Lezione del 16 Marzo

Teorema 0.1. *Sia $p: E \to X$ rivestimento regolare, allora*

$$Aut(E) \cong \frac{\pi_1(X,x)}{p_\star(\pi_1(E,\tilde{x}))}$$

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo che il termine di destra è un gruppo, il sottogruppo per cui stiamo quozientando è normale (essendo il rivestimento regolare).
Sia $\vartheta : \pi_1(X,x) \to Aut(E)$ tale che $\forall \alpha \in \pi_1(X,x)$ definiamo $\vartheta(\alpha)$ come l'unico elemento di $Aut(E)$ tale che $\vartheta(\alpha)(\tilde{x}) = \tilde{x} \centerdot \alpha$.
Osserviamo che tale isomorfismo esiste in quanto il rivestimento è regolare (azione è transitiva) ed è unico poichè l'azione è libera.
Mostriamo che ϑ è un omomorfismo

$$(\vartheta(\alpha_1)\vartheta(\alpha_2))(\tilde{x} = \vartheta(\alpha_1)(\tilde{x} \centerdot \alpha_2) = (\vartheta(\alpha_1)(\tilde{x})) \centerdot \alpha_2 = (\tilde{x} \centerdot \alpha_1) \centerdot \alpha_2$$

Dove la seconda uguaglianza deriva dal fatto che l'azione di monodromia è quella indotta da $Aut(E)$ commutano
Mostriamo che ϑ è suriettivo.
Se $\varphi \in Aut(E)$ poichè l'azione di monodromia è transitiva, $\exists \alpha \in \pi_1(X,x)$ con $\tilde{x} \centerdot \alpha = \varphi(\tilde{x})$, dunque $\vartheta(\alpha) = vp$ in quanto i due isomorfismi coincidono su $\tilde{x}$ ($Aut(E)$ agisce in maniera libera).
Mostriamo che $Ker\vartheta = p_\star(\pi_1(E,\tilde{x}))$, da cui per il primo teorema di isomorfismo si ha la tesi.
Poichè $Aut(E)$ agisce liberamente si ha

$$\vartheta(\alpha) = Id \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta(\alpha)(\tilde{x}) = \tilde{x} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{x} \centerdot \alpha = \tilde{x} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in p_\star(\pi_1(E,\tilde{x}))$$

□

Corollario 0.2.

$$p: E \to X \text{ regolare} \quad \Rightarrow \quad X \cong \frac{X}{Aut(E)}$$

Dimostrazione. Essendo aperto e suriettivo p è un'identificazione, per cui $X \cong \frac{X}{\sim}$ dove

$$\tilde{x} \sim \tilde{y} \quad \Leftrightarrow \quad p(\tilde{x}) = p(\tilde{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{x} = \varphi(\tilde{y})\, \exists \varphi \in Aut(E)$$

dove per l'ultima implicazione abbiamo usato il fatto che $\varphi \circ p = p$ e in quanto $Aut(E)$ agisce in maniera transitiva sulle fibre

Vale una sorta di viceversa

Proposizione 0.3. *Se G agisce in maniera propriamente discontinua su uno spazi connesso E allora la proiezione $p: E \to \frac{E}{G}$ è un rivestimento regolare*

Dimostrazione. Dato $x \in \frac{E}{G}$ devo costruire un intorno ben rivestito U.
Scelgo $\tilde{x} \in E$ con $p(\tilde{x}) = x$, dalla definizione di azione propriamente discontinua, $\exists V \subseteq X$ aperto che contiene $\tilde{x}$ tale che $\gamma(V) \cap V = \emptyset$, $\forall \gamma \in G \backslash \{Id\}$
Pongo $U = p(V)$ che è aperto (le proiezioni al quoziente per azioni di gruppi sono aperte).
Per costruzione $p^{-1}(U) = \bigcup_{\gamma \in G} \gamma(V)$ ora $\gamma(V)$ è aperto (γ è omeomorfismo) e l'unione è disgiunta.

$$\gamma_1(V) \cap \gamma_2(V) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad V \cap (\gamma_1^{-1}\gamma_2(V)) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \gamma_1^{-1}\gamma_2 = Id \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_2$$

Infine $p_{|\gamma(V)}$ è un omeomorfismo su U in quanto è continua, aperta, suriettiva e iniettiva

Osservazione 1. Un rivestimento universale è regolare.
$p_\star(\{1\}) = \{1\} \triangleleft \pi_1(X, x)$

Corollario 0.4. *Sia* $p : E \to X$ *un rivestimento universale, allora* $Aut(E) \cong \pi_1(X, x)$

Corollario 0.5. *Se* E *è semplicemente connesso e* G *agisce su* E *in maniera propriamente discontinua,* $\pi_1\left(\frac{E}{G}\right) \cong G$

Esempio 0.6.

1. $S^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ *ora essendo* $\mathbb{R}$ *semplicemente connesso si ha* $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$
2. $(S^1)^n = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$ *da cui* $\pi_1((S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$
3. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{S^n}{\{\pm Id\}}$ *dunque se* $n \geq 2$ *allora* $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \{\pm Id\} = \mathbb{Z}_2$

Definizione 0.1.
X spazio topologico connesso per archi si dice **semilocalemente semplicemente connesso** se

$$\forall x \in X \ \exists U \subseteq X \text{ aperto con } x \in X \quad i : U \to X \text{ induce il morfismo banale } i_\star : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$$

ovvero $\forall x \in X \ \exists U \ni x$ tale che tutti i lacci basati in x e contenuti in U sono banali in X

Osservazione 2. La propietà sopra definita è verificata, ad esempio, se ogni punto ha un intorno semplicemente connesso

Osservazione 3. Se X ammette un rivestimento universale, allora è semilocalmente semplicemente connesso.
Dato $x \in X$, posso prendere un suo intorno U connesso per archi e ben rivestito.
Se $p : E \to X$ è il rivestimento universale $V \subseteq p^{-1}(U)$ è un aperto con $p_{|V} : V \to U$ omeomorfismo dunque abbiamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "p_{|V}"] & E \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[u, bend left, "s"] & X \end{tikzcd}$$

da cui $i = p \circ j \circ s$ dunque $i_\star = p_\star \circ j_\star \circ s_\star$ ma $j_\star$ è banale in quanto lo è $\pi_1(E)$ da cui $i_\star$ è banale

Lemma 0.7. *Quando esiste, il rivestimento universale è unico a meno di isomorfismi*

Dimostrazione. Siano $p_1 : E_1 \to X$ e $p_2 : E_2 \to X$ rivestimenti universali di X.
Abbiamo dunque:

$$\begin{tikzcd} & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ E_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & X \end{tikzcd}$$

dove l'esistenza di φ ($p_2 \circ \varphi = p_1$) deriva dal fatto che E_1 è semplicemente connesso.
Fissati $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x)$ e $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x)$ posso richiedere $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.
In modo analogo $\exists\, \psi : E_2 \to E_1$ con $p_1 \circ \psi = p_2$ e $\psi(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$
Ne segue che φ e ψ sono isomorfismi l'uno l'inverso dell'altro

Teorema 0.8. *X spazio topologico localmente connesso per archi e connesso*

$$X \text{ ammette rivestimento universale} \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ semilocalmente semplicemente connesso}$$

inoltre, in tal caso il rivestimento è unico

Dimostrazione. $\Rightarrow$ già visto
$\Leftarrow$ Fissato $x \in X$. Si definisce $E = \dfrac{\bigcup_{y \in X} \Omega(x, y)}{\sim}$ dove $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se e solo se sono omotopi come cammini.
Si topologizza $\bigcup\limits_{y \in X} \Omega(x, y)$tale insieme con la topologia compatta-aperta e si dota E della topologia quoziente.
Sia $p : E \to X$ dove $p([\gamma]) = \gamma(1)$

Teorema 0.9. *X connesso e semilocalmente semplicemente connesso per archi, $x \in X$*
$\forall H < \pi_1(X, x)$ esiste $p : E \to X$ tale che $p_\star(\pi_1(E, \tilde{x})) = H$ dove $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.
Tale rivestimento è unico

Dimostrazione. Sia $g : \widetilde{X} \to X$ il rivestimento universale di X e fissiamo $\widetilde{\widetilde{x}} \in g^{-1}(x)$.
Abbiamo un isomorfismo $\pi_(X, x) \to Aut(\widetilde{X})$, con un abuso di notazione denoto anche con H la copia di H in $Aut(\widetilde{X})$, pongo $E = \frac{\widetilde{X}}{H}$

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & E = \frac{\widetilde{E}}{H} \arrow[r, "p"] & X = \frac{\widetilde{X}}{\pi_1(X,x)} \end{tikzcd}$$

Si verifica facilmente che p è un rivestimento (un aperto ben rivestito rispetto a g lo è anche rispetto a p)
Inoltre se $\tilde{x} = \pi\left(\widetilde{\widetilde{x}}\right) \in E$ abbiamo $p_\star(\pi_1(E, \tilde{x})) = Stab(\tilde{x})$ rispetto all'azione di monodromia.
Dato $\alpha \in \pi_1(X, x)$ con $\alpha = [\gamma]$ siano
$\widetilde{\gamma}$ e $\widetilde{\widetilde{\gamma}}$ i sollevamenti di γ in E a partire da $\tilde{x}$ e $\widetilde{\widetilde{x}}$ così che $\widetilde{\gamma} = \pi \circ \widetilde{\widetilde{\gamma}}$
Ora $\widetilde{x} \centerdot \alpha = \widetilde{\gamma}(1) = \pi\left(\widetilde{\widetilde{\gamma}}(1)\right)$ che è uguale a $\tilde{x}$ se e solo se $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(1)$ è equivalente a $\widetilde{\widetilde{x}}$ tramite l'azione di H che equivale alla tesi

Sia Γ un grafo finito connesso avente V vertici e E lati

- Γ è un albero se non contiene cicli, cioè loop iniettivi
- Un albero è contraibile (induzione sul numero di vertici: un albero deve avere un vertice libero, è possibile retrarre per deformazione il lato che lo contiene sul resto dell'albero)
- Se Γ è un albero allora $V - E = 1$ (induzione: ogni retrazione toglie un vertice e un lato, si finisce con un vertice e 0 lati)
- Γ conesso allora contiene Γ' albero massimale che contiene tutti i vertici di Γ
$$\Gamma = \Gamma' \cup \{ \text{ qualche lato}\}$$
- Definisco $\chi(\Gamma) = V - E$ che prende il nome di caratteristica di Eulero.
Se $\Gamma' \subset \Gamma$ massimale allora $\chi(\Gamma') = 1$ e $\Gamma = \Gamma' \cup \{(1 - \chi(\Gamma)) \text{ lati}\}$

Teorema 0.10.
$$\pi_1(\Gamma) \cong F_{1-\chi(\Gamma)}$$

Dimostrazione. Si dimostra usando induttivamente Van Kampen e dal fatto che Γ si ottiene da un albero massimale aggiungendo $1 - \chi(\Gamma)$ lati

Teorema 0.11. *F gruppo libero su n generatori, $H < F$ di indice k.*
Allora H è un gruppo libero su $k(n-1)+1$ generatori

Dimostrazione. $F = \pi_1(\Gamma)$ con $\chi(\Gamma) = 1 - n$ per il teorema appena visto.
Sia $\widetilde{\Gamma}$ il rivestimento di Γ associato ad H.
Poichè vertici e lati sono semplicemente connessi, se V, E sono i vertici ed i lati di Γ allora i vertici di $\widetilde{\Gamma}$ sono kV e kE in quanto il grado del rivestimento è k da cui $H = \pi_1(\widetilde{\Gamma}) = F_{1-\chi(\widetilde{\Gamma})} = F_{1+k(n-1)}$ $\square$