Lezione del 4 aprile

1 Indice di avvolgmento

Fissato $a \in \mathbb{C}$, sappiamo che $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ si ritrae per deformazione su un cerchio di raggio 1 e centro a, preso x_0 sul bordo del cerchio ($x_0 \in \partial B(a,1)$), fissiamo un isomorfismo canonico

$$f : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a\}, x_0) \to \mathbb{Z} \quad [\gamma] \to 1$$

dove γ è una parametrizzazione di $\partial B(a,1)$ che percorre la circonferenza in senso antiorario.
Come già osservato esiste una bigezione naturale

$$\Omega(x_0, x_0) \to \Omega(S^1, x_0) \quad \gamma \to \hat{\gamma}$$

Questa bigezione induce un omomorfismo

$$\partial : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a\}, x_0) \to [S^1, \mathbb{C} \setminus \{a\} \quad [\gamma] \to [\hat{\gamma}]$$

dove con $[S', \mathbb{C} \setminus \{a\}]$ intendiamo le classi di omotopie di mappe continue $S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ Tale mappa risulta suriettiva ed inoltre $\partial([\gamma]) = \partial([\gamma'])$ se e solo se $[\gamma]$ e $[\gamma']$ sono coniugati.
Ora $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a\}, x_0)$ è abeliano, dunque la mappa è iniettiva.
Definiamo per composizione la mappa

$$\psi : \partial^{-1} \circ f : [S^1, \mathbb{C} \setminus \{a\}] \to \mathbb{Z}$$

Definizione 1.1. Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ un cammino chiuso in x_0.
Denotiamo indice di γ rispetto ad a l'intero $\psi([\hat{\gamma}])$ e lo denotiamo con $I(\gamma, a)$

Teorema 1.1. *Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ un cammino chiuso. Allora*

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi 1} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

Dimostrazione. Come sappiamo $\frac{1}{z-a}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ dunque la forma $\omega = \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$ è chiusa.
Possiamo integrare ω lungo curve γ continue, e il valore dell'integrale non dipende dal rappresentante nella classe di omotopia, dunque è ben definita la funzione

$$\varphi : [S^1, \mathbb{C} \setminus \{a\}] \to \mathbb{C}$$

$$[\hat{\gamma}] \to \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \omega$$

Mostriamo che $\varphi = \psi$ il che conclude la dimostrazione.
Notiamo che

$$[S^1, \mathbb{C} \setminus \{a\}] = \{[\hat{\gamma_n}] : \gamma_n : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{a\} \text{ dove } t \to a + e^{2\pi i n t}\}$$

dunque $\psi([\hat{\gamma_n}]) = n$ (avvolto n volte).
Ora abbiamo visto che

$$\int_{\gamma_n} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi i n$$

da cui la tesi

Osservazione 1. Banalmente, 2 curve chiuse continue in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ liberamente omotope hanno lo stesso indice

Vediamo come varia l'indice al variare del punto a

Proposizione 1.2. *Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa continua.*
Allora la funzione

$$\mathbb{C} \setminus Im\gamma \to \mathbb{C} \quad a \to I(\gamma, a)$$

è localmente costante (costante su ogni componente connessa del dominio)

Dimostrazione. Fissato a nel dominio. Mostriamo che $\forall h \in \mathbb{C}$ sufficientemente piccolo si ha $I(\gamma, a+h) = I(\gamma, a)$.
Sia

$$0 < \gamma_0 < \min\{|\gamma(t) - a| \, : \, t \in [0,1]\}$$

è ben posto in quanto $|\gamma(t) - a| \neq 0$ poichè $a \notin Imm\gamma$.
Per ogni $h \in \mathbb{C}$ con $|h| \leq \gamma_0$ abbiamo

$$I(\gamma, a+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - (a+h)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-h) - a}$$

Con il cambio di variabili $z' = z - h$ otteniamo

$$I(\gamma, a+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{\mathrm{d}z'}{z' - a} \text{ dove } \gamma'(t) = \gamma(t) + h$$

Il che conclude la dimostrazione infatti

$$F(t,s) = \gamma(t) - sh$$

è un omotopia tra γ e γ'

Proposizione 1.3. *Sia $a \in \mathbb{C}$ e sia γ una curva chiusa continua tale che $Im\gamma \subseteq D \subseteq \mathbb{C} \setminus \{a\}$ dove D aperto semplicemente connesso.*
Allora $I(\gamma, a) = 0$

Dimostrazione. La forma $\omega = \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$ è chiusa in un semplicemente connesso, dunque esatta da cui

$$I(\gamma, a) = \int_\gamma \omega = 0$$

□

Proposizione 1.4. *Sia γ una curva chiusa continua e sia $a \in \mathbb{C} \setminus Imm\gamma$.*
$I(\gamma, a) = 0$ per ogni a in una componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus Imm\gamma$

Esempio 1.5. *Sia $\gamma : t \to Re^{it}$ con $R > 0$ allora*

- $|z| < R$ *allora* $I(\gamma, z) = 1$
- $|z| > R$ *allora* $I(\gamma, z) = 0$

Proposizione 1.6. *Sia*

$$f : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\} \to \mathbb{C}$$

una mappa continua e sia $\gamma(t) = f(Re^{2\pi it})$ *per* $t \in [0, 1]$.
Se $a \notin Imm\gamma$ *e* $I(\gamma, a) \neq 0$ *allora esiste* z *con* $|z| < R$ *tale che* $f(z) = a$

Dimostrazione. Assumiamo, per assurdo $f(z) \neq a$ per ogni $|z| < R$, dunque di conseguenza $f(z) \neq a$ per ogni $|\leq| R$ (abbiamo supposto $a \notin Imm\gamma$).
Definiamo

$$F(t, s) = f(tRe^{2\pi i}) \quad \forall t, s \in [0, 1]$$

F è un omotopia tra γ e il cammino costante $f(0)$ dunque γ è omotop ad un cammino costante da cui

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a} = 0$$

contro l'ipotesi $I(\gamma, a) \neq 0$

Definizione 1.2. Siano γ_1, γ_2 due curve continue, allora

$$\gamma_1\gamma_2 : t \to \gamma_1(t)\gamma_2(t)$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 : t \to \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$$

Teorema 1.7. *Siano γ_1, γ_2 due curve continue chiuse con $0 \notin Imm\gamma_1, \gamma_2$ allora*

$$I(\gamma_1\gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$$

Dimostrazione. La forma $\omega = \frac{\mathrm{d}z}{z}$ ammette una primitiva locale, sia

$$f_i : [0,1] \to \mathbb{C} \quad e^{f_i(t)} = \gamma_i(t)$$

allora

$$\gamma_1\gamma_2(t) = e^{f_1(t)}e^{f_2(t)} = e^{f_1(t)+f_2(t)}$$

dunque $f = f_1 + f_2$ è una primitiva di ω lungo $\gamma_1\gamma_2$ da cui

$$I(\gamma_1\gamma_2, 0) = \frac{f_1(1) + f_2(1) - f_1(0) - f_2(0)}{2\pi i} = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$$

Teorema 1.8. *Siano γ, γ_1 curve chiuse continue tali che $0 \notin Imm\gamma_1, \gamma$.*
Assumiamo che $0 \leq |\gamma_1(t)| \leq |\gamma|(t)$ per ogni $t \in [0,1]$. Allora

$$I(\gamma_1 + \gamma, 0) = I(\gamma, 0)$$

Dimostrazione.

$$\gamma(t) + \gamma_1(t) = \gamma(t)\left(1 + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)}\right) = \gamma(t)\beta(t)$$

dunque

$$I(\gamma_1 + \gamma, 0) = I(\gamma\beta, 0) = I(\gamma, 0) + I(\beta, 0)$$

Mostriamo che $I(\beta, 0) = 0$ infatti $Imm\beta \subseteq D(1,1)$ dunque $Im\beta$ contenuto in un aperto semplicemente connesso . □

Teorema 1.9 (Formula integrale di Cauchy)**.**
Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto con $a \in D$ sia

$$\gamma : [0,1] \to D \setminus \{a\}$$

un cammino chiuso omotopicamente banale in D e tale che $a \notin Imm\gamma$.
Sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = I(\gamma, a)f(a)$$

Dimostrazione. Per ogni $z \in D$ definisco la funzione

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \text{ se } z \neq a \\ f(a) \text{ se } z = a \end{cases}$$

essendo f olomorfa, g è continua in a ed è olomorfa in $D \setminus r$ con r la retta orizzontale che passa per a.
Per un teorema visto $g(z)\,\mathrm{d}z$ è chiusa in D.
Visto che γ è omotopicamente banale in D e $g(z)\,\mathrm{d}z$ è chiusa si ha

$$0 = \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z - f(a)\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

dividendo per $2\pi i$ si ha la tesi □