Příklady pro týden 1

Martin Šimák

Příklad 1; $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r'}$

(1)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{R_0}}{R^n}\right) = \frac{R^n(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{R_0}) - \boldsymbol{R_0}\cdot(\boldsymbol{\nabla}R^n)}{R^{2n}} = \frac{R^n(\frac{2}{R}) - \boldsymbol{R_0}\cdot(nR^{n-1}\boldsymbol{R_0})}{R^{2n}} = \frac{2R^{n-1} - nR^{n-1}}{R^{2n}} = \frac{2-n}{R^{n+1}}$$

(2)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{R}\right) = \nabla^2(\frac{1}{R}) = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{R}) = 0,$$

kde poslední rovnost platí díky faktu, že $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r'}$.

Příklad 2 Geometricky (1) představuje přirozený dekrement působení silového radiálního pole generovaného bodovým zdrojem. Divergence je v každém bodě nulová, kdybychom však spočítali průtok pole sférou o poloměru R, dostaneme:

$$\oiint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_S \left(\frac{1}{R}\boldsymbol{r}\right) \cdot \left(R^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\,\boldsymbol{r}\right) = \left(\int_0^\pi \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\right) = 4\pi,$$

což neodpovídá našemu očekávání (alternativní řešení pomocí Gaussovy integrální věty vede na nulové řešení). Paradox je tvořen tím, že při výpočtu divergence nepřipouštíme $\boldsymbol{R} = 0$, což by způsobilo dělení nulou (pole má v bodě $\boldsymbol{R} = 0$ singularitu). Divergence v tomto místě je tedy odpovědna za průtok pole v celém prostoru. Tento problém lze elegantně vyřešit zapomoci Diracovy funkce delta, která by nám v tomto případě udávala nulovou divergenci všude, krom počátku.