1. Vedení - základní vztahy

Předpoklad: a) příčné rozměry vedení << λ_g, vlna TEM

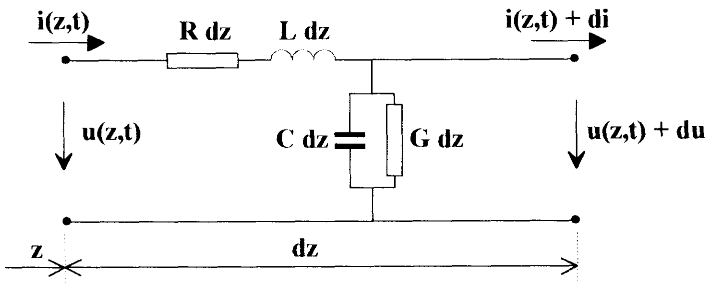
b) vedení je příčně homogenní

Primární parametry vedení.

R - měrný odpor	[Ω/m]
L - měrná indukčnost	[H/m]
G - měrná příčná vodivost	[S/m]
C - měrná kapacita	[F/m]

Homogenní vedení - R, L, G, C jsou konstanty

1.1 Telegrafní rovnice.



Obr. 1.1.1

kde

$$du = \frac{\partial u(z,t)}{\partial z}.dz \quad \text{a} \quad di = \frac{\partial i(z,t)}{\partial z}.dz \tag{1.1.1}$$

harmonický časový průběh

$$u(z,t) = U(z).e^{j\omega t} \tag{1.1.2}$$

$$i(z,t) = I(z).e^{j\omega t} \tag{1.1.3}$$

Pak

$$\frac{dU(z)}{dz} = -(R + j\omega L).I(z) = -Z_m.I(z) \tag{1.1.4}$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C).U(z) = -Y_m.U(z), \tag{1.1.5}$$

kde Z_m resp. Y_m je tzv. podélná měrná impedance resp. příčná měrná admitance. Po derivaci lze získat tzv. telegrafní rovnice.

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} = Z_m.Y_m.U(z) \tag{1.1.6}$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = Z_m.Y_m.I(z). \tag{1.1.7}$$

Řešení: $$U(z) = V^{+}.e^{-\gamma z} + V^{-}.e^{\gamma z} \tag{1.1.8}$$

kde $\gamma = \sqrt{Zm.Ym} = \sqrt{(R+j\omega L).(G+j\omega C)} = \beta + j\alpha$, α a β jsou reálné.

Sekundární parametry vedení.

γ - konstanta šíření

$$\gamma = \sqrt{Zm.Ym} = \sqrt{(R+j\omega L).(G+j\omega C)} = \beta + j\alpha \tag{1.1.9}$$

Z_V - charakteristická (vlnová) impedance

$$Z_V = \frac{Z_m}{\gamma} = \frac{Z_m}{\sqrt{Z_m.Y_m}} = \sqrt{\frac{Z_m}{Y_m}} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} \tag{1.1.10}$$

Z (1.1.4) po dosazení (1.1.8) lze získat pro proud:

$$I(z) = \frac{1}{Z_v}.\left(V^{+}.e^{-\gamma z} + V^{-}.e^{+\gamma z}\right) \tag{1.1.11}$$

Postupná vlna: $$u(z,t) = V^{+}.e^{-\beta z}.e^{j(\omega t - \alpha z)} \tag{1.1.12}$$

Odražená vlna: $$u(z,t) = V^{-}.e^{+\beta z}.e^{-j(\omega t + \alpha z)} \tag{1.1.13}$$

β je tzv. konstanta útlumu (měrný útlum), α je tzv. fázová konstanta (měrný fázový posun).

Výraz $(\omega t - \alpha z) = \Phi$ je okamžitá fáze.
Jakou rychlostí se pohybují body s konstantní fází, tj. Φ= konst.?
Φ =konst. $\Rightarrow d\Phi = 0$. Tedy $\omega.dt - \alpha.dz = 0$. Odtud:

Fázová rychlost: $$v_f = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\alpha} \tag{1.1.14}$$

Vlnová délka: $$\lambda_g = v_f.T = v_f.\frac{1}{f} = \frac{\omega}{\alpha.f} = \frac{2\pi}{\alpha} \tag{1.1.15}$$

1.2. Bezeztrátové vedení

Předpoklad: $R = 0$; $G = 0$, pak:

$$\gamma = \beta + j\alpha = \sqrt{j\omega L.j\omega C} = j\omega\sqrt{LC} = j\alpha \tag{1.2.1}$$

$$\Rightarrow \qquad \beta = 0, \qquad \alpha = \omega.\sqrt{LC} \tag{1.2.2}$$

$$Z_V = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{1.2.3}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1.2.4}$$

1.3. Vedení s malými ztrátami

Předpoklad: $R << \omega L$; $G << \omega C$ (1.3.1)

Z (1.1.9) lze odvodit:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2 LC}{2}\left[-\left(1 - \frac{RG}{\omega^2 .LC}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{RG}{\omega LC}\right)^2 + \left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right)^2}\,\right]} \qquad (1.3.2)$$

vzhledem k (1.3.1)

$$\frac{RG}{\omega^2 .LC} \to 0 \qquad (1.3.3)$$

Pak lze (1.3.2) upravit:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2 LC}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right)^2}\,\right]} \cong \omega.\frac{\sqrt{LC}}{2}.\left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) \qquad (1.3.4)$$

U vedení s malými ztrátami platí:

$$Zv = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \cong \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (1.3.5)$$

(1.3.5) lze pak upravit:

$$\beta = \frac{R}{2Z_v} + \frac{G}{2Y_v} = \beta c + \beta_d \qquad (1.3.6)$$

U vedení s malými ztrátami tedy platí:
Celkové ztráty jsou rovny součtu ztrát ve vodičích a v dielektriku!

Z (1.1.9) lze pro α při použití (1.3.2) odvodit:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 LC}{2}\left[\left(1 - \frac{RG}{\omega^2 LC}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{RG}{\omega^2 LC}\right)^2 + \left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right)^2}\,\right] \cong$$

$$\cong \frac{\omega^2 LC}{2}.\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right)^2}\,\right] \cong \omega^2 \sqrt{LC}.\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right)^2\right] \qquad (1.3.7)$$

Tedy:

$$\alpha = \omega \sqrt{LC}.\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right)^2} \cong \omega.\sqrt{LC}.\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{G}{\omega C} + \frac{R}{\omega L}\right)^2\right] \qquad (1.3.8)$$

a odtud:

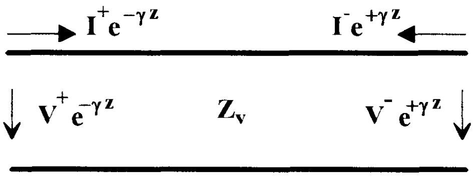
$$\alpha = \omega.\sqrt{LC}.\left[1 + \frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)^2\right] \qquad (1.3.9)$$

Pro fázovou rychlost pak platí:

$$v_f = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{LC}\cdot\left[1+\frac{1}{8\omega^2}\cdot\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)^2\right]} \cong \frac{1-\frac{1}{8\omega^2}\cdot\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)^2}{\sqrt{LC}} \tag{1.3.10}$$

U vedení s malými ztrátami je tedy fázová rychlost a tím i vlnová délka kratší než u bezeztrátového vedení.

1.4. Koeficient odrazu a impedance na vedení



nekonečné vedení

Obr. 1.4.1.

Okamžité hodnoty výsledného napětí:

$$u(z,t) = V^+.e^{j\omega t}.e^{-\gamma z} + V^-.e^{j\omega t}.e^{+\gamma z} = V^+.e^{j\omega t}.e^{-\gamma z}.\left(1+\frac{V^-.e^{\gamma z}}{V^+.e^{-\gamma z}}\right) \tag{1.4.1}$$

Napěťový **koeficient odrazu** v místě z.

$$\rho(z) = |\rho|.e^{j\varphi}.e^{+\gamma z} = \frac{V^-.e^{\gamma z}}{V^+.e^{-\gamma z}} \tag{1.4.2}$$

kde

$$|\rho|.e^{j\varphi} = \frac{V^-}{V^+} \tag{1.4.3}$$

Pak pro napětí podle (1.4.1) platí:

$$u(z,t) = V^+.e^{j\omega t}.e^{-\gamma z}.\left(1+|\rho|.e^{+2\gamma z}.e^{j\varphi}\right) \tag{1.4.4}$$

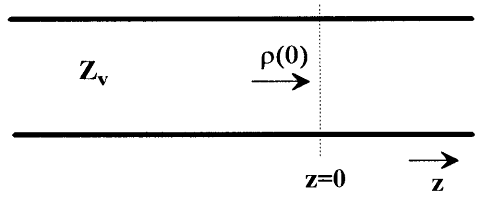
Okamžité hodnoty výsledného proudu:

$$i(z,t) = \frac{1}{Z_v}.\left(V^+.e^{j\omega t}.e^{-\gamma z} - V^-.e^{j\omega t}.e^{+\gamma z}\right) = \frac{1}{Z_v.}.V^+.e^{j\omega t}.e^{-\gamma z}.\left(1-\rho.e^{-2\gamma z}\right) \tag{1.4.5}$$

Impedance na vedení v místě z je pak určena:

$$Z(z) = \frac{u(z,t)}{i(z,t)} = Z_v.\frac{1+|\rho|.e^{+2\gamma z}.e^{j\varphi}}{1-|\rho|.e^{+2\gamma z}.e^{j\varphi}} = Z_v.\frac{1+\rho.e^{+2\gamma z}}{1-\rho.e^{+2\gamma z}} \tag{1.4.6}$$

Transformace $Z(z)$ podél vedení



Obr. 1.4.2.

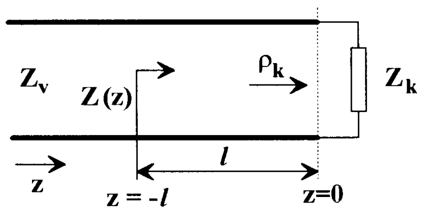
Nechť v místě z=0 je koeficient odrazu $\rho(0) = \rho_k$ resp. impedance:

$$Z(0) = Z_k = Z_v.\frac{1+\rho_k}{1-\rho_k}, \tag{1.4.7}$$

tj.

$$\rho_k = \frac{Z_k - Z_v}{Z_k + Z_v} \tag{1.4.8}$$

Impedanční poměry na vedení pro z<0 se nezmění, je-li pravá část vedení se z>0 nahrazena impedancí Z_k vytvářející koeficient odrazu ρ_k.



Obr. 1.4.3.

V místě z pak Z_k vytváří impedanci:

$$Z = Z_v.\frac{1+\rho_k.e^{+2\gamma(-l)}}{1-\rho_k.e^{+2\gamma(-l)}} = \frac{Z_k + Z_v.\frac{1-e^{-2\gamma l}}{1+e^{-2\gamma l}}}{1+\frac{Z_k}{Z_v}.\frac{1-e^{-2\gamma l}}{1+e^{-2\gamma l}}} = \frac{Z_k + Z_v.\mathrm{tgh}(\gamma l)}{1+\frac{Z_k}{Z_v}\mathrm{tgh}(\gamma l)} \tag{1.4.8}$$

Zvláštní případy:

$Z_k = 0$ $\qquad Z = Z_v.\mathrm{tgh}(\gamma l)$ (1.4.9)

pro $\beta = 0$ $\qquad Z = Z_v.\mathrm{tgh}(j\alpha l) = j.Z_v.\mathrm{tg}(\alpha l)$ (1.4.10)

$Z_k \to \infty$ $\qquad Z = Z_v.\mathrm{cotgh}(\gamma l)$ (1.4.11)

pro $\beta = 0$ $\qquad Z = Z_v.\mathrm{cotgh}(j\alpha l) = -j.Z_v.\mathrm{cotgh}(\alpha l)$ (1.4.12)