České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická



Fyzika 1 pro Kybernetiku a robotiku

Vypracoval: doc. Dr. Ing. Michal Bednařík

Obsah

1	Uvod	· ·	6
2	2.1 H	a makrosvěta 1ednotky 1 1.1 Rozdělení fyzikálních veličin 1 1.2 Fyzikální jednotky 1 1.3 Fyzikální pole 1	(
Ι	Klas	ická mechanika 10	6
3	Úvod	1	7
4	4.1 H 4.2 H 4	dnicové soustavy 2 artézská souřadnicová soustava	1
5	5.1 7 5.2 5 5.3 5 5.4 H 5.5 H 5.6 6	natika hmotného bodu rajektorie hmotného bodu 3 ednorozměrný pohyb 3 2.1 Rychlost 3 2.2 Zrychlení 3 icerozměrný pohyb (pohyb v prostoru) 3.1 Rychlost 3 3.2 Zrychlení 3 ohyb po kružnici 3 ostředivé zrychlení 3 becný křivočarý pohyb 4 6.1 Grafické odvození normálové a tečné složky zrychlení 6.2 Vektorové odvození normálové a tečné složky zrychlení 6.3 Popis rovinného pohybu v pohyb v homogenním tíhovém poli 4 6.4 Skládání a rozkládání pohybu. Pohyb v homogenním tíhovém poli 4	10000000000000000000000000000000000000
6	6.1 7	nika hmotného bodu 5 ákladní úlohy dynamiky	4

7	Neir	nerciální vztažné soustavy	58
	7.1	Rotující neinerciální soustava	58
		7.1.1 Pohybová rovnice pro rotující soustavu a setrvačné síly	
		7.1.2 Odstředivá síla	
		7.1.3 Coriolisova síla	
	7.2	Pohybová rovnice pro neinerciální translační soustavu	
	7.3	Pohybová rovnice pro soustavu konající obecný pohyb	
		v v 1 v	00
	7.4	Pohybová rovnice hmotného bodu pohybujícího se blízko nad zemským povr-	co
		chem pro soustavu pevně spojenou s rotující Zemí	
		7.4.1 Projevy Coriolisovy síly na Zemi	73
8	Dná	ao zvítkon impula altr o mochonistá energia	75
0		ce, výkon, impuls síly a mechanická energie	
	8.1	Práce, výkon a impuls síly	
	8.2	Rozdělení sil a mechanická energie	
	8.3	Tření a odpor prostředí	
		8.3.1 Tření smykové	
		8.3.2 Odpor při valení (valivé tření)	87
•			0.0
9		llytická mechanika	88
	9.1	Klasifikace vazeb a zobecněné souřadnice	
	9.2	Lagrangeovy rovnice 2. druhu	
	9.3	Integrály pohybu a cyklické souřadnice	
	9.4	Zákony zachování z pohledu Lagrangeova formalismu	102
		9.4.1 Zákon zachování hybnosti soustavy	102
		9.4.2 Zákon zachování momentu hybnosti	104
		9.4.3 Zákon zachování mechanické energie	108
	9.5	Hamiltonovy kanonické rovnice pohybu	108
		9.5.1 Fázový prostor	
	9.6	Odvození Lagrangeových rovnic druhého druhu pro kartézské souřadnice a	
		jejich zobecnění	112
	9.7	Základní informace k variačnímu počtu	
	0	9.7.1 Notace δ	
	9.8	Odvození Lagrangeových rovnic 2. druhu na základě integrálního principu	
	0.0	odvozem zagrangeových rovnie z. draha na zaklade miegrammo principa	110
10	Gra	vitační pole	121
		Gravitační pole tenké hmotné kulové slupky	128
		Gravitační pole uvnitř a vně homogenní duté koule. Gravitační pole vně ho-	
	10.2	mogenní plné koule	130
	10.3	Gravitační pole vně po vrstvách homogenní plné koule	
		Gravitační pole vne po vistvach homogenní pine koule	
	10.5	Gaussův zákon a Poissonova rovnice	134
11	Med	chanické kmity	137
11		Netlumený mechanický oscilátor	
		Tlumený mechanický oscilátor	
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
		Vynucené (nucené) kmitání tlumeného mechanického oscilátoru	
	11.4	Fyzikální oscilátory	152

12	Pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli	153
	12.1 Moment síly a moment hybnosti	. 153
	12.2 Pohybové rovnice a konstanty pohybu hmotného bodu v centrálním silovém po	oli 154
	12.3 Rovnice trajektorie hmotného bodu v centrálním silovém poli	. 157
	12.4 Keplerova úloha	. 158
	12.5 Kvalitativní analýza pohybu v centrálním silovém poli pomocí efektivní po-	
	tenciální energie	. 164
13	Dynamika soustavy hmotných bodů	166
	13.1 První věta impulzová	. 166
	13.2 Hmotný střed soustavy hmotných bodů	
	13.3 Druhá věta impulzová	. 169
	13.4 Energie soustavy hmotných bodů	. 170
14	Srážka těles	173
	14.1 Klasifikace srážek	
	14.2 Zákony zachování při srážkách částic	
	14.3 Dokonale pružná čelní srážka	
	14.4 Dokonale nepružná čelní srážka	
15	Mechanika tuhého tělesa	178
	15.1 Základní pojmy	
	15.2 Obecný pohyb tuhého tělesa	. 180
	15.2.1 Šroubovitý pohyb tělesa	. 183
	15.3 Pohybové rovnice tuhého tělesa	. 184
	15.4 Otáčivý pohyb tělesa kolem pevné osy	. 186
	15.4.1 Kinetická energie a moment setrvačnosti tuhého tělesa	. 186
	15.4.2 Steinerova věta	. 187
	15.4.3 Moment hybnosti vzhledem k pevné ose	. 188
	15.4.4 Pohybová rovnice rotujícího tělesa kolem pevné osy	. 189
	15.4.5 Práce vnějších sil při rotačním pohybu kolem pevné osy	. 190
	15.5 Rotace kolem pevného bodu	. 191
	15.6 Elipsoid setrvačnosti	. 197
	15.7 Určení geometrického vztahu mezi směrem vektoru momentu hybnosti a vek-	
	toru úhlové rychlosti	. 202
	15.8 Nalezení hlavních os setrvačnosti	. 205
	15.9 Vliv odstředivých sil při nevyvážené rotaci tělesa	. 211
	15.10Druhy setrvačníků	. 212
	15.11Eulerovy úhly a Eulerovy kinematické rovnice	
	15.12Eulerovy dynamické rovnice	. 215
	15.13Volný setrvačník	. 216
	15.14 Těžký setrvačník otáčející se kolem pevného bodu	
16	Statika tuhého tělesa	227
-0	16.1 Skládání sil	
	16.2 Rovnováha tuhého tělesa	
17	Mechanika kontinua	235
	17.1 Tenzor napětí	
	17.1.1 Obecná rovnice rovnováhy kontinua	
	17.2 Tenzor deformace	. 242

		17.2.1 Geometrický význam složek tenzoru malých deformací 2	44
		17.2.2 První invariant tenzoru malé deformace	48
	17.3	Zobecněný Hookův zákon	49
	17.4	Youngův modul, Poissonova konstanta,	
		modul torze	51
	17.5	Pohybové rovnice kontinua	54
		Mechanika tekutin	
		17.6.1 Statika tekutin	58
	17.7	Kinematika tekutin	62
		Dynamika tekutin	
		17.8.1 Rovnice kontinuity	65
		17.8.2 Eulerova rovnice	
		17.8.3 Bernoulliho rovnice	67
	17.9	Navierova-Stokesova rovnice	70
тт	G-	peciální teorie relativity 27	7 1
II	SI	peciální teorie relativity 27	4
18	Spec	ciální teorie relativity 2	7 5
	18.1	Postuláty speciální teorie relativity a speciální Lorentzova transformace 2	75
	18.2	Obecná Lorentzova transformace	79
	18.3	Skládání rychlostí	80
	18.4	Dilatace času	82
	18.5	Kontrakce délky	83
	18.6	Současnost, minulost a budoucnost z pohledu	
		speciální teorie relativity	84
	18.7	Časoprostorový interval	85
		18.7.1 Relativistický Dopplerův jev	86
	18.8	Relativistická dynamika	89
		18.8.1 Síla, pohybová rovnice a energie	92
		18.8.2 Transformace hmotnosti a energie	93
		18.8.3 Transformace hybnosti a síly	94
	18.9	Pomalá Lorentzova transformace	97
		18.9.1 Pomalá transformace síly	97
	18.10	OShrnutí získaných poznatků ze speciální teorie relativity	00
II	I E	Elektrické a magnetické pole 30)1
19	Elek	trostatika 3	02
10		Elektrický náboj	
		Coulombův zákon a elektrické pole	
		Intenzita elektrického pole a elektrický potenciál	
	15.5	intenzità elektrickeno pote a elektricky potenerar	00
20			14
	20.1	Gaussův zákon v integrálním a diferenciálním tvaru	14
		Poissonova rovnice	
	20.3	Elektrické pole nabité roviny	18
		Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin	
		Elektrostatické pole a potenciál nabité koule	
		Práce elektrostatické síly a elektrická energie nábojů	

		20.6.1 Práce elektrostatického pole při přemísťování elektrického náboje	
		Elektrická energie bodových nábojů	
		Elektrická energie spojitě rozložených nábojů a elektrostatického pole	
	20.9	Schematické shrnutí výsledných vztahů	. 329
21	Mul	tipólový rozvoj a pole elektrického dipólu	330
		Multipólový rozvoj	
		Elektrické pole dipólu	
22		t trostatické pole v materiálovém prostředí Dielektrika a jejich polarizace	337
		Elektrické pole polarizovaného dielektrika	
		Gaussův zákon v dielektriku	
	22.4	Dielektrika v elektrostatickém poli	
		22.4.1 Elektrostatické pole na rozhraní dvou dielektrik	
		22.4.2 Vlastnosti dielektrik	
		Vodiče v elektrostatickém poli	
	22.6	Kapacita vodiče a kondenzátor	
		22.6.1 Kapacita osamoceného vodiče	
		22.6.2 Kapacita dvou vodičů (elektrický kondenzátor)	. 355
		22.6.3 Elektrická energie kondenzátoru	. 356
23	Elek	trodynamika	358
		Elektrický proud a hustota proudu	
		Rovnice kontinuity elektrického proudu	
		Stacionární elektrické pole	
	20.0	23.3.1 Ohmův zákon	
		23.3.2 Relaxační doba	
		23.3.3 Jouleův zákon	
		23.3.4 Elektromotorické napětí	. 3/1
24		ionární magnetické pole	374
	24.1	Magnetická indukce a Lorentzova síla	. 374
	24.2	Biotův-Savartův-Laplaceův zákon	. 376
	24.3	Ampèrův zákon magnetické síly a vzájemné silové působení dvou vodičů pro-	
		tékaných elektrickým proudem	. 379
	24.4	Hallův jev	. 382
	24.5	Ampèrův zákon celkového proudu	. 383
		Vektorový potenciál magnetického pole	
		Magnetický dipól	
		Schematické shrnutí výsledných vztahů	
		Stacionární magnetické pole v materiálovém prostředí	
	⊿ 1.∂	24.9.1 Vliv materiálového prostředí na magnetické pole	
	9/ 10	Pole magneticky polarizovaného materiálu	
		U V 1	
		l Ampèrův zákon celkového proudu v materiálovém prostředí	
	24.12	2Magnetické vlastnosti látek	
		24.12.1 Rozdělení látek podle jejich magnetických vlastností	
		24.12.2 Stacionární magnetické pole na rozhraní dvou prostředí	. 399

25 Elektromagnetické pole 40)1
25.1 Faradayův zákon elektromagnetické indukce	01
25.2 Maxwellovo zobecnění Ampèrova zákona celkového proudu pro nestacionární	
elektromagnetické pole	07
25.3 Úplná soustava Maxwellových rovnic	09
25.4 Kvazistacionární elektromagnetické pole	11
25.5 Indukčnost vodičů a energie magnetického pole v kvazistacionárním přiblížení 41	12
25.5.1 Vlastní indukčnost vodiče a vlastní indukce	12
25.5.2 Vzájemná indukčnost vodičů a vzájemná indukce 41	13
25.6 Energie magnetického pole	14
25.7 Energie elektromagnetického pole, Poyntingova věta	16
A Některé vektorové identity 42	2U

Kapitola 1

Úvod

Předkládaný studijní materiál je psán v souladu s přednášenou látkou v rámci předmětu Fyzika I pro KyR. Skripta jsou věnována třem základním partiím fyziky: klasická mechanika, speciální teorie relativity a teorie elektrického a magnetického pole. S ohledem na přidělený počet výukových hodin pro tento předmět nemůže být pohlíženo na tato skripta tak, že svým obsahem plně vyčerpávají problematiku, které se věnují. Text je koncipován způsobem, který má studentům ukázat vnitřní konzistentnost fyzikální teorie vybraných fyzikálních partií. Proto má prezentovaná teorie zvolených partií fyziky jednotnou osnovu. Nejdříve jsou uvedeny základní zákony týkající se příslušné partie, na jejichž základě je následně vystavěna příslušná teorie. Přitom teorie je vybudována na předpokladu znalosti matematického aparátu, se kterým se studenti seznámili na hodinách matematiky přednášené v rámci daného studijního programu. Hlavním záměrem pro napsaní těchto skript byla snaha o odlehčení výkladu fyziky na přednáškách. Díky těmto skriptům mají studenti k dipozici všechna odvození nutná k pochopení teorie a závěrů z ní vyplývajících. Z tohoto důvodu bude možné na přednáškách nabídnout studentům nejen alternativní přístupy k teoretickému výkladu, ale i zaměřit se více na praktické využití některých fyzikálních jevů. Ve skriptech je uvedena i řada příkladů, které mají studentům usnadnit pochopení příslušné problematiky.

Kapitola 2

Fyzika makrosvěta

Každá společnost uznává a oceňuje fyziku v přímé souvislosti s jejím přínosem pro zajištění základních potřeb společnosti (zajištění energie, mobility, komunikace, usnadnění života, zajištění obranyschopnosti, léčby apod.) Podstatně omezenějšího uznání se fyzice dostává za její funkci poznávací, neboť jen nepatrná část společnosti je schopna průběžně sledovat, pochopit a oceňovat výsledky fyzikálního výzkumu a jejich význam. Jen zcela výjimečně se stává, že významný fyzikální objev pronikne do širšího povědomí, nebo že za nějakou technickou aplikací vidí lidé prvotní a zásadní přínos fyziky. Je spíše pravidlem, že naprostá většina společnosti vůbec nechápe, že současný technický pokrok i výsledky "nefyzikálních" přírodovědných oborů, včetně lékařství, by nebyly možné bez průkopnické práce fyziků jak v oblasti teoretické, tak i metodické a experimentální. Je paradoxem, že se toto pravidlo naplňuje zejména ve vyspělých a v jistém smyslu "zhýčkaných" společnostech, což vede k nebezpečně rostoucímu nezájmu o přírodní vědy obecně a o fyziku zvlášť. Tato skutečnost je o to více zarážející, že právě tyto společnosti jsou nejvíce zranitelné neúprosně se blížící energetickou krizí, přírodními katastrofami, ekologickými problémy apod., přitom si čím dál méně uvědomují, že již nejen další udržitelný rozvoj, ale i samotné bytí lidského druhu je v budoucnu primárně závislé na výsledcích přírodovědného a zejména fyzikálního poznání.

Obecně můžeme pohlížet na fyziku jako na přírodní vědu, která zkoumá hmotný svět kolem nás. Hmota se vyskytuje ve dvou základních formách, buď jako látka (látkové objekty) nebo jako pole (polní objekty). Podle klasické fyziky je látka tvořena částicemi, kdežto pole zprostředkovává vzájemné silové působení (interakci) mezi těmito částicemi. Předmětem fyziky jsou obecně fyzikální objekty a fyzikální jevy.

2.1 Fyzikální veličiny a jejich jednotky

Předepíšeme-li způsob jak měřit určitou vlastnost vztahující se k danému fyzikálnímu objektu či jevu, pak tím definujeme fyzikální veličinu a její fyzikální jednotku. Veličinou nazýváme vlastnost, kterou lze objektivně změřit a charakterizovat číselnou hodnotou a jednotkou.

Výsledek měření jisté fyzikální veličiny X můžeme zapsat jako součin

$$X = \{X\}[X], \qquad (2.1)$$

kde $\{X\}$ představuje číselnou hodnotu a [X] fyzikální jednotku.

2.1.1 Rozdělení fyzikálních veličin

V rámci našeho kurzu přednášek budeme rozlišovat toliko tři druhy fyzikálních veličin:

- Tenzorové veličiny nultého řádu skalární veličiny.
 Jedná se o fyzikální veličiny, určené pouze jediným číslemA, jehož hodnota závisí na zvolené jednotce. Patří sem např. teplota, čas, hmotnost, tlak, délka atd.
- 2. Tenzorové veličiny prvního řádu vektorové veličiny. Jedná se o veličiny, u kterých se zajímáme nejen o velikost, ale i o orientaci v prostoru. Patří sem např. síla, rychlost, zrychlení, polarizace atd. Omezíme-li se na trojrozměrný prostor, pak jsou určené trojicí čísel, které můžeme zapsat jako A_i, kde i = 1, 2, 3. Nebo můžeme zvolit označení A, kde A = (A₁, A₂, A₃). V případě ručního psaní používáme pro označení vektorové veličiny místo tučné značky stejnou značku se šipkou, tedy A \equiv A.
- 3. Tenzorové veličiny druhého řádu¹ zkráceně jen *tenzory*. Pomocí tenzorových veličin druhého řádu dáváme do úměrnosti dvě vektorové veličiny, které jsou obecně nekolineární (nejsou rovnoběžné). Patří sem např. tenzor deformace, tenzor setrvačnosti, tenzor vodivosti, tenzor permitivity atd.

V trojrozměrném eukleidovském prostoru je tenzor druhého řádu určen devíti čísly (prvky) a zapisujeme ho pomocí dvou indexů A_{ij} , kde i, j = 1, 2, 3, tj.

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} . \tag{2.2}$$

Často se ve fyzice setkáváme se symetrickými tenzory, tj $A_{ij} = A_{ji}$, které mají tu vlastnost, že je možné je diagonalizovat vhodnou volbou souřadných os, tedy

$$\{S\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} , \qquad (2.3)$$

kde λ_i jsou tzv. hlavní hodnoty tenzoru a osám souřadnic, v nichž má tenzor diagonální tvar, říkáme hlavní osy souřadnic.

Pozn. Výše uvedené rozdělení fyzikálních veličin je možné udělat korektněji vzhledem ke způsobu transformace souřadnic.

Vztah mezi fyzikálními veličinami je možné vyjádřit pomocí matematiky, tedy pomocí matematických rovnic, které nejčastěji reprezentují rovnice algebraické, integrální, diferenciální či jejich kombinace.

R. P. Feynman: "... není možné lidem poctivě a zároveň srozumitelně vysvětlit krásy fyzikálních zákonů, pokud dobře neovládají některé partie matematiky."

2.1.2 Fyzikální jednotky

Fyzikální jednotky v rámci SI je možné rozdělit do následujících tří skupin

 Základní jednotky SI – je jich 7 (jednotka délky metr m, jednotka hmotnosti kilogram kg, jednotka času sekunda s, jednotka elektrického proudu ampér A, jednotka termodynamické teploty kelvin K, jednotka látkového množství mol mol, jednotka svítivosti kandela cd)

¹Existují i tenzorové veličiny vyšších řádů, kterými se v rámci těchto skript víceméně zabývat nebudeme.

- Odvozené jednotky jsou dány násobky a podíly základních jednotek SI, např. ms⁻². Některé odvozené jednotky zaujímají natolik významné postavení, že mají speciální označení a název, např. newton N=kgms⁻², pascal Pa, joule J atd. Mezi odvozené jednotky řadíme i jednotku rovinného úhlu radián rad a jednotku prostorového úhlu steradián sr (dříve byly tyto jednotky označované jako doplňkové).
- Násobné a podílové jednotky vytvářejí se dekadickými násobky a decimálními zlomky od základních a odvozených jednotek, např. kilometr km, milivolt mV atd.

Předpony j	pro násobr	né jednotky	Předpony j	pro podílo	vé jednotky
Předpona	Zkratka	Násobek	Předpona	Zkratka	Násobek
exa	E	10^{18}	deci	d	10^{-1}
peta	P	10^{15}	centi	С	10^{-2}
tera	Т	10^{12}	mili	m	10^{-3}
giga	G	10^{9}	mikro	μ	10^{-6}
mega	M	10^{6}	nano	n	10^{-9}
kilo	k	10^{3}	piko	p	10^{-12}
hekto	h	10^{2}	femto	f	10^{-15}
deka	da	10^{1}	atto	a	10^{-18}

2.1.3 Fyzikální pole

Nabývá-li nějaká fyzikální veličina v každém bodě nějaké oblasti prostoru určité hodnoty, říkáme, že v této oblasti existuje *pole* této fyzikální veličiny². Jde-li o veličinu skalární, nazývá se *pole skalární*, jde-li pak o veličinu vektorovou, nazývá se *vektorové pole*.

V dané oblasti prostoru může existovat současně libovolné množství polí příslušných různým fyzikálním veličinám.

Analytickým vyjádřením skalárního pole skalární veličiny U je skalární funkce

$$U = U(\mathbf{r})$$
, resp. $U = U(x, y, z)$, (2.4)

kde \mathbf{r} je polohový vektor obecného bodu uvažované oblasti prostoru a x, y, z jsou kartézské souřadnice tohoto bodu³.

Analytickým vyjádřením vektorového pole vektorové veličiny \boldsymbol{A} je vektorová funkce

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) . \tag{2.5}$$

Vztah (2.5) je při volbě kartézských souřadnic ekvivalentní těmto třem rovnicím

$$A_x = A_x(\mathbf{r})$$
 neboli $A_x = A_x(x, y, z)$, (2.6)

$$A_y = A_y(\mathbf{r})$$
 neboli $A_y = A_y(x, y, z)$, (2.7)

$$A_z = A_z(\mathbf{r})$$
 neboli $A_z = A_z(x, y, z)$. (2.8)

Ve vektorovém poli A(r) lze pro lepší názornost zavést soustavu vzájemně neprotínajících se orientovaných křivek definovaných tak, že orientovaná tečna kterékoliv z těchto křivek v libovolném bodě, kde $A \neq 0$, má shodnou orientaci s vektorem A(r) v tomto bodě. Každá takováto křivka se nazývá vektorová křivka (čára) pole nebo čára pole⁴.

Vlastnosti vektorových křivek můžeme shrnout do následujících bodů:

²Tato definice se nevztahuje k poli, jakožto jedné z forem hmoty, ale jako matematicky definované entitě.

³Je možné obecně uvažovat i jiné souřadnice.

⁴Pro některá vektorová pole mají vektorové křivky vlastní pojmenování, např. siločára, indukční čára, proudová čára apod.

- Každým bodem vektorového pole prochází jediná vektorová křivka, tedy vektorové křivky se nikde neprotínají.
- 2. Vektorové křivky vystihují orientaci vektorů **A** v různých bodech pole.
- 3. Z důvodu přehlednosti zakreslujeme ve vektorovém poli jen některé vektorové křivky. Jejich počet omezujeme úmluvou tak, abychom mohli z hustoty vektorových křivek usuzovat na velikost $|\mathbf{A}|$ v daném místě pole.

Dále uvažujme element plochy dS_{\perp} umístěný v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} kolmo k vektorovým čarám a tak malý, abychom mohli předpokládat, že ve všech bodech elementu má vektorové pole \mathbf{A} stejnou velikost i směr. Označme počet vektorových křivek procházejících uvažovaným elementem plochy dN. Vyjádříme si plošnou hustotu vektorových křivek, tj. přepočteme jejich počet na kolmou jednotkovou plochu, a podle úmluvy tuto hustotu položíme číselně rovnu velikosti vektorového pole v daném místě

$$|\mathbf{A}| \equiv A = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}} \,. \tag{2.9}$$

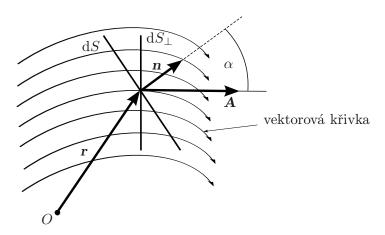
Aby tato rovnost platila nejen číselně, ale i jednotkově, nahradíme počet vektorových křivek N veličinou Φ , kterou nazveme tok vektorového pole A. Číselně je veličina Φ tedy rovna počtu vektorových křivek N a navíc vyhovuje rozměrově rovnici

$$A = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S_{\perp}} \,. \tag{2.10}$$

Odtud je možné psát

$$d\Phi = AdS_{\perp} . (2.11)$$

Předpokládejme element plochy dS, který obecně není kolmý k vektorovým čarám, ale jeho průmět do směru kolmého k vektorovým čarám je právě element d S_{\perp} , viz obr. 2.1. Velikost tohoto průmětu je



Obrázek 2.1: Orientace elementu plochy.

$$dS_{\perp} = dS \cos \alpha \,\,\,\,(2.12)$$

kde α je úhel, který svírá normála k elementu plochy dS. Vztah (2.11) lze tedy přepsat jako

$$d\Phi = AdS \cos \alpha . (2.13)$$

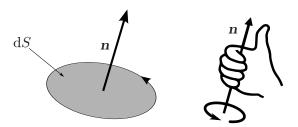
⁵Hustota vektorových křivek má obecně jiný rozměr než uvažovaná vektorová veličina, tedy rovnost platí jen co se týče číselného vyjádření.

Stejného výsledku, který je dán vztahem (2.13) dosáhneme tím, že element plochy dS si vyjádříme vektorově, tj.

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS \,, \tag{2.14}$$

kde \mathbf{n} je jednotkový normálový vektor k elementu plochy dS. Abychom mohli určit směr vektoru \mathbf{n} , tak nejdříve si určíme, že směr oběhu po obvodu elementu plochy dS bude proti pohybu hodinových ručiček, viz 2.2. Směr vektoru \mathbf{n} pak určíme pomocí pravidla pravé ruky: Prsty pravé ruky určují směr oběhu po obvodu elementu plochy a vztyčený palec ukazuje směr jednotkového normálového vektoru \mathbf{n} k tomuto elementu plochy.

Pomocí vektoru elementu plochy můžeme psát



Obrázek 2.2: Směr normálového vektoru **n** elementu plochy.

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = A dS \cos \alpha . \tag{2.15}$$

Chceme-li stanovit tok Φ uvažovaného vektorového pole plochou S, musíme tuto plochu rozdělit na jednotlivé elementy a toky všemi těmito elementy sečíst, což v infinitezimálním případě představuje integraci přes celou plochu S, tedy

$$\Phi = \iint_{S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} . \tag{2.16}$$

Protože vektorový element dr, kterékoliv vektorové křivky pole je souhlasně orientovaný s vektorem A(r) v daném bodě na této křivce o polohovém vektoru r, platí, že

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{2.17}$$

neboli

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & dy & dz \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (A_z dy - A_y dz) \mathbf{i} + (A_x dz - A_z dx) \mathbf{j} + (A_y dx - A_x dy) \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

odtud dostáváme následující soustavu rovnic

$$A_z dy - A_y dz = 0$$

$$A_x dz - A_z dx = 0$$

$$A_y dx - A_x dy = 0$$

kterou můžeme upravit do následujícího tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{A_y} - \frac{\mathrm{d}z}{A_z} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{A_z} - \frac{\mathrm{d}x}{A_x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x} - \frac{\mathrm{d}y}{A_y} = 0.$$
(2.18)

Ze soustavy rovnic (2.18) v vyplývá, že mají-li být rovnosti splněny, potom

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y} = \frac{\mathrm{d}z}{A_z} \,. \tag{2.19}$$

Rovnice (2.19) představují v kartézských souřadnicích diferenciální rovnice křivky pole.

Příklad 2.1.1

Najděte rovnici vektorových křivek pro vektorové pole $\mathbf{A} = (x, 2y)$.

Řešení:

Dosazením do vztahu (2.19) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{2y} \,, \tag{2.20}$$

odtud integrací dostaneme

$$\ln \frac{x}{x_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{y}{y_0} \,, \tag{2.21}$$

kde x_0 a y_0 jsou integrační konstanty. Z rovnice (2.21) dostáváme rovnice hledaných vektorových křivek

$$y = \frac{y_0}{x_0^2} x^2 = Cx^2 \,, \tag{2.22}$$

kde C je parametr pro danou vektorovou křivku.

Fyzikální pole nazýváme *homogenní*, jestliže ve všech jeho bodech je příslušná fyzikální veličina stejná, tj. z hlediska fyzikální veličiny jsou všechny body pole rovnocenné⁶. *Izotropní* fyzikální pole se vyznačuje tím, že příslušná fyzikální veličina se ve všech směrech projevuje stejně, tj. neexistuje privilegovaný směr (všechny směry jsou rovnocenné)⁷.

⁶Např. elektrická intenzita mezi deskami kondenzátoru (vyjma okrajů desek) vytváří homogenní pole.

⁷Např. homogenní koule vytváří kolem sebe vektorové izotropní pole intenzity gravitace.

Část I Klasická mechanika

Kapitola 3

Úvod

Mechanika je obor fyziky, který se zabývá mechanickým pohybem, tj. změnou polohy uvažovaného tělesa vzhledem k tělesu vztažnému či změnou jeho velikosti a tvaru. Mechanika hraje nejvýznamnější roli ve fyzice, představuje jakousi pomyslnou "vstupní bránu" do fyziky. Mechanika zahrnuje kinematiku a dynamiku.

Kinematika se zabývá pouze závislostí polohy tělesa na čase, tj. geometrií jeho pohybu, bez zřetele na síly, které tento pohyb způsobují.

Dynamika vyšetřuje závislosti mezi pohybem těles a silami, které na ně působí a vyvolávají změnu jejich pohybového stavu.

Speciálním případem dynamiky je statika a zabývá se vyšetřováním podmínek rovnováhy sil. Klasickou mechaniku můžeme rozdělit na tzv. newtonovskou (vektorovou) mechaniku a mechaniku analytickou (skalární). Newtonovské pojetí popisuje mechaniku vektorovými veličinami, které jsou spojeny pohybovými zákony. Analytická mechanika vychází při formulaci zákonů z obecných principů¹, které jsou vyjádřené zpravidla skalární rovnicí (popř. nerovnicí).

Klasickou mechaniku začneme newtonovskou mechanikou, jejíž teoretické základy formuloval anglický fyzik a matematik Isaac Newton (1643-1727) ve svém fundamentálním díle (1687) Philosophiae Naturalis Principia Mathematica². Newton předpokládal, že prostor a čas jsou absolutní, tj. že nezávisí na hmotných objektech a jejich pohybech. Na předpokladu absolutního prostoru a času je založena klasická mechanika. I když z Einsteinovy teorie relativity víme, že absolutní prostor a absolutní čas neexistuje, přesto nám klasická mechanika popisuje fyzikální svět s dostatečnou přesností, pakliže můžeme předpokládat přítomnost slabého gravitačního pole (velmi hmotné objekty jsou dostatečně vzdálené) a že vyšetřované objekty jsou makroskopické³ a pohybují se rychlostmi výrazně nižšími, než je rychlost světla, tedy $v \ll c \cong 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$.

Poněvadž dvě tělesa mohou mít libovolnou, spojitě se měnící vzájemnou vzdálenost a vzájemnou orientaci, přisuzujeme prostoru, ve kterém pohyb tělesa vyšetřujeme, vlastnosti kontinua. Abychom jednotlivé body prostorového kontinua od sebe odlišili, přiřadíme každému bodu trojici údajů, takže na prostor klasické mechaniky pohlížíme jako na třírozměrné kontinuum. Ukazuje se, že geometrické vlastnosti takového prostoru lze popsat soustavou Eukleidových axiomů, takže prostor klasické fyziky je třírozměrným eukleidovským prostorem, který je homogenní a izotropní, tj. všechny body a všechny směry jsou zde rovnocenné, ničím se neliší. Často se setkáváme se situací, kdy se těleso pohybuje v oblasti prostoru, jejíž rozměry výrazně převyšují vlastní rozměry tohoto tělesa (např. pohyb Země kolem Slunce). Z tohoto důvodu

¹Principy mají pro fyziku charakter axiomů a jednotlivé zákony z nich plynou jako přímý logický důsledek. ²Překlad: *Matematické základy přírodní filosofie*, někdy toto dílo zkráceně nazýváme jen *Princípia* či

³Předpokladem, že se jedná o objekty makroskopické, se vyvarujeme nutnosti použít kvantový popis.

si můžeme dovolit zanedbat vlastní rozměry pohybujícího se tělesa a přejít k abstrakci, kdy tato tělesa nahradíme tzv. hmotnými body⁴ (bodová hmotnost). V určité úloze pod pojmem hmotný bod chápeme těleso se zanedbatelnými geometrickými rozměry, které z důvodu matematického popisu považujeme za nekonečně malé (bod). Hmotný bod si však ponechává hmotnost tělesa, které nahrazuje. U hmotného bodu pak nemá smysl mluvit o jeho vlastním otáčení, ani o změně tvaru (deformaci). Později si ukážeme, že postupný (translační) pohyb tělesa lze nahradit pohybem hmotného bodu, který nazýváme hmotný střed.

⁴Někdy se v literatuře místo pojmu hmotný bod můžeme setkat s pojmem *částice*.

Kapitola 4

Souřadnicové soustavy

Zavedení pojmu absolutního prostoru a času nezbavuje klasickou mechaniku nutnosti použít vztažného (referenčního) tělesa, k němuž vztahujeme mechanický pohyb dalších těles v prostoru a čase. Abychom mohli popsat polohu a spojitý pohyb tělesa v prostoru, musíme označit jednotlivé body prostoru. Omezíme se na třírozměrný eukleidovský prostor. Pro popis jednotlivých bodů prostoru používáme souřadnicovou soustavu pevně spojenou se vztažným tělesem, pomocí které každému bodu přiřadíme trojici čísel u_1, u_2, u_3 , kterým říkáme sou-řadnice neboli koordináty bodu. Pokud zvolíme jednu souřadnici pevně a zbylé dvě necháme "probíhat" všemi dovolenými hodnotami, dostaneme tzv. souradnicové plochy. Souřadnicové plochy $u_1 = c_1, u_2 = c_2, u_3 = c_3, kde c_1, c_2$ a c_3 jsou konstanty, se protínají v souradnicové krivkách (čarách). Pokud jsou všechny souřadnicové plochy rovinami, hovoříme o prímočarých souradnicích, není-li tomu tak, pak hovoříme o krivočarých souradnicích. Pokud se všechny souřadnicové plochy protínají navzájem kolmo, hovoříme o souradnicích. souradnicích. souradnicích, a pokud ne, pak hovoříme o souradnicích (sosoúhlych) souradnicích.

4.1 Kartézská souřadnicová soustava

Jedná se o nejčastěji používanou souřadnicovou soustavu, kterou v roce 1637 zavedl René Descartes (1596-1650) ve své knize *Rozpravy o metodě*. Označení této souřadnicové soustavy přívlastkem *kartézská* vychází z latinského přepisu jména jeho autora *Cartesius*. Tato souřadnicová soustava (systém) je přímočará a ortogonální.

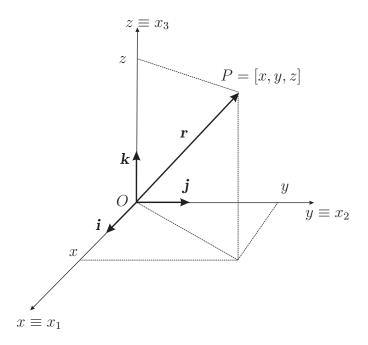
Tuto soustavu tvoří tři vzájemně kolmé přímky, tzv. osy, které se protínají v bodě zvaném počátek souřadnicové soustavy, jenž značíme O (lat. origo = počátek) 1 . Osy zpravidla označujeme x, y, z nebo x_1, x_2, x_3 , viz obr. 4.1. Souřadnice x, y, z libovolného bodu P = [x, y, z] určíme jako průsečík tří rovin, z nichž první je ve vzdálenosti x od počátku a je rovnoběžná s rovinou (y, z), druhá je ve vzdálenosti y od počátku a je rovnoběžná s rovinou (x, z) a třetí je ve vzdálenosti z od počátku a je rovnoběžná s rovinou (x, y). Spojnici počátku O s libovolným bodem nazýváme polohovým vektorem (průvodičem, rádius-vektorem) uvažovaného bodu prostoru vzhledem k bodu <math>O a značíme ho zpravidla \mathbf{r} .

Jednotkové souřadnicové vektory obvykle značíme $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ nebo $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ či $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ a polohový vektor je pak vyjádřen jako

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} , \qquad (4.1)$$

kde x,y,z jsou kartézské souřadnice polohového vektoru ${m r}$ (jeho koncového bodu), viz obr 4.1.

¹Počátku souřadnicové soustavy přisuzujeme souřadnice O = [0, 0, 0].



Obrázek 4.1: Kartézské souřadnice

Tedy složky souřadnicových vektorů jsou

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \tag{4.2}$$

$$\mathbf{j} = (0, 1, 0), \tag{4.3}$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1) \,. \tag{4.4}$$

Pro souřadnicové vektory platí, že jsou lineárně nezávislé a že jsou na sebe kolmé, což můžeme pomocí skalárního součinu vyjádřit jako

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3 \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$\tag{4.5}$$

kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta. Vztah (4.5) platí obecně pro ortogonální souřadnicové soustavy.

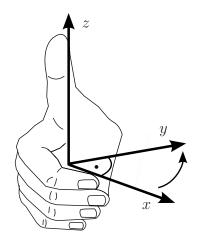
V trojrozměrném případě musíme dávat pozor na vzájemnou orientaci souřadnicových os v pořadí x, y, z. Ve fyzice se téměř výhradně používá pravotočivá souřadnicová soustava. Máme-li pravotočivý šroub a budeme jím otáčet od kladného směru osy x nejkratší cestou ke kladnému směru osy y a bude-li se šroub přitom posunovat v kladném směru osy z, nazýváme takovou kartézskou soustavu pravotočivou. K určení pravotočivosti souřadnicové soustavy můžeme též použít pravidla pravé ruky, které nám říká (viz obr. 4.2): Osu z uchopíme pravou rukou tak, aby prsty ukazovaly od kladného směru osy x nejkratší cestou ke kladnému směru osy y. Vztyčený palec ukazuje kladný směr osy z.

Zaměníme-li u pravotočivé kartézské soustavy smysl jedné nebo všech tří os, dostaneme soustavu levotočivou. Kartézské soustavy levotočivé či pravotočivé nelze navzájem převést pouhým posouváním a natáčením.

Pro infinitezimální změnu polohového vektoru budeme psát

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}. \tag{4.6}$$

Při pohybu hmotného bodu se jeho polohový vektor r s časem mění a jeho koncový bod opisuje křivku zvanou trajektorie. Obloukový element ds této křivky mezi body o souřadnicích



Obrázek 4.2: Definování pravotočivé kartézské soustavy pomocí pravidla pravé ruky.

[x, y, z] a [x + dx, y + dy, z + dz] je dán následovně²

$$ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$
 (4.7)

Označíme-li α , β , γ úhly, jež svírá polohový vektor \boldsymbol{r} s kladnými směry souřadnicových os x, y, z, pak pro souřadnice polohového vektoru platí

$$x = r \cos \alpha$$
, $y = r \cos \beta$, $z = r \cos \gamma$, (4.8)

kde r značí velikost polohového vektoru \mathbf{r} , tedy

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ . \tag{4.9}$$

Směrové kosiny splňují normovací podmínku

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \tag{4.10}$$

4.2 Křivočaré souřadnicové soustavy

Ve fyzice užíváme různé souřadnicové soustavy. Doposud byla zmíněna pouze kartézská souřadnicová soustava. Vedle této soustavy používáme i soustavy jiné, které jsou někdy pro fyzikální popis daného problému vhodnější.

V dané oblasti prostoru Ω nechť jsou dány tři navzájem nezávislé, spojité a jednoznačné funkce kartézských souřadnic x,y,z

$$u_1 = u_1(x, y, z) , u_2 = u_2(x, y, z) , u_3 = u_3(x, y, z) , [x, y, z] \in \Omega .$$
 (4.11)

V oblasti Ω nechť mají funkce (4.11) spojité parciální derivace prvního řádu. Dále předpokládejme, že funkcionální determinant (jacobián)

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix}
\frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\
\frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z}
\end{vmatrix}$$
(4.12)

 $^{^2}$ Je to vlastně Pythagorova věta pro tělesnou úhlopříčku pravoúhlého rovnoběžnostěnu o hranách d $s_1 = dx$, $ds_2 = dy$, $ds_3 = dz$.

je v uvažované oblasti různý od nuly. Pak mají v dané oblasti rovnice (4.11) jednoznačné inverzní řešení

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3).$$
 (4.13)

Každému bodu P = [x, y, z] v dané oblasti Ω je rovnicemi (4.11) přiřazena trojice čísel u_1, u_2, u_3 (souřadnice) a obráceně tato trojice určuje jednoznačně polohu bodu $P = [u_1, u_2, u_3]$.

Každým bodem P procházejí tři souřadnicové plochy, viz obr. 4.3

$$u_1 = c_1 , \quad u_2 = c_2 , \quad u_3 = c_3 , \tag{4.14}$$

kde c_1 , c_2 , c_3 jsou konstanty. Souřadnicové křivky jsou na obr. 4.3 označeny u_1 , u_2 a u_3 . Nechť $\mathbf{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor bodu P. Na základě transformačních vztahů (4.11) je možné tento polohový vektor vyjádřit i pomocí souřadnic u_1, u_2, u_3 , tj. $\mathbf{r} = (u_1, u_2, u_3)$. Tečný vektor k souřadnicové křivce u_1 , pro kterou u_2 a u_3 jsou konstanty, je dán výrazem

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \,. \tag{4.15}$$

Jednotkový vektor v tomto směru e_1 je dán následujícím vztahem

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right| . \tag{4.16}$$

Vektor (4.15) je možné vyjádřit jako

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{e}_1 \;, \tag{4.17}$$

kde

$$h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right| . \tag{4.18}$$

K podobným vztahům můžeme dospět i pro tečné vektory zbývajících souřadnicových křivek, takže obecně můžeme psát, že

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = h_i \mathbf{e}_i \;, \quad i = 1, 2, 3 \;, \tag{4.19}$$

$$\mathbf{e}_{i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_{i}} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_{i}} \right| . \tag{4.20}$$

a

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| \tag{4.21}$$

jsou tzv. Laméovy koeficienty.

Na rozdíl od kartézského souřadnicového systému, souřadnicové vektory \mathbf{e}_i mění spojitě od místa k místu svůj směr.

Pro infinitezimální změnu polohového vektoru můžeme psát

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3.$$
 (4.22)

Pro obloukový element platí, že

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} . (4.23)$$

Budeme-li dále předpokládat, že souřadnicový systém je ortogonální, tj.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3 \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$(4.24)$$

potom pro obloukový element (4.23), na základě vztahu (4.22), můžeme psát

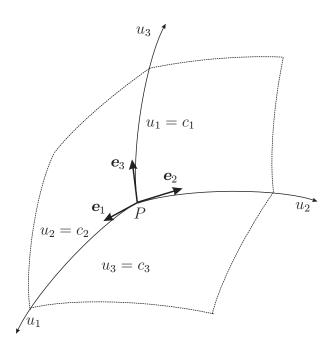
$$ds^{2} = h_{1}^{2}du_{1}^{2} + h_{2}^{2}du_{2}^{2} + h_{3}^{2}du_{3}^{2}.$$
(4.25)

Z vektorové algebry je známo, že smíšený součin odpovídá velikosti objemu rovnoběžnostěnu, jehož stěny odpovídají velikosti vektorů vystupujících ve smíšeném součinu. Proto pro objemový element dostáváme

$$dV = |[(h_1 du_1 \mathbf{e}_1) \times (h_2 du_2 \mathbf{e}_2)] \cdot (h_3 du_3 \mathbf{e}_3)| = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$
(4.26)

neboť

$$|(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3| = 1. \tag{4.27}$$



Obrázek 4.3: Obecné křivočaré souřadnice.

Gradient skalární funkce ϕ můžeme v pravoúhlých křivočarých souřadnicích vyjádřit jako

$$\nabla \phi = f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3 , \qquad (4.28)$$

kde skalární funkce f_1, f_2 a f_3 máme určit. Pro totální diferenciál skalární funkce ϕ můžeme s ohledem na vztah (4.22) psát

$$d\phi = (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{r} = h_1 f_1 du_1 + h_2 f_2 du_2 + h_3 f_3 du_3.$$
 (4.29)

Avšak obecně pro úplný diferenciál funkce $\phi(u_1, u_2, u_3)$ platí

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \phi}{\partial u_3} du_3.$$
 (4.30)

Porovnáním odpovídajících si členů v rovnostech (4.29) a (4.30) dostáváme

$$f_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} , \quad f_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} , \quad f_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} . \tag{4.31}$$

Dosadíme-li za funkce f_1 , f_2 a f_3 ve vztahu pro gradient funkce ϕ výrazy (4.31), pak dostaneme vztah pro gradient funkce v pravoúhlých křivočarých souřadnicích

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3. \tag{4.32}$$

Odtud dostáváme vztah pro nabla operátor v křivočarých pravoúhlých souřadnicích

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \mathbf{e}_3.$$
 (4.33)

4.2.1 Cylindrická (válcová) souřadnicová soustava

Cylindrické souřadnice budeme značit ρ , φ , z, viz obr. 4.4. Mezi kartézskými a cylindrickými souřadnicemi platí následující transformační vztahy (viz (4.13))

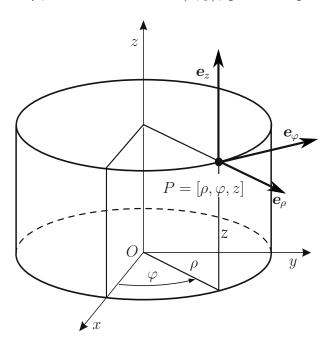
$$x = \rho \cos \varphi$$
, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, (4.34)

kde (viz (4.11))

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z,$$
(4.35)

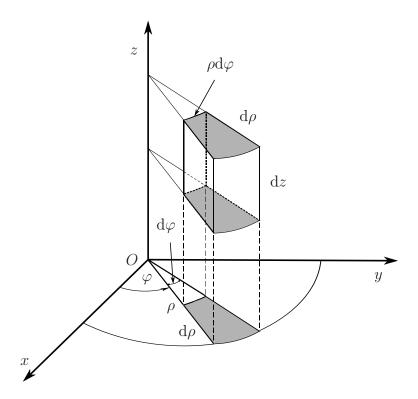
$$\rho \ge 0 \; , \quad 0 \le \varphi < 2\pi \; , \quad -\infty < z < \infty \; . \tag{4.36}$$

Zadáme-li poloměr $\rho = \rho_0$ kružnice v rovině (x, y), pak to v prostoru představuje plášť



Obrázek 4.4: Cylindrické souřadnice.

válce (souřadnicová plocha) s osou z rozprostírajícího se od $z=-\infty$ do $z=\infty$. Zvolíme-li určitou hodnotu úhlu $\varphi=\varphi_0$, vznikne tím v prostoru polorovina kolmá na rovinu (x,y) i cylindrickou plochu pláště válce. Průsečíkem této cylindrické plochy $\rho=\rho_0$ s polorovinou $\varphi=\varphi_0$ je přímka rovnoběžná s osou válce (osou z) a ležící na plášti válce. Položíme-li $z=z_0$, vznikne tím rovina rovnoběžná s rovinou (x,y) a protínající uvedenou přímku v bodě o cylindrických souřadnicích $\rho_0,\,\varphi_0,\,z_0$. Obecný bod $P=[\rho,\varphi,z]$ je tedy v cylindrické soustavě určen průsečíkem tří vzájemně kolmých souřadnicových ploch: cylindrické plochy a dvou rovin, jedná se tedy o křivočaré souřadnice.



Obrázek 4.5: Elementární objem v cylindrických souřadnicích.

Uvažujme polohový vektor $\mathbf{r}=(x,y,z)$, za souřadnice x,y,z dosadíme ze vztahů (4.34), takže dostaneme

$$\mathbf{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) . \tag{4.37}$$

Nyní zderivujeme polohový vektor (4.37) podle jednotlivých cylindrických souřadnic, viz (4.19), kde $u_1 = \rho$, $u_2 = \varphi$ a $u_3 = z$ a pomocí vztahů (4.20), (4.21) určíme souřadnicové vektory a Laméovy koeficienty

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) ,$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0) ,$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1) ,$$
(4.38)

$$h_{1} = h_{\rho} = \sqrt{(\cos \varphi)^{2} + (\sin \varphi)^{2}} = 1 ,$$

$$h_{2} = h_{\varphi} = \sqrt{\rho^{2}(\sin \varphi)^{2} + \rho^{2}(\cos \varphi)^{2}} = \rho ,$$

$$h_{3} = h_{z} = \sqrt{1^{2}} = 1 ,$$
(4.39)

$$\mathbf{e}_{1} = \mathbf{e}_{\rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) ,
\mathbf{e}_{2} = \mathbf{e}_{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) ,
\mathbf{e}_{3} = \mathbf{e}_{z} = (0, 0, 1) .$$
(4.40)

Dosadíme-li ze vztahů (4.38) a (4.39) do výrazů (4.22), (4.25), (4.26), pak dospějeme k následujícím vztahům platným pro cylindrickou souřadnicovou soustavu

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_{\rho} + \rho d\varphi \mathbf{e}_{\varphi} + dz \mathbf{e}_{z} , \qquad (4.41)$$

$$ds^{2} = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\rho^{2} + \rho^{2}d\varphi^{2} + dz^{2}, \qquad (4.42)$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz . (4.43)$$

Na obrázku 4.5 je zachycen příslušný element objemu.

4.2.2 Polární souřadnicová soustava

Někdy se pro popis pohybu v rovině hodí tzv. polární souřadnice, které jsou jistým případem cylindrických souřadnic, kdy z=0. Polární souřadnice budeme značit ρ , φ , viz obr. 22.1. Z tohoto obrázku odvodíme transformační vztahy mezi kartézskými a polárními souřadnicemi

$$x = \rho \cos \varphi \,\,, \quad y = \rho \sin \varphi \,\,, \tag{4.44}$$

kde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$
(4.45)

Jelikož polární souřadnicový systém je jistým případem souřadnicového systému cylindrického, pak je možné pro Laméovy koeficienty a souřadnicové vektory psát, viz (4.39), (4.40), že

$$h_1 = h_{\rho} = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2} = 1,$$

 $h_2 = h_{\varphi} = \sqrt{\rho^2 (\sin \varphi)^2 + \rho^2 (\cos \varphi)^2} = \rho.$ (4.46)

$$\mathbf{e}_{1} = \mathbf{e}_{\rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi) ,$$

$$\mathbf{e}_{2} = \mathbf{e}_{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi) .$$

$$(4.47)$$

V případě polárních souřadnic dostáváme pro infinitezimální změnu polohového vektoru

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_{\rho} + \rho d\varphi \mathbf{e}_{\varphi} . \tag{4.48}$$

Pro obloukový element ds v případě polárních souřadnic platí

$$ds^{2} = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\rho^{2} + \rho^{2}d\varphi^{2}. \tag{4.49}$$

4.2.3 Sférická (kulová) souřadnicová soustava

Sférické souřadnice budeme značit r, ϑ, φ , viz obr. 4.7. Mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi platí následující transformační vztahy

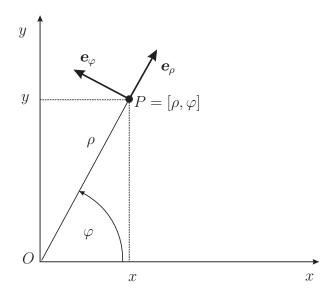
$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$
, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, (4.50)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
, $\vartheta = \arccos\frac{z}{r}$, $\varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, (4.51)

$$r \ge 0 \;, \quad 0 \le \vartheta < \pi \;, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \;.$$
 (4.52)

Co se týče sférických souřadnic, tak souřadnici r nazýváme průvodič, ϑ nazýváme deklinace a φ azimut.

Sférické souřadnice lze rovněž interpretovat pomocí tří vzájemně se protínajících ploch. Zadáme-li $r=r_0$ omezujeme množinu bodů na povrch koule o poloměru $r=r_0$. Úhlu $\vartheta=\vartheta_0$ odpovídá v prostoru plášť kužele s vrcholem v počátku souřadnic o rozvorovém úhlu



Obrázek 4.6: Polární souřadnice.

(měřeném od osy z) $\vartheta=\vartheta_0$. Tato kuželová plocha protne povrch koule kolmo (každý poloměr koule je kolmý na povrch koule); průsečíkem je kružnice o poloměru $r\sin\vartheta=r_0\sin\vartheta_0$. Zadáme-li $\varphi=\varphi_0$, vznikne rovina svírající s rovinou (x,z) úhel φ_0 . Tato rovina protne kolmo uvedenou kružnici v bodě o sférických souřadnicích r_0 , ϑ_0 , φ_0 . Tedy obecný bod $P[r,\vartheta,\varphi]$ je ve sférických souřadnicích určen průsečíkem tří vzájemně kolmých ploch: kulové plochy, pláště kužele a roviny. Opět se tak setkáváme s případem ortogonálních křivočarých souřadnice.

Opět uvažujme polohový vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, za souřadnice x, y, z dosadíme vztahy (4.50), takže dostaneme

$$\mathbf{r} = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta) . \tag{4.53}$$

Nyní zderivujeme polohový vektor (4.53) podle jednotlivých cylindrických souřadnic, viz (4.19), kde $u_1 = r$, $u_2 = \vartheta$ a $u_3 = \varphi$ a pomocí vztahů (4.20), (4.21) určíme souřadnicové vektory a Laméovy koeficienty

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta),
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0),$$
(4.54)

$$h_{1} = h_{r} = \sqrt{(\sin \vartheta \cos \varphi)^{2} + (\sin \vartheta \sin \varphi)^{2} + (\cos \vartheta)^{2}} = 1 ,$$

$$h_{2} = h_{\vartheta} = \sqrt{r^{2}(\cos \vartheta \cos \varphi)^{2} + r^{2}(\cos \vartheta \sin \varphi)^{2} + r^{2}(\sin \vartheta)^{2}} = r ,$$

$$h_{3} = h_{\varphi} = \sqrt{r^{2}(\sin \vartheta \sin \varphi)^{2} + r^{2}(\sin \vartheta \cos \varphi)^{2}} = r \sin \vartheta ,$$

$$(4.55)$$

$$\mathbf{e}_{1} = \mathbf{e}_{r} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) ,
\mathbf{e}_{2} = \mathbf{e}_{\vartheta} = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta) ,
\mathbf{e}_{3} = \mathbf{e}_{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) .$$
(4.56)

Dosadíme-li ze vztahů (4.54) a (4.55) do výrazů (4.22), (4.25), (4.26), pak dospějeme k následujícím vztahům platným pro sférický souřadnicový systém

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\vartheta\mathbf{e}_\vartheta + r\sin\vartheta d\varphi\mathbf{e}_\varphi , \qquad (4.57)$$

$$ds^{2} = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^{2} + r^{2}d\vartheta^{2} + r^{2}\sin^{2}\vartheta d\varphi^{2}, \qquad (4.58)$$

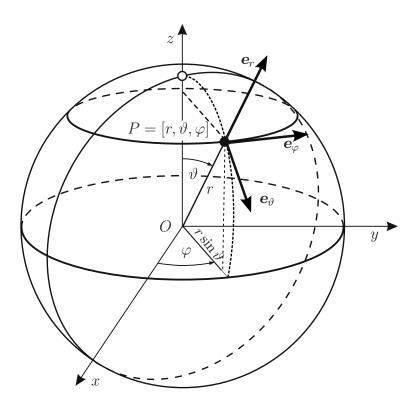
$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi . \tag{4.59}$$

Podle obrázku 4.8 můžeme elementární plochu na kouli dS vyjádřit jako součin stran vyznačeného "obdélníku", tj.

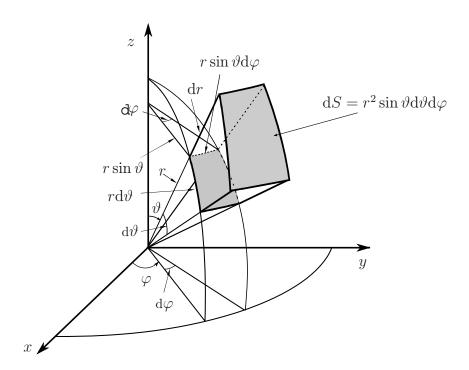
$$dS = (rd\vartheta)(r\sin\vartheta d\varphi) = r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$
 (4.60)

Pomocí obrázku 4.8 či vztahu (4.26) dostáváme i vztah pro element objemu ve sférických souřadnicích

$$dV = dSdr = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi . (4.61)$$



Obrázek 4.7: Sférické souřadnice.



Obrázek 4.8: Elementární objem a plocha ve sférických souřadnicích

Kapitola 5

Kinematika hmotného bodu

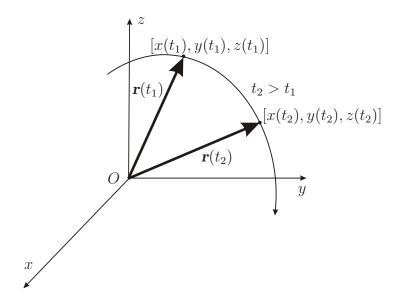
5.1 Trajektorie hmotného bodu

Pohyb hmotného bodu je jednoznačně určen, je-li v každém časovém okamžiku t dána jeho poloha $\mathbf{r}(t)$ vzhledem ke vztažné souřadnicové soustavě¹. Uvažujeme-li kartézský souřadnicový systém, je poloha uvažovaného hmotného bodu určena kartézskými souřadnicemi, které jsou funkcí času

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$
 (5.1)

Rovnice (5.1) jsou parametrickými rovnicemi křivky, po níž se hmotný bod pohybuje. Parametrem je v tomto případě čas t. Rovnice (5.1) definují oblouk spojité křivky a určitý směr na této křivce, daný rostoucím t. Tuto křivku nazýváme dráha nebo trajektorie hmotného bodu.

Jestliže rovnice (5.1) vynásobíme příslušnými jednotkovými souřadnicovými vektory i, j, k



Obrázek 5.1: Pohyb hmotného bodu po trajektorii.

a sečteme, dostaneme polohový vektor uvažovaného hmotného bodu

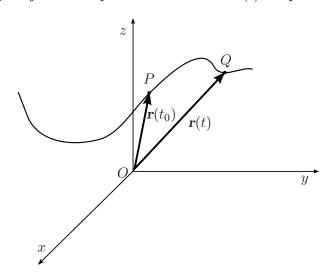
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \equiv (x(t), y(t), z(t)).$$
(5.2)

Parametrické rovnice (5.1) trajektorie jsou tedy ekvivalentní vektorové rovnici

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \ . \tag{5.3}$$

¹Přísně vzato, polohu určujeme vůči konkrétním vztažným tělesům. Abstrakcí dojdeme k zavedení vztažné souřadnicové soustavy, která je pevně spojená se vztažným tělesem a vůči níž určujeme polohu bodů.

Libovolnému bodu Q trajektorie o polohovém vektoru $\mathbf{r}(t)$ lze přiřadit číslo



Obrázek 5.2: Délka dráhy.

$$s(t) = \int_{t_0}^t ds = \int_{t_0}^t \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} =$$

$$\int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt'}\right)^2} dt' = \int_{t_0}^t \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt'}\right| dt', \quad (5.4)$$

jehož absolutní hodnota určuje délku oblouku na trajektorii s koncovými body P a Q, viz obr. 5.2. Budeme říkat, že bod Q leží za (před) bodem P, je-li s(t) > 0 (s(t) < 0).

Jinými slovy, vztah (5.4) přiřazuje jednotlivým bodům trajektorie čísla vzhledem k bodu P na trajektorii mající polohový vektor \mathbf{r}_0 . V takovém případě je možné pohlížet na s(t) jako na souřadnici, s jejíž pomocí určujeme polohu hmotného bodu na trajektorii, kterou předem známe.

V případě, že je vektorová funkce $\mathbf{r}(t)$ prostá, pak s(t) udává i délku dráhy uraženou hmotným bodem při jeho pohybu. Není-li $\mathbf{r}(t)$ prostou funkcí, musíme časový interval, ve kterém se hmotný bod pohybuje, rozdělit na části, v nichž $\mathbf{r}(t)$ je prostou funkcí, a vypočítat délku dráhy jako součet drah uražených v jednotlivých dílčích intervalech. V tomto smyslu pro náš vztah (5.4) představuje délku dráhy s(t) > 0, kterou urazí hmotný bod v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$. Představuje-li s(t) délku dráhy, pak je rostoucí funkcí. Diferenciál ds vystupující ve vztahu (5.4) nazýváme element délky dráhy.

Na parametr t, který je použit v parametrických rovnicích (5.1), (5.2) a (5.3), můžeme pohlížet jako na obecný parametr, kterým může být kromě času i například souřadnice s daná vzthem (5.4) (tzv. přirozená parametrizace). V případě tohoto parametru pak můžeme analogicky psát, že

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$
 (5.5)

a hmotnému bodu můžeme přiřadit polohový vektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)), \qquad (5.6)$$

přičemž závislost s na t je známa.

Při popisu pohybu se nemusíme omezit jen na kartézský souřadnicový systém. Někdy mohou být vhodnější např. polární, cylindrické nebo sférické souřadnice. Okamžitá poloha je pak dána následujícími parametrickými rovnicemi

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t),$$
(5.7)

$$r = r(t)$$
, $\vartheta = \vartheta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. (5.8)

Podle trajektorie je možné rozdělit pohyb hmotného bodu na pohyb

- $p\check{r}imo\check{c}ar\acute{y}$ pohyb se děje po přímce, kdy při určení polohy vystačíme s jedinou souřadnicí s.
- křivočarý pohyb se děje po prostorové křivce. V tomto případě již obecně nevystačíme s jedinou souřadnicí pro určení aktuální polohy hmotného bodu. Pouze v případě, kdy je trajektorie známa, vystačíme s jedinou souřadnicí s.

5.2 Jednorozměrný pohyb

Jedná se o pohyb, pro jehož popis vystačíme s jedinou souřadnicí, např. délkou dráhy s či jednou z kartézských souřadnic.

5.2.1 Rychlost

Fyzikální veličinou, která odráží časovou změnu polohy, je rychlost. Definujeme ji podílem délky dráhy, kterou urazí sledovaný hmotný bod, a doby potřebné jejímu uražení. Rychlost značíme obvykle značkou v.

Jestliže hmotný bod urazil za dobu Δt délku dráhy Δs , potom se pohyboval průměrnou rychlostí \overline{v}

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \,. \tag{5.9}$$

Jednotkou rychlosti² v soustavě SI je ms⁻¹.

V případě, že se rychlost v čase mění – nerovnoměrný~pohyb, je účelné zavést okamžitou~rychlost vztahem

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v}.$$
 (5.10)

Je to tedy průměrná rychlost během infinitezimálně krátkého časového intervalu $(t, t + \Delta t)$. Limita (5.10) reprezentuje derivaci funkce s = s(t), takže můžeme psát, že

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{s} \ . \tag{5.11}$$

Ve vztahu (5.11) je použito pro označení první časové derivace tečky tak, jak to zavedl Isaac Newton. Pro druhou derivaci bychom použili tečky dvě.

Ze vztahu (5.11) můžeme psát

$$ds = vdt. (5.12)$$

Integrací rovnosti (5.12) dostáváme, že

$$\int_{s_0}^{s(t)} ds' = \int_{t_0}^t v(t')dt', \qquad (5.13)$$

kde s_0 odpovídá délce dráhy, kterou hmotný bod již urazil v čase t_0 . Tedy jedná se o počáteční podmínku $s(t_0)=s_0$.

Řešením levé strany rovnice (5.15) dostáváme

$$s(t) - s_0 = \int_{t_0}^t v(t') dt'$$
 (5.14)

²Např. námořníci používají jinou jednotku rychlosti a tou je *námořní uzel*, 1 uzel≈0,514 m/s.

a odtud

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' + s_0.$$
 (5.15)

V případě, že v = konst. (rovnoměrný pohyb), pak lze snadno řešit integrál ve vztahu (5.15), tedy³

$$s(t) = v \int_{t_0}^t dt' + s_0 = v(t - t_0) + s_0.$$
 (5.16)

5.2.2 Zrychlení

Pohybuje-li se hmotný bod nerovnoměrně, tedy mění-li během pohybu svoji rychlost, je účelné zavést fyzikální veličinu, která odráží časovou změnu rychlosti. Touto fyzikální veličinou je zrychlení a budeme jej značit a.

Definujeme průměrné zrychlení \overline{a} jako

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \ . \tag{5.17}$$

Jednotkou zrychlení je ms⁻².

Okamžité zrychlení můžeme definovat limitou

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s} . \tag{5.18}$$

Odtud lze vidět, že zrychlení má vůči rychlosti stejný vztah jako rychlost ku poloze. Na základě vztahu (5.18) můžeme psát

$$dv = adt. (5.19)$$

Integrací vztahu (5.19) dostáváme pro okamžitou rychlost

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t')dt' + v_0 , \qquad (5.20)$$

kde v_0 je hodnota rychlosti v čase $t=t_0$, tedy jedná se o počáteční podmínku $v(t_0)=v_0$. V případě, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb, tj. a=konst., potom lze na základě rovnosti (5.20) integrovat

$$v(t) = a \int_{t_0}^{t} dt' + v_0 = a(t - t_0) + v_0.$$
 (5.21)

Dosazením rychlosti (5.21) do vztahu (5.15) dostaneme

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} [a(t'-t_0) + v_0] dt' + s_0 = \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 + v_0(t-t_0) + s_0.$$
 (5.22)

Je-li a < 0, jde o pohyb zpomalený. Značíme-li a' = -a > 0 a je-li a' = konst., platí zřejmě

$$v(t) = -a'(t - t_0) + v_0, (5.23)$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}a'(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$
 (5.24)

³Jelikož rychlost je konstantní, vytkneme ji při integraci před integrál.

5.3 Vícerozměrný pohyb (pohyb v prostoru)

Při vícerozměrném pohybu používáme k určení polohy hmotného bodu polohový vektor. Jeho velikost a směr popisuje polohu hmotného bodu, který se pohybuje po trajektorii. Časově proměnný vektor $\mathbf{r}(t)$ je popsán vztahem (5.2).

5.3.1 Rychlost

Obecně je rychlost vektorovou veličinou, která poskytuje informaci nejen o velikosti rychlosti hmotného bodu, ale i o směru jakým se pohybuje.

Okamžitou rychlost zavádíme podle obr. 5.3 vztahem

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}}.$$
 (5.25)

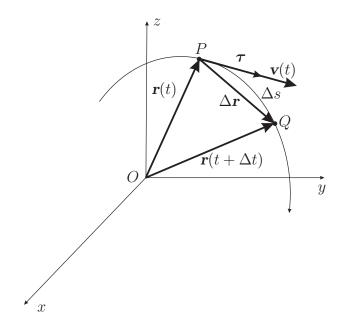
V kartézských souřadnicích platí

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) , \qquad (5.26)$$

resp.

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k} . \tag{5.27}$$

Zavedením rychlosti je možné vyjádřit vztah (5.4) jako

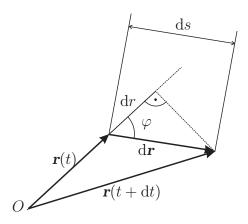


Obrázek 5.3: Pohyb hmotného bodu po trajektorii v prostoru.

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{v_x^2(t') + v_y^2(t') + v_z^2(t')} \, dt' .$$
 (5.28)

Uvažujeme-li dva body P a Q ležící na trajektorii, pak těmito body je určena orientovaná sečna, která je v našem případě reprezentována vektorem $\Delta \mathbf{r}$, viz obr. 5.3. Jestliže se bod Q blíží k bodu P, otáčí se sečna kolem bodu P a její mezní (limitní) poloha stanoví tečnu ke trajektorii v bodě P. Popsaná situace je zřejmá z geometrického náhledu 5.3. Odtud je rovněž patrné, že pro infinitezimální časový interval se element délky dráhy limitně blíží k nule, $\mathrm{d} s = \Delta s \to 0$, přičemž platí, že

$$|\mathbf{d}\mathbf{r}| = \mathbf{d}s \,, \tag{5.29}$$



Obrázek 5.4: Rozdíl mezi symbolem dr a $|d\mathbf{r}|$.

tedy v limitě délka tětivy $|d\mathbf{r}|$ a délka oblouku ds jsou si rovny. Na obrázku 5.4 je zachycen rozdíl mezi symboly d \mathbf{r} a $|d\mathbf{r}|$. Vzroste-li čas t o dt, změní se vektor \mathbf{r} o přírůstek d \mathbf{r} , který nazýváme orientovaný element dráhy (křivky) a k jeho označení můžeme také použít stejné značky jako pro označení křivky (s nebo někdy l), tj.

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{s} = d\mathbf{l} . ag{5.30}$$

Absolutní hodnota vektoru r se také změní, a to o průmět vektoru dr do směru vektoru r. Přírůstek velikosti vektoru r je tedy

$$d|\mathbf{r}| \equiv dr = |d\mathbf{r}|\cos\varphi = ds\cos\varphi, \qquad (5.31)$$

kde φ je úhel sevřený mezi vektorem \mathbf{r} a jeho přírůstkem d \mathbf{r} (uvažte, že φ je tedy úhel mezi \mathbf{r} a \mathbf{v}). Protože absolutní hodnotu vektoru \mathbf{r} označujeme symbolem r, má symbol dr význam přírůstku absolutní hodnoty a nikoliv hodnoty přírůstku vektoru, tedy

$$dr \neq |d\mathbf{r}|. \tag{5.32}$$

Jelikož délka dráhy je funkcí času, můžeme derivaci dr/dt vyjádřit následujícím způsobem 4

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \,. \tag{5.33}$$

Jelikož limitně přechází sečna v tečnu a uvážíme-li, že sečna je orientovaná (viz obr. 5.3), pak dle vztahu (5.29) můžeme psát, že

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{\tau} \ , \tag{5.34}$$

kde τ představuje jednotkový tečný vektor v místě o polohovém vektoru $\mathbf{r}(t)$. Na základě rovností (5.11) a (5.34) můžeme upravit vztah (5.33) do tvaru

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}(t) , \qquad (5.35)$$

kde ${m v}$ představuje okamžitou rychlost hmotného bodu. Ta má vždy směr tečny ke trajektorii a ten je orientován souhlasně se směrem daným rostoucím t. Pro velikost rychlosti platí $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$.

Ze vztahu (5.25) můžeme psát, že d $\mathbf{r} = \mathbf{v}$ dt, takže následnou integrací dostáváme

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t') \mathrm{d}t' + \mathbf{r}_0 , \qquad (5.36)$$

⁴Na $\mathbf{r}(t)$ pohlížíme jako na složenou funkci $\mathbf{r}(s(t))$.

 $kde \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0.$

Odtud pro přímočarý rovnoměrný pohyb, tj. $\mathbf{v} = \mathbf{konst.}$, dostáváme

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t - t_0) + \mathbf{r}_0. \tag{5.37}$$

5.3.2 Zrychlení

Zrychlení představuje časovou změnu rychlosti. Rychlost může měnit v průběhu času nejen velikost, ale i směr, takže zrychlení souvisí jak s časovou změnou velikosti rychlosti, tak jejího směru. Z výše uvedeného vyplývá, že zrychlení je rovněž vektorová veličina. Vektor okamžitého zrychlení definujeme jako

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}.$$
 (5.38)

Pro kartézské souřadnice můžeme psát

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) , \qquad (5.39)$$

resp.

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k} . \tag{5.40}$$

Ze vztahu (5.38) plyne $d\mathbf{v} = \mathbf{a}dt$, takže

$$\mathbf{v}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t') dt' + \mathbf{v}_0 , \qquad (5.41)$$

kde $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$.

Jedná-li se o přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb, tj. $\mathbf{a} = \mathbf{konst.}$, pak

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}(t - t_0) + \mathbf{v}_0. \tag{5.42}$$

Dosazením vztahu (5.42) do rovnice (5.36) a následné integraci obdržíme

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}_0.$$
 (5.43)

5.4 Pohyb po kružnici

Pohyb po kružnici představuje velmi častý a v technice důležitý případ křivočarého pohybu. Pro polohový vektor hmotného bodu v tom případě platí

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 = konst. \tag{5.44}$$

Odtud derivací dostaneme

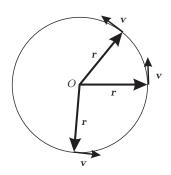
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0 , \qquad (5.45)$$

protože $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, potom

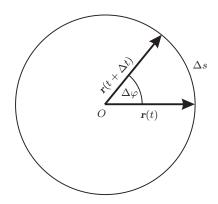
$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0 \ . \tag{5.46}$$

Vektory \mathbf{r} a \mathbf{v} tedy musí být na sebe kolmé, viz obr. 5.5. Odtud vyplývá, že vektor rychlosti \mathbf{v} má v každém okamžiku směr tečný ke kružnici, tj. $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$.

Uvažujme kružnici o poloměru r, po které se pohybuje hmotný bod. Za časový interval Δt urazí hmotný bod dráhu, která odpovídá oblouku $\Delta s = \overline{v}\Delta t$, kde \overline{v} je průměrná obvodová



Obrázek 5.5: Pohyb hmotného bodu po kružnici.



Obrázek 5.6: Změna středového úhlu za čas Δt .

rychlost. Tomuto oblouku odpovídá středový úhel $\Delta \varphi$, viz obr. 5.6. Pro středový úhel můžeme psát, že

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{r} = \frac{\overline{v}\Delta t}{r} \,. \tag{5.47}$$

Protože obvodová rychlost je dána průměrnou obvodovou rychlostí \overline{v} během doby Δt , můžeme zavést průměrnou úhlovou rychlost $\overline{\omega}$ vztahem

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \ . \tag{5.48}$$

Použijeme-li vztah (5.47), tj. $\Delta\varphi=\Delta s/r,$ můžeme průměrnou úhlovou rychlost vyjádřit jako

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{1}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\overline{v}}{r} \,. \tag{5.49}$$

Pro okamžitou úhlovou rychlost ω můžeme psát

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi} , \qquad (5.50)$$

pro kterou při použití vztahu (5.47) platí

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{r \Delta t} = \frac{1}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r}, \tag{5.51}$$

kde v je okamžitá obvodová rychlost. Ze vztahů (5.49) a (5.51) vyplývá

$$\overline{v} = \overline{\omega}r \;, \; v = \omega r \;.$$
 (5.52)

Je-li obvodová rychlost konstantní, v = konst., tj. jedná-li se o rovnoměrný pohyb po kružnici, pak pro oběžnou dobu (periodu) T bude platit

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\omega r} = \frac{2\pi}{\omega} \ . \tag{5.53}$$

Odtud pak dostáváme

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \,, \tag{5.54}$$

kde f je kmitočet (frekvence) a udává (při rovnoměrném otáčení) počet otáček za jednu sekundu. Jednotkou je Hz (hertz) a je roven 1/s. Ze vztahu (5.54) je patrné, že f=1/T. Periodický pohyb je takový pohyb, který se po uplynutí doby T (periody) opakuje. Platí tedy

$$\mathbf{r}(t+T) = \mathbf{r}(t)$$
 pro všechny časy t . (5.55)

Počet otáček n za čas spočteme z celkového úhlu otočení φ v radiánech jako

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} \ . \tag{5.56}$$

V případě, že se jedná o nerovnoměrný pohyb po kružnici, zavádíme okamžité úhlové zrychlení ε

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \ . \tag{5.57}$$

Ze vztahu (5.50) plyne

$$d\varphi = \omega dt \tag{5.58}$$

a odtud

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \omega(t') dt' + \varphi_0 , \qquad (5.59)$$

kde φ_0 je hodnota středového úhlu v čase $t = t_0$, tj. $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

V případě, že $\omega = konst.$ (rovnoměrný pohyb po kružnici), pak snadno spočteme⁵

$$\varphi(t) = \omega \int_{t_0}^t dt' + \varphi_0 = \omega(t - t_0) + \varphi_0.$$
 (5.60)

Podle (5.57) můžeme psát

$$d\omega = \varepsilon dt . ag{5.61}$$

a integrací dostaneme

$$\omega(t) = \int_{t_0}^t \varepsilon(t') dt' + \omega_0 , \qquad (5.62)$$

kde ω_0 je hodnota okamžité úhlové rychlosti v čase $t=t_0$, tj. $\omega(t_0)=\omega_0$. V případě, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb, tj. $\varepsilon=konst.$, lze snadno (5.62) zintegrovat

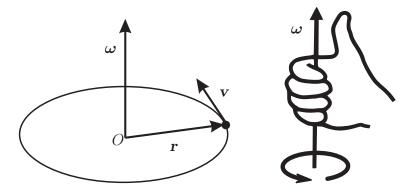
$$\omega(t) = \varepsilon \int_{t_0}^t dt' + \omega_0 = \varepsilon(t - t_0) + \omega_0$$
 (5.63)

další integrací

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t [\varepsilon(t - t_0) + \omega_0] dt + \varphi_0 = \frac{1}{2}\varepsilon(t - t_0)^2 + \omega_0(t - t_0) + \varphi_0.$$
 (5.64)

Je-li $\varepsilon<0$, jde o rovnoměrně zpomalený pohyb. Při označení $\varepsilon'=-\varepsilon>0$ a je-li $\varepsilon'=konst.$ platí zřejmě

$$\omega(t) = -\varepsilon'(t - t_0) + \omega_0 , \qquad (5.65)$$



Obrázek 5.7: Zavedení vektorových veličin pro popis pohybu hmotného bodu po kružnici.

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}\varepsilon'(t - t_0)^2 + \omega_0(t - t_0) + \varphi_0.$$
 (5.66)

Vektor obvodové rychlosti \mathbf{v} je vždy kolmý k ose otáčení a tečný ke kružnici. Z tohoto důvodu je možné určit vektor obvodové rychlosti \mathbf{v} pomocí vektorového součinu, viz obr. 5.7

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \,. \tag{5.67}$$

K určení orientace vektoru úhlové rychlosti použijeme pravidla pravé ruky: ukazují-li zahnuté prsty pravé ruky směr pohybu hmotného bodu po kružnici, pak vztyčený palec této ruky ukazuje orientaci vektoru úhlové rychlosti ω .

Nechť $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\omega}^0$ a jednotkový vektor $\boldsymbol{\omega}^0 = \boldsymbol{konst}$, potom když zavedeme úhlové zrychlení jako vektorovou veličinu $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}^0$, musí platit, že $\boldsymbol{\omega}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}^0$. Tedy vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}$ jsou kolineární, tj. mají stejný směr $(\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{\varepsilon})$.

5.5 Dostředivé zrychlení

Uvažujme případ rovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici. Pro něj který platí, že $\omega = konst.$, a tedy $\dot{\omega} = 0$. Ze vztahu (5.67) dostáváme postupně

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}}_{-\mathbf{0}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) .$$
 (5.68)

Tento výraz lze dále upravit podle vektorové identity "BAC-CAB"

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})}_{=0} - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{r}\omega^{2}, \qquad (5.69)$$

protože vektory $\boldsymbol{\omega}$ a \boldsymbol{r} jsou na sebe kolmé. Zavedeme následující označení

$$-\mathbf{r} = -r\mathbf{r}^0 = r\mathbf{\nu} , \qquad (5.70)$$

kde $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$ a $\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{r}^0$ pak značí jednotkový vektor zvaný *vnitřní normálový vektor* (orientovaný ke středu křivosti)⁶. Vektor $\boldsymbol{\nu}$ směřuje do středu kružnice, po které se uvažovaný hmotný bod pohybuje, proto zrychlení (5.68) nazýváme *dostředivé*, viz obr. 5.8. Je tedy dáno vztahem

$$\mathbf{a}_D = \omega^2 r \mathbf{\nu} = -\omega^2 \mathbf{r} \,. \tag{5.71}$$

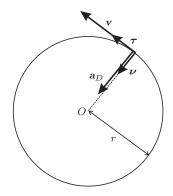
Pomocí vztahu (5.52) můžeme tento výraz upravit do tvaru

$$\mathbf{a}_D = \frac{v^2}{r} \boldsymbol{\nu} \ . \tag{5.72}$$

Z původního předpokladu $\omega = konst.$ a vztahu (5.52) vyplývá, že $|\mathbf{v}| = konst.$, a tudíž \mathbf{a}_D

⁵Jelikož úhlová rychlost je konstantní, vytkneme ji při integraci před integrál.

⁶Vnější normálový vektor je k němu opačný.

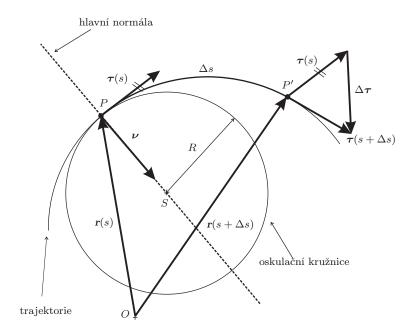


Obrázek 5.8: Dostředivé zrychlení.

souvisí pouze s časovou změnou směru rychlosti.

5.6 Obecný křivočarý pohyb

5.6.1 Grafické odvození normálové a tečné složky zrychlení



Obrázek 5.9: Pohyb hmotného bodu po zakřivené trajektorii.

Obrázek 5.9 postihuje případ, kdy hmotný bod se pohybuje v prostoru po křivočaré trajektorii. Na trajektorii jsou vybrána dvě místa (jedno odpovídá délce dráhy s a druhé délce dráhy $s+\Delta s$), která jsou určena polohovými vektory $\mathbf{r}(s)$ a $\mathbf{r}(s+\Delta s)$. Z tohoto obrázku je patrné, že pro tyto dva body na trajektorii mají tečné vektory různé směry. Dále budeme předpokládat, že když tyto body jsou od sebe infinitezimálně vzdáleny, tj. d $s = \Delta s \rightarrow 0$, pak místo $\Delta \tau \rightarrow 0$ můžeme psát d τ .

Pro tečný jednotkový vektor $\tau(s)$ platí, že

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1 \ . \tag{5.73}$$

Zderivujeme rovnost (5.73) podle proměnné s, čímž dostaneme

$$\tau \cdot \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = 0 \ . \tag{5.74}$$

Odtud plyne, že $\tau \perp (\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}s)$, a tedy vektor $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}s$, resp. $\mathrm{d}\tau$, má směr normály k tečně v daném bodě $\mathbf{r}(s)$. Všechny tyto normály leží v rovině kolmé k vektoru τ a vytvářejí normálovou rovinu dané trajektorie v daném bodě. Z obrázku 5.9 je vidět, že bodu P přísluší tečný vektor $\tau(s)$ a bodu P' tečný vektor $\tau(s+\Delta s)=\tau(s)+\Delta\tau$. Tyto dva vektory $\tau(s)$, $\tau(s+\Delta s)$, u kterých předpokládáme, že neleží na stejné přímce, umožňují jednoznačně sestrojit rovinu. Tato rovina prochází bodem P a je paralelní s vektorem $\tau(s+\Delta s)$. Při změně bodu P' se bude tato rovina měnit, bude se otáčet kolem vektoru $\tau(s)$. Při přibližování bodu P' k bodu P, tj. $\Delta s \to 0$, se bude tato rovina blížit k jisté limitě zvané oskulační rovina (tečná rovina). Pro snazší pochopení zavedení oskulační roviny můžeme použít definice, kterou se zavádí v diferenciální geometrii. Tato definice říká:

oskulační rovina v bodě $\mathbf{r}(s)$ je limitní poloha roviny určené třemi body P, P', Q, když $P', Q \rightarrow P,$ viz obr. 5.10.

Všimněme si skutečnosti, že limita $Q \to P$ souvisí se zavedením tečného vektoru τ , viz obr. 5.3 a vztah (5.34).

Z analytické geometrie víme, že třemi body je rovněž určena kružnice. Body použité k zavedení oskulační roviny, které se k sobě neomezeně přibližují, určují také limitní polohu kružnice zvanou oskulační kružnice, viz obrázek 5.9. Jinými slovy, v každém bodě trajektorie můžeme velmi malý úsek křivky přibližně nahradit obloukem kružnice o jistém poloměru. Zmenšováním délky tohoto úseku křivky nahrazuje kruhový oblouk úsek křivky přesněji. V limitním případě, tj. v případě nekonečně malé délky úseku křivky, existuje právě jedna kružnice, jejíž oblouk nekonečně malé délky kopíruje přesně zakřivení trajektorie v daném bode P.

Průsečík normálové a oskulační roviny určuje hlavní normálu ležící v oskulační rovině. Normála oskulační roviny se nazývá binormála.

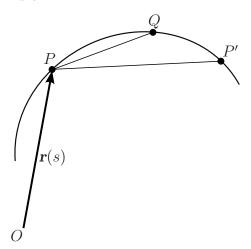
Jednotkový vektor ve směru hlavní normály označíme ν a budeme ho považovat za vnitřní normálový vektor, tj. vektor orientovaný ke středu oskulační kružnice.

Ze dvou vzájemně kolmých vektorů τ , ν lze sestrojit třetí jednotkový vektor β , jenž je kolmý k oběma vektorům. Toto přiřazení provedeme pomocí vektorového součinu

$$\beta = \tau \times \nu . \tag{5.75}$$

Poněvadž vektor β , podle definice vektorového součinu, je kolmý na oskulační rovinu, v níž leží jednotkový vektor ν , je β jednotkovým vektorem ve směru binormály křivky.

Z výše uvedených skutečností plyne, že vektor d τ leží v oskulační rovině a má směr vnitřního



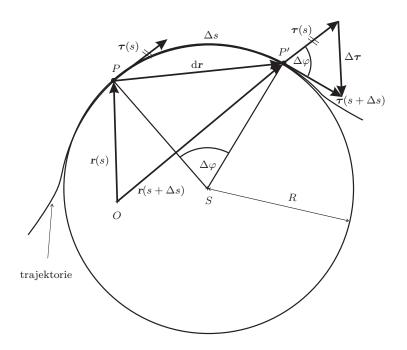
Obrázek 5.10: Tři body k zavedení oskulační roviny a kružnice.

normálového vektoru ν , tedy můžeme psát

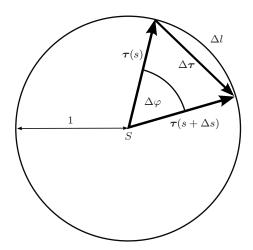
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \kappa \boldsymbol{\nu} \;, \tag{5.76}$$

kde κ reprezentuje $k\check{r}ivost$.

Výše bylo uvedeno, že malý úsek trajektorie lze nahradit obloukem kružnice, viz 5.11, tj.



Obrázek 5.11: Pohyb hmotného bodu po zakřivené trajektorii.



Obrázek 5.12: Přenesení počátečních bodů tečných vektorů $\tau(s)$ a $\tau(s+\Delta s)$ do středu jednotkové kružnice.

 $\Delta s = R \Delta \varphi$. Zmenšováním délky úseku trajektorie docílíme při této náhradě lepší přesnosti, tedy v limitním přiblížení oblouk kružnice $R d \varphi$, kterou v tomto případě nazýváme oskulační, se shoduje s úsekem trajektorie, $R d \varphi = ds = \Delta s \rightarrow 0$, kde R poloměr oskulační kružnice a $d \varphi$ je element středového úhlu oskulační kružnice. Tímto můžeme přepsat vztah (5.76)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\varphi} = \kappa \boldsymbol{\nu} \ . \tag{5.77}$$

Přeneseme počáteční body vektorů $\tau(s)$ a $\tau(s+\Delta s)$ do středu jednotkové kružnice, viz obr. 5.12. S ohledem na tento obrázek ($\Delta l = 1 \Delta \varphi$) dostáváme

$$\left| \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d} s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\boldsymbol{\tau}(s + \Delta s) - \boldsymbol{\tau}(s)|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\boldsymbol{\tau}(s + \Delta s) - \boldsymbol{\tau}(s)|}{\Delta \varphi} = \frac{|\mathrm{d} \boldsymbol{\tau}|}{\mathrm{d} \varphi} = \frac{\mathrm{d} l}{\mathrm{d} \varphi} = 1. \quad (5.78)$$

Uplatníme tento výsledek ve rovnosti (5.77)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{R} \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\varphi} \right| \mathbf{e} = \frac{1}{R} \mathbf{e} = \kappa \boldsymbol{\nu} . \tag{5.79}$$

Z výsledku je patrné, že převrácená hodnota křivosti je rovna poloměru oskulační kružnice, který nazýváme poloměr křivosti R, tj. $1/\kappa = R$ (poloměr křivosti přímky pokládáme za nekonečný). Tedy

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R}\boldsymbol{\nu} \ . \tag{5.80}$$

Vraťme se ke vztahu (5.38), do kterého dosadíme za vektor rychlosti ze vztahu (5.35), čímž dostaneme

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{\tau})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}.$$
 (5.81)

Derivaci

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

upravíme jako derivaci složené funkce $\tau = \tau(s(t))$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \ .$$

Dosazením za derivaci ve vztahu (5.81) dostáváme, že

$$\mathbf{a} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}_{a_t} \mathbf{\tau} + v \frac{\mathrm{d}\mathbf{\tau}}{\mathrm{d}s} \underbrace{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}_{v} . \tag{5.82}$$

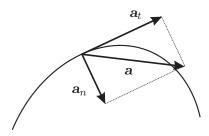
Rovnici (5.82) můžeme dále upravit s ohledem na vztah (5.80)

$$\mathbf{a} = \underbrace{a_t \boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{a}_t} + \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{a_n} \boldsymbol{\nu} . \tag{5.83}$$

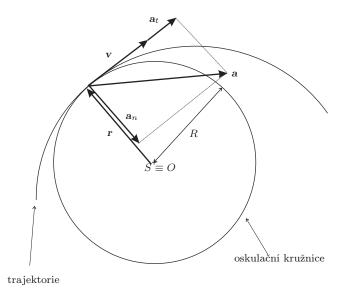
Vektor zrychlení, viz obr. 5.13, je tedy součtem dvou vektorů, vektoru tečného zrychlení $\mathbf{a}_t = a_t \boldsymbol{\tau}$, a to vektoru normálového zrychlení $\mathbf{a}_n = a_n \boldsymbol{\nu}$, tj.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \ . \tag{5.84}$$

Tečné zrychlení \mathbf{a}_t souvisí s časovou změnou velikosti rychlosti hmotného bodu, kdežto normálové zrychlení \mathbf{a}_n souvisí s časovou změnou směru rychlosti.



Obrázek 5.13: Normálové a tečné zrychlení.



Obrázek 5.14: Pohyb hmotného bodu po zakřivené trajektorii - vektorové odvození.

5.6.2 Vektorové odvození normálové a tečné složky zrychlení

Z výkladu v předchozí kapitole je zřejmé, že po krátkou dobu můžeme aproximovat každou trajektorii kruhovou dráhou. Tedy je možné si představit, že hmotný bod se po krátkou dobu pohybuje po oskulační kružnici o poloměru $|\mathbf{r}|=R$, viz obr. 5.14, kde R je poloměr křivosti. Derivací rychlosti (5.67) podle času dostaneme

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}}_{\mathbf{c}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}}_{\mathbf{v}}.$$
 (5.85)

Jelikož $\varepsilon = \dot{\omega}$ a směr vektoru úhlové rychlosti ω se během pohybu po oskulační kružnici nemění, pak musí platit, že $\varepsilon ||\omega|$.

Podle orientace členů na pravé straně je možné psát zrychlení **a** rozložit:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n . \tag{5.86}$$

Platí-li, že $v\tau = \omega \times r$ a je-li $\varepsilon \parallel \omega$ (mají stejný směr, tj. jedná se o pohyb zrychlený, nikoliv zpomalený), potom vektor $\varepsilon \times r$ musí mít stejnou orientaci jako vektor obvodové rychlosti v, a tudíž představuje tečnou složku zrychlení⁷.

Pomocí vztahů (5.67), (5.70) a (5.52) můžeme psát, že

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})}_{=0} - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{r}\omega^2 = \omega^2 R \boldsymbol{\nu} = \frac{v^2}{R} \boldsymbol{\nu}$$
. (5.87)

Protože $\varepsilon \perp r$ bude pro velikost tečného vektoru zrychlení platit, že

$$a_t = |\mathbf{a}_t| = \varepsilon R = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} R = \frac{\mathrm{d}(\omega R)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
 (5.88)

Takže platí, že

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \,, \tag{5.89}$$

 $^{^7\}mathrm{V}$ případě, že se jedná o pohyb zpomalený, bude mít tato složka opačnou orientaci než vektor obvodové rychlosti.

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} = a_t \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{\tau} ,$$
 (5.90)

$$a_n = \frac{v^2}{R} \,, \tag{5.91}$$

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = a_n \boldsymbol{\nu} = \frac{v^2}{R} \boldsymbol{\nu} . \tag{5.92}$$

Ze vztahů (5.90) a (5.92) vyplývá, že tečné zrychlení \mathbf{a}_t souvisí s časovou změnou velikosti rychlosti hmotného bodu, kdežto zrychlení \mathbf{a}_n souvisí s časovou změnou směru rychlosti uvažovaného hmotného bodu.

Příklad 5.6.1

Uvažujme trajektorii parametricky určenou takto:

$$x = 3\cos(t), \quad y = 3\sin(t), \quad z = 4t.$$
 (5.93)

Určete polohový vektor, okamžitou rychlost, normálovou a tečnou složku okamžitého zrychlení, poloměr křivosti.

Řešení:

Polohový vektor má pak následující tvar

$$\mathbf{r}(t) = 3\cos(t)\mathbf{i} + 3\sin(t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}. \tag{5.94}$$

Ze vztahu (8.2) dostaneme vektor rychlosti (5.25)

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = -3\sin(t)\mathbf{i} + 3\cos(t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}. \tag{5.95}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right| = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}} = \sqrt{[-3\sin(t)]^2 + [3\cos(t)]^2 + 4^2} = 5.$$
 (5.96)

Na základě vztahu (5.35) můžeme pro jednotkový tečný vektor τ psát

$$\tau = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = -\frac{3}{5}\sin(t)\mathbf{i} + \frac{3}{5}\cos(t)\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}.$$
 (5.97)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[-\frac{3}{5}\sin(t)\boldsymbol{i} + \frac{3}{5}\cos(t)\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k} \right] = -\frac{3}{5}\cos(t)\boldsymbol{i} - \frac{3}{5}\sin(t)\boldsymbol{j}.$$
 (5.98)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = -\frac{3}{25}\cos(t)\boldsymbol{i} - \frac{3}{25}\sin(t)\boldsymbol{j}. \tag{5.99}$$

Protože (viz (5.76))

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = \kappa \boldsymbol{\nu}$$

odtud pro křivost

$$\kappa = \left| \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d} s} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{25} \cos(t) \right)^2 + \left(\frac{3}{25} \sin(t) \right)^2} = \frac{3}{25} .$$

Jelikož pro poloměr křivosti platí, že $R=1/\kappa$, pak dostáváme, že

$$R = \frac{1}{\kappa} = \frac{25}{3} \ .$$

Ze vztahu (5.76) plyne, že

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\kappa} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s} = -\cos(t)\boldsymbol{i} - \sin(t)\boldsymbol{j}.$$

Pro tečné zrychlení dostáváme

$$\mathbf{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{\tau} = 0\left(-\frac{3}{5}\sin(t)\mathbf{i} + \frac{3}{5}\cos(t)\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}\right) = \mathbf{0}$$

Pro normálové zrychlení dostáváme

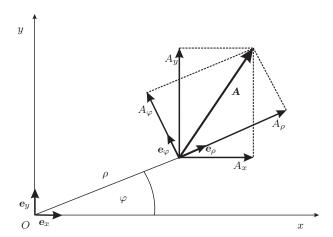
$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{\nu} = \frac{5^2}{\frac{25}{3}} (-\cos(t)\mathbf{i} - \sin(t)\mathbf{j}) = -3\cos(t)\mathbf{i} - 3\sin(t)\mathbf{j}.$$

Pak

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \mathbf{0} - 3\cos(t)\mathbf{i} - 3\sin(t)\mathbf{j} = -3\cos(t)\mathbf{i} - 3\sin(t)\mathbf{j}.$$

5.6.3 Popis rovinného pohybu v polárních souřadnicích

Ve dvourozměrných případech s rotační symetrií je vhodnější popisovat rovinný křivočarý pohyb v polárních souřadnicích. Na obrázku 5.15 je zachycen obecný vektor spolu s jeho složkami jak v kartézských, tak polárních souřadnicích. Pro odvození složek vektoru rychlosti



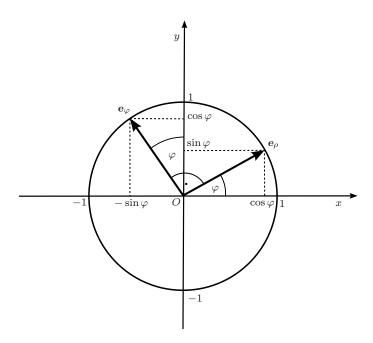
Obrázek 5.15: Obecný vektor v polárních souřadnicích.

použijeme složkové odvození.

Připomeňme, že složky jednotkových polárních souřadnicových vektorů jsou dány jako

$$\mathbf{e}_{\rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi) , \quad \mathbf{e}_{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi) .$$
 (5.100)

Pro přímé určení velikostí složek, které mají souřadnicové vektory \mathbf{e}_{ρ} , \mathbf{e}_{φ} v kartézských souřadnicích (5.100), je také možné použít obrázek 5.16. Pro obecný vektor \mathbf{A} platí, že



Obrázek 5.16: Situační obrázek k odvození kartézských složek souřadnicových vektorů ${\bf e}_{\rho}$ a ${\bf e}_{\varphi}.$

$$\mathbf{A} = A_{\rho} \mathbf{e}_{\rho} + A_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} . \tag{5.101}$$

Dosadíme-li souřadnicové vektory (5.100) do výrazu (5.101), pak dostaneme

$$\mathbf{A} = A_{\rho}(\cos\varphi, \sin\varphi) + A_{\varphi}(-\sin\varphi, \cos\varphi) = (A_{\rho}\cos\varphi, A_{\rho}\sin\varphi) + (-A_{\varphi}\sin\varphi, A_{\varphi}\cos\varphi).$$
(5.102)

Provedeme součet vektorů (jednotlivých složek), čímž můžeme psát

$$\mathbf{A} = (A_{\rho}\cos\varphi - A_{\varphi}\sin\varphi, A_{\rho}\sin\varphi + A_{\varphi}\cos\varphi) = (A_{x}, A_{y}). \tag{5.103}$$

Porovnáním složek ve vztahu (5.103) dostaneme

$$A_x = A_\rho \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi , \qquad (5.104)$$

$$A_y = A_\rho \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi . (5.105)$$

Rovnosti (5.104) a (5.105) ukazují, jaký je vztah mezi kartézskými a polárními složkami obecného vektoru (geometrického modelu) ${\pmb A}$.

Připomeňme, že mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí následující transformační vztahy

$$x = \rho \cos \varphi \,\,\,\,(5.106)$$

$$y = \rho \sin \varphi . \tag{5.107}$$

Přistupme k odvození složek vektoru rychlosti \mathbf{v} v polárních souřadnicích, přičemž je nutné si uvědomit, že polární souřadnice jsou funkcemi času, tj. $\rho = \rho(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$

$$v_x = \dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi , \qquad (5.108)$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi . \tag{5.109}$$

Porovnáním rovnosti (5.108) s výrazem (5.104), resp. (5.109) s výrazem (5.105) pro složky rychlosti v polárních souřadnicích dostaneme

$$v_{\rho} = \dot{\rho} , \quad v_{\varphi} = \rho \dot{\varphi} , \qquad (5.110)$$

takže pro vektor rychlosti můžeme psát

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_{\rho} + \rho \dot{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi} \ . \tag{5.111}$$

Podobně můžeme postupovat při odvození složek v polárních souřadnicích pro vektor zrychlení **a**, pro který platí⁸

$$a_x = \ddot{x} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \sin \varphi . \tag{5.112}$$

Porovnáním výrazu (5.112) s výrazem (5.104) dostaneme, že

$$a_{\rho} = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 , \quad a_{\varphi} = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} , \qquad (5.113)$$

takže pro vektor zrychlení můžeme psát

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_{\rho} + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \mathbf{e}_{\varphi} . \tag{5.114}$$

Pro kruhový pohyb, kdy $\rho=R=konst.,$ kde R je poloměr kružnice, můžeme na základě výše uvedených vztahů psát

$$v_{\rho} = \dot{R} = 0$$
, $v_{\varphi} = R\dot{\varphi} = R\omega$, $a_{\rho} = -R\dot{\varphi}^2 = -R\omega^2$, $a_{\varphi} = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon$, $\mathbf{e}_{\varphi} = \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{e}_{\varrho} = -\boldsymbol{\nu}$, (5.115)

kde v_{φ} odpovídá velikosti okamžité obvodové rychlosti v, tj. $v_{\varphi} \equiv v$, uvážíme-li, že $v = R\omega$, potom platí

$$\mathbf{a}_{\rho} = a_{\rho} \mathbf{e}_{\rho} = -a_{\rho} \boldsymbol{\nu} = R\omega^{2} \boldsymbol{\nu} = \frac{v^{2}}{R} \boldsymbol{\nu} . \tag{5.116}$$

Srovnáme-li výraz (5.116) s výrazem (5.72), tak je zřejmé, že vektor \mathbf{a}_{ρ} reprezentuje dostředivé zrychlení, tj. $\mathbf{a}_{\rho} \equiv \mathbf{a}_{D}$.

Jedná-li se o kruhový pohyb rovnoměrný ($\omega = konst., \varepsilon = 0$), potom platí

$$v_{\rho} = \dot{R} = 0 \; , \; v_{\varphi} = R\dot{\varphi} = R\omega \; , \; a_{\rho} = -R\dot{\varphi}^2 = -R\omega^2 \; , \; a_{\varphi} = 0 \; .$$
 (5.117)

5.6.4 Skládání a rozkládání pohybu. Pohyb v homogenním tíhovém poli

Koná-li hmotný bod několik pohybů současně, pak výsledný pohyb získáme tak, že všechny pohyby složíme, a to v libovolném pořadí. Naopak složený pohyb můžeme rozložit do jednodušších pohybů a ty vyšetřovat zvlášť.

S výhodou využíváme výše zmíněné možnosti rozkládat složitější pohyb do pohybů jednodušších, např. při vyšetřování pohybů v homogenním tíhovém poli Země⁹. Má-li hmotný bod nenulovou počáteční rychlost, pak takovýto pohyb nazýváme *vrhem*, v případě nulové počáteční rychlosti pak *volným pádem*.

Jelikož se všechna tělesa v tíhovém poli Země pohybují se stejným zrychlením $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, budou pro ně platit následující vztahy, viz (5.42), (5.43)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}(t - t_0) , \qquad (5.118)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{g}(t - t_0)^2, \qquad (5.119)$$

⁸Zderivujeme podle času výraz (5.108).

⁹Neuvažujeme odpor prostředí.

kde \mathbf{r}_0 je počáteční polohový vektor hmotného bodu a \mathbf{v}_0 je jeho počáteční rychlost. Jak vrhy, tak volný pád budeme považovat za rovinné pohyby, tj. za pohyby jejichž trajektorie jsou rovinnými křivkami. Pro vyšetřování těchto pohybů si zvolíme rovinu (x, y). Příslušné vektorové veličiny můžeme zapsat jako¹⁰

$$\mathbf{v}(t) = (v_x, v_y), \quad \mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}), \quad \mathbf{r}(t) = (x, y), \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0), \quad \mathbf{g} = (0, -g).$$
 (5.120)

Pohyb hmotného bodu rozložíme na pohyb vodorovný (podél osy x) a pohyb svislý (podél osy y), takže rovnice (5.118) a (5.119) budou mít pro uvažované složky vektorů (5.120) následující tvar

$$v_x(t) = v_{x0} (5.121)$$

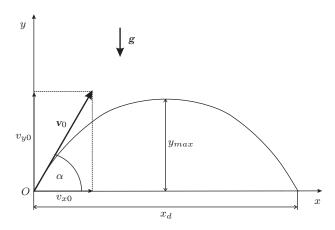
$$v_y(t) = v_{y0} - g(t - t_0) , (5.122)$$

$$x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0) , (5.123)$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2.$$
 (5.124)

Příklad 5.6.2

Nechť je hmotný bod vržen počáteční rychlostí \mathbf{v}_0 , svírající s osou x úhel α (nazývá elevační), viz obr. 5.17.



Obrázek 5.17: Vrh šikmý vzhůru.

Řešení:

Počáteční hodnoty jsou

$$t_0 = 0$$
; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$, $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$. (5.125)

Pro rovnice (5.121) - (5.124) s ohledem na počáteční podmínky (5.125) dostáváme

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha \,\,\,(5.126)$$

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt , \qquad (5.127)$$

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha \,\,\,\,(5.128)$$

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 . (5.129)$$

 $^{^{10}}$ Uvažujeme, že směr tíhového pole je opačný než orientace osy y. Pro velikost tíhového zrychlení zvolíme hodnotu $g=9,81~{\rm m\,s^{-2}}.$

V určitý časový okamžik t_v dosáhne vržený hmotný bod maximální výšky y_{max} . V tomto časovém okamžiku přestává hmotný bod stoupat, tj. rychlost $v_y(t_v) = 0$, takže z rovnice (5.127) dostaneme

$$t_v = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \,. \tag{5.130}$$

Protože hmotný bod bude z maximální výšky, které dosáhne, klesat po stejnou dobu, jakou stoupal, bude časový okamžik dopadu (doba pohybu) roven

$$t_d = 2t_v = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \,. \tag{5.131}$$

Dosazením času t_v do vztahu (5.129) dostaneme maximální výšku výstupu

$$y_{max} = v_0 t_v \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_v^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$
 (5.132)

a dosazením času t_d do vztahu (5.128) dostaneme vzdálenost, kam vržený hmotný bod doletí

$$x_d = v_0 t_d \cos \alpha = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$
 (5.133)

Vyloučením času t z rovnic (5.128) a (5.129) dostaneme rovnici trajektorie uvažovaného hmotného bodu. Pro tento účel vyjádříme čas z rovnice (5.128), tedy

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \,. \tag{5.134}$$

Tento čas dosadíme do rovnice (5.129), takže po úpravě dostaneme

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$
 (5.135)

Rovnice trajektorie (balistická křivka) hmotného bodu (5.135) představuje rovnici paraboly.

Kapitola 6

Dynamika hmotného bodu

Newtonovská mechanika vychází ze tří základních navzájem nezávislých pohybových zákonů (axiomů): zákon setrvačnosti, zákon síly a zákon akce a reakce. Uvedeme si znění těchto zákonů v současném pojetí spolu s jejich matematickým vyjádřením:

1. Těleso setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není přinuceno svůj pohybový stav změnit působením vnějších sil.

$$F = 0 \Rightarrow v = konst.$$

2. Časová změna hybnosti tělesa se rovná síle, která na něj působí.

$$\frac{\mathrm{d} \boldsymbol{p}}{\mathrm{d} t} = \boldsymbol{F}$$
.

3. Jestliže dvě tělesa 1,2 na sebe vzájemně působí silami, pak jsou tyto síly stejně velké, ale opačně orientované, leží na společné silové přímce a v každém okamžiku platí

$$F_{12} = -F_{21}$$
.

Tradičně se jedna ze sil (libovolná) nazývá akce, druhá reakce.

Zákon setrvačnosti nám říká, že setrvačnost (vlastnost setrvávat ve svém pohybovém stavu) představuje jednu ze základních vlastností tělesa. Dále definuje základní pohybový stav tělesa a příčinu změny pohybového stavu (tj. změnu vektoru rychlosti) tělesa, která se nazývá (vnější) sílou. Jinými slovy můžeme říct, že uvažované těleso mění svůj pohybový stav pouze interakcí (vzájemným působením) s okolními objekty, přičemž kvantitativně tuto interakci popisujeme pomocí fyzikální veličiny, kterou nazýváme síla.

Jestliže na těleso nepodrobené vazbám (není omezeno v pohybu) nepůsobí síla, nebo na ně působí více sil, které mají nulovou výslednici, nazýváme takové těleso *volným tělesem* a jeho pohyb *setrvačným* (stejným způsobem je možné definovat volný hmotný bod).

Newtonova formulace zákona setrvačnosti platí přesně vzato jen pro hmotný bod, popř. hmotný střed tělesa, tj. zmiňuje jen pohyb translační (posuvný). Uvedená formulace zákona se nezmiňuje o rotačním (otáčivém) pohybu. Aby formulace zákona byla úplná, je nutné ji doplnit o tvrzení, že se zachovává i velikost a směr rychlosti otáčení. Vzhledem k tomu, že se v rámci této kapitoly věnujeme dynamice hmotného bodu, můžeme se s Newtonovou formulací spokojit.

Z rozboru zákona setrvačnosti vyplývá otázka ohledně vztažné soustavy, vůči které se určuje

¹Moderním tvarem je míněno, že se nejedná o doslovný překlad zákonů, jak je Newton publikoval ve svých Principiích.

stav klidu nebo pohybu. Zákon setrvačnosti platí ve vztažné soustavě, v níž se těleso, na které nepůsobí žádné síly (volné těleso), nachází v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, neboli platí v souřadnicové soustavě, v níž platí. Odtud vyplývá existenční význam zákona setrvačnosti, který může být přeformulován do následujícího moderního znění:

Existuje vztažná soustava, v níž se volné těleso pohybuje beze změny rychlosti. Takováto soustava se nazývá inerciální vztažná soustava.

Je-li jedna vztažná soustava inerciální, jsou inerciální všechny vztažné soustavy, které jsou vůči ní v klidu nebo se pohybují rovnoměrně přímočaře.

Díky tomu, že první pohybový zákon vlastně představuje teorém o existenci inerciální vztažné soustavy, nelze tento zákon považovat za důsledek druhého pohybového zákona, ve kterém položíme $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

K určení vztažné soustavy potřebujeme tři hmotné body, které neleží na stejné přímce. V případě, že tyto tři hmotné body budou volné², potom zřejmě budou představovat inerciální vztažnou soustavu. Spojíme-li s touto inerciální vztažnou soustavou zvolenou souřadnicovou soustavu, pak tato souřadnicová soustava bude inerciální vztažnou souřadnicovou soustavou. Bohužel, žádnou inerciální vztažnou soustavu neznáme, a tak se musíme spokojit se soustavami, které můžeme pokládat za přibližně inerciální. Protože všechny známé interakce těles slábnou s jejich vzájemnou vzdáleností, považují se za téměř volné hmotné body objekty, které jsou od sebe velmi hodně vzdáleny³. Za velmi vzdálené objekty můžeme považovat např. stálice naší galaxie, jejichž průměrná vzdálenost činí $\sim 10^{13}$ km. Tyto stálice můžeme s vysokou přesností považovat za volné hmotné body. Souřadnicovou soustavu, která má počátek ve středu hmotnosti naší sluneční soustavy a její dvě osy směřují ke stálicím, pokládáme za téměř inerciální a nazýváme ji Galileiho soustavou. Často lze přijmout s dostačující přesností za inerciální i soustavu pevně spojenou se Zemí. Tuto soustavu nazýváme laboratorní soustavou.

V Newtonových pohybových zákonech vystupuje síla jako základní pojem, který však těmito zákony nemůže být definován. Proto je potřeba definovat sílu nezávisle zákonem silového působení (interakce) mezi hmotnými body (tělesy). Hybnost \boldsymbol{p} definoval Newton jako součin hmotnosti m a okamžité rychlosti tělesa \boldsymbol{v} , tj. $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$. Potom na základě zákona síly můžeme psát, že

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.$$
 (6.1)

Jelikož v klasické mechanice považujeme hmotnost m za nezávislou na pohybovém stavu tělesa⁴ (m = konst.), můžeme rovnost (6.1) upravit do následujícího tvaru

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\mathbf{a}.$$
 (6.2)

Ze vztahu (6.2) je patrné, že síla je příčinou zrychlení (zrychleného pohybu) uvažovaného tělesa a má s ním stejný směr. To nám dovoluje přeformulovat zákon síly následujícím způsobem:

Zrychlení je přímo úměrné působící síle, má s ní stejný směr a je nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \ . \tag{6.3}$$

²Volný hmotný bod je hmotný bod, na který nepůsobí vnější síly a který není podroben vazbám (není omezen ve svém pohybu).

³Tyto objekty pak s ohledem na jejich vzdálenost můžeme považovat za hmotné body.

⁴Hmotnost se nemění s časem, tedy je nezávislá na čase.

Protože hmotnost m = konst., pak poměr $m = |\mathbf{F}|/|\mathbf{a}| = F/a = konst.$, tedy poměr velikosti síly a velikosti zrychlení je konstantní.

Pro úplné vybudování mechaniky je třeba přidat ještě axiom (zákon) o nezávislosti silového působení neboli princip superpozice:

Působí-li na hmotný bod (těleso) současně více sil, je výsledné zrychlení rovno vektorovému součtu zrychlení, udělovaných hmotnému bodu (tělesu) jednotlivými silami,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\sum_{i} \mathbf{F}_{i}}{m} = \sum_{i} \frac{\mathbf{F}_{i}}{m} = \sum_{i} \mathbf{a}_{i}. \tag{6.4}$$

Hmotnost tělesa budeme chápat jako skalární fyzikální veličinu, jejíž hodnota vyjadřuje míru odporu ("neochoty") tohoto tělesa ke změně svého pohybového stavu. Takže čím je větší hmotnost tělesa, tím klade větší odpor ke změně svého pohybového stavu. Odtud vyplývá, že chceme-li zajistit dané zrychlení (změnu pohybového stavu) tělesa, pak u těles o velké hmotnosti bude k tomuto zapotřebí větší síly, než by tomu bylo u tělesa s hmotností menší. Jinými slovy můžeme říci, že hmotnost je mírou setrvačných vlastností tělesa. Každé těleso, na které působíme silou, potřebuje určitý čas, než změní svou rychlost o danou hodnotu. Působíme-li silou dlouhou dobu, pak těleso "ochotně" změní svou rychlost i vlivem malé síly. Chceme-li docílit změny rychlosti v krátkém čase, "brání se" těleso této změně ohromnou silou. Tuto skutečnost je možné demonstrovat tak, že těžké těleso, k němuž je připevněn provázek, položíme na hladkou vodorovnou podložku. Trneme-li prudce provázkem, provázek se přetrhne. Táhneme-li provázek malou silou, těleso tím uvedeme do pohybu, aniž by se provázek přetrhl.

Hmotnost, která je mírou setrvačných vlastností tělesa, budeme nazývat setrvačnou hmotností a značíme ji m_s . Setrvačnou hmotnost určíme například tak, že jak na referenční, tak na měřené těleso budeme definovaným způsobem působit stejnou silou. Referenční těleso se bude pohybovat se zrychlením a_0 , kdežto měřené těleso se zrychlením a_X . Označíme-li setrvačnou hmotnost referenčního tělesa m_{s0} a měřenou setrvačnou hmotnost tělesa m_{sX} , potom z důvodu působení stejné síly na obě tělesa můžeme ze vztahu (6.3) psát, že

$$m_{s0}a_0 = m_{sX}a_X {.} {(6.5)}$$

Odtud pak určíme setrvačnou hmotnost tělesa jako

$$m_{sX} = \frac{a_0}{a_X} m_{s0} . (6.6)$$

Ze vztahu (6.6) je vidět, že setrvačnou hmotnost určíme měřením zrychlení.

Důležitou experimentální skutečností je, že zrychlení při volném pádu těles je pro všechna tělesa v daném místě stejné. Toto zrychlení zpravidla značíme g a nazýváme ho tíhovým zrychlením. Obecně při každém pohybu v okolí Země bude na těleso působit tíhová síla, kterou nazýváme tíhou (dříve se říkalo vahou) a budeme ji označovat symbolem G. Pro tíhu (tíhovou sílu) můžeme tedy psát

$$\mathbf{G} = m_t \mathbf{g} \,, \tag{6.7}$$

kde m_t je tíhová hmotnost.

Tíhovou hmotnost lze stanovit poměrem velikostí tíhových sil působících na referenční těleso (G_0) a na těleso, pro kterého tíhovou hmotnost chceme určit (G_X)

$$m_{tX} = m_{t0} \frac{G_X}{G_0} \,, \tag{6.8}$$

 $^{^5{\}rm V}$ předchozím textu značíme hmotnost standardně m,i když s ohledem na tento text by měla být značena $m_s.$

kde m_{t0} je tíhová hmotnost referenčního tělesa.

Tíhovou hmotnost však běžně určujeme vážením, např. pomocí rovnoramenné váhy, na jejíž jednu misku položíme těleso, které chceme vážit, a na druhou misku klademe referenční tělíska (závaží) známých hmotností. Jakmile dosáhneme rovnováhy, jsou tíhové hmotnosti misek vyrovnány a známe tím i tíhovou hmotnost tělesa m_t .

Rovnost tíhových hmotností dvou různých těles určíme tedy vážením. Rovnost dvou setrvačných hmotností se projevuje tím, že stejně veliké síly jim udělují stejné velké zrychlení. Otázkou je, zda dvě tělesa, jedno např. olověné a druhé železné, která mají stejnou tíhovou hmotnost, budou mít stejné i hmotnosti setrvačné, tj. při působení stejných sil by nabývaly stejných zrychlení. Experimentálně bylo ukázáno, že různá tělesa o stejných tíhových hmotnostech, mají i stejné setrvačné hmotnosti. Takže byla zjištěna skutečnost, že z rovnosti tíhových hmotností plyne rovnost jejich hmotností setrvačných a naopak, tedy

$$m_{t1} = m_{t2} \Leftrightarrow m_{s1} = m_{s2} . \tag{6.9}$$

Vydělíme-li prvou rovnici rovnicí druhou, dostaneme

$$\frac{m_{s1}}{m_{t1}} = \frac{m_{s2}}{m_{t2}} \ . \tag{6.10}$$

Poměr hmotnosti tíhové a setrvačné téhož tělesa je pro všechna tělesa stejný. Závisí jen na volbě jednotek, v nichž tíhovou a setrvačnou hmotnost měříme. Měříme-li obě hmotnosti ve stejných jednotkách, je tento poměr roven jedné⁶. Pak hmotnost setrvačná každého tělesa je rovna jeho hmotnosti tíhové. Tento zajímavý výsledek je z hlediska Newtonovy mechaniky experimentální skutečností, avšak v Einsteinově teorii gravitace představuje základní princip, podle kterého tíhové a setrvačné vlastnosti jsou projevem jedné a téže fyzikální veličiny - hmotnosti. V dnešní době má tedy otázka existence jakoby dvou různých fyzikálních veličin - hmotnosti setrvačné a hmotnosti tíhové - jen historický význam. V dalším textu budeme proto hovořit jen o hmotnosti a značit ji budeme m.

Hmotnost udáváme v kilogramech, jejichž zkratkou je **kg**. Jelikož síla představuje významnou fyzikální veličinu, tak má i svoji jednotku a tou je *newton*, jehož zkratkou je **N**, N=kg.m.s⁻². Ze vztahu (6.3) přímo vyplývá, že těleso má hmotnost 1 kg, když mu síla 1 N uděluje zrychlení 1 m.s⁻².

Je třeba zdůraznit, že 1. a 2. pohybový zákon platí pouze v inerciální vztažné soustavě. Platnost třetího pohybového zákona však není vázána pouze na inerciální vztažné soustavy. Třetí pohybový zákon umožňuje přechod od dynamiky hmotného bodu k dynamice soustavy hmotných bodů. Z třetího pohybového zákona vyplývá, že součet sil akce a reakce je vždy roven nulovému vektoru. Je však nutné si uvědomit, že tyto síly působí na různá tělesa: \mathbf{F}_{12} označuje sílu, kterou působí první těleso na těleso druhé a \mathbf{F}_{21} je síla, kterou působí druhé těleso na těleso první, a nelze je proto sečíst. Skládat lze totiž jen síly působící na stejné těleso.

6.1 Základní úlohy dynamiky

Úlohy, se kterými se v dynamice hmotného bodu setkáváme, můžeme rozdělit do dvou skupin.

1. První základní úloha mechaniky Jedná se o úlohu, která z daného popisu pohybu, tj. kinematické rovnice hmotného bodu $\mathbf{r}(t)$ nebo $\mathbf{v}(t)$, mají určit působící sílu. Působící sílu získáme z 2. pohybového zákona tak, že vynásobíme zrychlení hmotného bodu jeho hmotností

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} , \qquad (6.11)$$

 $^{^6}$ Nejnovější měření dosáhla při ověřování rovnosti setrvačné a tíhové hmotnosti hodnoty 1 ± 10^{-12} .

přičemž zrychlení získáme z dané kinematické rovnice uvážením rovnosti

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} \,. \tag{6.12}$$

2. Druhá základní úloha mechaniky

Jedná se o úlohu, která má z daných sil působících na hmotný bod určit průběh pohybu, tj. najít kinematické pohybové rovnice hmotného bodu ($\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{v}(t)$). K vyřešení této úlohy je nutné řešit rovnici, která je matematickým vyjádřením druhého pohybového zákona. Tato rovnice má následující tvar

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) , \qquad (6.13)$$

kde síla je obecně funkcí času, polohy a rychlosti. Tato rovnice se nazývá pohybová rovnice ve vektorovém tvaru. K tomu, abychom mohli řešit vektorovou diferenciální rovnici druhého řádu (6.13), musíme navíc znát počáteční podmínky souřadnic $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ a rychlosti $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$. Chceme-li řešit tuto vektorovou diferenciální rovnici, pak ji zpravidla řešíme pro jednotlivé složky⁷, tj. vektorová diferenciální rovnice přejde v soustavu tří skalární diferenciálních rovnic. V kartézkých souřadnicích můžeme vyjádřit ve složkovém tvaru druhý pohybový zákon jako

$$ma_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x\left(t, x, y, z, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) , \tag{6.14}$$

$$ma_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y\left(t, x, y, z, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) , \tag{6.15}$$

$$ma_z = m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z\left(t, x, y, z, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) . \tag{6.16}$$

Rovnice (6.14)-(6.16) se nazývají *pohybové rovnice ve složkovém tvaru*. Pro řešení pohybových rovnic ve složkovém tvaru je nutné znát i počáteční podmínky v tomto tvaru

$$x(t_0) = x_0 , \quad v_x(t_0) = v_{x0} ,$$
 (6.17)

$$y(t_0) = y_0 , \quad v_y(t_0) = v_{y0} ,$$
 (6.18)

$$z(t_0) = z_0 , \quad v_z(t_0) = v_{z0} .$$
 (6.19)

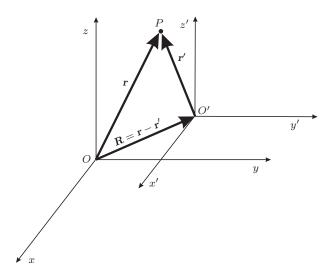
6.2 Galileiho princip relativity a Galileiho transformace

Uvažujme dvě souřadnicové kartézské soustavy, které se vůči sobě pohybují, situace je zachycena na obrázku 6.1. Nechť hmotný bod P o hmotnosti m má v uvažovaných souřadnicových soustavách polohový vektor \mathbf{r} , resp. \mathbf{r}' . Napíšeme pohybové rovnice hmotného bodu pro obě uvažované soustavy

$$\mathbf{F} = m \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} \,, \tag{6.20}$$

$$\mathbf{F'} = m \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r'}}{\mathrm{d}t^2} \ . \tag{6.21}$$

⁷V případě, že síla je konstantní, je možné řešit pohybovou rovnici rovnou ve vektorovém tvaru.



Obrázek 6.1: Polohové vektory bodu P v nečárkované a čárkované kartézské soustavě.

Pro rozdíl sil dostaneme, že

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}' = m \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = m \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2}.$$
 (6.22)

Uvážíme-li, že $m \neq 0$, potom rozdíl sil v rovnosti (6.22) bude nulový jen za předpokladu, že

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{0} \quad \text{neboli} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{konst.} = \mathbf{v}_R. \tag{6.23}$$

Odtud vyplývá, že síly jsou si rovny jen v případě, že se obě souřadnicové soustavy vůči sobě pohybují konstantní rychlostí \mathbf{v}_R , tj. nemění se jak její velikost, tak její orientace. Předpokládáme-li, že nečárkovaná souřadnicová soustava je soustavou inerciální a čárkovaná soustava se vůči nečárkované pohybuje konstantní rychlostí, jak co do orientace, tak rychlosti, potom je i čárkovaná soustava soustavou inerciální. Tato skutečnost se dá zobecnit a můžeme tvrdit, že všechny soustavy, které se pohybují rovnoměrně přímočaře vzhledem k inerciální vztažné soustavě, jsou rovněž inerciálními vztažnými soustavami.

Na základě výše uvedené rovnosti sil v inerciálních vztažných soustavách tedy platí, že pohybové rovnice mají stejný tvar a že síly působící na vyšetřovaný hmotný bod jsou stejné. Odtud je možné napsat tzv. Galileiho (klasický) princip relativity:

Všechny inerciální vztažné soustavy jsou pro popis mechanických dějů rovnocenné a žádnými mechanickými experimenty nelze změřit absolutní pohyb dané inerciální soustavy.

Uvažujme dvě inerciální vztažné souřadnicové soustavy, přičemž předpokládáme, že se čárkovaná soustava vůči té nečárkované pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \mathbf{v}_R , opět viz obr. 6.1. Jelikož jeden ze základních postulátů klasické mechaniky je předpoklad absolutního času, pak pro obě soustavy bude platit, že t=t'. Pro polohové vektory v uvažovaných soustavách dostáváme následující vztah

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_R t \ . \tag{6.24}$$

Derivací podle času, s uvážením, že $\mathbf{v}_R = \mathbf{konst}$, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} + \mathbf{v}_R \tag{6.25}$$

neboli

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_R . \tag{6.26}$$

Následující derivací podle času 8 rovnice (6.26) obdržíme rovnost

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t} \tag{6.27}$$

neboli

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' \ . \tag{6.28}$$

Nalezené transformační vztahy můžeme napsat pohromadě

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_R t$$
, $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_R$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, $t = t'$. (6.29)

Uvedené transformační vztahy nazýváme Galileiho transformace.

⁸Rychlost $\mathbf{v}_R = \mathbf{konst}$. je konstantní co do směru i rychlosti, potom její časová derivace je rovna nulovému vektoru.

Kapitola 7

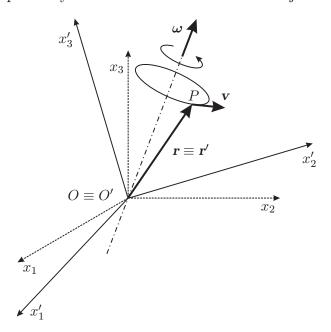
Neinerciální vztažné soustavy

Neinerciální vztažná soustava je kterákoli vztažná soustava \mathcal{S}' , jejíž počátek O' se vzhledem k libovolně zvolené inerciální vztažné soustavě \mathcal{S} pohybuje s nenulovým zrychlení nebo jejíž osy souřadnic se vzhledem k osám inerciální soustavy \mathcal{S} otáčejí, popř. koná-li soustava \mathcal{S}' v vzhledem k soustavě \mathcal{S} oba tyto pohyby. V neinerciální soustavě neplatí 1. a 2. Newtonův pohybový zákon.

7.1 Rotující neinerciální soustava

Uvažujme vztažnou souřadnicovou soustavu \mathcal{S}' (čárkovaná) rotující vůči inerciální vztažné souřadnicové soustavě \mathcal{S} (nečárkovaná). Předpokládejme, že soustava \mathcal{S}' vůči soustavě \mathcal{S} rotuje¹ s okamžitou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. Souřadnicové soustavy \mathcal{S} , \mathcal{S}' nechť mají společný počátek, viz obrázek 7.1. Je nutné si uvědomit, že se během otáčení čárkované soustavy s časem mění orientace jejích os x_1' , x_2' a x_3' .

Vzhledem k tomu, že polohový vektor v obou soustavách ukazuje na tentýž bod P, který se



Obrázek 7.1: Rotace čárkované soustavy vůči inerciální nečárkované soustavě s okamžitou úhlovou rychlostí ω .

z pohledu inerciální vztažné soustavy pohybuje po kružnici, musí být tyto vektory totožné,

¹Pro snazší představu si představme, že čárkovaná soustava je pevně spojena s tělesem, které rotuje kolem okamžité osy otáčení.

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}' \,, \tag{7.1}$$

takže v další části textu, nebude-li uvedeno jinak, budeme označovat tento polohový vektor bez čárky.

V případě, že by vektor \mathbf{r} byl vzhledem k rotující (čárkované) soustavě konstantní, pak by v inerciální (nečárkované) soustavě byla jeho časová změna dána vztahem pro obvodovou rychlost hmotného bodu obíhajícího po kružnici (5.67), neboť

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}, \qquad (7.2)$$

kde r_{\parallel} je rovnoběžná složka vektoru r s osou rotace (vektorový součin s vektorem úhlové rychlosti ω je tedy roven nulovému vektoru) a r_{\perp} je kolmá složka vektoru r na osu rotace soustavy, která odpovídá polohovému vektoru ve zmiňovaném vztahu (5.67).

Avšak v obecném případě se vektor \boldsymbol{r} může s časem měnit vůči rotující (čárkované) soustavě, což označíme následujícím způsobem

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathrm{d}'\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \,, \tag{7.3}$$

kde čárka v pravé části rovnice značí, že se jedná o časovou změnu vůči čárkované soustavě. Potom pro celkovou časovou změnu polohového vektoru v nečárkované můžeme s přihlédnutím ke vztahům (7.2) a (7.3) psát, že

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \,. \tag{7.4}$$

Rovnici (7.4) můžeme přepsat do následujícího tvaru

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \,, \tag{7.5}$$

kde

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

nazýváme absolutní rychlostí bodu P vzhledem k inerciální soustavě,

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathrm{d}' \mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

označujeme jako relativní rychlost bodu P vzhledem k neinerciální (rotující) soustavě a $\mathbf{v}_u = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ nazýváme unášivou rychlostí, jež je dána vlastní rotací neinerciální soustavy.

Ke vztahu (7.4) můžeme dospět i následujícím způsobem.

Opět předpokládejme, že inerciální i rotující (neinerciální) soustava mají společný počátek. Nechť neinerciální soustava rotuje s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Použijeme-li rovnosti (7.1), pak můžeme pro časovou derivaci polohového vektoru

$$\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}' = x_1' \mathbf{e}_1' + x_2' \mathbf{e}_2' + x_3' \mathbf{e}_3' = \sum_{i=1}^3 x_i' \mathbf{e}_i'$$

psát, že

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i=1}^{3} x_i' \mathbf{e}_i' \right) = \sum_{i=1}^{3} (\dot{x}_i' \mathbf{e}_i' + x_i' \dot{\mathbf{e}}_i') = \frac{\mathrm{d}'\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{3} x_i' \dot{\mathbf{e}}_i' , \qquad (7.6)$$

kde první člen na pravé straně této rovnosti představuje relativní rychlost bodu P a poslední člen na pravé straně rovnosti vyjadřuje skutečnost, že s časem se mění orientace os, resp. souřadnicových vektorů, rotující soustavy.

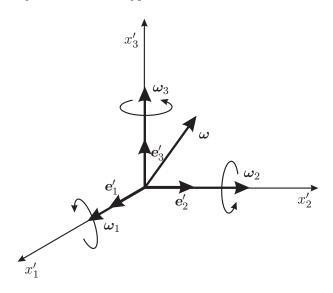
Rotační pohyb neinerciální soustavy s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ můžeme rozložit na tři rotační pohyby kolem jejich souřadnicových os, tj.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1' + \omega_2 \mathbf{e}_2' + \omega_3 \mathbf{e}_3' = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3, \qquad (7.7)$$

viz obrázek 7.2. Z tohoto obrázku je patrné, že např. při rotaci kolem osy x_2' s úhlovou rychlostí ω_2 budou rotovat souřadnicové vektory \mathbf{e}_1' a \mathbf{e}_2' . Zaměříme-li se při této rotaci na vyšetřování časově změny orientace souřadnicového vektoru \mathbf{e}_1' , můžeme tuto situaci znázornit způsobem uvedeným na obrázku 7.3. Vidíme, že obrázek je analogický s obrázkem 5.7. Díky této analogii² můžeme k vyjádření okamžité časové změny vektoru \mathbf{e}_1' použít vztahu (5.67), tedy

$$\dot{\mathbf{e}}_1' = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_1' = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1' & \mathbf{e}_2' & \mathbf{e}_3' \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\omega_2 \mathbf{e}_3' . \tag{7.8}$$

Podobným způsobem bychom mohli vyjádřit okamžitou časovou změnu vektoru e'_1 díky



Obrázek 7.2: Rozklad rotace s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ na tři rotace kolem jednotlivých souřadnicových os s úhlovými rychlostmi odpovídajícími jejím složkám.

rotaci kolem osy x_3' , kdy bychom dostali, tj.

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{1}' = \boldsymbol{\omega}_{2} \times \boldsymbol{e}_{1}' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{1}' & \boldsymbol{e}_{2}' & \boldsymbol{e}_{3}' \\ 0 & 0 & \omega_{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_{3} \boldsymbol{e}_{2}'.$$
 (7.9)

Na základě výsledků (7.8) a (7.9) můžeme zapsat výslednou časovou změnu vektoru \mathbf{e}_1' jako

$$\dot{\mathbf{e}}_{1}' = \boldsymbol{\omega}_{2} \times \mathbf{e}_{1}' + \boldsymbol{\omega}_{2} \times \mathbf{e}_{1}' = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{1}' & \mathbf{e}_{2}' & \mathbf{e}_{3}' \\ 0 & \omega_{2} & \omega_{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_{3} \mathbf{e}_{2}' - \omega_{2} \mathbf{e}_{3}'.$$
 (7.10)

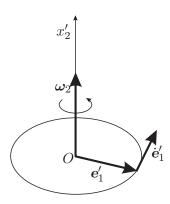
K určení časových změn zbývajících souřadnicových vektorů budeme postupovat analogicky, čímž dostaneme, že

$$\dot{\mathbf{e}}_2' = -\omega_3 \mathbf{e}_1' + \omega_1 \mathbf{e}_3' , \qquad (7.11)$$

 $^{^2}$ Při této analogii ztotožníme vektor e_1' s vektorem r a časovou derivaci \dot{e}_1' s obvodovou rychlostí $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$.

$$\dot{\mathbf{e}}_3' = \omega_2 \mathbf{e}_1' - \omega_1 \mathbf{e}_2' . \tag{7.12}$$

Výsledky (7.10), (7.11) a (7.12) můžeme zapsat jako



Obrázek 7.3: Obíhání vektoru e'_1 kolem osy x'_2 s úhlovou rychlostí ω_2 .

$$\dot{\mathbf{e}}_i' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i' \ . \tag{7.13}$$

Pomocí vztahu (7.13) je možné vyjádřit rovnost (7.6) následujícím způsobem

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\omega} \times x_{i}' \mathbf{e}_{i}' = \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}'\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{3} x_{i}' \mathbf{e}_{i}' = \frac{\mathrm{d}'\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$
 (7.14)

Tento vztah je identický se vztahem (7.4).

Výsledek zachycený v rovnici (7.4) se dá zobecnit tak, že pro vyjádření časové změny libovolné vektorové veličiny v inerciální soustavě je možné použít následující operátorové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\cdot}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\cdot}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \cdot \quad . \tag{7.15}$$

Jinými slovy, na vektor \mathbf{r} je možné pohlížet jako na geometrický model, jelikož bod P, na který ukazuje, se může nacházet na libovolném místě, takže polohový vektor \mathbf{r} může nabývat libovolné velikosti a orientace, a tudíž tímto může reprezentovat jakýkoliv vektor. Vzhledem k této skutečnosti musí platit pro libovolný vektor stejný transformační vzorec (7.4), který platí pro vektor \mathbf{r} . Z tohoto důvodu přepíšeme transformační vztah (7.4) jako

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} , \qquad (7.16)$$

kde \boldsymbol{A} představuje libovolný vektor.

Platnost transformačního vztahu je možné ukázat následujícím způsobem. Uvažujme libovolný vektor \mathbf{A} , který si vyjádříme v rotující soustavě jako

$$\mathbf{A} = A_1' \mathbf{e}_1' + A_2' \mathbf{e}_2' + A_3' \mathbf{e}_3'. \tag{7.17}$$

Časová změna vektoru A vzhledem k rotující soustavě je dána vztahem

$$\frac{\mathrm{d}'\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \dot{A}_1'\mathbf{e}_1' + \dot{A}_2'\mathbf{e}_2' + \dot{A}_3'\mathbf{e}_3'. \tag{7.18}$$

Časová změna vektoru \boldsymbol{A} vzhledem k inerciální soustavě může být vyjádřena jako

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(A_1'\mathbf{e}_1' + A_2'\mathbf{e}_2' + A_3'\mathbf{e}_3') = \frac{d(A_1'\mathbf{e}_1')}{dt} + \frac{d(A_2'\mathbf{e}_2')}{dt} + \frac{d(A_3'\mathbf{e}_3')}{dt} = (\dot{A}_1'\mathbf{e}_1' + \dot{A}_2'\mathbf{e}_2' + \dot{A}_3'\mathbf{e}_3') + A_1'\dot{\mathbf{e}}_1' + A_2'\dot{\mathbf{e}}_2' + A_3'\dot{\mathbf{e}}_3' . \quad (7.19)$$

S ohledem na vztahy (7.13), (7.18) a (7.17) můžeme přepsat poslední dva členy rovnosti (7.19) a následně upravit tímto způsobem

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + A'_{1}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_{1}) + A'_{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_{2}) + A'_{3}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_{3}) = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (A'_{1}\mathbf{e}'_{1} + A'_{2}\mathbf{e}'_{2} + A'_{3}\mathbf{e}'_{3}) = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}, \quad (7.20)$$

čímž jsme dospěli ke vztahu shodnému se vztahem (7.16).

Q.E.D.

7.1.1 Pohybová rovnice pro rotující soustavu a setrvačné síly

Protože vztah (7.16) platí pro libovolný vektor, musí tedy platit i pro vektor rychlosti

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \,. \tag{7.21}$$

Levá strana rovnice (7.21) představuje zrychlení **a** bodu P vzhledem k inerciální soustavě. Za rychlost **v** na pravé straně rovnice (7.21) dosadíme ze vztahu (7.5), čímž dostáváme

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}'(\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \tag{7.22}$$

Provedeme časovou derivaci prvního členu na pravé straně rovnice (7.22) a zároveň roznásobíme závorku u druhého členu na pravé straně téže rovnice

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}'\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}'\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}}_{=\mathbf{v}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) . \tag{7.23}$$

První člen na pravé straně rovnice (7.23) reprezentuje zrychlení bodu P vzhledem k rotující soustavě \mathbf{a}' . Časová změna vektoru úhlové rychlosti (úhlové zrychlení) v rotující soustavě

$$\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

je shodná s časovou změnou vektoru úhlové rychlosti v soustavě inerciální, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením tohoto vektoru do vztahu (7.16)

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\omega}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\omega \times \omega}_{=0} = \frac{\mathrm{d}'\omega}{\mathrm{d}t} = \varepsilon \ . \tag{7.24}$$

Dosazením úhlové rychlosti (7.24) do rovnice (7.23) dostáváme, že

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) . \tag{7.25}$$

S ohledem na rovnost (7.25) bude mít pohybová rovnice hmotného bodu o hmotnosti m pro inerciální soustavu $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ následující tvar

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}' + m\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \tag{7.26}$$

Z pohybové rovnice pro inerciální vztažnou soustavu si můžeme snadno vyjádřit pohybovou rovnici pro neinerciální (rotující) soustavu

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \qquad (7.27)$$

kterou můžeme přepsat do následujícího tvaru

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_O , \qquad (7.28)$$

kde F je reálná (skutečná) síla působící na hmotný bod, zatímco zbývající tři síly představují síly setrvačné, jež zajišťují jakousi "korekci" pohybové rovnice, aby mohla platit pro uvažovanou neinerciální soustavu. Setrvačné síly se někdy označují jako síly nepravé nebo také zdánlivé (kinematické, fiktivní, neskutečné), což souvisí s faktem, že tyto síly jsou jen kinematickým důsledkem rotace vztažné soustavy a ne výsledkem silového působení reálného fyzikálního objektu, takže k nim neexistuje příslušná silová reakce. Na rozdíl od sil setrvačných se změnou vztažné soustavy, bez ohledu jestli jde o soustavu inerciální či neinerciální, se pravé síly nemění. Setrvačné síly se objevují jen v neinerciálních vztažných soustavách, takže přechodem od soustavy neinerciální k soustavě inerciální tyto síly vymizí.

První ze setrvačných sil je tzv. Eulerova síla

$$\mathbf{F}_E = m\mathbf{a}_E = -m\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \,, \tag{7.29}$$

kde $\mathbf{a}_E = -\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ je Eulerovo zrychlení.

Druhá síla je tzv. Coriolisova síla

$$\mathbf{F}_C = m\mathbf{a}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' , \qquad (7.30)$$

kde $\mathbf{a}_C = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ je Coriolisovo zrychlení.

Poslední setrvačnou silou je tzv. odstředivá síla

$$\mathbf{F}_O = m\mathbf{a}_O = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) , \qquad (7.31)$$

kde $\mathbf{a}_O = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ je odstředivé zrychlení.

7.1.2 Odstředivá síla

K určení směru a velikosti odstředivého zrychlení vyjdeme z obrázku 7.4. Provedeme rozklad polohového vektoru do dvou složek $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}$, kde složka \mathbf{r}_{\perp} je kolmá k ose rotace, kdežto složka \mathbf{r}_{\parallel} je s ní rovnoběžná, viz obr. 7.4. Dosazením těchto složek do výrazu pro odstředivou sílu a po následné úpravě dostaneme

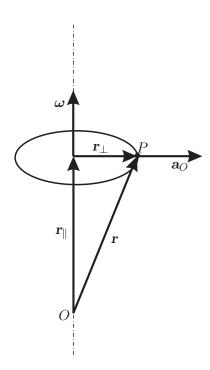
$$\mathbf{a}_{O} = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel})] = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}) - \boldsymbol{\omega} \times (\underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\parallel}}) = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}) = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}) + \mathbf{r}_{\perp} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}^{2} \mathbf{r}_{\perp}. \quad (7.32)$$

Z výsledku (7.32) je vidět, že odstředivé zrychlení je kolmé na okamžitou osu otáčení 3 (viz obr. 7.4) a má velikost, jež je dána součinem poloměru kružnice, kolem které bod P obíhá, a kvadrátu velikosti úhlové rychlosti.

Ze vztahu pro odstředivou sílu (7.31), resp. vztahu pro odstředivé zrychlení (7.32), je zřejmé, že tato síla působí na každý hmotný bod, i když se nepohybuje a tedy se s ní potkáme v každé rotující soustavě. Vztah pro odstředivé zrychlení je možné upravit na základě výsledku (7.32) a vztahu pro velikost unášivé rychlosti hmotného bodu $v_u = \omega r_{\perp}$ následujícím způsobem

$$\mathbf{a}_O = \omega^2 \mathbf{r}_\perp = \frac{v_u^2}{r_\perp} \mathbf{r}_\perp^0 \ . \tag{7.33}$$

 $^{^3}$ Vektor odstředivého zrychlení je orientován od středu kružnice, po které se pohybuje bod P, odtud je zřejmé pojmenování tohoto vektoru.



Obrázek 7.4: Uspořádání vektorů při určení velikosti a směru odstředivého zrychlení.

Vztah (7.33) připomíná vztah pro dostředivé zrychlení (5.72), avšak odstředivé se na první pohled liší svým směrem působení. Nutno je však připomenout skutečnost, že odstředivá síla $\mathbf{F}_O = m\mathbf{a}_O$ je silou setrvačnou, tudíž nemá původ v jiném fyzikálním objektu a objevuje se jen v rotujících soustavách. Naopak dostředivá síla $\mathbf{F}_D = m\mathbf{a}_D$ je silou pravou, takže má svůj původ v působení jiného fyzikálního objektu. Navíc dostředivá síla závisí na absolutní rychlosti hmotného bodu, na který působí, kdežto odstředivá síla závisí jen na velikosti unášivé rychlosti.

Vzhledem k tomu, že při používání pojmu odstředivá síla či odstředivé zrychlení dochází často k nesprávné interpretaci (mnohdy zapříčiněné nevhodným zavedením pojmů), a tak na názorném příkladu bude ukázáno, jak správně interpretovat síly, které se v něm objevují. K tomu, aby se hmotný bod pohyboval rovnoměrně po kružnici, musí na něj působit nějaká síla, nejčastěji vazbová (provázek, koleje apod.). Tato síla působí při rovnoměrném pohybu hmotného bodu do středu kružnice, a proto se nazývá dostředivá síla. Působí na uvažovaný hmotný bod. Pokládáme-li vazbovou dostředivou sílu za akci, pak reakcí k ní je síla, kterou působí hmotný bod na vazbu (provázek, kolej apod.). Někdy se tato síla nazývá odstředivou. Takže se pak např. konstatuje, že koleje poškodila odstředivá síla projíždějících vlaků nebo že ložisko vymlela odstředivá síla špatně vyváženého kola apod. Avšak tato síla je něco úplně jiného než výše vyložená (setrvačná) odstředivá síla:

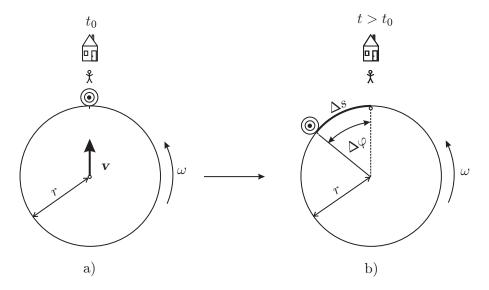
- Nová odstředivá síla působí na vazbu (závěs, kolej, apod.), zatímco setrvačná odstředivá síla působila na hmotný bod.
- 2. Nová odstředivá síla je ve vztahu akce reakce s dostředivou silou, nutící hmotný bod k pohybu po kružnici, zatímco setrvačná odstředivá síla nemá k sobě žádnou reakci.
- Nová odstředivá síla jakožto skutečná síla existuje při popisu v kterékoli vztažné soustavě, zatímco setrvačná odstředivá síla se vyskytuje výhradně při popisu v rotující, neinerciální soustavě.

Tři výše uvedené rozdíly jasně deklarují rozdíly mezi skutečnou a fiktivní setrvačnou silou.

7.1.3 Coriolisova síla

Coriolisova síla (7.30) závisí na rychlosti, se kterou se vzhledem k rotující soustavě hmotný bod pohybuje. Je-li hmotný bod v klidu anebo se pohybuje rovnoběžně s osou otáčení, Coriolisova síla na něj nepůsobí. Největší vliv má Coriolisova síla na pohyby kolmé k ose otáčení. Coriolisova síla je vždy kolmá na směr pohybu hmotného bodu, a tedy se jedná o sílu gyroskopickou.

Coriolisovu sílu je možné fyzikálně demonstrovat na následujícím příkladu. Uvažujme rotující disk s úhlovou rychlostí ω a o poloměru r, v jehož středu se nachází zařízení, které vystřelí kuličku rychlostí \mathbf{v} , tak aby zasáhla terč umístěný na okraji disku. Kulička, kterou reprezentujeme hmotným bodem, se bude tedy pohybovat k okraji rotujícího disku a my její pohyb budeme pozorovat jak z pozice pozorovatele, který se nachází v inerciální soustavě (mimo disk), tak z pozice pozorovatele, jenž se nachází ve středu rotujícího disku, tedy v neinerciální vztažné soustavě. Nejdříve se budeme věnovat pozorovateli, který se nachází v inerciální soustavě, viz obrázek 7.5. Na obrázku 7.5 a) je zachycena situace v počátečním čase t_0 . Díky tomu, že se disk otáčí úhlovou rychlostí ω , nezasáhne kulička terč. Z pohledu pozorovatele v inerciální soustavě se kulička pohybuje po přímce rychlostí v a v čase t dosáhne kraje disku, tj. r = vt, jak je zachyceno na obrázku 7.5 b). Za čas t se terč posunul o úsek Δs , jemuž



Obrázek 7.5: Pozorování pohybu kuličky z pohledu pozorovatele nacházejícího se v inerciální soustavě. Na obrázku je zachycena situace v počátečním čase t_0 a v čase dopadu t.

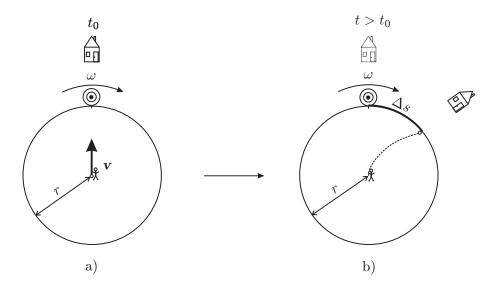
odpovídá středový úhel $\Delta \varphi$, takže platí

$$\Delta s = r\Delta \varphi = r\omega t = v\omega t^2 \,, \tag{7.34}$$

kde za poloměr bylo dosazeno r = vt.

Jinak pohyb kuličky vidí pozorovatel, který se nachází ve středu otáčejícího se disku. Tento pozorovatel je součástí neinerciální rotující vztažné soustavy. Pro tohoto pozorovatele se otáčí objekty mimo disk úhlovou rychlostí ω , avšak v opačném směru, než rotuje disk vzhledem k inerciální vztažné soustavě. Popsaná situace se nachází na obrázku 7.6 a). Pozorovatel v neinerciální soustavě samozřejmě rovněž pozoruje, že kulička nezasáhla terč. Jenže příčinu toho, že kulička, ač byla vystřelena přesně na terč, nezasáhla terč vidí z pohledu své soustavy jinak. Tento pozorovatel měl za to, že se kulička bude pohybovat rovnoměrně přímočaře, avšak vidí, že výsledný pohyb se děje po křivce⁴, viz obr. 7.6 b). Protože na základě zákona

⁴Dá se ukázat, že touto křivkou je spirála. Tato křivka je výsledkem současného působení Coriolisovy a odstředivé síly.



Obrázek 7.6: Pozorování pohybu kuličky z pohledu pozorovatele nacházejícího se v neinerciální soustavě. Na obrázku je zachycena situace v počátečním čase t_0 a v čase dopadu t.

setrvačnosti se těleso pohybuje rovnoměrně přímočaře, dokud není přinuceno vnější silou jinak, usoudí pozorovatel z neinerciální soustavy, že na kuličku (hmotný bod) musela působit nějaká síla. Složka této síly, která je kolmá ke směru pohybu, způsobila odklon kuličky od terče Δs . Je-li hmotnost kuličky m a označíme-li onu sílu působící na kuličku F_C , potom můžeme psát, že

$$\Delta s = \frac{1}{2} \frac{F_C}{m} t^2 \ . \tag{7.35}$$

Jelikož kulička pro oba pozorovatele musí dopadnout do stejného místa, potom i dráhové úseky (7.34) a (7.35) musí být stejné. Dáme-li pravé strany výrazů do rovnosti, pak dostaneme, že

$$v\omega t^2 = \frac{1}{2} \frac{F_C}{m} t^2 \ . \tag{7.36}$$

Porovnáním levé a pravé strany rovnice (7.36) je zřejmé, že síla F_C se musí rovnat následujícímu výrazu

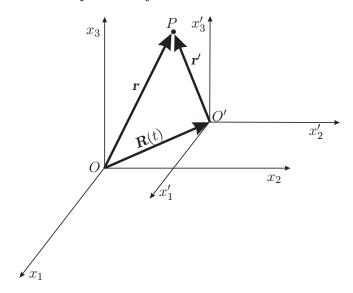
$$F_C = 2m\omega v , \qquad (7.37)$$

který je vyjádřením velikosti Coriolisovy síly (7.30) pro případ, že úhel mezi vektorem úhlové rychlosti ω a vektorem rychlosti v neinerciální soustavě je $\pi/2$. Vzhledem k tomu, že jak rychlost, tak síla jsou vektorové veličiny, je možné vztah (7.37) zobecnit zavedením vektoru úhlové rychlosti ω tak, že všechny tři veličiny budou tvořit pravotočivý systém, čímž dospějeme k výrazu (7.30). Tímto jsme na fyzikálně názornějším příkladu zavedli Coriolisovu sílu. Coriolisovu sílu můžeme snadno pocítit "na vlastní kůži", když se posadíme na otočnou židli. Nejdříve uvolněnou rukou nacvičme rychlý pohyb od kolenou směrem k našemu tělu. Potom židli roztočíme a nacvičeným pohybem se pokusíme trefit do čela. Pokud na samotný pohyb příliš nemyslíme, Coriolisova síla nám odkloní pohybující se ruku do boku, takže se do čela netrefíme.

7.2 Pohybová rovnice pro neinerciální translační soustavu

Mějme inerciální soustavu, kterou označíme jako nečárkovanou a dále soustavu čárkovanou, která se pohybuje obecným čistě translačním pohybem vůči soustavě nečárkované (viz obr.

7.7), takže čárkovaná soustava představuje obecně soustavu neinerciální. Počátek čárkované



Obrázek 7.7: Popis pohybu bodu P v inerciální a neinerciální vztažné soustavě.

soustavy má v nečárkované soustavě polohový vektor $\mathbf{R}(t)$, takže transformační vzorec pro polohové vektory je dán následujícím výrazem

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} \ . \tag{7.38}$$

Následnou derivací podle času dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} \tag{7.39}$$

neboli

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \,. \tag{7.40}$$

Provedeme-li další derivaci rovnice (7.40) podle času obdržíme rovnost

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} \tag{7.41}$$

neboli

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A} , \tag{7.42}$$

kde \boldsymbol{a} představuje zrychlení bodu P měřené v inerciální, tj. nečárkované soustavě, \boldsymbol{a}' je zrychlení bodu P v neinerciální (čárkované soustavě) a \boldsymbol{A} je translační zrychlení čárkované soustavy vůči soustavě nečárkované, které je zapříčiněno jejím nerovnoměrným přímočarým pohybem.

Pohybová rovnice hmotného bodu o hmotnosti m v inerciální soustavě má tvar

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$
,

kam po dosazení ze vztahu (7.42) dostáváme

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}' + m\mathbf{A} \ . \tag{7.43}$$

Z pohybové rovnice (7.43) můžeme snadno obdržet následují pohybovou rovnici pro neinerciální soustavu

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_S , \qquad (7.44)$$

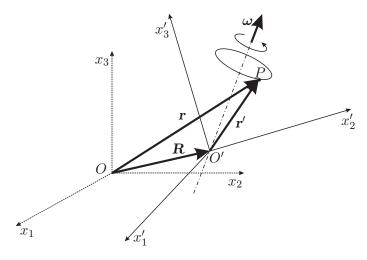
kde

$$\mathbf{F}_S = -m\mathbf{A} = -m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2} \tag{7.45}$$

reprezentuje setrvačnou sílu související se zrychleným translačním pohybem čárkované (neinerciální) soustavy.

7.3 Pohybová rovnice pro soustavu konající obecný pohyb

V předchozích dvou kapitolách byly odvozeny pohybové rovnice pro případ, kdy neinerciální soustava koná čistě rotační nebo čistě translační pohyb. Vzhledem k tomu, že je možné každý obecný pohyb rozložit na dva pohyby, a to pohyb rotační kolem okamžité osy otáčení a pohyb translační (viz kapitola věnovaná dynamice tuhých těles), potom je možné získat pohybovou rovnici neinerciální soustavy konající obecný pohyb sloučením pohybových rovnic pro výše vyšetřované dva pohyby neinerciálních soustav. Vzájemná poloha inerciální (nečárkované) souřadnicové soustavy a neinerciální (čárkované) soustavy konající obecný pohyb, tj. složený z pohybu translačního a rotačního, je zachycena na obrázku 7.8. V případě, že neinerciální



Obrázek 7.8: Vzájemná poloha inerciální (nečárkované) souřadnicové soustavy a neinerciální (čárkované) soustavy, která koná obecný pohyb.

soustava koná obecný pohyb, pak již neplatí, že polohové vektory v inerciální a neinerciální soustavě jsou totožné, a tedy vztah mezi vektorem v inerciální a neinerciální soustavě je dán následujícím výrazem

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} \,, \tag{7.46}$$

kde \mathbf{R} je polohový vektor počátku neinerciální soustavy vůči soustavě inerciální. Sloučením pohybových rovnic (7.28) a (7.44) tedy dostaneme pohybovou rovnici pro inerciální soustavu konající obecný pohyb

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_O , \qquad (7.47)$$

kterou můžeme s ohledem na vztah (7.46) případě rozepsat jako

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A} - m\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') . \tag{7.48}$$

resp.

$$m\frac{\mathrm{d}^{\prime 2}\mathbf{r}^{\prime}}{\mathrm{d}t^{2}} = \mathbf{F} - m\frac{\mathrm{d}^{2}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t^{2}} - m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}^{\prime} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}^{\prime}\mathbf{r}^{\prime}}{\mathrm{d}t} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^{\prime}). \tag{7.49}$$

7.4 Pohybová rovnice hmotného bodu pohybujícího se blízko nad zemským povrchem pro soustavu pevně spojenou s rotující Zemí

Předpokládejme, že Země koná pouze rotační pohyb kolem své osy, přičemž vektor úhlové rychlosti ω Země považujeme za konstantní, tj. d $\omega/dt = 0$. Dále Zemi považujeme za homo-

genní kouli o poloměru⁵ R a počátek inerciální soustavy umístíme do jejího středu. Počátek neinerciální soustavy se nachází na povrchu Země, přičemž jeho poloha je určena pouze dvěma souřadnicemi ϑ a φ , viz obr. 7.9. Neinerciální soustava tedy koná čistě rotační pohyb kolem osy a počátky inerciální a neinerciální soustavy nejsou totožné. V tomto případě je možné použít k popisu hmotného bodu vůči rotující soustavě pohybovou rovnici (7.49) s tím, že polohový vektor \mathbf{R} ukazující na počátek neinerciální soustavy nemění s časem svoji velikost, ale jen orientaci⁶, jelikož počátek O' neinerciální soustavy obíhá po kružnici. Ukazuje-li polohový vektor \mathbf{r}' na bod P, který by byl nepohyblivý vzhledem k neinerciální soustavě, bude obíhat se stejným vektorem úhlové rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ jako koncový bod polohového vektoru \mathbf{R} , viz obr.7.9. Vzhledem k tomu, že časová změna polohového vektoru \mathbf{R} ve vztahu (7.49) je časová změna pozorovaná v inerciální vztažné soustavě, vyjdeme pro vyjádření této změny ze vztahu (7.2), který pro náš účel přepíšeme jako

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \,. \tag{7.50}$$

Derivací této rovnice podle času s uvážením d $\omega/dt = 0$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} \,. \tag{7.51}$$

Dosadíme-li do posledního členu na pravé straně rovnice (7.51) ze vztahu (7.50), pak dostáváme, že

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) . \tag{7.52}$$

Dosazením vztahu (7.52) do rovnice (7.49), opět s uvážením d $\omega/dt = 0$, dospějeme k následující pohybové rovnici

$$m\frac{\mathrm{d}^{\prime 2}\mathbf{r}^{\prime}}{\mathrm{d}t^{2}} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}^{\prime}\mathbf{r}^{\prime}}{\mathrm{d}t} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^{\prime}).$$
 (7.53)

Jestliže jedinou reálnou silou, která na hmotný bod o hmotnosti m působí, je gravitační síla, jež má v inerciální soustavě tvar

$$\mathbf{F}_g = -\varkappa \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{a}_g m \; ,$$

kde M je hmotnost Země a $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$ a \mathbf{a}_g je tzv. gravitační zrychlení. Dosazením této síly do pohybové rovnice (7.53) dostaneme

$$m\frac{\mathrm{d}'^{2}\mathbf{r'}}{\mathrm{d}t^{2}} = -\varkappa \frac{mM}{r^{3}}\mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}'\mathbf{r'}}{\mathrm{d}t} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r'}). \tag{7.54}$$

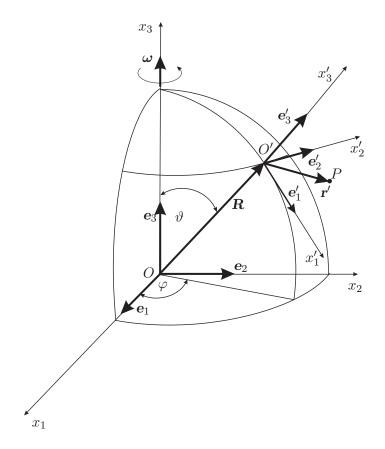
Jestliže pohybová rovnice (7.54) bude popisovat pohyb hmotného bodu v blízkosti zemského povrchu, pak si můžeme dovolit aproximaci, že $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \approx \mathbf{R}$, protože $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r}'|$. Na základě této aproximace si zavedeme tzv. *tíhové zrychlení* jako

$$\mathbf{g} = -\varkappa \frac{M}{R^3} \mathbf{R} - \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) . \tag{7.55}$$

Ze vztahu pro tíhové zrychlení (7.55) je vidět, že tíhové zrychlení představuje pro danou zeměpisnou šířku konstantní vektor. Díky vektorovému součtu s odstředivým zrychlením je

 $^{^5{\}rm Za}$ poloměr Země budeme považovat $R=6378~{\rm km}.$

 $^{^6}$ V případě, kdy se počátek neinerciální soustavy O' pohybuje po přímce (translační pohyb), mění s časem polohový vektor R pouze svoji velikost a ne svůj směr.



Obrázek 7.9: Poloha čárkované a nečárkované souřadnicové soustavy na Zemi.

zřejmé, že vektor tíhového zrychlení, na rozdíl od gravitačního zrychlení \mathbf{a}_g nesměřuje do středu země.

Pomocí tíhového zrychlení můžeme přepsat pohybovou rovnici (7.54) do následujícího tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}^{\prime 2}\mathbf{r}^{\prime}}{\mathrm{d}t^{2}} = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}^{\prime}\mathbf{r}^{\prime}}{\mathrm{d}t} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^{\prime}). \tag{7.56}$$

Jelikož se v odstředivém zrychlení vyskytuje kvadrát velikosti úhlové rychlosti, která je pro Zemi⁷ $\omega \ll 1$ a v blízkosti zemského povrchu platí, že $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r}'|$, je možné poslední člen na pravé straně rovnice (7.56) zanedbat⁸, čímž se nám pohybová rovnice (7.56) redukuje na následující tvar

$$m\frac{\mathrm{d}^{\prime 2}\mathbf{r}^{\prime}}{\mathrm{d}t^{2}} = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}^{\prime}\mathbf{r}^{\prime}}{\mathrm{d}t}, \qquad (7.57)$$

kde poslední člen na pravé straně reprezentuje Coriolisovu sílu. Tato pohybová rovnice pro souřadnicovou vztažnou soustavu s dostatečnou přesností popisuje pohyb hmotných bodů v blízkosti povrchu Země.

S ohledem na zavedení čárkované soustavy, viz obrázek 7.9, je možné po vydělení hmotností a uplatnění tečkové notace pro derivace podle času přepsat pohybovou rovnici (7.57) do tvaru

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -q\mathbf{e}_{2}' - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}', \qquad (7.58)$$

resp.

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' , \qquad (7.59)$$

kde, s ohledem na skutečnost, že $\omega \ll 1$, se předpokládá, že vektor tíhového zrychlení směřuje do středu Země, tj. $\mathbf{g} = (0, 0, -g) = -g\mathbf{e}_3'$.

 $^{7\}omega = 2\pi/T = 2\pi/86400 \approx 7, 3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

⁸Odstředivé zrychlení na povrchu Země je zahrnuto do tíhového zrychlení g.

Jednotkový souřadnicový vektor \mathbf{e}_3 má v čárkované souřadnicové soustavě následující souřadnice⁹

$$\mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1')\mathbf{e}_1' + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2')\mathbf{e}_2' + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3')\mathbf{e}_3' = \cos(\vartheta + \pi/2)\mathbf{e}_1' + 0\mathbf{e}_2' + \cos(\vartheta)\mathbf{e}_3' = -\sin(\vartheta)\mathbf{e}_1' + \cos(\vartheta)\mathbf{e}_3'. \quad (7.60)$$

Protože vektor úhlové rychlosti Země je dán v nečárkované soustavě jako $\omega = \omega \mathbf{e}_3$, je možné složky tohoto vektoru vyjádřit pomocí rovnosti (7.60) následovně

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \sin(\vartheta) \boldsymbol{e}_1' + \omega \cos(\vartheta) \boldsymbol{e}_3' , \qquad (7.61)$$

takže můžeme můžeme psát, že

$$-\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}' = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \boldsymbol{e}'_3 \\ -\omega \sin \vartheta & 0 & \omega \cos \vartheta \\ \dot{x}'_1 & \dot{x}'_2 & \dot{x}'_3 \end{vmatrix} = (\omega \dot{x}'_2 \cos \vartheta) \boldsymbol{e}'_1 - (\omega \dot{x}'_3 \sin \vartheta + \omega \dot{x}'_1 \cos \vartheta) \boldsymbol{e}'_2 + (\omega \dot{x}'_2 \sin \vartheta) \boldsymbol{e}'_3 . \quad (7.62)$$

Pomocí rovnosti (7.60) a výsledku (7.62) je možné přepsat rovnici (7.58) do následujícího tvaru

$$(\ddot{x}_1', \ddot{x}_2', \ddot{x}_3') = (0, 0, -g) + 2(\omega \dot{x}_2' \cos \vartheta, -\omega \dot{x}_3' \sin \vartheta - \omega \dot{x}_1' \cos \vartheta, \omega \dot{x}_2' \sin \vartheta). \tag{7.63}$$

Vektorová rovnice (7.63) představuje následující tři složkové rovnice

$$\ddot{x}_1' = 2\omega \dot{x}_2' \cos \vartheta \,, \tag{7.64}$$

$$\ddot{x}_2' = -2\omega(\dot{x}_3'\sin\vartheta + \dot{x}_1'\cos\vartheta) , \qquad (7.65)$$

$$\ddot{x}_3' = -g + 2\omega \dot{x}_2' \sin \vartheta . \tag{7.66}$$

Soustava rovnic (7.64), (7.65), (7.66) představuje soustavu vázaných diferenciálních rovnic, kde parametrem vazby je úhlová rychlost ω . Pro případ, že $\omega=0$ se soustava těchto rovnic redukuje na jedinou rovnici, která popisuje volný pád v inerciální vztažné soustavě. Uvedenou soustavu diferenciálních rovnic je sice možné vyřešit analyticky, avšak řešení je poměrně zdlouhavé. Využijeme-li skutečnosti, že $\omega\ll 1$, je možné řešit vektorovou diferenciální rovnici (7.58) či soustavu diferenciálních rovnic (7.64), (7.65), (7.66) za daných počátečních podmínek např. $metodou\ postupných\ aproximací$.

Příklad 7.4.1

Určete velikost a směr odchylky od těžnice při pádu těles z věže vysoké 100 m, která se nachází na 50° severní zeměpisné šířky.

Řešení:

Při řešení této úlohy vyjdeme z pohybové rovnice (7.59), kterou budeme řešit metodou postupných aproximací, což nám dovoluje skutečnost, že Coriolisova síla je malá. Řešení budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)} , \qquad (7.67)$$

⁹Skalární součiny ve vztahu (7.60) představují směrové kosiny.

pro které platí, že $|\mathbf{v}'^{(1)}| \gg |\mathbf{v}'^{(2)}|$. Řešení v prvním přiblížení (aproximaci) $\mathbf{v}'^{(1)}$ představuje řešení rovnice (7.59) při zanedbání Coriolisovy síly a řešení v druhém přiblížení $\mathbf{v}'^{(2)}$ představuje korekci působení Coriolisovy síly. Do pohybové rovnice (7.59) dosadíme za relativní rychlost ze vztahu (7.67)

$$\dot{\mathbf{v}}^{\prime(1)} + \dot{\mathbf{v}}^{\prime(2)} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^{\prime(1)} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^{\prime(2)} . \tag{7.68}$$

S ohledem na výše uvedené předpoklady získáme z rovnice (7.68) následující diferenciální rovnice

$$\dot{\mathbf{v}}^{(1)} = \mathbf{g} \,, \tag{7.69}$$

$$\dot{\mathbf{v}}^{(1)} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^{(1)} , \qquad (7.70)$$

přičemž díky skutečnosti, že Coriolisova síla je malá a že $|\mathbf{v}'^{(1)}| \gg |\mathbf{v}'^{(2)}|$, jsme zanedbali vliv členu $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'^{(2)}$.

Řešením rovnice (7.69) dostaneme, že

$$\mathbf{v}^{\prime(1)} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0' \,, \tag{7.71}$$

kde integrační konstanta \mathbf{v}_0' reprezentuje počáteční rychlost. Řešení (7.71) dosadíme do diferenciální rovnice (7.70)

$$\dot{\mathbf{v}}^{(2)} = -2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t + \mathbf{v}_0' = -2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0', \qquad (7.72)$$

jejíž řešením dostaneme

$$\mathbf{v}^{\prime(2)} = -2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0')t - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t^2, \qquad (7.73)$$

přičemž integrační konstantu volíme rovnu nule,
protože počáteční rychlost jsme již uvážili ve výrazu pro
 $\mathbf{v}'^{(1)}$. Dosazením jednotlivých řešení (7.71) a (7.73) do předpokládaného tvaru řešení (7.67) dostáváme přibližné řešení pro relativní rychlost \mathbf{v}'

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0' + \mathbf{g}t - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0')t - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t^2.$$
 (7.74)

Jelikož $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}'$, dostaneme jednoduchou integrací vztahu (7.74) následující přibližné řešení pro polohový vektor spojený s neinerciální souřadnicovou soustavou, tedy

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{v}'_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_0) t^2 - \frac{1}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}) t^3 , \qquad (7.75)$$

kde integrační \mathbf{r}_0' konstanta odpovídá počáteční poloze hmotného bodu vůči čárkované soustavě.

Řešení (7.75) představuje řešení pohybové rovnice (7.59) ve vektorovém tvaru. Použijeme-li vztahu (7.61), pak řešení (7.74) a (7.75) si můžeme vyjádřit pomocí složek jejich jednotlivých vektorových členů, tedy

$$(v'_{1}, v'_{2}, v'_{3}) = (v'_{01}, v'_{02}, v'_{03}) + (0, 0, -g)t + 2\omega(v'_{02}\cos\vartheta, -v'_{03}\sin\vartheta - v'_{01}\cos\vartheta, v'_{02}\sin\vartheta)t + \omega(0, -g\sin\vartheta, 0)t^{2}, \quad (7.76)$$

$$(x'_{1}, x'_{2}, x'_{3}) = (x'_{01}, x'_{02}, x'_{03}) + (v'_{01}, v'_{02}, v'_{03})t + \frac{1}{2}(0, 0, -g)t^{2} + \omega(v'_{02}\cos\vartheta, -v'_{03}\sin\vartheta - v'_{01}\cos\vartheta, v'_{02}\sin\vartheta)t^{2} + \frac{1}{3}\omega(0, -g\sin\vartheta, 0) . \quad (7.77)$$

S ohledem na zadání můžeme napsat následující počáteční podmínky

$$\mathbf{r}_0' = (0, 0, h), \quad \mathbf{v}_0 = (0, 0, 0),$$
 (7.78)

kde h=100 m a uvažované zeměpisné šířce odpovídá $\vartheta=\vartheta_p=90^\circ-50^\circ=40^\circ$. Dosazením počátečních podmínek do řešení (7.76) a (7.77) dostaneme

$$(v_1', v_2', v_3') = (0, 0, 0) + (0, 0, -g)t + (0, 0, 0)t + \omega(0, -g\sin\theta_p, 0)t^2,$$
(7.79)

$$(x_1', x_2', x_3') = (0, 0, h) + (0, 0, 0)t + \frac{1}{2}(0, 0, -g)t^2 + \omega(0, 0, 0)t^2 + \frac{1}{3}\omega(0, -g\sin\vartheta_p, 0)t^3.$$
 (7.80)

Z rovnice (7.80) můžeme přímo psát, že

$$x_1' = 0 (7.81)$$

$$x_2' = -\frac{1}{3}\omega g t^3 \sin \vartheta_p , \qquad (7.82)$$

$$x_3' = h - \frac{1}{2}gt^2 \ . (7.83)$$

Položením levé strany rovnice (7.83) rovnou nule, můžeme z této rovnice určit dobu pádu, tj.

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}} \ . \tag{7.84}$$

Dosazením této doby do rovnice (7.84) dostaneme, že

$$x_2' = -\frac{1}{3}\omega g t_d^3 \sin \vartheta_p = -\frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \sin \vartheta_p = -0,014 \text{ m}.$$
 (7.85)

Takže místo dopadu bude mít souřadnice (0; 0, 014; 0) neboli odchylka od těžnice bude 1,4 cm východním směrem.

Pozn.: Řešení (7.74) a (7.75) představují obecná řešení pohybové rovnice (7.59) a tedy se dají použít pro různé typy zadání.

7.4.1 Projevy Coriolisovy síly na Zemi

Jelikož je Coriolisova síla na Zemi malá, bude se projevovat zejména u pohybů, které trvají dostatečně dlouho. Příkladem takovéhoto působení jsou tzv. pasáty, což jsou větry, které na obou polokoulích pravidelně vanou směrem k rovníku. Vlivem Coriolisovy síly se na severní polokouli stáčejí doprava, tedy na západ. Na jižní polokouli se vlivem Coriolisovy síly pasáty stáčejí doleva, tedy rovněž na západ. Z hlediska inerciální vztažné soustavy lze pohyb pasátů vysvětlit tak, že setrvávají v rovnoměrném přímočarém pohybu, zatímco Země se pod nimi otáčí směrem na východ. Obecně pohyb vzdušných mas je ovlivňován mimo jiné právě pohybem Coriolisovy síly, takže tato síla je součástí řady meteorologických a klimatologických modelů. Např. vlivem rozdílných tlaků vniká vzdušné proudění, které by mělo směřovat od tlakové výše (anticyklóna) k tlakové níži (cyklóna), a tudíž by mělo být kolmé na izobary. Avšak vlivem Coriolisovy síly se toto proudění stáčí, na severní polokouli doprava, a tak výsledné proudění má spíše směr podél izobar. Podobně jsou Coriolisovou silou ovlivňovány i mořské proudy a řeky na Zemi. U velkých vodních toků se na severní polokouli více podemílají pravé břehy než levé. Nejlépe lze tuto skutečnost pozorovat u řek, které tečou na sever nebo jih, neboť v tomto případě pozorovaný jev neovlivňuje odstředivá síla.

Dalším významným případem, u kterého se projevuje vliv Coriolisovy síly, je postupné stáčení roviny kyvu kyvadla, jenž je k tomuto účelu vhodně zkonstruováno a nazývá se Foucaultovo

kyvadlo. Samozřejmě se s vlivem Coriolisových sil na Zemi setkáváme ve vojenství, např. při výpočtu dopadu střel dalekonosných děl. Dalším případem účinků Coriolisových sil jsou koleje s převládajícím jednosměrným provozem, kdy se na severní polokouli více opotřebovává pravá kolejnice ve směru jízdy. S vlivem Coriolisovy síly je možné se také setkat např. u volně padajících těles z vysoké věže, kdy pozorujeme odklon od přímého směru pohybu. Dalším z projevů Coriolisovy síly, který se často demonstruje, souvisí se směrem otáčení vodního víru při vypouštění vody z umyvadla či jiné nádoby. Na severní polokouli se vír vody točí doleva a na jižní polokouli opačným směrem. Při demonstraci tohoto pokusu je nutné si však uvědomit, že výtok vody je citlivý na počáteční podmínky, a tak při rychlém vypouštění z klasického umyvadla může mít náhodný vznik pohybu víru na opačnou stranu silnější účinek než Coriolisova síla, čímž se pokus stane neprůkazným. Proto je k demonstraci vhodnější např. vana, u které není rychlost vypouštění tak velká, a tudíž se vzniklý vír otáčí zpravidla předpokládaným směrem.

Kapitola 8

Práce, výkon, impuls síly a mechanická energie

8.1 Práce, výkon a impuls síly

Když zmiňujeme, že člověk koná práci, tak zpravidla máme primárně na mysli skutečnost, že silou svých svalů přemísťuje nějaké předměty. Tedy v obyčejné řeči spojujeme pojem práce se silou a přemístěním. Podobně mechanickou práci definujeme i ve fyzice. Práci definujeme jako dráhový účinek síly, resp. sil. Nejjednodušším případem je práce konstantní síly.

Práce A konstantní síly je definována jako skalární součin vektoru síly \mathbf{F} a posunutí \mathbf{r} jejího působiště, tj.

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = F \, r \cos \varphi \,\,, \tag{8.1}$$

kde φ je úhel, který svírá vektor síly \mathbf{F} s vektorem posunutí \mathbf{r} .

Práce A je tedy skalární fyzikální veličina, jejíž jednotkou je joule, kterou značíme J.

Z definice skalárního součinu vyplývá, že práce konstantní síly je rovna součinu velikosti posunutí a průmětu síly do směru posunutí F_t ($F_t = F\cos\varphi$). Je-li úhel mezi vektorem síly a vektorem posunutí ostrý, koná síla kladnou práci a v tomto případě se síla nazývá hybná. Je-li úhel mezi vektorem síly a vektorem posunutí tupý, koná síla práci zápornou a v tomto případě se síla nazývá odporem proti pohybu, příp. odporující silou. Svírají-li vektor síly a vektor posunutí úhel $\pi/2$, tj. jsou na sebe kolmé, pak z definice skalárního součinu rovněž plyne, že práce síly je rovna nule. Tedy rozložíme-li sílu na tečnou složku F_t (složka ve směru posunutí) a normálovou složku F_n , pak normálová složka práci nekoná.

Jelikož pro skalární součin platí distributivní zákon, můžeme psát, že

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{r} + \dots + \mathbf{F}_N \cdot \mathbf{r}. \tag{8.2}$$

Z rovnosti (8.2) vyplývá, že práce výslednice sil \mathbf{F} je rovna algebraickému součtu prací jednotlivých sil, které působí na tentýž hmotný bod. Rovněž na základě distributivního zákona platí, že

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_N = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_N) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$$
 (8.3)

Tedy rovnost (8.3) vyjadřuje skutečnost, že práci, kterou vykoná konstantní síla \mathbf{F} po sobě provedenými posunutími $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 ..., \mathbf{r}_N$ příslušného hmotného bodu, je rovna práci, kterou by tato síla vykonala při jednom posunutí, které představuje výslednici všech posunutí.

Uvažujeme-li kartézský souřadnicový systém, pak $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ a $\mathbf{r} = (x, y, z)$, takže vztah (8.1) můžeme vyjádřit v následujícím složkovém tvaru

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = F_x x + F_y y + F_z z . \tag{8.4}$$

Budeme-li předpokládat nekonečně malé (infinitezimální, resp. elementární) posunutí d \mathbf{r} , potom na základě vztahů (8.1) a (8.4) dostáváme vztah pro elementární práci

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F ds \cos \varphi.$$
(8.5)

Složitějším případem je práce proměnné síly. Síla obecně závisí na čase, poloze hmotného bodu (působiště síly) a rychlosti hmotného bodu, tj. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. V tomto případě se polohový vektor \mathbf{r} působiště síly obecně pohybuje po křivce. Koná-li působiště sil křivočarý pohyb, pak pro výpočet práce je možné využít pouze vztah (8.5), který v tomto případě reprezentuje elementární práci po zvoleném úseku křivky. Během posunu působiště síly po elementu křivky lze považovat sílu za neproměnnou. Je-li dráha, po které se pohybuje působiště síly, konečnou a po částech hladkou křivkou C, pak je práce dána následujícím křivkovým integrálem (druhého druhu)¹

$$A = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,. \tag{8.6}$$

Uvažujme hmotný bod o hmotnosti m, na který působí síla \mathbf{F} , pak můžeme napsat jeho pohybovou rovnici v následujícím tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\,,\tag{8.7}$$

kde \mathbf{v} je rychlost uvažovaného hmotného bodu v čase t (okamžitá rychlost). V tomto místě neklademe žádná omezení, co se týče působící síly \mathbf{F} . Skalárně vynásobíme pohybovou rovnici (8.7) rychlostí \mathbf{v} hmotného bodu, takže dostaneme

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} . \tag{8.8}$$

Pro další úpravu levé strany rovnice (8.8) provedeme derivaci skalárního součinu

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.$$
 (8.9)

Odtud

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v^2}{2}\right) . \tag{8.10}$$

S ohledem na skutečnost, že m=konst., můžeme levou stranu rovnice (8.8) pomocí rovnosti (8.10) upravit následujícím způsobem

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \; ,$$

můžeme pomocí této rovnosti upravit rovnici (8.8)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \,, \tag{8.11}$$

kde

$$T = \frac{1}{2}mv^2 (8.12)$$

$$A = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$
 nebo $A = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$.

¹S ohledem na rovnosti (5.30) můžeme práci vyjádřit také jako

je tzv. kinetická energie (pohybová energie) hmotného bodu. Z rovnosti (8.11) a (8.5) vyplývá, že

$$dT = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dA. \tag{8.13}$$

a odtud integrací dostáváme, že

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = A , \qquad (8.14)$$

kde A je práce vykonaná přemístěním hmotného bodu z místa o polohovém vektoru \mathbf{r}_1 do místa o polohovém vektoru \mathbf{r}_2 po trajektorii, jíž odpovídá křivka C. T_1 je kinetická energie hmotného bodu v čase t_1 a T_2 je kinetická energie hmotného bodu v čase t_2 , přičemž s časem je svázána jak poloha, tak rychlost uvažovaného hmotného bodu.

Je nutné si uvědomit skutečnost, že obecně hodnota vykonané práce A závisí na zvolené cestě (křivce), po které se hmotný bod pohyboval neboli pro různé cesty získáme rozdílné hodnoty vykonané práce. Odtud vyplývá, že elementární práce (8.5) obecně nepředstavuje úplný diferenciál, jak je tomu v případě kinetické energie dT. To znamená, že k určení hodnoty vykonané práce nám stačí znát kinetickou energii v počátečním a koncovém bodě, kdežto k určení hodnoty vykonané práce podle křivkového integrálu

$$A(C) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
 (8.15)

potřebujeme znát cestu C, po které se pohyboval uvažovaný hmotný bod a tedy cestu, podle které provedeme příslušnou integraci.

Můžeme říct, že na změnu rychlosti hmotného bodu (urychlení), musíme vykonat práci a tato práce je uchována ve formě kinetické energie.

Při výpočtu křivkového integrálu je třeba mít na paměti, že budeme-li provádět integraci po té samé křivce, ale v opačném směru, pak bude platit, že

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_2}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$
 (8.16)

V následujícím příkladu je ukázána skutečnost, že obecně hodnota práce závisí na zvolené cestě.

Příklad 8.1.1

Určete práci, kterou vykoná silové pole $\mathbf{F} = (xy, y)$ při přemístění tělesa z bodu $\mathbf{r}_1 = (0, 0)$ do bodu $\mathbf{r}_2 = (3, 9)$ a) po parabole $y = x^2$, b) po přímce y = 3x.

Řešení:

a) Práce po parabole

V tomto případě $y = x^2$ a odtud dy = 2x dx.

$$A(parabola) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(3,9)} (xy, y) \cdot (dx, dy) = \int_{(0,0)}^{(3,9)} (xydx + ydy) = \int_{0}^{3} x^3 dx + \int_{0}^{3} 2x^3 dx = \int_{0}^{3} 3x^3 dx = \frac{243}{4} \text{ J.} \quad (8.17)$$

b) Práce po přímce

V tomto případě y = 3x a odtud dy = 3dx.

$$A(primka) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(3,9)} (xy, y) \cdot (dx, dy) = \int_{(0,0)}^{(3,9)} (xydx + ydy) = 3 \int_0^3 x^2 dx + 3 \int_0^3 x dx = \frac{81}{2} J. \quad (8.18)$$

Z hlediska technických aplikací je práce důležitá nejen sama o sobě, nýbrž je důležitý i poměr práce a doby, za kterou byla vykonána. Je zřejmé, že ze dvou strojů, které vykonávají tu samou práci, je ekonomicky cennější ten, který tuto práci vykoná za kratší dobu. Abychom mohli posoudit práci s ohledem na dobu potřebnou k jejímu vykonání, zavádíme novou fyzikální veličinu, tzv. výkon. Podíl vykonané práce ΔA za dobu Δt definuje tzv. průměrný výkon

$$\bar{P} = \frac{\Delta A}{\Delta t} \ . \tag{8.19}$$

Výkon měříme jednotkou zvanou watt která má zkratku **W**. Kromě průměrného výkonu definujeme ještě okamžitý výkon

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} , \qquad (8.20)$$

kde $\mathbf{v}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ je okamžitá rychlost, kterou síla \mathbf{F} přemisťuje hmotný bod (těleso). Nutno připomenout, že normálová složka síly, jež je kolmá ke směru pohybu, a tedy k rychlosti, nekoná práci a má tudíž nulový výkon.

Každý stroj pracuje se ztrátami, a proto musí být výkon stroji přiváděný, tzv. příkon, větší než výkon ze stroje odebíraný, tzv. užitečný výkon. Poměr okamžitého užitečného výkonu stroje P_u k okamžitému potřebnému příkonu P_p se nazývá učinnost stroje η

$$\eta = \frac{P_u}{P_p} < 1. \tag{8.21}$$

Účinnost (bezrozměrná veličina) je tedy vždy menší než jedna. Definiční vztah (8.21) reprezentuje okamžitou účinnost. Pro určení průměrné účinnosti bychom použili následujícího vztahu

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{P}_u}{\bar{P}_n} = \frac{\Delta A_2 / \Delta t}{\Delta A_1 / \Delta t} = \frac{\Delta A_2}{\Delta A_1} < 1 , \qquad (8.22)$$

kde ΔA_1 je dodaná práce stroji a ΔA_2 je skutečně využitá práce stroje.

Další fyzikální veličinou, která souvisí se sílou, je *impuls síly*. Impuls síly vyjadřuje časový účinek síly a budeme ho značit I. Jestliže na hmotný bod působí konstantní síla po dobu $\Delta t = t_2 - t_1$, potom je impuls síly roven součinu této síly a doby jejího působení, tj.

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}\Delta t = m\bar{\mathbf{a}}\Delta t = m\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}\Delta t = m\frac{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)}{\Delta t}\Delta t = m\mathbf{v}(t_2) - m\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1).$$
(8.23)

Ze vztahu (8.23) je vidět, že impuls síly je roven změně hybnosti hmotného bodu. V případě, že je síla časově proměnná, je impuls síly definován následujícím integrálem

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \int_{\mathbf{p}(t_1)}^{\mathbf{p}(t_2)} d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) . \tag{8.24}$$

Tedy i v případě časově proměnné síly je její impuls roven změně hybnosti hmotného bodu.

8.2 Rozdělení sil a mechanická energie

Síly, se kterými ve fyzice pracujeme, je možné rozdělit následujícím způsobem:

1. Síly gyroskopické \mathbf{F}_{Gy} , což jsou síly, které závisejí lineárně na rychlosti hmotného bodu a mají směr kolmý na tuto rychlost, z čehož na základě vztahu (8.20) vyplývá, že výkon gyroskopických sil je vždy roven nule, neboť

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_{Gy} \cdot \mathbf{v} = 0 \ . \tag{8.25}$$

Příkladem gyroskopické síly je síla Coriolisova či elektromagnetická síla Lorentzova.

2. Síly disipativní \mathbf{F}_{Dis} , což jsou síly, které jsou namířené proti směru pohybu hmotného bodu. Disipativní síla se dá zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F}_{Dis} = -\lambda \mathbf{v} \,, \tag{8.26}$$

kde λ je kladná skalární funkce, která může obecně záviset na poloze a na rychlosti hmotného bodu. Pomocí těchto sil se projevuje odpor prostředí při pohybu hmotných bodů či těles ve spojitém prostředí (tekutinách) nebo při vzájemném styku těles. Obecný zákon působení těchto sil nebyl dosud nalezen, takže se zpravidla využívá následujícího empirického vzorce

$$\mathbf{F}_{Dis} = -kv^{n-1}\mathbf{v} = -kv^n\mathbf{v}^0 , \qquad (8.27)$$

kde k značí konstantu úměrnosti, exponent n nabývá nezáporných hodnot a \mathbf{v}^0 je jednotkový vektor tečný k dráze. Fyzikálními příčinami vzniku těchto sil jsou

- (a) interakce mezi dotýkajícími se plochami pevných těles
- (b) viskozita, tj. působení třecích sil ve vrstvách tekutiny, s nimiž dochází do styku povrch tělesa,
- (c) tlakový odpor, tj. výslednice tlaků v tekutině, které působí na povrch tělesa,
- (d) vlnový odpor, tj. způsobený ztrátami energie v důsledku vzniku vlnění prostředí při pohybu tělesa v něm. Uplatňuje se zejména při řešení pohybu lodí, kdy každá vlna způsobená lodí odnáší energii, která musí být nahrazena jinou formou energie, např. motoru.
- 3. síly *potenciálové*, což jsou síly, které lze vyjádřit jako

$$\mathbf{F} = -\nabla U \,, \tag{8.28}$$

kde U je skalární funkce (pole), kterou nazýváme potenciální energie hmotného bodu. Je-li potenciální energie pouze funkcí polohy, tj. $U=U(\mathbf{r})$, potom sílu s ní spojenou vztahem (8.28) nazýváme stacionární potenciálovou silou, je-li potenciální energie navíc funkcí času, tj. $U=U(\mathbf{r},t)$, potom sílu s ní spojenou vztahem (8.28) nazýváme nestacionární potenciálovou silou².

Pro úplný diferenciál potenciální energie $U = U(\mathbf{r}, t)$ je možné psát, že

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt = \nabla U \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt . \tag{8.29}$$

²Příkladem takovéto síly může být pole časově proměnného náboje nebo pole nabíjeného či vybíjeného kondenzátoru.

Na základě vztahů (8.28) a (8.29) je možné vyjádřit element práce (8.5) jako

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\nabla U \cdot d\mathbf{r} = -dU + \frac{\partial U}{\partial t} dt, \qquad (8.30)$$

odtud pak dostáváme vztah pro okamžitý výkon nestacionární potenciálové síly

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla U \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U}{\partial t} . \tag{8.31}$$

Předpokládejme, že na hmotný bod působí nestacionární potenciálová síla, disipativní síla a gyroskopická síla, takže jejich výslednicí je síla

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \mathbf{F}_{Gy} + \mathbf{F}_{Dis} . \tag{8.32}$$

S uvážením vztahu (8.25) můžeme pro okamžitý výkon (8.31) výslednice uvažovaných sil (8.32) psát, že

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla U \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_{Gy} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_{Dis} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}_{Dis} \cdot \mathbf{v}. \tag{8.33}$$

Ze vztahu (8.13) vyplývá rovnost

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \,, \tag{8.34}$$

s jejíž pomocí můžeme dále upravit výraz (8.33) následujícím způsobem

$$\frac{\mathrm{d}(T+U)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}_{Dis} \cdot \mathbf{v} \,. \tag{8.35}$$

Součet kinetické a potenciální energie představuje celkovou mechanickou energii a budeme ji značit E, tedy E = T + U. Takže můžeme tímto přepsat rovnici (8.35) jako

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}_{Dis} \cdot \mathbf{v} \,, \tag{8.36}$$

resp. s ohledem na vztah (8.26)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} - \lambda v^2 \,. \tag{8.37}$$

Z rovnice pro časovou změnu celkové mechanické energie (8.36), resp. (8.37) je vidět, že gyroskopické síly celkovou mechanickou energii nemění, a že časová změna celkové mechanické energie je dána časovou změnou potenciální energie a existencí (okamžitým výkonem) disipativních sil. S ohledem na vztah (8.26) je zřejmé, že okamžitý výkon disipativních sil je vždy záporný, takže disipativní síly se podílejí na poklesu celkové mechanické energie. Jedná-li se o stacionární síly $(\partial U/\partial t = 0)$, pak ze vztahu (8.37) plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\lambda v^2 < 0 \,, \tag{8.38}$$

tedy časová změna celkové mechanické energie je spojena pouze s jejím úbytkem.

Nepůsobí-li na hmotný bod disipativní síly ($\mathbf{F}_{Dis} = \mathbf{0}$) a současně platí, že potenciálové síly jsou stacionární, potom ze vztahu (8.36) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = konst. \,, \text{ resp. } T + U = konst. \,.$$
 (8.39)

Vztah (8.39) vyjadřuje zákon zachování mechanické energie. Jelikož se celková mechanická energie E zachovává, neboli konzervuje, nazývají se stacionární potenciálové síly jako síly

konzervativní, resp. pole těchto sil se nazývá konzervativním silovým polem. Jelikož konzervativní síly hrají ve fyzice zásadní význam, budeme se jimi dále zabývat.

Na základě definice totálního (úplného) diferenciálu a vztahu (8.28) můžeme psát, že

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -\nabla U \cdot \mathbf{dr} = -\mathbf{d}U \,, \tag{8.40}$$

u kterého je nutné připomenout, že pro konzervativní síly je potenciální energie pouze funkcí polohy, tj. $U=U(\mathbf{r})$. Z tohoto důvodu nazýváme takovouto potenciální energii také jako polohová energie.

Při konečném přemístění hmotného bodu z místa o polohovém vektoru \mathbf{r}_1 do místa o polohovém vektoru \mathbf{r}_2 po nějaké křivce C vykonáme, s ohledem na vztah (8.40) práci

$$A(C) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dU = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2).$$
 (8.41)

Z rovnosti (8.41) vyplývá, že v případě konzervativních sil práce závisí pouze na rozdílu hodnot potenciálních energií v počátečním a koncovém bodě, přičemž tento výsledek není ovlivněn cestou (křivkou), po které byl hmotný bod přesouván, neboli v případě konzervativních sil nezávisí hodnota vykonané práce na křivce, po které se uvažovaný hmotný bod přemístil z bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_1 do bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_2 , ale jen na poloze těchto bodů. Odtud vyplývá, že budou-li konzervativní síly konat práci po libovolné uzavřené křivce, tudíž počáteční a koncový pod je stejný, potom na základě vztahu (8.41) můžeme říct, že vykonaná práce bude rovna nule, tj. $A = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_1) = 0$. Tuto skutečnost je možné zapsat jako

$$A = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{8.42}$$

Vztah (8.42) je vyjádřením faktu, že koná-li konzervativní síla práci po libovolné uzavřené křivce, pak se její práce rovná nule neboli cirkulace vektoru konzervativní síly podél libovolné křivky je rovna nule.

Ověřit konzervativnost pole na základě vztahu (8.42) je ovšem neschůdné, protože nikdy si nemůžete být jisti tím, že pro zcela určitou křivku či oblouk, po které jsme příslušný integrál druhého druhu ještě nepočítali, uvedené vztahy platí.

Kritérium konzervativnosti silového pole dostaneme použitím Stokesovy věty. Pomocí této věty můžeme rovnost (8.42) upravit následujícím způsobem

$$\oint_{C(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S} (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$
(8.43)

Jelikož křivka C uzavírá libovolnou plochu S (je hranicí po částech hladké plochy), je plošný integrál ve vztahu (8.43) roven nule, pakliže

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} . \tag{8.44}$$

Vztah (8.44) je nutnou a postačující podmínkou konzervativnosti silového pole. Ze vztahu (8.40) můžeme psát, že

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,. \tag{8.45}$$

Potenciální energii U pak učíme integrací pravé strany vztahu (8.45)

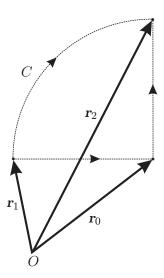
$$U(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + C, \qquad (8.46)$$

kde C je integrační konstanta, kterou určujeme s ohledem na potenciální energii v referenčním bodě \mathbf{r}_0 . Vztah (8.46) lze interpretovat tak, že potenciální energie je určena až na aditivní

konstantu. Hodnotu této konstanty volíme tak, aby v referenčním místě nabývala potenciální energie požadovanou hodnotu, nejčastěji nulovou. Nechť polohový vektor \mathbf{r}_0 ukazuje na referenční bod, ve kterém nabývá potenciální energie požadované hodnoty, potom je možné zapsat potenciální energii jako

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \qquad (8.47)$$

Práci z bodu o poloze \mathbf{r}_1 do bodu \mathbf{r}_2 po křivce C, viz obr. 8.1, spočítáme jako



Obrázek 8.1: Výpočet práce z rozdílu potenciálních energií.

$$A(C) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \tag{8.48}$$

Jelikož uvažujeme práci konzervativních sil, a tedy nezáleží na volbě integrační cesty, zvolíme si integrační cestu z bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_1 přes referenční bod \mathbf{r}_0 a od něho ke koncovému bodu \mathbf{r}_2 , viz obr. 8.1, přičemž při výpočtu použijeme vztah (8.47), takže můžeme psát, že

$$A = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) . \tag{8.49}$$

Výsledek (8.49) ukazuje skutečnost, že je-li práce dána rozdílem potenciálních energií v příslušných místech, potom nezáleží na volbě polohy referenčního bodu. Uvažujeme sílu, která je dána následujícím vztahem

$$\mathbf{F} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = g(r)\mathbf{r}. \tag{8.50}$$

Ze vztahu (8.50) je patrné, že tato síla nabývá stejné velikosti ve všech bodech, které jsou stejně vzdáleny od počátku souřadnic. Rovněž z tohoto vztahu vyplývá, že všechny směry od počátku souřadnic jsou si rovnocenné, tj. vektorové pole této síly je pole izotropní. Je-li vektorové pole této síly třídimenzionální, potom je geometrickým místem bodů, ve kterých nabývá toto silové pole stejné velikosti, kulová plocha. Počátek souřadnic je v tomto případě totožný s tzv. silovým centrem a síly, resp. silová pole, které vyhovují předpisu (8.50) se nazývají centrální síly, resp. centrální silová pole. Příkladem centrálního silového pole je pole

gravitační. Pomocí podmínky (8.44) zjistíme, zda centrální síly jsou síly konzervativní.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (g(r)\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g(r)x & g(r)y & g(r)z \end{vmatrix} = \\ \left(\frac{\partial(g(r)z)}{\partial y} - \frac{\partial(g(r)y)}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial(g(r)x)}{\partial z} - \frac{\partial(g(r)z)}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial(g(r)y)}{\partial x} - \frac{\partial(g(r)x)}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \\ \left(\frac{\partial g(r)}{\partial y}z + g(r)\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial g(r)}{\partial z}y - g(r)\frac{\partial y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial g(r)}{\partial z}x + g(r)\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial g(r)}{\partial x}z - g(r)\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \\ \left(\frac{\partial g(r)}{\partial x}y + g(r)\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial g(r)}{\partial y}x - g(r)\frac{\partial x}{\partial y}\right)\mathbf{k} . (8.51)$$

Jelikož x, y a z jsou nezávislé proměnné, potom všechny jejich parciální derivace v rovnosti (8.51) jsou rovny nule, takže výsledek (8.51) je možné zjednodušit na tvar

$$\nabla \times (g(r)\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial g(r)}{\partial y}z - \frac{\partial g(r)}{\partial z}y\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial g(r)}{\partial z}x - \frac{\partial g(r)}{\partial x}z\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g(r)}{\partial x}y - \frac{\partial g(r)}{\partial y}x\right)\mathbf{k}.$$
(8.52)

V argumentu funkce g je velikost polohového vektoru, tj. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, takže derivací této funkce podle jednotlivých proměnných dostaneme, že

$$\nabla \times (g(r)\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{yz}{r} - \frac{\partial g}{\partial z}\frac{yz}{r}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\frac{xz}{r} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{xz}{r}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{xy}{r} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{xy}{r}\right)\mathbf{k}. \quad (8.53)$$

Vzhledem k tomu, že parciální derivace funkce g jako vnější funkce podle jednotlivých proměnných musí být stejná a označíme ji g'. Pak je možné výsledek (8.53) upravit jako

$$\nabla \times (g(r)\mathbf{r}) = g'\left(\frac{yz}{r} - \frac{yz}{r}\right)\mathbf{i} + g'\left(\frac{xz}{r} - \frac{xz}{r}\right)\mathbf{j} + g'\left(\frac{xy}{r} - \frac{xy}{r}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$
 (8.54)

Výsledek (8.54) nám říká, že všechny centrální síly jsou silami konzervativními.

Příklad 8.2.1

Spočtěte centrální izotropní silové pole (sílu), je-li zadána jeho potenciální energie $U = \frac{1}{2}kr^2$, kde k > 0 je konstanta a souřadnice $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Řešení:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\nabla \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = (-kx, -ky, -kz) = -k(x, y, z) = -k\mathbf{r}$$
.

Homogenní silové pole např. můžeme napsat jako³

$$\mathbf{F} = a\mathbf{k} = (0, 0, a) , \tag{8.55}$$

 $^{^3}$ Vždy si můžeme zvolit orientaci kartézské souřadnicové soustavy tak, aby bylo možné vyjádřit homogenní silové pole uvedeným způsobem.

kde a je konstanta.

K ověření skutečnosti, zda homogenní silové pole je pole konzervativní, použijeme opět podmínky (8.44), takže můžeme psát, že

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (a\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0} ,$$

protože derivace konstanty je rovna nule. I v případě homogenních sil (silových polí) platí, že jsou vždy konzervativní. Příkladem homogenního pole je homogenní tíhové pole Země.

8.3 Tření a odpor prostředí

Pod pojmem *tření* budeme rozumět jev vyvolaný složitými procesy interakce mezi dotýkajícími se tělesy nebo jejich různými částmi, který se projevuje vznikem sil působících proti vzájemnému přemístění těchto těles, resp. jejich částí. Síly vznikající při tření jsou disipativními silami. Tyto síly se nazývají *síly tření*, případně *třecí síly*. Pro některé z nich se používá názvu *odpor*, příp. *odporová síla* a s tímto označením se setkáváme zejména při pohybu těles v tekutině.

Rozlišujeme dva hlavní druhy tření, a to vnitřní tření a vnější tření.

Pod pojmem vnitřní tření budeme rozumět tření, které vzniká při vzájemném posouvání částí téže látky. Projevuje se tečnými silami působícími mezi dotýkajícími se částmi, a to proti směru jejich vzájemného posouvání. U tekutin souvisí vnitřní tření s jejich viskozitou. Vnější tření vzniká mezi pevnými tělesy, které se vzájemně dotýkají a jsou k sobě přitlačována určitou silou. Vnější tření se projevuje silami působícími proti směru vzájemného pohybu těles nebo tak, že zabraňují jejich vzájemnému přemisťování. Vnější tření můžeme rozdělit na tzv. smykové tření a odpor při valení.

8.3.1 Tření smykové

vztah

Rozlišujeme dva různé případy smykového tření.

1. Dynamické tření, což je vnější tření, které vzniká při posouvání jednoho pevného tělesa po jiném pevném tělese, jehož se dotýká a je k němu přitlačováno určitou silou. Projevuje-li se mezi tělesy dynamické tření, potom mluvíme též o smýkání či klouzání tělesa po jiném pevném tělese. V ploše, popř. bodech dotyku těles, působí v důsledku tohoto tření na posouvající se těleso výsledná třecí síla F_t, jejíž směr je v každém okamžiku opačný než je směr pohybu tělesa. Jsou-li dotýkající se povrchy těles suché, nazývá se toto tření suché tření nebo Coulombovo tření. Je-li mezi uvažovanými tělesy vrstva viskózní látky, tedy maziva, potom toto tření nazýváme viskózní tření. Je-li plocha dotyku (styková plocha) těles rovinnou plochou, používá se při přibližných výpočtech Amontonův (Amontonův-Coulombův) zákon, který nám říká, že při suchém tření velikost třecí síly nezávisí na velikosti stykových ploch a je přímo úměrná velikosti normálové síly působící na pohybující se těleso (též přítlačná síla), kterou je pohybující se těleso tlačeno k druhému tělesu. Matematické vyjádření tohoto zákona je následující

$$F_t = \mu F_n , \qquad (8.56)$$

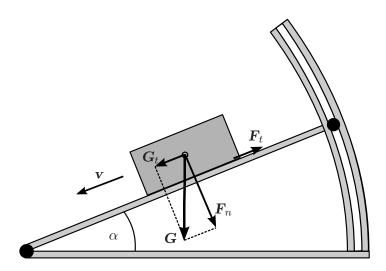
kde $F_n = |\mathbf{F}_n|$ je velikost normálové síly a bezrozměrná konstanta úměrnosti μ se nazývá činitel dynamického tření, příp. součinitel tření či součinitel smykového tření. Někdy se

můžeme v literatuře setkat s tím, že je pro součinitel smykového tření použito symbolu f. Tento součinitel závisí na materiálech dotýkajících se těles, na drsnosti jejich povrchů ve stykové ploše, na teplotě atd. Pro dokonale hladké povrchy je $\mu=0$. Poznamenejme, že vztah (8.56) se také používá pro viskózní tření, kdy součinitel tření μ je nižší, než je tomu u suchého tření a navíc závisí na relativní rychlosti vzájemného pohybu těles. Součinitel tření μ se často vyjadřuje pomocí úhlu α , zvaného *úhel tření* (*třecí úhel*). Jelikož jsou síly \mathbf{F}_t a \mathbf{F}_n navzájem kolmé, lze psát

$$\mu = \frac{F_t}{F_n} = \tan \alpha \,\,, \tag{8.57}$$

kde α je tedy úhel, který svírá normálová síla \mathbf{F}_n se silou rovnající se součtu $\mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t$, viz obr. 8.2. Uvažovaný třecí úhel α je možné poměrně snadno změřit. Uvažujme rovinu, jejíž úhel sklonu α lze měnit v rozmezí $\alpha \in \langle 0; \pi/2 \rangle$. Na nakloněné rovině je položené těleso. Pro uvažované těleso a nakloněnou rovinu, po které se toto těleso smýká (pohybuje se posuvným pohybem se třením), chceme určit součinitel tření, resp. třecí úhel. Na těleso bude působit tíhová síla \mathbf{G} , jejíž složka kolmá k naklánějící se rovině představuje normálovou sílu \mathbf{F}_n . Označme rychlost smýkání tělesa \mathbf{v} . Celá situace je zachycena na obrázku 8.2. Při jistém úhlu sklonu nakloněné roviny $\varphi = \alpha$ budeme pozorovat, že se těleso pohybuje konstantní rychlostí smýkání $\mathbf{v} = \mathbf{konst}$. Pohybuje-li se těleso konstantní rychlostí, potom na něj nepůsobí ve směru pohybu žádná síla. Z obrázku 8.2 je zřejmé, že v tomto případě musí platit, že $\mathbf{G}_t + \mathbf{F}_t = \mathbf{0}$, kde $F_t = G_t = G\sin\alpha$. Zároveň platí, že $G_n = F_n = G\cos\alpha$. Dosadíme-li za velikosti třecí a normálové síly výše uvedené hodnoty potom, dospějeme ke vztahu (8.57), tj.

$$\mu = \frac{F_t}{F_n} = \frac{G \sin \alpha}{G \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha . \tag{8.58}$$



Obrázek 8.2: Síly působící na pohybující se těleso na nakloněné rovině.

2. Statické (klidové) tření je smykové tření působící mezi dotýkajícími se pevnými tělesy přitlačovanými k sobě silou, přičemž tato tělesa jsou vůči sobě v klidu. Statické tření vzniká tehdy, když na jedno z těles začne působit tzv. tažná síla \boldsymbol{F} rovnoběžná s rovinou dotyku těles. Proti této síle působí ve stykové ploše uvažovaných těles tzv. síla statického tření \boldsymbol{F}_t^s , která ruší účinek tažné síly do té doby, dokud tažná síla nepřekoná jistou maximální možnou sílu statického tření \boldsymbol{F}_{tm}^s . Tuto maximální možnou hodnotu síly

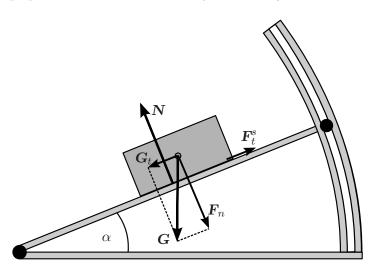
statického tření, která působí v okamžiku přechodu tělesa z klidu do pohybu, nazýváme mezní síla statického tření. Je-li plocha dotyku obou těles rovinnou plochou, pak platí pro velikost mezní třecí síly vztah podobný vztahu (8.56)

$$F_{tm}^s = \mu_s F_n , \qquad (8.59)$$

kde bezrozměrnou konstantu úměrnosti μ_s nazýváme *činitel statického tření* či součinitel statického tření. Experimentálně bylo zjištěno, že za stejných podmínek vzájemného styku dvou těles při suchém tření platí relace, že $\mu_s > \mu$. Pro statické tření zavádíme, podobně jako pro tření dynamické, úhel α_s , pro který platí vztah analogický vztahu (8.57), tj.

$$\mu_s = \frac{F_{tm}^s}{F_n} = \tan \alpha_s \,, \tag{8.60}$$

kde α_s se v případě statického tření nazývá kritický úhel. K určení kritického úhlu či



Obrázek 8.3: Síly působící na nepohybující se těleso na nakloněné rovině.

součinitele statického tření používáme obdobné metody jako v případě tření dynamického, viz obr. 8.3. Používaná metoda se v případě statického tření liší jen v tom, že kritický úhel α_s je roven úhlu sklonu nakloněné roviny, při kterém se počne těleso po nakloněné rovině pohybovat (smýkat), tj. když tažná síla je právě rovna maximální možné síle statického tření \boldsymbol{F}_{tm}^{s} , tedy

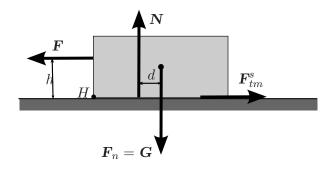
$$\mu_s = \frac{F_{tm}^s}{F_n} = \frac{G \sin \alpha_s}{G \cos \alpha_s} = \frac{\sin \alpha_s}{\cos \alpha_s} = \tan \alpha_s . \tag{8.61}$$

Na obrázku 8.3 je zachycena i reakce N, kterou podložka působí na těleso. Reakce je tedy stejně velká jako je velikost normálové síly, avšak opačně orientovaná. Z obrázku je patrné, že reakce je vůči normálové síle F_n posunuta. Velikost tohoto posunutí vyplývá z rozboru situace zachycené na obrázku 8.4.

Na obrázku 8.4 je zachycena skutečnost, že normálová síla, která je v tomto případě totožná se silou tíhovou, je umístěna do hmotného středu (těžiště) tělesa. Jelikož těleso je v rovnováze, takže součet sil ve vodorovném a svislém směru i součet momentů vzhledem k hmotnému středu musí být nulový, tedy

$$F - F_{tm}^s = 0 (8.62)$$

$$N - F_n = 0 (8.63)$$



Obrázek 8.4: Síly působící na těleso v mezním stavu statického tření.

$$Nd - F_{tm}^s h = 0$$
 (8.64)

Z rovnice (8.64) dostáváme, že

$$d = h \frac{F_{tm}^s}{N} = h \frac{F_{tm}^s}{F_r} \,, \tag{8.65}$$

přičemž při úpravě rovnice (8.65) bylo využito skutečnosti, že $N = F_n$. Rovnici (8.65) je možné dále upravit použijeme-li vztahů (8.59) a (8.60), čímž dostaneme, že

$$d = h \frac{F_{tm}^s}{N} = h\mu_s = h \tan \alpha_s . (8.66)$$

Ze vztahu (8.66) je vidět, jak vzdálenost posunutí síly reakce podložky N závisí na vzdálenosti h tažné síly \mathbf{F} od podložky. Odsud také přímo vyplývá, že rozložení tlaku ve stykové ploše musí být nerovnoměrné. Pokud by nastala situace, že klopný moment tažné síly \mathbf{F} k hraně H (Fh) nebude moci být vyrovnán momentem dvojice sil \mathbf{F}_n a \mathbf{N} (Nd), dojde k překlopení uvažovaného tělesa kolem hrany H. Tento závěr potvrzuje zkušenost, že chceme-li přesouvat nějaké těleso, např. skříň, potom abychom se vyhnuli jeho překlopení, je nutné umístit tažnou sílu, co nejblíže k podlaze.

Závěrem je nutné zdůraznit, že platí-li relace $F \leq \mu_s F_n$, potom nedojde k pohybu tělesa. Na rozdíl od dynamického smykového tření, pohlížíme povětšinou na statické smykové tření jako na vítaný fyzikální jev, díky kterému jsme schopni takových samozřejmých úkonů jako je chůze, uchopení předmětů či jízdy automobilem. Bez výše popsaného projevu tohoto tření bychom se nemohli spolehnout na spojovací funkce hřebíků, šroubů, klínů či švů, jen s obtížemi bychom se shledávali s odloženými předměty apod. Ze zkušenosti víme, že jen snížení součinitele statického tření (náledí, olej) vede k obtížím souvisejícím s poruchami výše uvedených funkcí.

8.3.2 Odpor při valení (valivé tření)

Odpor při valení je odpor působící při valení oblého pevného tělesa (např. koule, rotačního válce, rotačního kužele) po jiném pevném tělese, ke kterému je přitlačováno silou. Odpor při valení je vyvolán deformacemi obou těles v okolí bodu, příp. přímky, jejich dotyku, které vznikají tím, že tělesa jsou k sobě přitlačována. Matematickému popisu tohoto typu tření se nebudeme věnovat a spokojíme se pouze s výše uvedeným kvalitativním popisem.

Kapitola 9

Analytická mechanika

9.1 Klasifikace vazeb a zobecněné souřadnice

K popisu volného hmotného bodu v prostoru potřebujeme znát 3 souřadnice, nejčastěji se jedná o souřadnice kartézské, přičemž přívlastkem "volný" vyjadřujeme skutečnost, že bod není ve svém pohybu omezen (není podroben vazbám). Uvažujme soustavu N volných hmotných bodů. K jednoznačnému určení jejich polohy budeme potřebovat 3N souřadnic. Například si představme soustavu tvořenou dvěma volnými hmotnými body. Potom k určení jejich polohy potřebujeme znát celkem 6 souřadnic, tj. $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$, resp. $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}; x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}$, příp. $x_1, x_2, x_3; x_4, x_5, x_6$.

V případě, že je pohyb hmotných bodů nějak omezen, mluvíme o existenci tzv. vazeb (vazeb-ných sil).

Charakter vazeb může být rozmanitý. Matematicky je vazba vyjádřena buď rovnicí f = 0, pak mluvíme o vazbě oboustranné (udržující), nebo nerovnicí $f \ge 0$, resp. $f \le 0$ a v tomto případě mluvíme o vazbě jednostranné (neudržující).

Oboustrannou vazbu můžeme vyjádřit následovně

$$f(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, t) = 0,$$
(9.1)

resp.

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0. (9.2)$$

Formu zápisu vazby (9.1) je možné zjednodušit následujícím způsobem

$$f(x_i, t) = 0$$
, $i = 1, 2, ..., 3N$, (9.3)

což představuje zápis

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}, t) = 0.$$
(9.4)

Všechny uvedené zápisy vazeb jsou rovnocenné. Forma zápisu (9.3) se díky jednoduchosti používá v literatuře nejčastěji, avšak zápis vazby (9.1) je, s ohledem na další text, nejpřehlednější. Budeme se ho proto držet, nebude-li explicitně uvedeno jinak. Vazba vyjádřená vazebnou podmínkou (9.1) se nazývá vazbou geometrickou. V případě, že vazebná podmínka obsahuje i rychlost

$$f(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, \dot{x}_{1,1}, \dot{x}_{1,2}, \dot{x}_{1,3}, \dots, \dot{x}_{N,1}, \dot{x}_{N,2}, \dot{x}_{N,3}, t) = 0,$$

$$(9.5)$$

pak se tato vazba nazývá kinematickou.

Zderivujeme-li vazebnou podmínku geometrické vazby (9.1) podle času, pak dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha,i}} \dot{x}_{\alpha,i} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{neboli}$$

$$\varphi(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, \dot{x}_{1,1}, \dot{x}_{1,2}, \dot{x}_{1,3}, \dots, \dot{x}_{N,1}, \dot{x}_{N,2}, \dot{x}_{N,3}, t) = 0 . \quad (9.6)$$

Srovnáním vazebných podmínek (9.5) a (9.6) vidíme, že jsme geometrickou vazebnou podmínku převedli na vazebnou podmínku kinematickou. Praktický význam mají hlavně kinematické vazby lineární v rychlostech. Můžeme je zapsat jako

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} a_{\alpha,i}(x_{\alpha,i}, t) \dot{x}_{\alpha,i} + b(x_{\alpha,i}, t) = 0.$$
 (9.7)

Pokud lze levou stranu rovnice (9.7) přepsat jako totální derivaci podle času, tj.

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_{\alpha,i}} \dot{x}_{\alpha,i} + \frac{\partial g}{\partial t} , \qquad (9.8)$$

pak je možné následnou integrací podle času získat vazebnou podmínku (viz rovnost (9.6))

$$f(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, t) = g(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, t) - C = 0, \quad (9.9)$$

kde C je integrační konstanta závislá na počátečních podmínkách. Vazebná podmínka (9.9) představuje vlastně geometrickou podmínku. Kinematická vazba je v tomto případě integrabilní, tj. převoditelná na vazbu geometrickou. Každou geometrickou vazbu nebo kinematickou vazbu, která je integrabilní, budeme nazývat holonomní vazbou¹. Vazba, která tuto vlastnost nemá, se nazývá neholonomní (anholonomní). Neholonomní vazby se vyskytují zejména v mechanice tuhých těles. Dále rozlišujeme případ, kdy vazebná podmínka explicitně neobsahuje čas, pak se nazývá stacionární (skleronomní). Vazebná podmínka závislá na čase se nazývá nestacionární (rheonomní). V dalším textu se budeme zabývat jen vazbami holonomními. Je-li mechanická soustava podrobena pouze holonomním vazbám, pak se nazývá holonomní soustavou. Typickými holonomními vazbami jsou vazby, které udržují hmotné body při jejich pohybu na stanovených plochách, příp. křivkách, nebo v daných vzájemných vzdálenostech. Jestliže se tvar ani poloha těchto ploch, příp. křivek, nebo vzájemné vzdálenosti nemění, jde zároveň o vazbu skleronomní.

Fyzikálně jsou vazby realizovány např. spojujícími tyčemi, lany, kloubovými mechanizmy apod. Příklady vázaných pohybů jsou zachyceny na obrázku 9.1.

Vazby holonomní mají ve fyzice největší význam a snižují stupeň volnosti! *Počtem stupňů volnosti s* rozumíme počet nezávislých údajů (parametrů), kterými lze jednoznačně určit polohu systému (objektu).

Systém N hmotných bodů s R holonomními vazbami má počet stupňů volnosti

$$s = 3N - R. (9.10)$$

¹Někdy jsou v literatuře geometrické vazby nazývány holonomními a integrabilní kinematické vazby vazbami semiholonomními.

Příklady vazeb

Dva hmotné body vůči sobě zachovávají vzdálenost d. Vazbovou podmínku můžeme vyjádřit jako

$$(x_{1,1} - x_{2,1})^2 + (x_{1,2} - x_{2,2})^2 + (x_{1,3} - x_{2,3})^2 - d^2 = 0$$
.

Jedná se o skleronomní holonomní vazbu, s = 5.

• Rovinné matematické kyvadlo délky l, které koná kmitavý pohyb v rovině (x, y). Dvě vazbové podmínky pro tento případ je možné zapsat jako

$$z = 0$$
, $x^2 + y^2 - l^2 = 0$,

kde $x \equiv x_{1,1}, y \equiv x_{1,2}, z \equiv x_{1,3}$. Jedná se o dvě skleronomní holonomní vazby, (s = 1).

• Dva hmotné body se pohybují po povrchu koule o poloměru R, přičemž vůči sobě zachovávají vzdálenost d. Jejich pohyb musí vyhovovat následujícím třem vazbovým podmínkám, které reprezentují opět skleronomní holonomní vazby, (s=3)

$$x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2 + x_{1,3}^2 - R^2 = 0 ,$$

$$x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2 + x_{2,3}^2 - R^2 = 0 ,$$

$$(x_{1,1} - x_{2,1})^2 + (x_{1,2} - x_{2,2})^2 + (x_{1,3} - x_{2,3})^2 - d^2 = 0 .$$

 Pohyb hmotného bodu po povrchu nafukujícího se balónku tvaru koule musí splňovat následující vazbovou podmínku

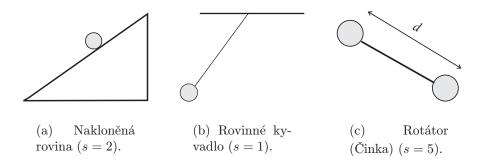
$$x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2 + x_{1,3}^2 - R^2(t) = 0$$
,

kde R(t) je časově proměnný poloměr uvažovaného balónku. V tomto případě se jedná o rheonomní holonomní vazbu, (s = 2).

ullet Těleso klouže po nakloněné rovině v rovině (x,y), jejíž sklon se s časem mění, čímž splňuje následující vazbové podmínky

$$z = 0$$
, $\frac{y}{x} - \tan(\omega t) = 0$,

kde $x \equiv x_{1,1}$, $y \equiv x_{1,2}$, $z \equiv x_{1,3}$. První z podmínek reprezentuje skleronomní holonomní vazbu, kdežto druhá představuje rheonomní holonomní vazbu, (s = 1).



Obrázek 9.1: Příklady omezených pohybů vazbami

Uvažujme soustavu N hmotných bodů s holonomními vazbami, která má počet stupňů volnosti s. Polohu všech těchto bodů v daném časovém okamžiku vzhledem ke zvolené vztažné soustavě nazýváme konfiguraci soustavy. Konfiguraci soustavy v každém okamžiku můžeme jednoznačně vyjádřit s nezávislými parametry $q_1(t), q_2(t), ..., q_s(t)$, které nazveme zobecněné (obecné) souřadnice². Zobecněné souřadnice představují kombinaci různých typů souřadnic a parametrů (zpravidla vzdálenosti a úhly). Jejich volba není předem ničím předepsána, jediným omezením je, aby zvolené zobecněné souřadnice $q_1(t), q_2(t), ..., q_s(t)$ jednoznačně popisovaly všechny možné polohy hmotných bodů soustavy, tj. konfiguraci soustavy. Jinými slovy "ušijeme na míru" vhodné souřadnice řešenému problému, přičemž tento úkol často vyžaduje jistou dávku zkušenosti a intuice.

Zobecněné souřadnice³ q_1, q_2, \ldots, q_s vymezují takzvaný konfigurační prostor všech možných poloh (konfigurací) soustavy. Máme-li N hmotných bodů určených obecnými souřadnicemi $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_s(t)$, potom si můžeme soustavu obecných souřadnic představit jako souřadnice jednoho bodu v prostoru dimenze s=3N-R. Jedná se vlastně o konfigurační varietu \mathcal{Q}^s , přičemž $[q_1, q_2, \ldots, q_s]$ jsou příslušné lokální souřadnice na této varietě. Je potřeba si uvědomit, že konfigurační prostor není prostorem fyzikálních stavů soustavy, jelikož vypovídá pouze o polohách, tedy konfiguracích, všech uvažovaných hmotných bodů soustavy. Pro úplnou informaci o úplném fyzikálním stavu soustavy je nutné znát také jejich rychlosti. Proto konfigurační prostor musíme doplnit o tzv. zobecněné rychlosti $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$. Teprve spojením informací o polohách a rychlostech vzniká prostor fyzikálních stavů dané mechanické soustavy, jehož dimenze je 2s a je tedy parametrizovaný souřadnicemi $q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$, které určují fyzikální stav mechanické soustavy v čase t v tom smyslu, že zahrnuje nezbytné údaje k určení časového vývoje této soustavy.

V další části textu budeme usilovat o nalezení vhodného formálního aparátu, který by umožňoval zapsat pohybové rovnice dané soustavy pomocí zvolených zobecněných souřadnic. Vyřešení tohoto problému bude mít i význam pro soustavy, které nejsou podrobeny vazbám, avšak je z nějakých důvodů pro ně vhodné zavést křivočaré souřadnice. Předpokládejme, že mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi platí transformační vztahy⁴ (zobrazení⁵)

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) , \quad \alpha = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, 3 .$$
 (9.11)

Vztah (9.11) představuje parametrický zápis uvažované variety.

Udáme-li polohu hmotných bodů pomocí zobecněných souřadnic q_j , předpokládáme, že jsou automaticky splněny vazebné podmínky⁶

$$f_k(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, R.$$
 (9.12)

Jsou-li vazby skleronomní, tj.

$$f_k(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, R,$$
 (9.13)

pak je možné zapsat transformační vztahy jako

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \alpha = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, 3,$$
 (9.14)

Za povšimnutí stojí skutečnost, že transformační vztah pro skleronomní vazby neobsahuje explicitně čas t, jak je tomu u rheonomní vazby (9.12).

²Na rozdíl od kartézských souřadnic, obecné souřadnice nemusí mít fyzikální rozměr délky.

³Připomeňme, že jejich počet odpovídá stupni volnosti soustavy.

 $^{^4}$ Tento zápis je obecně pouze lokální, jelikož nemusí být možné pokrýt varietu Q^s jedinou souřadnicovou soustavou.

⁵Toto zobrazení musí být prosté a regulární, tj. jednoznačné a existuje k němu jednoznačné inverzní zobrazení, neboli v každém časovém okamžiku můžeme z hodnot zobecněných souřadnic stanovit polohu všech hmotných bodů soustavy v prostoru pomocí kartézských souřadnic.

 $^{^{6}}$ Indexem k odlišujme jednotlivé holonomní vazby, kterých je R.

9.2 Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Uvažujme soustavu N hmotných bodů, která je podrobena R holonomním vazbám, u nichž připouštíme časovou závislost (rheonomní vazby). Celkovou kinetickou energii uvažované soustavy můžeme vyjádřit jako

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^{2} . \tag{9.15}$$

Dále derivováním vztahu (9.11) podle času dostaneme

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{n=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} . \tag{9.16}$$

Provedeme-li derivaci rovnice (9.16) podle \dot{q}_n dostaneme⁷

$$\frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \ . \tag{9.17}$$

Dosadíme-li rovnost (9.16) do výrazu pro celkovou kinetickou energii soustavy (9.15), pak můžeme psát, že

$$T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2.$$
 (9.18)

Nyní provedeme následující parciální derivace kinetické energie (9.18):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{j}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{n}} \dot{q}_{n} + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{j}} \left(\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{m}} \dot{q}_{m} + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right) , \qquad (9.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right) . \tag{9.20}$$

Pomocí rovností (9.16) a (9.17) upravíme vztahy (9.19) a (9.20)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} , \qquad (9.21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial q_j} . \tag{9.22}$$

Derivací vztahu (9.21) podle času dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{j}} \right) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \left[\ddot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{j}} + \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{j}} \right) \right] = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \left(\ddot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{j}} + \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial q_{j}} \right) . \quad (9.23)$$

⁷Nalezená rovnost se někdy označuje jako pravidlo "krácení tečkou".

Využitím vztahů (9.22) a (9.23) můžeme psát, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{j}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{j}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \left(\ddot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{j}} + \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial q_{j}} - \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial q_{j}} \right) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \ddot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{j}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} F_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{j}} \equiv Q_{j} , \quad (9.24)$$

kde $F_{\alpha,i}$ je *i*-tá složka síly působící na α -tý hmotný bod a Q_j je *j*-tá složka zobecněné síly. Tímto jsme odvodili Lagrangeovy rovnice II. druhu v nejobecnějším tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j , \qquad j = 1, 2, \dots, s , \qquad (9.25)$$

které řešíme s následujícími počátečními podmínkami

$$q_i(t_0) = q_{i0} , \qquad \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_{i0} , \qquad (9.26)$$

druhá počáteční podmínka je zkráceným zápisem výrazu

$$\left. \frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} \right|_{t=t_0} = \dot{q}_{j0} \ .$$

Volba nezávislých zobecněných souřadnic je zcela libovolná, pakliže jednoznačně popisuje konfigurace soustavy. Kdybychom zvolili jinou soustavu nezávislých zobecněných souřadnic, našli bychom Lagrangeovy rovnice stejného tvaru. Takže Lagrangeovy rovnice druhého druhu mají tu vlastnost, že jsou invariantní (neměnné) při přechodu z jedné soustavy souřadnic k soustavě jiné.

Působí-li na uvažovanou soustvu hmotných bodů pouze konzervativní síly, pak je možné obecně komplikované složky zobecněných sil Q_j vyjádřit pomocí jediné skalární funkce, tj. pomocí potenciální energie

$$U = U(x_{1,1}(q_1,\ldots,q_s),\ldots,x_{N,3}(q_1,\ldots,q_s)).$$

Na základě obecného vztahu mezi konzervativní silou a potenciální energií můžeme pro složky obecné síly psát, že

$$Q_{j} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} F_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{j}} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{j}} = -\frac{\partial U}{\partial q_{j}}, \qquad (9.27)$$

což nám umožní přepsat Lagrangeovy rovnice II. druhu jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} , \qquad j = 1, 2, \dots, s . \tag{9.28}$$

Jelikož potenciální energie nezávisí na rychlostech, pak platí, že $\partial U/\partial \dot{q}_j=0$. Díky této skutečnosti je možné upravit Lagrangeovy rovnice (9.28) do následujícího tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = 0 , \qquad j = 1, 2, \dots, s .$$
 (9.29)

Zavedeme-li Lagrangeovu funkci (lagranžián) následujícím vztahem

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = T - U, \qquad (9.30)$$

potom je možné Lagrangeovy rovnice II. druhu přepsat do následujícího tvaru⁸

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 , \qquad j = 1, 2, \dots, s .$$
 (9.31)

Řešením Lagrangeových rovnic II. druhu získáme závislost obecných souřadnic $q_j(t)$ na čase. Z Lagrangeových rovnic (9.31) je patrné, že pohybové rovnice lze získat přímočarou kombinací parciálních derivací jediné skalární funkce \mathcal{L} , což představuje výhodu Lagrangeova formalismu oproti obvyklému newtonovskému přístupu, kde je nutné provádět složité rozklady působících sil do směrů jednotlivých souřadnic.

V případě, že budeme při sestavování pohybových rovnic pracovat s konzervativními silami, tak budeme postupovat dle následujícího algoritmu:

- 1. Určíme počet stupňů volnosti s dané mechanické soustavy a zavedeme vhodné zobecněné souřadnice $q_j, j = 1, ..., s$, tj. s parametrů q_j , které jednoznačně popisují pohyb soustavy v souladu s vazbami.
- 2. Vyjádříme kartézské souřadnice $x_{1,1}, \ldots, x_{N,3}$ pomocí zobecněných souřadnic, tj. určíme vztahy $x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$, kde $\alpha = 1, \ldots, N, i = 1, 2, 3$.
- 3. Vypočteme složky kartézské rychlosti, tj. $\dot{x}_{\alpha,i} \equiv \mathrm{d}x_{\alpha,i}(q_1(t),\ldots,q_s(t),t)/\mathrm{d}t$.
- 4. Dosazením do definice kinetické energie T (9.15) za kartézské složky rychlosti dostaneme vyjádření kinetické energie pro zobecněné souřadnice (9.18).
- 5. Dosazením $x_{\alpha,i}(q_1,q_2,\ldots,q_s,t)$ do potenciální energie $U(x_{1,1},\ldots,x_{N,3})$ vypočítáme $U(q_1,\ldots,q_s)$.
- 6. Určíme Lagrangeovu funkci $\mathcal{L} = T U$.
- 7. Derivováním Lagrangeovy funkce a jejím následným dosazením do Lagrangeových rovnic (9.31) získáme hledané pohybové rovnice.

Příklad 9.2.1

Pomocí Lagrangeových rovnic popište pohyb rovinného matematického kyvadla. Konstantní délka závěsu nechť je l, přičemž jeho hmotnost zanedbáváme. Hmotnost závaží (hmotného bodu) je m. Situace je zachycena na obrázku 9.2.

Řešení:

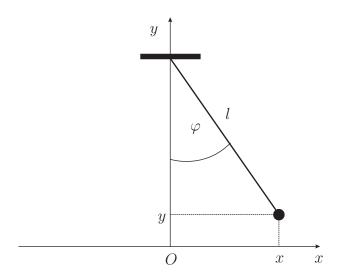
Počet stupňů volnosti rovinného matematického kyvadla s=1 (konstantní délka závěsu a omezení se na pohyb rovinný zavádí dvě holonomní skleronomní vazby), N=1, takže k jeho popisu vystačíme pouze s jednou zobecněnou souřadnicí. Touto zobecněnou souřadnicí bude středový úhel φ , viz obr. 9.2, tedy $q_1 \equiv \varphi$, $\dot{q}_1 \equiv \dot{\varphi}$. Transformační vztahy mezi zobecněnou souřadnicí a souřadnicemi kartézskými je následující

$$x \equiv x_{1,1} = l\sin\varphi , \qquad (9.32)$$

$$y \equiv x_{1,2} = l - l\cos\varphi , \qquad (9.33)$$

$$z \equiv x_{1,3} = 0 \ . \tag{9.34}$$

⁸Počáteční podmínky jsou opět dány vztahy (9.26).



Obrázek 9.2: Pohyb rovinného matematického kyvadla.

Zderivujeme vztahy (9.32), (9.33) a (9.34) podle času, čímž dostaneme složky rychlosti hmotného bodu⁹

$$v_x = \dot{x} \equiv \dot{x}_{1,1} = l\dot{\varphi}\cos\varphi \,\,, \tag{9.35}$$

$$v_y = \dot{y} \equiv \dot{x}_{1,2} = l\dot{\varphi}\sin\varphi , \qquad (9.36)$$

$$v_z = \dot{z} \equiv \dot{x}_{1.3} = 0 \ . \tag{9.37}$$

Abychom určili Lagrangeovu funkci $\mathcal{L} = T - U$, musíme nejdříve určit kinetickou T a potenciální U energii. Pro kinetickou energii můžeme psát, že

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^{2} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_{1,1}^{2} + \dot{x}_{1,2}^{2} + \dot{x}_{1,3}^{2}) , \qquad (9.38)$$

kde $m_1 \equiv m$. Za složky rychlosti v rovnosti (9.38) dosadíme výrazy (9.35), (9.36) a (9.37), čímž dostáváme

$$T = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{-1} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2.$$
 (9.39)

Pro potenciální energii můžeme psát, že

$$U = mgx_{1,2} (9.40)$$

Za $x_{1,2}$ ve vztahu (9.40) dosadíme výraz (9.33)

$$U = mg(l - l\cos\varphi) = mgl - mgl\cos\varphi. \tag{9.41}$$

Pomocí rovností (9.39) a (9.41) může již vyjádřit Lagrangeovu funkci

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl + mgl\cos\varphi. \tag{9.42}$$

Lagrangeovu rovnici můžeme napsat jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0 \ . \tag{9.43}$$

 $^{^9 \}text{Při derivování je třeba si uvědomit, že zobecněná souřadnice je funkcí času <math display="inline">\varphi = \varphi(t)$ a že délka závěsu je konstantní l = konst.

Protože v našem případě $q_1 \equiv \varphi$, přepíšeme rovnici (9.43)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 . \tag{9.44}$$

Derivací Lagrangeovy funkce (9.42) dostáváme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m l^2 2 \dot{\varphi} = m l^2 \dot{\varphi} . \tag{9.45}$$

Ještě zderivujeme výraz (9.45) podle času

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\mathrm{d}m l^2 \dot{\varphi}}{\mathrm{d}t} = m l^2 \ddot{\varphi} . \tag{9.46}$$

Dále

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi \ . \tag{9.47}$$

Dosazením výrazů (9.46) a (9.47) do Lagrangeovy rovnice (9.44) dostaneme

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0. (9.48)$$

Rovnici (9.48) podělíme výrazem ml^2

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{9.49}$$

Rovnice (9.49) popisuje pohyb rovinného matematického kyvadla (pohybová rovnice). Tato pohybová rovnice je obyčejnou nelineární diferenciální rovnicí druhého řádu. Pro malé amplitudy úhlové výchylky (maximální hodnoty úhlové výchylky) $\varphi_m < 5^{\circ}$, je možné rovnici (9.49) linearizovat náhradou sin $\varphi \approx \varphi$, tedy

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0. (9.50)$$

K vyřešení pohybové rovnice (9.49), příp. (9.50), potřebuje znát dvě počáteční podmínky, které mohou mít např. tvar

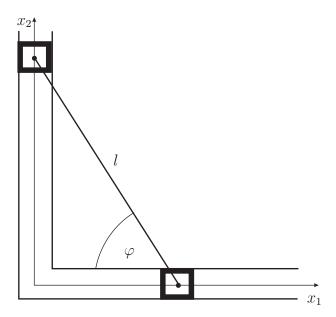
$$\varphi(t_0) = \varphi_0 = \frac{\pi}{4} , \quad \dot{\varphi}(t_0) = \omega_0 = 0 .$$

Příklad 9.2.2

Dva bloky o stejné hmotnosti m kloužou bez tření mezi lištami, viz obrázek 9.3. Bloky jsou spojeny tyčí délky l, u které zanedbáváme hmotnost. Pomocí Lagrangeových rovnic popište pohyb těchto bloků.

Řešení:

Jedná se o systém s jedním stupněm volnosti, s=1 (Každý z bloků se pohybuje po přímce, takže každý blok má stupeň volnosti roven jedné a oba dohromady dají stupeň volnosti dva, avšak jsou spojeny tyčí, která představuje skleronomní holonomní vazbu snižující stupeň



Obrázek 9.3: Pohyb bloků vymezený lištami.

volnosti o jedna, tudíž výsledný stupeň volnosti je roven jedné), N=2. Jako zobecněnou souřadnici zvolíme úhel $q\equiv \varphi$, který svírá tyč s osou x_1 , viz 9.3. Poloha bloku pohybujícího se vodorovně je určena souřadnicemi

$$x_{1,1} = l\cos\varphi \,, \tag{9.51}$$

$$x_{1,2} = 0 (9.52)$$

$$x_{1,3} = 0 (9.53)$$

a poloha bloku pohybujícího se svisle je dána souřadnicí

$$x_{2,1} = 0 (9.54)$$

$$x_{2,2} = l\sin\varphi \,\,\,\,(9.55)$$

$$x_{2,3} = 0. (9.56)$$

Vztahy (9.51) a (9.55) představují transformační vztahy mezi kartézskými souřadnicemi a zobecněnou souřadnicí. Rychlost vodorovně pohybujícího se bloku je dána jako

$$\dot{x}_{1,1} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi\tag{9.57}$$

a rychlost bloku pohybujícího se svisle je

$$\dot{x}_{2,2} = -l\dot{\varphi}\cos\varphi \ . \tag{9.58}$$

Kinetická energie vodorovně pohybujícího se bloku je $(m_1=m_2\equiv m)$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_{1,1}^2\tag{9.59}$$

a kinetická energie svisle pohybujícího se bloku je

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_{2,2}^2. {(9.60)}$$

Takže celková kinetická energie obou bloků je dána součtem jejich kinetických energií (9.59) a (9.60)

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_{1,1}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_{2,2}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{1,1}^2 + \dot{x}_{2,2}^2) . \tag{9.61}$$

Dosadíme za rychlosti $\dot{x}_{1,1}$ a $\dot{x}_{2,2}$ výrazy (9.57) a (9.58), takže

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{1,1}^2 + \dot{x}_{2,2}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{-1} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2. \tag{9.62}$$

Potenciální energie vodorovně pohybujícího se bloku je rovna nule a potenciální energie svisle pohybujícího se bloku, a tím i celého systému, je

$$U = mgx_{2,2} (9.63)$$

Dosadíme-li do vztahu (9.63) výraz (9.55), potom dostaneme

$$U = mgl\sin\varphi . (9.64)$$

Lagrangeova funkce má pro zobecněnou souřadnici následující tvar

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\sin\varphi . \tag{9.65}$$

Lagrangeova rovnice pro zvolenou zobecněnou souřadnici je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 . \tag{9.66}$$

Derivací Lagrangeovy funkce (9.65) dostáváme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m l^2 2 \dot{\varphi} = m l^2 \dot{\varphi} . \tag{9.67}$$

Ještě zderivujeme výraz (9.67) podle času

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\mathrm{d}m l^2 \dot{\varphi}}{\mathrm{d}t} = m l^2 \ddot{\varphi} . \tag{9.68}$$

Dále

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -mgl\cos\varphi \ . \tag{9.69}$$

Dosazením výrazů (9.68) a (9.69) do Lagrangeovy rovnice (9.66) dostaneme

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\cos\varphi = 0. {(9.70)}$$

Rovnici (9.70) podělíme výrazem ml^2

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\cos\varphi = 0. \tag{9.71}$$

Rovnice (9.71) popisuje pohyb obou bloků spojených tyčí (pohybová rovnice).

9.3 Integrály pohybu a cyklické souřadnice

Lagrangeův formalismus nám umožňuje nejen efektivně sestavit pohybové rovnice vyšetřované mechanické soustavy, ale poskytuje nám i "triky" pro jejich řešení, jak si ukážeme níže. Při pohybu mechanické soustavy se 2s veličin q_j a \dot{q}_j , které určují fyzikální stav této soustavy, mění s časem. Existují však takové funkce veličin q_j a \dot{q}_j , které si při pohybu soustavy zachovávají konstantní hodnoty závisející jen na počátečních podmínkách. Tyto funkce se nazývají integrály (konstanty) pohybu a vyjadřují zákony zachování. Z matematického pohledu představuje integrál pohybu tzv. první integrál pohybových rovnic vycházejících z Lagrangeových rovnic II. druhu (9.31). Označme funkci (veličinu) představující integrál pohybu jako $G(q_j,\dot{q}_j,t)$, která po dosazení libovolného řešení Lagrangeových rovnic II. druhu (9.31) $q_j=q_j(t)$ je konstantní (na čase nezávislá), tj.

$$G(t) \equiv G(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) = konst.$$
 neboli $\frac{\mathrm{d}G(t)}{\mathrm{d}t} = 0$. (9.72)

Je třeba zdůraznit, že pro různé trajektorie $q_i(t)$ je hodnota G = konst. obecně různá.

Platí věta, že nezávisí-li Lagrangeova funkce \mathcal{L} na některé zobecněné souřadnici q_n (v takovém případě nazýváme zobecněnou souřadnici q_n cyklickou souřadnicí), pak výraz

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \tag{9.73}$$

je integrálem pohybu.

Potvrzení platnosti této věty snadno získáme, když z Lagrangeových rovnic II. druhu (9.31), kde $j = 1, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots, s$ vybereme n-tou rovnici, tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0 .$$

Díky předpokladu, že zobecněná souřadnice q_n je cyklickou souřadnicí (lagranžián na q_n nezávisí), tj.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0 \; ,$$

zůstane jen první člen n-té Lagrangeovy rovnice, takže

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) = 0 \ .$$

Na základě porovnání s (??), pak dostáváme, že

$$G \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = konst.$$

Q.E.D.

Příklad 9.3.1

Uvažujme volný hmotný bod, tj. hmotný bod, na který nepůsobí žádné síly, o hmotnosti m. Nalezněte integrály pohybu.

Řešení:

Pro volný hmotný bod platí, že U=0 a tedy $\mathcal{L}=T$. V kartézských souřadnicích můžeme Lagrangeovu funkci vyjádřit jako

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) ,$$

tedy $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, takže x, y, z jsou zřejmě cyklické souřadnice, a tak na základě výše uvedené věty dostáváme následující tři integrály pohybu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = C_1 ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = C_2 \; ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = C_3 \; ,$$

kde C_1, C_2, C_3 jsou konstanty. Uvedené integrály pohybu vyjadřují zákon zachování hybnosti, tedy

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}) = (C_1, C_2, C_3) = \mathbf{konst.}$$

V případě, že se uvažovaný hmotný bod nachází v homogenním tíhovém poli, pak Lagrangeova funkce bude mít následující tvar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz ,$$

tedy $\mathcal{L} = \mathcal{L}(z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, takže v tomto případě máme pouze dvě cyklické souřadnice x, y.

Další věta, která souvisí s integrálem pohybu říká, že nezávisí-li Lagrangeova funkce \mathcal{L} explicitně na čase t, pak výraz

$$\mathcal{E}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s), \tag{9.74}$$

který nazýváme zobecněná energie, je integrálem pohybu.

Platnost této věty si snadno ověříme tak, že zderivujeme rovnost (9.74), čímž dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) \dot{q}_{j} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \ddot{q}_{j} \right] ,$$

kde v souladu s předpokladem věty již člen $-\partial L/\partial t$ není obsažen. Jelikož druhý a čtvrtý člen se navzájem vyruší, je možné po úpravě pro časovou derivaci zobecněné energie psát, že

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} \right] \dot{q}_{j} .$$

Výraz v hranaté závorce představuje levou stranu Lagrangeovy rovnice (9.31), která se pro reálný pohyb rovná nule, a tudíž d $\mathcal{E}/dt = 0$, takže $\mathcal{E} = konst$. je integrálem pohybu.

Protože Lagrangeova funkce může být obecně funkcí času t, pak i zobecněná energie může obecně záviset na čase, tj.

$$\mathcal{E}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) , \qquad (9.75)$$

avšak v tomto případě zobecněná energie již není integrálem pohybu, tak jak je uvedeno ve výše prezentované větě.

Příklad 9.3.2

Uvažujte hmotný bod, který se nachází v konzervativním silovém poli. Určete zobecněnou energii pro tento hmotný bod.

Řešení:

Pro kartézské souřadnice můžeme psát

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) ,$$

takže na základě rovnosti pro zobecněnou energii (9.74) dostaneme, že

$$\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{z} - \mathcal{L} = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U = T + U .$$

Z výsledku tohoto příkladu je vidět, že v tomto případě je zobecněná energie $\mathcal E$ rovna celkové mechanické energii, která se zachovává.

Na tomto místě je třeba upozornit na skutečnost, že zobecněná energie \mathcal{E} jako integrál pohybu není vždy rovna součtu kinetické energie T a potenciální energie U. Například rheonomní vazby dané soustavě energii buď dodávají nebo ji odebírají. Jinými slovy je možné říct, že obsahují-li transformační rovnice mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi explicitně čas¹⁰, pak zobecněná energie se nerovná celkové mechanické energii soustavy. Toto tvrzení ale neznamená, že výběrem vhodných zobecněných souřadnic se může změnit fyzikální skutečnost, že se zobecněná energie zachovává.

Avšak platí věta, která říká, že pokud jsou síly konzervativní a pokud jsou vazby holonomní a současně skleronomní, pak

$$\mathcal{E} = T + U = konst. \,\, (9.76)$$

tedy celková mechanická energie se zachovává.

¹⁰Samozřejmě současně platí předpoklad, že potenciální energie je funkcí pouze zobecněných souřadnic, tj. uvažuje se konzervativní silové pole.

Při dokazování platnosti této věty vyjdeme ze vztahu (9.18), přičemž využijeme skutečnosti, že v případě skleronomních vazeb platí rovnost $\partial x_{\alpha,i}/\partial t = 0$, tedy

$$T(q_{1}, \dots, q_{s}, \dot{q}_{1}, \dots, \dot{q}_{s}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{n}} \dot{q}_{n} \right)^{2} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \left(\sum_{m=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{m}} \dot{q}_{m} \right) \left(\sum_{n=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_{n}} \dot{q}_{n} \right) . \quad (9.77)$$

Zavedeme-li si následující matici

$$a_{mn}(q_1, \dots, q_s) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_m} \dot{q}_m \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \dot{q}_n , \qquad (9.78)$$

pak je možné vyjádřit kinetickou energii soustavy (9.77) následujícím způsobem

$$T = \sum_{m=1}^{s} \sum_{n=1}^{s} a_{mn} \dot{q}_m \dot{q}_n . {(9.79)}$$

Derivací vztahu (9.79) podle \dot{q}_j a následným vynásobením touto zobecněnou rychlostí dostáváme, že

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=1}^{s} \sum_{n=1}^{s} \left(a_{mn} \delta_{jm} \dot{q}_{n} + a_{mn} \delta_{jn} \dot{q}_{m} \right) \dot{q}_{j} = 2 \sum_{m=1}^{s} \sum_{n=1}^{s} a_{mn} \dot{q}_{m} \dot{q}_{n} = 2T . \tag{9.80}$$

Dosazením ze vztahu (9.80) do vztahu pro zobecněnou energii (9.74) dostaneme

$$\mathcal{E} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} - (T - U) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} - (T - U) = 2T - T + U = T + U.$$
(9.81)
Q.E.D.

9.4 Zákony zachování z pohledu Lagrangeova formalismu

Každé transformaci, při které nedochází ke změně Lagrangeovy funkce \mathcal{L} (Lagrangeova funkce je při ní invariantní neboli zůstává symetrická), odpovídá určitý integrál pohybu. Jak bude ukázáno níže, prostorové translaci odpovídá zákon zachování hybnosti, rotaci zákon

zachování momentu hybnosti a časové translaci odpovídá zákon zachování energie. Nebude-li uvedeno jinak, budeme v rámci následujících tří podkapitol považovat vyšetřovanou soustavu hmotných bodů za soustavu izolovanou, tj. za soustavu, která neinteraguje s jakoukoliv jinou soustavou. Lagrangeova funkce tudíž nemůže explicitně záviset na čase¹¹.

9.4.1 Zákon zachování hybnosti soustavy

V rámci uvažované inerciální vztažné soustavy považujeme prostor za homogenní, takže Lagrangeova funkce izolované soustavy hmotných bodů není ovlivněna translací (posunem)

 $^{^{11} {\}rm Lagrangeova}$ funkce je taktéž nezávislá na čase v případě, že se soustava nachází v homogenním silovém poli.

celé uvažované soustavy v prostoru. Uvažujme infinitezimální translaci každého polohového vektoru \mathbf{r}_{α} , kterou zapíšeme jako

$$\mathbf{r}_{\alpha} \to \mathbf{r}_{\alpha} + \delta \mathbf{r} , \qquad \alpha = 1, \dots, N .$$
 (9.82)

Tedy celá soustava se posune o

$$\delta \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \delta x_i \mathbf{e}_i \ .$$

Předpokládáme, že souřadnice hmotných bodů soustavy vyhovují v časovém okamžiku t vazebným podmínkám (9.12). Jestliže posuneme celou soustavu o $\delta \mathbf{r}$, tak i v tomto případě požadujeme, aby nové polohy soustavy hmotných bodů pro stejný časový okamžik t vyhovovaly uvažovaným holonomním vazbám, tj.

$$f_k(x_{1,1} + \delta x_1, x_{1,2} + \delta x_2, x_{1,3} + \delta x_3, \dots, x_{N,1} + \delta x_1, x_{N,2} + \delta x_2, x_{N,3} + \delta x_3, t) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, R. \quad (9.83)$$

Předpoklad, že infinitezimální translace jednotlivých hmotných bodů soustavy vyhovuje vazebným podmínkám při neměnném čase, nám říká, že je potřeba tuto translaci chápat čistě geometricky. Jinými slovy, translace¹² není spojena s pohybem hmotných bodů.

Budeme předpokládat Lagrangeovu funkci v kartézských souřadnicích,

$$\mathcal{L}(x_1,\ldots,x_{3N},\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_{3N})$$
.

Změnu Lagrangeovy funkce, jež je způsobena infinitezimálním posunutím $\delta \mathbf{r}$, můžeme, s ohledem na homogennost prostoru, položit rovnu nule a tuto skutečnost vyjádřit jako

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\alpha,i}} \delta x_i + \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} \delta \dot{x}_i = 0.$$
 (9.84)

Jelikož uvažované posunutí není ani explicitní, ani implicitní funkcí času t, musí platit, že

$$\delta \dot{x}_i = \delta \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\delta x_i}{\mathrm{d}t} = 0 \ . \tag{9.85}$$

Na základě rovnosti (9.85) se rovnice (9.84) jednodušší do následujícího tvaru

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\alpha,i}} \delta x_i = 0.$$
 (9.86)

Vzhledem k libovolnosti posunutí $\delta \mathbf{r}$ musí pro splnění rovnice (9.86) platit, že

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\alpha,i}} = 0.$$
 (9.87)

Při použití vztahu (9.87), pak z Lagrangeových rovnic dostaneme, že

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}p_{\alpha,i}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} p_{\alpha,i} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad (9.88)$$

¹²Podobně je potřeba pohlížet i na rotaci soustavy v následující kapitole.

kde jsme použili rovnosti, kterou pro hmotný bod v konzervativním silovém poli, můžeme vyjádřit jako

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial (T(\dot{x}_i) - U(x_i))}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i = p_i , \qquad (9.89)$$

kde p_i je složka hybnosti uvažovaného hmotného bodu.

Rovnost (9.88) nám vyjadřuje zákon zachování hybnosti pro uvažovanou izolovanou soustavu hmotných bodů, tj.

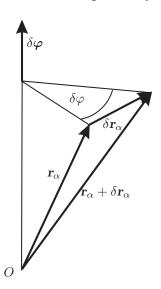
$$\mathbf{p} = \mathbf{konst.} \tag{9.90}$$

Tedy homogennost prostoru implikuje skutečnost, že výsledná hybnost uvažované soustavy hmotných bodů se s časem nemění.

Tento výsledek může být také interpretován tak, že je-li Lagrangeova funkce uvažované soustavy hmotných bodů, která nemusí být nutně izolovaná, invariantní vůči posunutí v jistém směru, pak se hybnost soustavy v tomto směru s časem nemění, tedy zachovává se.

9.4.2 Zákon zachování momentu hybnosti

V rámci uvažované inerciální vztažné soustavy považujeme prostor za izotropní, takže Lagrangeova funkce izolované soustavy hmotných bodů není ovlivněna rotací (pootočením) celé uvažované soustavy v prostoru. Předpokládejme, že uvažovaná soustava se otočí kolem dané osy o infinitezimální úhel $\delta\varphi$, viz obr. 9.4. Tímto se polohový vektor \mathbf{r}_{α} změní



Obrázek 9.4: Pootočení o infinitezimální úhel $\delta\varphi$.

$$\mathbf{r}_{\alpha} \to \mathbf{r}_{\alpha} + \delta \mathbf{r} \,, \qquad \alpha = 1, \dots, N \,,$$
 (9.91)

kde

$$\delta \mathbf{r}_{\alpha} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_{\alpha} \ . \tag{9.92}$$

Jelikož se pootočením změní všechny vektory stejným způsobem, pak platí, že

$$\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \to \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} + \delta \dot{\mathbf{r}} , \qquad \alpha = 1, \dots, N ,$$
 (9.93)

kde

$$\delta \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \ . \tag{9.94}$$

Vyjádříme-li Lagrangeovu funkci v kartézských souřadnicích $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_{3N}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3N})$, pak díky izotropii prostoru můžeme její změnu vlivem infinitezimální rotace položit rovnu nule, tj.

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\alpha,i}} \delta x_{\alpha,i} + \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} \delta \dot{x}_{\alpha,i} = 0.$$
 (9.95)

V rovnosti (9.88) je použito vztahu

$$p_{\alpha,i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} \,, \tag{9.96}$$

s jehož pomocí je možné zapsat Lagrangeovy rovnice druhého druhu v kartézských souřadnicích jako

$$\dot{p}_{\alpha,i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\alpha,i}} , \qquad \alpha = 1, \dots, N ; \quad i = 1, 2, 3 .$$
 (9.97)

Použitím vztahů (9.96) a (9.97) je možné zapsat rovnost (9.95) jako

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left(\dot{p}_{\alpha,i} \delta x_{\alpha,i} + p_{\alpha,i} \delta \dot{x}_{\alpha,i} \right) = 0$$
 (9.98)

nebo ve vektorovém tvaru

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} (\dot{\boldsymbol{p}}_{\alpha} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{\alpha} + \boldsymbol{p}_{\alpha} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha}) = 0.$$
 (9.99)

Použitím vztahů (9.92) a (9.94) je možné vyjádřit rovnost (9.99) následujícím způsobem

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left[\dot{\boldsymbol{p}}_{\alpha} \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}_{\alpha}) + \boldsymbol{p}_{\alpha} \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha}) \right] = 0 . \tag{9.100}$$

Provedeme-li cyklické záměny pro výše uvedené smíšené součiny, pak výraz (9.100) přejde po úpravě do tvaru

$$\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^{N} \left(\boldsymbol{r}_{\alpha} \times \boldsymbol{p}_{\alpha} + \dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha} \times \boldsymbol{p}_{\alpha} \right) \right] = 0 . \tag{9.101}$$

Členy v kulaté závorce rovnice (9.101) můžeme vyjádřit jako časovou derivaci vektorového součinu $\mathbf{L}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}$, takže můžeme psát, že

$$\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \left[\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\underbrace{\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha}}) \right] = 0 , \qquad (9.102)$$

kde L_{α} reprezentuje moment hybnosti příslušející hmotnému bodu α .

Díky tomu, že $\delta \varphi$ je nenulový vektor, jehož směr je libovolný, potom k tomu, aby platila rovnice (9.102), musí být splněno, že

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{L}_{\alpha}}{\mathrm{d} t} = \boldsymbol{0} , \qquad (9.103)$$

takže odtud úpravou dostaneme, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{L}_{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} \quad \text{neboli} \quad \mathbf{L} = \mathbf{konst.} , \qquad (9.104)$$

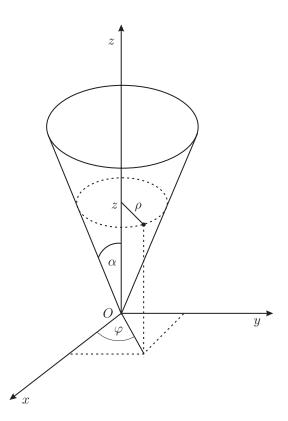
kde \boldsymbol{L} je celkový moment hybnosti uvažované izolované soustavy hmotných bodů. Vztahy (9.104) představují matematické vyjádření zákona zachování momentu hybnosti pro izolovanou soustavu hmotných bodů.

K tomu, aby byla Lagrangeova funkce invariantní vůči rotaci, není vždy nezbytně nutné, aby uvažovaná soustava hmotných bodů byla izolovaná. Totiž v případě, že se uvažovaná soustava hmotných bodů nachází ve vnějším silovém poli, které má osu symetrie, pak Lagrangeova funkce je invariantní vůči rotaci okolo této osy symetrie. Tuto situaci demonstruje níže uvedený příklad.

Příklad 9.4.1

Uvažujeme hmotný bod o hmotnosti m, jehož pohyb je vázán na vnitřní stranu kužele s vrcholovým úhlem 2α . Na tento hmotný bod působí tíhová síla. Určete zobecněné souřadnice, popište vazby a nalezněte Lagrangeovy rovnice pohybu.

Řešení:



Obrázek 9.5: Pohyb hmotného bodu po vnitřní straně kužele.

Osou kužele je osa z a jeho vrchol je totožný s počátkem kartézské souřadnicové soustavy. Jelikož má řešený problém osovou symetrii, použijeme jako zobecněné souřadnice souřadnice cylindrické, tj. ρ, φ, z .

Vazba je holonomní skleronomní vazbou a můžeme ji matematicky popsat jako

$$z = \rho \cot \alpha . \tag{9.105}$$

Uvažovaný hmotný bod má stupeň volnosti s=2, takže k úplnému popisu hmotného bodu bude potřeba pouze dvou zobecněných souřadnic. Pomocí rovnice vazby můžeme eliminovat

buď proměnnou z nebo ρ . V našem příkladu budeme eliminovat proměnnou z. Transformační rovnice mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi můžeme vyjádřit jako

$$x = \rho \cos \varphi \; ; \qquad \dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi \; , \tag{9.106}$$

$$y = \rho \sin \varphi \; ; \qquad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi \; , \tag{9.107}$$

$$z = \rho \cot \alpha \; ; \qquad \dot{z} = \dot{\rho} \cot \alpha \; .$$
 (9.108)

Pro kinetickou energii můžeme pomocí vztahů (9.106), (9.107), (9.108) psát

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2\cot^2\alpha\right) . \tag{9.109}$$

Pro potenciální energii dostáváme

$$U = mgz = mg\rho \cot \alpha . (9.110)$$

Takže Lgrangeova funkce bude mít v zobecněných souřadnicích tvar

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 \cot^2 \alpha \right) - mg\rho \cot \alpha . \tag{9.111}$$

Ze vztahu (9.111) je vidět, že Lagrangeova funkce neobsahuje explicitně proměnnou φ , takže platí, že

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \ .$$

Z Lagrangeovy rovnice potom vyplývá, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 , \qquad (9.112)$$

tedy

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi}^2 = m\rho^2 \omega = konst. \tag{9.113}$$

Výraz (9.113) představuje moment hybnosti vzhledem k ose z. Proto rovnice (9.113) vyjadřuje zákon zachování momentu hybnosti kolem osy symetrie.

Pro proměnnou ρ můžeme psát Lagrangeovu rovnici jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \ . \tag{9.114}$$

Dosazením Lagrangeovy funkce (9.111) do Lagrangeovy rovnice (9.114) dostaneme

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + \rho \sin \alpha \cos \alpha = 0 , \qquad (9.115)$$

která spolu s rovnicí (9.113) představuje pohybovou rovnici uvažovaného hmotného bodu pro zobecněnou souřadnici ρ .

9.4.3 Zákon zachování mechanické energie

Uvažujeme-li izolovanou soustavu hmotných bodů, potom Lagrangeova funkce pro tuto soustavu hmotných bodů explicitně nezávisí na čase, což je ve své podstatě odrazem skutečnosti, že čas, který uvažujeme v rámci dané inerciální vztažné soustavy, je homogenní neboli všechny časové okamžiky jsou rovnocenné. Takže Lagrangeova funkce je invariantní vůči translaci v čase, což zapíšeme jako $\partial L/\partial t=0$. V kapitole 9.3 věnované integrálům pohybu je ukázáno, že není-li Lagrangeova funkce explicitní funkcí času, pak zobecněná energie (9.75) je konstantní. Vyjádříme-li tuto skutečnost v kartézských souřadnicích, tak dostáváme, že

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} \dot{x}_{\alpha,i} - \mathcal{L} = konst.$$
 (9.116)

Protože platí, že $\mathcal{L} = T - U$, můžeme rovnici (9.116) přepsat jako

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} \dot{x}_{\alpha,i} - T + U = konst.$$
 (9.117)

Využijeme-li vztahu pro kinetickou energii v kartézských souřadnicích (9.15) a předpokladu, že se jedná o konzervativní silové pole, tj. potenciální energie je funkcí pouze polohy, potom je možné vztah (9.117) upravit jako

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \left(m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^{2} - \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^{2} \right) + U(x_{1,1}, \dots, x_{N,3}) = konst.$$
 (9.118)

Rovnice (9.118) upravíme s ohledem na vztah (9.15) do následujícího tvaru

$$T + U = konst., (9.119)$$

což odpovídá matematickému vyjádření zákona zachování mechanické energie.

Odvodili jsme zákony zachování pro izolované soustavy hmotných bodů na základě předpokladu, že čas je homogenní (tj. všechny časové okamžiky jsou rovnocenné), prostor je homogenní tj. všechna místa uvažovaného prostoru jsou rovnocenná) a dále, že prostor je izotropní (tj. všechny směry uvažovaného prostoru jsou rovnocenné), přitom jsme popisovali tuto izolovanou soustavu hmotných bodů vzhledem k inerciálnímu vztažnému systému. Zjistili jsme, že homogennost času a homogennost a izotropie prostoru má pro Lagrangeovu funkci izolovaných hmotných bodů za následek, že tato funkce je invariantní neboli symetrická vůči časové translaci, prostorové translaci či prostorové rotaci.

9.5 Hamiltonovy kanonické rovnice pohybu

Na základě analogie můžeme výsledek (9.89) rozšířit i pro zobecněné souřadnice, čímž definitoricky zavádíme tzv. zobecněnou hybnost

$$p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ . \tag{9.120}$$

I když značíme zobecněnou hybnost stejně jako hybnost v kartézských souřadnicích, tak se obecně nejedná o stejné veličiny.

Použijeme-li zobecněné hybnosti (9.120) v Lagrangerových rovnicích II. druhu (9.31), pak je možné tyto rovnice vyjádřit úsporněji jako

$$\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}, \qquad j = 1, \dots, s.$$
 (9.121)

Použijeme-li zobecněné hybnosti ve vztahu pro zobecněnou energii (9.75), pak pomocí vztahu (9.121) dostaneme

$$\mathcal{E}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) . \tag{9.122}$$

Řešíme-li rovnici (9.120) pro zobecněnou rychlost, pak toto řešení můžeme obecně vyjádřit jako

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t)$$
 (9.123)

Vztah (9.123) nám umožňuje vyjádřit zobecněnou energii jako funkci proměnných (q_j, p_j, t) místo původních proměnných (q_j, \dot{q}_j, t) , tj. dosazením za \dot{q}_j ze vztahu (9.123) na pravé straně rovnice (9.122)¹³, tedy

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) , \qquad (9.124)$$

kde namísto symbolu \mathcal{E} je použito symbolu \mathcal{H} , který budeme nazývat Hamiltonovou funkcí (hamiltoniánem).

Rovnost (9.124) je napsána způsobem, který má zdůraznit skutečnost, že Hamiltonova funkce je vždy považována za funkci proměnných $(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s, t)$, kdežto Lagrangeova funkce je funkcí proměnných $(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$, tj.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) , \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) .$$
 (9.125)

Uvažováním zápisu hamiltoniánu (9.125) můžeme napsat jeho diferenciál jako

$$d\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt . \qquad (9.126)$$

Na základě rovnosti (9.124) můžeme diferenciál hamiltoniánu zapsat také jako

$$d\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{s} \left(\dot{q}_{j} dp_{j} + p_{j} d\dot{q}_{j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{j}} dq_{j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{j}} d\dot{q}_{j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt .$$
 (9.127)

Pomocí vztahů (9.120) a (9.121) je možné v rovnici (9.127) nahradit $\partial L/\partial q_j$ a $\partial L/\partial \dot{q}_j$, čímž se vyruší druhý a čtvrtý člen v závorce, takže dostaneme

$$d\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{s} (\dot{q}_{j} dp_{j} - \dot{p}_{j} dq_{j}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt . \qquad (9.128)$$

Porovnáním koeficientů u dq_j , dp_j a dt v rovnicích (9.126) a (9.128) dostaneme, že

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \qquad j = 1, \dots, s,$$
 (9.129)

$$-\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \qquad j = 1, \dots, s \tag{9.130}$$

a

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \ . \tag{9.131}$$

 $^{^{13}}$ Tato transformace souřadnic $(q_j,\dot{q}_j,t)\to (q_j,p_j,t)$ spadá do třídy Legendreových transformací, se kterými se často setkáváme v termodynamice při přechodech mezi různými soubory stavových proměnných.

Rovnice (9.129) a (9.130) představují $Hamiltonovy~kanonick\'e~rovnice^{14}$. K jejich řešení je nutné znát počáteční podmínky

$$q_i(t_0) = q_{i0} , \qquad p_i(t_0) = p_{i0} .$$
 (9.132)

Tedy řešením Hamiltonových kanonických rovnic získáme časové závislosti zobecněných souřadnic $q_i(t)$ a zobecněných hybností $p_i(t)$.

Zjevně (9.129) a (9.130) představují 2s kanonických rovnic a nahrazují s Lagrangeových rovnic. Kanonické rovnice představují diferenciální rovnice prvního řádu, kdežto Lagrangeovy rovnice představují diferenciální rovnice druhého řádu. Sestavení Lagrangeových rovnic je často jednodušší než je tomu v případě kanonických rovnic. Při hledání kanonických rovnic zpravidla nejdříve vytvoříme Lagrangeovu funkci, s jejíž pomocí vypočítáme zobecněné hybnosti ze vztahu (9.120). Avšak existují i případy, kdy je možné kanonické rovnice sestavit přímo.

Derivací Hamiltonovy funkce (9.125) podle času t a následným využitím Hamiltonových kanonických rovnic dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s} \underbrace{\left(-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j \right)}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} . \tag{9.133}$$

Pokud Hamiltonova funkce není explicitně závislá na čase, potom

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \mathcal{H} = konst. \tag{9.134}$$

Z rovnice (9.131) vyplývá, že nezávisí-li Hamiltonova funkce explicitně na čase, pak ani Lagrangeova funkce explicitně na čase nezávisí. Jelikož Hamiltonova funkce je číselně rovna zobecněné energii (9.75), potom můžeme říct, viz kapitola 9.3, že je-li uvažované silové pole konzervativní a uvažované vazby holonomní a zároveň skleronomní pak

$$\mathcal{H} = T + U = konst. \tag{9.135}$$

Zobecněné souřadnice q_j a zobecněná hybnost p_j jsou tzv. kanonicky sdružené veličiny. Z kanonických rovnic (9.129) a (9.130) vyplývá, že jestliže hamiltonián neobsahuje zobecněnou souřadnici q_n , potom $\dot{p}_n=0$, tedy sdružená zobecněná hybnost představuje integrál pohybu. Nezávisí-li Hamiltonova funkce na nějaké zobecněné souřadnici q_n , pak se tato souřadnice rovněž nazývá cyklickou souřadnicí. A platí, že je-li zobecněná souřadnice cyklická v případě Hamiltonovy funkce, pak je cyklická i v případě funkce Lagrangeovy. Avšak, je-li zobecněná souřadnice q_n cyklickou souřadnicí pro \mathcal{L} , neznamená to, že jí odpovídající zobecněná rychlost \dot{q}_n není součástí v Lagrangeovy funkce, tedy

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}, q_{n+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) . \tag{9.136}$$

Z Lagrangeovy funkce (9.136) vyplývá, že se tímto nesnižuje stupeň volnosti soustavy, tj. musí být řešeno s rovnic. Avšak v případě kanonické formulace platí, že je-li q_n cyklickou souřadnicí, pak $p_n = C_n$, kde C_n je konstanta a Hamiltonovu funkci je možné zapsat jako

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \dots, q_{n-1}, q_{n+1}, \dots, q_s, p_1, \dots, p_{n-1}, C_n, p_{n+1}, \dots, p_s, t) , \qquad (9.137)$$

takže je nutné v tomto případě řešit jen 2s-2 diferenciálních rovnic prvního řádu, a tímto se počet stupňů volnosti efektivně sníží o 1. Konstantu C_n určíme z počátečních podmínek. Hamiltonova formulace mechaniky je vhodná zejména v případech, kdy se setkáme s cyklickými souřadnicemi. Kdybychom mohli formulovat uvažovaný problém takovým způsobem, že by všechny souřadnice byly cyklické, potom bychom dosáhli jeho nejednoduššího možného řešení. Je dokonce možné najít takové transformace souřadnic, které zajistí, že všechny souřadnice jsou cyklické. Tato problematika však přesahuje rámec tohoto skripta.

¹⁴Mezi oběma rovnicemi existuje zjevná symetrie, a proto jsou tyto rovnice označovány přívlastkem "kanonické", čímž je přibližně míněno, že se jedná o jednoduché základní rovnice.

9.5.1 Fázový prostor

Uvažujme mechanickou soustavu, které přísluší zobecněné souřadnice q_j a kanonicky sdružené zobecněné hybností p_j , pro něž máme příslušnou Hamiltonovu funkci (9.124). Jestliže známe počáteční hodnoty (9.132), pak pohyb této soustavy je popsán funkcemi $q_j(t)$ a $p_j(t)$ $(j=1,\ldots,s)$, které jsou jednoznačně určeny Hamiltonovými kanonickými rovnicemi. Uvažovaný pohyb může být reprezentován geometricky jako pohyb fázového bodu ve fázovém prostoru. Trajektorii fázového bodu fázovým prostorem nazýváme fázovou trajektorií. Fázový prostor je reálný prostor dimenze 2s, ve kterém má fázový bod souřadnice $[q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s]$. Bod ve fázovém prostoru reprezentuje nejen konfiguraci uvažované mechanické soustavy, ale, díky zobecněným hybnostem, celý jeho fyzikální stav. To je rozdíl oproti Lagrangeovu konfiguračnímu prostoru dimenze s. Potom každý pohyb mechanické soustavy odpovídá pohybu fázového bodu fázovým prostorem.

Příklad 9.5.1

Napište Hamiltonovy kanonické rovnice pro vrh šikmý vzhůru, když víte, že těleso (hmotný bod) bylo vrženo pod elevačním úhlem α s počáteční rychlostí v_0 .

Řešení:

V tomto případě budeme uvažovat pouze kartézské souřadnice. Jelikož se jedná o rovinný pohyb, budeme předpokládat pohyb v rovině (x, y). Na základě zadání můžeme napsat počáteční podmínky

$$x(0) = 0$$
, $y(0) = 0$, (9.138)

$$p_x(0) = mv_0 \cos \alpha , \ p_y(0) = mv_0 \sin \alpha .$$
 (9.139)

Protože pohyb uvažovaného hmotného bodu je vázán na rovinu (x, y), máme jednu holonomní a zároveň skleronomní vazbu z = 0, takže musí platit, že $\mathcal{H} = T + U$. Stupeň volnosti je v tomto případě s = 3 - 1 = 2. Pro kartézské složky hybnosti můžeme psát, že

$$p_x = m\dot{x}^2 \,, \quad p_y = m\dot{y}^2 \,. \tag{9.140}$$

Pro celkovou mechanickou energii můžeme psát, že

$$E = T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy.$$
 (9.141)

Vzhledem k tomu, že Hamiltonova funkce je číselně rovna celkové mechanické energii, použijeme k vyjádření této funkce vztahu (9.141) s tím, že upravíme členy pro kinetickou energii pomocí vztahů (9.140)

$$\mathcal{H}(y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + mgy.$$
 (9.142)

Z vyjádření Hamiltonovy funkce (9.142) je vidět, že tato funkce není závislá na proměnné x, takže tato souřadnice je cyklickou souřadnicí. Díky této skutečnosti k ní kanonicky sdružená hybnost p_x musí představovat integrál (konstantu) pohybu, tj. $p_x = C_x$, kde konstantu C_x určíme z počátečních podmínek (9.139), tedy $C_x = mv_0 \cos \alpha$. Tímto se efektivně snižuje stupeň volnosti od hodnotu 1, neboli je potřeba řešit pouze dvě Hamiltonovy kanonické rovnice. S ohledem na tuto skutečnost můžeme napsat Hamiltonovy kanonické rovnice (9.129) a (9.130)

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} \,, \tag{9.143}$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -mg \ . \tag{9.144}$$

Dosazením za složku hybnosti p_y v rovnosti (9.144) ze vztahu (9.143) dostaneme

$$m\ddot{y} = -mg. (9.145)$$

Integrací rovnice (9.145) podle času dostaneme, že

$$m\dot{y} = p_y = -mgt + C \,, \tag{9.146}$$

kde integrační konstantu C určíme z integrační podmínky (9.139), tj. $C=mv_0\sin\alpha$, takže výsledek (9.146) bude mít tvar

$$m\dot{y} = p_y = -mgt + mv_0 \sin\alpha , \qquad (9.147)$$

který upravíme podělením hmotností a následnou integrací podle času dostaneme, že

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t\sin\alpha + C , \qquad (9.148)$$

kde integrační konstantu C určíme z integrační podmínky (9.138), tj. C=0, takže výsledek (9.148) bude mít výsledný tvar

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t\sin\alpha \ . \tag{9.149}$$

Získané výsledky představují známé vztahy pro popis vrhu šikmého vzhůru.

9.6 Odvození Lagrangeových rovnic druhého druhu pro kartézské souřadnice a jejich zobecnění

Předpokládejme, že síla je konzervativní, potom pro jednorozměrný pohyb můžeme pohybovou rovnici napsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial x} \,, \tag{9.150}$$

kde p=mv je hybnost uvažovaného hmotného bodu a U je jeho potenciální energie. Rovnici (9.150) můžeme též vyjádřit jako

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial x} \ . \tag{9.151}$$

Uvážíme-li, že pro kinetickou energii T platí

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \,, \tag{9.152}$$

potom můžeme hybnost mv napsat jako

$$mv = \frac{\partial T}{\partial v} \,. \tag{9.153}$$

Dosazením ze vztahu (9.153) za hybnost ve vztahu (9.151) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right) = -\frac{\partial U}{\partial x} \,. \tag{9.154}$$

Rovnici (9.154) je možné převést na symetričtější tvar zavedením Lagrangeovy funkce

$$L = T - U. (9.155)$$

Derivujeme-li Lagrangeovu funkci podle v a x, tak dostaneme, že

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial v},$$
 (9.156)

jelikož

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ a } \frac{\partial U}{\partial v} = 0 \text{ .}$$
 (9.157)

Dosazením výrazů (9.156) do rovnice (9.154) po převedení na jednu stranu dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ . \tag{9.158}$$

Protože platí, že $v = \dot{x}$, je možné rovnici (9.158) vyjádřit jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ . \tag{9.159}$$

Zobecníme rovnici (9.159) pro N hmotných bodů, které mají následující kartézské souřadnice $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N$, které pro lepší přehlednost přeznačíme jako $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \ldots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}$. Potenciální energii pak můžeme vyjádřit jako

$$U = U(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3})$$

$$(9.160)$$

a kinetickou energii následujícím způsobem

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha,i}^{2} , \qquad (9.161)$$

kde $v_{\alpha,i} = \dot{x}_{\alpha,i}$ jsou příslušné složky rychlosti jednotlivých hmotných bodů, takže výraz (9.161) je možné také psát jako

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m \dot{x}_{\alpha,i}^{2} . \tag{9.162}$$

Pro Lagrangeovu funkci pak dostáváme, že

$$L = T - U = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m \dot{x}_{\alpha,i}^{2} - U(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}) . \quad (9.163)$$

Na rovnici (9.159) je možné pohlížet jako na rovnici, která platí právě pro jednu složku rychlosti, pak je možné tuto rovnici přímočarým způsobem zobecnit pro N hmotných bodů jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha,i}} = 0 , \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, 3 . \tag{9.164}$$

Rovnice (9.164) představují Lagrangeovy rovnice druhého druhu pro kartézské souřadnice.

9.7 Základní informace k variačnímu počtu

Základním problémem variačního počtu 15 je stanovení funkce y(x) takové, že integrál

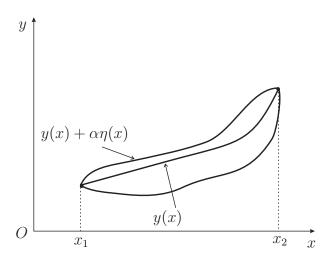
$$I = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x] dx, \qquad (9.165)$$

kde $y'(x) = \mathrm{d}y(x)/\mathrm{d}x$, nabývá extrému, tj. nabývá maximální nebo minimální hodnoty. Integrační meze v integrálu (9.165) jsou pevné. Integrál I představuje funkcionál, který závisí na funkci y(x) a na integračních mezích. Funkce y(x) se mění dokud není nalezena extrémní hodnota funkcionálu. Tím je míněna skutečnost, že nabývá-li funkcionál I pro funkci y = y(x) např. minimální hodnoty, pak pro jakoukoliv sousední funkci musí funkcionál I narůstat. Definici sousední funkce můžeme provést následujícím způsobem.

Všem možným funkcím y přisoudíme parametrickou reprezentaci $y=y(\alpha,x)$ takovou, že pro $\alpha=0$ je funkce y=y(0,x)=y(x) funkcí, pro kterou nabývá funkcionál I extrému. Můžeme psát, že

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha \eta(x) , \qquad (9.166)$$

kde $\eta(x)$ je funkce proměnné x,která má první derivaci a v koncových bodech nabývá nulové hodnoty, tj. $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, jelikož v bodech x_1 a x_2 musí všechny variace $y(\alpha, x)$ funkce y(x) nabývat stejných hodnot, viz obr. 9.6. V případě, že budeme uvažovat funkci (9.166),



Obrázek 9.6: Funkce y(x) a k ní sousední funkce.

pak se integrál I stává funkcionálem parametru α

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f[y(\alpha, x), y'(\alpha, x), x] dx.$$
 (9.167)

Podmínkou, že integrál (9.167) nabývá extrémní hodnoty, je skutečnost, že

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \tag{9.168}$$

pro všechny funkce $\eta(x)$. Toto je podmínka nutná, nikoliv dostačující. Zderivujeme vztah (9.168) podle uvažovaného parametru α , abychom mohli hledat podmínky

¹⁵Variační počet je jednou z klasických disciplín matematické optimalizace. Má četná použití ve fyzice, zejména mechanice. Zpravidla jde o to najít mezi funkcemi předepsaných vlastností takové funkce, pro které daný integrál (funkcionál), jehož hodnota závisí na těchto funkcích, nabývá extrémní hodnoty na dané třídě funkcí.

splňující rovnost (9.168)

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f[y(\alpha, x), y'(\alpha, x), x] dx. \qquad (9.169)$$

Protože integrační meze jsou pevné, operace derivování ovlivní pouze integrand, přičemž je nutné si uvědomit, že proměnná x nezávisí na α ,

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx . \tag{9.170}$$

Z rovnice (9.166) vyplývá, že

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) , \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} .$$
 (9.171)

Dosazením výrazů (9.171) do rovnice (9.170) dostaneme

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x . \tag{9.172}$$

Pro druhý člen integrandu v rovnici (9.172) použijeme metody per partes, tj.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \mathrm{d}x . \tag{9.173}$$

Vzhledem k tomu, že $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, zjednoduší se výraz (9.173) následujícím způsobem

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \eta(x) \mathrm{d}x . \tag{9.174}$$

Do rovnice (9.172) dosadíme za druhý člen integrandu výraz (9.174), takže po úpravě dostáváme, že

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) \mathrm{d}x . \tag{9.175}$$

Vzhledem k tomu, že funkce $\eta(x)$ je libovolná a má-li být pro extrém splněna podmínka (9.168), pak samotný integrand v rovnici (9.175) pro $\alpha = 0$ musí splňovat rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 , \qquad (9.176)$$

kde y, y' jsou již funkce nezávislé na α . Rovnice (9.176) se nazývá *Eulerova rovnice*, která představuje nutnou podmínku k tomu, aby integrál I nabýval extrémní hodnoty.

V případě, že funkce f, je funkcí více závislých proměnných

$$f = f(y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \dots, x)$$
(9.177)

nebo jednodušeji

$$f = f(y_i(x), y_i'(x), x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$
 (9.178)

Analogicky s rovnicí (9.166) můžeme psát

$$y_i(\alpha, x) = y_i(0, x) + \alpha \eta_i(x) . \tag{9.179}$$

Postupem podobným s postupem při hledání Eulerovy rovnice (9.176) dospějeme k rovnici

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \right] \eta_i(x) \mathrm{d}x . \tag{9.180}$$

Protože jednotlivé variace jsou nezávislé, pak aby byla splněna podmínka (9.166), musí pro $\alpha=0$ platit, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n . \tag{9.181}$$

9.7.1 Notace δ

Ve variačním počtu je zvykem používat zkráceného zápisu pro variace. K vysvětlení této notace použijeme rovnosti (9.175), která může být zapsána následujícím způsobem

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha dx . \tag{9.182}$$

Rovnost (9.182) pak může být zapsána jako

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y \mathrm{d}x , \qquad (9.183)$$

kde

$$\delta I \equiv \frac{\partial I}{\partial \alpha} d\alpha , \quad \delta y \equiv \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha .$$
 (9.184)

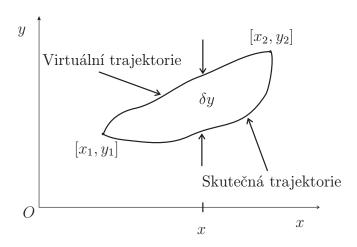
Podmínku pro extrém je možné zapsat následujícím způsobem

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx = 0, \qquad (9.185)$$

což odpovídá zápisu

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y \mathrm{d}x = 0 . \tag{9.186}$$

Že jsou zápisy (9.185) a (9.186) ekvivalentní si následně ukážeme. Na obrázku 9.7 je zakreslena



Obrázek 9.7: Variace δy .

jak skutečná, tak virtuálni (možná) trajektorie. Variace (virtuální posunutí) δy je vázána na konkrétní souřadnici x.

Variační symbol δ můžeme přesunout, díky tomu, že jsou integrační meze pevné, dovnitř integrálu

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x \right) dx . \tag{9.187}$$

Protože¹⁶

$$\delta y' = \delta \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\delta y) \text{ a } \delta x = 0 ,$$
 (9.188)

 $^{^{16}}$ Variace se uskutečňují pro stejnou hodnotu proměnné x, takže $\delta x=0$. V případě, že místo proměnné x bychom uvažovali čas t tak, pak hovoříme o tzv. izochronni variaci, kdy $\delta t=0$.

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \delta y \right) \mathrm{d}x . \tag{9.189}$$

Integrací druhého členu integrandu metodou per partes, podobně jako v případě výpočtu integrálu (9.173), můžeme psát, že

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \mathrm{d}x . \tag{9.190}$$

Opět protože variace δy je libovolná tak, aby byla splněna podmínka pro extrém $\delta I = 0$, je nutné, aby integrand byl roven nule, což bude platit při splnění Eulerovy rovnice (9.176).

Příklad 9.7.1

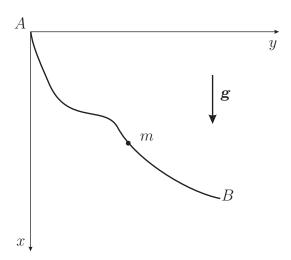
Touto úlohou, která se nazývá *úloha o brachistochroně*, se zabývali již Jakob a Johann Bernoulli v roce 1696 a zdárně ji vyřešili.

Zadání znělo následovně:

Ve svislé rovině jsou dány dva body A a B. Najděte dráhu, po které se těleso (hmotný bod) o hmotnosti m dostane vlivem vlastní tíže z bodu A do bodu B za nejkratší možný čas. Hledaná křivka byla nazvána brachistochrona.

Řešení:

Předpokládáme, že hmotný bod se nachází v homogenním tíhovém poli. Bez újmy na obecnosti si zvolíme takový souřadnicový systém, že bod A = [0,0] (leží v počátku) a bod B = [x,y], viz obr. 9.8. Jestliže měříme potenciální energii od bodu x = 0, tj. U(x = 0) = 0,



Obrázek 9.8: Zvolený souřadnicový systém k úloze o brachistochroně

pak v bodě A bude mít hmotný bod o hmotnosti m celkovou mechanickou energii rovnu nule, tj.

$$T + U = 0. (9.191)$$

Protože pro kinetickou energii platí, že $T = \frac{1}{2}mv^2$, a pro potenciální energii, že U = -mgx, dostaneme po dosazení za kinetickou a potenciální energii do vztahu (9.191), že

$$v = \sqrt{2gx} (9.192)$$

Jelikož pro okamžitou rychlost platí, že

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \,, \tag{9.193}$$

je možné na základě tohoto vztahu psát, že

$$dt = \frac{ds}{v} \tag{9.194}$$

a odtud pak integrací dostáváme

$$t = \int_{[0,0]}^{[x,y]} \frac{\mathrm{d}s}{v} \,. \tag{9.195}$$

Jelikož na základě Pythagorovy věty platí, že

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \;,$$

můžeme výraz (9.195) pomocí vztahu (9.192) přepsat do následujícího tvaru, kdy současně dosadíme za rychlost ze vztahu (9.192)

$$t = \int_{[0,0]}^{[x,y]} \frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}}{\sqrt{2gx}} \,. \tag{9.196}$$

Čitatel integrandu můžeme upravit následujícím způsobem

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$
. (9.197)

Dosadíme za čitatel v integrandu integrálu (9.196)

$$t = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gx}} dx . (9.198)$$

Protože konstanta $\sqrt{2g}$ neovlivní výsledek, můžeme funkci, která musí splňovat Euelerovu rovnici (9.176), vyjádřit jako

$$f = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}} \ . \tag{9.199}$$

Jelikož $\partial f/\partial y=0$, vyplývá z Eulerovy rovnice (9.176), že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0\tag{9.200}$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = konst. = \frac{1}{\sqrt{2a}} \,, \tag{9.201}$$

kde $a \neq 0$ je nějaká konstanta.

Zderivujeme-li funkci f, viz výraz (9.199), pak na základě rovnosti (9.201) dostaneme

$$\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \,. \tag{9.202}$$

Umocníme rovnici (9.202)

$$\frac{y^{2}}{x(1+y^{2})} = \frac{1}{2a} \,. \tag{9.203}$$

Separací proměnných v rovnici (9.203) dostaneme

$$y = \int \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{2ax - x^2}} \,. \tag{9.204}$$

Pro integrál (9.204) zvolíme následující substituci

$$x = a(1 - \cos\varphi) \Rightarrow dx = a\sin\varphi d\varphi$$
. (9.205)

Po použití substituce (9.205) v integrálu (9.204) dostaneme

$$y = \int a(1 - \cos\varphi) d\varphi . \tag{9.206}$$

Řešení integrálu (9.206) obdržíme následující výsledek

$$y = a(\varphi - \sin \varphi) + C, \qquad (9.207)$$

kde C je integrační konstanta, kterou položíme rovnu nule C=0, aby byla splněna okrajová podmínka, že y=0 pro x=0, tj. pro $\varphi=0$, viz vztah (9.205). Použijeme-li vztahů (9.205) a (9.207), tj.

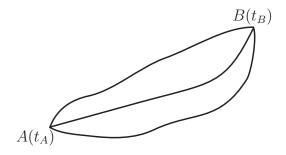
$$x = a(1 - \cos \varphi)$$

$$y = a(\varphi - \sin \varphi).$$
 (9.208)

Rovnice (9.208) představují parametrické rovnice cykloidy, která je řešením úlohy o brachistochroně, tedy nalezli jsme dráhu pomocí Eulerovy rovnice (9.176), po které se hmotný bod dostane z bodu A do bodu B za nejkratší čas.

9.8 Odvození Lagrangeových rovnic 2. druhu na základě integrálního principu

Uvažujme hmotný bod, který se pohyboval z bodu A do bodu B během časového intervalu $\Delta t = t_B - t_A$. Pro tento hmotný bod chceme vědět, po jaké se pohyboval trajektorii. Vymyslíme si libovolnou možnou trajektorii, kterou se dostal uvažovaný hmotný bod z A do B za čas $\Delta t = t_B - t_A$, viz obr. 9.9. Myšleným křivkám říkáme virtuální (možné) trajektorie, je jich



Obrázek 9.9: Virtuální trajektorie pohybu.

nekonečně mnoho. Jestliže pro každou z virtuálních trajektorií spočítáme jistou veličinu, můžeme každou trajektorii nějak ohodnotit. Jedné ze všech možných virtuálních trajektorií bude příslušet nejmenší hodnota a právě tato trajektorie odpovídá skutečnému pohybu hmotného bodu, mluvíme o tzv. reálné (skutečné) trajektorii. Onu jistou veličinu, kterou spočítáme pro každou virtuální trajektorii, nazýváme akce (účinek), značíme ji S a je definována jako

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}[q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, q_s(t), t] dt , \qquad (9.209)$$

kde funkce

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) - U(q_1, \dots, q_s) , \qquad (9.210)$$

je Lagrangeova (lagranžián), T je kinetická energie a U je potenciální energie soustavy.

Hamiltonův princip nejmenší akce:

Ze všech možných cest, podél kterých se dynamický systém může pohybovat z jednoho do druhého bodu konfiguračního prostoru v rámci daného časového intervalu, se pohyb uskuteční po té cestě, pro kterou časový integrál Lagrangeovy funkce uvažovaného systému (lagranžián) nabývá minimální hodnoty.

Hamiltonův princip patří mezi tzv. integrální principy, nezávisí na volbě souřadnic a představuje univerzální formu vyjádření zákonů pohybu ve fyzice¹⁷.

Akce S představuje funkcionál, reálná trajektorie pak reprezentuje extremálu, k jejímuž určení používáme variačního počtu.

Formálně můžeme Hamiltonův princip vyjádřit následovně

$$\delta S = \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) dt = 0.$$
 (9.211)

Srovnáme-li zápis (9.211) se zápisem (9.186), pak můžeme dospět s pomocí Eulerovy rovnice (9.180) k následujícím analogiím

$$x \to t$$
, $y_i(x) \to q_j(t)$, $y_i'(x) \to \dot{q}_j(t)$, $f(y_1, \dots, y_1', \dots, x) \to \mathcal{L}(q_1, \dots, \dot{q}_1, \dots, t)$.

Vzhledem k výše uvedeným analogiím musí Lagrangeova funkce splňovat Eulerovu rovnici (9.181), takže musí platit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \; , \quad j = 1, 2, \dots, s \; . \tag{9.212}$$

Rovnice (9.212) se nazývají *Lagrangeovy rovnice 2. druhu*. Je nutné je doplnit o počáteční podmínky

$$q_j(t_0) = q_{j0} , \ \dot{q}_j(t_0) = \dot{q}_{j0} .$$
 (9.213)

¹⁷S Hamiltonovým principem se můžeme setkat i v jiných oborech fyziky, např. teorii pole.

Kapitola 10

Gravitační pole

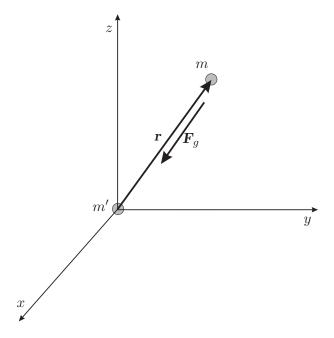
Newtonův gravitační zákon říká: Dva hmotné body se přitahují silou, jejíž velikost je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná kvadrátu jejich vzdálenosti.

Matematické vyjádření gravitačního zákona představuje následující vztah (viz obrázek 10.1) pro gravitační sílu, která působí na hmotný bod m

$$\mathbf{F}_g = -\varkappa \frac{m \, m'}{r^2} \mathbf{r}^0 = -\varkappa \frac{m \, m'}{r^3} \mathbf{r} \,, \tag{10.1}$$

kde m je hmotnost testovacího hmotného bodu, m' je hmotnost zdrojového hmotného bodu umístěného v počátku souřadnic, $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$ je jednotkový polohový vektor, $\varkappa = (6,673 \pm 0,010).10^{-11} \ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ je tzv. $gravitační konstanta^1$. Znaménko minus "-" ve vztahu (10.1) ukazuje na skutečnost, že gravitační síla \mathbf{F}_g má opačný směr než polohový vektor \mathbf{r} . Ze vztahu (10.1) je patrné, že gravitační síla je s uvážením izotropie prostoru **izotropní centrální** silou². Z této skutečnosti vyplývá, že gravitační silové pole je současně **konzervativním** silovým polem.

Vztah pro gravitační sílu (10.1) předpokládá, že se zdrojový hmotný bod nachází v počátku



Obrázek 10.1: Geometrické uspořádání ke vztahu (10.1).

¹Gravitační konstanta je snad nejstarší základní fyzikální konstantou, avšak její hodnotu umíme určit s menší přesností, než je tomu u většiny "moderních" základních konstant.

²Obecně je možné centrální sílu vyjádřit jako $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}/r$.

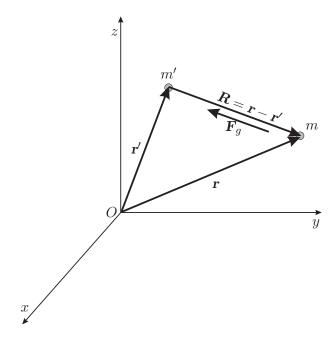
vztažné souřadnicové soustavy. Není-li tomu tak, potom je nutné přepsat vztah (10.1) do následujícího tvaru (viz obrázek 10.2)

$$\mathbf{F}_g = -\varkappa \frac{m \, m'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\varkappa \frac{m \, m'}{R^3} \mathbf{R} \,, \tag{10.2}$$

kde ${\bf r}$ je polohový vektor testovacího hmotného bodu $m, {\bf r}'$ je polohový vektor zdrojového hmotného bodu $m', {\bf R} = {\bf r} - {\bf r}' = (x - x', y - y', z - z')$ a $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$. V případě, že $R \to 0$, je pole popisované vztahem (10.2) singulární, tj. roste nade všechny meze. Tato skutečnost je jen důsledkem idealizace související s hmotným bodem, který má nekonečně malý geometrický rozměr. Avšak je nutné si uvědomit, že nic takového, jako je hmotný bod, v reálném světě neexistuje a tudíž každé těleso má **konečné** rozměry.

V další části textu se budeme držet úmluvy, že zdrojovým hmotným bodům odpovídají **čár-kované** souřadnice ($\mathbf{r}' = (x', y', z')$), kdežto testovacímu hmotnému bodu budou odpovídat souřadnice **nečárkované** ($\mathbf{r} = (x, y, z)$).

Pro Newtonův gravitační zákon platí **princip superpozice**³, tj. výslednou gravitační sílu



Obrázek 10.2: Geometrické uspořádání ke vztahu (10.2).

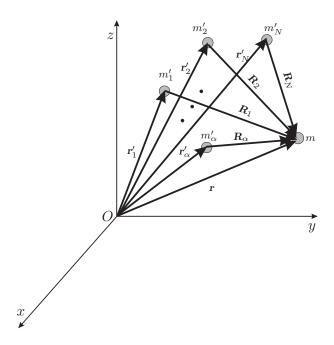
působící na hmotný bod m, která je výsledkem gravitačního působení více hmotných bodů (označme jejich počet N), můžeme jednoduše určit jako vektorový součet jednotlivých gravitačních sil, nebo stručněji můžeme říct, že síla působící mezi dvěma hmotnými body není ovlivněna přítomností dalších hmotných bodů. Nechť na testovací hmotný bod m působí gravitační silou soustava zdrojových hmotných bodů $m'_1, m'_2 \dots, m'_N$, potom výslednou gravitační sílu můžeme vyjádřit jako (viz obrázek 10.3)

$$\mathbf{F}_{g} = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{F}_{g\alpha} = -\varkappa m \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_{\alpha}'(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}'|^{3}} = -\varkappa m \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_{\alpha}'}{R_{\alpha}^{3}} \mathbf{R}_{\alpha} , \qquad (10.3)$$

kde \mathbf{r}'_{α} je polohový vektor α -tého zdrojového hmotného bodu a \mathbf{r} je polohový vektor testovacího hmotného bodu m.

Uvažujme zdrojové těleso se spojitě rozloženou hmotou. Toto těleso má objem V' a celkovou

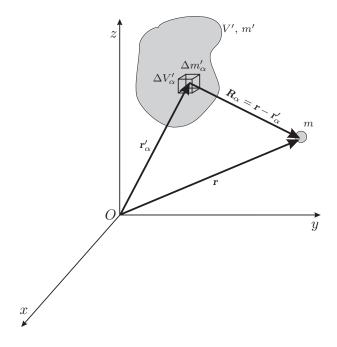
 $^{^3}$ Princip superpozice vyplývá ze skutečnosti, že velikost gravitační síly, kterou zdrojový hmotný bod m v místě \mathbf{r} působí na určitý testovací hmotný bod v místě \mathbf{r}' , závisí na hmotnosti m lineárně, tj. $F_g = km$, kde k je určitá konstanta.



Obrázek 10.3: Geometrické uspořádání ke vztahu (10.3).

hmotnost m'. Objem tělesa rozdělíme na dostatečně malé objemy $\Delta V'_{\alpha}$, jejichž hmotnost je $\Delta m'_{\alpha}$, viz obrázek 10.4.

V infinitezimálním případě (objem se stahuje v bod), tj.



Obrázek 10.4: Geometrické uspořádání ke vztahu (10.5).

$$dV' = dx'dy'dz' = \Delta V'_{\alpha} \to 0 , \qquad (10.4)$$

můžeme pohlížet na vybraný element objemu jako na hmotný bod, takže na základě analogie s případem pro soustavu hmotných bodů (10.3) můžeme psát, že

$$\mathbf{F}_{g} = -\varkappa m \lim_{\substack{\Delta V_{\alpha}' \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\Delta m_{\alpha}'(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}'|^{3}}.$$
 (10.5)

Jelikož pro objemovou hustotu platí, že

$$\rho(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta V_{\alpha}' \to 0} \frac{\Delta m_{\alpha}'}{\Delta V_{\alpha}'} \,, \tag{10.6}$$

potom je možné upravit výraz (10.5) s uvážením vztahů (10.4) a (10.6) do následujícího tvaru

$$\mathbf{F}_{g} = -\varkappa m \lim_{\substack{\Delta V_{\alpha}' \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\Delta m_{\alpha}'}{\Delta V_{\alpha}'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}'|^{3}} \Delta V_{\alpha}' = -\varkappa m \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3}} dV', \qquad (10.7)$$

kde $\rho(\mathbf{r})$ představuje funkci objemové hustoty, pomocí které můžeme určit celkovou hmotnost obsaženou v objemu V, tj.

$$m = \iiint_{V} \rho(\mathbf{r}) dV. \qquad (10.8)$$

Vzhledem k tomu, že výsledný vztah (10.7) je velmi důležitý, napíšeme ho ještě jednou, ale bez mezičlenu

$$\mathbf{F}_g = -\varkappa m \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$
 (10.9)

Výraz (10.9) nám vyjadřuje výslednou gravitační sílu působící na testovací hmotný bod, jež je dána součtem všech gravitačních sil od zdrojových hmotnostních elementů d $m' = \rho(\mathbf{r'}) dV'$. Je nutné si uvědomit, že integrace ve výrazu (10.9) probíhá **jen přes čárkované souřadnice** x', y', z'.

Jelikož platí, že $dm' = \rho(\mathbf{r}')dV'$, je možné integrál (10.9) přepsat do následujícího tvaru

$$\mathbf{F}_g = -\varkappa m \int_{m'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dm'.$$
 (10.10)

Vztahy (10.9) a (10.10) vyjadřují gravitační zákon pro spojitě rozloženou hmotu (zdrojové těleso), která je zdrojem gravitačního pole. Vztah (10.10) platí obecně, tj. můžeme ho použít i pro dvojrozměrná a jednorozměrná zdrojová tělesa. Vztah (10.10) se dobře hodí pro nejrůznější fyzikální úvahy, avšak pro výpočty se zpravidla nehodí, na rozdíl od vztahu (10.9). V případě dvojrozměrného zdrojového tělesa platí, že $dm' = \sigma(\mathbf{r}')dS'$, čímž můžeme upravit vztah (10.10) do následujícího tvaru

$$\mathbf{F}_g = -\varkappa m \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS', \qquad (10.11)$$

kde $\sigma(\mathbf{r}')$ je plošná hustota.

Analogicky pro jednorozměrné zdrojové těleso, $\mathrm{d}m' = \tau(\mathbf{r}')\mathrm{d}l'$, úpravou vztahu (10.10) dostáváme, že

$$\mathbf{F}_g = -\varkappa m \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl', \qquad (10.12)$$

kde $\tau(\mathbf{r}')$ je lineární hustota.

Jelikož gravitační síla je silou konzervativní, tak pro ni platí, že

$$\mathbf{F}_g = -\nabla U \;, \tag{10.13}$$

kde U je potenciální energie gravitačního pole.

Z gravitačního zákona vyplývá, že na sebe budou silově působit hmotné body, i když budou od sebe velmi vzdálené. Ve fyzice silové působení na objekt vlivem přítomnosti jiného

objektu nazýváme silové působení na dálku. Pro popis silového působení na dálku si zavedeme fyzikální pole, které nazveme gravitační pole. V okolí každého hmotného bodu (tělesa) existuje tedy pole, o němž se můžeme jednoduše přesvědčit tím, že do uvažovaného místa umístíme jiný, tj. testovací hmotný bod. Na testovací hmotný bod bude působit gravitační síla a tedy v místě testovacího hmotného bodu existuje gravitační pole. Pomocí gravitačního pole vytvořeného hmotnými body zajistíme, že hmotný bod "pocítí" silové působení díky lokálnímu vlivu, čímž zbavíme silové působení na dálku nálepky něčeho zvláštního či tajemného. Gravitační pole lze popsat buď silově nebo energeticky. Silový popis vede k veličině intenzita gravitačního pole a energetický popis vede k veličině potenciál gravitačního pole. Předpokládejme soustavu hmotných bodů, které vytváří gravitační pole. Do bodu o polohovém vektoru \mathbf{r} , pak umístíme testovací hmotný bod m a změříme sílu, která na něj bude působit. Gravitační intenzitu pole (intenzitu gravitačního pole) pak definujeme jako sílu vztaženou na jednotku hmotnosti testovacího hmotného bodu. Protože testovací hmotný bod sám vytváří gravitační pole, a tedy narušuje původní gravitační pole, musí mít hmotný bod co nejmenší hmotnost, abychom minimalizovali toto narušení. Z tohoto důvodu popíšeme tento proces limitním případem, čímž pro intenzitu gravitačního pole dostáváme

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \lim_{m \to 0} \frac{\text{síla působící na test. hmotný bod } m \text{ v bodě } \mathbf{r}}{m}$$
. (10.14)

Tímto jsme zavedli veličinu intenzita gravitačního pole $K(\mathbf{r})$. Pomocí této veličiny zavádíme vektorové pole $K = K(\mathbf{r})$, které nazýváme pole gravitační. Vložíme-li testovací hmotný bod m do gravitačního pole v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} , tak na něj bude působit následující gravitační síla

$$\mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = \mathbf{K}(\mathbf{r}) \, m \,. \tag{10.15}$$

Odtud můžeme psát

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} \ . \tag{10.16}$$

Podělením vztahu (10.13) hmotností testovacího hmotného bodu dostaneme s pomocí vztahu (10.16) následující výraz pro intenzitu gravitačního pole

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi , \qquad (10.17)$$

kde $\varphi=U/m$ je potenciál gravitačního pole. Plochu, jejíž všechny body mají stejný gravitační potenciál

$$\varphi(\mathbf{r}) = konst. , \qquad (10.18)$$

nazýváme ekvipotenciální plochu.

Pro intenzitu gravitačního pole pak na základě vztahu (10.10) dostáváme

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\varkappa \int_{m'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dm' = -\varkappa \int_{m'} \frac{\mathbf{R}}{R^3} dm'.$$
 (10.19)

Intenzita K(r) nám popisuje gravitační vektorové pole. Definujeme ji jako sílu gravitačního pole vztaženou na jednotku hmotnosti testovacího hmotného bodu. Nyní využijeme následující rovnosti

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C' \right) = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \qquad (10.20)$$

kde $C' = C'(\mathbf{r}')$ je obecně libovolnou funkcí čárkovaných souřadnic, avšak pro gradient přes nečárkované souřadnice zůstává konstantou. Dosazením do vztahu (10.19) dostaneme

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\varkappa \int_{m'} -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C' \right) dm'.$$
 (10.21)

Protože gradient funkce $(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + C')$ je realizován přes nečárkované souřadnice, můžeme operátor ∇ vytknout před integrál (10.21), který představuje integraci jen přes souřadnice čárkované, takže

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(-\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \right) , \qquad (10.22)$$

kde C je konstanta určená vztahem

$$C = -\varkappa \int_{m'} C'(\mathbf{r}') dm'. \qquad (10.23)$$

Díky předpokladu, že funkce $C'(\mathbf{r}')$ je libovolnou funkcí, představuje konstanta C libovolnou konstantu.

Porovnáním vztahů (10.22) a (10.17) dospějeme ke vztahu pro potenciál gravitačního pole pro případ, kdy je jeho zdrojem těleso se spojitě rozloženou hmotou

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C = -\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{R} + C.$$
 (10.24)

Ze vztahu (10.24) je vidět, že potenciál gravitačního pole je určen až na aditivní konstantu C, kterou určíme z gravitačního potenciálu v referenčním bodě.

Předpokládejme, že objekt, který je zdrojem gravitačního pole, je **prostorově omezen**, tj. jedná se o lokálně distribuovanou hmotu. Chceme-li určit gravitační potenciál takovéhoto objektu ve velmi vzdáleném bodě, tj. $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ neboli $r \gg r'$, potom je možné zjednodušit vztah (10.24) následujícím způsobem

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} + C \approx -\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{|\mathbf{r}|} + C = -\frac{\varkappa}{r} \int_{m'} \mathrm{d}m' + C = -\frac{\varkappa m'}{r} + C . \quad (10.25)$$

Poslední výraz v rovnostech (10.25) představuje potenciál od zdrojového hmotného bodu o hmotnosti m', který je umístěn do počátku souřadnic. Použitá aproximace ve vztazích (10.25) demonstruje oprávněnost zavedení hmotného bodu nahrazujícího těleso konečných rozměrů. Budeme-li požadovat, aby platilo, že

$$\varphi(\infty) = \lim_{r \to \infty} \left[-\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} + C \right] = 0 , \qquad (10.26)$$

potom na základě výsledku aproximace (10.25) budou platit pro určení konstanty C následující úpravy

$$\varphi(\infty) = \lim_{r \to \infty} \left[-\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \right] = \lim_{r \to \infty} -\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \lim_{r \to \infty} C = -\lim_{r \to \infty} \frac{\varkappa m'}{r} + C = C = 0 . \quad (10.27)$$

Připomeňme, že k tomuto výsledku jsme dospěli za předpokladu, že hmota není neomezeně distribuována⁴. Kdyby tomu tak nebylo, byli bychom nuceni zvolit nulový potenciál v nějakém konečně vzdáleném bodě.

Na základě výsledku (10.27) je tedy možné napsat gravitační potenciál jako

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{R}.$$
 (10.28)

⁴V případě prostorově neomezené distribuce hmoty by tento integrál divergoval.

Pomocí vztahu (10.28) můžeme dostat obecný výraz pro potenciální energii testovacího hmotného bodu v gravitačním poli

$$U(\mathbf{r}) = m\varphi(\mathbf{r}) = -\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} = -\varkappa m \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{R}.$$
 (10.29)

Využitím vztahů $dm' = \rho(\mathbf{r}')dV'$, $dm' = \sigma(\mathbf{r}')dS'$ a $dm' = \tau(\mathbf{r}')dl'$ a výrazů (10.28) a (10.29), je možné přepsat vztahy pro gravitační potenciál a gravitační potenciální energii do tvarů pro objemově, plošně a lineárně (jednorozměrně) rozloženou hmotu, která je zdrojem gravitačního pole.

Tedy pro objemově rozloženou hmotu dostáváme

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\varkappa \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\varkappa \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV', \qquad (10.30)$$

$$U(\mathbf{r}) = -\varkappa m \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\varkappa m \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV', \qquad (10.31)$$

pro plošně rozloženou hmotu analogicky dospějeme ke vztahům

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\varkappa \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = -\varkappa \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R} dS', \qquad (10.32)$$

$$U(\mathbf{r}) = -\varkappa m \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = -\varkappa m \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R} dS'$$
(10.33)

a pro jednorozměrně rozloženou hmotu můžeme psát, že

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\varkappa \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' = -\varkappa \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{R} dl', \qquad (10.34)$$

$$U(\mathbf{r}) = -\varkappa m \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' = -\varkappa m \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{R} dl'.$$
 (10.35)

Podobným způsobem, jako v případě spojitě rozložené hmoty, která je zdrojem gravitačního pole, můžeme postupovat i pro nespojitě rozloženou hmotu. Zaměříme se pouze na případ, který je reprezentován vztahem (10.2). Takže pro intenzitu gravitačního pole, která odpovídá jednomu zdrojovému hmotnému bodu dostáváme

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\varkappa \frac{m'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{r}^0 = -\varkappa \frac{m'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\varkappa \frac{m'}{R^3} \mathbf{R} . \tag{10.36}$$

Použijeme-li vztahu (10.20) v rovnosti (10.36) dostaneme⁵

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(-\varkappa \frac{m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) . \tag{10.37}$$

Porovnáním vztahu (10.37) se vztahem (10.17) dostaneme výraz pro gravitační potenciál hmotného bodu

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\varkappa \frac{m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\varkappa \frac{m'}{R} . \tag{10.38}$$

 $^{^5}$ Protože i v tomto případě předpokládáme nulový potenciál v nekonečně vzdáleném bodě, můžeme bez újmy na obecnosti považovat funkci $C'(\mathbf{r}')$ ve vztahu (10.20) za nulovou.

Pro potenciální energii testovacího hmotného bodu m v gravitačním poli od jednoho zdrojového hmotného bodu dostáváme

$$U(\mathbf{r}) = m\varphi(\mathbf{r}) = -\varkappa \frac{m \, m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\varkappa \frac{m \, m'}{R} \,. \tag{10.39}$$

Bude-li umístěn zdrojový hmotný bod v počátku vztažné soustavy $(\mathbf{r}' = \mathbf{0})$, pak přejdou vztahy (10.36), (10.38) a (10.39) do následujícího tvaru

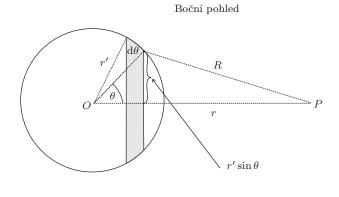
$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\varkappa \frac{m'}{r^3} \mathbf{r} \,, \tag{10.40}$$

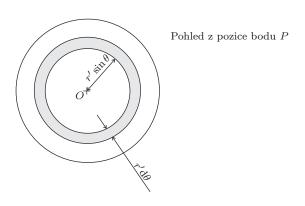
$$\varphi(\mathbf{r}) = -\varkappa \frac{m'}{r} \,, \tag{10.41}$$

$$U(\mathbf{r}) = -\varkappa \frac{m \, m'}{r} \,. \tag{10.42}$$

10.1 Gravitační pole tenké hmotné kulové slupky

Označme poloměr slupky r' a její celkovou hmotnost m'. Nejprve budeme hledat gravitační potenciál vytvářený kulovou slupkou se stejnoměrně rozloženou hmotou v bodě P, přičemž střed kulové slupky leží v počátku, viz obrázek 10.5. Při hledání gravitačního potenciálu vyjdeme ze vztahu (10.28). Celou kouli rozdělíme na prstence, jejichž body mají od zvoleného bodu P konstatní vzdálenost $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, tudíž přispívají k potenciálu stejným dílem. Plošná hustota slupky je





Obrázek 10.5: Geometrické uspořádání ke vztahu k výpočtu gravitačního pole slupky.

$$\sigma = \frac{m'}{S'} = \frac{m'}{4\pi r'^2} = konst.$$
, (10.43)

kde S' je celková plocha koule (kulové slupky).

Jelikož se vztah (10.28) pro integraci nehodí, využijeme pro účel integrace vztahu (10.32) spolu se vztahem (10.43)

$$\varphi(P) = -\varkappa\sigma \iint_{S'} \frac{1}{R} dS' = \frac{-\varkappa m'}{4\pi r'^2} \iint_{S'} \frac{1}{R} dS'.$$
 (10.44)

Kružnice o poloměru $r'\sin\theta$ (viz obr. 10.5 - pohled z pozice bodu P) má plochu $S'(\theta) = \pi r'^2 \sin^2\theta$. Provedeme-li diferencování této plochy (diferenciál), tak dostaneme infinitezimální přírůstek plochy (funkce plochy), který v našem případě odpovídá ploše infinitezimálního prstence na vyšetřované kulové slupce, viz obr. 10.5

$$dS' = \frac{dS'(\theta)}{d\theta}d\theta = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta. \qquad (10.45)$$

Vynásobením vztahu (10.43) vztahem (10.45) dostaneme, že

$$dm' = \sigma dS' = \frac{m'}{4\pi r'^2} 2\pi r'^2 \sin\theta d\theta = \frac{m'}{2} \sin\theta d\theta . \qquad (10.46)$$

Z kosínové věty plyne, že

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta \ . \tag{10.47}$$

Diferencováním levé a pravé strany rovnosti (10.47) (r a r' jsou v tomto případě konstanty) dostaneme rovnici

$$2RdR = 2rr'\sin\theta d\theta , \qquad (10.48)$$

kterou upravíme do tvaru

$$\frac{R\mathrm{d}R}{rr'} = \sin\theta\mathrm{d}\theta \ . \tag{10.49}$$

Rovnici (10.49) využijeme k úpravě vztahu (10.45), čímž dostaneme

$$dS' = 2\pi r'^2 \frac{RdR}{rr'} = \frac{2\pi r' RdR}{r} . (10.50)$$

Budeme-li ve vztahu (10.44) za element plochy považovat plochu infinitezimálně úzkého prstence (10.50), přejde dvojný integrál v integrál jednoduchý, tj.

$$\varphi(P) = \frac{-\varkappa m'}{4\pi r'^2} \int_{r-r'}^{r+r'} \frac{1}{R} \frac{2\pi r' R dR}{r} = \frac{-\varkappa m'}{2r' r} \int_{r-r'}^{r+r'} dR = \frac{-\varkappa m'}{2r' r} [R]_{r-r'}^{r+r'} = \frac{-\varkappa m'}{2r' r} (r + r' - r + r') = \frac{-\varkappa m'}{r} . \quad (10.51)$$

Takže hodnota gravitačního potenciálu v bodě P, pro který platí, že $r \geq r'$ (leží vně kulové slupky), je dána vztahem

$$\varphi(P) = \frac{-\varkappa m'}{r} \,. \tag{10.52}$$

Porovnáme-li vztah (10.52) se vztahem pro gravitační potenciál jednoho hmotného bodu (10.41), zjistíme, že mají stejný tvar, z čehož vyplývá, že gravitační pole vně homogenní slupky je stejné jako gravitační pole hmotného bodu o stejné hmotnosti ležícího ve středu slupky. Ze vztahu (10.52) rovněž vyplývá, že gravitační potenciál vně kulové slupky nezávisí na jejím poloměru.

Intenzita vně slupky je pak dána jako

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi = -\varkappa \frac{m'}{r^3} \mathbf{r} . \tag{10.53}$$

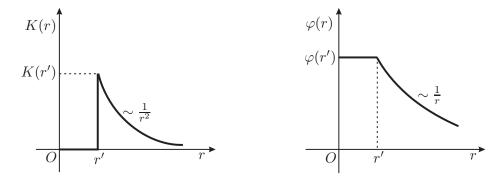
Pokud bude bod P ležet uvnitř slupky, tj. r < r', bude se měnit vzdálenost R v intervalu r' - r až r + r', takže analogicky, jako v případě bodu vně slupky, dostaneme

$$\varphi(P) = \frac{-\varkappa m'}{2r'r} \int_{r'-r}^{r'+r} dR = \frac{-\varkappa m'}{2r'r} (2r) = \frac{-\varkappa m'}{r'} = konst.$$
 (10.54)

Výsledný gravitační potenciál je tedy v tomto případě **konstantní**. Pro intenzitu gravitačního pole v tomto případě dostáváme

$$K(r) = -\nabla \varphi = 0. \tag{10.55}$$

Ze vztahů (10.55) a (10.54) vyplývá, že intenzita gravitačního pole uvnitř homogenní slupky je nulová a potenciál konstantní. Na obrázku 10.6 jsou zachyceny průběhy závislosti velikosti



Obrázek 10.6: Závislost velikosti intenzity a potenciálu gravitačního pole na vzdálenosti od středu slupky.

intenzity a potenciálu gravitačního pole od středu slupky.

10.2 Gravitační pole uvnitř a vně homogenní duté koule. Gravitační pole vně homogenní plné koule

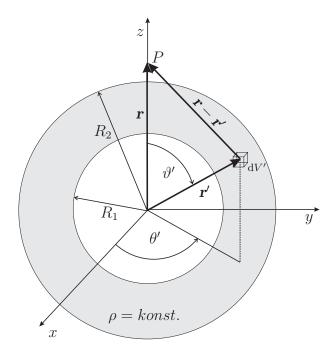
Na základě závěrů při vyšetřování gravitačního pole uvnitř a vně tenké kulové slupky byl nalezen průběh intenzity gravitačního pole plné koule. V rámci této kapitoly si určíme gravitační pole uvnitř a vně homogenní duté koule o hustotě ρ přímou integrací definičního vztahu (10.30). Označme vnitřní poloměr R_1 a vnější poloměr R_2 . S ohledem na zadání budeme provádět integraci ve sférických souřadnicích, přičemž souřadnicový systém volíme tak, aby osa, od níž měříme úhel ϑ , procházela bodem P, v němž budeme hledat gravitační potenciál, viz obr. 10.7. Při výpočtu gravitačního potenciálu vyjdeme ze vztahu (10.30), tedy

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\varkappa\rho \iiint_{V'} \frac{\mathrm{d}V'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$
 (10.56)

Ve sférických souřadnicích je element objemu dán vztahem $\mathrm{d}V' = r'^2 \sin \vartheta' \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\vartheta' \mathrm{d}r'$. Na základě kosinové věty můžeme dále psát, že $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}$. Takže vztah pro gravitační potenciál vyjádříme jako

$$\varphi(r) = -\varkappa \rho \int_{r'=R_1}^{R_2} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} \frac{r'^2 \sin \vartheta' d\theta' d\vartheta' dr'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}}$$

$$= -2\pi \varkappa \rho \int_{r'=R_1}^{R_2} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \frac{r'^2 \sin \vartheta' d\vartheta' dr'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}}. \quad (10.57)$$



Obrázek 10.7: Souřadnicový systém při výpočtu potenciálu homogenní duté koule.

Pomocí substituce $\cos \vartheta' = t, -\sin \vartheta' \mathrm{d}\vartheta' = \mathrm{d}t$ přejde integrál (10.57) do následujícího tvaru⁶

$$\varphi(r) = -2\pi\varkappa\rho \int_{r'=R_1}^{R_2} \int_{t=-1}^{1} \frac{r'^2 dt dr'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't}} = -\frac{2\pi\varkappa\rho}{r} \int_{r'=R_1}^{R_2} r' \left[\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr't} \right]_{+1}^{-1} dr'$$

$$= -\frac{2\pi\varkappa\rho}{r} \int_{r'=R_1}^{R_2} r' \left(\sqrt{\frac{r^2 + r'^2 + 2rr'}{(r+r')^2}} - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} \right) dr' =$$

$$-\frac{2\pi\varkappa\rho}{r} \int_{r'=R_1}^{R_2} r' \left(r + r' - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} \right) dr' . \quad (10.58)$$

Výraz pod odmocninou $\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'}$ si můžeme vyjádřit jako a) $(r - r')^2$ nebo b) $(r' - r)^2$.

a)
$$0 \le \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} = \sqrt{(r - r')^2} = r - r'. \tag{10.59}$$

Aby platila relace, že $r - r' \ge 0$, musí platit $r \ge R_2$, tedy bod P leží vně duté koule nebo na ní. V tomto případě přejde integrál (10.58) do následujícího tvaru

$$\varphi(r) = -\frac{2\pi\varkappa\rho}{r} \int_{r'=R_1}^{R_2} r' \left(r + r' - (r - r')\right) dr' = -\frac{4\pi\varkappa\rho}{r} \int_{r'=R_1}^{R_2} r'^2 dr' = -\varkappa\rho \frac{4\pi}{3r} (R_2^3 - R_1^3) = -\varkappa \frac{m'}{r} , \quad (10.60)$$

kde m' je hmotnost duté koule. Porovnáním výsledku (10.60) se vztahem (10.38) je zřejmé, že potenciál duté koule odpovídá potenciálu hmotného bodu, který se nachází v počátku souřadnicové soustavy a má stejnou hmotnost jako uvažovaná dutá koule.

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a-bt}} = -\frac{2\sqrt{a-bt}}{b} \; .$$

⁶Použijeme tabulkový integrál

Výsledek (10.60) lze snadno zobecnit i pro plnou kouli položením $R_1 = 0$. V tomto případě pak m' bude reprezentovat hmotnost plné koule. Takže můžeme, podobně jako v případě duté koule, psát, že potenciál, který vytváří plné koule, odpovídá potenciálu od hmotného bodu, který se nachází v počátku souřadnicové soustavy a má stejnou hmotnost jako uvažovaná dutá koule.

b)
$$0 \le \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'} = \sqrt{(r' - r)^2} = r' - r. \tag{10.61}$$

Aby platila relace, že $r'-r \ge 0$, musí platit $r \le R_1$, tedy bod P leží uvnitř duté koule. V tomto případě přejde integrál (10.58) do následujícího tvaru

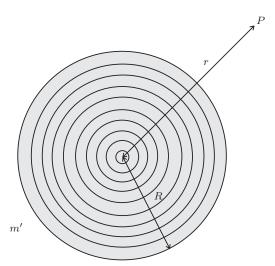
$$\varphi(r) = -\frac{2\pi\varkappa\rho}{r} \int_{r'=R_1}^{R_2} r' \left[r + r' - (r' - r)\right] dr' = -\frac{4\pi\varkappa\rho}{r} \int_{r'=R_1}^{R_2} rr' dr' = -2\pi\varkappa\rho(R_2^2 - R_1^1) = konst. \quad (10.62)$$

Výsledek (10.62) nám říká, že potenciál uvnitř duté koule je ve všech bodech stejný, a tudíž díky vztahu (10.17) je intenzita gravitačního pole uvnitř duté koule rovna nulovému vektoru, $\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

10.3 Gravitační pole vně po vrstvách homogenní plné koule

Jelikož je tenká kulová slupka limitním případem duté koule, budeme následnou úvahu provádět na základě vlastností tenké kulové slupky.

Uvažujme plnou po vrstvách homogenní kouli (tj. hustota koule $\rho(r)$ závisí jen na vzdálenosti od jejího středu, nezávisle na směru). Nechť tato plná koule má poloměr R a hmotnost m'. Tuto kouli si můžeme představit jako soustavu kulových slupek, viz obrázek 10.8. Nejprve



Obrázek 10.8: Plnou kouli je možné si představit jako soustavu slupek.

předpokládejme, že bod P, ve kterém vyšetřujeme gravitační pole plné koule, se nachází vně této koule $(r \ge R)$. Využijeme skutečnosti, že již umíme určit potenciál vně slupky⁷ (10.52).

 $[\]overline{}^7 V$ zhledem k tomu, že homogenní dutou kouli můžeme v limitním případě považovat za slupku, lze samozřejmě pro další úvahy vyjít i ze vztahu (10.60).

Označme hmotnost tenké n-té slupky $\Delta m'_n$. Potom na základě vztahu (10.52) pro potenciál gravitačního pole od n-té slupky v bodě P dostáváme

$$\varphi_n(P) = \frac{-\varkappa \Delta m_n'}{r} \ . \tag{10.63}$$

Jelikož platí princip superpozice provedeme součet přes hmotnost celé plné koule, čímž určíme výsledný gravitační potenciál od všech slupek, které tvoří plnou kouli. Vzhledem k tomu, že koule nemusí být homogenní, bude nutné volit slupky infinitezimálně tenké, tedy

$$\varphi(P) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(P) = -\varkappa \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta m'_n}{r} = -\varkappa \int_{m'} \frac{\mathrm{d}m'}{r} = -\varkappa \frac{m'}{r} . \tag{10.64}$$

Výsledek pro gravitační potenciál vně koule je tedy dán následujícím vztahem

$$\varphi(P) = -\varkappa \frac{m'}{r} \,, \tag{10.65}$$

ze kterého porovnáním se vztahem (10.41) vyplývá, že gravitační pole po vrstvách homogenní plné koule je vně této koule stejné jako gravitační pole hmotného bodu o hmotnosti celé koule, který se nachází v jejím středu⁸.

Intenzita pole vně plné koule je pak dána jako

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi = -\varkappa \frac{m'}{r^3} \mathbf{r} \,. \tag{10.66}$$

10.4 Gravitační pole uvnitř homogenní koule

Nyní předpokládejme, že se bod P, ve kterém vyšetřujeme gravitační pole plné koule, nachází uvnitř koule (r < R). Při vyšetřování gravitačního pole uvnitř koule využijeme závěru, že intenzita gravitačního pole uvnitř tenké kulové slupky či duté koule je nulová. Z této skutečnosti vyplývá, že kulové slupky, které se nacházejí vně bodu P (nad bodem P), viz obrázek 10.9 - nevybarvená část koule, **nebudou přispívat** k intenzitě gravitačního pole v uvažovaném bodě. K intenzitě gravitačního pole uvnitř koule v místě P bude přispívat jen část koule ležící pod tímto bodem, na obrázku 10.9 jí odpovídá vybarvená část. Tato část koule má poloměr r, odpovídá jí hmotnost m'_r a objem $V'_r = 4\pi r^3/3$. Intenzitu gravitačního pole v uvažovaném bodě je pak možné určit na základě závěru, ke kterému jsme došli při vyšetřování intenzity gravitačního pole vně koule, tedy že intenzita po vrstvách homogenní koule je shodná s intenzitou hmotného bodu umístěného v jejím středu. Jelikož bod P se nachází vně vybarvené koule, pak na základě vztahu (10.66) můžeme psát

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\varkappa \frac{m_r'}{r^3} \mathbf{r} . \tag{10.67}$$

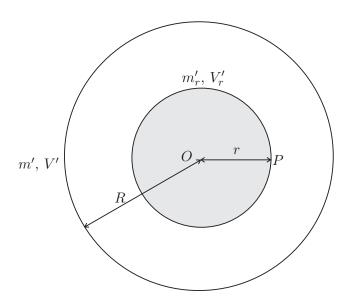
Dále předpokládejme, že se jedná o homogenní kouli, tj. $\rho=konst$. Pomocí známé hustoty ρ , pak můžeme určit hmotnost vnitřní koule

$$m_r' = \rho V_r' = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$
 (10.68)

Hustotu koule je možné určit ze znalosti poloměru R a hmotnosti m' celé koule

$$\rho = \frac{m'}{V'} = \frac{m'}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3m'}{4\pi R^3} \,. \tag{10.69}$$

 $^{^8{\}rm Tento}$ závěr je zobecněním závěru (10.60), který byl odvozen za předpokladu, že hustota duté koule je konstantní.



Obrázek 10.9: Geometrická situace pro určení gravitačního pole uvnitř koule. Nevybarvená část nepřispívá k intenzitě gravitačního pole v bodě P.

Dosazením vztahu (10.69) do vztahu (10.68) po úpravě dostaneme

$$m_r' = \frac{m'}{R^3} r^3 \ . \tag{10.70}$$

Dosazením za m_r ze vztahu (10.68), resp. (10.70) do vztahu (10.67) po úpravě dostaneme pro velikost intenzity gravitačního pole uvnitř plné koule následující vztah

$$K(r) = \frac{4}{3}\pi \varkappa \rho r , \qquad (10.71)$$

resp.

$$K(r) = \varkappa \frac{m'}{R^3} r \ . \tag{10.72}$$

Pro vektor intenzity gravitačního pole tedy dostáváme

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\frac{4}{3}\pi \varkappa \rho r \mathbf{r}^0 = -\frac{4}{3}\pi \varkappa \rho \mathbf{r}.$$
 (10.73)

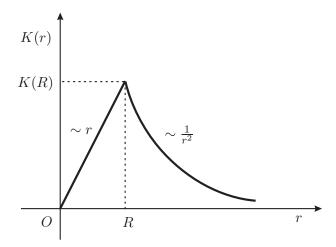
Ze vztahu (10.71), resp. (10.72) vyplývá, že intenzita gravitačního pole uvnitř plné homogenní koule lineárně roste se vzdáleností od jejího středu.

Na základě výše uvedených závěrů můžeme tedy konstatovat, že ke gravitačnímu poli uvnitř homogenní koule přispívá jen ta část koule, která leží hlouběji než bod, v němž gravitační pole zkoumáme.

10.5 Gaussův zákon a Poissonova rovnice

Provedeme divergenci intenzity gravitačního pole (10.66) vně plné homogenní koule umístěné v počátku souřadnic

$$\operatorname{div} \mathbf{K} \equiv \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{\nabla} \cdot (K_x, K_y, K_z) = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = \mathbf{\nabla} \cdot \left(-\varkappa \frac{m'}{r^3} \mathbf{r} \right) = -\varkappa m' \mathbf{\nabla} \cdot \left(\frac{x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) . \quad (10.74)$$



Obrázek 10.10: Závislost velikosti intenzity gravitačního pole na vzdálenosti od středu plné homogenní koule.

Vypočteme jednotlivé parciální derivace

$$\frac{\partial K_x}{\partial x} = -\varkappa m' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \\
-\varkappa m' \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - \frac{3}{2}x (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \\
-\varkappa m' \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} . (10.75)$$

Pro další úpravu výrazu (10.75) využijeme vztahu $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, takže po úpravě dostaneme

$$\frac{\partial K_x}{\partial x} = -\varkappa m' \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \,. \tag{10.76}$$

Podobně budeme postupovat i v případě dalších parciálních derivací, čímž dostaneme

$$\frac{\partial K_y}{\partial y} = -\varkappa m' \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} , \qquad (10.77)$$

$$\frac{\partial K_z}{\partial z} = -\varkappa m' \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \ . \tag{10.78}$$

Takže pro divergenci vektoru intenzity gravitačního pole při využití vztahů (10.76), (10.77) a (10.78) dostáváme, že

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = -\varkappa m' \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\varkappa m' \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0 . \quad (10.79)$$

Z výsledku (10.79) je zřejmé, že divergence intenzity vně koule je rovna nule. Dále vypočteme divergenci intenzity gravitačního pole uvnitř homogenní koule (10.71), tedy

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = -\frac{4}{3}\pi \varkappa \rho \nabla \cdot \mathbf{r} \,. \tag{10.80}$$

Vypočteme divergenci polohového vektoru

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$
 (10.81)

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = -4\pi \varkappa \rho \ . \tag{10.82}$$

Výsledek (10.79) vyplývá přímo ze vztahu (10.82), jelikož vně koule je **hustota nulová** $\rho = 0$, takže i divergence intenzity gravitačního pole bude rovna nule.

Budeme předpokládat, že uvažovaná koule, pro kterou jsme hledali divergenci její intenzity gravitačního pole, je natolik malá, že může reprezentovat částici tvořící těleso nebo odpovídat části tělesa o elementárním objemu dV. Jelikož každé částici, potažmo bodu, můžeme přisoudit jinou hustotu, potom je možné zobecnit výsledný vztah (10.82) tak, že v něm hustotu nebudeme považovat za konstantu, ale za funkci polohy⁹, tj.

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = -4\pi \varkappa \rho(\mathbf{r}) \ . \tag{10.83}$$

Výraz (10.83) představuje tzv. Gaussův zákon v diferenciálním tvaru. Pomocí Gaussovy věty (teorému) je možné Gaussův zákon (10.83) převést do integrálního tvaru

$$\iiint\limits_{V} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{K} dV = \iint\limits_{S(V)} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} , \qquad (10.84)$$

takže Gaussův zákon v integrálním tvaru je

$$\iint_{S(V)} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi \varkappa \iiint_{V} \rho dV = -4\pi \varkappa m , \qquad (10.85)$$

kde m je celková hmotnost tělesa uzavřeného v ploše S.

V případě, že v uzavřené ploše se nachází soustava hmotných bodů, potom celková hmotnost v Gaussově zákoně v integrálním tvaru (10.85) bude odpovídat součtu hmotností hmotných bodů této soustavy $m = \sum_{\alpha}^{N} m_{\alpha}$.

Gaussův zákon v integrálním tvaru (10.85) je možné číst tak, že tok intenzity gravitačního pole uzavřenou plochou S je roven $-4\pi\varkappa$ násobku celkové hmotnosti všech těles uzavřených touto plochou.

Nyní v Gaussově zákoně v diferenciálním tvaru (10.83) vyjádříme intenzitu gravitačního pole pomocí jeho potenciálu

$$\nabla \cdot (-\nabla \varphi(\mathbf{r})) = -4\pi \varkappa \rho(\mathbf{r}) . \tag{10.86}$$

Rovnici (10.86) upravíme do tvaru

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = 4\pi \varkappa \rho(\mathbf{r}) , \qquad (10.87)$$

kde

$$\nabla^2 \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \,. \tag{10.88}$$

Rovnice (10.87) je tzv. *Poissonova rovnice* gravitačního pole. Jedná se o nehomogenní lineární parciální diferenciální rovnici. Známe-li rozložení hmoty, tj. objemovou hustotu jako funkci polohy, potom řešení Poissonovy rovnice je dáno vztahem (10.30).

V té části prostoru, kde je hustota nulová, musí gravitační potenciál splňovat *Laplaceovu rovnici*

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{10.89}$$

s příslušnými okrajovými podmínkami.

 $^{^{9}}$ Polohový vektor r ukazuje na místo, kde se uvažovaná částice či element objemu tělesa nachází.

Kapitola 11

Mechanické kmity

Obecně kmitavým pohybem tělesa (hmotného bodu) rozumíme jakýkoliv prostorově omezený pohyb tělesa (hmotného bodu) kolem stabilního rovnovážného bodu. O kmitání (vibracích) tělesa hovoříme jen tehdy, když všechny jeho části kmitají ve fázi, v opačném případě mluvíme o vlnění.

Mechanickou soustavu (např. těleso) schopnou konat mechanické kmity nazýváme mechanický $oscilátor^1$, přičemž pak jeho kmity můžeme nazývat oscilacemi.

Hmotný bod (příp. těleso), který se nachází v klidu ve stabilním rovnovážném bodě, má minimální potenciální energii, která je rovna jeho celkové mechanické energii, $E=U_0=U_{min}$. Takže pro okolní body platí, že $U\geq U_0$. Pokud zvětšíme celkovou mechanickou energii na $E>U_0$, potom se bude vyšetřovaný hmotný bod pohybovat v okolí rovnovážného bodu všude tam, kde je splněna podmínka, že E>U, jelikož v tomto případě platí, že hmotný bod bude mít kladnou kinetickou energii $T=E-U\geq 0$.

Příčinou kmitavého pohybu je vratná síla \mathbf{F}_V , která neustále vrací hmotný bod do jeho rovnovážného bodu (polohy), ve kterém je vratná síla nulová, $\mathbf{F}_V = \mathbf{0}$.

U kmitavého pohybu rozlišujeme zda se jedná o kmitavý pohyb periodický či neperiodický (aperiodický).

Jestliže kmitavý pohyb hmotného bodu popisujeme pomocí časově proměnného polohového vektoru $\mathbf{r}(t)$, tak pro periodický pohyb platí, že $\mathbf{r}(t+T)=\mathbf{r}(t)$, kde T nazýváme perioda pohybu. Kyvem budeme rozumět pohyb z jedné maximální výchylky uvažovaného hmotného bodu do jeho opačné maximální výchylky, přičemž pro periodický pohyb je doba kyvu τ_k rovna polovině periody. Kmit je pohyb z jedné maximální výchylky uvažovaného hmotného bodu přes jeho opačnou maximální výchylku zpět do jeho maximální výchylky, tedy se jedná o pohyb oscilátoru odpovídající úplnému cyklu. V případě periodického pohybu trvá právě jednu periodu.

Dále je možné pohyb dělit na harmonický a anharmonický (neharmonický). Harmonický pohyb je takový pohyb, u kterého závislost polohy (výchylky) hmotného bodu na čase je vyjádřena harmonickou funkcí, např. $A\sin(\omega t + \varphi)$. Nelze-li vyjádřit závislost hmotného bodu na čase pomocí harmonické funkce, jedná se o pohyb anharmonický. Anharmonický pohyb však může být pohybem periodickým.

Omezíme se na pohyb, který se děje v jedné přímce (nechť je jí osa x), tj. bude se jednat o jednorozměrný kmitavý pohyb. V tomto případě bude vratná síla funkcí pouze proměnné x, tj. $F_V = F_V(x)$. Rovnovážný bod umístíme na ose do bodu x = 0.

Provedeme Taylorův rozvoj vratné síly kolem rovnovážného bodu

$$F_V(x) = F_{V0} + \left(\frac{\mathrm{d}F_V}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\mathrm{d}^2 F_V}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\mathrm{d}^3 F_V}{\mathrm{d}x^3}\right)_{x=0} x^3 + \dots , \qquad (11.1)$$

¹Oscilátorem se také označuje soustava (např. elektrický obvod), ve které se uskutečňuje kmitání jiné fyzikální povahy než mechanické.

kde F_{V0} je hodnota funkce F_V v bodě x=0, tj. $F_{V0}=F_V(0)$. Pro F_{V0} však musí platit, že $F_{V0}=0$, jinak by bod o souřadnici x=0 nebyl rovnovážným bodem, protože by na něj působila síla, která by ho z rovnovážného bodu vždy vychýlila. Dále budeme předpokládat, že výchylky kmitajícího bodu z rovnovážné polohy jsou malé, takže můžeme zanedbat členy obsahující x^n , kde $n \geq 2$ (provedeme linearizaci). Takže pro tuto vratnou sílu dostáváme, že

$$F_V(x) = \left(\frac{\mathrm{d}F_V}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} x \ . \tag{11.2}$$

Jelikož vratná síla vždy směřuje k rovnovážnému bodu, tj. její smysl je vždy opačný, než je smysl výchylky, takže musí platit, že

$$\left(\frac{\mathrm{d}F_V}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} < 0. \tag{11.3}$$

Označme

$$\left| \left(\frac{\mathrm{d}F_V}{\mathrm{d}x} \right)_{x=0} \right| = k \; ,$$

potom můžeme výraz (11.2) přepsat do tvaru

$$F_V(x) = -kx (11.4)$$

kde k je kladná konstanta.

V našem případě je vratná síla lineární funkcí x, takže v tomto případě pak mluvíme o lineárním mechanickém oscilátoru.

Nebude-li uvedeno jinak, budeme v dalším textu předpokládat lineární vratnou sílu.

Vyjádříme-li vratnou sílu ve vektorovém tvaru, tj. $\mathbf{F}_V = (-kx, 0, 0)$, potom se snadno přesvědčíme, že $\nabla \times \mathbf{F}_V = \mathbf{0}$, tedy že se jedná o sílu konzervativní.

11.1 Netlumený mechanický oscilátor

Pro lineární mechanický oscilátor platí následující pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = F_V . ag{11.5}$$

Dosazením za F_V ze vztahu (11.4) dostáváme, že

$$m\ddot{x} = -kx \ . \tag{11.6}$$

Upravíme pohybovou rovnici netlumeného harmonického oscilátoru, resp. netlumených harmonických kmitů, (11.6) do následujícího tvaru

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \,, \tag{11.7}$$

kde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = konst. \tag{11.8}$$

Rovnice (11.7) představuje obyčejnou lineární homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Řešením jí odpovídající charakteristické rovnice ($\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$) zjistíme charakteristická čísla $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0$. Pak obecné řešení této diferenciální řešení je možné napsat ve tvaru

$$x(t) = Q_1 e^{\lambda_1 t} + Q_2 e^{\lambda_2 t} = Q_1 e^{j\omega_0 t} + Q_2 e^{-j\omega_0 t} = Q_1 (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) + Q_2 (\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t) = (Q_1 + Q_2) \cos \omega_0 t + j(Q_1 - Q_2) \sin \omega_0 t ,$$
(11.9)

kde Q_1 a Q_2 jsou obecně komplexní konstanty, tj. $Q_1 = a_1 + \mathrm{j} b_1$, $Q_2 = a_2 + \mathrm{j} b_2$. Vzhledem k tomu, že každá z těchto konstant má obecně jak reálnou, tak imaginární složku, jedná se tedy o čtyři konstanty (a_1, b_1, a_2, b_2) , které nemohou být nezávislé, protože k jejich určení vycházíme pouze ze dvou reálných počátečních podmínek. Počet nezávislých konstant může být redukován požadavkem, že konstanty Q_1 a Q_2 jsou komplexně sdružené, tj. $Q_1 = (C + \mathrm{j} D)/2$, $Q_2 = (C - \mathrm{j} D)/2$, a tímto se současně zajistí, že samotné řešení bude reálné. Dosazením těchto komplexně sdružených konstant do obecného řešení (11.9) dostaneme

$$x(t) = C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t , \qquad (11.10)$$

kde C a D jsou reálné integrační konstanty. Jejich hodnoty se určí z počáteční podmínky výchylky $x(t_0) = x_0$ a počáteční rychlosti $v(t_0) = v_0$.

Zavedeme-li nové konstanty C a D následujícím způsobem

$$C = A\sin\varphi_0 \quad a \quad D = A\cos\varphi_0 ,$$
 (11.11)

potom je možné řešení (11.10) upravit do následujícího tvaru

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) , \qquad (11.12)$$

kde amplitudu A a počáteční fázi φ_0 určíme ze vztahů (11.11) následujících způsobem

$$A = \sqrt{C^2 + D^2}$$
, $\tan \varphi_0 = \frac{C}{D}$. (11.13)

 ${\bf Z}$ řešení (11.12) plyne, že netlumený mechanický oscilátor koná periodické harmonické kmity s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \,,$$

kde ω_0 nazýváme vlastní (charakteristický) kruhový kmitočet lineárního mechanického oscilátoru.

Argument funkce sinus v řešení (11.12) $\omega_0 t + \varphi_0$ nazýváme *fáze kmitavého pohybu*. Časovou derivací výchylky (11.12) dostaneme rychlost kmitavého pohybu

$$v(t) \equiv \dot{x} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) . \tag{11.14}$$

Upravíme vztah pro rychlost (11.14) tak, abychom ho mohli snadněji porovnat se vztahem pro výchylku (11.12), tedy

$$v(t) = \omega_0 A \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) . \tag{11.15}$$

Ze vztahu (11.15) je vidět, že počáteční fáze rychlosti je $\varphi_0 + \pi/2$, tedy že rychlost fázově předbíhá výchylku o 90°.

Derivací okamžité rychlosti (11.14) dostaneme okamžité zrychlení harmonického pohybu

$$a(t) \equiv \ddot{x} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \tag{11.16}$$

V případě zrychleného kmitavého pohybu je počáteční fáze rovna $\varphi_0 + \pi$, neboli zrychlení kmitavého pohybu je fázově posunuto o 180° oproti výchylce.

Vzhledem k tomu, že vratná síla (11.4) je silou konzervativní, pak je i silou stacionární potenciálovou a můžeme ji vyjádřit jako

$$F_V = -kx = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \,, \tag{11.17}$$

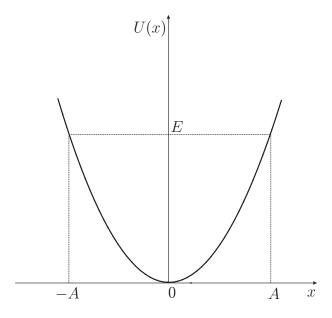
kde U(x) je příslušná potenciální energie vratné síly kmitavého pohybu, kterou můžeme vyjádřit přímo ze vztahu (11.17) jako

$$U(x) = -\int F_V dx + C = \int kx dx + C = \frac{1}{2}kx^2 + C, \qquad (11.18)$$

kde C je integrační konstanta, kterou volíme, aby potenciální energie v rovnovážném bodě x=0 nabývala nulové hodnoty, tedy C=0. Takže potenciální energii kmitavého pohybu je dána následujícím vztahem

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \ . \tag{11.19}$$

Na obrázku 11.1 je zachycen parabolický průběh potenciální energie U(x).



Obrázek 11.1: Závislost potenciální energie kmitavého pohybu na jeho výchylce (parabolická potenciálová jáma)

Pro celkovou mechanickou energii harmonického oscilátoru můžeme psát, že

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 . {11.20}$$

Dosazením za rychlost ze vztahu (11.14), za výchylku ze vztahu (11.12) a konstantu $k = m\omega_0^2$ ze vztahu (11.8) do rovnice pro celkovou mechanickou energii (11.20) dospějeme k následující rovnosti

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \left[\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = konst. \quad (11.21)$$

Z pravé strany rovnosti (11.21) je vidět, že celková mechanická energie nezávisí na čase a je tedy konstantní, což je očekávaný závěr vzhledem ke skutečnosti, že vratná síla je silou konzervativní. Při kmitavém pohybu se periodicky mění potenciální energie na kinetickou a zpět. Při maximální výchylce je kinetická energie nulová a potenciální energie dosahuje svého maxima a rovná se celkové mechanické energii harmonického oscilátoru. Tedy platí relace, že $E \geq U(x)$. Jelikož kmitající hmotný bod má konstantní mechanickou energii, potom na základě výše uvedeného vyplývá, že výchylka harmonického oscilátoru x(t) leží v mezích

 $-A \le x(t) \le A$, viz obr. 11.1. Tímto můžeme konstatovat, že kmitající hmotný bod je "uvězněn" v parabolické potenciálové jámě.

Vzhledem k tomu, že jakoukoliv symetrickou potenciálovou jámu můžeme vždy pro malé amplitudy kmitů aproximovat parabolickou potenciálovou jámou, popisuje tímto harmonický oscilátor obecně libovolné kmitavé pohyby o malé amplitudě.

S ohledem na výsledek (11.21) platí, že

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{11.22}$$

Dosazením za celkovou mechanickou energii hmotného bodu ze vztahu (11.20) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = 0 \ . \tag{11.23}$$

Provedením příslušné derivace po jednoduché úpravě dostaneme

$$mv \underbrace{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}_{-\ddot{x}} + kx \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{-x} = 0. \tag{11.24}$$

Tuto rovnici upravíme do tvaru

$$(m\ddot{x} + kx)v = 0. (11.25)$$

Vzhledem k tomu, že obecně $v \neq 0$, je nutné, aby součet členů v závorce na levé straně této rovnice se rovnal nule, tedy

$$m\ddot{x} + kx = 0 , \qquad (11.26)$$

což odpovídá rovnici (11.6). Tento výsledek nám říká, že volbou parabolické potenciálové jámy, která může představovat aproximaci obecnější symetrické potenciálové jámy, určujeme charakter kmitavého pohybu.

11.2 Tlumený mechanický oscilátor

Netlumený mechanický oscilátor je fyzikální idealizací, jelikož koná časově neomezený kmitavý pohyb. Naší každodenní (makroskopické) zkušenosti odpovídá mechanický oscilátor, jehož amplituda výchylky se s časem zmenšuje, neboli se tlumí, tj. dochází k postupné disipaci mechanické energie, kterou mají na svědomí disipativní síly (8.26). Jelikož uvažujeme jednorozměrný pohyb, budeme uvažovat pouze disipativní sílu $F_{Dis} = -\lambda(x, \dot{x}) \dot{x}$, kde λ je kladná skalární funkce. Obvykle uvažujeme disipativní sílu přímo úměrnou rychlosti

$$F_{Dis} = -h\dot{x} , \qquad (11.27)$$

kde h je kladná konstanta h > 0.

Pohybová rovnice tlumeného mechanického oscilátoru má následující tvar

$$m\ddot{x} = F_V + F_{Dis} . ag{11.28}$$

Dosazením za vratnou sílu F_V ze vztahu (11.4) a za disipativní sílu ze vztahu (11.27) do pohybové rovnice (11.28) dostaneme

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} . ag{11.29}$$

Úpravou pohybové rovnice dospějeme k jejímu následujícímu tvaru

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \,, \tag{11.30}$$

kde $\delta = h/(2m)$ je tzv. dekrement útlumu (parametr útlumu) a $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Vzhledem k tomu, že uvažujeme působení disipativních sil, ukážeme si jakým způsobem se bude s časem měnit mechanická energie tlumeného mechanického oscilátoru na teplo. Pro tento účel si přepíšeme pohybovou rovnici (11.30) do následujícího tvaru

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\delta \dot{x} . \tag{11.31}$$

Vynásobíme rovnici (11.31) rychlostí \dot{x}

$$\ddot{x}\dot{x} + \omega_0^2 \dot{x}x = -2\delta \dot{x}^2 \ . \tag{11.32}$$

Levá strana rovnice (11.32) představuje úplný diferenciál, takže můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{\omega_0^2}{2} x^2 \right) = -2\delta \dot{x}^2 \,. \tag{11.33}$$

Vynásobíme rovnici (11.33) hmotností m, přičemž využijeme rovností $\delta = h/(2m)$ a $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 \right) = \frac{d}{dt} (T + U) = \frac{dE}{dt} = -h \dot{x}^2 \le 0.$$
 (11.34)

Relace uvedená ve vztahu (11.34) je dána výše uvedeným předpokladem, že h > 0. Dosažený výsledek můžeme interpretovat způsobem, že celková mechanická energie tlumeného mechanického oscilátoru s časem ubývá, a to rychlostí $-h\dot{x}^2$. Výsledek můžeme s ohledem na vztah (11.27) napsat jako

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = F_{Dis}\dot{x} , \qquad (11.35)$$

z čehož vyplývá, že celková mechanická energie tlumeného mechanického oscilátoru s časem ubývá, přičemž s ohledem na definiční vztah (8.20) můžeme říci, že tento úbytek je roven okamžitému výkonu disipativních sil.

Charakteristická rovnice odpovídající pohybové rovnici (11.30) má tvar

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{11.36}$$

Kořeny charakteristické rovnice jsou

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \ . \tag{11.37}$$

Řešením diferenciální rovnice (11.30) jsou lineárně nezávislé funkce $\exp(\lambda_1 t)$ a $\exp(\lambda_2 t)$, jejichž lineární kombinace představuje obecné řešení této rovnice, tedy

$$x(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)$$
 (11.38)

Dosazením za $\lambda_{1,2}$ ze vztahu (11.37) můžeme po úpravě obecné řešení pohybové rovnice tlumeného mechanického oscilátoru napsat jako

$$x(t) = e^{-\delta t} \left[C_1 \exp\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) \right].$$
 (11.39)

Za předpokladu, že $\delta \neq 0,$ mohou nastat následující tři případy:

- 1. slabý útlum (podtlumené kmitání): $\omega_0^2 > \delta^2$,
- 2. silný útlum (přetlumené kmitání): $\omega_0^2 < \delta^2$,
- 3. $kritick\acute{y} \acute{u}tlum : \omega_0^2 = \delta^2$,

které budou níže rozebrány.

Slabý útlum (podtlumené kmitání)

Pro případ slabého útlumu si zavedeme kruhový kmitočet

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \ . \tag{11.40}$$

Potom je možné řešení (11.39) vyjádřit jako

$$x(t) = e^{-\delta t} \left[C_1 \exp(j\omega t) + C_2 \exp(-j\omega t) \right]. \tag{11.41}$$

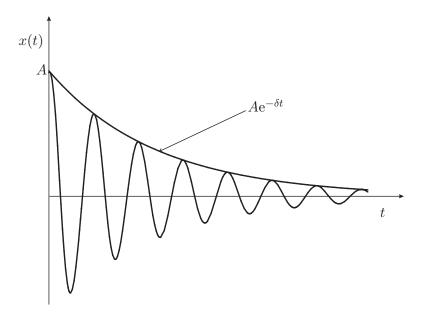
Řešení (11.41) můžeme přepsat do následujícího tvaru

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi). \tag{11.42}$$

Časovou derivací okamžité výchylky dostaneme vztah pro okamžitou rychlost

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = Ae^{-\delta t} \left[\omega \cos(\omega t + \varphi) - \delta \sin(\omega t + \varphi) \right]. \tag{11.43}$$

Z obrázku 11.2, kde je zachycen časový průběh výchylky mechanického oscilátoru pro pří-



Obrázek 11.2: Časový průběh výchylky mechanického oscilátoru pro případ slabého útlumu pro počáteční podmínky $x(t_0) = A$ a $v(t_0) = 0$. Na obrázku je současně zachycen časový vývoj amplitudy.

pad slabého útlumu, je patrné, že v tomto případě již nemůžeme mluvit o čistě periodickém pohybu, jelikož $x(t) \neq x(t+T)$. V případě slabě tlumeného oscilátoru mluvíme o tzv. kvaziperiodickém pohybu.

Z obrázku je patrné, že kmitající hmotný bod prochází opakovaně nulovou polohou (rovnovážnou polohou). Jednotlivé průchody nulovou polohou určíme z rovnice, která vznikne dosazením nulové hodnoty za výchylku ve vztahu (11.42), tedy $0 = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$, neboli $0 = \sin(\omega t + \varphi)$. Z této rovnice plyne, že $\omega t + \varphi = n\pi$, kde n je celé číslo. Časový interval $t_{n+1} - t_n$ mezi dvěma po sobě následujícími průchody nulou zjistíme odečtením rovnic $\omega t_{n+1} + \varphi = (n+1)\pi$ a $\omega t_n + \varphi = n\pi$, tj.

$$\omega t_{n+1} + \varphi - (\omega t_n + \varphi) = (n+1)\pi - n\pi$$
 (11.44)

Odtud

$$t_{n+1} - t_n = \frac{\pi}{\omega} \ . \tag{11.45}$$

Jako dobu kmitu T označíme dvojnásobnou hodnotu intervalu (11.45), protože teprve při každém druhém průchodu nulovou polohou se hmotný bod pohybuje ve stejném smyslu, tedy

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \,. \tag{11.46}$$

S ohledem na (11.40) je možné říct, že doba mezi průchody nulovou polohou je oproti netlumenému mechanickému oscilátoru poněkud delší.

Uvažujme poměr dvou výchylek, které jsou od sebe časově vzdáleny o $T=2\pi/\omega$

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = \frac{Ae^{-\delta(t+T)}\sin(\omega(t+T)+\varphi)}{Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\varphi)} = e^{-\delta T} = e^{-\Delta}, \qquad (11.47)$$

kde veličinu $\Delta = \delta T$ nazýváme logaritmický dekrement.

Silný útlum (přetlumené kmitání)

V tomto případě jsou kořeny charakteristické rovnice (11.36) reálné. Vzhledem k tomu, že $\delta>0$ a pro silný útlum platí, že $\delta^2>\omega_0^2$, budou kořeny charakteristické rovnice (11.37) vždy záporné. Takže v tomto případě bude pro řešení (11.38) pohybové rovnice tlumeného mechanického oscilátoru platit následující limita

$$x(t) = \lim_{t \to \infty} [C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)] = 0.$$
 (11.48)

Tedy výchylka u silného útlumu, tak jako v případě slabého útlumu, konverguje k nule pro rostoucí hodnoty času t.

Položíme-li v rovnici (11.39) x = 0, dostaneme rovnici

$$e^{-\delta t} \left[C_1 \exp\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) \right] = 0, \qquad (11.49)$$

jejímž řešením nalezneme průchody kmitajícího hmotného bodu rovnovážnou polohou. Protože $e^{-\delta t} \neq 0$ pro konečné hodnoty t, položíme

$$C_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} = 0$$
, (11.50)

odtud

$$e^{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} = -\frac{C_2}{C_1} \,. \tag{11.51}$$

Tato rovnice má jedno řešení je-li $C_2/C_1 < 0$ (pro $C_2/C_1 > 0$ řešení nemá). Tedy je-li jedna z integračních konstant kladná a druhá záporná, potom řešením rovnice (11.51) dostáváme

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \ln \left(-\frac{C_2}{C_1} \right) . \tag{11.52}$$

Omezíme-li se na případ, že t>0, potom absolutní hodnoty konstant musí splňovat podmínku

 $\frac{|C_2|}{|C_1|} > 1 .$

Jsou-li splněny výše uvedené podmínky, pak hmotný bod při silném útlumu projde jen jednou rovnovážnou polohou pro konečné t>0, jinak rovnovážnou polohu zaujme až pro $t\to\infty$ (neuvažujeme triviální případ $C_1=C_2=0$, kdy je hmotný bod celou dobu v rovnovážné poloze).

Odtud můžeme konstatovat, že typickou vlastností silného útlumu je, že průchod hmotného

bodu rovnovážnou polohou nastává pro konečné hodnoty času t nejvýše jednou. Z výše uvedeného plyne, že se průběh neopakuje, a proto se jedná o pohyb aperiodický. Uvažujme např. počáteční podmínky x(0) = 0 a $v(0) = v_0$. Potom dle obecného řešení (11.39) můžeme psát, že

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 \implies C_1 = -C_2 = \frac{A}{2}$$
 (11.53)

Dosazením vztahu (11.53) za integrační konstanty do řešení (11.39) dostaneme

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{-\delta t} \left[\exp\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) - \exp\left(-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) \right] = A e^{-\delta t} \sinh\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right). \tag{11.54}$$

Derivací řešení (11.54) podle času dostaneme

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = -\delta A e^{-\delta t} \sinh\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) + A\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} e^{-\delta t} \cosh\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) . \quad (11.55)$$

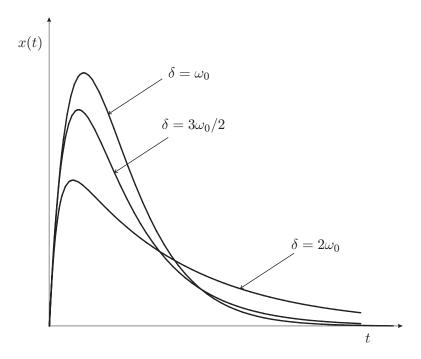
Pak pro druhou počáteční podmínku můžeme na základě vztahu pro rychlost (11.55) psát, že

$$v(0) = v_0 = A\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$
 odtud $A = \frac{v_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$. (11.56)

Dosadíme-li do řešení (11.54) za konstantu A ze vztahu (11.56), pak dostáváme

$$x(t) = \frac{v_0 e^{-\delta t}}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) . \tag{11.57}$$

Nalezené řešení je pro různé hodnoty dekrementu útlumu δ uvedeno na obrázku 11.3. Z obrázku je patrné, že pro nižší hodnoty dekrementu útlumu dochází k rychlejšímu zatlumení výchylky mechanického oscilátoru z rovnovážné polohy.



Obrázek 11.3: Tři aperiodické časové průběhy výchylky mechanického oscilátoru pro různé hodnoty dekrementu útlumu.

Kritický útlum

V tomto případě má charakteristická rovnice (11.36) dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -\delta$, takže řešení pohybové rovnice (11.30) má tvar

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\delta t} . (11.58)$$

Rychlost je pak dána následujícím vztahem

$$v(t) \equiv \dot{x} = C_2 e^{-\delta t} - \delta(C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}$$
 (11.59)

Anulováním rovnice (11.58) zjistíme, že pro konečné kladné hodnoty času (t>0) projde hmotný bod rovnovážnou polohou pouze v případě, kdy

$$t = -\frac{C_1}{C_2} > 0.$$

Odtud plyne, že integrační konstanty C_1 a C_2 musí mít opačná znaménka. Jako v předcházejícím případě se bude jednat o pohyb aperiodický.

Budeme-li uvažovat počáteční podmínky jako v případě silného útlumu, tj. x(0) = 0 a $v(0) = v_0$, potom řešení pohybové rovnice (11.30) je

$$x(t) = v_0 t e^{-\delta t} . ag{11.60}$$

Na obrázku 11.3 je zachycen průběh kriticky tlumeného mechanického oscilátoru $\delta = \omega_0$. V případě kritického útlumu dojde, jak lze vidět z obrázku, k zatlumení nejrychleji.

11.3 Vynucené (nucené) kmitání tlumeného mechanického oscilátoru

Chceme-li udržet tlumený oscilátor v kmitavém pohybu, musíme ho neustále budit vnější silou F_B , která nutí předmětný oscilátor ke kmitům. V takovémto případě můžeme napsat pohybovou rovnici uvažovaného oscilátoru jako

$$m\ddot{x} = F_V + F_{Dis} + F_B \ .$$
 (11.61)

Budeme-li uvažovat harmonickou budicí sílu $F_B = F_0 \cos 9\Omega t$), potom po dosazení za síly na pravé straně pohybové rovnice (11.61) a následné úpravě, viz kapitola 11.2, dostaneme pohybovou rovnici v následujícím tvaru

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = B\cos(\Omega t) , \qquad (11.62)$$

kde $B = F_0/m$.

Řešení nehomogenní diferenciální rovnice (11.61) je dáno součtem obecného řešení x_H odpovídající homogenní rovnice a partikulárního řešení x_P rovnice (11.62), tedy $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$. Homogenní řešení, v případě uvažování slabého útlumu, bylo nalezeno v předchozí kapitole a je dáno vztahem (11.42), tedy

$$x_H(t) = A_H e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_H) . \qquad (11.63)$$

Pro nalezení partikulárního řešení rovnice (11.62) použijeme s výhodou komplexní reprezentaci. Budeme předpokládat, že partikulárnímu řešení bude odpovídat reálná složka² komplexní funkce $\hat{x}_P(t)$, tj. $x_P(t) = \text{Re}\{\hat{x}_P\}$. Hledanému komplexnímu partikulárnímu řešení \hat{x}_P

²Hledané partikulární funkce nemůže být funkcí komplexní, jelikož hledané řešení musí odpovídat fyzikálnímu řešení, tedy řešení, které je měřitelné.

odpovídá následující komplexní diferenciální rovnice

$$\ddot{\hat{x}}_P + 2\delta \dot{\hat{x}}_P + \omega_0^2 \hat{x}_P = B \exp(j\Omega t) . \tag{11.64}$$

Reálná složka řešení komplexní diferenciální rovnice (11.64) představuje řešení diferenciální rovnice (11.61). Pravá strana rovnice (11.64) reprezentuje komplexní funkci vyjádřenou pomocí známého Eulerova vzorce a její reálná složka odpovídá uvažované funkci F_B/m , tj.

$$\operatorname{Re}\{B\exp(\mathrm{j}\Omega t)\} = \operatorname{Re}\{B\cos(\Omega t) + \mathrm{j}B\sin(\Omega t)\} = B\cos(\Omega t) = F_B/m. \tag{11.65}$$

Komplexní partikulární řešení si vyjádříme rovněž pomocí Eulerova vzorce

$$\hat{x}_P = \mathcal{A}_P \exp(j\Omega t) = A_P \exp(j\varphi_P) \exp(j\Omega t) = A_P \exp[j(\Omega t + \varphi_P)], \qquad (11.66)$$

kde A_P se nazývá komplexní amplituda a A_P je reálná amplituda partikulárního řešení rovnice (11.61) a φ_P je jeho počáteční fáze.

Dosazením partikulárního řešení (11.66) do komplexní diferenciální rovnice (11.64) obdržíme³ následující komplexní algebraickou rovnici

$$-\Omega^{2} A_{P} \exp(j\varphi_{P}) \exp(j\Omega t) + j2\delta\Omega A_{P} \exp(j\varphi_{P}) \exp(j\Omega t) + \omega_{0}^{2} A_{P} \exp(j\varphi_{P}) \exp(j\Omega t) = B \exp(j\Omega t). \quad (11.67)$$

Vynásobíme-li rovnici (11.67) funkcí $\exp(-j\varphi_P)\exp(-j\Omega t)$, pak po následné úpravě dostaneme

$$A_P(\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\delta\Omega) = B \exp(-j\varphi_P).$$
(11.68)

Komplexní číslo, které se nachází v závorce na levé straně rovnice (11.68), můžeme vyjádřit pomocí Eulerova vzorce, čímž dospějeme k následujícímu tvaru algebraické rovnice

$$A_P|\hat{K}|\exp(j\phi) = B\exp(-j\varphi_P), \qquad (11.69)$$

kde

$$|\hat{K}| = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}$$
(11.70)

a

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) . \tag{11.71}$$

Z rovnice (11.69) můžeme za pomocí vztahu (11.70) nalézt amplitudu partikulárního řešení jako

$$A_P(\Omega) = \frac{B}{|\hat{K}|} = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$
 (11.72)

Ve vztahu (11.72) je naznačeno, že amplituda partikulárního řešení závisí na kmitočtu budicí síly.

Pro počáteční fázi partikulárního řešení dostaneme z rovnice (11.69) vyjádření

$$\tan(\varphi_P(\Omega)) = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \,, \tag{11.73}$$

neboli

$$\varphi_P(\Omega) = \arctan\left(-\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right).$$
(11.74)

³Na tomto místě je nutno připomenout, že pro časové derivace představuje komplexní jednotka v předpokládaném komplexním tvaru partikulárního řešení konstantu.

Jelikož partikulární řešení rovnice (11.61) je rovno reálné složce komplexního partikulárního řešení (11.66), tedy

$$x_P(t) = \operatorname{Re}\{\hat{x}_P\} = \operatorname{Re}\{A_P \exp[j(\Omega t + \varphi_P)]\} = A_P \cos(\Omega t + \varphi_P), \qquad (11.75)$$

kde A_P je dáno vztahem (11.72) a φ_P vztahem (11.74).

Obecné řešení diferenciální rovnice (11.61) si pomocí funkcí (11.63) a (11.75) můžeme vyjádřit způsobem

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = A_H e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_H) + A_P(\Omega) \cos(\Omega t + \varphi_P). \tag{11.76}$$

Vzhledem k uvažovanému útlumu, je zřejmé, že část řešení (11.76), která odpovídá homogennímu řešení, se s časem výrazně zatlumí, takže partikulární řešení bude dominovat. Pro $t\to\infty$ (ustálený neboli stacionární stav) bude řešení diferenciální rovnice (11.61) dáno pouze funkcí, která odpovídá jejímu partikulárnímu řešení. Vzhledem k tomu, že amplituda funkce (11.63) se s časem exponenciálně tlumí, je možné tuto funkci považovat s dostatečnou přesností za nulovou po tzv. relaxační době, která je dána dohodnutým (příp. vhodně zvoleným) násobkem časové konstanty $\tau=1/\delta$. Jinými slovy můžeme konstatovat, že uvažovaný buzený tlumený mechanický oscilátor se snaží kmitat na kmitočtu, který odpovídá jeho volným tlumeným kmitům, avšak postupem času se "poddá" budicí síle, která kmitá na kruhové frekvenci Ω . Z výše uvedeného důvodu se zpravidla za řešení nehomogenní diferenciální rovnice (11.61) považuje pouze její partikulární řešení. V takovém případě již není nutné používat indexu P pro označení partikulárního řešení, takže řešení uvažované diferenciální rovnice můžeme zapsat jako⁴

$$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi), \qquad (11.77)$$

kde $A = A_P$ a $\varphi = \varphi_P$.

Derivací okamžité výchylky buzeného mechanického oscilátoru podle času dostaneme vztah reprezentující jeho okamžitou rychlost

$$v(t) = -A_V(\Omega)\sin(\Omega t + \varphi) = A_V(\Omega)\cos\left(\Omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (11.78)$$

kde $A_V(\Omega) = A(\Omega)\Omega$ je amplituda rychlosti.

Dosazením ze vztahu (11.72) můžeme amplitudu rychlosti vyjádřit jako

$$A_V(\Omega) = \frac{B\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \,. \tag{11.79}$$

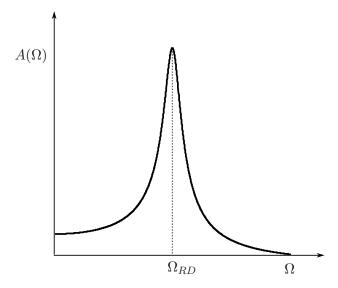
Ze vztahu (11.78) je patrné, že mezi okamžitou výchylkou a okamžitou rychlostí nucených kmitů je fázový posuv $\pi/2$.

Na obrázcích 11.4 a 11.5 jsou vyneseny grafy závislosti amplitudy výchylky $A(\Omega)$ a amplitudy rychlosti $A_V(\Omega)$ na kruhovém kmitočtu budicí harmonické síly Ω . Tyto grafy nazýváme rezonanční křivky. Z těchto grafů je patrné, že jak amplituda výchylky, tak amplituda rychlosti mají jedno absolutní maximum, jehož hodnota závisí na velikosti dekrementu útlumu δ , čím je hodnota dekrementu útlumu nižší, tím je maximální hodnota zmiňovaných amplitud vyšší a rezonanční křivka užší. Kmitočty, pro které nabývají grafy průběhů amplitud svého maxima, se nazývají rezonanční kmitočty.

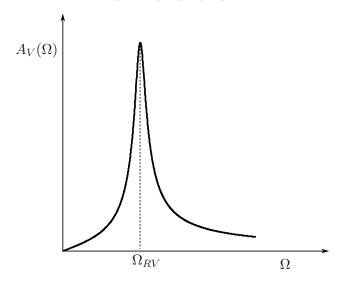
Za účelem nalezení rezonančního kmitočtu amplitudy výchylky Ω_{RD} a rezonančního kmitočtu amplitudy rychlosti Ω_{RV} , nejdříve zderivujeme funkční vztahy (11.72) a (11.79) podle kruhového kmitočtu Ω , čímž dostáváme

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \right) = 2B \frac{\Omega(\omega_0^2 - 2\delta^2 - \Omega^2)}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2]^{3/2}},$$
(11.80)

⁴Partikulární řešení uvažované diferenciální rovnice je možné považovat za její řešení i pro případ kritického nebo silného útlumu.



Obrázek 11.4: Závislost amplitudy výchylky A na kmitočtu budicí síly Ω .



Obrázek 11.5: Závislost amplitudy rychlosti A_V na kmitočtu budicí síly Ω .

$$\frac{dA_V(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{B\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \right) = B \frac{\omega_0^4 - \Omega^4}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2]^{3/2}}.$$
 (11.81)

Položíme výrazy (11.80) a (11.81) rovny nule, čímž dostaneme rovnice, jejichž řešením nalezneme body, které odpovídají hledaným rezonančním kmitočtům. Pro amplitudu výchylky (uvažujeme pouze kmitočty $\Omega \geq 0$) je podmínka $dA(\Omega)/d\Omega = 0$ splněna pro $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 \to \infty$ a pro kmitočet

$$\Omega_{RD} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \ . \tag{11.82}$$

Kmitočtům Ω_1 a Ω_2 odpovídá extrémní hodnota amplitudy výchylky vždy. Extrém funkce $A(\Omega)$ pro hodnotu $\Omega = \Omega_{RD}$ nastane jen v případě, je-li kmitočet Ω_{RD} reálný, tedy s ohledem na vztah (11.82) musí být splněna podmínka

$$\omega_0 > \delta\sqrt{2} \ . \tag{11.83}$$

Hodnota Ω_{RD} je reálná i pro $\omega_0 = \delta \sqrt{2}$, ale v tomto případě je $\Omega_{RD} = 0$ a splývá s hodnotou kmitočtu Ω_1 . Je-li splněna podmínka (11.83), potom

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 A(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega^2}\right|_{\Omega=\Omega_{RD}}<0\ ,$$

tedy pro $\Omega = \Omega_{RD}$ nastává maximum funkce $A(\Omega)$.

Při splnění podmínky $\omega_0 > \delta \sqrt{2}$ je extrém funkce $A(\Omega)$ při hodnotě $\Omega = \Omega_{RD}$ maximem a říkáme, že pro $\Omega = \Omega_{RD}$ nastává rezonance výchylky a kmitočtu Ω_{RD} říkáme rezonanční kmitočet výchylky.

Provedeme-li podobný rozbor pro amplitudu rychlosti, tak poměrně snadno dospějeme k hodnotě rezonančního kmitočtu rychlosti

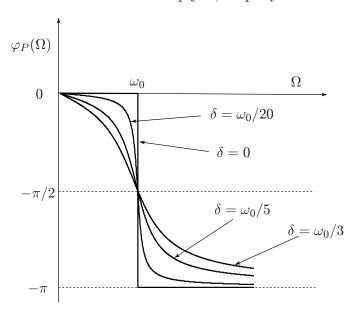
$$\Omega_{RV} = \omega_0 \ . \tag{11.84}$$

Nyní vyšetříme, jak závisí fázová konstanta $\varphi \equiv \varphi_P$ určená rovnicí (11.73) na kmitočtu Ω při konstantních hodnotách δ a ω_0 a splnění podmínky (11.83). Z rovnice (11.73) plyne, že pro $\Omega=0$ je $\tan(\varphi_P)=0$. Omezíme se na případ, kdy pro $\Omega=0$ položíme $\varphi_P(0)=0$. Ze vztahu (11.73) je zřejmé, že pro kmitočet z intervalu $0<\Omega<\omega_0$ je $\tan(\varphi_P)<0$, a tedy s ohledem na volbu, že $\varphi_P(0)=0$, bude počáteční fáze φ_P z intervalu $-\pi/2<\varphi_P<0$. Dále z rovnice (11.73) plyne, že pro $\Omega=\omega_0$ je $\tan(\varphi_P)=-\infty$, tedy $\varphi_P(\omega_0)=-\pi/2$. Pro relaci $\Omega>\omega_0$ je $\tan(\varphi_P)>0$. Opět s ohledem na volbu, že $\varphi_P(0)=0$, bude pak počáteční fáze φ_P z intervalu $-\pi<\varphi_P<-\pi/2$. Konečně pro $\Omega\to\infty$ je $\tan(\varphi_P)=0$, a tudíž

$$\lim_{\Omega \to \infty} \varphi_P(\Omega) = -\pi \ .$$

Na obrázku 11.6 je zachycena závislost počáteční fáze nucených kmitů na kmitočtu budicí síly $(\varphi(\Omega))$ pro různé hodnoty tlumení.

Z výše provedeného rozboru a obrázku 11.6 plyne, že pohyb nuceného mechanického osci-



Obrázek 11.6: Fázové zpoždění (počáteční fáze) nucených kmitů $\varphi(\Omega)$ pro různé hodnoty tlumení.

látoru je vždy opožděn za budicí silou. Pro velmi rychlá buzení $\Omega \gg \omega_0$ je pohyb oscilátoru opožděn oproti budicí síle téměř o π a tedy oscilátor kmitá téměř v protifázi k budicí síle. Pro celkovou mechanickou energii harmonicky buzeného oscilátoru s využitím vztahů (11.77), (11.78) a (11.8) můžeme po úpravě psát, že

$$E = T + U = \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}mA^2 \left[\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos^2(\Omega t + \varphi)\right] . \tag{11.85}$$

Bude-li $\Omega = \Omega_{RV}$, tj. $\Omega = \omega_0$, potom

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 = konst. {(11.86)}$$

Ze vztahu (11.86) je vidět, že je-li frekvence budicí síly rovna rezonančnímu kmitočtu rychlosti, potom celková mechanická energie nezávisí na čase, tj. dE/dt = 0. Pro časovou změnu celkové mechanické energie můžeme psát, že

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = F_{Dis}\dot{x} + F_B\dot{x} \ . \tag{11.87}$$

Rovnost (11.87) nám říká, že časová změna celkové mechanické energie se rovná součtu okamžitého výkonu disipativních sil a okamžitého výkonu síly budicí. V případě, že frekvence budicí síly je rovna rezonančnímu kmitočtu rychlosti, potom s ohledem na vztah (11.86) bude platit, že

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 = F_{Dis}\dot{x} + F_B\dot{x} \ . \tag{11.88}$$

Z rovnosti (11.88) vyplývá, že v případě rezonance rychlosti se v každém čase okamžitý výkon disipativních sil rovná, až na znaménko, okamžitému výkonu budicí síly.

V obecném případě, tj. pro libovolný kmitočet budicí síly, musí platit, že časová střední hodnota 5 celkové mechanické energie $\langle E \rangle$ v ustáleném stavu je rovna konstantě, což je dáno skutečností, že po odeznění relaxačního děje se celková mechanická energie oscilátoru již nemění. Z tohoto důvodu bude muset platit, že

$$\langle F_{Dis}\dot{x}\rangle + \langle F_B\dot{x}\rangle = 0. {(11.89)}$$

Z rovnice (11.89) plyne, že střední časová hodnota okamžitého výkonu disipativních sil musí být až na znaménko rovna střední časové hodnotě okamžitého výkonu budicí síly neboli jinými slovy, budicí síla v ustáleném stavu kompenzuje ztráty, ke kterým dochází vlivem disipativních sil.

Pro hodnocení oscilátorů se používá tzv. činitel jakosti Q, který je definován jako

$$Q = \frac{\Omega_{RD}}{2\delta} \ . \tag{11.90}$$

Za kvalitní oscilátory jsou považovány vysokojakostní oscilátory, tj. oscilátory, které mají vysoký činitel jakosti Q. Rezonanční křivka vysokojakostních oscilátorů se vyznačuje velmi ostrým maximem kolem rezonančního kmitočtu. Pro tyto oscilátory je možné kolem rezonančního kmitočtu použít následující aproximace

$$\Omega \approx \omega_0 \; , \tag{11.91}$$

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = (\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \Omega). \tag{11.92}$$

S ohledem na aproximace (11.91) a (11.92) můžeme upravit vztah pro amplitudu výchylky (11.72) následujícím způsobem

$$A(\Omega) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \approx \frac{B}{\sqrt{(2\omega_0(\omega_0 - \Omega))^2 + 4\delta^2 \omega_0^2}} = \frac{B}{\sqrt{4\omega_0^2(\omega_0 - \Omega)^2 + 4\delta^2 \omega_0^2}} = \frac{B}{2\omega_0\sqrt{(\omega_0 - \Omega)^2 + \delta^2}}.$$
 (11.93)

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cdot \mathrm{d}t.$$

 $^{^5}$ Pro označení časové střední hodnoty budeme používat označení $\langle\cdot\rangle,$ které přestavuje operátor

Pro amplitudu výchylky, která je dána přibližným vztahem (11.93) platí, že své maximální hodnoty nabývá pro kmitočet $\Omega = \omega_0$. Jestliže umocníme na kvadrát přibližnou hodnotu amplitudy výchylky (11.93), potom tento kvadrát bude pro budicí kmitočet $\Omega = \omega_0$ nabývat své maximální hodnoty $B/(2\omega_0\delta)$. Pro budicí kmitočty $\Omega = \Omega_- = \omega_0 - \delta$ a $\Omega = \Omega_+ = \omega_0 + \delta$ bude hodnota tohoto kvadrátu rovna přesně polovině jeho maximální hodnoty. Pomocí těchto hodnot budicích kmitočtů můžeme zavést tzv. *šířku rezonanční křivky*, která je dána následujícím vztahem

$$\Delta\Omega = \Omega_+ - \Omega_- = 2\delta \ . \tag{11.94}$$

Na základě rovnosti (11.94) je možné u vysokojakostních oscilátorů určit přibližně jejich činitel jakosti (11.90) jako

$$Q \approx \frac{\Omega_{RD}}{\Delta \Omega} \ . \tag{11.95}$$

11.4 Fyzikální oscilátory

V předchozích kapitolách jsme se zaměřili na mechanický oscilátor, který je reprezentován hmotným bodem, jenž kmitá kolem své rovnovážné polohy po přímce. Takovýto mechanický rezonátor může být realizován např. závažím, které je připevněno na jeden konec pružiny, jejíž druhý konec se nepohybuje. Natáhneme-li pružinu, která je nositelem vratné síly, spolu s uvažovaným závažím, počne toto závaží (hmotný bod) konat kmitavý pohyb. Avšak kmitající hmotný bod nemusí nutně konat kmitavý pohyb po přímce. Příkladem může být např. rovinné matematické kyvadlo. V případě vychýlení závaží (hmotného bodu) u tohoto rovinného matematického kyvadla, bude závaží také kmitat kolem své rovnovážné polohy, avšak v tomto případě po kružnici. V případě matematického kyvadla je vratná síla dána projevem tíhové síly. Matematický tvar linearizované pohybové rovnice rovinného matematického kyvadla je shodný s tvarem odpovídající pohybové rovnice popisující kmitavý pohyb hmotného bodu pohybujícího se po přímce, srovnej (9.50) a (11.7). Jsou-li rovnice popisující oscilace u fyzikálních nemechanických oscilátorů shodné, co do tvaru, s pohybovými rovnicemi mechanických oscilátorů, je možné v tomto případě rozšířit teorii mechanického oscilátoru i na tyto fyzikální oscilátory.

Teorie mechanických oscilátorů prezentovaná v předchozích kapitolách samozřejmě nevyčerpává teorii mechanických oscilátorů. Zvláštní pozornost zasluhují např. oscilátory nelineární, samobuzené, parametricky buzené apod. Teorie věnující se problematice takovýchto oscilátorů přesahuje rámec tohoto skripta.

Kapitola 12

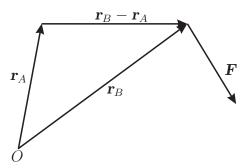
Pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli

12.1 Moment síly a moment hybnosti

Při vyšetřování pohybu hmotného bodu v centrálním silovém poli si nejdříve zavedeme dvě fyzikální vektorové veličiny. První z nich se nazývá $moment\ síly$ a značíme ho jako M a je definován jako

$$\mathbf{M} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F} . \tag{12.1}$$

Z definičního vztahu (12.1) vyplývá, že se jedná o moment síly, která působí v místě o polohovém vektoru \mathbf{r}_{B} , vzhledem k bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_{A} , viz obr. 12.1. V případě, že



Obrázek 12.1: Vysvětlující obrázek k momentu síly, která působí v místě o polohovém vektoru \mathbf{r}_{B} , vzhledem k bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_{A} .

moment síly budeme uvažovat vzhledem k bodu ležícímu v počátku uvažované souřadnicové soustavy, bude $\mathbf{r}_A = \mathbf{0}$. Potom polohový vektor \mathbf{r}_B můžeme označit bez indexu, tj. $\mathbf{r}_B \equiv \mathbf{r}$ a moment síly bude v tomto případě dán následujícím vztahem (viz obr. 12.2)

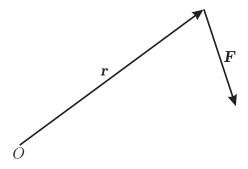
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \tag{12.2}$$

Další veličinou, kterou si zavedeme bude tzv. $moment\ hybnosti\ L$. V případě, že moment hybnosti budeme uvažovat vzhledem k počátku, potom je dán následujícím vztahem¹

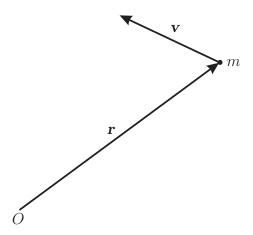
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \,, \tag{12.3}$$

kde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ je hybnost uvažovaného hmotného bodu, viz obr. 12.3.

 $^{^{1}}$ V případě, že by se jednalo o moment hybnosti vzhledem k obecnému bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_{A} , zavedli bychom ho analogickým způsobem jako v případě momentu síly (12.1).



Obrázek 12.2: Vysvětlující obrázek k momentu síly, která působí v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} , vzhledem k počátku.



Obrázek 12.3: Vysvětlující obrázek k momentu hybnosti vzhledem k počátku.

12.2 Pohybové rovnice a konstanty pohybu hmotného bodu v centrálním silovém poli

Uvažujme hmotný bod o hmotnosti m, který se nachází v centrálním silovém poli (8.50), jehož silové centrum umístíme do počátku souřadnic. Moment síly v tomto případě určíme na základě vztahu (12.2) jako

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{f(r)}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$$
 (12.4)

V další části textu budeme uvažovat pouze centrální silové pole neboli působení centrální (radiální) síly. Vyjdeme-li z výsledku (12.4), pak s ohledem na vztah (12.3) můžeme psát, že

$$\mathbf{0} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{p} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} - \underbrace{\mathbf{v} \times m\mathbf{v}}_{=0} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}.$$
 (12.5)

Z výsledku (12.5) vyplývá, že

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0} \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{konst.}$$
 (12.6)

Rovnosti (12.6) nám vyjadřují skutečnost, že v centrálním silovém poli se moment hybnosti s časem nemění², tj. moment hybnosti se rovná konstantnímu vektoru³ $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{konst.}$

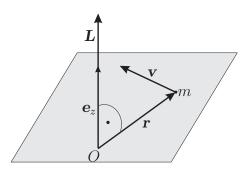
²Tento závěr ale platí jen za předpokladu, že počátek souřadnic, vůči kterému jak moment hybnosti, tak moment síly určujeme, je totožný se silovým centrem.

 $^{^3}$ Vektor momentu hybnosti L s časem nemění jak svojí velikost, tak svoji orientaci.

Z definice vektorového součinu vyplývá, že moment hybnosti \boldsymbol{L} je vždy kolmý současně k vektorům \boldsymbol{r} a \boldsymbol{v} , které leží v rovině, jež s časem nemění svoji pozici vůči zvolené vztažné souřadnicové soustavě, protože $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{konst.}$, viz obrázek 12.4. Vzhledem k tomuto závěru můžeme konstatovat, že pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli je nutně rovinný, tj. uvažovaný hmotný bod se pohybuje v rovině a tudíž k určení jeho polohy potřebujeme znát pouze dvě souřadnice. Jelikož centrální silové pole je sféricky symetrické, je proto přirozené k popisu rovinného pohybu hmotného bodu použít použít polárních souřadnice $\rho \equiv |\boldsymbol{r}| \equiv r$ a φ v uvažované rovině. Polární souřadnice si zvolíme za zobecněné souřadnice, takže můžeme Lagrangeovu funkci $\mathcal L$ pro uvažovaný hmotný bod napsat jako (viz kapitola)

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2) - U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) . \tag{12.7}$$

Ve vztahu pro Lagrangeovu funkci (12.7) se vyskytuje potenciální energie U(r), která je



Obrázek 12.4: Rovinný pohyb v centrálním silovém poli.

funkcí pouze vzdálenosti r od silového centra (počátku), což je dáno tím, že centrální silové pole je pole izotropní, tj. všechny směry od silového centra jsou si rovnocenné. Všimněme si, že potenciální energie není funkcí času, takže se vztahuje ke konzervativnímu silovému poli. Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro uvažovaný hmotný bod, pak mají následující tvar

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} \,, \tag{12.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}(mr^2\dot{\varphi})}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{neboli} \quad 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} = 0. \tag{12.9}$$

Moment hybnosti L je možné si vyjádřit pomocí polárních souřadnic jako

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = mr\mathbf{e}_r \times (v_r\mathbf{e}_r + v_{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi}) = mrv_r(\underbrace{\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r}) + mrv_{\varphi}(\underbrace{\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_{\varphi}}) = \underbrace{\mathbf{e}_z}$$

$$mrv_{\varphi}\mathbf{e}_z = mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z = \mathbf{konst.} \quad (12.10)$$

Na základě rovnosti (12.10) tedy můžeme psát, že

$$L_z = L = mr^2 \dot{\varphi} = konst. \tag{12.11}$$

S ohledem na Lagrangeovu funkci (12.7) můžeme konstatovat, že souřadnice φ je cyklickou souřadnicí, takže veličina $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{\varphi}$ představuje integrál pohybu, tedy

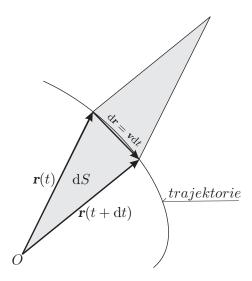
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = L_z = L = konst. , \qquad (12.12)$$

což se shoduje s výsledkem (12.11).

Jelikož Lagrangeova funkce (12.7) nezávisí explicitně na čase, tak se zachovává zobecněná energie \mathcal{E} , která je v tomto případě rovna celkové mechanické energii E = T + U, tedy

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = konst.$$
 (12.13)

Pro geometrické vyjádření zákona zachování momentu hybnosti (12.6) vyjdeme z obrázku 12.5. Využijeme skutečnosti, že velikost vektorového součinu je rovna velikosti plochy rov-



Obrázek 12.5: Geometrické vyjádření zákona zachování momentu hybnosti.

noběžníku, jehož délky stran jsou shodné s velikostmi vektorů, mezi kterými se uskutečňuje vektorový součin. V našem případě jsou těmito vektory $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t+\mathrm{d}t)$. Plocha odpovídajícího rovnoběžníku je na obrázku 12.5 vybarvena šedě. Zajímáme se o velikost plochy dS, kterou opíše polohový vektor (průvodič) \mathbf{r} za čas dt. V případě, že se jedná o infinitezimální časový interval, pak plocha opsaná polohovým vektorem odpovídá polovině plochy zmiňovaného rovnoběžníku. Takže pro plochu opsanou polohovým vektorem \mathbf{r} za infinitezimální časový interval dt můžeme psát

$$dS = \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t+dt)| = \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t) \times (\mathbf{r}(t)+d\mathbf{r})| = \frac{1}{2}|\underbrace{\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t)}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|dt = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|dt = \frac{|\mathbf{r} \times m\mathbf{v}|}{2m}dt = \frac{|\mathbf{L}|}{2m}dt = \frac{L}{2m}dt. \quad (12.14)$$

Přímo z výsledného výrazu (12.14) je možné vyjádřit časovou změnu velikosti plochy (velikost $plošné\ rychlosti$) opsané polohovým vektorem uvažovaného hmotného bodu, který se pohybuje v centrálním silovém poli jako

$$w = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m} = konst. \tag{12.15}$$

Protože jak velikost momentu hybnosti, tak hmotnost uvažovaného hmotného bodu, jsou konstantní, je konstantní i plošná rychlostw neboli můžeme konstatovat, že v centrálním silovém poli je velikost plošné rychlosti konstantní.

Místo toho, abychom řešili pohybové rovnice (12.8) a (12.9) je možné, bez újmy na obecnosti, řešit pouze integrály pohybu (12.12) a (12.13), což jsou obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, které obsahují integrační konstanty L a E pro hledané funkce r = r(t) a $\varphi = \varphi(t)$.

12.3 Rovnice trajektorie hmotného bodu v centrálním silovém poli

Při hledání tvaru trajektorie hmotného bodu v centrálním silovém poli $r=r(\varphi)$ můžeme postupovat následujícím způsobem.

Zavedeme si proměnnou u, která představuje inverzní radiální vzdálenost, tj.

$$u = \frac{1}{r} \tag{12.16}$$

a upravíme si vztah (12.11) do následujícího tvaru

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \,. \tag{12.17}$$

Nyní provedeme časovou derivaci radiální vzdálenosti r s tím, že použijeme vztahů (12.16) a (12.17), čímž dostaneme

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{u(\varphi(t))} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \dot{\varphi} = -r^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{m} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \,. \tag{12.18}$$

Rovnici (12.13) upravíme do následujícího tvaru

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left[E - \left(U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right] . \tag{12.19}$$

Dosadíme do rovnice (12.19) za radiální rychlost \dot{r} ze vztahu (12.18), přičemž použijeme rovnosti (12.16)

$$\left(\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{2}{m}\left[E - \left(U(u) + \frac{L^2u^2}{2m}\right)\right].$$
(12.20)

Následnou úpravou rovnice (12.20) dostaneme, že

$$\frac{L^2}{m^2} \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2} u^2 = \frac{2}{m} [E - U(u)] . \tag{12.21}$$

Derivací rovnice (12.21) podle proměnné φ a vynásobením $m^2/(2L)^2$ dospějeme k následující rovnici

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{m}{L^2}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}.$$
 (12.22)

Budeme-li dále předpokládat, že $(du/d\varphi) \neq 0$, pak je možné rovnici (12.22) tímto faktorem vydělit, čímž tato rovnice přejde do následujícího tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u} \,. \tag{12.23}$$

Rovnice (12.23) se nazývá Binetův vzorec. V případě, že máme zadánu konkrétní funkci potenciální energie U(r(u)), pak z Binetova vzorce získáme nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici, jejímž řešením dostaneme funkci $u(\varphi)$. Inverzí této funkce obdržíme funkci $r(\varphi) = 1/u(\varphi)$, která popisuje tvar trajektorie uvažovaného hmotného bodu v centrálním silovém poli.

⁴Při provádění derivace je nutné si uvědomit, že celková mechanická energie E je konstanta a dále, že proměnná u je funkcí polární souřadnice φ , tj. $u = u(\varphi)$.

12.4 Keplerova úloha

Významným případem pohybu v centrálním silovém poli je pohyb planet či jiných astronomických objektů, které se pohybují v gravitačním poli Slunce.

Předpokládejme, že Slunce má hmotnost M a jeho potenciální energie je dána vztahem

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} , \qquad \alpha = \varkappa Mm > 0 , \qquad (12.24)$$

kde m je hmotnost uvažovaného hmotného bodu (planety) ($m \ll M$) a \varkappa je gravitační konstanta. Použijeme-li proměnnou u danou vztahem (12.16) potom na základě rovnosti (12.24) můžeme psát, že

$$U(u) = -\alpha u . (12.25)$$

Odtud dostáváme, že

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u} = -\alpha. \tag{12.26}$$

S ohledem na vztah (12.26) je možné vyjádřit Binetův vzorec (12.23) jako

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{\alpha m}{L^2} \,. \tag{12.27}$$

Rovnice (12.27) představuje lineární diferenciální rovnici s konstantní pravou stranou. Kompletní řešení této diferenciální rovnice obdržíme součtem obecného řešení u_H homogenní rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = 0 \tag{12.28}$$

a partikulárního řešení u_P rovnice (12.27). Obecné řešení homogenní rovnice je dáno výrazem

$$u_H = A\cos\varphi + B\sin\varphi \,, \tag{12.29}$$

které může být přepsáno do následujícího tvaru

$$u_H = C\cos(\varphi - \varphi_0) , \qquad (12.30)$$

kde $A = C \cos \varphi_0$, $B = C \sin \varphi_0$.

Partikulárním řešením rovnice (12.27) je zjevně

$$u_P = \frac{\alpha m}{L^2} \,. \tag{12.31}$$

Takže kompletní řešení diferenciální rovnice (12.27) je dáno následujícím vztahem

$$u = u_H + u_P = C\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\alpha m}{L^2}.$$
 (12.32)

Jelikož si můžeme souřadnicovou soustavu zvolit tak, aby počáteční fáze φ_0 byla nulová, tak bez újmy na obecnosti ji v řešení (12.32) položíme rovnu nule, čímž dostaneme, že

$$u = \frac{1}{r} = C\cos\varphi + \frac{\alpha m}{L^2} \,. \tag{12.33}$$

Úpravou toho řešení dostáváme

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha m}{L^2} \left(1 + \varepsilon \cos \varphi \right) , \qquad (12.34)$$

kde ε je nová konstanta nahrazující původní konstantu C. Následnou další úpravou dostaneme následující rovnici

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi \,\,\,\,(12.35)$$

která představuje rovnici kuželosečky v polárních souřadnicích. Konstantu ε nazýváme numerická excentricita (numerická výstřednost) a parametr (konstanta)

$$p = \frac{L^2}{\alpha m} \tag{12.36}$$

určuje velikost kuželosečky.

V následující části textu si ukážeme, jak souvisí hodnota numerické excentricity ε s konstantami pohybu vztahující se k danému hmotnému bodu (planetě).

Vyjádříme-li řešení (12.35) opět pomocí proměnné u, pak dostáváme, že

$$u = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p} \tag{12.37}$$

Derivací řešení (12.37) podle proměnné φ obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{\varepsilon}{p}\sin\varphi \ . \tag{12.38}$$

Dosazením výrazů (12.25), (12.37) a (12.38) do rovnice (12.21) dospějeme k následující rovnosti

$$\frac{L^2}{m^2 p^2} \left(\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + 1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi \right) = \frac{2}{m} (E + \alpha u) = \frac{2}{m} \left[E + \frac{\alpha}{p} (1 + \varepsilon \cos \varphi) \right]. \tag{12.39}$$

Uplatněním identity $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ upravíme levou stranu rovnosti (12.40), čímž dostaneme

$$\frac{L^2}{m^2 p^2} \left(\varepsilon^2 + 1 + 2\varepsilon \cos \varphi \right) = \frac{2}{m} \left[E + \frac{\alpha}{p} (1 + \varepsilon \cos \varphi) \right] . \tag{12.40}$$

Vynásobíme rovnici (12.40) výrazem m^2p^2/L^2 , přičemž využijeme rovnost (12.36), a následnou úpravou dospějeme k následující rovnici

$$\varepsilon^{2} + 1 + 2\varepsilon\cos\varphi = \frac{2L^{2}}{\alpha^{2}m}E + 2(1 + \varepsilon\cos\varphi). \tag{12.41}$$

Odtud pak můžeme psát, že

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 m} E \ . \tag{12.42}$$

Vztah určuje zavedenou integrační konstantu (numerickou excentricitu) ε .

V závislosti na hodnotě numerické excentricity ε , jejíž hodnota je ovlivněna velikostí celkové mechanické energie E uvažovaného hmotného bodu dle vztahu (12.42), popisuje vztah (12.35) následující kuželosečky:

1.
$$\varepsilon = 0 \Longrightarrow E = E_{min} = -\alpha^2 m/(2L^2) < 0 \Longrightarrow \text{kružnice}^5$$
,

2.
$$0 < \varepsilon < 1 \Longrightarrow E < 0 \Longrightarrow$$
 elipsa.

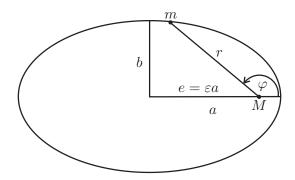
3.
$$\varepsilon = 1 \Longrightarrow E = 0 \Longrightarrow \text{parabola},$$

 $^{^5 \}text{Vyjádření}$ hodnoty minimální celkové mechanické energie E_{min} dostaneme přímo ze vztahu (12.42), kam dosadíme $\varepsilon=0.$

4.
$$\varepsilon > 1 \Longrightarrow E > 0 \Longrightarrow$$
 hyperbola.

Z výše vedeného vyplývá, že pohyb planety (hmotného bodu) po parabole či hyperbole znamená, že se daná planeta jednou přiblíží ke Slunci (silovému centru, resp. ohnisku) a pak se bude od něho jen vzdalovat, tj. má dostatečnou energii na to, aby se vymanila z gravitačního potenciálu Slunce. Avšak dle pozorování se planety naší sluneční soustavy periodicky přibližují ke Slunci, musí být nutně jejich celková mechanická energie záporná (E < 0) neboli $\varepsilon < 1$, tedy planety obíhají po eliptických $\operatorname{orbit\acute{a}ch}$ (trajektoriích). Abychom mohli formulovat další závěry, je nutné si na tomto místě připomenout některé ze základních vlastností elipsy.

Na obrázku 12.6 je zachycena elipsa reprezentující trajektorii uvažovaného hmotného bodu



Obrázek 12.6: Elipsa s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b a excentricitou (výstředností) $e = \varepsilon a$ spolu s polárními souřadnicemi r, φ uvažovaného hmotného bodu (planety) o hmotnosti m nacházejícího se v centrálním gravitačním poli hmotného bodu (Slunce) o hmotnosti M.

(planety) o hmotnosti m při jeho oběhu kolem hmotného bodu (Slunce) o hmotnosti M, který se nachází v počátku souřadnicové soustavy. Na tomto obrázku jsou rovněž zachyceny polární souřadnice obíhajícího hmotného bodu. Velká poloosa je značena a, malá poloosa je značena b a excentricita (výstřednost) je značena e a je rovna součinu numerické excentricity ε a velikosti velké poloosy a, tj. $e = \varepsilon a$, což je ukázáno níže. Z tohoto obrázku je zřejmé, že excentricita odpovídá vzdálenosti silového centra (ohniska) od středu elipsy neboli vzdálenost Slunce od středu eliptické trajektorie.

Pro další úvahu vyjdeme z obrázku 12.7. Z tohoto obrázku je vidět, že bude-li se hmotný bod nacházet v bodě A, tj. nejblíže ohnisku F, potom $r = \overline{AF} = \overline{BF'}$, $r' = 2a - \overline{AF}$. Odtud

$$r + r' = \overline{AF} + 2a - \overline{AF} = 2a , \qquad (12.43)$$

tedy pro každou elipsu musí platit, že r + r' = 2a.

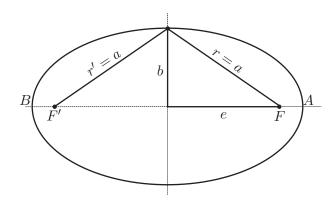
Na obrázku 12.7 zachycena situace, která nám pomůže najít vztah mezi excentricitou a délkami poloos. Z obrázku 12.7 totiž můžeme na základě Pythagorovy věty psát, že

$$e^2 + b^2 = a^2 (12.44)$$

Uvážíme-li, že platí rovnost $e=\varepsilon a$, potom je možné výraz (12.44) upravit do následujícího tvaru

$$\varepsilon^2 a^2 + b^2 = a^2 \implies b^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2)$$
 (12.45)

Na obrázku 12.8 jsou zachycena významná místa při obíhání hmotného bodu kolem silového centra. Jedním z těchto míst je tzv. pericentrum, které v případě, že silovým centrem je Slunce, má název perihelium (přísluní). Je-li tímto silovým centrem Země, pak se nazývá perigeum. Pericentrem je bod na elipse, kterému odpovídá souřadnice $\varphi=0$, tedy se jedná



Obrázek 12.7: Situační obrázek.

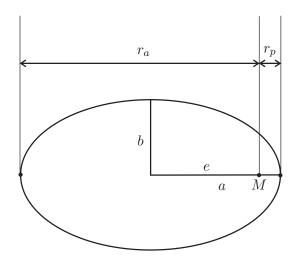
o bod elipsy, který se nachází nejblíže silového centra. Vzdálenost tohoto bodu od silového centra získáme ze vztahu (12.35) po dosazení $\varphi = 0$, tj.

$$r_p = \frac{p}{1+\varepsilon} \ . \tag{12.46}$$

Podle obrázku 12.8 můžeme rovněž psát, že

$$r_p = a - e . ag{12.47}$$

V následující části si ukážeme, že skutečně rovnice (12.35) představuje rovnici elipsy v polár-



Obrázek 12.8: Vzdálenost pericentra a apocentra od silového centra.

ních souřadnicích. Při odvozování rovnice elipsy v polárních souřadnicích budeme vycházet ze základních geometrických vlastností elipsy a situace, která je zachycena na obrázku 12.9. Použijeme-li kosinové věty, je možné psát

$$r^{2} = (2e)^{2} + r^{2} - 2(2e)r\cos(\pi - \varphi). \tag{12.48}$$

Ze vztahu (12.43) plyne, že rovnost r' = 2a - r, kterou uplatníme v rovnici (12.48)

$$(2a-r)^2 = 4e^2 + r^2 - 4er\cos(\pi - \varphi), \qquad (12.49)$$

tedy

$$4a^{2} - 4ar + r^{2} = 4e^{2} + r^{2} - 4er\cos(\pi - \varphi).$$
 (12.50)

Tuto rovnici podělíme číslem 4 a za a^2 dosadíme ze vztahu (12.44), takže po úpravě dostáváme

$$e^{2} + b^{2} - ar = e^{2} + er\cos\varphi . {(12.51)}$$

Odtud

$$b^2 = ar\left(1 + \frac{e}{a}\cos\varphi\right) \ . \tag{12.52}$$

Provedeme konečnou úpravu, která vede na hledanou rovnici elipsy v polárních souřadnicích

$$\frac{\frac{b^2}{a}}{r} = 1 + \frac{e}{a}\cos\varphi \ . \tag{12.53}$$

Porovnáním s rovnicí (12.35) je zřejmé, že $\varepsilon = e/a$ a

$$p = \frac{b^2}{a} \ . \tag{12.54}$$

Z tohoto vztahu je vidět, že parametr p souvisí s velikostí elipsy, a že numerická excentricita nám říká, jak hodně se elipsa liší od kružnice. Rovněž pro elipsu zřejmě platí, že $a>e,\ e>0,$ a tedy $0< e/a=\varepsilon<1.$

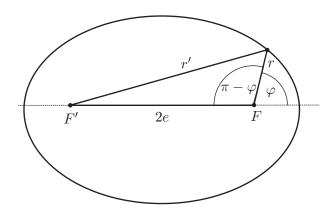
Dalším významným místem je bod elipsy, který je nejvíce vzdálen od silového centra a odpovídá mu souřadnice $\varphi = \pi$. Tento bod se nazývá apocentrum. Je-li silovým centrem Slunce, pak se tento bod nazývá afelium (odsluní), je-li silovým centrem Země, pak se nazývá apogeum. Vzdálenost tohoto bodu od silového centra získáme opět dosazením do vztahu (12.35) pro $\varphi = \pi$, tj. získáme ze vztahu (12.35) po dosazení $\varphi = 0$, tj.

$$r_a = \frac{p}{1 - \varepsilon} \ . \tag{12.55}$$

Podle obrázku 12.8 můžeme rovněž psát, že

$$r_a = a + e (12.56)$$

Dáme-li do rovnosti pravé strany⁶ výrazů (12.46) a (12.47), pak dostaneme



Obrázek 12.9: Situační obrázek pro nalezení rovnice elipsy v polárních souřadnicích.

$$\frac{p}{1+\varepsilon} = a - e = a - a\varepsilon . ag{12.57}$$

Odtud, s pomocí vztahu (12.45), dospějeme k rovnosti

$$p = a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a} \,. \tag{12.58}$$

⁶Podobně bychom mohli použít pravých stran rovností (12.55) a (12.56).

Dosadíme-li do nalezeného vztahu (12.58) výrazy (12.36) a (12.42), pak můžeme vyjádřit velikost velké poloosy jako

 $a = -\frac{\alpha}{2E} = \frac{\alpha}{2|E|} \,. \tag{12.59}$

Ve vztahu (12.59) byla při úpravě vzata do úvahy skutečnost, že při pohybu po elipse je E < 0. Z tohoto vztahu je vidět, jak velikost velké poloosy a závisí jen na celkové mechanické energií obíhajícího hmotného bodu a ne na momentu hybnosti.

Pomocí vztahu pro plošnou rychlost (12.15) je možné vyjádřit plochu elipsy, kterou opíše polohový vektor hmotného bodu (planety), pomocí doby jeho oběhu T následujícím způsobem

$$S = \int_0^T w dt = \int_0^T \frac{L}{2m} dt = \frac{L}{2m} \int_0^T dt = \frac{LT}{2m}.$$
 (12.60)

Plochu této elipsy je možné vyjádřit i pomocí jejích poloos pomocí známého vzorce

$$S = \pi ab . (12.61)$$

Dáme-li vztahy (12.60) a (12.61) do rovnosti, můžeme si vyjádřit dobu oběhu hmotného bodu (planety) kolem silového centra (Slunce) jako

$$T = \frac{2\pi mab}{L} \ . \tag{12.62}$$

Umocníme-li vztah (12.62) na kvadrát

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^2 b^2}{L^2} \ . \tag{12.63}$$

Pro další úpravu použijeme vztah (12.54)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 p a^3}{L^2} \ . \tag{12.64}$$

K další úpravě rovnosti (12.64) použijeme vztahu (12.36)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 ma^3}{\alpha} \ . \tag{12.65}$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za $\alpha = \varkappa mM$ (viz rovnost (12.24)), pak po následné úpravě dospějeme ke vztahu

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\varkappa M} = konst. {(12.66)}$$

Z výsledného vztahu (12.66) vyplývá, že podíl druhé mocniny oběžné doby hmotného bodu (planety) kolem silového centra (Slunce) a třetí mocniny délky hlavní poloosy jeho eliptické dráhy je konstantní. Pomocí vztahu (12.66) je možné určit hmotnost silového centra (Slunce). Jestliže řešíme Keplerovu úlohu za účelem vyšetření pohybu planet naší sluneční soustavy, tak je nutné si uvědomit, že jsme se dopustili celé řady zjednodušení, takže jsme nevzali v úvahu např.:

- Slunce i uvažované planety jsou nepravidelná nehomogenní tělesa, tudíž není možné, striktně vzato, je nahradit hmotným bodem;
- Slunce i ostatní planety rotují kolem vlastních os;
- planety sluneční soustavy gravitačně působí na jiné planety:

- planety díky své hmotnosti způsobují, že silové centrum se nenachází ve středu Slunce, ale v místě společného těžiště;
- u planet s výstřednou trajektorií (protažená elipsa) se projevují relativistické efekty (např. stáčení perihelia Merkuru);

• ...

S ohledem na výše uvedené skutečnosti můžeme předpokládat, že lze závěry z řešení Keplerovy úlohy s dostatečnou přesností aplikovat na naší sluneční soustavu, což je dáno tím, že hmotnost Slunce (cca $2 \cdot 10^{30}$ kg) je podstatně větší než hmotnost planet sluneční soustavy (např. hmotnost Země je cca $6 \cdot 10^{24}$ kg). Ve výše uvedeném textu byly formulovány závěry, ke kterým dospěl Johannes Kepler, když se zabýval vyšetřováním pohybu planet naší sluneční soustavy kolem Slunce. Závěry, ke kterým dospěl J. Kepler se nazývají Keplerovy zákony, které je možné formulovat následujícím způsobem:

- Planety se pohybují po elipsách kolem Slunce, které se nachází v jejich společném ohnisku.
- 2. Plocha průvodiče planet opsaná za jednotku času je konstantní.
- 3. Podíl kvadrátu oběžné doby planety kolem Slunce a třetí mocniny délky velké poloosy jí příslušné elipsy je roven konstantě, která je pro všechny planety sluneční soustavy stejná.

12.5 Kvalitativní analýza pohybu v centrálním silovém poli pomocí efektivní potenciální energie

Zavedeme si pomocnou veličinu efektivní potenciální energie následujícím způsobem

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \,. \tag{12.67}$$

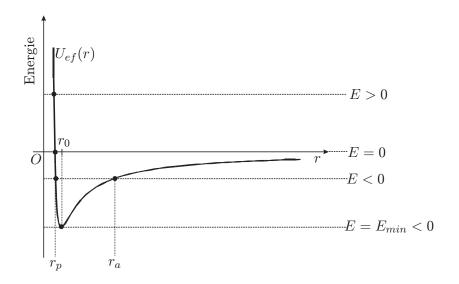
Pomocí efektivní potenciální energie je možné přepsat vztah (12.19) do následujícího tvaru

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left[E - U_{ef}(r) \right] . \tag{12.68}$$

Abychom ze vztahu (12.68) mohli vyjádřit druhou odmocninou rychlost hmotného bodu (planety) v radiálním směru \dot{r} , musí platit, že pravá strana vztahu (12.68) je nezáporná, což je zajištěno následující podmínkou

$$E \ge U_{ef}(r) , \qquad (12.69)$$

neboli pohyb je možný jen pro takové radiální vzdálenosti od silového centra r, pro které je splněna podmínka (12.69). Tuto podmínku lze poměrně snadno analyzovat graficky, když si pro daný moment hybnosti L vykreslíme průběh efektivní potenciální energie $U_{ef}(r)$. Pro případ gravitačního pole, je průběh efektivní potenciální energie zachycen na obrázku 12.10. Pod grafem funkce $U_{ef}(r)$ se nachází zakázaná oblast, kam se nemůže hmotný bod (planeta) dostat, protože by byla porušena podmínka (12.69). Na obrázku 12.10 jsou přerušovanou čarou zachyceny hladiny celkové mechanické energie uvažovaných hmotných bodů. Připomeňme, že platí E = konst. pro všechna r. Průsečíky přímek reprezentujících danou hladinu E s grafem efektivní potenciální energie představují tzv. body obratu. Pro body obratu platí, že $E = U_{ef}$, takže na základě rovnosti (12.68) platí, že v těchto bodech je radiální rychlost



Obrázek 12.10: Průběh efektivní potenciální energie $U_{ef}(r)$ a hladiny celkové mechanické energie E hmotného bodu (planety).

nulová $\dot{r}=0$. Nulová hodnota radiální rychlosti nám říká, že se hmotný bod (planeta) v daném místě zastaví a začne se následně buď vzdalovat od silového centra nebo přibližovat k silovému centru. Z obrázku 12.10 je patrné, že pro případ E < 0 se jedná o konečný (finitní) pohyb příslušného hmotného bodu, tj. hmotný pod se pohybuje v potenciálové jámě mezi radiálními vzdálenostmi r_p a r_a a opakovaně se vzdaluje a přibližuje vzhledem k silovému centru. V případě gravitačního pole tomuto případu odpovídá pohyb hmotného bodu (planety) po elipse, což souvisí s Bertrandovým teorémem, který říká, že pouze potenciální energie $U \sim 1/r$ a $U \sim r^2$ vedou na uzavřené periodické trajektorie. Z obrázku je dále vidět, že pro E > 0 existuje pouze jeden bod obratu, takže pohyb vyšetřovaného hmotného bodu je neomezený (infinitní). Pro energii E=0 je trajektorií pohybu parabola a pro energii E>0 je trajektorií hyperbola. Zvláštní případ nastává pro celkovou mechanickou energii, která se rovná minimu efektivní potenciální energie. V tomto případě si zachovává hmotný bod konstantní vzdálenost od jeho silového centra, která je v obrázku označena jako r_0 . Tedy v případě, že $E = E_{min}$ se hmotný bod pohybuje kolem svého silového centra po kružnici. Chceme-li najít hodnotu poloměru této kružnice r_0 , potom je nutné najít hodnotu radiální vzdálenosti r, pro kterou hodnota efektivní potenciální energie nabývá minima. Za tímto účelem dosadíme do vztahu pro efektivní potenciální energii potenciální energii gravitačního pole (12.24), čímž dostaneme, že

$$U_{ef}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \,. \tag{12.70}$$

Abychom nalezli extrém funkce (12.70), tak zderivujeme funkci podle r a položíme výsledek rovno nule, tedy

$$\frac{\alpha}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} = 0. ag{12.71}$$

Odtud můžeme psát, že

$$r_0 = \frac{L^2}{m\alpha}$$
 (12.72)

Porovnáním se vztahem (12.36) dostaneme, že

$$r_0 = p$$
. (12.73)

Kapitola 13

Dynamika soustavy hmotných bodů

Dynamika soustavy hmotných bodů je dána prostým složením pohybových rovnic jednotlivých hmotných bodů, které uvažovanou soustavu tvoří. Je-li soustava tvořena velkým množstvím hmotných bodů, je obtížné sledovat každý hmotný bod soustavy samostatně. Z tohoto důvodu je nutné se omezit na celkový popis soustavy. Právě dynamika soustavy hmotných bodů se zaměřuje na dynamiku soustavy jako celku.

Předpokládejme, že soustavu tvoří N hmotných bodů. Pro každý hmotný bod soustavy (obecně n-tý hmotný bod) platí následující pohybová rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_n}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_n \;, \tag{13.1}$$

kde \mathbf{F}_n je výslednice **pravých** sil působících na zvolený n-tý bod. Výslednici sil \mathbf{F}_n můžeme rozdělit na výslednici sil vnitřních (interních) \mathbf{F}_n^i a na výslednici sil vnějších (externích) \mathbf{F}_n^e ($\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n^i + \mathbf{F}_n^e$). Výslednice vnitřních sil \mathbf{F}_n^i je dána součtem jednotlivých silových působení všech zbývajících hmotných bodů soustavy na uvažovaný hmotný bod, tj.

$$\boldsymbol{F}_{n}^{i} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} \boldsymbol{F}_{nk}^{i} . \tag{13.2}$$

V součtech sil \mathbf{F}_{nk} tedy vynecháme sčítanec, kde n=k, což vychází z předpokladu, že žádný hmotný bod na sebe nepůsobí nenulovou silou ($\mathbf{F}_{nn}=\mathbf{0},\ n=1,2,\ldots,N$).

V další části textu již nebudeme psát, že sumace probíhá od 1 do N.

Vnitřní síly považujeme za síly **centrální**. Pohybovou rovnici pak můžeme napsat jako

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_n}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_n^i + \boldsymbol{F}_n^e = \sum_{k \neq n} \boldsymbol{F}_{nk}^i + \boldsymbol{F}_n^e , \qquad (13.3)$$

13.1 První věta impulzová

Budeme-li uvažovat všechny hmotné body soustavy, pak musíme uvažovat následující soustavu pohybových rovnic

$$\sum_{n} \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{p}_{n}}{\mathrm{d} t} = \sum_{n} \boldsymbol{F}_{n}^{i} + \sum_{n} \boldsymbol{F}_{n}^{e} = \sum_{n} \sum_{k \neq n} \boldsymbol{F}_{nk}^{i} + \sum_{n} \boldsymbol{F}_{n}^{e} . \tag{13.4}$$

Rovnost (13.4) upravíme následujícím způsobem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n} \mathbf{p}_{n} = \sum_{n} \sum_{k \neq n} \mathbf{F}_{nk}^{i} + \mathbf{F}^{e} , \qquad (13.5)$$

kde \mathbf{F}^e je výslednice vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů, \mathbf{p} je celková hybnost soustavy hmotných bodů. Na základě zákona akce a reakce¹ musí platit, že

$$\boldsymbol{F}_{nk}^{i} = -\boldsymbol{F}_{kn}^{i} . \tag{13.6}$$

S ohledem na vztah (13.6) platí, že

$$\sum_{n} \sum_{k \neq n} \mathbf{F}_{nk}^{i} = \mathbf{0} , \qquad (13.7)$$

tedy můžeme rovnici (13.5) přepsat do následujícího tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}^e \ . \tag{13.8}$$

Rovnice (13.8) představuje matematický zápis tzv. *I. věty impulzové*, která říká, že časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů se rovná výslednici vnějších sil na soustavu hmotných bodů působících.

Soustavu hmotných bodů považujeme za izolovanou, když pro výslednici vnějších sil platí, že $\mathbf{F}^e = \mathbf{0}$.

Pro izolovanou soustavu hmotných bodů bude mít I. věta impulzová následující tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{konst.} \tag{13.9}$$

Vztah (13.9) představuje matematický zápis *zákona zachování hybnosti izolované soustavy hmotných bodů*. Tento zákon můžeme také vyjádřit jako

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N = \mathbf{konst.} \tag{13.10}$$

resp.

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_N \mathbf{v}_N = \mathbf{konst.}$$
 (13.11)

Nyní vyšetříme, jak se změní celková hybnost soustavy hmotných bodů, jestliže přejdeme z jedné inerciální vztažné soustavy (nečárkované) do jiné inerciální vztažné soustavy (čárkované), která se vůči nečárkované soustavě pohybuje rychlostí V = konst. Pro rychlost n-tého bodu v nečárkované vztažné soustavě můžeme psát

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_n' + \mathbf{V} \,, \tag{13.12}$$

kde \mathbf{v}_n' je rychlost n-tého bodu v čárkované soustavě. Pro celkovou hybnost soustavy můžeme psát

$$\mathbf{p} = \sum_{n} \mathbf{p}_{n} = \sum_{n} m_{n} \mathbf{v}_{n} = \sum_{n} m_{n} \mathbf{v}_{n}' + \sum_{n} m_{n} \mathbf{V} = \underbrace{\sum_{n} m_{n} \mathbf{v}_{n}'}_{=\mathbf{p}'} + \mathbf{V} \underbrace{\sum_{n} m_{n}}_{=\mathbf{m}} = \mathbf{p}' + m \mathbf{V},$$
(13.13)

kde p' je celková hybnost soustavy hmotných bodů v čárkované soustavě a m je celková hmotnost soustavy. Takže transformační vztah pro celkové hybnosti mezi čárkovanou a nečárkovanou soustavou je

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + m\mathbf{V}. \tag{13.14}$$

Derivací vztahu (13.14) podle času dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p'}}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{V})}{\mathrm{d}t}}_{-\boldsymbol{q}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p'}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}^e . \tag{13.15}$$

Z rovnosti (13.15) vyplývá, že *I. věta impulzová má stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách*, i když hybnost v každé ze vztažných soustav je podle vztahu (13.14) jiná.

 $^{^{1}}n$ -tý hmotný bod působí na k-tý hmotný bod stejně velkou silou, jakou působí k-tý hmotný bod na n-tý hmotný bod, ale opačně orientovanou.

13.2 Hmotný střed soustavy hmotných bodů

V této části kapitoly si nadefinujeme pro soustavu N hmotných bodů myšlený bod, který nazýváme hmotný střed 2 . Poloha hmotného středu je dána vztahem 3

$$\mathbf{r}_s = \frac{\sum_n m_n \mathbf{r}_n}{\sum_n m_n} = \frac{\sum_n m_n \mathbf{r}_n}{m} , \qquad (13.16)$$

kde $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$ je polohový vektor hmotného středu. Pro jednotlivé kartézské souřadnice dostáváme

$$x_s = \frac{\sum_n m_n x_n}{m}, \quad y_s = \frac{\sum_n m_n y_n}{m}, \quad z_s = \frac{\sum_n m_n z_n}{m}.$$
 (13.17)

Pro rychlost hmotného středu dostáváme

$$\mathbf{v}_s = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m} \sum_n m_n \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum_n m_n \mathbf{v}_n}{m} = \frac{\mathbf{p}}{m} . \tag{13.18}$$

Z rovnosti (13.18) můžeme psát, že

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_s = \mathbf{p}_s \,. \tag{13.19}$$

Vztah (13.19) představuje zápis fyzikální skutečnosti, že celková hybnost soustavy hmotných bodů je stejná jako hybnost hmotného bodu o hmotnosti celé soustavy umístěného v hmotném středu, tedy jinými slovy můžeme soustavu hmotných bodů nahradit jediným hmotným bodem, který se nachází v hmotném středu \mathbf{r}_s a má hmotnost rovnu hmotnosti celé soustavy, přičemž na tento bod působí výslednice všech vnějších sil. Takže na základě (13.19) můžeme I. větu impulsovou napsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_s}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}^e . \tag{13.20}$$

Rovnice (13.20) vlastně představuje pohybovou rovnici hmotného středu. Jedná-li se o izolovanou soustavu, potom na základě vztahu (13.20) můžeme psát, že

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_s}{\mathrm{d}t} = m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{konst.}$$
 (13.21)

Výraz (13.21) je vyjádřením zákona zachování rychlosti hmotného středu izolované soustavy. Vztažnou soustavu, jejíž počátek je umístěn do hmotného středu soustavy hmotných bodů nazýváme soustavou hmotného středu nebo také těžišťovou soustavou. V těžišťové soustavě platí, že

$$\boldsymbol{p}_s = \boldsymbol{0} \,, \tag{13.22}$$

protože v této soustavě platí, že

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{0} \ . \tag{13.23}$$

Připomeňme, že v této soustavě také platí

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{0} . \tag{13.24}$$

I když z fyzikálního pohledu jsou všechny inerciální vztažné soustavy rovnocenné (Galileiho princip relativity), tak z matematického hlediska se těžišťová soustava jeví jako vztažná soustava výhodnější.

 $^{^2}$ Někdy se používá pojmu těžiště, avšak je nutné si uvědomit, že těžiště je působištěm tíhy (tíhové síly) tělesa a je shodné s hmotným středem jen tehdy, když se těleso nachází v homogenním tíhovém poli.

³Poloha hmotného středu nemusí souhlasit s polohou nějakého hmotného bodu soustavy.

13.3 Druhá věta impulzová

Vynásobíme všechny pohybové rovnice (13.4) vektorově polohovým vektorem, který přísluší danému hmotnému bodu, čímž dostaneme, že

$$\sum_{n} \mathbf{r}_{n} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{n}}{\mathrm{d}t} = \sum_{n} \sum_{k \neq n} \mathbf{r}_{n} \times \mathbf{F}_{nk}^{i} + \sum_{n} \underbrace{\mathbf{r}_{n} \times \mathbf{F}_{n}^{e}}_{=\mathbf{M}_{n}^{e}}, \qquad (13.25)$$

kde M_n^e je moment vnějších sil působících na n-tý bod.

Na základě pravidla pro derivování vektorového součinu funkcí platí

$$\frac{\mathrm{d} \underbrace{(\mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n)}_{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d} \mathbf{r}_n}{\mathrm{d}t}}_{=\mathbf{v}_n} \times \underbrace{\mathbf{p}_n}_{=m_n \mathbf{v}_n} + \mathbf{r}_n \times \frac{\mathrm{d} \mathbf{p}_n}{\mathrm{d}t} , \qquad (13.26)$$

takže od odtud dostáváme, že

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_n}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_n \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_n}{\mathrm{d}t} \,, \tag{13.27}$$

kde \mathbf{L}_n je moment hybnosti n-tého hmotného bodu soustavy. Dosadíme výraz (13.27) do rovnice (13.25), takže můžeme psát

$$\sum_{n} \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{L}_{n}}{\mathrm{d} t} = \sum_{n} \sum_{k \neq n} \boldsymbol{r}_{n} \times \boldsymbol{F}_{nk}^{i} + \sum_{n} \boldsymbol{M}_{n}^{e} . \tag{13.28}$$

Dále upravíme (13.28)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n} \mathbf{L}_{n} = \sum_{n} \sum_{k \neq n} \mathbf{r}_{n} \times \mathbf{F}_{nk}^{i} + \sum_{n} \mathbf{M}_{n}^{e}, \qquad (13.29)$$

kde L je celkový moment hybnosti soustavy hmotných bodů a M^e je celkový moment vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů. Rovnici (13.29) můžeme vyjádřit jako

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{n} \sum_{k \neq n} \boldsymbol{r}_{n} \times \boldsymbol{F}_{nk}^{i} + \boldsymbol{M}^{e} . \tag{13.30}$$

První člen na pravé straně rovnice (13.30) vyjádříme jako⁴

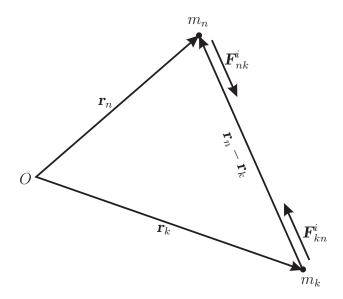
$$\sum_{n} \sum_{k \neq n} \mathbf{r}_{n} \times \mathbf{F}_{nk}^{i} = \frac{1}{2} \sum_{n} \sum_{k \neq n} (\mathbf{r}_{n} \times \mathbf{F}_{nk}^{i} + \mathbf{r}_{k} \times \mathbf{F}_{kn}^{i}) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n} \sum_{k \neq n} (\mathbf{r}_{n} \times \mathbf{F}_{nk}^{i} - \mathbf{r}_{k} \times \mathbf{F}_{nk}^{i}) = \frac{1}{2} \sum_{n} \sum_{k \neq n} (\mathbf{r}_{n} - \mathbf{r}_{k}) \times \mathbf{F}_{nk}^{i} = \mathbf{0}. \quad (13.31)$$

Skutečnost, že se výraz (13.31) rovná nulovému vektoru je vidět z obrázku 13.1 (rovnoběžnost vektorů). Díky rovnosti (13.31) pak můžeme rovnici (13.30) vyjádřit jako

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}^e \ . \tag{13.32}$$

⁴Při úpravě použijeme vztahu (13.6).



Obrázek 13.1: Vysvětlující obrázek k rovnosti (13.31).

Rovnice (13.32) je matematickým vyjádřením II. věty impulzové, která říká, že časová změna celkového momentu hybnosti soustavy je rovna celkovému momentu vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů vzhledem ke stejnému bodu⁵.

Jedná-li se o izolovanou soustavu hmotných bodů potom z II. věty impulzové plyne

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \mathbf{konst.} \tag{13.33}$$

Vztah (13.33) představuje matematický zápis zákona zachování momentu hybnosti izolované soustavy hmotných bodů.

13.4 Energie soustavy hmotných bodů

Vynásobíme všechny pohybové rovnice (13.4) skalárně rychlostí, která přísluší danému hmotnému bodu, čímž dostaneme, že

$$\sum_{n} \mathbf{v}_{n} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{n}}{\mathrm{d}t} = \sum_{n} \mathbf{v}_{n} \cdot \mathbf{F}_{n}^{i} + \sum_{n} \underbrace{\mathbf{v}_{n} \cdot \mathbf{F}_{n}^{e}}_{=P_{n}^{e}}.$$
 (13.34)

kde P_n^e je okamžitý výkon vnějších sil působících na n-tý bod. Pro levou stranu rovnice (13.34) můžeme psát, že

$$\sum_{n} \mathbf{v}_{n} \cdot \frac{\mathrm{d} \mathbf{p}_{n}}{\mathrm{d}t} = \sum_{n} m_{n} \mathbf{v}_{n} \cdot \frac{\mathrm{d} \mathbf{v}_{n}}{\mathrm{d}t} = \sum_{n} \frac{1}{2} m_{n} \frac{\mathrm{d}v_{n}^{2}}{\mathrm{d}t} = \sum_{n} \frac{\mathrm{d}T_{n}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n} T_{n} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} , \qquad (13.35)$$

kde T je celková kinetická energie soustavy hmotných bodů. Dosadíme tento výsledek do levé strany rovnice (13.34)

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum_{n} \mathbf{v}_{n} \cdot \mathbf{F}_{n}^{i} + \sum_{n} P_{n}^{e}, \qquad (13.36)$$

⁵Bod, vůči kterému jsou oba momenty počítány, musí být počátkem inerciální vztažné soustavy, aby platily Newtonovy pohybové zákony, jejichž platnost jsme při odvozování této věty předpokládali. Dá se však dokázat, viz kapitola 15.3, že tímto společným bodem může být i hmotný střed.

kde P^e je celkový okamžitý výkon vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů. Dále upravíme první člen na pravé straně rovnice (13.36), přičemž využijeme skutečnosti, že vnitřní síly jsou centrální, a že centrální síly jsou silami konzervativními

$$\sum_{n} \mathbf{v}_{n} \cdot \mathbf{F}_{n}^{i} = \sum_{n} \mathbf{v}_{n} \cdot (-\nabla_{n} U_{n}) = -\sum_{n} \mathbf{v}_{n} \cdot \left(\frac{\partial U_{n}}{\partial x_{n}}, \frac{\partial U_{n}}{\partial y_{n}}, \frac{\partial U_{n}}{\partial z_{n}}\right) = -\sum_{n} \mathbf{v}_{n} \cdot \frac{\partial U_{n}}{\partial \mathbf{r}_{n}} = -\sum_{n} \frac{\partial U_{n}}{\partial \mathbf{r}_{n}} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{n}}{dt} = -\sum_{n} \frac{\partial U_{n}}{\partial t} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{n}}{dt} = -\sum_{n} \frac{dU_{n}}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_{n} U_{n} = -\frac{dU}{dt}, \quad (13.37)$$

kde U je celková potenciální energie soustavy hmotných bodů.

Výsledek úpravy (13.37) dosadíme do rovnice (13.36)

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + P^e \ . \tag{13.38}$$

Rovnici (13.38) upravíme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(T+U)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = P^e , \qquad (13.39)$$

kde E je celková mechanická energie soustavy hmotných bodů.

Rovnice (13.39) je matematickým vyjádřením věty o mechanické energii soustavy hmotných bodů, která říká, že časová změna celkové mechanické energie soustavy je rovna celkovému okamžitému výkonu vnějších sil na soustavu hmotných bodů působících. Pro případ izolované soustavy hmotných bodů můžeme na základě rovnosti (13.39) psát, že

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = konst. \tag{13.40}$$

Výraz (13.40) vyjadřuje zákon zachování mechanické energie pro soustavu hmotných bodů. Pro izolovanou soustavu jsme našli celkem čtyři zákony zachování:

- 1. zákon zachování hybnosti,
- 2. zákon zachování momentu hybnosti,
- 3. zákon zachování mechanické energie,
- 4. zákon zachování rychlosti hmotného středu.

Popišme polohu hmotných bodů soustavy vzhledem k hmotnému středu, viz obrázek 13.2. Pro polohu *n*-tého hmotného bodu můžeme psát

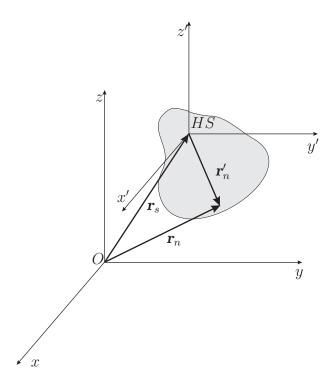
$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_s + \mathbf{r}_n' \ . \tag{13.41}$$

Zderivujeme podle času výraz (13.41)

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_n' \,. \tag{13.42}$$

Výraz (13.42) dosadíme do vztahu pro kinetickou energii soustavy a využijeme skutečnosti, že celková hybnost soustavy hmotných bodů v těžišťové (čárkované) soustavě je rovna nulovému vektoru ($p'_s = 0$)

$$T = \sum_{n} \frac{1}{2} m_{n} v_{n}^{2} = \sum_{n} \frac{1}{2} m_{n} (\mathbf{v}_{s} + \mathbf{v}_{n}')^{2} = \sum_{n} \frac{1}{2} m_{n} v_{s}^{2} + \sum_{n} \frac{1}{2} m_{n} v_{n}'^{2} + \sum_{n} m_{n} \mathbf{v}_{s} \cdot \mathbf{v}_{n}' = \frac{1}{2} v_{s}^{2} \sum_{n} m_{n} + T' + \mathbf{v}_{s} \cdot \sum_{n} m_{n} \mathbf{v}_{n}' = \frac{1}{2} m v_{s}^{2} + T' . \quad (13.43)$$



Obrázek 13.2: Poloha hmotného bodu vzhledem k těžišti, HS značí hmotný střed soustavy.

Výsledek (13.43) přepíšeme do tvaru

$$T = T' + \frac{1}{2}mv_s^2 \ . {13.44}$$

Vztah (13.44) vyjadřuje tzv. Königovu větu pro soustavu hmotných bodů, která nám říká, že kinetická energie soustavy hmotných bodů je rovna součtu vnitřní kinetické energie (kinetické energii v těžišťové soustavě) a kinetické energie hmotného bodu o hmotnosti soustavy m, který se pohybuje rychlostí hmotného středu (těžiště) \mathbf{v}_s vzhledem k inerciální vztažné soustavě. Na základě Königovy věty můžeme vyjádřit celkovou mechanickou energii soustavy hmotných bodů jako

$$E = T + U = T' + \frac{1}{2}mv_s^2 + U = \frac{1}{2}mv_s^2 + E', \qquad (13.45)$$

kde E' = T' + U je vnitřní energie soustavy hmotných bodů (potenciální energie nezávisí na volbě vztažné soustavy, takže U = U').

Vztah (13.45) nám vyjadřuje skutečnost, že zvýšení energie působením vnějších sil nemusí být navenek vždy patrné, jelikož se vložená práce může akumulovat do vnitřní energie E' a soustava se bude pohybovat konstatní rychlostí \mathbf{v}_s .

Kapitola 14

Srážka těles

V mechanice, ale i v atomové, jaderné či částicové fyzice, se setkáváme s významným fyzikálním jevem, kterým je srážka (kolize) těles, resp. částic. Pojem srážky je velmi obecný a široký. Zpravidla je spojen s přímým kontaktem zúčastněných těles. Avšak tělesa (částice) se mohou ovlivňovat prostřednictvím vzájemného silového působení, aniž by došlo k jejich přímému styku. V takovém případě místo pojmu srážka zpravidla používáme pojmu rozptyl. V nejobecnější rovině můžeme srážku chápat jako časově a prostorově omezenou interakci těles, resp. částic, při níž dochází k přerozdělování hybnosti a energie. Jedná-li se o srážku těles konečných rozměrů, pak mluvíme o rázu těles. Je-li druhý tělesem neprostupná stěna, hovoříme o odrazu tělesa.

Během srážky na sebe tělesa působí po relativně krátkou dobu velkými silami, které nazýváme nárazové síly. Vzhledem k ohromné velikosti nárazových sil se při vyšetřování srážek těles ostatní síly, včetně tíhy, obvykle zanedbávají, aniž by to znamenalo větší chybu při popisu tohoto děje.

Při rázu těles záleží na tvaru tělesa, umístění jeho těžiště, vlastnostech povrchu či způsobu nárazu.

Budeme se zabývat pouze srážkami těles bez potřeby znalosti jejich vnitřní struktury a mechanických vlastností jejich povrchu. V takovém případě hovoříme o srážce částic. Částicí nebudeme rozumět jen bodové částice, ale i koule s dokonale hladkým povrchem. Tyto koule se budou pohybovat jen posuvným pohybem (nebudou rotovat) a nebudou se odvalovat po uvažovaném povrchu. Při popisu srážek částic vystačíme pouze se zákony zachování. Výsledky našich úvah budou platit pro částice libovolné povahy a v omezené míře i pro reálná tuhá tělesa (např. kulečníkové koule), u kterých budeme moci zanedbat drsnost jejich povrchu a rotaci.

14.1 Klasifikace srážek

Pokud při srážce platí zákon zachování kinetické energie (nedochází k žádným ztrátám mechanické energie), jde o srážku pružnou (dokonale pružnou). Jestliže zákon zachování kinetické energie neplatí, jedná se o srážku nepružnou. V případě, že se po srážce obě částice pohybují jako jediná částice (nedojde k odpružení), jde o srážku dokonale nepružnou. Pokud však k jistému odpružení částic dojde, mluvíme o nedokonale pružné srážce.

V případě, že leží vektory rychlosti obou částic před i po srážce na jediné přímce, jde o *přímou* neboli *čelní srážku*. Není-li tomu tak, pak se jedná o *srážku šikmou*.

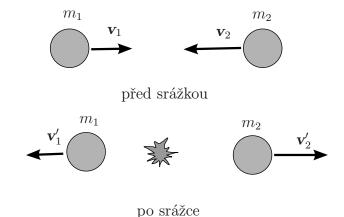
14.2 Zákony zachování při srážkách částic

Pokud neznáme přesný mechanismus silové interakce částice (zákon síly), nemůžeme srážku plně popsat a předpovědět její výsledek. Vzhledem k tomu, že z důvodů uvedených výše stačí uvažovat jen nárazové síly a ostatní můžeme ignorovat, považujeme obě částice během srážky za izolovanou soustavu. Díky této skutečnosti bude platit pro srážku zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti. Avšak v našem případě předpokládáme, že se jedná o srážku buď bodových částice či koule s dokonale hladkým povrchem, takže zákon momentu hybnosti neuvažujeme.

Aniž bychom znali cokoliv bližšího o struktuře srážejících se částic a jejich silovém působení, můžeme uvažovat zákon zachování hybnosti. V případě pružné srážky přistupuje k tomuto zákonu zachování ještě zákon zachování mechanické energie. Protože se při našich úvahách omezíme pouze na srážky dvou částic (binární srážka), budeme hmotnosti částic vstupujících do interakčního prostoru označovat jako m_1 a m_2 a jejich rychlosti jako \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 . Protože neznáme přesný mechanismus interakce uvažovaných částic, nevíme co se v interakční oblasti děje.

14.3 Dokonale pružná čelní srážka

Uvažujme, pro názornost, dvě (dokonale) pružné koule s ideálně hladkým povrchem, které se pohybují proti sobě. Jde o srážku přímou (čelní srážka). I když se koule po srážce pružně deformují, za okamžik se jejich deformační energie přemění zpět na kinetickou energii a obě koule se po srážce od sebe pružně odrazí. Situace před srážkou a po srážce je zachycena na obrázku 14.1. Z obrázku je vidět, že koule se po pružné srážce pohybují rychlostmi \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 . Z definice pružné srážky je zřejmé, že platí jak zákon zachování hybnosti, tak zákon zachování mechanické energie, tedy



Obrázek 14.1: Dokonale pružná čelní srážka dvou koulí.

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'$$
, (14.1)

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1^{\prime 2} + m_2 v_2^{\prime 2} . (14.2)$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o čelní srážku, pohyb se děje po přímce (jednorozměrný pohyb). Tuto přímku budeme orientovat pomocí jednotkového bázového vektoru **e**. Z tohoto pohledu bude platit

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{e} \; , \; \; \mathbf{v}_2 = v_2 \mathbf{e} \; , \; \; \mathbf{v}_1' = v_1' \mathbf{e} \; , \; \; \mathbf{v}_2' = v_2' \mathbf{e} \; ,$$

kde v_1, v_2, v_1' a v_2' jsou příslušné složky jednorozměrných vektorů.

Tímto soustava rovnic (14.1) a (14.2) představuje soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé a

jejím řešením dostaneme \mathbf{v}_1' a \mathbf{v}_2' . Avšak k výsledku se můžeme daleko snadněji dostat výpočtem v těžišťové vztažné soustavě. V těžišťové vztažné soustavě spojené s těžištěm soustavy obou částic budeme k označení rychlostí používat značky u. Pro polohu těžiště (hmotného středu) dostáváme

$$\mathbf{r}_T = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \ . \tag{14.3}$$

Odtud dostaneme rychlost těžiště (hmotného středu), která je pro izolovanou soustavu konstantní

$$\mathbf{v}_T = \dot{\mathbf{r}}_T = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{konst.}$$
 (14.4)

Protože se rychlost těžiště zachovává, tak bude i po srážce platit

$$\mathbf{v}_T = \frac{m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'}{m_1 + m_2} \ . \tag{14.5}$$

Protože v těžišťové soustavě platí rovnost (13.22), tj. $\mathbf{p}_T = \mathbf{0}$, potom pomocí vztahů (14.4) a (14.5) dostáváme

$$m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \,, \tag{14.6}$$

$$m_1 \mathbf{u}_1' + m_2 \mathbf{u}_2' = \mathbf{0} \,, \tag{14.7}$$

kde

$$\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{v}_{1,2} - \mathbf{v}_T \tag{14.8}$$

a

$$\mathbf{u}_{1,2}' = \mathbf{v}_{1,2}' - \mathbf{v}_T \ . \tag{14.9}$$

jsou transformační vztahy mezi rychlostmi v těžišťové soustavě a rychlostmi v jiné inerciální vztažné soustavě.

Pro rychlosti v těžišťové soustavě přepíšeme zákon zachování energie

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 u_1^{\prime 2} + m_2 u_2^{\prime 2} . (14.10)$$

Z rovnic (14.6) a (14.7) dostaneme vztahy

$$\mathbf{u}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{u}_1 \;,$$

$$\mathbf{u}_2' = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{u}_1' \;,$$

které dosadíme do vztahu (14.10). Po následné jednoduché úpravě dostaneme

$$u_1^2 = u_1^{\prime 2} \tag{14.11}$$

a odtud

$$u_1' = \pm u_1 \ . \tag{14.12}$$

Analogickým postupem dostaneme

$$u_2' = \pm u_2 \ . \tag{14.13}$$

Kladné znaménko u rešení (14.12) a (14.13) by zde znamenalo, že se pohyb před srážkou a po srážce nezměnil, takže by vlastně o žádnou srážku nešlo. Z tohoto důvodu jen záporné znaménko představuje řešení pružné srážky, tedy

$$\mathbf{u}_1' = -\mathbf{u}_1 \ . \tag{14.14}$$

$$\mathbf{u}_2' = -\mathbf{u}_2 \ . \tag{14.15}$$

Z těchto řešení plyne, že po pružné srážce se velikosti rychlostí uvažovaných koulí v těžišťové vztažné soustavě nezmění, změní se jen jejich směr na opačný.

Nyní si vyjádříme rychlosti po srážce v obecné vztažné soustavě, tím že rychlosti přetransformujeme zpět podle transformačních vztahů (14.8) a (14.9), které dosadíme do nalezených řešení (14.14) a (14.15)

$$\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_T = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_T \,, \tag{14.16}$$

$$\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_T = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_T \ . \tag{14.17}$$

Dosadíme do těchto vztahů výraz pro rychlost těžiště (14.4) a po algebraické úpravě dostaneme

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_2 , \qquad (14.18)$$

$$\mathbf{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_2 . \tag{14.19}$$

V případě, že hmotnosti obou koulí jsou stejné $(m_1 = m_2)$, potom z uvedených řešení dostaneme

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2 \;, \quad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1 \;, \tag{14.20}$$

tedy při pružné čelní srážce stejných koulí si obě koule navzájem vymění své rychlosti. Odtud plyne, že bude-li jedna ze stejných koulí před srážkou v klidu, tak po srážce bude v klidu druhá koule a ta první (původně v klidu) se bude pohybovat.

14.4 Dokonale nepružná čelní srážka

Tentokrát budeme uvažovat dvě koule, které jsou dokonale nepružné. Při srážce se obě koule deformují a zaklesnou se do sebe, takže se pak pohybují jako jediný celek (částice) o hmotnosti $m_1 + m_2$ s rychlostí \mathbf{v}' , viz obr. 14.2. Při tomto druhu srážky se mechanická energie nezachovává, neboť se její část přemění na deformační práci a teplo. Avšak při nepružné srážce se zachovává hybnost soustavy uvažovaných koulí, tedy

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}'$$
 (14.21)

Odtud po dokonale nepružné srážce koulí pro výslednou rychlost \mathbf{v}' dostáváme 1

$$\mathbf{v}' = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{v}_T . \tag{14.22}$$

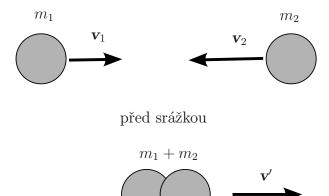
Úbytek energie spojený s deformační prací a uvolněným teplem při dokonale nepružné srážce spočítáme jako

$$\Delta E = \Delta T = T - T' = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 , \qquad (14.23)$$

kde

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$
, $T' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2$.

¹Tento výsledek bychom dostali i v případě, že by se nejednalo o srážku přímou.



po srážce

Obrázek 14.2: Dokonale nepružná srážka dvou koulí.

Kapitola 15

Mechanika tuhého tělesa

15.1 Základní pojmy

Pod pojmem těleso budeme rozumět určitý objem V, který je nějakým způsobem vyplněn spojitě¹ nebo nespojitě hmotou. V případě spojitého vyplnění objemu V hmotou má smysl zavést objemovou hustotu ρ . Objemová hustota v uvažovaném místě o polohovém vektoru \mathbf{r} (v bodě P o polohovém vektoru \mathbf{r}) je dána následujícím vztahem

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \,, \tag{15.1}$$

kde ΔV je objem obklopující bod P a Δm je hmotnost této části objemu. Ze vztahu (15.1) vyplývá, že

$$dm = \rho(\mathbf{r})dV . {15.2}$$

Pro homogenní těleso (s konstantní hustotou) platí, že

$$\rho = \frac{m}{V} \,, \tag{15.3}$$

kde m je hmotnost celého tělesa.

Pro hmotu rozloženou v tenké vrstvě je možné podobným způsobem zavést plošnou hustotu

$$\sigma(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} \,, \tag{15.4}$$

kde ΔS je plocha obsahující bod P a Δm je hmotnost této části plochy.

V případě, že hmota je rozložena podél nějaké křivky, zavádíme zcela analogicky $line\acute{a}rn\acute{l}$ hustotu

$$\tau(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} \,, \tag{15.5}$$

kde Δl je část křivky obsahují bod P a Δm je hmotnost této části křivky.

Obecně těleso může konat tři druhy pohybů:

- 1. posuvný (translační),
- 2. otáčivý (rotační),
- 3. deformační.

 $^{^1{\}rm V}$ íme, že všechna tělesa jsou tvořena atomy. Je-li uvažovaný objem tvořen velkým množstvím atomů, lze odhlédnout od nespojité struktury a považovat rozložení hmoty za spojité.

Pod pojmem *tuhé těleso* chápeme těleso, u něhož je vzájemná vzdálenost jednotlivých bodů **neměnná** (nedeformuje se). Tuhé těleso může vykonávat pouze dva druhy pohybu, tj. posuvný a otáčivý.

Vzhledem k tomu, že tuhé těleso může být reprezentováno hmotnými body, které vůči sobě nemění vzdálenost, tak všechny závěry odvozené pro soustavu hmotných bodů můžeme použít i pro tuhé těleso. Pro převod vztahů platných pro soustavu hmotných bodů na vztahy použitelné pro tuhá tělesa se spojitě rozloženou hmotou můžeme použít následujícího převodního vztahu

$$\sum_{n} f_{n} m_{n} \rightarrow \int_{m} f \, \mathrm{d}m \; , \; \sum_{n} \mathbf{f}_{n} m_{n} \rightarrow \int_{m} \mathbf{f} \, \mathrm{d}m \; , \qquad (15.6)$$

kde f_n , resp. \mathbf{f}_n , je nějaká skalární, resp. vektorová, fyzikální veličina vztahující se k n-tému bodu, m_n je jeho hmotnost a $f = f(\mathbf{r})$, resp. $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$, je spojitá skalární, resp. vektorová, funkce přes hmotnost tělesa se spojitě rozloženou hmotou.

Jelikož je nevhodné integrovat přes hmotnost tělesa, tak pomocí vztahu (15.2) převedeme integrál (15.6) na objemový integrál

$$\int_{V} f \rho \, \mathrm{d}V \ . \tag{15.7}$$

Z důvodu lepší přehlednosti textu budeme nadále tuhé těleso označovat jen pojmem těleso.

Pro hmotný střed tělesa můžeme na základě transformačního vztahu psát, že

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_m \mathbf{r} \, \mathrm{d}m}{\int_m \mathrm{d}m} \equiv \frac{\int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \, \mathrm{d}V}{\int_V \rho \mathrm{d}V} . \tag{15.8}$$

Poznamenejme, že integrál ve jmenovateli výrazu (15.8) představuje celkovou hmotnost tělesa, tj.

$$m = \int_{m} \mathrm{d}m = \int_{V} \rho \,\mathrm{d}V \,. \tag{15.9}$$

Je-li hustota konstantní, potom můžeme přepsat vztah (15.8) do tvaru

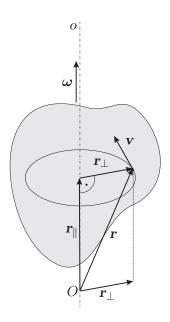
$$\mathbf{r}_S = \frac{\rho \int_V \mathbf{r} \, dV}{m} = \frac{\int_V \mathbf{r} \, dV}{V} \,. \tag{15.10}$$

Určením objemové hustoty jako funkce polohy $\rho = \rho(\mathbf{r})$ je vlastně určena i hranice tělesa, tj. těleso se nachází tam, kde $\rho \neq 0$, mimo těleso je $\rho = 0$.

Poloha tělesa je jednoznačně určena polohou jeho tří bodů, které neleží současně na jedné přímce. Vzhledem k tomu, že se vzájemná vzdálenost mezi takovýmito body nemění, existují mezi body tři vazby, takže počet stupňů volnosti tělesa $s=3\cdot 3-3=9-3=6$.

Koná-li tuhé těleso obecný pohyb, je ho možné v každém okamžiku rozložit na pohyb otáčivý a pohyb posuvný a tyto pohyby vyšetřovat zvlášť. Při posuvném pohybu jsou dráhy všech bodů tělesa totožné, v libovolném okamžiku se tyto body pohybují stejnou okamžitou rychlostí. V případě otáčivého pohybu je situace složitější. Otáčivý pohyb můžeme rozdělit na dva druhy otáčení:

- 1. otáčení kolem pevné osy je to pohyb, u kterého zůstávají v klidu body ležící na ose otáčení, tedy v klidu zůstává **jediná přímka** v tělese (prochází-li osa otáčení tělesem),
- 2. otáčení kolem pevného bodu je to pohyb, u kterého zůstává v klidu**jediný bod**v tělese (je-li pevný bod součástí tělesa).



Obrázek 15.1: Rotace tělesa kolem pevné osy.

Při rotaci kolem pevné osy (osa rotace) body tělesa ležící na ose rotace zůstávají v klidu a každý jiný bod tělesa opisuje kružnici, jejíž střed leží na ose rotace. Samotná kružnice, kolem které obíhají body mimo osu rotace, leží v rovině proložené uvažovaným bodem kolmo na osu rotace, viz obrázek 15.1. Okamžitá úhlová rychlost ω bodů pohybujících se po kružnici je pro všechny body **stejná**. Z kinematiky hmotného bodu víme, že pro okamžitou rychlost \mathbf{v} můžeme psát, že

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \,. \tag{15.11}$$

Výraz pro okamžitou obvodovou rychlost (15.11) je možné také psát jako

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\parallel}}_{=0} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}.$$
 (15.12)

Pro úhlovou rychlost ω a úhlové zrychlení ε při tomto otáčení platí, že $\omega \parallel \varepsilon$.

Při rotaci kolem pevného bodu (těleso je upevněné v jednom bodě) se každý bod tělesa, vyjma pevného, pohybuje po kulové ploše se středem v pevném bodě. Rotaci kolem pevného bodu si můžeme představit jako rotaci kolem osy, která s časem mění svoji polohu v prostoru a tato osa prochází pevným bodem, okolo kterého se rotace uskutečňuje. Této ose pak říkáme okamžitá osa otáčení. Vektor úhlové rychlosti ω leží na okamžité ose rotace. Díky této skutečnosti vektor ω mění v čase jak svoji velikost, tak i směr. Vzhledem k tomu, že

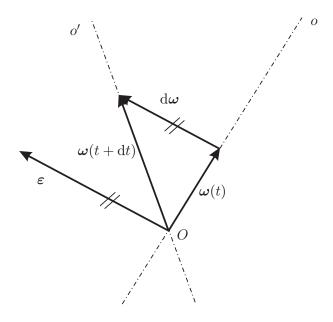
$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \,, \tag{15.13}$$

takže ω a ε již nejsou rovnoběžné, viz obrázek 15.2.

15.2 Obecný pohyb tuhého tělesa

Obecný pohyb úplně volného tělesa (má počet stupňů volnosti s=6) můžeme v každém okamžiku nahradit translačním pohybem zvoleného bodu A a rotačním pohybem kolem okamžité osy otáčení procházející bodem A, jak vyplývá z následujícího textu.

Uvažujme tuhé těleso, které koná obecný pohyb. Nečárkovaná soustava je soustavou inerciální a čárkovaná soustava, která je pevně spojena s tělesem, je obecně soustavou neinerciální, viz obrázek 15.3. Pro polohový vektor \mathbf{r}_X platí, že



Obrázek 15.2: Rotace tělesa kolem pevného budu O – okamžitá osa ve dvou časových okamžicích.

$$\mathbf{r}_X = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}'_{AX} . \tag{15.14}$$

Derivací vztahu (15.14) podle času dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_X}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'_{AX}}{\mathrm{d}t} \,. \tag{15.15}$$

Člen d $\mathbf{r}'_{AX}/\mathrm{d}t$ představuje časovou změnu vektoru \mathbf{r}'_{AX} , která souvisí čistě jen s rotačním pohybem (těleso se nedeformuje). Rovnici (15.15) potom můžeme přepsat jako

$$\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}'_{AX} , \qquad (15.16)$$

kde \mathbf{v}_X je rychlost libovolného bodu X, \mathbf{v}_A je rychlost posuvného pohybu tělesa a $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{AX}$ reprezentuje rychlost otáčivého pohybu (obvodovou rychlost) bodu X o polohovém vektoru \mathbf{r}_X kolem okamžité osy otáčení procházející bodem A (v této ose leží vektor okamžité úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}(t)$). Jinými slovy můžeme také říci, že okamžitá rychlost pohybu libovolného bodu X je rovna součtu na volbě bodu X nezávislého vektoru \mathbf{v}_A a vektoru $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{AX}$ (Chaslesova věta). Vztah (15.16) je tedy důsledkem skutečnosti, že obecný pohyb je možné rozložit na pohyb translační a pohyb rotační.

Vyšetříme nyní, jakým způsobem závisí rychlost translace a úhlová rychlost na volbě počátku souřadnicové soustavy.

Pro souřadnicovou soustavu, jejíž počátek je umístěn do bodu A, můžeme rovnici (15.16) napsat jako

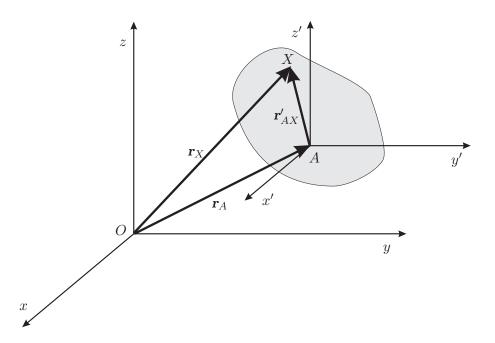
$$\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}'_{AX} , \qquad (15.17)$$

Dále místo bodu A si zvolíme jiný bod B, se kterým je spojen počátek čárkované souřadnicové soustavy, potom analogickým způsobem, jako v případě bodu A, pro okamžitou rychlost bodu X obdržíme, že

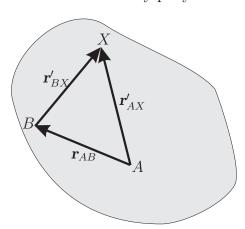
$$\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}'_{BX} \ . \tag{15.18}$$

Na základě obrázku 15.4 je možné psát $\mathbf{r}'_{BX} = \mathbf{r}'_{AX} - \mathbf{r}_{AB}$, což zohledníme ve vztahu (15.18)

$$\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times (\mathbf{r}'_{AX} - \mathbf{r}_{AB}) . \tag{15.19}$$



Obrázek 15.3: Obecný pohyb tělesa.



Obrázek 15.4: Volba bodu B a odpovídající vektory.

Z porovnání vztahů (15.17) a (15.19) vyplývá, že

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{AB} \tag{15.20}$$

a

$$\omega_A = \omega_B = \omega . \tag{15.21}$$

Podmínky (15.20) a (15.21) tedy zajišťují, že vztahy (15.17) a (15.18) představují stejný vektor rychlosti \mathbf{v}_X .

Z podmínky (15.21) vyplývá, že vektor úhlové rychlosti ω nezávisí (je stále stejný) na volbě počátku soustavy, která je pevně spojená s tělesem. Můžeme tedy říci, že úhlová rychlost, se kterou se otáčí v každém časovém okamžiku souřadnicová soustava pevně spojená s vyšetřovaným tělesem, je nezávislá na volbě počátku této souřadnicové soustavy. Všechny takovéto soustavy se otáčejí v daném okamžiku kolem navzájem rovnoběžných os se stejnou úhlovou rychlostí. Naopak rychlost translačního pohybu tělesa závisí na volbě bodu A. Z rovnice (15.20) je vidět, že je možné vždy vybrat počátek souřadnic A tak, že jeho okamžitá translační rychlost \mathbf{v}_A je rovna nule, takže pohyb tělesa v daném okamžiku bude čistou rotací vzhledem k ose procházející bodem A.

Koná-li těleso současně více rotačních pohybů s úhlovými rychlostmi $\omega_1, \omega_2, \ldots$, potom rychlost libovolného bodu tělesa, jehož polohový vektor je r, bude

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} + \dots = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \dots) \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
. (15.22)

Ze vztahu (15.23) vyplývá, že pohyb nahradíme jedinou rotací s úhlovou rychlostí ω .

15.2.1 Šroubovitý pohyb tělesa

Redukci obecného úplně volného tělesa lze provést ještě jiným způsobem, zavedeme-li pojem pohybu *šroubovitého*. O šroubovitém pohybu mluvíme tehdy, když směr translace tělesa je rovnoběžný s jeho osou otáčení.

Lze dokázat, že rychlost obecného bodu X tělesa je v každém okamžiku taková, jakou by onen bod měl, kdyby těleso konalo určitý okamžitý pohyb šroubovitý.

Abychom tuto skutečnost dokázali, veďme bodem A obecně pohybujícího se tělesa, jehož rychlost je \mathbf{v}_A , rovinu kolmou k vektoru $\boldsymbol{\omega}$ a hledejme v této rovině bod S, jehož rychlost \mathbf{v}_S je s vektorem $\boldsymbol{\omega}$ rovnoběžná. Polohový vektor bodu S vzhledem k bodu S označme \mathbf{r}_{S} . Podle vztahu (15.16) je rychlost \mathbf{v}_S bodu S rovna

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AS} \ . \tag{15.23}$$

Má-li být tato rychlost rovnoběžná s vektorem úhlové rychlosti ω , musí platit

$$\mathbf{v}_S \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \ . \tag{15.24}$$

Dosadíme-li sem za \mathbf{v}_S ze vztahu (15.23), pak můžeme psát

$$\mathbf{v}_A \times \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AS}) \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$
 (15.25)

Z druhého členu levé strany rovnice (15.25) vidíme, že hledaných vektorů \mathbf{r}_{AS} bude nekonečně mnoho, totiž k nalezenému vektoru \mathbf{r}_{AS} můžeme přičíst libovolný vektor rovnoběžný s $\boldsymbol{\omega}$ a rovnice (15.16) bude stále splněna. Existuje tedy celá přímka bodů S, která je rovnoběžná s vektorem $\boldsymbol{\omega}$. Takovouto osu nazýváme *centrální osou*.

Rozvedeme-li trojnásobný vektorový součin podle pravidla "BAC-CAB" v rovnici (15.25), pak dostáváme

$$\mathbf{v}_A \times \boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r}_{AS} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AS}) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$
 (15.26)

Avšak skalární součin $(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_{AS})$ je roven nule, jelikož vektory $\boldsymbol{\omega}$ a \boldsymbol{r}_{AS} jsou na sebe kolmé (\boldsymbol{r}_{AS}) leží v rovině kolmé k $\boldsymbol{\omega}$). Takže rovnici (15.26) nabývá tvaru

$$\mathbf{v}_A \times \boldsymbol{\omega} + \omega^2 \mathbf{r}_{AS} = \mathbf{0} \ . \tag{15.27}$$

Odtud

$$\mathbf{r}_{AS} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathbf{v}_A}{\omega^2} \,. \tag{15.28}$$

Dosadíme výraz (15.28) do rovnice (15.23)

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_A + \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A)}{\omega^2} . \tag{15.29}$$

V rovnici (15.29) uplatníme pravidlo pro trojnásobný vektorový součin "BAC-CAB", čímž dostaneme, že

$$\mathbf{v}_{S} = \mathbf{v}_{A} + \frac{1}{\omega^{2}} \left[\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_{A}) - \mathbf{v}_{A} \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})}_{=\boldsymbol{v}_{A}} \right] = \mathbf{v}_{A} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega^{2}} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_{A})}_{=\boldsymbol{v}_{A}} - \mathbf{v}_{A} = \mathbf{v}_{A}^{\parallel}, \qquad (15.30)$$

kde \mathbf{v}_A^{\parallel} představuje složku vektoru \mathbf{v}_A ve směru rotace $\boldsymbol{\omega}$. Ukázali jsme, že rychlost \mathbf{v}_S zvoleného bodu S o polohovém vektoru určeném vztahem (15.28) je rovnoběžná s vektorem úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$. Vzhledem k výše uvedenému, bude rychlost všech bodů ležících na centrální ose rovněž rovnoběžná s $\boldsymbol{\omega}$. Tedy můžeme říct, že při každém pohybu úplně volného tělesa existuje v každém okamžiku v tělese jedna a jen jedna přímka zvaná centrální osa, jejíž všechny body se pohybují rychlostí \mathbf{v}_S danou vztahem² (15.29). Úplně volné těleso se při každém svém pohybu pohybuje ve směru centrální osy translačním pohybem rychlostí \mathbf{v}_S a současně se kolem této osy otáčí úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. Koná tedy pohyb šroubovitý. Tímto jsme dokázali, že složený pohyb tělesa je možno v každém okamžiku považovat za šroubovitý pohyb.

15.3 Pohybové rovnice tuhého tělesa

Pro tuhé těleso platí všechny zákony, které byly odvozeny pro soustavu hmotných bodů. Pohybové rovnice tuhého tělesa můžeme vyjádřit následovně

1.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}^e \,, \tag{15.31}$$

kde $\mathbf{p} = \mathbf{p}_s = m\mathbf{v}_s$ je celková hybnost tělesa a \mathbf{F}^e je výslednice vnějších sil.

2.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}^e \ . \tag{15.32}$$

První rovnice je matematickým vyjádřením tzv. *těžišťové věty*, která říká, že *těžiště* (hmotný střed) tělesa se pohybuje tak, jak by se pohyboval hmotný bod o hmotnosti tělesa pod působením stejných vnějších sil.

Druhá rovnice je matematickým vyjádřením tzv. momentové věty (druhá věta impulzová pro těleso), která říká, že časová změna celkového momentu hybnosti tělesa se rovná momentu vnějších sil vzhledem ke stejně zvolenému pevnému bodu³.

Z první věty dostaneme přímo pohyb těžiště tělesa, a proto by bylo přirozené počítat i momenty vzhledem k těžišti. Avšak těžiště není pevným bodem a pohybuje se obecně zrychleně. Tedy není jisté, zda druhá věta impulzová platí i pro těžiště. Abychom mohli v této otázce rozhodnout provedeme následující úvahy.

Uvažujme těleso o hmotnosti m a pevný bod A, pro který platí druhá věta impulzová, tj.

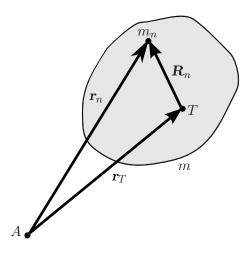
$$\dot{\boldsymbol{L}}_A = \boldsymbol{M}_A \;, \tag{15.33}$$

kde L_A je moment hybnosti tělesa vzhledem k bodu A a M_A je moment síly vzhledem k bodu A.

Pro moment hybnosti vzhledem k bodu A platí

$$\mathbf{L}_A = \sum_n \mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{v}_n \;, \tag{15.34}$$

kde \mathbf{r}_n je polohový vektor n-tého hmotného bodu vzhledem k bodu A. Tento polohový vektor si rozložíme $\mathbf{r}_n = \mathbf{R}_n + \mathbf{r}_T$, kde \mathbf{r}_T je polohový vektor těžiště vzhledem k bodu A a \mathbf{R}_n je polohový vektor n-tého hmotného bodu vzhledem k těžišti, viz obr. 15.5. Rovněž vektor rychlosti n-tého hmotného bodu \mathbf{v}_n rozložíme na dva vektory $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_T + \mathbf{V}_n$, kde \mathbf{v}_T je



Obrázek 15.5: Situace k určení druhé věty impulzové vzhledem k těžišti.

rychlost těžiště a V_n doplňková rychlost n-tého hmotného bodu. Dosazením do vztahu (15.34) dostaneme

$$\mathbf{L}_{A} = \sum_{n} ([\mathbf{R}_{n} + \mathbf{r}_{T}) \times m_{n} (\mathbf{v}_{T} + \mathbf{V}_{n})] = \left(\sum_{n} m_{n} \mathbf{R}_{n}\right) \times \mathbf{v}_{T} + \sum_{n} \mathbf{R}_{n} \times m_{n} \mathbf{V}_{n} + \mathbf{r}_{T} \times \sum_{n} m_{n} \mathbf{V}_{n} + \mathbf{r}_{T} \times m \mathbf{v}_{T} . \quad (15.35)$$

S ohledem na vztah (13.16) platí

$$m\mathbf{r}_T = \sum_n m_n \mathbf{R}_n , \qquad (15.36)$$

kde polohový vektor těžiště vzhledem k těžišti je $\mathbf{r}_T = \mathbf{0}$. V důsledku této skutečnosti je vztah (15.36) roven nulovému vektoru, tj.

$$\sum_{n} m_n \mathbf{R}_n = \mathbf{0} . \tag{15.37}$$

Celková hybnost tělesa vzhledem k těžišti musí být rovněž nulová, tj.

$$\sum_{n} m_n \mathbf{V}_n = \sum_{n} m_n \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n} m_n \mathbf{R}_n = \mathbf{0} . \tag{15.38}$$

S ohledem na rovnosti (15.37) a (15.38) upravíme vztah (15.35)

$$\mathbf{L}_{A} = \mathbf{r}_{T} \times m\mathbf{v}_{T} + \sum_{n} \mathbf{R}_{n} \times m_{n} \mathbf{V}_{n} = \mathbf{r}_{T} \times \mathbf{p}_{T} + \mathbf{L}_{T}, \qquad (15.39)$$

kde $\mathbf{p}_T = m\mathbf{v}_T$ a \mathbf{L}_T je moment hybnosti tělesa vzhledem k těžišti.

Pro moment síly vzhledem k bodu A dospějeme k analogickému transformačnímu vztahu jako v případě momentu hybnosti vzhledem k témuž bodu (15.39), tedy

$$\mathbf{M}_{A} = \mathbf{r}_{T} \times \mathbf{F}^{e} + \sum_{n} \mathbf{R}_{n} \times \mathbf{F}_{n}^{e} = \mathbf{r}_{T} \times \mathbf{F}^{e} + \mathbf{M}_{T}, \qquad (15.40)$$

²Jelikož můžeme k vektoru \mathbf{r}_{AS} přičíst libovolný vektor rovnoběžný s $\boldsymbol{\omega}$ a přitom bude splněna rovnost (15.25), dostaneme stejnou rychlost pro všechny body na centrální ose.

³Dá se ukázat, že tímto bodem může být i hmotný střed, viz níže.

kde \mathbf{F}^e je výslednice vnějších sil působících na těleso.

Po dosazení vztahů (15.39) a (15.40) do rovnice (15.33) a po příslušném derivování dostaneme

$$\underbrace{\dot{\mathbf{r}}_T \times \mathbf{p}}_{=\mathbf{v}_T \times \mathbf{p} = \mathbf{0}} + \mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{L}}_T = \mathbf{r}_T \times \mathbf{F}^e + \mathbf{M}_T. \tag{15.41}$$

Z první věty impulzové platí, že $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}^e$, takže se nám rovnice (15.41) redukuje na

$$\dot{\boldsymbol{L}}_T = \boldsymbol{M}_T \ . \tag{15.42}$$

Tato rovnice vyjadřuje momentovou větu vzhledem k těžišti (druhou větu impulzovou vzhledem k těžišti) tělesa. Dokázali jsme, že momentová věta platí nejen pro inerciální body, ale i pro těžiště tělesa bez ohledu na jeho pohyb⁴.

15.4 Otáčivý pohyb tělesa kolem pevné osy

15.4.1 Kinetická energie a moment setrvačnosti tuhého tělesa

Při otáčivém pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy (předpokládejme, že těleso posuvný pohyb nekoná) se jeho každý bod pohybuje po kružnici se středem na ose otáčení se stejnou úhlovou rychlostí, ale rozdílnou obvodovou rychlostí. Označme hmotnost bodu tuhého tělesa m_n , které se nachází od osy otáčení tuhého tělesa ve vzdálenosti r_n , viz obr. 15.6. Obvodová rychlost tohoto bodu je

$$v_n = \omega r_{n\perp} \,, \tag{15.43}$$

kde ω je úhlová rychlost uvažovaného hmotného bodu. Celková rotační kinetická energie je dána součtem kinetických energií všech bodů, které tvoří tělesa

$$T_r = \sum_n \frac{1}{2} m_n v_n^2 \ . \tag{15.44}$$

Dosazením za obvodovou rychlost ze vztahu (15.43) do vztahu (15.44) dostaneme

$$T_r = \sum_n \frac{1}{2} m_n \omega^2 r_{n\perp}^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_n m_n r_{n\perp}^2 .$$
 (15.45)

Suma ve vztahu (15.45) na rychlosti otáčení nezávisí, ale je dána jen geometrickým rozložením hmoty tělesa vzhledem k ose. Z tohoto důvodu zavedeme fyzikální veličinu

$$J = \sum_{n} m_n r_{n\perp}^2 , \qquad (15.46)$$

která se nazývá moment setrvačnosti vzhledem k ose.

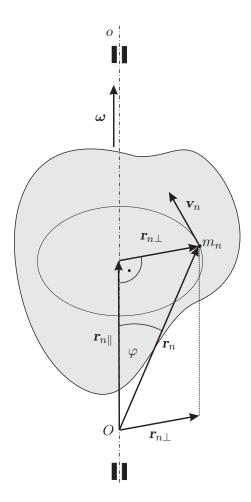
Vztah (15.45) je možné přepsat jako

$$T_r = \frac{1}{2}J\omega^2 \ . \tag{15.47}$$

V případě, že je hmota v tělese rozložena spojitě, tak na základě převodního vztahu (15.6) můžeme přepsat vztah pro moment setrvačnosti (15.46) do následujícího tvaru

$$J = \int_{m} r_{\perp}^{2} dm = \iiint_{V} \rho(r) r_{\perp}^{2} dV , \qquad (15.48)$$

kde r_{\perp} je vzdálenost od osy otáčení.



Obrázek 15.6: Rotace tělesa kolem pevné osy.

15.4.2 Steinerova věta

Nyní budeme hledat vztah mezi momentem setrvačnosti vzhledem k ose o_T jdoucí těžištěm (hmotným středem) T a vzhledem k ní rovnoběžné ose o_A jdoucí bodem A. Nechť vzdálenost těchto os je d, viz obrázek 15.7. Kartézskou souřadnicovou soustavu volíme tak, aby osa z byla totožná s osou jdoucí těžištěm a osa x procházela jak těžištěm, tak bodem A. Z definice je moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí bodem A roven

$$J_A = \int_m r_\perp^2 \mathrm{d}m. \tag{15.49}$$

Na základě Pythagorovy věty můžeme pro vzdálenost elementu hmotnosti od osy otáčení o_A psát, že $r_{\perp}^2 = (x - d)^2 + y^2$, pak můžeme vztah (15.49) upravit jako

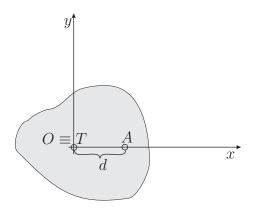
$$J_A = \int_m \left[(x - d)^2 + y^2 \right] dm = \int_m (d^2 - 2xd + x^2 + y^2) dm =$$

$$d^2 \underbrace{\int_m dm}_m - 2d \int_m x dm + \underbrace{\int_m (x^2 + y^2) dm}_{J_T} = md^2 - 2d \int_m x dm + J_T. \quad (15.50)$$

Vzhledem k tomu, že poloha těžiště (hmotného středu) je totožná s počátkem souřadnic (těžišťová soustava), pak polohový vektor těžiště je roven nulovému vektoru $\mathbf{r}_T = \mathbf{0}$, tedy

$$x_T = 0 = \frac{\int_m x dm}{m} , \quad \Rightarrow \quad \int_m x dm = 0 , \qquad (15.51)$$

⁴Těžiště tělesa se obecně pohybuje neinerciálně.



Obrázek 15.7: Volba bodu A a odpovídající osy.

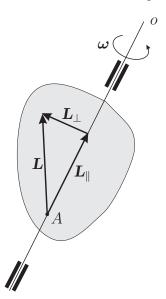
odtud vyplývá, že prostření člen v poslední rovnosti (15.50) je roven nule. Takže můžeme psát, že

$$J_A = J_T + m d^2 . (15.52)$$

Vztah (15.52) je matematickým vyjádřením Steinerovy věty, která říká, že moment setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné s osou procházející těžištěm je roven součtu momentu setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm a součinu hmotnosti tělesa s kvadrátem jejich vzdálenosti. Ze vztahu (15.52) vyplývá, že moment setrvačnosti daného tělesa je vždy nejmenší vzhledem k ose procházející těžištěm.

15.4.3 Moment hybnosti vzhledem k pevné ose

Uvažujme tuhé těleso, které se otáčí úhlovou rychlostí ω kolem pevné osy o, viz obrázek 15.8. Moment hybnosti tělesa s diskrétně rozloženou hmotou je definován předpisem



Obrázek 15.8: Otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy.

$$\boldsymbol{L} = \sum_{n} \boldsymbol{r}_{n} \times \boldsymbol{v}_{n} m_{n} , \qquad (15.53)$$

odtud na základě převodního vztahu (15.6) můžeme pro moment hybnosti tělesa se spojitě rozloženou hmotou psát

$$\mathbf{L} = \int_{m} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm , \qquad (15.54)$$

kde r je polohový vektor, který měříme od zvoleného bodu A. Moment hybnosti L obecně závisí na volbě referenčního bodu A. Pokud referenční bod A zvolíme přímo na ose rotace o, pak pro rychlost rotačního pohybu platí vztah

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \,, \tag{15.55}$$

z něhož je zřejmé, že vektor rychlosti \mathbf{v} je vždy kolmý k ose rotace o. Provedeme-li rozklad polohového vektoru \mathbf{r} na složku \mathbf{r}_{\parallel} , která je rovnoběžná s osou rotace, a složku \mathbf{r}_{\perp} kolmou k ose rotace, pak platí, že

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp} . \tag{15.56}$$

Dosazením vztahu (15.56) do rovnosti (15.55) dostaneme

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}) = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\parallel}}_{=0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}$$
(15.57)

Za povšimnutí stojí skutečnost, že v případě volby referenčního bodu A na ose otáčení, nezávisí složka \mathbf{r}_{\perp} na jeho poloze na ose.

Dosadíme výraz (15.56) do definičního vztahu (15.54)

$$\mathbf{L} = \int_{m} (\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}) \times \mathbf{v} dm = \int_{m} \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{v} dm + \int_{m} \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{v} dm = \mathbf{L}_{\perp} + \mathbf{L}_{\parallel}.$$
 (15.58)

Jak je vidět na obrázku 15.8, složka $\boldsymbol{L}_{\parallel}$ je rovnoběžná s osou rotace, kdežto složka \boldsymbol{L}_{\perp} je na ní kolmá. Složku $\boldsymbol{L}_{\parallel}$ nazýváme momentem hybnosti vzhledem k ose rotace. Určíme tuto složku podle definičního předpisu (15.54) a vztahu (15.57), přičemž použijeme pravidlo pro dvojitý vektorový součin "BAC-CAB" (viz (A.7))

$$\mathbf{L}_{\parallel} = \int_{m} \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{v} dm = \int_{m} \mathbf{r}_{\perp} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}) dm = \int_{m} r_{\perp}^{2} \boldsymbol{\omega} dm - \int_{m} \mathbf{r}_{\perp} \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\perp})}_{m} dm = \omega \int_{m} r_{\perp}^{2} dm . \quad (15.59)$$

S ohledem na vztah (15.48) můžeme výsledek (15.59) přepsat jako

$$\mathbf{L}_{\parallel} = J\boldsymbol{\omega} , \qquad (15.60)$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení o.

Příčná složka momentu hybnosti L_{\perp} nemá na dynamiku rotujícího tělesa s pevnou osou vliv, má pouze vliv na silové reakce v ložiscích osy. Z tohoto důvodu se jí nebudeme v dalších úvahách zabývat.

15.4.4 Pohybová rovnice rotujícího tělesa kolem pevné osy

Z druhé věty impulzové můžeme psát, že

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\parallel}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_{\parallel}^{e} \,, \tag{15.61}$$

kde $\mathbf{M}_{\parallel}^{e}$ je moment vnějších sil vzhledem k ose otáčení.

Vztah (15.61) představuje podélnou složku druhé věty implulzové.

Pro výsledný moment vnějších sil působících na uvažované těleso můžeme psát

$$\mathbf{M}^{e} = \sum_{n} \mathbf{r}_{n} \times \mathbf{F}_{n}^{e} = \sum_{n} \left[(\mathbf{r}_{n\perp} + \mathbf{r}_{n\parallel}) \times (\mathbf{F}_{n\perp}^{e} + \mathbf{F}_{n\parallel}^{e}) \right] = \sum_{n} \left(\underbrace{\mathbf{r}_{n\parallel} \times \mathbf{F}_{n\parallel}^{e}}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{r}_{n\parallel} \times \mathbf{F}_{n\perp}^{e} + \mathbf{r}_{n\perp} \times \mathbf{F}_{n\parallel}^{e} + \underbrace{\mathbf{r}_{n\perp} \times \mathbf{F}_{n\parallel}^{e}}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{r}_{n\perp} \times \mathbf{F}_{n\parallel}^{e}}_{=\mathbf{0}} \right). \quad (15.62)$$

Druhé a třetí členy v poslední sumaci jsou kolmé k ose, tedy nemají vliv na dynamiku rotujícího tělesa. Ze vztahu (15.62) spočítáme moment vnějších sil vzhledem k ose způsobem

$$\boldsymbol{M}_{\parallel}^{e} = \sum_{n} \boldsymbol{r}_{n\perp} \times \boldsymbol{F}_{n\perp}^{e} . \tag{15.63}$$

Do vztahu (15.61) dosadíme ze vztahu (15.60)

$$\frac{\mathrm{d}(J\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_{\parallel}^{e} \,. \tag{15.64}$$

Rovnice (15.64) představuje *pohybovou rovnici tělesa rotujícího kolem pevné osy*. Jestliže se moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem pevné osy s časem nemění, je možné přepsat pohybovou rovnic (15.64) do tvaru

$$J\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = J\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_{\parallel}^{e} . \tag{15.65}$$

Vzhledem k rovnoběžnosti vektorů ε a M_{\parallel}^e , pracujeme zpravidla s pohybovou rovnicí ve skalárním tvaru, tj.

$$J\varepsilon = M_{\parallel}^e$$
 (15.66)

Jestliže na těleso nebudou působit žádné síly (izolované těleso) či jen síly nemající otáčivý účinek na těleso, potom $M^e_{\parallel}=0$, tedy na základě vztahu (15.64) můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} = 0;,\tag{15.67}$$

tj.

$$L_{\parallel} = J\omega = konst. \tag{15.68}$$

Vztah (15.68) je matematickým vyjádřením zákona zachování momentu hybnosti pro tuhé těleso rotující kolem pevné osy.

15.4.5 Práce vnějších sil při rotačním pohybu kolem pevné osy

Pro element práce vnějších sil můžeme psát, že

$$dA = \sum_{n} \mathbf{F}_{n}^{e} \cdot d\mathbf{r}_{n} = \sum_{n} \mathbf{F}_{n}^{e} \cdot (d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_{n}), \qquad (15.69)$$

kde d $\mathbf{r}_n = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_n$ představuje posunutí působiště n-té vnější síly působící na n-tý hmotný bod při pootočení tělesa o úhel⁵ d φ . Pro vektor φ platí, že má stejný směr jako vektor úhlové rychlosti, takže je možné přímo psát, že

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\omega}^{0} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{\omega}^{0} = \frac{\mathrm{d}(\varphi \boldsymbol{\omega}^{0})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \qquad (15.70)$$

kde jednotkový vektor úhlové rychlosti $\omega^0=konst.$ při rotaci kolem pevné osy. Využijeme pravidla pro smíšený součin

$$\mathbf{F}_{n}^{e} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_{n}) = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{r}_{n} \times \mathbf{F}_{n}^{e}) \tag{15.71}$$

 5 Tedy

$$\mathbf{v}_n = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_n}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}_n$$

Odtud

$$\mathrm{d}\mathbf{r}_n = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{r}_n\right) \mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_n \ .$$

k úpravě vztahu (15.69)

$$dA = d\varphi \cdot \sum_{n} \mathbf{r}_{n} \times \mathbf{F}_{n}^{e} = d\varphi \cdot \sum_{n} \mathbf{M}_{n}^{e} = \mathbf{M}^{e} \cdot d\varphi .$$
 (15.72)

Provedeme integraci vztahu (15.72)

$$A = \int \mathbf{M}^e \cdot d\boldsymbol{\varphi} = \int \left(\mathbf{M}_{\parallel}^e + \mathbf{M}_{\perp}^e \right) \cdot d\boldsymbol{\varphi} = \int M_{\parallel}^e d\boldsymbol{\varphi} . \tag{15.73}$$

Ze vztahu (15.73) vyplývá, že práci při rotačním pohybu konají jen vnější síly, které mají nenulový podélný moment M^e_{\parallel} vzhledem k ose otáčení. Reakce ložisek, ve kterých je osa otáčení uchycena, práci nekonají. Vztah (15.73) platí i pro rotaci tělesa kolem pevného bodu. V případě, že je otáčivý moment stálý, tj. $M^e_{\parallel}=konst.$, potom je možné přímo ze vztahu (15.73) psát, že

$$A = M_{\parallel}^e \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M_{\parallel}^e (\varphi_2 - \varphi_1) = M_{\parallel}^e \Delta \varphi . \tag{15.74}$$

Z definice pro okamžitý výkon vnějších sil s přihlédnutím ke vztahům (15.72) a (15.70) dostáváme, že

$$P^{e} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{M}^{e} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}^{e} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{M}_{\parallel}^{e} + \mathbf{M}_{\perp}^{e}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{\parallel}^{e} \cdot \boldsymbol{\omega} = M_{\parallel}^{e} \omega , \qquad (15.75)$$

kde P^e je okamžitý výkon vnějších sil při rotačním pohybu.

15.5 Rotace kolem pevného bodu

Uvažujeme soustavu N hmotných bodů, které představují tuhé těleso (jejich vzájemné vzdálenosti zůstávají neměnné). Toto těleso rotuje s okamžitou úhlovou rychlostí ω okolo okamžité osy otáčení, která prochází pevným bodem A. Nechť bod A je počátkem souřadnicové soustavy (nečárkovaná), která je pevně spojena s pohybujícím se tělesem. Jelikož uvažované těleso koná obecný pohyb, jedná se o soustavu neinerciální. Uvažovaný bod A se vzhledem k inerciální vztažné soustavě (čárkovaná) pohybuje okamžitou rychlostí $\mathbf{v}'_A = \mathrm{d}\mathbf{r}'_A/\mathrm{d}t$, viz obr. 15.9. Analogicky se vztahem (15.16) můžeme pro okamžitou rychlost n-tého bodu soustavy psát⁶, že

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_n'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_A'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_n}{\mathrm{d}t} \tag{15.76}$$

neboli

$$\mathbf{v}_n' = \mathbf{v}_A' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n \ . \tag{15.77}$$

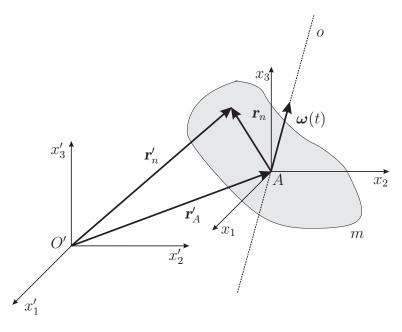
Kinetická energie n-tého hmotného bodu vzhledem k čárkované soustavě je

$$T_n = \frac{1}{2} m_n v_n^{2} , \qquad (15.78)$$

tudíž celková kinetická energie bude

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n} m_n (\mathbf{v}_A' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n} m_n v_A'^2 + \sum_{n} \mathbf{v}_A' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) + \frac{1}{2} \sum_{n} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 . \quad (15.79)$$

 $^{^6}$ Je nutné si uvědomit, že v tomto případě oproti zmiňovanému analogickému případu je inerciální soustava čárkovaná a neinerciální soustava je nečárkovaná.



Obrázek 15.9: Obecný pohyb tuhého tělesa.

Výraz (15.79) představuje obecný vztah pro kinetickou energii a platí pro jakoukoliv volbu počátku, se kterou je vektor \mathbf{r}_n spojen.

Zaměříme se na následující člen výrazu (15.79)

$$\sum_{n} m_{n} \mathbf{v}_{A}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{n}) . \tag{15.80}$$

Na základě vztahu pro hmotný střed (13.16) můžeme pro tento vztah psát

$$\sum_{n} m_{n} \mathbf{v}'_{A} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{n}) = \mathbf{v}'_{A} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{n} m_{n} \mathbf{r}_{n}\right) = \mathbf{v}'_{A} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times m \mathbf{r}_{s}) = m \mathbf{r}_{s} \cdot (\mathbf{v}'_{A} \times \boldsymbol{\omega}) . \quad (15.81)$$

Tento výraz je roven nule v těchto čtyřech případech:

- 1. Je-li $\mathbf{v}_A' = \mathbf{0}$, tj. vztažný bod A se vůči inerciální vztažné soustavě (čárkovaná soustava) nepohybuje.
- 2. Je-li $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$, jedná-li se tedy o pohyb čistě translační.
- 3. Je-li vztažným bodem A některý bod centrální osy (viz kapitola 15.2.1), neboť v tomto případě je $\mathbf{v}_A' \parallel \boldsymbol{\omega}$.
- 4. Zvolíme-li za vztažný bod A hmotný střed tělesa (těžiště). Pak $\mathbf{r}_s = \mathbf{0}$.

Výraz (15.81) je možné dále přepsat pomocí vztahu (15.16), ve kterém za bod X zvolíme hmotný střed tělesa, tedy

$$\mathbf{v}_s' = \mathbf{v}_A' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_s , \qquad (15.82)$$

odtud

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_s = \mathbf{v}_s' - \mathbf{v}_A' . \tag{15.83}$$

Dosazením tohoto vztahu do rovnosti (15.81) dostaneme

$$\sum_{n} m_{n} \mathbf{v}'_{A} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{n}) = \mathbf{v}'_{A} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{r}_{s}) = m\mathbf{v}'_{A} \cdot (\mathbf{v}'_{s} - \mathbf{v}'_{A}) . \tag{15.84}$$

Dosadíme tento výsledek do vztahu (15.79)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n} m_n v_A'^2 + m \mathbf{v}_A' \cdot (\mathbf{v}_s' - \mathbf{v}_A') + \frac{1}{2} \sum_{n} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n + m \mathbf{v}_A' \cdot (\mathbf{v}_s' - \mathbf{v}_A') + \frac{1}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n + m \mathbf{v}_A' \cdot (\mathbf{v}_s' - \mathbf{v}_A') + \frac{1}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n + m \mathbf{v}_A' \cdot (\mathbf{v}_s' - \mathbf{v}_A') + \frac{1}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n + m \mathbf{v}_A' \cdot (\mathbf{v}_s' - \mathbf{v}_A') + \frac{1}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n + m \mathbf{v}_A' \cdot (\mathbf{v}_s' - \mathbf{v}_A') + \frac{1}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n + m \mathbf{v}_A' \cdot (\mathbf{v}_s' - \mathbf{v}_A') + \frac{1}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n + m \mathbf{v}_A' \cdot (\mathbf{v}_s' - \mathbf{v}_A') + \frac{1}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n + m \mathbf{v}_A' \cdot (\mathbf{v}_s' - \mathbf{v}_A') + \frac{1}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 + \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 + \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 + \frac{v_A'^2}{2} \sum_{n}^{m} m_n (\boldsymbol{$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_n)^2 = \underbrace{\frac{1}{2} m v_A'^2}_{r} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n} m_n (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_n)^2}_{r} + m \boldsymbol{v}_A' \cdot (\boldsymbol{v}_s' - \boldsymbol{v}_A') , \quad (15.85)$$

kde

$$T_{tr} = \frac{1}{2}mv_A^{\prime 2} \tag{15.86}$$

je translační (posuvná) kinetická energie tělesa a

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_n m_n (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2$$
 (15.87)

je rotační (otáčivá) kinetická energie uvažovaného tělesa.

S ohledem na vztah (15.47) můžeme pro celkovou kinetickou energii tuhého tělesa psát

$$T = \frac{1}{2}mv_A'^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + m\mathbf{v}_A' \cdot (\mathbf{v}_s' - \mathbf{v}_A').$$
 (15.88)

Tento vztah je matematickým vyjádřením Königovy věty pro tuhé těleso:

Kinetická energie tuhého tělesa je rovna součtu kinetické energie translačního pohybu libovolného bodu soustavy A, v němž si myslíme soustředěnou veškerou hmotu tělesa, kinetické energie okamžitého rotačního pohybu tělesa kolem okamžité osy otáčení jdoucí bodem A a součinu úhrnné hmoty tělesa se skalárním součinem vektoru rychlosti bodu A a vektoru relativní rychlosti hmotného středu tělesa vzhledem k bodu A.

Nechť hmotný střed leží na ose rotace, potom je vzhledem k nečárkované (neinerciální) vztažné soustavě v klidu, takže bude platit, že $\mathbf{v}_A' = \mathbf{v}_s'$. V tomto případě se pak vztah (15.88) redukuje na vztah

$$T = \frac{1}{2}mv_A^{\prime 2} + \frac{1}{2}J_T\omega^2 , \qquad (15.89)$$

tedy kinetická energie tělesa, jejíž hmotný střed leží na okamžité ose otáčení, s skládá z translační a rotační kinetické energie.

Budeme se dále věnovat rotační kinetické energii. Za tímto účelem upravíme vztah (15.87) podle identity

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2, \qquad (15.90)$$

takže

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_n m_n \left[\omega^2 r_n^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_n)^2 \right] . \tag{15.91}$$

Pro složky uvažovaných vektorů zavedeme následující označení⁷

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) , \qquad (15.92)$$

$$\mathbf{r}_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}) \tag{15.93}$$

 $⁷x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3.$

dále platí, že

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \tag{15.94}$$

a

$$r_n^2 = x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + x_{n3}^2 \,. ag{15.95}$$

Takže můžeme přepsat vztah (15.91) následujícím způsobem

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_n m_n \left[\left(\sum_i \omega_i^2 \right) r_n^2 - \left(\sum_i \omega_i x_{ni} \right) \left(\sum_j \omega_j x_{nj} \right) \right] . \tag{15.96}$$

Protože můžeme psát, že

$$\omega_i = \sum_j \omega_j \delta_{ij} , \qquad (15.97)$$

kde $\delta_{ij}=1$ pro i=j a $\delta_{ij}=0$ pro $i\neq j$ (i,j=1,2,3), je možné dále upravit výraz (15.97) následujícím způsobem

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{n} \sum_{i} \sum_{j} m_n \left[\omega_i \omega_j \delta_{ij} r_n^2 - \omega_i \omega_j x_{ni} x_{nj} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_{n} m_n \left(\delta_{ij} r_n^2 - x_{ni} x_{nj} \right) .$$

$$(15.98)$$

Označme

$$J_{ij} = \sum_{n} m_n \left(\delta_{ij} r_n^2 - x_{ni} x_{nj} \right) , \qquad i, j = 1, 2, 3 , \qquad (15.99)$$

pak je možné výraz pro rotační kinetickou energii (15.98) přepsat jako

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \omega_i \omega_j . \tag{15.100}$$

Výrazy (15.99) představují prvky tenzoru setrvačnosti, který budeme značit jako $\{J\}$. Tento tenzor je tenzorem druhého řádu, který je tvořen devíti prvky. Navíc, jak lze vidět ze vztahu (15.99), se jedná o tenzor symetrický, tj.

$$J_{ij} = J_{ji} (15.101)$$

Jednotlivé prvky tenzoru setrvačnosti, tedy obecně všechny tenzory druhého řádu, můžeme uspořádat do matice 3×3 , tedy

$$\{\boldsymbol{J}\} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n} m_{n} (r_{n}^{2} - x_{n1}^{2}) & -\sum_{n} m_{n} x_{n1} x_{n2} & -\sum_{n} m_{n} x_{n1} x_{n3} \\ -\sum_{n} m_{n} x_{n2} x_{n1} & \sum_{n} m_{n} (r_{n}^{2} - x_{n2}^{2}) & -\sum_{n} m_{n} x_{n2} x_{n3} \\ -\sum_{n} m_{n} x_{n3} x_{n1} & -\sum_{n} m_{n} x_{n3} x_{n2} & \sum_{n} m_{n} (r_{n}^{2} - x_{n3}^{2}) \end{pmatrix}.$$

$$(15.102)$$

Pro úpravu prvků na diagonále matice (15.102) můžeme použít vztah (15.95) a dále využijeme komutativnosti skalárního násobení, takže matici prvků tenzoru setrvačnosti můžeme přepsat jako

$$\{\boldsymbol{J}\} = \begin{pmatrix} \sum_{n} m_{n}(x_{n2}^{2} + x_{n3}^{2}) & -\sum_{n} m_{n}x_{n1}x_{n2} & -\sum_{n} m_{n}x_{n1}x_{n3} \\ -\sum_{n} m_{n}x_{n1}x_{n2} & \sum_{n} m_{n}(x_{n1}^{2} + x_{n3}^{2}) & -\sum_{n} m_{n}x_{n2}x_{n3} \\ -\sum_{n} m_{n}x_{n1}x_{n3} & -\sum_{n} m_{n}x_{n2}x_{n3} & \sum_{n} m_{n}(x_{n1}^{2} + x_{n2}^{2}) \end{pmatrix} . \tag{15.103}$$

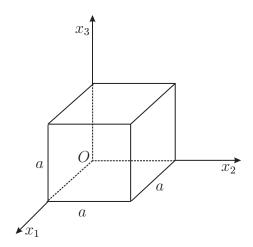
Prvky na diagonále matice (15.103) nazýváme momenty setrvačnosti vzhledem k osám, tj. J_{11} je moment setrvačnosti vzhledem k ose x_1 neboli k ose x_1 neboli k ose x_2 neboli k ose x_2 neboli k ose x_3 neboli k ose x_3 neboli k ose x_4 neboli k ose x_5 neboli k ose x_6 neboli k ose x_6 neboli k ose x_7 neboli k ose x_8 neboli

$$J_{ij} = \int_{m} (\delta_{ij}r^{2} - x_{i}x_{j}) dm = \iiint_{V} \rho(\mathbf{r}) (\delta_{ij}r^{2} - x_{i}x_{j}) dV \qquad i, j = 1, 2, 3.$$
 (15.104)

Příklad 15.5.1

Spočítejte tenzor setrvačnosti homogenní krychle o hustotě ρ , hmotnosti M a délce stran a. Nechť její dolní roh leží v počátku souřadnic a odpovídající hrany leží na souřadnicových osách, viz obr. 15.10.

Řešení:



Obrázek 15.10: Homogenní krychle s délkou strany a.

Podle rovnice (15.104) dostáváme, že

$$J_{11} = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x_2^2 + x_3^2) dx_3 dx_2 dx_1 = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a x_2^2 dx_1 dx_2 dx_3 + \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a x_3^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{2}{3}\rho a^5 = \frac{2}{3}Ma^2, \quad (15.105)$$

$$J_{12} = -\rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a x_1 x_2 \, dx_3 dx_2 dx_1 = -\rho \int_0^a x_1 dx_1 \int_0^a x_2 dx_2 \int_0^a dx_3 = -\frac{1}{4}\rho a^5 = -\frac{1}{4}Ma^2.$$
(15.106)

Dalšími výpočty je možné se snadno přesvědčit, že diagonální prvky tenzoru setrvačnosti (momenty setrvačnosti vzhledem k osám) jsou stejné a rovněž všechny prvky tohoto tenzoru mimo diagonálu (deviační momenty) jsou si rovny, takže

$$J_{11} = J_{22} = J_{33} = \frac{2}{3} M a^2 ,$$

$$J_{12} = J_{13} = J_{23} = -\frac{1}{4} M a^2 .$$
(15.107)

Pro tenzor setrvačnosti pak dostáváme

$$\{\mathbf{J}\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 \end{pmatrix} . \tag{15.108}$$

Uvažujme moment hybnosti tělesa vzhledem k pevnému bodu A, který je spojen s uvažovaným tělesem (viz 15.9), potom můžeme psát, že

$$\boldsymbol{L} = \sum_{n} \mathbf{r}'_{n} \times \boldsymbol{p}'_{n} \tag{15.109}$$

kde hybnost $\boldsymbol{p}_n = m_n \boldsymbol{v}_n = m_n (\boldsymbol{v}_A' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_n)$, takže vztah (15.109) můžeme zapsat jako

$$\boldsymbol{L} = \sum_{n} \boldsymbol{r}'_{n} \times [m_{n}(\boldsymbol{v}'_{A} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{n})] . \tag{15.110}$$

Vzhledem k tomu, že se zajímáme pouze o rotaci tělesa, můžeme ztotožnit počátky čárkovaných a nečárkovaných souřadnic, tj. $O' \equiv A$. Pro tento případ dostáváme, že

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'_n \quad \mathbf{v}'_A = \mathbf{0}$$
.

Moment hybnosti pak můžeme psát jako

$$\boldsymbol{L} = \sum_{n} \boldsymbol{r}_{n} \times (m_{n} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{n}) . \tag{15.111}$$

Kdybychom ztotožnili počátek nečárkované soustavy, tj. bod A, s těžištěm tělesa, pak dostáváme

$$\mathbf{L} = \sum_{n} \mathbf{r}_{n} \times (m_{n}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{n}) = \sum_{n} (\mathbf{r}_{T} + \mathbf{r}_{n}^{T}) \times [m_{n}(\mathbf{v}_{T} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{n})] =$$

$$\mathbf{r}_{T} \times \underbrace{\left(\sum_{n} m_{n}\right)}_{=m} \mathbf{v}_{T} + \mathbf{r}_{T} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \sum_{n} m_{n} \mathbf{r}_{n}^{T}\right) + \underbrace{\left(\sum_{n} \mathbf{r}_{n}^{T} m_{n}\right)}_{=0} \times \mathbf{v}_{T} + \sum_{n} \mathbf{r}_{n}^{T} \times (m_{n}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{n}^{T}) =$$

$$\mathbf{r}_{T} \times \mathbf{p}_{T} + \mathbf{L}_{T}, \quad (15.112)$$

kde $p_T=m\mathbf{v}_T$ a m je celková hmotnost tělesa a \mathbf{r}_n^T je polohový vektor n-tého hmotného bodu v těžišťové vztažné soustavě. Tedy pro moment hybnosti vztažený k těžišti můžeme psát

$$\mathbf{L}_{T} = \sum_{n} \mathbf{r}_{n}^{T} \times (m_{n} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{n}^{T}) . \qquad (15.113)$$

Vztahy (15.111) a (15.113) se liší jen tím, že v jednom případě je počáteční bod polohového vektoru spojen s nepohybujícím se bodem (vzhledem k čárkované soustavě) a v druhém případě je počáteční bod polohového vektoru totožný s těžištěm uvažovaného tělesa. Formálně se však jedná o stejné vztahy. Pro následující odvozování zvolíme jako výchozí vztah (15.111) s tím, že lze nalezené závěry snadno aplikovat i pro případ, kdy bod A bude totožný s těžištěm.

Použijeme-li identitu

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = A^2 \mathbf{B} - \mathbf{A} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

pak můžeme pro moment hybnosti (15.111) psát, že

$$\mathbf{L} = \sum_{n} m_n [r_n^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_n (\mathbf{r}_n \cdot \boldsymbol{\omega})]. \qquad (15.114)$$

Pro i-tou složku vektoru momentu hybnosti můžeme tedy napsat následující vztah

$$L_{i} = \sum_{n} m_{n} \left(\omega_{i} r_{n}^{2} - x_{ni} \sum_{j} x_{nj} \omega_{j} \right) = \sum_{n} m_{n} \sum_{j} \left(\omega_{j} \delta_{ij} r_{n}^{2} - \omega_{j} x_{ni} x_{nj} \right) =$$

$$= \sum_{j} \omega_{j} \sum_{n} m_{n} \left(\delta_{ij} r_{n}^{2} - x_{ni} x_{nj} \right) . \quad (15.115)$$

Porovnáním se vztahem (15.99) můžeme výraz (15.115) přepsat jako

$$L_i = \sum_j J_{ij}\omega_j , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (15.116)

Protože obecně není vektor momentu hybnosti \boldsymbol{L} kolineární s vektorem úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ (viz např. obr. 15.11), pak není možné tyto dvě vektorové veličiny jednoduše převádět pomocí skalární veličiny. V obecném případě je tedy situace složitější, jak je zřejmé ze vztahu (15.116), který pomocí tenzoru setrvačnosti vyjadřuje vztah mezi složkami vektoru momentu hybnosti a vektoru úhlové rychlosti.

Vynásobíme-li vztah (15.116) výrazem $\omega_i/2$ a provedeme-li následně sumaci přes index i pak porovnáním se vztahem (15.100) dostaneme, že

$$\frac{1}{2} \sum_{i} \omega_{i} L_{i} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \omega_{i} \omega_{j} = T_{r} . \qquad (15.117)$$

Z rovnosti (15.117) pak můžeme přímo psát, že

$$T_r = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} \ . \tag{15.118}$$

15.6 Elipsoid setrvačnosti

Použijeme-li rovnosti pro velikost vektorového součinu, pak na základě obrázku 15.6 můžeme psát, že

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2 = \omega^2 \underbrace{r_n^2 \sin \varphi^2}_{=r_{n\perp}^2} = \omega^2 r_{n\perp}^2 . \tag{15.119}$$

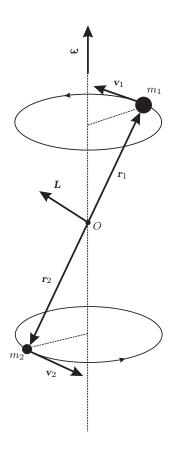
Odtud dostáváme

$$r_{n\perp}^2 = \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n)^2}{\omega^2} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \times \mathbf{r}_n\right)^2 = \left(\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{r}_n\right)^2 ,$$
 (15.120)

kde ω^0 je jednotkový vektor úhlové rychlosti.

Svírá-li osa otáčení se souřadnicovými osami směrové úhly α, β, γ , lze jednotkový vektor ω^0 psát v následujícím tvaru

$$\boldsymbol{\omega}^0 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma . \tag{15.121}$$



Obrázek 15.11: Dva rotující hmotné body spojené tuhou nehmotnou hřídelí.

Připomeňme, že pro polohový vektor \mathbf{r}_n můžeme psát

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{i}x_n + \mathbf{j}y_n + \mathbf{k}z_n , \qquad (15.122)$$

kde x_n , y_n , z_n jsou souřadnice hmotného bodu m_n . Na základě vztahů (15.121) a (15.122) můžeme napsat vektorový součin jednotkového vektoru úhlové rychlosti a polohového vektoru hmotného bodu m_n jako

$$\boldsymbol{\omega}^{0} \times \boldsymbol{r}_{n} = \boldsymbol{i}(z_{n}\cos\beta - y_{n}\cos\gamma) + \boldsymbol{j}(x_{n}\cos\gamma - z_{n}\cos\alpha) + \boldsymbol{k}(y_{n}\cos\alpha - x_{n}\cos\beta) . \quad (15.123)$$

Dosazením vztahu (15.123) do vztahu (15.120) dostaneme

$$r_{n\perp}^{2} = (z_{n}\cos\beta - y_{n}\cos\gamma)^{2} + (x_{n}\cos\gamma - z_{n}\cos\alpha)^{2} + (y_{n}\cos\alpha - x_{n}\cos\beta)^{2} = (y_{n}^{2} + z_{n}^{2})\cos^{2}\alpha + (x_{n}^{2} + z_{n}^{2})\cos^{2}\beta + (x_{n}^{2} + y_{n}^{2})\cos^{2}\gamma - 2x_{n}y_{n}\cos\alpha\cos\beta - 2y_{n}z_{n}\cos\beta\cos\gamma - 2x_{n}z_{n}\cos\alpha\cos\gamma .$$
(15.124)

Dosadíme-li výraz (15.124) do vztahu (15.46), pak můžeme psát

$$J^{(\omega^{0})} = \sum_{n} m_{n} (y_{n}^{2} + z_{n}^{2}) \cos^{2} \alpha + \sum_{n} m_{n} (x_{n}^{2} + z_{n}^{2}) \cos^{2} \beta + \sum_{n} m_{n} (x_{n}^{2} + y_{n}^{2}) \cos^{2} \gamma$$
$$-2 \sum_{n} m_{n} x_{n} y_{n} \cos \alpha \cos \beta - 2 \sum_{n} m_{n} y_{n} z_{n} \cos \beta \cos \gamma - 2 \sum_{n} m_{n} x_{n} z_{n} \cos \alpha \cos \gamma . \quad (15.125)$$

Porovnáním členů v rovnici (15.125) s prvky tenzoru setrvačnosti (15.102) je možné moment setrvačnosti tělesa $J^{(\omega^0)}$ kolem osy otáčení⁸ procházející bodem O (viz obr. 15.6) a svírající

⁸Obecně se jedná o okamžitou osu otáčení, zpravidla však jde o osu otáčení pevnou.

s souřadnicovými osami úhly α , β , γ vyjádřit jako⁹

$$J^{(\omega^0)} = J_{11}\cos^2\alpha + J_{22}\cos^2\beta + J_{33}\cos^2\gamma + 2J_{12}\cos\alpha\cos\beta + 2J_{23}\cos\beta\cos\gamma + 2J_{13}\cos\alpha\cos\alpha\cos\gamma.$$
(15.126)

Připomeňme, že $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\omega}^0$, kde $\boldsymbol{\omega}^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0)$ je jednotkový vektor ve směru okamžitého otáčení. Vztah (15.100) je možné přepsat

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \omega^2 \omega_i^0 \omega_j^0 .$$
 (15.127)

Tento vztah porovnáme se vztahem (15.47), který vyjadřuje kinetickou energii tělesa rotujícího kolem pevné osy, za kterou můžeme považovat okamžitou osu otáčení, tedy

$$J^{(\boldsymbol{\omega}^0)} = \sum_{i,j} J_{ij} \omega_i^0 \omega_j^0 , \qquad (15.128)$$

kde $J^{(\omega^0)}$ je moment setrvačnosti tělesa při jeho otáčení kolem okamžité osy. Dosadíme za složky tenzoru setrvačnosti ve výrazu (15.128) ze vztahu (15.99)

$$J^{(\boldsymbol{\omega}^0)} = \sum_{i,j} \sum_{n} m_n \left(\delta_{ij} r_n^2 - x_{ni} x_{nj} \right) \omega_i^0 \omega_j^0 = \sum_{n} m_n (\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n - (\mathbf{r}_n \cdot \boldsymbol{\omega}^0)^2) =$$

$$\sum_{n} m_n (r_n^2 - r_n^2 \cos^2 \varphi) = \sum_{n} m_n r_n^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \sum_{n} m_n r_n^2 \sin^2 \varphi = \sum_{n} m_n r_{n\perp}^2 . \quad (15.129)$$

Tento výsledek je roven výrazu (15.46).

Ze vztahu (15.128) je vidět, že i když má těleso sebekomplikovanější tvar a i když je nehomogenní, stačí určit (třeba experimentálně) moment setrvačnosti $J^{(\omega^0)}$ vzhledem k šesti různým osám ω^0 procházejícím stejným bodem (např. těžištěm tělesa). Vyřešením lineární soustavy rovnic (15.128) pak dopočítáme tenzor setrvačnosti při otáčení vzhledem k libovolné ose procházející zvoleným bodem.

Problematiku ohledně výpočtu momentu setrvačnosti vzhledem k libovolné ose lze však výrazně zjednodušit. Abychom získali názornou představu o momentech setrvačnosti vzhledem k různým osám procházejících uvažovaným bodem O, použijeme následujícího geometrického znázornění.

Jestliže z uvažovaného bodu O vedeme pomyslné paprsky (osy) všemi směry a na každý z nich naneseme úsečku délky

$$R = \frac{1}{\sqrt{J(\omega^0)}} \,, \tag{15.130}$$

kde $J^{(\omega^0)}$ je moment setrvačnosti vzhledem k tomuto paprsku, leží koncové body těchto úseček na ploše, jejíž rovnici obdržíme následující úpravou rovnice (15.126). Směrové kosiny uvažované úsečky délky (15.130) vyjádříme jako

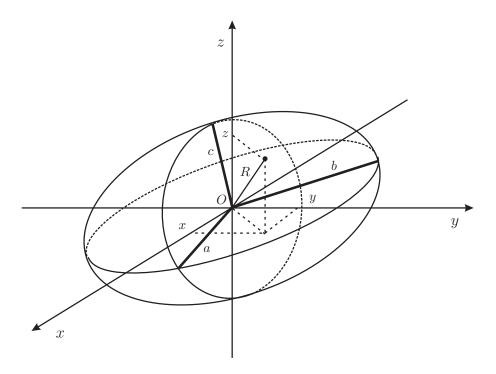
$$\cos \alpha = \frac{x}{R} = \sqrt{J^{(\omega^0)}} x , \qquad \cos \beta = \frac{y}{R} = \sqrt{J^{(\omega^0)}} y , \qquad \cos \gamma = \frac{z}{R} = \sqrt{J^{(\omega^0)}} z , \qquad (15.131)$$

kde x, y, z jsou souřadnice koncového bodu úsečky, viz obr. 15.12. Dosadíme-li za směrové kosiny v rovnici (15.126) jim odpovídající vztahy (15.131) a získanou rovnici podělíme veličinou J, tak dostaneme

$$J_{11}x^2 + J_{22}y^2 + J_{33}z^2 + 2J_{12}xy + 2J_{23}yz + 2J_{13}xz = 1. (15.132)$$

Rovnice (15.132) reprezentuje kvadratickou plochu, která se nazývá elipsoid (tenzoru) setr-

⁹Samozřejmě pro těleso se spojitě rozloženou hmotou obdržíme identický tvar, přičemž při výpočtu jednotlivých prvků tenzoru setrvačnosti se držíme předpisu (15.104).



Obrázek 15.12: Elipsoid setrvačnosti.

vačnosti příslušný bodu O. Pro různé vztažné body O mohou být jak tvar 10 , tak orientace elipsoidu setrvačnosti různé. Je to důsledek toho, že prvky tenzoru setrvačnosti závisí na poloze vztažného bodu O.

Rovnici (15.132) pro elipsoid setrvačnosti můžeme získat také přímo z rovnice (15.128)

$$\sum_{i,j} J_{ij} \frac{\omega_i^0}{\sqrt{J(\omega^0)}} \frac{\omega_j^0}{\sqrt{J(\omega^0)}} = 1.$$
 (15.133)

Z analytické geometrie je známá skutečnost, že pro každou uvažovanou plochu elipsoidu existuje význačná souřadnicová soustava, v níž rovnice této plochy nabývá jednoduššího tvaru, tj.

$$J_{11}x^2 + J_{22}y^2 + J_{33}z^2 = 1 , (15.134)$$

kde $J_1 \equiv J_{11}, J_2 \equiv J_{22}, J_3 \equiv J_{33}$ jsou diagonální členy tenzoru setrvačnosti v této význačné soustavě.

Je známo, že tato význačná souřadnicová soustava je orientována tak, že její osy splývají s hlavními osami elipsoidu. Existuje tedy pro každý vztažný bod taková privilegovaná pravoúhlá souřadnicová soustava, že vzhledem k ní všechny deviační momenty vymizí. Osy této význačné souřadnicové soustavy se nazývají hlavní osy setrvačnosti tělesa v uvažovaném bodě. Momenty setrvačnosti pro tuto význačnou souřadnicovou soustavu J_1 , J_2 a J_3 se nazývají hlavní momenty setrvačnosti, pro které platí, že

$$J_1 = \frac{1}{a^2}, \qquad J_2 = \frac{1}{b^2}, \qquad J_3 = \frac{1}{c^2},$$
 (15.135)

kde a, b, c jsou délky poloos příslušného elipsoidu.

Podrobný popis způsobu nalezení bázových vektorů pro hlavní osy setrvačnosti je uveden v kapitole 15.8.

Obecně můžeme říct, že diagonalizace tenzoru setrvačnosti zapsaného v maticovém tvaru $\{J\}$ se provádí standardním postupem nalezení vlastních čísel λ a jím odpovídajícím vlastním

¹⁰Pořád se však bude jednat o plochu elipsoidu.

vektorům $\boldsymbol{\nu}$. Vlastní čísla nalezneme řešením charakteristické rovnice $\det(\{\boldsymbol{J}\} - \lambda I) = 0$, kde I je jednotková matice. Charakteristická rovnice je v našem případě obecně kubickou rovnicí, takže jejím řešením dostaneme tři vlastní čísla λ_q , kde q=1,2,3. Jednotlivým vlastním číslům λ_q , pak odpovídají vlastní vektory $\boldsymbol{\nu}^{(q)}$ jejichž složky řešením rovnice (soustavy rovnic při rozepsání do složek)

 $\{\boldsymbol{J}\}\boldsymbol{\nu}^{(q)T} = \lambda_q \boldsymbol{\nu}^{(q)T}$,

kde horní index T značí, že se jedná o sloupcový tvar zápisu vektoru.

Jelikož se matice $\{J\}$ je maticí symetrickou, budou vlastní vektory na sebe kolmé. Potom jednotkové vektory vlastních vektorů budou tvořit bázi hlavních os, ve které má matice $\{J\}$ diagonální tvar, přičemž na diagonále se nacházejí právě vlastní čísla, tj. $J_q = \lambda_q$.

Bude-li pouze jedna ze tří souřadnicových os hlavní osou setrvačnosti, pak musí být nulové jí odpovídající deviační momenty. Např. je-li osa $x_1 \equiv x$ hlavní osou setrvačnosti, pak musí být nulové deviační momenty $J_{12} = J_{21} = 0$, $J_{13} = J_{31} = 0$.

Rotační pohyb tělesa závisí na své struktuře prostřednictvím veličin 11 J_1 , J_2 , J_3 , tj. jen prostřednictvím hlavních momentů setrvačnosti. Odtud vyplývá, že jestli dvě různá tělesa mají stejné hlavní momenty setrvačnosti, pak se pohybují (rotují) stejným způsobem, bez ohledu na jejich rozdílné tvary. Bude-li rotovat těleso nepravidelných tvarů, pak ho lze, alespoň z pohledu rotace, nahradit jednoduchým geometrickým útvarem jako je trojosý elipsoid. Je nutné zdůraznit, že elipsoid setrvačnosti je pevně spojen s příslušným tělesem, takže otáčili se těleso, otáčí se s ním i odpovídající elipsoid setrvačnosti.

Elipsoid setrvačnosti příslušný hmotnému středu tělesa se nazývá centrální elipsoid setrvačnosti. Ze Steinerovy věty vyplývá, že je ze všech elipsoidů setrvačnosti daného tělesa největší.

Platí věta, že hlavní osa setrvačnosti centrálního elipsoidu je také hlavní osou setrvačnosti vzhledem ke každému bodu, který na ní leží.

Platnost této věty je možné dokázat následujícím způsobem. Uvažujme bod O, který splývá s hmotným středem tělesa. Nechť tedy osa o_z (osa z) je jedna z hlavních os setrvačnosti centrálního elipsoidu. Pak na základě výše uvedených skutečností platí, že odpovídající deviační momenty jsou nulové, tedy

$$J_{23} = -\sum_{n} m_n y_n z_n = 0 , \quad J_{13} = -\sum_{n} m_n x_n z_n = 0 .$$
 (15.136)

Zvolme na ose o_z libovolný jiný bod O' různý od bodu O a položme

$$OO' = a. (15.137)$$

Uvažujme jinou souřadnicovou soustavu $\{O', x', y', z'\}$, jejíž osy x' a y' jsou rovnoběžné s osami x a y a jsou stejně orientovány. V této souřadnicové soustavě bude mít hmotný bod m_n tělesa o původních souřadnicích x_n , y_n , z_n nové souřadnice x_n , y_n , $z_n - a$. Deviační momenty budou mít hodnoty

$$J_{23} = -\sum_{n} m_n y_n(z_n - a) = -\sum_{n} m_n y_n z_n + a \sum_{n} m_n y_n = 0, \qquad (15.138)$$

$$J_{13} = -\sum_{n} m_n x_n (z_n - a) = -\sum_{n} m_n x_n z_n + a \sum_{n} m_n x_n = 0.$$
 (15.139)

¹¹V případě, že nepoužíváme k popisu hlavních os setrvačnosti, pak jsou těmito veličinami všechny prvky tenzoru setrvačnosti.

Zde byla vzata do úvahy skutečnost, že souřadnice hmotného středu jsou $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s) = (0, 0, 0)$.

Tedy oba deviační momenty jsou nulové i v nové souřadnicové soustavě, a tudíž osa o_z je hlavní osou setrvačnosti pro libovolný bod O', který na ní leží.

Q.E.D.

15.7 Určení geometrického vztahu mezi směrem vektoru momentu hybnosti a vektoru úhlové rychlosti

Rotační kinetickou energii tělesa otáčejícího se kolem osy, která prochází bodem O můžeme pomocí vztahů (15.47) a (15.126) vyjádřit jako

$$T_r = \frac{1}{2} \left(J_{11} \cos \alpha^2 + J_{22} \cos \beta^2 + J_{33} \cos \gamma^2 + 2J_{12} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{23} \cos \beta \cos \gamma + 2J_{13} \cos \alpha \cos \gamma \right) \omega^2.$$
 (15.140)

Na základě vztahu (15.121) můžeme psát, že

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k} = \omega \boldsymbol{\omega}^0 = \omega (\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma) . \tag{15.141}$$

Ze vztahu (15.141) plyne

$$\cos \alpha = \frac{\omega_1}{\omega}, \quad \cos \beta = \frac{\omega_2}{\omega}, \quad \cos \gamma = \frac{\omega_3}{\omega}.$$
 (15.142)

Dosazením vztahů (15.142) za směrové kosiny ve vztahu (15.140) po úpravě dostaneme¹²

$$T_r = \frac{1}{2} \left(J_{11}\omega_1^2 + J_{22}\omega_2^2 + J_{33}\omega_3^2 + 2J_{12}\omega_1\omega_2 + 2J_{23}\omega_2\omega_3 + 2J_{13}\omega_1\omega_3 \right) . \tag{15.143}$$

Derivacemi vztahu (15.143) podle jednotlivých složek vektoru úhlové rychlosti dostaneme podle vztahu (15.116) jednotlivé složky vektoru momentu hybnosti, tedy

$$L_1 = \frac{\partial T_r}{\partial \omega_1} , \quad L_2 = \frac{\partial T_r}{\partial \omega_2} , \quad L_3 = \frac{\partial T_r}{\partial \omega_3} .$$
 (15.144)

Na základě vztahu (15.144)

$$\mathbf{L} = L_1 \mathbf{i} + L_2 \mathbf{j} + L_3 \mathbf{k} = \frac{\partial T_r}{\partial \omega_1} \mathbf{i} + \frac{\partial T_r}{\partial \omega_2} \mathbf{j} + \frac{\partial T_r}{\partial \omega_2} \mathbf{k} = \nabla_{\omega} T_r .$$
 (15.145)

Z rovnice (15.143) je zřejmé, že plochou konstantní rotační energie je elipsoid, jehož souřadnicemi jsou složky vektoru úhlové rychlosti ω_1 , ω_2 a ω_3 . Konstantní rotační energii T_r tělesa je možné dosáhnout různými úhlovými rychlostmi s různě velkými složkami ω_1 , ω_2 a ω_3 . Takže provedeme-li takovou změnu úhlové rychlosti, že rotační energie tělesa T_r zůstane konstantní, potom bude na základě vztahu (15.145) platit následující rovnost

$$dT_r = 0 = \nabla_{\omega} T_r \cdot d\omega = \mathbf{L} \cdot d\omega . \tag{15.146}$$

Uvažujme následující substituci

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k} = \mathbf{r} \sqrt{2T_r} = \sqrt{2T_r} (x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}) , \qquad (15.147)$$

¹²Přihlédneme-li ke vztahu (15.141), tak se vlastně jedná o vztah (15.127).

ze které z porovnání odpovídajících si členů vyplývá, že

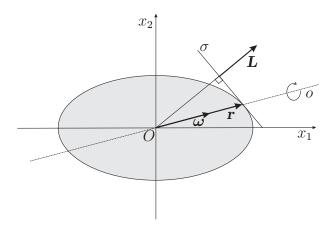
$$\omega_1 = \sqrt{2T_r}x_1 \; , \; \; \omega_2 = \sqrt{2T_r}x_2 \; , \; \; \omega_3 = \sqrt{2T_r}x_3 \; .$$
 (15.148)

Dosazením ze vztahů (15.148) do rovnice (15.143) po následné úpravě dostaneme rovnici elipsoidu setrvačnosti (15.132).

Použitím substituce (15.147) je možné vyjádřit rovnost (15.146) jako

$$0 = \mathbf{L} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} \cdot \left(\sqrt{2T_r} d\mathbf{r}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$
 (15.149)

Vzhledem k tomu, že koncový bod polohového vektoru \boldsymbol{r} je bodem elipsoidu setrvačnosti, pak ze vztahu (15.149) vyplývá, že vektor d \boldsymbol{r} leží v tečné rovině σ k elipsoidu setrvačnosti v místě o polohovém vektoru \boldsymbol{r} a tudíž vektor momentu hybnosti \boldsymbol{L} je kolmý k této rovině, resp. k elipsoidu setrvačnosti, viz obrázek 15.13. Z tohoto obrázku lze vidět, že vektor momentu hybnosti \boldsymbol{L} má obecně jiný směr než vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$. Jedině pro tři zvláštní směry úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$, které jsou dané směry hlavních os setrvačnosti, jsou vektory \boldsymbol{L} a $\boldsymbol{\omega}$ rovnoběžné.



Obrázek 15.13: Orientace vektoru momentu hybnosti a úhlové rychlosti vzhledem k elipsoidu setrvačnosti.

Příklad 15.7.1

Homogenní těleso tvaru hranolu s hmotností M=10 kg a rozměry a=10 cm, b=30 cm, c=10 cm se otáčí okolo pevné osy o spadající do směru úhlopříčky tělesa rychlostí $\omega=2\pi$ s⁻¹, viz obr. 15.14. Určete kinetickou rotační energii tělesa, rovnici elipsoidu setrvačnosti a vektor momentu hybnosti vzhledem k ose rotace.

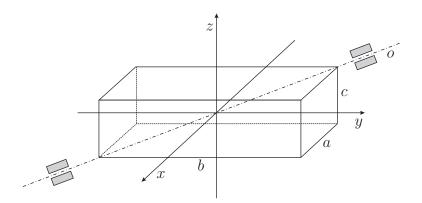
Řešení:

Pro rotační kinetickou energii platí následující vztah

$$T_r = \frac{1}{2}J\omega^2 \,, (15.150)$$

kde J představuje moment setrvačnosti vzhledem k uvažované ose otáčení. Pro moment setrvačnosti platí následující rovnost

$$J = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \cos^2 \beta + J_3 \cos^2 \gamma , \qquad (15.151)$$



Obrázek 15.14: Rotace kvádru kolem osy procházející úhlopříčkou.

 $J_1,\ J_2,\ J_3$ jsou hlavní momenty setrvačnosti a $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ jsou směrové úhly pro osu otáčení o, resp. pro s ní splývající úhlopříčku tělesa. Pro směrové kosiny dostáváme následující výrazy

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}},$$
$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}. \quad (15.152)$$

Jelikož roviny symetrie tělesa jsou totožné s rovinami souřadnicovými, představují souřadnicové osy tzv. hlavní osy setrvačnosti. To znamená, že všechny deviační momenty jsou nulové a momenty počítané pro dané osy jsou hlavní momenty setrvačnosti. Abychom mohli spočítat moment setrvačnosti J, bude nutné nejdříve spočítat zmiňované hlavní momenty setrvačnosti

$$J_1 = \int_m (y^2 + z^2) dm = \int_V \rho(y^2 + z^2) dV.$$
 (15.153)

Protože se jedná o homogenní těleso, můžeme vytknout jeho objemovou hustotu před objemový integrál, za element objemu dosadíme $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ a vyjádříme příslušné meze integrací

$$J_{1} = \rho \int_{-\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}}^{\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}} (y^{2} + z^{2}) dx dy dz = \rho \int_{-\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}}^{\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}} y^{2} dx dy dz + \rho \int_{-\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}}^{\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}} z^{2} dx dy dz . \quad (15.154)$$

Výpočtem integrálů (15.154) dostáváme, že

$$J_1 = \rho \frac{ab^3c}{12} + \rho \frac{abc^3}{12} = \frac{\rho Vb^2}{12} + \frac{\rho Vc^2}{12} = \frac{Mb^2}{12} + \frac{Mc^2}{12} = \frac{M}{12}(b^2 + c^2).$$
 (15.155)

Je zřejmé, že bychom analogickým způsobem dospěli ke zbývajícím dvěma hlavním momentům setrvačnosti, pro které dostáváme

$$J_2 = \rho \int_V (x^2 + z^2) dV = \frac{M}{12} (a^2 + c^2), \quad J_3 = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV = \frac{M}{12} (a^2 + b^2).$$
 (15.156)

Dosazením z (15.152), (15.155) a (15.156) do výrazu (15.151) dospějeme k následujícímu výsledku

$$J = 0,029 \text{ kg m}^2$$
. (15.157)

Dosadíme do vztahu pro rotační kinetickou energii (15.150) a dostáváme, že

$$T_r = 0.57 \text{ J}.$$
 (15.158)

Rovnice elipsoidu (v tomto případě centrálního) setrvačnosti má pro vyšetřované těleso následující tvar

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1 , (15.159)$$

kde

$$A = \frac{1}{\sqrt{J_1}} = 0,289$$
, $B = \frac{1}{\sqrt{J_2}} = 0,129$, $C = \frac{1}{\sqrt{J_3}} = 0,289$.

Elipsoid setrvačnosti je pevně spojen s tělesem a při vyšetřování rotačních pohybů tělesa je možné pracovat pouze s jemu odpovídajícím elipsoidem setrvačnosti. Takto je možné nahradit tělesa i těch nejkomplikovanějších tvarů (např. družice, baletku apod.) tímto elegantním symetrickým útvarem. Pro jednotkový vektor úhlové rychlosti platí, že

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{11}}\boldsymbol{i} + \frac{3}{\sqrt{11}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{11}}\boldsymbol{k}.$$
 (15.160)

Pro úhlovou rychlost můžeme psát

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\omega}_0 = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{11}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{11}} \mathbf{k} \right) . \tag{15.161}$$

Vektor momentu hybnosti vzhledem k ose otáčení určíme jako

$$\mathbf{L}_{\parallel} = J\boldsymbol{\omega} = 0,58\pi \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{11}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{11}} \mathbf{k} \right) . \tag{15.162}$$

15.8 Nalezení hlavních os setrvačnosti

V případě, že deviační momenty tenzoru setrvačnosti jsou nulové, potom můžeme pro prvky tenzoru setrvačnosti psát, že

$$J_{ij} = J_i \delta_{ij} , \qquad i, j = 1, 2, 3 ,$$
 (15.163)

tedy

$$\{\mathbf{J}\} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} . \tag{15.164}$$

V tomto případě můžeme vztah (15.116) vyjádřit jako

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} J_i \delta_{ij} \omega_j = J_i \omega_i \tag{15.165}$$

a vztah (15.117) je možné přepsat do následujícího tvaru

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_i \delta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_i J_i \omega_i^2 . \qquad (15.166)$$

Porovnáním navzájem si odpovídajících vztahů je zřejmé, že v případě nulových deviačních momentů dochází k jejich výraznému zjednodušení. Z lineární algebry je známo, že každou symetrickou matici lze převést ortogonální transformací na diagonální tvar. Tento postup nazýváme diagonalizací a ukážeme si ho na případu tenzoru setrvačnosti. Diagonalizace spočívá v nalezení takové orientace na sebe kolmých souřadnicových os, pro které budou prvky mimo diagonálu nulové. V kapitole 15.6 jsme nazvali takovéto osy hlavními osami setrvačnosti. Uvažujme, že těleso se bude otáčet kolem hlavní osy setrvačnosti x'_{ν} . Potom v tomto případě můžeme vektor úhlové rychlosti vyjádřit jako

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_{\nu}' \ . \tag{15.167}$$

Dosadíme-li vektor úhlové rychlosti do vztahu (15.165), pak můžeme psát, že

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega} \,\,\,(15.168)$$

kde $J \equiv J_{\nu}$ představuje hlavní moment setrvačnosti pro rotaci kolem uvažované hlavní osy setrvačnosti. Je-li např. $\nu = 2$, potom $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_2' = (0, \omega_2, 0)$ a vektor moment hybnost $\boldsymbol{L} = L\boldsymbol{e}_2' = (0, L_2, 0)$, kde $\omega_2 = \omega$ a $L_2 = L$.

Ukázaná vlastnost rovnoběžnosti vektorů ${\pmb L}$ a ${\pmb \omega}$ v případě rotace kolem nějaké z hlavních os setrvačnosti umožňuje určit orientaci hlavních os setrvačnosti.

Na základě vztahu (15.168) a vztahu (15.116) dostáváme následující soustavu tří algebraických rovnic

$$L_{1} = J\omega_{1} = J_{11}\omega_{1} + J_{12}\omega_{2} + J_{13}\omega_{3} ,$$

$$L_{2} = J\omega_{2} = J_{21}\omega_{1} + J_{22}\omega_{2} + J_{23}\omega_{3} ,$$

$$L_{3} = J\omega_{3} = J_{31}\omega_{1} + J_{32}\omega_{2} + J_{33}\omega_{3} ,$$
(15.169)

kterou můžeme upravit jako

$$(J_{11} - J)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 = 0 ,$$

$$J_{21}\omega_1 + (J_{22} - J)\omega_2 + J_{23}\omega_3 = 0 ,$$

$$J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33} - J)\omega_3 = 0 .$$
(15.170)

Aby homogenní soustavu rovnic (15.170) měla netriviální řešení, musí být determinant matice soustavy rovnic roven nule, tj.

$$\begin{vmatrix} (J_{11} - J) & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & (J_{22} - J) & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & (J_{33} - J) \end{vmatrix} = 0.$$
 (15.171)

Výpočtem (rozvojem) determinantu (15.171) dostaneme tzv. charakteristickou kubickou rovnici pro neznámou J. Jelikož víme, že tenzor setrvačnosti je symetrický, potom je symetrická i matice soustavy. Z lineární algebry je známo tvrzení, že je-li matice soustavy symetrická, pak řešení uvažované charakteristické kubické rovnice budou reálná. Tato řešení se v lineární algebře nazývají vlastními čísly, která reprezentují v našem případě hlavní momenty setrvačnosti. Pro symetrickou matici soustavy rovněž platí, že vlastní vektory, které odpovídají různým vlastním číslům, jsou na sebe kolmé, takže tvoří ortogonální bázi. V našem případě vlastní vektory představují vektory úhlových rychlostí. Vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu (hlavnímu momentu setrvačnosti) J_{ν} označíme $\omega^{(\nu)}$ a jeho složky určíme řešením následující soustavy rovnic

$$(J_{11} - J_{\nu})\omega_{1}^{(\nu)} + J_{12}\omega_{2}^{(\nu)} + J_{13}\omega_{3}^{(\nu)} = 0 ,$$

$$J_{21}\omega_{1}^{(\nu)} + (J_{22} - J_{\nu})\omega_{2}^{(\nu)} + J_{23}\omega_{3}^{(\nu)} = 0 ,$$

$$J_{31}\omega_{1}^{(\nu)} + J_{32}\omega_{2}^{(\nu)} + (J_{33} - J_{\nu})\omega_{3}^{(\nu)} = 0 .$$

$$(15.172)$$

Potom na základě vztahu (15.168), resp. (15.165), bude platit, že

$$L = J_{\nu} \omega^{(\nu)} , \qquad \nu = 1, 2, 3 .$$
 (15.173)

Ortogonální bázi $\{e_1', e_2', e_3'\}$ hlavních os setrvačnosti určíme pomocí nalezených tří vlastních vektorů $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$ následujícím způsobem

$$\{\mathbf{e}_{1}',\mathbf{e}_{2}',\mathbf{e}_{3}'\} = \left\{\frac{\boldsymbol{\omega}^{(1)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(1)}|},\frac{\boldsymbol{\omega}^{(2)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(2)}|},\frac{\boldsymbol{\omega}^{(3)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(3)}|}\right\}.$$
 (15.174)

Na tomto místě je třeba zdůraznit, že kartézský souřadnicový systém, který bude tvořen hlavními osami setrvačnosti, bude mít stejný počátek jako původní kartézský souřadnicový systém. Odtud dále vyplývá, že rotací kolem počátku souřadnic, pro který jsou prvky tenzoru setrvačnosti počítány, je možné nalézt nový kartézský souřadnicový systém, v němž má tenzor setrvačnosti diagonální tvar.

Polohu hlavních os setrvačnosti je možné často uhodnout u těles pravidelného geometrického tvaru. Má-li těleso rovinu symetrie, pak ji stačí zvolit za souřadnicovou rovinu, aby dva deviační momenty vymizely. Je-li např. rovinou symetrie rovina $x_3 = 0$ potom

$$J_{13} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_{n1} x_{n3} = 0$$
, $J_{23} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_{n2} x_{n3} = 0$,

což je dáno tím, že pro dva body symetricky položené vzhledem k rovině $x_3 = 0$ jsou veličiny m_n , x_{n1} , x_{n2} stejné, zatímco souřadnice x_{n3} jsou co do velikosti rovněž stejné, ale liší se znaménky.

Jestliže tedy má těleso rovinu symetrie pak každá kolmice k této rovině je hlavní osou setrvačnosti pro bod v němž kolmice rovinu protíná. Má-li soustava dvě navzájem kolmé roviny symetrie, pak tyto roviny budou nutně hlavními rovinami elipsoidu setrvačnosti vzhledem ke každému bodu jejich průsečnice. Zvolíme-li tedy tyto roviny za souřadnicové roviny, pak zřejmě vymizí všechny tři deviační momenty. Pro rotační tělesa každá meridiánová rovina¹³, je zřejmě rovinou symetrie, a proto rotační osa tělesa je hlavní osou setrvačnosti pro každý její bod a příslušné elipsoidy setrvačnosti budou rotační elipsoidy, jejichž rotační osou je rotační osa tělesa.

Příklad 15.8.1

Proveďte diagonalizaci tenzoru setrvačnosti pro krychli z příkladu 15.5.1 a nalezněte bázové vektory pro kartézský souřadnicový systém s hlavními osami setrvačnosti.

Řešení:

Na základě spočítaného tenzoru setrvačnosti (15.108) zapíšeme charakteristickou rovnici (15.171) jako

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) \end{vmatrix} = 0.$$
 (15.175)

¹³Rovina procházející osou rotační plochy se nazývá meridiánová.

Jelikož hodnota determinantu není ovlivněna přičtením jakékoliv násobku řádky k jakémukoliv jinému řádku, odečteme první řádek od řádku druhého

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ \left(-\frac{11}{12}Ma^2 + J\right) & \left(\frac{11}{12}Ma^2 - J\right) & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) \end{vmatrix} = 0.$$
 (15.176)

Vytknutím před determinant dostaneme

$$\left(\frac{11}{12}Ma^2 - J\right) \begin{vmatrix} \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) \end{vmatrix} = 0.$$
(15.177)

Rozvojem podle druhého řádku pak dostáváme následující kubickou charakteristickou rovnici

$$\left(\frac{11}{12}Ma^2 - J\right) \left[\left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right)^2 - \frac{1}{8}M^2a^4 - \frac{1}{4}Ma^2\left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) \right] = 0,$$
(15.178)

kterou upravíme do následujícího tvaru

$$\left(\frac{1}{6}Ma^2 - J\right)\left(\frac{11}{12}ma^2 - J\right)\left(\frac{11}{12}ma^2 - J\right) = 0.$$
 (15.179)

Z charakteristické rovnice (15.179) pak můžeme přímo psát její kořeny, které představují vlastní čísla neboli hlavní momenty setrvačnosti

$$J_1 = \frac{1}{6}Ma^2$$
, $J_2 = \frac{11}{12}Ma^2$, $J_3 = \frac{11}{12}Ma^2$. (15.180)

Odtud můžeme napsat diagonalizovaný tvar tenzoru setrvačnosti

$$\{\mathbf{J}\} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}Ma^2 \end{pmatrix} . \tag{15.181}$$

Jelikož $J_2 = J_3$, potom hlavní osa setrvačnosti spojená s hlavním momentem setrvačnosti J_1 musí být osou symetrie.

Dosazením do soustavy rovnic (15.172) za J hodnotu prvního vlastního čísla J_1 dostaneme

$$\left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{1}{6}Ma^2\right)\omega_1^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_2^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_3^{(1)} = 0,$$

$$-\frac{1}{4}Ma^2\omega_1^{(1)} + \left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{1}{6}Ma^2\right)\omega_2^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_3^{(1)} = 0,$$

$$-\frac{1}{4}Ma^2\omega_1^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_2^{(1)} + \left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{1}{6}Ma^2\right)\omega_3^{(1)} = 0.$$
(15.182)

Soustavu rovnic (15.182) podělíme $Ma^2/4$, čímž dostaneme

$$2\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} - \omega_3^{(1)} = 0 ,$$

$$-\omega_1^{(1)} + 2\omega_2^{(1)} - \omega_3^{(1)} = 0 ,$$

$$-\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} + 2\omega_3^{(1)} = 0 .$$
(15.183)

Řešením soustavy rovnic (15.183) dostaneme následující vlastní vektor

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \left(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}\right) = \alpha(1, 1, 1) , \qquad \alpha \in R .$$
 (15.184)

Abychom získali vlastní vektory, které odpovídají vlastním číslům $J_2 = J_3$, opět dosadíme do soustavy rovnic (15.172) za tato vlastní čísla, čímž obdržíme následující soustavu rovnic

$$\left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{11}{12}Ma^2\right)\omega_1^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_2^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_3^{(1)} = 0,$$

$$-\frac{1}{4}Ma^2\omega_1^{(1)} + \left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{11}{12}Ma^2\right)\omega_2^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_3^{(1)} = 0,$$

$$-\frac{1}{4}Ma^2\omega_1^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_2^{(1)} + \left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{11}{12}Ma^2\right)\omega_3^{(1)} = 0.$$
(15.185)

Tuto soustavu opět podělíme $Ma^2/4$, čímž dostaneme

$$-\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} - \omega_3^{(1)} = 0 ,$$

$$-\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} - \omega_3^{(1)} = 0 ,$$

$$-\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} - \omega_3^{(1)} = 0 .$$
(15.186)

Řešením této soustavy rovnic dostáváme, že

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \left(\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \omega_3^{(2)}\right) = (-\beta - \gamma, \gamma, \beta) , \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{R} , \qquad (15.187)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(3)} = \left(\omega_1^{(3)}, \omega_2^{(3)}, \omega_3^{(3)}\right) = (-\beta - \gamma, \gamma, \beta) , \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{R} . \tag{15.188}$$

Protože parametry α , β , γ představují jakékoliv reálná čísla, zvolíme tyto parametry, tak aby vlastní vektory byly na sebe kolmé. Jelikož vlastní číslo J_1 je různé od vlastních čísel J_2 a J_3 , takže při jakékoliv volbě parametrů budou vlastní vektory odpovídající vlastním číslům J_2 a J_3 kolmé na vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu J_1 . Vzhledem k tomu, že vlastní čísla J_2 a J_3 jsou stejná, tak jí odpovídající vlastní vektory sice budou ležet ve stejné rovině, která bude kolmá k vlastnímu vektoru vlastního čísla J_1 , ale při obecné volbě parametrů β a γ nebudou na sebe kolmé¹⁴. Z tohoto důvodu je nutné nalézt parametry β a γ tak, aby tyto vlastní vektory byly na sebe kolmé a současně, aby vzniklý souřadnicový systém byl pravotočivý. To můžeme jednoduše provézt tak, že si pro vlastní vektor $\omega^{(3)}$ zvolíme např. parametry $\beta = -1$ a $\gamma = 0$, takže na základě vztahu (15.188) dostaneme $\omega^{(3)} = (1, 0, -1)$. Parametry pro zbývající vlastní vektor $\omega^{(2)}$ určíme z podmínky, aby

$$\boldsymbol{\omega}^{(3)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(2)} = 0 \ . \tag{15.189}$$

Zvolíme si pro vlastní vektor $\omega^{(2)}$ parametr β , např. $\beta=-1$, takže na základě vztahů (15.187) a (15.189) můžeme psát

$$1 - \gamma + 1 = 0. (15.190)$$

odtud $\gamma = 2$. Takže vlastní vektory budou mít souřadnice

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = (1, 1, 1) \,, \tag{15.191}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = (1, 0, -1) , \qquad (15.192)$$

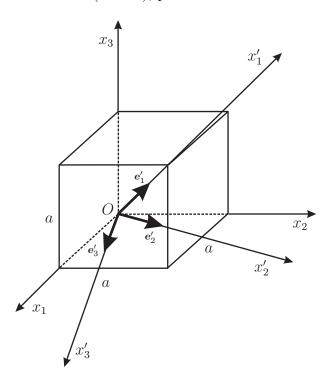
$$\boldsymbol{\omega}^{(3)} = (-1, 2, -1) \ . \tag{15.193}$$

 $^{^{14}}$ Kolmé by na sebe byly jen v případě, že by platilo $J_2 \neq J_3.$

Určíme ortonormální bázi nové kartézské soustavy, pro kterou má tenzor setrvačnosti nulové deviační momenty, podle vztahu (15.174)

$$\{\mathbf{e}_{1}',\mathbf{e}_{2}',\mathbf{e}_{3}'\} = \left\{\frac{\boldsymbol{\omega}^{(1)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(1)}|},\frac{\boldsymbol{\omega}^{(2)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(2)}|},\frac{\boldsymbol{\omega}^{(3)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(3)}|}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)\right\}.$$
(15.194)

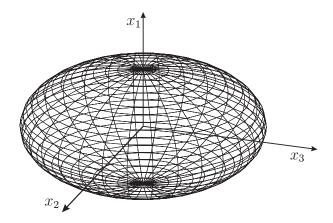
Na obrázku 15.15 je jsou zobrazeny původní souřadnice a nalezené hlavní osy setrvačnosti. Pro rovnice elipsoidu setrvačnosti (15.134), pak můžeme na základě rovností (15.175) psát



Obrázek 15.15: Hlavní osy setrvačnosti $x_1',\,x_2',\,x_3'$ homogenní krychle s délkou strany a.

$$\frac{1}{6}Ma^2x_1^2 + \frac{11}{12}Ma^2y^2 + \frac{11}{12}Ma^2z^2 = 1. (15.195)$$

Elipsoid setrvačnosti je zachycen na obrázku 15.16.



Obrázek 15.16: Odpovídající elipsoid setrvačnosti.

15.9 Vliv odstředivých sil při nevyvážené rotaci tělesa

Při rotaci tělesa kolem pevné osy budou působit na toto těleso odstředivé síly. Na jednotlivé elementy hmotnosti dm působí odstředivá síla (viz situace na obr. 15.17)

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_O = \omega^2 \mathbf{r}_\perp \mathrm{d}m \ . \tag{15.196}$$

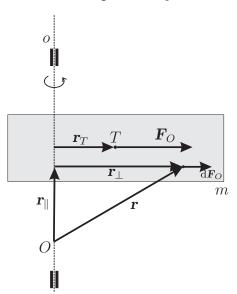
Potom výsledná odstředivá síla působící na těleso je dána následujícím vztahem

$$\mathbf{F}_O = \int_m \omega^2 \mathbf{r}_\perp dm = \omega^2 m \mathbf{r}_T , \qquad (15.197)$$

kde \mathbf{r}_T je polohový vektor těžiště.

Na základě vztahu (15.197) je zřejmé, že silová reakce ložisek $\mathbf{R} = -\mathbf{F}_0$ je nenulová pakliže osa otáčení neprochází těžištěm rotujícího tělesa. Leží-li těžiště tělesa na rotační ose ($\mathbf{r}_T = \mathbf{0}$) potom říkáme, že rotující těleso (setrvačník) je staticky vyvážené, a tedy podmínkou statické vyváženosti rotujícího tělesa je $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Avšak i v případě, že rotační osa tělesa prochází jeho těžištěm, může dojít k namáhání



Obrázek 15.17: Staticky nevyvážené rotující těleso (setrvačník).

ložisek díky tzv. klopnému momentu odstředivých sil, viz obrázek 15.18. Klopný moment odstředivých sil je možné určit následujícím způsobem

$$\mathbf{M}_O = \int \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{F}_O = \int_m \mathbf{r} \times \omega^2 \mathbf{r}_\perp \mathrm{d}m = \omega^2 \int_m (\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel) \times \mathbf{r}_\perp \mathrm{d}m = \omega^2 \int_m \mathbf{r}_\parallel \times \mathbf{r}_\perp \mathrm{d}m .$$
 (15.198)

Ze vztahu (15.198) je patrné, že klopný moment je kolmý k rotační ose o, má tedy tendenci rotační osu tělesa sklopit a odtud ono označení klopný moment. Reakci ložisek na klopný moment označíme $\mathbf{M}_R = -\mathbf{M}_O$. Pokud je klopný moment nulový, potom hovoříme o dynamicky vyváženém rotujícím tělese (setrvačníku). Takže podmínkou dynamicky vyváženého rotujícího tělesa je, že $\mathbf{M}_R = \mathbf{0}$.

Bez újmy na obecnosti dále předpokládejme, že osa rotace je totožná se souřadnicovou osou x_3 a počátek souřadnicové soustavy je totožný s těžištěm tělesa, viz obr. 15.19. V tomto případě spočítáme klopný moment podle vztahu (15.198) jako

$$\mathbf{M}_{O} = (M_{O1}, M_{O2}, M_{O3}) = \omega^{2} \int_{m} \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{r}_{\perp} dm = \omega^{2} \int_{m} (0, 0, x_{3}) \times (x_{1}, x_{2}, 0) dm = \left(\omega^{2} \int_{m} -x_{2} x_{3} dm\right) \mathbf{i} + \left(-\omega^{2} \int_{m} -x_{1} x_{3} dm\right) \mathbf{j} = M_{O1} \mathbf{i} + \mathbf{j} M_{O2}. \quad (15.199)$$

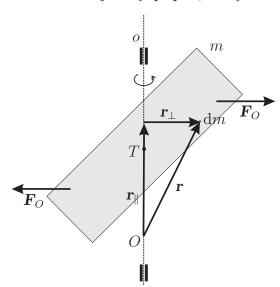
Ze vztahů (15.104) a (15.199) plyne, že

$$M_{O1} = \omega^2 J_{23} , \quad M_{O2} = -\omega^2 J_{13} .$$
 (15.200)

Budou-li deviační momenty J_{23} a J_{13} nulové, potom bude nulový i klopný moment odstředivých sil vzhledem k ose x_3 . Odtud plyne název deviační momenty, neboť se vyskytují ve vztazích pro momenty, které mají snahu způsobit odklon neboli deviaci, rotační osy. Kdybychom za osu rotace zvolili souřadnicovou osu x_2 , příp. x_1 , pak bychom dosáhli rovněž nulového klopného momentu, jelikož v tomto případě platí, že by byly příslušné deviační momenty rovněž nulové.

Na základě výše uvedeného vyplývá, že existují pro každé těleso osy rotace, pro které je rotační pohyb dokonale vyvážený. Takovéto osy rotace se nazývají volné osy. Tedy každé těleso má alespoň tři volné osy rotace a jsou jimi hlavní osy setrvačnosti procházející těžištěm uvažovaného tělesa (hlavní centrální osy setrvačnosti). V případě, že těleso nerotuje kolem volné osy, potom ložiska kompenzují vliv odstředivých sil přídavnými reakcemi, které nejen zvyšují opotřebení ložisek, ale vzhledem k proměnnosti směru svého působení vyvolávají např. neklidný chod strojů.

Na obrázku 15.20 je demonstrován zajímavý případ, který souvisí s klopným momentem



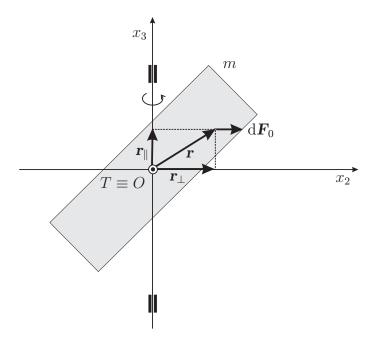
Obrázek 15.18: Dynamicky nevyvážené rotující těleso (setrvačník).

odstředivých sil. Ukazuje, že u tělesa, u něhož $J_1 \neq J_2 \neq J_3$, nejsou všechny volné osy v tělese rovnocenné. Bude-li těleso, které je zavěšeno v jediném bodě, postupně roztáčeno, potom narůstající odstředivé síly postupně způsobí, že těleso spontánně zaujme polohu, která odpovídá rotaci s největším momentem setrvačnosti. Na obrázku 15.20 tímto přejde tyč ze své svislé polohy do polohy vodorovné. Podobně by tomu bylo např. u rotující obruče apod. Stabilně rotuje těleso kolem hlavní centrální osy, vzhledem k níž má největší moment setrvačnosti.

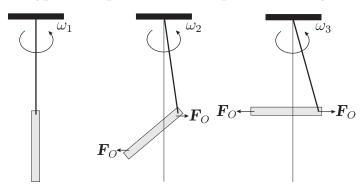
Teoretický rozbor dále ukazuje, že u tělesa, které má pro hlavní momenty setrvačnosti tři různé hodnoty $J_1 > J_2 > J_3$ je stabilní rotace nejen kolem hlavní centrální osy, vzhledem k níž má největší moment J_1 , ale i vzhledem k hlavní centrální ose, vzhledem k níž má nejmenší moment J_3 . Rotace kolem osy, vzhledem k níž má moment J_2 , je labilní.

15.10 Druhy setrvačníků

Setrvačník je rotující těleso, které slouží k akumulaci kinetické rotační energie. Obecně setrvačníkem budeme rozumět jakékoliv těleso, které rotuje. Bez újmy na obecnosti lze zavést



Obrázek 15.19: Výpočet klopného momentu pro těleso rotující kolem osy x_3 .



Obrázek 15.20: Změna orientace tělesa při různých rychlostech otáčení, $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$.

podmínku $J_1 \leq J_2 \leq J_3$. Ze vztahu (15.104) je zřejmé, že hlavní momenty setrvačnosti musí být vždy kladné. Jelikož pro kartézské souřadnicové osy platí trojúhelníková nerovnost, pak platí trojúhelníková nerovnost i pro hlavní momenty setrvačnosti (viz zavedení těchto momentů ve vztahu (15.102))

$$J_1 + J_2 \ge J_3$$
, $J_2 + J_3 \ge J_1$, $J_3 + J_1 \ge J_2$. (15.201)

Že výše uvedené relace (15.201) jsou pravdivé si ukážeme pomocí vztahu (15.104), ze kterého plynou následující rovnosti

$$J_1 = \int_{(m)} (x_2^2 + x_3^2) dm$$
, $J_2 = \int_{(m)} (x_1^2 + x_3^2) dm$, $J_3 = \int_{(m)} (x_1^2 + x_2^2) dm$. (15.202)

Pro první nerovnost (15.201) pak ze vztahů pro hlavní momenty setrvačnosti (15.202) plyne, že

$$J_1 + J_2 = \int_{(m)} (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) dm \ge \int_{(m)} (x_1^2 + x_2^2) dm = J_3$$
 (15.203)

Podobně se dá ukázat platnost zbývajících relací.

Vzhledem k předpokladu $J_1 \leq J_2$ plyne z trojúhelníkové nerovnosti také podmínka, že $J_3 \leq 2J_2$. Obecně můžeme napsat relaci, že

$$J_1 \le J^{(\boldsymbol{\omega}^0)} \le J_3 \;, \tag{15.204}$$

která nám říká, že nejmenší i největší možný moment setrvačnosti dostaneme rotací kolem jedné z hlavních os setrvačnosti.

Setrvačníky dělíme podle hlavních momentů setrvačnosti na $symetrick\acute{e}$ setrvačníky, což jsou setrvačníky, které mají alespoň dva hlavní momenty setrvačnosti stejné, tj. $J_1=J_2,\,J_1=J_3,\,J_2=J_3$ nebo $J_1=J_2=J_3$. Symetrický setrvačník mající všechny hlavní momenty setrvačnosti stejné nazýváme izotropním setrvačníkem. Příkladem izotropního setrvačníku je koule, krychle, pravidelný čtyřstěn atd. Elipsoid setrvačnosti bude v tomto případě degenerován na kouli. Příkladem symetrického neizotropního setrvačníku je např. válec a pro neizotropní symetrické setrvačníky se elipsoid setrvačnosti degeneruje na rotační elipsoid. Setrvačníky, pro které platí, že $J_1 < J_2 < J_3$ nazýváme asymetrickými setrvačníky. Mezi asymetrické setrvačníky patří. např. kvádr s různě dlouhými stranami. Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že je-li jeden z hlavních momentů setrvačnosti nulový, potom se musí zbývající dva hlavní momenty setrvačnosti rovnat. Takovýto setrvačník nazýváme rotátor, který představují např. dva hmotné body rotující kolem jejich těžiště. Pokud na setrvačník nepůsobí žádné vnější síly, nazývá se volný (bezsilový) setrvačník, kdežto setrvačník podrobený působení vnějších sil se nazývá těžký (silový) setrvačník.

15.11 Eulerovy úhly a Eulerovy kinematické rovnice

Libovolnou rotaci kolem počátku souřadnic je možné realizovat pomocí tří po sobě jdoucích jednoduchými rotacemi kolem vhodně zvolených pevných os, takže dojde k transformaci původní kartézské souřadnicové soustavy x_1', x_2', x_3' na kartézskou souřadnicovou soustavu x_1, x_2, x_3 , viz obr. 15.21¹⁶. Tyto rotace popisujeme pomocí Eulerových úhlů φ , ϑ a ψ . Úhel φ se nazývá precesní úhel a představuje otočení kolem osy x_3' právě o tento úhel, viz obr. 15.21. Následně provedeme otočení kolem uzlové přímky (osy) p o tzv. nutační úhel ϑ , viz obr. 15.21. Nakonec provedeme otočení kolem osy x_3 o rotační úhel ψ , viz obr. 15.21. Rotační úhel ψ měří vlastní rotaci kolem osy x_3 , která je zpravidla totožná s osou symetrie. Nutační úhel ϑ a precesní úhel φ určují okamžitou polohu osy x_3 vůči původní čárkované soustavě, přičemž tyto úhly jsou totožné s úhly při zavedení standardních sférických souřadnic.

Jelikož je výhodnější vyjádřit pohybové rovnice v souřadnicové soustavě pevně spojené s tělesem, vyjádříme vektor úhlové rychlosti ω právě v této soustavě. S ohledem na výše popsané tři rotace si zavedeme následující tři vektory úhlových rychlostí:

- 1. $\dot{\varphi}$ vektor úhlové rychlosti při rotaci kolem osy x_3
- 2. $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}$ vektor úhlové rychlosti při rotaci kolem přímky p
- 3. $\dot{\psi}$ vektor úhlové rychlosti při rotaci kolem os
y x_3'

Složky těchto úhlových rychlostí vzhledem k souřadnicovým osám spojených s tělesem je možné pomocí Eulerových úhlů vyjádřit následujícím způsobem (viz obr. 15.21)

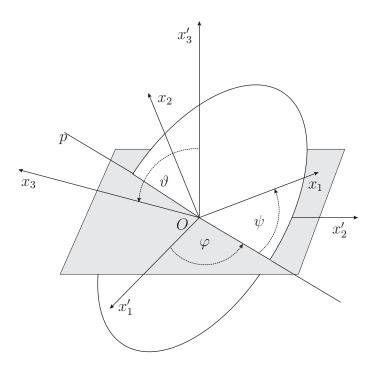
$$\dot{\varphi} = (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3) = (\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi, \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi, \dot{\varphi}\cos\vartheta), \qquad (15.205)$$

$$\dot{\vartheta} = (\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3) = (\dot{\vartheta}\cos\psi, -\dot{\vartheta}\sin\psi, 0) , \qquad (15.206)$$

$$\dot{\psi} = (\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3) = (0, 0, \dot{\psi}) . \tag{15.207}$$

¹⁵Přesněji bezmomentový.

¹⁶Z důvodu přehlednějšího zápisu následně odvozovaných vztahů jsou původní souřadnice nestandardně čárkované.



Obrázek 15.21: Eulerovy úhly.

Použitím vztahů (15.205), (15.206), (15.207) si můžeme vyjádřit vektor úhlové rychlosti ω v soustavě pevně spojené s tělesem jako

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\dot{\varphi}_1 + \dot{\vartheta}_1 + \dot{\psi}_1, \dot{\varphi}_2 + \dot{\vartheta}_2 + \dot{\psi}_2, \dot{\varphi}_3 + \dot{\vartheta}_3 + \dot{\psi}_3) = (\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi, \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi, \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \quad (15.208)$$

neboli

$$\omega_{1} = \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi ,
\omega_{2} = \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi ,
\omega_{3} = \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} .$$
(15.209)

Soustava rovnic (15.209) se označuje jako Eulerovy kinematické rovnice.

15.12 Eulerovy dynamické rovnice

Koná-li těleso pouze otáčivý pohyb, tak jeho pohyb je popsán pohybovou rovnicí (15.32). Je nutné si uvědomit, že moment působících vnějších sil v této pohybové rovnici je spojen s inerciální vztažnou soustavou, tj. je chápán jako působící v inerciální souřadné soustavě. Díky této skutečnosti je nutné levou stranu rovnice (15.32) chápat jako časovou změnu vektoru momentu hybnosti L vůči inerciální souřadné soustavě. Nyní převedeme pohybovou rovnici (15.32) do neinerciální souřadné soustavy, která je pevně spojena s rotujícím tělesem a má s inerciální souřadnou soustavou společný počátek, kolem něhož se uvažované těleso, tedy i neinerciální souřadná soustava, otáčí. Vektor momentu hybnosti lze nejjednodušeji vyjádřit v neinerciální soustavě tehdy, když zvolíme její bázi ve směru hlavních os setrvačnosti. V takovém případě můžeme pomocí vztahu (15.165) psát

$$L_1 = J_1 \omega_1 , \quad L_2 = J_2 \omega_2 , \quad L_3 = J_3 \omega_3 , \qquad (15.210)$$

kde složky J_1 , J_2 a J_3 jsou konstanty. Na základě vztahu (7.15) můžeme psát, že

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\Big|_{inerc.} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\Big|_{teleso} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} . \tag{15.211}$$

Uplatníme-li rovnost (15.211) v pohybové rovnici (15.32), potom pro jednotlivé složky můžeme psát, že

$$J_{1}\dot{\omega}_{1} + \omega_{2}L_{3} - \omega_{3}L_{2} = M_{1}^{e} ,$$

$$J_{2}\dot{\omega}_{2} + \omega_{3}L_{1} - \omega_{1}L_{3} = M_{2}^{e} ,$$

$$J_{3}\dot{\omega}_{3} + \omega_{1}L_{2} - \omega_{2}L_{1} = M_{3}^{e} .$$
(15.212)

Pomocí vztahů (15.210) dále upravíme rovnice (15.212) do následujícího tvaru

$$J_{1}\dot{\omega}_{1} - (J_{2} - J_{3})\omega_{2}\omega_{3} = M_{1}^{e} ,$$

$$J_{2}\dot{\omega}_{2} - (J_{3} - J_{1})\omega_{3}\omega_{1} = M_{2}^{e} ,$$

$$J_{3}\dot{\omega}_{3} - (J_{1} - J_{2})\omega_{1}\omega_{2} = M_{3}^{e} ,$$
(15.213)

přičemž je nutné si uvědomit, že složky vektoru momentu sil **musí být vyjádřeny v neinerciální souřadné soustavě spojené s tělesem**, což vede na funkce poměrně složitého tvaru, obecně $M_i = M_i(\varphi, \vartheta, \psi)$ (i=1,2,3), kde φ , ϑ a ψ jsou Eulerovy úhly. Rovnice (15.213) se nazývají *Eulerovy dynamické rovnice*. Jedná se o pohybové rovnice rotujícího tělesa v silovém poli. Z matematického pohledu představují tyto rovnice soustavu tří nelineárních diferenciálních rovnic. Jelikož je nutné dosadit za složky vektoru úhlové rychlosti z Eulerových kinematických rovnic (15.209, takže soustava Eulerových rovnic je pak dána nelineárními diferenciálními rovnicemi 2. řádu. Použijeme-li permutační symbol (Levi-Civitův tenzor) je možné soustavu Eulerových rovnic (15.213) přepsat do následujícího úsporného tvaru

$$(J_i - J_j)\omega_i\omega_j - \sum_{k=1}^3 (J_k\dot{\omega}_k - M_k)\varepsilon_{ijk} = 0.$$
 (15.214)

15.13 Volný setrvačník

V případě volného setrvačníku budou Eulerovy dynamické rovnice (15.213) mít následující tvar

$$J_{1}\dot{\omega}_{1} - (J_{2} - J_{3})\omega_{2}\omega_{3} = 0 ,$$

$$J_{2}\dot{\omega}_{2} - (J_{3} - J_{1})\omega_{3}\omega_{1} = 0 ,$$

$$J_{3}\dot{\omega}_{3} - (J_{1} - J_{2})\omega_{1}\omega_{2} = 0 .$$
(15.215)

V tomto případě se Eulerovy dynamické rovnice (15.215) redukují na nelineární diferenciální rovnice 1. řádu.

Budeme-li navíc uvažovat osově symetrický setrvačník, tj. $J_1 = J_2 \neq J_3$, pak se Eulerovy dynamické rovnice pro volný setrvačník dále zjednoduší do následujícího tvaru

$$(J_1 - J_3)\omega_2\omega_3 - J_1\dot{\omega}_1 = 0,$$

$$(J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 - J_1\dot{\omega}_2 = 0,$$

$$J_3\dot{\omega}_3 = 0,$$
(15.216)

kde hlavní moment setrvačnosti J_1 byl dosazen za hlavní moment setrvačnosti J_2 . Bez ztráty na obecnosti budeme předpokládat, že hmotný střed setrvačníku leží v počátku inerciální

souřadnicové soustavy. Budeme dále předpokládat, že vektor úhlové rychlosti ω neleží podél některé z hlavních os setrvačnosti, neboť by se v tomto případě jednalo o triviální pohyb setrvačníku.

Řešením poslední rovnice (15.216) dostáváme, že

$$\omega_3 = \omega_0 = konst. \tag{15.217}$$

Dosazením řešení (15.217) do zbylých dvou rovnic soustavy (15.216) po úpravě dostaneme

$$\dot{\omega}_1 = -\left(\frac{J_3 - J_1}{J_1}\omega_0\right)\omega_2 \,, \tag{15.218}$$

$$\dot{\omega}_2 = \left(\frac{J_3 - J_1}{J_1}\omega_0\right)\omega_1 \ . \tag{15.219}$$

Jelikož členy v závorkách rovnic (15.218) a (15.219) představují stejnou konstantu, zavedeme pro ni následující označení

$$\Omega = \frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_0 \,\,\,\,(15.220)$$

takže můžeme soustavu rovnic (15.218) a (15.219) psát jako

$$\dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0 \,, \tag{15.221}$$

$$\dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0 \ . \tag{15.222}$$

Tuto soustavu svázaných rovnic (15.221) a (15.222) můžeme snadno řešit např. tak, že druhou rovnici vynásobíme komplexní jednotkou j a následně obě rovnice sečteme, čímž dostaneme

$$(\dot{\omega}_1 + j\,\dot{\omega}_2) - j\,\Omega(\omega_1 + j\,\omega_2) = 0$$
. (15.223)

Zavedeme-li si následující proměnnou

$$\widehat{\omega} = \omega_1 + j \, \omega_2 \,, \tag{15.224}$$

pak je možné přepsat rovnici (15.223) jako

$$\dot{\widehat{\omega}} - j\,\Omega\widehat{\omega} = 0. \tag{15.225}$$

Pro rovnici (15.225) snadno nalezneme následující řešení

$$\widehat{\omega}(t) = A \exp(j \Omega t) ,$$
 (15.226)

kde A je integrační konstanta.

Na základě vztahu (15.224) a Eulerova vztahu pro komplexní čísla je možné toto řešení rozepsat následujícím způsobem

$$\omega_1 + j\omega_2 = A\cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t) \tag{15.227}$$

a odtud porovnáním reálných a imaginárních členů na obou stranách rovnice můžeme psát, že

$$\omega_1(t) = A\cos(\Omega t) \,, \tag{15.228}$$

$$\omega_2(t) = A\sin(\Omega t) , \qquad (15.229)$$

kde konstanta A je reálná. Za povšimnutí stojí fakt, že rovnice (15.228) a (15.229) představují parametrické rovnice kružnice.

Na základě nalezených řešení
(15.217), (15.228) a (15.229) můžeme určit velikost vektoru úhlové rychlost
i ω jako

$$|\boldsymbol{\omega}| \equiv \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^3} = \sqrt{A^2 + \omega_0^2} = konst.$$
 (15.230)

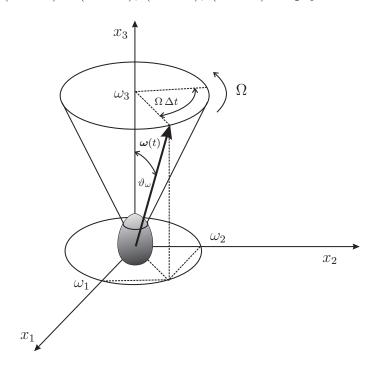
Ze vztahů (15.230) a (15.217) je vidět, že se ω a ω_3 se zachovávají, takže lze časový vývoj vektoru úhlové rychlosti ω geometricky znázornit tak, že se tento vektor pohybuje po kuželi, jehož osa je totožná s osou symetrie a vrcholový úhel tohoto kužele je dán jako

$$\tan \vartheta_{\omega} = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_3} = \frac{A}{\omega_0} \ . \tag{15.231}$$

Jinými slovy můžeme říct, že vektor ω určuje okamžitou osu otáčení, která nezůstává v čase konstatní, ale opisuje vůči volnému setrvačníku již zmíněný kužel. Tento jev se nazývá regulární precese a takovýto pohyb nazýváme precesním pohybem. Pro vektor úhlové rychlosti ω můžeme na základě vztahů pro jeho složky (15.217), (15.228), (15.229) psát

$$\boldsymbol{\omega} = A\cos(\Omega t)\boldsymbol{e}_1 + A\sin(\Omega t)\boldsymbol{e}_2 + \omega_0\boldsymbol{e}_3. \tag{15.232}$$

Použitím vztahů (15.210) a (15.217), (15.228), (15.229) dospějeme k následujícím rovnos-



Obrázek 15.22: Znázornění regulární precese.

 tem^{17}

$$L_1 = AJ_1A\cos(\Omega t) , \qquad (15.233)$$

$$L_2 = AJ_1 A \sin(\Omega t) , \qquad (15.234)$$

$$L_3 = AJ_3 A\omega_0 \ . \tag{15.235}$$

Porovnáním vztahů pro jednotlivé složky vektoru momentu hybnosti (15.233), (15.234), (15.235) a složek vektoru úhlové rychlosti (15.217), (15.228), (15.229) je zřejmé, že vektor

 $^{^{17} \}mathrm{P} \check{\mathrm{r}}$ ipomeňme si, že se jedná o symetrický setrvačník, tj. $J_1 = J_2.$

momentu hybnosti L se bude vzhledem k osám spojeným s tělesem, stejně jako vektor úhlové rychlosti ω , pohybovat po kuželi s vrcholovým úhlem

$$\tan \vartheta_L = \frac{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}{L_3} = \frac{AJ_1}{J_3\omega_0} \,. \tag{15.236}$$

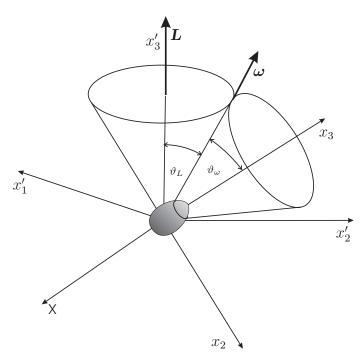
Jelikož se jedná o volný neboli bezsilový setrvačník, tak podle druhé věty impulzové platí, že vektor momentu hybnosti L = konst. pro inerciální vztažnou soustavu, takže vektor momentu hybnosti je vůči inerciální souřadnicové soustavě v klidu na rozdíl od vektoru úhlové rychlosti ω . Použijeme-li vztahu pro rotační energii (15.118) a uvážíme-li, že rotační energie je konstantní

$$T_r = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = konst. , \qquad (15.237)$$

pak ze vztahu (15.237) vyplývá, že je-li v inerciální vztažné soustavě $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{konst.}$ musí projekce vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ na vektor momentu hybnosti \boldsymbol{L} být konstantní. Provedeme následující smíšený součin

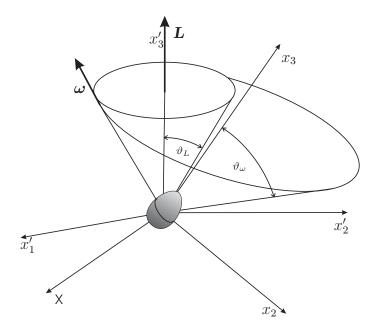
$$\mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{L} \cdot (\omega_2 \mathbf{e}_1 - \omega_1 \mathbf{e}_2) = (J_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + J_1 \omega_2 \mathbf{e}_2 + J_3 \omega_3 \mathbf{e}_3) \cdot (\omega_2 \mathbf{e}_1 - \omega_1 \mathbf{e}_2) = J_1 \omega_1 \omega_2 - J_1 \omega_2 \omega_1 = 0 . \quad (15.238)$$

Z výsledku smíšeného součinu (15.238) vyplývá, že vektory \boldsymbol{L} , $\boldsymbol{\omega}$ a \boldsymbol{e}_3 leží v jedné rovině. V případě, že vektor \boldsymbol{L} bude ležet na ose x_3' , potom pozorovatel v inerciální soustavě bude pozorovat, jak vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ opisuje kužel kolem osy x_3' . Současně vektor $\boldsymbol{\omega}$ opisuje kužel kolem osy x_3 , která je pevně spojená s tělesem (setrvačníkem). Celou situaci si můžeme graficky znázornit jako valení dvou kuželů po sobě, přičemž okamžitá přímka jejich dotyku odpovídá okamžité ose otáčení, tj. leží na ní vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$. Pro případ $J_1 < J_3$ (zploštělý setrvačník) je $\vartheta_L < \vartheta_{\omega}$ a kužel spojený s \boldsymbol{L} se valí uvnitř kužele spojeného s osou x_3 (viz obr. 15.24), zatímco pro $J_1 > J_3$ (protažený setrvačník) je $\vartheta_L > \vartheta_{\omega}$ se kužele valí vně sebe, viz obr. 15.23. V případě, že bychom popisovali volný setrvačník, avšak nesymetrický,



Obrázek 15.23: Znázornění precesních pohybů valením kuželů pro případ $\vartheta_L > \vartheta_\omega$.

pak by řešení bylo zřejmě složitější, jelikož se v tomto případě nezachovává směr ani velikost vektoru úhlové rychlosti ω .



Obrázek 15.24: Znázornění precesních pohybů valením kuželů pro případ $\vartheta_L < \vartheta_\omega$.

15.14 Těžký setrvačník otáčející se kolem pevného bodu

Uvažujme osově symetrický setrvačník $J_1 = J_2 \neq J_3$ o hmotnosti m, který se může volně otáčet v homogenním tíhovém poli s tíhovým zrychlením g kolem pevného bodu. Budeme předpokládat, že počátek soustavy pevně spojené s tělesem bude totožný s počátkem inerciální souřadnicové soustavy, takže translační kinetická energie bude nulová. Pevný bod, kolem kterého se uvažovaný setrvačník otáčí je totožný s počátkem obou souřadnicových soustav. Z důvodu snazšího popisu ztotožníme osu symetrie setrvačníku s osou x_3 , která je jednou z os souřadnicové soustavy pevně spojené se setrvačníkem, viz obr. 15.25. Vzdálenost hmotného středu od počátku označme h. Uplatníme-li předpoklad symetričnosti setrvačníku, pak kinetickou energie můžeme vyjádřit podle vztahu (15.166) jako

$$T = T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} J_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} J_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 .$$
 (15.239)

Použijeme-li Eulerovy kinematické rovnice (15.209) potom můžeme psát, že

$$\begin{split} &\omega_1^2 &= (\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi)^2 = \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\sin^2\psi + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\sin\psi\cos\psi + \dot{\vartheta}^2\cos^2\psi\;,\\ &\omega_2^2 &= (\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi)^2 = \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\cos^2\psi - 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\sin\psi\cos\psi + \dot{\vartheta}^2\sin^2\psi. \end{split}$$

$$\omega_3^2 &= (\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2\;.$$

Odtud vyplývá, že

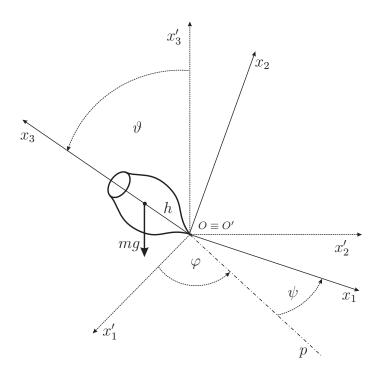
$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \ . \tag{15.241}$$

Použití kvadrátu třetí Eulerovy kinematické rovnice (15.240) a rovnosti (15.241) je možné vyjádřit rotační energii (15.239) jako

$$T = T_r = \frac{1}{2} J_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} J_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2.$$
 (15.242)

Jelikož potenciální energie uvažovaného setrvačníku

$$U = mgh\sin\vartheta \,, \tag{15.243}$$



Obrázek 15.25: Rotace těžkého setrvačníku kolem pevného bodu.

je možné Lagrangeovu funkci L=T-U vyjádřit jako

$$L = \frac{1}{2}J_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2 - mgh\sin\vartheta$$
 (15.244)

Protože souřadnice φ a ψ jsou cyklické souřadnice, dostáváme tímto dva integrály pohybu, neboli sdružené zobecněné hybnosti k těmto souřadnicím jsou konstantami pohybu, tj.

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (J_1 \sin^2 \vartheta + J_3 \cos^2 \vartheta)\dot{\varphi} + J_3\dot{\psi}\cos \vartheta = konst., \qquad (15.245)$$

$$p_{\psi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = konst. \tag{15.246}$$

Rovnici (15.246) je možné řešit vzhledem k proměnné $\dot{\psi}$, čímž dostaneme

$$\dot{\psi} = \frac{p_{\psi} - J_3 \dot{\varphi} \cos \vartheta}{J_3} \ . \tag{15.247}$$

Dosazením tohoto výsledku do rovnice (15.245) získáme následující rovnost

$$(J_1 \sin^2 \vartheta + J_3 \cos^2 \vartheta)\dot{\varphi} + (p_{\psi} - J_3 \dot{\varphi} \cos \vartheta) \cos \vartheta = p_{\omega}, \qquad (15.248)$$

kterou je možné dále upravit do následujícího tvaru

$$(J_1 \sin^2 \vartheta)\dot{\varphi} + p_\psi \cos \vartheta = p_\varphi . \tag{15.249}$$

Z rovnice (15.249) pak dostáváme, že

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \vartheta}{J_1 \sin^2 \vartheta} \,. \tag{15.250}$$

Dosadíme-li výsledek (15.250) do výsledku (15.247), pak po úpravě dospějeme k následujícímu vztahu

$$\dot{\psi} = \frac{p_{\psi}}{J_3} - \frac{(p_{\varphi} - p_{\psi}\cos\theta)\cos\theta}{J_1\sin^2\theta} . \tag{15.251}$$

Jelikož řešený problém představuje podle předpokladu konzervativní systém, pak celková mechanická energie se zachovává, tedy pomocí vztahů (15.242) a (15.243) dostáváme, že

$$E = T + U = \frac{1}{2}J_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2 + mgh\cos\vartheta = konst.$$
 (15.252)

Využijeme-li třetí Eulerovy kinematické rovnice (15.209), potom je možné upravit rovnost (15.252) jako

$$E = \frac{1}{2}J_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 + mgh\cos \theta = konst.$$
 (15.253)

Pomocí třetí Eulerovy kinematické rovnice (15.209) je možné vyjádřit rovnost (15.247) následujícím způsobem

$$p_{\psi} = J_3 \omega_3 = konst. , \qquad (15.254)$$

odtud pak

$$J_3\omega_3^2 = \frac{p_\psi^2}{J_3} = konst. {(15.255)}$$

Na základě rovnosti (15.255) vyplývá, že i $E-J_3\omega_3^2/2=konst.$, takže můžeme psát, že

$$E' = E - \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}J_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + mgh\cos\theta = konst.$$
 (15.256)

Dosazením z rovnice (15.250) do rovnosti (15.256) po úpravě dostaneme, že

$$E' = \frac{1}{2}J_1\dot{\vartheta}^2 + \frac{(p_{\varphi} - p_{\psi}\cos\vartheta)^2}{2J_1\sin^2\vartheta} + mgh\cos\vartheta.$$
 (15.257)

Zavedeme-li "efektivní potenciální energii"

$$U_{ef}(\vartheta) = \frac{(p_{\varphi} - p_{\psi}\cos\vartheta)^2}{2J_1\sin^2\vartheta} + mgh\cos\vartheta , \qquad (15.258)$$

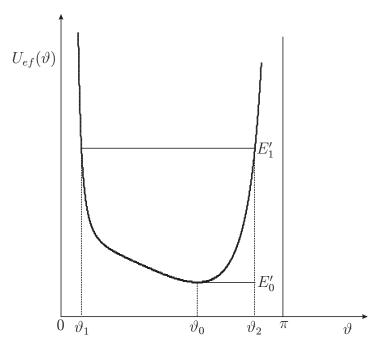
potom je možné přepsat rovnici (15.257) jako

$$E' = \frac{1}{2}J_1\dot{\vartheta}^2 + U_{ef}(\vartheta) . {15.259}$$

Rovnici (15.259) můžeme řešit metodou separace proměnných, čímž bychom získali řešení $t(\vartheta)$. Jeho následnou inverzí bychom obdrželi funkci $\vartheta(t)$, jejímž dosazením do vztahů (15.250) a (15.251) bychom dostali časové závislosti Eulerových úhlů coby zobecněných souřadnic, tj. $\vartheta(t), \, \varphi(t), \, \psi(t)$, které plně popisují těžký setrvačník a tudíž představují vlastní řešení dané úlohy. Toto principiální řešení však je poměrně náročné a vede na komplikovaná vyjádření pomocí eliptických integrálů, což přesahuje rámec této publikace. Proto provedeme kvalitativní řešení problému způsobem podobným jako při řešení pohybu hmotného bodu v centrálním silovém poli. Tímto získáme představu o základních vlastnostech chování těžkého setrvačníku, aniž bychom znali ono explicitní řešení.

Na obrázku 15.26 je zachycen průběh efektivního potenciálu těžkého setrvačníku (15.258). Jak ze vztahu (15.258), tak z obrázku 15.26 je patrné, že efektivní potenciál $U_{ef}(\vartheta)$ má dvě asymptoty, a to $\vartheta=0$ a $\vartheta=\pi$, které vymezují fyzikálně přijatelnou oblast pohybu uvažovaného setrvačníku. Z obrázku 15.26 je patrné, že pro jakoukoliv energii E' (např. E'_1) je sklon od osy x'_3 těžkého setrvačníku omezen na interval $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$, kde hodnoty ϑ_1 a ϑ_2 jsou kořeny pravé strany rovnice

$$\dot{\vartheta} = \frac{2}{J_1} [E' - U_{ef}(\vartheta)] ,$$



Obrázek 15.26: Průběh efektivního potenciálu těžkého setrvačníku.

kterou získáme úpravou rovnice (15.259).

V případě, že $E' = E'_0 = U_{ef}(\vartheta_0) = U_{efmin}$, je sklon těžkého setrvačníku dán pevnou hodnotou ϑ_0 , a tudíž setrvačník koná ustálený precesní pohyb. Hodnotu ϑ_0 získáme tak, že položíme rovnu nule derivaci efektivního potenciálu U_{ef} (15.258) podle proměnné ϑ , tedy

$$\frac{\mathrm{d}U_{ef}}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{-\cos\vartheta(p_{\varphi} - p_{\psi}\cos\vartheta)^{2} + p_{\psi}\sin^{2}\vartheta(p_{\varphi} - p_{\psi}\cos\vartheta)}{J_{1}\sin^{3}\vartheta} - mgh\sin\vartheta = \frac{-\cos\vartheta(p_{\varphi} - p_{\psi}\cos\vartheta)^{2} + p_{\psi}\sin^{2}\vartheta(p_{\varphi} - p_{\psi}\cos\vartheta) - mghJ_{1}\sin^{4}\vartheta}{J_{1}\sin^{3}\vartheta} = 0. \quad (15.260)$$

Budeme předpokládat,že hodnotu $\vartheta = \vartheta_0$, pro kterou je rovnost (15.260) rovna nule, známe a dosadíme ji do lomené funkce (15.260)

$$\frac{-\cos\vartheta_0(p_{\varphi} - p_{\psi}\cos\vartheta_0)^2 + p_{\psi}\sin^2\vartheta_0(p_{\varphi} - p_{\psi}\cos\vartheta_0) - mghJ_1\sin^4\vartheta_0}{J_1\sin^3\vartheta_0} = 0.$$
 (15.261)

Zavedeme si následující proměnnou

$$\beta = p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta_0 , \qquad (15.262)$$

kterou dosadíme do čitatele lomené funkce (15.262) a položíme tento čitatel roven nule¹⁸, tedy

$$(\cos \theta_0)\beta^2 - (p_\psi \sin^2 \theta_0)\beta + (mghJ_1 \sin^4 \theta_0) = 0.$$
 (15.263)

Rovnice (15.262) představuje kvadratickou rovnici, pro kterou dostaneme následující řešení

$$\beta_{\pm} = \frac{p_{\psi} \sin^2 \theta_0}{2 \cos \theta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgh J_1 \cos \theta_0}{p_{\psi}^2}} \right) . \tag{15.264}$$

Protože jsou fyzikálně přijatelná pouze reálné hodnoty β_{\pm} , musí být hodnota pod odmocninou ve výrazu (15.264) kladná. Uvažujme nejprve případ kdy $\vartheta_0 < \pi/2$. Potom proměnná β_{\pm} nabývá reálných hodnot jen v případě, že bude splněna následující podmínka

$$p_{\psi}^2 \ge 4mghJ_1\cos\theta_0 \ . \tag{15.265}$$

¹⁸Má-li být rovnice (15.262) rovna nule, musí být roven nule její čitatel.

Použijeme-li vztahu (15.254), pak můžeme tuto podmínku upravit jako

$$\omega_3 \ge \frac{2}{J_3} \sqrt{4mghJ_1 \cos \vartheta_0} \ . \tag{15.266}$$

Podmínka (15.266) nám říká, že ustálená precese, za předpokladu $\vartheta_0 < \pi/2$, může nastat jen v případě, že úhlová rychlost ω_3 otáčení těžkého setrvačníku kolem osy x_3 (osy symetrie) je větší nebo rovna mezní hodnotě, která je daná touto podmínkou.

Dosadíme-li nalezené hodnoty (15.264) proměnné β do vztahu (15.250), pak dostaneme dvě možné hodnoty pro úhlovou rychlost $\dot{\varphi}^0$ pro stacionární precesní pohyb, tj.

$$\dot{\varphi}_{\pm}^{0} = \frac{\beta_{\pm}}{J_{1}\sin^{2}\vartheta_{0}} \,. \tag{15.267}$$

Hodnota $\dot{\varphi}^0_+$ odpovídá rychlé precesi, kdežto hodnota $\dot{\varphi}^0_-$ precesi pomalé. Dále předpokládejme, že se uvažovaný setrvačník otáčí natolik rychle ($\omega_3 \gg 1$ neboli $p_\psi \gg 1$), že můžeme považovat zlomek pod odmocninou výrazu (15.264) za malý. Provedeme-li binomický rozvoj odmocniny v tomto vztahu, pak můžeme psát, že

$$\sqrt{1 - \frac{4mghJ_1\cos\vartheta_0}{p_{\psi}^2}} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{4mghJ_1\cos\vartheta_0}{p_{\psi}^2} . \tag{15.268}$$

Dosadíme-li v tomto případě za odmocninu ve výrazu (15.264) její binomický rozvoj (15.268) a následně dosadíme do rovnice (15.267), pak při uvážení

$$\frac{1}{2} \frac{4mgh J_1 \cos \vartheta_0}{p_{\psi}^2} \ll 1$$

a vztahu (15.254) můžeme po úpravě psát

$$\dot{\varphi}_{+}^{0} \cong \frac{J_3 \omega_3}{J_1 \cos \vartheta_0} \,, \tag{15.269}$$

$$\dot{\varphi}_{-}^{0} \cong \frac{mgh}{J_3\omega_3} \,. \tag{15.270}$$

Při ustáleném precesním pohybu těžkého setrvačníku obvykle pozorujeme úhlovou rychlost (15.270).

V případě, že $\vartheta_0 > \pi/2$, pak je výraz pod odmocninou nalezeného řešení (15.264) vždy kladný, takže v tomto případě neexistuje žádná podmínka kladená na úhlovou rychlost ω_3 . Pro případ, že $\vartheta_0 > \pi/2$, má rychlá precese stejný směr jako v případě, kdy $\vartheta_0 < \pi/2$. Avšak pomalá precese probíhá v opačném směru oproti případu $\vartheta_0 < \pi/2$, tj.

$$\dot{\varphi}_{-}^{0} \cong -\frac{mgh}{J_3\omega_3} \,. \tag{15.271}$$

Budeme-li uvažovat obecný případ, kdy $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$, potom z rovnice (15.250) vyplývá, že $\dot{\varphi}$ může či nemůže měnit znaménko s tím, jak se s časem mění hodnota nutačního úhlu $\vartheta(t)$ v uvažovaném intervalu. Zda se bude či nebude měnit znaménko závisí na hodnotách p_{ψ} a p_{φ} , jež se vyskytují v rovnici (15.250). Je-li $\dot{\varphi} = 0$, pak se precese setrvačníku zastaví. Tato situace nastane tehdy, když čitatel na pravé straně rovnice (15.250) je roven nule, tedy

$$p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \vartheta = 0. \tag{15.272}$$

Jsou-li zobecněné hybnosti p_ψ a p_φ rozdílné od nuly, potom rovnice je splněna pro nutační úhel ϑ_s , který je dán vztahem

$$\cos \vartheta_s = \frac{p_{\varphi}}{p_{\psi}} \,. \tag{15.273}$$

Pro nutační úhel $\varphi(t) = \varphi_s$ dojde k zastavení precesního pohybu. Tedy s přechodem nutačního úhlu přes hodnotu ϑ_s dojde ke změně znaménka úhlové rychlosti precesního pohybu $\dot{\varphi}$. Takže pro hodnoty $\varphi(t) > \varphi_s$ je $\dot{\varphi} > 0$, kdežto pro hodnoty $\varphi(t) < \varphi_s$ je $\dot{\varphi} < 0$.

Pohyb setrvačníku se dá výhodně zobrazit pomocí křivky, kterou opisuje koncový bod jednotkového vektoru namířeného v kladném směru pohyblivé osy (osy symetrie) x_3 (tento vektor se nazývá apex). Je to sférická křivka a její souřadnice na kouli odpovídají úhlům ϑ a φ . Z předchozího je vidět, že tato křivka musí ležet mezi kružnicemi ϑ_1 a ϑ_2 , přičemž $\dot{\vartheta}$ je na těchto kružnicích rovno nule, jelikož se jedná o body obratu.

Pro $\vartheta \in \langle \vartheta_1; \vartheta_2 \rangle$ mohou nastat následující případy:

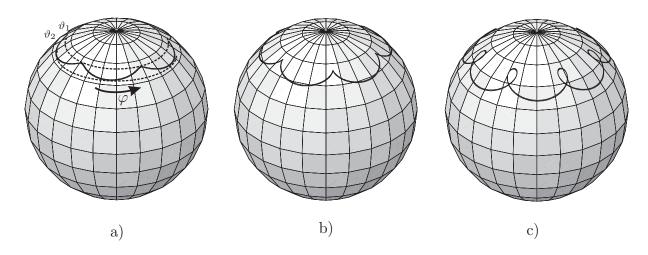
- 1. $\vartheta_s < \vartheta_1$; v tomto případě je zajištěno, že $\vartheta(t) > \vartheta_s$, takže $\dot{\varphi} > 0$ a tudíž $\varphi(t)$ je monotónně rostoucí funkcí, tj. uvažovaný setrvačník koná kolem osy x_3' monotónní precesní pohyb a osa symetrie x_3 osciluje mezi hodnotami ϑ_1 a ϑ_2 . Tento pohyb osy symetrie se nazývá nutačním pohybem neboli nutací. Tvar křivky opisované apexem je znázorněn na obrázku 15.27 a).
- 2. $\vartheta_s = \vartheta_1$; v tomto případě je funkce $\varphi(t)$ rovněž rostoucí, avšak v bodech $\vartheta(t) = \vartheta_1$ dochází k zastavení precese. Tvar křivky opisované apexem pro tento případ je znázorněn na obrázku 15.27 b).

Pro tento případ platí, že

$$\dot{\varphi}|_{\varphi=\varphi_1}=0\;,\qquad \dot{\vartheta}|_{\vartheta=\vartheta_1}=0\;.$$

Tento případ odpovídá těžkému setrvačníku, který je nejdříve roztočen kolem své osy a následně je vychýlen, takže počáteční podmínky jsou $\vartheta=\vartheta_1$ a $\dot{\varphi}=\dot{\vartheta}=0$. Pro případ 1. a níže uvedený případ 3. apex popisuje křivky, které odpovídají pohybu, u něhož počáteční úhlová rychlost $\dot{\varphi}$ je buď ve směru nebo v protisměru směru precese.

3. $\vartheta_1 < \vartheta_s < \vartheta_2$; v tomto případě dochází ke změně znaménka pro úhlovou rychlost $\dot{\varphi}$ pro mezní nutační úhly ϑ_1 a ϑ_2 . Průsečík křivky opisované apexem s rovnoběžkou ϑ_s na jednotkové kouli vymezuje body, v nichž přestává funkce $\varphi(t)$ růst (v těchto bodech se zastaví precese) a začne dočasně klesat, takže křivka opisovaná apexem má podobu smyček, viz 15.27 c).



Obrázek 15.27: Sférické křivky opisované apexem.

Kapitola 16

Statika tuhého tělesa

Statika je samostatným oborem dynamiky a zabývá se vyšetřováním podmínek rovnováhy sil působících na těleso a skládáním sil.

16.1 Skládání sil

V pohybových rovnicích (15.31) a (15.32) je silové působení na tuhé těleso vystiženo výslednicí vnějších sil působících na těleso

$$\mathbf{F}^e = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{F}_{\alpha}^e \tag{16.1}$$

a výsledným momentem vnějších sil působících na těleso

$$\mathbf{M}^e = \sum_{\alpha=1}^{N} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^e) = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{M}_{\alpha}^e . \tag{16.2}$$

Různé soustavy vnějších sil působících na těleso, u nichž výslednice \mathbf{F}^e a výsledný moment \mathbf{M}^e vzhledem k témuž bodu jsou stejné, mají na těleso stejný dynamický účinek. O takových soustavách sil říkáme, že jsou dynamicky ekvivalentní.

Přímý a také často nejjednodušší postup, jak zjistit dynamický účinek soustavy sil, je vypočítat podle vztahu (16.1) výslednici sil \mathbf{F}^e a podle vztahu (16.2) výsledný moment \mathbf{M}^e soustavy vnějších sil vzhledem ke zvolenému počátku soustavy souřadnic. Zejména pro technické aplikace se rozvinula řada metod, jak nahrazovat složitější soustavy sil působících na těleso jednoduššími dynamicky ekvivalentními soustavami.

Nejprve si ukážeme, jak závisí výsledný moment vnějších sil (16.2) na volbě bodu, vůči kterému ho počítáme. Počátek souřadnicové soustavy, v které je moment (16.2) počítán, označíme O. Nyní posuneme počátek souřadnicovém soustavy o vektor \boldsymbol{l} , takže nový počátek souřadnicové soustavy se bude nacházet v místě O', viz obr. 16.1. Z tohoto obrázku je vidět, že

$$\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha}' + \mathbf{l} \ . \tag{16.3}$$

Dosazením tohoto vztahu do vztahu (16.2) dostaneme

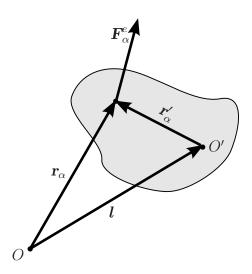
$$\mathbf{M}^{e} = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{e} = \sum_{\alpha=1}^{N} (\mathbf{r}_{\alpha}^{\prime} + \mathbf{l}) \times \mathbf{F}_{\alpha}^{e} = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha}^{\prime} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{e}}_{\mathbf{M}^{\prime e}} + \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{l} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{e} = \mathbf{M}^{\prime e} + \mathbf{l} \times \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{F}_{\alpha}^{e} , \quad (16.4)$$

kde $\mathbf{M}'^e = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}'_{\alpha} \times \mathbf{F}^e_{\alpha}$ je celkový moment vnějších sil vzhledem k počátku O'. Odtud s ohledem na vztah (16.1) dostaneme

$$\mathbf{M}^{\prime e} = \mathbf{M}^e - \mathbf{l} \times \mathbf{F}^e . \tag{16.5}$$

Tato rovnice představuje hledaný vztah mezi momenty sil \mathbf{M}'^e a \mathbf{M}^e , a který můžeme interpretovat tímto způsobem:

Změníme-li počátek souřadnicové soustavy, vůči kterému počítáme výsledný moment vnějších sil působících na těleso, musíme od původního výsledného momentu \mathbf{M}^e odečíst vektorový součin vektoru \mathbf{l} , o který jsme počátek posunuli, a výslednice vnějších sil \mathbf{F}^e , abychom dostali vyjádření výsledného momentu sil \mathbf{M}'^e vzhledem k novému počátku souřadnic O'. Změna počátku neovlivní výslednici vnějších sil \mathbf{F}^e .



Obrázek 16.1: Posunutí počátku souřadnicové soustavy.

Působí-li v místě \mathbf{r}_A na těleso síla \mathbf{F}^e , lze ji přenést do libovolného jiného bodu působiště podél přímky p, která prochází bodem o polohovém vektoru \mathbf{r}_A ve směru vektoru síly \mathbf{F}^e , viz obr. 16.2. Pro tuto přímku používáme označení silová přímka (vektorová přímka nebo také nositelka). S ohledem na vztah (16.1) je zřejmé, že posunutím působiště síly po silové přímce se její příspěvek k výsledné síle nemění, tj. výslednice sil je pro obě polohy působiště síly stejná. Vyšetříme nyní, jak se změní moment síly vzhledem k počátku posuneme-li její působiště opět po silové přímce. Vyjdeme-li z definičního vztahu momentu síly (12.2) a obrázku 16.2, tak můžeme psát

$$\mathbf{r}_B \times \mathbf{F}^e = (\mathbf{r}_A + \Delta \mathbf{r}) \times \mathbf{F}^e = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}^e + \underbrace{\Delta \mathbf{r} \times \mathbf{F}^e}_{=0} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}^e ,$$
 (16.6)

neboť $\Delta \boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{F}^e$.

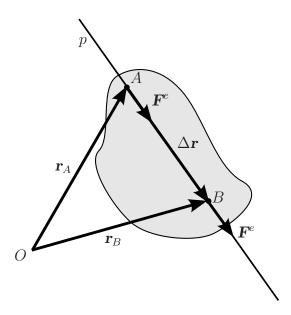
Odtud plyne závěr, že účinek síly na těleso se nemění, když její působiště posuneme podél silové přímky.

Na obrázku 16.3 je znázorněna další často uvažovaná konstrukce pro skládání dvou sil působících na těleso, jejichž silové přímky jsou různoběžné a protínají se v bodě P. Předpokládejme, že v bodě A působí síla \mathbf{F}_1^e a v bodě B síla \mathbf{F}_2^e . Tyto síly přesuneme po jejich silových přímkách do průsečíku P, kde je vektorově sečteme $\mathbf{F}^e = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_2^e$. Nahradíme-li síly \mathbf{F}_1^e a \mathbf{F}_2^e silou \mathbf{F}^e , nemá tato náhrada vliv na výslednici vnějších sil ze vztahu (16.1). Ze vztahu (16.6) plyne, že moment síly $\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1^e$, působí-li síla \mathbf{F}_1^e v bodě A, je stejný jako moment $\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_1^e$. Obdobně platí, že $\mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_2^e = \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_2^e$. Protože pro vektorový součin platí distributivní zákon, tak dostaneme

$$\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_1^e + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_2^e = \mathbf{r}_P \times (\mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_2^e) = \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}^e$$
 (16.7)

Posuneme-li sílu \mathbf{F}^e z bodu P do nějakého bodu C ležícího na silové přímce síly \mathbf{F}^e , musí dle vztahu (16.6) platit

$$\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}^e = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}^e \ . \tag{16.8}$$



Obrázek 16.2: Posunutí působiště síly po silové přímce.

Získané výsledky můžeme shrnout, čímž dostáváme

$$\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_1^e + \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_2^e = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}^e . \tag{16.9}$$

Z tohoto výsledku je zřejmé, že síla \mathbf{F}^e v bodě C je dynamicky ekvivalentní působení dvou sil, tedy síle \mathbf{F}_1^e působící v bodě A a síle \mathbf{F}_2^e působící v místě B.

Na obrázku 16.4 je zachycen způsob, jak složit dvě rovnoběžné síly \mathbf{F}_1^e a \mathbf{F}_2^e ležící ve stejné rovině. Vzhledem k tomu, že uvažované síly jsou rovnoběžné, jejich silové přímky se neprotínají v žádném bodě. Abychom mohli použít výše uvedenou konstrukci pro skládání různoběžných sil ležících v rovině, přičteme v místech působení uvažovaných sil pomocné síly \mathbf{F}_0^e a $-\mathbf{F}_0^e$. Tyto pomocné síly budou ležet na společné silové přímce p_0 procházející působišti sil \mathbf{F}_1^e a \mathbf{F}_2^e (body A a B). Je zřejmé, že přičtením pomocných sil, které leží na společné přímce, jsme vlastně přičetli nulový vektor $\mathbf{F}_0^e - \mathbf{F}_0^e = \mathbf{0}$, takže se silové poměry nezměnily. Přičteme-li pomocnou sílu $-\mathbf{F}_0^e$ k síle \mathbf{F}_1^e dostaneme sílu $\mathbf{F}_1^{e'} = \mathbf{F}_1^e + (-\mathbf{F}_0^e)$. Podobně vektorovým sečtením sil \mathbf{F}_0^e a \mathbf{F}_2^e dostaneme sílu $\mathbf{F}_2^{e'} = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_0^e$. Síly $\mathbf{F}_1^{e'}$ a $\mathbf{F}_2^{e'}$ jsou již síly různoběžné, takže k jejich složení můžeme použít výše uvedené metody. Tedy složením těchto sil dostaneme výslednou sílu (výslednici)

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F}_1^{e'} + \mathbf{F}_2^{e'} = \mathbf{F}_1^e + (-\mathbf{F}_0^e) + \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_0^e = \mathbf{F}_1^e + \mathbf{F}_2^e . \tag{16.10}$$

Její silová přímka p protíná silovou přímku p_0 v bodě C. Porovnáním odpovídajících si příslušných trojúhelníků z obrázku 16.4 dostaneme

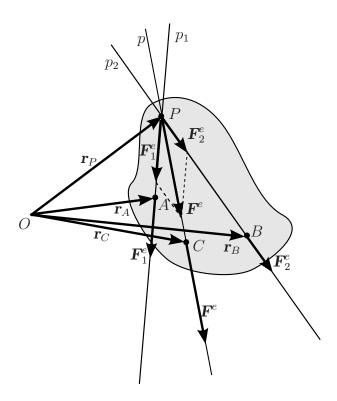
$$\frac{l_1}{|PC|} = \frac{F_1^e}{F_0^e} \,, \quad \frac{l_2}{|PC|} = \frac{F_2^e}{F_0^e} \,, \tag{16.11}$$

kde $l_1 = |AC|$ a $l_2 = |CB|$. Odtud

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{F_2^e}{F_1^e} \quad \text{nebo} \quad F_1^e l_1 = F_2^e l_2 \ . \tag{16.12}$$

Uvažujme nyní případ, kdy na těleso působí soustava N sil, které nemají obecně společné působiště, ale jejich silové přímky se protínají v jednom bodě P o polohovém vektoru \mathbf{r}_P . Posuneme všechny tyto síly do bodu P a sečteme je. Součtem dostaneme výslednici sil

$$\mathbf{F}^e = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\alpha}^e , \qquad (16.13)$$



Obrázek 16.3: Skládání dvou různoběžných sil ležících v jedné rovině.

jejíž působiště bude v bodě P o polohovém vektoru \mathbf{r}_P . Pro výsledný moment síly vzhledem k počátku dostáváme

$$\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}^e = \mathbf{r}_P \times \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\alpha}^e = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_P \times \mathbf{F}_{\alpha}^e = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{M}_{\alpha}^e = \mathbf{M}^e$$
 (16.14)

Odtud plyne, že moment výslednice soustavy sil protínajících se v jednom bodě P vzhledem k počátku O je roven vektorovému součtu momentů složkových sil k témuž počátku O. Tato věta se nazývá věta Varignonova.

Uvažujme nyní případ skládání dvou sil, které jsou stejně velké, ale nesouhlasně rovnoběžné (mají stejný směr, ale opačnou orientaci a jejich silové přímky jsou rovnoběžné). V takovémto případě je vektorový součet těchto sil nulový, $\mathbf{F}^e + (-\mathbf{F}^e) = \mathbf{0}$. Tyto dvě síly představují nejjednodušší soustavu sil, kdy výslednice sil ze (16.1) je nulová, ale součet momentů sil ze vztahu (16.2) je nenulový.

Na obrázku 16.5 je znázorněna takováto soustava sil, kterou nazýváme dvojice sil. Použitím vztahu (16.2) s ohledem na tento obrázek dostaneme

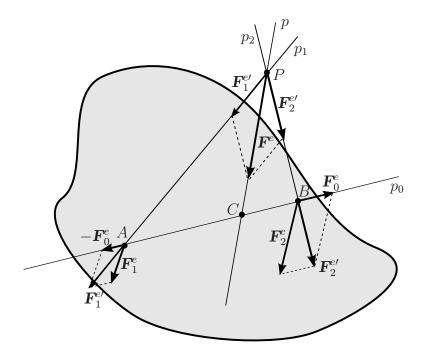
$$\mathbf{M}^e \equiv \mathbf{M}^D = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}^e + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}^e) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}^e = \mathbf{d} \times \mathbf{F}^e , \qquad (16.15)$$

 \mathbf{M}^D nazýváme moment dvojice sil a vektor \mathbf{d} spojuje působiště uvažovaných sil. Smysl vektoru \mathbf{d} volíme tak, aby směřoval k působišti té z obou sil, se kterou vektorovým násobením v pořadí $\mathbf{d} \times \mathbf{F}^e = \mathbf{M}^D$ vytvoří moment dvojice sil.

Změníme-li počátek soustavy souřadnic, vektor \mathbf{F}^e ani vektor \mathbf{d} se tímto nezmění. Díky této skutečnosti, na rozdíl od obecného momentu síly, nemusíme u momentu silové dvojice uvažovat o bodu, vůči kterému je počítán.

Z rovnice (16.15) elementárně plyne, že velikost momentu silové dvojice je roven součinu velikosti síly a kolmé vzdálenosti l rovnoběžných silových přímek obou sil, tedy

$$M^D = lF^e (16.16)$$



Obrázek 16.4: Skládání dvou rovnoběžných sil ležících v jedné rovině.

Dále uvažujme případ, kdy na těleso působí v bodě A o polohovém vektoru \mathbf{r}_A síla \mathbf{F}^e , viz obr. 16.6.

Na obrázku 16.7 je zachyceno to samé těleso, na které působí tři síly, jejichž výslednice dá sílu \mathbf{F}^e . Sečtěme momenty těchto tří sil

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}^e = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}^e + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}^e + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}^e) = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}^e + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}^e = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}^e + \mathbf{M}^D$$
. (16.17)

Výsledek (16.17) můžeme slovně popsat takto: Přeneseme-li sílu \mathbf{F}^e z bodu A do bodu B, její dynamický účinek na těleso se nezmění, přidáme-li k síle \mathbf{F}^e v bodu B silovou dvojici o momentu $\mathbf{M}^D = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}^e$.

Tímto způsobem můžeme přenést všechny síly působící na těleso do hmotného středu tělesa \mathbf{r}_S . Přenesením všech sil do hmotného středu se zřejmě nezmění výslednice těchto sil (16.1). Pro kompenzaci účinků spojených s přenesením sil musíme připojit N momentů dvojic sil, jejichž vektorovým součtem dostaneme výsledný moment dvojice sil \mathbf{M}_V^D

$$\mathbf{M}_{V}^{D} = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{M}_{\alpha}^{D} = \sum_{\alpha=1}^{N} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{S}) \times \mathbf{F}_{\alpha}^{e} = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{e} - \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{r}_{S} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{e}.$$
(16.18)

S ohledem na vztahy (16.1) a (16.2) můžeme tento výsledek dále upravit

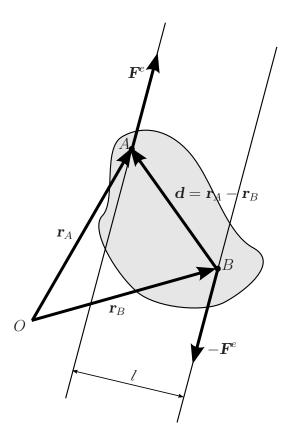
$$\mathbf{M}_{V}^{D} = \mathbf{M}^{e} - \mathbf{r}_{S} \times \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{F}_{\alpha}^{e} = \mathbf{M}^{e} - \mathbf{r}_{S} \times \mathbf{F}^{e} . \tag{16.19}$$

Tedy

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{M}_V^D + \mathbf{r}_S \times \mathbf{F}^e \ . \tag{16.20}$$

Z tohoto výsledku plyne, že přenesením sil do hmotného středu tělesa a přidáním kompenzujících momentů silových dvojic se nezmění výsledný moment vnějších sil působících na těleso. Tímto jsme rovněž ukázali, že nová soustava sil po přidání momentu výsledné silové dvojice \mathbf{M}_{V}^{D} je dynamicky ekvivalentní s původní soustavou, kde síly \mathbf{F}_{α}^{e} se nacházely v místech \mathbf{r}_{α} . Posuneme-li bod, vůči kterému počítáme výsledný moment vnějších sil působících na těleso, do hmotného středu, potom podle vztahu (16.5) dostáváme

$$\mathbf{M}_{S}^{e} = \mathbf{M}^{e} - \mathbf{r}_{S} \times \mathbf{F}^{e} . \tag{16.21}$$



Obrázek 16.5: Moment dvojice sil.

Porovnání tohoto vztahu se vztahem (16.19) nám dá výsledek

$$\mathbf{M}_{V}^{D} = \mathbf{M}_{S}^{e} , \qquad (16.22)$$

který nám říká, že výsledný moment vnějších sil působících na těleso počítaný vůči hmotnému středu tělesa je roven momentu výsledné silové dvojice působící na těleso.

Za povšimnutí stojí skutečnost, že v případě nulové výsledné síly vnějších sil působících na těleso ($\mathbf{F}^e = \mathbf{0}$) je podle vztahu (16.5) výsledný moment vnějších sil \mathbf{M}^e nezávislý na volbě bodu, vůči kterému je počítán a dle rovnice (16.19) je roven momentu výsledné silové dvojice.

16.2 Rovnováha tuhého tělesa

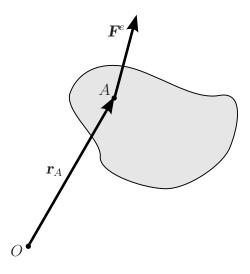
Obecně jsou podmínky rovnováhy tuhého tělesa stanoveny takto: Těleso je v rovnováze, když výslednice vnějších sil, která na něj působí, je nulová,

$$\mathbf{F}^e = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{\alpha}^e = \mathbf{0} \tag{16.23}$$

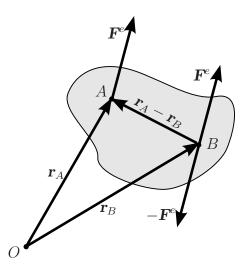
a výsledný moment vnějších sil, které na něj působí, je nulový,

$$\boldsymbol{M}^{e} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{M}_{\alpha}^{e} = \boldsymbol{0} . \tag{16.24}$$

Je-li těleso před působením vnějších sil, které splňují podmínky (16.23) a (16.24), v klidu, zůstane v klidu i nadále. Tento případ se označuje jako *statická rovnováha*. Není-li těleso před působením vnějších sil splňujících podmínky (16.23) a (16.24) v klidu, může konat řadu



Obrázek 16.6: Situační obrázek.

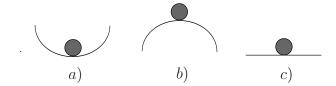


Obrázek 16.7: Zachování dynamického účinku při přesunu síly.

různých pohybů. Tedy podmínky rovnováhy (16.23) a (16.24) jsou nutnými, ale ne postačujícími, podmínkami pro to, aby těleso bylo v klidu.

O druhu rovnovážné polohy rozhoduje změna ΔU potenciální energie tělesa při jeho nepatrném vychýlení z této polohy. Z následujících tři příkladů vyplývají tři různé případy rovnovážných poloh:

- 1. Umístíme-li v tíhovém poli do kulové misky kouli, pak se koule v nejnižším bodě misky, viz obr. 16.8 a), nachází v rovnovážné poloze stálé~(stabilni). Potenciální energie má v tomto bodě minimum $(\Delta U > 0)$.
- 2. Umístíme-li kouli na obrácenou kulovou misku, pak jsou rovnovážné podmínky splněny, když se koule nachází v nejvyšším bodě této misky, viz obr. 16.8 b). V tomto případě se jedná o rovnovážnou polohu vratkou (labilni). Potenciální energie má v tomto bodě maximum ($\Delta U < 0$).
- 3. Postavíme-li kouli na vodorovnou podložku, viz obr. 16.8 c), pak podmínky rovnováhy jsou splněny pro každou polohu koule na této podložce. Rovnovážná poloha je volná (indiferentni) a rovnováha odpovídá případu, kdy potenciální energie je konstantní ($\Delta U = 0$). Koule může být v klidu nebo se pohybovat tak, že její hmotný střed má stálou rychlost.



Obrázek 16.8: Tři druhy rovnovážné polohy.

Kapitola 17

Mechanika kontinua

Při popisu pohybu deformace elastických těles či pohybu tekutin je potřeba vybudovat takový model, který bude co nejvěrněji odrážet realitu a současně musí být tento model natolik jednoduchý, aby ho bylo možné bez větších obtíží matematicky popsat. Takovýmto modelem je model kontinua (spojitého prostředí), tj. tělesa, resp. prostředí, v němž je hmota spojitě rozložena, a které je současně poddajné, tj. deformuje se působením vnějších sil. Spojité rozložení hmoty je tedy základní charakteristikou kontinua, a tudíž budeme spojitost předpokládat i u veličin, které fyzikální stav kontinua popisují. O něco přesněji můžeme definovat kontinuum jako soustavu složenou z *částic kontinua*, které hustě zaplňují určitý objem V třírozměrného eukleidovského prostoru, takže v každém bodě určeném polohovým vektorem vzhledem k libovolnému počátku se nachází jistá částice kontinua. Je nutné zdůraznit, že částicemi kontinua nejsou míněny atomy či molekuly, které je nutné popisovat z pohledu kvantové mechaniky a není je tedy možné popisovat z pohledu mechaniky klasické. Abychom se mohli ve svém popisu opírat o klasickou mechaniku, je tedy nutné odhlédnout od mikroskopického složení tělesa. Proto částicí kontinua budeme rozumět fyzikálně nekonečně malou částici, přičemž počet těchto částic bude na jedné straně dostatečně velký a na druhé straně velmi malý v porovnání s počtem molekul daného tělesa. Částice kontinua musí zaujímat fyzikálně nekonečně malý objem, který je však dostatečně velký k tomu, aby obsahoval větší počet molekul, ale současně dostatečně malý, aby se v jeho rozměrech již neprojevovala závislost makroskopických parametrů tělesa na poloze. Místo částice kontinua se někdy v literatuře můžeme setkat s pojmem materiálový bod. My se v textu budeme držet pojmu částice kontinua či zkráceně jen částice.

17.1 Tenzor napětí

V této kapitole se budeme zabývat možností popisu sil uvnitř tělesa, které považujeme za kontinuum. V reálném tělese vnitřní síly představují síly, kterými na sebe působí částice hmoty. V klasické teorii kontinua, kde je hmota spojitě rozložena, působí vnitřní síly v každém vnitřním bodě tělesa. Síly, s nimiž jsme se dosud setkali, byly zpravidla takového typu, že jsme mohli předpokládat jejich působení v jediném bodě. S konceptem bodových sil již v mechanice kontinua nevystačíme. Síly, se kterými se setkáváme v mechanice kontinua, jsou v podstatě dvojího druhu, tzv. síly objemové a síly plošné.

Síly objemové \mathbf{F}^O jsou síly, které působí na všechny elementy objemu uvažovaného kontinua. Příkladem těchto sil jsou např. síly gravitační či setrvačné. Pro složky výsledné objemové síly působící na objem V můžeme psát, že

$$F_i^O = \int_V \mathcal{F}_i \, dV , \qquad i = 1, 2, 3 ,$$
 (17.1)

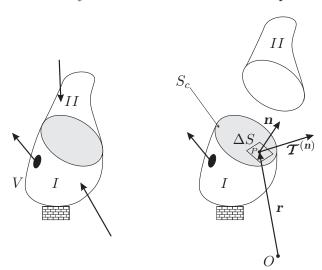
kde \mathcal{F}_i je složka objemové síly vztažená na jednotku objemu kontinua (objemová hustota síly).

Významnější roli hrají v mechanice kontinua síly plošné \mathbf{F}^P . Představují síly, které působí na plochu (skutečnou či myšlenou), jež odděluje jednotlivé části kontinua. Jsou to síly, které charakterizují vzájemné ovlivňování jednotlivých elementů kontinua. Tyto síly ovlivňují v podstatě jen sousední elementy kontinua, tj. od jedné plochy, na kterou působí plošná síla, se bude silové působení přenášet vždy na přilehlou sousední plochu. Tímto je možné plošné síly označit za síly kontaktní. Pro složky výsledné plošné síly působící na plochu S můžeme psát, že

 $F_i^P = \int_S \mathcal{T}_i^{(\mathbf{n})} \, dS , \qquad i = 1, 2, 3 ,$ (17.2)

kde $\mathcal{T}_i^{(\mathbf{n})}$ je složka plošné síly vztažená na jednotku orientované plochy, jejímž normálovým jednotkovým vektorem je \mathbf{n} , viz obr. 17.1.

Uvažujme materiálové kontinuum, které je vystaveno působení vnějších objemových a plošných sil. Působení vnějších sil se přenáší z jedné části kontinua do druhé. Jsou-li vnější síly s časem neproměnné, ustanoví se v uvažovaném kontinuu rovnovážný stav. Označme $\Delta \boldsymbol{F}^P$ plošnou sílu, která působí na plošku kontinua ΔS (nezáleží na tom, zda se bude nacházet na povrchu či uvnitř kontinua). Přitom síla působící na plošku bude záviset nejen na poloze, kde se ploška v kontinuu nachází, ale i na její orientaci. Abychom tuto skutečnost lépe popsali, budeme vycházet ze situace zachycené na obrázku 17.1. Na tomto obrázku je zobrazeno kontinuum o objemu V. Nechť polohový vektor \boldsymbol{r} ukazuje na bod kontinua P. Tímto bodem veďme řez, kterým kontinuum rozdělíme na dvě části. Oddělíme-li část II od části I a chceme-li zachovat stávající rovnovážný stav v části I, potom je nutné působit na rovinu řezu S_c soustavou sil, která rovnovážný stav nezmění Pro vektor plošné síly, resp. jeho složky,



Obrázek 17.1: Situační obrázek k rozdělení kontinua na dvě části, které je vystaveno působení objemových a plošných sil.

vztažené na jednotku plochy můžeme psát

$$\mathcal{T}^{(\mathbf{n})} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}^{P}}{\Delta S} , \qquad \mathcal{T}_{i}^{(\mathbf{n})} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_{i}^{P}}{\Delta S} , \qquad (17.3)$$

kde bodPje vnitřním bodem plošky $\Delta S.$

Složky plošných sil vztažených na jednotku plochy $\mathcal{T}_i^{(\mathbf{n})}$ jsou tedy složkami vektoru, který

¹Jednotlivé objemové, resp. hmotnostní, elementy kontinua na sebe rovněž působí objemovými silami, které jako síly vnitřní se díky zákonu Akce a reakce vykompenzují, takže je nemusíme zahrnout do uvažované soustavy sil.

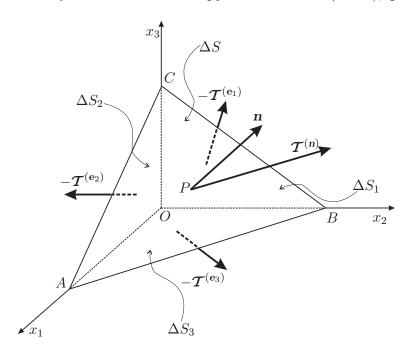
v našem případě budeme nazývat $vektor napětí \mathcal{T}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{r}) = (\mathcal{T}_1^{(\mathbf{n})}, \mathcal{T}_2^{(\mathbf{n})}, \mathcal{T}_3^{(\mathbf{n})})$. Vektor napětí $\mathcal{T}^{(\mathbf{n})}$ charakterizuje stav napjatosti v daném místě kontinua. Normálový vektor \mathbf{n} uvedený u vektoru napětí, či jeho složek, má značit skutečnost, že vektor napětí závisí na orientaci zvolené plochy. Vektor napětí je bodovou funkcí na rozdíl od plošné síly (17.2). Složka vektoru napětí ve směru normálového vektoru se nazývá normálové napětí, kdežto složka vektoru napětí, která je kolmá na normálový vektor se nazývá tečné napětí nebo smykové napětí. Je-li směr normálového napětí souhlasný se směrem vnější normály, hovoříme o tahovém napětí, zkráceně o tahu. Jestliže působí na povrch těles normálová síla (vektor napětí je shodně orientovaný s uvažovaným normálovým vektorem $\mathcal{T}^{(\mathbf{n})} \uparrow \mathbf{n}$), pak hovoříme o prostém (čistém) tahu. Je-li orientace normálového napětí opačná vzhledem k orientaci vnější normály $\mathcal{T}^{(\mathbf{n})} \uparrow \mathbf{n}$, hovoříme o tlakovém napětí, zkráceně o tlaku. Jednotkou napětí je pascal, který značíme Pa.

Na základě třetího Newtonova pohybového zákona (zákon Akce a reakce) můžeme pro vektor napětí psát, že

$$\boldsymbol{\mathcal{T}^{(-\mathbf{n})}} = -\boldsymbol{\mathcal{T}^{(\mathbf{n})}} \ . \tag{17.4}$$

V každém bodě kontinua můžeme tedy stanovit nekonečně mnoho vektorů napětí pro všechny možné orientace normálových vektorů \boldsymbol{n} . Odtud vyplývá, že každému bodu kontinua přísluší nekonečně mnoho vektorů napětí. Jak si dále ukážeme, nepotřebujeme pro každou možnou orientaci plošky znát odpovídající vektor napětí, ale stačí za tímto účelem znát vektor napětí pouze pro plošky ležící ve třech základních souřadnicových rovinách. Pak pomocí těchto vektorů napětí můžeme učit vektor napětí pro libovolně orientovanou plošku, resp. její jednotkový normálový vektor \boldsymbol{n} .

Plošku ΔS s normálovým vektorem \mathbf{n} v napjatém kontinuu (tělese), pro kterou chceme



Obrázek 17.2: Situační obrázek pro uvažovaný čtyřstěn.

určit vektor napětí $\mathcal{T}^{(n)}$, necháme procházet v blízkosti počátku souřadnic, takže nám spolu s souřadnicovými rovinami vymezí malý čtyřstěn OABC, viz obr. 17.2. Tedy je-li ΔS plocha trojúhelníka ABC a ΔS_1 , ΔS_2 , ΔS_3 plochy trojúhelníků OBC, OAC, OAB, potom ΔS_1 , ΔS_2 , ΔS_3 vlastně reprezentují vlastní průměty trojúhelníka ABC do jednotlivých souřadnicových rovin. Jednotlivé složky normálového vektoru \boldsymbol{n} jsou rovny směrovým kosinům, tj.

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) . \tag{17.5}$$

Pomocí složek normálového vektoru \boldsymbol{n} pak můžeme vyjádřit velikosti ploch ΔS_j jako

$$\Delta S_i = \Delta S \, n_i \,, \qquad j = 1, 2, 3 \,.$$
 (17.6)

Objem V_{\square} uvažovaného čtyřstěnu je dán následujícím vztahem

$$V_{\square} = \frac{1}{6} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 , \qquad (17.7)$$

kde Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 odpovídají délkám úseček \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} .

Na vyšetřovaný čtyřstěn působí jednak plošné síly od napjatého tělesa, ze kterého jsme tento čtyřstěn jakoby vyřízli a vyjmuli, a jednak síly objemové.

Na obrázku 17.2 jsou zachyceny vektory napětí působících v těžištích jednotlivých stěn uvažovaného čtyřstěnu². Má-li být čtyřstěn v rovnováze, potom jednotlivé vektory napětí působící v ploškách ΔS_j musí jistým způsobem kompenzovat vliv vektoru napětí působícího na plošce ΔS neboli přesněji, má-li být uvažovaný čtyřstěn v rovnováze, musí vymizet výslednice všech sil převedených do stejného bodu, takže musí platit následující rovnice rovnováhy

$$\mathcal{T}^{(n)}\Delta S - \mathcal{T}^{(e_1)}\Delta S_1 - \mathcal{T}^{(e_2)}\Delta S_2 - \mathcal{T}^{(e_3)}\Delta S_3 + V_{\square}\mathcal{F} = \mathbf{0},$$
(17.8)

kde ρ je hustota kontinua vymezeného čtyřstěnem³, V_{\square} je objem uvažovaného čtyřstěnu a \mathcal{F} je vektor objemové síly vztažené na jednotku objemu.

Objemové síly (např. tíhová nebo odstředivá síla) jsou úměrné objemu čtyřstěnu (17.7), kdežto plošné síly jsou úměrné plochám ΔS_i , pro které platí

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} \Delta x_2 \Delta x_3 , \quad \Delta S_2 = \frac{1}{2} \Delta x_1 \Delta x_3 , \quad \Delta S_3 = \frac{1}{2} \Delta x_1 \Delta x_2 ,$$
 (17.9)

tudíž je zřejmé, že pro limitní případ $\mathrm{d}x_j = \Delta x_j \to 0$ můžeme objemové síly oproti silám plošným zanedbat. Díky této skutečnosti bude mít rovnice rovnováhy (17.8) následující tvar

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{(\mathbf{n})} dS - \boldsymbol{\mathcal{T}}^{(\mathbf{e}_1)} dS_1 - \boldsymbol{\mathcal{T}}^{(\mathbf{e}_2)} dS_2 - \boldsymbol{\mathcal{T}}^{(\mathbf{e}_3)} dS_3 = \boldsymbol{0}.$$
 (17.10)

Pro uvažovaný limitní případ přepíšeme vztah (17.6) jako

$$dS_j = dS \, n_j \,, \qquad j = 1, 2, 3$$
 (17.11)

a použijeme jej v rovnici rovnováhy (17.10)

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{(\mathbf{n})} dS - \boldsymbol{\mathcal{T}}^{(\mathbf{e}_1)} n_1 dS - \boldsymbol{\mathcal{T}}^{(\mathbf{e}_2)} n_2 dS - \boldsymbol{\mathcal{T}}^{(\mathbf{e}_3)} n_3 dS = \boldsymbol{0}.$$
 (17.12)

Podělením rovnice rovnováhy (17.12) faktorem dS dostaneme, že

$$\mathcal{T}^{(\mathbf{n})} = \mathcal{T}^{(\mathbf{e}_1)} n_1 + \mathcal{T}^{(\mathbf{e}_2)} n_2 + \mathcal{T}^{(\mathbf{e}_3)} n_3$$
 (17.13)

Označme složky vektorů napětí $\mathcal{T}^{(e_i)}$ následujícím způsobem

$$\mathcal{T}^{(\mathbf{e}_1)} = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}),
\mathcal{T}^{(\mathbf{e}_2)} = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}),
\mathcal{T}^{(\mathbf{e}_3)} = (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}).$$
(17.14)

 $^{^2}$ Je třeba si uvědomit, že jednotkovými normálovými vektory k plochám uvažovaného čtyřstěnu ležícím v jednotlivých souřadnicových rovinách jsou vektory $-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_2$, $-\mathbf{e}_3$. Pak na základě vztahu (17.4) dostáváme, že $-\mathcal{T}^{(\mathbf{e}_1)} = \mathcal{T}^{(-\mathbf{e}_1)}$, $-\mathcal{T}^{(\mathbf{e}_2)} = \mathcal{T}^{(-\mathbf{e}_2)}$, $-\mathcal{T}^{(\mathbf{e}_3)} = \mathcal{T}^{(-\mathbf{e}_3)}$.

³Bez újmy na obecnosti můžeme hustotu kontinua vymezeného malým čtyřstěnem považovat za konstantní.

Na základě vztahu (17.13) a zavedeného značení (17.14) je možné pro jednotlivé složky vektoru napětí $\mathcal{T}^{(n)}$ psát

$$T_i^{(\mathbf{n})} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (17.15)

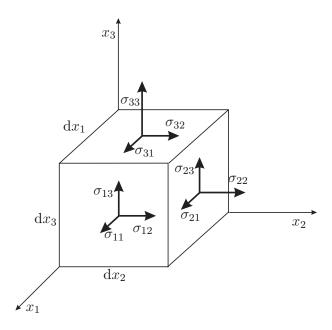
Složky vektorů napětí jsou složkami tenzoru napětí (Cauchyho tenzor napětí), který dává do vztahu vektor napětí $\mathcal{T}^{(n)}$, jenž charakterizuje stav napjatosti v obecném bodě kontinua, a normálový vektor⁴ n uvažované elementární orientované plochy $d\mathbf{S} = n dS$, na níž působí elementární plošné síly $d\mathbf{F}^P = \mathcal{T}^{(n)} dS$. Tenzor napětí je tenzorem druhého řádu a jeho složky můžeme uspořádat do matice tenzoru napětí

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} . \tag{17.16}$$

Při značení výše uvedených složek vektorů napětí, resp. tenzoru napětí, bylo použito pravidla, že první index odpovídá indexu normálového vektoru příslušné souřadnicové roviny (směr normály k ploše, k níž je složka tenzoru napětí vztažena) a druhé indexy odpovídají indexům odpovídajících souřadnicových vektorů (označují směr složky, který odpovídá kladnému směru příslušné souhlasně orientované souřadnicové osy). Tedy např. $\mathcal{T}^{(e_1)}$ je vektor napětí v souřadnicové rovině, které přísluší normálový vektor \mathbf{e}_1 , takže můžeme pro jeho složky psát

$$\mathcal{T}^{(\mathbf{e}_1)} = \left(\mathcal{T}_1^{(\mathbf{e}_1)}, \mathcal{T}_2^{(\mathbf{e}_1)}, \mathcal{T}_3^{(\mathbf{e}_1)}\right) = \mathcal{T}_1^{(\mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_1 + \mathcal{T}_2^{(\mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_2 + \mathcal{T}_3^{(\mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_3 = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \mathbf{e}_2 + \sigma_{11} \mathbf{e}_3 = \left(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}\right).$$

Složky tenzoru napětí mající stejné indexy (ležící na diagonále matice tenzoru napětí (17.16) reprezentují normálové napětí, kdežto složky tenzoru napětí nestejných indexů představují tečná (smyková) napětí. Názorně mohou být složky tenzoru napětí zachyceny např. způsobem uvedeným na obrázku 17.3.



Obrázek 17.3: Složky tenzoru napětí.

⁴Vektor napětí a normálový vektor nemají obecně stejný směr.

17.1.1 Obecná rovnice rovnováhy kontinua

Rovnováha tuhého tělesa nastane tehdy, bude-li výslednice všech působících vnějších sil a jejich momentů rovna nulovému vektoru. V případě kontinua rovnováha rovněž nastane, bude-li výslednice všech vnějších sil (plošných i objemových) a jejich momentů nulová. Je-li v rovnováze uvažované kontinuum jako celek, pak musí být v rovnováze i jeho dílčí objemy. Kdybychom však postupovali při vyšetřování rovnováhy kontinua jako v případě tuhých těles, tak by nám vypadla vnitřní napětí, která jsou pro nás předmětem zájmu. Proto v případě kontinua postupujeme tak, že vydělíme z uvažovaného kontinua libovolnou část o objemu V, která je ohraničena plochou S. Má-li být výslednice sil působících na zvolenou část kontinua nulová, pak musí platit, že

$$F_i^O + F_i^P = \int_V \mathcal{F}_i \, dV + \int_S \mathcal{T}_i^{(\mathbf{n})} \, dS = 0 , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (17.17)

Rovnost můžeme dále upravit pomocí vztahu (17.15), čímž dostaneme

$$\int_{V} \mathcal{F}_{i} \, dV + \int_{S} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji} n_{j} \, dS = \int_{V} \mathcal{F}_{i} \, dV + \int_{S} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji} \, dS_{j} = 0 , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (17.18)

Plošný integrál v rovnosti (17.18) převedeme na integrál objemový pomocí Gaussovy věty vyjádřenou ve složkovém tvaru, takže dostáváme rovnici

$$\int_{V} \mathcal{F}_{i} \, dV + \int_{V} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_{j}} \, dV = 0 , \qquad i = 1, 2, 3 , \qquad (17.19)$$

kterou dále upravíme do následujícího tvaru

$$\int_{V} \left(\mathcal{F}_{i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_{j}} \right) dV = 0 , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (17.20)

Jelikož objem uvažovaného kontinua byl zvolen obecně, bude podmínka (17.20) splněna, když bude platit

$$\mathcal{F}_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (17.21)

Rovnice (17.21) představuje první podmínku, resp. rovnici, rovnováhy kontinua.

Při odvození druhé podmínky rovnováhy použijeme vyjádření vektorového součinu ve složkovém tvaru, tj. uvažujeme-li např. vektorový součin $C = A \times B$, potom pro něj můžeme psát

$$C_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \equiv \sum_{i,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k , \quad i = 1, 2, 3 , \qquad (17.22)$$

kde ε_{ijk} je tzv. Levi-Civitův symbol (tenzor), pro který platí

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{jestliže indexy } i, j, k \text{ vytvářejí sudé permutace } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{jestliže indexy } i, j, k \text{ vytvářejí liché permutace } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{jestliže jakýkoliv index je roven jakémukoliv jinému indexu} \end{cases}$$
 (17.23)

Sudou permutací rozumíme, že došlo k sudému počtu výměn pozice dvou symbolů, takže pak cyklická permutace je vždy sudá, tj. $123 \rightarrow 312 \rightarrow 231$. Tedy

$$\varepsilon_{122} = \varepsilon_{313} = \varepsilon_{211} = 0 \text{ atd.}$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$$
(17.24)

Druhou podmínku rovnováhy dostaneme z podmínky, že výslednice momentů sil působících na zvolený objem musí být nulová. Potom pro i-tou složku výslednice momentů objemových a plošných sil musí platit

$$\int_{V} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j \mathcal{F}_k dV + \int_{S} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j \mathcal{T}_k^{(n)} dS = 0 , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (17.25)

Plošný integrál v rovnici (17.25) převedeme pomocí Gaussovy věty s použitím vztahu (17.15) na integrál objemový následujícím způsobem

$$\int_{S} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_{j} \mathcal{T}_{k}^{(\mathbf{n})} dS = \int_{S} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_{j} \sum_{l} \sigma_{lk} n_{l} dS = \int_{S} \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijk} x_{j} \sigma_{lk} n_{l} dS =$$

$$\int_{V} \sum_{j,k,l} \frac{\partial}{\partial x_{l}} (\varepsilon_{ijk} x_{j} \sigma_{lk}) dV = \int_{V} \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijk} \left(\delta_{jl} \sigma_{lk} + x_{j} \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_{l}} \right) dV =$$

$$\int_{V} \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{jk} + x_{j} \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_{l}} \right) dV . \quad (17.26)$$

Ze vztahu (17.21) dostáváme, že

$$\mathcal{F}_k = -\frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} = 0. {(17.27)}$$

Do rovnice (17.25) dosadíme ze vztahů (17.26) a (17.27), takže dostaneme

$$\int_{V} \sum_{j,k,l} -\varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} dV + \int_{V} \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{jk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dV = 0.$$
 (17.28)

Sloučením integrálů na levé straně rovnice (17.28) dostaneme

$$\int_{V} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0.$$
 (17.29)

Vzhledem k tomu, že integrál (17.29) je roven nule pro libovolný objem, musí platit, že

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 , \qquad i = 1, 2, 3 . \tag{17.30}$$

Vztah (17.30) představuje druhou podmínku rovnováhy kontinua.

Vzhledem k tomu, že Levi-Civitův symbol, viz (17.23), je nenulový, jsou-li indexy i, j, k navzájem různé, je nutné, aby byla splněna rovnost (17.30), aby platilo, že

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \; , \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \; , \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}$$
 (17.31)

neboli zkráceně

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad i, j = 1, 2, 3 .$$
 (17.32)

Z podmínky (17.32) tedy vyplývá, že tenzor napětí je tenzorem symetrickým, a tudíž ho můžeme vhodnou volbou souřadnicového systému diagonalizovat, tj. $\sigma_{ij} = 0$ pro $i \neq j$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} . \tag{17.33}$$

Souřadnicové osy, pro které dochází k diagonalizaci tenzoru napětí se nazývají hlavní osy napětí a složky $\sigma_{11} \equiv \sigma_1$, $\sigma_{22} \equiv \sigma_2$, $\sigma_{33} \equiv \sigma_3$ se nazývají hlavní napětí. Je-li napětí v kontinuu homogenní, potom $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$.

17.2 Tenzor deformace

V případě tuhých těles jsme předpokládali, že tato tělesa mohou konat pouze posuvný a otáčivý pohyb. Tuhá tělesa jsou však idealizací reálných těles, u kterých kromě dvou výše zmíněných pohybů, dochází i k pohybu deformačnímu. Deformační pohyb vede k deformaci neboli změně tvaru tělesa, obecně kontinua. Deformace souvisí se skutečností, že se mění vzájemná vzdálenost jednotlivých bodů kontinua. Abychom postihli deformaci kontinua, budeme předpokládat nějaký bod kontinua A, v jehož blízkosti se nachází bod kontinua B. Poloha bodu A je určena polohovým vektorem \mathbf{r} , kterému přísluší složky x_i , kde i=1,2,3. Bodu B odpovídá polohový vektor $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$, viz obr. 17.4. Ve složkovém tvaru můžeme polohu bodu B vyjádřit jako x_i+dx_i . Vlivem silového působení bod kontinua A přejde do nové polohy o polohovém vektoru \mathbf{r}' , který ukazuje na bod A', tedy dojde k posunutí $A \to A'$. Posunutí bodu A do bodu A' je dáno vektorem posunutí \mathbf{u} , tedy platí, že $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$ neboli ve složkovém tvaru 5 $x_i' = x_i + u_i(x_j)$ (i, j = 1, 2, 3). Vlivem silového působení rovněž i bod B se posune do místa, které je označeno bodem B' $(B \to B')$. Tomuto bodu odpovídá polohový vektor $\mathbf{r}' + d\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \mathbf{u} + d\mathbf{u}$. Element vektoru d \mathbf{r}' odpovídá, viz obrázek 17.4, rozdílu polohových vektorů ukazujících na bod B' a bod A', tj.

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \underbrace{\mathbf{u} + d\mathbf{u}}_{=\mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r})} - (\mathbf{r} + \mathbf{u}) = d\mathbf{r} + d\mathbf{u}, \qquad (17.34)$$

kde element vektoru posunutí d \boldsymbol{u} reprezentuje deformaci kontinua. Ve složkovém tvaru je možné vztah (17.34) vyjádřit následujícím způsobem

$$dx'_i = dx_i + du_i$$
, $i = 1, 2, 3$. (17.35)

Diferenciál vektoru posunutí je dán vztahem⁶

$$du_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j , \qquad i = 1, 2, 3 ,$$

což nám umožňuje přepsat vztah (17.35) do následujícího tvaru

$$dx_i' = dx_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^3 \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (17.36)

Pro lepší představu můžeme vyjádřit rovnost (17.36) např. pro index i = 1

$$dx_1' = dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3.$$
 (17.37)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = (u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3))$$
.

 $^{^5 {\}rm Je}$ třeba si uvědomit, že každá složka vektoru posunutí je funkcí souřadnic $x_1,\,x_2$ a $x_3,\,{\rm tj}.$

⁶Z důvodu úspornějšího zápisu autoři odborné literatury věnované mechanice kontinua využívají Einsteinovu sumační konvencí. Vzhledem k tomu, že se toto skriptum věnuje mechanice kontinua jen okrajově, budeme se držet zápisů pomocí symbolů sumace.

Pomocí rovnosti (17.36) můžeme psát, že

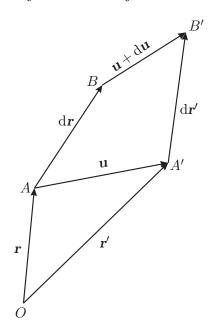
$$dx_{i}'dx_{i}' = \sum_{j=1}^{3} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}}\right) dx_{j} \sum_{k=1}^{3} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}}\right) dx_{k} =$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}}\right) dx_{j} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}}\right) dx_{k} =$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\delta_{ij}\delta_{ik} + \delta_{ij}\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}} + \delta_{ik}\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}}\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}}\right) dx_{j} dx_{k} =$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_{k}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{j}}{\partial x_{k}} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}}\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}}\right) dx_{j} dx_{k} , \qquad i = 1, 2, 3 . \quad (17.38)$$

Kvadrát vzdálenosti bodů A a B je dán následujícím vztahem



Obrázek 17.4: Posunutí bodů kontinua vlivem deformace.

$$ds_{AB}^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i$$
(17.39)

a kvadrátu vzdálenosti bodů A' a B', s využitím vztahu (17.36), odpovídá následující rovnost

$$ds_{A'B'}^{2} = d\mathbf{r'} \cdot d\mathbf{r'} = \sum_{i=1}^{3} dx_{i}' dx_{i}' = \sum_{i=1}^{3} \left[\sum_{j=1}^{3} \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} \right) dx_{j} \sum_{k=1}^{3} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}} \right) dx_{k} \right] =$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \delta_{ij} \delta_{ik} dx_{j} dx_{k} + \delta_{ij} \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}} dx_{j} dx_{k} + \delta_{ik} \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} dx_{j} dx_{k} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}} dx_{j} dx_{k} =$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \delta_{ij} \delta_{ik} dx_{j} dx_{k} + \frac{\partial u_{j}}{\partial x_{k}} dx_{j} dx_{k} + \frac{\partial u_{k}}{\partial x_{j}} dx_{j} dx_{k} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}} dx_{j} dx_{k} =$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \delta_{ij} \delta_{ik} dx_{j} dx_{k} + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_{j}}{\partial x_{k}} + \frac{\partial u_{k}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}} \right) dx_{j} dx_{k} =$$

$$\sum_{i=1}^{3} dx_{i} dx_{i} + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_{j}}{\partial x_{k}} + \frac{\partial u_{k}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}} \right) dx_{j} dx_{k} . \quad (17.40)$$

Jako míru deformace kontinua použijeme rozdíl kvadrátů vzdáleností (17.40) a (17.39)

$$ds_{A'B'}^2 - ds_{AB}^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 2e_{jk} dx_j dx_k ,$$
(17.41)

 e_{jk} jsou složky Greenova tenzoru, resp. tenzoru velkých deformací, $\{e\}$

$$e_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) , \qquad j, k = 1, 2, 3 .$$
 (17.42)

Jestliže se omezíme pouze na malé deformace, potom můžeme zanedbat kvadratický člen ve vztahu (17.42), čímž dostaneme prvky tzv. Cauchyho tenzoru, resp. tenzoru malých deformací, $\{\epsilon\}$, tj.

$$\epsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) , \qquad j, k = 1, 2, 3 .$$
 (17.43)

Ze vztahu pro prvky tenzoru malých deformací (17.43) je vidět, že se jedná o symetrický tenzor, tedy $\epsilon_{jk} = \epsilon_{kj}$. Jako symetrickému tenzoru mu přísluší kvadratická plocha nazvaná elipsoid deformace. Osy tohoto elipsoidu nazýváme hlavní osy (směry) deformace.

17.2.1 Geometrický význam složek tenzoru malých deformací

Využijeme-li výsledku (17.40) a vztahu (17.43), potom můžeme pro skalární součin dvou různých elementů $d\mathbf{r}'^{(1)}$, $d\mathbf{r}'^{(2)}$ psát

$$d\mathbf{r}^{\prime(1)} \cdot d\mathbf{r}^{\prime(2)} = |d\mathbf{r}^{\prime(1)}| |d\mathbf{r}^{\prime(2)}| \cos \theta = \sum_{i=1}^{3} dx_{i}^{(1)} dx_{i}^{(2)} + \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} 2\epsilon_{jk} dx_{j}^{(1)} dx_{k}^{(2)} = |d\mathbf{r}^{\prime(1)}| |d\mathbf{r}^{\prime(2)}| \cos \varphi + \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} 2\epsilon_{jk} dx_{j}^{(1)} dx_{k}^{(2)}, \quad (17.44)$$

kde θ je úhel, který svírají vektorové elementy d $\mathbf{r}'^{(1)}$ a d $\mathbf{r}'^{(2)}$ a φ je úhel, který svírají vektorové elementy d $\mathbf{r}^{(1)}$ a d $\mathbf{r}^{(2)}$.

Vyjádříme-li si vektorové elementy $d\mathbf{r}^{(1)}$ a $d\mathbf{r}^{(2)}$ pomocí jejich velikostí a jednotkových vektorů, tak dostaneme

$$d\mathbf{r}^{(1)} = |d\mathbf{r}^{(1)}|(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)}), \quad d\mathbf{r}^{(2)} = |d\mathbf{r}^{(1)}|(e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, e_3^{(2)}),$$
(17.45)

kde jednotkový vektor $\mathbf{e}^{(1)} = \mathrm{d}\mathbf{r}^{(1)}/|\mathrm{d}\mathbf{r}^{(1)}| = (e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)})$ a jednotkový vektor $\mathbf{e}^{(2)} = \mathrm{d}\mathbf{r}^{(2)}/|\mathrm{d}\mathbf{r}^{(2)}| = (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, e_3^{(2)})$.

Pomocí výrazů (17.45) můžeme přepsat skalární součin (17.44) do následujícího tvaru

$$|d\mathbf{r}^{(1)}||d\mathbf{r}^{(2)}|\cos\theta = |d\mathbf{r}^{(1)}||d\mathbf{r}^{(2)}|\cos\varphi + 2|d\mathbf{r}^{(1)}||d\mathbf{r}^{(2)}|\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{jk}e_{j}^{(1)}e_{k}^{(2)}.$$
 (17.46)

Diagonální složky tenzoru malých deformací

Pomocí skalárního součinu (17.46) je možné zapsat skalární součin dvou stejných vektorových elementů $d\mathbf{r}^{(1)} = d\mathbf{r}^{(2)}$ ($\theta = \varphi = 0$) jako

$$|\mathbf{d}\mathbf{r}^{(1)}|^2 = |\mathbf{d}\mathbf{r}^{(1)}|^2 + 2|\mathbf{d}\mathbf{r}^{(1)}|^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{jk} e_j^{(1)} e_k^{(1)}.$$
 (17.47)

Pro malé deformace, tj. za předpokladu $|d\mathbf{r}^{(1)}| \approx |d\mathbf{r}'^{(1)}|$, můžeme psát

$$|d\mathbf{r}^{\prime(1)}|^2 - |d\mathbf{r}^{(1)}|^2 = (|d\mathbf{r}^{\prime(1)}| - |d\mathbf{r}^{(1)}|)(|d\mathbf{r}^{\prime(1)}| + |d\mathbf{r}^{(1)}|) \approx 2|d\mathbf{r}^{(1)}|(|d\mathbf{r}^{\prime(1)}| - |d\mathbf{r}^{(1)}|). \quad (17.48)$$

Použitím vztahu (17.48) můžeme s dostatečnou přesností upravit rovnost (17.47) do následujícího tvaru

$$\frac{|\mathrm{d}\mathbf{r}^{(1)}| - |\mathrm{d}\mathbf{r}^{(1)}|}{|\mathrm{d}\mathbf{r}^{(1)}|} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{jk} e_{j}^{(1)} e_{k}^{(1)}.$$
(17.49)

Vztah (17.49) představuje relativní prodloužení ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{e}^{(1)}$. Budemeli předpokládat prodloužení např. ve směru souřadnicové osy x_1 , tj. ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{e}^{(1)} \equiv \mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ potom po dosazení do vztahu pro relativní prodloužení (17.49) dostaneme, že

$$\frac{|\mathbf{d}\mathbf{r}^{(1)}| - |\mathbf{d}\mathbf{r}^{(1)}|}{|\mathbf{d}\mathbf{r}^{(1)}|} = \epsilon_{11} . \tag{17.50}$$

Výsledek (17.50) nám říká, že relativní prodloužení ve směru souřadnicové osy x_1 je rovno diagonální složce tenzoru malých deformací ϵ_{11} . Podobně bychom nalezli relativní prodloužení ve směru zbývajících dvou souřadnicových os. Odtud můžeme konstatovat, že složky tenzoru malé deformace ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} (diagonální složky) vyjadřují relativní změny délky úseček vlivem deformace, které byly před deformací rovnoběžné s jednotlivými souřadnicovými osami. Tyto složky souvisejí s deformací kontinua v tahu nebo tlaku (opak tahu) ve směru souřadnicových os.

Nediagonální složky tenzoru malých deformací

Uvažujme dva vektorové elementy d $\mathbf{r}^{(1)} = |\mathrm{d}\mathbf{r}^{(1)}|\mathbf{e}^{(1)}$, d $\mathbf{r}^{(2)} = |\mathrm{d}\mathbf{r}^{(2)}|\mathbf{e}^{(2)}$, které jsou na sebe kolmé, tj. $\mathbf{e}^{(1)} \perp \mathbf{e}^{(2)}$ a tedy $\varphi = \pi/2$. Dosazením těchto dvou vektorových elementů do rovnosti (17.46) dostaneme

$$|\mathbf{d}\mathbf{r}^{(1)}||\mathbf{d}\mathbf{r}^{(2)}|\cos\theta = 2|\mathbf{d}\mathbf{r}^{(1)}||\mathbf{d}\mathbf{r}^{(2)}|\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{jk}e_{j}^{(1)}e_{k}^{(2)}.$$
(17.51)

Nechť

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma \,, \tag{17.52}$$

potom rovnici je možné zapsat jako

$$\frac{1}{2} \frac{|\mathbf{d}\mathbf{r}^{(1)}|}{|\mathbf{d}\mathbf{r}^{(1)}|} \frac{|\mathbf{d}\mathbf{r}^{(2)}|}{|\mathbf{d}\mathbf{r}^{(2)}|} \sin \gamma = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{jk} e_{j}^{(1)} e_{k}^{(2)}.$$
 (17.53)

Pro malé deformace můžeme použít následující aproximace

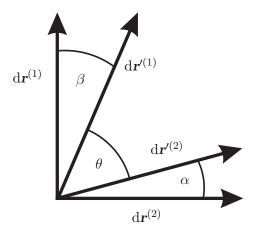
$$\sin \gamma \approx \gamma$$
, $\frac{|\mathrm{d}\mathbf{r}^{(1)}|}{|\mathrm{d}\mathbf{r}^{(1)}|} \approx 1$, $\frac{|\mathrm{d}\mathbf{r}^{(2)}|}{|\mathrm{d}\mathbf{r}^{(2)}|} \approx 1$. (17.54)

Použijeme-li aproximace (17.54) ve vztahu (17.53), pak můžeme s dostatečnou přesností psát, že

$$\frac{\gamma}{2} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{jk} e_j^{(1)} e_k^{(2)} , \qquad (17.55)$$

kde úhel γ nazýváme smykovým úhlem. Popisovaná situace je zachycena na obr. 17.5, kde smykový úhel $\gamma = \alpha + \beta$.

Předpokládejme, že vektorový element d $\mathbf{r}^{(1)}$ leží např. ve směru souřadnicové osy x_1 , tj.



Obrázek 17.5: Deformace pravého úhlu ($\gamma = \alpha + \beta$).

 $\mathbf{e}^{(1)} \equiv \mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ a že vektorový element d $\mathbf{r}^{(2)}$ leží např. ve směru souřadnicové osy x_2 , tj. $\mathbf{e}^{(2)} \equiv \mathbf{e}_2 = (0,1,0)$. Dosazením do rovnice (17.55) dostaneme

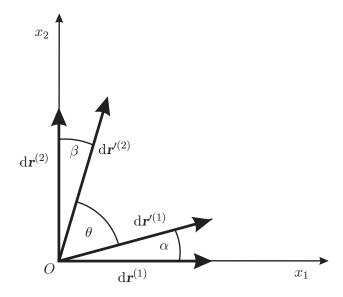
$$\frac{\gamma}{2} = \epsilon_{12} \ . \tag{17.56}$$

Podobně bychom mohli postupovat pro jiné vektorové elementy ležící ve směrech souřadnicových os. Samozřejmě smykové úhly γ mohou nabývat pro různé případy různých hodnot, což rozlišujeme odpovídajícími indexy. Takže pro výše řešený případ se pak píše, že

$$\frac{\gamma_{12}}{2} = \epsilon_{12} \ . \tag{17.57}$$

S ohledem na situační obrázek 17.6 můžeme psát, že $\gamma_{12} = 2\epsilon_{12} = \alpha + \beta = \pi/2 - \theta$. Bude-li naopak vektorový element d $\mathbf{r}^{(1)}$ ležet ve směru souřadnicové osy x_2 a vektorový element d $\mathbf{r}^{(2)}$ ležet ve směru souřadnicové osy x_1 , potom dostaneme, že

$$\frac{\gamma_{21}}{2} = \epsilon_{21} . \tag{17.58}$$



Obrázek 17.6: Situační obrázek ke geometrickému významu nediagonální složky tenzoru malé deformace.

Vzhledem k symetrii tenzoru malých deformací musí platit, že $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$, a tudíž také musí pro smykové úhly platit, že $\gamma_{12} = \gamma_{21}$. S ohledem na geometrický význam nediagonálních složek tenzoru malých deformací můžeme pro tento tenzor psát, že

$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \epsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$
(17.59)

kde samozřejmě pro smykové úhly platí, že $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$.

Na základě výše uvedeného můžeme konstatovat, že nediagonální složky tenzoru malých deformací $(\epsilon_{ij}, i \neq j)$ odpovídají úhlu odklonu od pravého úhlu, svíraného před deformací úsečkami, rovnoběžnými s odpovídajícími souřadnicovými osami.

Příklad 17.2.1

Jsou dány následující složky vektoru posunutí:

$$u_1 = kx_2^2$$
, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$.

Pro uvažovaný vektor posunutí $\mathbf{u} = (kx_2^2, 0, 0)$ určete tenzor malých deformací, relativní prodloužení a úhel smyku pro vektorové (materiálové) elementy $d\mathbf{r}^{(1)} = |d\mathbf{r}^{(1)}|\mathbf{e}_1$ a $d\mathbf{r}^{(2)} = |d\mathbf{r}^{(2)}|\mathbf{e}_2$, které se před deformací nacházely v bodě A = [0, 1, 0].

Rešení:

Dle vztahu (17.43) spočítáme složky tenzoru malé deformace, který v maticovém vyjádření bude mít následující tvar

$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} 0 & kx_2 & 0 \\ kx_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

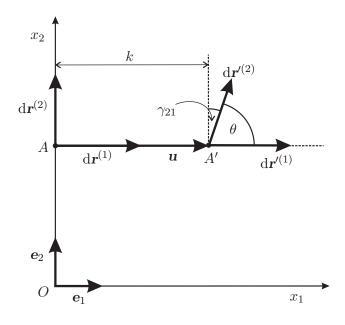
Vzhledem k tomu, že $\epsilon_{11} = 0$ bude relativní prodloužení ve směru osy x_1 , resp. ve směru souřadnicového vektoru \mathbf{e}_1 , nulové, a tudíž bude nulové i prodloužení vektorového elementu

 $d\mathbf{r}^{(1)} = |d\mathbf{r}^{(1)}|\mathbf{e}_1$. Jelikož i diagonální složka $\epsilon_{22} = 0$, potom bude rovněž nulové prodloužení vektorového elementu $d\mathbf{r}^{(2)} = |d\mathbf{r}^{(2)}|\mathbf{e}_2$.

V bodě A = [0, 1, 0] je $x_2 = 1$, potom pro bod A budou mít složky tenzoru malých deformací následující hodnoty

$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Tedy pro bod A platí, že $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = k$, potom na základě vztahu (17.57) platí, že smykový úhel $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 2\epsilon_{12} = 2k$. Po deformaci budou vektorové elementy d $\mathbf{r}'^{(1)}$ a d $\mathbf{r}'^{(2)}$ svírat, dle vztahu (17.52), úhel $\theta = \pi/2 - \gamma_{12} = \pi/2 - 2k$. Pomocí vztahu (17.36) dostaneme, že d $\mathbf{r}'^{(1)} = (\mathrm{d}x_1^{(1)}, 0, 0) = \mathrm{d}\mathbf{r}'^{(1)}$ a d $\mathbf{r}'^{(2)} = (k\mathrm{d}x_1^{(2)}, \mathrm{d}x_2^{(2)}, 0)$. Výsledná situace je zachycena na obrázku 17.7.



Obrázek 17.7: Situační obrázek k příkladu.

17.2.2 První invariant tenzoru malé deformace

V souřadnicové soustavě hlavních os deformace vymizí (jsou nulové) nediagonální složky tenzoru malé deformace, takže je možné konstatovat, že hlavní osy deformace si tedy při deformaci zachovávají svůj směr, tedy i po deformaci jsou vzájemně kolmé, jelikož smykové úhly jsou nulové. V maticovém vyjádření můžeme zapsat tenzor malých deformací v souřadnicové soustavě hlavních os jako

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} , \qquad (17.60)$$

kde $\epsilon_1,\,\epsilon_2,\,\epsilon_3$ jsou řešení následující charakteristické kubické rovnice 7

$$\begin{vmatrix} (\epsilon_{11} - \epsilon) & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & (\epsilon_{22} - \epsilon) & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & (\epsilon_{33} - \epsilon) \end{vmatrix} = 0, \qquad (17.61)$$

kterou je možné přepsat do tvaru

$$\epsilon^3 - \vartheta_1 \epsilon^2 + \vartheta_2 \epsilon - \vartheta_3 = 0 , \qquad (17.62)$$

kde ϑ_1 , ϑ_2 a ϑ_3 jsou tzv. skalární invarianty tenzoru malých deformací, tj. jedná se o veličiny, které se nemění při transformacích souřadnic. Důležitý je především první invariant tenzoru malých deformací ϑ_1 , který je dán následujícím vztahem

$$\vartheta_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = konst. \tag{17.63}$$

Předpokládejme kvádr o hranách a, b, c, které jsou rovnoběžné s hlavními osami deformace. Objem tohoto kvádru je

$$V_0 = a b c$$
, (17.64)

Po deformaci tohoto kvádru dostaneme opět kvádr s hranami a', b', c', jelikož, jak bylo výše uvedeno, hlavní osy deformace si při deformaci zachovávají svůj směr. Protože ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 odpovídají relativním prodloužením ve směru hlavních os deformace, je možné pro hrany deformovaného kvádru psát

$$a' = a + \Delta a = a + a \epsilon_1 = a(1 + \epsilon_1) ,$$

 $b' = b + \Delta b = b + b \epsilon_2 = b(1 + \epsilon_2) ,$
 $c' = c + \Delta c = c + c \epsilon_3 = c(1 + \epsilon_3) .$ (17.65)

Objem kvádru po deformaci bude

$$V = a'b'c' = a b c (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) \cong a b c (1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3).$$
 (17.66)

Pomocí vztahů (17.64), (17.66) a (17.63) můžeme vyjádřit objemovou (kubickou) dilataci jako

$$\mathcal{K} = \frac{V - V_0}{V_0} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \vartheta_1 . \tag{17.67}$$

Výsledek (17.67) nám říká, že první invariant vyjadřuje změnu jednotkového objemu po malé deformaci.

17.3 Zobecněný Hookův zákon

Předpokládejme, že je kontinuum podrobeno působení časově neproměnných vnějších sil, takže dochází k jeho deformaci. Přestanou-li tyto vnější síly působit, kontinuum (těleso) se vrátí do původního stavu. Takovéto těleso pak nazýváme tělesem pružným (elastickým)⁸.

 $^{^7}$ Jedná se vlastně o hledání vlastních čísel matice, přičemž maticí je v tomto případě maticový zápis tenzoru malých deformací (17.59). V našem případě jsou vlastními čísly ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 . Vlastní vektory odpovídající nalezeným vlastním číslům jsou navzájem kolmé a jejich jednotkové vektory jsou souřadnicovými vektory souřadnicové soustavy hlavních os.

⁸Nutno poznamenat, že reálná tělesa se do původního stavu nevrací, a tudíž u nich pozorujeme tzv. zbytkovou deformaci. Tedy těleso bez zbytkové deformace je tělesem dokonale pružným. Opakem dokonale pružných těles jsou tělesa (dokonale) plastická, tj. tělesa, která zůstávají ve výsledném zdeformovaném stavu i v případě, že vnější síly přestanou působit.

Zmíněná deformace vlivem vnějších sil má za následek vznik napětí, které kompenzuje ve všech bodech kontinua vlivy zmíněných vnějších sil. Odtud vyplývá, že v ustáleném stavu je tenzor napětí nějakou funkcí složek tenzoru deformace. V následujícím textu se budeme věnovat pouze případu, kdy tenzor napětí bude lineární funkcí složek tenzoru deformace. Tímto předpokladem se omezíme na tzv. lineární teorii pružnosti. Obecná lineární závislost mezi napětím a deformací je dána zobecněným Hookovým zákonem, který můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} C_{ijkl} \epsilon_{kl} , \qquad i, j = 1, 2, 3 .$$
 (17.68)

Zobecněný Hookův zákon je dán tenzorovou rovnicí, která nám ukazuje, jak každá ze šesti složek tenzoru napětí (symetrický tenzor) závisí na šesti složkách tenzoru malých deformací. Tenzor čtvrtého řádu $\{C\}$ nazýváme tenzorem elastických koeficientů. Složky tenzoru elastických koeficientů jsou obecně funkcí polohy, avšak my se omezíme pouze na případ homogenních elastických těles, pro která složky tohoto tenzoru na poloze nezávisí. Plný počet těchto nezávislých složek je využit pouze v případě látek z velkým stupněm anizotropie. Tenzor elastických koeficientů $\{C\}$, jakožto tenzor čtvrtého řádu má $3^4=81$ složek. Díky symetrii tenzoru napětí $\{\sigma\}$ a tenzoru malých deformací $\{\epsilon\}$ platí, že $C_{ijkl}=C_{jikl}$ a $C_{ijkl}=C_{ijlk}$, čímž se tedy počet nezávislých složek tenzoru $\{C\}$ redukuje na $36=6\cdot 6$. Avšak z energetických úvah vyplývá, že tenzor $\{C\}$ je symetrický i při záměně první dvojice indexů s dvojicí druhou, a proto platí, že $C_{ijkl}=C_{klij}$. Tímto se dále redukuje počet nezávislých složek tenzoru elastických koeficientů na výsledných 21 nezávislých složek. S tímto počtem složek tenzoru $\{C\}$ se setkáváme pouze u látek s vysokým stupněm anizotropie⁹. Při přechodu k látkám méně anizotropním se tento počet dále výrazně redukuje¹⁰. Pro izotropní elastické těleso¹¹ se počet nezávislých elastických koeficientů redukuje na 2.

Izotropnímu elastickému tělesu musí příslušet izotropní tenzor elastických koeficientů $\{C\}$. Obecně pro izotropní tenzor platí, že se jeho složky při ortogonální transformaci souřadnic nemění neboli izotropní tenzor má stejné složky v každé ortonormální bázi¹². Pomocí Kroneckerova symbolu, jakožto izotropního tenzoru druhého řádu, je možné vytvořit následující tři izotropní tenzory čtvrtého řádu

$$A_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} , \quad B_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} , \quad H_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk} .$$
 (17.69)

Dá se dokázat, že jakýkoliv izotropní tenzor čtvrtého řádu může být vyjádřen jako lineární kombinace výše uvedených izotropních tenzorů čtvrtého řádu (17.69), tedy i izotropní tenzor elastických koeficientů $\{C\}$

$$C_{ijkl} = \lambda A_{ijkl} + \alpha B_{ijkl} + \beta H_{ijkl}$$
, $i, j, k, l = 1, 2, 3$, (17.70)

kde λ , α , β jsou konstanty.

Pomocí vztahů (17.69) a rovnosti (17.70) je možné vyjádřit zobecněný Hookův zákon (17.68)

⁹Připomeňme, že anizotropní těleso má v různých směrech rozdílné mechanické vlastnosti.

 $^{^{10}}$ Příkladem mohou být krystalové struktury (krychlová, hexagonální atd.), u kterých se uplatní další symetrie, čímž se počet nezávislých složek tenzoru $\{C\}$ dále sníží.

¹¹Izotropním elastickým tělesem chápeme těleso, které má ve všech směrech stejné mechanické vlastnosti. Příkladem mohou být látky s polykrystalickou strukturou, např. kovy.

¹²Dá se ukázat, že tenzor nultého řádu (skalár) je izotropním tenzorem, izotropní tenzor prvního řádu neexistuje, jediným izotropním tenzorem druhého řádu je Kroneckerův symbol a jediným izotropním tenzorem třetího řádu je Levi-Civitův symbol.

jako

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon_{kl} + \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} \epsilon_{kl} + \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \beta \delta_{il} \delta_{jk} \epsilon_{kl} ,$$

$$i, j = 1, 2, 3 . \quad (17.71)$$

Odtud úpravou dostaneme, že

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} + (\alpha + \beta) \epsilon_{ij} , \qquad i, j = 1, 2, 3 .$$
 (17.72)

S ohledem na vztah (17.63) a zavedením označení 2μ za $\alpha+\beta$ můžeme přepsat rovnici (17.72) do následujícího tvaru

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta_1 \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} , \qquad i, j = 1, 2, 3 . \tag{17.73}$$

Vztah (17.73) vyjadřuje zobecněný Hookův zákon pro izotropní těleso. První člen na pravé straně rovnice (17.73) popisuje objemovou deformaci a druhý deformaci tvarovou. Konstanty λ , μ se nazývají Laméovy koeficienty. Protože složky tenzoru deformace jsou bezrozměrné, mají Laméovy koeficienty stejný fyzikální rozměr jako složky tenzoru napětí, tj. $[{\rm N/m^2}]$. Pro konkrétní materiály musí být Laméovy konstanty určeny pomocí vhodně navržených experimentů.

17.4 Youngův modul, Poissonova konstanta, modul torze

Zobecněný Hookův zákon je možné napsat i v inverzním tvaru (inverzní zobecněný Hookův zákon), tj.

$$\epsilon_{kl} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} S_{klij} \sigma_{ij} , \qquad k, l = 1, 2, 3 ,$$
(17.74)

kde S_{klij} jsou složky tzv. tenzoru elastických modulů. Některé moduly, resp. prvky, tenzoru $\{S\}$ hrají významnou roli v teorii pružnosti a z tohoto důvodu se jim budeme věnovat v rámci této kapitoly.

Na základě rovnice (17.73) můžeme inverzní Hookův zákon (17.74) pro izotropní tělesa přepsat jako

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu} \delta_{ij} \vartheta_1 \ . \tag{17.75}$$

Pro další úpravy si vyjádříme první invariant tenzoru deformace ϑ_1 pomocí složek tenzoru napětí. Z Hookova zákona pro izotropní tělesa (17.73) můžeme psát

$$\Theta = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii} = \lambda \vartheta_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \delta_{ii}}_{=3} + 2\mu \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ii}}_{=\vartheta_1} = (3\lambda + 2\mu)\vartheta_1 , \qquad (17.76)$$

kde $\Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ nazýváme lineární invariant tenzoru napětí. Ze vztahu (17.76) můžeme pro první invariant tenzoru deformace ϑ_1 psát

$$\vartheta_1 = \frac{\Theta}{3\lambda + 2\mu} \ . \tag{17.77}$$

Dosazením za ϑ_1 ze vztahu (17.77) do rovnice (17.75) po úpravě dostaneme

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\Theta}{3\lambda + 2\mu} \lambda \right) . \tag{17.78}$$

Uvažujme nyní případ, kdy je izotropní těleso podrobeno čistému tahu (vektor napětí má stejný směr jako jednotkový normálový vektor) ve směru osy x_1 , pak $\sigma_{11} \neq 0$ a ostatní složky tenzoru napětí jsou nulové. Za těchto okolností z rovnosti (17.78) plyne

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{11} - \delta_{11} \frac{\Theta}{3\lambda + 2\mu} \lambda \right) = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3\lambda + 2\mu} \lambda \right) = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right) \sigma_{11} ,$$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu} \frac{\sigma_{11}}{3\lambda + 2\mu} , \quad \epsilon_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j .$$
(17.80)

Ze vztahů (17.79) a (17.80) je zřejmé, že je-li podrobeno izotropní těleso čistému tahu, potom u něho nedochází ke smykovým deformacím, takže se jeho deformace projeví pouze jeho relativním prodloužením, resp. zkrácením, ve směru souřadnicových os.

Poměr napětí σ_{11} a relativního prodloužení ϵ_{11} značíme E a nazýváme Youngův modul (pružnosti). Na základě vztahu (17.79) můžeme Youngův modul E vyjádřit pomocí Laméových koeficientů, tj.

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \ . \tag{17.81}$$

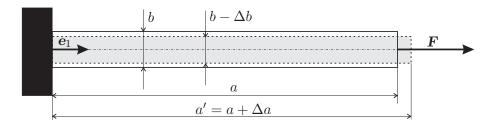
Ze vztahu (17.81) je možné vyjádřit elementární Hookův zákon v matematickém tvaru jako

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} \tag{17.82}$$

neboli

$$\epsilon_{11} = \frac{a' - a}{a} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \,,$$
 (17.83)

kde a je původní délka tyče¹³, a' je nastalá délka tyče vlivem silového působení, S je její průřez a F je velikost síly, kterou namáháme tyč v tahu ve směru osy x_1 (podélná síla), viz obr. 17.8. Přímá úměrnost mezi deformací a napětím, jak je popisována vztahem (17.82),



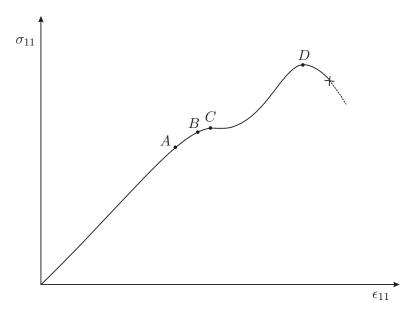
Obrázek 17.8: Působení čistého tahu na vetknutou tyč. Plnou čarou je zachycen stav před deformací, čarou přerušovanou stav po deformaci. Z obrázku je patrné podélné prodloužení a příčné zkrácení tyče.

platí jen pro malé deformace. Pro větší hodnoty deformace přestává být vztah mezi napětím a deformací lineární. Na obrázku 17.9 je zachycen tzv. tahový (napěťový) diagram tenké tyče. Na tahovém diagramu jsou vyznačeny čtyři významné body. Bod A je bodem, za kterým přestává elementární Hookův zákon (17.82) platit, neboli od tohoto bodu přestává platit předpokládaný lineární vztah mezi napětím a deformací. Tento bod nazýváme mez úměrnosti.

 $^{^{13}\}mathrm{Zde}$ hovoříme o tyči s ohledem na experimentální sestavu sloužící k určování Youngova modulu pro daný materiál.

Za tímto bodem začíná napětí růst pomaleji. Dalším bodem je bod B, který nazýváme mezi pružnosti. Do tohoto bodu je deformace ještě vratná. Za mezí pružnosti dochází k plastické deformaci. V oblasti plastické deformace se dále nachází bod C, který nazýváme mez kluzu. Od tohoto bodu dochází k další deformaci, avšak prakticky při konstantním napětí, takže říkáme, že materiál teče. V této fázi dochází ke změně některých fyzikálních vlastností zkoumaného materiálu. Posledním bodem je bod D, který nazýváme mez pevnosti. Za tímto bodem dochází ke zmenšování příčného průřezu uvažované tyče, až se nakonec tato tyč přetrhne.

Další významnou konstantou je tzv. Poissonova konstanta (součinitel příčného zkrácení),



Obrázek 17.9: Tahový (napěťový) diagram tyče.

která je definována jako poměr příčného zkrácení k relativnímu prodloužení, tedy podíl vztahů (17.80) a (17.79)

$$\nu = \left| \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} \right| = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \,. \tag{17.84}$$

Z definičního vztahu pro Poissonovu konstantu (17.84) je zřejmé, že tato konstanta je bezrozměrná.

Pro příčné zkrácení tyče můžeme na základě vztahu (17.84) napsat rovněžHookův~zákon~pro~příčné zkrácení

$$\epsilon_{22} = -\nu \epsilon_{11} \tag{17.85}$$

neboli

$$\frac{\Delta b}{b} = -\nu \frac{\Delta a}{a} \ . \tag{17.86}$$

Pomocí vztahů (17.81) a (17.84) můžeme dospět k následujícím vztahům pro Laméovy koeficienty vyjádřené pomocí Youngova modulu a Poissonovy konstanty

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \,, \tag{17.87}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \ . \tag{17.88}$$

Uvážíme-li, že pro tyč obdélníkového průřezu platí, že $\epsilon_{11} = \Delta a/a \ll 1$ a $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \Delta b/b = \Delta c/c \ll 1$, potom s ohledem na vztahy (17.83), (17.85) a (17.86) můžeme objemovou dilataci (17.67) vyjádřit následujícím způsobem

$$\mathcal{K} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_{11} + 2\epsilon_{22} = \epsilon_{11}(1 - 2\nu) . \tag{17.89}$$

Jelikož objem tyče tahovým působením vždy roste, musí platit, že $0 \le \nu \le 0, 5$. Pro materiály jejichž Poissonova konstanta se blíží hodnotě 0,5 se objem tyče téměř nemění, takovým materiálem je např. guma.

Pomocí konstant E a ν je možné přepsat inverzní Hookův zákon pro izotropní materiály jako

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \delta_{ij}\nu\Theta \right] . \tag{17.90}$$

Podobně můžeme přepsat i Hookův zákon pro izotropní materiály

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta_1 \delta_{ij} \right) . \tag{17.91}$$

Dále uvažujme případ, kdy je izotropní těleso podrobeno *čistému (prostému) smyku*. Čistý smyk nastává v případě, kdy pouze jeden nediagonální pár složek tenzoru deformace je nenulový. Nechť je tímto párem pár $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} \neq 0$, takže $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \epsilon_{23} = \epsilon_{32} = 0$. Na základě Hookova zákona pro izotropní tělesa (17.73) pak můžeme psát, že

$$\sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12} \ . \tag{17.92}$$

Na základě zavedení vztahu mezi smykovými úhly a nediagonálními složkami tenzoru deformace (17.59) můžeme upravit rovnici (17.92) jako

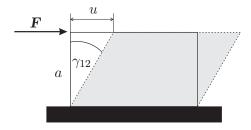
$$\sigma_{12} = \mu \gamma_{12} \ . \tag{17.93}$$

Odtud můžeme napsat, že

$$\gamma_{12} = \frac{1}{\mu} \sigma_{12} \ . \tag{17.94}$$

Vztah (17.94) představuje Hookův zákon pro prostý smyk, kde Laméův koeficient μ nazýváme také modul torze (modul pružnosti ve smyku), který však v tomto případě zpravidla značíme G, takže se častěji setkáváme s matematickým vyjádřením Hookova zákona pro prostý smyk v následujícím tvaru

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G}\sigma_{12} \ . \tag{17.95}$$



Obrázek 17.10: Čistá smyková deformace izotropního kvádru. Plnou čarou je zachycen stav před deformací, čarou přerušovanou stav po deformaci.

17.5 Pohybové rovnice kontinua

Síly, které urychlují element objemu kontinua, rovny objemovým a povrchovým silám na tento element působících. Dle vztahu (17.20), resp. (17.21), můžeme na základě 2. Newtonova pohybového zákona psát

$$\mathcal{F}_{i} dV + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_{j}} dV = \rho \frac{\partial^{2} u_{i}}{\partial t^{2}} dV , \qquad i = 1, 2, 3 , \qquad (17.96)$$

odtud

$$\mathcal{F}_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} , \qquad i = 1, 2, 3 , \qquad (17.97)$$

kde ρ je hustota uvažovaného kontinua a u_i jsou složky vektoru posunutí. Parciální diferenciální rovnice (17.97) představuje základní pohybovou rovnici kontinua, ze které se vychází při studiu konkrétních dynamických problémů.

Předpokládejme, že kontinuum je homogenní a izotropní. V tomto případě dosadíme za složky tenzoru napětí v rovnici (17.97) ze vztahu (17.73), čímž dostaneme

$$\sum_{i=1}^{3} \left[\lambda \frac{\partial}{\partial x_j} (\vartheta_1 \delta_{ij}) + 2\mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} \right] + \mathcal{F}_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (17.98)

Pomocí vztahů (17.43) a (17.67) je možné dále upravit rovnici (17.98) jako

$$\sum_{j=1}^{3} \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{kk} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} + \mathcal{F}_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
(17.99)

Uvážíme-li, že $\epsilon_{kk} = \partial u_k/\partial x_k$, je možné dále upravit předchozí rovnici do následujícího tvaru

$$(\lambda + \mu) \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^{2} u_{j}}{\partial x_{i} \partial x_{j}} + \mu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^{2} u_{i}}{\partial x_{j}^{2}} + \mathcal{F}_{i} = \rho \frac{\partial^{2} u_{i}}{\partial t^{2}}, \qquad i = 1, 2, 3.$$
 (17.100)

Rovnici (17.100) je možné přepsat do vektorového tvaru

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mathcal{F} = \rho \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}.$$
 (17.101)

Rovnice (17.100), resp. (17.101) se nazývá Navierova-Laméova rovnice.

Vlnová rovnice pro homogenní izotropní kontinuum

V další části této kapitoly budeme předpokládat, že lze zanedbat objemové síly působící na kontinuum, tedy $\mathcal{F}_i = 0$ pro i = 1, 2, 3. Rovnici (17.101) podělíme hustotou uvažovaného izotropního kontinua a zavedeme následující konstanty

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \,, \tag{17.102}$$

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \,, \tag{17.103}$$

tedy $\mu = \rho c_T^2$, $\lambda = \rho (c_L^2 - 2c_T^2)$.

Dostaneme následující tvar pohybové rovnice

$$(c_L^2 - c_T^2)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + c_T^2\nabla^2\mathbf{u} = \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}.$$
 (17.104)

Podle tzv. Helmholtzovy věty je možné každý vektor **u** rozložit na součet dvou vektorů

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_T + \mathbf{u}_L \,, \tag{17.105}$$

pro něž platí

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_T = 0 \,, \tag{17.106}$$

$$\nabla \times \mathbf{u}_L = \mathbf{0} \,. \tag{17.107}$$

Do rovnice (17.104) dosadíme za vektor posunutí ze vztahu (17.105), kdy využijeme rovnosti (17.106), takže dostaneme

$$(c_L^2 - c_T^2)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_L) + c_T^2\nabla^2(\mathbf{u}_T + \mathbf{u}_L) = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2}.$$
 (17.108)

Nyní na celou rovnici (17.108) budeme aplikovat operaci divergence $\nabla \cdot$, čímž dostaneme, s ohledem na rovnost (17.106), následující rovnici

$$(c_L^2 - c_T^2) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_L) + c_T^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_L) = \nabla \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} , \qquad (17.109)$$

kterou dále upravíme do následujícího tvaru

$$\nabla \cdot \left(c_L^2 \nabla^2 \mathbf{u}_L - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} \right) = 0.$$
 (17.110)

Aby byla splněna rovnice (17.110) v celém uvažovaném prostoru, potom musí platit, že

$$c_L^2 \nabla^2 \mathbf{u}_L - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} = 0.$$
 (17.111)

Podobně provedeme operaci rotace $\nabla \times$ celé rovnice (17.108), čímž dospějeme, s využitím vztahu (17.107), k následující rovnosti

$$c_T^2 \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}_T) = \nabla \times \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} , \qquad (17.112)$$

kterou dále upravíme

$$\nabla \times \left(c_T^2 \nabla^2 \mathbf{u}_T - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} \right) = 0.$$
 (17.113)

Opět má-li být splněna rovnice (17.113) v celém uvažovaném prostoru, musí platit, že

$$c_T^2 \nabla^2 \mathbf{u}_T - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} = 0. (17.114)$$

Rovnice (17.111) představuje vlnovou rovnici pro podélné (longitudiální) vlny, které se šíří rychlostí c_L . Rovnice (17.114) představuje vlnovou rovnici pro příčné (transversální) vlny, které se šíří rychlostí c_T . Vlny, resp. vlnění, popisované uvedenými vlnovými rovnicemi představují mechanické elastické vlny.

Pomocí vztahů pro Laméovy koeficienty (17.87) a (17.88) je možné upravit vztahy pro rychlosti šíření (17.102) a (17.103)

$$c_T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \,\,\,(17.115)$$

$$c_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \ . \tag{17.116}$$

17.6 Mechanika tekutin

Tekutiny chápeme jako kontinuum, takže základní vztahy a rovnice odvozené v předchozích kapitolách věnovaných mechanice kontinua platí i pro tekutiny. Název tekutina je společné označení pro kapalinu a plyn, které mají společnou vlastnost a tou je tekutost, tj. mohou téci. Mechanické chování kapalin a plynů je natolik podobné, že je výhodné jejich obecný popis dělat současně, a pouze zvlášť diskutovat případy, které vedou k odlišným závěrům z důvodu odlišnosti obou druhů látek.

Rozdíl mezi kapalinami a plyny spočívá v tom, že kapaliny tvoří, na rozdíl od plynů, volnou hladinu, což je dáno skutečností, že molekuly kapaliny jsou k sobě vázány tzv. kohézními silami (soudržnými silami). U plynů jsou kohézní síly mezi molekulami natolik slabé, že nemají téměř žádnou vzájemnou soudržnost a tudíž netvoří volnou hladinu. Molekuly plynu se velmi rychle pohybují a neustále do sebe narážejí, čímž si vyměňují hybnost a energii. Díky nesoudržnosti molekul plynů, tyto molekuly vyplní jakýkoliv prostor, do kterého je uzavřeme. Z důvodu této skutečnosti, můžeme plyn považovat za amorfní neboli beztvarou látku. Za amorfní můžeme považovat i kapaliny, jelikož zaujímají vždy tvar nádoby, do které je nalijeme.

Na tekutost tekutiny má vliv jejich tzv. viskozita (vazkost). Viskozita (vazkost) představuje odpor tekutiny proti změně tvaru. Je zřejmé, že tato vlastnost přichází v úvahu, jen když tekutina není v rovnováze, tj. nestačila se přizpůsobit vnějším silám na ní působícím. Tak jak vznikají síly při vzájemném suchém tření těles, tak můžeme mluvit o síle vazkosti, která má snahu zeslabit rozdíl vzájemných rychlostí v proudící tekutině. Vzhledem k jisté podobnosti mezi silami vazkosti a silami třecími, nazýváme jevy spojené s vazkostí tekutin vnitřním třením.

Při pohybu tekutiny 14 se tedy uplatňují i tečné (nediagonální) složky tenzoru napětí, které ovlivňují jejich tekutost. Zpravidla namísto tečných složek tenzoru napětí hovoříme o viskozitě neboli vnitřním tření tekutin. V mechanice tekutin zavádíme pojem ideální (dokonalá) kapalina, což je kapalina neviskózní (bez vnitřního tření) neboli jedná se o kapalinu dokonale tekutou. Navíc ideální kapalina je dokonale nestlačitelná, tj. $\rho = konst.$ Ideálním (dokonalým) plynem budeme chápat plyn, který je neviskózní (nevazký) a současně dokonale stlačitelný. Použijeme-li označení ideální (dokonalá) tekutina, tak budeme mít na mysli tekutinu bez vnitřního tření neboli neviskózní (nevazká).

Když je tekutina v rovnováze, tak se viskozita neuplatňuje, tudíž závěry týkající se statiky tekutin, budou platit jak pro tekutiny ideální, tak tekutiny viskózní (vazké).

Co se týče volné hladiny kapalin, tak je nutné zdůraznit, že odpovídá ekvipotenciální hladině (ploše) tíhového pole, tj. $U(\mathbf{r}) = konst.$ (hustota kapaliny je ve všech bodech konstantní i při působení libovolných vnějších sil). Nachází-li se kapalina v homogenním tíhovém poli, potom vytváří vodorovnou hladinu. V případě, že se kapalina nachází v beztížném stavu, tak zaujme kulový tvar¹⁵.

Na základě výše uvedeného je možné konstatovat, že pro rovnováhu tekutin platí stejná podmínka rovnováhy jako pro obecné kontinuum (17.21). Pro tenzor napětí ideální tekutiny můžeme napsat, že

$$\sigma_{ij} = -p \,\delta_{ij} \;, \qquad i, j = 1, 2, 3 \;,$$
(17.117)

kde $p \geq 0$ je tzv. tlak tekutiny a záporné znaménko volíme z důvodu, že tlak má opačný směr než vnější normála uvažované (uzavřené) plochy elementu kontinua. Vztah (17.117) nám říká, že napětí je čistý tlak velikosti p, který je stejný ve všech rovinách proložených daným bodem tekutiny. Jelikož jsou u ideálních tekutin tečné složky tenzoru napětí nulové

 $^{^{14}{\}rm My}$ šleno reálných tekutin.

 $^{^{15}}$ Kulový tvar vznikne vlivem působení povrchového napětí, čímž dosáhne daný objem kapaliny stabilního stavu, který souvisí s minimální energií systému

 $(\sigma_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j)$, ideální tekutina neklade odpor změně tvaru. Podmínka $p \geq 0$ nám říká, že v ideální tekutině nelze realizovat tahové napětí.

17.6.1 Statika tekutin

Vzhledem k tomu, že se tečné složky tenzoru napětí u tekutiny, která je v rovnováze, neuplatní, budeme při zkoumání statiky tekutin¹⁶ předpokládat, že tenzor napětí je dán vztahem (17.117), čímž je možné upravit rovnici vyjadřující podmínku rovnováhy kontinua (17.21) jako

$$\mathcal{F}_i - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (p \, \delta_{ji})}{\partial x_j} = 0 \;, \qquad i = 1, 2, 3 \;,$$
 (17.118)

tedy

$$\mathcal{F}_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 , \qquad i = 1, 2, 3 . \tag{17.119}$$

Rovnici (17.119) je možné snadno přepsat do vektorového tvaru

$$\mathcal{F} - \nabla p = \mathbf{0} \,. \tag{17.120}$$

Jestliže rovnici (17.120) skalárně vynásobíme výrazem d \boldsymbol{r} , tak po drobné úpravě dostaneme, že

$$\mathbf{\mathcal{F}} \cdot \mathbf{dr} = \mathbf{\nabla} p \cdot \mathbf{dr} = \mathbf{d} p . \tag{17.121}$$

Pravá strana rovnice (17.121) představuje úplný diferenciál tlaku. Aby jím byla i levá strana této rovnice, potom musí platit, že

$$\mathcal{F} = -\nabla \mathcal{U} \,\,\,\,(17.122)$$

kde \mathcal{U} je potenciální energie vztažená na jednotku objemu tekutiny (objemová hustota potenciální energie tekutiny). Odtud je vidět, že objemové síly musí být síly potenciálové.

Pascalův zákon

Dosazením za objemovou hustotu síly $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ ze vztahu (17.122) do vztahu (17.121) dostaneme, že

$$-\nabla \mathcal{U} \cdot d\mathbf{r} = \nabla p \cdot d\mathbf{r}. \tag{17.123}$$

Odtud tedy můžeme psát, že

$$-d\mathcal{U} = dp. ag{17.124}$$

Následnou integrací rovnice (17.124) dostaneme

$$\int_{p_0}^{p} dp = -(\mathcal{U} - \mathcal{U}_0) , \qquad (17.125)$$

kde p, p_0 , $\mathcal{U} = \mathcal{U}(p)$, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}(p_0)$ jsou hodnoty tlaku a objemové hustoty potenciální energie tekutiny ve dvou různých místech. Dále budeme předpokládat, že se jedná o nestlačitelnou kapalinu. Nechť v uvažovaných místech tekutiny se nepatrně změní hodnota tlaku tekutiny na hodnoty $p + \delta p$, $p_0 + \delta p_0$, přitom při stejných vnějších (objemových) silách bude platit¹⁷

$$\int_{p_0 + \delta p_0}^{p + \delta p} dp = -(\mathcal{U} - \mathcal{U}_0) . \tag{17.126}$$

¹⁶Statika tekutin je ta část mechaniky tekutin, která předpokládá, že vyšetřovaná tekutina se nepohybuje.

¹⁷Avšak plošné síly nejsou neměnné.

Jestliže mezi sebou odečteme rovnice (17.126) a (17.125), tak dostaneme

$$\int_{p_0 + \delta p_0}^{p + \delta p} dp - \int_{p_0}^{p} dp = 0.$$
 (17.127)

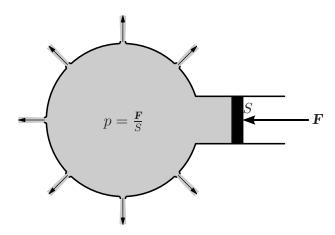
Řešením integrálů v rovnici (17.127) dospějeme k následujícímu výsledku

$$\delta p = \delta p_0 \,, \tag{17.128}$$

který představuje matematické vyjádření *Pascalova zákona* pro nestlačitelné kapaliny. Slovní znění Pascalova zákona můžeme napsat jako:

Tlak ve všech místech nestlačitelné kapaliny se mění o stejnou hodnotu.

Základním zařízením, které využívá Pascalův zákon, je hydraulické zařízení, které slouží k



Obrázek 17.11: Demonstrace Pascalova zákona. Voda vytéká všemi otvory kolmo a se stejnou rychlostí.

převodu sil. Mezi hydraulická zařízení patří hydraulické lisy, hydraulické brzdy, hydraulické zvedáky, ovládací zařízení těžké techniky apod. V principu jde o zařízení, které tvoří nádoba s kapalinou (nejčastěji se jedná o olej). Nádoba je opatřena dvěma písty o různých velikostech ploch, přičemž platí relace, že $S_1 < S_2$, viz obrázek 17.12. Jelikož podle Pascalova zákona vyplývá, že tlak je v kapalině všude stejný, takže z definice tlaku vyplývá, že

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \,, \tag{17.129}$$

odtud dostaneme převodní poměr pro síly, tedy

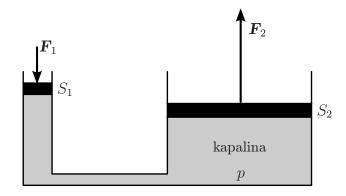
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1} \,. \tag{17.130}$$

Ze vztahu (17.130) vyplývá, že malou silou \mathbf{F}_1 působící na malý píst o ploše S_1 vyvoláme v kapalině tlak p a ten působí velkou silou \mathbf{F}_2 na velký píst mající plochu S_2 .

Archimédův zákon

Při odvozování podmínky rovnováhy kontinua jsme uvažovali kontinuum v rovnováze, je-li v rovnováze každá jeho část. Uvažujeme-li kontinuum o objemu V, který uzavírá plocha S, potom výslednice objemových sil působících v tomto objemu kontinua musí být rovna záporně vzaté výslednici sil plošných, tj.

$$F_i^O = -F_i^P \,, \tag{17.131}$$



Obrázek 17.12: Situační obrázek k vysvětlení principu hydraulického zařízení.

kde F_i^O je složka výslednice vektoru objemové síly daná vztahem (17.1) a F_i^P je složka výslednice plošných sil daná vztahem (17.2). Předpokládáme-li, že uvažovanou objemovou silou je síla tíhová $\mathbf{G} = (0, 0, -mg)$, potom na základě vztahu (17.1) můžeme pro složku objemových sil psát

$$F_3^O = -g \underbrace{\int_V \rho(\mathbf{r}) \, dV}_{-m}, \qquad F_1^O = F_2^O = 0.$$
 (17.132)

Z rovnice (17.131) vyplývá, že

$$F_3^P = -F_3^O = g \int_V \rho(\mathbf{r}) \, dV , \qquad F_1^P = F_2^P = 0 .$$
 (17.133)

Vztah (17.133) nám říká, že přes plochu S působí na kontinuum nacházející se v homogenním tíhovém poli, a jež je v rovnováze, síla, která míří vzhůru a je rovna tíze kontinua $g \int_V \rho(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}V$ majícího objem V. Kdybychom předpokládali, že plocha S uzavírající objem V může být vyplněna pevným tělesem, pak od tekutiny působí přes hraniční plochu S stejné síly, jako kdyby byl objem vyplněn tekutinou. Tedy na pevné těleso ponořené do tekutiny v homogenním tíhovém poli, působí síla, která je dána vztahem (17.133) a tuto sílu nazýváme vztlak a míří svisle vzhůru (v opačném smyslu než síla tíhová) a je rovna tíze tekutiny mající stejný objem V. Tímto jsme dospěli tzv. $Archimédovu\ zákonu$, který může být formulován následujícím způsobem:

Těleso ponořené celým svým povrchem do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, jejíž velikost je rovna tíze kapaliny stejného objemu, jako je objem ponořeného tělesa.

Tlak v tekutině nacházející se v homogenním tíhovém poli Země

V této části kapitoly odvodíme závislost tlaku v tekutině, která se nachází v homogenním tíhovém poli Země, v závislosti na hloubce.

Předpokládejme tíhovou sílu G = (0, 0, -mg), která je orientována proti směru osy x_3 . Na tekutinu o objemu V působí v námi uvažovaném případě objemová síla, která je dána vztahy (17.132), tedy $\mathbf{F}^O = (0, 0, \int_V (-g\rho) \, \mathrm{d}V)$. Porovnáním se vztahem (17.1) je zřejmé, že pro objemovou sílu vztaženou na jednotku objemu můžeme psát

$$\mathcal{F} = (0, 0, -\rho g) . \tag{17.134}$$

Z podmínky rovnováhy pro tekutiny (17.119) dostaneme, že

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \; , \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \; , \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \; .$$
 (17.135)

Na základě rovností (17.135) můžeme pro diferenciál tlaku psát, že

$$dp = (\nabla p) \cdot d\mathbf{r} = -\rho g dx_3 . \tag{17.136}$$

• Budeme-li předpokládat, že hustota uvažované tekutiny je konstantní ($\rho=konst.$), tj. jedná se o nestlačitelnou kapalinu, potom je možné integrací vztahu (17.136) dospět k následující rovnosti

$$p = -\rho g x_3 + C \,, \tag{17.137}$$

kde C je integrační konstanta, kterou určíme z podmínky, že na volnou hladinu uvažované kapaliny působí barometrický (atmosferický) tlak p_b , přičemž výšku volné hladiny kapaliny označíme x_{30} . Potom dosazením do vztahu (17.137) dostaneme

$$C = p_b + \rho g x_{30} . {17.138}$$

Dosadíme-li za integrační konstantu v rovnici (17.137) ze vztahu (17.138), pak pro tlak v nestlačitelné kapalině můžeme psát, že

$$p = p_b + \rho g(x_{30} - x_3) = p_b + \rho gh , \qquad (17.139)$$

kde h představuje hloubku pod volnou hladinou v kapalině. Takže můžeme konstatovat, že tlak v hloubce h pod hladinou nestlačitelné kapaliny je dán součtem barometrického tlaku p_b a tzv. tlaku hydrostatického p_h , kde

$$p_h = \rho g h . \tag{17.140}$$

 Budeme-li nyní předpokládat, že tekutinou je barotropní plyn¹⁸, který se řídí Boylovým-Mariottovým zákonem

$$\rho = kp . \tag{17.141}$$

Dosazením ze vztahu (17.141) do vztahu pro diferenciál tlaku (17.136) dostaneme rovnici

$$\mathrm{d}p = -kgp\,\mathrm{d}x_3\;,\tag{17.142}$$

kterou snadno vyřešíme metodou separace proměnných, čímž dostaneme

$$\ln p = -kq \, x_3 + C' \,, \tag{17.143}$$

kde C' je integrační konstanta. Provedeme-li odlogaritmování výrazu (17.143), tak dostaneme, že

$$p = C \exp(-kqx_3) . \tag{17.144}$$

Umístíme-li počátek souřadnicového systému na zemský povrch a tlak a hustotu na zemském povrchu $(x_3 = 0)$ označíme p_0 , ρ_0 , potom dosazením této okrajové podmínky do vztahu (17.144) můžeme určit integrační konstantu $C = p_0$ a konstantu úměrnosti k ze vztahu (17.141) jako $k = \rho_0/p_0$, takže můžeme přepsat vztah (17.144) jako

$$p = p_0 \exp(-\frac{\rho_0}{p_0} gx_3) . (17.145)$$

Vztah (17.145) se nazývá barometrická formule nebo barometrický vzorec.

¹⁸Plyn označujeme jako barotropní, pakliže jeho hustota je funkcí pouze tlaku $\rho = \rho(p)$.

17.7 Kinematika tekutin

Pohyb tekutiny můžeme pozorovat dvojím způsobem. První způsob se nazývá Lagrangeova metoda a spočívá v tom, že si v tekutině zvolíme libovolnou částici kontinua, resp. tekutiny, kterou pak sledujeme po celou dobu, po kterou nás zajímá. Tato metoda se hodí spíše pro studium deformačního pohybu pružných těles, kdy se částice příliš nevzdalují ze svých poloh. Pro zkoumání pohybu tekutin je výhodnější Eulerova metoda, při které sledujeme změny veličin, jež charakterizují pohyb tekutiny, v určitém libovolně zvoleném bodě prostoru tekutinou zaplněného. Lagrangeův popis vypadá jednoduše, ale studium proudění tekutin z hlediska jednotlivých částic je problematikou spíše speciální než obecně používanou, a proto se budeme dále zabývat pouze Eulerovou metodou popisu proudění založenou na sledování změn proudového pole, což vychází z výše uvedené skutečnosti, že Eulerova metoda pozoruje "dění" v určitém bodě prostoru a nesleduje konkrétní částici. Rychlost je tak funkcí prostoru a času, tedy

$$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \equiv v_i(\mathbf{r}, t) , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (17.146)

Budou-li souřadnice x_1 , x_2 , x_3 v rovnicích (17.146) konstantní a čas t bude proměnný, dostáváme tímto vyjádření pro rychlost různých částic procházejících pevně zvoleným bodem prostoru. Naopak, budou-li souřadnice x_1 , x_2 , x_3 proměnné a čas t konstantní, pak rovnice (17.146) popisují rozdělení rychlostí částic tekutiny v daný časový okamžik. Proměnné x_1 , x_2 , x_3 , t nazýváme Eulerovými proměnnými.

Co se týče zrychlení, tak můžeme pomocí rovnic (17.146) určit jak zrychlení tekutiny v určitém bodě prostoru, tj. při pevných souřadnicích, tak zrychlení každé částice tekutiny. Složky zrychlení tekutiny v určitém bodě prostoru jsou tedy dány jako

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} , \qquad i = 1, 2, 3 . \tag{17.147}$$

Z výše uvedeného vztahu je zřejmé, že složky zrychlení jsou dány parciálními derivacemi odpovídajících složek rychlosti. Takovéto zrychlení nazýváme lokální zrychlení (místní zrychlení).

Co se týče zrychlení částice, tak vyjdeme ze skutečnosti, že v čase t se uvažovaná částice bude nacházet v místě o souřadnicích x_1 , x_2 , x_3 , resp. v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} . V tomto místě budou složky rychlosti částice dány vztahem (17.146). Za časový interval (element času) dt se změní souřadnice částice o dt0, dt0, dt0, Se změnou polohy a času dojde ke změně i uvažovaných složek rychlosti částice. Tuto změnu označíme dt0, a můžeme pro ni s použitím Taylorova rozvoje při zanedbání jeho členů vyšších řádů psát

$$dv_{i} = v_{i}(x_{1} + dx_{1}, x_{2} + dx_{2}, x_{3} + dx_{3}, t + dt) - v_{i}(x_{1}, x_{2}, x_{3}, t) = \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{1}} dx_{1} + \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{2}} dx_{2} + \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{3}} dx_{3} + \frac{\partial v_{i}}{\partial t} dt, \qquad i = 1, 2, 3. \quad (17.148)$$

Podělíme-li výraz (17.148) elementem času dt, tak dostaneme výraz pro zrychlení částice tekutiny

$$a_{i} = \frac{\mathrm{d}v_{i}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_{i}}{\partial t} + \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{1}} \frac{\mathrm{d}x_{1}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{2}} \frac{\mathrm{d}x_{2}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{3}} \frac{\mathrm{d}x_{3}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_{i}}{\partial t} + \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{1}} v_{1} + \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{2}} v_{2} + \frac{\partial v_{i}}{\partial x_{3}} v_{3} \qquad i = 1, 2, 3.$$

$$(17.149)$$

Vztah pro složky zrychlení částice je možné přepsat do vektorového tvaru následujícím způsobem

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \tag{17.150}$$

Ze vztahu (17.150) je vidět, že zrychlení částice je dáno tzv. totální (substancionální) derivací rychlosti částice podle času. Totální derivace rychlosti je dle vztahu (17.150) dána součtem

lokální derivace rychlosti podle času $\partial \mathbf{v}/\partial t$, která vyjadřuje změnu rychlosti v daném místě, a tzv. konvektivní (proudové) derivace rychlosti $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$.

Křivky, jejichž tečné vektory mají směr rychlostního pole, nazýváme *proudnicemi*. Jinými slovy, proudnice je myšlená křivka, ke které je rychlost částice, jež se na této křivce se nachází, tečná. Platí tedy

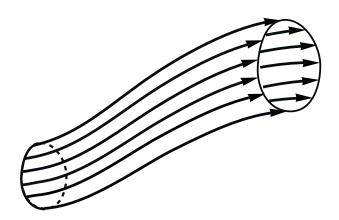
$$\frac{x_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{x_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{x_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)}.$$
 (17.151)

V rovnicích (17.151) je čas t konstantním parametrem.

Částice během svého přemisťování prochází v průběhu času body prostoru, jež tvoří nehybnou orientovanou čáru v prostoru, které říkáme trajektorie. Rychlosti jsou tečné jak k proudnicím, tak k trajektoriím. Rozdíl mezi těmito čarami spočívá v tom, že proudnice jsou určeny rychlostmi částic tekutiny ve stejném čase, zatímco trajektorie jsou určeny rychlostmi částic v po sobě jdoucích časových okamžicích. Proudnice mohou být vytvořeny různými částicemi tekutiny. Proudnice se navzájem neprotínají, což je dáno skutečností, že v daný okamžik se může nacházet v jednom bodě prostoru pouze jedna částice. Při nestacionárním proudění se kinematický stav tekutiny v libovolném bodě prostoru mění s časem. Proto je obraz proudnic v každém okamžiku jiný. Naproti tomu jsou trajektorie neproměnnými křivkami. Z tohoto vyplývá, že při nestacionárním proudění proudnice a trajektorie částic nejsou obecně totožné. Proudnice jsou totožné s trajektoriemi částic pouze v případě stacionárního (ustáleného) proudění, kdy

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0} . \tag{17.152}$$

Zavedení proudnice umožňuje definovat tzv. *proudovou trubici*, což je plocha, kterou vyplní všechny proudnice procházející uzavřenou křivkou, viz obr. 17.13. Pokud je proudění tekutiny ustálené, budou i jeho proudnice v čase neměnné.



Obrázek 17.13: Proudnice vytváří proudovou trubici.

1. Helmholtzova věta

Nechť $v_i(\mathbf{r},t)$ a $v_i(\mathbf{r}',t)$ jsou složky rychlosti dvou prostorově blízkých částic ve stejném časovém okamžiku. Potom na základě vztahu (17.148) můžeme pomocí prvních členů Taylorova

rozvoje psát, že

$$v_i(\mathbf{r}',t) = v_i(\mathbf{r},t) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (x'_j - x_j), \qquad i = 1, 2, 3.$$
 (17.153)

Obecně nesymetrický tenzor $\partial v_i/\partial x_j$ (relativní změna rychlosti částice ve dvou sousedních bodech způsobená nestejnorodostí proudového pole je tenzorem druhého řádu) je možné rozložit na symetrickou a nesymetrickou část, tedy

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij} , \qquad i, j = 1, 2, 3 , \qquad (17.154)$$

kde složky

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \tag{17.155}$$

patří symetrickému tenzoru, který nazýváme tenzor rychlosti deformace a složky

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \tag{17.156}$$

patří antisymetrickému tenzoru, který nazýváme tenzor rychlosti rotace. S ohledem na vztah (17.154) je možné vyjádřit rovnost (17.153) jako

$$v_i(\mathbf{r}',t) = v_i(\mathbf{r},t) + \sum_{j=1}^{3} (\dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij})(x'_j - x_j), \qquad i = 1, 2, 3.$$
 (17.157)

Antisymetrický tenzor rychlosti rotace má diagonální složky nulové a můžeme ho v maticovém tvaru vyjádřit následujícím způsobem

$$\{\dot{\boldsymbol{\omega}}\} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\omega}_{12} & \dot{\omega}_{13} \\ -\dot{\omega}_{12} & 0 & \dot{\omega}_{23} \\ -\dot{\omega}_{13} & -\dot{\omega}_{23} & 0 \end{pmatrix} . \tag{17.158}$$

Zavedeme si vektor úhlové rychlosti rotace jako

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\omega}_{32}, \dot{\omega}_{13}, \dot{\omega}_{21}) , \qquad (17.159)$$

pomocí kterého můžeme přepsat rovnici (17.157) jako

$$v_i(\mathbf{r}',t) = v_i(\mathbf{r},t) + \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \omega_j(x_k' - x_k) + \sum_{j=1}^{3} \dot{\epsilon}_{ij}(x_j' - x_j) , \qquad i = 1, 2, 3 . \quad (17.160)$$

První člen na pravé straně rovnice (17.160) reprezentuje rychlost translace, druhý člen rychlost rotace a třetí člen rychlost deformace. Výsledek (17.160) je matematickým vyjádřením tzv. 1. Helmholtzovy věty, která nám říká, že každý pohyb tekutiny v okolí určitého bodu můžeme rozložit na pohyb translační, pohyb rotační a pohyb deformační.

Pomocí vektoru (17.159) zavádíme tzv. vír rychlosti

$$\mathbf{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} \,. \tag{17.161}$$

Platí-li v určité oblasti, že $\nabla \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pak mluvíme o *vírovém pohybu tekutiny*, resp. *vířivém pohybu tekutiny*, je-li v určité oblasti splněno, že $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, potom mluvíme o *nevírovém pohybu tekutiny*. Při nevírovém proudění vždy existuje taková funkce φ , kterou nazýváme rychlostní potenciál, pro kterou platí, že

$$\mathbf{v} = \mathbf{\nabla}\phi \ . \tag{17.162}$$

Platí-li pro všechny body oblasti, že $\Omega \neq 0$, pak říkáme, že v této oblasti existuje *vírové pole*.

17.8 Dynamika tekutin

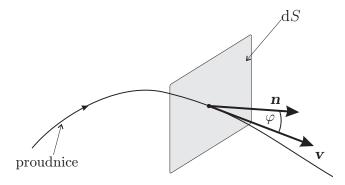
Dynamiku tekutin uvedeme odvozením rovnice kontinuity pro tekutiny.

17.8.1 Rovnice kontinuity

Zavedeme si veličinu *okamžitý objemový průtok* tekutiny orientovaným elementem plochy, která je dána následujícím vztahem (viz obr. 17.14)

$$Q_V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = v dS \cos \varphi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \qquad (17.163)$$

kde ΔV je objem tekutiny, který projde uvažovaným orientovaným elementem plochy za čas Δt , d $\mathbf{S} = \mathbf{n} \mathrm{d} S$ je orientovaný element plochy, \mathbf{n} je její vnější normála a \mathbf{v} je vektor okamžité rychlosti částice tekutiny v místě průchodu uvažovaným elementem plochy. Je-li \mathbf{n} vnější jednotkový normálový vektor, potom má výtok vždy znaménko "+", kdežto vtok znaménko "-". Veličina \mathcal{Q}_V nám číselně udává objem tekutiny, který projde uvažovaným elementem plochy, jehož orientace je dána vnějším normálovým vektorem, za jednotku času. Další veličinou, kterou si zavedeme, je okamžitý hmotnostní průtok



Obrázek 17.14: Situační obrázek k zavedení okamžitého objemového a hmotnostního toku tekutiny orientovaným elementem plochy.

$$Q_{m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \rho \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho Q_{V} = \rho v dS \cos \varphi = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S},$$
(17.164)

kde $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ je tzv. hustota toku neboli proudová hustota tekutiny. Veličina \mathcal{Q}_m nám číselně udává množství (hmotnost) tekutiny, které projde uvažovaným elementem plochy, jehož orientace je dána vnějším normálovým vektorem, za jednotku času.

Nyní uvažujme tekutinu o objemu V, jejíž hmotnost je

$$m = \iiint_{V} \rho \mathrm{d}V , \qquad (17.165)$$

a která je uzavřena **nehybnou**¹⁹ plochou S(V) (kontrolní plocha). Uvažovanou uzavřenou plochou S(V), proteče za jednotku času tekutina o hmotnosti, která je číselně rovna

$$Q_m = \iint_{S(V)} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S(V)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$
 (17.166)

¹⁹Uzavírající (uzavřená) plocha nemění jak svoji velikost, tak ani tvar.

Protože musí platit pro tekutiny zákon zachování hmotnosti, tak hmotnost tekutiny, která za jednotku času protekla uvažovanou uzavřenou plochou S(V), se musí rovnat úbytku hmotnosti tekutiny, která byla uzavřena v uvažované ploše, tj. $\partial m/\partial t = -\mathcal{Q}_m$, neboli

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V} \rho dV + \iint_{S(V)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$
 (17.167)

Rovnice (17.167) představuje tzv. rovnici kontinuity tekutin v integrálním tvaru. Použijemeli Gaussovy věty, potom můžeme plošný integrál v rovnici kontinuity (17.167) převést na integrál objemový a dále je možné parciální časovou derivaci zaměnit s uvažovaným objemovým integrálem. Provedeme-li uvedené úpravy, tak nám rovnice kontinuity (17.167) přejde do následujícího tvaru

$$\iiint_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_{V} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = 0.$$
 (17.168)

V rovnici (17.168) sloučíme oba integrály, čímž dostaneme

$$\iiint_{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0.$$
 (17.169)

Libovolnost volby objemu V v rovnici (17.169) implikuje nutnost nulovosti integrandu, tedy dostáváme, že

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{17.170}$$

Rovnice (17.170) představuje tzv. rovnici kontinuity tekutin v diferenciálním tvaru. Budeme-li předpokládat ustálené proudění, tj. $\partial \rho/\partial t = 0$, pak se rovnice kontinuity (17.170), resp. (17.167) redukuje na tvar

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \,, \tag{17.171}$$

resp.

$$\iint_{S(V)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{17.172}$$

Jedná-li se o nestlačitelnou kapalinu ($\rho = konst$), potom je možné zjednodušit výše uvedené tvary rovnice kontinuity pro ustálená proudění jako

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 , \qquad (17.173)$$

$$\iint_{S(V)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$
 (17.174)

17.8.2 Eulerova rovnice

V této kapitole si odvodíme pohybovou rovnici ideální tekutiny, tj. tekutiny, pro které mají tenzory napětí, i při pohybu, nulové všechny nediagonální složky.

Je-li výslednice vnějších sil působících na ideální tekutinu nulová, tak se tekutina bude nacházet v rovnováze a platí pro ni rovnice (17.120). Nenachází-li se tekutina v rovnováze, pak výslednice objemových a plošných sil již není rovna nulovému vektoru, a tudíž na základě 2. Newtonova pohybového zákona, s ohledem na rovnost (17.120), můžeme napsat pohybovou rovnici částice tekutiny, jíž odpovídá element hmotnosti d $m = \rho dV$, tedy

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}V = -\nabla p \,\mathrm{d}V + \mathcal{F} \mathrm{d}V \ . \tag{17.175}$$

Podělíme-li rovnici (17.175) elementem objemu dV a použijeme-li vztahu (17.150) pro vyjádření derivace, potom dostaneme následující pohybovou rovnici

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathcal{F}. \tag{17.176}$$

Rovnice (17.176) je tzv. *Eulerova pohybová rovnice* platící pro ideální tekutinu. Připomeňme skutečnost, že Eulerova rovnice představuje pohybovou rovnici, jejíž členy jsou vztaženy na jednotku objemu.

17.8.3 Bernoulliho rovnice

Výraz $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ v Eulerově rovnici (17.176) můžeme upravit pomocí následující identity

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \tag{17.177}$$

S ohledem na výraz $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, který chceme upravit, dosadíme do vektorové identity (17.177), že $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{v}$, čímž po jednoduché úpravě dostaneme následující vztah

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}). \tag{17.178}$$

Při hledání Bernoulliovy rovnice se omezíme na předpoklad, že proudění tekutiny je nevírové (potenciálové), tj. $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, viz kapitola 17.7. Díky tomuto omezení se rovnice (17.178) zjednoduší, tedy

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{\nabla})\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{\nabla}v^2 . \tag{17.179}$$

Dosadíme-li ze vztahu (17.179) do Eulerovy rovnice (17.176), tak dostaneme

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right) = -\nabla p + \mathcal{F} . \tag{17.180}$$

V případě, že budeme předpokládat, že hustota objemových sil \mathcal{F} souvisí pouze s tíhovou sílou, tak ji můžeme vyjádřit vztahem (17.134). Jelikož je tíhové homogenní pole konzervativní, můžeme, s ohledem na vztah (17.134), a za předpokladu, že tekutina představuje nestlačitelnou kapalinu ($\rho = konst.$) psát, že

$$\mathcal{F} = -\rho g \mathbf{k} = -\nabla \varphi = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} \mathbf{k} , \qquad (17.181)$$

odtud integrací dostáváme, že

$$\varphi = \rho qz \,, \tag{17.182}$$

kde jsme integrační konstantu zvolili rovnu nule. S ohledem na vztah (17.181) lze rovnici (17.180) přepsat následujícím způsobem

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right) = -\nabla p - \nabla \varphi \tag{17.183}$$

a odtud s ohledem na to, že $\rho = konst.$ dostáváme

$$\nabla \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \varphi\right) = -\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \,. \tag{17.184}$$

Budeme-li navíc předpokládat, že proudění nestlačitelné kapaliny je prouděním ustáleným (stacionárním), potom $\partial \mathbf{v}/\partial t = \mathbf{0}$, takže v rovnici (17.184) položíme pravou stranu rovnu nule a dosadíme ze vztahu (17.183)

$$\nabla \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho gz\right) = 0. \tag{17.185}$$

Z rovnice (17.185) můžeme napsat, že

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = konst. , \qquad (17.186)$$

resp.

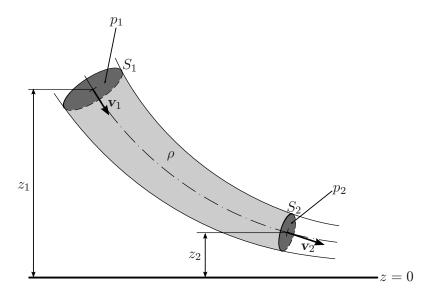
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 , \qquad (17.187)$$

viz obrázek 17.15.

Rovnice (17.186) je tzv. *Bernoulliho rovnice*, která je matematickým vyjádřením následující skutečnosti:

Při ustáleném proudění ideální kapaliny je součet kinetické a potenciální energie objemové jednotky a tlaku všude stejný.

První člen na levé straně Bernoulliho rovnice (17.186) reprezentuje kinetickou energii kapa-



Obrázek 17.15: Proudění kapaliny v trubici.

liny o jednotkovém objemu. Druhý člen pak představuje tíhovou potenciální energii kapaliny o jednotkovém objemu a třetí člen nám vyjadřuje tlakovou potenciální energii kapaliny o jednotkovém objemu a její změna souvisí s prací tlakových sil²⁰. Odtud lze konstatovat, že Bernoulliho rovnice tedy představuje zákon zachování mechanické energie ideální kapaliny (Bernoulliho rovnici lze rovněž poměrně snadno odvodit i pomocí zákona zachování mechanické energie).

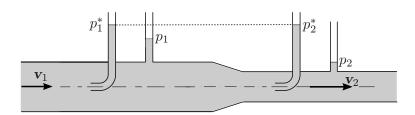
U skutečných kapalin dochází při proudění v důsledku vnitřního tření k úbytku celkové mechanické energie kapaliny. Projevuje se to tím, že v Bernoulliho rovnici (17.186) již není na pravé straně konstanta. V rovnici (17.186) se tato skutečnost řeší způsobem, že na levou stranu rovnice pro skutečné kapaliny se připojí tzv. ztrátová výška, jejímž výpočtem se v rámci našeho výkladu nebudeme zabývat.

První člen na levé straně Bernoulliho rovnice (17.186) představuje také tzv. dynamický tlak.

 $^{^{20}}$ Práci tlakové síly na elementu dráhy ds můžeme vyjádřit jako $p \operatorname{Sd} s = p \operatorname{d} V$.

Klesne-li rychlost proudění kapaliny na nulu, potom se v daném místě zvýší tlak v kapalině právě o hodnotu dynamického tlaku. Druhý člen na levé straně Bernoulliho rovnice odpovídá svým tvarem vztahu pro hydrostatický tlak (17.140), takže i v tomto případě se jedná o tlak hydrostatický. Poslední člen na levé straně pak představuje tlak statický. Takže Bernoulliho rovnici můžeme také interpretovat tak, že součet dynamického tlaku, hydrostatického tlaku a statického tlaku je v různých místech proudící ideální kapaliny stejný. K uvedené interpretaci Bernoulliho rovnice je na obrázku 17.16 zachycen případ proudění ideální kapaliny vodorovnou trubicí. Na obrázku je znázorněno, že se celkový tlak v potrubí nemění, byť se mění tlak dynamický i statický $(v_1 < v_2)$. Pro celkový tlak p^* můžeme psát, že

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = p_1^* = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = p_2^*.$$



Obrázek 17.16: Ilustrace k Bernoulliho trubici demonstrující skutečnost, že se celkový tlak v potrubí p^* nemění $(v_1 < v_2)$.

Bernoulliho rovnice pro nevazkou stlačitelnou tekutinu

Bernoulliho rovnice (17.186) byla odvozena pro ideální kapalinu, jejíž proudění je potenciálové. V následující části této kapitoly se pokusíme odvodit o něco obecnější tvar Bernoulliho rovnice. Omezíme se v první fázi jen na ideální tekutinu (neviskózní tekutina), jejíž proudění bude opět nevírové. Vyjdeme z rovnice (17.180), kterou podělíme hustotou

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mathcal{F}}{\rho} . \tag{17.188}$$

Předpokládejme, že objemová hustota síly souvisí jen s tíhovou silou Země, pro kterou jsme si v kapitole 8 ukázali, že je silou konzervativní a tudíž bude platit, že

$$\frac{\mathcal{F}}{\rho} = -\nabla\phi \,\,, \tag{17.189}$$

kde ϕ je odpovídající skalární funkce (potenciál na jednotku hmotnosti). Budeme-li předpokládat, že se jedná o proudění stacionární $\partial \mathbf{v}/\partial t = \mathbf{0}$, potom si pomocí vztahu (17.189) můžeme rovnici (17.188) přepsat do následujícího tvaru

$$\nabla \left(\frac{1}{2}v^2\right) + \nabla \phi + \frac{\nabla p}{\rho} = 0. \tag{17.190}$$

Dále skalárně vynásobíme rovnici (17.190) elementem polohového vektoru 21 d \boldsymbol{r}

$$\left[\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right] \cdot d\mathbf{r} + (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{r} + \frac{(\nabla p) \cdot d\mathbf{r}}{\rho} = 0.$$
 (17.191)

²¹Připomeňme, že d $f = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}$.

S ohledem na definici úplného diferenciálu můžeme rovnici (17.191) přepsat jako

$$d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + d\phi + \frac{dp}{\rho} = 0. \tag{17.192}$$

Předpokládejme, že se jedná o barotropní tekutinu, pro kterou platí stavová rovnice $\rho = \rho(p)$, pak integrací rovnice (17.192) podél proudnice dospějeme k následující rovnici

$$\frac{1}{2}v^2 + \phi + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} = C , \qquad (17.193)$$

kde C je integrační konstanta. S ohledem na rovnost (17.181) přepíšeme rovnici (17.193) do následujícího tvaru

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + P = C = konst., (17.194)$$

$$P = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} \tag{17.195}$$

je tzv. tlaková funkce. Rovnost (17.194) je vyjádřením Bernoulliho rovnice pro nevírově proudící ideální tekutiny (neviskózní, avšak stlačitelné), kterou v našem případě považujeme za barotropní. Je nutné si uvědomit, že konstanta C je konstantou pro danou proudnici, ale pro různé proudnice se může lišit.

Pro nestlačitelnou tekutinu je tlaková funkce rovna $P = p/\rho$, čímž Bernoulliho rovnice (17.194) přejde v Bernoulliho rovnici pro nestlačitelné kapaliny (17.186).

Z Bernoulliho rovnice (17.186) vyplývá, že tlak klesá v místech, kde roste rychlost kapaliny, neboli jinými slovy, v užší části trubice, kde kapalina proudí rychleji, má kapalina menší tlak. Fyzikální interpretace tohoto závěru spočívá v tom, že tekutina musí zvýšit rychlost v místě zúžení, aby tak vyhověla rovnici kontinuity, zatímco jí poklesne tlak, aby se zachovala mechanická energie kapaliny. Tedy získaná kinetická energie je vyvážená poklesem tlaku. Tento jev se nazývá Venturiho jev. Jelikož při malých rychlostech proudění vzduchu dochází jen k malým změnám jeho tlaku a tedy i hustoty, je tudíž možné na pomalu se pohybující vzduch pohlížet jako na nestlačitelnou kapalinu. Tímto je možné rozšířit výše uvedené vysvětlení Venturiho jevu i na proudící vzduch. Venturiho jev nachází uplatnění např. v rozprašovačích, karburátorech, vysavačích apod. Pomocí Venturiho jevu lze vysvětlit například, proč průvan přibouchne dveře či proč při foukání mezi dva listy se budou tyto listy přitahovat namísto předpokládanému odpuzování. Příčinou je pokles tlaku při proudění vzduchu kolem nedovřených dveří či mezi uvažovanými listy papíru.

17.9 Navierova-Stokesova rovnice

V kapitole 17.3 byl uveden obecný Hookův zákon (17.68), ze kterého vyplývá lineární závislost mezi složkami tenzoru napětí a složkami tenzoru malých deformací. Nyní zavedeme podobným způsobem pojem vazké tekutiny. Pod tímto pojmem budeme mít na mysli kontinuum, pro které tenzor napětí bude lineární funkcí složek tenzoru rychlosti deformace zavedeného vztahem (17.155). V této závislosti zpravidla vydělujeme zvlášť závislost platnou pro ideální tekutiny (17.117), takže pro složky tenzoru napětí vazkých tekutin můžeme psát

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} , \qquad i, j = 1, 2, 3 ,$$
 (17.196)

kde τ_{ij} je funkcí tenzoru rychlosti deformace a představuje složku tenzoru třecích (vazkých) napětí. Pro tyto složky, pak můžeme psát, že

$$\tau_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} K_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} , \qquad i, j = 1, 2, 3 , \qquad (17.197)$$

kde $\{K\}$ je tenzor empiricky nalezených koeficientů kapaliny.

O vztahu (17.196) říkáme, že je vyjádřením *Navierova-Stokesova zákona* a tekutinu, které tomuto zákonu vyhovuje nazýváme *newtonovskou tekutinou*, patří sem např. voda, líh, benzín atd.

Pro izotropní tekutinu pak můžeme použít postupu, který je analogický s postupem pro izotropní tělesa uvedený v kapitole 17.3. Takže na základě analogie se vztahem (17.73) dostaneme následující vztah

$$\tau_{ij} = \zeta \dot{\vartheta}_1 \delta_{ij} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} , \qquad i, j = 1, 2, 3 ,$$
 (17.198)

kde

$$\dot{\vartheta}_1 = \sum_{k=1}^3 \dot{\epsilon}_{kk}$$

a ζ a η jsou koeficienty (součinitele) vazkosti. Koeficient η se nazývá dynamická vazkost (viskozita) a koeficient ζ se nazývá druhá vazkost (viskozita). Dynamická viskozita η se uplatňuje ve vazkých napětích, která vznikají při smykové deformaci elementu tekutiny. Druhá vazkost ζ se uplatňuje ve vazkých napětích, která vznikají mění-li se objem tekutiny při současném zachování jeho tvaru.

Vztah (17.198) dosadíme do rovnosti (17.196)

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \zeta \dot{\vartheta}_1 \delta_{ij} + 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} , \qquad i, j = 1, 2, 3 .$$
 (17.199)

Jelikož se tekutina již nenachází v rovnováze, tak na základě 2. Newtonova pohybového zákona zapíšeme pohybovou rovnici pro vazké tekutiny vztaženou na jednotku objemu, přičemž vyjdeme z rovnice (17.21),

$$\rho a_i = \mathcal{F}_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (17.200)

Levou stranu rovnice (17.201) upravíme pomocí vztahu (17.149), čímž dostaneme, že

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j\right) = \mathcal{F}_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \qquad i = 1, 2, 3.$$
 (17.201)

Budeme-li předpokládat, že ζ a η jsou skalární konstanty, potom při dosazení za složky tenzoru napětí ze vztahu (17.199) do rovnice (17.201) a jestliže při následných úpravách vezmeme v úvahu vztah (17.155), pak dostaneme, že

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \zeta \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) + \eta \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \mathcal{F}_i,$$

$$i = 1, 2, 3. \quad (17.202)$$

Pravou stranu rovnice (17.202) lze dále upravit do následujícího tvaru

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\zeta + \eta) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \eta \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \mathcal{F}_i , \qquad i = 1, 2, 3 .$$

$$(17.203)$$

Rovnice (17.203) představuje *Navierovu-Stokesovu rovnici* ve složkovém tvaru. Jedná se o pohybovou rovnici pro vazké tekutiny. Ve vektorovém tvaru pak bude mít Navierova-Stokesova rovnice následující tvar

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + (\zeta + \eta) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \mathcal{F}.$$
 (17.204)

Jsou-li koeficienty vazkosti nulové, potom Navierova-Stokesova rovnice přejde v rovnici Eulerovu (17.176).

Pro nestlačitelnou kapalinu platí rovnice kontinuity ve tvaru (17.173), pomocí které se zjednoduší pro nestlačitelnou kapalinu ($\rho = konst.$) i tvar Navierovy-Stokesovy rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathcal{F} , \qquad (17.205)$$

kde $\nu = \eta/\rho$ se nazývá kinematická vazkost (viskozita).

Navierovu-Stokesovu rovnici (17.203) bez uvažování vnějších sil ($\mathcal{F}_i = 0$) si nyní převedeme do bezrozměrného tvaru tím, že rozměrové veličiny vztáhneme na vhodně zvolené referenční veličiny stejného rozměru. Zavedeme si jako referenční veličinu tzv. charakteristickou délku L, kterou může být např. průměr potrubí, hloubka profilu apod., charakteristickou rychlost U, kterou může být např. rychlost tekutiny v ose potrubí, rychlost homogenního nabíhajícího proudu, průměrná rychlost apod., a charakteristický čas $t_0 = L/U$. Pomocí těchto referenčních veličin si můžeme zavést následující bezrozměrné veličiny:

- bezrozměrný čas $T = t/t_0$
- bezrozměrná složka rychlosti $V_i = v_i/U$,
- $\bullet\,$ bezrozměrná prostorová souřadnice $X_i=x_i/L$,
- bezrozměrný tlak $P = p/(\rho U^2)$.

Pomocí výše uvedených bezrozměrných veličin si můžeme přepsat Navierovu-Stokesovu rovnici (17.203) do bezrozměrného tvaru, přičemž využijeme skutečnosti, že mezi druhou vazkostí ζ a dynamickou vazkostí η existuje lineární vztah $\zeta = k\eta$, kde k je bezrozměrná konstanta úměrnosti (|k| < 1), tedy

$$\frac{\partial V_i}{\partial T} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial X_j} V_j = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{k+1}{\text{Re}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 V_j}{\partial X_i \partial X_j} + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 V_i}{\partial X_j^2} , \qquad i = 1, 2, 3 , \quad (17.206)$$

kde

$$Re = \frac{UL\rho}{\eta} = \frac{UL}{\nu} \,. \tag{17.207}$$

je tzv. Reynoldsovo číslo (nejznámější z podobnostních čísel).

Rozdělení proudění tekutin

Z bezrozměrné Navierovy-Stokesovy rovnice (17.206) lze vidět, že pro vysoké hodnoty Reynoldsova čísla budou viskózní členy méně významné než v případě, že Reynoldsovo číslo bude malé. Pro velmi vysoké hodnoty Reynoldsova čísla přechází Navierova-Stokesa rovnice do tvaru shodného s rovnicí Eulerovou a tekutina se chová jako ideální tekutina, vyjma tenké vrstvy kapaliny se stěnami překážky. V této tzv. mezní vrstvě se vliv vazkosti zanedbat nedá. U vazkých tekutin rozdělujeme proudění podle jeho charakteru na proudění laminární a proudění turbulentní. Při laminárním proudění jednotlivé vrstvy tekutiny proudí vedle sebe, aniž se promíchávají, vrstvy při tomto proudění neztrácejí kontakt, rychlost se podél vrstev i mezi vrstvami mění pozvolna. Ideální tekutina, která je neviskózní, proudí vždy laminárně. Při turbulentním proudění dochází k promíchávání vrstev tekutiny, ke ztrátě jejich kontaktu a k velkým změnám rychlosti a tlaku tekutiny, a to jak mezi sousedními body v tekutině, tak v

jednom místě v průběhu času. Laminární proudění nastává při malých rychlostech proudění, kdežto proudění turbulentní pozorujeme při rychlostech vyšších. V přírodě a v technické praxi se častěji setkáváme s prouděním turbulentním než laminárním.

Základním parametrem, který charakterizuje režim proudění tekutiny v potrubí, je výše uvedené Reynoldsovo číslo (17.207). V případě proudění tekutiny v potrubí za charakteristickou vzdálenost považujeme průměr potrubí a za charakteristickou rychlost považujeme průměrnou rychlost tekutiny definovanou jako podíl objemového průtoku tekutiny potrubím a průřezu potrubí, tj. $U = Q_V/S$. Na základě experimentů bylo zjištěno, že pro hladké potrubí zůstává proudění tekutin laminární pro Re < 2300. Pro Reynoldsovo číslo Re > 4000 je možné považovat proudění tekutiny v hladkém potrubí za turbulentní. Pro Re \in $\langle 2300; 4000 \rangle$ se jedná o proudění přechodové, které má vlastnosti obou typů proudění.

Část II Speciální teorie relativity

Kapitola 18

Speciální teorie relativity

18.1 Postuláty speciální teorie relativity a speciální Lorentzova transformace

Na konci 19. století byla mechanika (z dnešního pohledu označována jako klasická mechanika) považována za téměř hotovou teorii. Svého vrcholu dosáhla v analytické mechanice, která umožnila opustit vektorový přístup a nahradit ho Lagrangeovým či Hamiltonovým formalismem. Mechanika vycházela z představy absolutního prostoru a času a byla vybudována na Newtonových pohybových zákonech.

Teorie elektromagnetického pole byla rovněž víceméně hotova. "Vadou na kráse" elektromagnetické teorie byla skutečnost, že Maxwellovy rovnice, které slouží k popisu elektromagnetického pole, nejsou invariantní vůči Galileiho transformaci. Z Maxwellových rovnic vyplývá, že rychlost světla (světelná rychlost) ve vakuu je dána vztahem

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \text{ m/s}.$$
 (18.1)

Vzhledem k tomu, že z Galileiho transformace plyne, že se rychlosti při přechodu mezi inerciálními soustavami sčítají (skládání rychlostí), bylo nutné ze všech možných kandidátů na vztažnou soustavu vyloučit ty vztažné soustavy, ve kterých by rychlost světla byla jiná než ta, která vychází z elektromagnetické teorie. Jelikož elektromagnetické pole bylo popisováno jako mechanický stav ve vše prostupujícím speciálním prostředí zvaném *éter*, stalo se aktuálním úkolem nalezení vztažné soustavy, vůči které by byl éter v klidu.

Na základě řady přesných experimentů (např. experiment pomocí Michelsonova interferometru, který v roce 1887 uskutečnil A. A. Michelson a E. W. Morley) bylo zjištěno, že žádný absolutní pohyb vzhledem k éteru neexistuje a že rychlost světla ve vakuu je ve všech inerciálních soustavách stejná. Tato rychlost nezávisí na druhu zdroje ani na rychlosti jeho pohybu. Výsledkem experimentů bylo, že nelze určit absolutní pohyb a že všechny vztažné inerciální soustavy jsou naprosto rovnocenné.

Na základě závěrů vycházejících ze zmíněných experimentů došel Albert Einstein k formulaci následujících dvou postulátů, které dnes nazýváme postuláty speciální teorie relativity:

- 1. Všechny fyzikální zákony mají ve všech inerciálních vztažných soustavách stejný tvar.
- 2. Rychlost světla ve vakuu je ve všech inerciálních vztažných soustavách stejná.

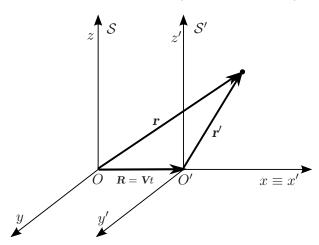
První postulát relativity představuje zobecnění Galileiho principu relativity, který se omezuje jen na mechaniku. Jelikož nic jako čistě mechanický děj neexistuje, představuje Einsteinova

formulace principu relativity zohlednění skutečnosti, že není možné oddělit žádný fyzikální děj od jiných fyzikálních dějů.

Z výše uvedeného vyplývá, že neměnnost rychlosti světla a Galileiho transformace jsou spolu ve sporu, a proto je nutné tuto transformaci nahradit jinou, která by tento rozpor odstranila, neboli je potřeba nalézt takovou transformaci, aby při převodu souřadnic vycházela rychlost c_0 ve všech soustavách stejná. Aby nepřítomnost výsledné síly (nulové zrychlení) v jedné inerciální vztažné soustavě, znamenala i nepřítomnost výsledné síly v jakékoliv jiné inerciální vztažné soustavě, je nutné se omezit na lineární transformace mezi prostorovými souřadnicemi a časem. Tímto se zajistí, že rovnoměrný přímočarý pohyb v jedné inerciální vztažné soustavě, zůstane rovnoměrným přímočarým pohybem i v inerciální vztažné soustavě druhé.

Předpokládejme jistou událost popsanou ve dvou inerciálních vztažných soustavách \mathcal{S} a \mathcal{S}' . Událostí budeme rozumět určení prostorového a časového údaje, tj. dvojice $[\mathbf{r},t]$, tj. kde a kdy daný jev nastal, bez ohledu na to, co se vlastně stalo. K plné informaci je samozřejmě nutné určit vztažnou soustavu, v níž polohu a čas určujeme. Prozatím se omezíme na pohyb v jediném směru, přičemž v tomto směru budeme orientovat osy x, x' obou soustav, viz obr. 18.1 (osy x sice x' splývají $x \equiv x'$, avšak to neznamená, že souřadnice x a x' jsou totožné). Rychlost soustavy \mathcal{S}' vůči soustavě \mathcal{S} (unášivá rychlost) budeme značit V. Prostoročasové souřadnice události označíme $[\mathbf{r},t]$ v soustavě \mathcal{S} , resp. $[\mathbf{r}',t']$ v soustavě \mathcal{S}' . Na základě vzájemné orientace obou soustav je patrné, že y=y' a z=z'.

Nyní se pokusíme odvodit transformační vztahy mezi čárkovanými a nečárkovanými sou-



Obrázek 18.1: Pohyb inerciální vztažné soustavy čárkované S' vůči inerciální vztažné soustavě nečárkované S.

řadnicemi. Pro porovnání nejdříve uvedeme příslušné transformační vztahy pro Galileiho transformaci

$$x' = x - Vt , (18.2)$$

$$y' = y, (18.3)$$

$$z' = z , (18.4)$$

$$t' = t. (18.5)$$

Nové transformační vztahy budou muset vyhovovat výše uvedeným postulátům speciální teorie relativity. S ohledem na vzájemnou orientaci soustav \mathcal{S} a \mathcal{S}' je zřejmé, že transformační vztahy y=y' a z=z' zůstanou nezměněné v hledané soustavě nových transformačních vztahů. Zaměříme-li se na počátek čárkované soustavy \mathcal{S}' , tak vzhledem k této soustavě bude mít souřadnice [0,0,0]. Vzhledem k soustavě \mathcal{S} bude mít tento počátek souřadnice [Vt,0,0]. Vezmeme-li výše uvedené skutečnosti v úvahu, tak pro hledaný lineární vztah musí platit, že

$$x' = \gamma(x - Vt) , \qquad (18.6)$$

kde γ je neznámý činitel úměrnosti, který v následující části textu určíme. Lehce se přesvědčíme, že rovnice (18.6) splňuje podmínku vztahu mezi souřadnicemi počátku čárkované soustavy \mathcal{S}' , tj. pro x'=0 musí platit, že x=Vt. Jelikož na transformační vztah je možné pohlížet jako na fyzikální zákon, tak podle prvního postulátu bude muset mít obrácený transformační vztah (pro druhou soustavu) stejný tvar, přičemž je nutné si uvědomit, že unášivá rychlost V' je rovna záporně vzaté unášivé rychlosti z předchozího případu, tj. V'=-V. Jinými slovy, obrácený transformační vztah musí respektovat skutečnost, že vzhledem k soustavě \mathcal{S}' bude mít počátek nečárkované soustavy souřadnice [V't',0,0]=[-Vt',0,0], neboli pro x=0 musí platit, že x'=V't'=-Vt', tedy

$$x = \gamma(x' - V't') = \gamma(x' + Vt') , \qquad (18.7)$$

V dalších krocích nastíníme postup nalezení vztahu pro neznámý činitel úměrnosti γ . Dosadíme-li ve vztahu (18.7) za souřadnici x' ze vztahu (18.6), tak dostaneme

$$x = \gamma(\gamma(x - Vt) + Vt') = \gamma^2 x - \gamma^2 Vt + \gamma Vt'.$$
(18.8)

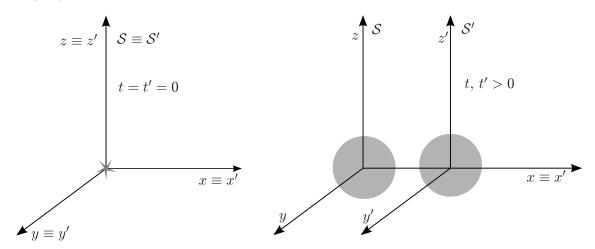
Ze vztahu (18.8) můžeme jednoduchou úpravou dostat následující převodní vztah mezi časy uvažovaných soustav

$$t' = \gamma t + \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma V}\right) x. \tag{18.9}$$

V dalším kroku použijeme postulát speciální teorie relativity, který se týká neměnnosti rychlosti světla. Předpokládejme, že v časech t=t'=0 počátky čárkované a nečárkované vztažné inerciální soustavy splývají. Právě v tomto okamžiku zableskne v počátcích obou soustav bodová výbojka (shodná událost v obou soustavách), takže se světlo začne šířit všemi směry, čímž se vytvoří kulová světelná vlna, která má střed právě v počátcích uvažovaných soustav. Vzhledem k tomu, že se obě soustavy vůči sobě pohybují konstantní unášivou rychlostí, soustavy se od sebe budou vzdalovat . Z důvodu neměnnosti rychlosti světla budeme v obou soustavách pozorovat tutéž světelnou kulovou vlnu, situace je zachycena na obrázku 18.2. Budeme-li v nečárkované soustavě $\mathcal S$ měřit vzdálenost (poloměr) x, kterou paprsek urazí za čas t v kladném směru osy x, tak bude platit, že

$$x = c_0 t$$
, (18.10)

kde c_0 je rychlost světla ve vakuu. Podobně v čárkované soustavě \mathcal{S}' naměříme vzdálenost,



Obrázek 18.2: Vytvoření světelných kulových vln.

kterou urazil paprsek v kladném směru osy x' za čas t', a tato vzdálenost je s ohledem na neměnnost rychlosti světla ($c_0 = konst.$) dána následujícím vztahem

$$x' = c_0 t' . (18.11)$$

Do rovnice (18.11) dosadíme ze vztahů (18.6) a (18.9)

$$\gamma(x - Vt) = c_0 \left(\gamma t + \left(\frac{1 - \gamma^2}{\gamma V} \right) x \right) . \tag{18.12}$$

Ze vztahu (18.12) si vyjádříme proměnnou x

$$x = \frac{c_0 \gamma t + V \gamma t}{\gamma - \frac{1 - \gamma^2}{\gamma V} c_0} = c_0 t \frac{\gamma + \frac{V \gamma}{c_0}}{\gamma - \frac{1 - \gamma^2}{\gamma V} c_0}.$$
 (18.13)

Porovnáme-li rovnici (18.13) s rovnicí poloměr kulové vlny (18.10), tak je zřejmé, že

$$\frac{\gamma + \frac{V\gamma}{c_0}}{\gamma - \frac{1-\gamma^2}{\gamma V}c_0} = 1. \tag{18.14}$$

Vynásobením rovnice (18.14) jmenovatelem a následným vynásobením výrazem $\gamma V c_0$ dostaneme po úpravě následující rovnost

$$\gamma^2 V^2 = -(1 - \gamma^2)c_0^2 \,. \tag{18.15}$$

Odtud pak pro kvadrát činitele γ dostaneme

$$\gamma^2 = \frac{c_0^2}{c_0^2 - V^2} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c_0^2}} \,. \tag{18.16}$$

Po odmocnění rovnosti dostaneme výraz pro hledaný součinitel, přičemž volíme řešení s kladným znaménkem, abychom pro V=0 dostali ze vztahu (18.7) rovnost x=x', tedy

$$\gamma \equiv \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}} \ge 1$$
 (18.17)

Činitel γ nazýváme Lorentzův faktor.

Dosadíme Lorentzův faktor γ do rovnice (18.9) a provedeme úpravu

$$t' = \gamma t + \left(\frac{1 - \frac{V^2}{c_0^2} - 1}{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}\right) \frac{x}{\gamma V} = \gamma t - \frac{\frac{V^2}{c_0^2}}{1 - \frac{V^2}{c_0^2}} \frac{x}{\gamma V} = \gamma t - \gamma^2 \frac{V^2}{c_0^2} \frac{x}{\gamma V} = \gamma t - \gamma^2 \frac$$

Provedenou úpravou jsme nalezli transformační vztah mezi časy v soustavách \mathcal{S} a \mathcal{S}' . Dosazením Lorentzova faktoru γ do transformačního vztahu (18.6) a použitím nalezeného transformačního vztahu (18.18) můžeme napsat hledanou soustavu transformačních vztahů

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}} = \gamma(x - Vt) , \qquad (18.19)$$

$$y' = y (18.20)$$

$$z' = z (18.21)$$

$$t' = \frac{t - Vx/c_0^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}} = \gamma(t - Vx/c_0^2) . \tag{18.22}$$

Transformační vztahy (18.19) - (18.22) představují tzv. speciální Lorentzovu transformaci. Pro nalezení inverzního transformačního vztahu ke vztahu (18.22) použijeme vztahu (18.9), do kterého za x dosadíme ze vztahu (18.7)

$$t = \frac{1}{\gamma} \left[t' + \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma V} \right) \gamma (x' + Vt') \right] . \tag{18.23}$$

Tímto jsme získali hledaný transformační vztah, který však dále upravíme

$$t = \frac{1}{\gamma} \left[t' + (\gamma^2 - 1) \left((t' + \frac{x'}{V}) \right) \right] = \frac{1}{\gamma} \left[\gamma^2 t' + (\gamma^2 - 1) \frac{x'}{V} \right] = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{t' + \frac{Vx'}{c_0^2}}{1 - \frac{V^2}{c_0^2}} \right) = \frac{t' + \frac{Vx'}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}} = \gamma \left(t' + \frac{Vx'}{c_0^2} \right) . \quad (18.24)$$

Dosazením Lorentzova faktoru γ do transformačního vztahu (18.7) a použitím nalezeného transformačního vztahu (18.24) můžeme napsat celou soustavu inverzních transformačních vztahů

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}} = \gamma(x' + Vt') , \qquad (18.25)$$

$$y = y' , \qquad (18.26)$$

$$z = z' (18.27)$$

$$t = \frac{t' + Vx'/c_0^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}} = \gamma(t' + Vx'/c_0^2) . \tag{18.28}$$

Inverzní transformační vztahy (18.25) - (18.28) představují tzv. inverzní speciální Lorentzovu transformaci.

18.2 Obecná Lorentzova transformace

Chceme-li odvodit vztahy pro obecnou Lorentzovu transformaci, je k tomuto účelu vhodné rozdělit polohový vektor \mathbf{r} do podélné a příčné složky vektoru unášivé rychlosti \mathbf{V} . Pomocí skalárního součinu můžeme nalézt podélnou složku polohového vektoru ve směru vektoru \mathbf{V}

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} \,, \tag{18.29}$$

s jejíž pomocí určíme složku příčnou

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} \ . \tag{18.30}$$

Z transformačních vztahů pro speciální Lorentzovu transformaci vyplývá, že příčná složka polohového vektoru se při transformaci nemění, tj.

$$\mathbf{r}_{\perp}' = \mathbf{r}_{\perp} \;, \tag{18.31}$$

kdežto podélná složka se bude měnit analogickým transformačním vztahem ke vztahu (18.19), tedy

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{V}t) \ . \tag{18.32}$$

Složením vztahů (18.31) a (18.32) s přihlédnutím ke vztahům (18.30) a (18.32) dostaneme vztah

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} + \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{V}t)$$
 (18.33)

Dosazením vztahu (18.29) do vztahu (18.33) po úpravě dostaneme, že

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V} \left[\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{V^2} (\gamma - 1) - \gamma t \right]$$
 (18.34)

V případě obecného směru unášivé rychlosti V je možné na základě analogie se vztahem pro transformaci času pro speciální Lorentzovu transformaci (18.22) psát, že

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{c_0^2} \right) . \tag{18.35}$$

Vztahy (18.34) a (18.35) představují transformační vztahy pro *obecnou Lorentzovu transformaci*.

Podobným postupem je možné získat i transformační vztahy pro inverzní obecnou Lorentzovu transformaci, které formálně získáme záměnou čárkovaných veličin za nečárkované a naopak a náhradou \mathbf{V} za $-\mathbf{V}$ ve vztazích (18.34) a (18.35), tedy

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V} \left[\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}}{V^2} (\gamma - 1) + \gamma t' \right] ,$$
 (18.36)

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}'}{c_0^2} \right) . \tag{18.37}$$

18.3 Skládání rychlostí

Okamžitá rychlost hmotného bodu pohybujícího se podél osy x' v čárkované soustavě S', která se vůči soustavě S pohybuje, je dána vztahem

$$v' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \,. \tag{18.38}$$

Vzhledem k tomu, že okamžitá rychlost je dána podílem infinitezimálně chápaných diferenciálů dx' a dt', určíme si nejprve tyto diferenciály z transformačních vztahů (18.19) a (18.22)

$$dx'(x,t) = \frac{\partial x'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial t}dt = \gamma dx - \gamma V dt = \gamma (dx - V dt), \qquad (18.39)$$

$$dt'(x,t) = \frac{\partial t'}{\partial x}dx + \frac{\partial t'}{\partial t}dt = \gamma dt - \gamma \frac{V}{c_0^2}dx = \gamma \left(dt - \frac{V}{c_0^2}dx\right).$$
 (18.40)

Dosadíme-li diferenciály (18.39) a (18.40) do vztahu (18.38), tak obdržíme následující výraz

$$v' = \frac{\gamma(\mathrm{d}x - V\mathrm{d}t)}{\gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{V}{c_0^2}\mathrm{d}x\right)}.$$
 (18.41)

Podělíme-li čitatele a jmenovatele ve výrazu (18.41) faktorem γdt , tak dostaneme

$$v' = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - V}{1 - \frac{V}{c_0^2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \,. \tag{18.42}$$

Okamžitá rychlost uvažovaného hmotného bodu je v soustavě nečárkované $\mathcal S$ dána výrazem

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,. \tag{18.43}$$

S ohledem na vztah (18.43) můžeme upravit rovnost (18.42)

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{V}{c_0^2}v} \ . \tag{18.44}$$

Výraz (18.44) představuje vzorec pro skládání rychlostí, který vyhovuje postulátu o stálosti rychlosti světla.

Například je-li v rychlost světelného paprsku v nečárkované soustavě S rovna c_0 , potom po dosazení do vztahu (18.44) dostaneme

$$v' = \frac{c_0 - V}{1 - \frac{V}{c_0^2} c_0} = \frac{c_0 - V}{\frac{c_0 - V}{c_0}} = c_0 .$$
 (18.45)

Z tohoto výsledku lze vidět, že postulát 2. postulát speciální teorie relativity je splněn. Analogickým způsobem můžeme určit i transformační vztah pro okamžitou rychlost hmotného bodu vzhledem k nečárkované soustavě \mathcal{S} . Výraz, který obdržíme, bude shodný s výra-

ného bodu vzhledem k nečárkované soustavě \mathcal{S} . Výraz, který obdržíme, bude shodný s výrazem, který získáme tak, že ve vztahu (18.44) zaměníme čárkované rychlosti za nečárkované a naopak a za unášivou rychlost dosadíme rychlost -V, tedy

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c_0^2}v'} \,. \tag{18.46}$$

Budeme-li předpokládat, že se čárkovaná soustava S' pohybuje vůči nečárkované soustavě rychlostí světla $V = c_0$ a bude-li se v čárkované soustavě S' světelný paprsek pohybovat rychlostí $v' = c_0$, potom jeho rychlost vůči nečárkované soustavě S získáme dosazením do vztahu (18.46)

$$v = \frac{c_0 + c_0}{1 + \frac{c_0}{c_0^2} c_0} = \frac{2c_0}{2} = c_0.$$
 (18.47)

Z výsledku je patrné, že i v tomto případě je splněn postulát o neměnnosti rychlosti světla. Navíc z výsledku vyplývá důležitý závěr, že maximální možnou dosažitelnou rychlostí je právě rychlost světla c_0 .

Budeme-li uvažovat okamžitou rychlost hmotného bodu vůči čárkované soustavě \mathcal{S}' , který se pohybuje libovolným směrem, potom můžeme psát, že

$$\mathbf{v}' = (v_x', v_y', v_z') = \left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}, \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}, \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\right) . \tag{18.48}$$

Z transformačních vztahů (18.20) a (18.21) vyplývá, že

$$dy' = dy , \quad dz' = dz . \tag{18.49}$$

Dosadíme-li v rovnosti (18.48) za diferenciál dx' ze vztahu (18.39), za diferenciál dt' ze vztahu (18.40) a za diferenciály dy' a dz' rovnosti (18.49), pak po podělení diferenciálem dt a následné úpravě dostaneme pro jednotlivé složky rychlosti následující transformační vztahy

$$v'_{x} = \frac{v_{x} - V}{1 - \frac{V}{c_{0}^{2}} v_{x}}, \quad v'_{y} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_{y}}{1 - \frac{V}{c_{0}^{2}} v_{x}}, \quad v'_{z} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_{z}}{1 - \frac{V}{c_{0}^{2}} v_{x}}, \quad (18.50)$$

 v_x, v_y a v_z odpovídají složkám okamžité rychlosti hmotného bodu vůči nečárkované soustavě $\mathcal{S},$ tj.

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) . \tag{18.51}$$

18.4 Dilatace času

Uvažujme hodiny, které jsou umístěny v počátku čárkované soustavy \mathcal{S}' (x'=0), která se vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} pohybuje rychlostí V. Tedy tyto hodiny se vůči čárkované soustavě nepohybují a čas, který ukazují nazýváme vlastní čas. Dále předpokládejme, že v čase t=t'=0 počátky obou soustav splývaly. Nechť v čárkované soustavě \mathcal{S}' uplyne doba $T'=T_0$, potom na základě transformačních vztahů (18.19) a (18.22) můžeme pro polohu a čas na hodinách psát

$$0 = x' = \gamma(x - VT) , \qquad (18.52)$$

$$T_0 = t' = \gamma (T - Vx/c_0^2)$$
 (18.53)

Ze vztahu (18.52) dostaneme výsledek, že

$$x = VT (18.54)$$

který dosadíme do vztahu (18.53)

$$T_0 = \gamma (T - V^2 T/c_0^2) = T\gamma (1 - V^2/c_0^2) = T\frac{\gamma}{\gamma^2} = \frac{T}{\gamma} \le T$$
 (18.55)

Z výsledku (18.55) je patrné, že čas na hodinách pohybujících se spolu s čárkovanou soustavou S', běží pomaleji, než čas T, který naměří pozorovatel na svých hodinách v nečárkované soustavě S. Tedy mezi dvěma událostmi U_1 a U_2 uplyne nejkratší doba v té soustavě, ve které měříme tuto dobu hodinami, jež vůči oběma událostem stojí. Neboli událost sledovaná v soustavě S trvá delší dobu než v soustavě S', tj.

$$T = \gamma T_0 , \qquad (18.56)$$

a proto hovoříme o dilataci (prodloužení) času.

Příklad 18.4.1

Pi srážkách primárního kosmického záření s atomy vrchní vrstvy atmosféry vznikají miony. Jsou to nestabilní částice se střední dobou života $\tau_0 = 2, 2.10^{-6}$ s (měřenou v klidové soustavě mionu). Pozorování pomocí stratosférických balónů a raket ukázala, že miony vznikají ve velkých výškách nad povrchem Země (více než 10 km) a odtud se pohybují k Zemi rychlostí blížící se rychlosti světla. Za střední dobu života se mion rozpadá na elektron a dvě neutrina. Předpokládejme, že mion vznikl ve výšce 15 km a pohybuje se k Zemi rychlostí v = 0,999 c_0 . Může tento mion doletět na povrch Země?

Řešení:

Tuto úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě spojené se Zemí. S ohledem na vysoké rychlosti mionu, je zřejmé, že budeme nuceni vycházet z poznatků speciální teorie relativity. Dráha, kterou může mion od okamžiku vzniku do okamžiku rozpadu urazit, je

$$l = v\tau , (18.57)$$

kde dobu života τ vzhledem soustavě spojené se Zemí (nečárkovaná soustava) určíme pomocí vztahu (18.56), tedy

$$\tau = \gamma \tau_0 \ . \tag{18.58}$$

Dosazením z tohoto vztahu do výrazu (18.57) dostaneme

$$l = v\gamma\tau_0 = \frac{0,9998.3.10^8.2, 2.10^{-6}}{\sqrt{1 - 0.9998^2}} = \frac{0,09998.3.10^8.2, 2.10^{-6}}{\sqrt{3,9996.10^{-4}}} = 0,09998.3.10^8.2, 2.10^{-6}.50 = 32995 \text{ m} = 33 \text{ km}. \quad (18.59)$$

Mion tedy urazí za dobu svého života v zemské vztažné soustavě dráhu l=33 km, a proto může být zaregistrován přístroji na Zemi. Kdyby se neprojevila dilatace času a čas byl absolutní veličina ($\tau=\tau_0$), pak by nejrychlejší miony mohly od okamžiku svého vzniku do okamžiku rozpadu urazit jen dráhu zhruba 660 m. To znamená, že by se nemohly dostávat na povrch Země. V laboratořích na Zemi však miony vznikající ve velkých výškách registrujeme, čímž je experimentálně prokázán jev dilatace času.

18.5 Kontrakce délky

Uvažujme tyč ležící na souřadnicové ose x', která je v klidu v čárkované soustavě \mathcal{S}' , jež se vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} pohybuje rychlostí V. Jeden její konec nechť má souřadnici x_1' a druhý konec souřadnici x_2' , tedy délka tyče $L' \equiv L_0$ je v čárkované soustavě \mathcal{S}' dána rozdílem $L_0 = x_2' - x_1'$. Tuto délku nazýváme jako vlastni (klidová) délka. Uvažovaná tyč se tedy vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} pohybuje rychlostí V. Její délka v soustavě \mathcal{S} je definována rozdílem souřadnic jejích konců, tj. $L = x_2 - x_1$, kde souřadnice x_1 a x_2 jsou souřadnice konců tyče určené současně v libovolném časovém okamžiku 1 t. Z transformačního vztahu (18.19) plynou pro okamžité souřadnice obou konců tyče následující vztahy

$$x_1' = \gamma(x_1 - Vt) , \qquad (18.60)$$

$$x_2' = \gamma(x_2 - Vt) \ . \tag{18.61}$$

Odečtením vztahů (18.61) a (18.60) dostaneme

$$x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - Vt) - \gamma(x_1 - Vt) = \gamma(x_2 - x_1)$$
(18.62)

neboli s ohledem na výše zavedené značení délky tyče v uvažovaných soustavách

$$L_0 = \gamma L > L . \tag{18.63}$$

Odtud

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \ . \tag{18.64}$$

Délka L, kterou naměříme u pohybující se tyče, je vždy kratší než je vlastní délka tyče L_0 a z tohoto důvodu hovoříme o tzv. kontrakci (zkrácení) délky tyče při jejím pohybu. Je třeba současně uvést, že příčné rozměry se nemění, viz transformační vztahy (18.26) a (18.27). Obhájit toto tvrzení je možné na základě následujícího myšlenkového experimentu. Uvažujme dvě identické souosé trubky, které se proti sobě pohybují. Dále přijměme předpoklad, že se při pohybu trubek zmenšuje jejich příčný rozměr. Dále je zřejmé, že pro každou z uvažovaných trubek můžeme nalézt soustavu, vůči které se nebude pohybovat. Na základě výše uvedených předpokladů bychom pozorovali v rámci jedné ze soustav spojených s uvažovanou trubkou, že druhá, pohybující se trubka, díky zkrácení příčných rozměrů, projde

¹Obě souřadnice jsou tedy stanoveny ve stejném časovém okamžiku.

trubkou, která je vůči dané soustavě v klidu. Naopak v soustavě, vůči které je druhá trubka v klidu, bychom pozorovali jev opačný, tj. trubka, která je procházena druhou trubkou, by byla v té druhé soustavě trubkou procházející. Jelikož nemůže dojít k protichůdným výsledků experimentu ve dvou zvolených soustavách, můžeme vyslovit tvrzení, že *příčné rozměry těles se při jejich pohybu neměn*í. Samozřejmě ke stejnému rozporu bychom dospěli při myšlenkovém experimentu, při kterém by se s pohybem trubky její příčné rozměry zvětšovaly.

18.6 Současnost, minulost a budoucnost z pohledu speciální teorie relativity

Pozorovatel v nečárkované soustavě \mathcal{S} sleduje dvě události \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 , přičemž prostoročasové určení první události je $[(x_1,0,0),t]$ a prostoročasové určení druhé události je $[(x_2,0,0),t]$, tedy události nastaly na různých místech, přitom obě události nastaly současně v čase t. Jinak bude prostoročasové určení uvedených událostí vnímat pozorovatel v čárkované soustavě \mathcal{S}' , která se pohybuje vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} rychlostí V. Podle transformačního vztahu (18.22) nastala událost \mathcal{U}_1 pro pozorovatele v čárkované soustavě \mathcal{S}' v okamžiku

$$t_1' = \gamma \left(t - \frac{V}{c_0^2} x_1 \right) \tag{18.65}$$

a událost \mathcal{U}_2 v okamžiku

$$t_2' = \gamma \left(t - \frac{V}{c_0^2} x_2 \right) . \tag{18.66}$$

Platí-li, že $x_2 \neq x_1$, potom pro pozorovatele v čárkované soustavě nenastaly obě události současně a časový rozdíl mezi uvažovanými událostmi je dán rozdílem časů (18.66) a (18.65), tj.

$$t_2' - t_1' = -\gamma \frac{V}{c_0^2} (x_2 - x_1) . {18.67}$$

Odtud je vidět, že pojem současnosti ztrácí ve speciální teorii relativity smysl. O současnosti můžeme mluvit jen tehdy, když obě události nastanou ve stejnou dobu na stejném místě. Události, které nastávají současně v různých místech v jedné soustavě, se jeví v jiných pohybujících se soustavách jako nesoučasné, přičemž v některých soustavách událost \mathcal{U}_1 nastane dříve než událost \mathcal{U}_2 , v jiných tomu může být právě naopak.

Budeme nyní uvažovat opět dvě události \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 , které nastaly pro pozorovatele z nečárkované soustavy \mathcal{S} v různých místech a v různých časech, jejich prostoročasové určení je dáno jako $[(x_1,0,0),t_1]$ a $[(x_2,0,0),t_2]$, přičemž $t_2>t_1$. Opět budeme uvažovat čárkovanou soustavu \mathcal{S}' , ve které pozorovatel uvedené události pozoruje dle transformačního vztahu (18.22) v časech

$$t_1' = \gamma \left(t_1 - \frac{V}{c_0^2} x_1 \right) , \qquad (18.68)$$

$$t_2' = \gamma \left(t_2 - \frac{V}{c_0^2} x_2 \right) . {18.69}$$

Tedy mezi uvažovanými událostmi uběhl čas

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{V}{c_0^2} (x_2 - x_1) \right] . \tag{18.70}$$

S ohledem na relaci $V \leq c_0$ budeme uvažovat mezní případ $V = c_0$. Pak ze vztahu (18.70) plyne, že bude-li platit relace

$$|x_2 - x_1| < c_0(t_2 - t_1) , (18.71)$$

pak vždy $\Delta t' > 0$ (je-li $x_2 - x_1 < 0$, pak se druhý člen v hranaté závorce vztahu (18.70) přičítá ke členu $(t_2 - t_1)$, v případě, že $x_2 - x_1 > 0$, je nutné zajistit, aby vzdálenost $x_2 - x_1$ byla kratší než vzdálenost, kterou urazí světelný signál). V tomto případě pro všechny pozorovatele nastává událost \mathcal{U}_1 před událostí \mathcal{U}_2 . Pak říkáme, že mezi takovými událostmi existuje příčinná (kauzálni) (souvislost), takže událost \mathcal{U}_2 může být následkem události \mathcal{U}_1 . Výraz

$$v = \frac{|x_2 - x_1|}{t_2 - t_1} \tag{18.72}$$

představuje rychlost, se kterou se šíří příčina od události \mathcal{U}_1 k události \mathcal{U}_2 . Touto příčinou může být např. informace, energie, silová interakce apod., záleží na fyzikální povaze událostí. Nemá-li být porušena příčinná souvislost mezi událostmi \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 , musí být splněna podmínka

$$|x_2 - x_1| \le c_0(t_2 - t_1) . (18.73)$$

Použijeme-li tuto podmínku ve vztahu pro rychlost šíření příčiny události (18.72), tak dostaneme, že

$$v < c_0$$
 . (18.74)

Z podmínky (18.74) plyne, že jakýkoliv signál se nemůže šířit rychleji než světlo. Předpokládejme, že platí následující relace

$$|x_2 - x_1| > c_0(t_2 - t_1) . (18.75)$$

V takovémto případě je vždy možné nalézt čárkovanou soustavu \mathcal{S}' takovou, že v ní časový interval $\Delta t'$ může nabývat jak kladné, tak záporné hodnoty v závislosti na volbě rychlosti jejího pohybu V vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} , takže pro jednoho pozorovatele nastane událost \mathcal{U}_1 před událostí \mathcal{U}_2 a pro jiného pozorovatele to může být právě naopak. Díky této skutečnosti můžeme konstatovat, že za předpokladu splnění relace (18.75) nemůže mezi uvažovanými událostmi \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 být příčinná souvislost.

Obecně události, mezi kterými je příčinná souvislost, vymezuje v prostoru světelný kužel

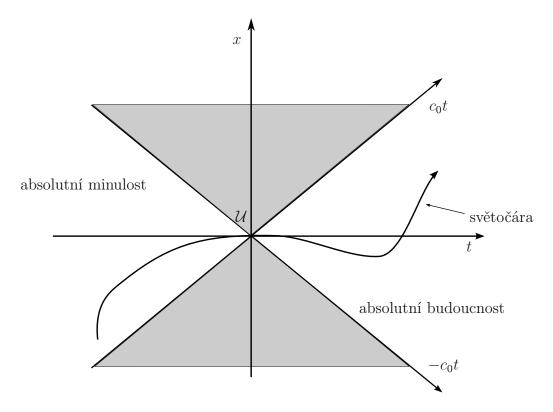
$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \le c_0(t_2 - t_1)$$
 (18.76)

Platí-li, že $t_2 > t_1$, potom událost \mathcal{U}_2 nastává později než událost \mathcal{U}_1 a všechny události \mathcal{U}_2 tvoří absolutní budoucnost vzhledem k události \mathcal{U}_1 , kdežto všechny události \mathcal{U}_1 tvoří absolutní minulost vzhledem k události \mathcal{U}_2 . Na obrázku 18.3 je zachycen světelný kužel v rovině (xt), který je vymezen přímkami $x = \pm c_0 t$. Události ležící vpravo od události \mathcal{U} , které odpovídá časoprostorové určení [(0,0,0),t], představují absolutní budoucnost, kdežto události nacházející se od ní vlevo představují absolutní minulost. Křivka zachycená na obrázku reprezentuje příčinný sled událostí a tato křivka se nazývá světočára. Události nacházející se ve vybarvených sektorech nemohou mít příčinnou souvislost se zachycenou událostí \mathcal{U} .

18.7 Časoprostorový interval

Je známo, že v eukleidovském prostoru se při transformacích souřadnic jako je translace, rotace či zrcadlení nemění vzdálenost mezi body. Říkáme, že vzdálenost mezi body je invariantní (neměnná) vůči zmíněným transformacím. Budeme-li uvažovat dva body o polohových vektorech \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 , potom druhou mocninu vzdálenosti Δl mezi nimi spočítáme podle Pythagorovy věty jako

$$(\Delta l)^2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = (x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$
 (18.77)



Obrázek 18.3: Světelný kužel.

Pro Lorentzovu transformaci existuje jeden velmi důležitý invariant, který nazýváme *časo-prostorový interval* (někdy jen stručně *interval*) a značíme ho Δs . Pro dvě události s časo-prostorovým určením $[\mathbf{r}_1, t_1]$ a $[\mathbf{r}_2, t_2]$ je tento časoprostorový interval definován jako

$$(\Delta s)^2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 - c_0^2 (t_2 - t_1)^2.$$
 (18.78)

Tedy pro dvě události zůstává časoprostorový interval (18.78) při Lorentzově transformaci invariantní (neměnný), o čemž se dá snadno přesvědčit použitím transformačních vztahů (18.25)-(18.28) v rovnosti (18.78). Na základě výše uvedeného musí platit, že

$$(\Delta s)^{2} = (\mathbf{r}_{2} - \mathbf{r}_{1})^{2} - c_{0}^{2}(t_{2} - t_{1})^{2} = (\mathbf{r}_{2}' - \mathbf{r}_{1}')^{2} - c_{0}^{2}(t_{2}' - t_{1}')^{2} = (\Delta s')^{2}.$$
 (18.79)

Jsou-li dvě události v kauzálním vztahu, potom na základě podmínky (18.71) musí platit, že $(\Delta s)^2 < 0$. Odpovídající časoprostorový interval Δs je imaginární a v tomto případě ho nazýváme časupodobný interval. Nejsou-li dvě události v kauzálním vztahu (nesouvisející) platí na základě podmínky (18.75), že $(\Delta s)^2 > 0$, takže časoprostorový interval Δs je reálný a v tomto případě ho nazýváme prostorupodobný interval. Pro dvě události, které spojuje světelný signál platí, že $(\Delta s)^2 = 0$.

18.7.1 Relativistický Dopplerův jev

Nechť se v nečárkované soustavě S šíří vlna o kmitočtu ν rychlostí U a v čárkované soustavě S' se vlna od stejného bodového zdroje šíří rychlostí U' a s kmitočtem ν' . Dále předpokládejme, že poloha zdroje vln je dána v nečárkované soustavě polohovým vektorem \mathbf{r} a tento zdroj je vzhledem k čárkované soustavě v klidu. Čárkovaná soustava se pohybuje vůči nečárkované soustavě v kladném směru osy x rychlostí V, a tedy stejnou rychlostí se pohybuje i zdroj vln. Vnější jednotkový normálový vektor k vlnoploše 2 v počátku nečárkované soustavy O

²Vlnoplochu tvoří body, kterým odpovídá stejná fáze.

označíme \mathbf{n} (normálový vektor udává směr dopadu uvažované vlny v uvažovaném místě). Pro jednoduchost uvažovaný normálový vektor \mathbf{n} leží v rovině (x,y) a svírá s osou x úhel α , viz obr. 18.4. Na základě výše uvedených předpokladů můžeme složky tohoto jednotkového normálového vektoru vyjádřit jako $\mathbf{n} = (-\cos\alpha, -\sin\alpha)$. Předpokládejme, že v čase t=0 opouští vlna bodový zdroj a bodu O dosáhne uvažovaný hřeben vlny za čas (v soustavě \mathcal{S}')

$$t_0 = \frac{|\mathbf{r}|}{U} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|}{U} = \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{U}.$$
 (18.80)

Počet hřebenů uvažované vlny, který v čase t napočítá pozorovatel P pevně spojený s nečárkovanou vztažnou soustavou, je

$$N = \nu(t - t_0) = \nu \left(t - \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{U} \right) . \tag{18.81}$$

Jelikož počet hřebenů vlny N je vlastně jen číslo, nemůže tímto záviset na volbě vztažné soustavy, tedy počet hřebenů vlny N musí být stejný v obou soustavách \mathcal{S} , \mathcal{S}' . Jinak řečeno, pozorovatel P' pevně spojený s čárkovanou vztažnou soustavou zjistí stejný počet hřebenů za odpovídající transformovaný časový interval $t' - t'_0$. Z tohoto důvodu můžeme napsat

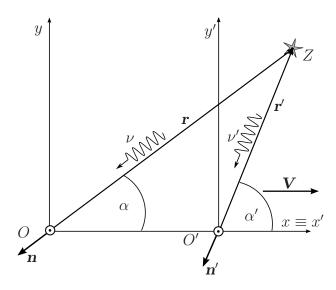
$$\nu(t - t_0) = \nu'(t' - t_0') \tag{18.82}$$

neboli

$$\nu \left(t - \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{U} \right) = \nu' \left(t' - \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{U'} \right) , \qquad (18.83)$$

kde čárkované veličiny na pravé straně rovnice představují transformované veličiny naměřené v nečárkované vztažné soustavě.

Protože rovnice (18.83) musí platit pro libovolné body prostoru a libovolný čas, použijeme



Obrázek 18.4: Situační obrázek k odvození Dopplerova jevu.

pro nalezení transformačního vztahu mezi ν' a ν v této rovnici Lorentzových transformací (18.25), (18.26) a (18.28), čímž dostaneme

$$\nu\gamma\left(1 - \frac{V\cos\alpha}{U}\right)t' - \gamma\left(\cos\alpha - \frac{V}{c_0^2}\right)\frac{\nu}{U}x' - \frac{\nu\sin\alpha}{U}y' = \nu't' - \frac{\nu'\cos\alpha'}{U'}x' - \frac{\nu'\sin\alpha'}{U'}y' . (18.84)$$

Aby rovnice (18.84) platila musí se rovnat součinitele u proměnných t', x' a y' na jejích obou stranách. Porovnáme-li součinitele u proměnných t', tak dospějeme k následujícímu

transformačnímu vztahu mezi kmitočty

$$\nu' = \nu \gamma \left(1 - \frac{V \cos \alpha}{U} \right) = \nu \frac{1 - \frac{V \cos \alpha}{U}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}} \,. \tag{18.85}$$

Budeme-li předpokládat elektromagnetickou vlnu, potom můžeme ve vztahu (18.85) dosadit za rychlost U rychlost c_0 , tj.

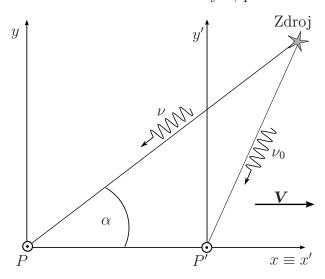
$$\nu' = \nu \gamma \left(1 - \frac{V \cos \alpha}{c_0} \right) = \nu \frac{1 - \frac{V \cos \alpha}{c_0}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}} \,. \tag{18.86}$$

Protože světelný zdroj je v klidu v soustavě \mathcal{S}' , tak kmitočet zdroje v této soustavě představuje tzv. klidový kmitočet, který budeme značit ν_0 , tedy $\nu' = \nu_0$. Dosadíme-li za ν' ve vztahu (18.86) klidový kmitočet, tak po následné úpravě dostaneme

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}}{1 - \frac{V \cos \alpha}{c_0}} \,. \tag{18.87}$$

Na obrázku 18.5 je zachycena popisovaná situace, kdy pozorovatelé (měřicí body) se nacházejí v počátcích obou dvou vztažných soustav.

Bude-li se uvažovaná vlna šířit v kladném směru osy x, potom $\cos \alpha = \cos 0 = 1$. V tomto



Obrázek 18.5: Zdroj se pohybuje spolu s čárkovanou soustavou rychlostí V. Pozorovatel P v nečárkované soustavě naměří kmitočet ν , kdežto pozorovatel P' v čárkované soustavě naměří kmitočet ν_0 .

případě můžeme upravit vztah (18.87) do následujícího tvaru

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}}{1 - \frac{V}{c_0}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}{\left(1 - \frac{V}{c_0}\right)^2}} = \nu_0 \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{V}{c_0}\right)\left(1 + \frac{V}{c_0}\right)}{\left(1 - \frac{V}{c_0}\right)^2}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c_0}}{1 - \frac{V}{c_0}}}.$$
 (18.88)

Transformační vztah pro vlnovou délku dostaneme při použití vztahů $\lambda=c_0/\nu$ a $\lambda_0=c_0/\nu_0$ v rovnosti (18.88)

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c_0}}{1 + \frac{V}{c_0}}} \,. \tag{18.89}$$

Vztah (18.87), resp. vztahy (18.88) či (18.89), představují transformační vztahy pro podélný relativistický Dopplerův jev.

V případě, že se rovinná vlna bude v nečárkované soustavě \mathcal{S} šířit ve směru kolmém na pohyb zdroje, tj. $\cos \alpha = \cos \pi/2 = 0$, potom ze vztahu (18.87) dostaneme následující výraz

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}} \,, \tag{18.90}$$

který reprezentuje transformační vztah pro tzv. *příčný Dopplerův jev*. Poznamenejme, že příčný Dopplerův jev je čistě relativistická záležitost, která nemá, na rozdíl od podélného relativistického Dopplerova jevu, v klasické mechanice svoji analogii.

18.8 Relativistická dynamika

Z klasické mechaniky víme, že Newtonovy pohybové rovnice jsou invariantní vzhledem k Galileiho transformace, na rozdíl od Maxwellových rovnic, které představují základní rovnice elektromagnetické teorie. Na druhou stranu jsou Maxwellovy rovnice invariantní pro Lorentzovy transformace, avšak Newtonovy pohybové rovnice při těchto transformacích nejsou neměnné. Z tohoto důvodu je nezbytné nalézt takový tvar pohybových rovnic, aby byly rovněž invariantní vůči Lorentzovým transformacím. Uvážíme-li skutečnost, že Lorentzovy transformacíní vztahy je možné nahradit transformačními vztahy Galileiho v případě, že $V \ll c_0$, potom by bylo žádoucí, aby nový tvar pohybových rovnic, které budou invariantní vůči Lorentzovým transformacím, bylo možné rovněž nahradit tvarem pohybových rovnic klasické mechaniky, bude-li splněno, že $V \ll c_0$.

Hybnost hmotného bodu budeme definovat podobně jako v klasické mechanice, tj.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} . \tag{18.91}$$

Lze se snadno přesvědčit (viz níže), že pro takto zavedenou hybnost a pro m = konst. není zákon zachování hybnosti pro izolovanou soustavu hmotných bodů invariantní vůči Lorent-zovým transformacím. Z tohoto důvodu nebudeme hmotnost m považovat za konstantní, ale budeme předpokládat, že je funkcí velikosti rychlosti, tj. m = m(v). Takto zavedenou hmotnost budeme nazývat relativistickou hmotností. Hmotnost $m(0) = m_0$ je hmotnost změřená v soustavě, kde je objekt v klidu, představuje klasickou hmotnost (hmotnost zavedenou v klasické mechanice) a nazýváme ji klidová hmotnost.

Budeme hledat tvar funkce m = m(v) na základě předpokladu, že v izolované soustavě platí zákon zachování hmotnosti i pro relativistickou hmotnost, tj.

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} = konst. \tag{18.92}$$

a zákon zachování hybnosti

$$\sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{konst.}$$
 (18.93)

Při hledání funkční závislosti m=m(v) použijeme Tolmanovo-Lewisovo odvození. Uvažujme dokonale nepružnou srážku dvou částic, které matematicky popisujeme jako hmotné body. V důsledku dokonale nepružné srážky dochází ke spojení částic. Abychom si co nejvíce zjednodušili situaci, tak budeme předpokládat, že uvažované dvě částice se v čárkované inerciální vztažné soustavě \mathcal{S}' pohybují před srážkou se stejně velkými, ale opačně orientovanými rychlostmi a navíc mají stejné klidové hmotnosti m_0 . Díky takto zavedenému předpokladu

částice vzniklá spojením uvažovaných částic, jako důsledek dokonale nepružné srážky, bude v čárkované soustavě S' v klidu³. Označíme-li rychlost před srážkou první částice v'_1 a druhé částice v'_2 a dále rychlost po srážce v', tak na základě výše uvedeného můžeme napsat, že

$$v_1' = u \;, \quad v_2' = -u \;, \quad v' = 0 \;, \tag{18.94}$$

kde u je velikost rychlostí, tj. $|v_1'| = |v_2'| = u$.

Popisovaná situace je zachycena na obrázku 18.6. Popišme uvažovanou srážku z pohledu



Obrázek 18.6: Dokonale nepružná srážka dvou stejných částic z pohledu inerciální vztažné soustavy \mathcal{S}' .

nečárkované soustavy \mathcal{S} , vůči které se pohybuje čárkovaná soustava \mathcal{S}' rychlostí V. Podle transformačního vztahu (18.46) bude platit

$$v_1 = \frac{v_1' + V}{1 + \frac{V}{c_0^2} v_1'}, \quad \text{resp.} \quad v_1 = \frac{u + V}{1 + \frac{V}{c_0^2} u},$$
 (18.95)

$$v_2 = \frac{v_2' + V}{1 + \frac{V}{c_0^2} v_2'}, \quad \text{resp.} \quad v_2 = \frac{-u + V}{1 - \frac{V}{c_0^2} u}.$$
 (18.96)

Označíme v nečárkované soustavě S hmotnost první částice m_1 a druhé částice m_2 , které v následující úvaze budeme považovat za konstanty, tj. nezávislé na rychlosti pohybu částice. Na základě zákona zachování hybnosti, jehož platnost předpokládáme, můžeme pro součet hybností před srážkou a po srážce psát

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) w$$
 (18.97)

Jelikož jsme předpokládali, že $m_1 = m_2$ (hmotnosti považujeme stále ještě za klasické, takže se klidová hmotnost neliší od hmotnosti částice v pohybu), dostaneme z rovnice (18.97) následující vztah pro rychlost po srážce (rychlost spojených částic) vyjádřit následujícím vztahem

$$w = \frac{v_1 + v_2}{2} \ . \tag{18.98}$$

Budeme-li předpokládat, že V=u, potom 4 $v_2=0$ a w=u, takže

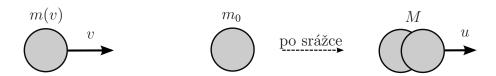
$$w = u = \frac{v_1}{2} \,. \tag{18.99}$$

Avšak dosadíme-li za rychlost v_1 v rovnosti (18.99) ze vztahu (18.95), tak zjistíme, že dospějeme k hodnotě rychlosti w, která se neshoduje s hodnotou ve vztahu (18.99). K této hodnotě se bude blížit pro případ, kdy $u \ll c_0$. Tímto jsme ukázali, že chceme-li zajistit platnost zákona zachování hybnosti z pohledu speciální teorie relativity, je nutné na hmotnosti nepohlížet jako na konstanty, ale jako na funkce rychlosti pohybu částice jejíž hmotnost uvažujeme, tj. že m = m(v). Z tohoto důvodu tedy není možné předpokládat, že $m_1 = m(v_1)$ se bude rovnat $m_2 = m(v_2)$.

Předpokládejme, že čárkovaná soustava \mathcal{S}' se vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} pohybuje rych-

³Podle zákona zachování hybnosti se částice při rázu zastaví, spojí se v jednu částici a ta zůstane v klidu.

 $^{^4}$ Jestliže spojené částice se v čárkované vztažné soustavě nepohybují a pohybuje-li se tato čárkovaná vztažná soustava vzhledem k nečárkované soustavě rychlostí u, potom se tyto spojené částice musí v nečárkované vztažné soustavě pohybovat rychlostí u.



Obrázek 18.7: Dokonale nepružná srážka dvou stejných částic z pohledu inerciální vztažné soustavy S, vůči které je druhá z částic v klidu.

lostí u v kladném směru osy x, tj. V=u. Použitím vztahu pro skládání rychlostí (18.46), pak pro rychlost první částice $v_1=v$ vzhledem k nečárkované soustavě dostaneme

$$v_1 = v = \frac{v_1' + V}{1 + \frac{V}{c_0^2} v_1'} = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c_0^2}}.$$
 (18.100)

Je zřejmé, že po uskutečnění dokonale nepružné srážky se spojené částice budou pohybovat rychlostí u v kladném směru osy x, viz obr. 18.7.

Vyjádříme si dále zákon zachování hybnosti a hmotnosti z pohledu nečárkované vztažné soustavy ${\mathcal S}$

$$m(v)v = Mu (18.101)$$

$$m(v) + m_0 = M (18.102)$$

Vyloučením hmotnosti M dostaneme z posledních dvou rovnic

$$\frac{m(v)}{m_0} = \frac{u}{v - u} \ . \tag{18.103}$$

Dosazením ze vztahu (18.100) do vztahu (18.103) dostaneme

$$\frac{m(v)}{m_0} = \frac{u}{v - u} = \frac{m(v)}{m_0} = \frac{u}{\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c_0^2}} - u} = \frac{u}{\frac{2uc_0^2}{c_0^2 + u^2} - u} = \frac{1}{\frac{2c_0^2}{c_0^2 + u^2} - 1} = \frac{c_0^2 + u^2}{c_0^2 - u^2}.$$
 (18.104)

Použijeme-li vztahu 18.100), pak lze ukázat, že platí následující rovnost

$$1 - \frac{u^2}{c_0^2} = 1 - \frac{\left(\frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c_0^2}}\right)^2}{c_0^2} = 1 - \frac{\left(\frac{2u}{\frac{c_0^2 + u^2}{c_0^2}}\right)^2}{c_0^2} = 1 - \frac{4u^2c_0^2}{(c_0^2 + u^2)^2} = \frac{(c_0^2 + u^2)^2 - 4u^2c_0^2}{(c_0^2 + u^2)^2} = \frac{(c_0^2 + u^2)^2 - 4u^2c_0^2}{(c_0^2 + u^2)^2} = \frac{(c_0^2 + u^2)^2 - 4u^2c_0^2}{(c_0^2 + u^2)^2}.$$
(18.105)

Odsud můžeme psát, že

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} = \frac{c_0^2 + u^2}{c_0^2 - u^2} \,. \tag{18.106}$$

Porovnáním vztahů (??) a (18.106) dostaneme

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} = \gamma(v)m_0.$$
 (18.107)

Vztah (18.107) představuje hledanou závislost hmotnosti na rychlosti pohybu uvažovaného objektu 5 .

 $^{^5{\}rm Za}$ povšimnutí stojí skutečnost, že Lorentzův faktor zde souvisí s rychlostí pohybu částice va ne s rychlostí Vpohybu čárkované vztažné soustavy vůči vztažné soustavě nečárkované.

Ze vztahu (18.107) je patrné, že pro $v \to c_0$ bude $m \to \infty$. Na základě vztahu (18.107) můžeme pro relativistickou hybnost částice psát

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} = \gamma(v)m_0\mathbf{v}$$
 (18.108)

Na rozdíl od hmotnosti částice, její elektrický náboj na rychlosti nezávisí, a tedy při přechodu z jedné inerciální vztažné soustavy do druhé se nemění. O tomto svědčí skutečnost, že atomy a molekuly látek jsou elektricky neutrální, přestože rychlosti elektronů v atomových obalech různých atomů jsou různé a značně se liší od rychlostí protonů v atomových jádrech.

18.8.1 Síla, pohybová rovnice a energie

Předpokládejme, že ve speciální teorii relativity je možné vyjádřit pohybovou rovnici způsobem

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} \,, \tag{18.109}$$

který je shodný s vyjádřením, jak ho známe z klasické mechaniky. Vzhledem k tomu, že již na hmotnost nepohlížíme jako na konstantu, není možné zápis pohybové rovnice ve tvaru ${\pmb F}=m{\pmb a},$ což vyplývá z následující rovnosti

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}(m\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} + m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} + m\mathbf{a}.$$
 (18.110)

Pro další úvahy se zaměříme na zavedení pojmu energie z pohledu speciální teorie relativity. Z klasické mechaniky víme, že pro přírůstek kinetické energie E_k platí

$$dE_k = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \tag{18.111}$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \,. \tag{18.112}$$

Dosadíme-li za vektor síly ze vztahu (18.109) do vztahu (18.111), tak dostaneme

$$dE_k = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}.$$
 (18.113)

Diferenciací vztahu (18.108) obdržíme následující vztah⁶

$$d\mathbf{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} + \frac{\mathbf{v} \frac{v}{c_0^2} dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} = m_0 \frac{d\mathbf{v} - \frac{v^2}{c_0^2} d\mathbf{v} + \frac{v^2}{c_0^2} d\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} = m_0 \frac{d\mathbf{v}}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} = m_0 \frac{d\mathbf{v}}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}.$$
 (18.114)

Dosadíme-li do vztahu (18.113) ze vztahu (18.114), tak můžeme psát, že

$$dE_k = m_0 \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = m_0 \frac{v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$
 (18.115)

 $^{^6}$ V následných úpravách použijeme rovnosti $\mathbf{v} \cdot \mathrm{d} \mathbf{v} = v \mathrm{d} v$, jejíž oprávněnost vyplývá z následujících vztahů: $v \mathrm{d} v = (1/2) \mathrm{d} v^2 = (1/2) \mathrm{d} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = (1/2) [(\mathrm{d} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\mathrm{d} \mathbf{v})] = \mathbf{v} \cdot \mathrm{d} \mathbf{v}$.

Integrací vztahu (18.115) dostaneme pro kinetickou energii následující výraz

$$E_k = \frac{m_0 c_0^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} + C , \qquad (18.116)$$

kde C je integrační konstanta, kterou určíme z podmínky, že pro v=0 musí být $E_k=0$, tedy $C=-m_0c_0^2$, takže pro kinetickou energii dostáváme

$$E_k = \frac{m_0 c_0^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} - m_0 c_0^2 . {18.117}$$

S přihlédnutím ke vztahu (18.107) je možné upravit nalezený vztah pro kinetickou energii (18.117)

$$E_k = m_0 \gamma(v) c_0^2 - m_0 c_0^2 = m c_0^2 - m_0 c_0^2 . {18.118}$$

Zavedeme-li následující označení $E=mc_0^2$ a $E_0=m_0c_0^2$, potom ze vztahu (18.118) dostáváme

$$E_k = E - E_0 (18.119)$$

odtud

$$E = E_k + E_0 = mc_0^2 (18.120)$$

 $E_0 = m_0 c_0^2$ představuje klidovou energii a $E = m c_0^2$ představuje celkovou energii a vyjadřuje ekvivalenci hmotnosti a energie. Ze vztahu je zřejmé, že hmotnost se mění s obsahem energie daného tělesa. Například zahřátím tělesa vzroste kinetická energie jeho atomů a tím vzroste i jeho hmotnost. Důsledkem ekvivalence hmotnosti a energie je skutečnost, že zákon zachování hmotnosti a zákon zachování energie jsou si ekvivalentní.

Vztah mezi energií a hybností můžeme nalézt poměrně snadno úpravou vztahu (18.107), který nejdříve umocníme na kvadrát a následně ho vynásobíme jmenovatelem, takže dostaneme

$$m^2 - \frac{m^2 v^2}{c_0^2} = m_0^2 \ . ag{18.121}$$

Vynásobením rovnice (18.121) čtvrtou mocninou rychlosti světla c_0^4 , pak obdržíme následující vztah

$$m^2 c_0^4 - m^2 v^2 c_0^2 = m_0^2 c_0^4 , (18.122)$$

který dále upravíme do následujícího tvaru s využitím vztahů $E=mc_0^2$ a p=mv

$$E^2 = p^2 c_0^2 + m_0^2 c_0^4 . (18.123)$$

Rovnice (18.123) vyjadřuje vztah mezi energií a hybností.

18.8.2 Transformace hmotnosti a energie

Jelikož klidová hmotnost nezávisí na rychlosti, představuje invariant, a tuto skutečnost můžeme vyjádřit jako

$$m_0' = m_0 (18.124)$$

Avšak relativistická hmotnost závisí na rychlosti, tudíž relativistická hmotnost není invariantem. Pro relativistickou hmotnost v čárkované soustavě musí na základě vztahů (18.107) a (18.124) platit, že

$$m' = m'(v') = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c_0^2}}}$$
 (18.125)

Pro další úpravy použijeme následujícího vztahu

$$\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c_0^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}{1 - \frac{Vv_x}{c_0^2}},$$
(18.126)

jehož platnost (tj. že levá strana se rovná pravé straně) lze přímým výpočtem ověřit pomocí vztahů (18.50), které dosadíme za $v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2$ na levé straně rovnosti (18.126). Pomocí vztahu (18.126) můžeme výraz (18.125) přepsat do následujícího tvaru

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \frac{1 - \frac{Vv_x}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}} = \gamma m \left(1 - \frac{Vv_x}{c_0^2} \right) , \qquad (18.127)$$

kde $\gamma = \sqrt{1 - V^2/c_0^2}$.

Roznásobíme-li hmotností m závorku u výsledného výrazu vztahu (18.127), tak dostaneme

$$m' = \gamma \left(m - \frac{V p_x}{c_0^2} \right) . \tag{18.128}$$

Vztah (18.128) představuje transformační vztah pro hmotnost.

Vzhledem ke vztahu vyjadřujícímu ekvivalenci mezi hmotností a energií $E=mc_0^2$, je možné vynásobením transformačního vztahu pro hmotnost (18.128) kvadrátem rychlosti světla c_0^2 dospět k následujícímu transformačnímu vztahu pro energii

$$E' = \gamma \left(E - V p_x \right) , \qquad (18.129)$$

kde $E' = m'c_0^2$.

18.8.3 Transformace hybnosti a síly

Transformace příčných složek hybnosti

Pro složku hybnost vyjádřenou v čárkované soustavě \mathcal{S}' můžeme s ohledem na vztahy (18.108) a (18.125) psát, že

$$p_y' = m'v_y' = \frac{m_0 v_y'}{\sqrt{1 - \frac{{v'}^2}{c_0^2}}}. (18.130)$$

Dosazením ze vztahu (18.50) do vztahu (18.130) dostaneme

$$p_y' = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c_0^2}}} \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}}{1 - \frac{V v_x}{c_0^2}} \,. \tag{18.131}$$

Uplatníme-li ve vztahu (18.131) vztah (18.126), tak dospějeme k následující rovnosti

$$p_y' = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} = p_y . {18.132}$$

Analogickým způsobem bychom zjistili, že $p'_z = p_z$. Tedy můžeme konstatovat, že příčné složky hybnosti se při transformaci nemění.

Transformace podélné složky hybnosti

Pro podélnou složku hybnosti můžeme opět s ohledem na vztahy (18.108) a (18.125) psát, že

$$p_x' = m'v_x' = \frac{m_0 v_x'}{\sqrt{1 - \frac{{v'}^2}{c_0^2}}} \,. \tag{18.133}$$

Dosazením ze vztahu (18.50) do vztahu (18.133) dostaneme

$$p_x' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c_0^2}}} \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c_0^2}} \,. \tag{18.134}$$

Uplatníme-li ve vztahu (18.134) vztah (18.126), tak dospějeme k následující rovnosti

$$p_x' = \frac{m_0(v_x - V)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}} = \frac{m(v_x - V)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}} = \gamma(mv_x - mV) . \tag{18.135}$$

Využijeme-li dále rovnosti $E=mc_0^2$, potom je možné dospět k následujícímu transformačnímu vztahu pro podélnou složku hybnosti

$$p_x' = \gamma \left(p_x - \frac{EV}{c_0^2} \right) . \tag{18.136}$$

Pro nalezení transformačních vztahů pro jednotlivé složky síly začneme složkou podélnou, pro kterou můžeme psát

$$F_x' = \frac{\mathrm{d}p_x'}{\mathrm{d}t'} \ . \tag{18.137}$$

Vztah (18.137) přepíšeme do následujícího tvaru

$$F_x' = \frac{\mathrm{d}p_x'}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \,. \tag{18.138}$$

Abychom nalezli odpovídající transformační vztah, tak si nejdříve vyjádříme derivaci $\mathrm{d}t/\mathrm{d}t'$ a to derivací vztahu (18.28), přičemž pro vyjádření složky rychlosti v_x' využijeme transformačního vzorce (18.50)

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \gamma \left(1 + \frac{V}{c_0^2} \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \right) = \gamma \left(1 + \frac{Vv_x'}{c_0^2} \right) = \gamma \left[1 + \frac{\frac{V}{c_0^2}(v_x - V)}{1 - \frac{Vv_x}{c_0^2}} \right] = \gamma \left(\frac{1 - \frac{Vv_x}{c_0^2} + \frac{Vv_x}{c_0^2} - \frac{V^2}{c_0^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c_0^2}} \right) = \gamma \left(\frac{1 - \frac{V^2}{c_0^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c_0^2}} \right) . \quad (18.139)$$

Pro vyjádření derivace $\mathrm{d}p_x'/\mathrm{d}t$ použijeme transformačního vztahu (18.136), tedy

$$\frac{\mathrm{d}p_x'}{\mathrm{d}t} = \gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(p_x - \frac{EV}{c_0^2} \right) = \gamma \left(\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} - \frac{V}{c_0^2} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \right) = \gamma \left(F_x - \frac{V}{c_0^2} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \right) . \tag{18.140}$$

S ohledem na vztah (18.120) a (18.112) dospějeme k následující rovnosti

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(E_k + E_0)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} . \tag{18.141}$$

Dosadíme výraz (18.141) do vztahu (18.140)

$$\frac{\mathrm{d}p_x'}{\mathrm{d}t} = \gamma \left(F_x - \frac{V}{c_0^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \right) . \tag{18.142}$$

Nyní pro podélnou složku síly můžeme po dosazení vztahů (18.139) a (18.142) do rovnice (18.138) psát

$$F'_{x} = \gamma^{2} \left(\frac{1 - \frac{V^{2}}{c_{0}^{2}}}{1 - \frac{Vv_{x}}{c_{0}^{2}}} \right) \left(F_{x} - \frac{V}{c_{0}^{2}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{1}{1 - \frac{Vv_{x}}{c_{0}^{2}}} \left(F_{x} - \frac{V}{c_{0}^{2}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{1}{1 - \frac{Vv_{x}}{c_{0}^{2}}} \left[F_{x} - \frac{V}{c_{0}^{2}} (F_{x}v_{x} + F_{y}v_{y} + F_{z}v_{z}) \right] = \frac{1}{1 - \frac{Vv_{x}}{c_{0}^{2}}} \left[F_{x} \left(1 - \frac{Vv_{x}}{c_{0}^{2}} \right) - \frac{V}{c_{0}^{2}} (F_{y}v_{y} + F_{z}v_{z}) \right] = F_{x} - \frac{V}{1 - \frac{Vv_{x}}{c_{0}^{2}}} \frac{F_{y}v_{y} + F_{z}v_{z}}{c_{0}^{2}} \right]. \quad (18.143)$$

Vezmeme-li v úvahu skutečnost, že se příčné složky vektoru hybnosti při transformaci nemění, jak bylo ukázáno v předchozí kapitole, pak pro příčné složky síly je možné podobně psát, že

$$F_y' = \frac{\mathrm{d}p_y'}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = F_y \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}$$
(18.144)

a podobně

$$F_z' = F_z \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \tag{18.145}$$

Použijeme-li vztah (18.139) v rovnostech (18.144) a (18.145), tak po malé úpravě dospějeme k následujícím transformačním vztahům

$$F_y' = \frac{F_y}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c_0^2}\right)} \,, \tag{18.146}$$

$$F_z' = \frac{F_z}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c_0^2}\right)} \ . \tag{18.147}$$

Bude-li se tedy vektor síly \mathbf{F} , resp. jeho složky, transformovat podle vztahů (18.143), (18.144) a (18.145), máme tak zajištěnu invarianci pohybové rovnice (18.109) vůči Lorentzovým transformacím.

Nyní se ještě vrátíme k pohybové rovnici (18.110), ve které pro časovou změnu relativistické hmotnosti použijeme vztahu $E=mc_0^2$ a rovnosti (18.141)

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right) \mathbf{v} + m\mathbf{a} = \left(\frac{1}{c_0^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\right) \mathbf{v} + m\mathbf{a}. \tag{18.148}$$

Použitím vztahu (18.107) přepíšeme rovnost (18.148) do následujícího tvaru

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} \mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{c_0^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}. \tag{18.149}$$

Porovnáme-li nalezený tvar pohybové rovnice (18.149) s pohybovou rovnicí v klasické mechanice $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, tak vidíme, že tvar pohybové rovnice v dynamice speciální teorie relativity je složitější a vyplývá z něho, že zrychlení obecně nemá směr působící síly.

Má-li být rovnice (18.149) skutečnou pohybovou rovnicí, je samozřejmě třeba, aby byl ještě explicitně zadán v konkrétní inerciální vztažné soustavě tvar silového zákona. S výhodou se proto použije požadavek, aby v momentálně klidové soustavě částice byl silový zákon identický s odpovídajícím vyjádřením známým z klasické mechaniky. Poznamenejme, že pohybovou rovnici (18.149) můžeme, v případě, že $v \ll c_0$, nahradit pohybovou rovnicí, jak ji známe z klasické mechaniky, tj. $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$.

Poznámka k analogii

Při odvozování transformačních vztahů pro jednotlivé fyzikální veličiny lze vysledovat pravidlo, které nám umožní k daným transformačním vztahům nalézt vztahy inverzní. Toto pravidlo nám říká, že nahradíme-li v transformačních vztazích čárkované veličiny veličinami nečárkovanými a naopak a změníme-li znaménko u vzájemné rychlosti pohybu inerciálních soustav, tak dostaneme transformační vztahy inverzní.

18.9 Pomalá Lorentzova transformace

V případě, že vzájemná rychlost pohybu inerciálních soustav je malá, je možné zjednodušit odvozené transformační vztahy pro Lorentzovu transformaci, které pak reprezentují tzv. pomalou Lorentzovu transformaci. Označíme-li $V/c_0 = \beta$, potom v případě pomalé Lorentzovy transformace budeme zanedbávat členy obsahující β^n , kde n > 1. Z tohoto důvodu pak můžeme považovat Lorentzův faktor za přibližně roven jedné, tj. $\gamma \approx 1$. Vezmeme-li v úvahu tento předpoklad, potom transformační vztahy obecné Lorentzovy transformace (18.34) a (18.35) můžeme nahradit následujícími vztahy

$$\mathbf{r}' \approx \mathbf{r} - \mathbf{V}t$$
, (18.150)

$$t' \approx t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \,. \tag{18.151}$$

Vztahy (18.150) a (18.151) představují transformační vztahy pomalé Lorentzovy transformace.

Z inverzních transformačních vztahů obecné Lorentzovy transformace (18.36) a (18.37) dostaneme analogickým přístupem následující transformační vztahy pro inverzní pomalou Lorentzovu transformaci, tj.

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}' + \mathbf{V}t' \,, \tag{18.152}$$

$$t \approx t' + \frac{\mathbf{r'} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \,. \tag{18.153}$$

Porovnáme-li pomalou Lorentzovu transformaci s Galileiho transformací, tak se liší pouze členem v transformačním vztahu pro čas. Pomocí transformačních vztahů (18.150) a (18.151) nelze odvodit vztahy pro kontrakci délky či dilataci času, což je dáno tím, že se jedná o jevy druhého řádu, tj. jevy, které jsou popsány transformačními vztahy obsahujícími členy s β^2 . Jediným relativistickým jevem, který je nižší než druhého řádu je vztah ukazující na relativistické pojetí současnosti (18.68). Pro tento případ je možné dojít pomocí transformačního vztahu (18.151) k následující rovnosti

$$\Delta t' = t_2' - t_1' \approx t_1 - \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} - \left(t_2 - \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}\right) = t_2 - t_1 - \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} = \Delta t - \frac{\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}. \quad (18.154)$$

18.9.1 Pomalá transformace síly

Jelikož je síla rovna časové změně hybnosti, podíváme se nejprve na transformační vztah pro hybnost. Vzhledem k tomu, že hybnost je dána jako součin hmotnosti a rychlosti, budeme při transformaci hybnosti postupovat níže uvedeným způsobem.

Pro okamžitou rychlost v nečárkované soustavě S můžeme psát, že

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \,. \tag{18.155}$$

Derivací transformačního vztahu (18.152) podle času t' dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t'} \approx \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t'} + \mathbf{V} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \tag{18.156}$$

Derivací transformačního vztahu (18.151) podle času t dospějeme k tomuto vztahu

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \approx 1 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{V} = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \,. \tag{18.157}$$

Dále derivací transformačního vztahu (18.153)) podle času t' dospějeme k tomuto vztahu

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \approx 1 + \frac{1}{c_0^2} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t'} \cdot \mathbf{V} = 1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \,. \tag{18.158}$$

Přímo ze vztahu (18.158) dostáváme, že

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \approx \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}} \frac{1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}}{1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}} = \frac{1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}}{1 - \frac{\mathbf{v}'^2 V^2}{c_0^4}} \approx 1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}.$$
 (18.159)

Při úpravě výrazu (18.159) byl zanedbán člen obsahující β^2 .

Dosazením vztahů (18.156) a (18.159) do vztahu (18.155) dostaneme

$$\mathbf{v} \approx (\mathbf{v}' + \mathbf{V}) \left(1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \right) .$$
 (18.160)

Vektor rychlosti \mathbf{v} si vyjádříme jako

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} \,, \tag{18.161}$$

kde \mathbf{v}_{\parallel} je podélná složka rychlosti, která leží ve směru vektoru \mathbf{V} .

Na základě vztahu (18.161) pak můžeme transformační vztah (18.160) zapsat jako

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} \approx (\mathbf{v}_{\parallel}' + \mathbf{v}_{\perp}' + \mathbf{V}) \left(1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \right) = (\mathbf{v}_{\parallel}' + \mathbf{V}) \left(1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \right) + \mathbf{v}_{\perp}' \left(1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \right). \tag{18.162}$$

Leží-li \mathbf{v}_{\parallel}' ve směru vektoru \mathbf{V} , potom ze vztahu (18.162) přímo vyplývá transformační vztah pro příčnou složku rychlosti

$$\mathbf{v}_{\perp} \approx \mathbf{v}_{\perp}' \left(1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \right)$$
 (18.163)

a tedy

$$\mathbf{v}_{\parallel} \approx (\mathbf{v}_{\parallel}' + \mathbf{V}) \left(1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \right)$$
 (18.164)

V kapitole 18.8.3 jsme si ukázali, že příčné složky hybnosti se při Lorentzově transformaci nemění, tj. $p_{\perp}=p'_{\perp}$, takže

$$m\mathbf{v}_{\perp} = m'\mathbf{v}_{\perp}' \tag{18.165}$$

Dosadíme za \mathbf{v}_{\perp} z transformačního vztahu (18.163), čímž dostaneme, že

$$m\mathbf{v}_{\perp}'\left(1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{V}}{c_0^2}\right)\approx m'\mathbf{v}_{\perp}',$$
 (18.166)

a odtud pak pro transformace hmotností dostáváme, že

$$m \approx \frac{m'}{1 - \frac{\mathbf{v'} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}} = \frac{m'}{1 - \frac{\mathbf{v'} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}} \frac{1 + \frac{\mathbf{v'} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}}{1 + \frac{\mathbf{v'} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}} = \frac{m' \left(1 + \frac{\mathbf{v'} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}\right)}{1 - \frac{\mathbf{v'}^2 V^2}{c_0^4}} \approx m' \left(1 + \frac{\mathbf{v'} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2}\right) . \tag{18.167}$$

Při úpravách pro nalezení transformačního vztahu pro hmotnosti jsme zanedbali člen obsahující β^2 .

Pro nalezení transformačního vztahu pro hybnost využijeme vztahy (18.160) a (18.167), tak můžeme psát, že

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \approx m' \left(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \right) (\mathbf{v}' + \mathbf{V}) \left(1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \right) =$$

$$m'(\mathbf{v}' + \mathbf{V}) \left(1 + \frac{v'^2 V^2}{c_0^4} \right) \approx m'(\mathbf{v}' + \mathbf{V}) = \mathbf{p}' + m' \mathbf{V}. \quad (18.168)$$

Nyní již můžeme přistoupit k hledanému transformačnímu vztahu pro vektor síly. Pro sílu v nečárkované soustavě S platí, že

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \,. \tag{18.169}$$

Pomocí vztahu (18.168) můžeme napsat, že

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t'} \approx \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{\mathrm{d}t'} + \mathbf{V} \frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t'} = \mathbf{F}' + \mathbf{V} \frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t'}.$$
 (18.170)

Dosadíme ze vztahu (18.170) do vztahu (18.169)

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \approx \left(\mathbf{F}' + \mathbf{V} \frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t'}\right) \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \,.$$
 (18.171)

Pro další úpravu vztahu (18.171) použijeme rovnost (18.141) a skutečnosti, že v čárkované soustavě je $E'=m'c_0^2$

$$\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathbf{F'} \cdot \mathbf{v'}}{c_0^2} , \qquad (18.172)$$

takže dostáváme, že

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \approx \left(\mathbf{F}' + \mathbf{V} \frac{\mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}'}{c_0^2}\right) \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}' \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} + \mathbf{V} \frac{\mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}'}{c_0^2} \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} . \tag{18.173}$$

Pro další úpravu použijeme následující rovnosti, která vyplývá přímo ze vztahu (18.150)

$$\mathbf{v}' \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$
 (18.174)

Nalezený vztah (18.174) použijeme v posledním členu rovnosti (18.173), pro předposlední člen použijeme vztahu (18.157)

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{F'} \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \right) + \mathbf{V} \frac{\mathbf{F'} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{V})}{c_0^2} \approx \mathbf{F'} \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c_0^2} \right) + \mathbf{V} \frac{\mathbf{F'} \cdot \mathbf{v}}{c_0^2}.$$
 (18.175)

Opět jsme při úpravě výrazu (18.175) zanedbali člen obsahující β^2 .

V rovnici (18.175) můžeme roznásobit závorku, čímž po úpravě dostaneme

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{F}' + \frac{1}{c_0^2} \left[\mathbf{V} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}') - \mathbf{F}' (\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}) \right]$$
 (18.176)

S ohledem na známou vektorovou identitu "BAC-CAB", tj

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

přepíšeme výsledný vztah (18.176) do následujícího finálního tvaru

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{F'} + \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{F'})$$
 (18.177)

Vztah (18.177) představuje hledanou pomalou transformaci síly.

18.10 Shrnutí získaných poznatků ze speciální teorie relativity

Speciální teorie relativity vychází ze dvou postulátů, jejichž splnění není možné zajistit Galileiho transformací, a proto tato transformace musí být nahrazena transformací jinou, kterou nazýváme Lorentzova transformace. Pomocí této transformace je možné dospět, z pohledu klasické mechaniky, k překvapivým závěrům. Z výsledků, ke kterým jsme dospěli v předchozích kapitolách, vyplývá, že speciální teorie relativity významně mění naše chápání prostoru a času. Z nalezených vztahů je možné vysledovat skutečnost, že při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla je nutné vzít v úvahu, že prostor a čas nejsou nezávislé pojmy. Z těchto vztahů jednoznačně vyplývá, že při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla tedy není možné chápat prostor a čas nezávisle na pohybu vyšetřovaných objektů a vztažných soustav, takže absolutní prostor a čas, jak je zaveden v klasické mechanice, je již neobhajitelný. Speciální teorie relativity nemění jen naše pojímání prostoru a času, ale i hmoty a energie, jelikož existuje těsná souvislost mezi hmotností tělesa a jeho energií. Závěrem je nutné konstatovat, že speciální teorie relativity je plně slučitelná s teorií elektromagnetického pole.

Část III Elektrické a magnetické pole

Kapitola 19

Elektrostatika

Z pohledu kvantové teorie pole jsou libovolné látky nebo pole tvořeny elementárními částicemi a mezi těmito částicemi působí pouze čtyři základní síly (interakce):

- 1. gravitační síla,
- 2. elektromagnetická síla,
- 3. jaderná síla slabá,
- 4. jaderná síla silná.

Gravitační silou, z pohledu klasické fyziky, jsme se zabývali v kapitole 10. Tato síla se projevuje univerzálně mezi všemi typy hmotných objektů, tedy i mezi všemi elementárními částicemi. V relativistické nekvantové fyzice je gravitace popsána Einsteinovou obecnou teorií relativity založenou na představě zakřiveného prostoročasu. Z pohledu kvantové fyziky je gravitační síla zprostředkována elementárními částicemi zvanými gravitony, které zatím nebyly experimentálně prokázány. Dosah gravitačních sil je neomezený. Gravitační síla je nejslabší známou silou. V mikrosvětě (mikroskopickém měřítku) je projev gravitační síly natolik malý, že ji při popisu chování elementárních částic zpravidla zanedbáváme. V megasvětě, tj. v měřítkách srovnatelných s rozměry kosmických objektů, naopak gravitační síla dominuje. Důvodem této skutečnosti je velká hmotnost kosmických objektů, která není kompenzována, jelikož neexistuje "záporná hmotnost", která by byla projevem antigravitace.

Silná jaderná síla drží pohromadě protony a neutrony v atomových jádrech a překonává elektrické odpuzování mezi stejně nabitými protony. Jedná se o sílu extrémně krátkého dosahu, takže její působení nepociťujeme, přestože se jedná o nejsilnější ze čtyř výše uvedených sil. Zprostředkujícími částicemi jsou tzv. gluony.

Slabá jaderná síla působí pouze na kvarky a leptony. Představuje druhou nejslabší známou sílu a je silou nejkratšího dosahu. Na rozdíl od zbývajících třech základních sil, tato síla svým působením nevytváří žádné vázané stabilní systémy částic, ale projevuje se pouze β -rozpadem elementárních částic.

Elektromagnetická síla je druhou nejsilnější silou. Obdobně jako gravitační síla je tato síla neomezeného dosahu, avšak na rozdíl od gravitační síly se neuplatňuje v megasvětě, protože dochází ke kompenzaci jejího silového působení z důvodu existence kladných a záporných nábojů. Kvantový popis elektromagnetických sil je možný v rámci kvantové elektrodynamiky, kde zprostředkující částicí je kvantum elektromagnetického pole zvané foton. Elektromagnetická síla má největší škálu projevů, např. zajišťuje soudržnost atomů, chemické vazby, síly tření, magnetické síly, kapilaritu apod.

Typ síly	Relativní síla	Dosah (m)
Elektromagnetická	10^{-2}	∞
Gravitační	10^{-38}	∞
Slabá	10^{-13}	10^{-18}
Silná	1	10^{-15}

Tabulka 19.1: Porovnání základních sil.

19.1 Elektrický náboj

Elektromagnetická interakce se projevuje pouze mezi některými částicemi, o kterých pak říkáme, že jsou elektricky nabité, či že nesou *elektrický náboj*. Podstatu elektrického náboje neznáme, avšak pomocí experimentů můžeme zjišťovat jeho vlastnosti, které můžeme shrnout do následujících šesti bodů:

- 1. Náboj neexistuje jako samostatná substance, tj. je vždy vázán na příslušnou částici, čímž charakterizuje její schopnost podstoupit elektromagnetickou interakci.
- 2. Rozlišujeme dva druhy nábojů, kladný a záporný náboj, přičemž náboje stejného znamení se odpuzují a náboje rozdílného znamení se přitahují. Jinak řečeno, mezi danými částicemi můžeme pozorovat elektromagnetickou sílu, která je v některých případech přitažlivá a v jiných případech odpudivá, což rozlišujeme zavedením elektrických nábojů kladného a záporného znamení.
- 3. *Platí zákon zachování náboje*, elektrický náboj je nestvořitelný a nezničitelný. Při reakcích je celkový náboj před reakcí roven celkovému náboji po reakci.
- 4. *Elektrický náboj se nemění při pohybu částice*, se kterou je spjat. Jinými slovy, velikost náboje je stejná ve všech vztažných soustavách.
- 5. Náboj je kvantován. Existuje nejmenší možný náboj, který nazýváme elementární náboj a všechny náboje jsou jeho celistvými násobky 1 . Elementární náboj budeme značit e. Hodnota náboje protonu je +e, kdežto hodnota náboje elektronu je -e. Elektrický náboj budeme značit Q.
- 6. Elektrický náboj vesmíru je nulový. Algebraický součet všech nábojů ve vesmíru je nulový².

Jednotkou elektrického náboje je coulomb a značíme ho C. Přibližná hodnota elementárního náboje je

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$$
 C.

V teorii elektrického pole zpravidla nemluvíme o částicích nesoucích elektrický náboj, ale jen o nábojích, s tím, že si uvědomujeme skutečnost, že náboj nemůže existovat jako samostatná substance, jak již bylo uvedeno výše. Vzhledem k tomu, že hodnota elementárního náboje je velmi malá, tak budeme z praktických důvodů ignorovat zmíněnou kvantizaci elektrického náboje.

Tak jako jsme v mechanice zavedli hmotný bod, tak v teorii elektromagnetického pole zavádíme bodový náboj, což je pro nás náboj (částice nesoucí elektrický náboj) konečné velikosti, ale nekonečně malých rozměrů. Nabité částice či tělesa, jejichž vlastní rozměry jsou

¹Kvarkový model hadronů, což jsou částice podléhající silné interakci, pracuje s *kvarky*. Kvarky jsou částice, které mají třetinové elementární náboje. Avšak za běžných podmínek nelze hadrony rozštěpit na jednotlivé kvarky, takže elementární náboj lze oprávněně považovat za základní kvantum elektrického náboje.

²Žádná astronomická a astrofyzikální pozorování nenasvědčují, že by tomu tak nemělo být.

zanedbatelné vzhledem ke vzdálenostem mezi vyšetřovanými částicemi či tělesy, můžeme ve fyzikálních modelech považovat za bodové náboje.

19.2 Coulombův zákon a elektrické pole

Základním problémem, se kterým se musíme v rámci elektromagnetické teorie vypořádat, je určení velikosti síly, jakou působí soustava nábojů q_1, q_2, \ldots, q_N na náboj Q. Náboje označené symbolem q budeme nazývat $zdrojovými \ náboji$ a náboj označený Q budeme nazývat $testovacím \ nábojem$. Obecně se může poloha zdrojových nábojů s časem měnit, přičemž čas představuje parametr, kterým je možné jejich polohu jednoznačně určit. Může-li se testovací náboj pohybovat, potom řešením příslušné pohybové rovnice získáme i rovnici dráhy, po které se testovací náboj pohyboval. Abychom si úlohu zjednodušili, tak přijmeme předpoklad, že zdrojové náboje se nepohybují, neboli jsou statické³, přičemž testovací náboj se pohybovat může. Tímto zjednodušením jsme se omezili na oblast problémů, které řeší partie zvaná elektostatika.

Budou-li v pozorovací soustavě oba náboje v pohybu, musíme provést relativistickou transformaci silového působení mezi náboji a dostaneme pole dynamické. Tímto se změní elektrostatické pole zdrojového náboje na pole elektromagnetické a síla mezi náboji na sílu Lorentzovu (ke Coulombově síle přistoupí síla magnetická). Výklad těchto jevů bude předmětem *elektrodynamiky*.

Coulombův zákon nám poskytuje odpověď na otázku, jakou silou působí zdrojový bodový náboj q, který je statický, na testovací bodový náboj Q, přičemž předpokládáme, že náboje se nachází v bezmateriálovém prostředí neboli vakuu. Matematické vyjádření tohoto zákona má následující tvar

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^3} \mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \mathbf{r}^0 , \qquad (19.1)$$

kde $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$ je jednotkový vektor k polohovému vektoru \mathbf{r} , který určuje polohu testovacího bodového náboje, ε_0 je tzv. elektrická konstanta nebo také permitivita vakua, kterou můžeme číselně vyjádřit jako

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c_0^2} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2} ,$$
 (19.2)

kde c_0 je rychlosti světla ve vakuu v soustavě SI.

Při matematickém vyjádření Coulombova zákona (19.1) se předpokládalo, že zdrojový bodový náboj se nachází v počátku zvolené soustavy souřadnic, viz obr. 19.1.

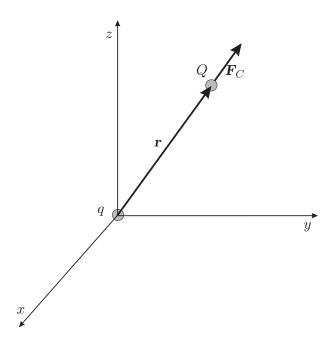
Coulombův zákon nám říká, že velikost síly, kterou na sebe dva bodové náboje působí, je přímo úměrná součinu jejich velikostí a nepřímo úměrná kvadrátu vzdálenosti mezi nimi. Vzhledem k tomu, že popisujeme silové působení mezi dvěma náboji v bezmateriálovém prostředí (vakuu) a prostor je izotropní, tak i Coulombova síla (elektrická síla) je silou izotropní neboli centrální. Díky této skutečnosti můžeme Coulombovu sílu považovat za sílu konzervativní.

Nebude-li se zdrojový bodový náboj nacházet v počátku souřadnic a jeho poloha bude určena polohovým vektorem \mathbf{r}' , viz obr. 19.2, potom je možné Coulombův zákon vyjádřit jako

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q \, q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q \, q}{R^3} \mathbf{R} \,, \tag{19.3}$$

kde ${m r}$ je polohový vektor testovacího bodového náboje $Q,~{m r}'$ je polohový vektor zdrojového bodového náboje $q,~{m R}={m r}-{m r}'=(x-x',y-y',z-z')$ a $R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.

³Skutečný nositel elektrického náboje není nikdy statický.

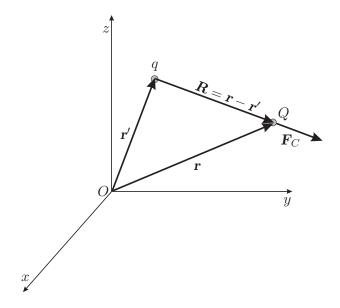


Obrázek 19.1: Geometrické uspořádání ke vztahu (19.1).

V případě, že $R \to 0$, je pole popisované vztahem (19.3) singulární, tj. roste nade vše meze. Při popisu jevů spojených s interakcí mezi bodovými náboji, které se k sobě přibližují na velmi malé vzdálenosti, je potřeba použít kvantové teorie, což překračuje rámec tohoto studijního textu. Z tohoto důvodu se omezíme na dostatečně velké vzdálenosti mezi náboji, abychom při popisu této silové interakce a souvisejících fyzikálních jevů vystačili jen s teorií prezentovanou v tomto studijním textu.

V další části textu se budeme držet úmluvy, že zdrojovým bodovým nábojům odpovídají **čárkované** souřadnice ($\mathbf{r}' = (x', y', z')$), kdežto testovacímu bodového náboje budou odpovídat souřadnice **nečárkované** ($\mathbf{r} = (x, y, z)$).

Porovnáme-li matematické vyjádření Coulombova zákona (19.3) s matematickým vyjádře-



Obrázek 19.2: Geometrické uspořádání ke vztahu (19.3).

ním gravitačního zákona (10.2), tak vidíme, že kromě konstanty úměrnosti, se liší jen v tom, že elektrické náboje mohou nabývat jak kladných, tak záporných hodnot, takže Coulombova síla může být jak silou přitažlivou, tak silou odpudivou, kdežto gravitační síla je jen silou

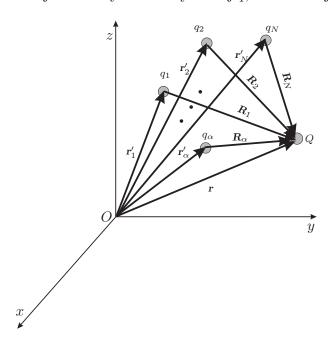
přitažlivou. Avšak po formální stránce jsou výrazy (19.3) a (10.2) zaměnitelné. Nahradíme-li ve vztahu (19.3) zdrojový bodový náboj q zdrojovým hmotným bodem m', testovací bodový náboj Q testovacím hmotným bodem m a konstantu úměrnosti $1/(4\pi\varepsilon_0)$ záporně vzatou gravitační konstantou $-\varkappa$, potom dostaneme vztah shodný se vztahem (10.2). Díky této formální podobnosti vztahů (19.3) a (10.2) je možné při popisu elektrostatického pole v bezmateriálovém prostředí (vakuu), použít formálně stejného postupu, jakého bylo použito pro pole gravitační v kapitole 10.

Jelikož pro Coulombův zákon platí princip superpozice, tj. výslednou elektrickou sílu působící na bodový náboj Q, která je výsledkem elektrického působení více bodových nábojů (označme jejich počet N), můžeme jednoduše určit jako vektorový součet jednotlivých elektrických sil. Stručněji můžeme říct, že síla působící mezi dvěma bodovými náboji není ovlivněna přítomností dalších bodových nábojů⁴. Nechť na testovací bodový náboj Q působí elektrickou silou soustava zdrojových bodových nábojů $q_1, q_2 \ldots, q_N$, potom výslednou elektrickou sílu můžeme vyjádřit jako (viz obrázek 19.3)

$$\mathbf{F}_{C} = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{F}_{C\alpha} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} Q \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{q_{\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\alpha})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\alpha}|^{3}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} Q \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{q_{\alpha}}{R_{\alpha}^{3}} \mathbf{R}_{\alpha} , \qquad (19.4)$$

kde \mathbf{r}'_{α} je polohový vektor α -tého zdrojového bodového náboje a \mathbf{r} je polohový vektor testovacího bodového náboje Q.

Uvažujme objem V' obsahující celkový elektrický náboj q, ve kterém je tento náboj rozložen



Obrázek 19.3: Geometrické uspořádání ke vztahu (19.4).

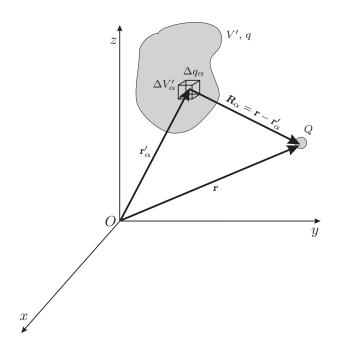
spojitě. Uvažovaný objem rozdělíme na dostatečně malé objemy $\Delta V'_{\alpha}$, jejichž náboj označíme Δq_{α} , viz obrázek 19.4.

V infinitezimálním případě (objem se stahuje v bod), tj.

$$dV' = dx'dy'dz' = \Delta V'_{\alpha} \to 0 , \qquad (19.5)$$

můžeme pohlížet na vybraný element objemu jako na bodový náboj, takže na základě analogie

 $^{^4}$ Je-li mezi uvažovanými náboji látka, a ne vakuum, pak obecně princip superpozice pro Coulombův zákon neplatí.



Obrázek 19.4: Geometrické uspořádání ke vztahu (19.6).

s případem pro soustavu zdrojových bodových nábojů (19.4) můžeme psát

$$\mathbf{F}_{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} Q \lim_{\substack{\Delta V_{\alpha}' \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\Delta q_{\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}'|^{3}}.$$
 (19.6)

Jelikož platí, že

$$\rho(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta V_{\alpha}' \to 0} \frac{\Delta q_{\alpha}}{\Delta V_{\alpha}'}, \qquad (19.7)$$

kde je ρ je objemová hustota náboje, potom je možné upravit výraz (19.6), s uvážením vztahů (19.5) a (19.7), do následujícího tvaru

$$\mathbf{F}_{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} Q \lim_{\substack{\Delta V_{\alpha}' \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\Delta q_{\alpha}}{\Delta V_{\alpha}'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}'|^{3}} \Delta V_{\alpha}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} Q \iiint_{V_{\alpha}'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3}} dV', \qquad (19.8)$$

kde $\rho(\mathbf{r})$ představuje funkci objemové hustoty, pomocí které můžeme určit celkový náboj obsažený v objemu V, jako

$$q = \iiint_{V} \rho(\mathbf{r}) dV . \tag{19.9}$$

Vzhledem k tomu, že výsledný vztah (19.8) je velmi důležitý, napíšeme ho ještě jednou, ale bez mezičlenu

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r'})(\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3} dV'.$$
 (19.10)

Výraz (19.10) nám vyjadřuje výslednou elektrickou sílu působící na testovací bodový náboj, jež je dána součtem všech elektrických sil od zdrojových elementů náboje $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$. Je nutné si uvědomit, že integrace ve výrazu (19.10) probíhá **jen přes čárkované souřadnice** x', y', z'.

Jelikož platí, že $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$, je možné integrál (19.10) přepsat do následujícího tvaru

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \int_q \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq .$$
 (19.11)

Vztahy (19.10) a (19.11) vyjadřují Coulombův zákon pro spojitě rozložený elektrický náboj, který je zdrojem elektrického pole. Vztah (19.11) platí obecně, tj. můžeme ho použít i pro případy dvojrozměrné a jednorozměrné distribuce zdrojového náboje. Vztah (19.11) se dobře hodí pro nejrůznější fyzikální úvahy, avšak pro výpočty se zpravidla nehodí, na rozdíl od vztahu (19.10).

V případě dvojrozměrné (plošné) distribuce elektrického zdrojového náboje platí, že $dq = \sigma(\mathbf{r}')dS'$, čímž můžeme upravit vztah (19.11) do následujícího tvaru

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' , \qquad (19.12)$$

kde $\sigma(\mathbf{r}')$ je plošná hustota zdrojového náboje.

Analogicky pro jednorozměrnou (lineární) distribuci zdrojového elektrického náboje, d $q = \tau(\mathbf{r}')dl'$, úpravou vztahu (19.11) dostáváme

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl', \qquad (19.13)$$

kde $\tau(\mathbf{r}')$ je lineární hustota zdrojového náboje.

Jelikož elektrická síla je silou konzervativní, tak pro ni platí, že

$$\mathbf{F}_C = -\nabla W_p \,\,, \tag{19.14}$$

kde W_p je potenciální energie testovacího bodového náboje.

19.3 Intenzita elektrického pole a elektrický potenciál

Z Coulombova zákona vyplývá, že na sebe budou silově působit bodové náboje, i když budou od sebe velmi vzdálené. Pro popis silového působení na dálku, podobně jako v případě gravitačních sil, viz kap. 10, si zavedeme fyzikální pole, které nazveme elektromagnetické pole. V pozorovací soustavě, v níž jsou zdrojové náboje v klidu, označujeme toto pole jako elektrostatické či elektrické. V okolí každého elektrického náboje existuje tedy pole, o němž se můžeme jednoduše přesvědčit tím, že do uvažovaného místa umístíme jiný, tj. testovací náboj. Na testovací náboj bude působit elektrická síla a tedy v místě testovacího náboje existuje elektrické pole. Pomocí elektrického pole vytvořeného elektrickými náboji zajistíme, že bodový náboj "pocítí" silové působení díky lokálnímu vlivu, čímž zbavíme silové působení na dálku nálepky něčeho zvláštního či tajemného. Elektrické pole lze popsat buď silově nebo energeticky. Silový popis vede k veličině intenzita elektrického pole a energetický popis vede k veličině potenciál elektrického pole.

Předpokládejme soustavu bodových zdrojových nábojů, které vytváří elektrické pole. Do bodu o polohovém vektoru ${\bf r}$, pak umístíme kladný bodový testovací náboj Q a změříme sílu, která na něj bude působit. $Elektrickou\ intenzitu$ pole pak definujeme jako sílu působící na kladný jednotkový náboj. Protože testovací náboj sám vytváří elektrické pole, a tedy narušuje původní elektrické pole, musí být velikost testovacího náboje co nejmenší, abychom minimalizovali toto narušení. Z tohoto důvodu popíšeme tento proces limitním případem, čímž pro intenzitu elektrického pole dostáváme

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \lim_{Q \to 0} \frac{\text{celková síla působící na test. bodový náboj } Q \text{ v bodě } \boldsymbol{r}}{Q} \ . \tag{19.15}$$

Tímto jsme zavedli veličinu intenzita elektrického pole E(r), s jejíž pomocí zavádíme vektorové pole, které nazýváme *elektrické pole*.

Vložíme-li testovací bodový náboj Q do elektrického pole v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} , tak na něj bude působit následující elektrická síla

$$\mathbf{F}_C(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) Q. \tag{19.16}$$

Odtud můžeme psát

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_C}{Q} \ . \tag{19.17}$$

Podělením vztahu (19.14) velikostí testovacího bodového náboje dostaneme s pomocí vztahu (19.17) následující výraz pro intenzitu elektrického pole

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi , \qquad (19.18)$$

kde

$$\varphi = \frac{W_p}{Q} \tag{19.19}$$

je potenciál elektrického pole. Plochu, jejíž všechny body mají stejný elektrický potenciál

$$\varphi(\mathbf{r}) = konst. , \qquad (19.20)$$

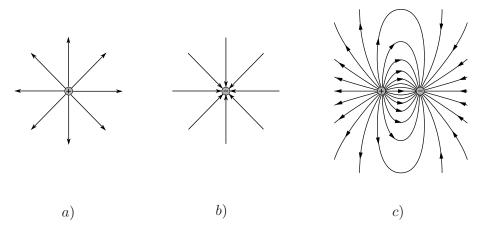
nazýváme ekvipotenciální plochou.

Pro intenzitu elektrického pole pak na základě vztahu (19.10) dostáváme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_C}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{\mathbf{R}}{R^3} dq.$$
 (19.21)

Elektrické pole $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ si můžeme názorně zobrazit pomocí vektorových čar (viz kapitola 2.1.3), které se pro případ tohoto pole nazývají siločáry. Podle přijaté konvence siločáry z kladného náboje vystupují a do záporného náboje vstupují, viz obr. 19.5. Protože platí zákon zachování náboje a velikost náboje se nemění ani za pohybu, můžeme postulovat, že celkový počet siločar vycházejících z elektrického náboje se zachovává a nemění se ani při pohybu náboje. Pro pohybující se náboje nebude ovšem už platit Coulombův zákon a siločáry se budou v prostoru různě zhušťovat a zakřivovat, ale žádná se nemůže ztratit ani zaniknout. Můžeme říci, že siločáry jsou jakési "vlasy" elektrického náboje, které principiálně nemohou vypadávat.

Totální diferenciál (přírůstek) potenciálu můžeme pomocí vztahu (19.18) zapsat jako



Obrázek 19.5: Znázornění elektrického pole pomocí siločar.

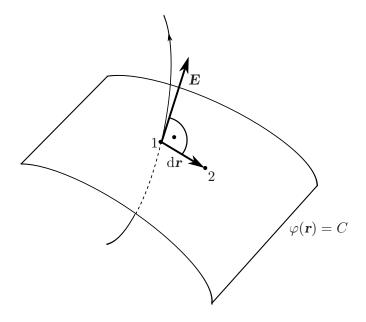
$$d\varphi = (\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \tag{19.22}$$

Uvažujme ekvipotenciální plochu $\varphi(\mathbf{r}) = C$, kde C je konstanta. Na této ploše si označíme bod 1, kterému přísluší polohový vektor \mathbf{r} . Přesuneme se z tohoto bodu o element polohového vektoru d \mathbf{r} do blízkého bodu 2, který se nachází rovněž na ekvipotenciále⁵. Bodu 2 pak bude příslušet polohový vektor $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Při přesunu z bodu 1 do bodu 2 se hodnota potenciálu nezměnila, protože oba body se nachází na ekvipotenciále, tedy d $\varphi = 0$. V tomto případě, s ohledem na vztah (19.22), bude tedy platit

$$0 = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \,. \tag{19.23}$$

Z tohoto vztahu plyne⁶, že $E \perp dr$. Protože intenzita elektrického pole je tečná v daném místě k siločáře, bude i siločára kolmá k elementu dr. Vzhledem k tomu, že se element polohového vektoru dr nachází na ekvipotenciální ploše, tak můžeme konstatovat, že siločáry jsou vždy kolmé na ekvipotenciály, viz obr. 19.6.

Nyní využijeme následující rovnosti



Obrázek 19.6: Siločára kolmá na ekvipotenciálu.

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C' \right) = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \qquad (19.24)$$

kde $C' = C'(\mathbf{r}')$ je obecně libovolnou funkcí čárkovaných souřadnic, avšak pro gradient přes nečárkované souřadnice zůstává konstantou. Dosazením do vztahu (19.21) dostaneme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q -\mathbf{\nabla} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C' \right) dq . \tag{19.25}$$

Protože gradient funkce $(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + C')$ je realizován přes nečárkované souřadnice, můžeme operátor ∇ vytknout před integrál (19.25), který představuje integraci jen přes souřadnice čárkované, takže

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{q} \frac{\mathrm{d}q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \right) , \qquad (19.26)$$

kde C je konstanta určená vztahem

$$C = \int_{q} C'(\mathbf{r}') dq' . \qquad (19.27)$$

⁵Předpokládáme, že vektor d**r** rovněž leží na ekvipotenciále.

⁶Skalární součin dvou nenulových vektorů je nulový, když jsou tyto vektory na sebe kolmé.

Díky předpokladu, že funkce $C'(\mathbf{r}')$ je libovolnou funkcí, představuje konstanta C libovolnou konstantu.

Porovnáním vztahů (19.26) a (19.18) dospějeme ke vztahu pro potenciál elektrického pole pro případ, kdy je jeho zdrojem těleso se spojitě rozloženým nábojem

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{\mathrm{d}q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{\mathrm{d}q}{R} + C.$$
 (19.28)

Ze vztahu (19.28) je vidět, že potenciál elektrického pole je určen až na aditivní konstantu C, kterou určíme z elektrického potenciálu v referenčním bodě.

Předpokládejme, že zdrojem elektrického pole je lokálně distribuovaný elektrický náboj. Chceme-li určit elektrický potenciál ve velmi vzdáleném bodě, tj. $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ neboli $r \gg r'$, potom je možné zjednodušit vztah (19.28) následujícím způsobem

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{\mathrm{d}q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{\mathrm{d}q}{|\mathbf{r}|} + C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \int_q \mathrm{d}q + C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} + C . \quad (19.29)$$

Poslední výraz v rovnostech (19.29) představuje potenciál od zdrojového bodového náboje o velikosti q, který je umístěn do počátku souřadnic. Použitá aproximace ve vztazích (19.29) demonstruje oprávněnost zavedení bodového náboje nahrazující nabité těleso konečných rozměrů. Budeme-li požadovat, aby platilo, že

$$\varphi(\infty) = \lim_{r \to \infty} \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{\mathrm{d}q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \right] = 0 , \qquad (19.30)$$

potom na základě výsledku aproximace (19.29) budou platit pro určení konstanty C následující úpravy

$$\varphi(\infty) = \lim_{r \to \infty} \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{\mathrm{d}q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \right] = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{\mathrm{d}q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \lim_{r \to \infty} C = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} + C = C = 0 . \quad (19.31)$$

Připomeňme, že k tomuto výsledku jsme dospěli za předpokladu, že elektrický náboj není neomezeně distribuován⁷. Kdyby tomu tak nebylo, byli bychom nuceni zvolit nulový potenciál v nějakém konečně vzdáleném bodě.

Pomocí tohoto výsledku je tedy možné napsat elektrický potenciál (19.28) jako

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{\mathrm{d}q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_q \frac{\mathrm{d}q}{R} . \tag{19.32}$$

Pomocí vztahu (19.32) můžeme dostat obecný výraz pro potenciální energii elektrického pole

$$W_p(\mathbf{r}) = Q\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \int_q \frac{\mathrm{d}q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \int_q \frac{\mathrm{d}q}{R} . \tag{19.33}$$

Využitím vztahů $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$, $dq = \sigma(\mathbf{r}')dS'$ a $dq = \tau(\mathbf{r}')dl'$ a výrazů (19.32) a (19.33), je možné přepsat vztahy pro elektrický potenciál a elektrickou potenciální energii do tvarů pro objemově, plošně a lineárně (jednorozměrně) rozložený elektrický náboj, který je zdrojem

⁷V případě prostorově neomezené distribuce elektrického náboje by tento integrál divergoval.

příslušného elektrického pole.

Tedy pro objemově rozložený náboj dostáváme

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV', \qquad (19.34)$$

$$W_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV', \qquad (19.35)$$

pro plošně rozložený náboj analogicky dospějeme ke vztahům

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} dS' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r'})}{R} dS', \qquad (19.36)$$

$$W_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R} dS'$$
(19.37)

a pro jednorozměrně rozložený náboj můžeme psát, že

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} dl' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r'})}{R} dl', \qquad (19.38)$$

$$W_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{R} dl'.$$
 (19.39)

Podobným způsobem, jako v případě spojitě rozloženého náboje, který je zdrojem elektrického pole, můžeme postupovat i pro nespojitě rozložený náboj. Zaměříme se pouze na případ, který je reprezentován vztahem (19.2). Takže pro intenzitu elektrického pole, která odpovídá jednomu zdrojovému bodovému náboji dostáváme

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_C}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{r}^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} \mathbf{R} .$$
 (19.40)

Použijeme-li vztahu (19.24) v rovnosti (19.40) dostaneme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \right) , \qquad (19.41)$$

přičemž integrační konstanta C=0 s ohledem na zvolený nulový potenciál pro $r\to\infty$, viz vztah (19.31). Porovnáním vztahu (19.41) se vztahem (19.18) dostaneme výraz pro elektrický potenciál bodového náboje

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} . \tag{19.42}$$

Pro potenciální energii testovacího bodové náboje v elektrickém poli zdrojového bodového náboje dostáváme

$$W_p(\mathbf{r}) = Q\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q q}{R}.$$
 (19.43)

Bude-li umístěn zdrojový bodový náboj v počátku vztažné soustavy ($\mathbf{r}' = \mathbf{0}$), pak přejdou vztahy (19.40), (19.42) a (19.43) do následujícího tvaru

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_C}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \,, \tag{19.44}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \,, \tag{19.45}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} , \qquad (19.45)$$

$$W_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q q}{r} . \qquad (19.46)$$

gravitační pole	elektrické (elektrostatické) pole	
hmotný bod	bodový náboj	
celková hmotnost	celkový náboj	
m	Q	
m'	q	
-21	$1/(4\pi\varepsilon_0)$	
$oldsymbol{F}_g$	\mathbf{F}_C	
K	E	
hustota	hustota náboje	

Tabulka 19.2: Záměny pro formální použití vztahů a některých formulací z kapitoly 10.

Kapitola 20

Gaussův zákon a Poissonova rovnice

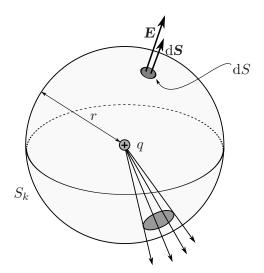
20.1 Gaussův zákon v integrálním a diferenciálním tvaru

V kapitole 2.1.3 jsme si zavedli veličinu tok vektorového pole. Vzhledem k tomu, že elektrické pole je rovněž polem vektorovým, můžeme podle vztahu (2.16) zavést tok intenzity elektrického pole plochou S

$$\Phi_e = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} . \tag{20.1}$$

Určíme si nejdříve tok intenzity elektrického pole kulovou plochou S_k o poloměru r obklopující kladný bodový náboj q, který se nachází v jejím středu, viz obr. 20.1. Přijmeme dohodu, že tok vytékající z objemu uzavřeného plochou budeme považovat za kladný, tok vtékající za záporný.

Pomocí vztahu (20.1) můžeme vyjádřit tok intenzity elektrického pole uvažovanou kulovou

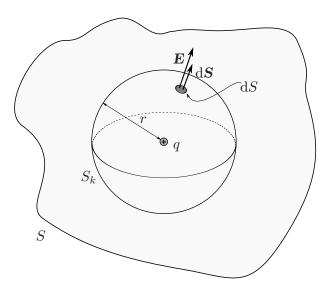


Obrázek 20.1: Tok intenzity elektrického pole kulovou plochou S_k .

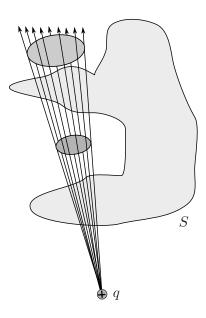
plochou (r = konst.), přičemž k výpočtu použijeme výraz (19.44)

$$\Phi_{e} = \iint_{S_{k}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \iint_{S_{k}} \frac{q}{r^{3}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{q}{r^{3}} \iint_{S_{k}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{q}{r^{2}} \iint_{S_{k}} \mathbf{r}^{0} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{q}{r^{2}} \iint_{S_{k}} dS = \frac{q}{\varepsilon_{0}} . \quad (20.2)$$

Zvolíme-li místo kulové plochy obecnou uzavřenou plochu S kolem bodového náboje q (viz obr. 20.2), musí z ní vycházet stejný počet siločar jako z kulové plochy S_k (každá siločára, která protne kulovou plochu, protne i obklopující plochu obecného tvaru). Tento závěr bude platit i v případě, kdy siločáry nebudou v prostoru rozloženy izotropně a dokonce i budou-li zakřiveny. Stejnou úvahu lze použít i pro případ, kdy nebude plocha konvexní (siločára protne plochu vícenásobně), a nebo když náboj bude ležet vně uzavřené plochy. Nachází-li se náboj vně uzavřené plochy, pak některé siločáry protínají uzavřenou plochu, přičemž počet průchodů uzavřenou plochou je vždy sudé číslo. V polovině případů siločáry vždy o stejném počtu (tedy stejně velký tok) vstupují do uzavřené plochy (protínají uzavřenou plochu směrem dovnitř) a v druhé polovině případů z uzavřené plochy vystupují (protínají uzavřenou plochu směrem ven), viz obr. 20.3. Vzhledem k tomu, že se toky vstupující a vystupující z uzavřené plochy liší znaménkem (ne velikostí), bude jejich výsledný součet nulový. Odtud plyne zřejmý závěr: bude-li ležet elektrický náboj vně uzavřené plochy, pak tok intenzity elektrického pole touto plochou bude nulový. Protože celkový tok intenzity elektrického pole



Obrázek 20.2: Tok intenzity elektrického pole obecnou uzavřenou plochou S.



Obrázek 20.3: Tok intenzity elektrického pole obecnou uzavřenou plochou S, kdy se zdrojový bodový náboj q nachází vně této plochy.

nemůže záviset na poloze náboje q, můžeme si uvnitř uzavřené plochy představit N bodových nábojů a podle principu superpozice bude celkový tok intenzity elektrického pole uzavřenou plochou dán algebraickým součtem (tok je skalární veličina) toků od jednotlivých nábojů. Tedy

$$\iint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha=1}^{N} q_{\alpha} = \frac{q}{\varepsilon_0} ,$$
(20.3)

kde q je celkový náboj nacházející se uvnitř uzavřené plochy S.

Náboj může být uvnitř objemu V vymezeném uzavřenou plochou S rozložen spojitě s objemovou hustotou ρ (případně se může jednat i hustotu plošnou či lineární). Pak bude mít výsledek (20.3) tvar

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V} \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{q}{\varepsilon_0} .$$
(20.4)

Odtud je možné napsat obecně vztah

$$\Phi_e = \iint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} , \qquad (20.5)$$

který je matematickým vyjádřením Gaussova zákona v integrálním tvaru, který nám říká: Celkový tok intenzity elektrického pole libovolnou uzavřenou plochou se rovná celkovému náboji v prostoru, který uzavírá tato plocha, dělenému elektrickou konstantou (permitivitou vakua)¹.

Pomocí Gaussovy věty lze levou stranu rovnice (20.5) vyjádřit jako

$$\iint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{E} dV . \qquad (20.6)$$

Dosazením z této rovnosti za plošný integrál ve vztahu (20.4) dostaneme

$$\iiint_{V} \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V} \rho(\mathbf{r}) dV , \qquad (20.7)$$

odtud

$$\iiint_{V} \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) dV = 0.$$
 (20.8)

Vzhledem k tomu, že provádíme integraci přes obecný objem, je nutné, aby byl roven nule integrand tohoto objemového integrálu, tedy

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \ . \tag{20.9}$$

Tato rovnice vyjadřuje $Gaussův zákon v diferenciálním tvaru^2$.

Gaussův zákon jsme odvozovali pro elektrostatické pole, ale vzhledem ke skutečnosti, že celkový počet siločar se nemění ani v případě, že jsou náboje v pohybu, můžeme tímto předpokládat, že Gaussův zákon platí zcela obecně i pro pohybující se náboje a časově proměnná elektrická pole. V případě statických nábojů z Gaussova zákona plyne zákon Coulombův.

 $^{^{1}}$ Z kapitoly 2.1.3 plyne, že počet siločar procházejících uzavřenou plochou S je tedy číselně roven q/ε_{0} (samozřejmě počet siločar vstupujících dovnitř plochy se odčítá od počtu siločar z této plochy vystupujících).

²Gaussův zákon bychom mohli samozřejmě odvodit způsobem, který byl použit v případě gravitačního pole.

Uvažujme kladný bodový náboj q umístěný ve středu koule o poloměru r, viz obr. 20.1. V námi uvažovaném případě budou vektor intenzity E a vektor vnější normály k uvažované kulové ploše n souhlasně kolineární ve všech místech kulové plochy. Proto z Gaussova zákona v integrálním tvaru (20.5) plyne

$$\iint_{S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_k} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E \iint_{S_k} dS = \frac{q}{\varepsilon_0} .$$
(20.10)

Odtud dostáváme

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2} \,. \tag{20.11}$$

Vzhledem k tomu, že vektor intenzity \boldsymbol{E} je v tomto případě stejně orientován jako vektor vnější normály ke kulové ploše, je možné psát

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2} \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} . \tag{20.12}$$

Vztah pro intenzitu elektrického pole (20.12) nám vlastně vyjadřuje sílu působící na kladný jednotkový náboj, dospěli jsme tímto ke Coulombovu zákonu.

Gaussův zákon lze s výhodou použít pro výpočet intenzity elektrického pole, jen když elektrické pole vykazuje kulovou, válcovou či rovinnou symetrii. V takovém případě volíme příslušnou uzavřenou plochu S tak, aby procházela bodem, kde určujeme intenzitu, a vedeme ji tak, aby byla kolmá na siločáry nebo rovnoběžná s nimi. Pak se snadno počítá tok intenzity uzavřenou plochou (např. viz výše určení Coulombova zákona ze zákona Gaussova).

20.2 Poissonova rovnice

Dosadíme za intenzitu elektrického pole v rovnici (20.9) ze vztahu (19.18)

$$-\nabla \cdot \nabla \varphi = -\nabla^2 \varphi \equiv -\Delta \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \ . \tag{20.13}$$

Odtud dostáváme Poissonovu rovnici

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \ . \tag{20.14}$$

Pro známou distribuci elektrických nábojů $\rho(\mathbf{r})$ je řešením Poissonovy rovnice potenciál daný vztahem (19.34).

Často potřebujeme zjistit, jak vypadá pole v té části prostoru, kde se nevyskytuje náboj 3 , $\rho=0$. V té části prostoru, kde je hustota náboj 4 nulová se Poissonova rovnice redukuje na tzv. Laplaceovu rovnici

$$\nabla^2 \varphi = 0 \ . \tag{20.15}$$

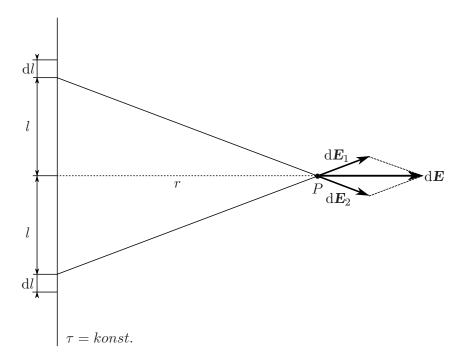
Laplaceova rovnice hraje natolik zásadní roli v elektrostatice, že můžeme s trochou nadsázky prohlásit, že elektrostatika je studium Laplaceovy rovnice. Chceme-li řešit buď Poissonovu nebo Laplaceovu rovnici, pak musíme znát příslušné okrajové podmínky, kterým musí vyhovovat potenciál, jenž je řešením těchto rovnic.

³Samozřejmě, že náboj v jiné části prostoru existovat může a je zdrojem elektrického pole.

20.3 Elektrické pole nabité roviny

Uvažujme kladný elektrický náboj rovnoměrně rozložený podél nekonečné přímky, tj. $\tau=konst$. Budeme dále uvažovat bod P ve vzdálenosti r od uvažované přímky. Vezmeme-li v úvahu příspěvky nábojových elementů $\mathrm{d}q=\tau\mathrm{d}l$ ležících ve stejné vzdálenosti l na obě strany od paty kolmice spuštěné z bodu P na nabitou přímku, pak jejich vektorový součet bude zřejmě kolmý k přímce a bude mířit v našem případě od přímky (uvažujeme kladný náboj), viz obr. 20.4. Tedy ze symetrie ze úlohy vyplývá, že siločáry elektrického pole (tedy i elektrická intenzita) jsou kolmé k uvažované nabité přímce. Intenzitu elektrického pole nekonečné rovnoměrně nabité přímky lze spočítat buď pomocí vztahu (19.21) ($\mathrm{d}q=\tau\mathrm{d}l$) nebo pomocí Gaussova zákona (20.5), kdy obklopíme část uvažované přímky plochou souosého válce.

Nyní uvažujme elektrický náboj, který je rozložen na nekonečné rovině s konstantní plošnou



Obrázek 20.4: Kolmý směr vektoru intenzity elektrického pole k nabité nekonečné přímce.

hustotou σ . Budeme hledat intenzitu v bodě P vzdáleném r od uvažované roviny. Kdybychom rozdělili tuto rovinu na dvojice rovnoběžných infinitezimálně tenkých přímých proužků symetricky umístěných vzhledem k patě kolmice spuštěné z bodu P na rovinu, lze tyto proužky považovat za nabité přímky a sčítat jejich příspěvky. Ze symetrie úlohy je zřejmé, že vektor intenzity (siločáry) bude mířit kolmo od kladně nabité nekonečné roviny.

Zvolíme-li si za Gaussovu plochu S povrch válce s osou kolmou k rovině a s podstavami libovolného tvaru o ploše ΔS tak, aby ležely ve vzdálenosti r na obě strany od kladně nabité roviny (viz obr. 20.5 a)), pak ze vztahu (20.5) dostaneme

$$\iint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2 \iint_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E\Delta S = \frac{\Delta q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}.$$
(20.16)

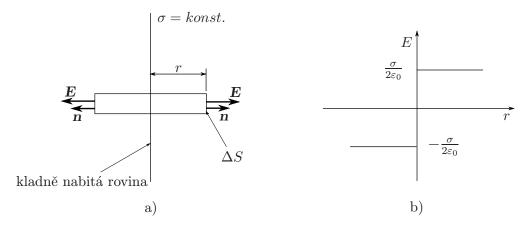
Odtud tedy dostáváme

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = konst. \tag{20.17}$$

Výsledný vztah vyjadřuje skutečnost, že elektrické pole nabité nekonečné roviny je konstantní v poloprostoru vymezeném touto rovinou.

Přijmeme úmluvu, že elektrické pole vpravo od svislé kladně nabité roviny budeme brát jako

kladné, vlevo pak jako záporné. S ohledem na tuto úmluvu je na obrázku 20.5 b) zachycen průběh intenzity elektrického pole na obou stranách nabité roviny.

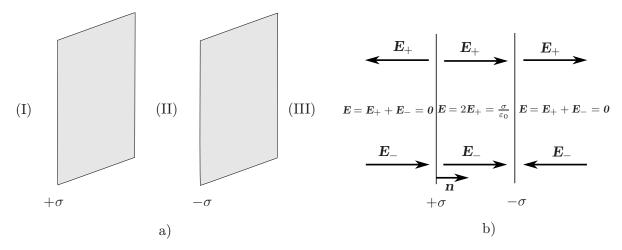


Obrázek 20.5: a) Gaussova plocha ve tvaru válce. b) Průběh intenzity elektrického pole na obou stranách kladně nabité roviny.

20.4 Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin

Uvažujme dvě nekonečné nabité roviny, které jsou rovnoměrně nabité opačnými náboji o stejně velké plošné hustotě, tj. $\pm \sigma$. Budeme vyšetřovat elektrické pole ve třech oblastech vymezených uvažovanými nabitými rovinami. Tyto oblasti označíme (I), (II), viz obr. 20.6 a).

Využijeme-li závěrů z předchozí kapitoly, tak můžeme zakreslit vektory elektrické intenzity



Obrázek 20.6: a) Uvažované oblasti vymezené nabitými rovinami. b) Elektrické pole od jednotlivých rovin spolu s výsledným elektrickým polem.

polí buzených kladně a záporně nabitou rovinou způsobem, který je zachycen na obr. 20.6 b). Na tomto obrázku jsou znázorněny vektory intenzit elektrických polí od jednotlivých rovin, které jsou stejně velké. Provedeme-li na základě principu superpozice jejich součet, tak zjistíme, že jak v oblasti (I), tak v oblasti (III) je výsledné elektrické pole nulové. V oblasti (II) mezi uvažovanými opačně nabitými rovinami směřuje elektrické pole kolmo od kladně nabité roviny k záporně nabité rovině. Výsledná elektrická intenzita je rovna součtu intenzit od obou rovin, které jsou mezi rovinami stejně orientované, tedy

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n} , \qquad (20.18)$$

kde **n** je jednotkový normálový vektor ke kladně nabité ploše zachycený na obr. 20.6 b). Tedy můžeme konstatovat, že výsledné elektrické pole dvou nekonečných opačně a rovnoměrně nabitých rovin je mezi těmito rovinami homogenní a různé od nuly, kdežto vně těchto rovin je výsledné elektrické pole nulové.

20.5 Elektrostatické pole a potenciál nabité koule

Elektrostatické pole a potenciál objemově a povrchově nabité koule můžeme určit integrací (19.34) analogickým postupem uvedeným v kapitole 10.6. Abychom se vyhnuli poměrně pracnému integrování, použijeme pro daný úkol s výhodou Gaussova zákona.

Nechť má uvažovaná koule poloměr R. Bude-li její povrch nabit konstantní plošnou hustotou σ , potom koule ponese náboj $q=S_k\sigma=4\pi R^2\sigma$. V případě objemově nabité koule s konstantní hustotou náboje ρ bude mít uvažovaná koule elektrický náboj $q=V_k\rho=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$. Pro oba případy rozložení náboje použijeme k určení pole vně koule $(r\geq R)$ Gaussův zákon (20.5). Nabitou kouli uzavřeme do kulové plochy o poloměru $r\geq R$, která bude mít shodný střed s nabitou koulí, viz obr. 20.7. Na této kulové ploše bude mít vektor intenzity elektrického pole konstantní velikost (díky konstantním hodnotám hustoty elektrického náboje je elektrické pole izotropní) a bude orientován souhlasně s vektorem vnější normály. Za těchto okolností můžeme vyřešit integrál ve vztahu (20.5) jako

$$\iint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S} E dS = E \iint_{S} dS = E 4\pi r^{2}.$$
 (20.19)

Dosazením do vztahu (20.5) dostaneme

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \ . \tag{20.20}$$

Odtud

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \,. \tag{20.21}$$

Protože vektor intenzity je kolmý ke kulové ploše, bude platit

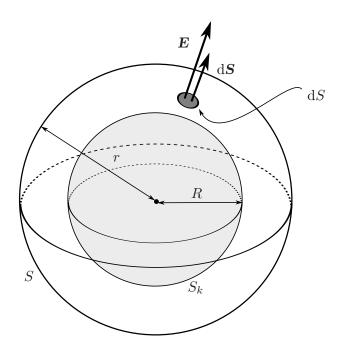
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} r \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}.$$
 (20.22)

Připomeňme, že pro oba uvažované případy nabité koule dostáváme stejné výsledky (výsledné vztahy mají stejný tvar) pro $r \geq R$. Porovnáme-li tento výsledek se vztahem pro intenzitu elektrického pole bodového náboje umístěného v počátku souřadnic (19.44), je zřejmé, že se jedná o identické vztahy. Odtud plyne důležitý závěr, že vně nabité koule můžeme nahradit tuto kouli bodovým nábojem, umístěným v jejím středu, o stejné velikosti náboje, jaký nese tato koule. Potom potenciál vně rovnoměrně nabité koule je dán vztahem (19.45).

Nyní se zaměříme na vyšetření pole uvnitř nabité koule. I v tomto případě použijeme k tomuto účelu Gaussův zákon. Opět za uzavřenou plochu použijeme kulovou plochu o poloměru r, avšak v tomto případě bude platit, že $r \leq R$, viz obr. 20.8. V případě plošně nabité koule je zřejmé, že uzavírající kulová plocha nebude obsahovat žádný náboj⁴. Takže na základě Gaussova zákona (20.5) můžeme psát

$$\iint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 , \qquad (20.23)$$

⁴Tok intenzity elektrického pole kulovou plochou, jehož zdrojem jsou náboje vně této plochy, bude nulový.



Obrázek 20.7: Tok intenzity elektrického pole kulovou plochou S, kdy $r \geq R$.

odtud plyne, že ${\bf E}={\bf 0}$ pro $r\leq R$. Uvážíme-li, že ${\bf E}=-{\bf \nabla}\varphi$, potom v tomto případě je $\varphi=konst.$, přičemž konstanta se rovná potenciálu na povrchu koule. Na obrázku 20.9 je zachycen jak průběh velikosti intenzity elektrického pole, tak jeho potenciálu uvnitř i vně plošně nabité koule.

Pro objemově nabitou kouli bude uzavírající kulová plocha obsahovat celkový elektrický náboj

$$q_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \ . \tag{20.24}$$

Použitím Gaussova zákona dostaneme⁵

$$\iint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_r}{\varepsilon_0} \ . \tag{20.25}$$

Z obrázku 20.8 lze vidět, že při řešení integrálu na levé straně rovnice (20.24) budeme postupovat stejným způsobem jako v předchozím případě, kdy jsme vyšetřovali pole vně nabité koule, tedy

$$\iint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^{2} E = \frac{q_{r}}{\varepsilon_{0}}.$$
 (20.26)

Odtud

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_r}{r^2} \,. \tag{20.27}$$

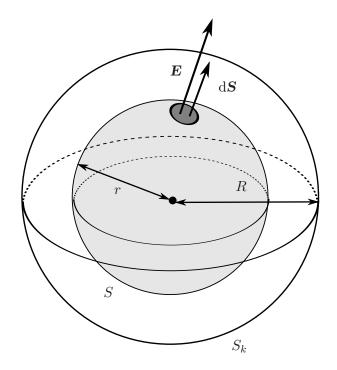
Dosadíme-li za náboj ze vztahu (20.24), tak po jednoduché úpravě dostaneme

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r \ . \tag{20.28}$$

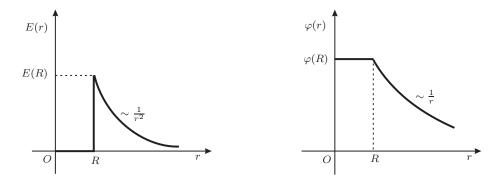
Protože pro objemovou hustotu náboje platí, že

$$\rho = \frac{q}{V_k} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \;,$$

⁵Opět příspěvek nábojů vně uvažované koule je nulový.



Obrázek 20.8: Tok intenzity elektrického pole kulovou plochou S,kdy $r \leq R$.



Obrázek 20.9: Závislost velikosti intenzity a potenciálu elektrického pole na vzdálenosti od středu plošně nabité koule.

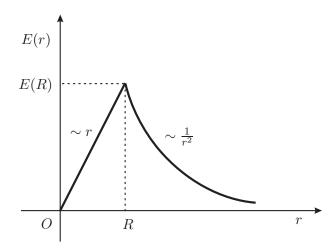
kde q je celkový náboj koule, lze přepsat vztah (20.28) do tvaru

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r \ . \tag{20.29}$$

Z předchozího či tohoto vztahu je patrná zajímá skutečnost, že intenzita uvnitř rovnoměrně objemově nabité koule s rostoucí vzdáleností od středu koule lineárně roste. Protože i v tomto případě je vektor intenzity kolmý ke kulové ploše, tak bude platit

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} \mathbf{r} . \tag{20.30}$$

Na obrázku 20.10 je zachycen průběh velikosti intenzity elektrického pole objemově nabité koule v závislosti na vzdálenosti od jejího středu.



Obrázek 20.10: Závislost velikosti intenzity elektrického pole na vzdálenosti od středu objemově nabité koule.

20.6 Práce elektrostatické síly a elektrická energie nábojů

20.6.1 Práce elektrostatického pole při přemísťování elektrického náboje

Práci, kterou vykoná elektrostatická síla \mathbf{F}_C při přemísťování elektrického náboje z bodu o poloze \mathbf{r}_1 do bodu \mathbf{r}_2 po křivce C spočítáme (viz vztah (8.15)) jako

$$A(C) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = Q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$
 (20.31)

Jak už jsme zmínili v kapitole 19.2, elektrostatické pole je polem konzervativním. Z tohoto důvodu můžeme vyjádřit elektrostatickou sílu pomocí potenciální energie vztahem (19.14). Proto můžeme při výpočtu práce, kterou vykoná elektrostatické pole po libovolné křivce C, použít vztahu (8.41), tj.

$$A(C) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dW_p = W_p(\mathbf{r}_1) - W_p(\mathbf{r}_2) .$$
 (20.32)

Naopak, práce, kterou bychom vykonali proti silám elektrostatického pole (práce vnějších sil $\mathbf{F}^e = -\mathbf{F}_C$) při přemísťování elektrického náboje z bodu o poloze \mathbf{r}_1 do bodu \mathbf{r}_2 po libovolné křivce C je dána vztahem

$$A'(C) = -A(C) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dW_p = W_p(\mathbf{r}_2) - W_p(\mathbf{r}_1) . \tag{20.33}$$

Potenciální energii můžeme určit ze znalosti elektrostatického pole pomocí vztahu (8.46), tedy

$$W_p(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} + C , \qquad (20.34)$$

kde C je integrační konstanta, kterou určujeme s ohledem na potenciální energii v referenčním bodě, ve kterém volíme potenciální energii nejčastěji nulovou. V případě, že polohový vektor \mathbf{r}_0 ukazuje na referenční bod, pro který je zvolena hodnota potenciální energie $W_p(\mathbf{r}_0) = W_{p0}$, je možné stanovit potenciální energii jako

$$W_p(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_C(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \qquad (20.35)$$

Jsou-li náboje umístěny v konečné oblasti prostoru, můžeme pak zvolit potenciální energii nulovou v nekonečnu

$$W_p(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_C(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \qquad (20.36)$$

S ohledem na vztahy (19.17) a (19.20) je možné snadno přepsat vztahy (20.34) a (20.36), tedy

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + C , \qquad (20.37)$$

kde C je integrační konstanta, kterou určujeme s ohledem na nulový potenciál v referenčním bodě a

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\int_{-\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \qquad (20.38)$$

Rozdíl potenciálů ve dvou bodech určených polohovými vektory \mathbf{r}_2 a \mathbf{r}_1 , tj. $\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1)$, je číselně roven práci, kterou vykonáme při přemísťování jednotkového náboje proti silám elektrostatického pole⁶ z bodu \mathbf{r}_1 do bodu \mathbf{r}_2 po libovolné křivce, tj.

$$\varphi_{21} = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\varphi = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\infty}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$
 (20.39)

Naopak, rozdíl potenciálů $\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2)$ odpovídá číselně práci, kterou vykoná uvažované silové pole při přemísťování jednotkového náboje z bodu \mathbf{r}_1 do bodu \mathbf{r}_2 po libovolné křivce (srovnej se vztahem (20.32)). Tento rozdíl nazýváme (elektrické) napětí a značíme ho U

$$U = \varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \qquad (20.40)$$

Všechny tři veličiny, tj. potenciál, potenciálový rozdíl a napětí, mají zřejmě stejný fyzikální rozměr a měří se v týchž jednotkách J/C (joule na coulomb), které nazýváme volt a značíme V.

Vzhledem k tomu, že elektrostatické pole je polem konzervativním, tak musí pro elektrostatické síly platit vztahy (8.42) a (8.44), tedy

$$A = \oint_C \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = Q \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 , \qquad (20.41)$$

$$\nabla \times \mathbf{F}_C = Q \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} , \qquad (20.42)$$

neboli

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 , \qquad (20.43)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} . \tag{20.44}$$

Rovnice (20.5) a (20.43) představují Maxwellovy rovnice elektrostatického pole ve vakuu v integrálním tvaru a rovnice (20.9) a (20.44) Maxwellovy rovnice elektrostatického pole ve vakuu v diferenciálním tvaru.

 $^{^6}$ Jedná se o práci stejné velikosti, ale opačného znaménka vzhledem k práci, kterou by mezi stejnými body vykonalo elektrostatické pole.

20.7 Elektrická energie bodových nábojů

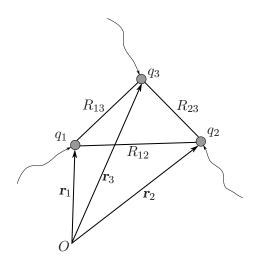
S ohledem na vztah (19.19) můžeme vyjádřit potenciální energii elektrického náboje pomocí potenciálu v daném místě

$$W_p(\mathbf{r}) = Q\varphi(\mathbf{r}) . (20.45)$$

Vzniká otázka, jakou práci vykonáme (vnější síly), když shromáždíme z nekonečné vzdálenosti na určená místa N bodových nábojů? Tato práce bude odpovídat potenciální energii těchto nábojů. Jestliže přesuneme na dané místo o polohovém vektoru \mathbf{r}_1 první náboj (q_1) , tak nevykonáme žádnou práci, jelikož ještě neexistuje elektrostatické pole. Nyní přesuneme na místo \mathbf{r}_2 druhý náboj q_2 . V tomto případě již vykonáme práci proti silám elektrostatického pole, jehož zdrojem je náboj q_1 , viz obr. 20.11. Tato práce bude rovna potenciální energii určené vztahem (20.45), tedy

$$W_{p2} = q_2 \varphi(\mathbf{r}_2) = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{R_{12}} \right) . \tag{20.46}$$

Dále na místo \mathbf{r}_3 přesuneme náboj q_3 , čímž vykonáme práci proti silám elektrostatického



Obrázek 20.11: Situační obrázek k nalezení potenciální energie bodových nábojů.

pole, jehož zdrojem jsou náboje q_1 a q_2

$$\varphi(\mathbf{r}_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_{13}} + \frac{q_2}{R_{23}} \right) ,$$

tedy

$$W_{p3} = q_3 \varphi(\mathbf{r}_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{R_{13}} + \frac{q_2}{R_{23}} \right) . \tag{20.47}$$

Podobně v případě přenesení náboje q_4 do místa o polohovém vektoru \mathbf{r}_4 dostaneme

$$W_{p4} = q_4 \varphi(\mathbf{r}_4) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{R_{14}} + \frac{q_2}{R_{24}} + \frac{q_3}{R_{34}} \right) . \tag{20.48}$$

Celková práce k přenesení všech čtyř elektrických nábojů (N = 4), která současně je rovna potenciální energii souboru těchto nábojů, je dána součtem prací (20.46), (20.47) a (20.48)

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{R_{12}} + \frac{q_1 q_3}{R_{13}} + \frac{q_1 q_4}{R_{14}} + \frac{q_2 q_3}{R_{23}} + \frac{q_2 q_4}{R_{24}} + \frac{q_3 q_4}{R_{34}} \right) . \tag{20.49}$$

Odtud lze vypozorovat pravidlo pro výpočet potenciální energie obecného počtu nábojů

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\j>i}}^{N} \frac{q_i q_j}{R_{ij}} . \tag{20.50}$$

Relace j > i ve výše uvedené sumě nám zajistí, aby se stejné páry nesčítaly dvakrát. Tento výraz je možné přepsat do tvaru, ve kterém se stejné páry sice sčítají dvakrát, ale ve výsledku je součet podělen 2, tedy

$$W_p = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\j \neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{R_{ij}} . \tag{20.51}$$

Tento výraz přepíšeme jako

$$W_{p} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_{i} \left(\sum_{\substack{j=1\\j \neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{q_{j}}{R_{ij}} \right) . \tag{20.52}$$

Výraz v závorce tohoto vztahu vlastně představuje potenciál v bodě o polohovém vektoru \mathbf{r}_i , tj. v bodě, ve kterém se nachází náboj q_i , tedy

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \varphi(\mathbf{r}_i) . \qquad (20.53)$$

20.8 Elektrická energie spojitě rozložených nábojů a elektrostatického pole

Pro spojitě distribuované náboje lokalizované v objemu V můžeme přepsat vztah (20.53) jako⁷

$$W_p = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dV. \qquad (20.54)$$

Pomocí vztahů (20.53) a (20.54) připisujeme elektrickým nábojům energii. Výraz $\rho\varphi$ je nenulový pouze v těch místech, kde se nalézají náboje, tedy můžeme říci že vztahy (20.53) a (20.54) vyjadřují energii soustavy elektrických nábojů.

Rovnici (20.54) je však možno dát i jinou, neobyčejně důležitou fyzikální interpretaci. Pomocí Gaussova zákona v diferenciálním tvaru (20.9) si můžeme vyjádřit objemovou hustotu náboje

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} \,, \tag{20.55}$$

kterou dosadíme do vztahu (20.54)

$$W_p = \frac{1}{2} \iiint_V (\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \varphi(\mathbf{r}) dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \varphi(\mathbf{r}) dV. \qquad (20.56)$$

Pro další úpravu tohoto vztahu použijeme následující identitu

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F}. \qquad (20.57)$$

 $^{^{7}}$ Podobným způsobem je možné přepsat vztah (20.53) i pro náboje rozložené jen na ploše či křivce.

Jejím použitím dostaneme

$$W_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V \mathbf{\nabla} \cdot (\varphi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})) dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V (\mathbf{\nabla} \varphi(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV. \qquad (20.58)$$

Pomocí Gaussovy věty převedeme první integrál na pravé straně této rovnice na integrál plošný a ve druhém integrálu uplatníme rovnost $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$, čímž dostaneme

$$W_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iint_{S(V)} (\varphi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S} + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V E^2(\mathbf{r}) dV. \qquad (20.59)$$

Ze způsobu, jakým byl odvozen vztah (20.54) je zřejmé, že integrace je míněna přes objem, ve kterém jsou distribuovány elektrické náboje. V případě, že budeme integrovat přes objem větší než nejmenší objem obsahující všechny uvažované náboje, se zřejmě výsledek integrace nezmění, protože místa (body), kde $\rho=0$ nepřispívají k uvažované integraci. Odtud vyplývá, že výsledek integrace není ovlivněn velikostí objemu, pakliže tento objem obsahuje uvažované náboje.

Využijeme tohoto závěru ve vztahu (20.59). Objem přes, který budeme integrovat ztotožníme s objemem koule, přičemž budeme předpokládat, že všechny uvažované náboje se nachází uvnitř této koule. Bez újmy na obecnosti můžeme do středu této koule umístit počátek souřadnic. Druhý (objemový) integrál může s rostoucím poloměrem uvažované koule jen narůstat, jelikož integrand je kladný $(E^2 > 0)$. Aby celková potenciální energie uvažované distribuce nábojů zůstala stejná, musí naopak plošný integrál klesat. Plošný integrál představuje tok vektoru $\varphi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})$ plochou uvažované koule. Bude-li poloměr koule, jejíž plochou počítáme tok, velmi velký, potom můžeme objem lokalizovaných nábojů považovat za bodový náboj ležící ve středu souřadnicové soustavy, viz obr. 20.12. Z tohoto důvodu bude integrand plošného integrálu přibližně konstantní na povrchu této koule. Ve velkých vzdálenostech od uvažované distribuce elektrických nábojů můžeme tedy konstatovat, že velikost intenzity elektrického pole klesá s kvadrátem poloměru dané koule ($\sim 1/r^2$) a potenciál je nepřímo úměrný tomuto poloměru ($\sim 1/r$). Tedy odtud plyne, že integrand klesá s třetí mocninou poloměru dané koule ($\sim 1/r^3$), kdežto plocha, přes kterou integrujeme roste jen s kvadrátem poloměru, takže můžeme zhruba říct, že plošný integrál je úměrný převrácené hodnotě poloměru uvažované koule ($\sim 1/r$), tedy klesá. Jelikož výsledek integrace nemá být ovlivněn velikostí zvoleného objemu, přes který budeme integrovat, zvolíme si neomezený poloměr uvažované koule $r \to \infty$, tedy budeme provádět integraci přes celý prostor. Na základě výše uvedeného bude v tomto případě plošný integrál roven nule a my můžeme pro tento případ přepsat vztah (20.59) jako

$$W_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\text{Celý}} E^2(\mathbf{r}) dV . \qquad (20.60)$$

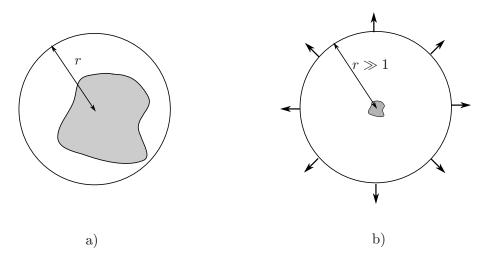
Pozoruhodné je, že integrand obsahuje pouze kvadrát intenzity elektrického pole. Víme, že intenzita \boldsymbol{E} může být nenulová i v místech, kde nejsou elektrické náboje. To nám umožňuje formulovat následující závěr: Nositelem elektrostatické energie nejsou náboje, nýbrž prostor v okolí těchto nábojů, tj. elektrostatické pole.

Každý objemový element tohoto pole obsahuje energii

$$\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\mathrm{d}V. \tag{20.61}$$

Odtud můžeme zavést objemovou hustotu elektrické energie (energie objemové jednotky)

$$w_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \ . \tag{20.62}$$



Obrázek 20.12: a) Kulová plocha o poloměru, který je blízký vlastním geometrickým rozměrům lokalizované objemové distribuce elektrických nábojů. b) Poloměr uvažované kulové plochy výrazně převyšuje geometrické rozměry lokalizované objemové distribuce elektrických nábojů.

Příklad 20.8.1

Nalezněte elektrickou energii rovnoměrně rozloženého náboje o celkové velikosti q na povrchu koule o poloměru R.

Řešení:

Vztah (20.53) je možné přepsat pro námi uvažovaný případ spojitě plošně rozloženého náboje

$$W_p = \frac{1}{2} \iint_S \sigma(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dS .$$

Potenciál na povrchu námi uvažované koule je konstantní a je dán vztahem

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \ .$$

Takže pro elektrickou energii rovnoměrně rozloženého náboje na povrchu koule ($\sigma=q/S_k=q/(4\pi R^2)=konst.$) dostáváme

$$W_p = \frac{1}{2} \iint_{S_k} \sigma(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \sigma \iint_{S_k} dS = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{R}.$$

Příklad 20.8.2

Nalezněte elektrickou energii elektrostatického pole, jehož zdrojem je náboj q rovnoměrně rozložený po povrchu koule o poloměru R.

Řešení:

Ze závěrů kapitoly 20.5 víme, že elektrické pole uvnitř povrchově nabité koule je nulové, E = 0 pro r < R. Také odtud víme, že elektrická intenzita uvažované koule je

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0 \; ,$$

odtud

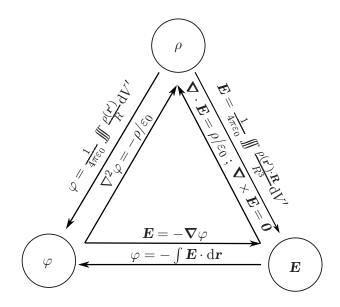
$$E^2 = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{q^2}{r^4} \ .$$

Dosazením do vztahu (20.60) dostaneme

$$W_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\text{Celý}} E^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \int_R^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{q^2}{r^4} r^2 dr d\vartheta d\varphi = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} 8\pi^2 \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{R}.$$

20.9 Schematické shrnutí výsledných vztahů

Výsledky, ke kterým jsme dospěli v předcházejících kapitolách můžeme schematicky shrnout pomocí obrázku 20.13. Tento obrázek nám znázorňuje, jakými vztahy jsou navzájem spojeny vždy dvě ze tří veličin důležitých pro popis elektrostatického pole ve vakuu: ρ , φ a E.



Obrázek 20.13: Schematické shrnutí získaných poznatků.

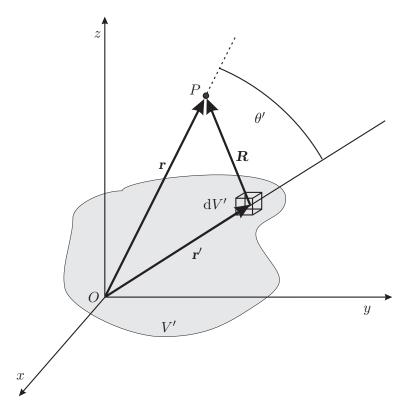
Kapitola 21

Multipólový rozvoj a pole elektrického dipólu

21.1 Multipólový rozvoj

V kapitole 19.3 jsme si ukázali, že nacházíme-li se velmi daleko od lokalizované distribuce elektrického náboje, tak se nám tato distribuce jeví jako jeden bodový elektrický náboj, takže elektrický potenciál je možné počítat pomocí vztahu pro potenciál bodového náboje (19.29). V případě, že celkový náboj uvažované distribuce elektrického náboje je nulový, nabízí se závěr, že i potenciál ve vzdáleném bodě bude přibližně roven nule. Abychom byli schopni odhadnout jak velké chyby se dopouštíme při této aproximaci, provedeme v této kapitole hlubší rozbor možnosti náhrady lokalizované distribuce elektrického náboje jedním či více bodovými náboji.

Uvažujme objem V', ve kterém je nějakým způsobem rozmístěn elektrický náboj. Nechť



Obrázek 21.1: Situační obrázek k multipólovému rozvoji.

se bod P, nachází ve vzdálenosti od počátku mnohem větší než jsou rozměry uvažovaného

objemu V', viz obr. 21.1. Elektrický potenciál v tomto bodě je dán vztahem (19.34), tj.

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' . \qquad (21.1)$$

K určení převrácené velikosti vektoru \mathbf{R} ve vztahu (21.1) použijeme kosinové věty (viz obr. 21.1)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')}} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{2r'}{r}\cos\theta' \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} (1 + \epsilon)^{-1/2} , \quad (21.2)$$

kde

$$\epsilon = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{2r'}{r}\cos\theta' \ . \tag{21.3}$$

Díky předpokladu, že bod P se nachází ve vzdálenosti převyšující vlastní rozměry uvažovaného objemu, tj. $r'/r \ll 1$, je možné považovat za malý i parametr ϵ daný vztahem (21.3). Provedeme binomický rozvoj funkce (21.2)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} (1+\epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 \dots \right) . \tag{21.4}$$

Za parametr ϵ dosadíme v tomto vztahu ze vztahu (21.3) a po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \theta' + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 (5 \cos^3 \theta' - 3 \cos \theta') \dots \right] = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta'), \quad (21.5)$$

kde P_n jsou Legendrovy polynomy n-tého stupně.

Dosadíme-li tuto řadu do integrálu pro potenciál (21.1), dostaneme tzv. multipólový rozvoj elektrostatického pole

$$\varphi_{P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \iiint_{V'} r'^{n} P_{n}(\cos\theta') \rho(\mathbf{r}') dV' =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \left[\frac{1}{r} \iiint_{V'} \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{r^{2}} \iiint_{V'} r' \cos(\theta') \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{r^{3}} \iiint_{V'} r'^{2} \left(\frac{3}{2} \cos^{2}\theta' - \frac{1}{2} \right) \rho(\mathbf{r}') dV' + \dots \right] =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \left(\frac{N_{0}}{r} + \frac{N_{1}}{r^{2}} + \frac{N_{2}}{r^{3}} \dots \right) = \varphi_{P}^{(0)} + \varphi_{P}^{(1)} + \varphi_{P}^{(2)} + \dots$$
(21.6)

Integrály N_n nazýváme elektrickými multipólovými momenty. Tyto momenty představují elektrické charakteristiky uvažovaného objemu, které závisí pouze na rozložení náboje v tomto objemu a na jeho symetrii.

První z multipólových momentů N_0 odpovídá elektrickému monopólu a představuje celkový náboj q uvažovaného objemu. Tomuto momentu odpovídá elektrický potenciál

$$\varphi_P^{(0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \,. \tag{21.7}$$

Tento potenciál odpovídá potenciálu bodového náboje q, který je umístěn v počátku uvažovaného souřadnicového systému. Tímto potenciálem aproximuje potenciál elektrického náboje rozloženého daným způsobem v objemu v místě, které se nachází v dostatečné vzdálenosti od tohoto objemu. Přesnost této aproximace je možné odhadnout pomocí dalších členů multipólového rozvoje. V případě, že vyšetřujeme potenciál pouze bodového náboje umístěného v počátku souřadnicové soustavy, budou zbývající členy multipólového rozvoje nulové.

V případě, že daný objem bude jako celek nenabitý, potom rozhodující roli bude hrát další člen N_1 (tedy není-li také nulový), jenž představuje moment elektrického dipólu¹. Potenciál elektrického dipólu je tedy dán vztahem

$$\varphi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \varphi_P^{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \iiint_{V'} r' \cos(\theta') \rho(\mathbf{r}') dV'.$$
 (21.8)

Z obrázku 21.1 můžeme psát

$$r'\cos\theta' = \mathbf{r'}\cdot\mathbf{r}^0\,\,\,\,(21.9)$$

kde \mathbf{r}^0 je jednotkovým vektorem polohového vektoru \mathbf{r} , který určuje polohu bodu P, v němž vyšetřujeme elektrický potenciál. Pomocí tohoto vztahu můžeme přepsat výraz (21.8)

$$\varphi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{r}^0 \cdot \iiint_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'. \qquad (21.10)$$

Pro dané rozložení náboje si zavedeme novou vektorovou veličinu \boldsymbol{p} , kterou nazýváme elektrický dipólový moment

$$\mathbf{p} = \iiint_{V'} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV' . \tag{21.11}$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že dipólový moment je určen geometrií (tvarem, velikostí a hustotou) distribuce elektrického náboje.

Pro případ nespojitého rozložení náboje je elektrický dipólový moment dán jako

$$\mathbf{p} = \sum_{n} \mathbf{r}_{n}' q_{n} . \tag{21.12}$$

Pomocí elektrického dipólového momentu přepíšeme vztah (21.10)

$$\varphi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}^0}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} . \tag{21.13}$$

Nyní vyšetříme, jak se změní elektrický dipólový moment se změnou počátku souřadnic. Uvažujme přechod od počátku souřadnic O_1 k novému počátku souřadnic O_2 . Označme vektor spojující oba počátky jako \mathbf{d} , pak transformaci souřadnic můžeme zapsat jako $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_2 + \mathbf{d}$ a pro elektrický dipólový moment spojený s novým počátkem (v nových souřadnicích²) dostáváme

$$\mathbf{p}_{2} = \sum_{n} \mathbf{r}'_{n2} q_{n} = \sum_{n} (\mathbf{r}'_{n1} - \mathbf{d}) q_{n} = \sum_{n} \mathbf{r}'_{n1} q_{n} - \mathbf{d} \sum_{n} q_{n} = \mathbf{p}_{1} - \mathbf{d} q.$$
 (21.14)

Z tohoto výsledku je zřejmé, že elektrický dipólový moment je invariantní vůči volbě počátku souřadnicové soustavy jen tehdy, je-li celkový náboj q v objemu nulový. Takový objem pak

¹Pod pojmem elektrický dipól chápeme soustavu dvou nábojů stejné velikosti, ale opačného znaménka, kterým přísluší rozdílné polohové vektory, tj. jsou od sebe vzdáleny.

²Nový souřadnicový systém má osy rovnoběžné s osami původního souřadnicového systému.

nazýváme polarizovaný.

Může nastat situace, že jak celkový náboj v objemu, tak dipólový moment budou nulové. V takovémto případě se převládajícím členem stává další člen v pořadí obsahující elektrický multipólový moment N_2 , který nazýváme $kvadrupólovým\ momentem$. Další v pořadí by byl $oktupólový\ moment\ N_3$, atd.

Z rozvoje (21.6) je zřejmé, že příspěvky od vyšších členů (vyššího řádu) klesají se vzdáleností od uvažovaného objemu rychleji, než příspěvky od členů nižších, takže se zpravidla, s ohledem na požadovanou přesnost, spokojíme s rozvojem malého počtu prvních nenulových členů. Čím dále budeme od uvažovaného objemu, tím přesnější bude naše aproximace.

Ze vztahu (21.13) určíme intenzitu elektrického pole dipólu

$$\mathbf{E}_{\text{dip}} = -\nabla \varphi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\right) = \\
-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\nabla \left(\frac{1}{r^3}\right) \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \frac{\nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] . \quad (21.15)$$

Bude-li uvažovaný objem, ve kterém jsou distribuovány elektrické náboje, elektricky neutrální, a jeho vlastní rozměry budou výrazně menší než je vzdálenost, v níž vyšetřujeme elektrické pole, potom je možné zanedbat vliv vyšších členů v rozvoji $(n \geq 2)$ a ztotožnit intenzitu elektrického pole s intenzitou elektrického pole dipólu, tj. $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_{\text{dip}}$.

21.2 Elektrické pole dipólu

Zaměříme se na případ elektrického dipólu, tj. případ, kdy soustavu zdrojových nábojů tvoří pouze dva stejně velké, ale opačné, bodové náboje, které se nachází relativně blízko sebe, viz obr. 21.2. Jedná se tedy o elektricky neutrální soustavu. Abychom mohli všechny členy multipólového rozvoje položit rovny nule, vyjma členu dipólového, aniž bychom se tímto dopustili nepřesnosti, bylo by nutné zajistit fyzikálně nereálné limitní předpoklady, že $q \to 0$, $l \to 0$, kde l je vzdálenost mezi uvažovanými bodovými náboji dipólu. My se spokojíme s předpokladem, že uvažované bodové náboje jsou velmi blízko sebe, takže pro vzdálenost vyšetřovaného místa elektrického pole platí $r \gg l$. Tímto předpokladem si budeme moci dovolit zanedbat vliv vyšších členů multipólového rozvoje.

Ze vztahu (21.12), s ohledem na obrázek 21.2, si vyjádříme elektrický dipólový moment uvažovaného dipólu

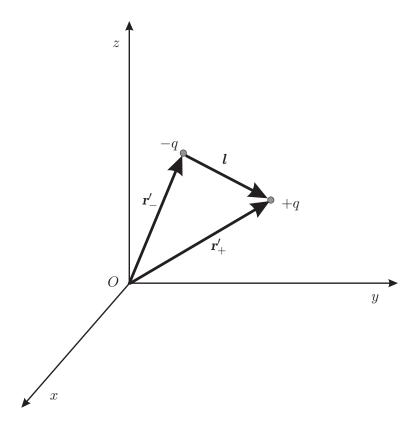
$$\mathbf{p} = \mathbf{r}'_1 q_1 + \mathbf{r}'_2 q_2 = q \mathbf{r}_+ - q \mathbf{r}_- = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = q \mathbf{l}$$
 (21.16)

Bez újmy na obecnosti si uvažovaný dipól umístíme do počátku souřadnic ve směru osy z tak, jak je naznačeno na obrázku 21.3, přičemž předpokládáme, že $r \gg l$. Dosadíme za elektrický dipólový moment ze vztahu (21.16) do vztahu (21.13)

$$\varphi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos \vartheta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos \vartheta}{r^2} . \tag{21.17}$$

Vyjádříme si nabla operátor ve sférických souřadnicích, přičemž vyjdeme z obecného vztahu pro nabla operátor v ortogonálních křivočarých souřadnicích (4.33), kam dosadíme $u_1 = r$, $u_2 = \vartheta$, $u_3 = \phi$ a za Laméovy koeficienty ze vztahů (4.55), tedy

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_{\phi} . \tag{21.18}$$



Obrázek 21.2: Elektrický dipól tvořený dvěma bodovými náboji.

Výraz pro intenzitu elektrického pole uvažovaného dipólu v bodě P nalezneme pomocí vztahu $\mathbf{E}_{\text{dip}} = -\nabla \varphi_{\text{dip}}$, kde za φ_{dip} dosadíme ze vztahu (21.17). Jednotlivé složky vektoru intenzity elektrického pole \mathbf{E}_{dip} ve sférických souřadnicích dostaneme použitím nabla operátoru (21.18)

$$E_r = -\frac{\partial \varphi_{\text{dip}}}{\partial r} = \frac{2p\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \,, \tag{21.19}$$

$$E_{\vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{dip}}}{\partial \vartheta} = \frac{p \sin \vartheta}{4\pi \varepsilon_0 r^3} , \qquad (21.20)$$

$$E_{\phi} = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi_{\text{dip}}}{\partial \phi} = 0.$$
 (21.21)

Složka E_{ϕ} je nulová, což je důsledek osové symetrie elektrického pole uvažovaného dipólu. Odtud dostaneme

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(r,\vartheta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} (2\cos\vartheta \,\mathbf{e}_r + \sin\vartheta \,\mathbf{e}_\vartheta) \ . \tag{21.22}$$

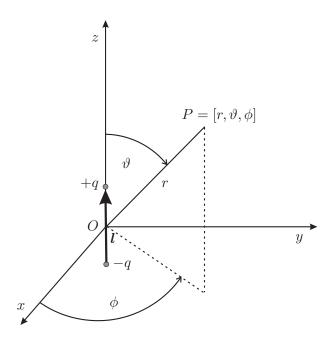
Na obrázku 21.4 je pomocí siločar znázorněno pole elektrického dipólu, které je popsáno vztahem (21.22).

Za povšimnutí stojí skutečnost, že velikost intenzity elektrického dipólu (21.15), příp. (21.22), klesá s třetí mocninou vzdálenosti od zdroje (velikost intenzity elektrického monopólu klesá s druhou mocninou) a jeho elektrický potenciál (21.13) s druhou mocninou (elektrický potenciál monopólu klesá s první mocninou vzdálenosti) od zdroje.

Umístíme-li dipól do vnějšího homogenního elektrického pole, bude výsledná síla působící na dipól nulová, avšak na tento dipól bude působit moment silové dvojice (16.15) (viz obr. 21.5 a))

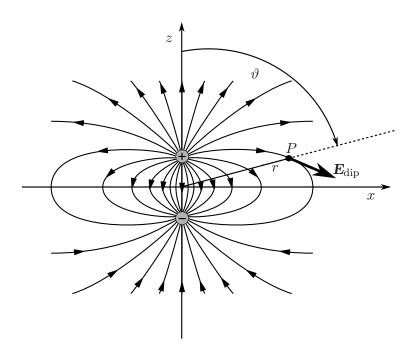
$$\mathbf{M}^{D} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_{C} = \mathbf{l} \times q\mathbf{E} = q\mathbf{l} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$
. (21.23)

Působení silové dvojice vede k výslednému natočení dipólu ve směru vnějšího elektrického pole, viz obr. 21.5 b).

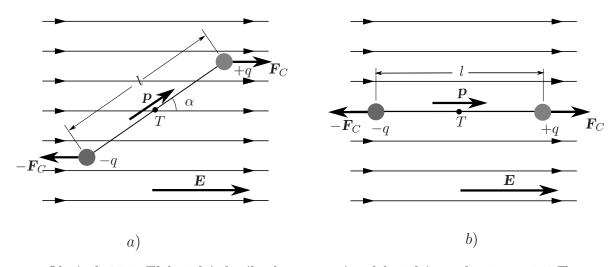


Obrázek 21.3: Elektrický dipól umístěný v počátku souřadnic.

 ${\bf V}$ případě, že vnější elektrické pole bude nehomogenní, tak na dipól bude působit i nenulová výsledná síla.



Obrázek 21.4: Elektrické pole elektrického dipólu.



Obrázek 21.5: Elektrický dipól v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}.$

Kapitola 22

Elektrostatické pole v materiálovém prostředí

V této kapitole se budeme věnovat elektrickému poli v materiálovém prostředí. Různá materiálová prostředí reagují rozdílným způsobem na vnější elektrické pole. Na základě experimentálních zkušeností můžeme rozdělit materiálová prostředí (materiály) do dvou skupin. Jednu skupinu tvoří tzv. vodiče a druhou skupinu tzv. dielektrika (izolanty, nevodiče). Vodiče jsou materiály (např. kovy), které obsahují velké množství elektrických nábojů, jež se mohou volně pohybovat daným materiálem. Elektrické náboje u vodičů se mohou ve vodiči pohybovat na makroskopických škálách, tj. v celém objemu vodiče, avšak nemohou jej opustit¹.

Naopak dielektrika jsou materiály, které obsahují rovněž velké množství elektrických nábojů, avšak tyto náboje jsou vázány k daným atomům či molekulám, takže se mohou pohybovat jen na mikroskopických škálách.

22.1 Dielektrika a jejich polarizace

Při vložení dielektrika do vnějšího elektrického pole můžeme podle jeho způsobu odezvy na přítomnost tohoto pole rozdělit dielektrika na polární a nepolární.

Polární dielektrika

Molekuly polárních dielektrik (např. voda, oxid uhelnatý, amoniak) mají stálé (permanentní) dipólové momenty, $\mathbf{p}_{\alpha} \neq \mathbf{0}$ (indexem α rozlišujeme jednotlivé molekuly dielektrika).

Nepolární dielektrika

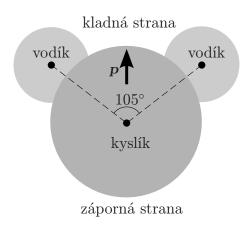
Jsou tvořena molekulami, které se vyznačují středovou souměrností (např. hélium). V případě, že na ně nepůsobí vnější elektrické pole, mají nulový dipólový moment, $\mathbf{p}_{\alpha} = \mathbf{0}$.

Vytvoření a uspořádání dipólů v dielektriku do směru vnějšího pole nazýváme *polarizací*. Rozlišujeme dva základní mechanizmy polarizace:

1. Indukovaná polarizace

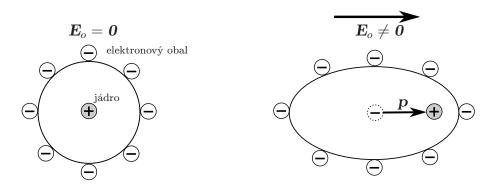
(a) Elektronová polarizace - projevuje se ve všech dielektrikách. Její podstata spočívá v deformaci elektronových obalů atomů v elektrickém poli. Tato deformace se projevuje posunutím "těžiště" záporného náboje (elektronů) vůči "těžišti" kladného

¹V případě, že by elektrické náboje mohly opustit vodič, mluvíme o tzv. emisi.



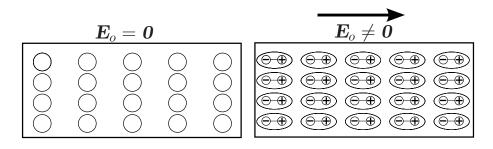
Obrázek 22.1: Polární molekula vody.

náboje (jader) v atomu. Posunutí těžišť nábojů je velmi malé, řádově 10^{-15} m. Tím vznikne dipól, jehož dipólový moment má směr souhlasný s vnějším elektrickým polem. Říkáme, že takový dipólový moment je indukovaný elektrickým polem. Elektronová polarizace se projevuje až do velmi vysokých kmitočtů.



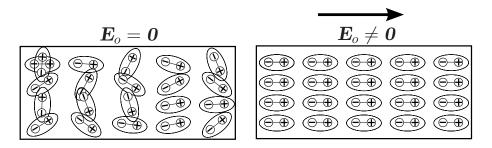
Obrázek 22.2: Elektronová polarizace, intenzita vnějšího elektrického pole E_o .

(b) *Iontová polarizace* je způsobena změnou relativní polohy iontů v molekulách dielektrika vlivem vnějšího elektrického pole. Iontová polarizace se rovněž projevuje až do vysokých kmitočtů.



Obrázek 22.3: Indukovaná polarizace.

2. Orientační polarizace se projevuje u polárních dielektrik, kde se elektrické dipóly natáčejí do směru vnějšího elektrického pole. Protože molekuly konají nepřetržitě nahodilý tepelný pohyb, nejsou uspořádány úplně, tj. orientace všech elektrických dipólů (molekul) není shodná s vnějším elektrickým polem. Na základě výše uvedeného můžeme říci, že vlivem tepelného pohybu dochází jen k částečné polarizaci dielektrika. Samozřejmě částečnou polarizaci chápeme ve smyslu střední časové hodnoty. Přitom je orientace elektrických dipólů tím úplnější, čím větší je intenzita vnějšího elektrického pole a čím nižší je teplota dielektrika (s klesající teplotou klesá tepelný pohyb molekul, a tedy i dipólů). Ve střídavých elektrických polích se při vyšších kmitočtech projevuje setrvačnost polárních molekul, které již nestačí sledovat změny elektrického pole.



Obrázek 22.4: Orientační polarizace.

22.2 Elektrické pole polarizovaného dielektrika

Ve vnějším elektrickém poli představují atomy a molekuly dielektrika elementární dipóly s dipólovými momenty p_{α} . Z makroskopického hlediska se polarizace dielektrika projevuje tím, že se na povrchu dielektrického tělesa objeví vázaný náboj. Tento povrchový vázaný náboj vzniká v důsledku toho, že na povrchu dielektrika nejsou koncové náboje elementárních dipólů vykompenzovány. Makroskopický objem dielektrika vykazuje ve vnějším elektrickém poli nenulový elektrický dipólový moment. Vázaný náboj je záporný na té straně tělesa, do níž vstupují siločáry vnějšího elektrického pole, a kladný na té straně, ze které siločáry z tělesa vystupují.

Polarizaci dielektrika můžeme z makroskopického hlediska popsat vektorovou veličinou nazvanou elektrická polarizace P. Tato veličina je definována vztahem

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} , \qquad (22.1)$$

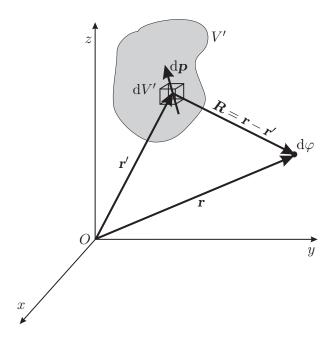
kde Δp představuje elektrický dipólový moment objemu ΔV . Ze vztahu (22.1) je zřejmé, že vektor elektrické polarizace P se rovná elektrickému dipólovému momentu objemové jednotky dielektrika, pokud v ní bude všude stejná polarizace jako v uvažovaném místě. Vektor elektrické polarizace je funkcí prostorových souřadnic, P(r). Na vektor elektrické polarizace je možné rovněž pohlížet jako na vektor udávající objemovou hustotu elektrických dipólových momentů v daném místě. Jednotkou elektrické polarizace je $C.m^{-2}$.

Uvažujme dielektrikum o objemu V', které je polarizované. Pro uvažovaný objem zpolarizovaného dielektrika je znám vektor polarizace $\mathbf{P}(\mathbf{r})$. Objemovému elementu zpolarizovaného dielektrika $\mathrm{d}V'$ v místě \mathbf{r}' odpovídá elektrický dipólový moment $\mathrm{d}\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r}')\mathrm{d}V'$, viz obr. 22.5. Pomocí vztahu (21.17) můžeme určit potenciál uvažovaného elementu zpolarizovaného dielektrika v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} jako

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$
 (22.2)

Pro další úpravu tohoto vztahu použijeme rovnosti (viz (A.31))

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \qquad (22.3)$$



Obrázek 22.5: Polarizované dielektrikum o objemu V'.

kde ∇' je nabla operátor podle čárkovaných souřadnic. Využitím této identity můžeme upravit vztah (22.2)

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{\nabla}' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'.$$
 (22.4)

K další úpravě použijeme následující identitu

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F}. \tag{22.5}$$

S pomocí této identity je možné dále upravit vztah (22.4)

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV'.$$
 (22.6)

Abychom získali příspěvek k elektrickému potenciálu v bodě o polohovém vektoru \mathbf{r} od všech objemových elementů zpolarizovaného dielektrika, provedeme následující integraci přes celý jeho objem V'

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (22.7)$$

Nyní použijeme Gaussovy věty pro první člen na pravé straně této rovnosti

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{-\mathbf{\nabla}' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{-\mathbf{\nabla}' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (22.8)$$

Porovnáním prvního integrálu na pravé straně s integrálem (19.36) a druhého integrálu s integrálem (19.34) dospějeme k následujícím vztahům

$$\sigma_v = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \,, \tag{22.9}$$

$$\rho_v = -\nabla' \cdot \mathbf{P} \,, \tag{22.10}$$

kde σ_v je plošná hustota vázaného náboje a ρ_v je objemová hustota vázaného náboje, viz obr. 22.6.

Pomocí značek pro plošnou a objemovou hustotu vázaného náboje přepíšeme pravou stranu rovnosti (22.8)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$
 (22.11)

Tento vztah lze interpretovat způsobem:

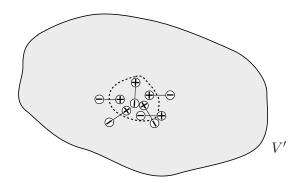
Elektrostatické pole dipólů objemově rozložených v dielektriku o objemu V s hustotou $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ lze formálně popsat jako superpozici elektrostatického pole vázaných nábojů objemově rozložených v tomto objemu s hustotou $\rho_v = -\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{P}$ a elektrostatického pole vázaných nábojů plošně rozložených na povrchu S uvažovaného objemu V s hustotou $\sigma_v = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, kde \mathbf{n} je jednotkový vektor kladné normály.

Nalezený vztah (22.11) lze také interpretovat tak, že potenciál, a tudíž i elektrické pole, polarizovaného dielektrika je stejný jako potenciál vytvořený nábojem s objemovou hustotou $\rho_v = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$ a nábojem s plošnou hustotou $\sigma_v = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}$. Stačí tedy jen nalézt vázané náboje a pak spočítat pole, které vytvářejí, a to stejným způsobem jako v případě jakýchkoliv jiných objemově a plošně rozložených nábojů. Tímto nemusíme provádět integraci infinitezimálních dipólových momentů způsobem

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$
 (22.12)

Tento vztah jsme získali integrací výrazu (22.2).

V případě homogenního rozložení dipólů v uvažovaném dielektriku, kdy hustota \mathbf{P} je v celém objemu konstantní, je zřejmě $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. Potenciál je pak dán jen plošným integrálem z pravé strany vztahu (22.1) a pole vytvářené polarizovaným dielektrikem je pak ekvivalentní poli uvedeného plošného vázaného náboje.



Obrázek 22.6: Vznik objemových vázaných nábojů, $P \neq konst.$

22.3 Gaussův zákon v dielektriku

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že elektrické pole polarizovaného dielektrika je polem vázaných nábojů v tomto dielektriku. Výsledné elektrické pole pak můžeme považovat za pole určené spolupůsobením vázaných a volných nábojů a pole *náboje volného*. Volným nábojem budeme rozumět jakýkoliv náboj, který **není** výsledkem polarizace dielektrika.

V dielektriku mohou být vedle vázaných nábojů rovněž náboje volné². Objemovou hustotu volného náboje budeme značit ρ a objemovou hustotu vázaného náboje jsme v předchozí kapitole označili jako ρ_v , takže celková hustota náboje uvnitř dielektrika je

$$\rho_c = \rho + \rho_v . \tag{22.13}$$

Dosadíme-li do Gaussova zákona (20.9) celkovou objemovou hustoto náboje, pak dostaneme

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} = \frac{\rho + \rho_v}{\varepsilon_0} , \qquad (22.14)$$

kde **E** je celkové elektrické pole.

Pro další úpravu tohoto vztahu použijeme rovnost (22.10)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} = \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \,. \tag{22.15}$$

Vynásobením této rovnice konstantou ε_0 a následnou úpravou dostaneme

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho . \tag{22.16}$$

Zavedeme si novou vektorovou veličinu

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \,, \tag{22.17}$$

kterou nazýváme vektor elektrické indukce. Pomocí této veličiny lze Gaussův zákon pro elektrostatické pole v dielektriku v diferenciálním tvaru zapsat jako

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \ . \tag{22.18}$$

Gaussův zákon pro elektrostatické pole v dielektriku lze snadno vyjádřit i v integrálním tvaru

$$\Psi = \iint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q , \qquad (22.19)$$

kde $q=\iint_V \rho \mathrm{d}V$ je celkový **volný** náboj nacházející se v uzavřené ploše S, která uzavírá objem V a značka Ψ reprezentuje tzv. elektrický indukční tok.

Tvar Gaussovy věty (22.19) nám říká, že součet všech volných nábojů uvnitř uzavřené plochy se rovná toku vektorového pole \boldsymbol{D} touto plochou, tj. počtu siločar pole \boldsymbol{D} , které z plochy vystupují zmenšeného o počet těch, které do plochy vstupují. Je potřeba mít na paměti, že pole \boldsymbol{D} je jen jakýmsi lidským "vynálezem", příroda ho nezná, je tak umělé, jako je umělé dělení elektrických nábojů na volné a vázané. Kdežto pole \boldsymbol{E} je pole reálné, jeho velikost můžeme v principu přímo měřit, avšak k určení pole \boldsymbol{D} se musíme podívat na všechny náboje v širokém okolí a rozhodnout, jsou-li volné nebo vázané.

²Neuvažujeme ideální dielektrikum, které obsahuje výhradně vázané náboje.

Maxwellovy rovnice pro elektrostatické pole v dielektriku jsou v diferenciálním tvaru představují následující rovnice

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \,\,\,\,(22.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} . \tag{22.21}$$

Maxwelovy rovnice elektrostatického pole v dielektriku v integrálním tvaru představují následující rovnic

$$\oint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q ,$$

$$\oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 .$$
(22.22)

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{22.23}$$

V kapitole 20 jsme si ukázali, že je možné z Gaussova zákona ve tvaru (20.5) odvodit zákon Coulombův. Díky podobnosti tvaru Gaussova zákona (22.19) a (20.5) bychom mohli mylně předpokládat, že i pro vektor elektrické indukce D existuje podobný Coulombův zákon. Abychom mohli usuzovat na podobnost mezi vektorovým polem E(r) a vektorovým polem D(r), je nutné připomenout i další vlastnost elektrického pole, a to, že $\nabla \times E = 0$. Avšak pro vektor elektrické indukce **obecně neplatí**, že $\nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{0}$ neboť

$$\nabla \times \mathbf{D} = \varepsilon_0 \underbrace{\nabla \times \mathbf{E}}_{=0} + \nabla \times \mathbf{P} . \tag{22.24}$$

Odtud je zřejmé, že $\nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{0}$ jen v případě, že $\nabla \times \mathbf{P} = \mathbf{0}$, což nemusí být vždy splněno. Odtud také plyne, že pro vektor elektrické indukce neexistuje "potenciál", jehož gradient by se mu rovnal, jak je tomu v případě vektoru elektrické intenzity.

22.4 Dielektrika v elektrostatickém poli

Z popisu mechanismu polarizace dielektrika uvedeném v kapitole 22.1 je zřejmé, že vložíme-li do vnějšího elektrického pole E_o kus dielektrika, pak toto vnější elektrické pole zpolarizuje dielektrikum a zpolarizované dielektrikum vytváří vlastní pole, které se vektorově skládá s vnějším polem, což má za následek modifikace nastalé polarizace, která se pak vektorově skládá s vnějším polem atd. Tedy je zřejmé, že výsledné pole uvnitř dielektrika E je výsledkem postupné regrese. Odtud můžeme konstatovat, že vektor elektrické polarizace P bude záviset na výsledném elektrickém poli 3 E, tj. P = P(E), kde P(0) = 0. Nebude-li toto elektrické pole příliš silné, můžeme si závislost P = P(E) vyjádřit pomocí následujícího rozvoje

$$P_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} E_j + \sum_{j,k=1}^{3} b_{ijk} E_j E_k + \dots , \qquad i = 1, 2, 3 ,.$$
 (22.25)

kde koeficienty a_{ij} jsou složky tenzoru druhého řádu a b_{ijk} jsou složky tenzoru třetího řádu. Složky tenzorů jsou dány specifickými vlastnostmi daného dielektrika a stanovují se experimentálně. Při normálních teplotách (ne příliš nízkých) a pro běžné intenzity elektrického pole je lineární aproximace dostačující, takže můžeme jak koeficienty b_{ijk} , tak koeficienty u členů vyšších řádů rozvoje, položit rovny nule. Takováto dielektrika nazýváme lineární dielektrika. V případě, že vektory **P** a **E** nejsou kolineární, mluvíme o anizotropním dielektriku a zpravidla vztah mezi složkami těchto vektorů zapisujeme jako

$$P_{i} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} E_{j} = \varepsilon_{0} \sum_{j=1}^{3} \chi_{eij} E_{j} , \qquad (22.26)$$

³Toto výsledné elektrické pole není zapříčiněno jen polarizací, ale i volnými náboji v dielektriku.

kde χ_{eij} jsou složky tenzoru elektrické susceptibility $\{\chi_e\}$. Zvláštní případ pak představují lineární dielektrika izotropní, pro která platí

$$a_{ij} = a\delta_{ij} , (22.27)$$

tj.

$$P_i = aE_i (22.28)$$

neboli

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \,, \tag{22.29}$$

kde $\varepsilon_0 \chi_e = a$ a χ_e se nazývá *elektrická susceptibilita*. Dosazením ze vztahu (22.29) do vztahu (22.17) dostaneme

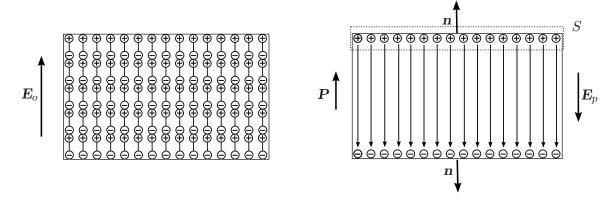
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \qquad (22.30)$$

kde $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ (pro vakuum je $\varepsilon_r = 1$) je relativní permitivita a $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ absolutní permitivita dielektrika.

Jedná-li se o lineární izotropní dielektrikum nehomogenní, potom $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$. Pro homogenní izotropní dielektrikum platí, že $\varepsilon = konst$.

Uvažujme homogenně polarizované lineární dielektrikum tvaru kvádru, jehož podstavy, mající plochu ΔS , jsou kolmé na siločáry vnějšího elektrického pole, které označíme \mathbf{E}_o . V kapitole 22.3 jsme dospěli k závěru, že polarizovaný objem dielektrika se chová jako určité ekvivalentní rozdělení plošných a objemových vázaných nábojů. Vzhledem k předpokladu, že námi uvažované dielektrikum je homogenně polarizované, tj. $\mathbf{P} = \mathbf{konst.}$, bude hustota objemového vázaného náboje podle vztahu (22.10) rovna nule, $\rho_v = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. Popisovanou situaci si také můžeme představit tak, že kladné a záporné náboje dipólů polarizovaného dielektrika se v jeho objemu vzájemně vykompenzují a uplatní se pouze kladné náboje dipólů tvořící hraniční rovinu (kladné plošné vázané náboje), ze které siločáry vnějšího (polarizujícího) elektrického pole vystupují a záporné náboje tvořící hraniční rovinu protilehlou (záporné plošné vázané náboje), do které siločáry vstupují, viz obr. 22.7.

Plošnou hustotu vázaných plošných nábojů stanovíme pomocí vztahu (22.9), tedy σ_v^+



Obrázek 22.7: Homogenně polarizované dielektrikum.

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \text{ a } \sigma_v^- = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P.$$

Plošné vázané náboje vytváří uvnitř dielektrika polarizační elektrické pole \mathbf{E}_p , které má směr opačný než vektor elektrické polarizace \mathbf{P} , viz obr. 22.7. Velikost polarizační intenzity určíme pomocí Gaussova zákona (20.5). Horní podstavu dielektrika o ploše ΔS s kladnými plošnými vázanými náboji uzavřeme plochou S. Tato plocha uzavírá celkový náboj $q = \sigma_v^+ \Delta S = P \Delta S$.

Ze závěrů kapitoly 20.4 je zřejmé, že vektor polarizační intenzity \mathbf{E}_p vytéká pouze spodní podstavou zvolené uzavřené plochy o velikosti ΔS , přičemž je tento vektor kolmý k podstavě, viz obrázek 22.7. Tedy z Gaussova zákona dostáváme

$$\iint_{S} \mathbf{E}_{p} \cdot d\mathbf{S} = E_{p} \iint_{\Delta S} dS = E_{p} \Delta S = \frac{\sigma_{v}^{+} \Delta S}{\varepsilon_{0}} = \frac{P \Delta S}{\varepsilon_{0}},$$
(22.31)

Odtud je možné psát

$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \ . \tag{22.32}$$

Pro výslednou intenzitu elektrického pole v dielektriku \boldsymbol{E} , s ohledem na vztah (22.32), dostáváme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_o - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} . \tag{22.33}$$

Ze vztahu (22.30) dostaneme

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}. \tag{22.34}$$

Dosadíme z tohoto vztahu do rovnosti (22.33)

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_o - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E}}{\varepsilon_0} = \boldsymbol{E}_o - (\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E}.$$
 (22.35)

Odtud

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_o}{\varepsilon_r} \ . \tag{22.36}$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že výsledné elektrické pole v dielektriku je ε_r -krát slabší než vnější elektrické pole, ve kterém se dielektrikum nachází.

Bude-li se volný náboj nacházet v dielektriku, potom elektrické pole, které vytváří, nebude dáno vztahem (19.40), ale vztahem

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_C}{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{r}^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{q}{R^3} \mathbf{R} . \tag{22.37}$$

To neznamená, že je s Coulombovým zákonem něco v nepořádku, pouze se touto úpravou (podělením ε_r) říká, že polarizované dielektrikum náboj částečně "stíní" tím, že ho obklopuje vázaným nábojem opačného znamení.

Poznámka

V dielektriku se síly mezi náboji zmenší ε_r -krát. Zvlášť výrazně se tato vlastnost projevuje u vody a tím se vysvětluje i velká disociační vlastnost vody. Při rozpouštění solí, jejichž molekuly mají iontovou vazbu (např. NaCl, CuSO₄) ve vodě, se elektrická síla mezi ionty (např. Na⁺, Cl⁻) ve vodě zmenší přibližně 80-krát, a to vyvolá rozpad molekuly na samostatné ionty. Tímto vzniká elektrolyt, který je schopen volnými kladnými a zápornými ionty zprostředkovat vedení elektrického proudu.

Látka	typ	$arepsilon_r$
hélium	nepolární	1,000065
vodík	nepolární	1,00025
vzduch	nepolární	1,00060
oxid uhličitý	nepolární	1,00097
olej	nepolární	2,24
benzen	nepolární	2,28
skla	nepolární	4 - 7
chlorid sodný	nepolární	6
ethanol	polární	25,0
nitrobenzen	polární	35,7
voda	polární	80,1

Tabulka 22.1: Relativní permitivita vybraných dielektrik.

22.4.1 Elektrostatické pole na rozhraní dvou dielektrik

Uvažujme rozhraní dvou dielektrik s relativními permitivitami ε_{r1} a ε_{r2} . Jak vektor elektrické intenzity \mathbf{E} , tak vektor elektrické indukce \mathbf{D} , rozložíme na normálovou a tečnou složku vzhledem k rozhraní uvažovaných dvou dielektrik, viz obr. 22.8 a 22.9. Budeme vyšetřovat, jak se budou složky těchto vektorů měnit při přechodu z jednoho dielektrika do druhého.

Nejdříve se zaměříme na tečné složky elektrické intenzity. K tomuto účelu sestrojíme v těsné blízkosti rozhraní uzavřenou dráhu ve tvaru úzkého obdélníku ABCD. Protože elektrostatické pole je polem konzervativním, tak bude platit

$$\oint_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$
 (22.38)

Integrál v tomto vztahu rozepíšeme na čtyři integrály podél jednotlivých stran uvažovaného obdélníku, přičemž budeme uvažovat, že vektory intenzity elektrického pole pro obě dielektrika budou mít složky $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{t1} + \mathbf{E}_{n1}$ a $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{t2} + \mathbf{E}_{n2}$ (viz obr. 22.8)

$$\int_{A}^{B} E_{t1} dl + \int_{B}^{C} E_{n1} dl - \int_{C}^{D} E_{t2} dl - \int_{D}^{A} E_{n1} dl = 0.$$
 (22.39)

Protože vyšetřujeme pole v těsné blízkosti rozhraní, pak v limitním případě $BC \to 0$ a $DA \to 0$ můžeme integrály s normálovými složkami vektoru elektrické intenzity (tedy druhý a čtvrtý integrál) v rovnici (22.39) položit rovny nule, takže dostáváme

$$\int_{A}^{B} E_{t1} dl - \int_{C}^{D} E_{t2} dl = 0.$$
 (22.40)

Vzhledem k tomu, že délky stran obdélníku mezi body AB a CD se rovnají, tak odtud vyplývá

$$E_{t1} = E_{t2} (22.41)$$

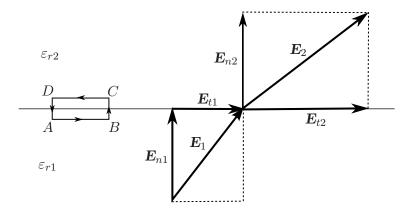
Tedy můžeme konstatovat, že velikost tečné složky intenzity elektrického pole se na rozhraní dvou dielektrik nemění.

S ohledem na vztah (22.30) lze výsledek (22.41) přepsat

$$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} \tag{22.42}$$

a odtud dostáváme

$$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \,, \tag{22.43}$$



Obrázek 22.8: Složky vektoru elektrické intenzity na rozhraní dvou dielektrik.

tedy velikost tečné složky vektoru elektrické indukce se na rozhraní dvou dielektrik skokově změní v poměru odpovídajících relativních permitivit.

Nyní vyšetříme, jak se změní normálové složky vektoru elektrické indukce při přechodu z jednoho dielektrika do druhého. Za tímto účelem na rozhraní uvažovaných dielektrik zvolíme uzavřenou plochu S_v ve tvaru válce, jehož podstavy budou rovnoběžné s rozhraním. Budemeli předpokládat ideální dielektrikum, potom v námi uvažované uzavřené ploše se nenachází žádný volný náboj, takže podle vztahu (22.22) dostaneme

$$\iint_{S_n} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{22.44}$$

Integrál na levé straně této rovnice rozepíšeme na tok vektoru elektrické indukce D základnami válce ΔS a tok plochou jeho pláště $S_{\rm pl}$

$$-\iint_{\Delta S} D_{n1} dS + \iint_{S_{\text{pl}}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Delta S} D_{n2} dS = 0.$$
 (22.45)

U prvního integrálu je znaménko minus, protože elektrický indukční tok vstupuje spodní základnou do uzavřené plochy⁴. Dále předpokládejme, že se základny válce ΔS neomezeně blíží k rozhraní, tj. $h \to 0$, a tedy $S_{\rm pl} \to 0$. Díky tomuto předpokladu je možné integrál pro tok elektrické indukce pláštěm válcové plochy (prostřední integrál) položit roven nule, takže dostáváme

$$-\iint_{\Delta S} D_{n1} dS + \iint_{\Delta S} D_{n2} dS = 0.$$
 (22.46)

Jelikož základy válce jsou stejně velké, tak odtud vyplývá

$$D_{n1} = D_{n2} (22.47)$$

Odtud můžeme konstatovat, že normálová složka vektoru elektrické indukce se na rozhraní dvou dielektrik nemění.

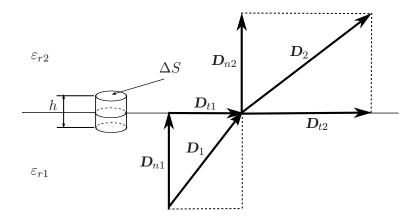
Opět pomocí vztahu (22.30) přepíšeme tuto rovnost

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_{n1} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_{n2} \tag{22.48}$$

a odtud dostáváme

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \ . \tag{22.49}$$

 $[\]overline{{}^{4}D_{n1} \cdot dS} = D_{n1} \cdot ndS = D_{n1}dS \cos \pi = -D_{n1}dS.$



Obrázek 22.9: Složky vektoru elektrické indukce na rozhraní dvou dielektrik.

Z tohoto vztahu lze vidět, že velikost normálové složky vektoru elektrické intenzity se na rozhraní dvou dielektrik mění skokem a to v obráceném poměru relativních permitivit. Odtud je zřejmé, že v případě, kdy elektrické pole není kolmé k rozhraní dvou dielektrik, dochází k lomu elektrických siločar i elektrických indukčních čar.

22.4.2 Vlastnosti dielektrik

Mezi nelineární dielektrika patří skupina krystalických látek zvaná feroelektrika. Feroelektrika se chovají v elektrickém poli obdobně jako feromagnetické látky v magnetickém poli. U těchto dielektrik pozorujeme ve feroelektrickém stavu velmi vysoké hodnoty relativní permitivity ($\varepsilon_r = 10^3 - 10^4$). Relativní permitivita těchto látek velmi výrazně závisí na směru (anizotropní dielektrikum) a teplotě. Relativní permitivita se mění také v případě časově proměnných elektrických polí⁵. Mezi feroelektrika patří např. Seignettova sůl (vínan sodnodraselný NaKC₄H₄O₆.4H₂O), fosforečnan draselný (KH₂PO₄), titaničitan barnatý (BaTiO₃) aj. Feroeletrické látky mají doménovou strukturu, tj. obsahují oblasti (domény), ve kterých jsou elementární dipólové momenty rovnoběžné, tedy tyto oblasti se vyznačují spontánní (samovolnou) vnitřní elektrickou polarizací. Ve feroelektrickém stavu jsou v látce celé oblasti spontánní elektrické polarizace. Feroelektrický stav trvá jen pod tzv. Curieovou teplotou, při jejím překročení přechází látka do paraelektrického stavu a její permitivita prudce klesá⁶. Ve feroelektrickém stavu se u těchto látek pozoruje elektrická hystereze, která se při kruhové změně intenzity elektrického pole E projeví hysterezní smyčkou závislosti P(E).

Některé feroelektrické látky, jako je směs pryskyřice a vosku, karnaubský vosk, organické sklo aj., polarizované silným elektrickým polem v tekutém stavu, si podržují konstantní hodnotu vektoru polarizace i bez elektrického pole, necháme-li je ztuhnout v tomto polarizovaném stavu. Takovéto látky nazýváme *elektrety* a představují obdobu permanentních magnetů.

Při působení elektrického pole na iontové krystaly dochází při polarizaci krystalu také k deformaci krystalové mřížky a tím ke změně rozměrů krystalu. Tento jev nazýváme *elektrostrikcí* nebo také *obráceným piezoelektrickým jevem*. Elektrostrikce se využívá zejména pro generování ultrazvukových polí a v krystalových elektronických oscilátorech.

Piezoelektrický jev pozorujeme při mechanickém namáhání (tlakem, tahem, ohybem) některých krystalů, což vede ke změně elektrické polarizace krystalu, která se projeví jako indukovaný povrchový elektrický náboj, čímž vznikne mezi deformovanými plochami elektrické napětí. Povrchová hustota náboje u piezoelektrických krystalů je úměrná mechanickému na-

⁵Například u vody při velmi vysokých frekvencích dochází k poklesu relativní permitivity až na hodnotu cca 1,77.

⁶Existují i feroelektrika, která nemají Curieovu teplotu (bod) a nachází se ve feroelektrickém stavu až do teploty tání.

pětí, kterému je krystal vystaven. Piezoelektrický jev se projevuje jen u těch krystalů, kde elementární krystalová buňka není elektricky symetrická. Takovou látkou jsou všechny krystaly ve feroelektrickém stavu nebo např. křemen (SiO₂). Pomocí piezoelektrického materiálu dochází k přeměně mechanické energie na elektrickou, čehož se využívá k detekci deformací, pohybu, sil, tlaku či vibrací zpracováním vytvořeného elektrického signálu.

U některých dielektrik se můžeme setkat i s pyroelektrickým jevem. Zahřejeme-li takovéto dielektrikum (např. turmalín), tak u něho dojde k objemovým změnám a na dielektriku se objeví povrchové náboje.

22.5 Vodiče v elektrostatickém poli

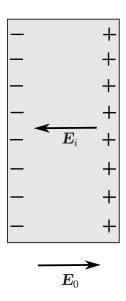
V rámci této kapitoly budeme vyšetřovat chování vodičů vložených do elektrostatického pole, přičemž budeme předpokládat, že se jedná o vodiče dokonalé. Dokonalým (ideálním) vodičem rozumíme materiál obsahující zcela volné nosiče elektrického náboje. I když dokonalý vodič představuje idealizaci skutečných vodičů, existuje řada látek, které můžeme považovat za téměř dokonalé vodiče, takže naše závěry týkající se dokonalých vodičů můžeme aplikovat i na vodiče reálné, a tedy nebudeme mezi nimi rozlišovat.

Vložíme-li vodič do vnějšího elektrostatického pole E_o , tak se volné náboje začnou vlivem tohoto pole pohybovat, kladné náboje na jednu stranu a záporné náboje na stranu opačnou (ve skutečnosti v kovech, jako reprezentantech téměř dokonalých vodičů, se pohybují jen elektrony, čímž na jedné straně vodiče budou převažovat kladné náboje jader jinak elektricky neutrálních atomů, takže efekt je vlastně stejný, jako když uvažujeme současně pohyb záporných a kladných nábojů). Jakmile náboj dosáhne povrchu vodiče, začne se zde hromadit (předpokládáme, že elektrický náboj nemůže opustit vodič), tedy kladný náboj na jedné straně a záporný náboj na straně druhé, viz obr. 22.10. Tím že se na **vnitřním** povrchu vodiče naindukují elektrické náboje, dojde ke zpolarizování vodiče a uvnitř vodiče vznikne elektrické pole, které je opačně orientované k poli vnějšímu, E_i . Můžeme také říci, že se ve vodiči indukuje elektrický dipólový moment orientovaný souhlasně se směrem vnějšího elektrického pole. Pohyb elektrických nábojů bude pokračovat tak dlouho, dokud makroskopické elektrické pole uvnitř vodiče zcela nevykompenzuje vnější elektrické pole. Výsledkem tedy je, že elektrické pole uvnitř vodiče zcela vymizí (pouze uvnitř vodiče), neboli intenzita elektrického pole $E = E_o + E_i = 0$ uvnitř vodiče. Popsaný jev se nazývá elektrostatická indukce. Vně vodiče bude samozřejmě elektrické pole nenulové.

Náboje na povrchu vodiče se rozloží téměř okamžitě, takže můžeme elektrické pole považovat opět za elektrostatické. Dojde-li ke zvětšení vnějšího elektrického pole, tak vodič opět poskytne elektrické náboje, které se budou hromadit na jeho povrchu, čímž dojde opět k vykompenzování elektrického pole uvnitř vodiče. Bude-li vnější pole nehomogenní, potom indukovaný elektrický dipólový moment bude orientován ve směru tohoto pole a vodič bude vtahován do oblasti, kde je vnější pole silnější.

Je-li ${\bf E}={\bf 0}$, pak z Gaussova zákona (20.9) přímo vyplývá, že uvnitř vodiče je objemová hustota elektrického náboje nulová (objemová hustota kladného a záporného náboje je ve všech místech vodiče stejná), $\rho=0$. Také odtud vyplývá, že ve vodiči se nachází stejné množství kladného i záporného náboje, takže celkový náboj je roven nule. Pak i množství indukovaného kladného i záporného náboje je stejné, takže jejich součet je roven nule. Náboj na ploše je rozmístěn tak, aby minimalizoval svoji potenciální energii a dosáhl elektrostatické rovnováhy. V důsledku silového působení povrchových nábojů vzniká na povrchu vodiče mechanické napětí.

Uvažujme jakékoliv dva body o polohových vektorech r_1 a r_2 , které se nachází buď uvnitř



Obrázek 22.10: Elektrostatická indukce.

nebo na povrchu vodiče. Potom bude pro rozdíl potenciálů (20.39) platit 7

$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$
, (22.50)

tedy

$$\varphi(\mathbf{r}_2) = \varphi(\mathbf{r}_1) \ . \tag{22.51}$$

Odtud vyplývá, že vodič má všude stejný elektrický potenciál, a tudíž povrch vodiče je ekvipotenciálou, takže intenzita elektrostatického pole, a tedy i siločáry, jsou kolmé k povrchu vodiče⁸, viz kapitola 19.3. Tedy siločáry elektrostatického pole vstupují zvnějšku kolmo k povrchu vodiče tam, kde je soustředěn záporný plošný náboj, a vystupují opět kolmo k povrchu tam, kde je soustředěn kladný plošný náboj.

Přiblížíme-li k nenabitému vodiči elektrický náboj, pak se bude tento náboj s vodičem vzájemně přitahovat. Tato skutečnost je dána tím, že přiložený náboj vytváří elektrostatické pole, čímž u vodiče dojde k výše popsané elektrostatické indukci, takže elektrické pole uvnitř vodiče bude nulové. Jiná situace nastane v případě, že se uvnitř vodiče nachází dutina, do které vložíme např. kladný elektrický náboj q>0. Tento náboj zapříčiní, že se jak na vnitřním, tak na vnějším povrchu budou indukovat náboje tak, aby uvnitř vodiče bylo elektrické pole nulové, tj. E=0. Nyní budeme uvažovat uvnitř vodiče uzavřenou plochu S, ve které se nachází i uvažovaná dutina s kladným elektrickým nábojem, viz obr. 22.11. Protože intenzita uvnitř vodiče je nulová, bude její tok uzavřenou plochou S roven nule,

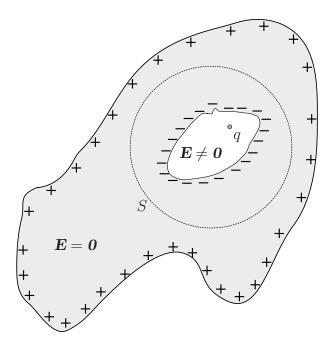
$$\iint_{S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{22.52}$$

Z Gaussova zákona v integrálním tvaru (20.5) potom plyne, že celkový náboj uzavřený v uvažované ploše S je roven nule, tedy velikost indukovaného záporného náboje na ploše dutiny q_{ind}^- musí být rovna velikosti kladného náboje v dutině, tj.

$$q_{\text{ind}}^- + q = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{\text{ind}}^- = -q \ .$$
 (22.53)

⁷Intenzita uvnitř vodiče je E = 0.

⁸Kdyby tomu tak nebylo, měla by intenzita složku ve směru povrchu a přesouvala by po povrchu náboj, což by bylo v rozporu s naší představou elektrostatické rovnováhy.



Obrázek 22.11: Kladný náboj uvnitř dutiny.

Protože celkový náboj ve vodiči je roven nule, je samozřejmě množství indukovaného množství kladného náboje $q_{\rm ind}^+$ na vnějším povrchu vodiče rovno množství indukovaného záporného náboje, takže jejich součet je roven nule.

Odtud je zřejmé, že

$$\underbrace{q_{\text{ind}}^{+} + q_{\text{ind}}^{-}}_{=0} + q = q . \tag{22.54}$$

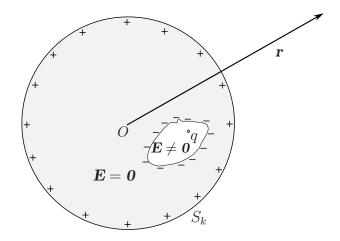
Tento výsledek nám říká, že z vnějšku se nám vodič jeví jako nabitý kladným nábojem q, takže vně vodiče existuje nenulové elektrické pole. Tuto situaci si budeme demonstrovat na příkladu vodiče ve tvaru koule, v jehož dutině se nachází kladný elektrický náboj q>0, viz obr. 22.12. Bez újmy na obecnosti umístíme střed koule do počátku souřadnic. Ze vztahů (22.53) a (22.54) vyplývá, že indukovaný náboj rozložený na vnější ploše koule $q_{\rm ind}^+ = q$. Tento náboj je stejnoměrně rozložen po povrchu koule ($\sigma=konst.$), protože asymetrický vliv náboje uvnitř dutiny je zastíněn indukovaným nábojem $q_{\rm ind}^-$ na vnitřní ploše kolem dutiny. V kapitole 20.5 jsme však dospěli k závěru, že tímto způsobem nabitá koule vytváří elektrické pole shodné s polem bodového náboje umístěného do jejího středu. Tedy elektrické pole (intenzita) námi uvažované vodivé koule s dutinou, ve které je uvězněn kladný elektrický náboj q je dáno vztahem

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} . \tag{22.55}$$

Jedná se o poměrně zajímavý výsledek, který lze interpretovat tak, že námi uvažovaná vodivá koule nám jaksi "zatajuje" informace o dutině (její tvar, umístění v kouli) a poskytuje nám jen informaci, že obsahuje náboj q>0.

Přeneseme-li na izolovaný vodič elektrický náboj (nabitý vodič), pak se všechen rozmístí na **vnějším** povrchu vodiče, protože náboje stejného znaménka se vzájemně odpuzují. Přenesením náboje na izolovaný vodič se vytvoří elektrické pole uvnitř vodiče. To silově působí na volné náboje ve vodiči a pohybuje jimi tak dlouho, až celkové pole uvnitř dutiny vymizí (E = 0) a nastane elektrostatická rovnováha (celý děj proběhne velmi rychle). V opačném případě by se ve vodiči v ustáleném stavu pohybovaly volné náboje z místa na místo a vznikly by tímto "věčné" proudy, které však ve vodiči neexistují.

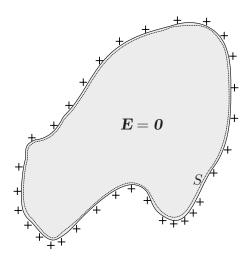
Díky nulovému elektrickému poli uvnitř nabitého vodiče bude zřejmě platit, stejně jako pro



Obrázek 22.12: Kladný náboj uvnitř dutiny vodivé koule.

nenabitý vodič v elektrickém poli, že všechny body vodiče, je jedno zda uvnitř či na povrchu, mají stejný potenciál⁹. Protože uvnitř nabitého vodiče je $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$, pak z Gaussova zákona (20.9) přímo vyplývá, že uvnitř vodiče je objemová hustota elektrického náboje nulová, $\rho=0$. Zvolíme-li Gaussovu plochu S těsně pod povrchem nabitého vodivého tělesa, pak z důvodu, že $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ všude uvnitř vodiče, potom z Gaussova zákona v integrálním tvaru (20.5) plyne, že i celkový náboj uvnitř této plochy je nulový. Odtud je zřejmé, že přivedený náboj musí ležet jen na povrchu vodiče, viz obr. 22.13.

Uvažujme nyní případ izolovaného vodiče s dutinou, na který byl přiveden kladný náboj.



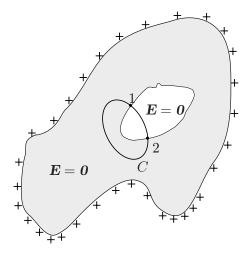
Obrázek 22.13: Gaussova plocha těsně pod povrchem nabitého izolovaného vodiče.

Bude nás zajímat elektrické pole uvnitř jeho dutiny. Je zřejmé, že ze stejného důvodu jako v případě izolovaného nabitého vodiče bez dutiny, bude intenzita všude uvnitř nulová (mimo dutiny). Vzhledem k tomu, že elektrické pole je polem konzervativním, bude muset platit, že cirkulace vektoru intenzity podél křivky C, viz obr. 22.14, bude rovna nule. Křivkový integrál podél uzavřené křivky C rozdělíme na dva křivkové integrály

$$0 = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$
 (22.56)

Protože víme, že intenzita elektrického pole je uvnitř vodiče nulová, bude i nulový křivkový

⁹Tento závěr můžeme zobecnit i na případ izolovaného nabitého vodiče nacházejícího se ve vnějším elektrickém poli.



Obrázek 22.14: Pole uvnitř dutiny izolovaného nabitého vodiče.

integrál z budu 1 do bodu 2 (první křivkový integrál na pravé straně rovnosti (22.56)). Vzhledem k tomu, že cirkulace vektoru \boldsymbol{E} podél křivky C je rovna nule, musí na základě rovnosti (22.56) platit, že i křivkový integrál z bodu 2 do bodu 1, tj. po křivce vedoucí dutinou, bude roven nule

$$\int_{2}^{1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{22.57}$$

Protože jsme k danému výsledku dospěli pro libovolnou uzavřenou křivku C, je rovnice (22.57) splněna jen za předpokladu, že intenzita uvnitř dutiny je nulová ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$), a že na povrchu dutiny se nenachází žádný elektrický náboj. Odtud plyne závěr, že intenzita uvnitř dutiny izolovaného vodiče, na který byl přiveden libovolně velký elektrický náboj, je vždy rovna nule.

Vodič s dutinou se nazývá *Faradayova klec* a slouží k odstínění citlivých zařízení. Protože i automobil představuje Faradayovu klec, můžeme se v automobilu cítit relativně bezpečně¹⁰ během bouřky.

Nyní určíme hodnotu intenzity elektrostatického pole v blízkosti povrchu kladně nabitého izolovaného vodiče. Zvolíme uzavřenou plochu S_v ve tvaru velmi nízkého válce s malými podstavami ΔS , jehož osa je kolmá k povrchu vodiče. Jedna podstava je umístěna vně vodiče a druhá uvnitř. Situace je zachycena na obrázku 22.15, kde v části je zobrazen řez vodičem včetně uvažovaného válce. Vzhledem k malým rozměrům válce můžeme zanedbat nehomogenitu pole a nehomogenitu rozložení povrchového náboje. Uvnitř uvažované válcové plochy je uzavřen celkový náboj $\Delta q = \sigma \Delta S$, kde σ je hodnota plošné hustoty v místě válce. Vzhledem k tomu, že všude uvnitř vodiče je E = 0, je tok intenzity elektrického pole podstavou ve vodiči nulový. Tok pláštěm válce je rovněž nulový, neboť siločáry jsou rovnoběžné s osou válce. Tok intenzity uvažovaným válcem bude nenulový jen podstavou válce umístěnou vně vodiče, tedy

$$\Delta \Phi_e = \iint_{S_v} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = E \Delta S \ .$$

Z Gaussovy věty pak plyne

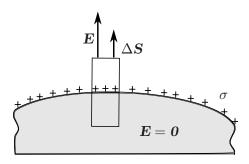
$$E\Delta S = \frac{\Delta q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \ . \tag{22.58}$$

¹⁰Udeří-li blesk do automobilu, tak sice nebudeme usmrceni elektrickým proudem, ale můžeme být uvařeni.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ . \tag{22.59}$$

Tento výsledek se někdy nazývá *Coulombovou větou*. Z výsledku plyne, že ačkoliv elektrostatické pole vně vodiče je vytvářeno celkovým rozložením nábojů na povrchu vodiče, je v blízkosti povrchu plně určeno lokální hodnotou plošné hustoty náboje.

Na povrchu nabitého vodiče, který není kulově symetrický, se náboj nerozdělí rovnoměrně. Hustota náboje roste se zakřivením, takže na hrotech a hranách může hustota náboje, a tím s ohledem na vztah (22.59) i intenzita elektrického pole vně vodiče, dosahovat velmi vysokých hodnot. Vzduch se může kolem takovýchto hrotů ionizovat a dojít ke vzniku koronového výboje.



Obrázek 22.15: Pole v blízkosti povrchu kladně nabitého izolovaného vodiče.

22.6 Kapacita vodiče a kondenzátor

Při nabíjení vodivých těles můžeme měřením náboje a potenciálu elektrostatického pole na jejich povrchu zjistit, že různá vodivá tělesa, nabitá stejným nábojem, mají různý potenciál. Tento potenciál závisí na velikosti a tvaru vodivého tělesa, na vzdálenosti od okolních vodičů a na prostředí, kterým je vodivé těleso obklopeno. V následujících dvou kapitolách se budeme zmíněnými závislostmi zaobírat podrobněji.

22.6.1 Kapacita osamoceného vodiče

Uvažujme osamocené izolované nabité vodivé těleso s nábojem o plošné hustotě σ , které je umístěno ve vakuu. Celkový náboj rozložený s danou hustotou po ploše vodiče je dán vztahem

$$q = \iint_{S'} \sigma dS' , \qquad (22.60)$$

kde S je uzavřená plocha představující povrch uvažovaného vodivého tělesa. Potenciál $\varphi_S(\mathbf{r}_P)$ v libovolném bodě P na povrchu vodiče (povrch vodiče je ekvipotenciálou) bude podle vztahu (19.36)

$$\varphi_S(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|} dS'. \qquad (22.61)$$

Zvětšíme-li k-krát plošnou hustotu náboje, $\sigma' = k\sigma$, potom podle vztahu (22.60) dostaneme

$$q' = \iint_{S'} \sigma' dS' = \iint_{S'} k \, \sigma dS' = kq \,, \qquad (22.62)$$

tedy i náboj na povrchu vodiče vzroste k-krát. Toto k-násobné zvětšení náboje, resp. jeho plošné hustoty, bude mít za následek i změnu potenciálu v uvažovaném bodě, tedy

$$\varphi_{S}(\mathbf{r}_{P})' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \iint_{S'} \frac{\sigma'(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_{P} - \mathbf{r}'|} dS' = \frac{k}{4\pi\varepsilon_{0}} \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_{P} - \mathbf{r}'|} dS' = k\varphi_{S}(\mathbf{r}_{P}).$$
(22.63)

Odtud tedy vyplývá, že se i potenciál zvětší k-krát.

Z nalezených skutečností lze učinit závěr, že celkový náboj q na osamoceném izolovaném vodiči a potenciál na jeho povrchu jsou veličiny přímo úměrné. Tedy lze psát

$$q = C_v \varphi , \qquad (22.64)$$

kde konstanta úměrnosti C_v se nazývá kapacita osamoceného vodiče. Jednotkou kapacity je farad, kterému odpovídá značka F.

Ve vakuu je kapacita C_v je pouze funkcí geometrického tvaru vodiče.

Vyjádříme-li si kapacitu ze vztahu (22.64)

$$C_v = \frac{q}{\varphi_S} \tag{22.65}$$

a bude-li potenciál na povrchu vodiče roven 1 V, je evidentní, že v tomto případě bude kapacita číselně rovna náboji, kterým se vodič nabije na potenciál 1 V. Odtud je možné na kapacitu vodiče pohlížet jako na jeho schopnost jímat elektrický náboj.

22.6.2 Kapacita dvou vodičů (elektrický kondenzátor)

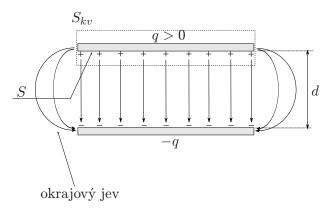
Nechť izolovaný vodič je nabitý nábojem q > 0. Do těsné blízkosti tohoto vodiče umístíme druhý vodič, který je nabitý nábojem -q. Potenciál prvního vodiče (nesoucí kladný náboj) označíme φ_1 a potenciál druhého vodiče označíme jako φ_2 . Takovéto uspořádání vodičů nazýváme elektrickým kondenzátorem či jen kondenzátorem a jednotlivé vodiče nazýváme elektrodami. Mezi těmito elektrodami je soustředěno elektrické pole. Kapacitu kondenzátoru C pak definujeme vztahem

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U} \,, \tag{22.66}$$

kde U je napětí mezi elektrodami kondenzátoru, viz (20.40).

Jednotlivé kondenzátory se liší tvarem elektrod, takže můžeme rozlišovat např. kulové, deskové či válcové kondenzátory.

V praxi nejběžnějším kondenzátorem je tzv. deskový kondenzátor, který se skládá ze dvou vzájemně rovnoběžných vodivých desek (elektrod) o ploše S. Tyto desky jsou od sebe vzdáleny d, viz obrázek 22.16. Předpokládáme, že plocha desek je dostatečně velká a vzdálenost mezi nimi natolik malá, že můžeme zanedbat vliv ostatních elektrických polí. V případě dostatečně velkých ploch uvažovaných desek se téměř veškerý náboj shromáždí na jejich vnitřních stěnách. Ze závěrů kapitoly 20.4 můžeme konstatovat, že elektrické pole je soustředěno pouze v prostoru mezi deskovými elektrodami. Díky předpokladu, že desky se nachází v těsné blízkosti, můžeme elektrické pole mezi deskami považovat za homogenní. Pouze v místech, kde siločáry opouštějí prostor mezi elektrodami se projevují tzv. okrajové jevy, které při dalších úvahách zanedbáme.



Obrázek 22.16: Deskový kondenzátor.

Velikost intenzity mezi deskami kondenzátoru určíme pomocí Gaussova zákona (20.5), přičemž za uzavřenou plochu budeme považovat plochu kvádru, jejíž dvě stěny mají plochu rovnou ploše S uvažované desky. Uvnitř této uzavřené plochy se nachází kladně nabitá deska (viz obr. 22.16)

$$\iint_{S_{kn}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES = \frac{q}{\varepsilon_0} , \qquad (22.67)$$

odtud

$$E = \frac{q}{S\varepsilon_0} \ . \tag{22.68}$$

Pomocí nalezené intenzity mezi deskami kondenzátoru spočítáme podle vztahu (19.34) mezi nimi napětí

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E d = \frac{q d}{S \varepsilon_0}.$$
 (22.69)

Dosazením tohoto napětí do vztahu pro kapacitu kondenzátoru (22.66) dostaneme

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q\,d}{S\varepsilon_0}} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \,. \tag{22.70}$$

Prostor mezi elektrodami kondenzátoru bývá často vyplněn dielektrikem, které dle vztahu (22.36) zeslabuje intenzitu elektrického pole ε_r -krát, takže je nutné v takovém případě vynásobit kapacitu kondenzátoru spočítanou pro vakuum relativní permitivitou ε_r použitého dielektrika, tedy

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \ . \tag{22.71}$$

22.6.3 Elektrická energie kondenzátoru

K nabití kondenzátoru musí být vykonána práce vnějším působením (vnějšími silami). Abychom nabili kondenzátor, tak musíme odejmout elektrony z jeho kladné elektrody a přenést je na jeho elektrodu zápornou. Elektrické pole, které se přitom vytváří v prostoru mezi nimi, má takový směr, že brání dalšímu přenosu náboje. Čím větší náboj se shromažďuje na elektrodách kondenzátoru, tím více práce je nutné vykonat k přenosu dalších elektronů. V praxi tuto práci uskutečníme nejčastěji baterií na úkor její chemické energie. Práce, která byla potřebná k nabití kondenzátoru, je obsažena v elektrickém poli mezi jeho elektrodami ve formě elektrické potenciální energie, případně můžeme konstatovat, že odpovídá potenciální energii nábojů na elektrodách kondenzátoru. Tuto energii můžeme uvolnit vybitím kondenzátoru. Nyní spočítáme práci, kterou je třeba vykonat k nabití kondenzátoru nábojem q.

Předpokládejme, že v určitém okamžiku byl přemístěn elektrický náboj q' z jedné elektrody

na druhou. Napětí U' mezi elektrodami v tomto okamžiku bude dle vztahu (22.66) q'/C. Jestliže přemístíme další infinitezimální náboj dq', musíme na to vynaložit práci rovnající se přírůstku potenciální energii elektrického pole. Tuto práci určíme pomocí vztahu¹¹

$$dW_p = U'dq' = \frac{q'}{C}dq'. (22.72)$$

Práce potřebná k přenesení celkového náboje q pak odpovídá celkové elektrické energii pole mezi deskami kondenzátoru

$$W_p = \int dW_p = \int_0^q U' dq' = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{q^2}{2C}.$$
 (22.73)

Tento výsledek můžeme dále upravit pomocí vztahu (22.66)

$$W_p = \frac{1}{2}CU^2 \ . \tag{22.74}$$

V kapitole 20.8 jsme nalezli vztah pro energii elektrostatického pole (20.60) pro případ bezmateriálového prostředí (vakuum). V případě, že budeme uvažovat volné elektrické náboje, které jsou rozložené v dielektriku, potom budeme postupovat analogickým způsobem. Takže i v tomto případě vyjdeme ze vztahu (20.54), ve kterém však vyjádříme hustotou volného elektrického náboje pomocí vztahu (22.18). Poté použijeme stejných úprav i úvah, čímž dospějeme ke vztahu

$$W_p = \frac{1}{2} \iiint_{\substack{\text{Celý} \\ \text{prestor}}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV . \tag{22.75}$$

Odtud pro objemovou hustotu elektrické energie můžeme s použitím vztahu (22.17) psát

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}). \qquad (22.76)$$

 $^{^{11}{\}rm Připomeňme},$ že napětí Uodpovídá číselně práci vykonané na přenesení jednotkového náboje mezi uvažovanými body.

Kapitola 23

Elektrodynamika

Elektrodynamika se zabývá elektrickými a magnetickými poli a interakcemi způsobenými makroskopickými distribucemi elektrických nábojů a proudů. V této kapitole započneme studovat jevy, které nastávají při přemisťování náboje. To znamená, že se budeme zabývat jednak popisem samotného pohybu náboje, jednak budeme studovat jeho příčiny a fyzikální projevy. Od elektrostatiky přejdeme tedy k elektrodynamice.

23.1 Elektrický proud a hustota proudu

V makroskopickém pojetí rozumíme elektrickým proudem uspořádaný pohyb nosičů elektrického náboje (elektrických nábojů). Aby se mohly tyto náboje pohybovat, musí se jednat o náboje volné. S volnými elektrickými náboji se setkáváme v látkách, které nazýváme vodiče, přičemž vodiče mohou mít nositele náboje jednoho znaménka (např. elektrony v kovech) anebo obojích znamének (např. kladné a záporné ionty v elektrolytech či ionty a elektrony v ionizovaných plynech). Vytvořit elektrický proud můžeme i oddělením nosičů elektrického náboje od látky, které se pak mohou pohybovat ve vakuu nebo zředěných plynech. K samovolnému uspořádanému pohybu nosičů elektrického náboje nedochází. Nosiče elektrického náboje v látkách jsou sice v neustálém pohybu, avšak tento pohyb je statisticky neuspořádaný, chaotický, takže z makroskopického pohledu nelze hovořit o pohybu elektrického náboje. Z možných vodičů mají největší význam polykrystalické látky s kovovou vazbou zvané kovy. Kovy se vyznačují tím, že každý jejich mikroskopický monokrystal má pevnou krystalovou mříž sestávající se z kladných jontů. Mezi jonty krystalové mříže se pohybují volné elektrony

Kovy se vyznačují tím, že každý jejich mikroskopický monokrystal má pevnou krystalovou mříž sestávající se z kladných iontů. Mezi ionty krystalové mříže se pohybují volné elektrony rychlostmi, jejichž velikosti i směry jsou statisticky proměnné. Tyto elektrony jsou v neustálém neuspořádaném (chaotickém) pohybu. Střední hodnota vektoru rychlosti všech elektronů je nulová, kdežto střední rychlost určitého elektronu závisí na teplotě daného kovu. Elektrony konají tepelný pohyb, přičemž velikost rychlosti tohoto pohybu je o několik řádů větší než je velikost rychlosti kmitání iontů v krystalové mříži. Horní mez tepelného pohybu volných elektronů je zhruba 10^6 m/s.

Připojením vodiče k vnějšímu zdroji elektrického pole (např. realizované galvanickým článkem), začne původně statisticky neuspořádaný pohyb volných nosičů náboje vytvářet usměrněný pohyb. U kladných nosičů náboje je jejich usměrněný pohyb orientován shodně s elektrickým polem, u záporných nosičů náboje je tento pohyb orientován opačně. Tímto vniká výše zavedený makroskopický elektrický proud. V případě, že vodič obsahuje nosiče náboje obou polarit, budou se tyto nosiče pohybovat současně, ale ve vzájemně opačných směrech. Je zvykem směr proudu definovat souhlasně se směrem uspořádaného pohybu kladných nosičů elektrického náboje. Takto zavedený směr proudu nazýváme technickým směrem proudu a jeho zavedení má historické důvody. Tedy u kovových vodičů je směr proudu volných elektronů opačný než je jeho technický směr.

Elektrický proud značíme zpravidla 1 jako I a zavádíme ho následující úvahou.

Uvažujme orientovanou plochu S, kterou procházejí elektrické náboje. Předpokládejme, že za čas Δt projde touto plochou v kladném směru kladný náboj Δq_+ a současně v záporném směru (proti orientaci uvažované plochy) projde záporný náboj $-\Delta q_-$. Pak celkový náboj Δq , který za čas Δt projde orientovanou plochou S je

$$\Delta q = \Delta q_+ - (-\Delta q_-) = \Delta q_+ + \Delta q_-. \tag{23.1}$$

Z tohoto výsledku je patrné, že průchod záporného náboje orientovanou plochou S v záporném směru je ekvivalentní průchodu kladného náboje v kladném směru. Hodnota průměrného elektrického proudu je dána vztahem

$$\bar{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \,, \tag{23.2}$$

kde Δq představuje množství náboje, které prošlo plochou \boldsymbol{S} za dobu Δt . Okamžitý proud uvažovanou plochou \boldsymbol{S} definujeme vztahem

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \,. \tag{23.3}$$

Odtud můžeme konstatovat, že velikost elektrického proudu udává množství náboje, které proteče uvažovanou plochou za jednotku času.

Jedná-li se o ustálený (stacionární, tj. časově neproměnný) elektrický proud, potom ho lze vyjádřit vztahem

$$I = \frac{q}{t} \,, \tag{23.4}$$

kde q je celkový náboj, který prošel orientovanou plochou S za čas t.

V soustavě SI je jednotkou elektrického proudu ampér a značíme ho A.

Proud I je skalární veličina, která může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot. Procházejíli orientovanou plochou S v kladném směru (ve směru orientace plochy) nosiče kladného náboje, či v opačném směru nosiče záporného náboje, pak proud I nabývá kladné hodnoty. Avšak v případě, že nosiče kladného náboje procházejí orientovanou plochou S v záporném směru, nebo nosiče záporného náboje v kladném směru, potom je proud I záporný.

Elektrický proud I představuje veličinu, která nevystihuje rozložení proudu po uvažované ploše S, ani směr pohybu nosičů elektrických nábojů. Z tohoto důvodu se zavádí vektorová veličina hustota proudu, kterou značíme \boldsymbol{j} . Jestliže si v libovolném místě plochy S zvolíme orientovanou elementární plošku d \boldsymbol{S} (viz obr. 23.1), potom proud touto elementární ploškou je dán vztahem

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = j dS \cos \alpha , \qquad (23.5)$$

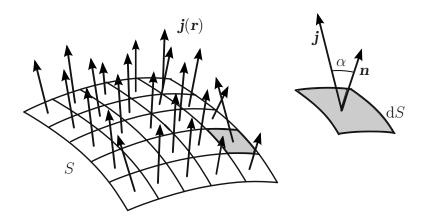
kde α je úhel mezi vektory \boldsymbol{j} a d \boldsymbol{S} .

Z rovnice (23.5) plyne pro velikost hustoty proudu

$$j = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S\cos\alpha} = \frac{|\mathrm{d}I|}{\mathrm{d}S_{\perp}},\tag{23.6}$$

 $dS_{\perp} = |dS \cos \alpha|$ představuje velikost průmětu orientované elementární plošky dS do roviny kolmé k vektoru hustoty j v daném místě. Na základě vztahu (23.6) lze tedy říci, že velikost hustoty proudu je číselně rovna velikosti proudu procházejícího kolmou plochou jednotkové

 $^{^1{\}rm V}$ teorii obvodů se značky I používá pro označení velikosti proudu, který je v čase neměnný, kdežto pro okamžitou hodnotu časově proměnného elektrického proudu se používá značka i.



Obrázek 23.1: Tok proudové hustoty j plochou S.

velikosti.

Pro celkový elektrický proud I plochou S můžeme na základě vztahu (23.5) psát, že

$$I = \iint_{S} \mathbf{j}(\mathbf{r}) d\mathbf{S} . \tag{23.7}$$

Odtud lze konstatovat, že proud I je tokem vektoru hustoty proudu \mathbf{j} plochou S. V případě, že $\mathbf{j} = \mathbf{konst.}$ a plocha S je plochou rovinnou, potom

$$I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} = jS \cos \alpha . \tag{23.8}$$

Podobně jako v mechanice tekutin si můžeme zavést proudové čáry a proudové trubice a pomocí nich popisovat tok (proudění) elektrických nábojů, resp. jejich nosičů. V každém bodě prostoru, kterým prochází elektrický proud, lze stanovit hustotu proudu \boldsymbol{j} a mluvíme tak o proudovém poli. Proudové pole je vektorové pole hustoty proudu \boldsymbol{j} . Vektorové čáry tohoto pole nazýváme proudové čáry. Proudová čára je prostorová křivka vedená tak, že v každém jejím bodě souhlasně orientovaná tečna má směr vektoru proudové hustoty \boldsymbol{j} v tomto bodě. Svazek proudových čar tvoří proudovou trubici.

Vzhledem k tomu, že elektrický proud může téct i po dané ploše, zavádíme tzv. lineární hustotu proudu ξ tímto vztahem

$$dI = \boldsymbol{\xi} \cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{n} \, dl \,, \tag{23.9}$$

kde dl element délky nějaké křivky na proudové ploše, která je protínaná proudem, a vektor \boldsymbol{n} je jednotkovým normálovým vektorem k dané křivce v uvažovaném bodě. Abychom si ukázali, jak souvisí hustota proudu s veličinami charakterizujícími uspořádaný pohyb nosičů elektrického náboje, budeme nejprve předpokládat, že proud je způsoben uspořádaným pohybem kladných nábojů, které jsou v blízkém okolí orientované elementární plošky d \boldsymbol{S} rozloženy s objemovou hustotou $\rho_+ = nq_0$, kde n je koncentrace nosičů náboje a $q_0 > 0$ je velikost náboje, který nesou (předpokládáme, že nosiče nesou stejný náboj). Uvažované nosiče elektrického náboje procházejí elementární ploškou rychlostí \boldsymbol{v}_+ (jedná se o střední rychlost volných nosičů náboje). Za dobu dt projdou elementární ploškou d \boldsymbol{S} všechny náboje z objemu d $V = \boldsymbol{v}_+ \cdot d\boldsymbol{S} dt = v_+ d\boldsymbol{S} dt \cos \alpha$, jejichž velikost odpovídá náboji

$$dq = \rho_+ dV = \rho_+ v_+ dS dt \cos \alpha. \tag{23.10}$$

Proud, který projde elementem plochy dS je tedy podle vztahu (23.3)

$$dI = \frac{dq}{dt} = \rho_{+} \mathbf{v}_{+} \cdot d\mathbf{S} = \rho_{+} v_{+} dS \cos \alpha . \qquad (23.11)$$

Porovnáním se vztahem (23.5) dostaneme, že²

$$\mathbf{j}_{+} = \rho_{+} \mathbf{v}_{+} = nq_{0} \mathbf{v}_{+} . \tag{23.12}$$

Bude-li proud dI zapříčiněn uspořádaným pohybem nosičů záporného elektrického náboje, které budou v okolí elementární plošky dS rozloženy s objemovou hustotou $\rho_- = -nq_0$, potom analogickým způsobem jako v případě nosičů kladného náboje dospějeme ke vztahům

$$dq = \rho_- dV = \rho_- v_- dS dt \cos \alpha , \qquad (23.13)$$

$$dI = \frac{dq}{dt} = \rho_{-} \mathbf{v}_{-} \cdot d\mathbf{S} = \rho_{-} v_{-} dS \cos \alpha , \qquad (23.14)$$

kde \mathbf{v}_{-} je rychlost, kterou uvažované nosiče procházejí danou elementární ploškou. Opět porovnáním se vztahem (23.5) dostaneme

$$\mathbf{j}_{-} = \rho_{-}\mathbf{v}_{-} = -nq_{0}\mathbf{v}_{-} . \tag{23.15}$$

Protože objemová hustota ρ_{-} je záporná a vektor rychlosti \mathbf{v}_{-} má opačnou orientaci jak \mathbf{v}_{+} , pak je zřejmé, že $\mathbf{j}_{-} = \rho_{-}\mathbf{v}_{-} = -nq_{0}\mathbf{v}_{-}$ má stejnou orientaci jako vektor \mathbf{j}_{+} . Odtud plyne, že vektor hustoty proudu má vždy souhlasnou orientaci jako vektor rychlosti kladných nosičů elektrických nábojů.

Bude-li proud dI způsoben současným uspořádaným pohybem kladných i záporných nábojů, pak pro hustotu proudu bude platit, že

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{+} + \mathbf{j}_{-} = \rho_{+} \mathbf{v}_{+} + \rho_{-} \mathbf{v}_{-} = \rho_{+} v_{+} \mathbf{v}_{+}^{0} + \rho_{-} v_{-} \mathbf{v}_{-}^{0} = nq_{0} v_{+} \mathbf{v}_{+}^{0} - nq_{0} v_{-} \mathbf{v}_{-}^{0} = nq_{0} (v_{+} + v_{-}) \mathbf{v}_{+}^{0},$$
(23.16)

kde \mathbf{v}_{+}^{0} a \mathbf{v}_{-}^{0} jsou odpovídající jednotkové vektory.

Výsledek (23.16) je možné zobecnit pro případ, kdy je proud vytvářen více druhy nábojů velikosti $q_{0\alpha}$ s různými koncentracemi n_{α} a různou rychlostí \mathbf{v}_{α} . V takovém případě můžeme pro objemovou hustotu elektrického náboje a hustotu proudu psát, že

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{0\alpha} n_{\alpha} , \qquad (23.17)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} q_{0\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \ . \tag{23.18}$$

Ze vztahu (23.17) je zřejmé, že může nastat případ, kdy celková hustota náboje bude nulová tím, že hustota kladných a záporných nábojů bude stejná. Avšak hustota proudu může být v takovém případě nenulová, jestliže se nosiče kladných a záporných nábojů pohybují různými uspořádanými rychlostmi. Takový případ můžeme pozorovat např. u kovů, u kterých hustota kladných iontů krystalové mříže je stejná jako hustota pohybujících se volných elektronů, avšak rychlosti pohybů volných elektronů a iontů krystalové mříže jsou různé.

Střední rychlost pohybu usměrněných volných nosičů elektrického náboje vyvolaná vnějším polem se zpravidla nazývá driftová rychlost. V následující části kapitoly si určíme velikost driftové rychlosti pro nejběžnější kovový vodič, kterým je měď (Cu). Nechť měděný vodič má konstantní průřez S a prochází jím proud I.

Jeden mol mědi obsahuje $N_A = 6,0221 \cdot 10^{23}$ atomů, z nichž každý má jeden volný (valenční) elektron. Tedy počet volných elektronů v jednotkovém objemu je

$$n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{sN_A}{M_m} \,, \tag{23.19}$$

²Podobně lze postupovat pro lineární hustotu proudu $\boldsymbol{\xi} = \sigma_+ \mathbf{v}_+$, kde σ_+ je plošná hustota nosičů kladného elektrického náboje.

kde V_m je molární objem, M_m je molární hmotnost a s je hustota mědi. Potom objemová hustota volných elektronů je

$$\rho_{-} = -nq_0 = -ne = -\frac{esN_A}{M_m} \,. \tag{23.20}$$

Dále použijeme vztah (23.14) k výpočtu proudu, který projde plochou S, která je kolmá ke směru pohybu volných elektronů ($\alpha = 0$)

$$I = \rho_{-}v_{-} \iint_{S} dS = \rho_{-}v_{-}S .$$
 (23.21)

Z rovnosti (23.21) určíme driftovou rychlost v_- volných elektronů, přičemž současně použijeme vztahu (23.20)

$$v_{-} = \left| \frac{I}{\rho_{-}S} \right| = \left| -\frac{IM_m}{esN_AS} \right| . \tag{23.22}$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu hustotu mědi $s=8930~{\rm kg.m^{-3}}$, molární hmotnost $M_m=63,54\cdot 10^{-3}~{\rm kg.mol^{-1}}$, elementární náboj $e=1,602\cdot 10^{-19}~{\rm C}$, průřez $S=1\cdot 10^{-6}~{\rm m^2}$ a proud $I=5~{\rm A}$, tak pro driftovou rychlost volných elektronů dostaneme, že $v_-=0,369~{\rm mm.s^{-1}}$. Z výsledku je zřejmé, že driftová rychlost související s proudy běžné velikosti v drátových vodičích je nesmírně malá. Kdybychom dosadili výše uvedené hodnoty do vztahu pro objemovou hustotu elektrického náboje (23.20), tak dostaneme, že $\rho_-=-1,36\cdot 10^{10}~{\rm C.m^{-3}}$. Z tohoto výsledku vidíme, že celkový náboj volných elektronů v jednotkovém objemu mědi je značný (i počet volných elektronů), a tedy potřebná driftová rychlost pro vyvolání proudů běžné technické velikosti je velmi malá.

Pro srovnání můžeme rychlost tepelného pohybu jednotlivého volného elektronu odhadnout ze vztahu³

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m_e v_e^2 \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \,,$$
 (23.23)

kde $k=1,38\cdot 10^{-23}~{\rm K.J^{-1}}$ je Boltzmannova konstanta, $m_e=9,1\cdot 10^{-31}~{\rm kg}$ je hmotnost elektronu a T je termodynamická teplota. Dosadíme-li uvedené hodnoty do vztahu (23.23), pak při pokojové teplotě dostaneme, že $v_e\approx 10^5~{\rm m.s^{-1}}$.

Jak již bylo naznačeno v úvodu této kapitoly, proudy můžeme obecně dělit na nestacio-nární, tj. proudy měnící se libovolně v čase, a stacionární, které představují ustálené, tj. s časem se neměnící, proudění elektrických nábojů. Dále je možné rozlišovat proudy střídavé, které mění v čase svůj směr, a stejnosměrné, které svůj směr nemění. Proudy můžeme také dělit podle charakteru pohybu elektrických nábojů. V takovém případě rozlišujeme následující elektrické proudy:

1. proud volných nosičů náboje

- (a) kondukční (vodivostní) proud jedná se o proud volných nosičů elektrického náboje (např. elektronů nebo iontů) uvnitř makroskopického tělesa (vodiče) ve skupenství pevném, kapalném a plynném.
- (b) konvekční proud jedná se o proud volných nosičů elektrického náboje (např. elektronů, protonů či atomových jader) ve vakuu nebo o pohyb elektrického náboje

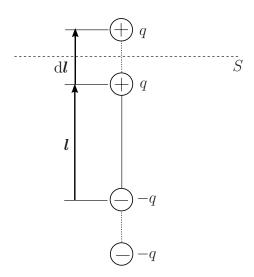
³Tento vztah je znám z kinetické teorie plynů. Vzhledem k tomu, že v jistém přiblížení můžeme na volné elektrony pohlížet jako na elektronový plyn, pak je možné pro odhad rychlosti tepelného pohybu použít tento vztah.

zprostředkovaný makroskopickými částicemi (např. nabité částice prachu, dešťové kapky, sněhové vločky apod.) či o pohyb elektrického náboje zprostředkovaný nabitými tělesy (např. pás Van de Graafova generátoru). Tento proud se nepodřizuje Ohmovu zákonu.

2. proud vázaných nosičů náboje

(a) polarizační proud - tento proud je vyvolán deformací molekulárních a atomárních dipólů vlivem elektrického pole. Díky této skutečnosti se mění vzdálenost mezi kladnými a zápornými náboji dipólů. Bude-li se vlivem časově proměnného elektrického pole střídavě smršťovat a roztahovat elektrický dipól, potom rovinnou plochou S bude procházet kladný náboj dipólu⁴, viz obr. 23.2, takže uvažovanou plochou S začne protékat střídavý elektrický proud, který nazýváme proudem polarizačním.

Pro hustotu polarizačního proudu můžeme psát, že



Obrázek 23.2: Deformace elektrického dipólu.

$$\mathbf{j}_p(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{v} = nq \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = n \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$
 (23.24)

kde n je koncentrace dipólů, resp. kladných nábojů dipólů, v blízkém okolí bodu o polohovém vektoru $\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{p}$ je jednotlivý elektrický dipólový moment a \boldsymbol{P} je vektor elektrické polarizace.

Je zřejmé, že díky skutečnosti, že nosiče elektrického náboje jsou vázané, polarizační proud musí být principiálně časově proměnný, tj. neexistuje stacionární polarizační proud.

- (b) magnetizační proud je vyvolán mikroskopickými smyčkovými proudy v atomech a molekulách magnetických látek.
- 3. *Maxwellův proud* jedná se o časově proměnný proud ve vakuu, u kterého sice nedochází k přenášení elektrického náboje, ale proud je zprostředkován časově proměnným elektrickým polem. Maxwellův proud umožní uzavřít střídavý elektrický proud v obvodu s kondenzátorem bez dielektrika.

⁴Můžeme samozřejmě zvolit rovinou plochu tak, aby jí procházel záporný náboj dipólu. Záporný náboj pak bude procházet rovinnou plochou opačným směrem než by procházel kladný náboj, ale vzhledem k opačné polaritě náboje získáme stejný výsledek.

23.2 Rovnice kontinuity elektrického proudu

Rovnice kontinuity elektrického proudu je matematickým vyjádřením zákona zachování elektrického náboje.

Uvažujme objem V ohraničený uzavřenou plochou S. Vzhledem k tomu, že se elektrický náboj za všech okolností absolutně přesně zachovává, tedy vytéká-li z uvažovaného objemu proud I, není možno jinak, než že v každém okamžiku stejnou měrou ubývá elektrický náboj v tomto objemu. Matematicky lze tento závěr formulovat jako

$$I = \iint_{S} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{V} \rho \, dV = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \,. \tag{23.25}$$

Takže pro rovnici kontinuity v integrálním tvaru můžeme psát, že

$$\iint_{S} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{V} \rho \, \mathrm{d}V . \tag{23.26}$$

Připomeňme, že jednotlivé elementární plochy na uvažované uzavřené ploše jsou orientovány ve smyslu vnější normály k uzavřené ploše v daném místě. Z tohoto důvodu proud vstupující do uzavřené plochy je záporný, kdežto proud vystupující z uzavřené plochy je kladný. Aplikujeme-li na plošný integrál v uvedené rovnici kontinuity Gaussův teorém, potom dostaneme

$$\iiint_{V} \nabla \cdot \mathbf{j} \, dV = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{V} \rho \, dV . \qquad (23.27)$$

Pro vyjádření rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru předpokládáme, že se s časem objem tělesa protékaného proudem nemění, neboli při derivaci na pravé straně rovnice (23.27) předpokládáme časově neproměnnou oblast integrace V. Tímto předpokladem můžeme provést následující úpravu rovnice (23.27)

$$\iiint\limits_{V} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \, dV = - \iiint\limits_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV , \qquad (23.28)$$

tedy

$$\iiint_{V} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \right) dV = 0.$$
 (23.29)

Jelikož tato rovnice musí být splněna pro libovolný objem, potom musí platit, že

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \ . \tag{23.30}$$

Tato rovnice představuje rovnici kontinuity v diferenciálním tvaru.

Rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru nám v souladu se zkušeností říká, že elektrický náboj se zachovává i v libovolné části uvažovaného objemu (jinak by v některých místech teoreticky mohl elektrický náboj samovolně vznikat či zanikat, přestože by se v celém objemu zachovával). Rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru nám také vyjadřuje vztah mezi objemovou hustotou náboje $\rho(\mathbf{r},t)$ a proudovou hustotou $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$.

Obecně rovnici kontinuity lze interpretovat takto:

Elektrický náboj se zachovává nejen v celém objemu, nýbrž i v každém jeho místě a v každém časovém okamžiku.

23.3 Stacionární elektrické pole

V elektrostatice jsme předpokládali, že elektrické náboje jsou statické (nehybné). Díky této skutečnosti všechny fyzikální veličiny používané pro popis elektrostatického pole a jeho účinků jsou nezávislé na čase. Z předchozí kapitoly 23.1 však víme, že volné nosiče konají neuspořádaný tepelný pohyb, který bude mít nenulovou stejnosměrnou složku. Tuto složku považujeme za uspořádaný pohyb ve směru pole. Každopádně odtud vyplývá, že z mikroskopického pohledu je distribuce elektrických nábojů časově nestálá a tedy časově závislá. Z makroskopického pohledu, který se zaměřuje na střední hodnoty příslušných veličin, se ztrácí některé charakteristické vlastnosti odehrávající se v mikroskopickém měřítku. Fyzikální veličiny odrážející makroskopický pohled budeme nazývat makroskopickými veličinami. Stacionárním elektrickým polem budeme rozumět takové elektrické pole, k jehož popisu vystačíme s makroskopickými veličinami, které explicitně nezávisí na čase. V takovém případě je objemová hustota náboje pouze funkcí polohy $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Tedy zdrojem stacionárního elektrického pole jsou stacionárně rozložené náboje. Ve srovnání s elektrostatikou je však situace obecnější v tom, že zatímco některé náboje mohou být v klidu, jiné konají makroskopický pohyb, a realizují tedy stacionární elektrický proud.

Experimentální zkušenost ukazuje, že **elektrické stacionární pole je** (podobně jako pole elektrostatické) **potenciální a konzervativní**, tedy platí Maxwellovy rovnice ve stejném tvaru jako pro elektrostatické pole, tj. rovnice (20.5) a (20.43). Byť je po formální stránce tato soustava Maxwellových rovnic shodná, jsou zde však dva zásadní rozdíly:

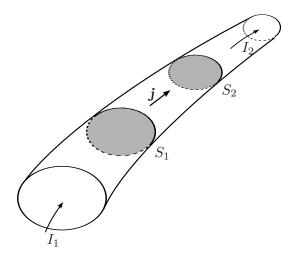
- 1. Uvnitř vodičů (protékaných stacionárním proudem) není stacionární elektrické pole nulové a na povrchu vodičů není potenciál konstantní.
- 2. Z kapitoly 23.1 víme, že elektrický proud může procházet vodičem i v případě, že hustota elektrického náboje v objemu vodiče je nulová. Uvažujme, že právě takováto situace nastala v případě dvou vodičů protékaných stacionárním proudem. Z pohledu elektrostatiky tyto dva vodiče nemohou na sebe silově působit. Avšak provedeme-li experiment, s jehož pomocí budeme sledovat vzájemné působení takovýchto vodičů, tak zjistíme, že tyto vodiče na sebe silově působí. Tuto sílu nazýváme silou magnetickou a její teoretické zdůvodnění dává speciální teorie relativity. Popisu této síly je věnována kapitola 24.3.

Na základě výše uvedeného můžeme konstatovat, že se volné elektrické náboje pohybují ustáleným způsobem a vytvářejí stacionární elektrický proud. Vzhledem k tomu, že objemová hustota elektrického náboje nezávisí explicitně na čase, tak se nám redukují rovnice kontinuity (23.26) a (23.30) na následující tvar

$$\iint_{S} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 , \qquad (23.31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \tag{23.32}$$

Rovnice (23.31) a (23.32) představují rovnice kontinuity pro stacionární elektrický proud. Z rovnice (23.32) plyne, že v případě stacionárního elektrického pole je vektorové pole proudové hustoty $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ polem solenoidálním, takže proudové čáry jsou uzavřené orientované křivky. Rovnice (23.31) nám, s ohledem na vztah (23.5), vyjadřuje, že celkový proud, který proteče uzavřenou plochou, musí být nulový. Neboli můžeme konstatovat, že náboj, který vstoupí do uzavřené plochy, se musí rovnat náboji, který z této plochy vystoupí. Jinými slovy, co do uzavřené plochy vteče, to z ní i vyteče, takže se elektrický náboj nemůže v objemu vymezeném touto uzavřenou plochou hromadit.



Obrázek 23.3: Proudová trubice proměnného průřezu.

Na obrázku 23.3 je zachycena proudová trubice proměnného průřezu, která může odpovídat případu kovového vodiče umístěného v elektricky nevodivém prostředí (např. vzduchu). Předpokládejme uzavřenou plochu S, která je tvořena plochami S_1 , S_2 a plochou odpovídající části pláště uvažované proudové trubice. Vzhledem k tomu, že proudové čáry nemohou protínat plášť proudové trubice, je možné napsat pro uvažovaný případ rovnici kontinuity (23.31) ve tvaru

$$\iint_{S} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$
 (23.33)

Označíme-li I_1 proud, který vstupuje plochou S_1 , tj.

$$I_1 = -\iint_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \tag{23.34}$$

a I_2 , který vystupuje plochou S_2 , tj

$$I_2 = \iint_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} , \qquad (23.35)$$

dostáváme s ohledem na vztah (23.33), že

$$-I_1 + I_2 = 0$$
 neboli $I_1 = I_2$. (23.36)

Odtud je patrné, že při stacionárním stejnosměrném proudu protéká každým průřezem vodiče stejný proud.

23.3.1 Ohmův zákon

Uvažujme homogenní kovový vodič, který umístíme do vnějšího stacionárního elektrického pole \boldsymbol{E} . Volný elektron koná ve vodiči chaotický tepelný pohyb, avšak vlivem vnějšího stacionárního elektrického pole bude na tento elektron působit síla $\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$, čímž získá ještě jistou složku rychlosti, proti směru vnějšího pole \boldsymbol{E} . Tímto dochází k usměrněnému driftovému pohybu a tedy vzniku elektrického proudu (kondukční elektrický proud). Volný elektron ve vodiči urazí, než se srazí s iontem krystalové mříže⁵, tzv. volnou dráhu λ , přičemž průměrná doba mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami je τ . Po tuto dobu bude volný elektron vnějším polem urychlován. V okamžiku srážky bude průměrná hybnost volného elektronu $m_e \boldsymbol{v}_-$, kde

 $^{^5{\}rm Např.}$ u mědi dochází v průměru k $10^{14}~{\rm srážkám}$ za sekundu.

 ${m v}_-$ značí driftovou rychlost elektronů a m_e jejich hmotnost. Tuto hybnost elektron získal vlivem působení vnější síly ${m F}=-e{m E}$ po dobu τ . Popsanou situaci můžeme formálně zapsat jako

$$m_e \mathbf{v}_- = -e \mathbf{E} \tau \ . \tag{23.37}$$

Odtud dostáváme, že

$$\mathbf{v}_{-} = -\frac{e\mathbf{E}\tau}{m_e} \ . \tag{23.38}$$

Tento vztah pro driftovou rychlost přepíšeme

$$\mathbf{v}_{-} = -k_e \mathbf{E} \,, \tag{23.39}$$

kde

$$k_e = \frac{e\tau}{m_e} \tag{23.40}$$

nazýváme pohyblivost volných elektronů v daném vodivém prostředí.

Vztah (23.39) nám říká, že driftová rychlost elektronu v kovovém vodiči je úměrná stacionární intenzitě vnějšího elektrického pole a konstantou úměrnosti je pohyblivost volných elektronů. Je-li počet volných elektronů v objemové jednotce kovu n, potom objemová hustota náboje je $\rho = -en$. Použijeme-li vztah (23.15), pak s ohledem na vztah (23.39) můžeme psát

$$\mathbf{j} = \rho_{-}\mathbf{v}_{-} = -en\mathbf{v}_{-} = -ne(-k_{e}\mathbf{E}) = enk_{e}\mathbf{E}. \tag{23.41}$$

Veličina $\gamma = enk_e$ závisí na materiálu vodiče a jeho fyzikálním stavu (zejména teplotě). Tato veličina se nazývá *měrná vodivost* látky (*konduktivita*), její jednotkou je *siemens na metr* S.m⁻¹. Protože dobu τ nelze přímo měřit, určuje se měrná vodivost látky experimentálně. Převrácená hodnota měrné vodivosti se nazývá *měrný odpor* a značíme ji ρ_R , jednotkou je *ohm metr* Ω .m. Tedy vztah (23.41) lze přepsat do tvaru

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \gamma \mathbf{E}(\mathbf{r}) , \qquad (23.42)$$

příp.

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho_R} \mathbf{E}(\mathbf{r}) . \tag{23.43}$$

Rovnice (23.42) vyjadřuje tzv. Ohmův zákon v diferenciálním tvaru⁶. Výraz (23.42) se vztahuje na určité místo uvažovaného vodivého prostředí a říká nám, že proudová hustota v určitém bodě vodivého prostředí je přímo úměrná intenzitě elektrického pole v tomto bodě. Ze vztahu (23.42) plyne, že ve vodiči, kterým prochází elektrický proud, musí být intenzita elektrického pole vždy různá od nuly.

U některých vodičů závisí měrná vodivost γ také na intenzitě přiloženého elektrického pole. V takovémto případě není hustota proudu přímo úměrná intenzitě \boldsymbol{E} . Takovéto vodiče nazýváme $neline\acute{a}rn\acute{i}$. Vodiče, u kterých měrná vodivost nezávisí na intenzitě přiloženého elektrického pole, nazýváme $line\acute{a}rn\acute{i}$.

Pro vedení elektrického proudu v elektrolytech lze dospět k vyjádření Ohmova zákona rovněž ve tvaru (23.42). Avšak v tomto případě platnost Ohmova zákona je omezena pouze na slabá elektrická pole.

Z Ohmova zákona v diferenciálním tvaru, který je reprezentován vztahem (23.42), vyplývá, že proudová hustota a elektrická intenzita mají stejný směr. Vodiče, u kterých má hustota proudu stejný směr s intenzitou přiloženého elektrického pole, nazýváme *izotropní vodiče*. Nejedná-li se o vodič izotropní, pak hovoříme o *anizotropním vodiči*. Pro anizotropní vodiče platí, že vektory **j** a **E** nejsou obecně kolineární. U lineárních anizotropních vodičů je měrná

⁶Toto označení není příliš výstižné, protože vlastně o diferenciální tvar nejde.

vodivost symetrickým tenzorem druhého řádu $\{\gamma\}$. V takovémto případě můžeme Ohmův zákon v diferenciálním tvaru napsat jako

$$j_i = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij} E_j , \quad i = 1, 2, 3 .$$
 (23.44)

V případě homogenních vodičů platí Ohmův zákon až do velmi vysokých hodnot elektrického pole. U nehomogenních vodičů nelze zpravidla popsat vedení proudu jen elektrickou vodivostí, ale je potřeba vzít v úvahu elektromotorická napětí (viz následující kapitola) jako jsou kontaktní potenciály, Seebeckovo termoelektrické napětí, Thomsonovo elektromotorické napětí.

Měrný odpor, resp. měrná vodivost, všech vodivých látek závisí na teplotě. Obecně řečeno, se vzrůstající teplotou elektrická vodivost klesá, tj. měrný odpor roste. V okolí pokojových teplot je možné s dobrou přesností vyjádřit měrný odpor jako lineární funkci teploty. V širším oboru teplot a při větších nárocích na přesnost, je možné teplotní závislost měrného odporu aproximovat polynomem druhého stupně. Označíme-li $\rho_R(t)$ měrný odpor při teplotě t v Celsiově stupnici, $\rho_{R,0}$ měrný odpor při teplotě 0° C, platí

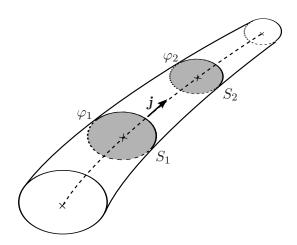
$$\rho_R(t) = \rho_{R,0}(1 + \alpha t + \beta t^2) , \qquad (23.45)$$

kde α a β je lineární a kvadratický teplotní součinitel odporu kovů, které je nutné pro jednotlivé kovy určit měřením.

Mějme proudovou trubici proměnného průřezu, viz obrázek 23.4. Uvažujme část této proudové trubice vymezenou ekvipotenciálními plochami S_1 a S_2 , pro jejichž potenciály φ_1 , φ_2 platí $\varphi_1 > \varphi_2$. Dále budeme předpokládat izotropní prostředí, a že integrační dráha je totožná s proudovou čárou. Mezi uvažovanými plochami je tedy napětí U, pro které můžeme psát

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_1^2 (\nabla \varphi) \cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^2 \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_1^2 E d\boldsymbol{l} = \int_1^2 \frac{1}{\gamma} j d\boldsymbol{l} = \int_1^2 \frac{d\boldsymbol{I}}{\gamma dS} d\boldsymbol{l}.$$
(23.46)

Jelikož proud dI je podél trubice konstantní⁷, můžeme psát



Obrázek 23.4: Kovový vodič proměnného průřezu.

$$U = \mathrm{d}I \int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}l}{\gamma(l)\mathrm{d}S(l)} . \tag{23.47}$$

⁷Připomeňme, že ve stacionárním elektrickém poli je I = konst.

Odtud

$$dI = \frac{U}{\int_{1}^{2} \frac{dl}{\gamma(l)dS(l)}}.$$
 (23.48)

Omezíme-li se na případ homogenního přímého vodiče se stálým průřezem, můžeme psát

$$dI = \frac{U}{\frac{1}{\gamma dS} \int_{1}^{2} dl} = U \frac{\gamma}{l} dS. \qquad (23.49)$$

Integrací přes plochu rovnající se průřezu vodiče dospějeme ke vztahu

$$I = U \frac{\gamma}{l} \iint_{S} dS = U \frac{\gamma S}{l} . \tag{23.50}$$

Odtud si zavedeme veličinu *elektrický odpor* odpovídající úseku vodiče délky *l*

$$R = \frac{l}{\gamma S} = \frac{\rho_R l}{S} \,, \tag{23.51}$$

jehož fyzikální jednotkou je ohm mající značku Ω . Jeho převrácenou hodnotu, tedy vodivost, značíme G a měříme ji v jednotkách siemens, pro které používáme značku S.

Elektrický odpor zavedený vztahem (23.51) je elektrický odpor úseku kovového vodiče mezi uvažovanými ekvipotenciálními plochami S_1 a S_2 .

Pomocí vztahu (23.51) je možné přepsat rovnost (23.47) do tvaru

$$U = IR. (23.52)$$

Tento vztah vyjadřuje Ohmův zákon v integrálním tvaru.

23.3.2 Relaxační doba

V této kapitole se budeme zabývat rozptylem volného elektrického náboje ve vodičích. Za tímto účelem nejprve dosadíme do rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru (23.30) za proudovou hustotu z Ohmova zákona (23.42)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\gamma \nabla \cdot \boldsymbol{E} \,. \tag{23.53}$$

Za divergenci intenzity elektrického pole dosadíme z Gaussova zákona v diferenciálním tvaru (20.9)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} \rho \ . \tag{23.54}$$

Řešením této rovnice metodou separace proměnných dostaneme

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},0) \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}t\right) , \qquad (23.55)$$

Ze vztahu (23.55) lze vidět, že distribuce volného elektrického náboje ponechaného ve vodiči bez vnějšího elektrického pole velmi rychle dospěje (exponenciálně) k téměř nulové hodnotě. Časová konstanta $\tau = \gamma/\varepsilon$ se nazývá $relaxační\ doba$ a je pro dobré vodiče zanedbatelně malá (např. pro měď dosahuje relaxační doba hodnoty 10^{-19} s). Díky této skutečnosti můžeme pokládat objemovou hustotu elektrického náboje ve vodičích za nulovou.

23.3.3 Jouleův zákon

Uvažujme vodivé prostředí, ve kterém se vlivem vnějšího elektrického pole \boldsymbol{E} pohybují náboje driftovou rychlostí \boldsymbol{v} . Jestliže se ve vodivém prostředí nachází volný náboj s objemovou hustotou ρ , potom síla působící na náboje v elementu objemu dV je dána vztahem

$$d\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} \, dV \ . \tag{23.56}$$

Označíme-li orientovaný element dráhy, který urazí volný náboj za element času dt, jako dl = vdt, můžeme vyjádřit element práce⁸ W, kterou vnější elektrické pole vykoná, vztahem

$$dW = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \, dV \, dt = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \, dV \, dt \,, \tag{23.57}$$

 $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$.

Pro element výkonu můžeme psát

$$dP = p dV = \frac{dW}{dt} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV , \qquad (23.58)$$

kde p je objemová hustota výkonu. Z rovnosti (23.58) plyne, že

$$p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} . \tag{23.59}$$

Tento vztah představuje Jouleův zákon v diferenciálním tvaru, který nám říká, že výkon dodaný jednotkovému objemu elektrickým polem se rovná skalárnímu součinu proudové hustoty a intenzity tohoto pole.

Celkový dodaný výkon související s objemem V je dán vztahem

$$P = \iiint_{V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, \mathrm{d}V \,, \tag{23.60}$$

který představuje Jouleův zákon v integrálním tvaru.

V případě, že se pohyb volných nábojů děje v rámci vodivého prostředí, dochází vlivem srážek nosičů tohoto náboje k disipaci výkonu dodaného elektrickým polem na teplo, které nazýváme *Jouleovo teplo*. Pro vodiče, pro které platí Ohmův zákon (23.42), který použijeme při úpravě Jouleova zákona v diferenciálním tvaru (23.59)

$$p = \gamma E^2 . (23.61)$$

Pomocí tohoto vztahu je možné pro vodiče upravit i vztah vyjadřující Jouleovo teplo v integrálním tvaru (23.60)

$$P = \iiint_{V} \gamma E^2 \, \mathrm{d}V \ . \tag{23.62}$$

Budeme-li uvažovat homogenní vodič o konstantním průřezu S a délce L, mezi jehož konci je napětí U, můžeme velikost intenzity elektrického pole vyjádřit jako

$$E = \frac{U}{L} \ .$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (23.62)

$$P = \iiint_{V} \gamma E^{2} dV = \iiint_{V} \gamma \left(\frac{U}{L}\right)^{2} dV = \gamma \left(\frac{U}{L}\right)^{2} V = \gamma \left(\frac{U}{L}\right)^{2} LS = \frac{\gamma S}{L} U^{2}.$$
 (23.63)

 $^{^8\}mathrm{V}$ rámci kapitol věnovaných stacionárnímu či nestacionárnímu elektrickému a magnetickému poli budeme značit práci jako W, protože značka A je rezervována pro označení magnetického vektorového potenciálu.

S ohledem na vztah (23.51) můžeme tento výsledek vyjádřit vztahem

$$P = \frac{U^2}{R} \,, \tag{23.64}$$

který pomocí Ohmova zákona (23.52) přepíšeme do tvaru

$$P = R I^2 . (23.65)$$

Tento vztah nám říká, že ve vodiči protékaném proudem vzniká teplo (Jouleovo teplo), jehož velikost je dána součinem jeho odporu a kvadrátu velikosti tohoto proudu. Pomocí Ohmova zákona je možné přepsat vztah (23.65) jako⁹

$$P = UI. (23.66)$$

23.3.4 Elektromotorické napětí

Doposud jsme se zabývali vlastnostmi a projevy stacionárního proudu ve vodičích, přičemž jsme se nestarali o podmínky, za kterých může stacionární proud existovat. Vzhledem k tomu, že podmínky existence stacionárních proudů představují významný problém elektrodynamiky, budeme se v této kapitole věnovat právě této otázce.

Z rovnice kontinuity pro stacionární proud (23.32) plyne, že proudové čáry stacionárního proudu v soustavách konečných rozměrů jsou vždy uzavřené křivky. Z tohoto důvodu se nositelé volného náboje, realizující tento proud, musí pohybovat po uzavřených drahách. S ohledem na platnost Maxwellovy rovnice (20.43) je zřejmé, že stacionární elektrické pole je polem potenciálovým (konzervativním). Z předchozí kapitoly víme, že dochází k disipaci dodaného výkonu stacionárním elektrickým polem, jestliže prochází vodičem stacionární elektrický proud. Odtud je zřejmé, že stacionární elektrické pole, jakožto pole konzervativní, nemůže vyvolat stacionární proud. Musíme tedy předpokládat existenci jiných, a to nepotenciálových silových polí, které působí na nositele proudu. Použijeme-li analogie z mechaniky, potom můžeme říci, že na nosiče elektrického náboje působí v reálném vodiči kromě konzervativní elektrické síly i síly disipativní (nekonzervativní), jejichž výkon je roven Jouleovu teplu. Aby docházelo k eliminaci disipace výkonu dodaného elektrickým polem, je nutné použít síly, které budou přesně kompenzovat vliv disipativních sil, aby proudovou smyčkou protékal stálý (stacionární) elektrický proud. Tyto síly budeme nazývat elektromotorické síly nebo vtištěné sily a budeme je značit \mathbf{F}^* . Vzhledem k tomu, že elektromotorické síly mají opačný účinek než síly disipativní, je zřejmé, že se bude rovněž jednat o síly nekonzervativní.

Výše popsaná situace vedla k zavedení elektromotorické síly, která zajišťuje existenci stacionárního elektrického proudu. K zavedení elektromotorické síly lze použít i obrázku 23.5. Na tomto obrázku je zachycena proudová čára C, po které se pohybuje kladný jednotkový náboj. V souvislosti s tímto pohybem je na tomto obrázku i znázorněna změna potenciálu. Je vidět, že kladný náboj se pohybuje ve směru klesajícího potenciálu (záporný náboj by se pohyboval ve směru stoupajícího potenciálu). Je-li okruh uzavřený, musí kladně nabité náboje vystoupit do místa s nejvyšším potenciálem, takže se musí pohybovat proti elektrostatickým silám. Jinými slovy, na překonání těchto elektrostatických sil je potřeba vykonat práci. Tuto práci však nemůže konat stacionární elektrické pole, protože se jedná, jak již bylo uvedeno, o pole konzervativní (potenciálové). Na základě výše uvedeného je tedy zřejmé, že tuto práci vykonají elektromotorické síly.

Předpokládejme, že elektromotorická síla je úměrná náboji q, jehož přenesení zajišťuje. Potom je možné v analogii s elektrickou intenzitou zavést veličinu $\mathbf{E}^* = \mathbf{F}^*/q$, kterou budeme

⁹Nalezené vztahy (23.64) - (23.66) platí i pro vodiče proměnného průřezu.

nazývat elektromotorickou intenzitou nebo vtištěnou intenzitou.

Elektromotorické síly musí přitom konat práci na úkor nějaké energie. Následkem toho vzniká trvalý potenciálový rozdíl. Velikost práce proti elektrostatickým silám, kterou vykonají elektromotorické síly při přemísťování jednotkového náboje, je číselně rovna elektromotorickému napětí (emn), které budeme značit \mathcal{E} . Pro emn musí platit

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} \neq 0.$$
 (23.67)

Odtud můžeme také konstatovat, že jakákoliv síla mající za následek, že

$$\oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \neq 0, \qquad (23.68)$$

je elektromotorickou silou.

Energii, na jejíž úkor konají elektromotorické síly práci proti elektrostatickým silám, dodává zdroj elektromotorického napětí (představuje zpravidla část proudové smyčky, ve které $E^* \neq 0$, přičemž ve zbývající části proudové smyčky je $E^* = 0$). Princip činnosti zdroje emn je velmi jednoduchý. Z každého prostředí (pevného, kapalného i plynného) můžeme vyrobit zdroj emn, jestliže najdeme způsob, jak trvale separovat (oddělit) od sebe kladný a záporný náboj. Zdrojem emn je tedy každé zařízení, jehož energie (např. mechanická, chemická, tepelná) je využívána k silovému působení na nosiče elektrického náboje za účelem vytvoření elektrického proudu. Běžnými zdroji emn jsou galvanické, palivové, fotovoltaické či termoelektrické články. Nejvýznamnějším zdrojem emn jsou však elektrické generátory.

Úbytek napětí, související s pohybem kladného náboje po křivce C na obr. 23.5, je dán vztahem

$$-\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} . \tag{23.69}$$

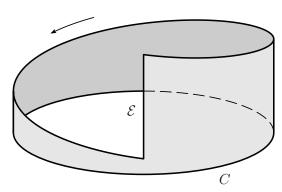
Proti tomuto úbytku napětí působí zdroj emn, takže v rovnováze platí rovnice

$$\mathcal{E} - \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{23.70}$$

Odtud pro emn dostáváme

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \ . \tag{23.71}$$

Uvnitř ideálního zdroje¹⁰ (neklade žádný odpor pohybu nosičů náboje uvnitř zdroje) platí,



Obrázek 23.5: Situační obrázek k výkladu elektromotorického napětí.

že $E + E^* = 0$, tedy $E = -E^*$. Elektromotorická intenzita E^* tedy zajišťuje uvnitř zdroje

 $^{^{10}}$ Reálný zdroj emn klade určitý odpor nosičům náboje pohybujícím se uvnitř zdroje. Tento odpor nazýváme vnitřním odporem a zpravidla ho značíme jako R_i . Prochází-li zdrojem emn proud, liší se napětí mezi jeho svorkami od emn $\mathcal E$ o hodnotu R_iI .

emn (tvořící zpravidla část proudové smyčky) proud nosičů elektrického náboje proti směru elektrického pole **E**. Napětí mezi konci (svorkami) zdroje emn (označme je 1 a 2) je proto

$$U = -\int_{1}^{2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{1}^{2} \mathbf{E}^{*} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C} \mathbf{E}^{*} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}.$$
 (23.72)

Připojíme-li k vodiči elektrického proudu zdroj emn, vznikne tak nehomogenní obvod, pro který je potřeba diferenciální formu Ohmova zákona rozšířit na následující tvar

$$\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) . \tag{23.73}$$

Poznámka

Abychom si objasnili, jak je možné využít chemické energie, na jejíž úkor elektromotorická síla koná práci, budeme uvažovat zředěný roztok elektrolytu jakým je např. kyselina chlorovodíková, HCl, jejíž koncentrace se prostorově mění. Nechť je uvažovaný elektrolyt téměř úplně disociován na ionty vodíku H^+ a chlóru Cl^- , přičemž ionty vodíku jsou výrazně lehčí než ionty chlóru. Díky této skutečnosti ionty vodíku difundují mnohem rychleji než ionty chlóru, tedy více iontů vodíku difunduje do oblasti s nízkou koncentrací. Vlivem koncentračního gradientu proud kladných nosičů náboje poteče do oblasti s nízkou koncentrací. Tento proces bude probíhat tak dlouho, dokud akumulovaný náboj nevytvoří natolik velké elektrické pole, které zabrání další difúzi. Na difúzi můžeme pohlížet jako na výsledek působení jisté síly F^* , která zapříčiňuje pohyb iontů. Pomocí této síly můžeme napsat podmínku rovnováhy jako $F^* + eE = 0$. Odtud zřejmě v uvažovaném prostředí bude působit silové pole $F^* = eE^* = -eE$. Na popsaném principu je možné zkonstruovat baterii, která se skládá z nádoby rozdělené na dvě části propustnou membránou. Jednu část nádoby pak naplníme kyselinou chlorovodíkovou a druhou čistou vodou.

Kapitola 24

Stacionární magnetické pole

Magnetické silové účinky byly známy již od starověku, avšak podstatný vývoj poznatků ohledně magnetizmu můžeme zaznamenat až od objevu magnetických účinků vodičů protékaných elektrickým proudem. Tento objev, který se připisuje dánskému fyzikovi H. Ch. Oerstedovi, odstartoval na počátku 19. století celou řadu experimentů, a z nich plynoucích objevů, vedoucích k zavedení pojmu magnetického pole. Na základě těchto objevů byl formulován Biotův-Savartův-Laplaceův zákon a Ampèrův zákon magnetické síly, které spolu s Coulombovým zákonem postačí k vybudování klasické elektrodynamiky. Teorie relativity z počátku 20. století přispěla k hlubšímu teoretickému pochopení již zavedeného elektrického a magnetického pole. Teorie relativity ukázala, že elektrické a magnetické pole jsou různými obrazy téhož tzv. elektromagnetického pole. Z teorie relativity vyplývá, že elektrické pole vzniká v klidové soustavě náboje, kdežto pole elektromagnetické vzniká ve vztažné soustavě, v níž se náboj vůči pozorovateli pohybuje. Využití relativistického popisu je základem tzv. relativistické elektrodynamiky, ze které, mimo jiné, vyplývá, že k vybudování elektrodynamiky bude stačit jen Coulombův zákon, jenž je zákonem empirickým, a relativistický vztah pro transformaci síly.

V následujících kapitolách se přidržíme relativistickému pojetí elektrodynamiky.

24.1 Magnetická indukce a Lorentzova síla

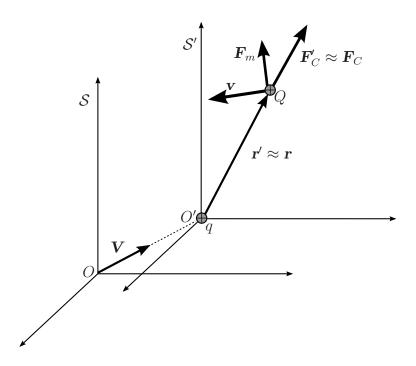
Uvažujme náboj q, který se v čárkované soustavě \mathcal{S}' nachází v klidu a další náboj, jenž označíme Q, který se v této soustavě pohybuje rychlostí \mathbf{v}' . Dle Coulombova zákona na náboj Q bude vzhledem k soustavě \mathcal{S}' působit síla

$$\mathbf{F}_C' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r'^3} \mathbf{r}' = \mathbf{E}'Q . \tag{24.1}$$

Zde porušujeme námi zavedenou konvenci tím, že čárkované souřadnice nepředstavují souřadnice zdrojového náboje, ale souřadnice spojené s inerciální vztažnou soustavou \mathcal{S}' , která se pohybuje vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} rychlostí $\mathbf{V} \ll c_0$, viz obr. 24.1. Připomeňme, že náboj je invariant, jehož velikost nezávisí na volbě souřadnicové soustavy. Budeme-li si chtít vyjádřit sílu působící na náboj Q, potom s výhodou použijeme transformačního vztahu pro sílu (18.177), který jsme odvodili v části textu věnované speciální teorii relativity. Připomeňme si jej

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_C' + \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{F}_C') . \tag{24.2}$$

Rychlost \mathbf{v} vystupující v transformačním vztahu odpovídá rychlosti náboje Q v nečárkované soustavě \mathcal{S} . Ze vztahu (24.2) je vidět, že síla v nečárkované soustavě má dvě složky, a to sílu elektrostatickou danou vztahem (24.1) a tzv. sílu magnetickou.



Obrázek 24.1: Situační obrázek k relativistické transformaci Coulombovy síly.

Předpoklad $\mathbf{V} \ll c_0$ je velice dobře splněn pro elektrické náboje podílející se na elektrickém proudu ve vodičích i v polovodičích. Driftová rychlost elektronů je při běžných poměrech např. v měděném vodiči zhruba 10^{12} krát menší než rychlost světla ve vakuu. Odtud je zřejmé, že v běžných případech vystačíme s pomalou Lorentzovou transformací. Z pomalé Lorentzovy transformace vyplývá, viz kap. 18.9, že se kontrakce délek neuplatňuje, tedy $\mathbf{r} \approx \mathbf{r}'$. Díky této skutečnosti můžeme i elektrickou intenzitu považovat za invariantní, takže s ohledem na rovnici (24.1) platí vztah

$$\mathbf{F}_C' = Q\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q Q}{r^3} \mathbf{r} = Q\mathbf{E} = \mathbf{F}_C.$$
 (24.3)

Dosazením ze vztahu (24.3) do rovnice (24.2) dostaneme

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_C + \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{F}_C) = Q\mathbf{E} + \mathbf{F}_m = \mathbf{F}_C + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c_0^2} \frac{q Q}{r^3} [\mathbf{v} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{r})], \qquad (24.4)$$

kde

$$\mathbf{F}_{m} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}c_{0}^{2}} \frac{qQ}{r^{3}} [\mathbf{v} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{r})]$$
 (24.5)

je tzv. *magnetická síla*, která se vyznačuje tím, že **působí**, na rozdíl od Coulombovy síly, j**en na pohybující se elektrické náboje**. Vztah (24.5) můžeme napsat ve tvaru

$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \,, \tag{24.6}$$

kde jsme zavedli novou vektorovou veličinu

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c_0^2} \frac{q}{r^3} (\mathbf{V} \times \mathbf{r}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} (\mathbf{V} \times \mathbf{r}). \tag{24.7}$$

Při úpravě vztahu (24.7) jsme použili novou konstantu

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c_0^2} \,, \tag{24.8}$$

které říkáme permeabilita vakua, příp. magnetická konstanta. Nově zavedená veličina \boldsymbol{B} popisuje vektorové pole, které se nazývá pole magnetické, a toto pole je zcela určeno pohybem zdrojového náboje q. Vektorovou veličinu \boldsymbol{B} nazýváme magnetická indukce. Výraz (24.7) můžeme přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c_0^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) , \qquad (24.9)$$

ze kterého vyplývá, že magnetické pole pohybujícího se náboje vzniká a existuje současně s elektrickým polem. Rovněž z tohoto vztahu je patrné, že vektor \boldsymbol{B} je v každém bodě kolmý k vektorům \boldsymbol{V} a \boldsymbol{E} . Jednotkou magnetické indukce je tesla mající značku T. Ze vztahu (24.9) také vyplývá, že díky násobení vektorového součinu převrácenou hodnotou kvadrátu rychlosti světla ve vakuu přispívá magnetické pole k silovému působení na elektrický náboj v mnohem menší míře než pole elektrické. Vzhledem k elektrickému poli je magnetické pole relativistickým jevem druhého řádu. Z tohoto důvodu se může magnetické pole výrazněji projevit jen v případech, kdy je elektrické pole výrazně zeslabeno nebo zcela vzájemně elektricky kompenzováno, jak je tomu u vodičů, kterými prochází elektrický proud.

Pomocí vztahu (24.6) lze přepsat výraz (24.4) jako

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_C + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) , \qquad (24.10)$$

sílu **F** na levé straně této rovnice nazýváme *Lorentzova síla* (*Lorentzův vztah*).

Ke grafickému znázornění magnetického pole používáme tzv. indukční čáry. Jde o orientované čáry, jejichž tečny v kterémkoliv jejich bodě mají směr vektoru magnetické indukce \boldsymbol{B} . Hustota indukčních čar se volí takovým způsobem, aby byla úměrná velikosti \boldsymbol{B} . Se zavedením indukčních čar souvisí skalární veličina Φ , kterou nazýváme magnetický indukční tok. Velikost této veličiny je úměrná celkovému počtu indukčních čar, které procházejí uvažovanou plochou v magnetickém poli. Z tohoto důvodu zavádíme magnetický indukční tok vztahem

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S_{\perp}} = B \ . \tag{24.11}$$

Odtud

$$d\Phi = BdS_{\perp} = BdS\cos\alpha = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \qquad (24.12)$$

kde α je úhel, který svírá normála k elementu plochy dS se směrem vektoru \boldsymbol{B} . Magnetický indukční tok Φ celou plochou S dostaneme součtem všech elementárních magnetických indukčních toků jejími elementy dS, tedy integrací přes celou plochu S

$$\Phi = \iint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \tag{24.13}$$

Jednotkou magnetického indukčního toku je weber, kterou značíme Wb.

24.2 Biotův-Savartův-Laplaceův zákon

Ze vztahu (24.9) vyplývá, že zdrojem magnetického pole je pohybující se elektrický náboj. Avšak jeden pohybující se bodový náboj nemůže vytvořit stacionární magnetické pole. K vytvoření stacionárního magnetického pole je nutné mít uzavřený stacionární proud. Stacionární proud rozdělíme na proudové elementy a výslednou magnetickou indukci popisující stacionární magnetické pole v daném místě určíme na základě principu superpozice. Princip superpozice pro magnetické pole nám umožňuje magnetická pole, vytvářená jednotlivými pohybujícími se náboji a proudy, nezávisle sčítat.

Pro nalezení vztahu určujícího magnetickou indukci stacionárního magnetického pole v místě P o polohovém vektoru \mathbf{r} vyjdeme ze situace zachycené na obrázku 24.2. Na tomto obrázku je znázorněna proudová smyčka C', kterou protéká stacionární elektrický proud I. Nejprve nalezneme vztah určující magnetickou indukci od proudového elementu d \mathbf{I} , pro který platí

$$d\mathbf{I} = Id\mathbf{l} = j\Delta Sd\mathbf{l} = \mathbf{j}dV = \rho dV\mathbf{v} = dq\mathbf{v}, \qquad (24.14)$$

kde ΔS je plocha příčného řezu uvažované proudové smyčky a ρ je objemová hustota náboje spojeného s proudovým elementem.

S ohledem na obrázek 24.2 přepíšeme pro element náboje vztah (24.7) (rychlost označíme \mathbf{v}' namísto \mathbf{V})

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 dq}{4\pi} \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \tag{24.15}$$

Do tohoto vztahu dosadíme za element náboje $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \rho(\mathbf{r}') dV'}{4\pi} \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$
 (24.16)

Tento vztah dále upravíme s ohledem na rovnost (24.14), ze které plyne, že $Id\mathbf{l}' = \rho dV'\mathbf{v}'$, tedy

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l'} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l'} \times \mathbf{R}}{R^3}.$$
 (24.17)

S ohledem na princip superpozice a výše zmíněnou skutečnost, že stacionární magnetické pole může vytvořit stacionární proudová smyčka (I=konst.), provedeme integraci příspěvků jednotlivých proudových elementů

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l'} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l'} \times \mathbf{R}}{R^3} . \tag{24.18}$$

Vztah (24.18) nám umožňuje stanovit magnetické pole různých stacionárních proudových smyček, resp. stacionárních proudových obvodů. Tento vztah reprezentuje Biotův-Savartův (-Laplaceův) zákon. Je nutné na tomto místě poznamenat, že vztah, který vyjadřuje Biotův-Savartův-Laplaceův zákon lze použít pouze v případě vodičů, které mají natolik malý průřez, že je možné proud nosičů elektrického náboje považovat v průřezu za homogenní (homogenně rozložený)¹. V případě, že tomu tak není, je potřeba tento zákon vyjádřit v poněkud jiném tvaru. V takovémto případě je potřeba vyjít ze vztahu (24.16), který upravíme s ohledem na výraz $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')\mathbf{v}'$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \tag{24.19}$$

Provedeme integraci příspěvků jednotlivých objemových proudových elementů $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV'.$$
 (24.20)

Vztah (24.20), vyjadřující Biotův-Savartův-Laplaceův zákon v obecném tvaru, hraje v teorii magnetického pole stejnou roli jako Coulombův zákon v teorii elektrického pole. K další úpravě vztahu (24.20) použijeme následující rovnosti (viz dodatek A)

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$
 (24.21)

¹Tedy aby bylo možné použít vztah $I = j\Delta S$.

Požijeme-li rovnost (24.21) ve vztahu (24.20) a identity

$$(\nabla f) \times \mathbf{F} = \nabla \times (f\mathbf{F}) - f\nabla \times \mathbf{F}$$
,

tak dostaneme

$$\boldsymbol{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \underbrace{\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')}_{=\mathbf{0}} dV' = \nabla \times \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{=\mathbf{A}(\mathbf{r})},$$

$$(24.22)$$

kde A(r) je magnetický vektorový potenciál, kterému je věnována kapitola 24.6.

Při úpravách bylo použito skutečnosti, že je možné vytknout operátor ∇ , který operuje nad nečárkovanými souřadnicemi, kdežto integrace je prováděna vzhledem k souřadnicím čárkovaným, a rotace přes nečárkované souřadnice vektoru hustoty elektrického proud, který je funkcí čárkovaných souřadnic, je rovna nulovému vektoru.

Provedeme-li divergenci vztahu (24.22), bude se jednat o divergenci rotace, která je vždy rovna nule (viz dodatek (A.10), tedy

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{24.23}$$

Tento výsledek nám říká, že magnetické pole (i nestacionární) je polem solenoidálním (ne-zřídlovým), to znamená, že indukční čáry se musí uzavírat samy do sebe nebo vycházet a končit v nekonečnu. Solenoidální pole souvisí s experimentálně zjištěnou skutečností, že ne-existují magnetické náboje (magnetické monopóly)².

Použijeme-li Gaussovu větu, pak je možné přepsat rovnici (24.23) do integrálního tvaru

$$\iint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{24.24}$$

Uvažujme přímý vodič, kterým protéká proud I ve směru osy x, viz obr. 24.3. V bodě o polohovém vektoru \mathbf{r} určíme pomocí vztahu (24.18) velikost magnetické indukce. Z obrázku 24.3 plyne, že $\mathrm{d}\mathbf{l}' = \mathrm{d}\mathbf{x}'$. S ohledem na tento situační obrázek lze napsat

$$R = \frac{r}{\sin \alpha} \,, \tag{24.25}$$

$$x' = -\frac{r}{\tan \alpha} \,, \tag{24.26}$$

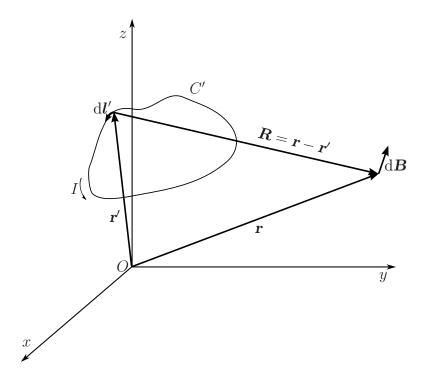
odtud

$$dx' = \frac{rd\alpha}{\sin^2 \alpha} \ . \tag{24.27}$$

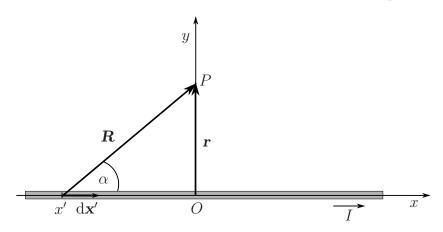
Rovnosti (24.25) - (24.27) použijeme ve vztahu (24.18), přičemž budeme předpokládat, že při probíhání elementu d \mathbf{x}' nabývá úhel α hodnot z intervalu $\langle \alpha_1; \alpha_2 \rangle$

$$B(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{|\mathrm{d}\mathbf{x}' \times \mathbf{R}|}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{R \mathrm{d}\mathbf{x}' \sin \alpha}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) . \quad (24.28)$$

²Fyzik P. A. M. Dirac ukázal, že kvantová teorie pole připouští existenci magnetických monopólů, tedy částic nesoucích magnetický náboj. Takováto částice však doposud nebyla objevena.



Obrázek 24.2: Situační obrázek k odvození Biotova-Savartova-Laplaceova zákona.



Obrázek 24.3: Přímý vodič protékaný elektrickým proudem I.

Výsledek (24.28) představuje příspěvek přímého úseku vodiče protékaného proudem I k magnetické indukci. Bude-li vodič nekonečně dlouhý, potom bude $\alpha_1 = 0$ a $\alpha_2 = \pi$. Dosazením do výsledku (24.28) dostaneme

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \,. \tag{24.29}$$

24.3 Ampèrův zákon magnetické síly a vzájemné silové působení dvou vodičů protékaných elektrickým proudem

V rámci této kapitoly vyšetříme působení magnetického pole o indukci \boldsymbol{B} (o jeho zdroji zprvu nic nepředpokládáme) na proudový element d $\boldsymbol{I} = I d \boldsymbol{l}$. Podle vztahu (24.6) bude magnetické pole působit silou \boldsymbol{F}_m jen na pohybující se elektrický náboj. Uvažujme pouze volný elektrický náboj ve vodiči, přičemž předpokládáme, že objem, v němž protéká proud, je elektricky neutrální, tj. $\rho = 0$, čímž je možné z úvah o silovém působení na vodič vyloučit elektrickou

sílu. Volný náboj ve vodiči se pohybuje driftovou rychlostí

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} \,. \tag{24.30}$$

Pro velikost volného náboje můžeme psát

$$dQ = Idt. (24.31)$$

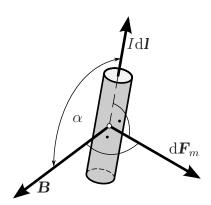
Dosazením vztahů (24.30) a (24.31) do vztahu pro magnetickou sílu (24.6) dostaneme

$$d\mathbf{F}_{m} = dQ\mathbf{v} \times \mathbf{B} = Idt \frac{d\mathbf{l}}{dt} \times \mathbf{B} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$
 (24.32)

Vztah (24.32) představuje diferenciální tvar Ampèrova zákona magnetické síly. Velikost síly (24.32) je dána vztahem

$$dF_m = BIdl\sin\alpha . (24.33)$$

K určení směru působící síly d \mathbf{F}_m se užívá Flemingovo pravidlo:



Obrázek 24.4: Situační obrázek k Ampèrovu zákonu magnetické síly.

Levou ruku položíme na vodič tak, aby prsty ukazovaly směr proudu a indukční čáry vstupovaly do dlaně, pak vztyčený palec ukazuje orientaci síly, kterou magnetické pole působí na vodič protékaný proudem.

K určení orientace síly působící na proudový element můžeme samozřejmě použít i znalosti pro určení orientace vektorového součinu.

V následující části této kapitoly určíme sílu pro vzájemné silové působení dvou proudových elementů.

Při odvození Ampèrova zákona síly vyjádřeného vztahem (24.32) jsme nic nepředpokládali o zdroji magnetického pole. Protože proudový element sám vytváří magnetické pole o indukci (24.17), můžeme zapsat silový zákon pro vzájemné působení dvou proudových elementů jako

$$d\mathbf{F}_{12} = I_1 d\mathbf{l}_1 \times d\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{R_{12}^3} [d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{R}_{12})], \qquad (24.34)$$

kde $I_1 dl_1$ je první proudový element, na který působí druhý proudový element magnetickou silou díky tomu, že sám vytváří magnetické pole d \mathbf{B}_2 v místě prvního proudového elementu. Vektor \mathbf{R}_{12} představuje polohový vektor, který určuje polohu druhého proudového elementu vzhledem k proudovému elementu prvnímu³.

 $[\]overline{^{3}\text{Ve}}$ vztahu (24.17) nahradíme \pmb{r}' vektorem \pmb{r}_{1} a vektor \pmb{r} vektorem $\pmb{r}_{2}.$

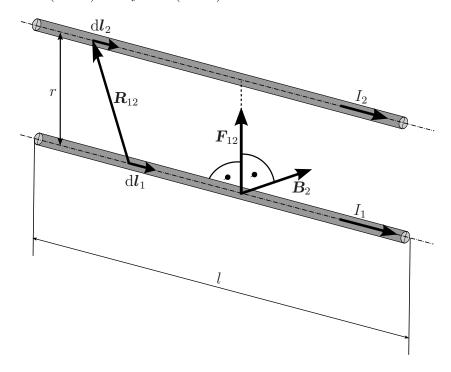
Uvažujme dva rovnoběžné nekonečně dlouhé přímé proudové vodiče, viz obrázek 24.5. Z vektorového součinu ve vztahu (24.18) vyplývá, že vektor magnetické indukce je kolmý k rovině tvořené proudovou přímkou a polohovým vektorem \mathbf{R} . Díky této skutečnosti můžeme vztah pro velikost síly mezi dvěma proudovými elementy, s ohledem na rovnost (24.34), vyjádřit jako

$$dF_{12} = B_2 I_1 dl_1 , (24.35)$$

kde B_2 je magnetická indukce , jejíž hodnota je dána vztahem (24.29), tedy

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \ . \tag{24.36}$$

Dosazením vztahu (24.38) do výrazu (24.37) dostaneme



Obrázek 24.5: Silové působení mezi dvěma nekonečně dlouhými přímými vodiči, kterými protékají elektrické proudy.

$$dF_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl_1 . {24.37}$$

Jednoduchou integrací rovnice (24.37) od 0 do l dostaneme velikost síly působící na délku l

$$F_{12} = \int_0^l \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} l. \qquad (24.38)$$

Z tohoto výrazu se vychází při definici základní jednotky ampér: 1 ampér je proud, který při stálém průtoku dvěma rovnoběžnými přímkovými nekonečně dlouhými (prakticky velmi dlouhými) vodiči zanedbatelného kruhového průměru, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1 m od sebe, vyvolá mezi vodiči sílu $2 \cdot 10^{-7}$ N na 1 m jejich délky.

Z této definice a ze vztahu (24.38) můžeme vypočítat velikost konstanty μ_0 v soustavě SI

$$\mu_0 = \frac{2\pi r F_{12}}{I_1 I_2 l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1},$$
(24.39)

kde $I_1=I_2=1$ A, r=1 m, $F_{12}=2\cdot 10^{-7}$ N .

K absolutnímu měření proudu se konstruují proudové váhy, které v současné době dovolují

změřit proud s relativní přesností až $5 \cdot 10^{-6}$, známe-li se stejnou (nebo lepší) přesností tíhové zrychlení v místě vah.

Protékají-li oběma vodiči souhlasné proudy, vodiče se přitahují, jsou-li proudy nesouhlasné, vodiče se odpuzují, což plyne ze vztahu (24.34).

24.4 Hallův jev

Hallův jev je jedním z nejznámějších galvanomagnetických jevů. Projevuje se vznikem tzv. $Hallova\ napěti\ U_H$ na plochém vodiči ve směru kolmém ke směru proudu I i ke směru magnetického pole, do kterého je vodič vložen. Hallovo napětí je způsobeno silami, které působí v magnetickém poli na pohybující se nosiče elektrického náboje ve vodiči.

Je-li proud I ve vodivé destičce tvořen uspořádaným pohybem částic (elektronů) s nábojem q=-e, které se pohybují průměrnou driftovou rychlostí \mathbf{v} proti směru proudu, pak v magnetickém poli o indukci \mathbf{B} na ně působí magnetická síla (24.6)

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \,. \tag{24.40}$$

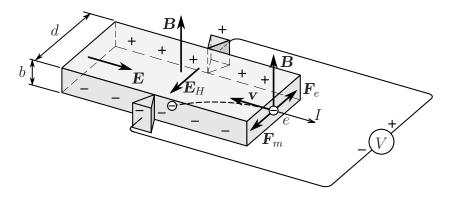
Tato síla způsobí zvýšení koncentrace nosičů náboje elektrického proudu u boční stěny vodiče, která se v důsledku toho nabije záporně. U protilehlé boční stěny se naopak koncentrace nosičů elektrického proudu sníží, takže tato stěna se nabije kladně. Tím vznikne napříč vodiče elektrické pole o intenzitě \mathbf{E}_H a na nosiče náboje bude současně působit síla elektrická (viz obr. 24.6)

$$\mathbf{F}_C = q\mathbf{E}_H \ . \tag{24.41}$$

V ustáleném stavu jsou obě síly stejné a opačně orientované, takže pro jejich velikosti platí

$$F_C = F_m \quad \Rightarrow \quad qE_H = q|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| \ .$$
 (24.42)

Je-li vodivá destička umístěna kolmo k magnetickým indukčním čarám, pak ${m v} \perp {m B},$ a tedy



Obrázek 24.6: Situační obrázek k vysvětlení Hallova jevu.

 $|\mathbf{v}\times\mathbf{B}|=vB.$ Velikost intenzity příčného elektrického pole vyjádříme pomocí Hallova napětí U_H

$$E_H = \frac{U_H}{d} \,, \tag{24.43}$$

kde d je šířka vodiče, viz obr. 24.6.

Tedy po dosazení do předchozí rovnice dostaneme

$$\frac{U_H}{d} = vB \tag{24.44}$$

a odtud

$$U_H = dvB. (24.45)$$

Je-li n počet volných nosičů náboje v jednotkovém objemu vodiče, pak velikost hustoty proudu ve vodiči je j=qnv. Odtud

$$v = \frac{j}{nq} . ag{24.46}$$

Dosazením tohoto vztahu do výrazu (24.45) dostaneme

$$U_H = dvB = \frac{1}{nq}djB = \frac{1}{nq}\frac{b\,dj}{b}B, \qquad (24.47)$$

kde b je tloušťka vodivé destičky. Pro kolmý průřez vodiče platí, že $S_{\perp}=bd$, takže $dbj=S_{\perp}j=I$, což je velikost proudu uvažovaným vodičem. Odtud můžeme přepsat vztah (24.47) do tvaru

$$U_H = \frac{1}{nq} \frac{I}{b} B , \qquad (24.48)$$

Dále zavedeme veličinu

$$R_H = \frac{1}{nq} \,,$$
 (24.49)

kterou nazýváme *Hallova konstanta*. Z tohoto vztahu je vidět, že je nepřímo úměrná koncentraci volných nosičů náboje. Vztah pro Hallovo napětí můžeme s ohledem na rovnost (24.49) zapsat jako

$$U_H = R_H \frac{I}{b} B . (24.50)$$

U polovodičů je koncentrace n_0 volných nosičů náboje malá v porovnání s kovy, a proto Hallova konstanta R_H bude velká (např. pro vizmut je $R_H = -1.10^{-6} \text{ m}^3\text{C}^{-1}$). Odtud plyne, že Hallův jev u polovodičových materiálů se poměrně snadno měří. U kovů je Hallova konstanta R_H malá (např. pro měď je $R_H = -7, 4.10^{-11} \text{ m}^3\text{C}^{-1}$), takže se Hallův jev měří obtížně. Proto je nutné v případě kovů použít tenké vzorky, viz vztah (24.50).

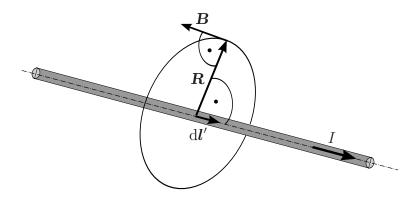
Ze vztahu pro Hallovo napětí (24.50) vyplývá, že pro danou vodivou (nebo polovodičovou destičku, která je protékána konstantním proudem I, je Hallovo napětí U_H přímo úměrné velikosti magnetické indukce, čehož využívají přístroje pro měření magnetického pole zvané teslametry.

24.5 Ampèrův zákon celkového proudu

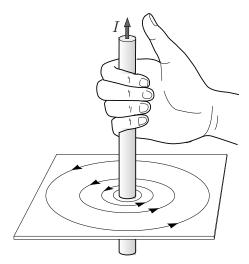
Ze vztahu (24.29) plyne, že magnetická indukce, kterou vytvoří přímý nekonečně dlouhý vodič protékaný proudem, má stejnou hodnotu podél kružnice, jejímž středem tento vodič prochází. Ze vztahu (24.18) je vidět, že vektor magnetické indukce \boldsymbol{B} je kolmý k rovině, ve které leží vektory \boldsymbol{R} a d \boldsymbol{l}' , a tedy vektor magnetické indukce je tečný k této kružnici, viz obr. 24.7. Na základě těchto skutečností můžeme konstatovat, že zmíněná kružnice představuje indukční čáru. Indukční čáry nekonečně dlouhého přímého vodiče protékaného proudem tvoří soustavu soustředných kružnic, jejichž středem tento vodič prochází. K určení orientace indukčních čar můžeme použít Ampèrova~pravidla~pravé~ruky, které nám říká:

Zahnuté prsty pravé ruky ukazují orientaci indukčních čar, když vztyčený palec ukazuje ve směru proudu.

Provedeme-li rotaci rovnosti (24.22), pak pomocí identity (A.13) dostaneme



Obrázek 24.7: Orientace vektoru magnetické indukce pro nekonečně dlouhý vodič protékaný proudem I.



Obrázek 24.8: Ampèrovo pravidlo pravé ruky.

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla^2 \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (24.51)$$

Integraci posledního integrálu můžeme provést přímo, použijeme-li následující rovnosti

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \qquad (24.52)$$

kde $\delta(\mathbf{r})$ je trojrozměrná Diracova funkce. Tedy

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla^2 \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \mu_0 \iiint_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$
 (24.53)

Porovnáním identit (A.26) a (A.31) můžeme psát

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$
 (24.54)

Protože ∇ operuje pouze s nečárkovanými souřadnicemi, je možné přepsat předposlední integrál v rovnosti (24.51) pomocí vztahu (24.54) přepsat jako

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' .$$
(24.55)

Pro další úpravu pravé části této rovnice použijeme tuto identitu

$$\nabla(f\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla f + f\nabla \cdot \mathbf{F} \,. \tag{24.56}$$

Pomocí této identity tedy dostáváme

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) dV' . \quad (24.57)$$

Druhý integrál na pravé straně rovnice převedeme pomocí Gaussovy věty na integrál plošný

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \oiint_{S'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' . \quad (24.58)$$

Protože v magnetostatice je nutné považovat elektrické proudy za stacionární, tak z rovnice kontinuity vyplývá, že $\nabla' \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = 0$. Z tohoto důvodu bude první integrál na pravé straně rovnice (24.58) roven nule. Zbývající plošný integrál bude však rovněž roven nule díky skutečnosti, že distribuce proudové hustoty je prostorově omezená a uzavřenou plochu, přes kterou integrujeme, můžeme neomezeně zvětšovat.

S ohledem na výsledky integrací nakonec dostáváme, že

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \,. \tag{24.59}$$

Tento výraz vyjadřuje Ampèrův zákon celkového proudu v diferenciálním tvaru. Pomocí Stokesovy věty můžeme ze vztahu (24.59) dostat Ampèrův zákon celkového proudu v integrálním tvaru, tedy

$$\iint_{S} \mathbf{\nabla} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_{0} \iint_{S} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_{0} I, \qquad (24.60)$$

kde I je celkový proud procházející plochou S, jejíž hranice je tvořena uzavřenou křivkou C (obecně se jedná o prostorovou křivku).

Tedy ze vztahu (24.60) napíšeme Ampèrův zákon celkového proudu v integrálním tvaru jako

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I . \tag{24.61}$$

Odtud je možné vyslovit znění Ampèrova zákona celkového proudu:

Dráhový (křivkový) integrál vektoru magnetické indukce podél uzavřené křivky se rovná μ_0 násobku celkového elektrického proudu procházejícího plochou, která je ohraničena touto křivkou⁴.

24.6 Vektorový potenciál magnetického pole

Pro popis magnetického pole by bylo výhodné, kdyby bylo možné obecně odvodit vektor magnetické indukce \boldsymbol{B} jako gradient skalární funkce. Vzhledem k tomu, že rotace vektoru magnetické indukce není obecně rovna nulovému vektoru⁵, viz vztah (24.59), není tato možnost obecně reálnou.

 $^{^{4}}I=\sum_{i}I_{i}$.

⁵Avšak kdekoliv je proudová hustota nulová, můžeme vektor magnetické indukce vyjádřit pomocí gradientu skalární funkce, kterou nazýváme *skalární magnetický potenciál*.

Každé vektorové pole, jehož divergence je rovna nule, můžeme vyjádřit jako rotaci vektorové funkce, neboť platí, že divergence rotace je identicky rovna nule. S ohledem na vztah (24.23) tedy můžeme vektor magnetické indukce vyjádřit pomocí nového vektoru (vektorového pole) $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, který vyhovuje vztahu

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) , \qquad (24.62)$$

které se nazývá vektorovým potenciálem magnetického pole nebo magnetickým vektorovým potenciálem.

Definiční vztah (24.62) však neurčuje vektorový potenciál jednoznačně. Je zřejmé, že pokud existuje alespoň jedna funkce vyhovující vztahu (24.62), vyhovuje tomuto vztahu také každá vektorová funkce tvaru

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \zeta(\mathbf{r}) , \qquad (24.63)$$

kde $\zeta(\mathbf{r})$ je libovolná skalární funkce, pro niž existují příslušné diferenciální operace. Tato skutečnost vyplývá z identity

$$\nabla \times (\nabla \zeta(\mathbf{r})) = \mathbf{0}$$
.

Speciálně je vždy možné vektorový potenciál vybrat tak, aby byla splněna podmínka

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \tag{24.64}$$

nazývaná (Coulombova) kalibrační podmínka .

Dosadíme-li vztah (24.62) do Ampèrova zákona (24.59), tak dostaneme

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} . \tag{24.65}$$

Použijeme identitu (A.13)

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} . \tag{24.66}$$

S ohledem na kalibrační podmínku (24.64) se tato rovnost zjednoduší

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \,. \tag{24.67}$$

Tuto vektorovou rovnici může vyjádřit ve složkovém tvaru jako

$$\nabla^2 A_i(\mathbf{r}) = -\mu_0 j_i(\mathbf{r}) , \qquad i = 1, 2, 3 .$$
 (24.68)

Dostali jsme tři Poissonovy rovnice pro jednotlivé kartézské složky. Vzhledem k tomu, že vztah (19.34) představuje řešení Poissonovy rovnice elektrostatického pole (20.14), můžeme na základě porovnání napsat i řešení pro Poissonovy rovnice (24.68)

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{j_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$
 (24.69)

Odtud je možné vyjádřit magnetický vektorový potenciál 6

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$
 (24.70)

Pro vyšetřování magnetického pole vodičů zanedbatelně malého průřezu ΔS s homogenně rozloženým proudem I je výhodné, pomocí rovností (24.14), přepsat vztah (24.70) jako

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l'}}{R} . \tag{24.71}$$

⁶Ke stejnému vztahu jsme dospěli při odvození vztahu (24.22)

V některých případech má význam studovat magnetické pole makroskopických plošných proudů. Je-li dána lineární hustota proudu, viz (23.9), tekoucího na ploše S', je zřejmě možné vyjádřit vektorový magnetický potenciál vzorcem, který odpovídá vztahu (19.36), tedy

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\mathbf{\xi}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'.$$
 (24.72)

24.7 Magnetický dipól

Pro popis vlastností magnetického pole je pojem magnetického dipólu stejně důležitý jako elektrický náboj pro popis elektrostatického pole.

Uvažujme rovinnou proudovou smyčku C' libovolného tvaru protékanou proudem I. Tuto smyčku, jejíž vlastní rozměry jsou malé, umístíme do blízkosti počátku pravoúhlé souřadnicové soustavy. V bodě o polohovém vektoru \mathbf{r} budeme vyšetřovat magnetické pole, které tato smyčka vybudí. Popisovaná situace je zachycena na obrázku 24.9. Funkci 1/R můžeme rozvinout způsobem popsaným vztahem (21.5). Protože předpokládáme, že vlastní rozměry uvažované proudové smyčky jsou malé, pak v dostatečně velké vzdálenosti od této proudové smyčky budou v binomickém rozvoji členy nižšího řádu dominovat nad členy řádu vyššího. S ohledem na rozvoj (21.5) je možné přepsat vztah (24.71)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}'}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint_{C'} (r')^n P_n(\cos \theta') \mathrm{d}\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint_{C'} \mathrm{d}\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2} \oint_{C'} r' \cos \theta' \mathrm{d}\mathbf{l}' + \frac{1}{r^3} \oint_{C'} (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}\mathbf{l}' + \dots \right] . \quad (24.73)$$

Stejně jako v případě multipólového rozvoje pro elektrický potenciál, budeme první člen rozvoje nazývat magnetickým monopólem, druhý člen magnetickým dipólem, třetí člen magnetickým kvadrupólem atd. Integrál pro magnetický vektorový potenciál monopólu představuje součet orientovaných elementů uzavřené křivky, který je vždy roven nule, tj.

$$\oint_{C'} \mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{0} .$$

Tento výsledek je v souladu s experimentálně zjištěnou skutečností, že neexistují magnetické náboje (magnetické monopóly).

Odtud plyne, že bude dominovat magnetický vektorový potenciál magnetického dipólu

$$\mathbf{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_{C'} r' \cos \theta' d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_{C'} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}^0) d\mathbf{l}'. \tag{24.74}$$

Vztah (24.74) upravíme tak, že ho vynásobíme skalárně pomocným konstantním vektorem c = konst.

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_{C'} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}^0) \mathbf{c} \cdot d\mathbf{l}'. \qquad (24.75)$$

Křivkový integrál převedeme pomocí Stokesovy věty na integrál plošný a pro další úpravu použijeme vzorec pro smíšený součin (A.6)

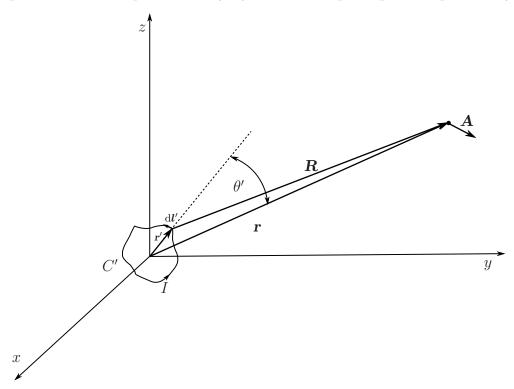
$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \iint_{S'} \left[\boldsymbol{\nabla}' \times (\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}^0) \boldsymbol{c} \right] \cdot d\boldsymbol{S}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \iint_{S'} d\boldsymbol{S}' \times \boldsymbol{\nabla}' \cdot (\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}^0) \boldsymbol{c} , \qquad (24.76)$$

kde S' = S je část roviny ohraničené smyčkou C'.

Vytknutím pomocného vektoru c z této rovnosti dostaneme (použijeme při úpravě rovnost $\nabla(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}^0) = \mathbf{r}^0$)

$$\mathbf{A}_{\mathrm{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \iint_{S'} \mathrm{d}\mathbf{S}' \times \mathbf{\nabla}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}^0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \left(\iint_{S'} \mathrm{d}\mathbf{S}' \right) \times \mathbf{r}^0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{r}^0}{r^2} , \qquad (24.77)$$

kde S je plocha uvažované proudové smyčky orientovaná podle pravidla pravé ruky. Získaný



Obrázek 24.9: Vektorový magnetický potenciál proudové smyčky.

vztah je možné přepsat do tvaru

$$\mathbf{A}_{\rm dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \,, \tag{24.78}$$

kde $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$ nazýváme Ampèrův magnetický dipólový moment proudové smyčky.

V případě, že je splněna relace $r' \ll r$, je možné vyšší členy rozvoje (24.75) zanedbat vůči dipólovému členu, takže můžeme psát, že $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r})$.

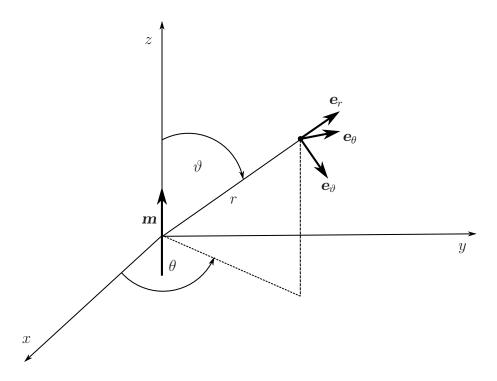
Magnetické pole, resp. vektor magnetické indukce, je pak určené vztahem (24.62). Pro snadné určení magnetického pole budeme předpokládat, bez újmy na obecnosti, že Ampèrův dipólový moment \boldsymbol{m} se nachází v počátku souřadnicové soustavy a je orientován souhlasně s osou z, viz obr. 24.10. Odtud je možné vyjádřit odpovídající vektorový magnetický potenciál ve sférických souřadnicích jako

$$\mathbf{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \vartheta}{r^2} \mathbf{e}_{\theta} . \tag{24.79}$$

Potom

$$\boldsymbol{B} \approx \boldsymbol{B}_{\mathrm{dip}}(r,\vartheta) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}_{\mathrm{dip}} = \boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \vartheta}{r^2} \boldsymbol{e}_{\theta}\right) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(2 \cos \vartheta \boldsymbol{e}_r + \sin \vartheta \boldsymbol{e}_{\vartheta}\right) . \quad (24.80)$$

Tento vztah je formálně shodný se vztahem (21.22). Díky této shodě dostaneme pro proudovou smyčku průběh indukčních čar analogický s průběhem siločar u elektrického dipólu, viz obr. 24.11. Proudová smyčka protékaná elektrickým proudem pak představuje magnetický dipól.



Obrázek 24.10: Ampèrův magnetický moment.

24.8 Schematické shrnutí výsledných vztahů

Výsledky, ke kterým jsme dospěli v předcházejících kapitolách můžeme schematicky shrnou pomocí obrázku 24.12. Tento obrázek nám znázorňuje, jakými vztahy jsou navzájem spojeny vždy dvě ze tří veličin důležitých pro popis stacionárního magnetického pole ve vakuu: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{j}$ a \boldsymbol{B} .

24.9 Stacionární magnetické pole v materiálovém prostředí

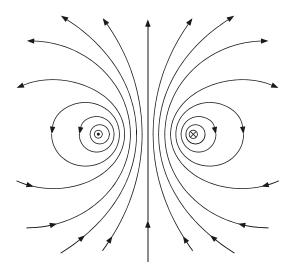
24.9.1 Vliv materiálového prostředí na magnetické pole

Vložíme-li látku do vnějšího magnetického pole, vytvořeného ve vakuu pohybem nosičů elektrického náboje v pozorovací soustavě anebo elektrickým proudem, dojde k interakci vnějšího magnetického pole s látkou. Každá látka je schopna se ve vnějším magnetickém poli magnetizovat, tj. získat nenulový makroskopický magnetický moment, čímž se stává zdrojem magnetického pole o magnetické indukci \mathbf{B}_i . Magnetická indukce \mathbf{B}_i se skládá s vnějším magnetickým polem \mathbf{B}_o , takže výsledné magnetické pole má magnetickou indukci

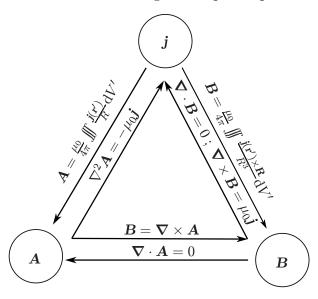
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_o + \mathbf{B}_i \ . \tag{24.81}$$

Protože magnetický stav látky se zachovává i při jejím dělení, byla vyslovena hypotéza o tzv. molekulárních (atomárních) proudech (Ampèrův model). Tato hypotéza má dnes oporu v kvantové mechanice, která umožňuje plně popsat magnetické vlastnosti materiálů. Vzhledem k tomu, že použití kvantové mechaniky překračuje rámec tohoto učebního textu, pokusíme se některé magnetické vlastnosti látek vysvětlit pomocí jednoduchého nekvantového modelu atomu. Tento model vychází z představy, že kolem kladně nabitého jádra atomu obíhají konstantní rychlostí elektrony. Navíc předpokládáme, že se elektron otáčí kolem své osy⁷, viz obr.

⁷Popsaný model jen velmi hrubě odpovídá kvantověmechanickému popisu chování atomu.



Obrázek 24.11: Magnetické pole dipólu.



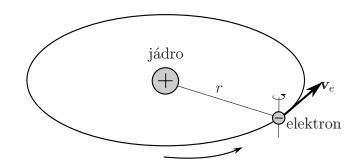
Obrázek 24.12: Schematické shrnutí získaných poznatků.

24.13. Magnetický moment způsobený oběhem elektronu kolem jádra nazýváme magnetickým momentem orbitálním, magnetický moment spojený s rotací elektronu kolem své osy nazýváme spinový magnetický moment. Výsledný magnetický moment atomu je dán vektorovým součtem orbitálních a spinových magnetických momentů všech elektronů. Tento výsledný magnetický moment atomu vytváří magnetické pole. Toto magnetické pole si můžeme představit jako magnetické pole elementární proudové smyčky (magnetického dipólu). Není-li přítomné vnější magnetické pole, pak magnetické dipóly, kterým přísluší Ampèrovy magnetické momenty⁸ \mathbf{m}_i , jsou orientovány nahodile, a tedy výsledné magnetické pole molekulárních proudů má nulovou magnetickou indukci, $\mathbf{B}_i = \mathbf{0}$ a též výsledný Ampèrův magnetický moment v objemu ΔV je nulový, tj.

$$\Delta \mathbf{m}_i = \sum_{\alpha}^{\Delta V} \mathbf{m}_{i\alpha} = \mathbf{0} . \tag{24.82}$$

Působením vnějšího magnetického pole se Ampèrovy magnetické momenty molekul (atomů) $m_{i\alpha}$ orientují do jednoho směru, tj. dochází k magnetické polarizaci. Výsledný Ampèrův

 $^{^{8}}$ U Ampèrových magnetických momentů budeme používat dolního indexu i, abychom zdůraznili souvislost s vnitřním magnetickým polem B_{i} .



Obrázek 24.13: Orbitální a spinální pohyb elektronu.

magnetický moment $\Delta \mathbf{m}_i$ makroskopického objemu látky ΔV je již nenulový a tedy výsledné magnetické pole již není nulové, $\mathbf{B}_i \neq \mathbf{0}$.

Tak jako jsme v případě polarizace dielektrika v elektrickém poli zavedli pro kvalitativní popis tohoto jevu vektor elektrické polarizace \boldsymbol{P} , zavedeme podobně i v případě magnetizace látky vektor magnetizace \boldsymbol{M} jako vektorový součet všech Ampèrových magnetických momentů molekulárních proudů v jednotkovém objemu látky. Je-li v makroskopickém objemu látky ΔV vektorový součet všech Ampèrových magnetických momentů molekulárních proudů roven

$$\Delta \mathbf{m}_i = \sum_{\alpha}^{\Delta V} \mathbf{m}_{\alpha i} , \qquad (24.83)$$

pak vektor magnetizace je dán vztahem

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{m}_i}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{\alpha}^{\Delta V} \mathbf{m}_{\alpha i}}{\Delta V} . \tag{24.84}$$

24.10 Pole magneticky polarizovaného materiálu

Vektor magnetizace je funkcí prostorových souřadnic, M(r). Na vektor magnetizace je možné rovněž pohlížet jako na vektor udávající objemovou hustotu Ampèrových magnetických momentů v daném místě.

Uvažujme magneticky polarizovanou látku o objemu V'. Pro uvažovaný objem magneticky zpolarizované látky je znám vektor magnetizace $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Objemovému elementu magneticky zpolarizované látky $\mathrm{d}V'$ v místě \mathbf{r}' odpovídá Ampèrův magnetický dipólový moment $\mathrm{d}\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r}')\mathrm{d}V'$, viz obr. 24.14. Pomocí vztahu (24.78) můžeme určit magnetický vektorový potenciál uvažovaného magneticky zpolarizované látky v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} jako

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$
(24.85)

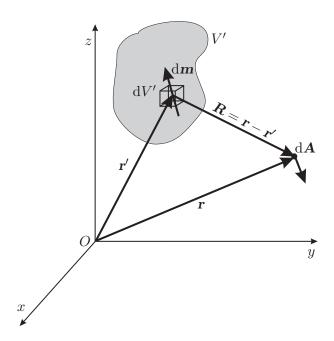
Pro další úpravu použijeme rovnost

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$
 (24.86)

kde $\boldsymbol{\nabla}'$ je nabla operátor podle čárkovaných souřadnic.

Tedy pomocí této identity můžeme upravit vztah (24.85) jako

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{\nabla}' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'.$$
 (24.87)



Obrázek 24.14: Magneticky polarizovaná látka o objemu V'.

K další úpravě použijeme následující identitu

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F} = f\nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla f. \tag{24.88}$$

S pomocí této identity je možné dále upravit vztah (24.87)

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{\nabla}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mathbf{\nabla}' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV'.$$
 (24.89)

Abychom získali příspěvek k magnetickému vektorovému potenciálu v bodě o polohovém vektoru \boldsymbol{r} od všech objemových elementů magneticky zpolarizované látky, provedeme následující integraci přes celý uvažovaný objem látky V'

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \left[\frac{\mathbf{\nabla}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mathbf{\nabla}' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{\nabla}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \mathbf{\nabla}' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'. \quad (24.90)$$

Pro další úpravu nalezeného vztahu použijeme identitu

$$\iiint_{V} \nabla \times \mathbf{F} dV = \iint_{S} d\mathbf{S} \times \mathbf{F}, \qquad (24.91)$$

kterou získáme tak, že vynásobíme integrál na levé straně skalárně pomocným konstantním vektorem c, pak použijeme vzorce pro smíšený součin (A.6) a Gaussovu větu

$$\iiint\limits_{V} \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} dV = \iiint\limits_{V} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{c}) dV = \oiint\limits_{S} (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{c}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oiint\limits_{S} \boldsymbol{c} \cdot d\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{F}.$$
(24.92)

Vytknutím pomocného vektoru dostaneme identitu (24.91). Tuto identitu použijme k úpravě posledního členu v rovnosti (24.90)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{\nabla}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{S'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$
 (24.93)

Zavedeme následující označení

$$\mathbf{j}_{v}(\mathbf{r}') = \mathbf{\nabla} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') , \qquad (24.94)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{v}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n} \,, \tag{24.95}$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály plochy S' v daném místě (d $\mathbf{S}' = \mathbf{n} dS'$). Pomocí zavedeného označení je možné přepsat integrandy v integrálech nacházející se ve vztahu (24.93)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{S'} \frac{\boldsymbol{\xi}_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' . \tag{24.96}$$

Porovnáním prvního integrálu se vztahem (24.70) je zřejmé, že vztah (24.94) představuje vektor proudové hustoty objemového proudu. Jedná se vlastně o výše zmíněné molekulární proudy, na které můžeme pohlížet jako na proudy vázané. Z toho důvodu bude pro nás vektor proudové hustoty \mathbf{j}_v ve vztahu (24.94) představovat vektor proudové hustoty vázaných proudů (proudová hustota vázaných proudů) v objemu magneticky zpolarizované látky. Podobně můžeme porovnat druhý integrál ve vztahu (24.96) se vztahem (24.72). Na základě tohoto porovnání můžeme konstatovat, že vztah (24.95) představuje vektor lineární hustoty vázaného proudu (lineární hustota vázaného proudu) na ploše ohraničující objem uvažované magneticky zpolarizované látky. Vázané proudy se někdy nazývají magnetizačními proudy. Vztah (24.96) můžeme interpretovat následujícím způsobem:

Magnetické pole vytvořené prostorovým rozložením magnetických dipólů s objemovou hustotou $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ v objemu V je totožné s magnetickým polem vytvořeným objemovými proudy hustoty $\mathbf{j}_v(\mathbf{r})$ tekoucími v objemu a plošnými proudy hustoty $\boldsymbol{\xi}_v(\mathbf{r})$ tekoucími na ploše S ohraničující objem V.

24.11 Ampèrův zákon celkového proudu v materiálovém prostředí

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že vázané proudy magneticky zpolarizované látky jsou zdrojem magnetického pole. Celkové magnetické pole lze považovat za pole, jehož zdrojem jsou jak vázané proudy, tak *volné proudy*, což jsou všechny proudy, které nejsou proudy vázanými.

Celkovou proudovou hustotu tedy můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{j}_c = \mathbf{j} + \mathbf{j}_v \ . \tag{24.97}$$

Celkovou proudovou hustotu dosadíme do Ampèrova zákona celkového proudu (24.59)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_c = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_v) . \tag{24.98}$$

Podělíme tento vztah permeabilitou vakua a za proudovou hustotu vázaných nábojů dosadíme ze vztahu (24.94)

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} + \nabla \times \boldsymbol{M} \,, \tag{24.99}$$

odtud

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}\right) = \mathbf{j}. \tag{24.100}$$

Veličinu v závorce označíme H

$$H = \frac{1}{\mu_0} B - M = \frac{B - P_m}{\mu_0}$$
 (24.101)

kde $P_m = \mu_0 M$ je magnetická polarizace. Veličinu H nazýváme intenzita magnetického pole. Tedy Ampèrův zákon celkového proudu v diferenciálním tvaru pro materiálové prostředí má tvar

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \ . \tag{24.102}$$

Pomocí Stokesovy věty můžeme ze vztahu (24.102) dostat Ampèrův zákon celkového proudu v integrálním tvaru pro materiálová prostředí, tedy

$$\iint_{S} \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I, \qquad (24.103)$$

kde I je celkový proud procházející plochou S, jejíž hranice je tvořena uzavřenou křivkou C(obecně se jedná o prostorovou křivku).

Maxwellovy rovnice pro stacionární magnetické pole v materiálovém prostředí jsou v diferenciálním tvaru dány rovnicemi

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \qquad (24.104)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \ . \tag{24.105}$$

Maxwellovy rovnice stacionárního magnetického pole v materiálovém prostředí v integrálním tvaru mají tvar

$$\oint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 ,$$

$$\oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I .$$
(24.106)

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I . \tag{24.107}$$

Magnetické vlastnosti látek 24.12

Jak magnetická polarizace P_m , tak magnetizace M charakterizují stupeň uspořádání Ampèrových magnetických momentů 9 m_i molekulárních proudů do směru vnějšího magnetického pole, tj. charakterizují stupeň magnetizace látky. Podobně jako při polarizaci dielektrika závisela polarizace na výsledné intenzitě elektrického pole v dielektriku, tak i v případě látky v magnetickém poli bude magnetizace záviset na výsledné intenzitě magnetického pole v látce. Pokud se omezíme na lineární magnetika, můžeme potom psát

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{24.108}$$

a tedy

$$\boldsymbol{P}_m = \mu_0 \chi_m \boldsymbol{H} \,, \tag{24.109}$$

kde χ_m je magnetická susceptibilita a je zřejmě bezrozměrnou veličinou. Může nabývat kladných i záporných hodnot a pro vakuum je rovna nule.

Dosadíme-li vztah (24.109) do vztahu (24.101), tak po úpravě dostaneme

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{=\mu_r} \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \qquad (24.110)$$

kde μ_r je relativní permeabilita prostředí (rovněž bezrozměrná veličina) a μ se nazývá permeabilita.

Pro magneticky izotropní látky jsou vektory P_m , M a H kolineární. U anizotropních látek nemá obecně vektor P_m stejný směr jako vektor H, potom magnetická susceptibilita již nemůže být skalární veličinou, ale veličinou tenzorovou (tenzorem druhého řádu).

⁹Vedle Ampèrova magnetického momentu se můžeme setkat s Coulombovým magnetickým momentem $\mathbf{p}_{mi} = \mu_0 \mathbf{m}_i.$

24.12.1 Rozdělení látek podle jejich magnetických vlastností

U látek nacházejících se v magnetickém poli pozorujeme rozdílné chování. Přiblížíme-li vzorky materiálů k permanentnímu magnetu, tak zjistíme, že některé vzorky jsou silně k magnetu přitahovány, zatímco vzorky jiných materiálů na přítomnost magnetického pole magnetu téměř nereagují. Díky této pozorované skutečnosti můžeme materiály rozdělit do dvou skupin:

- 1. Slabě magnetické látky jedná se o látky, které slabě reagují na přítomnost magnetického pole. Citlivým měřením bylo zjištěno, že na základě chování vzorků látek spadajících do této skupiny, které se nachází v nehomogenním magnetickém poli, je možné je dále rozdělit na další dvě skupiny. Látky jedné skupiny jsou do nehomogenního magnetického pole slabě vtahovány. Jejich magnetická susceptibilita má malou kladnou hodnotu, tj. $\chi_m > 0$ ($\mu_r > 1$). Tuto skupinu slabě magnetických látek nazýváme látky paramagnetické či paramagnetika. Druhou skupinou jsou látky, které jsou z nehomogenního magnetického pole naopak slabě vytlačovány. Magnetická susceptibilita u těchto látek má malou zápornou hodnotu, tj. $\chi_m < 0$ ($\mu_r < 1$). Látky patřící do této skupiny se nazývají látky diamagnetické či diamagnetika.
- 2. Silně magnetické látky jedná se o látky, které silně reagují na přítomnost magnetického pole. Jejich magnetická susceptibilita dosahuje vysokých kladných hodnot, tj. $\chi_m \gg 0$ ($\mu_r \gg 1$). Významnou skupinou látek patřící mezi silně magnetické látky jsou látky feromagnetické či jen feromagnetika. U feromagnetik není magnetická susceptibilita, a tedy i relativní permeabilita, konstantní, ale závisí na velikosti intenzity magnetického pole v látce. Jedná se tedy o nelineární magnetika.

Látky diamagnetické

Jejich magnetická susceptibilita χ_m je záporná a většinou v absolutní hodnotě značně menší než magnetická susceptibilita ostatních látek. Je to způsobeno tím, že atomy nebo molekuly těchto látek mají bez přítomnosti vnějšího magnetického pole nulový Ampèrův magnetický moment (elektrony jsou spárovány a jejich spinové magnetické momenty jsou vzájemně vykompenzovány), tj. je-li $\mathbf{B}_o = \mathbf{0}$ je $\mathbf{m}_{i\alpha} = \mathbf{0}$, a tudíž i $\Delta \mathbf{m}_i = \mathbf{0}$.

Působením vnějšího magnetického pole získá každý elektron přídavný, tzv. indukovaný magnetický moment, který je orientován proti vnějšímu magnetickému poli (výsledné pole v diamagnetické látce má tedy menší indukci než primární pole ve vakuu). Jedná se o indukovanou magnetickou polarizaci P_m , resp. magnetizaci M a tyto vektory mají opačnou orientaci než vektor magnetické indukce B_o vnějšího magnetického pole. Jejich magnetická susceptibilita χ_m nezávisí na teplotě ani na velikosti intenzity magnetického pole.

Do této skupiny látek patří některé kovy (Cu, Ag, Pb, Bi aj.), některé další látky pevného, kapalného či plynného skupenství (např. voda, HCl, vzácné plyny) a většina látek organického původu.

Látky paramagnetické

Do této skupiny patří látky, jejichž atomy či molekuly mají vlastní nenulový Ampèrův magnetický moment, $\mathbf{m}_i \neq \mathbf{0}$. Nepůsobí-li na látku z této skupiny magnetické pole, jsou Ampèrovy magnetické momenty těchto látek chaoticky orientovány, takže jejich vektorový součet v makroskopickém objemu ΔV je roven nule, tj. $\Delta \mathbf{m}_i = \sum_{\alpha}^{\Delta V} \mathbf{m}_{\alpha i} = \mathbf{0}$.

Vložíme-li do vnějšího magnetického pole paramagnetikum, dojde k částečnému uspořádání Ampèrových magnetických momentů molekul, takže jsou orientovány shodně s vektorem magnetické indukce \mathbf{B}_o (zesilují vnější magnetické pole). Toto uspořádání je však narušováno

tepelným pohybem molekul paramagnetika, a proto magnetická susceptibilita χ_m paramagnetických látek závisí nepřímo úměrně na absolutní teplotě látky, tj.

$$\chi_m = \frac{C}{T} \,, \tag{24.111}$$

kde T je absolutní teplota látky a C Courierova konstanta.

Magnetická polarizace P_m paramagnetických látek v nepříliš silných magnetických polích je při dané teplotě lineární funkcí intenzity magnetického pole (lineární magnetikum). Do této skupiny patří např. Al, Pt, Cr, Mn, vzduch.

Feromagnetické látky

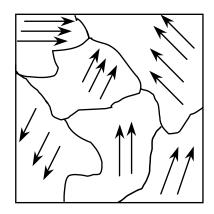
Mezi tyto látky patří např. Fe, Co, Ni, nebo některé slitiny. Jejich magnetické vlastnosti se výrazně odlišují od vlastností slabě magnetických látek. Jde zejména o následující rozdíly:

- Vzhledem k vysokým hodnotám magnetické susceptibility χ_m , a tedy relativní permeability μ_r , dosahuje magnetická polarizace vysokých hodnot již v přítomnosti slabých vnějších magnetických polí, takže magnetická indukce \boldsymbol{B} ve feromagnetických látkách je značně větší než magnetická indukce \boldsymbol{B}_o vnějšího magnetického pole.
- Jedná se o nelineární magnetika.
- Feromagnetické látky dosahují nasyceného stavu, tj. souhlasná orientace Ampèrových magnetických momentů všech molekul s vnějším magnetickým polem, již v poměrně slabých magnetických polích. Po dosažení nasyceného stavu zůstává magnetická polarizace konstantní i při dalším zvyšování intenzity vnějšího magnetického pole.
- Magnetická susceptibilita χ_m feromagnetické látky závisí nejen na intenzitě přiloženého magnetického pole, ale i na předchozím stavu látky, tj. $jevi\ hysterezi$.
- Magnetická susceptibilita χ_m závisí na teplotě látky způsobem, že pro každou feromagnetickou látku existuje tzv. Curierova teplota T_c , při jejímž překročení se látka stává parametrickou¹⁰. V paramagnetickém stavu se magnetická susceptibilita χ_m řídí Curierovým-Weissovým zákonem

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_p} \,, \tag{24.112}$$

který platí pro teploty $T \gg T_c$. Teplota $T_p < T$ je tzv. paramagnetická Curierova teplota, která je o několik desítek stupňů vyšší než Curierova teplota T_c .

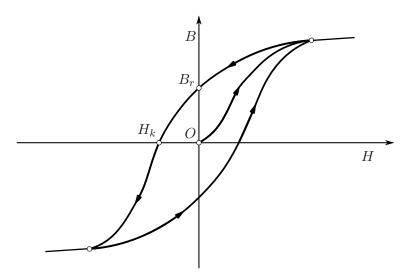
Atomy či molekuly feromagnetické látky mají i bez přítomnosti vnějšího magnetického pole nenulový Ampèrův magnetický moment $\mathbf{m}_{i\alpha} \neq \mathbf{0}$, podobně jako u paramagnetik, avšak existuje dostatečně silné vzájemné působení se sousedními atomy, tzv. *výměnná interakce*. Výsledkem tohoto působení je vznik malých oblastí, tzv. magnetických domén, které jsou spontánně zmagnetovány do nasyceného stavu, viz obr. 24.15. Objem feromagnetických domén může být řádově v rozmezí 10^{-3} mm³ až mm³. Zahřátím feromagnetické látky nad Curierovu teplotu T_c vymizí v látce doménová struktura a tím i spontánní magnetizace domén. Při snížení teploty látky pod Curierovu teplotu se v látce ustanoví nová doménová struktura. Pokud není vzorek látky ve vnějším magnetickém poli, jsou magnetické momenty těchto domén chaoticky orientovány, takže vektorový součet všech jejich magnetických momentů v makroskopickém objemu látky ΔV je roven nule. V takovém případě je látka nezmagnetována.



Obrázek 24.15: Oblasti spontánní magnetizace - domény.

Sledujme nyní závislost magnetické indukce pole ve feromagnetiku v závislosti na velikosti intenzity vnějšího magnetického pole, B=f(H), ze stavu H=0 dosud nemagnetovaného feromagnatika. S rostoucí hodnotou intenzity vnějšího magnetického pole se zvyšuje i velikost magnetické indukce (případně velikost magnetizace) v uvažovaném feromagnetiku. Nárůst magnetické indukce se děje po tzv. *křivce prvotní magnetizace*. Při jisté hodnotě intenzity vnějšího magnetického pole H se dosáhne nasyceného stavu, kdy jsou již magnetické momenty všech domén orientovány souhlasně s vnějším magnetickým polem, takže magnetizace M feromagnetika zůstává konstantní při dalším zvyšování intenzity H a magnetická indukce B jen nepatrně roste vlivem zvyšujícího se vnějšího magnetického pole.

Budeme-li nyní intenzitu vnějšího magnetického pole snižovat, nebude se magnetická indukce B snižovat po křivce prvotní magnetizace, ale po tzv. hysterezní křivce. Při H=0, tj. při vypnutí vnějšího magnetického pole, zůstane látka částečně zmagnetována a magnetická indukce bude mít hodnotu $B=B_r$, která se nazývá remanentní magnetická indukce. Změní-li se orientace magnetické intenzity H, tak dochází k postupnému snižování magnetické indukce B až dosáhne nulové hodnoty, které odpovídá hodnota magnetické indukce $H=H_k$, jež se nazývá koercitivní intenzita. Další magnetování probíhá po hysterezní křivce. Provedeme-li celý magnetizační cyklus, dostaneme uzavřenou hysterezní křivku zvanou hysterezní smyčka feromagnetika. Celá popsaná situace je zachycena na obrázku 24.16. Hysterezní smyčky růz-

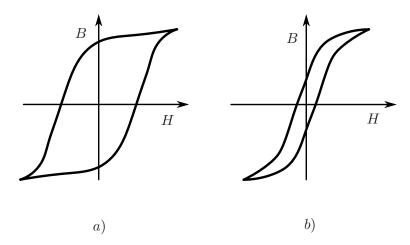


Obrázek 24.16: Hysterezní smyčka feromagnetika.

ných feromagnetických látek se od sebe liší jak tvarem, tak i plošným obsahem, který smyčka

 $^{^{10} \}mathrm{Pro}$ železo je $T_c = 769$ °C, pro nikl $T_c = 358$ °C

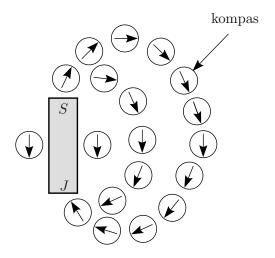
ohraničuje. Velikost této plochy souvisí s hysterezními ztrátami (čím větší plocha, tím jsou větší). Feromagnetika se širokou hysterezní smyčkou se nazývají magneticky tvrdá (vhodná pro výrobu permanentních magnetů), viz obr. 24.17 a), kdežto feromagnetika se úzkou hysterezní smyčkou se nazývají magneticky měkká (vhodná pro použití ve střídavých magnetických polích), viz obr. 24.17 b).



Obrázek 24.17: Hysterezní smyčka feromagnetika a) tvrdého b) měkkého.

Poznámka

Trvale zmagnetované (magneticky polarizované) látky nazýváme (permanentní) magnety. Přírodní ani uměle zhotovené magnety však nevykazují magnetické vlastnosti po celém povrchu stejně. Dvě místa, kde se magnetické jevy projevují nejvýrazněji, se nazývají magnetické póly. Jeden z magnetických pólů zpravidla nazýváme jako jižní, značíme ho J a druhý jako severni, značíme ho S. Indukční čáry vystupují ze severního pólu a vstupují do pólu jižního, viz obr. 24.18. Přiblížíme-li dva magnety k sobě jejich nesouhlasnými póly, tak zjistíme, že se magnety budou k sobě přitahovat, kdežto v případě přiblížení jejich souhlasných pólů se magnety budou vzájemně odpuzovat. Na obrázku 24.18 je zobrazen tyčový magnet a jeho magnetické pole.



Obrázek 24.18: Zachycení části pole tyčového magnetu.

24.12.2 Stacionární magnetické pole na rozhraní dvou prostředí

Uvažujme rozhraní dvou látek s relativními permeabilitami μ_{r1} a μ_{r2} . Jak vektor magnetické intenzity \boldsymbol{H} , tak vektor magnetické indukce \boldsymbol{B} rozložíme na normálovou a tečnou složku vzhledem k rozhraní uvažovaných dvou dielektrik, viz obr. 24.19 a 24.20. Budeme vyšetřovat, jak se budou složky těchto vektorů měnit při přechodu z jednoho dielektrika do druhého. Nejdříve se zaměříme na tečné složky magnetické intenzity. K tomuto účelu sestrojíme v těsné blízkosti rozhraní uzavřenou dráhu ve tvaru úzkého obdélníku ABCD. Necháme-li cirkulovat vektor intenzity magnetického pole podél tohoto obdélníku, pak na základě Ampèrova zákona celkového proudu platí

$$\oint_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \qquad (24.113)$$

Integrál v tomto vztahu rozepíšeme na čtyři integrály podél jednotlivých stran uvažovaného obdélníku, přičemž budeme uvažovat, že vektory intenzity magnetického pole pro obě magnetika budou mít složky $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{t1} + \mathbf{H}_{n1}$ a $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{t2} + \mathbf{H}_{n2}$ (viz obr. 24.19)

$$\int_{A}^{B} H_{t1} dl + \int_{B}^{C} H_{n1} dl - \int_{C}^{D} H_{t2} dl - \int_{D}^{A} H_{n1} dl = I.$$
 (24.114)

Protože vyšetřujeme pole v těsné blízkosti rozhraní, bude v limitním případě $BC \to 0$ a $DA \to 0$, tedy můžeme integrály s normálovými složkami vektoru magnetické intenzity (tedy druhý a čtvrtý integrál) v rovnici (24.114) položit rovny nule. Předpokládáme-li, že rozhraním dielektrik neteče plošný proud, pak pro uvažovaný limitní případ dostáváme

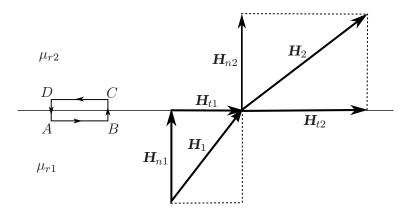
$$\int_{A}^{B} H_{t1} dl - \int_{C}^{D} H_{t2} dl = 0.$$
 (24.115)

Vzhledem k tomu, že délky stran obdélníku mezi body AB a CD se rovnají, tak odtud vyplývá

$$H_{t1} = H_{t2}$$
 (24.116)

Tedy můžeme konstatovat, že velikost tečné složky intenzity magnetického pole se na rozhraní dvou prostředí nemění.

S ohledem na vztah (24.110) lze výsledek (24.116) přepsat



Obrázek 24.19: Složky vektoru magnetické intenzity na rozhraní dvou prostředí.

$$\frac{B_{t1}}{\mu_0 \mu_{r1}} = \frac{B_{t2}}{\mu_0 \mu_{r2}} \tag{24.117}$$

a odtud dostáváme

$$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \,, \tag{24.118}$$

tedy velikost tečné složky vektoru magnetické indukce se na rozhraní dvou prostředí změní v poměru odpovídajících relativních permeabilit.

Nyní vyšetříme, jak se změní normálové složky vektoru magnetické indukce při přechodu z jednoho prostředí do druhého. Za tímto účelem na rozhraní uvažovaných prostředí zvolíme uzavřenou plochu S_v ve tvaru válce, jehož podstavy jsou rovnoběžné s rozhraním. Podle vztahu (24.24) dostaneme

$$\iint_{S_n} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{24.119}$$

Integrál na levé straně této rovnice rozepíšeme na tok vektoru magnetické indukce \boldsymbol{B} základnami válce ΔS a tok plochou jeho pláště $S_{\rm pl}$

$$-\iint_{\Delta S} B_{n1} dS + \iint_{S_{\text{pl}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Delta S} B_{n2} dS = 0.$$
 (24.120)

U prvního integrálu je znaménko minus, protože magnetický indukční tok vstupuje spodní základnou do uzavřené plochy. Dále předpokládejme, že se základny válce ΔS neomezeně blíží k rozhraní, tj. $h \to 0$, a tedy $S_{\rm pl} \to 0$. Díky tomuto předpokladu je možné integrál pro tok magnetické indukce pláštěm válcové plochy (prostřední integrál) položit roven nule, takže dostáváme

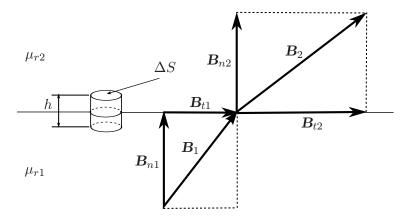
$$-\iint_{\Delta S} B_{n1} dS + \iint_{\Delta S} B_{n2} dS = 0.$$
 (24.121)

Jelikož základy válce jsou samozřejmě stejně velké, tak odtud vyplývá

$$B_{n1} = B_{n2} (24.122)$$

Odtud můžeme konstatovat, že velikost normálové složky vektoru magnetické indukce se na rozhraní dvou prostředí nemění.

Opět pomocí vztahu (24.110) přepíšeme tuto rovnost



Obrázek 24.20: Složky vektoru magnetické indukce na rozhraní dvou prostředí.

$$\mu_0 \mu_{r1} H_{n1} = \mu_0 \mu_{r2} H_{n2} \tag{24.123}$$

a odtud dostáváme

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} \ . \tag{24.124}$$

Z tohoto vztahu lze vidět, že velikost normálové složky vektoru magnetické intenzity se na rozhraní dvou prostředí mění skokem a to v obráceném poměru relativních permeabilit. Odtud je zřejmé, že v případě, kdy magnetické pole není kolmé k rozhraní dvou prostředí, dochází k lomu magnetických siločar i magnetických indukčních čar.

Kapitola 25

Elektromagnetické pole

25.1 Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Zákon elektromagnetické indukce souvisí se skutečností, že v uzavřené vodivé smyčce vzniká elektrický proud, jestliže v jeho okolí dochází k jakýmkoliv změnám magnetického pole. Jev elektromagnetické indukce lze pozorovat v několika situacích. Uvažujme vodivou uzavřenou smyčku zhotovenou z homogenního vodiče, která je umístěna v blízkosti zdrojů magnetického pole (soustava vodičů protékaná elektrickým proudem či zmagnetovaných těles). Předpokládejme dále, že máme možnost měřit proud protékající uvažovanou smyčkou. Zjistíme, že smyčkou nepoteče žádný proud, jestliže magnetické pole v jejím okolí bude neproměnné a smyčka bude v klidu. Naopak smyčkou začne protékat elektrický proud v těchto třech případech:

- 1. smyčka se začne vhodným způsobem pohybovat,
- 2. vhodným způsobem se začnou pohybovat zdroje magnetického pole,
- 3. smyčka i zdroje magnetického pole zůstanou v klidu vůči laboratorní (pozorovací) soustavě, ale začne se měnit magnetické pole uvnitř smyčky (např. tím, že se začnou s časem měnit elektrické proudy ve vodičích vytvářejících magnetické pole).

Dříve než si uvedeme znění Faradayova zákona elektromagnetické indukce, budeme uvažovat následující modelovou situaci, která odpovídá prvnímu výše uvedenému případu.

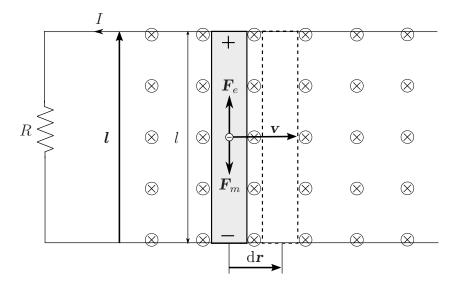
Přímý vodič (kovová tyč) délky l se nachází v homogenním magnetickém poli $\mathbf{B} = -B\mathbf{e}_z$. Nechť se tento vodič vlivem vnější síly pohybuje kolmo k indukčním čarám rychlostí $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ bez tření po vodivé koleji, viz obr. 25.1. Pohybující se vodič obsahuje volné nosiče elektrického náboje q = -e, které se pohybují v magnetickém poli rovněž rychlostí \mathbf{v} , takže na ně působí magnetické pole magnetickou silou

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} . \tag{25.1}$$

Vlivem působení této síly se volné nosiče elektrického náboje (elektrony) přemístí k dolnímu konci uvažovaného vodiče, kde vzroste jejich koncentrace, tedy volně pohybující se elektrony se posouvají proti pevným kladným iontům. Díky této skutečnosti na horním konci vodiče vzniká úbytek elektronů, na dolním jejich nadbytek. Tímto vznikne ve vodiči (podél vodiče) elektrostatické pole \boldsymbol{E} , které bude bránit dalšímu přemísťování nábojů vlivem magnetické síly. V ustáleném stavu působí na nosiče proudu elektrostatická síla stejné velikosti jako je síla magnetická, avšak opačně orientovaná, tj. $\boldsymbol{F}_e = -\boldsymbol{F}_m$, tedy

$$q\mathbf{E} = -q\mathbf{v} \times \mathbf{B} . \tag{25.2}$$





Obrázek 25.1: Pohybující se vodič v homogenním magnetickém poli.

Porovnáním levé a pravé strany této rovnice dostáváme

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \,. \tag{25.3}$$

Primárním činitelem probíhajícího děje uvnitř vodivé tyče je magnetická síla \mathbf{F}_m . Působení této síly na elektrony ve vodiči modelujeme indukovaným elektrickým polem (neelktrostatické) o intenzitě

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{F}_m}{q} = \frac{\mathbf{F}_m}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} . \tag{25.4}$$

Intenzita (25.4) představuje elektromotorickou (vtištěnou) intenzitu, tj. $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}^*$, a tedy magnetická síla představuje elektromotorickou (vtištěnou) sílu, tj. $\mathbf{F}_m = \mathbf{F}^*$.

Pomocí vtištěné intenzity \mathbf{E}_i vypočteme jí příslušné elektromotorické napětí (23.67), které nazýváme indukované elektromotorické napětí a budeme ho značit \mathcal{E}_i . Indukované emn \mathcal{E}_i odpovídá dráhovému integrálu intenzity \mathbf{E}_i , určenou vztahem (25.4), po délce vodivé tyče v magnetickém poli (indukované elektrické pole vzniká jen v úseku vodivé tyče)

$$\mathcal{E}_{i} = \oint_{C} \mathbf{E}_{i} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_{i} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-}^{+} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} = vlB , \qquad (25.5)$$

kde \boldsymbol{l} je vektor zachycený na obr. 25.1. Na obrázku 25.2 je zachycen ekvivalentní obvod k situaci zachycené obrázkem 25.1.

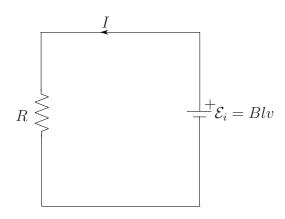
Ze vztahu (25.5) můžeme při použití pravidla o záměně členů smíšeného vektorového součinu psát

$$\mathcal{E}_{i} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{l}) \cdot \mathbf{B} = -\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{l}\right) \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mathrm{d}(\mathbf{r} \times \mathbf{l})}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{B} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{S}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{B}, \quad (25.6)$$

kde d $\mathbf{S} = d\mathbf{r} \times \mathbf{l}$ je vektorový element plochy, kterou opíše vodivá tyč za čas dt.

Uvážíme-li, že pro element magnetického indukčního toku platí $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, můžeme vztah pro indukované elektromotorické napětí (25.6) napsat ve tvaru

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \ . \tag{25.7}$$



Obrázek 25.2: Ekvivalentní obvod k situaci zachycené na obrázku 25.1.

Odtud vidíme že indukované emn je rovno záporně vzaté časové změně magnetického indukčního toku.

K tomuto výsledku jsme dospěli pro jednoduchý tvar vodiče, který se navíc pohyboval kolmo k indukčním čarám homogenního magnetického pole.

Jak bylo výše ukázáno, magnetická síla je zodpovědná za vznik elektromotorického napětí. Tato síla však nekoná práci, protože je silou gyroskopickou. Samozřejmě vzniká otázka, odkud se vzala energie na ohřátí elektrického odporu (Jouleovo teplo). Tuto energii dodává vnější síla, která posouvá uvažovanou tyč po kolejnici.

Příklad 25.1.1

Uvažujme výše popisovanou situaci, kdy se kolmo k homogennímu magnetickému poli $\mathbf{B} = -B\mathbf{e}_z$ pohybuje po koleji bez tření tyčový vodič o hmotnosti m, viz obr. 25.1. Spočítejte velikost proudu I, který protéká elektrickým odporem R, časovou závislost rychlosti této tyče, když víme, že v čase t=0 byla její rychlost v_0 . Dále ověřte, zda kinetická energie tyče v čase t=0 byla dodána uvažovanému elektrickému odporu R.

Řešení:

Elektrickým odporem R protéká elektrický proud

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} .$$

Dosadíme za emn ze vztahu (25.5)

$$I = \frac{Blv}{R} \ .$$

Pomocí vztahu (24.32) spočítáme magnetickou sílu, která působí na tyč protékanou proudem I

$$\mathbf{F}_m = -IlB\mathbf{e}_x = -\frac{B^2l^2v}{R}\mathbf{e}_x .$$

Odtud můžeme psát pohybovou rovnici tyče

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_x = \mathbf{F}_m = -\frac{B^2l^2v}{R}\mathbf{e}_x ,$$

tedy

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2 l^2}{mR}v \quad \Rightarrow \quad v = v_0 \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mR}t\right) \ .$$

Na základě vztahu (23.65) můžeme spočítat Jouleovo teplo

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = RI^2 = R\frac{B^2l^2v^2}{R^2} = \frac{B^2l^2v^2}{R} = \frac{B^2l^2}{R}v_0^2 \exp\left(-2\frac{B^2l^2}{mR}t\right) = amv_0^2\mathrm{e}^{-2at} \; ,$$

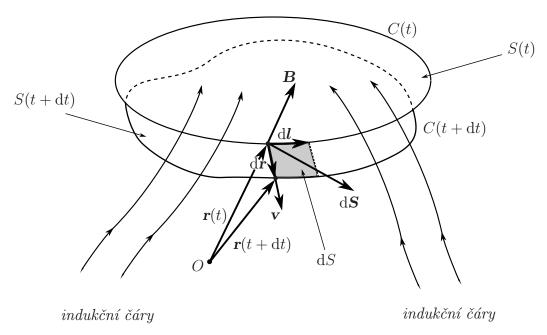
kde

$$a = \frac{B^2 l^2}{mR} \ .$$

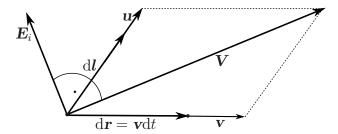
Odtud

$$W = amv_0^2 \int_0^\infty e^{-2at} dt = amv_0^2 \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}mv_0^2 = T_0.$$

V následující části textu nalezneme vztah pro indukované emn i pro obecnější případ, kdy magnetická indukce není homogenní, avšak $\partial \mathbf{B}/\partial t = \mathbf{0}$, a vodič představuje obecnou proudovou smyčku, která se pohybuje okamžitou rychlostí \mathbf{v} libovolným směrem a navíc s časem mění i svůj tvar (deformuje se). Situace je zachycena na obrázku 25.3, kde je zobrazena



Obrázek 25.3: Pohyb proudové smyčky v nehomogenním magnetickém poli.



Obrázek 25.4: Skládání rychlostí náboje \boldsymbol{u} a proudové smyčky \boldsymbol{v} .

smyčka v čase t a v čase t + dt. Na proudové smyčce uvažujme orientovaný délkový element vodiče dl. Plocha, kterou opíše délkový element vodiče dl při pohybu vodiče za čas dt, je dS. Tomuto elementu plochy odpovídá vektor

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{r} \times d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt \times d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})dt, \qquad (25.8)$$

kde \mathbf{v} je okamžitá rychlost bodu proudové smyčky o polohovém vektoru $\mathbf{r}(t)$, který za čas dt přejde do bodu $\mathbf{r}(t+\mathrm{d}t)$.

Na obrázku 25.3 jsou zobrazeny dvě křivky, které reprezentují uvažovanou proudovou smyčku (vodič) v čase t a čase t+dt. Můžeme si představit, že tyto křivky jsou spojeny pomyslným proužkem. Potom indukční tok $\Phi(t+dt)$ plochou S(t+dt) je dán součtem indukčního toku $\Phi(t)$ plochou S(t) a toku $\Phi_{\text{proužek}}$ oním pomyslným proužkem. Tedy pro změnu indukčního toku dostáváme

$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) = \Phi_{\text{proužek}} = \iint_{\text{proužek}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \qquad (25.9)$$

kde vektor elementu plochy proužku d \boldsymbol{S} je dán vztahem (25.8), který dosadíme do výrazu (25.9)

$$d\Phi = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) dt . \qquad (25.10)$$

Odtud dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times \mathrm{d}\mathbf{l}) . \tag{25.11}$$

Označíme-li rychlost náboje v proudové smyčce (vodiči) \boldsymbol{u} , pak výsledná rychlost pohybu náboje v laboratorní soustavě \boldsymbol{V} je dána jejím součtem s rychlostí proudové smyčky \boldsymbol{v} , tedy $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, viz obr. 25.4. Jelikož je rychlost \boldsymbol{u} je kolineární s elementem d \boldsymbol{l} můžeme přepsat vztah (25.11) do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} \times \mathrm{d}\mathbf{l}) . \tag{25.12}$$

Smíšený součin v tomto vztahu lze přepsat jako

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{V} \times d\mathbf{l}) = -(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} , \qquad (25.13)$$

čímž dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\oint_C (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \ . \tag{25.14}$$

Integrand v tomto vztahu vlastně představuje elektromotorickou intenzitu $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_i = \mathbf{F}/q = \mathbf{V} \times \mathbf{B}$, takže můžeme přepsat vztah (25.14) do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\oint_C \mathbf{E}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \ . \tag{25.15}$$

Protože platí, že

$$\mathcal{E}_i = \oint_C \mathbf{E}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \;, \tag{25.16}$$

lze porovnáním vztahů (25.15) a (25.16) dospět opět ke vztahu

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \ . \tag{25.17}$$

Na základně podrobných pokusů bylo ukázáno, že existuje kvantitativní vztah mezi hodnotou indukovaného emn a časovými změnami celkového magnetického toku. Tento vztah popisuje $Faradayův\ zákon\ elektromagnetické\ indukce^1$:

Velikost indukovaného elektromotorického napětí je rovna velikosti totální (úplné) časové derivace celkového magnetického toku smyčkou. Směr indukovaného proudu ve smyčce je vždy takový, že magnetické pole vytvořené tímto proudem se vždy snaží kompenzovat změny

¹Také se tento zákon označuje jako Faradayův zákon.

magnetického toku odpovědné za vznik indukovaného proudu. Matematická formulace tohoto zákona má tvar

$$\mathcal{E}_i(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \ . \tag{25.18}$$

Poznatek o směru indukovaného proudu se často označuje jako *Lenzovo pravidlo* či *Lenzův zákon*.

Elektromotorickým napětím jsme nazvali dráhový integrál vektoru intenzity elektrického pole, viz (23.71), takže i v případě indukovaného emn můžeme psát

$$\mathcal{E}_i = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} , \qquad (25.19)$$

odtud na základě vztahu (25.18) dostáváme

magnetické indukce na tvar diferenciální, tj.

$$\oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$
 (25.20)

Toto rovnice je rovněž matematickým vyjádřením zákona elektromagnetické indukce. V tomto tvaru, mimo jiné, nám říká, že *měnícím se magnetickým polem je indukováno elektrické pole*. J. C. Maxwell zobecnil rovnici (25.20) pro smyčky, resp. křivky, (i jen myšlené²) v libovolném prostředí.

Poněvadž obecně platí, že $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$, je možné totální časovou derivaci ve vztahu (25.20) vyjádřit v kartézských souřadnicích jako

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \ . \tag{25.21}$$

Totální derivace celkového magnetického indukčního toku odráží skutečnost, že indukované emn lze vyvolat buď prostorovou změnou vodiče při stálé hodnotě a pevném směru \boldsymbol{B} , nebo časovou změnou magnetického pole vyvolanou buď změnou velikosti indukce, nebo změnou jejího směru. První případ byl výše zkoumán.

Jestliže uvažujeme plochu S vymezenou křivkou C za nehybnou, pak časová derivace ve vztahu (25.20) se aplikuje jen na časově proměnné magnetické pole \boldsymbol{B} . V takovém případě můžeme vztah (25.20) přepsat jako

$$\oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$
(25.22)

Tento vztah vyjadřuje zákon elektromagnetické indukce v integrálním tvaru pro stacionární (nepohyblivou) smyčku, která je vložena do časově proměnného magnetického pole³. Použijeme-li Stokesovu větu, můžeme snadno převést integrální tvar zápisu zákona elektro-

$$\iint_{S} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{S} = -\iint_{S} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}, \qquad (25.23)$$

²Rovnice (25.20) nám říká, že měnící se magnetické pole vytváří pole elektrické a pozoruhodné je, že odtud plyne, že elektrické pole se indukuje i tehdy, když uzavřená vodivá smyčka je nahrazena jen myšlenou uzavřenou křivkou.

 $^{^3}$ Parciální časová derivace v integrandu má naznačit skutečnost, že časová změna souvisí pouze se změnou magnetické indukce \boldsymbol{B}

odtud

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \,. \tag{25.24}$$

Pravou stranu rovnice (25.22) můžeme položit rovnu indukovanému emn souvisejícímu čistě jen s časovou změnou vektoru \boldsymbol{B} při nehybné smyčce, které označíme jako

$$\mathcal{E}_{it} = -\iint_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} . \tag{25.25}$$

V případě, že indukované emn souvisí jen s pohybem smyčky (magnetické pole považujeme za neměnné), potom toto emn označíme jako \mathcal{E}_{ip} a na základě vztahů (25.11) a (25.17) je určeno jako

$$\mathcal{E}_{ip} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} . \qquad (25.26)$$

V případě, že se smyčka (obvod) pohybuje v časově proměnném magnetickém poli, je celkové indukované emn dáno vztahem

$$\mathcal{E}_{i} = \mathcal{E}_{it} + \mathcal{E}_{ip} = -\iint_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{C} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} . \qquad (25.27)$$

S ohledem na vztah (25.20) můžeme tuto rovnost vyjádřit jako

$$\oint_{C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}_{it} + \mathcal{E}_{ip} = -\iint_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{C} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} .$$
 (25.28)

Použitím Stokesovy věty dostaneme

$$\iint_{S} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{S} = -\iint_{S} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S} [\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})] \cdot d\boldsymbol{S}.$$
 (25.29)

Protože plocha S je ohraničena libovolnou křivkou C, bude tato rovnice splněna jen v případě následující rovnosti integrandů

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \tag{25.30}$$

Tato rovnice představuje zákon elektromagnetické indukce v nejobecnějším diferenciálním tvaru. Umožňuje nám určit elektrické pole v bodě pozorovatele pohybujícího se rychlostí ${\bf v}$ v magnetickém poli ${\bf B}$.

25.2 Maxwellovo zobecnění Ampèrova zákona celkového proudu pro nestacionární elektromagnetické pole

V kapitole 24.11 jsme dopěli k Ampèrovu zákonu celkového proudu v látkovém prostředí, jehož diferenciální tvar je dán vztahem (24.105). Provedeme-li divergenci obou stran rovnice (24.105), tak dospějeme k výsledku

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{j} \,. \tag{25.31}$$

Protože na základě identity (A.10) je divergence rotace rovna nule, bude rovnice (24.105) splněna jen v případě, že $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Z kapitoly 23.3 víme, že tato rovnost je však splněna jen v případě stacionárního elektrického pole. Uvažujeme-li elektrické pole nestacionární, což je náš případ, pak na základě rovnice kontinuity (23.30) platí

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \ . \tag{25.32}$$

Odtud vidíme, že Ampèrův zákon celkového proudu je použitelný v tomto tvaru jen pro stacionární elektrická pole. Pro nestacionární elektrické pole je nutné tento zákon upravit. Rovnici kontinuity (23.30) upravíme tak, že za objemovou hustotu volného elektrického náboje dosadíme z Gaussova zákona (22.18)

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} = 0.$$
 (25.33)

Rovnici můžeme dále upravit do tvaru

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{j}_c = 0 , \qquad (25.34)$$

kde

$$\mathbf{j}_c = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{25.35}$$

je celková hustota proudu, která se skládá z hustoty kondukčního a konvekčního proudu \mathbf{j} , ale i z hustoty tzv. posuvného proudu $\partial \mathbf{D}/\partial t$. Posuvný proud tedy existuje vždy, když se s časem mění vektor elektrické indukce (elektrické pole).

Dosadíme-li za elektrickou indukci ze vztahu (22.17), pak dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{j}_M + \mathbf{j}_P , \qquad (25.36)$$

kde první člen na pravé straně rovnosti se nazývá hustota *Maxwellova* proudu a poslední člen představuje hustotu proudu *polarizačního*, viz kapitola 23.1.

Má-li mít rovnice (24.105) obecnou platnost, je nutné na její pravou stranu přičíst posuvný proud, čímž dostaneme

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \ . \tag{25.37}$$

Tato rovnice je matematickým vyjádřením zobecněného Ampèrova zákona celkového proudu v diferenciálním tvaru, který platí i pro nestacionární elektrické pole. Integrální tvar tohoto zákona nalezneme pomocí Stokesovy věty

$$\oint_{C} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \iint_{S} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$
 (25.38)

Pro objasnění fyzikálního významu posuvného, resp. Maxwellova, proudu budeme uvažovat deskový kondenzátor, přičemž se omezíme na bezmateriálové prostředí, viz obr. 25.5. Při následujících úvahách budeme vycházet z experimentální zkušenosti, že v případě časově proměnného proudu I(t) naměříme stejný proud před i za kondenzátorem, takže kondenzátorem teče elektrický proud⁴. Proud I(t) nabíjí elektrody kondenzátoru a tím mění intenzitu elektrického pole \boldsymbol{E} mezi nimi. Pro intenzitu mezi elektrodami platí (předpokládáme homogenní elektrické pole - elektrody jsou blízko sebe)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{S} \,, \tag{25.39}$$

 $^{^4}$ Samozřejmě v případě stacionárního proudu je proud před i za kondenzátorem nulový, tedy kondenzátorem neteče elektrický proud.

kde Q je náboj na elektrodě kondenzátoru o ploše S.

Odtud můžeme psát

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 S} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\varepsilon_0 S} I(t) . \tag{25.40}$$

Pro posuvný proud ve vakuu mezi elektrodami, tedy Maxwellův proud, dostáváme

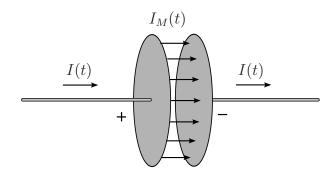
$$I_M(t) = \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \iint_S dS = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} S.$$
 (25.41)

Dosadíme za $\partial E/\partial t$ ze vztahu (25.40)

$$I_M(t) = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} S = \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0 S} I(t) S = I(t) .$$
 (25.42)

Odtud lze vidět, že vodivý (kondukční) a Maxwellův proud mají stejnou velikost.

Maxwellův proud $I_M(t)$ můžeme proto považovat za pokračování vodivého proudu I(t) z jedné elektrody přes mezeru kondenzátoru k druhé elektrodě. Protože elektrické pole je mezi deskami homogenní, je i Maxwellův proud $I_M(t)$ mezi nimi rozložen rovnoměrně, jak ukazují proudové čáry na obr. 25.5. Uvažme, že mezi deskami je vakuum, kde není žádný náboj, který by se pohyboval a vytvářel tak jakýkoli proud!



Obrázek 25.5: Maxwellův
proud I_M mezi deskami kondenzátoru nabíjeného proude
m ${\cal I}$.

Ze zobecněného Ampèrova zákona celkového proudu v diferenciálním tvaru (25.37) lze samozřejmě zpětně snadno získat rovnici kontinuity elektrického náboje v diferenciálním tvaru. Stačí nad rovnicí (25.37) provést operaci divergence, tedy

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{j} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$
 (25.43)

Jak již bylo výše uvedeno, divergence rotace vektorové funkce je vždy rovna nule, takže uvážíme-li navíc Gaussův zákon, tak můžeme psát

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad (25.44)$$

čímž jsme dostali rovnici kontinuity elektrického náboje v diferenciálním tvaru.

25.3 Úplná soustava Maxwellových rovnic

V předchozích částech kapitoly věnované elektromagnetickému poli jsme si ukázali, že elektrické pole nezávisí jen na rozložení elektrických nábojů, ale i na časových změnách magnetického pole, a dále, že magnetické pole závisí nejen na rozložení elektrických proudů, ale

také na časových změnách elektrického pole. To nás opravňuje zavést pojem jediného, a to elektromagnetického pole. Důsledkem tohoto zobecnění je pak předpověď existence elektromagnetických vln, které jsou dnes ve všech svých vlastnostech podrobně experimentálně i teoreticky prozkoumány.

Vlastnosti makroskopického elektromagnetického pole jsou popsány čtyřmi Maxwellovými rovnicemi, které vyjadřují čtyři obecně platné fyzikální zákony:

- I. Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru
 - 1. Gaussův zákon

$$\iint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q ,$$

2. Zákon o neexistenci magnetických nábojů

$$\iint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 ,$$

3. Faradayův zákon elektromagnetické indukce⁵

$$\oint_{c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

4. Zobecněný Ampèrův zákon celkového proudu

$$\oint_{c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \iint_{S} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

- II. Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru
 - 1. Gaussův zákon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$
,

2. Zákon o neexistenci magnetických nábojů

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
.

3. Faradayův zákon elektromagnetické indukce

$$\mathbf{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \;,$$

4. Zobecněný Ampèrův zákon celkového proudu

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$
.

Z výše uvedeného obecného tvaru Maxwellových rovnic vyplývá:

1. princip superpozice ve vakuu; v látkách platí princip superpozice jen pokud platí lineární vztahy $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H};$

⁵Tímto zápisem Faradayova zákona elektromagnetické indukce nebereme v úvahu časovou změnu indukčního toku způsobenou změnou polohy plochy uvažované smyčky (popř. i její velikosti a tvaru).

- 2. zákon zachování elektrického náboje;
- 3. Coulombův zákon a Biotův-Savartův zákon;
- 4. neplyne výraz pro Lorentzovu sílu;
- 5. neplyne zákon kvantování elektrického náboje;
- 6. neplyne, jak se v poli chovají látky (jsou-li dielektrické, paramagnetické apd.), to je třeba určit pomocí kvantové a statistické fyziky.

25.4 Kvazistacionární elektromagnetické pole

Je zřejmé, že pro bezmateriálové prostředí je nutné rovnici vyjadřující Ampèrův zákon celkového proudu (24.59) zobecnit pro nestacionární pole tak, že budeme navíc uvažovat Maxwellův proud

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \mathbf{j}_M . \tag{25.45}$$

Podle vztahu (25.36) můžeme tuto rovnici dále upravit

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \tag{25.46}$$

S ohledem na vztah (18.1) je možná následující úprava

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \tag{25.47}$$

S ohledem na faktor $1/c_0^2$ u posledního členu, je zřejmé, že tento člen je velmi malý. Maxwellův posuvný proud se tedy projeví až při velmi rychlých změnách elektrického pole, kdy časová derivace $\partial \mathbf{E}/\partial t$ je velká. Při pomalých změnách pole, např. při průmyslových frekvencích 50 až 60 Hz, můžeme tedy Maxwellův proud zanedbat a použít jen rovnice (24.59).

V případě, že si můžeme dovolit zanedbat Maxwellův proud, potom mluvíme o tzv. kvazistaconárním přiblížení a elektromagnetické pole vyhovující tomuto přiblížení nazýváme kvazistacionárním⁶. Kvazistacionárním přiblížením zajišťujeme předpoklad, že ve stejném čase je elektrický proud jakýmkoliv uvažovaným průřezem vodiče stejný. Jinými slovy, ve všech místech vodiče (např. kovový drát) naměříme stejnou hodnotu elektrického proudu, který se však s časem může měnit. V kvazistacionárním přiblížení se tedy proudové čáry s časem nemění a pro proudovou hustotu tímto můžeme psát

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})g(t) , \qquad (25.48)$$

přičemž platí při zanedbání posuvného proudu

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \tag{25.49}$$

Kvazistacionární elektromagnetické pole je popsáno následující neúplnou soustavou Maxwellových rovnic

1.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \Rightarrow \quad \iint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \;,$$

⁶Můžeme také říci, že elektromagnetické pole nazýváme kvazistacionárním, pakliže si můžeme dovolit počítat časovou změnu u zákona elektromagnetické indukce pomocí vztahů stacionárního magnetického pole.

2.
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 ,$$

3.
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \oint_{c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_{S} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} ,$$

4.
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad \oint_{c} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I \ .$$

V případě, že by bylo elektrické a magnetické pole stacionární, zjednoduší se výše uvedená soustava Maxwellových rovnic do následujícího tvaru

1.
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \Rightarrow \quad \iint_{S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \;,$$

2.
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 ,$$

3.
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{c} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$
,

4.
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad \oint_{c} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I \ .$$

25.5 Indukčnost vodičů a energie magnetického pole v kvazistacionárním přiblížení

25.5.1 Vlastní indukčnost vodiče a vlastní indukce

Uvažujme uzavřený elektrický obvod (proudovou smyčku), kterým protéká elektrický proud I. Z Biotova-Savartova-Laplaceova zákona (24.18) plyne, že magnetická indukce \boldsymbol{B} v okolí vodiče je přímo úměrná elektrickému proudu I, který vodičem protéká. Vezmeme-li dále v úvahu definiční vztah pro magnetický indukční tok (24.13), tak je odtud zřejmé, že je-li přímo úměrná magnetická indukce elektrickému proudu $B \sim I$, musí být i magnetický indukční tok přímo úměrný elektrickému proudu, tj. $\Phi \sim I$. Odtud zřejmě můžeme psát

$$\Phi = LI \,, \tag{25.50}$$

kde konstantu úměrnosti L nazýváme vlastní indukčnost vodiče. Výraz (25.50) představuje tzv. statickou definici vlastní indukčnosti. Jednotkou indukčnosti je henry a značíme ji H. Pro bezmateriálové prostředí je vlastní indukčnost L kladnou konstantní veličinou, která je závislá jen na velikosti a tvaru vodiče, tj. geometrii vodiče. Pro materiálová prostředí bude vlastní indukčnost navíc záviset na magnetických vlastnostech prostředí⁷.

Bude-li obvodem protékat časově proměnný proud I(t), bude s ohledem na výše uvedené

⁷Pro feromagnetická prostředí bude vlastní indukčnost záviset i na proudu, tedy není konstantou.

skutečnosti, vytvářet časově proměnné magnetické pole a plochou elektrického obvodu bude procházet časově proměnný magnetický indukční tok $\Phi(t)$. Podle zákona elektromagnetické indukce se díky časovým změnám magnetického indukčního toku bude indukovat v obvodu elektromotorické napětí

 $\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$ (25.51)

Tento jev se nazývá vlastní indukce či samoindukce. Připomeňme, že znaménko mínus souvisí s Lenzovým zákonem, a tedy značí, že indukované napětí je namířeno proti změně proudu, která jev vyvolává⁸. Odtud vyplývá, že elektrický obvod (vodič), kterým prochází časově proměnný proud, klade jeho průchodu odpor. Vztah (25.51) představuje tzv. dynamickou definici vlastní indukčnosti.

25.5.2 Vzájemná indukčnost vodičů a vzájemná indukce

Uvažujme dvě proudové smyčky, které jsou vůči sobě v klidu, viz 25.6. Jestliže první smyčkou protéká proud I_1 , potom vytváří magnetické pole \boldsymbol{B}_1 . Některé indukční čáry procházejí plochou vymezenou druhou smyčkou. Tok vektoru magnetické indukce \boldsymbol{B}_1 druhou smyčkou označíme Φ_2 . Potom na základě úvah z předchozí kapitoly musí platit, že $B_1 \sim I_1$ a $\Phi_2 \sim I_1$, tedy můžeme napsat

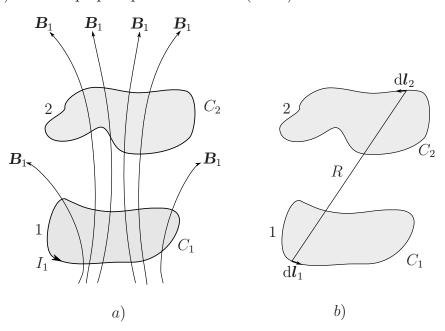
$$\Phi_2 = M_{21}I_1 \,, \tag{25.52}$$

kde M_{21} představuje konstantu úměrnosti, která může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot v závislosti na vzájemné orientaci uvažovaných smyček.

Pro indukční tok druhou smyčkou můžeme tedy psát

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathrm{d}S_2 \ . \tag{25.53}$$

Vztah (25.53) můžeme přepsat pomocí rovnosti (24.62) do tvaru



Obrázek 25.6: K výkladu vzájemné indukčnosti proudových smyček 1 a 2.

⁸Odtud plyne, že kdykoliv chceme v obvodu změnit proud, musíme překonat vliv indukovaného napětí. Tedy indukčnost hraje v elektrických obvodech stejnou roli, jakou hraje hmotnost v mechanických soustavách. Čím je větší indukčnost, tím je těžší změnit proud, čím je objekt hmotnější, tím je těžší změnit jeho rychlost.

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{A}_1) \cdot \mathrm{d}S_2 \ . \tag{25.54}$$

Tento vztah dále upravíme pomocí Stokesovy věty

$$\Phi_2 = \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_2 \ . \tag{25.55}$$

Za magnetický vektorový potenciál A_1 dosadíme ze vztahu (24.71)

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \left(\oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 . \tag{25.56}$$

Odtud porovnáním se vztahem (25.52) dostaneme

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{R} \,. \tag{25.57}$$

Tento vztah bývá nazýván *Neumannův vzorec*. Byť se tento vztah pro výpočet moc nehodí, plynou z něho následující dva důležité závěry:

- 1. Konstanta M_{21} závisí jen na tvaru, velikosti a vzájemné poloze uvažovaných smyček.
- 2. Křivkové integrály ve vztahu (25.57) lze zaměnit, čímž i zaměníme role uvažovaných smyček, díky čemuž musí tedy platit

$$M_{21} = M_{12} = M$$
,

kde konstantu M nazýváme vzájemná indukčnost smyček (vodičů) 1 a 2. Pro vzájemnou indukčnost používáme samozřejmě stejnou jednotku jako pro vlastní indukčnost.

Předpokládejme, že proud I_1 protékající smyčkou 1 se s časem mění. Jeho změna vyvolá změnu magnetického pole \mathbf{B}_1 a tím i časovou změnu magnetického indukčního toku Φ_2 druhou smyčkou. V souladu se zákonem o elektromagnetické indukci se tímto bude v druhé smyčce indukovat emn

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \,. \tag{25.58}$$

Tedy jakákoliv časová změna proudu I_1 způsobí, že druhou smyčkou bude téct elektrický proud I_2 , aniž by byly smyčky vodivě spojeny⁹.

25.6 Energie magnetického pole

Uvažujme rozpojený elektrický obvod, viz obr. 25.7. Součástí obvodu je vnější zdroj elektromotorického napětí \mathcal{E} , vlastní indukčnost uvažovaného obvodu L, elektrický odpor R, který představuje ztráty Jouleovým teplem (ohmické ztráty), a spínač S. Zpočátku je obvod rozpojený a v čase $t=t_0$ dojde k jeho sepnutí, čímž obvodem začne protékat elektrický proud. Změna z nulové hodnoty proudu na jeho konečnou hodnotu I však nebude skoková, ale velkost proudu bude s časem postupně narůstat. Popisovaný děj souvisí se skutečností, že díky změně proudu se naindukuje v uvažovaném obvodu elektromotorické napětí \mathcal{E}_i , které musí vnější zdroj emn \mathcal{E} překonávat. Část energie vnějšího zdroje emn se spotřebuje na hrazení

 $^{^9\}mathrm{Samozřejmě}$ stejným způsobem je možné změnou proudu I_2 indukovat ve smyčce 1 elektromotorické napětí $\mathcal{E}_{i1}.$

ztrát Jouleovým teplem a část energie se spotřebuje na práci, kterou musí vykonat na překonání indukovaného elektromotorického napětí, resp. proti elektromotorické síle, která brání změně elektrického proudu. Energie vnějšího zdroje emn spotřebovaná na práci proti elektromotorické síle se neztratí a bude uložena v magnetickém poli. Kvantitativně si můžeme tuto energii určit níže uvedeným způsobem.

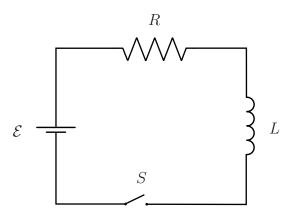
Práci, kterou musíme vykonat na jednotkovém náboji proti elektromotorické síle po uzavřené dráze C shodné s proudovou smyčkou (obvodem) je rovna $-\mathcal{E}_i$. Znaménko mínus souvisí se skutečností, že tuto práci konáme proti elektromotorické síle, tedy nejedná se o práci elektromotorické síly. Potom celková práce vykonaná za jednotku času (okamžitý výkon) je dána jako (použijeme vztahu (25.51))

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{E}_i I = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} I = L I \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \,. \tag{25.59}$$

Odtud můžeme psát

$$dW = LIdI. (25.60)$$

Vzroste-li v obvodu proud z nulové hodnoty na hodnotu I, potom vnější zdroj emn vykoná



Obrázek 25.7: Elektrický obvod se spínačem

práci

$$W = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2 . {25.61}$$

Využitím vztahu (24.62) a Stokesovy věty si můžeme vyjádřit indukční tok pomocí magnetického vektorového potenciálu jako

$$\Phi = \iint_{S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S} (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} . \qquad (25.62)$$

S ohledem na vztah (25.50) můžeme psát

$$LI = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} , \qquad (25.63)$$

takže si práci vnějšího zdroje emn můžeme vyjádřit vztahem

$$W = \frac{1}{2}I \oint_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \oint_{C} j\Delta S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \iiint_{V} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) dV.$$
 (25.64)

Proudovou hustotu v tomto vztahu si vyjádříme pomocí Ampèrova zákona celkového proudu (24.59)

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \mathbf{A} \cdot (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{B}) dV . \qquad (25.65)$$

Pro další úpravu použijeme následující identity

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \qquad (25.66)$$

odtud

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) . \tag{25.67}$$

Pomocí této identity tedy přepíšeme vztah (25.65)

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\iiint_V B^2 dV - \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dV \right] . \tag{25.68}$$

Druhý z integrálů můžeme pomocí Gaussovy věty přepsat na integrál plošný

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\iiint_V B^2 dV - \oiint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \right] . \tag{25.69}$$

Integrál ve vztahu (25.64) je počítán přes objem, ve kterém se nachází proudová hustota. Integrace může být počítána i přes větší objem s ohledem na skutečnost, že kdekoliv jinde je $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. Protože integrand v prvním integrálu vztahu (25.69) je vždy kladný ($B^2 > 0$), takže se zvětšujícím se objemem přes, který integrujeme, poroste i hodnota tohoto integrálu. Protože práce W, kterou vykonal vnější zdroj emn musí být stejná, musí současně klesat hodnota druhého integrálu ve vztahu (25.69), který integrujeme přes plochu uzavírající uvažovaný objem. Provedeme-li integraci přes celý prostor, potom nutně bude příspěvek druhého integrálu roven nule, viz kapitola 20.8. Tedy můžeme psát, že

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{Celý}} B^2 dV . {(25.70)}$$

Tento výsledek je možné interpretovat způsobem, že energie je uložena v magnetickém poli s objemovou hustotou

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \ . \tag{25.71}$$

Tedy magnetické pole má vlastnosti hmotného prostředí. Naopak vztah (25.64) můžeme interpretovat tak, že energie je uložena v proudovodičích.

25.7 Energie elektromagnetického pole, Poyntingova věta

V kapitole věnované elektrostatickému poli jsme určili práci proti Coulombovým odpuzujícím silám na vytvoření statické distribuce elektrických nábojů, kterou považujeme za energii elektrického pole

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\text{Celý}} E^2 dV , \qquad (25.72)$$

kde \boldsymbol{E} je výsledné elektrické pole. V předchozí kapitole jsme určili práci, kterou je třeba vykonat proti elektromotorickým silám, aby uvažovaným obvodem protékal elektrický proud. Tato práce je uložena v magnetickém poli a je dána vztahem

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{Celý}} B^2 dV , \qquad (25.73)$$

kde \boldsymbol{B} je výsledné magnetické pole.

Odtud pak můžeme vyjádřit celkovou energii elektromagnetického pole jako

$$W_{em} = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Celý}\atop \text{prostor}} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV$$
 (25.74)

V rámci této kapitoly si ukážeme obecnější způsob odvození celkové energie elektromagnetického pole.

Uvažujme, že v čase t jistou konfiguraci nábojů a proudů, které jsou zdrojem elektrického a magnetického pole. Za časový okamžik dt působením elektromagnetické síly, tedy Lorentzovy síly, dojde k posunutí elektrických nábojů. Uvažujme náboj $Q = \rho dV$, na který působí po dráze d $l = \mathbf{v} dt$ Lorentzova síla

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\mathbf{v}dt = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}dt = \rho dV\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}dt = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}dVdt.$$
 (25.75)

Odtud můžeme snadno vyjádřit práci, kterou vykoná Lorentzova síla za jednotku času (okamžitý výkon) na všech nábojích v objemu V

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \iiint_{V} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) \mathrm{d}V . \tag{25.76}$$

Zřejmě integrand $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j}$ představuje okamžitý výkon vztažený na jednotku objemu, tj. objemovou hustotu okamžitého výkonu, kterou si pomocí zobecněného Ampèrova zákona celkového proudu můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{25.77}$$

Pro další úpravu použijeme následující identity

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}), \qquad (25.78)$$

kterou upravíme pomocí Maxwellovy rovnice představující Faradayův zákon elektromagnetické indukce

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) , \qquad (25.79)$$

odtud dostaneme výraz

$$\mathbf{E} \cdot (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) , \qquad (25.80)$$

který dosadíme do vztahu (25.77)

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) . \tag{25.81}$$

Pro další úpravu tohoto vztahu použijeme následující rovnosti

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{\partial t} , \quad \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{\partial t} ,$$
 (25.82)

tedy

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) - \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) . \tag{25.83}$$

Pro vakuum přejde tento vztah do tvaru

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) . \tag{25.84}$$

Porovnáním členů v první závorce se vztahy (20.62) a (25.71) je zřejmé, že se jedná o objemové hustoty elektrické a magnetické energie. Odtud můžeme konstatovat, že i členy v první závorce vztahu (25.83) představují příslušné objemové hustoty energie, avšak pro látkové prostředí. Tedy můžeme napsat vztah pro objemovou hustotu energie elektromagnetického pole jako

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) . \tag{25.85}$$

Zavedeme si další vektorovou veličinu

$$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \,, \tag{25.86}$$

které říkáme Poyntingův vektor, jehož fyzikální interpretaci uvedeme později.

Pomocí objemové hustoty elektromagnetické energie (25.85) a Poyntingova vektoru (25.86) lze přepsat rovnici (25.83) do následujícího tvaru

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}} . \tag{25.87}$$

Tato rovnice nám vyjadřuje zákon zachování elektromagnetické energie v diferenciálním tvaru. Někdy je tato rovnice označována jako Poyntingova rovnice.

Dosazením vztahu (25.87) do rovnosti (25.76) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \iiint_{V} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) \mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{V} w \mathrm{d}V - \iiint_{V} \nabla \cdot \mathbf{S} \, \mathrm{d}V . \tag{25.88}$$

Pomocí Gaussovy věty provedeme úpravu tohoto vztahu

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \iiint_{V} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) \mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{V} w \, \mathrm{d}V - \oiint_{S} \mathbf{S} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad (25.89)$$

neboli

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{V} w \,\mathrm{d}V = \iiint_{V} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) \mathrm{d}V + \oiint_{S} \mathbf{S} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$
 (25.90)

Tento vztah představuje zákon zachování elektromagnetické energie v integrálním tvaru neboli Poyntingovu větu.

Z tohoto vztahu je zřejmý i fyzikální význam Poyntingova vektoru \mathcal{S} , kdy $\mathcal{S} \cdot d\mathbf{S}$ představuje množství energie, které projde za jednotku času orientovanou elementární plochou d \mathbf{S} , neboli velikost Poyntingova vektoru je rovna množství energie, která proteče za jednotku času jednotkovou plochou orientovanou shodně s Poyntingovým vektorem. Tedy Poyntingův vektor představuje hustotu toku energie.

Poyntingova věta nám říká, že úbytek elektromagnetické energie v objemu V je roven okamžitému výkonu elektromagnetické síly a množství elektromagnetické energie, která projde plochou uzavírající tento objem.

Použijeme-li zobecněného Ohmova zákona v diferenciálním tvaru (23.73), potom můžeme psát

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} = \frac{j^2}{\gamma} - \boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{j} . \tag{25.91}$$

Pomocí tohoto vztahu pak přepíšeme rovnici (25.87) do tvaru

$$\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{j} = \frac{j^2}{\gamma} + \frac{\partial w}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} . \tag{25.92}$$

Zvolme nyní libovolnou uzavřenou plochu S, kterou nemohou pronikat nosiče elektrického náboje, a která uzavírá objem V. Provedeme objemovou integraci levé i pravé strany rovnice (25.92) a následně poslední integrál na pravé straně převedeme pomocí Gussovy věty na integrál plošný

$$\iiint_{V} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j}) dV = \iiint_{V} \frac{j^2}{\gamma} dV + \frac{d}{dt} \iiint_{V} w dV + \oiint_{S} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}.$$
 (25.93)

Tato rovnice nám představuje alternativní vyjádření Poyntingovy věty:

Výkon dodaný do objemu V vtištěnými silami se spotřebuje jednak na Jouleovo teplo a na změnu energie elektromagnetického pole, jednak část tohoto výkonu vyteče plochou S ohraničující objem V.

Příloha A

Některé vektorové identity

Nejdříve si připomeneme některé rovnosti z vektorové algebry

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{skalár} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z , \qquad (A.1)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \text{ vektor } = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} , \qquad (A.2)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \,, \tag{A.3}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{pro} \quad \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \,, \tag{A.4}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 , \tag{A.5}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \,, \tag{A.6}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \tag{A.7}$$

V následující části si napíšeme některé identity. Jelikož si nabla operátor ∇ můžeme představit jako vektor, tak v některých případech pro jejich odvození využijeme analogie s některou z algebraických rovností (A.1) - (A.7).

div grad
$$f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (\nabla \cdot \nabla)f = \nabla^2 f = \Delta f = \text{skalární pole}, \quad (A.8)$$

rot grad
$$f \equiv \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f = \mathbf{0}$$
 analogie s (A.3), (A.9)

div rot
$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{F}) = (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{\nabla}) \cdot \mathbf{F} = 0$$
 analogie s (A.6), (A.10)

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{F} = \nabla^2 \boldsymbol{F} = \Delta \boldsymbol{F} = \text{ vektorov\'e pole },$$
 (A.11)

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \text{vektorov\'e pole},$$
 (A.12)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F}\equiv\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^{2}\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F}-\Delta\boldsymbol{F}\quad\text{analogie s}\ (A.7)\ .\ (A.13)$$

Uvažujme polohový vektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} . \tag{A.14}$$

Potom bude platit, že

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 , \qquad (A.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \,. \tag{A.16}$$

Nechť \mathbf{k} je konstantní vektor, pak

$$\nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{k} . \tag{A.17}$$

Uvažujme polohový vektor v čárkovaných souřadnicích

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} . \tag{A.18}$$

Pro rozdíl plolohových vektorů (A.14) a (A.18) můžeme psát

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}\mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k}. \tag{A.19}$$

Dále pro velikost rozdílu pololohových vektorů dospějeme k následujícímu vztahu

$$R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$
 (A.20)

Platí, že

$$\frac{\partial 1/R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-1/2} = \frac{\partial (R^2)^{-1/2}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{2(x - x')}{(R^2)^{3/2}} = -\frac{x - x'}{R^3} . \quad (A.21)$$

Obdobně

$$\frac{\partial 1/R}{\partial y} = -\frac{y - y'}{R^3} \,, \tag{A.22}$$

$$\frac{\partial 1/R}{\partial z} = -\frac{z - z'}{R^3} \,. \tag{A.23}$$

Pro gradient skalární funkce 1/R podle nečárkovaných souřadnic můžeme psát, že

$$\nabla \left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial 1/R}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial 1/R}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial 1/R}{\partial z}\mathbf{k}.$$
 (A.24)

V gradientu (A.24) využijeme rovností (A.21), (A.22) a (A.23), čímž dostáváme

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{x - x'}{R^3}\mathbf{i} - \frac{y - y'}{R^3}\mathbf{j} - \frac{z - z'}{R^3}\mathbf{k}, \qquad (A.25)$$

což s přihlédnutím ke vztahu (A.19) je možné po úpravě vyjádřit jako

$$\nabla \left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$
 (A.26)

V případě, že bychom chtěli vyjádřit gradient funkce 1/R podle čárkovaných souřadnic, tj.

$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial 1/R}{\partial x'} \mathbf{i} + \frac{\partial 1/R}{\partial y'} \mathbf{j} + \frac{\partial 1/R}{\partial z'} \mathbf{k} . \tag{A.27}$$

Jelikož platí, že

$$\frac{\partial 1/R}{\partial x'} = \frac{x - x'}{R^3} \,. \tag{A.28}$$

Obdobně

$$\frac{\partial 1/R}{\partial y'} = \frac{y - y'}{R^3} \,, \tag{A.29}$$

$$\frac{\partial 1/R}{\partial z'} = \frac{z - z'}{R^3} \,, \tag{A.30}$$

je možné dospět po dosazení vztahů (A.28), (A.29) a (A.30) do výrazu (A.27) k následující rovnosti

$$\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$
 (A.31)

Přechod plošného integrálu přes plochu S ohraničenou křivkou C k uzavřenému křivkovému integrálu podél této křivky nám umožňuje $Stokesova\ věta$, která je dána následujícím vztahem

$$\oint_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S} (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}. \tag{A.32}$$

Přechod od objemového integrálu přes objem V k plošnému integrálu přes plochu ohraničující uvažovaný objem nám umožňuje $Gaussova\ věta$, která je dána následujícím vztahem

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V} (\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{F}) \, dV . \tag{A.33}$$

Literatura

- [1] Mechlová, E., Košťál, R. a kol.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus, Praha, 1999.
- [2] Horák, Z., Krupka, F.: Fyzika, SNTL/ALFA, Praha, 1981.
- [3] Ilkovič, D.: Fyzika I., ALFA, Bratislava, 1968.
- [4] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika, VUTIUM-PROMETHEUS, Brno, 2000.
- [5] Kolektiv autoru: FO archiv studijních textů, http://fo.cuni.cz/archiv/studijni-texty, 2011
- [6] Obdržálek, J.: Fyzikální veličiny a jednotky SI 1. díl, ALBRA, Úvaly, 2004.
- [7] Obdržálek, J.: Fyzikální veličiny a jednotky SI 2. díl, ALBRA, Úvaly, 2006.
- [8] Havránek, A.: Klasická mechanika I., KAROLINUM, Praha, 2002.
- [9] Tilich, J., Richterek, L.: Klasická mechanika, Univ. Palac.-Přírodověd. fak., Olomouc, 2008.
- [10] Horský, J., Novotný, J., Štefánik, M.: Mechanika ve fyzice, Academia, Praha, 2001.
- [11] Štoll, I.: Mechanika, ČVUT, Praha, 1998.
- [12] Kvasnica, J., Havránek, A., Lukáč, P., Sprušil, B.: Mechanika, Academia, Praha, 2004.
- [13] Brdička, M., Hladík, A.: Teoretická mechanika, Academia, Praha, 1987.
- [14] Rosenberg, J.: Teoretická mechanika, Západočeská univ., Plzeň, 2003.
- [15] Štoll, I., Tolar, J.: Teoretická fyzika, ČVUT, Praha, 1999.
- [16] Langer, J., Podolský, J.: Teoretická mechanika-studijní text, UK UTF, Praha, 2006.
- [17] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B.: Mechanika kontinua, Academia, Praha, 2000.
- [18] Okrouhlík, M.: Aplikovaná mechanika kontinua III, ČVUT, Praha, 1993.
- [19] Reddy, J. N.: An Introduction to Continuum Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [20] Lai, M., Krempl, E., Ruben, D.: Introduction to Continuum Mechanics, Elsevier, Oxford, 2010.
- [21] Bajer, J.: Mechanika 1, chlup.net, Olomouc, 2007.
- [22] Bajer, J.: Mechanika 2, chlup.net, Olomouc, 2008.

- [23] Bajer, J.: Mechanika 3, Univ. Palac.-Přírodověd. fak., Olomouc, 2006.
- [24] Greiner, W.: Classical mechanics Point particles and relativity, Springer, New York, 2004.
- [25] Greiner, W.: Classical mechanics Systems of particles and Hamiltonian Dynamics, Springer, New York, 2003.
- [26] Thornton, S. T., Marion, J. B.: Classical mechanics of particles and systems, Thomson, Singapore, 2004.
- [27] Gregory, R. D.: Classical mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [28] Horský, J.: Úvod do teorie relativity, SNTL, Praha, 1975.
- [29] Bartuška, K.: Kapitoly ze speciální teorie relativity, SPN, Praha, 1989.
- [30] Vybíral B.: Fyzikálne pole z hladiska teorie relativity, SPN. Bratislava, 1980.
- [31] Haňka, L.: Teorie elektromagnetického pole, SNTL/ALFA, Praha, 1982.
- [32] Sedlák, B., Štoll, I.: Elektřina a magnetismus, Academia, Praha, 2002.
- [33] Fuka, J., Havelka, B.: Elektřina a magnetismus, SPN, Praha, 1965.
- [34] Zahejský, J.: Elektřina a magnetismus, Univ. Palac.-Přírodověd. fak., Olomouc, 2002.
- [35] Szántó, L.: Maxwellovy rovnice a jejich názorné odvození, BEN, Praha, 2003.
- [36] Štoll, I.: Elektřina a magnetismus, ČVUT, Praha, 1998.
- [37] Kvasnica, J.: Fyzikální pole, SNTL, Praha, 1964.
- [38] Čechová, M., Vyšín, I.: Teorie elektromagnetického pole, VUP, Olomouc, 1998.
- [39] Greiner, W.: Classical electrodynamics, Springer, New York, 1998.
- [40] Griffiths, D. J., College, R.: Introduction to Elektrodynamics, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [41] Guru, B., Hiziroglu, H. R.: *Electromagnetic Field Theory Fundamentals*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [42] Franklin, J.: Classical Electromagnetism, PEARSON, San Francisco, 2005.
- [43] Bo Thidé: Electromagnetic Field Theory, UPSILON BOOKS, Uppsala, 2004.
- [44] Vanderline, J.: Classical Electromagnetic Theory, KLUWER, New York, 2005.
- [45] Kvasnica, J.: Matematický aparát fyziky, Academia, Praha, 1997.
- [46] Murray, R. S.: Vector analysis, Schaum's-McGraw-Hill, New York, 2000.