Lezione del 12 Dicembre del Prof. Frigerio

1 π_1 come funtore

Sia $f : X \to Y$ continua.
Se $\alpha : [0,1] \to X$ è continua allora anche $f \circ \alpha$ lo è.
f induce

$$f_\star : \Omega(a,a) \to \Omega(f(a), f(a))$$

Se $\alpha \sim \beta$ in $\Omega(a,a)$ e $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ è un'omotopia di cammini tra α e β allora $f \circ H : [0,1] \times [0,1] \to Y$ è un omotopia di cammini tra $f_\star(\alpha)$ e $f_\star(\beta)$.
Possiamo dunque osservare che $f_\star$ induce

$$f_\star : \pi_1(X,a) \to \pi_1(Y, f(a))$$

1. $f_\star$ è un omomorfismo di gruppi

$$f_\star([\alpha] \cdot [\beta]) = f_\star([\alpha \star \beta]) = [f \circ (\alpha \star \beta)] = [(f \circ \alpha) \star (f \circ \beta)] = f_\star([\alpha]) \cdot f_\star([\beta])$$

2. se $g : Y \to Z$ allora $g_\star \circ f_\star = (g \circ f)_\star$

$$(g \circ f)([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_\star([f \circ \alpha]) = g_\star(f_\star([\alpha]))$$

3. Data $Id : X \to X$ allora $Id_\star : \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,a)$ è l'identità

Dalle 3 propietà sopra enunciate, ho realizzato un funtore tra la categorieadegli spazi topologici puntati con le funzioni continue che preservano la puntatura e quella dei gruppi con gli omomorfismi di gruppi

Corollario 1.1.

$$f : X \to Y \textit{ omeomorfismo} \quad \Rightarrow \quad f_\star : \pi_1(X,a) \to \pi_1(Y, f(a)) \textit{ isomorfismo}$$

Dimostrazione. sia $g : Y \to Y$ l'inversa continua di f allora $g_\star$ è l'inversa di $f_\star$

Osservazione 1. Se X e Y sono omeomorfi allora X e Y sono omotopicamente equivalenti

Proposizione 1.2. *Sia $f : X \to X$ omotopa all'identità tramite H.*
Fissato $a \in X$, sia $\gamma : [0,1] \to X$ data da $\gamma(s) = H(a,s)$
La mappa $f_\star : \pi_1(X,a) \to \pi_1(X, f(a))$ e $\gamma_\sharp$ coincidono

Dimostrazione. $\forall \alpha \in \Omega(a,a)$ sia

$$K : [0,1] \times [0,1] \to X \qquad K(t,s) = H(\alpha(t), s)$$

Osserviamo che $\alpha \star \gamma \star \overline{f_\star(\alpha)} \star \overline{\gamma}$ è omotopa all'identità, dunque la giunzione si estende da ∂I^2 a I^2.
Lo stesso vale per $f_\star(\alpha) \star \overline{\gamma} \star \overline{\alpha} \star \gamma$ che è perciò omotopa a $1_{f(a)}$ dunque

$$1 = [f_\star(\alpha) \star (\overline{\gamma} \star \overline{\alpha} \star \gamma)] = [f_\star(\alpha)] \cdot [\overline{\gamma} \star \overline{\alpha} \star \gamma]$$

ovvero

$$[f_\star(\alpha)] = [\overline{\gamma} \star \overline{\alpha} \star \gamma]^{-1} = [\overline{\gamma} \star \alpha \star \gamma] = \gamma_\sharp([\alpha])$$

$\square$

Teorema 1.3.

$$f : X \to Y \text{ equivalenza omotopica} \quad \Rightarrow \quad f_\star \text{ isomorfismo}$$

Dimostrazione. Sia g un'inversa omotopica di f.
Poichè $g \circ f \sim Id_X$ allora $(g \circ f)_\star : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, g(f(a))$ è un isomorfismo in quanto coincide con $\gamma_\sharp$ per un certo $\gamma \in \Omega(a, g(f(a)))$.
Analogamente $f_\star \circ g_\star$ è un isomorfismo, $f_\star$ è iniettiva e surgettiva, da cui la tesi □

Definizione 1.1. X si dice semplicemente connesso se X connesso per archi e $\pi_1(X, a) = \{1\}$ $\forall a \in X$

Corollario 1.4. *X contraibile $\Rightarrow$ X semplicemente connesso*

Proposizione 1.5. *$A \subseteq X$ retratto con inclusione i e retrazione r.*

1. *$i_\star$ iniettiva e $r_\star$ surgettiva (per ogni scelta del punto base in A)*
2. *se la retrazione è per deformazione $i_\star$ e $r_\star$ sono isomorfismi*

Dimostrazione.

1. Dato $a \in A$ si ha $r \circ i = Id_A$, dunque $r_\star \circ i_\star = Id_{\pi_1(A,a)}$ da cui la tesi
2. Segue dal fatto che i e r sono equivalenze omotopiche

Osservazione 2. Se $A \subseteq X$ $i_\star : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, a)$ può non essere iniettiva.
Ad esempio se $X = D^2$ e $A = S^1$

Esercizio 1.6. *Sia*

$$\psi : \pi_1(X, a) \to [S', X] \qquad \psi([\alpha]) = [\hat{\alpha}]$$

Mostrare che

$$X \text{ connesso per archi} \quad \Leftrightarrow \quad \psi \text{ surgettiva}$$

e

$$\psi([\alpha]) = \psi([\beta]) \quad \Leftrightarrow \quad [\alpha] \text{ coniugato a } [\beta] \text{ in } \pi_1(X, a)$$