- **PROF**: FRANCESCO DELLI PRISCOLI **MAIL**: DELLIPRISCOLI@DIS.UNIROMA1.IT
- **TUTOR**: FRANCESCO LIBERATI

→ **TESTO**: ALBERTO ISIDORI - SISTEMI DI CONTROLLO VOL. 1+2 SIDEREA

→ **DISPENSA**: DA STAMPARE DA MAXI - PIODA

INTRODUZIONE

CONTROL ENGINEERING | DIAG.UNIROMA1.IT/AUTOMATICA

ESAMI DI BASE

- ROBOTICA
- FUTURE INTERNET
- AUTOMATIVE
- SISTEMI INDUSTRIALI

RETI DI TLC → FIWARE, FICORE, T-NOVA, SWIPE, PLATINO PON

" DI ENERGIA → SMARTV2G, MOBINCITY

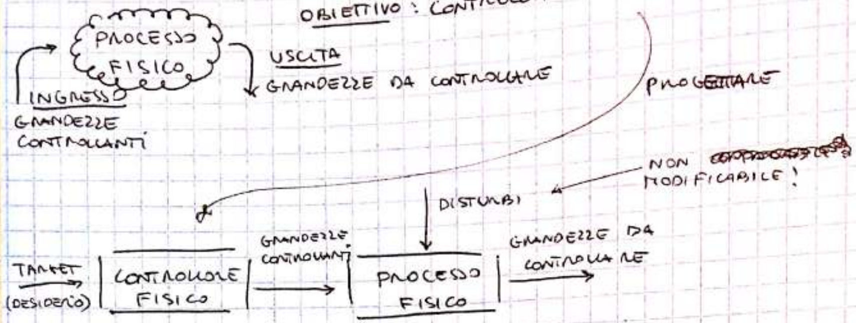
" DI TRASPORTO → BON VOYAGE

SICUREZZA → TASS, COCKPIT CI, INSHIELD

- EC.EUROPA.EU/PROGRAMME/HORIZON2020
- LABRETI.ING.UNIROMA1.IT ↑ LABORATORIO PROF

PROGRAMME

OBIETTIVO: CONTROLLARE IL PROCESSO



EX: STANZA DA RISCALDARE

USCITA (GRANDEZZA DA CONTROLLARE): TEMPERATURA

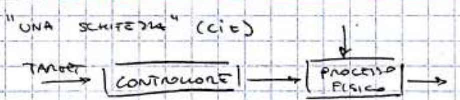
DISTURBO: (EX:) TEMPERATURA ESTERNA

Def: SISTEMA DI CONTROLLO

INSIEME DI PROCESSO FISICO ∧ CONTROLLORE

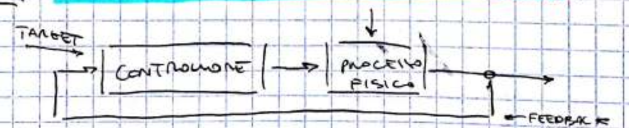
Def: SISTEMA DI CONTROLLO AD ANELLO APERTO

"UNA SCHIFEZZA" (cit.)



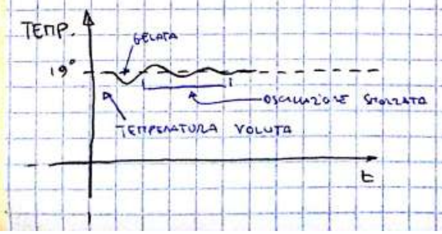
SENZA CONTROREAZIONE (FEEDBACK)

Def: SISTEMA DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO

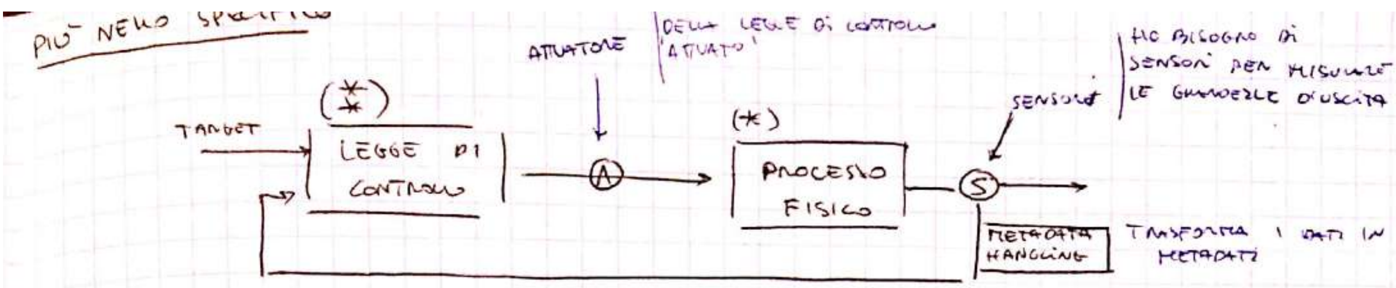


CON CONTROREAZIONE (FEEDBACK)

IL CONTROLLORE REAGISCE IN FUNZIONE DELLE GRANDEZZE LETTE ISTANTE PER ISTANTE



PIU' NELLO SPECIFICO



(*) DEVO MODELLIZZARE IL PROCESSO FISICO: DA SISTEMA FISICO A SISTEMA DI EQ. DIFFERENZIALI

(**) TROVO IL MODELLO MATEMATICO, DEVO POI CREARE UN DISPOSITIVO FISICO CHE FA DA CONTROLLORE

IN CONTROLLI AUTOMATICI CI PREOCCUPEREMO DI CALCOLARE MATEMATICAMENTE UNA LEGGE DI CONTROLLO

Def: TECNOLOGY DEPENDENT VS INDEPENDENT

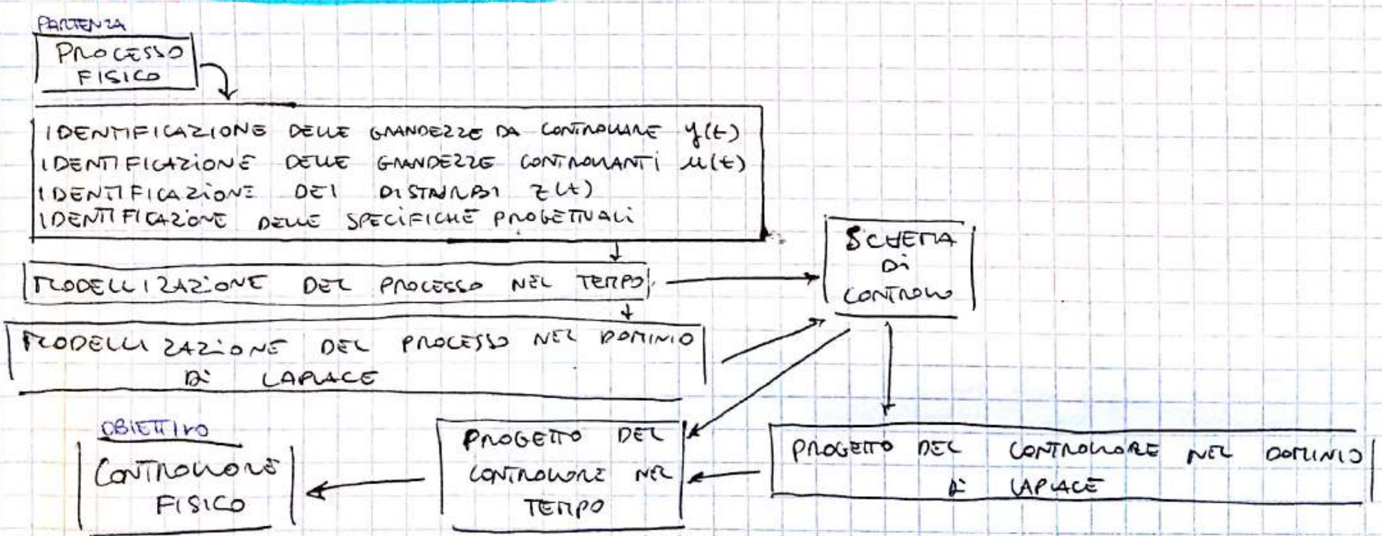
TECNOLOGY DEPENDENT : EX ATTUATORE, DIPENDE DALLA TECNOLOGIA AL QUALE APPLICO LA LEGGE

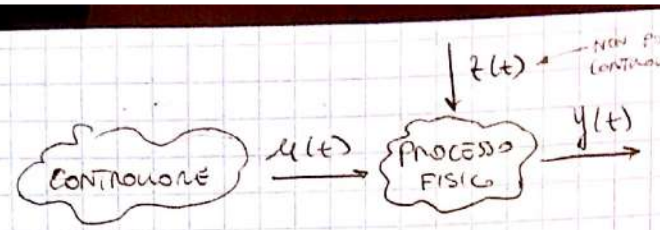
TECNOLOGY INDEPENDENT : EX LEGGE DI CONTROLLO, NON DIPENDE DALLA TECNOLOGIA CHE USO

OSS

ALCUNE TECNICHE DI CONTROLLO PERMETTONO DI OPERARE ANCHE NELL'ASSENZA TOTALE DELLA CONOSCENZA DEL PROCESSO FISICO

SCHEMA RIASSUNTIVO DEL CORSO





$$y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{pmatrix} \quad u(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{pmatrix}$$

$$z(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_r(t) \end{pmatrix}$$

OBIETTIVI (SPECIFICHE)

1) TRACKING
2) DISTURBANCE REJECTION
3) ASYMPTOTIC STABILITY

SOLO QUELLI AFFRONTATI NEL CORSO! NON SONO TUTTI (OVVIAMENTE)

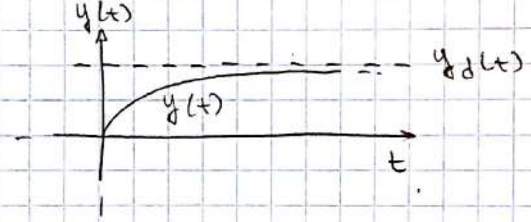
TRACKING

FAR SI CHE L'USCITA ~~~~ ABBIA UN VALORE PRECISO

OSS.

SPESSO SI CONSIDERA $\underbrace{e(t)}_{\text{ERRORE}} = \underbrace{y_d(t)}_{\text{USCITA DESIDERATA}} - \underbrace{y(t)}_{\text{USCITA REALE}}$ CHE SECONDO LE SPECIFICHE DI TRACKING CERCHERÒ DI FAR TENDERE A ZERO. (ALMENO ASINTOTICAMENTE)

ANDAMENTO TIPICO

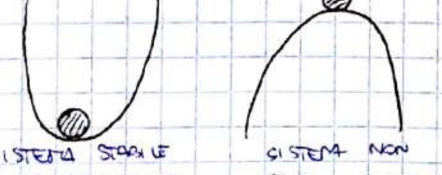


DISTURBANCE REJECTION

IL MIO SISTEMA DI CONTROLLO DEVE FUNZIONARE NONOSTANTE UNA AZIONE DI DISTURBO ESTERNA. NELLA STRAGRANDE MAGGIORANZA DEI CASI NON ~~~~ È POSSIBILE UNA DISTURBANCE REJECTION TOTALE, MA ALCUNI TIPI DI DISTURBO NON SARANNO CONTROLLABILI

ASYMPTOTIC STABILITY

RICHIESTA DI STABILITÀ ASINTOTICA DEL SISTEMA



SISTEMA STABILE ASINTOTICAMENTE

SISTEMA NON STABILE ASINTOTICAMENTE

$$\begin{cases} \overset{m\times 1}{\dot{x}(t)} = \overset{m\times m}{A}\,\overset{m\times 1}{x(t)} + \overset{m\times p}{B}\,\overset{p\times 1}{u(t)} + \overset{m\times r}{P}\,\overset{r\times 1}{z(t)} \\ \underset{q\times 1}{y(t)} = \underset{q\times m}{C}\,\underset{m\times 1}{x(t)} + \underset{q\times p}{D}\,\underset{p\times 1}{u(t)} + \underset{q\times r}{Q}\,\underset{r\times 1}{z(t)} \end{cases}$$ CASO LINEARE

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), z(t)) \\ y = g(x(t), u(t), u(t)) \end{cases}$$ CASO GENERALE

PRIMA PARTE DEL CORSO : $m = q = p = 1$

ULTIMA PARTE DEL CORSO : $m > 1$ ...

OSS.

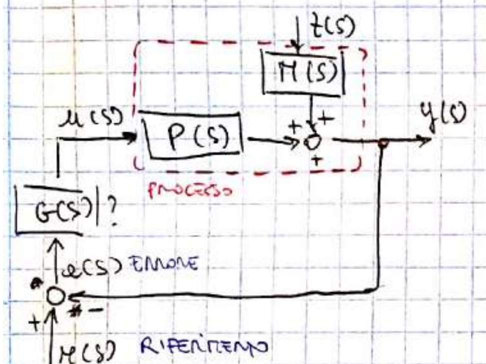
UNA VOLTA MODELLIZZATO IL FENOMENO → BIVIO : DOMINIO DEL TEMPO O DI LAPLACE

O MAGGIOR PARTE DEL CORSO FAREMO METODOLOGIE CHE PASSANO NEL DOMINIO DI LAPLACE

CURIOSITÀ

NEI SISTEMI NON LINEARI NON È STATO TROVATO UN CORRISPETTIVO DI LAPLACE

NEL DOMINIO DI LAPLACE

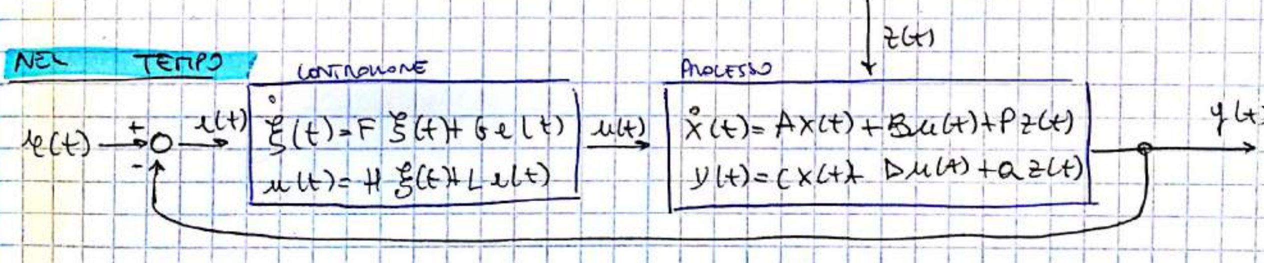


$P(S) = $ F. DI TRASF. ING-USC. DEL PROCESSO $= C(SI-A)^{-1}B + D$

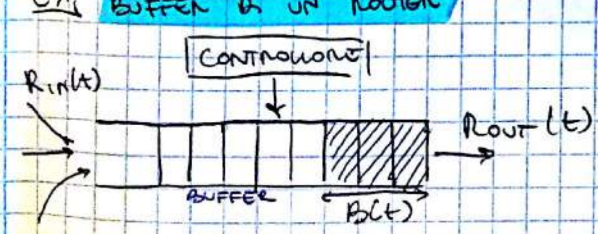
$M(S) = $ F. DI TRASF. DIST-USC. DEL PROCESSO $= C(SI-A)^{-1}P + Q$

$G(S) = $ F. DI TRASF. ING-USC. DEL CONTROLLORE

NEL TEMPO



EX. BUFFER DI UN ROUTER



$[R_{out}(t)] = [R_{in}(t)] = bit/s$

$[B(t)] = bit$

$u(t) = R_{out}(t)$

$y(t) = B(t)$

$z(t) = R_{in}(t)$

$\dot{B}(t) = R_{in}(t) - R_{out}(t)$ EQUAZIONE CHE CARATTERIZZA IL SISTEMA

PONGO $x(t) = B(t)$

MODELLO DEL SISTEMA
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -u(t) + z(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

TRUCCO PRATICO!
LE COMPONENTI DELLO STATO SONO QUELLE CHE COMPAIONO CON LE DERIVATE O L'INTEGRALE
EX:
$\ddot{a} + \dot{b} + \dot{c} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \dot{a} \\ c \end{pmatrix} = x$

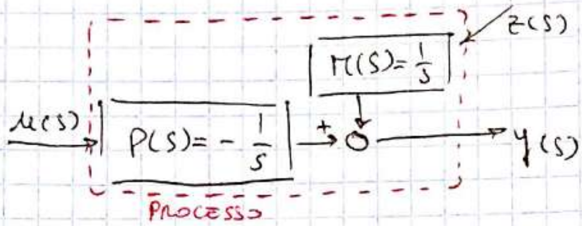
$\ddot{d} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \dot{d} \end{pmatrix} = x$

$A=0 \quad B=-1 \quad C=1 \quad D=0 \quad P=1 \quad Q=0$

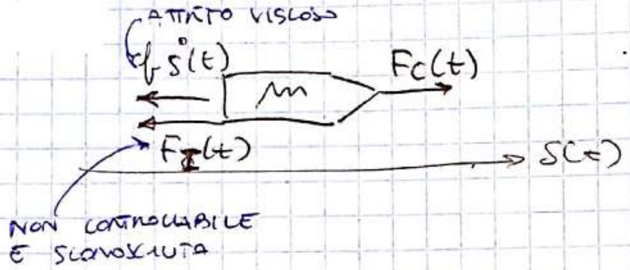
$$P(s) = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot (-1) + 0 = -\frac{1}{s}$$

$$M(s) = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{s}$$

(APPLICANDO LA FORMULA)



EX: MODELLO DI UN CORPO CHE SI MUOVE IN UN FLUIDO



$y(t) = s(t)$ GRANDEZZA DA CONTROLLARE

$u(t) = F_c(t)$ GRANDEZZA CONTROLLANTE

$z(t) = F_I(t)$ DISTURBO

$$m\ddot{s}(t) = F_c(t) - f\dot{s}(t) - F_I(t)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= s(t) \\ x_2(t) &= \dot{s}(t) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{f}{m} x_2(t) - \frac{z(t)}{m} + \frac{1}{m} u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f}{m} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/m \end{pmatrix}}_{P} z(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

APPLICO LA TRASFORMATA DI LAPLACE AL SISTEMA

TRASFORMATE DI LAPLACE (REGOLE)

(t) $\qquad\qquad$ (s)

$$a F_1(t) + b F_2(t) \longrightarrow a f_1(s) + b f_2(s)$$

$$\dot F_1(t) = \frac{dF(t)}{dt} \longrightarrow s \cdot f(s) - F(0)$$

$$\int_0^t F(\tau)\, d\tau \longrightarrow \frac{1}{s} f(s)$$

$$\underbrace{F_1(t) * F_2(t)} \longrightarrow f_1(s) \cdot f_2(s)$$

$$\int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau)\, d\tau$$

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

$$\begin{cases} \dot x(t) = A x(t) + B u(t) + P z(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) + Q z(t) \end{cases} \xrightarrow{x(0)=0} \begin{cases} s X(s) = A X(s) + B u(s) + P z(s) \\ y(s) = C X(s) + D u(s) + Q z(s) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} (sI - A) X(s) = B u(s) + P E(s) \\ Y(s) = C X(s) + D u(s) + Q z(s) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1} [B u(s) + P z(s)] \\ y(s) = C X(s) + D u(s) + Q z(s) \end{cases}$$

$$y(s) = C (sI - A)^{-1} [B u(s) + P z(s)] + D u(s) + Q z(s) =$$

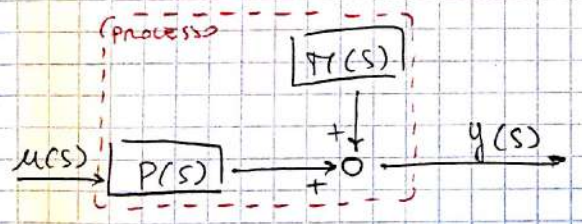
$$= \underbrace{[C (sI-A)^{-1} B + D]}_{P(s)} u(s) + \underbrace{[C (sI-A)^{-1} P + Q]}_{\Pi(s)} z(s)$$

QUINDI

$$y(s) = P(s) u(s) + \Pi(s) z(s) \quad \text{CON} \quad \begin{cases} P(s) = C (sI - A)^{-1} B + D \\ \Pi(s) = C (sI - A)^{-1} P + Q \end{cases}$$

FdT INGRESSO USCITA

FdT DISTURBO USCITA



EX. CALCOLO P(S) e Π(S) DELL'EX DI PRIMA CON $m = b = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \;\; 0) \quad D = 0 \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Q = 0$$

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \longrightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

- $P(s) = C (sI - A)^{-1} B + D = \dfrac{1}{s(s+1)}$
- $\Pi(s) = C (sI - A)^{-1} P + Q = -\dfrac{1}{s(s+1)}$

SE $u(t)=e^{-2t}$ e $z(t)=1$, $y(t)=?$ POICHÉ IL SISTEMA È LINEARE SFRUTTIAMO LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI e CALCOLIAMO SINGOLARMENTE L'USCITA A $u(t)$ e $z(t)$

FORMULE DI TRASFORMAZIONE

(t)	(S)
$u_0(t)$	1
1	$1/s$
$t^m/m!$	$1/s^{m+1}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

1° PASSO

PASSIAMO AL DOMINIO DI LAPLACE:

$$u(s)=\frac{1}{s+2} \qquad z(s)=\frac{1}{s}$$

$$y_1(s)=P(s)u(s)=\frac{1}{s(s+1)}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$y_2(s)=\Pi(s)z(s)=-\frac{1}{s(s+1)}\cdot\frac{1}{s}$$

2° PASSO

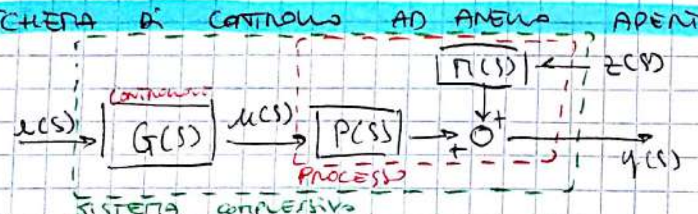
ANTITRASFORMO

$$y_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1/2}{s+2}\right]=\underbrace{1/2}_{PERMANENTE}\overbrace{-e^{-t}+1/2\,e^{-2t}}^{TRANSITORIO}$$

$$y_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right]=\underbrace{-t+1}_{PERMANENTE}\underbrace{-e^{-t}}_{TRANSITORIO}$$

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

SCHEMA DI CONTROLLO AD ANELLO APERTO (OPEN LOOP)



$$\begin{cases} y(s)=P(s)u(s)+\Pi(s)z(s) \\ u(s)=G(s)e(s) \end{cases}$$

G(S) : FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA COMPLESSIVO

TUTTE LE SPECIFICHE PROGETTUALI CHE ANDIAMO A IMPORRE DEVONO ESSERE SODDISFATTE DAL SISTEMA COMPLESSIVO

FdT DEL SISTEMA COMPLESSIVO:

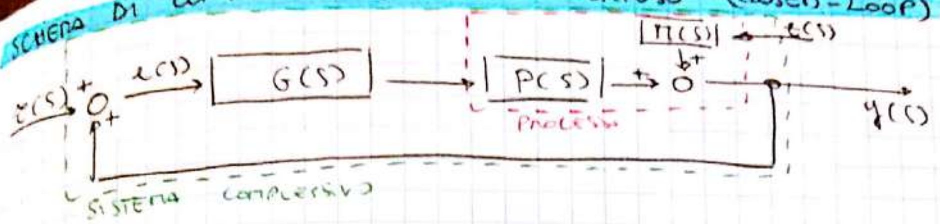
$$\begin{cases} y(s)=P(s)u(s)+\Pi(s)z(s) \\ u(s)=G(s)e(s) \end{cases} \rightarrow y(s)=\underbrace{P(s)G(s)}_{W(s)}\overbrace{e(s)}^{INGRESSO}+\underbrace{\Pi(s)}_{W_\Pi(s)}\overbrace{z(s)}^{DISTURBO}$$

$W(s)$: FdT DEL SISTEMA COMPLESSIVO

$W_\Pi(s)$: FdT DISTURBO - USCITA DEL SISTEMA COMPLESSIVO

OSS: $W_\Pi(s)$ NON HA LA $G(s)$, QUINDI L'OPEN-LOOP NON PUÒ CONTROLLARE I DISTURBI!

SCHEMA DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO (CLOSED-LOOP)



$$\begin{cases} y(s) = P(s)u(s) + \pi(s)z(s) \\ u(s) = G(s)e(s) \\ e(s) = r(s) - y(s) \end{cases}$$

SPESSO : $r(s) = y_d(s)$ USCITA DESIDERATA

$\Downarrow$

$$y(s) = P(s)G(s)(r(s) - y(s)) + \pi(s)z(s)$$

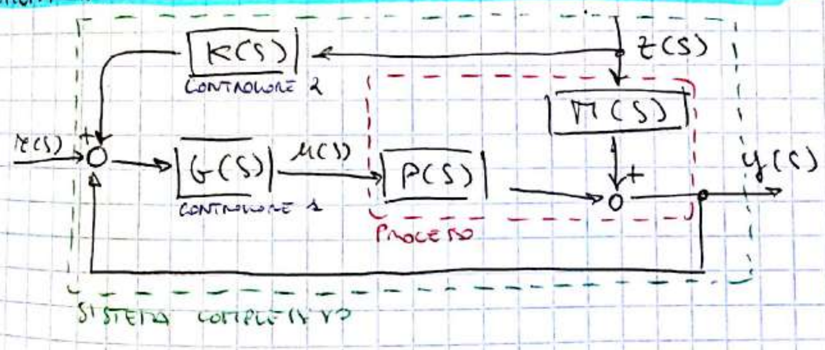
$\Updownarrow$ SUPPONGO UN INGRESSO E UN'USCITA

$$y(s)(1 + P(s)G(s)) = P(s)G(s)r(s) + \pi(s)z(s)$$

$\Updownarrow$

$$y(s) = \underbrace{\frac{P(s)G(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W(s)} r(s) + \underbrace{\frac{\pi(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W_z(s)} z(s)$$

SCHEMA DI CONTROLLO A DOPPIA CONTROREAZIONE



OSS. COME SCELGO QUALE SCHEMA DI CONTROLLO USARE? IN GENERALE SI USA L'ANELLO CHIUSO (INFATTI IL DISTURBO NON È MISURABILE). SE SPECIFICANO CHE IL DISTURBO È MISURABILE SI USA QUELLO A DOPPIA CONTROREAZIONE

$$y(s) = P(s)u(s) + \pi(s)z(s)$$

$$u(s) = G(s)e(s)$$

$$e(s) = r(s) - y(s) + K(s)z(s)$$

$$y(s) = P(s)\left[G(s)\left[r(s) - y(s) + K(s)z(s)\right]\right] + \pi(s)z(s)$$

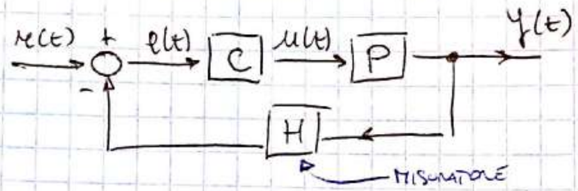
$\Updownarrow$

$$y(s) = \underbrace{\frac{P(s)G(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W(s)} r(s) + \underbrace{\frac{P(s)G(s)K(s) + \pi(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W_z(s)} z(s)$$

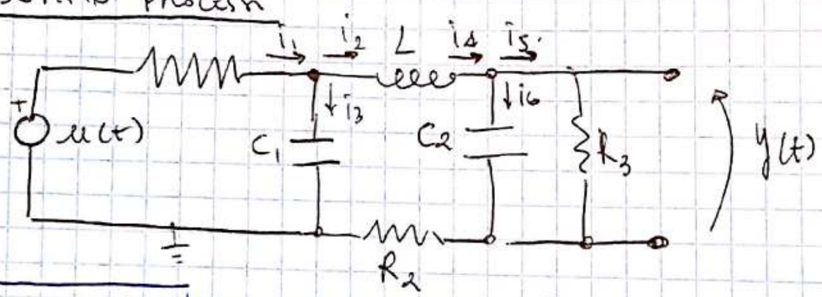
RIEPILOGO

	ANELLO APERTO	ANELLO CHIUSO	DOPPIA CONTROREAZIONE
$W(s)$	$P(s)G(s)$	$\frac{P(s)G(s)}{1+P(s)G(s)}$	$\frac{P(s)G(s)}{1+P(s)G(s)}$
$W_z(s)$	$M(s)$	$\frac{M(s)}{1+P(s)G(s)}$	$\frac{P(s)G(s)K(s)+M(s)}{1+P(s)G(s)}$

TUTOR (RIPASSO tds)



ESEMPIO PROCESSI



$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$v = Ri$$

eq. CARATTERISTICHE

$i_1 = i_2 + i_3$, $i_2 = i_L$

$$\frac{u(t)-v_{C_1}}{R_1} = i_L + C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} \quad (1)$$

$i_4 = i_5 + i_6$

$$i_L = C_2\frac{dv_{C_2}}{dt} + \frac{v_{C_2}}{R_3} \quad (2)$$

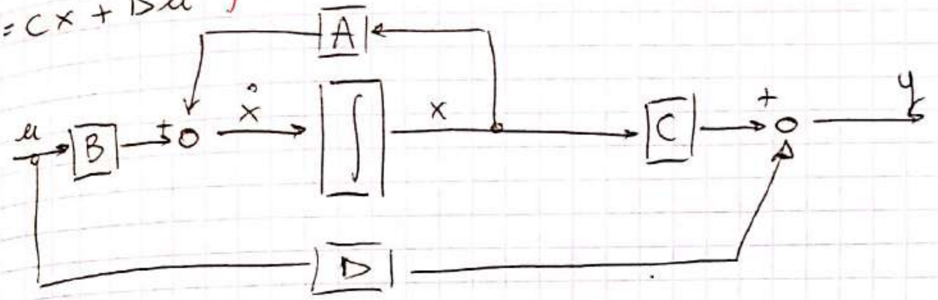
$$v_{C_1} = R_2 i_L + v_{C_2} + L\frac{di_L}{dt} \quad (3)$$

$$X = \begin{pmatrix} v_{C_1} \\ i_L \\ v_{C_2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \dot{X}_1 = -\frac{1}{R_1C_1}X_1 - \frac{1}{C_1}X_2 + \frac{1}{R_1C_1}u(t) \\ \dot{X}_2 = \frac{1}{L}X_1 - \frac{R_2}{L}X_2 - \frac{1}{L}X_3 \\ \dot{X}_3 = \frac{1}{C_2}X_2 - \frac{1}{C_2R_3}X_3 \\ y = X_3 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2R_{03}} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C=(0 \quad 0 \quad 1) \quad D=0$$

SCHEMA DI SIMULAZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

$$\left.\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx+Du \end{cases}\right\} \text{RAPPRESENTAZIONE IMPLICITA}$$



SOLUZIONI DEL SISTEMA

$$\left.\begin{cases} x(t)=\underbrace{e^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{EV. LIBERA}}+\underbrace{\int_{t_0}^{t}Be^{A(t-\tau)}u(\tau)d\tau}_{\text{EV. FORZATA}} \\ y(t)=\underbrace{Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}}+\underbrace{\int_{t_0}^{t}\left[Ce^{A(t-\tau)}B+D\delta(t-\tau)\right]d\tau}_{\text{EVOLUZIONE FORZATA}} \end{cases}\right\} \text{RAPPRESENTAZIONE ESPLICITA}$$

RICHIAMI SULLA TRASFORMATA DI LAPLACE

$f(t)$ DEFINITA PER $t\in[0,+\infty)$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

EX.

$f(t)=e^{at}$

CONVERGE SOLO SE $Re(a-s)<0 \leftrightarrow Re(s)>a$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{(a-s)t}dt=\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-a}$$

PROPRIETÀ

1) $\mathcal{L}[f_1(t)+f_2(t)]=\mathcal{L}[f_1(t)]+\mathcal{L}[f_2(t)]$

2) $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$

APPLICHIAMO LA TRASFORMATA DI LAPLACE ALLA RAPPRESENTAZIONE IMPLICITA

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \ ; \ x(t_0) = x_0 \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (sI - A)X(s) = x_0 + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}x_0 + (sI-A)^{-1}B \cdot U(s) \\ Y(s) = C(sI-A)^{-1}x_0 + \underbrace{\left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]}_{W(s)} U(s) \end{cases}$$

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE

$$y_{re} = \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

OSS.

LA RISPOSTA A REGIME DEVE ESSERE INDIPENDENTE DALLO STATO INIZIALE.

LA RISPOSTA, OLTRE A RISPOSTA LIBERA + RISPOSTA FORZATA, PUO' ESSERE SCOMPOSTA IN RISPOSTA TRANSITORIA + RISPOSTA A REGIME PERM.

N.B. → LA RISPOSTA LIBERA È TUTTA COMPRESA NELLA RISPOSTA TRANSITORIA.

CALCOLIAMO LA RISPOSTA A REGIME CON UN INGRESSO SINUSOIDALE

$$\sin(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$ CONSIDERO PRELIMINARMENTE $e^{j\omega t}$

$$\xi = t - \tau \qquad d\xi = -d\tau$$

$$y_r = \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)e^{j\omega\tau}\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)e^{j\omega\tau}\,d\tau = -\int_{-\infty}^{t} W(\xi)e^{j\omega t} \cdot e^{-j\omega\xi}\,d\xi =$$

$$= e^{j\omega t}\int_{0}^{+\infty} W(\xi)e^{-j\omega\xi}\,d\xi = e^{j\omega t}\, W(s)\Big|_{s=j\omega}$$

$$W(j\omega) = \underbrace{M(j\omega)}_{\text{MODULO}} \cdot e^{j\overbrace{\phi(j\omega)}^{\text{FASE}}}$$

ORA CALCOLIAMO LA $y_r(t)$ AL SENO (t)

$$y_r(t) = \frac{e^{j\omega t} W(j\omega) - e^{-j\omega t} W(j\omega)}{2j} = \frac{e^{j\omega t} M(\omega) e^{j\phi(\omega)} - e^{-j\omega t} M(\omega) e^{-j\phi(\omega)}}{2j} =$$

$$= M(\omega) \frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} = M(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

GRANDE RISULTATO! L'INGRESSO È MODIFICATO SOLO IN MODULO E FASE!

DIAGRAMMA DI BODE

$W(s) = C(sI-A)^{-1}B$

SERVE A GRAFICARE MODULO E FASE DI $W(j\omega)$ CHE, AL VARIARE DELLA FREQUENZA ω, INDICA DI QUANTO L'INGRESSO SINUSOIDALE VIENE MODIFICATO IN MODULO E IN FASE (PER LE CONSIDERAZIONI FATTE PRIMA).

$$W(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n} \qquad n \geq m$$

$W(j\omega) = W(s)\big|_{s=j\omega}$ RISPOSTA ARMONICA

$|W(j\omega)|$ $\quad \angle W(j\omega)$ (DUE DIAGRAMMI DIFFERENTI)

PER DISEGNARE I DIAGRAMMI ABBIAMO BISOGNO DELLA $W(s)$ IN FORMA DI BODE:

$$W(s) = K \frac{\prod \text{MONOMIO} \ \prod \text{BINOMIO} \ \prod \text{TRINOMIO}}{\prod \text{MONOMIO} \ \prod \text{BINOMIO} \ \prod \text{TRINOMIO}}$$

- MONOMIO : s
- BINOMIO : $1 + \tau s$
- TRINOMIO : $1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

  - ξ SMORZAMENTO
  - ω_n PULSAZIONE NATURALE

Ex,

$$W(s) = \frac{2s}{3+s} = \frac{2s}{3(1+\frac{1}{3}s)}$$

$K = \frac{2}{3}$

s MONOMIO

$1 + \frac{1}{3}s$ TERMINE BINOMIO

Scanned by CamScanner

OSS

$$\angle W_1 \cdot W_2 = \angle W_1 + \angle W_2$$

INFATTI:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= M_1 \cdot e^{j\phi_1} \\ W_2 &= M_2 \cdot e^{j\phi_2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow W_1 \cdot W_2 = \underbrace{M_1 \cdot M_2}_{\text{PRODOTTO! NON SOMMA BRUTTO}} e^{j\overbrace{(\phi_1 + \phi_2)}^{}}$$

SOMMA DELLE FASI

OSS

$$\angle \frac{1}{W_1} = -\angle W_1$$

OSS

NON VALE LO STESSO PER I MODULI! PER QUESTO MOTIVO IL MODULO VIENE TRACCIATO IN DECIBEL (dB)

$$|W|_{dB} = 20 \log_{10} |W|$$

INFATTI IN dB:

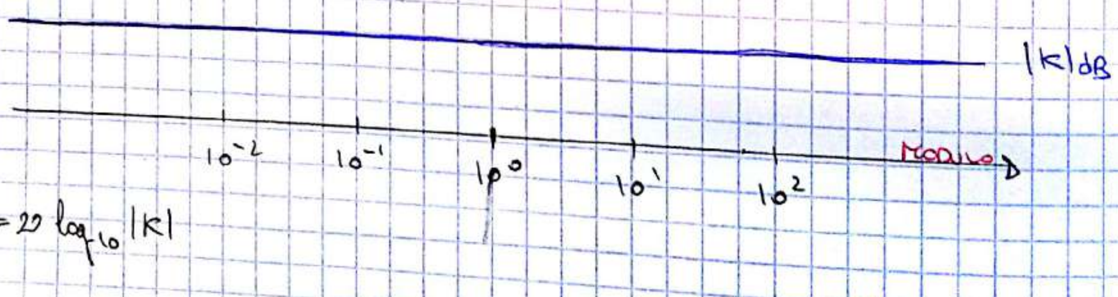
$$|W_1 \cdot W_2|_{dB} = 20 \log_{10} |W_1 \cdot W_2| = 20 \log_{10} |W_1| + 20 \log_{10} |W_2| = |W_1|_{dB} + |W_2|_{dB}$$

OSS

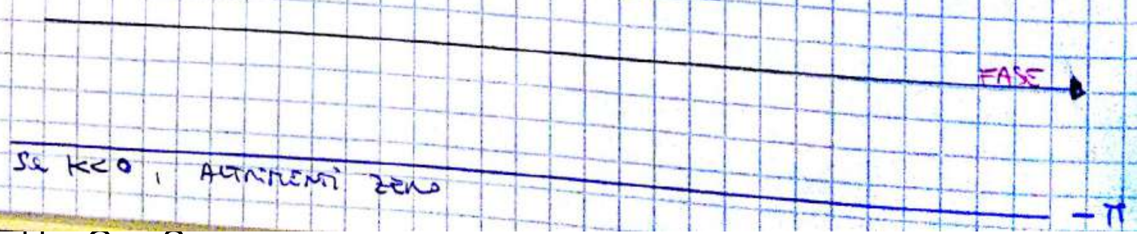
ANCHE ω VIENE ESPRESSO IN dB NEI DIAGRAMMI DI BODE

TERMINE COSTANTE

$$\boxed{K = \text{COSTANTE} = W(j\omega)}$$



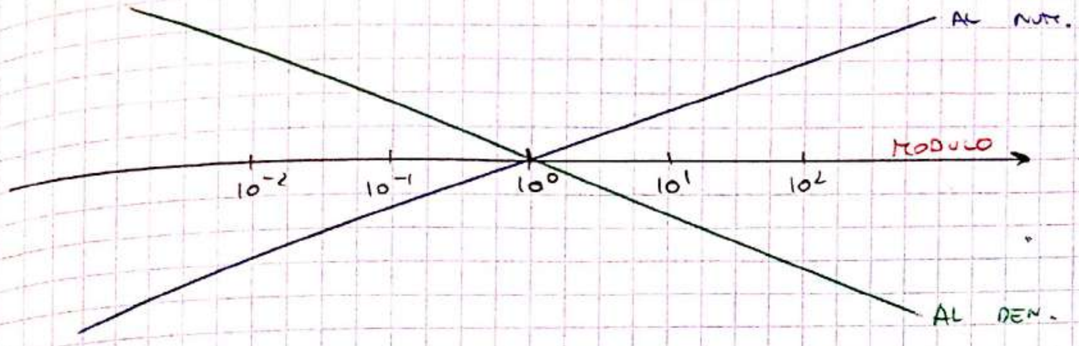
$$|K|_{dB} = 20 \log_{10} |K|$$

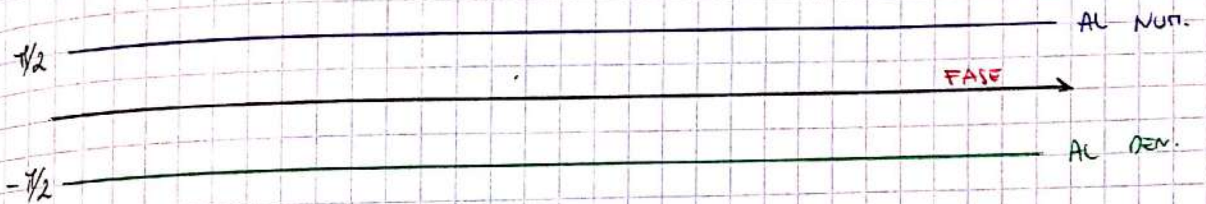


TERMINE MONOMIO

$\boxed{j\omega = W(j\omega)}$

$|j\omega|_{dB} = 20\log_{10}|j\omega| = 20\log_{10}\omega$ QUINDI, POICHÉ SULL'ASSE X C'È $\log_{10}\omega$, È UNA RETTA CON PENDENZA 20dB PER DECADE





TERMINE BINOMIO

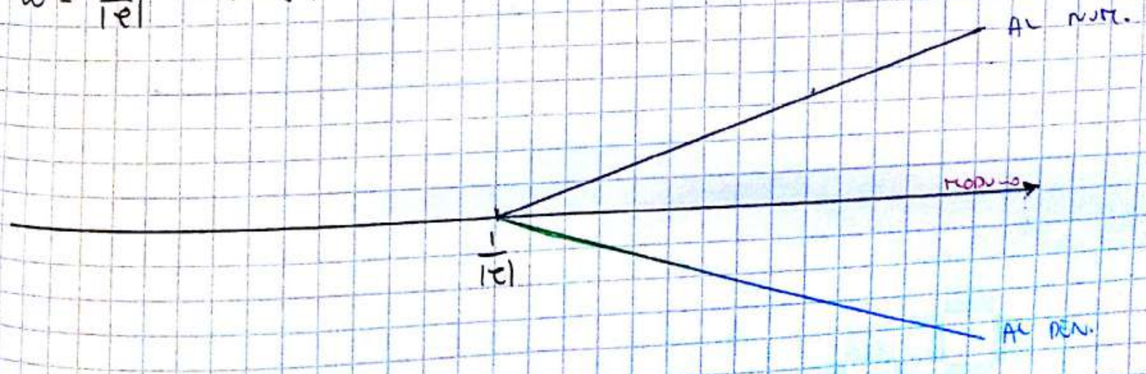
$\boxed{W(j\omega) = 1+\tau s}$

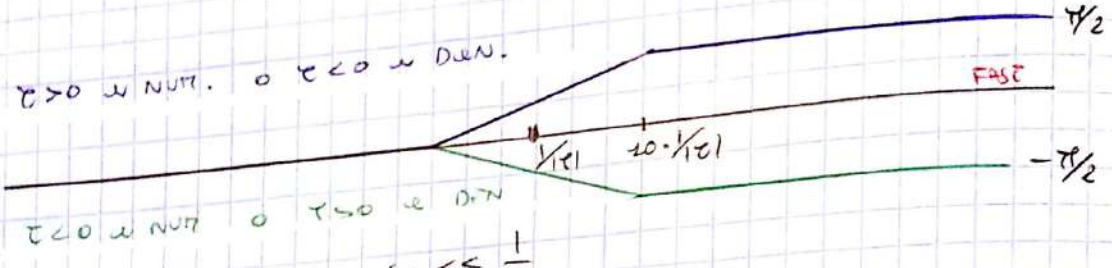
$|W(j\omega)|_{dB} = |1+\tau s|_{dB} = 20\log_{10}|1+\tau j\omega| = 20\log_{10}\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$

Se $\omega >> \frac{1}{|\tau|}$ → VALE $20\log_{10}\omega|\tau| = 20\log_{10}\omega + 20\log_{10}|\tau|$

Se $\omega << \frac{1}{|\tau|}$ → VALE 0

Se $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ → VALE CIRCA 3



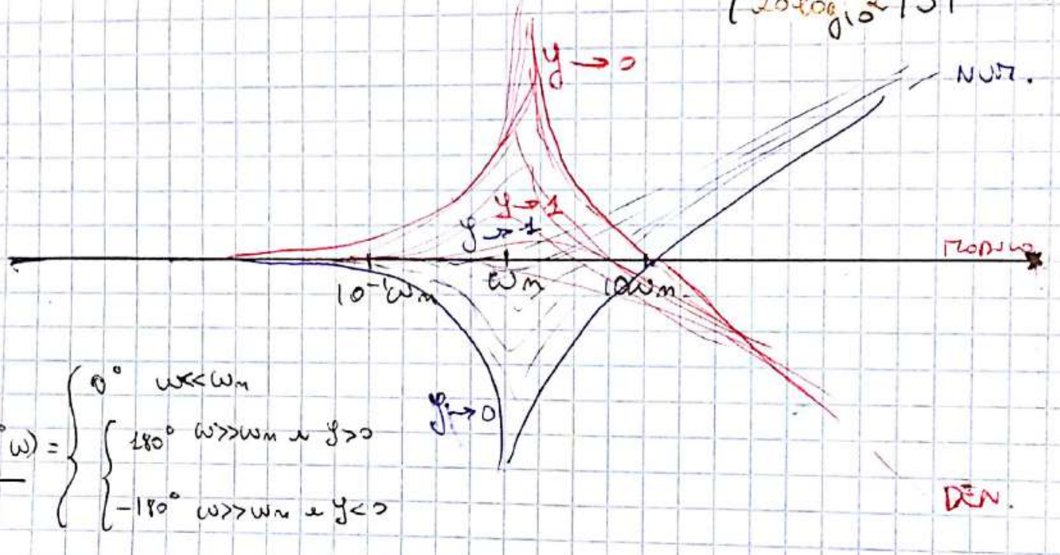


$$\angle 1+\tau\omega = \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ \pi/2 & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \text{ e } \tau>0 \\ -\pi/2 & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \text{ e } \tau<0 \end{cases}$$

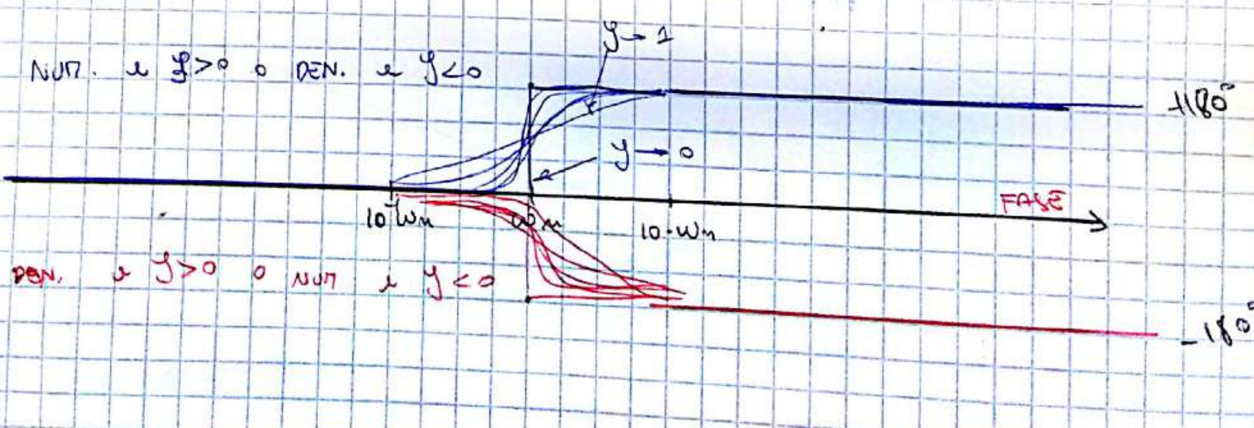
TERMINE TRINOMIO:

$$\boxed{W(j\omega) = 1 + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n \\ 40\log_{10}\frac{\omega}{\omega_n} & \omega \gg \omega_n \\ 20\log_{10}2|\xi| & \omega = \omega_n \end{cases}$$



$$\angle W(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \ll \omega_n \\ \begin{cases} 180^\circ & \omega \gg \omega_n \text{ e } \xi>0 \\ -180^\circ & \omega \gg \omega_n \text{ e } \xi<0 \end{cases} \end{cases}$$



PASSAGGIO DAL CONTROLLORE NEL DOMINIO DI LAPLACE, AL CONTROLLORE NEL TEMPO

• TERMINI E NOZIONI PRELIMINARI

$$P(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \qquad G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \qquad W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)}$$

$P(s)$: fdT del processo — $G(s)$: fdT del controllore — $W(s)$: fdT controllore + processo

$n_p = \text{grado}(N_p(s))$ $\qquad n_g = \text{grado}(N_G(s))$ $\qquad n_w = \text{grado}(N_W(s))$

$d_p = \text{grado}(D_p(s))$ $\qquad d_g = \text{grado}(D_G(s))$ $\qquad d_w = \text{grado}(D_W(s))$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO:
- STRETTAMENTE PROPRIA $\quad n_w < d_w$
- PROPRIA $\quad n_w = d_w$
- IMPROPRIA $\quad n_w > d_w$ ← NON POSSONO ESISTERE PER PROBLEMI DI REALIZZABILITÀ FISICA

EX.

$$P(s) = \frac{\boxed{s(s+1)}}{\boxed{(s+2)^2(s+4)}} \qquad \begin{matrix} \leftarrow N_p(s) & n_p = 2 \\ \leftarrow D_p(s) & d_p = 3 \end{matrix}$$

Def: DIMENSIONE DI UNA RAPPRESENTAZIONE INGRESSO – STATO – USCITA

DATO $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$, LA SUA DIMENSIONE È LA DIMENSIONE DELLA MATRICE A

Def: POLI E ZERI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

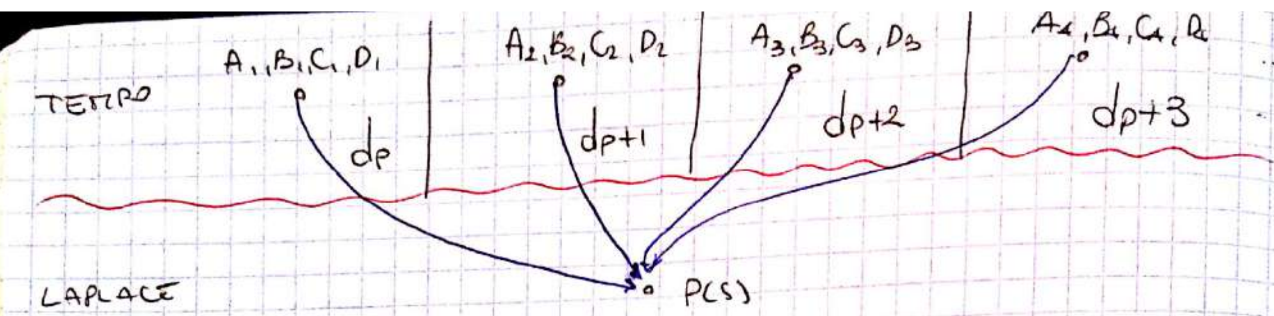
POLI: ZERI DI $D(s)$

ZERI: ZERI DI $N(s)$

OSS.

PIÙ RAPPRESENTAZIONI INGRESSO – STATO – USCITA POSSONO ESSERE RAPPRESENTATE DA UNA SOLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO. IN PARTICOLARE UNA FDT PUÒ RAPPRESENTARE INFINITE RAPPRESENTAZIONE INGRESSO – STATO – USCITA. QUINDI NEL PASSAGGIO DALLA FDT AL TEMPO BISOGNA SCEGLIERE UNA DELLE INFINITE RAPPRESENTAZIONI

Scanned by CamScanner



OGNI RAPPRESENTAZIONE SI DIFFERENZIA DALLA DIMENSIONE DELLA STESSA.

QUELLA A DIMENSIONE MINIMA È QUELLA CHE HA DIMENSIONE dp

OSS

OVVIAMENTE QUELLO A DIMENSIONE MINIMA È IL PIÙ INTERESSANTE

DALLA FdT ALLA RAPPRESENTAZIONE INGRESSO-STATO-USCITA

$$P(s) = \underbrace{\boxed{D}}_{\text{COSTANTE}} + \boxed{\frac{c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}}$$

STRETTAMENTE PROPRIA

EX

$$P(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

$$\begin{array}{r|l} s+1 & s+2 \\ \hline -s-2 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$P(s) = 1 + \frac{-1}{s+2}$$

OSS

$$D(s) \cdot Q(s) + R(s) = N(s)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$$

RAPPRESENTAZIONE RAGGIUNGIBILE

OSS LA DIM. DI INGRESSO E USCITA LA CONSIDERIAMO = 1

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \underset{n\times 1}{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underset{1\times n}{C} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

OSS n È IL GRADO DEL DENOMINATORE DELLA FdT

OSS

PER UN INGRESSO E UNA USCITA, LA DIMENSIONE È MINIMA, E QUINDI LA RAPPRESENTAZIONE È ANCHE OSSERVABILE.

PER PIÙ INGRESSI E PIÙ USCITE QUESTO NON È PIÙ VERO. ~~[illegible]~~

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

$$A,B,C,D \xrightarrow{T} \tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D}$$

$\tilde{A} = TAT^{-1}$

$\tilde{B} = TB$

$\tilde{C} = CT^{-1}$

$\tilde{D} = D$

QUALUNQUE SIA LA MATRICE T, LA RAPPRESENTAZIONE CHE TROVIAMO HA LA STESSA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

DIM.

$$\tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}+\tilde{D} = CT^{-1}(sTT^{-1}-TAT^{-1})^{-1}TB+D =$$

$$= CT^{-1}\left[T(sI-A)T^{-1}\right]^{-1}TB+D =$$

OSS

$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

$$= CT^{-1}T(sI-A)^{-1}T^{-1}TB+D = \underbrace{C(sI-A)^{-1}B+D}_{\square}$$

HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO INGRESSO – USCITA

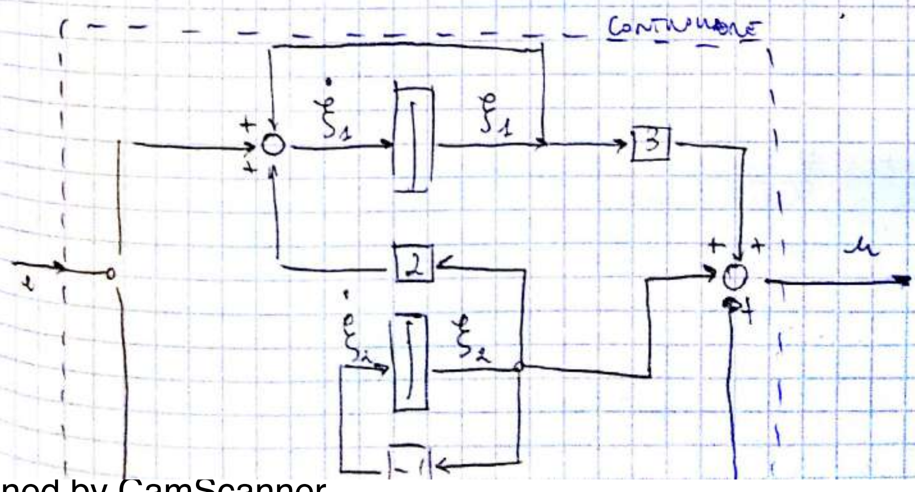
COME DETERMINARE IL PROCESSO FISICO DAL MODELLO

ES. DI CONTROLLORE

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1 + 2\xi_2 + e \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_2 \\ u = 3\xi_1 + \xi_2 + e \end{cases}$$

$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$H = (3 \quad 1)$ $L = 1$



Def: **PUNTO DI EQUILIBRIO**

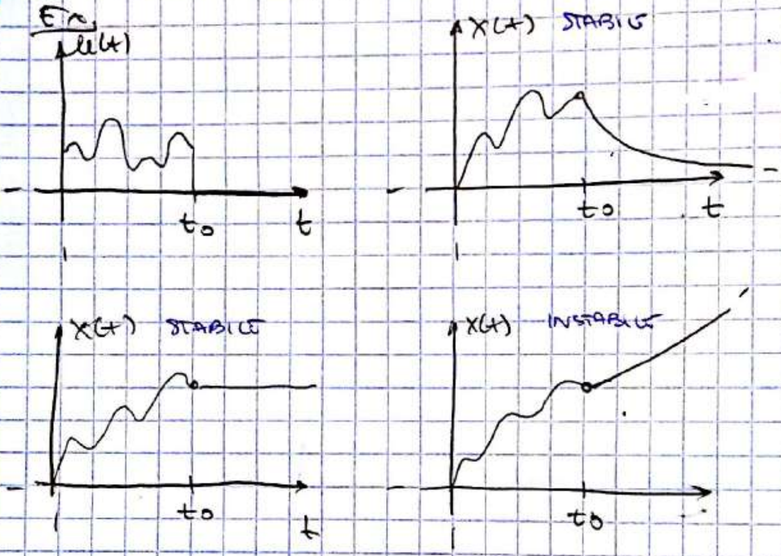
$\dot{x} = Ax \qquad \dot{x} = 0$

$Ax = 0$ INSIEME DEI PUNTI DI EQUILIBRIO

Def: **SISTEMA LINEARE ASINT. STABILE**

SISTEMA LIN. ASINT. STABILE $\Longleftrightarrow$ SE AD UN ISTANTE $t_0 > 0$ PONGO $u(t) = 0$ $\forall t \geq t_0$, ALLORA $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

Es.



OSS.

$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \rightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$

INFATTI $y(t) = Ax + Bu$ e u è POSTO A ZERO

SOLUZIONI DI $\dot{x} = Ax + Bu$

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0)}_{\text{RISPOSTA IN EV. LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot Bu(\tau)\, d\tau}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}, \text{ con } t_0 > 0$$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i t}$$

- λ_i: i-ESIMO AUTOVALORE DI A
- r: n° DI AUTOVALORI DI A
- m_i: MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DELL'AUTOVALORE i-ESIMO
- R_{ik}: RESIDUO

DIM AFFERMAZIONE STABILITÀ ASINTOTICA

PERCHÉ $x(t)$ VADA A ZERO SE $u(t)=0$, ALLORA

$$\lim_{t\to+\infty} e^{A(t-t_0)}\, x(t_0) = 0$$

MA PER LA DEF. DI e^{At}, QUEL LIMITE È SODDISFATTO SE GLI AUTOVALORI DI A HANNO PARTE REALE < 0.

QUINDI:

SISTEMA ASINT. STABILE $\Longleftrightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE DINAMICA DEVONO AVERE PARTE REALE MINORE DI ZERO

OSS.

TANTO PIÙ I λ_i SONO NEGATIVI, TANTO PIÙ LA CONVERGENZA A ZERO È RAPIDA. IN ALCUNI CASI IL TEMPO È IMPORTANTE

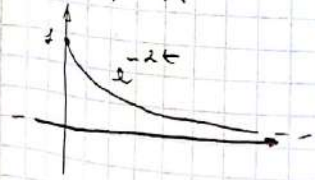
EX DOMANDA DI ESAME

VELOCITÀ DI ALMENO e^{-2t}. QUINDI GLI AUTOVALORI DEVONO AVERE PARTE REALE < -2

OSS.

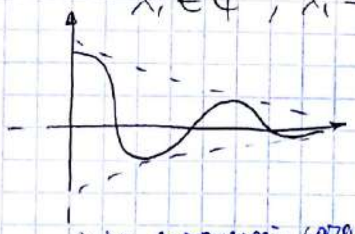
DAL MOMENTO CHE e^{At} È FORMATO DA UNA PRODUTTORIA DI $e^{\lambda_i t}$, QUELLO CHE CONTA ALLA FINE DELLA VELOCITÀ DI ESAURIMENTO DEL TRANSITORIO È QUELLO 'PIÙ LENTO'; QUINDI QUELLO A PARTE REALE PIÙ ALTA.

$\lambda_i \in \mathbb{R}$



CASO AUTOVALORI REALI

$\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \alpha_i \pm j\omega_i$



CASO AUTOVALORI COMPLESSI E CONIUGATI

TUTTI E DUE A PARTE REALE NEGATIVA

EX

$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ IL SISTEMA CARATTERIZZATO DA QUESTA MATRICE DINAMICA, È STABILE ASINTOTICAMENTE?

$n=2$

$$|\lambda I-A|=0 \iff \begin{vmatrix}\lambda+1 & -2\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=0 \iff (\lambda+1)(\lambda-1)-2=0$$

$$\iff \lambda^2-3=0 \iff \lambda=\pm\sqrt{3}$$

QUINDI IL SISTEMA NON È ASINTOTICAMENTE STABILE.

OSS

$$P(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\frac{C(sI-A)^{a}B}{|sI-A|}+D$$

SE NON CI SONO CANCELLAZIONI CON IL DENOMINATORE, IL DEN. DELLA $P(s)$ È IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI A.

EX

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix} \quad D=1$$

ESSENDO A TRIANGOLARE, I SUOI AUTOVALORI SONO $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=-1$

$$(sI-A)=\begin{pmatrix}s-\cancel{A}1 & -2\\ 0 & s+1\end{pmatrix} \longrightarrow (sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix}s+1 & 2\\ 0 & s-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

$$C(sI-A)^{-1}B+D=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s+1\\ 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{(s+1)(s-1)}+1=\frac{3\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s-1)}=\frac{3}{s-1}+1$$

OSS

UN AUTOVALORE SI PERDE, SI SEMPLIFICA CON LO ZERO

$$\left\{\begin{matrix}\text{AUTOVALORI}\\ \text{DI}\\ \text{'A'}\end{matrix}\right\} \subseteq \left\{\begin{matrix}\text{POLI DI}\\ P(s)\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{AUTOVALORI}\\ \text{NASCOSTI DEL}\\ \text{PROCESSO}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{AUTOVALORI}\\ \text{DI}\\ A\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{POLI DI}\\ P(s)\end{matrix}\right\}$$

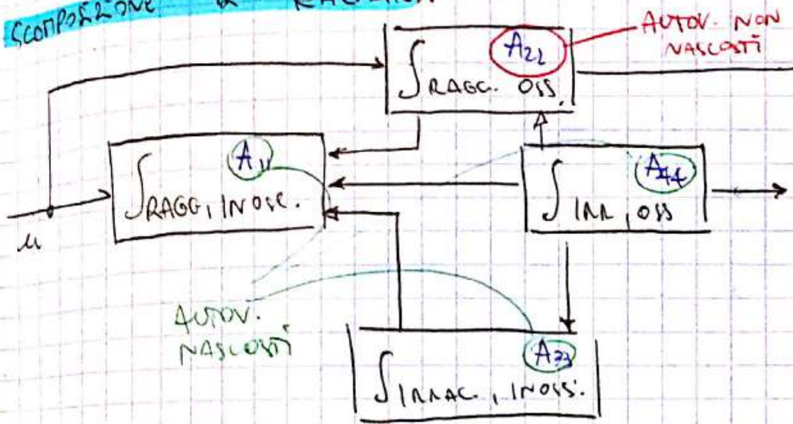
OSS. Gli autovalori nascosti NON sono controllabili. Il controllore $G(s)$ non può controllarli

Def: **STABILIZZABILITÀ**

Processo stabilizzabile $\iff$ TUTTI gli autovalori nascosti del processo sono a parte reale negativa

OSS. Il processo dell'ultimo esercizio è stabilizzabile, posso portare l'altro autovalore a un qualsiasi valore negativo, ma la velocità rimarrà sempre vincolata a quello nascosto che è '-1'.

SCOMPOSIZIONE DI KALMAN



$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\
y = \begin{pmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

OSS. Essendo 'A' triangolare, ~~tutti~~ gli autovalori che caratterizzano il sistema sono quelli che caratterizzano $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ (cioè quelli dei singoli sistemi).

OSS.
HO INFLUENZA SUGLI AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI E NON OSSERVABILI, MA NON POSSO VEDERNE GLI EFFETTI

EX

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

TRIANGOLARE A BLOCCHI:

AUTOVALORI DI $\left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 \end{array}\right)$ + AUTOVALORI DI (-2)

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = -2$

$R = \left(B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B\right) \qquad m = \text{rango}(R)$

$O = \begin{pmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \qquad p = \text{rango}(O)$

rango R = N° AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI

~~RAGGIUNGIBILI~~ rango O = N° AUTOVALORI ~~OSSERVABILI~~ INOSSERVABILI

$R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango} R = 2 \Rightarrow 2$ AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI

$O = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango} I = 1 \Rightarrow 2$ AUTOVALORI OSSERVABILI

TEST DI HAUTUS (RAGGIUNGIBILITÀ)

$\bar{\lambda}$ È RAGGIUNGIBILE?

$$\text{rango}\left(A - \bar{\lambda} I \mid B\right) = \begin{cases} n \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ È RAGG.} \\ < n \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ NON È RAGGIUNGIBILE} \end{cases}$$

$$\text{rango}\,(A - \bar{\lambda}_2 I \mid B) = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \bar{\lambda}_2 = 0 \text{ È RAGGIUNGIBILE}$$

$$\text{rango}\,(A - \lambda_1 I \mid B) = \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \bar{\lambda}_1 = -1 \text{ NON È RAGG.}$$

TEST DI HAUTUS (OSSERVABILITÀ)

$\bar{\lambda}$ È OSSERVABILE?

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A - \bar{\lambda} I \\ \hline C \end{pmatrix} = \begin{cases} n \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ È OSSERVABILE} \\ < n \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ È INOSSERVABILE} \end{cases}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \text{ è OSSERVABILE}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ È INOSS.}$$

$\lambda_2 = 0$ ragg. e oss.

$\lambda_1 = -1$ iragg. e inoss. } AUTOVALORI NASCOSTI

$\lambda_3 = -2$ ragg. e inoss. }

IL SISTEMA È STABILIZZABILE

MASSIMA VELOCITÀ DI CONVERGENZA DEL TRANSITORIO ANCHE DOPO AVER COLLEGATO IL CONTROLLORE?

e^{-t}

OSS.

IL DENOMINATORE DI $P(s)$ È 's', INFATTI È CARATTERIZZATO DAGLI AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI E OSSERVABILI

INTERCONNESSIONE DI SISTEMI

$$u \longrightarrow \underbrace{\boxed{P_1(s) = \frac{1}{s+1}}}_{1} \longrightarrow \underbrace{\boxed{P_2(s) = \frac{s+1}{s-2}}}_{2} \longrightarrow y$$

PROCESSO

$$P(s) = P_2(s) \cdot P_1(s) = \frac{1}{s-2}$$

OSS

C'È STATA UNA CANCELLAZIONE, UN AUTOVALORE DIVENTA NASCOSTO

$$u \longrightarrow \boxed{P(s) = \frac{1}{s-2}} \longrightarrow y$$

GLI AUTOVALORI SONO RIMASTI DUE! SOLO CHE UNO È DIVENTATO NASCOSTO.

PROCESSO 1

$A_1 = -1 \quad B_1 = 1$

$C_1 = 1$

PROCESSO 2

$A_2 = 2, \quad B_2 = 1$

$C_2 = 3 \quad D_2 = 1$

$$u \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 \\ y_1 = x_1 \end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \dot{x}_2 = 2x_2 + u_2 \\ y_2 = 3x_2 + u_2 \end{matrix}} \longrightarrow y$$

$$\left.\begin{matrix} u_1 = u \\ u_2 = y_1 \\ y = y_2 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 & u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \\ y = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

MATRICE DINAMICA DELL'INTERCONNESSIONE DELLA CASCATA

$$A_c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_c = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D_c = 0$$

$$R = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow 2 \text{ STATI RAGGIUNGIBILI}$$

$$O = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow 1 \text{ STATO OSSERVABILE}$$

OSS) L'AUTOVALORE '2' È SICURAMENTE OSSERVABILE E RAGGIUNGIBILE PERCHÉ COMPARE NELLA FdT COMPLESSIVA, QUINDI

$\lambda_1 = -1$ RAGG.

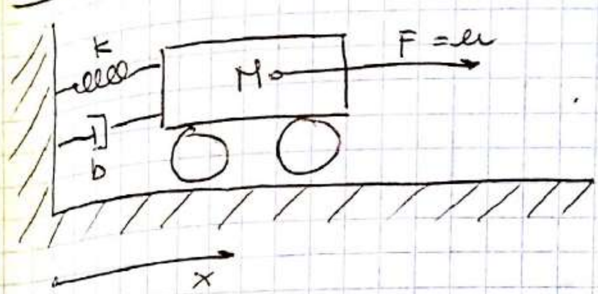
$\lambda_2 = 2$ RAGG. e OSSERVABILE

REGOLETTA PRATICA

CANCELLAZIONE POLO – ZERO $\longrightarrow$ AUTOVALORE <u>RAG. e INOSS.</u>

CANCELLAZIONE ZERO – POLO $\longrightarrow$ AUTOVALORE <u>OSS e IRRAG.</u>

TUTOR



$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = v = \dot{x}_1 \end{cases}$$

$$Ma = u - Kx - bv \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{K}{M}x_1 - \frac{b}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

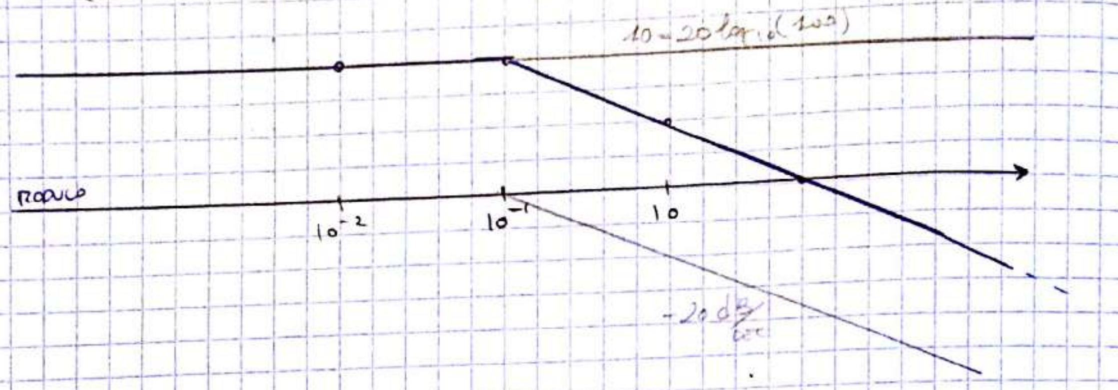
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -K/M & -b/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 1/M \\ 0 \end{pmatrix}}^{B} u \\ y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad D = 0 \end{cases}$$

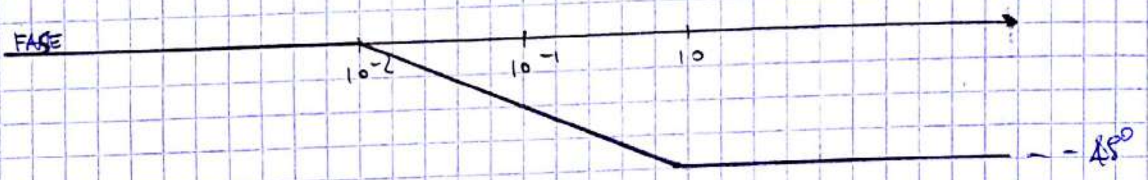
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -b/M \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/M \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + b/M & +1 \\ -K/M & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/M \end{pmatrix}}{s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{K}{M}} = \frac{1}{Ms^2 + bs + K}$$ FdT DEL SISTEMA

EX (DIAGRAMMI DI BODE)

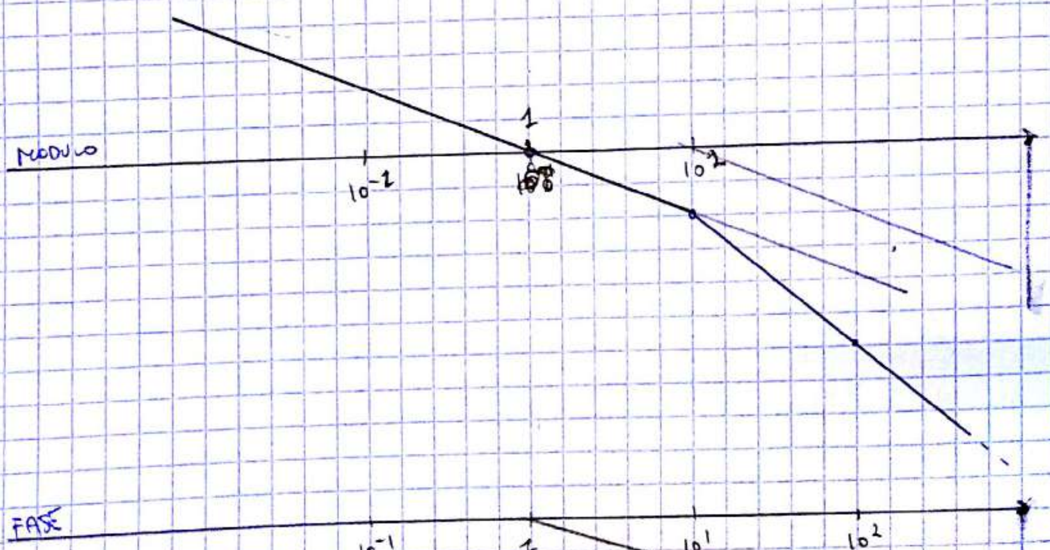
$$W(s)=\frac{10}{\left(\frac{1}{10}+s\right)}=\frac{10}{\frac{1}{10}(1+10s)}=\frac{100}{1+10s}$$

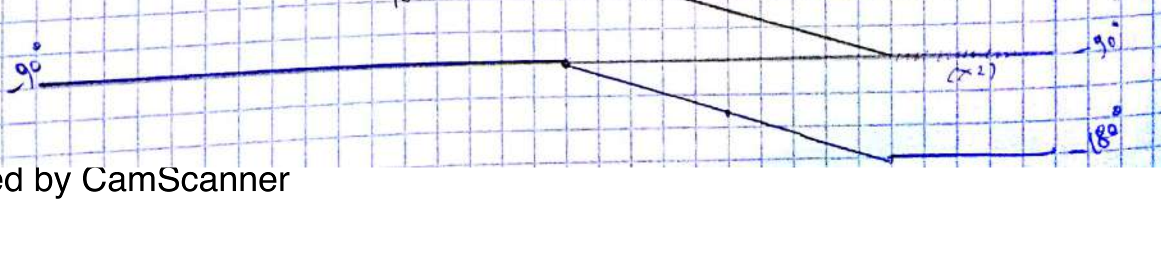




EX DIAGRAMMI DI BODE

$$W(s)=\frac{10}{s(10+s)}=\frac{\cancel{10}}{\cancel{10}\,s\left(1+\frac{1}{10}s\right)}=\frac{1}{s\left(1+\frac{1}{10}s\right)}$$





EX) $W(s) = \frac{2(s+2)}{(s^2-1)} = -4 \frac{1+\frac{s}{2}}{(1+s)(1-s)}$

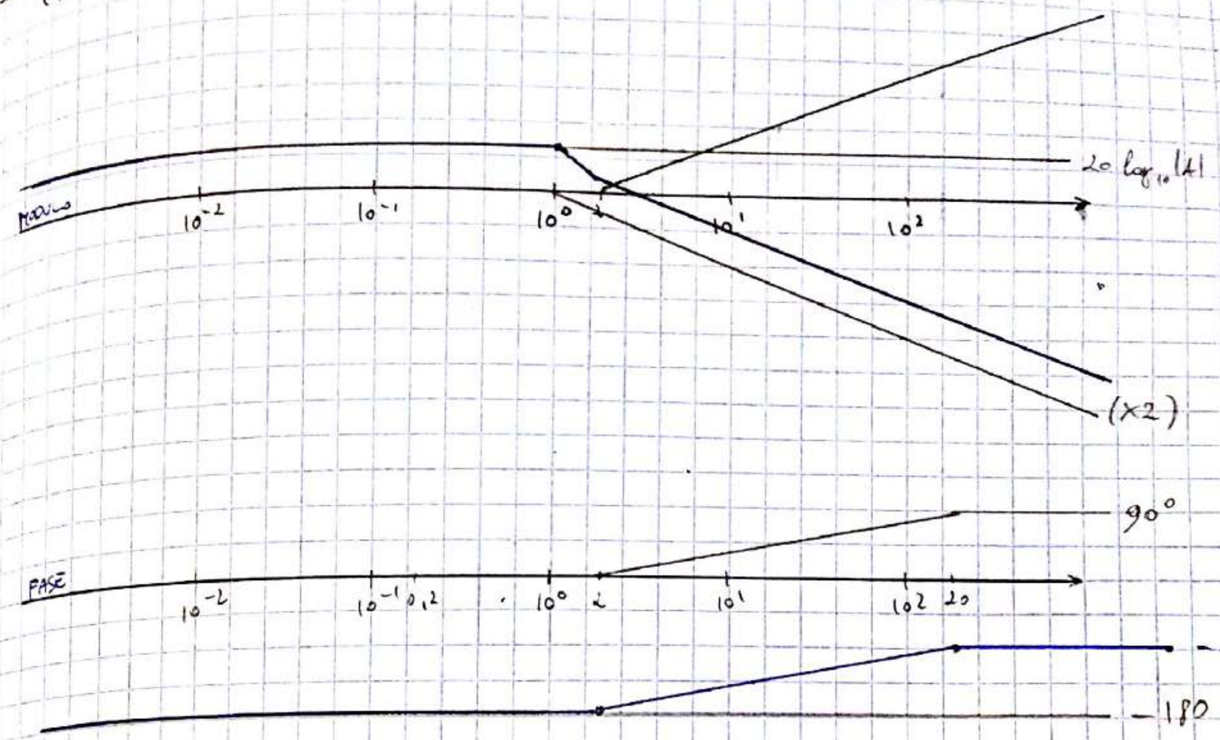
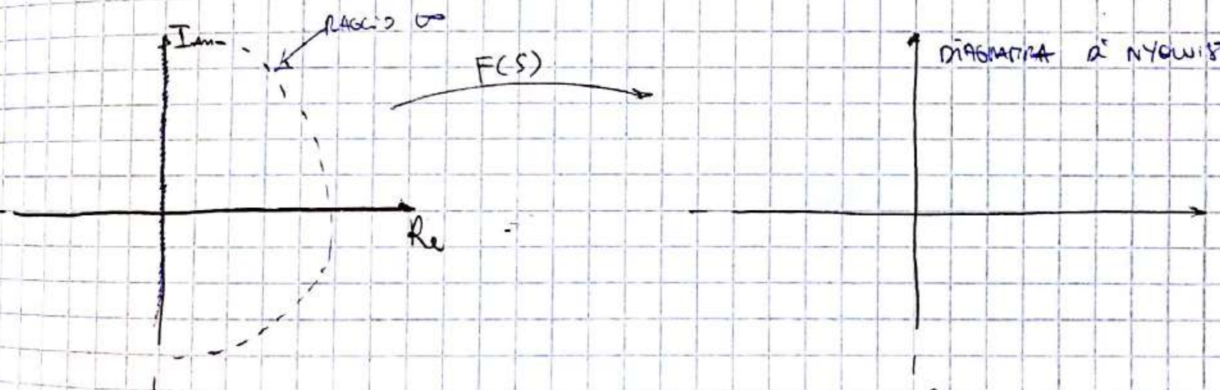


DIAGRAMMA DI NYQUIST

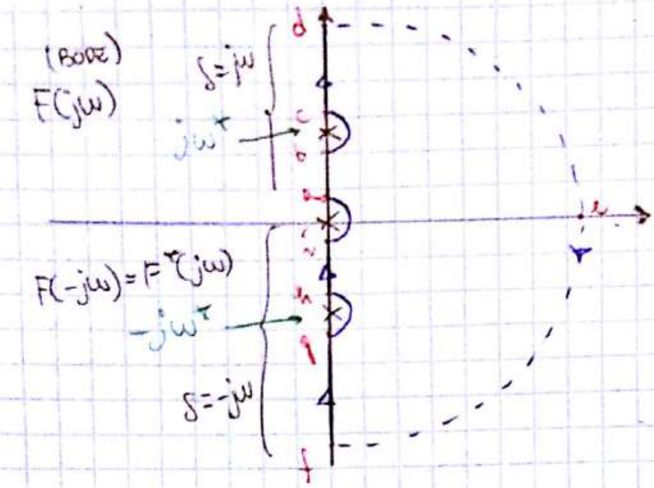
$s^* = a + jb \quad |s^*| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \angle s^* = \arctan\frac{b}{a} \quad s^* = \rho e^{j\phi}$



IL DIAGRAMMA DI NYQUIST MAPPA UNA FUNZIONE F(S), SULLA CURVA DI NYQUIST IN BW NEL PIANO COMPLESSO

CAMMINO DI NYQUIST:

COMPRENDE:
- L'ASSE IMMAGINARIO TRANNE I POLI DELLA F(S) A PARTE REALE NULLA
- SEMICIRCONFERENZA DESTRA DI RAGGIO INFINITO
- SEMICIRCONFERENZE DESTRE DI RAGGIO INFINITESIMO CHE LASCIA A SINISTRA GLI EVENTUALI POLI DELLA F(S)



$\overline{ab}: s=j\omega \quad 0<\omega<\omega^*$

$\overline{cd}: s=j\omega \quad \omega^*<\omega<+\infty$

$\overline{hi}: s=j\omega \quad -\omega^*<\omega<0$

$\overline{fg}: s=j\omega \quad -\infty<\omega<-\omega^*$

c, b : $s=j\omega^*+\rho e^{j\phi} \quad \rho\to 0, -\frac{\pi}{2}<\phi$

a, h : $s=\rho e^{j\phi} \quad \rho\to 0, -\frac{\pi}{2}<\phi$

h, g : $s=-j\omega^*+\rho e^{j\phi} \quad \rho\to 0, -\frac{\pi}{2}<\phi<$

d, f : $s = Re^{j\phi} \quad R\to +\infty, +\frac{\pi}{2}>\phi>$

GRAFICO

1) SEMIASSE POSITIVO IMMAGINE

$F(j\omega) \quad 0<\omega<+\infty$ → DAI DIAGRAMMI DI BODE

2) SEMIASSE NEGATIVO IMMAGINE.

$F(-j\omega) \quad 0<\omega<+\infty$ → LA OTTENGO RIBALTANDO QUELLA DI PRIMA

INFATTI PER LA PROPRIETÀ DEI NUMERI COMPLESSI: $F(j\omega)=|F(j\omega)|e^{j\phi(F(j\omega))}$

3) SEMICIRCONFERENZE INFINITESIME

POLO A PARTE REALE NULLA μ CON MOLTEPLICITÀ m, VIENE MAPPATO CON m SEMICIRCONFERENZE DI RAGGIO ∞ DA TRACCIARE IN SENSO ORARIO

4) SEMICIRCONFERENZA DI RAGGIO INFINITO

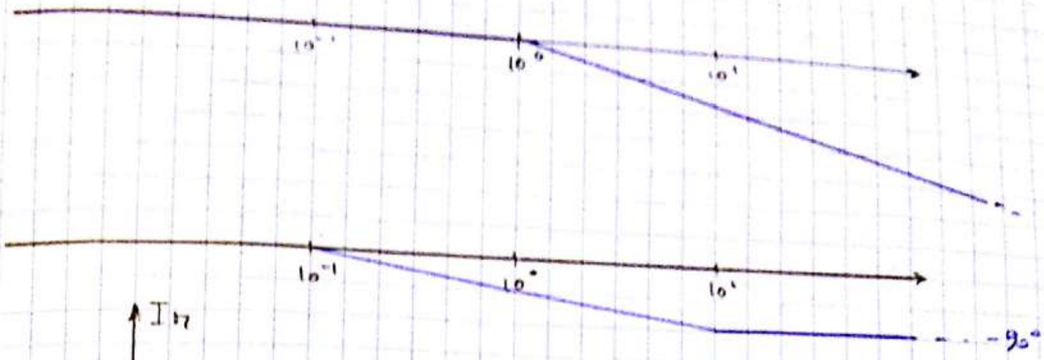
VIENE MAPPATA IN $(0,0)$. INFATTI SE SOSTITUIAMO A s $Re^{j\phi}$ E FACCIAMO TEN R A $+\infty$, POICHÉ IL GRADO DEL DEN. DI F È > DEL GRADO DEL NUM. F VA A ZERO

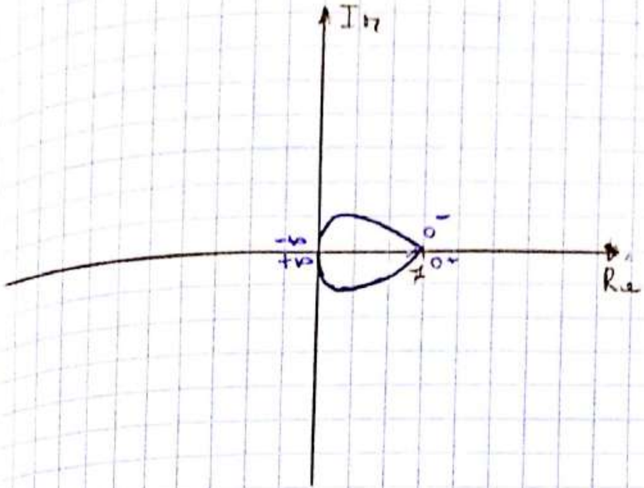
OSS.

POICHÉ PARLIAMO DI FUNZIONI RAZIONALI, $F^*(j\omega)=F(-j\omega)$; QUINDI PER TRACCIARE IL SEMIASSE NEGATIVO BASTA 'SPECCHIARE' L'ALTRA PARTE DEL DIAGRAMMA.

Ex

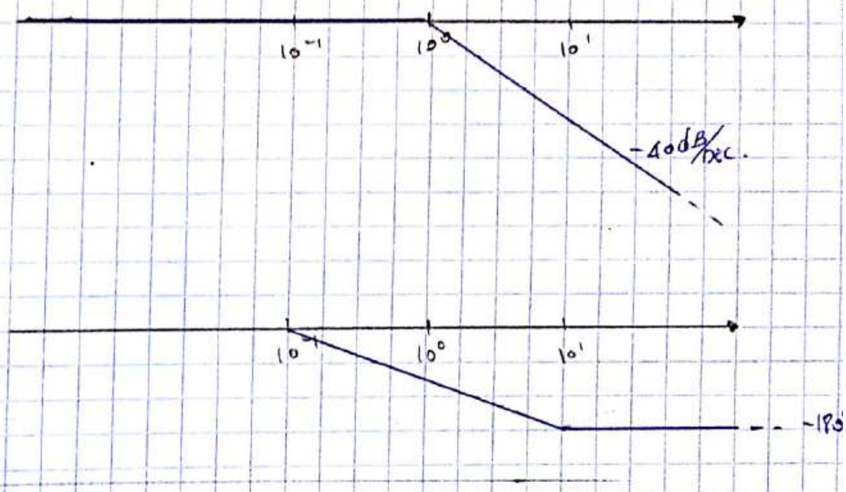
$F(s) = \frac{1}{s+1}$

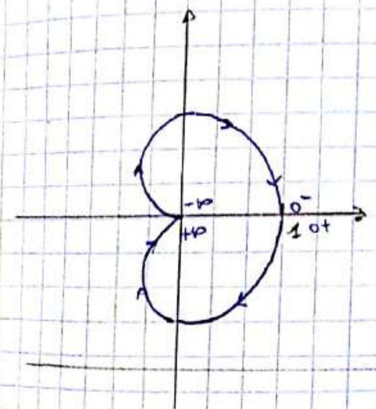




Ex

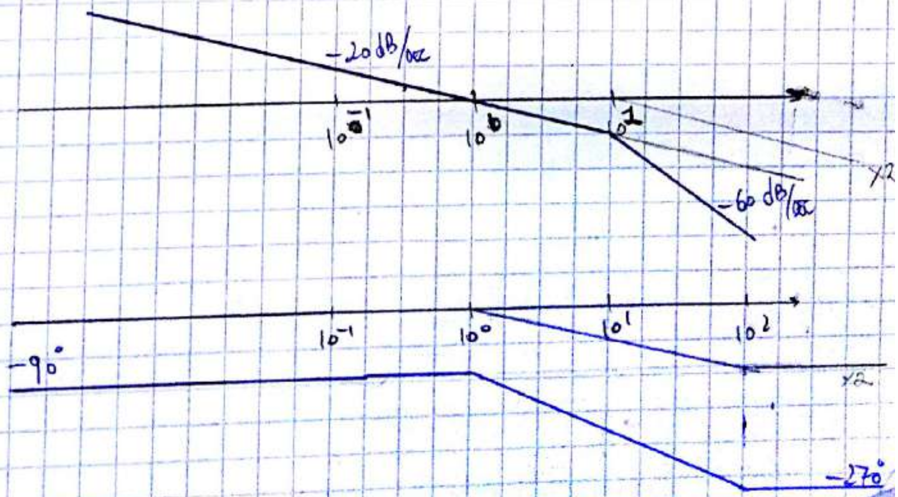
$F(s) = \frac{100}{(s+10)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^2}$

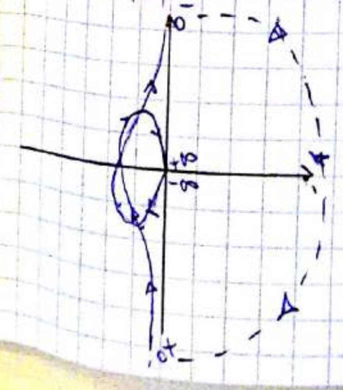




Ex

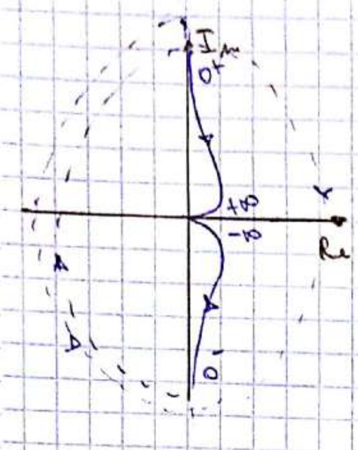
$F(s) = \frac{1}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}$

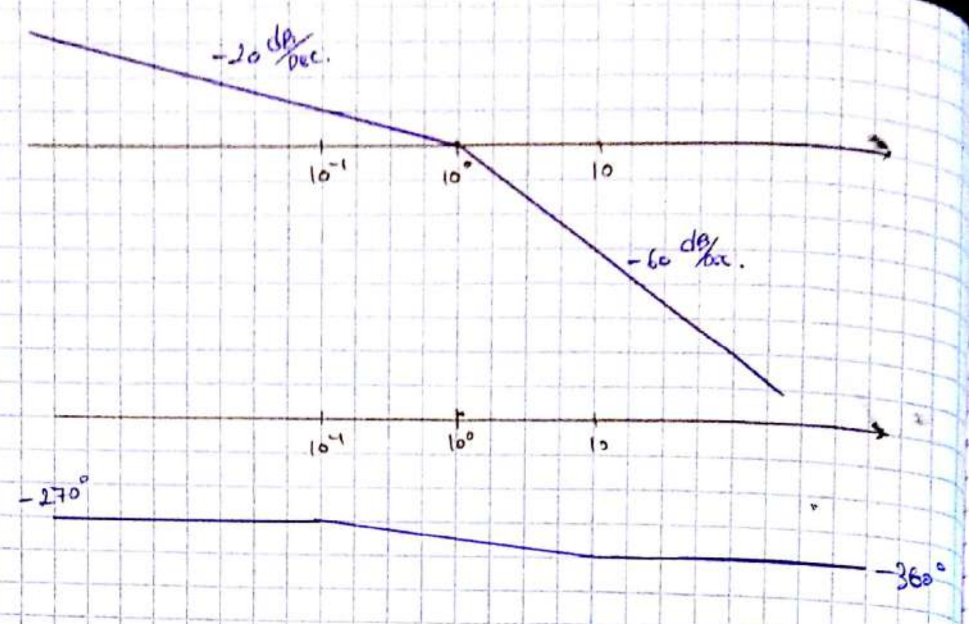




EX

$$F(s) = \frac{1}{s^3(s+1)}$$





TEOREMA DI NYQUIST

IL TEOREMA DI NYQUIST DICE SE IL SISTEMA CONTROREAZIONATO CON CONTROREAZIONE UNITARIA È STABILE SULLA BASE DEL GRAFICO

NOTAZIONI:

P: N° POLI A PARTE REALE POSITIVA DI F(s)

N: N° DI GIRI CHE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST DI F(s) COMPIE INTORNO AL PUNTO (-1, 0)

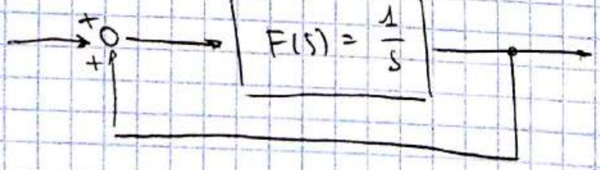
I GIRI SONO POSITIVI SE IN SENSO ~~ORARIO~~ ANTIORARIO E NEGATIVI SE IN SENSO ORARIO

N NON È DEFINITO SE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST DI F(s) PASSA SU (-1, 0)

TEO

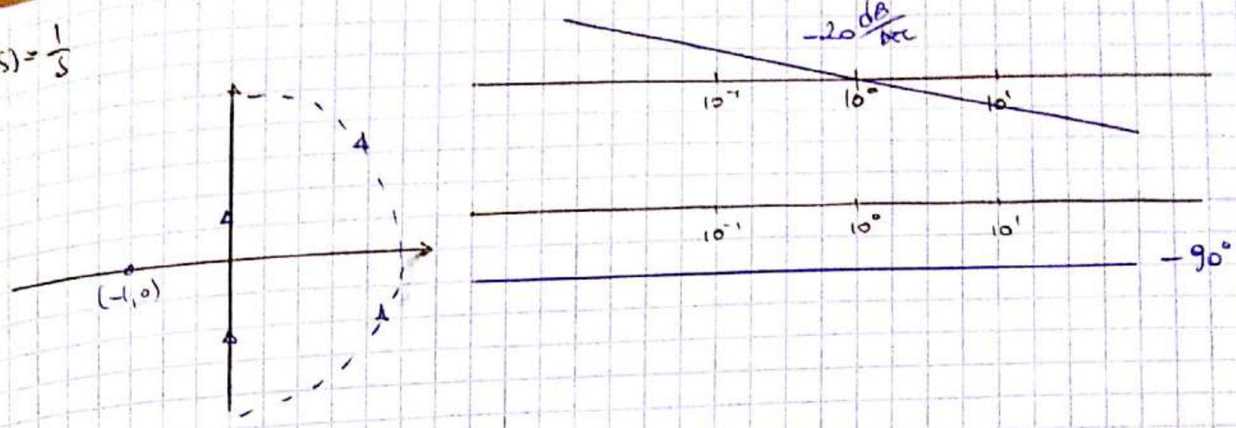
CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER STABILITÀ ASINTOTICA DELLA RETROAZIONE UNITARIA DI F(s) È CHE SIA N BEN DEFINITO E CHE SI ABBIA $N = P$

EX



È STABILE ASINTOTICAMENTE!

$F(s) = \frac{1}{s}$



$N = P = 0 \Rightarrow$ IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE

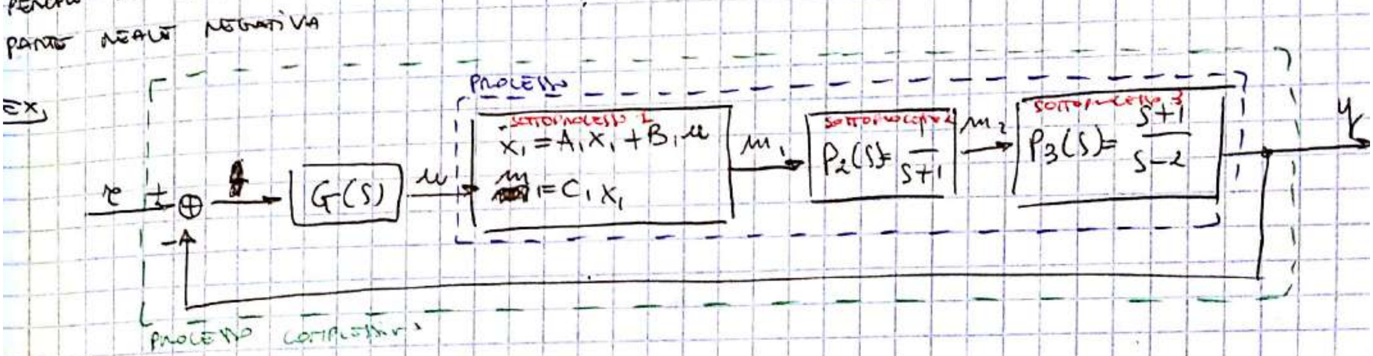
FINE TUTOR

$$\left\{ \begin{matrix} \text{AUTOVALORI DEL} \\ \text{SISTEMA COMPLESSIVO} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{AUTOVALORI NASCOSTI} \\ \text{INTRINSECI} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \text{AUTOVALORI NASCOSTI} \\ \text{GENERATI PER} \\ \text{INTERCONNESSIONE} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \text{AUTOVALORI NON} \\ \text{NASCOSTI} \end{matrix} \right\}$$

POLI DI $W(s)$

OSS.
PERCHÉ IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA STABILE → TUTTI GLI AUTOVALORI DEVONO AVERE PARTE REALE NEGATIVA

EX,



$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

TRASFORMIAMO IL PRIMO PROCESSO NEL DOMINIO DI LAPLACE (STANDO ATTENTO A VEDERE SE PERDO INFORMAZIONI SU QUALCHE AUTOVALORE)

$$\text{rango}\begin{pmatrix} B_1 & A_1B_1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \longrightarrow \text{UN AUTOVALORE RAGGIUNGIBILE}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_1A_1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \longrightarrow \text{UN AUTOVALORE OSSERVABILE}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

VARI CASI POSSIBILI:

$\lambda_1 = -1$ RAGG e OSS o RAGG e 7OSS

$\lambda_2 = -1$ 7RAGG e 7OSS o 7RAGG e OSS

1   2

$$P_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 = (1\ \ 0)\begin{pmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

$$P_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

- POICHÉ UN AUTOVALORE COMPARE COME POLO DI $P_1(s)$, POSSIAMO DIRE CHE L'AUTOVALORE È RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE (CASO 1)
- IL PROCESSO HA UN AUTOVALORE NASCOSTO MA A PARTE REALE NEGATIVA $\Rightarrow$ NO PROBLEM

QUINDI:

IL PRIMO SOTTOPROCESSO HA UN AUTOVALORE INTRINSECO NASCOSTO $\lambda = -1$

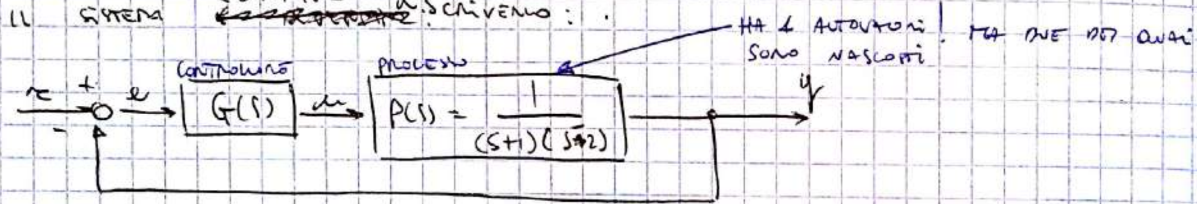
CALCOLO LA FdT DEL PROCESSO:

$$P(s) = P_1(s) \cdot P_2(s) \cdot P_3(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

OSS.

C'È STATA UNA CANCELLAZIONE POLO – ZERO $\longrightarrow$ UN AUTOVALORE È DIVENTATO NASCOSTO, IN PARTICOLARE $\lambda = -1$ È DIVENTATO NASC. E TOT. MA È A PARTE REALE < 0 $\Rightarrow$ NO PROBLEM

IL SISTEMA POSSIAMO RISCRIVERLO:



$F = GP \longrightarrow$ AD ANELLO APERTO $\quad F = \frac{N_F}{D_F}$

AD ANELLO CHIUSO:

$$W = \frac{PG}{1+PG} = \frac{F}{1+F} = \frac{\frac{N_F}{D_F}}{1+\frac{N_F}{D_F}} = \frac{N_F}{D_F+N_F}$$

FdT DEL SISTEMA COMPLESSIVO

$$W = \frac{N_W}{D_W} \Rightarrow N_W = N_F\ ,\quad D_W = D_F + N_F$$

STRUTTURA $G(s)$	a	$\frac{a}{s+b}$	$\frac{as+b}{s+c}$	$\frac{as+b}{s^2+cs+d}$	$\frac{as^2+bs+c}{s^2+ds+e}$	...
N° PARAMETRI	1	2	3	4	5	...
DIMENSIONE DEL CONTROLLORE	0	1	1	2	2	...

OSS.
a NEL PRIMO CASO È REALE! ALTRIMENTI IL CONTROLLORE NON È REALIZZABILE.

OSS
PERCHÉ NON METTO $G(s) = \frac{a}{s^2+bs+c}$? PERCHÉ HO GIÀ UNA G(S) CON TRE GRADI DI LIBERTÀ MA DI DIMENSIONE PIÙ PICCOLA! IL MIO OBIETTIVO È CERCARE LA G(S) CON LA DIMENSIONE PIÙ PICCOLA

ANDIAMO A TENTATIVI CON IL METODO DI ROUTH:

1) $G(s) = a$

$F = G \cdot P = \frac{a}{(s+1)(s-2)}$ $\quad N_F = a$ $\quad N_W = N_F = a$

$D_F = (s+1)(s-2)$ $\quad D_W = N_F + D_F = a + (s+1)(s-2) =$

$= a + s^2 - s - 2 = \underbrace{s^2 - s}_{\text{VARIAZIONE!}} - 2 + a$

NON È STABILE PER QUALSIASI VALORE DI a.

OSS
CN PERCHÉ TUTTE LE SOL. SIANO A PARTE REALE NEGATIVA È CHE TUTTI I COEFF. ABBIANO LO STESSO SEGNO (LA CONDIZIONE NON È SUFF., BISOGNA USARE ROUTH SE HANNO TUTTI LO STESSO SEGNO) PER I POL. DI GRADO 1 e 2 LA CN È ANCHE SUFFICIENTE

2) $G(s) = \frac{a}{s+b}$

$F = GP = \frac{a}{(s+b)(s+1)(s-2)}$ $\quad D_W = N_F + D_F = a + (s+b)(s+1)(s-2) = s^3 + s^2(b-1) + s(-b-2)$
$+ a - 2b$

VERIFICHIAMO LA C.N.:

$b - 1 > 0 \rightarrow b > 1$
$b < -2$ IN CONTRADDIZIONE!
$a - 2b > 0$

PER NESSUN VALORE DI a e b IL SISTEMA È STABILE

OSS.

PIÙ SI VA AVANTI, PIÙ SI COMPLICANO I CONTI: SCELGO COSÌ LA PROPRIA $G(s) = a\frac{s+1}{s+b}$, COSÌ DA CREARE UN AUTOVALORE NASCOSTO, MA È A PARTE REALE NEGATIVA $\Rightarrow$ NO PROBLEM

(SBAGLIATISSIMO SEMPLIFICARE '$s-2$'! OTTERREI UN AUTOVALORE NASCOSTO A PARTE REALE POSITIVA!)

3) $G(s) = a\frac{s+1}{s+b}$

$$F = GP = a\frac{\cancel{s+1}}{s+b}\cdot\frac{1}{\cancel{(s+1)}(s-2)} = \frac{a}{(s+b)(s-2)}$$

$$\underline{D_w} = a + (s+b)(s-2) = a + s^2 + s(b-2) - 2b = s^2 + s(b-2) + a - 2b$$

VERIFICHIAMO LA C.N.:

$$\begin{cases} b-2>0 \\ a-2b>0 \end{cases} \quad \begin{cases} b>2 \\ a>2b>4 \end{cases}$$

$\boxed{\text{OK}}$: CI POTREBBERO ESSERE SOLUZIONI AL PROBLEMA, ANZI CI SONO SIC. PERCHÉ IL POLINOMIO È DI GRADO 2 E LA CN È ANCHE S

SCELGO AD ESEMPIO $b=3$ e $a=7$

CON QUESTI VALORI DI a e b: $D_W = s^2 + s + 1$

$$s^2+s+1=0 \longrightarrow s_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

IN DEFINITIVA:

NASCOSTI:

$\lambda_1 = -1$ ~~RAGG.~~ ¬RAGG. e ¬OSS.

$\lambda_2 = -1$ RAGG. e ¬OSS.

$\lambda_3 = -1$ ¬RAGG. e OSS.

NON NASCOSTI:

$\lambda_4 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_5 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

POLI DI $W(s)$ QUINDI RAGG. e OSS.

AUTOVALORI DEL SISTEMA ~~COMPLESSIVI~~ COMPLESSIVO CONSIDERANDO COME $G(s)$ QUELLA APPENA CALCOLATA

OSS

SE ALL'ESAME VIENE CHIESTO IL POLINOMIO CARATTERISTICO NON C'È BISOGNO DI CALCOLARE LE RADICI. NELL'ESEMPIO:

$P(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda^2+\lambda+1)$ POLINOMIO CARATTERISTICO

OSS.

LA VELOCITÀ DI CONVERGENZA SI È RIDOTTA DA e^{-t} A $e^{-\frac{1}{2}t}$. POI IMPARIAMO DELLE TECNICHE PER DIMINUIRE IL VALORE ~~REALE~~ DEGLI AUTOVALORI NON NASCOSTI (NON POSSO TOCCARE QUELLI NASCOSTI)

PROVIAMO A FAR SÌ CHE LA VELOCITÀ DI CONVERGENZA NELL'EX SIA e^{-t}.

$D_W = N_F + D_F = a + (s+b)(s-2) = s^2 + (b-2)s + a - 2b$

FACCIO UNA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE: $s \longrightarrow s-1$

$D_W = (s-1)^2 + (b-2)(s-1) + a - 2b = s^2 + s(b-4) + 3 + a - 3b$

$$\begin{cases} b-4>0 \\ 3+a-3b>0 \end{cases} \quad \begin{cases} b>4 \\ a>\cancel{15}\,9 \end{cases}$$

CON QUESTI VALORI DI a E b SONO SICURO CHE LE SOLUZIONI HANNO PARTE REALE < -1

EX. $a = 16$ E $b = 6$

$D_W = s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2$ (HANNO PARTE REALE < -2)

ASSEGNAZIONE DI AUTOVALORI NEL DOMINIO DI LAPLACE

TECNICA CON LA QUALE SCELGO ESATTAMENTE IL VALORE AGLI AUTOVALORI NON NASCOSTI DOPO AVER APPLICATO IL CONTROLLORE.

$W(s) = \dfrac{N_W(s)}{D_W(s)}$ — LE RADICI DI $D_W(s)$ SONO GLI AUTOVALORI NON NASCOSTI DEL SISTEMA COMPLESSIVO

CASO DEL CONTROLLO CLASSICO

IN QUESTO CASO:

$W(s) = \dfrac{N_F}{N_F + D_F}$ OVE $F = \dfrac{N_F}{D_F}$

$$D_W(s) = \prod_{i=1}^{d_W} (s - s_{ARB,i})$$

EQ. CIOFANTINA

d_W = grado di $D_W(s)$

$s_{ARB,i}$: I-ESIMO AUTOVALORE ASSEGNATO A MIO ARBITRIO

DEVO FARE IN MODO CHE $D_W(s)$ ABBIA ESATTAMENTE QUELLA FORMA.

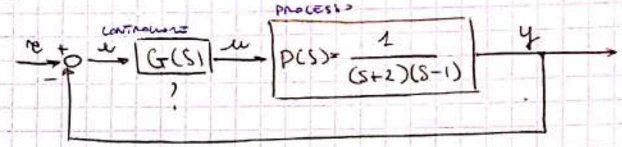
UN'EQUAZIONE DI QUESTO TIPO SI DICE: EQ. DIOFANTINA.

COME LA RISOLVO?

OVVIAMENTE $P(s)$ È ASSEGNATO, POSSO LAVORARE SOLO ~~...~~ SU $G(s)$ MODIFICANDOLO A PIACIMENTO.

DEVO SCEGLIERE $G(s)$ CON $\boxed{N^\circ \text{ PARAMETRI} = d_W}$

EX)



VOGLIAMO TUTTI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA COMPLESSIVO IN '−1'

$$W(s) = \frac{N_F}{D_F + N_F}, \quad F = PG = \frac{N_F}{D_F}$$ INFATTI È UNO SCHEMA CLASSICO A CONTROREAZIONE

OSS)

d_W = GRADO DI D_W = GRADO DI D_F (INFATTI F È UNA FUNZIONE STRETTAM. PROPRIA)

VALE SOLO NEL CLASSICO SCHEMA A CONTROREAZIONE UNITARIA

1) SE $G(s) = a \longrightarrow F(s) = G(s) \cdot P(s) = \dfrac{a}{(s+2)(s-1)}$

IN QUESTO CASO: $d_F = 2$, MA LA $G(s)$ HA SOLO UN PARAMETRO!

NON VA BENE.

2) SE $G(s) = \dfrac{a}{s+b} \longrightarrow F(s) = G(s) \cdot P(s) = \dfrac{a}{(s+b)(s+2)(s-1)}$

IN QUESTO CASO: $d_F = 3$, MA LA $G(s)$ HA SOLO 2 PARAMETRI!

NON VA BENE.

3) SE $G(s) = \dfrac{as+b}{s+c} \longrightarrow F(s) = G(s) \cdot P(s) = \dfrac{as+b}{(s+c)(s+2)(s-1)}$

IN QUESTO CASO: $d_F = 3$, ESATTAMENTE IL NUMERO DI PARAMETRI DI $G(s)$, OK!

SCRIVIAMO L'EQ. DIOFANTINA:

$D_W = N_F + D_F = (s+1)^3$ VOGLIO TUTTI E 3 GLI AUTOVALORI A '−1'

$\Updownarrow$

ALTRO RAMO

$(as+b) + (s+c)(s+2)(s-1) = (s+1)^3$

$s^3 + s^2(c+1) + s(a+c-2) - 2c + b = s^3+3s^2+3s+1$

ADESSO LA RISOLVIAMO CON IL <u>PRINCIPIO DI IDENTITÀ</u> DEI POLINOMI

$c+1=3 \longrightarrow \boxed{c=2}$

$\boxed{a=3}$

$-4+b=1 \longrightarrow \boxed{b=5}$

SCEGLIENDO IN QUESTO MODO I PARAMETRI DI G(S), SO CHE GLI AUTOVALORI SARANNO ESATTAMENTE QUELLI CHE HO SCELTO

OSS.

CERCARE G(S) UTILIZZANDO IL METODO DI ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI APPENA FATTO, PORTA A UNA G(S) A DIMENSIONE $\geq$ A QUELLO DELLA G(S) OTTENUTA CON IL METODO A TENTATIVI CON ROUTH.

QUINDI: SE DEVO SOLO STABILIZZARE IL SISTEMA $\longrightarrow$ NON USO QUESTO METODO (IN GENERE NEI COMPITI D'ESAME È RICHIESTA UNA G(S) A DIM. MINIMA).

USIAMO IL METODO DELL'ALTRA VOLTA:

1) $G(s) = a$ • $F(s) = G(s) \cdot P(s) = \dfrac{a}{(s+2)(s-1)}$

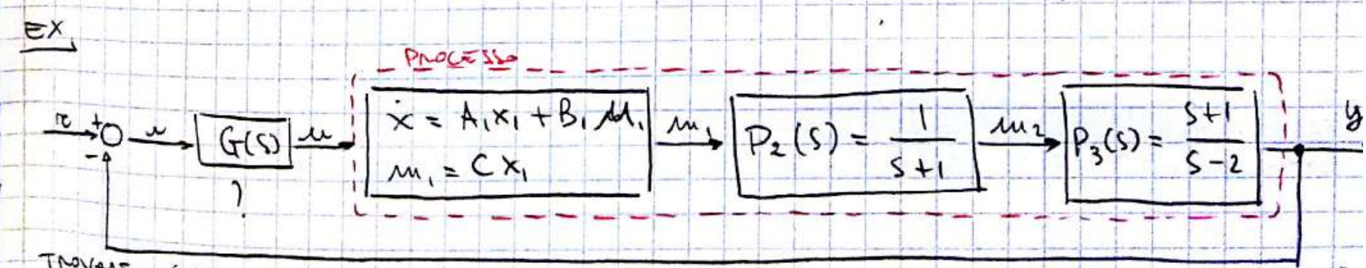
• $D_W = a + (s+2)(s-1) = s^2 + s - 2 + a$

PER IL CRIT. DI ROUTH, SE $-2+a>0 \Rightarrow \boxed{a>2}$ IL SISTEMA È STABILE.

OSS.

PER LA STABILITÀ BASTA UNA G(S) A DIMENSIONE ZERO!

EX.



TROVARE G(S) IN MODO CHE IL PO. CA. SIA (SE POSSIBILE) COME QUELLI INDICATI:

A) $(s+2)^N$ B) $(s+1)(s+2)^N$ C) $(s+1)^2(s+2)^N$ D) $(s+1)^3(s+2)^N$

$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = (1 \quad 0)$ (STESSO EX. DI QUALCHE PAGINA PRIMA)

$\left\{\begin{matrix}\text{AUTOVALORI}\\ \text{NASCOSTI}\end{matrix}\right\} = \{-1, -1\}$

$P_1(s) = \frac{1}{s+1} \qquad P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{\cancel{s+1}} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s-2} = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$

<u>NB</u>

A) e B) SONO <u>IMPOSSIBILI</u> PERCHÉ 2 AUTOVALORI SONO NASCOSTI E IN '-1', NON POSSO SPOSTARLI!

C)

$G(s) = \frac{as+b}{s+c} \longrightarrow F = G \cdot P = \frac{as+b}{(s+c)(s+1)(s-2)}$

HO 3 PARAMETRI, TANTI QUANTO È IL GRADO DI D_F, OK!

$W(s) = \frac{N_F}{N_F + D_F}$ INFATTI È UNA CLASSICA CONTROREAZIONE UNITARIA

$D_W = as+b+(s+c)(s+1)(s-2) = (s+2)^3$

$s^3 + s^2(c-1) + s(a-c-2) + b - 2c = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$

$c-1 = 6 \longrightarrow \boxed{c=7}$

$a-7-2 = 12 \longrightarrow \boxed{a=21}$

$b-14 = 8 \longrightarrow \boxed{b=22}$

D) PRENDO $G(s)$ CON AL NUMERATORE $s+1$, COSÌ RENDO NASCOSTO L'AUTOVALORE '-1' E NON DEVO PIÙ PREOCCUPARMENE.

$G(s) = a\frac{s+1}{s+b} \longrightarrow F = GP = \frac{a}{(s+b)(s-2)}$

<u>OSS.</u> C'È UN NUOVO AUT. NASCOSTO!

HO 2 PARAMETRI, TANTI QUANTO d_F, OK!

$D_W = a + (s+b)(s-2) =$ INFATTI È UNA CONTROREAZIONE UNITARIA

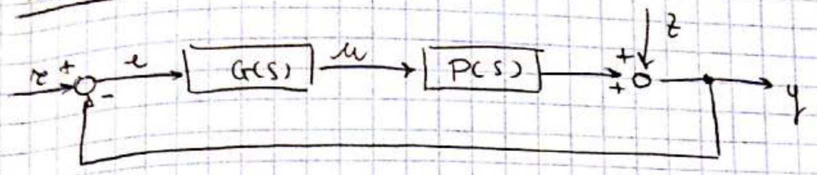
$= \cancel{a} + s^2 + (b-2)s - 2b + a = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$

$b-2 = 4 \longrightarrow \boxed{b=6}$

$-2b+a = 4 \longrightarrow \boxed{a=16}$

SPECIFICHE DI TRACKING e REIEZIONE DEI DISTURBI

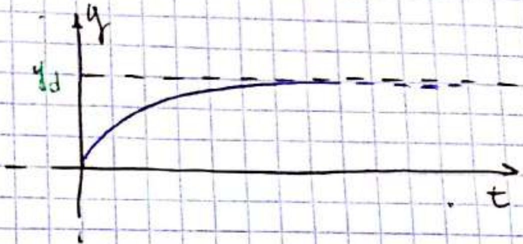
TRACKING



$r = y_d$ USCITA DESIDERATA

$e = r - y = y_d - y$

VOGLIO CHE $\lim_{t \to +\infty} e(t) = 0$



$e(t) = \underbrace{\tilde{e}(t)}_{\text{ERRORE A REG. PER.}} + \underbrace{e_t(t)}_{\text{ERRORE TRANS.}}$

$y(t) = \underbrace{\tilde{y}(t)}_{\text{RISPOSTA A REG. PER.}} + \underbrace{y_t(t)}_{\text{RISPOSTA TRANSITORIA}}$

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE A INGRESSI CANONICI POLINOMIALI

$u(t) = \frac{t^k}{k!}$

MOLTEPLICITÀ ZERO IN $s=0$

	$u(t)$: 1	t	$t^2/2$
0	$W(0) \neq 0$	$W(0)t + \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0}$	$W(0)\frac{t^2}{2} + \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
1	0	$\left.\frac{W(s)}{s}\right\|_{s=0} \neq 0$	$\left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
2	0	0	$\left.\frac{W(s)}{s^2}\right\|_{s=0}$

Ex.

$u(t) \longrightarrow \boxed{W(s) = \frac{s(s+2)}{(s+1)^2}} \xrightarrow{y(t)}$

$u(t) = t \qquad \tilde{y}(t) = ?$

IN $s=0$, LA MOLTEPLICITÀ è 1 $\Rightarrow \tilde{y}(t) = 2$

OSS.

$$y(t) = \tilde{y}(t) + y_t(t)$$

RISPOSTA A R.P. — RISPO. TRANSITORIA

NOI LAVOREREMO SOPRATTUTTO PER MODIFICARE LA $\hat{y}(t)$, NON POSSIAMO FARE MOLTO SUL TRANSITORIO

OSS.

SE $u(t) = a\,u_1(t) + b\,u_2(t) \longrightarrow \tilde{y}(t) = a\,\tilde{y}_1(t) + b\,\tilde{y}_2(t)$

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PER LINEARITÀ

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE AD INGRESSI PERIODICI

$u(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$ | UGUALE PER IL COSENO!

$$\tilde{y}(t) = |W(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \angle W(j\omega))$$

EX.

$$W(s) = \frac{1}{s+1} \qquad \xrightarrow{u(t)} \boxed{W(s) = \frac{1}{s+1}} \xrightarrow{y(t)}$$

$u(t) = \operatorname{sen}(2t) \qquad \omega = 2$

$$\tilde{y}(t) = |W(j2)| \cdot \operatorname{sen}(2t + \angle W(j2))$$

$$W(j2) = \frac{1}{2j+1} \cdot \frac{1-2j}{1-2j} = \frac{1-2j}{1+4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}j$$

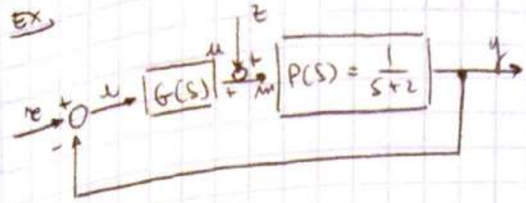
$$|W(2j)| = \left|\frac{1}{2j+1}\right| = \frac{|1|}{|2j+1|} = \frac{1}{|2j+1|} = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\angle W(2j) = \angle \frac{1}{2j+1} = \angle 1 - \angle 2j+1 = -\arctan(2)$$

$\Downarrow$

$$\tilde{y}(t) = \frac{\sqrt{5}}{5} \sin(2t - \arctan(2))$$

EX.



DOMANDE

PROGETTARE G(S) A DIMENSIONE MINIMA IN MODO DA SODDISFARE LE SEGUENTI SPECIFICHE:

1) ERRORE e(t) A REG. PER. CORRISPONDENTE A RIF. r(t) COSTANTI SIA NULLO
2) LA RISPOSTA y(t) A REG. PER. CORRISPONDENTE A DISTURBI z(t) COSTANTI SIA NULLA
3) L'ERRORE e(t) A REG. PERM. CORRISPONDENTE A RIF. r(t) = t SIA IN MODULO < 1/2
4) LA RISP. A REG. PER. CORRISPONDENTE A RIF r(t) = sin(2t) SIA NULLA
5) IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINTOTICAMENTE STABILE

①,③,④ SPECIFICHE DI TRACKING

OSS

CONVIENE IN GENERE LASCIARE QUELLA STABILITÀ PER ULTIMA.

CONVIENE INIZIARE DA QUELLE SPECIFICHE CHE HANNO BISOGNO DI UN VALORE ESATTO (ex. 1 e 2) e POI QUELLE CHE DANNO UN CERTO GRADO DI LIBERTÀ (ex 3)

ESEMPIO DI SVOLGIMENTO: 1, 2, 4, 3, 5.

INIZIAMO DALLA PRIMA

SAPPIAMO CHE $y(s) = W(s) \cdot r(s)$ $\xrightarrow{r} \boxed{W(s)} \xrightarrow{y}$

INOLTRE ESISTERÀ W_e : $e = W_e \, r$

SAPPIAMO CHE $e = r - y$ e CHE $y = P(s) \cdot m$

OSS IMPORTANTE!

QUANDO VADO A IMPORRE CONDIZIONI DI TRACKING, PRESCINDERE DALL'ESISTENZA DEI DISTURBI (RICORDARSI CHE VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI)

ALLA LUCE DI QUANTO DETTO: $\begin{cases} m = u \\ u = G(s) \cdot e \end{cases}$

QUINDI

$$\begin{cases} e = r - y \\ y = P(s) \cdot m \\ m = u \\ u = G(s) \cdot e \end{cases} \longrightarrow e = r - P(s)\,G(s)\,e \iff e = \frac{r}{(1 + P(s) \cdot G(s))}$$

$$\text{QUINDI: } W_e = \frac{e}{r} = \frac{1}{1 + PG} = \frac{1}{1 + \frac{N_G}{D_G} \cdot \frac{N_P}{D_P}} = \frac{D_G D_P}{N_G \cdot N_P + D_G D_P} = W_e$$

FdT INGRESSO – ERRORE

OSS

CONOSCIAMO D_P $(s+2)$ e N_P (1) MA NON N_G e D_G (SONO QUELLE CHE DOBBIAMO TROVARE NOI).

GUARDO LA TABELLA DEGLI INGRESSI POLINOMIALI:

- SPECIFICA PER UN INGRESSO COSTANTE ⟶ PRIMA COLONNA

OSS - GUARDO LE RIGHE: LA PRIMA HA (IN COLONNA 1) UN TERMINE DALLA SECONDA RIGA IN POI → OK!

OSS.
È MEGLIO SEGUIRE LA RIGA PIÙ RARA.

QUINDI:
- DEVO AVERE UNO ZERO IN $s=0$ IN W_e CON MOLTEPLICITÀ =

PER COME È FATTO IL NUMERATORE DI W_e?

$N_{We} = D_G D_P$. D_P HA UNO ZERO IN $s=0$? NO! ALLORA LO DEVE AVERE D_G.

QUINDI $\boxed{G = \frac{N_G}{s \cdot D'_G}}$

PERCHÉ PREFERISCO MOLTEPLICITÀ $=1$?: PERCHÉ ALTRIMENTI AUMENTEREI INUTILMENTE LA DIMENSIONE DI G! (CHE VOGLIO A DIM. MINIMA)

SECONDA SPECIFICA

OSS.
COSÌ COME PRIMA HO CONSIDERATO I DISTURBI NULLI, ORA CONSIDERO I RIFERIMENTI NULLI

$y = \cancel{W_r\, r}^{\,0} + W_z \cdot z$

DEVO CALCOLARE LA $\boxed{W_z = \frac{y}{z}}$

$$\begin{cases} y = P \cdot m \\ m = z + u \\ u = G e \\ e = -y \end{cases} \longrightarrow y = P(z - Gy) \Rightarrow y(1+PG) = Pz \Rightarrow \frac{y}{z} = \boxed{\frac{P}{1+PG} = W_z}$$

QUINDI: $\boxed{W_z = \frac{\frac{N_P}{D_P}}{1 + \frac{N_P}{D_P} \cdot \frac{N_G}{D_G}} = \frac{N_P D_G}{N_P N_G + D_P D_G}}$

NON DEVO FARE NULLA! D_G HA GIÀ UNO ZERO CON MOLTEPLICITÀ $=1$ IN $s=0$.

INFATTI HO BISOGNO DI UNO ZERO IN $s=0$ CON MOLTEPLICITÀ DI ALMENO 1 NEL POLINOMIO $\overset{\text{NUM. DI } W_z}{N_P \cdot D_G}$ PERCHÉ LA W_z AD UN INGRESSO COSTANTE SIA NULLA.

QUANTITÀ SPECIFICA

$$\frac{y}{t} = W = \frac{N_G \cdot N_P}{N_G \cdot N_P + D_G \cdot D_P}$$

$$\tilde{y}(t) = |W(2j)| \sin(2t + \angle W(j2)) = 0$$

PERCHÉ QUESTO SIA VERO $\longrightarrow |W(2j)| = 0 \Longrightarrow \left| \frac{N_G(2j) \cdot N_P(2j)}{N_G(2j) \cdot N_P(2j) + D_G(2j) D_P(2j)} \right| = 0$

PERCHÉ L'ULTIMA SIA VERA, BASTA CHE $|N_G(2j) \cdot N_P(2j)| = 0$

POICHÉ $N_P = 1$, NON SI ANNULLA IN $2j$. DEVO LAVORARE SU N_G.

SE PRENDO $N_G = (s-2j) N_G'$, LA CATENA DI IMPLICAZIONI È SODDISFATTA

PERÒ NON MI BASTA, NON POSSO AVERE COEFFICIENTI IMMAGINARI IN UNA FDT, QUINDI DICO CHE $N_G = (s-2j)(s+2j) \cdot N_G'$

OSS IMPORTANTE

SE UNA FDT HA COEFFICIENTI IMMAGINARI NON È REALIZZABILE FISICAMENTE

OSS:

LA PRIMA (PIÙ SEMPLICE) STRUTTURA DI $G(s)$ CHE POSSIAMO CONSIDERARE È LA SEGUENTE: $\frac{as^2+bs+c}{s^2+ds+e} \longleftrightarrow a\frac{(s+b)(s+c)}{(s+d)(s+e)}$

DALLE CONDIZIONI IMPOSTE FIN'ORA: $b=-2j$, $c=2j$ e $d=0$

IN DEFINITIVA: $G(s) = a\frac{s^2+4}{s(s+b)}$ È UNA $G(s)$ COMPATIBILE.

D'ORA IN POI VADO A TENTATIVI! PROVO CON UNA STRUTTURA COMPATIBILE e SE ARRIVO AD UNA SOLUZIONE IMPOSSIBILE NE SCELGO UN'ALTRA PIÙ COMPLESSA MA CON PIÙ GRADI DI LIBERTÀ.

TERZA SPECIFICA

CONSIDERA $G(s) = a\frac{s^2+4}{s(s+b)}$

(*) SCELGO PROPRIO LA SECONDA ~~RIGA~~ RIMANENDO NELL'OTTICA DI SCEGLIERE SEMPRE LA RIGA PIÙ IN ALTO.

SAPPIAMO GIÀ CHE $W_e = \frac{D_G D_P}{N_G N_P + D_G D_P}$

GUARDO SEMPRE LA TABELLA DELLE RISPOSTE A INGRESSI POLINOMIALI E VEDO CHE SIAMO SULLA SECONDA COLONNA N ABBIAMO BISOGNO DELLA RIGA DALLA 2 IN POI(*)

IL NUMERATORE DI $W_e = D_G D_P$, E GIÀ HA UNO ZERO IN S, CON MOLTEPLICITÀ = 1 (PER LE CONDIZIONI IMPOSTE PRIMA).
DOBBIAMO IMPORRE, PERÒ, CHE

$$\left| \left. \frac{W_e(s)}{s} \right|_{s=0} \right| < \frac{1}{2} \iff \left| \left. \frac{1}{s} \cdot \frac{D_G D_P}{N_G N_P + D_G D_P} \right|_{s=0} \right| < \frac{1}{2}$$

$$\iff \left| \left. \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{\cancel{s}(s+b)(s+2)}{a(s^2+4)\cdot 1 + s(s+b)(s+2)} \right|_{s=0} \right| < \frac{1}{2} \iff \left| \frac{2b}{4a} \right| = \left| \frac{b}{2a} \right| < \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{1}{2}\left|\frac{b}{a}\right| < \frac{1}{2} \iff |b| < |a| \quad \text{NUOVA CONDIZIONE}$$

OSS
È SBAGLIATO ASSEGNARE VALORI AD a E b A QUESTO LIVELLO! MI GIOCHEREI I GRADI DI LIBERTÀ; DEVO LASCIARE INDICATA LA CONDIZIONE SU FISSARE a E b, SOLO DOPO AVER TROVATO L'ULTIMA CONDIZIONE POSSO PROVARCI.

QUINTA SPECIFICA

SAPPIAMO GIÀ CHE $\frac{y}{r} = W = \frac{N_G N_P}{N_G N_P + D_G D_P}$

QUINDI: $D_W = N_G N_P + D_G D_P = a(s^2+4)\cdot 1 + s(s+b)(s+2) = s^3 + s^2(a+b+2) + 2bs + 4a$

ESISTE UNA COPPIA (a,b) CHE FACCIA SÌ CHE LE RADICI DI D_W ABBIANO PARTE REALE NEGATIVA E CHE SIA SODDISFATTA LA CONDIZIONE PRECEDENTE $(|b| < |a|)$?

APPLICO IL CRITERIO DI ROUTH A D_W:

$$\begin{cases} a+b+2 > 0 \\ 2b > 0 \rightarrow b > 0 \\ 2a > 0 \rightarrow a > 0 \end{cases}$$

→ ESISTONO VALORI DI a E b CHE SODDISFANO IL SISTEMA E CHE SODDISFANO $|b| < |a|$.
LA C.N. È SODDISFATTA, DEVO SCRIVERE LA TABELLA DI

3	(*) 1	$2b$
2	(*) $a+b+2$	$4a$
1	(*) $\frac{2ab+2b^2+4b-4a}{a+b+2}$	0
0	(*) $4a$	

(*) DEVONO ESSERE TUTTI DELLO STESSO SEGNO.
POICHÉ $1>0$ → TUTTI DEVONO ESSERE >0

$$\begin{cases} a+b+2>0 \\ 2ab+2b^2+4b-4a>0 \\ a>0 \\ |b|<|a| \end{cases}$$

QUESTO SISTEMA È SODDISFATTO DA $a=2$ e $b=1$

NB

NON DEVO TROVARE TUTTE LE COPPIE (a,b), ME NE BASTA UNA!

SAREBBE VERAMENTE COMPLICATO TROVARLE TUTTE e, INOLTRE, INUTILE!

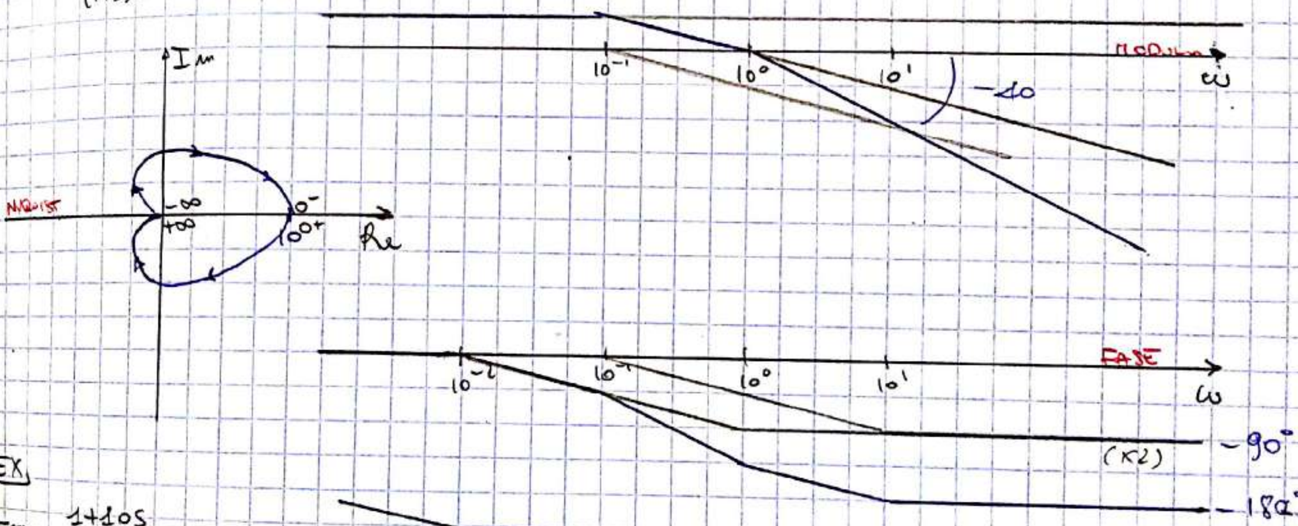
IN DEFINITIVA:

$G(s) = 2 \cdot \dfrac{s^2+4}{s(s+1)}$ SODDISFA TUTTE LE SPECIFICHE RICHIESTE

TUTOR

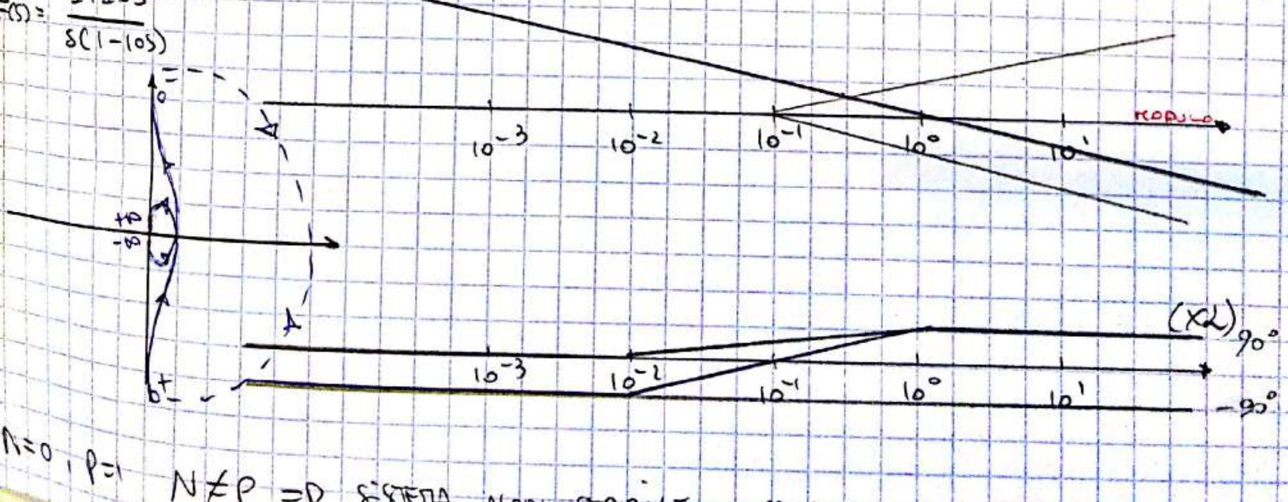
EX, DIAGRAMMI BODE e NYQUIST

$$F(s) = \frac{10}{(1+s)(1+10s)}$$



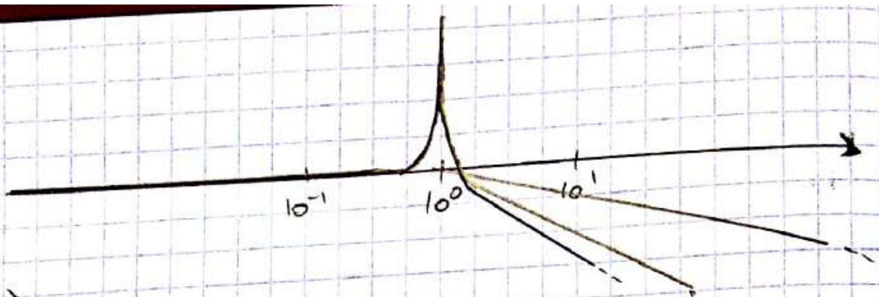
EX,

$$F(s) = \frac{1+10s}{s(1-10s)}$$



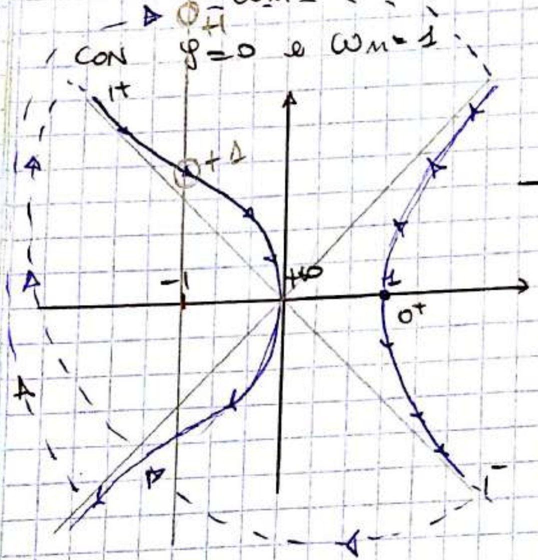
$N=0$, $P=1$ $\quad N \neq P \Rightarrow$ SISTEMA NON STABILE ASINTOTICAMENTE

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$



$$1+s^2 = 1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

con $\xi = 0$ e $\omega_n = 1$



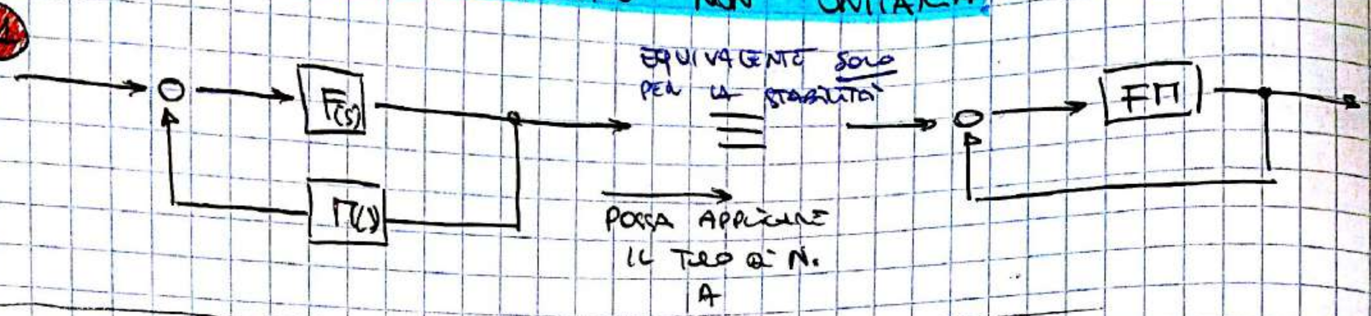
$P=0$

Oss.

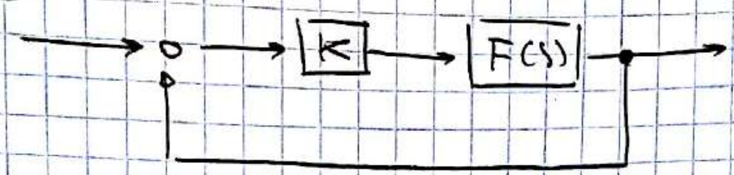
Come conto i giri? Traccio una semiretta da $(-1, j0)$ verso l'alto e conto in senso algebrico le curve entranti e uscenti (positive se entranti e negative se uscenti)

SISTEMI CON CONTROREAZIONE NON UNITARIA

1

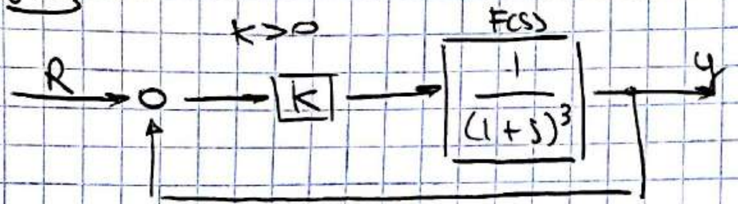


2

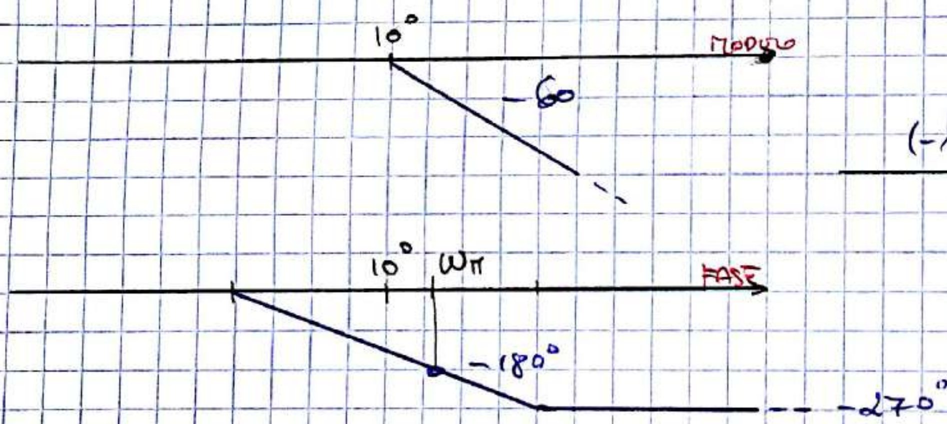


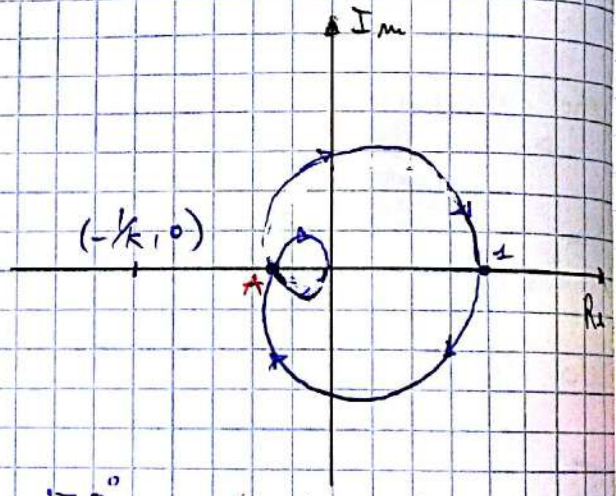
CONSIDERO I GIRI INTORNO A $(-1/K, j0)$ INVECE CHE $(-1, j0)$

EX.



$P=0$



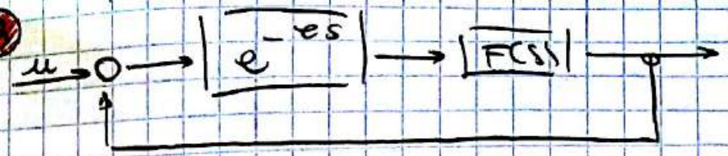


$A=(X_a, 0)$

- PER LA STABILITÀ VOGLIAMO CHE $X_a > -1/K$
- PER CALCOLARE X_a TROVO IL VALORE DEL MODULO DI $F(s)$ QUANDO LA FASE È $-180°$

- $\angle F(j\omega_\pi) = -180° \iff -3\arctan(\omega_\pi) = -180° \iff \omega_\pi = \tan(60°) = \sqrt{3}$
- $|F(j\omega_\pi)| = \dfrac{1}{(\sqrt{1+3})^3} = \dfrac{1}{8} = -X_a \implies X_a = -\dfrac{1}{8}$

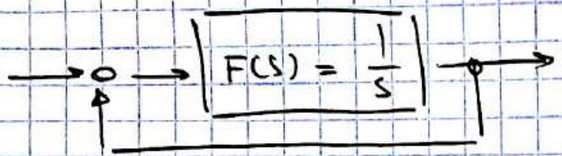
QUINDI SE $K < 8$ IL SISTEMA È STABILE.

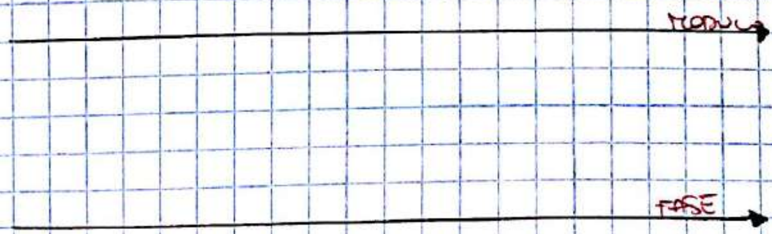


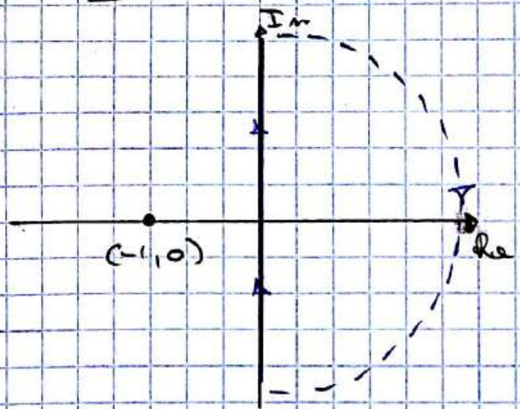
PER STUDIARE LA STABILITÀ SI TRACCIA IL DIAGRAMMA DI N. DI

$e^{-\tau s}F(s)$

ex)

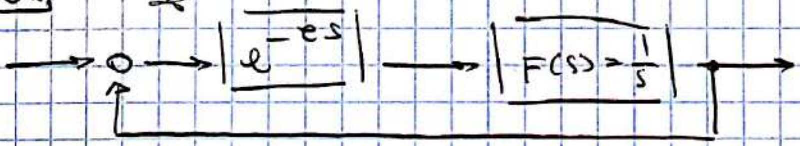




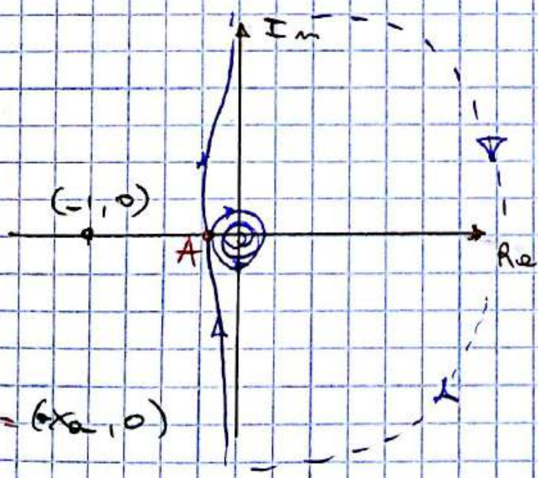


QUINDI IL SISTEMA È STABILE SE PERÒ INTRODUCIAMO UN RITARDO PUÒ DIVENTARE INSTABILE

Ex)



PER QUALI VALORI DI τ È INSTABILE?



$A = (x_a, 0)$

TROVO ω_π

$$\left.\angle e^{-\tau s}F(s)\right|_{s=j\omega_\pi} = -180^\circ$$

$$\angle e^{-\tau j\omega_\pi}\cdot\frac{1}{j\omega_\pi} = -180^\circ \iff -\tau\omega_\pi - 90^\circ = -180^\circ$$

$$\iff \omega_\pi = \frac{\pi}{2\tau}$$

TROVO x_a

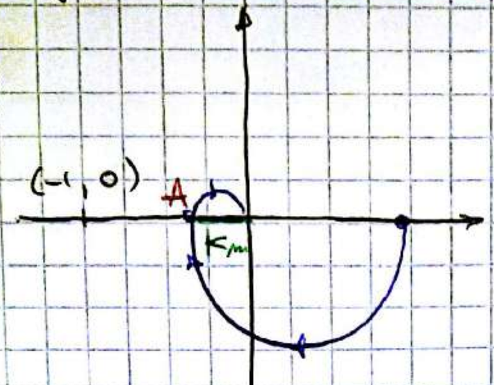
$$x_a = -\left|e^{-\tau j\omega_\pi}\cdot F(j\omega_\pi)\right| = -1\cdot\frac{1}{\omega_\pi} = -\frac{2\tau}{\pi}$$

QUINDI SE $-1 < -\frac{2\tau}{\pi} \iff \tau < \frac{\pi}{2}$ IL SISTEMA È STABILE ASINTOTICAMENTE

Def: MARGINE DI GUADAGNO K_m

K_m è in dB

$$K_m = \frac{1}{\overline{A0}} = \frac{1}{x_a}$$

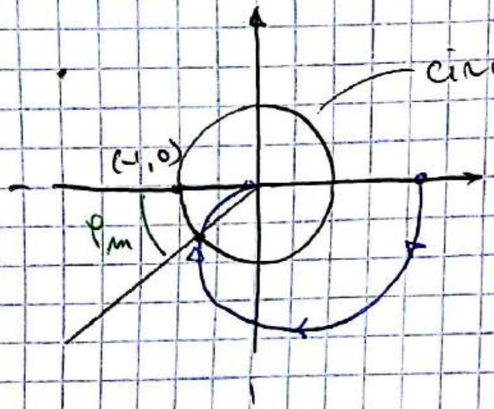


$A = (x_a, 0)$

Oss

Con un margine di guadagno alto ne deriva: il sistema più robusto rispetto a incertezze sul guadagno.
Ci vuole un guadagno molto alto per rendere il sistema instabile

Def: MARGINE DI FASE φ_m



$\omega_t : |F(j\omega_t)| = 1$

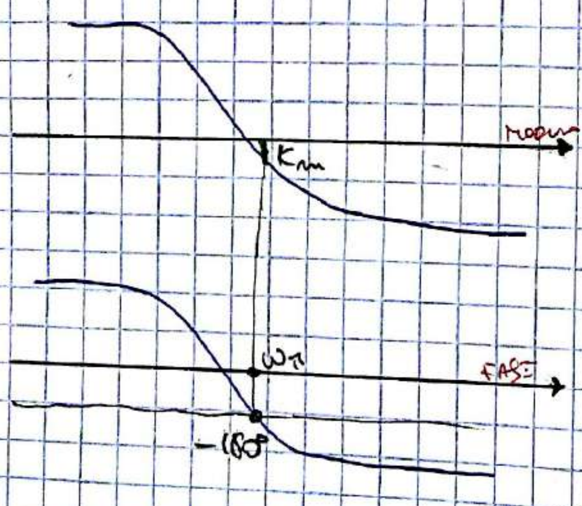
$$\varphi_m = 180^\circ + F(j\omega_t)$$

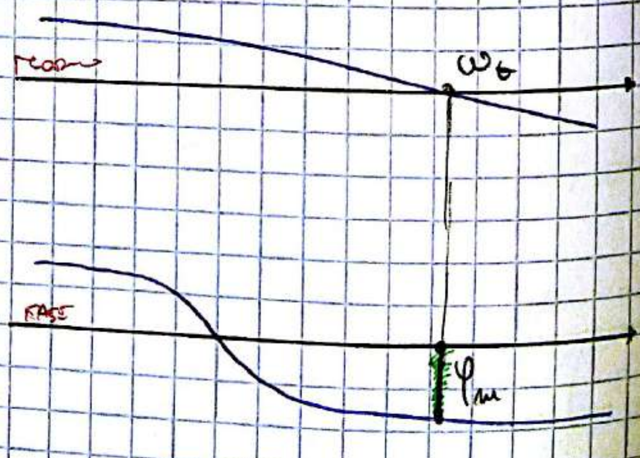
Oss

Con un margine di fase grande il sistema è più robusto rispetto a perturbazioni della fase

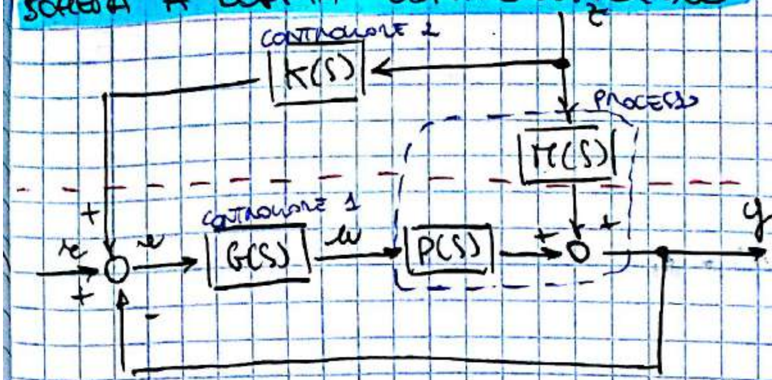
Oss

I valori di K_m e φ_m si possono ottenere anche per via grafica dai diagrammi di Bode





SCHEMA A DOPPIA CONTROREAZIONE



OSS.

SE NEL COMPITO È SCRITTO 'IL DISTURBO z È MISURABILE' BISOGNA USARE QUESTO SCHEMA. ALTRIMENTI NO

SAPPIAMO CHE:

$$\frac{y}{r} = W = \frac{GP}{1+GP} \quad \text{e CHE} \quad \frac{y}{z} = W_z = \frac{M+GPK}{1+PG}$$

OSS.

IL PROBLEMA VA DIVISO IN DUE SOTTOPROBLEMI: UNO CHE RIGUARDA IL CONTROLLORE G(S) e UNO CHE RIGUARDA IL CONTROLLORE K(S).

IL PRIMO RIGUARDA LE SPECIFICHE IN CUI NON È PRESENTE IL DISTURBO

IL SECONDO IN CUI È PRESENTE IL DISTURBO

K(S) } SOLO SPECIFICHE DEL DISTURBO

G(S) } TUTTE LE ALTRE

OSS.

CON IL SECONDO CONTROLLORE SI RIESCE AD OTTENERE LA REIEZIONE (QUASI) (*) TOTALE DI TUTTI I DISTURBI. (NON AD EX SOLO QUELLI COSTANTI O DI TIPO $r = t$ ...)

SE PONGO INFATTI $W_z = 0$ (FDT DISTURBO - USCITA), PER OGNI z LA y SARÀ NULLA.

PER FARE CIÒ: $W_z = \dfrac{M+GPK}{1+PG} = 0 \iff K = -\dfrac{M}{GP}$

C'È PERÒ UN PROBLEMA (*):

POTREBBE VENIRE UNA K(S) IMPROPRIA (NON REALIZZABILE FISICAMENTE)

PER OVVIARE A QUESTO PROBLEMA VANNO AGGIUNTI DEI 'POLI LONTANI'

Def: **POLO LONTANO**

$$\frac{1}{1+TS} \quad \text{CON } T>0 \text{ SUFF. PICCOLO}, T \in \mathbb{R}$$

TEOREMA:

SE AGGIUNGO UN 'POLO LONTANO' ALLA K(S) PER RENDERLA PROPRIA, OTTENGO UN'INFLUENZA LIMITATA DEL DISTURBO SULL'USCITA. MINORE È T, MINORE È L'INFLUENZA CHE IL DISTURBO PRODUCE (MA PER T ECCESSIVAMENTE PICCOLO HO PROBLEMI DI REALIZZABILITÀ).

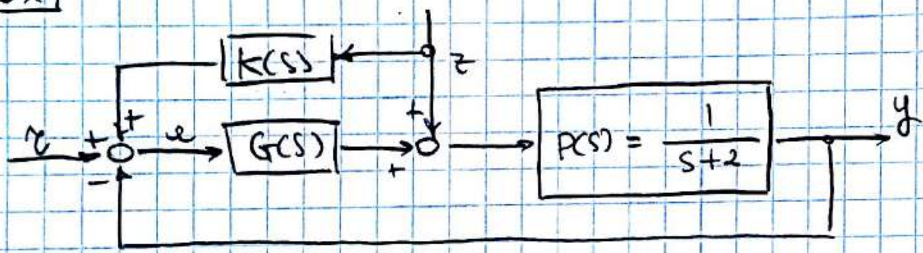
EX.

$$K(S) = -\frac{M}{GP} = \frac{S(S+2)}{S+1} \longrightarrow K(S) = \frac{S(S+2)}{(S+1)(1+0.01S)}$$

EX.

$$K(S) = -\frac{M}{GP} = \frac{(S+1)^2(S+2)}{S+3} \longrightarrow K(S) = \frac{(S+1)^2(S+2)}{(S+3)(1+0.01S)^3}$$

EX.



IL DISTURBO z È MISURABILE

2) LA RISPOSTA y CORRISPONDENTE AD UN QUALSIASI DISTURBO z SIA NULLA

// TUTTE LE ALTRE SPECIFICHE (2 ESCLUSA) SONO LE STESSE DELL'ULTIMO ESERCIZIO

TROVO $\frac{y}{z} = W_z$ (PONGO $r = 0$)

$$\begin{cases} y = P\cdot(z + Ge) \\ e = Kz - y \end{cases} \longrightarrow y = P(z + GKz - Gy) \longrightarrow y = \frac{P+PGK}{1+PG} z$$

OSS.

TUTTE LE SPECIFICHE AD ECCEZIONE DELLA 2 NON FANNO RIFERIMENTO AL DISTURBO. CALCOLO G(S) COSÌ COME È STATO FATTO NELL'ES. DELL'ALTRA VOLTA.

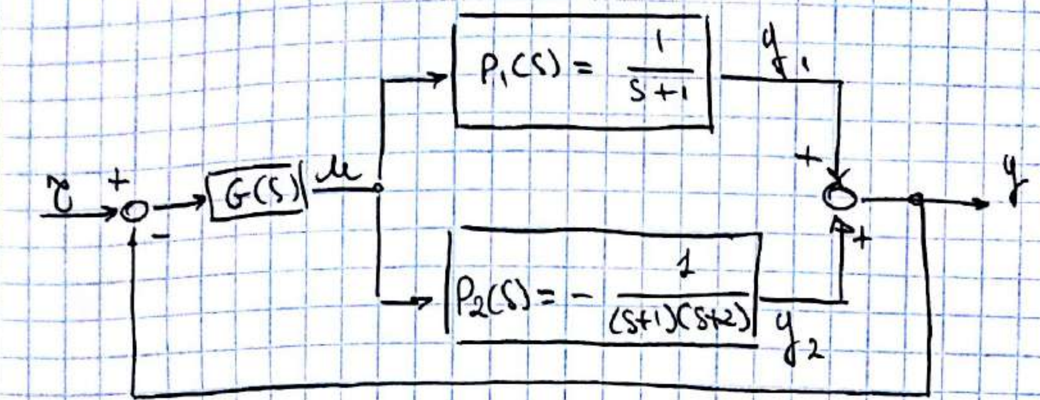
OTTENGO: $G(S) = 2 \cdot \frac{S^2+4}{S(S+1)}$

PER SODDISFARE LA SECONDA SPECIFICA PONGO $W_z = 0$

$$\longrightarrow P + PGK = 0 \longrightarrow K(S) = -\frac{1}{G} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{S(S+1)}{S^2+4}$$

NON DEVO METTERE POLI LONTANI

EX



SI DETERMINI UN CONTROLLORE $G(s)$ A DIMENSIONE MINIMA IN MODO TALE CHE:

1) IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINTOTIC. STABILE

2) IL SISTEMA COMPLESSIVO ABBIA 3 AUTOV. NASCOSTI

3) L'ERRORE A REG. PERM. CORRISPONDENTE AL RIFERIMENTO $r(t) = \sin(t)$ SIA NULLO

4) LA RISPOSTA y A REG. PERM. CORRISPONDENTE AL RIFERIMENTO $r(t) = 1$ SIA UGUALE A 0.5

TROVO $P(s)$:

$$\frac{y}{u} = P \qquad \begin{cases} y = y_1 + y_2 \\ y_1 = P_1 u \\ y_2 = P_2 u \end{cases} \longrightarrow y = (P_1 + P_2)u \implies P = P_1 + P_2$$

PARALLELO: SOMMA DELLE FDT

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{\cancel{s+1}}{\cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

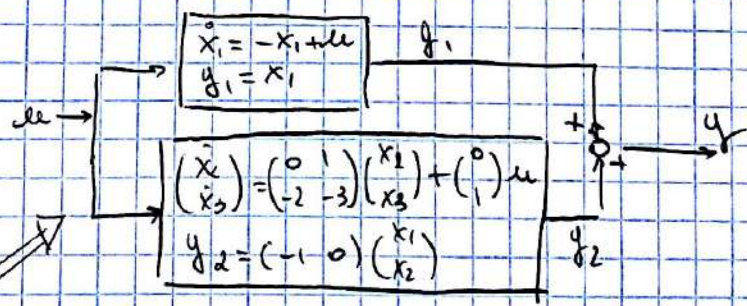
UN AUTOVALORE È DIVENTATO NASCOSTO

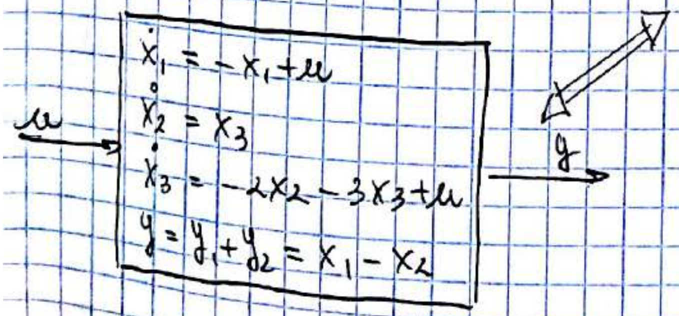
C'È STATA UNA PERDITA DI RAGGIUNGIBILITÀ O OSSERVABILITÀ?

RITORNIAMO NEL DOMINIO DEL TEMPO:

$A_1 = -1 \quad B_1 = 1 \quad C_1 = 1$

$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$





$$A_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad B_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -2$

$$\text{ran}\begin{pmatrix} B_P & A_P B_P & A_P^2 B_P \end{pmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2 \quad \# \text{ AUTOV. RAGG.}$$

$$\text{ran}\begin{pmatrix} C_P \\ C_P A_P \\ C_P A_P^2 \end{pmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad \# \text{ AUTOV. OSS.}$$

ADESSO, VISTO CHE SAPPIAMO CHE $\lambda_3 = -2$ È RAGG. e OSS,

POSSIAMO DEDURRE CHE $\begin{cases} \lambda_1 = -1 & \text{RAGG e } \neg\text{OSS} \\ \lambda_2 = -1 & \neg\text{RAGG. e OSS} \end{cases}$

QUINDI ABBIAMO ~~GIÀ~~ DUE AUTOVALORI NASCOSTI SOLO PER IL PARALLELO, DOBBIAMO FARNE UN TERZO.

POICHÉ IL POLO DI P(S) È A PARTE REALE < 0, POSSIAMO RENDERLO NASCOSTO CON G(S)

$$G(s) = \frac{(s+2)\ldots}{\ldots}$$

~~OSS~~ CANCELLAZIONE ZERO-POLO, $\lambda = -2$ PERDE DI RAGGIUNGIBILITÀ

PASSIAMO A TRATTARE LA ~~TENSIONE SPECIFICA~~:

$W_e = \frac{e}{r} = \frac{D_F}{N_F + D_F}$ OVE $F = GP$

QUINDI $\tilde{e}(t) = |W_e(j1)| \sin(t + \angle W_e(j1)) = 0$

$$|W_e(j1)| = 0 \iff \left|\frac{D_F(j1)}{N_F(j1) + D_F(j1)}\right| = 0 \iff |D_F(j1)| = 0$$

$$\iff |D_G(j1) D_P(j1)| = 0 \iff |D_G(j1)| \cdot |D_P(j1)| = 0$$

POICHÉ $|D_P(j1)| \neq 0 \longrightarrow$ DEVO IMPORRE $|D_G(j1)| = 0$

QUINDI G(S) DEVE AVERE UN POLO ~~[illegible]~~ IN j. PER PROBLEMI DI REALIZZABILITÀ NE DEVE AVERE UN ALTRO IN $-j$.

QUINDI:

$$G(s) = \frac{(s+2)\ldots}{(s^2+1)\ldots}$$

PASSIAMO A TRATTARE LA ~~SECONDA SPECIFICA~~

$$W = \frac{y}{r} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$$ DEVO IMPORRE $W(0) = 0{,}5$ (QUANDO LE TABELLE DI USCITE A INGRESSI CANONICI)

È ARRIVATO IL MOMENTO DI IPOTIZZARE LA STRUTTURA DI $G(s)$.

TENENDO CONTO CHE DEVE ESSERE A DIMENSIONE MINIMA DEVO PARTIRE DA UNA STRUTTURA A DIM 2 (DIMENSIONE ATTUALE DI $G(1)$)

IPOTIZZO LA SEGUENTE STRUTTURA:

$$G(s) = \frac{(s+2)(as+b)}{(s^2+1)} \rightarrow F = GP = \frac{as+b}{s^2+1}$$

$$W(0) = \frac{N_F(0)}{N_F(0)+D_F(0)} = \frac{b}{b+1} = 0{,}5 \Longleftrightarrow b = 1$$

~~PRIMA SPECIFICA~~ ~~(STABILITÀ)~~

DENOMINATORE DI $W(s)$

DEVO IMPORRE CHE $D_W = N_F + D_F$ ABBIA TUTTI GLI ZERI < 0

$$D_W = as + 1 + s^2 + 1 = s^2 + as + 2$$

PER IL CRITERIO DI ROUTH, BASTA CHE $a > 0$

PER POLINOMI DI GRADO 2 LA C.N. È ANCHE S.

ALTRA DOMANDA:

QUAL È IL POLINOMIO CARATTERISTICO DEL SISTEMA COMPLESSIVO?

$$P(\lambda) = \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + 1)}_{\text{RAGG. E OSS}}\underbrace{(\lambda+1)}_{\text{RAG. E TOSS}}\underbrace{(\lambda+1)}_{\text{TRAG. E OSS}}\underbrace{(\lambda+2)}_{\text{TRAG. E OSS}} \qquad a > 0$$

QUINDI: $G(s) = \dfrac{(s+2)(as+1)}{(s^2+1)}$ CON $a > 0$

EX VARIANTE DELL'EX PRECEDENTE

LA SPECIFICA 1) DIVERSA:

1) IL POLINOMIO CARATTERISTICO DEL SISTEMA COMPLESSIVO DIA $(\lambda+1)^2(\lambda+2)^N$
$N \in \mathbb{N}$

OSS

SE LA SPECIFICA NON IMPONEVA $(\lambda+1)^2 \cdots$ MA AD EX $(\lambda+1)(\lambda+2)^N$ IL PROBLEMA NON AVREBBE AVUTO SOLUZIONE. GLI AUTOVALORI NASCOSTI IN -1 NON LI POSSO CONTROLLARE!

LA PRIMA PARTE È IDENTICA:

OTTENGO $G(S) = \dfrac{(S+2)\cdots}{(S^2+1)}$

ORA DEVO SCEGLIERE LA STRUTTURA DI $G(S)$.

$G(S) = \dfrac{(S+2)(aS+b)}{(S^2+1)}$ NON VA BENE! PERCHÉ SAREBBE VERO CHE $(N° \text{ PARAMETRI}) = 2 = dF = 2$ E QUINDI POSSO APPLICARE IL METODO DI ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI MA HO BISOGNO DI UN ALTRO GRADO DI LIBERTÀ PER SODDISFARE LA QUARTA SPECIFICA (QUINDI AVERE $(N° \text{ PAR.}) = (dF+1)$)

a e b

GRADO DEL DEN. di F

NEANCHE $G(S) = \dfrac{(S+2)(aS+b)}{(S^2+1)(S+c)}$ VA BENE, PERCHÉ AVREI $(N° \text{ PARAMETRI}) = 3 = dF = 3$

QUINDI DEVO SCEGLIERE:

$$G(S) = \frac{(S+2)(aS+b)}{(S^2+1)(S^2+cS+d)}$$

QUARTA SPECIFICA:

$$W(0) = \frac{N_F(0)}{D_F(0)+N_F(0)} = \frac{c}{c+d} = 0{,}5 \longrightarrow c = 0{,}5c + 0{,}5d \rightarrow c = d$$

PRIMA SPECIFICA:

$$D_W = N_F + D_F = aS^2 + bS + c + (S^2+1)(S+d) = (S+2)^3$$

$$\Updownarrow$$

$$S^3 + S^2(a+d) + S(b+1) + c + d = S^3 + 6S^2 + 12S + 8$$

$$\begin{cases} a+d=6 \\ b+1=12 \\ c+d=8 \\ c=d \end{cases}$$

DERIVANTE DALLA QUARTA SPECIFICA

ALLA FINE:

$\underline{a=2}$, $\underline{b=11}$, $\underline{c=d=4}$

QUINDI:

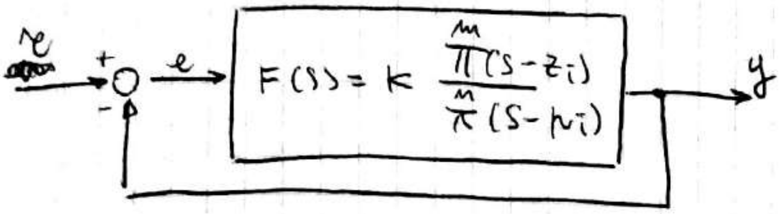
$$G(S) = \frac{(S+2)(2S+11)}{(S^2+1)(S^2+4S+4)}$$

E IL POLINOMIO CARATTERISTICO:

$$P(S) = \underbrace{(S+i)}_{\text{RAD. e ZOSS}}\underbrace{(S+i)}_{\text{RADICI e OSS}}\underbrace{(S+2)}_{\text{RADICI e OSS}}\underbrace{(S+2)^3}_{\text{RADICI e OSS.}}$$

QUINDI È VENUTO $N=4$

LUOGO DELLE RADICI :



EX.

$F(s) = k \frac{(s+1)(s-1)}{s^2(s+3)}$ $\quad m=2 \quad z_1=-1 \quad z_2=1$

$\quad n=3 \quad p_1=p_2=0 \quad p_3=-3$

$$W(s) = \frac{N_F}{N_F+D_F} \longrightarrow D_W = N_F+D_F = \underbrace{k \prod_{i=1}^{m} (s-z_i)}_{N_F} + \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (s-p_i)}_{D_F}$$

IL LUOGO DELLE RADICI DESCRIVE COME CAMMINANO SUL PIANO COMPLESSO LE n RADICI DI D_W AL VARIARE DI K

OSS.

D_W È DI GRADO n, INFATTI PER LE FDT $n \geq m$

EX.

$F(s) = k \frac{1}{s(s+2)}$ $\quad m=0 \quad n=2 \quad p_1=0, \; p_2=-2$

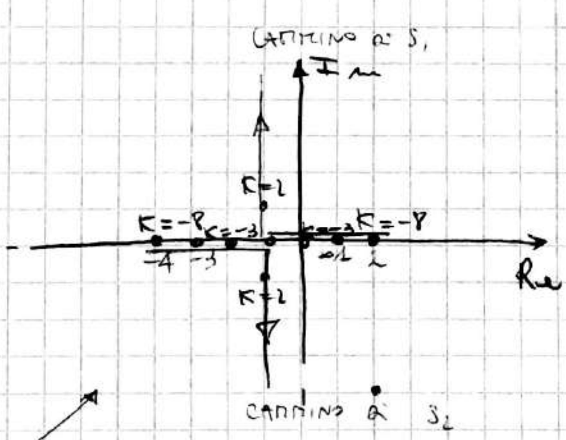
$D_W = N_F+D_F = k + s(s+2) = s^2+2s+k = 0$

$s_1 = -1+\sqrt{1-k}$

$s_2 = -1-\sqrt{1-k}$

k	s_1	s_2
-8	2	-4
-3	1	-3
0	0	-2
1	-1	-1
2	$-1+j$	$-1-j$
5	$-1+2j$	$-1-2j$

LÌ GRAFICO



(*)
CAMMINO DELLA RADICE : SI METTE UN VERSO (QUELLO DELLE K CRESCENTI)

OSS.

ORA DAL LUOGO DELLE RADICI DISEGNATO POSSO VEDERE PER QUALI VALORI DI K IL SISTEMA È STABILE E PER QUALI NON LO È

IL SISTEMA È STABILE ASINTOTICAMENTE SE $K>0$

OSS.

CI SONO DELLE REGOLE PER TRACCIARE IL LUOGO DELLE RADICI

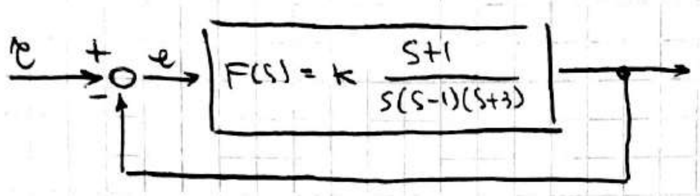
Def: LUOGO POSITIVO ——— lo indico con

PARTE DEL GRAFICO CHE CORRISPONDE A VALORI POSITIVI DI K   PARTENZA O ARRIVO +∞

Def: LUOGO NEGATIVO ——— LO INDICO CON

PARTE DEL GRAFICO CHE CORRISPONDE A VALORI NEGATIVI DI K   PARTENZA → ARRIVO 0

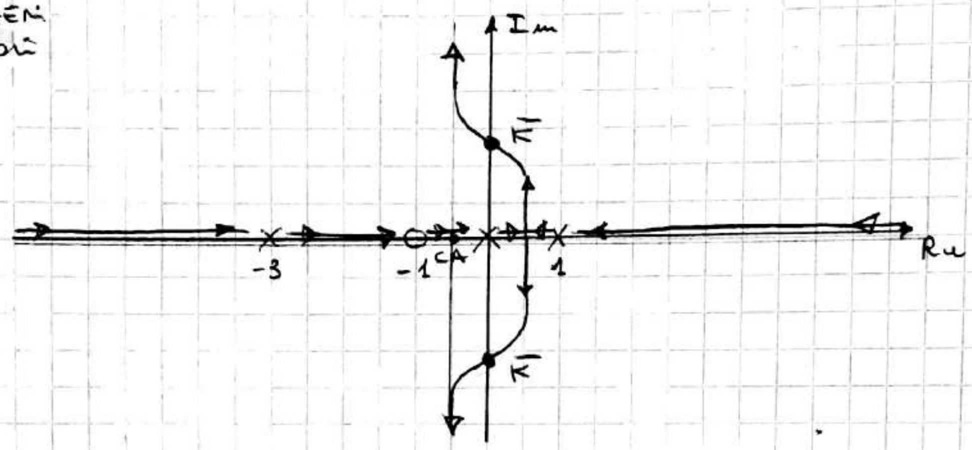
EX



$m = 1 \quad z_1 = 1$

$n = 3 \quad p_1 = 0,\ p_2 = 1,\ p_3 = -3$

O: ZERI
x: POLI



- OGNI VOLTA CHE INCONTRO UNO ZERO O UN POLO IL LUOGO PASSA DA NEGATIVO A POSITIVO E VICEVERSA
- PARTO DA +∞ (NEGATIVO) E VADO FINO A −∞ SULL'ASSE X
- TUTTO L'ASSE X FA PARTE DEL LUOGO DELLE RADICI

	$n-m=1$	$n-m=2$	$n-m=3$
LUOGO POSITIVO		C.A.	
LUOGO NEGATIVO		C.A.	

- DISEGNO GLI ASINTOTI SEGUENDO LA TABELLA

$$C.A. = \text{CENTRO ASINTOTI} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

NELL'ESEMPIO: $n-m=2$ e $C.A. = -\frac{1}{2}$

OSS

IL DENOMINATORE DI F(S) HA GRADO 3 ⇒ CI DOVREMMO ASPETTARE 3 CAMMINI (IN REALTÀ 3 SEMICAMMINI NEGATIVI E 3 SEMICAMMINI POSITIVI)

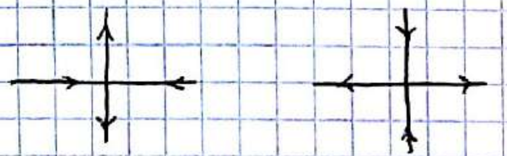
- GLI n SEMICAMMINI (POSITIVI) PARTONO DA OGNUNO DEGLI n POLI (OSS: METTO LA 'FRECCETTA' VERSO LA PARTE POSITIVA DEL CAMMINO GIÀ TRACCIATO)

- I SEMICAMMINI POSITIVI ARRIVANO O IN UN POLO O IN UN ASINTOTO (1 SOLO SEMICAMMINO PER POLO e 1 SOLO SEMICAMMINO PER ASINTOTO)
  (METTO LA 'FRECCETTA' ENTRANTE NELLO ZERO O IN ALTO O IN BASSO SULL'ASINTOTO)

OSS UN ASINTOTO HA DUE ARRIVI (I SUOI DUE CAPI)

OSS SE ABBIAMO DUE 'FRECCETTE' CHE SI SCONTRANO O DIVERGONO, ABBIAMO UN PUNTO SINGOLARE

- SE CI SONO SCONTRI O DIVERGENZE ACCADE QUESTO:



- COMPLETO A INTUITO IL DIAGRAMMA DEI SEMICAMMINI POSITIVI

- GLI m SEMICAMMINI (NEGATIVI) PARTONO O DAGLI ZERI O DAGLI ASINTOTI (UNO PER OGNI ZERO O ASINTOTO)
- GLI n SEMICAMMINI NEGATIVI ARRIVANO AD OGNUNO DEGLI n POLI
- IL GRAFICO È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE REALE e SONO SIMMETRICI ANCHE I VALORI DI K

OSSERVIAMO IL GRAFICO → I SEMICAMMINI NEGATIVI SONO DUE A SX DELL'ASSE Y e UNO A DX; I PRIMI VANNO BENE, IL TERZO NO. I SEMICAMMINI POSITIVI VANNO BENE PER $K > \bar{K}$ OVE $\bar{K}$ È IL VALORE DI K PER IL QUALE IL LUOGO DELLE RADICI INCONTRA L'ASSE DEGLI IMMAGINARI.

NELL'ESEMPIO K NEGATIVO NON ANDRÀ MAI BENE! UNO ZERO RIMANE SEMPRE A DX DELL'ASSE PER $K \in (-\infty, 0)$

COME TROVIAMO $\bar{k}$?

SAPPIAMO CHE $D_W = N_F + D_F = k(s+1) + s(s-1)(s+3) =$

$$= s^3 + 2s^2 + s(k-3) + k = 0$$

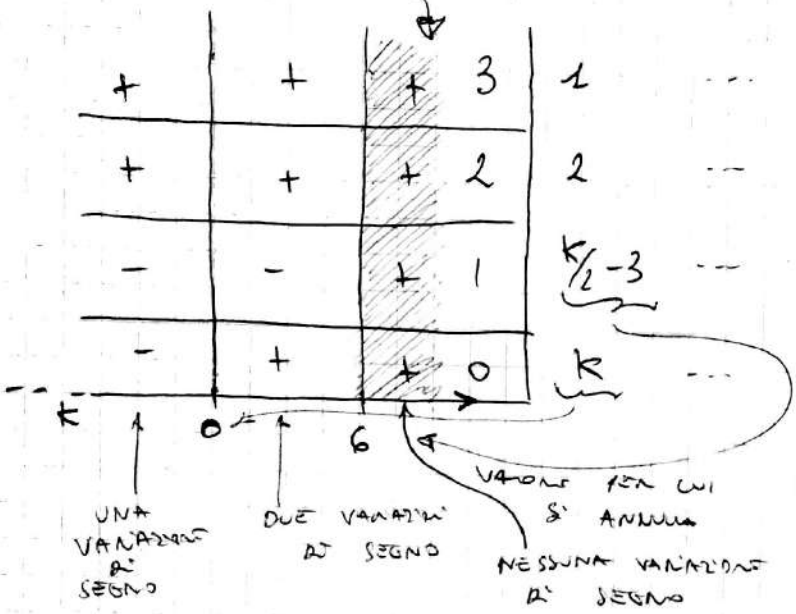
USO IL CRITERIO DI ROUTH

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k-3 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & \frac{k}{2}-3 & \\ 0 & k & \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{k}{2} - 3 > 0 \\ k > 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{k > 6}$$

QUINDI SO CHE TUTTE LE SOLUZIONI HANNO PARTE REALE < 0 SE $k > 6$

$\bar{k} = 6$ È, QUINDI, IL VALORE LIMITE



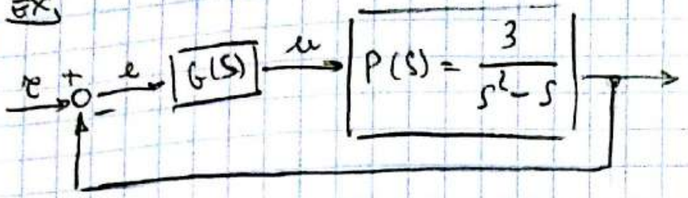
QUINDI:

PER $k \in (-\infty, 0)$ HO 1 RADICE A PARTE REALE > 0

PER $k \in (0, 6)$ HO 2 RADICI A PARTE REALE > 0

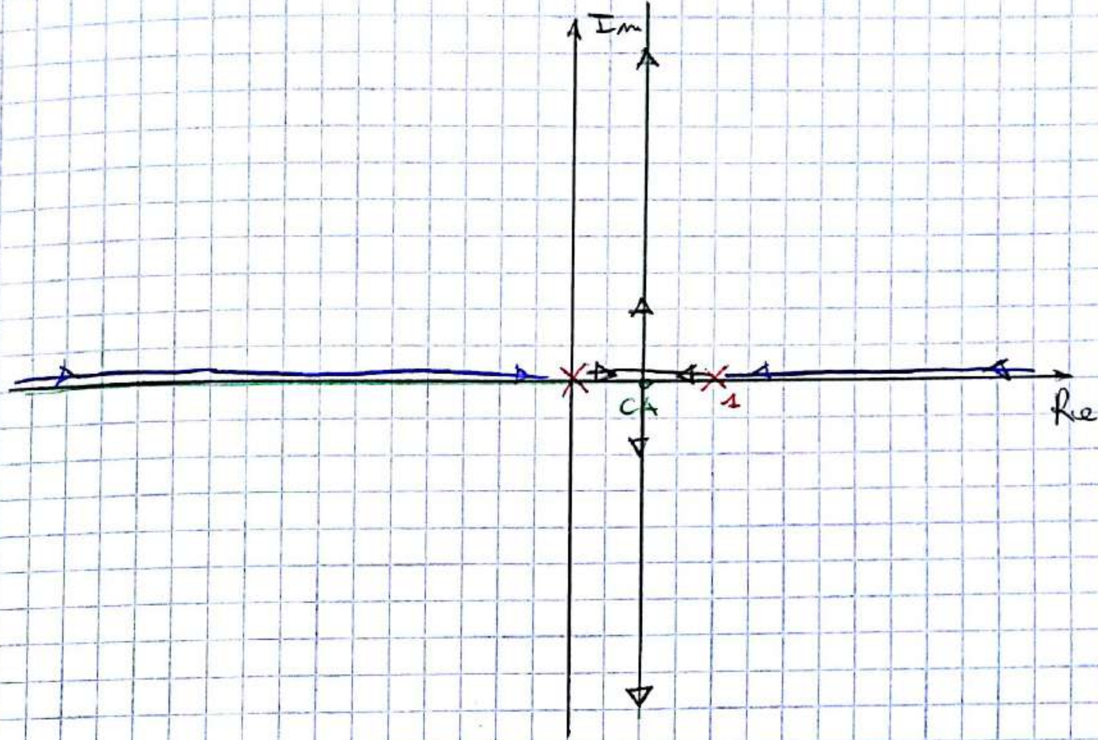
PER $k \in (6, +\infty)$ HO 0 RADICI A PARTE REALE > 0

EX.



TROVARE G(S) IN MODO DA RENDERE STABILE IL SISTEMA COMPLESSIVO

$G(s) = \frac{k}{3} \Longrightarrow F = G \cdot P = k \cdot \frac{1}{s(s-1)}$ $\quad m = 0$ $\quad n = 2 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = 1$



$n - m = 2 - 0 = 2$

$CA = \frac{\sum p - \sum z}{n - m} = \frac{1}{2}$

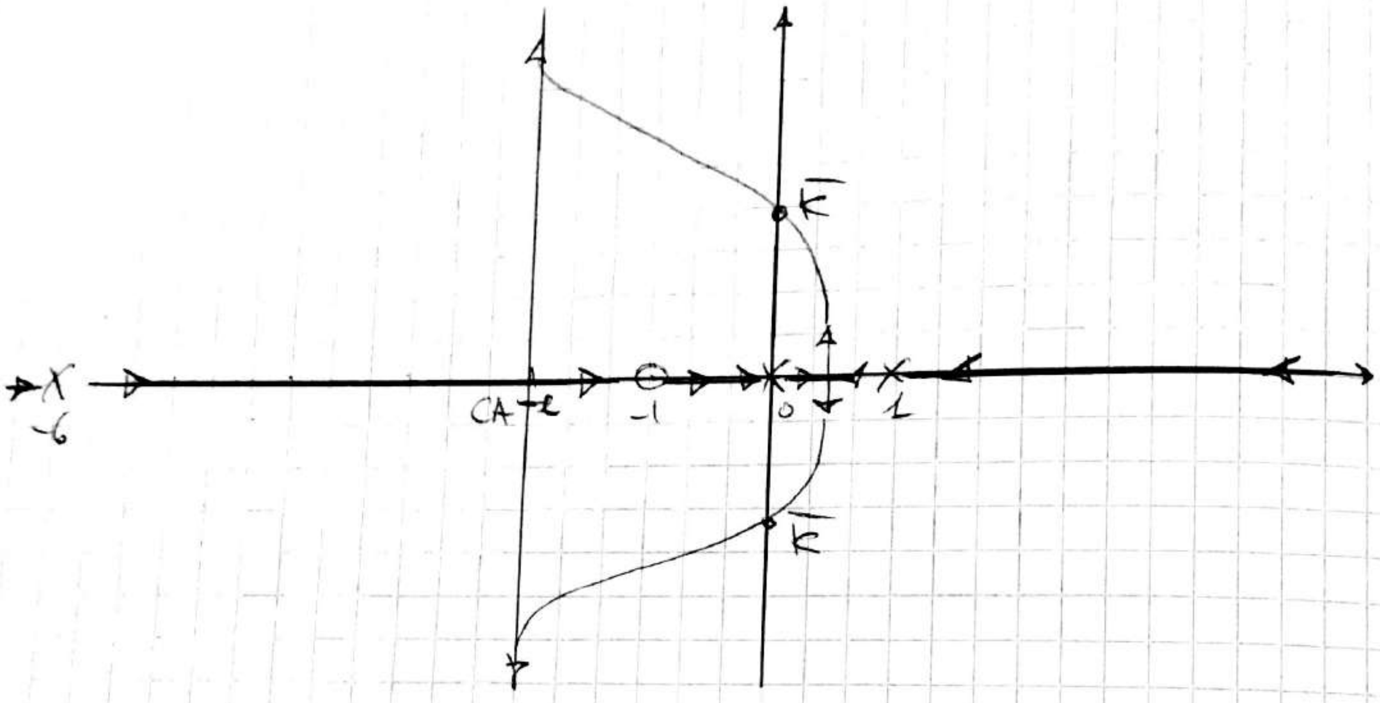
IL SISTEMA NON È STABILE PER NESSUN VALORE DI K!

DEVO AGGIUNGERE DEI POLI O/E DEGLI ZERI A G(S)

DAL MOMENTO CHE $CA = \frac{\sum p - \sum z}{n - m}$ SE INTRODUCO DEGLI ZERI IN MODO DA RENDERE $CA < 0 \longrightarrow$ L'ASINTOTO SI SPOSTA A SINISTRA ED ESISTERÀ UN $\bar{K}$ PER CUI PER $K > \bar{K}$ IL SISTEMA È STABILE

SCELGO 1 ZERO $\quad G(s) = \frac{K}{3} \cdot \frac{s+1}{s+6}$

RIFACCIO IL LUOGO


-6
CA
-2
-1
0
1
K̄
K̄

PARTENZA

DISEGNARE IL LUOGO DELLE RADICI RELATIVO A F(S)

È POSSIBILE RENDERE IL SISTEMA ASINT. STABILE SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE K?

SÌ → $G(S)=C$ (A)

NO → IN P(S) CI SONO ZERI A DESTRA?

SÌ → PROCEDERE PER TENTATIVI O RICORRERE ALL'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI (E)

NO → $n-m=2$ / $n-m=3$

$n-m=2$ → (B)

$n-m=3$ → IL C.A. È A SX?

SÌ → (C)

NO → (D)

(B) AGGIUNGERE UNO ZERO E UN POLO TALI CHE SIANO A SINISTRA E FACCIANO SPOSTARE A SX IL C.A.

$$G(S) = C\,\frac{S-z}{S-p} \qquad p<z<0$$

(C)
1) AGGIUNGERE UNO ZERO A SX TALE DA FAR RIMANERE A SX IL C.A.
2) AGGIUNGERE UN POLO LONTANO

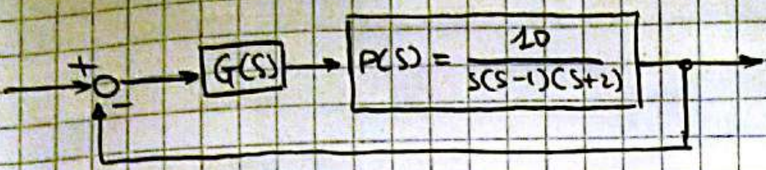
$$G(S) = \frac{S-z}{1+TS}\cdot C \qquad -\frac{1}{T} \ll z < 0$$

(D)
1) AGGIUNGERE DUE ZERI E UN POLO TUTTI A SX TALI DA FAR SPOSTARE A SX IL C.A.
2) AGGIUNGERE UN POLO LONTANO

$$G(S) = C\cdot\frac{(S-z_1)(S-z_2)}{(S-p)(1+TS)} \qquad -\frac{1}{T} \ll p < z_1, z_2 < 0$$

OSS. PER $n-m \geq 3$ → SEMPRE PROCEDIMENTO (D)

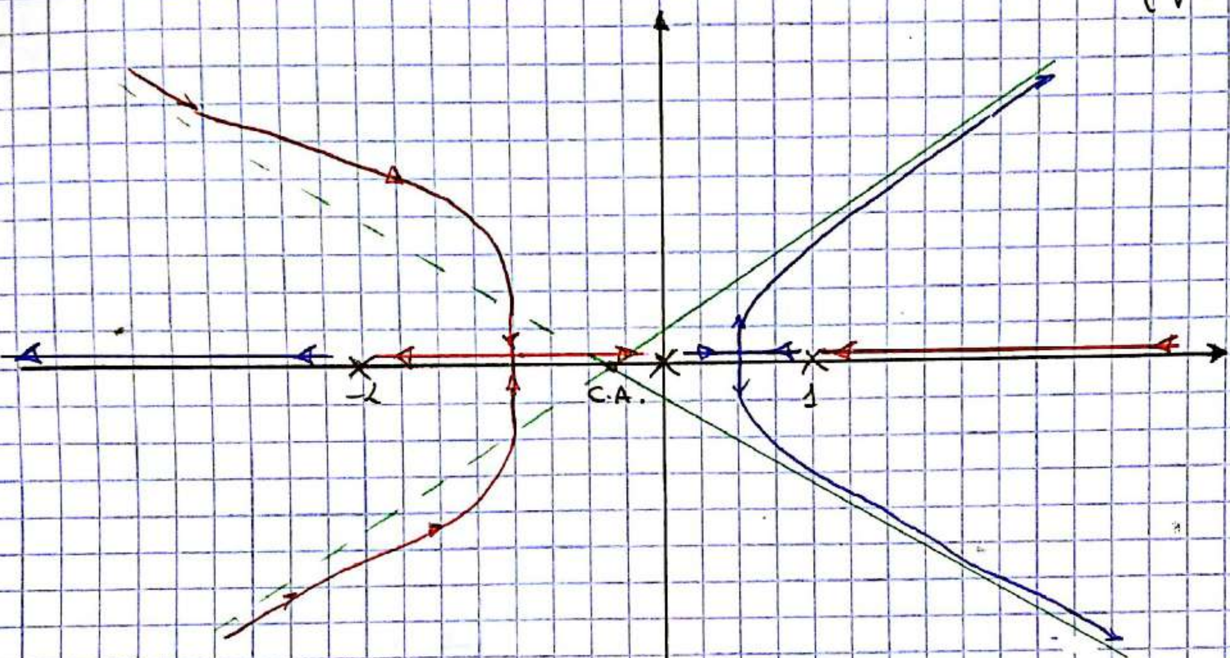
ES)



$G(s) = \frac{k}{10} \Longrightarrow F(s) = G(s)\cdot P(s) = k\,\frac{1}{s(s-1)(s+2)}$

$m = 0$

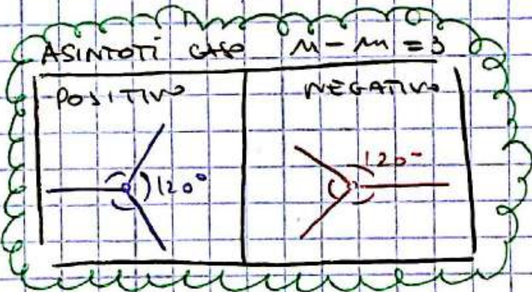
$n = 3 \quad \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 1 \\ p_3 = -2 \end{cases}$



— LUOGO POSITIVO — ASINTOTO POS.

— LUOGO NEGATIVO - - - ASINTOTO NEG.

$C.A. = \frac{\sum p_n - \sum z_m}{n - m} = \frac{0 + 1 - 2}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$



SIA IL LUOGO POSITIVO SIA QUELLO NEGATIVO HA ALMENO UNA RADICE A PARTE REALE >0 $\forall K$ $\Longrightarrow$ NON POSSO STABILIZZARE IL SISTEMA SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE K.

NON CI SONO ZERI A DX e $n - m = 3$ e IL C.A. È A SX $\longrightarrow$ SIAMO NEL CASO (C) DEL DIAGRAMMA

OSS.
AGGIUNGO UNO ZERO A SX IN MODO DA "ADDRIZZARE" L'ASINTOTO FACENDO SÌ CHE IL LUOGO POSITIVO SI SPOSTI A SX PER DETERMINATI VALORI DI K

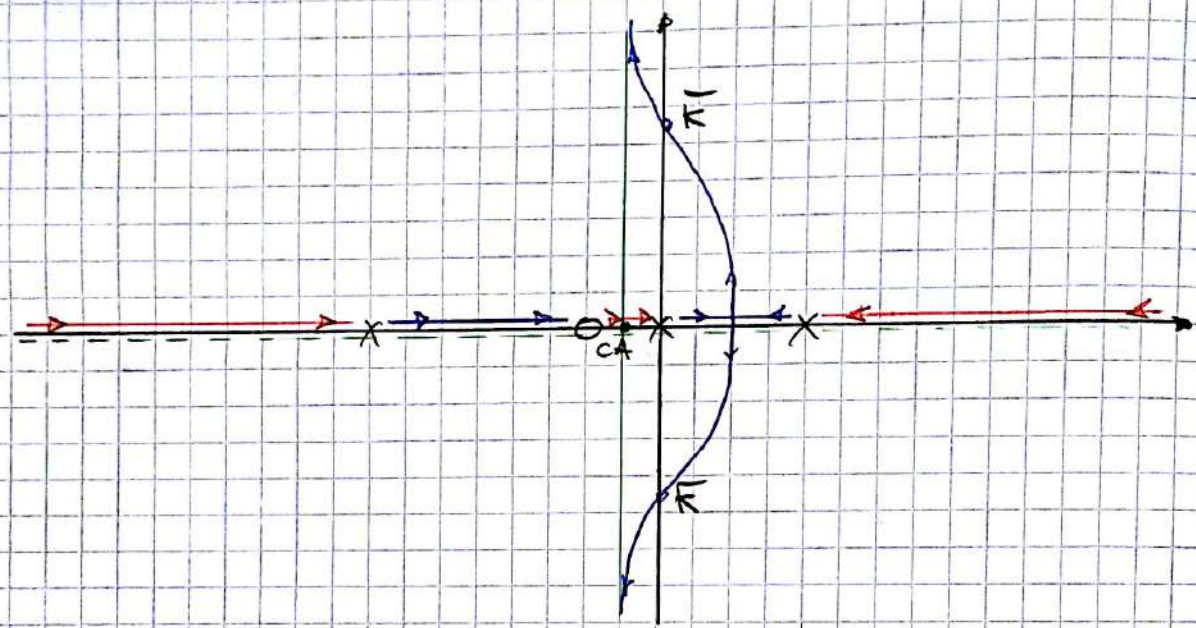
OSS.
PERCHÉ VOGLIO LO ZERO A SX? PERCHÉ ALTRIMENTI SI CREA UN ASINTOTO A DX!

SCEGLIENDO $G(s) = \frac{K}{10}(s - z)$

$$\begin{cases} C.A._{NEW} = \dfrac{(0+1-2) - z}{3-1} \underbrace{< 0}_{\text{VOGLIO CHE C.A. RIMANGA A SX}} \\ \underbrace{z < 0}_{\text{VOGLIO LO ZERO A SX}} \end{cases}$$

→ SCELGO $z = -\frac{1}{2} \Longrightarrow C.A._{NEW} = -\frac{1}{4}$

OSS. ORA $n - m = 2$!



ORA IL LUOGO POSITIVO VA BENE PER $K > \bar{K}$!

OSS.

SE AVESSI MESSO LO ZERO A DX, AVREI AVUTO UNO ZERO TUTTO A DX ~~PARTE~~ DEL SEMIPIANO POSITIVO!

FACENDO I CALCOLI CON ROUTH VIENE $\bar{K} = 4$

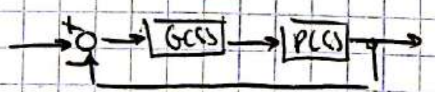
QUINDI IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE PER $K > 4$

C'È ANCORA UN PROBLEMA: $G(s)$ È IMPROPRIA → AGGIUNGO UN POLO

QUINDI: $G(s) = \frac{K}{10} \frac{s + \frac{1}{2}}{Ts + 1}$ CON $K > 4$ e $-\frac{1}{T} << -\frac{1}{2} < 0$

HO APPLICATO IL SEGUENTE TEOREMA

SE IL SISTEMA



È AS. STABILE

ALLORA $\exists \bar{T} > 0$ t.c. $\forall T \in (0, \bar{T})$ ANCHE IL SISTEMA

È ASINT. STABILE

Scanned by CamScanner

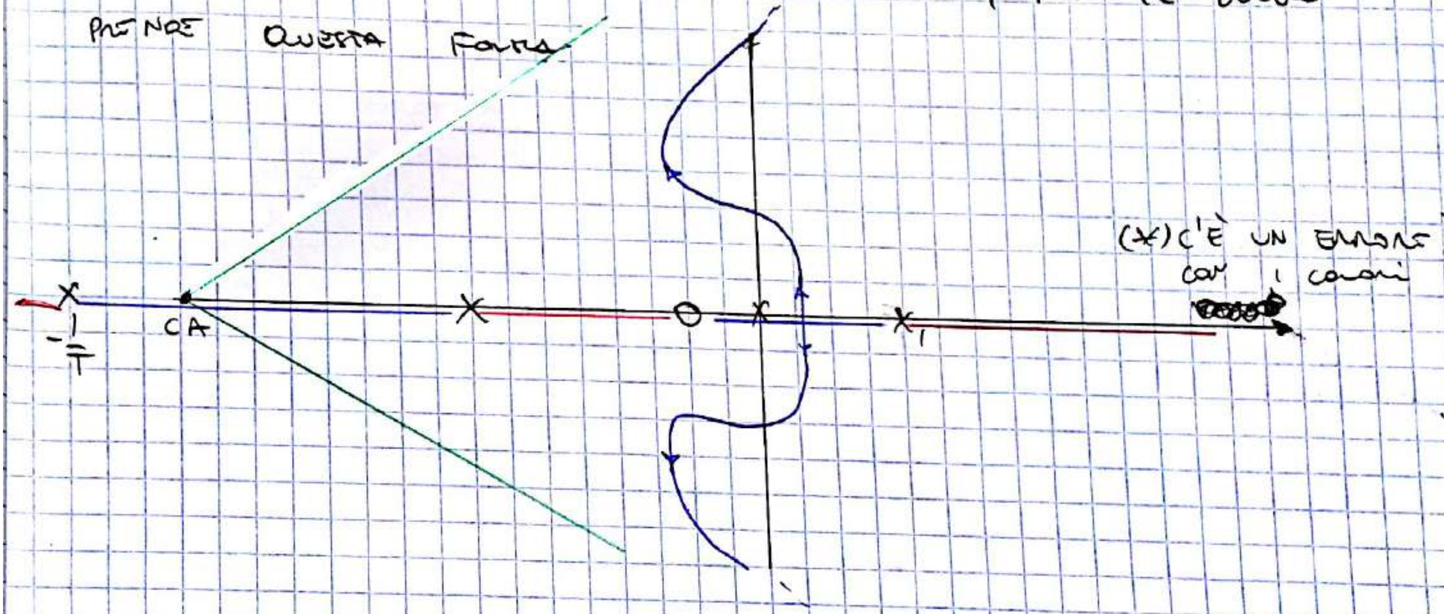
OSS) COME CALCOLO T?

PER TROVARE UN VALORE DI T, SCELGO UN VALORE DI K (ES K = 10) E APPLICO IL CRITERIO DI ROUTH AL DENOMINATORE DEL SISTEMA COMPLESSIVO MANTENENDO T COME INCOGNITA

PER K = 10 SI OTTIENE $0 < T < 0{,}036$ PER I QUALI IL SISTEMA COMPLESSIVO RIMANE STABILE

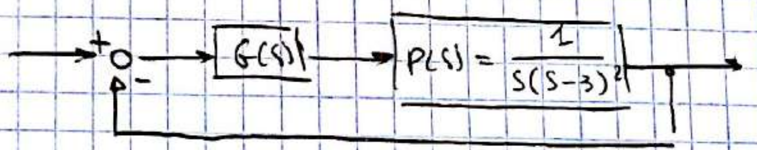
OSS MA AGGIUNGENDO UN POLO, $n - m = 3$ DI NUOVO. NON SI CREA LO STESSO PROBLEMA DI INIZIO?

GLI ASINTOTI RITORNANO AD ESSERE OBLIQUI, MA IL LUOGO PRENDE QUESTA FORMA

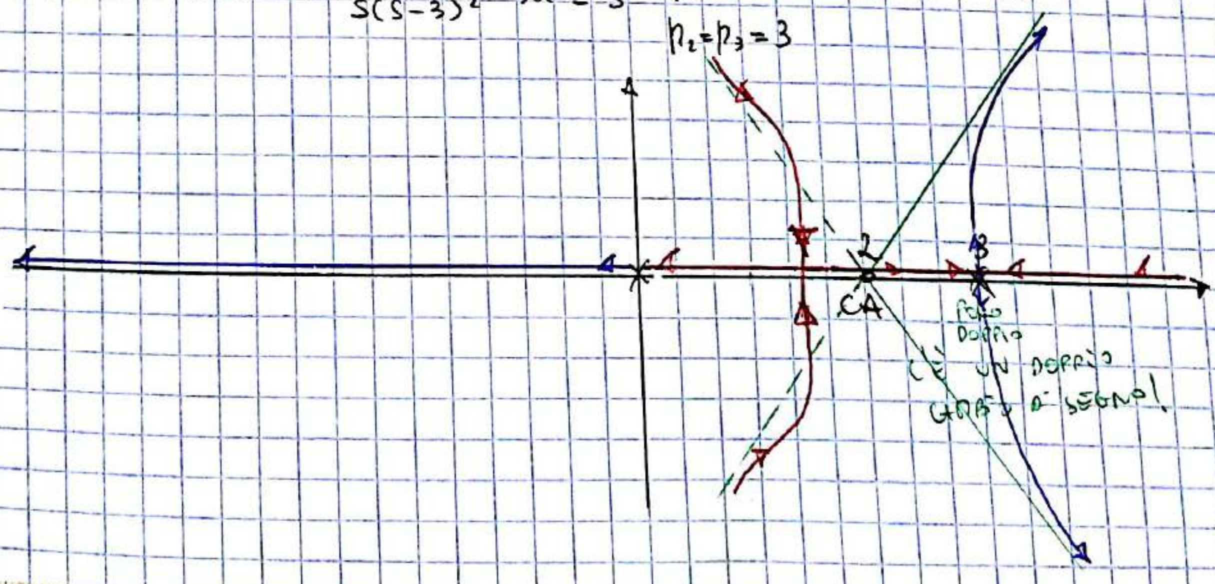


(*) C'È UN ERRORE CON I COLORI

EX)



$G(s) = K \rightarrow F(s) = K \frac{1}{s(s-3)^2}$ $\quad m = 0$, $n = 3$ $\quad p_1 = 0$, $p_2 = p_3 = 3$ $\quad n - m = 3$



ORA ESISTE UN $\bar{K}$ t.c. PER $K > \bar{K} > 0$ IL SISTEMA È ASINT. STABILE.

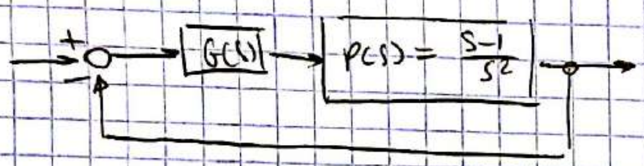
SE CALCOLO $\bar{K}$ CON ROUTH VIENE $\bar{K} = 150,1$

MA ABBIAMO ANCORA UN PROBLEMA! $G(s)$ È IMPROPRIA $\rightarrow$ DEVO AGGIUNGERE UN POLO LONTANO

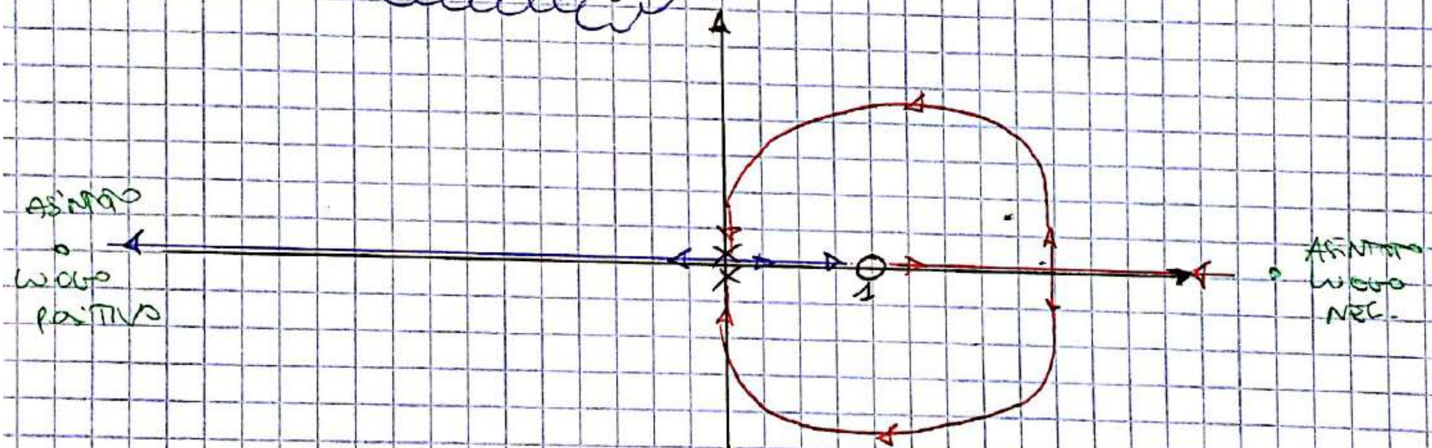
OTTENGO così $G(s) = K \frac{(s+1)^2}{(s+10)(1+Ts)}$ CON $K > 150,1$ e $T > 0$ SUFF. PICCOLO

COME AL SOLITO SI PUÒ RICAVARE T APPLICANDO ROUTH A D_W USANDO T COME INCOGNITA.

EX)



$G(s) = K \rightarrow F = GP = K\frac{s-1}{s^2}$ $\quad n = m = 1$



NON ESISTONO VALORI DI K PER CUI IL SISTEMA È STABILE

SIAMO NEL CASO E

PROCEDO CON L'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI.

CON $G(s) = \frac{as+b}{s+c} \rightarrow F(s) = \frac{as+b}{s+c} \cdot \frac{s-1}{s^2}$ ABBIAMO CHE $\underline{N° \text{ PARAM.} = d_F}$ OK!

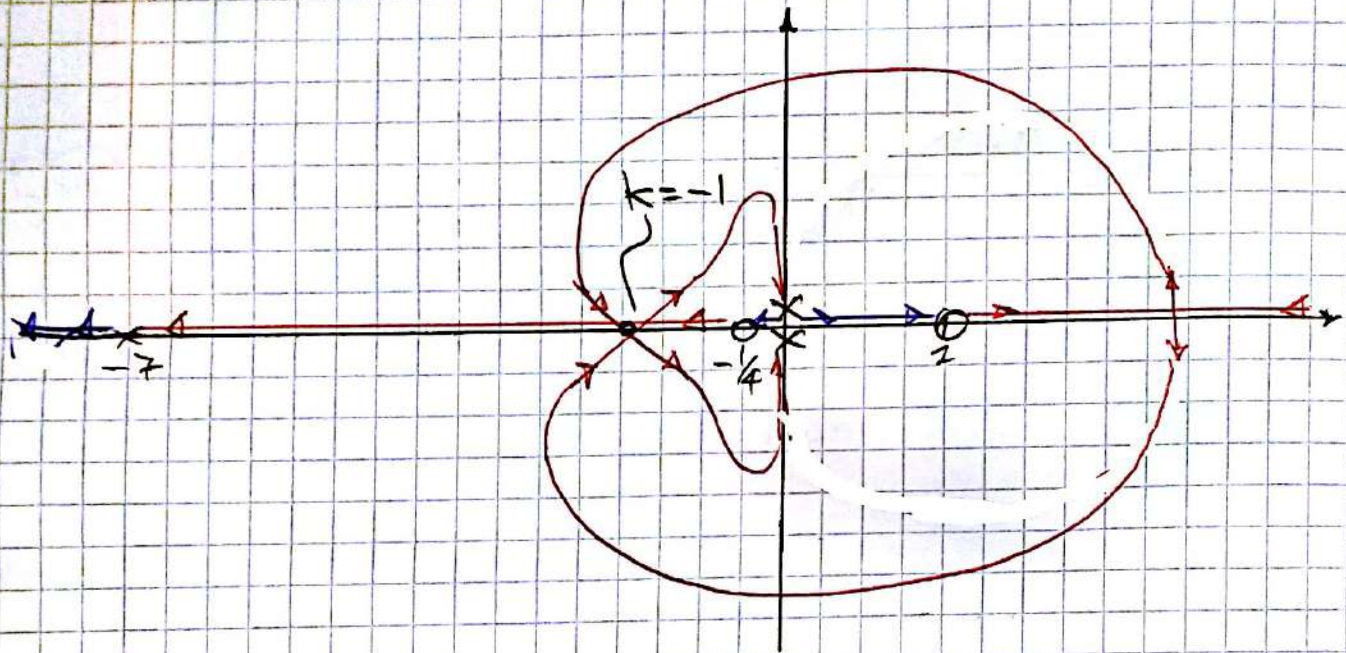
$D_W = N_F + D_F = (as+b)(s-1) + (s+c)s^2 = (s+1)^3$ METTO AD EX TUTTI IN -1

FACENDO I CALCOLI:

$a = -4 \quad b = -1 \quad e \quad c = 7$

OTTENGO COSÌ $G(s) = \frac{-4s-1}{s+7} = -4\,\frac{s+\frac{1}{4}}{s+7}$

PROVIAMO A DISEGNARE $F = GP = k\,\frac{(s+\frac{1}{4})(s-1)}{s^2(s+7)}$ PER CAPIRE COSA È SUCCESSO (HO SOSTITUITO A −4 k PER DISEGNARLO)

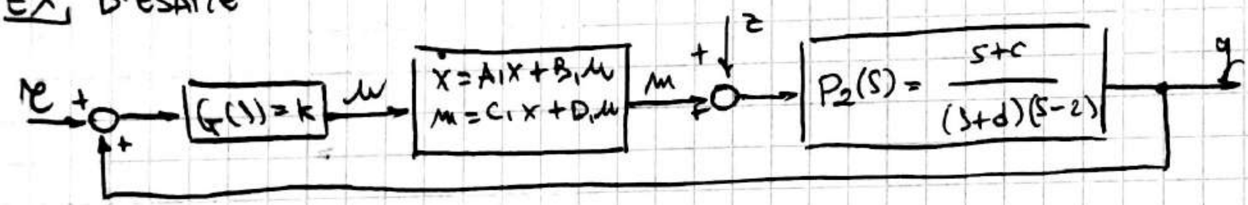


OSS.

L'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI HA CREATO IN −1 UN PUNTO SINGOLARE! INVISIBILE ALLE REGOLETTE DI TRACCIAMENTO

TRIPLO

EX. D'ESAME



$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D_1 = 1$$

SPECIFICHE:

- RISPOSTA y NULLA A REG. PERM. PER DISTURBI z COSTANTI
- IL SISTEMA COMPLESSIVO ABBIA 2 AUTOVALORI COMPLESSI
- IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINT. STABILE CON TUTTI GLI AUTOVALORI COINCIDENTI
- $c \neq d$, $c \neq 0$

CALCOLIAMO $P_1(s)$:

$$P_1(s) = C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 + D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + 1 = \frac{a}{s+b} + 1 = \frac{s+a+b}{s+b}$$

OSS,

IL SOTTOPROGETTO 1 AVEVA DUE AUTOVALORI ($\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -b$) MA AL DENOMINATORE DI $P_1(s)$ COMPARE SOLO L'AUTOVALORE $-b \Rightarrow -2$ È NASCOSTO

VERIFICO SE HA PERSO DI RAGGIUNGIBILITÀ O/E OSSERVABILITÀ

$$\text{rango}\left(A - \lambda_1 I \mid B\right) \underset{\lambda_1 = -2}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-b & a \end{pmatrix} = 1 < 2 \Rightarrow \lambda_1 = -2 \text{ è } \neg\text{RAGG.}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A - \lambda_1 I \\ \hline C \end{pmatrix} \overset{\text{rango}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2-b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } b \neq 2 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ è OSS} \\ 1 & \text{se } b = 2 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ è } \neg\text{OSS} \end{cases}$$

OSS,

TENENDO PRESENTE LA TERZA SPECIFICA DEL PROBLEMA E VISTO CHE ABBIAMO UN AUTOVALORE NASCOSTO IN -2 CHE NON POSSIAMO MODIFICARE $\longrightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI DOVRANNO ESSERE POSTI IN -2

CALCOLANDO $W_z = \frac{y}{z}$

$$\begin{cases} y = P_2(z + m) \\ m = P_1 u \\ u = G e \\ e = -y \end{cases} \longrightarrow y = P_2(z - P_1 G y) \longrightarrow y = \frac{P_2}{1 + P_1 P_2 G} z$$

$$W_z = \frac{P_2}{1 + P_1 P_2 G} \qquad G = \frac{N_G}{D_G} \qquad P_1 = \frac{N_{P_1}}{D_{P_1}} \qquad P_2 = \frac{N_{P_2}}{D_{P_2}}$$

$$W_z = \frac{\frac{N_{P_2}}{D_{P_2}}}{1 + \frac{N_{P_1}}{D_{P_1}} \cdot \frac{N_{P_2}}{D_{P_2}} \cdot \frac{N_G}{D_G}} = \frac{N_{P_2} D_G D_{P_1}}{D_{P_1} D_{P_2} D_G + N_{P_1} N_{P_2} N_G}$$

PER LA PRIMA SPECIFICA E CONSULTANDO LA TABELLA DELLE USCITE A INGRESSI CANONICI VEDO CHE HO BISOGNO DI UNO ZERO IN $s = 0$ CON MOLTEPLICITÀ ≥ 1.

QUINDI $N_{P_2} D_G D_{P_1}$ DEVE AVERE UNO ZERO IN $s = 0$:

- PER RISPETTARE LA SPECIFICA $c \neq 0$, NON POSSO METTERLO IN N_{P_2},
- NON POSSO METTERLO IN D_G POICHÉ $D_G \equiv 1$
- NON MI RIMANE CHE $D_{P_1} \longrightarrow$ PONGO $b = 0$

POICHÉ HO BISOGNO DI DUE AUTOVALORI NASCOSTI IN -2 (PER LA SECONDA + 3ª SPECIFICA) PONGO $a = d = 2$.

INFATTI AVEVAMO:

$$\dots \boxed{P_1(s) = \frac{s+a}{s}} \longrightarrow \oplus \longrightarrow \boxed{P_2(s) = \frac{s+c}{(s+d)(s-2)}}$$

$$a = d = 2$$

IN QUESTO MODO ~~PER~~ CREIAMO UNA CANCELLAZIONE ZERO-POLO RENDENDO NASCOSTO UN ALTRO AUTOVALORE IN -2

~~[illegible] LA STABILITÀ~~

$$F = G P_1 P_2 = k \cdot \frac{s+2}{s} \cdot \frac{s+c}{(s+2)(s-2)} = k \, \frac{s+c}{s(s-2)}$$

DEVO USARE L'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI PER ~~RENDERE~~ METTERE TUTTI GLI AUTOVALORI IN -2

N° PARAMETRI = GRADO $D_F \longrightarrow 2 = 2$ OK!

POICHÉ $W = \frac{N_F}{N_F + D_F} \longrightarrow D_W = N_F + D_F = k(s+c) + s(s-2) =$

$$= s^2 + (k-2)s + kc$$

EQ. DIOFANTINA

$$s^2 + (k-2)s + kc = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

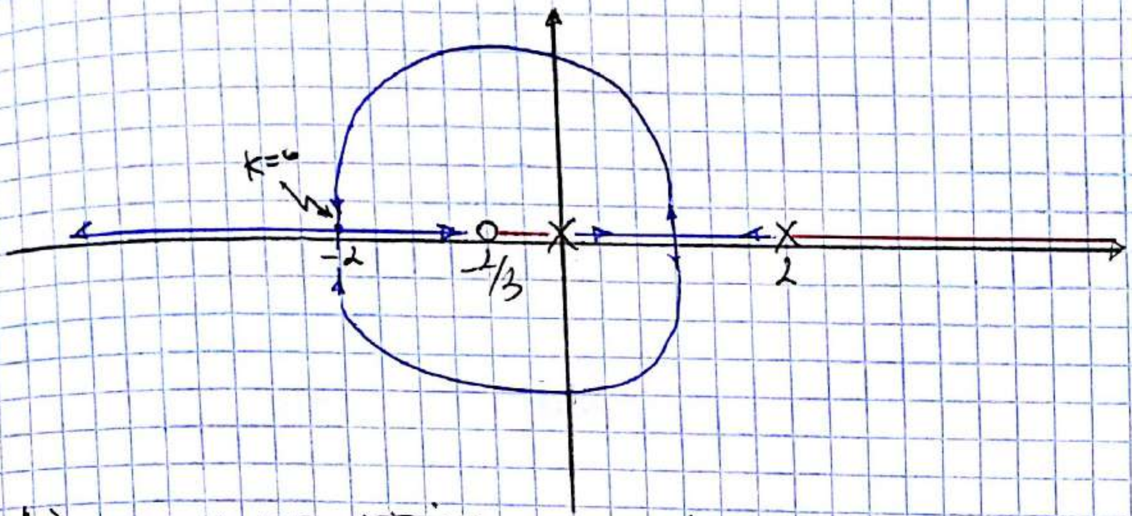
$$\begin{cases} k - 2 = 4 \\ kc = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

DOMANDA ACCESSORIA: SCRIVERE POLINOMIO CARATTERISTICO SISTEMA COMPLESSIVO CON RELATIVA RAGG. e/o OSS.

$$p(s) = \underbrace{(s+2)^2}_{\neg \text{RAGG. e OSS}} \cdot \underbrace{(s+2)^2}_{\text{RAGG. e OSS}}$$

DOMANDA ACCESSORIA: SI TRACCI IL LUOGO DELLE RADICI

$F(s) = k\frac{s+2/3}{s(s-2)}$ SAPPIAMO CHE PER $k=6$ ABBIAMO 2 RADICI IN $s=-2$



QUAL È IL VALORE DI k PER CUI MIGLIORIAMO AL ~~MASSIMO~~ MAX LA VELOCITÀ DEL TRANSITORIO? $\underline{k=6}$

INFATTI PER $k=6 \to$ VEL TRANSITORIO $= -2$

PER $k>6$ UN AUTOVALORE MIGLIORA, L'ALTRO PEGGIORA! e PER $k<6$ TUTTI E DUE PEGGIORANO.

CALCOLIAMO I PUNTI SINGOLARI

$$\begin{cases} s^2+s(k-2)+\frac{2}{3}k=0 & \text{EQUAZIONE DEL LUOGO} \\ 2s+k-2=0 & \text{SUA DERIVATA} \end{cases}$$

$\downarrow$

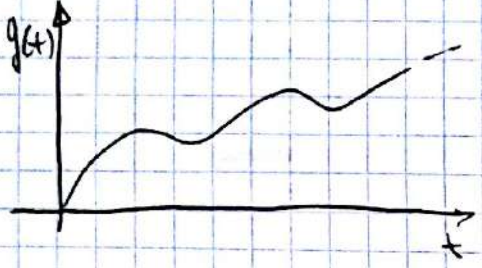
$$s^2+s(\cancel{2}-2s-\cancel{2})+\frac{2}{3}(2-2s)=0 \longrightarrow -s^2-\frac{4}{3}s+\frac{4}{3}=0$$

$$\longrightarrow s^2+\frac{4}{3}s-\frac{4}{3}=0 \to \begin{cases} s_1=0{,}\bar{6} \longrightarrow k_1=-2\cdot 0{,}\bar{6}+2=0{,}\bar{6} \\ s_2=-2 \longrightarrow k_2=2+2\cdot 2=6 \end{cases}$$

SISTEMI A TEMPO DISCRETO

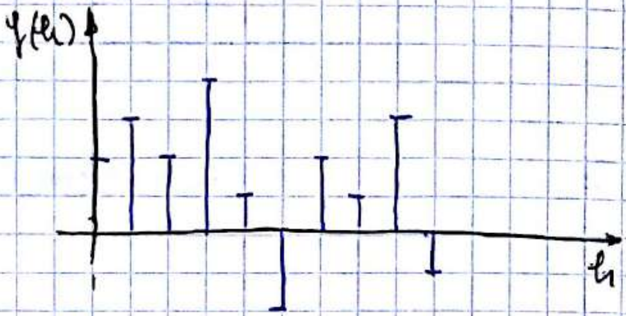
TEMPO CONTINUO

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + P z(t)$$
$$y(t) = C x(t) + D u(t) + Q z(t)$$



TEMPO DISCRETO

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) + P z(k)$$
$$y(k) = C x(k) + D u(k) + Q z(k)$$



TRASFORMATA DI LAPLACE

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$1/s$
t	$1/s^2$

t	s
$a f_1(t) + b f_2(t)$	$a F_1(s) + b F_2(s)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\int_0^t f(\theta)d\theta$	$\frac{F(s)}{s}$

TRASFORMATA ZETA

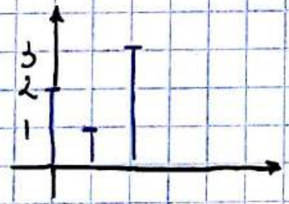
$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$\eta(k)$	$\frac{z}{z-1}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\eta(k) = \begin{cases} 1 & k\geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

k	z
$a f_1(k) + b f_2(k)$	$a F_1(z) + b F_2(z)$
$f(k-a)$	$\frac{F(z)}{z^a}$

EX



$$f(k) = 2\delta(k) + \delta(k-1) + 3\delta(k-2)$$

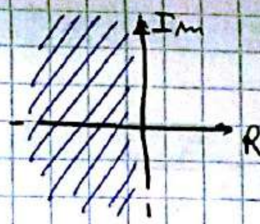
$$Z[f(k)] = 2 + \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2}$$

$$P(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$
$$\Pi(s) = C(sI-A)^{-1}P + Q$$

$$P(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$$
$$\Pi(z) = C(zI-A)^{-1}P + Q$$

CONTINUO

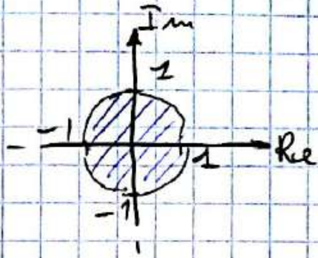
$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$



ove $e^{At} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} R_{ik}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_i t} \xrightarrow[\text{ASINTOTICA}]{\text{STABILITÀ}} Re(\lambda_i)<0$

DISCRETO

$$y(h) = CA^{h-h_0}x(h_0) + \sum_{i=h_0}^{h-1} CA^{h-i-1}Bu(i) + Du(h)$$

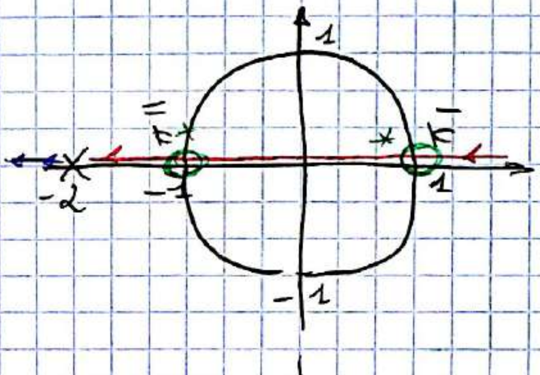


ove $A^h = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} R_{ik}\frac{h^{[k-1]}}{(k-1)!}\lambda_i^{h-k+1} \xrightarrow[\text{ASINTOTICA}]{\text{STABILITÀ}} |\lambda_i|<1$

METODO PER APPLICARE IL CRITERIO DI ROUTH AL TEMPO DISCRETO

$D_W(z) \longrightarrow$ SOSTITUISCO $z = \frac{w+1}{w-1}$

EX)



$F(z) = k\frac{1}{z+2}$

VOGLIO CHE TUTTE LE RADICI SIANO DENTRO IL CERCHIO UNITARIO

IL LUOGO NEGATIVO VA BENE! PER $\bar{\bar{k}}<k<\bar{k}$ L'UNICA SOLUZIONE È ALL'INTERNO DEL CERCHIO

$D_W = N_F + D_F = z+2+k = 0 \xrightarrow[z=1\ (*)]{\text{SOSTITUISCO}} \bar{k} = -3$

$\xrightarrow[z=-1\ (*)]{\text{SOSTITUISCO}} \bar{\bar{k}} = -1$

SAREMMO ARRIVATI ALLO STESSO RISULTATO APPLICANDO LA TRASF. $z=\frac{w+1}{w-1}$

$D_W(z) = z+2+k \longrightarrow z=\frac{w+1}{w-1} \longrightarrow 1+w+(2+k)(1-w)=0$

$\longrightarrow w(-1-k)+3+k=0$

APPLICO ROUTH SU W (IN QUESTO CASO BANALISSIMO)

$\begin{cases}-1-k>0\\ 3+k>0\end{cases} \quad \begin{cases}k<-1\\ k>-3\end{cases} \iff -3<k<-1$ HO RITROVATO LA CONDIZIONE DI PRIMA

INGRESSI POLINOMIALI A TEMPO DISCRETO

$$u(h) = \frac{h^{[k]}}{k!} = \frac{h(h-1)\cdots(h-k+1)}{k!}$$

RISPOSTA A REGIME A INGRESSI CANONICI

MOLTEPLICITÀ DELLO ZERO IN $z=1$ DELLA $W(z)$	$\eta(h)$	h	$\frac{h(h-1)}{2}$
0	$W(1) \neq 0$	$W(1)h + \frac{dW}{dz}\Big\vert_{z=1}$ $Ah+B$	$W(1)\frac{h^{[2]}}{2} + \frac{dW}{dz}\Big\vert_{z=1} h + \frac{1}{2}\frac{d^2W}{dz^2}\Big\vert_{z=1}$ $Ah^{[2]}+Bh+C$
1	0	$\frac{W(z)}{z-1}\Big\vert_{z=1} \neq 0$	$\frac{dW}{dz}\Big\vert_{z=1} h + \frac{1}{2}\frac{d^2W}{dz^2}\Big\vert_{z=1}$ $Ah+B$
2	0	0	$\frac{W(z)}{(z-1)^2}\Big\vert_{z=1} \neq 0$

RISPOSTA A REGIME A INGRESSI PERIODICI

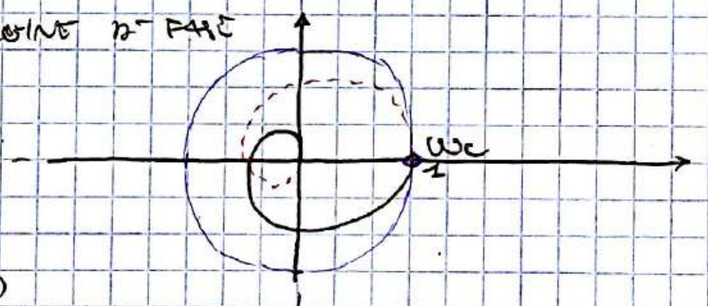
$u(h) = \sin \theta h$

$\tilde{y}(h) = |W(e^{j\theta})| \sin(\theta h + \angle e^{j\theta})$

INIZIO TUTOR

ES. TROVARE MARGINE DI FASE

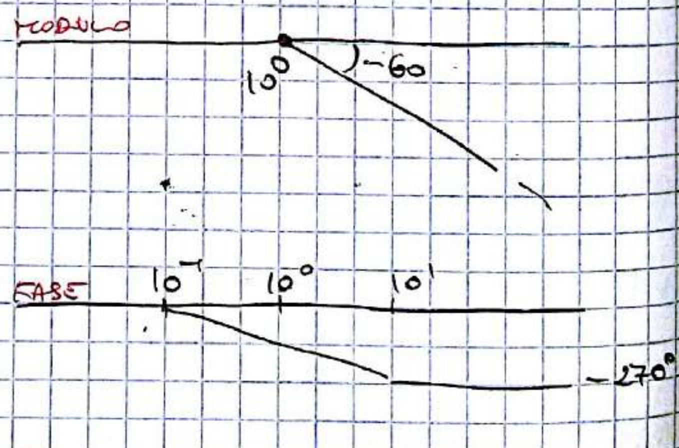
$$F(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$



$M\varphi = 180° + \angle F(j\omega_c)$

PULSAZIONE DI ATTRAVERSAMENTO O PULSAZIONE CRITICA

$\omega_c : \omega \text{ t.c. } |F(j\omega)| = 1$



TROVIAMO ω_c:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{1+\omega^2}\right)^3} = 1 \longrightarrow \omega_c = 0$$

CALCOLIAMO $M\varphi$

$$M\varphi = 180° + \angle \frac{1}{1+0} = 180°$$

EX)

$$F(s) = \frac{2(1+s)}{s^2}$$

TROVIAMO ω_c: $\quad |F(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{1+\omega_c^2}}{\omega_c^2} = 1$

$$\Rightarrow 4 + 4\omega_c^2 = \omega^4 \Rightarrow \omega^4 - 4\omega_c^2 + 4 = 0$$

$t = \omega_c^2 \longrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \quad t = 2 \pm \sqrt{4+4} = 2 \pm \sqrt{8} \quad 2 - \sqrt{8} < 0$

NON VA BENE

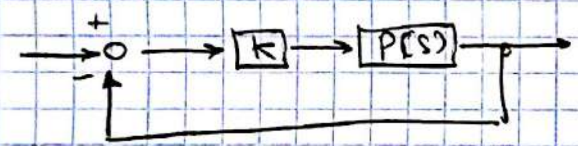
$\omega_c = \sqrt{t} = \pm\sqrt{2+\sqrt{8}}$ OVVERO NEGATIVA LA SCARTIAMO

$\omega_c = \sqrt{2+\sqrt{8}} \simeq 2.19$

TROVIAMO $m\varphi$:

$m\varphi = 180° + \angle F(j\omega_c) = \cancel{180°} + \arctan(\omega_c) \cancel{- 180°} \simeq 65,5°$

EX)



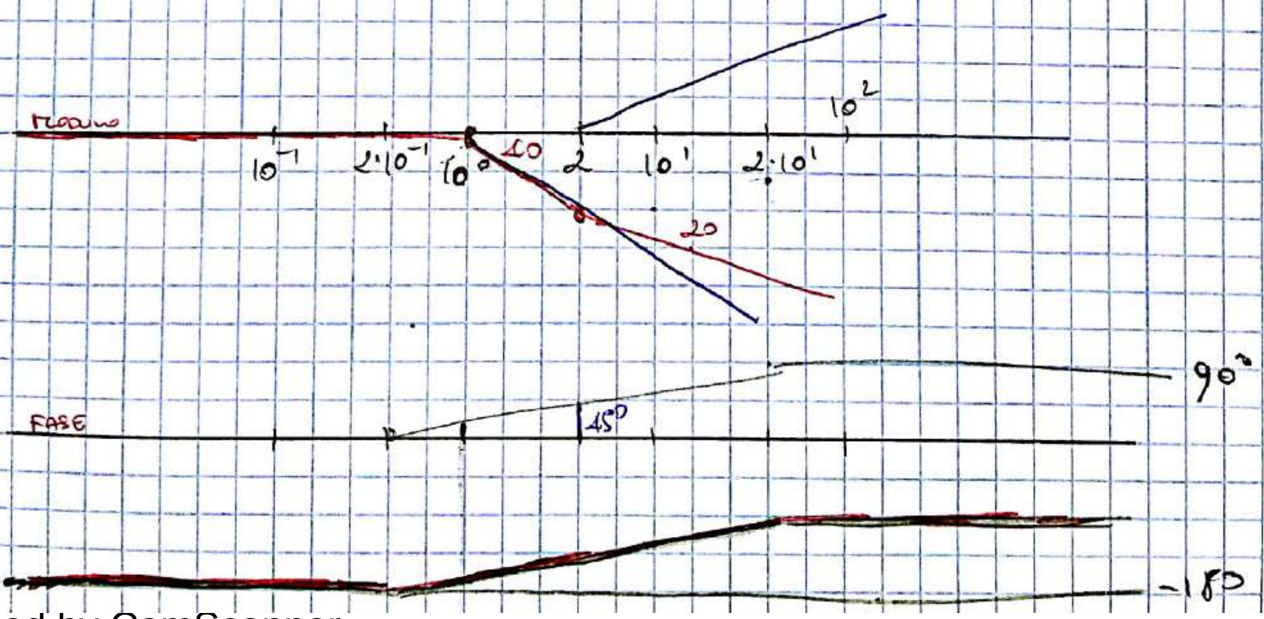
TROVARE k t.c.

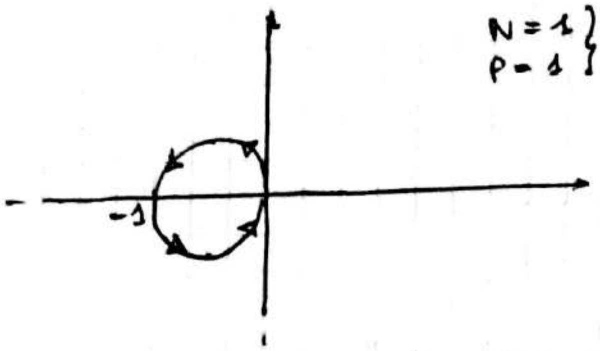
a) STABILE ASINT. CON $m\varphi \geq 45°$

b) ω_t PIÙ PICCOLO POSSIBILE

$$P(s) = -\frac{1+0{,}5s}{(1+s)(1-s)}$$

DIAGRAMMA DI BODE CON $k = 1$





$\left.\begin{matrix} N=1 \\ P=1 \end{matrix}\right\}$ se $k>1$

PER $k=1$ NON È ASINT. STABILE (N NON È BEN DEFINITO)

MA BASTA $k>1$ PER RENDERLO STABILE

CERCO k IN MODO DA SODDISFARE $m_\varphi \geq 45°$

$F = kP(s)$

$$\underbrace{|F(j2)|}_{} = 1 \iff \frac{k\sqrt{1+4/4}}{(\sqrt{1+4})^2} = \frac{k\sqrt{2}}{5} = 1 \iff k = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

HO PRESO $j2$ PER ISPEZIONE DEL DIAGRAMMA DI BODE

INFATTI PER $\omega = 2$

LA FASE VALE $45° - 180°$

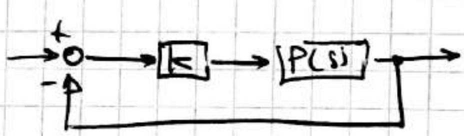
QUINDI $m_\varphi = 180° + 45° - 180° = 45°$

QUINDI PER $k \geq \frac{5}{\sqrt{2}}$ ABBIAMO RISOLTO IL PROBLEMA

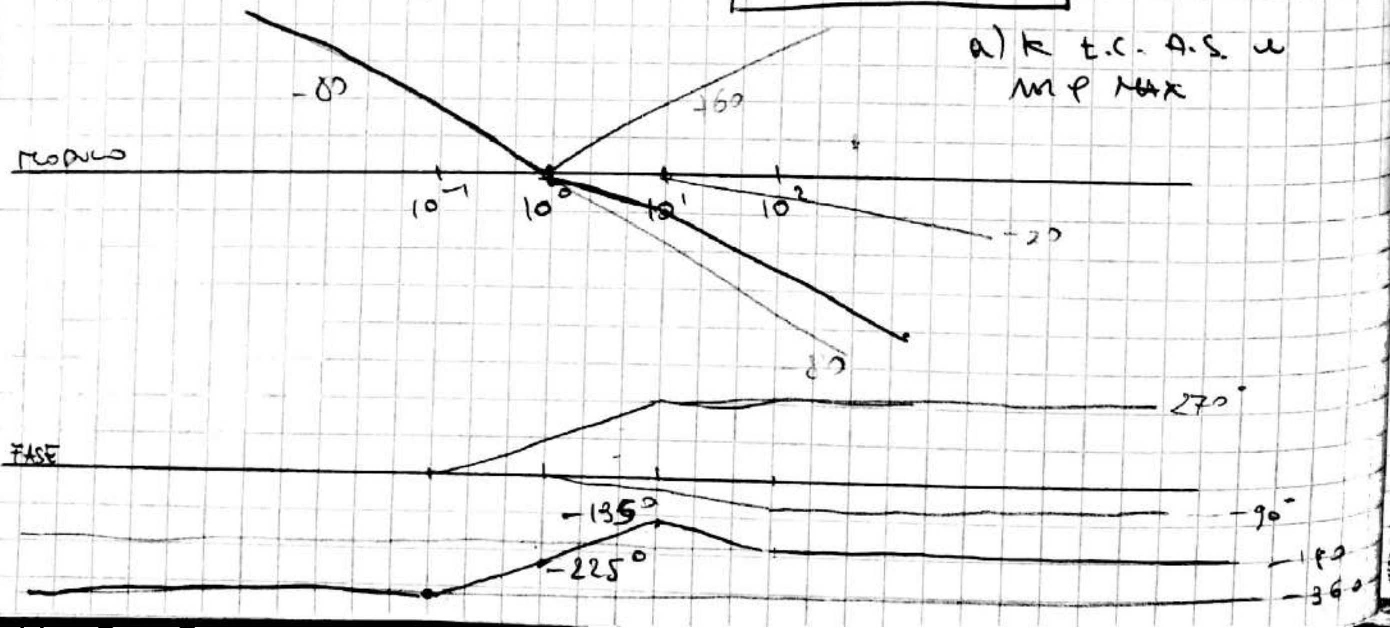
(INFATTI $k = \min \{ (1, +\infty) \cap (\frac{5}{\sqrt{2}}, +\infty) \}$

EX

$$P(s) = \frac{10(1+s)^3}{s^4(10+s)} = \frac{(1+s)^3}{s^4(1+\frac{s}{10})}$$



a) k t.c. A.S. e m_φ MAX

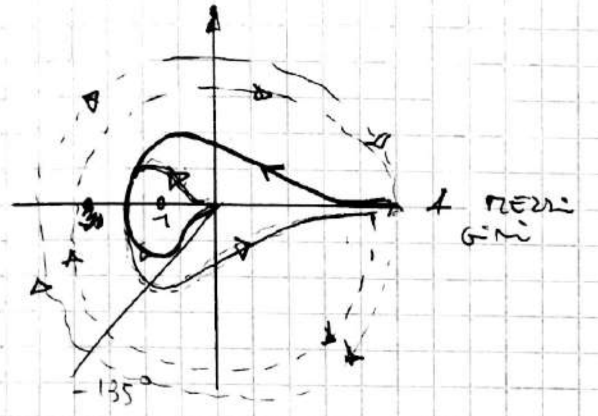


$m_\varphi = 180° + \angle F(10j)^{(*)} = 180° + 3\cdot \arctan(10) - 360° - \arctan(1) \cong 27{,}86°$

$\omega_t : \ |F(j\omega_t)| = 1 \qquad \dfrac{k\left(\sqrt{1+100}\right)^3}{10^4\sqrt{1+1}} = 1 \qquad k \cong 10\sqrt{2} \cong 13{,}93$

(*) 10 lo prendo dal diagramma di Bode! lo sfasamento max (da -180°) ce l'ho per $\omega = 10$

Traccio il diagramma di Nyquist per verificare la stabilità

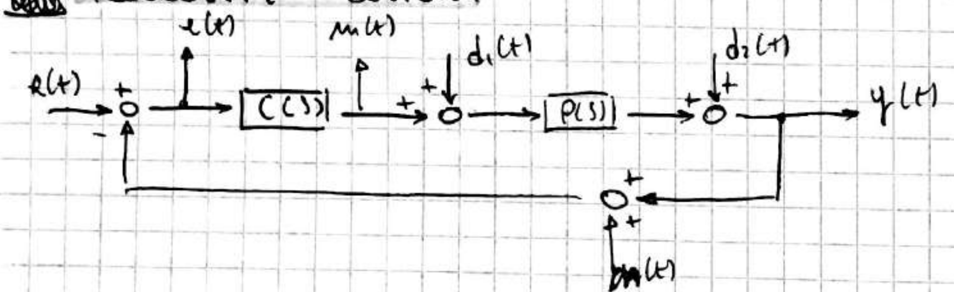


Come facciamo a capire se $(-1, j0)$ è dentro il grafico interno?

Lo vediamo dai diagrammi di Bode

Il punto è dentro $\Rightarrow$ il sist. è stabile $(N = 0 = P)$

Requisiti sistema



Requisiti fondamentali:

1) Stabilità
- nominali con disturbi = 0 — Nyquist
- perturbate attraverso certi disturbi — margini di fase e guadagno

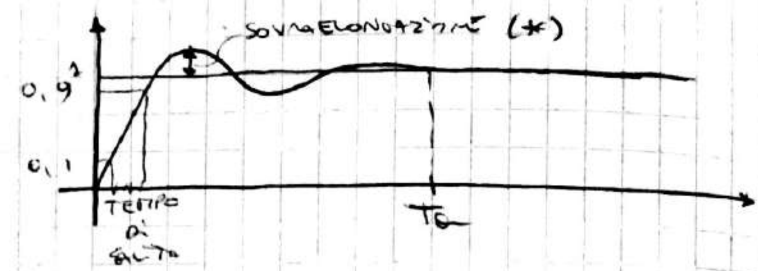
2) Prestazioni nominali
- prestazioni statiche cioè sul comportamento a regime
- prestazioni dinamiche durante il transitorio

3) Prestazioni robuste
- regime permanente
- transitorio

PRESTAZIONI DINAMICHE

IN GENERE SI FA RIFERIMENTO ALLA RISPOSTA INDICIALE

PARAMETRI CARATTERISTICI:



- T_s TEMPO DI SALITA
- $\hat{S}$ SOVRAELONGAZIONE
- T_a TEMPO DI ASSESTAMENTO

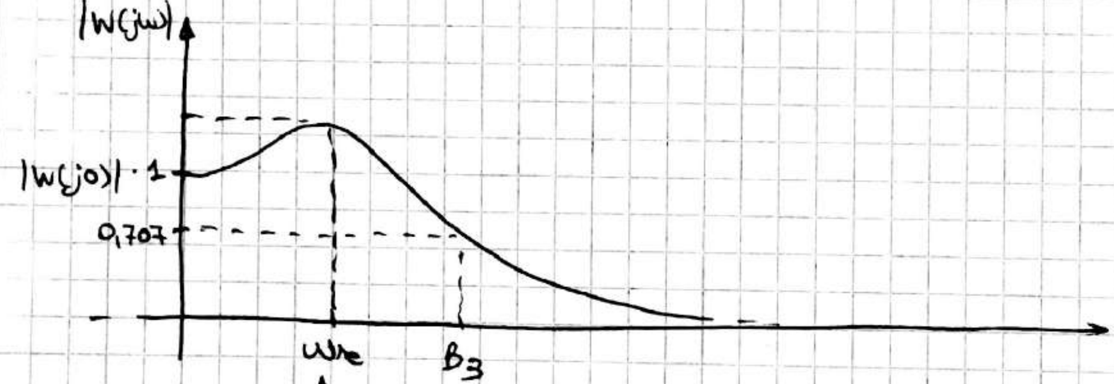
(*) IN GENERE SI INDICA IN PERCENTUALE RISPETTO AL VALORE DI REGIME

OSS

IN GENERE SI VOGLIONO T_s, $\hat{S}$ e T_a PIÙ PICCOLE POSSIBILI

ORA VOGLIAMO TRADURRE QUESTE SPECIFICHE NEL TEMPO IN SPECIFICHE SULLA $W(s)$

- B_3 BANDA PASSANTE



FASE DI RISONANZA RELATIVA A M_R MODULO DI RISONANZA

REGOLE EMPIRICHE

- $B_3 \cdot T_s \cong 3 \Longrightarrow B_3 \cong \frac{3}{T_s}$
- $1+\hat{S} \cong 0{,}85 M_R \Longrightarrow \hat{S} \cong 0{,}85 M_R - 1$

CONSIDERIAMO IL CONTROLLORE $C(s) = C_1(s) \cdot C_2(s)$

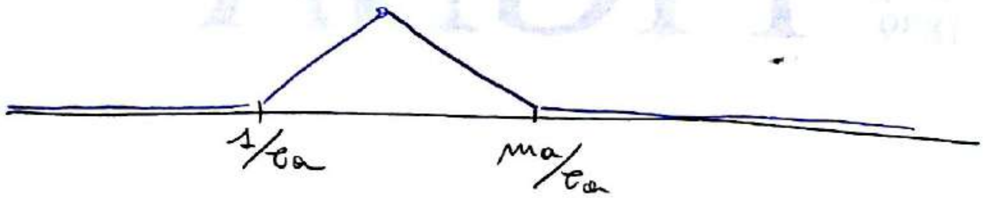
PER SODDISFARE LE SPECIFICHE STATICHE

ARRIVO A $C_1(s) = \frac{K}{s^2}$. VEDO SE CON $C_2(s) = 1$ RIESCO A SODDISFARE LE SPECIFICHE. SE NON LE SODDISFANO CERCO UNA $C_2(s)$ IN MODO DA SODDISFARE LE SPECIFICHE SU ω_c e φ_m

Scanned by CamScanner

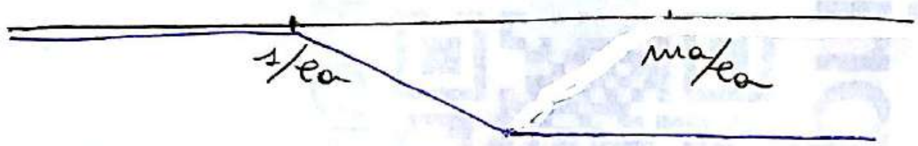
RETE ANTICIPATRICE

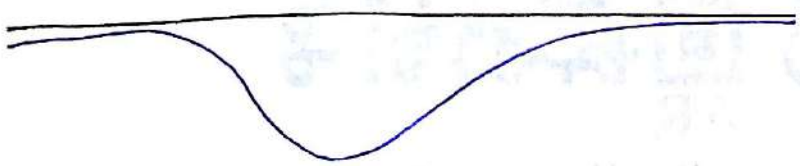
$$\tilde{C}_2(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s} \quad \text{con } \tau_a > 0,\ m_a > 0$$



RETE ATTENUATRICE

$$C_2(s) = \frac{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s}{1 + \tau_a s} \quad \text{con } \tau_a > 0 \text{ e } m_a > 0$$

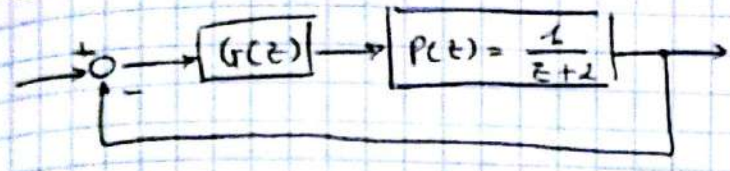




OSS,

PER SISTEMI A TEMPO DISCRETO POSSIAMO IMPORRE LA CONVERGENZA DELLA RISPOSTA IN TEMPO FINITO

EX,



PROGETTARE G(z) IN MODO CHE:

1) LA RISPOSTA y CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $r(k) = \eta(k)$ SIA NULLA A PARTIRE DA UN CERTO ISTANTE ℓ (CON ℓ MINIMO)

2) IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINTOTICAMENTE STABILE

INIZIAMO DALLA SPECIFICA 1

CALCOLIAMO LA FDT INGRESSO USCITA $W = \dfrac{y}{r} = \dfrac{N_F}{N_F + D_F}$

OVE $F = GP = \dfrac{N_F}{D_F}$

$$r(k) = \eta(k) \longrightarrow r(z) = \mathcal{Z}[\eta(k)] = \frac{z}{z-1}$$

OSS,

IL NOSTRO OBIETTIVO È FAR SÌ CHE $y(k) = 0 \ \forall k \geq \ell$

$$y(k) = A_0 \delta(k) + A_1 \delta(k-1) + A_2 \delta(k-2) + \dots + A_{\ell-1} \delta(k-\ell+1)$$

$$y(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_{\ell-1}}{z^{\ell-1}} = \frac{A_0 z^{\ell-1} + A_1 z^{\ell-2} + A_2 z^{\ell-3} + \dots + A_{\ell-1}}{z^{\ell-1}}$$

QUINDI $y(z) = \dfrac{S(z)}{z^{\ell-1}}$ ← POLINOMIO DI GRADO $\leq \ell - 1$

QUINDI DEVO FARE IN MODO CHE:

$$\underbrace{y(z)}_{\frac{S(z)}{z^{\ell-1}}} = \underbrace{W(z)}_{\frac{N_F}{N_F+D_F}} \cdot \underbrace{r(z)}_{\frac{z}{z-1}}$$

$$\frac{S(z)}{z^{\ell-1}} = \frac{N_F}{N_F + D_F} \cdot \frac{z}{z-1} \iff \frac{(z-1)\,S(z)}{z^{\ell}} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$$

ORA EGUAGLIO IL NUMERATORE A SX e IL DEN. A SX CON NUM. e DEN. A DX

$$\begin{cases} (z-1)\,S(z) = N_F(z) \\ z^{\ell} = N_F(z) + D_F(z) \end{cases}$$

$(z-1)\,S(z) = N_F(z)$ ⟶ IMPONE SUBITO IL FATTO CHE $N_F = (z-1) \dots$

Scanned by CamScanner

La seconda equazione non è altro che un'equazione diofantina

Sappiamo che per risolverla dobbiamo soddisfare la seguente specifica:

N° parametri $= d_W = d_F$

Scelgo $G(z) = a\,\frac{z-1}{z+b} \longrightarrow F(z) = G(z)P(z) = \frac{a(z-1)}{(z+b)(z+2)}$

N° parametri $= 2 = \partial F \longrightarrow$ ok!

$N_F + D_F = a(z-1) + (z+b)(z+2) = z^2$

$\Updownarrow$

$z^2 + (2+b+a)z + 2b - a = z^2 \longrightarrow \begin{cases} 2b - a = 0 \\ 2+b+a = 0 \end{cases}$ $b = -\frac{2}{3}$, $a = -\frac{4}{3}$

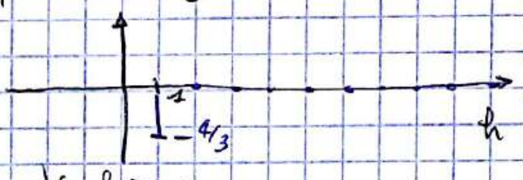
Oss. così facendo abbiamo anche reso stabile il sistema! Abbiamo infatti assegnato gli autovalori in zero! (infatti $D_W = N_F + D_F$)

$G(z) = -\frac{4}{3}\,\frac{z-1}{z-\frac{2}{3}}$

Qual è l'andamento di $y(z)$?

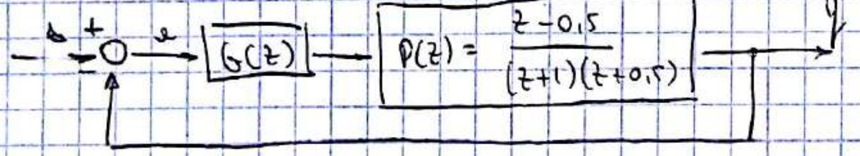
$y(z) = \frac{N_F}{N_F + D_F}\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{-4/3\,\cancel{(z-1)}}{z^2}\cdot\frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}} = \frac{-4/3}{z}$

quindi: $y(k) = -4/3\,\delta(k-1)$



Come ci aspettavamo $y(k) = 0 \quad \forall\, k \geq 2$

EX



Oss: per A, B, C anche stabilità asintotica

A) Si determini un controllore $G_A(z)$ tale da rendere nullo l'errore a reg. perm. per ingressi $r(k) = \eta(k)$

B) Si determini un controllore $G_B(z)$ tale da rendere nullo l'errore corrispondente all'ingresso $r(k) = \eta(k)$ nel tempo più breve possibile

C) Si determini un controllore $G_C(z)$ t.c. in corrispondenza di $r(k) = \eta(k)$ si abbia: $e(0) = 1 \quad e(1) = 0 \quad e(2) = -1 \quad e(k) = 0 \quad \forall\, k \geq 3$

A

$$W_e = \frac{e}{r} = \frac{D_F}{N_F + D_F}$$

$$W = \frac{y}{r} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$$

	$\eta(h)$
0	$W_e(1) \neq 0$
1	0
2	0

zeri in $z=1$ della $W_e(z)$ $\rightarrow$ 1

BISOGNA CONSULTARE LA TABELLA DEL REGIME PERMANENTE IN CORRISPONDENZA A INGRESSI POLINOMIALI (INFATTI LA SPECIFICA È SOLO SUL REGIME PERMANENTE)

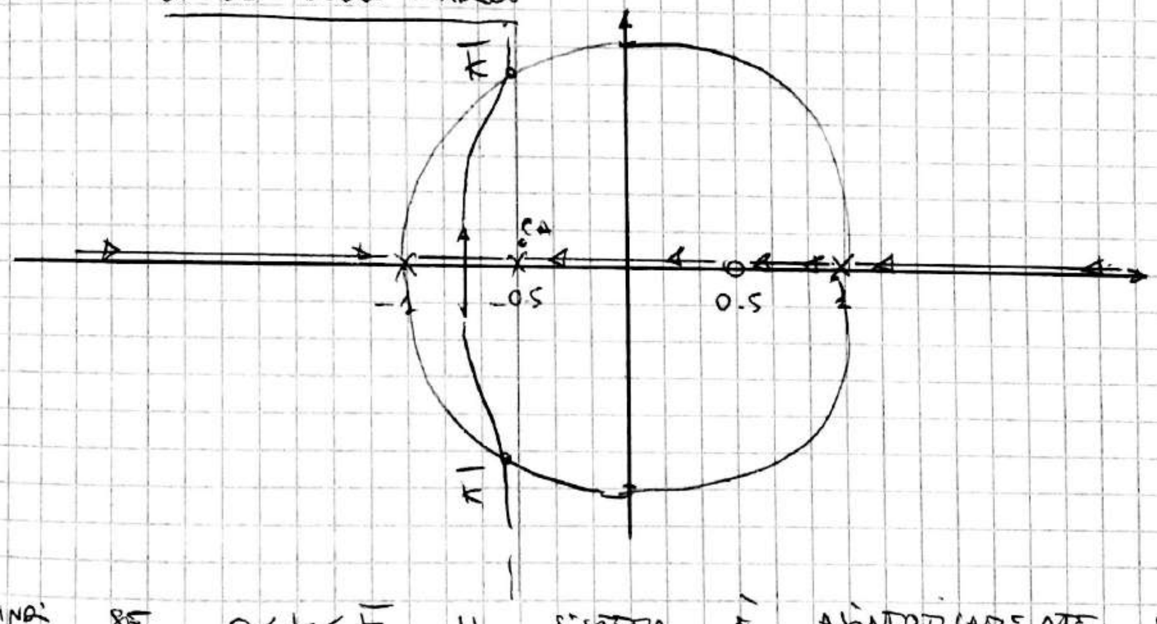
QUINDI $G(z) = \dfrac{\cdots}{(z-1)\cdots}$

A DIFFERENZA DELL'EX PRECEDENTE MI DEVO PREOCCUPARE DELLA STABILITÀ!
(NON HO BISOGNO DELL'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI)

SCELGO $G(z) = \dfrac{k}{z-1}$ E VEDO SE È STABILE

$$F(z) = k\,\frac{z-0{,}5}{(z-1)(z+1)(z+0{,}5)} \qquad m=1 \quad z_1 = 0{,}5$$
$$n = 3 \quad p_1 = 1,\ p_2 = -1,\ p_3 = -0{,}5$$

USO IL LUOGO DELLE RADICI



QUINDI SE $0 < k < \bar{k}$ IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE
(ALL'ESAME NON BISOGNA CALCOLARE $\bar{k}$, SE PROPRIO C'È TEMPO TROVARNE UNO!)

AD EX $\rightarrow$ SOSTITUISCO $z = -0{,}7$ IN D_W E RICAVO k (CON UN VALORE COSÌ DI z È PROBABILE CHE IL k VADA BENE)

B (STESSO RAGIONAMENTO DELL'EX PRECEDENTE)

$\ell(z) = W_e(z) r(z)$

SAPPIAMO SOLO CHE $d_S \leq \ell - 1$

$$\frac{S(z)}{z^{\ell-1}} = \frac{D_F}{N_F + D_F} \cdot \frac{z}{z-1} \iff \frac{(z-1)S(z)}{z^{\ell}} = \frac{D_F}{N_F + D_F}$$

$$\begin{cases} (z-1)S(z) = D_F \\ z^{\ell} = N_F + D_F \end{cases} \qquad G(z) = \frac{---}{(z-1)\cdots}$$

RISOLVIAMO L'EQ. DIOFANTINA:

DEVO SCEGLIERE LA STRUTTURA DI $G(z)$ CHE PER ORA È COSÌ: $G(z) = \frac{\cdots}{(z-1)\cdots}$

CONVIENE CHE CON $G(s)$ 'CANCELLO TUTTO IL CANCELLABILE' OVVERO RENDO NASCOSTI ~~a~~ TUTTI GLI AUTOVALORI t.c. $|\lambda| < 1$ (COSÌ SEMPLIFICO I CALCOLI)

SCELGO $G(z) = \dfrac{(z+0{,}5)(az+b)}{(z-0{,}5)(z-1)}$

INFATTI SE METTEVO SOLO UN PARAMETRO IN $G(s)$ VENIVA IL GRADO DI $F = 2 \neq N°$ PARAMETRI!

$$F(z) = \frac{az+b}{(z+1)(z-1)}$$

ORA POSSO RISOLVERE L'EQ.

$$N_F + D_F = az + b + (z+1)(z-1) = z^2 \iff z^2 + az + b - 1 = z^2$$

QUINDI:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

OSS.

PER CASO È VENUTO CHE BASTAVA UN SOLO PARAMETRO!

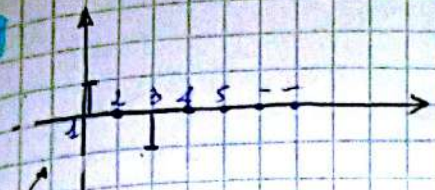
$$G_B(z) = \frac{z+0{,}5}{(z-0{,}5)(z-1)}$$

POSSO ESSERE SICURO CHE IL SISTEMA È STABILE (HO ASSEGNATO GLI AUTOVALORI IN ZERO).

~~QUAL È IL POL. CARATT. DEL SISTEMA COMPLESSIVO?~~ $\underbrace{(z-0{,}5)}_{\text{RAGG. 7OSS}}\underbrace{(z+0{,}5)}_{\text{7RAGG. OSS}}\underbrace{z^2}_{\text{RAGG. OSS}} = p(z)$

Scanned by CamScanner

C



$$e(k) = \delta(k) - \delta(k-2) \longrightarrow \boxed{E(z) = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{z^2-1}{z^2}}$$

DEVO IMPORRE CHE $e(k)$ SIA FATTA COSÌ

$$E(z) = W(z)\,R(z)$$

$$\frac{z^2-1}{z^2} = \frac{D_F}{N_F+D_F}\cdot\frac{z}{z-1} \iff \frac{(z-1)(z^2-1)}{z^3} = \frac{D_F}{N_F+D_F} \rightarrow \begin{cases} (z-1)(z^2-1) = D_F \\ z^3 = N_F + D_F \end{cases}$$

$$(z-1)^2(z+1) = (z-1)(z^2-1)$$

IN QUESTO CASO ABBIAMO $E(z)$ FISSATO!

$$G(z) = \underbrace{\frac{z+0{,}5}{z-0{,}5}}_{\text{CANCELLO IL CANCELLABILE}} \cdot \underbrace{\frac{\cdots}{(z-1)^2}}_{z+1 \text{ È GIÀ IN } P(z)!} \Longrightarrow F = \frac{N_F}{(z+1)(z-1)^2}$$

$$z^3 - D_F = N_F \iff N_F = z^3 - (z-1)(z^2-1) = \boxed{z^2 + z - 1}$$

L'ERR MI HA IMPOSTO ANCHE N_F

QUINDI: $\boxed{G_c(z) = \frac{z+0{,}5}{z-0{,}5}\cdot\frac{z^2+z-1}{(z-1)^2}} \longrightarrow F = GP = \frac{z^2+z-1}{(z+1)(z-1)^2}$

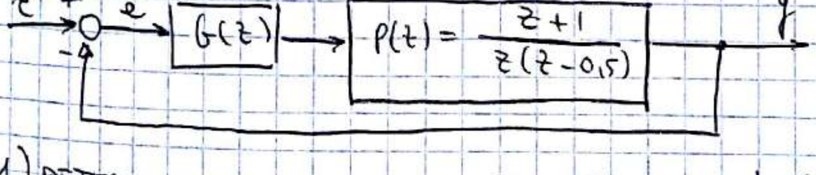
OSS

L'ESERCIZIO È STATO COSTRUITO "AD ARTE", ~~NON~~ ALTRIMENTI POTEVA NON AVERE SOLUZIONE

~~QUAL È IL POLINOMIO CARATTERISTICO DEL SISTEMA COMPLESSIVO~~?

$$P(z) = (z-0{,}5)(z+0{,}5)z^3$$

EX



1) DETERMINARE $G(z)$ IN MODO CHE PER L'INGRESSO $R(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ L'ERRORE $e(k) = 0 \ \forall k \geq \ell$ (ℓ PIÙ PICCOLO POSSIBILE)

$$W_e = \frac{D_F}{N_F + D_F} \qquad W = \frac{N_F}{N_F+D_F} \qquad F = GP = \frac{N_F}{D_F}$$

Scanned by CamScanner

$$\underbrace{e(z)}_{\dfrac{S(z)}{z^{\ell-1}}} = \underbrace{W_e(z)}_{\dfrac{D_F}{N_F+D_F}} \underbrace{r(z)}_{\dfrac{1}{z(z-2)}}$$

$$\frac{S(z)}{z^{\ell-1}} \cdot \frac{D_F}{N_F+D_F} \cdot \frac{1}{z(z-2)} \Longleftrightarrow \frac{S(z)(z-2)}{z^{\ell-2}} = \frac{D_F}{N_F+D_F} \quad \begin{cases} S(z)(z-2) = D_F \\ \underbrace{N_F+D_F}_{d_F} = \underbrace{z^{\ell-2}}_{\ell-2} \end{cases}$$

$$\ell = d_F + 2$$

$$G(z) = \frac{\dots}{(z-2)}$$

CON $G(z)$ CANCELLO IL CANCELLABILE. $G(z) = \dfrac{z(z-0{,}5)}{(z-2)} \cdot \dfrac{a}{z+b}$

$\longrightarrow F = GP = a\dfrac{z+1}{(z-2)(z+b)}$ ABBIAMO CHE N° PARAMETRI $= 2 = d_F$ OK!

$$a(z+1) + (z-2)(z+b) = z^2 \Longrightarrow z^2 + (b-2+a)z + a - 2b = z^2$$

$\begin{cases} b+a-2=0 \\ a-2b=0 \end{cases}$ $\quad b = \frac{2}{3}$, $a = \frac{4}{3}$ QUINDI: $G(z) = \dfrac{z(z-0{,}5)}{z-2} \cdot \dfrac{4/3}{z+2/3}$

OSS

IL SISTEMA È ANCHE STABILE POICHÉ HO ASSEGNATO IO ZERI GLI AUTOVALORI

~~MEDIANTE NOTE~~ ~~È~~ ~~FATTO~~ ~~ESSERE~~ ~~SEL~~ ~~APPARIRE~~ ~~ZERO~~:

$$e(z) = \frac{D_F}{N_F+D_F}\frac{1}{z(z-2)} = \frac{\cancel{(z-2)}(z+2/3)}{4/3(z+1)+(z-2)(z+2/3)} \cdot \frac{1}{z\cancel{(z-2)}} = \frac{z+2/3}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{2/3}{z^3}$$

QUINDI: $e(k) = \delta(k-2) + 2/3\,\delta(k-3)$

~~POLINOMIO~~ ~~CARATTERISTICO~~ ~~DEL~~ ~~SISTEMA~~ ~~COMPLESSIVO~~

$$P(z) = \underbrace{z(z-0{,}5)}_{\substack{\text{IRRAGG}\\ \text{OSS}}} \underbrace{z^2}_{\substack{\text{RAGG}\\ \text{OSS}}}$$

RISPOSTA A REGIME A INGRESSI PERIODICI

SUPPONIAMO CHE UN ESERCIZIO ABBIA LA SEGUENTE SPECIFICA:

1) $e(k)$ NULLO A REG. PERM. PER $r(k) = \sin(4k)$

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE:

$$r(k) = \sin\theta k \longrightarrow \tilde{e}(k) = |W_e(e^{j\theta})| \sin(\theta k + \underline{/W_e(e^{j\theta})})$$

NEL NOSTRO CASO: $\theta = 4$

$\tilde{e}(h) = |W_e(e^{j4})| = 0$

$$W_e = \frac{D_F}{N_F + D_F} \qquad |D_F(e^{j4})| = 0 \Longleftarrow |D_G(e^{j4})| \cdot |D_P(e^{j4})| = 0$$

$|D_G(e^{j4})| = 0$

QUINDI: $D_G(z) = (z - e^{j4})\underbrace{(z - e^{-j4})}_{}\ldots$

AGGIUNGO QUESTO TERMINE
PER AVERE COEFF. REALI

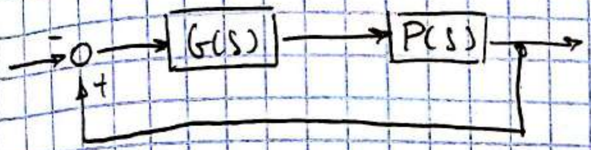
$$D_G(z) = (z - \cos 4 - j\sin 4)(z - \cos 4 + j\sin(4)) = (z - \cos 4)^2 + \sin^2 4 =$$

$$= z^2 - 2z\cos 4 + \underbrace{\cos^2 4 + \sin^2 4}_{1} = z^2 - 2z\overset{\cos 4}{\gamma} + 1$$

QUINDI: $G(z) = \dfrac{\ldots}{(z^2 - 2\cos 4 \cdot z + 1)\ldots}$

Scanned by CamScanner

SINTESI DIRETTA



$$W(s) = \frac{G(s)\,P(s)}{1 + G(s)\cdot P(s)}$$

SINTETIZZO DIRETTAMENTE W(s) RISPETTANDO LE SPECIFICHE DATE

$$W(1+GP) = GP \leftrightarrow G(WP-P) = -W \leftrightarrow G = \frac{1}{P}\cdot\frac{W}{1-W}$$

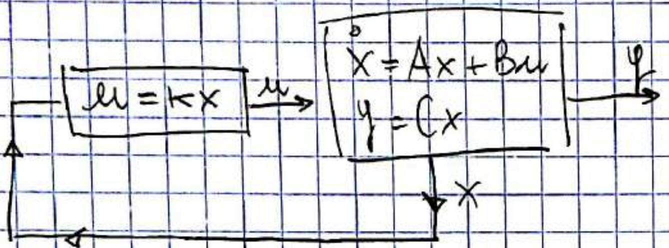
W CALCOLATA ALL'INIZIO.

DOV'È IL PROBLEMA? IL PROBLEMA È CHE SE P HA POLI O ZERI A PARTE REALE POSITIVA O NULLA NON SI PUÒ USARE! PERCHÉ RENDEREI NASCOSTI AUTOVALORI A PARTE REALE ≥ 0.

METODI DI SINTESI DEL CONTROLLORE NEL DOMINIO DEL TEMPO

- A • STABILIZZAZIONE CON REAZIONE DALLO STATO
- B • OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO
- C • STABILIZZAZIONE CON REAZIONE DALL'USCITA

A STABILIZZAZIONE CON REAZIONE DALLO STATO



NON METTIAMO L'INGRESSO PERCHÉ COMPLICHEREBBE I CALCOLI E NON CAMBIEREBBE NULLA

OSS

QUESTE METODOLOGIE VALGONO ANCHE PER PIÙ INGRESSI E PIÙ USCITE (u e y POTREBBERO ESSERE VETTORI)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BKx \\ y = Cx \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = (\underset{n\times n}{A} + \underset{n\times p}{B}\underset{p\times n}{K})x \\ y = Cx \end{cases}$$

MATRICE DINAMICA DEL SISTEMA COMPLESSIVO $n \times n$

TEOREMA DELL'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI

ASSEGNATO UN PROCESSO, SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE K, SI PUÒ FAR SÌ CHE GLI AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI DEL PROCESSO SI "TRASFORMINO NELLA MATRICE "$A+BK$" IN VALORI ARBITRARI, MENTRE GLI AUTOVALORI IRRAGGIUNGIBILI DEL PROCESSO SI RITROVANO PARI PARI NELLA MATRICE $A+BK$

OSS

SOLO GLI AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI POSSONO ESSERE MODIFICATI | QUELLI IRRAGGIUNGIBILI NON POSSONO ESSERE TOCCATI.

OSS

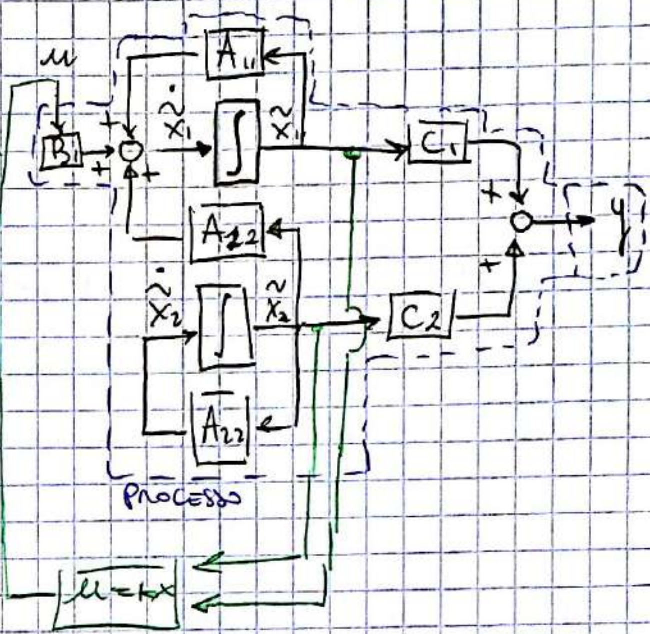
AVENDO LA POSSIBILITÀ DI MISURARE LO STATO POSSO MODIFICARE ANCHE SOLO GLI AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI (CONDIZIONI MENO STRINGENTI RISPETTO A RAGG e OSS CHE ABBIAMO VISTO PRIMA)

OSS.
POSSIAMO CONSIDERARE LO STATO COME UN'ALTRA USCITA $y' = x$, COSÌ FACENDO
GLI AUTOVALORI DIVENTANO ANCHE OSSERVABILI

SCOMPOSIZIONE RAGGIUNGIBILE

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_1 \neq 0$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2 + B_1 u \\ \dot{\tilde{x}}_2 = A_{22}\tilde{x}_2 \\ y = (C_1 \quad C_2)\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$



COME CAMBIAMO VALORE AGLI AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI?

IMPONGO: $|\lambda I - (A_{11} + B_1 k_1)| = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_{ARB_i})$ ← VALORE ARBITRARIO

EX $m = 2$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2) \right] \right| = (\lambda - \lambda_{ARB1})(\lambda - \lambda_{ARB2})$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_2 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - \lambda(\lambda_{ARB1} + \lambda_{ARB2}) + \lambda_{ARB1}\lambda_{ARB2}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a_0 - k_1 & \lambda + a_1 - k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \qquad \lambda(\lambda + a_1 - k_2) + (a_0 - k_1) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2$$

$$\lambda^2 + (a_1 - k_2)\lambda + a_0 - k_1 = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \rightarrow \begin{cases} a_1 - k_2 = \alpha_1 \\ a_0 - k_1 = \alpha_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k_2 = a_1 - \alpha_1 \\ k_1 = a_0 - \alpha_2 \end{cases} \quad \square$$

EX

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

$$\left|\lambda I-(A+BK)\right| = \prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_{ARB_i})\prod_{i=1}^{n-m}(\lambda-\lambda_{NRAG_i})$$

FORMULA GENERALE! NON HO BISOGNO DELLA ~~...~~ SCOMPOSIZIONE DI KALMAN

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=-1$

$\operatorname{ran}(A+I|B)=\operatorname{ran}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1<2=n \Rightarrow \lambda_2=-1 \ \nexists$ RAGG.

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(k_1 \quad k_2)\right]\right|=(\lambda-\lambda_{ARB})\underbrace{(\lambda+1)}_{\text{AUTOVA. NON RAGG.}}$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1+k_1 & 1+k_2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1-k_1 & 1+k_2\\ 0 & \lambda+1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$(\lambda-1-k_1)\cancel{(\lambda+1)}=(\lambda-\lambda_{ARB})\cancel{(\lambda+1)}$$

$\lambda_{ARB}=1+k_1 \longleftrightarrow k_1=\lambda_{ARB}-1$

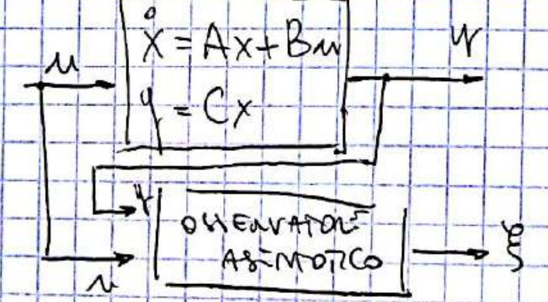
SE SCELGO $\lambda_{ARB}=-1 \longrightarrow k_1=-2$

$K=(-2 \quad \ast)$

VALORE QUALSIASI

OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO

PROBLEMA "DUALE" RISPETTO AL PRECEDENTE.
CONSISTE NELLO STIMARE LO STATO CHE NON È MISURABILE



$e(t)=x(t)-\xi(t)$

$\lim_{t\to+\infty} e(t)=0$

HA QUESTE PROPRIETÀ

EQUAZIONE DELL'OSSERVATORE ASINTOTICO

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + Gy - GC\xi$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\xi} = (Ax+Bu) - (A\xi + Bu + G\underbrace{Cx}_{y} - GC\xi) = (A-GC)x - (A-GC)\xi =$$

$$= (A-GC)(x-\xi) = (A-GC)e$$

$$e(t) = \underset{\exp}{e}^{(A-GC)t}\, e(0)$$

SE $A-GC$ HA TUTTI GLI AUTOVALORI A PARTE REALE $<0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} e(t) = 0$

PROBLEMA DUALE AL PRECEDENTE!

TEOREMA

ASSEGNATO UN PROCESSO SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE UNA MATRICE G SI PUò FAR SI CHE GLI AUTOVALORI OSSERVABILI DEL PROCESSO SI TRASFORMINO NELLA MATRICE $A-GC$ IN VALORI ARBITRARI, MENTRE GLI AUTOVALORI INOSS. DEL PROCESSO SI TROVANO PARI PARI NELLA MATRICE $A-GC$.

QUANDO È POSSIBILE PROGETTARE UN OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO?

QUANDO TUTTI GLI AUTOVALORI INOSS. DEL PROCESSO SONO A PARTE REALE NEGATIVA.

OSS

SE SI RICHIEDE CHE LA VELOCITÀ DI CONVERGENZA A ZERO DI $e = x - \xi$ DEVE ESSERE MINORE DI $-\alpha$, $\alpha > 0$, ALLORA GLI AUTOVALORI DI $A-GC$ DEVONO ESSERE $< -\alpha$

$$\left|\lambda I - (\underset{n\times n}{A} - \underset{n\times q}{G}\,\underset{q\times n}{C})\right| = \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_{ARB_i}) \cdot \prod_{i=1}^{n-p} (\lambda - \lambda_{INOSS_i})$$

$p = N°$ AUTV. OSS $= \text{rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{pmatrix}$

IL MIO OBIETTIVO È TROVARE G

$q = N°$ USCITE

EX

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$

$p = \text{rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = 1 < 2 = n$

$\lambda_2 = -1 \longrightarrow \text{rank}\begin{pmatrix} A+I \\ C \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = 1 < 2 = n \Rightarrow \lambda_2 = -1$ INOSS

L'UNICO AUTOVALORE INOSS è < 0 → ok!

$$|\lambda I - A - GC| = \prod_{i=1}^{\mu}(\lambda-\lambda_{ARB_i})\prod_{i=1}^{n-\mu}(\lambda-\lambda_{INOSS_i})$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}G_1\\ G_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2\end{pmatrix}\right]\right| = (\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-1+G_1 & G_1/2-1\\ G_2 & \lambda+1+G_2/2\end{vmatrix} = (\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$(\lambda-1+G_1)(\lambda+1+G_2/2) - G_2(G_1/2-1) = (\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$\lambda^2+\lambda(G_1+G_2/2)-1-G_2/2+G_1+\cancel{G_1G_2/2}-\cancel{G_1G_2/2}+G_2 = (\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$(\lambda+G_1+G_2/2-1)\cancel{(\lambda+1)} = (\lambda-\lambda_{ARB})\cancel{(\lambda+1)}$$

$$G_1+G_2/2-1 = -\lambda_{ARB}$$

SCELGO $\lambda_{ARB}=-1$ → $\boxed{G_1 = -G_2/2+2}$

POSSIAMO SCEGLIERE UNA QUALSIASI COPPIA CHE SODDISFA L'EQ.

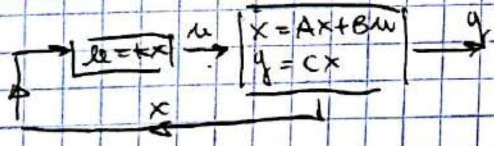
ES: $G_2=0$ $G_1=2$ → $\boxed{G=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}$

INFINE:

$\boxed{\dot{\xi} = A\xi+Bu+Gy-GC\xi}$ CON A, B, C DATI E G APPENA TROVATO

RIASSUNTO

STABILIZZAZIONE CON REAZIONE DALLO STATO

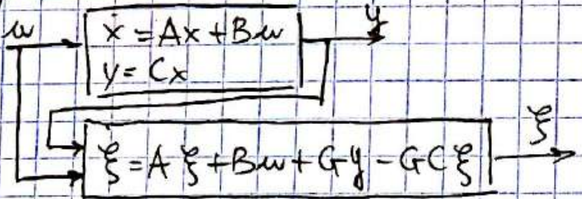


TROVARE K t.c.

$$|\lambda I-(A+BK)| = \prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_{ARB_i})\prod_{i=1}^{n-m}(\lambda-\lambda_{IRR_i})$$

POSSIBILE SE E SOLO SE TUTTI GLI AUTOVALORI IRRAGGIUNGIBILI DEL PROCESSO SONO A PARTE REALE NEGATIVA

OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO

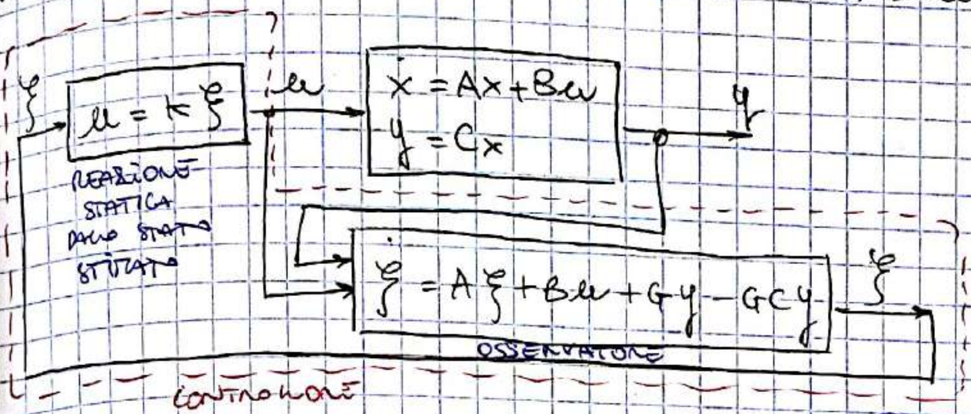


TROVARE G t.c. $|\lambda I-(A-GC)| = \prod_{i=1}^{\mu}(\lambda-\lambda_{ARB_i})\prod_{i=1}^{n-\mu}(\lambda-\lambda_{INOSS_i})$

POSSIBILE SE E SOLO SE TUTTI GLI AUTOV. INOSS DEL PROCESSO SONO A PARTE REALE MINORE DI ZERO

C STABILIZZAZIONE CON REAZIONE DALL'USCITA

NB: NON DÀ LUOGO IN GENERALE A UN CONTROLLORE A DIMENSIONE MINIMA



LA DIM DEL CONTROLLORE È LA DIM DI A!

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bk\xi \\ \dot{\xi} = A\xi + Bk\xi + GCx - GC\xi \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & Bk \\ GC & A+Bk-GC \end{pmatrix}}_{A_c} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$$

(blocchi $n \times n$)

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

$$T^{-1} = T = \begin{pmatrix} I_{n\times n} & O_{n\times n} \\ I_{n\times n} & -I_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_c = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & Bk \\ GC & A+Bk-GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+Bk & -Bk \\ 0 & A-GC \end{pmatrix}$$

AVENDO APPLICATO QUESTA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE ABBIAMO RESO A_c TRIANGOLARE: SONO VISIBILI I SUOI AUTOVALORI:

$$\text{AUTOVALORI DI } A_c = \begin{cases} \text{AUTOVAL. DI } \underbrace{A+Bk}_{\text{QUELLA DELLA CONTROREAZIONE DALLO STATO}} \\ \text{AUTOVAL. DI } \underbrace{A-GC}_{\text{QUELLO DELL'OSSERVATORE}} \end{cases}$$

DUE SOTTOPROBLEMI:

- TROVARE k t.c. $A+Bk$ ABBIA TUTTI GLI AUTOVAL. A PARTE REALE NEG. (PROBLEMA DELLA CONTROREAZIONE DALLO STATO)
- TROVARE G t.c. $A-GC$ ABBIA TUTTI GLI AUTOVAL. A PARTE REALE NEG. (PROBLEMA DELL'OSSERVATORE ASINTOTICO)

QUESTO È IL **PRINCIPIO DI SEPARAZIONE**

OSS.

Se tutti gli autovalori sono raggiungibili e osservabili, posso assegnarli tutti

EX.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Utilizzare il principio di separazione per rendere asint. stabile il sistema complessivo.

(Esercizio già fatto singolarmente per quanto riguarda stabilizzazione dallo stato e oss. asintotico)

Avevamo ottenuto $K = (-2 \;\; *)$ e $G = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'esercizio è finito! Se metto K e G nella struttura disegnata prima ho ottenuto il risultato

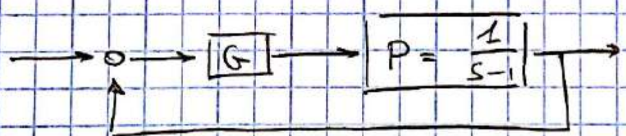
OSS.

Qual è la dimensione del controllore? È 2! Infatti è la dim. di A (non dim. ridotta)

Infatti, risolvendo con i metodi nel dominio di Laplace:

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s-1}$$

Scelgo $G(s) = a$



$$W = \frac{N_F}{N_F + D_F} \Rightarrow F = GP = \frac{a}{s-1} \Rightarrow D_W = a + s - 1$$

Il sist. è stabile se $a - 1 > 0 \leftrightarrow a > 1$

OSS

Bastava un controllore costante!

All'esame: solo se espressamente chiesto usare metodo nel tempo

EX

$$\xrightarrow{u} \boxed{\begin{array}{l}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{array}} \longrightarrow y \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad a) \quad D = 1$$

A TRIANGOLARE : $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

A) DETERMINARE PER QUALI VALORI DI a NON È POSSIBILE STABILIZZARE ASINT. IL SISTEMA COMPLESSIVO

RAGGIUNGIBILITÀ

$$m = \text{ran}(B \mid AB) = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } a \neq 2 \longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \text{ RAGG.} \\ 1 & \text{se } a = 2 \longrightarrow (*) \end{cases}$$

(*) FACCIO IL TEST DI HAUTUS CON $a=2$ PER CAPIRE CHE SUCCEDE:

$\boxed{a=2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = -1 \quad \text{ran}(A+I \mid B) = \text{ran}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right) = 1 < 2$$

NON È RAGGIUNGIBILE

$\lambda_1 = 1$ RAGGIUNGIBILE

$\lambda_2 = -1$ IRRAGGIUNGIBILE

OSSERVABILITÀ

$$n = \text{ran}\begin{pmatrix} C \\ \hline CA \end{pmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^2 & -a \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } a \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \text{ OSS.} \\ 0 & \text{se } a = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \text{ INOSS.} \end{cases}$$

QUINDI L'UNICO VALORE DI a PER CUI NON È POSSIBILE STAB. IL SISTEMA È $a = 0$ ⟶ PER QUESTO VALORE DI a INFATTI C'È UN AUTOV. A PARTE REALE > 0 NON OSS. ($\lambda_1 = 1$)

B) PER QUALI VALORI DEL PARAMETRO a NON È POSSIBILE ASSEGNARE AD ARBITRIO TUTTI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA COMPLESSIVO?

QUESTO È POSSIBILE SE TUTTI GLI AUTOVALORI SONO NON NASCOSTI

QUESTO È POSSIBILE SE $a \neq 0$ e $a \neq 2$ QUINDI:

$a = 0$ e $a = 2$

C) E SE CHIEDESSI LA STABILITÀ CON CONTROREAZIONE DALLO STATO?

PER LA STABILITÀ CON CONTROREAZIONE DALLO STATO CONTA SOLO LA RAGGIUNGIBILITÀ → PER TUTTI I VALORI DI a È STABILIZZABILE! (INFATTI PER $a=2$ L'UNICO AUTOV. NASCOSTO È A PARTE REALE NEG.)

D) PER QUALI VALORI DI a POSSO ASSEGNARE AD ARBITRIO GLI AUTOV. CON CONTROREAZIONE DALLO STATO?

PER $a \neq 2$ POSSO (INFATTI PER $a=2$ HO UN AUTOV. NON RAGG.)

E) PER QUALI VALORI DI a ESISTE L'OSS. ASINTOTICO?

ESISTE PER $a \neq 0$, INFATTI PER $a=0$ C'È $\lambda_1 = 1$ NON OSS. E A PARTE REALE POSITIVA!

PER $a \neq 0$ INOLTRE TUTTI GLI AUTOV. SONO OSS. ⇒ POSSO ASSEGNARE AD ARBITRIO LA VEL. DI CONVERGENZA.

F) PER QUALI VALORI DI a IL SISTEMA È STABILIZZABILE ASINT. MA SENZA POTER ASSEGNARE TUTTI GLI AUTOVALORI?

PER $a=2$, INFATTI HA SOLO UN AUTOV. NASCOSTO MA È A PARTE REALE NEG ($\lambda_2 = -1$ IRRAG.)

G) TROVARE IL CONTROLLORE CON IL principio DI SEPARAZIONE PER STABILIZZARE IL SISTEMA CON $a=2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = 1$$

$$K : |\lambda I - (A+BK)| = (\lambda - \lambda_{ARB_1})(\lambda+1)$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right] \right| = (\lambda - \lambda_{ARB_1})(\lambda+1)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 - k_1 & -k_2 \\ -2 - k_2 & \lambda + 1 - k_2 \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_{ARB_1})(\lambda+1)$$

$\lambda^2 + \lambda(-k_1 - k_2) - 1 - k_1 - k_2 = (\lambda - \lambda_{ANB_1})(\lambda + 1)$

DEVO FARE LA DIVISIONE TRA POLINOMI, IL POL. A SX DEVE ESSERE DIVISIBILE PER $\lambda+1$ (ALTRIMENTI HO SBAGLIATO)

⋮

$(\lambda+1)(\lambda - k_1 - k_2 - 1) = (\lambda - \lambda_{ANB_1})(\lambda+1)$

$-k_1 - k_2 - 1 = -\lambda_{ANB}$

$G: \left| \lambda I - (A - GC) \right| = (\lambda - \lambda_{ANB_2})(\lambda - \lambda_{ANB_3})$

$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \right| = (\lambda - \lambda_{ANB_2})(\lambda - \lambda_{ANB_3}) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$

⋮

$\lambda^2 + 2G_2\lambda + 4G_1 - 1 - 2G_2 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$

$\begin{cases} 2G_2 = \alpha_1 \\ 4G_1 - 1 - 2G_2 = \alpha_2 \end{cases}$

(SETTORE $a = 2$)

4) SI DETERMINI UN CONTROLLORE CON REAZIONE DALL'USCITA IN CUI SI STABILIZZI IL SISTEMA COMPLESSIVO E CON DUE AUTOVAL. NASCOSTI

PER RISPONDERE A QUESTA DOMANDA DEVO PASSARE NEL DOMINIO DI LAPLACE

$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s+1}{s-1}$

ABBIAMO GIÀ UN AUTOVALORE NASCOSTO IN -1, COME FACCIAMO A OTTENERE L'ALTRO? PREFERIAMO $G(s) = \frac{---}{(s+1)---}$ IN MODO DA CANCELLARE LO ZERO DI $P(s)$

IN QUESTO MODO: $\{\text{AUTOV. NASCOSTI}\} = \{\underset{\text{7RAGG OSS}}{-1}, \underset{\text{RAGG 7OSS}}{-1}\}$ CANCELLAZIONE POLO-ZERO

SCELGO $G(s) = \frac{a}{s+1} \longrightarrow F = GP = \frac{a}{s-1} \longrightarrow P_W = s - 1 + a$

IL SIST. È STABILE PER $a - 1 > 0 \longrightarrow \boxed{a > 1}$

EX.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad b) \qquad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = a$$

A) SI DETERMINI PER QUALI VALORI DI a e b NON È POSSIBILE COSTRUIRE UN OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO

B) SI DETERMINI PER QUALI VALORI DI a e b È POSSIBILE COSTRUIRE L'OSSERVATORE ASINTOTICO MA NON È POSSIBILE ASSEGNARE ARBITRARIAMENTE TUTTI GLI AUTOVALORI

A

$$\text{rank}\begin{pmatrix} C \\ \hline CA \end{pmatrix} = \text{rank}\left(\begin{array}{c|c} 1 & b \\ 1 & ab \end{array}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } b = 0 \text{ OR } a = 1 \\ 2 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1$

$$\text{rank}\begin{pmatrix} A - I \\ C \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a-1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } a \neq 1 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ è oss.} \\ 1 & \text{se } a = 1 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ è inoss.} \end{cases}$$

$\lambda_2 = a$

$$\text{rank}\begin{pmatrix} A - aI \\ C \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{ALTRIMENTI} \rightarrow \lambda_2 = a \text{ è oss.} \\ 1 & \text{se } a = 1 \text{ o } b = 0 \rightarrow \lambda_2 = a \text{ è inoss.} \end{cases}$$

$$\nexists \text{ oss. asint.} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \text{ e } a \geq 0 \end{cases}$$

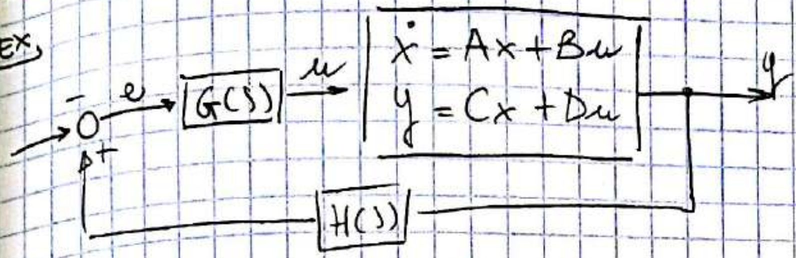
B

se $\begin{cases} b = 0 \\ a < 0 \end{cases}$ INFATTI IN QUESTO CASO $\lambda_2 = a$ è inoss.[(*)] MA È A PARTE REALE NEGATIVA (QUINDI L'OSS. ASINT. ESISTE)

(*) QUINDI NON POSSO SCEGLIERNE LA VEL. DI CONV.)

Scanned by CamScanner

EX.



$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $H(s) = \frac{H}{s}$

$C = (1 \ \ 1)$ $D = d$

DETERMINARE G(S) A DIMENSIONE MINIMA e I PARAMETRI "d" e "H" IN MODO DA SODDISFARE LE SEGUENTI SPECIFICHE:

α) IL SISTEMA COMPLESSIVO ABBIA DUE AUTOVALORI NASCOSTI.

β) LA RISPOSTA y A REGIME PERMANENTE PER L'INGRESSO $r(t) = t$ SIA UGUALE A $1/3$.

γ) IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINTOTICAMENTE STABILE CON TUTTI GLI AUTOVALORI COINCIDENTI.

DUE AUTOVALORI: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$, VERIFICAZIONE R. e O.

$m = \text{rank}(B \mid AB) = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ ⇒ UNO R. e UNO ¬R.

$n = \text{rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ ⇒ TUTTI e DUE O.

VERIFICO CHE SIA $\lambda_2 = -2$ QUELLO NON RAGG. (SE COSÌ NON FOSSE IL PROBLEMA NON AVREBBE SOLUZIONE!)

$\text{rank}(A + 2I \mid B) = \text{rank}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1$ ⇒ $\lambda_2 = -2$ ¬R. e O.; $\lambda_1 = 1$ R. e O.

CALCOLO P(S):

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{d(s - 1 + 1/d)}{s - 1}$$

OSS.

IL FATTO CHE ABBIAMO UN AUTOVALORE NASCOSTO IN −2 IMPLICA CHE DEVO METTERCI TUTTI IN '−2' PER SODDISFARE LA SPECIFICA (γ)

OSS.

VISTO CHE DEVO AVERE DUE AUTOV. NASCOSTI, METTO LO ZERO DI P(S) IN −2 IN MODO DA POTERLO CANCELLARE CON UN POLO IN G(S) →

$$s-1+\frac{1}{d} = s+2 \longrightarrow d = \frac{1}{3} \Longrightarrow P(s) = \frac{1}{3}\frac{s+2}{s-1}$$

$$G(s) = \frac{(\dots)}{(s+2)(\dots)}$$

ABBIAMO OTTENUTO COSÌ DUE AUTOVALORI NASCOSTI IN '−2'

UNO TRAG. e OSS. e UNO RAG. e NOSS.

TROVO LA FDT RIFERIMENTO-USCITA

$$W = \frac{y}{r} = \dots = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{OVE} \quad F = G \cdot P = \frac{N_F}{D_F} \quad H = \frac{N_H}{D_H}$$

CONSULTO LA TABELLA DELLE RISPOSTE A REGIME A INGRESSI CANONICI

DA LÌ → DEVO METTERE UNO ZERO IN $W(s)$ e DEVO RENDERLA

t.c. $\left.\frac{W(s)}{s}\right|_{s=0} = \frac{1}{3}$

$W(s)$ HA GIÀ UNO ZERO IN $s=0$! INFATTI $N_W = N_F \cdot D_H$ e

$D_H = s$. NON DEVO FARE NULLA.

DEVO, PERÒ, IMPORRE CHE $\left.\frac{W(s)}{s}\right|_{s=0} = \frac{1}{3}$

OSS.

IL FATTO CHE HO $\left.\frac{W(s)}{s}\right|_{s=0}$ AGGIUNGE LA NECESSITÀ DI AGGIUNGERE

UN NUOVO PARAMETRO! (ASSEGNAZIONE AUTOV. FINALE + VINCOLO CHE $\left.\frac{W(s)}{s}\right|_{s=0} = \frac{1}{3}$)

IN QUESTO CASO: N° PARAMETRI $= d_W + 1$

$$d_W = \underbrace{d_F + d_H}_{} = d_F + 1 \longrightarrow \ = d_F + 2$$

INFATTI I GRADI DEI DEN. SONO SEMPRE ≥ DI QUELLI DEI NUM.

$d_F + d_H \geq m_F + m_H$

POSSO ARRANGIARE LA STRUTTURA DI $G(s)$:

$$G(s) = \frac{a}{s+2} \longrightarrow F = \frac{\frac{1}{3}a}{s-1} \quad \text{NO!} \quad N° \text{ PAR.} = 2 \ (H \text{ e } a) \neq d_F + 2 = 3$$

$$G(s) = \frac{as+b}{s+2} \longrightarrow F = GP = \frac{1}{3}\frac{as+b}{s-1} \quad \text{OK!} \quad N° \text{ PAR} = 3 = d_F + 2 = 3$$

$$\left.\frac{W(s)}{s}\right|_{s=0} = \left.\frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{\frac{1}{3}(as+b)\cdot \cancel{s}}{\frac{1}{3}(as+b)H + (s-1)s}\right|_{s=0} = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{1}{H} = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow H = 3$$

ORA ASSEGNO GLI AUTOV. DI W IN MODO DA RENDERLI TUTTI -2 (PER SODDISFARE LA SPECIFICA γ)

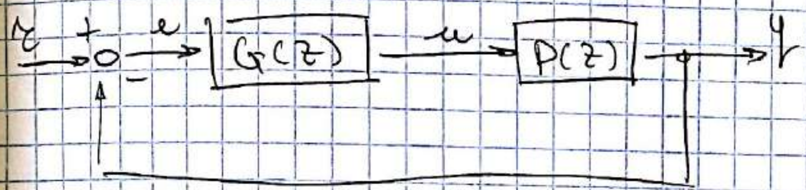
$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = (s+2)^2$$

$$\frac{1}{\cancel{3}}(as+b)\cancel{3} + (s-1)s = (s+2)^2 \longrightarrow s^2 + s(a-1) + b = s^2 + 4s + 4 \quad \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$$

ABBIAMO OTTENUTO COSÌ:
$$\begin{cases} \alpha = 1/3 \\ h = 3 \\ G(s) = \dfrac{5s+4}{s+2} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \text{AUTOV.} \\ \text{SISTEMA} \\ \text{COMPL.} \end{Bmatrix} = \{ \underbrace{-2}_{\text{NASC. OSS}} ; \underbrace{-2}_{\text{OSS NASC}} ; \underbrace{-2 ; -2}_{\text{NON NASCOSTI}} \}$$

Ex



$$G(z) = k\,\frac{z+a}{z+b} \qquad P(z) = \frac{z-2}{(z-1)(z+0{,}5)}$$

DETERMINARE k, a, b t.c.

α) ERRORE $e(k)$ CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $r(k) = 1(k)$ SI ANNULLI NEL PIÙ BREVE TEMPO POSSIBILE 'ℓ'

β) IL SIST. COMPLESSIVO SIA ASINT. STABILE

$$e(z) = W_e(z) \cdot r(z)$$

$$\frac{S(z)}{z^{\ell-1}} = \frac{D_F}{N_F + D_F} \cdot \frac{z}{z-1}$$ MOLTIPLICO AMBO I MEMBRI PER $\frac{z-1}{z}$ $$\frac{S(z)(z-1)}{z^{\ell}} = \frac{D_F}{N_F+D_F} \longrightarrow \begin{cases} S(z)\cdot(z-1) = D_F \\ z^{\ell} = N_F + D_F \end{cases}$$

$$G(z) = k\,\frac{z+0{,}5}{z+b} \Rightarrow F(z) = G(z)\cdot P(z) = k\,\frac{\overbrace{z-2}^{N_F}}{\underbrace{(z+b)(z-1)}_{D_F}} \qquad N_F + D_F = k(z-2) + (z+b)(z-1) = z^2$$

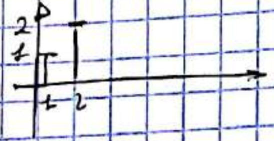
$$z^2 + (k+b-1)z - 2k - b = z^2$$

$$\begin{cases} k+b-1 = 0 \\ -2k - b = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

CALCOLIAMO IL TRANSITORIO:

$$e(z) = W_e(z)\cdot r(z) = \frac{D_F}{N_F+D_F}\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{(z+2)\cancel{(z-1)}}{z^2}\cdot\frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}} = \frac{z+2}{z} = 1+\frac{2}{z}$$

$$e(k) = \delta(k) + 2\,\delta(k-1)$$

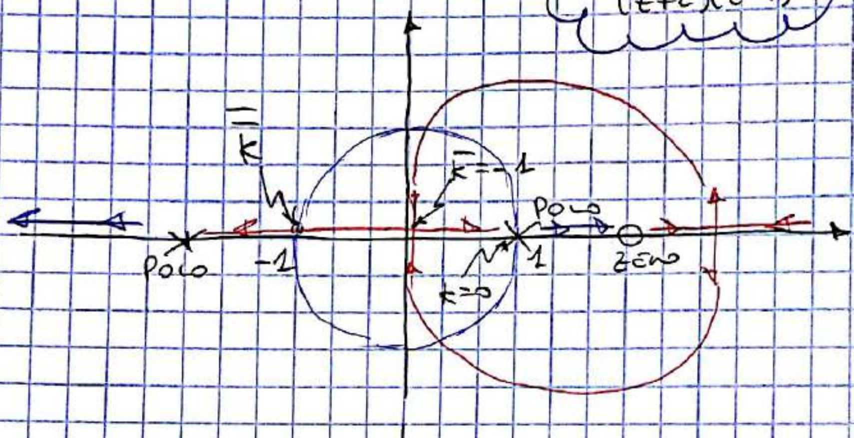


SCELTI I PARAMETRI a e b, TRACCIAMO IL LUOGO DELLE RADICI e DALL'ISPEZIONE DEL LUOGO DETERMINIAMO PER QUALI VALORI DI K IL SIST. È ASINTOTICAMENTE STABILE ~~[illegible]~~ e TUTTI GLI AUTOV. REALI

TRACCIO IL LUOGO DI $F = k\,\frac{z-2}{(z+2)(z-1)}$

$n = 2$

$z = 1$



IL SIST. È AS. STABILE e TUTTI GLI AUTOV. ~~[illegible]~~ REALI

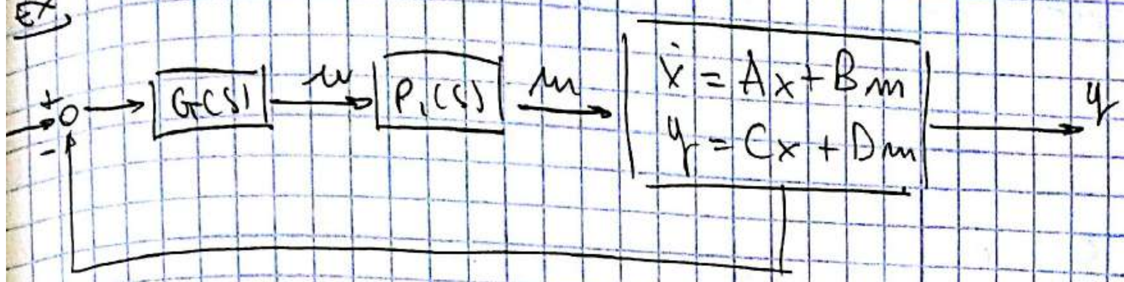
Se $\bar{k} < k < \bar{\bar{k}}$

COME TROVO $\bar{\bar{k}}$? SOSTITUISCO $z = -1$ IN $k(z-2)+(z+2)(z-1)=0$ $(N_F+D_F=0)$

$\longrightarrow \bar{\bar{k}} = -2/3$

OK,
L'ALTRO RAMO SAREBBE VERO TRA $k=0$ e $k=-1$, QUINDI PIÙ GRANDE

EX.



Si determinino "a" e "b" e un controllore $G(s)$ a dim. minima t.c.:

1) il processo abbia 2 autovalori nascosti
2) il pol. caratteristico del sistema complessivo sia:

$(\lambda+1)^2(\lambda+2)(\lambda+4)(\lambda+6)$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 1) \quad D = 1$$

$$P_1(s) = \frac{s-2}{s(s+b)}.$$

(pezzo non svolto in aula)

$$\lambda = a \begin{cases} \nexists \text{ragg. se } a = -2 \\ \text{ragg. se } a \neq -2 \end{cases}$$

sempre oss.

$\lambda = 1$ sempre ragg.

$$\begin{cases} \text{inoss. se } a = 3 \\ \text{oss se } a \neq 3 \end{cases}$$

Scelgo $a = -2$ in modo da creare un autoval. nascosto (uno dei due richiesti) nel processo.

$$P_2(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s+4}{s-1}$$

A questo punto scelgo $b = 4$ in modo da creare il secondo autov. nascosto richiesto.

$$P = P_1 P_2 = \frac{s-2}{s\cancel{(s+4)}} \cdot \frac{\cancel{s+4}}{s-1} = \frac{s-2}{s(s-1)}$$

ORA DEVO SCEGLIERE UNA STRUTTURA DI $G(S)$ IN MODO DA FARE L'ASS. DEGLI AUTOVALORI

N° PARAMETRI $= \partial W = \partial F$

SCELGO $G(S) = \dfrac{cS+d}{S+e}$, IN QUESTO MODO $F = \dfrac{(cS+d)(S-2)}{S(S-1)(S+e)}$

$\partial F = 3 = N^{\circ}$ PARAMETRI $\longrightarrow$ ok!

$W(S) = \dfrac{N_F}{N_F+D_F}$ $\quad D_W = N_F + D_F = (cS+d)(S-2) + S(S-1)(S+e) =$

$= (S+1)^2(S+6)$

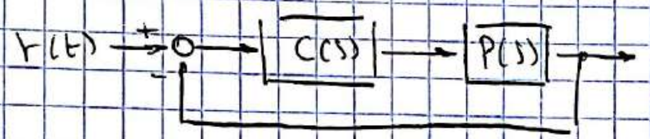
: CALCOLI

$c = -25$

$d = -3$

$e = 34$

EX.



$C(S) = K \quad P(S) = \dfrac{10(S+1)}{S(S-1)(S+10)}$

TROVARE K t.c.:

1) ERRORE A REGIME PERMANENTE CORRISPONDENTE A INGRESSI A GRADINO SIA NULLO

2) ASINTOTICAMENTE STABILE

3) MARGINE DI FASE φ_m MASSIMO

4) ω_t PULSAZIONE DI ATTRAVERSAMENTO $= 2 \frac{rad}{s}$ o $5 \frac{rad}{s}$ o $20 \frac{rad}{s}$

5) VERIFICARE IL PUNTO 2 TRAMITE NYQUIST

ORA GUARDIAMO CRITERI DI TIPO K

LA 1) È AUTOMATICAMENTE VERIFICATA GRAZIE AL POLO IN ZERO IN $P(S)$.

2) CALCOLO $D_W = N_F + D_F$

$$D_W = s(s-1)(s+10) + 10k(s+1) = s^3 + 9s^2 + s(k10-10) + 10k$$

APPLICHIAMO ROUTH

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 10k-10 \\ 2 & 9 & 10k \\ 1 & \frac{10k-9(10k-10)}{-9} & 0 \\ 0 & 10k & \end{array}$$

$$\begin{cases} 10k>0 \longrightarrow k>0 \\ \frac{10k-9(10k-10)}{-9} > 0 \longrightarrow 10k-9(10k-10)<0 \end{cases}$$

$\boxed{k > 9/8}$

3) $\varphi_m = 180^\circ + \angle F(j\omega_t)$

DEVO ~~CALCOLARE~~ SCEGLIERE ω_t t.c. φ_m è MASSIMO

~~XXXXXXXX~~

RISCRIVO $P(s)$ IN FORMA DI BODE (k è positivo e con fase nulla $\Rightarrow$ NON INFLUISCE NEL CALCOLO DELLA FASE)

$$P(s) = -\frac{(1+s)}{s(1-s)(1+\frac{s}{10})}$$

$$\angle F(j\omega_t) = -180^\circ + \arctan(\omega_t) - 90^\circ + \arctan(\omega_t) + - \arctan(0{,}1 \cdot \omega_t) =$$

$$= -270^\circ + 2 \cdot \arctan \omega_t - \arctan(0{,}1\omega_t) = \begin{cases} -154{,}4^\circ & \text{per } \omega_t = 2 \frac{rad}{s} \\ -139{,}2^\circ & \text{per } \omega_t = 5 \frac{rad}{s} \\ -159{,}2^\circ & \text{per } \omega_t = 20 \frac{rad}{s} \end{cases}$$

PER $\omega_t = 5$ rad/s

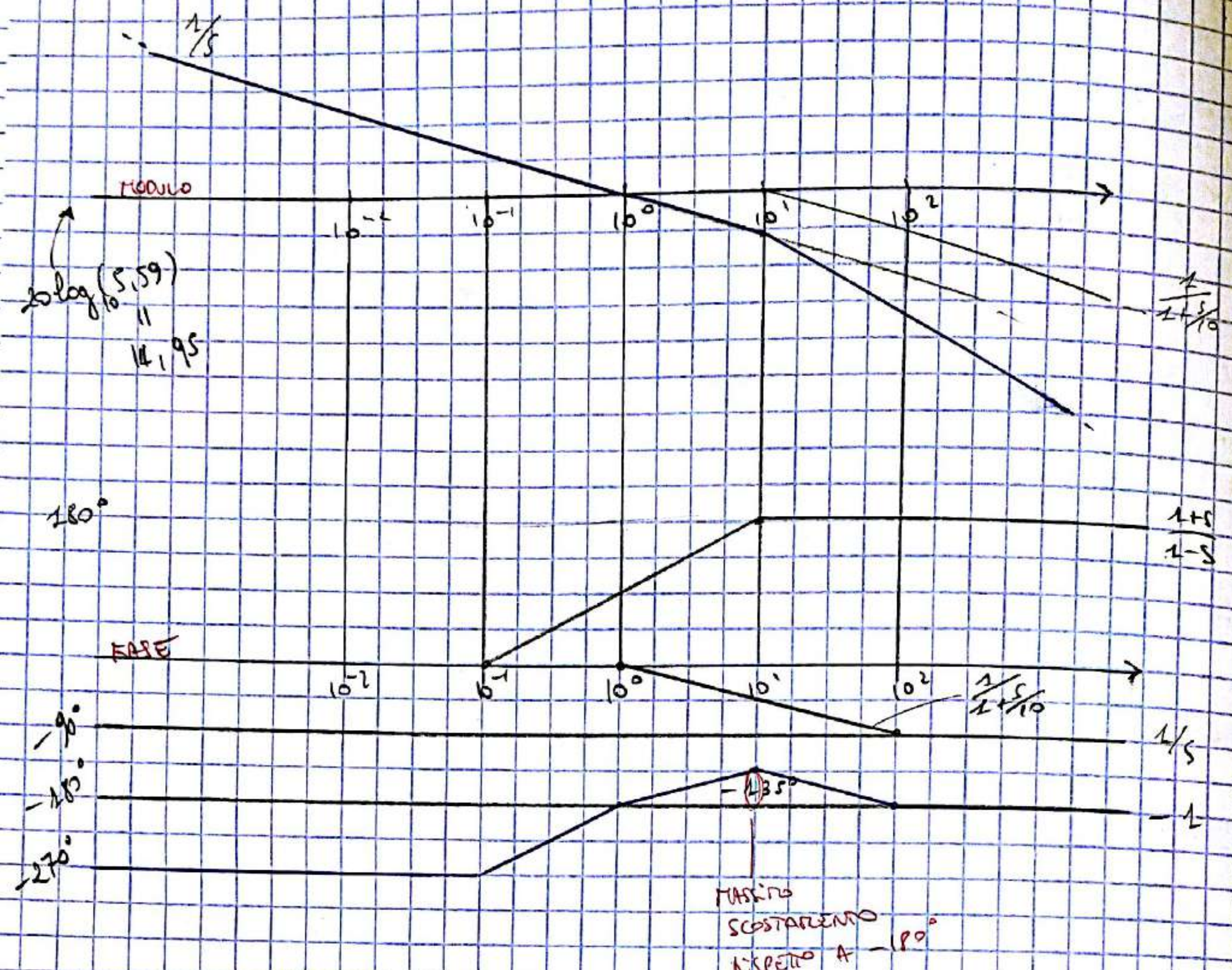
φ_m è MASSIMA

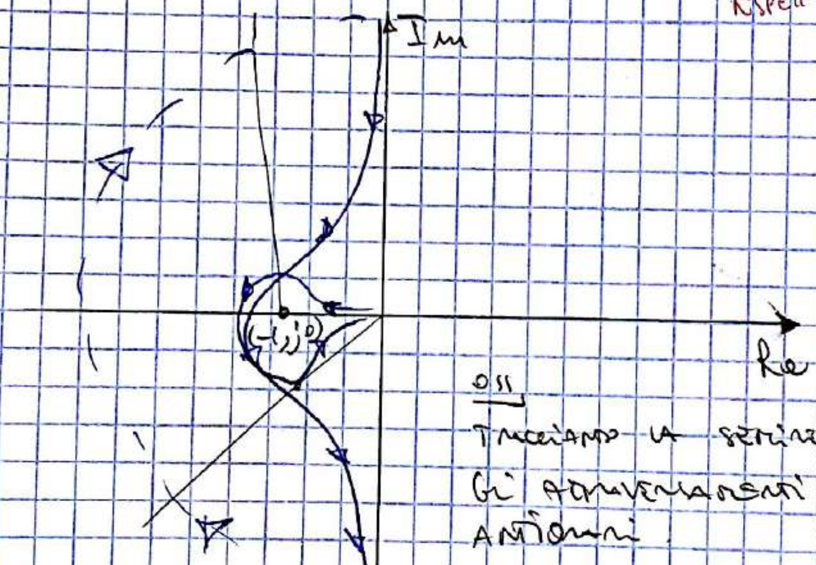
RICAVIAMO k APPLICANDO LA DEF. DI ω_t

$\omega_t : |F(j\omega_t)| = 1$

$$\frac{k\sqrt{26}}{5\sqrt{26} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4}}} = 1 \longleftrightarrow \boxed{k \cong 5{,}59}$$

$\varphi_m = 40{,}8^\circ = -139{,}2^\circ - 180^\circ$





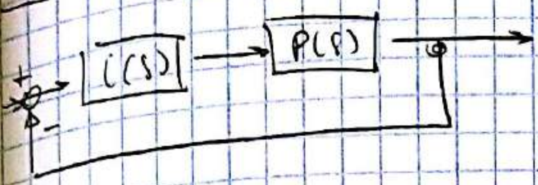
OSS.

TRACCIANDO LA SEMIRETTA CONTIAMO **NEGATIVI** GLI ATTRAVERSAMENTI **ORARI** E **POSITIVI** QUELLI ANTIORARI

OSS.

PER CAPIRE DOV'È (-1, j0) VEDIAMO IL DIAGRAMMA DI BODE: SE QUANDO IL DIAGRAMMA DELLE FASI ATTRAVERSA -180° IL MODULO È >1 ⟹ (-1, j0) È ALL'INTERNO DELLA 'PALLETTA'

EX



$$C(s) = -\frac{1}{a} \cdot \frac{s-a}{s-b}$$

$$P(s) = \frac{1}{s-1}$$

TROVARE a e b t.c.

1) MODULO ERRORE A REGIME PERMANENTE RAMPA $r(t)=t$ SIA ≤ 2

2) AS. STABILE

3) $|a| = \{0{,}1 \, , 1, 10\}$

4) VERIFICARE LA STABILITÀ CON IL DIAG. DI N.

1) $$W_e(s) = \frac{1}{1+C \cdot P} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a} \cdot \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{1}{s-1}} = \frac{a(s-b)(s-1)}{a(s-b)(s-1) - (s-a)}$$

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} e(s) \cdot s = \lim_{s \to 0} W_e(s) \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \cancel{s} = \lim_{s \to 0} \frac{a(s-b)(s-1)}{a\, s[(s-b)(s-1) - s(s-a)]}$$

VEDIAMO SUBITO CHE $b=0$ (INFATTI ALTRIMENTI L'$1/s$ RENDE IL LIMITE NON FINITO)

... CONTI ... $= -1$

$|e_\infty| = 1 \leq 2$ OK! SIAMO STATI SEMPLICEMENTE FORTUNATI

2)

CALCOLIAMO $D_W = N_F + D_F = -(s-a) + as(s-1) = as^2 - (a+1)s + a$

$$\begin{cases} a < 0 \\ a+1 > 0 \\ a < 0 \end{cases} \quad \text{OR} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a+1 < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

IMP!

$-1 < a < 0$

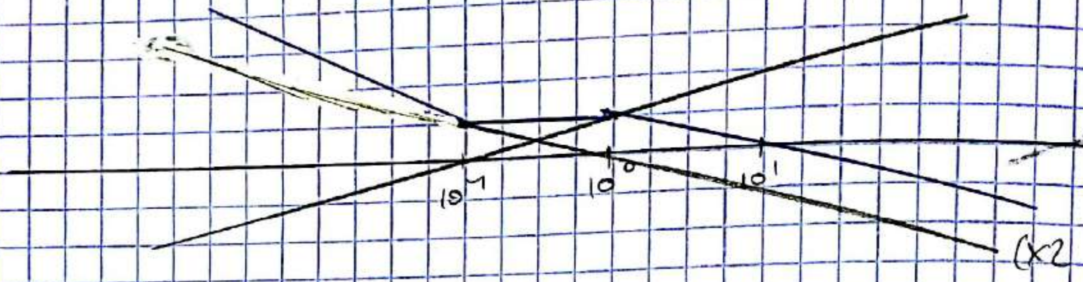
↳ PER RISPETTARE LA TERZA SPECIFICA SCELGO $a = -0{,}1$

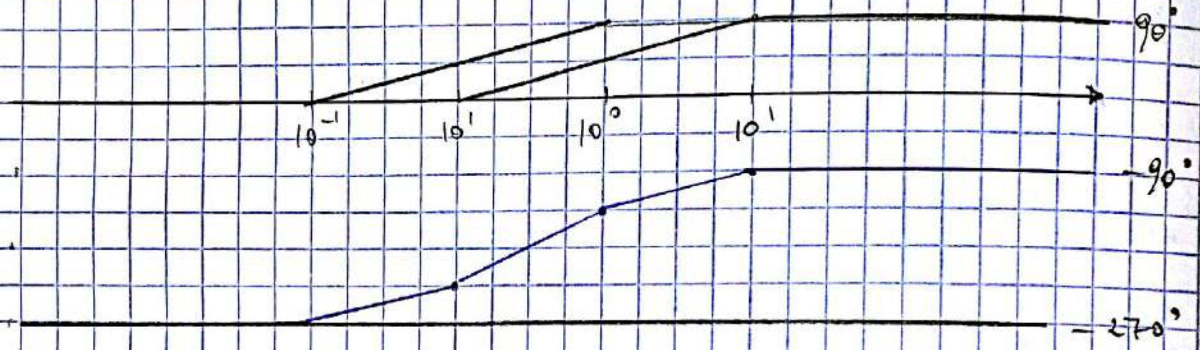
QUINDI:

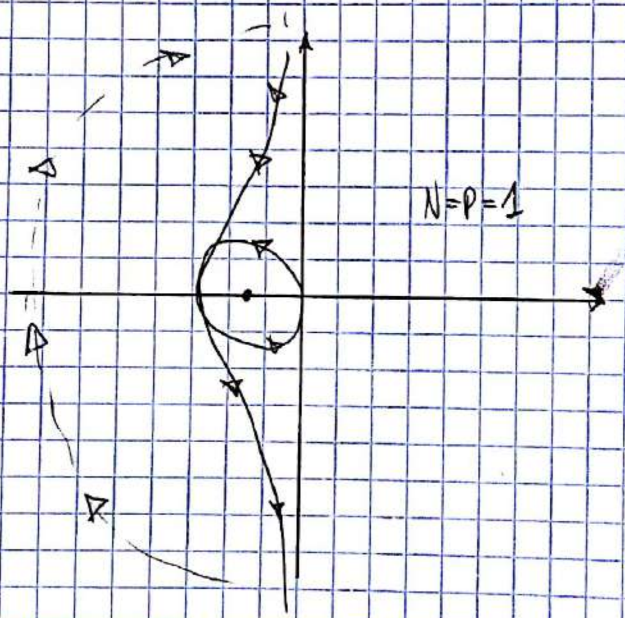
$$C(s) = 10 \, \frac{s+0{,}1}{s} = 10 + 1/s$$

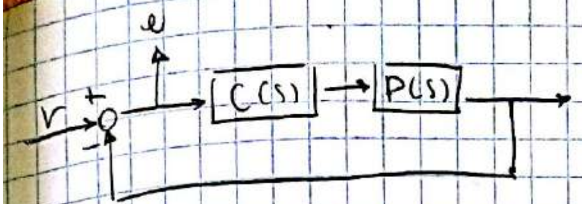
SCRIVIAMO F(S) IN FORMA DI BODE:

$$F(S)=\cancel{4}\;\frac{1+10S}{S(1+S)}$$









$C(s) = k$

$P(s) = \dfrac{(s+1)^2}{s^3}$

a. TROVARE k t.c.:

1) $\omega_t \leq 10$
2) m_φ più grande possibile e calcolarne il valore
3) stabilità armonica

b. TROVARE k t.c.

1) ω_t minore possibile
2) il sistema sia stabile asint.

c. TRACCIARE BODE e N. sulla domanda a.

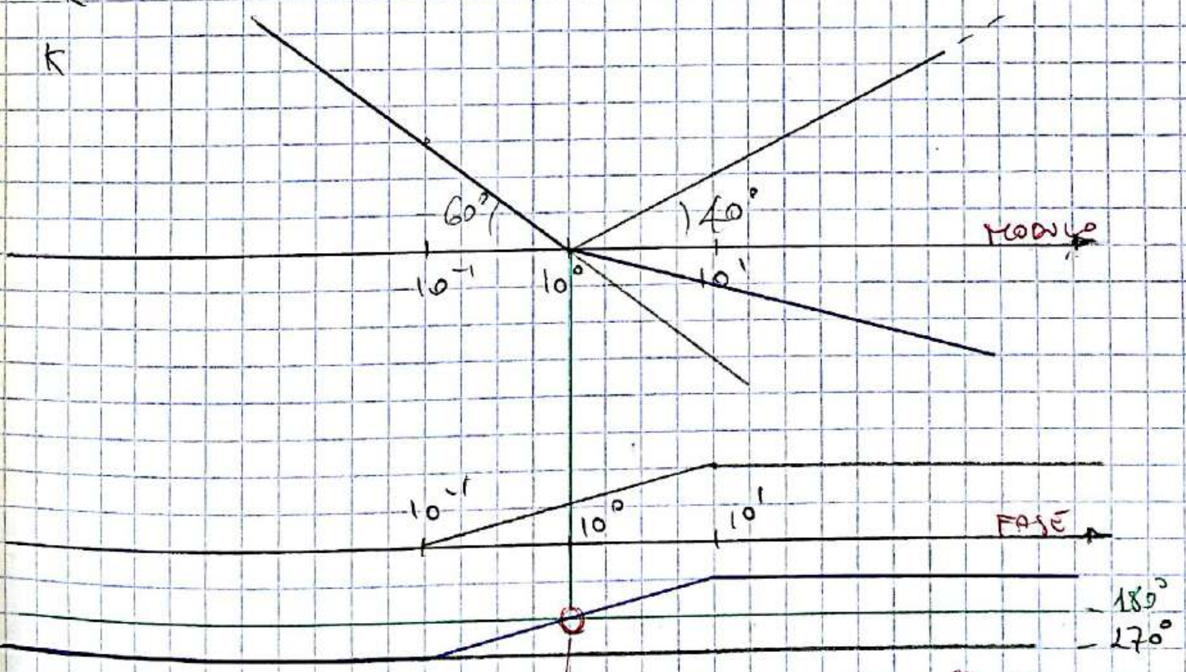
STABILITÀ

$$W = \frac{kP}{1+kP} = \frac{F}{1+F} = \frac{N_F}{N_F + D_F} \longrightarrow D_W = s^3 + k(s+1)^2 = s^3 + ks^2 + 2sk + k$$

CRITERIO DI ROUTH

3	1	$2k$
2	k	k
1	$\frac{k-2k^2}{-k}$	0
0	k	

$$\begin{cases} k > 0 \\ \dfrac{k(1-2k)}{-k} > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ 2k - 1 > 0 \end{cases} \qquad k > \tfrac{1}{2}$$



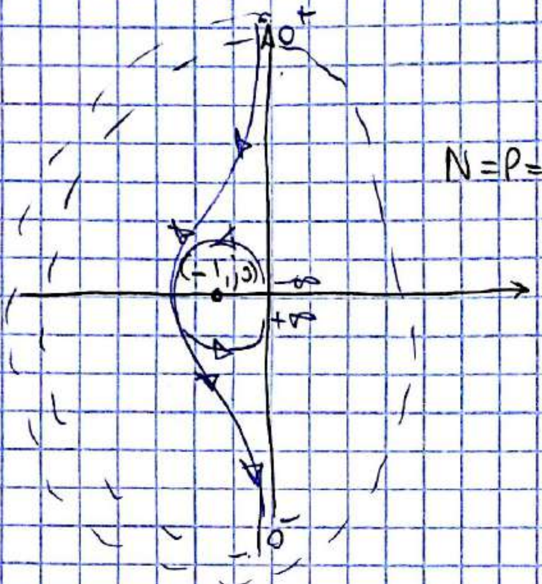
Il margine di fase è circa zero!
Il sist. non è asint. stabile

$\omega_t : |F(j\omega_t)| = 1$

$$\frac{k(1+100)}{1000} = \frac{101k}{1000} = 1 \longrightarrow \boxed{k = \frac{1000}{101} = 9,9}$$

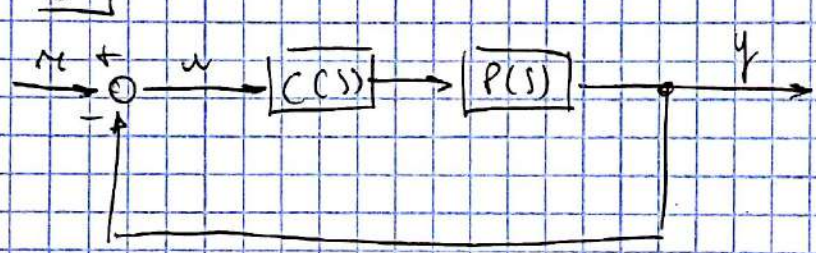
QUINDI $\omega_t = 10$ SE $k = 9,9$

$M_\varphi = 180° + \angle F(j10) = \dots = 78,57°$



$N = P = 0$ OK!

EX.



$P(S) = \frac{1}{S(S-1)}$

TROVARE $C(S)$ A DIMENSIONE FINITA t.c.

1) S AS. STABILE CON POLINOMIO CARATTERISTICO $S^4 + 9S^3 + 10S^2 + 40S + 20$

2) ERRORE "e" A REGIME PERMANENTE NULLO PER $R(t) = t$

3) BODE + N.

$C(S) = \frac{k}{S^m} C'(S)$

PER LA 2) → METTO UN POLO IN $C(S)$ IN ZERO

ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVAL.

$D_W = N_F + D_F = N_C + S^2 D_C (S-1) = S^4 + 9S^3 + 10S^2 + 40S + 20$

PER RISOLVERE LA DIOFANTINA IN N_c E IN D_c DEVO AVERE COMPLESSIVAMENTE 5 PARAMETRI

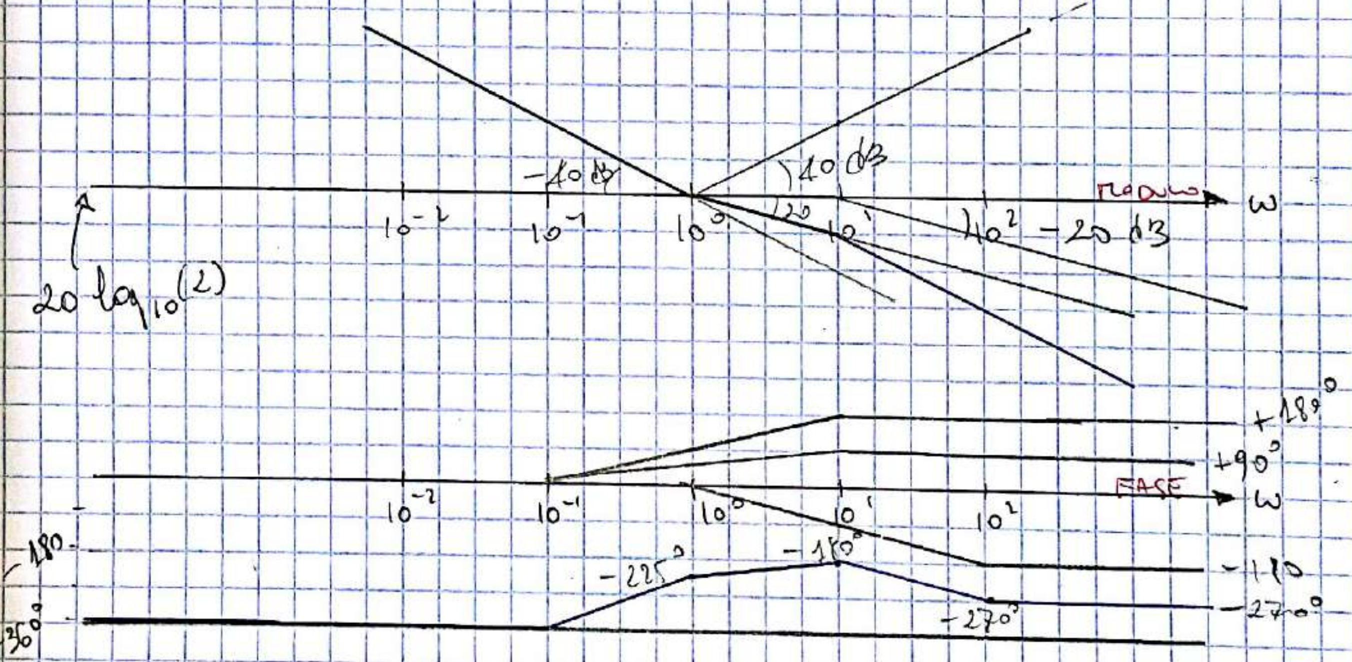
$N_c : as^2 + ds + e$

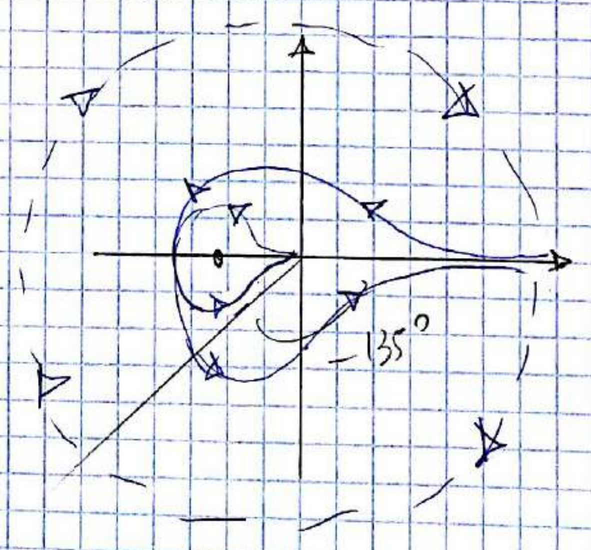
$D_c : s(as+b)$

$$s^2(as+b)(s-1) + cs^2 + ds + e = s^4 + 9s^3 + 10s^2 + 40s + 20$$

: calcoli

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 10 \\ c = 20 \\ d = 40 \\ e = 20 \end{cases} \Longrightarrow F(s) = \frac{20(s+1)^2}{s^2(s+10)(s-1)} = -2\frac{(1+s)^2}{s^2(1+0.1s)(1-s)}$$





OSS.
PER CAPIRE DOV'È IL PUNTO $(-1, j0)$ GUARDO SEMPRE I DIAGRAMMI DI BODE

$N = P = 1$