Lezione del 6 Novembre di Gandini

Teorema 0.1 (di Weistrass).
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ *continua con* X *spazio compatto. AllorA* f *ammette massimo e minimo in* X

Dimostrazione. Poichè $f(X)$ è un compatto di $\mathbb{R}$ è chiuso e limitato dunque ammette massimo e minimo

1 Norme

Definizione 1.1. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, una norma su V è una funzione

$$|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$$

con le seguenti propietà

(i) $||v|| \geq 0 \ \forall v \in V$ inoltre $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v|| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in V$

(iii) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w|| \ \forall v, w \in V$

Definizione 1.2. Sia $(V, || \cdot ||)$ uno spazio normato, allora definiamo la distanza associata alla norma come

$$d(v, w) = ||v - w||$$

Osservazione 1. Non tutte le distanze sono indotte da una norma, prendiamo ad esempio la distanza discreta su $\mathbb{R}^n$ infatti non è omogenea

Definizione 1.3. Due norme si dicono topologicamente equivalenti se lo sono le distanze associate

Lemma 1.1. *Sia $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una norma, allora tale funzione è continua nella topologia euclidea*

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e sia $M = \max_{i=1,\ldots,n} ||e_1||$ allora

$$\left|\left| \sum_{i=1}^{n} x_i e_1 \right|\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_1| \cdot ||e_1|| \leq M \sum_{i=1}^{n} |x_1|$$

Ora essendo d_1 e d_2 topologicamente equivalenti basta dimostrare che $|| \cdot ||$ è continua nella topologia indotta da d_1.
Sia d la distanza indotta da $|| \cdot ||$ e siano $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ allora

$$d(x - y) \leq ||x - y|| \leq \left|\left| \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_1) e_1 \right|\right| \leq M \sum_{i=1}^{n} |x_1 - y_1| = M d_1(x, y)$$

Dunque $|| \cdot ||$ è continua rispetto alla distanza d_1 dunque rispetto a d_2

□

Teorema 1.2. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita, allora tutte le norme su V sono topologicamente equivalenti.*

Dimostrazione. Fissando un qualunque isomorfismo lineare $\phi : \mathbb{R}^n \to V$ posso ricondurmi al caso $V = \mathbb{R}^n$.
Sia $|| \cdot ||$ una norma su $\mathbb{R}^n$, vediamo che tale norma è equivalente a $|| \cdot ||_2$.
Per il lemma precedente $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è continua rispetto a d_2.
Sia $S^n \subseteq \mathbb{R}^n$ allora essendo chiuso e limitato è compatto da cui per il Teorema di Weistrass: $|| \cdot ||$ ammette massimo M e minimo m su S^n.
Sia $v \in \mathbb{R}^n$ allora

$$||v|| = \left|\left| ||v||_2 \cdot \frac{v}{||v||_2} \right|\right| = ||v||_2 \cdot \left|\left| \frac{v}{||v||_2} \right|\right| \quad \Rightarrow \quad m||v||_2 \leq ||v|| \leq M||v||_2$$

dove l'implicazione deriva dal fatto che $\frac{||v||}{||v||2} = 1$.
Posto $k = \max\left(M, \frac{1}{m}\right) \geq 1$ si ha

$$\frac{1}{k}||v||_2 \leq ||v|| \leq k||v||_2$$

Sia d la distanza indotta da $||\cdot||$ allora

$$\forall v, w \quad \frac{1}{k}d_2(v,w) \leq d(v,w) \leq kd_2(v,w)$$

Dunque le distanze indotte sono topologicamente equivalenti □

Osservazione 2. Se la dimensione di V è infinita il teorema non vale.
Si pensi ad esempio $V = C^0([a,b])$ allora le distanze d_1 e d_∞ non sono topologicamente equivalenti, tale distanze sono indotte da $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_\infty$

2 Proiezione stereografica

Il 18 ottobre abbiamo dimostrato il seguente teorema

Teorema 2.1.

$$\frac{D^n}{S^{n-1}} \cong S^n$$

Corollario 2.2.

$$S^n - \{pt\} \cong \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione. Dalla definizione di collassamento di un insieme ad un punto, $\frac{D^n}{S^{n-1}}$ contiene un aperto omeomorfo a $D^n \backslash S^{n-1}$ tale aperto è l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, ||x|| < 1\}$$

Se consideriamo la seguente funzione

$$B\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^n \qquad v \to \tan(||v)v$$

tale funzione è un omeomorfismo da cui $D^n \backslash S^{n-1} \cong \mathbb{R}^n$.
Ora dalla definizione di collassamento $D^n \backslash S^{n-1}$ è omeomorfo a $\frac{D^n}{S^{n-1}}$ privato del punto ottenuto dal collasso di S^{n-1} dunque abbiamo l'omeomorfismo cercato. □

Mostriamo un omeomorfismo esplicito $S^n - \{pt\} \to \mathbb{R}^n$.
Fissiamo il punto $A = (1, 0, \ldots, 0)$ e identifichiamo $\mathbb{R}^n$ con $\{(x_0, \ldots, x_n) \,|\, x_0 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$$f : S^n \backslash (1, 0, \ldots, 0) \to \mathbb{R}^n$$

Sia $B = (x_0, \ldots, x_n) \in S^n$ con $B \neq A$ allora definiamo $f(B)$ come il punto di intersezione tra lo spazio $\{x_0 = 0\}$ e la retta passante per A e B.
Esplicitiamo tale funzione.
La retta passante per A e B è

$$t(x_0 - 1, x_1, \ldots, x_n) + (1, 0, \ldots, 0)$$

dunque

$$f((x_0, \ldots, x_n)) = \left(0, \frac{x_1}{1 - x_0}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_0}\right)$$

Mostriamo che f è omeomorfismo.
Poniamo $y_i = \frac{x_i}{1 - x_0}$ dunque $f((x_0, \ldots, x_n)) = (0, y_1, \ldots, y_n)$.
Vediamo come possiamo ricavare x_0 da $y_1, \ldots, y_n$

$$\sum_{i=1}^{n} y_1^2 + 1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{(1 - x_0)^2} + 1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 1 + x_0^2 + 2x_0}{(1 - x_0)^n}$$

Ma $(x_0, \ldots, x_n) \in S^n$ dunque $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1$ da cui

$$\sum_{i=1}^{n} y_1^2 + 1 = \frac{2(1 - x_0)}{(1 - x_0)^2} = \frac{2}{1 - x_0}$$

dunque dagli y_i ricavo x_0

$$x_0 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i^2) - 1}{(\sum_{i=1}^{n} y_i) + 1}$$

Definiamo $g : \mathbb{R}^n \to S^n \backslash (1, 0, \ldots 0)$ come

$$g((y_1, \ldots, y_n)) = \left(x_0 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i^2) - 1}{(\sum_{i=1}^{n} y_i) + 1}, y_1(1 - x_0), \ldots, y_n(1 - x_0) \right)$$

Ora f e g sono continue ed inverse l'una dell'altra dunque f è un omeomorfismo

3 Compattificazione di Alexandross

Sia X uno spazio topologico definiamo

$$\hat{X} = X \cup \{\infty\}$$

dove $\infty \notin X$.
Definiamo su $\hat{X}$ una topologia τ

$$\tau = \{A \,|\, A \subseteq X \text{ aperto }\} \cup \{\hat{X}\backslash K \,|\, K \subseteq X \text{ chiuso e compatto}\}$$

Proposizione 3.1. *La famiglia appena descritta è una topologia*

Dimostrazione.

1. $\emptyset$ è un aperto di X.
   $\emptyset$ è chiuso e compatto in X dunque $\hat{X} \in \tau$

2. L'intersezione di 2 aperti di X è un aperto di X.
   $(\hat{X}\backslash K_1) \cap (\hat{X}\backslash K_2) = \hat{X}\backslash(K_1 \cup K_2)$ ora $K_1 \cup K_2$ è un chiuso e compatto di X
   $A \cap (\hat{X}\backslash K) = A\backslash K$ è un aperto in X essendo A aperto e K chiuso

3. L'unione di aperti di X è un aperto di X.
   $\bigcup_{i\in I} \hat{X}\backslash K_i = \hat{X}\backslash \left(\bigcap_{i\in I} K_i \right)$ ora $\bigcap_{i\in I} K_i$ è un chiuso e compatto di X
   $A \cup (\tilde{X}\backslash K) = \hat{X}\backslash(K\backslash A)$ ora chiuso in un compatto è compatto ed è chiuso

□

Proposizione 3.2 (Propietà)**.**

1. *$i : X \hookrightarrow \hat{X}$ è un immersione aperta*
2. *$\hat{X}$ è compatto*

Dimostrazione.

1. Da come abbiamo definito la topologia su $\hat{X}$

   $$A \subseteq X \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad i(A) \subseteq \hat{X} \text{ aperto}$$

   dunque l'immersione è aperta

2. Sia $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $\hat{X}$.
   Essendo un ricoprimento $\exists i_0 \in I$ tale che $\infty \in U_{i_0}$ da cui $\exists K \subseteq X$ chiuso e compatto con $U_{i_0} = \hat{X}\backslash K$ Ora essendo K compatto

   $$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \quad \Rightarrow \quad \exists i_1, \ldots, i_n \in I \text{ con } K \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

   da cui

   $$\hat{X} = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

□

Definizione 3.1. $\hat{X}$ è detta compattificazione di Alexandross di X