Lezione del 24 ottobre del prof. Frigerio

Lemma 0.1. *Un'unione di chiusi localmente finiti è un chiuso*

Dimostrazione. Sia $\{C_i\}_{i\in I}$ una famiglia localmente finita di chiusi.

$$\forall x \in X \quad \exists U_x \subseteq X \text{ aperto che contiene } x \quad U_x \text{ interseca solo un numero finito di } C_i$$

Sia $\mathfrak{U}$ il ricoprimento aperto così definito

$$\mathfrak{U} = \{U_x\}_{x\in X}$$

Essendo $\mathfrak{U}$ un ricoprimento aperto, è fondamentale quindi

$$\bigcup_{i\in I} C_i \text{ chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) \cap U_x \text{ chiuso in } U_x \quad \forall x \in X$$

Poichè la famiglia è localmente finita allora fissato x

$$\exists i_1, \dots, i_n \quad U_x \cap \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = U_x \cap (C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_n})$$

Tale insieme è chiuso in U_x poichè unione finita di chiusi è chiusa □

Corollario 0.2. *Se $\{Y_i\}_{i\in I}$ è una famiglia localmente finita*

$$\overline{\bigcup_{i\in I} Y_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{Y_i}$$

Dimostrazione. In ogni caso vale $\supseteq$ infatti

$$\forall j \in I \quad Y_j \subseteq \bigcup_{i\in I} Y_i \quad \Rightarrow \quad \overline{Y_j} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} Y_i} \quad \forall j \in I \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i\in I} \overline{Y_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} Y_i}$$

Se la famiglia degli Y_i è localmente finito allora anche la famiglia degli $\overline{Y_i}$ lo è.
Sia V un aperto che contiene x allora essendo la famiglia degli Y_i localmente finita

$$\exists A \subseteq N \text{ finito} \quad V \cap Y_a \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad a \in A$$

Proviamo che se $a \notin A$ allora $\overline{Y_a} \cap V = \emptyset$ infatti poichè

$$\overline{Y_a} = \{x \in X \,|\, U \cap Y_a \neq \emptyset \quad \forall U \in I(x)\}$$

se $y \in V$ allora $V \in I(y)$ e $V \cap Y_a = \emptyset$ dunque $y \notin \overline{Y_a}$.
Ora $\bigcup_{i\in I} \overline{Y_i}$ è un chiuso che contiene $\bigcup_{i\in I} Y_i$ quindi

$$\overline{\bigcup_{i\in I} Y_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{Y_i}$$

□

Teorema 0.3.

$$\mathfrak{U} \text{ ricoprimento chiuso e localmente finito} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{U} \text{ ricoprimento fondamentale}$$

Dimostrazione. Sia $\{C_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento chiuso localmente finito.
Sia $Z \subseteq X$ tale che $Z \cap C_i$ è chiuso in C_i $\forall i \in I$.
Però C_i è un chiuso, e chiuso di un chiuso di X è chiuso in X, quindi $Z \cap C_i$ è chiuso in X $\forall i$.
La famiglia $\{X \cap C_i\}_{i\in I}$ è una famiglia localmente finita di chiusi quindi per il lemma 0.1

$$Z = \bigcup_{i\in I} (Z \cap C_i)$$

è chiuso in X quindi la tesi □

1 Connessione e connessione per archi

Definizione 1.1 (Sconnessione)**.**
Uno spazio topologico X si dice sconnesso se vale uno delle seguenti condizioni equivalenti

(i) $X = A \amalg B$ con A, B aperti non vuoti

(ii) $X = A \amalg B$ con A, B chiusi non vuoti

(iii) $\exists A \subseteq X$ con $A \neq \emptyset, X$ sia aperto che chiuso

Osservazione 1. Mostriamo le equivalenze.

- (i) $\Rightarrow$ (ii) $X = (X \backslash A) \amalg (X \backslash B)$.
  A, B aperti $\Rightarrow$ i loro complementari sono chiusi
- (ii) $\Rightarrow$ (i) si dimostra come nel caso precedente
- (i) $\Rightarrow$ (iii) Se A è aperto allora $X \backslash A = B$ è chiuso, ma B per ipotesi è aperto
- (iii) $\Rightarrow$ (i) $X \backslash A$ è aperto essendo A chiuso inoltre $X = A \amalg (X \backslash A)$ con entrambi aperti

Definizione 1.2 (Connesso)**.**
X spazio topologico è connesso se non è connesso.

$$\forall A \subseteq X \quad A \neq \emptyset \quad A \text{ aperto e chiuso si ha } A = X$$

Esempio 1.1. $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ *è sconnesso in quanto unione degli aperti* $(-\infty, 0)$ *e* $(0, +\infty)$

Teorema 1.2. $[0, 1]$ *è connesso.*

Dimostrazione. Siano A, B aperti non vuoti di $[0, 1]$ tali che

$$[0, 1] = A \amalg B$$

Posso supporre $0 \in A$ e poichè A è aperto

$$\exists \varepsilon > 0 \quad [0, \varepsilon) \subseteq A$$

Sia $t_0 = \inf B$ (esiste essendo B non vuoto e limitato inferiormente) inoltre $t_0 \geq \varepsilon >$.
Essendo B chiuso allora $t_0 \in B$ infatti esiste una successione di B convergente all'estremo inferiore.
Essendo B aperto e poichè $t_0 > 0$ si ha $(t_0 - \delta, t_0] \subseteq B$ ma ciò contraddice il fatto che t_0 è l'estremo inferiore

Definizione 1.3 (Connessione per archi)**.**
X si dice connesso per archi se

$$\forall x_0, x_1 \in X \quad \exists \alpha : [0, 1] \to X \text{ continua} \quad \alpha(0) = x_0 \quad \alpha(1) = x_1$$

Proposizione 1.3.

$$X \textit{ connesso per archi} \quad \Rightarrow \quad X \textit{ connesso}$$

Dimostrazione. Se X fosse sconnesso allora $X = A \amalg B$ con A, B aperti non vuoti.
Sia $x_0 \in A$ e $x_1 \in B$ Se il cammino $\alpha : [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$ fosse continua allora avrai una partizione

$$[0,1] = \alpha^{-1}(A) \amalg \alpha^{-1}(B) \text{ in aperti non vuoti}$$

Ma ciò è assurdo essendo $[0,1]$ connesso, non si puó partizionare in aperti disgiunti non vuoti. □

Proposizione 1.4. *Sia $f : X \to Y$ continua*

1. *X connesso $\Rightarrow f(X)$ connesso*
2. *X connesso per archi $\Rightarrow f(X)$ connesso per archi*

Dimostrazione.

1. La funzione $f : X \to f(X)$ è continua per la propietà universale della topologia di sottospazio.
   Supponiamo che $f(X) = A \amalg B$ con A, B aperti non vuoti allora $X = f^{-1}(A) \amalg f^{-1}(B)$ ovvero X è sconnesso
2. Essendo X connesso per archi $\exists \alpha : [0,1] \to X$ continuo, se considero il cammino

   $$(f \circ \alpha :) [0,1] \to f(X)$$

   è continuo

Lemma 1.5. *Sia X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ connesso*

$$\forall Z \subseteq \quad Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y} \quad \Rightarrow \quad Z \text{ connesso}$$

Dimostrazione. Osserviamo che Y è denso in Z infatti la chiusura di Y in Z è $\overline{Y} \cap Z = Z$.
Sia $\emptyset \neq A \subseteq Z$ un aperto e chiuso, allora $A \cap Y$ è sia aperto che chiuso in Y.
Ora essendo Y denso in Z ne segue che $A \cap Y \neq \emptyset$ dunque, per connessione di Y, deve essere $A \cap Y = Y$ cioè $Y \subseteq A$.
Ora essendo Y denso in Z anche A lo è dunque $\overline{A} = Z$ ma A è anche chiuso dunque $A = Z$ □

Corollario 1.6. *Y connesso $\Rightarrow \overline{Y}$ connesso*

Dimostrazione. Valgono le seguenti inclusioni $Y \subseteq \overline{Y} \subseteq \overline{Y}$ dunque concludo usando il lemma precedente

Lemma 1.7. *Sia $\{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottospazi connessi di X tali che $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$ allora*

$$Y = \bigcup_{i \in I} Y_i \text{ è connesso}$$

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \bigcap_{i \in I} Y_i$ e $A \neq \emptyset$ aperto e chiuso di Y.
A meno di sostituire A con $Y \setminus A$ posso supporre $x_0 \in A$

$$\forall i \in I \quad A \cap Y_i \text{ è non vuoto (contiene } x_0\text{) , aperto e chiuso di } Y_i$$

Dalla connessione di Y_i segue che $A \cap Y_i = Y_i$ cioè $Y_i \subseteq A$

$$Y = \bigcup_{i \in I} Y_i \subseteq A \quad \Rightarrow \quad Y = A$$

□

Definizione 1.4 (Componente connessa)**.**
Sia X spazio topologico e $x_0 \in X$ allora indichiamo con $C(x_0)$ e lo chiamiamo componente connessa di x_0: il più grande sottospazio connesso di X che contiene x_0

Proposizione 1.8. *Sia $x_0 \in X$ allora esiste la componente connessa*

Dimostrazione. Sia

$$C(x_0) = \bigcup \{Y \mid Y \subseteq X \text{ connessp che contiene } x_0\}$$

Osserviamo che tale unione non è vuota infatti $\{x_0\}$ è connesso.
Per il lemma 1.7 $C(x_0)$ è connesso (tutti i sottospazi che unisco contengono x_0) ed inoltre contiene qualsiasi connesso che contiene x_0

Proposizione 1.9. *Le componenti connesse realizzano una partizione di X in chiusi*

Dimostrazione. Le componenti connesse ricoprono infatti $\forall x \in X$ allora $x \in C(x)$.
Vediamo che le componenti connesse non disgiunte sono uguali.
Sia $x_0, x_1 \in X$ tali che $C(x_0) \cap C(x_1) \neq \emptyset$ dunque per il lemma 1.7 $C(x_0) \cap C(x_1)$ è connesso.
Ora

$$\begin{cases} C(x_0) \cap C(x_1) \subseteq C(x_0) \\ C(x_0) \cap C(x_1) \subseteq C(x_1) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C(x_0) = C(x_1) \text{ per massimalità}$$

Mostriamo, infine che le componenti connesse sono chiuse.
Per il corollario 1.6 $\overline{C(x)}$ è un connesso che contiene x_0 quindi

$$\overline{C(x)} \subseteq C(x) \quad \Rightarrow \quad \overline{C(x)} = C(x)$$

Osservazione 2. Se $\emptyset \neq A$ è aperto e chiuso. A è una componente connessa.
Sia $A \supseteq B$ è connesso allora A è un aperto e chiuso non vuoto di B allora $A = B$ per cui A è un connesso massimale da cui è una componente massimale

Osservazione 3. Le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ sono i punti ovvero $C(x) = \{x\}$ $\forall x \in \mathbb{Q}$.
In questo caso si dice che $\mathbb{Q}$ è totalmente sconnesso.
Per assurdo supponiamo che esista una componente connessa C che contiene x_0 e x_1.
Sia $y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tale che $x_0 < y < x_1$ allora

$$C = (C \cap (-\infty, y)) \amalg (C \cap (y, +\infty))$$

dunque C si partiziona in modo non banale in aperti, ovvero è sconnesso (assurdo)

Osservazione 4. Le componenti connesse, in generale, non sono aperte.
I punti di $\mathbb{Q}$ non sono aperti)