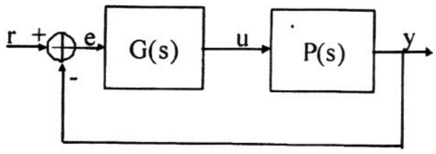
DELLI PRISCOLI (25/02/20)

667

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 4 aprile 2019

PROBLEMA 1

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $P(s) = \dfrac{1}{s-2}$.

A) Si determinino un controllore G(s) a dimensione minima in modo tale che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori in -1;
   β) la risposta "y" a regime permanente corrispondente al riferimento r(t) = sen t sia nullo.

B) Si disegni il luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto individuata nella domanda A), evidenziandone la congruenza con l'assegnazione degli autovalori di cui alla specifica α).

PROBLEMA 2

Si consideri il processo caratterizzato dalle equazioni:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Pz$$
$$y = Cx$$

con $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Il disturbo **z** è misurabile</u>.

A) Si progetti uno schema di controllo, a dimensione minima, in modo che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
   γ) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla;
   δ) l'errore "e" ("e" è l'ingresso del controllore G(s) che genera la variabile controllante "u") a regime permanente corrispondente ad un riferimento r(t) = t sia, in modulo, uguale a 0,1.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domande A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

TEMA

Si discutano le problematiche inerenti la modellizzazione di un processo fisico.

Soluzione del problema 1.

A) In base alla specifica β), la funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) deve avere un fattore s^2+1 a numeratore che, evidentemente, deve essere collocato nel controllore.

Per procedere all'assegnazione degli autovalori si deve quindi scegliere una struttura del controllore della forma:

$$G(s) = a\,\frac{s^2+1}{s^2+bs+c} \Rightarrow F(s) = G(s)P(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)} = a\,\frac{s^2+1}{(s^2+bs+c)(s-2)}$$

Per verificare la specifica α) si deve effettuare la seguente assegnazione degli autovalori:

$$D_W = N_F + D_F = (s^2+bs+c)(s-2) + a(s^2+1) = s^3+ s^2(a+b-2)+s(c-2b) + a-2c = (s+1)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{27}{5} = 5{,}4 \;;\; b= -\frac{2}{5} = -0{,}4 \;;\; c=\frac{11}{5} = 2{,}2$$

B) In base ai risultati della domanda A), la funzione di trasferimento ad anello aperto risulta:

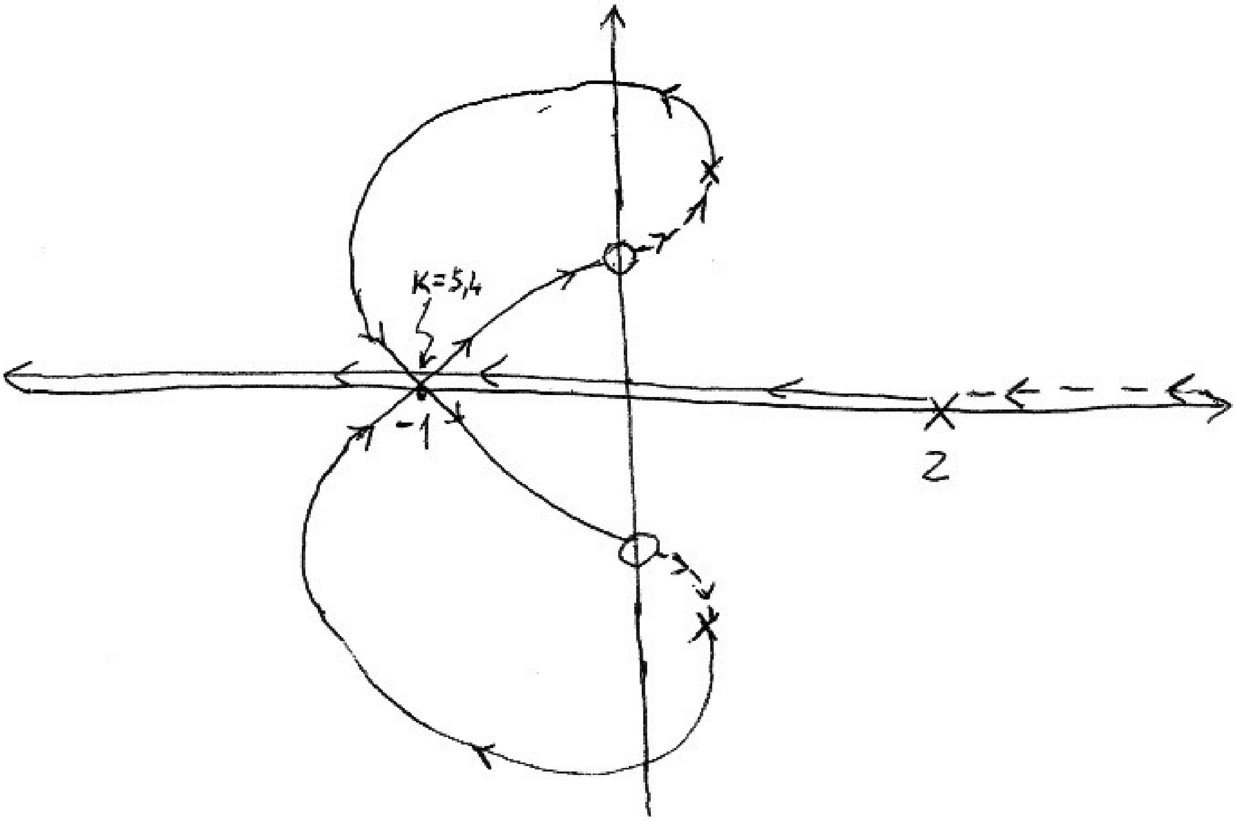
$$F(s) = 5{,}4\,\frac{s^2+1}{(s^2-0{,}4s+2{,}2)(s-2)} = 5{,}4\,\frac{s^2+1}{(s-0{,}2+j1{,}47)\,(s-0{,}2-j1{,}47)\,(s-2)}.$$

Quindi, il luogo delle radici da considerare è il seguente

$$F(s) = K\,\frac{s^2+1}{(s-0{,}2+j1{,}47)\,(s-0{,}2-j1{,}47)\,(s-2)}$$

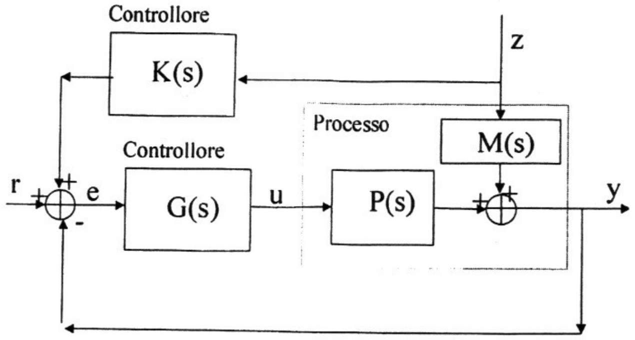
in cui, per assicurare la congruenza con la specifica α) della domanda A), si deve avere un punto singolare triplo in -1 in corrispondenza del valore K=5,4.

Il luogo delle radici richiesto è pertanto il seguente:



Soluzione del problema 2

A) In virtù del fatto che il disturbo è misurabile, si può realizzare il seguente schema di controllo:



Le funzioni di trasferimento che caratterizzano il processo sono:

$$P(s) = M(s) = 4\,\frac{s + 0{,}5}{s\,(s - 1)}$$

Per soddisfare la specifica β), si può introdurre nel controllore G(s) un polo in s= -0,5 in modo da creare una cancellazione polo-zero in -0,5, tale da dar luogo ad un autovalore nascosto ragg. ed inoss.
Si può tentare allora di stabilizzare il sistema complessivo con un controllore G(s) a dimensione uno del tipo.

$$G(s) = \frac{as + b}{s + 0{,}5} \;\Rightarrow F(s) = 4\,\frac{as + b}{s\,(s - 1)}$$

Per soddisfare la specifica δ):
(i) la funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) = G(s) P(s) deve avere un polo in s=0 (condizione automaticamente soddisfatta da P(s));
(ii) deve risultare:

$$\left|\,\frac{W_e(s)}{s}\Big|_{s=0}\right| = \left|\,\frac{D_F}{N_F + D_F}\,\frac{1}{s}\Big|_{s=0}\right| = 0{,}1 \quad (*)$$

Con la scelta del controllore suddetta, la condizione (*) impone |b| = 2,5|
Applicando il criterio di Routh al polinomio

$$D_W = N_F + D_F = 4\,(as + b) + s\,(s - 1) = s^2 + s\,(4a - 1) + 4b$$

si deduce che, per stabilizzare il sistema complessivo, deve risultare a>1/4, b>0. Per soddisfare tutte le condizioni su "a" e "b" si deve quindi scegliere a > 1/4, b= 2,5.

Si deve infine scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)$=0 ottenendo la reiezione completa del disturbo. Svolgendo i conti si ottiene:

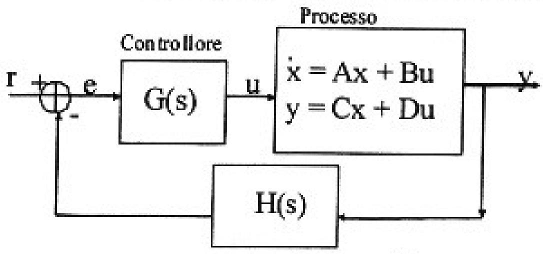
$$K(s) = -\,\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\,\frac{s + 0{,}5}{as + 2{,}5} \quad \text{con } a > 1/4$$

B) In base alle risultanze della domanda A), il polinomio caratteristico del sistema complessivo risulta pari a $(s + 0{,}5)\,[s^2 + s\,(4a - 1) + 10]$, con a>1/4, dove l'autovalore -0,5 è ragg. e inoss., mentre i due autovalori che sono radici del polinomio tra parentesi quadra sono ragg. ed oss.

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu)
Prova scritta del 12 giugno 2019

670

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il processo P(s) è caratterizzato dalle matrici: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [\ a \quad 1\ ]$.

Risulta inoltre $H(s) = \dfrac{s+3}{s+b}$

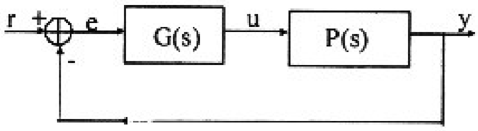
A) Si determinino i parametri "a" e "b", nonché un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> in modo che
   α) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   γ) la risposta y a regime permanente, in corrispondenza di un riferimento r costante, sia nulla.

B) Si determinino i parametri "a" e "b" ed un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> in modo che
   α) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto in -4;
   β) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori non nascosti in -2.

C) Si determinino i due polinomi caratteristici dei due sistemi complessivi individuati nelle domande A) e B). Si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità degli autovalori.

D) Si determini per quale valore del parametro "a" non è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato del processo. Inoltre, si determini per quale valore del parametro "a" è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato del processo, ma non è possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato reale e lo stato stimato del processo.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo:



con $P(s) = \dfrac{(s+1)}{s\,(s+2)^2}$.

A) Si determini un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> in modo che
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile (si tratti la stabilità asintotica con il <u>luogo delle radici</u>; si disegnino i luoghi di interesse);
   β) l'errore "e" a regime permanente, in corrispondenza di un riferimento $r(t)=t^2/2$, sia, in modulo, minore di 0,1;
   γ) tutti gli autovalori del sistema complessivo siano non nascosti.

B) Utilizzando il controllore individuato nella domanda A), si tracci il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto e, utilizzando il criterio di Nyquist, si verifichi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

TEMA

Si descrivano <u>due</u> applicazioni dell'automatica a scelta, utilizzando i concetti trattati durante il corso.

Soluzione del problema 1 671

Il processo ha due autovalori in -2 e +1. Entrambi gli autovalori sono ragg. Se a= -1 l'autovalore +1 diventa inoss.; se a=2 l'autovalore -2 diventa inoss.; per tutti gli altri valori di "a", entrambi gli autovalori sono oss.

A) Scegliendo a=2, l'autovalore -2 diventa ragg. ed inoss. e quindi la specifica α) è soddisfatta.

Con tale scelta, la funzione di trasferimento del processo è $P(s) = \frac{1}{s-1}$.

La funz. di trasf. del sistema complessivo è

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}, \quad \text{con } F(s) = G(s)\, P(s) = \frac{N_F}{D_F}\ , \quad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per soddisfare la specifica γ) è sufficiente scegliere b=0.

Scegliendo un controllore di dimensione zero G(s) = K, risulta:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = K(s+3) + s(s-1) = s^2 + s(K-1) + 3K$$

In base al criterio di Routh, il sistema è asint. stabile per K>1.

B) In base alle specifiche α) e β) l'autovalore nascosto deve essere necessariamente in -3. Quindi tale autovalore nascosto non può essere un autovalore intrinseco del processo.

La funzione di trasferimento del processo è:

$$P(s) = \frac{s+a}{(s+2)\,(s-1)}$$

Per soddisfare la specifica α), si deve necessariamente scegliere a=4 (creando uno zero di P(s) in -4), e creare una cancellazione tra un polo di G(s) in -4 e lo zero di P(s) in -4. Inoltre, per rendere risolubile l'equazione Diofantina necessaria per l'assegnazione degli restanti autovalori non nascosti in -2, si deve scegliere una struttura del controllore con un numero di parametri uguale a $d_W = d_F + 1$. Si noti che, nel conteggio del numero dei parametri, va' contato il parametro "b" poiché non ancora selezionato.

Tenendo conto di quanto sopra, la struttura corretta del controllore è la seguente:

$$G(s) = \frac{cs+d}{s+4} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{cs+d}{(s+2)\,(s-1)}$$

Si può quindi procedere all'assegnazione dei tre restanti autovalori (che necessariamente risulteranno non nascosti e quindi ragg. ed oss.) e risolvere con il principio di identità dei polinomi:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = (cs+d)(s+3) + (s+2)\,(s-1)\,(s+b) = (s+2)^3 \quad \Rightarrow \quad b=11/4\ ,\ c=9/4\ ,\ d=9/2$$

C) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo della domanda A) risulta pari a $(s + 2)\,[s^2 + s(K-1) + 3K]$, con K>1, dove l'autovalore -2 è ragg. e inoss., mentre i due autovalori che sono radici del polinomio tra parentesi quadra sono ragg. ed oss.

Il polinomio caratteristico del sistema complessivo della domanda B) risulta pari a $(s + 4)\,(s +2)^3$ dove l'autovalore -4 è ragg. e inoss., mentre i tre autovalori in -2 sono ragg. ed oss.

D) L'osservatore asintotico dello stato del processo esiste se tutti gli eventuali autovalori del processo sono a parte reale negativa; quindi, tale osservatore non esiste se a= -1.

Si può assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato reale e lo stato stimato del processo se tutti gli autovalori sono oss.; quindi, l'osservatore asintotico dello stato del processo esiste, ma non è possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza se a=2.

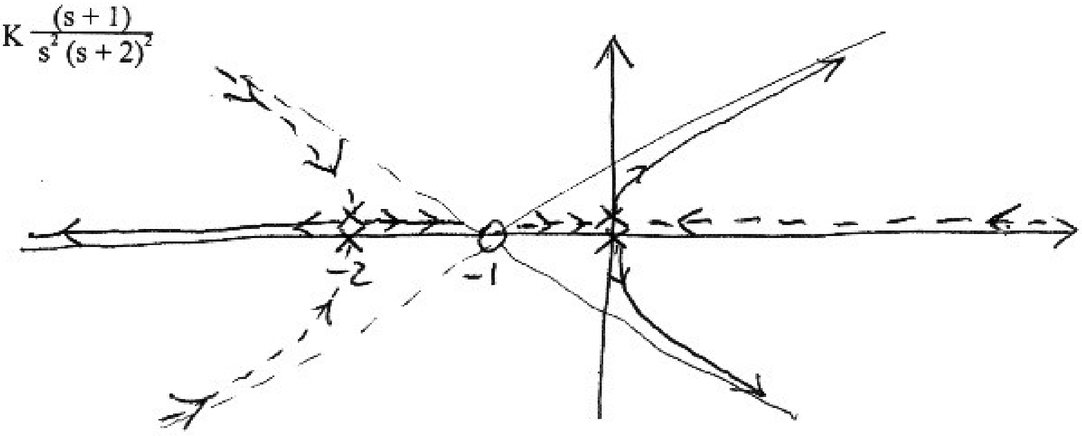
Soluzione del problema 2

A) Per soddisfare la specifica β) è necessario che la f. di trasf. di errore W_e abbia due zeri in s=0. Uno di tali zeri è già presente in D_P; conseguentemente, il secondo deve essere aggiunto in D_G (ossia, la G(s) deve avere un polo in s=0). Dovrà inoltre risultare:

$$\left| \frac{W_e(s)}{s^2}\Big|_{s=0} \right| = \left| \frac{D_F}{N_F + D_F} \frac{1}{s^2}\Big|_{s=0} \right| < 0{,}1 \qquad (*)$$

Conviene disegnare il luogo delle radici già tenendo in conto il suddetto polo "obbligatorio" della G(s) e quindi tracciare il luogo delle radici della seguente funzione:

$$F'(s) = K \frac{(s+1)}{s^2 (s+2)^2}$$



Dall'esame del luogo si constata che tutti gli zeri sono a parte reale neg., che la differenza poli-zeri (n-m) è uguale a 3, che il centro degli asintoti è a negativo. In questo caso la teoria del luogo delle radici suggerisce che per stabilizzare asintoticamente il sistema complessivo è sufficiente (i) aggiungere uno zero "z" nel controllore in modo tale che sia negativo (z < 0) e che faccia rimanere negativo il centro degli asintoti, (ii) scegliere K>0. La struttura del controllore (a dimensione 1) che consente di stabilizzare asintoticamente il sistema complessivo è quindi la seguente:

$$G(s) = K \frac{s - z}{s}$$

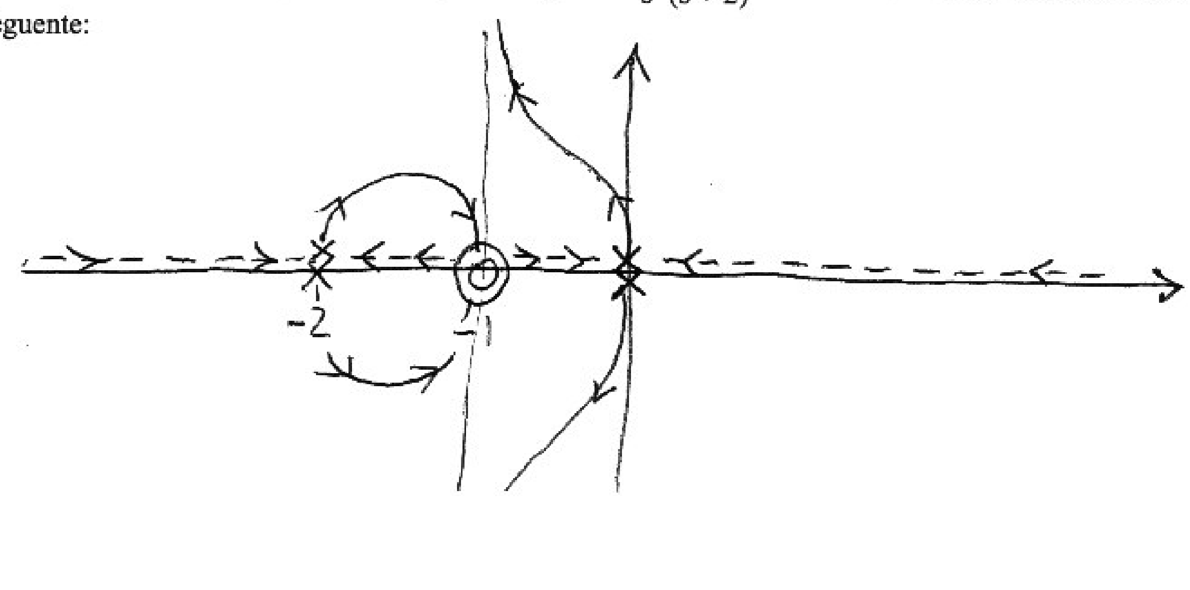
Si noti che sarebbe un errore aggiungere il cosiddetto "polo lontano" (1/(1+Ts)) poiché la G(s) diventerebbe a dimensione 2 (e quindi non minima); d'altra parte, anche senza l'aggiunta di tale polo lontano, il controllore G(s) non risulta improprio in virtù del polo in s=0.

Con la suddetta struttura del controllore, svolgendo i conti derivanti dalla condizione (*) si ottiene:

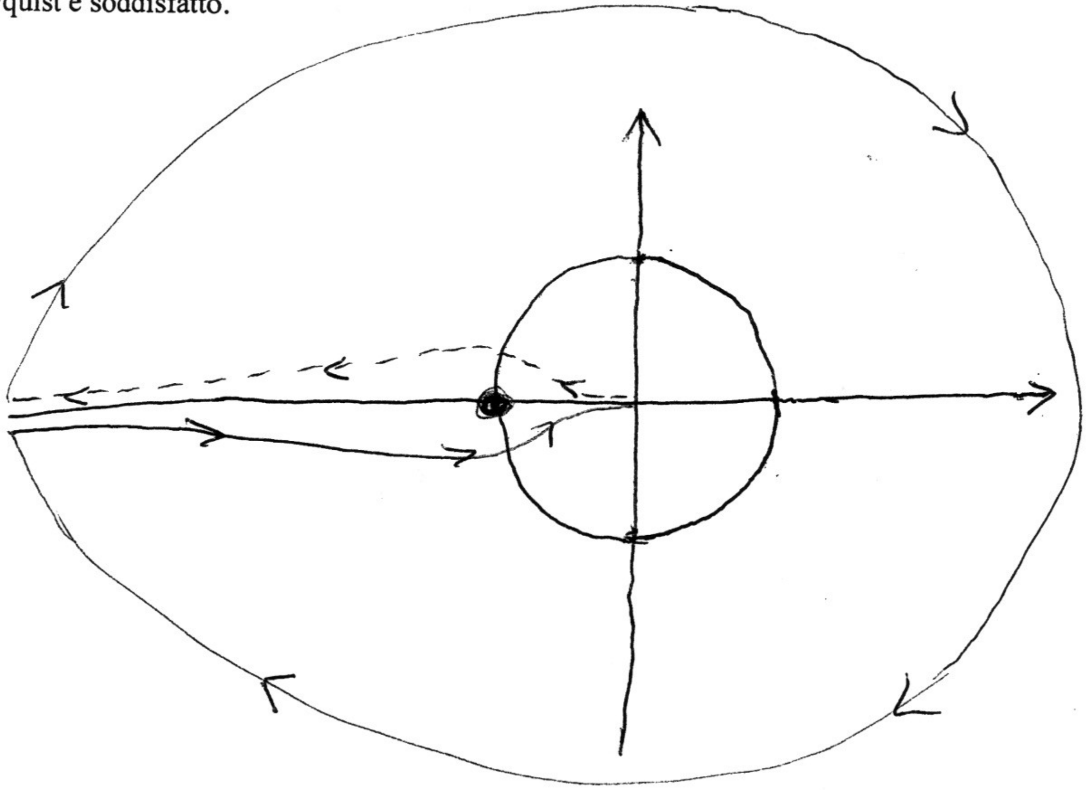
$|K\,z| > 40$

Tutte le suddette disequazioni sono soddisfatte scegliendo, ad esempio, z = -1 (con tale scelta il centro degli asintoti rimane in -1) e K > 40.

La f. di trasf. ad anello aperto risulta quindi $F(s) = K \frac{(s+1)^2}{s^2 (s+2)^2}$ con K>40. Il luogo delle radici relativo è il seguente:



B) Aiutandosi con i diagrammi di Bode della f. di trasf. ad anello aperto F(s), si può disegnare il seguente diagramma di Nyquist dal quale si constata che il numero di giri attorno al punto critico è pari a zero. Dato che è pari a zero anche il numero di poli a parte positiva della f. di trasf. ad anello aperto, il criterio di Nyquist è soddisfatto.

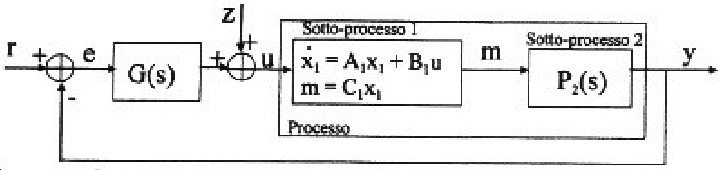


674

CONTROLLI AUTOMATCI

Prova scritta del 10 luglio 2019

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



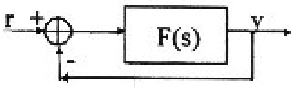
dove $A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_1 = [\ 1 \quad 0\ ]$, $P_2(s) = \dfrac{s+3}{s+b}$,

A) Si determinino un controllore G(s) a dimensione minima ed i parametri "a" e "b" in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) il processo abbia due autovalori nascosti;
   β) l'errore "e" a regime permanente in corrispondenza all'ingresso r(t) = t sia uguale a 5/3;
   γ) la risposta "y" a regime permanente in corrispondenza a disturbi "z" costanti sia nulla;
   δ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo specificando le caratteristiche di raggiungibilità e di osservabilità degli autovalori.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si disegni il luogo delle radici evidenziandone la congruenza con l'assegnazione degli autovalori effettuata. Dall'esame visivo del luogo si determinino quali sono i valori di K per cui il sistema complessivo è stabile asintoticamente ed il transitorio è privo di oscillazioni.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo:



con $F(s) = K \dfrac{s+5}{s^2 - 7s + 10}$

A) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist per K=20 rappresentando su di essi il margine di fase e tracciando i diagrammi di Bode di tutti i termini di interesse. Si verifichi inoltre il criterio di Nyquist.

B) Si determini il valore di K > 0 in corrispondenza al quale la pulsazione di attraversamento ω_t del sistema ad anello aperto non sia superiore a 10 rad/sec ed il margine di fase sia il massimo possibile.

C) Si discuta la stabilità asintotica del sistema ad anello chiuso al variare di K (sia per K > 0, sia per K < 0), evidenziando il numero di poli instabili presenti nel sistema ad anello chiuso al variare di K.

TEMA

Si individuino schemi di controllo a retroazione, discutendo il ruolo dei rispettivi controllori, in due dei seguenti ambiti a scelta: reti cellulari, reti di distribuzione dell'energia, infrastrutture critiche, cybersecurity, reti di trasporto, sietemi di supporto alla salute.

Soluzione del problema 1

A) La funzione di trasferimento del sotto-processo 1 è $P_1(s) = \dfrac{1}{s-a}$ con un autovalore nascosto (irrag. ed inoss.) in "a". Per creare il secondo autovalore nascosto nel processo (e quindi verificare la specifica α)) conviene scegliere a = -3 in modo da creare una cancellazione polo-zero tra i due sotto-processi (si genera un autovalore ragg. ed inoss. in -3). In tal modo, il processo ha 2 autovalori nascoti in -3 ed ha funzione di trasferimento pari a

$$P(s) = P_1(s)\, P_2(s) = \frac{1}{s+b}.$$

Si noti che, in base alla specifica δ), anche gli altri autovalori del sistema complessivo dovranno essere in -3.

La funzione di trasf. disturbo-uscita è $W_z(s) = \dfrac{N_P D_G}{N_P N_G + D_P D_G}$

Per soddisfare la specifica γ) è pertanto necessario inserire un polo in s=0 nel controllore.

La funzione di trasferimento di errore è $W_e(s) = \dfrac{D_F}{N_F + D_F}$

Per soddisfare la specifica β) è necessario (i) inserire un polo in s=0 nella funzione di trasf. ad anello aperto (condizione già soddisfatta in virtù del polo in s=0 del controllore inserito per soddisfare la precedente specifica), (ii) imporre:

$$\left.\frac{W_e(s)}{s}\right|_{s=0} = 5/3 \qquad (*)$$

Per rendere risolubile l'equazione Diofantina necessaria per l'assegnazione degli restanti autovalori non nascosti in -3, si deve scegliere una struttura del controllore con un numero di parametri uguale a $d_F + 1$, dove il "+1" deriva dalla necessità di soddisfare la condizione (*). Si noti che, nel conteggio del numero dei parametri, va' contato il parametro "b" poiché non ancora selezionato.

Tenendo conto di quanto sopra, la struttura corretta del controllore è la seguente:

$$G(s) = \frac{cs+d}{s} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{cs+d}{s(s+b)}$$

Con tale scelta, sviluppando la relazione (*) si ottiene: 3b=5d.

Per imporre che tutti gli autovalori non nascosti siano in -3, si deve impostare la seguente equazione Diofantina:

$$D_W(s) = N_F(s) + D_F(s) = cs+d + s(s+b) = (s+3)^2$$

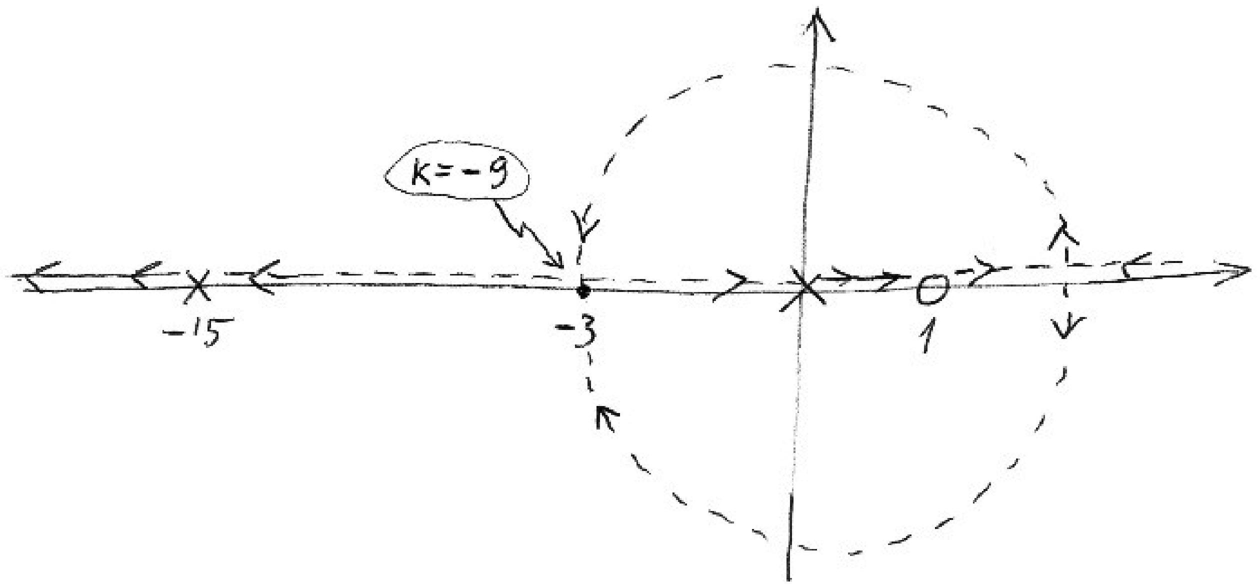
da cui si ottiene: b+c=6, d=9.

Si deve quindi scegliere b=15, c= -9, d=9.

B) Il polinomio caratteristico è $p(s)=(s+3)^4$, con 2 autovalori in ragg. ed oss., un autovalore ragg. ed inoss. ed un autovalore irragg. ed inoss.

C) Il luogo delle radici di interesse è quello relativo alla funzione di trasferimento $F(s) = K\,\frac{s-1}{s(s+15)}$.

Tale luogo è il seguente (si noti che l'assegnazione di autovalori di cui alla domanda A), implica la presenza di un punto singolare doppio in -3 corrispondente al valore K=-9):



Dall'esame visivo degli andamenti dei due cammini delle radici è evidente che per $0 > K \geq -9$ entrambi i cammini si mantengono sull'asse reale (il che garantisce un transitorio privo di oscillazioni) e danno luogo ad autovalori negativi.

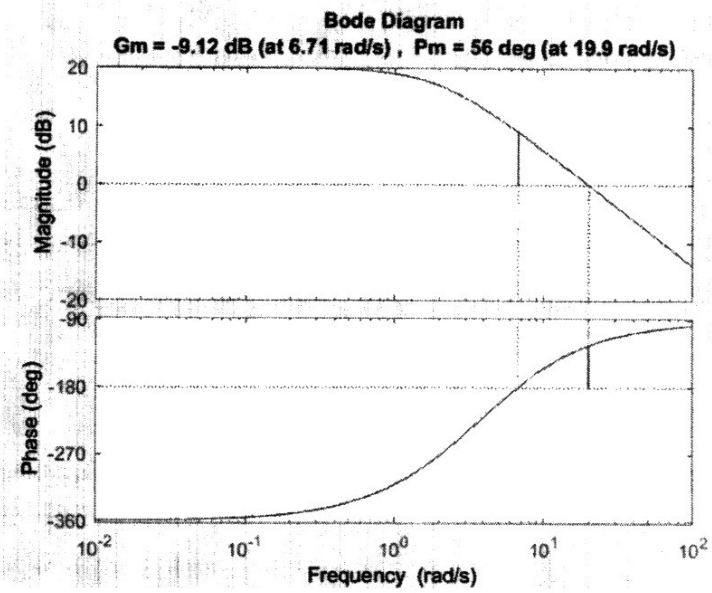
Soluzione del problema 2

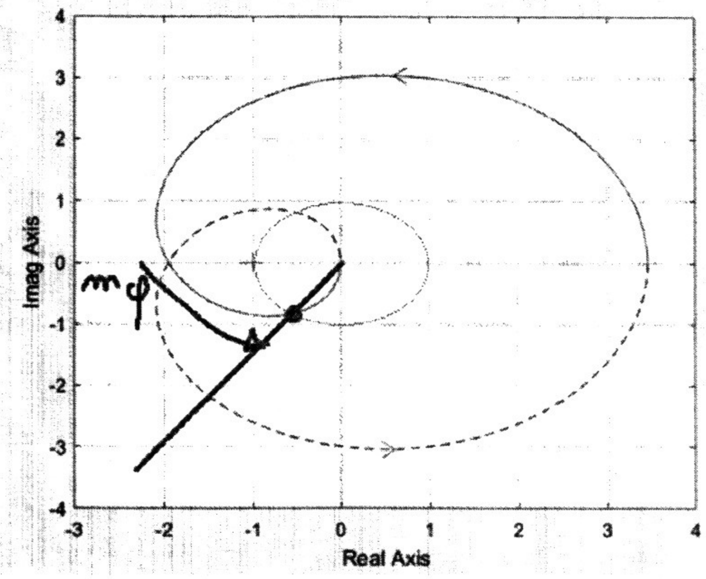
A) Per K=20 il sistema in forma di Bode diventa

$$\frac{10\ (1+s/5)}{(1-s/5)\ (1-s/2)}$$

Si noti che il denominatore di $F(s)$ non è un termine trinomio. Ciò si poteva verificare calcolandone le radici o scomponendolo direttamente tramite il metodo somma-prodotto.

I relativi diagrammi di Bode (complessivi) e Nyquist sono:





B) Dall'analisi del diagramma di Bode è evidente che al crescere della pulsazione di attraversamento il margine di fase aumenti. Di conseguenza per soddisfare la specifica è necessario trovare il K per cui la pulsazione ω_t sia massima, ovvero $\omega_t = 10$. Si impone quindi:

$$1 = \left| K \frac{s+5}{(s-2)(s-5)} \right|_{s=j10} \Rightarrow 1 = |K| \frac{|j10+5|}{|j10-2| \cdot |j10-5|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |K| = \sqrt{104}$$

Dato che, per la stabilità asintotica deve essere $K>0$ si ha $K=\sqrt{104}$.

C) Dall'analisi del diagramma di Nyquist è evidente al variare di K il sistema ad anello chiuso sarà caratterizzato diversamente dal punto di vista della stabilità, in quanto il numero di circuitazioni del punto critico varia con K.

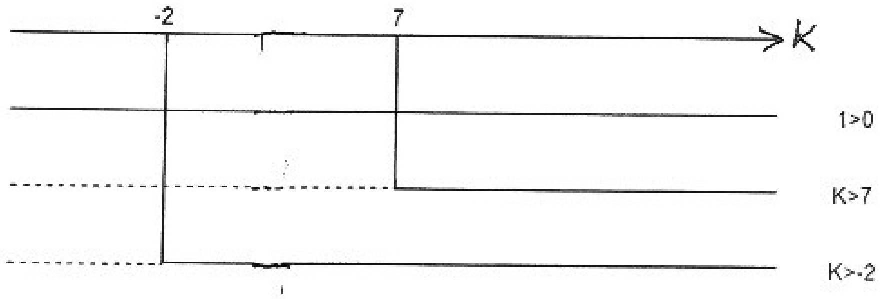
Costruendo la tabella di Routh per il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso, si ottiene:

$$s^2 - 7s + 10 + K(s+5) = s^2 + (-7+K)s + (10+5K)$$

si ottiene

$$\begin{array}{cc} 1 & (10+5K) \\ (-7+K) & 0 \\ (10+5K) & 0 \end{array}$$

Lo studio dei segni della prima colonna è il seguente (linea continua: termine positivo, linea tratteggiata: termine negativo):

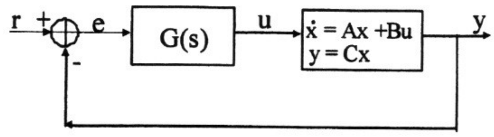


Per $K > 7$ non ci sono variazioni di segno (i.e. tutti i poli ad anello chiuso hanno parte reale negativa), per $-2 < K < 7$ ci sono due variazioni di segno (i.e., due poli ad anello chiuso hanno parte reale positiva), per $K < -2$ vi è una sola variazione di segno (i.e., 1 polo ad anello chiuso con parte positiva).

679

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 9 settembre 2019

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

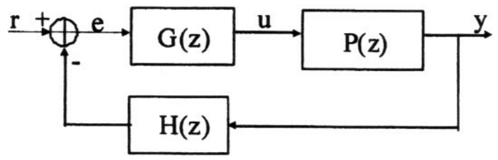


dove $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [\,1 \quad 1\,]$.

A) Si determinino un controllore G(s) a dimensione minima ed il parametro "a" in modo tale che:
α) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti: uno irraggiungibile ed osservabile, mentre l'altro raggiungibile ed inosservabile;
β) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori a parte reale compresa nell'intervallo [-1,-4] (ossia, ≥ -1 e ≤ -4);
γ) l'errore "e" a regime permanente per ingresso r(t)=t sia minore di 1/3.

B) Considerando il controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{(z - 0{,}2)\,(z - 0{,}1)}{(z + 0{,}5)\,(z - 0{,}3)\,(z + a)}$, $H(z) = \dfrac{z + b}{z - 1}$

A) Si determinino un controllore G(z) a dimensione minima e i parametri "a" e "b" (con a≠-0,1 e a≠-0,2) in modo da verificare le seguenti specifiche:
α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h)=η(h) (gradino) si annulli nel più breve tempo possibile (si indichi l'istante a partire dal quale l'errore si annulla);
β) tutti gli autovalori del sistema complessivo abbiano modulo minore di 0,4;
γ) la risposta y(h) a regime permanente corrispondente all'ingresso r(h)=h (rampa) sia uguale ad 1.
Si imposti il sistema di equazioni finale senza risolverlo.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

TEMA

A) Si dimostri come, sotto opportune condizioni, l'osservatore asintotico sia in grado di ricostruire asintoticamente lo stato di un processo.

B) Si dimostri come, sotto opportune condizioni (più stringenti di quelli della domanda A)), l'osservatore asintotico sia in grado di ricostruire asintoticamente lo stato di un processo e si possa assegnare arbitrariamente la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato reale e lo stato stimato del processo.

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha due autovalori: "-3" e "a". Entrambi sono sempre raggiungibili; l'autovalore "-3" è sempre osservabile, mentre l'autovalore "a" è inosservabile solo se a=-4. Per soddisfare la specifica α), conviene scegliere a=-4 (compatibile con la specifica β)) in modo da creare un autovalore ragg. ed inoss., e creare una cancellazione zero-polo tra controllore e processo in modo da creare un autovalore irragg. ed oss..
Scegliendo a=-4 la funzione di trasferimento del processo diventa:

$$P(s) = \frac{1}{s+3}$$

Per creare la cancellazione zero-polo di cui sopra, tenendo conto che la specifica γ) impone la presenza di un polo in s=0 nella funzione di trasferimento ad anello aperto (e quindi necessariamente nel controllore), si può tentare di risolvere il problema con un controllore a dimensione uno del tipo:

$$G(s) = b\,\frac{s+3}{s} \quad \Rightarrow \quad F(s) = G(s)P(s) = \frac{b}{s} \quad \Rightarrow \quad W(s) = \frac{b}{s+b}, \quad W_e(s) = \frac{s}{s+b}$$

Per soddisfare la specifica γ) deve risultare b>3.
Per soddisfare la specifica β), il parametro "b" deve essere compreso nell'intervallo [-1,-4].
Per soddisfare le precedenti specifiche, si può quindi scegliere, ad esempio, b=4.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è il seguente:

$$(s+3)\,(s+4)^2$$

dove l'autovalore - 3 è irrag. e oss, uno dei due autovalore in -4 è ragg. e inoss., mentre l'altro autovalore in -4 è ragg. e oss.

Soluzione del problema 2

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}, \quad W_e(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F}, \quad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per verificare la specifica α), deve essere presente uno zero in +1 nella $W_e(z)$ (tale zero è già presente, grazie al polo in +1 di H(z)) e si deve imporre $N_F N_H + D_F D_H = z^l$ dove l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.
La struttura del controllore deve essere tale da cancellare poli e zeri con modulo minore di 0,4 (in modo da essere coerenti con la specifica β)) e fare in modo che il numero dei parametri incogniti sia pari a d_w+1 (il "+1" deriva dalla necessità di soddisfare la specifica γ)); dato che $d_w = d_F+1$ (il +1 deriva dalla presenza del polo della H(z)), il numero dei parametri incogniti deve essere pari a d_F+2.

Considerando la presenza dei parametri ancora incogniti "a" e "b" conviene allora scegliere:

$$G(z) = \frac{(cz+d)\,(z-0{,}3)}{(z-0{,}1)\,(z-0{,}2)} \qquad \Rightarrow \qquad F(z) = G(z)P(z) = \frac{cz+d}{(z+0{,}5)\,(z+a)}$$

In questo modo si ha d_F+2 = 4 = numero parametri incogniti.

Si noti che la cancellazione di una coppia zero-polo in 0,3 provoca la comparsa di un autovalore irragg. ed oss. in 0,3, mentre la cancellazione di due coppie polo-zero in 0,1 e 0,2 provocano la comparsa di due autovalori ragg. ed inoss. in 0,1 e 0,2. Si noti inoltre che il polo in -0,5 di $P(z)$ non può essere cancellato per non violare la specifica β).

La specifica γ) impone:

$$\left.\frac{W(z)}{z-1}\right|_{z=1} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \left.\frac{N_F D_H}{z^l(z-1)}\right|_{z=1} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c+d=1 \ (*)$$

Si impone infine:

$$N_F N_H + D_F D_H = (cz + d)(z + b) + (z + 0{,}5)(z + a)(z - 1) = z^3 \qquad \Rightarrow \qquad l=3$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene:

$a+c=0{,}5$; $cb+d-0{,}5a=0{,}5$; $db=0{,}5a$ (**)

Il sistema di 4 equazioni in 4 incognite (*)+(**) fornisce i parametri "a", "b", "c", "d".

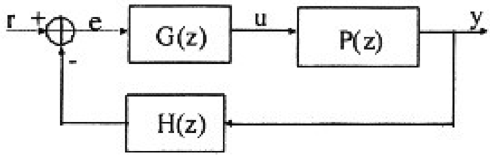
B) Il polinomio caratteristico richiesto è $z^3(z-0{,}3)(z-0{,}2)(z-0{,}1)$ dove i tre autovalori in zero (derivanti dall'assegnazione degli autovalori) sono ragg. e oss., l'autovalore in 0,3 è irragg. e oss., mentre gli autovalori 0,2 e 0,4 sono ragg. e inoss..

682

CONTROLLI AUTOMATICI

Prova scritta del 31 ottobre 2019

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



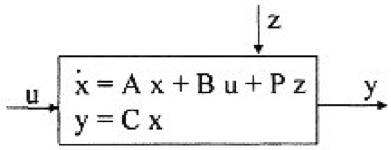
dove $P(z) = \dfrac{(z-0,3)\,(z+0,3)}{(z+0,5)\,(z-0,2)}$, $H(z) = \dfrac{1}{z-0,5}$

A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) la risposta y(h) corrispondente all'ingresso r(h)=η(h) (gradino) si annulli nel più breve tempo possibile (si indichi l'istante a partire dal quale l'errore si annulla);
   β) tutti gli autovalori del sistema complessivo abbiano modulo minore di 0,4.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificando le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità dei vari autovalori.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini la risposta y(h) corrispondente all'ingresso r(h)=η(h).

PROBLEMA 2.
Si consideri il processo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}$

<u>Il disturbo z è misurabile</u>.

Si progetti uno schema di controllo a dimensione minima in maniera da verificare le seguenti specifiche:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti;
   β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
   γ) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

TEMA

A) Vantaggi e svantaggi dell'assegnazione degli autovalori nel dominio del tempo rispetto all'assegnazione degli autovalori nel dominio di Laplace.

B) Si dimostri il principio di separazione.

Soluzione del problema 1

A) La funz. di trasf. di interesse è la seguente

$$W(z) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F} \;,\; H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per verificare la specifica α), deve essere presente uno zero in +1 nella W(z) e si deve imporre $N_F N_H + D_F D_H = z^l$ dove l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla. Si deve inoltre introdurre nel controllore un numero di parametri pari a d_F+2.

Si può allora scegliere:

$$G(z) = \frac{az+b}{z+c}\,\frac{(z-1)\,(z-0{,}2)}{(z-0{,}3)\,(z+0{,}3)} \qquad \Rightarrow \qquad F(z) = \frac{az+b}{z+c}\,\frac{z-1}{z+0{,}5}$$

Si noti che la cancellazione di una coppia zero-polo in -0,2 provoca la comparsa di un autovalore irragg. ed oss. in -0,2, mentre la cancellazione di due coppie polo-zero in -0,3 e +0,3 provocano la comparsa di due autovalore ragg. ed inoss. in -0,3 e +0,3. Si noti inoltre che il polo in -0,5 di P(z) non può essere cancellato per non violare la specifica β).

Si impone allora:

$$N_F N_H + D_F D_H = (az+b)\,(z-1) + (z-0{,}5)\,(z+0{,}5)\,(z+c) = z^3 \quad \Rightarrow \quad l=3$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene a=-1/3 ; b= -1/12 ; c=1/3.

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $z^3(z+0{,}3)(z-0{,}3)\,(z-0{,}2)$ dove i tre autovalori in zero (derivanti dall'assegnazione degli autovalori) sono ragg. e oss., l'autovalore -0,2 è irragg. e oss., mentre gli autovalori 0,3 e -0,3 sono ragg. e inoss..

C) La risposta ad ingresso a gradini è pari a

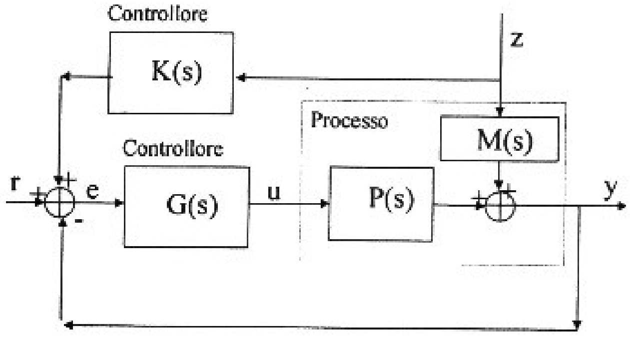
$$y(z) = W(z)\,\eta(z) = \frac{(-1/3\,z - 1/12)\,(z-1)\,(z-1/2)}{z^3}\,\frac{z}{z-1} = -1/3 + \frac{1/12}{z} + \frac{1/24}{z^2}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(h) = -\frac{1}{3}\,\delta(h) + \frac{1}{12}\,\delta(h-1) + \frac{1}{24}\,\delta(h-2)$$

Soluzione del problema 2

A) Dato che il disturbo è misurabile, è possibile progettare uno schema di controllo a doppia controreazione del tipo:



dove $P(s) = M(s) = \dfrac{s+2}{(s-1)\,(s-2)}$

Affinchè il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto (pur rimanendo asintoticamente stabile), si deve creare una cancellazione polo-zero in -2 tra controllore e processo; in questa maniera si crea un autovalore ragg. ed inoss. in -2 (e quindi, in virtù della specifica α), anche tutti gli altri autovalori del sistema complessivo devono essere in -2).

Si può allora scegliere un controllore G(s) con la struttura

$$G(s) = \frac{as+b}{s+2} \;\Rightarrow\; F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{as+b}{(s-1)\,(s-2)}$$

Procedendo all'assegnazione degli autovalori si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = as+b + (s-1)\,(s-2) = (s+2)^2.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene a=7 ; b= 2.

Si deve infine scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)=0$ ottenendo la reiezione completa del disturbo. Svolgendo i conti si ottiene:

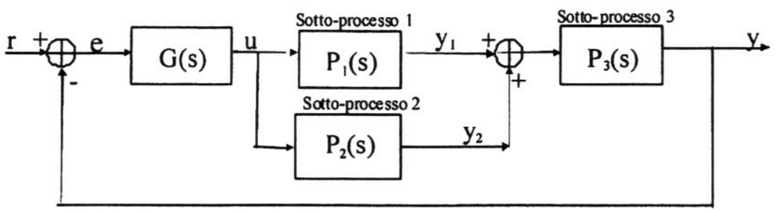
$$K(s) = -\,\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\,\frac{s+2}{7s+2}$$

685

CONTROLLI AUTOMATICI

Prova scritta del 10 gennaio 2020

PROBLEMA 1 Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $P_1(s) = \dfrac{a}{(s+3)(s-1)}$, $P_2(s) = \dfrac{1}{s+b}$, $P_3(s) = \dfrac{s+c}{s+2}$ con $c \neq 2$.

Si determinino i parametri "a", "b", "c" ed un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che:

α) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;

β) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a (s+1) (s+2) (s+3) (s+4).

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente processo

$$\dot{x} = A x + B u$$
$$y = C x$$

con $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ a \quad 2\ ]$

A) Si determini, motivando opportunamente la risposta, per quale valore del parametro "a" esiste un osservatore asintotico dello stato, ma non è possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza tra lo stato reale e lo stato stimato. Con tale scelta del parametro "a" qual'è la massima velocità di convergenza tra lo stato reale e lo stato stimato?

B) Si determini, motivando opportunamente la risposta, per quale valore del parametro "b" il processo è stabilizzabile con reazione dello stato, ma non è possibile, in uno schema di controllo con reazione dello stato, assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori.

C) Si scelgano i valori di "a" e "b" determinati rispettivamente nelle domande A) e B). Si determini uno schema di controllo con reazione dall'uscita che renda il sistema asintoticamente stabile utilizzando le tecniche nel <u>dominio del tempo</u> (*è sufficiente progettare lo schema di controllo ed impostare il problema di assegnazione degli autovalori senza risolverlo*).

TEMA

Si discutano i vantaggi degli schemi di controllo ad anello chiuso rispetto a quelli ad anello aperto.

Si discutano inoltre gli ulteriori vantaggi derivanti dall'eventuale misurabilità del disturbo.

Soluzione del problema 1

Scegliendo b= 3 nel parallelo dei due sotto-processi 1 e 2 si crea un autovalore nascosto in -3 come è evidente dal fatto che, con questa scelta, il parallelo dei due sotto-processi ha due autovalori rispettivamente in -3 e 1 (vale a dire i poli della funzione di trasferimento del parallelo dei due sotto-processi 1 e 2), contro i 3 autovalori dei due sotto-processi presi singolarmente (vale a dire i due poli del sotto-processo 1 in -3 e 1, e il polo del sotto-processo 2 in -3). Quindi, e' evidente che, nel parallelo, uno dei due autovalori in -3 si è nascosto.

Con tale scelta, considerando anche il sotto-processo 3, risulta:

$$P(s) = (P_1(s) + P_2(s))\, P_3(s) = \frac{(s + a - 1)}{(s + 3)\,(s - 1)}\, \frac{s + c}{s + 2}.$$

Per creare il secondo autovalore nascosto, tenendo conto della specifica β), si deve scegliere a=3, creando una cancellazione zero-polo in -2 e quindi un autovalore nascosto in -2. Con tale scelta si ottiene:

$$P(s) = (P_1(s) + P_2(s))\, P_3(s) = \frac{s + c}{(s + 3)\,(s - 1)}$$

Per soddisfare la specifica β), rimangono da assegnare due autovalori non nascosti in -1 e in -4. Per avere un numero di parametri sufficienti per tale assegnazione e' sufficiente scegliere G(s) = K, ottenendo:

$$F(s) = G(s)\, P(s) = K\, \frac{s + c}{(s + 3)\,(s - 1)}$$

Procedendo all'assegnazione degli autovalori si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = K(s+c) + (s+3)\,(s-1) = (s+1)\,(s+4)$$

Risolvendo con il principio di identità dei polinomi si ottiene K=3, c=7/3.

Soluzione del problema 2

A) L'osservatore asintotico dello stato esiste, ma non è possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza tra lo stato reale e lo stato stimato, quando nel processo c'è almeno un autovalore inosservabile a parte reale negativa. Nel processo assegnato ciò accade scegliendo a=1/2: infatti, con tale scelta l'autovalore -2 risulta inosservabile e la massima velocità di convergenza tra lo stato reale e lo stato stimato risulta pari ad e^{-2t}.

B) Il processo è stabilizzabile con reazione dallo stato, ma non è possibile assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori, quando nel processo c'è almeno un autovalore irraggiungibile a parte reale negativa. Nel processo assegnato ciò accade scegliendo b=0: infatti, con tale scelta l'autovalore -2 risulta irraggiungibile.

C) Si deve considerare lo schema di controllo con l'osservatore asintotico e la reazione dallo stato stimato. Tale schema di controllo è caratterizzato dalle matrici K e G. Tenendo conto del principio di separazione, tali matrici si possono determinare, per esempio attraverso il principio di identità dei polinomi, risolvendo le seguenti equazioni:

$$|\,\lambda - (A + BK)| = (\lambda + 2)\,(\lambda - \lambda_{arb-1})\,.$$

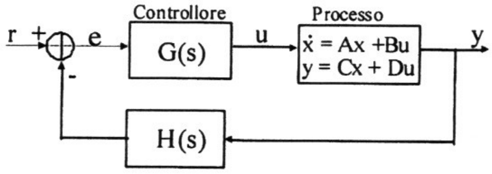
$$|\,\lambda - (A - GC)| = (\lambda + 2)\,(\lambda - \lambda_{arb-2})\,.$$

dove λ_{arb-1} e λ_{arb-2} sono due autovalori arbitrari negativi mentre, in base ai risultati ottenuti nelle domande A) e B), gli altri due autovalori assegnati devono essere "obbligatoriamente" in -2.

687

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 10 febbraio 2020

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $A=\begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C=[\,1 \quad 1\,]$, $D=1$ $\quad H(s)=\dfrac{1}{s+2}$

A) Si determini il parametro "a" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:

α) il processo abbia un autovalore nascosto;

β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;

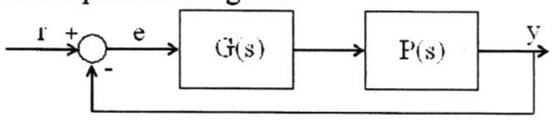
γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori a parte reale strettamente minore di –2;

δ) la risposta "y" a regime permanente per riferimento r(t)=1 sia uguale a 1,5.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2.

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s-1)}$

Si determini un controllore G(s) a dimensione minima in modo che:

α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente a riferimenti "r" costanti sia nullo;

β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e non abbia autovalori nascosti. Si risolva utilizzando il luogo delle radici (si disegnino quindi i luoghi di interesse).

TEMA

Si descriva come si effettua il tracciamento del diagramma di Nyquist e si spieghi come tale diagramma può essere utilizzato per la verifica della stabilità asintotica.

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha due autovalori in -1 e -3. In base alle specifiche α) e γ) si deve fare in modo che l'autovalore -3 sia nascosto. Utilizzando il test di Hautus si deduce che, scegliendo a=2, l'autovalore -3 risulta ragg. ed inoss.

Con tale scelta la funzione di trasferimento del processo risulta:

$$P(s) = \frac{s+3}{s+1}$$

Per soddisfare la specifica β), è necessaria la presenza di un secondo autovalore nascosto che può essere ottenuto inserendo un polo in -3 nel controllore: tale inserimento provoca una cancellazione zero-polo e quindi la creazione di un autovalore irrag. ed oss. in -3.

Alla luce di quanto sopra, si può tentare di risolvere il problema con un controllore con la struttura:

$$G(s) = \frac{bs+c}{s+3} \Rightarrow F(s) = G(s)P(s) = \frac{bs+c}{s+1}$$

La funz. di trasf. ing-uscita del sistema complessivo è la seguente:

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}$$

Per soddisfare la specifica δ) si deve imporre $W(0) = 1{,}5$: svolgendo i calcoli, questa condizione determina c=6.

Con le scelte effettuate risulta quindi:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = bs + 6 + (s+1)(s+2) = s^2 + s(3+b) + 8$$

Per applicare il criterio di Routh in modo da trovare se esistono radici del polinomio suddetto a parte reale strettamente minore di –2, si deve effettuare la trasformazione s -> s-2, ottenendo:

$$D_W' = s^2 + s(b-1) - 2b + 6$$

Applicando il criterio di Routh, si deduce che, affinché i due autovalori non nascosti del sistema complessivo siano a parte reale strettamente minore di –2, è necessario scegliere 3>b>1. Per esempio, si può scegliere b=2.

B) Con la scelta b=2, il polinomio caratteristico richiesto è $(s+3)^2(s^2+5s+8)$, dove uno dei due autovalori in –3 è ragg. ed inoss., l'altro autovalore in -3 è irragg. ed oss., e le due radici di s^2+5s+8 sono due autovalori ragg. e oss.