Lezione del 16 ottobre di Gandini

1 Assiomi di separabilitá

Definizione 1.1. Uno spazio topologico X si dice $T1$ se

$$\forall x, y \in X\, x \neq y \quad \exists U, V \subseteq X \text{ aperti} \quad x \in U \backslash V \text{ e } y \in V \backslash U$$

Proposizione 1.1 (Definizione alternativa).
Sia X uno spazio topologico

$$X \text{ è } T1 \quad \Leftrightarrow \quad \textit{i punti sono chiusi}$$

Dimostrazione. $\overline{\{x\}} = \{y \in X \mid \text{ tutti gli intorni che contengono } y \text{ contengono } x\}$
$\Rightarrow$ Essendo X $T1$

$$\forall y \in X\, y \neq x \quad \Rightarrow \quad \exists U \subseteq X \text{ aperto che contiene} y \text{ tale che } x \notin V \quad \Rightarrow \quad y \notin \overline{\{x\}}$$

$\Leftarrow$ Sia $y \neq x$ allora $V = X \backslash \{x\}$ e $U = X \backslash \{y\}$ sono aperti in quanto i punti sono chiusi. Dunque U è un aperto che contiene x ma non Y e viceversa V contiene y ma non x. □

Osservazione 1. Se τ è una topologia su X, allora τ soddisfa $T1$ se e solo se τ è più fine della topologia

Esercizio 1.2.

$$X \text{ è } T1 \quad \Leftrightarrow \quad \{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} U$$

Definizione 1.2. Uno spazio topologico X si dice $T2$ se

$$\forall x, y \in X\, x \neq y \quad \exists U, V \subseteq X \text{ aperti disgiunti} \quad x \in U\, y \in V$$

Definizione 1.3. Uno spazio topologico che verifica l'assioma $T2$ prende il nome di spazio di Hausdorff o spazio separato

Proposizione 1.3 (Definizione alternativa).

$$X \text{ è } T2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_X \subseteq X \times X \textit{ è chiuso con la topologia di sottospazio}$$

dove $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ è la diagonale di X

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $x \neq y$ allora $(x, y) \notin \Delta_X$.
Siano $U \in I(x)$ e $V \in I(y)$ disgiunti da cui

$$(x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X) \backslash \Delta_X$$

ovvero $U \times V$ è un intorno di (x, y) dunque è aperto
$\Leftarrow$ Il complementare della diagonale è aperto allora se $x \neq y$

$$\exists U, V \subseteq X \text{ aperti tali che } (x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X) \backslash \Delta_X$$

inoltre U e V sono disgiunti (se $\exists z \in U \cap V$ allora $(z, z) \in U \times V$ e $(z, z) \in \Delta_X$ ma avevamo supposto che $U \times V$ fosse contenuto nel complementare della diagonale)

Esercizio 1.4.

$$X \text{ è } T2 \quad \Leftrightarrow \quad \{x\} = \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U}$$

Proposizione 1.5. *Sia X uno spazio topologico allora $T2 \Rightarrow T1$*

Dimostrazione. Se U, V sono aperti disgiunti tali che $x \in U$ e $y \in V$ allora, in particolare, $x \in U \backslash V$ e $y \in V \backslash U$

Proposizione 1.6. *Sottospazi e prodotti arbitrati di $T2$ (risp. $T1$) sono ancora $T2$ (risp. $T1$)*

Dimostrazione. Mostriamo che prodotti di $T2$ è $T2$
Consideriamo

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \text{ dove gli } X_\alpha \text{ sono } T2$$

Sia $x \neq y$ allora $\exists a \in A$ tale che $x_a = x(a) \neq y(a) = y_a$.
Essendo X_a $T2$

$$\exists U_a \in I(x_a) \quad \exists V_a \in I(y_a) \quad \text{ con } U_a \cap V_a = \emptyset$$

Sia

$$U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \text{ dove } U_\alpha = \begin{cases} U_a \text{ se } \alpha = a \\ X_\alpha \text{ se } \alpha \neq a \end{cases} \qquad V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha \text{ dove } V_\alpha = \begin{cases} V_a \text{ se } \alpha = a \\ X_\alpha \text{ se } \alpha \neq a \end{cases}$$

Per come abbiamo definito una base della topologia prodotto U e V sono aperti in X inoltre essi sono disgiunti perchè U_a e V_a sono disgiunti

Osservazione 2. Se ho 2 topologie su X con $\tau_1 \subseteq \tau_2$

$$\tau_1 \text{ è } T1(\text{risp. } T2) \quad \Rightarrow \quad \tau_2 \text{ è } T1(\text{risp. } T2)$$

1.1 Alcune propietà di $T2$

Proposizione 1.7. *Sia Y uno spazio $T2$ e $f : X \to Y$ una funzione continua, allora il grafico di f è chiuso ovvero*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\} \subseteq X \times X \text{ è un chiuso}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$F : X \times Y \to Y \times Y \quad (x, y) \to (f(x), y)$$

essa è continua per come è stata definita la topologia prodotto e percè f è continua.
Osserviamo che $F^{-1}(\Delta_X) = \Gamma_f$ dunque essendo la diagonale un chiuso, anche il grafico lo è □

Proposizione 1.8. *Sia Y uno spazio $T2$ e $f, g : X \to Y$ continue allora*

$$C = \{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\} \text{ è chiuso}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$F : X \to Y \times Y \quad x \to (f(x), g(x))$$

essa è continua dunque $F^{-1}(\Delta_X)$ è chiuso essendo chiusa la diagonale ma $F^{-1}(\Delta_X) = C$ □

Corollario 1.9. *Sia X uno spazio $T2$ e $f : X \to X$ continua, allora $Fix(f)$ é chiuso*

Dimostrazione. Basta porre $g = id_X$ e usare la proposizione precedente

Proposizione 1.10. *Sia Y uno spazio $T2$ e $f, g : X \to Y$ continue.*
Sia $Z \subseteq X$ un denso tale che $f(z) = g(z)$ $\forall z \in Z$.
Allora $f = g$

Dimostrazione. Per la proposizione precedente $\{f(x) = g(x)\}$ è un chiuso, tale chiuso contiene un denso quindi contine la sua chiusura, ovvero, tutto lo spazio X

Proposizione 1.11. *Sia X uno spazio $T2$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione convergente. Il limite della successione è unico*

Dimostrazione. Siano x, y due limiti della successione.
Poichè la successione converge a x allora

$$\forall U \in I(x) \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \{x_n\} \subseteq U \quad \forall n \geq n_1$$

inoltre converge anche a y quindi

$$\forall V \in I(y) \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \{x_n\} \subseteq V \quad \forall n \geq n_2$$

quindi vale

$$\exists n_0 = \max\{n_1, n_2\} \quad \{x_n\} \subseteq V \cap U \quad \forall n \geq n_0$$

dunqe $\forall U \in I(x) \forall V \in I(y)$ accade $U \cap V \neq \emptyset$ ma ciò viola l'assioma $T2$ □

Definizione 1.4 (T3).
Uno spazio topologico X si dice $T3$ se

$$\forall C \subseteq X \text{ chisuo} \quad \forall x \in X \backslash C \quad \exists U, V \text{ aperti disgiunti} \quad x \in U \quad C \subseteq V$$

Definizione 1.5. X è uno spazio topologico regolare se soddisfa $T1$ e $T3$

Definizione 1.6. Uno spazio topologico X si dice $T4$ se

$$\forall C, D \subseteq X \text{ chiusi disgiunti} \quad \exists U, V \subseteq X \text{ aperti disgiunti} \quad C \subseteq U \quad D \subseteq V$$

Definizione 1.7. X è uno spazio topologico normale se soddisfa $T1$ e $T4$

Osservazione 3. Possiamo riformulare la condizione in $T4$ come segue:
Per ogni coppia di chiusi C, D , $\exists U \in X$ tale che

$$C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \backslash D$$

Infatti, in queste ipotesi U è un aperto che contenente C e $X \backslash \overline{U}$ è un aperto contenente D, inoltre i 2 aperti sono, in modo ovvio, disgiunti.
Se X è $T4$ allora $U \subseteq X \backslash V$ essendo U, V disgiunti.
Inoltre poichè $X \backslash V$ è un chiuso contenente U, contiene anche la sua chiusura dunque

$$U \subseteq \overline{U} \subseteq X \backslash V$$

concludiamo osservando che $D \subseteq V$ implica $X \backslash V \subseteq X \backslash D$
Possiamo fare un ragionamento analogo anche con $T3$

Proposizione 1.12. *Sottospazi e prodotti di $T3$ sono $T3$*

Dimostrazione. Mostriamo che sottospazi di $T3$ sono $T3$ l'altra è analoga a quella fatta nel caso di $T2$.
Sia X uno spazio vettoriale $T3$.
Siano $Z \subseteq X$ (con topologia di sottospazio), $z \in Z$ e $C \subseteq Z$ chiuso.
Dalla definizione di topologia di sottospazio

$$C \text{ chiuso } \Rightarrow \exists D \subseteq X \text{ chiuso} \quad C = Z \cap D$$

Ora essendo X $T3$

Proposizione 1.13. *Un sottospazio chiuso di $T4$ è un $T4$*

Dimostrazione. Sia X uno spazio $T4$ e $Z \subseteq X$ un chiuso.
Siano $C, D \subseteq Z$ chiusi disgiunti .
Dalla definizione di topologia di sottospazio

$$\exists C_1 \subseteq X \text{ chiusi} \quad C = C_1 \cap Z$$

$$\exists D_1 \subseteq X \text{ chiusi} \quad D = D_1 \cap Z$$

Ora essendo Z un chiuso di X e poichè l'intersezione di 2 chiusi è un chiuso: C e D sono chiusi disgiunti di X dunque

$$\exists U_1, V_1 \subseteq X \text{ aperti disgiunti} \quad C \subseteq U_1 \quad D \subseteq V_1$$

Ora poichè $C \subseteq Z$ vale in particolare $C \subseteq U_1 \cap Z$ e similmente $D \subseteq V_1 \cap Z$.
Ora $U = U_1 \cap Z$ e $V = V_1 \cap Z$ sono aperti disgiunti di Z otteniamo che Z è $T4$ □

Osservazione 4. In generale, sottospazi e prodotti di $T4$ non sono $T4$.

Proposizione 1.14. *metrizzabile $\Rightarrow$ normale*

Dimostrazione. Sia (X, d) uno spazio metrico, per provare che X è normale basta dimostrare che è $T4$ infatti X è $T2$ quindi $T1$.
Ricordiamo come avevamo definito la funzione distanza da un sottoinsieme Z (27 Settembre Esercizio 0.2)

$$d_Z(x) = \inf_{z \in Z} d(x, z)$$

essa è continua e $\overline{Z} = d_Z^{-1}(\{0\})$ (27 Settembre Esercizio 0.5).
Siano C, D chiusi disgiunti.
Definiamo

$$f : X \to [0, 3] \quad x \to \frac{3d_C(x)}{d_C(x) + d_D(x)}$$

tale funzione, essendo composizione di funzione continue è continua ed inoltre è ben definita: $C \cap D = \emptyset$ implica $d_C(x) \neq d_D(x)$.

$$U = f^{-1}([0, 1)) \quad C = \overline{C} = f^{-1}(0) \subseteq U$$
$$V = f^{-1}((2, 3]) \quad D = \overline{D} = f^{-1}(3) \subseteq V$$

Ora poichè C e D sono disgiunti anche U e V.
Essendo gli intervalli $[0, 1)$ e $(2, 3]$ aperti in $[0, 3]$ (con la topologia di sottospazio) U e V sono aperti □

Osservazione 5.

$$\text{metrizzabile} \Rightarrow (T4 + T1) \Rightarrow (T3 + T1) \Rightarrow T2 \Rightarrow T1$$

in modo equivalente

$$\text{metrizzabile} \Rightarrow \text{ normale } \Rightarrow \text{ regolare } \Rightarrow \text{ Hussdorff } \Rightarrow T1$$

Infatti se X è $T1$ allora i punti sono chiusi.

Mostriamo che, in generale, le implicazioni opposte non sono vere.
(quelle che mancano nella prossima lezione)

- Normale $\not\Rightarrow$ metrizzabile . Sia $\mathbb{R}_S$ la retta di Sorgenfray.
  $\mathbb{R}_S$,come sappiamo, non è metrizzabile).
  $\mathbb{R}_S$ è $T1$ in quanto ha una topologia meno fine di quella euclidea e $T2 \Rightarrow T1$.
  Resta da provare che è $T4$, siano C, D chiusi disgiunti.

  $$\forall c \in C \quad c \in \mathbb{R} \backslash D \text{ che è aperto quindi } \exists c' \in \mathbb{R} \quad [c, c') \subseteq \mathbb{R} \backslash D$$

  Dunque

  $$C \subseteq U = \bigcup_{c \in C} [c, c') \text{ con } U \text{ aperto}$$

  Similmente possiamo fare con D ottenendo

  $$D \subseteq V = \bigcup_{d \in D} [d, d') \text{ con } V \text{ aperto}$$

  Mostriamo che $U \cap V = \emptyset$ ovvero che $[c, c') \cap [d, d') = \emptyset \ \forall c \in C \ d \in D$
  Essendo C e D disgiunti in particolare $c \neq d$, assumiamo senza perdere di generalità che $c < d$.

  $$c \in \mathbb{R} \backslash D \quad \Rightarrow \quad [c, c') \cap D = \emptyset \quad \Rightarrow \quad c' \leq d$$

- Regolare $\not\Rightarrow$ normale
- $T2 \not\Rightarrow$ regolare
- $T1 \not\Rightarrow T2$. Sia X uno spazio infinito con la topologia cofinita.
  X è $T1$ per l'osservazione 1, osserviamo che in X non esistono aperti disgiunti.
  Siano U, V aperti disgiunti allora $U \subseteq X \backslash V$ dunque U è finito essendo $X \backslash V$ finito.
  $X \backslash U$ è un chiuso (complementare di un aperto) ma è infinito, ciò è assurdo.
  Nella topologia cofinita i chiusi sono finiti