Lezione del 2 Marzo

Definizione 0.1 (Prodotto libero)**.**
Sia $(G_i)_{i\in I}$ una famiglia di gruppi.
Il prodotto libero dei G_i è

a) un gruppo G

b) $(\phi_i : G_i \to G)_{i\in I}$ omomorfismi di gruppi che soddisfano la seguente propietà universale: dati $\psi_i : G_i \to H$ omomorfismi di gruppi con H gruppo arbitrario, $\exists!\psi$ che fa commutare il diagramma $\forall i$

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[rr, "\phi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & G \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

ovvero tale che $\psi \circ \phi_i = \psi_i$

In questo caso denotiamo $G = \star_{i\in I} G_i$

Esempio 0.1. *Nel caso di $I = \{1, 2\}$ abbiamo la seguente situazione*

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[dr, "\phi_1"] \arrow[drr, bend left, "\psi_1"] & & \\ & G \arrow[r, dashed, "\psi"] & H \\ G_2 \arrow[ur, "\psi_2"] \arrow[urr, bend right, "\psi_2"'] & & \end{tikzcd}$$

dove ψ è tale che i due triangoli commutino

Proposizione 0.2 (Unicità del prodotto libero)**.**

Dimostrazione. Fissiamo una famiglia $(G_i)_{i\in I}$ di gruppi e siano (G, ϕ_i) e (G', ψ'_i) due prodotti liberi.
Usando la propietà universale ponendo $H = G'$ e $\psi_i = \phi'_i$ si ha $\exists!\phi' : G \to G'$ tale che $\phi' \circ \phi_i = \phi'_i$
Usando la propietà universale ponendo $H = G$ e $\psi_i = \phi_i$ si ha $\exists!\phi : G' \to G$ tale che $\phi \circ \phi'_i = \phi_i$
Dunque mettendo insieme le 2 relazioni otteniamo

$$\phi_i = \phi \circ \phi'_i = \phi \circ (\phi' \circ \phi_i) = (\phi \circ \phi') \circ \phi_i$$

dunque abbiamo che i seguenti diagrammi commutano

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & G \arrow[d, "\phi\circ\phi'"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & G \arrow[d, "id_G"] \\ & G \end{tikzcd}$$

dunque dalla propietà universale $\phi \circ \phi' = id_G$ da cui ϕ è l'isomorfismo cercato □

Proposizione 0.3 (Esistenza del prodotto libero)**.**

Dimostrazione. Denotiamo con $e_i \in G_i$ l'identità $\forall i \in I$.
Definiamo
$$W = \bigcup_{i \in I} (G_i - \{e_i\})$$
e definiamo G nel seguente modo

- come insieme
$$G = \left\{ (g_1, \ldots, g_m) \,\middle|\, \begin{array}{c} m \geq 0 \; g_i \in W \\ g_k \text{ e } g_{k+1} \text{ appartengono a insiemi diversi} \end{array} \right\}$$
dove $(g_1, \ldots, g_m)$ è chiamata parola ridotta sull'alfabeto W

- definiamo su G un prodotto $(g_1, \ldots, g_m) \cdot (h_1, \ldots, h_s) =$
$$= \begin{cases} (g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_s) \text{ se } g_m \text{ e } h_1 \text{ non appartengono allo stesso } G_i \\ (g_1, \ldots, g_m h_1, \ldots, h_s) \text{ se } g_m \text{ e } h_1 \text{ appartengono allo stesso } G_i \text{ e } g_m h_1 \neq e_i \\ (g_1, \ldots, g_{m-1}, h_2, \ldots, h_s) \text{ se } g_m \text{ e } h_1 \text{ appartengono allo stesso } G_i \text{ e } g_m h_1 = e_i \end{cases}$$
Nel terzo caso si procede induttivamente analizzando g_{m-1} e h_2.
La parola verrà indicata senza tonde e senza virgole

Definiamo $\phi_i : G_i \to G \quad x \to (x)$ dove (x) è una parola.
Verifichiamo che tale coppia soddisfa la propietà universale.
Dati $\psi_i : G_i \to H$ omomorfismi di gruppi (H arbitrario) definiamo $\psi : G \to H$ nel seguente modo
$$\psi(g_1 \ldots g_m) = \psi_{i_1}(g_1) \cdots \psi_{i_m}(g_m)$$
dove $g_j \in G_{i_j}$.
È di facile verifica che con tale scelta si ha $\psi \circ \phi_i = \psi_i$ □

Definizione 0.2 (Gruppo libero generato da un insieme)**.**
Sia S un insieme.
Un gruppo libero generato da S è il dato di un gruppo F e di un'applicazione ϕ che gode della seguente propietà universale.
Data $\psi : S \to H$ mappa con H arbitrario, esiste unico omomorfismo $\vartheta : F \to H$ tale che $\psi = \vartheta \circ \phi$

Proposizione 0.4. *Per ogni insieme, esiste un unico gruppo libero generato da S*

Dimostrazione. Sia $S = \{x_i \, i \in I\}$ allora definiamo
$$F(S) = \star_{i \in I} G_i \text{ dove } G_i = \{x_i^m \,|\, m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$
ovvero è il prodotto libero di copie di $\mathbb{Z}$ indicizzate dagli elementi di S
Prendiamo come ϕ l'ovvia inclusione di S in $F(S)$ Si può provare che due prodotti liberi generati da un insiemi sono canonicamente isomorfi (la dimostrazione è analoga a quanto osservato per i prodotti liberi)

Osservazione 1. Dalla propietà universale di $F(S)$ possiamo concludere che dato H gruppo arbitrario
$$Hom(F(S), H) = Mappe(S, H)$$

Definizione 0.3 (Sottogruppo generato da un insieme)**.**
Sia $S \subseteq G$ sottoinsieme con G gruppo allora

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{K<G \\ S\subseteq K}} K$$

Osservazione 2.

$$\langle S \rangle = \left\{ a_1^{\pm 1} \dots a_k^{\pm 1} \,|\, a_i \in S \text{ e } k \in \mathbb{N} \right\}$$

Definizione 0.4 (Chiusura normale)**.**
Sia $S \subseteq G$ sottoinsieme con G gruppo allora

$$N(S) = \bigcap_{\substack{K \triangleleft G \\ S\subseteq K}} K$$

Osservazione 3.

$$N(S) = \{gag^{-1} \,|\, g \in G, \in S\}$$

Osservazione 4. Vogliamo studiare la relazione tra $G = \langle S \rangle$ e $F(S)$
Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "i"] \arrow[dr, hook] & F(S) \\
& G
\end{tikzcd}$$

Dunque per la propietà universale di $F(S)$ esiste una mappa $\phi : F(S) \to G$ tale che il diagramma commuta.
Dalla definizione di G segue che la mappa è suriettiva, da cui

$$G \cong \frac{F(S)}{Ker\,\phi} = \frac{F(S)}{N(R)}$$

Poniamo per notazione $G = \langle S \,|\, R \rangle$, dove S è l'insieme dei generatori, mentre R l'insieme dei generatori

Esempio 0.5.

$$\mathbb{Z} \cong \langle 1 \rangle$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \langle a, b \,|\, aba^{-1}b^{-1} \rangle$$