Lezione del 1 aprile

Teorema 0.1. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e ω una 1-forma su D.*
I seguenti fatti sono equivalenti

1. *ω è chiusa*
2. *$\int_{\partial R} \omega = 0$ per ogni rettangolo $R \subset D$*
3. *$\int_\gamma \omega = 0$ per ogni laccio γ omotopo al laccio costante*

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$ Se $\gamma \sim c$ a estremi fissi dove c è il cammino costante allora $\int_\gamma \omega = \int_c \omega = 0$.
$3 \Rightarrow 2$. ∂R è un cammino omotopicamente banale.
$2 \Rightarrow 1$ Visto nella lezione precedente

Ricordiamo che ogni cammino chiuso $\gamma : [0,1] \to D$ definisce un loop $\hat{\gamma} : S^1 \to D$

Definizione 0.1 (Liberamente omotopo)**.**
Siano α, γ loop.
γ si dice liberamente omotopo a α se

$$\exists H : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \to D$$

continua con

$$H(t,0) = \gamma(t)$$
$$H(t,1) = \alpha(t)$$
$$H(0,s) = H(1,s)\, \forall s$$

Osservazione 1. Due cammini sono liberamente omotopi se esiste un omotopia tra loro H tale che

$$H(\bullet, s) : [0,1] \to D$$

è un cammino chiuso per ogni s.
Tale condizione è una condizione più debbole dell'omotopia ad estremi fissi in quanto $H(0,s) = H(1,s)$ non sono costanti in s

Proposizione 0.2.

$$\alpha \textit{ liberamente omotopo a } \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\alpha} \sim \hat{\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \beta \textit{ cammino } \gamma \sim \beta \star \alpha \star \overline{\beta} \textit{ ad estremi fissi}$$

Esempio 0.3. *in $\mathbb{C} \setminus \{\}\, 0$ i cammini $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ e $\alpha(t) = 5e^{2\pi i t}$ sono liberamente omotopi*

Fatto 0.4. *Se ω è una 1-forma chiusa su D e α, γ sono cammini chiusi liberamente omotopi allora*

$$\int_\gamma \omega = \int_\alpha \omega$$

infatti $\gamma \sim \beta \star \alpha \star \overline{\beta}$ ad estremi fissi dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_{\beta\star\alpha\star\overline{\beta}} \omega = \int_\beta \omega + \int_\alpha \omega = \int_{\overline{\beta}} \omega = \int_\alpha \omega$$

1 Forme chiuse di classe C^1

Definizione 1.1. Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 1-forma su D.
ω si dice C^1 se $P, Q : D \to \mathbb{C}$ sono funzioni di classe C^1.
In questo caso poniamo formalmente

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(la definizione è formale in quanto non diamo significato a $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ è un simbolo formale)

Andiamo ora a definire l'integrazione su un rettangolo.
Sia $R \subset \mathbb{C}$ un rettangolo e $f : R \to \mathbb{C}$ continua, allora ha senso $\int_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
Se (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_2) sono i vertici del rettangolo allora

$$\int_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$$

Teorema 1.1 (Formula di Green, Green-Rieman, Stokes)**.** *Sia ω una 1-forma C^1 du D e $R \subseteq D$ un rettangolo allora*

$$\int_{\partial R} \omega = \int_R \mathrm{d}w$$

Dimostrazione. Con le notazioni appena introdotte

$$\int_R \mathrm{d}w = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_R \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y - \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x =$$

$$\int_{b_1}^{b_2} \left(Q(a_2,y) - Q(a_1,y)\right) \mathrm{d}y - \int_{a_1}^{a_2} \left(P(x,b_2) - P(x,b_1)\right) \mathrm{d}x =$$

$$\int_{b_1}^{b_2} Q(a_2,y)\,\mathrm{d}y - int_{b_1}^{b_2} Q(a_1,y)\,\mathrm{d}y - int_{a_1}^{a_2} P(x,b_2)\,\mathrm{d}x + int_{a_1}^{a_2} P(x,b_1)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial R} \omega$$

□

Teorema 1.2. *Sia ω una 1-forma C^1 su D*

$$\omega \text{ chiusa} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\omega = 0$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Essendo la forma chiusa, $\forall p \in D$ esiste $U \subseteq D$ aperto con $p \in U$ e con

$$\omega = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y \text{ su } U$$

Essendo ω di classe C^1, F è di classe C^2 ora

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ora per un noto teorema

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

da cui $\mathrm{d}\omega = 0$

$\Leftarrow$ Sia $R \subset D$ un rettangolo. Allora per il teorema precedente

$$\int_{\partial R} \omega = \int_R \mathrm{d}\omega = 0$$

dunque per un teorema precedente ω è chiusa $\square$

Teorema 1.3. *Sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. $f(z)\,\mathrm{d}z$ è una 1-forma chiusa su D*

Dimostrazione. Supponiamo $f(z)\,\mathrm{d}z$ non sia chiusa, allora esiste un rettangolo $R \subseteq D$ tale che $\int_{\partial R} \omega \neq 0$.
D'ora in avanti se $\overline{R}$ è un rettangolo denoteremo $\alpha(\overline{R}) = \int_{\partial \overline{R}} \omega$.
Dividiamo il rettangolo R in 4 rettangoli congruenti (dividiamo a metà entrambi i lati) ottenendo così i rettangoli $A_1, \dots, A_4$, osserviamo

$$\alpha(R) = \alpha(A_1) + \cdots + \alpha(A_4)$$

in quanto nel membro a destra, i contributi dei segmenti interni si elidono.
Essendo $\alpha(R) \neq 0$ esiste un A_i tale che

$$|\alpha(A_i)| \geq \frac{|\alpha(R)|}{4}$$

Pongo R_1 uguale ad A_i, iterando la costruzione applicandola ad R_1 ottengo un nuovo rettangolo $R_2 \subset R_1$ tale che $|\alpha(R_2)| \geq \frac{|\alpha(R_1)|}{2} \geq \frac{|\alpha(R_1)|}{4}$.
Iterando tale costruzione ottengo una successione di rettangoli inscatolati

$$R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset \cdots$$

con

$$|\alpha(R_i)| > \frac{|\alpha(R)|}{4^i}$$

Sia $z_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n \neq \emptyset$ (essendo intersezione di compatti chiusi non vuoti).
Poichè f olomorfa

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)\,|z - z_0|$$

dove

$$\lim_{z \to z_0} |\varepsilon(z)| \to 0$$

dunque

$$\alpha(R_n) = \int_{\partial R_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)\,|z - z_0|)\,\mathrm{d}z =$$

$$\int_{\partial R_n} f(z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial R_n} f'(z_0)(z - z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial R_n} \varepsilon(r)\,|z - z_0|\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R_n} \varepsilon(r)\,|z - z_0|\,\mathrm{d}z$$

infatti $\mathrm{d}z$ e $(z - z_0)\,\mathrm{d}z$ sono esatte ammettendo come primitiva z e $\frac{(z-z_0)^2}{2}$.
Se n è sufficientemente grande, $R_n \subseteq B(z_0, \delta)$ con δ piccolo a piacere.
Inoltre possiamo scegliere n in modo che

$$|\varepsilon(z)| \leq \frac{|\alpha(R)|}{4(a+b)^2} \quad \forall z \in R_n$$

dove a, b sono le lunghezze dei lati di R. Tale scelta è possibile in quanto $diam(R_n) \leq \frac{a+b}{2^n}$ e $\varepsilon(z) \to 0$ per $z \to z_0$.
Per tale n se $z \in \partial R_n$ si ha $|z - z_0| \leq \frac{a+b}{2^n} = diam(R_n)$ per cui

$$|\alpha(R_n)| = \left| \int_{\partial R_n} \varepsilon(z)\,|z - z_0|\,\mathrm{d}z \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{2\frac{a+b}{2^n}} |\varepsilon(\gamma(t))| \cdot |\gamma(t) - z_0|\,\mathrm{d}t \leq \frac{2(a+b)}{2^n} \cdot \frac{|\alpha(R)|}{4(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\alpha(R)|}{4^n}$$

il che contraddice $|\alpha(R_n)| > \frac{|\alpha(R)|}{4^n}$
γè un cammino che parametrizza il bordo di R_n □

Corollario 1.4. *Sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa allora $\forall p \in D$ esiste $U \subseteq D$ aperto con $p \in U$ e $F : U \to C$ olomorfa con $F' = f_{|U}$*

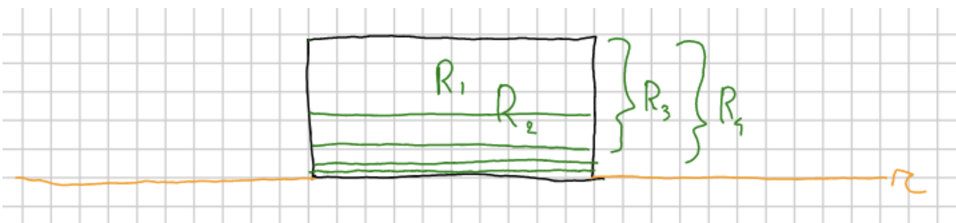
Dimostrazione. $f(z)\,\mathrm{d}z$ è chiusa, dunque esiste U come nell'enunciato e $F : U \to \mathbb{C}$ con $\mathrm{d}F = f(z)\,\mathrm{d}z$ su U.
Abbiamo F olomorfa e $F' = f$ su U □

Corollario 1.5. *Sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, allora $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ per ogni laccio γ omotopicamente banale*

Proposizione 1.6. *Sia $f : D \to \mathbb{C}$ con $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto.*
Se f è continua su D e olomorfa su $D \setminus r$ dove r retta orizzontale, allora $f(z)\,\mathrm{d}z$ è chiusa

Dimostrazione. Sia $R \subseteq D$ un rettangolo, dimostriamo che $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
Andiamo a distinguere alcuni casi

- Se $r \cap R = \emptyset$ allora f olomorfa su tutto R dunque ricadiamo nel teorema precedente
- Se un lato orizzontale di R giace su r allora costruisco una successione di rettangoli R_n come in figura in modo che R_n "tenda" a R.



  Allora usando che f è continua si vede

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to+\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

  in quanto $\int_{\partial R_n} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ per ogni n (r non initerseca la retta e ricadiamo nel caso precedente).
  Se R ha vertici (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_2) e $R \cap r$ ha ordinata b_1 con $b_1 < b_2$ allora i vertici di R_n sono $\left(a_1, b_1 + \frac{1}{n}\right)$, $\left(a_2, b_1 + \frac{1}{n}\right)$, (a_2, b_2), (a_1, b_2)

- Se r interseca R ma r non contiene lati di R, allora r divide il rettangolo in 2 rettangoli R_1 e R_2.
  Ora un lato di R_1 giace su r, così come per R_2 concludiamo osservando che

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial R_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial R_2} f(z)\,\mathrm{d}x = 0 + 0 = 0$$