Lezioni del 30 Ottobre del prof. Frigerio

Definizione 0.1 (Compatto)**.**
Uno spazio topologico X è **compatto** se ogni suo ricoprimento aperto un sottoricoprimento finito, cioè se dato

$$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I} \quad U_i \text{ aperto } \forall i \in I \quad X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

$$\exists i_0, \ldots, i_n \quad U = U_{i_0} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

Definizione 0.2. Un sottospazio si dice compatto se è compatto con la topologia di sottospazio

Definizione 0.3. Uno spazio metrico è limitato se

$$\exists x_0 \in X \text{ e } \exists R > 0 \quad X = B(x_0, R)$$

In modo equivalente

$$textdiam(X) = \sup_{x,y \in X} \{d(x, y)\} < +\infty$$

Osservazione 1. Mostriamo l'equivalenza delle definizioni.
Supponiamo $X = B(x_0, R)$ allora $\forall x, y \in X$ vale $d(x, y) < d(x_0, x) + d(x_0, y) < 2R$
se $diam(X) = d < +\infty$ allora $\forall x_0 \in X$ vale $X = B(x_0, d + 1)$

Lemma 0.1. *X metrico compatto $\Rightarrow$ X limitato*

Dimostrazione. Scelto $x_0 \in X$ e posto $U_n = B(x_0, n)$ con $n \in \mathbb{N}$ allora $\mathfrak{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto.
Dalla compattezza di X segue

$$X \subseteq U_{n_0} \cup \cdots \cup U_{n_k}$$

da cui $X \subseteq B(x_0, R)$ con $R = \max\{n_0, \cdots, n_k\}$ □

Corollario 0.2. $\mathbb{R}$ *non è compatto*

Teorema 0.3. $[0, 1]$ *è compatto*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1]$

$$A = \left\{ t \in [0, 1] \;\middle|\; \exists J \subseteq I \text{ finito con } [0, t] \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i \right\}$$

La tesi, è dunque equivalente a $1 \in A$.
Poichè $0 \in U_{i_0}$ e U_{i_0} è aperto abbiamo $[0, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$ per un qualche $\varepsilon > 0$.
se $t \in [0, \varepsilon)$ si ha $[0, t] \subseteq U_{i_0}$ dunque $[0, \varepsilon) \subseteq A$.
Ora A non è vuoto ed è limitato superiormente dunque è ben definito $t_0 = \sup A > 0$.
Mostriamo che t_0 è un massimo per A
Per definizione di ricoprimento $\exists\, U_i$ aperto con $t_0 \in U_i$ e poichè $t_0 > 0$

$$\exists\, \delta > 0 \quad (t_0 - \delta, t_0] \subseteq U_i$$

e dalla definizione di estremo superiore

$$\exists\, \bar{t} \in (t_0 - \delta, t_0] \cap A \quad \Rightarrow \quad [0, \bar{t}] \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

dunque

$$[0, t_0] \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup U_i \quad \Rightarrow \quad t_0 \in A$$

Proviamo che $t_0 = 1$, supponiamo che $t_0 < 1$.
Come prima $\exists\, U_i$ con $t_0 \in U_i$ e $[t_0, t_0 + \delta) \subseteq U_i$ per qualche $\delta > 0$.
Poichè $t_0 \in A$

$$[0, t_0] \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \quad \Rightarrow \quad \left[0, t_0 + \frac{\delta}{2}\right] \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup U_i \quad \Rightarrow \quad t_0 + \frac{\delta}{2} \in A$$

Ma ciò è un assurdo poichè $t_0 = \max A$

□

Teorema 0.4. *$f : X \to Y$ continua.*

$$X \text{ compatto} \quad \Rightarrow \quad f(X) \text{ compatto}$$

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$
Ora essendo f continua, dalla propietà universale della topologia di sottospazio, anche la funzione $\tilde{f} : X \to f(X)$ è continua.
Osserviamo che $\{\tilde{f}^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X.
Dalla compattezza di X segue $\exists J \subseteq I$ finito con

$$X = \bigcup_{i \in J} \tilde{f}^{-1}(U_i) \quad \Rightarrow \quad f(X) = \bigcup_{i \in J} U_i$$

dunque $f(X)$ è compatto

Fatti 0.5.

- *Ogni spazio finito è compatto*
- *Unione finita di sottospazi compatti è compatto*

Teorema 0.6. *Sia X uno spazio compatto*

$$Y \subseteq X \text{ chiuso} \quad \Rightarrow \quad Y \text{ compatto}$$

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di Y.
Dalla topologia di sottospazio posso supporre che $\forall i \in I$ si ha V_i aperto di X con $U_i = Y \cap V_i$.
Poichè $\{U_i\}$ è un ricoprimento di X si ha $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$.
Poichè Y è chiuso $W = X \backslash Y$ è aperto allora

$$\{V_i\}_{i \in I} \cup W \text{ è un ricoprimento aperto di } X$$

Per compattezza $X = V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n} \cup W$.
Poichè $W \cap Y = \emptyset$ se ne deduce che

$$Y \subseteq V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n} \quad \Rightarrow \quad Y = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

da cui la tesi □

Osservazione 2. Abbiamo visto che

$$Y \subseteq X \text{ compatto} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \{U_i\}_{i\in I} \text{ famiglia di aperti di } X \quad Y \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \text{ si ha } \exists J \subseteq I \text{ finito} \quad Y \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$$

Osservazione 3. Un sottospazio compatto non è chiuso.
Prendiamo X con la topologia cofinita, mostriamo che ogni sottoinsieme è un compatto.
Sia $Y \subseteq X$ e supponiamo che $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ con U_i aperto di X.
Se $Y = \emptyset$ allora è compatto, altrimenti $\exists\, y_0 \in Y$ e dunque $y_0 \in U_{i_0}$ per un $i_0 \in I$.
Ora essendo U_{i_0} aperto $X \backslash U_{i_0}$ è finito dunque a maggior ragione anche $Y \backslash U_{i_0}$ è finito.

$$Y \backslash U_{i_0} = \{y_1, \dots, y_n\} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \exists i_j \text{ con } y_j \subseteq U_{i_j}$$

$$Y = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

ovvero Y è compatto.

Potevamo prendere come controesempio un generico X con la topologia indiscreta.
Tutti i ricoprimenti aperti sono fatti da X stesso dunque ogni sottoinsieme è compatto ma nessuno escluso il vuoto e X stesso sono chiusi

Teorema 0.7. *Sia X spazio $T2$ e $Y \subseteq X$*

$$Y \textit{ compatto} \quad \Rightarrow \quad Y \textit{ chiuso}$$

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $X \backslash Y$ è aperto ovvero intorno di ogni suo punto.
Fissiamo $x_0 \in X \backslash Y$

$$\forall y \in Y \quad \exists\, U_y,\, V_y \text{ aperti disgiunti di } X \quad x_0 \in U_y \quad y \in V_j$$

Ora $\{V_y\}_{y\in Y}$ è un ricoprimento di Y con aperti di X.
Per compattezza di Y, $\exists\, y_1, \cdots, y_n \in Y$ con

$$Y \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$$

Pongo

$$V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}$$

$$U = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$$

ora U aperto e $x_0 \in V$ aperto essendo intersezione finita di aperti.
Per costruzione $U \cap V = \emptyset$ dunque $x_0 \in U \subseteq X \backslash V \subseteq X \backslash Y$

Lemma 0.8. *X compatto $T2 \Rightarrow X$ regolare*

Dimostrazione. $T2 \Rightarrow T1$ per cui basta vedere che vale $T3$
Siano $x_0 \in X$ e $Y \subseteq X$ chiuso con $x_0 \notin Y$
Poichè chiuso in un compatto è compatto (Teorema 0.6), Y è compatto.
Gli aperti U e V della dimostrazione precedente verificano $x_0 \in U$, $Y \subseteq V$ ed inoltre $U \cap V = \emptyset$ □

Teorema 0.9. *X compatto $T2 \Rightarrow X$ normale*

Dimostrazione. $T2 \Rightarrow T1$ dunque basta dimostrare che vale $T4$
Siano C, D chiusi di X con $C \cap D = \emptyset$
Poichè X regolare per il lemma precedente

$$\forall x \in C \quad \exists U_x, V_x \text{ aperti disgiunti di } X \text{ con } x \in U_x \quad D \subseteq V_x$$

$$C \subseteq \bigcup_{x \in C} U_x$$

inoltre C è chiuso in un compatto dunque compatto

$$\exists x_1, \cdots, x_n \in C \quad C \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$$

Pongo

$$U = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$$

$$V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$$

U e V sono aperti con la propietà richiesta da $T4$ □

Osservazione 4. Abbiamo dimostrato di più.
Se X è $T2$ con $C, D \subseteq X$ compatti disgiunti allora essi si possono separare con aperti.