Løsningsforslag – Innlevering nr. 7, ING3504 Signalbehandling

Oppgave nr. 1
Et digitalt basisbåndsignal har følgende datasekvens: [0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0] med en bittid lik 62 µsek. Finn den minste verdien for kanalens båndbredde som trenges for å overføre dette signalet når det brukes NRZ koding!

En bittid =62 µsek tilsvarer en kapasitet på 1/62µs = 16,129 bps.

Binær overføring gir Nyquist båndbredden $B = \frac{C}{2} = \frac{1}{2T_b} = \frac{1}{2\cdot 62\mu s} \approx \underline{\underline{8{,}0645\, kHz}}$

Oppgave nr. 2
Det skal konstrueres et modem som skal benytte en analog telefonkanal med båndbredde lik 3,1 kHz, og midlere signalstøy forhold lik 36 dB.

a) Hva er den teoretisk største feilfrie datarate kanalen kan gi, og hvor mange symboltilstander må benyttes for å få denne maksimale dataraten?

Etter Shannons formel (*Shannon limit*) blir maksimum datarate (kapasitet):

$$C = B\cdot\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = 3100\cdot\log_2\left(1+10^{3,6}\right) = \underline{\underline{37{,}074\, kbps}}$$

For <u>basisbånd-signal</u> har vi kapasiteten: $C = 2B\cdot\log_2(M)$

Dette tilsvarer antall bit per symbol: $n = \log_2(M) = \frac{C}{2B} = \frac{37{,}074\, kbps}{2\cdot 3100} = 5{,}98$

med teoretisk antall symboltilstander: $\underline{\underline{M}} = 2^n = 2^{5,98} \approx \underline{\underline{63{,}1}}$

b) Men praktisk/fysisk må vi ha et helt antall bit per symbol. Hvor stor kapasitet er det derfor mulig å få i denne kanalen?

Dette er nesten n= 6 bit per symbol (helt antall) og M=2^6=64 tilstander.

MEN, problemet er at Shannon limit er en absolutt øvre grense, så 6 bit gir kapasiteten $C = 2B\cdot\log_2(M) = 2\cdot 3100\cdot 6 = 37{,}2\ kbps$, noe som er litt <u>over den teoretiske grensen</u>.

Derfor må vi i praksis gå ned til n = 5 bit per symbol, med antall tilstander: <u>M=2^5=32</u>.

Det tilsvarer kapasiteten: $\underline{\underline{C}} = 2B\cdot\log_2(M) = 2\cdot 3100\cdot 5 = \underline{\underline{31{,}0\ kbps}}$

Om man velger å løse oppgaven for et <u>modulert signal</u> forsvinner faktoren 2 i kapasitets-beregningene siden båndbredden for et modulert signal er omtrent dobbelt så stor som for et basisbånd-signal (sml. øvre og nedre sidebånd).

Da får vi: $n = \log_2(M) = \frac{C}{B} = \frac{37{,}074\, kbps}{3100} = 11{,}96 \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M = 3982}}$

Men samme argumentasjon gjelder her. n = 12 bit per symbol, med tilhørende antall tilstander: $M=2^{12}=4096$ er over den teoretisk øvre grensen.

Så med n = 11 bit per symbol får vi $\underline{\underline{M=2^{11}=2048}}$ antall tilstander.

Det tilsvarer kapasiteten: $\underline{\underline{C}} = B \cdot \log_2(M) = 3100 \cdot 11 = \underline{\underline{34{,}1\,kbps}}$

Vi legger merke til at kravet om heltallig antall bit per symbol gir at vi i praksis kan få litt større kapasitet med modulert signal sammenlignet med basisbånd-overføring.

Men, når vi øker antall tilstander fra 32 til 3982 og samtidig vil beholde samme signal-støy-forhold, må vi "betale" med mye større signaleffekt (forutsatt at vi har samme støytetthet).

Oppgave nr. 3

En kommunikasjonslenk under vann har stor dempning av signalet over en kort distanse, slik at den maksimale E_b/N_0 som er oppnåelig med den ønskede avstand er lik –0,45 dB. Hva er den maksimale båndbredde-effektiviteten som kan forventes for denne lenken, og hvilken informasjonshastighet kan overføres innenfor en båndbredde lik 3100 Hz.

Ved å introdusere E_b/N_0 og C/B kan vi omforme Shannons formel (*Shannon limit*) til

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\frac{C}{B}} - 1}{\frac{C}{B}}$$ For vår situasjon med E_b/N_0 = -0,45 dB får vi: $$\frac{2^{\frac{C}{B}} - 1}{\frac{C}{B}} = 10^{-0.045} = 0{,}9016$$

Denne ligningen kan ikke løses analytisk med hensyn på C/B. Vi kan la datamaskinen løse den numerisk/iterativt, eller vi kan bruke Matlab/Octave og plotte E_b/N_0 som funksjon av C/B og løse den grafisk.

Løsning blir: $\frac{C}{B} = \underline{\underline{0{,}72801\left[\frac{bps}{Hz}\right]}}$ og dette gir: C=3100·0,7284=$\underline{\underline{2258\text{ bps}}}$

Oppgave nr. 4

Vi ønsker å overføre en datastrøm på 56 kbps med bruk av spredt spektrum. Finn nødvendig båndbredde i kanalen hvis kanalen har et termisk signal-støyforhold (SNR) lik: - 7 dB

Minimum båndbredde bestemmes av Shannon limit: $C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) = 56\,k$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{C}{\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)} = \frac{56\,k}{\log_2\left(1 + 10^{-0.7}\right)} = \underline{\underline{213{,}362\,kHz}}$$

Oppgave nr. 5

Et system har en båndbredde-effektivitet C/B = 3,75 bps/Hz. Finn den minste SNR som trengs, i dB. Finn også den tilsvarende verdien for E_b/N_0 i dB.

Det er enklest å finne E_b/N_0 først. $\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\frac{C}{B}} - 1}{\frac{C}{B}} = \frac{2^{3,75} - 1}{3,75} = 3{,}3212$ eller 5.21 dB

Det gir signal-støyforhold: $\frac{S}{N} = \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{C}{B} = 3{,}3212 \cdot 3{,}75 = 12{,}4543$ eller: 10,95 dB.

Oppgave nr. 6

En binær basisbånd-overføring har båndbredde lik 35 kHz og et *Raised* Cosinus filter med *roll-off* faktor α = 0,65. Finn forventet kapasitet!

For basisbånd: $C = \frac{2 \cdot B}{1+\alpha} \log_2(M)$ For binær overføring er M = 2

$$C = \frac{2 \cdot B}{1+\alpha} = \frac{2 \cdot 35k}{1+0{,}65} = \underline{\underline{42{,}4\ kbps}}$$

Oppgave nr. 7

En basisbånd binær datalink er i stand til å støtte en bitrate lik 6400 bps når det brukes et *Raised* Cosinus filter med α = 0,55. Hvor mye raskere kunne informasjonen bli sendt hvis verdien på α ble redusert til α = 0,15?

$\frac{C_{ny}}{C} = \frac{\frac{2B}{(1+\alpha_{ny})}}{\frac{2B}{(1+\alpha)}} = \frac{(1+\alpha)}{(1+\alpha_{ny})} = \frac{1{,}55}{1{,}15} \approx 1{,}35$ eller ca 35 % raskere. C_{ny} = 8626 bps

Oppgave nr. 8

a) Vi ønsker en binær basisbånd-overføring med bipolar NRZ signalering og BER $\leq 10^{-6}$.
Hva er den minste verdien E_b/N_0 kan ha (både lineær og i dB)?

$$P_s = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Eller motsatt: $\frac{E_b}{N_0} = [\mathrm{erfcinv}(2 \cdot P_s)]^2 = [\mathrm{erfcinv}(2 \cdot 10^{-6})]^2 = 11{,}3$ eller: 10,53 dB

b) Vi har E_b/N_0 = 11 dB. Finn forventet BER.

$$P_s = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\sqrt{10^{1,1}}\right) = \underline{\underline{2{,}6 \cdot 10^{-7}}}$$

Oppgave nr. 9

Et system for overføring av binære basisbånd-signal har en kapasitet lik 48 kbps.
Vi har E_b/N_0 lik 7,5 dB.

a) Finn S/N i dB hvis vi bruker minst mulig båndbredde (binært basisbånd-signal)).

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} + \left(\frac{C}{B}\right)_{dB} = 7{,}5\,dB + 10\log_{10}(2)\,dB = \underline{\underline{10{,}51\ dB}}$$

b) Hva er den minste båndbredden vi må ha? Med binært basisbånd må båndbredden minst må være C/2 = 24 kHz. Men teoretisk minimum (med gitt S/N) er gitt av

Shannons formel: $B = \frac{C}{\log_2\left(1 + S/N\right)} = \frac{48\ kbs}{\log_2\left(1 + 10^{1.051}\right)} = \underline{\underline{13.3\,kHz}}$

c) Finn forventet feilhyppighet for dette systemet hvis det brukes unipolar NRZ signalering med E_b/N_0 lik 7,5 dB. For unipolar signalering:

$$P_s = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2 \cdot N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\sqrt{\frac{10^{0,75}}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot erfc(1{,}6768) = \underline{\underline{8{,}9 \cdot 10^{-3}}}$$

d) Finn også forventet feilhyppighet for dette systemet hvis det brukes bipolar NRZ signalering med E_b/N_0 lik 7,5 dB.

$$P_s = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\sqrt{10^{0,75}}\right) = \frac{1}{2} \cdot erfc(2{,}3714) \approx \underline{\underline{4{,}0 \cdot 10^{-4}}}$$