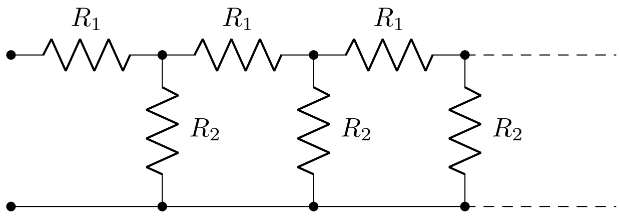
Příklady pro týden 6 - Martin Šimák

Zadání

Určete elektrický odpor na vstupních svorkách nekonečné žebříčkové struktury dle Obr. 1.

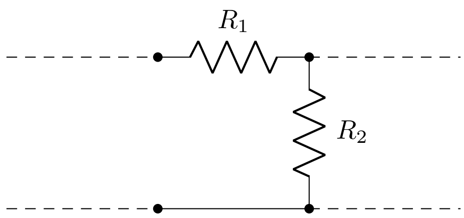


Obr. 1

Řešení

Daný problém můžeme pojmout jako nekonečnou posloupnost, jejíž členy představují opakující se části zadaného obvodu (jeden člen je znázorněn na Obr. 2). Obr. 2 zároveň znázorňuje první člen takto definované posloupnosti, u kterého můžeme jednoduše určit odpor jako

$$x_1 = R_1 + R_2.$$

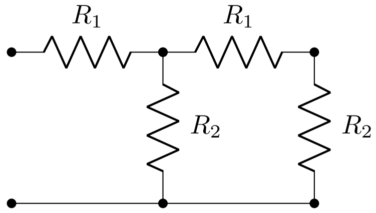


Obr. 2

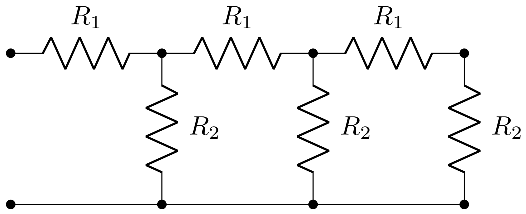
Následné dva členy posloupnosti lze jednoduchou obvodovou analýzou určit jako (obvodové diagramy Obr. 3a, Obr. 3b)

$$x_2 = \frac{(R_1 + R_2)R_2}{R_1 + 2R_2} + R_1,$$

$$x_3 = \frac{\left(R_1 + \frac{R_1R_2 + R_2^2}{R_1 + 2R_2}\right) R_2}{\left(R_1 + \frac{R_1R_2 + R_2^2}{R_1 + 2R_2}\right) + R_2}.$$



Obr. 3a



Obr. 3b

V členech posloupnosti lze tedy lehce poznat rekurentní vzorec

$$x_{n+1} = \frac{x_n R_2}{x_n + R_2} + R_1,$$

přičemž naše řešení je ntý člen posloupnosti, když n se bude blížít nekonečnu. Pro tento nekonečný člen můžeme uvést rovnost

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Označíme-li tedy $L \equiv \lim_{n\to\infty} a_n$, můžeme psát rekurentní vzorec jako

$$L = \frac{LR_2}{L + R_2} + R_1,$$

což nám umožňuje řešit rovnici pro L, kdy jediné kladné řešení (záporné samozřejmě z fyzikálních důvodů nelze uvažovat) této rovnice je

$$\boxed{L \equiv R = \frac{R_1}{2}\sqrt{1 + 4\frac{R_2}{R_1}}}\,.$$