Předmět B2M31DSP/Př. 7

PS

Přednáška 7: Ortogonální transformace - DCT

Obsah

Cíle přednášky

Cíle přednášky:

- základní pojmy a motivace
- diskrétní kosinová transformace

Motivace

Proč se zabývat další transformací - diskrétní kosinovou transformací?

- na rozdíl od komplexní DFT je pouze reálná (a i pro ní existují rychlé algoritmy výpočtu)
- používá se ve zpracování řeči, nahrazuje DFT při výpočtu několika málo složek parametrů (např. kepstra)
- vykazuje, na rozdíl od DFT, značnou schopnost „shrnout“ vlastnosti signálu do malého počtu složek (čar) - to je využíváno pro algoritmy ztrátové komprese - pro digitální fotografii video např. JPEG, videoformáty MPEG1, MPEG2, MPEG4 a pro akustické signály např. MP3

Typy transformací

Typy transformací $T\{\}$:

- bezeztrátové
    - ortogonální
    - biortogonální
- ztrátové

Pozn.1: Perfektní rekonstrukce: $y = \hat{x} = T^{-1}\{T\{x\}\} = x$
$=$ po aplikace transformace a inverzní transformace získáme původní signál[1]
Pozn.2: Pro ortogonální transformace platí, že skalární součin jejich dvou různých bázových funkcí je roven nule - viz např. Fourierovy řady, diskrétní Fourierovy řady, . . .

[1] Případně jeho zpožděnou verzi

Ortogonální transformace

Řadu transformací lze zapsat maticově
Pokud je matice transformace ortogonální, pak nazýváme příslušnou transformaci ortogonální.
Pro ortogonální (ortonormální) matici transformace platí

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^H = \mathbf{I}$$

a tedy

$$\mathbf{T}^H = \mathbf{T}^{-1}$$

kde $\mathbf{T}$ je čtvercová matice transformace a $\mathbf{I}$ je jednotková matice, H je hermitovská transpozice
Pozn1.: Pro matici s reálnými prvky přechází operátor H v transpozici matice
Pozn2.: V ortogonální (ortonormální) matici je skalární součin dvou různých řádků roven nule, skalární součin stejných řádků je roven jedné.

Ortogonální transformace - Fourierova transformace

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) - příklad ortogonální transformace

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk},\ k = 0, 1, ..., N-1$$

kde $W_N^{nk} = e^{-j2\pi nk/N}$. Pro dané k = konst jsou řádky této matice bázovými funkcemi, jejichž skalární součin pro $k_1 \neq k_2$ je roven nule

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{k_1 n} W_N^{k_2 n} = \begin{cases} N & ; \quad \text{pro } k_1 - k_2 = 0, \\ 0 & ; \quad \text{pro } k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

Ortogonální transformace - Fourierova transformace

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) - pokračování
DFT v maticovém tvaru

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

Platí

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$$

a

$$\mathbf{W}^{H} = \mathbf{W}^{-1}$$

Fourierova transformace - opakování

Fourierova transformace - FT

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

pro $x(t)$ definované na intervalu $-\infty < t < \infty$

Zopakujme si potřebné vlastnosti:

- je-li signál komplexní $x \in \mathbb{C}$ je spektrum komplexní $X \in \mathbb{C}$
- je-li signál reálný $x \in \mathbb{R}$ je spektrum komplexní, ale vykazuje symetrie: amplitudové nebo reálné spektrum je sudé, fázové nebo imaginární spektrum je liché, platí tedy: $X^*(-f) = X(f)$
- je-li signál reálný $x \in \mathbb{R}$ a sudý $x(-t) = x(t)$ je spektrum reálné a taktéž sudé - této vlastnosti využijeme pro odvození kosinové transformace

Kosinová transformace - CT

Máme-li kauzální signál $x(t)$, tj. signál definovaný pouze pro $t \geq 0$ lze z něj vytvořit sudou funkci $y(t)$ tak, že přidáme nekauzální složku, která vznikne zrcadlením $x(t)$ kolem svislé osy

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & ; \quad \text{pro } t \geq 0, \\ \\ x(-t) & ; \quad \text{pro } t < 0, \end{cases}$$

Pak lze získat Fourierovu kosinovou transformaci $X_c(f)$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Kosinová transformace - CT

S použitím Eulerova vztahu a vztahu pro $y(t)$ lze získat reálné sudé spektrum

$$Y(f) = 2\int_0^\infty x(t)\cos(2\pi ft)dt = X_c(f),$$

které představuje spojitou kosinovou transformaci - CT

Inverzní transformace ICT je dána vztahem

$$x(t) = 2\int_0^\infty X_c(f)\cos(2\pi ft)dt$$

Pozn.: je vhodné poznamenat, že při použití výše uvedeného odvození CT pro signál $x(t)$ konečné délky T_0, dojde v důsledku vytvoření sudého signálu $y(t)$ k prodloužení jeho délky na dvojnásobek - s tímto faktem se setkáme i u diskrétní kosinové transformace

Diskrétní kosinová transformace - DCT

Odvození diskrétní kosinové transformace - DCT lze provést

- vzorkováním spojité kosinové transformace - je nutné vzorkovat jak signál tak i spektrum, a proto DCT bude vázat diskrétní periodický signál a diskrétní periodické spektrum, přičemž obě posloupnosti budou reálné
- alternativně lze DCT odvodit pomocí operací s diskrétními posloupnostmi - tento postup použijeme - možností prodloužení posloupnosti $x[n]$ na sudou posloupnost je ovšem více, a proto lze v literatuře nalézt 4 různé definice DCT; v praxi se ovšem používají první dvě, označované jako DCT-1 a DCT-2

Diskrétní kosinová transformace - vlastnosti

Základní vlastnosti DCT

- energie signálu je po provedení DCT soustředěna v několika málo koeficientech - toho se využívá při jejich následném kvantování, např. JPEG nebo MP3
- výsledek DCT často bývá blízký[2] optimální Karhunenovy-Loevovy transformace (KLT)[3], je ale implementačně mnohem přívětivější, a proto se ujala DCT a ne KLT
- podobně jako DFT se DCT počítá z bloku dat, a proto např. ve fotografii může být po použití velké komprese pomocí DCT patrná bloková strukura
- podobně jako pro DFT existuje algoritmus FFT, tak i pro DCT existují rychlé algoritmy

[2] Uvedené tvrzení platí především pro signály s exponenciální autokorelační funkcí.

[3] Tato transformace bude námětem jedné z příštích přednášek.

Diskrétní kosinová transformace - DCT

Odvození DCT - posloupnost $x[n]$ o N vzorcích lze periodicky prodloužit[4] tak, abychom získali sudou posloupnost - existují čtyři možnosti

- prodloužení s překrytím[5], označuje se jako DCT-1
  $x1 = x_\alpha[((n))_{2N-2}] + x_\alpha[((-n))_{2N-2}]$,
  kde $x_\alpha[n] = \alpha[n]x[n]$ a $\alpha[n] = \begin{cases} 1/2 & ; \quad \text{pro } n = 0 \text{ a } n = N-1, \\ 1 & ; \quad \text{pro } n = 1, 2, ..., N-2 \end{cases}$
  osy symetrie jsou v bodech $n = 0$ a $n = N - 1$
- prodloužení bez překrytí, označuje se jako DCT-2
  $x_2 = x[((n))_{2N}] + x[((-n-1))_{2N}]$
  osy symetrie jsou v bodech $n = -1/2$ a $n = (2N-1)/2 = N - 1/2$

[4] Grafická ilustrace na wikipedii
https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_cosine_transform

[5] Znak ((.)) označuje hodnotu periody výsledné sudé posloupnosti

Diskrétní kosinová transformace - DCT

Odvození DCT - poslupnost $x[n]$ o N vzorcích lze periodicky prodloužit[6] tak, abychom získali sudou posloupnost - existují čtyři možnosti

- prodloužení na posloupnost délky 4N, osy symetrie jsou v bodech $n = 0$ a $n = 2N$
  označuje se jako DCT-3
- prodloužení na posloupnost délky 4N, osy symetrie jsou v bodech $n = -1/2$ a $n = 2N - 1/2$
  označuje se jako DCT-4

[6] Grafická ilustrace na wikipedii
`https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_cosine_transform`

Diskrétní kosinová transformace - DCT

Odvození DCT

- první způsob vede na transformaci označovanou jako DCT-1
- druhý způsob vede na transformaci označovanou jako DCT-2 - tato transformace je v aplikacích nejčastěji používána
- zbylými dvěma způsoby odvození DCT-3 a DCT-4 se nebudeme zabývat

Diskrétní kosinová transformace - DCT-1

Definice DCT-1

$$X^{C1}[k] = 2\sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n]x[n]\cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right),\ 0 \le k \le N-1$$

Zpětná DCT-1 = IDCT-1

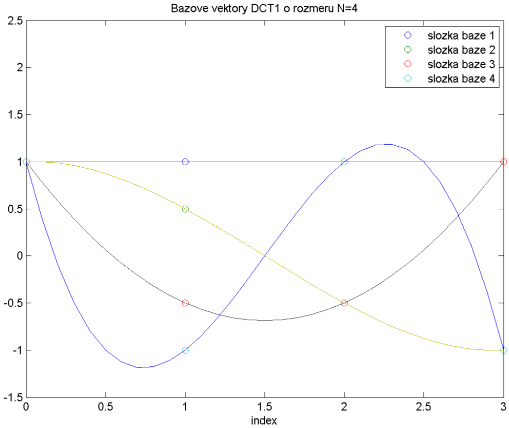
$$x[n] = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \alpha[n]X^{C1}[k]\cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right),\ 0 \le n \le N-1$$

Pozn.: při ověřování ortogonality transformace je do výpočtu součinu matic přímé a inverzní transformace nutné zahrnout konstanty i váhovací posloupnosti α pro DCT-1 i β pro DCT-2

Ilustrace baze DCT-1

Baze DCT-1 je definována:

$$\cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right) = \cos\left(\frac{2\pi kn}{2N-2}\right),\ 0 \leq k \leq N-1,\ 0 \leq n \leq N-1$$



Diskrétní kosinová transformace - DCT-2

Definice[7],[8] DCT-2

$$X^{C2}[k] = 2\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right),\; 0 \leq k \leq N-1$$

Zpětná DCT-2 = IDCT-2

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \beta[n] X^{C2}[k]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right),\; 0 \leq n \leq N-1$$

kde

$$\beta[n] = \begin{cases} 1/2 & ; \quad \text{pro } k = 0, \\ 1 & ; \quad \text{pro } k = 1, 2, ..., N-1 \end{cases}$$

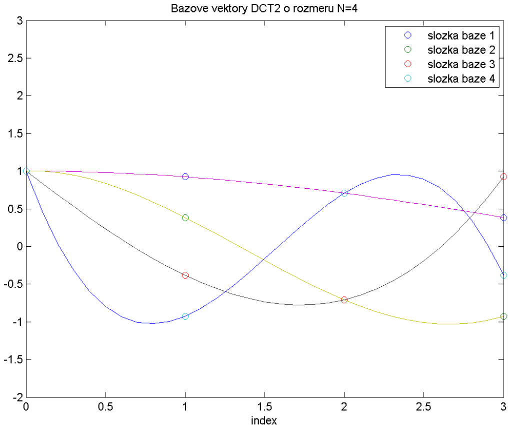
[7]Obě definice lze upravit tak, aby představovaly unitární transformace: přímá i zpětná mají násobitel $\sqrt{2/N}$.

[8]Argument cosinu lze upravit na tvar $\cos\left(\frac{\pi k(n+1/2)}{N}\right)$, tak jak je použit např. ve Wikipedii `https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_cosine_transform`

Ilustrace baze DCT-2

Baze DCT-2 je definována:

$$\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right) = \cos\left(\frac{\pi k(n+1/2)}{N}\right),\ 0 \leq k \leq N-1,\ 0 \leq n \leq N-1$$



Vztah DFT a DCT-1

Vztah DFT a DCT-1 lze získat pomocí vztahu pro prodloužení posloupnosti s překrytím

$$X_1[k] = X_\alpha[k] + X_\alpha^*[k] = 2Re\{X_\alpha[k]\},\ k = 0, 1, ..., 2N-3$$

kde $X_\alpha[k]$ je (2N-2) bodová DTF posloupnosti $x_\alpha[n]$ doplněné (N-2) nulami

Zároveň je

PRO $k = 0, 1, \ldots, N-1$

$$X_1[k] = 2Re\{X_\alpha[k]\} \overset{1}{=} 2\sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n]x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{2N-2}\right) = X^{C1}[k],$$

Posloupnost x[n] tedy naváhujeme, prodloužíme nulami na délku (2N-2), tím získáme x_α, provedeme DFT a vezmeme prvních N hodnot její reálné části

Alternativně vytvoříme sudou posloupnost[9] $x_1[n]$ s periodou $2N-2$ a použijeme DFT o rozměru $2N-2$.

[9]Sudou posloupnost vytvoříme tak, že do vektoru vložíme původní posloupnost a za ní vložíme vybrané prvky převrácené posloupnosti - vynecháme 1. a poslední prvek. 1 Druhou možností je doplnit původní posloupnost nulami na délku $2N-2$, naváhovat, převrátit ji a obě posloupnosti sečíst- viz příslušný vztah pro x_1.

Vztah DFT a DCT-2

Vztah DFT a DCT-2 lze získat pomocí vztahu pro prodloužení posloupnosti bez překrytí

$$X_2[k] = X[k] + X^*[k]e^{j2\pi k/2N} = e^{j\pi k/2N} 2Re\{X[k]e^{-j\pi k/2N}\},$$
$$k = 0, 1, ..., 2N-1$$

Platí

$$X^{C2}[k] = 2Re\{X[k]e^{-j\pi k/2N}\},\ k = 0, 1, ..., N-1$$

a tedy

$$X^{C2}[k] = e^{-j\pi k/2N} X_2[k],\ k = 0, 1, ..., N-1$$

Posloupnost x[n] tedy prodloužíme nulami na délku (2N), provedeme DFT, provedeme kompenzaci posunu a vezmeme prvních N hodnot její reálné části. Alternativně použijeme sudé rozšířenít[10] na posloupnost $x_2[n]$ o periodě $2N$ a provedeme DFT o rozměru $2N$ a použijeme kompenzaci posunu

[10] Sudou posloupnost vytvoříme tak, že do vektoru vložíme původní posloupnost a za ní vložíme převrácenou posloupnost. Druhou možností je doplnit původní posloupnost nulami na délku $2N$, převrátit ji, posunout doleva a obě posloupnosti sečíst- viz příslušný vztah pro x_2.

Vlastnosti DCT

Parcevalův teorém pro DCT-1 a DCT-2 - platí pro bezeztrátové transformace - zákon zachování energie nás zajímá především kvůli ztrátovým kompresím

DCT-1

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n] \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2N-2} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha[k] \left|X^{C1}[k]\right|^2,$$

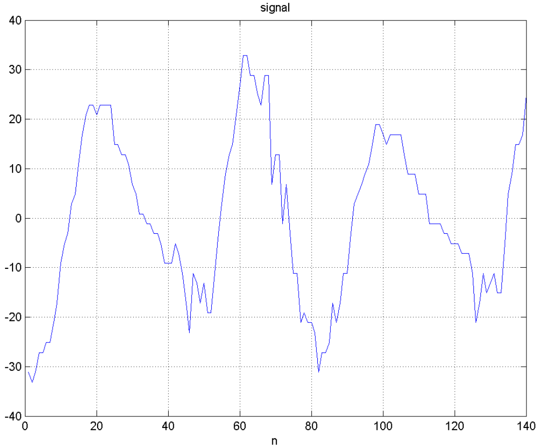
DCT-2

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta[k] \left|X^{C2}[k]\right|^2,$$

Další vlastnosti jako obraz posunuté posloupnosti a obraz konvoluce existují, ale jsou komplikovanější než u DFT[11]

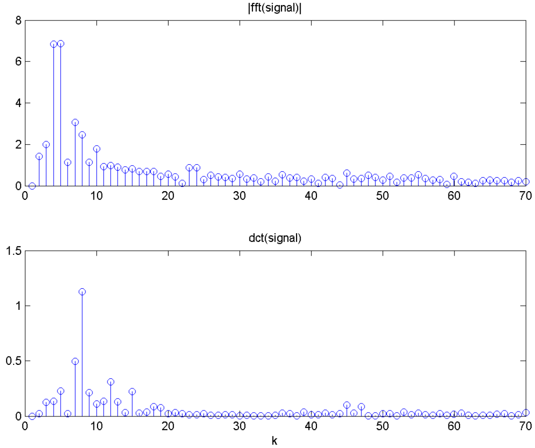
[11] Např. v obrazu posunuté posloupnosti se vyskytuje nejen kosinová, ale též sinová transformace

Ilustrace vlastností DCT - komprese



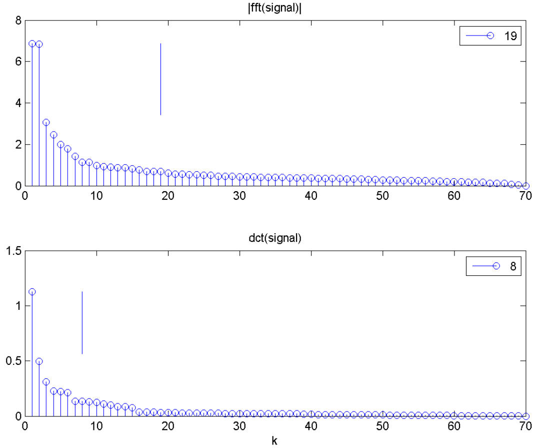
Obrázek: Segment řeči

Ilustrace vlastností DCT - komprese



Obrázek: DFT spektrum a DCT - je patrné, že DCT poskytuje méně čar než DF

Ilustrace vlastností DCT - komprese

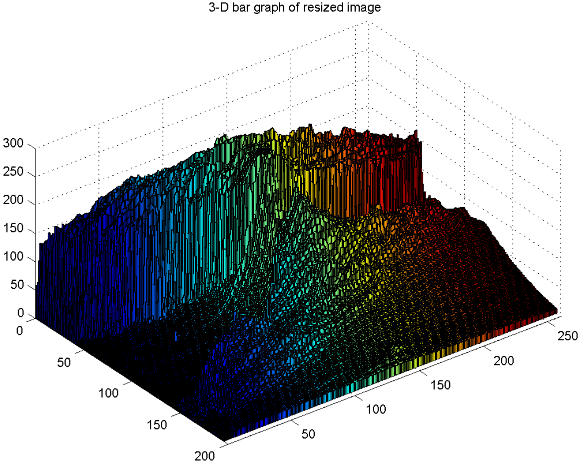


Obrázek: DFT spektrum a DCT seřazené podle velikosti - značka náleží indexu kde kumulativní hodnota energie dosahuje 95% energie signálu

Ilustrace vlastností DCT - komprese

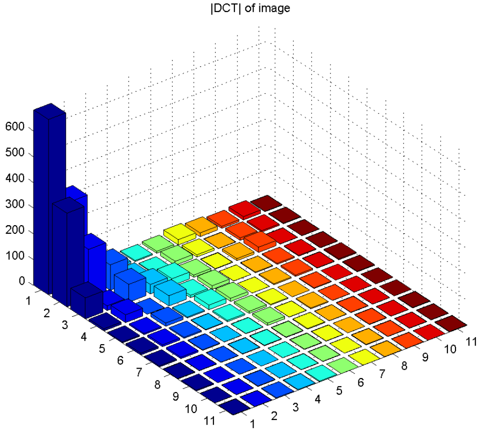
Obrázek: Černobílý obraz

Ilustrace vlastností DCT - komprese



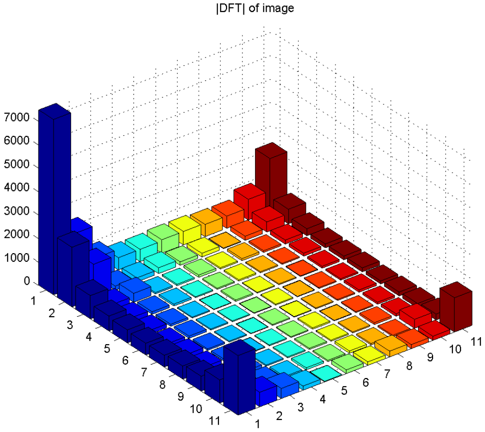
Obrázek: Hodnoty jasu obrazu

Ilustrace vlastností DCT - komprese



Obrázek: |DCT| střední části obrazu o rozměru 10x10

Ilustrace vlastností DFT - komprese



Obrázek: |DFT| střední části obrazu o rozměru 10x10