NTNU
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse
Vår 2020

TIØ4126 Optimering og beslutningsstøtte
Løsningsforslag til øving 5

Oppgave 1

a)

La x_1, x_2 og x_3 være antall enheter produsert av henholdsvis lenestoler, skamler og kjøkkenstoler. Modellen blir da:

$$\max Z = 24x_1 + 8x_2 + 15x_3$$

slik at

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 40 \quad \text{(treverk)}$$
$$2x_1 + x_2 \le 20 \quad \text{(lær)}$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 80 \quad \text{(timer)}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

b)

Vi må først skrive modellen på utvidet form:

$$\max Z = 24x_1 + 8x_2 + 15x_3$$

slik at

$$3x_1 + x_2 + 2x_2 + s_1 = 40$$
$$2x_1 + x_2 + s_2 = 20$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_3 = 80$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0$$

Det initielle simplex-tablået blir dermed:

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS	FHT
Z	1	-24	-8	-15	0	0	0	0	
s_1	0	3	1	2	1	0	0	40	
s_2	0	2	1	0	0	1	0	20	
s_3	0	5	2	3	0	0	1	80	

I første iterasjon pivoterer vi inn x_1, som har minst redusert kostnad. Forholdstallstesten brukes til å bestemme hvilken variabel som skal ut av basis:

BV	Z	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS	FHT
Z	1	**-24**	-8	-15	0	0	0	0	
s_1	0	**3**	1	2	1	0	0	40	40/3 = 13 1/3
$\mathbf{s_2}$	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**20**	**20/2 = 10**
s_3	0	**5**	2	3	0	0	1	80	80/5 = 16

Vi pivoterer inn x_1 og ut s_2:

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS	FHT
Z	1	0	4	-15	0	12	0	240	
s_1	0	0	-1/2	2	1	-3/2	0	10	
x_1	0	1	1/2	0	0	1/2	0	10	
s_3	0	0	-1/2	3	0	-5/2	1	30	

Vi har nå utført nøyaktig én iterasjon av simplex-algoritmen, slik oppgaven spør etter.

c)

Vi har nå gitt det initielle tablået

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS	FHT
Z	1	-24	-8	-15	0	0	0	0	
s_1	0	3	1	2	1	0	0	40	
s_2	0	2	1	0	0	1	0	20	
s_3	0	5	2	3	0	0	1	80	

i tillegg til deler av det optimale tablået:

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1				15/2	3/4	0	
x_3	0				1/2	-3/4	0	
x_1	0				0	1/2	0	
s_3	0				-3/2	-1/4	1	

Fra delene i det optimale tablået ser vi at første linje i optimalt tablå kan skrives som 1*første linje + 15/2*andre linje + 3/4*tredje linje + 0*fjerde linje i det opprinnelige tablået:

1*(1 -24 -8 -15 0 0 0 0)

\+ 15/2*(0 3 1 2 1 0 0 40)

\+ 3/4*(0 2 1 0 0 1 0 20)

\+ 0*(0 5 2 3 0 0 1 80)

= (1 0 1/4 0 15/2 3/4 0 315)

Tilsvarende kan vi skrive andre linje i optimalt tablå som 0*første linje + 1/2*andre linje – 3/4*tredje linje + 0*fjerde linje i opprinnelig tablå:

0*(1 -24 -8 -15 0 0 0 0)

\+ 1/2*(0 3 1 2 1 0 0 40)

\- 3/4*(0 2 1 0 0 1 0 20)

\+ 0*(0 5 2 3 0 0 1 80)

= (0 0 -1/4 1 1/2 -3/4 0 5)

Vi kan skrive tredje linje i optimalt tablå som 0*første linje + 0*andre linje + 1/2*tredje linje + 0*fjerde linje i opprinnelig tablå.

Fjerde linje i optimalt tablå kan skrives som 0*første linje – 3/2*andre linje – 1/4*tredje linje + 1*fjerde linje i opprinnelig tablå.

Vi får da:

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	0	1/4	0	15/2	3/4	0	315
x_3	0	0	-1/4	1	1/2	-3/4	0	5
x_1	0	1	1/2	0	0	1/2	0	10
s_3	0	0	1/4	0	-3/2	-1/4	1	15

d)

Optimal løsning for det primale problemet er (ikke-basisvariabler har verdi 0, og basisvariablene har verdier som angitt på høyresiden (RHS)): $x_1 = 10$ og $x_3 = 5$ (og $x_2 = 0$), med målfunksjonsverdi $Z = 315$.

e)

Svaret ligger i skyggeprisene (det vil si reduserte kostnader til slakkvariablene, eller verdien til dualvariablene). Det vil si, bedriften er villig til å betale 15/2 per enhet ekstra treverk, 3/4 per enhet ekstra lær, og ingenting for flere arbeidstimer.

f)

Vi er interessert i å se hva som skjer når koeffisienten foran x_3 i målfunksjonen endrer seg. Hvis koeffisienten endrer seg med Δ (til $15+\Delta$) vil tablået endre seg til:

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	0	1/4	$-\Delta$	15/2	3/4	0	315
x_3	0	0	−1/4	1	1/2	−3/4	0	5
x_1	0	1	1/2	0	0	1/2	0	10
s_3	0	0	1/4	0	−3/2	−1/4	1	15

I så fall må vi legge til målfunksjonsraden Δ ganger linjen hvor x_3 er basisvariabel (for å få at den reduserte kostnaden til x_3 blir 0). Dette vil gi:

BV	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	0	$1/4 - \Delta/4$	0	$15/2 + \Delta/2$	$3/4 - 3\Delta/4$	0	$315 + 5\Delta$
x_3	0	0	−1/4	1	1/2	−3/4	0	5
x_1	0	1	1/2	0	0	1/2	0	10
s_3	0	0	1/4	0	−3/2	−1/4	1	15

For at produktmiksen skal være uendret må alle reduserte kostnader her være ikke-negative. Det vil si:

$1/4 - \Delta/4 \geq 0$, som gir $\Delta \leq 1$

$15/2 + \Delta/2 \geq 0$, som gir $\Delta \geq -15$

$3/4 - 3\Delta/4 \geq 0$, som gir $\Delta \leq 1$

Med andre ord kan prisen endre seg mellom [0, 16] uten at optimal produktmiks endrer seg.

Oppgave 2

a)

Vi definerer først følgende beslutningsvariable:

y_i = antall vindmøller i park i, $i = 1{,}2$ (heltallsvariabel)

$x_{li} = 1$ dersom overføringskabel l benyttes for vindmøllepark i, og 0 ellers (binærvariabel)

Vi ønsker å minimere kostnader samtidig som vi må tilfredsstille følgende restriksjoner:

1. Øvre grense på antall vindmøller i hver park.
2. Overføringskapasiteten må være minst like stor som det som totalt (gjennomsnittlig) produseres i hver vindmøllepark.
3. Det kan kun være én overføringskabel fra hver vindmøllepark.
4. Kontraktsforpliktelser for levering av strøm.

Dette kan vi da modellere på følgende måte (restriksjonsnumrene sammenfaller med listen over):

$$\min z = \sum_{i=1}^{2} C^M y_i + \sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{2} C_{li}^L x_{li} \qquad (0)$$

$$y_i \le N \qquad i = 1{,}2 \qquad (1)$$

$$P_i y_i \le \sum_{l=1}^{L} Q_l x_{li} \qquad i = 1{,}2 \qquad (2)$$

$$\sum_{l=1}^{L} x_{li} \le 1 \qquad i = 1{,}2 \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{2} P_i y_i \ge D \qquad (4)$$

$$y_i \ge 0, \text{ og heltallig} \qquad i = 1{,}2 \qquad (5)$$

$$x_{li} \in \{0{,}1\} \qquad l = 1{,}2,\dots,L \text{ og } i = 1{,}2 \qquad (6)$$

En kan legge merke til at det i restriksjon (3) er ≤ og ikke =. Det er fordi en ikke nødvendigvis behøver noen overføringskabel dersom en ikke velger å ha noen vindmøller i den aktuelle parken.

b)

Nå er det altså opptil tre mulige vindmølleparker, så variablene y_i og x_{li} må defineres for $i = 1,2,3$. Det samme gjelder for restriksjonene (1), (2), (3) og (5). I tillegg definerer vi nå en ny variabel δ_3 som er lik 1 dersom bedriften etablerer den tredje vindmølleparken, og 0 ellers.
Den opprinnelige modellen må dermed endres som følger:

$$\min \mathrm{z} = \sum_{i=1}^{3} C^M y_i + \sum_{l=1}^{L} \sum_{i=1}^{3} C_{li}^L x_{li} + C^I \delta_3 \qquad (0')$$

$$y_i \le N \qquad i = 1,2,3 \qquad (1')$$

$$P y_i \le \sum_{l=1}^{L} Q_l x_{li} \qquad i = 1,2,3 \qquad (2')$$

$$\sum_{l=1}^{L} x_{li} \le 1 \qquad i = 1,2,3 \qquad (3')$$

$$\sum_{i=1}^{3} P y_i \ge D \qquad (4')$$

$$y_i \ge 0, \text{ og heltallig} \qquad i = 1,2,3 \qquad (5')$$

$$x_{li} \in \{0,1\} \qquad l = 1,2,\dots,L \text{ og } i = 1,2,3 \qquad (6')$$

En kan imidlertid merke seg at dersom $x_{l3} = 1$, betyr det at en velger overføringskabel l fra vindmøllepark 3 til park 1. Det betyr videre at den valgte overføringskabelen fra park 1 til land må ha tilstrekkelig kapasitet til å kunne overføre det som produseres fra begge vindmølleparkene 1 og 3. Dette må inn i en ny restriksjon som følger:

$$P y_1 + P y_3 \le \sum_{l=1}^{L} Q_l x_{l1} \qquad (7')$$

En må også sikre seg at en kun bygger vindmøller i park 3 dersom en faktisk har etablert vindmølleparken (altså at $\delta_3 = 1$). Den følgende restriksjonen vil sikre dette:

$$y_3 \le N \delta_3 \qquad (8')$$

$$\delta_3 \in \{0,1\} \qquad (9')$$