

Лабораторная работа №6  
«Работа с системой компьютерной вёрстки ТЕХ»  
Вариант 77

Выполнил:  
*Трикашиный Максим Дмитриевич*  
*Группа Р3114*  
Преподаватели:  
*Балакшин Б. В.*  
*Рыбаков С. Д.*

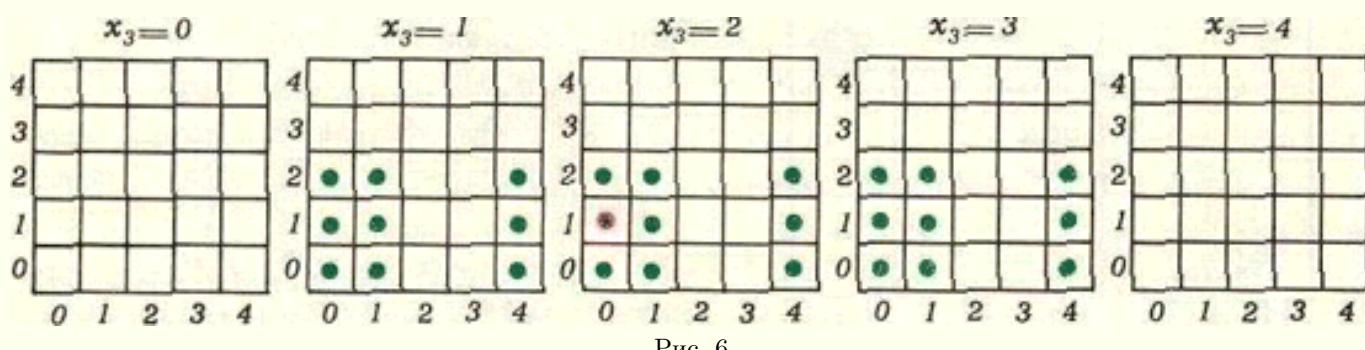
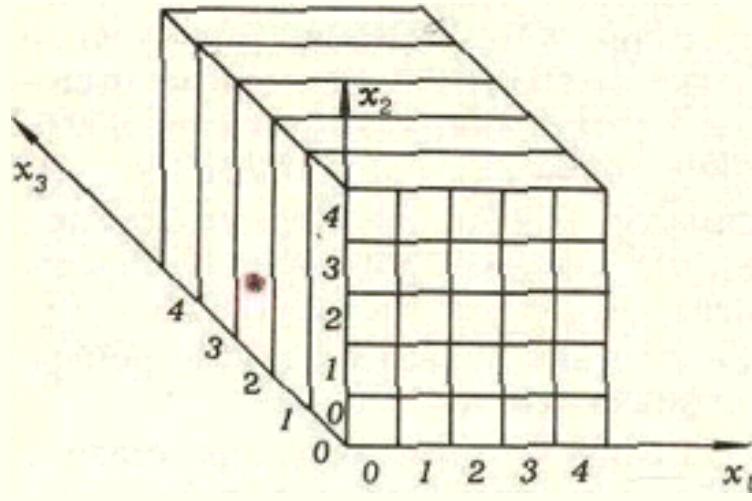
б) если  $n = 4s + 1$ , то на каждой вертикали и на каждой горизонтали доски располагаются ровно  $s = \left[ \frac{n}{4} \right]$  точек (королей) из  $M$  (здесь  $[a]$  — целая часть числа  $a$ );

в) если  $n = 4s + 3$ , то на каждой вертикали и на каждой горизонтали торической доски располагаются либо  $s$ , либо  $s + 1$ , точек из  $M$ .

**Задача 5.** Будем изображать граф  $P_5^2$  (тор) квадратом, помня, что противоположные стороны его склеены. Назовем *циклическим сдвигом* графа  $P_n^2$  отображение «параллельный перенос», при котором элемент  $(0; 0)$  переходит в  $(s; t)$ .

Докажите, что любое н. н. м.  $M$  графа  $P_5^2$  можно привести к виду, изображеному на рисунке 5, если разрешить циклические сдвиги графа доски и симметрии относительно диагонали, вертикали и горизонтали квадрата.

**Примечание.** Симметрию относительно диагонали  $(0; 0)$   $(n - 1; n - 1)$  квадрата можно записать формулой  $(x; y) \rightarrow (y; x)$ . Циклический сдвиг можно было бы записать так:  $(x; y) \rightarrow (x + s; y + 1)$ , но в этой бы отождествить числа  $n$  и  $0$ ,  $n + 1$  и  $1$  и т. д. Для этого применяются значки  $\equiv$  и  $\text{mod } n$ . Говорят, что  $a$  сравнимо с  $b$  по модулю  $n$  и пишут  $a \equiv b \pmod{n}$ , если  $a$  и  $b$  при делении на  $n$  дают равные остатки. Обозначим через  $a \pmod{n}$  остаток от деления  $a$  на  $n$ . Тогда можно сказать, что элемент  $(x; y)$  переходит при циклическом сдвиге графа в элемент  $((x + s) \pmod{n}; (y + 1) \pmod{n})$ , а при отражении относительно, скажем, прямой  $x = a$  — в элемент  $(2a - x) \pmod{n}; y$ .



## Все, что известно

Попробуем дальше усложнить наш передающий аппарат; построим аппарат  $A^k$ , где  $k$  — некоторое натуральное число. Это значит, что с помощью аппарата  $A$  мы будем передавать пачки из  $k$  букв, каждая из которых берется из начального входного алфавита  $S$ .

По аналогии с двухбуквенными сигналами несложно построить граф  $G^k$  ошибок аппарата  $A^k$ . Его множество вершин — это алфавит  $S^k$ , состоящий из всевозможных наборов букв длины  $k$ :  $(v_1; v_2; \dots; v_k)$ , где все  $v_i$  берутся из алфавита  $S$ . Несложно построить и ребра в графе  $G^k$ , то есть понять, какие сигналы  $(v_1; v_2; \dots; v_k)$  и  $(w_1; w_2; \dots; w_k)$  могут перепутаться. Для этого должны перепутаться между собой буквы каждой из координат, то есть для каждого  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) должно выполняться одно из двух условий: либо  $v_1 = w_1$ , либо  $v_1 \sim w_1$  (если  $v_i = w_i$  для каждого  $i$ , то данные наборы совпадают).

Определять точное назначение пропускной способности аппарата  $A^k$  в общем случае довольно сложно, но можно оценить ее снизу.

**Задача 6.** Докажите, что

$$\alpha(G^k) \geq (\alpha(G))^k$$

А дальше... Даже в одном из самых простых случаев, когда граф ошибок — это  $n$ -угольник  $P_n^k$ , об  $\alpha(P_n^k)$  известно мало. Все, что известно из литературы, сейчас и будет рассказано.

Торическую шахматную доску размером  $n \times n$  называют еще *двумерным тором*. Аналогично  $k$ -ю степень  $n$ -угольника (граф  $P_n^k$ ) можно назвать  $k$ -мерным тором со стороной  $n$ .

$n \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	2	4	8	16	32
5	2	5	10	25	■
6	3	9	27	81	243
7	3	10	33	■	■
8	4	16	64	256	1024
9	4	18	81	■	■
10	5	25	125	625	3125
11	5	27	■	■	■
12	6	36	216	1296	7776
13	6	39	■	■	■
14	7	49	343	2401	16807
15	7	52	■	■	■

Табл. 1

Вершины графа  $P_n^k$  можно отождествить с набором из  $k$  целых чисел:  $(x_1; x_2; \dots; x_k)$ , где каждое число  $x_i$  изменяется от 0 до  $n - 1$ .

Задача 7. Определите числов вершин в графе  $P_n^k$ .

Согласно определению, два набора  $(x_1; x_2; \dots; x_k)$  и  $(y_1; y_2; \dots; y_k)$  смежны в графе  $P_n^k$ , если в  $n$ -угольнике каждая пара координат  $x_i, y_i$  — соседи, то есть для каждого  $i$  значения  $i$ -той координаты различаются не более, чем на единицу:  $|x_i - y_i| \equiv h_i \pmod{n} \in \{0, 1\}$  для всех  $i$  от 1 до  $k$  (например, на рисунке 6 для случая  $k = 3, n = 5$  отмечены соседи набора  $(0; 1; 2)$ ).

Задача 8. Определите число соседей каждой вершины  $k$ -мерного тора.

Задача 9. Докажите, что

$$\alpha(P_n^k) \leq [(\frac{n}{2})^k]$$

Задача 10. Определите  $\alpha(P_n^k)$ , если  $n$  — четное.

Для нечетных  $n$  справедлива оценка

$$(\frac{n-1}{2})^k \leq \alpha(P_n^k) \leq [(\frac{n}{2})^k],$$

а иногда известно и точное значение  $\alpha(P_n^k)$ .

Теорема. Если  $n - 1$  делится на  $2^k$ , то

$$\alpha(P_n^k) = \frac{n-1}{2^k} \cdot n^{k-1}.$$

Полное доказательство этой теоремы довольно длинно, поэтому покажем лишь, как определить независимое множество с таким числом элементов. По каждому набору  $(x_1; x_2; \dots; x_{k-1})$  первых  $k - 1$  координат получим  $r = \frac{n-1}{2^k}$  значений  $k$ -той координаты:

$$x_k \equiv 2l + r(2^{2k-1}x_1 + 2^{2k-2}x_2 + \dots + 2^1x_{k-1}) \pmod{n}.$$

Здесь  $l$  — любое целое число от 0 до  $r - 1$ .

Если для случая  $k = 2$  вы изобразите множество вершин, координаты которых заданы последней формулой, то получится ответ задачи М415 при  $n - 1$ , делящимся на 4.

Эти результаты позволяют построить таблицу значений  $\alpha(P_n^k)$  (рис. 7).

В ней часть чисел получена теоретически, а остальные — при помощи вычислительной машины. Вы видите, что с ростом  $k$  и  $n$  доля незаполненных мест становится все весомее.

Может быть, кто-то из вас заполнит пропуски в этой таблице и решит задачу об определении пропускной способности передающих аппаратов?