

Лабораторная работа №6
«Работа с системой компьютерной вёрстки T_EX»
Вариант 77

Выполнил:
Трикашный Максим Дмитриевич
Группа Р3114
Преподаватели:
Балакишин Б. В.
Рыбаков С. Д.

б) если $n = 4s + 1$, то на каждой вертикали и на каждой горизонтали доски располагаются ровно $s = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ точек (королей) из M (здесь $[a]$ — целая часть числа a);

в) если $n = 4s + 3$, то на каждой вертикали и на каждой горизонтали торической доски располагаются либо s , либо $s + 1$, точек из M .

З а д а ч а 5. Будем изображать граф P_5^2 (тор) квадратом, помня, что противоположные стороны его склеены. Назовем *циклическим сдвигом* графа P_n^2 отображение «параллельный перенос», при котором элемент $(0; 0)$ переходит в $(s; t)$.

Докажите, что любое н. н. м. M графа P_5^2 можно привести к виду, изображенному на рисунке 5, если разрешить циклические сдвиги графа доски и симметрии относительно диагонали, вертикали и горизонтали квадрата.

П р и м е ч а н и е. Симметрию относительно диагонали $(0; 0) (n - 1; n - 1)$ квадрата можно записать формулой $(x; y) \rightarrow (y; x)$. Циклический сдвиг можно было бы записать так: $(x; y) \rightarrow (x + s; y + 1)$, но в этой бы отождествить числа n и 0 , $n + 1$ и 1 и т. д. Для этого применяются значки \equiv и $\text{mod } n$. Говорят, что a сравнимо с b по модулю n и пишут $a \equiv b \pmod{n}$, если a и b при делении на n дают равные остатки. Обозначим через $a \pmod{n}$ остаток от деления a на n . Тогда можно сказать, что элемент $(x; y)$ переходит при циклическом сдвиге графа в элемент $((x + s) \pmod{n}; (y + 1) \pmod{n})$, а при отражении относительно, скажем, прямой $x = a$ — в элемент $(2a - x) \pmod{n}; y)$.

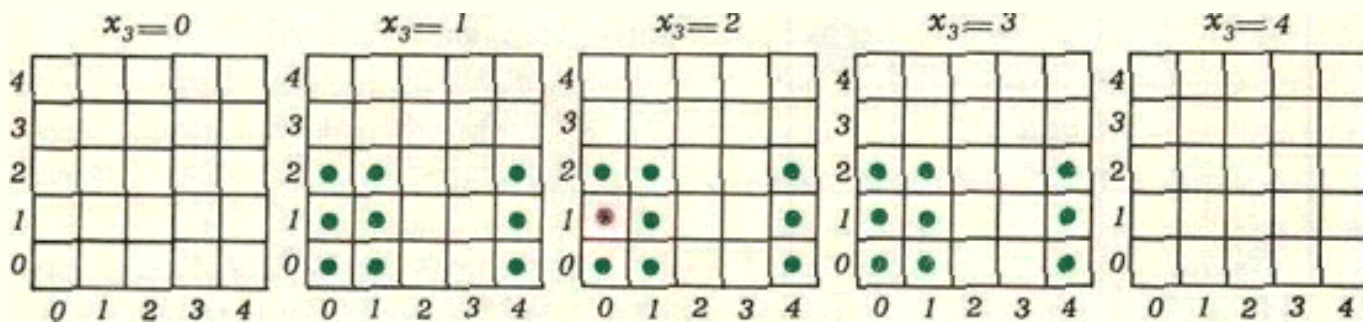
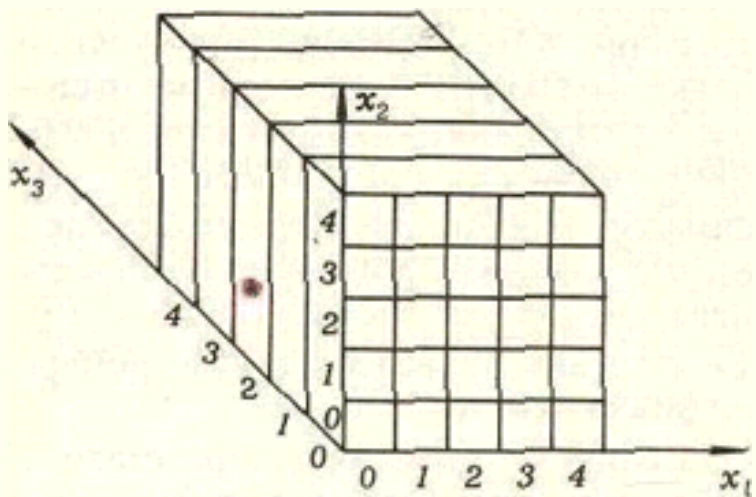


Рис. 6

Все, что известно

Попробуем дальше усложнить наш передающий аппарат; построим аппарат A^k , где k — некоторое натуральное число. Это значит, что с помощью аппарата A мы будем передавать пачки из k букв, каждая из которых берется из начального входного алфавита S .

По аналогии с двухбуквенными сигналами несложно построить граф G^k ошибок аппарата A^k . Его множество вершин — это алфавит S^k , состоящий из всевозможных наборов букв длины k : $(v_1; v_2; \dots; v_k)$, где все v_i берутся из алфавита S . Несложно построить и ребра в графе G^k , то есть понять, какие сигналы $(v_1; v_2; \dots; v_k)$ и $(w_1; w_2; \dots; w_k)$ могут перепутаться. Для этого должны перепутаться между собой буквы каждой из координат, то есть для каждого i ($1 \leq i \leq k$) должно выполняться одно из двух условий: либо $v_i = w_i$, либо $v_i \sim w_i$ (если $v_i = w_i$ для каждого i , то данные наборы совпадают).

Определять точное назначение пропускной способности аппарата A^k в общем случае довольно сложно, но можно оценить ее снизу.

З а д а ч а 6. Докажите, что

$$\alpha(G^k) \geq (\alpha(G))^k$$

А дальше... Даже в одном из самых простых случаев, когда граф ошибок — это n -угольник P^n , об $\alpha(P_n^k)$ известно мало. Все, что известно из литературы, сейчас и будет рассказано.

Торическую шахматную доску размером $n \times n$ называют еще *двумерным тором*. Аналогично k -ю степень n -угольника (граф P_n^k) можно назвать k -мерным тором со стороной n .

$k \backslash n$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	2	4	8	16	32
5	2	5	10	25	<input type="text"/>
6	3	9	27	81	243
7	3	10	33	<input type="text"/>	<input type="text"/>
8	4	16	64	256	1024
9	4	18	81	<input type="text"/>	<input type="text"/>
10	5	25	125	625	3125
11	5	27	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
12	6	36	216	1296	7776
13	6	39	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
14	7	49	343	2401	16807
15	7	52	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Табл. 1

Вершины графа P_n^k можно отождествить с набором из k целых чисел: $(x_1; x_2; \dots; x_k)$, где каждое число x_i изменяется от 0 до $n - 1$.

З а д а ч а 7. Определите число вершин в графе P_n^k .

Согласно определению, два набора $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ и $(y_1; y_2; \dots; y_k)$ смежны в графе P_n^k , если в n -угольнике каждая пара координат x_i, y_i — соседи, то есть для каждого i значения i -той координаты различаются не более, чем на единицу: $|x_i - y_i| \equiv h_i \pmod{n} \in \{0, 1\}$ для всех i от 1 до k (например, на рисунке 6 для случая $k = 3, n = 5$ отмечены соседи набора $(0; 1; 2)$).

З а д а ч а 8. Определите число соседей каждой вершины k -мерного тора.

З а д а ч а 9. Докажите, что

$$\alpha(P_n^k) \leq \left[\left(\frac{n}{2}\right)^k\right]$$

З а д а ч а 10. Определите $\alpha(P_n^k)$, если n — четное.

Для нечетных n справедлива оценка

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^k \leq \alpha(P_n^k) \leq \left[\left(\frac{n}{2}\right)^k\right],$$

а иногда известно и точное значение $\alpha(P_n^k)$.

Т е о р е м а. Если $n - 1$ делится на 2^k , то $\alpha(P_n^k) = \frac{n-1}{2^k} \cdot n^{k-1}$.

Полное доказательство этой теоремы довольно длинно, поэтому покажем лишь, как определить независимое множество с таким числом элементов. По каждому набору $(x_1; x_2; \dots; x_{k-1})$ первых $k - 1$ координат получим $r = \frac{n-1}{2^k}$ значений k -той координаты:

$$x_k \equiv 2l + r(2^{2k-1}x_1 + 2^{2k-2}x_2 + \dots + 2^1x_{k-1}) \pmod{n}.$$

Здесь l — любое целое число от 0 до $r - 1$.

Если для случая $k = 2$ вы изобразите множество вершин, координаты которых заданы последней формулой, то получится ответ задачи M415 при $n = 1$, делящимся на 4.

Эти результаты позволяют построить таблицу значений $\alpha(P_n^k)$ (рис. 7).

В ней часть чисел получена теоретически, а остальные — при помощи вычислительной машины. Вы видите, что с ростом k и n доля незаполненных мест становится все весомее.

Может быть, кто-то из вас заполнит пропуски в этой таблице и решит задачу об определении пропускной способности передающих аппаратов?