Lezione del 22 Novembre del Prof. Frigerio

Definizione 0.1 (Spazio proiettivo)**.**
Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
Definiamo su V la seguente relazione di equivalenza

$$v \sim w \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}^\star \quad v - \lambda w$$

Lo spazio proiettivo associato a V è

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V \backslash \{0\}}{\sim} = \frac{V \backslash \{0\}}{G} \quad G = \{\lambda Id \, \lambda \neq 0\}$$

$\mathbb{P}(V)$ è detto lo spazio delle rette di V

Definizione 0.2.
$W \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio do dimensione k se

$$W = \pi(H \backslash \{0\})$$

dove $H \subseteq V$ è uno spazio vettoriale di dimensione $k+1$ e $\pi : V \backslash \{0\} \to \mathbb{P}(V)$

Osservazione 1. Lo spazio proiettivo $p(V)$ ha dimensione $\dim V + 1$

Osservazione 2. Se $V = \mathbb{K}^n$ si pone $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.
Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ assumiamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dotato della topologia quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ e $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \cong \mathbb{R}^{2n+2} \backslash \{0\}$

Osservazione 3. Se $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la sfera unitaria S^n interseca ogni retta in 2 punti della forma $\pm v$ per cui COME INSIEME

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{S^n}{pmId}$$

Proposizione 0.1. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong \frac{S^n}{\pm Id}$

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\
\frac{S^n}{\pm Id} \arrow[r, "\bar{i}"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

esso è commutativo inoltre dalla propietà universale della topologia quoziente $\bar{i}$ è continua.
Consideriamo adesso il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
R^{n+1} \backslash \{0\} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"] & \S^n \arrow[d] \\
\frac{S^n}{\pm Id} \arrow[r, "\bar{i}"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

dove $r(x) = \frac{x}{||x||}$.
Analogamente $\bar{r}$ è continua.
Inoltre $\bar{r}$ e $\bar{i}$ sono una l'inversa dell'altra duneq omeomorfismi $\square$

Corollario 0.2. *$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto e di Hausdorff*

Dimostrazione. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è quoziente di S^n che è compatto dunque anche $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ lo è.
$P^n(\mathbb{R})$ è di Hausdorff per l'azione di un gruppo finito (dunque l'azione è propria) □

Proposizione 0.3. *Sia*

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \, , \, ||x|| \leq 1\}$$

e definiamo $\sim_D$ la relazione di equivalenza

$$x \sim_D y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \ o \ (||x|| = ||y\lhd = 1 \ e \ x = -y)$$

Allora $P^n(\mathbb{R}) \cong \frac{D^n}{\sim_D}$

Dimostrazione. Sia $H = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \,|\, x_0 \geq 0\}$ ovvero H è "l'emisfero nord"
Definiamo inoltre la relazione di equivalenza

$$v \sim_H w \quad \Leftrightarrow \quad v = w \text{ o } (v = -w \text{ e } x_0(v) = x_0(w) = 0$$

ovvero i punti sull'equatore stanno in una stessa classe di equivalenza.
La composizione $H \hookrightarrow S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ induce una bigezione continua.
La continuità deriva dalla propietà universale della topologia quoziente, inoltre ogni punto del proiettivo ha un rappresentante nell'emisfero nord (surgettiva), l'iniettività deriva dal fatto che $\sim_H$ identifica tutti i punti che vanno nella stessa classe del proiettivo.
Ora H compatto dunque $\frac{H}{\sim H}$ compatto ed essendo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ T2 si conclude che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong \frac{H}{\sim_H}$.
Infine l'omomorfismo

$$H \to D^n \quad (x_0, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_n)$$

ha come inversa $(x_1, \ldots, x_n) \to (\sqrt{1 - x_1^n - \cdots - x_n^2}, x_1, \ldots, x_n)$, dunque $\frac{H}{\sim_H} \cong \frac{D}{\sim_D}$ □

Osservazione 4. $\mathbb{P}(\mathbb{R}) \cong S^1$ in quanto

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \frac{D^1}{\sim} = \frac{[-1, 1]}{\{-1, 1\}} = S^1$$

Osservazione 5. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si ottiene attaccando un disco ad un nastro di Möbius lungo il suo bordo (per entrambi è S^1).
In generale l'inclusione $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ induce un inclusione $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \backslash \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \cong D^n$

Definizione 0.3 (Coordinate omogenee)**.**
Un punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è descritto da una $(n+1)$-upla a meno di multipli.
La classe di $(x_0, \ldots, x_n)$ si denota con $[x_0 : \cdots : x_n]$.

Osservazione 6. $[2 : 0 : 1] = [4 : 0 : 2]$ ed inoltre $[0 : 0 : 0]$ non esiste

Fatti 0.4.

- *Se $p \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$è un polinomio non ha senso calcolare il polinomio sulle coordinate omogenee ovvero chiedersi quanto vale $p([x_0 : \cdots : x_n])$.*

- *Se p è omogeneo di grado $\forall \lambda \in \mathbb{K}^\star$*

  $$p(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d p(x_0, \ldots, x_n)$$

  è ben definito il fatto che p si annulli in $[x_0 : \cdots : x_n]$, cosa che avviene per definizione se $p(x_0, \ldots, x_n) = 0$ per un rappresentante di $[x_0 : \cdots : x_n]$
  In particolare è ben definito $U_i = \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

- *Se* $p, q \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ *sono omogenei e dello stesso grado è ben definita la funzione*

$$\frac{p}{q} : V \to \mathbb{K} \text{ dove } V = \{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid q(x) \neq 0\}$$