Lezione del 7 Novembre di Gandini

Teorema 0.1. *S^n è omeomorfo alla compattificazione di Alexandross di $\mathbb{R}^n$*

Dimostrazione. Identifichiamo R^n con $S^n \backslash \{(1,0,\dots,0\}$.
Mostriamo che $\hat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$, Vale a dire che la topologia euclidea su S^n coincide con la topologia di Alexandross dove $\infty = (1,0,\dots,0)$.
Sia $A \subseteq S^n$

$$A \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \subseteq S^n \backslash (1,0,\dots,0) \text{ aperto} \\ A = S^n \backslash K \text{ con } K \subseteq S^n \backslash (1,0,\dots,0) \text{ compatto} \end{cases}$$

Osserviamo che basta richiedere che K sia compatto infatti lo spazio è di Hausdorff dunque compatto implica chiuso.

- $(1,0,\dots,0) \notin A$ dunque $A \subseteq S^n \backslash (1,0,\dots,0)$.
  Consideriamo $i : R^n \to S^n$ dove i con codominio ristretto a $S^n \backslash (1,0,\dots,0)$è l'inversa della proiezione stereografica, dunque immersione aperta.
  Ora essendo i aperta

$$A \subseteq S^n \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq S^n \backslash (1,0,\dots,0) \text{ aperto}$$

- Supponiamo, adesso, $(1,0,\dots,0) \in A$

$$A \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad S^n \backslash A \text{ chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad K = S^n \backslash A \text{ compatto} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad A = S^n \backslash K \text{ con } K \subseteq S^n \backslash (1,0,\dots,0) \text{ compatto}$$

□

Proposizione 0.2. $\hat{X}$ *Hausdorff* $\Leftrightarrow \begin{cases} X \textit{ Hausdorff} \\ \forall x \in X \quad x \textit{ ammette un intorno compatto} \end{cases}$

Dimostrazione.

- Caso 1: $x, y \in X$.
  Gli aperti di $\hat{X}$ sono aperti di X e viceversa quindi

$$\exists U, V \text{ aperti di } \hat{X} \text{ che separano } x \text{ e } y \quad \Leftrightarrow \quad U, V \text{ aperti di } X \text{ che separano } x \text{ e } y$$

- Caso 2: $y = \infty$

$$\exists U \ni x \quad V \ni \infty \text{ aperti di } \hat{X} \text{ con } U \cap V = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in U \subseteq X \text{ aperto} \\ \infty \in V = \hat{X} \backslash K \text{ K compatto} \\ U \cap V = \emptyset \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists U \ni x \text{ aperto di } X \\ y \in V \subseteq K \text{ con } K \text{ intorno compatto di } y \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

□

Proposizione 0.3. *Sia $f : X \to Y$ immersione aperta tra spazi di Hausdorff.*
Definiamo $g : Y \to \hat{X}$ via $g(y) = \begin{cases} x \text{ se } x \in f^{-1}(y) = \{x\} \\ \infty \text{ se } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$.
Allora g è continua

Dimostrazione. Sia $U \subseteq \hat{X}$ aperto

- Caso 1: $\infty \notin U$.
  $U \subseteq X \quad \Rightarrow \quad g^{-1}(U) = f(U)$ e poichè f è aperta $g^{-1}(U)$ è un aperto

- Caso 2: $\infty \in U$.
  Allora $U = \hat{X} \backslash K \, \exists K$ compatto

$$g^{-1}(U) = Y \backslash g^{-1}(K) = Y \backslash f(K)$$

  ora K è compatto dunque anche $f(K)$ lo è, ora un compatto in un Hausdorff è chiuso quindi $g^{-1}(U)$ è aperto

□

Corollario 0.4. *X compatto di Hausdorff, $x_0 \in X$ allora X è omeomorfo alla compattificazione di Alexandross di $X \backslash \{x_0\}$*

Dimostrazione. Mostriamo che $X \widehat{\backslash \{x_0\}}$ è di Hausdorff utilizzando la proposizione 0.2.
Essendo X di Hausdorff anche $X \backslash \{x_0\}$ lo è, vediamo ora che ogni punto $x \neq x_0$ ammette un intorno compatto.
Essendo X di Hausdorff $\exists U, V$ aperti con $x \in U$ e $x_0 \in V$ tali che $U \cap V = \emptyset$ dunque $x_0 \notin \overline{U}$ ora essendo K chiuso in un compatto è compatto.
$\overline{U}$ è l'intorno compatto di x in $X_0 \backslash \{x_0\}$ ($x \in U \subseteq \overline{U}$ con U aperto).
Sia $g : X \to X \widehat{\backslash \{x_0\}}$