Lezione del 6 Dicembre del Prof. Frigerio

Esempio 0.1. *$GL_+(n,\mathbb{R})$ si ritrae per deformazione su $SL(n,\mathbb{R})$*
Sia $A \in GL_+(n,\mathbb{R})$ con $\det A \geq 0$.
Consideriamo

$$A(t) = tA + \frac{(1-t)A}{\sqrt[n]{\det A}} = \left(t + \frac{1-t}{\sqrt[n]{\det A}}\right) A$$

dunque $A(t) \in GL_+(n,\mathbb{R})$.
Possiamo definire l'omotopia

$$H: GL_+(n,\mathbb{R}) times [0,1] \to GL_+(n,\mathbb{R}) \qquad H(A,t) = A(t)$$

Osserviamo che $A \in SL(n,\mathbb{R})$ se e solo se $H(A,t) = A \, \forall t \in [0,1]$.
Dunque H è l'omotopia tra Id e la retrazione $r = H_0$
In modo analogo si prova che $GL_+(n,\mathbb{R})$ si ritrae per deformazione su $SO(n)$

Esempio 0.2 (Pettine infinito)**.** *Sia $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$*

- *$\{(0,0)\}$ è un retratto di deformazione di X che perciò è contraibile.*

  Sia $H: X \to [0,1] \to X$ dato da

  $$H((x,y),t) = \begin{cases} (x,(1-2t)y) \text{ se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ ((2-2t)x, 0) \text{ se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

  La funzione è ben definita e $H((x,y),t) \in X \, \forall (x,y) \in X$ e $\forall t \in [0,1]$.
  H è continua lo sono le restrizioni sui 2 intervalli su cui è definita (sono ricoprimento fondamentale).

  $$H((x,y),0) = (x,y) \ \forall (x,y) \in X$$
  $$H((x,y),1) = (0,0) \ \forall (x,y) \in X$$
  $$H((0,0),t) = (0,0) \ \forall t \in [0,1]$$

  Dunque possiamo concludere che $\{(0,0)\}$ è un retratto di deformazione di X

- *$\{(0,1)\}$ non è un retratto di deformazione di X*
  Supponiamo per assurdo, che esista

  $$H: X \times [0,1] \to X$$

  omotopia tra Id e la costante $(0,1)$ tale che $H((0,1),t) = (0,1) \ \forall t \in [0,1]$.
  Presa $x \neq 0$ i punti $(0,1)$ e $(x,1)$ giacciono in componenti connesse distinte di $X \setminus \{\mathbb{R} \times \{0\}\}$ (in particolare, giacciono in componenti connesse per archi distinte).
  Ora se consideriamo l'arco $\gamma_x: [0,1] \to X$ definita da $\gamma_x(t) = H((x,1),t)$.
  Tale arco è continuo e connette $(0,1)$ a $(x,1)$ dunque deve passare per la retta $\{y=0\}$ dunque

  $$\forall x \neq 0 \quad \exists t(x) \in (0,1) \text{ tale che } H((x,1),t(x)) = (x',0)$$

  Consideriamo ora la successione $\{t_n\} \subseteq [0,1]$ definita da $t_n = t\left(\frac{1}{n}\right)$.
  Essendo $[0,1]$ compatto per successioni, a meno di estrarre una sottosuccessione, posso supporre $t_n \to \bar{t}$.
  Se pongo $y: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la proiezione sulla seconda coordinata, dalla continnuità di H e y ottengo

  $$0 = \lim_{n\to\infty} y\left(H\left(\frac{1}{n}, 1\right), t_n\right) = y\left(H((0,1),\bar{t})\right) = y(0,1) = 1$$

  dove abbiamo utilizzato il fatto che $H((0,1),t) = (0,1) \ \forall t \in [0,1]$

1 Gruppo fondamentale

Definizione 1.1. Sia X topologico, $a, b \in X$ allora definiamo con

$$\Omega(a,b) = \{\gamma : [0,1] \to X \text{ continua con } \gamma(0) = a \ \gamma(1) = b\}$$

Definizione 1.2. $\alpha, \beta \in \Omega(a,b)$ sono omotopi (come cammini o a estremi fissi) se

$$\exists H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

omotopia tra α e β tale che

$$H(0,t) = a \text{ e } H(1,t) = b \ \forall t \in [0,1]$$

Definizione 1.3. Il gruppo fondamentale con punto base a è l'insieme

$$\pi_1(X,a) = \frac{\Omega(a,a)}{\sim}$$

dove $\sim$ indica la relazione di omotopia a estremi fissi.
Dove l'operazione è data dalla giunzione $\star$

Osservazione 1. Da ora utilizzeremo le seguenti notazioni

- $1_a \in \Omega(a,a)$ denota il cammino costante in a.
- $\alpha \in \Omega(a,b)$ allora denotiamo con $\overline{\alpha} \in \Omega(b,a)$ il cammino $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$

La giunzione di cammini non è associativa, dunque l'omotopia di cammini serve per avere l'associatività, grazie al seguente

Lemma 1.1. *Sia $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ continua e tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$.*

$$\gamma \in \Omega(a,b) \quad \Rightarrow \quad \gamma \sim \gamma \circ \varphi$$

Dimostrazione. $H(t,s) = \gamma(st + (1-s)\varphi(t))$ è l'omotopia ad estremi fissi cercata □

Corollario 1.2. *Se $\alpha \in \Omega(a,b)$, $\beta \in \Omega(b,c)$ e $\gamma \in \Omega(c,d)$ allora*

$$(\alpha \star \beta) \star \gamma \sim \alpha \star (\beta \star \gamma)$$

Dimostrazione. Un cammino è la riparametrazione dell'altro

Lemma 1.3. *$\alpha, \alpha' \in \Omega(a,b)$ e $\beta, \beta' \in \Omega(b,c)$*

$$\alpha \sim \alpha' \text{ e } \beta \sim \beta' \quad \Rightarrow \quad \alpha \star \beta \sim \alpha' \star \beta' \text{ in } \Omega(a,c)$$

Dimostrazione. Se H e K sonio rispettivamente omotopia a estremi fissi tra α, α' e β, β'

$$(t,s) \to \begin{cases} H(2t,s) \text{ se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ K(2t-1,s) \text{ se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

è l'omotopia cercata. □

Corollario 1.4. *L'operazione*

$$\pi_1(X,a) \times \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,a)$$

$$([\alpha],[\beta]) \to [\alpha \star \beta]$$

è ben definita (1.3) e associativa (1.2)