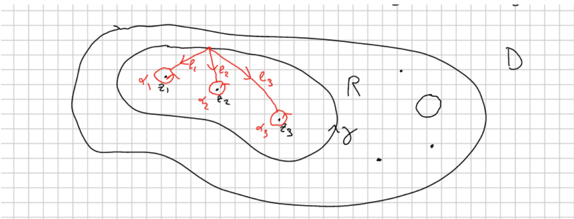
Lezione del 27 aprile

Teorema 0.1 (dei residui)**.**
Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, sia $f : D \setminus S$ olomorfa con S chiuso e discreto in D.
Sia $R \subseteq D$ compatto con bordo C^1 a tratti, dunque $R \cap S = \{z_1, \dots, z_k\}$ è finito, $\partial R \cap S = \emptyset$.
Allora

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} Res(f, z_i)$$

Dimostrazione. Lo dimostriamo solamente nel caso in cui D è omeomorfa ad un disco. Consideriamo i cammini come in figura dove α_i è una piccola circonferenza intorno a z_i percorsa



in senso antiorario.
Consideriamo il cammino

$$\beta = \gamma \star l_k \star \overline{\alpha_k} \star \overline{l_k} \star l_{k-1} \star \overline{\alpha_{k-1}} \star \overline{l_{k_1}} \star \dots \star l_1 \star \overline{\alpha_1} \star \overline{l_1}$$

tale cammino è omotopicamente banale in $R \setminus S$ poichè borda un disco ed essendo f olomorfa $\omega = f\,\mathrm{d}z$è chiusa su $R \setminus S$ si ha

$$0 = \int_\beta \omega = \int_\gamma \omega + \sum_{i=1}^{k} \left(\cancel{\int_{l_i} \omega} + \int_{\overline{\alpha_i}} \omega + \cancel{\int_{\overline{l_i}} \omega} \right)$$

da cui otteniamo

$$\int_\gamma \omega = -\sum_{i=1}^{k} \int_{\overline{\alpha_i}} \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\alpha_i} \omega = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} Res(f, z_i)$$

La dimostrazione nel caso in cui R non sia un omemorfa ad un disco è simile ma non viene dimostrato

0.1 Calcolo di residui

Se z_0 è un polo semplice di f, allora

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

dunque

$$(z - z - 0) f(z) = a_{-1} \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

da cui

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Nel caso $f = \frac{P}{Q}$ con P, Q olomorfe $P(z_0) \neq 0$ e z_0 zero semplice di Q otteniamo

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Esempio 0.2. *Calcolo dei residui di* $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$
$f(z)$ *ha singolarità in* $z_0 = i$ *e* $z_1 = -1$ *inoltre tali singolarità sono poli semplici, essendo zero semplici di* $z^2 + 1$.
Per quanto mostrato in precedenza otteniamo

$$Res(f, z_0) = \left.\frac{e^{iz}}{2z}\right]_{z=i} = \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{-i}{2e}$$

In modo analogo otteniamo

$$Res(f, z_1) = \frac{e^{i\cdot(-i)}}{2(-i)} = \frac{ei}{2}$$

Mostriamo ora una strategia nel caso i poli non siano semplici.
Se f ha un polo di ordine k in z_0 si pone $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$ che si estende ad una funzione olomorfa in z_0 (la denotiamo sempre con g).
Ora se

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

si ha che a_{-1} è il coefficiente di $(z - z_0)^{k-1}$ nello sviluppo di g.
Essendo g olomorfa in z_0 si ha

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

Esempio 0.3. $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$ *ha un polo semplice in* 0 *e due poli doppi in* $\pm i$.
Per calcolare il residuo in i *consideriamo*

$$g(z) = f(z)(z-i)^2 = \cancel{(z-i)^2}\frac{e^{iz}}{z(z+i)^2\cancel{(z-i)^2}} = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$$

dunque

$$g'(z) = \frac{ie^{iz}z(z+1)^2 - e^{iz}\left((z+1)^2 + 2z(z+i)\right)}{z^2(z+i)^4}$$

ovvero

$$g'(i) = -\frac{3}{4e} = \frac{g'(i)}{1!} = Res(f, i)$$

0.2 Applicazione del teorema dei residui

Esempio 0.4. *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}$$

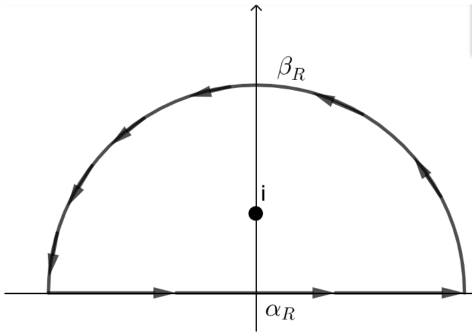
L'integrale richiesto è equivalente al calcolo di

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+1}$$

Notiamo ora che se $x \in \mathbb{R}$ allora $\frac{\cos x}{x^2+1} = Re\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right)$.
La funzione $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$ ha poli semplici in $\pm i$.
Sia

$$\Omega_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R \text{ e } Im(z) \ge 0\}$$

Una parametrizzazione positiva di Ω_R è $\alpha_R \star \beta_R$ come in figura Per il teorema dei residui si ha



$$\int_{\alpha_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i Res(f,i) = 2\pi i\left(\frac{-i}{2e}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Essendo

$$\alpha_R : [-R,R] \to \mathbb{C} \quad \alpha_R(t) = t$$
$$\beta_R : [0,\pi] \to \mathbb{C} \quad \beta_R(t) = Re^{it}$$

si ha

$$\int_{\alpha_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(t)\alpha'(t) = \int_{-R}^{R} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-R}^{R} \frac{\cos t + i\sin t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

la cui parte reale è l'integrale richiesto (come limite).
Per concludere osserviamo che $\int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
Ora $\beta_R(t) = R^{e^it} = R(\cos t + i\sin t)$ per cui

$$e^{i\beta_R(t)} = e^{iR(\cos t + i\sin t)} = e^{iR\cos t}e^{-R\sin t} \quad \Rightarrow \quad |f(\beta_R(t))| = e^{-R\sin t}$$

da cui

$$|f(\beta_R(t)\beta_R'(t)| = \left|\frac{e^{i\beta_R(t)}}{\beta_R(t)^2+1} iRe^{it}\right| = \frac{e^{-R\sin t}}{R^2e^{2it}+1} \le \frac{R}{R^2+1}$$

per cui

$$\left|\int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{R\pi}{R^2+1} \to 0 \text{ per } R \to +\infty$$

Dunque abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{e}$$

Osservazione 1. Per "complessificare" la funzione si sarebbe potuto prendere $\frac{\cos z}{z^2+1}$.
Il problema è che $\left|\frac{\cos z}{z^2+1}\right|$ non è stimabile facilmente lungo $\beta_R(t)$, inoltre $\cos(it) = \cosh t$ che non è limitato

Osservazione 2. In modo analogo (sempre integrando lungo $\partial\Omega_R$ con Ω_R come sopra) si calcola

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ dove } P, Q \text{ polinomi, } Q(x) \neq 0 \text{ e } \deg Q > \deg P + 2$$

Esempio 0.5. *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

Se consideriamo la funzione complessa $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ *essa ha 4 poli, la regione* Ω_R *(come sopra) contiene solamente i poli* $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ *e* $z_1 = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ *che sono semplici.*
Ragionando come sopra otteniamo

$$\int_{\partial\Omega_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i(Res(f, z_0) + Res(f, z_1)) = 2\pi i\left(-\frac{z_0}{4} - \frac{z_1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

come prima otteniamo che $\int_{\beta_R} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ *per* $R \to +\infty$ *da cui*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$