Lezioni del 27 Febbraio del prof. Frigerio

Osservazione 1. Siano $p\, E \to X$ rivestimento, $F = p^{-1}(x)$ e $x_0 \in X$.
La monodomia $F \times \pi_1(X, x_0) \to F$ è transitiva $\Leftrightarrow$ E connesso.

Dimostrazione. $\Leftarrow$ Dati $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in F$ se E è connesso per archi

$$\exists \tilde{\gamma} :\ [0,1] \to E \text{ con } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{x_0} \text{ e } \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x_1}$$

Posto $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ per come è definita l'azione si ha

$$\tilde{x_0} \centerdot [\gamma] = \tilde{\gamma}_{\tilde{x_0}}(1) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x_1}$$

$\Rightarrow$ Poichè l'azione è transitiva presi 2 punti in F allora esiste un cammino che collega questi 2 punti.
Sia $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in E$, pongo $x_0 = p(\tilde{x_0})$ e $x_1 = p(\tilde{x_1})$.
Poichè $x_0, x_1 \in X$ che è connesso per archi, esiste un arco γ che li connette, sollevando γ a partire da $\tilde{x_0}$otteno un arco che collega $\tilde{x_0}$ a $\tilde{y}$.
Per definizione di rivestimento $\tilde{y}$ e $\tilde{x_1}$ sono nella stessa fibra e dunque sono connessi da un arco.

Definizione 0.1. $p : E \to X$ rivestimento, si dice universale se E è semplicemente connesso.

Proposizione 0.1. *$p : E \to X$ rivestimento universale.*
Siano $x_0 \in X$ e $\tilde{x_0} \in F = p^{-1}(x_0)$ allora

$$\psi :\ \pi_1(X, x_0) \to F \quad \psi([\gamma]) = x_0 \centerdot [\gamma]$$

è una bigezione

Dimostrazione. Poichè E è connesso per archi, la surgettività discenda dal fatto che l'azione è transitiva.
Mostriamo che è iniettiva

$$\psi([\gamma_1]) = \psi([\gamma_2]) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{x_0} \centerdot [\gamma_1] = \tilde{x_0} \centerdot [\gamma_2] \quad \Leftrightarrow \quad (\tilde{\gamma_1})_{\tilde{x_0}}(1) = (\tilde{\gamma_2})_{\tilde{x_0}}(1)$$

Poichè E è semplicemente connesso $(\tilde{\gamma_1})_{\tilde{x_0}} \sim (\tilde{\gamma_2})_{\tilde{x_0}}$ (come cammini) dunque $\gamma_1 = p \circ (\tilde{\gamma_1})_{\tilde{x_0}}$ e $\gamma_2 = p \circ (\tilde{\gamma_2})_{\tilde{x_0}}$ sono omotopi come cammini da cui $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ $\square$

Teorema 0.2. $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Dimostrazione. Come abbiamo osservato $p : \mathbb{R} \to S^1$ tale che $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ è un rivestimento .
Poniamo $F = p^{-1}((1,0))$ dunque $F = \mathbb{Z}$.
Poniamo

$$\psi :\ \pi_1\left(S^1, (1,0)\right) \to \mathbb{Z} \quad \psi([\gamma]) = 0 \centerdot [\gamma]$$

Poichè $\mathbb{R}$ è contraibile, è semplicemente connesso dunque ψ è una bigezione.
Mostriamo che è anche un omomorfismo di gruppi.
Dati $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, (1,0))$ ho che

$$\psi([\alpha] \cdot [\beta]) = \psi([\alpha \star \beta]) = \left(\alpha \tilde{\star} \beta\right)_0 (1) = \tilde{\alpha}_0 \star \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1)$$

Ora $\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}$ e $\tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0$ sono entrambi sollevamenti di β a partire dallo stesso punto iniziale ($\tilde{\alpha}_0(1)$ è un numero è indica di quanto occorre "traslare") infatti

$$p\left(\tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0(t)\right) = p\left(k + \tilde{\beta}_0(t)\right) = p\left(\tilde{\beta}_0(t)\right) = \beta(t)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che la funzione p è intero-periodica.
Concludiamo, osservando,

$$\psi([\alpha \star \beta]) = \left(\tilde{\alpha_0}(1) + \tilde{\beta}_0\right)(1) = \tilde{\alpha_0}(1) + \tilde{\beta}_0(1) = \psi([\alpha]) + \psi([\beta])$$

Osservazione 2. Tramite $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ l'elemento $n \in \mathbb{Z}$ è rappresentato da $\gamma(t) = (\cos(2n\pi t), \sin(2n\pi t))$ in quanto $\tilde{\gamma}_0(t) = nt$ e $\tilde{\gamma}_0(1) = n$.
γ è un laccio che fa n giri di S^1

Proposizione 0.3. *$R \subseteq X$ retratto. Allora $\forall x_0 \in R$ si ha $i_\star$ iniettiva e $r_\star$ surgettiva*

Dimostrazione. Poichè $r \circ i = Id_R$ si ha $(r \circ i)_\star = Id_{\pi_1(R,x_0)} = r_\star \circ i_\star$.

Corollario 0.4. *$S^1 = \partial D^2$ non è un retratto di D^2*

Dimostrazione. Essendo D^2 convesso è contraibile, dunque semplicemente connesso.

Teorema 0.5 (del punto fisso di Brower).
Sia $f : D^2 \to D^2$ continua allora f ha un punto fisso

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, $f(x) \neq x \ \forall x \in D^2$.
Mostriamo come costruire una retrazione $r : D^2 \to S^1$.
Cerco $t \geq 0$ tale che $||f(x) + t(x - f(x))||^2 = 1$.
Pongo dunque $r(x) = f(x) + t(x - f(x))$.
Mostriamo che t dipende in modo continuo da X.
t si ottiene risolvendo

$$1 = ||f(x)||^2 + 2t\langle f(x), x - f(x)\rangle + t^2 \, ||x - f(x)||^2$$

che è un'equazione di secondo grado, i cui coefficienti dipendono in modo continuo da x .
La soluzione che ci interesse è quella della forma $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ perchè voglio $t \geq 0$ e so che $a > 0$
Per costruzione si ha che $r(x) \in S^1 \ \forall x \in D^2$ e $r(x) = x \ \forall x \in S^1$ dunque è una retrazione, il che è assurdo per il corollario precedente

Osservazione 3. La funzione costruita nel teorema è la funzione che associa ad x il punto d'intersezione tra la semiretta uscente da $f(x)$ e passante da x con S^1

Esercizio 0.6. *La funzione $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ data da $f(z) = z^n$ è un rivestimento di grado n*

Teorema 0.7. *Dati X, Y allora si ha $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$*

Dimostrazione. Siano π_X e π_Y le proiezioni canoniche, $i: X \to X \times Y$ e $j: Y \to X \times Y$ date da $i(x) = (x, 1)$ e $j(y) = (1, y)$.
Pongo

$$\psi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \quad \psi([\alpha]) = ((\pi_X)_\star ([\alpha]), (\pi_Y)_\star ([\alpha]))$$

ψ è un ben definito omomorfismo di gruppi.
Mostriamo che è suriettivo.
Dati $\beta \in \mathbb{P}1_(X, x_0)$ e $\gamma \in \pi_1(Y, y_0)$, pochè

$$\pi_X \circ i = Id_X \text{ e } \pi_Y \circ i = \text{costante}_{y_0}$$

si ha

$$(\pi_X)_\star (i_\star(\beta)) = \beta \text{ e } (\pi_Y)_\star (i_\star(\beta)) = 1$$

similmente si prova che

$$(\pi_X)_\star (j_\star(\gamma)) = 1 \text{ e } (\pi_Y)_\star (j_\star(\gamma)) = \gamma$$

da cui $\psi (i_\star(\beta) \cdot j_\star(\gamma)) = (\beta, \gamma)$
Mostriamo l'iniettività .
Sia $\psi(\alpha) = 1$ con $\alpha = [(\gamma_1, \gamma_2)]$ dove

$$\gamma_1 : [0, 1] \to X \quad \gamma_2 : [0, 1] \to Y$$

Se H_1 è un omotopia tra γ_1 e c_{x_0} (a valori in X) e H_2 è un omotopia tra γ_2 e c_{y_0} allora la mappa

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \to X \times Y \quad H(t, s) = (H_1(t, s), H_2(t, s))$$

mostra che $\alpha = 1$

□

Corollario 0.8.

$$\pi_1 \left(S^1 \times S^1\right) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$