Examen RO, M1 Info

RO 2014–2015

Les documents, à l'exception d'une feuille A4 recto-verso, et les appareils éléctroniques sont interdits. Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.

Exercice 1 :

On considère un problème de sac-à-dos. Le volume total du sac-à-dos est 8. Le tableau suivant donne les volumes et les valeurs des 4 objets dont on dispose. L'objectif est de remplir le sac-à-dos en maximisant la valeur totale des objets emportés sans dépasser le volume autorisé.

	A	B	C	D
volume	4	5	1	3
valeur	3	4	2	3

Question 1 – Formuler ce problème comme un programme linéaire en nombres entiers.

On souhaite résoudre ce problème avec un algorithme de *branch & bound*. On utilise dans chaque nœud la relaxation linéaire du programme décrit à la question précédente. Pour construire l'arbre de branchement, on choisit de mettre la variable fractionnaire à 1 sur le fils gauche et à 0 sur le fils droit. À chaque étape, on évalue les deux fils et on fait un parcours en profondeur fils droit d'abord.

Question 2 – Indiquer la valeur des variables à la racine de l'arbre de branchement.

Question 3 – Indiquer la valeur de la borne supérieure et de la borne inférieure à la racine.

Question 4 – Faire de même pour les deux fils de la racine.

Question 5 – Ensuite (une fois que la racine et ses deux fils ont été calculés), indiquer laquelle des réponses suivantes est juste et justifier ce choix.

1. l'algorithme s'arête.
2. l'algorithme poursuit la recherche sur le fils droit.
3. l'algorithme poursuit la recherche sur le fils gauche.

Exercice 2 : **Toujours plus de vélos !**

En constatant le succès rencontré par les systèmes de vélos en libre service dans les autres grandes villes de France, la mairie décide d'implanter un système similaire dans l'agglomération Grenobloise et vous contacte pour en optimiser la logistique.

Pour vous faire la main, vous commencez par vous intéresser au problème simplifié présenté sur la Figure 1. Le nombres d'utilisateurs souhaitant emprunter un vélo depuis une station i pour se rendre à une station j est indiqué sur l'arc (orienté) (i, j). Les capacités C_i correspondent au nombre total de bornes d'accueil en i, c'est-à-dire au nombre maximum de vélos que peut contenir la station i.

Le nombre de vélos disponibles dans les stations au début de la période sont $S^1 = 5$, $S^2 = 11$ et $S^3 = 11$. On suppose que toutes les trajets commencent et se terminent en

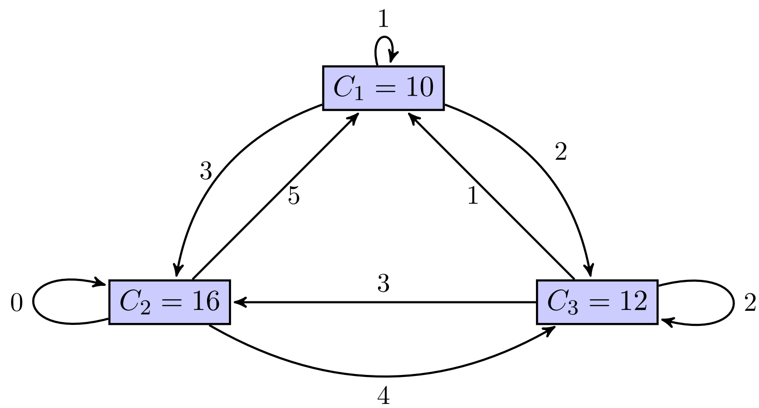

FIGURE 1 – Un réseau de trois stations

même temps. Par exemple, $(3+1+2=)$ 6 vélos quittent la station 3 au début de la période considérée et $(4+2+2=)$ 8 vélos y arrivent en fin de période.

Question 1 – Quelles sont les contraintes que doivent vérifier ces nombres pour que toutes les demandes soient satisfaites ? Sont-elles respectées dans ce cas ?

Question 2 – En supposant que tous les trajets ont pu être effectués, écrivez l'équation permettant de calculer le nombre de vélos présents à la station 2 à la fin de la période.

On s'intéresse maintenant à une généralisation du problème précédent pour un nombre quelconque N de stations sur plusieurs périodes consécutives, pour une journée typique entre 7h et 22h. Après une étude auprès des habitants, les projections d'utilisation journalière du système vous sont livrées. On considère des périodes de 15 minutes (total de 60 périodes dans une journée) et on suppose ici encore que les trajets pour la période $t \in \{1, \ldots, 60\}$ commencent et se terminent en même temps sur l'ensemble du réseau. On utilise les notations suivantes pour décrire les paramètres et l'état du système :

- Demande sur l'arc (i, j) à la période t : $d_t^{(i,j)}$
- Capacité de la station i : C^i
- Nombre de vélos à la station i au début de la période t : S_t^i

Question 3 – Donner les contraintes vérifiées par le stock S_t^i pour toute période t. Ecrire l'expression de S_{t+1}^i en fonction de S_t^i et des demandes $d_t^{(i,j)}$.

Afin d'éviter les situations de blocage et de pénurie, l'entreprise gestionnaire du réseau dispose d'un camion qu'elle peut envoyer entre deux périodes pour redistribuer les vélos entre les stations. On suppose que cette opération se fait instantanément, c'est-à-dire que lorsqu'on décide d'envoyer le camion de replacement entre t et $t+1$, les vélos à repositionner sont déjà placés et prêts à être utilisés au début de la période $t+1$.

Question 4 – Proposer des variables de repositionnement des vélos en fin de période t et les utiliser pour modifier l'expression de S_{t+1}^i trouvée précédemment.

L'envoi du camion dans le réseau entre les périodes t et $t+1$ entraîne un coût fixe de r_t pour l'entreprise.

Question 5 – Ecrire un programme permettant de trouver le plan de repositionnement journalier le moins onéreux pour l'entreprise.

Pour éviter d'avoir à résoudre un problème différent chaque jour, on souhaite utiliser le même plan de repositionnement d'un jour sur l'autre.

Question 6 – Ajouter une contrainte à votre programme pour s'assurer que le même plan de repositionnement est utilisé chaque jour.

En pratique, la capacité d'un camion (notée Q) est limitée et peut s'avérer insuffisante si le nombre de repositionnements à effectuer est trop important à certaines périodes. L'entreprise s'autorise donc à envoyer plusieurs camions identiques entre deux périodes si nécessaire, toujours pour un coût de r_t par camion. Elle dispose d'une flotte totale de M camions, que l'on suppose suffisante pour déplacer tous les vélos ($M \cdot Q$ est supérieur au nombre total de vélos du système).

Question 7 – Introduire des variables supplémentaires pour chaque période t et modifier votre programme (fonction objectif et contraintes) pour prendre en compte cette possibilité.

Bonus : La coordination de plusieurs camions sur une période peut s'avérer complexe. On engage donc un technicien spécialisé pour assigner un parcours précis à chaque camion lors de son départ de l'entrepôt. Si un ou plusieurs camions sont envoyés sur le réseau entre t et $t+1$, la mise en place d'un plan de repositionnement entraîne un coût fixe R_t indépendant du nombre de camions impliqués. Si aucun camion n'est envoyé sur le réseau entre t et $t+1$, aucun coût n'est encouru.

Question 8 – Modifiez votre programme pour intégrer ce nouvel aspect au problème.

Exercice 3 :

Soit $G = (V, A)$, un graphe orienté où V est l'ensemble des sommets et A est l'ensemble des arcs. Soient s et t deux sommets particuliers de ce graphe. A chaque arc $ij \in A$ est associée une valeur c_{ij}.

On considère le programme linéaire (P) suivant où les variables sont les w_{ij} :

$$\min z = \sum_{ij \in A} c_{ij} w_{ij}$$

$$\begin{array}{lcll}
\displaystyle\sum_{j/ij\in A} w_{ij} - \sum_{j/ji\in A} w_{ji} & = & 0 & \forall i \in V, \quad i \neq s \text{ et } i \neq t \\
\displaystyle\sum_{j/sj\in A} w_{sj} - \sum_{j/js\in A} w_{js} & = & 1 & \\
\displaystyle\sum_{j/tj\in A} w_{tj} - \sum_{j/jt\in A} w_{jt} & = & -1 &
\end{array}$$

$$w_{ij} \geq 0 \text{ entier} \quad \forall ij \in A$$

Toutes les questions suivantes peuvent être traitées indépendemment.

Question 1 – Quel est le problème de graphe modélisé par le Programme Linéaire en Nombres Entiers (P).

Question 2 – Écrivez le programme dual (D) de la relaxation linéaire de ce PLNE (on supprime les contraintes d'intégralité).

On note z^* la valeur de la solution optimale de (P), z^*_{RL} la valeur de la solution optimale de la relaxation linéaire (P), et v^* la valeur de la solution optimale de (D).

Question 3 – Indiquez les relations entres ces trois valeurs en justifiant chaque relation.

Question 4 – (bonus) Décrivez un problème pratique modélisé par (D).