1 Ancora sul logaritmo complesso

Proposizione 1.1. *Sia* $\log: D \to \mathbb{C}$ *una branca del logaritmo (*D *aperto connesso di* $\mathbb{C}$*) allora* $\log$ *è olomorfa con* $log'(z) = \frac{1}{z}$ *(*$0 \notin D$*)*

Dimostrazione. $\log(exp(x)) = z + c$ dunque $\log'(exp(z))exp'(z) = 1$ da cui essendo $exp'(z) = exp(z)$ si ha $\log'(exp(z)) = \frac{1}{exp(z)}$
(Detto bene: fissato $z_0 \in D$, esiste $y_0 \in \mathbb{C}$ con $z_0 = exp(y_0)$.
Per continuità di exp, dato un intorno V di z_0 in D, esiste un intorno W di y_0 in $\mathbb{C}$ con $exp(W) \subseteq V$.
Le uguaglianze di sopra sono verificate per $y \in W$ e $z \in Y$)

Osservazione 1. Nella proposizione abbiamo usato il seguente fatto:
Sia $f: D \to D'$ è olomorfa e bigettiva e $g: D' \to D$ è l'inversa di f.
Se $f'(z_0) \neq 0$ allora g è olomorfa in $f(z_0)$ e vale

$$g'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Infatti da $g \circ f = Id$ e dal teorema della funzione inversa (Analisi II) poichè $f'(z_0) = a + ib \neq 0$, $d_{f_{z_0}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ è invertibile.
Per cui g è differenziabile in $f(z_0)$ e $d_{g_{f(z_0)}} = (d_{f_{z_0}})^{-1}$.
Infine si verifica facilmente che se $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a+ib \neq 0$ allora ha come inversa $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ con $c + id = \frac{1}{a+ib}$

Proposizione 1.2. *Sia* $D = B(0,1)$ *e sia* $\log: \{Re(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ *la branca principale. Allora* $\forall z \in D$ *vale* $\log(1+z) = \sum(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$

Dimostrazione. Siano $f, g: D \to C$ con $f(z) = \log(1+z)$ e $g(z) = \sum(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$.
Poichè il raggio di convergenza della serie data è 1, g è ben definita e analitica, dunque olomorfa e

$$g'(z) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}n\frac{z^{n-1}}{n} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}z^{n-1} = \sum(-1)^n z^n = \sum(-z)^n = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z}$$

Perciò se $h = f - g$ si ha $h'(z) = f'(z) - g'(z) = 0$ per $z \in D$.
Dunque $h' \equiv 0$ in D, dunque h è costante in D, $h(z) = c$ ma $h(0) = 0$ da cui $f = g$ $\square$

Proposizione 1.3. *Sia D aperto connesso di $\mathbb{C}$ e $f : D \to \mathbb{C}$ analitica. I seguenti fatti sono equivalenti*

(i) $\exists z_0 \in D$ *con* $f^{(n)}(z_0) = 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\exists U \subseteq D$ *aperto con* $f_{|U} \equiv 0$

(iii) $f \equiv 0$

Dimostrazione.

- $(iii) \Rightarrow (i)$ ovvio
- $(i) \Rightarrow (ii)$ Per analicità $f(z) = \sum a_n(z - z_0)$ per $z \in B(z_0, R)$ per qualche $R > 0$.
  Ora $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ (vedi alla fine della dimostrazione).
  Dunque se $f^{(n)}(z_0) = 0$ allora $a_n = 0$ perciò $f \equiv 0$ su $B(z_0, R)$
- $(ii) \Rightarrow (iii)$ Sia $\Omega \subseteq D$

  $$\Omega = \{z \in D \,|\, \exists U \ni z \text{ aperto con } f_{|U} \equiv 0\}$$

  Essendo D connesso, basta provare che è aperto e chiuso.
  Ω è aperto per definizione, proviamo che è chiuso .
  Sia $z \in D$ con $z = \lim z_n$ dove $z_n \in \Omega$
  Ora $f^{(k)}(z_n) = 0$ per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ (in quanto se $z_n \in W$ allora $f \equiv 0$ in un intorno di z_0 dunque $f^{(k)}(z_n) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$).
  Ma $f^{(k)}$ è continua, dunque $f^{(k)}(z) = \lim_n f^{(k)}(z_n)$.
  Ora tutte le derivate di f si annullano in z_0 dunque $z \in \Omega$ (ripercorrere la dimostrazione $(i) \Rightarrow (ii)$)

Osservazione 2. Nella dimostrazione abbiamo usato che se f è analitica anche f' lo è e se $f(z) = \sum a_n z^n$ allora $f'(z) = \sum_{n\geq 1} a_n n z^{n-1}$.
Da cui f' è analitica, dunque derivabile.
Iterando otteniamo che f è derivabile infinite volte e $f^{(n)}(z_0) = a_n n!$

Osservazione 3. L'enunciato della proposizione è falso se si suppone f C^∞.
Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad f(a + ib) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{a}} \text{ se } a > 0 \\ 0 \text{ se } a \leq 0 \end{cases}$$

Ora f è C^∞ si annulla in $\{Re(z) \leq 0\}$ dunque su un aperto di $\mathbb{C}$ ma non è nulla su $\mathbb{C}$ (l'insieme Ω sopra definito non è chiuso)

Corollario 1.4. *Sia D aperto connesso di $\mathbb{C}$ e siano $f, g : D \to \mathbb{C}$ analitiche.*

- *Se $f = g$ su un aperto $U \subseteq D$ allora $f = g$ su D*
- *Se $\exists z_0 \in D$ con $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ allora $f = g$ su D*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente a $h = f - g$

Corollario 1.5. *L'anello delle funzioni analitiche su D (aperto connesso di $\mathbb{C}$) è un dominio di integrità*

Dimostrazione. Se $f, g : D \to \mathbb{C}$ sono tali che $fg \equiv 0$ allora siano:

$$A = \{z \,|\, f(z) = 0\} \quad B = \{z \, vert \, g(z) = 0\}$$

Allora $D = A \cup B$, essendo A, B chiusi allora umo di essi ha parte interna non vuota (ex), supponiamo $A^\circ \neq 0$ da cui $f \equiv 0$ su un aperto e dunque su D

2 Zeri di funzioni analitiche

Definizione 2.1. Sia $f : D \to \mathbb{C}$ analitica con $f \not\equiv 0$.
$\forall z_0 \in D$ definiamo

$$ord_{z_0}(f) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$$

Osservazione 4. Poichè la funziono non è identicamente nulla, l'insieme di cui cerchiamo il minimo è non vuoto

Osservazione 5. $f(z_0) = 0 \Rightarrow ord_{z_0}(f) \geq 1$

Definizione 2.2. Uno zero z_0 di f si dice semplice se $ord_{z_0}(f) = 1$
Uno zero z_0 di f si dice semplice se $ord_{z_0}(f) > 1$

Osservazione 6. Se $f(z) = \sum a_n(z - z_0)$, poichè $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$ allora

$$ord_{z_0}(f) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

Proposizione 2.1. *$f : D \to C$ con D aperto connesso di $\mathbb{C}$.*
Allora si ha

$$f(z) = (z - z_0)^{ord_{z_0}(f)} g(z)$$

con $g : D \to \mathbb{C}$ analitico e con $g(z) \neq 0$ in un intorno di z_0

Dimostrazione. Sia $k = ord_{z_0}(f)$.
In un intorno di z_0 si ha

$$f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n = \sum_{n\geq k} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^k \sum_{n\geq k} a_n(z-z_0)^{n-k} = (z-z_0)^k \sum a_{n+k}(z-z_0)^n$$

Sia $g(z) = \sum a_{n+k}(z-z_0)^n$, la serie di potenze che definisce g ha lo stesso raggio di convergenza di f
In particolare $\exists U$ intorno di z_0 tale che $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$.
Ora $g(z_0) = a_k \neq 0$, dunque esiste un intorno di z_0 con g non identicamente nulla nell'intorno

Corollario 2.2. *Sia $f : D \to \mathbb{C}$ (D aperto connesso di $\mathbb{C}$) e $f \not\equiv 0$*
Allora $C = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$ è discreto e chiuso in D

Dimostrazione. Sia $z_0 \in C$ con $k = ord_{z_0}(f)$ allora in un intorno U di z_0 si ha

$$f(z) = (x - x_0)^k g(z)$$

e tale che $g(z) \neq 0$ per $z \in U$
Se $z \in U \setminus \{z_0\}$ allora $C \cap U = \{z_0\}$ dunque è discreto.
C è chiuso essendo pre-immagine di $\{0\}$ mediante una funzione continua

3 1-forme differenziali complesse

$\mathbb{C}$ può essere visto come un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione 2 con base $\{1, i\}$.
Fissando questa base si ha $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \cong M(2, 2, \mathbb{R})$ (con $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ indichiamo l'insieme degli endomorfismi di $\mathbb{C}$ che sono $\mathbb{R}$-lineari).
L'isomorfismo è dato da

$$\psi \to \begin{pmatrix} Re(\psi(1)) & Re(\psi(i)) \\ Im(\psi(1)) & Im(\psi(i)) \end{pmatrix}$$

Notiamo che

$$\mathrm{d}x : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \mathrm{d}x(a + ib) = a$$

$$\mathrm{d}y : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \mathrm{d}y(a + ib) = b$$

è una base di $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ inteso come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale

Definizione 3.1. Sia D un aperto di $\mathbb{C}$ una 1-forma differenziale complessa su D è una funzione $\omega : D \to End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ continua (rispetto alla topologia di $M(2, 2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$)

Osservazione 7. Più concretamente una 1-forma differenziale complessa ω su D corrisponde a 2 funzioni $P, Q : D \to \mathbb{C}$ tali che

$$\omega(z) = P(z)\mathrm{d}x + Q(z)\mathrm{d}y = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

Osservazione 8. La continuità di ω deriva da quella di P e Q
Infatti se

$$P(z) = a(z) + ib(z) \text{ e } Q(z) = c(z) + id(z)$$

$$\omega(z)(1) = P(z)\mathrm{d}x(1) + Q(z)\mathrm{d}y(1) = P(z) = a(z) = ib(z)$$

$$\omega(z)(i) = P(z)\mathrm{d}x(i) + Q(z)\mathrm{d}y(i) = Q(z) = c(z) = id(z)$$

dunque

$$\omega(z) = \begin{pmatrix} a(z) & c(z) \\ b(z) & d(z) \end{pmatrix}$$

da cui ω è continua se e solo se a, b, c, d lo sono, se e solo se P, Q lo sono

Esempio 3.1. *Se $f : D \to \mathbb{C}$ è C^1 allora $\mathrm{d}f$ è una 1-forma differenziale complessa, data da*

$$\mathrm{d}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial\, Re(f}{\partial\, u} & \frac{\partial\, Re(f)}{\partial\, v} \\ \frac{\partial\, Im(f)}{\partial\, u} & \frac{\partial\, Im(f)}{\partial\, v} \end{pmatrix}$$

Osservazione 9. Un'altra base utile di $End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ è data da

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$$

$\big($è una base in quanto $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z}}{2}$ e $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z}}{2i} = -i\frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z}}{2}\big)$ Ora se f è differenziabile allora

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial\, f}{\partial\, x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\, f}{\partial\, y}\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{\partial\, f}{\partial\, x}\left(\frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z}}{2}\right) + \frac{\partial\, f}{\partial\, y}\left(-\frac{i}{2}(\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, f}{\partial\, x} - \frac{\partial\, f}{\partial\, y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, f}{\partial\, x} + i\frac{\partial\, f}{\partial\, y}\right)\mathrm{d}\overline{z}$$

Definizione 3.2. Sia f differenziabile

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Perciò risulta per costruzione

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z}$$

Osservazione 10. f è olomorfa $\Leftrightarrow$ $\mathrm{d}f$ è $\mathbb{C}$-lineare dunque

$$f \text{ olomorfa} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{d}f(i) = i\mathrm{d}f(1) = i\frac{\partial f}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Osservazione 11. Assumendo f olomorfa

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \mathrm{d}f_z(1) = f'(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \mathrm{d}f_z(i) = i\mathrm{d}f_z(1) = if'(z)$$

Perciò

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$$

Corollario 3.2. *Se f è olomorfa* $\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}z$

Dimostrazione. $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z} = f'\mathrm{d}z + 0$