Lezione del 30 Marzo

Corollario 0.1. *Su $C^\star$ la forma $\frac{\mathrm{d}z}{z}$ è chiusa ma non esatta*

Dimostrazione. $\forall z_0 \in C^\star$ esiste un aperto $z_0 \in U \subset \mathbb{C}^\star$ su cui è definita una branca F del logaritmo, ora $\mathrm{d}F = F'\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}z}{z}z$ su U per cui tale forma è chiusa.
Come abbiamo osservato $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ è un loop ma $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} \neq 0$.
Dunque per caratterizzazione la forma non è esatta

Corollario 0.2. *Non esiste un "logaritmo" definito su tutto $\mathbb{C}^\star$, altrimenti $\frac{\mathrm{d}z}{z}$ sarebbe esatto su $\mathbb{C}^\star$*

1 Integrazioni su rettangoli

Osservazione 1. Un rettangolo R in $\mathbb{C}$ è caratterizzato da 4 vertici della forma

$$a_1 + ib_1 \quad a_2 + ib_1 \quad a_2 + ib_2 \quad a_1 + ib_2$$

Possiamo parametrizzare il bordo del rettangolo con il cammino $\gamma = \gamma_1 \star \gamma_2 \star \gamma_3 \star \gamma_4$ dove

$$\gamma_1(t) = a_1 + t(a_2 - a_1) \quad \gamma_2(t) = a_2 + i(b_1 + t(b_2 - b_1))$$

similmente si definisce γ_3 e γ_4.
D'ora in poi poniamo per ogni 1-forma

$$\int_{\partial R} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

Se $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ poichè $\gamma_1'(t) = -\gamma_3'(t) = 1$ e $\gamma_2'(t) = -\gamma_4'(t) = i$ si ha

$$\int_{\gamma R} \omega = \int_{a_1}^{a_2} P(t, b_1)\,\mathrm{d}t + \int_{b_1}^{b_2} Q(a_2, t)\,\mathrm{d}t - \int_{a_1}^{a_2} P(t, b_2)\,\mathrm{d}t - \int_{b_1}^{b_2} Q(a_1, t)\,\mathrm{d}t$$

Proposizione 1.1. *Se $D = B(z_0, r)$ è il disco aperto e ω è una 1-forma su D*

$$\omega \text{ esatta} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\partial R} \omega = 0 \ \forall \text{ rettangolo } R \subseteq D$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ ∂R è un cammino chiuso, per quanto visto sulla caratterizzazioni delle forme esatte, l'integrale lungo un cammino chiuso di una forma esatta è nulla
$\Leftarrow$ Sia $z_0 \in D$ qualsiasi.
Costruiamo una primitiva, integrando ω lungo un cammino differenziabile a tratti fatti da un tratto orizzontale seguito da un tratto verticale che collega z_0 a z.
$\forall z \in D$ sia γ_z un tale cammino (l'esistenza deriva dal fatto che D è un disco). Pongo

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \omega$$

Poichè γ_z è univocamente determinato da z (a meno di riparametrizzazioni), F è ben definita.
Devo mostrare che se $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ allora $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$.
Il fatto che $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ segue dallo stesso ragionamento fatto per costruire la primitiva la volta scorsa (integrale lungo un loop generico).
Infatti se $z' = z + ih$ allora $\gamma_{z+ih} = \gamma_z \star \gamma_h$ (γ_h è un cammino verticale) dunque

$$F(z + ih) - F(z) = \int_{\gamma_h} \omega = \int_0^h Q(z + it)\,\mathrm{d}t$$

Ora se dividiamo per h, il termine di destra tende a $Q(z)$ per $h \to 0$.
Per mostrare che $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ devo usare l'ipotesi, ciò ci consente di dire che

$$F(z) = \int_{\alpha_z} \omega$$

dove α_z è il cammino da z_0 a z che va prima in verticale e poi in orizzontale, infatti $\gamma_z \star \overline{\alpha}_z$ è il bordo di un rettangolo dunque

$$0 = \int_{\gamma_z \star \overline{\alpha}_z} \omega = \int_{\gamma_z} \omega - \int_{\alpha_z} \omega \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_z} \omega = \int_{\alpha_z} \omega$$

A questo punto la dimostrazione che $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ è identica a quella fatta per $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ usando gli α_z al posto di γ_z

$\square$

Osservazione 2. Per verificare l'esattezza di ω su un disco, basta controllare i bordi dei rettangoli, per D qualsiasi devo considerare tutti i lacci chiusi

Corollario 1.2. *D aperto qualsiasi, ω una 1-forma differenziale su D.*

$$\int_{\partial R} \omega \, \forall \textit{ rettangolo } R \subset D \quad \Rightarrow \quad \omega \textit{ chiusa}$$

Dimostrazione. Dato $z_0 \in D$, sia U una palla centrata in z_0 (esiste in quanto un aperto è intorno di ogni suo punto).
Ora $\forall$ rettangolo $R \subset D$ si ha $\int_{\partial R} \omega = 0$, per cui per la proposizione precedente ω ha una primitiva su U dunque ω è chiusa

2 Integrazioni lungo curvo continue

Definizione 2.1. Sia ω una 1-forma CHIUSA su un aperto $D \subset \mathbb{C}$.
Se $\gamma : [0,1] \to D$ è una curva continua (non necessariamente C^1 a tratti), allora una primitiva di ω lungo γ è una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ tale che

$$\forall t_0 \in [0,1]\ \exists \varepsilon > 0 \text{ e } U \text{ intorno di } \gamma(t_0) \quad f(t_0) = F(\gamma(t))\ \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

dove $F : U \to \mathbb{C}$ è una primitiva locale di ω

Proposizione 2.1. *Nelle ipotesi di sopra, una primitiva lungo γ esiste.*
Due primitive lungo γ differiscono per una costante.

Dimostrazione. Mostriamo l'esistenza.
Per compattezza di $[0,1]$, posso considerare una suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$di $[0,1]$ tale che $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ per $i = 0, \ldots, n-1$, U_i è una palla in D su cui ω ammette una primitiva.
Sia $F_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ e pongo

$$f(t) = F_0(\gamma(t)) \quad \text{per } t \in [t_0, t_1]$$

Scelgo $F_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ con $F_1(\gamma(t_1)) = F_0(\gamma(t_0))$ (esiste perchè data F_1 una primitiva qualsiasi, ne ottengo un'altra tale che $F_1(\gamma(t_1)) = F_0(\gamma(t_1))$ sommando un'opportuna costante). Pongo

$$f(t) = F_1(\gamma(t)) \text{ per } t \in [t_1, t_2]$$

Iterando costruisco una funzione f continua (lo è su $[t_i, t_{i+1}]$ ed è ben definita sui t_i) ed inoltre è una primitiva lungo γ.
Mostriamo ora l'unicità a meno di costanti.
Siano $f_1, f_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ due primitive lungo γ di ω.
Allora per definizione di primitiva lungo γ si ha

$$\forall t_0 \in [0,1]\ \exists \varepsilon > 0 \text{ e } U \text{ intorno connesso di } \gamma(t_0) \text{ tali che}$$

$$f_1(t) = F(\gamma(t)) \text{ e } f_2(t) = G(\gamma(t)) \text{ per } t \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$$

dove $F, G : U \to \mathbb{C}$ sono primitive locali di ω Essendo F e G primitive di ω su un connesso differiscono per una costante dunque anche f_1 e f_2 differiscono per una costante su $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$.
Ora essendo $[0,1]$ connesso allora $f_1 - f_2$ è costante su tutto $[0,1]$

Definizione 2.2. ω una 1-forma differenziale chiusa su D, $\gamma : [0,1] \to D$ continua

$$\int_\gamma \omega = f(1) - f(0)$$

dove f è una primitiva di ω lungo γ

Osservazione 3. La definizione è ben posta in quanto se g è un altra primitiva, g e f differiscono per una costante dunque $f(1) - f(0) = g(1) - g(0)$

Fatti 2.2. *Sia ω una 1-forma chiusa e $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ cammini continui*

1.
$$\int_{\gamma_1 \star \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

2.
$$\int_{\overline{\gamma}} \omega = -\int_\gamma \omega$$

3. *Se γ è differenziabile a tratti allora riotteniamo la definizione già data.*
Infatti prendendo una suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ allora $\forall i = 0, \ldots, n-1$ si ha $\gamma_i = \gamma_{|[t_i, t_{i+1}]}$ è differenziabile e $\gamma_i([t_1, t_{i+1}]) \subseteq U$ su cui ω ha primitiva F_i.
Usando la vecchia definizione

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} \omega = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(\gamma(t_{i+1})) - F_i(\gamma(t_i))$$

il che è equivalente a $\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} \omega$ con la nuova definizione

Teorema 2.3 (Invarianza omotopica)**.**
Sia ω una 1-forma differenziale chiusa su $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto.
Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$ due cammini

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Dimostrazione. Sia $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ un'omotopia ad estremi fissi tra γ_1 e γ_2, voglio costruire $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ continua tale che

$$\forall (t_0, s_0) \in [0,1]^2 \ \exists U \text{ intorno connesso in D } di H(t_0, s_0) \text{ e } F : U \to \mathbb{C} \text{ primitiva locale di } \omega$$

con $G(t,s) = F(H(t,s))$ per (t,s) in un intorno di (t_0, s_0)
(l'intento è quello di costruire una primitiva di ω lungo H)
Per compattezza di $[0,1] \times [0,1]$ esistono suddivisioni

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

$$0 = s_0 < t_1 < \cdots < s_m = 1$$

tali che $H([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) \subseteq U_{i,j}$ su cui ω ammette una primitiva.
Fissiamo $s_0 = 0$ e occupiamoci della prima riga di "quadratini".
Scelgo $F_{0,0} : U_{0,0} \to \mathbb{C}$ una primitiva di ω su $U_{0,0}$ e pongo

$$G(t,s) = F_{0,0}(H(t,s)) \text{ per } (t,s) \in [t_0, t_1] \times [s_0, s_1]$$

Tra tutte le primitive di ω su $U_{1,0}$ scelgo quello che coincide con $F_{0,0}$ su $H(t_1, s_0)$ (tale primitiva è unica perchè $U_{1,0}$ è connesso) e la chiamo $F_{1,0}$.
È facile verificare che $F_{0,0}(t_1, s) = F_{1,0}(t_1, s)$ per $s \in [s_0, s_1]$ (sfruttando la connessione) dunque posso porre

$$G(t,s) = F_{1,0}(H(t,s)) \text{ per } (t,s) \in [t_1, t_2] \times [s_0, s_1]$$

Proseguo così definendo G su tutti i quadratini della forma $[t_i, t_{i+1}] \times [s_0, s_1]$ ottenendo G definita in $[0,1] \times [s_0, s_1]$.
Poi proseguo passando alla seconda striscia orizzontale $[0,1] \times [s_1, s_2]$ cominciando dal quadratino $[t_0, t_1] \times [s_1, s_2]$ e proseguo in questo modo definendo G su tutto $[0,1] \times [0,1]$.
Notiamo che $G(0,s)$ è una primitiva di ω lungo il cammino costante $H(0,s)$ dunque è costante $(G(0,0) = G(0,1))$, in modo analogo $G(1,0) = G(1,1)$, inoltre $G(t,0)$ è una primitiva di ω lungo γ_1 mentre $G(t,1)$ lo è lungo γ_2 abbiamo dunque

$$\int_{\gamma_1} \omega = G(1,0) - G(0,0) = G(1,1) - G(0,1) = \int_{\gamma_2} \omega$$

$\square$

Corollario 2.4. *$D \subseteq \mathbb{C}$ semplicemente connesso, ω una 1-forma su D*

$$\omega \text{ chiusa} \quad \Leftrightarrow \quad \omega \text{ esatta}$$

Dimostrazione. $\Leftarrow$ discende direttamente dalla definizione
$\Rightarrow$ Dato $\gamma : [0,1] \to D$ dalla semplice connessione segue che $\gamma \sim C_{\gamma(0)}$ dunque per quanto appena visto

$$\int_\gamma \omega = \int_{C_{\gamma(0)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \text{ esatta}$$

Osservazione 4. Se D è semplicemente connesso, riesco ad incollare le primitive locali di ω per creare una primitiva globale.
Abbiamo visto che ciò può non capitare se $\pi_1(D) \neq \{1\}$ (e.g $\omega = \frac{\mathrm{d}z}{z}$ su $D = \mathbb{C}^\star$ in quanto $\pi_1(C^\star) = \mathbb{Z}$)