Lezione del 26 marzo

Definizione 0.1. Sia ω una 1-forma differenziale esatta su D

- ω è esatta se $\exists F : D \to \mathbb{C}$ con $\omega = \mathrm{d}F$
- ω è chiusa se è localmente esatta, ovvero

$$\forall p \in D \; \exists U \subset D \text{ con } p \in U \text{ e } F_U : U \to \mathbb{C} \text{ con } \mathrm{d}F_U = \omega_{|U}$$

In tal caso F si chiama primitiva di ω, mentre F_U primitiva locale di ω

Osservazione 1. Ricordando che $\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y$ da cui $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ è esatta se esiste F tale che $P = \frac{\partial F}{\partial x}$ e $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$

1 Integrali curvilinei

Definizione 1.1 (Integrali complessi)**.**
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua, poniamo

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b Re(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^b Im(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Definizione 1.2. Sia D un dominio aperto connesso di $\mathbb{C}$ e fissiamo ω una 1-forma differenziale complessa su D.
Se $\gamma : [a,b] \to D$ è un cammino C^1 definiamo

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$$

dove se $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t)$ allora $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t) + iy'(t)$ mentre $\omega_{\gamma(t)} = \omega(\gamma(t))$

Osservazione 2. Se $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ allora

$$\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = P(\gamma(t))\mathrm{d}x(\gamma'(t)) + Q(\gamma(t))\mathrm{d}y(\gamma'(t)) = P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)$$

Esempio 1.1. *Sia* $D = \mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\omega = \frac{1}{z}\mathrm{d}z$ *e* $\gamma(t) = e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + \sin(2\pi t)$
Calcolare $\int_\gamma \omega$

Ricordando che $\mathrm{d}z$ *è l'identità di* $\mathbb{C}$ *e poichè* $\gamma'(t) = 2\pi i\gamma(t)$ *ottengo*

$$\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \frac{\mathrm{d}z}{\gamma(t)} \cdot 2\pi i\gamma(t) = 2\pi i$$

da cui $\int_\gamma \omega = \int_0^1 2\pi i\,\mathrm{d}t = 2\pi i.$

Svolgiamo lo stesso conto in coordinate (usando $\mathrm{d}x$ *e* $\mathrm{d}y$*)*

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{x+iy}(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2}(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} + i\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

Ora $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ *dove* $x(t) = \cos(2\pi t)$ *e* $y(t) = \sin(2\pi t)$

$$\mathrm{d}x(\gamma'(t)) = x'(t) = -2\pi\sin(2\pi t)$$

$$\mathrm{d}y(\gamma'(t)) = y'(t) = 2\pi\cos(2\pi t)$$

da cui

$$(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \cos(2\pi t)(-2\pi\sin(2\pi t)) + \sin(2\pi t)(2\pi\cos(2\pi t)) = 0$$

$$\left(i\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\right)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = i\frac{2pi(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t))}{\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)} = 2\pi$$

Abbiamo ritrovato

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{x} = \int_\gamma \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} + i\int_\gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 2\pi i$$

Proposizione 1.2. *Proprietà elementari dell'integrale curvileneo*

1. *Sia* $\gamma : [a,b] \to D$*, se* $\psi : [c,d] \to [a,b]$ *è* C^1 *con* $\psi(c) = a$ *e* $\psi(d) = b$ *allora*

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma\circ\psi} \omega$$

ovvero l'integrale non dipende dalle riparametrizzazioni che preservano il verso

2. *Sia* $\gamma : [a,b] \to D$*, se* $\psi : [c,d] \to [a,b]$ *è* C^1 *con* $\psi(c) = b$ *e* $\psi(d) = a$ *allora*

$$\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma\circ\psi} \omega$$

3. *Se* $\gamma = \gamma_1 \star \gamma_2$ *giunzione di cammini* C^1 *allora*

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

4. *Se* $\gamma : [a,b] \to D$ *è un cammino* C^1 *a tratti (ovvero continua e tale che esistono* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *tali che* $\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$ *sia* C^1 *allora*

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}} \omega$$

Dimostrazione.

1.

$$\int_{\gamma\circ\psi} \omega = \int_c^d \omega_{\gamma(\psi(t))}((\gamma\circ\psi)'(t))\mathrm{d}t = \int_c^d \omega_{\gamma(\psi(t))}(\gamma'(\psi(t))\psi'(t))\mathrm{d}t = \int_c^d \psi'(t)\cdot\omega_{\gamma(\psi(t))}(\gamma'(\psi(t)))\mathrm{d}t$$

in quanto $\psi'(t) \in \mathbb{R}$ da cui

$$\int_{\gamma\circ\psi} \omega = \int_{\psi(c)}^{\psi(t)} \omega(\gamma(s))\gamma'(s)\mathrm{d}s = \int_a^b \omega(\gamma(s))\gamma'(s)\mathrm{d}s = \int_\gamma \omega$$

2. Stessa dimostrazione del punto precedente ma usando il fatto che $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$

Lemma 1.3. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso. Allora D è connesso per archi (in particolare per archi C^1 a tratti)*

Dimostrazione. Quasi identica a localmente connessa per archi implica connesso per archi. Basta osservare che ogni punto di D ha un intorno connesso per archi C^1: preso $x_0 \in D$ si mostra che l'insieme dei punti di D connessi a x_0 da un arco C^1 a tratti è aperto e chiuso

Lemma 1.4. *Sia ω una 1-forma differenziale esatta su D con $\omega = \mathrm{d}F$.*
Allora $\forall \gamma : [a, b] \to D$ che è C^1 a tratti vale

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dimostrazione. Sia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partizione tale che $\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$ sia C^1.
Basta provare che $\forall i$ vale

$$\int_{\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}} \omega = F(\gamma(t_{i+1})) - F(\gamma(t_i))$$

(in quanto si ha

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}} \omega = F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

i termini centrali si cancellano)
Ma

$$\int_{\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}} \omega = \int_{\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}} \mathrm{d}F = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{d}F_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_{i+1}} (F \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = F(\gamma(t_{i+1})) - F(\gamma(t_i))$$

Corollario 1.5. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, $F : D \to \mathbb{C}$.*

$$\mathrm{d}F = 0 \quad \Rightarrow \quad F \textit{ costante}$$

Dimostrazione. $\forall a, b \in D$ esiste γ che connette a a b che è C^1 a tratti da cui

$$F(b) - F(a) = \int_\gamma \mathrm{d}F = 0$$

Corollario 1.6. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso. Se F è una primitiva di ω, tutte e sole le primitive di ω si ottengono sommando una costante a F*

Dimostrazione. Se G è un'altra primitiva, $\mathrm{d}G = \mathrm{d}F$ allora $\mathrm{d}(G - F) = 0$ dunque $G = F + cost.$
Il viceversaè ovvio in quanto $\mathrm{d}(F + cost) = \mathrm{d}F$

Teorema 1.7. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, e ω una 1-forma differenziale su D*

$$\omega \textit{ esatta} \quad \Leftrightarrow \quad \int_\gamma \omega = 0 \textit{ per ogni } \gamma \textit{ loop } C^1 \textit{ a tratti a valori in } D$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Se $\gamma : [a,b] \to D$ è un loop e ω è esatta, $\omega = \mathrm{d}F$ da cui

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

se γ è un loop allora $\gamma(a) = \gamma(b)$
$\Leftarrow$ Costruiamo una primitiva di ω come segue.
Fissato $x_0 \in D$, allora $\forall p \in D$ scelgo un cammino $\gamma_p : [0,1] \to D$ C^1 a tratti con $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = p$ e pongo

$$F(p) = \int_{\gamma_p} \omega$$

Mostriamo che $F(p)$ è ben definita, cioè non dipende dalla scelta di γ_p.
Sia α_p un altro cammino che congiunge x_0 a p, ora $\gamma_p \star \overline{\alpha_p}$ è un loop, dunque, per ipotesi

$$0 = \int_{\gamma_p \star \overline{\alpha}_p} \omega = \int_{\gamma_p} \omega + \int_{\overline{\alpha}_p} \omega = \int_{\gamma_p} \omega - \int_{\alpha_p} \omega$$

cioè $\int_{\gamma_p} \omega = \int_{\alpha_p} \omega$
Mostriamo che F è differenziabile con $\mathrm{d}F = \omega$.
Se $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ basta vedere che $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ (in quanto P e Q sono continue per ipotesi da cui per il teorema del differenziale totale, F ammetterebbe derivati parziali continue dunque è differenziabile con $\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y$).
Mostriamo che $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ (l'altra si fa in modo analogo).
Sia γ_{z_0} un cammino che connette x_0 a z_0 C^1 a tratti, sia γ_h un cammino che congiunge z_0 a $z_0 + h$ dunque

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = \int_{\gamma_{z_0} \circ \gamma_h} \omega - \int_{\gamma_{z_0}} \omega = \int_{\gamma_h} \omega$$

Sia $\gamma_h(t) = z_0 + t$ (cammino lungo x e costante lungo y) per cui

$$\omega_{\gamma_{h(t)}}(\gamma_h'(t)) = \omega_{h(t)}(1) = P(z_0 + t)\mathrm{d}x(1) + Q(z_0 + t)\mathrm{d}y(1) = P(z_0 + t)$$

dunque

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = \int_0^h P(z_0 + t)\,\mathrm{d}t$$

dividendo per h otteniamo

$$\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h P(z_0 + t)\,\mathrm{d}t = P(z_0 + \xi_h)$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal teorema della media integrale con $0 \le \xi_h \le h$
Passando al limite per $h \to 0$ e usando la continuità di P otteniamo $\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) = P(z_0)$ $\square$