NTNU
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse
Vår 2020

Emne TIØ4126 Optimering og beslutningsstøtte
Løsningsforslag til øving 2

Oppgave 1: LP modellering

a)
Indekser:

s = Sentral
t = Tjenestetype

Konstanter:

S = antall sentraler
T = antall tjenestetyper
$S_{TILGANGs}$ = prosesseringskapasitet tilgjengelig ved sentral s
T_{BEHOVt} = nødvendig prosessering for å utføre tjeneste t
C_{st} = kostnad ved å benytte en kapasitetsenhet fra sentral s for å betjene etterspørsel for kapasitetsbehov av tjeneste t

Variable:
x_{st} = Kapasitetsbehov for tjeneste t dekket av sentral s
z = Minimal kostnad for Telestor A/S

Relasjoner:

$$\min z = \sum_{s=1}^{S}\sum_{t=1}^{T} C_{st}x_{st},$$

når

$$\sum_{t=1}^{T} x_{st} \leq S_{TILGANG_s}, \qquad s = 1,\ldots,S,$$

$$\sum_{s=1}^{S} x_{st} \geq T_{BEHOV_t}, \qquad t = 1,\ldots,T,$$

$$x_{st} \geq 0, \qquad s = 1,\ldots,S,\ t = 1,\ldots,T.$$

Kommentar:

Denne modellen er en modell for en type problem som kalles *transportproblem*. Sentralene tilsvarer noder med tilgang og tjenestetyper tilsvarer noder med behov. I et transportproblem ønsker en å transportere varer fra tilgangsnoder til behovsnoder til minimal kostnad. Denne type problem er omtalt i kapittel 8 i læreboka. Ettersom den totale tilgangen (30 + 20 + 45) = totalt behov (10 + 20 + 50 + 15), kunne vi erstattet ≤ og ≥-tegnene med =-tegn i alle restriksjonene. Alt vil transporteres fra tilgangsnoder til behovsnoder.

Her kunne vi alternativt skrevet alle restriksjonene på samme form: "mengde transportert ut - mengde transportert inn = mengde tilgjengelig". Dette er gjort i eksempelet "Distributing goods through a distribution network" s. 58 - 60 i læreboka. En slik form er vanlig for sammensatte nettverk med tilgangsnoder, behovsnoder og omlastningsnoder (ingen behov eller tilgang i noden). For problem med kun tilgangsnoder og behovsnoder er formen som gitt over det vanlige.

b)

min z = $2 \cdot x_{11} + 3 \cdot x_{12} + 3 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{14} + 2 \cdot x_{21} + 2 \cdot x_{22} + 4 \cdot x_{23} + 4 \cdot x_{24} + 3 \cdot x_{31} + 3 \cdot x_{32} + 3 \cdot x_{33} + 3 \cdot x_{34}$

når

$$
\begin{aligned}
& x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 30 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 20 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 45 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 10 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 50 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 15
\end{aligned}
$$

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \geq 0$

Oppgave 2: Matematisk modellering og løsing i Excel

a) Vi definerer symboler slik

Indekser:

i – nærings stoff [kalorier, jern, protein, karbohydrater, fett, kolesterol]

j – mat type [kylling, fisk, kjøttdeig, bønner, salat, poteter, melk]

Data

I – antall næringsbidrag

J – antall mat typer

A_{ij} – Mengde av næringsstoff *i* pr lb av mat type *j*

U_i – Øvre grense for nærings stoff *i* i menyen

L_i – Nedre grense for nærings stoff *i* i menyen

C_j – pris pr lb for mat type *j*

Variable:

x_j – mengde av mat type *j* i menyen [lb]

z – totale kostnader per servering i [$/lb]

Relasjoner:

$$\min \quad z = \sum_{j=1}^{J} C_j x_j$$

når

$$\sum_{j=1}^{J} A_{ij} x_j \geq L_i \qquad ,i = 1,..,I$$

$$\sum_{j=1}^{J} A_{ij} x_j \leq U_i \qquad ,i = 1,..,I$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,..,J$$

b)Beslutningsvariable:

x_C	Mengde kylling i lb
x_F	Mengde fisk i lb
x_{BEEF}	Mengde kjøttdeig i lb
x_{BEANS}	Mengde bønner i lb
x_L	Mengde salat i lb
x_P	Mengde poteter i lb
x_M	Mengde melk i lb

Målfunksjon:

$$Min! \quad z = 0.8x_C + 3.7x_F + 2.3x_{BEEF} + 0.9x_{BEANS} + 0.75x_L + 0.4x_P + 0.83x_M \tag{1}$$

Restriksjoner

$$520x_C + 500x_F + 860x_{BEEF} + 600x_{BEANS} + 50x_L + 460x_P + 240x_M \geq 1500 \tag{2}$$

$$520x_C + 500x_F + 860x_{BEEF} + 600x_{BEANS} + 50x_L + 460x_P + 240x_M \leq 2000 \tag{3}$$

$$4.4x_C + 3.3x_F + 0.3x_{BEEF} + 3.4x_{BEANS} + 0.5x_L + 2.2x_P + 0.2x_M \geq 5 \tag{4}$$

$$30x_C + 5x_F + 75x_{BEEF} + 3x_{BEANS} + 0x_L + 0x_P + 10x_M \geq 20 \tag{5}$$

$$30x_C + 5x_F + 75x_{BEEF} + 3x_{BEANS} + 0x_L + 0x_P + 10x_M \leq 60 \tag{6}$$

$$17x_C + 85x_F + 82x_{BEEF} + 10x_{BEANS} + 6x_L + 10x_P + 16x_M \geq 30 \tag{7}$$

$$0x_C + 0x_F + 0x_{BEEF} + 30x_{BEANS} + 0x_L + 70x_P + 22x_M \geq 40 \tag{8}$$

$$180x_C + 90x_F + 350x_{BEEF} + 0x_{BEANS} + 0x_L + 0x_P + 20x_M \leq 30 \tag{9}$$

$$x_C, \ldots\ldots, x_M \geq 0 \tag{10}$$

Ledd med 0 foran kan kuttes i formuleringen.
Beskrivelse av målfunksjon og restriksjoner:
(1) - Minimer kostnader
(2) og (3) - Nedre og øvre grenser på kaloriinnhold i lunsjen

(4) - Nedre grense for jerninnhold i lunsjen
(5) og (6) - Nedre og øvre grenser på fettinnhold i lunsjen
(7) - Nedre grense på proteininnhold i lunsjen
(8) - Nedre grense på karbohydrater i lunsjen
(9) - Øvre grense på kolesterolnivå i lunsjen
(10) - Ikkenegativitetskrav.

c) se vedlagt Excel fil

d) Modellen ble kjørt med følgende tilleggsrestriksjon:

$$x_C, \ldots\ldots, x_P \leq 0.5$$

Dette ga umulig løsning. Begrensningene er for restriktive.

NB! Merk at tilleggrestriksjonen ikke gjelder for x_M

e) Skyggeprisene er positive for nedre grenser på kalorier og fett. Det betyr at kostnadene reduseres med skyggeprisen hvis en kan redusere kalorinivået og fettnivået med en enhet. Dette er gyldig innenfor henholdsvis intervallet [1360,2000] og [15,20.7]. Øvre grense på kolesterolnivå har negativ skyggepris. Det betyr at kostnadene reduseres med skyggeprisen hvis vi kan heve den øvre grensen med en enhet. Dette er gyldig innenfor intervallet [28.409,40]. De resterende restriksjonene er ikke bindende og har skyggepris 0. Det betyr at vi kan endre høyresiden innenfor sensitivitetsintervallet uten at målfunksjonsverdien påvirkes.

Kylling, Fisk, Kjøttdeig og Salat inngår ikke i menyen. En kan derfor øke kostnadene til uendelig uten at løsningen endres. Ved et visst kostnadsnivå (Objective coefficient – Allowable decrease) blir det aktuelt å vurdere produktene, og den optimale løsningen kan endres. Produktene som er med i optimal løsning vil fortsatt være optimale gitt at kostnadene er innenfor området:

$$C_{BEANS} - [-0.801, \infty], C_P - [0, 0.49] \text{ og } C_M - [-\infty, 1.017].$$

Oppgave 3 (Oppgave 3 ved eksamen i mikroøkonomi og optimering i desember 1999)

a) De mest sentrale beslutningsvariablene er:

xGj = antall ”barrels” av olje j brukt til ”Gasoline”, j = 1, 2
xHj = antall ”barrels” av olje j brukt til ”Heating oil”, j = 1, 2
z = målfunksjon = overskudd

Av answer report i vedlegg B ser vi at:
z = $330000
xG1 = 2000
xH1 = 4000
xG2 = 1000
xH2 = 8000

b) Av sensitivity report i vedlegg C ser vi at skyggeprisen for tilgjengeligheten av olje 1 er 40. Videre ser vi at den gjelder for en reduksjon på inntil 1500, mens oppgaven bare spør om en reduksjon på 500. Redusert tilgjengelighet gir mindre mulighetsområde og dermed dårligere løsning. Målverdien reduseres derfor med 40 · 500 = 20000, regnet i dollar til $310000 (=330000 − 20000).