Lezione del 18 Marzo

Definizione 0.1. Se $U \subseteq \mathbb{C}$ è un aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ è una funzione possiamo scrivere

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

chiamiamo

- $u : U \to \mathbb{R}$ la parte reale di f
- $v : U \to \mathbb{R}$ la parte immaginaria di f

Fatto 0.1. *Sia U, f, u, v come sopra e $z_0 \in U$*

$$f \text{ continua in } z_0 \quad \Leftrightarrow \quad u, v \text{ continue in } z_0$$

Definizione 0.2. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$.
La funzione $f : U \to \mathbb{C}$ è differenziabile in $z_0 \in U$ se $\exists A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ applicazione $\mathbb{R}$-lineare tale che

1. $f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + r(z)$
2. $\dfrac{|r(z)|}{|z - z_0|} \to 0$ per $z \to z_0$

In questo caso chiameremo l'applicazione A lo Jacobiano di f e lo denoteremo con $J_{f_{z_0}}$

Osservazione 1. f differenziabile in z_0 allora f continua in z_0

Fatti 0.2.

1. *Se f è differenziabile in $z_0 \in U$ allora esistono le derivate parziali di $f \in z_0$ e si ha*

$$J_{f_{z_0}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

   dove u, v sono la parte reale ed immaginaria di f e $z_0 = x_0 + iy_0$

2. *(Teorema del differenziale totale)*
   Siano u, v come sopra. Se esistono $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ in un intorno di z_0 e sono continue in z_0 allora f è differenziabile in z_0

Esercizio 0.3. *Sia $f : R^2 \to \mathbb{R}$ con* $f((x, y)) = \begin{cases} x \text{ se } y \neq x^2 \\ 0 \text{ se } y = x^2 \end{cases}$
f è differenziabile in $(0, 0)$?

Definizione 0.3.
Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ continua
f si dice olomorfa in $z_0 \in U$ se esiste il limite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

se tale limite esiste, lo chiamiamo derivata di f in z_0 e lo denotiamo con $f'(z_0)$

Diciamo che f è olomorfa in U se lo è in ogni punto di U

Diciamo che f è intera se è definita su $\mathbb{C}$ ed è olomorfa su $\mathbb{C}$

Proposizione 0.4. *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e siano $f, g : U \to \mathbb{C}$ olomorfe in z_0 allora*

- *$f + g$ è olomorfa in z_0 con $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$*
- *fg è olomorfa in z_0 con $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$*
- *se $g(z_0) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è olomorfa in z_0 con*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

Proposizione 0.5. *Siano U, V aperti di $\mathbb{C}$. Siano $f : U \to V$ e $g : V \to \mathbb{C}$ funzioni. Assumiamo f olomorfa in $z_0 \in U$ e g olomorfa in $f(z_0)$, allora $g \circ f$ è olomorfa in z_0 e si ha*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

Esempio 0.6.

- *$f(z) = z$ è intera*
$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{z+h-z}{h} = 1 \to 1$$
dunque $f'(z) = 1 \, \forall z \in \mathbb{C}$
- *$f(z) = z^n$ è intera con $n > 1$*
$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k h^{n-k} - z^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z^k h^{n-k-1} \to nz^{n-1}$$
dunque $f'(z) = nz^{n-1}$
- *$f(z) = z^n$ con $n < 0$ è olomorfa in $C \backslash \{0\}$ (esercizio)*
- *Dagli esempi precedenti segue che i polinomi sono interi e le funzioni razionali sono olomorfe dove definite (denominatore non nullo)*
- *$f(z) = \overline{z}$ non è olomorfa*
$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$
Se esiste la derivata, il limite dovrebbe esistere per ogni possibile direzione $h = 0$ dunque dovrebbe succedere
$$1 = \lim_{\substack{h \to 0 \\ Im(h)=0}} \frac{\overline{h}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ Re(h)=0}} \frac{\overline{h}}{h} = -1$$
- *$f(z) = \overline{z}$ è differenziabile*

Osservazione 2. Se f è olomorfa in z_0 allora è anche continua.

$$f(z) - f(z_0) = \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right)(z - z_0) \to f'(z_0) \lim_{z \to z_0}(z - z_0) = 0$$

Teorema 0.7. *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ continua*

$$f \text{ olomorfa in } z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a) \; f \text{ differenziabile in } z_0 \\ b) \; J_{f_{z_0}} \text{ corrisponde alla moltiplicazione per } a \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ La condizione di olomorfità implica cche

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + r(h) \tag{1}$$

con $\dfrac{|r(h)|}{|h|} \to 0$ per $h \to 0$
Nella base $\{1, i\}$ di $\mathbb{C}$ visto come spazio vettoriale reale, possiamo riscrivere la 1 come

$$f(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = f(x_0, y_0) + f'(z_0)(\alpha + i\beta) + r(\alpha, \beta)$$

con $\dfrac{|r(\alpha, \beta)|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \to 0$ (intendiamo $z_0 = x_0 + iy_0$ e $h = \alpha + i\beta$)
La mappa $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che manda z in $f'(z_0)z$ è $\mathbb{R}$-lineare, dunque sono soddisfatte a) e b)
$\Leftarrow$ Si procede in modo analogo

- Si parte dalla condizione di derivabilità nelle variabili x e y
- Si riscrive la condizione di sopra in termini della variabile $z = x + iy$
- Si pone per b) lo jacobiano uguale alla moltiplicazione per $f'(z_0)$

□

Lemma 0.8. *Sia $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione $\mathbb{R}$-lineare.*
I seguenti fatti sono equivalenti

- *A indotta dalla moltiplicazione per un numero complesso: $A(z) = a \cdot z$ con $a \in \mathbb{C}$*
- *A è $\mathbb{C}$-lineare*
- *$A(i) = 1A(i)$*
- *A è la moltiplicazione per la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (l'applicazione è rappresentata nella base $\{1, i\}$)*
  a del punto 1 è $\alpha + i\beta$

Dimostrazione. Esercizio

Teorema 0.9 (di Cauchy-Riemann)**.**
Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : U \to \mathbb{C}$ continua.
Denotiamo $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ nella base $\{1, i\}$ di $\mathbb{C}$

$$f \text{ olomorfa in } z_0 \in U \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a)\ f \text{ differenziabile in } z_0 \\ b')\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

dove $z_0 = x_0 + iy_0$
Nel caso f sia olomorfa allora $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$

Dimostrazione. Mostriamo che la condizione b) del precedente teorema implica la condizione b' (nota come condizione di Cauchy-Riemann) Poichè f è differenziabile il suo Jacobiano è della forma

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Per il Lemma precedente essendo lo Jacobiano $\mathbb{R}$-lineare e corrispondente alla moltiplicazione per un numero complesso si avrà $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ da cui

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \alpha \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \beta$$

$\square$

Definizione 0.4. $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$, chiamiamo esponenziale del numero complesso z la quantità

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Esempio 0.10. *$f(z) = e^z$ è intera con $f'(z) = e^z$*
Osserviamo che $u(x, y) = e^x \cos x$ mentre $v(x, y) = e^x \sin y$, in modo ovvio sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy-Riemann

Definizione 0.5.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^z}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$