Lezione del 4 Ottobre di Gandini.

Esercizio 0.1 (Topologia di Zariski)**.**
Sia $\mathbb{K}$ un campo e $\mathfrak{F} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ allora definiamo

$$V(\mathfrak{F}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{F}$$

ovvero $\mathfrak{F}$ è una famiglia di polinomi in n indeterminate con coefficienti in $\mathbb{K}$ e $V(\mathfrak{F}$ è il luogo di zeri della famiglia di polinomi.
Definiamo una topologia su $\mathbb{K}^n$ nel seguente modo

$$C \subseteq \mathbb{K}^n \textit{ chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathfrak{F} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \quad C = V(\mathfrak{F})$$

ovvero i chiusi sono tutti e soli i luoghi di zeri di famiglie di polinomi.
Mostriamo che è una topologia

- $\emptyset = V(1)$ *ovvero del polinomio sempre costante ad* 1
  $\mathbb{K}^n = V(0)$ *ovvero del polinomio costantemente nullo*
- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{F}_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right)$
- $V(\mathfrak{F}_1) \cup V(\mathfrak{F}_2) = V(\mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2)$ *dove* $\mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2 = \{f_1 f_2 \mid f_1 \in \mathfrak{F}_1,\ f_2 \in \mathfrak{F}_2\}$
  $\subseteq$ *Sia* $a \in V(\mathfrak{F}_1) \cup V(\mathfrak{F}_2)$ *allora*

  $$f_1(a) = 0 \quad \forall f_1 \in \mathfrak{F}_1 \quad f_2(a) = 0 \quad \forall f_2 \in \mathfrak{F}_2 \quad \Rightarrow \quad (f_1 f_2)(a) = 0 \quad \forall f_1 \in \mathfrak{F}_1 \forall f_2 \in \mathfrak{F}_2$$

  $\supseteq$ *Sia* $a \in \mathbb{K}^n \backslash (V(\mathfrak{F}_1) \cup V(\mathfrak{F}_2)$ *allora*

  $$\exists f_1 \in \mathfrak{F}_1\ f_1(a) \neq 0 \quad \exists f_2 \in \mathfrak{F}_2\ f_2(a) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (f_1 f_2)(a) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \notin V(\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2)$$

Osservazione 1.

$$D(f) = \{a \in \mathbb{K}^n \mid f(a) \neq 0\}$$

È un aperto in quanto $D(f) = \mathbb{K}^n \backslash V(f)$
Una base per questa topologie è

$$\{D(f) \mid f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}$$

infatti $\mathbb{K}^n \backslash V(\mathfrak{F}) = \displaystyle\bigcup_{f \in \mathfrak{F}} D(f)$

Osservazione 2. Se prendiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora la topologia di Zariski è meno fine della topologia euclidea infatti le funzioni polinomiali sono continue nella topologia quindi

$$D(f) = f^{-1}(\mathbb{R} \backslash \{0\}) \text{ ora } \mathbb{R} \backslash \{0\} \text{ è un aperto quindi } D(f) \in \tau_{eucl}$$

Osservazione 3. Per $n = 1$ la topologia di Zariski è la topologia cofinita

Se C è un chiuso nella topologia cofinita diverso da $\mathbb{K}$ allora C è finito ovvero $C = \{a_1, \dots, a_n\}$.
Presa $\mathfrak{F} = \{x - a_1, \dots, x - a_n\}$ otteniamo $C = V(\mathfrak{F}$ dunque è un chiuso in Zariski.
Sia C un chiuso nella topologia di Zariski diverso da $\mathbb{K}$ allora $C = V(\mathfrak{F})$ allora per $f \in \mathfrak{F}$ abbiamo $V(f)$ finito infatti f ha al più $\deg f$ radici

Esercizio 0.2. $\mathbb{R}$ *con la topologia di Sorgenfray è primo-numerabile ma non secondo-numerabile*
Sia $x \in \mathbb{R}$ *allora*

$$\mathfrak{B}_x = \left\{ \left[x, x + \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

è un sistema fondamentale di intorni per x *numerabile.*
Mostriamo che $\mathbb{R}_S$ *non è secondo numerabile.*
Sia $\mathfrak{B}$ *una base di* $\mathbb{R}_S$
Sia $a \in \mathbb{R}$ *allora* $[a, a+1)$ *è aperto dunque è unione di elementi di* $\mathfrak{B}$ *ovvero*

$$\exists B_a \in \mathfrak{B} \quad a \in B_a \subseteq [a, a+1)$$

dunque $\mathfrak{B} \supset B' = \{B_a \,|\, a \in \mathbb{R}\}$ *ora* $\mathfrak{B}'$ *non è numerabile essendo i* B_a *disgiunti dunque anche* $\mathfrak{B}$ *non è numerabile*

Osservazione 4. Abbiamo anche dimostrato che $\mathbb{R}_s$ non è metrizzabile, se X è metrico:
X primo-numerabile $\Rightarrow$ X secondo-numerabile

Osservazione 5. La topologia cofinita su un insieme più che numerabile non soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e supponiamo che $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia un sistema fondamentale di intorni dunque $X \backslash U_n$ è finito infatti

$$U_n \text{ intorno } \Rightarrow \exists A_n \subseteq U_n \text{ aperto} \quad \Rightarrow \quad X \backslash A_n \text{ chiuso dunque finito}$$

Ora $X \backslash A_n \subseteq X \backslash U_n$ dunque finito.

$$X \backslash U_n \text{ finito } \Rightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \backslash U_n \text{ numerabile}$$

Ora essendo X più che numerabile esiste y nel complementare di $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \backslash U_n$.
$X \backslash \{y\}$ è un aperto che contiene x dunque è un intorno di x da cui

$$\exists n \quad U_n \subseteq U$$

Inoltre $y \in X \backslash U \subseteq X \backslash U_n$

$$X \backslash U = \{y\} \subseteq X \backslash U_n \not\ni y$$

ma ciò è un assurdo

1 Intorni e continuità

Definizione 1.1. Sia $f : X \to Y$ una funzione tra spazi topologici e sia $x_0 \in X$.
f si dice continua in x_0 se

$$\forall V \text{ intorno di } f(x_0) \quad \exists U \text{ intorno di } x_0 \quad f(U) \subseteq V$$

ovvero

$$\forall V \text{ intorno di } f(x_0) \quad f^{-1}(V) \text{ è intorno di } x_0$$

Proposizione 1.1.

$$f \textit{ continua} \quad \Leftrightarrow \quad f \textit{ continua in ogni suo punto}$$

dove f continua è intesa con la definizione "La controimmagine di aperti è un aperto"

Dimostrazione. $\Leftarrow$ Sia V un aperto

$$f^{-1}(V) \text{ aperto } \Leftrightarrow f^{-1}(V) \in I(x) \quad \forall x \in f^{-1}(V)$$

infatti A è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.
$\forall x \in f^{-1}(V)$

$$V \text{ aperto} \quad \Rightarrow \quad V \in I(f(x)) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(V) \in I(x)$$

$\Rightarrow$ Sia $x_0 \in X$.
Sia $V \in I(f(x_0))$ dobbiamo provare che $f^{-1}(V) \in I(x_0)$

$$V \in I(f(x_0)) \quad \Rightarrow \quad \exists V' \subseteq Y \text{ aperto} \quad f(x_0) \in V' \subseteq V$$

Ora $f^{-1}(V')$ essendo f continua è un aperto quindi

$$x_0 \in f^{-1}(V') \subseteq f^{-1}(V) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(V) \in I(x_0)$$

□

Definizione 1.2. Sia X uno spazio topologico e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione allora

$$\{x_n\} \text{ converge a } x \in X \text{ se } \forall V \text{ intorno di } x \quad \exists n_0 \quad \text{t. c .} \quad x_n \in V \quad \forall n \geq n_0$$

Proposizione 1.2. *Sia X primo-numerabile e sia $C \subseteq X$ allora*

$$C \textit{ chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{per ogni successione } \{x_n\} \subseteq C \textit{ convergente a } x \in X \textit{ allora } x \in C$$

Dimostrazione.

$$\overline{C} = \{x \in X \,|\, U \cap C \neq \emptyset \quad \forall U \in I(x)\}$$

$\Rightarrow$ sia $\{x_n\}$ convergente a $x_0 \in X$.
Basta dimostrare che $x_0 \in C = \overline{C}$ ovvero che $U \cap C \neq \emptyset$ con $U \in I(x_0)$.
Dalla definizione di convergenza

$$\forall U \in I(x_0) \quad \exists n_0 \quad x_n \in U \quad \forall n \geq n_0$$

dunque $x_n \in U$ per infiniti n, ora la successione ha valori in C dunque $U_n \cap C \neq \emptyset$
$\Leftarrow$ Sia $x \in \overline{C}$, vediamo che $x \in C$.
Per ipotesi basta costruire una successione $\{x_n\} \subseteq C$ convergente a x.
Sia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale numerabile di intorni di x_0.

$$V_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \quad \Rightarrow \{V_n\} \text{ è un sistema fondamentale di } x_0 \text{ con } V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$$

Poichè $x \in \overline{C}$ allora $V_n \cap C \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Sia $x_n \in V_n \cap C$ e sia $\{x_n\}$ la successione così costruita allora

- $\{x_n\} \subseteq C$
- $\{x_n\}$ converge a x infatti

$$\forall U \in I(x) \quad \exists n_0 \quad V_{n_0} \subseteq U \text{ allora } x_n \in V_n \subseteq V_{n_0} \subseteq U \quad \forall n \geq n_0$$

□

Proposizione 1.3. *Sia X primo-numerabile e sia $A \subseteq X$ allora*

$$A \textit{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{per ogni successione } \{x_n\} \subseteq X \textit{ convergente a } x \in A \textit{ allora } x_n \in A \quad \forall n \geq n_0$$

Proposizione 1.4. *Siano X, Y spazi topologici primo-numerabile e $f : X \to Y$*

$$f \textit{ continua} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \{x_n\} \subseteq X \textit{ convergente a } x \in X \textit{ allora } \{f(x_n)\} \subseteq \textit{ è convergente a } f(x) \in Y$$