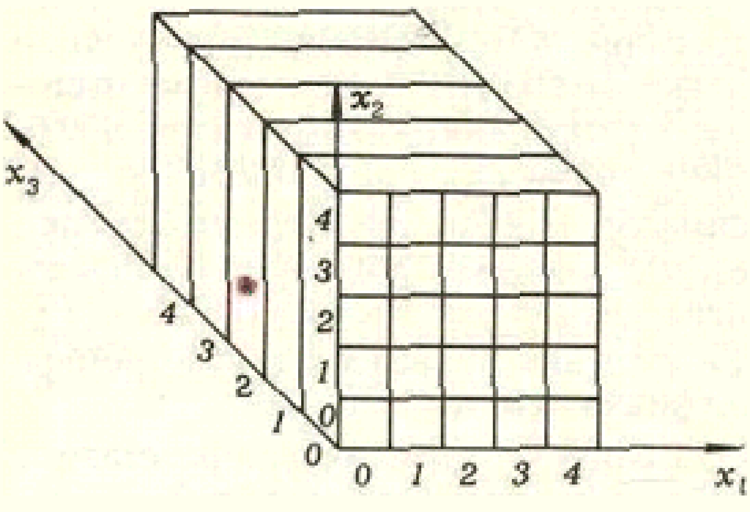
б) если $n = 4s + 1$, то на каждой вертикали и на каждой горизонтали доски располагаются ровно $s = \left[\frac{n}{4}\right]$ точек (королей) из M (здесь $[a]$ — целая часть числа a);

в) если $n = 4s + 3$, то на каждой вертикали и на каждой горизонтали торической доски располагаются либо s, либо $s + 1$, точек из M.

З а д а ч а 5. Будем изображать граф P_5^2 (тор) квадратом, помня, что противоположные стороны его склеены. Назовем *циклическим сдвигом* графа P_n^2 отображение «параллельный перенос», при котором элемент $(0; 0)$ переходит в $(s; t)$.

Докажите, что любое н. н. м. M графа P_5^2 можно привести к виду, изображенному на рисунке 5, если разрешить циклические сдвиги графа доски и симметрии относительно диагонали, вертикали и горизонтали квадрата.

П р и м е ч а н и е. Симметрию относительно диагонали $(0; 0)$ $(n - 1; n - 1)$ квадрата можно записать формулой $(x; y) \to (y; x)$. Цикличекий сдвиг можно было бы записать так: $(x; y) \to (x + s; y + 1)$, но в этой бы отождествить числа n и 0, $n + 1$ и 1 и т. д. Для этого применяются значки $\equiv$ и $mod\ n$. Говорят, что a сравнимо с b по модулю n и пишут $a \equiv b\ (mod\ n)$, если a и b при делении на n дают равные остатки. Обозначим через $a\ (mod\ n)$ остаток от деления a на n. Тогда можно сказать, что элемент $(x; y)$ переходит при циклическом сдвиге графа в элемент $((x + s)\ (mod\ n);\ (y + 1)\ (mod\ n))$, а при отражении относительно, скажем, прямой $x = a$ — в элемент $(2a - x)\ (mod\ n); y)$.



Все, что известно

Попробуем дальше усложнить наш передающий аппарат; построим аппарат A^k, где k — некоторое натуральное число. Это значит, что с помошью аппарата A мы будем передавать пачки из k букв, каждая из которых берется из начального входного алфавита S.

По аналогии с двухбуквенными сигналами несложно построить граф G^k ошибок аппарата A^k. Его множество вершин — это алфавит S^k, состоящий из всевозможных наборов букв длины k: $(v_1;\ v_2;\ \ldots;\ v_k)$, где все v_i берутся из алфавита S. Несложно построить и ребра в графе G^k, то есть понять, какие сигналы $(v_1;\ v_2;\ \ldots;\ v_k)$ и $(w_1;\ w_2;\ \ldots;\ w_k)$ могут перепутаться. Для этого должны перепутаться между собой буквы каждой из координат, то есть для каждого i $(1 \le i \le k)$ должно выполняться одно из двух условий: либо $v_1 = w_1$, либо $v_1 \sim w_1$ (если $v_i = w_i$ для каждого i, то данные наборы совпадают).

Определять точное назначение пропускной способности аппарата A^k в общем случае довольно сложно, но можно оценить ее снизу.

З а д а ч а 6. Докажите, что

$$\alpha\ (G^k) \ge (\alpha(G))^k$$

А дальше... Даже в одном из самых простых случаев, когда граф ошибок — это n-угольник P^n, об $\alpha\ (P_n^k)$ известно мало. Все, что известно из литературы, сейчас и будет рассказано.

Торическую шахматную доску размером $n \times n$ называют еще *двумерным тором.* Аналогично k-ю степень n-угольника (граф P_n^k) можно назвать k-мерным тором со стороной n.

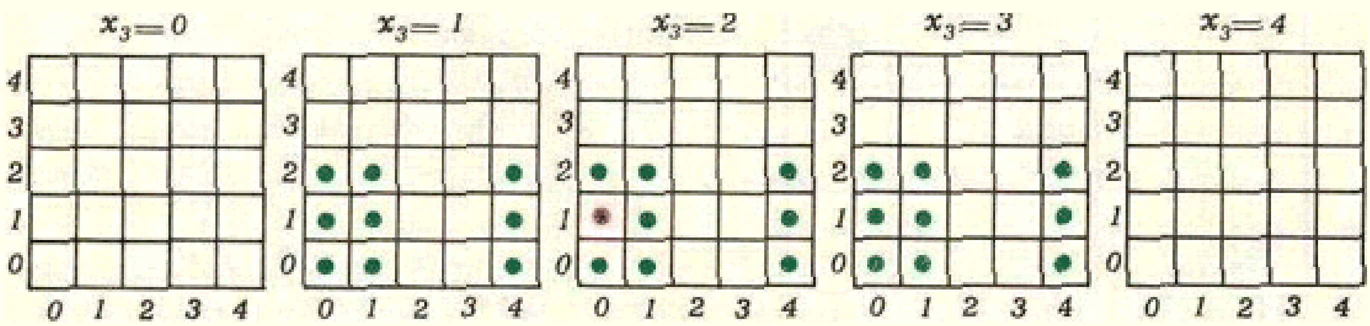


Рис. 6

$n \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	2	4	8	16	32
5	2	5	10	25	
6	3	9	27	81	243
7	3	10	33		
8	4	16	64	256	1024
9	4	18	81		
10	5	25	125	625	3125
11	5	27			
12	6	36	216	1296	7776
13	6	39			
14	7	49	343	2401	16807
15	7	52			

Табл. 1

Вершины графа P_n^k можно отождествить с набором из k целых чисел: $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_k)$, где каждое число x_i изменяется от 0 до $n-1$.

З а д а ч а 7. Определите числов вершин в графе P_n^k.

Согласно определению, два набора $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_k)$ и $(y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_k)$ смежны в графе P_n^k, если в n-угольнике каждая пара координат x_i, y_i — соседи, то есть для каждого i значения i-той координаты различаются не более, чем на единицу: $|x_i - y_i| \equiv h_i\ (mod\ n) \in \{0, 1\}$ для всех i от 1 до k (например, на рисунке 6 для случая $k = 3, n = 5$ отмечены соседи набора $(0;\ 1;\ 2)$).

З а д а ч а 8. Определите число соседей каждой вершины k-мерного тора.

З а д а ч а 9. Докажите, что

$$\alpha\ (P_n^k) \le [(\tfrac{n}{2})^k]$$

З а д а ч а 10. Определите $\alpha\ (P_n^k)$, если n — четное.

Для нечетных n справедлива оценка

$$(\tfrac{n-1}{2})^k \le \alpha\ (P_n^k) \le [(\tfrac{n}{2})^k],$$

а иногда известно и точное значение $\alpha\ (P_n^k)$.

Т е о р е м а. *Если* $n-1$ делится на 2^k, то

$$\alpha\ (P_n^k) = \tfrac{n-1}{2^k} \cdot n^{k-1}.$$

Полное доказательство этой теоремы довольно длинно, поэтому покажем лишь, как определить независимое множество с таким числом элементов. По каждому набору $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_{k-1})$ первых $k-1$ координат получим $r = \frac{n-1}{2^k}$ значений k-той координаты:

$$x_k \equiv 2l + r(2^{2k-1}x_1 + \\ + 2^{2k-2}x_2 + \ldots + 2^1 x_{k-1})\ (mod\ n).$$

Здесь l — любое целое число от 0 до $r-1$.

Если для случая $k-2$ вы изобразите множество вершин, координаты которых заданы последней формулой, то получится ответ задачи М415 при $n-1$, делящимся на 4.

Эти результаты позволяют построить таблицу значений $\alpha\ (P_n^k)$ (рис. 7).

В ней часть чисел получена теоретически, а остальные — при помощи вычислительной машины. Вы видите, что с ростом k и n доля незаполненных мест становится все весомее.

Может быть, кто-то из вас заполнит пропуски в этой таблице и решит задачу об определении пропускной способности передающих аппаратов?