Lezione del 19 + parte del 23 marzo

Corollario 0.1. *Sia $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa con $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(i) f *è costante in* U

(ii) f' *è identicamente nullo*

(iii) $Re(f)$ *è costante in* U

(iv) $Im(f)$ *è costante in* U

Dimostrazione.

- $(i) \Rightarrow (iii)$ e $(i) \Rightarrow (iv)$ sono ovvie
- $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Una funzione è costante se e solo se ha Jacobiano nullo.
  Ora essendo f olomorfa il suo Jacobiano è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ con $f'(z_0) = \alpha + i\beta$.
  Ora il jacobiano è identicamente nullo se e solo se $\alpha = \beta = 0$ da cui se e solo se $f'(z) = 0$
- $(iii) \Rightarrow (i)$ Scriviamo nella base $\{1, i\}$ di $\mathbb{C}$

  $$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

  $Re(f)$ costante è equivalente a u costante equivalentemente $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}$
  Per Cauchy-Riemann si ha $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ dunque la tesi
- $(iv) \Rightarrow (i)$ in modo analogo al punto precedente

$\square$

1 Serie di potenze

Definizione 1.1 (Assoluta convergente).
Sia $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi.
Diciamo che $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n$ è assolutamente convergente se la serie $\sum |c_n|$ è convergente

Esercizio 1.1. *La serie* $\sum \frac{i}{n!}$ *è assolutamente convergente?*

Proposizione 1.2. *Siano* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie assolutamente convergenti*

- $\sum(a_n+b_n)$ *è assolutamente convergente e la somma di questa serie è ottenuta sommando la somma delle serie dati*
- *se* $c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$ *la serie* $\sum c_n$ *è assolutamente convergente e la sua somma è uguale al prodotto della somma delle 2 serie date*

Definizione 1.2 (Raggio di convergenza).
Sia $\sum a_n z^n$ una serie di potenza chiamiamo raggio di convergenza la quantità

$$\rho = \sup\{r \in \mathbb{R}\, r > 0 \,|\, \sum |a_n| r^n \text{ è convergente } \}$$

Osservazione 1. ρ può essere finito e in questo caso, $\rho \geq 0$ oppure ρ è infinito

Definizione 1.3. Chiamiamo disco di convergenza l'insieme $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < \rho\}$

Osservazione 2. Il disco di convergenza è aperto.
Se $\rho = 0$ allora il disco è vuoto

Proposizione 1.3. *Data una serie di potenza* $\sum a_n z^n$ *esiste* $0 \leq \rho \leq \infty$ *tale che*

- $\rho = 0$ *la serie converge per* $z = 0$
- $\rho = \infty$ *la serie converge assolutamente per ogni* z
- $0 < \rho < \infty$ *allora se* $|z| > \rho$ *la serie converge assolutamente, per* $|z| > \rho$ *la serie non converge*

Inoltre si ha la formula di Hadamard

$$\frac{1}{\rho} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

con la convenzione

$$\rho = 0 \text{ se il limite superiore è } \infty$$

$$\rho = \infty \text{ se il limite superiore è } 0$$

Esercizio 1.4. *Calcolare il raggio di convergenza delle seguenti serie*

- $\sum n! z^n$
- $\sum \frac{1}{n!} z^n$
- $\sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
- $\sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Fatto 1.5. *Siano* $\sum a_n z^n$ *e* $\sum b_n z^n$ *serie di potenze con raggio di convergenza* $> R$ *per un certo* R *allora*

$$S(z) = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n$$

$$P(z) = \left(\sum a_n z^n\right) \left(\sum b_n z^n\right)$$

hanno raggio di convergenza minore di R.
Inoltre $\forall r \in \mathbb{C}$ *con* $|r| < R$ *si ha*

$$S(r) = \sum a_n r^n + \sum b_n r^n$$

$$P(r) = \left(\sum a_n r^n\right) \left(\sum b_n r^n\right)$$

Fatto 1.6. *Sia* $f(z) = \sum a_n z^n$ *chiamiamo serie derivata la serie di potenze* $\sum n a_n z^{n-1}$ *e la denotiamo con* $f'(z)$.
f *e* f' *hanno lo stesso raggio di convergenze*

2 Esponenziale e logaritmo complesso

Definizione 2.1. Fissato $z \in \mathbb{C}$ chiamiamo esponenziale del numero complesso z la quantità

$$e^z = \sum \frac{1}{n!} z^n$$

Definizione 2.2. Fissato $z \in \mathbb{C}$ chiamiamo coseno del numero complesso z la quantità

$$\cos z = \sum (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Definizione 2.3. Fissato $z \in \mathbb{C}$ chiamiamo seno del numero complesso z la quantità

$$\sin z = \sum (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Osservazione 3. Le definizioni sono ben poste, avendo le serie raggio di convergenza ∞

Esercizio 2.1. *Provare che le definizioni date oggi e nella lezione precedente coincidono*

Esempio 2.2. *Dati $z, z' \in \mathbb{C}$, proviamo che $e^{z+z'} = e^z + e^{z'}$*

Dimostrazione. Siano $a_n = \frac{1}{n} z^n$ e $b_n = \frac{1}{n}(z')^n$ allora

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{z^p}{p!}\right)\left(\frac{(z')^{n-p}}{(n-p)!}\right) = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} z^p (z')^{n-p} = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p (z')^{n-p}$$

dunque $c_n = \frac{1}{n!}(z+z')^n$.
Per quanto abbiamo visto sulle serie di potenze $\sum c_n$ converge assolutamente con

$$e^{z+z'} = \sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right) = e^z \cdot e^{z'}$$

$\square$

Osservazione 4. Siano $z, z' \in \mathbb{C}$ allora $e^z = e^{z'} \quad \Leftrightarrow \quad z' = z + i2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$
infatti dall'esercizio precedente $e^{z'} \cdot e^{-z} = e^{z'-z}$.
Ora $e^z = e^{Re(z)}(\cos Im(z) + i \sin Im(z)$ dunque se $w = z' - z$ otteniamo

$$e^z = e^{z'} \quad \Leftrightarrow \quad e^w = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{Re(w)} = 1 \\ cos(Im(w)) + i\sin(Im(w)) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Re(w) = 0 \\ Im(w) = 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Definizione 2.4. Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ allora definiamo il logaritmo del numero complesso z come

$$\log(z) = \log(|z|) + iarg(z)$$

Osservazione 5. Nella definizione c'è un'ambiguità derivante dal fatto che $arg(z) \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$

Vediamo come sia possibile definire una funzione $z \to \log(z)$

Definizione 2.5 (branca)**.**
Sia D un insieme aperto e connesso di $\mathbb{C}$ con $0 \notin D$.
Diciamo che $f : D \to \mathbb{C}$ continua è una branca di $\log(z)$ se $e^{f(z)} = z$
($f(z)$ è uno dei possibili valori di $\log(z)$)

Sia D come sopra e $g : D \to \mathbb{C}$ continua è una branca di $arg(z)$ se $z = |z|\, e^{ig(z)}$
($g(z)$ è uno dei possibili valori di $arg(z)$)

Osservazione 6. Se g è una branca di $arg(z)$ allora $f(x) = \log(|z|) + ig(x)$ è una branca di $\log z$

Proposizione 2.3. *Assumiamo che esista una branca di* $\log(z)$ *in* D*, allora tutte le altre di* $\log z$ *in* D *sono della forma* $f(z) + k(2\pi i)$ *per qualche* $z \in \mathbb{Z}$*.*
Inoltre $f(z) + k(2\pi i)$ *è una branca di* $\log(z)$ *in* D *per ogni* z *intero*

Dimostrazione. Siano $f(z)$ e $g(z)$ due branche di $log(z)$ in D consideriamo la funzione

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}(g(z) - h(z)) : D \to \mathbb{C}$$

Osserviamo che h è continua e ha immagine contenuta in $\mathbb{Z}$ (essendo $f(z)$ e $g(z)$ due branche di $\log(z)$ allora $e^{f(z)} = z = e^{g(z)}$ due per quanto abbiamo osservato sull'esponenziale $f(z)$ e $g(z)$ differiscono per $k(2\pi i)$)
Poichè D è connesso allora h è costante dunque $h(t) = k \ \forall t \in D$ dunque

$$\frac{1}{2\pi i}(g(t) - f(t)) = k \quad \Rightarrow \quad g(t) = f(t) + 2k\pi i \ \forall t \in D$$

Osservazione 7. Per ogni $z \in D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Re(z) > 0\}$ esiste unico $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $z = |z|\, e^{i\phi}$.
Definiamo la funzione $Arg : D \to \mathbb{C}$ con $Arg(z) = \phi$.
Se mostriamo che tale funzione è continua, abbiamo costruito una branca dell'argomento

Proposizione 2.4. $Arg : D \to \mathbb{C}$ *è continua*

Dimostrazione. Sia $U = \{z \in D \,|\, abs(z) = 1\}$ sia $f : D \to U$ con $f(z) = \frac{z}{|(|z)}$, chiaramente f è continua
Osserviamo che per ogni $z \in D$ $arg(z) = arg\,(f(z))$ dunque abbiamo il seguente diagramma cui abbiamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "Arg"'] & & U \arrow[dl, "Arg"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

Essendo f continua basta provare che $Arg : U \to \mathbb{C}$ è continua.
Per costruzione tale mappa è l'inversa della mappa $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to U$ dove $g(y) = e^{iy}$.
Estendiamo tale mappa a

$$\widetilde{g} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \{u \in \mathbb{C} \,|\, |u| = 1 \text{ e } Re(u) \geq 0\}$$

$\widetilde{g}$ è continua e bigettiva da un compatto ad uno spazio di Hausdorff dunque è un omeomorfismo, in particolare la sua inversa è continua, da cui anche l'inversa di g (f) è continua

Definizione 2.6. Chiamiamo branca principale di $\log z$ la funzione continua

$$\log(|z|) + iArg(z) \text{ per } z \in D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Re(z) > 0\}$$

Proposizione 2.5. *La serie di potenze* $\sum(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$ *converge per* $|z| < 1$ *ed è uguale alla branca principale di* $\log(z+1)$

Proposizione 2.6. *Se* $f(z)$ *è una branca di* $\log z$ *in un insieme aperto e connesso la funzione ammette derivata* $\frac{1}{z}$

Definizione 2.7. $\forall z, \alpha \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ poniamo

$$z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$$