Lezione del 13 Novembre del Prof. Frigerio

Definizione 0.1 (Sottosuccessione)**.**
Sia $\{a_n\}$ una successione a valori in uno spazio topologico X.
Una sottosuccessione $\{a_{n_i}\}$ è una sottofamiglia di $\{a_n\}$ dove $\{n_i\}$ è una successione strettamente crescente in $\mathbb{N}$

Definizione 0.2. Sia X topologico.
X si dice compatto per successioni se ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente

Proposizione 0.1. *Sia X primo-numerabile*

$$X \text{ compatto} \quad \Rightarrow \quad X \text{ compatto per successioni}$$

Dimostrazione. Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ sia } C_m = \overline{\{x_n \,|\, n \geq m}$$

vale che C_m chiuso e $C_{m+1} \subseteq C_m$.
Poichè X compatto , deduciamo $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m \neq \emptyset$, da cui sia $\overline{x} \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m$
Costruiamo una successione che tende a $\overline{x}$.
Sia $\{U_i\}$ il sistema di fondamentale numerabile di intorni di $\overline{x}$; a meno di sostituire U_i con $U_1 \cap \cdots \cap U_i$ posso supporre $U_{i+1} \subseteq U_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$.
Costruisco induttivamente $\{x_{n_1}\}$ come segue:
Poichè $\overline{x} \in C_0$ allora $\exists n_0$ tale che $x_{n_0} \in U_0$ (se $x \in \overline{C}$ allora tutti gli intorni di $\overline{x}$ intersecano C
So che $\overline{x} \in C_{n_0+1}$ allora $\exists n_1 \geq n_0 + 1 > n_0$ per cui $x_{n_1} \in U_1$
Procedo in questo modo costruendo una successione strettamente crescente $\{n_i\}$ con $x_{n_i} \in U_i$.
Proviamo che $x_{n_i} \to \overline{x}$.
Sia U un generico intorno di $\overline{x}$, allora dalla definizione di sistema fondamentale di intorni si ha

$$\exists i_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } U_{i_0} \subseteq U$$

Ora $\forall i \geq i_0$ si ha $x_{n_i} \in U_i \subseteq U_{i_0} \subseteq U$ da cui la tesi □

Teorema 0.2. *Sia X secondo-numerabile*

$$X \text{ compatto} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ compatto per successioni}$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ secondo-numerabile $\Rightarrow$ primo-numerabile da cui la tesi.
$\Leftarrow$ In modo contronominale.
Poichè X non è compatto, $\exists \mathfrak{U} = \{U_i\}$ ricoprimento con aperti di base senza sottoricoprimenti finiti .
Costruisco una successione, chiedendo che

$$x_i \in X \backslash (U_0 \cup \cdots \cup U_i)$$

la successione è ben definita poichè per definizione di $\mathfrak{U}$ $U_0 \cup \cdots \cup U_i \neq X$ $\forall i \in \mathbb{N}$.
Supponiamo, per assurdo, che x_n ammetta una sottosuccessione convergente e sia $\overline{x}$ questo limite.
Poichè $\mathfrak{U}$ è un ricoprimento di X , $x \in U_{i_0}$ per un certo $i_0 \in \mathbb{N}$, essendo U_{i_0} un intorno di $\overline{x}$ allora per definizione di limite
$|\{i \in \mathbb{N} \,|\, x_i \in U_{i_0}\}| = \infty$ ma per costruzione $x_i \notin U_{i_0}$ se $i > i_0$
Ciò è assurdo, dunque, x_n non ha sottosuccessioni convergenti □

Lemma 0.3. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni con $f_n : X \to A$.*

$$f_n \to f \text{ in } A^X \quad \Leftrightarrow \quad f_n \to f \text{ puntualmente}$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ nella lezione dell 8 Novembre
$\Leftarrow$ Fisso V intorno di f in A^x, dunque, dalla definizione di topologia prodotto $f \in U \subseteq V$ dove

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi^{-1}(W_i) \text{ con } W_i \text{ intorno di } f(x_i) \text{ in } A$$

ovvero $W_i = (f(x_i) - \varepsilon_i, f(x_i) + \varepsilon_i)$ dunque fissando $x_1, \dots, x_n$ e $\varepsilon_1, dots, \varepsilon_n$ ottengo

$$U = \{g : X \to A \,|\, |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon_i \, \forall i = 1, \dots, n\}$$

Poichè $f_n \to f$ puntualmente

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \exists n_1 \quad f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon_i$$

da cui

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \exists n_0 = \max_{i=1,\dots,n} \{n_i\} \quad |f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon_i \, \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad f_n \in U \subseteq V \, \forall n \geq n_0$$

Da cui $f_n \to f$ in A^X □

Osservazione 1. In generale

$$X \text{ compatto } \not\Rightarrow X \text{ compatto per successioni}$$

Prendiamo come esempio $X = [0,1]^{[0,1]}$.
Per Tychnoff X è compatto.
Cerco una successione $f_n : [0,1] \to [0,1]$ senza sottosuccessioni puntualmente convergenti.
Pongo

$$f^n(x) = 10^n \cdot x - \lfloor 10^n \cdot x \rfloor \text{ la parte decimale di } 10^n \cdot x$$

$f_n(x)$ è l'allineamento proprio decimale $0, a_1\, a_2 \dots a_n \dots$ dove a_i è la $(n+i)$-esima cifra dopo la virgola dell'allineamento decimale proprio che rappresenta x.
Data una qualsiasi successione crescente $\{n_i\}$ di indici, prendo x avente $(i \mod 10)$ come $n_i + 1$ cifra decimale.
Per costruzione $f_{n_i}(x)$ ha come prima cifra dopo la virgola $(i \mod 10)$ dunque f_{n_i} non converge