Příklady pro týden 7 - Martin Šimák

Zadání

Dvě kruhové nekonečně tenké smyčky o poloměru a jsou protékány stacionárním proudem I (proud teče v obou ve stejném směru). Smyčky jsou souosé a vzdálené d od sebe. Určete magnetické pole na ose systému. Určete Taylorův rozvoj pole v okolí geometrického středu systému. Nastavte poměr poloměru a vzdálenosti smyček tak, aby průběh magnetického pole v okolí středu systému byl co neplošší (snažte se popořadě vynulovat co největší počet vyšších členů Taylorova rozvoje). Určete velikost magnetického pole ve středu systému pro tento ideální případ.

Řešení

Nejprve začneme s výpočtem jednodušší (kanonické) úlohy, která spočívá ve výpočtu intenzity magnetického pole B na ose jedné smyčky položené v ose x, y.

Část první - kanonická paralela

Vektor B určitě nebude záviset na φ, jelikož je v této souřadnici invariantní, bude tedy velice výhodné přejít při výpočtu do cylindrické souřadnicové soustavy. Měříme B na ose smyčky (cylindrická vzdálenost od osy ρ je nulová), můžeme tedy položit

$$\boldsymbol{r} = (0, 0, z),\ \boldsymbol{r}' = (a\cos(\varphi), a\sin(\varphi), 0) \implies (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = (-a\cos(\varphi), -a\sin(\varphi), z).$$

Při výpočtu vyjdeme ze základního vztahu magnetostatiky, tedy z Biot-Savartova zákona

$$\boldsymbol{B}(\rho = 0, z) = \boldsymbol{B}_0(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{||\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'||^3} \mathrm{d}V',$$

který v našem případě můžeme upravit na

$$\boldsymbol{B}_0(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{I}{(a^2 + z^2)^{3/2}}\, \boldsymbol{e}_\varphi \times \begin{pmatrix} -a\cos(\varphi) \\ -a\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} a\,\mathrm{d}\varphi, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Známe-li tedy složky vektorů $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \boldsymbol{e}_\varphi$, můžeme vypočítat jejich vektorový součin jako

$$\boldsymbol{e}_\varphi \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\cos(\varphi) \\ -a\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos(\varphi) \\ z\sin(\varphi) \\ a \end{pmatrix}.$$

Dosadíme-li do vztahu, dostaneme dále již lehce řešitelný výraz

$$\boldsymbol{B}_0(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} z\cos(\varphi) \\ z\sin(\varphi) \\ a \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi,$$

u kterého, využijeme-li vlastností trigonometrických funcí, které (stejně jako všechny periodické funkce) mají nulový integrál přes celou periodu, tak se naše řešení zredukuje jen na složku ve směru osy z. Výsledné řešení kanonického případu je tedy

$$\boxed{\boldsymbol{B}_0(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,\boldsymbol{e}_z.}$$

Část druhá - přechod k řešení zadaného příkladu

Při řešení celého příkladu můžeme vyjít z vyřešené úlohy kanonické, kdy výsledný vztah z předchozí části se tentokrát ve vztahu pro magnetickou intenzitu objeví dvakrát (pro každou ze smyček jednou), přičemž jsou vzájemně posunuté na ose z o vzdálenost d, můžeme tedy pro vektor magnetické intenzity na ose smyček psát [1]

$$B(\rho=0,z) = B_0(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(\frac{1}{(a^2+(z+d/2)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2+(z-d/2)^2)^{3/2}}\right)\boldsymbol{e}_z.$$

Jelikož jsme si takto zvolili souřadnou soustavu, je geometrický střed naší dvojice smyček přesně v počátku $\boldsymbol{o}$. Pro Taylorův rozvoj v tomto geometrickém středu tedy můžeme psát

$$B_0(z) = B_0(0) + B_0'(0)z + \frac{1}{2}B_0''(0)z^2 + \cdots,$$

kde $B_0'(0), B_0''(0)$ značí první a druhou derivaci (další členy Taylorovy řady v zájmu přehlednosti dokumentu neuvádíme) podle z, které jsou určeny jako

$$B_0'(0) = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(\frac{-3(z+d/2)}{(a^2+(z+d/2)^2)^{5/2}} + \frac{-3(z-d/2)}{(a^2+(z-d/2)^2)^{5/2}}\right)\Bigg|_{z=0} = 0,$$

$$\begin{aligned} B_0''(0) &= \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(\frac{-3}{(a^2+(z+d/2)^2)^{5/2}} + \frac{15(z+d/2)^2}{(a^2+(z+d/2)^2)^{7/2}} + \right. \\ &\left. + \frac{-3}{(a^2+(z-d/2)^2)^{5/2}} + \frac{15(z-d/2)^2}{(a^2+(z-d/2)^2)^{7/2}}\right)\Bigg|_{z=0} = \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(\frac{-6(a^2+(d/2)^2)+30(d/2)^2)}{(a^2+(d/2)^2)^{7/2}}\right) = \\ &= 3\mu_0 I a^2\left(\frac{4(d/2)^2-a^2}{(a^2+(d/2)^2)^{7/2}}\right). \end{aligned}$$

[1] Budeme dále počítat pouze s velikostí B, směr se totiž derivacemi nijak nezmení

Jelikož se snažíme o co nejplošší průběh intenzity magnetického pole uvnitř soustavy, snažíme se tak vlastně o eliminaci (vynulování) co největšího počtu členů Taylorova rozvoje v okolí geometrického středu dvojice smyček (pouze tak dochází totiž k nejmenším (ideálně nulovým) fluktuacím zmíněného pole). Z této úvahy tak plyne další postup, který nám umožní určit vzdálenost smyček tak, aby vyšla i druhá derivace nulová. Tento požadavek lze uspokojit pouze pokud bude nulový čitatel zlomku, tedy

$$B_0''(0) = 3\mu_0 I a^2 \left(\frac{4(d/2)^2 - a^2}{(a^2 + (d/2)^2)^{7/2}} \right) = 0 \iff 4(d/2)^2 - a^2 = 0.$$

Jelikož obě veličiny a i d jsou z fyzikálního hlediska vzdálenosti, víme tak, že $a, d \geq 0$, proto je poslední podmínka splněna právě tehdy, když

$$\boxed{a = d.} \tag{H}$$

Závěr

Pokud tedy dále budeme předpokládat rovnost H, intenzita magnetického pole v geometrickém středu dvojice smyček[2] bude

$$\boldsymbol{B}_H(0) = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left(\frac{2}{(a^2 + (a/2)^2)^{3/2}} \right) \boldsymbol{e}_z = \frac{\mu_0 I}{a} \left(\frac{1}{(1 + 1/4)^{3/2}} \right) \boldsymbol{e}_z,$$

$$\boxed{\boldsymbol{B}_H(0) = \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}a} \boldsymbol{e}_z.}$$

[2]V tomto případě můžeme hovořit o Helmholtzových cívkách (s jedním závitem), proto výslednou intenzitu magnetického pole značíme $\boldsymbol{B}_H$