Løsningsforslag – Innlevering nr. 8, ING3504 Signalbehandling

Oppgave nr. 1

a) Et AM-signal med full bærebølge (**DSB FC**) har matematisk form lik (m er modulasjonsgrad):

$$U_{AM} = U_0 \cdot \left(1 + m \cdot \cos\left(\omega_m \cdot t\right)\right) \cdot \sin\left(\omega_c \cdot t\right)$$

Informasjonsfrekvensen har indeks *m* (*message*) og bærebølgen indeks *c* (*carrier*).

Vi bruker en koherent detektor der gjenvunnet bærebølge er gitt ved:

1. $U_{BB} = \sin\left(\omega_c \cdot t\right)$
2. $U_{BB} = U_1 \cdot \cos\left(\omega_c \cdot t\right)$

Bruk trigonometriske formler og finn det demodulerte informasjons-signalet (lavfrekvens-komponenten etter multiplikasjon med gjenvunnet bærebølge) for begge tilfelle. (Velg eventuelt informasjonsfrekvens og bærebølgefrekvens, f.eks. 1 kHz respektive 100 kHz. Men det er enklere og mindre sjanse for feilskriving om du håndterer multiplikasjonene med bokstavuttrykk.)
Hvilken rolle spiller amplitudefaktorene i demodulasjons-prosessen?

I en koherent detektor/mottaker multipliseres mottatt (modulert) signal med gjenvunnet bærebølge. For å ta imot informasjonssignalet må gjenvunnet bærebølge ha riktig frekvens og riktig fase. Da kan man bruke et LP-filter (etter multiplikasjon med bærebølgen) for å fjerne de høye frekvenskomponentene. Evt. DC-komponent er også lett å fjerne (kondensator i serie).

$$U_{\text{mottatt}} = U_{AM} \cdot U_{BB} = U_0 \cdot \left(1 + m \cdot \cos\left(\omega_m \cdot t\right)\right) \cdot \sin\left(\omega_c \cdot t\right) \cdot \sin\left(\omega_c \cdot t\right)$$

$$= U_0 \cdot \left(1 + m \cdot \cos\left(\omega_m \cdot t\right)\right) \cdot \left[\tfrac{1}{2}\left(1 - \cos 2\omega_c t\right)\right]$$

$$= \frac{U_0}{2} \cdot \left[1 + m \cdot \cos\left(\omega_m \cdot t\right) - \cos 2\omega_c t - m \cdot \cos\left(\omega_m \cdot t\right) \cdot \cos 2\omega_c t\right]$$

Siste multiplikasjonen gir frekvenskomponenter omkring to ganger bærebølgefrekvensen. Etter LP-filtrering (tar bort DC-komponenten og frekvenskomponenter omkring $2\omega_C$) står man igjen med informasjonssignalet: $\underline{\underline{U_{\text{info}}}} = \frac{U_0}{2} \cdot m \cdot \cos\left(\omega_m \cdot t\right) \quad \underline{\underline{\propto \cos\left(\omega_m \cdot t\right)}}$

Legg merke til faktoren ½ i de trigonometriske formlene ved multiplikasjon av sinusformede signaler. Amplitudefaktorene gir bare en matematisk skalering av hele resultatet og påvirker ikke frekvensinnholdet. I praksis er amplituden til mottatt signal også avhengig av både avstanden mellom sender og mottaker og forsterkningen i mottageren, så amplitudefaktorene kan vi se bort fra.

b) Et **DSB SC** signal har matematisk form lik $U_{DSB-SC} = U_m \cos\left(\omega_m \cdot t\right) \cdot U_c \sin\left(\omega_c \cdot t\right)$

Vi bruker også her en koherent detektor der gjenvunnet bærebølge er gitt ved:

1. $U_{BB} = \sin\left(\omega_c \cdot t\right)$

2. $U_{BB} = U_1 \cos(\omega_c \cdot t) = U_1 \sin\left(\omega_c \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$

Finn det demodulerte informasjons-signalet (lavfrekvens-komponenten) for begge tilfelle.
Hvilken rolle spiller amplitudefaktorene i demodulasjons-prosessen?

Den første (1.) blir i prinsipp samme som ovenfor bare uten DC-komponenten:

$$U_{\text{mottatt}} = U_{DSB-SC} \cdot U_{BB} = U_m \cos(\omega_m \cdot t) \cdot U_c \cdot \sin(\omega_c \cdot t) \cdot \sin(\omega_c \cdot t)$$

$$= U_c \cdot U_m \cos(\omega_m \cdot t) \cdot \left[\tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\omega_c t)\right]$$

$$= \frac{U_c \cdot U_m}{2} \cdot \cos(\omega_m \cdot t) \quad - \frac{U_c \cdot U_m}{2} \cdot \cos(\omega_m \cdot t) \cdot \cos 2\omega_c t$$

Etter LP-filtrering (tar bort frekvenskomponenter omkring $2\omega_c$) står man igjen med informasjonssignalet: $\underline{\underline{U_{\text{info}}}} = \frac{U_c \cdot U_m}{2} \cdot \cos(\omega_m \cdot t) \quad \underline{\underline{\propto \ \cos(\omega_m \cdot t)}}$

Amplituden synker i overføingen (avhengig av avstanden) men forsterkes opp i mottageren, så amplitudefaktorene kan vi se bort fra.

For den andre situasjonen (2.) er bærebølgen ved mottageren 90° feil og vi får:

$$U_{\text{mottatt}} = U_{DSB-SC} \cdot U_{BB} = U_m \cos(\omega_m \cdot t) \cdot U_c \cdot \sin(\omega_c \cdot t) \cdot U_1 \cos(\omega_c \cdot t)$$

$$= U_c \cdot U_1 \cdot U_m \cos(\omega_m \cdot t) \cdot \left[\tfrac{1}{2}(0 + \sin 2\omega_c t)\right]$$

$$= 0 \quad + \frac{U_c \cdot U_1 \cdot U_m}{2} \cdot \cos(\omega_m \cdot t) \cdot \sin 2\omega_c t$$

Her blir amplituden til mottatt lav-frekvenssignal (informasjonssignal) null! $\underline{\underline{U_{\text{info}} = 0}}$

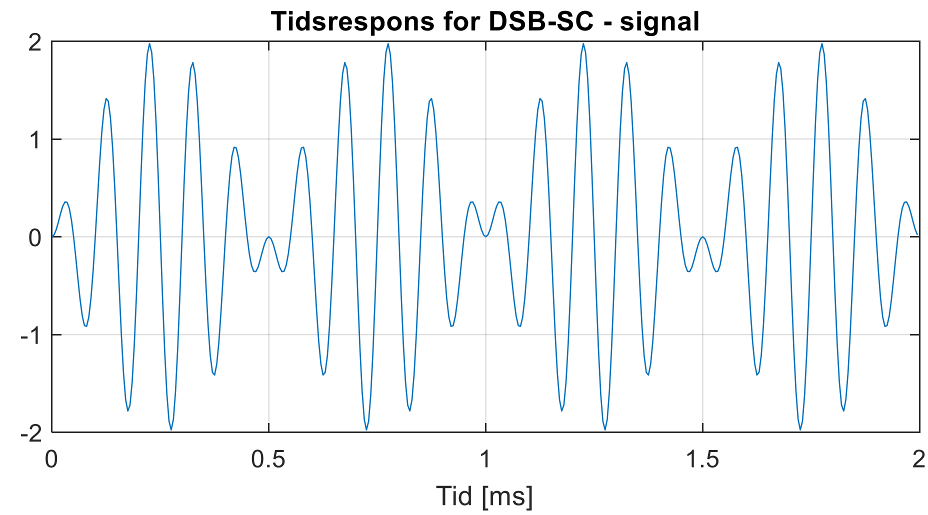
Dette fordi sinus og cosinus er ortogonale. Amplitudefaktorene kan vi se bort fra.

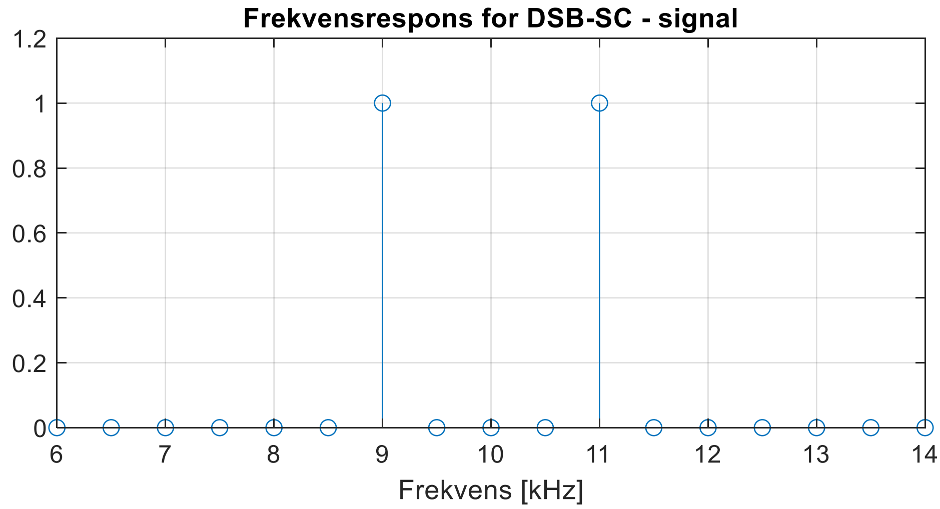
3. $U_{BB} = \sin(\omega_c \cdot t + \Delta\varphi)$ (ekstra utfordring – ingen innlevering)

c) Ekstra – ingen innlevering.
Kontroller beregningene med Matlab/Octave ved å forandre på parametere i koden nedenfor.
(Test gjerne andre saker også.)

```
close all; clear all; clc; format compact
fm = 1e3;   wm = 2*pi*fm; % Informasjons-frekvens i Hz (rad) (Message)
fc = 10e3;  wc = 2*pi*fc; % Bærebølgefrekvens i Hz     (rad) (Carrier)
fs = 20*fc;       % Sample-frekvens

m = 2;          % Ønsket antall perioder av informasjonsfrekvensen fm
N = m*fs/fm;    % Antall beregnings-punkter (sample-punkter)
t = (0:(N-1))*(1/fs);   % Definerer tidsaksen
f = [0:N-1]*fs/N;       % Definer frekvensaksen [0, fs>

% DSB-SC
U = 2;
DSB_SC = U*sin(wm*t).*sin(wc*t);
figure; plot(t*1000, DSB_SC); grid; % skalerer tidsaksen for å få ms
xlabel(' Tid [ms] ');
title('Tidsrespons for DSB-SC - signal')

X = fft(DSB_SC);
H = 2*abs(X)/N;            % Normaliserer for ensidig frekvens-spektrum
figure; stem(f/1000,H); grid;
xlim([(fc-4*fm)/1000, (fc+4*fm)/1000]); % skalerer frekvensaksen for å få kHz
xlabel(' Frekvens [kHz] ');
title('Frekvensrespons for DSB-SC - signal')

% Demodulasjon – med mulighet til fasefeil for gjenvunnet bærebølge
Fasefeil = 0;   % pi/2;
Demod = DSB_SC.*sin(wc*t + Fasefeil);
figure; plot(t*1000, Demod); grid;  % skalerer tidsaksen for å få ms
xlabel(' Tid [ms] ');
title('DSB-SC multiplisert med carrier')

X = fft(Demod);
H = 1*abs(X)/N;     % Normaliserer for tosidig frekvens-spektrum (subplot 1).
                    % Faktor 2 for subplot 2 for ensidig spektrum
figure;
subplot(2,1,1); stem(f/1000,H); grid;
title('DSB-SC multiplisert med carrier  ("to-sidig" spektrum)');
xlabel(' Frekvens [kHz] ')
subplot(2,1,2); stem(f/1000,2*H); xlim([0, (8*fm)/1000]); grid;
xlabel(' Frekvens [kHz] ')
title('Informasjons-signal  (ensidig spektrum)')
```

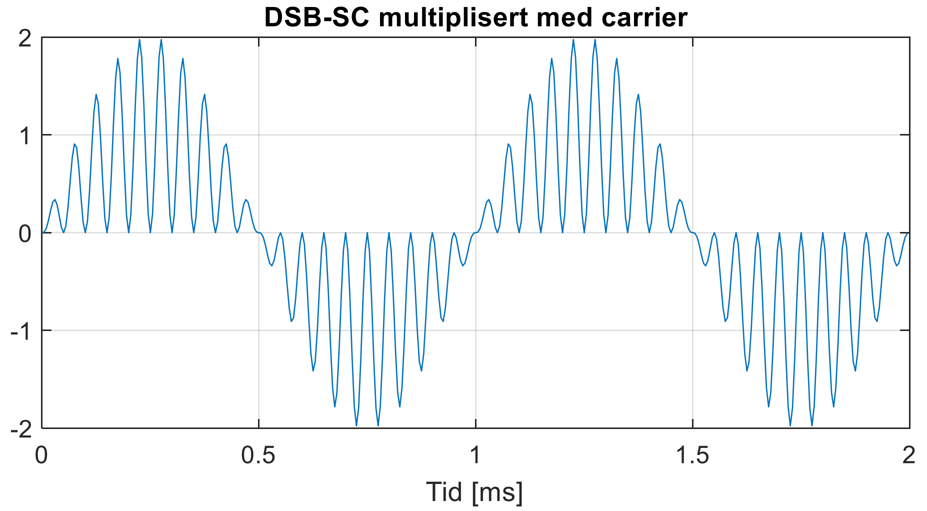
Kjører Matlab/Octave-koden som den står. Se valg av parametere i koden.
En liten fasefeil kan aksepteres. Det gir bare litt mindre amplitude, men dermed også litt dårligere kvalitet på mottatt signal. Når fasefeilen i gjenvunnet bærebølge blir pi/2 (90 grader) forsvinner informasjons-signalet helt (bærebølgen i det modulerte signalet og den gjenvunne bærebølgen er da ortogonale).

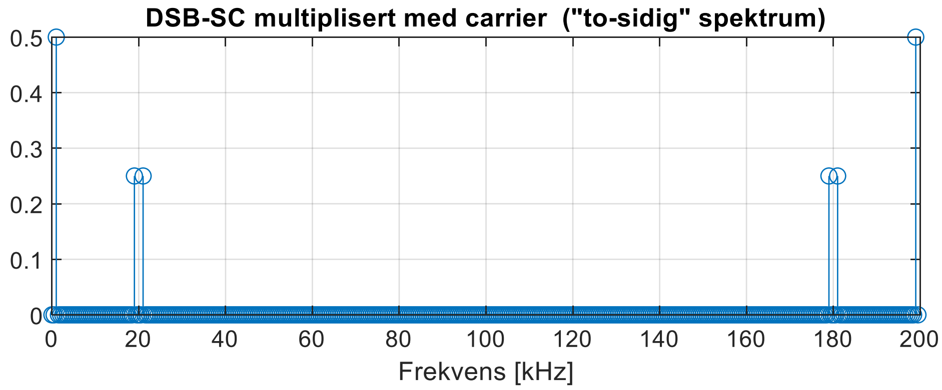


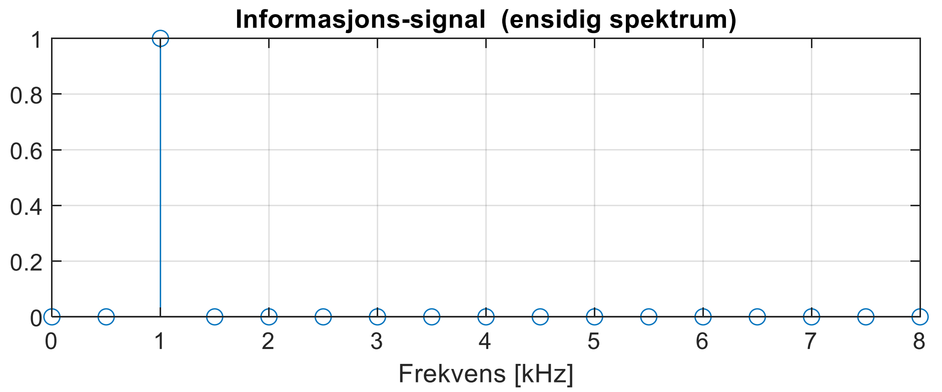


Samme tidsrespons som ovenfor fås ved å addere de to frekvenskomponentene i samsvar med trigonometriske formler:

```
% 2sin(x)sin(y) = -cos(x+y) + cos(x-y)
DSBsc = -cos((wc+wm)*t) + cos((wc-wm)*t)
figure; plot(t*1000, DSBsc); grid;
```


DSB-SC multiplisert med carrier
2
1
0
-1
-2
0
0.5
1
1.5
2
Tid [ms]


DSB-SC multiplisert med carrier ("to-sidig" spektrum)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
Frekvens [kHz]


Informasjons-signal (ensidig spektrum)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Frekvens [kHz]

Oppgave nr. 2

a) Et AM DSB signal (med full bærebølge, DSB-FC) har en midlere effekt lik 5,6 W over 50 Ω og en modulasjonsgrad m = 0,6. Finn amplituden til de forskjellige frekvens-komponentene i frekvensspektret hvis vi antar at LF signalet er sinusformet. Skisser signalets tidsrespons hvis LF signalet har frekvens lik 1 kHz og bærebølgen 10 kHz. Husk enheter på aksene!

Kan bruke formelen: $P_{AM} = P_0 \cdot \left[1 + \frac{m^2}{2}\right]$ og løse ut P_0:

$$P_0 = \frac{P_{AM}}{\left[1+\frac{m^2}{2}\right]} = \frac{5,6}{1+\frac{0,6^2}{2}} = 4,746W$$. Denne bærebølgeeffekten kan uttrykkes ved:

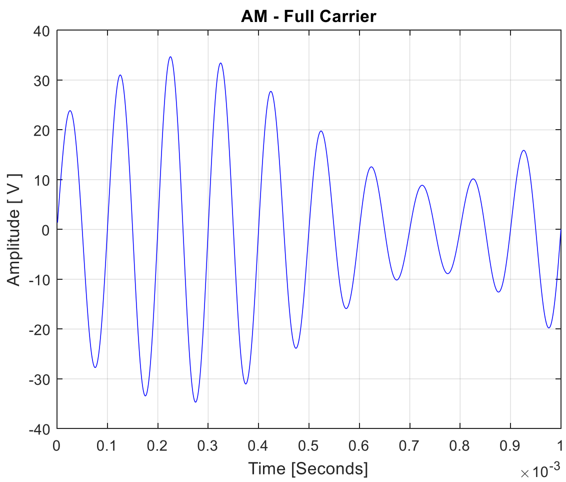
$$P_0 = \frac{\mathrm{U}_0^2}{2 \cdot \mathrm{R}} \quad \Rightarrow \quad U_0 = \sqrt{2 \cdot \mathrm{R} \cdot P_0} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 4,746} = 21,785V$$ som er bærebølgen.

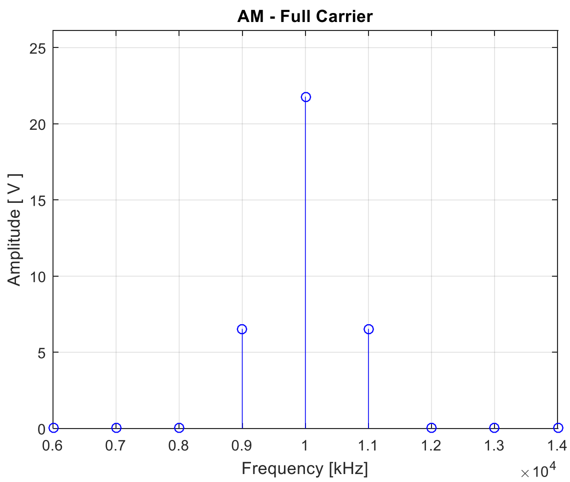
Sidebåndene blir: $U_s = \frac{m \cdot U_0}{2} = \frac{0,6 \cdot 21,785}{2} = 6,54\ V$

De to sidefrekvensene ligger på hver sin side av bærebølgekomponenten, avstand lik LF-frekvensen. Informasjonssignalet har amplituden: $U_m = m \cdot U_0 = 13,08V$

Maksimal og minimal amplitude i tidsdomene blir:

$U_{\max} = U_0 + U_m = 34,86V, \qquad U_{\min} = U_0 - U_m = 8,71V$. Se Matlab-plot.

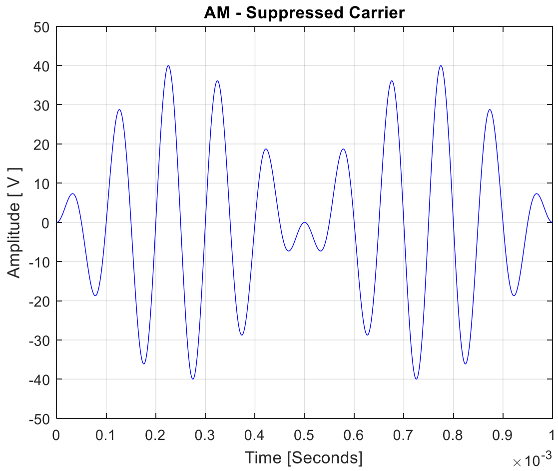


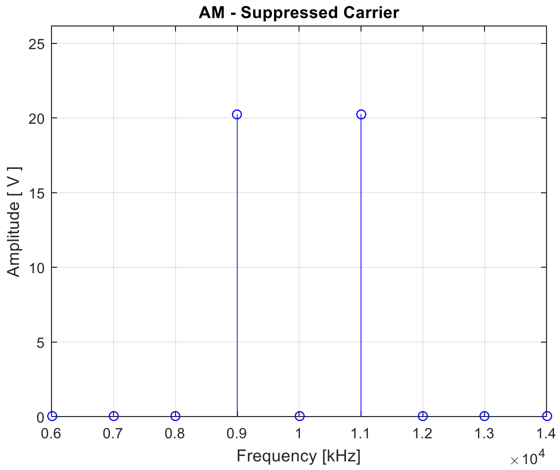


b) Et AM DSB SC signal har en midlere effekt lik 8,2 W over 50 **Ω**. Finn amplituden til de forskjellige komponentene i frekvensspektret hvis vi antar at LF signalet er sinusformet. Skisser signalets tidsrespons og frekvensrespons hvis LF signalet har frekvens lik 1 kHz og bærebølgen 10 kHz. Husk enheter på aksene!

Vi har to like komponenter med 8,2/2 = 4,1 W for hver.

Vi får: $U = \sqrt{2 \cdot R \cdot P} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 4,1} = 20,25\ V$





Se neste side for Matlab-kode for figurene.

```
% Exercise 2a, AM-DSB-FC calculations
% See alternatives below for time vector construction!
fc = 10e3;  % Carrier frequency, Hz
fm = 1e3;   % Modulation (message) frequency, Hz
ma = 0.6;   % Modulation index
U0 = 21.785;   % Amplitude of unmodulated carrier
Um = ma*U0;    % Amplitude of message signal
% Sampled (discretized) time vector.
Fs = 1e6;          % Sample frequency in Hz (here 1 MHz)
t=[1:1:1000]/Fs;   % Sampled time vector, 1000 sample points
% ---------------------------------
% Calculate and plot the time domain signal
y = (U0 + Um*sin(2*pi*fm*t)).*sin(2*pi*fc*t);  % DSB-FC signal
figure; plot(t,y,'b'); grid;
title('AM - Full Carrier');
ylabel('Amplitude [V]'); xlabel('Time [Seconds]');
% ---------------------------------
% Calculate and plot the frequency domain signal (FFT)
H = abs(fft(y))/(length(t)/2); % Normalized correct amplitude
f = [0:length(t)-1]*Fs/length(t); % Frequency vector, same number of
"sample points" as the time vector, from 0 to Fs
figure; stem(f,H,'b'); grid;
axis([fc-4*fm fc+4*fm 0 U0*1.2]); % The part to be plotted
title('AM - Full Carrier'); ylabel('Amplitude [V]'); xlabel('Frequency
[kHz]');
% figure; plot(f,H,'b'); axis([fc-2*fm fc+2*fm 0 U0*1.2]);
% -----------------------------------------------------------
% -----------------------------------------------------------
% Alternative time vector construction
Fs = 1e6;        % Sample frequency in Hz [Same as above]
T = 1e-3;        % Choose the total length in seconds
t = 1/Fs:1/Fs:T;    % Discretized time vector,  dt = 1/Fs
% ---------------------------------
```

```
% Another alternative time vector construction
Fs = 1e6;              % Sample frequency in Hz (here 1 MHz)
t = (1:2^12)/Fs;       % vector with 2^12 = 4096 sample points
% vector with 2^n points gives fast fft-calculations
% T = length(t)/Fs;
% T is total length of time vector in seconds - if needed
% -----------------------------------------------------------
% Exercise 2b
fc = 10e3;    % Carrier frequency, Hz
fm = 1e3;     % Modulation (message) frequency, Hz
Us = 20.25;   % Side band frequency amplitude
Fs = 1e6;            % Sample frequency in Hz (here 1 MHz)
t=[1:1:1000]/Fs;   % 1000 sample points
y = 2*Us*(sin(2*pi*fm*t)).*sin(2*pi*fc*t);   % DSB-SC signal
% Plot as done above (now suppressed carrier)
```

Oppgave nr. 3

a) Et binært ASK modem bruker ikke-koherent deteksjon. Hvilken verdi må E_b/N_0 ha for å oppnå en feilsannsynlighet mindre enn $8{,}5 \cdot 10^{-5}$?

$$\mathrm{P_b} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{E_b}}{2 \cdot \mathrm{N_0}}} \quad \text{eller:} \quad \frac{E_b}{N_0} = -2 \cdot \ln(2 \cdot P_b) = -2 \cdot \ln\left(2 \cdot 8{,}5 \cdot 10^{-5}\right) = 17{,}36 \; eller: \; 12{,}40 \text{ dB}$$

b) Hva er den tilsvarende feilsannsynligheten for et koherent ASK opplegg med samme verdien for E_b/N_0?

$$P_b = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2 \cdot N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\sqrt{\frac{17{,}36}{2}}\right) = 1{,}55 \cdot 10^{-5}$$

c) Et system bruker 8-ary ASK modulasjon og et ”root raised” cosinus-filter i både sender og mottaker, med en α= 0,45. Hva er den nødvendige båndbredden for å støtte en datarate lik 56 kbps?

Vi har: $$C = \frac{B}{1+\alpha} \cdot \log_2 M \quad eller: B = \frac{C \cdot (1+\alpha)}{\log_2 M} = \frac{56\ k \cdot 1{,}45}{\log_2 8} = 27{,}07\ kHz$$