# Aplikace derivace v kinematice

Minule jsme se dozvěděli o Větě o aritmetice derivací (zkráceně VoAD, vizme (1)) a o Větě od derivaci složené funkce (zkráceně VoDSF, vizme (2))

$$\begin{aligned} &(f \pm g)' = f' + g', \\ &\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',} \\ &\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).} \tag{2}$$

a také jak počítat derivace podle definice. Ačkoli se jedná o jednu z náročnějších elementárních funkcí na derivování, odvodíme funkci sinus, protože se nám bude dnes hodit (celý postup je uveden pouze pro zajímavost, o podobných výpočtech limit se budete učit v rámci prvního kursu Matematické analýzy)

$$\begin{aligned} (\sin(x))' &= \lim_{y \to x} \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{2 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)}{y - x} = \\ &= \lim_{y \to x} \left( \frac{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}{\frac{y-x}{2}} \right) \cdot \lim_{y \to x} \left( \cos\left( \frac{y+x}{2} \right) \right) = 1 \cos\left(\frac{2x}{2}\right) = \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

Funkce kosinus má odvození podobné, proto ho již neuvádíme. Každopádně výsledek této práce, který se dnes ukáže dobrým nástrojem, je

$$(\sin(x))' = \cos(x), \tag{3}$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x). \tag{4}$$

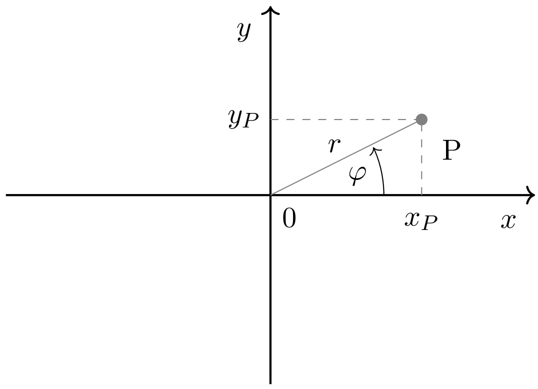
Dnes se tedy pokusíme o určitou aplikaci nově nabitých znalostí (zarámečkovaných rovností obzvlášť) do oblasti mechaniky. Začneme tedy přirozeně s rychlostí. Vzorec pro rychlost je základním kamenem kinematiky, partie mechaniky, která se zabývá popisem pohybu bez toho, abychom se příliš starali o jeho příčinu. Vztah rychlosti a polohy znám ze středoškolské fyziky i jeho vyjádření v jazyce nám již známých derivací je tedy

$$\begin{aligned} \overline{v}(t) &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_B - s_A}{t_B - t_A}, \\ v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = s'(t), \\ a(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = v'(t) = s''(t), \end{aligned}$$

kde $\overline{v}(t)$ (středoškolsky definovaná rychlost) je tedy pouze rychlostí průměrnou za daný časový interval, kdežto rychlost $v(t)$ zadefinována pomocí derivace je rychlost okamžitá pro daný čas $t$.

*Připomínka.* Polární souřadnice kartézsky vyjádřeného bodu $[x, y]$ můžeme určit dle obrázku níže jako

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi), \\ y &= r \sin(\varphi). \end{aligned}$$




Obrázek 1: Ilustrace polárních souřadnic v kartézské souřadné soustavě

Takto tedy můžeme určit polohu bodu stojícího v prostoru. My se však zabýváme obecně pohybem, který nemusí být vůči nám (pozorovateli) v klidu, ale jeho poloha bude záviset na čase. V případě polohy budou tedy obě souřadnice funkcemi času

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r(t)\cos(\varphi(t)), \\
y(t) &= r(t)\sin(\varphi(t))
\end{aligned}
$$

Rychlost tedy, jak jsme si ukázali již dříve, je časovou derivací právě funkce polohy, můžeme tedy psát

$$
\begin{aligned}
v_x(t) &= (r(t)\cos(\varphi(t)))', \\
v_y(t) &= (r(t)\sin(\varphi(t)))'.
\end{aligned}
$$

Nasasdíme-li tedy na takto obecně vyjádřený pohyb nám již známé věty o derivacích (1), (2) a znalost derivace funkce kosinus (4), x-ová složka rychlosti bude vypadat

$$
\begin{aligned}
v_x(t) &= (s_x(t))' = (r(t)\cdot\cos(\varphi(t)))' = (r(t))'\cdot\cos(\varphi(t)) + r(t)\cdot(\cos(\varphi(t)))' = \\
&= r'(t)\cos(\varphi(t)) + r(t)((-\sin(\varphi(t))\varphi'(t)) = r'(t)\cos(\varphi(t)) - r(t)\sin(\varphi(t))\varphi'(t),
\end{aligned}
$$

y-ová složka rychlosti pak zase s pomocí (1), (2), akorát tentokrát se nám vyskytne ve vyjádření sinus, takže použijeme (3)

$$
\begin{aligned}
v_y(t) &= (r(t)\sin(\varphi(t)))' = r'(t)\sin(\varphi(t)) + r(t)(\sin(\varphi(t)))' = \\
&= r'(t)\sin(\varphi(t)) + r(t)\cos(\varphi(t))\varphi'(t).
\end{aligned}
$$

Celkovou rychlost v polárních souřadnicích pak můžeme vyjádřit jako (na universitě již sloupcový) vektor a dostáváme tak ucelený výsledek

$$
\boxed{\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'(t)\cos(\varphi(t)) - r(t)\sin(\varphi(t))\varphi'(t) \\ r'(t)\sin(\varphi(t)) + r(t)\cos(\varphi(t))\varphi'(t) \end{pmatrix}.}
$$