

Enunciado Exercício de Avaliação #1 - SAT Solving

Métodos Formais em Engenharia de Software - 2022/2023

Simão Pedro Sá Cunha

A93262 - MIEI

Uma loja de electrónica permite aos seus clientes personalizar o seu computador, escolhendo entre:

- 2 modelos de CPU;
- 2 modelos de memória RAM;
- 2 modelos de motherboards;
- 3 modelos de placa gráfica;
- 3 modelos de monitor.

Cada computador tem que ter obrigatoriamente:

- 1 única motherboard;
- 1 único CPU;
- 1 única placa gráfica;
- 1 única memória RAM.

O computador poderá ter ou não ter monitores.

A personalização do computador deverá obedecer as seguintes regras:

- A motherboard MB1 quando combinada com a placa gráfica PG1, obriga a utilização da RAM1;
- A placa gráfica PG1 precisa do CPU1, excepto quando combinada com uma memória RAM2;
- O CPU2 só pode ser instalado na motherboard MB2;

B

- O monitor MON1 para poder funcionar precisa da placa gráfica PG1 e da memória RAM2;
- O monitor MON2 precisa da memória RAM2 para poder trabalhar com a placa gráfica PG3.

▼ Preparação

Para a realização deste exercício prático, será necessário instalar o **PICOSAT** com o comando abaixo:

```
! sudo apt-get install picosat
```

```
Reading package lists... Done
Building dependency tree
Reading state information... Done
The following package was automatically installed and is no longer required:
  libnvidia-common-460
Use 'sudo apt autoremove' to remove it.
The following NEW packages will be installed:
  picosat
0 upgraded, 1 newly installed, 0 to remove and 12 not upgraded.
Need to get 115 kB of archives.
After this operation, 744 kB of additional disk space will be used.
Get:1 http://archive.ubuntu.com/ubuntu bionic/universe amd64 picosat amd64 960-1build1 [115 kB]
Fetched 115 kB in 0s (582 kB/s)
debconf: unable to initialize frontend: Dialog
debconf: (No usable dialog-like program is installed, so the dialog based frontend cannot be used. at /usr/share/perl5/Debconf/)
debconf: falling back to frontend: Readline
debconf: unable to initialize frontend: Readline
debconf: (This frontend requires a controlling tty.)
debconf: falling back to frontend: Teletype
dpkg-preconfigure: unable to re-open stdin:
Selecting previously unselected package picosat.
(Reading database ... 123934 files and directories currently installed.)
Preparing to unpack .../picosat_960-1build1_amd64.deb ...
Unpacking picosat (960-1build1) ...
Setting up picosat (960-1build1) ...
```

B

```
Processing triggers for man-db (2.8.3-2ubuntu0.1) ...  
Processing triggers for libc-bin (2.27-3ubuntu1.6) ...
```

Exercício 1

Defina um conjunto adequado de variáveis proposicionais para modelar o problema. Depois indique um conjunto de formulas proposicionais que descrevem o problema, e converta essas formulas para CNF.

Resposta

- **Definição das variáveis proposicionais para a modelação do problema do enunciado:**

- CPU1: O computador tem o CPU 1.
- CPU2: O computador tem o CPU 2.
- RAM1: O computador tem a RAM 1.
- RAM2: O computador tem a RAM 2.
- MB1: O computador tem a MotherBoard 1.
- MB2: O computador tem a MotherBoard 2.
- PG1: O computador tem a placa gráfica 1.
- PG2: O computador tem a placa gráfica 2.
- MON1: O computador tem o monitor 1.
- MON2: O computador tem o monitor 2.
- MON3: O computador tem o monitor 3.

Para resolver as alíneas abaixo, recorri ao conceito de "ou exclusivo" (\oplus) cuja explicação pode ser encontrado neste link:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Ou_exclusivo

- **CNF que prova que um computador só pode ter obrigatoriamente 1 única motherboard:**

B

$$MB1 \oplus MB2$$

$$\equiv (MB1 \wedge \neg MB2) \vee (\neg MB1 \wedge MB2)$$

$$\equiv (MB1 \vee MB2) \wedge (\neg MB1 \vee \neg MB2)$$

- **CNF que prova que um computador só pode ter obrigatoriamente 1 único CPU:**

$$CPU1 \oplus CPU2$$

$$\equiv (CPU1 \wedge \neg CPU2) \vee (\neg CPU1 \wedge CPU2)$$

$$\equiv (CPU1 \vee CPU2) \wedge (\neg CPU1 \vee \neg CPU2)$$

- **CNF que prova que um computador só pode ter obrigatoriamente 1 única placa gráfica:**

$$PG1 \oplus PG2 \oplus PG3$$

$$\equiv (PG1 \wedge \neg PG2 \wedge \neg PG3) \vee (\neg PG1 \wedge PG2 \wedge \neg PG3) \vee (\neg PG1 \wedge \neg PG2 \wedge PG3)$$

$$\equiv (\neg PG1 \vee \neg PG2 \vee PG3) \wedge (\neg PG1 \vee PG2 \vee \neg PG3) \wedge (PG1 \vee \neg PG2 \vee \neg PG3) \wedge (PG1 \vee PG2 \vee PG3)$$

- **CNF que prova que um computador só pode ter obrigatoriamente 1 única memória RAM:**

$$RAM1 \oplus RAM2$$

$$\equiv (RAM1 \wedge \neg RAM2) \vee (\neg RAM1 \wedge RAM2)$$

$$\equiv (RAM1 \vee RAM2) \wedge (\neg RAM1 \vee \neg RAM2)$$

- **CNF que prova que um computador pode ou não ter monitores:**

$$MON1 \vee MON2 \vee MON3 \vee \neg MON1 \vee \neg MON2 \vee \neg MON3$$

Assim, de acordo com as regras estabelecidas no enunciado, a **definição de um computador** em CNF é:

$$\begin{aligned}
 & (MB1 \vee MB2) \wedge (\neg MB1 \vee \neg MB2) \\
 & \quad \wedge \\
 & (CPU1 \vee CPU2) \wedge (\neg CPU1 \vee \neg CPU2) \\
 & \quad \wedge \\
 & (\neg PG1 \vee \neg PG2 \vee PG3) \wedge (\neg PG1 \vee PG2 \vee \neg PG3) \wedge (PG1 \vee \neg PG2 \vee \neg PG3) \wedge (PG1 \vee PG2 \vee PG3) \\
 & \quad \wedge \\
 & (RAM1 \vee RAM2) \wedge (\neg RAM1 \vee \neg RAM2) \\
 & \quad \wedge \\
 & (MON1 \vee MON2 \vee MON3 \vee \neg MON1 \vee \neg MON2 \vee \neg MON3)
 \end{aligned}$$

Agora, passaremos para as regras referentes à personalização dos computadores.

- **CNF que prova que "A motherboard MB1 quando combinada com a placa gráfica PG1, obriga a utilização da RAM1"**

$$\begin{aligned}
 & (MB1 \wedge PG1) \rightarrow RAM1 \\
 \equiv & \neg(MB1 \wedge PG1) \vee RAM1 \\
 \equiv & (\neg MB1 \vee \neg PG1) \vee RAM1 \\
 \equiv & \neg MB1 \vee \neg PG1 \vee RAM1
 \end{aligned}$$

- **CNF que prova que "A placa gráfica PG1 precisa do CPU1, excepto quando combinada com uma memória RAM2"**

$$\begin{aligned}
 & (PG1 \rightarrow CPU1) \vee RAM2 \\
 \equiv & (\neg PG1 \vee CPU1) \vee RAM2 \\
 \equiv & \neg PG1 \vee CPU1 \vee RAM2
 \end{aligned}$$

- **CNF que prova que "O CPU2 só pode ser instalado na motherboard MB2"**

$\text{CPU2} \rightarrow \text{MB2}$

$\equiv \neg \text{CPU2} \vee \text{MB2}$

- **CNF que prova que "O monitor MON1 para poder funcionar precisa da placa gráfica PG1 e da memória RAM2"**

$\text{MON1} \rightarrow (\text{PG1} \wedge \text{RAM2})$

$\equiv \neg \text{MON1} \vee (\text{PG1} \wedge \text{RAM2})$

$\equiv (\neg \text{MON1} \vee \text{PG1}) \wedge (\neg \text{MON1} \vee \text{RAM2})$

- **CNF que prova que "O monitor MON2 precisa da memória RAM2 para poder trabalhar com a placa gráfica PG3"**

$(\text{MON2} \wedge \text{PG3}) \rightarrow \text{RAM2}$

$\equiv \neg(\text{MON2} \wedge \text{PG3}) \vee \text{RAM2}$

$\equiv \neg \text{MON2} \vee \neg \text{PG3} \vee \text{RAM2}$

▼ Exercício 2

Codifique o problema num SAT solver e comprove que o conjunto de fórmulas é consistente.

Resposta

De forma a efetuar um mapeamento entre inteiros e as variáveis proposicionais, surgiu a seguinte tabela:

Inteiros	Variáveis proposicionais
1	CPU1
2	CPU2
3	RAM1

Inteiros	Variáveis proposicionais
4	RAM2
5	MB1
6	MB2
7	PG1
8	PG2
9	PG3
10	MON1
11	MON2
12	MON3

Assim, surgem as seguintes traduções para PICOSAT:

Expressão	Expressão SAT
Computador só pode ter obrigatoriamente uma única motherboard	$(5 \vee 6) \wedge (-5 \vee -6)$
Computador só pode ter obrigatoriamente um único CPU	$(1 \vee 2) \wedge (-1 \vee -2)$
Computador só pode ter obrigatoriamente uma única placa gráfica	$(7 \vee 8 \vee 9) \wedge (-7 \vee -8) \wedge (-7 \vee -9) \wedge (-8 \vee -9)$
Computador só pode ter obrigatoriamente uma única memória RAM	$(3 \vee 4) \wedge (-3 \vee -4)$
Computador pode ou não ter monitores	$10 \vee 11 \vee 12 \vee -10 \vee -11 \vee -12$
A motherboard MB1 quando combinada com a placa gráfica PG1, obriga a utilização da RAM1	$-5 \vee -7 \vee 3$
A placa gráfica PG1 precisa do CPU1, excepto quando combinada com uma memória RAM2	$-7 \vee 1 \vee 4$
O CPU2 só pode ser instalado na motherboard MB2	$-2 \vee 6$
O monitor MON1 para poder funcionar precisa da placa gráfica PG1 e da memória RAM2	$(-10 \vee 7) \wedge (-10 \vee 4)$
O monitor MON2 precisa da memória RAM2 para poder trabalhar com a placa gráfica PG3	$-11 \vee -9 \vee 4$

Consequentemente, obtemos o seguinte ficheiro SAT:

```
! cat /content/first.cnf
```

```
p cnf 12 17
5 6 0
-5 -6 0
```

```

1 2 0
-1 -2 0
7 8 9 0
-7 -8 0
-7 -9 0
-8 -9 0
3 4 0
-3 -4 0
10 11 12 -10 -11 -12 0
-5 -7 3 0
-7 1 4 0
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0

```

Executando o solver, temos:

```
! picosat /content/first.cnf
```

```

s SATISFIABLE
v 1 -2 3 -4 -5 6 -7 -8 9 -10 -11 -12 0

```

Uma vez que deu *SATISFIABLE*, podemos concluir que o conjunto de fórmulas elaboradas na alínea 1 é consistente.

▼ Exercício 3

Justificando a sua resposta, use agora o SAT solver responder às seguintes questões.

- O monitor MON1 só poderá ser usado com uma motherboard MB1?
- Um cliente pode personalizar o seu computador da seguinte forma: uma motherboard MB1, o CPU1, a placa gráfica PG2 e a memória RAM1?
- E possível combinar a motherboard MB2, a placa gráfica PG3 e a RAM1 num mesmo computador ?

B

d. Para combinarmos a placa gráfica PG2 e a RAM1 temos que usar o CPU2?

Alínea A)

A forma normal conjuntiva (CNF) desta afirmação é:

```
MON1 → MB1
≡ ¬MON1 ∨ MB1
≡ MON1 ∧ ¬MB1
```

Traduz-se a CNF obtida em formato DIMACS da seguinte forma:

```
10 0
-5 0
```

Logo, acrescentando esta restrição, teremos o seguinte ficheiro:

```
! cat /content/second.cnf

p cnf 12 19
5 6 0
-5 -6 0
1 2 0
-1 -2 0
7 8 9 0
-7 -8 0
-7 -9 0
-8 -9 0
3 4 0
-3 -4 0
10 11 12 -10 -11 -12 0
-5 -7 3 0
-7 1 4 0
```

```
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0
10 0
-5 0
```

Executando o novo ficheiro no solver PICOSAT, temos:

```
! picosat /content/second.cnf
```

```
s SATISFIABLE
v 1 -2 -3 4 -5 6 7 -8 -9 10 -11 -12 0
```

Interpretando este resultado, sabemos que a CNF tem valor lógico falso. Logo, o uso de MON1 **não** implica o uso de MB1.

▼ Alínea B)

A forma normal conjuntiva (CNF) desta afirmação é:

$MB1 \wedge CPU1 \wedge PG2 \wedge RAM1$

Traduz-se a CNF obtida em formato DIMACS da seguinte forma:

```
5 0
1 0
8 0
3 0
```

Logo, acrescentando esta restrição, teremos o seguinte ficheiro:

B

```
! cat /content/third.cnf
```

```
p cnf 12 21
5 6 0
-5 -6 0
1 2 0
-1 -2 0
7 8 9 0
-7 -8 0
-7 -9 0
-8 -9 0
3 4 0
-3 -4 0
10 11 12 -10 -11 -12 0
-5 -7 3 0
-7 1 4 0
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0
5 0
1 0
8 0
3 0
```

Executando o novo ficheiro no solver PICOSAT, temos:

```
! picosat /content/third.cnf
```

```
s SATISFIABLE
v 1 -2 3 -4 5 -6 -7 8 -9 -10 -11 -12 0
```

Interpretando este resultado, concluímos que a construção do computador do enunciado pode ser construído, uma vez que a sua CNF tem valor lógico **verdadeiro**.

▼ Alínea C)

A forma normal conjuntiva (CNF) desta afirmação é:

$$MB2 \wedge PG3 \wedge RAM1$$

Traduz-se a CNF obtida em formato DIMACS da seguinte forma:

```
6 0
9 0
3 0
```

Logo, acrescentando esta restrição, teremos o seguinte ficheiro:

```
! cat /content/fourth.cnf

p cnf 12 20
5 6 0
-5 -6 0
1 2 0
-1 -2 0
7 8 9 0
-7 -8 0
-7 -9 0
-8 -9 0
3 4 0
-3 -4 0
10 11 12 -10 -11 -12 0
-5 -7 3 0
-7 1 4 0
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0
```

```
6 0
9 0
3 0
```

Executando o novo ficheiro no solver PICOSAT, temos:

```
! picosat /content/fourth.cnf
```

```
s SATISFIABLE
v 1 -2 3 -4 -5 6 -7 -8 9 -10 -11 -12 0
```

Interpretando este resultado, concluímos que a combinação de peças de *hardware* do enunciado pode ser efetuada, uma vez que a sua CNF tem valor lógico **verdadeiro**.

▼ Alínea D)

A forma normal conjuntiva (CNF) desta afirmação é:

$$\begin{aligned} & (PG2 \wedge RAM1) \rightarrow CPU2 \\ \equiv & \neg(PG2 \wedge RAM1) \vee CPU2 \\ \equiv & \neg PG2 \vee \neg RAM1 \vee CPU2 \end{aligned}$$

Traduz-se a CNF obtida em formato DIMACS da seguinte forma:

```
-8 0
-3 0
2 0
```

Logo, acrescentando esta restrição, teremos o seguinte ficheiro:

B

```
! cat /content/fifth.cnf
```

```
p cnf 12 20
5 6 0
-5 -6 0
1 2 0
-1 -2 0
7 8 9 0
-7 -8 0
-7 -9 0
-8 -9 0
3 4 0
-3 -4 0
10 11 12 -10 -11 -12 0
-5 -7 3 0
-7 1 4 0
-2 6 0
-10 7 0
-10 4 0
-11 -9 4 0
-8 0
-3 0
2 0
```

Executando o novo ficheiro no solver PICOSAT, temos:

```
! picosat /content/fifth.cnf
```

```
s SATISFIABLE
v -1 2 -3 4 -5 6 -7 -8 9 -10 -11 -12 0
```

Interpretando este resultado, concluímos que o valor lógico da CNF é **falso**, uma vez que a utilização do CPU2 impede que se possa usar uma combinação de PG2 com RAM1.

[Produtos pagos do Colab](#) - [Cancelar contratos](#)

