Lezione del 4 e 9 Marzo

Fatto 0.1. *Sia* $R \subseteq F(S)$ *e sia* $\psi : F(S) \to H$ *omomorfismo di gruppi, se* $\psi(r) = e_H$ $\forall r \in R$ *allora la mappa* $\overline{\psi} : \langle R \,|\, S \rangle \to H$ *tale che* $\overline{\psi}([s]) = \psi(s)$ *è ben definita.*

Proposizione 0.2. *Siano*

$$G_0 = \langle S_0 \,| R \rangle \quad G_1 = \langle S_1 \,| R_1 \rangle \quad G_2 = \langle S_2 \,| R_2 \rangle$$

$$\psi_1 : G_0 \to G_1 \quad \psi_2 : G_0 \to G_2 \textit{ omomorfismi di gruppo}$$

$$N = N(\{\phi_1(g)\phi_2(g)^{-1} \,|\, g \in G_0\})$$

Allora

$$G = \frac{G_1 \star G_2}{N} \cong \langle S_1 \cup S_2 \,|\, R_1 \cup R_2 \cup R \rangle$$

dove $R = \{\tilde{\phi}_1(s)\tilde{\phi}_2(s)^{-1} \,|\, s \in S_0\}$ *con* $\tilde{\phi}_i : F(S_0) \to F(S_i)$ *omomorfismo con* $[\tilde{\phi}_i(s)] = \phi_i([s])$ *per* $i = 1, 2$

Teorema 0.3 (di Van Kampen)**.**
Sia X *uno spazio topologico e supponiamo che* $X = A \cup B$ *con* A, B *aperti connessi per archi e con* $\emptyset \neq A \cap B$ *connesso per archi.*
Siano

$$\alpha : A \cap B \hookrightarrow A \quad \beta : A \cap B \hookrightarrow B$$

$$f : A \hookrightarrow X \quad g : B \hookrightarrow X$$

le inclusioni.
Sia G *un gruppo con* $h : \pi_1(A) \to G$ *e* $k : \pi_1(B) \to G$ *omomorfismi tali che* $h \circ \alpha_\star = k \circ \beta_\star$ *allora esiste unico* $\pi : \pi_1(X) \to G$ *tale che* $\phi \circ f_\star = h$ *e* $\phi \circ g_\star = k$
Tutti i gruppi fondamentali si intendono puntati in un medesimo $x_0 \in A \cap B$

Dimostrazione. Sia $x \in X$ allora $\alpha_x \in \Omega(x_0, x)$ è un cammino tale che

- se $x = x_0$ allora $\alpha_x = C_{x_0}$
- se $x \in A$ allora $\alpha_x([0,1]) \subset A$
- se $x \in B$ allora $\alpha_x([0,1]) \subseteq B$

come conseguenza se $x \in A \cap B$ allora $\alpha_x([0,1]) \subseteq A \cap B$.
Le ipotesi del teorema ci danno un diagramma del tipo

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A) \arrow[dr, "f_\star"] \arrow[drr, bend left, "h"] & & \\
\pi(A \cup B) \arrow[ur, "\alpha_\star"] \arrow[dr, "\beta_\star"'] & & \pi_1(X) & G \\
 & \pi_1(B) \arrow[ur, "g_\star"'] \arrow[urr, bend right, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dato $[\gamma] \in \pi_1(X)$ con γ suo rappresentante, andiamo a definire chi dovrebbe essere $\pi([\gamma])$ affinchà la mappa $\phi : \pi_1(X) \to G$ renda i 2 triangoli commutativi.

Poichè il ricoprimento $\{\gamma^{-1}(A), \gamma^{-1}(B)\}$ ammette un numero di Lesbegue, esiste una suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ tali che $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ è contenuto in A oppure in B.
Poniamo, per convenzione, $\alpha_i = \alpha_{\gamma(t_i)}$ e andiamo a costruire una serie di cammini

$$\gamma_1 = \gamma_{|[0,t_1]}$$

$$\gamma_i = \alpha_{i-1} \star \gamma_{|[t_{i-1},t_i]} \star \overline{\alpha_i} \text{ per } i = 2, \ldots, n-1$$

$$\gamma_n = \alpha n - 1 \star \gamma_{|[t_{n-1},t_n]}$$

Osserviamo che $\gamma \sim \gamma_1 \star \cdots \star \gamma_n$ in quanto ogni qual volta giungo con un α_i giungo anche per $\overline{\alpha}_i$. Pongo ora $\phi([\gamma]) = g_1 \ldots g_n$ dove

$$g_i = \begin{cases} h([\gamma_i]) \text{ se } Imm\gamma_i \subseteq A \\ k([\gamma_i]) \text{ se } Imm\gamma_i \subseteq B \end{cases}$$

Abbiamo dunque provato l'unicità di ϕ e per costruzione ϕ rende i triangoli commutativi

(a) Proviamo che ϕ non dipende dalla suddivisione scelta.
Basta provare che se aggiungiamo un punto alla suddivisione allora il valore della funzione non cambia (se abbiamo 2 suddivisioni, scegliamo un loro raffinamento).
Sia $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = 1$ come nella definizione di ϕ.
Sia $\bar{t}$ tale che $t_i < \bar{t} < t_{i+1}$
Come nella definizione di ϕ fatta precedentemente siano $\beta = \alpha_{\gamma(\bar{t}}$ e

$$\delta_1 = \alpha_i \star \gamma_{|[t_i,\bar{t}]} \star \overline{\beta} \quad \delta_2 = \beta \star \gamma_{|[\bar{t},t_{i+1}} \star \overline{\alpha_{i+1}}$$

Sia

$$l_j = \begin{cases} k(\delta_j) \text{ se } Im\gamma_j \subseteq A \\ h(\delta_j) \text{ se } Im\gamma_j \subseteq B \end{cases}$$

Osserviamo che $\gamma_{i+1} \sim \delta_1 \star \delta_2$ dunque

$$\phi([\gamma]) = g_1 \ldots g_i g_{i+1} g_{i+2} \ldots g_n = g_1 \ldots g_i (l_1 l_2) g_{i+2} \ldots g_n$$

dunque abbiamo provato che ϕ non dipende dalla suddivisione scelta

(b) Proviamo che ϕ non dipende dal rappresentante scelto
Sia $\beta \sim \gamma$.
Sia $H : [0,1]^2 \to X$ l'omotopia allora $\{H^{-1}(A), H^{-1}(B)\}$ è un ricoprimento aperto di $[0,1] \times [0,1]$ da cui esiset $n \in \mathbb{N}$ con $H\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right)$ contenuto in A oppure in B.
(da inserire disegnini)

(c) Il fatto che ϕ è omo è lasciato come esercizio

Corollario 0.4. *Sia X, A, B come nell'epotesi del Teorema di Van Kamper allora*

$$\pi_1(X) = \frac{\pi_1(A) \star \pi_1(B)}{N} \textit{ dove } N = N(\{i(\alpha_\star(g))j(\beta_\star(g) \mid g \in \pi_1(A \cap B)\}$$

con i, j le ovvie inclusioni

Dimostrazione.

$$\begin{tikzcd}
\pi_A \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "f_\star"] & & \\
& \pi_1(A) \star \pi_1(B) & \pi_1(X) \\
\pi_1(B) \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, bend right, "g_\star"'] & &
\end{tikzcd}$$

Allora dalla propietà universale del prodotto libero segue che esiste unica

$$\psi :\ \pi_1(A) \star \pi_1(B) \to \pi_1(X)$$

che rende commutativi i 2 triangoli.
È di facile verifica che $\psi(n) = e \ \forall n \in N$ da cui ψ passa al quoziente .
Usando il teorema di Van Kampen con $h = i$, $k = j$ e $G = \frac{\pi_1(A)\star\pi_1(B)}{N}$ si ottiene che esiste ϕ.
Dall'unicità di ϕ e ψ segue che una è l'inversa dell'altra

Corollario 0.5. *Assumiamo le stesse ipotesi dei teorema di Van Kampen su X, se A e B sono semplicemente connessi allora anche X lo è.*

Esempio 0.6. S_n *è semplicemente connesso per* $n \geq 2$

Dimostrazione. Siano $A = S^n \backslash \{(1, 0, \dots, 0)\}$ e $B = S^n \backslash \{(-1, 0, \dots, 0)\}$ ora A, B sono omeomorfi a $\mathbb{R}^n$ che è semplicemente connsesso

Osservazione 1. $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2 \ \forall n \geq 2$.
S^n è rivestimento universale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ avente grado 2 da cui il gruppo fondamentale è un gruppo con 2 elementi

Esempio 0.7. $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \{e\} \ \forall n$

Dimostrazione. Se $n = 0$ allora $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ è un punto dunque non ho nulla da dimostrare
Sia $H = \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \,|\, x_0 = 0\}$.
Siano $H = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \backslash A$ e $B = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \backslash \{[1 : 0 \cdots : 0]\}$ ora

$$A \to \mathbb{C}^n \quad [x_0 :\ \dots\ : x_n] \to \left(\frac{x_1}{x_0} :\ \dots\ : \frac{x_n}{x_0}\right)$$

è un omeomorfismo, dunque $\pi_1(A) = \{e\}$.
Similmente $A \cap B$ è omeomorfo a $\mathbb{C}^n$ meno un punto dunque è connesso per archi.
Mostriamo che B è omotopicamente equivalente a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$
$H \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ è B si ritrae per deformazione su H.
Sia $r \in \mathbb{C}^{n+1}$ la retta generata da $(1, 0, \dots, 0)$ e sia

$$h :\ (C^{n+1} \backslash r) \times [0, 1] \to C^{n+1} \backslash r \quad ((x_0, \dots, x_n), t) \to (tx_0, x_1, \dots, x_n)$$

Tale mappa passa al quoziente ottenendo $K : B \times [0, 1] \to B$ che induce la retrazione cercata.
Usando l'ipotesi induttiva $\pi_1(B) = \{e\}$ e per un corollario del teorema di Van Kamper si giunge alla tesi

1 Wedge di cerchi

Definizione 1.1. Sia X topologico. Diciamo che X è un wedge di cerchi se esiste una famiglia S_α con $\alpha \in I$ con

- $X = \bigcup S_\alpha$, inoltre $\exists p$ con $S_\alpha \cap S_\beta = \{p\}$ se $\alpha \neq \beta$
- $S_\alpha \cong S^1$
- $U \subseteq X$ aperto $\Leftrightarrow$ $U \cap S_\alpha$ è aperto in S_α per ogni $\alpha \in I$

Denotiamo $X = \wedge_{\alpha \in I} S_\alpha$

Proposizione 1.1. *Sia X un wedge di cerchi allora $\pi_1(X, p)$ è un gruppo libero inoltre se $[\gamma_\alpha]$ è un generatore di $\pi_1(S_\alpha, p)$ allora $\{[\gamma_\alpha] \,|\, \alpha \in I\}$ è un insieme di generatori liberi*

Corollario 1.2. *Sia $X = \wedge_{i=1}^n S_i$ allora $\pi_1(X, p) = F_n$ dove F_n è il gruppo libero generato da n elementi*

Esempio 1.3. *Sia $X = C_1 \cup C_2$ con*

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + y^2 = 1\} \text{ e } C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x+1)^2 + y^2 = 1\}$$

allora $\pi_1(X) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$

Dimostrazione. Sia $p = (-2, 0)$ e $q = (2, 0)$ allora è di facile verifica che $A = X \backslash \{p\}$ e $B = X \backslash \{q\}$ si retraggono per deformazione rispettivamente su C_1 e C_2
Ora $A \cap B$ è omotopicamente equivalente a $S^1 \backslash \{pt\} \cong \mathbb{R}$ dunque è semplicemente connesso.

$$\pi_1(X) = \frac{\pi_1(A) \star \pi_1(B)}{N}$$

ora N dipende dall'intersezione ma essendo banale si ha $\pi_1(X) = \pi_1(C_1) \star \pi_1(C_2) \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$

Esercizio 1.4. *Provare che $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}) = F_n$ dove $x_i \in \mathbb{R}^2$ e $x_i \neq x_j$ se $i = j$ [Suggerimento: Mostrare che $\mathbb{R}^2 \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$ è omotopicamente equivalente al wedge di n cerchi*

Esercizio 1.5. *Siano $r_1, \ldots, r_n \subseteq \mathbb{R}^3$ rette distinte passanti per l'origine.*
$R^3 \backslash \bigcup r_i$ si ritrae per deformazione su $S^2 \backslash (S^n \cap \bigcup r_i)$ dunque $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash \bigcup r_i) = F_{2n-1}$