Lezione del 6 maggio

Esempio 0.1. *Siano* A, B, C, D *in* $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ *in posizione generale, consideriamo i punti*

$$P = L(A,B) \cap L(C,D) \quad Q = L(A,C) \cap L(B,D) \quad R = L(A,D) \cap L(B,C)$$

I punti P, Q, R *sono allineati?*
Da un lemma sappiamo che A, B, C, D *determinano un riferimento proiettivo in cui*

$$A = [e_0] \; B = [e_1] \; C = [e_2] \; D = [e_0 + e_1 + e_2]$$

determiniamo le equazioni parametriche delle rette definite sopra

$$L(A,B) : \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad L(A,B) : x_2 = 0$$

$$L(A,D) : \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_0 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad L(A,D) : x_1 - x_2 = 0$$

$$L(A,C) : \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad L(A,C) : x_1 = 0$$

$$L(C,D) : \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & x_0 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad L(C,D) : x_0 - x_1 = 0$$

$$L(B,D) : \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & x_0 \\ 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad L(B,D) : x_0 - x_2 = 0$$

$$L(B,C) : \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_0 \\ 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad L(B,C) : x_0 = 0$$

dunque risolvendo dei sistemi lineari otteniamo

$$P = [a, a, 0] = [1, 1, 0] \; Q = [1, 0, 1] \; R = [0, 1, 1]$$

dunque tali punti risultano allineati se il determinate della seguente matrice è nullo, essendo

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

si mostra che i punti non sono allineati

Esempio 0.2. *Siano* $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ *due rette sghembe, sia* $P \in \mathbb{P}^3(\mathbb{K}) \setminus (r_1, \cap r_2)$.
Provare che esiste un'unica retta l *tale che* $P \in l$ *e* $r_i \cap l \neq \emptyset$ *per* $i = 1, 2$
Siano $P_i = L(P, r_i)$ *che sono piani in quanto*

$$\dim P_i = \dim\{P\} + \dim r_i - \dim(r_i \cap \{P\}) = 0 + 1 - (-1) = 2$$

Osserviamo che $P_1 \cap P_2 = l$ *che è una retta (se i piani non fossero distinti allora* $r_1, r_2 \in P_1$ *da cui si intersecano, contro l'ipotesi di essere sghembe)*
Osserviamo che $P \in l$ *inoltre* l, r_i *sono due rette che giacciono sullo stesso piano, dunque si intersecano in un punto.*

Esercizio 0.3. *Dimostrare l'unicità*

Esercizio 0.4. *Determinare il sistema di equazioni cartesiane per l (come sopra) nel caso in cui* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *e*

$$r_1 : \begin{cases} x_0 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_0 + x_1 = 0 \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$P = [0, 1, 0, 1]$$

Esempio 0.5. *Siano* W_1, W_2, W_3 *piani di* $\mathbb{P}^4(\mathbb{K})$ *tali che* $W_i \cap W_j$ *è un punto per* $i \neq j$ *e* $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$*.*
Mostrare che esiste un unico piano W_0 *tale che* $W_i \cap W_0$ *sia una retta per* $i = 1, 2, 3$
Siano $P_{ij} = W_i \cap W_j$*, osserviamo che* P_{12}, P_{13} *e* P_{23} *sono in posizione generale.*
Se questi punti fossero allineati, allora $L(P_{13}, P_{23}) \subseteq W_3$ *ma anche* $P_{12} \in W_3$ *da cui* $P_{12} \in W_1 \cap W_2 \cap W_3$ *contro l'ipotesi sui piani.*
Definiamo $W_0 = L(P_{12}, P_{13}, P_{23})$ *ed essendo i punti in posizione generale* W_0 *ha dimensione* 2 *dunque è una retta.*
Mostriamo che $W_0 \cap W_1$ *è una retta (similmente si farà con gli altri 2 piani).*
$\dim(W_0 \cap W_1) < 2$ *in quanto i 2 piani sono distinti (se così non fosse si avrebbe che* $P_{23} \in W_1$ *dunque i 3 piani non sono disgiunti) ed inoltre* $L(P_{12}, P_{13}) \subseteq W_0 \cap W_1$ *da cui si conclude che* $L(P_{12}, P_{13}) = W_0 \cap W_1$*.*
Andiamo a mostrare l'unicità, sia W_0' *un altro piano che soddisfa le condizioni della tesi, sia* $l_i = W_0' \cap W_i$ *per* $i = 1, 2, 3$
Osserviamo ora che

$$l_i \cap l_j = W_0' \cap W_i \cap W_0' \cap W_j = \{P_{ij}\}$$

quindi $P_{12}, P_{13}, P_{23} \in W_0'$*, ora per minimalità di* W_0 *otteniamo* $L(P_{12}, P_{13}, P_{23}) = W_0 \subseteq W_0'$ *ma entrambi sono piani*

Esempio 0.6. *Siano* r_1, r_2, r_3 *rette di* $\mathbb{P}^4(\mathbb{K})$ *a due a due sghembe e non tutte contenute in un iperpiano.*
Allora esiste unica retta l che interseca tutte e tre le rette date.
Osserviamo che $r_i \cap r_j$ *ha dimensione* $1 + 1 - (-1) = 3$ *dunque* $H_{ij} = r_i \cap r_j$ *è un iperpiano per* $i \neq j$ *.*
Ora essendo le 3 rette non contenute in un iperpiano si ha $H_{12} \neq H_{23}$ *da cui* $\dim(H_{12} \cap H_{13}) < 3$ *da cui* $H_{12} \cap H_{23}$ *è un piano (segue dalla stima data dalla formula di Grassman).*
Poniamo $l = H_{12} \cap H_{13} \cap H_{23}$ *e osserviamo che*

$$\dim l = \dim((H_{12} \cap H_{23}) \cap H_{13}) \geq 2 + 3 - 4 = 1$$

Se mostriamo che l non è un piano abbiamo concluso.
Supponiamo per assurdo che l sia un piano, dunque $r_1 \cap r_2$ *sono contenute in un piano dunque si intersecano*

Esercizio 0.7. *Provare l'unicità della retta*

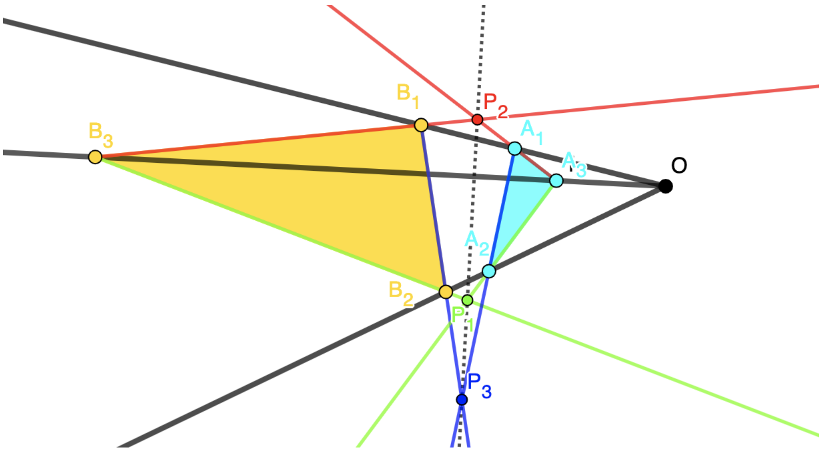
Definizione 0.1. Siano T_1, T_2 triangoli di vertici rispettivamente A_1, A_2, A_3 e B_1, B_2, B_3 allora i due triangoli sono in prospettiva se e solo se

$\exists O$ centro della prospettiva, distinto dagli A_i, B_j tale che $L(A_i, B_i)$ per $i = 1, 2, 3$ passano per O

Teorema 0.8 (di Desagues). *Sia $\mathbb{P}(V)$ un piano proiettivo e siano $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ punti distinti di $\mathbb{P}(V)$ a 3 a 3 non allineati.*
Consideriamo i triangoli T_1 e T_2 di vertici rispettivamente A_1, A_2, A_3 e B_1, B_2, B_3.
Allora T_1, T_2 sono in prospettiva se e solo se i punti

$$P = L(A_2, A_3) \cap L(B_2, B_3) \ P_2 = L(A_3, A_1) \cap L(B_3, B_1) \ P_3 = L(A_1, A_2) \cap L(B_1, B_2)$$

sono allineati



Dimostrazione. Essendo i vertici dei 2 triangoli a 3 a 3 non allineati, P_1, P_2, P_3 sono distinti tra di loro e distinti dai vertici.
I vertici A_1, B_1, P_3, P_2 sono in posizione generale dunque essi danno luogo ad un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ dove

$$A_1 = [e_0] \ B_1 = [e_1] \ P_3 = [e_2] \ P_2 = [e_0 + e_1 + e_2]$$

Ora con un conto analogo all'esercizio 0.1 si mostra che $A_2 = [b, 0, c]$ con $b, c \neq 0$ essendo $A_2 \neq A_1 \neq P_3$ dunque otteniamo

$$A_2 = [1, 0, a_2]$$

con $a_2 \neq 0$
Ragionando in modo analogo otteniamo

$$A_3 = [a_3, 1, 1] \text{ con } a_3 \neq 0$$

$$B_2 = [0, 1, b_2] \text{ con } b_2 \neq 0$$

$$B_3 = [1, b_3, 1] \text{ con } b_3 \neq 0$$

Consideriamo i punti

$$P_1' = L(A_2, A_3) \cap L(P_2, P_3)$$

$$P_1'' = L(B_2, B_3) \cap L(P_2, P_3)$$

Allora P_1, P_2, P_3 sono allineati se e solo se $P_1 = P_1' = P_1''$ infatti

- Se P_1, P_2, P_3 sono allineati, $P_1 \in L(P_2, P_3)$ da cui si ha $P_1 = P_1' = P_1''$

- Se $P_1 = P_1' = P_1''$ allora $P_1 \in L(P_2, P_3)$

Osserviamo che le coordinate omogenee di questi nuovi punti sono

$$P_1' = [1, 1, 1 - a_2 a_3 + a_2]$$

$$P_1'' = [1, 1, 1 - b_2 b_3 + b_2]$$

Dunque si ha P_1, P_2, P_3 allineati se e solo se $P_1' = P_1''$ dunque se e solo se

$$a_2(1 - a_3) = b_2(1 - b_3) \tag{1}$$

Esaminiamo le condizioni che fanno si che T_1, T_2 sono in prospettiva, ovvero sotto quali ipotesi

$$\exists O = L(A_1, B_1) \cap L(A_2, B_2) \cap L(A_3, B_3)$$

ovvero

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ a_2 x_2 + b_2 x_1 - x_2 = 0 \\ (1 - b_3)x_0 + (1 - a_3)x_1 + (a_3 b_3 - 1)x_2 = 0 \end{cases}$$

Tale soluzione ammette una soluzione non nulla se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_2 & b_2 & -1 \\ 1 - b_3 & 1 - a_3 & a_3 b_3 - 1 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero se e solo se

$$b_2(1 - b_3) = a_2(1 - a_3)$$

che è la condizione 1 □