

Příklady pro týden 5 - Martin Šimák

Zadání

Bodový náboj o velikosti q leží vně koule o poloměru R . Koule je z dokonalého vodiče a je nabitá nábojem q . Předpokládejte, že zvolíme potenciál v nekonečnu rovný nule. V takovém případě má uvedená úloha jediné řešení. Nalezněte toto řešení. Dále určete práci, kterou musí konat síla působící na tento bodový náboj, aby ho z nekonečna přesunula na určitou pozici vně koule. Závislost této práce vykreslete. Fyzikálně interpretujte její průběh. Bodový náboj i koule mají stejný náboj. Přitahují se, či odpuzují?

Řešení

Nejprve vyřešíme lehčí úlohu, kdy budeme prozatím ignorovat náboj samotné koule (zůstává však dokonalým vodičem), čímž získáme potenciál φ' (metodou zrcadlení) a až potom k tomuto výsledku přičteme i působení nabitě koule.

Metoda zrcadlení zde spočívá v tom, že nalezneme bod inverzní dle kružnice, která vznikne řezem koule libovolnou rovinou obsahující polopřímku SQ , kde S je střed této kružnice a Q je bod, ve kterém se nachází korespondující náboj. Bod Q invertujeme na bod Q' , kam následně umístíme obraz náboje q , dle rovnice kruhové inverze

$$|SQ||SQ'| = R^2 \implies r_{q'} = |SQ'| = \frac{R^2}{|SQ|} = \frac{R^2}{r_q}.$$

Zbývá tedy již jen stanovit náboj q' , který určíme zapomocí podmínky, že soustava musí být silově rovnovážná na hranici kružnice. Stačí tedy dosadit do Coulombova zákona pro elektrostatickou sílu, kde bod pozorování bude průsečík uvažované kružnice (vzdálenost R) a polopřímky SQ , tedy

$$F_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|R - r_q|} + \frac{q'}{|R - r_{q'}|} \right) = 0$$

$$\frac{q'}{R - r_{q'}} = -\frac{q}{r_q - R}$$

$$q' = \frac{-q \left(R - \frac{R^2}{r_q} \right)}{r_q - R} = -q \frac{R}{r_q}.$$

Výsledné značení:

- zrcadlový obraz náboje $q' = -qR/r_q$,
- bod pozorování $\mathbf{r} = r \mathbf{r}_0$ (\mathbf{r}_0 je jednotkový vektor ve směru pozorování),
- bodový náboj je na souřadnici $\mathbf{r}_q = r_q \mathbf{r}_{0q}$ (\mathbf{r}_{0q} je jednotkový vektor ve směru bodového náboje q),
- zrcadlový obraz bodového náboje q' je na souřadnici $\mathbf{r}_{q'} = r_{q'} \mathbf{r}_{0q'}$ ($\mathbf{r}_{0q'}$ je jednotkový vektor ve směru zrcadlového obrazu q' a $r_{q'} = R^2/r_q$),
- konstanta $\alpha \equiv r/R$,
- konstanta $\beta \equiv R/r_q$.

Výpočet potenciálu:

$$\begin{aligned}\varphi'(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q\|} + \frac{q'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q'}\|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\|r\mathbf{r}_0 - r_q\mathbf{r}_{0q}\|} - \frac{qR/r_q}{\|r\mathbf{r}_0 - R^2/r_q\mathbf{r}_{0q}\|} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{\|\alpha\mathbf{r}_0 - 1/\beta\mathbf{r}_{0q}\|} - \frac{\beta}{\|\alpha\mathbf{r}_0 - \beta\mathbf{r}_{0q}\|} \right)\end{aligned}$$

Nyní jsme tedy stanovili potenciál, který představuje situaci bodového náboje vně dokonale vodivé, však nenabitě koule. Jelikož koule se vně vlastního objemu v dostatečné vzdálenosti jeví jako bodový náboj, můžeme její příspěvek snadno přičíst k dosavadnímu výsledku, tedy

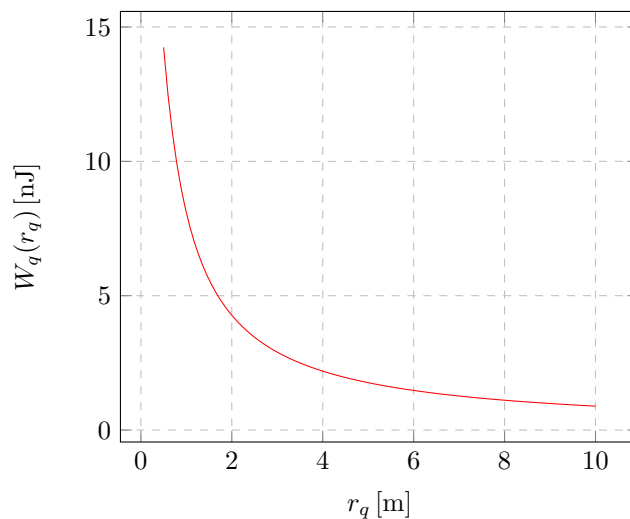
$$\varphi = \varphi' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{\|\alpha\mathbf{r}_0 - 1/\beta\mathbf{r}_{0q}\|} - \frac{\beta}{\|\alpha\mathbf{r}_0 - \beta\mathbf{r}_{0q}\|} + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Výpočet práce (energie): Práci vykonanou při přesunu bodového náboje z nekonečna (místo nulového potenciálu) na určitou posici vně koule můžeme interpretovat také jako elektrostatickou energii náboje ve výsledné poloze. Spočteme ji pomocí námi dříve určeného potenciálu, do kterého nebudeme započítávat první člen v závorce, protože náboj sám na sebe elektrostatickou silou nepůsobí.

$$W_q = q(\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\infty)) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{R}{r_q} - \frac{R/r_q}{\|r_q/R\mathbf{r}_q - R/r_q\mathbf{r}_{0q}\|} \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\beta - \frac{\beta}{1/\beta - \beta} \right)$$

$$W_q = \frac{q^2 \beta}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{\beta}{1 - \beta^2} \right)$$

Visualisace práce v grafu: Práci jako funkci radiální vzdálenosti, do které vkládáme bodový náboj q , od středu koule, kterou jsme umístili do počátku souřadnicové soustavy, můžeme nanést do 2-D grafu. Pro účely vizualizace jsme jako referenční hodnoty zvolili $q = 1 \text{ nC}$, $R = 0.1 \text{ m}$.



Z grafu vidíme, že práce vychází kladně, což implikuje fakt, že se koule s nábojem odpuzují.