NTNU
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse
Vår 2020

Emne TIØ4126 Optimering og beslutningsstøtte
Løsningsforslag til øving 4

Oppgave 1 (11.3-4 i Hillier and Lieberman)

a)

Først en generell formulering for å vise hvordan slike ser ut.

Indekser

i = leke
f = fabrikk

Konstanter

I = antall nye leker
F = antall fabrikker som har mulighet for å produsere disse
M_i = ”Big M”
C_i = fast kostnad ved oppstart for produksjon av leke i
P_i = profitt per enhet leke i
K_f = tilgjengelig produksjonskapasitet fabrikk f (timer)
R_{fi} = produksjonsrate leke i ved fabrikk f (leker/time)

Beslutningsvariabler

x_i = antall leke i
δ_i = binærvariabel, 1 hvis det startes produksjon av leke i ved fabrikk f
γ_f = binærvariabel, 1 hvis fabrikk f *ikke* startes, 0 hvis den startes

Restriksjoner

$$\max z = \sum_{i=1}^{I} \left(P_i x_i - C_i \delta_i\right) \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{R_i} x_i - M\gamma_f \leq K_f, \quad f = 1..F \qquad (2)$$

$$\sum_{f=1}^{F} \gamma_f = F - 1 \qquad (3)$$

$$x_i - M_i \delta_i \leq 0, \quad i = 1...I \qquad (4)$$

$x_i \geq 0$, $i = 1...I$
δ_i, γ_f binære, $i = 1...I$, $f = 1..F$

1. er målfunksjonen, summen over alle lekenes bidrag, som skal maksimeres.
2. sikrer at det ikke produseres mer enn det er kapasitet til, M er stor nok til at kapasiteten ved fabikk f kun er bindende dersom $\gamma_f = 0$, dvs når fabrikk f velges. Dette er for at kun restriksjonen for den ene fabrikken som startes skal være bindende.
3. sikrer at kun en fabrikk startes opp, dvs alle de $F - 1$ andre *ikke* startes.
4. sikrer at hvis det er produksjon av leke i så må den faste kostnaden betales.

M bør velges minst mulig uten å bli strammere enn modellens øvrige restriksjoner. For eksempel det største noen av x'ene kan være når kun en av dem produseres. For hver enkelt x i begge fabrikkene beregnes (mengde tilgjengelig ressurs)/(ressursforbruk), og det største av disse tallene velges som "Big M."

I regnearket er modellen formulert slik med tall, her er samme big-M på 28 000 valgt for alle restriksjonene en big-M trengs. I (1) kan big-M feks være $\max\{50 \cdot 500, 40 \cdot 700\} = 28\,000$, i (2) $\max\{40 \cdot 500, 25 \cdot 700\} = 20\,000$. Tilsvarende kan miste mulige big-M som ikke strammer mer enn de andre restriksjonene finnes for (3) og (4).

$\max z = 10x_1 + 15x_2 - 50\,000\,\delta_1 - 80\,000\,\delta_2$

når

(1) $x_1 \le 28\,000\,\delta_1$
(2) $x_2 \le 28\,000\,\delta_2$

(3) $1/50\,x_1 + 1/40\,x_2 \le 500 + 28\,000\,\gamma$
(4) $1/40\,x_1 + 1/25\,x_2 \le 700 + 28\,000\,(1 - \gamma)$

$x_1, x_2 \ge 0$
$\delta_1, \delta_2, \gamma$ binære

b) Se eget Excelvedlegg.

Løst med solveren i Excel blir målfunksjonsverdien 230 000, og den oppnås ved å produsere 28 000 enheter av leke 1 i fabrikk 2. Det er ikke fabrikk-indeks på γ siden det kun er to alternative fabrikker. Når den er 0 produseres det kun ved fabrikk 1, og når den er 1 kun ved fabrikk 2.

Oppgave 2

a) Indekser

$$i = \text{ operatør}$$
$$j = \text{ maskin}$$

Konstanter:

I = antall operatører (5 stykker)

J = antall maskiner (4 stykker)

P_{ij} = forventet produksjon på maskin j når operatør i bruker denne maskinen

D_{ij} = forventet antall defekte på maskin j når operatør i bruker denne maskinen

G = 0.04 = øvre grense for andel defekte

Variable:

$$x_{ij} = 1 \text{ når operatør } i \text{ bruker maskin } j \,/\, = 0 \text{ ellers}$$
$$z = \text{ samlet produksjon}$$

Relasjoner:

Vi har en forholdsrelasjon. Vi kan multiplisere opp med nevneren og så trekke sammen. Det blir litt vankskelig å holde orden på den måten. Noe enklere blir det hvis vi lager en egen variabel (som vi har gjort) for samlet produksjon. Da vil grensen på 0.04 synes i modellen.

$$\max \quad z,$$

når:

$$-z + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} P_{ij}\, x_{ij} = 0,$$

$$-G\, z + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} D_{ij}\, x_{ij} \leq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \leq 1, \qquad i = 1, \ldots, I,$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots. J,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i = 1, \ldots I, j = 1, \ldots, J.$$

Kommentar:

I rekkefølge sier restriksjonene følgende: 1): beregn samlet produksjon, 2): begrens andel defekte, 3): ingen operatør betjener mer enn en maskin, 4): alle maskinene betjenes av eksakt en operatør og 5): operatørene betjener hver maskin fullt ut eller ikke i det hele tatt.

b) Se vedlagte excel fil. Løsning (øvrige variable lik null):

$$z = 83 \qquad x_{1C} = x_{3D} = x_{4B} = x_{5A} = 1$$

Her har vi brukt maskinnavnene direkte i indeksene.