1 Teorija

1 S formulami napišite definije relacij **a)** $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$; **b)** $f(n) = \Omega(h(n))$; in **c)** $f(n) = \Theta(k(n))$;

2 Izpeljite asimptotično (Θ) zahtevnost funkcije $f(n) = 8^{log_2 n}$.

3 Kdaj rečemo, da ima algoritem *psevdo*-polinomsko časovno zahtevnost?

4 **a)** Katere grafe lahko topološko uredimo? **b)** V psevdokodi napišite algoritem za topološko urejanje grafa $G(V, E)$.

5 Dan je označen graf $G(V, E, c)$, kjer je $c_{i,j}$ cena povezave (i, j), $|V| = n$ in $|E| = m$. Graf je topološko urejen. Napišite sistem Bellmanovih enač za G.

6 Problem P rešujemo z metodo *deli in vladaj* takole: P razdelimo v podprobleme (iste vrste kot P), od katerih je vsak velikosti $n/2$. Sedem podproblemov rešimo in iz njihovih rešitev sestavimo rešitev problema P. Priprava podproblemov in sestavljanje njihovih rešitev v končno skupaj terjata $5n^2$ časa. Kakšna je asimptotična časovna zahtevnost tega algoritma? Odgovor utemelji.

7 Za vsakega od spodnjih algoritmov povejte: a) Kakšen problem rešuje? b) Kakšne časovno zahtevnost $O(f(n))$ ima? Pri vsakem odgovoru povejte, kaj pomeni n.

1. Dvojiško iskanje
   a)
   b)
2. Quicksort
   a)
   b)
3. Heapsort
   a)
   b)
4. Bubblesort
   a)
   b)
5. Topološko urejanje grafa
   a)
   b)
6. FFT
   a)
   b)
7. Strassenovo množenje
   a)
   b)
8. Ford-Fulkersonov alg.
   a)
   b)
9. Bellman-Fordov alg.
   a)
   b)
10. Floyd-Warshallov alg.
    a)
    b)

8 Zapišite Floyd-Warshallov algoritem (psevdokoda) za računanje dolžin najkrajših poti med vsemi pari vozlišč grafa $G(V, E)$. Graf opisuje matrika sosednosti C reda $n \times n$, kjer je $C[i, j]$ cena povezave (v_i, v_j).

9 Izpeljite asimptotično (Θ) zahtevnost funkcije $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \log k$.

10 Naj bo G splošen graf z n vozlišči in cenami povezav c_{ij}. Naj bo $u_i^{(p)} \equiv$ *cena najcenejše poti iz vozlišča 1 v vozlišče i, ki ima kvečjemu p povezav.* Zapišite Bellmanove enačbe, po katerih deluje Bellman-Fordov algoritem (za računanje najmanjših cen poti iz 1 do vseh vozlišč grafa G).

11 Zapišite strogo (formalno) definicijo Problema nahrbtnika.

12 Pretoki: pot, ki jo določajo vozlišča $v_1, v_2, \ldots, v_n$ usmerjenega grafa, ima povezave $e_{i,i+1} = (v_i, v_{i+1})$ s kapacitetami $c_{i,i+1}$ in trenutnimi tokovi $x_{i,i+1}$, kjer je $i = 1, \ldots, n-1$. Naj bosta $\mathcal{P}$ množica pozitivnih povezav na tej poti (usmerjenih k v_n) in $\mathcal{N}$ množica negativnih povezav na tej poti (usmerjenih k v_1). Zapišite (formalno) izraz, ki pove, za koliko lahko povečamo pretok iz v_1 do v_n po tej poti, da bo pot zasičena.

13 (a) Kakšna je asimptotična časovna zahtevnost (Θ) hitrega algoritma za iskanje k-tega elementa po velikosti med n urejenimi števili? (b) Opišite, kako pri tem algoritmu uporabimo metodo deli in vladaj.

14 Dana je funkcija $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$. Poiščite asimptotično zahtevnost $\Theta(f(n))$.

15 Za problem P razvijamo algoritem po metodi *deli in vladaj*. Izkaže se tole: P lahko razdelimo v štiri podprobleme (iste vrste kot P), kjer je vsak velikosti $n/3$; rešitev problema P se da sestaviti iz rešitev dveh izmed podproblemov; priprava podproblemov in sestavljanje njihovih rešitev zahtevata skupaj $5n$ časa. Izračunaj asimptotično časovno zahtevnost tega algoritma.

16 Zapišite strogo definicijo relacije $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, kjer sta f in g funkciji.

17 Kdaj pravimo, da je usmerjeni graf $G(\{1, \ldots, n\}, A)$ topološko urejen? Opišite algoritem za topološko ureditev usmerjenega grafa $G(\{1, \ldots, n\}, A)$.

18 Zapišite Warshallov algoritem za računanje dolžin najkrajših poti med vsemi pari vozlišč grafa $G(\{1, \ldots, n\}, E)$. Graf opisuje matrika sosednosti C reda $n \times n$, kjer je $C[i, j]$ dolžina povezave $\{i, j\}$. (Če $\{i, j\} \notin E$, je $C[i, j] = \infty$.) Kakšna je časovna zahtevnost tega algoritma?

19 Zapišite stroge definicije relacij

a) $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$,

b) $f(n) = \Omega(g(n))$,

c) $f(n) = \Theta(g(n))$.

2 Praksa

1 Kmetica Mica ima v svojem hlevu ovce (O) in koze (K), ki so trenutno razporejene v spodnje zaporedje. Pomagaj ji čim hitreje urediti živali tako, da bodo ovce pred kozami.

$$O, K, O, O, K, O, K.$$

1. Zapiši psevdokodo algoritma, ki uporabi natanko eno zanko, za urejanje takšnih zaporedij (permutacija oznak K in O).

2. Prikaži delovanje oz. sled zapisanega algoritma na zgoraj podanem zaporedju.

3. Je zapisani algoritem stabilen? Utemelji.

Mica se je odločila, da bo vse živali označila s tročrkovnimi oznakami, tako je dobila naslednje zaporedje oznak:

$$ona, kim, one, ono, kit, opa, kis.$$

4. Prikaži sled korenskega urejanja za podano zaporedje.

2 V obsegu Z_{29} bi radi naredili DFT polinoma $11x^3 + 3x^2 + 7x + 4$.
a) V množici števil $\{7, 12, 17, 28\}$ se skrivajo primerni kandidati za n-ti primitivni koren enote s katerim bi to transformacijo lahko naredili. Katera so torej primerna števila iz podane množice, da lahko naredimo DFT?
b) Katera števila (iz $\{7, 12, 17, 28\}$) bi lahko uporabili v algoritmu FFT (nad podanim polinomom)?
c) Z enim primernim PKE naredite FFT podanega polinoma. Jasno zapišite drevo izvajanja in kateri PKE se uporablja na katerem nivoju tega drevesa.

3 Želimo napisati program, ki bo izračunal podobnost dveh datotek, ki vsebujeta programsko kodo. Podobnost je definirana kot najdaljše skupno podzaporedje enakih vrstic, kjer podzaporedje ni nujno strnjeno (možne so torej poljubne vrzeli).

```
Datoteka 1:
int a = 1;
int b = 3;
if (a == 2)
{
      System.out.println("ABC");
      System.out.println("DEF");
}
```

```
Datoteka 2:
int a = 1;
if (a == 2)
{
      System.out.println("ABC");
}
System.out.println("KONEC");
```

Podobnost teh dveh datotek je 5, saj lahko najdemo skupno podzaporedje 1-1, 3-2, 4-3, 5-4, 7-5, kjer je prva številka vrstica v prvem programu in druga številka vrstica v drugem programu.

Algoritem naredimo po metodi dinamičnega programiranja. Vhod v algoritem sta datoteki x in y, kjer x_i predstavlja i-to vrstico in y_j predstavlja j-to vrstico teh datotek. Najdaljše skupno podzaporedje datotek lahko dobimo na osnovi spodnje enačbe:

$$P_{i,j} = \begin{cases} 0, & i = 0 \text{ ali } j = 0 \\ P_{i-1,j-1} + 1 & i, j > 0 \text{ in } x_i = y_j \\ max(P_{i,j-1}, P_{i-1,j}) & i, j > 0 \text{ in } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Pri čemer $P_{i,j}$ predstavlja dolžino najdaljšega skupnega podzaporedja, kjer upoštevamo prvih i vrstic prve datoteke in prvih j vrstic druge datoteke.

1. Zapiši sled algoritma v obliki tabele P za datoteki podani zgoraj.
2. Kakšna je Θ ocena časovne zahtevnosti zgornjega algoritma računanja podobnosti? Utemeljite.
3. Kakšna je Θ ocena prostorske zahtevnosti zgornjega algoritma? Utemeljite.

4 a) Zapišite funkcijo v Javi, ki kot vhod dobi celo število n, izvaja pa se $\Theta(n^{\log_7 5})$ časa.
b) Ocenite časovno zahtevnost spodnje funkcije v odvisnosti od dolžine podane tabele:

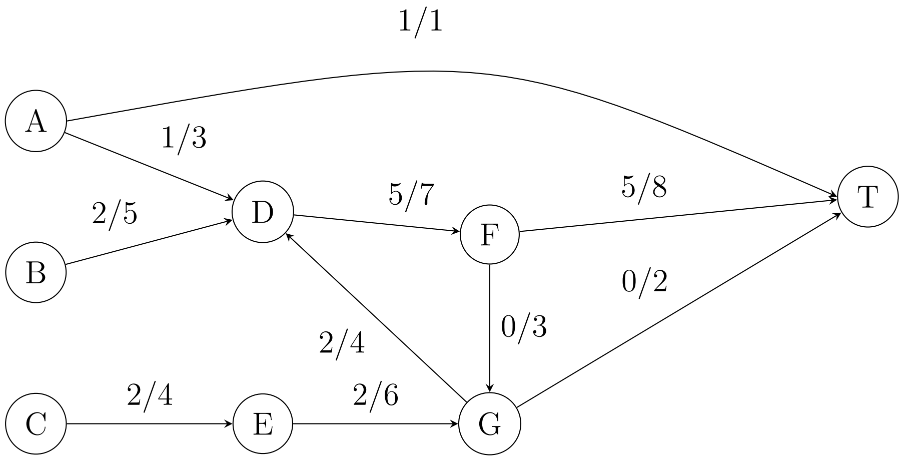
```
void f(int[] a){

        b = heapsort(a);
        for(int i= 0; i<6; i++){
                f(a[i*(n/7):(i+1)*(n/7)])
        }
        Karatsuba(a,b);

}
```

5 Študentje s krajev A, B in C gredo na morje v kraj T. Kraje povezujejo ceste in na vsaki vozi en taksist z nekim številom sedežev za stranke (število na desni strani poševnice). Nekateri študentje so si že organizirali prevoz s taksijem (število na levi strani poševnice).

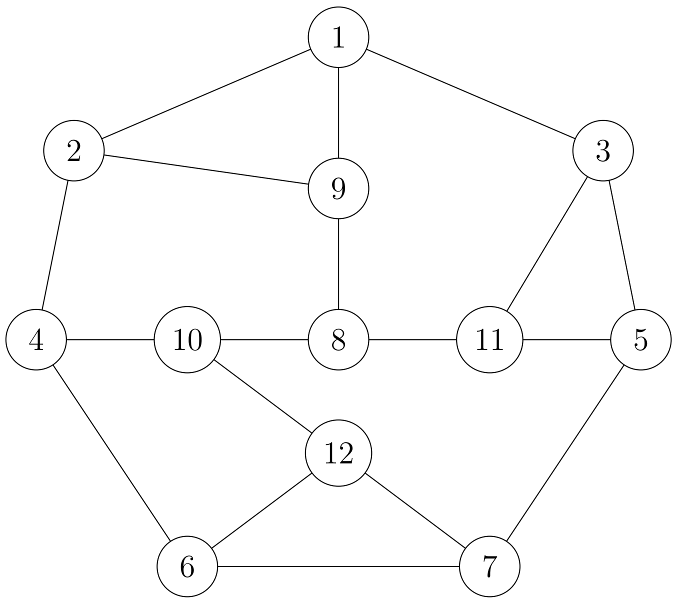
a) Koliko študentov gre lahko še na morje? Izvajajte Ford-Fulkersenov algoritem, kjer dodajte izvorno vozlišče s povezavami z neskončnimi kapacitetami do krajev A, B in C. Predpostavimo, da taksisti po cesti peljejo le enkrat in pred odpravo vedno počakajo na vse študente. Dogovorimo se, da med izvajanjem algoritma za naslednji obisk med vozlišči, ki so na voljo, vedno izberemo po abecedi najmanjšega.

b) Študentska organizacija bi ob nekaterih cestah postavila oglasne panoje za svojo naslednjo prireditev. Želijo, da se vsak študent natanko enkrat pelje mimo oglasnega panoja. Kako s F. F. algoritmom ugotovimo postavitev panojev in na katere povezave jih postavimo? Koliko je vseh študentov, ki bo videlo oglas?

c) Dva študenta iz istega kraja sta se sprla in ju zanima ali je v tem cestnem omrežju možno, da se odpravita na morje brez da bi kadarkoli sedela v istem taksiju. Kako bi spremenili prvotni graf, da bi nam F. F. odgovoril na to vprašanje? Namig: razmislite o kapacitetah povezav.



6 Za spodaj podani graf odgovorite na naslednja vprašanja iz snovi o barvanjih grafov:
a) Kakšno rešitev bi našel požrešni algoritem za barvanje grafov, če bi obiskal vozlišča v naraščajočem vrstnem redu oznak?
b) Zapišite velotno drevo preiskovanja v širino (zapišite ga po nivojih), če bi preiskovanje začeli v vozlišču 8. V katerem nivoju preiskovanja bi algoritem za dvobarvanje ugotovil, da se tega grafa ne da pobarvati z dvema barvama?
c) Kako velika bi bila tabela podrešitev, če bi uporabili dinamično programiranje za iskanje optimalnega obarvanja?
d) Kako velika je največja neodvisna množica v tem grafu? Zapiši primer tako velike neodvisne množice



7 Dano je zaporedje $1, 3, 8, 7, 6, 5$, ki ga želimo nepadajoče urediti s kopico.

1. Prikaži sled gradnje kopice (postopek iz vaj). Jasno nariši in označi drevo, ki predstavlja kopico na posameznem koraku.
2. Nadaljuj postopek do konca, da dobiš urejeno zaporedje.
3. Zapiši kopico, sestavljeno iz zgornjih elementov, ki tekom samega urejanja zahteva največ pogrezanj? Prikaži sled urejanja in jasno označi pogrezanja.

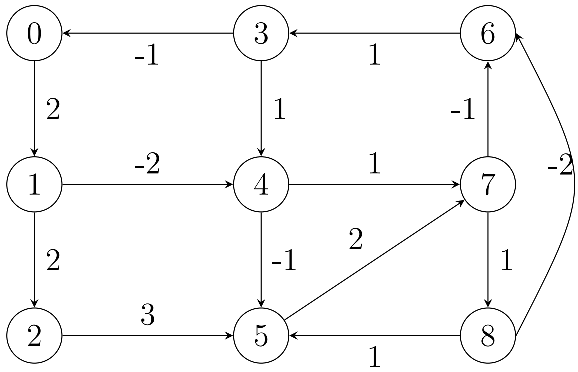
4. Zapiši kopico, sestavljeno iz zgornjih elementov, ki tekom samega urejanja zahteva najmanj pogrezanj? Prikaži sled urejanja in jasno označi pogrezanja.

8 Spodaj imate podano delno sled izvajanja algoritma za 0/1-nahrbtnik, kot smo si ga ogledali na vajah. Spomnimo, en par predstavlja eno trenutno napolnitev nahrbtnika, prva številka je zapolnjen volumen, druga pa vrednost te rešitve.

$(0,0)$ $(\_\_,\_\_)$
$(0,0),(3,7)$ $(\_\_,\_\_),(7,8)$
$(\_\_,\_\_),(\_\_,\_\_),(\_\_,\_\_)$ $(\_\_,5),(\_\_,\_\_),(12,\_\_)$
$(\_\_,\_\_),(\_\_,\_\_),(\_\_,\_\_),(\_\_,\_\_),(\_\_,\_\_)$ $(\_\_,\_\_),(\_\_,\_\_),(\_\_,\_\_),(\_\_,\_\_),(\_\_,\_\_)$
$(0,0),(3,7),(5,8),(8,15)$ $(2,\_\_),(5,\_\_),(7,\_\_),(10,\_\_)$
$(0,0),(2,5),(3,7),(5,12),(7,13),(8,15),(10,20)$

1. Koliko predmetov je vseboval vhodni problem? Kakšne volumne in kakšne cene so imeli posamezni predmeti?
2. Kaj veš o volumnu nahrbtnika?
3. Izpolnite vse manjkajoče podatke v podani sledi.
4. Koliko znaša cena optimalno napolnjenega nahrbtnika in katere predmete vsebuje?

9 Spodaj je podan usmerjen graf z utežmi:



1. Z Bellmann-Fordovim algoritmom izračunajte najkrajše poti od vozlišča 0 do vseh ostalih.
2. Ali graf vsebuje negativni cikel? Če ga ne vsebuje, povej kako to veš. Če ga vsebuje, ga eksplicitno zapiši.

10 Z algoritmi za množenje velikih celih števil zmnoži števili 5684 in 2577.

1. Uporabi osnovni algoritem po principu deli in vladaj (4 podproblemi). Zapiši sled izvajanja kot drevo.

2. Uporabi Karacubov algoritem (3 podproblemi). Namig: uporabite, kar ste naračunali pod a), jasno nakažite katere podprobleme je potrebno izračunati.

3. Če se Karacubov algoritem pri neki nalogi izvaja 10 sekund, koliko časa se bo pri dvakrat večji nalogi?

4. V algoritmu po principu deli in vladaj delimo števili a in b kot $a = a_3a_2a_1$ in $b = b_3b_2b_1$, kjer a_i in b_i vsebujejo enako število števk. Koliko podproblemov je potrebno rešiti? Kako veliki so podproblemi? Koliko je časovna zahtevnost tega algoritma?

11 Problem 0/1 nahrbtnika s prostornino 5, predmeti pa imajo vrednosti $c = (1, 2, 3, 2, 5)$ in prostornine $v = (1, 4, 3, 2, 4)$.

1. Zapiši sled algoritma iz vaj (tabela).

2. Zapiši optimalno rešitev: njeno vrednost in podmnožico predmetov.

3. Zapiši optimalno rešitev, če predmete lahko režemo?

4. Predlagajte učinkovitejši algoritem za 0/1 nahrbtnik, če je ureditev predmetov po teži naraščajoče enaka ureditvi predmetov po ceni padajoče in analizirajte njegovo časovno zahtevnost.

12 Izračunati želimo diskretno Fourierjevo transformacijo s pomočjo hitrega rekurzivnega algoritma FFT za polinom

$$p(x) = a + bx^2 + cx^4 + dx^6.$$

1. Zapiši ustrezno dolžino transformacije n, obseg in n-ti primitivni koren enote ω.

2. Zapiši sled (drevo) algoritma?

3. Koliko množenj in koliko seštevanj kompleksnih števil je potrebno izračunati, če množenj oz. seštevanj z 0 in 1 ne upoštevamo.

4. Izračunaj a, b, c in d, če velja $p(1) = 2p(\omega^6)$, $p(\omega) = p(\omega^7) = 2i$ in $p(i) = 8$ ter $p(\omega^5) = 2$.

5. Zapiši DFT polinoma $p(x)$ pri pogojih iz d).

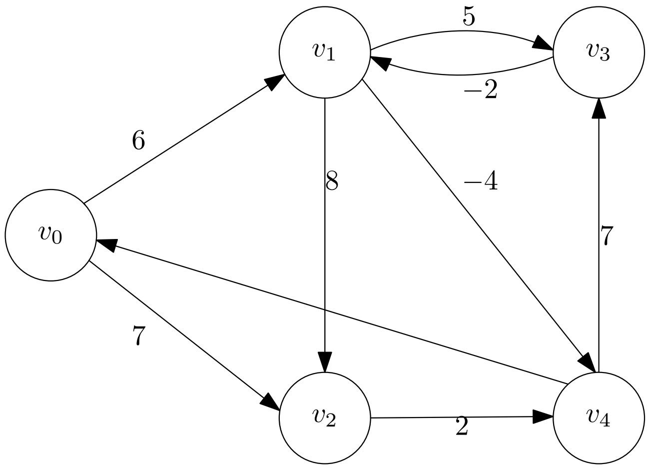
13 Podano imate funkcijo:

```
boolean f(int[] a, int k){
    for(int i=0;i<a.length;i++)
        for(j=i+1;j<a.length;j++)
            if(a[i]*a[j]==k)
                return true;
    return false;
}
```

a) Kaj počne funkcija f?
b) Kolikšna je Θ ocena časovne zahtevnosti izvajanja te funkcije v najboljšem primeru? Povejte kakšen je ta najboljši primer. c) Zapišite funkcijo, ki ima asimptotično boljšo časovno zahtevnost (v najslabšem primeru), počne pa seveda isto kot funkcija f. Koliko je Θ časovna zahtevnost vaše implementacije?
d) Če bi lahko tabelo a uredili v času $\Theta(n)$, a bi lahko vašo funkcijo še pohitrili? Če da, kako? Če ne, zakaj?

14 Dana sta polinoma $p(x) = x^2 + x + 3$ in $q(x) = x + 2$ a) Izračunajte diskretno Fourierjevo transformacijo polinoma p v $\mathbb{C}$. Uporabite najmanjši možni n.
b) Izračunajte z algoritmom FFT transformacijo polinoma p v $\mathbb{C}$. Ponovno uporabite najmanjši možni n.
c) Koliko je $p(x)q(x)$ v vrednostni predstavitvi?
d) S pomočjo FFT izračunajte produkt $p(x)q(x)$ (rezultat naj bo v koeficientni predstavitvi).

15 a) Kakšna je prostorska zahtevnost Bellman-Fordovega algoritma? Odgovor utemelji.
b) Simuliraj izvajanje algoritma na grafu s slike 2.
c) Kako bi algoritem predelal, da bi poleg dolžin najkrajših poti izračunal tudi poti same?
d) Kako bi algoritem predelal, da bi računal najkrajše poti, ki uporabijo kvečjemu k povezav, kjer je k parameter algoritma? Kakšna je tedaj časovna zahtevnost algoritma?



Slika 1: Utežen usmerjen graf.

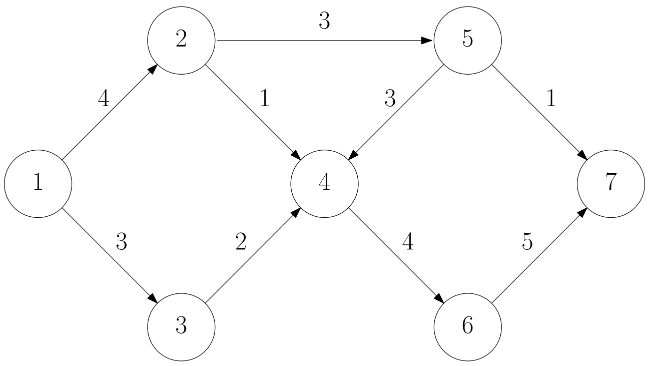
16 Zapišite sled izvajanja spodnjih algoritmov za zunanje urejanje v nepadajoči vrstni red:

$$0, 9, 6, 1, 4, 4, 5, 8, 9, 7, 9, 7, 2, 1, 1, 5.$$

a) Navadno zlivanje z dvema trakovoma brez izboljšav.
b) Navadno uravnoteženo zlivanje s štirimi trakovi.
c) Naravno uravnoteženo, dvosmerno zlivanje.

17 Tokrat boste delali Fourierjevo transformacijo v obsegu $\mathbb{Z}_7$. Spomnimo $\mathbb{Z}_7$ je obseg celih števil $\{0, \ldots, 6\}$, operacije seštevanja in množenja pa se izvajajo po modulu 7 (npr. $3 + 6 = 2$ in $3 * 6 = 4$).
a) Ali lahko v tem obsegu izračunamo DFT, za katerega potrebujemo šesti primitivni koren enote? Argumentiraj.
b) Koliko je šestih primitivnih korenov enote v $\mathbb{Z}_7$ in kateri so?
c) Ali lahko v tem obsegu izvajamo algoritem FFT? Zakaj?
d) Naredite DFT polinoma $4x^3 + 2x + 3$ v $\mathbb{Z}_7$.

18 Na voljo imamo spodnji graf, kjer je vozlišče 1 izvor in vozlišče 7 ponor. Nad povezavami so zapisane kapacitete povezav.



a) Zapišite katerikoli najmanjši (1,7) prerez in njegovo kapaciteto. Kaj lahko iz tega ugotovimo glede maksimalnega pretoka grafa?

b) Za zgornji graf zapišite sled izvajanja algoritma za iskanje maksimalnega pretoka. Za vsako iteracijo zapišite pot (npr. 1-2-5-7) po kateri ste povečali pretok ter količino povečanega pretoka.

c) Kako oz. ali vrstni red obiskovanja označenih vozlišč vpliva na optimalnost rešitve?

d) Kakšna je časovna zahtevnost algoritma? Pojasnite.