

## Emne TIØ4126 Optimering og beslutningsstøtte Øving 3

**Utlevering:** Torsdag 23.01

**Veiledning:** Mandag 27.01

**Innlevering:** Fredag 31.01

### Oppgave 1: Hjørnepunkt og basisløsninger

Gitt følgende optimeringsmodell:

$$\begin{array}{llll} \max & 12x_1 & + & 9x_2 \\ \text{slik at} & x_1 & & \leq 1000 \quad (1) \\ & & x_2 & \leq 1500 \quad (2) \\ & x_1 & + & x_2 \leq 1750 \quad (3) \\ & 4x_1 & + & 2x_2 \leq 4800 \quad (4) \\ & x_1 & , & x_2 \geq 0 \quad (5) \end{array}$$

- Tegn alle restriksjonene i en graf. Marker alle hjørnepunktsløsningene til modellen. Hvilke av disse er lovlige løsninger?
- Beregn målfunksjonsverdien til hver lovlige hjørnepunktsløsning, og bruk dette til å vise at optimal løsning er i hjørnepunktet  $x_1 = 650$ ,  $x_2 = 1100$ . Hva blir målfunksjonsverdien? Hvilke restriksjoner er bindende i denne løsningen? Tegn inn målfunksjonskurven som passerer gjennom optimal løsning. (svar: målfunksjonsverdi: 17 700)
- Denne modellen kan løses ved hjelp av simplex-metoden. Gitt at simplex-algoritmen starter i punktet (0,0), hvilke hjørnepunkter vil den undersøke før den finner optimal løsning?
- Introduser slakkvariabler og skriv modellen på utvidet («augmented») form. I grafen fra a), uttrykk hver restriksjon ved hjelp av slakkvariablene.
- Finn basisløsningen som korresponderer til hver tillatte hjørnepunktsløsning. Finn basisløsningen som tilsvarer hjørnepunktsløsningen der restriksjon (2) og (4) er oppfylt ved likhet. Hvordan kan vi fra basisløsningen se at denne ikke er tillatt?
- Hvilke slakkvariabler er ved sin nedre grense i optimal løsning? Hvilke variabler er i basis i den optimale løsningen?

### Oppgave 2: Sensitivitetsanalyse

For alle spørsmål, bruk samme modell som i oppgave 1.

- Dersom alle andre faktorer er uendret, hva skjer med målfunksjonsverdien om man får en økning på høyresiden i restriksjon (1)? Begrunn svaret ut fra grafen i oppgave 1.

- b) Dersom alle andre faktorer er uendret, hva skjer med målfunksjonsverdien om man får en reduksjon på høyresiden i restriksjon (3)? Begrunn svaret ut fra grafen i oppgave 1.
- c) Høyresiden i restriksjonene i modellen i kan tolkes som tilgjengelig mengde av ulike ressurser. Hva er skyggeprisen til ressurs 1 og 3? Innenfor hvilke intervall er disse skyggeprisene gyldige?  
*(svar: ressurs 1: skyggepris 0, gyldig intervall  $[650, \infty]$   
 ressurs 3: skyggepris 6, gyldig intervall  $[1400, 1950]$ )*
- d) Hva er sensitivitetssområdet for målfunksjonskoeffisientene? (Hvor mye kan koeffisientene foran  $x_1$  og  $x_2$  i målfunksjonen endre seg før løsningen ikke lenger er optimal?)  
*(svar:  $c_1: [9, 18]$ ,  $c_2: [6, 12]$ )*

### Oppgave 3: Begrepsgym lineære likningssystem

- a) Hva er forholdet mellom hjørneløsninger, basiske løsninger og kanoniske likningssystem (system som er på "proper form from Gaussian elimination"). På kanonisk form er det kun én basisvariabel i hver likning og den har koeffisient 1.
- b) Skriv likningssystemet under på standard form for LP (augmented form), dvs. slik at det er klart for å løses med simplex:

$$\max z = x_1 + x_2, \quad (0)$$

$$x_1 + x_2 \leq 4, \quad (1)$$

$$-x_1 + x_4 \geq 3, \quad (2)$$

$$x_1 - x_3 = -2, \quad (3)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad (4)$$

$$x_4 \leq 0 \quad (5)$$

- c) Indiker en basisløsning i likningssystemet under:

$$\max z = x_1 + x_2, \quad (0)$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 4, \quad (1)$$

$$-4x_1 + x_3 + x_5 = 2, \quad (2)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \quad (3)$$

- d) Finn relativ profitt for å ta inn  $x_1$  og  $x_2$  i løsningen for problemet i c). Relativ profitt (Ofte kalt redusert kostnad) er den endringen i målfunksjonsverdi man oppnår ved å øke en ikke-basisk variabel til 1 og endre basis variabler tilsvarende. (*Problemene fordrer at  $x_1$  og  $x_2$  ikke var i basisløsningen fra problemet i c).*)
- e) Argumenter for at det ikke er profittmaksimerende å ta  $x_3$  inn i løsningen.
- f) Finn optimal løsning iterativt ved å ta inn variabelen med høyest relativ profitt i basis.  
*(svar: optimal løsning:  $x_1 = 4$ ,  $x_5 = 18$ ,  $z = 4$ , vis hvordan man kommer frem til svaret. Dette er bare en av flere optimale løsninger, det avhenger av hvilken basis man starter å løse problemet fra)*