Corso di Istituzioni di Analisi Numerica

Docente E. Carlini

Foglio di esercizi n. 4
Metodi Multi-step per O.D.E.

Codici Scrivere i codici che implementano i seguenti metodi:

1. Metodo di Adams Bashfort di ordine $1, 2, 3, 4$ in dimensione 1
2. Metodo di Adams Multon di ordine $1, 2, 3, 4.$ in dimensione 1
3. Metodo di Adams Bashfort di ordine $1, 2, 3, 4.$ in dimensione 2
4. Metodo di Adams Multon di ordine $1, 2, 3, 4.$ in dimensione 2 per o.d.e. lineari (facoltativo)

ode45 Esplorare il funzionamento della routine di Matlab `ode45` per equazioni scalari. Provare in particolare la differenza tra l'uso di `tspan = [t0; tf ]` (passo variabile) e quello di `tspan =[t0 : h : tf ]` (passo fisso).

multistep Utilizzare il codice multistep per risolvere numericamente almeno un paio dei problemi di Cauchy elencati nella lista Problemi Test con i metodi di Adams-Bashfort e di Adams-Moulton. Per i metodi impliciti fissare la tolleranza ed il numero massimo di iterate, ad esempio a $1e-06$ e 30. Per innescare i metodi a più passi si può usare la routine di Matlab `ode45` .
Calcolare il vettore degli errori sui tempi discreti della griglia temporale uniforme, produrre il grafico della soluzione esatta e di quella approssimata sovrapposte ed il grafico dell'errore.

ordine Scrivere un programma per la verifica dell'ordine dell'errore dei metodi studiati. Per ogni metodo il programma calcola la soluzione approssimata relativa a un passo iniziale h_0 e poi di nuovo per m volte dimezzando il passo. Ogni volta viene calcolato l'errore in modulo tra la soluzione calcolata e quella esatta al tempo finale. Al termine gli errori sono riportati in un grafico in scala semilogaritmica. Creare una tabella con 3 colonne, la prima riporta il valore del passo, la seconda l'errore al tempo finale in modulo, la terza l'ordine dato dalla formula $p = \log_2(\frac{E_{2h}}{E_h})$

Test 1d Alcuni problemi da inserire in un menú di scelta dei programmi (verificare che risolvono il pb di Cauchy)

$$y' = -y\ln y,\ y(0) = 0.5, \quad \text{sol. esatta:} \quad y(t) = e^{\ln(0.5)e^{-t}}$$
$$y' = -e^{(-(t+y))},\ y(0) = 1, \quad \text{sol. esatta:} \quad y(t) = \ln(e + e^{-t} - 1)$$
$$y' = y(1-y),\ y(0) = 0.5, \quad \text{sol. esatta:} \quad y(t) = e^t/(1+e^t)$$
$$y' = 16y(1-y),\ y(0) = 1/1024, \quad \text{sol. esatta:} \quad y(t) = e^{16t-\ln 1023}/(1+e^{16t-\ln 1023})$$
$$y' = -100(y - e^{-t}) - e^{-t} \quad y(0) = 1, y(0) = 0, \quad \text{sol. esatta:} \quad y(t) = (y(0)-1)e^{-100t} + e^{-t}$$

Test 2d

1. Oscillatore armonico
$y'' = -y,\ \ y(0) = x_0,\ y'(0) = y_0,$
soluzione esatta: $y(t) = x_0\cos(t) + y_0\sin(t)$

2. Caso lineare con origine nodo stabile
   $y' = Ay, \quad A = \begin{bmatrix} -21 & 19 \\ 19 & -21 \end{bmatrix} \quad y_0 = (10,\ 20)^T$, sol. esatta
   $y(t) = Q^{-1}\exp(D(t-t_0))Qy_0$ dove $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -40 \end{bmatrix}$

3. Pendolo
   $y'' = -\sin y,\ y(0) = x_0,\ y'(0) = y_0$

4. Modello di Lotka-Volterra, preda-predatore

$$\begin{cases} y_1' &= \alpha y_1 - \beta y_1 y_2 \\ y_2' &= -\gamma y_2 + \delta y_1 y_2 \end{cases}$$

   con $\alpha = 0.25, \beta = 0.01, \gamma = 1, \delta = 0.01,\ y_1(0) = 80, y_2(0) = 30, T = 30.$