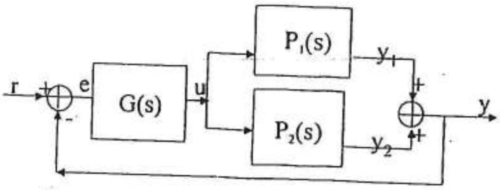
Alessandro
Gaeta

383

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica n.o. (C.A. N.O.), **CONTROLLI AUTOMATICI** v.o. (C.A. V.O.)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. delle telecomunicazioni (S.C.A.)
Prova scritta dell'11 gennaio 2007 - Anno accademico 2005/06

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $P_1(s) = \dfrac{1}{s+2}$, $P_2(s) = \dfrac{3}{(s+2)(s+a)}$

A) Si determini il parametro "a" e un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori in -2.

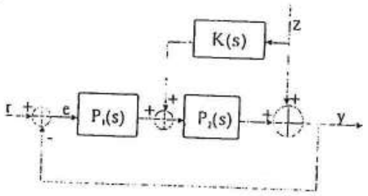
B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A) specificando le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità degli autovalori.

C) Per il sistema complessivo individuato nella domanda A), si calcoli la risposta y a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = 2 + 4 \text{ sen } 2t$

D) **Solo per C.A.V.O.**: nello schema di controllo suddetto si consideri la stessa $P_1(s)$, ma si sostituisca la $P_2(s)$ con la seguente funzione di trasferimento: $P_2(s)= \dfrac{-s^2 + 4s - 3}{(s+2)(s-2)^2}$

Si tracci il luogo delle radici di interesse e si determini una G(s) che stabilizzi asintoticamente il sistema complessivo.

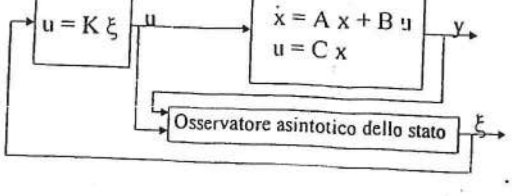
PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P_1(s) = \dfrac{1}{s(1 + a s)}$ e $P_2(s) = b$

Si determinino K(s) e i parametri "a" e "b" in modo che:
1) risulti $1 \leq a \leq 2$;
2) si abbia risposta y nulla a regime permanente corrispondente al disturbo $z(t) = \text{sen } \omega t \ \forall \omega$;
3) il modulo dell'errore e a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = t$ sia non superiore ad 1;
4) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con il margine di fase maggiore possibile. Si determini, sulla base del diagramma di Bode, il margine di fase ottenuto (approssimato).

PROBLEMA 3 (C.A. N.O. e C.A. V.O.). Si discuta lo schema di controllo riportato in figura:



EMA 3 (S.C.A.). Si discuta la raggiungibilità e l'osservabilità degli autovalori di un sistema.

Soluzione del problema 1

A) Per ottenere un controllore a dimensione minima, conviene ridurre il più possibile la dimensione del processo, facendo attenzione a generare autovalori nascosti in -2.
Conviene quindi scegliere a = -1, in modo che la funzione di trasferimento del processo P(s) sia pari a

$$P(s) = P_1(s) + P_2(s) = \frac{1}{s-1}$$

Dal fatto che sia rimasto il solo polo di P(s) in +1, si può evincere la presenza di due autovalori nascosti in -2.
Per ulteriore conferma e per studiare le proprietà di raggiungibilità/osservabilità di tali autovalori (conoscenza necessaria per rispondere alla domanda B)) conviene determinare la rappresentazione ingresso-stato-uscita del parallelo; tale rappresentazione è la seguente:

$$A_P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_P = [\ 1 \quad 3 \quad 0\ ],$$

La matrice A_P ha due autovalori in -2 e un autovalore in +1. Come si può verificare per esempio con il test di Hautus, l'autovalore +1 è l'unico raggiungibile ed osservabile poichè compare nel denominatore di P(s). Con le formule canoniche si deduce che i due autovalori in -2 sono uno raggiungibile ed inosservabile e l'altro irraggiungibile ed osservabile.

A questo punto è sufficiente scegliere un controllore a dimensione zero del tipo

$$G(s) = b \;\Rightarrow\; F(s) = \frac{b}{s-1}$$

ed imporre l'assegnazione dell'unico autovalore non nascosto:

$$D_W = N_F + D_F = s - 1 + b = s + 2 \;\Rightarrow\; b=3 \;\Rightarrow\; W(s) = \frac{3}{s+2}$$

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è il seguente:

$$P(s) = (s + 2)^3$$

dove i tre autovalori in -2 sono uno rag. e inos., un secondo irrag. e oss. e un terzo rag. e oss.

C) La risposta a regime permanente richiesta è pari a

$$\cancel{2\,W(0) + 4\,|W(j2)|\,\text{sen}\,(2t + \text{fase}[W(j2)]) = 3 + 12/\sqrt{8}\cdot \text{sen}\,(2t - 45°)}$$

Soluzione del problema 2

Lo schema di controllo è del tipo a doppia controreazione. Conviene quindi in un primo passo determinare i parametri "a" e "b" soddisfacendo le specifiche che non riguardano il disturbo (specifiche 1, 3 e 4) ed in un secondo passo determinare la funzione di trasferimento K(s) tenendo conto delle specifiche che riguardano il disturbo (specifica 2).

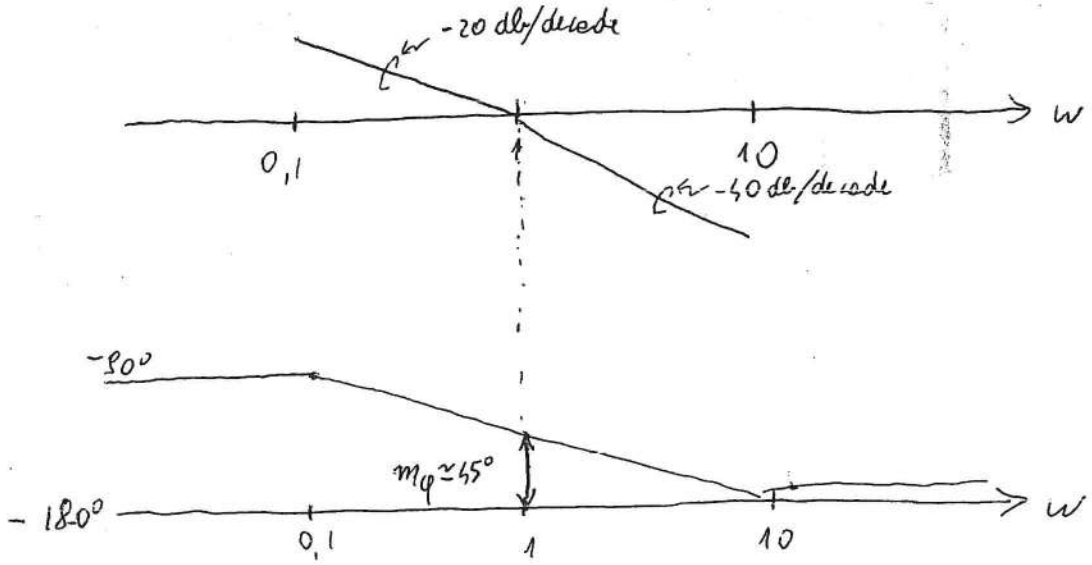
<u>Passo 1</u>
In base al criterio di Routh, si deduce facilmente che il sistema è asintoticamente stabile per a > 0 e b > 0.

L'errore a regime permanente di cui alla specifica 3) risulta:

$$\left| \frac{W_e(s)}{s}\Big|_{s=0} \right| = \frac{1}{|b|}$$

per cui, per soddisfare tale specifica, si deve scegliere $b \geq 1$.

Dall'esame dei diagrammi di Bode, è evidente che, per avere il margine di fase maggiore possibile è necessario scegliere "a" minore possibile e "b" minore possibile. La scelta esatta è quindi b=1 e a=1. Per tale scelta il margine di fase è circa pari a 45° (vedere la figura qui sotto).



Passo 2

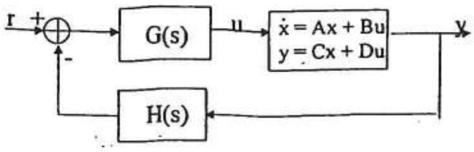
L'unico modo per verificare la specifica 2) è determinare K(s) in modo tale che $W_z(s) = 0$.
Esaminando lo schema proposto risulta:

$$W_z(s) = \frac{1 + P_2(s)\, K(s)}{1 + P_1(s)\, P_2(s)}$$

Imponendo $W_z(s) = 0$, risulta $K(s) = -1/P_2(s) = -1/b = -1$.

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica n.o. (C.A. N.O.),
Prova scritta del 13 marzo 2007 - Anno accademico 2006/07

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

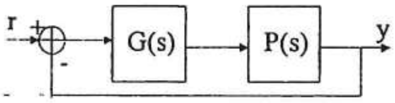


dove $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 1 \quad 0\ ]$, $D = 1$, $\quad H(s) = \frac{1}{s}$

A) Si determini un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che:
   α) la risposta *y* a regime permanente corrispondente al riferimento $r(t) = \text{sen } t$ sia nulla,
   β) la risposta *y* a regime permanente corrispondente a riferimenti $r(t)$ costanti sia nulla,
   γ) il sistema complessivo abbia 2 autovalori nascosti,
   δ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda precedente, specificando le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $G(s) = K$, $\quad P(s) = -\dfrac{1}{(1-10s)(1+s)}$

Si traccino i diagrammi di Bode del processo.
Si determini la costante K in modo che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con margine di fase m_φ non inferiore a 40°.
Si specifichino chiaramente il margine di fase ottenuto (determinato analiticamente) e la relativa pulsazione di attraversamento ω_t.
Si traccino i diagrammi di Nyquist di G(s)P(s). Utilizzando il criterio di Nyquist, si evidenzi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

PROBLEMA 3 Si consideri un processo caratterizzato dalle seguenti matrici:

$A = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 0 \quad 1\ ]$, $D = 0$

A) Si determini per quali valori del parametro "a" non è possibile stabilizzare asintoticamente il suddetto processo con uno schema di controllo <u>con reazione dall'uscita</u>.

B) Scelto a = –2 e supposto che lo stato del processo sia misurabile, si determini un controllore con <u>reazione dallo stato</u> in modo che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e abbia tutti gli autovalori coincidenti (è sufficiente impostare il problema senza svolgere i relativi calcoli).

Soluzione del problema 1

A) Si nota la presenza nel processo di un autovalore raggiungibile ed inosservabile in -3 che, essendo a parte reale negativa non compromette la stabilizzabilità del sistema complessivo. La funzione di trasferimento del processo P(s) è pari a

$$P(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

La funzione di trasferimento ingresso uscita risulta pari a

$$W(s) = W(s) = \frac{N_F D_H}{D_F D_H + N_F N_H} \quad \text{con } F = \frac{N_F}{D_F} = G\,P\,, \quad H = \frac{N_H}{D_H}$$

La specifica α) richiede la presenza di un fattore $s^2 + 1$ a numeratore della W(s), fattore che deve essere necessariamente inserito in N_F e quindi in N_G. Ciò significa che il controllore non può essere a dimensione minore di 2.

La specifica β) richiede la presenza di uno zero in s=0 a numeratore della W(s) ed è automaticamente soddisfatta data la presenza del fattore "s" in D_H.

Per soddisfare la specifica γ), il secondo autovalore nascosto (oltre quello già citato presente nel processo) deve essere necessariamente ottenuto cancellando o lo zero del processo in -2, o il polo del processo in -1. Si deve però scegliere la prima delle suddette cancellazioni in quanto la seconda implicherebbe un controllore di dimensione 3. La cancellazione della coppia polo-zero in -2 provoca la presenza di un autovalore nascosto (raggiungibile ed inosservabile) in -2 che, essendo a parte reale negativa, non compromette la stabilizzabilità del sistema complessivo..

Alla luce di quanto sopra, la struttura (a dimensione 2) appropriata per la G(s) è la seguente:

$$G(s) = a\,\frac{s^2+1}{(s+2)\,(s+b)} \quad \Rightarrow \quad F(s) = a\,\frac{s^2+1}{(s+1)\,(s+b)}$$

Per soddisfare la specifica δ), le radici del denominatore della funzione di trasferimento ingresso uscita devono essere tutte a parte reale negativa; tale denominatore è il seguente polinomio:

$$D_W = D_F D_H + N_F N_H = s\,(s+1)\,(s+b) + a\,(s^2+1) = s^3 + s^2\,(a+b+1) + bs + a$$

Utilizzando il criterio di Routh si deduce che le radici di D_W sono tutte a parte reale negativa se risulta contemporaneamente: $a + b + 1 > 0$, $b^2 + b + ab - a > 0$, $a > 0$.

Per soddisfare le suddette disequazioni, si può, per esempio, scegliere a=b=1.

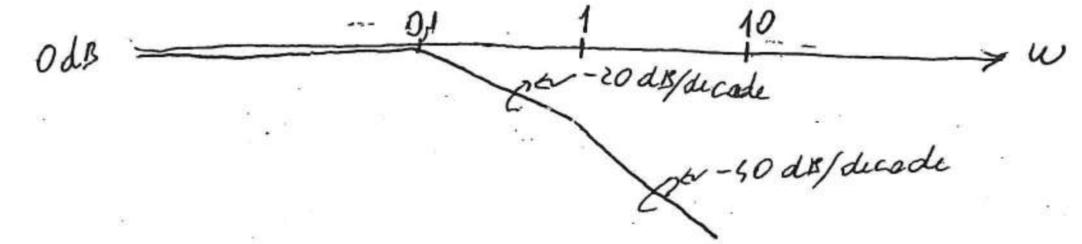
B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è il seguente:

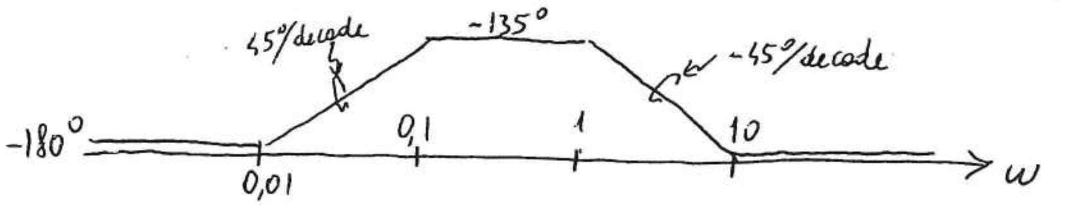
$$P(s) = (s+2)\,(s+3)\,(s^3 + s^2\,(a+b+1) + bs + a)$$

dove gli autovalori in -2 e -3 sono rag. e inos., mentre gli altri tre autovalori sono rag. e oss.

Soluzione del problema 2

I diagrammi di Bode del processo sono i seguenti:





Per soddisfare la specifica sul margine di fase deve risultare:

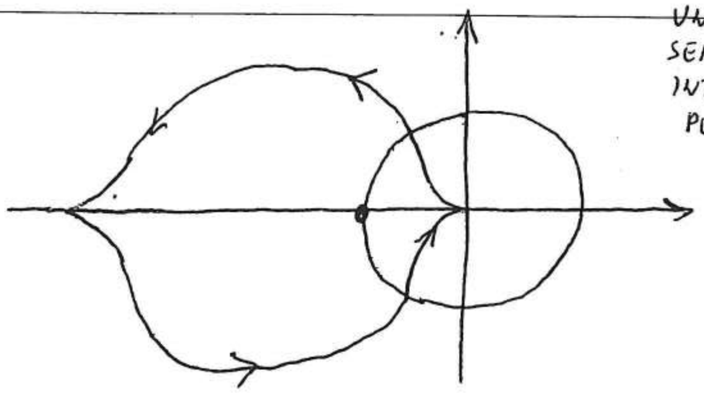
Fase $[K\,P(j\omega_t)] = -180° - \text{arctg}\,(-10\omega_t) - \text{arctg}\,\omega_t \geq -180° + 40° \;\Rightarrow\; m_\varphi = -\text{arctg}\,(-10\omega_t) - \text{arctg}\,\omega_t \geq 40°$

Dai suddetti diagrammi di Bode si evince che, per soddisfare la specifica sul margine di fase, la pulsazione di attraversamento ω_t deve essere approssimativamente compresa tra 0,1 e 1.
Scegliendo, ad esempio ω_t=0,5, risulta $m_\varphi = 52{,}1° \geq 40°$.
Per fare in modo che la funzione di trasferimento ad anello aperto abbia la pulsazione di attraversamento prescelta si deve sceglicre K in modo che

$$|\,K\,P(j\omega_t)| = 1 \;\Rightarrow\; \frac{K}{|1 - 10\,j\omega_t|\,|1 + j\omega_t|} = 1$$

Scegliendo ω_t=0,5, la precedente equazione fornisce K= 5,7 (K=15,1 dB).

Il diagramma di Nyquist richiesto è il seguente:



UN GIRO IN SENSO ANTIORARIO INTORNO AL PUNTO (-1,0) = UN POLO A PARTE REALE POS. NELLA FUNZ. DI TRASF. AD ANELLO APERTO

⇓

CRITERIO DI NYQUIST VERIFICATO

Soluzione del problema 3

Gli autovalori del processo sono "a" e -4.
Per $a \neq -2$, entrambi gli autovalori del processo sono raggiungibili. Se invece $a = -2$, l'autovalore $a = -4$ è rag. e l'autovalore $a = -2$ è irragg.
Per qualsiasi valore di "a", l'autovalore "a" è inoss., mentre l'autovalore - 4 è oss..

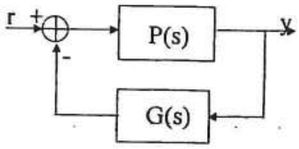
A) La condizione di stabilizzabilità con reazione dall'uscita è che tutti gli autovalori nascosti siano a parte reale negativa. Quindi, il processo non è stabilizzabile asintoticamente con reazione dall'uscita se risulta $a \geq 0$.

B) Dato che per $a = -2$, l'autovalore -2 è irraggiungibile, tale autovalore deve essere obbligatoriamente presente nell'assegnazione di autovalori. E' quindi necessario assegnare entrambi gli autovalori in -2.
Il controllore con reazione dallo stato è caratterizzato dalla matrice K che si può determinare, sfruttando il principio di identità dei polinomi, svolgendo la seguente relazione:

$$|\lambda I - (A+BK)| = (\lambda+2)^2$$

SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. delle telecomunicazioni (S.C.A.)
CONTROLLI AUTOMATICI v.o. (C.A. V.O.)
Prova scritta del 14 marzo 2007 - Anno accademico 2006/07

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



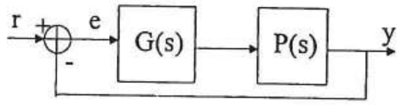
dove $P(s) = \dfrac{1}{s\,(s+1)}$

A) Si determini un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che:
   α) la risposta y a regime permanente corrispondente a riferimenti $r(t)$ costanti sia nulla,
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determini un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che:
   α) la risposta y a regime permanente corrispondente a riferimenti $r(t)$ costanti sia nulla,
   γ) tutti gli autovalori del sistema complessivo siano in -1.

C) **Solo per C.A.V.O.**: Con riferimento al controllore individuato nella domanda B), si tracci il luogo delle radici.

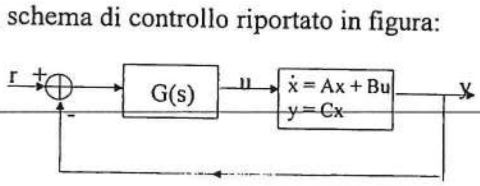
PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $G(s) = K$, $P(s) = \dfrac{1}{(1+s)^2}$

Si traccino i diagrammi di Bode del processo.
Si determini la costante K in modo che
 α) l'errore e a regime permanente corrispondente al riferimento $r(t) = 1$ sia non superiore a 1/6,
 β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con il margine di fase m_φ maggiore possibile.
Si specifichino chiaramente, determinandoli analiticamente, il margine di fase ottenuto e la relativa pulsazione di attraversamento ω_t.
Si traccino i diagrammi di Nyquist di G(s)P(s). Utilizzando il criterio di Nyquist, si evidenzi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

PROBLEMA 3. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\,1 \quad 0\,]$

A) Si determini il parametro "a" ed un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che:
   α) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto,
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda precedente, specificando le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità dei vari autovalori.

Soluzione del problema 1

La funzione di trasferimento ingresso uscita risulta pari a

$$W(s) = \frac{D_G N_P}{D_G D_P + N_G N_P}$$

La specifica α) richiede la presenza di uno zero in s=0 a numeratore della W(s) e implica pertanto la presenza di un polo in s=0 nel controllore G(s).

A) La struttura (a dimensione 1) del controllore che soddisfa la specifica β) è la seguente:

$$G(s) = \frac{as + b}{s} \quad \Rightarrow \quad D_W = D_G D_P + N_G N_P = s^2 (s + 1) + as + b = s^3 + s^2 + as + b$$

Utilizzando il criterio di Routh si deduce che le radici di D_W sono tutte a parte reale negativa se risulta a>b>0.

B) La struttura (a dimensione 2) del controllore che soddisfa la specifica γ) è la seguente:

$$G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s\,(s + d)}$$

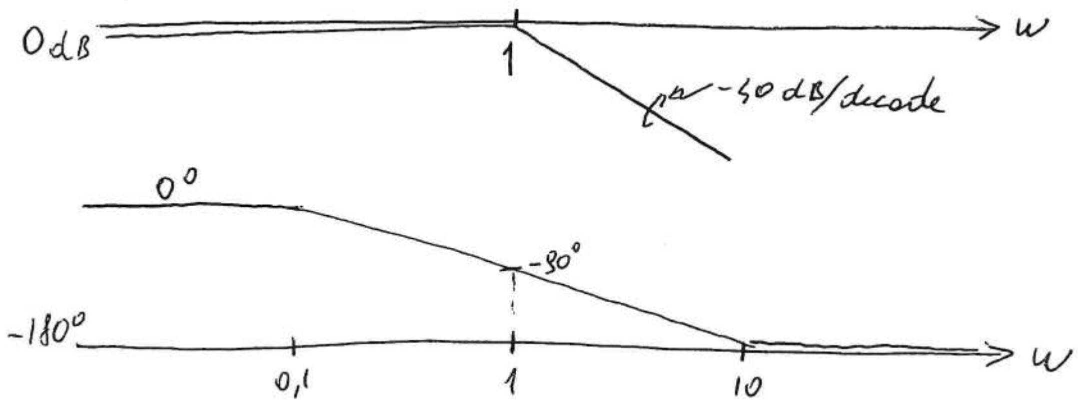
In corrispondenza di tale struttura, si può procedere alla seguente assegnazione degli autovalori utilizzando il principio di identità dei polinomi:

$$D_W = D_G D_P + N_G N_P = s^2 (s + 1)(s + d) + as^2 + bs + c = (s + 1)^4 \Rightarrow$$
$$s^4 + s^3 (1 + d) + s^2 (a + d) + bs + c = s^4 + 4 s^3 + 6 s^2 + 4s + 1 \Rightarrow a=3,\ b=4,\ c=1,\ d=3.$$

Soluzione del problema 2

Per soddisfare la specifica α) deve risultare $K \geq 5$.

I diagrammi di Bode del processo sono i seguenti:



Dall'esame dei diagrammi suddetti è evidente che il margine di fase diminuisce al crescere di K. Per massimizzare il margine di fase, conviene quindi scegliere il K minore possibile compatibilmente con la specifica α) ossia $K = 5$.

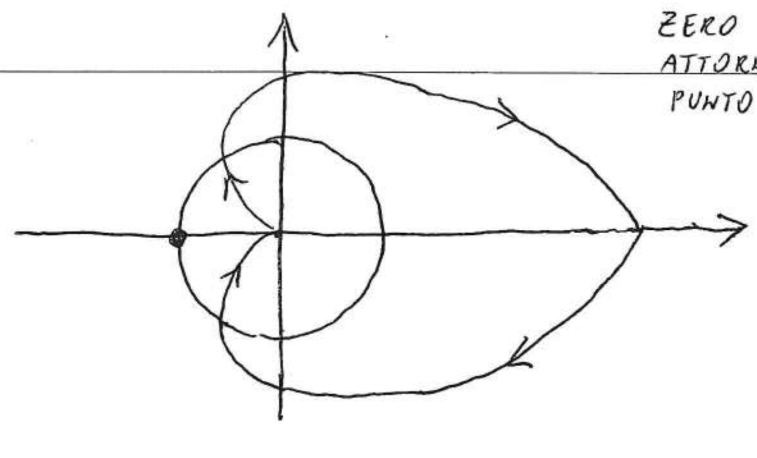
La corrispondente pulsazione di attraversamento si determina risolvendo, rispetto ad ω_t, la seguente equazione:

$$|K\,P(j\omega_t)| = \frac{5}{|1 + j\omega_t|^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_t = 2.$$

La fase corrispondente a tale pulsazione di attraversamento, risulta

$$\text{Fase}\,[K\,P(j\omega_t)] = \text{Fase}\,[5\,P(j2)] = -2\,\text{arctg}\,2 = -126{,}9° \;\Rightarrow m_\varphi = 53{,}1°$$

Il diagramma di Nyquist richiesto è il seguente:



ZERO GIRI ATTORNO AL PUNTO (-1,0) = ZERO POLI A PARTE REALE POS. DELLA FUNZ. DI TRASF. AD ANELLO APERTO

⇓

CRITERIO DI NYQUIST VERIFICATO

Soluzione del problema 3

A) Gli autovalori del processo sono a e 1.
Per $a \neq -2$, entrambi gli autovalori del processo sono raggiungibili. Se invece $a = -2$, l'autovalore $a = -2$ è irrag. e l'autovalore 1 è ragg.
Entrambi gli autovalori del processo sono osservabili per qualsiasi valore di a.

Per soddisfare la specifica α), conviene allora scegliere $a = -2$ creando un autovalore nascosto in -2 irrag. e oss. Dato che gli autovalori del sistema complessivo devono essere tutti coincidenti, tale scelta implica che anche gli autovalori non nascosti dovranno essere pari a -2.

Con la scelta suddetta la funzione di trasf. del processo risulta:

$$P(s) = \frac{1}{s-1}$$

Per assegnare gli autovalori non nascosti in -2 è allora sufficiente scegliere un controllore (a dimensione 0) del tipo:

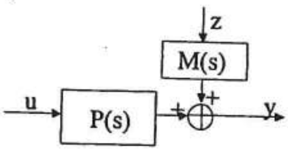
$$G(s) = K \Rightarrow D_W = D_G D_P + N_G N_P = s - 1 + K = s + 2 \Rightarrow K = 3.$$

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $p(\lambda) = (\lambda+2)^2$ dove un autovalore in -2 è irrag. e oss., mentre l'altro è ragg. e oss.

SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. delle telecomunicazioni (S.C.A.)
CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica (C.A.)
Prova scritta del 12 aprile 2007 - Anno accademico 2006/07

394

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente processo:

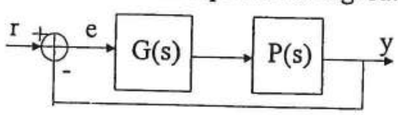


con $P(s) = \dfrac{s+1}{(s+3)\,(s-1)}$, $M(s) = \dfrac{1}{s}$.

L'uscita y e il disturbo z sono misurabili.
Si progetti uno schema di controllo a dimensione minima in modo che siano verificate le seguenti specifiche:

α) l'errore e a regime permanente tra l'uscita y ed un riferimento $r(t)$ = costante sia nullo;
β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
γ) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori a parte reale inferiore a -2;
δ) la risposta y corrispondente ad un qualsiasi disturbo z sia nulla.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

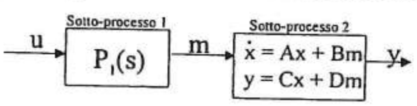


con $G(s) = K\,\dfrac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$, $P(s) = \dfrac{1}{s^2}$

Si determinino analiticamente i parametri K, τ_1 e τ_2 in modo che
α) risulti $0{,}1 \le \tau_1 \le 1$ e $0{,}1 \le \tau_2 \le 1$;
β) la pulsazione di attraversamento ω_t sia pari ad 1;
γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con il margine di fase m_φ maggiore possibile (si calcoli analiticamente il margine di fase ottenuto).

Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist di G(s)P(s). Utilizzando il criterio di Nyquist, si evidenzi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

PROBLEMA 3. Si consideri il seguente processo formato dalla cascata dei sotto-processi 1 e 2:



con $P_1(s) = \dfrac{1}{s+3}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 2 \quad 1\ ]$, $D = 1$

A) Si determini per quali valori del parametro "a" non è possibile stabilizzare asintoticamente il processo mediante uno schema di controllo con reazione dall'uscita.

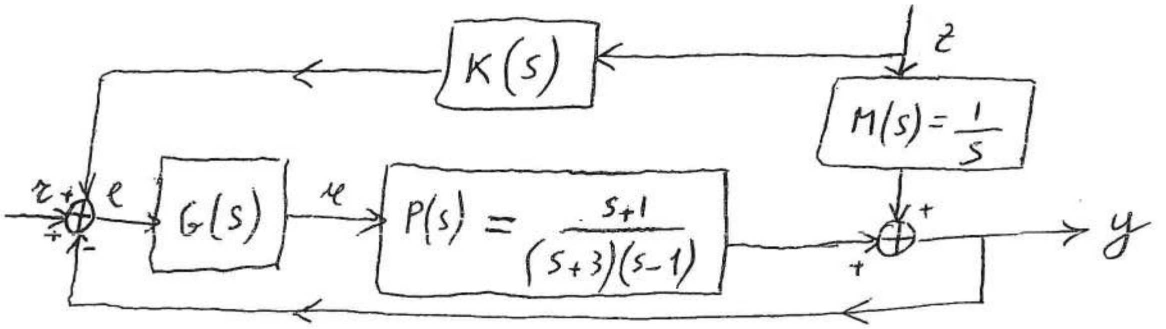
B) **Solo per C.A.:** Si determini per quali valori del parametro "a" è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato che garantisca una velocità di convergenza a zero dell'errore tra stato reale e stato stimato almeno pari a " e^{-2t} ".

C) Si consideri uno schema di controllo del suddetto processo con reazione dall'uscita. Si determini il parametro "a" e un controllore a dimensione minima in modo che il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a $p(\lambda) = (\lambda+1)\,(\lambda+2)\,(\lambda+3)$.

D) Si determinino le caratteristiche di raggiungibilità e osservabilità degli autovalori del sistema complessivo di cui alla domanda precedente.

Soluzione del problema 1

Dato che il disturbo è misurabile è possibile implementare uno schema di controllo a doppia controreazione del tipo:



Conviene dapprima determinare il controllore $G(s)$ in modo da soddisfare tutte le specifiche indipendenti dal disturbo e, successivamente, determinare il controllore $K(s)$ in modo da soddisfare la specifica riguardante il disturbo (specifica δ)).

Per soddisfare la specifica α) è necessario introdurre un polo in $s=0$ in $G(s)$, mentre per soddisfare la specifica β) è necessario creare una cancellazione tra $P(s)$ e $G(s)$ la quale, considerata la specifica γ), non può che essere una cancellazione zero-polo del fattore "$s+3$". Per soddisfare la specifica γ), si può allora tentare di adottare la seguente struttura per $G(s)$:

$$G(s) = a\,\frac{s+3}{s} \implies F(s) = G(s)\,P(s) = a\,\frac{s+1}{s(s-1)}$$

Il denominatore della f. di trasf. ing.-usc. risulta

allora:

$$D_W = N_F + D_F = a(s+1) + s(s-1) = s^2 + s(a-1) + a$$

Si può quindi applicare la traslazione $s \rightarrow s-2$ e, successivamente, adoperare il criterio di Routh:

$$(s-2)^2 + (s-2)(a-1) + a = s^2 + s(a-5) + 6 - a$$

Il criterio di Routh è verificato per $6 > a > 5$. Si può scegliere, ad esempio, $a = 5{,}5 \Rightarrow \boxed{G(s) = 5{,}5\ \frac{s+3}{s}}$.

Per soddisfare la specifica J), si deve scegliere il controllore $K(s)$ in modo che $W_z(s) = 0$. Si ha quindi:

$$\frac{y(s)}{z(s)} = W_z(s) = \frac{M(s) + P(s)\,G(s)\,K(s)}{1 + P(s)\,G(s)} = 0 \Rightarrow \boxed{K(s) = -\frac{M(s)}{P(s)\,G(s)} = -\frac{s-1}{5{,}5(s+1)}}$$

Soluzione del problema 2

La f. di trasf. ad anello aperto risulta:

$$F(s) = G(s)\,P(s) = K\,\frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}\,\frac{1}{s^2} \Rightarrow F(j\omega) = K\,\frac{1+\tau_1 j\omega}{1+\tau_2 j\omega}\,\frac{1}{(j\omega)^2}$$

In corrispondenza della pulsazione di attraversamento $\omega_t = 1$:

$$\angle F(j1) = -180^\circ + \mathrm{arctg}\,\tau_1 - \mathrm{arctg}\,\tau_2$$

Dalla suddetta relazione e/o dall'analisi del diagramma di Bode, è evidente che, per massimizzare il margine di fase, è necessario scegliere $K>0$, τ_1 più grande possibile e τ_2 più piccolo possibile. Si deve allora scegliere $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 0{,}1$

Per tale scelta risulta $\angle F(j1) \simeq -140{,}7^\circ \Rightarrow m_\varphi \simeq 39{,}3^\circ$.

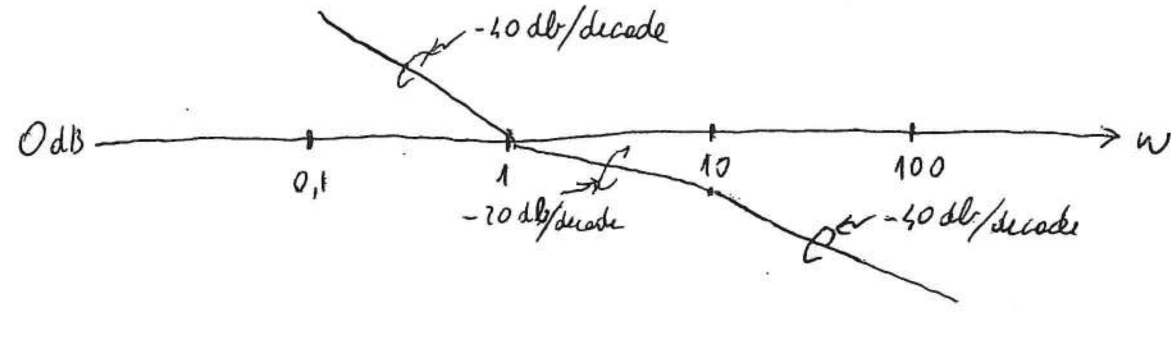
Per fare in modo che la pulsazione di attraversamento sia pari ad "1", si deve scegliere $K>0$ modo che:

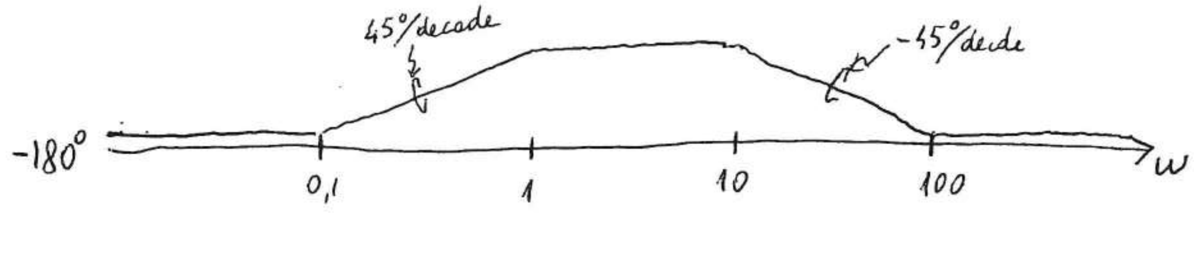
$$\left|F(j1)\right| = \left|K\,\frac{1+j\tau_1}{1+j\tau_2}\,\frac{1}{j^2}\right| = 1 \Rightarrow |K| = \sqrt{\frac{1+\tau_2^2}{1+\tau_1^2}} \simeq 0{,}71$$

Quindi

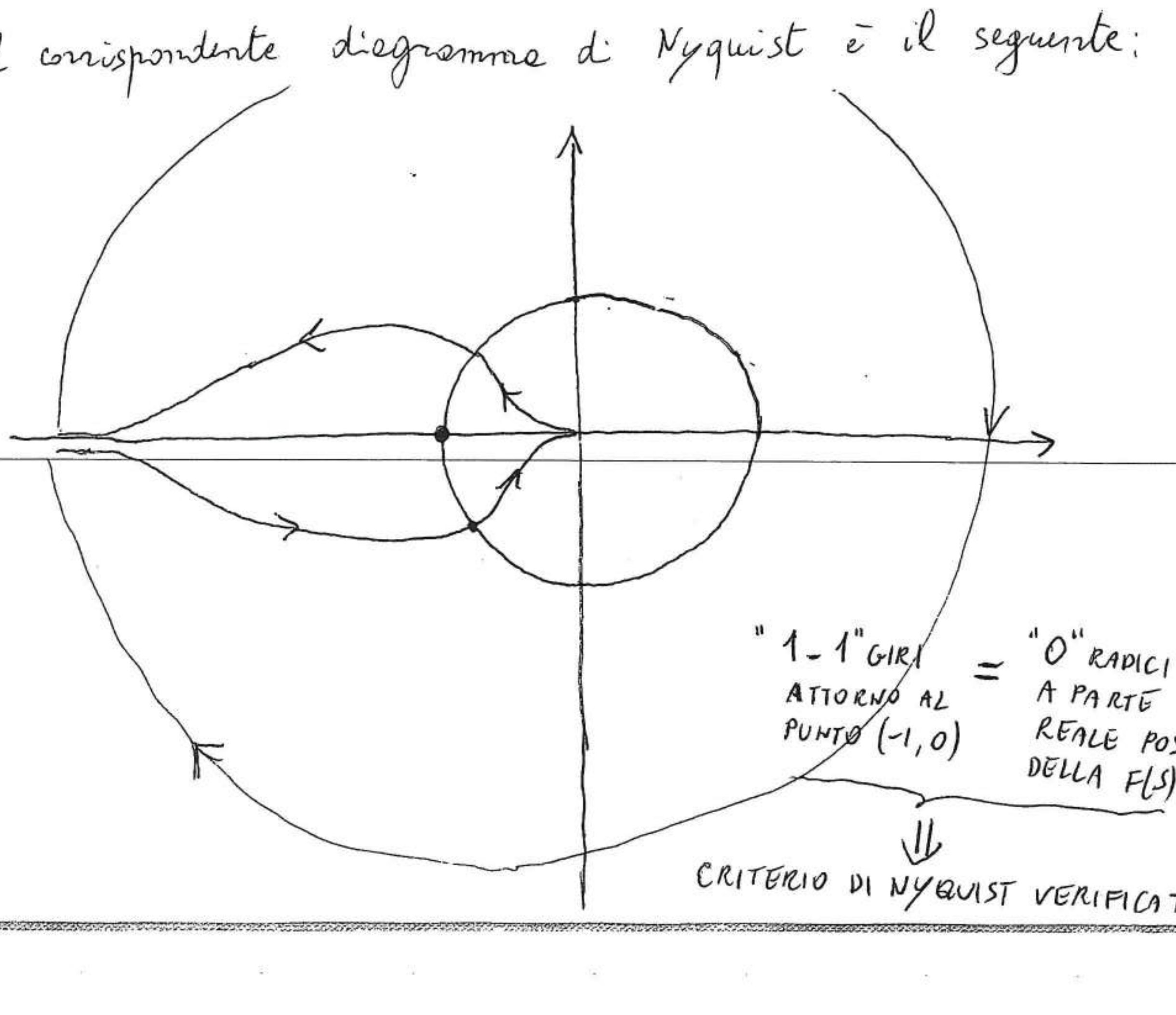
$$K \simeq 0{,}71 \Rightarrow K \simeq -2{,}97 \text{ db}$$

I diagrammi di Bode di $F(s)$ sono i seguenti:





Il corrispondente diagramma di Nyquist è il seguente:



Soluzione del problema 3

Gli autovalori del sotto-processo 2 sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.
L'autovalore $\lambda_1 = 1$ è irrag. se $a = -\frac{1}{2}$ ed è oss. $\forall a$.
L'autovalore $\lambda_2 = -1$ è rag. $\forall a$ ed è inoss. $\forall a$.
Nel sotto-processo 1 non vi sono autovalori nascosti.
Si osserva inoltre che, $\forall a$, non si possono creare cancellazioni di coppie polo-zero a parte reale positiva o nulla tra il sottoprocesso 1 e il sottoprocesso 2.

A) La condizione per la stabilizzabilità asintotica con reazione dall'uscita è che tutti gli autovalori nascosti siano a parte reale neg.. Il processo risulta quindi sempre stabilizzabile con reazione dall'uscita tranne nel caso $a = -\frac{1}{2}$.

B) La condizione di esistenza dell'osservatore asintotico richiesto è che tutti gli autovalori inosservabili siano a parte reale minore o uguale a -2. Dato che, $\forall a$, esiste un autovalore inosservabile in -1 non è mai possibile implementare l'osservatore asintotico richiesto.

~~C) La f. di trasf. del sotto-processo 2 risulta:~~

$$P_2(s) = \frac{s+2a}{s-1}$$

Come già notato in precedenza, esiste un autovalore

nescosto in "-1" che si ritroverà nel polinomio
caratteristico del sistema complessivo.

Per minimizzare la dimensione del controllore e semplificare i calcoli, conviene creare una cancellazione polo-zero in "-3" tra i due sottoprocessi, scegliendo $a = 3/2$. Con tale scelta si ha:

$$P(s) = P_1(s)\, P_2(s) = \frac{1}{s-1}$$

La suddetta cancellazione provoca la presenza di un autovalore nascosto (ragg. e inoss.) in "-3" che si ritroverà nel polinomio caratteristico del sistema complessivo.

A questo punto l'unico autovalore che rimane da assegnare è quello in "-2". La suddetta assegnazione può essere effettuata facilmente scegliendo $G(s) = K$:

$$D_W = N_G N_P + D_G D_P = K + s - 1 = s + 2 \Rightarrow K = 3$$

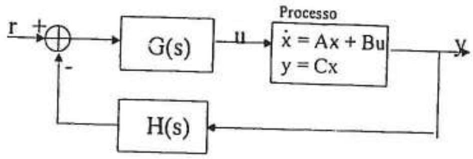
D) In base a quanto notato in precedenza, risulta:

$$p(\lambda) = \underbrace{(\lambda+1)}_{\substack{\text{ragg.}\\ \text{e inoss.}}}\ \underbrace{(\lambda+2)}_{\substack{\text{ragg.}\\ \text{e oss.}}}\ \underbrace{(\lambda+3)}_{\substack{\text{ragg.}\\ \text{e inoss.}}}$$

401

SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. delle telecomunicazioni (S.C.A.)
CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica (C.A.)
Prova scritta del 28 giugno 2007 - Anno accademico 2006/07

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente processo:

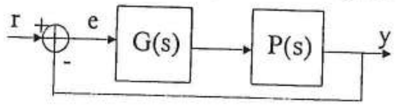


dove $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 0 \quad 1\ ]$ $\qquad H(s) = \dfrac{1}{s + b}$

Si determinino i parametri "a" e "b", nonchè un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che il sistema complessivo abbia tre autovalori coincidenti a parte reale negativa di cui uno nascosto e due non nascosti. Si specifichino inoltre le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità di tali autovalori.

Solo per S.C.A.: con la scelta effettuata del parametro "a", è possibile progettare un osservatore asintotico dello stato in grado di ricostruire asintoticamente lo stato del processo e di garantire una velocità di convergenza a zero dell'errore tra stato reale e stato stimato almeno pari a " e^{-3t} "?

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $G(s) = K$ $\quad , \quad$ $P(s) = \dfrac{1 + 10\,s}{s^2\,(1 + s)}$

Si determini analiticamente il parametro K in modo che

α) la pulsazione di attraversamento ω_t sia pari a 10^n con "n" <u>numero intero dispari</u> da scegliersi opportunamente;

β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con il margine di fase m_φ maggiore possibile (si calcoli analiticamente il margine di fase ottenuto).

Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist di G(s)P(s). Utilizzando il criterio di Nyquist, si evidenzi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

TEMA.

Si descrivano, <u>nello spazio massimo di 3 facciate e senza far ricorso ad esempi</u>, i vari passi per arrivare al progetto di un controllore fisico che guidi un dato processo fisico a verificare assegnate specifiche progettuali, mettendo in evidenza gli aspetti più importanti e i punti critici dei suddetti passi.

Soluzioni del problema 1

Dall' analisi strutturale del processo si deduce che il processo stesso ha 2 autovalori ragg. se $a \neq -2$, mentre, se $a = -2$, ha un autovalore in -1 ragg. e un autovalore in -2 irrag.; inoltre il processo è oss. $\forall a$ (è quindi sempre possibile determinare un oss. asintotico dello stato e garantire una qualsivoglia velocità di convergenza a zero dell'errore tra stato ed stato stimato).

Per generare l'autovalore nascosto richiesto, conviene scegliere $a = -2$. Per tale scelta risulta $P(s) = \frac{1}{s+1}$.

Per assegnare i 2 autovalori non nascosti, conviene tentare la scelta di un controllore (a dimensione zero) del tipo

$$G(s) = K \qquad \Longrightarrow F(s) = P(s)\,G(s) = \frac{K}{s+1}$$

Con le scelte suddette vi sono a disposizione due parametri (K e b) che possono essere utilizzati nell' assegnazione di autovalori.

~~La f. di trasf del sistema complessivo è la seguente:~~

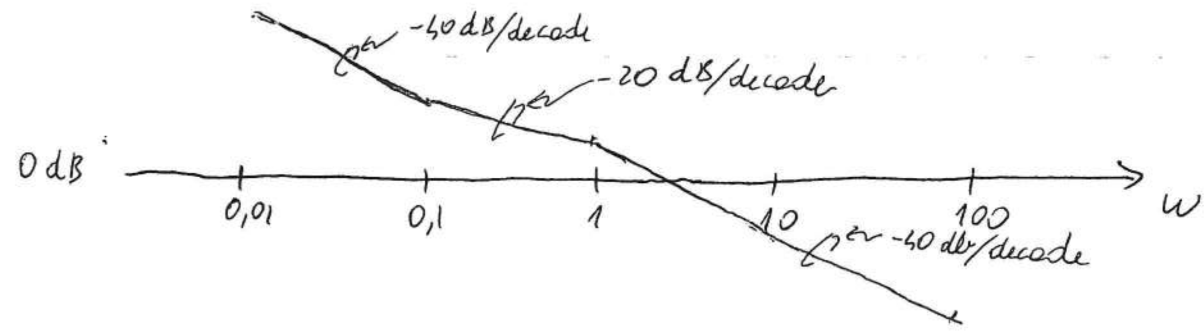
$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \qquad \text{con } F(s) = \frac{N_F}{D_F} \text{ e } H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

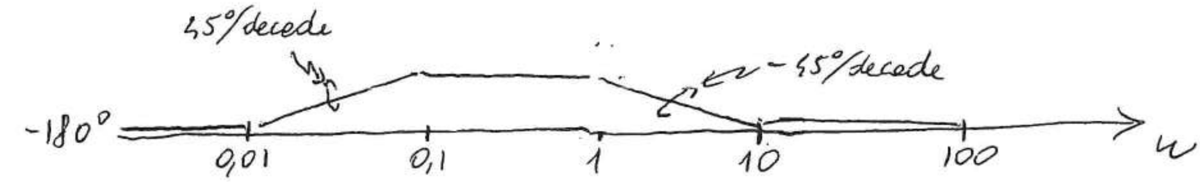
Per assegnare i due autovalori non nascosti (rag. e oss.) che devono necessariamente essere in -2, si deve imporre

$$N_F N_H + D_F D_H = K + (s+b)(s+1) = (s+2)^2 \Longrightarrow b = 3,\ K = 1$$

Soluzione del problema 2

I diagrammi di Bode qualitativi di $P(s)$ sono i seguenti:





Dai diagrammi suddetti è evidente che, per massimizzare il margine di fase conviene scegliere $\omega_t = 0{,}1$ (ossia $\nu = -1$). Con tale scelta risulta:

$$\angle F(j0{,}1) = \angle \frac{1 + 10j0{,}1}{(j0{,}1)^2(1+j0{,}1)} = -180° + \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0{,}1 = -180° + 39{,}3° \Rightarrow m_\varphi = 39{,}3°$$

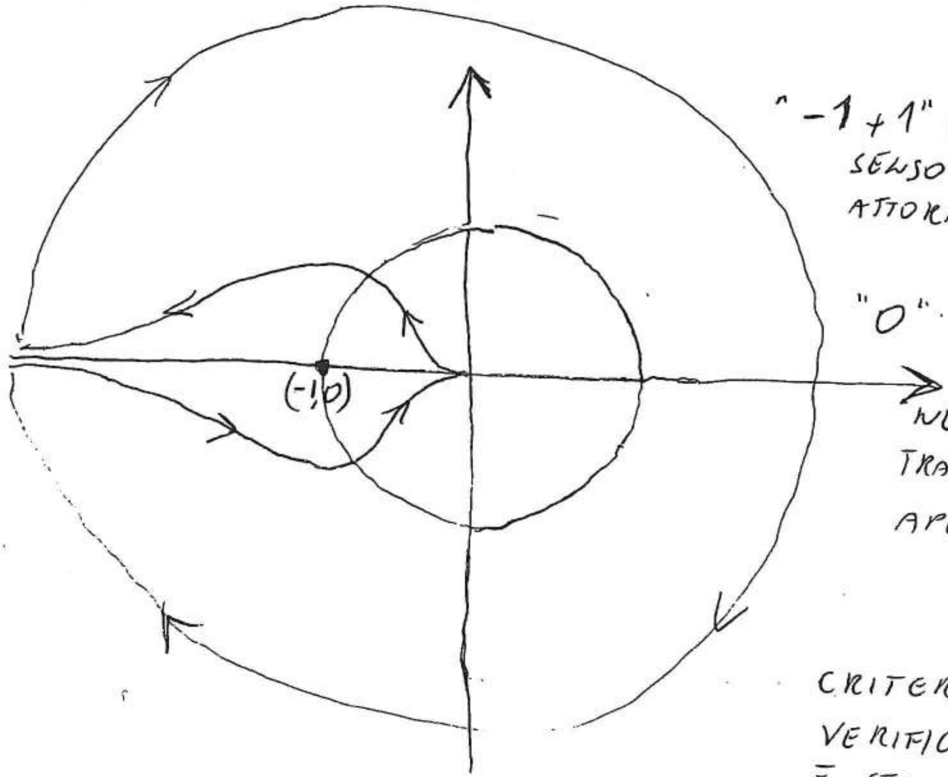
Per portare la pulsazione di attraversamento ω_t in 0,1, si deve scegliere K in modo che risulti:

$$|F(j0{,}1)| = 1 \Rightarrow \left| K \frac{1 + 10j0{,}1}{(j0{,}1)^2(1+j0{,}1)} \right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |K| = (0{,}1)^2 \sqrt{\frac{1{,}01}{2}} \Rightarrow |K| = 0{,}0071$$

Per assicurare la stabilità asintotica deve essere $K > 0$, per cui $K = 0{,}0071 \Rightarrow K \simeq -43$ db

Il diagramma di Nyquist richiesto è il seguente:



"$-1+1$" GIRI IN SENSO ANTIORARIO ATTORNO AL PUNTO $(-1,0)$

$\|$

"0" POLI A PARTE REALE POS. NELLA FUNZ. DI TRASF. AD ANELLO APERTO $G(S)\,P(S)$

$\Downarrow$

CRITERIO DI NYQUIST VERIFICATO: IL SISTEMA È STABILE ASINT.

Soluzione del problema 1

Il primo dei due sottosistemi in cascata è in forma canonica raggiungibile, per cui la sua funzione di trasferimento è pari a $\dfrac{c_1 s + c_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$.

Per creare due autovalori nascosti in -1 e -2, si devono creare una coppia polo-zero in -1 (autovalore ragg. e inoss.) e una coppia zero-polo in -2 (autovalore irragg. e oss.), per cui la funzione di trasferimento del controllore deve essere del tipo:

$$G(s) = \frac{a\,(s+2)}{(s+b)\,(s+1)} \quad \Rightarrow \quad F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{a\,(s+3)}{(s+b)\,s}$$

Procedendo all'assegnazione dei due autovalori residui, si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = a\,(s+3) + (s+b)\,s = (s+1)\,(s+2) \quad \Rightarrow \quad a = 2/3,\ b = 7/3 \ \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{2/3\,(s+2)}{(s+7/3)\,(s+1)} = \frac{2/3\,s + 4/3}{(s^2 + 10/3\,s + 7/3)} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2/3,\ c_0 = 4/3,\ a_1 = 10/3,\ a_0 = 7/3$$

Soluzione del problema 2

A) Dall'esame dei diagrammi di Bode e di Nyquist [illegible]da anche la domanda B) o dal criterio di Routh si può osservare che per α=2 o α=3, il sistema compl[illegible] non è asintoticamente stabile per qualsiasi valore di K. Si deve quindi scegliere α=1.

Per verificare la specifica 1) deve risultare:

$$\left|\, \frac{W_e(s)}{s}\Big|_{s=0} \right| \le 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad |K| \ge 2$$

E' evidente che, per garantire la stabilità asintotica d[illegible]tema complessivo, K deve essere positivo; deve quindi risultare $K \ge 2$ il che esclude K=0,1 e K=1.

Dall'esame dei diagrammi di Bode si può osservare ch[illegible]umentare di K, la pulsazione di attraversamento aumenta e le fasi corrispondenti a tale pulsazione dim[illegible]ono; diminuisce conseguentemente il margine di fase. Conviene quindi scegliere K=10.

Con le scelte suddette risulta $F(s) = \dfrac{10}{s\,(s+1)}$

Imponendo $|F(j\omega_t)| = 1$ si ottiene $\omega_t \approx 3{,}08$.

Si ha quindi Fase[F(j3,08)] ≈ - 162° e un margine di fase pari a circa 18°.

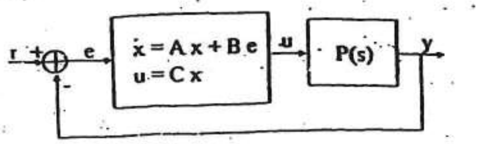
B) I diagrammi di Bode e di Nyquist richiesti sono riportati qui di seguito.

Si noti che nella funzione di trasferimento ad anello aperto non ci sono poli a parte reale negativa e che il diagramma di Nyquist compie 2 giri in senso orario attorno al punto di coordinate (0,-1). Quindi per K=1 e α =2 il sistema complessivo non risulta asintoticamente stabile.

CONTROLLI AUTOMATICI e SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO

Prova scritta del 19 settembre 2007 - Anno accademico 2006/07

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

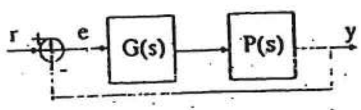


dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ c_0 \ \ c_1\ ]$, $P(s) = \dfrac{(s+3)(s+1)}{(s+2)\,s}$.

A) Si determinino i quattro parametri a_0, a_1, c_0, c_1 in modo tale che:
   1) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a $(s+1)^2\,(s+2)^2$;
   2) i quattro autovalori di cui al punto 1) siano due non nascosti e due nascosti (se ne specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità).

PROBLEMA 2

Si consideri il seguente processo:



con $G(s) = \dfrac{K}{s^{\alpha}}$, $P(s) = \dfrac{1}{1+s}$.

Il parametro K può assumere uno a scelta tra i seguenti 4 valori: K=0,1 , K=1, K=10, K=100. Il parametro α può assumere uno a scelta tra i seguenti 3 valori: $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$.

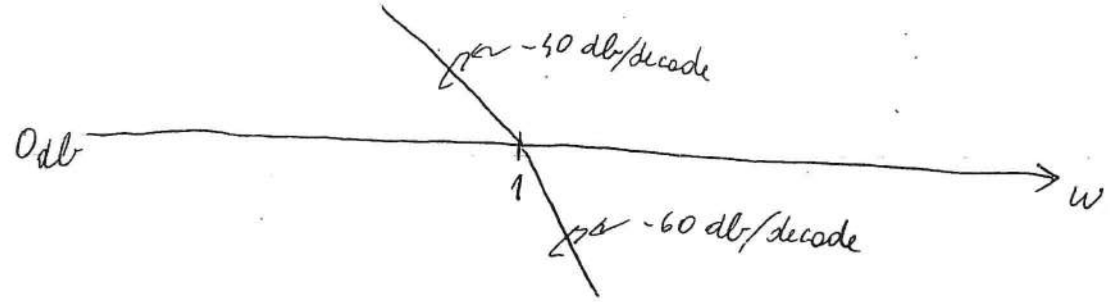
A) Si determinino K e α in maniera che le seguenti specifiche risultano soddisfatte:
   1) il modulo dell'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t)=t sia non superiore a 0,5;
   2) il sistema complessivo sia stabile asintoticamente con margine di fase il piu' elevato possibile.

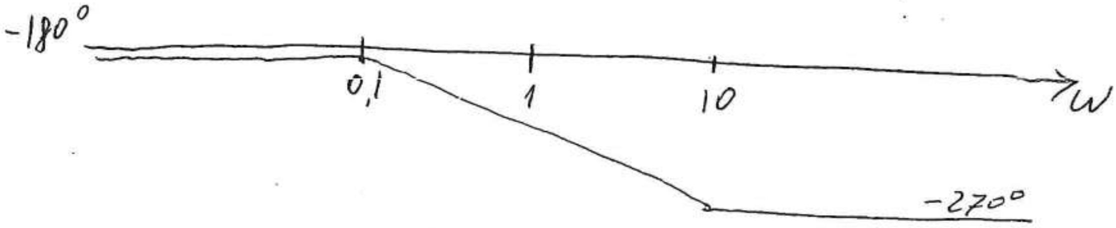
   Si motivi la scelta effettuata per i parametri K e α.
   Si specifichino chiaramente, determinandoli analiticamente, il margine di fase ottenuto e la relativa pulsazione di attraversamento ω_t.

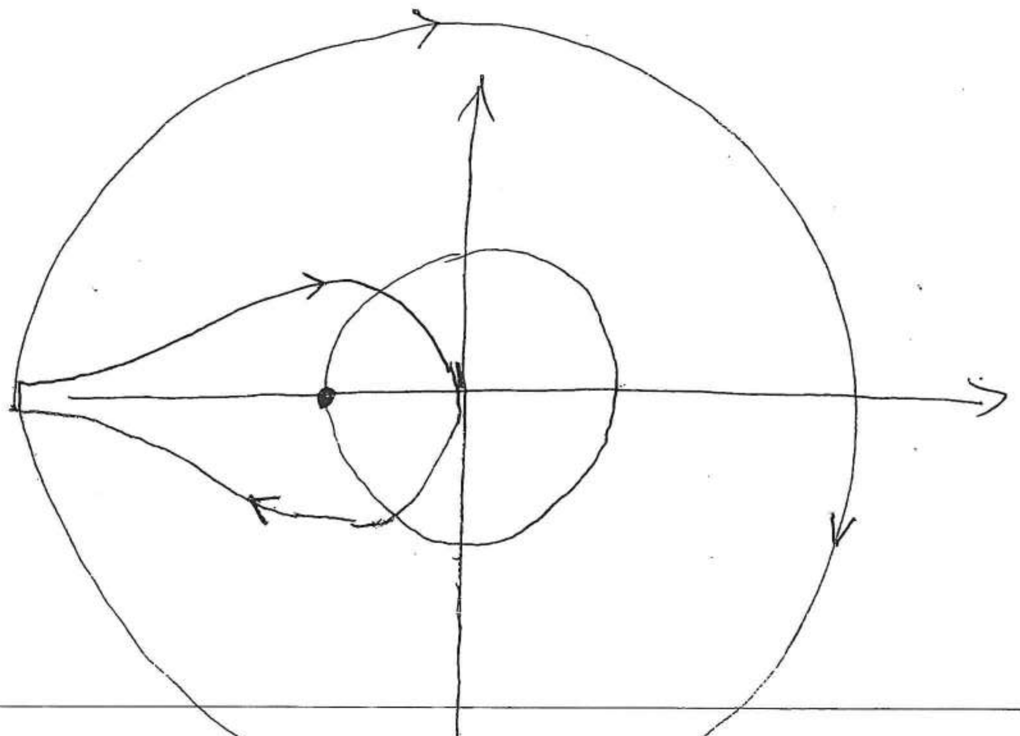
B) Scelti K=1 e α =2 si traccino i diagrammi di Nyquist di G(s)P(s). Utilizzando il criterio di Nyquist, si discuta la stabilità asintotica del sistema complessivo.

PROBLEMA 3 .

Descrivere i vantaggi del controllo ad anello chiuso rispetto al controllo ad anello aperto.


-40 db/decade
0db
1
w
-60 db/decade


-180°
0,1
1
10
w
-270°

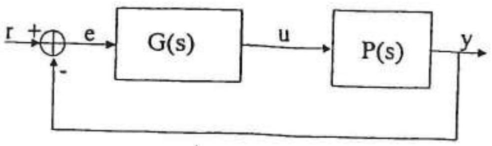


408

CONTROLLI AUTOMATICI (C.A.) e SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO (S.C.A.)

Prova scritta dell'8 gennaio 2008 - Anno accademico 2006/07

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $P(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s-1)}$.

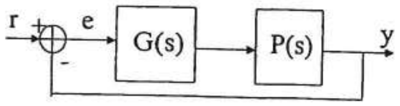
A) Si determini un controllore G(s) a dimensione minima in modo tale che:
   1) il polinomio caratteristico del sistema complessivo abbia un autovalori nascosto;
   2) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   3) l'errore "e" a regime permanente per ingresso r(t)=t sia in modulo minore di 2.

B) Considerando il controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

C) Considerando il controllore individuato nella domanda A), qual'è la massima velocità ottenibile di convergenza a zero del transitorio?

PROBLEMA 2

Si consideri il seguente processo:



con $G(s) = K$, $P(s) = \dfrac{1}{1-s}$.

A) Si determini K in modo che le seguenti specifiche risultano soddisfatte:
   1) la risposta "y" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t)=1 sia non superiore a 2;
   2) il sistema complessivo sia stabile asintoticamente con margine di fase il piu' elevato possibile. Si determini analiticamente il margine di fase ottenuto.

B) Si traccino i diagrammi di Nyquist di G(s)P(s). Utilizzando il criterio di Nyquist, si discuta la stabilità asintotica del sistema complessivo.

PROBLEMA 3 (per Controlli Automatici per ing. informatica).

Si determini un processo instabile a dimensione 2 per il quale sia possibile costruire un osservatore asintotico dello stato, ma non sia possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato reale e lo stato stimato. Si giustifichino le scelte effettuate. Per tale processo si costruisca il relativo osservatore asintotico dello stato.

PROBLEMA 3 (per Sistemi di Controllo Automatico per ing. telecomunicazioni).

Si spieghi perchè un sistema è stabile asintoticamente se e solo se tutti i suoi autovalori sono a parte reale negativa.

Soluzione del problema 1

A) Per soddisfare la specifica 3) è indispensabile inserire un polo in s=0 nella G(s).
Dato che il controllore deve essere a dimensione minima e che deve essere presente un autovalore nascosto, si può tentare di risolvere il problema con un controllore con la struttura seguente:

$$G(s) = K\frac{s+2}{s} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = K\frac{s+1}{s\,(s-1)}$$

Si noti che il suddetto controllore determina la creazione di un autovalore nascosto (irrag. e oss.) in -2.
Per soddisfare la specifica 3) deve risultare:

$$\left|\frac{W_e(s)}{s}\Big|_{s=0}\right| < 2 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{D_F}{N_F + D_F}\frac{1}{s}\Big|_{s=0}\right| < 2 \;\Rightarrow\; |K| > 0{,}5$$

Per soddisfare la specifica sulla stabilità asintotica, devono essere a parte reale negativa le radici del seguente polinomio:

$$N_F + D_F = s^2 + s\,(K-1) + K$$

In base al criterio di Routh, deve quindi risultare $K>1$.
Sulla base dei risultati ottenuti, il controllore suddetto soddisfa tutte le specifiche purchè si scelga $K>1$.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è il seguente:

$$(s+2)\,(s^2 + s\,(K-1) + K)$$

dove l'autovalore - 2 è irrag. e oss, mentre gli altri due autovalori sono ragg. e oss.

C) La massima velocità ottenibile di convergenza a zero del transitorio è determinata dall'autovalore meno negativo. Nel caso specifico, scegliendo opportunamente K è possibile far assumere ai due autovalori ragg. e oss. valori a piacere (quindi anche molto negativi); la massima velocità ottenibile di convergenza a zero del transitorio è determinata quindi dall'autovalore -2 ed è pari a e^{-2t}.

Soluzione del problema 2

A) Utilizzando il criterio di Routh, è evidente che il sistema è stabile asintoticamente per $K < -1$.
Dall'esame dei diagrammi di Bode di -P(s) si constata che per massimizzare il margine di fase occorre scegliere il modulo di K più grande possibile.
In base alla specifica 1) deve risultare:

$$W(0) \leq 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{K}{1-s+K}\Big|_{s=0} \leq 2 \qquad \Rightarrow \qquad K \geq -2$$

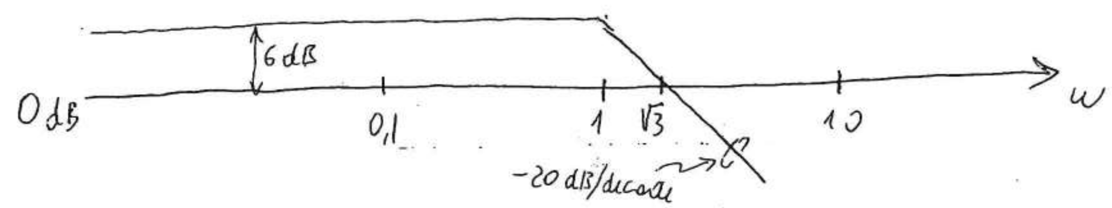
Conviene quindi scegliere $K=-2$
Per tale scelta risulta $F(s) = G(s)P(s) = -2/(1-s)$.
La pulsazione di attraversamento ω_t si deduce imponendo:

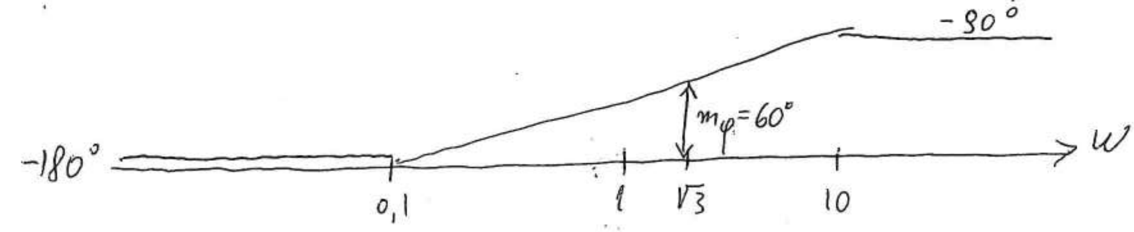
$$|F(j\omega_t)| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_t = \sqrt{3}$$

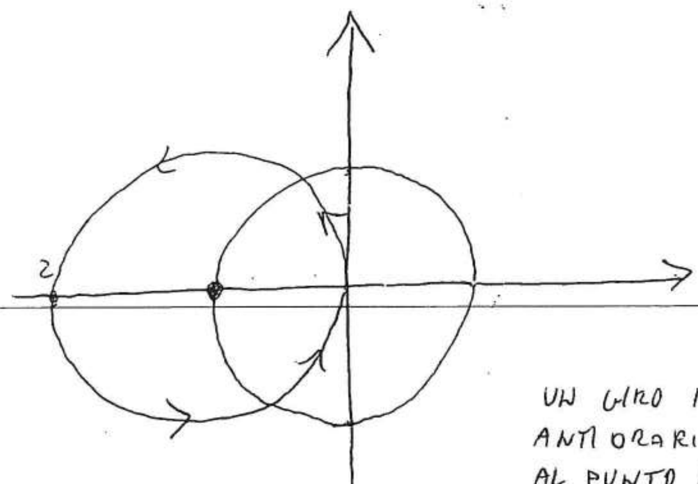
In corrispondenza a tale pulsazione di attraversamento, la fase assume il valore:

Fase$[F(j\sqrt{3})] = -120°$ $\Rightarrow$ $m_\varphi = 60°$

B) I diagrammi di Bode e di Nyquist richiesti sono riportati qui di seguito.







UN GIRO IN SENSO ANTIORARIO ATTORNO AL PUNTO (-1, 0) = UN POLO A PARTE REALE POS. NELLA F. DI TRASF. AD ANELLO APERTO

$\Downarrow$

IL CRITERIO DI NYQUIST È SODDISFATTO

CONTROLLI AUTOMATICI e SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO

Prova scritta del 12 marzo 2008 - Anno accademico 2007/08

411

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

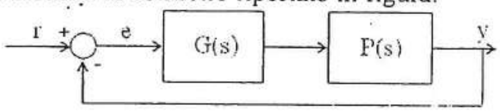
dove $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_1 = [\ 1 \quad 0\ ]$ $\qquad P_2(s) = \dfrac{s+3}{s-1}$.

A) Si determinino il parametro α ed un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> in modo tale che:
   1) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   2) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
   3) la risposta "y" a regime permanente per ingresso r(t) = 1 sia uguale a 2.

B) Si determinino il parametro α ed un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> in modo tale che:
   1) il polinomio caratteristico del sistema complessivo abbia tutti gli <u>autovalori coincidenti</u>;
   2) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti.

C) Si determinino i due polinomi caratteristici del sistema complessivo individuati nelle domande A) e B) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

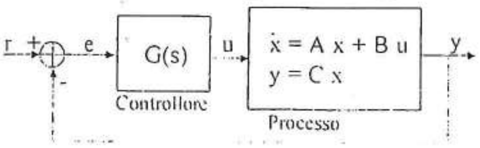


con $P(s) = -\dfrac{1+s}{s(1+0.1s)}$

A) Si determini un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo che:
   1) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=t sia identicamente nullo;
   2) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   3) la pulsazione di attraversamento ω_t del sistema complessivo sia pari a 30 rad/s.

B) Con riferimento al controllore che risolve la domanda A), si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) e, utilizzando il criterio di Nyquist, si verifichi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

PROBLEMA 3 . Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [\ c_1 \quad c_2\ ]$

~~A) Per quali valori dei parametri c_1 e c_2 il sistema complessivo non è stabilizzabile?~~

B) Per quali valori dei parametri c_1 e c_2 non si possono assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema complessivo?

C) Scelti c_1=1 e c_2=3 si determini un controllore G(s) a dimensione minima in modo che
   1) l'errore "e" a regime permanente per ingresso r(t) = 1 sia nullo;
   2) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a (s+1)(s+2)(s+3).

D) **Solo per Controlli Automatici per ing. informatica:** scelti c_1=1 e c_2=3 si specifichi se esiste un osservatore asintotico dello stato del processo e, in caso positivo, si indichi qual'è la massima velocità di convergenza a zero tra lo stato reale e lo stato stimato che può essere ottenuta.

Soluzione del problema 1

A) Il sotto-processo 1 ha funzione di trasferimento $P_1(s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$. In tale sotto-processo esiste un autovalore nascosto (raggiungibile ed inosservabile) in -2.

Il secondo autovalore nascosto può essere creato scegliendo $\alpha = -3$ e quindi creando una cancellazione polo-zero in -3 (autovalore raggiungibile ed inosservabile).
Con tale scelta la funzione di trasferimento del processo risulta pari a

$$P(s) = P_1(s)\,P_2(s) = \frac{1}{s-1}$$

Si può allora provare a risolvere il problema con un controllore del tipo $G(s) = a \;\Rightarrow\; F(s) = \dfrac{a}{s-1}$

La specifica 3) impone $W(0) = 2$ con $W(s) = \dfrac{N_F}{N_F + D_F} \;\Rightarrow\; a=2$
Per il valore a=2 il sistema risulta asintoticamente stabile (specifica 1)) dato che $N_F + D_F = 2 + s - 1 = s + 1$.

B) Il sotto-processo 1 ha funzione di trasferimento $P_1(s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$. In tale sotto-processo esiste un autovalore nascosto (raggiungibile ed inosservabile) in -2. Allora, dato che la specifica 1) impone che tutti gli autovalori del sistema complessivo siano coincidenti anche tutti gli altri autovalori di tale sistema dovranno essere in -2.
Per creare un secondo autovalore nascosto (che in base a quanto sopra dovrà essere necessariamente in -2), l'unica strada è scegliere $\alpha = -2$ ed inserire un fattore "s+2" a numeratore di G(s) in modo da creare una cancellazione zero-polo (autovalore irraggiungibile ed osservabile) in -2.
Si può allora tentare di risolvere il problema di assegnazione degli autovalori con un controllore con la struttura:

$$G(s) = a\,\frac{s+2}{s+b} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = G(s)\,P_1(s)\,P_2(s) = \frac{a\,(s+3)}{(s+b)(s-1)}$$

Il numero di parametri di tale struttura risulta compatibile con l'assegnazione di autovalori.
La suddetta assegnazione risulta:

$$D_W = N_F + D_F = a\,(s+3) + (s+b)(s-1) = (s+2)^2 \quad \Rightarrow \quad a = 9/4,\; b = 11/4$$

C) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nelle domande A) è pari a $(s+1)(s+2)(s+3)$ dove l'autovalore in -1 è ragg. ed oss.. mentre gli altri due autovalori sono ragg. ed inoss.

Il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nelle domande B) è pari a $(s+2)^4$ dove due dei quattro autovalori in- 2 sono ragg. ed oss, mentre i due autovalori nascosti sono uno ragg. ed inoss. e l'altro irrag. ed oss.

Soluzione del problema 2

A) Per soddisfare la specifica 1) la f.d.t. ad anello aperto F(s) deve avere 2 poli in s=0. Il controllore G(s) cercato è dunque della forma

$$G(s) = \frac{k}{s} \Rightarrow F(s) = -\frac{k(1+s)}{s^2(1+0.1s)}$$

Per quanto riguarda la specifica 2) sulla stabilità il polinomio caratteristico del sistema complessivo è

$$D_W(s) = 0.1s^3 + s^2 - ks - k$$

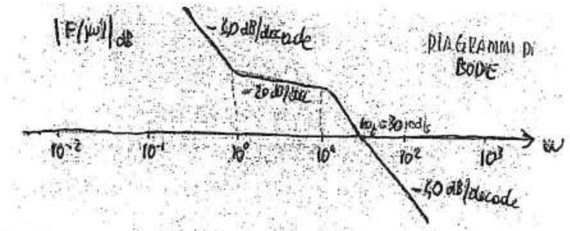
Applicando il criterio di Routh si trova che, affinché non ci siano radici a parte reale positiva, si deve avere $K < 0$.

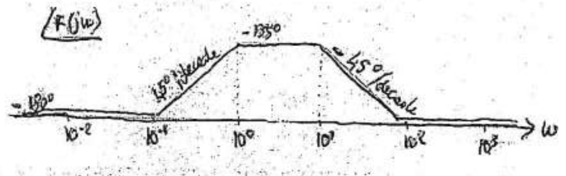
Per soddisfare la specifica 3) imponiamo $|F(i30)| = 1 \Rightarrow |k| \approx 95 \Leftrightarrow |k|_{dB} \approx 39.5dB$

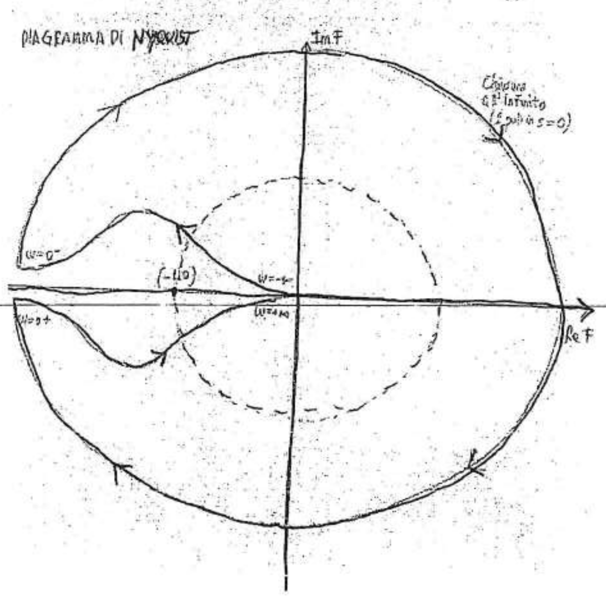
Il controllore cercato è dunque

$$G(s) = \frac{k}{s} \text{ con } K = -95$$

B) I diagrammi di Bode e di Nyquist di F(s) sono i seguenti:







Il diagramma di Nyquist compie zero giri in senso orario intorno al punto critico. La f.d.t. ad anello aperto F(s) non ha poli a parte reale positiva, quindi il criterio di Nyquist è soddisfatto.

Soluzione del problema 3

A), B) Il processo ha gli autovalori -1 e 2. Entrambi gli autovalori sono sempre ragg. L'autovalore 2 risulta inoss solo se $c_2=0$; quindi per tale valore non è possibile stabilizzare il sistema complessivo a causa della presenza di un autovalore nascosto a parte reale positiva. L'autovalore -1 risulta inoss quando $c_2=3c_1$; quindi per tali valori non è possibile assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema complessivo a causa della presenza di un autovalore nascosto.

C) Con $c_1=1$ e $c_2=3$ risulta $P(s)=\frac{1}{s-2}$. In base all'analisi precedente, si ha un autovalore nascosto (ragg. ed inoss) in -1.

Per soddisfare la specifica 1) occorre inserire un polo in s=0 a denominatore della G(s).

Si può allora tentare di risolvere il problema di assegnazione degli autovalori con un controllore con la struttura:

$$G(s)=\frac{as+b}{s} \qquad \Rightarrow \qquad F(s)=\frac{as+b}{s\,(s-2)}$$

Il numero di parametri di tale struttura risulta compatibile con l'assegnazione di autovalori.

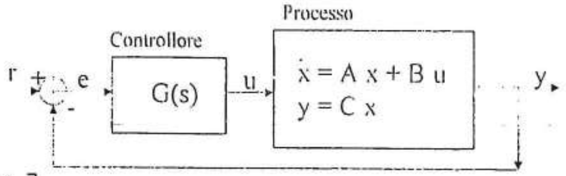
La suddetta assegnazione risulta:

$$D_W = N_F + D_F = as + b + s\,(s-2) = (s+2)(s+3) \qquad \Rightarrow \qquad a=7,\ b=6$$

D) Con $c_1=1$ e $c_2=3$ l'osservatore asintotico del processo esiste dato che tutti gli autovalori inosservabili (nella fattispecie l'autovalore -1) sono a parte reale negativa. Tuttavia la presenza dell'autovalore inoss. in -1 limita la massima velocità di convergenza a zero tra lo stato reale e lo stato stimato a un andamento del tipo e^{-t}.

CONTROLLI AUTOMATICI - SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO 415
Prova scritta del 12 aprile 2008 - Anno accademico 2007/08

PROBLEMA 1 Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



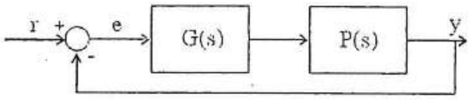
con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ b \quad 1\ ]$

A) Si determinino i due parametri "a" e "b" nonchè un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo che:
   (α) il processo abbia tutti gli autovalori raggiungibili ed osservabili;
   (β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
   (γ) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a (s+5)(s+3)(s+1);
   (δ) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un riferimento r(t) = t sia minore di 0,25.

B) Si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità degli autovalori del sistema complessivo individuato nella domanda A).

C) Con riferimento al sistema complessivo individuato nella domanda A), si determini la risposta y a regime permanente al riferimento r(t) = t.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

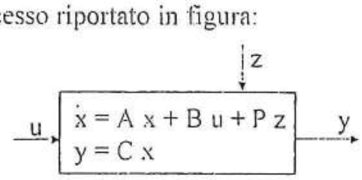


con $P(s) = -\dfrac{10}{(1+\tau s)^2}$ con $\tau = 0.05\,\text{sec}$

A) Si determini un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo che:
   1) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=t sia una costante non nulla;
   2) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   3) il margine di guadagno sia $m_g = 12dB$.

B) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento a ciclo aperto F(s) e, utilizzando il criterio di Nyquist, si verifichi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

PROBLEMA 3 Si consideri il processo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ -1 \quad 1\ ]$

<u>Il disturbo z è misurabile.</u>

A) Si progetti uno schema di controllo a dimensione minima e si scelga il parametro "a" in maniera da verificare le seguenti specifiche:
   α) $|a| = 1$;
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   γ) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

B) Si discuta il vantaggio dello schema di controllo a doppia controreazione, rispetto a quello a controreazione semplice.

416

Soluzione del problema 1

A+B) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \dfrac{s+b}{s\,(s+a)}$.

Dato che il processo deve avere tutti gli autovalori raggiungibili ed osservabili deve essere a≠b e b≠0.
Per avere due autovalori nascosti nel sistema complessivo, è necessario procedere alla cancellazione del polo in -a e dello zero in -b, creando un autovalore nascosto irrag. ed oss. in -a ed un autovalore nascosto ragg. e inos. in -b.
Si può allora scegliere un controllore della forma

$$G(s) = K\frac{s+a}{s+b} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{K}{s} \qquad \Rightarrow \qquad W(s) = \frac{K}{s+K}\ ,\ W_e(s) = \frac{s}{s+K}$$

La specifica δ) impone K > 4.
Gli autovalori del sistema complessivo sono quindi -K (non nascosto, quindi rag. e oss), -a e -b. Deve quindi risultare K=5; inoltre, si deve scegliere a = 3 e b = 1, oppure a = 1 e b = 3.

C) La risposta richiesta è pari a $W(0)\,t + \dfrac{dW}{ds}\Big|_{s=0} = t - 1/5$

Soluzione del problema 2

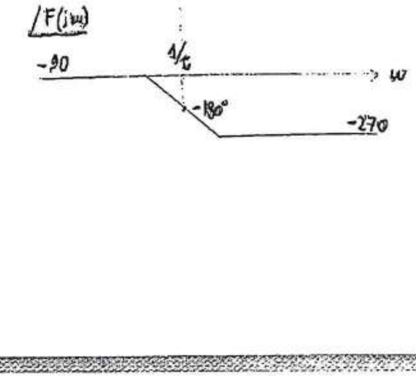
A) Per sodddisfare la specifica 1 la funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) deve avere un polo in s=0. Dunque il controllore sarà della forma $G(s) = \dfrac{k}{s}$.

Il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso W(s) è $D_W(s) = s(1+\tau s)^2 - 10k$ da cui si ottiene come condizione necessaria ma non sufficiente di stabilità $k < 0$.
Per quanto riguarda la specifica 3), dall'osservazione del diagramma di Bode della fase di F(s) si trova che la pulsazione $\tilde{\omega}$ in corrispondenza alla quale $\angle F(i\tilde{\omega}) = -\pi$ vale $\tilde{\omega} = \dfrac{1}{\tau} = 20 rad/s$.

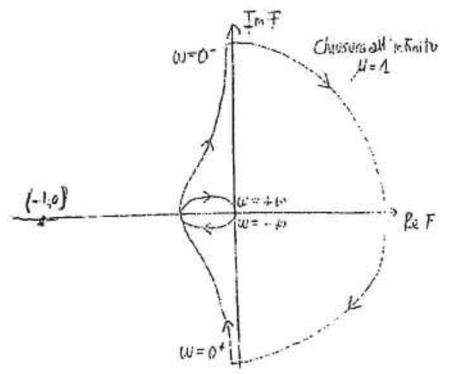
Imponendo $m_{g_{dB}} = 20\log m_g = 20\log\dfrac{1}{|F(i\tilde{\omega})|} = 20\log\dfrac{1}{5\tau|k|} = 12dB$ si ottiene $|k| \approx 1$.

Il controllore cercato è dunque $G(s) = \dfrac{k}{s}$ con $k = -1$.

B)



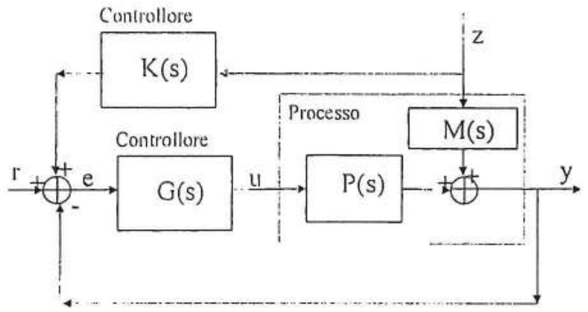
417



Il cammino di Nyquist di $F(i\omega)$ non compie rotazioni intorno al punto critico. La f.d.t. ad anello aperto F(s) non ha poli a parte reale positiva, quindi il criterio di Nyquist è verificato.

Soluzione del problema 3

A) Dato che il disturbo è misurabile, è possibile progettare uno schema di controllo a doppia controreazione del tipo:



dove $P(s) = M(s) = \dfrac{s - 1}{s\,(s - a)}$

Se "a" fosse pari a +1, il sistema avrebbe un autovalore nascosto in -1 e quindi la specifica β) non potrebbe essere verificata: si deve quindi scegliere necessariamente a = -1.
Si può tentare allora di stabilizzare il sistema complessivo con un controllore G(s) a dim. zero del tipo

$$G(s) = K \;\Rightarrow F(s) = K\,\frac{s - 1}{s\,(s + 1)}$$

Applicando il criterio di Routh al polinomio

$$D_W = N_F + D_F = K\,(s - 1) + s\,(s + 1) = s^2 + s\,(1 + K) - K$$

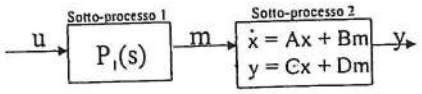
~~si deduce che deve essere 0 > K > -1.~~

Si deve infine scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)=0$ ottenendo la reiezione completa del disturbo. Svolgendo i conti si ottiene:

$$K(s) = -\,\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\,\frac{1}{K}$$

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica n.o. (C.A.),
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. delle telecomunicazioni n.o. (S.C.A.)
Prova scritta del 28 giugno 2008 - Anno accademico 2007/08

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportatc in figura:



con $P_1(s) = \dfrac{4\,(s+3)}{(s+2)(s-1)}$, $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = [\ 4 \quad -1\ ]$, $D = b$

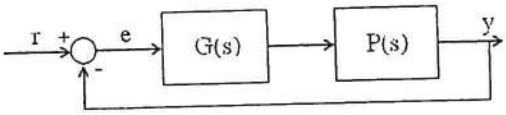
A) Si determini per quali valori del parametro "a" non è possibile stabilizzare asintoticamente il processo mediante un appropriato schema di controllo con reazione dall'uscita e scegliendo opportunamente il parametro "b".

B) **Solo per C.A.:** Si determini per quali valori del parametro "a" non è possibile stabilizzare asintoticamente il processo mediante uno schema di controllo con reazione dallo stato.

C) Si consideri uno schema di controllo del suddetto processo con reazione dall'uscita. Si determinino i parametri "a" e "b" ed un controllore <u>a dimensione minima</u> in modo che il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a $p(\lambda) = (\lambda+1)\ (\lambda+2)\ (\lambda+3)\ (\lambda+4)\ (\lambda+5)$. *Suggerimento: si consiglia di creare quanti più autovalori nascosti possibile.*

D) Si determinino le caratteristiche di raggiungibilità e osservabilità degli autovalori del sistema complessivo di cui alla domanda precedente.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P(s) = \dfrac{1}{s\,(1+\tau s)}$ con $\tau > 0$

A) Si determini un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo che:
 1) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=t sia uguale a 0.1;
 2) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile (si discuta la stabilità del sistema complessivo al variare del parametro τ).

B) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) e, utilizzando il criterio di Nyquist, si verifichi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

TEMA

A) Si discutano, senza far riferimento ad esempi, le problematiche inerenti la modellizzazione di un processo fisico.

B) Si discutano, senza far riferimento ad esempi, le problematiche inerenti la scelta dello schema di controllo.

Soluzione del problema 1

A) I due autovalori del sottoprocesso 2 sono "a" e 2. L'autovalore "a" è irraggiungibile se e solo se a = -1 ed osservabile per qualsiasi valore di "a". L'autovalore 2 è sempre raggiungibile ed è inosservabile se e solo se a= -2. Cnes per poter stabilizzare un processo con reazione dall'uscita è che tutti gli eventuali autovalori irrag. e/o inoss. siano a parte reale negativa. Il processo non è quindi stabilizzabile con reazione dall'uscita per a = -2. Si noti che, scegliendo opportunamente "b", è sempre possibile evitare, nella cascata tra i sottoprocessi 1 e 2, la cancellazione dell'autovalore +1.

B) Cnes per poter stabilizzare un processo con reazione dallo stato è che tutti gli eventuali autovalori irrag. siano a parte reale negativa. In base all'analisi di cui alla domanda precedente, questa condizione è sempre verificata per qualsiasi valore di "a".

C) D) Per ottenere un controllore a dimensione minima, conviene ridurre il più possibile la dimensione del processo, facendo attenzione a generare autovalori nascosti compatibili con il polinomio caratteristico da assegnare. Conviene quindi scegliere a = -1, creando un autovalore irrag. ed oss. in -1; con tale scelta la funzione di trasferimento del secondo sottoprocesso diventa pari a

$$P_2(s) = \frac{1}{s-2} + b$$

Conviene scegliere "b" in modo da provocare una cancellazione polo-zero in -2 tra i due sottoprocessi; tale cancellazione provoca un autovalore ragg. ed inoss. in -2. Si sceglie quindi

$$b=1/4 \quad \Rightarrow P_2(s) = \frac{s+2}{4\,(s-2)} \quad \Rightarrow \quad P(s) = P_1(s)\,P_2(s) = \frac{s+3}{(s-1)\,(s-2)}$$

A questo punto, restano da assegnare gli autovalori -3, -4 e -5. Conviene quindi scegliere un controllore G(s) a dimensione 1 con la forma:

$$G(s) = \frac{cs+d}{s+3} \quad \Rightarrow \quad F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{cs+d}{(s-1)\,(s-2)}$$

La scelta suddetta provoca una cancellazione polo-zero in -3 tra controllore e processo; tale cancellazione provoca un autovalore ragg. ed inoss. in -3. A questo punto, restano da assegnare gli autovalori -4 e -5 che risulteranno ragg. e oss.. Si può quindi procedere alla seguente assegnazione degli autovalori

$$D_W = N_F + D_F = cs + d + (s-1)\,(s-2) = (s+4)\,(s+5) \Rightarrow \quad c = 12\;,\; d = 18.$$

Soluzione del problema 2

A) Il controllore cercato è $G(s) = K$. Dalla specifica 1) si ha

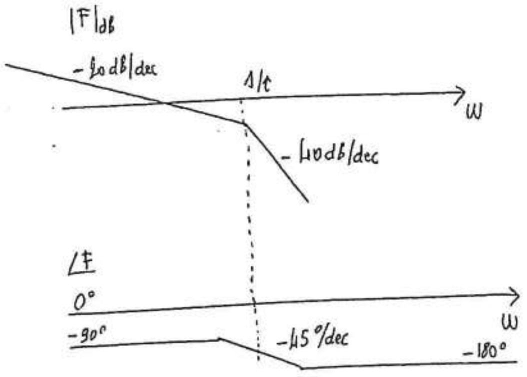
$$e = \left|\frac{W_e(s)}{s}\right|_{s=0} = \left|\frac{1}{K}\right| = 0.1 \Rightarrow |K| = 10$$

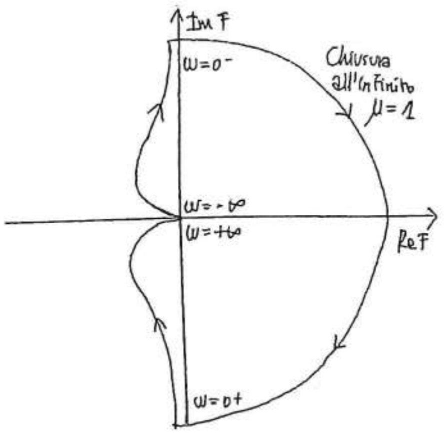
Il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso è

$$D_W = \tau s^2 + s + K$$

che non ha variazioni di segno per $K > 0$ e $\tau > 0$. Il controllore cercato è dunque $G(s) = 10$. Il sistema complessivo è quindi asintoticamente stabile per qualsiasi valore di τ positivo.

B)



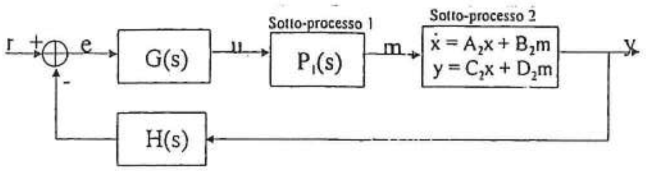


Dato che non ci sono poli a parte reale positiva nella funzione di trasferimento ad anello aperto e dato che non ci sono giri attorno al punto di coordinate (-1,0), in base al criterio di Nyquist, il sistema complessivo risulta asintoticamente stabile. Si noti che, poichè il sistema ad anello aperto ha solo due poli, il massimo sfasamento ottenibile si ha per $\omega \to \infty$ e vale $-\pi$ Al variare del parametro τ il sistema è quindi strutturalmente stabile, purchè tale costante di tempo sia positiva.

421

SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. delle telecomunicazioni (S.C.A.)
CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica (C.A.)
Prova scritta del 20 settembre 2008 - Anno accademico 2007/08

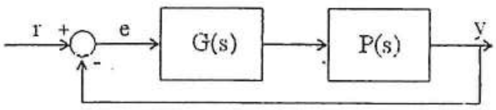
PROBLEMA 1. Si consideri il seguente processo:



dove $P_1(s) = \dfrac{s+5}{s+2}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$, $C_2 = [\ 1 \quad 1\ ]$, $D_2 = b$ $\quad H(s) = \dfrac{1}{s}$

Si determinino i parametri "a" e "b", nonchè un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che il sistema complessivo abbia tre autovalori nascosti e il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a (s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5). Si specifichino inoltre le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità di tali autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P(s) = \dfrac{1}{s(1-\tau s)}$ $\qquad \tau > 0$

A) Si dimostri, utilizzando il criterio di Nyquist, che non è possibile stabilizzare il sistema complessivo mediante un controllore del tipo $G(s)=k$ con $k \in R$. Si analizzino separatamente i casi $k > 0$ e $k < 0$.

B) Si verifichi la coerenza di quanto stabilito al punto A) mediante il criterio di Routh.

C) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) per entrambi i casi considerati.

TEMA.

Si descrivano i criteri per la scelta della struttura di un controllore.

Soluzione del problema 1

Conviene creare un primo autovalore nascosto nel sotto-processo 2 scegliendo opportunamente il valore del parametro "a". Aiutandosi con il test di Hautus, si constata che, scegliendo a=2, l'autovalore -1 del sotto-processo 2 risulta nascosto (irraggiungibile ed osservabile).

Per tale scelta risulta $P_2(s) = \dfrac{bs + 3 - b}{s - 1}$. Conviene creare un secondo autovalore nascosto generando una cancellazione polo-zero tra il primo e il secondo sotto-processo.

Scegliendo b=1 risulta $P_2(s) = \dfrac{s+2}{s-1} \Rightarrow P(s) = P_1(s)\, P_2(s) = \dfrac{s+5}{s-1}$

La suddetta cancellazione ha creato un autovalore nascosto (ragg. e inoss) in -2.

La funz. di trasf. ing.-uscita è pari a

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \qquad \text{con } F(s) = \frac{N_F}{D_F} = G(s)\, P_1(s)\, P_2(s), \quad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Conviene quindi scegliere una struttura che crei il terzo autovalore nascosto tramite una cancellazione polo-zero (autovalore ragg. ed inoss) in -5 ed inoltre consenta di assegnare gli ultimi due autovalori in -3 e -4 (i quali risultano non nascosti, ossia ragg. e oss.). tale struttura è la seguente:

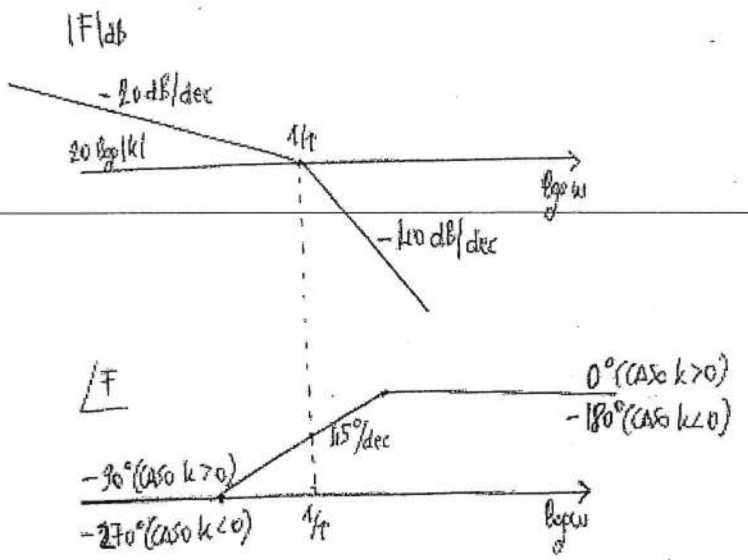
$$G(s) = \frac{cs+d}{s+5} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{cs+d}{s-1}$$

Procedendo all'assegnazione degli autovalori suddetti e risolvendo con il principio di identità dei polinomi si ottiene:

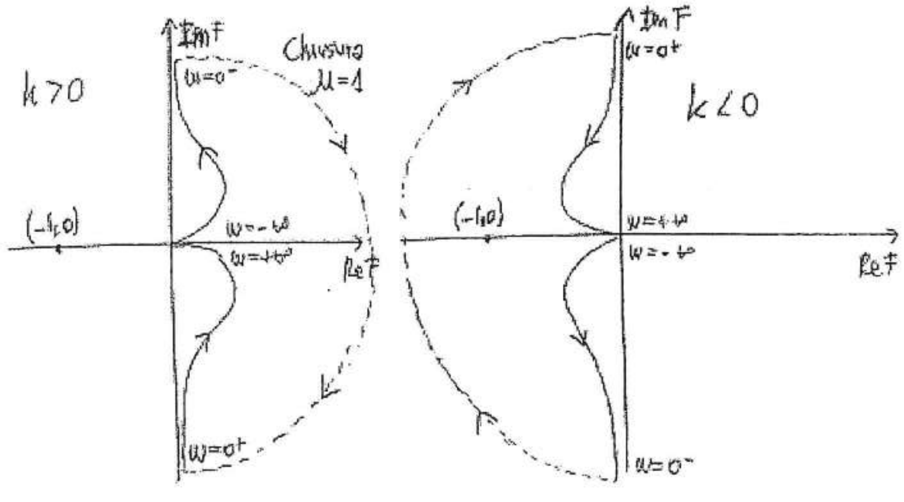
$D_W = N_F N_H + D_F D_H = cs + d + (s-1)s = (s+3)(s+4) \Rightarrow c=8,\ d=12.$

Soluzione del problema 2

A) C) I diagrammi di Bode del modulo per i due casi considerati sono lo stesso, mentre i diagrammi della fase sono traslati di 180 gradi l'uno rispetto all'altro.



I diagrammi di Nyquist sono quindi lo stesso a meno di una rotazione di 180 gradi.



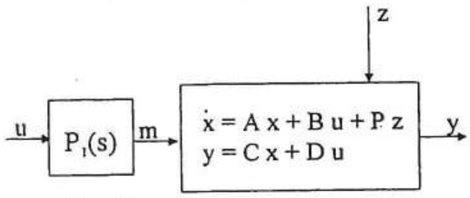
Affinchè il sistema complessivo sia stabile si dovrebbe avere una rotazione antioraria del diagramma di Nyquist intorno al punto critico. Ciò non si verifica in nessuno dei due casi considerati.

B) Il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso è $D_W = -\tau s^2 + s + k$, da cui si vede che non è possibile scegliere k in modo da non avere variazioni di segno.

424

CONTROLLI AUTOMATICI - SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO
Prova scritta del 10 gennaio 2009 - Anno accademico 2008/09

PROBLEMA 1. Si consideri il processo riportato in figura:



dove $P_1(s) = \frac{1}{s}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [\ 1 \quad 1\ ]$, $D = d$, $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

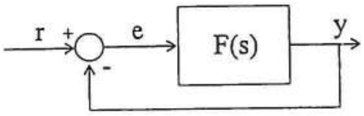
Il disturbo z e l'uscita y sono misurabili.

A) Si progetti uno schema di controllo a dimensione minima e si scelga il parametro "d" in modo che

1) i disturbi z non abbiano influenza sull'uscita y;
2) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
3) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
4) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori coincidenti.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A) specificando le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità degli autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema a controreazione in figura.



A) Si grafichino i diagrami di Nyquist relativi alle seguenti funzioni di trasferimento a ciclo aperto:

$$F_1(s) = \frac{1}{s(1-\tau s)} \quad F_2(s) = -\frac{1}{s(1+\tau s)} \quad F_3(s) = -\frac{1}{(1+\tau s)} \qquad \tau > 0$$

B) Con riferimento ai diagrami di cui sopra si individui, utilizzando il criterio di Nyquist, a quale funzione di trasferimento a ciclo aperto corrisponde un sistema a ciclo chiuso rispettivamente:

1) stabile;
2) al limite di stabilità;
3) instabile

Si motivi ciascuna delle tre risposte.

PROBLEMA 3 (per Sistemi di Controllo Automatico)

A) Si illustri il significato degli autovalori raggiungibili/irraggiungibili e degli autovalori osservabili/inosservabili di un processo.

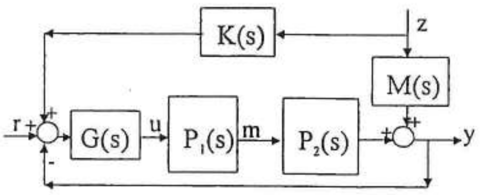
B) Si spieghi (in maniera intuitiva) per quale ragione gli autovalori nascosti di un processo non possono essere spostati con uno schema di controllo a controrcazione.

PROBLEMA 3 (per Controlli Automatici)

Si enuncino e si dimostrino le condizioni di esistenza dell'osservatore asintotico dello stato di un processo.

Soluzione del problema 1

A) Stante la misurabilità del disturbo conviene adoperare uno schema di controllo a doppia controreazione che, nel dominio di Laplace, diventa:



con $P_1(s) = \frac{1}{s}$, $P_2(s) = \frac{ds-2d+1}{s-2}$, $M(s) = \frac{2s}{(s-2)(s+2)}$

Si noti la presenza nel processo di un autovalore irraggiungibile ed osservabile in -2.

Conviene dapprima determinare il controllore G(s) in modo tale da verificare le specifiche 2), 3), 4) e, successivamente, determinare il controllore K(s) in modo da soddisfare la prima specifica.

Dato che esiste un autovalore nascosto in -2, in base alla specifica 4), anche tutti gli altri autovalori devono essere in -2. Per creare un secondo autovalore nascosto in -2, conviene scegliere "d" in modo che $P_2(s)$ abbia uno zero in -2 e cancellare tale zero con un polo di G(s) (in tal modo si crea un autovalore raggiungibile ed inosservabile).

Si sceglie quindi d=1/4 e

$$G(s) = \frac{as+b}{s+2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{4}\,\frac{as+b}{s(s-2)}$$

Per assegnare in -2 anche gli autovalori non nascosti bisogna imporre:

$$D_W = N_F + D_F = as+b+ 4s(s-2) = 4\,(s+2)^2$$

Utilizzando il principio di identità dei polinomi si deduce a=24, b=16.

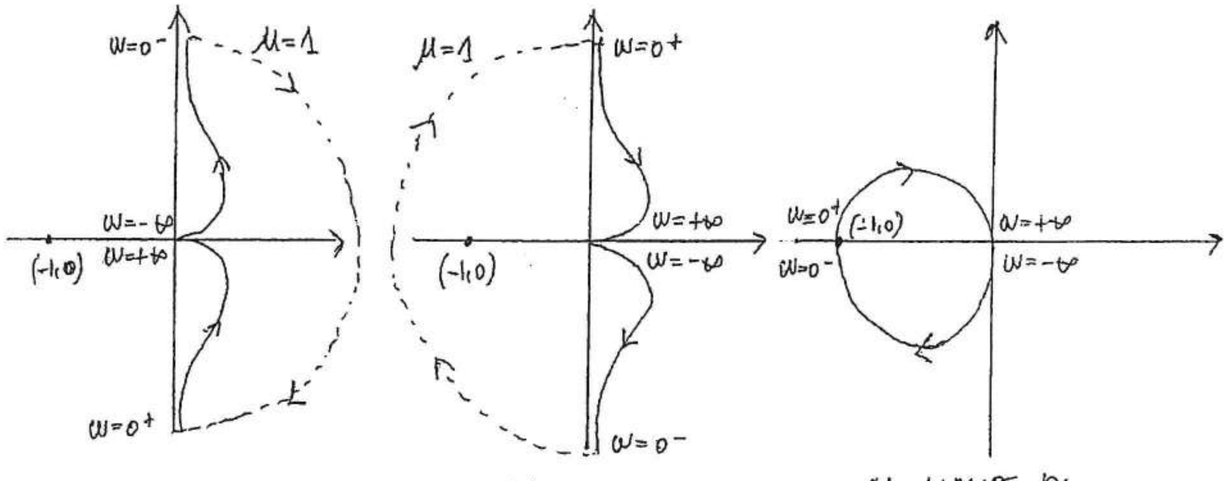
Per imporre che i disturbi non abbiano influenza sull'uscita, bisogna imporre che la funzione di trasferimento disturbo-uscita sia identicamente pari a zero. Ciò significa:

$$W_z(s) = \frac{M + P_1P_2GK}{1+P_1P_2G} = 0 \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{M}{P_1\,P_2\,G} = -\frac{s^2}{(s+2)(3s+2)}$$

B) Il polinomio caratteristico è pari a $(s+2)^4$ con due autovalori raggiungibili ed osservabili, un autovalore raggiungibile ed inosservabile ed un autovalore irraggiungibile ed osservabile.

Soluzione del problema 2

$$F_1(s) = \frac{1}{s(1-\tau s)} \qquad F_2(s) = -\frac{1}{s(1+\tau s)} \qquad F_3(s) = -\frac{1}{1+\tau s}$$

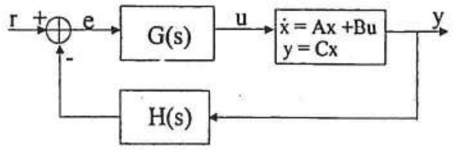


INSTABILE | INSTABILE | AL LIMITE DI STABILITA'

427

SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. delle telecomunicazioni (S.C.A.)
CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica e vecchio ordinamento(C.A.)
Prova scritta del 19 giugno 2009 - Anno accademico 2008/09

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



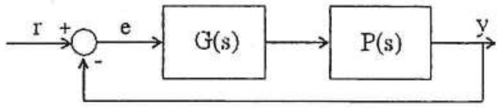
dove $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [\ 1 \quad 0\ ]$, $H(s) = \frac{1}{s}$

A) Si determini un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
  α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = t^2/2$ sia, in modulo, minore di 0,1;
  β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si calcoli l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = 2 + 3t$

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



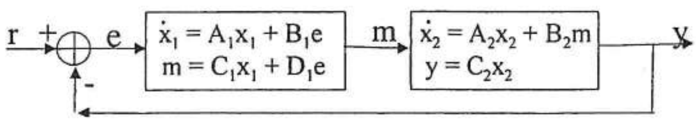
con $P(s) = -\frac{s+1}{s(1+0.1s)}$

A) Si determini un controllore G(s) a dimensione minima tale che:
  a) il sistema complessivo abbia un autovalore raggiungibile ed inosservabile;
  b) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = t$ sia, in modulo, minore di 0.2;
  c) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) e si verifichi la stabilità del sistema ad anello chiuso utilizzando il criterio di Nyquist.

C) Si verifichi la coerenza di quanto stabilito al punto B) mediante il criterio di Routh.

PROBLEMA 3. Si consideri il seguente schema di controllo



dove $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $C_1 = [\ 1 \quad 1\ ]$, $D_1 = 1$,

$A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = [\ c_1 \quad c_2 \quad c_3\ ]$

Si determinino i coefficienti b_1, b_2, c_1, c_2, c_3 in modo che il sistema complessivo abbia i seguenti autovalori con le seguenti caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità:
-2 irraggiungibile ed osservabile, -3 raggiungibile ed inosservabile, -4 irraggiungibile ed osservabile,
-5 raggiungibile ed inosservabile, -6 raggiungibile ed osservabile.

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{1}{s+1}$. Si noti la presenza di un autovalore nascosto (irrag. e inoss.) in -1 che, essendo a parte reale negativa, non inficia la stabilizzabilità del sistema complessivo

Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_G N_P N_H}{N_G N_P N_H + D_G D_P D_H},\ W_e(s) = \frac{D_G D_P D_H}{N_G N_P N_H + D_G D_P D_H}\ \text{con } G(s) = \frac{N_G}{D_G},\ P(s) = \frac{N_P}{D_P}\quad H(s) = \frac{N_H}{D_H}.$$

Per soddisfare la specifica α), è necessario introdurre un polo in s=0 nel controllore. Si può quindi provare a risolvere il problema con un controllore con la struttura:

$$G(s) = \frac{as + b}{s} \qquad (*)$$

Per soddisfare la specifica α), è allora sufficiente che risulti:

$$\left| \frac{W_e(s)}{s^2} \Big|_{s=0} \right| < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad |b| > 10$$

Per garantire l'asintotica stabilità, tutte le radici del denominatore D_W della funz. di trasferimento ingresso-uscita devono avere parte reale negativa; con le scelte effettuate, tale denominatore risulta

$$D_W = N_G N_P N_H + D_G D_P D_H = s^3 + s^2 + as + b$$

In base al criterio di Routh, deve risultare a-b>0, b>0.

Quindi il controllore (*) risolve il problema purchè si scelga a>b>10..

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s^3 + s^2 + as + b)(s+1)$ dove il primo fattore contiene gli autovalori ragg. e oss., mentre il secondo fattore contiene l'autovalore irrag. e inoss. in -1

C) L'errore richiesto è nullo.

Soluzione del problema 2.

A) Per soddisfare la specifica a) è necessario cancellare lo zero del processo. La presenza in quest'ultimo del polo in s=0 garantisce che la risposta in regime permanente per ingressi a rampa sia costante. Il controllore è dunque del tipo

$$G(s) = \frac{k}{(s+1)}$$

Per soddisfare la specifica b) è necessario imporre

$$\left\| \frac{W_e(s)}{s} \right\|_{s=0} < 0.2 \Rightarrow |k| > 5$$

Per determinare il segno del guadagno si può applicare il criterio di Routh. In particolare poiché il polinomio caratteristico è del second'ordine e vale

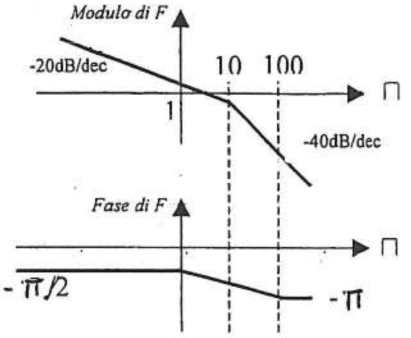
$$D_W(s) = -k + s(1 + 0.1s)$$

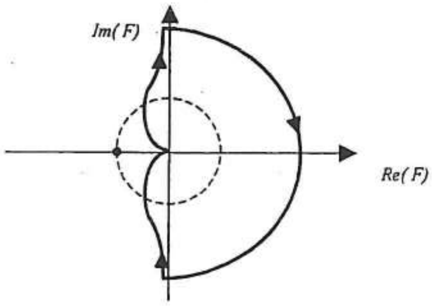
per la stabilità è sufficiente imporre che non ci siano variazioni di segno. Si deve quindi avere k<0.

La soluzione del problema è infine

$$G(s) = \frac{k}{(s+1)} \quad \text{con} \quad k < -5$$

B)





Il processo controllato è stabile asintoticamente. Il diagramma di Nyquist di F non compie rotazioni intorno al punto critico. Ne segue che il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente.

C) Si veda il punto A).

Soluzione del problema 3

Aiutandosi con il test di Hautus, si constata facilmente che ponendo $b_2=0$, si genera l'autovalore irrag. ed oss. in -2; inoltre, ponendo $c_1=0$ e $c_3=0$ si generano, rispettivamente, gli autovalori ragg. ed inos. in -3 e -5.

Per generare l'autovalore irrag. e oss. in -4, l'unica possibilità è quella di creare una cancellazione zero-polo in -4.

Con le suddette posizioni, calcolando le funzioni di trasferimento, si ottiene:

$$P_1(s) = \frac{s+1+b_1}{s+1},\ P_2(s) = \frac{c_2}{s+4}$$

Per generare la suddetta cancellazione zero-polo è sufficiente porre $b_1=3$. Con tale posizione risulta:

$$F(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)} = P_1(s)\ P_2(s) = \frac{c_2}{s+1}$$

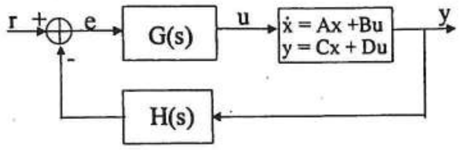
L'autovalore in -6, dovendo essere rag. ed oss., deve risultare essere un polo della funz. di trasf ingresso-uscita del sistema complessivo $W(s) = \dfrac{N_F(s)}{N_F(s) + D_F(s)}$.

Si deve quindi imporre:

$$D_W(s) = N_F(s) + D_F(s) = c_2 + s + 1 = s + 6 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 5.$$

SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. delle telecomunicazioni (S.C.A.) 430
CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica e vecchio ordinamento(C.A.)
Prova scritta del 1 luglio 2009 - Anno accademico 2008/09

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C=[\ c_1 \quad c_2\ ]$, $D=1$, $\qquad H(s)=\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$

A) Si determinino i coefficienti c_1, c_2, ω ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:

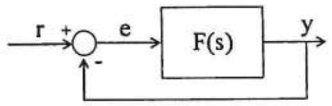
α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = sen t sia nullo;

β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;

γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo a controreazione unitaria:



Si traccino i diagrammi di Nyquist relativi a ciascuna delle seguenti funzioni di trasferimento a ciclo aperto:

$$F_1(s)=\frac{s}{1+\tau s} \qquad \tau>0$$

$$F_2(s)=\frac{2}{(1+\tau s)^4} \qquad \tau>0$$

$$F_3(s)=\frac{1}{(1+\tau s)^3(1-\tau s)} \qquad \tau>0$$

$$F_4(s)=\frac{1+\tau s}{s^3(1-\tau s)} \qquad \tau=10$$

$$F_5(s)=-\frac{1+\tau s}{s(1-\tau s)} \qquad \tau=10$$

Per ognuna di esse si discuta la stabilità del corrispondente sistema ad anello chiuso utilizzando il criterio di Nyquist.

TEMA. Si introduca il concetto di raggiungibilità di una rappresentazione con lo spazio di stato e si ricavi la più generica rappresentazione lineare e stazionaria che evidenzi la scomposizione del sistema in due sottosistemi, di cui uno raggiungibile e l'altro irraggiungibile.

Soluzione del problema 1

A) Conviene generare uno dei due autovalori nascosti ponendo $c_2=0$. Con tale scelta si genera un autovalore ragg. ed inoss. in -2, il che, in base alla specifica γ), obbliga ad assegnare anche tutti gli altri autovalori in -2.

Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{s+c_1}{s}$. Per generare l'altro autovalore nascosto (che necessariamente deve essere in -2) si deve allora scegliere $c_1=2$ e creare una cancellazione polo-zero in -2 tra controllore e processo (si viene cosi' a generare un secondo autovalore ragg. ed inoss. in -2).

Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_F N_H}{N_F N_H + D_F D_H},\; W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \;\text{ con } F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{N_F}{D_F}\;,\; H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per soddisfare la specifica α), è necessario scegliere $\omega=1$.

Per assegnare gli autovalori non nascosti in -2 si deve scegliere la seguente struttura del controllore:

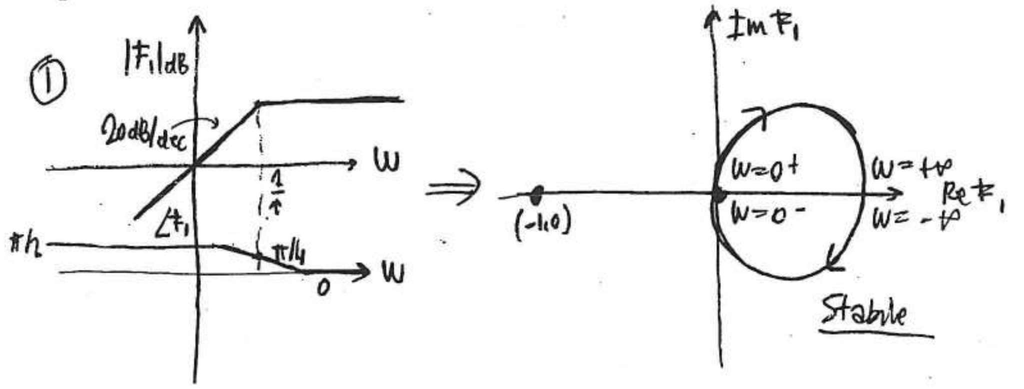
$$G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{(s+d)\,(s+2)} \quad\Rightarrow\quad F(s) = \frac{as^2 + bs + c}{(s+d)\,s}$$

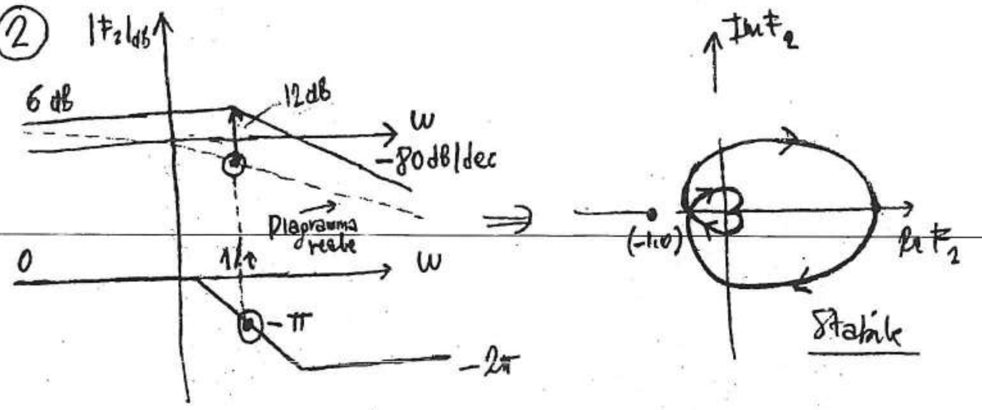
L'assegnazione degli autovalori risulta:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = as^2 + bs + c + (s+d)\,s\,(s^2+1) = (s+2)^4 \quad\Rightarrow\quad a=33,\; b=24,\; c=16,\; d=8$$

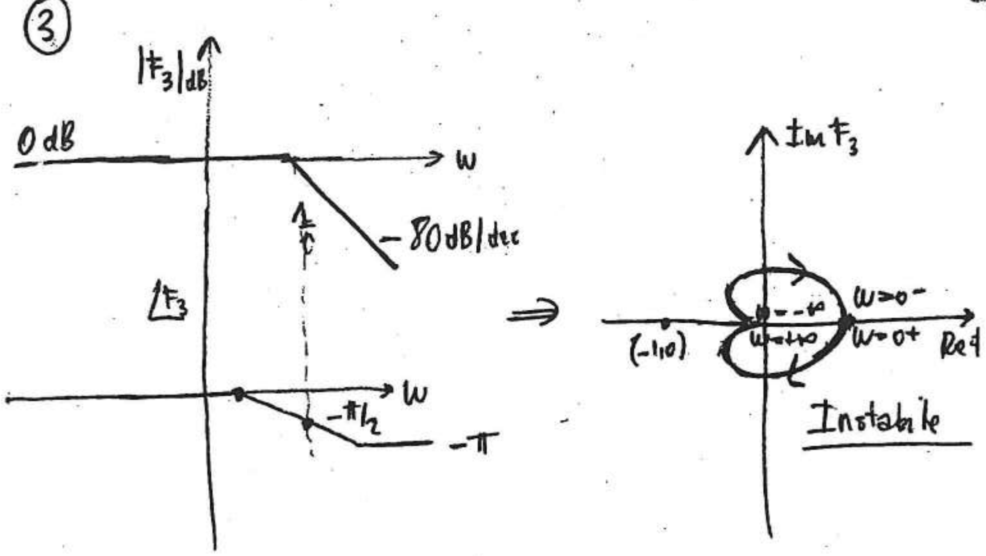
B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s+2)^6$ dove quattro autovalori in -2 sono ragg. e oss, mentre gli altri due sono ragg. ed inoss.

Soluzione del problema 2.



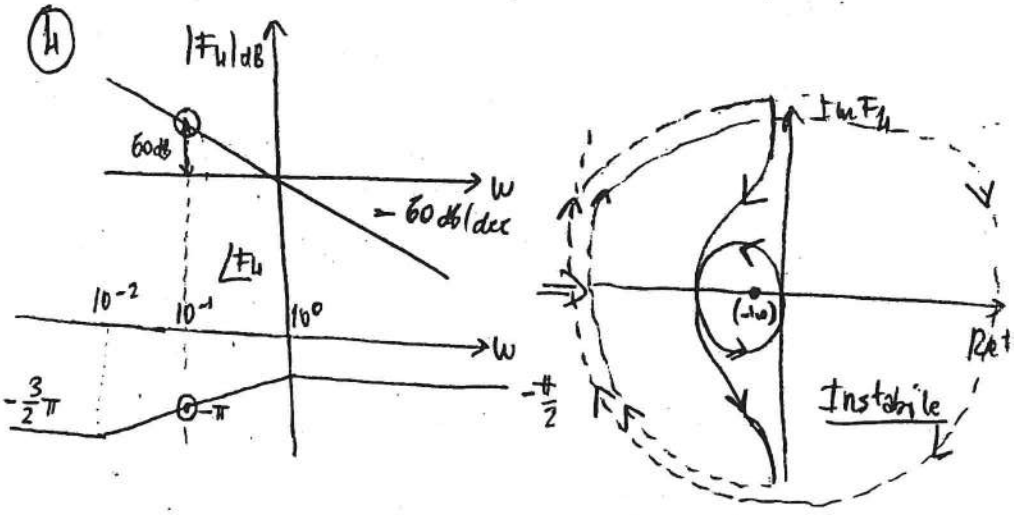


3



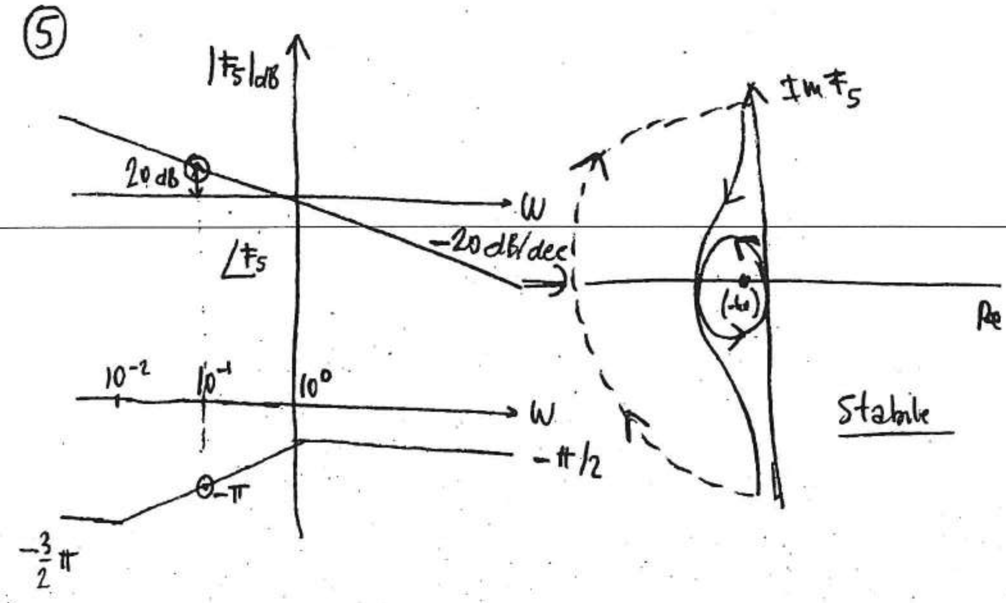
|F3|dB
0 dB
w
1/c
-80dB/dec
∠F3
w
-π/2
-π
Im F3
w=0-
(-1,0)
w=+∞
w=0+
Re F
Instabile

4



|F4|dB
60dB
w
-60 dB/dec
∠F4
10^-2
10^-1
10^0
w
-3/2 π
-π
-π/2
Im F4
(-1,0)
Re F
Instabile

5

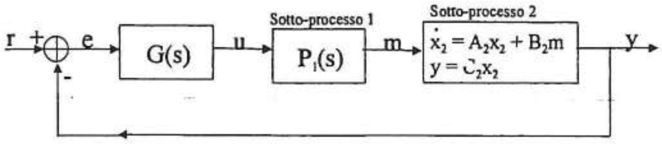


|F5|dB
20 dB
w
-20 dB/dec
∠F5
10^-2
10^-1
10^0
w
-π/2
-π
-3/2 π
Im F5
(-1,0)
Re
Stabile

433

SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. delle telecomunicazioni (S.C.A.)
CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica e vecchio ordinamento(C.A.)
Prova scritta del 22 settembre 2009 - Anno accademico 2008/09

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



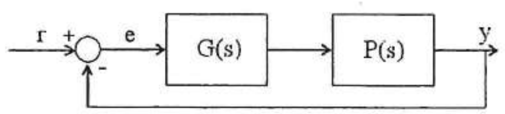
dove $P_1(s) = \dfrac{s-1}{s+2}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = [\,1 \quad 0\,]$

A) Si determinino i parametri "a" e "b" ed un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = t sia, in modulo, non superiore a 2;
   β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
   γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.
B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.
C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si calcoli l'errore a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = 2.

PROBLEMA 2. Si consideri lo stesso schema di controllo del problema 1 dove $P_1(s)$, A_2, B_2 e C_2 siano gli stessi del problema 1.

A) Si determinino i parametri "a" e "b" ed un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = t sia nullo;
   β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
   γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti.
B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.
C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si detremini runa rappresentazione con lo spazio di stato del controllore.

PROBLEMA 3. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P(s) = \dfrac{1}{(1+\tau s)^3}$ con $\tau > 0$

A) Si dica se è possibile determinare un controllore G(s) di dimensione non superiore a due tale che:
   1) il sistema complessivo abbia due autovalori irraggiungibili e osservabili;
   2) l'errore a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=t sia identicamente nullo;
   3) l'errore a regime permanente corrispondente ad un ingresso $r(t)=t^2/2$ sia in modulo minore di 0.1;
   4) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento a ciclo aperto F(s) e, utilizzando il criterio di Nyquist, si verifichi la stabilità asintotica del sistema.

Soluzione del problema 1

A) La funz. di traf. del secondo sottoprocesso è pari a

$$P_2(s) = \frac{1}{s-a}$$

Il secondo sottoprocesso ha un autovalore nascosto (ragg. ed inoss.) in "b" che pertanto deve essere reale e negativo.

Per verificare la specifica α) la funz. di trasferimento ad anello aperto deve avere un polo in s=0. Conviene allora scegliere a=0.

Inoltre, per generare il secondo autovalore nascosto conviene cancellare il polo in -2 del sottoprocesso 1 con uno zero in -2 nel controllore (in questa maniera si genera un autovalore irrag. ed oss in -2). Conviene quindi provare a stabilizzare il sistema complessivo con un controllore della forma:

$$G(s) = c\,\frac{s+2}{s+d} \qquad \Rightarrow \qquad F = GP_1P_2 = c\,\frac{s-1}{s\,(s+d)}$$

In base alla specicfica α) deve risutare:

$$\left|\frac{W_e(s)}{s}\right|_{s=0} \leq 2 \;\Rightarrow\; |c| \geq 0{,}5\,|d|$$

Applicando il criterio di Routh al polinomio $D_W = N_F + D_F = s^2 + s(c+d) - c$, si deduce che il sistema complessivo è asintoticamente stabile per $c + d > 0$ AND $c < 0$.

Per soddisfare tutte le specifiche è pertanto sufficiente scegliere $0 < -c < d \leq -2c$; per esempio, c= -2 e d=3.

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s+2)(s-b)(s^2 + s(c+d) - c)$ dove l'autovalore b è ragg. ed inoss, l'autovalore -2 è irrag. ed oss., mentre gli altri due autovalori sono ragg. ed oss.

C) L'errore a regime permanente richiesto è nullo.

Soluzione del problema 2

A) I due autovalori nascoti si possono generare oome per il problema 1; in questo caso pero', dato che tutti gli autovalori del sistema complessivo devono essere coincidenti, si deve necessariamente scegliere b= -2.

Inoltre, per soddisfare la specifica α), la funz. di trasferimento ad anello aperto deve avere un polo in s=0 di molteplicità due. Conviene allora scegliere a=0 ed inserire un polo in s=0 nel controllore

Infine, per garantire l'assegnabilità degli autovalori il controllore deve avere tre parametri incogniti. Quindi, si deve cegliere un controllore con la struttura:

$$G(s) = \frac{(cs+d)\,(s+2)}{(s+e)\,s} \qquad \Rightarrow \qquad F = GP_1P_2 = \frac{(cs+d)\,(s-1)}{(s+e)\,s^2}$$

L'assegnazione degli autovalori risulta:

$$D_W = N_F + D_F = (cs+d)\,(s-1) + (s+e)\,s^2 = (s+2)^3 \quad \Rightarrow \; c= -20,\ d= -8,\ e=26.$$

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s+2)^5$ dove un autovalore è ragg. ed inoss, un altro è irrag. ed oss., mentre gli altri tre autovalori sono ragg. ed oss.

C) La funz. di trasf. del conrollore richiesto risulta:

$$G(s) = \frac{-20\,s^2 - 48\,s - 16}{s^3 + 26\,s^2}$$

Applicando la forma canonica raggiungibile si ottiene la rappresentazione:

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -26 \end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ H=[\ -16 \ \ -48 \ \ -20\ ]$$

Soluzione del problema 3

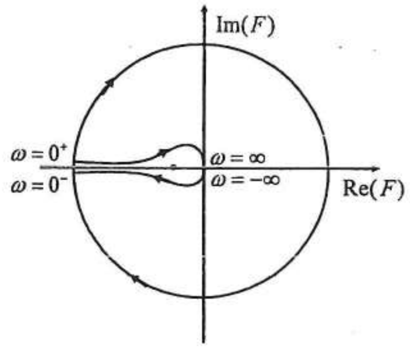
Per soddisfare le specifiche 1) e 2) il controllore deve avere la forma

$$G(s)=k\frac{(1+\tau s)^2}{s^2}$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso è quindi

$$F(s)=\frac{k}{s^2(1+\tau s)}$$

Dalla specifica 3) imponendo $\left\|\dfrac{W_e(s)}{s^2}\right\|_{s=0}<0.1$ si ricava $|k|>10$.



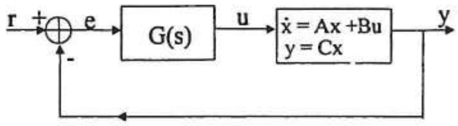
Per k>0 il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso non ha variazioni di segno, tuttavia ciò è condizione necessaria ma non sufficiente per la stabilità asintotica. L'osservazione del diagramma di Nyquist rivela che non è possibile scegliere k in modo da garantire la stabilità.

Per garantire la stabilità è necessario ricorrere ad un controllore di dimensione maggiore, ad esempio un controllore della forma

$$G(s)=k\frac{(1+\tau s)^2(s+a)}{s^2(s+b)}$$

SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. delle telecomunicazioni (S.C.A.) 436
CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica e vecchio ordinamento(C.A.)
Prova scritta del 27 novembre 2009 - Anno accademico 2008/09

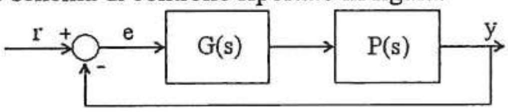
PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C=[\ 1 \quad 0\ ]$.

A) Si determini un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = t sia, in modulo, minore di 0,1;
   β) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori in -1;
   γ) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti.
B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.
C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si calcoli la risposta "y" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = 10.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P(s) = -\dfrac{10(1+s)}{(10+s)}$

A) Si determini un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo che:
   1) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   2) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un ingresso $r(t)=t^2$ sia una costante non nulla;
   3) la pulsazione di attraversamento ω_t della funzione di trasferimento ad anello aperto sia 300 rad/s.
B) Con riferimento al controllore trovato, si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) e, utilizzando il criterio di Nyquist, si verifichi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

PROBLEMA 3.
Si considerino due sotto-processi in cascata caratterizzati dalle funzioni di trasferimento:
$P_1(s) = \dfrac{1}{s+1}$, $P_2(s) = \dfrac{s+1}{s}$.
Si dimostri, passando attraverso le rappresentazioni con lo spazio di stato dei due sotto-processi, che nella ~~serie di tali sotto-processi si viene a creare un autovalore nascosto raggiungibile ed inosservabile in -1.~~

Soluzione del problema 1

437

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{1}{s+1}$. Si noti la presenza di un autovalore nascosto (irrag. e inoss.) in -1

Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_F}{N_F + D_F}, \quad W_e(s) = \frac{D_F}{N_F + D_F} \quad \text{con } F(s) = G(s)\,P(s)$$

Per soddisfare la specifica γ), è necessario provocare una cancellazione tra uno zero in -1 del controllore e il polo in -1 del processo, creando così un secondo autovalore nascosto (irrag. e oss.) in -1. Si osserva poi che la specifica α) impone la presenza di almeno un polo in s=0 nel controllore. Si potrebbe quindi tentare di risolvere il problema con un controllore di dimensione 1 del tipo:

$$G(s) = a\,\frac{s+1}{s} \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{a}{s}$$

La specifica β) imporrebbe a=1, mentre, la specifica α) imporrebbe

$$\left| \frac{W_e(s)}{s}\Big|_{s=0} \right| < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad |a| > 10$$

Essendo le due specifiche chiaramente incompatibili, non è possibile risolvere il problema con un controllore a dimensione 1.

Si deve allora ricorrere ad un controllore a dimensione 2. Per esempio, con due poli in s=0 si rende nullo l'errore di cui alla specifica α); si può quindi progettare un controllore del tipo:

$$G(s) = \frac{(s+1)\,(as+b)}{s^2} \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{as+b}{s^2}$$

Effettuando l'assegnazione degli autovalori, si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = s^2 + as + b = (s+1)^2 \quad \Rightarrow \quad a=2,\ b=1.$$

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s+1)^4$ con due autovalori ragg. e oss., un autovalore irrag. e inoss e un autovalore irrag. e oss.

C) La funz di trasferimento ingresso-uscita risulta $W(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2}$.

La risposta a regime permanente all'ingresso a gradino e' pari a W(0) = 1. Quindi, la risposta richiesta è pari a 10.

Soluzione del problema 2

A) Per soddisfare la specifica 2) la f.d.t. ad anello aperto F(s) deve avere 2 poli in s=0.
Il controllore G(s) cercato è dunque della forma

$$G(s) = \frac{k}{s^2} \Rightarrow F(s) = -\frac{k(1+s)}{s^2(1+0.1s)}$$

Per quanto riguarda la specifica 1) sulla stabilità il polinomio caratteristico del sistema complessivo è

$$D_W(s) = 0.1s^3 + s^2 - ks - k$$

pplicando il criterio di Routh si trova che, affinché non ci siano radici a parte reale positiva, si deve avere

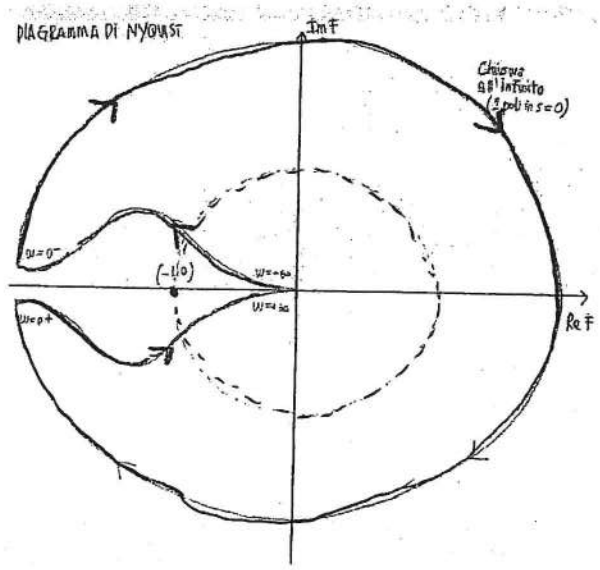
$K < 0$.

Per soddisfare la specifica 3) si ha $|F(i300)| = 1 \Rightarrow |k| \approx 9000 \Leftrightarrow |k|_{dB} \approx 79dB$

Il controllore cercato è dunque

$$G(s) = \frac{k}{s^2} \text{ con } K = -9000$$

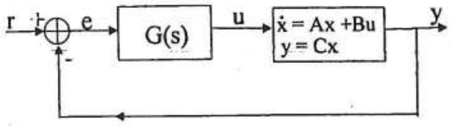
B) Il diagramma di Nyquist di F(s) è riportato in figura:



Non essendoci rotazioni intorno al punto critico ed essendo F(s) stabile il criterio di Nyquist risulta soddisfatto.

SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. delle telecomunicazioni (S.C.A.)
CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica e vecchio ordinamento (C.A.)
Prova scritta del 16 gennaio 2010 - Anno accademico 2008/09

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



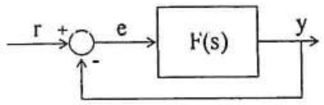
dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 1 \quad 1\ ]$.

A) Si determinino il parametro "a" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
  α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = t sia nullo;
  β) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori a parte reale minore di -3/2;
  γ) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) (*Solo per Controlli Automatici v.o.*): si tracci il luogo delle radici di interesse e si evidenzi la congruenza del luogo con i risultati ottenuti nella domanda A).

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo a controreazione unitaria:



Si traccino i diagrammi di Nyquist relativi a ciascuna delle seguenti funzioni di trasferimento a ciclo aperto:

$$F_1(s) = \frac{4}{s(1+s)^3}$$

$$F_2(s) = \frac{\sqrt{2}}{s(1+s)^2}$$

$$F_3(s) = \frac{1}{s(1-s)^2}$$

Per ognuna di esse si discuta la stabilità del corrispondente sistema ad anello chiuso utilizzando il criterio di Nyquist (*Suggerimento*: si presti attenzione al discostamento in punti particolari tra diagrammai di Bode reali e asintotici).

PROBLEMA 3.
Si illustrino vantaggi e svantaggi degli schemi di controllo
- ad anello aperto,
- ad anello chiuso (a controreazione singola dall'uscita),
- a doppia controreazione (controreazione sia dall'uscita che dal disturbo).

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{s+1}{s\,(s-a)}$.

Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_F}{N_F + D_F},\ W_e(s) = \frac{D_F}{N_F + D_F} \quad \text{con } F(s) = G(s)\,P(s)$$

Per soddisfare la specifica γ), è necessario provocare una cancellazione tra uno zero in "a" del controllore e il polo in "a" del processo, con a<-3/2 per rispettare la specifica β); scegliendo, per esempio, a= -2 si crea un autovalore nascosto (irrag. e oss.) in -2. Si osserva poi che la specifica α) impone la presenza di due poli in s=0 nella funz. di trasf. ad anello aperto: dato che un polo in s=0 è già presente nel processo, si deve collocare l'altro polo nel controllore. Si può allora tentare di risolvere il problema con un controllore di dimensione 1 del tipo:

$$G(s) = b\,\frac{s+2}{s} \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{b\,(s+1)}{s^2}$$

Gli autovalori non nascosti del sistema complessivo sono allora le radici del polinomio:

$$D_W = N_F + D_F = s^2 + bs + b$$

Dato che la specifica β) richiede che gli autovalori siano a parte reale minore di -3/2, per utilizzare il criterio di Routh, si deve preventivamente effettuare la sostituzione $s \to s-3/2$.

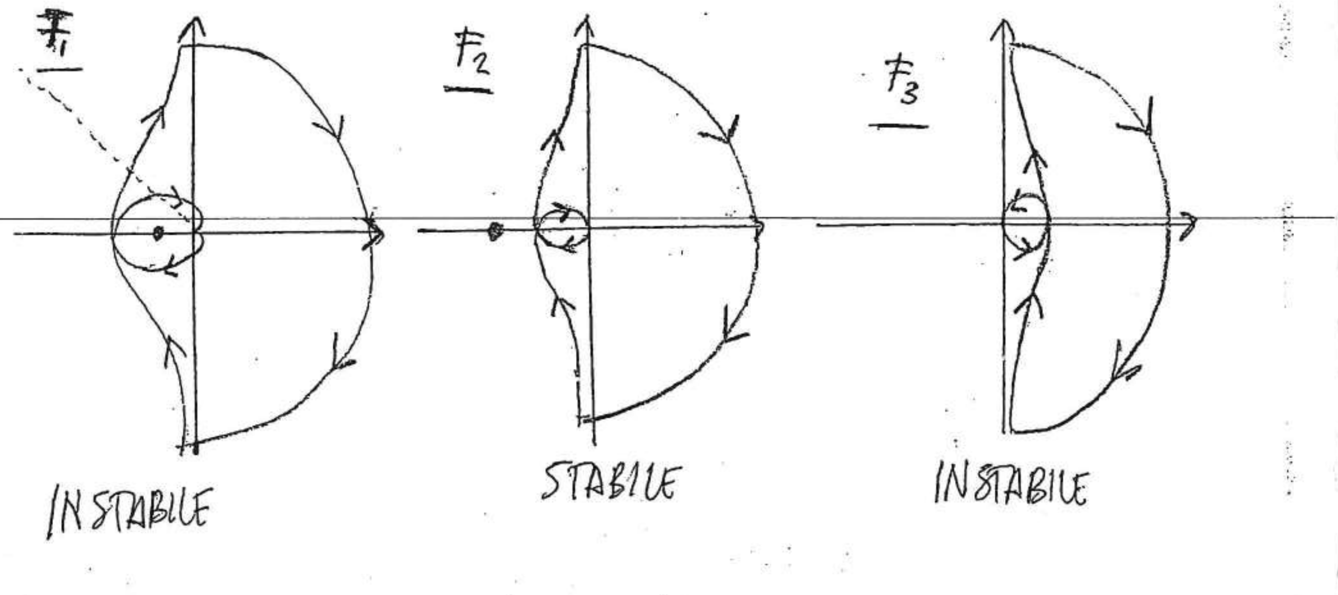
Con tale sostituzione si ottiene:

$$(s-3/2)^2 + b(s-3/2) + b = s^2 + s\,(b-3) + 9/4 - b/2$$

Applicando il criterio di Routh, si deduce il vincolo 4,5 > b > 3. Si può scegliere, ad esempio, b=4.

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s+2)^3$ con due autovalori ragg. e oss. e un autovalore irrag. e oss.

Soluzione del problema 2.



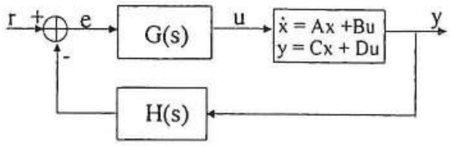
441

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu)

COMPITO A

Prova scritta del 7 giugno 2010 - Anno accademico 2009/10

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 6 \quad 0\ ]$, $D = 1$, $H(s) = \frac{1}{s}$

A) Si determinino il parametro "c" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:

α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = 5\,t + 3$ sia nullo;

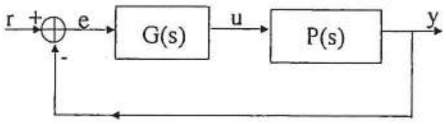
β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;

γ) il sistema complessivo abbia N autovalori in -1, -2,....,-N (ad esempio, se il sistema complessivo dovesse avere N=3 autovalori, tali tre autovalori dovrebbero essere rispettivamente in -1,-2 e -3).

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2.

Si consideri lo schema di controllo



in cui il processo è caratterizzato dalla funzione di trasferimento $P(s) = \dfrac{s + 10}{s\,(s+2)^2}$.

A) Si determini un controllore G(s) a dimensione minima tale che:

α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile. Si disegni il relativo luogo delle radici e lo si utilizzi per la verifica della stabilità;

β) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = t$ sia, in modulo, minore di 0,2.

B) Si determini un controllore G(s) a dimensione minima tale che:

α) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori a parte reale minore di -1. Si disegni il relativo luogo delle radici e lo si utilizzi per la verifica di questa specifica.

β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto raggiungibile ed inosservabile.

TEMA

Si discutano i campi di applicazione dell'automatica evidenziando i vantaggi derivanti dall'uso di controllori a controreazione.

Soluzione del problema 1

A) Per soddisfare la specifica β), conviene fare in modo che l'autovalore in -2 del processo sia nascosto. Aiutandosi con il test di Hautus, si deduce che, ponendo c = 0,5, si genera un autovalore irragg. ed oss. in -2.

Con la scelta suddetta, il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{s+3}{s}$. Per generare l'altro autovalore nascosto si deve allora creare una cancellazione polo-zero in -3 tra controllore e processo (si viene cosi' a generare un secondo autovalore ragg. ed inoss. in -3).

Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_F N_H}{N_F N_H + D_F D_H}, \quad W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{N_F}{D_F}, \quad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

La specifica α) risulta automaticamente soddisfatta considerando il principio di sovrapposizione degli effetti ed il fatto che la $W_e(s)$ ha già uno zero di molteplicità due in s=0.

Per assegnare gli autovalori non nascosti si deve scegliere la seguente struttura del controllore:

$$G(s) = \frac{as+b}{s+3} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{as+b}{s}$$

Il controllore suddetto consente di assegnare ad arbitrio due autovalori non nascosti del sistema complessivo, i quali, tenendo in conto la specifica γ) e la circostanza che i due autovalori nascosti sono in -2 e -3, devono necessariamente essere in -1 e -4. L'assegnazione degli autovalori risulta:

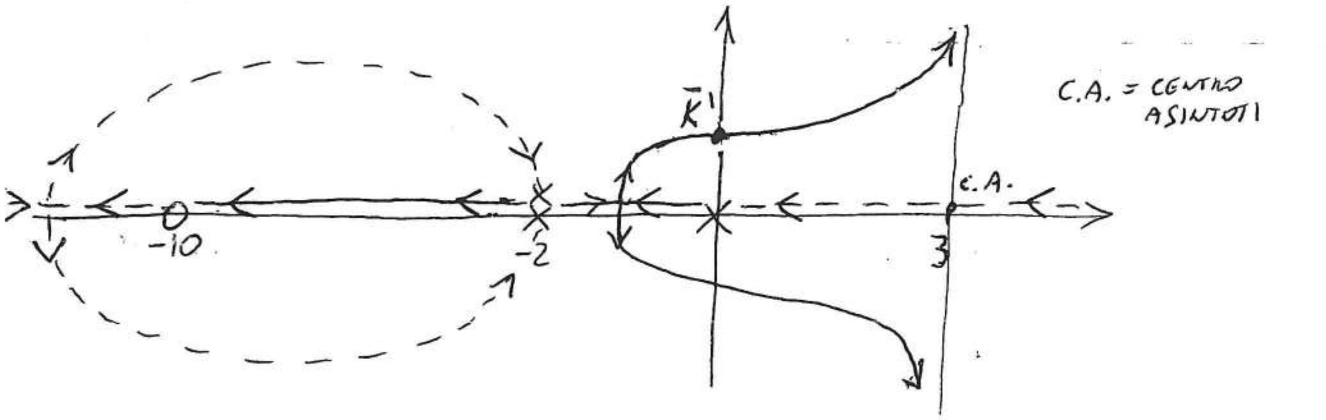
$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = as + b + s^2 = (s+1)(s+4) \quad \Rightarrow a=5,\ b=4$$

B) Il polinomio caratteristico richiesto è (s+1) (s+2) (s+3) (s+4) dove gli autovalori -1 e -4 sono ragg. e oss, l'autovalore -2 è irrag. ed oss, l'autovalore -3 è ragg. e inoss.

Soluzione del problema 2

A) Ponendo G(s) = K', la "classica" specifica β) implica |K'| > 2.

Il luogo delle radici relativo alla F(s) = = K' $\frac{s + 10}{s\,(s + 2)^2}$ è il seguente:



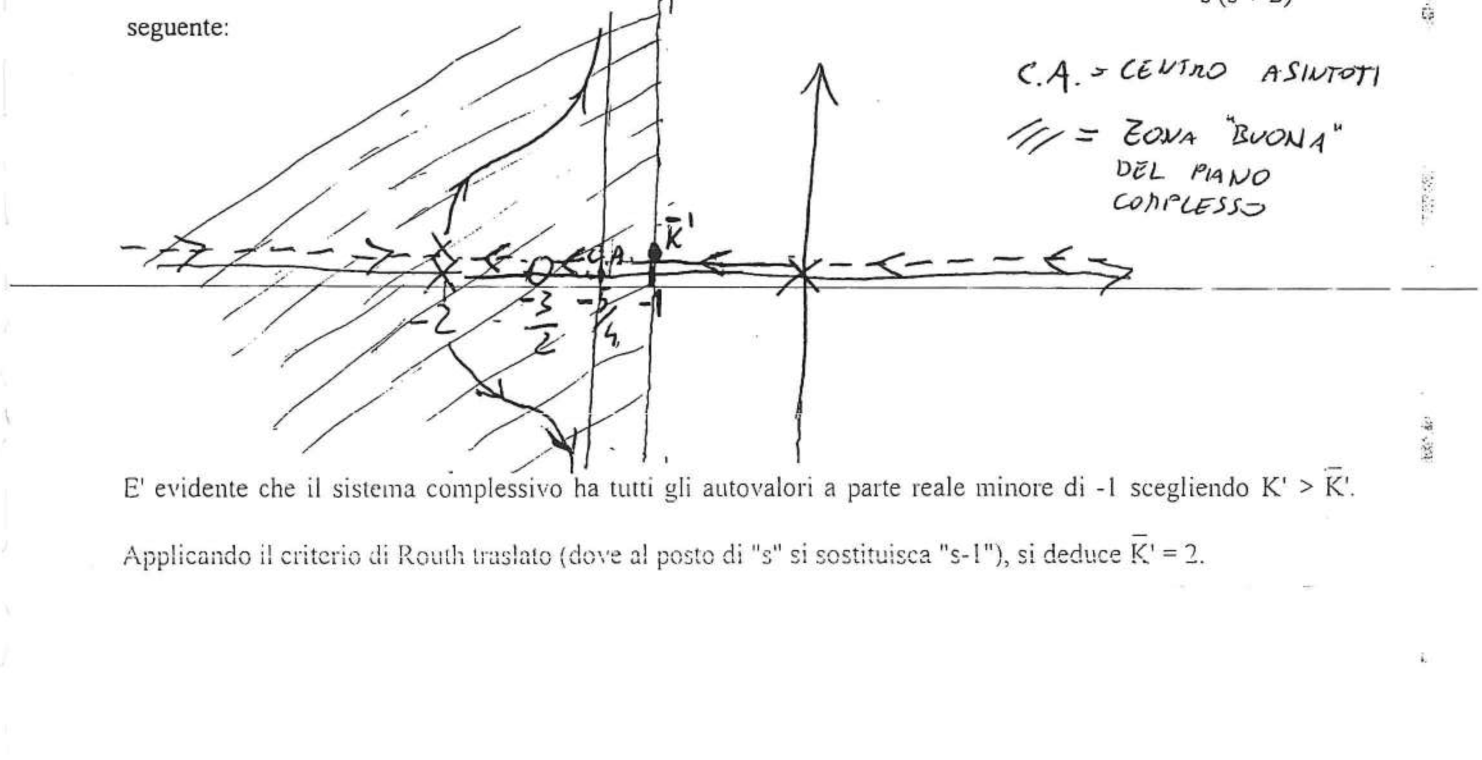
E' evidente che il sistema complessivo e' asintoticamente stabile scegliendo K' compreso tra 0 e $\bar{K}'$.

Applicando il criterio di Routh, si deduce $\bar{K}'$ = 8/3.
In conclusione il controllore G(s) = K' con K' compreso nell'intervallo (2, 8/3) consente di risolvere questa domanda.

B) Dall'analisi del luogo delle radici disegnato nella domanda A), è evidente che, per soddisfare la specifica α), bisogna fare in modo che il centro degli asintoti sia minore di -1, senza introdurre zeri maggiori di -1. Ciò può essere realizzato introducendo in G(s) un'opportuna coppia polo-zero. Per soddisfare la specifica β), si deve creare una cancellazione polo-zero tra controllore e processo che, necessariamente, deve essere in -10; deve essere quindi ricercato un controllore con la struttura:

$$G(s) = K' \frac{s - z}{s + 10} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = K' \frac{s - z}{s\,(s + 2)^2}$$

affinchè il centro degli asintoti sia minore di -1 deve risultare z > -2; lo zero z deve quindi essere scelto nell'intervallo (-1, -2). Scelto, per esempio, z= -3/2, il luogo delle radici relativo alla F(s) = = K' $\frac{s + 3/2}{s\,(s + 2)^2}$, è il seguente:



E' evidente che il sistema complessivo ha tutti gli autovalori a parte reale minore di -1 scegliendo K' > $\bar{K}'$.

Applicando il criterio di Routh traslato (dove al posto di "s" si sostituisca "s-1"), si deduce $\bar{K}'$ = 2.

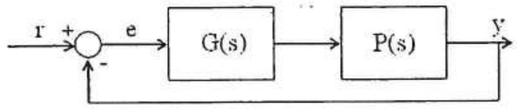
444

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu)

COMPITO B

Prova scritta del 7 giugno 2010 - Anno accademico 2009/10

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P(s) = \frac{10(1+0{,}001s)}{(1+0{,}01s)^2}$, $G(s) = \frac{K}{s}$

A) Si determini il parametro K in modo che:

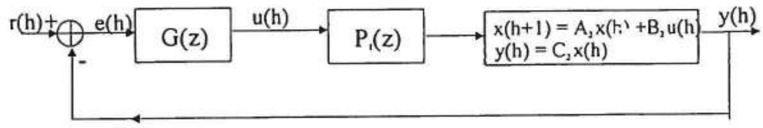
a. l'errore a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=1 sia identicamente nullo;
b. l'errore a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=t sia in modulo minore di 0.05;
c. la pulsazione di attraversamento assuma uno dei seguenti valori:
   ω_t=3 rad/s, ω_t=30 rad/s, ω_t=300 rad/s;
d. il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con margine di fase il più grande possibile.

Si calcoli analiticamente il margine di fase ottenuto.

B) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento a ciclo aperto F(s) e, utilizzando il criterio di Nyquist, si verifichi la stabilità asintotica del sistema.

PROBLEMA 2.

Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P_1(z) = \frac{z+1}{z-0{,}5}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_2 = [\ 1 \quad 0\ ]$

A) Si determini per quali valori del parametro "c" il sistema complessivo non può essere stabilizzato asintoticamente.

B) Scelto un valore del parametro "c", in corrispondenza del quale sia possibile stabilizzare asintoticamente il sistema complessivo, si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:

α) l'errore "e" corrispondente all'ingresso a gradino r(h) = η(h) sia nullo a partire da un istante "l" con "l" più piccolo possibile;

β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

C) Si determini l'andamento completo dell'errore "e", corrispondente al controllore individuato nella domanda B) e all'ingresso a gradino r(h) = η(h).

D) Con riferimento al controllore individuato nella domanda B), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

TEMA

Si discutano i campi di applicazione dell'automatica evidenziando i vantaggi derivanti dall'uso di controllori a controreazione.

Soluzione del problema 1

Il controllore ha la forma:

$$G(s) = \frac{k}{s}$$

La funzione di trasferimento ad anello aperto è quindi

$$F(s) = k\frac{10(1+0{,}001s)}{s(1+0{,}01s)^2}$$

Dalla specifica b) imponendo $\left|\frac{W_e(s)}{s}\right\|_{s=0} < 0.05$ si ricava $|k| > 2$.

Dall'osservazione dei diagramma di Bode di F(s), per k=1, si vede che la pulsazione di attraversamento vale ω_t=10 rad/s.

Si nota inoltre che per k negativo il sistema ad anello chiuso risulterebbe instabile.

Tra le possibilità di scelta per ω_t di cui alla specifica c), si nota che

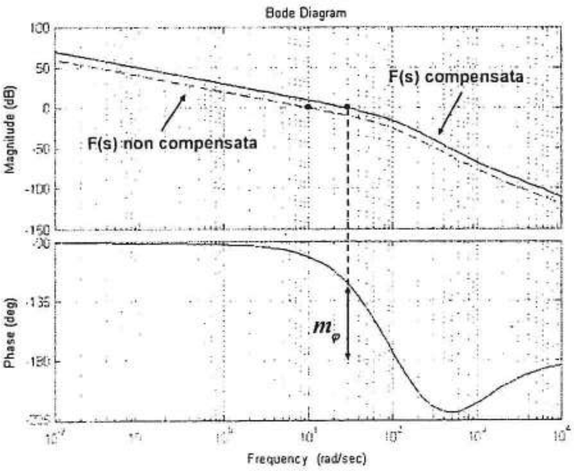
- per avere ω_t=3 rad/s bisognerebbe porre k<1, valore non accettabile;
- ω_t=300 rad/s comporterebbe l'instabilità del sistema ad anello chiuso.

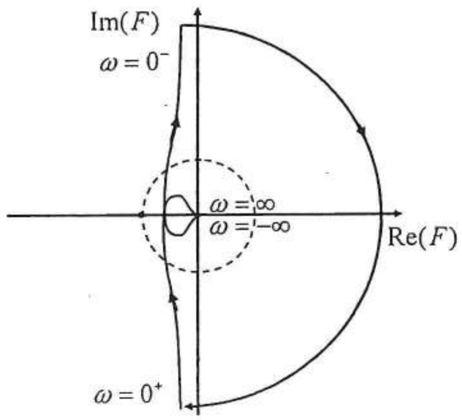
Si sceglie quindi ω_t=30 rad/s, il che comporta di aumentare il modulo di F(s) di circa 10dB. Si ha quindi k uguale circa a 3,2.

Per quanto riguarda il calcolo del margine di fase si ha

$$m_\varphi = 180^\circ + arctg(0{,}001\cdot 30) - 90^\circ - 2arctg(0{,}01\cdot 30) = 180^\circ + 1{,}7^\circ - 90^\circ - 2\cdot 16{,}7^\circ = 58{,}3^\circ$$

Il cammino di Nyquist non compie rotazioni intorno al punto critico. F(s) non ha poli a part reale positiva. Il sistema ad anello chiuso risulta quindi stabile asintoticamente.





Soluzione del problema 2

A) L'autovalore "1" è ragg. ed oss, mentre l'autovalore "c" è inosservabile; quindi, affinchè il sistema complessivo sia stabilizzabile asintoticamente c deve essere, in modulo, minore di 1.

B) Scelto, ad esempio, c=0 (il che significa l'esistenza di un autovalore nascosto ragg. ed inoss. in 0) , la funzione di trasferimento del secondo sotto-processo, risulta

$$P_2(z) = \frac{1}{z-1} \qquad \Rightarrow \qquad P(z) = P_1(z)\,P_2(z) = \frac{z+1}{(z-0{,}5)\,(z-1)}$$

Per avere errore nullo nel più breve tempo possibile in corrispondenza ad un gradino, si deve avere un polo in z=1 nella f. di trasf. ad anello aperto (già presente), cancellare tutto ciò che può essere cancellato (nello specifico il polo in 0,5, può essere cancellato da uno zero in 0,5 del controllore provocando un autovalore nascosto irrag. ed oss. in 0,5) ed assegnare tutti gli autovalori non nascosti in 0.

Si può allora scegliere la seguente struttura di G(z):

$$G(z) = a\,\frac{z-0{,}5}{z+b} \qquad \Rightarrow \qquad F(z) = a\,\frac{z+1}{(z+b)\,(z-1)}$$

Procedendo all'assegnazione degli autovalori e risolvendo con il principio di identità dei polinomi, si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = a\,(z+1) + (z+b)\,(z-1) = z^2 \quad \Rightarrow \quad a=0{,}5\ ,\ b=0{,}5,\ l=2$$

C) L'errore richiesto risulta:

$$e(z) = W_e(z)\,r(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\,\frac{z}{z-1} = \frac{z+0{,}5}{z} = 1 + \frac{0{,}5}{z}$$

$$e(h) = \delta(h) + 0{,}5\ \delta(h-1)$$

L'errore e(h), come previsto, si annulla a partire dall'istante l=2.

D) Il polinomio caratteristico è pari a $z^3\,(z - 0{,}5)$ dove due autovalori in zero sono ragg. ed oss. (non nascosti), mentre un autovalore in zero è ragg. ed inoss, e l'autovalore in 0,5 è irrag. ed oss.

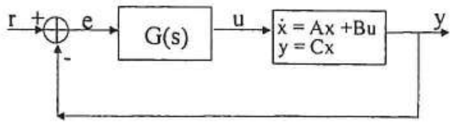
447

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu)

COMPITO A

Prova scritta del 5 luglio 2010 - Anno accademico 2009/10

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:

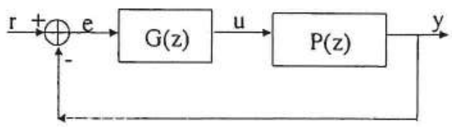


dove $A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\,1 \;\; 1\,]$.

A) Si determinino il parametro "α" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = sen t sia nullo;
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e con tutti gli autovalori coincidenti;
   γ) il sistema complessivo abbia un autovalore irraggiungibile ed osservabile.
B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2.

Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



con $P(z) = \dfrac{(z + 2)\,(z - 0{,}2)}{(z - 1)\,(z + 0{,}8)\,(z - 0{,}5)}$

A) Si determinino un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore "e" corrispondente all'ingresso a gradino $r(h) = \eta(h)$ sia nullo a partire da un istante "l" con "l" più piccolo possibile;
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.
B) Si determini l'andamento completo dell'errore "e", corrispondente al controllore individuato nella domanda A) e all'ingresso a gradino $r(h) = \eta(h)$.
C) Si disegni il luogo delle radici relativo alla F(z) ottenuta considerando il prodotto della G(z) determinata nella domanda A) con la P(z).
~~D) Quale particolarità del disegno del luogo delle radici di cui alla domanda C) si può dedurre~~ dall'assegnazione di autovalori necessaria per risolvere la domanda A)? Per quali valori del parametro K' il sistema complessivo risulta asintoticamente stabile e gli autovalori sono tutti reali?

TEMA

Si illustrino i passi per arrivare al controllore fisico a partire dal processo fisico, mettendo in luce, per ognuno dei vari passi, le problematiche relative..

Soluzione del problema 1

A) Per soddisfare la specifica γ), conviene fare in modo che il processo abbia un autovalore irraggiungibile ed osservabile. Applicando il test di Hautus, si deduce che l'autovalore -2 del processo è sempre raggiungibile, mentre l'autovalore -1 del processo risulta irraggiungibile per $\alpha = -1$. Per tale valore di α, entrambi gli autovalori sono osservabili.

Quindi, con la scelta suddetta di α, l'autovalore -1 risulta irrag. ed oss. come richiesto dalla specifica γ) ed il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{2}{s+2}$. Si noti che il suddetto autovalore, essendo nascosto, sarà anche un autovalore del sistema complessivo; quindi, in base alla specifica β) anche tutti gli altri autovalori del sistema complessivo devono essere assegnati in -1.

Considerando che la specifica α) impone la presenza del fattore s^2+1 a denominatore del controllore, la struttura corretta della G(s) per procedere all'assegnazione degli autovalori e' la seguente:

$$G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + 1}\,\frac{2}{s+2}$$

L'assegnazione degli autovalori risulta:

$$D_W = N_F + D_F = (s^2 + 1)(s+2) + 2(as^2 + bs + c) = (s+1)^3 \;\Rightarrow\; a=1/2,\ b=1,\ c=-1/2$$

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s+1)^4$ dove tre dei quattro autovalori in -1 sono ragg. e oss, mentre il quarto autovalore in -1 è irrag. ed oss.

Soluzione del problema 2

A) Per soddisfare la specifica α) è necessaria la presenza di un polo in z=1 nella funzione di trasf. ad anello aperto, l'assegnazione di tutti gli autovalori in zero e la cancellazione di poli/zeri interni al cerchio unitario.

Si noti che un polo in z=1 è già presente nel processo. La struttura del controllore richiesto è quindi la seguente:

$$G(z) = a\,\frac{(z-0{,}5)\,(z+0{,}8)}{(z+b)\,(z-0{,}2)} \quad \Rightarrow \quad F(z) = a\,\frac{z+2}{(z-1)\,(z+b)}$$

Procedendo all'assegnazione degli autovalori e risolvendo con il principio di identità dei polinomi, si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = a\,(z+2) + (z+b)\,(z-1) = z^2 \quad \Rightarrow \quad a=1/3\,,\ b=2/3,\ l=2$$

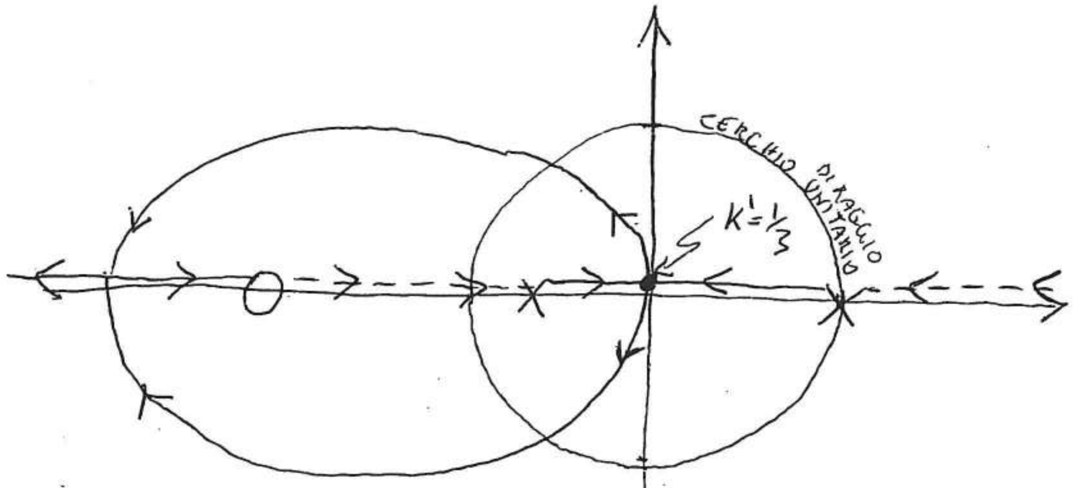
B) L'errore richiesto risulta:

$$e(z) = W_e(z)\,r(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\,\frac{z}{z-1} = \frac{z+2/3}{z} = 1 + \frac{2/3}{z}$$

$e(h) = \delta(h) + 2/3\ \delta(h-1)$

L'errore e(h), come previsto, si annulla a partire dall'istante l=2.

C) Il luogo delle radici relativo a $F(z) = K'\,\dfrac{z+2}{(z-1)\,(z+2/3)}$ è il seguente:



D) L'assegnazione di due autovalori in zero effettuata nella domanda A), determina che per K'=a=1/3 entrambe le radici del denominatore della funz. di trasf. del sistema complessivo si trovano in zero. Ciò implica la presenza di un punto singolare doppio in z=0 corrispondente al valore K'=1/3 come evidenziato nel disegno del luogo.

Dalla suddetta circostanza e dall'esame del luogo si evince che entrambe le radici sono interne al cerchio unitario e reali per $0<K'\leq 1/3$.

Cognome:…………………….. Posto: …………………….. Matricola:……………………..

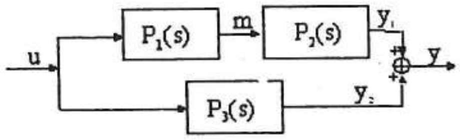
450

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu)

Prova scritta del 5 luglio 2010 - Anno accademico 2009/10 - COMPITO B

PROBLEMA 1

Si consideri il processo con ingresso "u" ed uscita "y" di cui alla seguente figura



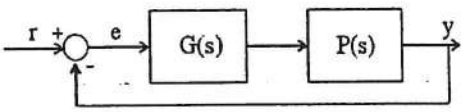
Le funzioni di trasferimento dei 3 sotto-processi sono le seguenti: $P_1(s)=\frac{s+1}{s}$, $P_2(s)=\frac{1}{s+1}$, $P_3(s)=\frac{1}{s}$

A) Si determinino le caratteristiche di raggiungibilità/irraggiungibilità, osservabilità/inosservabilità degli autovalori che caratterizzano il processo. Si dimostrino tali caratteristiche utilizzando le rappresentazioni ingresso-stato-uscita dei 3 sotto-processi.

B) E' possibile determinare uno schema di controllo ed un controllore in corrispondenza del quale il sistema complessivo sia asintoticamente stabile?

PROBLEMA 2

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura



con $P(s)=\dfrac{1}{s^2(1+0.1s)}$

A) Si determini un controllore G(s) a dimensione minore o uguale a 1 tale che:

a. l'errore a regime permanente corrispondente ad un ingresso $r(t)=t^2/2$ sia in modulo pari a 0.1;
b. il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
c. il modulo alla risonanza M_r del sistema complessivo sia minore di 12 dB;
d. la banda passante B_3 del sistema complessivo sia approssimativamente 5 rad/s.

B) Si traccino i diagrammi di Nyquist della funzione di trasferimento a ciclo aperto non compensata $\hat{F}(s)$ e di quella compensata $F(s)$ e, utilizzando il criterio di Nyquist, si discuta la stabilità dei corrispondenti sistemi ad anello chiuso.

TEMA

Si illustrino i passi per arrivare al controllore fisico a partire dal processo fisico, mettendo in luce, per ognuno dei vari passi, le problematiche relative.

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{2}{s}$. Da ciò si deduce che nel processo è presente un autovalore non nascosto (rag. e oss.) in zero.
Per individuare (e dimostrare) le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità degli autovalori nascosti è necessario determinare le rappresentazioni ingresso-stato-uscita dei 3 sotto-processi, ossia

$\dot{x}_1 = u$	$\dot{x}_2 = -x_2 + m$	$\dot{x}_3 = u$
$m = x_1 + u$	$y_1 = x_2$	$y_2 = x_3$

Dalle suddette rappresentazioni dei 3 sotto-processi , si deduce che la rappresentazione ingresso-stato-uscita del processo è caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C_P = [\; 0 \;\; 1 \;\; -1 \;]$$

Quindi, il processo è caratterizzato da un autovalore in -1 e da due autovalori in zero.
Si osservi che risulta:
$\text{rgo}\,(B_P \;\; A_P B_P \;\; A_P^2 B_P) = 1 \;\;\Rightarrow$ il processo ha un autovalore rag. e due autovalori irrag.

$$\text{rgo}\begin{pmatrix} C_P \\ C_P A_P \\ C_P A_P^2 \end{pmatrix} = 2 \;\;\Rightarrow \text{ il processo ha due autovalori oss. e un autovalore inoss.}$$

Inoltre, in base al Test di Hautus l'autovalore -1 risulta irrag. e oss.
Da quanto sopra si può infine dedurre che i due autovalori in zero sono uno ragg. ed oss. e l'altro irrag. ed inoss.

B) Un processo può essere stabilizzato asintoticamente con uno schema di controllo a reazione dall'uscita se e solo se tutti gli autovalori nascosti sono a parte reale negativa. Nel caso in esame è presente un autovalore nascosto in zero per cui il processo non può essere stabilizzato asintoticamente con reazione dall'uscita.
Si noti che, se lo stato fosse disponibile per misure e quindi fosse possibile uno schema di controllo con reazione dallo stato, il processo non potrebbe essere stabilizzato asintoticamente neanche con tale reazione a causa della presenza dell'autovalore irrag. in zero (il processo può essere stabilizzato asintoticamente con reazione dallo stato se e solo se tutti gli autovalori irrag. sono a parte reale negativa).

Soluzione del problema 2

E' immediato verificare che un controllore del tipo $G(s)=k$ non permette di ottenere un sistema a ciclo chiuso stabile, $\forall k \in \mathbb{R}$. E' necessario quindi ricorrere ad un controllore della forma $G(s)=kR(s)$, dove $R(s)$ sia una opportuna rete compensatrice elementare.

La funzione di trasferimento a ciclo aperto è quindi

$$F(s)=\frac{k}{s^2(1+0.1s)}R(s)=\hat{F}(s)R(s)$$

Il guadagno del controllore deve essere scelto in modo da soddisfare la specifica a).

$$\left\|\frac{W_e(s)}{s^2}\right\|_{s=0}=0.1 \Rightarrow |k|=10.$$

Per facilitare il procedimento di stabilizzazione del sistema si sceglie $k=10$.

Dall'osservazione del diagramma di Bode del modulo di $\hat{F}(i\omega)$ si ricava per la pulsazione di attraversamento $\hat{\omega}_t \approx 3\, rad/s$. In corrispondenza di questo valore la fase di $\hat{F}(i\omega)$ vale

$$\angle\hat{F}(i\omega)=-180^\circ - arctg(0.3)=-180^\circ-16.7^\circ=-196.7^\circ$$

L'instabilità, in assenza di compensazione, può essere quindi vista come dovuta ad un eccesso di ritardo di fase in $\hat{\omega}_t$ pari a 16.7°.

Dall'osservazione della carta di Nichols si ricava che, per soddisfare la specifica c), è necessario avere $m_\varphi^* \geq 15^\circ$. Dalla specifica d) infine si ricava per la pulsazione di attraversamento desiderata il valore $\omega_t^* \approx 3\, rad/s$, il che è verificato già in assenza di compensazione.

Per risolvere il problema è quindi necessario introdurre un'azione compensatrice tale da garantire un anticipo di fase di almeno $16.7^\circ + 15^\circ = 31.7^\circ$ in $\hat{\omega}_t$, lasciando $\hat{\omega}_t$ stessa il più possibile inalterata. Una rete anticipatrice elementare del tipo

$$R(s)=\frac{1+\tau s}{1+\frac{\tau}{m}s}$$

Con $m=16$ e $\omega\tau=0.7$ garantisce un anticipo di fase di circa 32.5° e comporta un'amplificazione indesiderata minore di 2 dB.

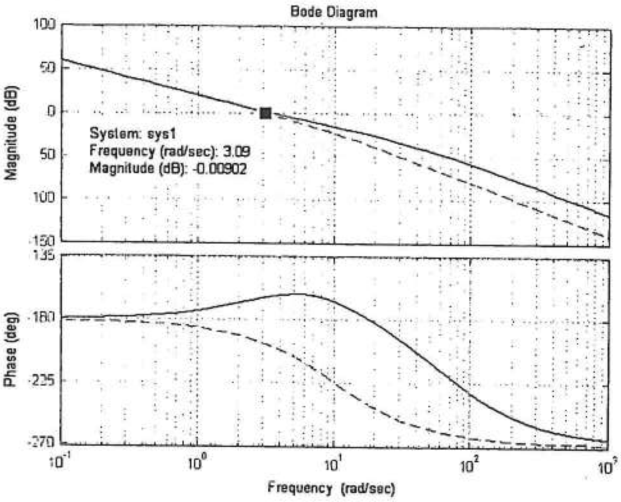
Il controllore cercato è quindi

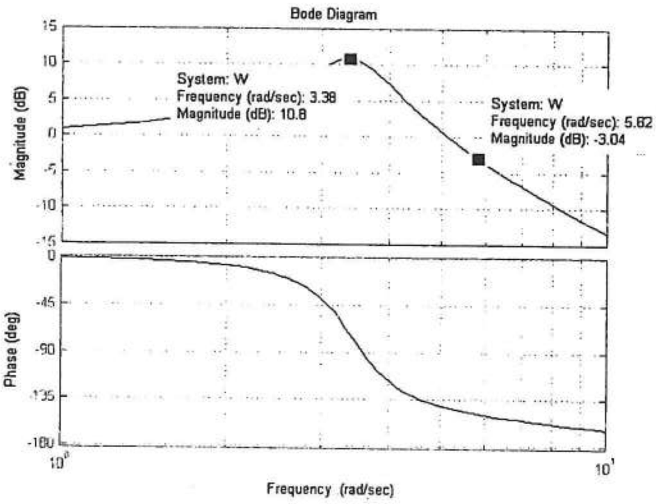
$$G(s)=10\frac{\left(1+\frac{7}{30}s\right)}{\left(1+\frac{7}{480}s\right)}$$

Il margine di fase ottenuto, calcolato per difetto (assumendo $\omega_t \approx 3\, rad/s$), vale

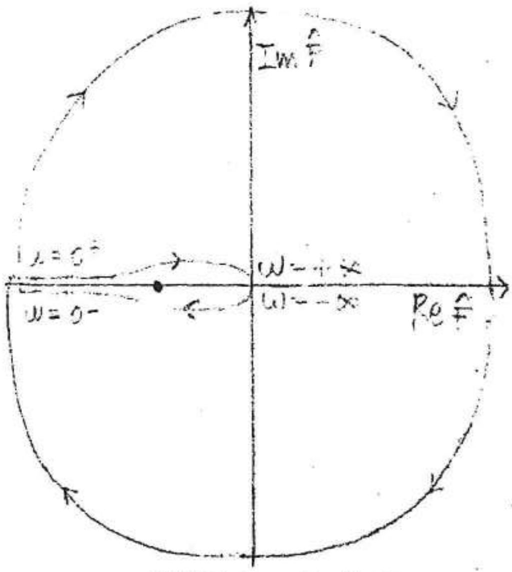
$$m_\varphi=180^\circ-196.7^\circ+arctg(0.7)-arctg(0.7/16)=180^\circ-196.7^\circ+35^\circ-2.5^\circ=15.8^\circ$$

Di seguito sono riportati i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento a ciclo aperto $\hat{F}(s)$ e $F(s)$, e poi di $W(s)$, da cui si ha la conferma del soddisfacimento delle specifiche a carattere "dinamico" per il sistema a ciclo chiuso.

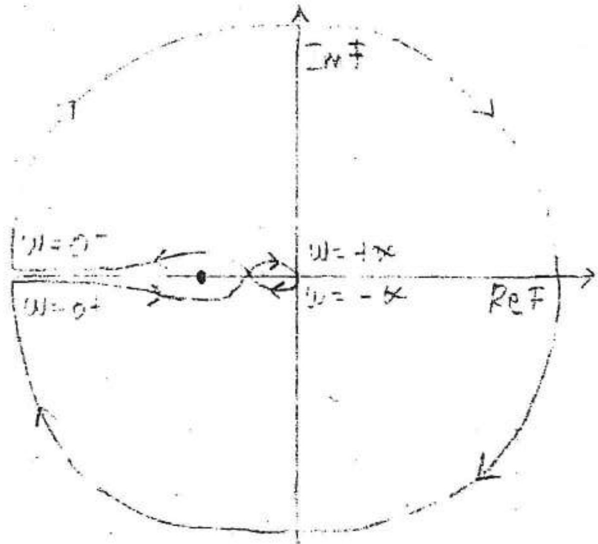




Sono infine riportati i diagrammi di Nyquist di $\hat{F}(s)$ e di $F(s)$, da cui si osserva che la compensazione ha effetto di stabilizzazione sul sistema a ciclo chiuso.



CRITERIO DI NYQUIST
NON VERIFICATO



CRITERIO DI NYQUIST
VERIFICATO

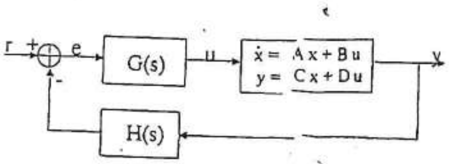
1

455

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu)

Prova scritta del 16 settembre 2010 - Anno accademico 2009/10

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente processo:



dove $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 1 \quad a\ ]$, $D = 1$, $H(s) = \dfrac{1}{s^2 + bs + c}$

(A) Si determinino i parametri "a", "b" e "c", nonchè un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che:

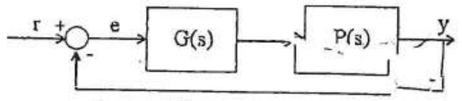
(α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = sen t sia nullo;

(β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;

(γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e con tutti gli autovalori coincidenti.

(B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura.



con $P(s) = \dfrac{4}{s(1+0.1s)^2}$ e $G(s) = \dfrac{k}{s^r}\left(\dfrac{1+\frac{\tau}{2}s}{1+\tau s}\right)^{\alpha}$ $(k \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}, \tau \in \mathbb{R})$.

A) Si determini i parametri k, r, α, τ del controllore G(s) in corrispondenza ai quali si abbia che:

a. l'errore a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=1 sia identicamente nullo;
b. l'errore a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=t sia in modulo pari a 0.025;
c. il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
d. il margine di guadagno m_g sia maggiore di 4 dB;
e. la dimensione del controllore sia la minore possibile.

B) Si traccino i diagrammi di Nyquist della funzione di trasferimento a ciclo aperto non compensata $\hat{F}(s)$ e di quella compensata $F(s)$ e, utilizzando il criterio di Nyquist, si discuta la stabilità dei corrispondenti sistemi ad anello chiuso.

PROBLEMA 3.

(A) Considerato uno schema di controllo tempo discreto a controreazione, si enuncino le condizioni sotto le quali è possibile ottenere errore nullo in tempo finito in corrispondenza ad un ingresso costante (a gradino);

(B) Si dimostrino le condizioni di cui alla domanda (A).

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

(A) La f. di trasf. del processo è

$$P(s) = \frac{s + a + 1}{s + 1}$$

Si noti la presenza di un autovalore nascosto (irrag. e oss.) in "-2"; ciò impone che anche tutti gli altri autovalori (nascosti e non nascosti) del sistema complessivo siano in -2 (specifica (γ))

Per soddisfare la specifica (α), la f. di trasf. di errore $W_e(s)$ deve avere a numeratore il fattore s^2+1. Dato che risulta

$$W_e(s) = \frac{D_F(s)\,D_H(s)}{D_F(s)\,D_H(s) + N_F(s)N_H(s)}$$

per soddisfare la specifica (α) è sufficiente porre $b=0$ e $c=1$.

Per avere un secondo autovalore nascosto in -2 (e quindi soddisfare la specifica (β)), si deve scegliere $a=1$ e collocare il fattore $s+2$ a denominatore della $G(s)$ (cancellazione polo-zero).

Alla luce di quanto sopra, per poter poi procedere all'assegnazione degli autovalori

non nescosti in -2, si deve scegliere
la seguente struttura della $G(s)$:

$$G(s) = \frac{d s^2 + e s + f}{(s+g)(s+2)} \Rightarrow F(s) = \frac{d s^2 + e s + f}{(s+1)(s+g)}$$

Si può quindi procedere all'assegnazione degli autovalori con l'equazione Diofantina:

$$D_F D_H + N_F N_H = (s+1)(s+g)(s^2+1) + d s^2 + e s + f = (s+2)^4$$

Risolvendo con il principio di identità dei polinomi si ottiene $d = 16 \quad e = 24 \quad f = 9 \quad g = 7$

(B) Il polinomio caratteristico è $(s+2)^6$ con 4 autov. rag. e oss., un autov. irrag. e oss. (quello interno al processo), un autov. rag. e inos. (quello generatosi dalla cancellazione polo-zero).

Soluzione problema 2

Il primo passo è quello di soddisfare le specifiche a) e b) riguardanti il regime permanente.
Per soddisfare la specifica a) la funzione di trasferimento in anello aperto F(s) deve avere un polo in s=0, il che è già verificato per la presenza di detto polo nella funzione di trasferimento del processo controllato P(s). Si sceglie quindi $r = 0$. Per soddisfare la specifica b) il guadagno del controllore deve essere scelto in modo da soddisfare la seguente relazione:

$$\left\|\frac{W_e(s)}{s}\right\|_{s=0} = 0.025 \Rightarrow |k| = 10 .$$

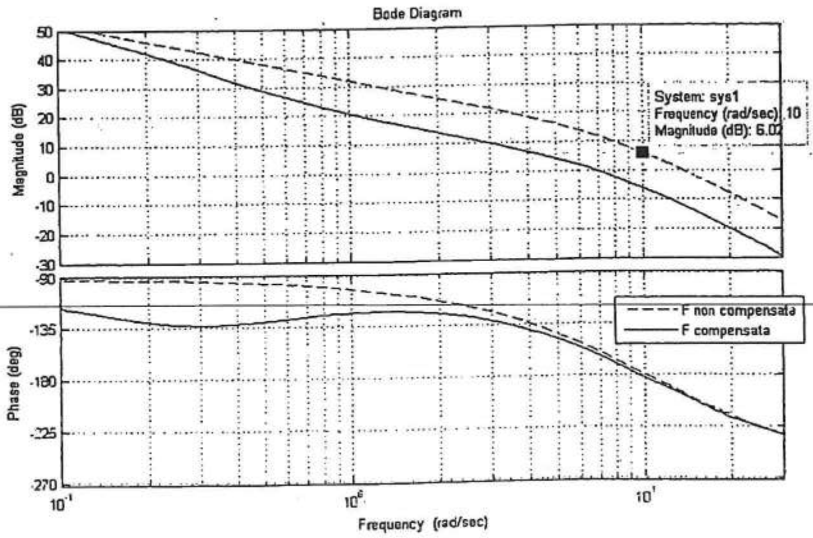
Per facilitare il procedimento di stabilizzazione del sistema si sceglie $k = 10$.

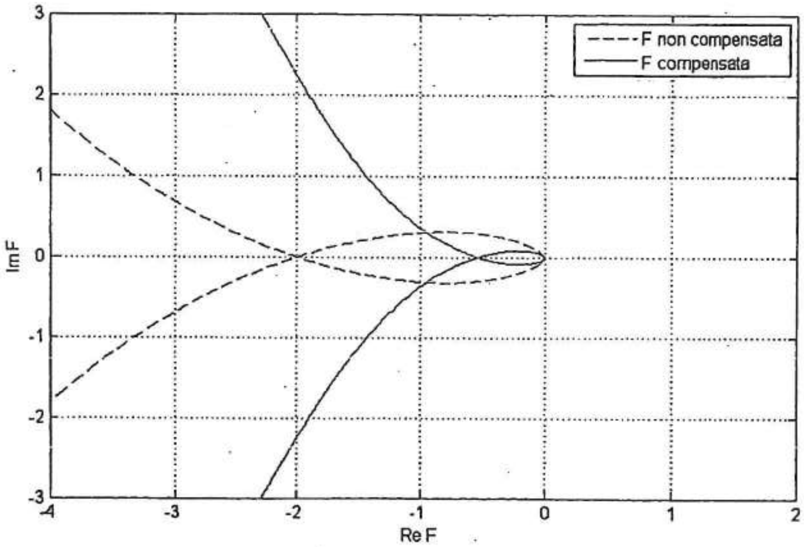
Successivamente si passa alle specifiche c) e d) riguardanti la stabilità del sistema in anello chiuso, che possono essere soddisfatte scegliendo opportunamente il numero α di reti attenuatrici identiche e la relativa costante di tempo τ.
Dall'osservazione dei diagrammi di Bode della funzione di trasferimento a ciclo aperto non compensata

$$\hat{F}(s) = \frac{40}{s(1+0.1s)^2}$$

si ricava che, in corrispondenza a $\bar{\omega} = 10\ rad/s$ (definita dalla relazione $\angle\hat{F}(i\bar{\omega}) = -\pi$), si ha $\left|\hat{F}(i\bar{\omega})\right| \simeq 6dB$. Il corrispondente sistema ad anello chiuso risulta quindi instabile. Per stabilizzare il sistema e garantire il margine di guadagno desiderato è sufficiente introdurre un'azione attenuatrice che lasci inalterata $\bar{\omega}$ ed introduca in $\bar{\omega}$ stessa un'attenuazione pari almeno a 10dB.
Dall'osservazione dei diagrammi universali è immediato verificare che una rete attenuatrice con m=2 può garantire un'attenuazione massima di 6 dB. Si sceglie quindi $\alpha = 2$. Una buona scelta per la costante di tempo è infine $\bar{\omega}\tau = 50 \Rightarrow \tau = 5s$. In questo modo si ha $m_g \simeq 6dB$.
Riassumendo la soluzione del problema è dunque $k = 10,\ r = 0,\ \alpha = 2,\ \tau = 5s$.

Di seguito sono infine riportate le porzioni di interesse dei diagrammi di Bode e di Nyquist delle funzioni di trasferimento a ciclo aperto $\hat{F}(s)$ e $F(s)$.





Si noti come i cammini di Nyquist di $\hat{F}(s)$ e di $F(s)$, nell'attraversare il semiasse reale negativo, lascino rispettivamente a destra e sinistra il punto critico (-1,0), risultando rispettivamente nella instabilità e stabilità dei corrispondenti sistemi ad anello chiuso.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 3

(A) Le condizioni richieste sono le seguenti:

- deve essere presente un polo in $z=1$ nella f. di trasf. ad anello aperto $F(z)$

- deve risultare

$$N_F(z) + D_F(z) = z^{\ell} \qquad \text{con } F(z) = \frac{N_F(z)}{D_F(z)}$$

dove "ℓ" è l'istante a partire dal quale l'errore è identicamente pari a zero

(B) Per avere errore nullo per ingressi costanti a partire dall'istante ℓ-esimo deve risultare

$$e(z) = W_e(z)\, u(z) = \frac{S(z)}{z^{\ell-1}}$$

con $S(z)$ generico polinomio di grado $\leq \ell-1$.

Dato che $W_e(z) = \dfrac{D_F(z)}{N_F(z)+D_F(z)}$ e $u(z) = \dfrac{z}{z-1}$

risulta

$$\frac{D_F(z)}{N_F(z)+D_F(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{S(z)}{z^{\ell-1}} \Rightarrow \frac{D_F(z)}{N_F(z)+D_F(z)} = \frac{S(z)(z-1)}{z^{\ell}} \quad (*)$$

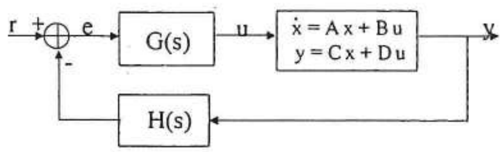
Uguagliando i numeratori e denominatori della $(*)$ si ottengono le condizioni di cui alla domanda (A).

461

CONTROLLI AUTOMATICI I per ing. Automatica e Informatica (5 cfu)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. Telecomunicazioni (5 cfu)

Prova scritta del 16 settembre 2010 - Anno accademico 2009/10

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente processo:

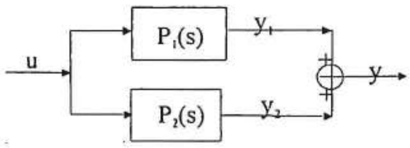


dove $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 1 \quad a\ ]$, $D = 1$, $H(s) = \dfrac{1}{s^2 + bs + c}$

(A) Si determinino i parametri "a", "b" e "c", nonchè un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che:
- (α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = sen t sia nullo;
- (β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
- (γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e con tutti gli autovalori coincidenti.

(B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente processo:



con $P_1(s) = \dfrac{1}{s-1}$, $P_2(s) = \dfrac{-3}{(s-1)(s+2)}$

(A) Si dimostrino (passando attraverso lo spazio di stato) le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità degli autovalori che caratterizzano il processo.

(B) Esiste un controllore in grado di stabilizzare asintoticamente il processo? Si giustifichi la risposta.

TEMA

Si descrivano i vantaggi e gli svantaggi dei vari schemi di controllo.

CONTROLLI AUTOMATICI II per ing. Automatica e Informatica (5 cfu)

Prova scritta del 16 settembre 2010 - Anno accademico 2009/10

PROBLEMA 1.

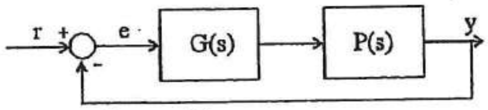
(A) Si disegni il luogo delle radici della seguente funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$F(s) = K' \frac{(s-2)\,(s+9/4)}{(s+2)\,(s^2+11/4)}$$

Si tenga conto che, poichè risulta $(s-2)\,(s+9/4) + (s+2)\,(s^2+11/4) = (s+1)^3$, il luogo ha un punto singolare triplo in -1, corrispondente al valore K'=1.

(B) Per quali valori del parametro K' il sistema complessivo risulta asintoticamente stabile ed il transitorio privo di oscillazioni?

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura.



con $P(s) = \dfrac{4}{s(1+0.1s)^2}$ e $G(s) = \dfrac{k}{s^r}\left(\dfrac{1+\frac{\tau}{2}s}{1+\tau s}\right)^{\alpha}$ $(k \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}, \tau \in \mathbb{R})$.

A) Si determini i parametri k, r, α, τ del controllore G(s) in corrispondenza ai quali si abbia che:

a. l'errore a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=1 sia identicamente nullo;
b. l'errore a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=t sia in modulo pari a 0.025;
c. il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
d. il margine di guadagno m_g sia maggiore di 4 dB;
e. la dimensione del controllore sia la minore possibile.

B) Si traccino i diagrammi di Nyquist della funzione di trasferimento a ciclo aperto non compensata $\hat{F}(s)$ e di quella compensata $F(s)$ e, utilizzando il criterio di Nyquist, si discuta la stabilità dei corrispondenti sistemi ad anello chiuso.

PROBLEMA 3.

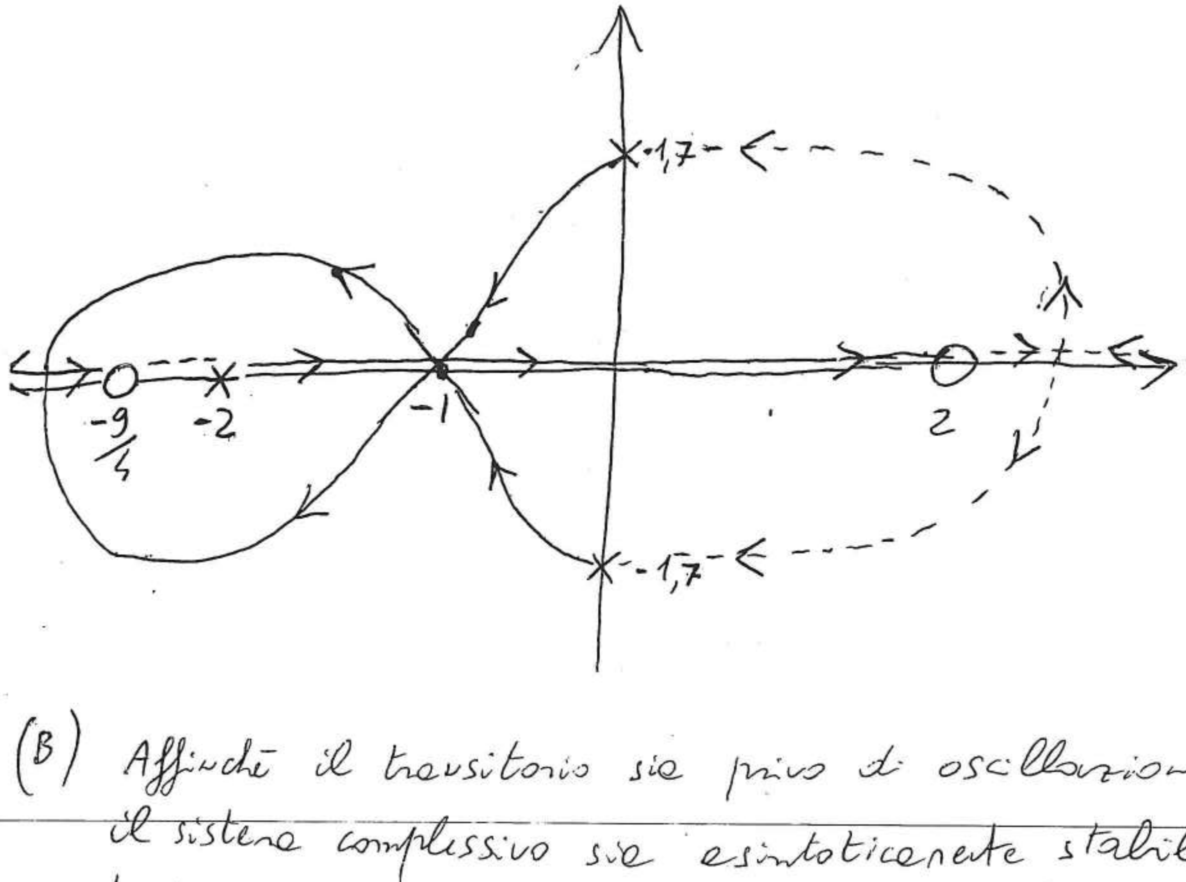
(A) Considerato uno schema di controllo tempo discreto a controreazione, si enuncino le condizioni sotto le quali è possibile ottenere errore nullo in tempo finito in corrispondenza ad un ingresso costante (a gradino);

(B) Si dimostrino le condizioni di cui alla domanda (A).

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1

(A) Il fatto che, per $K'=1$, risulti $D_F + N_F = (s+1)^3$, significa che per $K'=1$ il luogo ha un punto singolare triplo in -1.

Tenendo conto che $\sqrt{\frac{11}{4}} \simeq 1{,}7$, il luogo delle radici qualitativo è il seguente



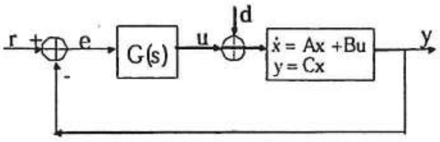
(B) Affinché il transitorio sia privo di oscillazione e il sistema complessivo sia esintoticamente stabile, tutti gli autovalori devono essere reali e negativi. Dal disegno del luogo delle radici è evidente che ciò si verifica solo in corrispondenza del punto triplo (ossia per $K'=1$)

466

CONTROLLI AUTOMATICI per Ing. Automatica e Informatica (9 cfu)

Prova scritta dell'11 novembre 2010 - Anno accademico 2009/10

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:

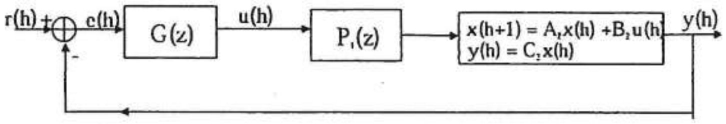


dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\, 1 \;\; 1 \,]$.

A) Si determini il parametro "a" ed un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo da verificare le seguenti specifiche:
   - α) la risposta in uscita ad un disturbo "d" a gradino sia nulla;
   - β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   - γ) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto (irraggiungibile e/o inosservabile).

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo a tempo discreto:



dove $P_1(z) = \dfrac{(z+0{,}5)\,(z+0{,}2)}{(z-1)\,(z-0{,}5)}$, $A_2 = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = [\, 1 \;\; 0 \,]$

A) Si determinino il parametro "c" ed un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   - α) l'errore "e" corrispondente all'ingresso a gradino r(h) = h sia nullo a partire da un istante "l" con "l" più piccolo possibile;
   - β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determini l'andamento completo dell'errore "e", corrispondente al controllore individuato nella domanda A) e all'ingresso a gradino r(h) = h.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

TEMA

L'assegnazione degli autovalori nel dominio del tempo: enunciati, significato, dimostrazione del principio di separazione.

Soluzione del PROBLEMA 1

A) Per soddisfare la specifica α), la funzione di trasferimento disturbo-uscita del sistema complessivo deve avere uno zero in $s = 0$. Pertanto il controllore dovrà avere la struttura $G(s) = G'(s)/s$.

Per soddisfare la specifica γ), poiché il controllore deve essere di dimensione minima, proviamo a determinare l'autovalore nascosto richiesto nel processo, attraverso una scelta opportuna del parametro incognito. Dal criterio di Hautus si ricava che l'autovalore $\lambda_1 = 1$ (che, in quanto positivo, deve essere raggiungibile ed osservabile) è sempre osservabile ed è irraggiungibile se $a = 2$. L'autovalore $\lambda_2 = a$ è invece sempre raggiungibile ed è inosservabile per $a = -1$. Pertanto, scegliendo $a = -1$ si ottiene un autovalore raggiungibile e osservabile $\lambda_1 = 1$, ed un autovalore raggiungibile ed inosservabile in $\lambda_2 = -1$. La funzione di trasferimento del processo è $P(s) = 3/(s-1)$.

Per la specifica β), applichiamo il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso $d_W(s)$, e verifichiamo la specifica per tentativi. Supponiamo che il controllore sia $G(s) = K/s$: otteniamo $d_W(s) = s^2 - s + 3K$, che non è asintoticamente stabile per qualsiasi valore di K. Proviamo quindi $G(s) = (bs+c)/s$: otteniamo $d_W(s) = s^2 + (3b-1)s + 3c$, che ha le due radici negative se $b > 1/3$ e $c > 0$.

Un controllore che risolve il problema è ad esempio $G(s) = [(5/3)s+(4/3)]/s = (5s+4)/(3s)$.

B) Con i valori scelti per b e per c, $d_W(s) = s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2$. Il polinomio caratteristico richiesto è pertanto $(s+1)(s+2)^2$ dove i due autovalori in -2 sono ragg. e oss, mentre l'autovalore in -1 è rag. ed inoss.

Soluzione del PROBLEMA 2

A) L'autovalore "c" è ragg. ed oss., mentre l'autovalore "0" è ragg. (per $c \neq 2$) ed inoss.

Dato che per la specifica β), la funz. di trasf. ad anello aperto dovrà avere due poli in $z=1$ (dei quali uno è giià presente in $P_1(z)$), conviene scegliere $c=1$ in modo da creare il secondo polo in $z=1$. Con tale scelta, la funzione di trasferimento del secondo sotto-processo, risulta

$$P_2(z) = \frac{1}{z-1} \quad \Rightarrow \quad P(z) = P_1(z)\, P_2(z) = \frac{(z+0{,}5)\,(z+0{,}2)}{(z-1)^2\,(z-0{,}5)}$$

Per avere errore nullo nel più breve tempo possibile in corrispondenza ad un gradino, oltre ai due poli in $z=1$ nella f. di trasf. ad anello aperto (già presenti), si deve cancellare tutto ciò che può essere cancellato ed assegnare tutti gli autovalori non nascosti in 0.

Si può allora scegliere la seguente struttura di $G(z)$:

$$G(z) = \frac{(az+b)\,(z-0{,}5)}{(z+0{,}2)\,(z+0{,}5)} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{az+b}{(z-1)^2}$$

Procedendo all'assegnazione degli autovalori e risolvendo con il principio di identità dei polinomi, si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = az + b + (z-1)^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad a=2,\ b=-1,\ l=2$$

C) L'errore richiesto risulta:

$$e(z) = W_e(z)\, r(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\, \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z}$$

$$e(h) = \delta(h-1)$$

L'errore $e(h)$, come previsto, si annulla a partire dall'istante $l=2$.

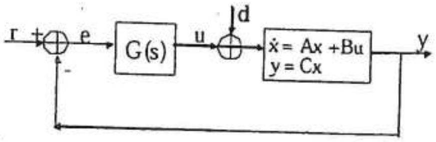
D) Il polinomio caratteristico è pari a $z^3(z-0{,}5)(z+0{,}5)(z+0{,}2)$ dove due autovalori in zero sono ragg. ed oss. (non nascosti), mentre un autovalore in zero è ragg. ed inoss, l'autovalore in 0,5 è irrag. ed oss. e gli autovalori in -0,2 e -0,5 sono rag. ed inoss.

469

FONDAMENTI DI AUTOMATICA per Ing. delle Comunicazioni (6 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI I per Ing. Automatica (5 cfu)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per Ing. Telecomunicazioni (5 cfu)

Prova scritta dell'11 novembre 2010 - Anno accademico 2009/10

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 1 \quad 1\ ]$.

A) Si determini il parametro "a" ed un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo da verificare le seguenti specifiche:

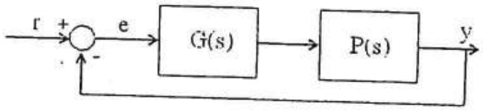
α) la risposta in uscita ad un disturbo "d" a gradino sia nulla;

β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;

γ) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto (irraggiungibile e/o inosservabile).

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura.



con $P(s) = \dfrac{1+0.1s}{s^2(1+0.01s)^2}$

A) Si determini un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> tale che:

a. l'errore a regime permanente in corrispondenza ad un ingresso a rampa sia identicamente nullo;

b. il sistema ad anello chiuso sia stabile asintoticamente;

c. il margine di fase m_φ sia il più grande possibile.

Si calcoli analiticamente il margine di fase ottenuto.

B) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento a ciclo aperto $F(s)$ e, utilizzando il criterio di Nyquist, si discuta la stabilità del sistema ad anello chiuso.

TEMA: Si consideri un processo $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$, con $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = [a \quad b]$.

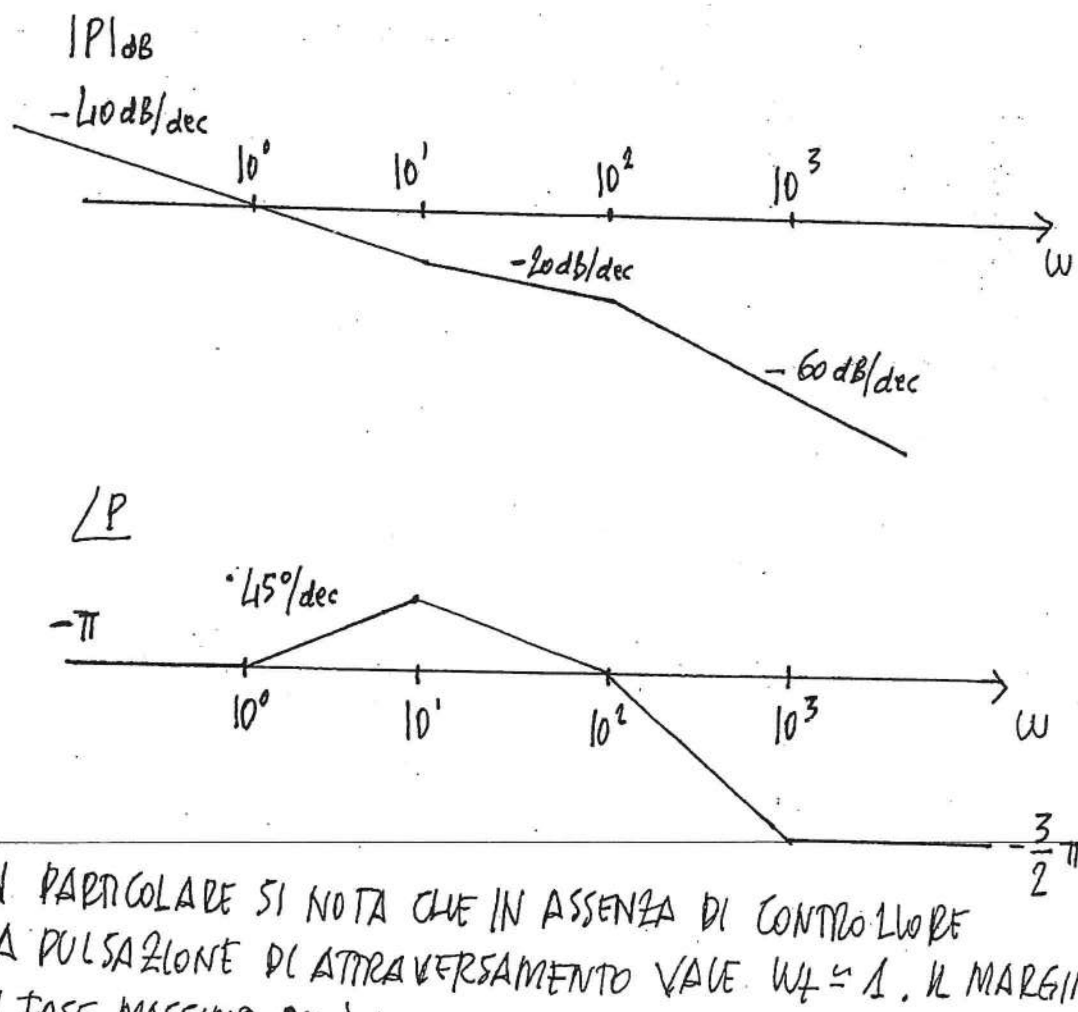
A) Stabilire per quali valori dei parametri "a" e"b" non è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato;

B) Stabilire per quali valori dei parametri "a" e"b" è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato con velocità di convergenza a piacere;

C) Stabilire per quali valori dei parametri "a" e"b" è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato ma con velocità di convergenza limitata, e determinare la velocità massima di convergenza.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

PER RISOLVERE IL PROBLEMA E' SUFFICIENTE UN CONTROLLORE DELLA FORMA $G(s) = k$. LA SPECIFICA a) E' SODDISFATTA A CAUSA DELLA PRESENZA DI DUE POLI IN $s=0$ IN $P(s)$, MENTRE PER SODDISFARE LE SPECIFICHE b) E c) E' UTILE L'OSSERVAZIONE DEI DIAGRAMMI DI BODE DI $P(s)$.



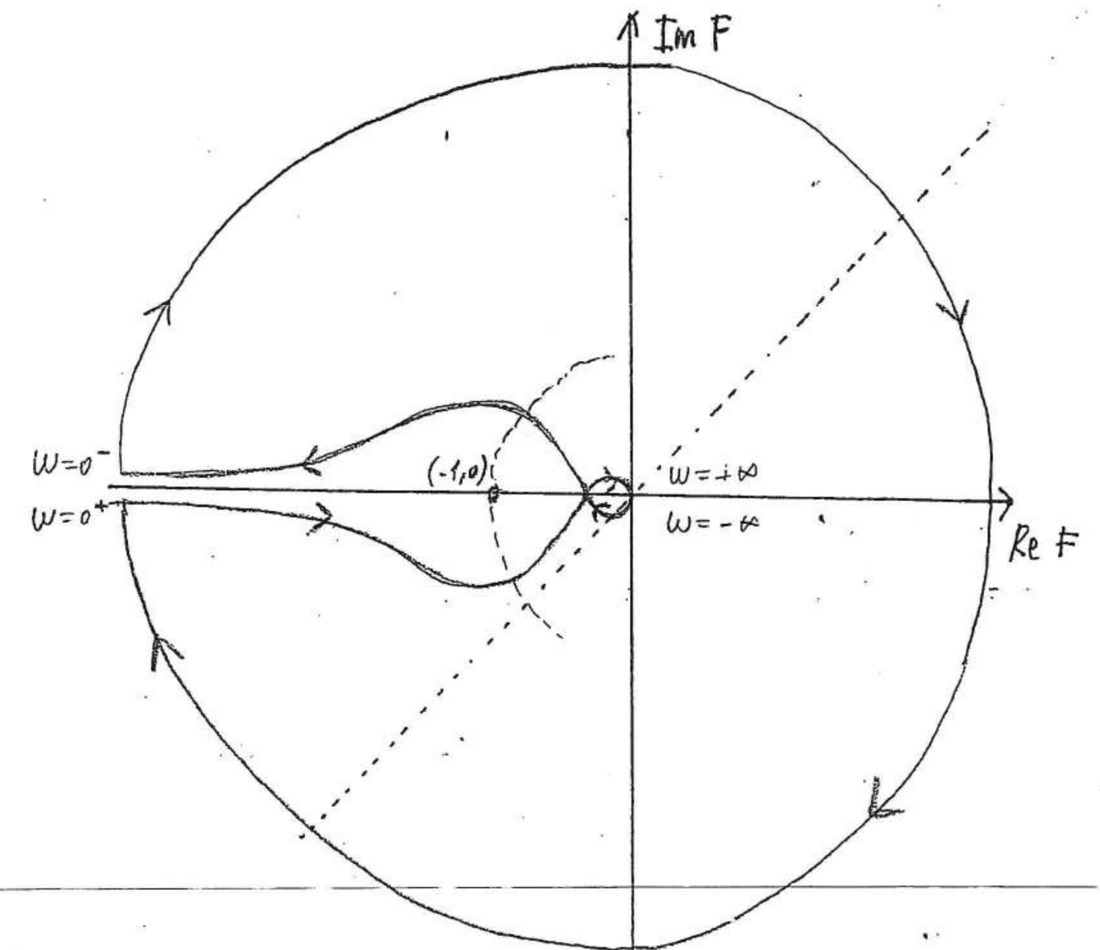
IN PARTICOLARE SI NOTA CHE IN ASSENZA DI CONTROLLORE LA PULSAZIONE DI ATTRAVERSAMENTO VALE $\omega_t \simeq 1$. IL MARGINE DI FASE MASSIMO PUO' ESSERE OTTENUTO INTRODUCENDO UN GUADAGNO TALE DA TRASLARE LA PULSAZIONE DI ATTRAVERSAMENTO IN $\omega = 10$. IL DIAGRAMMA DEL MODULO RIVELA CHE IL GUADAGNO NECESSARIO E' $|k|_{dB} = 40\,dB$ (37 dB SE SI CONSIDERA

LA CORREZIONE AL DIAGRAMMA DOVUTA AL FATTORE BINOMIO A NUMERATORE DI $R(s)$).

IL MARGINE DI FASE COSÌ OTTENUTO È

$$m_\varphi = 180^\circ + \angle F(j10) = 180^\circ - 180^\circ + \operatorname{arctg} 1 - 2 \operatorname{arctg} 0.1 \simeq 33.6^\circ$$

IL DIAGRAMMA DI NYQUIST DI F È IL SEGUENTE:



IL CAMMINO DI NYQUIST NON COMPIE ROTAZIONI ORARIE INTORNO AL PUNTO CRITICO (-1;0), $R(s)$ NON HA POLI A PARTE REALE POSITIVA, QUINDI IL SISTEMA AD ANELLO CHIUSO È STABILE ASINTOTICAMENTE

Soluzione del TEMA

C) Per qualsiasi valore di a, se $b = 0$ l'autovalore in 3 è inosservabile, e non è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

D) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, gli autovalori sono osservabili, ed è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato con velocità di convergenza a piacere.

E) Se $b \neq 0$ e $a = 0$, l'autovalore in -2 è inosservabile e l'autovalore in 3 è osservabile, ed è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato con velocità massima limitata dall'autovalore inosservabile in -2. La velocità massima di convergenza è pertanto e^{-2t}.

473

CONTROLLI AUTOMATICI II per Ing. Automatica e Informatica (5 cfu)

Prova scritta dell'11 novembre 2010 - Anno accademico 2009/10

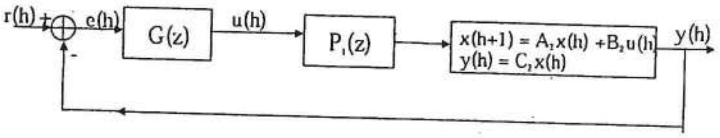
PROBLEMA 1. Si consideri il processo caratterizzato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A) Si supponga che lo stato del processo sia misurabile. Determinare un controllore con reazione dallo stato tale che tutti gli autovalori del sistema complessivo siano negativi e il transitorio si esaurisca quanto più tapidamente possibile (è sufficiente impostare l'assegnazione degli autovalori senza risolverla); qual'e' la massima velocità di esaurimento del transitorio che può essere ottenuta?

B) Si supponga che lo stato del processo non sia misurabile. Impostare la costruzione di un osservatore asintotico, in modo da massimizzare la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato stimato e lo stato reale.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo a tempo discreto:



dove $P_1(z) = \dfrac{(z+0,5)\,(z+0,2)}{(z-1)\,(z-0,5)}$, $A_2 = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

A) Si determinino il parametro "c" ed un controllore $G(z)$ a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:

α) l'errore "e" corrispondente all'ingresso a gradino $r(h) = h$ sia nullo a partire da un istante "I" con "I" più piccolo possibile;

β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determini l'andamento completo dell'errore "e", corrispondente al controllore individuato nella domanda A) e all'ingresso a gradino $r(h) = h$.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

TEMA

L'assegnazione degli autovalori nel dominio del tempo: enunciati, significato, dimostrazione del principio di separazione.

Soluzione del PROBLEMA 1

I due autovalori del processo sono -1 (irrag. e oss) e -2 (ragg. e inoss).

A) La presenza dell'autovalore irrag. in -1 limita la massima velocità di esaurimento del transitorio a e^{-t}.

Il controllore richiesto è dato dalla matrice K che puo' essere ottenuta risolvendo, con il principio di identità dei polinomi, la seguente equazione:

$|\lambda I - (A+BK)| = (\lambda+1)(\lambda+\lambda_{arb})$

dove λ_{arb} può essere un qualsiasi numero reale non inferiore a 1.

B) La presenza dell'autovalore inoss. in -2 limita la massima velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato stimato e lo stato reale a e^{-2t}.

L'osservatore asintotico richiesto è caratterizzato dalla matrice G che puo' essere ottenuta risolvendo, con il principio di identità dei polinomi, la seguente equazione:

$|\lambda I - (A-GK)| = (\lambda+2)(\lambda+\lambda_{arb})$

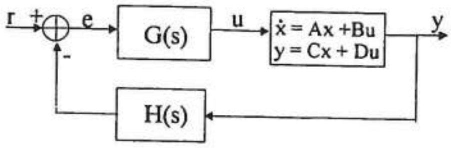
dove λ_{arb} può essere un qualsiasi numero reale non inferiore a 2.

475

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu)

Prova scritta dell'1 febbraio 2011 - Anno accademico 2010/11

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [\,c \quad 1\,]$, $D = 1$, $H(s) = \frac{1}{s+d}$

A) Si determinino i parametri "a", "b", "c", "d" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:

α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = t^2/2$ sia minore di 3;

β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;

γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti in -1.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2.

Si tracci il luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto $F(s) = K' \frac{s-1}{(s+1)^3}$

Per quali valori del parametro K' il sistema ad anello chiuso risulta asintoticamente stabile?

Per quale valore del parametro K' nel sistema ad anello chiuso si ha la massima velocità di esaurimento del transitorio? Qual'e' tale velocità?

TEMA

Si dimostri il principio di separazione.

Si effettui un esempio di applicazione di tale principio.

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha un autovalore nascosto (irrag. ed oss.) in b. Per soddisfare la specifica γ), tale autovalore deve essere necessariamente uguale a -1, per cui b= -1.

Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{s+c-a}{s-a}$.

Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_F N_H}{N_F N_H + D_F D_H},\quad W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{N_F}{D_F},\quad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

La specifica α) impone a=0 e d=0. $\Rightarrow$ $P(s) = \frac{s+c}{s}$, $H(s) = \frac{1}{s}$

Per generare l'altro autovalore nascosto (specifica β)) si deve allora creare una cancellazione polo-zero in -1 (si viene cosi' a generare un autovalore ragg. ed inoss. in -1). Si deve allora scegliere c=1 e impostare la seguente struttura del controllore:

$$G(s) = \frac{es+f}{s+1} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{es+f}{s}$$

La specifica α) impone inoltre

$$\left.\frac{W_e(s)}{s^2}\right|_{s=0} < 3 \quad \Rightarrow \quad f > 1/3 \ (*)$$

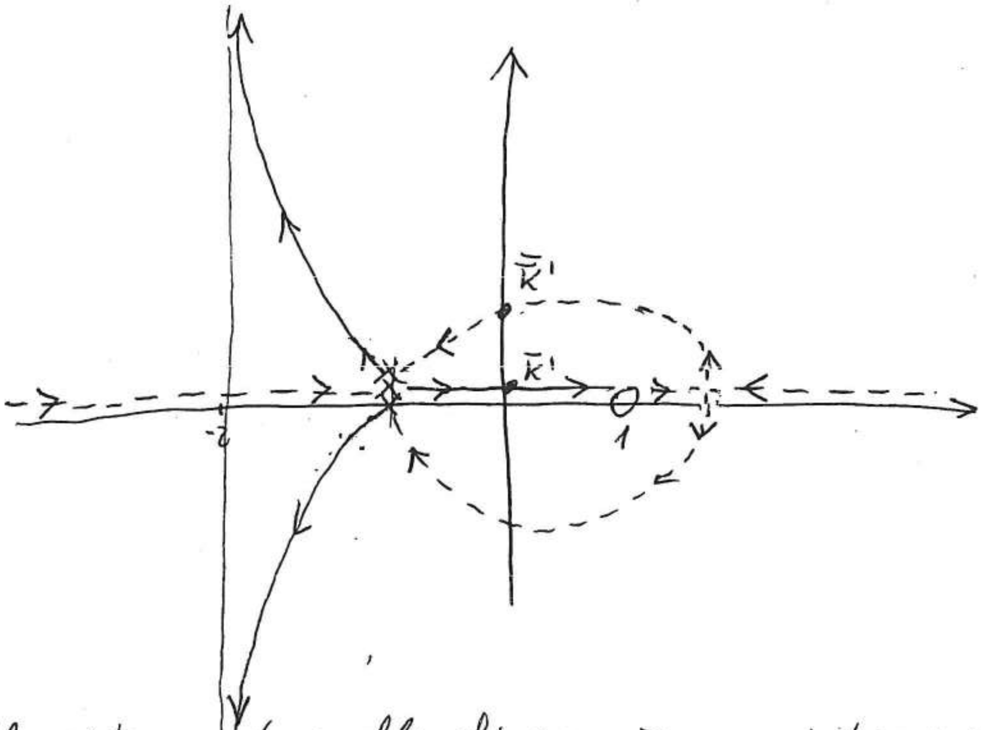
Il controllore suddetto consente di assegnare ad arbitrio due autovalori non nascosti del sistema complessivo, i quali, tenendo in conto la specifica γ), devono necessariamente essere in -1. L'assegnazione degli autovalori risulta:

$D_W = N_F N_H + D_F D_H = es + f + s^2 = (s+1)^2 \quad \Rightarrow$ e=2, f=1 (compatibile con la condizione (*)).

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s+1)^4$ dove i due autovalori in -1 derivanti dall'assegnazione degli autovalori sono ragg. e oss., un autovalore è irrag. ed oss. (quello nel processo), ed uno è ragg. e inoss. (quello derivante dalla cancellazione).

Soluzione del problema 2

Il luogo delle radici è il seguente:



Il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile per $\bar{\bar{K}}' < K' < \bar{K}'$.

Dal criterio di Routh, si deduce $\bar{\bar{K}}' = -2$, $\bar{K}' = -1$.

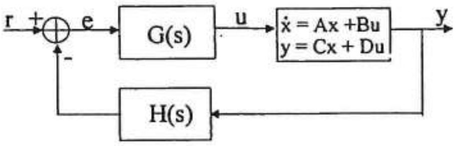
Dall'esame del luogo delle radici, si deduce che la massima velocità di esaurimento del transitorio (pari a e^{-t}) si ottiene per $K' = 0$: per tale valore di K' tutti e 3 gli autovalori del sistema ad anello chiuso sono in -1 (si ricordi che la ~~massima~~ velocità di esaurimento del transitorio è determinata dall'autovalore meno negativo).

478

FONDAMENTI DI AUTOMATICA per Ing. delle Comunicazioni (6 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI I per ing. Automatica (5 cfu)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. Telecomunicazioni (5 cfu)

Prova scritta dell'1 febbraio 2011 - Anno accademico 2010/11

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



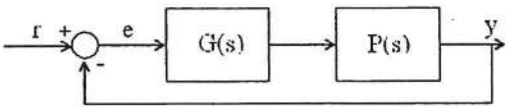
dove $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [\ c \quad 1\ ]$, $D = 1$, $H(s) = \frac{1}{s+d}$

A) Si determinino i parametri "a", "b", "c", "d" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
  1. l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = t^2/2$ sia minore di 3;
  2. il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
  3. il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti in -1.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2.

Si consideri l'anello di controllo riportato in figura:



con $P(s) = -\frac{s+3}{s(s+1)}$

A) Si determini un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> tale che:
  a) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto raggiungibile ed inosservabile;
  b) l'errore in regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = t sia, in modulo, minore di 0.05;
  c) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si verifichi la stabilità del sistema ad anello chiuso utilizzando il criterio di Routh.

C) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) e si verifichi la coerenza di quanto stabilito al punto B) mediante il criterio di Nyquist.

PROBLEMA 3

479

Considerare il sistema dinamico definito dalle matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $C = [\ c_1 \quad c_2\ ]$.

1. Determinare per quali valori di b_1, b_2, c_1 e c_2 il sistema sia stabilizzabile mediante reazione dallo stato.
2. Determinare per quali valori di b_1, b_2, c_1 e c_2 sia possibile assegnare gli autovalori del sistema a piacere mediante reazione dallo stato.
3. Determinare per quali valori di b_1, b_2, c_1 e c_2 sia possibile stimare le variabili di stato del sistema mediante un osservatore asintotico dello stato.
4. Determinare per quali valori di b_1, b_2, c_1 e c_2 sia possibile stimare le variabili di stato del sistema mediante un osservatore asintotico dello stato, con velocità di convergenza della stima arbitraria.
5. Determinare per quali valori di b_1, b_2, c_1 e c_2 il sistema sia stabilizzabile mediante reazione dall'uscita.
6. Determinare per quali valori di b_1, b_2, c_1 e c_2 sia possibile assegnare gli autovalori del sistema a piacere mediante reazione dall'uscita.

Soluzione del problema 2.

A-B) Per soddisfare la specifica a) è necessario introdurre nel controllore un polo tale da cancellare lo zero del processo. A causa della presenza nel processo del polo in s=0, l'errore in regime permanente per ingressi a rampa è costante e può essere opportunamente reso piccolo agendo sul guadagno statico del controllore. Il controllore è dunque del tipo

$$G(s) = \frac{k}{(s+3)}$$

Il modulo del guadagno si determina dunque imponendo la condizione

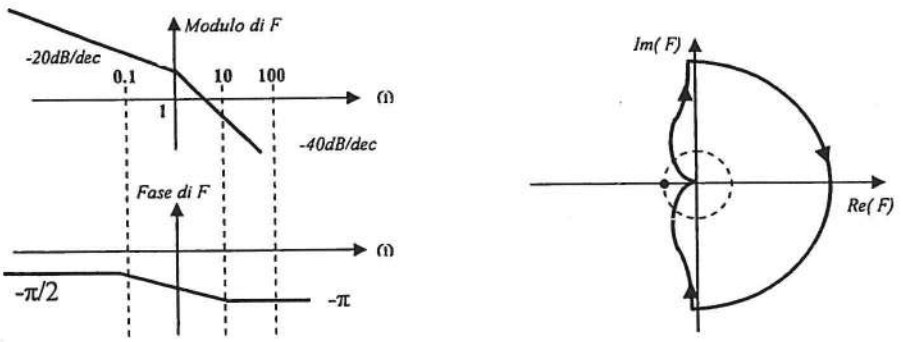
$$\left|\frac{W_e(s)}{s}\right|_{s=0} < 0.05 \Rightarrow |k| > 20$$

Il segno del guadagno va scelto in modo da soddisfare la specifica c), per la quale si può applicare il criterio di Routh. Il polinomio caratteristico vale $D_W(s) = -k + s(1+s)$. Essendo questo del second'ordine condizione necessaria e sufficiente per la stabilità è che non ci siano variazioni di segno. Si deve quindi avere k<0. La soluzione del problema è infine

$$G(s) = \frac{k}{(s+3)} \quad \text{con} \quad k < -20$$

. Si sceglie ad esempio k= - 25.

C)



Il processo controllato è stabile asintoticamente. Il diagramma di Nyquist di F non compie rotazioni intorno al punto critico. Ne segue che il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente. Ciò è coerente con il criterio di Routh. Si noti che scegliendo k positivo il cammino di Nyquist avrebbe compiuto una rotazione oraria intorno al punto critico ed il polinomio caratteristico avrebbe avuto una variazione di segno, che avrebbero dato luogo ad un sistema complessivo instabile.

482

CONTROLLI AUTOMATICI II per ing. Automatica e Informatica (5 cfu)

Prova scritta dell'1 febbraio 2011 - Anno accademico 2010/11

PROBLEMA 1.

Considerare il processo P_1 definito dalle matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $C = [\ c_1 \quad c_2\ ]$.

A) Determinare per quali valori di b_1, b_2, c_1 e c_2 sia possibile:

i) stabilizzare il sistema con reazione dallo stato;

ii) assegnare gli autovalori del sistema a piacere mediante reazione dallo stato;

iii) stimare le variabili di stato del sistema mediante un osservatore asintotico dello stato;

iv) stimare le variabili di stato del sistema mediante un osservatore asintotico dello stato con velocità di convergenza della stima arbitraria.

B) Considerando i seguenti valori per i parametri incogniti: $b_1 = -2$, $b_2 = 1$, $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, progettare un osservatore asintotico dello stato che converga più velocemente possibile e, sfruttando il principio di separazione, un controllore a reazione dallo stato stimato che assegni gli autovalori del sistema in maniera tale gli autovalori siano coincidenti.

PROBLEMA 2.

Si tracci il luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto $F(s) = K' \frac{s - 1}{(s + 1)^3}$

Per quali valori del parametro K' il sistema ad anello chiuso risulta asintoticamente stabile?

Per quale valore del parametro K' nel sistema ad anello chiuso si ha la massima velocità di esaurimento del transitorio? Qual'e' tale velocità?

TEMA

Si dimostri il principio di separazione.

Si effettui un esempio di applicazione di tale principio.

Soluzione del Problema 3

Gli autovalori del sistema sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Applicando il test di Hautus, è possibile stabilire che λ_1 è raggiungibile se $b_1 \neq 0$ oppure $b_2 \neq 0$, ed osservabile se $c_2 \neq 0$, e che λ_2 è raggiungibile se $b_1 \neq 0$, ed osservabile se $c_2 \neq 2c_1$. Pertanto:

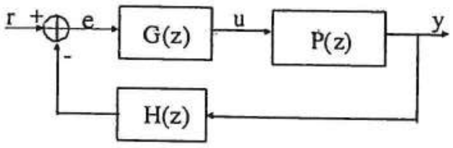
1. Il sistema è stabilizzabile mediante reazione dallo stato se l'autovalore $\lambda_2 = 1$ (a parte reale positiva) è raggiungibile: $b_1 \neq 0$.
2. È possibile assegnare gli autovalori del sistema a piacere mediante reazione dallo stato se gli autovalori sono raggiungibili: $b_1 \neq 0$.
3. È possibile stimare le variabili di stato del sistema mediante un osservatore asintotico dello stato se l'autovalore $\lambda_2 = 1$ è osservabile: $c_2 \neq 2c_1$.
4. È possibile stimare le variabili di stato del sistema mediante un osservatore asintotico dello stato con velocità di convergenza della stima arbitraria se gli autovalori sono osservabili: $c_2 \neq 2c_1$, $c_2 \neq 0$.
5. Il sistema è stabilizzabile mediante reazione dall'uscita se l'autovalore $\lambda_2 = 1$ è raggiungibile ed osservabile: $b_1 \neq 0$, $c_2 \neq 2c_1$.
6. È possibile assegnare gli autovalori del sistema a piacere mediante reazione dall'uscita se gli autovalori sono raggiungibili raggiungibile ed osservabili: $b_1 \neq 0$, $c_2 \neq 2c_1$, $c_2 \neq 0$.

484

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu)

Prova scritta dell'1 marzo 2011 - Anno accademico 2010/11

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{z - 0{,}3}{z + 0{,}5}$, $H(z) = \dfrac{1}{z - 1}$

A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:

α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h) a gradino si annulli nel più breve tempo possibile (si indichi l'istante a partire dal quale l'errore si annulla);

β) tutti gli autovalori del sistema complessivo abbiano modulo minore di 0,4.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini l'andamento completo dell'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h) a gradino.

PROBLEMA 2.

Si tracci il luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = K' \frac{(s-1)\,(s+0{,}25)}{(s+7)\,s^2}$$

sapendo che nel punto -1 è presente un punto singolare triplo (ovvero un punto in cui si intersecano 3 rami del luogo).

Dall'esame visivo del luogo (e senza effettuare alcun calcolo), si deduca (i) se esiste un intervallo di valori del parametro K' per cui il sistema ad anello chiuso risulta asintoticamente stabile, (ii) quale può essere la massima velocità di esaurimento del transitorio con un opportuna scelta di K'.

PROBLEMA 3

Si dimostri che nella cascata di due sistemi caratterizzati rispettivamente dalle funzioni di trasferimento:

$P_1(s) = \dfrac{1}{s + 2}$, $P_2(s) = \dfrac{s + 2}{s - 2}$

è presente un autovalore nascosto in -2.

483

SOLUZIONE PROBLEMA 1

Gli autovalori del sistema sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.

A)

i) Per stabilizzare il sistema con reazione dallo stato è necessario che l'autovalore λ_1, a parte reale positiva, sia raggiungibile, quindi $b_1 \neq 0$.

ii) E' possibile assegnare gli autovalori del sistema a piacere mediante reazione dallo stato se tutti gli autovalori sono raggiungibili: $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq - b_1/3$.

iii) Per stimare le variabili di stato del sistema mediante un osservatore asintotico dello stato è necessario che l'autovalore λ_1 sia osservabile: $c_2 \neq 3c_1$

iv) E' possibile stimare le variabili di stato del sistema mediante un osservatore asintotico dello stato se il sistema è osservabile: $c_2 \neq 3c_1$ $c_2 \neq 0$.

B)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'autovalore $\lambda_2 = -2$ è inosservabile e raggiungibile, perciò non è possibile progettare un osservatore asintotico dello stato che converga con velocità arbitraria. Affinchè gli autovalori siano coincidenti è necessario che coincidano in -2.

L'equazione dell'osservatore asintotico è la seguente:

$$\xi = A\xi + Bu + H(y - C\xi) = (A - HC)\xi + Bu + GCx$$

posto l'errore

$$e(t) = x(t) - \xi(t)$$

si verifica che

$$e(t) = e^{(A-HC)(t-t0)}e(t)$$

che evolve con modalità che dipendono dagli autovalori della matrice A-HC.

$$A\text{-}HC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-h_1 & 0 \\ -1-h_2 & -2 \end{bmatrix}$$

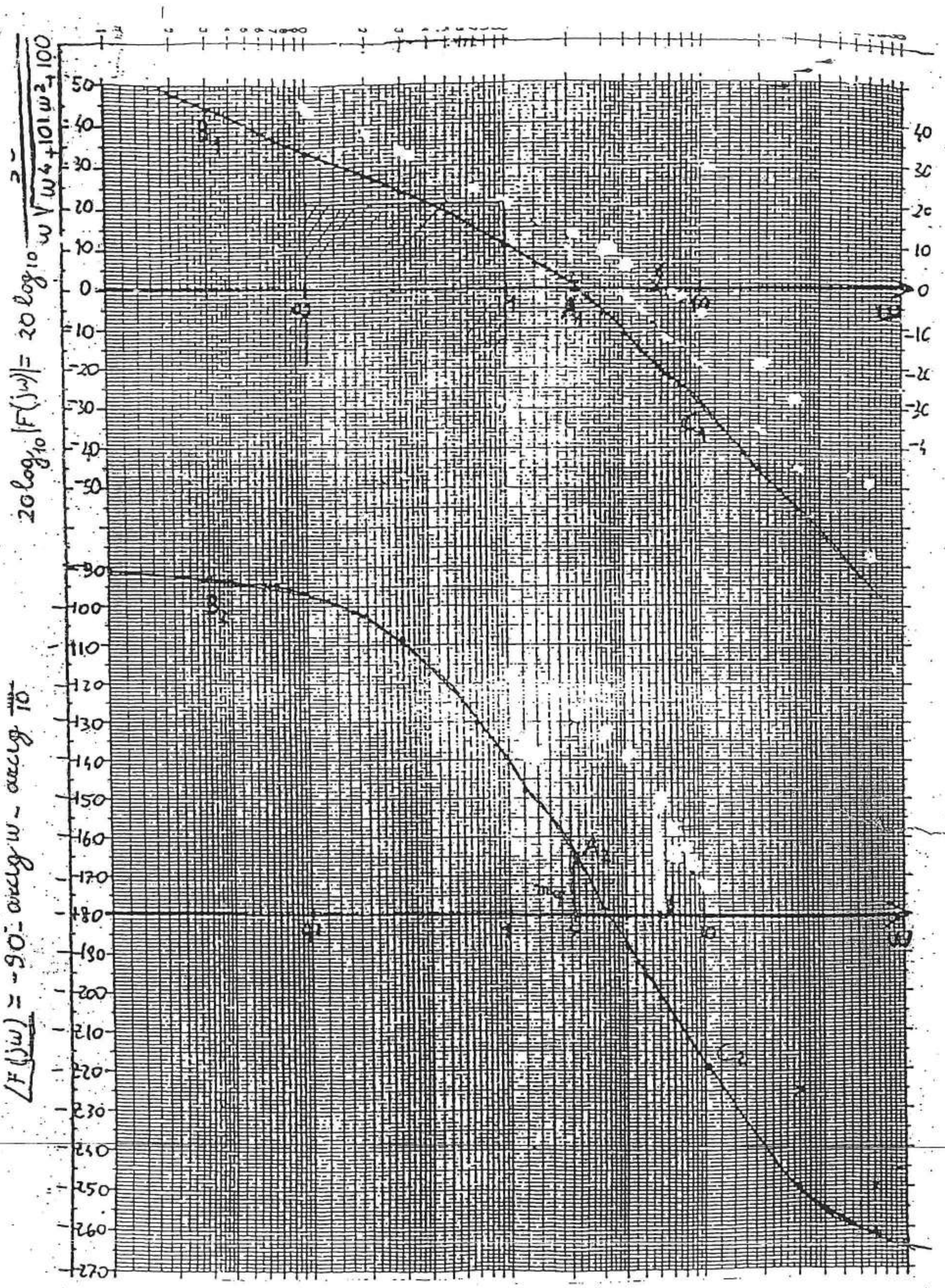
per progettare un osservatore asintotico dello stato che converga più velocemente possibile è necessario che:
$1\text{-}h_1 \leq -2 \rightarrow h_1 \geq 3$

Sfruttando il principio di separazione considero un controllore a reazione dallo stato stimato che assegni al sistema autovalori coincidenti in -2.

$$A+BK = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2k_1 & -2k_2 \\ k_1-1 & k_2-2 \end{bmatrix}$$

$\text{Det}(\lambda I\text{-}A\text{-}BK) = p(\lambda)$
con $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -2$
$\text{Det}(\lambda I\text{-}A\text{-}BK) = \lambda^2+4\lambda+4$

$(\lambda-1+2k_1)(\lambda-k_2+2)-(2k_2)(-k_1+1) = \lambda^2+4\lambda+4$
$k_2 = 0$, $k_1 = 3/2$
$K = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \end{bmatrix}$



$$F(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+10)}$$

Soluzione del problema 1

485

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F N_H}{N_F N_H + D_F D_H},\quad W_e(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F}\ ,\ H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per verificare la specifica α), deve essere presente uno zero in +1 nella $W_e(z)$ (condizione automaticamente verificata, grazie al polo in +1 di H(z)) e si deve imporre $N_F N_H + D_F D_H = z^l$ dove l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Si puo' allora scegliere:

$$G(z) = \frac{az + b}{z - 0{,}3} \qquad \Rightarrow \qquad F(z) = \frac{az + b}{z + 0{,}5}$$

Si noti che la cancellazione di una coppia polo-zero in 0,3 provoca la comparsa di un autovalore ragg. ed inoss. in 0,3. Si noti inoltre che il polo in -0,5 di P(z) non può essere cancellato per non violare la specifica β).

Si impone allora:

$$N_F N_H + D_F D_H = az + b + (z + 0{,}5)(z - 1) = z^2 \qquad \Rightarrow \qquad l=2$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene a=0,5, b=0,5.

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $z^2(z-0{,}3)$ dove i due autovalori in zero (derivanti dall'assegnazione degli auto valori) sono ragg. e oss., mentre l'autovalore in 0,3 (quello derivante dalla cancellazione) è ragg. e inoss..

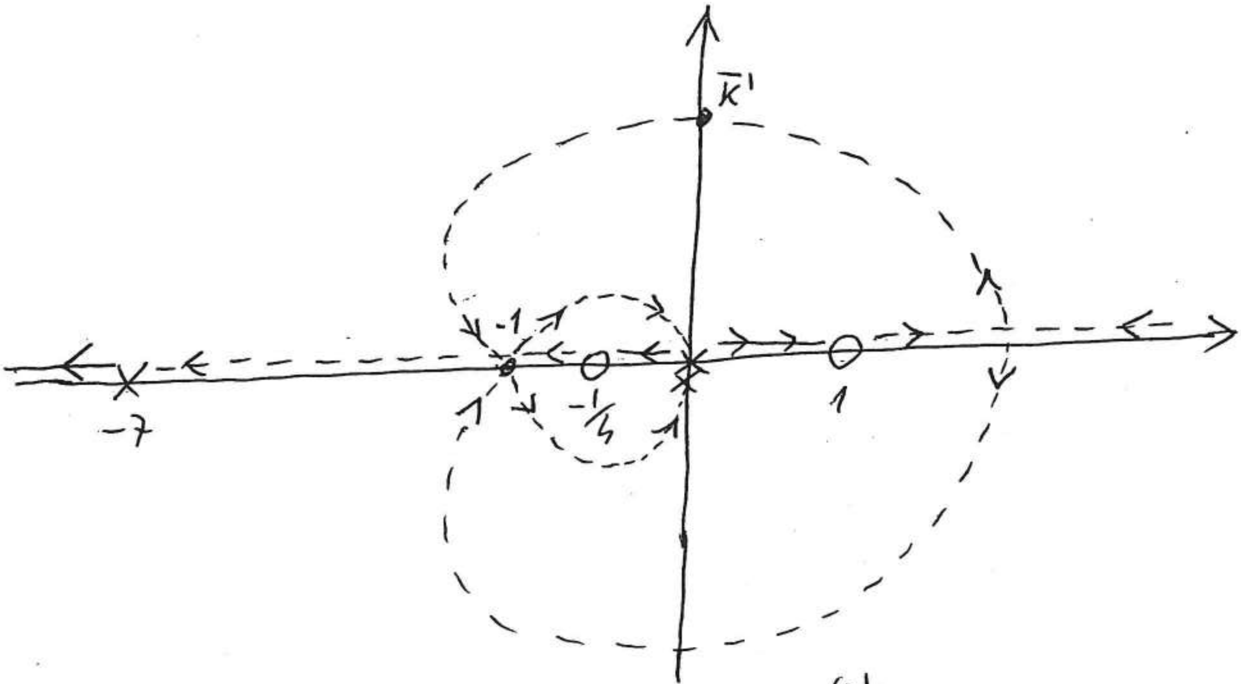
C)

$$e(z) = W_e(z)\, r(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}\ \frac{z}{z-1} = 1 + \frac{0{,}5}{z}$$

$$e(h) = \delta(h) + 0{,}5\ \delta(h-1)$$

Soluzione del problema 2

Il luogo delle radici richiesto è il seguente:



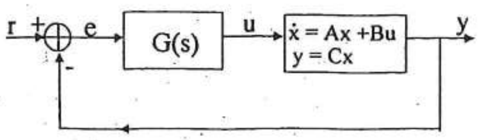
Dall'esame visivo del luogo è evidente (i) che il sistema ad anello chiuso è asint. stabile per $0 > K' > \bar{K}'$, (ii) che per il valore di K' corrispondente al punto singolare triplo in -1, si ottiene la massima velocità di esaurimento del transitorio. In effetti, per tale valore di K', tutti e tre gli autovalori del sistema complessivo sono in -1; per qualsiesi altro valore di K' c'è almeno un autovalore con parte reale maggiore di -1. Pertanto tale velocità è pari a "e^{-t}"; il corrispondente valore di K' è pari a -4 (calcolo non richiesto dal testo).

487

CONTROLLI AUTOMATICI, CONNTROLLI AUTOMATICI II, SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO, FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Prova scritta del 6 aprile 2011 – Appello straordinario riservato ai fuori corso

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$.

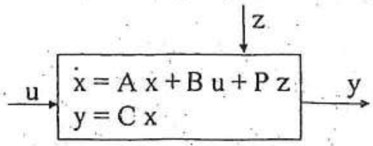
A) <u>Per tutti</u>. Si determinino il parametro "a" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = t sia nullo;
   β) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori coincidenti in -1;
   γ) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto.

B) <u>Per tutti</u>. Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) <u>Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II</u>. Considerando il controllore di cui alla domanda A) si tracci il luogo delle radici di interesse e si discuta la relazione tra la specifica β) e i punti singolari del luogo.

PROBLEMA 2.

Si consideri il processo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Il disturbo z è misurabile</u>.

A) <u>Per tutti</u>. Si progetti uno schema di controllo a dimensione minima in maniera da verificare le seguenti specifiche:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   β) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

B) <u>Solo per Controlli Automatici (5 cfu e 6 cfu), Sistemi di Controllo Automatico (5 cfu) e Fondamenti di Automatica (6 cfu)</u>: Si discuta il vantaggio dello schema di controllo a doppia controreazione, rispetto a quello a controreazione semplice.

C) <u>Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II.</u> Si risolva il problema di cui alla domanda A) considerando un processo tempo discreto (invece che tempo continuo) caratterizzato dalle stesse matrici A, B, P e C di cui sopra.

TEMA

<u>Solo per Controlli Automatici (5 cfu e 6 cfu), Sistemi di Controllo Automatico (5 cfu) e Fondamenti di Automatica (6 cfu)</u>: Si discutano le problematiche inerenti la modellizzazione di un processo fisico.

<u>Solo per Controlli Automatici (9 cfu) c Controlli Automatici II.</u> Metodologie di stabilizzazione nel dominio del tempo.

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{s+1}{s\,(s-a)}$.

Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_F}{N_F + D_F},\quad W_e(s) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\quad \text{con } F(s) = G(s)\,P(s)$$

Per soddisfare la specifica γ), è sufficiente scegliere a= -1. In questo modo il processo viene ad avere un autovalore nascosto (ragg. e inoss.) in -1 e la funzione di trasferimento del processo diventa $P(s) = \frac{1}{s}$.

Si osserva poi che la specifica α) impone la presenza di due poli in s=0 nella funz. di trasf. ad anello aperto: dato che un polo in s=0 è già presente nel processo, si deve collocare l'altro polo nel controllore. Si può allora tentare di risolvere il problema con un controllore di dimensione 1 del tipo:

$$G(s) = \frac{as+b}{s} \quad\Rightarrow\quad F(s) = \frac{as+b}{s^2}$$

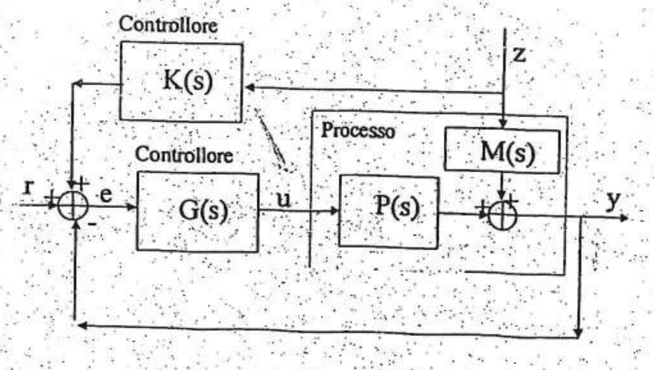
Per assegnare in -1 anche gli autovalori non nascosti del sistema complessivo è sufficiente imporre:

$$D_W = N_F + D_F = s^2 + as + b = (s+1)^2 \quad\Rightarrow\quad a=2,\ b=1$$

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s+1)^3$ con due autovalori ragg. e oss. e un autovalore ragg. e inoss.

Soluzione del problema 2

A) Dato che il disturbo è misurabile, è possibile progettare uno schema di controllo a doppia controreazione del tipo:



dove $P(s) = M(s) = \frac{s-1}{s\,(s+2)}$

Si può tentare allora di stabilizzare il sistema complessivo con un controllore G(s) a dim. zero del tipo

$$G(s) = K \quad\Rightarrow F(s) = K\,\frac{s-1}{s\,(s+2)}$$

Applicando il criterio di Routh al polinomio

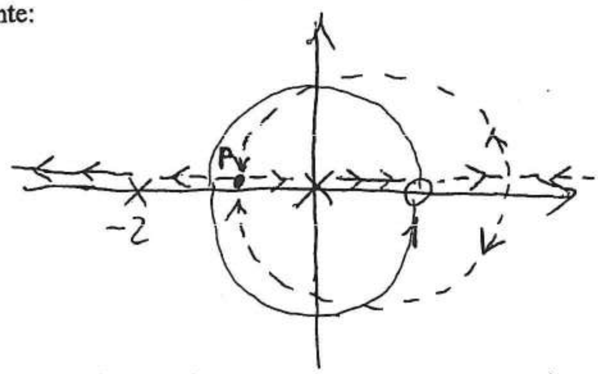
$$D_W = N_F + D_F = K\,(s-1) + s\,(s+2) = s^2 + s\,(2+K) - K$$

si deduce che deve essere 0 > K > -2.

Si deve infine scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)=0$ ottenendo la reiezione completa del disturbo. Svolgendo i conti si ottiene:

$$K(s) = -\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\frac{1}{K}$$

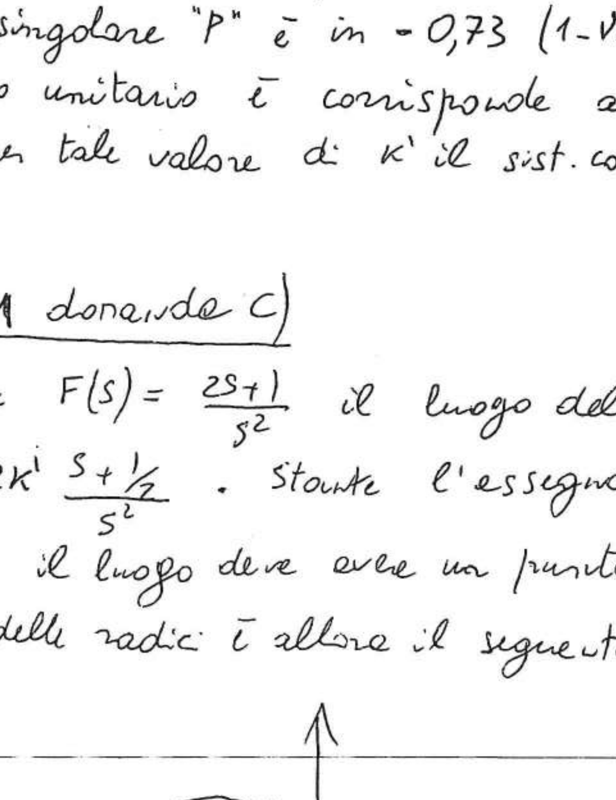
C) Il problema e' analogo al caso tempo continuo.
L'unica differenza e' che le radici di D_W devono essere interne al cerchio unitario. Il luogo delle radici di F(z) e' il seguente:



Il punto singolare "P" è in -0,73 $(1-\sqrt{3})$ quindi interno al cerchio unitario è corrisponde al valore K' = -0,54. Quindi per tale valore di K' il sist. complessivo è asint. stabile

Problema 1 domanda C)

Dato che $F(s) = \frac{2s+1}{s^2}$ il luogo delle radici di interesse è $F(s) = 2K' \frac{s+1/2}{s^2}$. Stante l'assegnazione degli autovalori effettuata il luogo deve avere un punto singolare doppio in -1. Il luogo delle radici è allora il seguente:



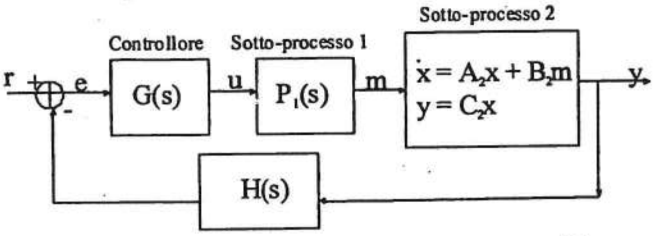
CONTROLLI AUTOMATICI (Ing. Informatica e Automatica) (9 CFU)
Prova scritta del 9 giugno 2011

430

COMPITO A

PROBLEMA 1

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il sotto-processo 1 è caratterizzato dalla funzione di trasferimento $P_1(s) = \frac{s+b}{s+c}$.

Il sotto-processo 2 è caratterizzato dalle matrici:

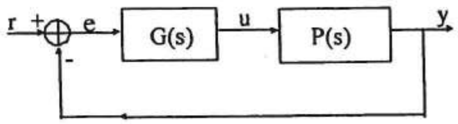
$$A_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Risulta inoltre $H(s) = \frac{1}{s}$

A) Si determinino i parametri "a", "b", "c" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo che il sistema complessivo abbia 5 autovalori e precisamente: un autovalore in -1 raggiungibile ed osservabile, un autovalore in -2 irraggiungibile ed osservabile, un autovalore in -3 raggiungibile ed inosservabile, un autovalore in -4 irraggiungibile ed osservabile, un autovalore in -5 raggiungibile ed osservabile.

B) Si determini una rappresentazione ingresso-stato-uscita del controllore individuato nella domanda A).

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $G(s) = K_G \frac{1-\tau s}{1+\tau s}$, $P(s) = \frac{1}{s-1}$.

A) Si determinino il parametro "τ" ed il guadgno K_G del controllore G(s) in modo da verificare le seguenti specifiche:

α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = 1 sia pari a -1;

β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si disegni (passando attraverso il diagramma di Bode) il relativo diagramma di Nyquist e si verifichi, tramite il criterio di Nyquist, il conseguimento della stabilità asintotica del sistema complessivo.

C) Considerando il controllore di cui alla domanda A) si tracci il luogo delle radici di interesse e si discuta la sua coerenza con la specifica β).

TEMA

Si discutano i vantaggi del controllo a retroazione.

Soluzione del problema 1

491

A) Scegliendo a = -3, nel sotto-processo 2 si ha un autovalore in -3 ragg. ed inoss.

Con tale scelta la funz. di trasf. di tale sotto-processo diventa $P_2(s) = \frac{1}{s+2}$.

Scegliendo allora b=2, si provoca una cancellazione zero-polo in -2 che genera un autovalore iragg. ed oss. in -2.

Scegliendo infine c=4 e collocando uno zero della G(s) in -4, si provoca una cancellazione zero-polo in -4 che genera un autovalore iragg. ed oss. in -4.

Tenendo in conto che $W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}$ con $F(s) = \frac{N_F}{D_F} = G(s)\, P_1(s)\, P_2(s)$, $H(s) = \frac{N_H}{D_H}$, per assegnare i residui due auto valori non nascosti (in -1 e -5) conviene scegliere la seguente struttura del controllore:

$$G(s) = d\,\frac{s+4}{s+e} \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{d}{s+e}$$

Procedendo all'assegnazione degli autovalori suddetti e risolvendo con il principio di identità dei polinomi si ottiene:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = d + (s+e)s = (s+1)(s+5) \Rightarrow d=5,\ e=6.$$

B) Il controllore individuato nella domanda A) è caratterizzato dalla funz. di trasf.:

$$G(s) = 5\,\frac{s+4}{s+6} = 5 + \frac{-10}{s+6}$$

Applicando la forma canonica raggiungibile, la quadrupla (F,G,H,L) che caratterizza il controllore risulta F=-6, G=1, H=-10, L=5.

492

Soluzione del problema 2

A) La specifica α) impone $K_G=2$.

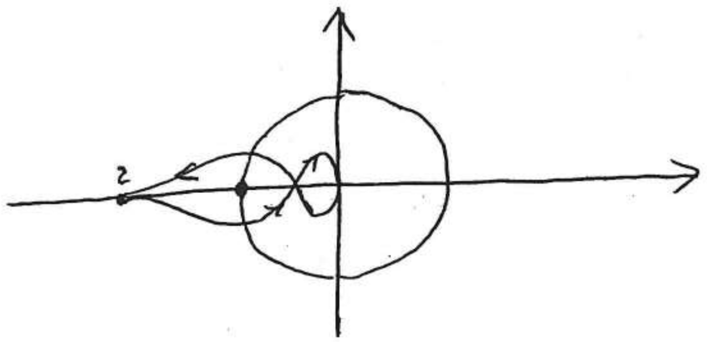
Quindi la funz. di trasf. ad anello aperto risulta $F(s) = 2\,\dfrac{1-\tau s}{(1+\tau s)(s-1)}$.

Il denominatore della funz. di trasf. ingresso-uscita del sistema complesivo risulta allora:

$$D_W = N_F + D_F = 2(1-\tau s) + (1+\tau s)(s-1) = \tau s^2 + s(1-3\tau) + 1.$$

Quindi, in base al criterio di Routh, deve risultare $0 < \tau < 1/3$.
Si può scegliere, ad esempio, $\tau = 1/4$.

B) Il diagramma di Nyquist (qualitativo) richiesto è il seguente (dal cui esame visivo è evidente un giro in verso antiorario attorno al punto di coordinate (-1,0), che, stante la presenza di un polo a parte reale positiva nella funzione di attraversamento ad anello aperto, consente di verificare il criterio di Nyquist):

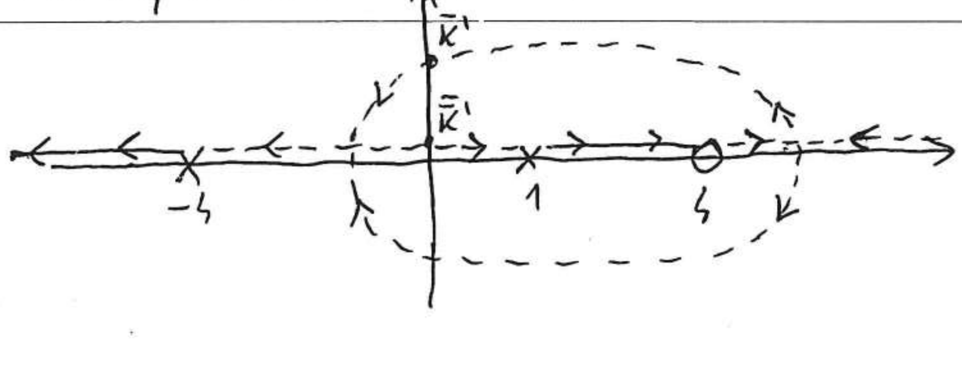


C) Con la scelta $\tau = 1/4$, la funz. di trasf. ad anello aperto diviene $F(s) = -2\,\dfrac{s-4}{(s+4)(s-1)}$.

Quindi, il luogo delle radici di interesse è il seguente:

$$F(s) = K'\,\frac{s-4}{(s+4)(s-1)}$$

Si noti che, in base a quanto dedotto nella domanda A), per $K'=-2$ il sistema complessivo deve essere asintoticamente stabile; quindi, il punto singolare compreso nell'intervallo (-4,1) dovrà essere necessariamente nel semipiano negativo. Inoltre, con riferimento al disegno del luogo, utilizzando Routh, si deduce $\bar{K}'=-3$, $\bar{\bar{K}}'=-1$. Il sistema complessivo è asint. stabile per $-3<K'<-1$: quindi $K'=-2$ è compreso nell'intervallo di stabilità.

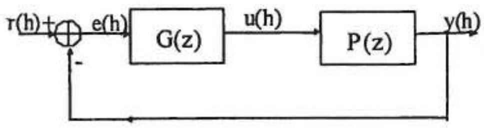


493

CONTROLLI AUTOMATICI (Ing. Informatica e Automatica) (9 CFU)
CONTROLLI AUTOMATICI II (Ing. Automatica) (5 CFU)
Prova scritta del 9 giugno 2011

COMPITO B

PROBLEMA 3. Si consideri il seguente schema di controllo a tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{z - 0{,}5}{(z-1)(z+1)}$

A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
  α) l'errore "e" corrispondente all'ingresso a rampe $r(h) = h$ sia nullo a partire da un istante "l" con "l" più piccolo possibile (si specifichi chiaramente l'istante "l" ottenuto);
  β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si disegni il corrispondente luogo delle radici tenendo conto dell'assegnazione degli autovalori effettuata in tale domanda. In corrispondenza di quale valore del parametro K' gli autovalori del sistema complessivo sono tutti reali e a modulo minore di uno?

PROBLEMA 4. Si consideri il processo caratterizzato dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = [\,1 \quad c\,]$$

A) Si determini per quali valori dei parametri "a" e "c" è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato; si determini inoltre per quali valori dei parametri "a" e "c" è anche possibile garantire una velocità di convergenza a zero arbitraria dell'errore tra stato reale e stato stimato.

B) Scelti $a = -2$, $c = 4$, si costruisca un osservatore asintotico dello stato che garantisca la massima velocità di convergenza a zero dell'errore tra stato reale e stato stimato.

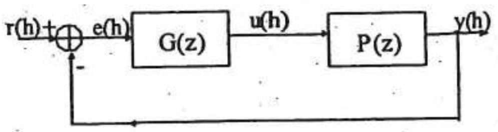
TEMA
Si discutano i vantaggi del controllo a retroazione.

493

CONTROLLI AUTOMATICI (Ing. Informatica e Automatica) (9 CFU)
CONTROLLI AUTOMATICI II (Ing. Automatica) (5 CFU)
Prova scritta del 9 giugno 2011

COMPITO B

PROBLEMA 3. Si consideri il seguente schema di controllo a tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{z - 0{,}5}{(z-1)(z+1)}$

A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
 α) l'errore "e" corrispondente all'ingresso a rampa $r(h) = h$ sia nullo a partire da un istante "l" con "l" più piccolo possibile (si specifichi chiaramente l'istante "l" ottenuto);
 β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si disegni il corrispondente luogo delle radici tenendo conto dell'assegnazione degli autovalori effettuata in tale domanda. In corrispondenza di quale valore del parametro K' gli autovalori del sistema complessivo sono tutti reali e a modulo minore di uno?

PROBLEMA 4. Si consideri il processo caratterizzato dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & c \end{bmatrix}$$

A) Si determini per quali valori dei parametri "a" e "c" è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato; si determini inoltre per quali valori dei parametri "a" e "c" è anche possibile garantire una velocità di convergenza a zero arbitraria dell'errore tra stato reale e stato stimato.

B) Scelti $a = -2$, $c = 4$, si costruisca un osservatore asintotico dello stato che garantisca la massima velocità di convergenza a zero dell'errore tra stato reale e stato stimato.

TEMA
Si discutano i vantaggi del controllo a retroazione.

Soluzione del problema 3

A) Per verificare la specifica α), la F(z) deve avere due poli in z=1 (uno dei due è già presente nella P(z)). Inoltre, deve risultare $N_F + D_F = z^l$ dove "l" rappresenta l'istante tempo discreto a partire dal quale l'errore è identicamente nullo.

Si noti che la relazione suddetta assegna tutti gli autovalori non nascosti in z=0 e quindi consente di risolvere anche la specifica β).

Conviene quindi scegliere la seguente struttura del controllore:

$$G(z) = \frac{az^2 + bz + c}{(z - 1)(z - 0{,}5)} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{az^2 + bz + c}{(z - 1)^2 (z + 1)}$$

Si noti la cancellazione di una coppia zero-polo in 0,5 con la conseguente generazione di un autovalore irrag. e oss. in 0,5 che, essendo a modulo minore di 1, non inficia la stabilità asintotica del sistema complessivo.

Procedendo all'assegnazione degli autovalori suddetti e risolvendo con il principio di identità dei polinomi si ottiene:

$D_W = N_F + D_F = az^2 + bz + c + (z - 1)^2 (z + 1) = z^3 \Rightarrow$ a=1, b=1, c=-1, l=3.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo e' il seguente: $z^3(z - 0{,}5)$ dove i 3 autovalori in "0" sono ragg. e oss., mentre l'autovalore in 0,5 è irrag. e oss.

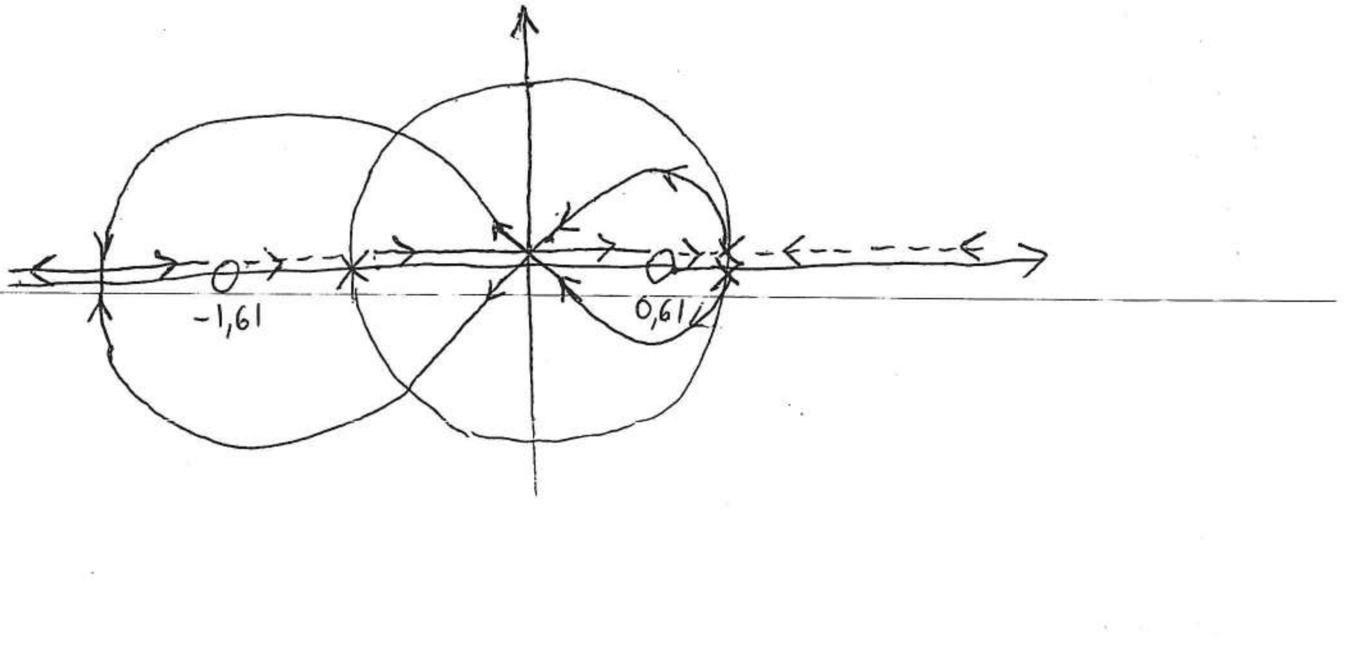
C) In base ai risultati della domanda A), risulta $F(z) = \dfrac{z^2 + z - 1}{(z - 1)^2 (z + 1)} = \dfrac{(z - 0{,}61)(z + 1{,}61)}{(z - 1)^2 (z + 1)}$.

Quindi, il luogo delle radici di interesse è il seguente:

$$F(z) = K' \frac{(z - 0{,}61)(z + 1{,}61)}{(z - 1)^2 (z + 1)}.$$

In base all'assegnazione di autovalori effettuata nella domanda A), sappiamo che per K'=1 tutti e tre gli autovalori non nascosti del sistema complessivo coincidono in zero.

Sfruttando tale informazione, si può disegnare il seguente luogo delle radici (dal cui esame visivo è evidente che K'=1 è l'unico valore del parametro K' in corrispondenza del quale gli autovalori del sistema complessivo sono tutti reali e a modulo minore di uno):



Soluzione del problema 4.

A) Utilizzando il test di Hautus, si deduce che
- l'autovalore "a" è inosservabile se $a+c=2$ (altrimenti è osservabile);
- l'autovalore "2" è inosservabile se $c=0$ (altrimenti è osservabile).

In generale, l'osservatore asintotico si può costruire se e solo se tutti gli eventuali autovalori inosservabili sono a parte reale negativa. Quindi, nel caso specifico, l'osservatore asintotico non si può costruire se $a+c=2$ AND $a\geq 0$, oppure se $c=0$.
In generale, si può anche garantire una velocità di convergenza a zero arbitraria dell'errore tra stato reale e stato stimato se e solo se tutti gli autovalori sono osservabili. Quindi, nel caso specifico, tale velocità arbitraria non può essere garantita se $a+c=2$, oppure se $c=0$.

B) In questo caso, l'autovalore -2 risulta inosservabile (ma essendo a parte reale negativa l'osservatore asintotico si puo' costruire). Ciò limita la velocità di convergenza a zero dell'errore a " e^{-2t} ". La marice G che caratterizza l'osservatore asintotico si puo' dedurre risolvendo, con il principio di identita' dei polinomi l'equazione:

$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda+2)(\lambda-\lambda_{arb})$$

dove λ_{arb} può essere scelto ad arbitrio, ma deve essere non superiore a -2, per non limitare ulteriormente velocità di convergenza a zero dell'errore. Scegliendo, ad esempio, $\lambda_{arb}=-2$, si ottiene:

$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda+2)^2 \quad \text{con } G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

Svolgendo i conti si deduce che G_1 e G_2 devono essere scelte in modo che $G_1 + 4G_2 = 4$.

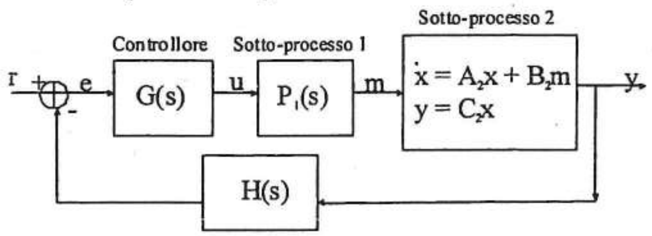
FONDAMENTI DI AUTOMATICA per Ing. delle Telecomunicazioni (6 CFU),
CONTROLLI AUTOMATICI I per ing. Automatica (5 CFU),
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO 1 (5 CFU),

496

Prova scritta del 9 giugno 2011

PROBLEMA 1

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il sotto-processo 1 è caratterizzato dalla funzione di trasferimento $P_1(s) = \frac{s+b}{s+c}$.

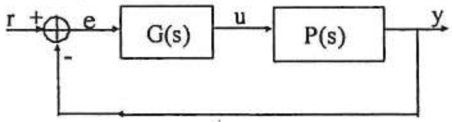
Il sotto-processo 2 è caratterizzato dalle matrici:

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = [\ 1 \quad 1\ ]$$

Risulta inoltre $H(s) = \frac{1}{s}$

Si determinino i parametri "a", "b", "c" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo che il sistema complessivo abbia 5 autovalori e precisamente: un autovalore in -1 raggiungibile ed osservabile, un autovalore in -2 irraggiungibile ed osservabile, un autovalore in -3 raggiungibile ed inosservabile, un autovalore in -4 irraggiungibile ed osservabile, un autovalore in -5 raggiungibile ed osservabile.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $G(s) = K_G \frac{1-\tau s}{1+\tau s}$, $P(s) = \frac{1}{s-1}$.

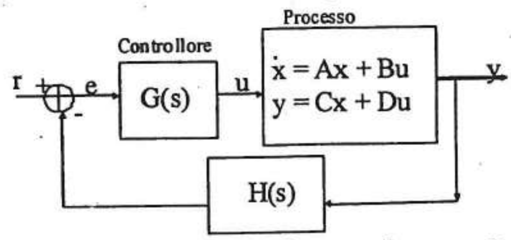
A) Si determinino il parametro "τ" ed il guadgno K_G del controllore G(s) in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = 1 sia pari a -1;
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.
B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si disegni (passando attraverso il diagramma di Bode) il relativo diagramma di Nyquist e si verifichi, tramite il criterio di Nyquist, il conseguimento della stabilità asintotica del sistema complessivo.

TEMA

Si discutano i vantaggi del controllo a retroazione.

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu) 497
Prova scritta del 4 luglio 2011 - Anno accademico 2010/11

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il processo P(s) è caratterizzato dalle matrici: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [\,6 \;\; 3\,]$ $D = 1$.

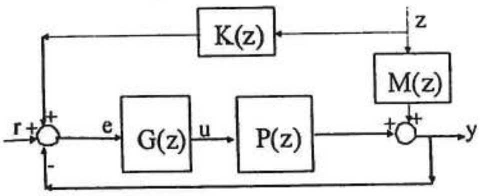
Risulta inoltre $H(s) = \frac{1}{s}$

A) Si determini un controllore G(s), a dimensione zero, in modo che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determini un controllore G(s), a dimensione uno, in modo che il sistema complessivo abbia polinomio caratteristico pari a $(s+1)^2\,(s+2)^2$. Si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità degli autovalori del sistema complessivo.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda B), si disegni il luogo delle radici relativo a $F'(s) = G(s)P(s)H(s)$. Dall'analisi visiva del luogo e tenendo conto dell'assegnazione degli autovalori effettuata nella domanda B), si indichi per quali valori del parametro K' gli autovalori del sistema complessivo sono tutti reali e negativi.

PROBLEMA 2.
Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



con $P(z) = M(z) = \dfrac{z-2}{(z-1)\,(z+0,5)}$.

A) Si tracci il luogo delle radici di $K' \dfrac{z-2}{(z-1)(z+0,5)}$ (suggerimento: il luogo ha due punti singolari doppi in 0,42 e 3,58)

B) Si determinino i controllori G(z) e K(z) (entrambi a dimensione zero) in modo che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e gli autovalori siano tutti reali (ci si aiuti con il luogo delle radici di cui alla domanda A));
   β) il modulo dell'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(h) = h, sia il più piccolo possibile;
   γ) la risposta "y" corrispondente ad un qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

C) Lo schema di controllo di cui sopra quale ipotesi presuppone?

PROBLEMA 3

A) Si descriva, in generale, la struttura dell'osservatore asintotico dello stato di un processo e si dimostri che, nell'ipotesi in cui tutti gli autovalori inosservabili del processo siano a parte reale negativa, l'osservatore asintotico è in grado di ricostruire asintoticamente lo stato.

B) Con riferimento al processo di cui al problema 1, si costruisca un osservatore asintotico dello stato (è sufficiente impostare il problema di determinazione della matrice G senza effettuare i relativi calcoli).

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{s+2}{s-1}$. Nel processo è presente un autovalore <u>ragg. ed inoss.</u> in -2 che non inficia la stabilità asintotica di cui alla domanda A) ed è compatibile con l'assegnazione di autovalori di cui alla domanda B).

La funz. di trasf. del sistema complessivo è

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}, \text{ con } F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{N_F}{D_F} \;,\; H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Scegliendo un controllore di dimensione zero $G(s) = K$, risulta:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = K(s+2) + s(s-1) = s^2 + s(K-1) + 2K$$

In base al criterio di Routh, il sistema è asint. stabile per $K>1$.

B) Conviene scegliere un controllore di dimensione uno nella forma:

$$G(s) = \frac{as+b}{s+2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{as+b}{s-1}$$

La suddetta scelta di G(s) causa la cancellazione di una coppia polo-zero in -2 e quindi la presenza di un secondo (oltre quello presente intrinsecamente nel processo) autovalore nascosto in -2 (anche questo <u>ragg. ed inoss.</u>).

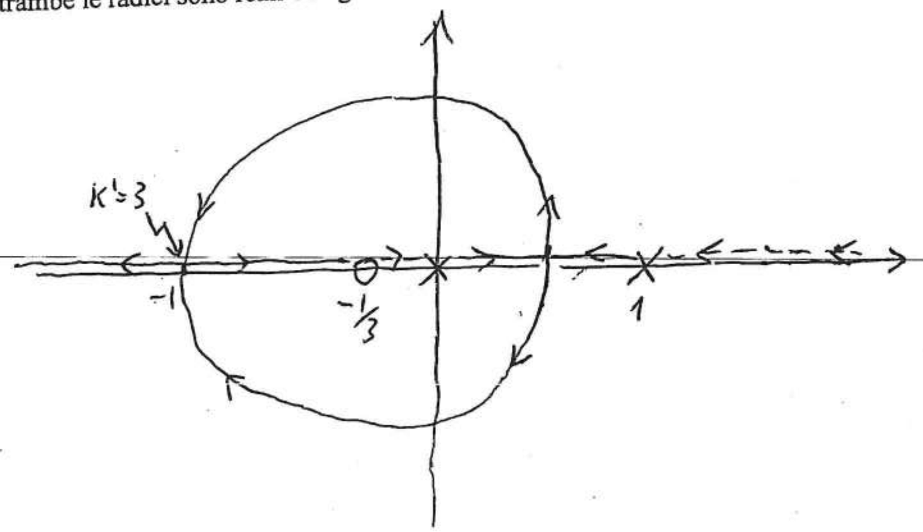
Si può quindi procedere all'assegnazione dei due restanti autovalori (che necessariamente risulteranno non nascosti e quindi <u>ragg. ed oss.</u>) e risolvere con il principio di identità dei polinomi:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = as+b + s(s-1) = (s+1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad a=3 \;,\; b=1$$

C) In base alla soluzione della domanda B) risulta:

$$F'(s) = \frac{3s+1}{s(s-1)} = 3\,\frac{s+1/3}{s(s-1)}$$

Il luogo delle radici richiesto è quindi relativo a $F'(s) = K' \frac{s+1/3}{s(s-1)}$. In base all'assegnazione di autovalori effettuata nella domanda B), si sa a priori che per $K'=3$ dovrà essere presente un punto singolare doppio in -1. Alla luce di tale circostanza, il luogo delle radici è il seguente (dall'analisi visiva del luogo è evidente che per $K'\geq 3$, entrambe le radici sono reali e negative.



Soluzione del problema 3

500

B) Dato che nel processo è presente un autovalore ragg. ed inoss. in -2, tale autovalore deve essere necessariamente presente nell'equazione per la determinazione della matrice G che caratterizza l'osservatore asintotico. Tale equazione è quindi la seguente:

$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda+2)(\lambda-\lambda_{arb})$$

dove λ_{arb} è un autovalore negativo che può essere arbitrariamente scelto.

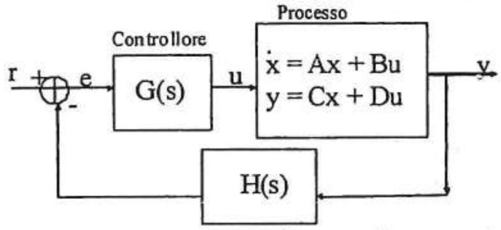
Ponendo $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$, e risolvendo l'equazione di cui sopra con il principio di identità dei polinomi, si può determinare la matrice G.

501

FONDAMENTI DI AUTOMATICA per Ing. delle Comunicazioni (6 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI I per ing. Automatica (5 cfu)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. Telecomunicazioni (5 cfu)

Prova scritta del 4 luglio 2011 - Anno accademico 2010/11

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il processo P(s) è caratterizzato dalle matrici: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [\ 6 \quad 3\ ]$ $D = 1.$

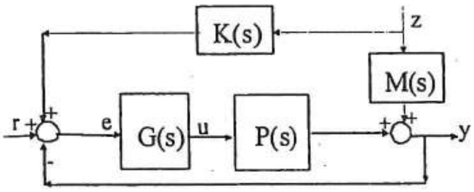
Risulta inoltre $H(s) = \frac{1}{s}$

A) Si determini un controllore G(s), a dimensione zero, in modo che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determini un controllore G(s), a dimensione uno, in modo che il sistema complessivo abbia polinomio caratteristico pari a $(s+1)^2 (s+2)^2$. Si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità degli autovalori del sistema complessivo.

C') Con riferimento al controllore individuato nella domanda B), si disegnino i diagrammi (approssimati) di Bode e Nyquist relativi a $F'(s) = G(s)P(s)H(s)$. Utilizzando il criterio di Nyquist si verifichi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo:



con $P(s) = M(s) = \frac{s-1}{s\,(s+0{,}5)}$.

A) Si determinino i controllori G(s) e K(s) (entrambi a dimensione zero) in modo che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   β) il modulo dell'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = t, sia il più piccolo possibile;
   γ) la risposta "y" corrispondente ad un qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

B) Lo schema di controllo di cui sopra quale ipotesi presuppone?

TEMA

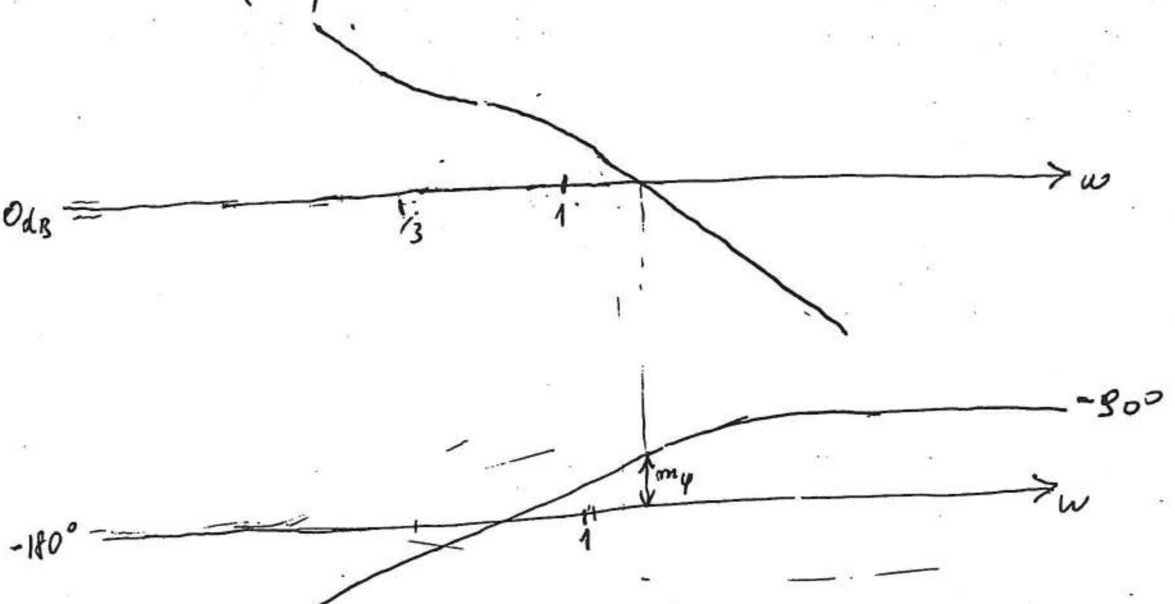
Autovalori raggiungibili/irraggiungibili, osservabili/inosservabili (si spieghino i relativi concetti, possibilmente, attraverso lo decomposizione in sottosistemi derivante dalla forma canonica di Kalman, e si descrivano le formule per la loro determinazione).

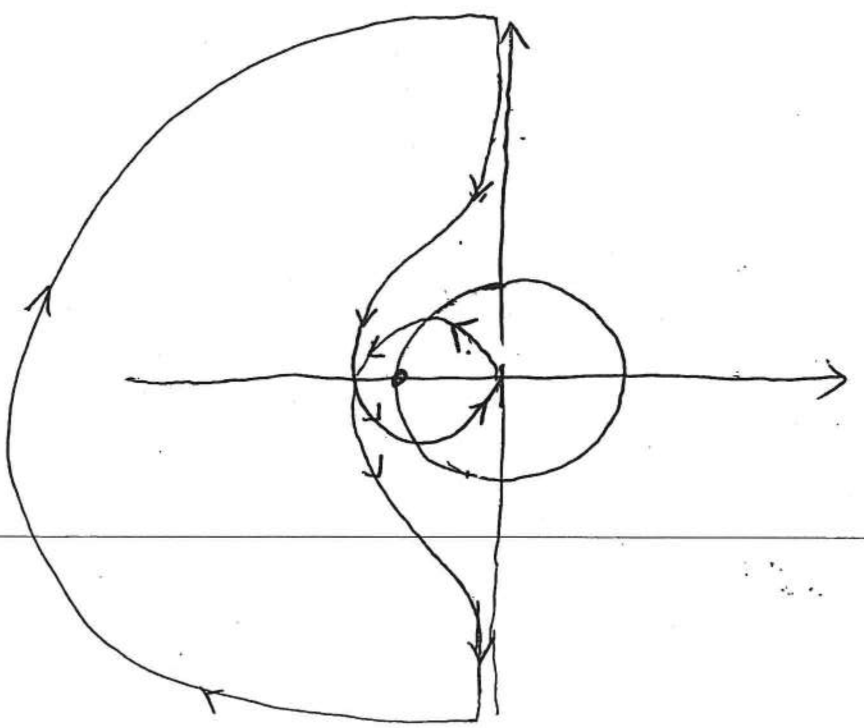
SOLUZIONE PROBLEMA 1

502

c')

$F'(s) = -\dfrac{1+3s}{s(1-s)}$ I diagrammi di Bode e Nyquist (approssimati) sono i seguenti





Il criterio di Nyquist è verificato dato che il numero di giri in senso antiorario attorno al punto (-1,0) è uguale al numero di radici con parte reale positive di $F(s)$ ($\Lambda = 1$).

Soluzione del problema 2

503

A) Si sceglie un controllore, a dimensione zero, nella forma

$$G(s) = K' \quad \Rightarrow \quad F(s) = K' \frac{s-1}{s\,(s+0{,}5)}$$

L'errore di cui alla specifica β) è pari a $\left|\frac{1}{2K'}\right|$. Quindi, per verificare tale specifica, K' deve essere scelto, in modulo, il più grande possibile.

Gli autovalori del sistema complessivo (tutti non nascosti) coincidono con le radici del polinomio:

$D_W = N_F + D_F = K'(s-1) + s\,(s+0{,}5) = s^2 + s(K' + 0{,}5) - K'$.

In base al criterio di Routh, il sistema è asintoticamente stabile per $0 > K' > -0{,}5$.

Alla luce di quanto sopra, la scelta corretta di K' è un valore appena superiore a -0,5.

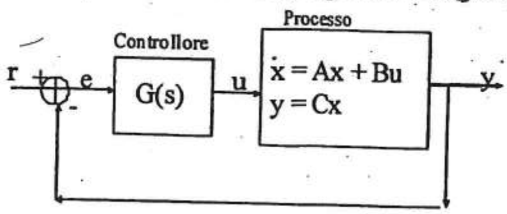
Infine, per verificare la specifica γ), si deve imporre:

$$W_z(s) = \frac{M+PGK}{1+PG} = 0 \quad \Rightarrow \quad G = -\frac{M}{PG} = -\frac{1}{K'}.$$

B) L'ipotesi in questione è la misurabilità del disturbo.

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu) 504
Prova scritta del 22 settembre 2011 - Anno accademico 2010/11

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il processo P(s) è caratterizzato dalle matrici: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [\,2 \quad 1\,]$.

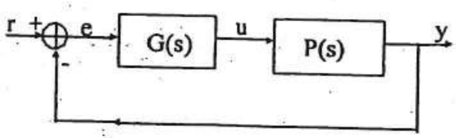
A) Si determini un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che
   α) il sistema complessivo abbia tutti autovalori coincidenti;
   β) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad ingressi "r" costanti sia nullo.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) Si determinino tutti i controllori G(s), a dimensione minima, tali che
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   β) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad ingressi "r" costanti sia nullo;
   γ) la risposta "y" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t)= sen t sia nulla.

PROBLEMA 2.

Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $P(s) = \dfrac{1}{s-1}$.

A) Si determini un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che
   α) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori in -2;
   β) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad ingressi "r" costanti sia nullo.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si tracci il relativo luogo delle radici e, basandosi sull'assegnazione effettuata nella domanda precedente, si determinino (i) l'intervallo di valori del parametro K' in corrispondenza del quale tutte le radici sono reali e negative, (ii) il valore del parametro K' in corrispondenza del quale la velocità di esaurimento del transitorio è la più elevata.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si tracci il diagramma di Nyquist ed, utilizzando il criterio di Nyquist, si verifichi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

TEMA

L'assegnazione degli autovalori nel dominio del tempo.
Si illustri lo schema di controllo e si dimostri il principio di separazione.

Soluzione del problema 1

A) La f. di trasf. del processo è $P(s) = \frac{1}{s+1}$.

Si noti la presenza di un autovalore ragg. ed inos. in -2

Tale autovalore nascosto implica che, per soddisfare la specifica α), tutti gli autovalori del sistema complessivo devono essere in -2.

Le f. di trasf. del sistema complessivo sono

$$W = \frac{N_F}{N_F + D_F} \qquad W_e = \frac{D_F}{N_F + D_F}$$

Per soddisfare la specifica β), il controllore deve avere un polo in $s=0$.

Si sceglie allora un controllore nella forma:

$$G(s) = \frac{as+b}{s} \Longrightarrow F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{as+b}{s(s+1)}$$

Procedendo all'assegnazione degli autovalori, si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = as + b + s(s+1) = (s+2)^2 \Longrightarrow a=3,\ b=4$$

B) Il polinomio caratteristico è il seguente

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{RAGG. e OSS}}}{(s+2)^2}\ \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{RAGG. e INOS}}}{(s+2)}$$

c) Per soddisfare la specifica γ) il controllore deve avere un fattore "s^2+1" a numeratore; per cui, tenendo conto delle specifiche β) (le stesse della domanda A)), si può cercare di stabilizzare il sistema complessivo con un controllore nella forma:

$$G(s) = a\,\frac{s^2+1}{s(s+b)} \implies F(s) = G(s)P(s) = a\,\frac{s^2+1}{s(s+b)(s+1)}$$

Risulta quindi

$$D_W = N_F + D_F = a(s^2+1) + s(s+b)(s+1) = s^3 + s^2(a+b+1) + bs + a$$

In base al criterio di Routh il sistema è asintoticamente stabile scegliendo una coppia (a, b) tale che

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ a+b+1 > 0 \\ b^2+b+ab-a > 0 \end{cases}$$

Per esempio, si può scegliere $a=1$, $b=1$

Soluzione del problema 2

A) Per verificare la specifica β), occorre introdurre un polo in $s=0$ nel controllore.

Il controllore $G(s)$ deve quindi avere la forma:

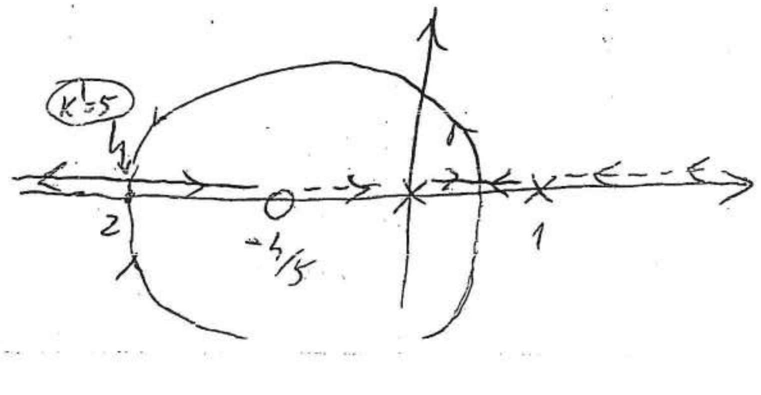
$$G(s) = \frac{as+b}{s} \Longrightarrow F(s) = G(s)P(s) = \frac{as+b}{s(s-1)}$$

Procedendo all'assegnazione degli autovalori, si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = as+b+s(s-1) = (s+2)^2 \Rightarrow a=5 \quad b=4$$

B) Il luogo è il seguente $F(s)=K'\,\frac{s+4/5}{s(s-1)}$

Dall'assegnazione effettuata nella domanda A), si sa a priori che, per $K'=5$, entrambe le radici sono coincidenti in -2. Il luogo è quindi il seguente



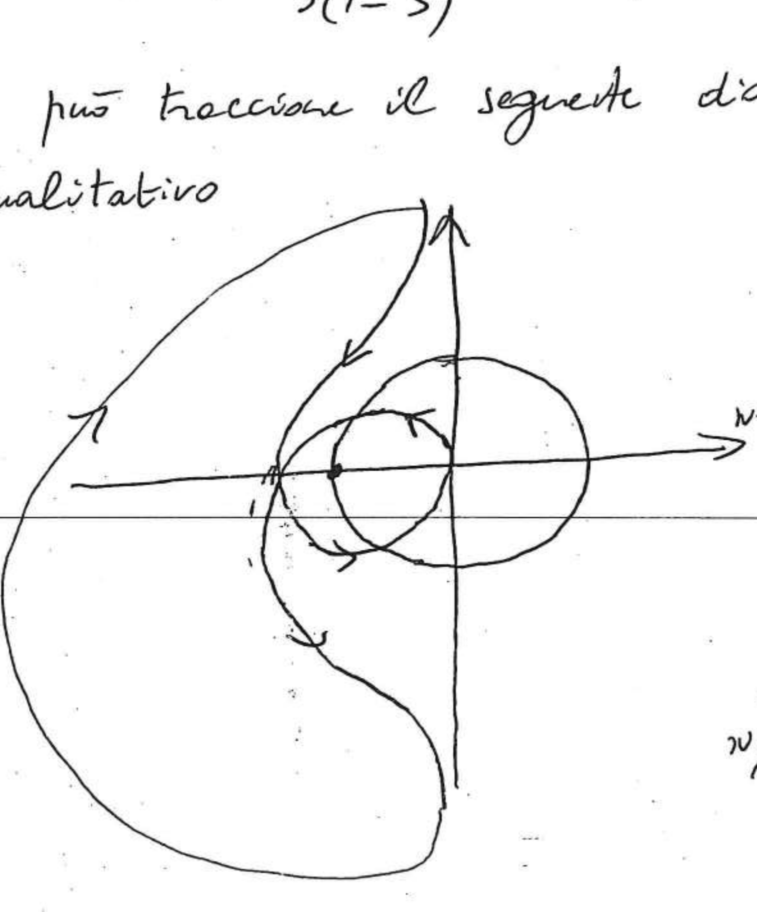
Dall' esame visivo del luogo è evidente che le radici sono entrambe negative e reali nell'intervallo $K' \in [5, +\infty)$.

Inoltre la massima velocità di esaurimento del transitorio (pari a e^{-2t}) si raggiunge per $K'=5$

c) Sulle base dei diagrammi di Bode di

$$F(s) = -4 \, \frac{1+\frac{5}{4}s}{s(1-s)}$$

si può tracciare il seguente diagramma di Nyquist qualitativo



GIRI INTORNO AL PUNTO $(-1,0) = 1$

N° POLI A PARTE REALE POS. DELLA $F(s)$ $= 1$

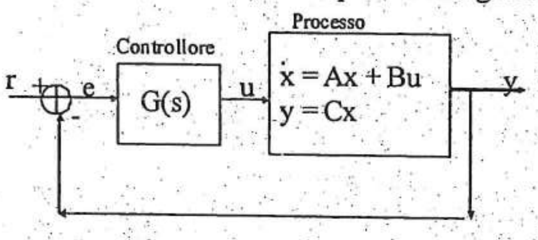
$\Downarrow$

CRITERIO DI NYQUIST VERIFICATO $(1=1)$

509

FONDAMENTI DI AUTOMATICA per Ing. delle Comunicazioni (6 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI I per ing. Automatica (5 cfu)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per ing. Telecomunicazioni (5 cfu)
Prova scritta del 22 settembre 2011 - Anno accademico 2010/11

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



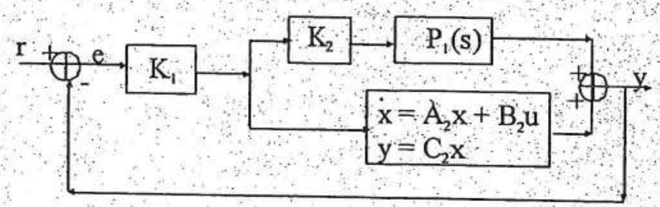
Il processo P(s) è caratterizzato dalle matrici: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [\,2 \;\; 1\,]$.

A) Si determini un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che
  α) il sistema complessivo abbia tutti autovalori coincidenti;
  β) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad ingressi "r" costanti sia nullo.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità.

C) Si determinino tutti i controllori G(s), a dimensione minima, tali che
  α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
  β) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad ingressi "r" costanti sia nullo;
  γ) la risposta "y" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t)= sen t sia nulla.

PROBLEMA 2.
Si consideri il seguente schema di controllo :



Sono assegnati: $P_1(s) = \dfrac{1}{(s+1)\,(s+2)}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = [\,1 \;\; 1\,]$$

A) Si determino le costanti K_1 e K_2 in modo che tutti gli autovalori del sistema complessivo siano coincidenti.

B) Con riferimento alle costanti individuate nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo.

TEMA

Le problematiche di modellizzazione di un processo.

Soluzione del problema 2

La f. di trasf. del sotto-processo 2 è $P_2(s) = \frac{1}{s+1}$

noti la presenza di un autovalore rag. ed inos. in -1.

Tale autovalore nascosto implica che, affinché tutti gli autovalori del sistema complessivo siano coincidenti, tutti tali autovalori devono essere in -1.

La f. di trasf. del parallelo di cui allo schema in figura è la seguente

$$P_P(s) = K_2 P_1(s) + P_2(s) = \frac{s+2+K_1}{(s+1)(s+2)}$$

Scegliendo $K_2 = -1$ si ottiene $P_P(s) = \frac{1}{s+2}$. Con tale scelta si vengono a creare due autovalori nascosti in -1.

Infine, dato che $D_W = s+2+K_1$, scegliendo $K_1 = -1$ si assegna un autovalore in -1.

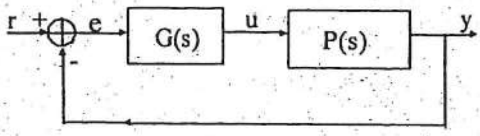
b) Il polinomio caratteristico è il seguente:

$$\underset{\text{RAG. e INOS}}{(s+1)}\ \underbrace{(s+1)(s+1)}_{\substack{\text{AUTOVALORI}\\ \text{NASCOSTI NEL}\\ \text{PARALLELO}}}\ \underset{\text{RAG. e OSS}}{(s+1)}$$

CONTROLLI AUTOMATICI II per ing. Automatica e Informatica (5 cfu) 511
Prova scritta del 22 settembre 2011 - Anno accademico 2010/11

PROBLEMA 1.

Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $P(s)=\frac{1}{s-1}$.

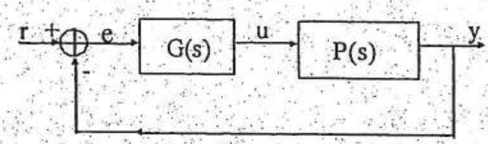
A) Si determini un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che
  α) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori in -2;
  β) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad ingressi "r" costanti sia nullo.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si tracci il relativo luogo delle radici e, basandosi sull'assegnazione effettuata nella domanda precedente, si determinino (i) l'intervallo di valori del parametro K' in corrispondenza del quale tutte le radici sono reali e negative, (ii) il valore del parametro K' in corrispondenza del quale la velocità di esaurimento del transitorio è la più elevata.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si tracci il diagramma di Nyquist ed, utilizzando il criterio di Nyquist, si verifichi la stabilità asintotica del sistema complessivo.

PROBLEMA 2.

Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $P(s)=\frac{1}{(s-1)^3}$.

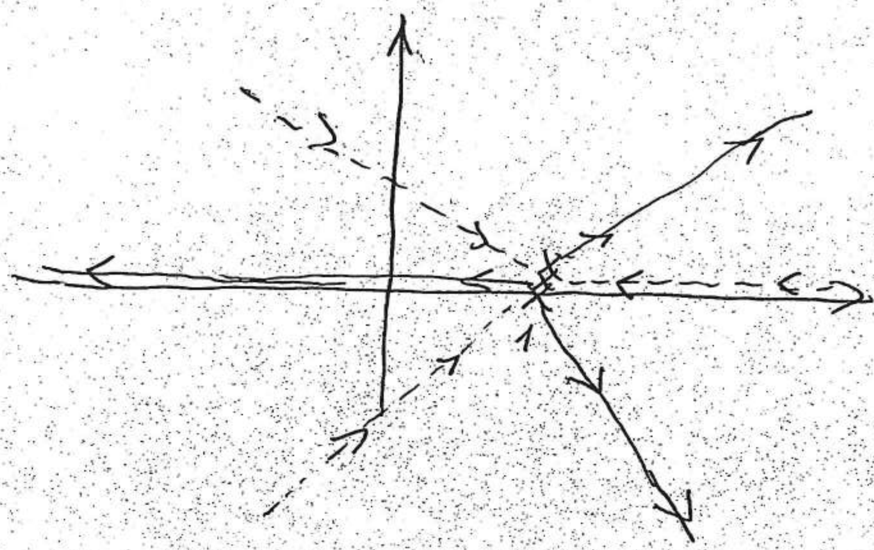
Utilizzando il luogo delle radici si determini un controllore G(s) che stabilizzi il sistema complessivo (si traccino i luoghi delle radici prima, durante e dopo la compensazione).

TEMA

L'assegnazione degli autovalori nel dominio del tempo.
Si illustri lo schema di controllo e si dimostri il principio di separazione.

Solurione del problema 2

Il luogo delle radici prima della compensazione è il seguente



Si deve dunque scegliere un controllore nella forma $G(s) = \frac{(s+z_1)(s-z_2)}{s-p}$

che porti il centro degli asintoti a sinistra.

Si deve quindi scegliere p_1, p_2 e z in modo che

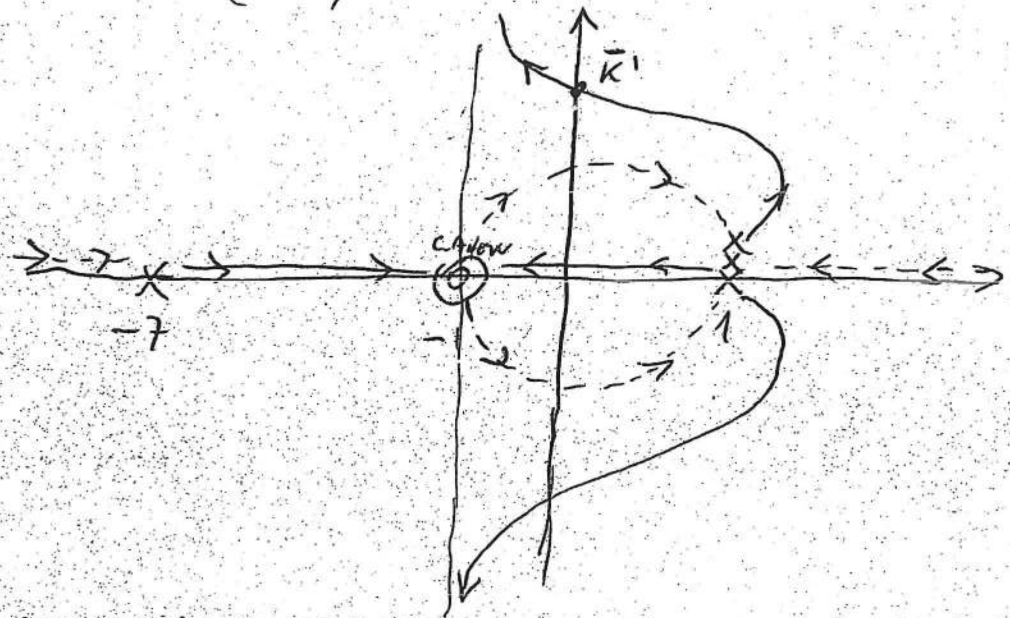
$$C.A_{NEW} = \frac{(+1+1+1+p) - (z_1 + z_2)}{4-2} < 0 \quad \text{con } \begin{matrix} z_1 < 0 \\ z_2 < 0 \end{matrix}$$

Si può scegliere, per esempio $z_1 = -1$, $z_2 = -1$, $p = -7$

Con tale scelta risulta $CA_{NEW} = -1$.

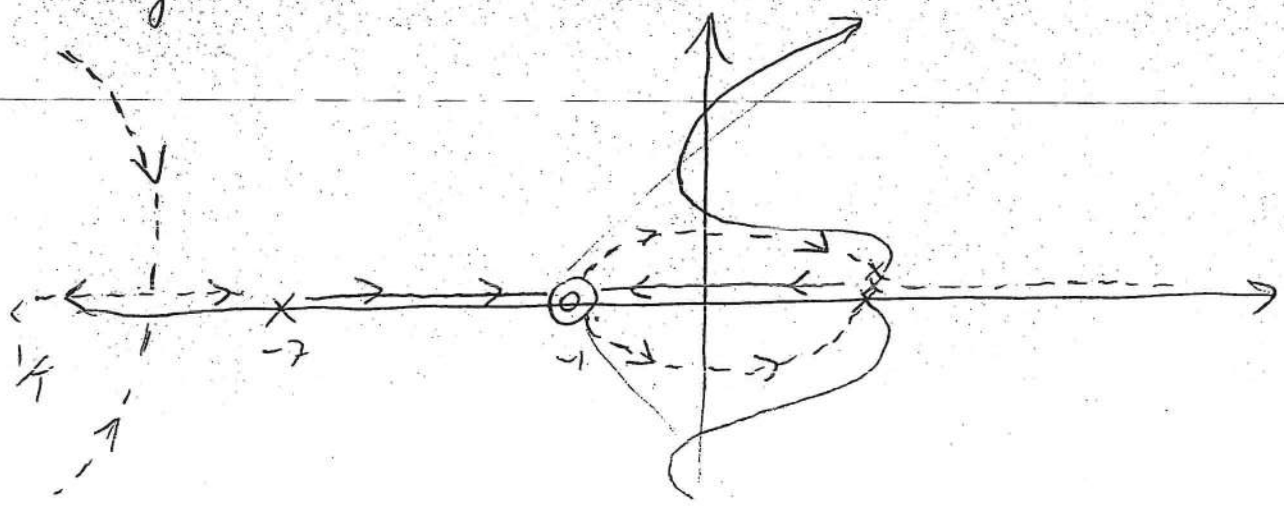
A questo punto il luogo delle radici è il seguente

$$K' \frac{(s+1)^2}{(s+7)(s-1)^3}$$



Dal grafico è evidente che il sistema è asint. stabile per $K' > \bar{K}'$.

Per rendere proprio il controllore si può infine aggiungere un "polo lontano" nella forma $\frac{1}{1+Ts}$ con $T>0$ sufficientemente piccolo. Il luogo risultante è il seguente

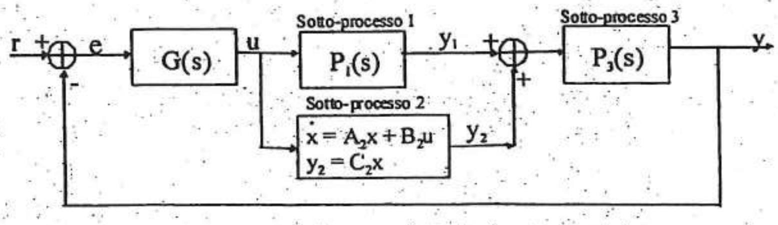


514

CONTROLLI AUTOMATICI per Ing. Automatica e Informatica (9 cfu)
FONDAMENTI DI AUTOMATICA per Ing. delle Comunicazioni (6 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI I per Ing. Automatica (5 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI II per Ing. Automatica (5 cfu)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per Ing. Telecomunicazioni (5 cfu)

Prova scritta del 12 gennaio 2012

PROBLEMA 1 Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $P_1(s) = \dfrac{s^2 + cs + d}{(s+2)(s-0{,}5)}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = [\,1 \ \ 0\,]$, $P_3(s) = \dfrac{1}{s+2}$

A) Per tutti. Si determinino i parametri "a", "b", "c", "d" ed un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che:
- α) la risposta "y" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = sen 2t sia nullo;
- β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti coincidenti;
- γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Per tutti. Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo.

C) Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II (5 cfu). Si tracci il luogo delle radici e si evidenzi la congruenza del luogo con quanto determinato nella domanda A).

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente processo

$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$
$$y = C\,x$$

con $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\,a \ \ 1\,]$

A) Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II (5 cfu). Si scelga, motivando opportunamente la risposta, il valore del parametro "a" in modo che esista un osservatore asintotico dello stato, ma non sia possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza tra lo stato reale e lo stato stimato.

~~B) Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II (5 cfu). In corrispondenza del valore del~~ parametro "a" scelto nella domanda A), si costruisca l'osservatore asintotico dello stato (è sufficiente impostare il calcolo) e si determini la massima velocità di convergenza tra lo stato reale e lo stato stimato.

C) Solo per per Fondamenti di Automatica (6 cfu), Controlli Automatici I (5 cfu) e Sistemi di Controllo Automatico (6 cfu). Si scelga a=0. Si progetti uno schema di controllo a dimensione minima in grado di assicurare stabilità asintotica con un margine di fase almeno pari a 60°. Si verifichi con il criterio di Nayquist la stabilità asintotica del sistema complessivo.

TEMA Per tutti.

Si discutano i vantaggi e gli svantaggi delle metodologie conosciute per la stabilizzazione asintotica di un processo.

515

Soluzione del problema 1

A) Il sotto-processo 2 ha un autovalore nascosto in "b".

La funz. di trasf. del sotto-processo 2 è $P_2(s) = \frac{1}{s - a}$.

Conviene scegliere a= -2 per creare un secondo autovalore nascosto in -2 nel parallelo dei due sotto-processi (con questa scelta, il sotto-processo 1 ha due autovalori in -2 e 0,5, il sotto-processo 2 ha un autovalore in -2, mentre il parallelo dei due sotto-processi ha due autovalori in -2 e 0,5 per cui, anche senza svolgere i calcoli, e' evidente che uno dei due autovalori in -2 si è nascosto nel parallelo). Dato che i due autovalori nascosti devono essere coincidenti, tale scelta implica anche b= -2.

Con tali scelte risulta quindi

$$P(s) = (P_1(s) + P_2(s))\, P_3(s) = \frac{s^2 + s\,(c+1) + d - 0{,}5}{(s+2)^2\,(s - 0{,}5)}.$$

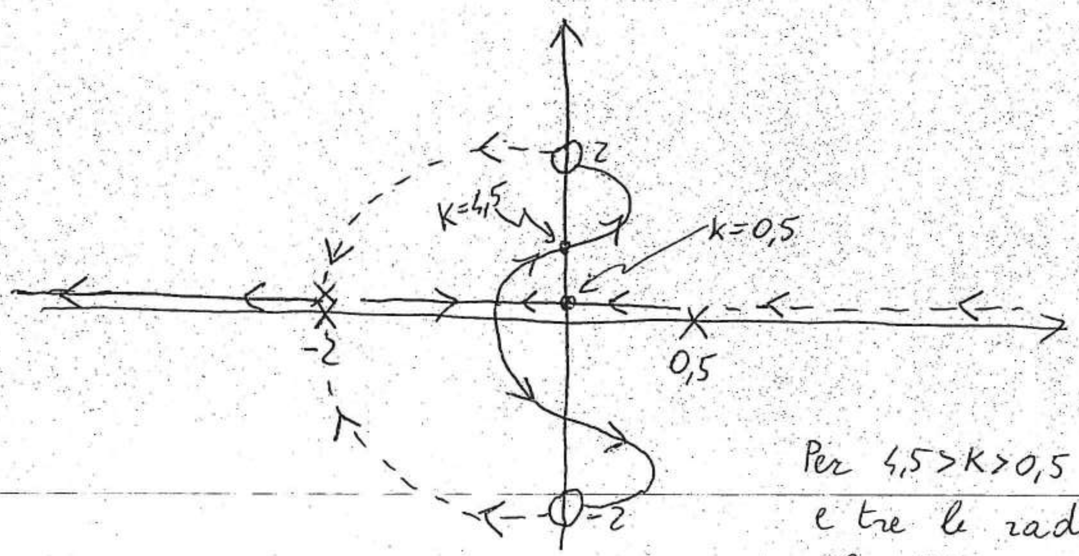
Conviene scegliere c = -1, d = 4,5 per avere a denominatore del processo il fattore $s^2 + 4$ che consente di soddisfare la specifica α).

Scegliendo G(s) = K ed applicando il criterio di Routh, si determina che il sistema complessivo è asintoticamente stabile per $4{,}5 > K > 0{,}5$.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è

$$[K\,(s^2 + 4) + (s+2)^2\,(s - 0{,}5)]\,(s+2)^2$$

C) Il luogo delle radici di $F(s) = K\,\frac{s^2 + 4}{(s+2)^2\,(s - 0{,}5)}$ è il seguente:



Per 4,5 > K > 0,5 tutte e tre le radici sono nel semipiano negativo

Soluzione del problema 2

A) L'osservatore asintotico dello stato esiste, ma non è possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza tra lo stato reale e lo stato stimato, quando nel processo c'è un autovalore inosservabile a parte reale negativa. Affinchè ciò accada si deve scegliere a=0,5: con tale scelta l'autovalore -1 risulta inosservabile e la massima velocità di convergenza tra lo stato reale e lo stato stimato risulta pari ad e^{-t}.

B) L'osservatore asintotico dello stato risulta caratterizzato dalla matrice G che si puo' determinare, in base al principio di identità dei polinomi, dalla relazione:

$|\lambda - (A - GC)| = (\lambda + 1)^2$.

517

) PER $a=0$ LA f.d.t DEL PROCESSO È

$$P(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)} = -\frac{2\,(1+0.5s)}{(1+s)(1-s)}$$

PER RISOLVERE IL PROBLEMA È SUFFICIENTE CONSIDERARE UNO SCHEMA A CONTROREAZIONE UNITARIA CON UN CONTROLLORE DEL TIPO $G(s) = k$ (CON $k>0$)
DALLA DEFINIZIONE DI MARGINE DI FASE È POSSIBILE DETERMINARE LA PULSAZIONE DI ATTRAVERSAMENTO ω_t CHE GARANTISCE UN MARGINE DI FASE DI $60°$.

$$m_\varphi = \angle F(j\omega_t) + 180° = 60° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{-180°} + \text{arctg}(0.5\,\omega_t) \cancel{- \text{arctg}\,\omega_t} \cancel{+ \text{arctg}\,\omega_t} \cancel{+ 180°} = 60° \Rightarrow$$

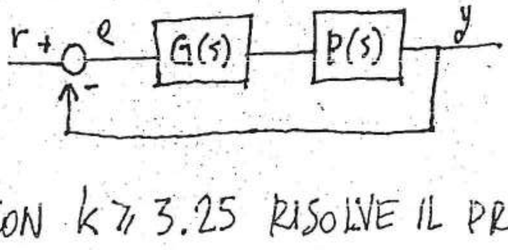
$$\Rightarrow \boxed{\omega_t = 2\sqrt{3}}$$

DALLA DEFINIZIONE DI PULSAZIONE DI ATTRAVERSAMENTO SI HA

$$\left|F(j\omega_t)\right|\Big|_{\omega_t = 2\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \frac{2|k|\sqrt{1+(0.5\,\omega_t)^2}}{1+\omega_t^2}\Bigg|_{\omega_t=2\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} |k| = 3.25 \\ |k|_{dB} \simeq 10.2\ dB \end{array}}$$

IL SISTEMA DI CONTROLLO QUI RAFFIGURATO



CON $G(s) = k$, CON $k \geq 3.25$ RISOLVE IL PROBLEMA.

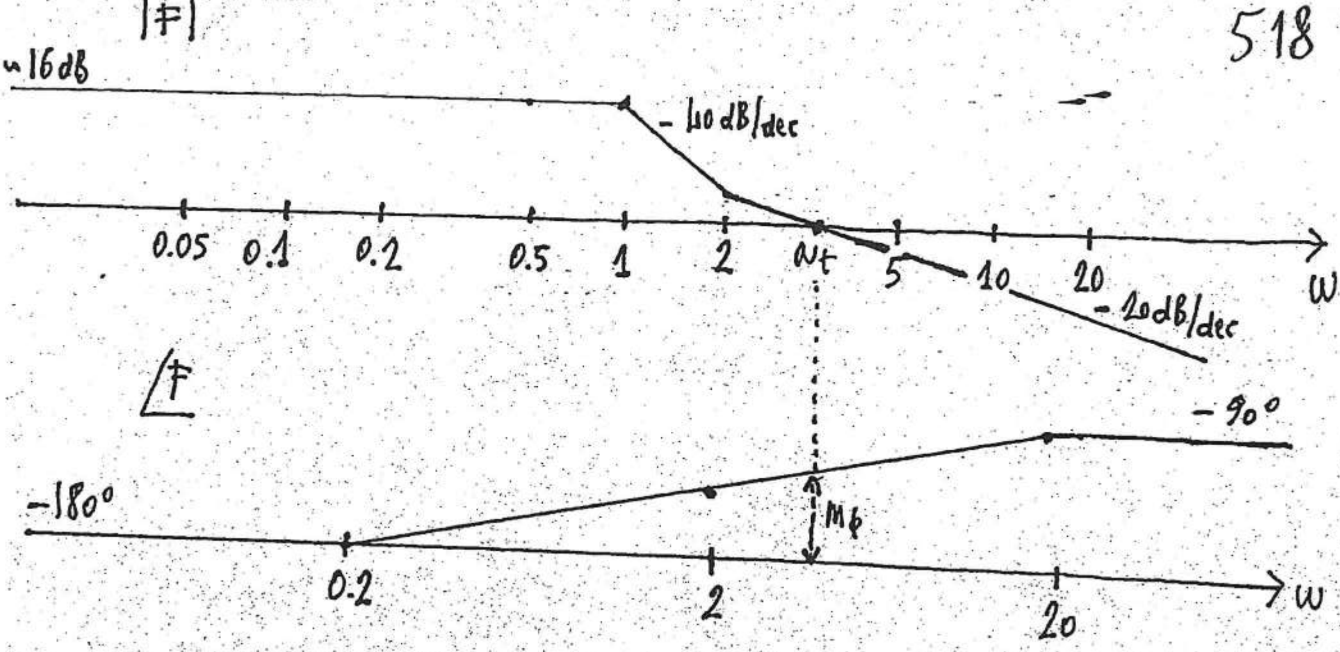
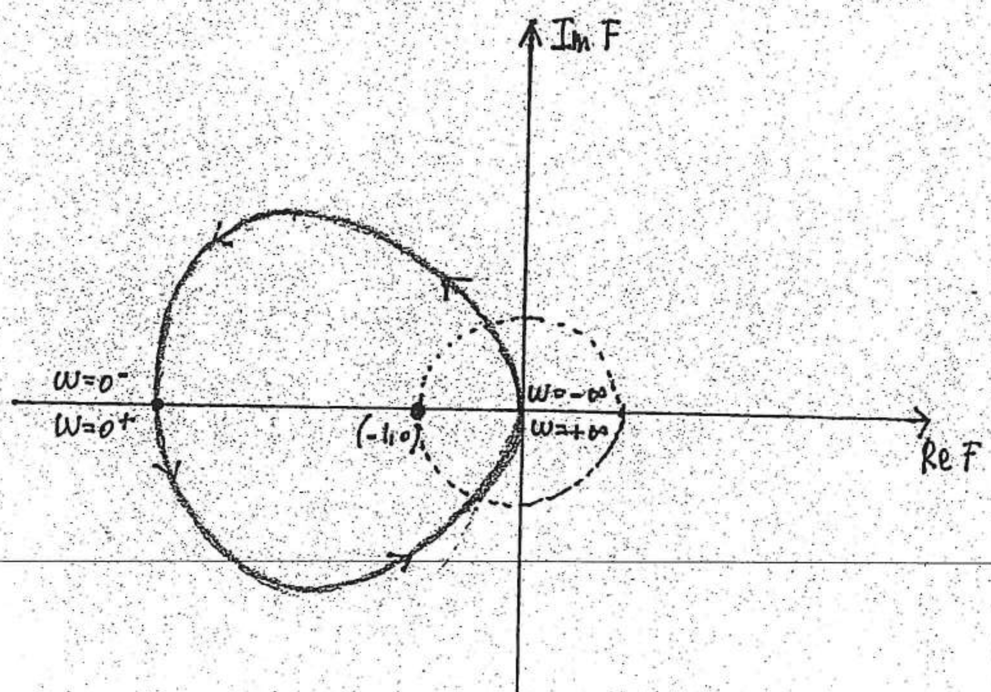


DIAGRAMMA DI NYQUIST APPROSSIMATO



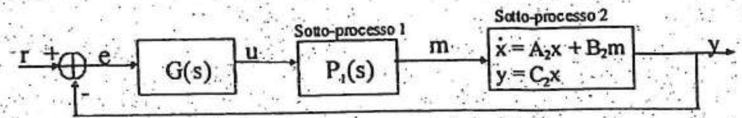
IL CRITERIO DI NYQUIST E' SODDISFATTO, POICHE' IL DIAGRAMMA DI NYQUIST COMPIE 1 GIRO IN SENSO ANTIORARIO INTORNO AL PUNTO CRITICO (-1,0) E LA f.d.t. AD ANELLO APERTO HA UN POLO A PARTE REALE POSITIVA.

CONTROLLI AUTOMATICI per Ing. Automatica e Informatica (9 cfu)
FONDAMENTI DI AUTOMATICA per Ing. delle Comunicazioni (6 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI I per Ing. Automatica (5 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI II per Ing. Automatica (5 cfu)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per Ing. Telecomunicazioni (5 cfu)

519

Prova scritta del 3 febbraio 2012

ROBLEMA 1 (Per tutti) Si consideri il seguente schema di controllo:



ove $P_1(s) = \dfrac{s+3}{s+1}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} b & 1 \end{bmatrix}$

A) Si determini per quali valori dei parametri "a" e "b" non è possibile stabilizzare asintoticamente il sistema complessivo.

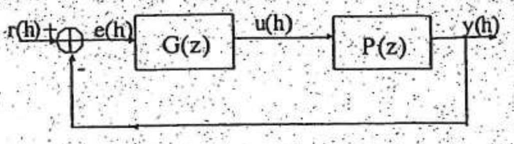
B) Si determinino i parametri "a" e "b" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
- α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = costante sia nullo;
- β) il sistema complessivo abbia un solo autovalore nascosto e tale autovalore sia irraggiungibile ed osservabile;
- γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori a parte reale minore di -2.

Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II (5 cfu): si tracci il luogo delle radici di interesse.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda B), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2 Solo per Fondamenti di Automatica (6 cfu), Controlli Automatici I (5 cfu) e Sistemi di Controllo Automatico (6 cfu). Con riferimento allo schema di controllo di cui al Problema 1, scelti b=3 e a=-1, si progetti un controllore costante tale da garantire stabilità asintotica con un margine di fase di almeno 30°. Si verifichi la stabilità asintotica tramite il criterio di Nyquist.

PROBLEMA 2 (Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II (5 cfu)) Si consideri il seguente schema di controllo a tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{z-0{,}5}{(z-1)(z+0{,}5)}$

A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
- α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h)=γ(h) sia pari a δ(h) + 2 δ(h-1);
- β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

TEMA (Per tutti).

Si discutano le problematiche inerenti la modellizzazione dei processi.

520

Soluzione del problema 1

A) Cnes per poter stabilizzare un processo con reazione dall'uscita è che tutti gli eventuali autovalori irrag. e/o inoss. siano a parte reale negativa.
I due autovalori del sotto-processo 2 (l'unico nel quale si potrebbe creare la situazione di cui sopra) sono "a" e "0".
Entrambi gli autovalori sono sempre raggiungibili.
L'autovalore "0" è inosservabile se e solo se $b = 0$: quindi, per poter stabilizzare il processo deve essere $b \neq 0$. L'autovalore "a" è inosservabile se e solo se $a = -b$: quindi, per poter stabilizzare il processo, deve essere anche $a \neq -b$ se $a \geq 0$.

B) La funzione di trasferimento del sotto-processo 2 risulta pari a

$$P_2(s) = \frac{s+b}{s\,(s-a)}$$

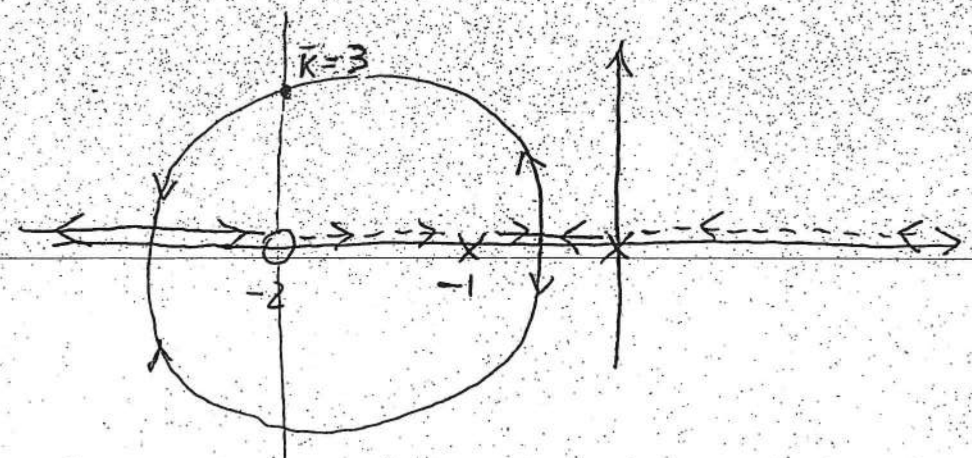
con $a \neq -b$ altrimenti si avrebbe un autovalore nascosto ragg. ed inoss. contrariamente alla specifica β). Per soddisfare tale specifica, conviene scegliere $a=-3$ creando quindi una cancellazione zero-polo in -3 tra i sotto-processi 1 e 2 che genera un autovalore nascosto irrag. ed oss.
Con tale scelta risulta:

$$P(s) = P_1(s)\,P_2(s) = \frac{s+b}{s\,(s+1)}$$

La specifica α) è automaticamente verificata grazie al polo in zero del processo.
Dall'esame del luogo delle radici è evidente che una scelta del parametro "b" maggiore o uguale a 2, assicura la possibilità di verificare la specifica γ) con un controllore costante. Scelto, ad esempio, $b=2$, ed un controllore $G(s)=K$ risulta:

$$F(s) = G(s)\,P(s) = K\,\frac{s+2}{s\,(s+1)}$$

In base al criterio di Routh, in cui si sia effettuata la sostituzione $s \to s-2$, la specifica γ) risulta verificata per $K > 3$.
Il luogo delle radici di interesse è il seguente:



C) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è

$[K\,(s + 2) + s\,(s + 1)]\,(s + 3)$ dove i due autovalori coincidenti con le radici del polinomio tra parentesi quadra sono ragg. ed oss., mentre l'autovalore -3 è irrag. ed oss.

521

Soluzione del problema 2

A) Nello schema di controllo proposto, l'errore e(z) si calcola come

$$e(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\, r(z) \quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F}$$

In base alla specifica α), in corrispondenza di $r(z) = \frac{z}{z-1}$ deve risultare $e(z) = \frac{z+2}{z}$.

Deve risultare quindi:

$$\frac{z+2}{z} = \frac{D_F}{N_F + D_F}\,\frac{z}{z-1}$$

Per verificare la suddetta relazione è sufficiente imporre:

$D_F = (z+2)(z-1)$

$N_F + D_F = z^2$

Dalla due relazioni suddette si può ricavare $N_F = z^2 - D_F = z^2 - (z+2)(z-1) = -z+2$.

Si deve quindi scegliere G(z) in modo che risulti:

$N_F = -z+2$

$D_F = (z+2)(z-1)$

Per verificare le due suddette condizioni, si deve scegliere

$$G(z) = \frac{(z+0{,}5)(-z+2)}{(z-0{,}5)(z+2)} \Rightarrow F(z) = \frac{-z+2}{(z+2)(z-1)}$$

La suddetta scelta di G(z) comporta la creazione di due autovalori nascosti rispettivamente in -0,5 e +0,5, i quali essendo a modulo minore di 1, non inficiano la stabilità asintotica del sistema complessivo. L'aver imposto $N_F + D_F = z^2$ equivale ad assegnare due autovalori nell'origine: la specifica β) risulta quindi automaticamente soddisfatta.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è pari a

$z^2(z+0{,}5)(z-0{,}5)$

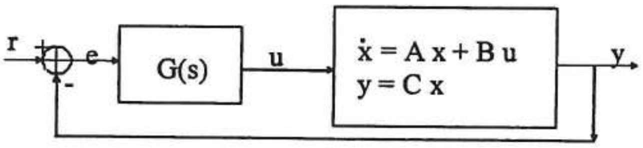
dove i due autovalori in 0 sono ragg. ed oss., l'autovalore in 0,5 è ragg. ed inoss, l'autovalore in -0,5 è irragg. ed oss.

522

CONTROLLI AUTOMATICI per Ing. Automatica e Informatica (9 cfu)

Prova scritta del 27 aprile 2012

PROBLEMA 1 Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

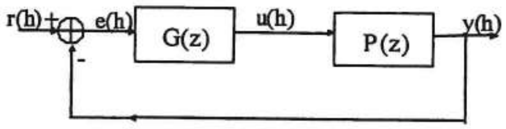


dove $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

A) Si determinino <u>tutte</u> le matrici B e C in corrispondenza delle quali sia possibile, mediante una scelta opportuna di G(s), stabilizzare asintoticamente il sistema complessivo.

B) Si determinino un controllore G(s) a dimensione minima e una coppia di matrici B e C in modo da verificare le seguenti specifiche:
 α) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto irraggiungibile ed inosservabile;
 β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
 γ) l'errore $e(t)$ a regime permanente in corrispondenza ad ingressi $r(t)$ costanti sia nullo.

PROBLEMA 2 Si consideri il seguente schema di controllo a tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{z+1}{z^2}$

A) Si determini un controllore $G_A(z)$ a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
 α) l'errore e(h) a regime permanente corrispondente all'ingresso costante ($r(h) = \eta(h)$) sia nullo;
 β) il sistema complessivo abbia uno ed un solo autovalore nascosto;
 γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori <u>reali</u>.

B) Si determini un controllore $G_B(z)$ a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
 α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso costante ($r(h) = \eta(h)$) sia nullo in tempo finito;
 β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

C) Si determinino i polinomi caratteristici relativi alle domande A) e B) specificando le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità dei vari autovalori.

D) Si disegnino i luoghi delle radici relativi alle domande A) e B), determinando, ove possibile facilmente, il valore dei punti singolari.

TEMA

L'osservatore asintotico dello stato di un processo: (i) si enuncino le condizioni di esistenza, (ii) si descriva come costruirlo, (iii) si dimostri come sia in grado di ricostruire asintoticamente lo stato del processo.

Soluzione del problema 1

A) Per poter stabilizzare asintoticamente con reazione dall'uscita il processo considerato, gli eventuali suoi autovalori nascosti devono essere a parte reale negativa; perchè ciò accada è necessario e sufficiente che l'autovalore in 1 sia raggiungibile ed osservabile.

L'autovalore 1 è raggiungibile se e solo se la matrice $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ ha l'elemento B_2 diverso da zero.

L'autovalore 1 è osservabile se e solo se la matrice $C = [\ C_1 \quad C_2\ ]$ ha l'elemento C_2 diverso da zero.

B) Scegliendo $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 0 \quad 1\ ]$, l'autovalore -1 risulta irraggiungibile ed inosservabile soddisfacendo la specifica α). Con tale scelta risulta $P(s) = \frac{1}{s-1}$.

In base alla specifica β) il controllore deve avere un polo in s=0. Come è facile verificare utilizzando il criterio di Routh, la struttura più semplice del controllore che consente di stabilizzare asintoticamente il sistema complessivo è la seguente:

$$G(s) = \frac{as+b}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{as+b}{s(s-1)} \Rightarrow D_W = N_F + D_F = s(s-1) + as+b$$

Applicando il criterio di Routh si deduce che il sistema complessivo risulta asintoticamente stabile per a>1, b>0.

Soluzione del problema 2

A) Nello schema di controllo proposto, l'errore e(z) si calcola come

$$e(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\, r(z) \quad \text{con } F(z) = G(z)\, P(z) = \frac{N_F}{D_F}$$

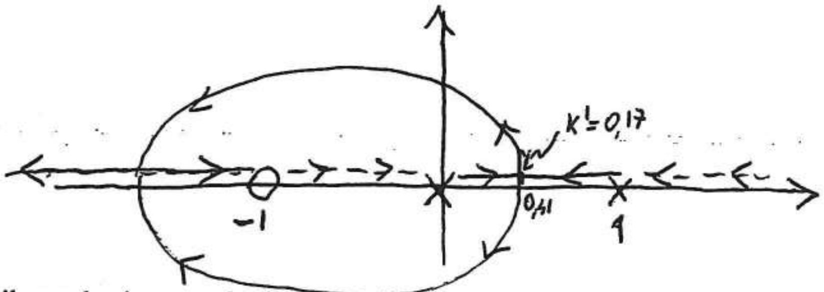
In base alla specifica α), il controllore deve avere un polo in z=1.

In base alla specifica β), il controllore deve avere uno zero in z=0, in modo da creare una cancellazione zero-polo e quindi un autovalore nascosto (irrag. ed oss.) in z=0.

Conviene quindi scegliere un controllore (a dimensione uno) con la struttura:

$$G_A(z) = K'\frac{z}{z-1} \Rightarrow F(z) = K'\frac{z+1}{z(z-1)}$$

Il luogo delle radici relativo alla suddetta F(z) è il seguente:



E' facile rendersi conto che il punto singolare compreso tra i due poli si trova in $-1+\sqrt{2} \cong 0{,}41$ e che tale valore si raggiunge per K'≅0,17. Quindi, dall'analisi visiva del luogo delle radici si deduce che, scegliendo K' nell'intervallo (0 ; 0,17] gli autovalori sono entrambi reali e con modulo minore di uno.

B) Per ottenere errore nullo a partire da un istante finito l si deve far in modo che la F(z) abbia un polo in z=1 e risulti $N_F + D_F = z^l$.

Conviene quindi scegliere un controllore (a dimensione due) con la struttura:

$$G_B(z) = a\frac{z^2}{(z-1)(z+b)} \Rightarrow F(z) = a\frac{z+1}{(z-1)(z+b)}\ ,\ l=2$$

Imponendo $N_F + D_F = z^2$, si ottiene:

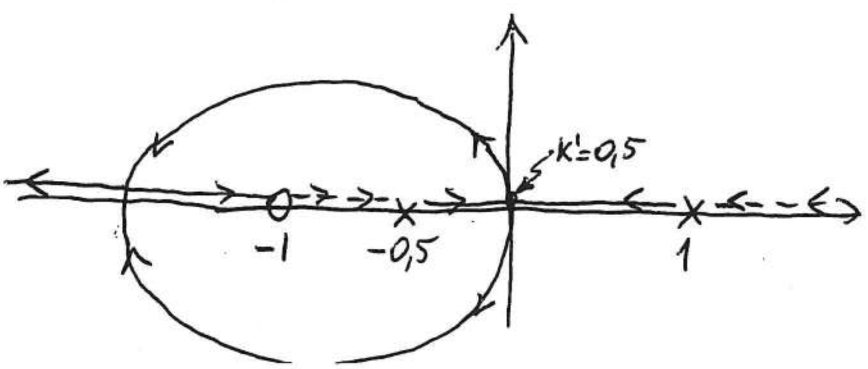
$$N_F + D_F = a\,(z+1) + (z-1)(z+b) = z^2+z(a+b-1) + a-b = z^2 \Rightarrow a=b=0{,}5$$

C) Per la domanda A) il polinomio caratteristico è $z[z^2+z(K'-1)+K']$ dove l'autovalore in z=0 è irrag. ed oss. e gli altri due autovalori sono ragg. ed oss.

Per la domanda B) il polinomio caratteristico è z^4 dove due autovalori in z=0 sono irrag. ed oss., mentre gli altri due autovalori in z=0 sono rag. ed oss.

D) Il luogo delle radici relativo alla domanda A) è quello già disegnato. Quello della domanda B) è relativo alla $F(z) = K'\dfrac{z+1}{(z-1)(z+0{,}5)}$, in cui si deve tener conto che per K'=0,5 si ha un punto singolare doppio in z=0.

Il luogo risulta quindi il seguente:

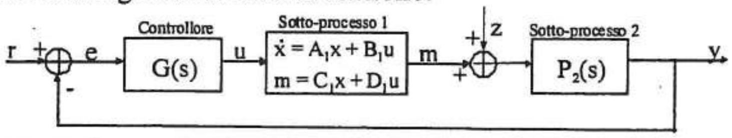


525

CONTROLLI AUTOMATICI per Ing. Automatica e Informatica (9 cfu)
FONDAMENTI DI AUTOMATICA per Ing. delle Comunicazioni (6 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI I per Ing. Automatica (5 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI II per Ing. Automatica (5 cfu)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per Ing. Telecomunicazioni (5 cfu)

Prova scritta del 6 giugno 2012

PROBLEMA 1 Si consideri il seguente schema di controllo:



con $G(s) = K$, $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$, $C_1 = [\ 1 \quad 1\ ]$, $D_1 = 1$, $P_2(s) = \dfrac{s+c}{(s+d)(s-2)}$ con $c \neq d$ e $c \neq 0$.

A) <u>(Per tutti).</u> Si determinino i parametri "K" "a", "b", "c", "d" in modo che:
   - α) la risposta "y" a regime permanente corrispondente al disturbo z = costante sia nulla;
   - β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
   - γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con <u>tutti gli autovalori coincidenti</u>.

B) <u>(Per tutti).</u> Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo specificando le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità dei vari autovalori.

C) <u>Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II (5 cfu).</u> Si tracci il luogo delle radici e si evidenzi la congruenza del luogo con quanto determinato nella domanda A). In particolare, dall'esame visivo del luogo ed in base a quanto determinato nella domanda A), si determini per quali valori di K tutti gli autovalori del sistema complessivo risultano reali e negativi.

PROBLEMA 2. Si consideri un classico sistema di controllo a controreazione unitaria, caratterizzato dal seguente processo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$
$$y = [\ 1 \quad 1\ ]\, x$$

A) <u>(Per tutti).</u> Si determini, utilizzando il luogo delle radici (<u>per chi non ha in programma il luogo delle radici,</u> utilizzando il criterio di Routh), un controllore a dimensione minima che stabilizzi asintoticamente il sistema complessivo.

B) <u>(Per tutti).</u> Si determini, utilizzando i diagrammi di Bode e di Nyquist, un controllore a dimensione minima che stabilizzi asintoticamente il sistema complessivo e garantisca un margine di fase almeno pari a 45°. Si verifichi la stabilità asintotica attraverso il criterio di Nyquist.

C) <u>(Per tutti).</u> Si determini, utilizzando l'assegnazione degli autovalori nel dominio di Laplace (equazione Diofantina), un controllore a dimensione minima che assegni tutti gli autovalori del sistema complessivo in -1.

D) <u>Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II (5 cfu).</u> Si determini, utilizzando l'assegnazione degli autovalori nel dominio del tempo (principio di separazione), un controllore che assegni tutti gli autovalori del sistema complessivo in -1.

TEMA <u>(Per tutti).</u>

Si confrontino (anche con riferimento alla domanda precedente) le metodologie conosciute per la stabilizzazione asintotica di un processo, rispetto ai seguenti parametri: complessità del controllore, possibilità di controllare il transitorio, possibilità di controllare la robustezza (margini di fase/guadagno), applicabilità a processi a più ingressi e più uscite.

Soluzione del problema 1

A) Il sotto-processo 1 ha un autovalore nascosto, irrag. ed oss. in -2. Ciò implica, dato che tutti gli autovalori del sistema complessivo devono essere coincidenti, che tutti tali autovalori devono essere in -2.

La funz. di trasf. del sotto-processo 1 è $P_1(s) = \frac{s+a+b}{s+b}$.

Per soddisfare la specifica α) è necessario introdurre un polo a monte del disturbo: dato che il controllore deve essere costante, tale polo deve essere necessariamente presente nel sotto-processo 1, il che può essere ottenuto ponendo b=0 $\Rightarrow$ $P_1(s) = \frac{s+a}{s}$

Per far comparire il secondo autovalore nascosto in -2 (specifica β)), si deve necessariamente porre a=d=2 creando una cancellazione zero-polo tra i due sottoprocessi e quindi un auto valore irragg. ed oss.

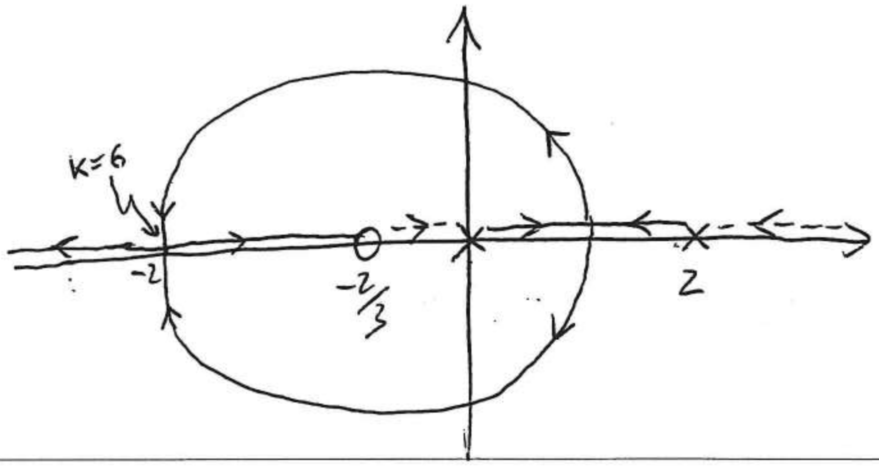
Risulta quindi $F = GP_1P_2 = K\frac{s+c}{s(s-2)}$

Infine, i parametri rimanenti ("K" e "c") sono necessari e sufficienti per procedere all'assegnazione degli autovalori non nascosti:

$D_W = N_F + D_F = K(s+c) + s(s-2) = (s+2)^2 \Rightarrow K=6,\ c=2/3$

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(s+2)^4$ con due autov. irrag. ed oss. e due autov. rag. ed oss.

C) Il luogo delle radici di $F(s) = K\frac{s+2/3}{s(s-2)}$ è il seguente:



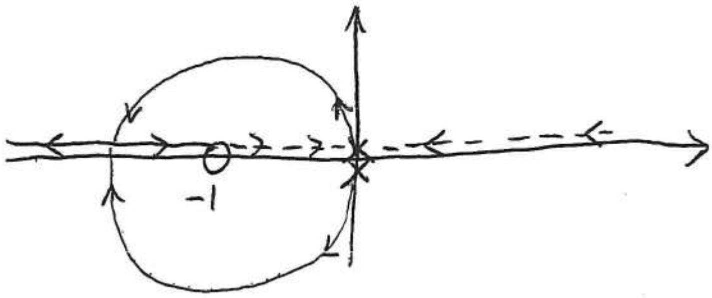
In base all'assegnazione degli autovalori effettuata nella domanda A), il luogo delle radici deve avere un punto singolare doppio in -2 che si ottiene per K=6. Inoltre, dall'esame visivo del luogo è evidente che entrambi gli autovalori sono reali e negativi per $K \geq 6$.

Soluzione del problema 2

A) Entrambi gli autovalori in 0 sono ragg. ed oss.

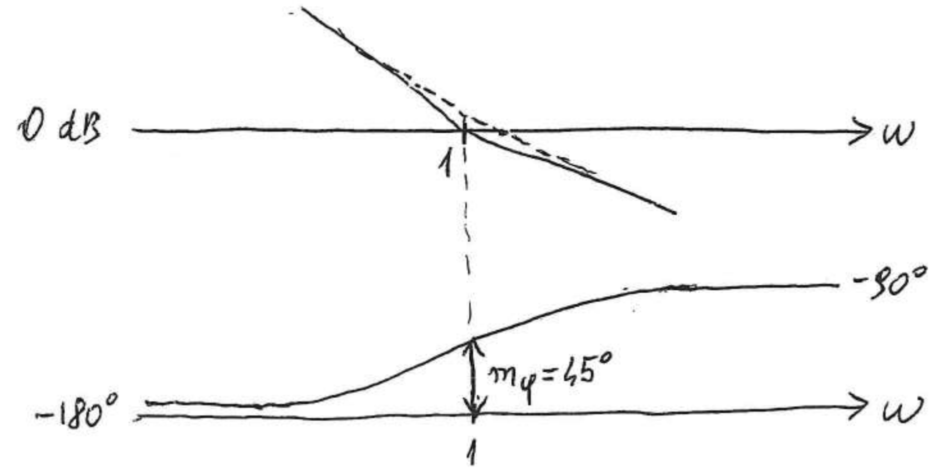
La funz. di trasf. del processo è $P(s)=\frac{s+1}{s^2}$.

Posto G(s)=K, il luogo delle radici, è il seguente:



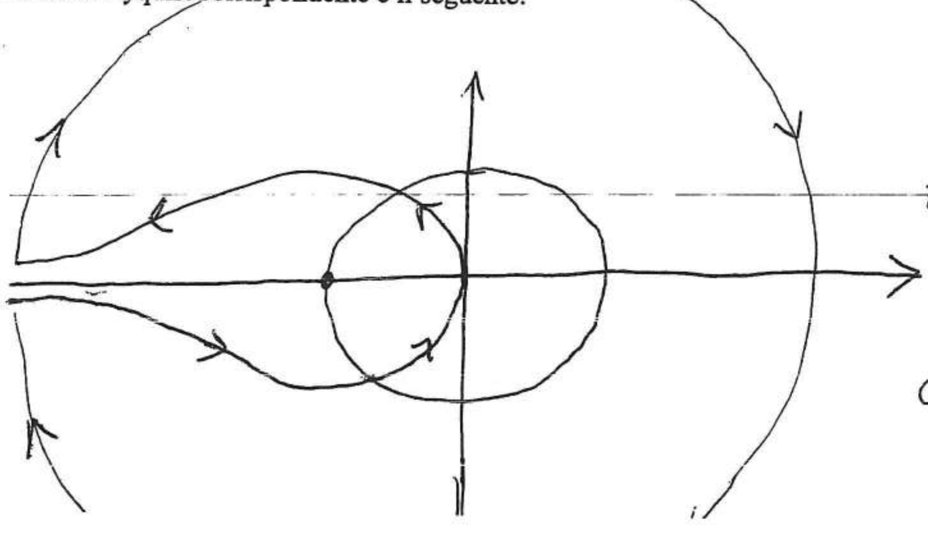
Dall'esame del luogo si evince che il sistema complessivo è asintoticamente stabile per K>0.

B) I diagrammi di Bode di P(s) sono i seguenti



Dall'esame di tali diagrammi si evince che per G(s)=1, il sistema è asintoticamente stabile (in base a quanto determinato nella domanda A)) con margine di fase uguale a 45°; per K≥1 il margine di fase risulta sicuramente maggiore di 45° ~~(per la precisione, è sufficiente K ≥ 1/√2)~~.

Il diagramma di Nyquist corrispondente è il seguente:



ZERO GIRI ATTORNO AL PUNTO (-1;0)

ZERO RADICI A PARTE REALE POS. NELLA F(S).

⇓

CRITERIO DI NYQUIST SODDISFATTI

C) Per effettuare l'assegnazione degli autovalori richiesta, si può utilizzare la seguente struttura del controllore:

$$G(s) = \frac{as+b}{s+1} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{as+b}{s^2}$$

La cancellazione polo-zero in -1 crea un autovalore nascosto (ragg. ed inos.) in -1 coerente con la specifica.

Si può quindi procedere alla seguente assegnazione degli autovalori non nascosti:

$$D_W = N_F + D_F = as+b+s^2 = (s+1)^2 \qquad \Rightarrow \quad a=2,\ b=1$$

D) Si deve utilizzare un osservatore asintotico dello stato e un controllore statico alimentato dallo stato stimato. Le matrici K e G che caratterizzano rispettivamente il controllore statico e l'osservatore asintotico possono esser dedotte in base alle seguenti assegnazioni di autovalori:

$$|\lambda - (A + BK)| = (\lambda + 1)^2 \;\Rightarrow\; K = [\ -1 \quad -2\ ];$$

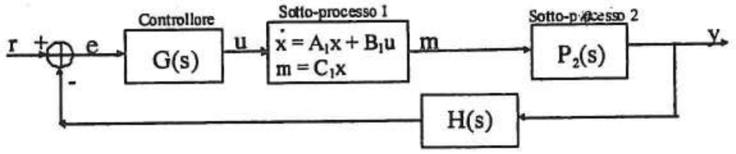
$$|\lambda - (A - GC)| = (\lambda + 1)^2 \;\Rightarrow\; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

-528

CONTROLLI AUTOMATICI per Ing. Automatica e Informatica (9 cfu)
FONDAMENTI DI AUTOMATICA per Ing. delle Comunicazioni (6 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI I per Ing. Automatica (5 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI II per Ing. Automatica (5 cfu)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per Ing. Telecomunicazioni (5 cfu)

Prova scritta del 9 luglio 2012

PROBLEMA 1 Per tutti. Si consideri il seguente schema di controllo:

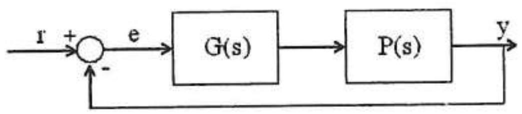


con $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_1 = [\ 0 \quad 1\ ]$, $P_2(s) = \dfrac{s+a}{s+b}$ con $a \neq b$, $H(s) = \dfrac{1}{s}$.

A) Per tutti. Si determinino i parametri "a", "b" ed un controllore G(s) a dimensione minima, in modo che:
   α) la risposta "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r = costante sia nulla;
   β) il sistema complessivo abbia tre autovalori nascosti;
   γ) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a $(s+1)^2(s+2)^3$.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si specifichino le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità degli autovalori del sistema complessivo.

PROBLEMA 2 Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P(s) = \dfrac{s+1}{(s^2+1)(s+4)}$

A) Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II. Si determini, utilizzando il luogo delle radici (e disegnando i luoghi di interesse), un controllore a dimensione uno tale da verificare le seguenti specifiche:
   α) la risposta "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = 5 + 2 sen t sia nulla;
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Per Fondamenti di Automatica e Controlli Automatici I (5 cfu). Si determini un controllore a dimensione uno tale da verificare le seguenti specifiche:
   α) la risposta "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = 2 sen t sia nulla;
   β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto irraggiungibile ed osservabile;
   γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

TEMA (Per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II).

Si descrivino le peculiarità delle metodologie di controllo dei sistemi tempo discreti, rispetto a quelle dei sistemi tempo continui.

TEMA (Per Fondamenti di Automatica e Controlli Automatici I (5 cfu))

Si descriva come si effettua il tracciamento del diagramma di Nyquist e si spieghi come tale diagramma può essere utilizzato per la verifica della stabilità asintotica.

Soluzione del problema 1

A) La funz. di trasf. ing.-errore è pari a

$$W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \qquad \text{con } F(s) = \frac{N_F}{D_F} = G(s)\,P_1(s)\,P_2(s), \quad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Si noti che la specifica α) è automaticamente soddisfatta in virtù del polo in s=0 presente nella funz. di trasf. H(s).

Dalle specifiche β) e γ) si evince che il sistema complessivo deve avere 5 autovalori di cui 3 nascosti e 2 non nascosti.

Il sotto-processo 1 ha un autovalore nascosto (ragg. ed inoss.) in "-2", compatibile con la specifica γ). La funz. di trasf. del sotto-processo 1 è $P_1(s) = \frac{1}{s+2}$.

Per far comparire gli ulteriori due autovalori nascosti (e quindi soddisfare la specifica β)) ed essere compatibili con la specifica γ) è necessario scegliere

- a=2, creando una cancellazione polo-zero in -2 tra i sotto-processi 1 e 2 (autovalore ragg. ed inoss.);
- b=1 e uno zero in s=-1 nel controllore G(s), creando una cancellazione zero-polo in -1 tra il controllore ed il sotto-processo 2 (autovalore irragg. ed oss.).

Da quanto sopra si evince che i due autovalori non nascosti devono essere assegnati in -1 e -2.

Il controllore può quindi avere la struttura:

$$G(s) = c\,\frac{s+1}{s+d}$$

dove i parametri "c" e "d" si determinano procedendo alla seguente assegnazione di auto valori:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = c + s(s+d) = (s+1)(s+2) \;\Rightarrow\; c=2\,,\; d=3$$

B) In base a quanto dedotto in precedenza i due autovalori in -1 sono uno irrag. ed oss. e l'altro ragg. ed oss.; i tre auto valori in -2 sono due ragg. ed inoss. mentre il terzo è ragg. ed oss.

Soluzione del problema 2

A) Considerando il principio di sovrapposizione degli effetti, la specifica α) impone la presenza di un fattore "s" e di un fattore "s^2+1" in D_F (ossia, nel denominatore della funz. di trasf. ad anello aperto F(s)). Il secondo fattore è già presente nella funz. di trasf. del processo, mentre il primo deve essere aggiunto nel controllore.

Conviene quindi considerare inizialmente il controllore

$$G(s) = \frac{K}{s} \qquad \Rightarrow \quad F(s) = K\,\frac{s+1}{s(s^2+1)(s+4)}$$

Il relativo luogo delle radici è riportato in Fig. 1. Dal disegno del luogo è evidente che per nessun valore del parametro K le 4 radici del luogo sono tutte a parte reale negativa.

In una situazione del genere (assenza di zeri a parte reale ≥0, n-m=3, centro degli asintoti negativo), la teoria del luogo delle radici suggerisce di aggiungere uno zero tale da far rimanere negativo il centro degli asintoti. Scegliendo, ad esempio, uno zero in -1, ossia

$$G(s) = K\,\frac{s+1}{s} \Rightarrow \; F(s) = K\,\frac{(s+1)^2}{s(s^2+1)(s+4)}\,,$$

il luogo delle radici diventa quello riportato in Fig. 2. Dal disegno del luogo è evidente che, per un valore del parametro K sufficientemente alto (per esempio, K=3 come si può verificare facilmente applicando un criterio di Routh tutto numerico), tutte e 4 le radici sono a parte reale negativa.

FIGURA 1 : LUOGO DELLE RADICI DI $F(s) = K \dfrac{s+1}{s(s^2+1)(s+4)}$

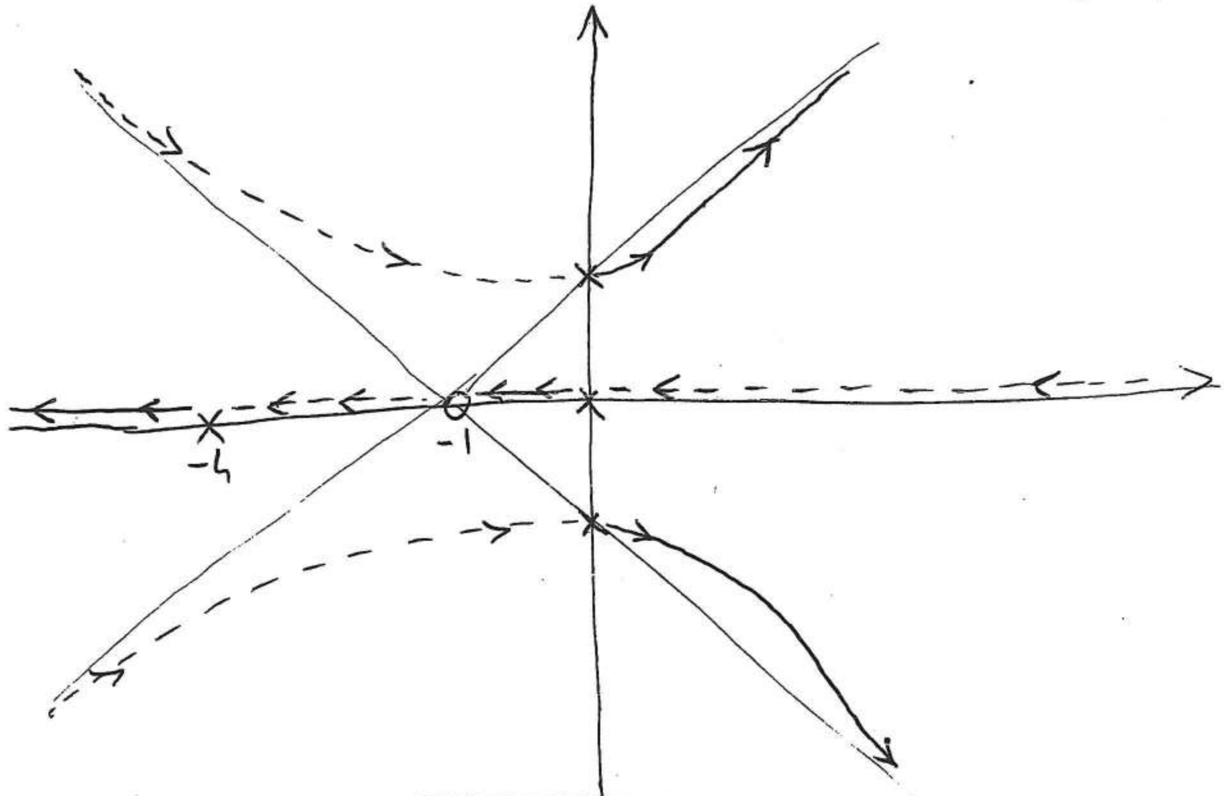
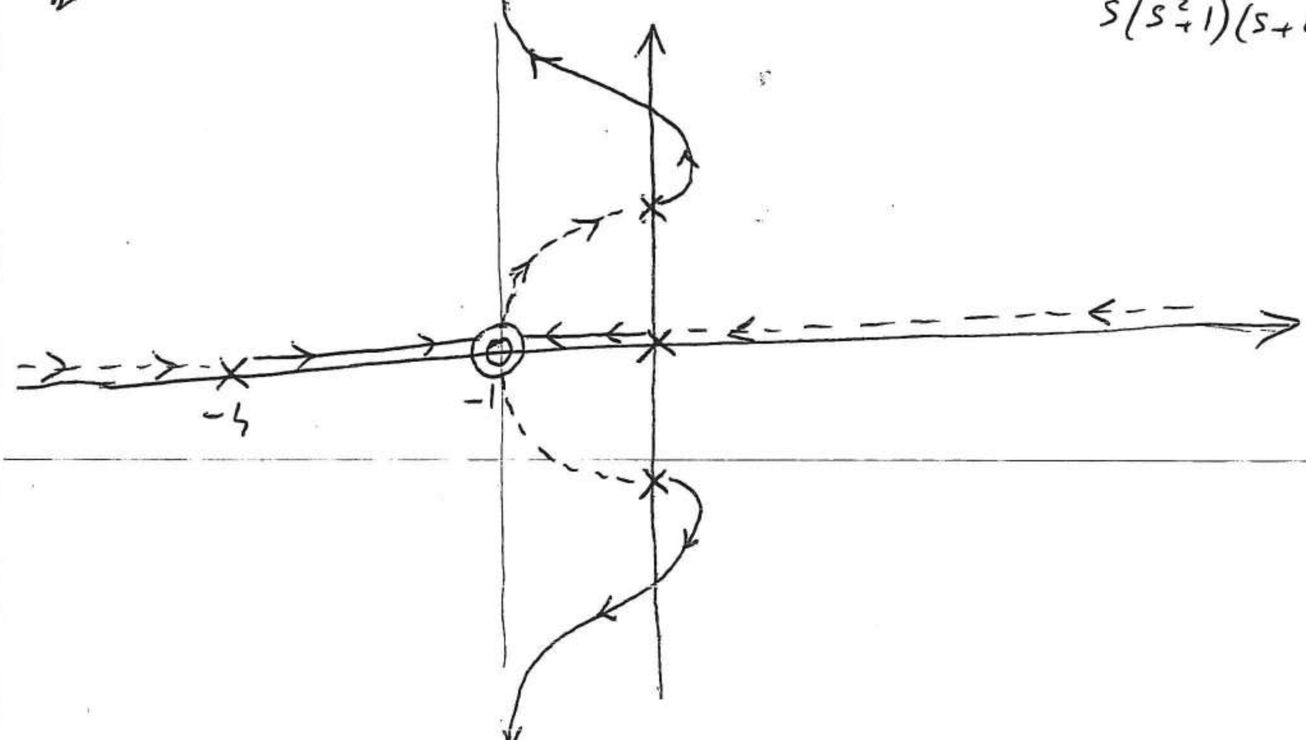


FIGURA 2 : LUOGO DELLE RADICI DI $F(s) = K \dfrac{(s+1)^2}{s(s^2+1)(s+4)}$



B) La specifica α) è automaticamente verificata (si veda la domanda A)).

Per verificare la specifica β) conviene scegliere un controllore nella forma

$$G(s) = K\frac{s+4}{s+p} \;\Rightarrow\; F(s) = K\frac{s+1}{(s^2+1)(s+p)} \qquad \Rightarrow\; D_W = N_F + D_F = K(s+1) + (s^2+1)(s+p)$$

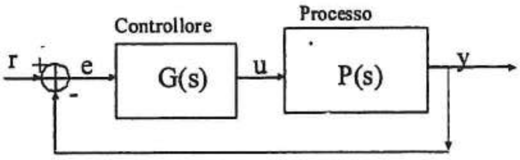
Utilizzando il criterio di Routh, è facile determinare una coppia (K, p) in corrispondenza della quale tutte e tre le radici del polinomio D_W siano a parte reale negativa (per esempio, K=p=2).

533

CONTROLLI AUTOMATICI per Ing. Automatica e Informatica (9 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI II per Ing. Automatica (5 cfu)

Prova scritta del 21 settembre 2012

PROBLEMA 1 Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



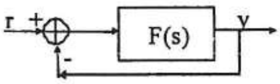
con $P(s) = \dfrac{s+c}{(s+a)\,(s+b)}$

A) Si determinino i tre parametri "a", "b" e "c" nonchè un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo che
   (α) il processo abbia tutti gli autovalori raggiungibili ed osservabili;
   (β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto raggiungibile ed inosservabile;
   (γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti;
   (δ) il modulo dell'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un riferimento $r(t) = t^2/2$ sia minore di 1/3.

B) Si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità degli autovalori del sistema complessivo individuato nella domanda A).

PROBLEMA 2A

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $F(s) = K\dfrac{s+a}{s^2(s+b)}$

A) Si determinino i parametri "a" e "b", in modo che il corrispondente luogo delle radici abbia un punto singolare triplo (ossia un punto in cui si intersecano tre cammini delle radici) in -1; si disegni il luogo corrispondente.

B) Con riferimento al luogo delle radici individuato nella domanda A), per quali valori del parametro K il sistema complessivo è asintoticamente stabile?

C) Con riferimento al luogo delle radici individuato nella domanda A), si determini il valore del parametro K in corrispondenza del quale la velocità di esaurimento del transitorio è la più elevata. Qual è tale velocità?

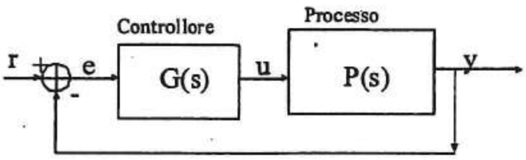
TEMA

In una autovettura sono presenti molti sistemi di controllo. Con riferimento ad almeno tre di essi, si discuta informalmente se si tratta di sistemi di controllo ad anello aperto o ad anello chiuso e, con riferimento ai tre sistemi di controllo individuati, si discuta quali sono i pro e i contro del passaggio dall'anello aperto all'anello chiuso.

FONDAMENTI DI AUTOMATICA per Ing. delle Comunicazioni (6 cfu) 534
CONTROLLI AUTOMATICI I per Ing. Automatica (5 cfu)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per Ing. Telecomunicazioni (5/6 cfu)

Prova scritta del 21 settembre 2012

PROBLEMA 1 Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

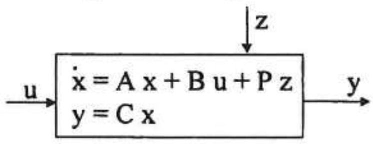


con $P(s) = \dfrac{s+c}{(s+a)\,(s+b)}$

A) Si determinino i tre parametri "a", "b" e "c" nonché un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo che:
   (α) il processo abbia tutti gli autovalori raggiungibili ed osservabili;
   (β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto raggiungibile ed inosservabile;
   (γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti;
   (δ) il modulo dell'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un riferimento $r(t) = t^2/2$ sia minore di 1/3.

B) Si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità degli autovalori del sistema complessivo individuato nella domanda A).

PROBLEMA 2B Si consideri il processo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\,-2 \quad 1\,]$

<u>Il disturbo z è misurabile</u>.

A) Si progetti uno schema di controllo, a dimensione minima, in maniera da verificare le seguenti specifiche:
   (α) il modulo dell'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un riferimento r(t) = t sia il più piccolo possibile;
   (β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   (γ) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla

~~B) Si discuta il vantaggio dello schema di controllo a doppia controreazione, rispetto a quello a~~ controreazione semplice.

TEMA

In una autovettura sono presenti molti sistemi di controllo. Con riferimento ad almeno tre di essi, si discuta informalmente se si tratta di sistemi di controllo ad anello aperto o ad anello chiuso e, con riferimento ai tre sistemi di controllo individuati, si discuta quali sono i pro e i contro del passaggio dall'anello aperto all'anello chiuso.

Soluzione del problema 1

A+B) Dato che il processo deve avere tutti gli autovalori raggiungibili ed osservabili deve essere $a \neq c$ e $b \neq c$. Per avere un autovalore nascosto ragg. ed inoss. nel sistema complessivo, è necessario che il controllore abbia a denominatore il fattore "s+c", con c>0 (cancellazione polo-zero che genera un autovalore nascosto ragg. ed inoss. in -c): ciò significa che, in base alla specifica (γ), tutti gli autovalori del sistema complessivo devono essere in -c con c>0.

Per soddisfare la specifica (δ), è necessario che la funzione di trasferimento ad anello aperto abbia un polo di molteplicità doppia in s=0; ciò può essere ottenuto, senza aggiungere ulteriori poli al controllore ponendo a=b=0.

Si può allora scegliere un controllore della forma

$$G(s) = \frac{ds + e}{s + c} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{ds + e}{s^2} \quad \Rightarrow \quad W(s) = \frac{ds + e}{s^2 + ds + e}\ ,\ W_e(s) = \frac{s^2}{s^2 + ds + e}$$

La specifica (δ) impone $|e| > 3$.

Si impone poi che anche tutti gli autovalori non nascosti (ragg. ed oss.) del sistema complessivo siano in -c (con c>0), ottenendo:

$$D_W = N_F + D_F = s^2 + ds + e = (s + c)^2 \Rightarrow \qquad d = 2c\ ,\ e = c^2$$

Tenendo conto del vincolo $|e| > 3$, si può scegliere, ad esempio e=4, c=2, d=4.

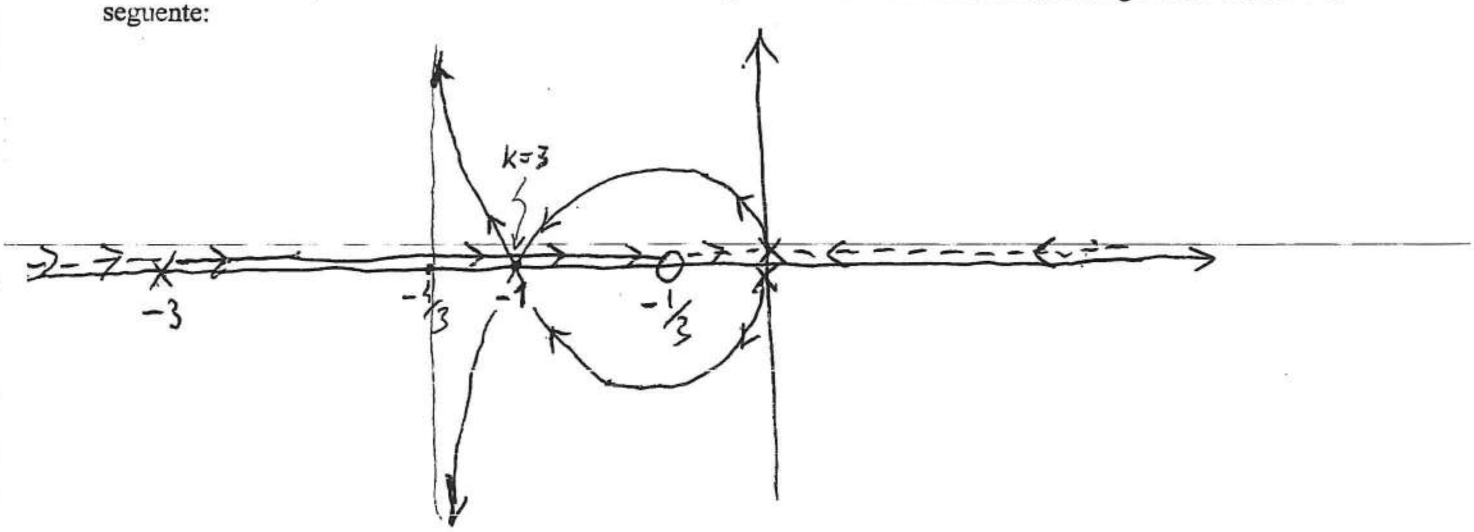
Con la scelta suddetta, tutti e tre gli autovalori del sistema complessivo risultano in -2 (due ragg. e oss. e uno ragg. e inoss.).

Soluzione del problema 2A

A) La presenza di un punto singolare triplo nel luogo delle radici significa che deve esistere valori di K e dei parametri "a" e "b" in corrispondenza dei quali i 3 autovalori del sistema complessivo sono tutti in -1. Tali valori possono essere determinati imponendo:

$$D_W = N_F + D_F = s^2(s+b) + K(s + a) = (s + 1)^3 \Rightarrow \qquad a = 1/3,\ b = 3,\ K = 3$$

Da quanto sopra si evince che il luogo delle radici della funzione $F(s) = K\dfrac{s+1/3}{s^2(s+3)}$ ha un punto singolare triplo in -1 corrispondente al valore K=3. Tenendo presente tale informazione, il luogo delle radici è il seguente:

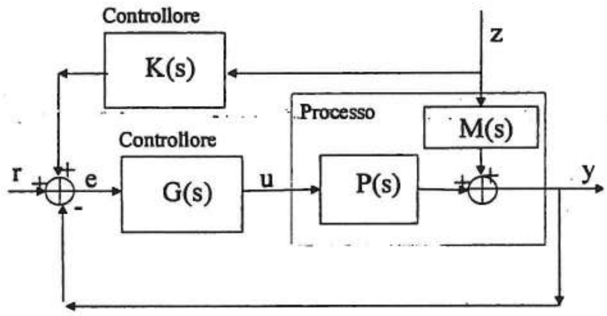


B) Dall'esame visivo del luogo (ulteriormente confermato dal criterio di Routh), si evince che il sistema risulta asintoticamente stabile per K>0

C) Dall'esame visivo del luogo, risulta evidente che il valore del parametro K in corrispondenza del quale la parte reale del massimo dei tre autovalori del sistema complessivo è la minima, coincide con il valore corrispondente al punto singolare triplo, ossia K=3. Quindi, la velocità di esaurimento del transitorio più elevata è pari a e^{-t}.

Soluzione del problema 2B

Dato che il disturbo è misurabile, è possibile progettare uno schema di controllo a doppia controreazione del tipo:



dove $P(s) = M(s) = \dfrac{s - 2}{s\,(s + 1)}$

La specifica (α) impone la presenza di un polo in s=0 nella funz. di trasf. G(s)P(s), condizione automaticamente soddisfatta dalla presenza del polo in s=0 della P(s).
Si può tentare allora di stabilizzare il sistema complessivo con un controllore G(s) a dim. zero del tipo

$$G(s) = K \;\Rightarrow G(s)P(S) = F(s) = K\,\frac{s - 2}{s\,(s + 1)}$$

L'errore a regime permanente di cui alla specifica (α) risulta pari a $|1/2K|$; quindi, per minimizzare l'errore, K deve essere scelto più grande possibile in modulo.
Applicando il criterio di Routh al polinomio

$$D_W = N_F + D_F = K\,(s - 2) + s\,(s + 1) = s^2 + s\,(1 + K) - 2K$$

~~si deduce che, affinchè il sistema complessivo sia asintoticamente stabile, deve risultare 0 > K > -1.~~
Tenendo conto della specifica (α), si deve allora scegliere K appena maggiore di -1.

Si deve infine scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)=0$ ottenendo la reiezione completa del disturbo richiesta dalla specifica (γ). Svolgendo i conti si ottiene:

$$K(s) = -\,\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\,\frac{1}{K}$$

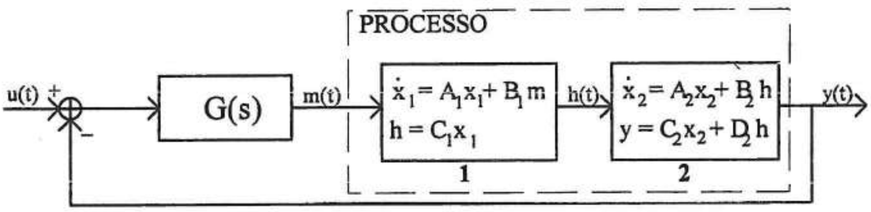
537

CONTROLLI AUTOMATICI (9 cfu)

Prova scritta del 16 novembre 2012

PROBLEMA 1

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura. Il processo (tratteggiato in figura) è costituito dalla cascata dei due sotto-processi 1 e 2 caratterizzati rispettivamente da una matrice dinamica A_1 di dimensione 1 e da una matrice dinamica A_2 di dimensione 2.



A) Si determinino i due sottoprocessi 1 e 2 in modo che:
   α) il processo abbia un autovalore in +1;
   β) il processo abbia un autovalore irraggiungibile ed osservabile in -1;
   γ) il processo abbia un autovalore raggiungibile ed inosservabile in -1.

B) Facendo riferimento al processo individuato nella domanda A) si scelga un controllore G(s) a dimensione minima in modo che tutti gli autovalori del sistema complessivo siano coincidenti.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = K\,\frac{s+2}{s\,(s+a)}$$

A) Si determini il parametro "a" in modo che il luogo delle radici abbia un punto singolare doppio in -1.

B) Si tracci il luogo delle radici di cui alla domanda precedente: in corrispondenza di quale valore del parametro K la velocità di esaurimento del transitorio è massima?

TEMA

Si illustrino i principali concetti relativi alla sintesi per tentativi.

Soluzione problema 1

A) Conviene fare in modo che risulti:

$P_1(s) = \frac{1}{s+1} \qquad P_2(s) = \frac{s+1}{s-1}$

In questa maniera il processo viene ad avere l'autovalore in -1 di cui alla specifica α) e l'autovalore raggiungibile ed inosservabile di cui alla specifica γ.

La scelta di $P_1(s)$ implica $A_1=-1$, $B_1=1$, $C_1=1$.

Per soddisfare anche la specifica β) si può scegliere per $P_2(s)$ la seguente realizzazione:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_2 = [\ 2 \quad 1\ ], D_2 = 1$$

B) Tutti gli autovalori devono essere necessariamente in -1.

Risulta $P(s) = P_1(s)\, P_2(s) = \frac{1}{s-1}$

Per assegnare anche l'autovalore ragg. ed inoss. in -1 il controllore cercato deve essere pari a $G(s) = 2$.

Soluzione problema 2

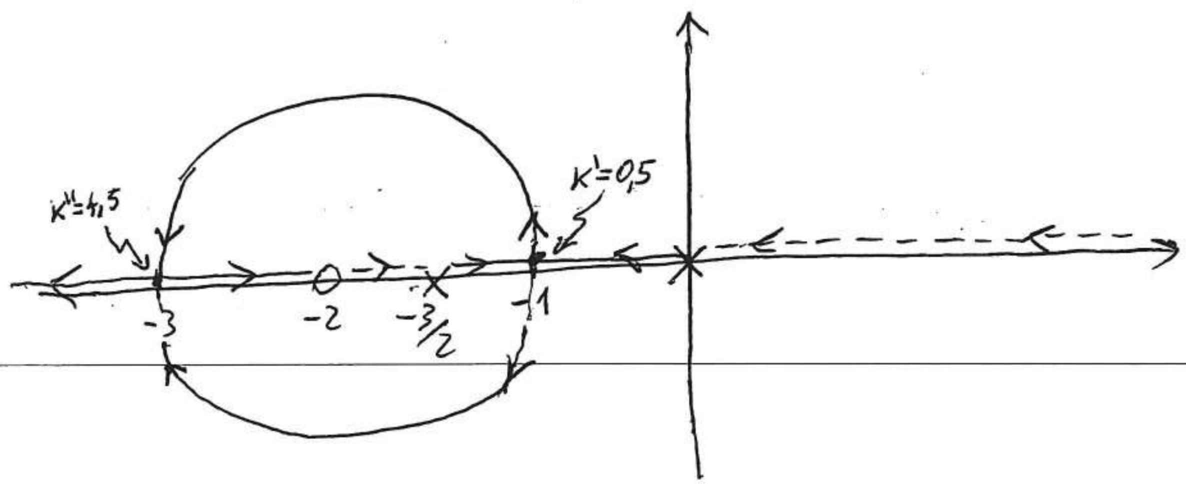
A e B) Affinchè il luogo abbia un punto singolare doppio in -1 deve essere

$$N_F + D_F = (s+1)^2 \;\Rightarrow\; K\,(s+2) + s\,(s+a) = (s+1)^2 \;\Rightarrow\; a=1{,}5,\; K=0{,}5$$

Quindi il luogo delle radici della funzione di trasferimento ad anello aperto

$$F(s) = K\,\frac{s+2}{s\,(s+1{,}5)}$$

avrà un punto singolare doppio in corrispondenza del valore K'=0,5. Tale luogo è quello indicato in figura:



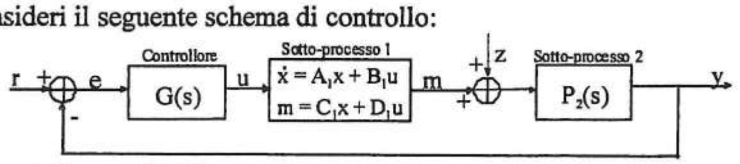
Dall'esame visivo del luogo è evidente che la velocità di esaurimento del transitorio è massima per K=K", ossia in corrispondenza del punto singolare doppio in -3 corrispondente al valore K"=9/2.

533

CONTROLLI AUTOMATICI per Ing. Automatica e Informatica (9 cfu)
FONDAMENTI DI AUTOMATICA per Ing. delle Comunicazioni (6 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI I per Ing. Automatica (5 cfu)
CONTROLLI AUTOMATICI II per Ing. Automatica (5 cfu)
SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per Ing. Telecomunicazioni (5 cfu)

Prova scritta del 16 gennaio 2013

PROBLEMA 1 Si consideri il seguente schema di controllo:



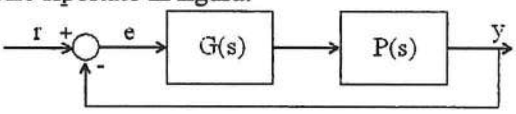
con $G(s)=K$, $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$, $C_1 = [\ 1 \quad 1\ ]$, $D_1 = 1$, $P_2(s) = \dfrac{s^2 + cs + d}{(s+e)\,(s+f)\,(s-1)}$.

A) Per tutti. Si determinino un controllore G(s) a dimensione minima e i parametri "a", "b", "c", "d", "e", "f" in modo che:
   α) la risposta "y" a regime permanente corrispondente al disturbo $z = 5 + \text{sen}\, t$ sia nulla;
   β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti coincidenti;
   γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Per tutti. Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo specificando le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità dei vari autovalori.

C) Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II (5 cfu). Si tracci il luogo delle radici e si evidenzi la congruenza del luogo con quanto determinato nella domanda A).

PROBLEMA 2.
Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P(s) = \dfrac{1}{s\,(s+3)}$

A) Per tutti. Si determini un controllore G(s) a dimensione minima in modo che:
   α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente a riferimenti "r" a rampa sia nullo;
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e non abbia autovalori nascosti.

B) Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II. Si tracci il luogo delle radici prima e dopo la compensazione.

PROBLEMA 3 Solo per Controlli Automatici (9 cfu) e Controlli Automatici II.

A) Si descriva, in generale, la struttura dell'osservatore asintotico dello stato di un processo e si dimostri che, nell'ipotesi in cui tutti gli autovalori inosservabili del processo siano a parte reale negativa, l'osservatore asintotico è in grado di ricostruire asintoticamente lo stato.

B) Con riferimento al processo $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $C = [\ 1 \quad 0\ ]$, si costruisca un osservatore asintotico dello stato in cui la velocità di convergenza a zero dell'errore tra stato stimato e stato reale sia la massima possibile.

TEMA (solo per FONDAMENTI DI AUTOMATICA (6 cfu), CONTROLLI AUTOMATICI I per Ing. Automatica (5 cfu), SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO per Ing. Telecomunicazioni (5 cfu))

Si descrivano sinteticamente gli svantaggi e i vantaggi del controllo a retroazione.

Soluzione del problema 1

A) Il sotto-processo 1 ha un autovalore nascosto, irrag. ed oss. in -2. Dato che tutti gli autovalori nascosti devono essere coincidenti, ciò implica che tutti tali autovalori nascosti devono essere in -2.

La funz. di trasf. del sotto-processo 1 è $P_1(s) = \dfrac{s+a+b}{s+b}$.

La funzione di trasferimento disturbo-uscita è la seguente:

$$W_z(s) = \frac{D_G\, D_{P_1} N_{P_2}}{N_G\, N_{P_1} N_{P_2} + D_G\, D_{P_1} D_{P_2}}$$

Per soddisfare la specifica α) è quindi sufficiente porre $N_{P_2} = s^2 + 1$ (ossia c=0, d=1) ed introdurre un polo a monte del disturbo, il che può essere ottenuto ponendo b=0 $\Rightarrow$ $P_1(s) = \dfrac{s+a}{s}$

Per far comparire l'altro autovalore nascosto in -2 (specifica β)), si può porre a=2, e=2 creando una cancellazione zero-polo tra i due sottoprocessi e quindi un autovalore irragg. ed oss. in -2.

Risulta quindi $F = GP_1P_2 = K\,\dfrac{s^2+1}{s\,(s+f)\,(s-1)}$

Gli autovalori non nascosti del sistema complessivo sono le tre radici del polinomio:

$D_W = N_F + D_F = K(s^2+1) + s\,(s+f)\,(s-1)$

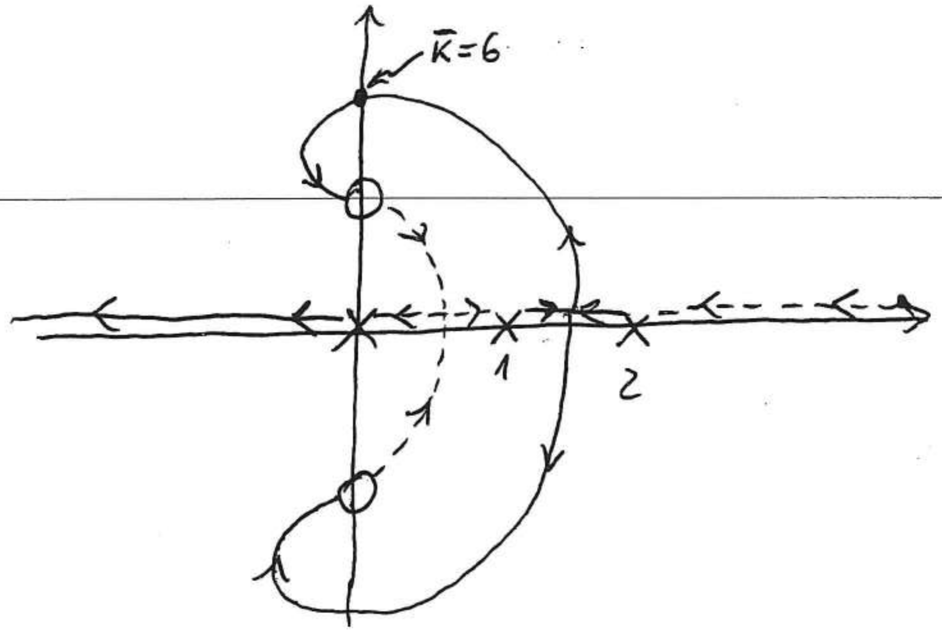
Applicando il criterio di Routh si deduce che le suddette tre radici sono tutte a parte reale negativa (e quindi il sistema asintoticamente stabile) se sono verificate simultaneamente le seguenti condizioni:

$f - 1 + K < 0,\ K > 0,\ -f^2 + f - fK - K > 0$

Scegliendo, per esempio, f=-2, le condizioni precedenti sono soddisfatte scegliendo K>6.

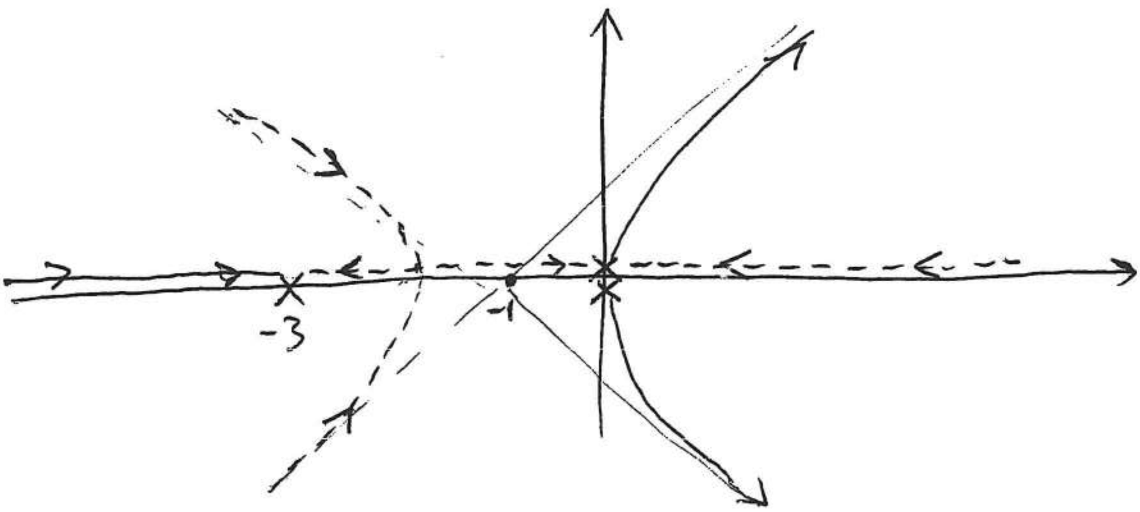
B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(s+2)^2\,[K(s^2+1) + s\,(s+f)\,(s-1)]$ con i due autovalori in -2 irrag. ed oss., e i tre autovalori rappresentati dalle radici del polinomio tra parentesi quadre ragg. ed oss.

C) Il luogo delle radici di $F(s) = K\,\dfrac{s^2+1}{s\,(s-1)\,(s-2)}$ è il seguente (è evidente che per K>6, tutti e tre i cammini delle radici si trovano nel semipiano negativo):



Soluzione del problema 2

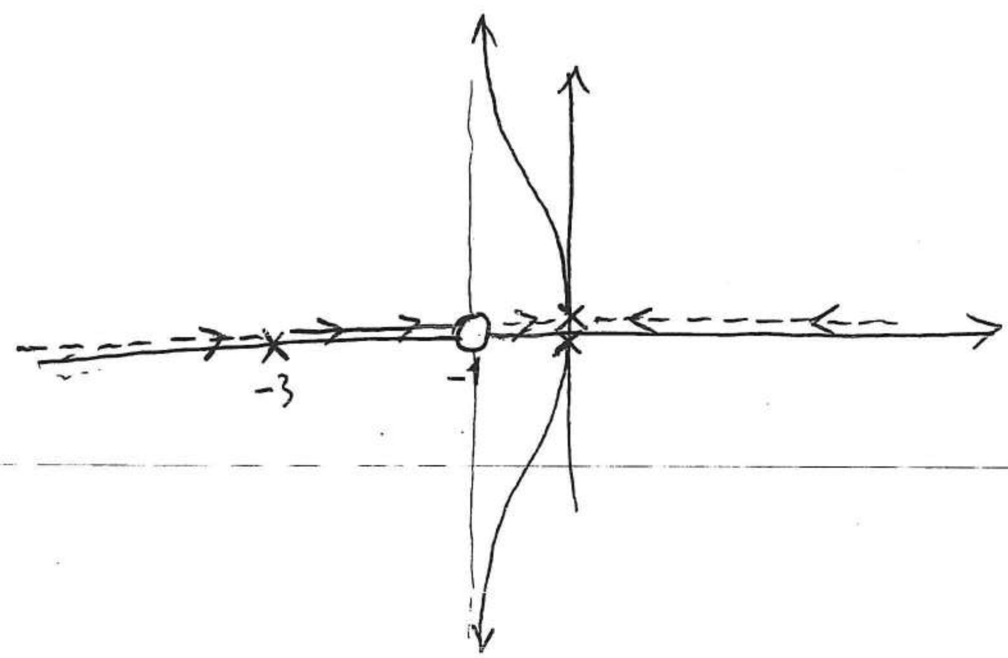
A+B) La specifica α) impone la presenza di un polo in s=0 nel controllore G(s). Quindi, il luogo delle radici prima della compensazione, relativo alla funzione di trasferimento $P(s)\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2(s+3)}$ è il seguente:



Siamo quindi nel caso di n-m=3 e centro degli asintoti a sinistra. In questo caso la tecnica di risoluzione basata sul luogo delle radici suggerisce di aggiungere nel controllore uno zero a sinistra in modo da raddrizzare gli asintoti senza farli spostare a destra. Si può, per esempio, aggiungere nel controllore uno zero in -1, in modo che risulti:

$$G(s)=K\frac{s+1}{s} \quad \Rightarrow \quad F(s)=K\frac{s+1}{s^2(s+3)}.$$

Il relativo luogo delle radici (dal quale si deduce che il sistema è asintoticamente stabile per K>0) è il seguente:



Soluzione del problema 3

B) Dato che nel processo è presente un autovalore ragg. ed inoss. in -2, tale autovalore deve essere necessariamente presente nell'equazione per la determinazione della matrice G che caratterizza l'osservatore asintotico; tale autovalore limita la velocità di convergenza ad e^{-2t}. La suddetta equazione è quindi la seguente:

$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda+2)(\lambda-\lambda_{arb})$$

dove λ_{arb} è un autovalore non superiore a -2.

Ponendo $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$, scegliendo, per esempio, $\lambda_{arb} = -2$ e risolvendo l'equazione di cui sopra con il principio di identità dei polinomi, si ottiene

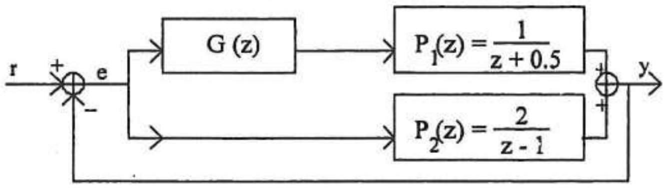
$G = \begin{bmatrix} 1 \\ * \end{bmatrix}$ dove * indica un numero reale qualsiasi.

543

CONTROLLI AUTOMATICI 9 cfu
Prova scritta del 13 febbraio 2013

PROBLEMA 1

Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:

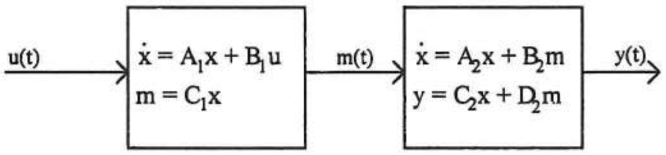


(1A) Si determi un controllore G(z) a dimensione minima in modo tale che l'errore "e" corrispondente ad un ingresso "r" a gradino sia nullo nel minor tempo possibile e il sistema complessivo sia asintoticamente stabile (si specifichi a partire da quale istante l'errore si annulla).

(1B) Si determini l'andamento transitorio dell'errore di cui alla domanda precedente.

PROBLEMA 2

Si consideri il seguente processo (formato da 2 sotto-processi in cascata) con ingresso u ed uscita y:



dove $A_1 = -1$, $B_1=2$, $C_1=2$; $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = [\ a \quad 0\ ]$, $D_2 = 1$

(2A) Scegliendo opportunamente il parametro "a", si determini un controllore a <u>dimensione minima</u> in modo che il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a (s+1)(s+2)(s+3).

(2B) Determinare le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità degli autovalori del polinomio caratteristico di cui alla domanda precednte.

(2C) Si consideri un osservatore asintotico dello stato del processo in esame. Scegliendo opportunamente il parametro "a", qual'e' la massima velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato stimato e lo stato reale?

TEMA

Si descrivano il metodo e la ratio per la stabilizzazione asintotica tramite il luogo delle radici di un processo instabile con una differenza tra numero di poli e numero di zeri pari a 3 e centro degli asintoti a destra rispetto all'asse immaginario.

Soluzione del problema 1

(1A+1B) Per verificare le specifica richiesta occorre che (i) in $F(z) = y(z)/e(z)$ vi sia un polo in +1: tale polo è già presente in $P_2(z)$, (ii) risulti $N_F(z) + D_F(z) = z^l$ dove l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.
Si può allora scegliere la seguente struttura di G(z):

$$G(z) = \frac{a\,(z + 0.5)}{z + b} \Rightarrow F(z) = \frac{a(z-1) + 2(z + b)}{(z-1)\,(z + b)}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi alla relazione $N_F(z) + D_F(z) = z^2$ si ricava a =-1/2 e b = -1/2.
Quindi, il sistema complessivo è asintoticamente stabile con polinomio caratteristico pari a $(z+0,5)\,z^2$.

Risulta allora: $F(z) = \dfrac{1,5\,z - 0,5}{(z-1)\,(z - 0,5)} \Rightarrow W_e(z) = \dfrac{(z-0,5)(z-1)}{z^2}$

Quindi l'errore è uguale identicamente a zero a partire dall'istante l=2 e risulta:

$$e(z) = W_e(z)\,u(z) = \frac{(z-0,5)(z-1)}{z^2}\,\frac{z}{z-1} = \frac{z-0,5}{z} = 1 + \frac{-0,5}{z}$$

$$e(h) = \delta(h) - 0,5\,\delta(h-1)$$

Soluzione del problema 2

(2A+2B) Passando alle funzioni di trasferimento i sotto-processi diventano:

$$P_1(s) = \frac{4}{s+1}\,,\ P_2(s) = \frac{s+a}{s}$$

Nel sotto-processo 2 è presente un autovalore raggiungibile ed inosservabile in "-3".
Ponendo a=1, nella cascata dei sotto-processi 1 e 2 si viene a creare un altro autovalore raggiungibile ed inosservabile in "-1" e la funzione di trasferimento complessiva del processo risulta $P(s) = P_1(s)\,P_2(s) = \dfrac{4}{s}$.

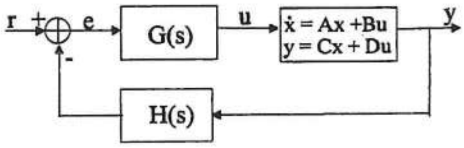
Affinchè il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a (s+1)(s+2)(s+3), è allora sufficiente imporre un autovalore ragg. ed oss. in -2 scegliendo G(s) = 1/2.

(2C) Scegliendo $a \neq 0$ e $a \neq 1$, il processo ha un unico autovalore inosservabile in -3 che limita la massima velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato stimato e lo stato reale a e^{-3t}.

545

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu)
Prova scritta del 12 aprile 2013

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



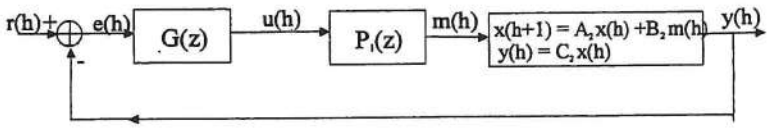
dove $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\,1 \quad 1\,]$, $H(s) = \dfrac{1}{s+2}$

A) Si determini un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
  α) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
  β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori a parte reale strettamente minore di −1 (quindi autovalori in −1 non vanno bene).

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2.

Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P_1(z) = \dfrac{z - 0{,}5}{z - 1}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_2 = [\,1 \quad 0\,]$

A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
  α) l'errore "e(h)" corrispondente all'ingresso a gradino r(h) = h sia nullo a partire da un istante "l" con "l" più piccolo possibile;
  β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si tracci il luogo delle radici di interesse.

TEMA
Si scelga un settore di applicazione dell'automatica e, con riferimento a tale settore, si evidenziando i vantaggi derivanti dall'uso di controllori a controreazione.

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = 2\,\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$.

Per generare i due autovalori nascosti richiesti dalla specifica α) rispettando la specifica β) è necessario che il controllore cancelli lo zero in -2 e il polo in -3 del processo (si viene cosi' a generare un autovalore ragg. ed inoss. in -2 ed un autovalore irragg. ed oss. in -3).

Si può allora tentare di risolvere il problema con un controllore del tipo:

$$G(s) = K\,\frac{s+3}{s+2} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{2K}{s+1}$$

Le funz. di trasf. ing-uscita del sistema complessivo è la seguente:

$$W(s) = \frac{N_F\,N_H}{N_F\,N_H + D_F\,D_H},$$

Con le scelte effettuate risulta quindi:

$$D_W = N_F\,N_H + D_F\,D_H = 2K + (s+1)\,(s+2) = s^2 + 3s + 2 + 2K$$

Per applicare il criterio di Routh in modo da trovare se esistono radici del polinomio suddetto a parte reale strettamente minore di -1, si deve effettuare la trasformazione s -> s-1, ottenendo:

$$D_W' = s^2 + s + 2K$$

Applicando il criterio di Routh, si deduce che, affinché i due autovalori non nascosti del sistema complessivo siano a parte reale strettamente minore di -1, è necessario scegliere $K>0$.

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s+2)\,(s+3)\,(s^2 + 3s + 2 + 2K)$ dove -2 è un autovalore ragg. ed inoss., -3 è un autovalore irragg. ed oss. e le due radici di $s^2 + 3s + 2 + 2K$ sono due autovalori ragg. e oss.

Soluzione del problema 2

A) Nel secondo sotto-processo è presente un autovalore nascosto (ragg. ed inoss in zero). La funzione di trasferimento del secondo sotto-processo, risulta

$$P_2(z) = \frac{1}{z-1} \qquad \Rightarrow \qquad P(z) = P_1(z)\,P_2(z) = \frac{z-0{,}5}{(z-1)^2}$$

Per avere errore nullo nel più breve tempo possibile in corrispondenza ad una rampa h, si deve avere un polo doppio in z=1 nella f. di trasf. ad anello aperto (già presente nel processo), cancellare tutto ciò che può essere cancellato (nello specifico lo zero in 0,5 del processo, può essere cancellato da un polo in 0,5 del controllore provocando un autovalore nascosto rag. ed inoss. in 0,5) ed assegnare tutti gli autovalori non nascosti in 0.

Si può allora scegliere la seguente struttura di G(z):

$$G(z) = \frac{az+b}{z-0{,}5} \qquad \Rightarrow \qquad F(z) = \frac{az+b}{(z-1)^2}$$

Procedendo all'assegnazione degli autovalori e risolvendo con il principio di identità dei polinomi, si ottiene:

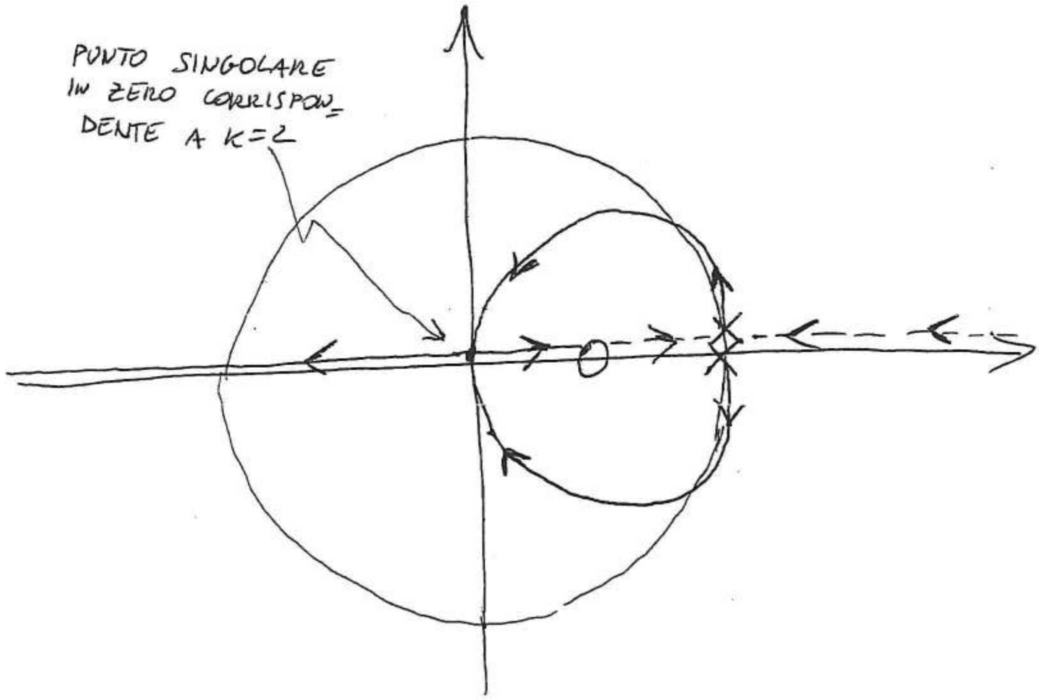
$$D_W = N_F + D_F = az + b + (z-1)^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad a=2\,,\ b=-1,\ l=2$$

B) Il polinomio caratteristico è pari a $z^3\,(z-0{,}5)$ dove due autovalori in zero sono ragg. ed oss. (non nascosti), mentre un autovalore in zero è ragg. ed inoss, e l'autovalore in 0,5 è rag. ed inoss.

C) La funzione di trasferimento ad anello aperto di interesse è la seguente

$$F(z) = K\,\frac{z-0{,}5}{(z-1)^2}$$

Il luogo delle radici di interesse è il seguente:

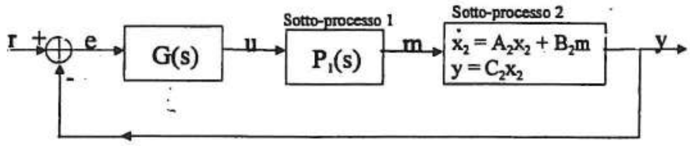


548

CONTROLLI AUTOMATICI per Ing. Automatica e Informatica (9 cfu)

Prova scritta del 10 giugno 2013

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:

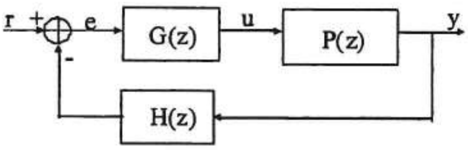


dove $P_1(s) = \dfrac{s-1}{s+2}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & b \end{bmatrix}$

A) Si determinino i parametri "a" e "b" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = 1 sia, in modulo, non superiore a 2/3;
   β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto in -3;
   γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile (si disegni il relativo luogo delle radici).

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{(z-0,3)\,(z+0,4)^2}{(z-1)(z-0,4)\,(z+0,6)}$, $H(z) = \dfrac{1}{z-1}$

A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h)=h si annulli in tempo finito (si indichi l'istante a partire dal quale l'errore si annulla);
   β) il sistema complessivo abbia 4 autovalori nascosti;
   γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e la velocità di convergenza a zero del transitorio sia la massima possibile (compatibilmente con il soddisfacimento delle altre specifiche).

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 3.

A) Si descriva, in generale, la struttura dell'osservatore asintotico dello stato di un processo e si dimostri che, nell'ipotesi in cui tutti gli autovalori inosservabili del processo siano a parte reale negativa, l'osservatore asintotico è in grado di ricostruire asintoticamente lo stato.

B) Con riferimento al sotto-processo 2 di cui al problema 1, si ponga a = –2, b = 0.
   B1) Qual è la massima velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato reale e quello stimato che è possibile ottenere e perchè?
   B2) Si costruisca l'osservatore asintotico dello stato.

Soluzione del problema 1 549

A) Per verificare la specifica β) il metodo più semplice è quello di far comparire un autovalore nascosto in -3 nel sottoprocesso 2. Si deve quindi porre a=-3 in modo da far comparire un autovalore in -3 in tale sottoprocesso e quindi scegliere b=2 in modo che tale autovalore risulti ragg. ed inoss.

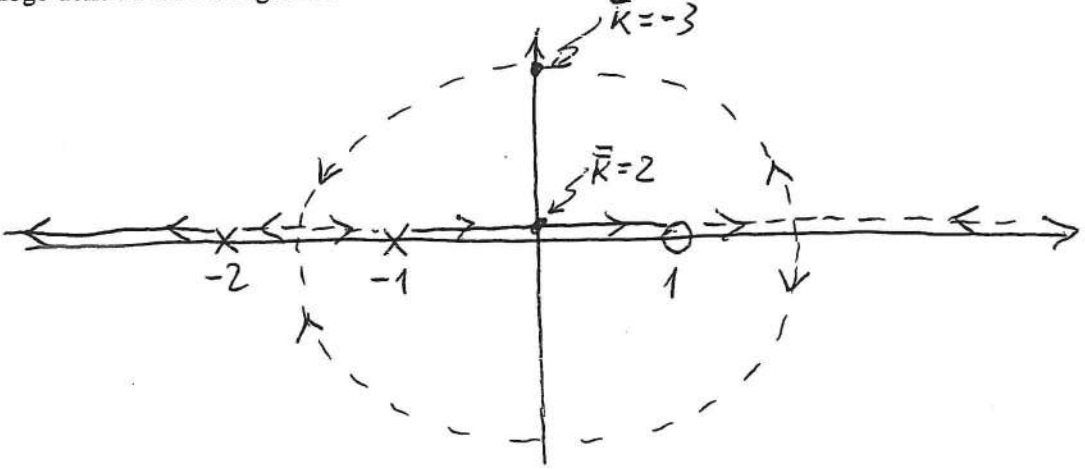
Con tale scelta la f. di trasf. del secondo sottoprocesso risulta:

$$P_2(s) = \frac{3}{s+1} \;\Rightarrow\; P(s) = P_1(s)\,P_2(s) = 3\,\frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

Scegliendo $G(s) = K/3$, si ottiene $F(s) = G(s)\,P(s) = K\,\dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)}$

La specifica α) impone $|W_e(0)| \le 2/3 \Rightarrow \left|\dfrac{D_F(0)}{N_F(0)+D_F(0)}\right| \le 2/3 \Rightarrow |2-K| > 3$ (*).

Il luogo delle radici è il seguente:



Applicando il criterio di Routh si deduce che il sistema complessivo è asintoticamente stabile per $-3 < K < 2$. In particolare, per $-3 < K < -1$ il sistema è asintoticamente stabile e soddisfa la (*). Quindi, per risolvere il problema, si può scegliere, ad esempio, $K= -2$.

B) Con la scelta $G(s) = -2/3$ di cui alla precedente domanda, il polinomio caratteristico del sistema complessivo risulta pari a

$$D_W\,(s+3) = [N_F + D_F]\,(s+3) = [(s+1)(s+2) - \tfrac{2}{3}(s-1)](s+3) = (s^2 + \tfrac{7}{3}s + \tfrac{8}{3})(s+3)$$

dove le radici del polinomio di secondo grado sono gli autovalori ragg. ed oss. del sistema complessivo e l'autovalore -3 è ragg. ed inoss.

Soluzione del problema 2

550

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H},\ W_e(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}\quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F}\ ,\ H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per verificare la specifica α), deve risultare:

$$W_e(z)\,r(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{S(z)}{z^{l-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} = \frac{S(z)\,(z-1)^2}{z^l}$$

dove $S(z)$ è un polinomio qualsiasi di grado non superiore a l-1 e l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Per verificare la condizione suddetta è sufficiente che (i) $D_F D_H$ abbia una radice doppia in +1 (condizione automaticamente verificata, grazie al polo in +1 di $H(z)$ e al polo in +1 della $P(z)$) e (ii) si imponga $N_F N_H + D_F D_H = z^l$.

Per verificare la specifica β), $G(z)$ deve cancellare 4 dei 5 poli e zeri a modulo minore di uno della $P(z)$. Dato che la specifica γ) richiede la massima velocità di convergenza a zero del transitorio (nel caso tempo discreto governato da fattori del tipo λ^h che convergono a zero tanto più rapidamente quanto più è piccolo il modulo di λ) conviene non cancellare il polo in -0,6 dal momento che tale polo è quello a modulo maggiore tra i 5 poli e zeri suddetti. Si puo' allora scegliere:

$$G(z) = \frac{(z-0{,}4)\,(az^2+bz+c)}{(z+0{,}4)^2\,(z-0{,}3)} \Rightarrow \qquad F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{az^2+bz+c}{(z+0{,}6)\,(z-1)}$$

Si notino le cancellazioni di tre coppie polo-zero (una in 0,3 e due in -0,4) che provocano la comparsa di tre autovalori ragg. ed inoss., e di una coppia zero-polo in 0,4 che provoca la comparsa di un autovalore irragg. e oss.

Si impone allora l'assegnazione degli autovalori:

$$N_F N_H + D_F D_H = az^2 + bz + c + (z+0{,}6)\,(z-1)^2 = z^3 \qquad \Rightarrow \qquad l=3$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene a=1,4 ; b=0,2 ; c= -0,6.

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $z^3(z-0{,}3)(z-0{,}4)(z+0{,}4)^2$ dove i tre autovalori in zero (derivanti dall'assegnazione degli autovalori) sono ragg. e oss., l'autovalore in 0,3 e i due autovalori in -0,4 sono ragg. e inoss., l'autovalore in 0,4 è irrag. e oss..

Soluzione del problema 3 551

B1) Ponendo a=-2 e b=0 nel sotto-processo 2 è presente un autovalore ragg. ed inoss. in -1. Ciò limita a e^{-t} la massima velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato reale e quello stimato che è possibile ottenere. Tale autovalore deve essere necessariamente presente nell'equazione per la determinazione della matrice G che caratterizza l'osservatore asintotico. Tale equazione è quindi la seguente:

$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda+1)(\lambda-\lambda_{arb})$$

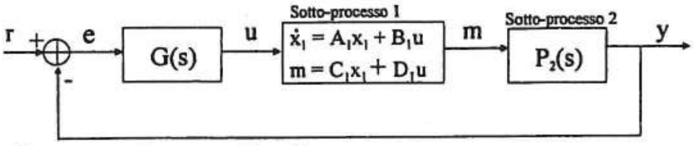
dove λ_{arb} è un autovalore negativo che può essere arbitrariamente scelto. Ponendo, ad esempio, $\lambda_{arb} = -1$ e $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$, risolvendo poi l'equazione di cui sopra con il principio di identità dei polinomi, si può determinare la matrice $G = \begin{bmatrix} -1 \\ * \end{bmatrix}$, dove * è un numero reale qualsiasi.

552

CONTROLLI AUTOMATCI per Ing. Informatica ed Automatica (9 cfu)

Prova scritta del 5 luglio 2013

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



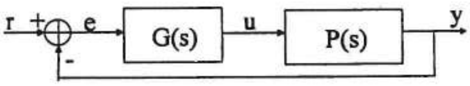
dove $G(s) = K$, $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_1 = [\ a \quad b\ ]$, $D_1=1$, $P_2(s) = \dfrac{1}{s-c}$,

A) Si determinino i parametri "a", "b", "c" e "K" in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto inosservabile;
   β) l'errore "e" a regime permanente in corrispondenza ad ingressi "r" a gradino sia nullo;
   γ) la velocità di convergenza a zero del transitorio sia la maggiore possibile;
   δ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo specificando le caratteristiche di raggiungibilità e di osservabilità degli autovalori.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si disegni il luogo delle radici. Dall'esame visivo del luogo si determinino quali sono i valori di K per cui il sistema complessivo ha tutti gli autovalori minori di -1 ed un transitorio privo di oscillazioni.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo:



dove $G(s) = K$, $P(s) = 10\,\dfrac{(s+1)}{s\,(s-1)\,(s+10)}$

A) Si determini il parametro K in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore "e" a regime permanente in corrispondenza ad ingressi "r" a gradino sia nullo;
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   γ) il sistema complessivo abbia il margine di fase maggiore possibile;
   δ) la pulsazione di attraversamento ω_t sia pari a 2 rad/s, oppure a 5 rad/s, oppure a 20 rad/s.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist (entrambi approssimati) e si verifichi la stabilità ottenuta mediante il criterio di Nyquist.

PROBLEMA 3.

A) Si dimostri il principio di separazione.

B) Sia assegnato il processo caratterizzato dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = [\ 0 \quad 1\ ]$$

Utilizzando il principio di separazione si detremini un controllore in modo tale che il sistema complessivo abbia il polinomio caratteristico $(\lambda+1)\,(\lambda+2)\,(\lambda+3)^2$.

Soluzione del problema 1

A) Per verificare la specifica α) conviene rendere non osservabile un autovalore del sotto-processo 2. Infatti, un'eventuale cancellazione zero-polo tra i sotto-processi creerebbe un autovalore osservabile e irraggiungibile (mentre viene richiesto un autovalore inosservabile).

La specifica γ) ci impone di rendere inosservabile l'autovalore più 'veloce', cicè l'autovalore in -2. Come facilmente verificabile con il criterio di Hautus, per $b = 0$ l'autovalore in -2 è raggiungibile ed inosservabile. Allora, in base alla specifica δ), tutti gli autovalori del sistema complessivo devono essere coincidenti in -2.

Il sottoprocesso 2 è pertanto descritto dalla funzione di trasferimento $P_1(s) = \dfrac{s+1+a}{s+1}$.

Quindi, la funzione di trasferimento ad anello aperto è la seguente:

$$F(s) = G(s)\,P(s) = G(s)\,P_1(s)\,P_2(s) = K\,\frac{s+1+a}{(s+1)\,(s-c)}.$$

La specifica β) richiede la presenza di un polo in zero della $F(s)$; si deve quindi porre $c=0$.

Per imporre che tutti gli autovalori non nascosti siano in -2, si deve allora impostare la seguente equazione diofantina:

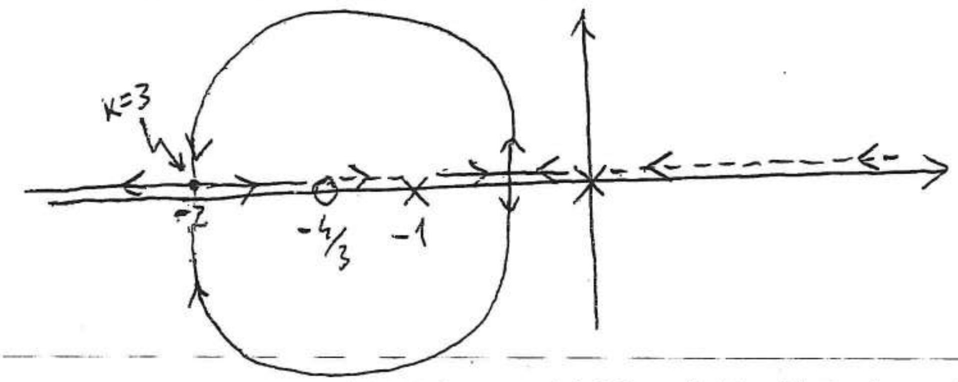
$$D_W(s) = N_F(s) + D_F(s) = K(s+1+a) + s\,(s+1) = (s+2)^2$$

che è risolta dai valori $K=3$, $a=1/3$.

B) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda)=(\lambda+2)^3$, con 2 autovalori in ragg. ed oss., ed un autovalore raggiungibile ed inosservabile.

C) Dato che $c=0$ e $a=1/3$, il luogo delle radici di interesse è quello relativo alla funzione di trasferimento $F(s) = K\,\dfrac{s+4/3}{(s+1)\,s}$.

Tale luogo è il seguente (si noti che l'assegnazione di autovalori di cui alla domanda A), implica la presenza di un punto singolare doppio in -2 corrispondente al valore $K=3$):



Dall'esame visivo degli andamenti dei due cammini delle radici è evidente che per $K \geq 3$ entrambi i cammini si mantengono sull'asse reale (il che garantisce un transitorio privo di oscillazioni) e forniscono autovalori minori di -1.

Soluzione del problema 2

A) Per verificare la specifica α), la funzione di trasferimento ad anello aperta deve avere almeno un polo in s=0. Poiché P(s) ha un polo in s=0 tale specifica risulta automaticamente soddisfatta.

Per verificare la specifica β), si può applicare il criterio di Routh al seguente polinomio che corrisponde al denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$D_W(s) = N_G(s)\,N_P(s) + D_G(s)\,D_P(s) = 10K\,(s+1) + s\,(s-1)\,(s+10) = s^3 + 9\,s^2 + s\,(10\,K - 10) + 10\,K.$

Dal criterio di Routh, si deduce che il sistema complessivo è asintotiticamente stabile per K > 9/8.

Per verificare la specifica γ), conviene (i) scegliere tra le tre opzioni possibili per la pulsazione di attraversamento (specifica δ)) quella che massimizzare la fase di F(jω), (ii) scegliere K in modo che la pulsazione di attraversamento coincida effettivamente con quella prescelta.

La fase di F(jω) si può calcolare con la formula:

$$\text{Fase } F(j\omega) = -270° + 2\,\text{arctg}\,\omega - \text{arctg}\,\frac{\omega}{10}$$

La suddetta formula fornisce -154,4° , -139,2° e -159,2°, rispettivamente per ω_t pari a 2 rad/s, 5 rad/s, 20 rad/s. La scelta da operare è quindi ω_t = 5 rad/s.

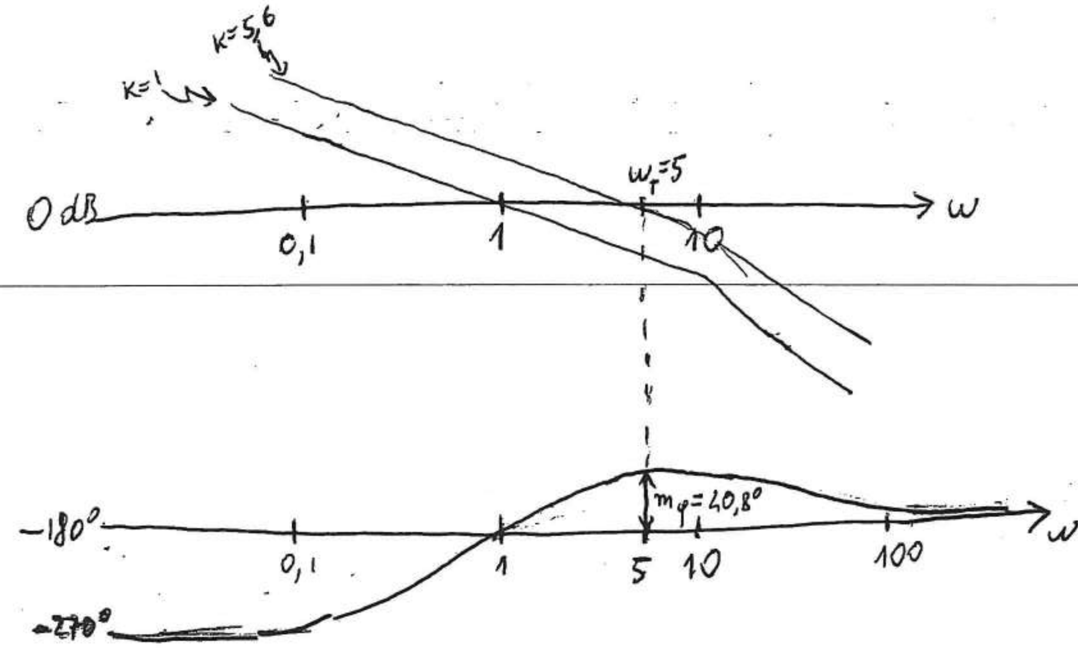
In base alla definizione di pulsazione di attraversamento, per fare in modo che la pulsazione di attraversamento sia effettivamente pari a ω_t = 5 rad/s, si deve scegliere K in modo che risulti:

$$|F(j5)| = \left|10\,K\,\frac{(j5+1)}{j5\,(j5-1)\,(j5+10)}\right| = 1$$

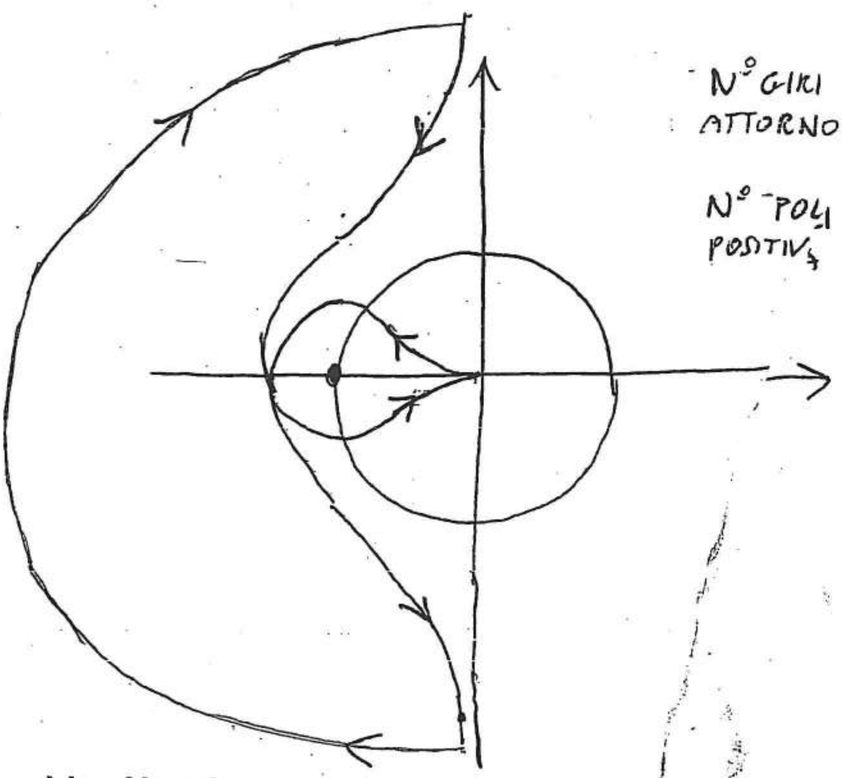
Da cui si ricava |K| = 5,6 (la scelta corretta di K è quella con il segno positivo per quanto desunto in base alla specifica sulla stabilità asintotica).

Quindi, in corrispondenza di tale scelta di K il margine di fase è pari a m_φ = 40,8° (180-139,2).

B) I diagrammi di Bode e di Nyquist sono i seguenti:



555



N° GIRI ANTIORARI ATTORNO AL PUNTO (-1,0) = 1

N° POLI A PARTE REALE POSITIVA DI F(S) = 1

⇓

CRITERIO DI NYQUIST VERIFICATO

Soluzione del problema 3

B) Il controllore che si determina attraverso il principio di separazione è basato sulla presenza di due opportune matrici K e G, dedotte attraverso due distinte assegnazioni degli autovalori: quella relativa alla matrice K deve necessariamente includere tutti gli autovalori irrag. del processo, mentre quella relativa alla matrice G deve necessariamente includere tutti gli autovalori inoss. del processo.

Dato che il processo ha un autovalore ragg. e inoss in -1 ed un autovalore irrag. e oss. in -2, le matrici K e G che caratterizzano il controllore si devono dedurre sulla base delle due seguenti assegnazioni degli autovalori:

$$|\lambda I - (A+BK)| = (\lambda+2)(\lambda+3) \quad \Rightarrow \quad K = [\,-4 \quad *\,]$$

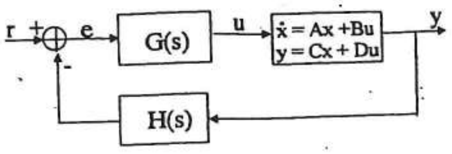
$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda+1)(\lambda+3) \quad \Rightarrow \quad G = \begin{bmatrix} * \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove "*" indica un qualsiasi numero reale.

556

CONTROL AUTOMATICI (9 cfu) per ing. Automatica e Informatica (9 cfu)
Prova scritta del 16 settembre 2013

PROBLEMA 1. Si consider seguente schema di controllo:

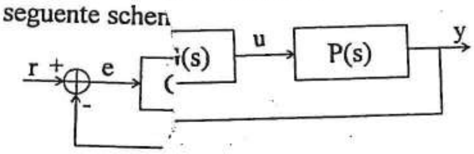


dove $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [\,1 \;\; 1\,]$, $D = 1$, $H(s) = \frac{1}{s+d}$

A) Si determinino i parametri "a", "b", ;" e "d", nonché un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
- α) l'errore "e" a regime permanente ‹rrispondente all'ingresso $r(t) = 2t + 2$ sia nullo;
- β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti: in particolare, un autovalore raggiungibile ed osservabile, ed un autovalore irragg ungibile ed osservabile;
- γ) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori in -1.

B) Con riferimento al controllore individua ɔ nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le ca atteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schen ıa di controllo:



con $P(s) = \frac{100}{(s+100)(s-1)}$

A) Si determini un controllore G(s) a dim ensione minima tale che:
- i) l'errore a regime in risposta a u ingresso r(t) a gradino sia, in modulo, minore o uguale a 0.1;
- iii) il sistema complessivo sia asi toticamente stabile con margine di fase maggiore possibile;

) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist (qualitativi) relativi al processo $P(s)$ e alla funzione di rasferimento compensata a ciclo aperto $F(s)$. Utilizzando il criterio di Nyquist, si discuta la stabilità dei orrispondenti sistemi ad anello chiuso.

IA

lustri come si procede per effettuare la stabilizzazione di un sistema a controreazione utilizzando il luogo lle radici nei seguenti casi: (i) differenza tra poli e zeri uguale a due e centro degli asintoti positivo, erenza tra poli e zeri uguale a tre e centro degli asintoti positivo.

557

Soluzione del problema 1

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H},\quad W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{N_F}{D_F}\ ,\ H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per ottenere l' autovalore nascosto irraggiungibile ed osservabile richiesto dalla specifica β) (il quale deve essere necessariamente in -1 in base alla specifica γ)), si deve scegliere b=-1.

Per soddisfare la specifica α), la $W_e(s)$ deve avere uno zero di molteplicità due in s=0. Ciò può essere ottenuto, ponendo d=0 e facendo in modo che uno dei due autovalori del processo sia in 0, il che si ottiene ponendo a=0.

Con tale scelta risulta $P(s) = \frac{s+c}{s}$

Scegliendo quindi c=1 e $G(s) = \frac{es+f}{s+c}$ si ottiene $F(s) = \frac{es+f}{s}$.

In tal modo, nella cascata tra G(s) e P(s) si ottiene l' autovalore nascosto raggiungibile ed inosservabile richiesto dalla specifica β) e tale autovalore risulta in -1 congruentemente con la specifica γ).

Infine, si procede all'assegnazione degli autovalori non nascosti in -1:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = es + f + s^2 = (s+1)^2 \quad \Rightarrow \text{e=2, f=1}$$

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s+1)^4$ dove un autovalore è ragg. ed inoss., un autovalore è irrag. ed oss., due autovalori sono ragg. ed oss.

Soluzione del problema 2

A) La funzione compensatrice va ricercata in generale nella forma: $G(s) = \frac{K_G}{s^r} R(s)$

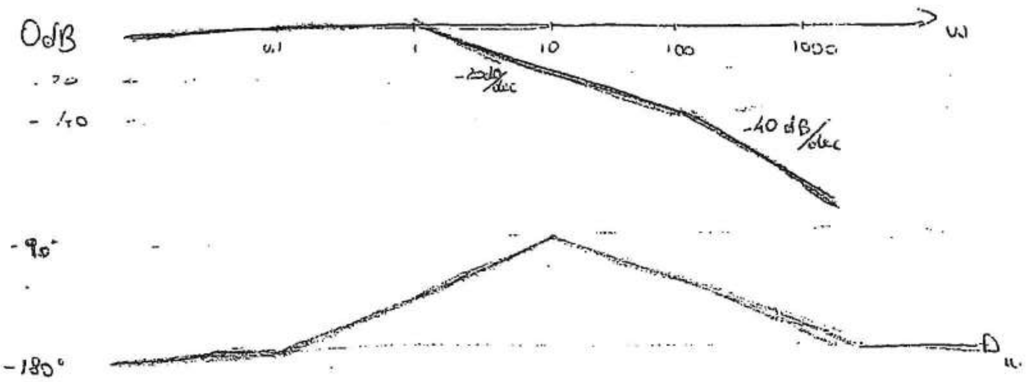
I parametri K_G e r vanno scelti in modo da soddisfare le specifiche sul regime permanente, mentre con $R(s)$ si impongono le specifiche sul transitorio aventualmente non ancora soddisfatte.

La specifica i) richiede che il sistema sia di tipo 0, perciò non è necessario introdurre poli nell'origine nella funzione di trasferimento ad anello aperto ($r = 0$). L'errore a regime per un ingresso a gradino sarà costante e diverso da zero, inoltre la specifica i) richiede che:

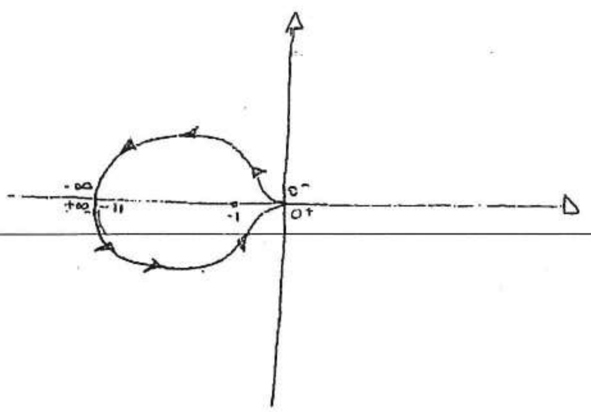
$|e_0| \leq 0.1$

Il modulo del guadagno si determina imponendo $|W_e(s)|_{s=0} = |D_P(s)/(D_P(s) + K_G N_P(s))|_{s=0} \leq 0.1$ da cui si ottiene $K_G \geq 11$,

Dall'esame dei diagrammi di Bode si deduce che è possibile soddisfare tutte le specifiche aumendando opportunamente il guadagno d'anello (quindi R(s)=1). In particolare per soddisfare la specifica ii) basterebbe aumentare il guadagno di circa 20 dB ($K_G \approx 10$), in modo tale che la pulsazione di attraversamento ω_t sia circa 10 rad/s. Considerando le condizioni ottenute per soddisfare la specifica i) si ottiene $K_G = 11$.



DIAGRAMMI DI BODE (APPROSSIMATI)

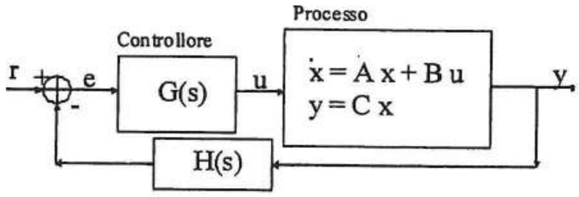


Il criterio di Nyquist è verificato dato che il numero di giri in senso antiorario che il vettore rappresentativo di F(jω), per ω che varia da -∞ a +∞, compie attorno al punto (-1;j0) coincide con il numero di radici a parte reale positive.

559

Esame di Controlli Automatici (9 cfu)
Prova scritta del 5 novembre 2013

PROBLEMA 1
Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



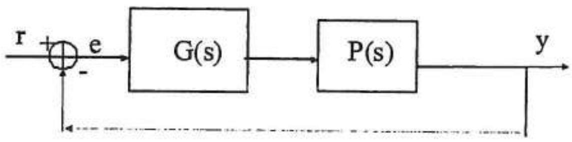
con

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ a & 1-a\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}b & 1\end{bmatrix}\qquad H(s)=\frac{1}{s+c}$$

Si determinino i tre parametri "a" , "b", "c" ed un controllore G(s) a <u>dimensione uno</u> in modo che:

(α) il processo e il controllore abbiano tutti gli autovalori raggiungibili ed osservabili;
(β) il sistema complessivo abbia 2 autovalori nascosti;
(γ) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a $(s+1)^2\,(s+2)^2$.

PROBLEMA 2
Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



La funzione di trasferimento del processo è pari a $P(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$.

A) Si determini un controllore G(s) a <u>dimensione due</u> in modo da verificare le seguenti specifiche:
(α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad ingressi r(t) = 5 + sen 2t sia nullo;
(β) la risposta y a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = sen t sia nulla;
(γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si disegni il luogo delle radici relativo alla domanda A).

TEMA.
Si dimostri che, assegnata una coppia di matrici (A, B), è possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori alla matrice A+BK (scegliendo opportunamente la matrice K), se e solo se tutti gli autovalori della matrice A sono raggiungibili.

Soluzione del problema 1

La funz. di trasf. del processo è $P(s) = \frac{s+b}{(s-1)(s+a)}$ con $a \neq b$ per rispettare la specifica (α).

Dato che il sistema complessivo deve avere due autovalori nascosti, conviene provare a risolvere il problema con un controllore che abbia la seguente struttura:

$$G(s) = K\frac{s+a}{s+b} \text{ con } a \neq b \text{ per rispettare la specifica } (\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = G(s)P(s) = \frac{K}{s-1}$$

Con la struttura suddetta, il sistema complessivo viene ad avere un autovalore nascosto irragg. ed oss. in $-a$ ed un autovalore nascosto ragg. ed inoss. in $-b$. Tenendo conto della specifica (γ), conviene scegliere $a=1$ e $b=2$ (oppure $a=2$ e $b=1$).

In questo modo, in base alla specifica (γ) restano da assegnare solo due autovalori: uno in -1 e l'altro in -2.

Dato che risulta $D_w = N_F N_H + D_F D_H$, si deve procedere alla seguente assegnazione di autovalori:

$$D_w = N_F N_H + D_F D_H = (s+1)(s+2) \quad \Rightarrow \quad K + (s-1)(s+c) = (s+1)(s+2) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad s^2 + (c-1)s - c + K = s^2+3s+2 \quad \Rightarrow \quad c=4,\ K=6$$

Soluzione del problema 2

La funz. di trasf. ing.-usc. e ing.-errore del sistema complessivo sono le seguenti:

$$W(s) = \frac{N_G N_P}{N_G N_P + D_G D_P}, \quad W_e(s) = \frac{D_G D_P}{N_G N_P + D_G D_P}.$$

Per quanto riguarda la specifica (α), per il principio di sovrapposizione degli effetti, devono essere nulle sia la risposta a reg. perm. corrispondente all'ingresso 5, sia la risposta a reg. perm. corrispondente all'ingresso sen 2t. Dato che D_P contiene il fattore s^2+4, la risposta a reg. perm. corrispondente all'ingresso sen 2t è già, automaticamente, nulla. Per fare in modo che sia nulla anche la risposta a reg. perm. corrispondente all'ingresso 5, è necessario inserire un polo in $s=0$ nel controllore.

Per soddisfare la specifica (β), è necessario inserire il fattore s^2+1 in N_G.

In base a quanto sopra, considerando che il controllore deve avere dimensione 2, la struttura di G(s) deve essere la seguente:

$$G(s) = K\frac{s^2+1}{s\,(s-p)} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = K\frac{s^2+1}{s\,(s-p)\,(s^2+4)}$$

Il problema della stabilità del sistema complessivo può essere studiato con il luogo delle radici (caso n-m=2; il centro degli asintoti è in p/2).

Nel caso n-m=2, affinchè tutti gli autovalori del sistema complessivo siano a parte reale negativa, occorre che il centro degli asintoti sia negativo. Si può allora scegliere, per esempio, p=-2, di modo che il centro degli asintoti sia in -1. Con tale scelta risulta quindi:

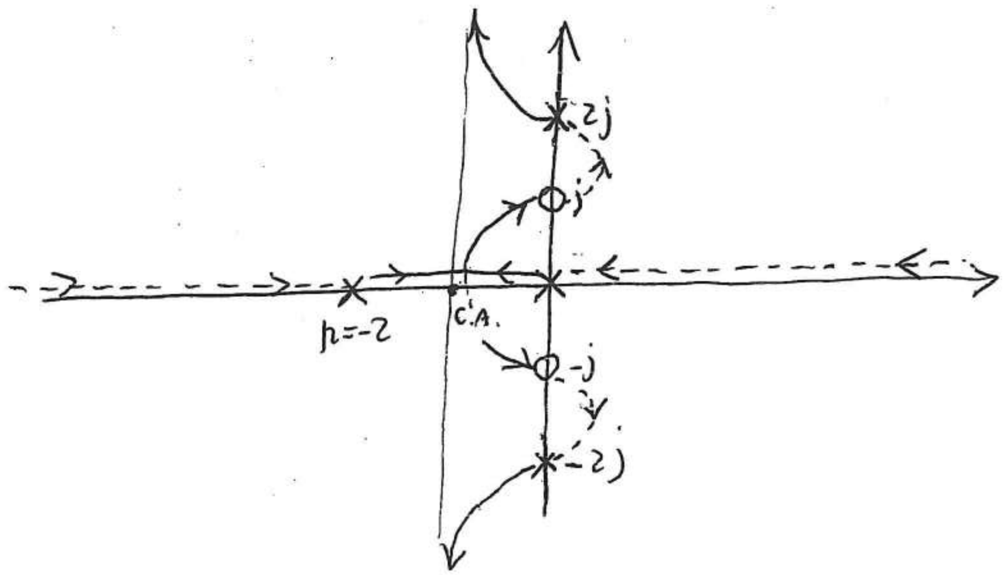
$$F(s) = K\frac{s^2+1}{s\,(s+2)\,(s^2+4)} \qquad \Rightarrow \qquad D_w = N_F + D_F = s^4 + 2s^3 + (K+4)s^2 + 8s + K$$

In base al criterio di Routh il sistema è asintoticamente stabile per K>0.

B) Il luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto

$F(s) = K\frac{s^2+1}{s\,(s+2)\,(s^2+4)}$ è il seguente:

561

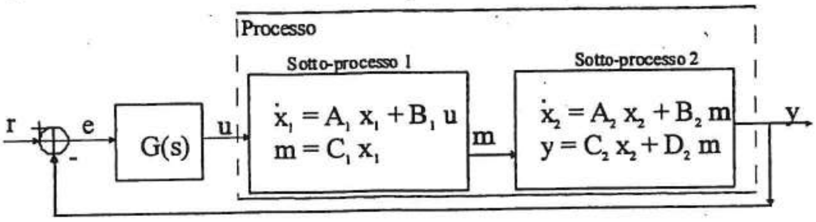


562

CONTROLLI AUTOMATICI -
Prova scritta del 13 gennaio 2014

PROBLEMA 1

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura. Il processo (tratteggiato in figura) è costituito dalla cascata di due sotto-processi 1 e 2.



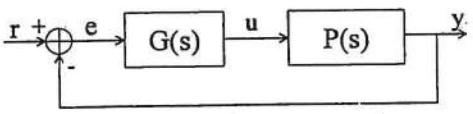
$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [\,1 \quad 0\,]; \qquad A_2 = 1 \quad B_2 = 1 \quad C_2 = 2 \quad D_2 = c$$

A) Si determinino i parametri "a", "b" e "c" nonché un controllore G(s) a dimensione minima in modo che:
  - α) il processo abbia un autovalore nascosto in -1;
  - β) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori in -1;
  - γ) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un riferimento r(t)=t sia nullo.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà e osservabilità degli autovalori.

PROBLEMA 2

Si consideri il seguente schema di controllo:



con $P(s) = \dfrac{1}{s-1}$

A) Si determinino i parametri a e b del controllore $G(s) = -\dfrac{1}{a}\dfrac{s-a}{s-b}$, in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche:
  - i) il modulo dell'errore a regime in risposta a un ingresso r(t) a rampa sia minore di o uguale a 2;
  - ii) ~~il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;~~
  - iii) il modulo del parametro a sia pari ad uno dei tre valori nell'insieme {0.1, 1, 10}.

B) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist (qualitativi) relativi alla funzione di trasferimento compensata a ciclo aperto $F(s)$. Utilizzando il criterio di Nyquist, si discuta la stabilità dei corrispondenti sistemi ad anello chiuso.

TEMA

L'osservatore asintotico dello stato di un processo:

1) si enuncino le condizioni di esistenza;

2) si dimostri che, soddisfatte le condizioni di esistenza, si può costruire un osservatore in grado di ricostruire asintoticamente lo stato di un processo.

Soluzione del problema 1

A) Le funzioni di trasferimento dei sotto-processi 1 e 2 sono le seguenti:

$$P_1(s) = \frac{1}{(s-a)\,(s-b)} \qquad\qquad P_2(s) = \frac{cs - c + 2}{s - 1}$$

Per soddisfare la specifica α), si deve creare una cancellazione polo-zero in -1 tra i due sottoprocessi. Ciò può essere ottenuto ponendo a=-1 e c=1.
Per soddisfare la specifica γ), la funzione di trasferimento ad anello aperto F(s)=G(s)P(s) deve avere due poli in s=0. Conviene allora porre b=0 in modo da creare il primo dei due poli in s=0.
Con le scelte suddette, la funzione di trasferimento del processo risulta:

$$P(s) = P_1(s)\,P_2(s) = \frac{1}{s\,(s-1)}$$

Per effettuare l'assegnazione degli autovalori richiesta dalla specifica β), e, al contempo, introdurre il secondo polo nella funzione di trasferimento ad anello aperto, si deve scegliere un controllore nella forma

$$G(s) = \frac{ds^2+es+f}{s(s+g)} \quad\Rightarrow\quad F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{ds^2+es+f}{s^2(s+g)(s-1)}$$

La relativa equazione Diofantina è la seguente:

$$D_F + N_F = s^2(s+g)(s-1) + ds^2+es+f = (s+1)^4 \qquad \Rightarrow d = 11\,;\ e = 4\,;\ f = 1\,;\ g = 5$$

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(s+1)^5$: un autovalore in -1 è raggiungibile ed inosservabile, i restanti quattro autovalori sono raggiungibili ed osservabili.

Soluzione del problema 2

A) La funzione in catena aperta del sistema è $F(s) = G(s)P(s) = -\frac{1}{a}\frac{s-a}{(s-b)(s-1)}$. La funzione di trasferimento di errore è pertanto $W_e(s) = \frac{1}{1+F(s)} = \frac{D_F(s)}{N_F(s)+D_F(s)} = \frac{(s-b)(s-1)}{-\frac{1}{a}(s-a)+(s-b)(s-1)}$.

Per la specifica i) bisogna imporre:

$$\lim_{t\to\infty}|e(t)| = \lim_{s\to 0}|sW_e(s)r(s)| = \lim_{s\to 0}\left|s\frac{(s-b)(s-1)}{-\frac{1}{a}(s-a)+(s-b)(s-1)}\frac{1}{s^2}\right| \le 2,$$

dove $r(s) = \frac{1}{s^2}$ è la trasformata di Laplace del riferimento a rampa $r(t) = t$.
Affinché la disequazione possa essere verificata, deve esistere un polo in 0 in catena aperta, ovvero bisogna imporre $b = 0$.

Si ottiene quindi $F(s) = -\frac{1}{a}\frac{s-a}{s(s-1)}$, e la specifica diventa:

$$\lim_{s\to 0}\left|\frac{s-1}{-\frac{1}{a}(s-a)+s(s-1)}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| \le 2,$$

che è evidentemente verificata per qualsiasi valore di a.

Specifica ii): il sistema complessivo può essere reso asintoticamente stabile. Infatti, il denominatore della funzione di trasferimento in catena chiusa è:

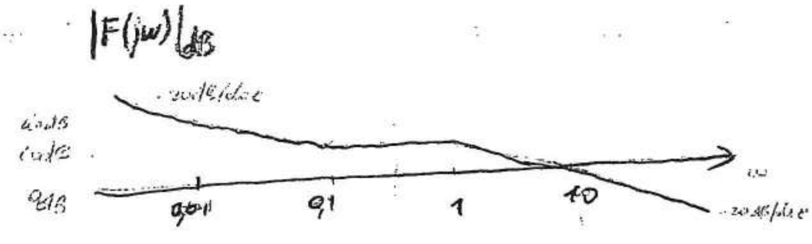
$$D_W(s) = D_F(s) + N_F(s) = s(s-1) - \frac{1}{a}(s-a) = s^2 - \left(1+\frac{1}{a}\right)s + 1,$$

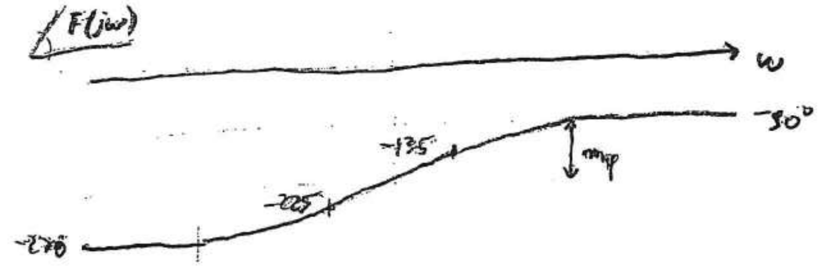
i cui coefficienti sono tutti positivi per $-1 < a < 0$.

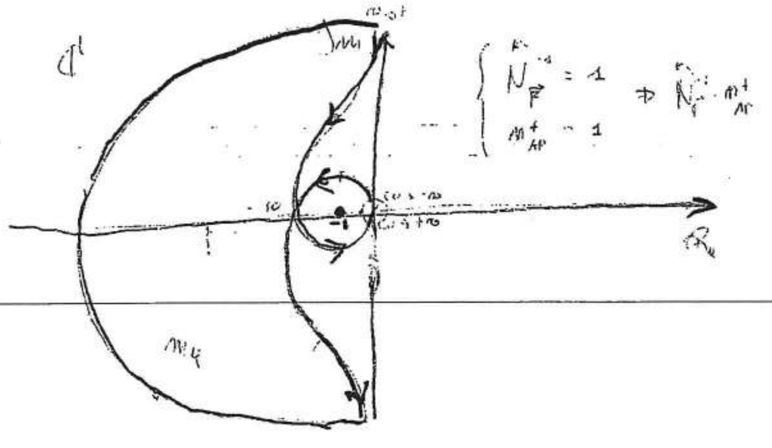
Per la specifica iii), l'unica scelta possibile è $a = -0.1$, per cui il controllore cercato è $G(s) = 10\frac{s+0.1}{s}$.

B) I diagrammi di Bode e di Nyquist sono i seguenti:

$$F(j\omega) = G(j\omega)P(j\omega) = 10\,\frac{j\omega+0,1}{j\omega}\cdot\frac{1}{j\omega-1} = -\frac{1+j\omega/0,1}{j\omega(1+j\omega)}$$







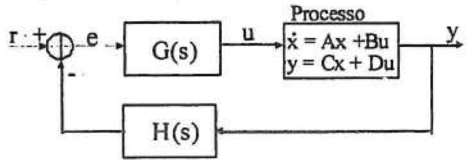
Il criterio di Nyquist è verificato, poiché il vettore complesso $\mathbf{F}(j\omega)$ percorre 1 giro in senso antiorario attorno al punto meno uno, per $-\infty < \omega < \infty$ ($\overline{N}_F^{-1} = 1$), e la funzione di trasferimento a catena aperta ha 1 polo a parte reale positiva ($n_{AP}^{+} = 1$).

CONTROLLI AUTOMATICI

Prova scritta del 12 febbraio 2014

PROBLEMA 1

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = 1$, $H(s) = \frac{1}{s}$

A) Si determinino il parametro "a" ed un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che:

α) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori in -1;

β) l'errore a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t) costante sia nullo.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda precedente, specificando le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2.

A) Con riferimento al processo del problema precedente, si scelga il parametro "a" in modo che:

- esista un osservatore asintotico dello stato del processo;
- la velocità di convergenza a zero tra la stima dell'errore dello stato e l'errore reale non possa essere superiore a e^{-2t}.

B) Per il processo di cui alla domanda A), si costruisca un osservatore asintotico dello stato.

PROBLEMA 3.

Si discuta il metodo di stabilizzazione, <u>basato sul luogo delle radici</u>, di un processo con le seguenti caratteristiche:

- il processo è instabile e non può essere stabilizzato con un controllore pari ad una costante;
- tutti gli zeri del processo sono a parte reale negativa;
- la differenza tra il numero di poli e il numero di zeri del processo è pari a 3;
- il centro degli asintoti del luogo delle radici del processo è positivo.

Soluzione del problema 1

A) Dato che il processo ha un autovalore nascosto (ragg. ed inoss.) in 1-a, e dato che, in base alla specifica α), tutti gli autovalori devono essere in -1, deve risultare, necessariamente, a = 2.

La funzione di trasferimento del processo risulta allora $P(s) = \frac{s-1}{s-2}$.

Per soddisfare la specifica β), deve esistere uno zero di molteplicità uno in s=0 nel polinomio $D_F D_H$. Stante la presenza del polo in s=0 in H(s), tale specifica è automaticamente soddisfatta.

Per soddisfare la specifica α), conviene scegliere un controllore con la seguente struttura:

$$G(s) = \frac{as+b}{s+c} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{as+b}{s+c}\,\frac{s-1}{s-2}$$

L'assegnazione degli autovalori richiesta risulta:

$$D_W = (as+b)(s-1) + (s+c)(s-2)\,s = s^3 + s^2(a+c-2) + s(-a+b-2c) - b = (s+1)^3 \quad \Rightarrow \quad a=14,\ b=-1,\ c=-9.$$

B) In base alle considerazioni di cui sopra, nel caso della domanda A) il polinomio caratteristico risulta:

$[s^2 + K s + K]\,(s + a - 1)$ con $K>0$ e $a>1$,

dove l' autovalore in 1-a è raggiungibile ed inosservabile, mentre i due autovalori del polinomio tra parentesi quadre sono raggiungibili ed osservabili.

Soluzione del problema 2

Dato che il processo ha un autovalore nascosto (ragg. ed inoss.) in 1-a, si deve scegliere a=3: in questo modo il processo ha un autovalore inosservabile in -2 che, essendo negativo, non preclude l'esistenza dell'osservatore asintotico, tuttavia limita la velocità di convergenza a e^{-2t}.

Per costruire l'osservatore asintotico dello stato e' sufficiente trovare una matrice G tale che

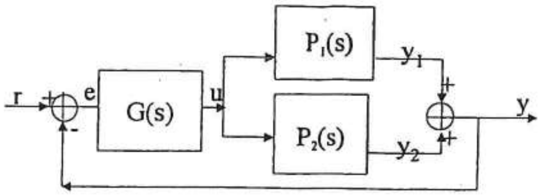
$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda+2)^2 \qquad \Rightarrow \qquad G = \begin{bmatrix} 5 \\ * \end{bmatrix}$$ dove "*" è un numero qualsiasi.

567

CONTROLLI AUTOMATICI

Prova scritta dell'11 aprile 2014

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $P_1(s) = \dfrac{1}{s+3}$, $P_2(s) = \dfrac{1}{(s+a)(s+3)}$

A) Si determini il parametro a e un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che:

α) l'errore e a regime permanente corrispondente a riferimenti r costanti sia nullo;
β) il processo (ossia il parallelo dei due sotto-processi) abbia un autovalore nascosto;
γ) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
δ) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori coincidenti.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A).

PROBLEMA 2.
Si consideri un classico schema di controllo a controreazione con il processo dato dalla funzione di trasferimento:

$P(s) = \dfrac{1}{s^2(s+3)}$

Si determini un controllore G(s), <u>a dimensione minina</u> in modo che il sistema sia asintoticamente stabile (<u>si disegni il luogo delle radici di interesse</u>);

PROBLEMA 3
Si illustri lo schema per l'assegnazione degli autovalori nel dominio del tempo e si dimostri il principio di separazione.

568

Soluzione del problema 1

A) La specifica β) è automaticamente verificata stante la presenza di un autovalore nascosto in -3 nel parallelo dei due sotto-processi 1 e 2. Tale autovalore nascosto, alla luce della specifica δ), obbliga a fare in modo che anche tutti gli altri autovalori del sistema complessivo siano in -3.
Scegliendo a=0 la specifica α) è soddisfatta.
Con tali scelte, la funzione di trasferimento del processo P(s) è pari a

$$P(s) = P_1(s) + P_2(s) = \frac{s+1}{s(s+3)}$$

Per soddisfare la specifica γ), alla luce della specifica δ), conviene cancellare il polo in –3 del processo con uno zero in -3 del controllore. Si può quindi scegliere un controllore a dimensione uno con la struttura:

$$G(s) = a\,\frac{s+3}{s+b} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = G(s)P(s) = a\,\frac{s+1}{s(s+b)}$$

ed imporre l'assegnazione di due autovalori non nascosti in -3:

$$D_W = N_F + D_F = a(s+1) + s(s+b) = s^2 + s(a+b) + a = (s+3)^2 \;\Rightarrow\; \quad a=9,\ b=-3$$

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è il seguente:

$$P(s) = (s+3)^4$$

Soluzione del problema 2

In base alla teoria del luogo delle radici, il caso proposto (n-m=3, centro degli asintoti a sinistra) si risolve con un controllore del tipo:

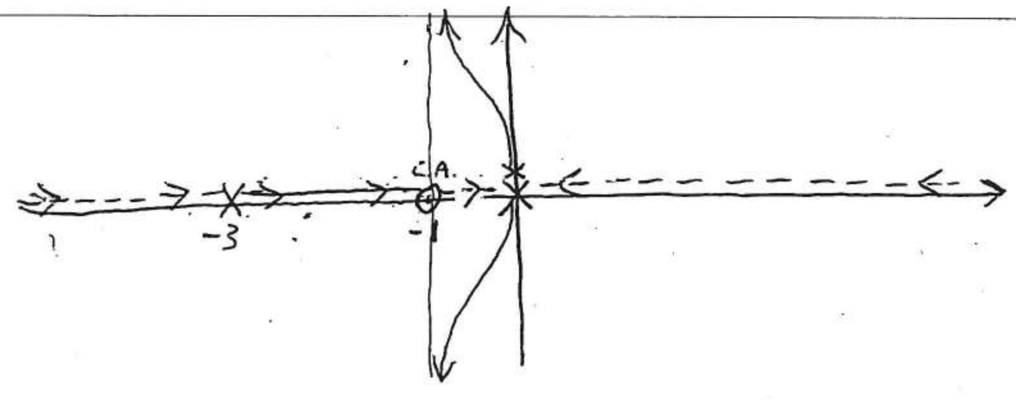
$$G(s) = K'\,\frac{s-z}{1+Ts}$$

con T>0 e sufficientemente piccolo (*polo lontano*), z<0 e tale da far rimanere a sinistra il centro degli asintoti (C.A.), ossia:

$$C.A. = \frac{(0+0-3)-z}{3-1} < 0$$

Si può scegliere, ad esempio, z=-1 $\Rightarrow$ C.A. = -1

Con tale scelta, il luogo delle radici (prima dell'aggiunta del polo lontano) di interesse è $F(s) = K'\,\frac{s+1}{s^2(s+3)}$



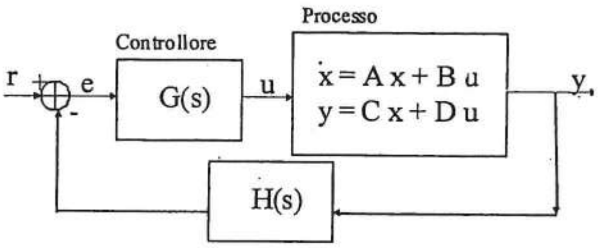
E' evidente che per K'>0 il sistema e' asintoticamente stabile.

SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICO 1- CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 6 giugno 2014

569

PROBLEMA 1

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il processo è caratterizzato dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = d. \text{ Risulta inoltre } H(s) = \frac{H}{s}.$$

Si determinino un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> e i parametri "d" ed "H" in modo che siano verificate le seguenti specifiche:

α) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;

β) la <u>risposta</u> a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = t sia uguale a 1/3;

γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con <u>tutti gli autovalori coincidenti</u>. <u>Si specifichino le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità dei vari autovalori del sistema complessivo</u>.

PROBLEMA 2

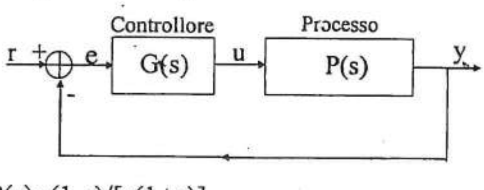
Si consideri un classico schema di controllo a controreazione con il processo dato dalla funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{1}{s^2\,(s+3)}$$

Si determini, utilizzando il metodo del luogo delle radici, un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u> in modo che il sistema sia asintoticamente stabile (<u>si disegnino i luoghi delle radici di interesse</u>).

PROBLEMA 3

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove G(s)=k (k costante reale) e P(s)=(1-s)/[s(1+s)].

A) Si determini (applicando ad esempio il criterio di Routh) per quali valori del parametro di controllo k il sistema complessivo risulta asintoticamente stabile.

B) Si determini per via analitica il valore del parametro k da imporre affinchè il margine di fase m_φ di F(s)=G(s)P(s) sia pari a 30°.

C) Con riferimento al valore del parametro k trovato al precedente punto B), si verifichi la stabilità del sistema complessivo applicando il criterio di Nyquist (si tracci il diagramma di Nyquist qualitativo della funzione di trasferimento d'anello aperto G(s)P(s) a partire dai diagrammi di Bode di G(jω)P(jω)).

Soluzione del problema 1.

La funzione di trasferimento del processo risulta $P(s) = \dfrac{d\,(s-1+1/d)}{s-1}$ con un autovalore nascosto (irraggiungibile ed osservabile) in - 2. Tale autovalore nascosto in -2, in base alla specifica γ), impone che anche tutti gli autovalori del sistema complessivo siano in -2.
L'altro autovalore nascosto (necessario per soddisfare la specifica α)) deve generarsi cancellando uno zero del processo con un polo del controllore e tale cancellazione deve necessariamente riguardare una coppia polo-zero in -2. Si deve quindi scegliere d=1/3, in modo che risulti $P(s) = \dfrac{1/3\ (s+2)}{s-1}$, e lo zero in -2 del processo possa venir cancellato da un polo in -2 del controllore (tale cancellazione genera un autovalore ragg. ed inoss.).

Conviene quindi tentare di scegliere un controllore (a dimensione 1) con la seguente struttura:
$G(s) = \dfrac{as+b}{s+2}$. Ciò implica $F(s) = P(s)\,G(s) = \dfrac{1/3\ (as+b)}{s-1}$

La funzione di trasferimento ingresso-uscita può essere scritta nella forma:

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \qquad \text{con } F(s) = \frac{N_F}{D_F}, \qquad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per soddisfare la specifica β), deve essere presente uno zero in s=0 nel numeratore di W(s), circostanza automaticamente soddisfatta poiché D_H=s. Inoltre, per soddisfare la specifica α) deve essere:

$\dfrac{W(s)}{s}\Big|_{s=0} = 1/3$, il che implica H = 3.

Infine, per soddisfare la specifica γ), si procede all'assegnazione di due autovalori in -2 (si noti che tali autovalori, essendo non nascosti, risultano raggiungibili ed osservabili), imponendo:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = as + b + (s-1)\,s = (s+2)^2.$$

Procedendo con il principio di identità dei polinomi si ottiene a = 5, b = 4.

In base a quanto sopra, il sistema complessivo ha quattro autovalori in -2, dei quali due non nascosti (ragg. e oss.) e 2 nascosti (uno irrag. ed oss., e l'altro ragg. ed inoss.)

Soluzione del problema 2

In base alla teoria del luogo delle radici, il caso proposto (n-m=3, centro degli asintoti a sinistra) si risolve con un controllore del tipo:

$$G(s) = K' \frac{s-z}{1+Ts}$$

con T>0 e sufficientemente piccolo (*polo lontano*), z<0 e tale da far rimanere a sinistra il centro degli asintoti (C.A.), ossia:

$$C.A. = \frac{(0+0-3)-z}{3-1} < 0$$

Si può scegliere, ad esempio, z=-1 ⇒ C.A. = -1.

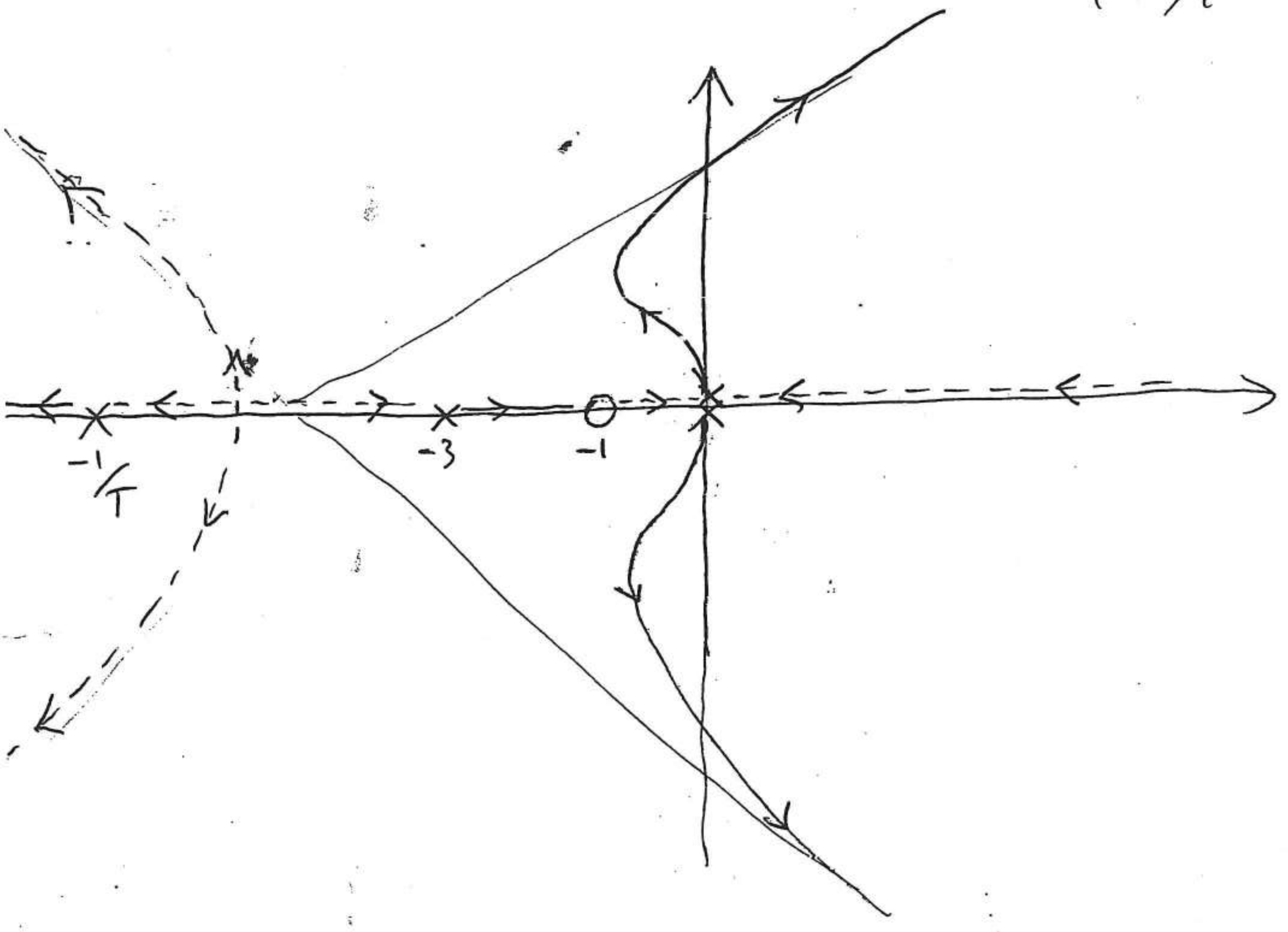
Con tale scelta, il luogo delle radici di interesse, prima dell'aggiunta del polo lontano, è $F(s) = K' \dfrac{s+1}{s^2\,(s+3)}$;

dopo l'aggiunta del polo lontano, è $F(s) = K' \dfrac{s+1}{s^2\,(s+3)(1+Ts)}$

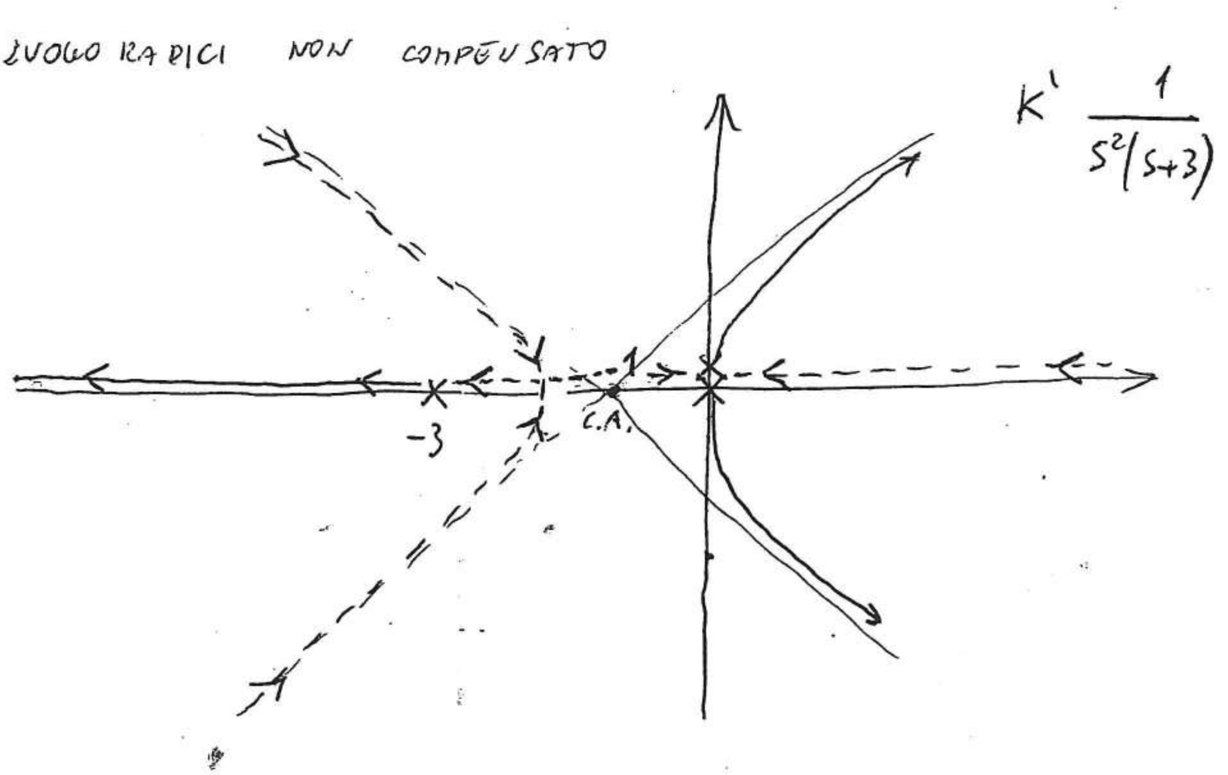
LUOGO DELLE RADICI CON L'AGGIUNTA DI UNO ZERO 572

IN -1 E UN POLO LONTANO IN $G(s)$

$$K' \frac{s+1}{s^2(s+3)(1+Ts)}$$



LUOGO RADICI NON COMPENSATO



LUOGO RADICI CON L'AGGIUNTA DI UNO ZERO IN -1 IN G(S)

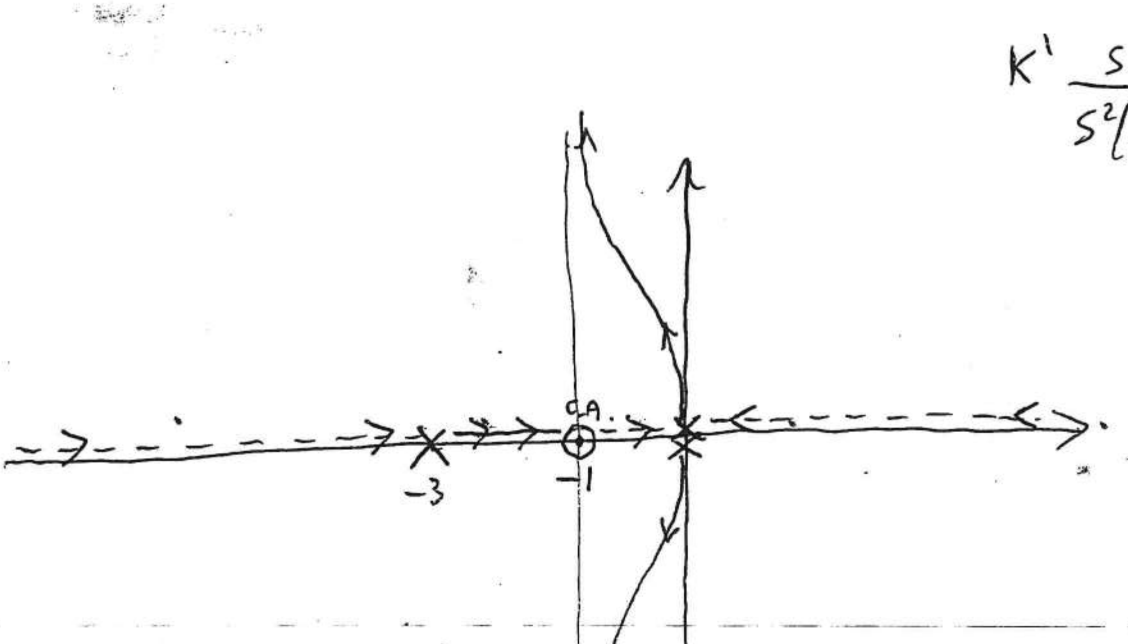
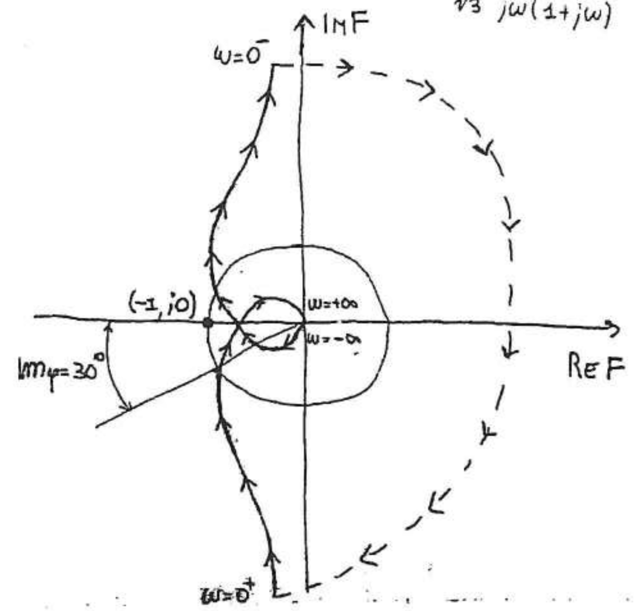


DIAGRAMMA DI NYQUIST QUALITATIVO DI $F(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(1-j\omega)}{j\omega(1+j\omega)}$



Il criterio di Nyquist per la stabilità asintotica del sistema complessivo risulta soddisfatto, essendo N=P=0 (dove N indica il numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist intorno al punto critico (-1, j0), contati positivi se in senso antiorario, e P denota il numero di poli a parte reale positiva della F(s)).

573

Soluzione del problema 3.

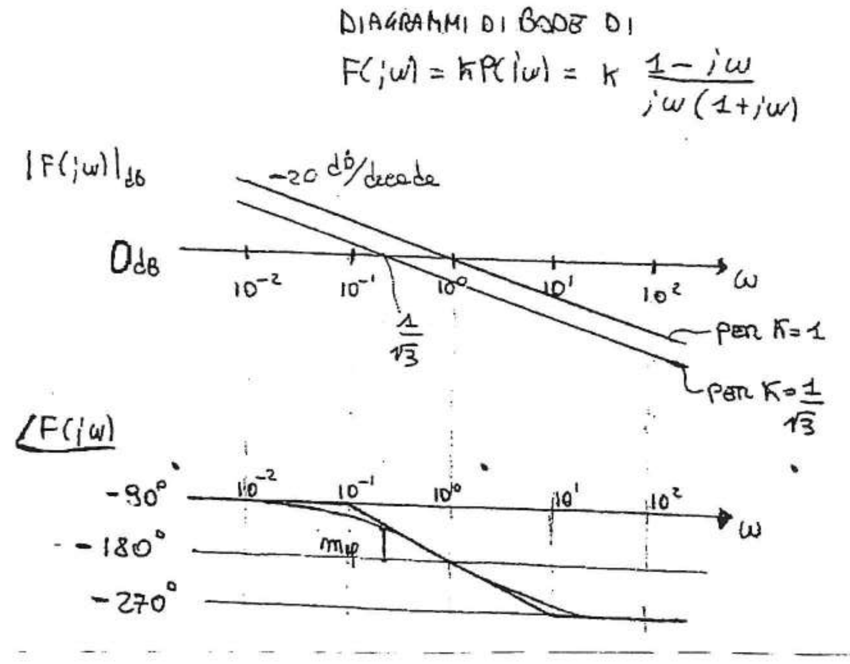
A)
La funzione di trasferimento riferimento-uscita (r-y) del sistema complessivo è data da:

$W(s) = F(s)/[1+F(s)] = N_F/(D_F+N_F)$ con $F(s) = G(s)P(s) = N_F/D_F$

Il denominatore della funzione di trasferimento W(s) è dato da $D_F + N_F = s(1+s) + k(1-s) = s^2 + (1-k)s + k$. Applicando il criterio di Routh si deduce che, ai fini della stabilità asintotica del sistema complessivo, deve essere 1-k>0 e k>0, da cui risulta la condizione **0<k<1.**

B)
La formula per il calcolo del margine di fase è: $m_\varphi = 180^\circ + \text{fase}(F(j\omega_t))$, dove F(s) = G(s)P(s) e ω_t denota la pulsazione di attraversamento (pulsazione per cui si ha $|F(j\omega_t)|=1$). Per sostituzione si ricava $30^\circ = 180^\circ - 90^\circ - 2\text{arctg}(\omega_t)$, da cui si evince che per il soddisfacimento della specifica è necessario imporre per la pulsazione di attraversamento ω_t un valore pari a $\boldsymbol{\omega_t = 1/\text{sqrt}(3)}$, dove sqrt() indica l'operazione di radice quadrata. Per definizione di pulsazione di attraversamento si ha $|F(j\omega_t)| = 1$. Il valore cercato per il parametro di controllo k si ottiene sostituendo in quest'ultima formula il valore della pulsazione di attraversamento che occorre imporre per il soddisfacimento della specifica ($\omega_t = 1/\text{sqrt}(3)$). In definitiva, svolgendo i conti si trova il valore $\boldsymbol{k = \omega_t = 1/\text{sqrt}(3)}$.

C)
I diagrammi di Bode di modulo e fase relativi alla funzione $F(j\omega)=G(j\omega)P(j\omega)$ sono riportati nella seguente figura:

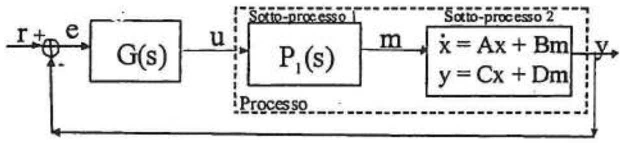


Il relativo diagramma di Nyquist qualitativo è riportato nella seguente figura:

575

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 4 luglio 2014

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



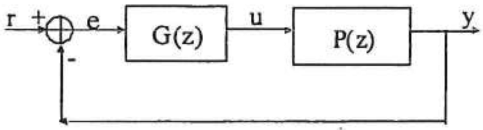
con $P_1(s) = \dfrac{s-2}{s\,(s+b)}$, $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = [\ 1 \quad 1\ ]$, $D = 1$

A) Si determinino i parametri "a" e "b", nonché un controllore G(s) a dimensione minima in modo che il processo abbia due autovalori nascosti e il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a $p(\lambda) = (\lambda+1)^2\,(\lambda+2)\,(\lambda+4)\,(\lambda+6)$.

B) Si determinino le caratteristiche di raggiungibilità e osservabilità degli autovalori del sistema complessivo di cui alla domanda precedente.

C) Si individui almeno un valore del parametro "a" in corrispondenza al quale il processo non è stabilizzabile.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $G(z) = K\dfrac{z+a}{z+b}$, $P(z) = \dfrac{z-2}{(z-1)\,(z+0{,}5)}$

A) Si determinino i parametri "K", "a", "b" che caratterizzano il controllore G(z) in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso $r(h)=\eta(h)$ (gradino) si annulli nel tempo più breve possibile (si indichi l'istante "l" a partire dal quale l'errore si annulla);
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Scelti i parametri "a", "b" determinati nella domanda precedente, si disegni il luogo delle radici. Dall'esame visivo del luogo, si determinino tutti i valori del parametro K in corrispondenza ai quali il sistema complessivo è stabile asintoticamente e tutti gli autovalori del sistema complessivo sono reali.

PROBLEMA 3

A) Si descriva, in generale, la struttura dell'osservatore asintotico dello stato di un processo.

B) Con riferimento al processo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $C = [\ 1 \quad b\ ]$, si determini:

B1) per quali valori dei parametri "a" e "b" non è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato;

B2) per quali valori dei parametri "a" e "b" l'osservatore asintotico dello stato esiste, ma non è possibile determinare arbitrariamente la velocità di convergenza a zero dell'errore tra stato stimato e stato reale.

Soluzione del problema 1

A) B) Il processo deve avere due autovalori nascosti: un autovalore nascosto (in -b) può essere creato tramite cancellazione polo-zero tra i sotto-processi 1 e 2; l'altro dovrà invece essere necessariamente un autovalore nascosto intrinseco nel sotto-processo 2.
I due autovalori del sottoprocesso 2 sono "a" e 1.
L'autovalore "a" è irraggiungibile se e solo se a = -2 ed osservabile per qualsiasi valore di "a".
L'autovalore 1 è sempre raggiungibile ed è inosservabile se e solo se a= 3.
Cnes per poter stabilizzare un processo con reazione dall'uscita è che tutti gli eventuali autovalori irrag. e/o inoss. siano a parte reale negativa. Il sotto-processo 2 non è quindi stabilizzabile con reazione dall'uscita per a = 3. Invece per a=-2 il sotto-processo 2 ha un autovalore nascosto in -2 (irrag. ed oss.) ed è stabilizzabile.
In base all'analisi precedente si deve scegliere a=-2. Con tale scelta la funzione di trasferimento del sotto-processo 2 risulta pari a

$$P_2(s) = \frac{s+4}{s-1}$$

Per generare il secondo autovalore nascosto del processo conviene scegliere b=4 in modo da provocare una cancellazione polo-zero in -4 tra i due sottoprocessi; tale cancellazione provoca un autovalore ragg. ed inoss. in -4. Con tale scelta risulta quindi

$$P(s) = P_1(s)\,P_2(s) = \frac{s-2}{s\,(s-1)}$$

A questo punto, restano da assegnare i tre autovalori (rag. e oss.) -1, -1 e -6. Conviene quindi scegliere un controllore G(s) a dimensione 1 con la forma:

$$G(s) = \frac{cs+d}{s+e} \quad \Rightarrow \quad F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{cs+d}{s+e}\,\frac{s-2}{s\,(s-1)}$$

Si può quindi procedere alla seguente assegnazione degli autovalori

$$D_W = N_F + D_F = (cs+d)\,(s-2) + s\,(s-1)\,(s+e) = (s+1)^2\,(s+6) \Rightarrow c = -25\ ,\ d = -3,\ e = 34.$$

C) In base all'analisi precedente il processo non è stabilizzabile per a=3 (autovalore nascosto a parte reale positiva intrinseco nel sotto-processo 2). Il processo non è stabilizzabile anchc pcr a=2 poiché il sotto-processo 2 avrebbe un polo in +2 che si cancellerebbe con lo zero in +2 del sotto-processo 1 creando un autovalore nascosto a parte reale positiva.

Soluzione del problema 2

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F}{N_F + D_F},\ W_e(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F} \quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F} =$$

Per verificare la specifica α), deve risultare:

$$e(z) = W_e(z)\,r(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\,\frac{z}{z-1} = \frac{S(z)}{z^{l-1}} \qquad \Rightarrow \frac{D_F}{N_F + D_F} = \frac{S(z)\,z-1}{z^{l}}$$

dove S(z) è un polinomio qualsiasi di grado non superiore a l-1 e l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Per verificare la condizione suddetta è sufficiente che (i) D_F abbia una radice in +1 (condizione automaticamente verificata, grazie al polo in +1 della P(z)) e (ii) si imponga $N_F + D_F = z^l$. Inoltre, per minimizzare l'istante "l" a partire dal quale l'errore si annulla conviene cancellare poli e zeri del processo interni al cerchio di raggio unitario e centro l'origine: conviene scegliere pertanto a=0,5. Con tale scelta si ottiene:

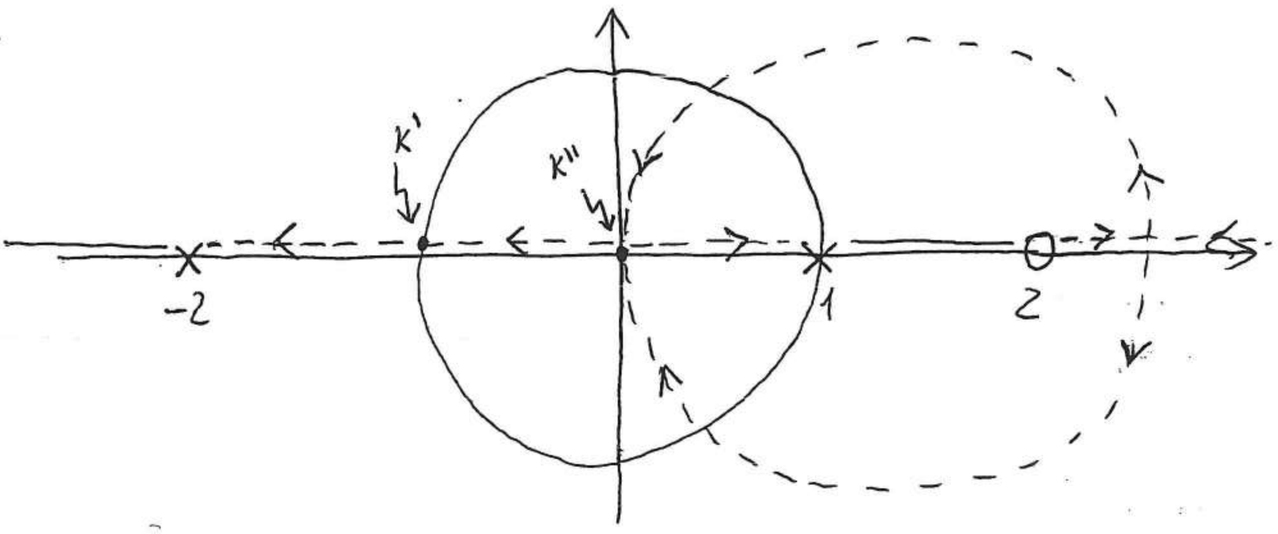
$$F(z) = K \frac{z-2}{(z-1)(z+b)}$$

Si impone allora l'assegnazione degli autovalori:

$N_F + D_F = (z-1)(z+b) + K(z-2) = z^2 \quad \Rightarrow \quad l=2$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene K= -1 , b=2.

B) Tenendo conto che l'assegnazione degli autovalori effettuata nella domanda A), presuppone la presenza di un punto singolare doppio in z=0, il luogo delle radici di $F(z) = K \frac{z-2}{(z-1)(z+2)}$ è il seguente:



Dall'esame dei due cammini degli autovalori del sistema complessivo, è evidente che nell'intervallo $0 > K' > K > K''$ tali autovalori sono reali ed interni al cerchio di raggio unitario e centro l'origine. Si noti che il valore K'' corrispondente al punto singolare doppio in zero, in base a quanto determinato nella domanda precedente, è uguale a -1; il valore K', corrispondente al punto di ascissa -1, può invece essere determinato ponendo z=-1 nell'equazione caratteristica del luogo $K'(z-2) + (z-1)(z+2)=0 \Rightarrow K' = -2/3$.

Soluzione del problema 3

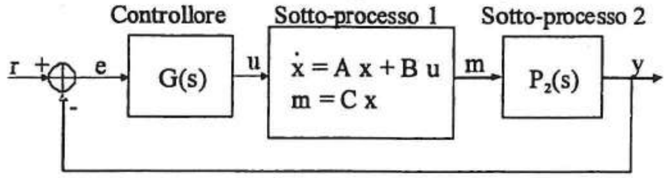
B1) L'osservatore asintotico dello stato esiste se tutti gli autovalori inosservabili sono a parte reale negativa. Nel caso specifico, l'autovalore +1 risulta inosservabile se a=1; l'autovalore "a" risulta inosservabile se b=0. Quindi, l' osservatore asintotico dello stato *non* esiste se a=1, oppure se b=0 AND a≥0.

B2) Per poter determinare ad arbitrio la velocità di convergenza, tutti gli autovalori devono essere osservabili. Quindi, l'osservatore asintotico dello stato esiste, ma non è possibile determinare arbitrariamente la velocità di convergenza a zero dell'errore tra stato stimato e stato reale se b=0 AND a<0.

578

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 16 settembre 2014

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = [\,1 \quad 0\,]$, $P_2(s) = \dfrac{s+3}{s-1}$.

A) Si determinino un controllore G(s) a dimensione minima e il parametro "a" in modo tale che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto raggiungibile ed inosservabile;
   γ) l'errore "e" a regime permanete in corrispondenza ad ingresso r = 1 (gradino unitario) sia minore di 0,1.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2

A) Si illustri sinteticamente (senza dimostrazioni) lo schema di controllo nel dominio del tempo che consente di stabilizzare asintoticamente un processo.

B) Si consideri un processo caratterizzato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = [\,1 \quad 0\,]$$

B1) Utilizzando lo schema di controllo nel dominio del tempo di cui alla domanda A), quale dei seguenti tre polinomi caratteristici e' possibile asssagnare al sistema complessivo e perchè?
$(s+2)^3$; $(s+1)^4$; $(s+1)^3(s+2)$

B2) Si proceda ad impostare il problema di assegnazione degli autovalori nel dominio del tempo imponendo il polinomio caratteristico scelto nella domanda B1) (non è richiesto di svolgere tutti i conti).

PROBLEMA 3 .

A) Si discuta, in generale, il metodo di stabilizzazione, basato sul luogo delle radici, di un processo con le seguenti caratteristiche:
- il processo non e' asintoticamente stabile e non può essere stabilizzato con un controllore pari ad una costante;
- tutti gli zeri del processo sono a parte reale negativa;
- la differenza tra il numero di poli e il numero di zeri del processo è pari a 3;
- il centro degli asintoti del luogo delle radici del processo è negativo.

B) Si individui un processo con quattro poli e uno zero che abbia tutte le caratteristiche di cui alla domanda A) e si proceda, utilizzando la tecnica del luogo delle radici, alla determinazione di un controllore a dimensione minima in corrispondenza al quale il sistema complessivo risulti asintoticamente stabile.

579

Soluzione del problema 1

A) Dato che il sotto-processo 1 ha tutti gli autovalori osservabili, l'autovalore nascosto richiesto dalla specifica β) deve essere creato con una cancellazione polo-zero.
La funzione di trasferimento del sotto-processo 1 è pari a

$$P_1(s) = \frac{s+2}{(s+a)\,(s-1)}\,.$$

Allora, per creare la cancellazione di cui sopra, occorre porre a=3.
Con tale posizione, risulta:

$$P(s) = P_1(s)\,P_2(s) = \frac{s+2}{(s-1)^2}$$

Si puo' allora tentare di risolvere il problema con un controllore a dimensione zero

$$G(s) = K \quad \Rightarrow \quad F(s) = K\,\frac{s+2}{(s-1)^2} \quad \Rightarrow \quad W_e(s) = \frac{D_F}{N_F + D_F} = \frac{(s-1)^2}{K(s+2)+(s-1)^2}$$

La specifica γ) impone quindi:

$$W_e(0) < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2K+1} < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad K > 4{,}5$$

Risulta inoltre:

$$D_W = N_F + D_F = K(s+2) + (s-1)^2 = s^2 + s\,(K-2) + 2K + 1$$

In base al criterio di Routh, il sistema e' asintoticamente stabile (specifica α) per K>2.
In conclusione, tutte le specifiche sono rispettate scegliendo K > 4,5.

Soluzione del problema 2

B1) Nel processo è presente un autovalore irraggiungibile e osservabile in -2.

Dato che lo schema di controllo nel dominio del tempo porta all'assegnazione di 2n (n=dim A) autovalori (quindi, 4 autovalori nel caso proposto), e dato che gli autovalori nascosti devono obbligatoriamente essere presenti tra quelli che si asegnano, l'unico polinomio caratteristico assegnabile tra i tre proposti è $(s+1)^3(s+2)$.

B2) Si deve determinare K in modo che:

$$|\lambda I - (A+BK)| = (\lambda+1)\,(\lambda+2)$$

e determinare G in modo che:

$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda+1)^2$$

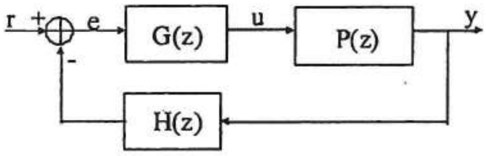
Si noti che l'autovalore -2, essendo irraggiungibile, deve essere obbligatoriamente assegnato ad A+BK.

580

CONTROLLI AUTOMATICI

Prova scritta del 31 ottobre 2014

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



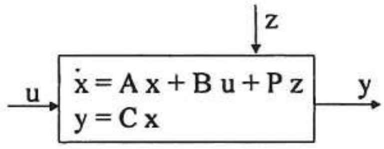
dove $P(z) = \dfrac{(z+0,6)\,(z+0,3)}{(z-0,4)\,(z-0,2)}$, $H(z) = \dfrac{1}{z-1}$

A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:

- α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h)=h (rampa) si annulli nel più breve tempo possibile (si indichi l'istante a partire dal quale l'errore si annulla);
- β) tutti gli autovalori del sistema complessivo abbiano modulo minore di 0,5.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2.
Si consideri il processo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix}$

<u>Il disturbo z è misurabile</u>.

A) Si scelga il parametro "a" e si progetti uno schema di controllo a dimensione minima in maniera da verificare le seguenti specifiche:

- α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti;
- β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
- γ) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

B) Si discuta il vantaggio dello schema di controllo a doppia controreazione, rispetto a quello a controreazione semplice.

PROBLEMA 3

Si dimostri che nella cascata di due sistemi caratterizzati rispettivamente dalle funzioni di trasferimento:

$P_1(s) = \dfrac{1}{s+1}$, $P_2(s) = \dfrac{s+1}{s-1}$

è presente un autovalore nascosto raggiungibile ed inosservabile in −1.

Soluzione del problema 1

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F N_H}{N_F N_H + D_F D_H},\ W_e(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F}\ ,\ H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per verificare la specifica α), deve essere presente uno zero doppio in +1 nella $W_e(z)$ (uno zero è già presente, grazie al polo in +1 di H(z)) e si deve imporre $N_F N_H + D_F D_H = z^l$ dove l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Si puo' allora scegliere:

$$G(z) = \frac{az + b}{z + c}\,\frac{(z - 0{,}4)\,(z - 0{,}2)}{(z - 1)\,(z + 0{,}3)} \qquad \Rightarrow \qquad F(z) = \frac{az + b}{z + c}\,\frac{z + 0{,}6}{z - 1}$$

Si noti che la cancellazione di una coppia polo-zero in -0,3 provoca la comparsa di un autovalore ragg. ed inoss. in -0,3, mentre la cancellazione di due coppie zero-polo in +0,4 e +0,2 provocano la comparsa di due autovalore irragg. ed oss. in +0,4 e +0,2. Si noti inoltre che lo zero in -0,6 di P(z) non può essere cancellato per non violare la specifica β).

Si impone allora:

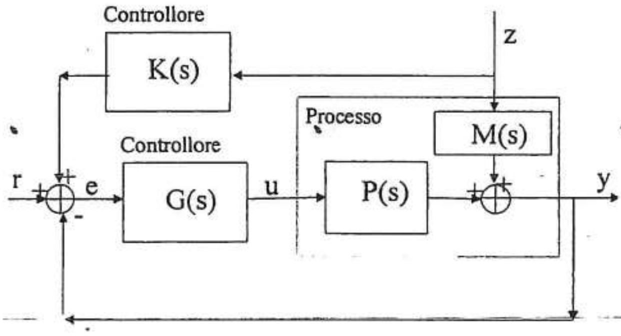
$$N_F N_H + D_F D_H = (az + b)\,(z + 0{,}6) + (z + c)\,(z - 1)^2 = z^3 \qquad \Rightarrow \qquad l=3$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene a=1,48 ; b= -0,86 ; c=0,52.

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $z^3(z+0{,}3)(z-0{,}4)\,(z-0{,}2)$ dove i tre autovalori in zero (derivanti dall'assegnazione degli autovalori) sono ragg. e oss., l'autovalore in -0,3 è ragg. e inoss., mentre gli autovalori 0,2 e 0,4 sono irragg. e oss..

Soluzione del problema 2

A) Dato che il disturbo è misurabile, è possibile progettare uno schema di controllo a doppia controreazione del tipo:



dove $P(s) = M(s) = \dfrac{s + a - 1}{(s - 1)\,(s + 2)}$

Affinchè il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto (pur rimanendo asintoticamente stabile), si deve scegliere a=3; in questa maniera si crea un autovalore ragg. ed inoss. in -2 (e quindi, in virtù della specifica α), anche tutti gli altri autovalori del sistema complessivo devono essere in -2). Con tale scelta risulta allora:

$$P(s) = M(s) = \frac{1}{s-1}$$

Si può allora di stabilizzare il sistema complessivo con un controllore G(s) a dim. zero del tipo

$$G(s) = K \;\Rightarrow F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{K}{s-1}$$

Procedendo all'assegnazione degli autovalori si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = K + (s-1) = s + 2$$

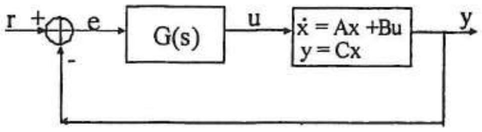
si deduce che deve essere K = 3.

Si deve infine scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)=0$ ottenendo la reiezione completa del disturbo. Svolgendo i conti si ottiene:

$$K(s) = -\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\frac{1}{K} = -\frac{1}{3}$$

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 13 gennaio 2015

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [\ a+1 \quad 1\ ]$.

A) Si determinino i parametri "a" e "b", nonchè un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> in modo tale che:
   1) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto in -2 irraggiungibile ed osservabile;
   2) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori distinti e a parte reale minore di -1;
   3) l'errore "e" a regime permanente per ingresso $r(t)=t^2$ sia, in modulo, minore di 2.

B) Considerando il controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2

Si consideri lo stesso schema di controllo di cui al problema 1 e si ponga $a = 1$ e $b = -1$.

A) Si determini un controllore $G(s) = K$ in modo tale che:
   1) la risposta "y" a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t)=1$ sia, in modulo, non inferiore a 2;
   2) il sistema complessivo sia stabile asintoticamente con margine di fase il piu' elevato possibile. Si determini analiticamente il margine di fase ottenuto.

B) Considerando il controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

TEMA

Si descrivino le peculiarità delle metodologie di controllo dei sistemi tempo discreti, rispetto a quelle dei sistemi tempo continui.

Soluzione del problema 1

A) Per soddisfare la specifica 1), dato che entrambi gli autovalori del processo ("a" e "b") sono raggiungibili, è indispensabile creare una cancellazione zero-polo in -2 tra controllore e processo. Si deve quindi scegliere "a" (oppure "b") uguale a -2 (in modo che il processo abbia un polo in -2) e inserire uno zero in -2 nel controllore G(s).

Inoltre, per soddisfare la specifica 3) e' necessario che nella funzione di trasferimento ad anello aperto F(s)=G(s)P(s) sia presente un polo di molteplicità 2 in s=0. Nell'ottica di minimizzare la dimensione del controllore, si deve allora scegliere "b" (oppure "a") uguale a zero (in modo da avere un primo polo in s=0 nella F(s)) e inserire un secondo polo in s=0 nel controllore G(s).

In base alle considerazioni di cui sopra, la funzione di trasferimento del processo, diventa $P(s) = \dfrac{s+1}{s\,(s+2)}$ e si può tentare di risolvere il problema con un controllore G(s) a dimensione uno con la struttura:

$$G(s) = K\,\frac{s+2}{s} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{N_F}{D_F} = G(s)P(s) = K\,\frac{s+1}{s^2}$$

Per soddisfare la specifica 3) deve risultare:

$$2\left|\,\frac{W_e(s)}{s^2}\Big|_{s=0}\right| < 2 \qquad \Rightarrow \qquad 2\left|\,\frac{D_F}{N_F + D_F}\,\frac{1}{s^2}\Big|_{s=0}\right| < 2 \qquad \Rightarrow \qquad |K| > 1$$

Per soddisfare la specifica 2), devono essere a parte reale minore di -1 le radici del seguente polinomio:

$N_F + D_F = s^2 + K\,s + K$ (*)

Applicando la trasformazione s-> s-1 ed applicando il criterio di Routh, si deduce che gli autovalori sono a parte reale minore di -1 per K>2. Infine, dall'esame della (*), è evidente che si debba escludere il valore K=4 in corrispondenza del quale tutti gli autovalori del sistema complessivo risulterebbero coincidenti in -2 (e quindi non distinti).

Sulla base dei risultati ottenuti, il controllore suddetto soddisfa tutte le specifiche purchè si scelga K>2 AND K≠4.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è il seguente:

$(s + 2)\,(s^2 + K\,s + K)$

dove l'autovalore - 2 è irrag. e oss, mentre gli altri due autovalori sono ragg. e oss.

Soluzione del problema 2

A) La funzione di trasferimento del processo risulta $P(s) = \dfrac{1}{s-1}$. Nel processo è presente un autovalore raggiungibile ed inosservabile in -1.

Utilizzando il criterio di Routh, è evidente che il sistema è stabile asintoticamente per $K > 1$.

Dall'esame dei diagrammi di Bode di P(s) si constata che per massimizzare il margine di fase occorre scegliere il modulo di K più grande possibile.

Per soddisfare la specifica 1), tenendo conto che (come detto sopra) K deve essere maggiore di 1 (per garantire la stabilità), deve risultare:

$|W(0)| \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{K}{K+s-1}\Big|_{s=0}\right| \geq 2 \quad \Rightarrow \quad 1 < K \leq 2$

Conviene quindi scegliere K= 2

Per tale scelta risulta $F(s) = G(s)P(s) = \dfrac{2}{s-1}$.

La pulsazione di attraversamento ω_t si deduce imponendo:

$|F(j\omega_t)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_t = \sqrt{3}$

In corrispondenza a tale pulsazione di attraversamento, la fase assume il valore:

$\mathrm{Fase}[F(j\sqrt{3})] = -120° \quad \Rightarrow \quad m_\varphi = 60°$

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è il seguente:

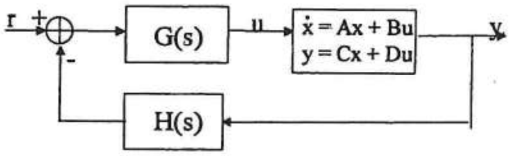
$(s+1)^2$

dove uno dei due autovalori in - 1 è rag. e oss., mentre l'altro è ragg. ed inoss.

586

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 12 febbraio 2015

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

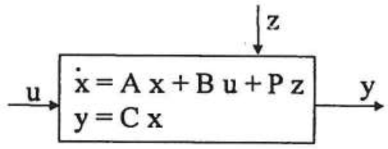


dove $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\,1 \quad 0\,]$, $D = 1$, $H(s) = \frac{1}{s}$

A) Si determini un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che:
   - α) la risposta y a regime permanente corrispondente al riferimento $r(t)$ = sen t sia nulla,
   - β) il polinomio caratteristico del sistema complessivo abbia un autovalore in -2 e tutti gli altri autovalori in -1;
   - γ) il sistema complessivo abbia tre autovalori nascosti.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda precedente, specificando le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri il processo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\,1 \quad 1\,]$

<u>Il disturbo z è misurabile</u>.

A) Si progetti uno schema di controllo a dimensione zero in modo da verificare le seguenti specifiche:
   - α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   - β) il transitorio sia privo di oscillazioni e si esaurisca quanto più velocemente possibile;
   - γ) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

B) Si tracci il luogo delle radici di interesse discutendo la congruenza del luogo con la specifica β).

TEMA

Si dimostri il principio di separazione.

Soluzione del problema 1

A) La funzione di trasferimento del processo P(s) è pari a

$$P(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

Si nota la presenza nel processo di un autovalore irraggiungibile ed inosservabile in "-1" che è compatibile con le specifiche β) e γ). La funzione di trasferimento ingresso uscita risulta pari a

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{D_F D_H + N_F N_H} \quad \text{con } F = \frac{N_F}{D_F} = G\,P\,, \quad H = \frac{N_H}{D_H}$$

La specifica α) richiede la presenza di un fattore $s^2 + 1$ a numeratore della W(s), fattore che deve essere necessariamente inserito in N_F e quindi in N_G.

Per soddisfare la specifica γ), il secondo e il terzo autovalore nascosto (oltre quello già citato che è presente nel processo) deve essere necessariamente ottenuto cancellando lo zero del processo in -2 e il polo del processo in -1. La cancellazione della coppia polo-zero in -2 provoca la presenza di un autovalore nascosto (raggiungibile ed inosservabile) in -2 che è compatibile con la specifica β). Parimenti, la cancellazione della coppia zero-polo in -1 provoca la presenza di un autovalore nascosto (irraggiungibile ed osservabile) in -1 che è compatibile con la specifica β).

Alla luce di quanto sopra, la struttura (a dimensione 3) appropriata per la G(s) è la seguente:

$$G(s) = a\,\frac{s+1}{s+2}\,\frac{s^2+1}{s^2+bs+c} \quad \Rightarrow \quad F(s) = a\,\frac{s^2+1}{s^2+bs+c}$$

Per soddisfare la specifica β), le radici del denominatore della funzione di trasferimento ingresso-uscita (autovalori del sistema complessivo ragg. ed oss.) devono essere tutte uguali a -1 in quanto l'unico autovalore in -2 compatibile con tale specifica è necessariamente quello originato dalla cancellazione della coppia polo-zero in -2 di cui sopra. Si deve quindi imporre:

$$D_W = D_F D_H + N_F N_H = s\,(s^2 + bs + c) + a\,(s^2 + 1) = s^3 + s^2\,(a + b) + cs + a = (s + 1)^3$$

Utilizzando il principio di identità dei polinomi si deduce a=1, b=2, c=3.

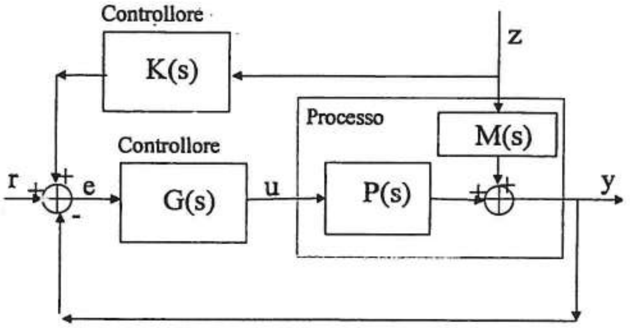
B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è il seguente:

$$P(s) = (s+2)\,(s+1)^5$$

dove l'autovalore in -2 è ragg. ed inoss., un autovalore in -1 è irrag. e inoss., un altro autovalore in -1 è irrag. ed oss., e gli altri tre autovalori in -1 sono ragg. ed oss.

Soluzione del problema 2

A) Dato che il disturbo è misurabile, è possibile progettare uno schema di controllo a doppia controreazione del tipo:

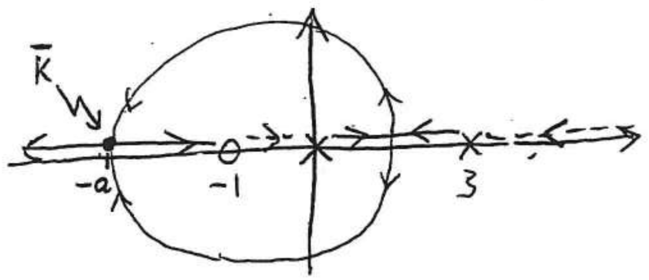


dove $P(s) = M(s) = \frac{s+1}{s\,(s-3)}$

Come richiesto dal testo del problema, utilizzando un controllore G(s) a dimensione zero, si ottiene:

$$G(s) = K \;\Rightarrow F(s) = K\,\frac{s+1}{s\,(s-3)}$$

Il luogo delle radici è il seguente:



Come evidente dal luogo delle radici, per soddisfare le specifiche α) e β), occorre scegliere $K=\overline{K}$. Infatti, per tale valore di K, entrambi gli autovalori del sistema complessivo sono reali garantendo un transitorio privo di oscillazioni; inoltre, per tale valore di K, il minimo dei due autovalori (che è quello che determina la velocità di esaurimento del transitorio) assume il massimo valore. Dato che per $K=\overline{K}$ entrambi gli autovalori coincidono con un valore *a* reale e negativo, per trovare tale valore è sufficiente risolvere con il principio di identità dei polinomi la seguente espressione:

$$D_W = N_F + D_F = \overline{K}\,(s+1) + s\,(s-3) = s^2 + s\,(\overline{K} - 3) + \overline{K} = (s+a)^2 \text{ con } a>0.$$

Si ricava $\overline{K} = 9$, a = 3.

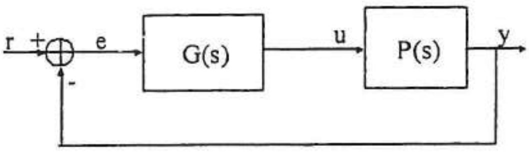
Si deve infine scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)=0$ ottenendo la reiezione completa del disturbo. Svolgendo i conti si ottiene:

$$K(s) = -\,\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\,\frac{1}{K}$$

589

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 13 aprile 2015

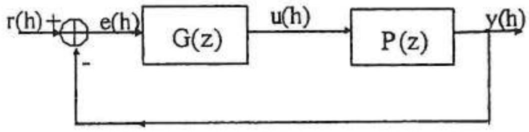
PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $P(s) = \dfrac{(s+3)\,(s+1)}{(s+2)^2\, s}$.

A) Si determini un controllore G(s) a dimensione minima in modo tale che:
   α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente al riferimento r(t)=t sia nullo;
   β) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a $(s+1)^4\,(s+2)\,(s+3)$
   γ) i sei autovalori di cui al punto β) siano tre non nascosti e tre nascosti (se ne specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità).

PROBLEMA 2 Si consideri il seguente schema di controllo a tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{z+1}{(z-0{,}5)\,(z-1)}$

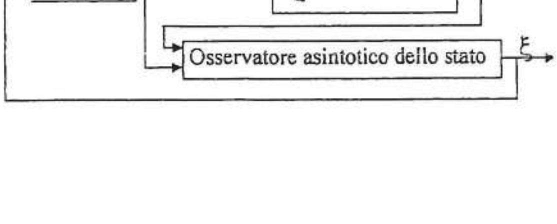
A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso costante r(h) = η(h) (a gradino) sia nullo in tempo finito;
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini l'intera espressione dell'errore e(h) corrispondente all'ingresso costante r(h) = η(h) (a gradino).

C) Si disegni il luogo delle radici relativo alla F(z)=G(z)P(z) dove G(z) è il controllore individuato nella domande A) e P(z) è il processo assegnato. Si determini, dall'esame del luogo, per quali valori del parametro K' il sistema è asintoticamente stabile con il transitorio privo di oscillazioni.

PROBLEMA 3 .

A cosa serve lo schema di controllo riportato in figura?
Come si determinano la marice K e la matrice G che caratterizza l'osservatore asintotico dello stato?



SITI UTILI

* LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA AUTOMATICA (CONTROL ENGINEERING)

diag.uniroma1.it/automatica

* LABORATORIO DI CONTROLLO DELLE RETI (per TESI DI LAUREA DI PRIMO E SECONDO LIVELLO)

labreti.ing.uniroma1.it

* RICERCA NELL'AMBITO DEI PROGETTI EUROPEI

ec.europa.eu/programmes/horizon2020

Per arrivare ai work programmes cliccare su HORIZON 2020 Programme

Soluzione del problema 1

In base alla specifica α), la funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) deve avere un polo di molteplicità doppia in s=0. Dato che un polo in s=0 è già presente nel processo P(s), sarà necessario inserire un secondo polo in s=0 nel controllore G(s).

Per creare tre autovalori nascosti che siano compatibili con la specifica β) si devono creare due cancellazioni polo-zero rispettivamente in -1 e -3 (autovalori ragg. e inoss.) e una cancellazione zero-polo in -2 (autovalore irragg. e oss.), per cui la funzione di trasferimento del controllore deve essere del tipo:

$$G(s) = \frac{(s+2)\,(as^2+bs+c)}{s\,(s+1)\,(s+3)} \quad \Rightarrow \quad F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{as^2+bs+c}{s^2\,(s+2)}$$

Procedendo all'assegnazione dei tre autovalori residui in -1 (ragg. ed oss.), si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = s^2\,(s+2) + as^2 + bs + c = (s+1)^3 \quad \Rightarrow \quad a=1,\ b=3,\ c=1$$

Soluzione del problema 2

A) Per ottenere errore nullo a partire da un istante finito l si deve far in modo che la F(z)=G(z)P(z) abbia un polo in z=1 e risulti $N_F + D_F = z^l$. La prima condizione è automaticamente verificata dato che il polo in z=1 è già presente nel processo.

Conviene quindi scegliere un controllore (a dimensione due) con la struttura:

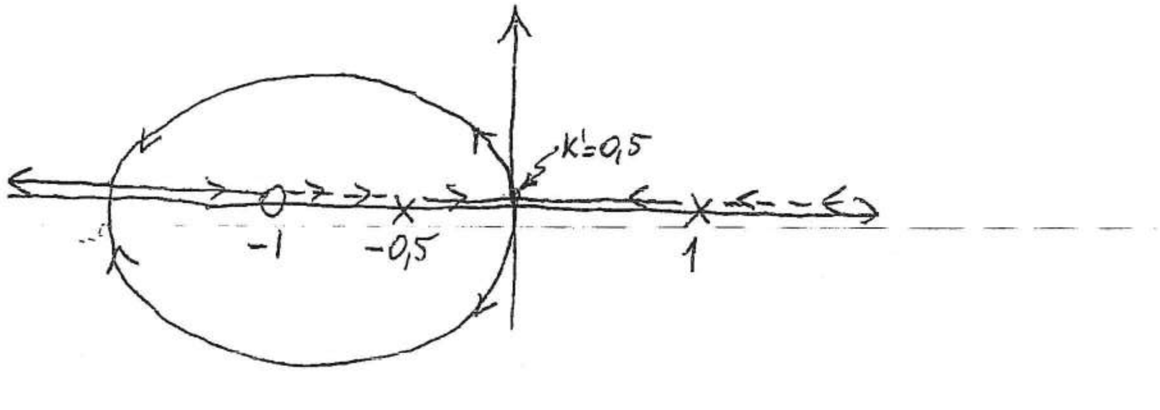
$$G(z) = a\,\frac{z-0{,}5}{z+b} \Rightarrow F(z) = a\,\frac{z+1}{(z-1)(z+b)}\ ,\ l=2$$

Imponendo $N_F + D_F = z^2$, si ottiene:

$$N_F + D_F = a\,(z+1) + (z-1)(z+b) = z^2 + z(a+b-1) + a - b = z^2 \Rightarrow a=b=0{,}5$$

B) $$e(z) = W_e(z)\,r(z) = \frac{D_F}{N_F+D_F}\,\frac{z}{z-1} = \frac{(z-1)\,(z+0{,}5)}{z^2}\,\frac{z}{z-1} = \frac{z+0{,}5}{z} = 1 + \frac{0{,}5}{z} \Rightarrow e(h) = \delta(h) + 0{,}5\,\delta(h-1)$$

C) Il luogo delle radici è relativo alla $F(z) = K'\,\frac{z+1}{(z-1)(z+0{,}5)}$, in cui si deve tener conto che (in base all'assegnazione di autovalori effettuata nella domanda A)) per K'=0,5 si ha un punto singolare doppio in z=0. Il luogo risulta quindi il seguente:



Dall'esame visivo del luogo è evidente che tutti e due gli autovalori sono sia interni al cerchio di centro origine e raggio unitario (il che rende il sistema asintoticamente stabile), sia reali (il che rende il transitorio privo di oscillazioni) quando il parametro K' è compreso tra 0 e 0,5.

591

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 9 giugno 2015

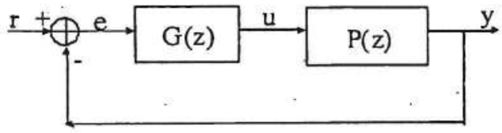
PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

dove $A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_1 = [\ 0{,}5 \quad 1\ ]$ $\quad P_2(s) = \dfrac{s-a}{s+1}$.

A) Si determinino il parametro "a" ed un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> in modo tale che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori a parte reale minore di -2;
   β) l'errore "e" a regime permanente per ingresso r(t) = t sia uguale a 0,1.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domande A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:

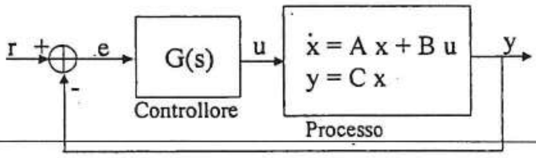


dove $P(z) = \dfrac{1}{(z-1)\,(z-0{,}5)}$

A) Si determini un controllore G(z) in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h)= h (rampa) si annulli nel tempo più breve possibile (si indichi l'istante "l" a partire dal quale l'errore si annulla);
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si disegni il luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto F(z)=G(z)P(z) individuata nella domanda A), evidenziando la congruenza del luogo con l'assegnazione degli autovalori effettuata nella domanda A).

PROBLEMA 3 . Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$, $C = [\ c \quad 1\ ]$

A) Per quali valori dei parametri "b" e "c" il sistema complessivo non è stabilizzabile?
B) Per quali valori dei parametri "b" e "c" il sistema complessivo è stabilizzabile, ma non si possono assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema complessivo?
C) Scelto c=0,5 si costruisca un osservatore asintotico dello stato del processo (si discuta la schema di controllo e si imposti la condizione per la determinazione della matrice G senza fare i conti) e si indichi qual'è la massima velocità di convergenza a zero tra lo stato reale e lo stato stimato che può essere ottenuta.

Soluzione del problema 1 592

A) Il sotto-processo 1 ha funzione di trasferimento $P_1(s) = \frac{2}{s-a}$. In tale sotto-processo esiste un autovalore nascosto (irraggiungibile ed inosservabile) in "a".

Con tale scelta la funzione di trasferimento del processo risulta pari a

$$P(s) = P_1(s)\,P_2(s) = \frac{2}{s+1}$$

Un secondo autovalore nascosto in "a" si crea dalla cancellazione polo-zero (autovalore raggiungibile ed inosservabile). In base alla specifica α), "a" deve essere un numero reale minore di -2; si sceglie, ad esempio, a= -3.
In base alla specifica β), il controllore deve avere un polo in s=0 e deve risultare:

$$\left.\frac{W_e(s)}{s}\right|_{s=0} = 0{,}1 \ (*)$$

Stante la presenza del polo in s=0 del controllore, la sua dimensione deve essere almeno pari ad uno; considerato allora che un paramtero sarà vincolato dalla condizione (*), conviene provare a risolvere il problema con un controllore con due parametri ("b" e "c") del tipo:

$$G(s) = \frac{c\,s+b}{s} \quad \Rightarrow \quad F(s) = 2\,\frac{c\,s+b}{s\,(s+1)}$$

La condizione (*) impone b=5.
Per tale valore di "b" il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso diventa:

$$D_W = N_F + D_F = s\,(s+1) + 2\,c\,s + 10 = s^2 + s\,(2c+1) + 10.$$

Applicando il criterio di Routh con la trasformazione s -> s-2 (per tener conto che gli autovalori devono avere parte reale minore di -2) si ottiene:

$$(s-2)^2 + (s-2)\,(2c+1) + 10 = s^2 + s\,(2c-3) + 12-4c \quad \Rightarrow 2c-3>0 \text{ AND } 12-4c>0 \quad \Rightarrow 3>c>3/2$$

Si sceglie, per esempio, c=2.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nelle domande A) è pari a $(s^2+5s+10)(s+3)^2$ dove i due autovalori corrispondenti alle radici del polinomio $s^2+5s+10$ sono ragg. e oss., mentre i due autovalori in -3 sono uno irragg. ed inoss., mentre l'altro ragg. ed inoss.

Soluzione del problema 2

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F}{N_F + D_F},\ W_e(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F} \quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F}$$

Per verificare la specifica α), deve risultare:

$$e(z) = W_e(z)\,r(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{S(z)}{z^{l-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_F}{N_F + D_F} = \frac{S(z)\,(z-1)^2}{z^l}$$

dove S(z) è un polinomio qualsiasi di grado non superiore a l-1 e l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Per verificare la condizione suddetta è sufficiente che (i) D_F abbia una radice doppia in +1 (una delle due radici è già presente nella P(z)) e (ii) si imponga l'assegnazione degli autovalori $N_F + D_F = z^l$ (si noti che tale assegnazione degli autovalori rende il sistema complessivo asintoticamente stabile consentendo di verificare anche la specifica β)). Inoltre, per minimizzare l'istante "l" a partire dal quale l'errore si annulla, conviene cancellare il polo del processo in 0,5 (tale polo è cancellabile in quanto interno al cerchio di centro origine e raggio unitario). Infine conviene introdurre un numero di parametri atto a verificare l'assegnazione degli autovalori. Tenendo conto di quanto sopra, conviene scegliere la seguente struttura del controllore:

$$G(z) = \frac{(z - 0{,}5)\,(az + b)}{(z - 1)\,(z + c)} \qquad \Rightarrow \qquad F(z) = \frac{az + b}{(z - 1)^2\,(z + c)}$$

Si impone allora l'assegnazione degli autovalori:

$$N_F + D_F = (z - 1)^2\,(z + c) + az + b = z^3 \qquad \Rightarrow \qquad l=3$$

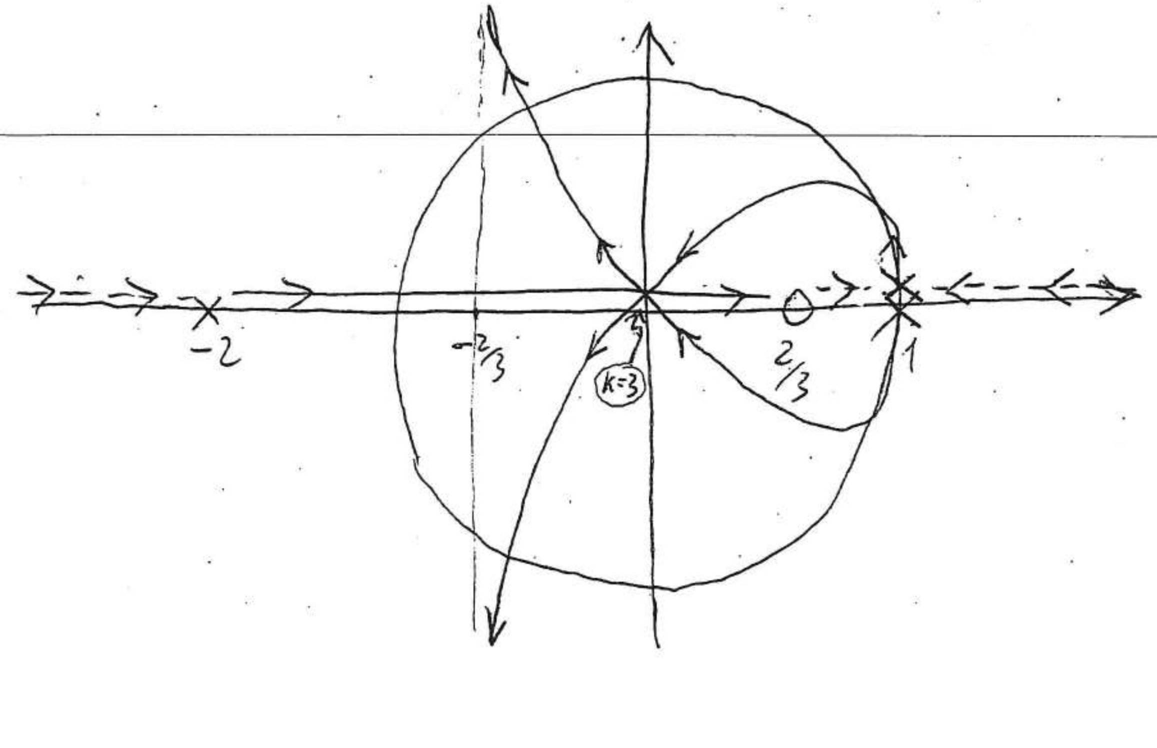
Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene a=3 , b= -2, c=2.

B) Dalla domanda A) risulta $F(z) = \dfrac{3z - 2}{(z - 1)^2\,(z + 2)} = 3\,\dfrac{z - 2/3}{(z - 1)^2\,(z + 2)}$.

Il luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto è pertanto

$$F(z) = K\,\frac{z - 2/3}{(z - 1)^2\,(z + 2)}$$

dove l'assegnazione degli autovalori effettuata nella domanda A), presuppone la presenza di un punto singolare triplo in z=0 corrispondente al valore K=3. Il luogo delle radici è pertanto il seguente:



Soluzione del problema 3

Il processo ha autovalori -1 e +1. L'autovalore -1 è sempre raggiungibile ed è inosservabile solo per c=0,5; l'autovalore +1 è irraggiungibile solo per b= -0,5 ed è sempre osservabile.

A) Un processo è stabilizzabile con reazione dall'uscita se e solo se tutti i suoi eventuali autovalori nascosti sono a parte reale negativa: quindi il processo non è stabilizzabile se b= -0,5 (qualsiasi sia il valore di "c").

B) Per poter assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema complessivo, non ci devono essere autovalori nascoti; quindi il processo è stabilizzabile, ma non si possono assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema complessivo se c=0,5 (qualsiasi sia il valore di "b", con $b \neq -0,5$).

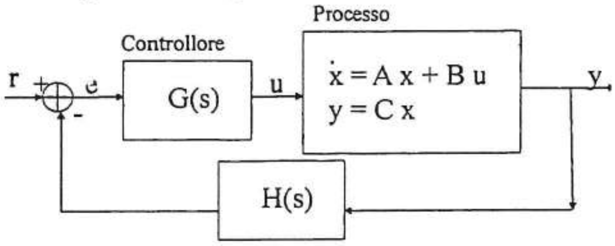
C) Per c=0,5, l'autovalore -1 risulta inosservabile: ciò significa che l'osservatore asintotico esiste, ma la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato reale e lo stato stimato non può essere superiore a e^{-t}. Costruito l'osservatore asintotico dello stato come indicato dalla teoria, la matrice G che lo caratterizza si ottiene tramite la seguente assegnazione degli autovalori (nella quale deve obbligatoriamente comparire l'autovalore inosservabile):

$$| \lambda I - (A-GC)| = (\lambda - \lambda_{arb}) (\lambda + 1)$$

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 6 luglio 2015

595

PROBLEMA 1
Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



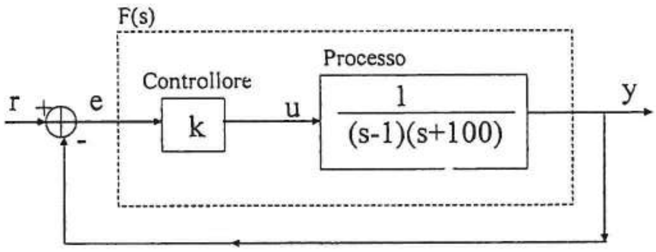
Il processo è caratterizzato dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = [\ 1 \quad 0\ ].$$ Deve inoltre risultare $H(s) = \dfrac{s+a}{s+b}$.

Si determinino un controllore G(s) a dimensione minima e le costanti "a" e "b" in modo che siano verificate le seguenti specifiche:

α) la risposta y a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = sen t sia nulla;
β) la risposta y a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = costante sia nulla;
γ) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
δ) il sistema complessivo abbia N autovalori distinti (con N da scegliersi opportunamente) pari a −1, −2, −3,…,−N (è sufficiente impostare l'assegnazione degli autovalori senza effettuare i conti). Si specifichino le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità degli N autovalori.

PROBLEMA 2
Si consideri lo schema di controllo proporzionale riportato in figura:



A) Posto k=10, si determini tramite il criterio di Nyquist (si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist) se il sistema di controllo complessivo è asintoticamente stabile.
B) Posto k=1000, si stimi dai diagrammi di Bode il margine di fase del sistema di controllo.

PROBLEMA 3
A) Si descriva l'osservatore asintotico dello stato di un processo e se ne enuncino le condizioni di esistenza. Si dimostri che, se le suddette condizioni sono verificate, l'osservatore dello stato è in grado di ricostruire asintoticamente lo stato del processo.
B) Si dimostri il principio di separazione e se ne evidenzi l'utilità.

Soluzione del problema 1.

La funzione di trasferimento del processo risulta $P(s) = \frac{s+4}{s\,(s+2)}$ senza autovalori nascosti. Per poter soddisfare la specifica γ) è allora necessario inserire nel controllore uno zero in -2 e un polo in -4 in modo da creare una cancellazione zero-polo in -2 (autovalore irragg. ed oss.) e una cancellazione polo-zero in -4 (autovalore ragg. ed inoss.).
La funzione di trasferimento ingresso-uscita è la seguente:

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \qquad \text{con } F(s) = \frac{N_F}{D_F} = G(s)P(s), \qquad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per soddisfare le specifica α) è necessario che nel numeratore della W(s) sia presente il fattore s^2+1: dato che non è possibile inserirlo in D_H, e considerato che tale fattore non è presente nel numeratore di P(s), tale fattore deve essere necessariamente inserito nel numeratore di G(s).
Per soddisfare le specifica β) è necessario che nel numeratore della W(s) sia presente il fattore "s": per non accrescere ulteriormente la dimensione del controllore G(s), conviene inserirlo in D_H ponendo b=0. Risulta quindi $H(s) = \frac{s+a}{s}$.
Alla luce di quanto sopra e per avere un numero di parametri sufficienti a soddisfare la specifica δ), la struttura corretta del controllore è la seguente:

$$G(s) = \frac{c\,(s^2+1)(s+2)}{(s^2+ds+e)(s+4)} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{c\,(s^2+1)}{s\,(s^2+ds+e)}.$$

Infine, per soddisfare la specifica δ), si procede all'assegnazione di quattro autovalori (ragg. ed oss.) -1, -3, -5 e -6 (si noti che gli autovalori -2 e -4 non devono essere assegnati perché già presenti come autovalori nascosti), imponendo:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = c\,(s+a)\,(s^2+1) + s^2\,(s^2+ds+e) = (s+1)(s+3)(s+5)(s+6).$$

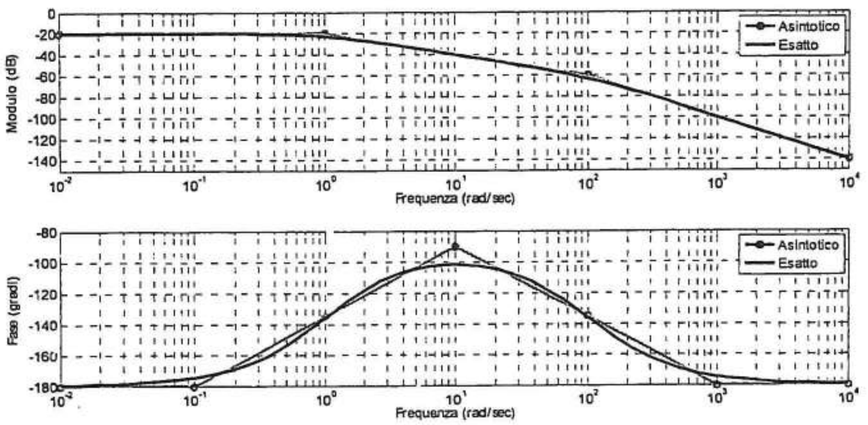
Svolgendo i conti ed applicando il principio di identità dei polinomi si otterrà un sistema (facilmente resolubile) di 4 equazioni nelle 4 incognite *a, c, d, e*.

Soluzione del problema 2

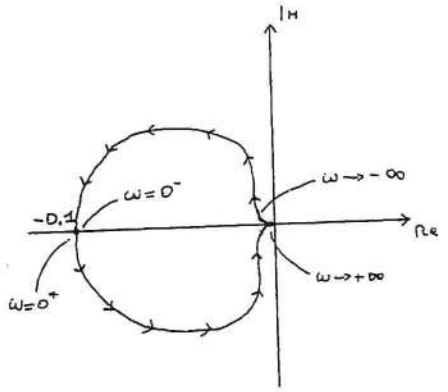
A)

- Per k=10, la funzione di trasferimento in catena diretta è F(s)=10/[(s-1)(s+100)].
- Ai fini del tracciamento dei diagrammi di Bode, si procede riscrivendo la F(s) in forma di Bode:
  F(s)=-1/[10(1-s)(1-0.01s)]
- Si tracciano i diagrammi di Bode (guadagno pari a -20dB; due termini binomi con pulsazioni di rottura 1 e 100):

597



- Si traccia il diagramma di Nyquist qualitativo



- Si applica il teorema di Nyquist: la F(s) ha un polo a parte reale positiva. Il diagramma di Nyquist di cui sopra non compie giri intorno al punto critico (-1,j0). Per il criterio di Nyquist dunque il sistema di controllo complessivo risulta instabile.

B)

Per k=1000, la F(s) è data da:

$F(s)=-10/[(1-s)(1+0.01s)]$

Essendo il margine di fase "m" dato da m=180°+Fase($F(j\omega_t)$), occorre in primo luogo ricavare una stima del valore della pulsazione di attraversamento ω_t (la pulsazione per cui la F ha modulo unitario, cioè $|F(j\omega_t)|=1$). Essendo per k=1000 $|F(j0)|_{dB}=20$, il diagramma di Bode del modulo si ottiene semplicemente traslando in alto di 40dB l'omologo diagramma di cui alla lettera A) (mentre il diagramma delle fasi rimane invariato). Si evince dunque graficamente che un'ottima stima per la ω_t è 10 rad/sec.

~~Posto quindi $\omega_t=10$, dal diagramma asintotico delle fasi si vede che Fase($F(j\omega_t)$)=-90°.~~

Da cui si ottiene una stima "asintotica" del margine di fasi pari a:

m=180°+Fase($F(j\omega_t)$)=180°-90°=90°

La stima asintotica può essere raffinata considerando che lo scostamento di fase di ciascun termine asintotico binomio in corrispondenza della pulsazione 10 rad/sec è pari a circa 6° (poichè per entrambi i termini la pulsazione 10 rad/sec cade a distanza di una decade dalla pusazione di rottura).

Da cui si ottiene la stima raffinata.

m=180°-90°-2*(6°)=78°

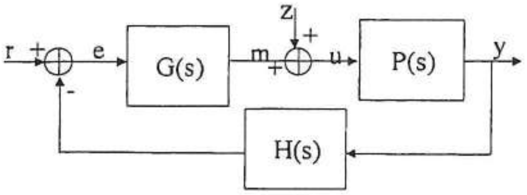
(Da calcolo analitico risulta ω_t=9.9rad/sec e m=78,6°).

598

CONTROLLI AUTOMATICI

Prova scritta del 18 settembre 2015

PROBLEMA 1 Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

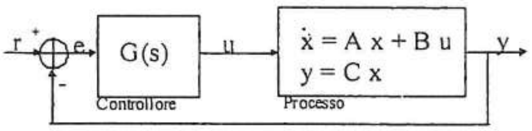


dove $P(s) = \dfrac{s+2}{s+4}$, $H(s) = \dfrac{1}{s}$

A) Si determini un controllore G(s), a dimensione minima, in modo tale che:
   1) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori minori di -3;
   2) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
   3) il modulo della risposta a regime permanente corrispondente al disturbo z(t) = t sia nullo.

B) Si determini un controllore G(s), a dimensione minima, in modo tale che:
   1) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia (s+1)(s+2)(s+5);
   2) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\,2 \quad 1\,]$

A) Si determini per quali valori del parametro "a" il processo non risulta stabilizzabile asintoticamente.

B) Si determini per quali valori del parametro "a" non è possibile assegnare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema complessivo.

C) Si ponga a=1 e G(s)=K. Si determini analiticamente il valore di K in corrispondenza del quale il margine di fase e' uguale a 30° (non è richiesto di disegnare i diagrammi di Bode o Nyquist).

TEMA

Vantaggi e svantaggi dei vari metodi per la stabilizzazione di un processo.

Soluzione del problema 1

A) Risulta:

$$W(s) = \frac{s\,N_F}{s\,D_F + N_F}$$

$$W_z(s) = \frac{s\,N_P\,D_G}{s\,D_F + N_F}$$

Per verificare la specifica 3) è necessario che la G(s) abbia un polo in s=0.
Per verificare la specifica 2), rispettando la specifica 1) e' necessario introdurre uno zero in -4 nel controllore in modo da creare una cancellazione zero-polo in -4 (autovalore nascosto irragg. ed oss. del sistema complessivo).
Si può quindi tentare di risolvere il problema con un controllore con la struttura:

$$G(s) = a\,\frac{s+4}{s} \quad \Rightarrow \quad F(s) = a\,\frac{s+2}{s}$$

Gli autovalori ragg. ed oss. del sistema complessivo coincidono con le radici del denominatore della W(s), ossia:

$$D_W = s\,D_F + N_F = s^2 + a(s+2)$$

Applicando Routh, dopo aver effettuato la traslazione s -> s-3, si deduce che le due radici del polinomio suddetto sono entrambe a parte reale minore di -3 per $6 < a < 9$.

B) Per verificare la specifica 2) in maniera da essere compatibili con la specifica 1) e' necessario introdurre un polo in -2 nel controllore in modo da creare una cancellazione polo-zero in -2 (autovalore nascosto ragg. ed inoss. del sistema complessivo).
Per poter effettuare l'assegnazione dei due autovalori rimanenti (-1 e -5) si deve allora adoperare la struttura:

$$G(s) = \frac{as + b}{s + 2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{as + b}{s + 4}$$

L'assegnazione degli autovalori richiesta risulta:

$$D_W = s\,D_F + N_F = s\,(s+4) + as + b = (s+1)(s+5)$$

dalla quale, sfruttando il principio di identità dei polinomi, si ottiene a=2, b=5.

Soluzione del problema 2

A), B) Il processo ha due autovalori in +1 e in -1. Come si può verificare con il test di Hautus, l'autovalore in +1 risulta irraggiungibile se a = -2 ed è sempre osservabile; l'autovalore in -1 risulta inosservabile se a = 1 ed è sempre raggiungibile.
Quindi, il sistema complessivo non è stabilizzabile se a= -2 dato che in questo caso si avrebbe un autovalore nascosto a parte reale positiva; inoltre, non si possono assegnare ad arbitrio gli autovalori al sistema complessivo se a= -2 o se a=1, dato che in corrispondenza di tali due valori il sistema ha un autovalore nascosto.

C) La funzione di trasferimento del processo è

$$P(s) = \frac{3}{s-1} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{3K}{s-1}$$

In base al criterio di Routh si deduce che il sistema complessivo è asintoticamente stabile per K > 1/3.
Per ottenere margine di fase uguale a 30°, la pulsazione di attraversamento deve soddisfare la seguente condizione:

$$\text{Fase}[\,K\,P(j\omega_t)] = -180° + 30° \Rightarrow \; -180° - \text{Fase}[1 - j\omega_t] = -180° + 30° \qquad \Rightarrow \; \text{arctg}\,\omega_t = 30° \Rightarrow \; \omega_t = 0{,}577$$

Per far sì che $\omega_t = 0{,}577$ risulti effettivamente la pulsazione di attraversamento, si deve imporre:

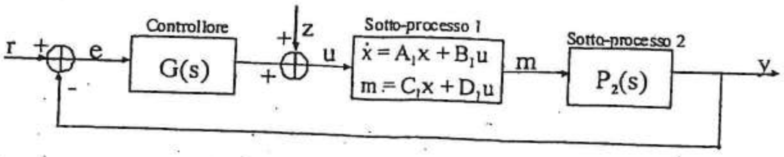
$$|\,K\,P\,(j0{,}577)\,| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad |K| = 0{,}385$$

Si deve scegliere quindi K= 0,385 (-8,29 dB).

601

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 29 ottobre 2015

PROBLEMA 1 Si consideri il seguente schema di controllo:



con $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_1 = [\ 1 \quad 0\ ]$, $D_1 = 0{,}5$; $\quad P_2(s) = \dfrac{1}{s+b}$.

A) Si determinino un controllore G(s) a dimensione minima e i parametri "a", "b", in modo che:
 α) la risposta "y" a regime permanente corrispondente a un disturbo z costante sia nulla;
 β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
 γ) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori in -1.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà e osservabilità degli autovalori.

PROBLEMA 2.
Si consideri uno schema di controllo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento ad anello aperto:

$$F(s) = K\frac{s-2}{(s+7)\,(s-1)}$$

A) Si disegni il luogo delle radici (*suggerimento: in -1 è presente un punto singolare doppio*).

B) Si determini per quali valori del parametro K il sistema ad anello chiuso risulta asintoticamente stabile.

C) Si determini per quale valore del parametro K il sistema ad anello chiuso risulta asintoticamente stabile e si ha la massima velocità di esaurimento del transitorio.

TEMA
Si dimostri che per un processo con tutti gli autovalori inosservabili a parte reale negativa, esiste un osservatore asintotico in grado di ricostruire asintoticamente lo stato del processo.

Soluzione del problema 1

A) In virtù della specifica γ) i due autovalori nascosti di cui alla specifica β) devono essere entrambi in -1. Per far comparire uno dei due autovalori nascosti suddetti, conviene scegliere il parametro "a" in modo che l'autovalore -1 del sotto-processo 1 sia nascosto. In effetti, scegliendo a=2 l'autovalore -1 diviene irrag. e oss.

Con tale scelta la f. di trasf. del sotto-processo 1 diventa $P_1(s) = 0{,}5\,\frac{s+1}{s-1}$.

Per far comparire il secondo dei due autovalori nascosti in -1, conviene scegliere b=1 in modo da creare una cancellazione zero-polo in -1 (che genera un autovalore irrag. e oss. in -1).

Con tale scelta risulta $P = P_1P_2 = \frac{0{,}5}{s-1}$.

In base alla specifica α) il controllore deve avere un polo in s=0. Si può allora scegliere un controllore con la seguente struttura (dotata di un numero di parametri sufficienti per la successiva assegnazione degli autovalori):

$$G(s) = \frac{cs+d}{s} \quad \Rightarrow \quad F = GP_1P_2 = 0{,}5\,\frac{cs+d}{s\,(s-1)}$$

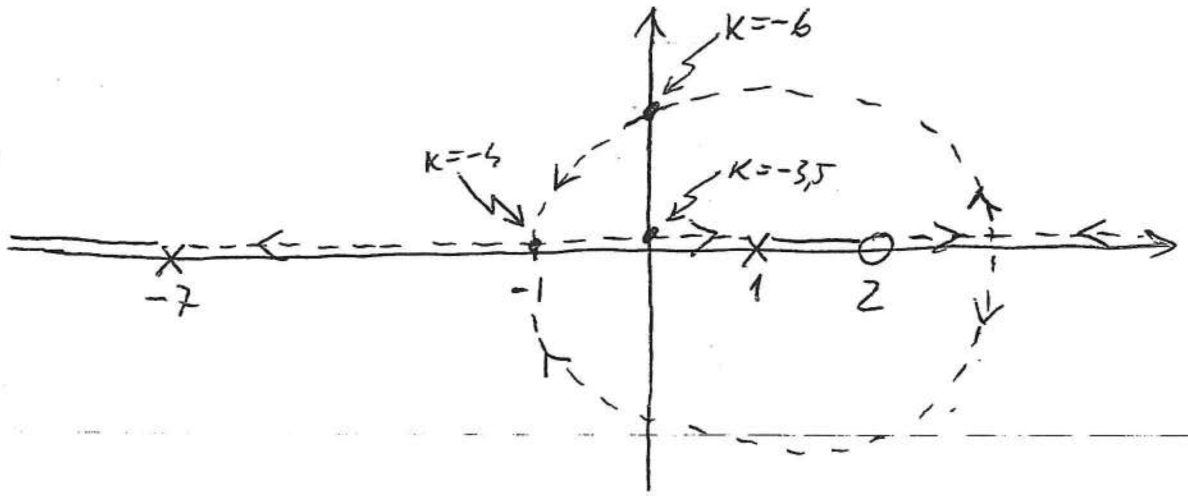
Procedendo all'assegnazione degli autovalori con l'equazione Diofantina si ottiene:

$$D_W = N_F + D_F = 0{,}5(cs+d) + s\,(s-1) = (s+1)^2 \qquad \Rightarrow \text{c=6, d=2.}$$

B) In base ai risultati del punto A), il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(s+1)^4$ con due autovalori nascosti irrag. ed oss., e due autovalori non nascosti ragg. ed oss.

Soluzione del problema 2

A) Il luogo delle radici richiesto è il seguente:



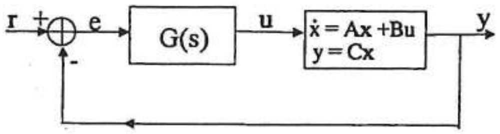
B) Applicando il criterio di Routh, si deduce che il sistema ad anello chiuso risulta asintoticamente stabile per -3,5 > K > -6.

C) La velocità di esaurimento del transitorio è governata dall'autovalore meno negativo. Dall'esame visivo del luogo, si deduce che tale situazione si verifica in corrispondenza del punto singolare doppio in -1. Ponendo s= -1 nell'equazione caratteristica del luogo si ottiene K= -4.

603

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 13 gennaio 2016

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



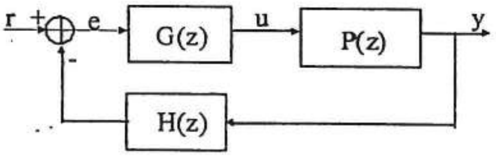
dove $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix}$.

A) Si determinino il parametro "a" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   - α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = costante sia nullo;
   - β) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori a parte reale minore di -1;
   - γ) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) Si tracci il luogo delle radici di interesse e si evidenzi la congruenza del luogo con i risultati ottenuti nella domanda A).

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{(z-1)\,(z+0{,}3)}{(z+0{,}6)\,(z-0{,}2)}$, $H(z) = \dfrac{1}{z+a}$

A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima e il parametro "a" in modo da verificare le seguenti specifiche:
   - α) l'uscita y(h) corrispondente all'ingresso r(h) a gradino si annulli nel più breve tempo possibile (si indichi l'istante a partire dal quale l'errore si annulla);
   - β) tutti gli autovalori del sistema complessivo abbiano modulo minore di 0,5.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini l'andamento completo della risposta y(h) corrispondente all'ingresso r(h) a gradino.

PROBLEMA 3.
Si dimostri che nella cascata di due sistemi caratterizzati dalle seguenti funzioni di trasferimento
$P_1(s) = \dfrac{s+3}{s}$, $P_2(s) = \dfrac{s+1}{s+3}$.
è presente un autovalore irraggiungibile ed osservabile in -3.

Soluzione del problema 1 604

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{s-1}{(s+3)\,(s-a)}$.

Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_F}{N_F + D_F},\quad W_e(s) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\quad \text{con } F(s) = G(s)\,P(s)$$

Per soddisfare la specifica γ), è necessario provocare una cancellazione tra i due poli del processo ed altrettanti zeri del controllore, scegliendo a < -1 per non violare la specifica β) (per esempio, si può scegliere a= -3). In questo modo si creano due autovalori nascosti (irrag. e oss.) in -3. Si osserva poi che la specifica α) impone la presenza di un polo in s=0 nella funz. di trasf. ad anello aperto che si deve collocare nel controllore. Si può allora tentare di risolvere il problema con un controllore di dimensione 1 del tipo:

$$G(s) = K\,\frac{(s+3)\,(s-a)}{s\,(s+b)}\quad \text{con } a<-1 \Rightarrow\quad F(s) = K\,\frac{s-1}{s\,(s+b)}$$

Gli autovalori non nascosti del sistema complessivo sono allora le radici del polinomio:

$$D_W = N_F + D_F = s^2 + s(K+b) - K$$

Dato che la specifica β) richiede che gli autovalori siano a parte reale minore di -1, per utilizzare il criterio di Routh, si deve preventivamente effettuare la sostituzione $s \to s-1$.

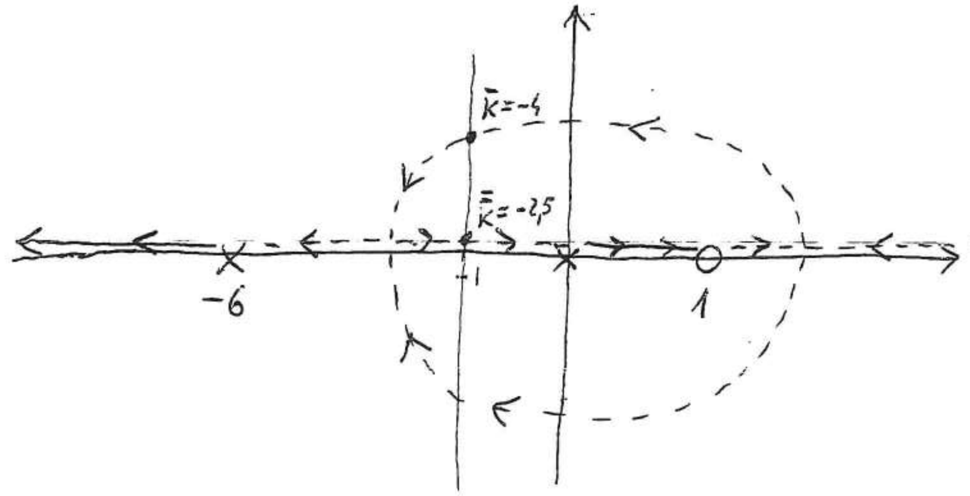
Con tale sostituzione si ottiene:

$$(s-1)^2 + (s-1)\,(K+b) - K\; = s^2 + s\,(K+b-2) + 1 - b - 2K$$

Applicando il criterio di Routh, si deducono i vincoli $K + b > 2$ e $2K + b < 1$. Entrambi i vincoli possono essere soddisfatti scegliendo, ad esempio, K= -3, b=6.

B) con le scelte effettuate, il polinomio caratteristico richiesto è $(s+3)^2\,(s^2 + 3s - 3)$ con due autovalori irragg. e oss. in -3 e due autovalori rag. e oss. radici del polinomio $s^2 + 3s - 3$.

C) Con le scelte effettuate nella domanda A), il luogo delle radici di interesse, relativo alla funzione di trasferimento $F(s) = K\,\frac{s-1}{s\,(s+6)}$ è il seguente:



Soluzione del problema 2

605

A) Le funz. di trasf. di interesse è la seguente

$$W(z) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \text{ con } F(z) = G(z)\, P(z) = \frac{N_F}{D_F} \quad , \; H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per verificare la specifica α), deve essere presente uno zero in +1 nella W(z) (condizione automaticamente verificata, grazie allo zero in +1 di P(z)) e si deve imporre $N_F N_H + D_F D_H = z^l$ dove l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Si puo' allora scegliere:

$$G(z) = K\,\frac{z-0{,}2}{z+0{,}3} \qquad \Rightarrow \qquad F(z) = K\,\frac{z-1}{(z+0{,}6)(z+a)}$$

Si noti che la cancellazione di una coppia polo-zero in -0,3 provoca la comparsa di un autovalore ragg. ed inoss. in -0,3; inoltre, la cancellazione di una coppia zero-polo 0,2 provoca la comparsa di un autovalore irragg. ed oss. in 0,2. Si noti inoltre che il polo in -0,6 di P(z) non può essere cancellato per non violare la specifica β).

Si impone allora:

$$N_F N_H + D_F D_H = K\,(z-1) + (z+0{,}6)\,(z+a) = z^2 \quad \Rightarrow \quad l=2$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene K= -0,225, a= -0,375.

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $z^2\,(z+0{,}3)(z-0{,}2)$ dove i due autovalori in zero (derivanti dall'assegnazione degli auto valori) sono ragg. e oss., l'autovalore in -0,3 è ragg. e inoss., l'autovalore in 0,2 è irragg. ed oss..

C)

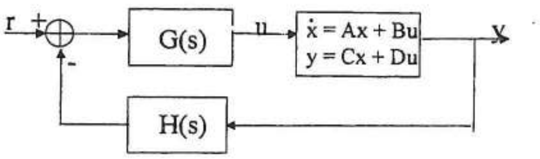
$$y(z) = W(z)\, r(z) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}\,\frac{z}{z-1} = \frac{K(z-1)(z+a)}{z^2}\,\frac{z}{z-1} = \frac{K\,(z+a)}{z} = K + \frac{Ka}{z}$$

$$y(h) = K\,\delta(h) + Ka\,\delta(h-1)$$

606

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 12 febbraio 2016

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

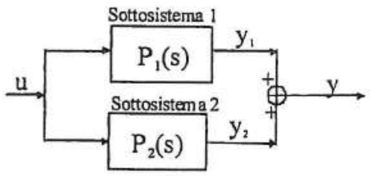


dove $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\, c \quad 0 \,]$, $D = 1$, $H(s) = \dfrac{1}{s^2 + ds + e}$

A) Si determini un controllore G(s), a dimensione minima, nonché i parametri "c", "d", "e" in modo tale che:
   α) la risposta y a regime permanente corrispondente al riferimento $r(t)$ =costante sia nulla,
   β) il sistema complessivo abbia 2 autovalori nascosti,
   γ) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori coincidenti,
   δ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda precedente, specificando le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità dei vari autovalori.

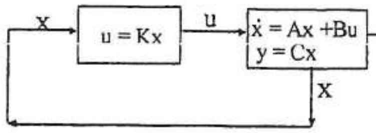
PROBLEMA 2.
Si consideri il seguente sistema con ingresso u e uscita y



ottenuto dal parallelo di due sottosistemi caratterizzati dalle seguenti funzioni di trasferimento:
$P_1(s) = \dfrac{1}{s+1}$, $P_2(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$

Si dimostri che nel suddetto sistema è presente un autovalore irraggiungibile ed inosservabile in -1.
Per effettuare la suddetta dimostrazione si passi attraverso le rappresentazioni ingresso-stato-uscita dei due sottosistemi e si costruisca la rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema costituito dal parallelo dei due suddetti sottosistemi.

PROBLEMA 3.
Si consideri il seguente sistema con reazione dallo stato:



Si dimostri che la condizione "tutti gli autovalori irraggiungibili della matrice A sono a parte reale negativa" è *necessaria* per assicurare la stabilizzabilità del sistema complessivo.

607

Soluzione del problema 1

A) Si nota la presenza nel processo di un autovalore raggiungibile ed inosservabile in -2 che, essendo a parte reale negativa non compromette la stabilizzabilità del sistema complessivo; tuttavia, la presenza di tale autovalore nascosto, in virtù della specifica γ), impone che anche tutti gli altri autovalori del sistema complessivo siano in -2. La funzione di trasferimento del processo P(s) è pari a

$$P(s) = \frac{s+1+c}{s+1}$$

Per soddisfare la specifica β), il secondo autovalore nascosto in -2 (oltre quello già citato presente nel processo) deve essere necessariamente ottenuto, scegliendo c=1 e cancellando lo zero del processo in -2 con un polo del controllore in -2 (generando in tal modo un altro autovalore ragg. ed inoss. in -2).
La funzione di trasferimento ingresso uscita del sistema complessivo risulta pari a

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{D_F D_H + N_F N_H} \quad \text{con } F = \frac{N_F}{D_F} = G\,P\,, \quad H = \frac{N_H}{D_H}$$

La specifica α) richiede la presenza di un fattore s a numeratore della W(s), fattore che può essere ottenuto da D_H ponendo e=0.
Alla luce di quanto sopra, una struttura (a dimensione 1) con un numero appropriato di parametri (rispetto alla successiva assegnazione di autovalori) è la seguente:

$$G(s) = \frac{as+b}{s+2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{as+b}{s+1}$$

L'equazione Diofantina per assegnare gli autovalori non nascosti in -2 risulta:

$$D_W = D_F D_H + N_F N_H = (s+1)(s^2+ds) + as + b = (s+2)^3$$

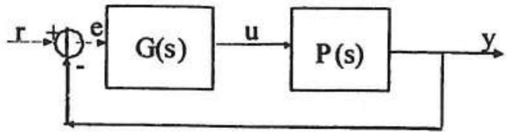
Utilizzando il principio di identità dei polinomi si ottiene a=7, b=8, d=5.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è pari a $(s+2)^5$ con due autovalori in -2 rag. ed inoss. e tre autovalori in -2 rag. ed oss.

CONTROLLI AUTOMATCI
Prova del 13 aprile 2016

608

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

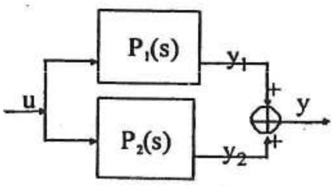


dove $P(s) = \dfrac{s + a}{(s + 3)(s - 2)}$.

Si determini il parametro "a" (con $a \neq 3$ e $a \neq 0$) ed un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo che:

α) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
β) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori coincidenti (è sufficiente impostare il problema di assegnazione degli autovalori senza risolverlo numericamente);
γ) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = sen t sia nullo;
δ) la risposta "y" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) =1 sia uguale a 1.

PROBLEMA 2.
Si consideri il parallelo dei due seguenti processi:

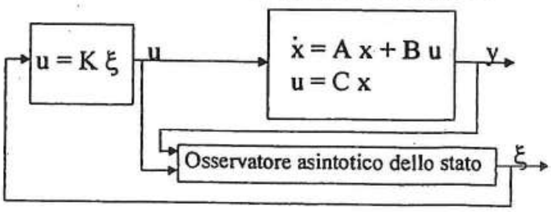


dove $P_1(s) = \dfrac{1}{s+2}$, $P_2(s) = -\dfrac{1}{(s+2)(s+3)}$

A) Si dimostri, passando attraverso il dominio del tempo, che nel processo complessivo (con ingresso *u* e uscita *y*) costituito dal parallelo dei suddetti due processi vengono a crearsi due autovalori nascosti.

B) Si specifichino le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità degli autovalori di tale processo complessivo.

PROBLEMA 3. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Si dimostri che gli autovalori dello schema di controllo suddetto sono gli autovalori di A+BK più gli autovalori di A-GC (G è la matrice che caratterizza l'osservatore asintotico dello stato).

Soluzione del problema 1

Posto $F(s) = P(s)\,G(s) = \dfrac{N_F}{D_F}$, risulta $W_e(s) = \dfrac{D_F}{N_F + D_F}$ e $W(s) = \dfrac{N_F}{N_F + D_F}$.

Per soddisfare la specifica γ), D_F deve necessariamente contenere il fattore $s^2 + 1$. Per soddisfare la specifica α) conviene inserire in G(s) uno zero che cancelli il polo di P(s) in -3, creando un autovalore nascosto irragg. ed oss. in -3. Si noti che tale soluzione è preferibile a quella di cancellare lo zero in "-a" del processo poiché non accresce la dimensione del controllare e non "consuma" il grado di libertà fornito dal parametro "a".

Tenendo conto di quanto sopra e del fatto che un grado di libertà (e quindi un parametro addizionale) sarà necessario per risolvere la specifica δ), la struttura di G(s) che può consentire di risolvere il problema di assegnazione degli autovalori (tutti necessariamente in -3 in base alla specifica β)) è la seguente:

$$G(s) = \frac{(bs^2 + cs + d)\,(s + 3)}{(s + e)\,(s^2 + 1)} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \frac{(s + a)\,(bs^2 + cs + d)}{(s + e)\,(s^2 + 1)\,(s - 2)}$$

Per soddisfare la specifica δ), deve essere $W(0) = 1 \Rightarrow e = 0$.

Infine, per soddisfare la specifica β) si deve risolvere l'equazione Diofantina:

$$D_W = N_F + D_F = (s + a)\,(bs^2 + cs + d) + s\,(s^2 + 1)\,(s - 2) = (s + 3)^4$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si giungerà ad un sistema di 4 equazioni nelle 4 incognite a, b, c, d, la cui soluzione permetterà di completare la struttura del controllore.

Soluzione del problema 2

A) La funzione di trasferimento P(s) del processo complessivo, ossia del parallelo dei due processi $P_1(s)$ e $P_2(s)$ è pari a

$$P(s) = P_1(s) + P_2(s) = \frac{1}{s + 3}$$

Dal fatto che il grado del denominatore di P(s) sia pari ad uno già si può evincere la presenza di due autovalori nascosti. Inoltre, il polo di P(s) in -3 è certamente un autovalore non nascosto (e quindi ragg. ed oss.) del processo complessivo.

Per dimostrare la presenza di due autovalori nascosti e per studiare le proprietà di raggiungibilità/osservabilità di tali autovalori (conoscenza necessaria per rispondere alla domanda B)) conviene determinare la rappresentazione ingresso-stato-uscita del parallelo; tale rappresentazione è la seguente:

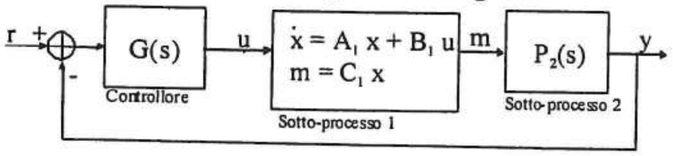
$$A_P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_P = [\ 1 \ \ -1 \ \ 0\ ],$$

La matrice A_P ha due autovalori in -2 e un autovalore in -3. Con le formule canoniche si deduce che due autovalori sono raggiungibili e due autovalori sono osservabili. L'autovalore -3 è l'unico raggiungibile ed osservabile poiché compare nel denominatore di P(s) (lo si può anche verificare con il test di Hautus); quindi i due autovalori in -2 sono entrambi nascosti e non possono che essere uno raggiungibile ed osservabile e l'altro irraggiungibile ed osservabile.

610

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 9 giugno 2016

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $G(s) = K$, $A_1 = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_1 = [\,1 \quad 0\,]$, $P_2(s) = \dfrac{(s-2)\,(s+2)}{s^2 + as + b}$.

A) Si determinino i parametri "a", "b", "c", "d" e la costante K (il controllore è costante) in modo che:
 α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti;
 β) l'uscita "y" a regime permanente per ingresso r(t) = 1 sia uguale a 9/2;
 γ) il sistema complessivo abbia 2 autovalori nascosti.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domande A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

C) Considerati i parametri "a", "b", "c", "d" individuati nella domanda A), si disegni il luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto F(s), evidenziando la congruenza del luogo con l'assegnazione degli autovalori effettuata nella domanda A).

D) Considerando il luogo delle radici di cui alla domanda C) ed utilizzando il criterio di Routh, si determini per quali valori del parametro K il sistema complessivo è stabile asintoticamente ed il transitorio è privo di oscillazioni.

PROBLEMA 2 . Si consideri un processo le cui equazioni ingresso-stato-uscita siano caratterizzate dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}, \quad C = [\,c \quad 1\,]$$

A) Per quali valori dei parametri "a", "b" e "c" <u>non</u> è possibile, utilizzando uno schema di controllo con reazione dall'uscita, fare in modo che il sistema complessivo sia stabile asintoticamente?

B) Per quali valori dei parametri "a" e "c" <u>non</u> esiste un osservatore asintotico dello stato del processo?

C) Scelti $a = -3$ e $c = 0$, si costruisca un osservatore asintotico dello stato del processo.

TEMA

Si descrivano le applicazioni dell'automatica conosciute (possibilmente, individuando i ruoli di sensori, controlli ed attuatori).

611

Soluzione del problema 1

A) Il sotto-processo 1 ha funzione di trasferimento $P_1(s) = \dfrac{1}{s-c}$. In tale sotto-processo esiste un autovalore nascosto (irraggiungibile ed inosservabile) in "d".

Il secondo autovalore nascosto deve necessariamente ricavarsi scegliendo c= -2 in modo da cancellare il polo in c= -2 del sotto-processo 1 con lo zero in -2 del sotto-processo 2. In questo modo si genera un autovalore nascosto (ragg. ed inoss.) in -2 e, stante la specifica α) sulla coincidenza degli autovalori, si deve scegliere d= -2.
Con tali scelte la funzione di trasferimento ad anello aperto risulta pari a

$$F(s) = G(s)\, P_1(s)\, P_2(s) = K\,\frac{s-2}{s^2+as+b}$$

La specifica β) impone che risulti $W(0) = 9/2 \Rightarrow 9\,b = 14\,K$ (*)
L'equazione Diofantina per l'assegnazione degli autovalori non nascosti risulta:

$$D_W = N_F + D_F = K(s-2) + (s^2+as+b) = (s+2)^2 \quad \Rightarrow s^2 + s(K+a) - 2K + b = s^2 + 4s + 4$$

Risolvendo con il principio di identità dei polinomi si deducono le condizioni:
(**) $\quad K + a = 4$
(***) $\quad -2K + b = 4$

Il sistema di 3 equazioni (*), (**), (***) nelle 3 incognite "a", "b", "K" fornisce a=13, b= −14, K = −9.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(s+2)^4$ dove un autovalore in -2 è irrag. e inoss, un altro autovalore in -2 è ragg. e inoss., mentre gli altri due autovalori in -2 sono rag. e oss.

C-D) Il luogo delle radici richiesto è relativo alla

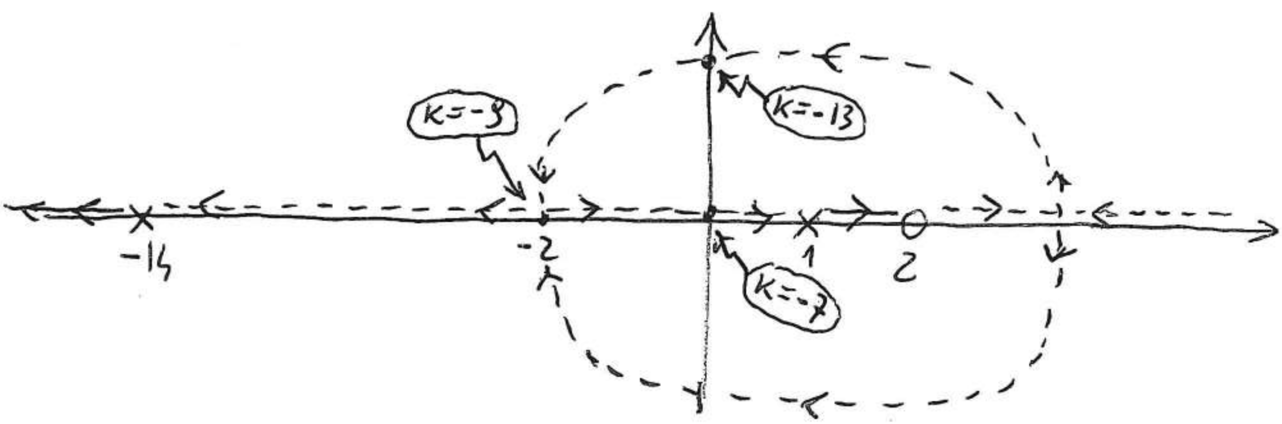
$$F(s) = K\,\frac{s-2}{s^2+13s-14} = K\,\frac{s-2}{(s-1)\,(s+14)}$$ ed è evidenziato in figura.

Si noti che l'asegnazione di autovalori di cui alla domanda A) determina la presenza di un punto singolare doppio in -2 corrispondente al valore di K= -9.

Applicando il criterio di Routh all'equazione caratteristica del luogo, ovvero

$$K\,(s-2) + (s-1)\,(s+14) = s^2 + s\,(K+13) - 14 - 2K = 0$$

si deduce che il sistema è stabile asintoticamente per −7 > K > −13. Dall'esame visivo del luogo è quindi evidente che il sistema complessivo è stabile asintoticamente ed il transitorio privo di oscillazione (che implica autovalori tutti reali) se risulta −7> K > −9.



Soluzione del problema 2

Il processo ha autovalori "a" e "+1".

612

L'autovalore "a" è irragg. se a+b-1=0 (altrimenti è ragg.) ed è inoss. se c=0 (altrimenti è oss.).
L'autovalore "+1" è irragg. se b=0 (altrimenti è ragg.) ed è inoss. se a-c-1=0 (altrimenti è oss.).

A) Un processo è stabilizzabile asintoticamente con reazione dall'uscita se e solo se tutti i suoi eventuali autovalori nascosti sono a parte reale negativa: quindi, il processo non è stabilizzabile se [a+b-1= 0] AND [a≥0] oppure se [c=0] AND [a≥0], oppure se [b=0], oppure se [a-c-1=0].

B) L'osservatore asintotico dello stato di un processo esiste se e solo se tutti i suoi autovalori inosservabili sono a parte reale negativa: quindi l' osservatore asintotico dello stato non esiste se [c=0] AND [a≥0], oppure se [a-c-1=0].

C) Per a = –3 e c = 0 il processo ha un autovalore inosservabile in a= -3 e un autovalore osservabile in +1. Si può quindi costruire l'osservatore asintotico dello stato (tuttavia, la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato reale e lo stato stimato non potrà essere superiore a e^{-3t}).
Costruito l'osservatore asintotico dello stato come indicato dalla teoria, la matrice G che lo caratterizza si ottiene tramite la seguente assegnazione degli autovalori (nella quale deve obbligatoriamente comparire l'autovalore inosservabile in -3):

$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda - \lambda_{arb})(\lambda + 3)$$

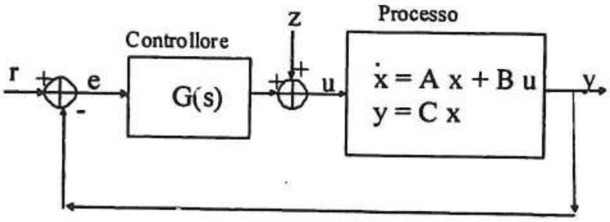
Risolvendo con il principio di identità dei polinomi, si ottiene $G=\begin{bmatrix} * \\ 1-\lambda_{arb} \end{bmatrix}$ dove * indica un qualsiasi numero reale.

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 8 luglio 2016

613

PROBLEMA 1

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il processo è caratterizzato dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix}.$$

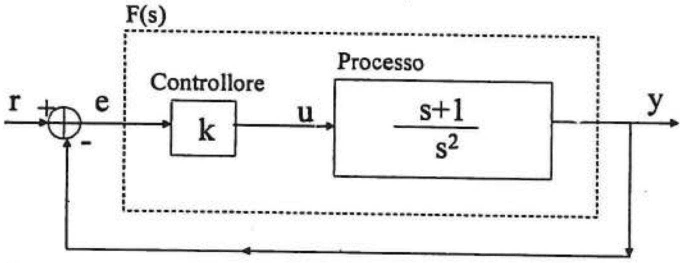
A) Si determinino un controllore G(s) <u>a dimensione uno</u> e il parametro "a" in modo che siano verificate le seguenti specifiche:
   - α) la risposta y a regime permanente corrispondente al disturbo $z(t) = t$ sia uguale a 0,1;
   - β) il <u>processo</u> abbia un autovalore nascosto;
   - γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori a parte reale minore di -2.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domande A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

C) Si disegni il luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto F(s).

PROBLEMA 2

Si consideri lo schema di controllo proporzionale riportato in figura:



A) Posto k=10, si determini tramite il criterio di Nyquist (si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist) se il sistema complessivo è asintoticamente stabile.

B) Posto $k = -10$, si determini tramite il criterio di Nyquist (si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist) se il sistema complessivo è asintoticamente stabile.

C) Si determini il valore di k in corrispondenza del quale il margine di fase "m" del sistema complessivo è uguale a 84°.

TEMA

Si consideri lo schema di controllo con reazione dallo <u>stato</u> studiato durante il corso.

A) Si dimostri che il fatto che gli autovalori irraggiungibili del processo siano tutti a parte reale negativa è condizione necessaria per la stabilizzabilità del sistema complessivo.

B) Si dimostri che il fatto che gli autovalori del processo siano tutti raggiungibili è condizione necessaria per l'assegnabilità ad arbitrio degli autovalori del sistema complessivo.

Soluzione del problema 1.

A) Il processo ha autovalori -1 e -3 entrambi raggiungibili. Per soddisfare la specifica β), tenendo conto che gli autovalori del sistema complessivo devono essere tutti a parte reale minore di -2 (specifica γ)), si deve scegliere il parametro "a" in modo che l'autovalore -3 sia inosservabile. Utilizzando il test di Hautus, si deduce che ciò è possibile scegliendo a = 3. Con tale scelta la funzione di trasferimento del processo risulta $P(s) = \frac{1}{s+1}$.

Le funzioni di trasferimento disturbo-uscita e ingresso-uscita sono le seguenti:

$$W_z(s) = \frac{N_P D_G}{N_F + D_F} \; ; \; W(s) = \frac{N_F}{N_F + D_F} \qquad \text{con } F(s) = \frac{N_F}{D_F} = G(s)P(s)$$

Per soddisfare la specifica α) è necessario (i) che nel numeratore della $W_z(s)$ sia presente il fattore s, (ii) che risulti $\frac{W_z(s)}{s}\Big|_{s=0} = 0{,}1$. Per soddisfare il requisito (i) è necessario aggiungere un polo in s=0 nel controllore; allora, tenendo conto che tale controllore deve essere a dimensione uno, la sua struttura sarà:

$$G(s) = \frac{bs + c}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{bs + c}{s\,(s+1)}$$

Utilizzando le suddette strutture, per soddisfare il requisito (ii), deve risultare c=10.

Infine, per soddisfare la specifica γ), si considera il denominatore della funzione di trasferimento ingresso-uscita:

$$D_W = N_F + D_F = bs + 10 + s\,(s+1) = s^2 + s\,(b+1) + 10$$

Effettuando la sostituzione s -> s-2 per tener conto che tutti gli autovalori devono essere a parte reale minore di -2 si ottiene:

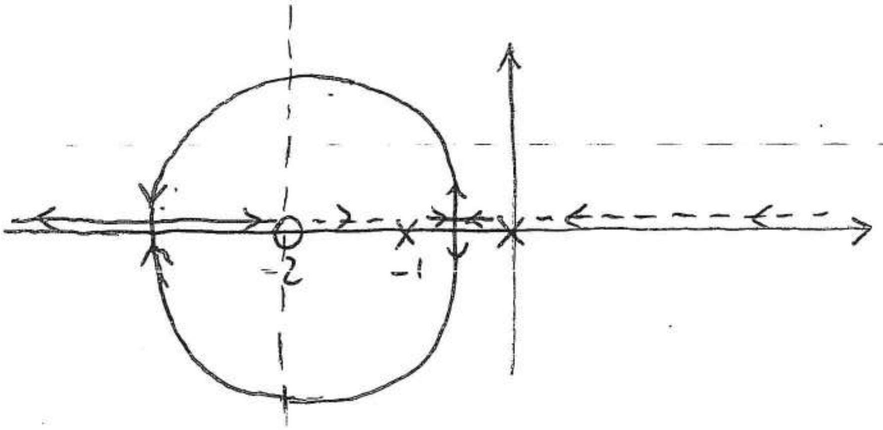
$$s^2 + s\,(b-3) + 12 - 2b$$

Utilizzando il criterio di Routh si deduce che, scegliendo 6 > b > 3, entrambi gli autovalori ragg. e oss. sono a parte reale minore di -2. Per esempio, scegliendo b=5, i due suddetti autovalori sono in -3+j e -3-j.

B) In base a quanto discusso nella domanda A), il polinomio caratteristico del sistema complessivo risulta pari a $(s+3)(s^2 + s\,(b+1) + 10)$ con 6 > b > 3, dove l'autovalore -3 è ragg. e inoss., mentre le due radici del polinomio $s^2 + s\,(b+1) + 10$ sono autovalori ragg. e oss.

C) Scegliendo, ad esempio, b=5, il luogo delle radici di interesse è quello relativo alla funzione

$$F(s) = K\,\frac{s+2}{s\,(s+1)}$$



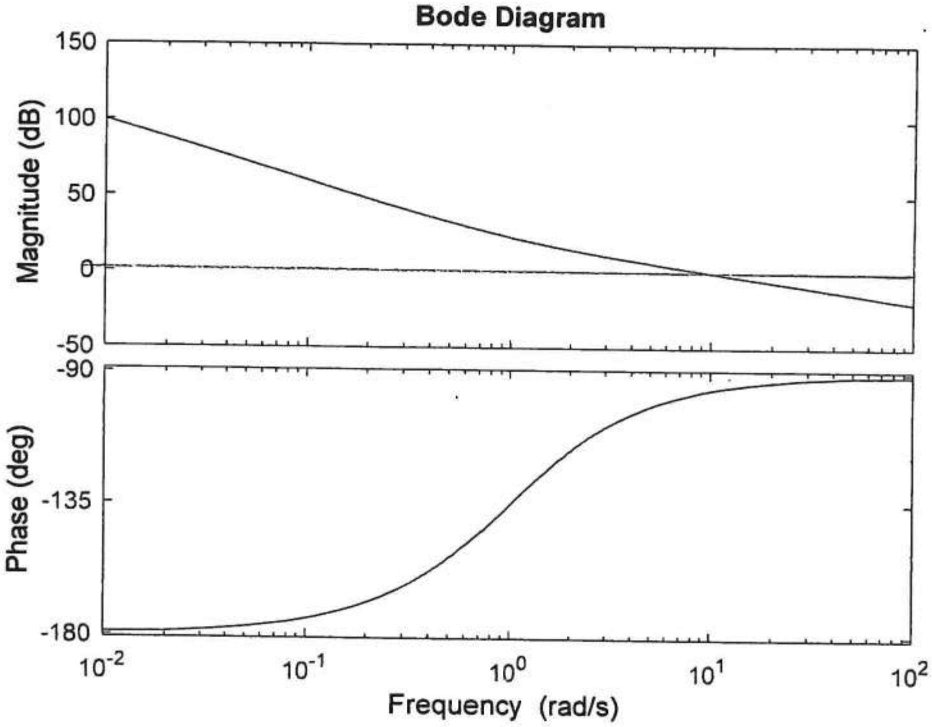
Si noti che, in base a quanto dedotto nella domanda A), per K=5 le due radici si trovano in -3+j e -3-j.

Soluzione del problema 2

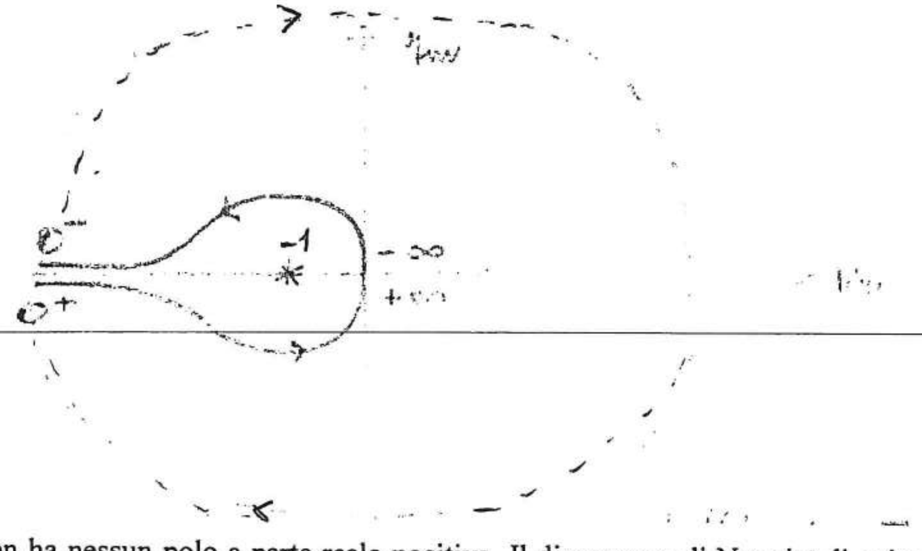
615

A)

- Per k=10, la funzione di trasferimento in catena diretta è $F(s)= 10\ (s+1)/s^2$
- Si noti che la F(s) è già nella forma canonica per il tracciamento dei diagrammi di Bode.
- Si tracciano i diagrammi di Bode (guadagno pari a 20dB; un termine binomio a numeratore con pulsazioni di rottura pari a 1 e due termini monomio a denominatore):



- Si traccia il diagramma di Nyquist qualitativo



- La F(s) non ha nessun polo a parte reale positiva. Il diagramma di Nyquist di cui sopra compie un giro orario e un giro antiorario intorno al punto critico (-1,j0). Per il criterio di Nyquist il sistema complessivo risulta asintoticamente stabile.

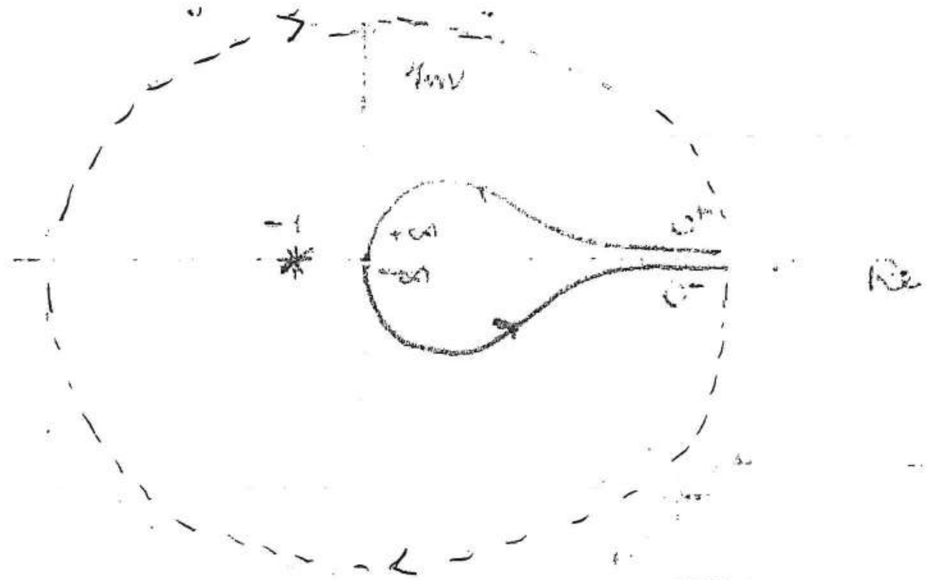
B)

616

Per k= −10, la F(s) è data da:

$F(s) = -10\ (s+1)/s^2$

- Si noti che la F(s) è già nella forma canonica per il tracciamento dei diagrammi di Bode.
- Si tracciano i diagrammi di Bode (segno negativo, guadagno pari a 20dB; un termine binomio a numeratore con pulsazioni di rottura pari a 1 e due termini monomio a denominatore). Il diagramma del modulo è lo stesso; cambia il diagramma della fase, che risulta abbassato di 180° rispetto al precedente.
- Si traccia il diagramma di Nyquist qualitativo



- La F(s) non ha nessun polo a parte reale positiva. Il diagramma di Nyquist di cui sopra compie un giro orario intorno al punto critico (-1,j0). Per il criterio di Nyquist il sistema complessivo risulta instabile.

C)

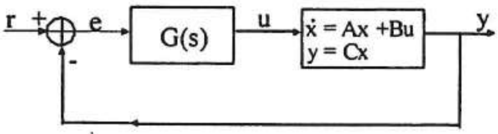
- Essendo il margine di fase "m" dato da m=180°+Fase(F(jω_t)), si deduce che, per ottenere m=84°, deve risultare Fase(F(jω_t) = −96°. Da quest'ultima relazione (tenendo in conto che k deve essere positivo affinchè il sistema complessivo sia asintoticamente stabile) si deduce che deve risultare ω_t = tang 84° $\cong$ 9,5. Il valore di k in corrispondenza del quale si ottiene tale pulsazione di attraversamento si ottiene imponendo

$$F(j9{,}5) = 1 \quad \Rightarrow \quad k\,\frac{s+1}{s^2}\Big|_{s=j9{,}5} = 1 \Rightarrow \quad k \cong 9{,}46$$

- Risulati simili possono essere ottenuti, in forma maggiormente approssimata, procedendo per via grafica.

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 16 settembre 2016

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente schema di controllo:



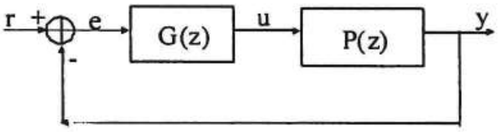
dove $A = \begin{bmatrix} -2 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

A) Si determinino il parametro "a" ed un controllore G(s) di <u>dimensione uno</u> in modo da verificare le seguenti specifiche:

- α) l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = t^2/2 + t + 2$ sia minore di 0,5;
- β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
- γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e la velocità di esaurimento del transitorio sia la massima possibile.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{z + 0{,}2}{(z - 0{,}3)\,(z + 0{,}5)}$

Si determini un controllore G(z) in modo da verificare le seguenti specifiche:

- α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso $r(h)=\eta(h)$ (gradino) abbia il seguente andamento: $e(0) = 1$, $e(1) = 2$, $e(h) = 0$ per $h \geq 3$.
- β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

PROBLEMA 3

Si descrivano le tecniche utilizzate nei vari casi possibili per rendere un sistema asintoticamente stabile mediante l'utilizzo del luogo delle radici.

Soluzione del problema 1

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_F}{N_F + D_F},\ W_e(s) = \frac{D_F}{N_F + D_F} \quad \text{con } F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{N_F}{D_F}$$

Per soddisfare la specifica α), considerando il principio di sovrapposizione degli effetti, si deve fare in modo che (i) la $W_e(s)$ abbia uno zero di molteplicità due in s=0 e (ii) risulti $\left.\frac{W_e(s)}{s^2}\right|_{s=0} < 0{,}5$.

La funzione di trasferimento del processo risulta:

$$P(s) = \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2 - a}$$

Per introdurre il primo dei due zeri in s=0 della $W_e(s)$ conviene scegliere a=2. Con tale scelta risulta:

$$P(s) = \frac{s+1}{s\,(s+3)}$$

Il secondo dei due zeri in s=0 della $W_e(s)$ dovrà necessariamente risultare dall'introduzione di un polo in s=0 nel controllore.

Per soddisfare la specifica β), tenendo conto che il controllore deve essere di dimensione uno e che (per quanto sopra detto) l'unico polo del controllore deve essere in s=0, il controllore G(s) dovrà contenere uno zero in s= –3 che cancelli il polo in s= –3 del processo.

Tenendo conto di quanto sopra, si può tentare di risolvere il problema con un controllore avente la struttura:

$$G(s) = K\frac{s+3}{s} \quad \Rightarrow \quad F(s) = K\frac{s+1}{s^2}$$

Utilizzando la struttura del controllore di cui sopra, imponendo $\left.\frac{W_e(s)}{s^2}\right|_{s=0} < 0{,}5$, si ottiene K>2.

Per verificare la specifica γ), si deve considerare il polinomio:

$$D_W = N_F + D_F = s^2 + Ks + K$$

Utilizzando il criterio di Routh si deduce che il sistema complessivo è asintoticamente stabile per K>0.

Infine, affinchè la velocità di esaurimento del transitorio sia la massima possibile, l'autovalore più grande del sistema complessivo deve essere il più piccolo possibile. Utilizzando, per esempio, il luogo delle radici, ci si rende conto che tale condizione si verifica per K=4 (compatibile con il vincolo K>2): in corrispondenza di tale valore risulta $D_W = (s+2)^2$ e quindi entrambi gli autovalori non nascosti del sistema complessivo sono in -2; con tale scelta, considerando che l'unico autovalore nascosto è in -3, la velocità di esaurimento del transitorio risulta pari ad e^{-2t}.

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $(s+2)^2\,(s+3)$ dove l'autovalore -3 è irragg. e oss, mentre i due autovalori in -2 sono rag. ed oss.

Soluzione del problema 2

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F}{N_F + D_F}, \quad W_e(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F} \quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F} =$$

Per verificare la specifica α), deve risultare:

$$e(z) = W_e(z)\,r(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\,\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{2}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_F}{N_F + D_F} = \frac{(z+2)\,(z-1)}{z^2} \Rightarrow$$

$$D_F = (z+2)\,(z-1) \quad (*), \qquad N_F + D_F = z^2 \quad (**)$$

Per verificare la condizione (*), si può scegliere il controllore con la struttura:

$$G(z) = \frac{(z-0,3)\,(z+0,5)\,(az+b)}{(z+0,2)\,(z+2)\,(z-1)} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{az+b}{(z+2)\,(z-1)}$$

Si noti che la suddetta struttura comporta la generazione di due cancellazioni zero-polo e una cancellazione polo-zero; le 3 cancellazioni suddette creano altrettanti autovalori nascosti i quali, avendo tutti modulo minore di uno, non inficiano la stabilità asintotica del sistema complessivo.
Per soddisfare la condizione (**) si deve scegliere:

$$N_F = z^2 - D_F = z^2 - (z+2)\,(z-1) = -z + 2 \quad \Rightarrow \quad a = -1,\ b = 2.$$

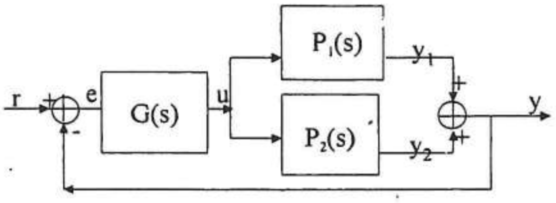
Si noti che la condizione (**), imponendo l'assegnazione di due autovalori (non nascosti) in zero, consente anche di ottenere la stabilità asintotica del sistema complessivo.

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. informatica n.o. (C.A. N.O.), CONTROLLI AUTOMATICI v.o. (C.A. V.O.)
CONTROLLI AUTOMATICI

Prova scritta del 10 novembre 2016

620

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

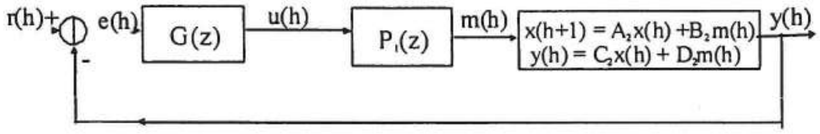


dove $P_1(s) = \dfrac{1}{s+a}$, $P_2(s) = \dfrac{-s^2+4s-3}{(s+2)\,(s-2)^2}$

A) Si determinino il parametro "a" e un controllore G(s), a dimensione minima, in modo tale che il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti e sia asintoticamente stabile.

B) Si traccino i luoghi delle radici di interesse.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo a tempo discreto:



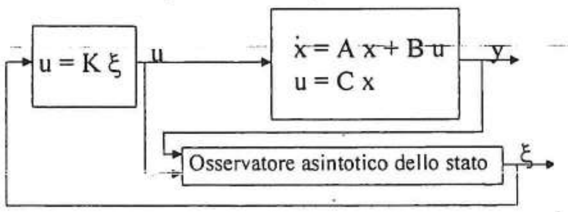
dove $P_1(z) = \dfrac{z+2}{(z-0{,}5)\,z}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_2 = [\ 1 \quad 0\ ]$, $D_2 = 1$

A) Si determinino il parametro "a" ed un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore "e(h)" corrispondente all'ingresso "r(h)" a gradino sia nullo a partire da un istante "l" con "l" più piccolo possibile;
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determini l'andamento completo dell'errore "e(h)", corrispondente al controllore individuato nella domanda A) e all'ingresso "r(h)" a gradino.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

TEMA Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Si dimostri come lo schema di controllo suddetto consente, sotto opportune ipotesi, di assegnare gli autovalori al sistema complessivo.

Soluzione del problema 1 621

A) + B) La f. di trasferimento del processo P(s) può essere ottenuta come somma delle f. di trasf. dei due sottoprocessi in parallelo ($P(s) = P_1(s) + P_2(s)$).
Un primo autovalore nascosto può essere ottenuto ponendo a=2. Infatti, in questo modo al denominatore della funzione di trasferimento del processo compaiano solo tre poli (uno in -2 e due in +2) contro i quattro poli dei due sotto-processi (due in -2 e due in +2); ciò significa che, nel parallelo dei due sottoprocessi, uno dei due autovalori in -2 è divenuto un autovalore nascosto. Essendo tale autovalore a parte reale negativa non pregiudica la stabilizzabilità del sistema complesivo.

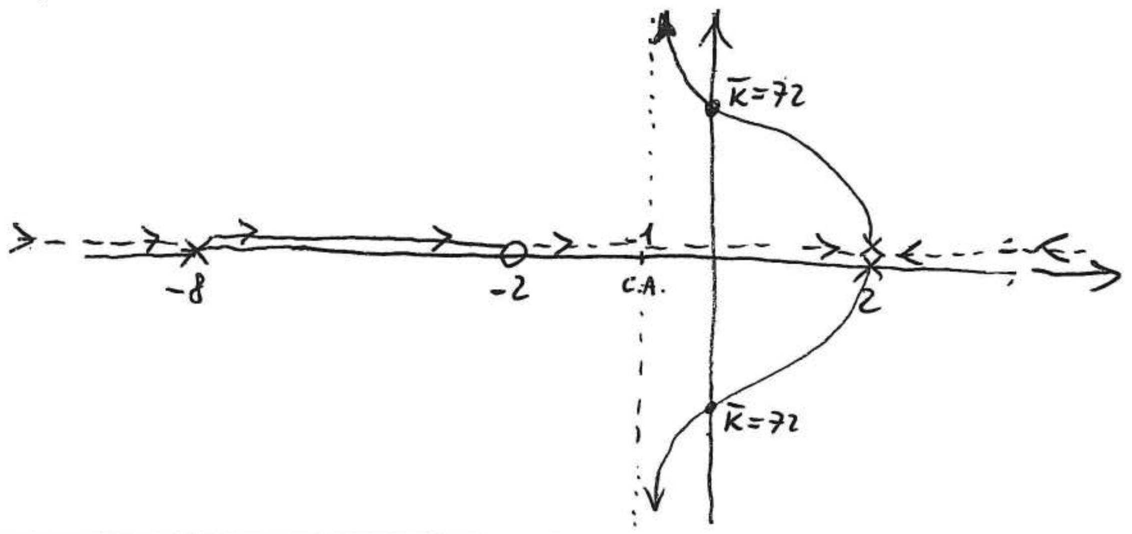
Con la scelta suddetta, la f. di trasf. del processo risulta:

$$P(s) = P_1(s) + P_2(s) = \frac{1}{(s+2)\,(s-2)^2}$$

Il secondo autovalore nascosto deve essere creato operando la cancellazione del polo in -2 del processo tramite uno zero in -2 del controllore. Utilizzando la teoria della stabilizzazione con il luogo delle radici, il sistema può allora essere stabilizzato con un controllore con la struttura:

$$G(s) = K\,\frac{(s+2)\,(s-z)}{(s-p)}$$

con z<0, "z" e "p" scelti in modo tale da far spostare il centro degli asintoti dal semipiano destro a quello sinistro, $K > \bar{K} > 0$. Si puo' quindi scegliere, ad esempio, z = -2, p = -8; con tale scelta, il nuovo centro degli asintoti si trova in -1 ed il sistema e' stabile asintoticamente per K > 72 (si veda il luogo delle radici qui di seguito)



Infine, come visto dalla teoria, affinchè il controllore abbia una f. di trasferimento propria (condizione richiesta per la realizzabilità fisica) e il sistema complessivo si mantenga asintoticamente stabile, si può aggiungere al denominatore della G(s) un fattore nella forma "1+Ts" con T>0 e sufficientemente piccolo.

Soluzione problema 2

Riguardo il secondo sotto-processo, l'autovalore "a" è rag. e oss. (se $a \neq 0$), mentre l'autovalore 0 è irrag. ed inoss.

La f. di trasf. di tale sotto-processo e' pari a

$$P_2(z) = \frac{1+z-a}{z-a}$$

Considerato che, in base alla specifica α), la f. di trasf. ad anello aperto dovrà avere un polo in +1, conviene scegliere a=1.

Con tale scelta risulta:

$$P_2(z) = \frac{z}{z-1} \quad \Rightarrow \quad P(z) = P_1(z)\, P_2(z) = \frac{z+2}{(z-0{,}5)(z-1)}$$

Nella cascata dei due sottoprocessi si viene a creare un secondo autovalore nascosto in 0 (ragg. ed inoss.).

Per poter effettuare l'assegnazione degli autovalori in zero necessaria per soddisfare la specifica α) (assegnazione che consente di verificare anche la specifica β)), conviene scegliere la seguente struttura del controllore:

$$G(s) = b\,\frac{z-0{,}5}{z+c} \qquad \Rightarrow \quad F(z) = G(z)\,P(z) = b\,\frac{z+2}{(z+c)(z-1)}$$

Nella cascata di controllore e processo si viene a creare un autovalore nascosto in 0,5 (irragg. ed oss.).

La suddetta assegnazione degli autovolari risulta:

$$D_W = N_F + D_F = (z+c)(z-1) + b(z+2) = z^2 \qquad \Rightarrow \quad b = 1/3,\ c = 2/3.$$

L'istante a partire dal quale l'errore è identicamente nullo è l=2.

B) L'errore a regime permanete si calcola come:

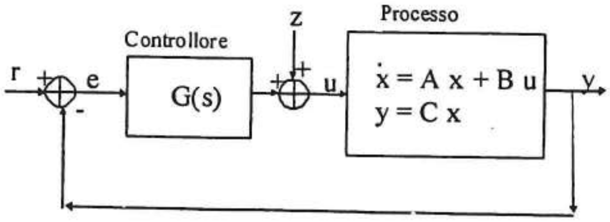
$$e(z) = W_e(z)\,u(z) = \frac{D_F}{N_F + D_F}\,\frac{z}{z-1} = \frac{z+2/3}{z} = 1 + \frac{2/3}{z} \Rightarrow \quad e(h) = \delta(h) + 2/3\,\delta(h-1)$$

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $z^4\,(z-0{,}5)$ dove l'autovalore in 0,5 è irragg. ed oss., mentre due degli autovalori in 0 sono ragg. ed oss., uno è irrag. ed inoss., uno è ragg. ed inoss..

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 13 gennaio 2017

623

PROBLEMA 1
Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



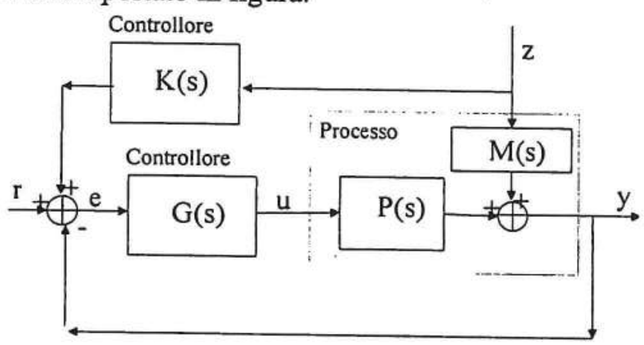
Il processo è caratterizzato dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A) Si determinino un controllore G(s) e i parametri "a" e "b" in modo che siano verificate le seguenti specifiche:
   - α) la risposta y a regime permanente corrispondente al disturbo $z(t) = t$ sia nulla;
   - β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto raggiungibile ed inosservabile in -1;
   - γ) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto irraggiungibile ed osservabile in -2;
   - δ) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori raggiungibili ed osservabili in -3.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domande A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2
Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P(s) = M(s) = \dfrac{s - 1}{s\,(s + 2)}$

Si progettino i controllori G(s) e K(s) in modo che:
- α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
- β) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla;
- γ) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
- δ) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un riferimento $r(t) = t$ sia, in modulo, minore di 3/2.

TEMA
Si discutano le problematiche inerenti la modellizzazione di un processo fisico.

624

Soluzione del problema 1.

A) Il processo ha un autovalore inosservabile in "a" Scegliendo allora a= -1 si soddisfa la specifica β).
Per soddisfare la specifica γ) si può creare una cancellazione zero-polo in -2, scegliendo b= –2 (scelta che comporta una funzione di trasferimento del processo P(s) pari a $\frac{1}{s+2}$) e introducendo uno zero in s= -2 nel controllore.

Per soddisfare la specifica α), considerato che $W_z(s) = \frac{N_P D_G}{N_F + D_F}$, si deve introdurre un polo di molteplicità 2 in s=0 nel controllore.
La struttura di G(s) che soddisfa i requisiti di cui sopra ed introduce un numero di parametri adeguati per il soddisfacimento della specifica δ) è la seguente:

$$G(s) = \frac{(cs+d)\,(s+2)}{s^2} \;\Rightarrow\; F(s) = \frac{cs+d}{s^2}$$

Infine, per soddisfare la specifica δ), si impone:

$$D_W = N_F + D_F = cs + d + s^2 = (s+3)^2 \;\Rightarrow\; c=6,\ d=9$$

B) In base a quanto discusso nella domanda A), il polinomio caratteristico del sistema complessivo risulta pari a $(s+3)^2\,(s+2)\,(s+1)$ dove l'autovalore -1 è ragg. e inoss., l'autovalore -2 è irragg. e oss., i due autovalori in -3 sono ragg. ed oss.

Soluzione del problema 2

A) Per soddisfare la specifica γ) si può introdurre nel controllore G(s) uno zero in s= -2 in modo da creare una cancellazione zero-polo in -2.
Per soddisfare la specifica δ):
(i) la funz. di trasferimento ad anello aperto F(s) = G(s) P(s) deve avere un polo in s=0 (condizione automaticamente soddisfatta da P(s));
(ii) deve risultare:

$$\left| \frac{W_e(s)}{s}\Big|_{s=0} \right| = \left| \frac{D_F}{N_F + D_F}\frac{1}{s}\Big|_{s=0} \right| < \frac{3}{2} \qquad (*)$$

Si può tentare allora di stabilizzare il sistema complessivo con un controllore G(s) a dimensione uno del tipo

$$G(s) = K\,\frac{s+2}{s+a} \;\Rightarrow\; F(s) = K\,\frac{s-1}{s\,(s+a)}$$

Con la scelta suddetta, la condizione (*) impone $3\,|K| > 2\,|a|$
Applicando il criterio di Routh al polinomio

$$D_W = N_F + D_F = K\,(s-1) + s\,(s+a) = s^2 + s\,(a+K) - K$$

si deduce che, per stabilizzare il sistema complessivo, deve essere $0 > K > -a$. Per soddisfare tutte le condizioni su "K" e "a" si può scegliere, ad esempio, K = -1, a = 5/4.

Si deve infine scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)=0$ ottenendo la reiezione completa del disturbo. Svolgendo i conti si ottiene:

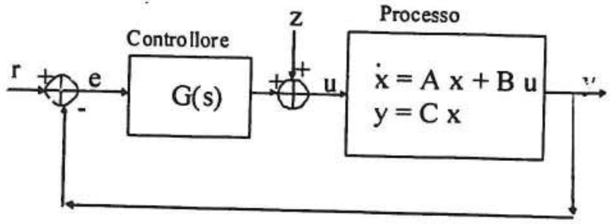
$$K(s) = -\,\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\,\frac{1}{K}\,\frac{s+a}{s+2}$$

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 14 febbraio 2017

625

PROBLEMA 1

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il processo è caratterizzato dalle matrici:

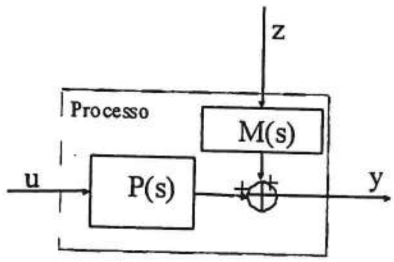
$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [\ 1 \quad 1\ ].$$

Si determinino un controllore G(s) e i parametri "a" e "b" in modo che siano verificate le seguenti specifiche:

α) la risposta y a regime permanente corrispondente al disturbo z(t) = costante sia nulla;
β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti irraggiungibili ed osservabili in –2;
γ) il sistema complessivo abbia il polinomio caratteristico pari a $(s+3)(s+2)^2$.

PROBLEMA 2

Si consideri il processo riportato in figura:



con $P(s) = M(s) = \dfrac{s - 1}{s\,(s + 3)}$

Il disturbo "z" è <u>misurabile</u>.

Si progetti uno schema di controllo, a dimensione minima, in modo che:

α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori coincidenti;
β) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

TEMA

Si illustri la tecnica di stabilizzazione di un processo con il luogo delle radici nel caso in cui non sia possibile stabilizzare mediante un controllore costante, tutti gli zeri del processo siano a parte reale negativa, la differenza tra numero di poli e numero di zeri del processo sia pari a 3 e il centro degli asintoti sia a parte reale negativa.

Soluzione del problema 1. 626

A) Il processo ha un autovalore irraggiungibile in "b" (osservabile se $1+b-a\neq 0$). Scegliendo allora $b=-2$ ($a\neq -1$) si introduce uno dei due autovalori richiesti dalla specifica β). Per introdurre il secondo di tali autovalori si può creare una cancellazione zero-polo in -2, scegliendo $a=-2$ (scelta che comporta una funzione di trasferimento del processo P(s) pari a $\frac{1}{s+2}$) e introducendo uno zero in $s=-2$ nel controllore.

Per soddisfare la specifica α), considerato che $W_z(s) = \frac{N_P D_G}{N_F + D_F}$, si deve introdurre un polo di molteplicità 1 in $s=0$ nel controllore.

In base alla specifica γ), rimane da assegnare un autovalore in -3. La struttura di G(s) che soddisfa i requisiti di cui sopra ed introduce un numero di parametri adeguati per il soddisfacimento della specifica γ) è la seguente:

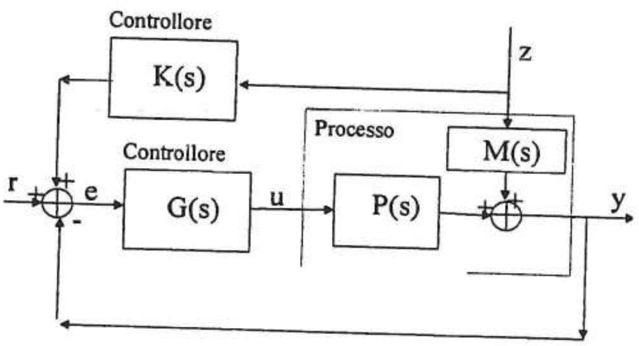
$$G(s) = c\frac{s+2}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{c}{s}$$

Pertanto, per soddisfare la specifica γ), si impone:

$$D_W = N_F + D_F = c + s = s + 3 \;\Rightarrow\; c=3$$

Soluzione del problema 2

Dato che il disturbo è misurabile si può progettare il seguente schema di controllo:



Per soddisfare la specifica α) si può scegliere un controllore G(s) a dimensione uno del tipo

$$G(s) = a\frac{s+3}{s+b} \Rightarrow F(s) = a\frac{s-1}{s\,(s+b)}$$

Con la scelta suddetta si introduce nel controllore G(s) uno zero in $s=-3$ in modo da creare una cancellazione zero-polo in -3. Si genera quindi un autovalore nascosto in -3 che, dato che tutti gli autovalori del sistema complessivo devono essere coincidenti, vincola anche gli altri autovalori del sistema complessivo a trovarsi in -3.

Pertanto, per soddisfare la specifica α), si impone:

$$D_W = N_F + D_F = a\,(s-1) + s\,(s+b) = (s+3)^2 \;\Rightarrow\; a=-9\,,\; b=15$$

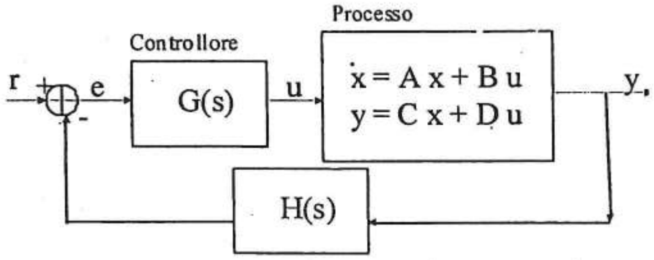
Infine, per soddisfare la specifica β), si deve scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)=0$ ottenendo la reiezione completa del disturbo. Svolgendo i conti si ottiene:

$$K(s) = -\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\frac{1}{a}\frac{s+b}{s+3} = \frac{1}{9}\frac{s+15}{s+3}$$

627

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 12 aprile 2017

PROBLEMA 1
Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il processo è caratterizzato dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 1.$$ Risulta inoltre $H(s) = \dfrac{1}{s-b}$.

Si determinino un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> e i parametri "a" e "b" in modo che siano verificate le seguenti specifiche:

α) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
β) l' errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso r(t) = 1 sia uguale a 2;
γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con <u>tutti gli autovalori coincidenti</u>.

Si specifichino le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità dei vari autovalori del sistema complessivo.

PROBLEMA 2

Si consideri un classico schema di controllo a controreazione con il processo dato dalla funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{1}{s^2\,(s-2)}$$

Si determini, utilizzando il metodo del luogo delle radici, un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u> in modo che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile (<u>si disegnino i luoghi delle radici di interesse</u>).

TEMA
Il principio di separazione: se ne discuta l'utilità e se ne effettui la dimostrazione.

Soluzione del problema 1.

La funzione di trasferimento del processo risulta $P(s) = \frac{s+3}{s-1}$ con un autovalore nascosto intrinseco (raggiungibile ed inosservabile) in "a".
L'altro autovalore nascosto (necessario per soddisfare la specifica α)) deve generarsi cancellando uno zero del processo con un polo del controllore (e tale cancellazione deve necessariamente riguardare una coppia polo-zero in -3 (si genera un autovalore ragg. ed inoss.). Tale autovalore nascosto, in base alla specifica γ), impone che anche l'autovalore nascosto intrinseco nel processo sia pari a -3; quindi, a= -3.

Le funzioni di trasferimento di interesse hanno la forma:

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \cdot \quad W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(s) = \frac{N_F}{D_F}, \qquad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Considerando il grado di libertà derivante dalla scelta del parametro "b", che per risolvere il problema di assegnazione degli autovalori sono necessari d_W gradi di libertà, che nello schema di controllo $d_W = d_F + 1$ e che la specifica β) richiede un ulteriore grado di libertà, conviene scegliere un controllore (a dimensione 1) con la seguente struttura:
$G(s) = \frac{cs + d}{s + 3}$. Ciò implica $F(s) = P(s)\, G(s) = \frac{cs+d}{s-1}$

Per soddisfare la specifica β) si deve imporre $W_e(0) = 2$, il che implica $2d + b = 0$ (*).

Infine, per soddisfare la specifica γ), si procede all'assegnazione di due autovalori in -3 (si noti che tali autovalori, essendo non nascosti, risultano raggiungibili ed osservabili), imponendo:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = cs + d + (s-1)(s-b) = (s+3)^2.$$

Procedendo con il principio di identità dei polinomi e tenendo in conto della condizione (*), si ottiene b=18, c=25, d= -9.

In base a quanto sopra, il sistema complessivo ha quattro autovalori in -3, dei quali due non nascosti (entrambi ragg. e oss.) e 2 nascosti (entrambi ragg. ed inoss.)

Soluzione del problema 2

In base alla teoria del luogo delle radici, il caso proposto (n-m=3, centro degli asintoti a destra) si risolve con un controllore del tipo:

$$G(s) = K\frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p)(1 + Ts)}$$

con T>0 e sufficientemente piccolo (*polo lontano*), $z_1<0$, $z_2<0$; inoltre, z_1, z_2 e p devono essere scelti in modo tale da far spostare a sinistra il centro degli asintoti (C.A.), ossia:

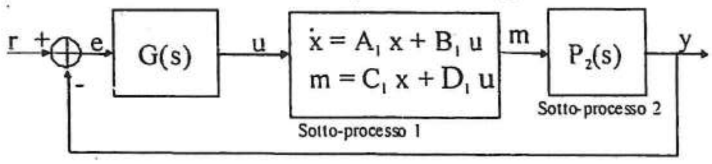
$$C.A. = \frac{(2+p)-(z_1+z_2)}{5-2} < 0$$

Si può scegliere, ad esempio, $z_1=z_2=-1$, $p= -7 \Rightarrow$ C.A. = -1.
Con tale scelta, il luogo delle radici di interesse, prima dell'aggiunta del polo lontano, è $F(s) = K\frac{(s+1)^2}{s^2 (s-2)(s+7)}$; dopo l'aggiunta del polo lontano, è $F(s) = K\frac{(s+1)^2}{s^2 (s-2)(s+7)(1 + Ts)}$.

629

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 13 giugno 2017

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



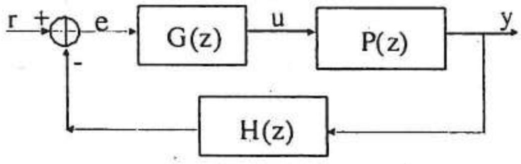
dove $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_1 = [\ 1 \quad 1\ ]$, $D_1 = d$ $\qquad P_2(s) = \dfrac{s-1}{(s+4)^2}$.

A) Si determinino i parametri "b" e "d" ed un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> in modo tale che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori a parte reale minore di -2;
   β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
   γ) il sotto-processo 1 abbia un autovalore nascosto.

B) Si disegni il luogo delle radici di interesse e si indichi su tale luogo (anche senza calcolarlo) il valore del parametro K in corrispondenza del quale la velocità di esaurimento del transitorio è massima.

C) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-0{,}8)}$, $\qquad H(z) = \dfrac{z+a}{z-1}$

A) Si determinino il parametro "a" ed un controllore G(z) <u>a dimensione minima</u> in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h)= h (rampa) si annulli nel tempo più breve possibile (si indichi l'istante "l" a partire dal quale l'errore si annulla);
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Utilizzando il parametro "a" ed il controllore G(z) calcolati nella domanda A) si calcoli l'espressione completa dell'errore.

C) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

TEMA

L'ingegnere automatico, oltre il campo della robotica, si può occupare di moltissimi altri settori applicativi. Si descrivano tre dei suddetti settori ritenuti particolarmente significativi (tralasciando il settore della robotica) individuando, qualitativamente, per ciascuno dei tre settori prescelti, quali grandezze svolgono il ruolo di variabili di controllo (quelle che nel corso abbiamo indicato con "u") e quali quelle di variabili di feedback (quelle che nel corso abbiamo indicato con "y").

Soluzione del problema 1

A+B) Il sotto-processo 1 ha due autovalori in -1 e -3. In base alla specifica γ) uno dei due deve essere nascosto; dato che tale autovalore nascosto diventerà un autovalore anche del sistema complessivo, in base alla specifica α), l'autovalore nascosto deve essere quello in -3. Entrambi gli autovalori sono osservabili; l'autovalore -1 è irrag. per b=0; l'autovalore -3 è irrag. per b=2. Per quanto sopra detto, bisogna allora scegliere b=2: in tal modo il processo ha un autovalore irrag. e oss. in -3 e la specifica γ) è soddisfatta senza violare la specifica α).

Con tale scelta risulta

$$P_1(s) = \frac{3}{s+1} + d.$$

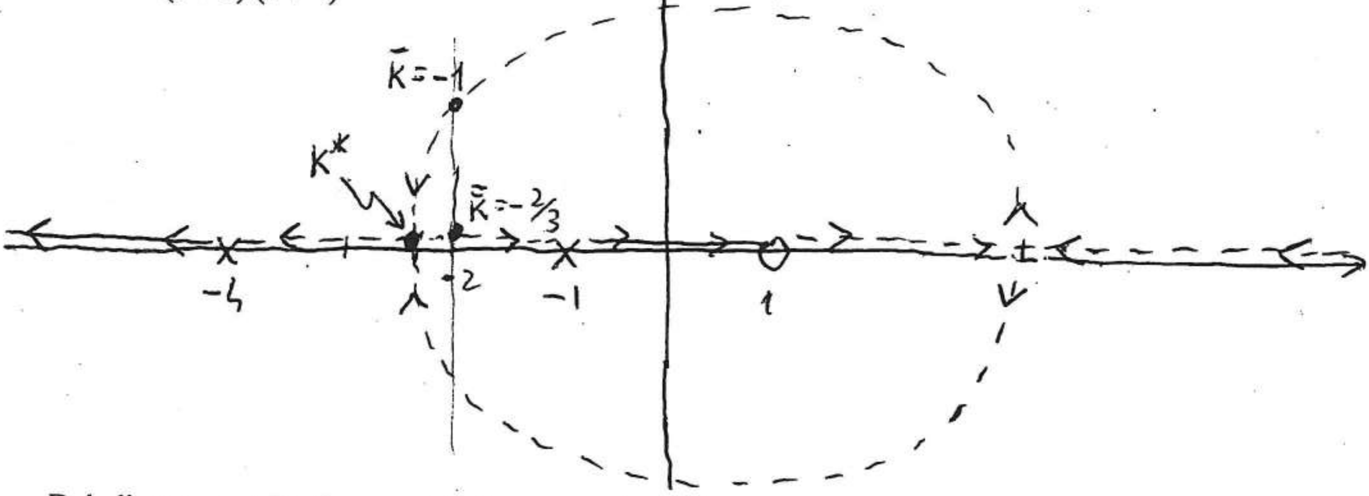
Per fare in modo che il sistema abbia un secondo autovalore nascosto, si deve scegliere "d" in modo che il sotto-processo 1 abbia uno zero in -4 tale da cancellare uno dei poli in -4 del sotto-processo 2. E' facile vedere che ciò avviene con la scelta d=1. Con tale scelta si ha infatti:

$$P_1(s) = \frac{s+4}{s+1} \Rightarrow \qquad P(s) = P_1(s)\,P_2(s) = \frac{s-1}{(s+1)\,(s+4)}$$

La cancellazione polo-zero in -4 crea un autovalore nascosto (irrag. ed oss.) in -4.

Ponendo G(s) = K si può disegnare il luogo delle radici di

$$F(s) = K\,\frac{s-1}{(s+1)\,(s+4)}$$



Dal disegno qualitativo di tale luogo ci si rende conto che un opportuno valore di K potrebbe forse soddisfare la specifica α). Per confermare tale ipotesi si considera il denominatore della f. di trasf. del sistema complessivo:

$$D_W = N_F + D_F = (s+1)(s+4) + K(s-1) = s^2 + s\,(5 + K) + 4 - K$$

Per tenere conto che gli autovalori devono avere parte reale minore di -2, si applica la traslazione s -> s-2 che fornisce il polinomio: $s^2 + s\,(1 + K) - 2 - 3K$

Applicando il criterio di Routh a tale polinomio, si deduce che si deve scegliere $\overset{\bar{\bar{K}}}{-2/3} > K > \overset{\bar{K}}{-1}$. Per esempio, si può scegliere K= - 0,8.

Infine si noti che il punto del luogo indicato nel disegno come K* corrisponde al valore di K in corrispondenza al quale il minore dei due autovalori è il maggiore possibile. Quindi, in corrispondenza di tale valore di K*, la velocità di esaurimento del transitorio è massima.

$K^* = -0{,}675$

VELOCITÀ DI ESAURIMENTO MASSIMA $= e^{-2{,}16t}$

C) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è

$$(s+3)\,(s+4)\,[s^2 + s\,(5 + K) + 4 - K] \quad \text{(con K tale che } -2/3 > K > -1)$$

dove gli autovalori -3 e -4 sono irrag. ed oss., mentre i due autovalori radici del polinomio tra parentesi quadra sono ragg. ed oss.

Soluzione del problema 2 631

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H},\quad W_e(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F}$$

Per verificare la specifica α), deve risultare:

$$e(z) = W_e(z)\,r(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}\,\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{S(z)}{z^{l-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} = \frac{S(z)\,(z-1)^2}{z^l}$$

dove S(z) è un polinomio qualsiasi di grado non superiore a l-1 e l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Per verificare la condizione suddetta è sufficiente che (i) il polinomio $D_F\, D_H$ abbia una radice doppia in +1 (condizione automaticamente soddisfatta dato che una delle due radici è già presente nel denominatore della P(z) e l'altra è presente in D_H) e (ii) si imponga l'assegnazione degli autovalori $N_F N_H + D_F D_H = z^l$ (si noti che tale assegnazione degli autovalori rende il sistema complessivo asintoticamente stabile consentendo di verificare anche la specifica β)). Inoltre, per minimizzare l'istante "l" a partire dal quale l'errore si annulla, conviene cancellare il polo del processo in 0,8 (tale polo è cancellabile in quanto interno al cerchio di centro origine e raggio unitario) creando un autovalore irrag. e oss. in 0,8.

Inoltre, tenendo conto che il numero di parametri per l'assegnazione degli autovalori deve essere pari a $d_W = d_{We} = d_F + 1$ e che possiamo disporre del parametro "a" presente in N_H, conviene scegliere la seguente struttura del controllore:

$$G(z) = b\,\frac{z-0{,}8}{z+c} \qquad \Rightarrow \qquad F(z) = b\,\frac{1}{(z-1)(z+c)}$$

Si impone allora l'assegnazione degli autovalori:

$$N_F N_H + D_F D_H = b\,(z+a) + (z-1)^2(z+c) = z^3 \qquad \Rightarrow \qquad l=3$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene a= -2/3 , b=3, c=2.

B) Dalla domanda A) risulta

$$e(z) = W_e(z)\,r(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}\,\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{(z-1)^2(z+2)}{z^3}\,\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z+2}{z^2}$$

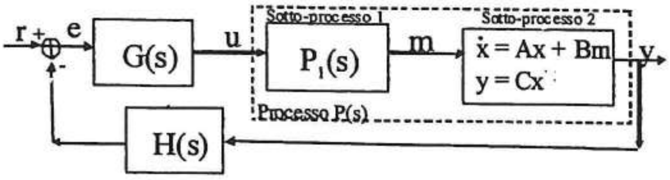
Effettuando l'antitrasformata zeta si ottiene:

$$e(h) = \delta(h-1) + 2\,\delta(h-2)$$

C) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(z-0{,}8)\, z^3$ dove l'autovalore 0,8 è irrag. ed oss, mentre i tre autovalori in zero sono ragg. e oss.

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 7 luglio 2017

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $P_1(s) = \dfrac{s+2}{s+3}$; $\quad A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 0{,}5 \quad 0{,}5\ ]$; $\quad H(s) = \dfrac{1}{s+b}$

A) Si determinino i parametri "a" e "b" nonché un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> in modo che:

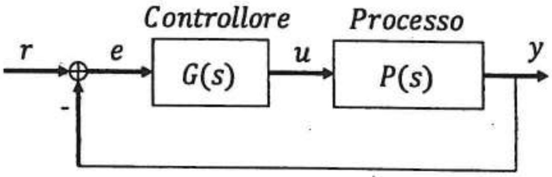
α) il sistema complessivo abbia tre autovalori nascosti (se ne specifichino le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità);

β) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a $p(s) = (s+1)^3 (s+2)^2 (s+3)$;

γ) l'errore "e" a regime permanente corrispondente al riferimento $r(t) = sen\ t$ sia nullo.

B) Utilizzando le scelte effettuate nella domanda A), si disegni il luogo delle radici della funzione di trasferimento che abbia gli zeri e i poli di G(s)P(s)H(s), evidenziando la congruenza tra il disegno del luogo e l'assegnazione degli autovalori effettuata nella domanda A).

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $\quad P(s) = \dfrac{s-10}{s(s+1)(s+10)} \quad$ e $\quad G(s) = K.$

A) Utilizzando il criterio di Routh si calcoli il valore di K per cui il sistema complessivo è asintoticamente stabile.

B) Scegliendo $K = -1$, si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto, si verifichi la stabilità del sistema complessivo con il criterio di Nyquist, si mostri graficamente e si calcoli analiticamente il margine di fase.

C) Scegliendo $K = +1$, si tracci il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto e si verifichi la stabilità (o meno) del sistema complessivo con il criterio di Nyquist.

D) Sapendo che il modulo di $P(j\,0{,}62) \cong 1{,}35$ e che la fase di $-P(j\,0{,}62) \cong -130°$, si calcoli analiticamente il valore di K in corrispondenza del quale si ottiene un margine di fase $m_\varphi \approx 50°$.

TEMA

Si illustri lo schema di controllo con reazione dall'uscita nel dominio del tempo e si dimostri il principio di separazione.

Soluzione del problema 1

A) Le f. di trasf. di interesse sono:

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \qquad W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(s) = \frac{N_F}{D_F} = G(s)\, P_1(s)\, P_2(s), \qquad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per soddisfare la specifica γ) è necessario inserire il fattore (s^2+1) a denominatore del controllore. Il controllore non può pertanto avere dimensione inferiore a 2.

I 3 autovalori nascosti del sistema complessivo di cui alla specifica α), compatibili con la specifica β), possono essere ricavati:

- ponendo a= -2, il che implica la presenza di un autovalore nascosto in -2 irrag. e inoss. nel sotto-processo 2 (che quindi diviene un autovalore nascosto in -2 irrag. e inoss. anche nel sistema complessivo); inoltre, con tale scelta, la f. di trasf. del sotto-processo 2 è pari a $P_2(s) = \frac{1}{s+2}$ e quindi crea una cancellazione zero-polo in -2 tra il sotto-processo 1 e il sotto-processo 2, generando un secondo autovalore nascosto in -2 irrag. ed oss.;
- inserendo il fattore (s+3) a numeratore del controllore, creando una cancellazione zero-polo in -3 tra il controllore e il sotto-processo 1, generando pertanto un autovalore irrag. ed oss. in -3.

Per procedere all'assegnazione dei restanti autovalori (in base alla specifica β) e alle scelte effettuate in precedenza, restano da assegnare tre autovalori in -1), si può allora scegliere la seguente struttura del controllore:

$$G(s) = \frac{(cs + d)(s+3)}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad F(s) = G(s)\, P_1(s)\, P_2(s) = \frac{cs + d}{s^2+1}$$

Si noti che tale struttura è tale da soddisfare l'equazione Diofantina dato che (i) abbiamo a disposizione 3 parametri ("b", "c", "d") e (ii) d_W=grado D_W= d_F+1=2+1=3. Tale equazione è pertanto:

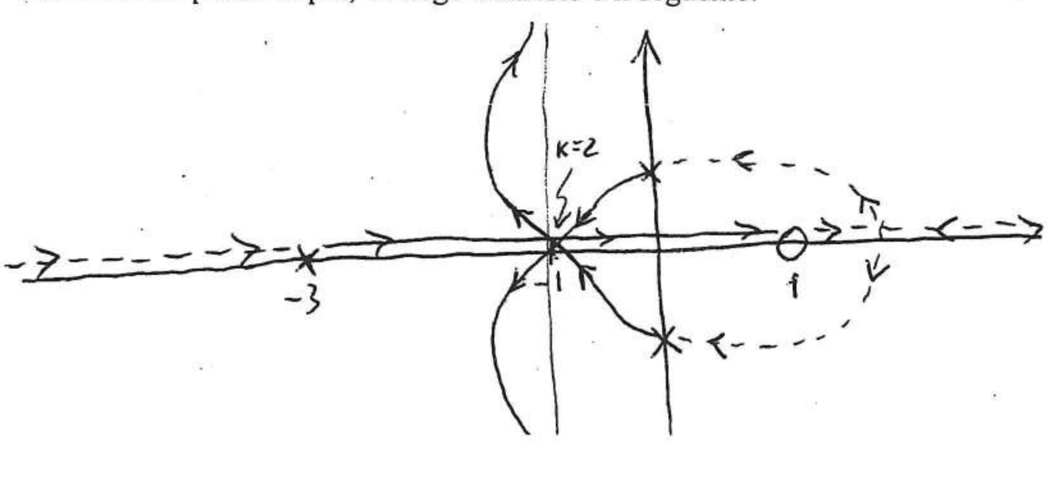
$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = cs + d + (s^2+1)(s + b) = (s+1)^3 \quad \Rightarrow \quad b=3\,,\ c=2\,,\ d=-2.$$

B) La f. di trasf. di interesse è la seguente:

$$F'(s) = K \frac{s-1}{(s^2+1)(s+3)}$$

Si noti che, in base all'assegnazione effettuata nella domanda A), per K=2, tutte e 3 le radici dell'equazione caratteristica del luogo (ossia $(s^2+1)(s+3) + K(s-1) = 0$) si devono trovare in -1; pertanto in tale punto sarà presente un punto singolare triplo corrispondente al valore K=2.

Alla luce di quanto sopra, il luogo richiesto è il seguente:



634

Soluzione del problema 2

A) La funzione di trasferimento a ciclo aperto è $F(s) = G(s)P(s) = K\,\dfrac{s-10}{s(s+1)(s+10)}$

Il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso è

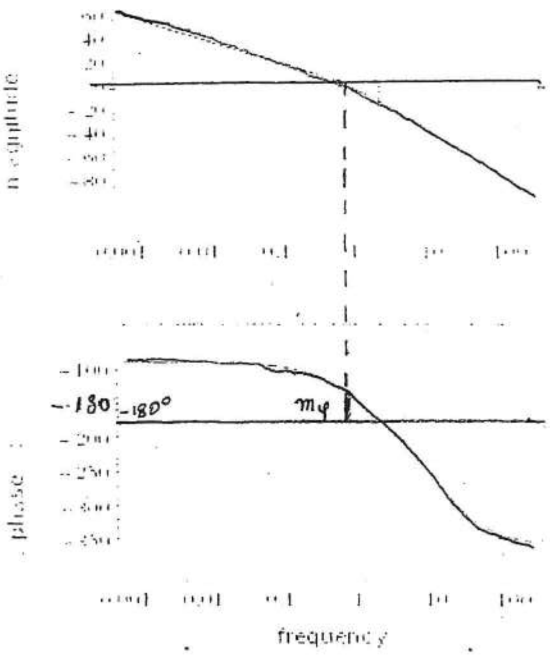
$$D_{cl}(s) = s(s+1)(s-10) + K(s-10) = s^3 - 11s^2 + (K-10)s - 10K.$$

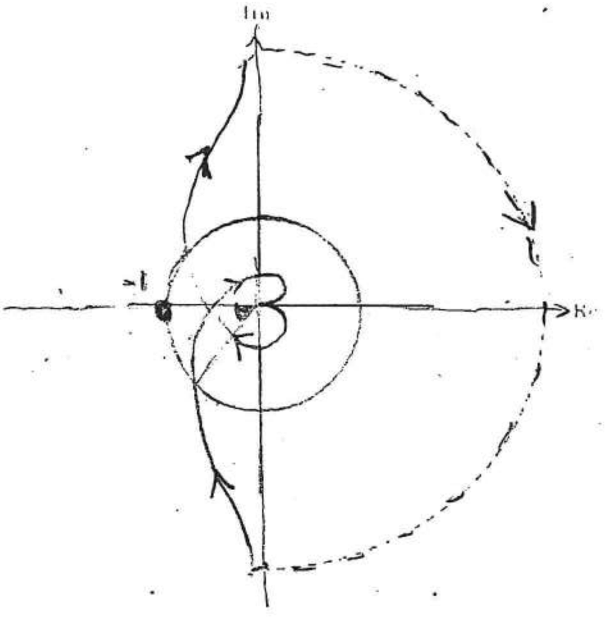
La corrispondente tabella di Routh è la seguente:

$$\left|\begin{array}{ll} 1 & (10-K) \\ 11 & -10K \\ (21K+110) & \\ -K & \end{array}\right.$$

In base al criterio di Routh il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile se $-5.2 < K < 0$.

B) La f. di trasferimento di interesse è $F(j\omega) = -\dfrac{j\omega-10}{j\omega(j\omega-1)(j\omega+10)} = \dfrac{1-\frac{j\omega}{10}}{j\omega(j\omega-1)\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)}$, i cui diagrammi di Bode e di Nyquist sono i seguenti:





Dal diagramma di Nyquist si verifica che il criterio di Nyquist è soddisfatto poiché il diagramma non fa giri attorno al punto $(-1,0)$ e non ci sono poli a parte reale positiva nella funz. di trasf. ad anello aperto.

In particolare, la pulsazione di attraversamento ω_t, calcolata per via analitica secondo la formula $\left|\dfrac{1-\frac{j\omega_t}{10}}{j\omega_t(j\omega_t+1)\left(1+\frac{j\omega_t}{10}\right)}\right| = 1$, vale $\omega_t \approx 0.78\,\dfrac{rad}{s}$.

$\angle F(j\omega_t) = -90° - 2arctg(0.1\omega_t) - arctg(\omega_t) = -137.2°$.

Pertanto, il margine di fase è pari a $m_\varphi = 180° + \angle F(j\omega_t) = 180° - 137.2° = 42.8°$.

635

C) La f. di trasferimento di interesse è $F(j\omega) = \frac{j\omega - 10}{j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 10)} = -\frac{1 - \frac{j\omega}{10}}{j\omega(j\omega + 1)\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)}$. Il diagramma di Nyquist risulterà analogo a quello illustrato al punto B), ma ruotato di 180°, comportando così un circondamento del punto critico $(-1{,}0)$. Non essendoci poli a parte reale positiva a catena aperta, in base al criterio di Nyquist il sistema ad anello chiuso risulta instabile, coerentemente con quanto dedotto al punto A).

D) Dato che la fase di $-P(j\ 0{,}62) \cong -130°$, per ottenere un margine di fase pari a 50° è necessario scegliere un valore di K negativo e tale che la pulsazione di attraversamento sia pari a 0,62.
Si deve quindi scegliere K tale che $|K\ \ P(j\ 0{,}62)| = 1$; dato che $P(j\ 0{,}62) \cong 1{,}35$, risulta $|K| \cong 0{,}74$.

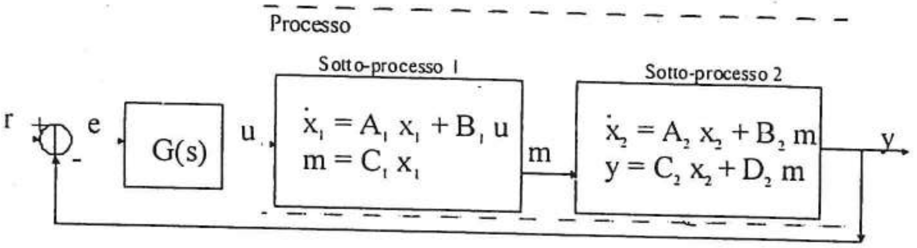
Si deve allora scegliere $K \cong -0{,}74$.

636

CONTROLLI AUTOMATICI -
Prova scritta del 15 settembre 2017

PROBLEMA 1

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura. Il processo (tratteggiato in figura) è costituito dalla cascata di due sotto-processi 1 e 2 (si noti che il sotto-processo 1 ha i due autovalori -1 ed "a"; il sotto-processo 2 ha un autovalore "b").



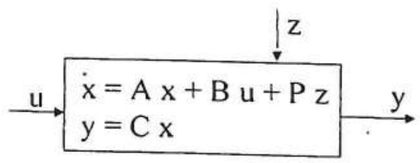
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & a-1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [\,2 \quad 1\,]; \qquad A_2 = b \quad B_2 = 1 \quad C_2 = 1 \quad D_2 = 1$$

A) Si determinino i parametri "a" e "b" nonché un controllore G(s) a dimensione minima in modo che:
   α) il sistema complessivo abbia i seguenti tre autovalori nascosti: un autovalore irraggiungibile ed osservabile in -1, un autovalore irraggiungibile ed osservabile in -2, un autovalore raggiungibile ed inosservabile in -3;
   β) gli autovalori del sistema complessivo siano tutti distinti e pari ai numeri interi negativi da -1 a -N (con N da scegliersi opportunamente);
   γ) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un riferimento r(t)= sen t sia nullo.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà e osservabilità degli autovalori.

PROBLEMA 2

Si consideri il processo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\,-1 \quad 1\,]$

Il disturbo z è misurabile.

A) Si progetti uno schema di controllo a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori in −2;
   β) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

B) Si tracci il luogo delle radici di interesse discutendo la congruenza del luogo con la specifica α). Si determini il valore del parametro K che caratterizza il luogo delle radici, in corrispondenza al quale il transitorio è privo di oscillazioni e si esaurisce quanto più velocemente possibile.

TEMA

L'osservatore asintotico dello stato di un processo.

A) Si enuncino le condizioni sotto le quali l'osservatore asintotico esiste ed è possibile assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato reale del processo e lo stato stimato.

B) Si dimostri che, soddisfatte le condizioni di cui al punto A), si può costruire un osservatore in grado di ricostruire asintoticamente lo stato di un processo ed assegnare ad arbitrio la velocità di convergenza a zero dell'errore tra lo stato reale del processo e lo stato stimato.

Soluzione del problema 1

A) Le funzioni di trasferimento dei sotto-processi 1 e 2 sono le seguenti:

$$P_1(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-a)} \qquad P_2(s) = \frac{s+1-b}{s-b}$$

La specifica α) può essere soddisfatta solo attraverso cancellazioni polo-zero o zero-polo; si nota infatti che esisterebbe un autovalore nascosto intrinseco nel sotto-sistema 1 solo se "a" fosse pari a -2, ma l'autovalore in -2 sarebbe ragg. ed inoss. e ciò sarebbe in contrasto con la specifica α). Pertanto, per soddisfare tale specifica, si devono creare due cancellazioni zero-polo rispettivamente in -1 e -2 ed una cancellazione polo-zero in -3. Ciò può essere ottenuto ponendo a=-3, b=- 2, e ponendo uno zero in -1 nel controllore.
Con le scelte effettuate risulta:

$$P(s) = P_1(s)\, P_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

Inoltre, per soddisfare la specifica γ), il denominatore della funzione di trasferimento ad anello aperto $F(s)=G(s)P(s)$ deve contenere il fattore s^2+1.
Conviene allora scegliere la seguente struttura del controllore:

$$G(s) = \frac{(cs+d)(s+1)}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{cs+d}{s^2+1}$$

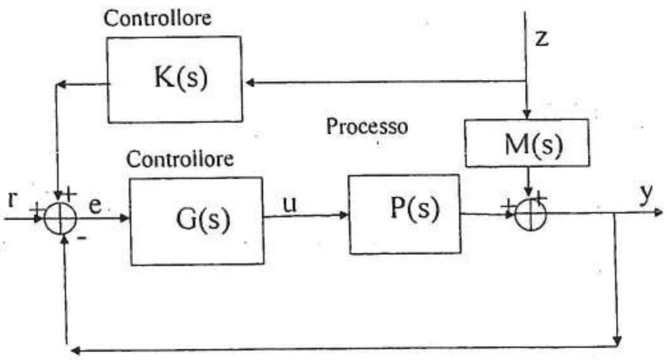
Per soddisfare la specifica β), è sufficiente scegliere N=5 e quindi assegnare gli autovalori -4 e -5. La relativa equazione Diofantina è la seguente:

$$D_F + N_F = s^2+1 + cs + d = (s+4)\,(s+5) \;\Rightarrow\; c = 9\,;\; d = 19.$$

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è (s+1) (s+2) (s+3) (s+4) (s+5), dove gli autovalori -1,-2,-3 hanno proprio le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità indicate nella specifica α), mentre gli autovalori -4 e -5 sono raggiungibili ed osservabili.

Soluzione del problema 2

A) Dato che il disturbo è misurabile, è possibile progettare uno schema di controllo a doppia controreazione del tipo:



dove $P(s) = M(s) = \dfrac{s - 1}{s\,(s + 1)}$

Per effettuare l'assegnazione di autovalori richiesta dalla specicifica α), si può scegliere un controllore G(s) con la seguente struttura:

$$G(s) = \frac{as+b}{s+c} \;\Rightarrow F(s) = \frac{as+b}{s+c}\,\frac{s - 1}{s\,(s + 1)}$$

La relativa equazione Diofantina è la seguente:

$$D_F + N_F = (as+b)(s - 1) + (s+c)\,s\,(s + 1) = (s + 2)^3 \;\Rightarrow\; a = -15/2\ ;\ b = -8\ ;\ c = 25/2.$$

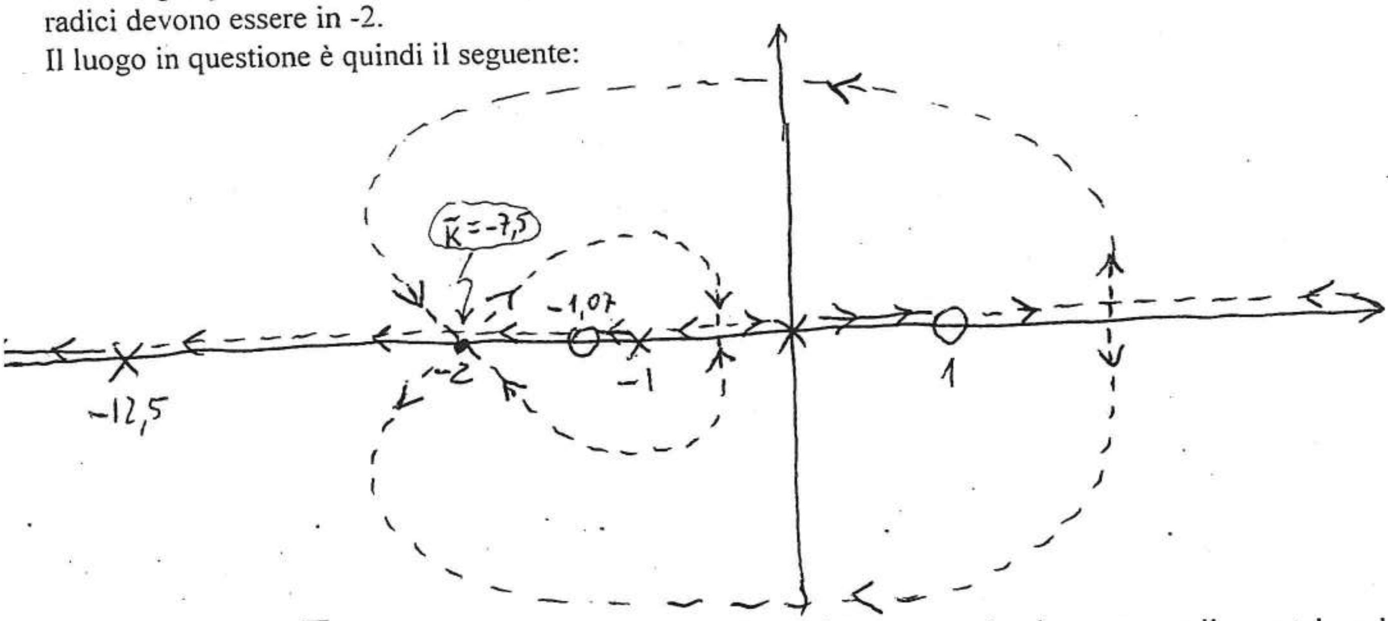
Pertanto, il controllore G(s) risulta:

$$G(s) = \frac{-15/2\ s - 8}{s + 25/2} = \frac{-7{,}5\ s - 8}{s + 12{,}5} = -7{,}5\,\frac{s + 1{,}07}{s + 12{,}5}$$

Il luogo delle radici di interesse è pertanto relativo alla seguente F(s):

$$F(S) = K\,\frac{s + 1{,}07}{s + 12{,}5}\,\frac{s - 1}{s\,(s + 1)}$$

Tale luogo, per essere congruente con la specifica α), deve essere tale che, per $\overline{K} = -7{,}5$, tutte e tre le radici devono essere in -2.
Il luogo in questione è quindi il seguente:



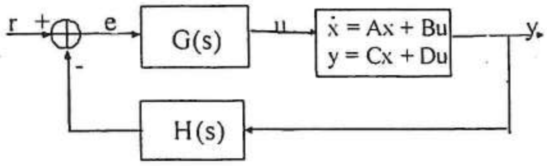
Dato che per $K = \overline{K} = -7{,}5$, tutti e tre gli autovalori del sistema complessivo sono reali, per tale valore il transitorio è privo di oscillazioni; inoltre, per tale valore di K, il minimo dei tre autovalori (che è quello che determina la velocità di esaurimento del transitorio) assume il massimo valore.

Infine, per soddisfare la specifica β), si deve scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)=0$ ottenendo la reiezione completa del disturbo. Tenendo conto che risulta M(s)=P(s), svolgendo i conti si ottiene:

$$K(s) = -\,\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\,\frac{1}{G(s)}$$

CONTROLLI AUTOMATICI
Esame del 13 ottobre 2017

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 1 \quad 0\ ]$, $D = 1$, $H(s) = \frac{1}{s}$

A) Si determini un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che:
   α) l'errore e a regime permanente corrispondente al riferimento $r(t) = t^2/2$ sia pari a 2;
   β) il sistema complessivo abbia 3 autovalori nascosti;
   γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda precedente, specificando le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2 Si consideri un processo caratterizzato dalle seguenti matrici:

$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $C = [\ a \quad 1\ ]$

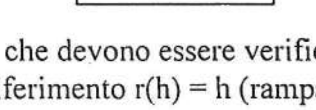
A) Si determini per quali valori del parametro "a" non è possibile stabilizzare asintoticamente il suddetto processo con uno schema di controllo <u>con reazione dall'uscita</u>.

B) Si determini la massima velocità di esaurimento del transitorio nel caso in cui (supponendo lo stato del processo misurabile) si costruisca uno schema di controllo <u>con reazione dallo stato</u>.

C) Si determini per quali valori del parametro "a" non può essere costruito un osservatore asintotico dello stato.

D) Si determini per quali valori del parametro "a", pur essendo possibile la costruzione di un osservatore asintotico dello stato, non può essere assegnata ad arbitrio la velocità di convergenza a zero tra lo stato reale e lo stato stimato.

TEMA
Si consideri il seguente schema di controllo <u>tempo discreto</u>:



Si enuncino e si <u>dimostrino</u> le condizioni che devono essere verificate per garantire che l'errore "e" si annulli <u>in tempo finito</u> in corrispondenza ad un riferimento r(h) = h (rampa tempo discreta).

Soluzione del problema 1

A) Si nota la presenza nel processo di un autovalore raggiungibile ed inosservabile in -3 che, essendo a parte reale negativa non compromette la stabilizzabilità del sistema complessivo. La funzione di trasferimento del processo P(s) è pari a

$$P(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

La funzione di trasferimento ingresso-errore risulta pari a

$$W_e(s) = \frac{D_F D_H}{D_F D_H + N_F N_H} \quad \text{con } F = \frac{N_F}{D_F} = G\,P\,, \quad H = \frac{N_H}{D_H}$$

La specifica α) richiede la presenza di un fattore s^2 a numeratore della $W_e(s)$: considerando la presenza del polo in s=0 in H(s), è necessario inserire un ulteriore polo in s=0 in G(s); sempre per soddisfare tale specifica, deve risultare $\frac{W_e(s)}{s^2}\Big|_{s=0} = 2$ (*).

Inoltre, per soddisfare la specifica β) è necessario che il controllore cancelli il polo in s=-1 e lo zero in s=-2 del processo creando, rispettivamente un autovalore rag. e inoss. in -2 e un autovalore irrag. e oss. in -1; in questo modo il sistema complessivo ha 3 autovalori nascosti (i due generati dalle suddette cancellazioni e quello in -3 intrinseco nel processo).
Alla luce di quanto sopra, si può provare a stabilizzare il sistema complessivo con un controllore con la seguente struttura (a dimensione 2):

$$G(s) = \frac{(as+b)\,(s+1)}{s\,(s+2)} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{as+b}{s} \quad \Rightarrow \quad W_e(s) = \frac{s^2}{s^2+as+b}$$

Quindi, per soddisfare la condizione (*), deve risultare b=0,5.

Infine, per soddisfare la specifica γ), le radici del denominatore della funzione di trasferimento ingresso-uscita devono essere tutte a parte reale negativa; tale denominatore è il seguente:

$$D_W = D_F D_H + N_F N_H = s^2 + as + b = s^2 + as + 0{,}5$$

Utilizzando il criterio di Routh si deduce che le radici di D_W sono tutte a parte reale negativa scegliendo a >0.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è il seguente:

$$(s+1)\,(s+2)\,(s+3)\,(s^2+as+0{,}5) \text{ con } a>0$$

dove gli autovalori in -2 e -3 sono rag. e inos., l'autovalore -1 è irrag. e oss., mentre gli altri due autovalori sono rag. e oss.

Soluzione del problema 2

Gli autovalori del processo sono -2 e +4.
L'autovalore +4 è ragg. per qualsiasi valore di "a", mentre l'autovalore -2 è irragg. per qualsiasi valore di "a". L'autovalore +4 è oss. per $a \neq 3$ (e quindi inoss. per a=3), mentre l'autovalore -2 è oss. per $a \neq 0$ (e quindi inoss. per a=0).

A) La condizione di stabilizzabilità con reazione dall'uscita è che tutti gli autovalori nascosti del processo siano a parte reale negativa. Quindi, il processo non è stabilizzabile asintoticamente con reazione dall'uscita se risulta a=3.

B) Dapprima, si osserva che la condizione di stabilizzabilità con reazione dallo stato (tutti gli autovalori irraggiungibili del processo a parte reale negativa) è soddisfatta per qualsiasi valore di "a" dato che l'autovalore irrag. in -2 è a parte reale negativa. Tuttavia, la velocità di convergenza a zero del transitorio è limitata dalla presenza dell'autovalore irrag. in -2; quindi tale massima velocità sarà pari a e^{-2t}.

C) La condizione di esistenza dell'osservatore asintotico dello stato è che tutti gli autovalori inossservabili del processo siano a parte reale negativa. Quindi, l'osservatore asintotico dello stato non può essere costruito se risulta a=3.

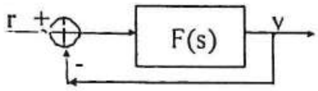
D) La condizione per cui la velocità di convergenza a zero tra lo stato reale e lo stato stimato può essere assegnata ad arbitrio, è che tutti gli autovaori siano osservabili; quindi, bisogna escludere, oltre il valore a=3 per il quale l'osservatore asintotico non può essere proprio costruito, anche il valore a=0.

642

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 17 gennaio 2018

PROBLEMA 1

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



con $F(s) = K\dfrac{s+a}{(s-1)^2}$

A) Si determini il parametro "a" in modo che il corrispondente luogo delle radici abbia un punto singolare doppio (ossia un punto in cui si intersecano due cammini delle radici) in -2; si disegni il luogo corrispondente.

B) Con riferimento al luogo delle radici individuato nella domanda A), per quali valori del parametro K il sistema complessivo è asintoticamente stabile?

C) Con riferimento al luogo delle radici individuato nella domanda A), si determini il valore del parametro K in corrispondenza del quale la velocità di esaurimento del transitorio è la più elevata. Qual è tale velocità?

PROBLEMA 2

A) Si illustri (senza dimostrazioni) lo schema di controllo con reazione dall'uscita nel dominio del tempo che consente di stabilizzare asintoticamente un processo.

B) Si consideri un processo caratterizzato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizzando lo schema di controllo nel dominio del tempo di cui alla domanda A) e progettando opportunamente il controllore, quali dei seguenti quattro polinomi possono essere polinomi caratteristici del sistema complessivo e perchè? (Non è assolutamente necessario effettuare il progetto del controllore per rispondere alla domanda)

$$(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)\ ; \quad (s+1)^4\ ; \quad (s+1)^2(s+2)^2\ ; \quad (s+1)^3(s+2)^2$$

PROBLEMA 3

Si consideri un processo formato da due sotto-processi in parallelo caratterizzati rispettivamente dalle funzioni di trasferimento $P_1(s) = \dfrac{1}{s+2}$ e $P_2(s) = \dfrac{-1}{(s+2)(s+3)}$.

A) Si determini la funzione di trasferimento del processo P(s).

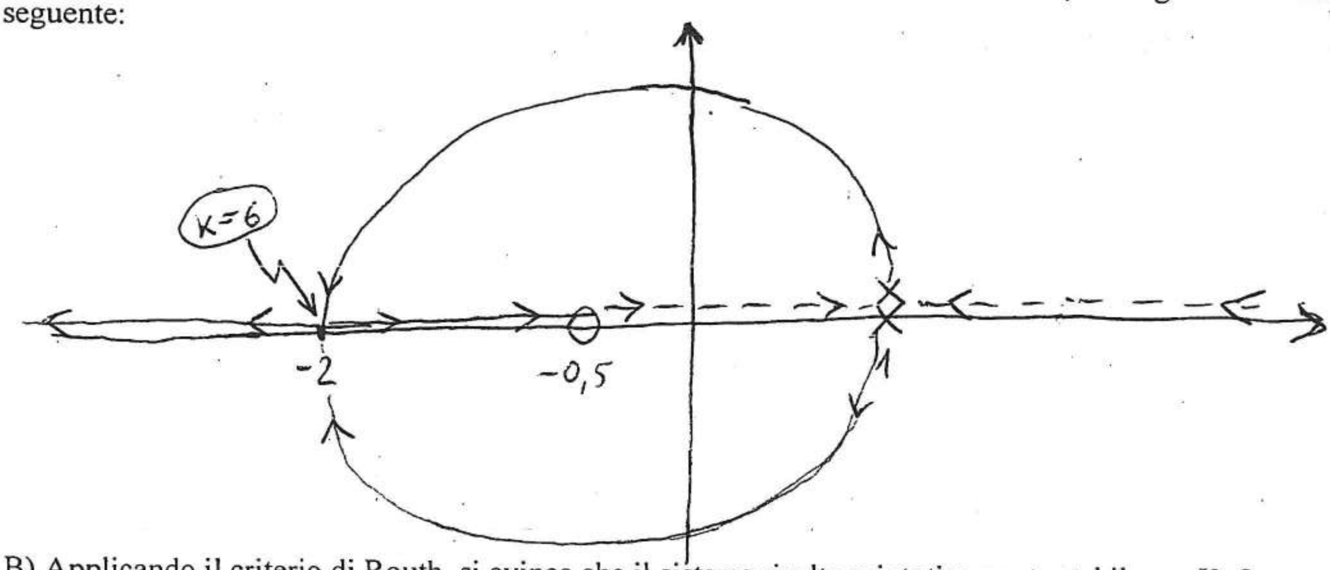
B) Si determinino gli autovalori del processo e se ne dimonstrino le caratteristiche di raggiungibilità e osservabilità (per rispondere alla domanda è necessario operare nel dominio del tempo).

Soluzione del problema 1

A) La presenza di un punto singolare doppio nel luogo delle radici implica l'esistenza di un valore di K e di un valore del parametro "a" in corrispondenza dei quali i 2 autovalori del sistema complessivo coincidano in -2. Tali valori possono essere determinati imponendo:

$$D_W = N_F + D_F = (s-1)^2 + K(s + a) = (s + 2)^2 \quad \Rightarrow \qquad a = 0{,}5 \;\; ; \; K = 6$$

Da quanto sopra si evince che il luogo delle radici della funzione $F(s) = K\,\dfrac{s+0{,}5}{(s-1)^2}$ ha un punto singolare doppio in -2 corrispondente al valore K=6. Tenendo presente tale informazione, il luogo delle radici è il seguente:



B) Applicando il criterio di Routh, si evince che il sistema risulta asintoticamente stabile per K>2.

C) Dall'esame visivo del luogo, risulta evidente che il valore del parametro K in corrispondenza del quale la parte reale del massimo dei due autovalori del sistema complessivo è la minima, coincide con il valore corrispondente al punto singolare doppio, ossia K=6. Quindi, la velocità di esaurimento del transitorio più elevata è pari a e^{-2t}.

Soluzione del problema 2

B) Nel processo è presente un autovalore irraggiungibile e inosservabile in -1.

Si ricorda che lo schema di controllo nel dominio del tempo, basato sul principio di separazione, è caratterizzato da $2n$ (n=dim A) autovalori (quindi, 4 autovalori nel caso proposto): gli n autovalori della matrice A+BK più gli n autovalori della matrice A-GC. Dato che gli autovalori irraggiungibili del processo devono essere obbligatoriamente presenti come autovalori di A+BK e che gli autovalori inosservabili del processo devono essere obbligatoriamente presenti come autovalori di A-GC, nel polinomio caratteristico del sistema complessivo deve necessariamente essere presente il fattore $(s+1)^2$.

Alla luce di quanto sopra solamente i due polinomi $(s+1)^4$ e $(s+1)^2(s+2)^2$ possono essere polinomi caratteristici del sistema complessivo.

644

CONTROLLI AUTOMATICI

Prova scritta del 12 febbraio 2018

PROBLEMA 1. Si considerino due sotto-processi in parallelo P_1 e P_2 descritti dalle seguenti matrici inseriti in un "classico" schema di controllo ad anello chiuso:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} -21 & 1 \end{pmatrix}.$$

A) Si determinino il parametro "a" ed un controllore $G(s)$ a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:

α) l'errore a regime permanente corrispondente ad ingressi a gradino sia nullo;
β) il sistema complessivo abbia 2 autovalori nascosti;
γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determi il polinomio caratteristico del sistema complessivo specificando le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità dei varoi autovalori

PROBLEMA 2.

A) Si traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist relativi alla funzione di trasferimento ad anello aperto (ossia, F(s)=G(S)P(s)) di cui al Problema 1.

B) Utilizzando il criterio di Nyquist, si mostri la stabilità asintotica del sistema complessivo e si calcoli graficamente il margine di fase sui diagramma di Bode e di Nyquist.

TEMA
Si dimostri il teorema di assegnazione degli autovalori.

Soluzione del problema 1

A) Le funzioni di trasferimento dei due sotto-processi sono $P_1(s) = \frac{1}{s-a}$ e $P_2(s) = \frac{s-21}{(s+1)^2}$ dove l'autovalore $\lambda_1 = -1$ del primo sotto-processo è ragg. e inoss ed è quindi nascosto. Il secondo autovalore nascosto, richiesto dalla specifica β), si può ottenere per interconnessione tra i due processi ponendo $a = -1$; con questa scelta infatti la f. di trasferimento del processo risultante è

$$P(s) = P_1(s) + P_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{s-21}{(s+1)^2} = 2\frac{s-10}{(s+1)^2}$$

in cui solo due dei tre autovalori in -1 dei sotto-processi compaiono nella f. di trasf. del processo P(s). Ciò significa che uno dei tre autovalori in -1 è diventato nascosto; interconnettendo le forme canoniche raggiungibili dei due sotto-processi in parallelo ed analizzando la raggiungibilità/osservabilità della rappresentazione ingresso-stato-uscita del processo risultante, si deduce che l'autovalore nascosto è irrag. ed inoss.

Per soddisfare la specifica α), occorre un polo in zero nella f. di trasf. ad anello aperto che deve essere evidentemente aggiunto nel controllore che sarà quindi della forma

$$G(s) = \frac{1}{s}G'(s)$$

Poiché il controllore deve essere di dimensione minima, per soddisfare la specifica γ) si procede per tentativi a partire dal controllore:

$$G(s) = K\frac{1}{s}$$

Con tale controllore la f. di trasf. a ciclo aperto risulta:

$$F(s) = 2K\frac{s-10}{s(s+1)^2}$$

ed il denominatore della f. di trasf. ad anello aperto è quindi

$$D_W(s) = N_F(s) + D_F(s) = s^3 + 2s^2 + (1+2K)s - 20K \quad (*)$$

Per mezzo del criterio di Routh si determinano i valori di K per i quali il sistema complessivo è stabile:

$$\begin{array}{|cc} 1 & 1+2K \\ 2 & -20K \\ 12K+1 & \\ -K & \end{array}$$

da cui segue che il sistema è asintoticamente stabile per $-\frac{1}{12} < K < 0$. Scegliendo, per esempio, $K = -0.01$ si ottiene il controllore

$$G(s) = -\frac{0.01}{s}$$

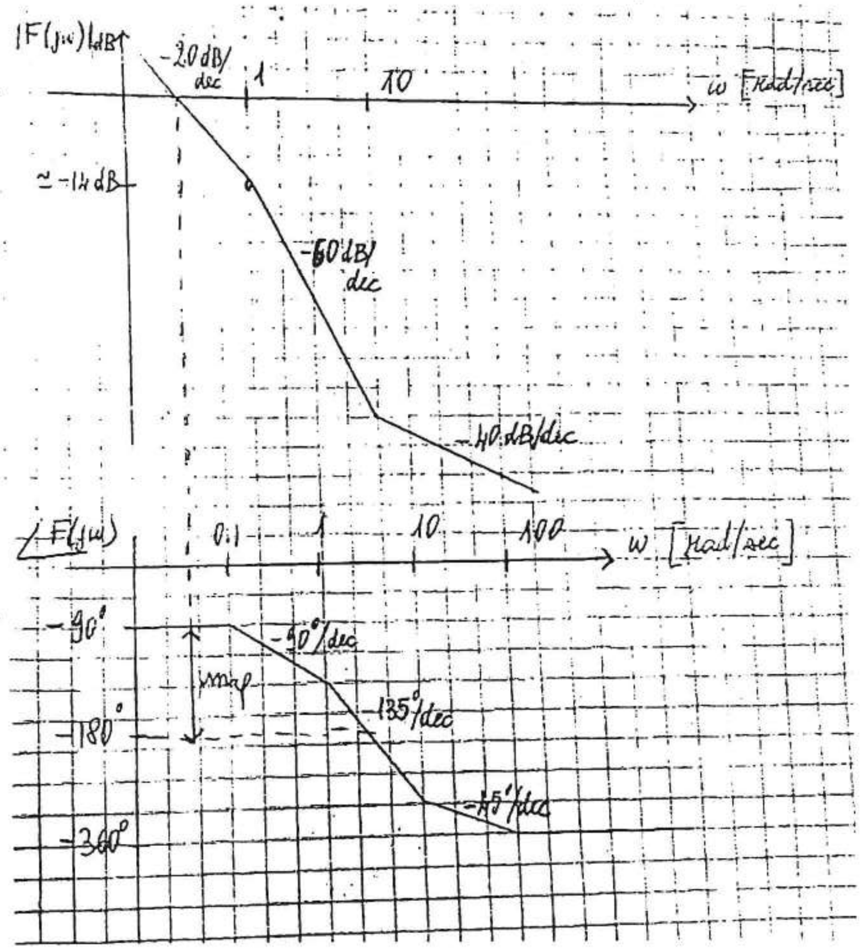
B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $D_w(s)\,(s+1)^2$ dove $D_w(s)$ è il polinomio (*) le cui tre radici sono autovalori ragg. e oss; i due autovalori in -1 sono uno ragg. ed inoss e l'altro irrag. ed inoss.

Soluzione del problema 2

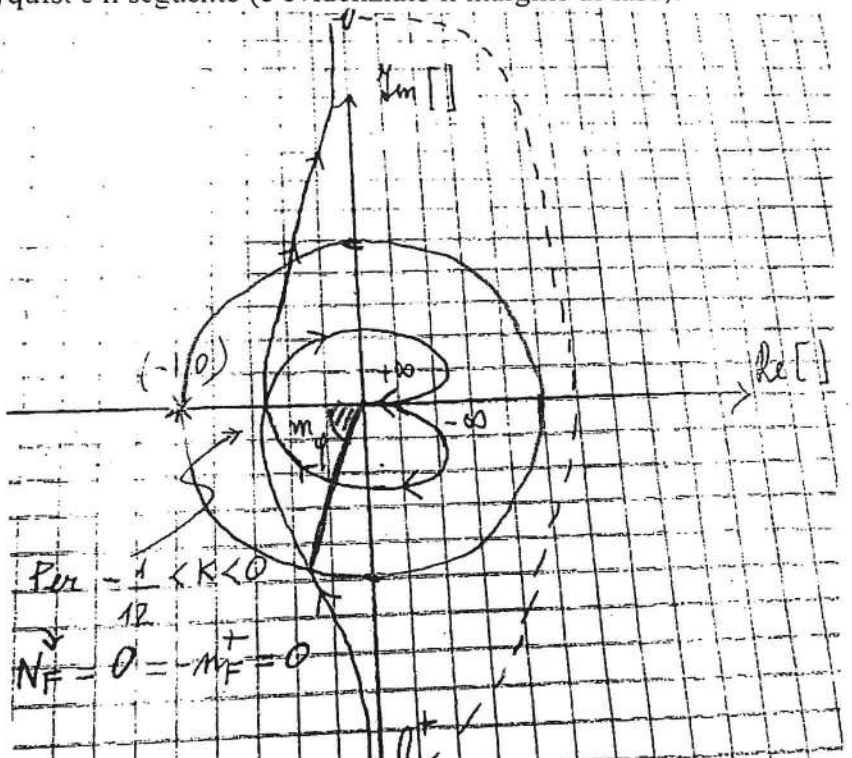
A) La f. di trasferimento ad anello aperto del sistema complessivo definito al punto A) risulta:

$$F(s) = 0.2\frac{1-\frac{s}{10}}{s(1+s)^2}$$

I diagrammi di Bode (asintotici) richiesti sono i seguenti (la figura evidenzia anche il margine di fase che risulta di poco inferiore a 90°):



B) Il diagramma di Nyquist è il seguente (è evidenziato il margine di fase):

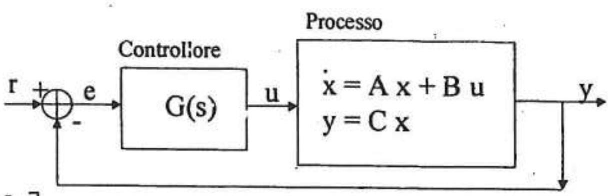


Il sistema è asintoticamente stabile poiché non vi sono giri del diagramma attorno al punto critico e non ci sono poli a parte rale positiva della F(s).

647

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 21 marzo 2018

PROBLEMA 1 Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



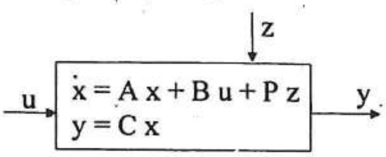
con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ 3 \quad 1\ ]$

A) Si determinino il parametro "a" ed un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo che:
   (α) il processo abbia tutti gli autovalori raggiungibili ed osservabili;
   (β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
   (γ) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a $(s+2)^3$.

B) Si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità degli autovalori del sistema complessivo individuato nella domanda A).

C) Con riferimento al sistema complessivo individuato nella domanda A), si determini l'errore "e" a regime permanente corrispondente al riferimento r(t) = t.

PROBLEMA 2 Si consideri il processo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\ -1 \quad 1\ ]$

<u>Il disturbo z è misurabile.</u>

A) Si progetti uno schema di controllo a dimensione minima in maniera da verificare le seguenti specifiche:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   β) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

B) Con riferimento alla soluzione individuata nella domanda A), si tracci il luogo delle radici di interesse e si indichi su tale luogo (senza calcolarlo) il valore del parametro K (il parametro che caratterizza il luogo delle radici) in corrispondenza al quale la velocità di convergenza del transitorio è massima.

TEMA

L'assegnazione degli autovalori nel dominio del tempo.

Si dimostri il principio di separazione.

Soluzione del problema 1 648

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{s+3}{s\,(s+a)}$.

Dato che il processo deve avere tutti gli autovalori raggiungibili ed osservabili non ci possono essere autovalori intrinseci del processo; quindi l'autovalore nascosto deve generarsi per interconnessione tra controllore e processo. Allora, per garantire la compatibilità con la specifica (γ), si deve necessariamente scegliere a=2 e porre uno zero in -2 nel controllore, in modo da creare un autovalore irragg. e oss. in -2.
Si può allora scegliere un controllore della forma

$$G(s) = b\,\frac{s+2}{s+c} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = b\,\frac{s+3}{s\,(s+c)}$$

Per soddisfare la specifica (γ) si procede all'assegnazione degli autovalori:

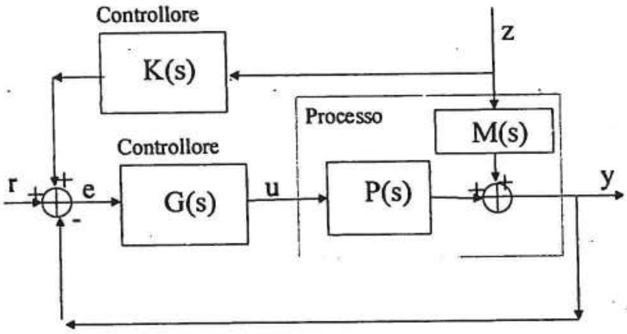
$$D_W = N_F + D_F = s\,(s+c) + b(s+3) = (s+2)^2 \qquad \Rightarrow \qquad b=4/3 \quad c=8/3$$

B) il sistema complessivo ha 3 autovalori in -2 di cui uno irragg. e oss. e due ragg. e oss.

C) La risposta richiesta è pari a $\left.\frac{W_e(s)}{s}\right|_{s=0} = 2/3$.

Soluzione del problema 2

A) Dato che il disturbo è misurabile, è possibile progettare uno schema di controllo a doppia controreazione del tipo:



dove $P(s) = M(s) = \frac{s-1}{s\,(s+2)}$

Si può tentare allora di stabilizzare il sistema complessivo con un controllore G(s) a dim. zero del tipo

$$G(s) = K \quad \Rightarrow F(s) = K\,\frac{s-1}{s\,(s+2)}$$

Applicando il criterio di Routh al polinomio

$$D_W = N_F + D_F = K\,(s-1) + s\,(s+2) = s^2 + s\,(2+K) - K$$

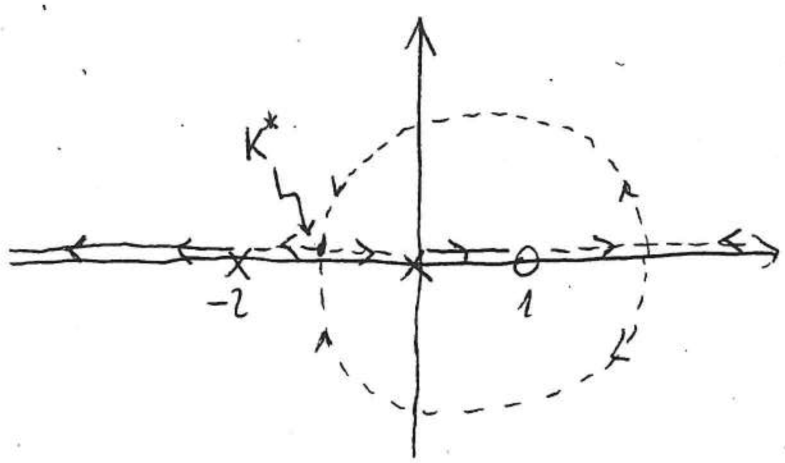
si deduce che deve essere $0 > K > -2$.

Si deve infine scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)=0$ ottenendo la reiezione completa del disturbo. Svolgendo i conti si ottiene:

$$K(s) = -\,\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\,\frac{1}{K}$$

649

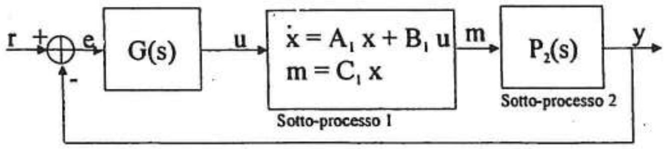
B) Dal luogo delle radici di F(s) (disegnato qui di seguito) è evidente che la velocità di convergenza risulta massima in corrispondenza del punto singolare tra i punti di ascissa -2 e 0, indicato come K*.



650

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 13 giugno 2018

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $A_1 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $C_1 = [\,1 \quad 0\,]$ $\qquad P_2(s) = \dfrac{s-b}{s+1}$.

A) Si determinino i parametri "a", "b" e un controllore G(s) costante (G(s) deve quindi essere uguale ad una costante K opportuna) in modo tale che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori a parte reale minore di -4;
   β) l'errore "e" a regime permanente per ingresso r(t) = t sia non maggiore di 0,03;
   γ) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto.

B) Si disegni il luogo delle radici relativo alla domanda A) evidenziandone la congruenza con la stabilizzazione di cui alla specifica α).
   Si indichino tutti i valori di K in corrispondenza dei quali tutte le specifiche della domanda A) sono soddisfatte. Nell'ambito di tali valori si calcoli il valore di K in corrispondenza del quale tutti gli autovalori del sistema complessivo sono reali e la velocità di esaurimento del transitorio è massima (si determini tale velocità di esaurimento).

C) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domande A; si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2.

Si consideri ancora lo schema di controllo del problema 1 (A_1, B_1, C_1 e $P_2(s)$ sono gli stessi del problema 1)

A) Si determinino i parametri "a", "b" ed un controllore G(s) a dimensione minima in modo tale che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con polinomio caratteristico pari a
   $(s+3)\,(s+4)^2\,(s+5)$;
   β) l'errore "e" a regime permanente per ingresso r(t) costante sia nullo;
   γ) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti entrambi irraggiungibili ed osservabili.

B) Si disegni il luogo delle radici relativo alla domanda A) evidenziando la congruenza con l'assegnazione degli autovalori effettuata in tale domanda.

TEMA
Si descriva il ruolo degli elementi fondamentali dell'automatica (sensori, attuatori, leggi/algoritmi di controllo, schema di controllo).
Facendo riferimento ai suddetti elementi, si descriva un settore applicativo ritenuto particolarmente significativo (tralasciando il settore della robotica).

Soluzione del problema 1

A) Il sotto-processo 1 ha funzione di trasferimento $P_1(s) = \dfrac{s+3}{(s-a)(s+5)}$. In base alla specifica β), la funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) deve avere un polo in s=0. Per fare comparire tale polo (che non può evidentemente essere presente né nel controllore, né nel sotto-processo 2) si deve scegliere a=0. In questo modo, il sotto-processo 1 ha funzione di trasferimento $P_1(s)=\dfrac{s+3}{s(s+5)}$. A questo punto, l'unico modo per far sì che il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto è scegliere b= -5, creando un autovalore nascosto (ragg. e inoss.) in -5 (compatibile con la specifica α).
Con tale scelte la funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) risulta pari a:

$$F(s) = K\, P_1(s)\, P_2(s) = K\,\frac{s+3}{s(s+1)}$$

Per verificare la specifica β) deve anche risultare:

$$\left.\frac{W_e(s)}{s}\right|_{s=0} \leq 0{,}03 \text{ con } W_e(s) = \frac{D_F}{N_F + D_F}$$

Svoilgendo i cònti, la condizione precedente è verificata se risulta $K \geq 11{,}11$
Per verificare la specifica α) si deve considerare il denominatore della funz. di trasf. ad anello chiuso:

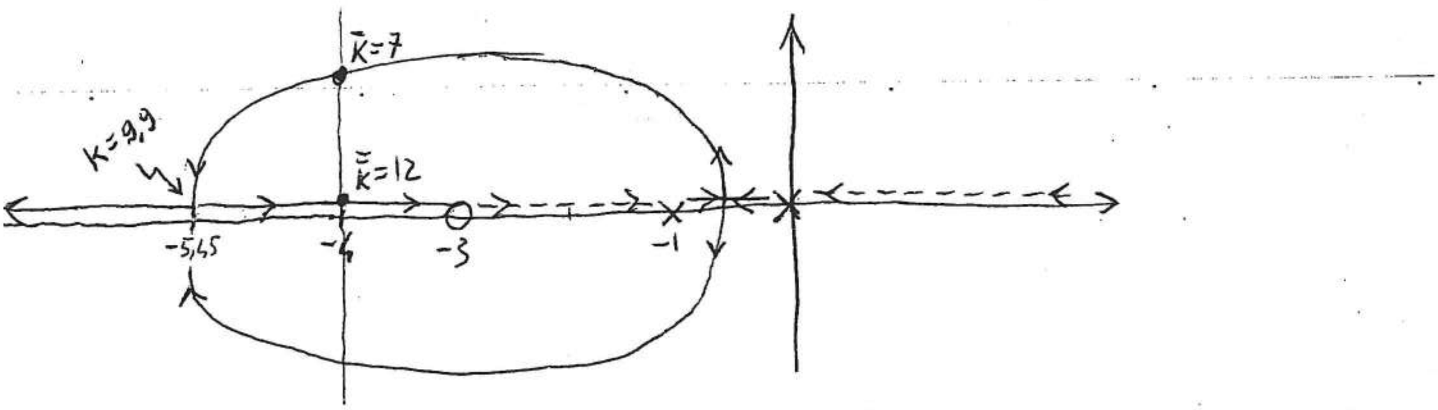
$$D_W = N_F + D_F = K(s+3) + s(s+1) = s^2 + s(K+1) + 3K$$

ed applicare il criterio di Routh dopo aver effettuato nel polinomio suddetto la sostituzione s -> s-4. Il polinomio ottenuto è

$$s^2 + s(K-7) + 12-K$$

Applicando il criterio di Routh, si deduce che il sistema è stabile asintoticamente per $12 > K > 7$.
Considerando anche la condizione su K derivante dalla specifica β), si deduce che i valori di K che consentono di verificare tutte le specifiche sono quelli compresi nell'intervallo $12 > K \geq 11{,}11$.

B) Il luogo delle radici di $F(s) = K\, P_1(s)\, P_2(s) = K\,\dfrac{s+3}{s(s+1)}$ è il seguente (nel disegno si evidenziano i valori di K che delimitano l'intervallo (7, 12) entro il quale il sistema è asintoticamente stabile con tutti gli autovalori a parte reale minore di -4):



Come già evidenziato dalla risposta alla domanda A), i valori di K che consentono di verificare tutte le specifiche sono quelli compresi nell'intervallo $12 > K \geq 11{,}11$. In corrispondenza di tutti i valori di K in tale intervallo il sitema complessivo ha 2 autovalori reali come si può desumere dall'esame visivo del luogo e dal calcolo del punto singolare che risulta in -5,45 in corrispondenza di K=9,9, (tale calcolo poteva essere evitato osservando che per K=11,11 entrambe le radici del polinomio $D_W = s^2 + s(K+1) + 3K = s^2 + 12{,}11\,s + 33{,}33$ sono reali).

Ancora dall'esame visivo del luogo è evidente che, nell'ambito dell'intervallo $12 > K \geq 11{,}11$, la velocità di esaurimento del transitorio è massima per K =11,11 poiché per tale valore è minimo il maggiore dei due autovalori del sistema complessivo. Le due radici dell'equazione $s^2 + 12{,}11\, s + 33{,}33$ sono -4,23 e -7,88; quindi la massima velocità di esaurimento del transitorio è pari ad $e^{-4{,}23t}$.

C) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è pari a $[s^2 + s\,(K+1) + 3K](s+5)$ (con $12 > K \geq 11{,}11$) dove le due radici del polinomio tra parentisi quadra sono autovalori ragg. ed oss., mentre l'autovalore in -5 è un autovalore ragg. ed inoss.

Soluzione del problema 2

A) Differentemente dal problema 1, non conviene scegliere a=0 per soddisfare la specifica sul regime permanente, altrimenti la specifica γ) diventerebbe impossibile da soddisfare. La specifica β) potrà essere soddisfatta inserendo un polo in s=0 nel controllore.

Utilizzando il test di Hautus è facile constatare che per a=-3 il sotto-processo 1 ha un autovalore irrag. ed oss. in -3 compatibile con la specifica α).

Con tale scelta il sotto-processo 1 ha funzione di trasferimento $P_1(s) = \dfrac{1}{s+5}$.

Per creare un secondo autovalore nascosto irrag. ed oss. si deve creare una cancellazione zero-polo. A questo punto l'unica possibilità è inseire un fattore s+5 a numeratore del controllore, creando una cancellazione zero-polo in -5 e quindi un autovalore in -5 irrag. ed oss. compatibile con la specifica α).

Considerando la specifica α), si noti che, a questo punto, rimangono da assegnare, mediante equazione Diofantina, solamente i due autovalori in -4.
In base alle considerazioni precedenti ed osservando che il parametro "b" deve ancora essere scelto, la struttura del controllore corretta (poiché il numero di parametri ancora liberi tra controllore e processo (2) è pari al grado del denominatore della F(s) (d_F=2)) è la seguente:

$$G(s) = K\frac{s+5}{s} \quad \Rightarrow \quad F(s) = K\frac{s-b}{s\,(s+1)}$$

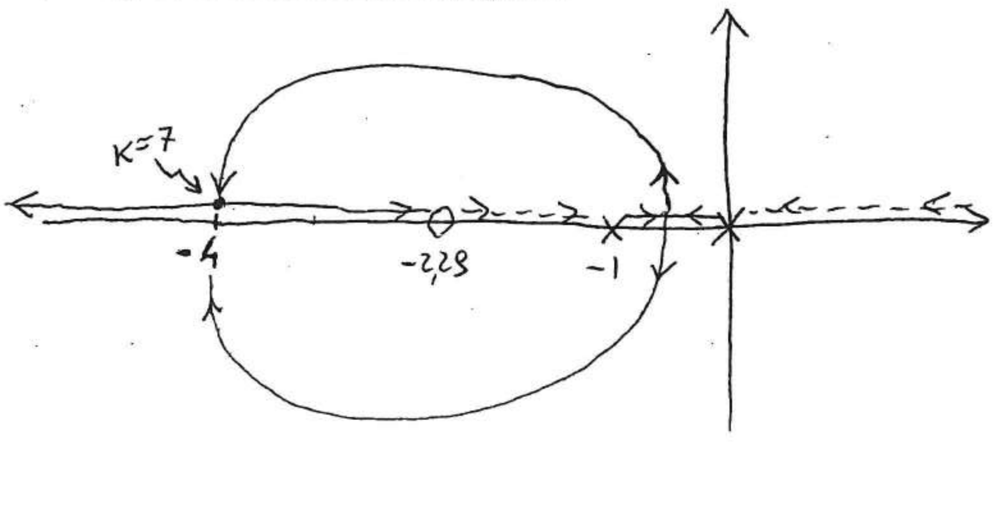
La corrispondente assegnazione degli autovalori risulta:

$$D_W = N_F + D_F = K(s-b) + s(s+1) = (s+4)^2 \Rightarrow \qquad K=7,\ b = -16/7 = -2{,}29$$

B) Il luogo delle radici relativo alla domanda A) è

$$F(s) = K\frac{s+2{,}29}{s\,(s+1)}$$

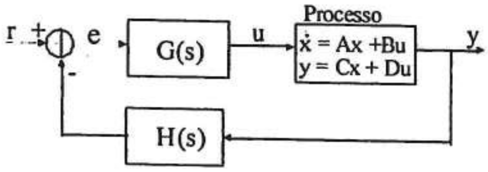
Inoltre, dall'assegnazione degli autovalori effettuata nella domanda A) si deduce che il luogo delle radici suddetto deve avere un punto singolare doppio in -4 corrispondente al valore K=7.
Pertanto, il luogo delle radici richiesto è il seguente:



653

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta dell' 11 luglio 2018

PROBLEMA 1
Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\,1 \quad 0\,]$, $D = b$, $H(s) = \dfrac{1}{s+c}$

A) Si determinino i parametri "a", "b", "c" ed un controllore G(s), <u>a dimensione uno</u>, in modo tale che:
   α) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori in -1;
   β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
   γ) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=1 sia uguale a 3.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A), specificando le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2.
Si consideri lo stesso processo del problema 1 (con le stesse matrici A, B, C, D).

A) Si specifichi per quali valori del parametro "a" esiste un osservatore asintotico dello stato del processo.

B) Scelto a=4 si costruisca un osservatore asintotico dello stato. Quale risulta essere la massima velocità di convergenza a zero dell'errore tra il valore stimato dello stato del processo e il valore reale di tale stato?

PROBLEMA 3.
A) Si consideri un processo con le seguenti caratteristiche:
- il processo è instabile e non può essere stabilizzato con un controllore pari ad una costante;
- tutti gli zeri del processo sono a parte reale negativa;
- la differenza tra il numero di poli e il numero di zeri del processo è pari a 3 (n-m=3);
- il centro degli asintoti del luogo delle radici relativo al processo è negativo.

Si descriva, in termini generali, il metodo, <u>basato sul luogo delle radici</u>, per progettare un controllore a dimensione minima che renda asintoticamente stabile il sistema complessivo costituito da un "classico" schema di controllo a retroazione in cui il processo abbia tutte le caratteristiche suddette.

B) Si illustri con un esempio quanto presentato in generale nella domanda A): in particolare, si determini un processo che abbia tutte le caratteristiche di cui alla domanda A), si progetti un controllore che renda il sistema complessivo asintoticamente stabile e si traccino i luoghi delle radici di interesse.

Soluzione del problema 1

A) Si nota innanzitutto che il processo ha un autovalore nascosto (ragg. ed inoss.) in 1-a; dato che tutti gli autovalori del sistema complessivo devono essere in -1 (specifica α)) deve necessariamente risultare 1-a= -1, ossia a=2.

La funzione di trasferimento del processo risulta quindi $P(s) = \frac{bs + 1 - 2b}{s - 2} = b\,\frac{s + (1 - 2b)/b}{s - 2}$

L'altro autovalore nascosto (necessario per soddisfare la specifica β)) si deve necessariamente generare dall'interconnessione del controllore con il processo. In particolare, si deve scegliere il parametro "b" in modo che il processo abbia uno zero in -1, così da poterlo cancellare con un polo in -1 del controllore, creando in tal modo un altro autovalore ragg. ed inoss. in -1 compatibile con la specifica α). Si deve quindi scegliere "b" in modo tale che (1-2b)/b = 1, ossia b= 1/3.
Alla luce di quanto sopra, tenendo conto che il controllore deve essere a dimensione 1, la sua struttura dovrà essere del tipo:

$$G(s) = \frac{ds + e}{s+1} \Rightarrow F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{1/3\,(ds + e)}{s-2}$$

La funzioni di trasferimento di interesse del sistema risultano:

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}, \quad W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con} \quad F(s) = G(s)\,P(s)$$

Per soddisfare la specifica γ) deve risultare

$$W_e(0)=3 \Rightarrow \frac{-2c}{1/3\,e - 2c} = 3 \quad \Rightarrow e = 4c\ (*)$$

Considerata l'equazione di cui sopra, per effettuare l'assegnazione degli autovalori con l'equazione diofantina sono necessari d_W+1 parametri; dalla struttura di W(s) si nota che risulta $d_W=d_F+d_H$; quindi, in definitiva, sono necessari d_F+d_H+1 parametri, ossia, con la struttura del controllore ipotizatta, 1+1+1=3 parametri, ossia esattamente il numero di parametri ancora disponibile ("c", "d" ed "e").

Si procede quindi con la seguente assegnazione degli autovalori:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = 1/3\,(ds + e) + (s-2)(s+c) = (s+1)^2$$

Dall'equazione diofantina suddetta, utilizzando il principio di identità dei polinomi, si deducono le due equazioni:

d= -3c+12 , e= 6c +3

Il sistema costituito dall'equazione (*) più le 2 equazioni suddette fornisce c= -3/2, d= 33/2 , e=-6

B) In base alle considerazioni di cui sopra, il polinomio caratteristico risulta $(s + 1)^4$ con due autovalori in -1 raggiungibili ed inosservabili, e due autovalori in -1 raggiungibili ed osservabili.

Soluzione del problema 2

A) La condizione di esistenza dell'osservatore asintotico è che gli eventuali autovalori inosservabili devono essere a parte reale negativa. Dato che il processo ha un autovalore inosservabile in 1-a, deve risultare 1-a<0, ossia a>1.

B) Si nota che per a=4 il processo ha un autovalore inosservabile in -3 che limita la velocità di convergenza richiesta a e^{-3t}.
Progettati lo schema di controllo e l'equazione che caratterizza l'osservatore asintotico, si nota che tale struttura dipende dalla matrice G per determinare la quale si deve imporre l'equazione:

$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda+3)(\lambda-\lambda_{arb})$$

dove λ_{arb} è un autovalore negativo che può essere scelto arbitrariamente (conviene comunque sceglierlo non superiore a -3 per non limitare ulteriormente la velocità di convergenza). Scegliendo, ad esempio $\lambda_{arb} = -3$ si ottiene:

$G= \begin{bmatrix} 7 \\ * \end{bmatrix}$ dove "*" è un numero qualsiasi.

Soluzione del problema 3

A) Il problema proposto si risolve con un controllore del tipo:

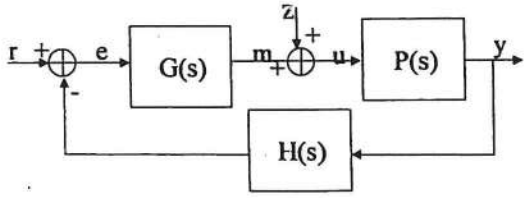
$$G(s) = K\,\frac{s - z}{1 + Ts}$$

Il metodo consiste nel considerare un controllore, momentaneamente improprio, nella forma G(s) = K(s-z), che, grazie all'introduzione dello zero in "z", rende la differenza tra poli e zeri uguale a 2 (n-m=2) e quindi rende verticali gli asintoti del luogo positivo; lo zero "z" deve essere scelto negativo e tale da far rimanere negativo il centro degli asintoti del luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto.
Una volta scelto z secondo i criteri di cui sopra, K deve essere scelto positivo e sufficientemente elevato (K deve essere maggiore di un valore limite che può essere determinato utilizzando il criterio di Routh), in modo che le due radici relative ai due cammini che convergono verso gli asintoti positivi verticali siano a parte reale negativa.
Una volta scelti z e K secondo i criteri di cui sopra, si deve aggiungere al denominatore di G(s) il fattore 1+Ts per rendere proprio il controllore; in particolare, sfruttando un opportuno teorema, si deve scegliere T positivo e sufficientemente piccolo, in modo tale che le due radici di cui sopra rimangano a parte reale negativa, poiché "risucchiate" nell' "ansa" del luogo delle radici che si viene a creare in virtù dell'introduzione del fattore 1+Ts.

656

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 10 settembre 2018

PROBLEMA 1 Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

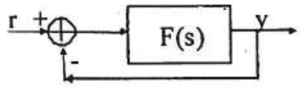


dove $P(s) = \frac{s+3}{(s+a)(s+1)}$, $H(s) = \frac{1}{s+b}$

A) Si determinino i parametri "a" e "b" (con $a \neq 3$) ed un controllore G(s), a dimensione minima, in modo tale che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori <u>coincidenti</u> e <u>minori di -2</u>;
   β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
   γ) la risposta y a regime permanente corrispondente al disturbo z(t) = costante sia nulla.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domande A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



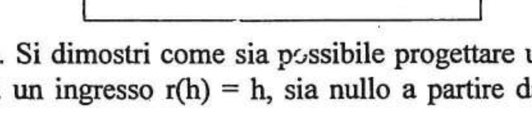
con $F(s) = K \frac{s+1}{s\,(s^2+as+b)}$

A) Si determinino i parametri "a" e "b", in modo che il corrispondente luogo delle radici abbia un punto singolare triplo (ossia un punto in cui si intersecano tre cammini delle radici) in -2; si disegni il luogo corrispondente.

B) Con riferimento al luogo delle radici individuato nella domanda A), si determini il valore del parametro K in corrispondenza del quale la velocità di esaurimento del transitorio è la più elevata. Si determini tale velocità?

TEMA

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Sia assegnato un processo P(z). Si dimostri come sia possibile progettare un controllore G(z) in modo che l'errore e(h), corrispondente ad un ingresso r(h) = h, sia nullo a partire da un certo istante finito (istante tempo discreto "l").

Soluzione del problema 1

A) Posto $F=GP=N_F/D_F$, le f. di trasf. di interesse sono le seguenti:

$$W(s) = \frac{D_H N_F}{D_H D_F + N_H N_F}$$

$$W_z(s) = \frac{N_P D_G D_H}{D_H D_F + N_H N_F}$$

Per verificare la specifica γ), senza aumentare la dimensione del controllore, è necessario scegliere b=0.
Per verificare la specifica β), rispettando la specifica α) (autovalori minori di -2), e' necessario introdurre un polo in -3 nel controllore in modo da creare una cancellazione polo-zero in -3 (autovalore nascosto ragg. ed inoss. del sistema complessivo); in base alla specifica α) (autovalori coincidenti), questa scelta vincola anche tutti gli altri autovalori del sistema complessivo ad essere assegnati in -3.
Si può quindi risolvere il problema con un controllore con due parametri incogniti che diventano tre considerando il paramtero "a" del controllore ancora da determinare; in questo modo il numero dei parametri incogniti è uguale al grado di D_W (d_H=3):

$$G(s) = \frac{cs + d}{s + 3} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{cs + d}{(s+a)\,(s+1)}$$

Gli autovalori ragg. ed oss. del sistema complessivo coincidono con le radici del denominatore della W(s), ossia:

$$D_W = D_H D_F + N_H N_F = s\,(s+a)\,(s+1) + cs + d = (s+3)^3 \quad \Rightarrow \quad a=8 \;\; c=19 \;\; d=27$$

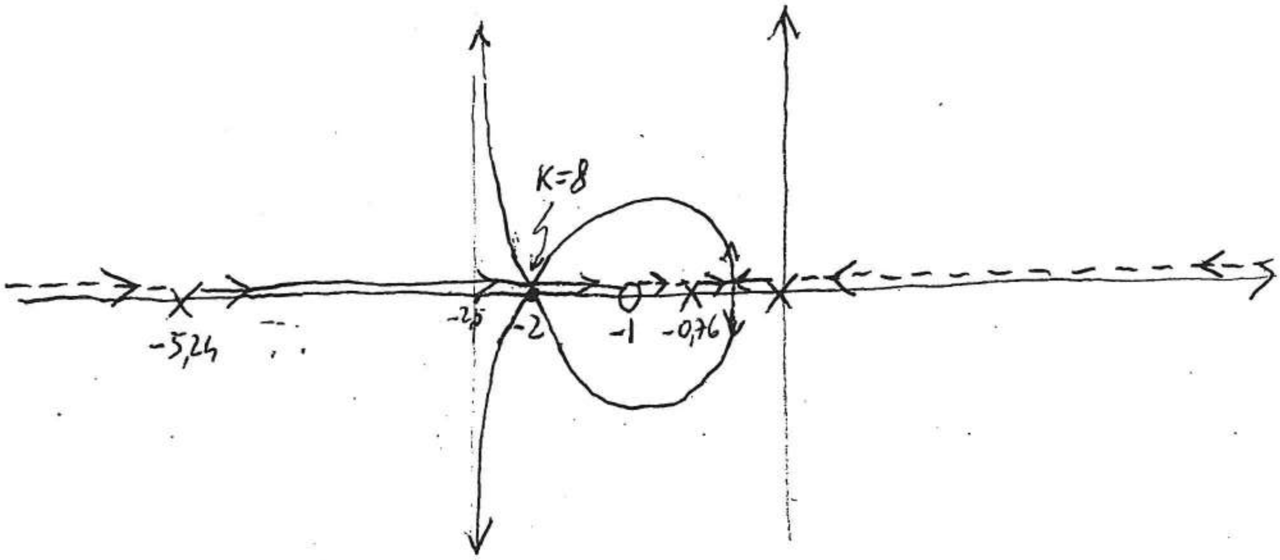
B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(s+3)^4$ dove un autovalore in -3 è rag. e inoss, mentre gli altri tre autovalori in -3 sono rag. e oss.

Soluzione del problema 2

A) La presenza di un punto singolare triplo nel luogo delle radici significa che deve esistere valori di K e dei parametri "a" e "b" in corrispondenza dei quali i 3 autovalori del sistema complessivo sono tutti in -2. Tali valori possono essere determinati imponendo:

$D_W = N_F + D_F = s(s^2+as+b) + K(s+1) = (s+2)^3 \quad \Rightarrow \quad a=6,\ b=4,\ K=8$

Da quanto sopra si evince che il luogo delle radici della funzione $F(s) = K\frac{s+1}{s(s^2+6s+4)} = K\frac{s+1}{s(s+0{,}76)(s+5{,}24)}$ ha un punto singolare triplo in -2 corrispondente al valore K=8. Tenendo presente tale informazione, il luogo delle radici è il seguente:

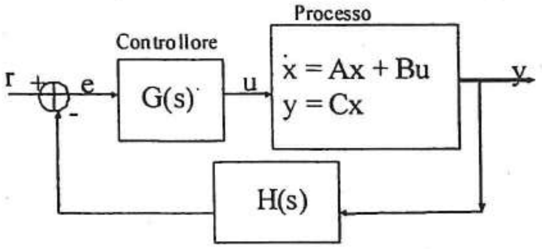


B) Dall'esame visivo del luogo, risulta evidente che il valore del parametro K in corrispondenza del quale la parte reale del massimo dei tre autovalori del sistema complessivo è la minima, coincide con il valore di K corrispondente al punto singolare triplo, ossia K=8. Quindi, la velocità di esaurimento del transitorio più elevata è pari a e^{-2t}.

659

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 15 ottobre 2018

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



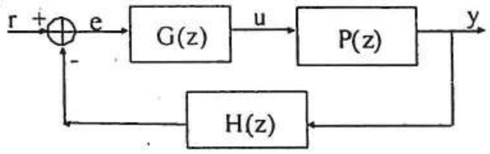
Il processo P(s) è caratterizzato dalle matrici: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [\ a \quad 1/3\ ]$.

Risulta inoltre $H(s) = \dfrac{s+b}{s}$

A) Si determinino i parametri "a" e "b", nonché un controllore G(s) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) la risposta y, a regime permanente, corrispondente ad un riferimento r(t) = t (rampa) sia uguale a 4;
   β) il processo abbia un autovalore nascosto;
   γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{z - 0{,}2}{(z+b)\,(z - 0{,}7)\,(z - 0{,}4)}$, $H(z) = \dfrac{z+a}{z-1}$

A) Si determinino i parametri "a" e "b", nonché un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h)= η(h) (gradino) si annulli nel tempo più breve possibile (si indichi l'istante "l" a partire dal quale l'errore si annulla);
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e tutti gli autovalori del sistema complesivo abbiano modulo minore di 0,5.

B) Utilizzando i parametri "a" e "b", nonché il controllore G(z) calcolati nella domanda A), si calcoli l'espressione completa della risposta y(h) all'ingresso r(h)= η(h) (gradino).

C) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

TEMA
Con riferimento al luogo delle radici, si discuta come, nei vari casi, devono essere progettati i controllori che stabilizzano asintoticamente il sistema complessivo.

Soluzione del problema 1 660

A) Il processo ha autovalori +1 e −2 entrambi raggiungibili. Come si può verificare utilizzando il test di Hautus, scegliendo a=2/3 l'autovalore -2 diviene inosservabile permettendo di verificare la specifica β) senza inficiare la stabilizzabilità del sistema complessivo.

Con tale scelta, la funzione di trasferimento del processo risulta:

$$P(s) = \frac{1/3}{s-1}$$

Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_F\, D_H}{N_F\, N_H + D_F\, D_H}, \text{ con } F(s) = G(s)\, P(s) = \frac{N_F}{D_F}, \; H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

La specifica α) impone che (i) il polinomio $N_F D_H$ abbia una radice singola in zero (condizione automaticamente soddisfatta dato che tale radice è già presente in D_H) e (ii) che risulti $W(s)/s|_{s=0} = 4$.

Si può allora tentare di risolvere il problema con un controllore di dimensione zero:

$$G(s) = K \;\Rightarrow\; F(s) = \frac{K/3}{s-1}$$

La condizione (ii) di cui sopra impone:

$W(s)/s|_{s=0} = 4 \;\Rightarrow\; b=1/4$

Il denominatore della W(s) risulta allora:

$$D_W = N_F\, N_H + D_F\, D_H = (K/3)(s+1/4) + s(s-1) = s^2 + s(K/3-1) + K/12$$

In base al criterio di Routh, il sistema è asint. stabile scegliendo K>3.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(s+2)[s^2 + s(K/3-1) + K/12]$ (con K>3) dove l' autovalore 2 è rag. e inoss, mentre i due autovalori uguali alle radici del polinomio tra parentisi quadra sono ragg. e oss.

Soluzione del problema 2 661

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F\, D_H}{N_F\, N_H + D_F\, D_H},\quad W_e(z) = \frac{D_F\, D_H}{N_F\, N_H + D_F\, D_H} \quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F}\ ,\ H(z) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per verificare la specifica α), deve risultare:

$$e(z) = W_e(z)\, r(z) = \frac{D_F\, D_H}{N_F\, N_H + D_F\, D_H}\, \frac{z}{z-1} = \frac{S(z)}{z^{l-1}} \qquad \Rightarrow \quad \frac{D_F\, D_H}{N_F\, N_H + D_F\, D_H} = \frac{S(z)\; z-1}{z^{l}}$$

dove S(z) è un polinomio qualsiasi di grado non superiore a l-1 e l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Per verificare la condizione suddetta è sufficiente che (i) il polinomio $D_F\, D_H$ abbia una radice singola in +1 (condizione automaticamente soddisfatta dato che tale radice è già presente in D_H) e (ii) si imponga l'assegnazione degli autovalori $N_F\, N_H + D_F\, D_H = z^{l}$ (si noti che tale assegnazione degli autovalori rende il sistema complessivo asintoticamente stabile consentendo di verificare anche la specifica β)). Inoltre, per minimizzare l'istante "l" a partire dal quale l'errore si annulla, conviene cancellare il polo del processo in 0,4 e lo zero del processo in 0,2 (tali zero e polo sono cancellabili in quanto hanno modulo minore di 0,5, circostanza non vera per il polo del processo in 0,7 che quindi non può essere cancellato). Le due cancellazioni suddette creano un autovalore rag. e inoss. in 0,2 (cancellazione polo-zero) ed un autovalore irrag. e oss. in 0,4 (cancellazione zero-polo).

Inoltre, tenendo conto che il numero di parametri per l'assegnazione degli autovalori deve essere pari a d_W=d_F+1 e che possiamo disporre dei parametri "a" e "b" conviene scegliere la seguente struttura del controllore (a dimensione 1), in corrispondenza della quale il numero dei parametri (tre, ovvero "a", "b" e "c") è uguale a $d_W = d_F+1 = 2+1 = 3$:

$$G(z) = c\,\frac{z-0{,}4}{z-0{,}2} \qquad \Rightarrow \qquad F(z) = \frac{c}{(z+b)\,(z-0{,}7)}$$

Si impone allora l'assegnazione degli autovalori:

$$N_F\, N_H + D_F\, D_H = c\,(z+a) + (z-1)(z+b)(z-0{,}7) = z^3 \qquad \Rightarrow \qquad l=3$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene a= -0,54 , b= 1,7, c= 2,19.

B) Dalla domanda A) risulta

$$y(z) = W(z)\, r(z) = \frac{N_F\, D_H}{N_F\, N_H + D_F\, D_H}\, \frac{z}{z-1} = \frac{c\,(z-1)}{z^3}\, \frac{z}{z-1} = \frac{c}{z^2} = \frac{2{,}19}{z^2}$$

Effettuando l'antitrasformata zeta si ottiene:

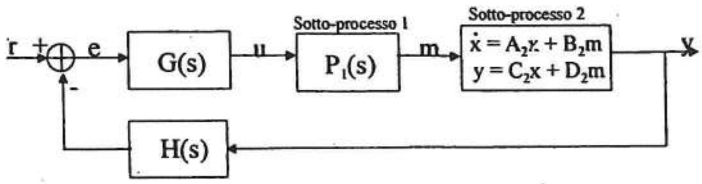
$y(h) = 2{,}19\ \delta(h-2)$

C) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(z-0{,}2)\,(z-0{,}4)\,z^3$ dove l' autovalore 0,2 è rag. e inoss., l'autovalore 0,4 è irrag. e oss., mentre i tre autovalori in zero sono ragg. e oss.

662

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 17 gennaio 2019

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente processo:

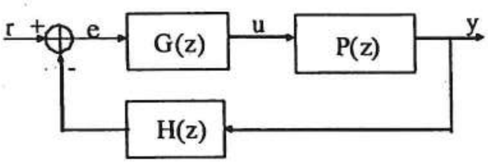


dove $P_1(s) = \dfrac{s+5}{s-1}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C_2 = [\ a \quad 3\ ]$, $D_2 = 1$ $\qquad H(s) = \dfrac{1}{s-2}$

A) Si determini il parametro "a", nonchè un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che:
 α) il sistema complessivo abbia tre autovalori nascosti;
 β) l'errore "e" a regime permanente, corrispondente ad un riferimento r(t) costante, sia nullo;
 γ) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a (s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)(s+6).

B) Si specifichino inoltre le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità degli autovalori del sistema complessivo.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{z-0{,}4}{z+0{,}7}$, $H(z) = \dfrac{1}{z-1}$

A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
 α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h) = h si annulli nel più breve tempo possibile (si indichi l'istante a partire dal quale l'errore si annulla);
 β) tutti gli autovalori del sistema complessivo abbiano modulo minore di 0,5.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini l'andamento completo dell'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h) = h.

TEMA.

Si descrivano i criteri per la scelta della struttura di un controllore.

Soluzione del problema 1

A) Conviene creare un primo autovalore nascosto nel sotto-processo 2 scegliendo opportunamente il valore del parametro "a". Aiutandosi con il test di Hautus, si constata che, scegliendo a=3, l'autovalore -2 del sotto-processo 2 risulta nascosto (raggiungibile ed inosservabile).

Per tale scelta risulta $P_2(s) = \dfrac{s+6}{s} \Rightarrow P(s) = P_1(s)\, P_2(s) = \dfrac{(s+5)(s+6)}{s(s-1)}$

Le funz. di trasf. ing.-uscita ed errore uscita sono pari a

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}, \quad W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(s) = \frac{N_F}{D_F} = G(s)\, P(s), \quad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

La specifica β) richiede che nella $W_e(s)$ ci sia uno zero di molteplicità uno in s=0: tale specifica è automaticamente soddisfatta grazie alla presenza del polo in s=0 in $P_2(s)$.

Per creare gli altri 2 autovalori nascosti richiesti dalla specifica α) e, al contempo, avere una struttura a dimensione minima con un numero di parametri che consenta di risolvere il problema di assegnazione degli autovalori di cui alla specifica γ), si deve necessariamente scegliere una struttura del tipo:

$$G(s) = \frac{bs^2 + cs + d}{(s+5)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad F(s) = G(s)\, P(s) = \frac{bs^2 + cs + d}{s(s-1)}$$

Con tale struttura si vengono a creare due cancellazioni polo-zero (autovalori ragg. ed inoss.) in -5 ed in -6.

Procedendo all'assegnazione dei residui tre autovalori e risolvendo con il principio di identità dei polinomi si ottiene:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = bs^2 + cs + d + s(s-1)(s-2) = (s+1)(s+3)(s+4) \Rightarrow b=11,\ c=17,\ d=12.$$

B) Come si evince dalla domanda A), gli autovalori -2, -5 e -6 risultano ragg. ed inoss., mentre gli autovalori -1, -3, -4 risultano ragg. ed oss.

Soluzione del problema 2

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F N_H}{N_F N_H + D_F D_H}, \quad W_e(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(z) = G(z)\, P(z) = \frac{N_F}{D_F}, \quad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per verificare la specifica α), deve essere presente uno zero di molteplicità due in +1 nella $W_e(z)$ (uno zero è già presente, grazie al polo in +1 di H(z)) e si deve imporre $N_F N_H + D_F D_H = z^l$ dove l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Si puo' allora scegliere:

$$G(z) = \frac{a z^2 + bz + c}{(z-1)(z-0{,}4)} \quad \Rightarrow \quad F(z) = G(z)\, P(z) = \frac{a z^2 + bz + c}{(z-1)(z+0{,}7)}$$

Si noti che la cancellazione di una coppia polo-zero in 0,4 provoca la comparsa di un autovalore ragg. ed inoss. in 0,4. Si noti inoltre che il polo in -0,7 di P(z) non può essere cancellato per non violare la specifica β).

Si impone allora:

$$N_F N_H + D_F D_H = a z^2 + bz + c + (z-1)^2 (z+0{,}7) = z^3 \quad \Rightarrow \quad l=3$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene a=1,3 ; b= 0,4 ; c= -0,7.

B) Il polinomio caratteristico richiesto è $z^3(z-0{,}4)$ dove i tre autovalori in zero sono ragg. e oss., mentre l'autovalore in 0,4 è ragg. e inoss..

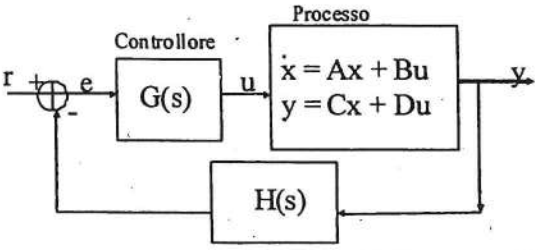
C) $e(z) = W_e(z)\, r(z) = \dfrac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \dfrac{z}{(z-1)^2} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{0{,}7}{z^2}$

$e(h) = \delta(h-1) + 0{,}7\, \delta(h-2)$

664

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 12 febbraio 2019

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il processo P(s) è caratterizzato dalle matrici: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [\ 6 \quad 3\ ]$ $D = 1.$

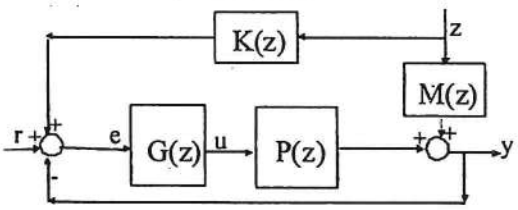
Risulta inoltre $H(s) = \dfrac{1}{s-1}$

A) Si determini un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che
   - il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   - l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = \eta(t)$ (gradino unitario) sia minore di 0,1.

B) Si determini un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti e tutti gli autovalori coincidenti.

C) Si determinino i due polinomi caratteristici dei due sistemi complessivi individuati nelle domande A) e B). Si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità degli autovalori.

PROBLEMA 2.
Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



con $P(z) = M(z) = \dfrac{z-2}{(z-1)(z-0{,}5)}$.

Si determinino i controllori G(z) e K(z) in modo che:
α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
β) l'errore "e" corrispondente all'ingresso $r(h) = \eta(h)$ (gradino unitario), sia nullo a partire da un istante "l" più piccolo possibile;
γ) la risposta "y" corrispondente ad un qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

PROBLEMA 3

A) Si descriva, in generale, la struttura dell'osservatore asintotico dello stato di un processo e si dimostri che, nell'ipotesi in cui tutti gli autovalori inosservabili del processo siano a parte reale negativa, l'osservatore asintotico è in grado di ricostruire asintoticamente lo stato.

B) Con riferimento al processo di cui al problema 1, si costruisca un osservatore asintotico dello stato (è sufficiente impostare il problema di determinazione della matrice G senza effettuare i relativi calcoli).

665

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{s+2}{s-1}$. Nel processo è presente un autovalore <u>ragg. ed inoss.</u> in -2 che non inficia la stabilità asintotica di cui alla domanda A).

Le funz. di trasf. di interesse del sistema complessivo sono

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H},\ W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \text{ con } F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{N_F}{D_F}\ ,\ H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Scegliendo un controllore di dimensione zero $G(s) = K$, la specifica sul regime permanente impone:

$W_e(0) < 0,1 \quad \Rightarrow \quad K > 4,5$

Affinché il sistema complessivo sia asintoticamente stabile, deve risultare:

$D_W = N_F N_H + D_F D_H = K(s+2) + (s-1)^2 = s^2 + s(K-2) + 2K + 1$

In base al criterio di Routh, il sistema è asint. stabile per $K>2$.

Quindi, entrambi le specifiche sono soddisfatte per $K>4,5$.

B) Conviene scegliere un controllore di dimensione uno nella forma:

$$G(s) = \frac{as+b}{s+2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{as+b}{s-1}$$

La suddetta scelta di $G(s)$ causa la cancellazione di una coppia polo-zero in -2 e quindi la presenza di un secondo (oltre quello presente intrinsecamente nel processo) autovalore nascosto in -2 (anche questo <u>ragg. ed inoss.</u>). Quindi, per rispettare la specifica, tutti gli autovalori del sistema complessivo devono essere coincidenti in -2.

Si può quindi procedere all'assegnazione dei due restanti autovalori (che necessariamente risulteranno non nascosti e quindi <u>ragg. ed oss.</u>) e risolvere con il principio di identità dei polinomi:

$D_W = N_F N_H + D_F D_H = as+b + (s-1)^2 = (s+2)^2 \quad \Rightarrow \quad a=6\ ,\ b=3$

C) Il polinomio caratteristico individuato nella domanda A) è $[s^2 + s(K-2) + 2K + 1](s+2)$ (con $K>4,5$) dove l'autovalore -2 è ragg. e inoss., mentre i due autovalori radici del polinomio tra parentesi quadra sono ragg. ed oss.

Il polinomio caratteristico individuato nella domanda A) è $(s+2)^4$ dove due autovalori in -2 sono ragg. ed inoss., mentre gli altri due sono ragg. ed oss.

Soluzione del problema 2.

A) Per soddisfare le specifiche α) e β) si deve sceglie un controllore a dimensione uno, nella forma

$$G(z) = a\,\frac{z-0,5}{z+b} \quad \Rightarrow \quad F(z) = a\,\frac{z-2}{(z-1)(z+b)}$$

ed imporre la seguente equazione (da risolvere con il principio di identità dei polinomi):

$D_W = N_F + D_F = a(z-2) + (z-1)(z+b) = z^2 \quad \Rightarrow \quad a= -1\ ,\ b=2$

Infine, per verificare la specifica γ), si deve imporre:

$$W_z(s) = \frac{M+PGK}{1+PG} = 0 \ \Rightarrow \quad K = -\frac{M}{PG} = -\frac{1}{G} = \frac{z+2}{z-0,5}.$$

Soluzione del problema 3

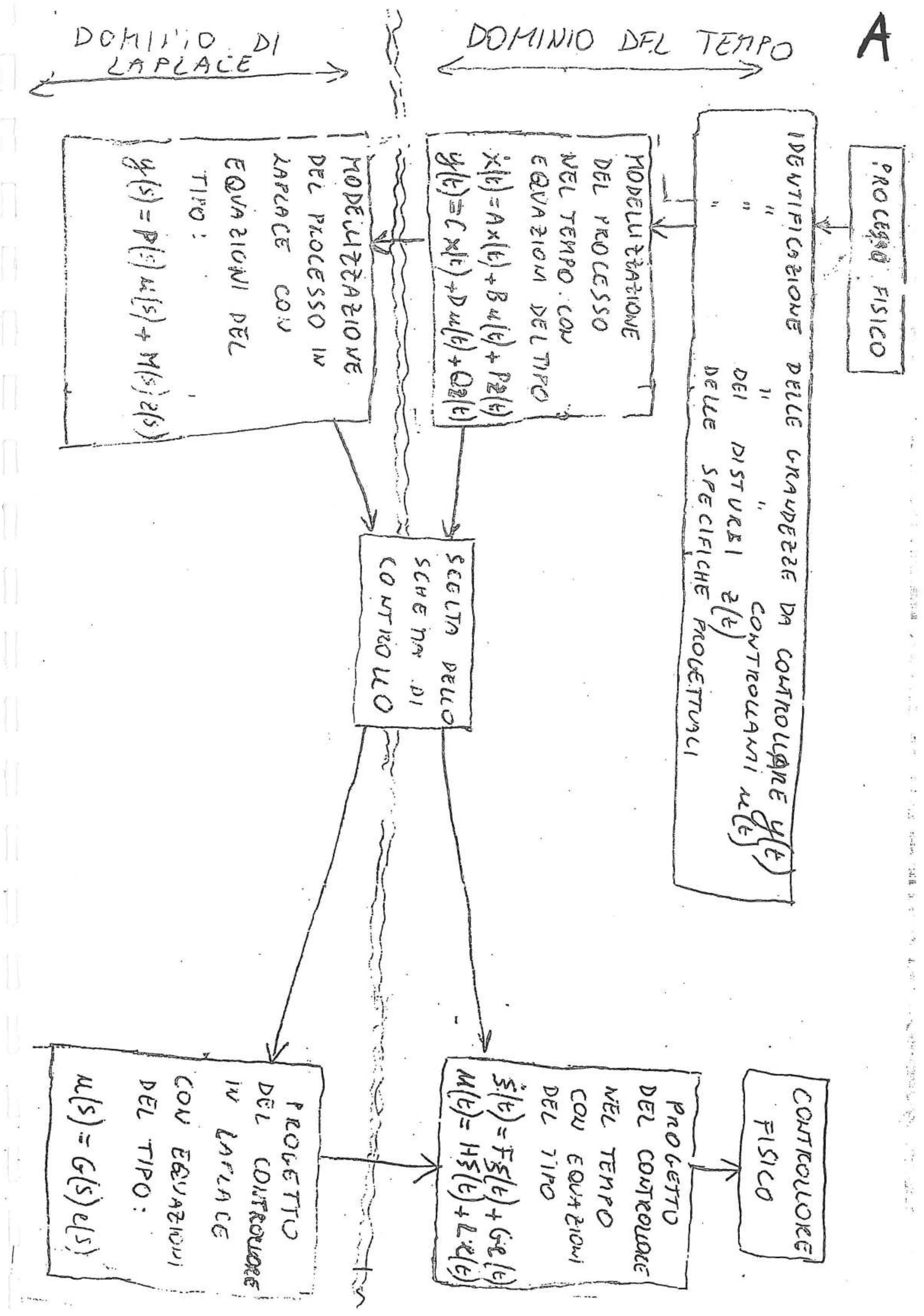
666

B) Dato che nel processo è presente un autovalore ragg. ed inoss. in -2, tale autovalore deve essere necessariamente presente nell'equazione per la determinazione della matrice G che caratterizza l'osservatore asintotico. Tale equazione è quindi la seguente:

$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda+2)(\lambda-\lambda_{arb})$$

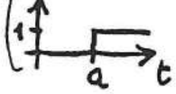
dove λ_{arb} è un autovalore negativo che può essere arbitrariamente scelto.

Ponendo $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$, e risolvendo l'equazione di cui sopra con il principio di identità dei polinomi, si può determinare la matrice G.


A
DOMINIO DI LAPLACE
DOMINIO DEL TEMPO
PROCESSO FISICO
IDENTIFICAZIONE DELLE GRANDEZZE DA CONTROLLARE y(t)
" " " CONTROLLANTI u(t)
" DEI DISTURBI z(t)
" DELLE SPECIFICHE PROGETTUALI
MODELLIZZAZIONE DEL PROCESSO NEL TEMPO CON EQUAZIONI DEL TIPO
$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Pz(t)$
$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Qz(t)$
MODELLIZZAZIONE DEL PROCESSO IN LAPLACE CON EQUAZIONI DEL TIPO:
$y(s) = P(s)u(s) + M(s)z(s)$
SCELTA DELLO SCHEMA DI CONTROLLO
CONTROLLORE FISICO
PROGETTO DEL CONTROLLORE NEL TEMPO CON EQUAZIONI DEL TIPO
$\dot{\xi}(t) = F\xi(t) + Ge(t)$
$u(t) = H\xi(t) + Le(t)$
PROGETTO DEL CONTROLLORE IN LAPLACE CON EQUAZIONI DEL TIPO:
$u(s) = G(s)e(s)$

TRASFORMATE DI LAPLACE

B

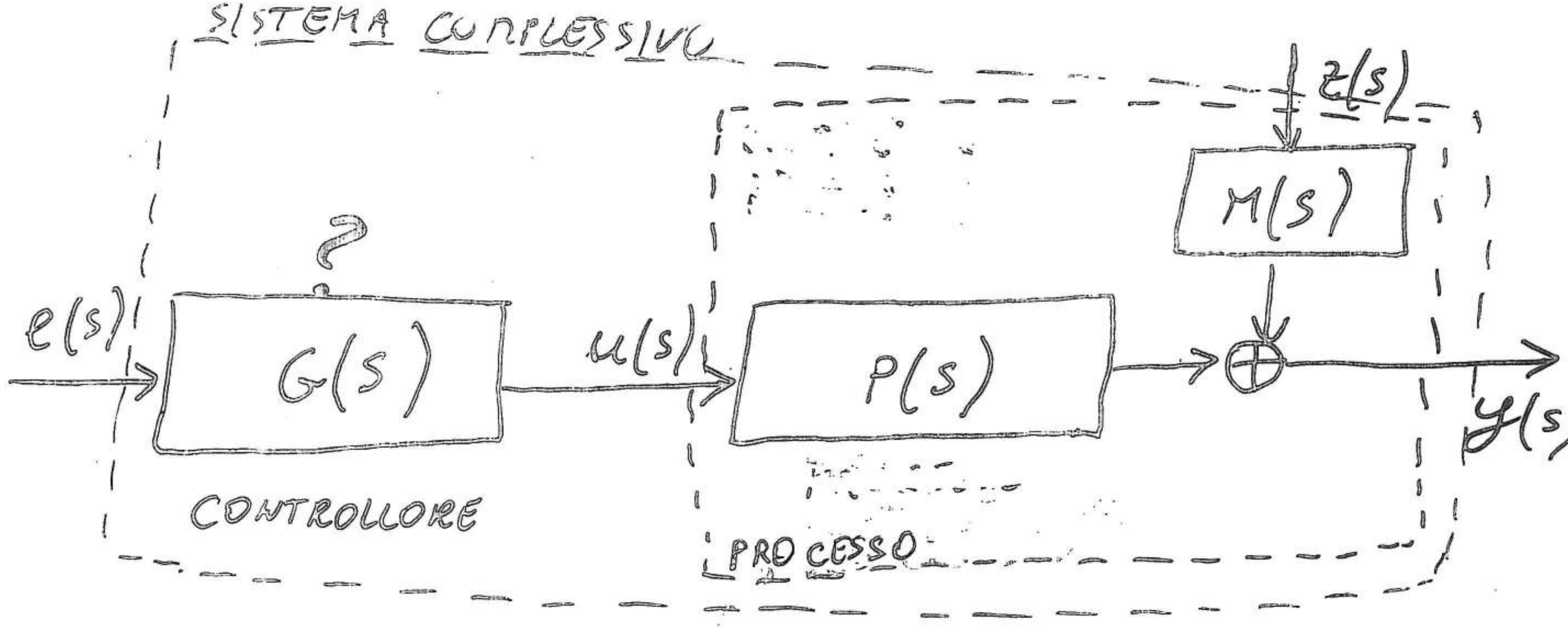
	$F(t)$	$f(s)$
1)	$u_0(t)$	1
2)	1	$1/s$
3)	$t^n/n!$	$1/s^{n+1}$
4)	$\eta(t-a)$ 	e^{-as}/s
5)	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
6)	$\dfrac{t^n e^{at}}{n!}$	$\dfrac{1}{(s-a)^{n+1}}$
7)	$\operatorname{sen} at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
8)	$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
9)	$e^{at}\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{[s-(a+jb)][s-(a-jb)]}$
10)	$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-b}{[s-(a+jb)][s-(a-jb)]}$

REGOLE DI TRASFORMAZIONE

11)	$a F_1(t) + b F_2(t)$	$a f_1(s) + b f_2($
12)	$\dfrac{dF(t)}{dt}$	$s f(s) - F(0)$
13)	$\int_0^t F(\tau)\,d\tau$	$\dfrac{1}{s} f(s)$
14)	$F_1(t) * F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau)\,F_2(t-\tau)\,d\tau$	$f_1(s)\,f_2(s)$
15)	$F(t-a)\,\eta(t-a)$	$e^{-as} f(s)$

C

CONTROLLO AD ANELLO APERTO



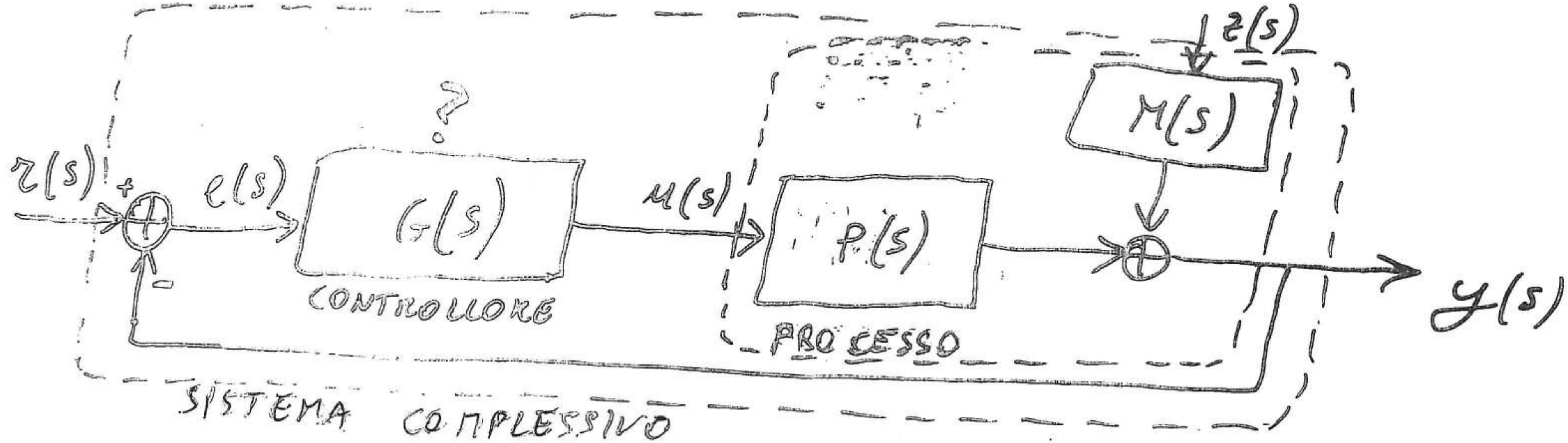
$$y(s) = P(s)\,u(s) + M(s)\,z(s)$$
$$u(s) = G(s)\,e(s)$$

$$\Longrightarrow\ y(s) = \underbrace{P(s)\,G(s)}_{W(s)}\,e(s) + \underbrace{M(s)}_{W_z(s)}\,z(s)$$

D

CONTROLLO A CONTROREAZIONE

Hp: L'USCITA "y" È MISURABILE



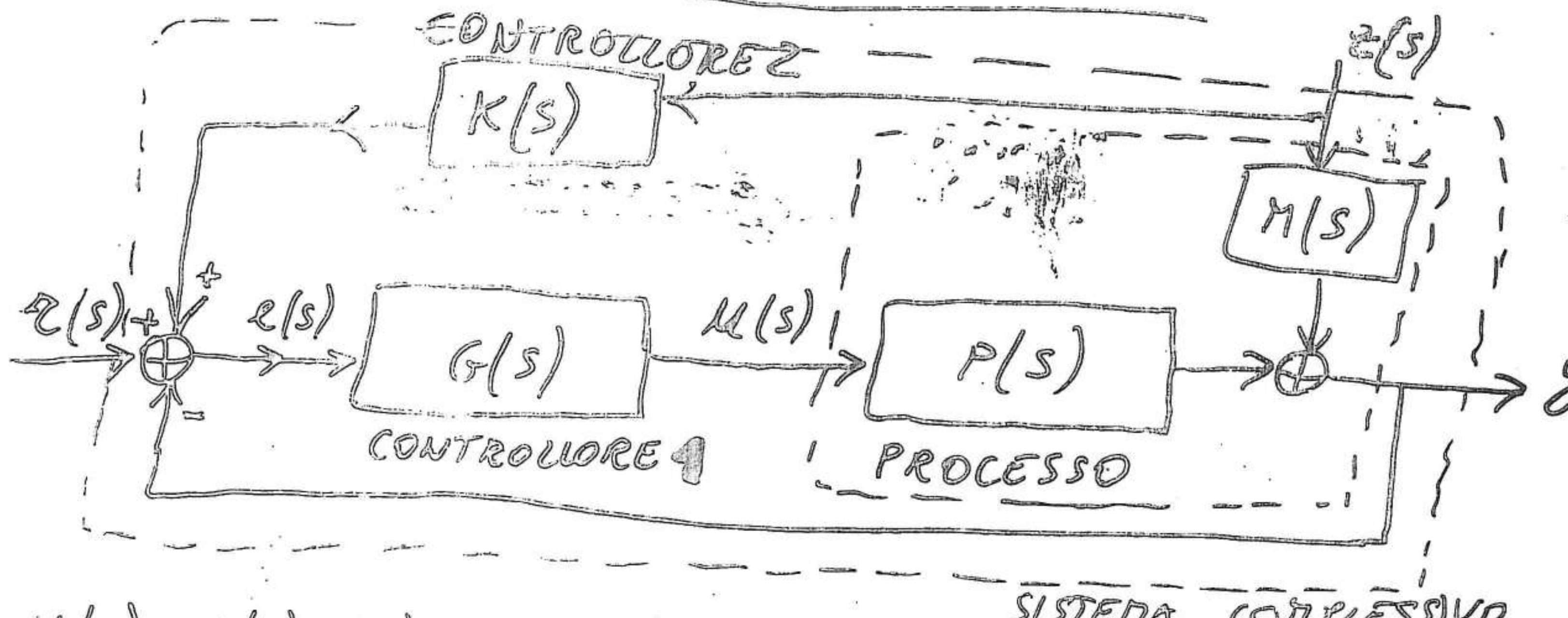
$$\left.\begin{aligned} y(s) &= P(s)\,u(s) + M(s)\,z(s) \\ u(s) &= G(s)\,e(s) \\ e(s) &= r(s) - y(s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y(s) = \underbrace{\frac{P(s)\,G(s)}{1+P(s)\,G(s)}}_{W(s)} r(s) + \underbrace{\frac{M(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W_z(s)} z$$

E

CONTROLLO A DOPPIA CONTROREAZIONE

Hp. L'USCITA "y" È MISURABILE

IL DISTURBO "z" È MISURABILE



$$\left.\begin{aligned} y(s) &= P(s)u(s) + M(s)z(s) \\ u(s) &= G(s)e(s) \\ e(s) &= r(s) + K(s)z(s) - y(s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y(s) = \underbrace{\frac{P(s)G(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W(s)} r(s) + \underbrace{\frac{P(s)G(s)K(s)+M(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W_z} z(s)$$

F

FORMA CANONICA RAGGIUNGIBILE

Hp.: SISTEMA AD UN INGRESSO ED UNA USCITA

$$p(s) = D + \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$n \times 1$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$1 \times n$

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d_p = \text{grado } D_p(s) = \dim A = n}$$

G

RISPOSTA DI UN SISTEMA NEL DOMINIO DEL TEMPO

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$$

$$\boxed{y(t) = C\, e^{A(t-t_0)}\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C\, e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau + D u(t)}$$

$$\overset{n \times n}{e^{At}} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \overset{n \times n}{R_{ik}}\, \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{\lambda_i t}$$

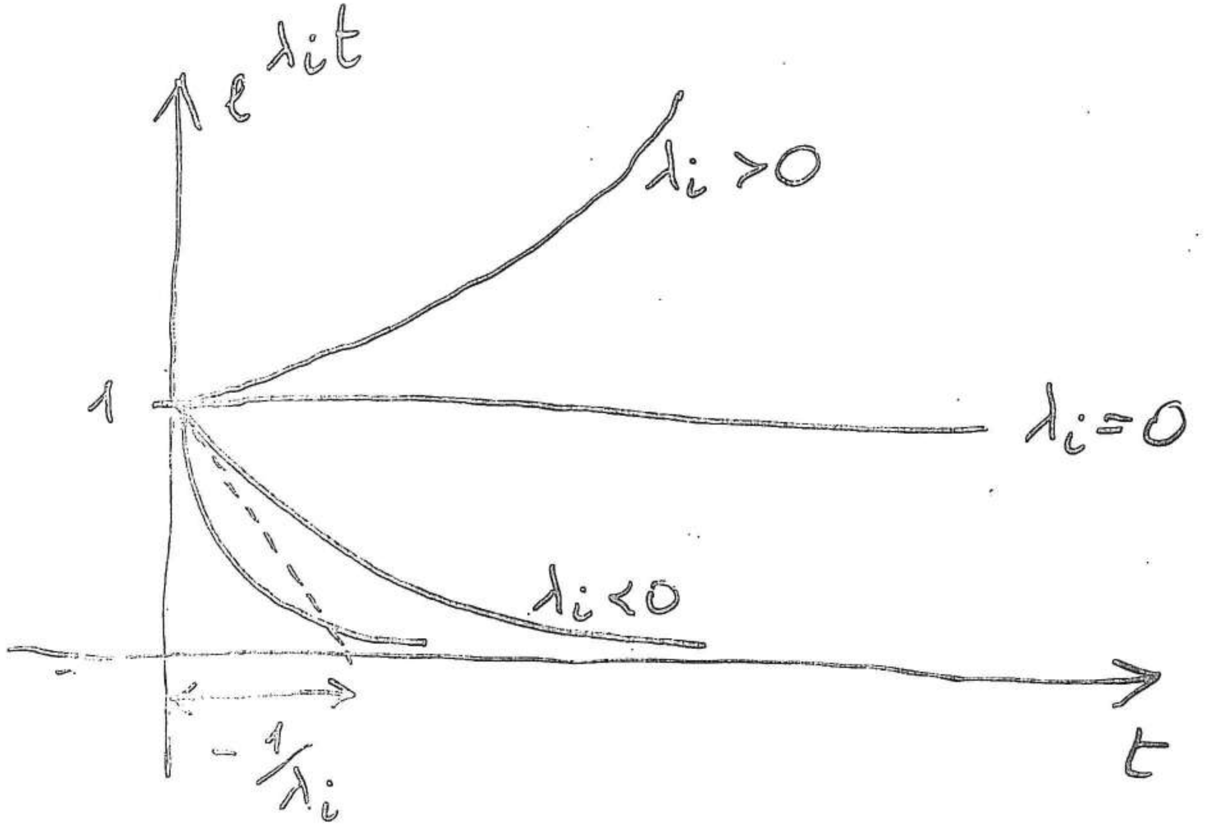
r = N° AUTOVALORI DISTINTI DI A

m_i = MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DELL'AUTOVALORE i-ESIMO

I

MODI NATURALI (CASO AUTOVALORI DISTINTI)

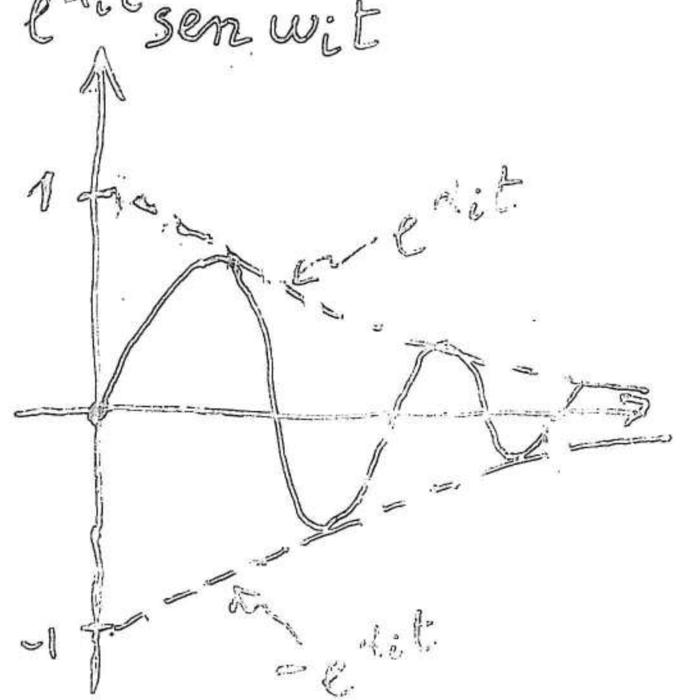
1) AUTOVALORI REALI λ_i



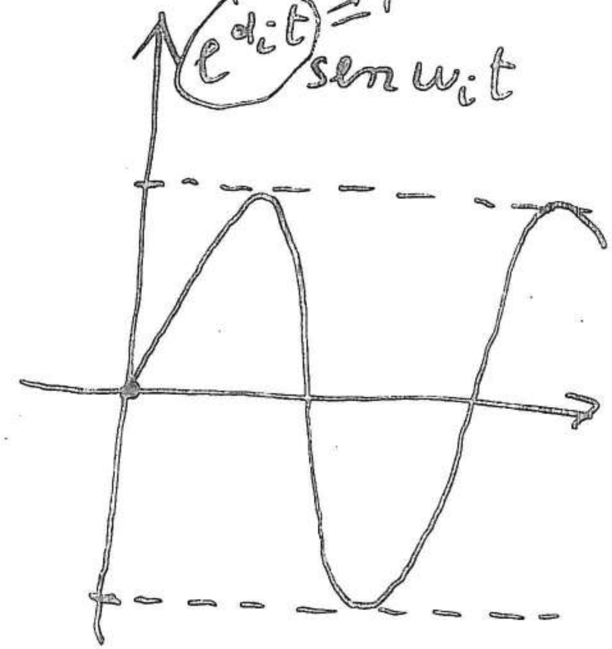
MODI NATURALI (CASO AUTOVALORI DISTINTI)

2) AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI $\alpha_i \pm j\omega_i$

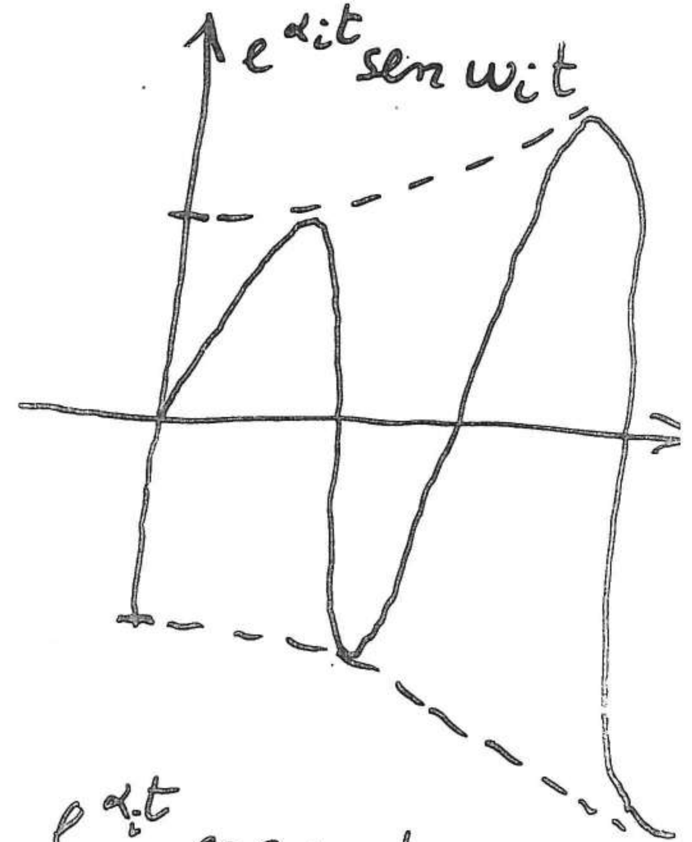
$\alpha_i < 0$



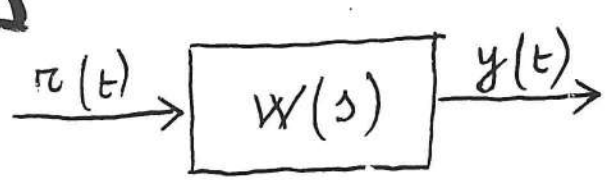
$\alpha_i = 0$



$\alpha_i > 0$



ANDAMENTI ANALOGHI PER $e^{\alpha_i t} \cos \omega_i t$



(*): VALORI DEDUCIBILI CON IL TEOREMA DEL VALORE FINALE

W(s) HA IN s = 0 UNO <u>ZERO</u> DI MOLTEPLICITÀ...

	$r(t)$: 1	t	$t^2/2$
0	$W(0) \neq 0$ (*)	$W(0)t + \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0}$	$W(0)\frac{t^2}{2} + \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
1	0 (*)	$\left.\frac{W(s)}{s}\right\|_{s=0} = \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} \neq 0$ (*)	$\left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
2	0 (*)	0 (*)	$\left.\frac{W(s)}{s^2}\right\|_{s=0} = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0} \neq 0$ (*)

LA TABELLA FORNISCE LA RISPOSTA A REGIME PERMANENTE $\tilde{y}(t)$ DEL SISTEMA CARATTERIZZATO DALLA F. DI TRASF. $W(s)$ IN CORRISPONDENZA ALL' INGRESSO $u(t)$

M

$\angle F(j\omega) = -90^\circ - \mathrm{arctg}\,\omega - \mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{10}$

$20\log_{10}|F(j\omega)| = 20\log_{10}\overline{\omega\sqrt{\omega^4+101\omega^2+100}}$

$F(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+10)}$