

Cognome:

Posto:

Matricola:

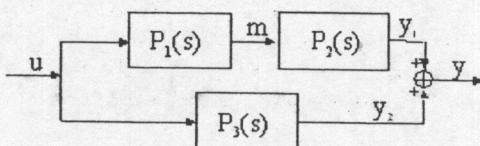
450

CONTROLLI AUTOMATICI per ing. Automatica e Informatica (9 cfu)

Prova scritta del 5 luglio 2010 - Anno accademico 2009/10 - COMPITO B

PROBLEMA 1

Si consideri il processo con ingresso "u" ed uscita "y" di cui alla seguente figura

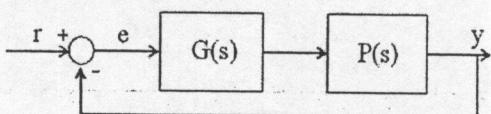


Le funzioni di trasferimento dei 3 sotto-processi sono le seguenti: $P_1(s) = \frac{s+1}{s}$, $P_2(s) = \frac{1}{s+1}$, $P_3(s) = \frac{1}{s}$

- A) Si determinino le caratteristiche di raggiungibilità/irraggiungibilità, osservabilità/inosservabilità degli autovalori che caratterizzano il processo. Si dimostrino tali caratteristiche utilizzando le rappresentazioni ingresso-stato-uscita dei 3 sotto-processi.
- B) E' possibile determinare uno schema di controllo ed un controllore in corrispondenza del quale il sistema complessivo sia asintoticamente stabile?

PROBLEMA 2

Si consideri lo schema di controllo riportato in figura



$$\text{con } P(s) = \frac{1}{s^2(1+0.1s)}$$

- A) Si determini un controllore $G(s)$ a dimensione minore o uguale a 1 tale che:
 - a. l'errore a regime permanente corrispondente ad un ingresso $r(t) = t^2/2$ sia in modulo pari a 0.1;
 - b. il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
 - c. il modulo alla risonanza M_r del sistema complessivo sia minore di 12 dB;
 - d. la banda passante B_3 del sistema complessivo sia approssimativamente 5 rad/s.
- B) Si traccino i diagrammi di Nyquist della funzione di trasferimento a ciclo aperto non compensata $\hat{F}(s)$ e di quella compensata $F(s)$ e, utilizzando il criterio di Nyquist, si discuta la stabilità dei corrispondenti sistemi ad anello chiuso.

TEMA

Si illustrino i passi per arrivare al controllore fisico a partire dal processo fisico, mettendo in luce, per ognuno dei vari passi, le problematiche relative.

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{2}{s}$. Da ciò si deduce che nel processo è presente un autovalore non nascosto (rag. e oss.) in zero.

Per individuare (e dimostrare) le caratteristiche di raggiungibilità/osservabilità degli autovalori nascosti è necessario determinare le rappresentazioni ingresso-stato-uscita dei 3 sotto-processi, ossia

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = u \\ m = x_1 + u \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_2 = -x_2 + m \\ y_1 = x_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_3 = u \\ y_2 = x_3 \end{array}$$

Dalle suddette rappresentazioni dei 3 sotto-processi, si deduce che la rappresentazione ingresso-stato-uscita del processo è caratterizzata dalle seguenti matrici:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_p = [0 \ 1 \ -1]$$

Quindi, il processo è caratterizzato da un autovalore in -1 e da due autovalori in zero.

Si osservi che risulta:

$$\text{rg}(B_p A_p B_p A_p^2 B_p) = 1 \Rightarrow \text{il processo ha un autovalore rag. e due autovalori irrag.}$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} C_p \\ C_p A_p \\ C_p A_p^2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{il processo ha due autovalori oss. e un autovalore inoss.}$$

Inoltre, in base al Test di Hautus l'autovalore -1 risulta irrag. e oss.

Da quanto sopra si può infine dedurre che i due autovalori in zero sono uno ragg. ed oss. e l'altro irrag. ed inoss.

B) Un processo può essere stabilizzato asintoticamente con uno schema di controllo a reazione dall'uscita se e solo se tutti gli autovalori nascosti sono a parte reale negativa. Nel caso in esame è presente un autovalore nascosto in zero per cui il processo non può essere stabilizzato asintoticamente con reazione dall'uscita.

Si noti che, se lo stato fosse disponibile per misure e quindi fosse possibile uno schema di controllo con reazione dallo stato, il processo non potrebbe essere stabilizzato asintoticamente neanche con tale reazione a causa della presenza dell'autovalore irrag. in zero (il processo può essere stabilizzato asintoticamente con reazione dallo stato se e solo se tutti gli autovalori irrag. sono a parte reale negativa).

Soluzione del problema 2

E' immediato verificare che un controllore del tipo $G(s) = k$ non permette di ottenere un sistema a ciclo chiuso stabile, $\forall k \in \mathbb{R}$. E' necessario quindi ricorrere ad un controllore della forma $G(s) = kR(s)$, dove $R(s)$ sia una opportuna rete compensatrice elementare.

La funzione di trasferimento a ciclo aperto è quindi

$$F(s) = \frac{k}{s^2(1+0.1s)} R(s) = \hat{F}(s)R(s)$$

Il guadagno del controllore deve essere scelto in modo da soddisfare la specifica a).

$$\left| \frac{W_e(s)}{s^2} \right|_{s=0} = 0.1 \Rightarrow |k| = 10.$$

Per facilitare il procedimento di stabilizzazione del sistema si sceglie $k = 10$.

Dall'osservazione del diagramma di Bode del modulo di $\hat{F}(i\omega)$ si ricava per la pulsazione di attraversamento $\hat{\omega}_t \approx 3 \text{ rad/s}$. In corrispondenza di questo valore la fase di $\hat{F}(i\omega)$ vale

$$\angle \hat{F}(i\omega) = -180^\circ - \arctg(0.3) = -180^\circ - 16.7^\circ = -196.7^\circ$$

L'instabilità, in assenza di compensazione, può essere quindi vista come dovuta ad un eccesso di ritardo di fase in $\hat{\omega}_t$ pari a 16.7° .

Dall'osservazione della carta di Nichols si ricava che, per soddisfare la specifica c), è necessario avere $m_\phi^* \geq 15^\circ$. Dalla specifica d) infine si ricava per la pulsazione di attraversamento desiderata il valore $\omega_t^* \approx 3 \text{ rad/s}$, il che è verificato già in assenza di compensazione.

Per risolvere il problema è quindi necessario introdurre un'azione compensatrice tale da garantire un anticipo di fase di almeno $16.7^\circ + 15^\circ = 31.7^\circ$ in $\hat{\omega}_t$, lasciando $\hat{\omega}_t$ stessa il più possibile inalterata. Una rete anticipatrice elementare del tipo

$$R(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m} s}$$

Con $m = 16$ e $\omega\tau = 0.7$ garantisce un anticipo di fase di circa 32.5° e comporta un'amplificazione indesiderata minore di 2 dB.

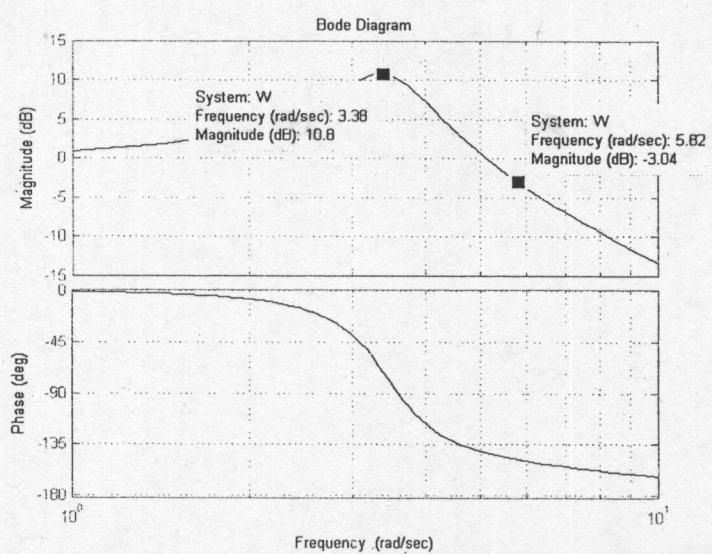
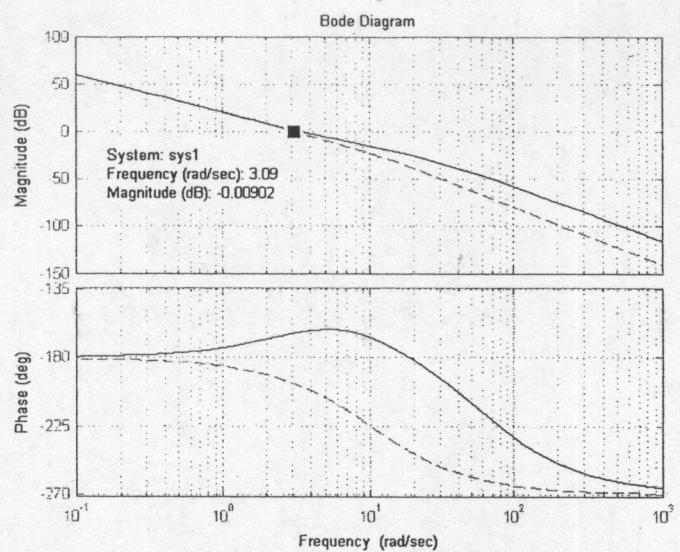
Il controllore cercato è quindi

$$G(s) = 10 \frac{\left(1 + \frac{7}{30}s\right)}{\left(1 + \frac{7}{480}s\right)}$$

Il margine di fase ottenuto, calcolato per difetto (assumendo $\omega_t \approx 3 \text{ rad/s}$), vale

$$m_\phi = 180^\circ - 196.7^\circ + \arctg(0.7) - \arctg(0.7/16) = 180^\circ - 196.7^\circ + 35^\circ - 2.5^\circ = 15.8^\circ$$

Di seguito sono riportati i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento a ciclo aperto $\hat{F}(s)$ e $F(s)$, e poi di $W(s)$, da cui si ha la conferma del soddisfacimento delle specifiche a carattere "dinamico" per il sistema a ciclo chiuso.



Sono infine riportati i diagrammi di Nyquist di $\hat{F}(s)$ e di $F(s)$, da cui si osserva che la compensazione ha effetto di stabilizzazione sul sistema a ciclo chiuso.

