Seconda parte della lezione del 12 Marzo

1 Morfismi di rivestimento

Definizione 1.1. Dati $p_1 : E_1 \to X$ e $p_2 : E_2 \to X$ rivestimenti.
Un morfismo tra p_1 e p_2 è una mappa $\varphi : E_1 \to E_2$ tale che $p_2 \circ \varphi = p_1$ cioè questo diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Definizione 1.2. Un morfismo φ come sopra è un isomorfismo se $\exists \psi : E_2 \to E_1$ con ψ inversa di φ

Osservazione 1. Composizione di morfismi è un morfismo. Id_E è un morfismo di $p : E \to X$. Dunque

$$Aut(E) = Aut(E, p) = \{\varphi : E \to E \mid \text{ isomorfismo}\}$$

tale insieme dotato delle composizione è un gruppo

Fissato un rivestimento connesso $p : E \to X$

Teorema 1.1. *Valgono i seguenti fatti*

(i) $Aut(E)$ *agisce su* E *in maniera propriamente discontinua*

(ii) $Aut(E)$ *agisce sulle fibre di* E

(iii) Se F *è una fibra di* E*,* $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F$ *allora*

$$\exists \varphi \in Aut(E) \text{ con } \varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1 \quad \Leftrightarrow \quad p_\star(\pi_1(E, \tilde{x}_0) = p_\star(\pi_1(E, \tilde{x}_1)$$

Dimostrazione.

(i) Dato $\tilde{x} \in E$, sia U un intorno ben rivestito e connesso per archi di $p(\tilde{x}) \in X$, si ha dunque che $p^{-1} = \coprod V_i$ e sia i_0 tale che $\tilde{x} \in V_{i_0}$.
Basta vedere che se $\varphi \in Aut(E)$ e $\varphi(V_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$ allora $\varphi = Id$.
Se $\varphi(V_{i_0}) \cap V_{i_0} \neq \emptyset$ allora sia $z \in V_{i_0}$ tale che $\varphi(z) \in V_{i_0}$.
Poichè $p \circ \varphi = p$ allora $p(\varphi(z)) = p(z)$ ma per definizione di intorno ben rivestito $p_{|V_{i_0}}$ è un omeomorfismo, dunque iniettiva da cui $\varphi(z) = z$.
Ora sia φ sia Id sono sollevamenti di p (a partire da E) che coincidono in un punto, segue per unicità del sollevamento $\varphi = Id$

(ii) Se $F = p^{-1}(x_0)$ e $\tilde{x} \in F$ allora poichè $p \circ \varphi = p$ allora $p(\varphi(\tilde{x})) = p(\tilde{x})$ dunque $f(\tilde{x}) \in F$

(iii) $\Rightarrow$ Se $\varphi \in Aut(E)$ con $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ poichè $p \circ \varphi = p$ allora $p_\star \circ \varphi_\star = p_\star$ come mappe $\pi_1(E, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$.
In particolare $p_\star(\varphi_\star(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = p_\star(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$.
Ora $\varphi_\star(\pi_1(E, \tilde{x}_0) = \pi_1(E, \tilde{x}_1)$ in quanto essendo φ omeomorfismo $\varphi_\star$ è isomorfismo.
$\Leftarrow$ Se $p_\star(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = p_\star(\pi_1(E, \tilde{x}_1))$ applicando il teorema dell'esistenza di sollevamenti a

$$\begin{tikzcd} & (E, \tilde{x}_1) \arrow[d, "p"] \\ (E, \tilde{x}_0) \arrow[r, "p"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

otteniamo $\varphi: E \to E$ con $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ e tale che $p \circ vp = p$.
Analogamente si ottiene $\psi: E \to E$ con $\psi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_0$
Ora $\varphi \circ \psi$ e $\psi \circ \varphi$ sono sollevamenti dell'identità che coincidono in un punto in quanto si ha $\varphi(\psi(\tilde{x}_1)) = \tilde{x}_1$ e $\psi(\varphi(\tilde{x}_0)) = \tilde{x}_0$.
Per unicitdel sollevamento si ha $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = Id_E$

$\square$

Teorema 1.2 (Le azioni di monodromia e di $Aut(E)$ commutano)**.**
Sia $F = p^{-1}(x_0)$*, sia* $\forall \varphi \in Aut(E),\ \alpha \in \pi_1(X, x_0),\ \tilde{x} \in F$ *si ha*

$$\varphi(\tilde{x} \centerdot \alpha) = \varphi(\tilde{x}) \centerdot \alpha$$

Dimostrazione. Sia $\alpha = [\gamma]$.
$\varphi \circ \widetilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ è un sollevamento di γ (in quanto $p \circ \varphi \circ \widetilde{\gamma}_{\tilde{x}} = p\widetilde{\gamma}_{\tilde{x}} = \gamma$) e ha come punto iniziale $\varphi\left(\widetilde{\gamma}_{\tilde{x}}(0)\right) = \varphi(\tilde{x})$, dunque per unicità del sollevamento si ha $\varphi \circ \widetilde{\gamma}_{\tilde{x}} = \widetilde{\gamma}_{\varphi(\tilde{x})}$ da cui

$$\varphi(\tilde{x} \centerdot \alpha) = \widetilde{\gamma}_{f(\tilde{x})}(1) = \varphi\widetilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1) = \varphi\left(\widetilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)\right) = \varphi(\tilde{x} \centerdot \alpha)$$

$\square$

Definizione 1.3. $p: E \to X$ rivestimento connesso si dice **regolare** se $\forall F$ fibra di E, l'azione di $Aut(E)$ su F è transitiva

Teorema 1.3. *I seguenti fatti sono equivalenti*

(i) p *è rivestimento regolare*

(ii) $\exists F$ *fibra di* E *tale che l'azione di* $Aut(E)$ *su* F *sia transitiva*

(iii) $\forall \tilde{x} \in E$ *si ha* $p_\star(\pi_1(E, \tilde{x}) \lhd \pi_1(X, p(\tilde{x}))$

(iv) $\exists \tilde{x} \in E$ *si ha* $p_\star(\pi_1(E, \tilde{x}) \lhd \pi_1(X, p(\tilde{x}))$

Dimostrazione.
- $(iii) \Rightarrow (iv)$ e $(i) \Rightarrow (ii)$ in modo ovvio
- Mostriamo che $(iv) \Rightarrow (iii)$.
  Supponiamo che la condizione valga per un fissato $\tilde{x}$ e sia $\tilde{y} \in E$ generico.
  Sia $\tilde{\gamma} \in \Omega(\tilde{x}, \tilde{y})$ e poniamo $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$.
  Se $x = p(\tilde{x})$ e $y = p(\tilde{y})$ allora $\gamma \in \Omega(x, y)$.
  Si vede facilmente che il seguente diagramma commuta ($\tilde{\gamma}_\sharp$ e $\gamma_\sharp$ sono isomorfismi)

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E, \tilde{x}) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_\sharp} & \pi_1(E, \tilde{y}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p_\star} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_\star} \\ \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\gamma_\sharp} & \pi_1(X, y) \end{array}$$

  Dunque

$$p_\star(\pi_1(E, \tilde{x})) \lhd \pi_1(X, x) \quad \Leftrightarrow \quad p_\star(\pi_1(E, \tilde{y})) \lhd \pi_1(X, y)$$

- $(ii) \Leftrightarrow (iv)$
  Sia $F = p^{-1}(x)$, dati $\tilde{x}, \tilde{y} \in F$ abbiamo visto che $\exists \varphi \in Aut(E)$ con $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}$ se e solo se $p_\star(\pi_1(E, \tilde{x})) = p_\star(\pi_1(E, \tilde{y}))$.
  Inoltre, abbiamo visto, al variare di $\tilde{y} \in F$ i gruppi $p_\star(\pi_1(E, \tilde{y}))$ sono tutti e soli i coniugati di $p_\star(\pi_1(E, \tilde{x}))$.
  Dunque l'azione su F è transitiva se e solo se $p_\star(\pi_1(E, \tilde{x}))$ coincide con tutti i suoi coniugati (è dunque normale)

$\square$