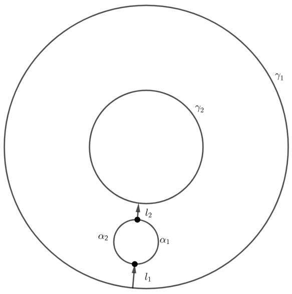
Lezione del 22 aprile

Teorema 0.1. *Sia* $A = \{z \,:\, \rho_2 < |z| < \rho_1\}$.
Sia f *olomorfa nella corona circolare* A, *allora* f *ammette un'espansione di Laurent.*

Dimostrazione. Sia $z \in A$ e siano r_1, r_2 scelti in modo che

$$0 < \rho_2 < r_2 < |z| < r_1 < \rho_1$$

sia $B = A \setminus C$ dove C è una piccola palla aperta centrata in z.
Sia $\alpha = \alpha_1 \star \alpha_2$ una parametrizzazione antioraria del bordo di C e siano γ_i parametrizzazioni antiorarie della circonferenza di raggio r_i, come in figura Il cammino



$$\beta = l_1 \star \alpha_1 \star \gamma_2 \star \overline{l_2} \star \alpha_2 \star \overline{l_1} \star \overline{\gamma_1}$$

borda un disco in B dunque è omotopicamente banale.
Dunque se $f \colon A \to \mathbb{C}$ è olomorfa allora la forma $\omega = \frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z$ è chiusa in B da cui

$$0 = \int_\beta \omega = \cancel{\int_{l_1} \omega} + \int_{\alpha_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \cancel{\int_{\overline{l_2}} \omega} + \int_{\alpha_2} \omega + \cancel{\int_{\overline{l_1}} \omega} + \int_{\overline{\gamma_1}} \omega = \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega + \int_\alpha \omega$$

Perciò

$$\int_\alpha \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

Per il primo dei due si fa lo stesso conto fatto per la formula di Cauchy.
Lungo γ_1 abbiamo $|\gamma_1(t)| = r_1 > |z|$.
Perciò se $w = \gamma_1(t)$ otteniamo

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w\left(1 - \frac{z}{w}\right)} = \frac{f(w)}{w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{f(w)}{w} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n f(w)}{w^{n+1}}$$

Poichè la convergenza di questa serie nella corona $\{r_2 \leq |z| \leq r_1\}$ è normale, dunque uniforme, possiamo scambiare serie e integrale nella seguente catena

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_1} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{z^n f(w)}{w^{n+1}} \right) \mathrm{d}w = \sum_{n \geq 0} z^n \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$$

dove abbiamo posto

$$b_n = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

Notiamo subito che se $\gamma \colon [0,1] \to A$ è un qualsiasi cammino omotopicamente equivalente a γ_1 ovvero con $I(\gamma, 0) = 1$ allora

$$b_n = \int_\gamma \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

infatti $\frac{f(w)}{w^{n+1}}$ è chiusa in A ed essere liberamente omotopi in A equivale ad esserlo in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si ritrae per deformazione su A) .
Andiamo a studiare l'altro integrale: $\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$.
Se $w = \gamma_2(t)$, $|w| < |z|$ per cui

$$\frac{f(w)}{w-z} = -\frac{f(w)}{z-w} = -\frac{f(w)}{z\left(1-\frac{w}{z}\right)} = -\frac{f(w)}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{w}{z}\right)^n = -\frac{f(w)}{z}\sum_{n\leq 0}\left(\frac{z}{w}\right)^n = -\frac{f(w)}{z}\cdot\frac{z}{w}\sum_{n<0}\left(\frac{z}{w}\right)^n = -\sum_{n<0}$$

Dunque come nello studio precedente

$$-\int_{\gamma_2}\omega = -\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_2}\left(\sum_{n<0}\frac{f(w)z^n}{w^{n+1}}\right)\mathrm{d}w = \sum_{n<0} z^n \int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{n<0} b_n z^n$$

dove

$$b_n = \int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w \text{ per ogni } \gamma : [0,1] \to A \text{ con } I(\gamma, 0) = 1$$

Dunque dalla formula integrale di Cauchy, otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1}\omega - \int_{\gamma_2}\omega\right) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n + \sum_{n<0} b_n z^n\right) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n$$

Dunque f ammette uno sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n \text{ dove } a_n = \frac{b_n}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w \text{ per qualsiasi } \gamma \text{ in } A \text{ con } I(\gamma, 0) = 1$$

Osservazione 1. Dalla definizione degli a_n visti sopra si ha (come nel caso già visto) $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \text{ dove } M(r) = \sup\{|f(w)| : |w| = r\}$$

Corollario 0.2. *Sia $A = \{\rho_2 < |z|\, \rho_1\}$ e $f : A \to \mathbb{C}$ olomorfa.*
Allora $f = f_1(z) + f_2(z)$ dove le funzioni

$$f_1 : B(0, \rho_1) \to \mathbb{C}$$

$$f_2 : \mathbb{C} \setminus \overline{B(0, \rho_2} \to \mathbb{C}$$

sono olomorfe.
Richiedendo che $\lim\limits_{|z|\to 0} |f_2(z)| = 0$ tale scrittura è unica

Dimostrazione. Essendo f olomorfa sulla corona circolare, ammette un'espansione di Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

Per l'esistenza poniamo

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

$$f_2(z) = \sum_{n<0} a_n z^n$$

(tali serie convergono sui rispettivi domini delle funzioni).
Mostriamo adesso l'unicità.
Se $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$ possiamo definire $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ponendo

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) - g_1(z) \text{ se } |z| < \rho_1 \\ g_2(z) - f_2(z) \text{ se } |z| > \rho_2 \end{cases}$$

Mostriamo che tale funzione è ben definita, da cui segue che è olomorfa.
Nell'intersezione $\rho_2 < |z| < \rho_1$ abbiamo che

$$f_1(z) + f_2(z) = g_1(z) + g_2(z)$$

in quanto entrambe coincidono con $f(z)$ per cui

$$f_1(z) - g_2(z) = g_1(z) - f_2(z)$$

dunque la funzione F è ben definita.
Osserviamo

$$\lim_{|z| \to +\infty} F(z) = \lim_{|z| \to +\infty} g_2(z) - f_2(z) = 0$$

dunque $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa e limitata, per Louivelle è costante.
Avendo limite nullo F è nulla il che implica che $f_i = g_i$ per $i = 1, 2$ $\square$

1 Singolarità

Definizione 1.1. Sia $a \in \mathbb{C}$ allora chiamiamo dischi puntati, corone circolari della forma $0 < |z - a| < R$ ovvero $B(a, R) \setminus \{a\}$ dove $R > 0$

Teorema 1.1. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $z_0 \in D$. Se $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ è olomorfa, allora*

$$f \text{ si estende ad una funzione olomorfa } g : D \to \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ limitata in un intorno di } z_0$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Essendo g olomorfa è continua, dunque localmente limitata.
$\Leftarrow$ Essendo f limitata in un intorno di z_0, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B = B(z_0, \varepsilon) \subseteq D$ e

$$|f(z)| \leq M \text{ per } z \in B \setminus \{z_0\}$$

Ora f è olomorfa in una corona circolare, dunque ammette uno sviluppo di Laurent su $B \setminus \{z_0\}$ ovvero

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \text{ per } z \in B \setminus \{z_0\}$$

dunque per quanto abbiamo osservato (dopo il teorema olomorfa implica sviluppo di Laurent) sappiamo

$$|a_n| \leq \frac{M}{R^n} \leq \frac{M}{R^n} \text{ per } R < \varepsilon$$

Se $n < 0$ allora $\lim\limits_{R \to 0^+} \dfrac{M}{R^n} = 0$ per cui $a_n = 0$.
Abbiamo dunque notato che la serie di Laurent ha solo termini con esponenti non negativi, dunque f si estende ad una funzione $\overline{f} : B(z_0, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ olomorfa, possiamo porre

$$g(z) = \begin{cases} \overline{f}(z) \text{ se } z \in B \\ f(z) \text{ se } z \neq z_0 \end{cases}$$

Osservazione 2. Non basta richiedere che f sia di classe C^∞ infatti la funzione $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è limitata ma non si estende in modo continuo in 0

Definizione 1.2. Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $z_0 \in D$ e sia $f : D \setminus \{z_0\}$ olomorfa.
Diciamo che z_0 è una singolarità eliminabile (o rimovibile) di f se f si estende in modo olomorfo ad una funzione su tutto D.
Se invece f non si estende in z_0 ad una funzione olomorfa, z_0 si chiama singolarità isolata

Definizione 1.3. Sia z_0 una singolarità isolata di $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa.
Sia

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

uno sviluppo di Laurent in un piccolo disco puntato in z_0.
Allora z_0 si dice

- polo di ordine n_0 se

  $$\{a_n \,|\, n < 0 \text{ e } a_n \neq 0\}$$

  è finito e

  $$n_0 = -\min \{a_n \,|\, n < 0 \text{ e } a_n \neq 0\}$$

- singolarità essenziale se
$$\{a_n \,|\, n < 0 \text{ e } a_n \neq 0\}$$
è infinito

Osservazione 3. Tali definizioni sono valide in quanto lo sviluppo di Laurent di una funzione olomorfa su una corona circolare è unico (prossima lezione)

Osservazione 4. Se $a_n \neq 0$ per qualche $n < 0$ allora la singolarità non è eliminabile.
Sia $a_{n_0} \neq 0$ con $n_0 < 0$ e consideriamo la funzione $g(z) = f(z)(z - z_0)^{absn_0=1}$.
Supponiamo che la funzione f si estenda in z_0, dunque anche g si estende.
Sia b_n il coefficiente n-esimo dello sviluppo di Laurent di g, dunque avremmo
$$b{-}1 = a_{n_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(w)}{(w - z_0)^{-1+1}} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(w) \, \mathrm{d}w = 0$$
perchè g è olomorfa in z_0. Abbiamo mostrato che $a_{n_0} = 0$ ma avevamo supposto $a_{n_0} \neq 0$