NTNU
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse
Vår 2020

Emne TIØ4126 Optimering og beslutningsstøtte
Løsningsforslag til øving 8

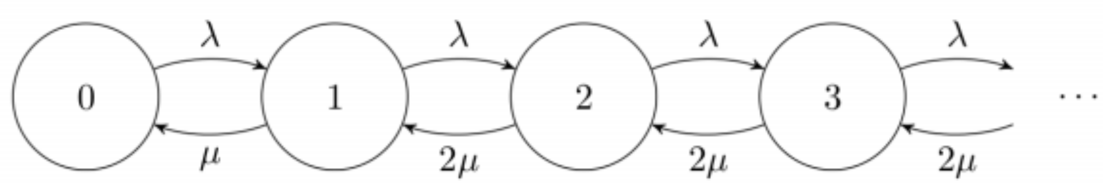
Oppgave 1: Køsystem og simulering

a) Hva slags køsystem kan kundesenteret modelleres som? Begrunn svaret og uttrykk formen på køsystemet ved hjelp av Kendalls notasjon.

Vi kan la de to kundebehandlerne være betjeningsstasjoner og de innkommende samtalene være ankomster. Ankomstene blir satt i en «first in – first out»-kø dersom begge betjeningsstasjonen er opptatte. Siden størrelsen på køen ikke er spesifisert, bør vi anta at den er uendelig. Varigheten til en samtale er da betjeningstiden og den er eksponentialfordelt. Videre er også tiden mellom ankomster eksponentialfordelt. Derfor kan vi konkludere med at vi har med et *M*/*M*/2-system å gjøre.

b) Tegn et diagram som viser de forskjellige tilstandene og tilstandsovergangene.

Vi lar tilstanden være antall telefonsamtaler som besvares og står i kø ved gitt tidspunkt. Hendelsene tilsvarer en innkommende samtale eller avsluttet samtale.



c) Hva er sannsynligheten for at begge kundebehandlerne er ledige?
(Hint: du kan bruke at $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$, dersom $x < 1$.)

At begge kundebehandlerne er ledige tilsvarer tilstand 0 i diagrammet ovenfor. Sannsynligheten for å være i tilstand 0, P_0, finner vi ved å sette opp balanselikningene (gjennomsnittlig rate inn = gjennomsnittlig rate ut) og løse likningssystemet for P_0 under betingelsen at summen av de ukjente sannsynlighetene er 1. Balanselikningene for et *M/M/2*-system er som følger:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = C_1 P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0 = C_2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{2\mu} P_2 = \frac{\lambda^3}{2^2\mu^3} P_0 = C_3 P_0$$

$$\cdots$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{2^{n-1}\mu^n} P_0 = C_n P_0$$

Summen av de ukjente sannsynlighetene summerer seg til 1 og kan skrives slik (med $C_0 = 1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} C_n}$$

La oss benevne $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$, da kan vi skrive $C_n = 2\rho^n$ for $n \geq 1$, og vi kan skrive om uttrykket for P_0 og bruke hintet i oppgaveteksten siden $\rho < 1$.

$$P_0 = \frac{1}{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{1 + 2(\frac{1}{1-\rho} - 1)}$$

Eventuelt kan vi utlede uttrykket for P_0 som i læreboka:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{n-2}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}})}$$

Hvis vi setter inn verdiene $\lambda = 15$/time og $\mu = 10$/time, får vi $P_0 = 0{,}1429$.

d) Hvor lang tid, forventningsmessig, vil en innkommende samtale stå i kø før den blir besvart?

Den enkleste måten å gå fram på for å finne forventet tid i kø, W_q, i et *M/M/2*-system er å først beregne forventet lengde på køen, L_q, og deretter bruke Littles formel $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$. Forventet lengde på køen er generelt

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s) P_n$$

hvor s er antall betjeningsstasjoner. Mer spesifikt får vi følgende uttrykk:

$$L_q = \sum_{n=2}^{\infty} (n-2) P_n = \sum_{j=0}^{\infty} j P_{j+2} = 2P_0 \sum_{j=0}^{\infty} j\rho^{j+2} = 2P_0\,\rho^3 \sum_{j=0}^{\infty} j\rho^{j-1}$$

Ved å benytte seg av at $j\rho^{j-1} = \frac{d}{d\rho}(\rho^j)$ får vi:

$$L_q = 2P_0\rho^3 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}(\rho^j) = 2P_0\rho^3 \frac{d}{d\rho}(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j) = 2P_0\,\rho^3 \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$
$$= 2P_0\rho^3(\frac{1}{(1-\rho)^2})$$

Hvis vi plugger inn verdier for λ og μ, får vi $L_q = 1{,}9286$, og videre $W_q = \frac{1{,}9286}{15} = 0{,}1286$ timer. Dette skulle bli en forventet tid i telefonkø på 7,7 minutter.

e) Forklar hva som menes med hendelses-basert tidsinkrementering (next-event incrementing) i diskret hendelsessimulering.

I diskret hendelsessimulering trenger man en simuleringsklokke for å holde rede på blant annet tid til neste hendelse. Generelt finnes det to måter å inkrementere klokka på: hendelses-basert tidsinkrementering og fast tidsinkrementering. Ved bruk av hendelsesbasert tidsinkrementering vil man inkrementere simuleringsklokka til neste hendelse, mens man med fast tidsinkrementering vil inkrementere klokka med et fast tid uavhengig av når hendelsene inntreffer. I hendelsesbasert-tidsinkrementering vil tilstanden oppdateres i det en hendelse skjer og den nye tilstanden er basert på hendelsen som inntreffer. Samtidig må det også genereres en tid til neste hendelse, hvis denne tiden ikke allerede er generert.

f) Ta utgangspunkt i at du skal bruke diskret hendelsessimulering med hendelsesbasert tidsinkrementering til å estimere sannsynligheten for at begge kundebehandlerne er ledige.

   i. Definer tilstander, mulige hendelser og overganger som er nødvendig for å utføre simuleringen.

i)
Slik som i køteori-oppgavene ovenfor bør tilstanden være antall innkommende samtaler i kø + antall samtaler som besvares ved et gitt tidspunkt. Hendelsene er at det kommer en innkommende samtale, at kundebehandler 1 er ferdig med en samtale og at kundebehandler 2 er ferdig med en samtale.

La oss benevne tilstanden som $N(t)$ og hendelsene som A (innkommende samtale), $B1$ og $B2$ (kundebehandler 1 eller 2 er ferdig med en samtale). Overgangene blir som følger:

$N = N + 1$, dersom hendelse A inntreffer
$N = N - 1$, dersom hendelse B inntreffer

h) Anta at triangulær-fordelingen angitt under bedre beskriver tidsfordelingen mellom to innkommende samtaler. Forklar hvordan du kan bruke akseptanse-avslag metoden (acceptance-rejection method) til å generere innkommende samtaler i kundesenteret.

For å generere tider mellom innkommende samtaler ved hjelp av akseptanse-avslag metoden, trenger vi å bruke minst to tilfeldige tall mellom 0 og 1, kall disse r_1 og r_2. På den enkleste måten kan vi generere et tall mellom 0 og topp-punktet til trianglærfordelingen, L (her lik $1/5$), og et tall mellom grensene på t (her $A = 0$ og $B = 10$).

1. Generer r_1 og r_2. La $T = r_1 * (B - A) + A$ (dette gir $A \leq T \leq B$)
2. Dersom $f(T) \geq r_2 * L$, la tid til neste hendelse være T, ellers reperer steg 1 og 2.