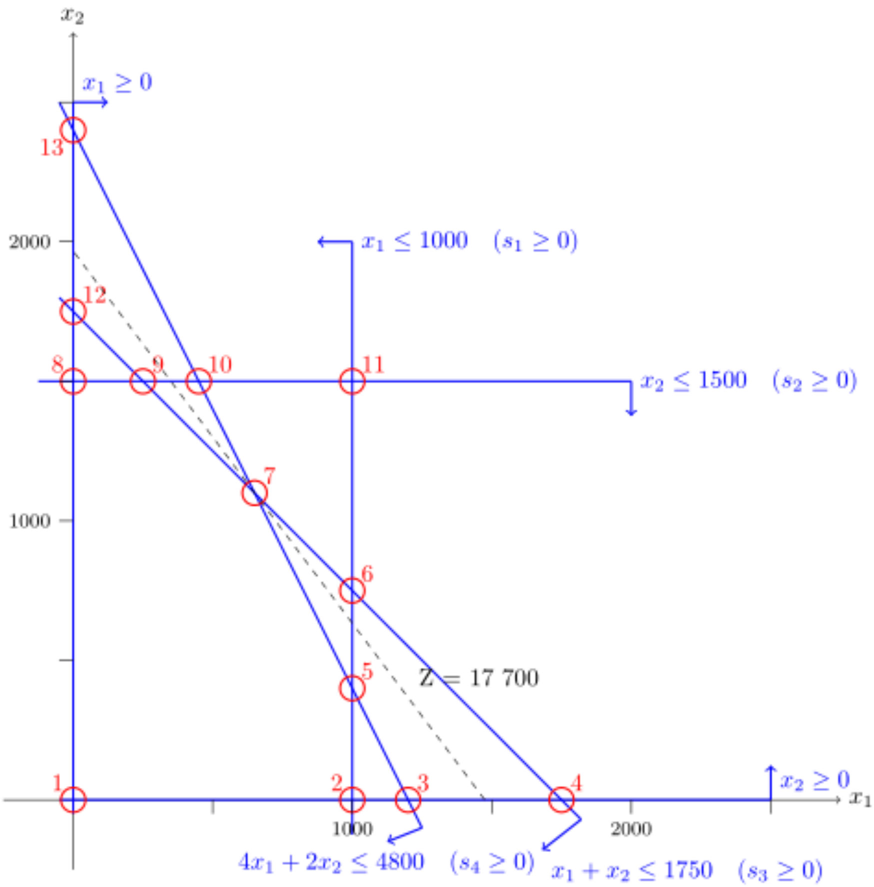
NTNU
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse
Vår 2020

Emne TIØ4126 Optimering og beslutningsstøtte
Løsningsforslag til øving 3

Oppgave 1

a)



Hjørnepunktene 1, 2, 5, 7, 8 og 9 er lovlige løsninger.

b) Punkt 1: $x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$Z = 12 * 0 + 9 * 0 = 0$

Punkt 2: $x_1 = 1000$
$x_2 = 0$
$Z = 12 * 1000 + 9 * 0 = 12\ 000$

Punkt 5: $x_1 = 1000$
$4x_1 + 2x_2 = 4800 \Rightarrow x_2 = (4800 - 4x_1) / 2$
$x_2 = (4800 - 4 * 1000) / 2 = 400$
$Z = 12 * 1000 + 9 * 400 = 15\ 600$

Punkt 7: $4x_1 + 2x_2 = 4800 \Rightarrow x_1 = (4800 - 2x_2) / 4$
$x_1 + x_2 = 1750 \Rightarrow x_1 = 1750 - x_2$
$(4800 - 2x_2) / 4 = 1750 - x_2$
$4800 - 2x_2 = 7000 - 4x_2$
$2x_2 = 2200$
$x_2 = 1100$
$x_1 = 1750 - 1100 = 650$
$Z = 12 * 650 + 9 * 1100 = 17\ 700$

Punkt 8: $x_1 = 0$
$x_2 = 1500$
$Z = 12 * 0 + 9 * 1500 = 13\ 500$

Punkt 9: $x_1 + x_2 = 1750 \Rightarrow x_1 = 1750 - x_2$
$x_2 = 1500$
$x_1 = 1750 - 1500 = 250$
$Z = 12 * 250 + 9 * 1500 = 16\ 500$

Optimal målfunksjonsverdi blir 17 700, i punkt 7 der $x_1 = 650$ og $x_2 = 1100$. Her er restriksjon 3 og 4 bindende.

c) Simplex-algoritmen vil traversere ytterkanten av det tillatte løsningsrommet og besøke alle lovlige hjørnepunktsløsninger langs veien inntil den finner optimal løsning (et punkt der alle mulige steg videre vil forverre målfunksjonsverdien). Hvilken retning den velger ut fra (0,0) avhenger av hvilken variabel som velges til gå inn i basis. I dette faget har vi sagt at en enkel og god strategi er å velge variabelen gjør at målfunksjonsverdien øker raskest, i dette tilfellet x_1. Dermed vil vi besøke punktene 1, 2 og 5 før vi kommer til optimal løsning i punkt 7. Hadde vi valgt en annen *prisingsstrategi* (utenfor pensum i dette kurset), kunne vi endt opp med å gå den andre veien, og besøkt punktene 1, 8, 9, 7.

d)

På utvidet form ser modellen slik ut:

$$
\begin{array}{lccccccccl}
\text{max} & 12x_1 & + & 9x_2 & & & & & & \\
\text{slik at} & x_1 & & & + & s_1 & = & 1000 & & (1) \\
 & & & x_2 & + & s_2 & = & 1500 & & (2) \\
 & x_1 & + & x_2 & + & s_3 & = & 1750 & & (3) \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & + & s_4 & = & 4800 & & (4) \\
 & & & & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 & \geq & 0 & & (5)
\end{array}
$$

e) En basisløsning er en utvidet hjørnepunktsløsning, for vår modell vil den ha formen [x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4]. For hvert punkt setter vi inn 0 for ikke-basis-variablene (variablene hvis tilhørende restriksjon er oppfylt ved likhet), og løser det resterende likningssettet.

Punkt 1: $[x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4] = [0, 0, 1000, 1500, 1750, 4800]$
Punkt 2: $[x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4] = [1000, 0, 0, 1500, 750, 800]$
Punkt 5: $[x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4] = [1000, 400, 0, 1100, 350, 0]$
Punkt 7: $[x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4] = [650, 1100, 350, 400, 0, 0]$
Punkt 8: $[x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4] = [0, 1500, 1000, 0, 250, 1800]$
Punkt 9: $[x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4] = [250, 1500, 750, 0, 0, 800]$

Restriksjon 2 og 4 er oppfylt ved likhet i punkt 10:
$[x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4] = [450, 1500, 550, 0, -200, 0]$

Vi ser enkelt at denne basisløsningen ikke er tillatt fordi en av ikke-basis-variablene har fått en negativ verdi ($s_3 = -200$). Det indikerer at restriksjon 3 er brutt i dette punktet.

f) I optimal løsning (punkt 7) er slakkvariablene s_3 og s_4 ved sin nedre grense, 0. Basisen er $\{x_1, x_2, s_1, s_2\}$.

Oppgave 2

a) En økning i høyresiden i restriksjon 1 vil flytte linjen $x_1 \leq 1000$ lenger mot høyre. Restriksjonen er ikke bindende i den nåværende optimale løsningen, og siden vi gjør det tillatte løsningsrommet større (vi *relakserer* problemet), vil optimal løsning ikke endre seg. Målfunksjonsverdien forblir uendret.

b) En reduksjon i høyresiden i restriksjon 3 vil flytte linjen $x_1 + x_2 \leq 1750$ mot venstre, og gjør det tillatte løsningsrommet mindre. Vi ser at hele kurven som definerer det som nå er optimal målfunksjonsverdi (Z = 17 700), vil bli liggende utenfor tillattløsningsrom. Målfunksjonsverdien vil bli redusert.

c) Siden restriksjonen tilhørende ressurs 1 ikke er bindende, er skyggeprisen 0.

Dette gjelder inntil høyresiden er redusert så mye at restriksjonen blir bindende (med andre ord: inntil restriksjonen skjærer bort nåværende optimal løsning). Nåværende optimal løsning er $(x_1,x_2) = (650, 1100)$, altså kan høyresiden i restriksjon (1) gå ned til 650 før den påvirker optimal løsning. Skyggeprisen for variabelen er gyldig i intervallet $[650, \infty)$, altså kan endringen i høyresiden ligge i intervallet $[-350, \infty)$

En endring i høyresiden i restriksjon 3 vil føre til at skjæringspunktet mellom restriksjonene 3 og 4 beveger seg langs linja som definerer restriksjon 4. Basisvariablene vil være de samme, men målfunksjonen vil endre seg.
En endring på én enhet i høyresiden av (3) gjør at ny optimal løsning er definert ved at $x_1 + x_2 = 1751$ og $4x_1 + 2x_2 = 4800$. Løser vi likningssettet får vi at $(x_1, x_2) = (1102, 649)$, og ny målfunksjonsverdi Z = 17706. En endring på høyresiden av (3) fører til en økning på 6 i målfunksjonen, skyggeprisen til ressurs 3 er 6.

Ved å studere grafen ser vi at dette vil holde inntil optimal løsning flytter seg så langt at restriksjon 1 blir bindende (ved reduksjon av høyresiden), eller inntil restriksjon 2 blir bindende (ved økning av høyresiden). Det første inntreffer i punkt 5, det andre i punkt 10. I oppgave 1e) så vi at dette er punktene (1000, 400) og (450, 1500), for at restriksjon 3 skulle vært oppfylt med likhet i disse punktene måtte vi hatt en høyreside på henholdsvis $x_1 + x_2 = 1400$ eller $x_1 + x_2 = 1950$. Skyggeprisen er gyldig for en høyreside i intervallet [1400, 1950], det vil si vi den er gyldig for en endring i intervallet [-350, 200]

d) Vi ser grafisk at optimal løsning gjelder inntil målfunksjonen endrer seg så mye at den blir parallell med restriksjon 3 (ved reduksjon i målfunksjonskoeffisienten til x_1 eller økning i målfunksjonskoeffisienten til x_2), eller til den blir parallell med restriksjon 4 (ved økning i målfunksjonskoeffisienten til x_1 eller reduksjon i målfunksjonskoeffisienten til x_2). Bruker at to linjer er parallelle om den ene kan uttrykkes som en konstant k multiplisert med den andre.

Endring i c_1:
$k_1 (x_1 + x_2) \leq (12 + \delta)\, x_1 + 9\, x_2 \leq k_2 (4x_1 + 2x_2)$

Setter inn $k_1 = 9$ og $k_2 = 4{,}5$:
$9x_1 + 9x_2 \leq (12 + \delta)x_1 + 9x_2 \leq 18x_1 + 9x_2$
$9x_1 \leq (12 + \delta)\, x_1 \leq 18x_1$
$-3 \leq \delta \leq 6$

Endring i c_2:
$k_1 (4x_1 + 2x_2) \leq 12x_1 + (9 + \delta)\, x_2 \leq k_2 (x_1 + x_2)$

Setter inn $k_1 = 3$ og $k_2 = 12$:
$12x_1 + 6x_2 \leq 12x_1 + (9 + \delta)\, x_2 \leq 12x_1 + 12x_2$
$6x_2 \leq (9 + \delta)\, x_2 \leq 12x_2$
$-3 \leq \delta \leq 3$

Løsningen forblir optimal for c_1 i intervallet [9, 18], og for c_2 i intervallet [6, 12].

1. Oppgave 3

(a) En hjørneløsning korrespondererer en til en med en basisk løsning. Et kanonisk likningssystem er et likningssystem med m likheter og n variable, hvor koeffisienten til m av variablene kan uttrykkes med en enhetsmatrise. Dvs disse m variablene har koeffesient 1 i en og bare en rad, og alle de andre av disse m har koeffisient 0 i samme rad. Dersom de andre variablene (*n-m*) settes lik 0, vil en basisk løsning finnes ved å sette den basiske variabelen (den som har 1 i koeffisientmatrisen) lik høyresiden for hver likning.

(b)
- Restriksjon (1) har $\leq -$tegn og vi innfører derfor slakkvariabelen: s_1
- Restriksjon (2) har $\geq -$tegn og vi innfører både en overskuddsvariabel s_2 for å gjøre den om til en likhetsrestriksjon, og en kunstvariabel A_1 for å få et løsbart ligningssett. Kunstvariabelen gis en "straffekostnad" M i målfunksjonen for å drive den til null slik at løsningen også er mulig i det opprinnelige problemet. Denne koeffesienten må ha negativt fortegn i maksimeringsproblem og positivt i minimeringsproblem. I motsetning til kunstvariablene som *må* være null i den endelige løsningen, kan slakk og overskuddsvariablene være ulik null, det tilsvarer en løsning der restriksjonene ikke er bindende i det opprinnelige problemet.
- Restriksjon (3) har negativ høyreside. Dette tillater ikke simplex. Vi multipliserer hele restriksjonen med -1, og innfører deretter en kunstvariabel A_2 for å sikre at restriksjonen kan oppfylles. Variabel x_4 kan bare ta negative verdier. Heller ikke dette tillater simplex. Vi erstatter x_4 med $-x_5$. Også denne kunstvariabelen straffes i målfunksjonen.

Modellen på standard form blir:

$$\begin{aligned}
\max z &= x_1 + x_2 - MA_1 - MA_2 && (0)\\
x_1 + x_2 + s_1 &= 4, && (1)\\
-x_1 - x_5 - s_2 + A_1 &= 3, && (2)\\
-x_1 + x_3 + A_2 &= 2, && (3)\\
x_1, x_2, x_3, x_5, s_1, s_2, A_1, A_2 &\geq 0, && (4)
\end{aligned}$$

Vi ser forøvrig at likningssystemet ikke har noen løsning! Hvorfor?

(c) En (av flere) basisk løsning er $x_4 = 4$ og $x_5 = 2$. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. $z = 0$

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= x_1 + x_2, && (0)\\
x_1 + x_2 + x_4 &= 4, && (1)\\
-4x_1 + x_3 + x_5 &= 2, && (2)\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0, && (3)
\end{aligned}
$$

(d) $z = x_1 + x_2$. Dette kan skrives på formen $z - x_1 - x_2 = 0$. Relativ profitt for x_1 og x_2 er da 1 for begge variablene. Dette sees direkte.

Vi kan også regne dette på følgende måte: Hvis vi tar en enhet av x_1 inn i løsningen, har vi $x_1 = 1, x_4 = 3$ og $x_5 = 6$. Profitt blir lik 1. Relativ profitt $= z_{ny} - z_{gammel} = 1 - 0 = 1$. Dette er en mulig løsning, men ingen basisk løsning. Hvor mye må variablene som går henholdsvis inn og ut av basis endres for å få en ny basisløsning?

Hvis vi tar en enhet av x_2 inn i løsningen, har vi $x_2 = 1, x_4 = 3$ og $x_5 = 2$. Profitt blir lik 1. Relativ profitt $= z_{ny} - z_{gammel} = 1 - 0 = 1$. Dette er heller ingen basisk løsning. Hvis vi skal ha en ny basisk løsning med x_2 i basis blir det: $x_2 = 4$ og $x_5 = 2$.

Vi ser her at relativ profitt var lik for x_1 og x_2. Vi velger vilkårlig en av dem inn i basis.

(e) x_3 har ikke noe positivt bidrag i målfunksjonen. Det har bare x_1 og x_2. Vi trenger ikke x_3 i løsningen. Merk at dersom likning (2) hadde vært eneste restriksjon kunne vi valgt x_1 uendelig og fått et ubegrenset problem.

(f) Initialisering: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 4, 2)$.

Optimalitetstest: Løsningen er ikke optimal, pga z økes hvis en av de ikke-basis variablene økes.

Iterasjon 1:

- Bevegelsesretning: Relativ økning i z er lik for x_1 og x_2. Vi velger x_1 vilkårlig. Dette medfører at x_1 går inn i basis.
- Hvor mye kan vi øke x_1?

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_4 &= 4, && \text{medfører } x_4 = 4 - x_1\\
-4x_1 + x_3 + x_5 &= 2, && \text{medfører } x_5 = 2 + 4x_1 && (1)
\end{aligned}
$$

x_4 kan ikke være negativ. Det betyr at når $x_1 = 4$ så må x_4 forlate basis.

- Vi utfører elementære rekkeoperasjoner, slik at det er koeffesient 1 foran x_1 i privotrekka, og 0 i alle de andre rekkene. Ny basisk mulig løsning:

$$\begin{aligned}
\max\ z & & \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 4, & (1)\\
4x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &= 18, & (2)\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0, & (3)
\end{aligned}$$

  Dette gir $x_1 = 4$ og $x_5 = 18$ og $z = 4$.

  Optimalitetstest: Løsningen er optimal pga z vil ikke øke om en av de ikke-basis variable økes.

  Vi ser her at vi har alternative løsninger ettersom det er flere relativ profitt ledd $= 0$ enn antall basisvariable.