Lezione del 11 Dicembre del Prof. Frigerio

Osservazione 1. Con un abuso, notazionale, d'ora in poi indicheremo con $\alpha \star \beta \star \gamma$ il cammino $(\alpha \star \beta) \star \gamma$ o il cammino $\alpha \star (\beta \star \gamma)$, il che non crea problemi a meno di riparametrazione, dunque a meno di omotopie di cammini, stessa convenzione per giunzioni multiple

Lemma 0.1. *1_a è l'elemento neutro*

Dimostrazione. $1_a \star \alpha$ e $\alpha \star 1_a$ sono riparametrazione di α $\forall \alpha \in \Omega(a,a)$

$$[1_a] \cdot [\alpha] = [1_a \star \alpha] = [\alpha] = [\alpha \star 1_a] = [\alpha] \cdot [1_a]$$

Lemma 0.2. *Sia $\alpha \in \Omega(a,a)$ allora $\overline{\alpha}$ è l'inverso di α*

Dimostrazione. Mostriamo che $\alpha \star \overline{\alpha} \sim 1_a$.

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) \text{ se } t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(s) \text{ se } \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \overline{\alpha}(2t-1) \text{ se } t > 1 - \frac{s}{2} \end{cases}$$

In modo analogo si prova che $\overline{\alpha} \star \alpha \sim 1_a$ □

Teorema 0.3. *Abbiamo dimostrato che $\pi_1(X,a)$ dotato dell'operazione $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha \star \beta]$ è un gruppo.*
Tale gruppo prende il nome di gruppo fondamentale

Osservazione 2. D'ora in avanti, se non diversamente esplicitato, assumiamo X connesso per archi (in quanto se Y è la componente connnessa per archi di a in X allora $\pi_1(X,a) \cong \pi_1(Y,a)$)

Definizione 0.1. Siano $a, b \in X$ e sia $\gamma \in \Omega(a,b)$.
Poniamo

$$\gamma_\sharp : \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b) \qquad \gamma_\sharp([\alpha]) = [\overline{\gamma} \star \alpha \star \gamma]$$

Osservazione 3. Osserviamo che $\gamma_\sharp$ è ben definita.

$$\alpha \sim \beta \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma} \star \alpha \sim \overline{\gamma} \star \beta \quad \Rightarrow \quad \overline{\gamma} \star \alpha \star \gamma \sim \overline{\gamma} \star \beta \star \gamma$$

Teorema 0.4. *$\gamma_\sharp$ è un isomorfismo di gruppi*

Dimostrazione. Mostriamo che è un omomorfismo di gruppi

$$\gamma_\sharp([\alpha] \cdot [\beta]) = \gamma_\sharp([\alpha \star \beta]) = [\overline{\gamma} \star \alpha \star \beta \star \gamma] = [\gamma \star \alpha \star (\gamma \star \overline{\gamma}) \star \beta] = [(\overline{\gamma} \star \alpha \star \gamma) \star (\overline{\gamma} \star \beta \star \gamma)] = \gamma_\sharp([\alpha]) \cdot \gamma_\sharp([\beta])$$

$\overline{\gamma}_\sharp$ è l'inversa di $\gamma_\sharp$ infatti

$$\overline{\gamma}_\sharp\left(\gamma_\sharp([\alpha])\right) = \overline{\gamma}_\sharp\left([\overline{\gamma} \star \alpha \star \gamma]\right) = \left[\left(\overline{\overline{\gamma}} \star \gamma\right) \star \alpha \star (\gamma \star \overline{\gamma})\right] = [1_a \star \alpha \star 1_a] = [\alpha]$$

Analogamente si mostra che vale $\gamma_\sharp\left(\overline{\gamma}_\sharp([\beta])\right) = [\beta]$

Corollario 0.5. *Il tipo di isomorfismo trovato precedentemente non dipende da a, per cui a volte si parla di "gruppo fondamentale di X" e lo si denota con $\pi_1(X)$*

Definizione 0.2.
$$\Omega(S^1, a) = \{\gamma : S^1 \to X \text{ con } \gamma(1) = a\}$$
dove $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ da cui $1 \in S^1$ è $(1,0) \in \mathbb{R}^2$

Esiste una bigezione canonica tra $\Omega(a,a)$ e $\Omega(S^1, a)$.
Se $\alpha \in \Omega(a,a)$ poichè $\alpha(0) = \alpha(1)$, α definisce
$$\hat{\alpha} : \frac{[0,1]}{\{0,1\}} \to X$$
continua.
Identifichiamo $\frac{[0,1]}{\{0,1\}}$ con S^1 $(t \to e^{2\pi i t})$ da cui
$$\hat{\alpha} : S^1 \to X$$
e$\hat{\alpha}(1) = a$.
L'invero di $\alpha \to \hat{\alpha}$è $\alpha(t) = \hat{\alpha}\left(e^{2\pi i t}\right)$

Lemma 0.6. *Sia $Q = [0,1] \times [0,1]$ e $C = \{s = 1\} \cup \{t = 0\} \cup \{t = 1\}$ (t, s sono le coordinate di Q)*
$$\frac{Q}{C} \cong D^2$$
tramite un omeomorfismo che manda $[t, 0]$ in $e^{2\pi i t}$

Proposizione 0.7. $\alpha \in Omega(a,a)$
$$[\alpha] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\alpha} \textit{ si estende in mondo continuo a } D^2$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ se $\alpha \sim 1_a$ allora esiste
$$H : Q \to X \quad H(t,0) = \alpha(t) \text{ e } H(C) = \{a\}$$
H definisce per passaggio al quoziente
$$\tilde{H} : \frac{Q}{C} \to X$$
e tramite l'identificazione del lemma precedente otteniamo
$$\tilde{H} : D^2 \to X$$
Osserviamo che si ha $\tilde{H}_{|S^1} = \hat{\alpha}$ dunque $\hat{\alpha}$ si estende a D^2
$\Leftarrow$ Se $\hat{\alpha}$ si estende a $f : D^2 \to X$.
La mappa $H : Q \to X$ data da $H = f \circ \pi$ ($\pi : Q \to \frac{Q}{C} = D^2$) da un'omotopia a estremi fissi tra α e 1_a $\square$

Corollario 0.8. *Sia $P \subseteq \mathbb{R}^2$ un poligono convesso con lati $l_1, \cdots, l_n$ parametrizzati da $\varphi_i : [0,1] \to l_i$ e sia $\theta : \partial P \to X$ e poniamo $\alpha_i = \theta \circ \varphi_i$*
$$\alpha_1 \star cdots \star \alpha_n \sim 1_{\alpha_1(0)} \quad \Leftrightarrow \quad \theta \textit{ si estende in modo continuo a } P$$

Dimostrazione. Esiste un omeomorfismo $f : P \to D^2$ con $f(\partial P) = S^1$ per cui la tesi segue da quanto già visto $\square$