**Lezione del 9 ottobre di Gandini**

# 1 Sottospazi topologici

**Definizione 1.1** (Topologia di sottospazio)**.**
Sia $X$ uno spazio topologico e $Y \subseteq X$.
La topologia indotta su $Y$ detta topologia di sottospazio è la topologia meno fine che rende continua l'inclusione $i : X \hookrightarrow Y$

*Osservazione* 1. La definizione è ben posta perchè l'intersezione di topologie che rendono $i$ continua è una topologia (meno fine) che rende $i$ continua

*Osservazione* 2. Sia $\tau_Y$ una topologia su $Y$

$$i \text{ continua } \Leftrightarrow U \cap Y = i^{-1}(U) \in \tau_Y \quad \forall U \in \tau_X$$

**Proposizione 1.1.** *Sia $Y \subseteq X$ sottospazio topologico.*

$$A \subseteq Y \text{ aperto } \Leftrightarrow A = U \cap Y \text{ con } U \subseteq X \text{ aperto}$$

*Dimostrazione.* $\Rightarrow$ $i^{-1}(U) = U \cap Y = A$ e dalla continuità di $i$ segue che $A$ è aperto.
$\Rightarrow$ In modo ovvio si verifica che $\tau = \{U \cap Y \,|\, U \subseteq X \text{ aperto }\}$ è una topologia, tale topologia rende continua $i$.
Dalla definizione di topologia di sottospazio si ha $\tau_{ssp} < \tau$ dunque $\forall A \in \tau_{ssp}$ si ha $A \in \tau$ ovvero $A = U \cap Y$ con $U$ aperto di $X$ □

*Osservazione* 3. Supponiamo $\mathfrak{B}$ base per la topologia su $X$.
Allora $\mathfrak{B}' = \{B \cap Y \mid B \in \mathfrak{B}\}$ è una base per la topologia di sottospazio su $Y$

**Proposizione 1.2.** *Sia $(X, d)$ metrico e $Y \subseteq X$.*
*Allora $(Y, d_{Y \times Y})$ é uno spazio metrico.*
*La topologia di sottospazio su $Y$ coincide con la topologia indotta dalla restrizione della distanza.*

**Definizione 1.2.** Sia $Y \subseteq X$ sottospazio metrico.
Allora diciamo che $Y$ è discreto se la topologia di sottospazio di $Y$ è quella discreta.
In modo equivalente: $\forall y \in Y \quad \exists U \subseteq X$ aperto tale che $U \cap Y = \{y\}$

**Proposizione 1.3** (Proprietà universale delle immersioni)**.**
*Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio topologico, $Z$ uno spazio topologico, $f : Z \to Y$ allora*

$$f \text{ continua } \Leftrightarrow i \circ f \text{ continua}$$

*Dimostrazione.* $\Rightarrow$ la funzione $i$ è continua per definizione, inoltre composizione di funzioni continue è continua da cui la tesi.
$\Leftarrow$ Sia $i \circ f$ continua.
Sia $A \subseteq Y$ un aperto allora $\exists U \subseteq X$ aperto tale che $A = U \cap Y$

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(U \cap Y) = f^{-1}(i^{-1}(U)) = (i \circ f)^{-1}(U)$$

che è aperto per ipotesi □

Il prossimo teorema ci fornisce il motivo per cui la propietà è detta universale

**Teorema 1.4.** *La proprietà universale caratterizza in modo unico la topologia di sottospazio di* $Y \subseteq X$.
*Vale a dire:*
*La topologia di sottospazio è l'unica topologia si* $Y$ *con la proprietà:*

$$\forall Z \text{ spazio topologico} \quad \forall f : Z \to Y$$

$$f \text{ continua} \quad \Leftrightarrow \quad i \circ f \text{ continua}$$

*Dimostrazione.* Abbiamo dimostrato che la topologia di sottospazio verifica la proprietà universale dobbiamo provare che è unica.
Indichiamo con $\tau_X$ la topologia su $X$ e con $\tau_{ssp}$ la topologia di sottospazio su $Y$.
Sia $\tau_Y$ una topologia su $Y$ che verifica la proprietà universale, abbiamo dunque il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & (X,\tau_X) \\ (Z,\tau_Z) \arrow[r, "f"] \arrow[ur, bend left, "i\circ f"] & (Y,\tau_Y) \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

- Prendiamo $(Z,\tau_Z) = (Y,\tau_{ssp})$ e $f = Id_Y$ ottenendo

$$\begin{tikzcd} & (X,\tau_X) \\ (Y,\tau_{ssp}) \arrow[r, hook, "id_Y"] \arrow[ur, bend left, "i"] & (Y,\tau_Y) \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

  Ora per definizione di topologia di sottospazio $i : (Y,\tau_{ssp}) \hookrightarrow (X,\tau_X)$ è continua dunque $id_Y : (Y,\tau_{ssp}) \to (Y,\tau_Y)$ è continua dunque $\tau_Y < \tau_{ssp}$

- Prendiamo $(Z,\tau_Z) = (Y,\tau_Y)$ e $f = Id_Y$ ottenendo

$$\begin{tikzcd} & (X,\tau_X) \\ (Y,\tau_Y) \arrow[r, "id_Y"] \arrow[ur, bend left, "i"] & (Y,\tau_Y) \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

  Ora $id_Y : (Y,\tau_Y) \to (Y,\tau_Y)$ è continua quindi per la proprietà universale risulta continua anche $i : (Y,\tau_Y) \hookrightarrow (X,\tau_X)$ dunque poiché $\tau_{ssp}$ è la meno fine topologia che rende continua l'inclusione sicuramente $\tau_{ssp} < \tau_Y$

Valgono entrambe le inclusione dunque $\tau_Y = \tau_{ssp}$ $\square$

Possiamo dare una nuova definizione, equivalente alla precedente

**Definizione 1.3.** La topologia di sottospazio è l'unica topologia su $Y$ con la prooietà universale

## 2 Applicazioni aperte e chiuse

**Definizione 2.1.** Sia $f : X \to Y$ continua, allora

- $f$ è detta mappa aperta se $f(A)$ è un aperto $\forall A$ aperto
- $f$ è detta mappa chiusa se $f(C)$ è un chiuso $\forall C$ chiuso

**Esempio 2.1.** *Sia $X = (a, b)$.*
*$(a, b) \hookrightarrow \mathbb{R}$ non è chiusa infatti $(a, b)$ è un chiuso in $X$ ma $(a, b)$ (tutto l'insieme è sempre un chiuso) non è un chiuso in $\mathbb{R}$. La funzione è invece aperta*
*$[a, b] \hookrightarrow \mathbb{R}$ in modo analogo è chiusa ma non aperta*
*$[a, b) \hookrightarrow \mathbb{R}$ non è aperta e nemmeno chiusa*

*Osservazione* 4. $f$ continua e bigettiva $\not\Rightarrow$ $f$ omeomorfismo

*Osservazione* 5. $f : X \to Y$ continua e bigettiva, allora

$$f \text{ omeomorfismo} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ aperta} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ chiusa}$$

Dove il secondo $\Leftrightarrow$ deriva dal fatto che gli assiomi di aperto e di chiuso sono tra loro equivalenti

## 3 Immersioni

**Definizione 3.1** (Immersione)**.**
Sia $f : X \to Y$ continua e iniettiva.
$f$ è detta immersione (topologica) se

$$A \subseteq X \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad \exists U \subseteq Y \text{ aperto} \quad A = f^{-1}(U)$$

in modo equivalente se

$$C \subseteq X \text{ chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad \exists Z \subseteq Y \text{ chiuso} \quad C = f^{-1}(Z)$$

**Esempio 3.1.** *Supponiamo $X \subseteq Y$ allora*

$$i : X \hookrightarrow Y \textit{ immersione} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_X = \tau_{ssp}$$

*Osservazione* 6. $f : X \to Y$ è un immersione se e solo se l'applicazione indotta $\tilde{f} : X \to f(X)$ è un omeomorfismo ($f(X)$ è dotato della topologia di sottospazio)

**Proposizione 3.2.** *Sia $f : X \to Y$ continua. Allora:*

1. *$f$ chiusa e iniettiva $\Leftrightarrow$ $f$ immersione chiusa $\Leftrightarrow$ $f$ immersione con $f(X)$ chiuso*
2. *$f$ aperta e iniettiva $\Leftrightarrow$ $f$ immersione aperta $\Leftrightarrow$ $f$ immersione con $f(X)$ aperto*

*Dimostrazione.* Dimostriamo la proposizione 1 l'altra è analoga

- Chiaramente

$$f \text{ chiusa e iniettiva} \Leftarrow f \text{ immersione chiusa} \Rightarrow f \text{ immersione con } f(X) \text{ chiuso}$$

- $f$ è iniettiva e chiusa $\Rightarrow$ $f$ immersione chiusa.
  Sia $C \subseteq X$ chiuso.
  Essendo $f$ chiusa $f(C)$ è un chiuso di $Y$.
  Inoltre essendo $f$ iniettiva $f^{-1}(f(A)) = A$ per $A \subseteq X$ dunque:

  $$C \subseteq X \text{ chiuso} \quad \Rightarrow \quad \exists Z = f(C) \subseteq Y \text{ chiuso} \quad f^{-1}(Z) = C$$

  Inoltre $f^{-1}(Z)$ con $Z$ chiuso in $Y$ è un chiuso di $X$ essendo la funzione $f$ continua

- $f$ immersione con $f(X)$ chiuso $\Rightarrow$ $f$ immersione chiusa.
  Sia $C \subseteq X$ un chiuso, allora $f(C) = Z \cap f(X)$ con $Z \subseteq Y$ chiuso, infatti, dall'osservazione precedente

  $$\tilde{f} : X \to f(X) \text{ è un omeomorfismo dove } f(X) \text{ ha la topologia di sottospazio}$$

  Ora $f(X)$, per ipotesi, è chiuso dunque anche $C = Z \cap f(X)$ è chiuso e quindi $f$ è chiusa

$\square$

# 4 Sottospazi e assiomi di numerabilità

*Osservazione* 7. Sia $X$ uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ con la topologia di sottospazio

- $X$ secondo-numerabile $\Rightarrow$ $Y$ secondo-numerabile.
  Segue dalla forma della base della topologia di sottospazio (Osservazione 3)
- $X$ primo-numerabile $\Rightarrow$ $Y$ primo-numerabile.
- $X$ metrico separabile $\Rightarrow$ Y metrico separabile.
  Segue dal fatto che $X$ metrico separabile $\Leftrightarrow$ $X$ secondo-numerabile e
  $X$ secondo numerabile $\Rightarrow$ $Y$ secondo-numerabile
- $X$ separabile $\not\Rightarrow$ $Y$ separabile.
  Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la topologia di Sorgenfrey: generata dagli insiemi $[a, b) \times [c, d)$.
  $\mathbb{R}^2$ con questa topologia è separabile infatti $\mathbb{Q}^2$ è numerabile e denso.
  Consideriamo l'insieme $Z = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
  Osserviamo che ogni punto di $Z$ è intersezione di $Z$ con un aperto quindi $Z$ con la topologia di sottospazio è omeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topologia discreta, per l'osservazione precedente $Z$ non può essere separabile.