = \psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx).$$

na intervalu (0,a). Všude jinde je funkce nulová (tam je potenciál nekonečný, a proto tam nic nemůže existovat). Aby byla funkce spojitá, musí platit, že námi získané řešení je nulové pro x=0 i x=a. Takovou rovnici jsme již řešili (stojaté vlnění), a proto víme, že řešení bude kvantované

$$\psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{\pi nx}{a}\right).$$

Z podmínky $\int |\psi_n(x)|^2 dx = 1$ můžeme najít i normovací konstantu $A_n = \sqrt{2/a}e^{i\theta}$ pro libovolné reálné θ . Zjistili jsme tedy, že $k_n = \pi n/a$ je kvantované, odtud je kvantovaná i hybnost a energie

$$p_n = \hbar k_n = \frac{\hbar \pi}{a} n,$$
 $E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2 \pi^2}{2ma^2} n^2.$