**Lezione del 5 Dicembre del Prof. Frigerio**

*Osservazione* 1. Quando non altro specificato, supponiamo tutte le funzioni continue

**Definizione 0.1.** Siano $f, g : X \to Y$ continue.
Una **omotopia** tra $f$ e $g$ è una mappa continua

$$H : X \times [0,1] \to Y \quad H(x,0) = f(x) \quad H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

Nel seguito indicheremo l'intervallo $[0,1]$ con $I$

*Osservazione* 2. $\forall t \in [0,1]$ la mappa $H_t(x) = H(x,t)$ è continua per cui $H$ descrive un'interpolazione continua tra $f$ e $g$: deforma $f$ in $g$

**Definizione 0.2.** $f$ si dice **omotopa** a $g$ e si indica con $f \sim g$ se esiste un omotopia tra $f$ e $g$

**Proposizione 0.1.** *Essere omotopi è una relazione di equivalenza sull'insieme $C(X,Y)$ delle funzioni continue da $X$ a $Y$.*
*L'insieme delle classi di omotopia di tali funzioni si denota con $[X,Y]$*

*Dimostrazione.*

- Riflessiva: $f \sim f$ infatti basta prendere $H(x,t) = f(x)$ $\forall x \in X$ e $\forall t \in I$
- Transitiva. Sia $H$ l'omotopia tra $f$ e $g$ allora $K(x,t) = H(x, 1-t)$ è un omotopia tra $g$ e $f$
- Transitiva. Sia $H$ è l'omotopia tra $f$ e $g$ e $K$ è l'omotopia tra $g$ e $h$.
  Costruiamo un omotopia tra $f$ e $h$: $J : X \times [0,1] \to Y$ così definita

  $$J(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) \text{ se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ K(x, 2t-1) \text{ se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

  $J$ è continua in quanto è ben definita ed inoltre è continua la restrizione sui chiusi $X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (sono ricoprimento fondamentale)

□

**Esempio 0.2.** *Se $Y$ è convesso di $\mathbb{R}^n$ (e.g $\mathbb{R}^n$ stesso), allora $|[X,Y]| = 1$ cioè tutte le mappe $f : X \to Y$ sono omotope tra loro.*
*Date $f, g : X \to Y$ la funzione $H(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x)$ è ben definita essendo $Y$ convesso ed inoltre è continua, dunque è l'omotopia cercata*

*Osservazione* 3. In realtà basta $Y$ stellato rispetto a $p \in Y$.
$H(x,t) = tf(x) + (1-t)p$ dunque $H$ è un omotopia tra $f$ e la costante $p$, da cui la tesi per transitività di $\sim$

**Definizione 0.3.** Sia $X$ uno spazio topologico, denotiamo con $\pi_0(X)$ l'insieme delle componenti connesse per archi di $X$

**Definizione 0.4.** Sia $f : X \to Y$ allora tale funzione induce una ben definita funzione

$$f_\star : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$

definita in modo che $f(C) \subseteq f_\star(C)$ $\forall C \in \pi_0(X)$

*Osservazione* 4. $f_\star$ manda una componente connessa di $X$ nell'unica componente connessa di $Y$ che contiene $f(C)$ (le componenti connesse sono disgiunte)

**Lemma 0.3.** *Se $f \sim g$ allora $f_\star = g_\star$*

*Dimostrazione.* Sia $C \in \pi_0(X)$ e sia $x_0 \in C$.
Se $H$ è un omotopia tra $f$ e $g$, la mappa

$$\gamma : [0,1] \to Y \quad \gamma(t) = H(x_0, t)$$

è un cammino continuo in $Y$ che congiunge $f(x_0)$ e $g(x_0)$.
$f(x_0)$ e $g(x_0)$ giacciono nella stessa componente connessa per archi di $Y$ che è sia $f_\star(C)$ ( contiene $f(x_0)$) sia $g_\star(C)$ (contiene $g(x_0)$.
Dato che le componenti connesse sono disgiunte si ottiene $f_\star(C) = g_\star(C)$ □

**Corollario 0.4.** *Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è stellato rispetto a $p$, allora c'è una biezione tra $[X, Y]$ e $\pi_0(Y)$*

*Dimostrazione.* Essendo $X$ stellato, è connesso per archi ovvero $|\pi_0(X)| = 1$.
Definiamo

$$\psi : C(X, Y) \to \pi_0(Y) \quad \psi(f) = f_\star(X)$$

Per il lemma $\psi$ induce una ben definita funzione $\varphi$; $[X, Y] \to \pi_0(Y)$, mostriamo che $\varphi$ è biettiva

- Suriettiva. Dato $C \in \pi_0(Y)$ scelgo $y \in C$ e pongo $f(x) = y$ allora $f$ è continua e $\psi(f) = C$ da cui $\varphi([f]) = C$

- Iniettiva. Data $f \in C(X, Y)$ allora $f$ è omotopa alla costante $f(p)$ in quanto $H(x,t) = f(tx + (1-t)p)$ è ben definita in quanto $X$ stellato.
  Dato $f, g$ con $\psi(f) = \psi(g)$ abbiamo $f(p)$ e $g(p)$ vivono nella stessa componente connessa per archi di $Y$ e dunque le costanti $f(p)$ e $g(p)$ sono omotope tramite $H(x,t) = \delta$ dove $\delta$ è un arco che congiunge $f(p)$ e $g(p)$.
  $f \sim f(p) \sim g(p) \sim g$ dunque $[f] = [g]$ □

**Definizione 0.5.** $f : X \to Y$ è un' **equivalenza omotopica** se ammette un inversa omotopica cioè

$$g : Y \to X$$

tali che $f \circ g \sim Id_Y$ e $g \circ f \sim Id_X$.
Due spazi si dicono **omotopicamente equivalenti** (o omotopici) se esiste un'equivalenza omotopica tra di loro

**Proposizione 0.5.** *Essere omotopici è una relazione di equivalenza, la transitività si mostra usando il seguente*

**Lemma 0.6.** *Siano $f_0, f_1 : X \to Y$ e $g_0, g_1 : Y \to Z$ continue*

$$f_0 \sim f_1 \text{ e } g_0 \sim g_1 \quad \Rightarrow \quad g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$$

*Dimostrazione.* Sia $H$ è l'omotopia tra $f_0$ e $f_1$ e $K$ l'omotopia tra $g_0$ e $g_1$.
La mappa $(x,t) \to K(H(x,t))$ è un'omotopia tra $g_0 \circ f_0$ e $g_1 \circ f_1$

**Definizione 0.6.** $X$ è **contraibile** se è omotopicamente equivalente ad un punto

**Proposizione 0.7.** *$X \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato $\Rightarrow$ $X$ contraibile*

*Dimostrazione.* Sia $Y = \{q\}$, definiamo allora le funzioni

$$f : X \to Y \quad f(x) = q$$

$$g : Y \to X \quad g(q) = x_0 \text{ a caso}$$

ora $f$ e $g$ sono continue inoltre $f \circ g = Id_Y \sim Id_Y$ mentre $g \circ f$ è omotopa a $Id_X$ poichè $X$ stellato per cui tutte le funzioni sono omotope tra loro □

**Proposizione 0.8.** *Se $f : X \to Y$ è equivalenza omotopica allora $f_\star : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ è una bigezione*

*Dimostrazione.* Segue dal fatto che le mappe omotope inducono la stessa mappa sui $\pi_0$ ed inoltre $(f \circ g)_\star = f_\star \circ g_\star$

*Osservazione* 5. $X$ contrattile $\Rightarrow$ $X$ connesso per archi.
Essendo contrattile esiste una bigezione tra $\pi_0(X)$ e le componente connesse per archi del punto, Ora l'insieme fatto da un solo punto ha una sola componente connessa, dunque anche $X$ ha una sola componente connessa per archi

**Definizione 0.7.** Sia $X$ topologico. $C \subseteq X$ di dica

- **Retratto** se $\exists r : X \to C$ (retrazione) continua tale che $r(x) = x \ \forall x \in C$
- **Retratto di deformazione** se esiste $r$ come sopra.
  Inoltre esiste un omotopia $H$ tra $Id_X$ e $i \circ r$ tale che $H(x,t) = x \ \forall c \in C$ e $\forall t \in [0,1]$.
  Dove $i : C \to X$ è l'inclusione

**Esempio 0.9.** *Se $p \in X$ allora $\{p\}$ è un retratto di $X$*

**Esempio 0.10.** *$S^n$ è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.*
*La retrazione è data da $f(x) = \frac{x}{||x||}$.*
*L'omotopia tra $i \circ r$ e l'identità è dato da $H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{||x||}$*