Lezione del 14 Novembre del Prof. Frigerio

Definizione 0.1 (Successione di Cauchy)**.**
Sia (X, d) uno spazio metrico.
Una successione $\{a_n\} \subseteq X$ è detta di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

Lemma 0.1. *Se $\{x_n\}$ è convergente allora è di Cauchy*

Dimostrazione. Sia $\overline{x}$ il limite di x_n dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

dunque

$$\forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \overline{x}) + d(x_m, \overline{x}) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Definizione 0.2 (Spazio completo)**.**
X spazio topologico si dice completo se ogni successione di Cauchy in X è convergente

Osservazione 1. $\mathbb{Q}$ non è completo, sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ convergente a $\sqrt{2}$ tale successione è di Cauchy, essendo convergente, ma non converge in $\mathbb{Q}$

Lemma 0.2. *Sia $\{x_n\}$ di Cauchy. Se $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente allora $\{x_n\}$ è essa stessa convergente.*

Dimostrazione. Poichè $\{x_n\}$ è di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad d(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_0$$

Ora sia $\overline{x} = \lim_{i \to +\infty} x_{n_i}$ dunque per definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists j \in \mathbb{N} \quad d(\overline{x}, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_j$$

Sia $n_{\overline{i}} \geq n_j \geq n_0$ dunque

$$\forall n \geq n_{\overline{i}} \quad d(\overline{x}, x_n) \leq d(\overline{x}, x_{n_{\overline{i}}}) + d(x_{n_{\overline{i}}}, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dunque $\lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}$ □

Corollario 0.3. *Sia X uno spazio metrico*

$$X \textit{ compatto per successioni} \quad \Rightarrow \quad X \textit{ completo}$$

Lemma 0.4. *Sia X è completo e $Y \subseteq X$ con la metrica indotta*

$$Y \textit{ completo} \quad \Leftrightarrow \quad Y \textit{ chiiuso in } X$$

Dimostrazione. In modo contronominale.
Se Y non è chiuso allora $\exists\{y_n\} \subseteq Y$ con $\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y} \notin Y$,infatti essendo Y primo numerabile, $\overline{Y} = \{$ punti limiti delle successioni $\subseteq Y\}$.
Ora $\{y_n\}$ converge, dunque è di Cauchy ma non converge in Y, Y non è completo.
$\Leftarrow$ Sia $\{y_n\} \subseteq Y$ di Cauchy.
Per completezza di X $\exists \lim_{n\to\infty} y_n = \overline{x}$, ora essendo Y chiuso $\overline{x} \in \overline{Y} = Y$ dunque Y completo □

Definizione 0.3. Sia X uno spazio metrico.
X è totalmente limitato se $\forall\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di X fatto con palle di raggio ε

Lemma 0.5.
$$X \text{ totalmente limitato} \quad \Rightarrow \quad X \text{ limitato}$$

Dimostrazione. Dalla totale limitatezza ponendo $\varepsilon = 1$ si ottiene

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1)$$

Posto $M = \max_{i,j=1,\dots,n}\{d(x_i, x_j)$

$$\forall x, y \in X \quad \exists x_i, x_j \quad x \in B(x_i, 1) \text{ e } y \in B(x_j, 1)$$

da cui
$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq 1 + M + 1 + M = M + 2$$

□

Osservazione 2. Non vale il viceversa.
Se su $\mathbb{R}$ poniamo $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$ allora $(\mathbb{R}, d)$ è limitato ma non totalmente limitato, non esistono ricoprimenti finiti con palle di raggio $1/2$

Proposizione 0.6. *(X, d) totalmente limitato $\Rightarrow$ a base numerabile*

Dimostrazione. Per un teorema già visto basta vedere che è separabile (metrico e separabile implica a base numerabile)

$$\forall n \quad \exists F_n \subseteq X \text{ finito con } X = \bigcup_{p\in F_n} B\left(p, \frac{1}{n}\right)$$

Allora $\bigcup_{n\geq 1} F_n$ è numerabile, mostriamo che è denso.
Sia $U \subseteq X$ un aperto non vuoto, dunque $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists z \in X$ tale che $B\left(z, \frac{1}{n_0}\right) \subseteq U$.
Ora le palle di raggio $\frac{1}{n_0}$ sono un ricoprimento da cui $\exists p \in F_{n_0}$ tale che $z \in B\left(p, \frac{1}{n_0}\right)$.
Dunque $p \in \bigcup F_n$ e $p \in B\left(z, \frac{1}{n_0}\right) \subseteq U$ da cui $\bigcup F_n$ interseca ogni aperto non vuoto da cui denso. □

Teorema 0.7. *Sia (X, d) metrico. I seguenti fatti sono equivalenti*

(i) X compatto

(ii) X compatto per successioni

(iii) X totalmente limitato e completo

Inoltre in questi casi X ammette una base numerabile

Dimostrazione.

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Deriva dal fatto che metrico implica primo-numerabile
- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Abbiamo già visto che compatto per successione implica completo.
  Mostriamo che X è totalmente limitato in modo contronominale.
  Se X non fosse totalmente limitato allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che X non sia ricoperto da un numero finito di palle di raggio ε.
  Costruiamo induttivamente una successione $\{x_n\}$.
  Prendiamo $x_0 \in X$ (qualunque).
  Poniamo $x_{n+1} \notin B(x_0, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)$.
  Tale successione non ammette sottosuccessione convergenti infatti $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ per tutti gli $n \neq m$
- (iii) $\Rightarrow$ (i) Poichè totalmente limita implica a base numerabile, sotto le ipotesi (iii) vale (i) $\Leftrightarrow$ (ii).
  Mostriamo, dunque, che X è compatto per successioni.
  Sia $\{x_n\}$ una successione in X, essendo X completo, troviamo una sottosuccessione di Cauchy (dunque convergente).
  Per totale limitatezza, $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste un ricoprimento finito $\mathfrak{U}_n$ di X fatto con palle di raggio 2^{-n}. Essendo $\mathfrak{U}_0$ finito

  $$\exists W_0 \in \mathfrak{U}_0 \quad I_0 = \{n \in \mathbb{N} \,|\, | \, x_n \in W_0\} \text{ infinito}$$

  (la successione si deve ripartire in finite palle, dunque deve esistere una palla che contiene infinti termini della successione)
  Pongo $n_0 = \min I_0$.
  Essendo $\mathfrak{U}_1$ finito

  $$\exists W_1 \in \mathfrak{U}_1 \quad I_1 = \{n \in \mathbb{N} \,|\, | \, n > n_0 \text{ e } x_n \in W_1\} \text{ infinito}$$

  Pongo $n_1 = \min I_1$.
  Proseguo induttivamente ottenendo una sottosuccessione $\{x_{n_i}\}$.
  Mostriamo che tale successione è di Cauchy; per ogni $i, j \geq j_0$ segue che $x_{n_i}, x_{n_j} \in W_{j_0}$
  Ora W_{j_0} è una palla di raggio 2^{-j_0} da cui $d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq 2^{-j_0+1} < \varepsilon$

$\square$