Lezione del 20 aprile

Teorema 0.1 (Lemma di Schwarz)**.**
Sia $f(z)$ una funzione olomorfa nel disco aperto $|z| < 1$.
Assumiamo $f(0) = 0$ e $|f(z)| < 1$ per $|z| < 1$ allora

1. $|f(z)| \leq |z|$ *e* $|f'(0)| \leq 1$
2. *Se* $\exists z_0 \neq 0$ *tale che* $|f(z_0)| = z_0$ *oppure* $|f'(0)| = 1$ *allora* $f(z) = \lambda z$ *con* $|\lambda| = 1$

Dimostrazione.

1. f è olomorfa, dunque analitica per $|z| < 1$, sia

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

l'approssimazione di Taylor nell'origine (con raggio di convergenza $\rho \geq 1$).
Definiamo la funzione

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} \text{ se } 0 < |z| < 1 \\ a_1 = f'(0 \text{ se } z = 0 \end{cases}$$

Dunque

$$g = \sum a_n z^{n-1}$$

da cui g è analitica ovvero olomorfa.
Sia $0 < r < 1$ e $|z| = r$ abbiamo

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad |g(z)| \leq 1 \text{ per } |z| < 1$$

dove l'implicazione deriva dal principio del massimo modulo per funzioni olomorfe.
Abbiamo dunque provato

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq |z|$$

In particolare, vale anche $|g(0)| < 1$ da cui $|f'(0)| < 1$

2. Se $\exists a$ come nelle ipotesi, allora per il corollario al principio del massimo modulo, g risulta costante da cui

$$g(z) = \lambda \quad \Rightarrow \frac{f(z)}{z} = \lambda \quad \Rightarrow f(z) = \lambda z$$

Esercizio 0.2. *Cosa succede se assumiamo $|f(z)| \leq 1$ al posto di $|f(z)| < 1$*

1 Serie di Laurent

Definizione 1.1. Una serie di Laurent è un'espressione della forma

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

Ad una serie di Laurent è possibile associare 2 serie di potenze

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \sum_{n<0} a_n z^{-n}$$

assumiamo che entrambe le serie abbiano raggio di convergenza diverso da 0 e $+\infty$ allora poniamo

$$\rho_1 = \text{ raggio di convergenza della serie } \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

$$\rho_2 = \frac{1}{\text{raggio di convergenza della serie } \sum_{n<0} a_n z^{-n}}$$

Sia

$$f_2 = \sum_{n<0} a_n z^n$$

tale serie converge assolutamente per $|z| > \rho_2$, mostriamo che tale funzione à anche olomorfa in $|z| > \rho_2$.
Poniamo

$$g(u) = f_2\left(\frac{1}{u}\right) = \sum_{n<0} a_n \left(\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n<0} a_n u^{-n} = \sum_{k>0} a_{-k} u^k$$

e tale serie converge assolutamente per $|u| < \frac{1}{\rho_2}$.
Essendo g analitica si ha

$$g'(z) = \sum_{k>0} k a_{-k} a^k$$

Notiamo ora che $f_2(z) = g\left(\frac{1}{z}\right)$ dunque usando la formula di derivazione di funzioni composte otteniamo

$$f_2'(z) = -g'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{z^2}\left(\sum_{k>0} k a_{-k}\left(\frac{1}{z}\right)^{k-1}\right) = \sum_{n<0} n a_n z^{n-1}$$

dunque esiste $f_2'(z)$ da cui f_2 è olomorfa.

Proposizione 1.1. *Sia $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ una serie di Laurent.*
Assumiamo che

- *Le serie $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ e $\sum_{n<0} a_n z^{-n}$ sono assolutamente convergenti*
- *I ρ_1 e ρ_2 definiti sopra soddisfano $\rho_2 < \rho_1$*

allora la somma $f(z)$ della serie di Laurent è olomorfa nella corona $\rho_2 < |z| < \rho_1$ e la serie converge normalmente in $r_2 \leq |z| \leq r_1$ con $\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1$

Definizione 1.2. Diciamo che una funzione definita sulla corona $\rho_2 < |z| < \rho_1$ ha un'espansione di Laurent se esiste una serie di Laurent che converge in questa corona e di cui $f(z)$ è la somma (per ogni z nella corona)

Osservazione 1. Se f ammette una serie di Laurent, allora f è olomorfa nella corona.
Infatti se

$$f(z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

sappiamo che le funzione

$$f_1(z) = \sum_{z \geq 0 a_n z^n} \qquad f_2(z) = \sum_{z<0} a_n z^n$$

sono olomorfe.
Concludiamo osservando che la somma di funzioni olomorfe è olomorfa da cui $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ è olomorfa