Osnova k výuce přípravných kurzů matematiky

16. června 2021 Martin Šimák

Přednáška první

Symbolika matematiky

V matematice využíváme formální jazyk, který nám umožňuje naše myšlenky a vnitřní logiku našeho uvažování vyjádřit s absolutní precizností. Mluvíme potom o takzvané exaktnosti matematiky, tj. že vyjádření má nulovou míru vágnosti či víceznačnosti. Jedná se proto o prostředek nám práci v akademickém světě ulehčující a nikoliv (jak si mnozí myslí) o prostředek jakési neprostupnosti a šifrování.

Mezi tyto prostředky patří zejména výroky a výrokové formule. O co se jedná? Výroky jsou libovolná tvrzení u nichž má smysl se ptát na jejich pravdivost. Výrokové formule jsou výroky a výroky z nich vzniklé výrokovými spojkami jako např. $\neg$, $\implies$ atd.

Příklady.

- Číslo 3 je prvočíslo.
- Včera pršelo.
- Číšlo 3 je prvočíslo a včera pršelo.

Výrok může též nabývat pravdivosti v závislosti na nějakém parametru. Například výrok „číslo x je sudé“ můžeme označit jako $V(x)$, tedy výrok závislý na parametru x. Takové výroky mohou být například rovnice.

Příklad (BREATHER). Rovnice $x^2 + 1 = 5$ je vlastně výrok v jazyce matematiky, jehož pravdivost závisí na hodnotě parametru x.

Tato souvislost vede přímo na zavedení pojmu množina. Množina je soubor prvků. Takový soubor můžeme definovat buď výčtem jejích prvků nebo charakterizací všech prvků jejich distinktní vlastností. Tato vlastnost je typicky právě výrok nabývající pravdivostní hodnoty 1 právě pro prvky množiny.

Příklad.

- $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je množina,
- $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 5\}$ je také množina.

Z toho, jak je zavedena druhá množina (pomocí vlastnosti) můžeme vidět, že je součástí něčeho obecnějšího. V takovém případě mluvíme o podmnožinách. Množina A je podmnožinou množiny B právě tehdy, když pro všechny prvky z A platí, že jsou zároveň i prvky B. Zapisujeme jako $A \subseteq B$. Pokud chceme zdůraznit, že množina B obsahuje i prvky, které v množině A neleží, můžeme vyslovit, že A je vlastní podmnožinou množiny B, značíme $A \subset B$. Posledním záklandím pojmem množin je rozdíl množin $B \setminus A$, který obsahuje všechny prvky z B neobsažené v množině A.

Příklady (POSLEDNÍ JAKO BREATHER OVĚŘIT).

- Množina N z předchozího příkladu je podmnožinou množiny $\mathbb{R}$, píšeme $N \subseteq \mathbb{R}$, dokonce i $N \subset \mathbb{R}$.
- Mějme $A = \{65, 12\}$, $B = \{12, 47, 65\}$, tudíž $A \subset B$ a $B \setminus A = \{47\}$.
- Pravdivý výrok $X \subset Y \Leftrightarrow ((X \subseteq Y) \wedge (Y \setminus X \neq \emptyset))$.

Pomocí vlastnosti být podmnožinou můžeme dále definovat pojem rovnosti množin. Přirozeně tim myslíme indentický obsah obou množin a v matematickém jazyce to zapíšeme jako výrok $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

Jako poslední ukázku symboliky ještě často používané kvantifikátory $\forall$ a $\exists$ znamenající „pro všechna“ a „existuje“

Příklady.

- Výrok „Pro všechna reálná čísla x platí, že druhá odmocnina z x^2 je rovna absolutní hodnotě z x.“ je ekvivalentní s výrokem „$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$.“
- Výše uvedená definice podmnožiny může nabýt formy „$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall y \in A : y \in B)$.“
- Definice limity reálné funkce f definované na $D \subseteq \mathbb{R}$ v bodě x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in D,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - L| < \epsilon.$$

Nejsofistikovanější a matematiku tvořící výroky jsou axiomy, definice, matematické věty, jejich důkazy a hypotéza.

(a) Axiom je tvrzení, jehož platnost nezpochybňujeme - nedokazují se. Matematika bez nich postrádá smysl, neb nemá na čem stát, z čeho vycházet.

(b) Definice je vymezení matematického pojmu pomocí pojmů základních či dříve definovaných.

(c) Matematická věta je tvrzení, jehož platnost je třeba dokázat.

(d) Důkaz je sled nezpochybnitelných logických postupů zdůvodňujících platnost matematické věty.

(e) Hypotéza je tvrzení s předpokládanou platností, avšak kompletní důkaz není poskytnut. Je možno ji tedy potvrdit či vyvrátit.

Ačkoli techniku důkazu nelze generalizovat na všechny věty, existuje pro spcifické případy pár postupů, jejichž procedura (je-li aplikovatelná) je korektní, viz důkaz sporem či matematická indukce.

Taky něco spočtěme

1. Rozehřívačka:

   (a) převod kvadratické funkce $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ na čtverec (5 min):

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 1 = 4\left(x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\right) = 4\left(x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{64} - \frac{25}{64} + \frac{1}{4}\right) =$$
$$= 4\left(x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{64}\right) - \frac{25}{16} + 1 = 4\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{9}{16}.$$

   (b) řešení rovnice $f(x) = 0$, kde f je kvadratická funkce z předchozího příkladu (5 min):

      (i) mechanické řešení:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 5x + 1 &= 0, \\ x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{8}, \\ x_{1,2} &= \frac{5 \pm 3}{8}, \\ x &\in \left\{-\frac{1}{4}; 1\right\}. \end{aligned}$$

      (ii) řešení za použití předchozího výsledku:

$$\begin{aligned} 4\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{9}{16} &= 0, \\ \left(x - \frac{5}{8}\right)^2 &= \frac{9}{64}, \\ x - \frac{5}{8} &= \pm\frac{3}{8}, \\ x_{1,2} &= \frac{5 \pm 3}{8}, \\ x &\in \left\{-\frac{1}{4}; 1\right\}. \end{aligned}$$

2. Obecná kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ a jak ji vyřešit. Mechanické řešení umí, vyřešit bez apriorní znalosti řešení (10-15 min):

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0, \quad a \neq 0, \\ a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= 0, \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0, \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}, \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \Big/ \text{ správně abs} \\ &\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.} \end{aligned}$$

Přednáška druhá

Funkce

Zobrazení f z množiny A do množiny B: taková binární relace, která každému prvku z množiny A přiřadí nejvýše jeden prvek z B.
* Binární relace je pojem popisující vztah prvků z jedné množiny k prvkům z množiny druhé (například $\leq$, $>$, $=$, "být sourozenec"atd.).
Pro nás důležité hlavně reálné funkce: Reálná funkce je zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$, kde M je libovolná neprázdná podmnožina reálných čísel. Dále definujeme pojmy:

- definiční obor funkce $D(f)$ jako množinu M,
- obor hodnot $H(f)$ je podmnožina $\mathbb{R}$ obsahující všechna reálná čísla, které mohou vzniknout jako obraz funkce f.

Dále u funkcí určujeme základní vlastnosti:

- omezenost zdola: funkce f je omezená zdola právě tehdy, když existuje K tak, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \geq K$,
- omezenost shora: funkce f je omezená shora právě tehdy, když existuje L tak, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq L$,
- absolutní omezenost: řekneme, že funkce f je omezená, pokud existuje M tak, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $|f(x)| \leq M$,
- sudost: $\forall x \in D(f) : f(-x) = f(x)$,
- lichost: $\forall x \in D(f) : f(-x) = -f(x)$,
- růst na $G \in D(f)$: $\forall x, y \in G : (x < y \implies f(x) < f(y))$,
- klesání na $G \in D(f)$: analogicky.

Lineární a afinní funkce

Linearita: $\forall x, y \in D(f)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Lineární funkce jsou tedy funkce $f(x) = ax$, funkce $f(x) = ax + b$ je afinní. Nakreslit grafy. Funkce jsou neomezené, monotónní, lineární jsou liché.

Příklady.

Intermezzo: Absolutní hodnota. Význam a graf absolutní hodnoty. Jak nám absolutní hodnota změní charakter lineárních rovnic a nerovnic (příklady).

Mocninné funkce

$f(x) = ax^n$, kde $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Nakreslit grafy. Liché mocniny jsou liché funkce, sudé jsou sudé. Odtud název parity.

Kvadratické funkce

- Obecný předpis $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_V) + y_V$, kde $[x_V, y_V] = V$ a $a \neq 0$, graf.
- Vlastnosti: $D(f) = \mathbb{R}$, $(-\infty, y_V]$ nebo $[y_V, \infty]$ v závislosti na vedoucím parametru a. Pokud vrchol leží na ose y ($x = 0$), pak je to sudá funkce. Je vždy bď zdola nebo shora omezená.

Příklady. Nakreslit graf, určit průsečíky s osama, převést na čtverec, odvození kvadratické formule, kvadratické rovnice, nerovnice.

3/9/2021

- Opakování sami a pak na tabuli: neúplné kvadratické rovnice, vzorec, vztahy mezi kořeny (Viet, rozklad).

3/11/2021

- Opakování víceméně samostatně: kvadratická funkce $f(x) = 4x^2 - 20x - 24$ -> převést na čtverec -> kořeny $f(x) = 0$ -> součinový tvar -> ověření Vietových vzorců. Na tabuli graf.

$$f(x) = 4(x - 5/2)^2 - 49, \qquad K = \{-1, 6\}\,.$$

- Hlubší opáčko: dvě rovnice s absolutními hodnotami.
- Povídání: kvadratický trojčlen (pokecat o rozdílem mezi funkcí a rovnicí, co to vlastně znamená ted předpis, co kterým zkoumat), průbehy funkcí.
- Příklady sami rychle: kvadratický trojčlen (příklad na průběh, rozklad na součin).
- Kvadratické nerovnice, jejich význam (výrok), příklady.
- Další příklady na kvadratické rovnice a nerovnice (rozložený kvartický rovnice, absolutní hodnota).
- Pokud zbyde čas: společná úloha o pohybu.

4/1/2021

- Pokec + opakování, co jsme dělali na minulých hodinách.
- Hodina fyzikálních aplikací.
- Rovnoměrně přímočarý pohyb jako lineární funkce.

- Úloha o pohybu vedoucí na kvadratické rovnice.
- Přirozený způsob nárůstu a poklesu jako exponenciální funkce, například nervové vnímání a reakce mozku.
- Logaritmus aplikovaný na široké škály a na veličiny v exponenciálním tvaru: hladina akustického tlaku, přenosy obvodů (analogové filtry, návrh domácích stereí).

4/15/2021

Trigonometrie, úhly a oblouková míra

- Scio příklad.
- Pokecat o motivaci goniometrických funkcí: pozorování, že všechny pravoúhlé trojúhelníky s jedním úhlem α mají stejné poměry stran.
- Zavedení gonio fcí, základní gonio identity.
- Argument gonio fcí úhel, pokecat o obloukové míře jako vhodné a přirozené náhradě úhlů z $s = \varphi r$.
- Uvést přepočetní vztahy.

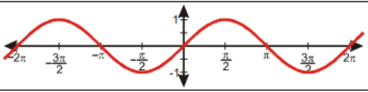
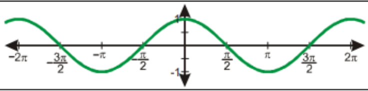
4/20/2021

Goniometrické funkce

- Jednotková kružnice, pravoúhlé trojúhelníky v ní a goniometrické funkce jako souřadnice. Zatim jenom sinus, kosinus.
- Ukázat si určování hodnot na běžných úhlech $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6$ z jednotkové kružnice. Důraz na orientovaný úhel.
- Popovídat o úhlech $\theta \notin [0, 2\pi] \rightarrow$ rotace do stejných hodnot sinu a kosinu $\rightarrow$ periodičnost g.f. + definice periodické funkce.
- Vykreslit význačné hodnoty do grafu a spojit do hladké funkce sinus, kosinus.
- Promluvit o vlastnostech funkcí sinus a kosinus. Ukázat, jak jsou vidět už na jednotkové kružnici, e.g. periodičnost, parity.

4/22/2021

- Grafické příklady.

$y = \sin x$	$y = \cos x$
	
$D(f) = R$	
periodická s nejmenší periodou 2π	
$H(f) = \langle -1;1 \rangle$	
shora i zdola omezená	
maximum 1 v bodě $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	maximum 1 v bodě $0 + k \cdot 2\pi$
minimum -1 v bodě $\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$	minimum -1 v bodě $\pi + k \cdot 2\pi$
lichá	sudá
rostoucí v $\left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right)$	rostoucí v $(\pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi)$
klesající v $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right)$	klesající v $(0 + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi)$
kladné hodnoty pro $x \in (0 + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi)$	kladné hodnoty pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right)$
záporné hodnoty pro $x \in (\pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi)$	záporné hodnoty pro $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right)$

Obrázek 1: Tabulka sin,cos

4/27/2021

- Zavedení tangenty a kotangenty podíly sinu a kosinu. Grafy, vlastnosti, jednotková kružnice.
- Základní vzorce a odkud se vzaly: unitární identita sinu a kosinu z Pythagora v jednotkové kružnici, parity again, periodické posuvy, symetrie sinu a kosinu:

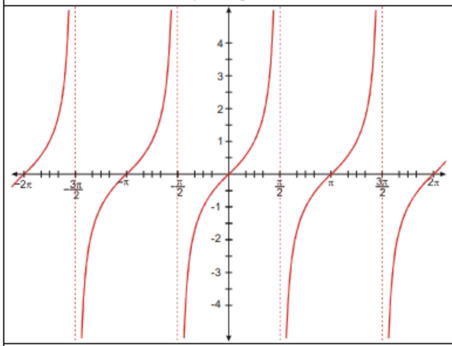
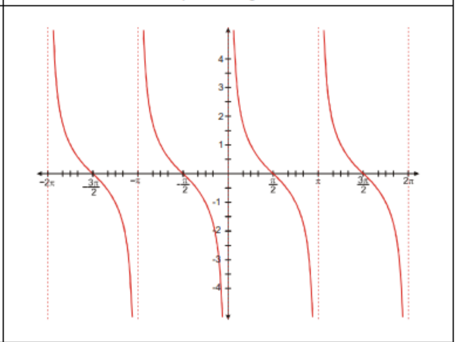
$$
\begin{aligned}
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1, & \tan(x) \cdot \cot(x) &= 1, \\
\sin(x) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & \cos(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\
\sin(x + \pi) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x), \\
\cot(x) &= \tan\left(-x + \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

- Bez důkazu součtové vzorce a vzorce dvojnásobného argumentu:

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), & \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y), \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), & \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y), \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x), & \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x), \\
\sin^2(x) &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}, & \cos^2(x) &= \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \\
\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}, & \left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}.
\end{aligned}
$$

- Goniometrické rovnice:

$$\sin(x) = 0,$$
$$\cos(x) = -\frac{1}{2},$$
$$\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin(x) = 0,1,$$
$$1 - (\sin(x) - 1) = 2 - \sqrt{3}\left(\sqrt{3}\sin(x) - 1\right),$$
$$\frac{\cos(x) + \cos(\pi)}{\sin(7\pi/6)\cos(x)} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1,$$
$$2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 2 = 0.$$

$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{cotg}\, x$
	
$D(f) = R - \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	$D(f) = R - \bigcup_{k\in Z}\{0 + k\pi\}$
periodická s nejmenší periodou π	periodická s nejmenší periodou π
$H(f) = R$	$H(f) = R$
není omezená	není omezená
nemá maximum ani minimum	nemá maximum ani minimum
lichá	lichá
rostoucí v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	klesající v intervalu $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$

10

Obrázek 2: Tabulka tan,cot

11/5/2021

- Posloupnosti na přání
- Pořešit bonusovou hodinu na integrály
- Poděkovat za elegantní mail Iloně

Komplexní čísla

- Zatím neintuitivní zavedení komplexní jednotky i. Motivace rozšíření číselného oboru, možnost řešení polynomiálních rovnic. Možná trochu historie.

13/5/2021

- Geometrie přímky pomocí reálných čísel (translace součtem, škálování násobením, zrcadlení/reflexe násobením (-1)).
- Let's get back to $i \times i = i^2 = -1$. Provedení stejné operace dvakrát činí reflexi. Co to znamená? Základní geometrická transformace: rotace. Reflexe je rotace o π, tj. násobení i je rotace o $\pi/2$.
- Ukázka toho, co je to i^k, kde $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Spočítat i ukázat pomocí rotací.
- Podotknout, že komplexní rovina je $\mathbb{R}^2$ vybavená specifickým násobením vektorů jako rotace.
- Srovnání reálných a komplexních čísel (vyjádření pomocí jednoho desetiného rozvoje vs. páru rozvojů, bod na přímce vs. bod v rovině)
- Procvičení aritmetiky (reálná a imaginární část, kvadrát komplexního čísla, komplexní sdružení, definice absolutní hodnoty komplexních čísel)

18/5/2021

- Procvičování: algebraický tvar $(1 + i) : (2 - i)$.
- Pozor: Neověřili jsme, že je vůbec možné každému komplexnímu číslu z najít inverzi $1/z$.
- Kvadratická rovnice s komplexním kořenem
$$x^2 - 2x + 10 = 0.$$
- Hele: řešením je komplexní číslo a jeho komplexní sdružení. Platí, že pokud z je kořen, tak $\bar{z}$ taky obecně?
- Ověřit větu „Je-li součin dvou komplexních čísel roven nule, je rovno nule alespoň jedno z nich.“
- Algebraický $\to$ goniometrický tvar komplexních čísel, komplexní sdružení v goniometrickém tvaru.
- Zopakování absolutní hodnoty a ukázat, že komplexně sdružená čísla mají stejnou absolutní hodnotu.
- Důkaz pravidel pro výpočet absolutních hodnot $|z_1 \cdot z_2|$ a $|z_1/z_2|$.

20/5/2021

- Opakovní z konce minulé hodiny: goniometrický tvar z algebraického (popis jednotkové a nejednotkové kružnice).
- Násobení a dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru.
- Moiverova věta, možnost jednoduché komputace z^n, mocninné a odmocninné funkce.
- Ukázka Eulerovy identity, exponenciální tvar komplexních čísel, nejkrásnější rovnice matematiky.
- Euler nahradil součtové vzorce. Odvodit tedy součtové goniometrické vzorce z Eulera.
- Co obecně geometricky znamená násobit dvě komplexní čísla? Obecná rotace v rovině (goniometrický a exponenciální tvar).
- Pomocí rotací můžeme získat smysl dříve známých pravd o komplexních číslech: $z\bar{z} = |z|^2$, rotace o $\pi/2$ násobením i a $i^2 = -1$.

27/5/2021

1.

$$y[n+3] + n^2 y[n] = \frac{1}{n+1}.$$

Systém je diskrétní, lineární, časově invariantní a neautonomní.

2.

$$\begin{aligned}
y''(t) + y(t) &= \sin(t), \quad y(0) = -1,\, y'(0) = 3,\\
p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + Y(p) &= \frac{1}{1+p^2},\\
(p^2+1)Y(p) &= -p + 3 + \frac{1}{p^2+1},\\
Y(p) &= \frac{-p+3+\frac{1}{p^2+1}}{p^2+1},\\
Y(p) &= \frac{(3-p)(p^2+1)+1}{(p^2+1)^2},\\
H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} &= \frac{\frac{(3-p)(p^2+1)+1}{(p^2+1)^2}}{\frac{1}{p^2+1}},\\
H(p) &= \frac{(3-p)(p^2+1)+1}{p^2+1} = \frac{(3-p)(p^2+1)+1}{(p+i)(p-i)}.
\end{aligned}$$

Jak je vidět, máme kořeny $\pm i$. Oba mají reálnou složku nulovou, a tak je systém na mezi stability.

3.

$$\begin{aligned}
y[n+2] - y[n] &= n, \quad y[0] = -1,\, y[1] = 1,\, n \in \mathbb{N}_0,\\
z^2\left(Y(z) - y[0] - \frac{y[1]}{z}\right) - Y(z) &= \frac{z}{(z-1)^2},\\
(z^2-1)Y(z) &= -z^2 + z + \frac{z}{(z-1)^2},\\
Y(z) &= \frac{-z^2+z+\frac{z}{(z-1)^2}}{z^2-1} = \frac{(z-z^2)(z-1)^2+z}{(z^2-1)(z-1)^2},\\
H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{\frac{(z-z^2)(z-1)^2+z}{(z^2-1)(z-1)^2}}{\frac{z}{(z-1)^2}},\\
H(z) &= \frac{(z-z^2)(z-1)^2+z}{z(z^2-1)} = \frac{(z-z^2)(z-1)^2+z}{z(z-1)(z+1)}.
\end{aligned}$$

Opět vidíme, že kořeny systémové funkce leží ve dvou případech (± 1) na jednotkové kružnici a jeden (0) leží uvnitř. Celkově tak máme závěr, že systém je opět na mezi stability.

Někdy jindy - polynomy

Obecně (polynom n-tého řádu) se jedná o funkci

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Tyto polynomy jsou velkou součástí úvodního matematického předmětu lineární algebra (strašák prváků). Proto je vhodné si připomenout pár základních vlastností. Násobení polynomů člen po členu (klasické roznásobování závorek), stupeň polynomu jakožto nejvyšší mocnina, dělení polynomů, kořen polynomu a jeho násobnost.

Dělení polynomu polynomem: Mějme dva nenulové polynomy $a(x)$ a $b(x)$, které chceme navzájem podělit jako $a(x) : b(x)$. Můžeme proto (bez důkazu) napsat, že výsledek bude vypadat jako

$$a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x),$$

kde $q(x)$ (kvocient) a $r(x)$ (zbytek) jsou polynomy a $r(x)$ má menší stupeň než $b(x)$.

Příklad, třeba $(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) : (x - 3)$ a $(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) : (x - 1)$. Pozorování: číslo $x_0 = 1$ je kořen děleného polynomu $\rightarrow$ dělení vyšlo beze zbytku. Náhoda? Let's see.

Dále můžeme říci, že máme-li polynom $a(x)$, můžeme jeho hodnotu v bodě x_0 spočítat jako zbytek po dělení polynomu $a(x)$ závorkou $(x - x_0)$. Opravdu: pokud vezmeme v potaz výše napsané tvrzení, dostáváme, že hodnota polynomu je

$$a(x_0) = (x - x_0) \cdot q(x) + r(x)\Big|_{x=x_0} = r(x_0).$$

Navíc speciálně, pokud je x_0 kořen polynomu (tj. $a(x_0) = 0$), musí platit

$$a(x_0) = (x - x_0) \cdot q(x) + r(x)\Big|_{x=x_0} = r(x_0) \stackrel{!}{=} 0,$$

tedy že platí $r(x_0) = 0$. Z věty o dělení polynomu polynomem ale máme, že zbytek musí být polynom menšího řádu než je řád polynomu, kterým dělíme. To je v našem případě $(x - x_0)$, tj. polynom 1. řádu, a tak $r(x)$ musí být konstanta (polynom nultého řádu). Víme tedy, že polynom $r(x)$ je vlastně konstanta a má nulovou hodnotu. Odvodili jsme tak takzvanou *kořenovou faktorizaci*, kdy polynom n-tého řádu s n kořeny (včetně násobností) můžeme rozdělit na součin n tzv. kořenových faktorů, tj. dvojčlenů $(x - x_k)$, kde x_k je k-tý kořen polynomu. Toto platí pro všechny polynomy n-tého řádu. Hlavní věta algebry totiž praví, že polynom n-tého řádu má n komplexních kořenů. V reálném oboru to vždycky jít nemusí.

Příklad, rozložit $p(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^3$ na součin kořenových faktorů.