Zásilka matematiky do karantény č. 1

- 34/22

  1. $\log_8(x) > 0$
     Jelikož vim, že platí $\log_8(1) = 0$ (protože $a^0 = 1$ pro každý číslo a), tak můžu rovnici přepsat jako
     $$\log_8(x) > \log_8(1).$$
     Dál vím, že logaritmus je funkce prostá, proto můžu bez problémů zavolat inversi (odlogaritmovat) a rovnou vychází výsledek
     $$x > 1,$$
     $$\boxed{x \in (1, \infty).}$$
  2. $\log_{\frac{5}{4}}(x) \leq 0$
     Stejný proces:
     $$\log_{\frac{5}{4}}(x) \leq \log_{\frac{5}{4}}(1),$$
     $$x \leq 1,$$
     $$\boxed{x \in (0, 1\rangle.}$$
     Stále platí $x > 0$ z definičního oboru, proto interval $(0, 1\rangle$. a ne $(-\infty, 1\rangle$.
  3. $\log_{0.8}(x) > 0$
     Tady pozor, základ je menší než jedna ($0.8 < 1$), takže graf funkce není ten rostoucí, ale klesající, což způsobí to, že při odlogaritmování musíme přehodit znaménko nerovnosti.
     $$\log_{0.8}(x) > \log_{0.8}(1),$$
     $$x < 1,$$
     $$\boxed{x \in (0, 1).}$$
  4. $\log_{\sqrt{2}}(x) \leq 0$
     $$\log_{\sqrt{2}}(x) \leq \log_{\sqrt{2}}(1),$$
     $$x \leq 1,$$
     $$\boxed{x \in (0, 1\rangle.}$$

- 35/23 je v pracovním sešitě řešený, to asi nemusim dělat.
- 35/24 Celá myšlenka tohoto cvičení (a 35/23 taky) je, aby sis zvykla na to, jak vypadá graf logaritmický funkce a to i v případě, že základ bude menší než jedna (vždycky ale větší než 0! ...logaritmus se záporným základem je divná funkce). Z těch grafů pak na základě toho, jestli roste (základ větší než 1) nebo klesá (základ mezi nulou a jedničkou), můžeme vyvodit porovnání hodnot. Pro rostoucí přece platí, že čím větší je x (číslo v závorce za log), tím větší je hodnota. U záporných funkcí je tomu však naopak.

1. $\boxed{\log_2(5) > \log_2(1)}$, protože $5 > 1$ a $\log_2(x)$ je rostoucí,
2. $\boxed{\log_{\frac{1}{2}}(5) < 1} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$, protože $5 > \frac{1}{2}$ a $\log_{\frac{1}{2}}(x)$ je klesající,
3. $0 = \boxed{\log_2(1) = \log_{\frac{1}{2}}(1)} = 0$,
4. $\boxed{\log_2\left(\dfrac{3}{2}\right) > \log_2\left(\dfrac{2}{3}\right)}$,
5. $\boxed{\log_{\frac{1}{3}}(9) < 0}$, protože logaritmus se základem menším než 0 je vždy záporný,

   když $x > 1$ (zde $x = 9$),
6. $\boxed{\log_2\left(\sqrt{2}\right) > \log_2(1)}$, protože $\sqrt{2} > 1$,
7. $\boxed{\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}\right) < 0} = \log_{\frac{1}{2}}(1)$, protože $\sqrt{2} > 1$,
8. $\boxed{\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{-4}\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{-3}\right)}$,
9. $\log_{\mathrm{e}}(\mathrm{e}) = \boxed{\ln(\mathrm{e}) = 1}$,
10. $\log_{\mathrm{e}}(\mathrm{e}) = 1 = \boxed{\ln(\mathrm{e}) < \log_2(\mathrm{e})}$,
11. $0 = \log_{\mathrm{e}}(1) = \boxed{\ln(1) = \log(1)} = \log_{10}(1) = 0$.

- 38/30 řešený.
- 38/31 graf na Desmosu.
- 38/32 $f : x \mapsto \log_3(x-9)$ (to je trochu víc fancy napsaný $f : y = \log_3(x-9)$)
  1. ANO, je roustoucí,
  2. NE, není omezená,
  3. ANO, je prostá,
  4. NE, není sudá,
  5. NE, není lichá,
  6. NE, je rovna 0,
  7. NE, jejím definičním oborem je interval $D(f) = (9, \infty)$.
- 39/33 graf na Desmosu.
- 39/34 graf na Desmosu + c) $D(f) = (-3, \infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$.
- 39/35 c).
- 36/26
  1. $f(x) = \log_{0.2}(2x-4)$

$$\begin{aligned} 2x - 4 &> 0, \\ 2x &> 4, \\ x &> 2, \\ &\boxed{x \in (2, \infty).} \end{aligned}$$

2. $f(x) = \log_3\left(\sqrt{3-x}\right)$

$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} &> 0, \\ 3-x &> 0, \\ x &< 3, \\ &\boxed{x \in (-\infty, 3).} \end{aligned}$$

3. $f(x) = \ln\left(\frac{4}{x+5}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+5} &> 0, & \qquad\qquad x &\neq -5, \\ x+5 &> 0, \\ x &> -5, \end{aligned}$$

$$\boxed{x \in (-5, \infty).}$$

4. $f(x) = \log\left(\frac{x+3}{1-0.2x}\right)$

$$\frac{x+3}{1-0.2x} > 0$$

Tato podmínka je splněna pouze pokud čitatel i jmenovatel jsou kladní (první odrážka) nebo oba záporní (druhá odrážka)

- čitatel i jmenovatel kladní

$$\begin{aligned} x+3 &> 0, & \qquad\qquad 1-0.2x &> 0, \\ x &> -3, & \frac{1}{5}x &< 1, \\ & & x &< 5, \\ x &\in (-3, \infty), & x &\in (-\infty, 5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\in (-3, \infty) \cap (-\infty, 5), \\ x &\in (-3, 5). \end{aligned}$$

- čitatel i jmenovatel záporní

$$\begin{aligned} x+3 &< 0, & \qquad\qquad 1-0.2x &< 0, \\ x &< -3, & \frac{1}{5}x &> 1, \\ & & x &> 5, \\ x &\in (-\infty, -3), & x &\in (5, \infty), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &\in (-\infty, -3) \cap (5, \infty), \\ x &\in \emptyset. \end{aligned}$$

Z jednoho řešení nám vyšel interval, z druhého prázdná množina. Finální řešení je ale sjednocení dílčích mezivýsledků (protože nám stačilo jedno z řešení, buď to nebo to), takže můžeme psát

$$\begin{aligned} x &\in (-3, 5) \cap \emptyset, \\ &\boxed{x \in (-3, 5).} \end{aligned}$$

- 42/2

  1. $\log_2(64) = 6$,
  2. $\log_2(1) = 0$,
  3. $\log_4(4) = 1$,
  4. $\log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$,
  5. $\log_{\frac{1}{2}}(2) = -1$,
  6. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$,
  7. $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3$,
  8. $\log_2\left(2^{14}\right) = 14$,
  9. $\ln(e) = 1$,
  10. $e^{\ln(e)} = e^1 = e$,
  11. $10^{\log(1)} = 10^0 = 1$,
  12. $\log(\log_2(2)) = \log(1) = 0$.