

Lezione del 29 aprile

Esempio 0.1. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$$

Scegliamo come regione

$$D_R = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \text{ e } 0 < \arg(z) < \frac{2\pi}{n} \right\}$$

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{n}}$ è l'unico polo di $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ in D_R .

Osserviamo che

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{nz_0^{n-1}} = \frac{z_0}{nz_0^n} = -\frac{z_0}{n} = \frac{1}{n} \left(-\cos \frac{\pi}{n} - i \sin \frac{\pi}{n} \right)$$

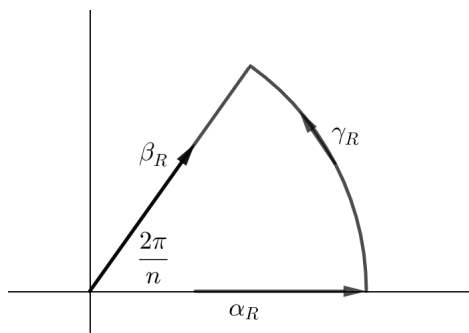
Consideriamo le seguenti parametrizzazioni

$$\alpha_R(t) = t \text{ per } t \in [0, R]$$

$$\beta_R(t) = Re^{it} \text{ per } t \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]$$

$$\gamma_R(t) = te^{\frac{2\pi}{n}t} \text{ per } t \in [0, R]$$

Allora per il teorema dei residui si ha



$$\int_{\alpha_R} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz - \int_{\beta_R} f(z) dz = \frac{2\pi i}{n} \left(-\cos \frac{\pi}{n} - i \sin \frac{\pi}{n} \right) = \frac{2\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} - i \cos \frac{\pi}{n} \right)$$

Osserviamo che $\int_{\alpha_R} f(z) dz$ è quello che vogliamo effettivamente calcolare.

Andiamo a vedere cosa succede lungo γ_R

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{2\pi}{n}} f(\gamma_R(t)) \gamma_R'(t) dt \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \left| \frac{1}{1 + (Re^{it})^n} iRe^{it} \right| dt \leq \\ &\leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R}{R^n - 1} dt = \frac{2\pi R}{n(R^n - 1)} \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1)$$

Resta da osservare cosa succede lungo β_R

$$\int_{\beta_R} f(z) dz = \int_0^R f(\beta_R(t)) \beta_R'(t) dt = \int_0^R \frac{1}{(1 + Re^{\frac{2\pi}{n}i})^n} e^{\frac{2\pi}{n}i} dt = \int_0^R \frac{1}{1 + t^n} e^{\frac{2\pi}{n}i} dt =$$

$$= e^{\frac{2\pi}{n}i} \int_0^R \frac{dt}{1+t^2} = e^{\frac{2\pi}{n}i} \int_{\alpha_R} f(z) dz$$

dunque passando al limite per $R \rightarrow \infty$ e ponendo $I = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^n} dt$ da

$$\int_{\alpha_R} f(z) dz + \int_{\beta_R} f(z) dz - \int_{\gamma_R} f(z) dz = \frac{2\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} - i \cos \frac{\pi}{n} \right)$$

otteniamo

$$I + 0 + e^{\frac{2\pi}{n}i} I = \frac{2\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} - i \cos \frac{\pi}{n} \right)$$

Poichè $I \in \mathbb{R}$ otteniamo, uguagliando la parte immaginaria

$$I \sin \frac{\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad I 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = 2 \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}$$

dunque

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}}$$

Osservazione 1. Possiamo generalizzare quanto visto in 1 come segue:

Se $\lim_{R \rightarrow +\infty} RM(R) = 0$ allora

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

dove γ_R parametrizza una porzione di circonferenza di raggio R , centrata nell'origine e con parte immaginaria non negativa

Prima del prossimo esempio occorrono 2 lemmi

Lemma 0.2. Sia f meromorfa con polo semplice in 0 e sia

$$\gamma_\varepsilon : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it} \text{ per } \varepsilon > 0$$

Allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = \pi i \text{Res}(f, 0)$$

Dimostrazione. Si ha $f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + g(z)$ dove g è olomorfa in un intorno di 0 con primitiva G

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{z} dz + \int_{\gamma_\varepsilon} g(z) dz = \pi i a_{-1} + G(\delta_\varepsilon(\pi)) - G(\delta_\varepsilon(0))$$

dunque per $\varepsilon \rightarrow 0$ otteniamo la tesi

Per le stime sulle semicirconferenze “grandi” usiamo

Lemma 0.3. f meromorfa su \mathbb{C} tale che $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$ allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz = 0$$

Dimostrazione. Se $z = \gamma_R(t) = R \cos t + iR \sin t$ allora

$$e^{iz} = e^{iR \cos t} e^{-R \sin t} \Rightarrow |e^{iz}| = e^{-R \sin t}$$

dunque

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz \right| \leq \int_0^\pi |f(\gamma_R(t))| e^{i\gamma_R(t)} \gamma_R'(t) dt = \int_0^\pi |f(\gamma_R(t))| \cdot |e^{i\gamma_R(t)}| \cdot |R i e^{it}| dt \leq \int_0^\pi M(r) e^{-R \sin t} R dt$$

$$M(R) \int_0^\pi e^{-R \sin t} R dt$$

Mostriamo che l'ultimo integrale è limitato indipendentemente da R .

Ora su $[0, \frac{\pi}{2}]$ la funzione $\frac{\sin t}{t}$ è limitato dal basso da una costante k (in tale intervallo è una funzione continua strettamente positiva su un compatto)

Allora

$$\int_0^\pi R e^{-R \sin t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R e^{-R \sin t} dt = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{R \frac{\sin t}{t} t} dt \leq 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rkt} dt = 2R \left[\frac{e^{-Rkt}}{-Rk} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{k} (-e^{Rk \frac{\pi}{2}} + 1) \leq \frac{2}{k}$$

Osservazione 2. Se non ci fosse il termine e^{iz} la condizione che serviva era $\lim_{R \rightarrow +\infty} RM(R) = 0$, il fattore oscillante rende sufficiente una condizione più debole

Esempio 0.4. *Calcoliamo*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$$

dove estendiamo $\frac{\sin x}{x}$ in 0 ponendolo uguale ad 1.

Il fatto che l'integrale non converga assolutamente, ci induce a pensare che la stima sui termini che dovranno andare a 0 sarà più fida (non basterà più prendere i moduli).

Osserviamo che

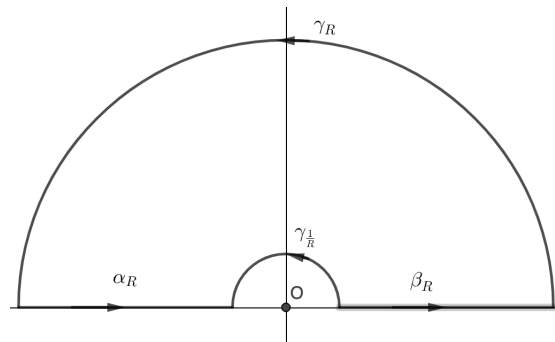
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{R}}^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{\frac{1}{R}} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\frac{1}{R}}^R \frac{\sin x}{x} dx \right)$$

dove abbiamo usato la parità di $\frac{\sin x}{x}$.

Prendiamo come curva

$$\beta = \alpha_R \star \overline{\gamma_{\frac{1}{R}}} \star \beta_R \star \gamma_R$$

come in figura



Ora β parametrizza il bordo di una regione (che è un disco topologico) che non contiene poli di f dunque dal teorema dei residuo

$$\int_{\alpha_R} f(z) dz + \int_{\overline{\gamma_{\frac{1}{R}}}} f(z) dz + \int_{\beta_R} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

Dal primo lemma si ha per $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\overline{\gamma_{\frac{1}{R}}}} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = -\pi i$$

Mentre per il secondo lemma $\int_{\gamma_R} \rightarrow 0$ per $R \rightarrow +\infty$.

Ora passando al limite $R \rightarrow \infty$ e considerando solo le parti immaginarie otteniamo

$$2 \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

1 Derivata logaritmica

Sia f una funzione meromorfa su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e sia z_0 un polo di f per cui $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$.

La derivata logaritmica di f è

$$\frac{f'}{f}$$

tale funzione è olomorfa eccetto al più nei poli o negli zeri di f .

Vediamo come si comporta "vicino" a z_0

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1}g(z) + (z - z_0)^k g'(z)$$

per cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Dunque la derivata logaritmica di f ha un polo semplice in z_0 e il suo residuo in z_0 è k

Osservazione 3. La derivata prende questo nome in quanto $d(\log(f)) = \frac{f'}{f}$.

Inoltre se $k > 0$ si ha z_0 uno zero, altrimenti un polo

Corollario 1.1. *Sia f meromorfa su Ω e sia $R \subseteq \Omega$ una regione compatta con bordo C^1 a tratti.*

Allora R contiene un numero finito di zeri e poli di f (sono discreti in un compatto) e supponiamo che nessuno di essi sia in ∂R .

Allora

$$\int_{\partial R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (Z - P)$$

dove Z indica il numero di zeri di f e P quello di poli (contati con molteplicità)

Dimostrazione. Segue dal teorema dei residui e dal conto fatto precedentemente infatti se k (quello di sopra) è positivo z_0 è uno zero con molteplicità k , se è negativo è un polo di ordine $-k$

Corollario 1.2 (Teorema di Rouché).

Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $R \subseteq \Omega$ una regione compatta con bordo C^1 a tratti.

Sia $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa con $|g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in \partial R$.

Allora f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri (contati con molteplicità) in R

Dimostrazione. Da $|g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in \partial R$ si deduce che f è più in generale $h_t = f + tg$ non si annullano in ∂R per ogni $t \in [0, 1]$.

Inoltre h_t è olomorfa essendo somma di funzioni olomorfe.

Applicando il corollario precedente a h_t otteniamo che se Z_t è il numero di zeri di h_t allora

$$Z_t = \int_{\partial R} \frac{h'_t(z)}{h_t(z)} dz$$

Ora al variare di t il membro di sinistra varia in maniera continua, dunque Z_t è costante (funzione continua a valori interi) concludiamo osservando che $Z_0 = Z_1$ dunque la tesi

Corollario 1.3 (Teorema fondamentale dell'algebra).

Sia $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$, se $M = \max \{|a_i|\}$ allora p ammette n radici (contate con molteplicità) nel disco di raggio $M + 1$ centrato nell'origine.

Dimostrazione. Sia

$$g(z) = p(z) - z^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$$

Allora se $|z| > M + 1$ si ha

$$|g(z)| < \sum_{i=0}^{n-1} |a_i z^i| \leq \sum_{i=0}^{n-1} M |z|^i = M \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \leq |z|^n - 1 \leq |z|^n$$

Per il teorema di Rouchè $f(z) = z^n$ e $p(z) = f(z) + g(z)$ hanno lo stesso numero di zeri in $B(0, R + 1)$. Poichè z^n ha n zeri in tale palla, segue la tesi