Lezioni del 25 Settembre del prof. Frigerio

1 Spazi metrici

Definizione 1.1 (Spazio metrico)**.**
Uno spazio metrico è una coppia (X, d) X è un insieme e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ con le seguenti propietá:

(i) Assioma di non negativitá

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0 \text{ inoltre } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(ii) Assioma di simmetria

$$\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$$

(iii) Disuguaglianza triangolare

$$\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

1. $X = \mathbb{R}$ con $d(x, y) = |x - y|$
2. $X = \mathbb{R}^n$ sia $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ allora consideriamo

$$d_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \text{ distanza euclidea}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_1 - y_1| \text{ distanza l1}$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\, i = 1, \ldots, n\} \text{ distanza l}\infty$$

3. X un insieme generico, definiamo la distanza discreta

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

4. $X = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d}t$$

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$$

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} \{|f(t) - g(t)\}$$

Proposizione 1.1. *d_∞ è una distanza*

(i) Essendo d_∞ il max *di numeri non negativi essa è necessariamente non negativa, inoltre se $d_\infty(x, y) = 0$ allora necessariamente $|x_i - y_i| = 0$ ovvero $x_i = y_1\, \forall i$ dunque $x = y$*

(ii) *La simmetria segue dal fatto che* $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$

(iii) *Dalla definizione di max*

$$\exists j \, d_\infty(x, z) = |x_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j|$$

Dove abbiamo usato la disuguaglianza triangolare del valore assoluto su $\mathbb{R}$.
Ora

$$|x_j - y_j| \leq \max\{x_i - y_i \, i = 1, \dots, n\} = d_\infty(x, y)$$
$$|y_j - z_j| \leq \max\{y_i - z_i \, i = 1, \dots, n\} = d_\infty(y, z)$$

Dunque otteniamo la disuguaglianza triangolare voluta

Definizione 1.2 (Embedding isometrico)**.**
Sia $f : (X, d) \to (Y, d')$ allora f è un embedding isometrico se

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Fatti 1.2.

1. *$id : (X, d) \to (X, d)$ è un embedding isometrico*
2. *Composizione di embedding isometrici è un embedding isometrico*
3. *Se un embedding isometrico f è bigettivo, f^{-1} è un embedding isometrico.*
   In tal caso f è una isometria
4. *Un embedding isometrico è iniettivo (da cui il nome)*

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad 0 = d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

5. *Un embedding isometrico è un isometria se e solo se è surgettivo*
6. *Se (X, d) è fissato. L'insieme delle isometrie da X in se stesso è un gruppo con la composizione, tale gruppo si chiama $Isom(X, d)$*

1.1 Continuitá

Definizione 1.3 (Palla)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, $r \in \mathbb{R}$ e $P \in X$

$$B(P, r) = \{x \in X \,:\, d(P, x) < r\}$$

Definizione 1.4 (Continuitá locale)**.**
$f : (X, d) \to (Y, d')$ si dice continua in $x_0 \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

o in modo equivalente

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$$

Definizione 1.5 (Continuitá globale)**.**
$f : (X, d) \to (Y, d')$ è continua se è continua in ogni $x_0 \in X$

Osservazione 1.

1. Gli embedding isometrici sono continui (basta porre $\delta = \varepsilon$)
2. Una funzione costante è continua ($\delta = 1$), ma le funzioni costanti non sono embedding isometrici dunque le funzioni continue sono maggiori degli è isometrici

Svincoliamo formalmente la continuitá dalla distanza

Definizione 1.6 (Aperto)**.**
Sia X uno spazio metrico, Un insieme $A \subseteq X$ è aperto se

$$\forall x \in A \quad \exists r > 0 \quad \text{t. c .} \quad B(x, r) \subseteq A$$

Esercizio 1.3. *Le palle aperte sono aperte*

Teorema 1.4.

$$f : (X, d) \to (Y, d') \text{ è continua} \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \text{ aperto di } Y \quad f^{-1}(A) \text{è aperto in } X$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $A \subseteq Y$ un aperto.
Sia $x_0 \in f^{-1}(A)$ allora $f(x_0) \in A$ ed essendo A un aperto

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{t. c .} \quad B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq A$$

Ora sfruttando la continuitá di f

$$\exists \delta > 0 \quad B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$$

Ora poichè $B(f(x_0), \varepsilon)) \subseteq A$ allora $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$
Per arbitrarietá di x_0 $f^{-1}(A)$ è aperto
$\Leftarrow$ Sia $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$.
Ora $B(f(x_0), \varepsilon)$ è un aperto di Y, dunque $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ è un aperto di X per ipotesi.
Dalla definizione di aperto e poichè $x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ segue che

$$\exists \delta > 0 \quad B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$$

dunque f è continua in x_0, da cui la tesi per arbitarietà di x_0 $\square$

Osservazione 2. La continuità di f dipende solo dalla famiglia degli aperti di X e di Y, solo indirettamente da d e d'