Lezioni del 26 Febbraio del prof. Frigerio

Osservazione 1. a $p : E \to X$ un rivestimento e $x_0 \in X$ e sia γ è un cammino in X con punto iniziale x_0.

Se $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ allora esiste un unico sollevamento di γ con punto iniziale $\tilde{x_0}$, indichiamo tale cammino con $\tilde{\gamma}_{\tilde{x_0}}$

Proposizione 0.1. *Sia $p : E \to X$ un rivestimento e $x_0, x_1 \in X$ allora esiste una bigezione tra $p^{-1}(x_0)$ e $p^{-1}(x_1)$*

Dimostrazione. Poichè X è connesso per archi, $\exists \gamma \in \Omega(x_0, x_1)$.

$$\psi : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1) \quad x_0 \to \tilde{\gamma}_{\tilde{x_0}}(1)$$

Tale mappa è ben definita in quanto se $\gamma(1) = x_1$ allora $\tilde{\gamma}_{\tilde{x_0}}(1) \in p^{-1}(x_1$ ed inoltre è invertibile (basta usare la stessa definizione di ψ usando il cammino $\overline{\gamma}$

Osservazione 2. La bigezione non è canonica, se cambio γ, viene a modificarsi l'identificazione tra le 2 fibre

Definizione 0.1 (Grado del rivestimento)**.**
Sia $p : E \to X$ rivestimento, per la proposizione precedente, è ben definito il grado del rivestimento come la cardinalità di una fibra $|p^{-1}(x_0)|$, tale cardinalità si inndica con $\deg p$

Definizione 0.2. Una sezione di un rivestimento $p : E \to X$ è una mappa continua $s : U \to E$ tale che $p(s(x)) = x \ \forall x \in U$.
Si dice che la sezione è locale se U è un aperto di X e globale se $U = X$.
(Ha senso di parlare di sezione per ogni mappa p)

Osservazione 3. Dalla definizione di rivestimento si ha $\forall x \in X \ \exists U \ni x$ aperto con sezione locale definita su U (prendo U intorno ben rivestito e scelgo uno degli intorni della preimmagine di x)

Teorema 0.2 (Sollevamento delle omotopie)**.**
Sia $p : E \to X$ rivestimento e $f : X \to Y$ continua con Y localmente connesso. Sia $F : Y \to [0,1] \to X$ tale che $F(y, 0) = f(y) \ \forall y \in Y$.
Supponiamo che esista $\tilde{f} : Y \to E$ un sollevamento di f.
Allora esiste unico sollevamento $\tilde{F} : T \to [0,1] \to E$ di F (ovvero tale che $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$

Dimostrazione. Andiamo a definire $\tilde{F}$ e poi verifichiamo che con questa definizione risulta continua.
$\forall y_0 \in Y$ sia γ_{y_0} il cammino dato da $\gamma_{y_0}(t) = F(y_0, t)$.
Sia $\tilde{\gamma}_{y_0}$ il sollevamento di γ_{y_0} s partire da $\tilde{f}(y_0)$.
Poniamo dunque

$$\tilde{F}(y_0, t) = \tilde{\gamma}_{y_0}(t)$$

è chiaro che con questa scelta $\tilde{F}$ solleva F e dunque se tale cammino è continuo, è l'unico sollevamento.
Mostriamo la continuità.
Basta vedere che $\forall (y_0, t) \in Y \times [0,1]$ esiste un intorno U in $Y \times [0,1]$ tale che $\tilde{F}_{|U} = s \circ F_{|U}$ dove s è una sezione locale continua del rivestimento.

Andiamo a ""quadrettare"" $Y \times [0,1]$
Poichè $y_0 \times [0,1]$ è compatto e $\{F^{-1}(W) \mid W$ aperto ben rivestito di $X\}$ è un suo ricoprimento otteniamo che $Z_1, \dots, Z_n$ sono un numero finito di aperti di $Y \times [0,1]$ che ricoprono $\{y_0\} \times [0,1]$ e sono tali che $F(Z_i)$ è contenuto in un intorno ben rivestito di X.
Per la definizione di topologia prodotto, posso supporre $Z_i = A_i \times B_i$ con A_i aperto in Y e B_i aperto in $[0,1]$ e tale che $y_0 \in A_i \quad \forall i$.
Sia $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ che è aperto in Y e $y_0 \in A$.
Ora $B_1 \cup \dots \cup B_n = [0,1]$ allora sia $\frac{1}{k}$ minore del numero di Lesbbegue di $\{B_1, \dots, B_n\}$.

$$\forall j = 0, \dots, k-1 \quad A \times \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right] \subseteq A_i \times B_i \quad \Rightarrow \quad F\left(A \times \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{j}\right]\right) \subseteq U_j \text{ intorno ben rivestito}$$

In questo modo abbiamo ricoperto $Y \times [0,1]$ con dei "quadrati" che finiscono tramite F in intorni ben rivestiti di X, mostriamo che su questi "quadrati" $\tilde{F}$ coincide con $s \circ F$.
Supponiamo A connesso per archi.
Sia $s_0 : U_0 \to E$ una sezione locale.
Su $A \times \{0\}$ confrontando le mappe $\tilde{F}$ e $s_0 \circ F$ esse coincidono su un punto, sonp continue e poichè A connesso per unicità dei sollevamenti, le 2 mappe coincidono su $A \times \{0\}$ e per definizione di $\tilde{F}$ coincidono su tutto il quadrato $A \times \left[0, \frac{1}{k}\right]$ ($\tilde{F}$ è definito in base a dove viene mandato $F(A \times \{0\})$.
Induttivamente si mostra che

$$\tilde{F}_{|\left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right]} = s_k \circ F$$

Osservazione 4. Il teorema dice che se ho un omotopia tra f e una certa funzione, se riesco a sollevare f allora l'omotopia si solleva

Corollario 0.3. *Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ cammini omotopi a estremi fissi con stesso punto iniziale x_0.*
Se $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ allora

$$(\tilde{\gamma_1})_{\tilde{x_0}} \sim (\tilde{\gamma_2})_{\tilde{x_1}} \quad \text{a estremi fissi}$$

in particolare si ha $\gamma_1 x_0(1) = (\tilde{\gamma_2})_{\tilde{x_1}}(1)$

Dimostrazione. Sia $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ un omotopia tra γ_1 e γ_2.
Usando il teorema appena dimostrato con $f = \gamma_1$ e $\tilde{f} = (\tilde{\gamma_1})_{\tilde{x_0}}$ otteniamo $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to E$ che solleva F dove

$$\tilde{F}(t,0) = (\tilde{\gamma_1})_{\tilde{x_0}}(t)$$

Se prendo $s \to \tilde{F}(0,s)$ è un sollevamento del cammino costante a x_0 a partire da $\tilde{x_0}$ perciò è il cammino costante a $\tilde{x_0}$.
Analogamente $\tilde{F}(1,s) = (\tilde{\gamma_1})_{\tilde{x_0}}$.
Il cammino $t \to \tilde{F}(1,t)$ solleva γ_2 a partire da $\tilde{x_0}$ dunque per unicità dei sollevamenti tale sollevamento è $(\tilde{\gamma_2})_{\tilde{x_0}}$
Dunque $\tilde{F}$ è un omotopia e estremi fissi cercata.

Corollario 0.4. *$p : E \to X$ rivestimento*

$$p_\star : \pi_1(E, \tilde{x_0}) \to \pi_1(X, x_0)$$

è iniettiva

Dimostrazione. Sia $\alpha = [\gamma] \in \ker p_\star$ dunque si ha

$$p \circ \gamma \sim c_{x_0} \quad \Rightarrow \quad \gamma = (p \,\tilde{\circ}\, \gamma)_{\tilde{x_0}} \sim (\tilde{c_{x_0}})_{\tilde{x_0}} = c_{\tilde{x_0}}$$

dunque $[\gamma] = 1 \in \pi_1(E, \tilde{x}_0)$

Definizione 0.3 (Monodromia)**.**
Sia $p: E \to X$ rivestimento, $x_0 \in X$ e $F = p^{-1}(x_0)$ allora esiste un azione destra di $\pi_1(X, x_0)$ su F

$$F \times \pi_1(X, x_0) \to F \qquad \tilde{x} \centerdot [\gamma] = (\tilde{\gamma})_{\tilde{x}}\,(1)$$

Osservazione 5. Se $\gamma \sim \gamma'$ allora $(\tilde{\gamma})_{\tilde{x}} \sim \left(\tilde{\gamma'}\right)_{\tilde{x}}$ da cui $(\tilde{\gamma})_{\tilde{x}}\,(1) = \left(\tilde{\gamma'}\right)_{\tilde{x}}(1)$.
Da quanto osservato l'azione di monodromia è ben definita.
Mostriamo che è un azione

$$\tilde{x} \centerdot ([\gamma] \cdot [\alpha]) = (\tilde{x} \centerdot [\gamma]) \centerdot [\alpha]$$

in quanto

$$\tilde{x} \centerdot ([\gamma] \cdot [\alpha]) = \tilde{x} \centerdot [\gamma \star \alpha] = (\gamma \,\tilde{\circ}\, \alpha)_{\tilde{x}}\,(1) = \left((\tilde{\gamma})_{\tilde{x}} \star \left(\tilde{\alpha}_{\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)}\right)\right)(1) = \tilde{\alpha}_{\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)}(1) = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1) \centerdot [\alpha] = (\tilde{x} \centerdot [\gamma]) \centerdot [\alpha]$$