Lezione del 20 Novembre di Gandini

Teorema 0.1 (del numero di Lebegue).
Sia (X, d) uno spazio metrico compatto.
Sia $\mathfrak{U}$ un ricoprimento aperto di X

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists U \in \mathfrak{U} \quad B(x, \varepsilon) \subseteq U$$

Dimostrazione. Sia

$$X_n = \{x \in X \mid \exists U \in \mathfrak{U} \quad B\left(x, 2^{-n}\right) \subseteq U\}$$

la tesi è dunque equivalente a dire che $X_n = X$ per un certo $n \in \mathbb{N}$ Osserviamo che $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ infatti $\mathfrak{U}$ è un ricoprimento aperto.
Osserviamo, inoltre, $X_n \subseteq X_{n+1}$, in realtà vale che

$$X_n \subseteq X_{n+1}^{\circ}$$

infatti preso $x \in X_n$ si ha $B\left(x, 2^{-n}\right) \subseteq U$ con $U \in \mathfrak{U}$.
Mostriamo adesso che $B\left(x, 2^{-(n+1)}\right) \subseteq X_{n+1}$ da cui $x \in X_{n+1}^{\circ}$.
Sia $y \in B\left(x, 2^{-(n+1)}\right)$ dunque $d(y, x) < 2^{-(n+1)}$.
Sia $z \in B\left(y, 2^{-(n+1)}\right)$ da cui $d(z, y) < 2^{-(n+1)}$.
$d(x, z) < 2^{-n}$ ovvero $z \in B\left(x, 2^{-n}\right)$.
Abbiamo provato che

$$y \in B\left(x, 2^{-(n+1)}\right) \quad \Rightarrow \quad y \in X_{n+1} \quad \Rightarrow \quad X_n \subseteq X_{n+1}^{\circ}$$

Dunque $\{X_n^{\circ}\}$ è un ricoprimento aperto e data la compattezza di X posso estrarre un sottoricoprimento finito, dunque posso estrarre il massimo (gli aperti sono inscatolati), da cui $X = X_n^{\circ}$ da cui la tesi ☐

Definizione 0.1 (Uniforme continuità).
Sia $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una funzione tra spazi metrici, f è uniformemente continua se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon \text{ se } d_X(x, , x') \leq \delta$$

Teorema 0.2 (Heine-Cantor).
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici con X compatto.

$$f : X \to Y \text{ continua} \quad \Rightarrow \quad f \text{ uniformemente continua}$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ cerchiamo un $\delta > 0$ tale che

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right) \ \forall x \in X \text{ ossia per cui } B(x, \delta) \subseteq f^{-1}\left(B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

Applichiamo il teorema del numero di Lebague al ricoprimento aperto

$$\mathfrak{U} = \left\{f^{-1}\left(B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right\}_{x \in X}$$

da cui $\exists \delta > 0$ tale che

$$\forall x \in X \quad \exists U \in \mathfrak{U} \quad B(x, \delta) \subseteq U$$

in modo equivalente

$$\forall x \in X \quad \exists x' \in X \quad B(x, \delta) \subseteq f^{-1}\left(B\left(f(x'), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

Sia $y \in B(x, \delta)$ allora

$$f(y) \in B\left(f(x'), \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ e } f(x) \in B\left(f(x'), \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

da cui $d_y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ ☐

Sia X un insieme arbitrario e Y spazio metrico completo

$$B(X,Y) = \{f : X \to Y \text{ limitate}\}$$

Mostriamo che $B(X,Y)$ è completo con la distanza

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d_y(f(x), g(x))$$

Sia $\{f_n\} \subseteq B(X,Y)$ una successione di Cauchy allora proviamo che $f_n \to f$.
Essendo la successione di Cauchy $\forall x \in X$ anche $\{f_n(x)\} \subseteq Y$ è di Cauchy e per completezza di Y ammette un limite in Y, sia $f(x) = \lim f_n(x)$.
Proviamo che f così definita è limitata

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x')) + d_Y(f_n(x') + f(x'))$$

Tale distanza è limitata infatti poichè f_n converge a f puntualmente $d_Y(f_n(x), f(x))$ e $d_Y(f_n(x'), f(x'))$ sono limitate ed essendo f_n limitata anche $d_Y(f_n(x), f_n(x'))$ lo è.
Mostriamo che $f_n \to f$ in d_∞

$$d_\infty(f, f_n) = \sup_{x \in X} d_y(f(x), f_n(x))$$

ora

$$d_Y(f(x), f_n(x)) = d_Y\left(\lim_{m \to \infty} f_m(x), f_n(x)\right)$$

Essendo $d_Y(\cdot . f_n(x))$ continua si ha

$$d_Y(f(x), f_n(x)) = \lim_{n \to \infty} d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad n \geq n_0$$

infatti la successione è di Cauchy dunque $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $d_\infty(f, f_n) \leq \varepsilon$ per $n \geq n_0$.
Abbiamo provato che $B(X,Y)$ è completo in dd_∞

Esercizio 0.3. *Supponiamo, adesso, X topologico e poniamo*

$$C_B(X,Y) = \{f \in B(X,Y) \text{ continue}\}$$

Allora $C_B(X,Y)$ è chiuso dunque C_B con d_∞ completo.
Inoltre se $\{f_n\} \subseteq C_B(X,Y)$ di Cauchy con limite $f \in B(X,Y)$ allora f è continua