

PŘEDMĚT B2M31DSP/PŘ. 12

PS

Přednáška 12: Spojitá vlnková transformace a banky filtrů



OBSAH

- 1 ÚVOD
- 2 MOTIVACE
- 3 TYPY TRANSFORMACÍ A PERFEKTNÍ REKONSTRUKCE
- 4 PŘÍKLADY VLNEK
- 5 ILUSTRACE CWT
- 6 BANKY FILTRŮ
- 7 PODMÍNKY PERFEKTNÍ REKONSTRUKCE
- 8 M-PÁSMOVÁ BANKA FILTRŮ S KRITICKOU DECIMACÍ
- 9 REALIZACE BANKY FILTRŮ STROMOVOU STRUKTUROU
- 10 DISKRÉTNÍ VLNKOVÁ TRANSFORMACE
- 11 REALIZACE DISKRÉTNÍ VLNKOVÉ TRANSFORMACE BANKOU FILTRŮ
- 12 ILUSTRACE DISKRÉTNÍ VLNKOVÉ TRANSFORMACE

ÚVOD

Cíle přednášky:

- základní pojmy a princip banky filtrů
- základní pojmy a princip vlnkové transformace

MOTIVACE

Motivace: hledání efektivních metod zpracování a kódování signálů

Problémy:

- proč používáme transformace?
- souvislost banky filtrů a vlnkové transformace

TYPY TRANSFORMACÍ A PERFEKTNÍ REKONSTRUKCE

Typy transformací $T\{\}$:

- bezetrátové
 - ortogonální
 - biortogonální
- ztrátové

Pozn.: Perfektní rekonstrukce: $y = \hat{x} = T^{-1}\{T\{x\}\} = x$
= po aplikaci transformace a inverzní transformace získáme původní signál¹

¹ Případně jeho zpožděnou verzi

TYPY TRANSFORMACÍ

Fourierova transformace (FT)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$X(f)$ = spektrum (1-D)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

Krátkodobá Fourierova transformace (STFT = short-time FT)

$$S(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(\tau - t) e^{-j2\pi ft} dt$$

τ = pozice (posun) na ose t , $S(f, \text{pozice})$ = spektrogram (2-D)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(f, \tau) e^{j2\pi ft} df d\tau$$

VLNKOVÁ TRANSFORMACE

Vlnková transformace (CWT-continuous wavelet transform)

- **Přímá CWT:**

$$C(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

a = měřítko (scale), b = posun (pozice) (translation),

$C(\text{měřítko}, \text{pozice})$ = scalogram (2-D)

$\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ = posunutá a komprimovaná vlnka

- **Zpětná CWT = ICWT:**

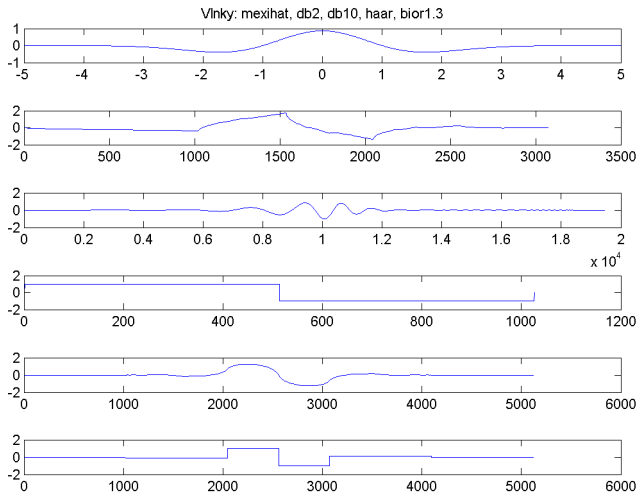
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(a, b) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db$$

PŘÍKLADY VLNEK

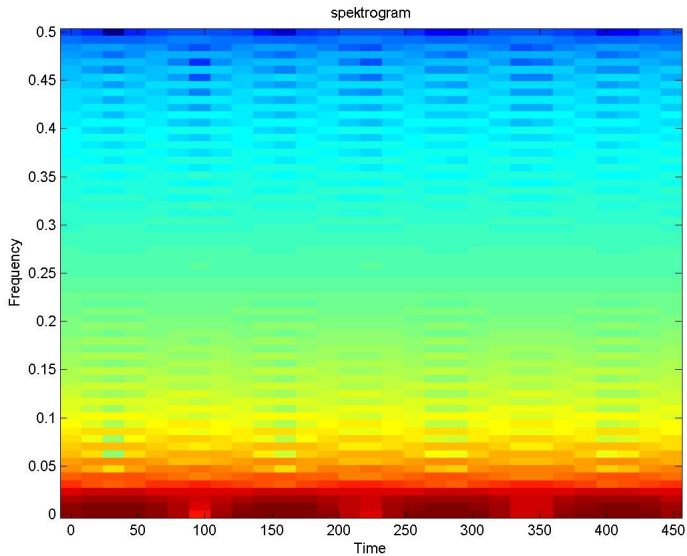
Vybrané vlnky

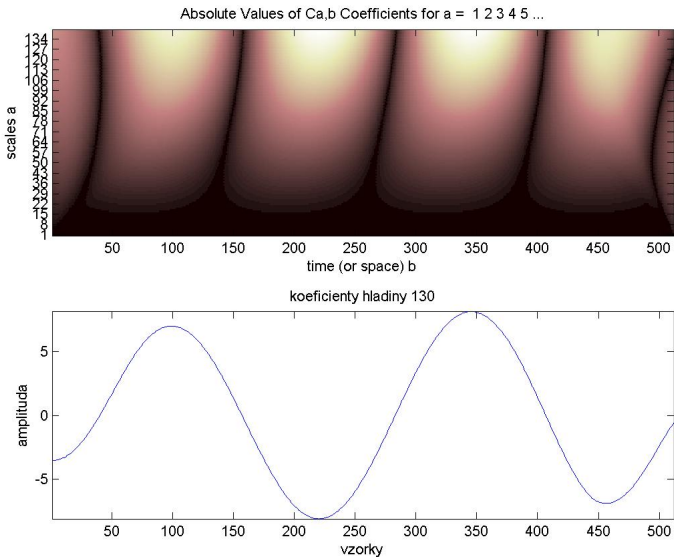
- $\Psi(t) = -te^{-t^2/2}$ = derivace Gaussovy funkce
- $\Psi(t) = \sin \pi t/2 / (\pi t/2) \cos(3\pi t/2)$ = Shannonova
- $\Psi(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2}$ = mexický klobouk

PŘÍKLADY VLNEK

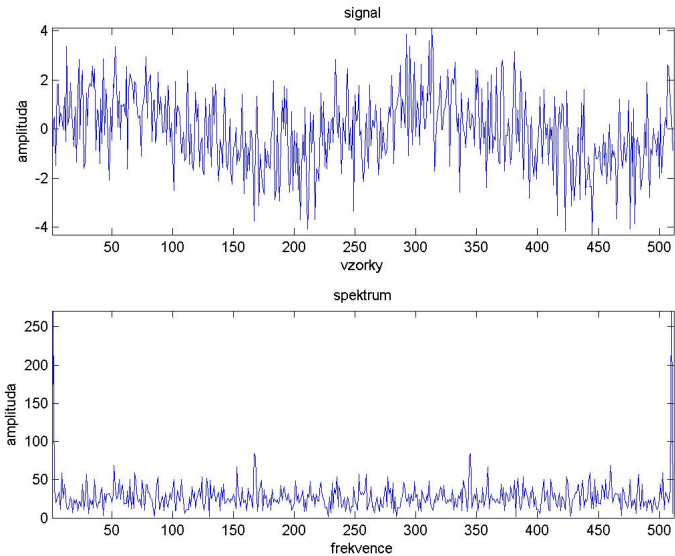


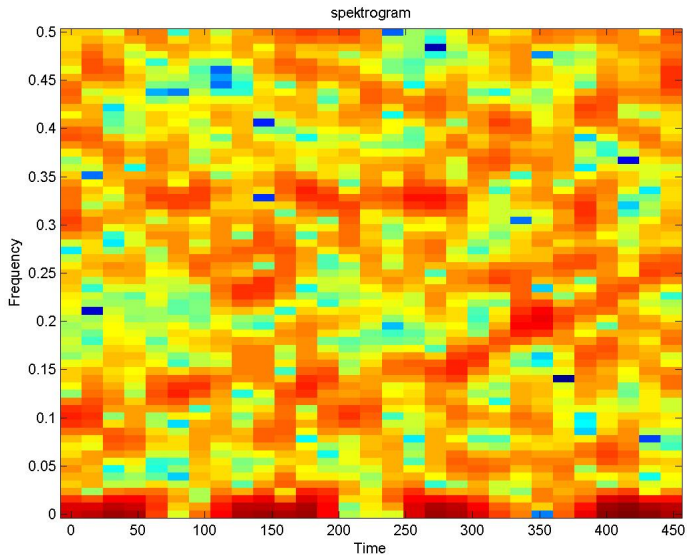
Příklady vlněk-ortogonální: mexický klobouk, db2, db10, Haarova; biortogonální: bior1.3

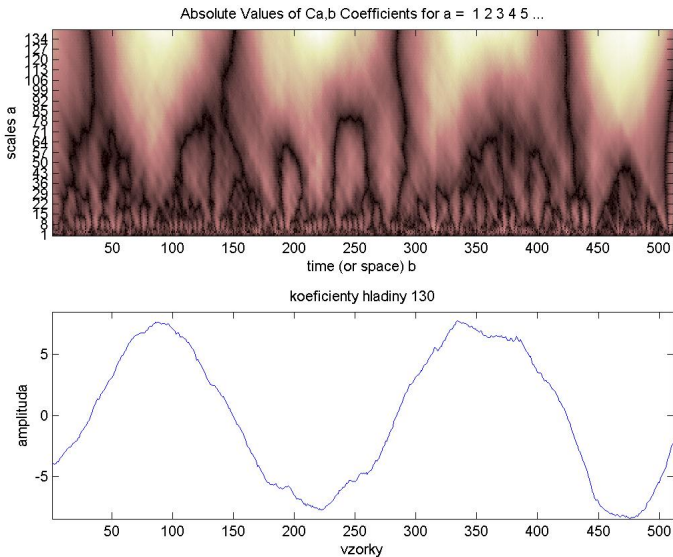




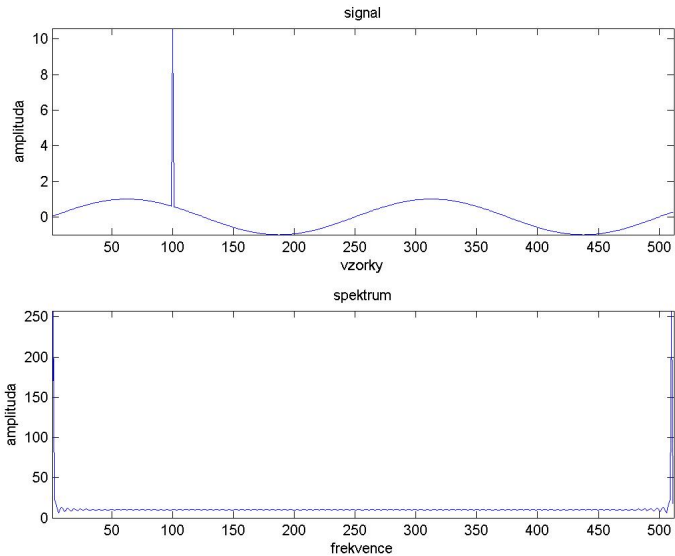
Scalogram sinusovky - na svislé ose jsou "scales" - měřítka - hladiny

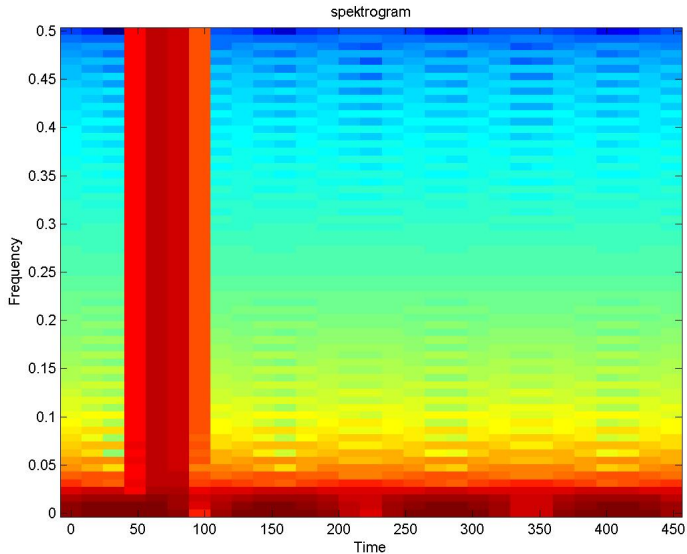


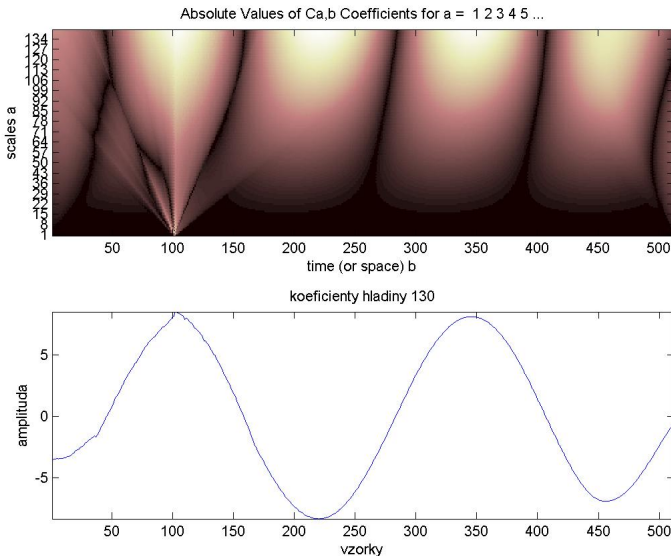




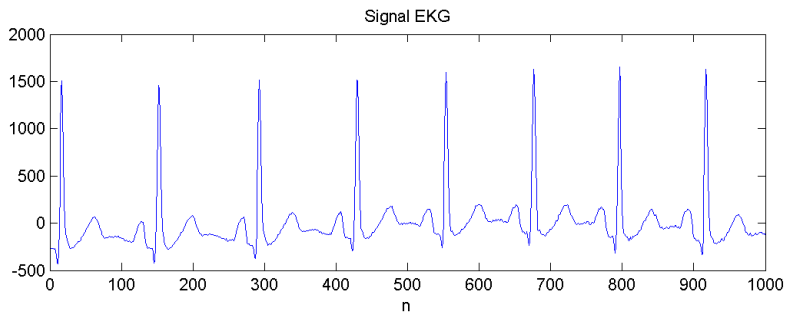
Scalogram - patrná změna časového rozlišení v rámci jednoho obrázku - spektrogram neumožňuje

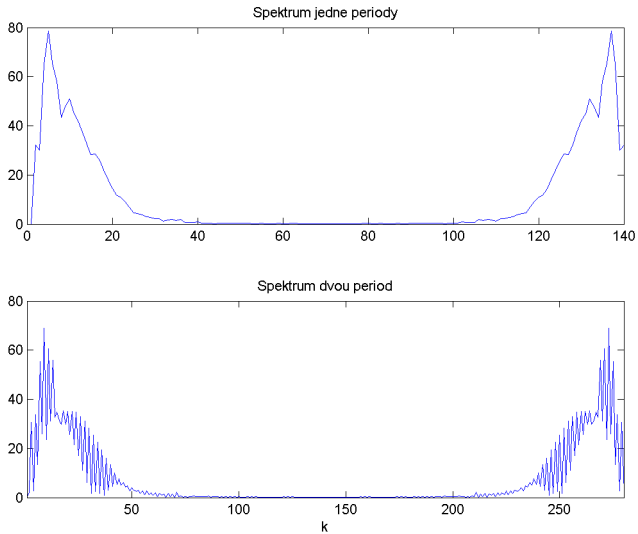




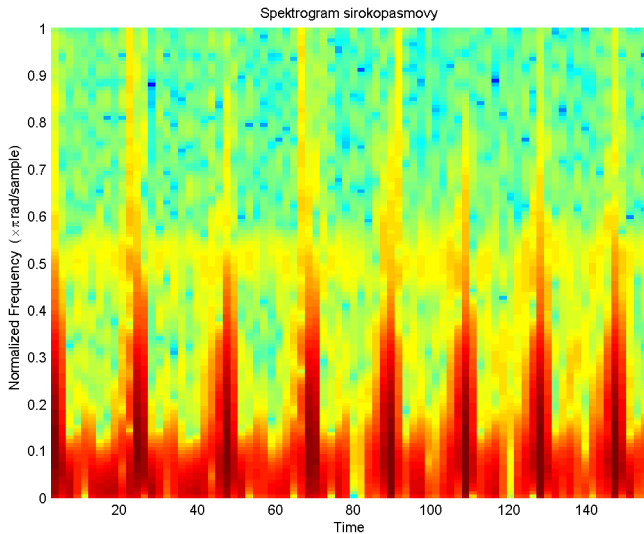


Scalogram - patrná změna časového rozlišení v rámci jednoho obrázku - spektrogram neumožňuje

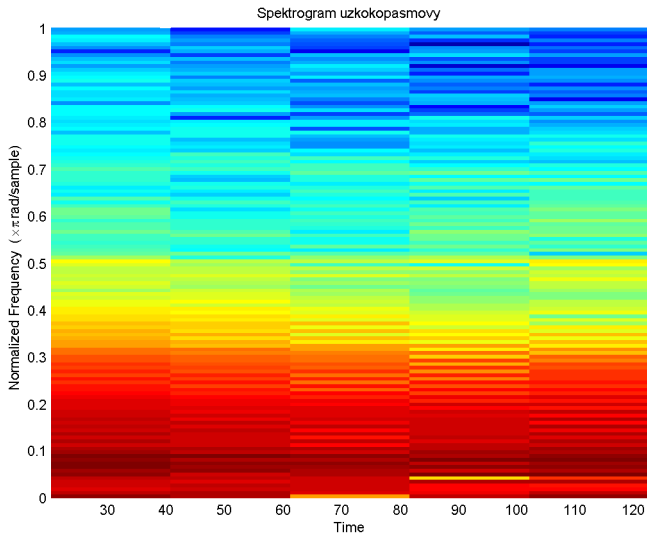




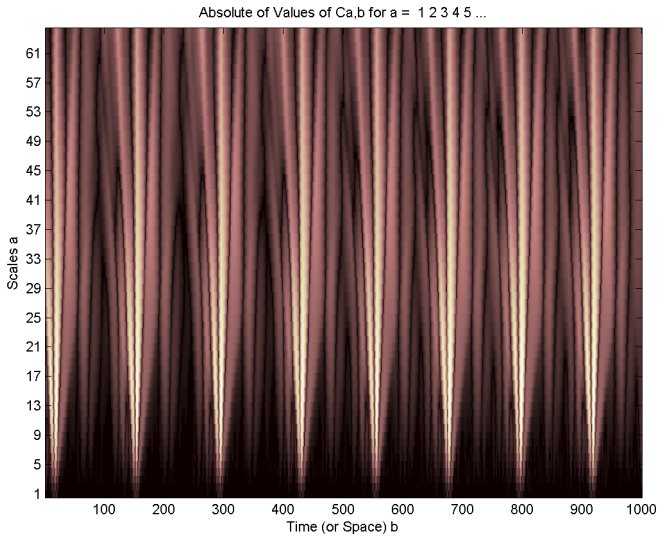
Spektrum jedné a dvou period EKG

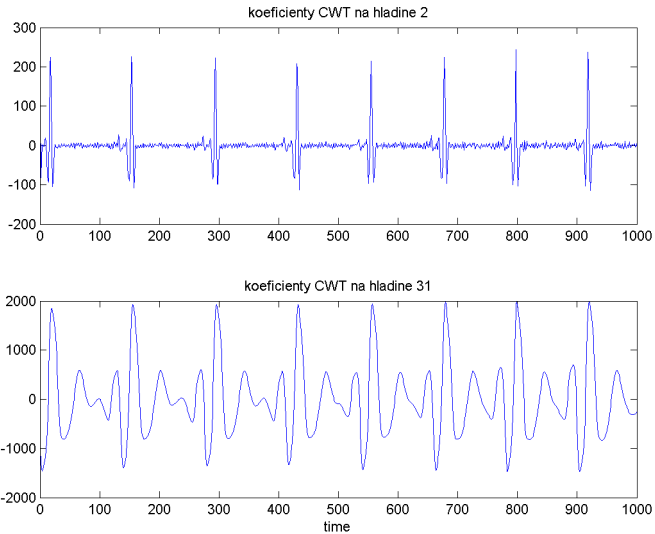


Širokopásmový spektrogram EKG



Úzkopásmový spektrogram EKG



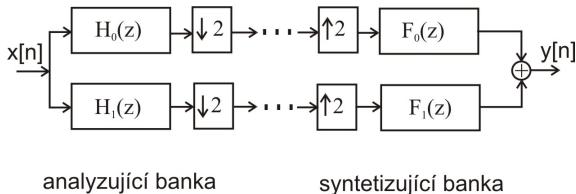


Koeficienty hladin 2 a 31

BANKY FILTRŮ

Banky filtrů: skupina číslicových filtrů vyhovující jistým podmínkám = podmínky perfektní rekonstrukce

Dvoupásmová banka filtrů



- **aproximace** = výstup dolní propusti $H_0(z)$
detaily = výstup horní propusti $H_1(z)$
- **analyzující banka filtrů** = rozklad signálu do pásem a decimace
syntetizující banka filtrů = interpolace a sloučení signálu

PODMÍNKY PERFEKTNÍ REKONSTRUKCE

Podmínky perfektní rekonstrukce²:

- žádné zkreslení signálu: $H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) = 2z^{-D}$
- žádné překrývání: $H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) = 0$

Potom platí³: $y[n] = x[n - D]$,

Důsledek podmínek perfektní rekonstrukce: **filtry jsou spolu svázány**
a nemohou být libovolné

Např. podmínka žádného překrývání je splněna, pokud platí
 $F_0(z) = H_1(-z)$ a $F_1(z) = -H_0(-z)$

Postup návrhu filtrů⁴: $H_0(z) \rightarrow H_1(z), F_1(z), F_0(z)$

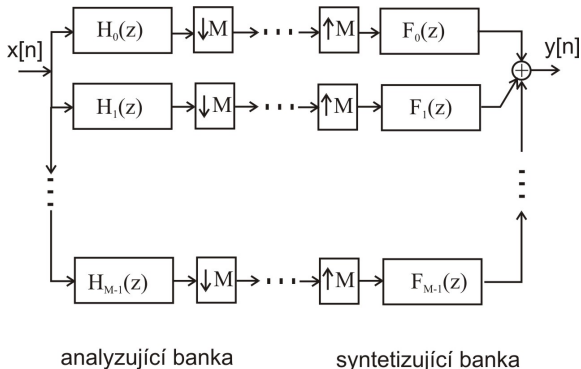
²Zjednodušeno - bez uvažování převzorkování

³ D = celkové zpoždění, x = vstup, $y = \hat{x}$ = výstup

⁴Kompletně bude uveden v další lekci

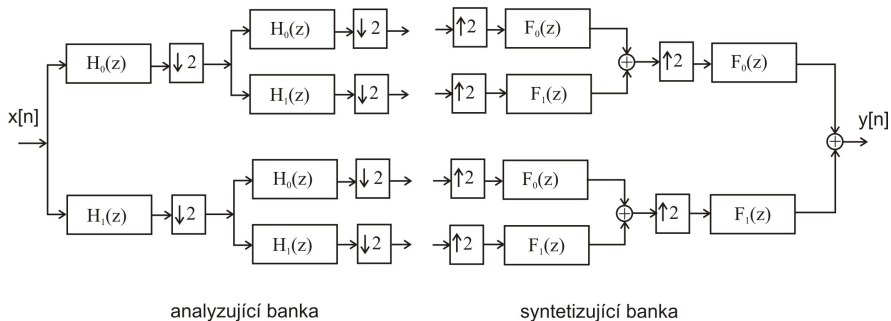
M-PÁSMOVÁ BANKA FILTRŮ S KRITICKOU DECIMACÍ

Zobecnění banky na více stejně širokých frekvenčních pásem



REALIZACE BANKY FILTRŮ STROMOVOU STRUKTUROU

Zobecnění banky na více frekvenčních pásem pomocí dělení pásem



DISKRÉTNÍ VLNKOVÁ TRANSFORMACE

Úvod do diskretní vlnkové transformace - DWT

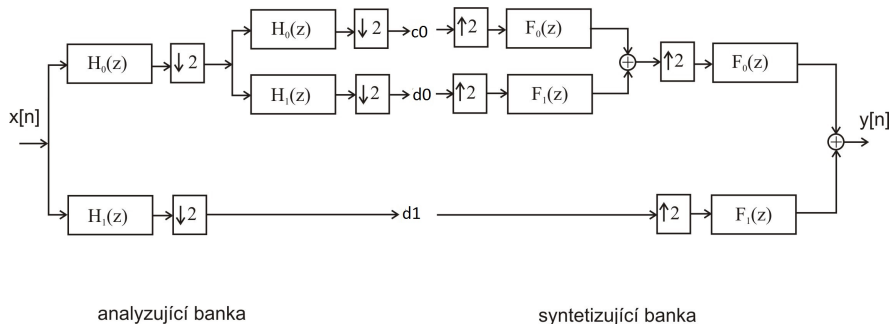
Posun b a měřítko a používané ve spojité vlnkové transformaci nabývají diskretních hodnot - jsou to mocniny 2:

mateřská vlnka \rightarrow rodina vlnek: $\Psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \Psi(2^{-m}t - n)$

n = posun, $\frac{1}{\sqrt{2^m}}$ = změna měřítka

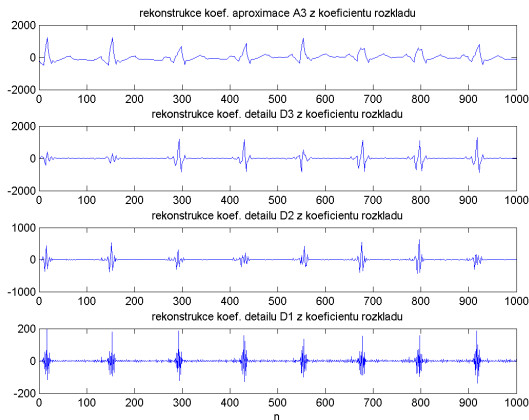
Pozn. DWT lze realizovat bankou filtrů

REALIZACE DWT BANKOU FILTRŮ: NELINEÁRNÍ DĚLENÍ FREKVENČNÍHO PÁSMÁ



Výstupy analyzující banky filtrů označujeme jako hladiny (scales) - zde jsou 3 hladiny odpovídající 3 frekvenčním pásmům - odshora dolů: aproximace ($c_0 \leftrightarrow H_0 H_0$), detaily ($d_0 \leftrightarrow H_0 H_1$), detaily ($d_1 \leftrightarrow H_1$); dvě spodní pásma c_0 a d_0 jsou stejně široká, horní pásmo d_1 je dvakrát širší než d_0 ; H_0 je dolní propust, H_1 je horní propust;

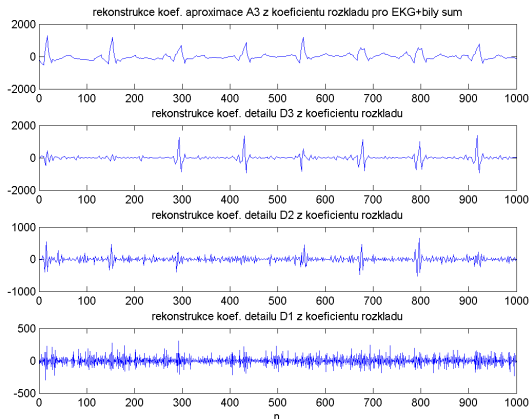
ILUSTRACE ANALÝZY EKG POMOCÍ DWT



Rozklad EKG pomocí DWT na 4 hladiny pomocí analyzující banky filtrů: $c_0 \leftrightarrow H_0 H_0 H_0$, $d_0 \leftrightarrow H_0 H_0 H_1$, $d_1 \leftrightarrow H_0 H_1$, $d_2 \leftrightarrow H_1$ - změny v průbězích koeficientů hladin jsou stále rychlejší - odpovídá to rostoucí frekvenci pásem/hladin; součet všech 4 průběhů poskytne původní signál

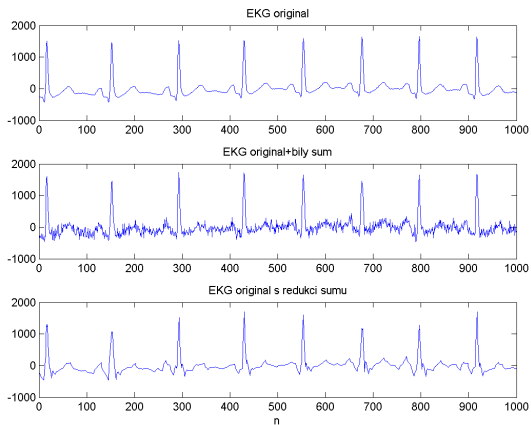
Pozn.: ve skutečnosti jsou zobrazené průběhy koeficientů získány až po rekonstrukci na příslušné hladině - nejsou to tedy koeficienty přímo po rozkladu analyzující bankou filtrů

ILUSTRACE ANALÝZY EKG+BÍLÝ ŠUM POMOCÍ DWT



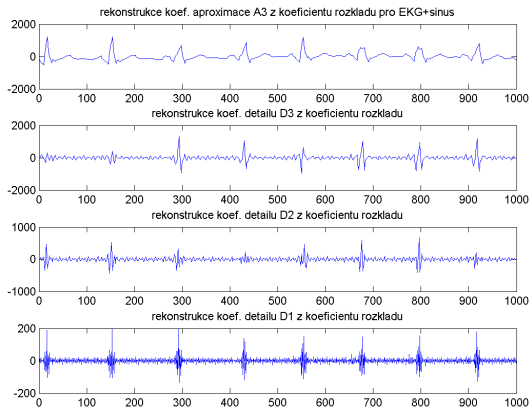
Rozklad EKG pomocí DWT na 4 hladiny pomocí analyzující banky filtrů: viz předchozí příklad, ale k EKG je přičten bílý šum, který je v rozkladu více patrný pro hladiny obsahující detaily - nejvíce je šum patrný pro d_1 a d_2 , proto se výkon šumu typicky odhaduje z nejvyšší hladiny detailů, zde d_2

ILUSTRACE ANALÝZY EKG+BÍLÝ ŠUM POMOCÍ DWT



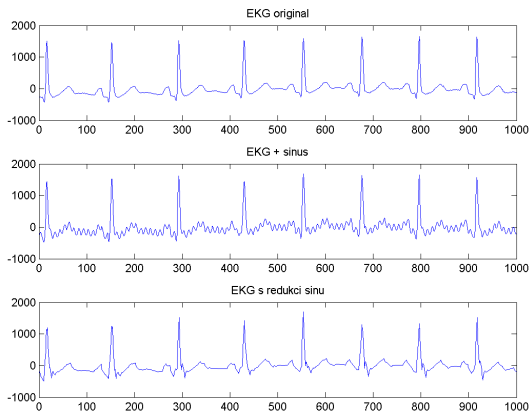
Původní signál, signál se šumem a signál s redukováným šumem

ILUSTRACE ANALÝZY EKG+sinus POMOCÍ DWT



Rozklad EKG pomocí DWT na 4 hladiny pomocí analyzující banky filtrů: viz předchozí příklad, ale k EKG je přičten sinus

ILUSTRACE ANALÝZY EKG+sinus POMOCÍ DWT



Původní signál, signál se šumem a signál s redukováným šumem