

# PŘEDMĚT B2M31DSP /Př. 6

PS

Přednáška 6: Aplikace keprální analýzy

- 1 ÚVOD
- 2 KEPSTRÁLNÍ ANALÝZA - OPAKOVÁNÍ
- 3 APLIKACE KEPSTRÁLNÍ ANALÝZY
- 4 METRIKA
- 5 INTEGRÁLNÍ METRIKA  $\rightarrow$  SPEKTRÁLNÍ VZDÁLENOST
- 6 KEPSTRÁLNÍ VZDÁLENOST
- 7 A2C
- 8 POUŽITÍ VZDÁLENOSTI
- 9 POUŽITÉ PRAMENY

## Cíle přednášky:

- aplikace keprální analýzy
- typy metrik
- spektrální a keprální vzdálenost
- AR keprum a keprální vzdálenost

# KEPSTRÁLNÍ ANALÝZA - OPAKOVÁNÍ

## Kepstrální analýza - opakování

- nelineární metoda dekonvoluce signálů
- bloky: analýza - liftrace - syntéza
- kepstum aperiodické složky je tlumené  $\rightarrow$  lze detekovat odrazy
- dvě úlohy kepstální analýzy: řeč X odrazy  $\rightarrow$  interpretace kepstálních složek

# APLIKACE KEPSTRÁLNÍ ANALÝZY

Aplikace keprstrální analýzy pro analýzu signálů

- parametrizace signálů
- keprstrální vzdálenost (metrika)
- redukce vlivu konvolučního zkreslení signálu

Parametrizace, které jsem již poznali

- spektrum signálu, výkonová spektrální hustota (PSD)
- lineární predikční koeficienty
- keprstrální koeficienty počítané pomocí DFT

# PŘÍKLAD APLIKACE KEPSTRÁLNÍ ANALÝZY

Příklad aplikace kepsrální analýzy - rozpoznávání řeči

- parametrizace řeči - kepsrální koeficienty, delta koeficienty, delta delta koeficienty
- klasifikace - postup: minimum kumulované vzdálenosti mezi vektory kepsrálních koeficientů aktuálního segmentu a vzorů - použití metriky (vzdálenosti); metriku používají též samoorganizující se sítě a algoritmy shlukové analýzy

Definice:

vektor kepsrálních koeficientů a delta koeficienty (nejjednodušší verze) a delta delta

$$\mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} c_n[0] \\ c_n[1] \\ \vdots \\ c_n[M] \end{bmatrix} ; \Delta \mathbf{c}_n = \frac{\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_{n-1}}{2}; \Delta\Delta \mathbf{c}_n = \Delta(\Delta \mathbf{c}_n)$$

# METRIKA

Definice: Metrika na neprázdné množině  $X$  je funkce  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  splňující<sup>1</sup> pro  $\forall x, y, z \in X$ :

- $d(x, y) \geq 0$  (= pozitivní semidefinitnost)
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (= definitnost)
- $d(x, y) = d(\overset{y, x}{\cancel{x, y}})$  (= symetrie)  $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (= trojúhelníková nerovnost)

Metrický prostor  $(X, d)$  je určen metrikou  $d$  na množině  $X$

---

<sup>1</sup> $X \times X$  znamená kartézský součin; metrika je tedy zobecněná vzdálenost

# METRIKA

Typy metrik („vzdáleností“) v euklidovském prostoru: Minkowského metriky (  $p$ -norm distance),  $p \geq 1$ ,  $p$  nemusí být celé číslo

$$d_p(x, y) = \left( \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

- $p = 1$  součtová (Hammingova, newyorská, manhattanská, taxicab - „taxikářská metrika“)
- $p = 2$  euklidovská
- $p \rightarrow \infty$  Čebyševova, maximová metrika (infinity norm):

$$d_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_N - y_N|)$$

Pozn.:  $x_i$ , resp.  $y_i$  jsou souřadnice bodu  $x$ , resp.  $y$  v  $N$ -rozměrném prostoru, tedy pro 2-D jsou souřadnice bodu  $x$  dány uspořádanou dvojicí  $[x_1, x_2]$  a bod  $y$  má souřadnice  $[y_1, y_2]$



# METRIKA - PŘÍKLADY

Př.1: Příklad euklidovské metriky (vzdálenosti) dvou bodů  $x, y$  ve dvourozměrném prostoru

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

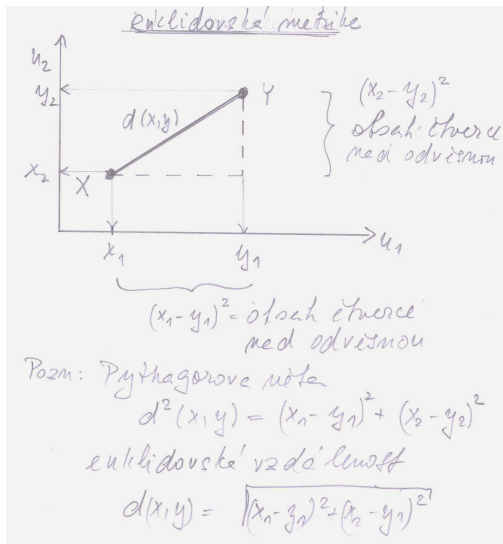
Př.2: Pro  $M$ -rozměrný prostor má euklidovská metrika pro dva body tvar

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^M (x_i - y_i)^2}$$

Tento zápis budeme používat pro metriku v prostoru keprálních koeficientů

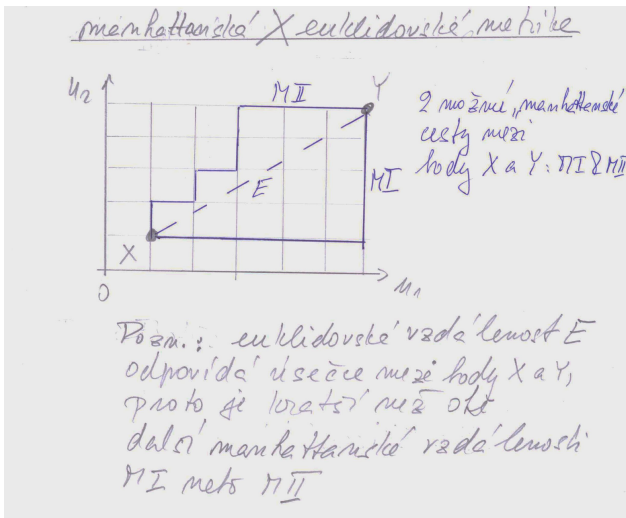
# METRIKA - PŘÍKLADY

## Ilustrace euklidovské vzdálenosti - $L_2$ norma



# METRIKA - PŘÍKLADY

## Porovnání euklidovské $L_2$ a Hammingovy $L_1$ vzdálenosti



# INTEGRÁLNÍ METRIKA „VZDÁLENOST“ FUNKCÍ

Integrální metrika v prostoru spojitých funkcí na intervalu  $(a, b)$ :

$$d_p(f, g) = \left[ \int_a^b |g(x) - f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

- $p = 1 \rightarrow L_1$ -metrika
- $p = 2 \rightarrow L_2$ -metrika

## INTEGRÁLNÍ METRIKA → SPEKTRÁLNÍ VZDÁLENOST

Rozdíl dvou spektrálních hustot

$$V(e^{j\Theta}) = \ln S_x(e^{j\Theta}) - \ln S_y(e^{j\Theta}); \quad V \in \mathbb{R}$$

udává rozdíl dvou spektrálních hustot  $S_x(e^{j\Theta})$  a  $S_y(e^{j\Theta})$  - je to funkce vymezující plochu vzniklé rozdílem těchto dvou funkcí

Po integraci získáme jedno číslo<sup>2</sup> odpovídající velikosti plochy

$$d_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [V(e^{j\Theta})]^2 d\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\ln S_x(e^{j\Theta}) - \ln S_y(e^{j\Theta})]^2 d\Theta$$

---

<sup>2</sup>Ztrácíme informaci o rozdílech na jednotlivých frekvencích

# SPEKTRÁLNÍ VZDÁLENOST

Spektrální vzdálenost = integrální  $L_2$ -metrika - udává vzdálenost (tedy rozdílnost) dvou spektrálních hustot  $S_x(e^{j\Theta})$  a  $S_y(e^{j\Theta})$  jedním číslem

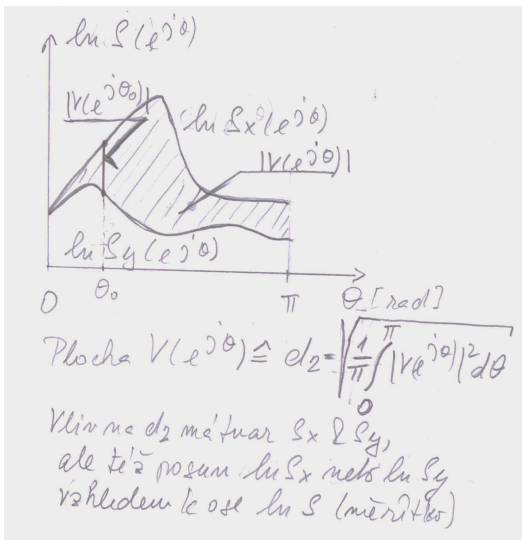
$$d_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [V(e^{j\Theta})]^2 d\Theta} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\ln S_x(e^{j\Theta}) - \ln S_y(e^{j\Theta})]^2 d\Theta}$$

Interpretace veličiny  $d_2$

- je úměrná rozdílu ploch dvou PSD  $S_x$  a  $S_y$
- vyjadřuje podobnost dvou stacionárních signálů  $x[n]$  a  $y[n]$

# METRIKA - PŘÍKLADY

## Ilustrace spektrální vzdálenosti



# KEPSTRÁLNÍ VZDÁLENOST

Platí<sup>3</sup> vztah mezi logaritmickým spektrem a kepstrem - kepstrální koeficienty jsou koeficienty Laurentovy nebo Taylorovy řady

$$\ln(S_x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x[n] e^{jn\Theta},$$

a proto lze získat vztah pro spektrální vzdálenost pomocí kepstrálních koeficientů  $\Rightarrow$  kepstrální vzdálenost

$$d_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [V(e^{j\Theta})]^2 d\Theta} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_x[k] - c_y[k])^2}$$

Integrální metrika přešla v euklidovskou vzdálenost dvou bodů v nekonečně-dimenzionálním prostoru, která udává podobnost dvou stacionárních signálů  $x[n]$  a  $y[n]$

<sup>3</sup>Viz přednáška o kepstrální analýze



# KEPSTRÁLNÍ VZDÁLENOST

Pro další výklad použijeme kvadrát kepstrální vzdálenosti

$$d_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_x[k] - c_y[k])^2,$$

kde  $c_x[n]$  a  $c_y[n]$  jsou kepstrální koeficienty porovnávaných signálů  $x[n]$  a  $y[n]$

Pro koeficienty reálného kepstra platí  $c[-k] = c[k]$ , proto lze výraz upravit

$$d_2^2 = (c_x[0] - c_y[0])^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (c_x[k] - c_y[k])^2$$

# KEPSTRÁLNÍ VZDÁLENOST

Porovnáváme-li podobnost dvou segmentů o  $N$  prvcích použijeme konečné meze ( $L \leq N$ )

$$d_2^2 \approx (c_x[0] - c_y[0])^2 + 2 \sum_{k=1}^L (c_x[k] - c_y[k])^2$$

a tedy výsledná kepstrální vzdálenost má tvar

$$d_2 \approx \sqrt{(c_x[0] - c_y[0])^2 + 2 \sum_{k=1}^L (c_x[k] - c_y[k])^2} \quad [\text{Np}]$$

Pozn. Np je zkratka jednotky neper, která se již nepoužívá

# KEPSTRÁLNÍ VZDÁLENOST

Převod na decibely

$$d_2 \approx \sqrt{(c_x[0] - c_y[0])^2 + 2 \sum_{k=1}^L (c_x[k] - c_y[k])^2} \quad [\text{Np}]$$

nebo<sup>4</sup>

$$d_2 \approx 4,34 \sqrt{(c_x[0] - c_y[0])^2 + 2 \sum_{k=1}^L (c_x[k] - c_y[k])^2} \quad [\text{dB}]$$

---

<sup>4</sup>Konstanta 4,34 je dána přepočtem přirozeného logaritmu na dekadický  $\log(x) = 10/\ln(10) \ln(x)$ , kde  $x = e$ , a tedy převodem neperu (Np) na dB:  
 $1 \text{ Np} = 20 \log_{10} e = 8.68 \text{ dB}$

# KEPSTRÁLNÍ VZDÁLENOST

Kepstrální vzdálenost pro konečný počet kepstrálních koeficientů, která zahrnuje jak rozdíl tvarů spekter tak i energie obou signálů<sup>5</sup>

$$d_2 \approx 4,34 \sqrt{(c_x[0] - c_y[0])^2 + 2 \sum_{k=1}^L (c_x[k] - c_y[k])^2} \quad [\text{dB}]$$

nebo vzdálenost, která zahrnuje pouze rozdíl tvarů spekter<sup>6</sup>

$$d_2 \approx 4,34 \sqrt{2 \sum_{k=1}^L (c_x[k] - c_y[k])^2} \quad [\text{dB}]$$

Koeficient  $c_x^2[0]$  představuje energii signálu  $x[n]$ , tedy kvadrát plochy spektra  $S_x$ , a proto postihuje pouze měřítko PSD  $S_x$ ; podobně  $c_y^2[0]$

<sup>5</sup>Příslušný m-file cd0.m

<sup>6</sup>Příslušný m-file cd1.m

# KEPSTRÁLNÍ VZDÁLENOST - SHRUTÍ

## SHRUTÍ

- KEPSTRÁLNÍ VZDÁLENOST = EUKLIDOVSKÁ VZDÁLENOST V  $L$ -ROZMĚRNÉM PROSTORU KEPSTRÁLNÍCH KOEFICIENTŮ
- $c_x^2[0]$  ODPOVÍDÁ ENERGII SEGMENTU = CELKOVÉMU KVADRÁTU PLOŠE SPEKTRA  $S_x$
- TVAR PSD  $S_x(e^{j\Theta})$  I HODNOTY KOEFICIENTŮ  $c_x[n]$  VYJADŘUJÍ VLASTNOSTI SIGNÁLU  $x[n]$ , PROTO  $d_2$  POROVNÁVÁ TVARY PSD NEBO HODNOTY KEPSTER OBOU SEGMENTŮ
- $d_2$  = PLOCHA VYJADŘUJÍCÍ ROZDÍL VÝKONOVÝCH SPEKTRÁLNÍCH HUSTOT TĚCHTO DVOU SEGMENTŮ
- ČÍM VÍCE KEPSTRÁLNÍCH KOEFICIENTŮ POUŽIJEME, TÍM VÍCE DETAILŮ VE SPEKTRU LZE POROVNÁVAT
- ZAJÍMÁ-LI NÁS PŘEDEVŠÍM ROZDÍL TVARŮ SPEKTER A CHCEME-LI POTLAČIT VLIV ROZDÍLU ENERGIÍ POUŽÍVÁME VZTAH BEZ  $c[0]$

$$d_2 \approx 4,34 \sqrt{2 \sum_{k=1}^L (c_x[k] - c_y[k])^2} \quad [\text{dB}]$$

# VÝPOČET KEPSTRÁLNÍCH KOEFICIENTŮ POMOCÍ AR MODELU

Pro AR model platí

$$H(z) = \frac{\sqrt{\alpha}}{A(z)},$$

kde

$$\alpha = R_e[0] = \sigma_e^2 = P = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^2[n]$$

je výkon chyby predikce

Pro získání kepstra použijeme logaritmus

$$\hat{H}(z) = \ln(H(z)) = \ln \frac{\sqrt{\alpha}}{A(z)} = \ln \sqrt{\alpha} - \ln(A(z))$$

# VÝPOČET KEPSTRÁLNÍCH KOEFICIENTŮ POMOCÍ AR MODELU

Následně logaritmus rozvineme do Taylorovy řady

$$\ln \sqrt{\alpha} - \ln (A(z)) = c[0] + \sum_{k=1}^{\infty} c[k]z^{-k},$$

kde  $c[0] = \ln \sqrt{\alpha}$  - opět má tedy význam měřítka

V dalším kroku derivujeme obě strany rovnice podle proměnné  $z^{-1}$

# VÝPOČET KEPSTRÁLNÍCH KOEFICIENTŮ POMOCÍ AR MODELU<sup>8</sup>

V posledním kroku úpravou derivované rovnice získáme vztah<sup>7</sup> mezi AR koeficienty a kepstrálními koeficienty ve tvaru

$$nc[n] = -na_n - \sum_{k=1}^p (n-k)a_k c[n-k], \quad n = 1, 2, \dots$$

kde  $p$  je řád AR modelu.

Protože platí  $a_n = 0$  pro  $n > p$ , lze rekursí dopočítat více kepstrálních koeficientů, než kolik je koeficientů AR modelu

$$nc[n] = - \sum_{k=1}^p (n-k)a_k c[n-k], \quad n = p+1, p+2, \dots$$

---

<sup>7</sup> Příslušný m-file a2c0.m - použitý Burgův algoritmus je numericky odolný vůči kvantovacím chybám a též zaručuje lepší frekvenční rozlišení pro krátké segmenty signálu než na přednášce odvozené řešení Yuleových-Walkerových rovnic

<sup>8</sup> Podrobné odvození je ve skriptech, která jsou k dispozici na MOODLE



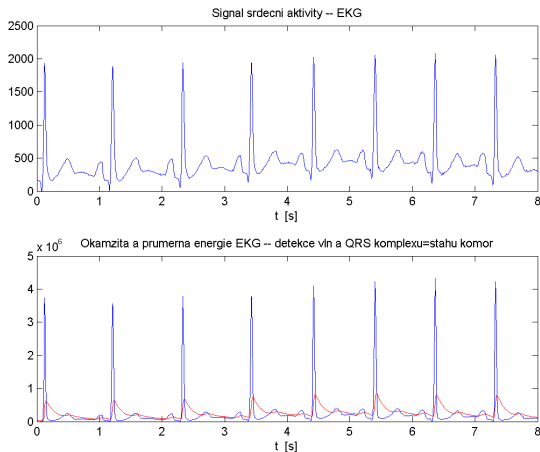
# POUŽITÍ VZDÁLENOSTI

Častá úloha, kde se používá vzdálenost je detekce změn v signálu

Dva příklady detektorů

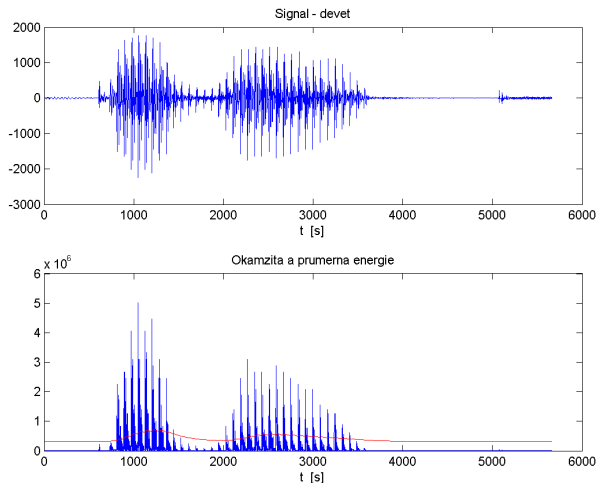
- detektor využívající krátkodobou energii - porovnává energii mezi dvěma segmenty nebo energii segmentu proti prahu
- detektor využívající keprální vzdálenost - porovnává změny ve spektru/kepru mezi dvěma segmenty a prahem nebo mezi segmentem a prahem

# PÍKLAD DETEKCE ZMĚN V ENERGII SIGNÁLU



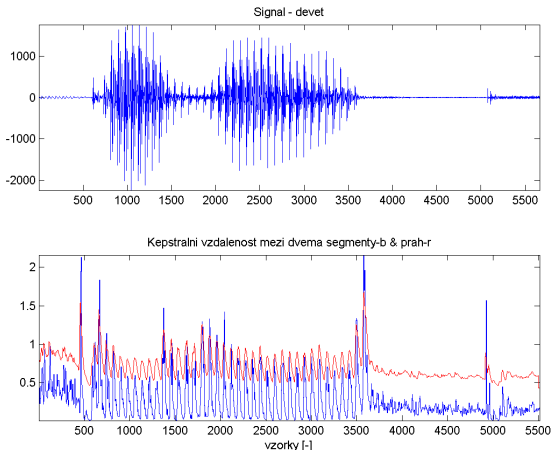
Modrá křivka je okamžitá energie signálu, červená je práh získaný vyhlazením okamžité energie. Překročení prahu signalizuje silnou změnu v hodnotách signálu - takto lze jednoduše detekovat přítomnost QR komplexu v EKG a měřit tepovou frekvenci. Pro zvýšení citlivosti detektoru se v reálných aplikacích používá difference signálu, která zvýrazní rychlý nárůst QR vlny.

# PÍKLAD DETEKCE ZMĚN POMOCÍ ENERGIE SIGNÁLU



Modrá křivka je okamžitá energie signálu, červená je práh získaný vyhlazením okamžité energie. Překročení prahu signalizuje silnou změnu v hodnotách signálu - takto lze jednoduše detekovat přítomnost řeči.

# PŘÍKLAD DETEKCE ZMĚN POMOCÍ KEPSTRÁLNÍ VZDÁLENOSTI



Modrá křivka je keprální vzdálenost mezi sousedními segmenty signálu, červená je práh získaný vyhlazením vzdálenosti. Překročení prahu signalizuje změnu ve tvaru spektra. Tento detektor je více odolný vůči šumu než detektor využívající energii.

# LITERATURA

Kniha: Uhlíř, Sovka: Číslicové zpracování signálů, Vyd. ČVUT, Praha 1995 a 2002

Skripta: Sovka, Pollák: Vybrané metody číslicového zpracování signálů, ČVUT v Praze, 2001