**Lezione del 27 Settembre di Gandini**

**Definizione 0.1** (Palle chiuse)**.**

$$C(x_0, R) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq R\}$$

**Proposizione 0.1.** *Sia $(X, d)$ uno spazio metrico, allora*

1. *Le palle aperte sono degli aperti*
2. *Le palle chiuse sono dei chiusi*

*Dimostrazione.*

1. Sia $x_0 \in X$ e $r > 0$ allora vogliamo provare che

$$\forall y \in B(x_0, r) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B(y_0, \varepsilon) \subseteq B(x_0, r)$$

Sia $\varepsilon = r - d(x_0, y)$ e poichè $y \in B(x_0, r)$ $\varepsilon > 0$
Sia $z \in B(y, \varepsilon)$ allora $d(x_0, z) < \varepsilon$ e usando la disuguaglianza triangolare

$$d(x_0, z) \leq d(x_0, y) + d(y, z) < d(x_0, y) + \varepsilon < r$$

2. $C(x_0, R)$ è chiuso $\Leftrightarrow X \backslash C(x_0, R)$ è un aperto $\Leftrightarrow A = \{x \in X \mid d(x, x_0) > r\}$ è aperto.
Sia $y \in A$ allora per definizione $d(y, x_0) > r$ e dunque ponendo $\varepsilon = d(y, x_0) - r > 0$ otteniamo

$$d(z, x_0) \geq |d(y, x_0) - d(z, y)| = d(y, x_0) - d(z, y) > r$$

□

**Esempio 0.2.** *Sia $(X, d)$ spazio metrico, $Z \subseteq X$ arbitrario, allora*

$$d_Z : X \to \mathbb{R} \quad x \to \inf_{z \in Z} d(x, z)$$

*è continua*

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che $\forall x, y \in X$ vale

$$|d_Z(x) - d_Z(y)| \leq d(x, y)$$

infatti da ciò segue la continuità.
Mostriamo la disuguaglianza; data la simmetria della distanza possiamo togliere il valore assoluto.
Dalla definizione di estremo inferiore

$$\forall \varepsilon > 0 \exists z \in Z \quad d(x, z) \leq d_Z(x) + \varepsilon$$

Ora

$$d_Z(y) \leq d(y, z) \leq d(y, x) + d(y, z) \leq d(x, y) + d_Z(x) + \varepsilon$$

dunque otteniamo la disuguaglianza

**Esempio 0.3.**

*(i) L'intersezione di famiglie arbitrarie di aperti non è aperto*

*(ii) L'unione di famiglie arbitrarie di chiusi non è un chiuso*

*In* $\mathbb{R}$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \text{ che non è aperto}$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = (0,1) \text{ che non è chiuso}$$

**Definizione 0.2.**
Siano $X$ uno spazio topologico e $Z \subseteq X$ allora

- La chiusura di $Z$ ($\overline{Z}$) è il più piccolo chiuso contenente $Z$ .
  In modo equivalente
$$\overline{Z} = \bigcap_{\substack{C \subseteq X \text{ chiuso} \\ Z \subseteq C}} C$$
- La parte interna di $Z$ ($Z^\circ$) è il più grande aperto contenuto in $Z$.
$$Z^\circ = \bigcup_{\substack{A \subseteq \text{ aperto} \\ A \subseteq Z}} A$$
- La frontiera di $Z$ ($\partial Z$) è l'insieme $\overline{Z} \backslash Z^\circ$ ed è un chiuso della topologia

**Esempio 0.4.** *In* $\mathbb{R}$

- $\overline{(a,b)} = \overline{[a,b)} = \overline{(a,b]} = \overline{[a,b]} = [a,b]$
- $(a,b)^\circ = [a,b)^\circ = (a,b]^\circ = [a,b]^\circ = (a,b)$
- *Nei casi precedenti* $\partial(...) = \{a,b\}$

*Osservazione* 1. Sia $(X,d)$ uno spazio metrico allora
$$B(x,r) \subseteq C(x,r) \quad \Rightarrow \quad \overline{B(x,r)} \subseteq C(x,r)$$
in $\mathbb{R}^2$ con la distanza euclidea (anche con $d_2$, $d_\infty$) vale l'uguaglianza.
In generale è falso infatti se prendiamo $d$ la distanza discreta:
$$B(x,1) = \{x\} \text{ chiuso} \quad \Rightarrow \overline{B(x,1)} = B(x,1)$$
Mentre $C(x,1) = X$

**Proposizione 0.5.** *Sia* $(X,d)$ *spazio metrico,* $Z \subseteq X$ *arbitrario, allora*
$$\overline{Z} = \{x \in X \quad | \quad \inf_{z \in Z} d(x,z) = 0\} = d_Z^{-1}(\{0\})$$
*Sia* $x \in X$ *allora*
$$\inf_{z \in Z} d(x,z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \cap Z \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad x \in \overline{Z}$$

**Proposizione 0.6.** *Consideriamo l'insieme $C^0([a,b])$ con le funzioni*

1. $d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d}t$
2. $d_2(f,g) = \left( \int_a^b |f(t) - g(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$
3. $d_\infty(f,g) = \sup_{t \ in[a,b]} |f(t) - g(t)|$

*allora le 3 funzioni sono distanze*

*Dimostrazione.* Mostriamolo solamente nel caso di $d_1$.

- $d_1(f,g) = d_1(g,f)$ segue dalle propietà del valore assoluto
- $d_1(f,g) \geq 0)$ infatti l'integrale di una funzione non negativa è non negativo.
  Sia $d_1(f,g) = 0$ e supponiamo $f \neq g$.
  Essendo le funzioni diverse sia $t_0 \in [a,b]$ tale che $f(t_0) \neq g(t_0)$ dunque essendo le funzioni continue

  $$\text{Sia } \delta > 0 \quad \exists \varepsilon \quad |f(t) - g(t)| \leq \delta \text{ per } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$$

  Dunque

  $$d_1(f,g) > \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} |f(t) - g(t) \varepsilon \, \mathrm{d}t > 0$$

- La disuguaglianza triangolare deriva dalla linearità dell'integrale e dalla disuguaglianza triangolare del modulo

□

*Osservazione* 2. Le distanza sopra definite non sono equivalenti.
Siano $\tau_1, \tau_2, \tau_\infty$ le topologie indotte.
Sia $f_n \in C^0([0,1])$ definita come

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt \text{ se } t \leq \frac{1}{n} \\ 0 \text{ se } t > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Calcoliamo la distanza di $f_n$ da 0(funzione nulla)

$$d_\infty(f_n, 0) = \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t)| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$d_1(f_n, 0) = \frac{1}{2n} \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad f_n \in B_{d_1}(0, \varepsilon) \quad \forall n \geq n_0$$

Dunque ogni aperto di $\tau_1$ che contiene la funzione nulla contiene anche infinite funzioni $f_n$.
Consideriamo $B = B_{d_\infty}(0,1)$ essa è un aperto di $\tau_\infty$ ma non contiene nessuna $f_n$ dunque $B$ non è un aperto di $\tau_1$

**Esercizio 0.7** (Topologia della semicontinuità).
*Su $\mathbb{R}$ definiamo una topologia come segue*

$$\tau = \{(-\infty, a)\,|a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

*è una topologia e prende il nome di topologia della semicontinuità*

*Dimostrazione.*

- L'insieme stesso e il vuoto sono aperti per definizione
- Siano $A$, $B$ aperti.
  Se $A = \emptyset$ allora $A \cap B = \emptyset$ quindi è aperto. Se $A = \mathbb{R}$ allora $A \cap B = B$ che è aperto.
  Supponiamo allora $A = (-\infty, a)$ e $B = (-\infty, b)$ dunque $A \cap B = (-\infty, \min(a, b)) \in \tau$
- Consideriamo $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto allora sia

  $$X = \bigcup_{a \in A} (-\infty, a)$$

  se $A$ è limitato allora $\exists \sup A$ dunque $X = (-\infty, \sup A) \in \tau$
  altrimenti $X = \mathbb{R}$

**Esercizio 0.8.** *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ con $X$ spazio topologico e $\mathbb{R}$ con la topologia della semicontinuità.*

$$f \textit{ continua } \Leftrightarrow \forall x \in X\, \forall \varepsilon > 0\, \exists U \subseteq X \textit{ aperto che contiene } x \quad f(y) < f(x) + \varepsilon \quad \forall y \in U$$

*Dimostrazione.* $\Rightarrow$ Sia $x \in X$ e sia $\varepsilon > 0$

$f(y) < f(x)+\varepsilon \quad \Rightarrow \quad y \in f^{-1}((-\infty, f(x)+\varepsilon))$ che è aperto in quanto controimmagine di aperto

$\Leftarrow$ Dobbiamo provare che $A = f^{-1}((-\infty, a))$ è aperto $\forall a \in \mathbb{R}$.
Sia $x \in f^{-1}((-\infty, a))$ allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $f(x) + \varepsilon < a$.
allora dalla tesi segue che

$$\exists U_x \subseteq X \text{ aperto tale che } f(U_x) \subseteq (-\infty, a)$$

allora $x \in U_x$ dunque $U_x \subseteq A$.
Dunque $A$ è un aperto in quanto unione di aperti $A = \bigcup_{x \in f^{-1}((-\infty,a))} U_x$ □