1 Sottospazio prodotto

Lezione del 11 ottobre del prof. Frigerio

Proposizione 1.1. *Sia* (X, d) *metrico.*
Allora $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ *definita come* $\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ *è una distanza topologicamente equivalente a* d *dunque la topologia di uno spazio metrizzabile è indotta da una distanza* ≤ 1

Dimostrazione.

- Mostriamo che $\overline{d}$ è una distanza.
  La non negatività e la simmetria seguono in maniera diretta dalle analoghe propietà su d.
  Siano x, y, z e proviamo che $\overline{d}(x, z) \leq \overline{d}(x, y) + \overline{d}(y, z)$
  Se almeno uno tra $\overline{d}(x, y)$ e $\overline{d}(xyz)$ è uguale a 1 ho concluso infatti $\overline{d}(x, z) \leq 1$.
  Altrimenti
  $$\overline{d}(x, z) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$
  ma $\overline{d}(x, z) \neq 1$ dunque $\overline{d}(x, y) = d(x, y)$ in modo analogo $\overline{d}(y, z) = d(y, z)$.

- Mostriamo che le 2 topologie indotte sono topologicamente equivalenti
  Come base della topologia associata ad una distanza si prendono le palle di raggio R al variare di $R < 1$.
  Ora $\forall x \in X$ e $\forall R < 1 \quad B_d(x, R) = B_{\overline{d}}(x, R)$ dunque le 2 topologie coincidono

□

Definizione 1.1 (Funzione lipschitziana)**.**
Sia $f : (X, d) \to (Y, d')$ diciamo che f è k-lipschitz se $k > 0$ e

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad d'(f(x_1), f(x_2)) \leq k \cdot d(x_1, x_2)$$

Osservazione 1. Sia $f : X \to Y$ una funzione k-lipschitz.
Poichè $f\left(B\left(x, \frac{\varepsilon}{k}\right)\right) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ una funzione lipschitziana è continua

Teorema 1.2. *Siano* (X_i, d_i) *spazi metrici con* $i \in \mathbb{N}$, *allora*

$$X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \text{ è metrizzabile}$$

Dimostrazione. Devo costruire $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che induce la topologia prodotto.
$\forall i \in \mathbb{N}$ posso supporre che $d_i \leq 1$.
Denotiamo con $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gli elementi di X, dove $x_i \in X_i$.
Pongo

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} d_i(x_i, y_i)$$

tale serie converge poichè $d_i < 1$ e la serie $\sum 2^{-i}$ converge.
È di facile verifica che d così definita è una distanza, sia τ_d la topologia che induce.
Sia $P_i : X \to X_i$ la proiezione su X_i

$$d_i(\pi_i(x), \pi_i(y)) = d_i(x_i, y_i) = 2^i(2^{-i} d_i(x_i, y_i) \leq 2^i d(x, y)$$

dunque la funzione P_i è 2^i-lipschitz dunque continua quindi $\tau_d > \tau_{prod}$ infatti τ_{prod} è la meno fine proiezione che rende continue le proiezioni.
Resta da vedere che $\tau_d > \tau_{prod}$.
Sia $B = B_d(x, \varepsilon) \subseteq X$ un aperto, dunque per $y \in B$ $\exists \delta > 0$ tale che $B_d(x, \delta) \subseteq B$.
Resta da dimostrare che $\exists U$ aperto di τ_{prod} con $y \in U \subseteq B_d(x, \delta)$.
Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\displaystyle\sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{\delta}{2}$ che esiste essendo la serie convergente. Pongo

$$U = B_{d_0}\left(y_0, \frac{\delta}{4}\right) \times \cdots \times B_{d_{n_0}}\left(y_{n_0}, \frac{\delta}{4}\right) \times X_{n_0+1} \times \cdots \times X_n \times \ldots$$

Se $z \in U$ allora $d_i(y_i, z_i) < \frac{\delta}{4} \quad \forall i \leq n_0$ Allora

$$d(y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-1} d_i(y_i, z_i) = \sum_{i=0}^{n_0} 2^{-1} d(y_i, z_i) + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-1} d_i(y_i, z_i) <$$

$$< \frac{\delta}{4} \sum_{i=0}^{n_0} 2^{-i} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} < 2\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Dunque $U \subseteq B_d(y, \delta) \subseteq B$ □

Osservazione 2. Genericamente, il prodotto più che numerabile di spazi metrici non è primo-numerabile dunque non è metrizzabile

Fatto 1.3. *Se* (X, d) *e* (Y, d') *sono metrici,* $X \times Y$ *è metrizzabile ed ha topologia indotta da una delle seguenti metriche*

1. $d_\infty(x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$
2. $d_2(x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d(x_1, x_2)^2 + d'(y_1, y_2)^2}$
3. $d_1(x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2)$

L'equivalenza si dimostra come abbiamo provato l'equivalenza su $\mathbb{R}^n$.
Per vedere che inducono la topologia prodotto usiamo il teorema precedente utilizzando $\frac{1}{2}d_1$ *che è topologicamente equivalente a* d_1 *e ponendo* $x = (x_1, x_2, 0, \ldots)$ *e* $y = (y_1, y_2, 0, \ldots)$

Esercizio 1.4. *Sia X topologico, $A, B \subseteq X$*

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. *L'uguaglianza è falsa per unioni infinite*
3. *Enunciati "duali" per la parte interna*
4. *In generale* $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$
5. $\overline{\overline{A}^\circ}^\circ = \overline{A}^\circ$
6. *Trovare $A \subseteq X$ per cui A, $\overline{A}$, $\overline{A}^\circ$, $\overline{\overline{A}^\circ}$ sia tutte diverse*
7. *Sia $A \subseteq Y \subseteq X$ allora la chiusura di A in Y (con topologia di sottospazio) è* $\overline{A} \cap Y$