Lezione del 18 ottobre del Prof. Frigerio

Definizione 0.1. Un insieme $Z \subseteq X$ è f-saturo se

$$Z = f^{-1}(f(Z))$$

in modo equivalente

$$Z = f^{-1}(C) \quad C \subseteq Y$$

Osservazione 1. In generale, vale $Z \subseteq f^{-1}(f(Z))$

Definizione 0.2 (Identificazione)**.**
$f : X \to Y$ si dice identificazione se è continua, suriettiva e se

$$A \subseteq X \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(A) \subseteq X \text{ aperto}$$

in modo equivalente

$$A \subseteq X \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad \exists B \text{ aperto saturo} \quad A = f(B)$$

Osservazione 2. La freccia "vera" è $\Leftarrow$ infatti l'altra è la definizione di continuità

Osservazione 3. Sia $f : X \to Y$ continua è biettiva. Allora

$$f \text{ immersione } \Leftrightarrow f \text{ identificazione } \Leftrightarrow f \text{ omeomorfismo}$$

Proposizione 0.1. *Sia $f : X \to Y$ identificazione.*
Definendo la relazione $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ allora $\overline{f}$ che fa commutare il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"] & Y \\ & \frac{X}{\sim} \arrow[u, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

è un omeomorfismo

Dimostrazione. $\overline{f}$ è ben definita e biettiva per motivi insiemistici, inoltre è continua per la propietà universale della topologia quoziente.
Devo vedere che f è aperta.
Sia $A \in \frac{X}{\sim}$ aperto.

$$\overline{f}(A) = f(\pi^{-1}(A))$$

Ma f è un identificazione

$$f(\pi^{-1}(A)) \subseteq Y \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(f(\pi^{-1}(A))) \subseteq X \text{ aperto}$$

Ora $\pi^{-1}(A)$ è f-saturo (per come è stata definita la relazione di equivalenza) per cui

$$f^{-1}(f(\pi^{-1}(A))) = \pi^{-1}(A) \text{ aperto perchè } \pi \text{ continua}$$

Osservazione 4. $\overline{f}$ come sopra è un omeomorfismo $\Leftrightarrow$ f è identificazione.
Basta leggere con attenzione la dimostrazione

Proposizione 0.2. *Sia $f : X \to Y$ continua e suriettiva*

- *f è aperta allora è un'identificazione*
- *f è chiusa allora è un'identificazione*

Dimostrazione. Mostriamo solamente il caso aperto.
Dato $A \subseteq Y$, devo dimostrare che

$$A \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(A) \subseteq X \text{ aperto}$$

$\Rightarrow$ deriva dalla continuità di f
$\Leftarrow$ essendo f aperta $f^{-1}(A)$ aperto $\Rightarrow f(f^{-1}(A))$ aperto.
Inoltre essendo f surgettiva allora $f(f^{-1}(A)) = A$ □

Notazione: se $A \subseteq X$ si pone con $\frac{X}{A} = \frac{X}{\sim}$ dove

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \text{ o } (x \in A \text{ e } y \in A$$

Tale insieme è ottenuto da X condensando A ad un punto

Esempio 0.3. $\frac{[0,1]}{\{0,1\}}$
Cerco un identificazione

$$f : [0,1] \to S' = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$$

tale che $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ o $\{x, y\} = \{0, 1\}$.
Pongo

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

tale funzione è continua, suriettiva e induce la relazione di equivalenza.
Mostriamo che è chiusa

- $f_| : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to C_1 = S' \cap \{y \geq 0\}$ *con C_1 chiuso.*
  Tale restrizione è un omeomorfismo essendo $g = \frac{\arccos x}{2\pi}$ una sua inversa continua
- *In modo analogo $f_| : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to C_2 = S' \cap \{y < 0\}$ è un omeomorfismo.*

- *Sia $Z \subseteq [0, 1]$ chiuso allora*

  $$f(Z) = f\left(Z \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \cup f\left(Z \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$

  Ora $Z \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ è un chiuso di $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e poichè $f_|$ è un omo sul chiuso C_1 allora

  $$f\left(Z \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \text{ è un chiuso di } S' \text{ (chiuso di un chiuso)}$$

  Analogamente

  $$f\left(Z \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \text{ è un chiuso di } S'$$

  quindi $f(Z)$ è unione di 2 chiusi quindi è chiuso

Osservazione 5. La funzione decritta non è aperta infatti $[0, 1)$ aperto in $[0, 1]$ ma $f([0, 1)$ non è aperto (arco di circonferenza) con un solo "estremo chiuso"

Enunciamo 2 teoremi che ci servono per generalizzare il risultato precedente

Teorema 0.4. *X compatto, Y è $T2$ con $f : X \to Y$ continua. Allora f è chiusa*

Teorema 0.5. *I chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$ sono compatti*

Definizione 0.3. Su $\mathbb{R}^n$ definiamo i seguenti insiemi

$$D^n = \{x \in R^n \mid ||x|| \leq 1\}\overline{B^n(0,1)}$$

$$S^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$$

Teorema 0.6.

$$\frac{D^n}{\partial D^n} \textit{ omeomorfo a } S^n$$

Dimostrazione. Cerco $f : D^n \to S^n$ tale che

$$f(x) = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y \text{ o } ||x|| = ||y|| = 1$$

continua (per il teorema precedente, chiusa) e surgettiva.
Pongo

$$f(x) = (\lambda x, 2||x||^2 - 1)$$

Poichè $f(x) \in S^n$ allora

$$\lambda^2||x||^2 + (2||x||^2 - 1)^2 = 1$$

$$\lambda = 2\sqrt{1 - ||x||^2}$$

Si verifichi che f è continua (dunque chiusa), biettiva e ha la propietà richiesta

Osservazione 6. Esistono identificazioni che non sono chiuse nè aperte.
Sia

$$X = \{x \geq 0\} \cap \{y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Allora $\pi : X \to \mathbb{R} \quad \pi(x, y) = x$ è un identificazione.
Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ allora dobbiamo provare che

$$\pi^{-1}(C) \text{ chiuso} \quad \Rightarrow \quad C \text{ chiuso}$$

Sia $p \in \overline{C}$ allora essendo $\mathbb{R}$ Hausdorff

$$\exists\{p_n\} \subseteq C \quad \lim p_n = p$$

Ora $(p_n, 0) \in \pi^{-1}(C)$ $\forall n$ quindi supponendo che la controimmagine sia chiusa

$$\lim(p_n, 0) = (p, 0) \in \overline{\pi^{-1}(C)} = \pi^{-1}(C)$$

Dunque $p = \pi(p, 0) \in C$ ovvero abbiamo provato che $C = \overline{C}$.
Mostriamo che non è aperta.
Sia $Y = \{x \in X \quad d(x, 0) < 1\}$ Y è aperta in X infatti $Y = B^2(0, 1) \cap X$ mentre $\pi(Y) = [0, 1)$ non è aperto in $\mathbb{R}$
Se prendiamo come chiuso un ramo di iperbole (primo quadrante) otteniamo che essa è chiusa in X mentre la sua immagine non è chiusa in $\mathbb{R}$