

5. MOMENTOVÁ METODA

5.1 Matematický základ

Momentová metoda [5.1] není ve své podstatě numerickou metodou, lepším označením je přibližná metoda. Někdy se tato metoda také nazývá Ritzova nebo Galerkinova metoda. Je široce využívána pro řešení lineárních diferenciálních, integrálních nebo integro – diferenciálních rovnic ve všech oblastech techniky. Aplikací momentové metody se původní rovnice převede na soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé koeficienty v rozvoji hledané funkce. Konkrétní řešení elektromagnetických rovnic je ovšem velmi rozmanité, ukážeme si proto jen některé úlohy. Další aplikace čtenář nalezne např. v knize [5.1].

Základní podstata momentové metody je velice jednoduchá. Vysvětlíme si ji na řešení obecné rovnice

$$L(f) = g \quad , \quad (5.1)$$

kde L je libovolný lineární operátor, g je zdrojová funkce. Naším úkolem je nalézt funkci $f = L^{-1}(g)$ splňující zadané okrajové podmínky.

Pro řešení použijeme obecný skalární součin dvou funkcí, který je zpravidla definován integrálem

$$(f, g) = \int_{\Omega} w f g d\Omega \quad , \quad (5.2)$$

kde w je váhová funkce, Ω je oblast (objem, plocha, křivka), na které hledáme řešení rovnice (5.1). Skalární součin (5.2) musí být lineární, komutativní, musí definovat míru (modul) prvku (funkce) $\|f\| = \langle f, f^* \rangle$ a metriku (vzdálenost) dvou prvků $\|f, g\| = \langle (f - g), (f - g)^* \rangle$, kde $*$ označuje komplexní sdružení. Hledanou funkci f rozložíme do řady tzv. bazových funkcí f_n a definujeme řadu tzv. testovacích funkcí w_m . Funkci f tedy hledáme ve tvaru

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n \quad , \quad (5.3)$$

kde α_n jsou neznámé koeficienty. Počet členů řady (5.3) je třeba omezit na konečné číslo N , čímž se řešení rovnice (5.1) stává přibližným. Řadu (5.3) dosadíme do rovnice (5.1) a s využitím linearit operátoru L dostaneme

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n L(f_n) = g \quad . \quad (5.4)$$

Obě strany této rovnice vynásobíme postupně N testovacími funkcemi w_m

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \langle w_m, L(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad , \quad m=1, \dots, N \quad (5.5)$$

Dostáváme tím soustavu N algebraických lineárních rovnic pro koeficienty α_n , kterou lze přepsat do maticového tvaru

$$[A_{mn}][\alpha_n] = [g_m], \quad (5.6)$$

kde

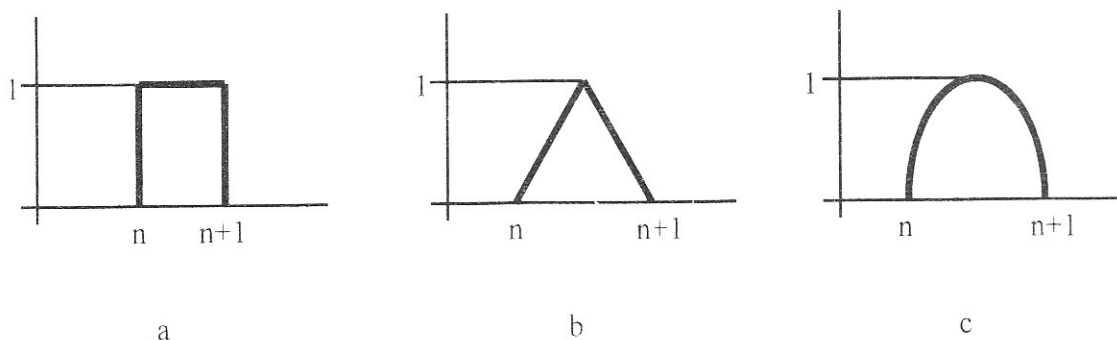
$$A_{mn} = \langle w_m, L(f_n) \rangle, \quad (5.7)$$

$$g_m = \langle w_m, g \rangle, \quad (5.8)$$

$[\alpha_n]$ je sloupcový vektor koeficientů α_n . Řešení této soustavy rovnic je

$$[\alpha_n] = [A_{mn}]^{-1} [g_m]. \quad (5.9)$$

Přesnost řešení závisí na volbě N , f_n a w_m . Pro $w_m = f_m$ dostáváme tzv. Galerkinovu metodu [5.2]. Volíme-li $N = \infty$, výsledek nezávisí na výběru f_n a w_m . Výběr funkcí f_n a w_m se řídí požadavky na přesnost a potřebou snadného výpočtu prvků matic A_{mn} a g_m . Existují dva základní druhy bázových funkcí. Jsou to funkce impulsní definované na subintervalech definičního oboru funkce f a funkce definované na celé oblasti Ω . Impulsní bázové funkce mohou být konstanty, trojúhelníkové impulsy nebo úseky funkce \sin . Tento výčet samozřejmě není úplný. Příklady jsou znázorněny na Obr. 5.1. Funkce definované na celé oblasti jsou zpravidla funkce goniometrické \sin , \cos (Fourierovy řady). Testovací funkce volíme obdobně. Zde máme ještě možnost volit tyto funkce ve tvaru Diracových impulsů $\delta(x-x_n)$, což představuje testování v bodech. V některých případech je výhodné volit bázové funkce jako řešení homogenní rovnice $L(f)=0$.



Obr. 5.1 Příklady 1D impulsních bázových funkcí

Ukažme si použití momentové metody na jednoduché diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + x = 0, \quad (5.10)$$

s okrajovými podmínkami $f(0)=0$ a $f(1)=0$. Přesné řešení lze získat např. dvojnásobnou integrací

$$f(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}. \quad (5.11)$$

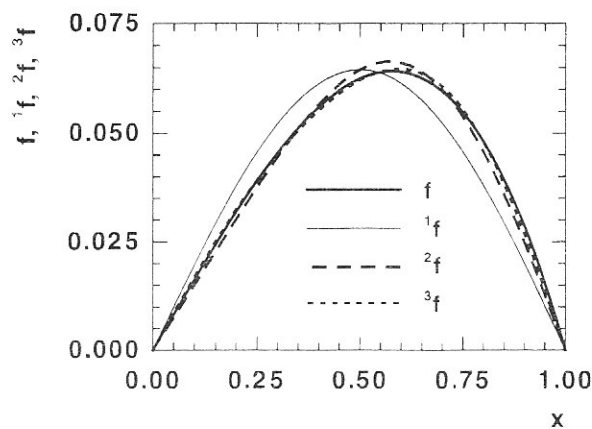
Rovnice (5.10) obsahuje lineární operátor $L=d^2/dx^2$, funkce $g(x)=-x$. Zvolíme báze funkce na celém intervalu $f_n=\sin(n\pi x)$, jejichž derivace jsou $f_n'=n\pi\cos(n\pi x)$, $f_n''=-n^2\pi^2\sin(n\pi x)$. Dosazením do rovnice (5.10) dostaneme

$$-\sum_{n=1}^N \alpha_n n^2 \pi^2 \sin(n\pi x) = -x \quad (5.12)$$

Potřebné skalární součiny jsou

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 1/2 & , n=m \\ 0 & , n \neq m \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\langle f_m, g \rangle = \int_0^1 x \sin(m\pi x) dx = -\frac{(-1)^m}{m\pi} \quad (5.14)$$



Obr. 5.2 Přesné řešení rovnice (5.10) f v porovnání s funkcemi 1f , 2f , 3f .

Dostáváme tedy po vynásobení rovnice (5.12) funkcí f_m a po integraci přímo N rovnic pro určení koeficientů α_m , neboť vlivem (5.13) je matice $[A_{mn}]$ diagonální maticí

$$\alpha_m = -\frac{(-1)^m \cdot 2}{m^3 \pi^3} \quad (5.15)$$

Pro první tři koeficienty dostáváme výrazy $\alpha_1=2/\pi^3=0,0645$, $\alpha_2=-1/(4\pi^3)=-0,00806$, $\alpha_3=2/(27\pi^3)=0,002393$. Porovnání přesného řešení (5.11) s funkcemi 1f , 2f , 3f , které představují omezení řady (5.3) na jeden, dva a tři členy je provedeno na Obr. 5.2. Je patrné, že již funkce 3f je dostatečně přesným řešením naší rovnice (5.10).

5.2 Greenovy funkce

Než přistoupíme k ukázkám řešení elektromagnetických polí, je nezbytné seznámit se s tzv. Greenovými funkcemi. Greenova funkce je odezvou systému na zdroj jednotkové amplitudy zaujímající elementární objem. Máme-li řešit obecnou rovnici (5.1), kde zdrojová funkce g je definována na Ω , nalezneme Greenovu funkci řešením rovnice

$$L(G)=1.\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (5.16)$$

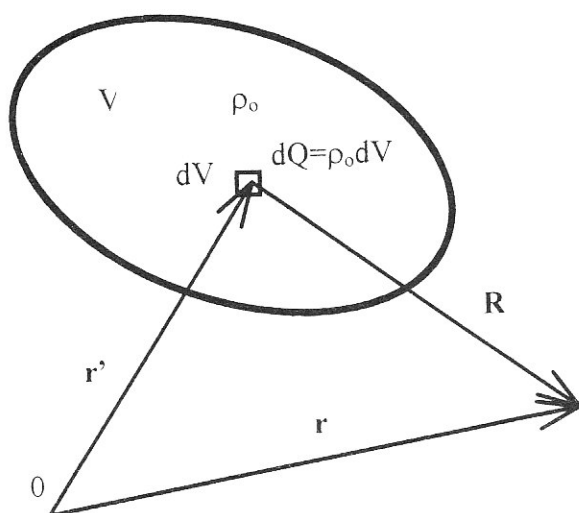
Hledaná odezva systému na buzení představené funkcí g má tvar

$$f(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') d\Omega \quad (5.17)$$

Ukážeme si nejjednodušší tvar Greenových funkcí pro řešení Poissonovy rovnice pro skalární potenciál elektrostatického pole φ a vlnové rovnice pro vektorový potenciál \mathbf{A} . V obou případech budeme uvažovat neomezený prostor vyplněný homogenním materiálem.

Poissonova rovnice pro skalární potenciál φ má tvar

$$\Delta\varphi = -\rho_o/\varepsilon, \quad (5.18)$$



kde ρ_o je objemová hustota volného náboje spojitě rozložená v objemu V , viz Obr. 5.3. Greenova funkce je zde vlastně velikost potenciálu v místě \mathbf{r} vytvořeného bodovým nábojem umístěným v místě \mathbf{r}' . Obecně je řešením rovnice

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.19)$$

Řešením této rovnice je funkce

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon R}, \quad (5.20)$$

Obr. 5.3 Geometrie úlohy pro řešení Poissonovy rovnice.

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (5.21)$$

Hledané rozložení potenciálu je

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_o(\mathbf{r}') dV = \iiint_V \frac{\rho_o(\mathbf{r}') dV}{4\pi\varepsilon R}. \quad (5.22)$$

Analogicky nalezneme Greenovu funkci vlnové rovnice pro vektorový potenciál ve volném prostoru vyplněném bezztrátovým materiálem

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu_o \mathbf{J}, \quad (5.23)$$

kde $k^2 = \omega^2 \mu_o \varepsilon$. Zde je vektorová Greenova funkce $\mathbf{G}_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ řešením rovnice

$$\Delta \mathbf{G}_A + k^2 \mathbf{G}_A = -\mu_o \mathbf{i}_o \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.24)$$

což je odezva na střídavý proud s amplitudou 1 A tekoucí vodičem zanedbatelného průřezu a délky ve směru určeném jednotkovým vektorem \mathbf{i}_o . Z teorie elektromagnetického pole víme, že takový zdroj generuje vlnu popsanou vektorovým potenciálem

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_o \mathbf{J} \mathbf{i}_o}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{R}, \quad (5.25)$$

Greenova funkce má tedy tvar

$$\mathbf{G}_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \mathbf{i}_0 \quad (5.26)$$

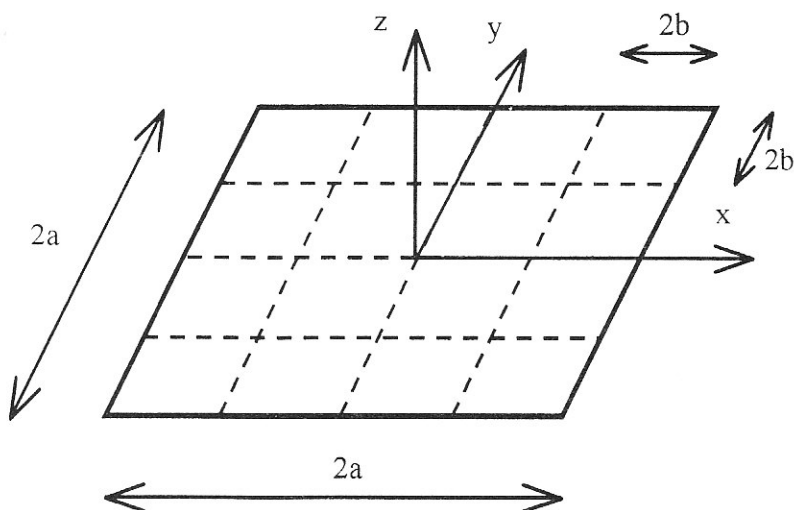
Vlnová rovnice (5.23) má s ohledem na geometrii analogickou Obr. 5.3 řešení

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \iiint_V \mathbf{G}_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{e^{-jkR}}{R} J(\mathbf{r}') \mathbf{i}_0 dV \quad (5.27)$$

Tyto jednoduché příklady ukazují konstrukci Greenových funkcí ve volném prostoru vyplněném homogenním materiálem. V závěru této kapitoly si ukážeme postup při konstrukci Greenovy funkce pro planární mikrovlnné obvody.

5.3 Rozložení náboje na vodivé desce

V tomto odstavci si ukážeme výpočet rozložení plošné hustoty náboje σ na dokonale vodivé čtvercové desce podle Obr. 5.4 a kapacitu této desky vůči nekonečnu. Deska má vůči nekonečnu potenciál U . Potenciál elektrostatického pole vyvolaný nábojem na desce je analogicky vztahu (5.22) popsán



Obr. 5.4 Vodivá deska zanedbatelné tloušťky

$$\varphi(x, y, z) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{\sigma(x', y')}{4\pi\epsilon R} dx' dy' \quad (5.28)$$

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \quad (5.29)$$

Okrajovou podmínkou pro výpočet rozložení potenciálu je $\varphi=U$ na povrchu desky. Po výpočtu plošné hustoty náboje lze kapacitu desky určit ze vztahu

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{U} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \sigma(x, y) dx dy \quad (5.30)$$

Dosadíme-li do okrajové podmínky $\varphi=U$ za potenciál ze (5.28) pro body na povrchu desky, dostáváme zde, tj. pro $x \in (-a, a)$, $y \in (-a, a)$ a $z=0$, integrální rovnici pro neznámou funkci $\sigma(x', y')$ popisující rozložení plošné hustoty náboje na desce

$$U = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{\sigma(x', y') dx' dy'}{4\pi\epsilon \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (5.31)$$

Povrch desky rozdělíme pravoúhlou sítí na N čtverců o rozměrech $2b \times 2b$ s plochou Δs_n . Zvolíme na těchto čtvercích nejjednodušší tvar báзовých funkcí s konstantní hodnotou na Δs_n , tj. $f_n=1$ na Δs_n a $f_n=0$ mimo Δs_n . Testovat budeme v bodech x_n a y_n , které jsou středy čtverců, tj. testovací funkce volíme ve tvaru $w_n=\delta(x-x_n)\delta(y-y_n)$. Rozložení plošné hustoty náboje budeme hledat ve tvaru

$$\sigma(x, y) = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n \quad (5.32)$$

Řadu (5.32) dosadíme do integrální rovnice (5.31). Pravou i levou stranu této rovnice vynásobíme postupně všemi N testovacími funkcemi w_m a integrujeme přes celou plochu desky. Vzhledem k vlastnostem Diracovy funkce δ jsou integrály

$$\langle w_m, f \rangle = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \delta(x-x_m) \delta(y-y_m) f(x, y) dx dy = f(x_m, y_m) \quad (5.33)$$

Dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé koeficienty α_n

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} \alpha_n = U, \quad m=1, 2, \dots, N \quad (5.34)$$

kde

$$A_{mn} = \int_{\Delta x_n} \int_{\Delta y_n} \frac{dx' dy'}{4\pi\epsilon \sqrt{(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2}} \quad (5.35)$$

Přesnější výsledky bychom získali použitím báзовých funkcí analogických trojúhelníkovým funkcím podle Obr. 5.1b a testovacích funkcí rovných konstantě na plošce Δs_n . Ukážeme si přibližný výpočet maticových prvků A_{mn} . Je-li deska rozdělena na N čtverců, je délka jejich hrany $2b=2a/\sqrt{N}$. Diagonální prvky matice pro $m=n$ jsou všechny stejné, vypočteme je pomocí jejich umístění do počátku souřadnicové soustavy, tj. pro $x_m=0$, $y_m=0$

$$A_{mn} = \int_{-b}^b \int_{-b}^b \frac{dx' dy'}{4\pi\epsilon \sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{2b}{\pi\epsilon} \ln(1 + \sqrt{2}) = 0,8814 \frac{2b}{\pi\epsilon} \quad (5.36)$$

Nediagonální prvky vypočteme tak, že nahradíme proměnnou vzdálenost

$$\sqrt{(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2} \approx \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} = R_{mn} \quad (5.37)$$

a tedy dostaneme

$$A_{mn} \approx \frac{\Delta s_n}{4\pi\epsilon R_{mn}} = \frac{b^2}{\pi\epsilon \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}} \quad (5.38)$$

5.4 Drátové antény

Nejprve uvažujme dokonale vodivé těleso s povrchem S , na jehož povrchu teče plošný proud \mathbf{K} , který vytváří elektrické pole

$$\mathbf{E}_s = -j\omega\mathbf{A} - \text{grad}\varphi, \quad (5.39)$$

kde \mathbf{A} a φ vyjádříme pomocí Greenových funkcí pro volný prostor analogických (5.26) a (5.20)

$$\mathbf{A} = \mu \iint_S \mathbf{K} \frac{e^{jkR}}{4\pi R} dS, \quad (5.40)$$

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon} \iint_S \sigma \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS. \quad (5.41)$$

Plošná hustota náboje σ je svázána s proudem \mathbf{K} rovnicí kontinuity

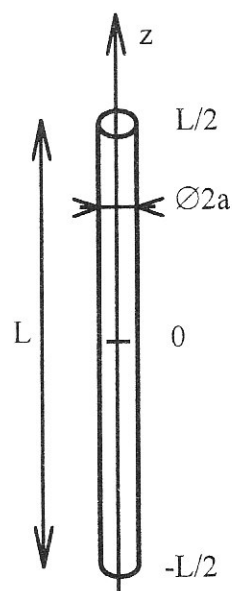
$$\sigma = -\frac{1}{j\omega} \text{div}\mathbf{K}. \quad (5.42)$$

Nechť se vodič nachází v prostoru s excitačním polem \mathbf{E}_i (např. rovinná vlna). Na ploše S musí být tečná složka elektrického pole rovna 0. Okrajová podmínka je tedy

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_i, \quad (5.43)$$

z této rovnice určíme rozložení plošné hustoty proudu \mathbf{K} , který definuje rozložení pole.

Z okrajové podmínky (5.43) odvodíme integrální rovnici popisující rozložení proudu podél válcového vodiče, Obr. 5.5, délky L srovnatelné s vlnovou délkou a s poloměrem a , pro který platí $a \ll L$, umístěného v ose z . Předpokládáme, že hledaný proud teče osou vodiče. Za tečné složky elektrického pole považujeme složky ve směru osy z E_z . Je-li vodič dostatečně štíhlý, lze na jeho povrchu považovat za nenulové jen derivace podle proměnné z . Okrajová podmínka (5.43) má tvar



Obr. 5.5 Drátová anténa.