**Lezione del 20 Novembre di Gandini**

**Definizione 0.1.** Sia $X$ uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ allora

- $Y$ è detto **raro** in $X$ se $\overline{Y}^\circ = \emptyset$
- $Y$ è detto **magro** o di I categoria se è unione numerabile di rari

*Osservazione* 1. Un chiuso $Z \subseteq X$ è raro $\Leftrightarrow Z^\circ = \emptyset$
in modo equivalente se e solo se $X \backslash Z$ è aperto denso

**Definizione 0.2.** $X$ è detto di **Baire** se $Y^\circ = \emptyset$ per ogni magro $Y \subseteq X$

**Proposizione 0.1.** *I seguenti fatti sono equivalenti*

*(i) $X$ è uno spazio di Baire*

*(ii) Unione numerabile di chiusi rari ha parte interna vuota*

*(iii) Intersezione numerabile di aperti densi è densa*

*Dimostrazione.*

- (ii)$\Leftrightarrow$(iii) Usando l'osservazione di sopra e passando al complementare
- (i)$\Rightarrow$(ii) È un indebolimento della definizione di spazio di Baire
- (ii)$\Rightarrow$(i) Sia $Y \subseteq X$ magro allora

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \quad Y_n \text{ raro}$$

Ora

$$Y^\circ = \left(\bigcup Y_n\right)^\circ \subseteq \left(\bigcup \overline{Y_n}\right)^\circ$$

Ora $\overline{Y_n}$ è chiuso raro dunque per la propietà (ii) si ha $Y^\circ \subseteq \emptyset$ dunque $Y^\circ = \emptyset$

**Teorema 0.2.** *$X$ spazio metrico completo $\Rightarrow$ $X$ spazio di Baire*

*Dimostrazione.* Usiamo la caratterizzazione (ii).
Sia $\{F_n\}$ una famiglia numerabile di chiusi rari.
Supponiamo per assurdo che $\left(\bigcup F_n\right)^\circ \neq \emptyset$.
Sia $x_0 \in X$ e $r_0 > 0$ tali che

$$B(x_0, r_0) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

Costruiamo induttivamente una successione di Cauchy, il cui limite (che esiste, vista la completezza) porta ad un assurdo.

$$F_0^\circ = \emptyset \quad \Rightarrow \quad B\left(x_0, \frac{r_0}{3}\right) \not\subset F_0$$

Ora essendo $F_0$ chiuso

$$\exists x_1 \in B\left(x_0, \frac{r_0}{3}\right) \backslash F_0 \quad \exists r_1 < \frac{r_0}{3} \text{ tale che } B(x_1, r_1) \cap F_0 = \emptyset$$

Ripetendo il ragionamento con $x_1, r_1, F_1$

$$\exists x_2 \in B\left(x_1, \frac{r_1}{3}\right) \backslash F_1 \quad \exists r_2 < \frac{r_1}{3} \text{ tale che } B(x_2, r_2) \cap F_1 = \emptyset$$

In questo modo costruisco successione $\{x_n\} \subseteq X$ e $\{r_n\} \subseteq R_+$ con le seguenti propietà

1. $r_{n+1} < \frac{r_n}{3} \leq \frac{r_0}{3^{n+1}}$

2. $x_{n+1} \in B\left(x_n, \frac{r_n}{3}\right) \setminus F_n$ dunque $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{r_n}{3} \leq \frac{r_0}{3^{n+1}}$

3. $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \cap F_n = \emptyset$

Mostriamo adesso che $\{x_n\}$ è di Cauchy.
Siano $m > n$ allora

$$d(x_n, x_m) \leq d\left(x_n, x_{n+1}\right) + \cdots + d\left(x_{m-1}, x_m\right) < \frac{r_n}{3} + \frac{r_{n+1}}{3} + \cdots + \frac{r_{m-1}}{3} \leq \frac{r_n}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{r_n}{2} \leq \frac{r_0}{2 \cdot 3^2}$$

Essendo la successione di Cauchy esiste $x_\infty = \lim x_n$.
Mostriamo che $x_\infty \notin F_n$.
Passando $m \to \infty$ in $d\left(x_{n+1}, x_m\right) < \frac{r_{n+1}}{2}$ si ha $d\left(x_{n+1}, x_\infty\right) \leq \frac{r_{n+1}}{2}$ dunque $x_\infty \in B\left(x_{n+1}, r_{n+1}\right)$ tale palla per 3 non interseca $F_n$.
Mostriamo che $d\left(x_\infty, x_0\right) < r_0$.
Passando $m \to +\infty$ alla disuguaglianza $d\left(x_0, x_m\right) < \frac{r_0}{2}$ otteniamo $d(x_0, x_\infty) < r_0$ ovvero

$$x_\infty \in b\left(x_0, r_0\right) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

il che è assurdo $\square$

*Osservazione* 2.

Il Teorema è detto di Baire, che contiene anche un altro enunciato (non dimostriamo) :

**Teorema 0.3.** *$X$ localmente compatto e $T2 \Rightarrow X$ spazio di Baire*

**Definizione 0.3.** Sia $X$ topologico, $y \in X$ si dice punto isolato se $\{y\} \subseteq X$ è un aperto

**Definizione 0.4.** $Y \subseteq X$ si dice **perfetto** se e chiuso e privo di punti isolati

**Proposizione 0.4.** *$Y \subseteq \mathbb{R}$ perfetto, allora $Y$ è più che numerabile*

*Dimostrazione.* Supponiamo $Y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Vogliamo trovare $n \in \mathbb{N}$ per cui $y_n \in Y$ è isolato.

$$Y \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso} \quad \Rightarrow \quad Y \text{ spazio metrico completo} \quad \Rightarrow \quad Y \text{ spazio di Baire}$$

Ora $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{y_n\}$ è unione numerabile di chiusi e $Y^\circ = Y \neq \emptyset$.
Per il teorema esiste un chiuso non raro dunque $\exists n$ tale che $y_n \in Y$ punto isolato (non può essere $\overline{\{y_n\}}^\circ = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\square$

**Teorema 0.5.** *Esiste una funzione* $f : [0.1] \to \mathbb{R}$ *continua non derivabile in nessun punto*

*Dimostrazione.* A BREVE