## 0.1 — Il modello SIR

Il modello SIR è un modello compartimentale: la popolazione (che si ritiene costante nel tempo) viene suddivisa in 3 classi

- $S$: i *suscettibili* ovvero individui che possono contrarre la malattia
- $I$: gli *infetti* ovvero coloro che sono ammalati
- $R$: i *rimossi* ovvero quelli tolti dalla prima classe perchè completamente guariti (dunque immuni)

Tale modello si basa su alcune assunzioni

- Il numero della popolazione è costante nel tempo e verrà indicato con $N$
- Non si considerano nuove nascite o morti
- Esiste un fattore di contatto $\beta$. Tale rapporto indica, mediamente, quanti suscettibili vengono infettati da un infetto.
- Gli infetti lasciano la classe al tasso $\alpha$ per unità di tempo e vanno nella classe $R$
- Un individuo che entra nella classe $R$ non uscirà da tale classe

Da queste considerazioni segue che

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I \\ I' &= \beta S I - \alpha I \\ R' &= \alpha I \end{aligned} \tag{1}$$

Poichè abbiamo assunto $N = S + I + R$ fosse costante, il sistema precedente risulta equivalente a

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I \\ I' &= \beta S I - \alpha I \end{aligned} \tag{2}$$

Studiamo cosa succede se introduciamo un piccolo numeri di infetti in una popolazione di suscettibili, ovvero consideriamo il sistema 2 con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} I(0) &= I_0 > 0 \\ S(0) &= S_0 = N - I_0 \end{aligned}$$

Da 2 osserviamo che $S' < 0$ per ogni tempo $t$ mentre $I' > 0$ se e solo se $\frac{\beta S}{\alpha} > 1$ Chiamiamo

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta S_0}{\alpha}$$

il *numero di riproduttività di base* ( rappresenta il numero di individui infettati all'interno di una popolazione di suscettibili, consideriamo $I_0 << N$).
Tale valore ci permette di capire l'andamento dell'epidemia

- se $\mathcal{R}_0 < 1$ allora l'epidemia si estingue infatti sotto queste condizioni $I'(t) < 0$ per ogni tempo $t$
- se $\mathcal{R}_0 > 1$ allora $I$ inizialmente aumenta e dunque l'epidemia può iniziare

Vogliamo studiare il sistema autonomo di equazioni differenziali 2.
Osserviamo che essendo $I = 0$ un equilibrio, per risolvere tale sistema non possiamo trovare gli equilibri e linearizzare attorno ad essi. Occorre dunque tentare un aprooccio diverso.

Sommando le due equazioni otteniamo

$$(S + I)' = -\alpha I \tag{3}$$

Ora $S + I$ è una funzione non negativa, decrescente dunque ammette un limite. Poichè la derivata di una funzione decrescente e limitata deve tendere a 0 si ha $I(t) \to 0$.
Da queste due osservazioni si ha $S(t) \to S_\infty$.
Ora integrando da 0 a $+\infty$ in **??** otteniamo

$$\alpha \int_0^{+\infty} I(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} (S(t) + I(t))' == N - S_\infty$$

In 2, dividendo per $S$ e integrando da 0 a $T$ otteniamo

$$\log \frac{S_0}{S_\infty} = \beta \int_0^{+\infty} I(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\beta}{\alpha}(N - S_\infty) = \mathcal{R}_0 \left(1 - \frac{S_\infty}{N}\right) \tag{4}$$

tale equazione prende il nome di *relazione di dimensione finale* infatti fornisce una relazione tra il numero $\mathcal{R}_0$ e la dimensione dell'epidemia (numero di membri che sono stati infetti nel corso dell'epidemia: $N - S_\infty$) .

**Osservazione 1.** *Poichè il lato destro della* **??** *è finito lo è anche il lato sinistro e dunque $S_\infty > 0$ ovvero finita l'epidemia esisteranno ancora degli individui suscettibili*

**Osservazione 2.** *Mostriamo che la relazione finale ha un'unica soluzione*
*Sia*

$$g(x) = \log \frac{S_0}{x} - \mathcal{R}_0 \left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

*ora*

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) > 0 \qquad g(N) = \log \frac{S_0}{N} < 0$$

*mentre*

$$g'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{\mathcal{R}_0}{N} < 0 \qquad \Leftrightarrow x < \frac{N}{\mathcal{R}_0}$$

- *se* $\mathcal{R}_0 \leq 1$ *allora* $N < \frac{N}{\mathcal{R}_0}$ *dunque* $g$ *decresce da un valore positivo in* $0^+$ *fino ad un valore negativo in* $N$.
  *In questo caso esiste* $g(x)$ *ha un'unica soluzione* $S_\infty$ *con* $S_\infty < N$

- *se* $\mathcal{R}_0 > 1$ *allora la funzione è monotona decrescente da un valore positivo in* $0^+$ *fino al minimo in* $\frac{N}{\mathcal{R}_0}$.
  *Poichè*

  $$g\left(\frac{S_0}{\mathcal{R}_0}\right) = \log \mathcal{R}_0 - \mathcal{R}_0 + \frac{S_0}{N} \leq \log \mathcal{R}_0 0 \mathcal{R}_0 + 1 < 0$$

  *infatti* $\log x < x - 1$ *per* $x > 0$.
  *Dunque* $g(x)$ *ha un unico zero in* $S_\infty$ *con* $S_\infty < \frac{N}{\mathcal{R}_0}$

Andiamo ora a descrivere le orbite delle soluzioni nel piano $(S, I)$.
Dividendo per $S$ l'equazione 2 e integrando tra 0 a $t$ otteniamo

$$\log \frac{S_0}{S(t)} = \beta \int_0^{+\infty} I(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\beta}{\alpha}\left(N - S(t) - I(t)\right)$$

**Osservazione 3** (Stima dei parametri). *Il fattore* $\beta$ *è di difficile stima: dipenda dalla malattia in esame ma soprattutto da fattori sociali e comportamentali.*
*I valori di* $S_0$ *e* $S_\infty$ *possono essere ricavati tramite test sierologici (misurazione della risposta immunitaria tramite analisi del sangue); da questi valori usando* **??** *possiamo stimare* $\mathcal{R}_0$.
*Questa stima, tuttavia è retrospettiva e può essere ricavata solamente dopo che l'epidemia ha fatto il suo corso.*

*Presentiamo un altro modo per stimare $\beta$.*
*Inizialmente vale la seguente approssimazione*

$$I' = (\beta N - \alpha)\, I$$

*dunque il numero degli infetti cresce esponenzialmente con un tasso di crescita*

$$r = \beta N - \alpha = \alpha\, (\mathcal{R}_0 - 1)$$

*Ora $r$ può essere ricavato dell'incidenza della malattia all'inizio dell'epidemia, dunque otteniamo*

$$\beta = \frac{r + \alpha}{N}$$

**Osservazione 4** (Immunizzazione)**.** *Se un gruppo di infetti viene introdotto in una popolazione, per prevenire un'epidemia è necessario ridurre $\mathcal{R}_0$.*
*Un modo può essere tramite l'immunizzazione, lo scopo è quello di trasferire membri della popolazione della classe $S$ a quella $R$, così facendo viene ridotto il numero $S_0$ dunque anche $\mathcal{R}_0$.*
*Andiamo a studiare il nuovo modello che si genera.*
*Supponiamo che una frazione $p$ della popolazione sia immunizzata: il numeri dei suscettibili passa da $S_0$ a $S_0(1-p)$.*
*Se inizialmente il numero di riproduzione di base era $\frac{\beta N}{\alpha}$, nella nuova situazione passa a $\frac{\beta N(1-p)}{\alpha}$ dunque*

$$\frac{\beta N(1-p)}{\alpha} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad p > 1 - \frac{\alpha}{\beta N} = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}$$

### 0.1.1 Un esempio

Analizziamo i dati della peste bubonica del $1665-66$ nel villaggio di Eyam (ref 3) I membri del villaggio hanno annotato giorno per giorno il numero di decessi. Per appianare alcune significative variazioni giornaliera nel tasso di mortalità abbiamo raccolto i dati con una cadenza di $15\frac{1}{2}$ giorni a partire dal $18$ Giugno del $1666$ (vedi tabella **??**)

Tabella 1: Popolazione di deceduti e rimossi

| Periodo (1666) | Deceduti | Rimossi (alla fine del periodo) |
|---|---|---|
| 19 Giugno-3/4 Luglio | 11.5 | 11.5 |
| 4/5 Luglio-19 Luglio | 26.5 | 38 |
| 20 Luglio-3/4 Agosto | 40.5 | 78.5 |
| 4/5 Agosto-19 Agosto | 41.5 | 120 |
| 20 Agosto-3/4 Settembre | 25 | 145 |
| 4/5 Settembre-19 Settembre | 11 | 156 |
| 20 Settembre-4/5 Ottobre | 11.5 | 167.5 |
| 5/6 Ottobre-20 Ottobre | 10.5 | 178 |

Prendendo come periodo medio di infezione $11$ giorni, possiamo stimare il numero degli infetti. Alla fine di ogni intervallo di tempo il numero di infetti è dato analizzando il diario dei decessi degli $11$ giorni successivi.
Sfruttando la relazione

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

otteniamo la tabella 2

Tabella 2: Numero di suscettibili ed infetti. $S(0) = 254$ $I(0) = 7$ e $N = 261$

| Data (1666) | S | I |
|---|---|---|
| 3/4 Luglio | 235 | 14.5 |
| 19 Luglio | 201 | 22 |
| 3/4 Agosto | 153.5 | 29 |
| 19 Agosto | 121 | 20 |
| 3/4 Settembre | 108 | 8 |
| 19 Settembre | 97 | 8 |
| 4/5 Ottobre | Sconosciuti | Sconosciuti |
| 20 Ottobre | 83 | 0 |

Dalla relazione di dimensione finale (**??**) otteniamo $\frac{\alpha}{\beta} \simeq 159$

Andiamo a calcolare i valori implementando il modello SIR in matlab. Utilizzando le funzioni

```
function f = sir(t,y,alpha, beta)
        f=zeros(2,1);
        f(1)=-beta*y(1)*y(2);
        f(2)=beta*y(1)*y(2)- alpha*y(2);
end
```

```
function [S,I,R,t]= sir_model(N,S0,I0, beta, alpha,t)
        c=[S0; I0];
        [t,y]=ode45(@(t,y) sir(t,y,alpha,beta), t , c);
        R= ones(size(t,1),1)*N -y(:,1) - y(:,2);
        S=y(:,1);
        I=y(:,2);
end
```

otteniamo i seguenti dati

Tabella 3: Numero di suscettibili ed infetti. $S(0) = 254$ $I(0) = 7$ e $N = 261$

| Data (1666) | S | I |
|---|---|---|
| 3/4 Luglio | 230 | 15 |
| 19 Luglio | 190 | 26 |
| 3/4 Agosto | 147 | 30 |
| 19 Agosto | 115 | 24 |
| 3/4 Settembre | 96 | 15 |
| 19 Settembre | 86 | 9 |
| 4/5 Ottobre | 81 | 4 |
| 20 Ottobre | 78 | 2 |

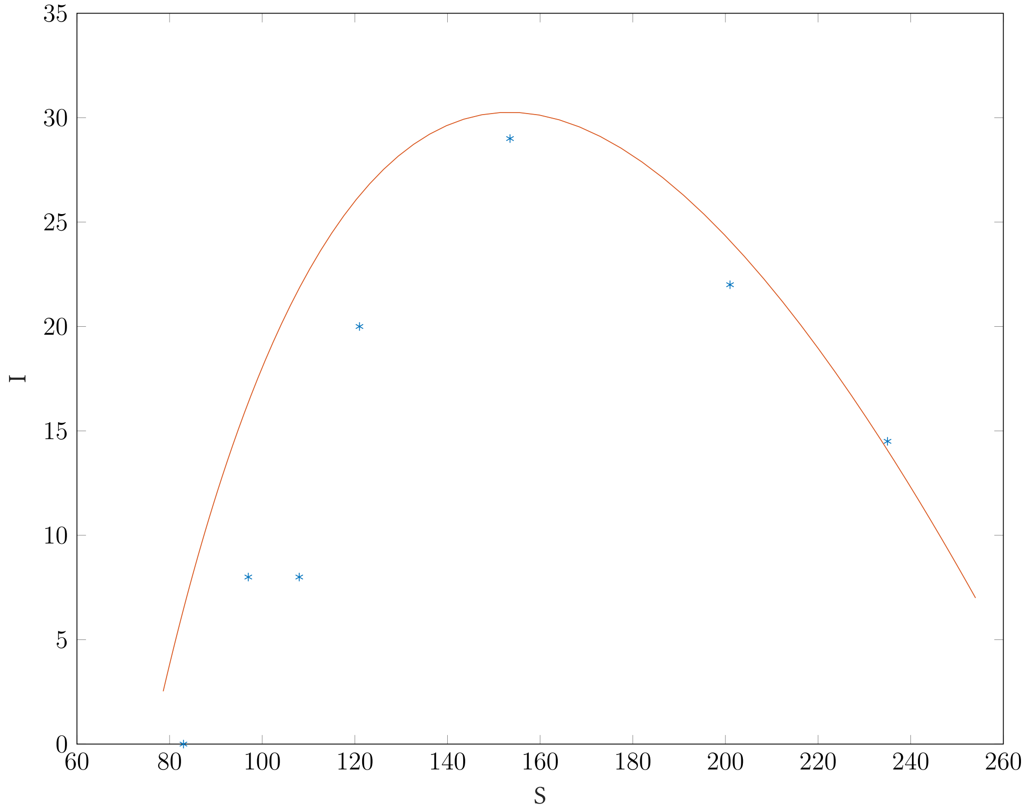


Figura 1: Orbite nel piano $(S, I)$. In blu i valori reali, in rosso quelli ottenuti applicando il modello SIR

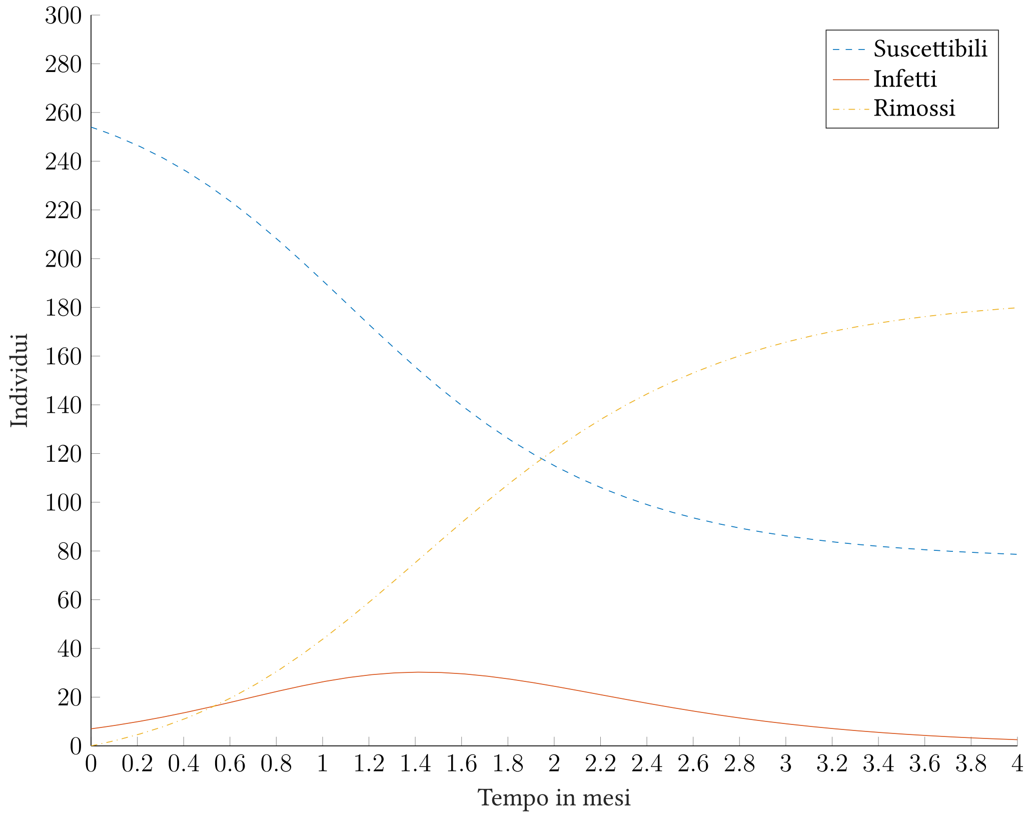


Figura 2: Grafico ottenuto applicando il modello SIR