1.

$$\binom{x+3}{x} - \binom{x+1}{x-1} = 3\binom{6}{6},$$
$$\frac{(x+3)!}{3!\cdot x!} - \frac{(x+1)!}{2!\cdot(x-1)!} = 3,$$
$$\frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{6} - \frac{(x+1)x}{2} = 3,$$
$$(x+3)(x+2)(x+1) - 3x(x+1) = 18,$$
$$x^3 + 3x^2 + 8x - 12 = 0,$$
$$(x-1)\left(x^2 + 4x + 12\right) = 0.$$

Nevím, proč vám tohle zadává. Nevidím jiný řešení, než že jeden kořen ($x = 1$) uhádneš a tím pádem ten polynom můžeš napsat v podobě $P(x) = (x-1)P'(x)$, kde $P(x)$ je původní polynom $P(x) =^2 + 4x + 12$ a $P'(x)$ je polynom, který vznikne jako výsledek dělení polynomů

$$P'(x) = P(x) : (x-1) = (x^2 + 4x + 12) : (x-1) = x^2 + 4x + 12,$$

což je kvadratická rovnice se záporným diskriminantem, tudíž jediný řešení v množině reálných čísel je $x = 1$, který jsi uhádla na začátku.

2.

$$\binom{x+3}{1}^3 + 6\binom{x+1}{2} - 6\binom{x}{3} = 9x^2 + 25,$$
$$(x+3)^3 + 6\frac{(x+1)!}{(x-1)!\cdot 2!} - 6\frac{x!}{(x-3)!\cdot 3!} = 9x^2 + 25,$$
$$(x+3)^3 + 3(x+1)x - x(x-1)(x-2) = 9x^2 + 25,$$
$$6x^2 + 28x + 2 = 0.$$

Tady se asi zase přepsala, protože z tohohle ani výpočetní technika nezíská ten výsledek, kterej získala paní učitelka xD.

3.

$$\binom{x+1}{2} + \binom{x+4}{2} + \binom{x+7}{x+5} < 9x^2 + 25,$$
$$\frac{(x+1)!}{(x-1)!\cdot 2!} + \frac{(x+4)!}{(x+2)!\cdot 2!} + \frac{(x+7)!}{2!\cdot(x+5)!} < 9x^2 + 25,$$
$$(x+1)x + (x+4)(x+3) + (x+7)(x+6) < 18x^2 + 50,$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{681}}{30} + \frac{7}{10}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{681}}{30} + \frac{7}{10}; +\infty\right).$$

To taky neni uplně ono, ale jako z mojí hlavy to neni, jen počáteční úpravy. Rovnice jsem nechal řešit Symbolab.