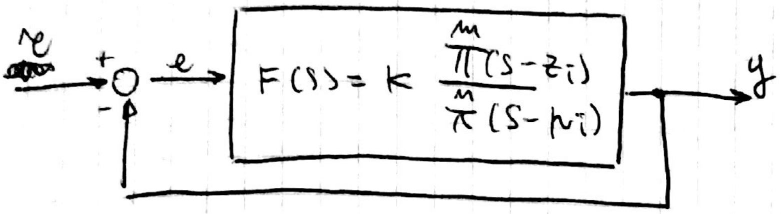
LUOGO DELLE RADICI:



EX

$$F(s) = k \frac{(s+1)(s-1)}{s^2(s+3)} \qquad m = 2 \quad n = 3 \qquad z_1 = -1 \quad z_2 = 1 \qquad p_1 = p_2 = 0 \quad p_3 = -3$$

$$W(s) = \frac{N_F}{N_F + D_F} \longrightarrow D_W = N_F + D_F = \underbrace{k \prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}_{N_F} + \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}_{D_F}$$

IL LUOGO DELLE RADICI DESCRIVE COME CAMMINANO SUL PIANO COMPLESSO LE n RADICI DI D_W AL VARIARE DI k

OSS

D_W È DI GRADO n, INFATTI PER LE FDT $n \geq m$

EX

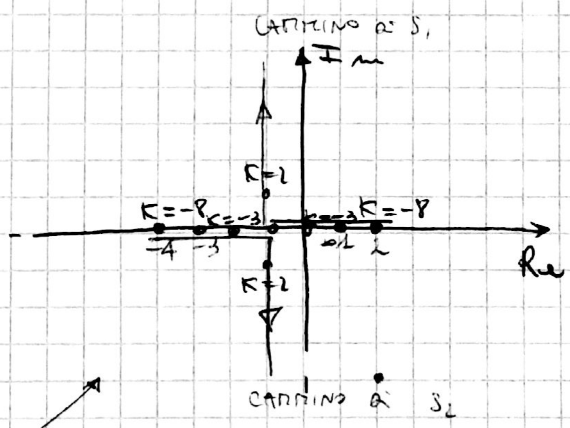
$$F(s) = k \frac{1}{s(s+2)} \qquad m = 0 \quad n = 2 \qquad p_1 = 0, \; p_2 = -2$$

$$D_W = N_F + D_F = k + s(s+2) = s^2 + 2s + k = 0$$

$$s_1 = -1 + \sqrt{1 - k}$$
$$s_2 = -1 - \sqrt{1 - k}$$

k	s_1	s_2
-8	2	-4
-3	1	-3
0	0	-2
1	-1	-1
2	$-1+j$	$-1-j$
5	$-1+2j$	$-1-2j$

LI GRAFICO



(*)
CAMMINO DELLA RADICE: SI METTE UN VERSO (QUELLO DELLE k CRESCENTI)

OSS
ORA DAL LUOGO DELLE RADICI DISEGNATO POSSO VEDERE PER QUALI VALORI DI k IL SISTEMA È STABILE E PER QUALI NON LO È

IL SISTEMA È STABILE ASINTOTICAMENTE SE $k > 0$

OSS
CI SONO DELLE REGOLE PER TRACCIARE IL LUOGO DELLE RADICI

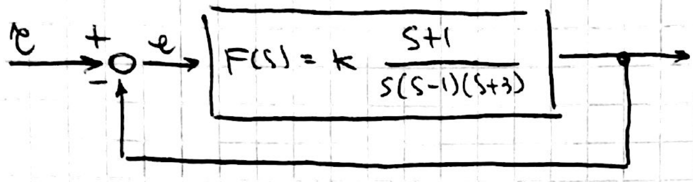
Def: LUOGO POSITIVO ———— lo indico con

PARTE DEL GRAFICO CHE CORRISPONDE A VALORI POSITIVI DI K   PARTENZA 0 ARRIVO $+\infty$

Def: LUOGO NEGATIVO ———— lo indico con

PARTE DEL GRAFICO CHE CORRISPONDE A VALORI NEGATIVI DI K   PARTENZA $-\infty$ ARRIVO 0

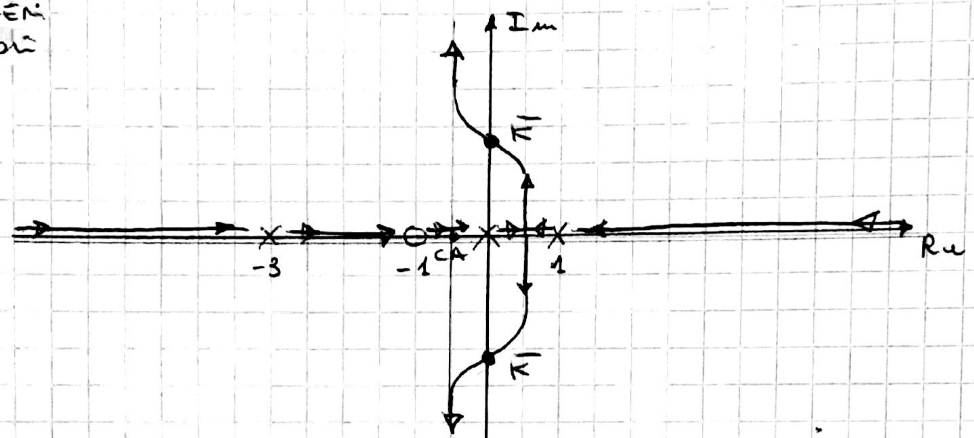
EX



$m = 1$ $z_1 = 1$

$n = 3$ $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = -3$

O : ZERI
X : POLI



- OGNI VOLTA CHE INCONTRO UNO ZERO O UN POLO IL LUOGO PASSA DA NEGATIVO A POSITIVO E VICEVERSA
- PARTO DA $+\infty$ (NEGATIVO) E VADO FINO A $-\infty$ SULL'ASSE X
- TUTTO L'ASSE X FA PARTE DEL LUOGO DELLE RADICI

	$n-m=1$	$n-m=2$	$n-m=3$
LUOGO POSITIVO		C.A.	
LUOGO NEGATIVO		C.A.	

o DISEGNO GLI ASINTOTI SEGUENDO LA TABELLA

$$C.A. = \text{CENTRO ASINTOTI} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

NELL'ESEMPIO: $n-m = 2$ e $C.A. = -\frac{1}{2}$

OSS

IL DENOMINATORE DI F(s) HA GRADO 3 ⟹ CI DOBBIAMO ASPETTARE 3 CAMMINI (IN REALTÀ 3 SEMICAMMINI NEGATIVI E 3 SEMICAMMINI POSITIVI)

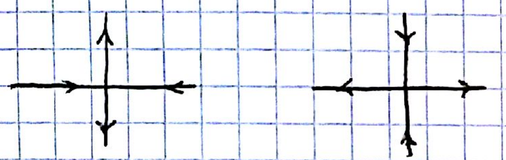
- GLI n SEMIGAMMINI (POSITIVI) PARTONO DA OGNUNO DEGLI n POLI
  (OSS: METTO LA 'FRECCETTA' VERSO LA PARTE POSITIVA DEL CAMMINO GIÀ TRACCIATO)

- I SEMIGAMMINI POSITIVI ARRIVANO O IN UN POLO O IN UN ASINTOTO (1 SOLO SEMIGAMMINO PER POLO E 1 SOLO SEMIGAMMINO PER ASINTOTO)
  (METTO LA 'FRECCETTA' ENTRANTE NELLO ZERO O IN ALTO O IN BASSO SULL'ASINTOTO)

OSS UN ASINTOTO HA DUE ARRIVI (I SUOI DUE CAPI)

OSS SE ABBIAMO DUE 'FRECCETTE' CHE SI SCONTRANO O DIVERGONO, ABBIAMO UN PUNTO SINGOLARE

- SE CI SONO SCONTRI O DIVERGENZE ACCADE QUESTO:



- COMPLETO A INTUITO IL DIAGRAMMA DEI SEMIGAMMINI POSITIVI

- GLI n SEMIGAMMINI (NEGATIVI) PARTONO O DAGLI ZERI O DAGLI ASINTOTI (UNO PER OGNI ZERO O ASINTOTO)
- GLI n SEMIGAMMINI NEGATIVI ARRIVANO AD OGNUNO DEGLI n POLI
- IL GRAFICO È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE REALE E SONO SIMMETRICI ANCHE I VALORI DI K

OSSERVIAMO IL GRAFICO → I SEMIGAMMINI NEGATIVI SONO DUE A SX DELL'ASSE Y E UNO A DX; I PRIMI VANNO BENE, IL TERZO NO. I SEMIGAMMINI POSITIVI VANNO BENE PER $K > \bar{K}$ OVE $\bar{K}$ È IL VALORE DI K PER IL QUALE IL LUOGO DELLE RADICI INCONTRA L'ASSE DEGLI IMMAGINARI.

NELL'ESEMPIO K NEGATIVO NON ANDRÀ MAI BENE! UNO ZERO RIMANE SEMPRE A DX DELL'ASSE PER $K \in (-\infty, 0)$

COME TROVIAMO $\bar{K}$?

SAPPIAMO CHE $D_W = N_F + D_F = k(s+1) + s(s-1)(s+3) =$

$$= s^3 + 2s^2 + s(k-3) + k = 0$$

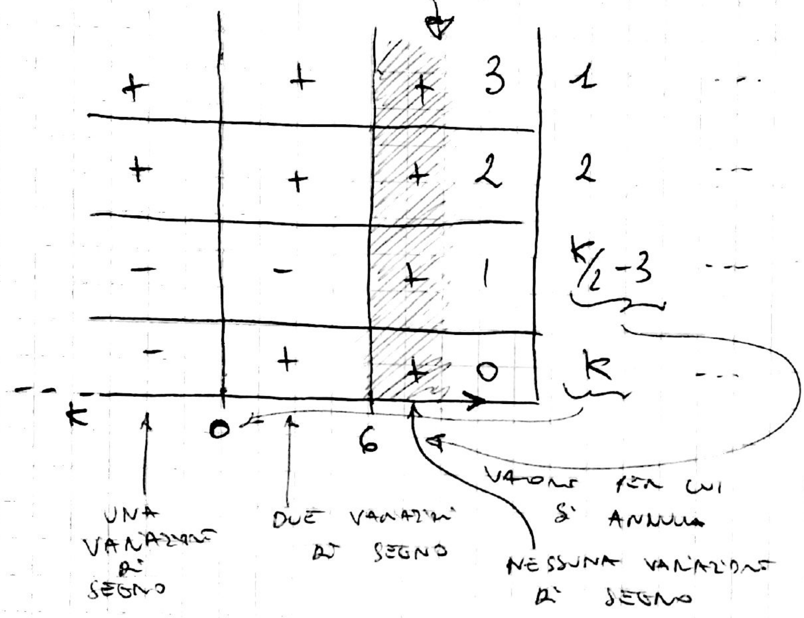
USO IL CRITERIO DI ROUTH

3	1	$k-3$
2	2	k
1	$\frac{k}{2}-3$	
0	k	

$$\begin{cases} \frac{k}{2} - 3 > 0 \\ k > 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{k > 6}$$

QUINDI SO CHE TUTTE LE SOLUZIONI HANNO PARTE REALE <0 SE $k>6$

$\bar{K} = 6$ È, QUINDI, IL VALORE LIMITE



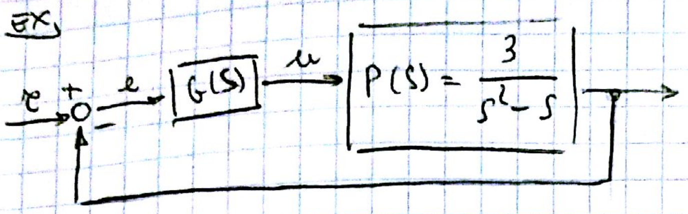
QUINDI:

PER $k \in (-\infty, 0)$ HO 1 RADICE A PARTE REALE > 0

PER $k \in (0, 6)$ HO 2 RADICI A PARTE REALE > 0

PER $k \in (6, +\infty)$ HO 0 RADICI A PARTE REALE > 0

EX)

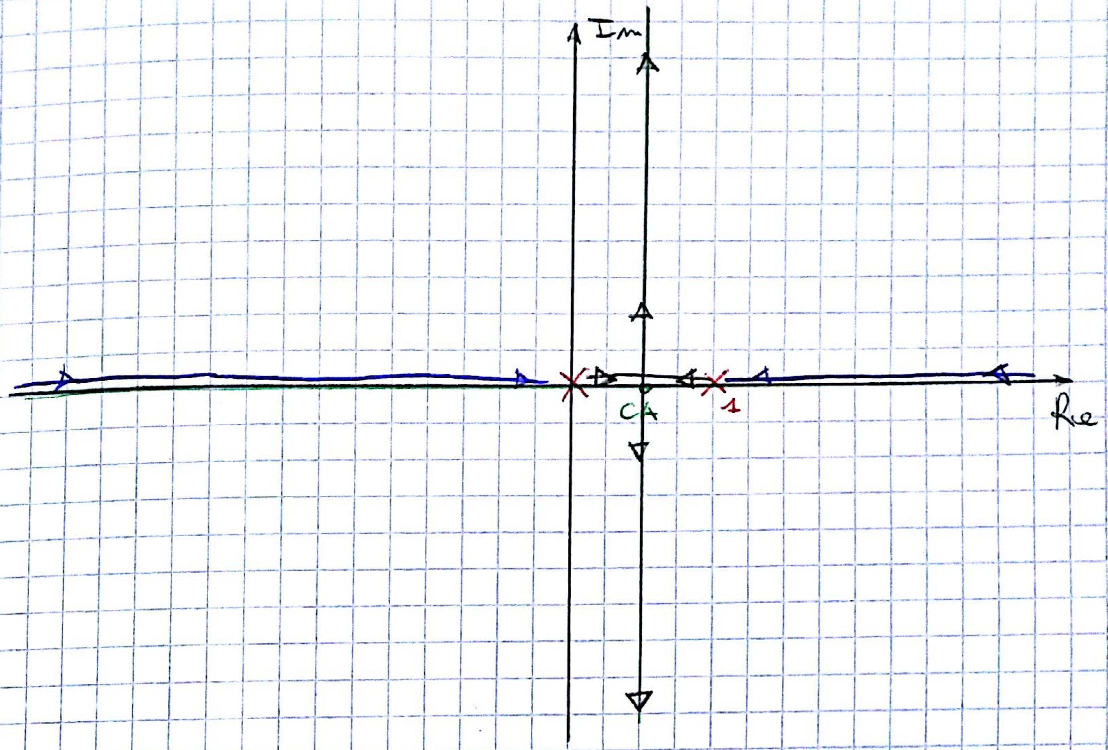


TROVARE G(S) IN MODO DA RENDERE STABILE IL SISTEMA COMPLESSIVO

$G(S) = \frac{K}{3} \implies F = G \cdot P = K \cdot \frac{1}{s(s-1)}$

$m = 0$

$n = 2 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = 1$



$n - m = 2 - 0 = 2$

$CA = \frac{\sum p - \sum z}{n-m} = \frac{1}{2}$

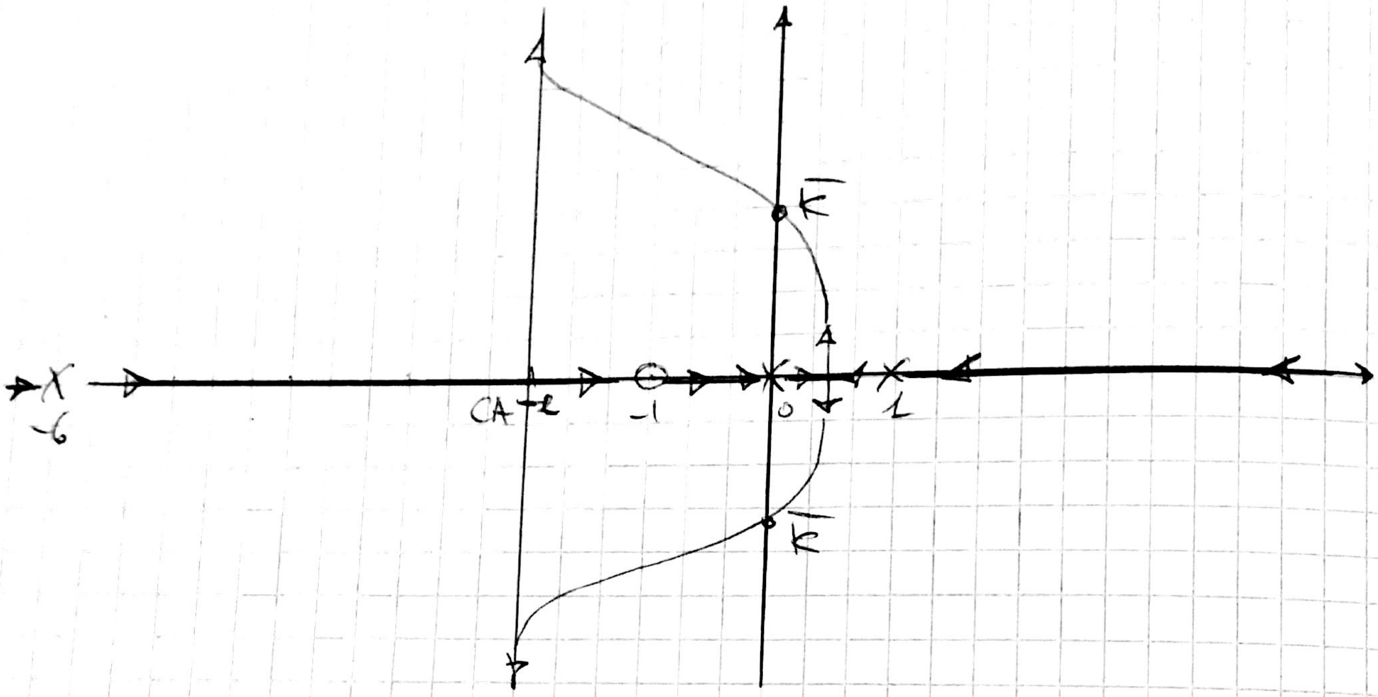
IL SISTEMA NON È STABILE PER NESSUN VALORE DI K!

DEVO AGGIUNGERE DEI POLI O/E DEGLI ZERI A G(S)

DAL MOMENTO CHE $CA = \frac{\sum p - \sum z}{n-m}$ SE INTRODUCO DEGLI ZERI IN MODO DA RENDERE $CA < 0 \longrightarrow$ L'ASINTOTO SI SPOSTA A SINISTRA ED ESISTERÀ UN $\bar{K}$ PER CUI PER $K > \bar{K}$ IL SISTEMA È STABILE

SCELGO AD ES $G(S) = \frac{K}{3} \cdot \frac{s+1}{s+6}$

RIFACCIO IL LUOGO


-6
CA
-2
-1
0
1