

Il Modello Epidemiologico SIR sulle Reti Complesse

Simmaco Di Lillo

Università di Pisa

12 settembre 2021



Il modello SIR scalare

Il modello SIR è un modello compartimentale: la popolazione viene suddivisa in 3 classi

- S : i suscettibili;
- I : gli infetti;
- R : i rimossi.



Il modello SIR scalare

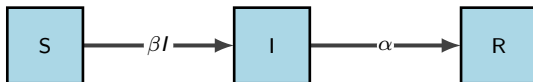


Figura: Schema del modello SIR.



Il modello SIR scalare

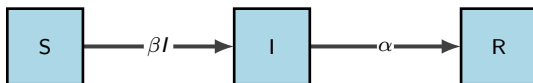


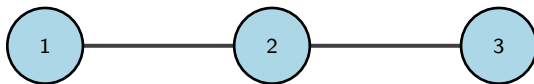
Figura: Schema del modello SIR.

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - \alpha I \\ \dot{R} &= \alpha I\end{aligned}\tag{1}$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio



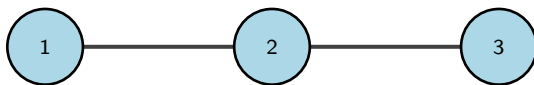
Come si infettano?

- Il nodo 1 ha una sola fonte d'infezione.
 $\langle S_1 \rangle$ diminuisce con un tasso di $\tau \langle S_1 I_2 \rangle$



Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio



Come si infettano?

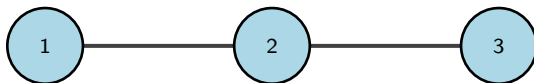
- Il nodo 1 ha una sola fonte d'infezione.
- Il nodo 2 ne ha due.

$\langle S_2 \rangle$ diminuisce con un tasso di $\tau \langle I_1 S_2 \rangle + \tau \langle S_2 I_3 \rangle$



Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio



Come si infettano?

- Il nodo 1 ha una sola fonte d'infezione.
- Il nodo 2 ne ha due.
- Anche il nodo 3 ne ha una sola.

$\langle S_3 \rangle$ diminuisce con un tasso di $\tau \langle I_2 S_3 \rangle$



Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio

$$\langle \dot{S}_1 \rangle = -\tau \langle S_1 I_2 \rangle,$$

$$\langle \dot{S}_2 \rangle = -\tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle),$$

$$\langle \dot{S}_3 \rangle = -\tau \langle I_2 S_3 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_1 \rangle = \tau \langle S_1 I_2 \rangle - \gamma \langle I_1 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_2 \rangle = \tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle) - \gamma \langle I_2 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_3 \rangle = \tau \langle I_2 S_3 \rangle - \gamma \langle I_3 \rangle,$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio

$$\begin{aligned}\langle \dot{S}_1 \rangle &= -\tau \langle S_1 I_2 \rangle, & \langle \dot{I}_1 \rangle &= \tau \langle S_1 I_2 \rangle - \gamma \langle I_1 \rangle, \\ \langle \dot{S}_2 \rangle &= -\tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle), & \langle \dot{I}_2 \rangle &= \tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle) - \gamma \langle I_2 \rangle, \\ \langle \dot{S}_3 \rangle &= -\tau \langle I_2 S_3 \rangle, & \langle \dot{I}_3 \rangle &= \tau \langle I_2 S_3 \rangle - \gamma \langle I_3 \rangle,\end{aligned}$$

Tale sistema **non è chiuso**. Dipende da alcune coppie.



Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio

Come evolvono nel tempo le coppie?

$$\langle \dot{S}_1 I_2 \rangle = \tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_2 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_1 \dot{S}_2 \rangle = -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 \rangle,$$

$$\langle \dot{S}_2 I_3 \rangle = -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_2 I_3 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_2 \dot{S}_3 \rangle = \tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_2 S_3 \rangle.$$

e le triple?

$$\langle \dot{S}_2 I_3 \rangle = -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 \rangle,$$

$$\langle S_1 \dot{S}_2 I_3 \rangle = -(\tau + \gamma) \langle S_1 S_2 I_3 \rangle,$$

$$\langle I_1 \dot{S}_2 I_3 \rangle = -(2\tau + 2\gamma) \langle I_1 S_2 I_3 \rangle,$$

$$\langle I_1 \dot{S}_2 S_3 \rangle = -(\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 S_3 \rangle.$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

Modello generale

Sia $G = (g_{ij})$ la matrice di adiacenza del grafo G . L'epidemia si diffonde sul grafo nel seguente modo

$$\langle \dot{S}_i \rangle = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij} \langle S_i I_j \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_i \rangle = \tau \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij} \langle S_i I_j \rangle - \gamma_i \langle I_i \rangle,$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

Chiusura alle coppie

Per ottenere un modello chiuso (ma non esatto) possiamo assumere l'indipendenza a livello delle coppie. Ovvero utilizzare l'approssimazione

$$\langle A_i B_j \rangle \approx \langle A_i \rangle \langle B_j \rangle \quad \forall A, B \in \{S, I, R\} \text{ e } \forall (i, j) \in E$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

Chiusura alle coppie

Per ottenere un modello chiuso (ma non esatto) possiamo assumere l'indipendenza a livello delle coppie. Ovvero utilizzare l'approssimazione

$$\langle A_i B_j \rangle \approx \langle A_i \rangle \langle B_j \rangle \quad \forall A, B \in \{S, I, R\} \text{ e } \forall (i, j) \in E$$

$$\langle \dot{S}_i \rangle = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij} \langle S_i \rangle \langle I_j \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_i \rangle = \tau \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij} \langle S_i \rangle \langle I_j \rangle - \gamma_i \langle I_i \rangle.$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

Chiusura alle coppie

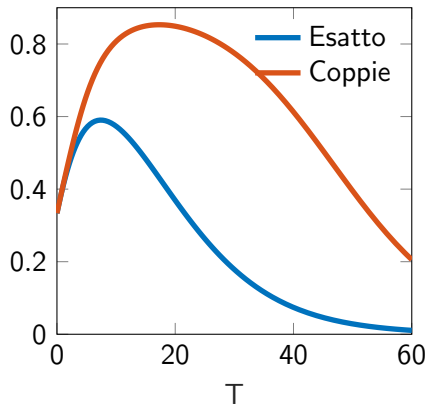


Figura: Prevalenza calcolata usando i due modelli.



Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Diamo due importanti definizioni

Definizione (cut-vertex)

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. $v \in V$ è un *cut-vertex* se il grafo senza il nodo v risulta sconnesso.

Definizione (Probabilità condizionale)

Siano A, B due eventi di uno spazio di probabilità con $\mathbb{P}(B) > 0$. Si dice *probabilità condizionale* di A dato B la quantità

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Teorema

Sia $G = (V, E)$ un grafo e $F = \{v_1, \dots, v_k\}$ un sottoinsieme connesso di vertici e sia v_i un suo cut-vertex. Poniamo

$$F_1 = \{v_1, \dots, v_{i-1}\} \text{ e } F_2 = \{v_{i+1}, \dots, v_k\}.$$

Se ogni cammino che connette un nodo in F_1 ad uno in F_2 passa da v_i allora:

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle$$

dove $Z \in \{S, I, R\}$.

Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Dimostrazione.

Se $\langle S_{v_i} \rangle = 0$ allora l'uguaglianza risulta banalmente vera.

Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Dimostrazione.

Sia $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Dimostrazione.

Sia $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} \rangle.$$

Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Dimostrazione.

Sia $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} \rangle.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} & \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle = \\ &= \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} | S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle. \end{aligned}$$

Ogni percorso da F_1 a F_2 deve passare attraverso v_i . Poichè v_i è suscettibile la trasmissione non può avvenire tra un nodo in F_1 ed uno in F_2 .

Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Dimostrazione.

Sia $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \mid S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} \rangle.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} & \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \mid S_{v_i} \rangle = \\ &= \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} \mid S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \mid S_{v_i} \rangle. \end{aligned}$$

Ogni percorso da F_1 a F_2 deve passare attraverso v_i . Poichè v_i è suscettibile la trasmissione non può avvenire tra un nodo in F_1 ed uno in F_2 . Riapplicando la definizione di probabilità condizionale la tesi □

Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

- Con una visita in profondità si trovano tutti i cut-vertex di G .



Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

- Con una visita in profondità si trovano tutti i cut-vertex di G .
- Si divide la rete originale in sottoreti connesse a due a due scollegate. Le sottoreti vengono create in modo che i cut-vertex siano mantenuti in tutte le sottoreti generate.



Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

- Con una visita in profondità si trovano tutti i cut-vertex di G .
- Si divide la rete originale in sottoreti ...
- Per ogni nodo i delle sottoreti, si ha

$$\langle \dot{S}_i \rangle = -\tau \sum_j g_{ij} \langle S_i I_j \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_i \rangle = \tau \sum_j g_{ij} \langle S_i I_j \rangle - \gamma \langle I_i \rangle,$$

$$\langle \dot{R}_i \rangle = 1 - \langle S_i \rangle - \langle I_i \rangle.$$

Si possono trovare equazioni simili anche per le strutture di ordine maggiore (coppie, triple, ...)



Il modello SIR bottom-up su una rete

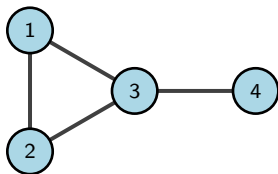
Approccio generale alla chiusura

- Con una visita in profondità si trovano tutti i cut-vertex di G .
- Si divide la rete originale in sottoreti ...
- Per ogni nodo i delle sottoreti ...
- Nella gerarchia che si verrà a creare, se appare un termine composto da vertici di sottoreti diverse allora in esso è presente un cut-vertex suscettibile. Usando il Teorema precedente è possibile esprimere questo termine usando termini più semplici.



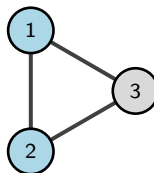
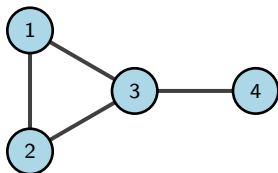
Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop



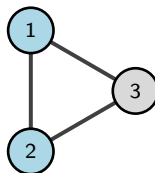
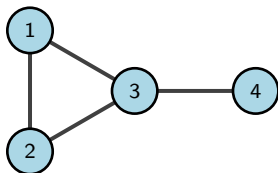
Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop



Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

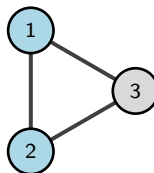
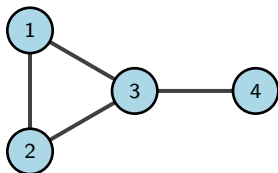


$$\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle =$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

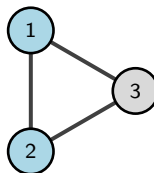
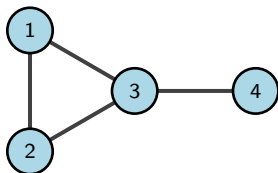


$$\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle)$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

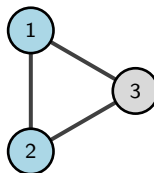
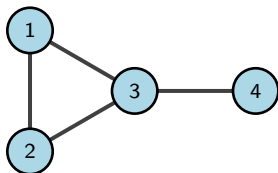


$$\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

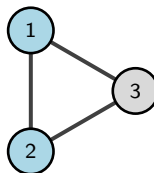
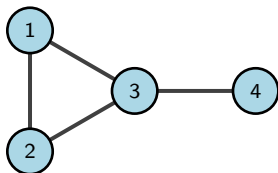


$$\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

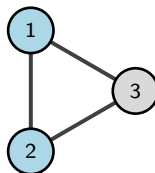
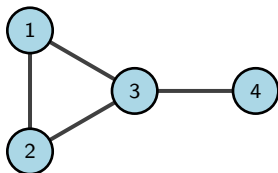


$$\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 I_3 \rangle =$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

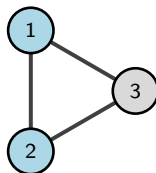
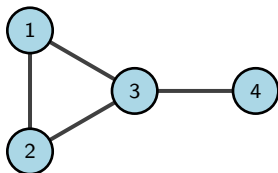


$$\begin{aligned}\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle &= \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 I_3 \rangle = \\ &= \tau \left(\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \frac{\langle S_1 S_3 \rangle \langle S_3 I_4 \rangle}{\langle S_3 \rangle} \right) - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 S_3 \rangle\end{aligned}$$



Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop



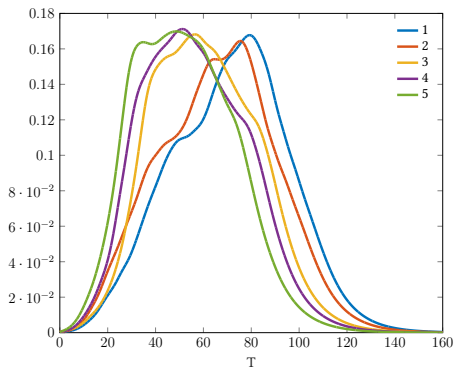
$$\begin{aligned}\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle &= \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 I_3 \rangle = \\ &= \tau \left(\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \frac{\langle S_1 S_3 \rangle \langle S_3 I_4 \rangle}{\langle S_3 \rangle} \right) - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 S_3 \rangle\end{aligned}$$

Grazie al Teorema, il numero di equazioni passa da 35 a 27



La rete stradale del Minnesota

Prevalenza e grado



La rete stradale del Minnesota

Immunizzazione

