Lezione del 8 Novembre del Prof. Frigerio

Teorema 0.1 (di Alexander)**.**
Sia X spazio topologico con una prebase P.
Se da ogni ricoprimento con elementi di P si può estrarre un sottoricoprimento finito, X è compatto

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che X non sia compatto.
Sia Ω l'insieme dei ricoprimenti aperti da cui non è possibile estrarre sottoricoprimenti finiti, e su Ω definiamo una relazione d'ordine tramite l'inclusione.
X non compatto $\Rightarrow \Omega \neq \emptyset$.

Proviamo che ogni catena di Ω ammette un maggiorante.
Sia $C \subseteq \Omega$ una catena, cioè $C = \{\mathfrak{U}_i\}_{i\in I}$ dove gli $\mathfrak{U}_i$ sono ricoprimenti aperti in Ω.
Pongo $\mathfrak{U} = \bigcup\limits_{i\in I} \mathfrak{U}_i$, sicuramente $\mathfrak{U}$ è un ricoprimento e $\mathfrak{U} > \mathfrak{U}_i\ \forall i \in I$.
Proviamo che $\mathfrak{U} \in \Omega$.
Supponiamo, per assurdo, che da $\mathfrak{U}$ si estrae un sottoricoprimento finito ovvero

$$\exists A_i, \dots, A_n \in \mathfrak{U} \quad X = A_1 \cup \cdots \cup A_n \text{ dove } A_j \in \mathfrak{U}_{i(j)} \text{ per qualche } i(j) \in I$$

Poichè gli $\mathfrak{U}_{i(j)}$ appartengono ad una catena e sono finiti, esiste il massimo, poniamo $\mathfrak{U}_{\bar{i}} \in C$ tale massimo.
Allora $A_J \in \mathfrak{U}_{\bar{i}}\ \forall j = 1, \dots n$ dunque da $\mathfrak{U}_{\bar{i}}$ si estrae un sottoricoprimento finito, il che è assurdo.
$\mathfrak{U} \in \Omega$ è il maggiorante della catena cercato.

Per il Lemma di Zorn, esiste un elemento $Z = \{Z_i\}_{i\in I} \in \Omega$ massimale, ovvero un ricoprimento Y che contiene Z e un aperto non contenuto in Z non appartiene ad Ω dunque da Y si estrae un sottoricoprimento finito.

Mostriamo che $P \cap Z$ è un ricoprimento di X.
Mostrando ciò, concludo la dimostrazione infatti da $P \cap Z$ non posso estrarre sottoricoprimenti finiti (non posso da Z). Dunque $P \cap Z$ è un ricoprimento con aperti di P dal quale non posso estrarre sottoricoprimenti finiti, il che è assurdo per ipotesi.
Sia $x \in X$, per definizione di ricoprimento $\exists i \in I$ con $x \in Z_i$.
Ora Z_i è aperto, dunque per definizione di prebase,

$$\exists P_1, \dots, P_n \in P \quad x \in P_1 \cap \cdots \cap P_n \subseteq Z_i$$

Mostriamo che un $P_j \in Z$.
Supponiamo, per assurdo, che $P_j \notin Z\ \forall j = 1, \dots, n$ dunque per massimalità di Z, $Z \cup \{P_j\} \notin \Omega$ ovvero

$$\exists I_j \subseteq I \text{ finito tale che } X = P_j \cup \bigcup_{i\in I_j} Z_i$$

Poichè ciò vale $\forall j$ allora

$$X = \left(\bigcap_{i=1}^{n} P_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i\in I_j} Z_i\right)$$

infatti se $x \notin \bigcap P_j$ allora appartiene ad un certo Z_i dove $i \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$.

Ora $\bigcap\limits_{j=1}^{n} P_j \subseteq Z_i$ dunque abbiamo trovato un sottoricoprimento finito di Z, da cui $P \cap Z$ è un ricoprimento, da cui la tesi. □

Teorema 0.2 (di Tychonoff).
Sia X_i, $i \in I$ una famiglia di spazi topologici compatti

$$X = \prod_{i \in I} X_i \text{ è compatto}$$

Dimostrazione. Per il teorema di Alexander, basta vedere che ogni ricoprimenti $\mathfrak{U}$ fatto con aperti di una prebase ammette un sottoricoprimento finito.
Scegliendo la prebase canonica, sia $\mathfrak{U} = \bigcup_{i \in I} A_i$ un ricoprimento di X dove

$$A_i = \{\pi_i^{-1}(D) \mid D \in \mathfrak{D}_i\} \text{ dove } \mathfrak{D}_i \text{ famiglia di aperti di } X_i$$

Ora $\exists i \in I$ per cui $\mathfrak{D}_i$ è un ricoprimento di X_i.
Supponiamo, per assurdo, che

$$\forall i \in I \quad \exists \overline{x_i} \in X_i \quad x_i \notin \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_i} D$$

dunque l'elemento $(\overline{x_i}_{i \in I}$ non appartiene ad alcun elemento di $\mathfrak{U}$ il che è assurdo.
Dunque $\exists i_0 \in I$ tale che $\mathfrak{D}_{i_0}$ è un ricoprimento di X_{i_0}, ma $\mathfrak{D}_{i_0}$ ammette un sottoricoprimento finito $B_1, \ldots, B_n$ dunque

$$\{\pi_{i_0}^{-1}(B_1), \ldots, \pi_{i_0}^{-1}(B_n)\}$$

è il sottoricoprimento di $\mathfrak{U}$ cercato. □

Esempio 0.3. *Sia X un insieme, $A \subseteq \mathbb{R}$*

$$A^X = \{f : X \to A\}$$

Dotando A^X della topologia prodotto (A con topologia euclidea) si ottiene la topologia della convergenza puntuale

Osservazione 1. Gli elementi di A^X, spesso, si denotano con $(a_x)_{x \in X}$, pensandoli come "stringhe di elementi di A"

Lemma 0.4. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni con $f_n : X \to A$.*

$$f_n \to f \text{ in } A^X \quad \Rightarrow \quad f_n \to f \text{ puntualmente}$$

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$. Per definizione di topologia prodotto, se $f(x_0) = a \in A$ allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \{(a_x)_{x \in X} \text{ con } |a_{x_0} - a| < \varepsilon\} = \pi_{x_0}^{-1}((a - \varepsilon, a + \varepsilon))$$

è un aperto, dunque un intorno di f.
Poichè $f_n \to f$ allora

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f(x_{n_0}) - a| = |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

ovvero $f_n \to f$ puntualmente □

Osservazione 2. Vale anche il viceversa, verrà dimostrato nelle successive lezioni