NTNU
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse
Vår 2020

TIØ4126 Optimering og beslutningsstøtte
Løsningsforslag til øving 6

Oppgave 1: Christian & Sønn Jeans A/S

Før vi kan bruke Lagrange må vi over på en formulering uten ulikheter. En måte å gjøre dette på er å legge til en kvadrert slakkvariabel i restriksjonen slik at den blir en likhetsrestriksjon.

Nytt problem:

$$\max \quad z = 25x_1 - 0.8x_1^2 + 30x_2 - 1.2x_2^2$$

når

$$x_1 + 2x_2 + x_3^2 = 40$$

så bruker vi Lagrange:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 25x_1 - 0.8x_1^2 + 30x_2 - 1.2x_2^2 - \lambda\left(x_1 + 2x_2 + x_3^2 - 40\right)$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\partial L}{\partial x_1} = 25 - 1.6x_1 - \lambda = 0 \\
L_2 &= \frac{\partial L}{\partial x_2} = 30 - 2.4x_2 - 2\lambda = 0 \\
L_3 &= \frac{\partial L}{\partial x_3} = -2x_3\lambda = 0 \\
L_\lambda &= \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + 2x_2 + x_3^2 - 40 = 0
\end{aligned}$$

Her har vi 4 likninger med fire ukjente, vi observerer at likning L_3 medfører at minst en av x_3 og λ må være lik 0. Likningene løser vi ved først finne et uttrykk for x_1 og x_2 i de to første likningene og deretter sette inn i L_λ :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{25-\lambda}{1.6} \\
x_2 &= \frac{15-\lambda}{1.2} \\
\frac{25-\lambda}{1.6} + \frac{30-2\lambda}{1.2} + x_3^2 - 40 &= 0
\end{aligned}$$

Vi får da to forskjellige løsninger:

$$x_3 = 0, \lambda = \frac{3}{11} \vee x_3 = \sqrt{-\frac{5}{8}}, \lambda = 0$$

Kvadratroten til et negativ tall gir ingen mening (siden vi kan se bort i fra imaginære tall i denne sammenheng), derfor kan vi konkludere med at x_3 må være lik null.

Dermed får vi:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 15.4 \\
x_2 &= 12.3 \\
x_3 &= 0 \\
\lambda &= \frac{3}{11} \\
z &= 382.7
\end{aligned}$$

Alternativ løsningsmetode

Før vi kan bruke Lagrange må vi over på en formulering uten ulikheter. Dette gjør vi ved å anta at ikke-negativitetskravene ikke skaper problemer (negtiv produksjon gir ikke mening i dette tilfellet). Videre antar vi at problemet virkelig er slik at vi ønsker å bruke all tilgjengelig tid, slik at vi kan erstatte $\leq$ med $=$. For å vise at dette kan være problematisk erstatter vi tilgjengelig tid med symbolet b. Etterpå vil vi se på løsningen for ulike verdier på b.

Nytt problem:

$$\max \quad z = 25x_1 - 0.8x_1^2 + 30x_2 - 1.2x_2^2$$

når

$$x_1 + 2x_2 = b$$

så bruker vi Lagrange:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 25x_1 - 0.8x_1^2 + 30x_2 - 1.2x_2^2 - \lambda\,(x_1 + 2x_2 - b)$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\partial L}{\partial x_1} = 25 - 1.6x_1 - \lambda = 0 \\
L_2 &= \frac{\partial L}{\partial x_2} = 30 - 2.4x_2 - 2\lambda = 0 \\
L_\lambda &= \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + 2x_2 - b = 0
\end{aligned}$$

Disse 3 ligningene løses for de 3 ukjente ved først å løse de 2 første for x_1 og x_2 og deretter sette inn i L_λ :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{25 - \lambda}{1.6} \\
x_2 &= \frac{15 - \lambda}{1.2} \\
\frac{25 - \lambda}{1.6} + \frac{30 - 2\lambda}{1.2} - b &= 0
\end{aligned}$$

Siste likning gir uttrykk for λ:

$$\lambda = \frac{195}{11} - \frac{24}{55}b$$

λ settes nå inn i uttrykkene for x_1 og x_2:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{25 - \frac{195}{11} + \frac{24}{55}b}{1.6} = \frac{50+3b}{11} \\ x_2 &= \frac{15 - \frac{195}{11} + \frac{24}{55}b}{1.2} = \frac{-25+4b}{11} \end{aligned}$$

Hvis dette settes inn i uttrykket for z får vi:

$$\begin{aligned} z &= 25\left(\frac{3b+50}{11}\right) - 0.8\left(\frac{3b+50}{11}\right)^2 + 30\left(\frac{4b-25}{11}\right) - 1.2\left(\frac{4b-25}{11}\right)^2 \\ &= 22.727 + 17.727b - (0.21818)\,b^2 \end{aligned}$$

Med

$$b = 40$$

får vi:

$$\begin{aligned} x_1 &= 15.4 \\ x_2 &= 12.3 \\ \lambda &= \frac{3}{11} \\ z &= 382.7 \end{aligned}$$

Vi ser av uttrykkene foran at x_1 er positiv for alle $b > 0$, men at x_2 er negativ for $b < \frac{25}{4} = 6.25$. Dvs. at for små b blir det galt når vi ikke tar hensyn til ikke-negativitets kravene. Videre ser vi at for positive b, så er

$$\frac{dz}{db} \geq 0$$

for

$$2\,(0.21818)\,b \leq 17.727$$

eller

$$b \leq \frac{17.727}{2\,(0.21818)} = 40.625$$

Dvs. at vi bare vinner på å øke b med litt over en halv time. Det var altså helt på grensen til at det var "lov" å forutsette at ressursen ble brukt opp.

Oppgave 2: KKT-betingelser

a) KKT-betingelser

1: $\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0 \Rightarrow$

$$8-2x_1-u_1 \leq 0 \quad (1a)$$
$$2-3u_1 \leq 0 \quad (1b)$$
$$1-2u_1 \leq 0 \quad (1c)$$

2: $x_j^*\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = 0 \Rightarrow$

$$x_1(8-2x_1-u_1) = 0 \quad (2a)$$
$$x_2(2-3u_1) = 0 \quad (2b)$$
$$x_3(1-2u_1) = 0 \quad (2c)$$

3: $g_i(x^*) - b_i \leq 0 \Rightarrow x_1+3x_2+2x_3-12 \leq 0 \quad (3)$

4: $u_i(g_i(x^*)-b_i) = 0 \Rightarrow u_1(x_1+3x_2+2x_3-12) = 0 \quad (4)$

5: $x_j^* \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \quad (5)$

6: $u_i \geq 0 \Rightarrow u_1 \geq 0 \quad (6)$

For $x=(2,2,2)$: (2a) $\rightarrow u_1 = 4$

(2b) $\rightarrow u_1 = \frac{2}{3}$

Dette er en selvmotsigelse, $x=(2,2,2)$ kan ikke være optimal løsning

b) Fra (1b) får vi $u_1 \geq \frac{2}{3}$.

Setter vi inn dette i (2c), ser vi at vi må ha $x_3 = 0$.

Videre ser vi at (4) nå må bety at $x_1 + 3x_2 - 12 = 0$ (4*)

Vet ikke om x_1 og x_2 er positive eller null, forsøker de ulike tilfellene:

$\underline{x_1 = 0}$: $x_2 = 4$ (fra 4*)
$u_1 = \frac{2}{3}$ (fra 2b)
$x_1 = 0$ og $u_1 = \frac{2}{3}$ motstrider (1a)

$\underline{x_2 = 0}$: $x_1 = 12$ (fra 4*)
$u_1 = -16$ (fra 2a)
$u_1 = -16$ motstrider (6)

Konkluderer at $x_1 > 0$ og $x_2 > 0$.

Fra (2b) får vi da at $u_1 = \frac{2}{3}$, (2a) og (4) gir da $x_1 = \frac{11}{3}$ og $x_2 = \frac{25}{9}$

Optimal løsning: $x = (\frac{11}{3}, \frac{25}{9}, 0)$