Lezione del 17 ottobre di Gandini

Continuo dei controesempi della lezione precedente

Lemma 0.1. *Sia X uno spazio $T4$ separabile e $D \subseteq X$ chiuso e discreto. Allora D ha cardinalità meno che continua.*

Dimostrazione. Sia $Q \subseteq X$ un denso numerabile.
Mostriamo che
$$|\mathcal{P}(D)| \leq |\mathcal{P}(Q)| \leq |\mathbb{R}|$$
Infatti $|D| < |\mathcal{P}(D)|$ quindi $|D| < |\mathbb{R}|$

Sia $S \subseteq D$, D è discreto quindi S è un chiuso, ora chiuso di chiuso è un chiuso da cui $S \subseteq X$ è un chiuso.
Ora anche S è anche un aperto quindi $D \backslash S$ è un chiuso in X.
Dal fatto che X è $T4$ posso separare D da $D \backslash S$ ovvero
$$\exists U_S, V_S \subseteq X \text{ aperti disgiunti} \quad S \subseteq U_S \quad D \backslash S \subseteq V_S$$
Consideriamo l'applicazione
$$\mathcal{P}(D) \to \mathcal{P}(Q) \quad S \to Q \cap U_S$$
osserviamo che $U_S \cap Q \neq \emptyset$ in quanto un denso interseca tutti gli aperti non vuoti.
Mostriamo che la funzione è iniettiva:
$$S \neq T \quad \Rightarrow S \backslash T \neq \emptyset$$
Allora
$$\begin{cases} S \subseteq U_S & D \backslash S \subseteq V_S \\ T \subseteq U_T & D \backslash T \subseteq V_T \end{cases} \qquad U_S \cap V_S = U_T \cap V_T$$
Ora per costruzione $S \backslash T \subseteq U_S \cap V_T$ quindi $U_S \cap V_T$ è un aperto non vuoto da cui
$$U_S \cap V_T \cap Q \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad (U_S \cap Q) \cap V_T \neq (U_T \cap Q) \cap V_T \quad \Rightarrow \quad U_S \cap Q \neq U_T \cap Q$$
Abbiamo trovato un'applicazione iniettiva quindi vale la disuguaglianza cercata □

Corollario 0.2. $\mathbb{R}^2_S$ *non è* $T4$

Dimostrazione. Abbiamo provato che $\mathbb{R}^2_S$ è separabile.
Ora l'antidiagonale è discreta , xhiusa e ha cardinalità continua

Osservazione 1.

Regolare $\not\Rightarrow$ normale. Sia $\mathbb{R}^2_S$ il piano di Sorgenfray.
Il piano di Sorgenfray è regolare in quanto $\mathbb{R}_S$ lo è ed il prodotto di regolari è regolare mentre per il corollario precedente non è normale

Osservazione 2. Abbiamo mostrato un esempio di prodotto di spazi normali che non è normale

Osservazione 3. $T2 \not\Rightarrow$ regolare.
Sia
$$K = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$
e consideriamo su $\mathbb{R}$ la topologia generata dagli aperti
$$(a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$(a,b)\backslash K \quad a,b\in\mathbb{R}$$

Questa topologia chiamata $\mathbb{R}_K$ è $T2$ essendo un raffinamento di quella euclidea ma non è regolare.
Infatti per costruzione K è un chiuso, ma non posso separarlo da 0.

$$A\in I(0) \quad\Rightarrow\quad A\supseteq(-\varepsilon,\varepsilon)\backslash K$$

Sia B aperto con $K\subseteq B$

$$\forall n \quad \frac{1}{n}\in K \quad \exists\varepsilon_n \quad \left(\frac{1}{n}-\varepsilon,\frac{1}{n}+\varepsilon\right)\subseteq B$$

quindi in particolare $A\cap B\neq\emptyset$

Teorema 0.3.

$$\textit{regolare a base numerabile} \quad\Rightarrow\quad \textit{normale}$$

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{B}$ una base numerabile per X spazio regolare.
Siano $C,D\subseteq X$ chiusi disgiunti

$$\forall c\in C \quad \exists U\subseteq X \quad c\in U\subseteq\overline{U}\subseteq X\backslash D$$

in particolare posso scegliere $U\in\mathfrak{B}$.
Sia

$$\mathfrak{C}=\{U\in\mathfrak{B}\,|\,\overline{U}\cap D=\emptyset\}$$

in particolare $U\in\mathfrak{C}$ esiste in quanto

$$\overline{U}\subseteq X\backslash D\Leftrightarrow\overline{U}\cap D=\emptyset$$

Similmente

$$\mathfrak{D}=\{V\in\mathfrak{B}\,|\,\overline{V}\cap C=\emptyset\}$$

Ora essendo $\mathfrak{B}$ numerabile posso considerare $\mathfrak{C}=\{C_n\}$ e $\mathfrak{D}=\{D_n\}$.
Dato n siano

$$A_n=U_n\left\backslash\bigcup_{j\leq n}\overline{V_j}\right.$$

$$A=\bigcup A_n \text{ è un aperto, in quanto lo sono gli } A_n$$

Segue dalla costruzione che $C\subseteq A$ infatti $\overline{V_j}\cap C=\emptyset$
In modo analogo possiamo definire $B=\bigcup B_n$.
Osserviamo che

$$\forall n,m \quad A_n\cap B_n=\emptyset$$

Infatti se $m\leq n$ allora $B_n\subseteq V_n$ dunque $A_m\cap B_n=\emptyset$ similmente $A_n\cap B_m=\emptyset$.
Dunque abbiamo costruito 2 aperti disgiunti che separano C,D □

Teorema 0.4 (Teorema di Urysohn)**.**

$$\textit{regoalare a base numerabile} \;\Rightarrow\; \textit{metrizzabile}$$

Corollario 0.5.

$$\textit{regolare a base numerabile}\Leftrightarrow\; \textit{normale a base numerabile}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \textit{metrizzabile a base numerabile} \;\Leftrightarrow\; \textit{metrizzabile separabile}$$

1 Quozienti topologici

Definizione 1.1 (Insieme saturo)**.**
Sia $\pi : X \to Y$ proiezione al quoziente.
Sia $Z \subseteq X$ allora Z è detto saturo se è unione di classe di equivalenza.
In modo equivalente

$$Z = \pi^{-1}(\pi(Z))$$

Osservazione 4. In generale è vera solo l'inclusione $\subset$

Definizione 1.2. La topologia quoziente su $Y = \frac{X}{\sim}$ è la più fine topologia su Y che rende continua la proiezione al quoziente

$$\pi : X \to Y \quad x \to [x]$$

Osservazione 5. Non è detto che tale topologia esista.

Proposizione 1.1.

$$\{\pi(B) \,|\, B \subseteq X \text{ aperto saturo } \}$$

è una topologia

Dimostrazione.

- $\emptyset = \pi(\emptyset)$ ed essendo la proiezione suriettiva $Y = \pi(X)$
- $$\bigcup(\pi(B_i)) = \pi\left(\bigcup B_i\right)$$
  ora l'unione dei B_i è un aperto e poichè ogni B_i è unione di classi di equivalenza anche $\bigcup B_i$ lo è
- $\pi(B_1) \cap \pi(B_2) = \pi(B_1 \cap B_2)$ essendo B_1 e B_2 saturi

□

Proposizione 1.2. *La topologia sopra descritta è la più fine topologia che rende la proiezione continua, tale topologia prende il nome di* τ_{quot}

Dimostrazione. Infatti se τ è una qualsiasi topologia su Y che rende continua π allora

$$\forall A \in \tau \quad B = \pi^{-1}(A) \text{ è un aperto sautro}$$

dunque $A = \pi(B)$ con B aperto saturo di X □

Osservazione 6.

$$A \subseteq Y \text{ aperto } \Leftrightarrow \pi^{-1}(A) \subseteq X \text{ aperto } \Leftrightarrow A = \pi(B) \text{ con } B \subseteq X \text{ aperto saturo}$$

similmente con i chiusi

$$C \subseteq Y \text{ chiuso } \Leftrightarrow \pi^{-1}(C) \subseteq X \text{ chiuso } \Leftrightarrow C = \pi(B) \text{ con } B \subseteq X \text{ chiuso saturo}$$

Proposizione 1.3 (Propietà universale).
La topologia quoziente è l'unica topologia su Y con la seguente propietà

$$\forall Z \text{ spazio topologico} \forall f : Y \to Z$$

$$f \text{ continua} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ \pi \text{ continua}$$

Dimostrazione. Vediamo che la topologia quoziente soddisfa la propietà (l'unicità è simile a quanto visto per le altre propietà universali)
$\Rightarrow$ La composizione di funzioni continue è continua $\Leftarrow$ Sia $A \subseteq Z$ un aperto allora dobbiamo provare che

$$f \text{ continua} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(A) \subseteq Y \text{ è aperto } \forall A \subseteq Z \text{ aperto}$$

$$f^{-1}(A) \subseteq Y \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad \pi^{-1}(f^{-1}(A) = (f \circ \pi)^{-1}(A)) \subseteq X \text{ aperto}$$

□