

1 Materiálová disperze

Tentokrát se budeme zabývat chováním elektromagnetických vln v disperzních prostředích. Hlavní změnou je, že již nemůžeme předpokládat homogenní či izotropní prostředí. Nám známé materiálové vztahy tedy utrpí malou změnu:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = [\epsilon * \mathbf{E}(\mathbf{r})](t), \quad \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\epsilon}(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = [\mu * \mathbf{H}(\mathbf{r})](t), \quad \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\mu}(\omega) \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = [\sigma * \mathbf{E}(\mathbf{r})](t), \quad \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\sigma}(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3)$$

tj. klasické násobení funkcí musíme v tomto případě nahradit konvolucí. Materiálové funkce se tedy chovají něco jako Greenovy funkce či „impluzové odezvy“. Pro všechny tyto funkce musí samozřejmě platit kauzalita a stabilita, tj. vlastnosti

$$f(t) = 0 \text{ pro } t < 0, \quad f(t) = 0 \text{ pro } t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Jednou jejich další důležitou vlastností je reálnost, což implikuje symetrii Fourierova obrazu:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = \left[\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\omega t} dt \right]^* = \hat{f}^*(-\omega), \quad (5)$$

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}^*(-\omega). \quad (6)$$

1.1 Lorentzův disperzní model

Model vznikl jako historická představa materiálu jakožto soustavy hmotných kuliček v pohybu harmonického oscilátoru. Celý popis taktéž vychází z Newtonových pohybových rovnic pro harmonický oscilátor s tlumícím faktorem Γ a rezonanční frekvencí ω_0 .

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}(t) + \Gamma \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(t) + \omega_0^2 \mathbf{P}(t) = \epsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}(t), \quad (7)$$

$$-\omega^2 \hat{\mathbf{P}}(\omega) + i\omega\Gamma \hat{\mathbf{P}}(\omega) + \omega_0^2 \hat{\mathbf{P}}(\omega) = \epsilon_0 \omega_p^2 \hat{\mathbf{E}}(\omega), \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{P}}(\omega) = \epsilon_0 \underbrace{\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}}_{\hat{\chi}_e(\omega)} \hat{\mathbf{E}}(\omega), \quad (9)$$

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 [1 + \hat{\chi}_e(\omega)], \quad (10)$$

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma} \right), \quad (11)$$

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \sum_i \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma_i} \right). \quad (12)$$

Poslední úprava je přechod k jakémusi interpolačnímu modelu, kdy zavádíme pro přesnost více parametrických tripletů $\omega_p, \omega_0, \Gamma$. Do dnešní doby je vhodným modelem pro popis velké spousty přírodních materiálů.

1.2 Drudeův disperzní model

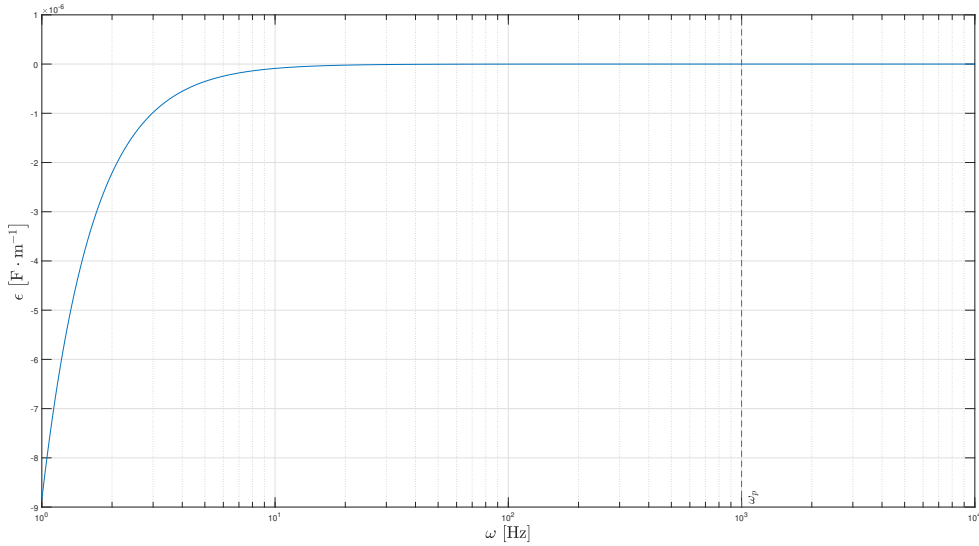
Jedná se o speciální případ Lorentzova modelu s nulovou rezonanční frekvencí a s plazmovou frekvencí $\omega_p^2 = \sigma_0 \Gamma / \epsilon_0$ v řádech THz.

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\Gamma)} \right), \quad \hat{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\frac{\omega}{\Gamma}}. \quad (13)$$

Drudeův model se hodí pro popis kovů, kde koeficient tlumení Γ nabývá významu „srážkové frekvence“. Představme si proto jakési bezkolizní prostředí, kde $\Gamma \rightarrow 0$. Tam bude platit

$$\frac{\Gamma}{\omega} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{\epsilon}(\omega) \approx \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right). \quad (14)$$

Takové bezkolizní prostředí může být například vysokoenergetické plazma.



Obrázek 1: Graf elektrické permitivity bezkolizního ($\Gamma = 0$) materiálu v Drudeově modelu s nerealisticky nízkou plazmovou frekvencí $\omega_p = 10^3$.

Jak můžeme vidět, plazmová frekvence ω_p slouží jako jakási hranice, za níž je materiál pro průchod elektromagnetické vlny naprosto transparentní. To potom v praxi samozřejmě implikuje fakt, že například nemůžeme navrhovat kovové antény na vysokofrekvenční (např. RTG nebo UVC) záření. Pro nízké frekvence je permitivita záporná, což opět není překvapením, neboť v popisu elektromagnetických vln figuruje exponenciála

$$e^{ikz} = e^{i\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\epsilon_r}z} \Big|_{\omega < \omega_p} = e^{-\frac{\omega}{c_0}\sqrt{|\epsilon_r|}z},$$

tj. elektromagnetické vlny se v kovech tlumí. To z praxe očekáváme.

V Drudeově modelu je ekvivalentní zadání elektrické permitivity ϵ nebo vodivosti σ . Pojdme se podívat například na to, jak získat vodivost ze zadané permitivity. Nejprve si vezměme ně-

kteřou z Maxwellových rovnic, např. Ampérův zákon s Maxwellovou korekcí:

$$\text{rot } \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{J}} + i\omega \hat{\mathbf{D}} = \sigma \hat{\mathbf{E}} + i\omega \epsilon \hat{\mathbf{E}} = i\omega \epsilon_0 \underbrace{\left(\epsilon_r + \frac{\hat{\sigma}}{i\omega \epsilon_0} \right)}_{\tilde{\epsilon}_r(\omega)} \hat{\mathbf{E}}.$$

Nová označená veličina $\tilde{\epsilon}_r$ musí odpovídat relativní permitivitě, kterou známe z Drudeova modelu, tj. musí platit, že staré $\epsilon_r = 1$ a dále

$$\frac{\hat{\sigma}(\omega)}{i\omega \epsilon_0} = -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\Gamma)}.$$

Tento vztah můžeme dále upravit a zavést konstantu σ_0 jako

$$\hat{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\frac{\omega}{\Gamma}}, \quad \sigma_0 = \hat{\sigma}(0) = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\Gamma}. \quad (15)$$

1.3 Debeyeův disperzní model

Tento disperzní model je relaxačním modelem $A/(1 + i\omega\tau)$ s relaxační dobou τ . Hodí se zejména pro popis vody a živých tkání. Jeho přesnost je však hlavně na nižších frekvencích (řádově do desítek GHz), neboť pro vyšší frekvence se již začínou výrazně projevovat Lorentzovské odezvy. Častým příkladem Debeyeova modelu permitivity je třeba

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\epsilon_{r,s} - 1}{1 + i\omega\tau} \right), \quad (16)$$

kde $\epsilon_{r,s} = \hat{\epsilon}_r(0)$ je „stejnoseměrná“ relativní permitivita.

1.4 Appletonův disperzní model

1.4.1 Odvození

Appletonův model je korekcí Drudeova modelu pro popis plazmatu ve vnějších slupkách atmosféry (ionosféra). Komplikací je zde samozřejmě relativně silné magnetické pole Země způsobující anizotropii. Představme si tedy zmagnetizované plazma v ionosféře: vyskytují se zde kationty a anionty, přičemž kationty jsou vcelku nepohyblivé, takže jejich interakce zanedbáme. Zajímáme se tedy rovnou o Lorentzovu sílu působící na rychlé anionty. Pro tu můžeme napsat Newtonovy pohybové rovnice bez vzájemných interakcí pro N částic:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} &= -e \mathbf{E} - e \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{B}_0, \\ m_i \frac{d^2 e\mathbf{r}_i}{dt^2} &= -e \left(e \mathbf{E} + \frac{de\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{B}_0 \right). \end{aligned}$$

Rovnici jsme si upravili tak, že se sugestivně objevuje elektrický dipól aniontů $\mathbf{p}_i = e\mathbf{r}_i$. Dále si již uvědomme, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ je $m_i = m_e$. Dále se pokusme rovnici vyprůměrovat přes zkoumaný objem V , tj. píšme

$$\underbrace{m_e \frac{1}{V} \sum_i \frac{d^2 \mathbf{p}_i}{dt^2}}_{\partial_{tt} \mathbf{P}} = -e \left(\underbrace{e \frac{1}{V} \sum_i \mathbf{E}}_{\mathbf{E}} + \underbrace{\frac{1}{V} \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \times \mathbf{B}_0}_{\partial_t \mathbf{P}} \right).$$

V závorce jsou uvedena zjednodušení: vektor elektrické polarizace \mathbf{P} je přímo definován průměrovacím integrálem/sumou a jelikož jsou naše sumy konečné, můžeme na základě linearity derivace prohodit operace pro zjednodušení. Dále vektor elektrické intenzity \mathbf{E} je přes objem zhruba konstantní, a tak ho můžeme jednoduše vyprůměrovat opět na sebe. Rovnice tedy po zavedení konstant nabývá tvaru

$$\frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} + \omega_c \frac{d\mathbf{P}}{dt} \times \mathbf{e}_B = \epsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}, \quad (17)$$

kde $\omega_c = B_0 e / m_e$ a $\omega_p^2 = e^2 / (m_e \epsilon_0)$ jsou cyklotronová a plazmová frekvence respektive. Pojdme se tedy pokusit takovou rovnici analyzovat pod Fourierovou transformací: nejprve zavedme souřadnicovou soustavu tak, aby $\mathbf{e}_B = \mathbf{e}_z$. Dále píšme

$$-\omega^2 \hat{\mathbf{P}} + i\omega\omega_c \hat{\mathbf{P}} \times \mathbf{e}_z = \epsilon_0 \omega_p^2 \hat{\mathbf{E}}. \quad (18)$$

Na první pohled je vidět, že díky vektorovému součinu $\hat{\mathbf{P}} \times \mathbf{e}_z = \hat{P}_y \mathbf{e}_x - \hat{P}_x \mathbf{e}_y$ ztrácíme možnost oddělit jednotlivé složky vektorů. Dostáváme tedy vektorovou rovnici

$$\begin{aligned} -\omega^2 \begin{pmatrix} \hat{P}_x \\ \hat{P}_y \\ \hat{P}_z \end{pmatrix} + i\omega\omega_c \begin{pmatrix} \hat{P}_y \\ -\hat{P}_x \\ 0 \end{pmatrix} &= \epsilon_0 \omega_p^2 \begin{pmatrix} \hat{E}_x \\ \hat{E}_y \\ \hat{E}_z \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -\omega^2 & i\omega\omega_c & 0 \\ -i\omega\omega_c & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{P}} &= \epsilon_0 \omega_p^2 \hat{\mathbf{E}}, \\ \hat{\mathbf{P}} &= \epsilon_0 \omega_p^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\omega^2 & i\omega\omega_c & 0 \\ -i\omega\omega_c & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}^{-1}}_{\hat{\chi}_e} \hat{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

Výpočtem inverzní matice získáváme Appletonův model permittivity

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & -\frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ \frac{i\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \quad (19)$$

jakožto antisymetrický tenzor, který díky antisymetrii vykazuje nereciproké chování. Můžeme povšimnout triviálního příkladu, kdy vyšleme vlnu kolmo na atmosféru. Vektory $\hat{\mathbf{B}}_0$ a $\hat{\mathbf{E}}$ jsou potom rovnoběžné a vektorový součin $\hat{\mathbf{P}} \times \hat{\mathbf{B}}_0$ je nulový. V tomto případě dostáváme opět permittivitu jako jednoduchou skalární funkci z Drudeova modelu.

1.4.2 Lze v Appletonově modelu rozkládat do rovinných vln?

V této podsekcí se budeme zabývat otázkou, jak je na tom náš elementární rozklad do rovinných vln v případě, že se nacházíme v materiálu popsaném Appletonovým disperzním modelem. Nejprve předpokládejme, že ano: Napišme si tedy Maxwellovy transformace pod plnou Fourierovou transformací.

$$i\mathbf{k} \cdot (\epsilon(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)) = 0, \quad (20)$$

$$i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = -i\omega\mu_0 \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega), \quad (21)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (22)$$

$$i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega) = i\omega\epsilon(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega). \quad (23)$$

Klasickou kombinací druhé a čtvrté rovnice získáme vztah

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \times \left(-\frac{1}{\omega\mu_0} \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} \right) &= \omega\epsilon(\omega)\hat{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{k} \times \left(\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} \right) &= \omega^2\mu_0\epsilon_0\epsilon_r(\omega)\hat{\mathbf{E}}, \\ -\left(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}} \right) \mathbf{k} + \|\mathbf{k}\|^2 \hat{\mathbf{E}} &= k_0^2\epsilon_r(\omega)\hat{\mathbf{E}}.\end{aligned}$$

Zásadní změnou zde však je, že nemusí nutně platit $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$. Speciální případ: $\hat{\mathbf{E}} = (\hat{E}_x, \hat{E}_y, 0)^T$, $\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$. To be continued.