NTNU
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse
Vår 2020

# Emne TIØ4126 Optimering og beslutningsstøtte
# Løsningsforslag til øving 7

## Oppgave 1: Eksponentialfordelingen

Når betjeningstiden er eksponensialfordelt med parameter $\mu$, så er

1. Forventningen lik $\frac{1}{\mu}$
2. Restbetjeningstiden eksponesialfordelt med samme parameter
3. Den minste av flere restbetingstider er eksponensialfordelt med en parameter lik summen av parametrene til de enklete betjeningstidene.

Her har vi 3 restbetingstider med ulike parametrere. Med time som tidsenhet får vi når forventningsverdiene er h.h.v. 30, 20 og 15 mintter følgende parametre:

$$\mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 3, \quad \mu_3 = 4$$
$$\mu_{TOT} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 9$$

Hvor $\mu_{TOT}$ er total betjeningsrate. Dvs. at

$$\text{Forventet tid til første ferdigbetjening} = \frac{60}{\mu_{TOT}} = \frac{20}{3} \text{ minutter}$$

## Oppgave 2: Fødsels- og dødsprosesser

a) Tegningen kan dere gjøre selv. Diagrammet har 3 noder for h.h.v. 0, 1 og 2 kunder i

systemet

Mellom disse nodene går det ialt 4 buer med følgende rater:

| Fra | Til | Rate |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 4 |
| 1 | 0 | 4 |
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 6 |

b) Stasjonært må en forlate en node like ofte som en kommer til noden. Dette gir følgende ligninger for de 3 nodene:

$$\begin{aligned} 4P_0 &= 4P_1 \\ 4P_0 + 6P_2 &= 4P_1 + 2P_1 \\ 2P_1 &= 6P_2 \end{aligned}$$

Her har vi 3 lineære ligninger i 3 ukjente. Siden vi ikke har noe konstant ledd, kan vi skalere løsnigen med en vilkårlig konstant.

Vi trenger derfor en ligning til som skalerer løsniongen rett for oss. Total sannynlighet er pr definisjon lik 1, slik at vi får:

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

c) Vi bruker denne og de 2 enkleste (nummer 1 og 3) av de forrige 3 ligningene. Dette gir

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 \\ P_2 &= \frac{1}{3}P_1 = \frac{1}{3}P_0 \\ P_0\left(1 + 1 + \frac{1}{3}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Dvs:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{3}{7} \\ P_1 &= \frac{3}{7} \\ P_2 &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

d) Nå gjør vi de tilsvarende beregningene som i a)-c) ved å bruke de generelle formlene for $M/M/s$ - køer (som bør huskes til eksamen:

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots . \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots . \mu_n} \quad \text{for} \quad n \geq 1 \\
C_0 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
P_n = C_n \left( \sum_{k=0}^{\infty} C_k \right)^{-1}
$$

Her har vi

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= 4 \\
\lambda_1 &= 2 \\
\lambda_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Siden $\lambda_2 = 0$ blir alle $C_n = 0$ for $n \geq 3$. Vi klarer oss derfor med de 3 første $C_n$-ene.

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= 4 \\
\mu_2 &= 6
\end{aligned}
$$

Dette gir

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 1 \\
C_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} = \frac{4}{4} = 1 \\
C_2 &= C_1 \frac{\lambda_1}{\mu_2} = 1 \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Dvs.

$$
\begin{aligned}
\left( \sum_{k=0}^{\infty} C_k \right)^{-1} &= \left( \sum_{k=0}^{2} C_k \right)^{-1} = (C_0 + C_1 + C_2)^{-1} \\
&= \left( 1 + 1 + \frac{1}{3} \right)^{-1} = \frac{3}{7}
\end{aligned}
$$

som gir

$$
\begin{aligned}
P_0 &= C_0 \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \\
P_1 &= C_1 \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \\
P_2 &= C_2 \frac{3}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

som før.

Forventet antall og forventet tid beregner vi nå slik:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=1}^{2} nP_n = P_0(1C_1 + 2C_2) = \frac{3}{7}\left(1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{7}$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)P_n = \sum_{n=2}^{2}(n-1)P_n = P_0(1C_2) = \frac{3}{7}\left(1 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{7}$$

Forventet ankomstrate beregner vi slik:

$$\overline{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = P_0 \sum_{n=0}^{2} \lambda_n C_n = \frac{3}{7}\left(4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{18}{7}$$

Så bruker vi Little's formel for de forventede tidene:

$$W = \frac{L}{\overline{\lambda}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{18} = \frac{5}{18}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{18} = \frac{1}{18}$$

EKSTRA:
La oss nå sjekke om vi får følgende formel til å stemme:

$$W = W_q + \frac{1}{\overline{\mu}}$$

$$\frac{1}{\overline{\mu}} = W - W_q = \frac{5}{18} - \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$$

hvor det siste leddet er forventet betjeningstid.

Forventet betjeningsrate er lik forventet ankomstrate for et køsystem i stasjonær tilstand.

Den forventede betjeningstiden må derfor beregnes på en annen måte enn den slik den forventede ankomstraten ble beregnet. Her er det ikke gitt noen informasjon om at det er flere kanaler. Vi må derfor anta at det er en kanal som jobber mer effektivt når en kunde også venter. Da får vi

$$\overline{\mu} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n P_n}{\sum_{n=1}^{\infty} P_n} = \frac{\sum_{n=1}^{2} \mu_n P_n}{(1-P_0)} = \frac{P_0}{1-P_0} \sum_{n=0}^{2} \mu_n C_n = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{7}\left(4 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

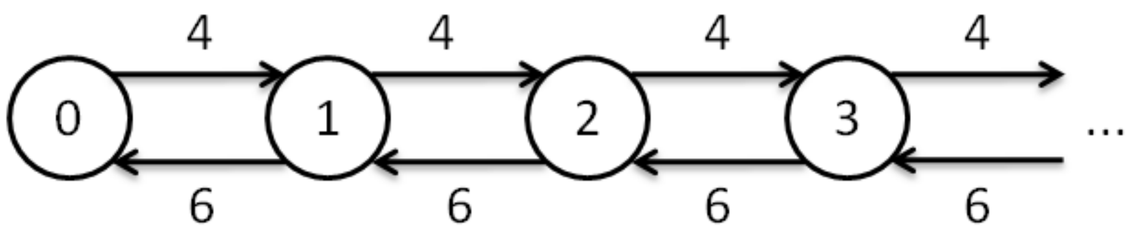
Detet gir

$$\frac{1}{\overline{\mu}} = \frac{2}{9}$$

som stemmer med det tidligere resultatet.

**Oppgave 3: Fra eksamen i 92031 Operasjonsanalyse 1, høsten 1992**

Oppgaveteksten beskriver en vanlig M/M/1-kø, så her kan vi bruke formlene fra læreboken direkte. Vi kan lage følgende tegning som beskriver det opprinnelige køsystemet:




Vi har altså $\lambda = 4$, $\mu = 6$ og $\rho = 4/6 = 2/3$. Hvis vi setter opp balanselikninger får vi, etter den vanlige manipulasjonen (se læreboken):

$P_n = C_n P_0$, hvor $C_n = \rho^n = (2/3)^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_0 = 1$ som gir $P_0 = 1-\rho = 1/3$.

Forventet antall enheter i systemet er $L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \ldots = \frac{2/3}{1-2/3} = 2$. Forventede kostnader per år blir da 2 * 2000 timer * 12 kroner/time = 48000 kroner.

Den alternative maskinen har $\lambda = 4$, $\mu = 8$ og $\rho = 4/8 = 1/2$. For denne blir $L = \ldots = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{4}{8-4} = 1$. Dette gir at forventede kostnader per år blir 1 * 2000 timer * 12 kroner/time = 24000 kroner.

Ettersom den nye maskinen koster 21000 kroner mer per år i drift, og ettersom den reduserer kostnadene ved å vente på reparasjon med 48000-24000 = 24000 kroner, så vil den til sammen medføre besparelser på 3000 kroner per år.