

# Il Modello Epidemiologico SIR sulle Reti Complesse

Simmaco Di Lillo

Università di Pisa

Discussione Tesi Triennale in Matematica,  
24 settembre 2021



# Il modello SIR scalare

Il modello SIR è un modello compartimentale: la popolazione viene suddivisa in 3 classi

- $S$ : i suscettibili;
- $I$ : gli infetti;
- $R$ : i rimossi.



# Il modello SIR scalare

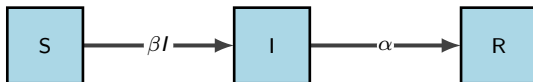


Figura: Schema del modello SIR.



# Il modello SIR scalare

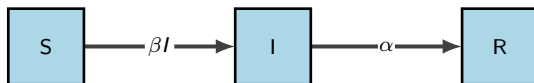


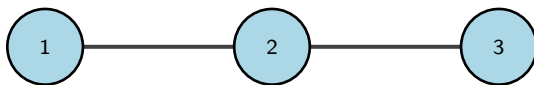
Figura: Schema del modello SIR.

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - \alpha I \\ \dot{R} &= \alpha I\end{aligned}\tag{1}$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio



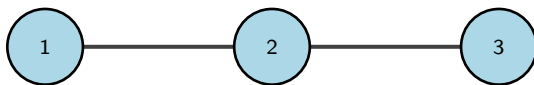
Come si infettano?

- Il nodo 1 ha una sola fonte d'infezione.  
 $\langle S_1 \rangle$  diminuisce con un tasso di  $\tau \langle S_1 I_2 \rangle$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio



Come si infettano?

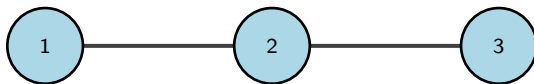
- Il nodo 1 ha una sola fonte d'infezione.
- Il nodo 2 ne ha due.

$\langle S_2 \rangle$  diminuisce con un tasso di  $\tau \langle I_1 S_2 \rangle + \tau \langle S_2 I_3 \rangle$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio



Come si infettano?

- Il nodo 1 ha una sola fonte d'infezione.
- Il nodo 2 ne ha due.
- Anche il nodo 3 ne ha una sola.

$\langle S_3 \rangle$  diminuisce con un tasso di  $\tau \langle I_2 S_3 \rangle$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Un primo esempio

$$\langle \dot{S}_1 \rangle = -\tau \langle S_1 I_2 \rangle,$$

$$\langle \dot{S}_2 \rangle = -\tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle),$$

$$\langle \dot{S}_3 \rangle = -\tau \langle I_2 S_3 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_1 \rangle = \tau \langle S_1 I_2 \rangle - \gamma \langle I_1 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_2 \rangle = \tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle) - \gamma \langle I_2 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_3 \rangle = \tau \langle I_2 S_3 \rangle - \gamma \langle I_3 \rangle,$$





# Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio

$$\begin{aligned}\langle \dot{S}_1 \rangle &= -\tau \langle S_1 I_2 \rangle, & \langle \dot{I}_1 \rangle &= \tau \langle S_1 I_2 \rangle - \gamma \langle I_1 \rangle, \\ \langle \dot{S}_2 \rangle &= -\tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle), & \langle \dot{I}_2 \rangle &= \tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle) - \gamma \langle I_2 \rangle, \\ \langle \dot{S}_3 \rangle &= -\tau \langle I_2 S_3 \rangle, & \langle \dot{I}_3 \rangle &= \tau \langle I_2 S_3 \rangle - \gamma \langle I_3 \rangle,\end{aligned}$$

Tale sistema **non è chiuso**. Dipende da alcune coppie.



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Un primo esempio

Come evolvono nel tempo le coppie?

$$\langle \dot{S}_1 I_2 \rangle = \tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_2 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_1 \dot{S}_2 \rangle = -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 \rangle,$$

$$\langle \dot{S}_2 I_3 \rangle = -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_2 I_3 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_2 \dot{S}_3 \rangle = \tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_2 S_3 \rangle.$$

e le triple?

$$\langle \dot{S}_2 I_3 \rangle = -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 \rangle,$$

$$\langle \dot{S}_1 \dot{S}_2 I_3 \rangle = -(\tau + \gamma) \langle S_1 S_2 I_3 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_1 \dot{S}_2 I_3 \rangle = -(2\tau + 2\gamma) \langle I_1 S_2 I_3 \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_1 \dot{S}_2 \dot{S}_3 \rangle = -(\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 S_3 \rangle.$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Modello generale

Sia  $G = (g_{ij})$  la matrice di adiacenza del grafo  $G$ . L'epidemia si diffonde sul grafo nel seguente modo

$$\langle \dot{S}_i \rangle = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij} \langle S_i I_j \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_i \rangle = \tau \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij} \langle S_i I_j \rangle - \gamma_i \langle I_i \rangle,$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Chiusura alle coppie

Per ottenere un modello chiuso ma **non esatto** possiamo assumere l'indipendenza a livello delle coppie. Ovvero utilizzare l'approssimazione

$$\langle A_i B_j \rangle \approx \langle A_i \rangle \langle B_j \rangle \quad \forall A, B \in \{S, I, R\} \text{ e } \forall (i, j) \in E$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Chiusura alle coppie

Per ottenere un modello chiuso ma **non esatto** possiamo assumere l'indipendenza a livello delle coppie. Ovvero utilizzare l'approssimazione

$$\langle A_i B_j \rangle \approx \langle A_i \rangle \langle B_j \rangle \quad \forall A, B \in \{S, I, R\} \text{ e } \forall (i, j) \in E$$

$$\langle \dot{S}_i \rangle = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij} \langle S_i \rangle \langle I_j \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_i \rangle = \tau \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij} \langle S_i \rangle \langle I_j \rangle - \gamma_i \langle I_i \rangle.$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Chiusura alle coppie

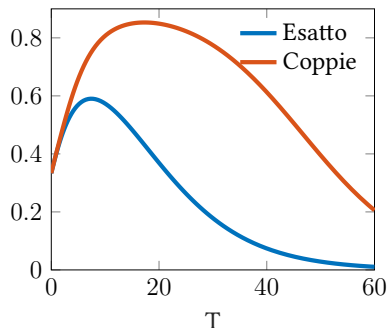


Figura: Prevalenza nei due modelli.

Riportiamo la definizione data dall'OMS nel 1959:

*La prevalenza indica il numero di individui malati in una determinata popolazione, senza nessuna distinzione tra nuovi e vecchi casi. La "prevalenza puntiforme" è solitamente espressa come una frazione: il denominatore è il numero della popolazione.*



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Diamo due importanti definizioni

## Definizione (cut-vertex)

Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso.  $v \in V$  è un *cut-vertex* se il grafo senza il nodo  $v$  risulta sconnesso.

## Definizione (Probabilità condizionale)

Siano  $A, B$  due eventi di uno spazio di probabilità con  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Si dice *probabilità condizionale* di  $A$  dato  $B$  la quantità

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Teorema (Kiss, Morris, Seélley, Simon, Wilkinson, J. Math. Biol. 2015)

*Sia  $G = (V, E)$  un grafo e  $F = \{v_1, \dots, v_k\}$  un sottoinsieme connesso di vertici e sia  $v_i$  un suo cut-vertex. Poniamo*

$$F_1 = \{v_1, \dots, v_{i-1}\} \text{ e } F_2 = \{v_{i+1}, \dots, v_k\}.$$

*Se ogni cammino che connette un nodo in  $F_1$  ad uno in  $F_2$  passa da  $v_i$  allora:*

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle$$

*dove  $Z \in \{S, I, R\}$ .*



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Dimostrazione.

Se  $\langle S_{v_i} \rangle = 0$  allora l'uguaglianza risulta banalmente vera.

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Dimostrazione.

Sia  $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

## Dimostrazione.

Sia  $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} \rangle.$$

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

## Dimostrazione.

Sia  $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \mid S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} \rangle.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} & \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \mid S_{v_i} \rangle = \\ & = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} \mid S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \mid S_{v_i} \rangle. \end{aligned}$$

Ogni percorso da  $F_1$  a  $F_2$  deve passare attraverso  $v_i$ . Poichè  $v_i$  è suscettibile la trasmissione non può avvenire tra un nodo in  $F_1$  ed uno in  $F_2$ .

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

## Dimostrazione.

Sia  $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \mid S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} \rangle.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} & \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \mid S_{v_i} \rangle = \\ &= \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} \mid S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \mid S_{v_i} \rangle. \end{aligned}$$

Ogni percorso da  $F_1$  a  $F_2$  deve passare attraverso  $v_i$ . Poichè  $v_i$  è suscettibile la trasmissione non può avvenire tra un nodo in  $F_1$  ed uno in  $F_2$ . Riapplicando la definizione di probabilità condizionale la tesi □

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

- Con una visita in profondità si trovano tutti i cut-vertex di  $G$ .



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

- Con una visita in profondità si trovano tutti i cut-vertex di  $G$ .
- Si divide la rete originale in sottoreti connesse a due a due scollegate. Le sottoreti vengono create in modo che i cut-vertex siano mantenuti in tutte le sottoreti generate.



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Approccio generale alla chiusura

- Con una visita in profondità si trovano tutti i cut-vertex di  $G$ .
- Si divide la rete originale in sottoreti ...
- Per ogni nodo  $i$  delle sottoreti, si ha

$$\langle \dot{S}_i \rangle = -\tau \sum_j g_{ij} \langle S_i I_j \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_i \rangle = \tau \sum_j g_{ij} \langle S_i I_j \rangle - \gamma \langle I_i \rangle,$$

$$\langle \dot{R}_i \rangle = 1 - \langle S_i \rangle - \langle I_i \rangle.$$

Si possono trovare equazioni simili anche per le strutture di ordine maggiore (coppie, triple, ...)





# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

- Con una visita in profondità si trovano tutti i cut-vertex di  $G$ .
- Si divide la rete originale in sottoreti ...
- Per ogni nodo  $i$  delle sottoreti ...
- Nella gerarchia che si verrà a creare, se appare un termine composto da vertici di sottoreti diverse allora in esso è presente un cut-vertex suscettibile. Usando il Teorema precedente è possibile esprimere questo termine usando termini più semplici.



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

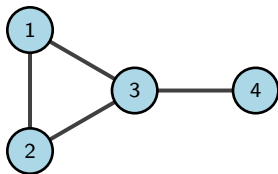


Figura: Rete lollipop.



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## La rete lollipop

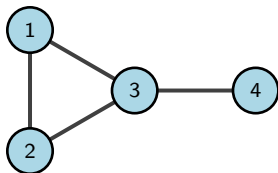


Figura: Rete lollipop.

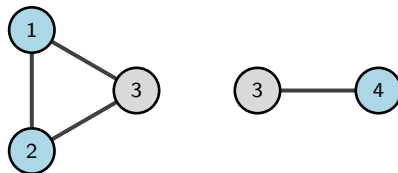


Figura: Rete lollipop: decomposizione.



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## La rete lollipop

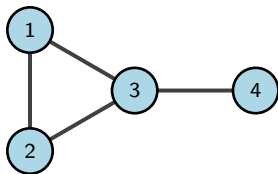


Figura: Rete lollipop.

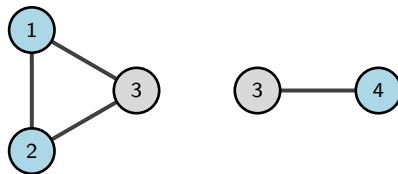


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle =$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

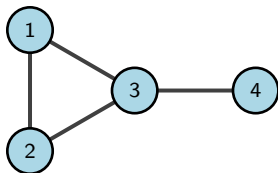


Figura: Rete lollipop.

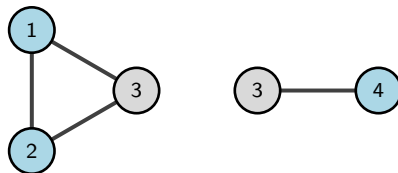


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle)$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

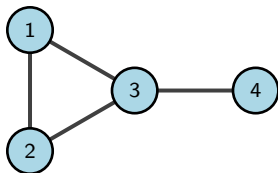


Figura: Rete lollipop.

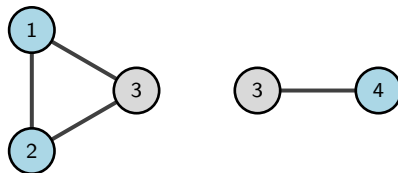


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

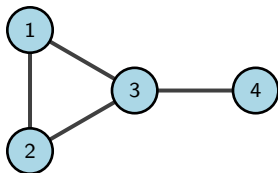


Figura: Rete lollipop.

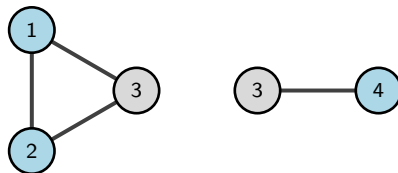


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## La rete lollipop

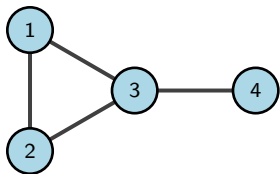


Figura: Rete lollipop.

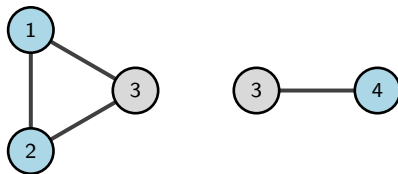


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 I_3 \rangle =$$





# Il modello SIR bottom-up su una rete

## La rete lollipop

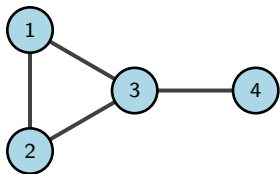


Figura: Rete lollipop.

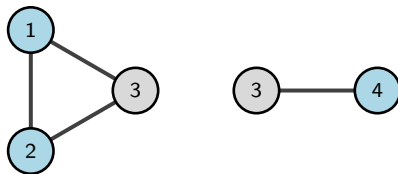


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\begin{aligned}\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle &= \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 I_3 \rangle = \\ &= \tau \left( \langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \frac{\langle S_1 S_3 \rangle \langle S_3 I_4 \rangle}{\langle S_3 \rangle} \right) - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 S_3 \rangle\end{aligned}$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## La rete lollipop

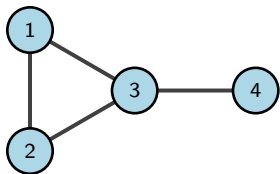


Figura: Rete lollipop.

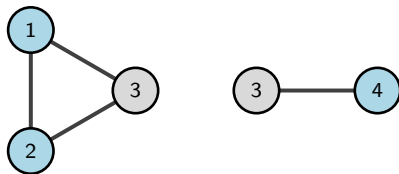


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\begin{aligned}\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle &= \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 I_3 \rangle = \\ &= \tau \left( \langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \frac{\langle S_1 S_3 \rangle \langle S_3 I_4 \rangle}{\langle S_3 \rangle} \right) - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 S_3 \rangle\end{aligned}$$

Grazie al Teorema, il numero di equazioni passa da 35 a 27



# La rete stradale del Minnesota

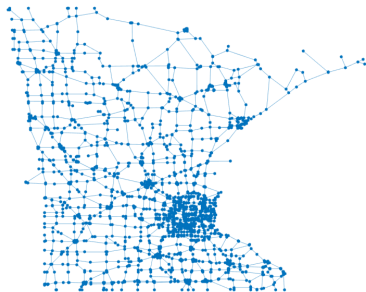


Figura: La rete stradale del Minnesota.

Abbiamo integrato il modello chiuso alle coppie

- funzione ode15s di MATLAB
- Tolleranza assoluta:  $1e - 12$
- Tolleranza relativa:  $1e - 12$
- Intervallo temporale:  $[0, 160]$
- Tasso d'infezione:  $\tau = 0.3$
- Tasso di rimozione:  $\gamma = 0.1$

Le condizioni iniziali sono stati puri: un nodo certamente infetto gli altri certamente sani



# La rete stradale del Minnesota

Sperimentazione numerica

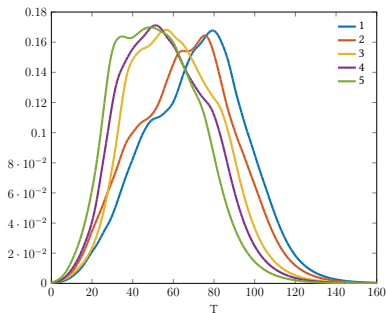


Figura: Prevalenza e grado.



# La rete stradale del Minnesota

## Sperimentazione numerica

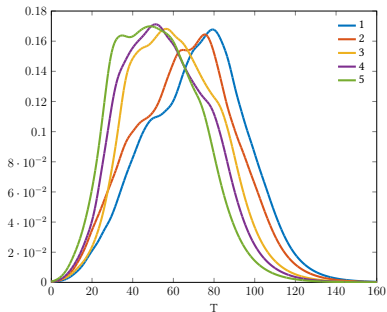


Figura: Prevalenza e grado.

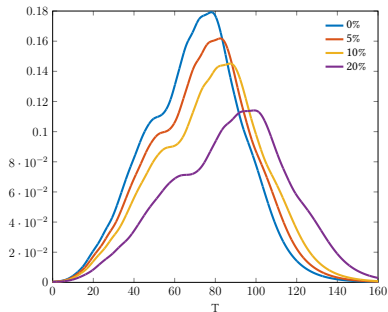


Figura: Immunizzazione.

