Lezione del 11 Marzo e prima parte della lezione del 12 Marzo

Teorema 0.1 (di classificazione)**.**
Le superfici compatte e orientabili (qualsiasi cosa voglia dire) sono tutte e sole le seguenti Σ_i dove Σ_i è la superficie con i-buchi

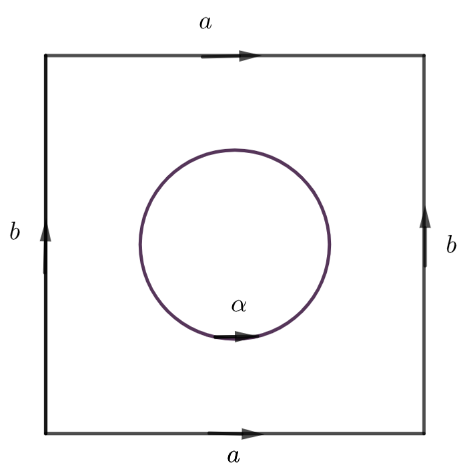
Osservazione 1. $\Sigma_0 = S^2$ (la sfera) mentre $\Sigma_1 = S^1 \times S^1$ (il toro)

Calcoliamo il π_1 del toro usando il teorema di Van Kamper Sia Q il quadrato e sia p il centro del quadrato.
Il toro si ottiene identificando i lati opposti del quadrato, sia $\pi : Q \to \Sigma_1$ la proiezione al quoziente.
Siano $A = \pi(Q\backslash\{p\}$ e $B = \pi(Q\backslash\partial Q)$ da cui $A \cap B = \pi(Q\backslash(\{p\} \cup \partial Q)$
Osserviamo che A, B e $A \cap B$ sono aperti (essendo immagine di aperti saturi) e connessi per archi.
Ora $Q\backslash\{p\}$ si retrae a ∂Q che a sua volta si proietta su $S^1 \wedge S^1$, la retrazione passa al quoziente, A si ritrae su $S^1 \wedge S^1$, abbbiamo $\pi_1(A) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ con generatori a, b
Osserviamo che B è omeomorfo a $Q\backslash\partial Q$ ($\pi_{Q\backslash\partial Q}$ è l'omomorfismo cercato), poichè tale insieme è convesso si ha $\pi_1(B) = 1$
Ora $A \cap B$ si ritrae su S^1 percui $\pi(A \cap B) = \mathbb{Z}$
Abbiamo dunque il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A) \arrow[dr] & \\
\pi_1(A \cap B) \arrow[ur, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \pi_1(\Sigma_1) \\
 & \pi_1(B) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \arrow[dr] & \\
\mathbb{Z} \arrow[ur, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \pi_1(\Sigma_1) \\
 & \{1\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ora se α è il generatore di $\pi_1(A \cup B)$ disegnato allora $\phi(\alpha) = aba^{-1}b^{-1}$ mentre ψ è banale.
Dal teorema di Van Kampen si ha

$$\pi_1(\Sigma_1) = \frac{\pi_1(A) \star \pi_1(B)}{\phi(\alpha) = \psi(\alpha)} = \langle a, b \,|\, aba^{-1}b^{-1} \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$



Possiamo fare una dimostrazione analoga anche per la superficie di genere 2.
Sia P l'ottagono e p il suo centro, sia $\pi : P \to \Sigma_2$ identificando i lati con le stesse lettere (vedi disegno)
Sia $A = \pi(P \backslash \{p\})$ e $B = \pi(P \backslash \partial P)$
Come nel caso precedente A, B e $A \cap B$ sono aperti e connessi per archi, A si ritrae su $\pi(\partial P)$ che è un boquet di 4 copie di S^1, date dalle proiezioni di a, b, c, d, dunque $\pi_1(A) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$.
Ora B è semplicemente connesso, mentre un convesso di R^2 meno un punto interno è omotopicamente equivalente a S^1 da cui $\pi_1(A \cup B) = \mathbb{Z}$
Se α è un generatore di $\pi_1(A \cup B)$ allora $\phi(\alpha) = aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$.
Per il teorema di Van Kamper si ha

$$\pi_1(\Sigma_2) = \langle a, b, c, d \,|\, aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle$$

Con un procedimento analogo partendo da un $4g$-agono si mostra che

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \left| \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \right\rangle$$

Denotiamo con $\Gamma_g = \pi(\Sigma_g)$

Teorema 0.2.

$$\frac{\Gamma_g}{[\Gamma_g, \Gamma_g]} \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

Dimostrazione. Definisco una mappa $\psi : \Gamma_g \to \mathbb{Z}^{2g}$ ponendo $\psi(a_i) = e_i$ e $\psi(b_i) = e_{2i+1}$
La buona definizione deriva dal fatto che ovviamente le relazioni vadano nell'identità di Z^{2g}.
Poichè $\mathbb{Z}^{2g}$ è abeliano si ha $[\Gamma_g, \Gamma_g] \subseteq \ker \psi$ da cui ψ induce

$$\overline{\psi} : \frac{\Gamma_g}{[\Gamma_g, \Gamma_g]} \to \mathbb{Z}^{2g}$$

Per concludere esibiamo un'inversa di $\overline{\psi}$

$$\phi : \mathbb{Z}^{2g} \to \frac{\Gamma_g}{[\Gamma_g, \Gamma_g]} \text{ con } \phi(e_i) = \begin{cases} [[a_i]] \text{ se } i \leq g \\ [[b_i]] \text{ se } i > g \end{cases}$$

Dal fatto che $\frac{\Gamma_g}{[\Gamma_g, \Gamma_g]}$ è abeliano, è facile verificare che ϕ si estende ad un omo di gruppi che è l'inversa di ψ

Osservazione 2. $\mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Z}^n \Leftrightarrow m = n$
Infatti se $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ è un omomorfismo, viene rappresentata da una matrice A di taglia $m \times n$.
se $\psi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ è l'inversa allora viene rappresentata da una matrice B di taglia $n \times m$
Ora $AB = I_m$ mentre $BA = I_n$, per fatti noti di algebra lineare si ha $n = m$

Corollario 0.3.

- $\Gamma_g \cong \Gamma_{g'} \Leftrightarrow g = g'$
- Σ_g *è omotopicamente equivalente a* $\Sigma_{g'}$ *se e solo se* $g = g'$
- $\Sigma_g \cong \Sigma_{g'} \Leftrightarrow g = g'$

D'ora in poi tutti gli spazi saranno localmente connessi per archi

Proposizione 0.4. *Sia $p: E \to X$ un rivestimento connesso (E connesso dunque connesso per archi (E localmente connesso).*
Sia $\tilde{x_0} \in F = p^{-1}(x_0)$ e sia $\psi : \pi_1(X, x_0) \to F$ dove $\psi(\alpha) = \tilde{x_0} \centerdot \alpha$.
Allora ψ induce una bigezione tra

$$\frac{p_\star(\pi_1(E, \tilde{x_0})}{\pi_(1)(X, x_0)} \to F$$

In particolare $Stab(\tilde{x_0}) = p_\star(\pi_1(E, \tilde{x_0}))$ e al variare di $\tilde{x} \in F$ i gruppi $p_\star(\pi_1(E, \tilde{x})) = Stab(\tilde{x})$ sono tutti e soli i coniugati di $p_\star(\pi_1(E, \tilde{x_0}))$

Dimostrazione. Poichè E è connesso, l'azione di monodromia è transitiva, da cui segue la surgettivita di ψ
Sia $\alpha = [\gamma] \in Stab(\tilde{x_0})$ dunque per definizione di monodromia

$$\widetilde{\gamma}_{\widetilde{x_0}}(1) = \tilde{x_0} \;\Leftrightarrow\; \widetilde{\gamma}_{\widetilde{x_0}} \text{ è un loop in } E \;\Leftrightarrow\; [\gamma] \in p_\star(\pi_1(E, \tilde{x_0}))$$

da ciò segue che

$$\psi(\alpha) = \psi(\beta) \;\Leftrightarrow\; \tilde{x_0} \centerdot \alpha = \tilde{x_0} \centerdot \beta \;\Leftrightarrow\; \tilde{x_0} \centerdot (\alpha\beta^{-1}) = \tilde{x_0} \;\Leftrightarrow\; \alpha\beta^{-1} \in Stab(\tilde{x_0}) \;\Leftrightarrow\; [\alpha] = [\beta] \text{ in } \frac{\pi_1(X, x_0)}{Stab(\tilde{x_0})}$$

dunque ψ induce la bigezione cercata.
Usando il fatto che l'azione è transitiva, è facile vedere che $Stab(\tilde{x})$ al variare di $\tilde{x}$ sono tutti e soli i coniugati di $Stab(\tilde{x_0})$ (se $\tilde{x} \in F$ allora $\tilde{x} = \tilde{x_0} \centerdot \eta$ E $Stab(\tilde{x})$ è il coniugato di $Stab(\tilde{x_0})$ per η $\square$

Teorema 0.5 (di sollevamento di mappe)**.**
Sia $p: E \to X$ un rivestimento connesso, $x_0 \in X$, $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ e sia $f : Y \to X$ continua con Y connesso e sia $y_0 \in Y$

$$\exists \tilde{f} : Y \to E \text{ sollevamento di } f \text{ con } \tilde{f}(y) = \tilde{x_0} \;\Leftrightarrow\; f_\star(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_\star(\pi(E, \tilde{x_0}))$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ se $f = p \circ \tilde{f}$ allora $f_\star = p_\star \circ \tilde{f}_\star$ dunque $Im_{f_\star} \subseteq Im_{p\star}$
$\Leftarrow$ Definiamo $\tilde{f}$ come segue, se $y \in Y$, scegliamo un cammino γ in Y che collega y_0 a y e poniamo $\tilde{f}(y) = \left(\widetilde{f \circ \gamma}\right)_{\widetilde{x_0}(} 1)$.
Verifichiamo la buona definizione ovvero che la funzione non dipende dal cammino scelto. Se β è un altro cammino allora $\gamma \sim \gamma \star \overline{\beta} \star \beta$ come cammini dunque

$$f \circ \gamma \sim [f \circ (\gamma \star \overline{\beta} \star \beta)] = f \circ (\gamma \star \overline{\beta}) \star f \circ \beta$$

Osserviamo che $\alpha = \gamma \star \overline{\beta}$ è un loop basato inn y_0 da cui $[f \circ \alpha] \in f_\star(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_\star(\pi_1(E, \tilde{x_0}))$ dunque $f \circ \alpha$ si solleva ad un loop in E a partire da $\tilde{x_0}$.
Si ha dunque

$$\left(\widetilde{f \circ \gamma}\right)_{\tilde{x}_0}(1) = \left(\widetilde{(f \circ \alpha) \star (f \circ \beta)}\right)_{\tilde{x}_0}(1) = \left(\widetilde{f \circ \alpha}\right)_{\tilde{x}_0} \star \left(\widetilde{f \star \beta}\right)_{\left(\widetilde{f \star \alpha}\right)_{\tilde{x}_0}(1)}(1)$$

Essendo $\left(\widetilde{f \star \alpha}\right)_{\tilde{x}_0}$ un loop allora $\left(\widetilde{f \star \alpha}\right)_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$ da cui

$$\left(\widetilde{f \circ \gamma}\right)_{\tilde{x}_0}(1) = \left(\widetilde{f \star \beta}\right)_{\tilde{x}_0}(1)$$

questo mostra la ben definizione di $\tilde{f}$

Mostriamo adesso la continuità.

Dato $y \in Y$. Sia U intorno aperto ben rivestito di $f(y) \in X$ dunque $p^{-1}(U) = \coprod V_i$ con V_i aperto in E.

Sia i_0 tale che $\tilde{f}(y) \in V_{i_0}$ e sia $s : U \to V_{i_0}$ l'inversa continua di $p_{|V_{i_o}}$ (esiste per definizione di intorno ben rivestito).

Sia $W = f^{-1}(U)$ che è aperto di Y (a meno di prendere un suo sottoinsieme, lo assumo connesso per archi).

Per mostrare la continuità di $\tilde{f}$ basta osservare che $\tilde{f}_{|W} = s \circ f_{|W}$

Sia $\gamma \in \Omega(y_0, y)$ e $z \in W$ tale che $\gamma_z \in \Omega(y, z)$, per definire $\tilde{f}(z)$ uso il cammino $\alpha_z = \gamma \star \gamma_z$ dunque

$$\tilde{f}(z) = \left(\widetilde{f \circ \alpha_z}\right)_{\tilde{x}_0}(1) = \left(\widetilde{(f \circ \gamma) \star (f \circ \gamma_z)}\right)_{\tilde{x}_0}(1) = \left(\widetilde{f \star \gamma}\right)_{\tilde{x}_0} \star \left(\widetilde{f \circ \gamma_z}\right)_{\tilde{f}(y)}(1)$$

in quanto $\tilde{f}(y) = \left(\widetilde{f \circ \gamma}\right)_{\tilde{x}_0}(1)$ dunque otteniamo

$$\left(\widetilde{f \circ \gamma}\right)_{\tilde{x}_0}(1) = \left(\widetilde{f \circ \gamma_z}\right)_{\tilde{f}(y)} = (s \circ (f \circ \gamma_z))(1) = s(f(z))$$

dove la penultima uguaglianza deriva dall'unicità del sollevamento in quanto $s \circ f \circ \gamma_z$ solleva $f \circ \gamma_z$ a partire da $\tilde{f}(y)$ $\square$

Corollario 0.6. *Sia $p : E \to X$ un rivestimento connesso, $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Sia $f : Y \to X$ con $f(y_0) = x_0$.*
Se Y è semplicemente connesso $\exists! \, \tilde{f} : Y \to E$ con $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$

Dimostrazione. La condizione del teorema è banalmente vera

Teorema 0.7 (di Barsuk-Ulam)**.** *Non esistono mappe continue $f : S^2 \to S^1$ con $f(-x) = -f(x)$*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo che esista una mappa f come nelle ipotesi.

Siano $p : S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e $q : S^1 \to \mathbb{P}(\mathbb{R})$ le proiezioni al quoziente. Abbiamo, dunque, un diagramma commutativo di funzioni continue

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & S^1 \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & \mathbb{P}(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

Ora $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$ e $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ segue che $\overline{f}_\star$ è la mappa banale (non esistono omomorfismi non banali da $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$)

Per il teorema di sollevamento $\exists h : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to S^1$ con $q \circ h = \overline{f}$ (non sappiamo che $h \circ p = f$)

Scelgo $x_0 \in S^2$. So che $q(h(p(x_0)) = q(f(x_0))$ in quanto $q(h(p(x_0)) = \overline{f}(p(x_0)) = q(f(x_0))$.

Dunque $h \circ p$ e f sono sollevamenti di $\overline{f} \circ p$.

Sia $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ allora $z_0 = \overline{f}(p(z_0))$.

Ora $q^{-1}(z_0) = \{y_0, -y_0\}$ dunque posso supporre $f(x_0) = y_0$ e $f(-x_0) = -y_0$.

Anche $h(p(x_0)), h(p(-x_0))$ appartengono a $\{y_0, -y_0\}$ ma $p(x_0) = p(-x_0)$ per cui $h(p(x_0)) = h(p(-x_0))$ dunque deve succedere che f e $h \circ p$ coincidono su un punto o x_0 o $-x_0$.

Ora f e $h \circ p$ sono sollevamenti che coincidono in un punto, per un unicità (S^2 connesso) $f = h \circ p$. Ciò è assurdo in quanto $f(x_0) \neq f(-x_0)$ mentre $h(p(x_0)) = h(p(-x_0))$ $\square$

Corollario 0.8. *$f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua. Allora $\exists x \in S^2$ con $f(x) = f(-x)$*

Dimostrazione. Se $f(x) \neq f(-x)$ $\forall x \in S^2$, allora la mappa $g: S^2 \to S^1$ definita come

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}$$

sarebbe ben definita e continua (il denominatore non si annullano).
Tale mappa genera un assurdo perchè $g(x) = -g(-x)$

Corollario 0.9. *In un fissato istante, sulla superficie terrestre, esistono 2 punti antipodali con la stessa temperatura e pressione (che si assumono continue)*