Moment setrvačnosti

Teoretické odvození

Motivací k zavedení a zkoumání momentu setrvačnosti je dynamická úloha tuhého tělesa rotujícího kolem osy. Připodobněme na začátek tuhé těleso soustavě N hmotných bodů neměnících vzájemnou vzdálenost (tuhé těleso se nedeformuje).[1] Celkovou kinetickou energii soustavy hmotných bodů vypočteme jednoduše jako součet kinetických energií všech částic. Můžeme tedy v našem přiblížení psát

$$E = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k v_k^2.$$

Dále budeme předpokládat, že těleso vykonává rotační pohyb podle osy procházející těžištěm. Můžeme proto psát $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}$. Z lineární algebry víme, že máme-li ve vektorovém prostoru nějaký podprostor, můžeme libovolný vektor rozložit na projekci do podprostoru a jeho rejekci podprostorem. V našem specifickém případě euklidovského prostoru to znamená, že můžeme libovolný polohový vektor rozložit na složku rovnoběžnou s osou rotace a na složku k ní kolmou, tj. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\parallel + \boldsymbol{r}_\perp$. Této skutečnosti můžeme pomocí vlastností vektorového součinu využít v následující úvaze.

$$v = \|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}\| = \left\|(\boldsymbol{r}_\parallel + \boldsymbol{r}_\perp) \times \boldsymbol{\omega}\right\| = \left\|\boldsymbol{r}_\parallel \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}_\perp \times \boldsymbol{\omega}\right\| = \|\boldsymbol{r}_\perp \times \boldsymbol{\omega}\| = r_\perp \omega$$

Z toho však pro kinetickou energii vyplývá, že

$$E = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k r_{k\perp}^2 \omega^2.$$

Dále si uvědomme, že sumační index se vyskytuje pouze ve veličinách m a $r_\perp$, můžeme tudíž ostatní činitele vytknout ze sumy. Pokud tak učiníme, stojíme před vzorcem, který je jakousi obdobou vzorce pro kinetickou energii hmotného bodu v případě rotace tělesa kolem osy. Suma je navíc pouhou strukturní charakteristikou rotujícího tělesa. S pohybem samotným nemá co dočinění. Jsme tedy pouze krok od toho si ujasnit co je vlastně moment setrvačnosti, a to tedy veličina popisující setrvačnost tělesa při rotaci kolem osy procházející těžištěm. Matematicky

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k r_{k\perp}^2 \omega^2 \equiv \frac{1}{2} J \omega^2, \qquad J \coloneqq \sum_{k=1}^{N} r_{k\perp}^2 m_k.$$

Nakonec můžeme učinit krok zpět ke spojité struktuře tuhého tělesa pomocí limity diference hmotnosti podle níž sčítáme a dostaneme tak definiční vztah

$$\boxed{J \coloneqq \int_m r_\perp^2(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}m \equiv \int_V r_\perp^2(\boldsymbol{r}) \rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V.} \tag{1}$$

V případě homogenního tělesa ($\rho(\boldsymbol{r}) = \rho = \text{const.}$) přejde vztah do tvaru

$$\boxed{J = \rho \int_V r_\perp^2(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V.} \tag{2}$$

[1] Tato úvaha není příliš v rozporu se skutečností, přihlédneme-li k tomu, že každá látka (tudíž i naše tuhé těleso) je složena z obrovské spousty atomů pro nás zanedbatelně malých velikostí.

Příklad. Vypočtěte moment setrvačnosti J kužele homogenní hustoty ρ a výšky h rotujícího kolem osy rovnoběžné s podstavou o průměru d procházející těžištěm.

Řešení.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad r_S = \frac{\int_m r \, \mathrm{d}m}{\int_m \, \mathrm{d}m} \qquad J = \rho \int_V r_\perp^2(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$