Lezione del 23 ottobre di Gandini

Esempio 0.1. *Il quoziente di uno spazio primo numerabile, in generale, non è primo numerabile.*
Consideriamo $\mathbb{R}^2$ *e* $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
$X = \frac{\mathbb{R}^2}{A}$ *non è primo numerabile.*
Sia $[A] \in X$ *il punto definito da* A*, dimostriamo che tale punto non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.*
Supponiamo per assurdo che $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sia un sistema fondamentali di intoni di* A *e sia* $V_n = \pi^{-1}(U_n)$.
V_n *è un aperto di* $\mathbb{R}^2$ *quindi*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \varepsilon_n > 0 \quad (n, y) \in V_n \quad \forall y \in [0, \varepsilon_n)$$

Sia

$$f : R \to (0, +\infty) \text{ continua e tale che } f(n) = \frac{\varepsilon_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ad esempio f *lineare a tratti ottenuta interpolando i punti* $\left(n =, \frac{\varepsilon_n}{2}\right)$.
Poniamo

$$V = \{(x, y) \mid |y| < f(x)\} \text{ aperto in } \mathbb{R}^2 \quad A \subseteq V$$

Sia $U = \pi(V)$ *allora esso è un intorno aperto di* $[A]$ *in* X *da cui*

$$\exists \overline{n} \quad U_{\overline{n}} \subseteq U \quad \Rightarrow \quad V_n \subseteq V$$

L'ultima affermazione è assurda infatti, per costruzione, $\exists (x, y) \in V_n \backslash V$

0.1 Quozienti per azioni di gruppi

Definizione 0.1. Sia X uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X tramite omeomorfismo, allora definiamo

$$\frac{X}{G} \text{ il quoziente ottenuto dalla relazione } x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in G \quad g \cdot x = y$$

ovvero le classi di equivalenza sono le orbite

Proposizione 0.2. $\mathbb{Z}$ *agisce su* $\mathbb{R}$ *per traslazione allora*

$$\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \cong S^1$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$f : \mathbb{R} \to S^1 \quad t \to (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Se proviamo che f è un identificazione ho finito, infatti le fibre di f sono le orbite in cui si partiziona $\mathbb{Z}$.
Poichè f è continua e suriettiva, proviamo che è aperta.
Poichè gli intervalli aperti I sono una base, basta dimostrare che $f(I)$ è aperto.
Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $I = (a, a + 1)$ allora

$$f_{|(a,a+1)} : (a, a + 1) \to S^1 \backslash f(a) \text{ è omeomorfismo}$$

da cui $f(I)$ aperto.
Sia A un generico aperto

- Se A contenuto in un intervallo $(a, a+1)$ allora

$$f(A) \text{ aperto in } S'\backslash f(a) \quad \Rightarrow \quad f(A) \text{ aperto in } S^1$$

  infatti $S'\backslash f(a)$ è aperto in S^1

- In generale

$$A = \bigcup_{j\in J} A_j \text{ con } A_j \text{ contenuti in intervallo di ampiezza 1}$$

  dunque

$$f(A) = f\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \bigcup_{j\in J} f(A_j)$$

  ora unione di aperti è aperta quindi $f(A)$ è aperto.

□

Osservazione 1. È presente un ambiguità nella notazione infatti $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ può indicare 2 cose differenti

- $\mathbb{R}$ facendo collassare $\mathbb{Z}$ in questo caso il quoziente è omeomorfo ad un bouquet infinito di circonferenze
- $\mathbb{Z}$ che agisce su $\mathbb{R}$ ed in questo caso il quoziente è omeomorfo a S^1

Esempio 0.3. *$\mathbb{Q}$ agisce su $\mathbb{R}$ con la traslazione allora il quoziente è più che numerabile con la topologia indiscreta.*

Dimostrazione. Le orbite sono di cardinalità numerabile dunque, in quantità, devono essere più che numerabili.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto saturo non vuoto dunque $x_0 \in A$, essendo aperto $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$ ora essendo saturo

$$A \supseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (x_0 + q - \varepsilon, x_0 + q + \varepsilon) = \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad A = \mathbb{R}$$

Proposizione 0.4. *Sia G un gruppo che agisce su X spazio topologico, allora*

$$\pi : X \to \frac{X}{G}$$

è aperta.

Dimostrazione. Sia $U \subseteq X$ un aperto.
Poichè G agisce per omeomorfismo $g \centerdot U$ è aperto

$$\pi(U) = \pi\left(\bigcup_{g\in G} g \centerdot U\right)$$

infatti U e $\bigcup g \centerdot U$ hanno la stessa orbita.
Ora $\bigcup g \centerdot U$ è un aperto saturo quindi $\pi(U)$è aperto. □

Osservazione 2. Se G è finito allora π è chiusa in quanto unione finite di chiusi è chiusa

Proposizione 0.5. *Siano $f_i : X_i \to Y_i$ identificazioni aperte $i = 1, 2$ allora*

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$$

è un'identificazione

Dimostrazione. $f_1 \times f_2$ è iniettiva e suriettiva poichè lo sono f_1 e f_2 resta da provare che è aperta.
Sia $U_i \subseteq X_i$ aperto allora

$$(f_1 \times f_2)(U_1 \times U_2) = f_1(U_1) \times f(U_2) \text{ aperto della topologia prodotto}$$

dunque $f_1 \times f_2$ è un'identificazione.

Proposizione 0.6. *Sia X spazio topologico e G gruppo che agisce su X tramite omeomorfismo. Sia $K = \{(x, g \centerdot x) \,|\, x \in X \ g \in X\}$ allora*

$$\frac{X}{G} \text{ è di Hausdorff} \quad \Leftrightarrow K \text{ chiuso in } X \times X$$

Dimostrazione.

$$\frac{X}{G} \text{ è di Hausdorff} \qquad \Delta_{\frac{X}{G}} \text{ è chiusa}$$

Per la proposizione 0.4 π è un identificazione aperta quindi anche $\pi \times \pi$ lo è

$$\Delta_{\frac{X}{G}} \text{ chiusa} \quad \Leftrightarrow \quad (\pi \times \pi)^{-1}\left(\Delta_{\frac{X}{G}}\right) \subseteq X \times X \text{ chiuso}$$

D'altronte $(\pi \times \pi)^{-1}\left(\Delta_{\frac{X}{G}}\right) = K$ ◻

1 Ricoprimenti

Definizione 1.1 (Ricoprimento)**.**
Sia X uno spazio topologico.
Un ricoprimento è una famiglia $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se

$$X = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U$$

se tutti gli $U \in \mathfrak{U}$ sono aperti, $\mathfrak{U}$ è detto ricoprimento aperto

Definizione 1.2 (Localmente finito)**.**
$\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{X}$è una famiglia localmente finita se

$$\forall x \in X \exists V \in I(x) \quad V \cap U \neq \emptyset \text{ solamente per finiti } U \in \mathfrak{U}$$

Esempio 1.1.

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$$

è un ricoprimento chiuso localmente finito

Definizione 1.3 (Ricoprimento fondamentale)**.**
$\mathfrak{U}$ ricoprimento di X è detto fondamentale se dato $A \subseteq X$ allora

$$A \text{ aperto in } X \quad \Leftrightarrow \quad A \cap U \text{ aperto in } U \quad \forall U \in \mathfrak{U}$$

in modo equivalente

$$A \text{ chiuso in } X \quad \Leftrightarrow \quad A \cap U \text{ chiuso in } U \quad \forall U \in \mathfrak{U}$$

Osservazione 3. La freccia $\Rightarrow$ segue dalla definizione di topologia di sottospazio

Proposizione 1.2.

$$\mathfrak{U} \textit{ ricoprimento aperto di } X \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{U} \textit{ ricoprimento fondamentale}$$

Dimostrazione. Sia $A \subseteq X$ tale che $A \cap U$ aperto in U $\forall U \in \mathfrak{U}$.
Ora U è aperto in X e poichè aperto di aperto è aperto

$$A \cap U \text{ aperto in } X \quad \forall U \in \mathfrak{U}$$

dunque

$$A = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} A \cap U \text{ aperto in } X$$

Osservazione 4. In generale, ricoprimenti chiusi non sono fondamentali.
Sia $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea allora

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \text{ è un ricoprimento chiuso}$$

Ora $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ allora $A \cap \{x\}$ è aperto in $\{x\}$ dunque se il ricoprimento fosse fondamentale

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \quad A \text{ aperto} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R} \text{ con la topologia discreta}$$

Proposizione 1.3. *Sia $\mathfrak{U}$ un ricoprimento fondamentale di X e $f : X \to Y$ funzione tra spazi metrici.*

$$f \text{ continua} \quad \Leftrightarrow \quad f_{|U} \text{ continua } \forall U \in \mathfrak{U}$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$

$$\forall A \subseteq Y \text{ aperto} \quad \left(f_{|U}\right)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap U$$

Ora essendo f continua $f^{-1}(A)$ aperto e poichè $\mathfrak{U}$ fondamentale anche $f^{-1}(A) \cap U$ è un aperto
$\Leftarrow$ Sia $A \subseteq Y$ aperto

$$f^{-1}(A) \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(A) \cap U \text{ aperto} \quad \forall U \in \mathfrak{U}$$

Ma $f_{|U}$ continua dunque

$$\left(f_{|U}\right)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap U \text{ aperto} \quad \forall U \in \mathfrak{U}$$

$\square$