Lezione del 9 aprile

Teorema 0.1 (di Liouville)**.** *Una funzione intera limitata è costante*

Dimostrazione. Essendo f intera si ha $f(z) = \sum a_n z^n$ e tale serie ha raggio di convergenza infinito.
Dal disuguaglianza di Cauchy si ha

$$\forall r, \forall n \geq 0 \quad |a_n| \, r^n \leq M(r)$$

Inoltre essendo f limitata, esiste $M > 0$ con $|f(z)| \leq M$ dunque

$$|a_n| \, r^n \leq M \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \forall r \geq 0, \forall n \geq 0$$

dunque per $r \to +\infty$ si ha $|a_n| \to 0$ per $n \geq 1$ da cui $f(z) = a_0$

Teorema 0.2 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.**
Sia $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio non costante.
Allora ammette almeno uno zero.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $P(z)$ non si annulli da cui $\frac{1}{P(z)}$ è intera.
Assumiamo

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \text{ con } a_n \neq 0$$

quindi

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right)$$

Per $|z| \to +\infty$ si ha $P(z) \to +\infty$ da cui $\left| \frac{1}{P(z)} \right| \to 0$
Dunque $\exists R > 0$ con $\left| \frac{1}{P(z)} \right|$ limitata per $|z| > R$
D'altra parte anche $\left| \frac{1}{P(z)} \right|$ definita su $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ è limitata (funzione continua su un compatto).
Ora per il teorema di Louville otteniamo $\frac{1}{P(z)}$ è costante dunque anche $P(z)$ lo è, in contraddizione con l'ipotesi □

1 Proprietà del valor medio

Definizione 1.1. Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f : D \to \mathbb{C}$ continua.
Diciamo che f ha la proprietà del valor medio (PVM) se

$$\forall a \in D \quad \exists r_0 > 0$$

tale che

1. $$\{z \mid |z-a| < r_0\} \subseteq D$$

2. $$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\vartheta}\right) \mathrm{d}\vartheta \text{ per ogni} 0 \leq r < r_0$$

Osservazione 1. Se f ha la proprietà del valor medio, anche $Re(f)$ e $Im(f)$ lo hanno

Osservazione 2. Se f è olomorfa, f ha la proprietà del valor medio.
Sia f olomorfa in D e $a \in D$, dunque dalla formula integrale di Cauchy abbiamo

$$f(a)I(\gamma, a) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z$$

dove $\gamma : \vartheta \to a + r_0^{2i\vartheta}$ per $\vartheta \in [0, 2\pi]$ e r_0 è tale che $\{z \mid |z-a| \leq r_0\} \subseteq D$.
Tale curva ha indice di avvolgimento 1 da cui

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(a + r_0e^{i\vartheta}\right)}{a + r_0e^{i\vartheta} - a} a + r_0ie^{i\vartheta} \,\mathrm{d}\vartheta$$

Concludiamo notando che la stessa formula vale per ogni $0 \leq r < r_0$

Teorema 1.1 (Principio del massimo modulo)**.**
Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : D \to \mathbb{C}$ una funzione continua che ha la proprietà del massimo modulo.
Se $|f|$ ha un massimo relativo in un punto $a \in D$ allora f è costante in un intorno di a

Dimostrazione. Se $f(a) = 0$ allora $|f(z)| \leq |f(a)| = 0$ per z sufficientemente vicino ad a e dunque $f(z) = 0$ in un intorno di a.
Consideriamo adesso il caso $f(a) \neq 0$, possiamo inoltre supporre $f(a) \in \mathbb{R}$ e $f(a) > 0$ (se $f(a) = \alpha e^{i\beta}$ allora lo rimpiazzo con $e^{-i\beta}f(a)$.
Siano $u = Re(f)$ e $v = Im(f)$ e sia $r_0 > 0$ tale che

1. r_0 è come nella definizione della proprietà del massimo modulo
2. $|f(z)| \leq |f(a)|$ per $z \in B(a, r_0)$

Dunque se pongo

$$M(r) = \sum\{|f(z)| : |z-a| = r\} \text{ per } 0 \leq r < r_0$$

si ha che $M(r) \leq |f(a)|$ per ogni $0 \leq r < r_0$ infatti ciò segue dalla proprietà 2 sopra esposta.
Inoltre poichè f soddisfa la proprietà del massimo modulo otteniamo

$$f(a) = |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \left|f\left(a + re^{i\vartheta}\right)\right| \mathrm{d}\vartheta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M(r)\,\mathrm{d}\vartheta = M(r) \quad \text{ per } 0 \leq r < r_0$$

dunque otteniamo $f(a) = M(r)$ dunque poichè $f(a) \in \mathbb{R}$ otteniamo

$$\int_0^{2\pi} \left[M(r) - u\left(a + re^{i\vartheta}\right)\right] \, \mathrm{d}\vartheta = 0$$

Sia

$$g(\vartheta) = M(r) - u\left(a + re^{i\vartheta}\right)$$

ora $g(\vartheta) \geq 0$ in quanto $M(r) \leq |f(s)|$.
Abbiamo dunque definito una funzione g non negativa su $[0, 2\pi]$ e tale che il suo integrale su $[0, 2\pi]$ sia nullo dunque g è costante su tale intervallo ovvero

$$M(r) = u\left(a + re^{i\vartheta}\right) \tag{1}$$

Usando la definizione di $M(r)$ otteniamo

$$M(r) \geq \left|f\left(a + re^{i\vartheta}\right)\right| = \left(u\left(a + re^{i\vartheta}\right)^2 + v\left(a + re^{i\vartheta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

dunque dall'uguaglianza 1 otteniamo

$$M(r) \leq \left(M(r)^2 + v\left(a + re^{i\vartheta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad v\left(a + re^{i\vartheta}\right) = 0$$

Concludendo otteniamo che $\forall z$ tale che $|z - a| < r_0$ vale

$$f(z) = u(z) = M(|z|) = f(a)$$

Corollario 1.2. *Sia D un aperto connesso e limitato.*
Sia f una funzione continua su $\overline{D}$ che la proprietà del valor medio su D.
Sia $M = \sup\{|f(z)| : z \in \partial D\}$ allora

- $|f(z)| \leq M$ *per ogni* $z \in D$
- *Se* $\exists a \in D$ *tale che* $|f(a)| = M$ *allora* f *è costante su* D

Dimostrazione. Sia

$$M' = \sup\{|f(z)| : z \in \overline{D}\}$$

allora chiaramente si ha $M' \geq M$ inoltre M' è finito infatti $|f|$ è continua su un compatto, da cui $\exists a \in \overline{D}$ con $|f(a)| = M'$.
Andiamo a distinguere 2 casi

- Se $a \in D$ allora per il principio del massimo modulo si ha che f è costante su un intorno di a. Sia

  $$D' = \{z \in D : |f(z)| = |f(a)|$$

  Ora D' è preimmagine di $|f(a)|$ dunque è chiuso.
  Mostriamo che D' è aperto, il che conclude $D' = D$.
  Se $a' \in D$ dunque $|f(a')| = M$ allora con gli stessi argomenti usati nella dimostrazione della proprietà del massimo modulo si osserva che

  $$f(z) = f(a') \text{ per } |z - a| < r'_0$$

  dunque D è aperto.
  Essendo f continua su $\overline{D}$ si ha f costante su $\overline{D}$ da cui $M = M'$

- $a \notin D$ allora $a \in \partial D$ dunque otteniamo $M' \leq |f(a)| = M'$ ma poichè $M \leq M'$ si ha la tesi

Corollario 1.3 (Principio del massimo modulo per funzioni olomorfe)**.**
Sia f olomorfa su un aperto connesso D.
Se f non è costante su D allora $|f|$ non ha massimo relativo in D
Inoltre se D è limitata ed f continua in $\overline{D}$ allora $|f|$ ammette massimo nel bordo di D

Dimostrazione. Essendo f olomorfa, f ha la proprietà del valor medio .
Se $|f|$ ha un massimo relativo in D allora per il principio del massimo modulo, otteniamo che f è costante su un aperto di D, da cui, per il principio di continuazione analitica f è costante in D (il che è assurdo).
Assumendo che D sia limitata, la tesi segue dal lemma precedente

Osservazione 3. Sia f olomorfa in $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ e continua in $\overline{D(0,r)}$ allora

$$|f(z)| \leq M(r) \quad \forall z \text{ con } |z| \leq r$$