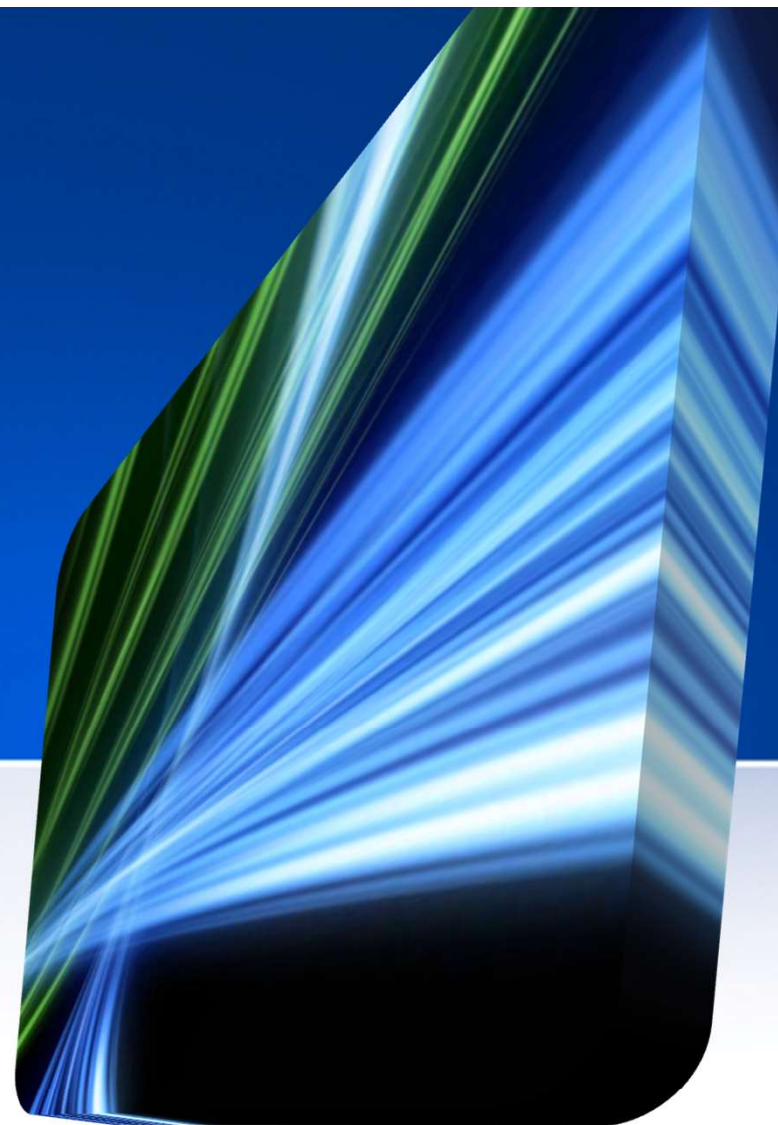


Výpočet polohy

Doc. Dr. Ing. Pavel Kovář



Obsah



- Čas
- Relativistické jevy
- Časová základna družice
- Formulace navigační úlohy
- Řešení navigační úlohy
- Chyba polohy
- Rozšířený Kalmánův filtr

Čas



Atomový čas

- UTC (Coordinated Universal Time)

Astronomický čas

- GMT

Rotace Země se zpomaluje, GMT se zpožďuje za UTC. Řeší se vkládáním a teoreticky i odebíráním přestupných sekund do UTC a to dle potřeby o půlnoci z 30. června na 1. července a půlnoci z 31. prosince na 1.ledna.

Časová základna GNSS



GPS GPST

- Atomový čas, přestupné sekundy ne, synchronizace s UTC $< 1\mu\text{s}$

GLONASS GLONASST

- Atomový čas, přestupné sekundy Ano
- GLONASST = UTC + 3h +/- 1 ms

Galileo GST

- Atomový čas, přestupné sekundy Ne
- Chyba k UTC $< 50\text{ ns}$

BeiDou BDT

- Atomový čas, přestupné sekundy Ne
- Chyba k UTC $< 100\text{ ns}$

Relativistické jevy



1. Pohyb družice

Podle speciální teorie relativity čas objektu, který se vůči nám pohybuje přímočaře plyne pomaleji než náš. GNSS družice se pohybuje rychlostí přibližně 3300 m/s. Její čas plyne $5 \cdot 10^{-9} \%$ pomaleji

2. Gravitace

Rychlost plynutí času závisí na gravitačním potenciálu. Gravitační potenciál na povrchu Země je 4 vyšší než na GNSS družici. To zpomalí rychlost plynutí času na zemi o $20 \cdot 10^{-9} \%$.

3. Šíření signálu

Podle teorie relativity je rychlost šíření světla a potažmo i signálu známá v inerciálních soustavách. Rotace Země způsobuje, že souřadnicová soustava ECEF není inerciální. Výpočet polohy je třeba provádět v jakékoliv inerciální soustavě ECI

Řešení relativistických jevů



- Jevy 1. a 2. se navzájem kompenzují až na změnu gravitačního potenciálu družice na excentrické dráze.
- U GPS se řeší uladěním kmitočtového normálu družice na kmitočet 10,22999999543 MHz. Pozorovateli na Zemi se kmitočet jeví jako 10,23 MHz.

- Změna gravitačního potenciálu se řeší korekcí

$$\Delta t_r = F \cdot e \cdot \sqrt{A} \sin E_k,$$

$F = \frac{-2 \cdot \sqrt{\mu}}{c^2} = -4.442807633 \cdot 10^{-10} \text{ s/m}^{1/2}$, e excentricita, A délka hlavní poloosy, E_k excentrická anomálie

- GLONASS korekci na změnu gravitačního potenciálu nepoužívá.

Řešení relativistických jevů



- Opomenutí korekce času u družice s excentricitou 0,02 způsobuje časovou chybu ± 46 ns, což odpovídá chybě vzdálenosti ± 13 m.

Časová základna družice



- Družice je vybavena přesnými atomovými hodinami.
- Odchylka hodin družice měří řídicí segment a počítá korekční koeficienty.

GPS

$$t = t_{SV} + \Delta t_{SV}$$
$$\Delta t_{SV} = a_{f0} + a_{f1}(t - t_{oc}) + a_{f2}(t - t_{oc})^2 + \Delta t_r$$

a_{f0}, a_{f1}, a_{f2}	korekční koeficienty vysílané v navigační zprávě
t_{oc}	vztažná čas
Δt_r	relativistická korekce

Formulace navigační úlohy



Východiska

1. Signál se od družice k uživateli šíří jistou dobu. U systému GPS je doba šíření mezi 66 a 86 ms. Za tuto dobu navigační družice urazí vzdálenost mezi 210 a 280 m. **Polohu navigačních družic je tedy třeba určit v okamžiku vysílání signálu**, nikoliv v okamžiku příjmu signálu.
2. Doba šíření signálu se přepočítává na vzdálenost pomocí známé rychlosti šíření signálu c . Podle speciální teorie relativity je rychlost šíření signálu známá v inerciálních soustavách. **Výpočet polohy družice je tedy třeba provádět v libovolné inerciální soustavě**, nikoliv v soustavě ECEF. Poznamenejme, že v neinerciálních rotujících soustavách, například ECEF rotace způsobuje změnu rychlosti šíření signálu. Jev se nazývá Sagnacův efekt.

Čas vysílání signálu



$$t_{tx} = t_{SV,tx} - \Delta t_{SV}$$

$t_{SV,tx}$ čas vyslání signálu v časové základně družice zjištěný z fáze kódu přijímaného signálu, bitové synchronizace a navigační zprávy.

t_{tx} čas vyslání signálu v časové základně systému.

Výpočet polohy navigačních družic



- Navigační úlohu je nejvýhodnější řešit v inerciální soustavě, která je v okamžiku výpočtu polohy t_{fix} totožná se soustavou ECEF. Odpadá tím transformace vypočítané polohy z ECI do ECEF.
- Transformace poloh navigačních družic ze soustavy ECEF do soustavy ECI

$$\theta = \dot{\Omega}(t_{tx} - t_{fix})$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{ECEF}x_k(t_{tx,k}) \\ {}^{ECEF}y_k(t_{tx,k}) \\ {}^{ECEF}z_k(t_{tx,k}) \end{bmatrix}$$

$\dot{\Omega}$ úhlová rychlost rotace Země

Formulace navigační úlohy



Zdánlivá vzdálenost

$$\rho_k = (t_{rt,k} - t_{t,k})c$$

$t_{rt,k}$ čas přijmu signálu k -té družice v časové základně přijímače

$t_{t,k}$ čas vyslání signálu k -té družice v časové základně navigačního systému

Vzdálenost

$$r_k = \rho_k + \tau_c c$$

τ_c časový posun mezi časovou základnou přijímače a časem navigačního systému

Formulace navigační úlohy



Měření musí odpovídat geometrii úlohy

$$\rho_k = \sqrt{(x_u - x_k)^2 + (y_u - y_k)^2 + (z_u - z_k)^2} - \tau_c c, \\ k = 1, 2, \dots$$

Řešení

- Přímá Bancroftova metoda
- Numerické řešení (Newtonova-Gaussova metoda)

Numerické řešení



Linearizace v bodě s předpokládanou polohou $(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u)$ a časovém posunu \hat{t}_c

$$\hat{\rho}_k = \sqrt{(x_u - \hat{x}_k)^2 + (y_u - \hat{y}_k)^2 + (z_u - \hat{z}_k)^2} - \hat{t}_c c = f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_c)$$

Skutečná poloha uživatele se liší o $(\Delta x_u, \Delta y_u, \Delta z_u, \Delta \tau_c)$

$$f(x_u, y_u, z_u, \tau_c) = f(\hat{x}_u + \Delta x_u, \hat{y}_u + \Delta y_u, \hat{z}_u + \Delta z_u, \hat{t}_c + \Delta \tau_c)$$

Rozvoj do Taylorovy řady

$$\begin{aligned} f(\hat{x}_u + \Delta x_u, \hat{y}_u + \Delta y_u, \hat{z}_u + \Delta z_u, \hat{t}_c + \Delta \tau_c) &= \\ &= f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_c) + \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_c)}{\partial \hat{x}_u} \Delta x_u + \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_c)}{\partial \hat{y}_u} \Delta y_u \\ &+ \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_c)}{\partial \hat{z}_u} \Delta z_u - \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_c)}{\partial \hat{t}_c} \Delta \tau_c + \dots \end{aligned}$$

Numerické řešení



$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_c)}{\partial \hat{x}_u} &= \frac{x_u - \hat{x}_k}{\hat{r}_k} = a_{x,k} \\ \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_c)}{\partial \hat{y}_u} &= \frac{y_u - y_k}{\hat{r}_k} = a_{y,k} \\ \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_c)}{\partial \hat{z}_u} &= \frac{z_u - \hat{z}_k}{\hat{r}_k} = a_{z,k} \\ \frac{\partial f(\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u, \hat{t}_c)}{\partial \hat{t}_c} &= -c\end{aligned}$$

Koeficienty $a_{x,k}$, $a_{y,k}$, $a_{z,k}$ představují směrové kosiny jednotkového vektoru s počátkem v místě uživatele, který směřuje ke k-té družici.

Numerické řešení



$$\Delta\rho_k = \rho_k - \hat{\rho}_k = a_{x,k}\Delta x_u + a_{y,k}\Delta y_u + a_{z,k}\Delta z_u - c\Delta\tau_c$$

Maticový tvar

$$\Delta\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{x}$$

$$\Delta\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \vdots \\ \Delta\rho_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a_{x,1} & a_{y,1} & a_{z,1} & 1 \\ a_{x,2} & a_{y,2} & a_{z,2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{x,n} & a_{y,n} & a_{z,n} & 1 \end{bmatrix} \quad \Delta\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ -c\Delta\tau_c \end{bmatrix}$$

H Matice směrových kosinů

Numerické řešení



Čtyři družice (n=4)

$$\Delta x = H^{-1} \Delta \rho$$

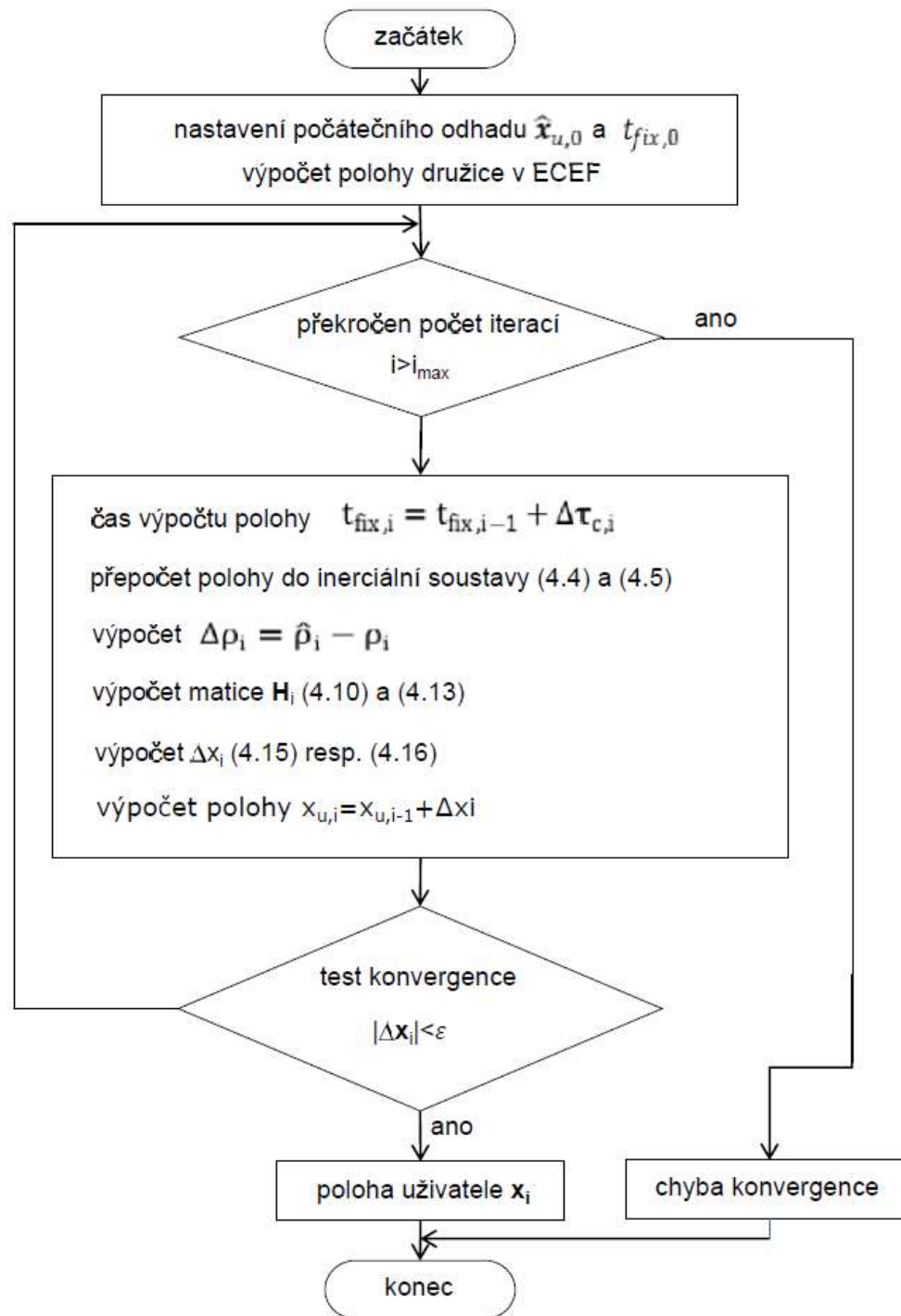
n>4

Metoda nejmenších čtverců

$$\Delta x = (H^T H)^{-1} H^T \Delta \rho$$

Váhovaná metoda nejmenších čtverců

$$\Delta x = (H^T W H)^{-1} H^T W \Delta \rho$$



Konvergence algoritmu



	a) Počátek ve středu Země			a) Počátek v místě poslední polohy		
Krok	x [m]	y [m]	z [m]	x [m]	y [m]	z [m]
0	0	0	0	3963844,14	1001362,26	4879390,95
1	5033921,30	1320513,52	6164878,19	3963862,47	1001378,38	4879397,38
2	4033867,54	1027556,93	4959868,45			
3	3964139,66	1001487,80	4879720,20			
4	3963844,14	1001362,27	4879390,95			
5	3963844,14	1001362,26	4879390,95			

Chyby měření



1. Chyby zdánlivých vzdáleností

2. **Geometrie úlohy**

- Koeficienty DOP vyjadřují, kolikrát je směrodatná odchylka chyby polohy větší než je směrodatná odchylka měření zdánlivé vzdálenosti σ .

Chyby měření



Kovarianční matice chyby

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{(d_{e,1} - d_e)}{R_1} & \frac{(d_{n,1} - d_n)}{R_1} & \frac{(d_{u,1} - d_u)}{R_1} & 1 \\ \frac{(d_{e,2} - d_e)}{R_2} & \frac{(d_{n,2} - d_n)}{R_2} & \frac{(d_{u,2} - d_u)}{R_2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(d_{e,n} - d_e)}{R_n} & \frac{(d_{n,n} - d_n)}{R_n} & \frac{(d_{u,n} - d_u)}{R_n} & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_k = \sqrt{(d_{e,k} - d_e)^2 + (d_{n,k} - d_n)^2 + (d_{u,k} - d_u)^2}$$

d_e, d_n, d_u
 $d_{e,k}, d_{n,k}, d_{u,k}$

polohový vektor uživatele v lokálních souřadnicích
je polohový vektor družice v lokálních souřadnicích

Chyby měření



$$(H^T H)^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_e^2 & \sigma_{en} & \sigma_{eu} & \sigma_{et} \\ \sigma_{ne} & \sigma_n^2 & \sigma_{nu} & \sigma_{nt} \\ \sigma_{ue} & \sigma_{un} & \sigma_u^2 & \sigma_{ut} \\ \sigma_{te} & \sigma_{tn} & \sigma_{tu} & \sigma_t^2 \end{bmatrix}$$

$GDOP = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_n^2 + \sigma_u^2 + \sigma_t^2}$	Geometric Dilution of Precision
$PDOP = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_n^2 + \sigma_u^2}$	Position Dilution of Precision
$HDOP = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_n^2}$	Horizontal Dilution of Precision
$VDOP = \sqrt{\sigma_u^2}$	Vertical Dilution of Precision
$TDOP = \sqrt{\sigma_t^2}$	Time Dilution of precision

Rozšířený Kalmánův filtr



Kalmánův filtr počítá s historií, zohledňuje polohy, které byly vypočítány v předchozích časových okamžicích

Stavový model a model měření

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{aligned}$$

\mathbf{w}_k je náhodný vektor zahrnující neurčitosti stavového modelu a \mathbf{v}_k představuje šum měření. Oba náhodné vektory (\mathbf{w}_k , \mathbf{v}_k) jsou časově nezávislé (bílé) náhodné posloupnosti s normálním rozložením, mají nulovou střední hodnotu se známou kovarianční maticí. Oba procesy jsou nekorelované s počátečním stavem \mathbf{x}_0

Rozšířený Kalmánův filtr



- \mathbf{x}_k $n \times 1$ Stavový vektor
- \mathbf{w}_k $n \times 1$ Vektor procesního šumu
- \mathbf{z}_k $m \times 1$ Vektor měření
- \mathbf{v}_k $m \times 1$ Vektor šumu měření
- $\mathbf{f}(\cdot)$ $n \times 1$ Nelineární funkce stavového modelu
- $\mathbf{h}(\cdot)$ $m \times 1$ Nelineární funkce modelu měření
- \mathbf{Q}_k $n \times n$ Kovarianční matice procesního šumu
- \mathbf{R}_k $m \times m$ Kovarianční matice šumu měření

Aproximace stavového modelu a modelu měření Taylorovou řadou



$$f(\mathbf{x}_{k-1}) \equiv f(\mathbf{x}_{k-1}^a) + J_f(\mathbf{x}_{k-1}^a)(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-1}^a) + \dots$$

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$h(\mathbf{x}_k) \equiv h(\mathbf{x}_k^f) + J_h(\mathbf{x}_k^f)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^f) + \dots$$

$$J_h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Kalmánův filtr



Predikce

$$\mathbf{x}_k^f \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^a)$$
$$\mathbf{P}_k^f = \mathbf{J}_f(\mathbf{x}_{k-1}^a) \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{J}_f^T(\mathbf{x}_{k-1}^a) + \mathbf{Q}_{k-1}$$

Filtrace

$$\mathbf{x}_k^a \approx \mathbf{x}_k^f + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^f) \right)$$
$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^f \mathbf{J}_h^T(\mathbf{x}_k^f) \left(\mathbf{J}_h(\mathbf{x}_k^f) \mathbf{P}_k^f \mathbf{J}_h^T(\mathbf{x}_k^f) + \mathbf{R}_k \right)^{-1}$$
$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_h(\mathbf{x}_k^f) \right) \mathbf{P}_k^f$$

Stavový model



Stavové veličiny

- Souřadnice x, y, z
- Rychlosti v_x, v_y, v_z
- Odchylka časové základny b a její drift f
- ...

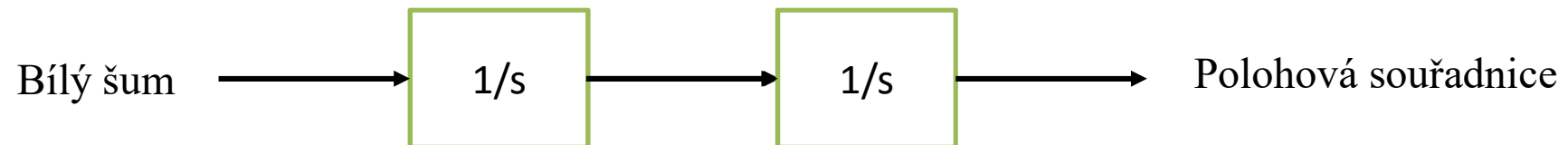
Stavový model pohybu uživatele



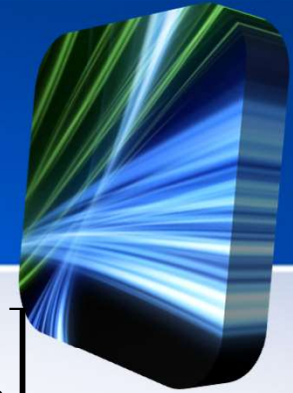
Náhodný pohyb



Integrovaný náhodný pohyb



Stavový model



$$\begin{bmatrix} x_k \\ v_{x,k} \\ y_k \\ v_{y,k} \\ z_k \\ v_{z,k} \\ b_k \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ v_{x,k-1} \\ y_{k-1} \\ v_{y,k-1} \\ z_{k-1} \\ v_{z,k-1} \\ b_{k-1} \\ f_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_p \\ 0 \\ w_p \\ 0 \\ w_p \\ w_f \\ w_b \end{bmatrix}$$