Lezione del 23 aprile

Teorema 0.1. *Unicità dello sviluppo in serie di Laurent di una funzione f olomorfa su una corona circolare*

Dimostrazione. Senza perdità di generalità supponiamo $z_0 = 0$ e sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa con

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \rho_2 < |z| < \rho_1\}$$

con sviluppo

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

Sia $k \in \mathbb{Z}$ fissato e sia $\gamma : [0,1] \to D$ con $I(\gamma, 0) = 1$.
Calcoliamo

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}} \, \mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n}{z^{k+1}} \right) \mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{n-k-1} \right) \mathrm{d}z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_\gamma z^{n-k-1} \, \mathrm{d}z$$

Ora $z^i \, \mathrm{d}z$ è esatta su $C \setminus \{0\}$ dunque su D per $i \neq -1$, dunque se $n-k-1 \neq -1$ ovveri $n \neq k$ si ha

$$\int_\gamma z^{n-k-1} \, \mathrm{d}z = 0$$

dunque nella somma di sopra otteniamo

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_\gamma z^{n-k-1} \, \mathrm{d}z = a_k \int_\gamma \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = 2\pi i a_k$$

dunque a_k è univocamente determinato da f

Osservazione 1. Osserviamo che per $k = -1$ otteniamo

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z$$

tale coefficiente prende il nome di residuo di f in z_0

Definizione 0.1. Sia $f : B \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa.
Chiamiamo residuo di f in z_0

$$Res(f, z_0) = a_{-1}$$

dove

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

è lo sviluppo di Lorent di f centrato in z_0

Proposizione 0.2 (Caratterizzazione dei poli).
Sia D aperto e $z_0 \in D$, supponiamo $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa.
Sia z_0 una singolarità isolata di f.
Sono fatti equivalenti

1. *z_0 è un polo di ordine n_0*
2. *$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}}$ dove g è olomorfa in D con $g(z_0) \neq 0$*
3. *$\frac{1}{f(z)}$ si estende ad una funzione olomorfa $k : U \to \mathbb{C}$ in un intorno di z_0 con z_0 zero di ordine n_0 per k*

Dimostrazione.

- $1 \Rightarrow 2.$
  Dalla definizione di polo si ha
  $$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n \text{ con } a_{-n_0} \neq 0$$
  dunque
  $$f(z) = (z-z_0)^{-n_0} \sum_{n \geq 0} a_{n-n_0}(z-z_0)^n = \frac{1}{(z-z_0)^{n_0}} g(z)$$
  ora $g(z)$ è olomorfa (è analitica) ed inoltre $g(z_0) = a_{-n_0} \neq 0$
- $2 \Rightarrow 3$
  Supponiamo
  $$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}} \text{ con } g(z_0) \neq 0$$
  ora in un intorno di z_0, la funzione g non si annulla per cui è ben definita e olomorfa la funzione
  $$k(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^{n_0}}{g(z)}$$
  tale funzione ha uno zero di ordine n_0 in z_0
- $3 \Rightarrow 1$
  Se
  $$k(z) = h(z)(z-z_0)^{n_0} \text{ con } h(z_0) \neq 0 \text{ e } k = \frac{1}{f}$$
  allora in $B \setminus \{z_0\}$ (B palla che contiene z_0) abbiamo
  $$f(z) = \frac{1}{h(z)(z-z_0)^{n_0}}$$
  ora $\frac{1}{h(z)}$ è olomorfa dunque analitica da cui
  $$f(z) = \left(\sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n \right) \frac{1}{(z-z_0)^{n_0}} \sum_{n \geq -n_0} a_{n+n_0}(z-z_0)^n$$
  ora z_0 è un polo di f di ordine n_0 in quanto $a_0 \neq 0$ infatti $\frac{1}{h(z_0)} \neq 0$

Definizione 0.2. Una funzione meromorfa su D è una funzione olomorfa

$$f : D \setminus S \to C$$

dove S è un insieme discreto di punti (chiuso in D) e

$$\forall z_0 \in S \quad f \text{ ha un polo in } z_0$$

Osservazione 2. Grazie alla caratterizzazione dei poli, se $f, g : D \to \mathbb{C}$ sono olomorfe e g non è costantemente nulla, allora $\frac{f}{g}$ è meromorfa.
Infatti gli zeri di una funzione olomorfa sono discreti.
L'unica cosa non completamente ovvia è capire cosa succede in z_0 e tale che $f(z_0) = g(z_0)$.
Se n è l'ordine di z_0 come zero di f e m è l'ordine di z_0 come zero di g.

- Se $n \geq m$ allora $\frac{f}{g}$ si estende ad una funzione olomorfa in D
- Se $n < m$ allora $\frac{f}{g}$ ha un polo di ordine $|n - m|$

Andiamo a studiare i comportamenti della funzioni "vicino" alle singolarità isolate

Corollario 0.3. *Se f ha un polo in z_0 allora* $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

Dimostrazione. Dalla caratterizzazione dei poli sappiamo che

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \text{ con } g(z_0) \neq 0 \text{ e } n > 0$$

dunque

$$|f(z)| = \left| \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \right| \to +\infty$$

Al contrario, vicino a singolarità essenziali abbiamo

Teorema 0.4 (di Weistrass)**.** *Sia z_0 una singolarità essenziale di $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Allora per ogni intorno contenuto in D U di z_0 $f(U \setminus \{z_0\})$ è denso in $\mathbb{C}$*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un intorno $U \subseteq D$ di x_0 tale che $f(U \setminus \{z_0\})$ non sia denso dunque

$$\exists a \in \mathbb{C} \ \exists R > 0 \text{ con } B(a, R) \cap f(U \setminus \{z_0\}) = \emptyset$$

Sia

$$g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \text{ con } g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

Dunque abbiamo che

$$\forall v \in U \quad |g(z)| = \frac{1}{|f(z) - a|} \leq \frac{1}{R}$$

Abbiamo dunque $g(z)$ limitata in un intorno di z_0 da cui z_0 è una singolarità eliminabile per z_0.
Abbiamo che g si estende ad una funzione olomorfa, che denotiamo ancora g, su tutto U.
Ma allora $f(z) = \frac{1}{g(z)} + a$ ha un polo in z_0 il che contraddice che z_0 sia una singolarità essenziale

Esempio 0.5. *La funzione $f(z) = e^{1/z}$ ha una singolarità essenziale in $z_0 = 0$*

Corollario 0.6. *Se z_0 è una singolarità essenziale per f allora* $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *non esiste*

Dimostrazione. Dal teorema di Weistrass, segue che per ogni $a \in \mathbb{C}$ allora posso costruire una successione $z_n \to z_0$ tale che $\lim_{n \to +\infty} f(z_n) = a$.

Definizione 0.3. Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ chiuso con $D^\circ \neq \emptyset$ e sia $\Gamma = \partial D$
Diciamo che D ha bordo C^1 a tratti se pet ogni Γ_i componente connessa di Γ

$\exists \gamma_i : J_i \to \Gamma_i$ C^1 a tratti dove $J_i \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e γ_i surgettiva iniettiva eccetto sugli estremi

Esempio 0.7.

- $D = \mathbb{R} \cup \overline{B(0,1)}$ *ha come bordo* $(-\infty, -1] \cup S^1 \cup [1, +\infty)$ *dunque non ha bordo* C^1 *a tratti*
- $D = \overline{B(0,1)}$ *ha* $\partial D = S^1$ *ed ha perciò bordo* C^1 *a tratti*
- $D_R = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| \leq R \; Im(z) \geq 0\}$ *con* $R > 0$ *ha bordo* C^1 *a tratti*

Le componenti di bordo di un sottoinsieme D con bordo C^1 a tratti si possono orientare canonicamente come segue

Definizione 0.4. Diciamo che $\gamma : J \to \Gamma'$ è positiva se $\forall t_0 \in J$ tale che $\gamma'(t_0)$ sia definita, il vettore $-i\gamma'(t_0)$ punta all'esterno di D in $\gamma(t_0)$

Definizione 0.5. Un vettore v "punta all'esterno di D " in $z_0 \in \partial D$ se

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \{t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \,|\, z_0 + tv \in D\} = [-\varepsilon, 0]$$

Definizione 0.6. Sia $R \subseteq D$ è un dominio con bordo C^1 di componenti connesse $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ con parametrizzazioni positive $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$.
Se ω è una 1-forma su D allora poniamo

$$\int_{\partial R} \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} \omega$$