Lezioni del 26 Settembre del prof. Frigerio

Definizione 0.1 (Topologicamente equivalenti).
Due distanze d e d' sullo stesso insieme X sono topologicamente equivalenti se inducono la stessa famiglia di aperti

Lemma 0.1. *Siano d e d' distanze sullo stesso insieme X tali che $\exists k \geq 1$ per cui*

$$\frac{1}{k} \leq \frac{d'(x,y)}{d(x,y)} \leq k \quad \forall x, y \in X$$

allora d e d' sono topologicamente equivalenti

Dimostrazione. $\forall x_0 \in X$

$$B_d(x_0, R) \subseteq B_{d'}(x_0, kR)$$

in quanto $d(x_0, y) < R \quad \Rightarrow \quad d'(x_0, y) \leq kd(x_0, y) < kR.$
Sia A un aperto di X rispetto a d', se $x_0 \in A$ allora per definizione

$$\exists \varepsilon > 0 \quad B_{d'}(x_0, \varepsilon) \subseteq A$$

allora

$$B_d\left(x_0, \frac{\varepsilon}{k}\right) \subseteq B_{d'}(x_0, \varepsilon) \subseteq A$$

dunque A è aperto rispetto a d (per arbitarietà di x_0)
La tesi segue dal fatto che l'ipotesi è simmetrica in d e d'

Corollario 0.2. *Le distanze d_1, d_E, d_∞ sono topologicamente equivalenti*

Dimostrazione. Per la disuguaglianza tra media aritmetica e quadratica

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}{n}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \quad \Rightarrow \quad d_1 \leq \sqrt{n} d_E$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\max_j\{|x_j - y_j|^2\}\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_\infty(x,y)^2} = \sqrt{n} d_\infty(x,y) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d_2 \leq \sqrt{n} d_\infty(x,y)$$

Infine ovviamente $d_\infty \leq d_1$ (negli addendi che si sommando per ottenere d_1 è presente d_∞ e gli altri addendi sono non negativi)

1 Spazi topologici

Definizione 1.1 (Spazio topologico)**.**
Uno spazio topologico è una coppia (X, τ) dove $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ soddisfa:

1. $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$
2. Se $A_1, A_2 \in \tau$ allora $A_1 \cap A_2 \in \tau$
3. Se I è un qualsiasi insieme e $A_i \in \tau \, \forall i \in I$ allora $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$

τ si chiama topologia di X e gli elementi di τ si chiamano aperti di τ

Osservazione 1. Con una facile induzione si prova che un intersezione finita di aperti è un aperto, mentre l'unione può essere fatta su una famiglia di aperti anche infinita

Definizione 1.2 (Chiuso)**.**
Sia (X, τ) uno spazio topologico, $C \subseteq X$ è chiuso se $X \backslash C$ è aperto

Fatti 1.1.

- *$\exists A \subseteq X$ nè aperti nè chiusi (es. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ con la topologia euclidea)*
- *$X = X \backslash \emptyset$ e $\emptyset = X \backslash X$ sono sempre aperti e chiusi*
- *Un'unione finita di chiusi è chiusa*
- *Un'intersezione arbitraria di chiusi è chiusa*

Proposizione 1.2. *Se (X, d) è uno spazio metrico, gli aperti rispetto a d (Definizione data il 25 Settembre) definiscono una topologia*

Dimostrazione. Sia τ la famiglia di aperti rispetto a d

1. $\emptyset \in \tau$ per motivi di logica, $X \in \tau$ per definizione di palla $\forall x_0 \in X \, B(x_0, 1) \subseteq X$
2. $A_1, A_2 \in \tau$.
   Sia $x_0 \in A_1 \cap A_2$ dunque per definizione di aperto rispetto a d
   $$\exists \delta_1 > 0 \quad B(x_0, \delta_1) \subseteq A_1$$
   $$\exists \delta_2 > 0 \quad B(x_0, \delta_2) \subseteq A_2$$
   $$\exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \quad B(x_0, \delta) \subseteq B(x_0, \delta_1) \cap B(x_0, \delta_2) \subseteq A_1 \cap A_2$$
   Ovvero $A_1 \cap A_2 \in \tau$
3. Se $A_i \in \tau \, \forall i \in I$ e $x_0 \in \cup_{i \in I} A_i$ allora
   $$\exists i_0 \in I \quad \text{t. c .} \quad x_0 \in A_{i_0} \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 \quad B(x_0, \delta) \subseteq A_{i_0}$$
   $$B(x_0, \delta) \subseteq \cup_{i \in I} A_i \quad \cup_{i \in I} A_i \text{è aperto}$$

□

Osservazione 2. Ogni spazio metrico è "naturalmente" uno spazio topologico

Definizione 1.3. Uno spazio topologico (X, τ) è metrizzabile se τ è indotto da una distanza su X

Alcuni esempi di topologia

1. Topologia metrizzabile
2. Topologia discreta.
   $\tau_D = \mathcal{P}(X)$ o equivalentemente ogni punto di X (singoletto) è un intorno.
   Tale topologia è metrizzabile essendo indotta dalla distanza discreta
3. Topologia indiscreta $\tau_I = \{\emptyset, X\}$
4. Topologia confinata $(\tau_C) A \subseteq X$ è aperto se $X \backslash A$ è finito o X

Esercizio 1.3. *La topologia indiscreta se* $|X| > 1$ *non è metrizzabile*

Proposizione 1.4. *La topologia confinata è una topologia*

Dimostrazione.

1. $X \backslash X = \emptyset$ ma $\emptyset$ è finito quindi X è aperto
   $X \backslash \emptyset = X$ quindi $\emptyset$ è aperto
2. $A_1, A_2 \in \tau$
   Se almeno uno dei 2 è vuoto $A_1 \cap A_2 = \emptyset \in \tau$.
   Altrimenti $X \backslash A_1$ e $X \backslash A_2$ sono finiti

$$X \backslash (A_1 \cap A_2) = (X \backslash A_1) \cup (X \backslash A_2) \text{ che è finito} \quad \Rightarrow \quad A_1 \cap A_2 \in \tau$$

3. Se $A_1 \in \tau \, \forall i \in I$ si possono verificare 2 casi:
   - $A_i = \emptyset \, \forall i \in I \quad \Rightarrow \cup_{i \in I} A_i = \emptyset \in \tau$
   - $\exists A_{i_0}$ tale che $X \backslash A_{i_0}$ è finito

$$X \backslash \left(\cup_{i \in I} A_i \right) \subseteq X \backslash A_{i_0}$$

   Ora $X \backslash A_{i_0}$ è finito quindi l'unione è un aperto di τ

Definizione 1.4 (Funzione continua).

$$f : (X, \tau) \to (Y, \tau') \text{ è continua se } f^{-1}(A) \in \tau \quad \forall A \in \tau'$$

Teorema 1.5.

1. *$Id : (X, \tau) \to (X, \tau)$ è continua*
2. *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono continue allora $g \circ f : X \to Z$ è continua*

Dimostrazione.

1. Ovvia
2. Sia A un aperto di Z.

$$\text{per continuitá di } g \quad g^{-1}(A) \text{ è aperto di } Y$$

$$\text{per continuitá di } f \quad f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) \text{ è aperto di } Y$$

dunque $(f \circ g)^{-1}(A)$ è aperto di X

□