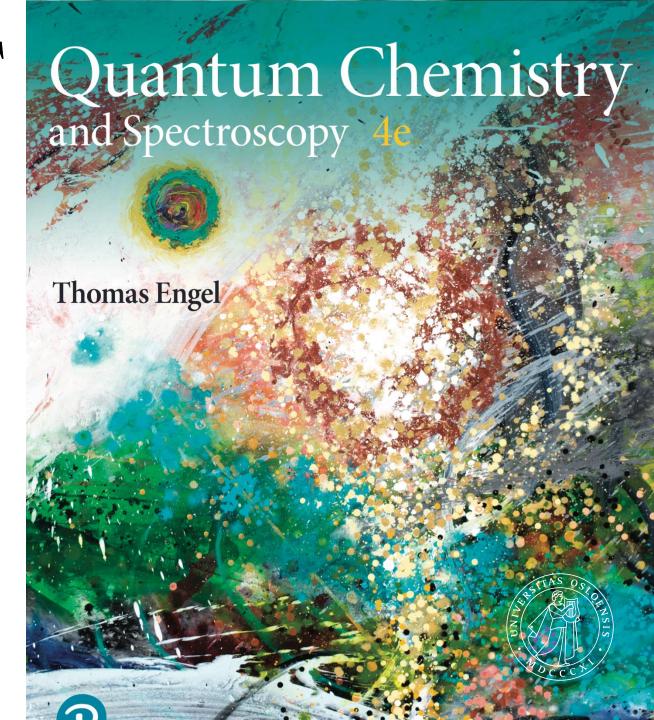
UNIVERSITETET I OSLO

KJM2601 – forelesning 9 og 10

Simen Kvaal (simen.kvaal@kjemi.uio.no) Førsteamanuensis Hylleraassenteret

25-26/9/2024



Litt repetisjon fra forrige uke

En kjapp menti ...

Total bevegelse = Translasjon + rotasjon + vibrasjon

Vi har følgende tilnærming for kjernebevegelse

$$\hat{H}_{nuc} \approx \hat{H}_{vib} + \hat{H}_{rot} + \hat{H}_{trans}$$

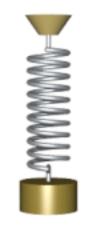
$$\Psi_{tot} \approx \Psi_{vib}(\mathbf{R}_{int})\Psi_{rot}(\phi, \theta, \psi)\Psi_{trans}(\mathbf{R}_{CM})$$

- Translasjon: bevegelse av massesenter, som fri partikkel
 - Små energier
- Rotasjon: rotasjon av molekylet om massesenter
 - Medium energier
- Vibrasjon: kollektive vibrasjoner av molekylet
 - Større energier
- Dette motiverer oss til å studere hver enkelt komponent separat
- Vi skal snart se på Born-Oppenheimer-tilnærmingen

Harmonisk oscillator

- Beskriver vibrasjonsbevegelse med konstant frekvens
 - Klassisk:

$$H(x,p) = \frac{1}{2\mu}p^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

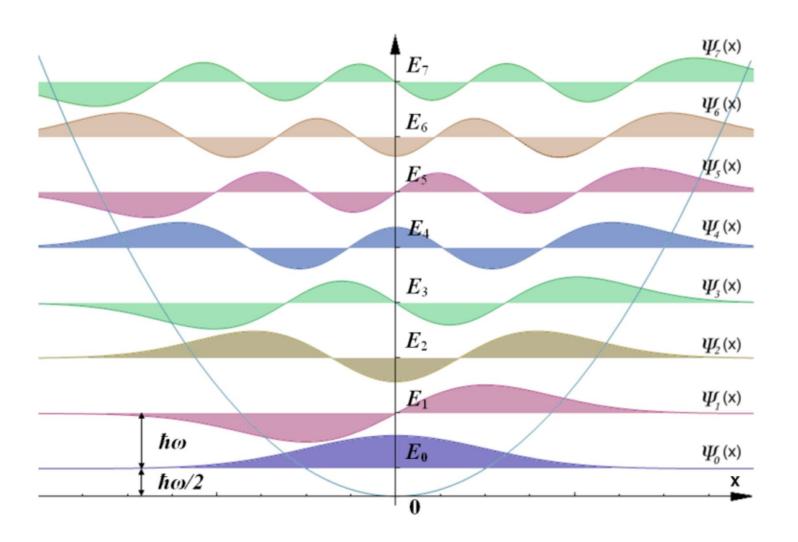


Kvantemekanisk

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2 \qquad \hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

$$\psi_n(x) = \frac{(\alpha/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\alpha^{1/2} x) e^{-\alpha x^2/2}$$

Egenfunksjonene til H.O.



Klassisk grense

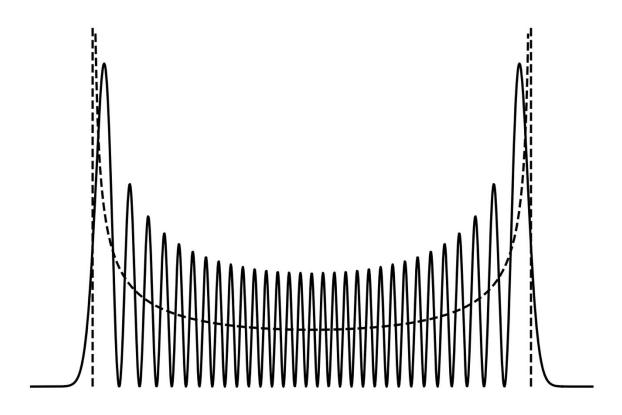


Figure: Sannsynlighetstettheten $|\Psi_{30}(x)|^2$ (oscillerende funksjon) sammenlignet med klassisk sannsynlighetstetthet (stiplet funksjon) og klassisk forbudt område (stiplet vertikal linje)

H.O. og molekylære vibrasjoner

- "Harmonisk tilnærming"
- Det ekte potensialet likner veldig på H.O. nær likevekt

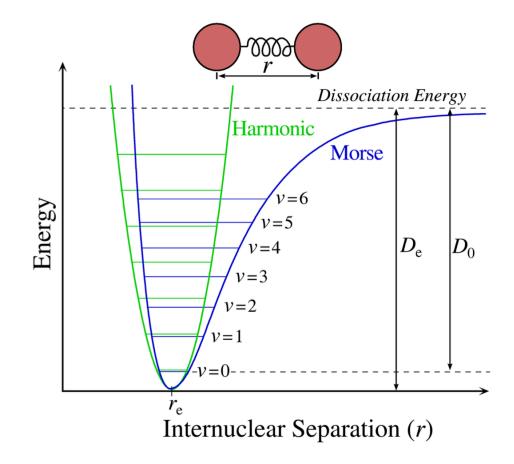


Figure: I nærheten av likevektsavstanden r_e ligner potensialet som funksjon av avstanden mellom atomene r, på en harmonisk oscillator.

Rotasjon i planet

• Totasjonsbevegelse for rigid rotor i planet:

$$\hat{H} = \frac{1}{2I}\ell_z^2, \quad \ell_z = I\dot{\theta}, \quad I = mr$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

Merk: samme uttrykk som for "fri partikkel"

$$\theta \leftrightarrow x$$
, $\ell_z \leftrightarrow p_x$, $I \leftrightarrow m$

•Men! Vinkel er periodisk, det er ikke x

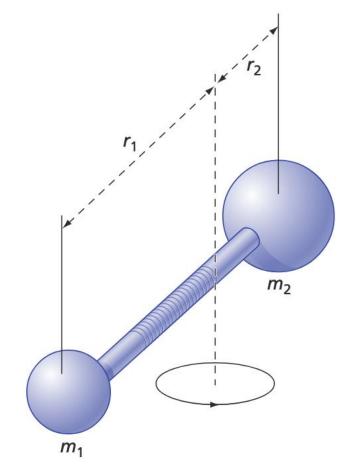


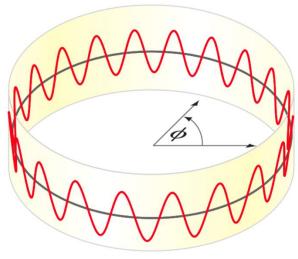
Figure 7.3

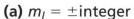
Sketch of a rigid rotor. A rigid rotor consisting of two masses is separated by a fixed distance. The dashed vertical line is the axis of rotation and is perpendicular to the plane of rotation and passes through the center of mass.

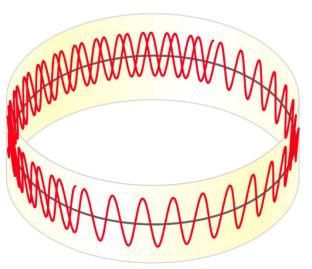
Kvantemekanisk rotasjon i planet

Hamiltonoperator og SL:

$$\hat{H} = \frac{1}{2I}\hat{\ell}_z^2 = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \qquad \hat{H}\psi_m(\phi) = E_m\psi_m(\phi) \qquad \psi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}, \quad E_m = \frac{\hbar^2m^2}{2I}$$







(b) $m_l \neq \pm integer$

m må være et heltall, ellers er ikke <u>randbetingelsene</u> oppfylt

Rotasjon i 3D

- •Angulærmoment: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad L_z = xp_y yp_x, \dots$
- Klassisk Hamiltonfunksjon

$$H(\theta, \phi, \mathbf{L}) = \frac{1}{2I} |\mathbf{L}|^2$$

•Rotasjon om en akse, konstant vinkelfrekvens $|\mathbf{L}| = I\omega$

•Kvantemekanisk: $\hat{H} = \frac{1}{2I}(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2)$

$$\hat{H}Y_l^{m_l}(\theta,\phi) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I} Y_l^{m_l}(\theta,\phi)$$

Kuleflatefunksjoner

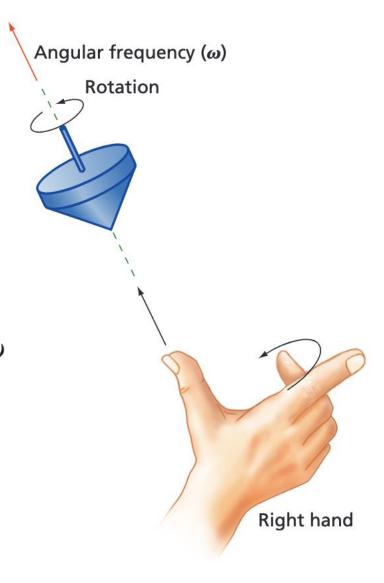


Figure 7.5

Use of the right-hand rule to determine the direction of the angular velocity vector.

Introduksjon til spektroskopi

Spektroskopi er et fantastisk verktøy

- Spektroskopi = analyse spektre fra eksperimenter der molekyler utsettes for elektromagnetisk stråling
- •En kan finnne:
 - Molekylstruktur
 - Båndlengder og vinkler
 - Elektroniske overganger
 - Vibrasjonelle moder
 - Rotasjonsoverganger
 - ... Og mye mer ...

Hvilke typer spektroskopi skal vi studere?

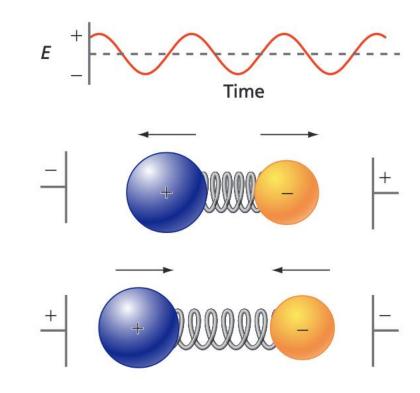
- Vibrasjonell spektroskopi
 - IR-spektroskopi (absorspsjon, elastisk spredning av lys)
 - Raman-spektroskopi (uelasisk spredning av lys)
- Rotasjonell spektroskopi
 - Også kalt MW-spektroskopi
- Elektronspektroskopi
 - Også kalt UV/VIS spektroskopi
- Elektron-paramagnetisk resonans-spektroskopi (EPR)
 - Resonante uparede elektroner i magnetfelt,
 - Stråling i MW-regimet
- Kjerne-magnetisk resonans (NMR)
 - Kjernene vekselvirker med MW-stråling og magnetfelt

Grunnleggende mekanisme

- •Intuisjon:
 - Et molekyl utsettes for EM-bølger
 - Ladede partikler akselereres
 - Molekylet kan ta opp energi
- •Energinivåene er kvantiserte:

$$|E_1 - E_2| = h\nu = hc\tilde{\nu}$$

Frekvens

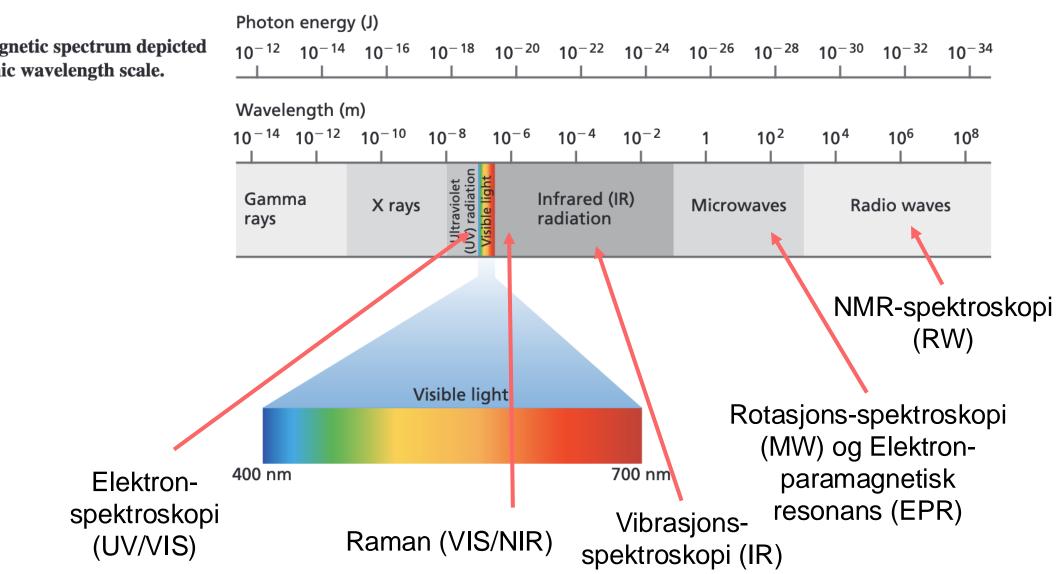


- Måler man spektret vil man finne "features" på de relevante frekvensene
- •Spektroskopister måler ofte energi ved help av bølgetallet: \tilde{v} [cm⁻¹]

Det elektromagnetiske spektrum



The electromagnetic spectrum depicted on a logarithmic wavelength scale.



UNIVERSITETET **I OSLO**

Maxwells likninger og Born-Oppenheimer

- Vekselvirkning mellom EM-stråling og kvantemekaniske partikler
- Vi skal gå gjennom Maxwells likninger
 - For å forstå litt om hvordan EM-bølger oppfører seg
- Vi skal gå gjennom Born-Oppenheimer-tilnærmingen
 - For å forstå hierarkiet av rotasjoner, vibrasjoner, og elektroniske eksitasjoner
- Dette er delvis orienteringsmateriale
- Lite om dette i Engel
- Notat: ...

Born-Oppenheimer-tilnærmingen

Molekylets partikler

• N elektroner, ladning e, masse m_e

$$r = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N)$$

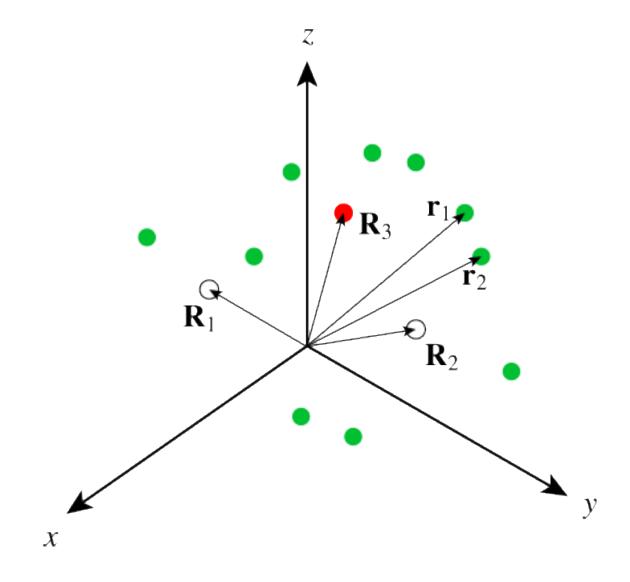
• N_{nuc} kjerner, ladning $-eZ_a$, masse M_a

$$R=(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\cdots,\mathbf{R}_{N_{nuc}})$$

• Kjernene er <u>tunge</u>

$$\frac{m_{proton}}{m_e} \approx 1836$$

•De vil bevege seg sakte



Fastklemt kjerne-tilnærming

- Vi antar først at kjernene ligger i ro
- Kun elektronene er kvantemekaniske

$$\Psi_e = \Psi_e(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N).$$

Hamiltonoperator:

$$\hat{H}_{e} = -\frac{\hbar^{2}}{2m_{e}} \sum_{i=1}^{N} \nabla_{i}^{2} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{a=1}^{N_{a}} \frac{-e^{2}Z_{a}}{4\pi\varepsilon_{0}|\mathbf{r}_{i} - \mathbf{R}_{a}|} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{e^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}|\mathbf{r}_{i} - \mathbf{r}_{i}|}$$

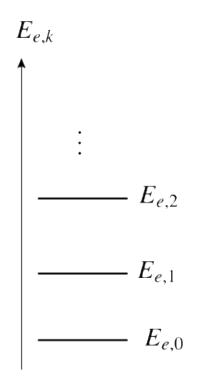
$$= \hat{T}_{e} + \hat{V}_{ne} + \hat{V}_{ee}$$

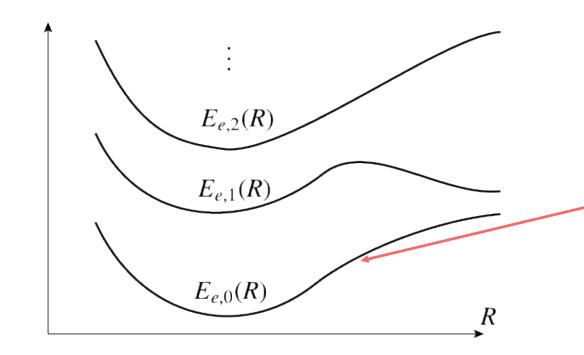
$$\hat{H}_e \Psi_{e,k} = E_{e,k} \Psi_{e,k}.$$

•Vi løser tidsuavhengig SL:
$$\hat{H}_e \Psi_{e,k} = E_{e,k} \Psi_{e,k}$$
. $\langle \Psi_{e,k} | \Psi_{e,k} \rangle = \int d^N r |\Psi_{n,k}|^2 = 1$

Potensialenergiflaten

- •Vi løste SL for fiksert R
- Varierer vi R får vi potensialenergiflater





For hvert punkt på kurven har vi også en bølgefunksjon

$$\Psi_{e,0}(R)$$

Kjernebevegelse i elektronpotensial

 Adiabatisk hypotese: Elektronene er alltid i en egentilstand, siden de beveger seg så utrolig fort!

$$\Psi(R, r) = \Psi_n(R)\Psi_e(r; R),$$

$$\hat{H}_e \Psi_e(r;R) = E_e(R) \Psi_e(r;R).$$

Total Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{tot} = \hat{T}_n + \hat{V}_{nn} + \hat{H}_e$$

Innsetting i tidsuavhengig SL gir:

Som regel svært liten!

$$[\hat{T}_n + \hat{V}_{nn}(R) + E_e(R) + U(R)]\Psi_n(R) = E_{\text{tot}}\Psi_n(R)$$

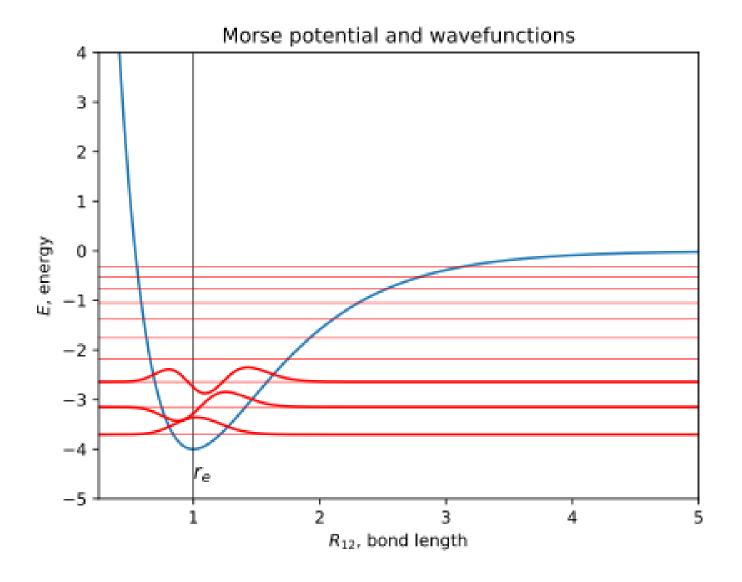


Morse-potensial

 Analytisk løsbar modell for vibrasjoner i toatomige molekyl

$$V(R) = D_e (1 - e^{-\alpha(R - r_e)})^2 - D_e$$

- Kvalitativt korrekt
- Noen egenfunksjoner er vist



Maxwells bølgelikninger

Lorentz-kraften

•En klassisk ladet partikkel i et EM-felt opplever en kraft

Lorentz-kraften

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- •E: Elektrisk felt, definert overalt i rom og tid
- •B: Magnetisk felt, definert overalt i rom og tid
- Lorentz forteller hvor ladningene skal bevege seg, gitt EM-feltene
- •Vi må gå fra klassisk til kvantemekanisk beskrivelse av kraften
 - Schrödinger!

Maxwells bølgelikninger

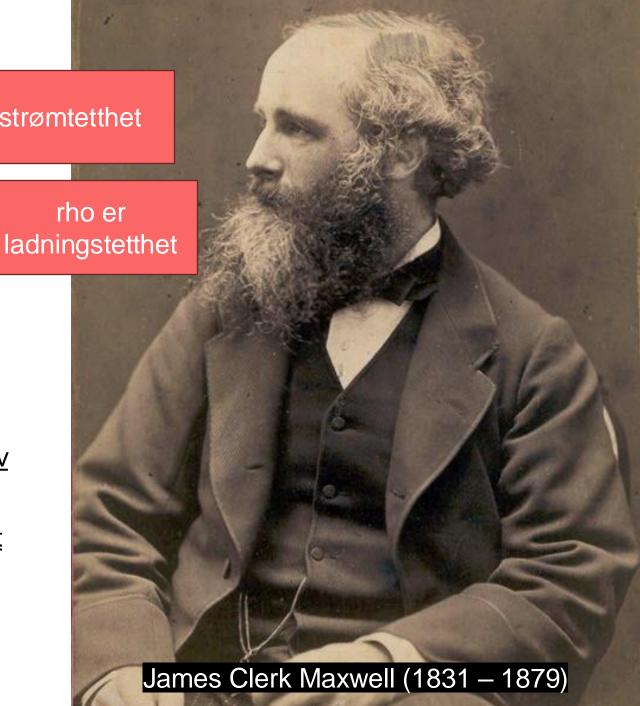
Bevegelsesloven for EM-felter

J er strømtetthet

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}$$

- Et par av (inhomogene) bølgelikninger
- Om tetthet og strøm er null, standard ikkedispersiv <u>bølgelikning</u>
- Maxwell forteller hvordan EM-felter utbrer seg, gitt ladningsfordelinger og deres tidsendringer



Planbølger

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

$$|\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{E}|}{c}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})$$

•Feltene ortogonale til utbredelsesretning

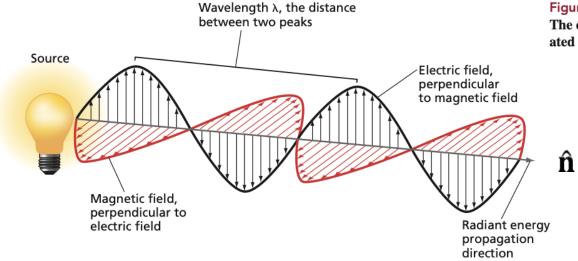


Figure 8.2

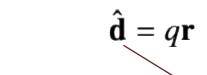
The electric and magnetic fields associated with a traveling light wave.

Fra Lorentz til Schrödinger: Vekselvirkning med elektromagnetisk felt

Dipolapproksimasjonen

•Kvantemekanisk Hamiltonoperator, svake felter med lang bølgelengde:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 + V(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}$$



- •Forteller hvor partikkelen skal gå, gitt eksternt felt.
- •For alle partiklene i et molekyl, en dipol per partikkel!

$$\hat{\mathbf{d}}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} e\mathbf{r}_i - \sum_{a=1}^{N_{nuc}} eZ_a\mathbf{R}_a$$
$$= \hat{\mathbf{d}}_e(r) + \hat{\mathbf{d}}_n(R),$$

Dipoloperator

Dipoloperator i BO-tilnærming

•Dipoloperator for kjernebevegelse fås ved å integrere ut elektronbevegelse:

$$\int d^N r \Psi_e(r;R)^* \hat{\mathbf{d}}_{tot} \Psi_{tot}(r,R) = \hat{\mathbf{d}}_n(R) \Psi_n(R) + \mu_e(R) \Psi_n(R)$$

$$\mu_e(R) = \langle \Psi_e | \hat{\mathbf{d}}_e | \Psi \rangle = e \sum_{i=1}^N \int d^N |\Psi_e(r; R)|^2 \mathbf{r}_i$$

En slags "dipolpotensialflate"

Hamiltonoperator ved vekselvirkning med felt:

$$\hat{H}(t) = \hat{T}_n + \hat{V}_{nn} + E_e(R) - \hat{\boldsymbol{\mu}}(R) \cdot \mathbf{E}(t)$$

Teoretisk grunnlag for mye av spektroskopien!

Ekstra term

Dipoloperator gir dipolmoment

•Dipoloperatoren er observabelen for dipolmoment.

- Dipolmomentet til et molekyl har 2 komponenter:
 - Dipol fra kjernenes ladningsfordeling $\hat{\mathbf{d}}_{nuc}(R)$
 - Dipol fra elektronenes ladningsfordeling $\mu_e(\mathbf{R})$

$$\mu_{tot} = \langle \hat{\mathbf{d}}_{tot} \rangle = \langle \Psi_{nuc} | \hat{\mathbf{d}}_{nuc} + \mu_e(\mathbf{R}) | \Psi_{nuc} \rangle$$

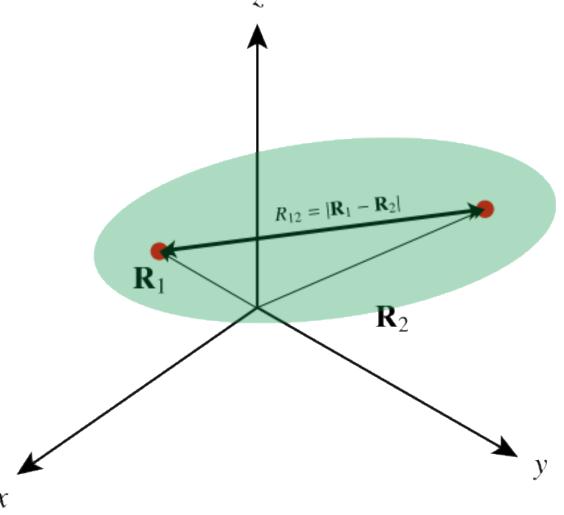
Homonukleære toatomige molekyl har intet permanent dipolmoment

- •Kun avstanden R_{12} som variabel grunnet symmetri
- •Elektrontettheten er symmetrisk fordelt
- Intet elektrondipolmoment

$$\mu_e(R_{12}) = 0 !$$

•Kjernene er også symmetrisk fordelt:

$$\mu_{tot} = \langle \mu_{nuc} \rangle = 0 !$$



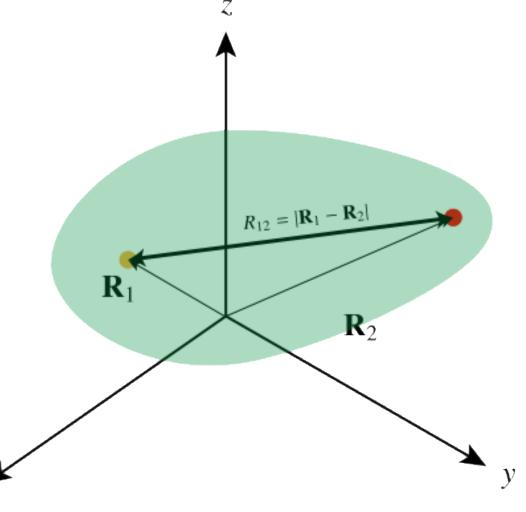
Heteronukleære toatomige molekyl <u>har</u> permanent dipolmoment

- •Kun avstanden R_{12} som variabel grunnet symmetri
- •Elektrontettheten er ikke symmetrisk fordelt
- Elektrondipolmoment

$$\mu_e(R_{12}) \neq 0$$
!

- •Kjernenes ladning <u>kan</u> være symmetrisk (isotopisk substitusjon), men som regel ikke
- Uansett

$$\mu_{tot} = \langle \mu_{nuc} \rangle \neq 0$$
!

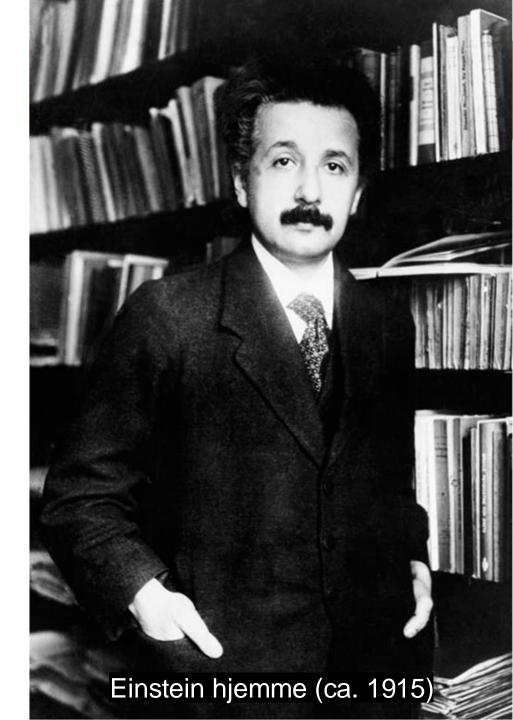


Absorbsjon, stimulert emisjon, og spontan emisjon

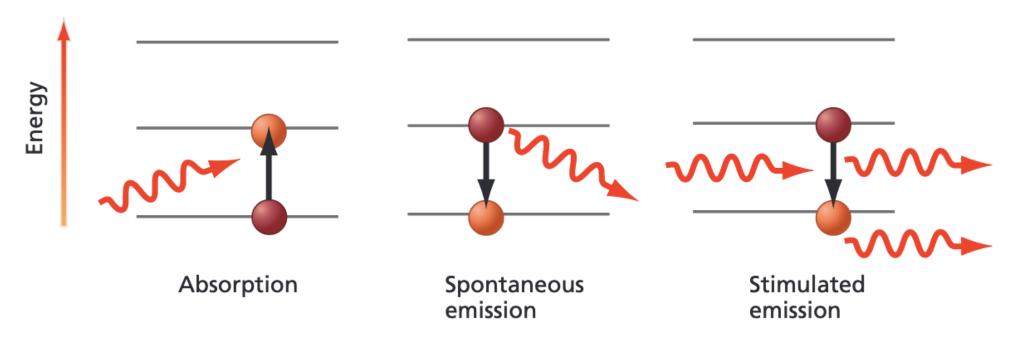
Zur Quantentheori der Strahlung

- Klassisk arbeid av Einstein, først publisert i 1916
- Dette var *lenge før Schrödinger*
- Ønsket å utlede Plancks strålingslov
- Stort sett klassiske argumenter
- Introduserer "stasjonære tilstander"
 - Også en sannsynlighetstolkning for atomer
 - Klassisk sett nonsens, siden klassiske elektroner i Bohr-baner skulle sende ut stråling

Les en gjennomgang av paperet her!



3 fundamentale prosesser for foton-assisterte overganger



- Absorbsjon: Et foton "brukes" til å heve energien (fotonet destrueres)
- Spontan emisjon: Et foton sendes ut på et tilfeldig tidspunkt (et foton kreeres)
- •Stimulert emisjon: Et foton "spretter" på atomet, får det til å gå ned i energi og sende ut foton (et foton kreeres i tillegg til det gamle)

Ratelikninger

- Vi ser for oss mange identiske atomer
 - *N*₁: antall atomer i grunntilstanden
 - N₂: antall atomer i eksitert tilstand
- • A_{21} : sannsynlighet per tid for spontan emisjon av foton
- •Et foton med *E=hv* er innkommende:
 - B_{12} : koeffisient for at et foton blir absorbert
 - B_{21} : koeffisient for at et foton blir emittert
 - Total sannsynlighet avhenger også av spektral tetthet

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12}\rho(\nu)N_1 + B_{21}\rho(\nu)N_2 + A_{21}N_2$$

$$\frac{dN_2}{dt} = B_{12}\rho(\nu)N_1 - B_{21}\rho(\nu)N_2 - A_{21}N_2$$

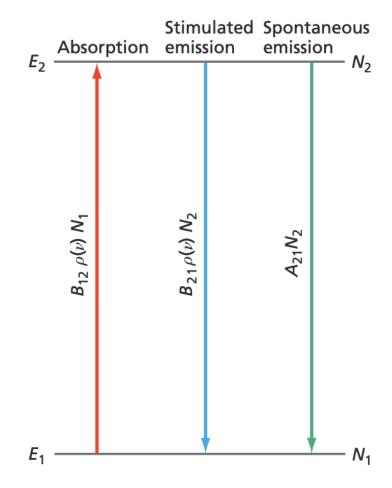


Figure 8.5

Termisk likevekt

Termisk likevekt: Ingen endring i populasjonene (steady state)

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{-\Delta E/k_B T} \qquad B_{12} \rho(\nu) N_1 = B_{21} \rho(\nu) N_2 + A_{21} N_2$$

•En kan vise (fra tidsavhengig SL):

$$B_{12} = B_{21}$$

Ved å anta Plancks lov fant Einstein relasjonen

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{16\pi^2\hbar\nu^3}{c^3}$$

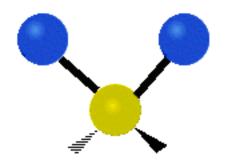
•En kan også vise dette direkte fra kvantefeltteori!

Vibrasjonsspektroskopi (IR-spektroskopi)

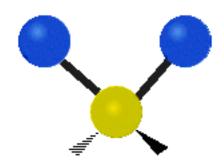
To grunner til at vibrasjonsspektroskopi har blitt så nyttig

- 1. Vibrasjonsfrekvensene primært avhengig av <u>identiteten til par eller små grupper</u> av atomer
 - Gruppefrekvenser
- Det er bare 1 observerbar frekvens av nevneverdig størrelse assosiert med hver vibrasjonsmode
 - Fra seleksjonsregler og Boltzmann-fordelingen
- Vibrasjonsspektroskopi lar oss feks:
 - Identifisere funksjonelle gruppers tilstedeværelsre
 - Analysere molekylgeometri

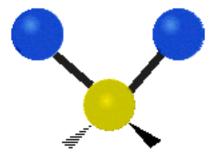
Karakteristiske vibrasjonelle moder



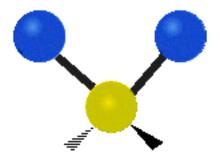
Symmetrisk strekk



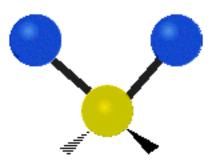
Asymmetrisk strekk



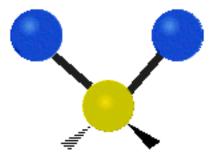
Vridning



Vagging



Saksebevegelse

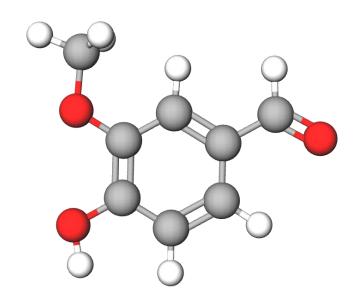


Vipping

Eksempel

- På ChemTube3D er det mange flotte visualiseriner av molekylære vibrasjoner
- Vi skal se på vanillin
 - Aromatisk bestanddel i vanilje
 - Produseres i store mengder som biprodukt fra celluloseindustrien
- Vanillin viser svært tydelig gruppefrekvenser
 - 3784 cm⁻¹: Hydroksyl-gruppe strekk
 - 3263 cm⁻¹: Alken-gruppe symmetrisk strekk
 - 3250 cm⁻¹: Alken-gruppe asymmetrisk strekk
 - 3053 cm⁻¹: Metyl-gruppe symmetrisk strekk
 - 860 cm⁻¹: Alken-gruppe vagging







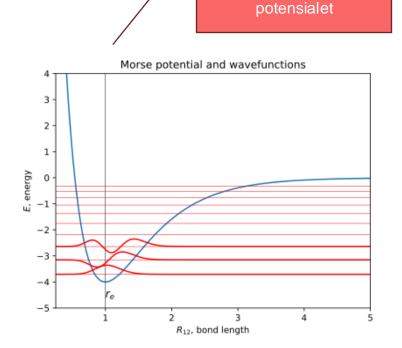
Populasjoner for vibrasjonelle tilstander ved romtemp.

 For de fleste toatomige molekyler er det kun vibrasjonell grunntilstand som er signifikant populert

Men <u>overtoner kan også observeres</u>

TABLE 8.2 Vibrational State Populations for Selected Diatomic Mo	lecules
--	---------

Molecule	$\widetilde{\nu}$ (cm ⁻¹)	$\nu (s^{-1})$	N_1/N_0 for 300. K	N_1/N_0 for 1000. K
Н–Н	4400	1.32×10^{14}	6.78×10^{-10}	1.78×10^{-3}
H–F	4138	1.24×10^{14}	2.44×10^{-9}	2.60×10^{-3}
H–Br	2649	7.94×10^{13}	3.05×10^{-6}	2.21×10^{-2}
N-N	2358	7.07×10^{13}	1.23×10^{-5}	3.36×10^{-2}
C-O	2170	6.51×10^{13}	3.01×10^{-5}	4.40×10^{-2}
Br–Br	323	9.68×10^{12}	0.213	0.628



Vibrasjonelle tilstander

illustrert med Morse-

Seleksjonsregler fra dipolmoment

- •Kvantemekanisk perturbasjonsteori (om hvordan små forstyrrelser påvirker en tilstand):
 - Mulig overgang mellom tilstand *n* og *m* dersom

Overgangsdipolmoment

$$\boldsymbol{\mu}_{k,l} = \langle \Psi_{n,k} | \hat{\mathbf{d}} | \Psi_{n,k} \rangle \neq 0$$

- Harmonisk approksimasjon + toatomig molekyl:
 - *k l* = oddetall
- Vi gjør utledningen på tavla, se Engel 8.4.
- Konklusjon:
 - Overgang fra k=0 til l=1 som er <u>overveldende synlig</u>

Dynamisk dipolmoment kreves for overgang

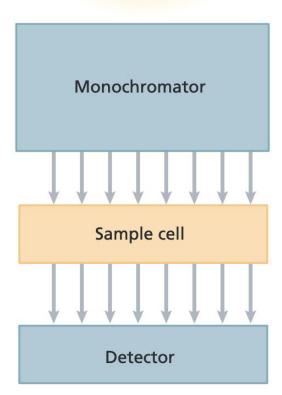
IR absorbsjonsspektroskopi i "praksis"

- •Mål: Beregne absorpsjon som funksjon av frekvens
- •Beer-Lambert:

$$I(\lambda) = I_0(\lambda)e^{-\epsilon(\lambda)Ml}$$

- • λ = c/ ν , bølgelengde
- •M = konsentrasjon av absorbant
- l = lysets veilengde/prøvens lengde
- • $I_0(\lambda)$ = innkommende intensitet
- • $I(\lambda)$ = utgående intensitet
- • $\epsilon(\lambda)$ = molar absorpsjonskoeffisient

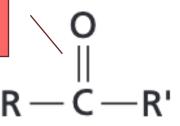




Molar absorbsjonskoeffisient

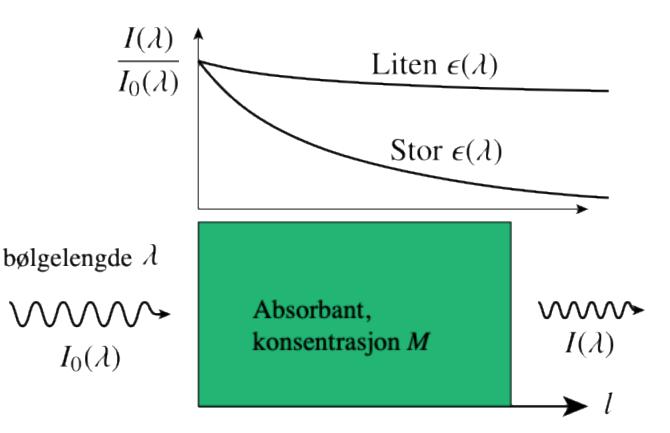
- Absorbant absorberer bølgelengder nær vibrasjonsfrekvenser
- Dersom overgangen endrer dipolmomentet mye: sterkere signal
- Karbonylgruppe:

Tenk på harmonisk oscillator



 Båndet har karakteristisk kraftkonstant

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

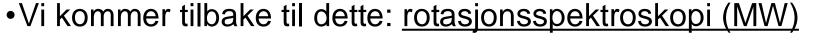


Fleratomige molekyl: Normalmoder

- Vi har sett at 2-atomige molekyl har 1 forventet frekvens strekk av bånd
- •For fleratomige molekyl (*N* atomer):
 - 3N totalt antall frihetsgrader
 - 3 translasjonsfrihetsgrader, 3 rotasjonsfrihetsgrader (2 for lineære molekyl)
 - Lineære molekyl: 3N 5 frekvenser
 - Andre molekyl: 3N 6 frekvenser
 - Noen frekvenser er degenererte, dvs. identiske
 - Gruppeteori brukes for å forklare dette
 - I prinsippet svinger <u>alle atomene normalmoder</u>
- Enkelte moder er dominert av karakteristiske grupper og gruppefrekvenser

Eksempel fra boka

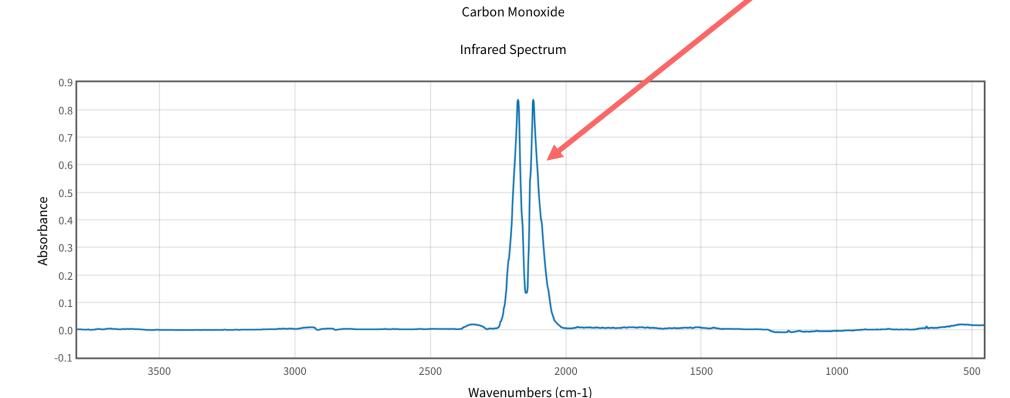
- •Hvorfor har ikke CO bare 1 tydelig topp i signalet?
- Rotasjoner er også eksitert



(Kilde: nist.gov)

UNIVERSITETET

LOSLO





MW-spektroskopi

Angulærmoment og seleksjon

- •Rotasjonsenergier tilsvarer typisk mikrobølgeområdet
- •MW-stråling har som regel for lite energi til å eksitere vibrasjoner
- Notasjon for angulærmoment for molekyler:

$$l \longrightarrow J$$

Seleksjonsregler:

$$\Delta J = J_{slutt} - J_{start} = \pm 1$$

Eksempel: Overgang fra *J*=0 til *J*=1 og *J*=2