1 Sottospazio prodotto

Lezione del 10 ottobre di Gandini

Definizione 1.1 (Prodotto cartesiano)**.**
Sia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una famiglia di insiemi, il prodotto cartesiano della famiglia è

$$X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \left\{ f : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha \,\middle|\, f(\alpha) \in X_\alpha \,\forall\alpha \in A \right\}$$

Nel caso in cui $A = \{1, \dots, n\}$

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times \cdots \times X_n$$

$$x \in X \quad \Rightarrow \quad x = (x_1, \dots, x_n) \text{ ovvero } f(i) = x_i$$

Definizione 1.2 (Proiezioni)**.** Lo spazio cartesiano X ammette delle proiezioni naturali $\forall\alpha \in A$

$$P_\alpha : X \to X_\alpha \quad f \to f(\alpha)$$

Definizione 1.3. La topologia prodotto su X è la topologia meno fine che rende tutte le proiezioni P_α continue.

Proposizione 1.1. *Una base per la topologia prodotto è data da*

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{\alpha\in A} U_\alpha \,\middle|\, U_\alpha \subseteq X_\alpha \textit{ aperto e } U_\alpha \neq X_\alpha \textit{ per un numero finito di } \alpha \right\}$$

Dimostrazione. Sia $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ aperto allora

$$P_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \prod_{\beta\in A} V_\beta \text{ dove } V_\beta = \begin{cases} U_\alpha \text{ se } \beta = \alpha \\ X_\beta \text{ se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

Dunque le P_α sono continue se e solo se tutte le controimmagini di tale forma sono aperte
Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ e $U_{\alpha_i} \subseteq X_{\alpha_i}$ aperti $\forall i = 1, \dots, n$ allora

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} P_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subseteq X \text{ aperto nella topologia prodotto}$$

intersezione finita di aperti è un aperto; ora

$$A = \prod_{\alpha\in A} V_\alpha \text{ dove } V_\alpha = \begin{cases} U_{\alpha_i} \text{ se } \alpha = \alpha_i \\ X_\alpha \text{ se } \alpha \neq \alpha_i \end{cases}$$

Dunque osserviamo che $A \in \mathfrak{B}$ infatti solo un numero finito di aperti è diverso da tutto lo spazio X_i, ovvero ogni elemento di $\mathfrak{B}$ è un aperto nella topologia prodotto.
Se $\mathfrak{B}$ è una base di una topologia possiamo concludere in quanto, per definizione, cerchiamo la topologia meno fine che rende continue le proiezioni.
Mostriamo che $\mathfrak{B}$ è una base.

1. Se prendiamo $U_\alpha = X_\alpha \ \forall \alpha \in A$ allora $\prod U_\alpha = X$ ovvero $\mathfrak{B}$ ricopre X
2. $$\left(\prod_{\alpha\in A} U_\alpha\right) \cap \left(\prod_{\alpha\in A} V_\alpha\right) = \prod_{\alpha\in A}(U_\alpha \cap V_\alpha)$$
   Se U_α, V_α sono aperti in X_α allora $U_\alpha \cap V_\alpha$ è un aperto di X_α.
   Inoltre se il numero dei $U_\alpha \neq X_\alpha$ e dei $V_\alpha \neq X_\alpha$ è finito allora sarà finito anche il numero dei $U_\alpha \cap V_\alpha \neq X_\alpha$

Abbiamo provato che $\mathfrak{B}$ verifica il criterio per essere una base □

Osservazione 1. Supponiamo B_α base per la topologia di X_α e assumiamo che $X_\alpha \in B_\alpha$ allora

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \prod_{\alpha\in A} B_\alpha \,\middle|\, B_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha \text{ e } B_\alpha = X_\alpha \text{ tranne per finiti } \alpha \right\}$$

è una base della topologia prodotto su X
Segue direttamente dal fatto che $\mathfrak{B}$ definita nella proposizione precedente è una base

Corollario 1.2. *Sia A numerabile e X_α secondo-numerabile $\forall \alpha \in A$ allora X è secondo-numerabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{B}_\alpha$ una base numerabile per X_α e supponiamo che $X_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha$ Sia

$$A_i = \left(\prod_{\alpha\in A} B_\alpha \,\middle|\, B_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha \text{ e } B_\alpha \neq X_\alpha \text{ per le prime } i \right\}$$

Allora A_i è ovviamente numerabile inoltre

$$\mathfrak{B}' = \bigcup_{i\in A} A_i$$

quindi $\mathfrak{B}'$ è numerabile essendo unione numerabile di insiemi numerabili □

Corollario 1.3. *Sia A numerabile e X_α primo-numerabile $\forall \alpha \in A$ allora X è primo-numerabile*

Osservazione 2. Se A non è numerabile, i corollari precedenti, in generale, sono falsi

1.1 Propietà della topologia prodotto

Proposizione 1.4. *La proiezione P_α è un' applicazione aperta*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{B}$ una base di X allora

$$P_\alpha \text{ aperta } \Leftrightarrow P_\alpha(B) \text{ aperta } \forall B \in \mathfrak{B}$$

Per come abbiamo definito una base della topologia prodotto

$$B = \prod_{\beta \in A} U_\beta \text{ dove } U_\beta \subseteq X_\beta \text{ aperto e } U_\beta \neq X_\beta \text{ per finiti } \beta$$

quindi $P_\alpha(B) = U_\alpha$ che è aperto per definizione. □

Osservazione 3. P_α, in generale, non è chiusa.
Prendiamo $\mathbb{R}^2$ e consideriamo P_1.
Sia $Z = \{(x, y) \,|\, xy = 1\}$ ovvero un iperbole equilatera, Z è chiuso in quanto luogo di zeri di un polinomio ($Z = p^{-1}(\{0\})$), un polinomio è una funzione continua e $\{0\}$ è chiuso.

$$P_1(Z) = \mathbb{R} \backslash \{0\} \text{ non è chiuso perchè in } \mathbb{R}\ \{0\} \text{ è aperto}$$

Proposizione 1.5. *Dato $\alpha \in A$, fissiamo $x_\beta \in X_\beta$ con $\beta \neq \alpha$, sia*

$$X(\alpha) = \{f \in X \mid f(\beta) = x_\beta\} \subseteq X$$

Allora la restrizione

$$P_{|\alpha} : X(\alpha) \to X_\alpha \text{ è un omeomorfismo}$$

dove $X(\alpha)$ eredita la topologia di sottospazio

Dimostrazione.

- La restrizione è continua infatti $P_{|\alpha} = P_\alpha \circ i$ con $i : X(\alpha) \hookrightarrow X$, ora i è continua per definizione di topologia di sottospazio
- La restrizione è biunivoca infatti l'inclusione è iniettiva
- Mostriamo che la funzione è aperta.
  Gli aperti di $X(\alpha)$ sono gli insiemi della forma

  $$U = \left(\prod_{\gamma \in A} U_\gamma \right) \cap X(\alpha)$$

  Se $U \neq \emptyset$ allora

  $$U = \{f \in X(\alpha) \mid f(\alpha) \in U_\alpha\}$$

  D'altra parte $P_{|\alpha}(U) = P_\alpha(U) = U_\alpha$ che è aperto

□

Osservazione 4. $P_{|\alpha}$ non è canonica come la proiezione infatti dipende dalla scelta di x_β

1.2 Propietà universale

Proposizione 1.6.
La topologia prodotto verifica la seguente propietà:
dato Z topologico e $f : Z \to X$ una funzione arbitraria

$$f \text{ continua} \quad \Leftrightarrow \quad P_\alpha \circ f \text{ continua}$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Composizione di funzioni continue è una funzione continua.
$\Leftarrow$ Sia $U \subseteq X$ un aperto, dimostriamo che $f^{-1}(U)$ è aperto.
Basta vederlo per $U \in \mathfrak{B}$ (base della topologia prodotto) ovvero per un U della forma

$$U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \text{ dove } U_\alpha \subseteq X_\alpha \text{ aperto}$$

inoltre $\exists A_0 \subseteq A$ finito, tale che $\forall \alpha \notin A_0 \quad U_\alpha = X_\alpha$
D'altra parte $f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\prod_{\alpha \in A} U_\alpha\right)$ e osservando che $U = \bigcap_{\alpha \in A_0} P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ otteniamo

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in A_0} P_\alpha^{-1}(U_\alpha)\right) = \bigcap_{\alpha \in A_0} (P_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$$

Ora intersezione finita di aperti è un aperto quindi

$$\forall U \in \mathfrak{B} \quad f^{-1}(U) \text{ è aperto} \qquad \Rightarrow f \text{ continua}$$

□

Teorema 1.7. *La topologia prodotto è univocamente determinata dalla propietà universale.*
Vale a dire:
Se τ_X è una topologia sul prodotto con la propietà

$$\forall Z \text{ topologico } f : Z \to X \text{ allora}$$

$$f \text{ continua} \quad \Leftrightarrow \quad P_\alpha \circ f \text{ continua } \forall \alpha \in A$$

Allora τ_X è la topologia prodotto

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato che la topologia prodotto soddisfa la propietà universale.
Sia τ_X una topologia che soddisfa la propietà, τ_α la topologia su τ_X e τ_{prod} la topologia prodotto, abbiamo dunque il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & (X, \tau_X) \arrow[d, "P_\alpha"] \\
(Z, \tau_Z) \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r, "P_\alpha \circ f"] & (X_\alpha, \tau_\alpha)
\end{tikzcd}$$

- Prendiamo $Z = (X, \tau_{prod})$ allora

$$\begin{tikzcd}
 & (X, \tau_X) \arrow[d, "P_\alpha"] \\
(X, \tau_{prod}) \arrow[ur, bend left, "id_X"] \arrow[r, "P_\alpha"] & (X_\alpha, \tau_\alpha)
\end{tikzcd}$$

$P_\alpha : (X, \tau_{prod}) \to (X, \tau_\alpha)$ è continua per definizione allora per definizione è continua anche

$$id_X : (X, \tau_{prod}) \to (X, \tau_X) \quad \Rightarrow \quad \tau_X < \tau_{prod}$$

- Proviamo che $P_\alpha : (X, \tau_X) \to (X_\alpha, \tau_\alpha)$ è continua e poi concludere per minimalità. Prendiamo $Z = (X, \tau_X)$ allora

$$\begin{tikzcd} & (X, \tau_X) \arrow[d, "P_\alpha"] \\ (X, \tau_X) \arrow[ur, bend left, "id_X"] \arrow[r, "P_\alpha"] & (X_\alpha, \tau_\alpha) \end{tikzcd}$$

e poichè $id_X : (X, \tau_X) \to (X, \tau_X)$ è continua allora per la propietà $P_\alpha : (X, \tau_X) \to (X_\alpha, \tau_\alpha)$ è continua