

# Il Modello Epidemiologico SIR sulle Reti Complesse

Simmaco Di Lillo

Università di Pisa

Discussione Tesi Triennale in Matematica,  
24 settembre 2021



# Il modello SIR scalare

Il modello SIR è un modello compartmentale: la popolazione viene suddivisa in 3 classi

- $S$ : i suscettibili;
- $I$ : gli infetti;
- $R$ : i rimossi.



# Il modello SIR scalare

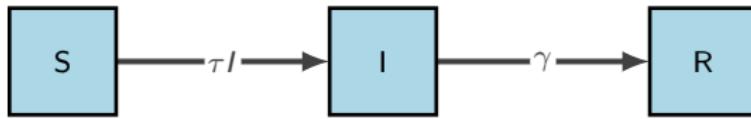


Figura: Schema del modello SIR.

Assunzioni :

- $N$ : numero di individui (costante)
- $\tau$ : tasso di contatto
- $\gamma$ : tassi di recupero



# Il modello SIR scalare

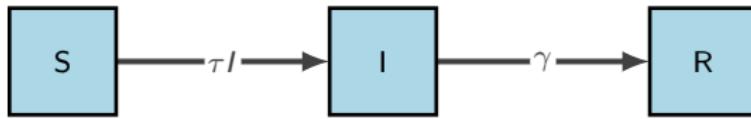


Figura: Schema del modello SIR.

Assunzioni :

- $N$ : numero di individui  
(costante)
- $\tau$ : tasso di contatto
- $\gamma$ : tassi di recupero

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\tau SI \\ \dot{I} &= \tau SI - \gamma I \\ \dot{R} &= \gamma I\end{aligned}$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Un primo esempio

Notazione:

- $\langle A_i \rangle(t)$ : probabilità che il nodo  $i$  si trovi nello stato  $A$  al tempo  $t$
- $\langle A_i B_j \rangle(t)$ : probabilità che il nodo  $i$  si trovi nello stato  $A$  e il nodo  $j$  in  $B$  al tempo  $t$

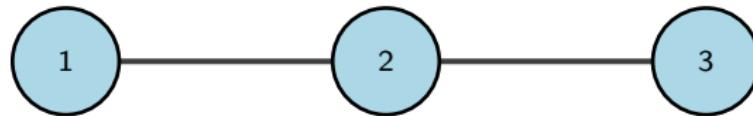


# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Un primo esempio

Notazione:

- $\langle A_i \rangle(t)$ : probabilità che il nodo  $i$  si trovi nello stato  $A$  al tempo  $t$
- $\langle A_i B_j \rangle(t)$ : probabilità che il nodo  $i$  si trovi nello stato  $A$  e il nodo  $j$  in  $B$  al tempo  $t$



Come si infettano?

- Il nodo 1 ha una sola fonte d'infezione.  
 $\langle S_1 \rangle$  diminuisce con un tasso di  $\tau \langle S_1 I_2 \rangle$

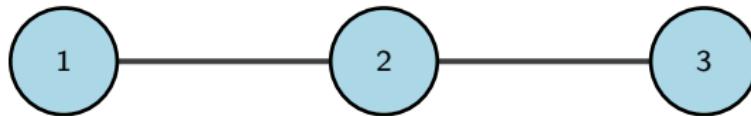


# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Un primo esempio

Notazione:

- $\langle A_i \rangle(t)$ : probabilità che il nodo  $i$  si trovi nello stato  $A$  al tempo  $t$
- $\langle A_i B_j \rangle(t)$ : probabilità che il nodo  $i$  si trovi nello stato  $A$  e il nodo  $j$  in  $B$  al tempo  $t$



Come si infettano?

- Il nodo 1 ha una sola fonte d'infezione.
- Il nodo 2 ne ha due.

$$\langle S_2 \rangle \text{ diminuisce con un tasso di } \tau \langle I_1 S_2 \rangle + \tau \langle S_2 I_3 \rangle$$

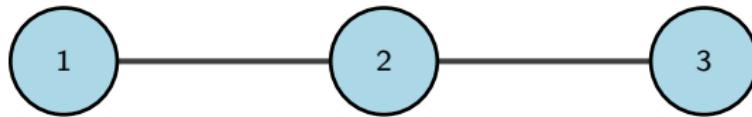


# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Un primo esempio

Notazione:

- $\langle A_i \rangle(t)$ : probabilità che il nodo  $i$  si trovi nello stato  $A$  al tempo  $t$
- $\langle A_i; B_j \rangle(t)$ : probabilità che il nodo  $i$  si trovi nello stato  $A$  e il nodo  $j$  in  $B$  al tempo  $t$



Come si infettano?

- Il nodo 1 ha una sola fonte d'infezione.
- Il nodo 2 ne ha due.
- Anche il nodo 3 ne ha una sola.

$\langle S_3 \rangle$  diminuisce con un tasso di  $\tau \langle I_2 S_3 \rangle$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio

$$\dot{\langle S_1 \rangle} = -\tau \langle S_1 I_2 \rangle,$$

$$\dot{\langle S_2 \rangle} = -\tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle),$$

$$\dot{\langle S_3 \rangle} = -\tau \langle I_2 S_3 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_1 \rangle} = \tau \langle S_1 I_2 \rangle - \gamma \langle I_1 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_2 \rangle} = \tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle) - \gamma \langle I_2 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_3 \rangle} = \tau \langle I_2 S_3 \rangle - \gamma \langle I_3 \rangle,$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Un primo esempio

$$\dot{\langle S_1 \rangle} = -\tau \langle S_1 I_2 \rangle,$$

$$\dot{\langle S_2 \rangle} = -\tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle),$$

$$\dot{\langle S_3 \rangle} = -\tau \langle I_2 S_3 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_1 \rangle} = \tau \langle S_1 I_2 \rangle - \gamma \langle I_1 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_2 \rangle} = \tau (\langle I_1 S_2 \rangle + \langle S_2 I_3 \rangle) - \gamma \langle I_2 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_3 \rangle} = \tau \langle I_2 S_3 \rangle - \gamma \langle I_3 \rangle,$$

Tale sistema **non è chiuso**. Dipende da alcune coppie.



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio

Come evolvono nel tempo le coppie?

$$\dot{\langle S_1 I_2 \rangle} = \tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_2 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_1 S_2 \rangle} = -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 \rangle,$$

$$\dot{\langle S_2 I_3 \rangle} = -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_2 I_3 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_2 S_3 \rangle} = \tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_2 S_3 \rangle.$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Un primo esempio

Come evolvono nel tempo le coppie?

$$\dot{\langle S_1 I_2 \rangle} = \tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_2 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_1 S_2 \rangle} = -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 \rangle,$$

$$\dot{\langle S_2 I_3 \rangle} = -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_2 I_3 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_2 S_3 \rangle} = \tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_2 S_3 \rangle.$$

e le triple?

$$\dot{\langle S_1 S_2 I_3 \rangle} = -(\tau + \gamma) \langle S_1 S_2 I_3 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_1 I_2 S_3 \rangle} = -(2\tau + 2\gamma) \langle I_1 I_2 S_3 \rangle,$$

$$\dot{\langle I_1 S_2 S_3 \rangle} = -(\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 S_3 \rangle.$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Modello generale

Sia  $G = (g_{ij})$  la **matrice di adiacenza** del grafo  $G$ . L'epidemia si diffonde sul grafo nel seguente modo

$$\dot{\langle S_i \rangle} = -\tau \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij} \langle S_i I_j \rangle,$$

$$\dot{\langle I_i \rangle} = \tau \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij} \langle S_i I_j \rangle - \gamma_i \langle I_i \rangle,$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Chiusura alle coppie

## Definizione (Coeffienti di correlazione)

Siano  $A, B \in \{S, I, R\}$  e  $(i, j) \in E$  allora

$$C_{A_i B_j} = \frac{\langle A_i B_j \rangle}{\langle A_i \rangle \langle B_j \rangle}$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Chiusura alle coppie

## Definizione (Coeffienti di correlazione)

Siano  $A, B \in \{S, I, R\}$  e  $(i, j) \in E$  allora

$$C_{A_i B_j} = \frac{\langle A_i B_j \rangle}{\langle A_i \rangle \langle B_j \rangle}$$

Nel modello SIR

- $C_{I_i I_j} \geq 1$
- $C_{S_i I_j} \leq 1$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Chiusura alle coppie

## Definizione (Coeffienti di correlazione)

Siano  $A, B \in \{S, I, R\}$  e  $(i, j) \in E$  allora

$$C_{A_i B_j} = \frac{\langle A_i B_j \rangle}{\langle A_i \rangle \langle B_j \rangle}$$

Nel modello SIR

- $C_{I_i I_j} \geq 1$
- $C_{S_i I_j} \leq 1$

Per ottenere un modello chiuso ma **non esatto** assumeremo l'indipendenza a livello delle coppie ovvero:

$$\langle A_i B_j \rangle \approx \langle A_i \rangle \langle B_j \rangle \quad \forall A, B \in \{S, I, R\} \text{ e } \forall (i, j) \in E$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

Chiusura alle coppie

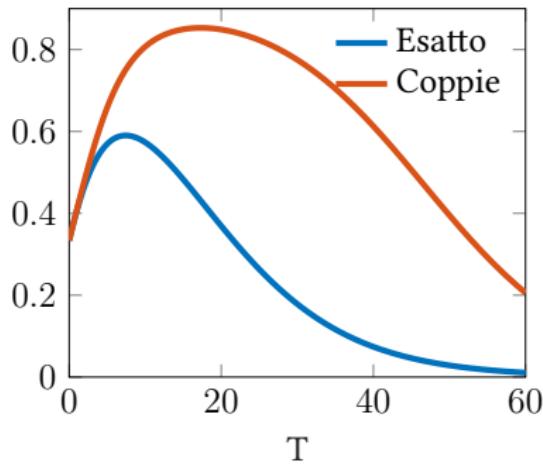


Figura: Prevalenza nei due modelli.

Riportiamo la definizione data dall'OMS nel 1959:

*La prevalenza indica il numero di individui malati in una determinata popolazione, senza nessuna distinzione tra nuovi e vecchi casi. La prevalenza puntiforme è solitamente espressa come una frazione: il denominatore è il numero della popolazione.*



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Approccio generale alla chiusura

Diamo due importanti definizioni

### Definizione (cut-vertex)

Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso.  $v \in V$  è un *cut-vertex* se il grafo senza il nodo  $v$  risulta sconnesso.

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

Diamo due importanti definizioni

## Definizione (cut-vertex)

Sia  $G = (V, E)$  un grafo connesso.  $v \in V$  è un *cut-vertex* se il grafo senza il nodo  $v$  risulta sconnesso.

## Definizione (Probabilità condizionale)

Siano  $A, B$  due eventi di uno spazio di probabilità con  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Si dice *probabilità condizionale* di  $A$  dato  $B$  la quantità

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Approccio generale alla chiusura

Teorema (Kiss, Morris, Seélley, Simon, Wilkinson, J. Math. Biol. 2015)

Sia  $G = (V, E)$  un grafo e  $F = \{v_1, \dots, v_k\}$  un sottoinsieme connesso di vertici e sia  $v_i$  un suo cut-vertex. Poniamo

$$F_1 = \{v_1, \dots, v_{i-1}\} \text{ e } F_2 = \{v_{i+1}, \dots, v_k\}.$$

Se ogni cammino che connette un nodo in  $F_1$  ad uno in  $F_2$  passa da  $v_i$ ; allora:

$$\text{angolo} Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle$$

dove  $Z \in \{S, I, R\}$ .

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

## Teorema

[...]

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle$$

## Dimostrazione.

Se  $\langle S_{v_i} \rangle = 0$  allora l'uguaglianza risulta banalmente vera.

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

## Teorema

[...]

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle$$

## Dimostrazione.

Sia  $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

## Teorema

[...]

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle$$

## Dimostrazione.

Sia  $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} \rangle.$$

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

## Teorema

[...]

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle$$

## Dimostrazione.

Sia  $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} \rangle.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} & \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle = \\ & = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} | S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle. \end{aligned}$$

Ogni percorso da  $F_1$  a  $F_2$  deve passare attraverso  $v_i$ . Poiché  $v_i$  è suscettibile la trasmissione non può avvenire tra un nodo in  $F_1$  ed uno in  $F_2$ .

# Il modello SIR bottom-up su una rete

Approccio generale alla chiusura

## Teorema

[...]

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle$$

## Dimostrazione.

Sia  $\langle S_{v_i} \rangle \neq 0$

$$\langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} \rangle = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} \rangle.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} & \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle = \\ & = \langle Z_{v_1} \dots Z_{v_{i-1}} S_{v_i} | S_{v_i} \rangle \langle S_{v_i} Z_{v_{i+1}} \dots Z_{v_k} | S_{v_i} \rangle. \end{aligned}$$

Ogni percorso da  $F_1$  a  $F_2$  deve passare attraverso  $v_i$ . Poiché  $v_i$  è suscettibile la trasmissione non può avvenire tra un nodo in  $F_1$  ed uno in  $F_2$ .

Riapplicando la definizione di probabilità condizionale la tesi



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Approccio generale alla chiusura

- Con una **visita in profondità** si trovano tutti i cut-vertex di  $G$ .



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Approccio generale alla chiusura

- Con una visita in profondità si trovano tutti i cut-vertex di  $G$ .
- Si divide la rete originale in **sottoreti** connesse a due a due scollegate. Le sottoreti vengono create in modo che i cut-vertex siano mantenuti in tutte le sottoreti generate.



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Approccio generale alla chiusura

- Con una visita in profondità si trovano tutti i cut-vertex di  $G$ .
- Si divide la rete originale in sottoreti ...
- Per ogni nodo  $i$  delle sottoreti, si ha

$$\langle \dot{S}_i \rangle = -\tau \sum_j g_{ij} \langle S_i I_j \rangle,$$

$$\langle \dot{I}_i \rangle = \tau \sum_j g_{ij} \langle S_i I_j \rangle - \gamma \langle I_i \rangle,$$

$$\langle \dot{R}_i \rangle = 1 - \langle S_i \rangle - \langle I_i \rangle.$$

Si possono trovare equazioni simili anche per le strutture di ordine maggiore (coppie, triple, ...)



# Il modello SIR bottom-up su una rete

## Approccio generale alla chiusura

- Con una visita in profondità si trovano tutti i cut-vertex di  $G$ .
- Si divide la rete originale in sottoreti ...
- Per ogni nodo  $i$  delle sottoreti ...
- Nella gerarchia che si verrà a creare, se appare un termine composto da vertici di sottoreti diverse allora in esso è presente un cut-vertex suscettibile. Usando il Teorema precedente è possibile esprimere questo termine usando **termini più semplici**.



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

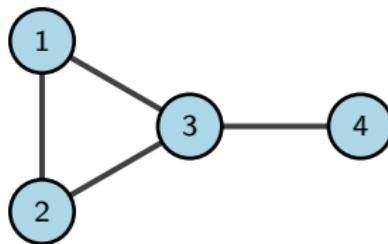


Figura: Rete lollipop.



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

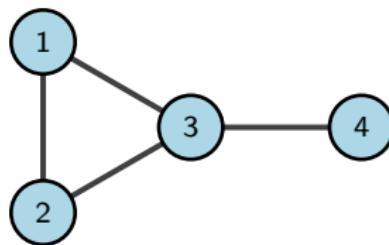


Figura: Rete lollipop.

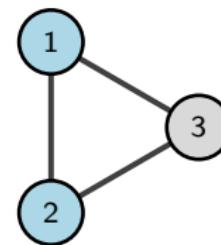


Figura: Rete lollipop: decomposizione.



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

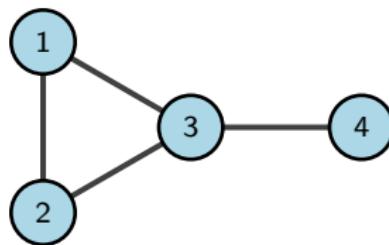


Figura: Rete lollipop.

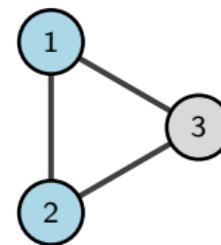


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\langle S_1 I_3 \rangle =$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

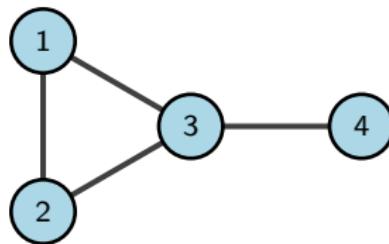


Figura: Rete lollipop.

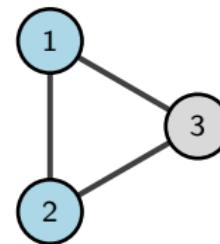


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\langle S_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle)$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

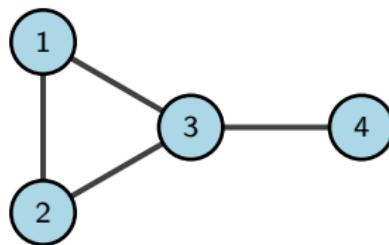


Figura: Rete lollipop.

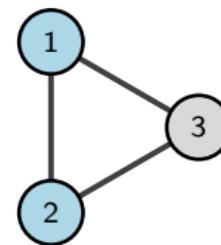


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\langle S_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

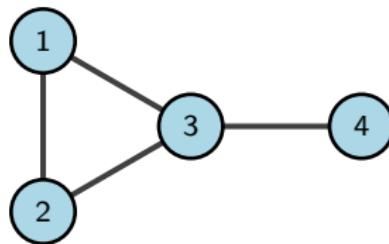


Figura: Rete lollipop.

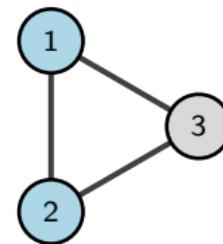


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\langle S_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

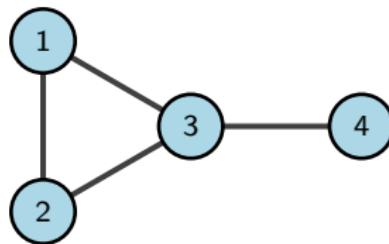


Figura: Rete lollipop.

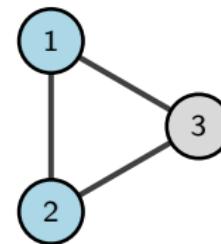


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\langle S_1 I_3 \rangle = \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 I_3 \rangle =$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

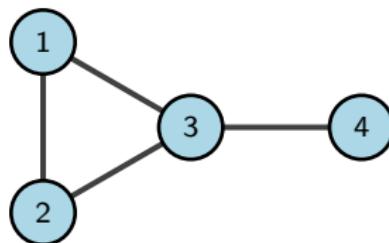


Figura: Rete lollipop.

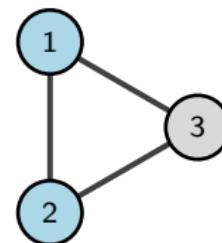


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\begin{aligned}\langle S_1 I_3 \rangle &= \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 I_3 \rangle = \\ &= \tau \left( \langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \frac{\langle S_1 S_3 \rangle \langle S_3 I_4 \rangle}{\langle S_3 \rangle} \right) - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 S_3 \rangle\end{aligned}$$



# Il modello SIR bottom-up su una rete

La rete lollipop

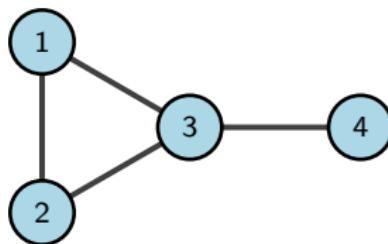


Figura: Rete lollipop.

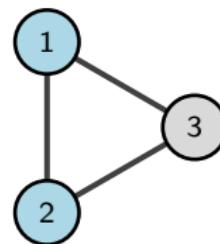


Figura: Rete lollipop: decomposizione.

$$\begin{aligned}\langle S_1 I_3 \rangle &= \tau (\langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \langle S_1 S_3 I_4 \rangle) - \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 I_3 \rangle = \\ &= \tau \left( \langle S_1 I_2 S_3 \rangle + \frac{\langle S_1 S_3 \rangle \langle S_3 I_4 \rangle}{\langle S_3 \rangle} \right) - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 S_3 \rangle\end{aligned}$$

Grazie al Teorema, il numero di equazioni passa da 35 a 27



# Errori usando le chiusure

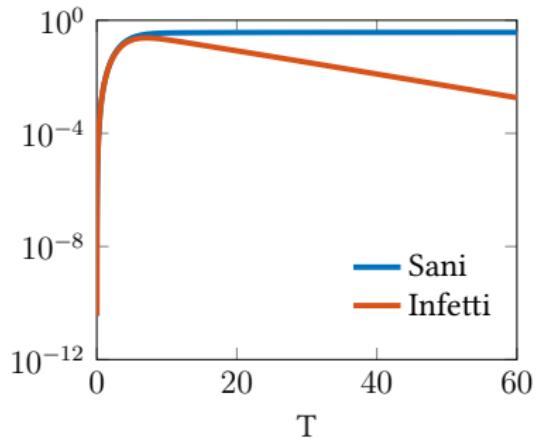


Figura: Chiusura alle coppie.



# Errori usando le chiusure

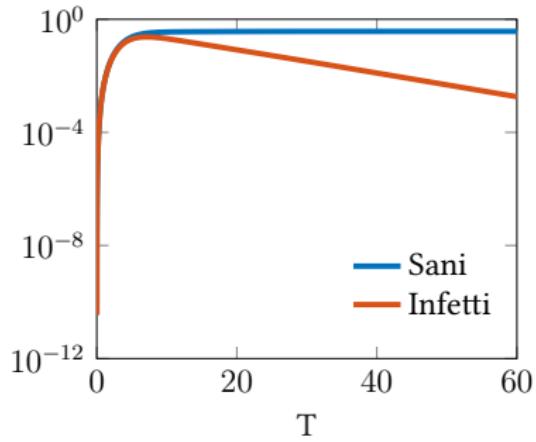


Figura: Chiusura alle coppie.

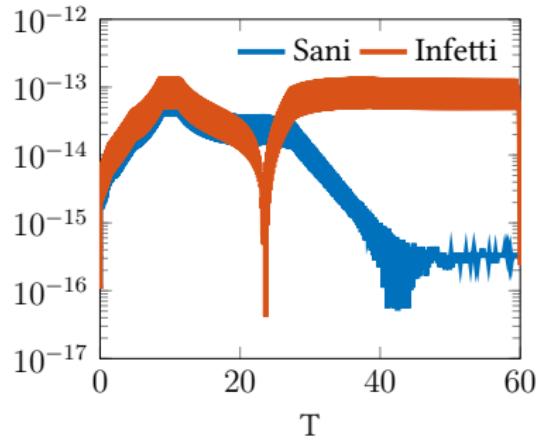


Figura: Chiusura con cut-vertex.



# La rete stradale del Minnesota



Figura: La rete stradale del Minnesota.

Abbiamo integrato il modello chiuso alle coppie

- funzione ode15s di MATLAB
- Tolleranza assoluta:  $1e - 12$
- Tolleranza relativa:  $1e - 12$
- Intervallo temporale:  $[0, 160]$
- Tasso d'infezione:  $\tau = 0.3$
- Tasso di rimozione:  $\gamma = 0.1$

Le condizioni iniziali sono stati puri:  
un nodo certamente infetto gli altri  
certamente sani



# La rete stradale del Minnesota

## Sperimentazione numerica

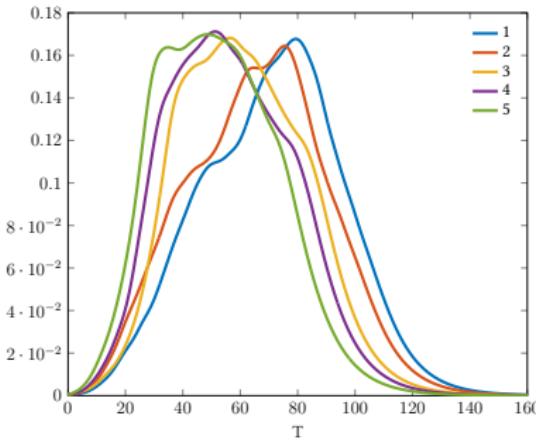


Figura: Prevalenza e grado.



# La rete stradale del Minnesota

## Sperimentazione numerica

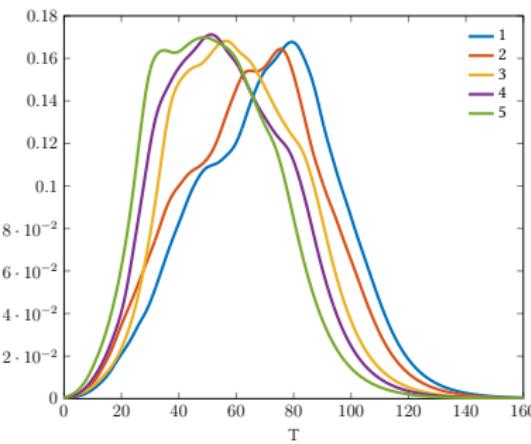


Figura: Prevalenza e grado.

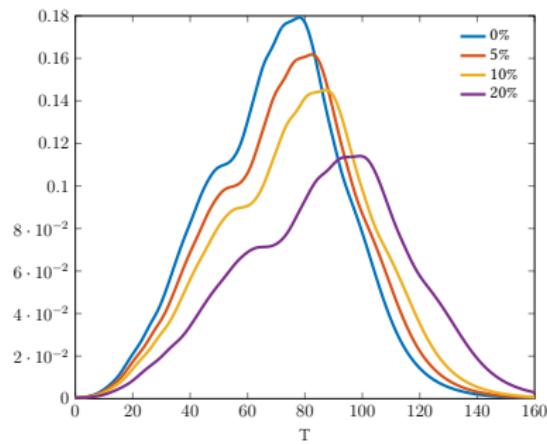


Figura: Immunizzazione.



Grazie per l'attenzione.

Tutto il materiale è reperibile sul  
repository:

<https://github.com/simmaco99/Tesi>

