# ТЕМА №10
# АНАЛИТИЧЕН И СХЕМАТИЧЕН МЕТОД ЗА РЕШАВАНЕ НА ВЕРОЯТНОСТНИ ЗАДАЧИ. МНОГОКРАТНО ПОВТОРЕНИЕ НА СЛУЧАЕН ОПИТ С ДВА И ПОВЕЧЕ ВЪЗМОЖНИ ИЗХОДА. АНАЛИТИЧНО И СХЕМАТИЧНО РЕШАВАНЕ НА СТАНДАРТНИТЕ ЗАДАЧИ ЗА МНОГОКРАТНО ПОВТОРЕНИЕ НА СЛУЧАЕН ОПИТИ С ДВА И ПОВЕЧЕ ВЪЗМОЖНИ ИЗХОДА

## 1. Понятие за биномна схема (схема на Бернули}.

Нека А е регулярно събитие, свързано с даден опит. Това означава, че при всяко реализиране на този опит, вероятността за настъпване на събитието А е една и съща. Да допуснем, че P(A)=p. В такъв случай, за вероятността на противоположното на събитието А, ще е изпълнено: $P(\overline{A})=1-p=q$.

Когато един такъв опит бъде повторен *n* пъти, се казва, че е налице *n-кратно повторение на случаен опит с два възможни изхода* или – *биномна схема* (*схема на Бернули) с параметри n* и *p.*

Биномните схеми(схемите на Бернули) с параметри *n* и *p* се означават накратко със символа B(*n;p*).

**Примери:**

1) При всяко хвърляне на зар, вероятността на събитието А={пада се 2} е една и съща, като P(A)=1/6, а $P(\overline{A})$=1 - 1/6=5/6. Следователно 5-кратното хвърляне на един зар представлява биномна схема с параметри *n*=5 и *p*=1/6, т.е. B(5;1/6).

2) При всеки произведен изстрел едно лице улучва дадена мишена с вероятност *p*=0.8 (и не улучва с вероятност *q*=1 - 0,8=0.2). В такъв случай, последователното произвеждане на 10 изстрела по мишената, от въпросното лице, представлява биномна схема с параметри *n*=10 и *p*= 0.8, т.е. B(10;0.8).

3) При ваксиниране на едно лице с дадена ваксина, вероятността за страничен ефект на ваксината е *p*=0.005 (вероятността за отсъствие на страничен ефект е *q*=1 - 0,005=0.995). В такъв случай, последователното произвеждане на 1000 ваксинации с въпросната ваксина, представлява биномна схема с параметри *n*=1000 и *p*= 0.005, т.е. B(1000;0.005).

## 2. Основни свойства на биномните схеми.

Да допуснум, че е налице биномна схема от тип B(*n;p*). Това означава, че случайният опит на биномната схема се повтаря *n* пъти, вероятността на интересуващото ни събитие А е P(A)=p, а на неговото противоположно $\overline{A}$ е $P(\overline{A})=1-p=q$.

Да означим с $P_n(k)$ вероятността на събитието „при *n*-те повторения на опита, събитието А настъпва точно *k* пъти".

Величината *К,* която приема за стойност броя на настъпванията на събитието А, при *n*-те повторения на опита в биномната схема B(*n;p*), представлява *случайна величина* с множество от възможни стойности *К* =0,1,2,..., *n*.

Биномните схеми от тип B(*n;p*) представляват n-кратно повтаряне на случаен опит с множество на възможните изходи $\Omega=\{A,\overline{A}\}$. В такъв случай, съгласно подточка А) на т. 5 от четвъртата тема на практикума, алтернативите(изходите) на биномните схеми от тип B(*n;p*) ще удовлетворяват следните свойства:

1) Броят на различните възможни алтернативи (изходи) на биномната схема B(*n;p*) е равен на $|\Omega^n|=|\Omega|^n=2^n$

2) Всяка възможна алтернатива(изход) на биномната схема B(*n;p*) представлява наредена n-торка, съставена със събитията А и $\overline{A}$.

3) Броят на алтернативите(изходите) на биномната схема B(*n;p*), в които събитието А настъпва *к* пъти, а събитието $\overline{A}$ - (*n-k*) пъти, е равен на $C_n^к$.

4) Множеството от възможните алтернативи(изходи) на биномната схема B(*n;p*) съвпада и може да се опише с множеството на простите едночлени от развитието на бинома $(A+\overline{A})^n$ и с множеството $\Omega^n$, където $\Omega=\{A,\overline{A}\}$.

За биномните схеми от тип B(*n;p*), са в сила и следните допълнителни свойства:

**Свойство 1)** $P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$ (*формула на Бернули*)

**Доказателство:** Да допуснем, че в резултат от реализирането на биномната схема B(*n;p*), е настъпила алтернативата, при която събитието А е настъпило първите **k** пъти, а следващите **(n - k)** пъти е настъпило събитието $\overline{A}$. Тази специална алтернатива-резултат на биномната схема ще настъпи тогава и само тогава, когато настъпят едновременно всички съставящи я събития. А това означава да настъпи тяхното произведение. Следователно, въпросната алтернатива-резултат, може да се представи по следния начин:

$$\underbrace{A\cap A\cap\ldots\cap A}_{k\text{-пъти}}\cap\underbrace{\overline{A}\cap\overline{A}\cap\ldots\cap\overline{A}}_{(n-k)\text{-пъти}}$$

Отчитайки, че всички съдържащи се в това произведение събития са независими (всички те имат фиксирани вероятности), за вероятността на горното произведение от събития, ще получим:

$$P(A\cap A\cap\ldots\cap A\cap \overline{A}\cap \overline{A}\cap\ldots\cap \overline{A}) = P(A)\times P(A)\ldots\times\ldots P(A)\times P(\overline{A})\times P(\overline{A})\ldots\times\ldots P(\overline{A})$$
$$= \underbrace{p\ \times\ p\ \ldots\times\ldots\ p}_{k\text{-пъти}}\ \times\ \underbrace{q\ \times\ q\ \ldots\times\ldots\ q}_{(n-k)\text{-пъти}}$$
$$= p^k.q^{(n-k)}$$

Съгласно свойство 3) на биномните схеми от тип В($n;p$), броят на алтернативите й, при които при които събитието А е настъпило **k** пъти, а събитието $\overline{A}$ е настъпило (**n – k)** пъти, е равен на $C_n^k$**.** Лесно се съобразява**,** че всяка една от тези $C_n^k$ алтернативи на горната биномна схема има същата вероятност $p^k.q^{(n-k)}$ и всеки две от тези $C_n^k$ алтернативи са несъвместими(т.е. не могат да настъпят едновременно). Това означава, че вероятността на сумата на тези $C_n^k$ алтернативи е равна на сумата от техните вероятности, т.е. на $C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$**,** защото всички те са равни на едно и също число $p^k.q^{(n-k)}$.

Но вероятността на сумата на тези $C_n^k$ алтернативи задава вероятността при n-те повторения на опита събитието А да е настъпило **k** пъти, а събитието $\overline{A}$ да е настъпило (**n – k)** пъти, т.е. вероятността $P_n(k)$.

Следователно:

$$P_n(k)= C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

С това, формулата на Бернули е доказана.

**Следствия от формулата на Бернули:**

*а*) Нека $P_n(n)$ е вероятността на събитието „при $n$ повторения на опита от биномната схема В($n;p$), събитието А настъпва $n$ пъти". Тогава:

$$P_n(n)= C_n^n\cdot p^n\cdot q^0 = p^n,\ \text{т.к.}\quad C_n^n=1,\ \text{и}\ q^0=1$$

*б*) Нека $B$={събитието А не настъпва поне веднъж}. Вероятността на това събитие може да се означи по няколко еквивалентни начина - с $P(B)$, с $P_n(к<n)$ и с $P_n(к\le n-1)$. За нея очевидно ще е изпълнено:

$$P(B)=P_n(к<n)= P_n(к\le n-1)= 1 - P(\overline{B})=1 - P_n(n) = 1 - p^n$$

*в*) Нека $P_n(0)$ е вероятността на събитието „при $n$ повторения на опита от биномната схема В($n;p$), събитието А не настъпва нито веднъж". Тогава:

$$P_n(0)= C_n^0\cdot p^0\cdot q^n = q^n,\ \text{т.к.}\ C_n^0=1,\ \text{и}\ p^0=1$$

*г*) Нека $C$={събитието А настъпва поне веднъж}. Вероятността на това събитие може да се означи по няколко еквивалентни начина - с $P(C)$, с $P_n(к>0)$ и с $P_n(к\ge 1)$. За нея очевидно ще е изпълнено:

$$P(C)= P_n(к>0)= P_n(к\ge 1)=1 - P(\overline{C})= 1 - P_n(0)=1 - q^n$$

*д*) Да означим с $P_n(k\ge к_1)$ вероятността на събитието „при $n$-те повторения на опита от биномната схема В($n;p$), събитието А настъпва не по-малко от $k_1$ пъти". Тогава очевидно ще е изпълнено:

$$P_n(k\ge к_1)=P_n(k_1) + P_n(k_1+1) + \ldots + P_n(n)= \sum_{i=k_1}^{n} C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i}$$

*е*) Да означим с $P_n(k\le k_2)$ вероятността на събитието „при $n$-те повторения на опита от биномната схема В($n;p$), събитието А настъпва не повече от $k_2$ пъти". Тогава очевидно ще е изпълнено:

$$P_n(k\le k_2)= P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(k_2) = \sum_{i=0}^{k_2} C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i}$$

*ж*) Да означим с $P_n(k_1\le k\le k_2)$ вероятността на събитието „при $n$-те повторения на опита от биномната схема В($n;p$), събитието А настъпва не по-малко от $k_1$ пъти и не повече от $к_2$ пъти". Тогава очевидно ще е изпълнено:

$$P_n(k_1\le k\le k_2)= \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i}$$

*З*) Вероятностите $P_n(к)$, за $к$-кратно настъпване на събитието $A$, при реализиране на биномната схема В($n;p$), са равни на съответните приведени едночлени в развитието на бинома $(p + q)^n$, където $q=1-p$.

И наистина:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P_n(k)$$

Следователно, при развиване на бинома $(p + q)^n$ и привеждане на подобните прости едночлени в него, ще получим сумата на всевъзможните вероятности $P_n(\kappa)$ за биномната схема B(*n;p*).

**Свойство 2)** Най-вероятната стойност N на случайната величина *К,* при *n*-те повторения на опита от биномната схема B(*n;p*) е N=[(*n*+1).*p*], където [(*n*+1).*p*], означава цялата част на числото (*n*+1).*p*.

Така например [22/7]=3, т.к. 22/7=3.14. Когато числото (*n*+1).*p*=m е цяло, то еднакво най-вероятни са две стойности: $N_1$=m и $N_2$= m -1.

**Свойство 3)** Необходимият брой повторения на опита от биномната схема B(*n;p*), които трябва да се извършат, за да сме сигурни с вероятност не по-малка от *P*, че събитието А, с вероятност P(A)=p, ще настъпи поне веднъж, удовлетворява следното неравенство:

$$n \ge \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$$

Когато събитието А представлява ефективно действие на някакво лекарство, числото n се означава с NNT(Number Needed to Treat). При NNT=1 се счита че лекарството е 100% ефективно. А при NNT>5 лекарството се счита за неефективно.

Когато събитието А представлява рисково странично действие на някакво лекарство, числото n се означава с NNH(Number Needed to Harm). При NNH=1 се счита че лекарството е 100% рисково. А при NNT>100 лекарството се счита за слабо рисково.

**3. Стандартни задачи за биномните схеми и методи за тяхното решаване.**

Задачите за биномните схеми, които могат да се решат с представените в Свойство 1, 2 и 3 на предната точка формули, се наричат *стандартни задачи за биномните схеми от тип B*(*n;p*).

За решаването на тези стандартни задачи съществуват два метода – аналитичен и схематичен.

При аналитичния метод, решаването на стандартните задачи за биномните схеми се извършва с помощта на представените в Свойство 1, 2 и 3 на предната точка формули.

При схематичния метод, решаването на стандартните задачи за биномните схеми се извършва с помощта на вероятностната схема на биномната схема.

**4. Аналитичен метод за решаване на стандартните задачи за биномните схеми.**

Ще демонстрираме аналитичния метод за решаване на задачи за биномните схеми, с помощта на един конкретен пример.

**Пример:** Едно лице произвежда 10 изстрела в една цел. При всеки един от 10-те изстрела, вероятността лицето да улучи целта е една и съща *p*=0.8. (Очевидно в случая е налице биномна схема с параметри *n*=10, *p*=0.8, т.е. B(10,0.8)).

Да се определи:

1) Каква е вероятността лицето да улучи целта точно 4 пъти?

Съгласно Свойство1 на биномните схеми, за търсената вероятност ще имаме:

$$P_{10}(4)= C_{10}^4 0.8^4 0.2^6$$

2) Каква е вероятността лицето да улучи целта и 10-те пъти?

Съгласно следствие *а*), за търсената вероятност ще имаме:

$$P_{10}(10)=p^{10}=0.8^{10}$$

3) Каква е вероятността на събитието B={лицето да не улучи целта поне веднъж}?

Съгласно следствие *б*), за търсената вероятност ще имаме:

$$P_{10}(B)= P_{10}(k<n)=1 - p^{10}=1 - 0.8^{10}$$

4) Каква е вероятността лицето да не улучи целта и 10-те пъти?

Съгласно следствие *в*), за търсената вероятност ще имаме:

$$P_{10}(0)=q^{10}=0.2^{10}$$

5) Каква е вероятността на събитието C={лицето да улучи целта поне веднъж}?

Съгласно следствие *г*), за търсената вероятност ще имаме:

$$P(C)= P_{10}(k>0)=1 - q^{10}=1 - 0.2^{10}$$

6) Каква е вероятността лицето да улучи целта не по-малко от 7 пъти?

Съгласно следствие *д*), за търсената вероятност ще имаме:

$$P_{10}(k \ge 7)= \sum_{i=7}^{10} C_{10}^i \cdot 0.8^i \cdot 0.2^{10-i}$$

7) Каква е вероятността лицето да улучи целта не повече от 6 пъти?

Съгласно следствие *е*), за търсената вероятност ще имаме:

$$P_{10}(k \le 6)= \sum_{i=0}^{6} C_{10}^{i} 0.8^{i} 0.2^{10-i}$$

8) Каква е вероятността лицето да улучи целта не по-малко от 3 пъти и не повече от 7 пъти?
Съгласно следствие *ж*), за търсената вероятност ще имаме:

$$P_{10}(3 \le k \le 7)= \sum_{i=3}^{7} C_{10}^{i} 0.8^{i} 0.2^{10-i}$$

9) Кой е най-вероятният брой N на точните попадения в целта, при проведените десет изстрела?
Съгласно свойство 2 на биномните схеми, за търсения брой ще имаме:

N=[(10+1).0,8]=[11.0,8]=[8,8]=8

10) Колко изстрела трябва да произведе лицето по целта, за да е сигурно с вероятност не по-малка от P=0,9, че ще улучи целта поне веднъж?
Съгласно свойство 3 на биномните схеми, за търсения брой *n* на изстрелите ще имаме:

$$n \ge \frac{\ln(1-0{,}9)}{\ln(1-0{,}8)} = \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}2)} \approx 1{,}43, \text{ т.е. при } n \ge 2$$

**5. Схематично решаване на стандартните задачи за биномната схема.**

Вече ни е известно, че броят на алтернативите на биномната схема от тип B(*n;p*) е $2^n$. Поради това, схематичния метод е неподходящ за решаване на стандартните задачи за биномни схеми с големи стойности на параметъра *n.* Защото ще се получи вероятностна схема с твърде много алтернативи. При *n=5,* например, ще се получи вероятностна схема с $2^5$=32 алтернативи.

При неголеми стойности на параметъра *n,* за дадена биномна схема от тип B(*n;p*), например *n*=2, 3 и 4, решаването на стандартните задачи за тази схема, може да се извърши не само по приведените в т. 3 от настоящата тема формули (т.е. аналитично), но и схематично, въз основа на вероятностната схема на биномната схема и схематичните правила за намиране на вероятност на сума и на произведение на събития.

Ще демонстрираме схематичния метод за решаване на стандартните задачи за биномните схеми от тип B(*n;p*), с неголеми стойности за параметъра *n*, с помощта на един конкретен пример:

**Пример:** Един лекар преглежда последователно три различни пациента. При всеки от извършените прегледи, вероятността P(A) на събитието A={лекарят поставя правилна диагноза} е една и съща - P(A)=0,6. Да се построи вероятностната схема на описания случаен опит от гледна точка на събитието A и да се определят по нея вероятностите на следните събития:

1) $P_3(0)$={събитието A не настъпва нито веднъж};

2) $P_3(1)$={събитието A настъпва само веднъж};

3) $P_3(2)$={събитието A настъпва само два пъти};

4) $P_3(3)$={събитието A настъпва и трите пъти};

5) $P_3(к<3)$={събитието A не настъпва поне веднъж};

6) $P_3(к>0)$={събитието A настъпва поне веднъж};

7) $P_3(к\ge 2)$={събитието A настъпва поне два пъти};

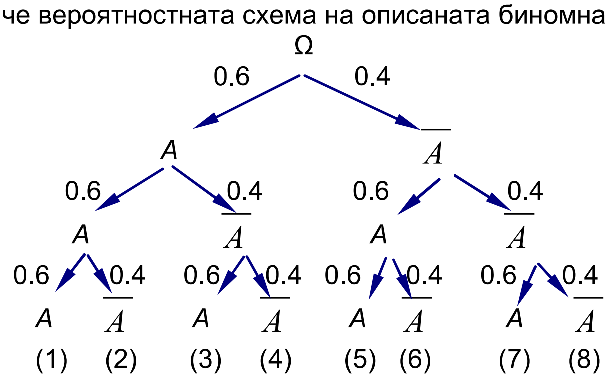
8) $P_3(к\le 2)$={събитието A настъпва не повече от два пъти}.

Определете най-вероятния брой *K* на правилните диагнози при извършените три прегледа.

Колко прегледа трябва да направи от лекарят, за да е сигурен с вероятност, не по-малка от P=0,9, че поне един от прегледите ще е с правилна диагноза?

**Решение:** Очевидно в случая е налице биномна схема(схема на Бернули) с параметри *n*=3 и *p*=0.6, т.е. B(3, 0.6). Следователно *q*=1-*p*=1-0.6=0.4.

Лесно се съобразява, че вероятностната схема на описаната биномна схема има следния вид:



Имайки в предвид построената вероятностна схема на описаната биномна схема, правилата за намиране на вероятността P(i) на i - тата алтернатива на случаен опит и схематичното правило за реализиране на формулата за вероятност на сума от несъвместими събития, лесно се съобразява, че за търсените в условието на задачата вероятности $P_3(k)$, съответно ще е изпълнено:

1) $P_3(0)=P(8)=0.4^3=0.064$

2) $P_3(1)= P(4)+ P(6)+ P(7)=3.(0.6).(0.4)^2=0,338$

3) $P_3(2)= P(2)+ P(3)+ P(5)=3.(0.6)^2.(0.4)=0.432$

4) $P_3(3)=P(1)=0.6^3=0.216$

5) $P_3(к<3)=1- P_3(3)=1-0.6^3=1-0.216=0.784$

6) $P_3(к>0)=1- P_3(0)=1-0.4^3=1-0.064=0.936$

7) $P_3(к\geq 2)= P_3(2)+ P_3(3)= P(2)+ P(3)+ P(5)+ P(8)=3.(0.6)^2.(0.4)+ 0.6^3=0.432+0.216=0.648$

8) <u>Първи начин</u>: $P_3(к\leq 2)= P_3(0)+ P_3(1)+ P_3(2)$
$= 0.4^3+3.(0.6).(0.4)^2+3.(0.6)^2.(0.4)$
$=0.064+0.338+0.432=0.784$

<u>Втори начин</u>: $P_3(к\leq 2)= P_3(к<3)=1- P_3(3)=1-0.6^3=1-0.216=0.784$.

**Забележка:** Същите вероятности ще получим, ако използваме формулите от Свойство 1 и неговите следствия от т 2 на настоящата тема.

За определяне на най-вероятният брой на правилните диагнози, които лекарят ще постави при извършените от него три прегледа, е необходимо да направим две неща:

1) Да уточним кои са възможните стойности за броя на правилните диагнози при извършените три прегледа. Очевидно това са числата 0, 1, 2 и 3.
2) Да пресметнем вероятностите на възможните стойности за броя на правилните диагнози при извършените три прегледа. Това вече е направено: $P_3(0)=0.064$, $P_3(1)=0.338$, $P_3(2)=0.432$ и $P_3(3)=0.216$.
3) Да намерим най-голямата сред вероятностите $P_3(0)$, $P_3(1)$, $P_3(2)$ и $P_3(3)$. Очевидно това е вероятността $P_3(2)=0.432$. Следователно, най-вероятноя брой N на правилните диагнози при извършените три прегледа е 2.

**Забележка:** Същият резултат ще получим, ако използваме формулата от Свойство 2 на т. 2:

$$N=[(n+1)p]=[4.0,6]=[2,4]=2$$

Що се отнася до броят n на прегледите, които трябва да се направят от лекаря, за да е сигурно с вероятност, не по-малка от P=0,9, че ще е налице поне една правилна диагноза, можем да постъпим по следния начин:

1) При n=1, вероятността за правилна диагноза е $P_1(k>0)= 1-P_1(0)=1-q=1-0.4=0,6<0,9$.

Следователно един преглед не е достатъчен.

2) При n=2, вероятността за поне една правилна диагноза е $P_2(к>0)=1- P_2(0)=1-0.4^2=0,84<0,9$

Следователно и два прегледа не са достатъчни.

3) При n=3, вероятността за поне една правилна диагноза е $P_3(к>0)=1- P_3(0)=1-0.4^3=0,946>0,9$

Следователно 3 прегледа са напълно достатъчни, за да имаме сигурност не по-малка от P=0,9, че поне един от прегледите ще е с правилна диагноза.

**Забележка:** Същият резултат ще получим, ако използваме формулата от Свойство 3 на т. 2:

### 6. Асимптотични свойства на биномните схеми.

В тази точка ще обсъдим две полезни свойства на биномните схеми от тип B(*n;p*), които са в сила при големи стойности на *n*. По тази причина, тези техни свойства се наричат *асимптотични*.

**1) При големи стойности на n (n>50) и не много малки или много големи стойности на p (0,2≤p≤0,8), за оценка на вероятността $P_n(k)$ е удобно да се използва следната приближена формула:**

$$P_n(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$, където $\mu=n.p$, $\sigma = \sqrt{n.p.q}$

Тази формула се нарича *формула на Лаплас, а величините μ и σ – нейни параметри*.

Причина за замяната на точната формула за пресмятане на $P_n(k)$ (формулата на Бернули) с приближената формула на Лаплас е в това, че при големи стойности на *n* (*n*>50) пресмятането на биномния коефициент и степените на вероятностите в точната формула на Бернули е неудобно и трудоемко за ръчно или калкулаторно осъществяване.

**Пример:** Един лекар поставя грешна диагноза с вероятност *p*=0,2. Известно е, че той е поставил общо *n*=100 диагнози. Определете:

1) Каква е вероятността броя на грешните диагнози сред 100-те поставени да е 0?
2) Каква е вероятността броя на грешните диагнози сред 100-те поставени да е по-толям от 1?
3) Каква е вероятността броя на грешните диагнози сред 100-те поставени да е 24?
4) Кой е най-вероятният брой N на неправилните диагнози?
5) Колко диагнози трябва да постави лекарят, за да е сигурно с P.=0.95, че поне една от тях ще е грешна?

**Решение:** Очевидно тук е налице биномна схема с параметри *n=100* и *p=0.2,* в която и двата параметъра удовлетворяват изискванията за прилагане на формулата на Лаплас. По тази причина, вместо точната формула на Бернули, за определяне на търсената вероятност е по-удачно да се използува приближената формула на Лаплас.

Първата стъпка при използване на формулата на Лаплас е да се пресметнат стойностите на параметрите $\mu$ и $\sigma$. Като се ползваме от формулите за тяхното пресмятане, ще получим:

$$\mu = n.p = 100.0,2 = 20$$

$$\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{100.0,2.0,8} = \sqrt{16} = 4\,.$$

Втората стъпка при използване на формулата на Лаплас е да се пресметнат стойностите на търсените вероятности:

1) За вероятността сред 100-те поставени диагнози да няма нито една грешна, ще имаме:

$$P_{100}(0) = \frac{1}{4\sqrt{2.\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{0-20}{4}\right)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2.\pi}}e^{-\frac{25}{32}} = \frac{0.46}{4\sqrt{2.\pi.e}} = \frac{0.46}{16.5} = 0.027$$

2) За вероятността сред 100-те поставени диагнози да има поне една грешна, ще имаме:

$$P_{100}(k>0) = 1 - P_{100}(0) = 1 - 0.027 = 0.973$$

3) За вероятността сред 100-те поставени диагнози да има 24 грешни, ще имаме:

$$P_{100}(24) = \frac{1}{4\sqrt{2.\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{24-20}{4}\right)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2.\pi}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2.\pi.e}} = \frac{1}{16.5} = 0.06$$

**Забележка:** Последният аритметичен израз може да се пресметне значително по-просто от този, който се представя от точната формула:

$$P_{100}(24) = C_{100}^{24}\, 0.2^{24}\, 0.8^{76}$$

4) За най-вероятният брой N на грешните диагнози, сред 100-те поставени, ще е изпълнено:

N=[(100+1).0,2]=[20,2]=20.

5) За минималния брой *n* на диагнозите, които трябва да постави лекарят, за да е сигурно с P.=0.95, че поне една от тях ще е грешна, ще е имаме:

$$n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)} = \frac{\ln(1-0,95)}{\ln(1-0,2)} = \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.8)} = \frac{-2,99573}{-0,22314} = 13,42513$$

Следователно са необходими минимум 14 диагнози, за да се постигне желаната увереност, че поне една от тях ще е грешна.

2) **При големи стойности на n (n>100) и много малки стойности на p (p<0,01), за оценка на вероятността $P_n(k)$ е удобно да се използва следната приближена формула:**

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, \text{ където } \lambda = n\cdot p$$

Тази формула се нарича *формула на Поасон, а величината λ – неин параметър.*

**Следствие 1:** $P_n(0) = \frac{\lambda^0}{0!}\cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$, т.к. $\lambda^0=1$ и $0!=1$;

**Следствие 2:** $P_n(k \geq 1) = P_n(k>0) = 1 - P_n(0) = 1 - e^{-\lambda}$.

**Пример:** Вероятността да се допусне грешка при обработката на една кръвна проба е *p*=0,001. Предстои да бъде извършена обработка на 2000 кръвни проби. Определете:

1) Каква е вероятността да не се допусне нито грешка при обработката на кръвните проби?
2) Каква е вероятността да се допусне грешка при поне една обработка на кръвна проба?
3) Каква е вероятността да се допуснат 2 грешка при обработката на кръвните проба?
4) Кой ще е най-вероятният брой N на грешните обработки на кръвни проби?

5) Колко кръвни проби трябва да бъдат обработени, за да е сигурно с P=0.95, че поне една от тях ще е обработена грешно?

**Решение:** Очевидно тук е налице биномна схема с параметри *n=2000* и *p=0.001,* в която и двата параметъра удовлетворяват изискванията за прилагане на формулата на Поасон. По тази причина, вместо точната формула на Бернули, за определяне на търсената вероятност е по-удачно да се използува приближената формула на Поасон.

Първата стъпка при използване на формулата на Поасон е да се пресметне стойността на параметъра $\lambda$. Като се възползваме от формулата за неговото пресмятане, ще получим:

$$\lambda = 2000.0{,}001 = 2$$

Втората стъпка при използване на формулата на Поасон или на нейните дв следствия, е да се пресметнат стойностите на търсените в подусловия 1) и 2) вероятности:

1) Съгласно формулата на Поасон, за търсената вероятност $P_{2000}(0)$ (сред 2000 обработени кръвни проби да няма нито една грешна) ще имаме:

$$P_{2000}(0) = \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = e^{-2} = 0.14$$

2) Съгласно формулата на Поасон, за търсената вероятност $P_{2000}(k\geq 1)$ (сред 2000 обработени кръвни проби да има поне една грешна) ще имаме:

$$P_{2000}(k\geq 1) = P_{2000}(k>0) = 1 - P_{2000}(0) = 1 - e^{-2} = 0.86$$

3) Съгласно формулата на Поасон, за търсената вероятност $P_{2000}(2)$ (сред 2000 обработени кръвни проби да има две грешни) ще имаме:

$$P_{2000}(2) = \frac{2^0}{2!} \cdot e^{-2} = \frac{e^{-2}}{2} = 0.07$$

6) От свойство 3 на биномните схеми намираме, че за най-вероятният брой N на грешно обработените кръвни проби, сред обработените 2000 такива, ще имаме:

N=[(2000+1).0,001]=[2,1]=2

7) От свойство 4 на биномните схеми следва, че за минималния брой на кръвните проби, които трябва да бъдат обработени, за да е сигурно с P=0.95, че поне една от тях ще е грешно обработена, ще е имаме:

$$n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)} = \frac{\ln(1-0{,}95)}{\ln(1-0{,}001)} = \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.999)} = \frac{-2{,}99573}{-0{,}001} = 2994{,}234$$

Следователно е необходимо да бъдат обработени минимум 2995 кръвни проби, за да постигнем желаната увереност, че поне една от тях ще е обработен грешно.

**7. Понятие за к-номна схема (обобщена схема на Бернули}.**

Налице е случаен опит с к възможни изхода $A_1$, $A_2$, ..., $A_к$ , които имат една и съща вероятност за настъпване $P(A_i)=p_i$, $i$=1,2,..,k, при всяко реализиране на опита.

Когато един такъв опит бъде повторен *n* пъти, се казва, че е налице *n-кратно повторение на случаен опит с к възможни изхода* или – *к-номна схема* (обобщена *схема на Бернули) с параметри n,* $p_1, p_2, ..., p_к$.

К-номните схеми(обобщените схеми на Бернули) с параметри *с параметри n,* $p_1$, $p_2$, ..., $p_к$. се означават накратко със символа $B(n; p_1, p_2, ..., p_к)$.

**Примери:**

1) При всяко хвърляне на зар, се пада един от шест възможни изхода – 1, 2, 3, 4, 5, 6. При това тези изходи се падат с една и съща вероятност - 1/6, при всяко реализиране на опита. Следователно 5-кратното хвърляне на един зар представлява триномна схема от тип B(5;1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6).

2) Едно заболяване се проявява в заболелия от него с една от три различни форми A, B и C. Известно е, че при едно болно от това заболяване лице формата A се проявява с вероятност 0,2, формата B- с вероятност 0,3, а формата C – с вероятност 0,5. В такъв случай, разболяването на 10 лица от това заболяване, представлява триномна схема от тип. B(10;0.2,0.3,0.5) по отношение на изходите A, B и C.

**8. Основни свойства на к-номните схеми.**

Да допуснем, че е налице к-номна схема от тип $B(n; p_1, p_2, ..., p_к)$. Това означава, че случайният опит на к-номната схема се повтаря *n* пъти и притежава к различни изхода $A_1$, $A_2$, ..., $A_k$, които настъпват с вероятности $P(A_i)=p_i$,където $i$=1, 2, ..., к, при всяко реализиране на опита.

Да означим с $P_n(n_1, n_2, ..., n_k)$ вероятността на събитието „при реализиране на к-номна схема $B(n; p_1, p_2, ..., p_к)$, изходът $A_i$ настъпва точно $n_i$ пъти", $i$=1, 2, ..., к. Ясно е, че числата $n_1, n_2, ..., n_k$ трябва да са цели неотрицателни и за тях да е изпълнено равенството $n_1+ n_2+ ...+ n_k=n,$

Лесно се съобразява, че к-номните схеми от тип B($n; p_1, p_2, ..., p_к$) представляват n-кратно повтаряне на опит с множество на възможните изходи $\Omega$={ $A_1$, $A_2$, ..., $A_k$}. В такъв случай, съгласно подточка B) на т. 5 от четвъртата тема на практикума, к-номните схеми от тип B($n; p_1, p_2, ..., p_к$) ще удовлетворяват следните свойства:

1) Броят на различните възможни алтернативи (изходи) на к-номната схема B($n; p_1, p_2, ..., p_к$) е равен на $|\Omega^n|=|\Omega|^n=к^n$

2) Всяка възможна алтернатива(изход) на к-номната схема B($n; p_1, p_2, ..., p_к$) представлява наредена n-торка, съставена с изходите $A_1$, $A_2$, ..., $A_k$.

3) Броят на алтернативите(изходите) на к-номната схема B($n;p$), при които изходът $A_1$ настъпва $n_1$ пъти, изходът $A_2$ настъпва $n_2$ пъти,...., а изходът $A_к$ настъпва $n_к$ пъти, където $n_1 + n_2 +....+ n_k =n$, е равен на $C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$.

4) Множеството от възможните алтернативи(изходи) на к-номната схема B($n; p_1, p_2, ..., p_к$) съвпада и може да се опише с множеството на простите едночлени от развитието на к-нома $(A_1+A_2+ ...+A_k)^n$ и с множеството $\Omega^n$, където $\Omega$={$A_1$, $A_2$, ..., $A_k$}.

За к-номните схеми от тип B($n; p_1, p_2, ..., p_к$) е в сила и следното допълнително свойство:

5) $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ . *(обобщена формула на Бернули)*

**Доказателство:** Да допуснем, че в резултат от реализирането на k-номната схема B($n; p_1, p_2, ..., p_к$), е настъпила алтернативата, при която изходът $A_1$ е настъпил първите $n_1$ пъти, изходът $A_2$ е настъпил следващите $n_2$ пъти, …., а изходът $A_k$ е настъпил последните $n_k$ пъти. В такъв случай, въпросната алтернатива-резултат, може да се представи по следния начин:

$$\underbrace{A_1\cap A_1\cap\dots\cap A_1}_{n_1\text{-пъти}}\cap \underbrace{A_2\cap A_2\cap\dots\cap A_2}_{n_2\text{-пъти}}\cap\dots\cap \underbrace{A_к\cap A_к\cap\dots\cap A_к}_{n_к\text{-пъти}}$$

Отчитайки, че всички съдържащи се в този израз събития са независими – всички те имат фиксирани вероятности, за вероятността на горното произведение от събития, ще получим:

$$P(A_1 \cap A_1 \dots\cap\dots A_1 \cap A_2 \cap A_2 \dots\cap\dots A_2 \dots\cap\dots A_к \cap A_к \dots\cap\dots A_к)$$
$$= P(A_1) \times P(A_1)\dots\times\dots P(A_1) \times P(A_2)\times P(A_2)\dots\times\dots P(A_2)\dots\times\dots P(A_к) \times P(A_к)\dots\times\dots P(A_к)$$
$$= \underbrace{p_1 \times p_1 \dots\times\dots p_1}_{n_1\text{-пъти}} \times \underbrace{p_2 \times p_2 \dots\times\dots p_2}_{n_2\text{-пъти}} \dots\times\dots \underbrace{p_к \times p_к \dots\times\dots p_к}_{n_к\text{-пъти}}$$
$$= p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

Съгласно свойство 3) на к-номните схеми, броят на всички алтернативи (изходи) на к-номната схема, при които изходът $A_1$ е настъпил $n_1$ пъти, изходът $A_2$ е настъпил $n_2$ пъти, …., а изходът $A_k$ е настъпил $n_k$ пъти, е равен на $C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$. Лесно се съобразява, че всяка една от тези $C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$ алтернативи на к-номната схема има същата вероятност $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ и всеки две от тези $C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$ алтернативи са несъвместими (т.е. не могат да настъпят едновременно). Това означава, че вероятността на сумата на тези $C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$ алтернативи е равна на сумата от техните вероятности, т.е. на $C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, защото всички те имат една и съща вероятност $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$.

Но вероятността на сумата на тези $C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$ алтернативи задава вероятността на събитието „при реализиране на к-номната схема B($n; p_1, p_2, ..., p_к$) изходът $A_1$ настъпва $n_1$ пъти, изходът $A_2$ настъпва $n_2$ пъти,...., а изходът $A_к$ настъпва $n_к$ пъти, където е $n_1 + n_2 +....+ n_k =n$ " т.е. на $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Следователно:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}.$$

С това, обобщената формула на Бернули е доказана.

Следствия от обощената формула на Бернули:

1) Вероятността при реализирането на к-номната схема от тип B($n; p_1, p_2, ..., p_к$) събитието $A_1$ да настъпи всеки път (т.е. n пъти), е равна на:

$$P_n(n, 0, \dots, 0) = C_n^{n,0,\dots,0} \cdot p_1^{n} \cdot p_2^{0} \dots p_k^{0} = p_1^{n}$$

2) Вероятността при реализирането на к-номната схема от тип B($n; p_1, p_2, ..., p_к$) събитието $A_1$ да не настъпи нито веднъж (т.е. да настъпи 0 пъти), е равна на:

$$P_n(0,\, n_2,\, \dots,\, n_k) = \sum_{n_2+n_3+\dots+n_k=n} C_n^{0,n_2,\dots,n_k} . p_1^0 . p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} = \sum_{n_2+n_3+\dots+n_k=n} C_n^{n_2,\dots,n_k} . p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

3) Вероятността при реализирането на к-номната схема от тип B($n;\, p_1,\, p_2, \dots, p_к$) събитието $A_1$ да не настъпи поне веднъж, е равна на:

$$P_n(n_1<n,\, n_2,\, \dots,\, n_k) = \mathbf{1-}\, P_n(n,\, 0,\, \dots,\, 0) = 1 - p_1^{\,n}$$

4) Вероятността при реализирането на к-номната схема от тип B($n;\, p_1,\, p_2, \dots, p_к$) събитието $A_1$ да настъпи поне веднъж, е равна на:

$$P_n(n_1>0,\, n_2,\, \dots,\, n_k) = \mathbf{1-}\, P_n(0,\, n_2,\, \dots,\, n_k) = \sum_{n_2+n_3+\dots+n_k=n} C_n^{n_2,\dots,n_k} . p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

**Забележка:** Сумиранията в горните две формули се извършват по всички възможни неотрицателни числа $n_2$, $n_3$, ..., $n_к$, за които $n_2 + n_3 + \dots + n_к = n$.

*5*) Вероятностите $P_n(n_1,\, n_2,\, \dots,\, n_k)$, от обобщената формула на Бернули, са равни на съответните приведени членове в развитието на k-нома $(p_1+p_2+ \dots +p_k)^n$.

И наистина:

$$(p_1+p_2+\dots+p_k)^n = \sum_{n_1,n_2,\dots,n_k} C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}\, p_1^{n_1} . p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} = \sum_{n_1,n_2,\dots,n_k} C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}\, P_n^{1}(n_1,n_2,\dots,n_k)$$

Следователно, при развиване на к-нома $(p_1+p_2+ \dots +p_k)^n$ и привеждане на подобните прости едночлени в него, ще получим сумата на всевъзможните вероятности $P_n(n_1,\, n_2,\, \dots,\, n_k)$ за к-номната схема B($n;\, p_1,\, p_2, \dots, p_к$).

**9. Стандартни задачи за к-номните схеми и методи за тяхното решаване.**

Задачите за к-номните схеми, които могат да се решат с представените в Свойства 1-5 на предната точка формули, се наричат *стандартни задачи за к-номните схеми от тип* B($n;\, p_1,\, p_2, \dots, p_к$).

Решаването на стандартните задачи за к-номните схеми с помощта на представените в Свойства 1-5 на предната точка формули, се нарича *аналитичен метод за решване на стандартните задачи за биномните схеми от тип* B($n;\, p_1,\, p_2, \dots, p_к$).

Аналитичният метод е единственият подходящ метод за решаването на въпросните стандартни задачи. Схематичният метод в този случай е неподходящ, поради големия брой алтернативи на к-номната схема.

**10. Аналитичен метод за решаване на стандартните задачи за к-номните схеми.**

Ще демонстрираме аналитичния метод за решаване на задачи за к-номните схеми B($n;\, p_1,\, p_2, \dots, p_к$), с помощта на един конкретен пример.

**Пример:** Едно заболяване се проявява в заболелия от него с една от три различни форми A, B и C. Известно е, че при едно болно от това заболяване лице формата A се проявява с вероятност 0,2, формата B- с вероятност 0,3, а формата C – с вероятност 0,5. За даден период от време са регистрирани 8 случая на това заболяване.

Определете:

1) Общият брой N на възможните алтернативи за проява на формите A, B и C, при тези осем нови случая.
2) Вероятността сред осемте регистрирани случая 1 да е с формата A, 3 с формата B и 4 с формата C.
3) Вероятността всички регистрирани да са болни от формата A на заболяването.
4) Вероятността нито един от регистрираните да не с болен от форма A на заболяването.
5) Вероятността поне един от регистрираните да не е болен от формата A на заболяването.
6) Вероятността поне един от регистрираните да е болен от формата A на заболяването.

**Решение**:

Лесно се съобразява, че за всяко болно от това заболяване ще са възможни три различни изхода по отношение на формата на заболяването - A, B и C. В такъв случай, регистрираните 8 случая на разболяване от това заболяване, представлява триномна схема от тип B(8;0.2,0.3,0.5).

Що се отнася до решенията на поставените стандартни задачи, те са следните:

1) Съгласно свойство 1 на к-номните схеми, за общият брой N на възможните алтернативи за проява на формите A, B и C, при тези осем нови случая на заболяване ще имаме: $N=3^8$.
2) Съгласно обобщената формула на Бернули, вероятността сред осемте регистрирани случая 1 да с формата A, 3 да са с формата B и 4 да са с формата C, е равна на:

$$P_8(1,\, 3,\, 4) = C_8^{1,3,4} . 0.2^1 . 0.3^3 . 0.5^4$$

3) Съгласно обобщената формула на Бернули, вероятността всички регистрирани да са болни от формата А на заболяването, е равна на:

$$P_8(8,\ 0,\ 0) = C_8^{8,0,0}\ .0.2^8\ .0.3^0\ .0.5^0 = 0.2^8$$

4) Съгласно обобщената формула на Бернули, вероятността нито един от регистрираните да не е болен от формата А на заболяването, е равна на:

$$P_8(0,\ n_2,\ n_2) = \sum_{n_2+n_3=8} C_8^{0,n_2,n_3}\, 0.2^0\, .\, 0.3^{n_2}\, .\, 0.5^{n_3} = \sum_{n_2+n_3=8} C_8^{0,n_2,n_3}\, 0.3^{n_2}\, .\, 0.5^{n_3}$$

5) Съгласно обобщената формула на Бернули, вероятността поне един от регистрираните да не е болен от формата А на заболяването, е равна на:

$$P_8(n_1<8,\ n_2,\ n_3) = \mathbf{1-}\ P_8(8,0,0) = 1 - 0.2^8$$

6) Съгласно обобщената формула на Бернули, вероятността поне един от регистрираните да е болен от формата А на заболяването, е равна на:

$$P_8(n_1>0,\ n_2,\ n_3) = \mathbf{1-}\ P_8(0,\ n_2,\ n_3) = 1 - \sum_{n_2+n_3=8} C_8^{0,n_2,n_3}\, 0.3^{n_2}\, .\, 0.5^{n_3}$$

**Забележка:** Сумиранията във формулите от подточки 4) и 5) се извършват по всички възможни неотрицателни числа $n_2$ и $n_3$, за които $n_2 + n_3=8$.

## ТЕМА №11

## ДИСКРЕТНИ СЛУЧАЙНИ ВЕЛИЧИНИ

### 1. Понятие за дискрегна случайна величина.

Величина, която приема своите стойности случайно, но в съответствие с някакъв детерминиран вероятностен /честотен/ закон, се нарича *случайна величина*.

**Примери:**

1/ Величината Х, която приема за стойност числото, което се е паднало при хвърляне на зар. Тази случайна величина ще приема допустимите си стойности случайно, но с една и съща вероятност/честота/ 1/6. В такъв случай казваме, че Х е *равномерно разпределена случайна величина*.

2/ Величината К, която приема за стойност броя на настъпването на събитието А в схемата на Бернули с параметри n и p. т.е. в B(n;p). Тази случайна величина ще приема допустимите си стойности ***к*=**0,1,2, .., n случайно, но с вероятност/честота/:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Тъй като вероятностите/честотите/ за различните стойности на величината К не са равни помежду си, казваме, че К е *неравномерно разпределена случайна величина*.

Случайна величина, която приема краен брой стойности се нарича *дискретна случайна величина*.

Горните две случайни величини очевидно са дискретни случайни величини. При реализирането си, тези дискретни случайни величини ще приемат една от своите допустими стойности, но предварително не е ясно точно коя от тях.

### 2. Основни характеристики и свойства на дискретните случайни величини/ДСВ/.

Нека Х е ДСВ с множество на допустимите значения $x_1$, $x_2$, …. $x_n$. Факта, че при реализирането си, ДСВ Х е приела стойност $x_i$, ще означаваме с $X=x_i$, а вероятността Х да приеме стойността $x_i$, при реализирането си, ще означаваме с $P(X=x_i)$.

Да допуснем, че ДСВ Х приема своите допустими стойности със следните вероятности:

$$P(X= x_i)= p_i,\quad i=1, 2, ...., n.$$

Ще разграничаваме следните характеристики на ДСВ Х:

**1/ Закон за разпределение на ДСВ Х.** Под закон на разпределение на ДСВ Х ще разбираме таблицата:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | $x_1$ | $x_2$ | …. | $x_n$ |
| P | $p_1$ | $p_2$ | …. | $p_n$ |

Законът за разпределение на една ДСВ Х показва с каква относителна честота тя ще приема своите допустими стойности, при голям брой пъти реализации на същата.

Стойността на Х с най-малка вероятност, се нарича най-малко вероятна, а стойността й с най-голяма вероятност – най-вероятна.

Важно свойство на закона за разпределение на една ДСВ е следното:

$$p_1 + p_2 + ..... + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

**2/Математическо очакване на ДСВ X.** Означава се с E(X) и се пресмята се по формулата:

$$E(X) = x_1 . p_1 + x_2 . p_2 + ..... + x_n . p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i . p_i$$

Математическото очакване на ДСВ X показва каква ще бъде средната стойност на X при голям брой нейни реализации.

**3/Отклонение на ДСВ X от средната стойност на X.** Означава се с X - E(X). За всяка конкретна стойност $x_i$ на X, отклонението на X от средната стойност на X се пресмята по формулата $x_i$ - E(X), i=1, 2,, n.

Величината X - E(X) представлява ДСВ, която има същия закон на разпределение, както и ДСВ X. Само дето на мястото на стойностите на X, в закона за разпределение на X, трябва да поставим съответните стойности на X - E(X) . В резултат на това ще получим следния закон за разпределието на ДСВ X - E(X):

| X- E(X) | $x_1$ - E(X) | $x_2$ - E(X) | .... | $x_n$- E(X) |
|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | .... | $p_n$ |

Величината $(X - E(X))^2$ представлява ДСВ, която има същия закон на разпределение, както и ДСВ X. Само дето на мястото на стойностите на X, в закона за разпределение на X, трябва да поставим съответните стойности на $(X - E(X))^2$. В резултат на това ще получим следния закон за разпределието на $(X - E(X))^2$:

| $(X- E(X))^2$ | $(x_1 - E(X))^2$ | $(x_2 - E(X))^2$. | ... | $(x_n - E(X))^2$ |
|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | .... | $p_n$ |

ДСВ $(X - E(X))^2$ се нарича „квадрат на отклонението на X от средната стойност на X“.

**4/Дисперсия на ДСВ X.** Пресмята се по формулата:

$$D(X) = E((X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 . p_i$$

Дисперсията на ДСВ X показва каква ще бъде средната стойност на ДСВ $(X - E(X))^2$ , т.е. на квадрата на отклонението на X от средната стойност на X, при голям брой реализации на X.

В сила следната удобна формула за пресмятане на дисперсията:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Величината $X^2$ от последната формула е ДСВ, която има същия закон на разпределение, както и ДСВ X. Само дето на мястото на стойностите на X, в закона за разпределение на X, трябва да поставим съответно стойности на $X^2$ . В резултат на това ще получим следния закон за разпределието на $X^2$:

| $X^2$ | $x_1^2$ | $x_2^2$ | .... | $x_n^2$ |
|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | .... | $p_n$ |

С помощта на горната таблица лесно се пресмята математическото очакване/т.е. средната/ $E(X^2)$ на ДСВ $X^2$.

$$E(X^2) = x_1^2 . p_1 + x_2^2 . p_2 + ..... + x_n^2 . p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . p_i$$

**5/Стандартно отклонение на ДСВ X.** Пресмята се по формулата:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Стандартното отклонение на ДСВ X показва каква ще бъде средната стойност на ДСВ |X - E(X)|, т.е. на абсолютната стойност на отклоненията на X от средната стойност на X, при голям брой нейни реализации.Или казано с други думи: „Средно с колко ще се отклоняват стойностите на ДСВ X от нейната средна стойност“.

**Пример:** Социологическа анкета в едно общество показва, че 30% от сключващите брак желаят да имат 1 дете, 50% - желаят да имат две деца и 20% - желаят да имат 3 деца. Нека X е ДСВ, която приема за стойност броя на децата на произволно избрано семейство от това общество. Определете закона за рапределение на X и нейната средна стойност, дисперсия и стандартно отклонение.

**Решение:** Лесно се съборазява, че ДСВ X има следния закон за рапределение:

| *X* | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| P | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

Следователно за средната стойност на X ще имаме.:

$$E(X)=1x0,3 + 2x0,5 + 3x0,2=1,9$$

За да пресметнем дисперсията на ДСВ X ще трябва да намерим средната стойност на ДСВ $X^2$ . За целта е необходимо да запишем нейния закон на разпределение:

| $X^2$ | 1 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|
| P | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

Следователно

$$E(X^2)=1x0,3 + 4x0,5 + 9x0,2=4,1$$

Тогава за дисперсията на ДСВ X, ще имаме:

$$D(X)= E(X^2) - E(X)^2 =4,1 – (1,9)^2=0,49$$

За стандартното отклонение на ДСВ X, т.е. средното отклонение на X от средната ѝ стойност, ще имаме:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,49} = 0,7$$

Следователно, средния брой деца, които ще има едно семейство в това общество ще е 1,9, като действителния брой на децата в едно семейство ще се отклонява от този среден брой средно с 0,7.

(*темата ще продължи в следващата лекция*)