Poloha družice

Doc. Dr. Ing. Pavel Kovář

Obsah

- Rovnice dráhy družice
- Keplerovské parametry
- Výpočet dráhy družice z keplerovských parametrů
- Výpočet dráhy družice GPS a Galileo
- Výpočet dráhy družice GLONASS

Rovnice dráhy družice

- Na družici působí dvě síly
  1. Gravitační síla
  2. Síla podle druhého Newtonova zákona

Síla podle druhého Newtonova zákona

$$\mathbf{F} = m.\boldsymbol{g}$$

m hmotnost družice

g vektor zrychlení

$$\boldsymbol{g} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \ ,$$

r polohový vektor družice

Gravitační síla

$$F = \frac{k.M.m}{r^2} = \frac{\mu.m}{r^2}$$

$k = 6{,}672.10^{-11}\ m^3/kg/s^2$ universální gravitační konstanta

M hmotnost Země

r vzdálenost družice od gravitačního středu Země

$k.M = \mu$ standardní gravitační parametr Země

Rovnováha gravitační síly a síly podle II. Newtonova zákona

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{\mu.\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Rozepsání do složek

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu.x}{r^3};\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu.y}{r^3};\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu.x}{r^3}$$

Řešení vede na dráhy ve tvaru kuželoseček, tj.

- Kružnice
- Elipsa
- Parabola
- Hyperbola

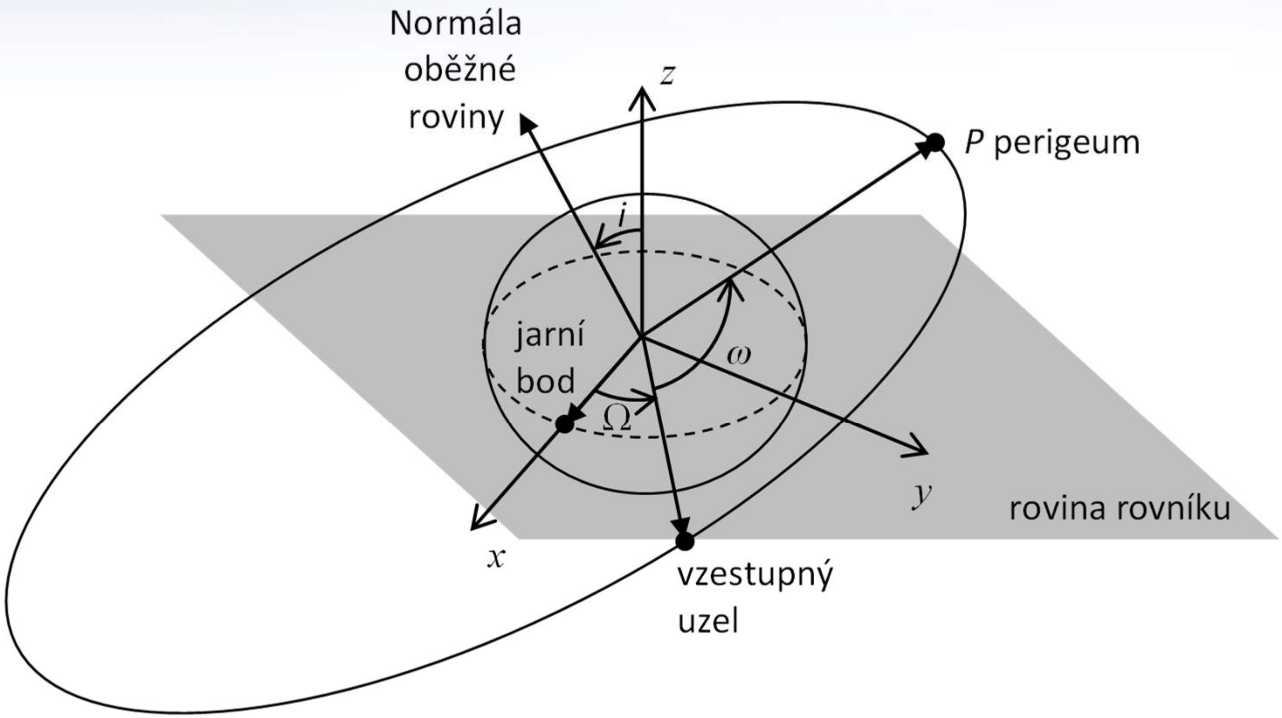
Keplerovské parametry

6 parametrů popisujících dráhu družice

I. Skupina - Orientace oběžné roviny vůči Zemi
   - inklinace oběžné dráhy družice i
   - zeměpisná délka vzestupného uzlu (rektascenze) Ω
   - argument perigea ω

II. Skupina - Tvar dráhy družice
   - délka hlavní poloosy oběžné dráhy a
   - excentricita oběžné dráhy e
   - čas průchodu perigeem t_p

Dráha družice



Výpočet dráhy družice

- Střední anomálie M_k
  - Fiktivní úhel, který lineárně závisí na čase

$$M_k - M_0 = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}(t - t_{0e})$$

G univerzální gravitační konstanta

t_{0e} vztažný čas

Keplerova rovnice

- Vztah mezi střední E_k a excentrickou M_k anomálií

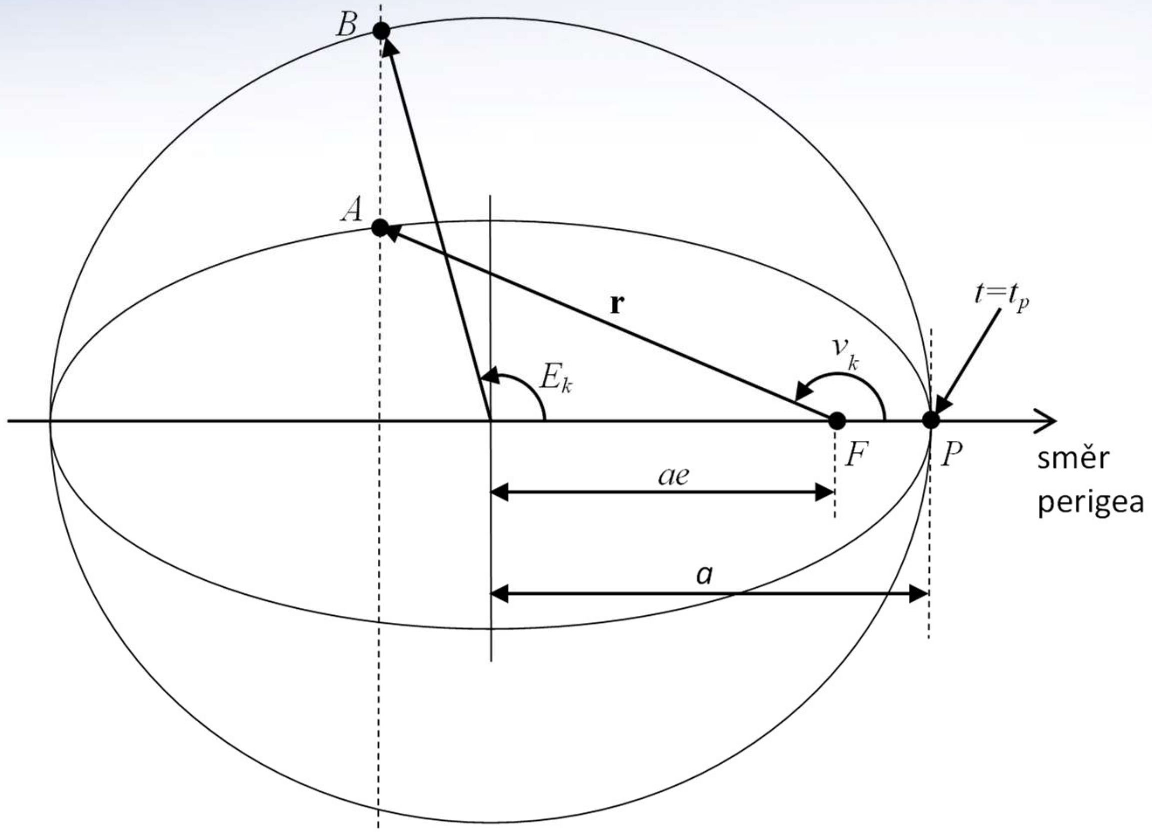
$$E_k - e.\sin(E_k) = M_k$$

(řeší se numericky prostou iterativní metodou)

Pravá anomálie v_k

$$v_k = tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E_k}{\cos E_k - e}\right\}$$

Geometrická interpretace



Poloha družice v oběžné rovině

- Poloměr dráhy

$$r_k = A(1 - e.\cos E_k)$$

- Souřadnice v orbitální rovině

$$x_k{}' = r_k \cos v_k$$
$$y_k{}' = r_k \sin v_k$$

Transformace do ECEF

- Dvě rotace
  1. Kolem osy *x* o inklinaci *i*
  2. Kolem osy *z* o úhel $-\Omega_k$

$$\Omega_k = \Omega_0 + \dot{\Omega} t_k$$

Ω_0 délka vzestupného uzlu v referenčním čase

$\dot{\Omega}$ rychlost rotace Země

t_k je doba, která uplynula od referenčního času

Transformace do ECEF

- Výsledný vztah

$$x = x_k'.\cos\Omega_k - y_k'.\cos i\ .\sin\Omega_k$$
$$y = x_k'.\sin\Omega_k - y_k'.\cos i\ .\cos\Omega_k$$
$$z = y_k'.\sin i$$

Výpočet dráhy GLONASS

- Založen na numerickém řešení pohybových rovnic

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu.x}{r^3};\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu.y}{r^3};\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu.x}{r^3}$$

- Almanach systému obsahuje
  - Polohový vektor družice $(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n}, \mathrm{z_n})$ ve vztažném čase
  - Vektor rychlosti $(\dot{\mathrm{x}}_\mathrm{n}, \dot{\mathrm{y}}_\mathrm{n}, \dot{\mathrm{z}}_\mathrm{n})$ ve vztažném čase
  - Doba platnosti dat 30 minut
  - Vztažný čas je v půlce doby platnosti dat

Výpočet dráhy GLONASS

- Dvě metody výpočtu
  1. Základní metoda
     - velmi složitá kompenzace vlivu okolních těles
     - výpočet probíhá v ECI, pak transformace v ECEF
  2. Zjednodušená metoda
     - vlivy okolních těles a rozložení hmoty v zemském tělese korigováno vektorem zrychlení $(\ddot{x}_n, \ddot{y}_n, \ddot{z}_n)$
     - výpočet probíhá v ECEF s využitím diferenciální rovnice, která prování transformaci z ECI do ECEF v průběhu numerického řešení

$$d\boldsymbol{r}/dt = \widetilde{d\boldsymbol{r}}/dt + \boldsymbol{\omega_m} \times \boldsymbol{r}$$

- Pro řešení diferenciálních rovnic se doporučuje použít čtyřbodovou metodu Runge-Kutta

Zjednodušená metoda

$$\frac{dx}{dt} = V_x;\ \frac{dy}{dt} = V_y;\ \frac{dz}{dt} = V_z$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}x - \frac{3}{2}J_0^2\frac{\mu.a_e^2}{r^5}x\left(1 - \frac{5z^2}{r^2}\right) + \omega^2 x + 2\omega V_y + \ddot{x}$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}y - \frac{3}{2}J_0^2\frac{\mu.a_e^2}{r^5}y\left(1 - \frac{5z^2}{r^2}\right) + \omega^2 y + 2\omega V_x + \ddot{y}$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}z - \frac{3}{2}J_0^2\frac{\mu.a_e^2}{r^5}z\left(1 - \frac{5z^2}{r^2}\right) + \ddot{z}$$

kde $\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2}$,

standardní gravitační parametr Země $\mu = 398600{,}44.10^9\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$

délka hlavní poloosy Země $\mathrm{a_e} = 6378136\ \mathrm{m}$

druhý zonální harmonický koeficient geopotenciálu $\mathrm{J}_0^2 = 1082625{,}7.10^{-9}$

rychlost rotace Země $\omega = 7.292115.10^{-5}\mathrm{rad/s}$

Metoda Runge-Kutta

- Tvar řešené soustavy rovnic

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{F}\big(t, \mathbf{Y}(t)\big)$$

- Algoritmus výpočtu

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(t_n, \mathbf{Y}_n)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{K}_\mathbf{1}\right)$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{K}_\mathbf{2}\right)$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{F}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{K}_\mathbf{3}\right)$$

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4)$$

Kde *h* je časový krok