Lezione del 24 Febbraio del Prof. Frigerio

Definizione 0.1 (Omeomorfismo locale).
$f : X \to Y$ è un omeomorfismo locale se

$$\forall x \in \quad \exists U \ni p \text{ aperto in } X \text{ e } V \ni f(p) \text{ aperto in } Y$$

tale che

$$f(U) = V \text{ e } f_{|U} : U \to V \text{ omeomorfismo}$$

Fatti 0.1.

1. *Un omeomorfismo locale è una mappa aperta*
   Sia $\Omega \subset X$ aperto, $\forall p \in X$ seleziono un aperto $U_p \ni p$ come nella definizione di sopra

$$f(\Omega) = f\left(\bigcup_{p \in X} (\Omega \cap U_p)\right) = \bigcup_{p \in X} f(\Omega \cap U_p)$$

   Ora poichè U_p è omeomorfo mediante f ad un aperto di Y ne segue che $f(\Omega \cap U_p)$ è un aperto di un aperto di Y dunque aperto.
   Ora la tesi segue in quanto unione di aperti è aperto

2. *f omeomorfismo locale $\Rightarrow f^{-1}(y)$ discreto in Y*
   Dato $x \in f^{-1}(y)$ per definizione di omeomorfismo locale, $\exists U \ni x$ aperto in X e tale che $f_{|U}$ è iniettiva.
   Ora $f^{-1}(x) \cap U = \{x\}$ da cui $\{x\}$ è aperto

Definizione 0.2 (Rivestimento).
Una mappa $p : E \to X$ è un rivestimento se

- X è connesso per archi
- $$\forall x \in X \quad \exists U \ni x \text{ aperto in } X \quad p^{-1}(U) = \amalg_{i \in I} V_i$$

  tali che $I \neq \emptyset$ e

  $$V_i \text{ aperto in } Y \text{ e } p_{|V_i} : V_i \to U \text{ omeomorfismo } \forall i \in I$$

Definizione 0.3. Un intorno come nella definizione si dice ben rivestito

Fatti 0.2.

1. *Un rivestimento è un omeomorfismo locale*
2. *Un rivestimento è surgettivo*

Esempio 0.3. *Sia $p : \mathbb{R} \to S^1$ con $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, p è un rivestimento.*

Dimostrazione. Dato $x_0 \in S^1$, allora $x_0 = p(t_0)$ per qualche t_0.
Scelgo $U = S^1 \backslash \{-x_0\}$, ora

$$p^{-1}(U) = \amalg_{k \in \mathbb{Z}} \left(t_0 - \frac{1}{2} + k, t_0 + \frac{1}{2} + k\right)$$

Ora $\forall k$ la restrizione di p su $\left(t_0 - \frac{1}{2} + k, t_0 + \frac{1}{2} + k\right)$ è un omeomorfismo

Esempio 0.4. *Sia* $p : (-1, 1) \to S^1$ *con* $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.
Tale mappa è un omeomorfismo locale surgettivo, ma non è un rivestimento in quanto $(1, 0) \in S^1$ *non ha un intorno ben rivestito*

Esercizio 0.5 (Retta con 2 origini).
Sia $\sim$ *la relazione su* $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ *dato da*

$$(x, \varepsilon) \sim (y, \varepsilon') \quad \Leftrightarrow \quad (x, \varepsilon) = (y, \varepsilon') \text{ o } (x = y \text{ e } x \neq 0)$$

Allora la mappa $\pi : \frac{\mathbb{R}\times\{-1,1\}}{\sim} \to \mathbb{R}$ *è un omomorfismo locale surgettivo*
($0 \in \mathbb{R}$ *non ha intorni ben rivestiti)*

Esercizio 0.6. $\pi : S^n \to \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ *è un rivestimento*
La dimostrazione verrà fatta avanti con strumenti diversi e non a mano.

Proposizione 0.7 (Unicità del sollevamento).
Sia $p : E \to X$ *un rivestimento,* Y *connesso per archi e* $f : Y \to X$.
Siano $\tilde{f}, \tilde{g} : Y \to E$ *con* $f = p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$.
Se $\exists y_0 \in Y$ *tale che* $\tilde{f}(x_0) = \tilde{g}(x_0)$ *allora* $\tilde{f} = \tilde{g}$

Dimostrazione. Poichè Y è connesso per archi basta mostrare che $\Omega = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)\}$ è sia aperto che è chiuso (Ω non è vuoto, dunque è tutto Y).
Mostriamo che Ω è aperto.
Sia $y \in \Omega$ allora $\tilde{x_0} = \tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)$ e $x_0 = p(\tilde{x_0})$
Per definizione di rivestimento $\exists U \in I(x_0)$ ben rivestito dunque $\pi^{-1}(U) = \amalg V_i$.
Sia i_0 tale che $\tilde{x_0} \in V_{i_0}$.
Essendo $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ continue, $\exists W \in I(y)$ tale che $\tilde{f}(W) \subset V_{i_0}$ e $\tilde{g}(W) \subset V_{i_0}$
Ora $p_{|V_{i_0}}$ è iniettiva dunque da $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$ deduco che $\tilde{f}_{|W} = \tilde{g}_{|W}$
Mostriamo Ω è chiuso, mostrando che $Y \backslash \Omega$ è aperto.
Sia $y \in Y \backslash \Omega$ per cui $\tilde{f}(y) \neq \tilde{g}(y)$, tuttavia $p \circ \tilde{f}(y) = p \circ \tilde{g}(y) = f(y) = x_0$.
Se U è un intorno ben rivestito di x_0 si ha $p^{-1}(U) \amalg V_i$.
Ora essenndo $\tilde{f}(y) \neq \tilde{g}(y)$ deduco che $\tilde{f}(y) \in V_{i_0}$ e $\tilde{g}(t) \in V_{i_1}$ con $i_0 \neq i_1$.
Dalla continuità delle funzioni $\exists W \in I(y)$ con $\tilde{f}(W) \subset V_{i_0}$ e $\tilde{g}(W) \subset V_{i_1}$.
Ora V_{i_0} e V_{i_1} sono disgiunti, da cui $W \in Y \backslash \Omega$

Proposizione 0.8 (Esistenza del sollevamento di cammini).
Siano $p : E \to X$ *e* $\gamma : [0, 1] \to X$ *continua .*
Sia $x_0 = \gamma(0)$ *e* $\tilde{x_0} = p^{-1}(x_0)$*, allora* $\exists! \tilde{\gamma} : [0, 1] \to E$ *continua con* $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x_0}$ *e* $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$

Dimostrazione. L'unicità segue dalla proposizione precedente essendo $[0, 1]$ connesso per archi e avendo fissato $\tilde{x_0}$.
Ricopriamo X con aperti ben rivestiti $\{U_i\}_{i\in I}$ e sia $\varepsilon > 0$ un numero di Lebesgue per il ricoprimento .
Se $\frac{1}{n} < \varepsilon$ $\forall k = 0, \dots, n-1$ si ha $\gamma\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subset U_k$ ben rivestito.
Definisco induttivamente $\tilde{\gamma}$ su $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ come segue.
Per definizione di rivestimento $\exists V_0$ aperto di E tale che $\tilde{x_0} \in V_0$ e $p_0 = p_{|V_0}$ è un omeomorfismo.
$\forall t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ pongo $\tilde{\gamma}(t) = p_0^{-1}(\gamma(t))$.
Una volta definito $\tilde{\gamma}$ continua su $\left[0, \frac{k}{n}\right]$, trovo $V_k \subset E$ tale che $\tilde{\gamma}\left(\frac{k}{n}\right) \in V_k$ e $p_k = p_{|V_k}$ omeomorfismo.
Pongo $\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ $\tilde{\gamma} = p_k^{-1}(\gamma(t))$.

□