

Libreremo

Questo libro è il frutto di un percorso di lotta per l'accesso alle conoscenze e alla formazione promosso dal **Csoa Terra Terra**, **Csoa Officina 99**, **Get Up Kids!**, **Neapolis Hacklab**. Questo libro è solo uno dei tanti messi a disposizione da **LIBREREMO**, un portale finalizzato alla condivisione e alla libera circolazione di materiali di studio universitario (e non solo!).

Pensiamo che in un'università dai costi e dai ritmi sempre più escludenti, sempre più subordinata agli interessi delle aziende, **LIBREREMO** possa essere uno strumento nelle mani degli studenti per riappropriarsi, attraverso la collaborazione reciproca, del proprio diritto allo studio e per stimolare, attraverso la diffusione di materiale controinformativo, una critica della proprietà intellettuale al fine di smascherarne i reali interessi.

I diritti di proprietà intellettuale (che siano brevetti o copyright) sono da sempre – e soprattutto oggi – grosse fonti di profitto per multinazionali e grandi gruppi economici, che pur di tutelare i loro guadagni sono disposti a privatizzare le idee, a impedire l'accesso alla ricerca e a qualsiasi contenuto, tagliando fuori dalla cultura e dallo sviluppo la stragrande maggioranza delle persone. Inoltre impedire l'accesso ai saperi, renderlo possibile solo ad una ristretta minoranza, reprimere i contenuti culturali dal carattere emancipatorio e proporre solo contenuti inoffensivi o di intrattenimento sono da sempre i mezzi del capitale per garantirsi un controllo massiccio sulle classi sociali subalterne.

L'ignoranza, la mancanza di un pensiero critico rende succubi e sottomette alle logiche di profitto e di oppressione: per questo riappropriarsi della cultura – che sia un disco, un libro, un film o altro – **è un atto cosciente caratterizzato da un preciso significato e peso politico**. Condividere e cercare canali alternativi per la circolazione dei saperi significa combattere tale situazione, apportando benefici per tutti.

Abbiamo scelto di mettere in condivisione proprio i libri di testo perché i primi ad essere colpiti dall'attuale repressione di qualsiasi tipo di copia privata messa in atto da SIAE, governi e multinazionali, sono la gran parte degli studenti che, considerati gli alti costi che hanno attualmente i libri, non possono affrontare spese eccessive, costretti già a fare i conti con affitti elevati, mancanza di strutture, carenza di servizi e borse di studio etc...

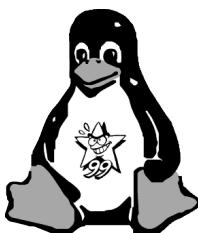
Questo va evidentemente a ledere il nostro diritto allo studio: le università dovrebbero fornire libri di testo gratuiti o quanto meno strutture e biblioteche attrezzate, invece di creare di fatto uno sbarramento per chi non ha la possibilità di spendere migliaia di euro fra tasse e libri originali... Proprio per reagire a tale situazione, senza stare ad aspettare nulla dall'alto, invitiamo tutt* a far circolare il più possibile i libri, approfittando delle enormi possibilità che ci offrono al momento attuale internet e le nuove tecnologie, appropriandocene, liberandole e liberandoci dai limiti imposti dal controllo repressivo di tali mezzi da parte del capitale.

**Facciamo fronte comune davanti ad un problema che coinvolge tutt* noi!
Riappropriiamoci di ciò che è un nostro inviolabile diritto!**



Get Up Kids

www.getupkids.org



Neapolis Hacklab

www.neapolishacklab.org

**csoa
Terra★Terra**



csoa Terra Terra

www.csoaterraterra.org

csoa Officina 99

www.officina99.org

www.libreremo.org

PREFAZIONE ALLA 1^a EDIZIONE

Queste note sono tratte dall'insegnamento di Controlli Automatici I che lo scrivente svolge, da alcuni anni, per gli studenti del Corso di Laurea Ingegneria Elettronica dell'Università di Roma. L'ordinamento didattico attuale di questo Corso di Laurea prevede che l'insegnamento di Controlli Automatici I sia frequentato al quarto anno di corso da parte di studenti che nell'anno precedente hanno acquisito, con l'insegnamento di Teoria dei Sistemi, gli strumenti matematici di base nell'analisi dei sistemi dinamici. Una tale articolazione didattica consente di concentrare l'insegnamento dei Controlli Automatici essenzialmente sui problemi di sintesi dei sistemi di controllo.

La linea espositiva seguita si rivolge esclusivamente allo studio di sistemi dotati di rappresentazioni lineari e stazionarie e cerca di stabilire un equilibrio tra l'esigenza di passare in rassegna le tecniche più tradizionali ed elementari di sintesi dei sistemi di controllo e quella di approfondire le metodologie più avanzate sviluppatesi negli ultimi quindici anni. I primi capitoli sono dedicati ai metodi per lo studio di sistemi con un solo ingresso ed una sola uscita e utilizzano principalmente tecniche basate sull'impiego di funzioni di variabile complessa; gli ultimi affrontano i problemi relativi a sistemi con molti ingressi e molte uscite e fanno riferimento a tecniche basate sull'analisi di proprietà delle rappresentazioni con lo spazio di stato.

Roma, novembre 1979

PREFAZIONE ALLA 2^a EDIZIONE

La seconda edizione di queste note è stata predisposta per tenere conto sia di un certo numero di varianti di carattere espositivo consigliate dall'esperienza didattica, sia di alcune importanti modifiche e integrazioni al programma dell'insegnamento di Controlli Automatici dette dallo sviluppo della teoria e della tecnica in questi ultimi anni.

Tali modifiche hanno suggerito, in particolare, il rifacimento completo degli ultimi tre capitoli del testo. Allo scopo di ridurre i costi di produzione, questa seconda edizione viene pubblicata in due volumi: nel primo volume trovano posto i capitoli da I a VIII, i quali differiscono dai corrispondenti capitoli della prima edizione in alcune varianti di carattere espositivo, per effettuare le quali è stato possibile riutilizzare in larga parte la precedente composizione; nel secondo volume trovano posto i capitoli IX, X e XI, il cui contenuto è sostanzialmente diverso da quello dei corrispondenti capitoli della prima edizione, composti con un diverso sistema tipografico.

Roma, settembre 1992

CAPITOLO I

INTRODUZIONE AI SISTEMI DI CONTROLLO A CONTRO-REAZIONE

I.1 - Concetto di controllo.

La parola *controllo*, nell'uso tecnico che qui interessa, ha un significato diverso da quello corrente nella lingua italiana (ove nella maggioranza dei casi è analogo a quello della parola *verifica*) ed affine, invece, a quello della parola *control* della lingua inglese. Per controllo, infatti, si intende l'azione o l'insieme delle azioni indirizzate a far assumere ad una grandezza, in generale una grandezza fisica, un valore determinato o una successione determinata di valori nel tempo. Così, ad esempio, per «controllo della velocità di un motore» si intende il complesso delle azioni intese a far assumere a questa velocità un valore prefissato o a far sì che l'evoluzione nel tempo del valore di questa velocità corrisponda ad una prefissata funzione.

Per specificare ulteriormente la definizione qualitativa così introdotta, conviene osservare che alcune delle nozioni essenziali connesse con il concetto di controllo possono essere facilmente correlate con le nozioni fondamentali che sono alla base del concetto di *sistema astratto*. Si consideri, allo scopo, un determinato oggetto o processo, naturale o artificiale, che verrà detto *oggetto o processo controllato*, e si assuma che in esso siano state individuate alcune grandezze di cui interessa osservare l'evoluzione nel tempo. Se si desidera svolgere determinate azioni intese a fare evolvere tali grandezze in modo prefissato, si è condotti allora a mettere in evidenza nell'oggetto o processo altre grandezze, manipolando le quali sia possibile ottenere lo scopo desiderato. In questo modo si viene a considerare l'oggetto o processo in questione da un punto di vista sostanzialmente analogo a quello in cui ci si pone in genere per associare un sistema astratto orientato. Le grandezze

di cui interessa osservare l'evoluzione si presentano come uscite; quelle che possono venire manipolate allo scopo di ottenere le evoluzioni volute si presentano come ingressi. Le prime vengono dette, in questo caso, *grandezze controllate* o sottoposte a controllo, le seconde *grandezze controllanti* o di controllo. L'azione del controllo consiste nella individuazione, per le grandezze controllanti, di quelle evoluzioni temporali alle quali corrisponde l'andamento desiderato per le grandezze controllate e nella attuazione concreta delle operazioni che consentono di realizzare questi andamenti nell'oggetto o processo reale. L'oggetto o processo in grado di imporre alle grandezze controllanti gli andamenti prestabiliti prende il nome di *oggetto o processo controllante* o, più semplicemente, di *controllore* (cfr. fig.I.1).

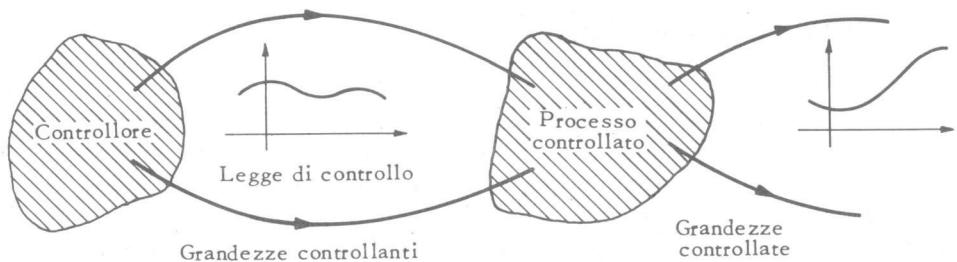


Fig.I.1

Poiché si richiede che il controllore sia in grado di imporre alle grandezze controllanti un andamento prestabilito (*legge di controllo*) è chiaro che, riguardando queste ultime come uscite del controllore, si può essere portati a considerare il controllore stesso come un nuovo oggetto o processo controllato e così risalire all'indietro individuando una successione di oggetti o processi ciascuno dei quali eserciti sul successivo la propria legge di controllo. È tuttavia abituale separare la successione in due parti, che rivestono rispettivamente i ruoli di controllore e di processo controllato in funzione della potenza associata alle grandezze che vengono considerate come ingressi e come uscite. Più precisamente, si assume come oggetto o processo controllato quella parte della successione alla quale corrispondono grandezze di controllo ad un livello di potenza sostanzialmente inferiore a quello relativo alle grandezze controllate.

Il controllo si dice *automatico*, generalmente in contrapposizione a *manuale*, quando le azioni corrispondenti vengono svolte ad aperta di dispositivi capaci di sostituire in parte o anche in tutto l'intervento dell'uomo. In effetti, il significato con cui viene usata questa parola è

relativo in quanto non indica un livello assoluto di riduzione dell'intervento dell'uomo ma, piuttosto, la differenza tra i sistemi ai quali essa è riferita e quelli in cui sia richiesto un maggiore intervento dell'uomo.

Un'indicazione, sia pure sommaria, dei vari livelli ai quali l'intervento diretto dell'uomo può essere sostituito - in tutto o in parte - da dispositivi automatici, può venire, ad esempio, dalla considerazione di alcuni aspetti del problema della condotta automatica di una nave (automazione navale). Uno dei problemi che in genere vengono risolti in modo automatico è quello della *stabilizzazione dell'assetto verticale*, che ha per scopo la compensazione del rollio provocato da moto ondoso trasversale. Un problema che - in molti casi - può essere risolto in modo automatico ma che, in talune situazioni particolari, può richiedere un intervento diretto dell'uomo è quello del *mantenimento della rotta* in presenza di azioni disturbanti (correnti, fenomeni meteorologici, ecc.). Un problema di livello superiore è quello della *scelta ottima della rotta*, in relazione a caratteristiche geografiche, necessità di scalo, stato meteorologico, condizioni del carico, consumo di combustibile, ecc. La soluzione di quest'ultimo può essere affidata all'intervento dell'uomo oppure, come avviene in misura sempre maggiore, a quello di un elaboratore elettronico programmato allo scopo.

I.2 - Il controllo a controllazione.

In questo paragrafo si presentano alcuni esempi destinati ad illustrare una delle tecniche più diffuse, nella realizzazione dei sistemi di controllo, che è quella basata sul cosiddetto principio della *controllazione*.

I problemi considerati sono descritti in modo schematico e, in molti casi, allo scopo di rendere il più possibile immediata la percezione dei principali fenomeni di interesse, si introducono sostanziali semplificazioni nella descrizione dei fenomeni stessi. Si ritiene tuttavia utile, in ogni caso, pervenire comunque ad una descrizione dei problemi in forma matematica, sia per abituare sin dall'inizio alla trattazione formale, sia per fornire le basi a ulteriori rielaborazioni in questo capitolo e nei successivi.

Esempio I.1 - Si consideri un serbatoio d'acqua destinato ad alimentare una determinata rete di utenti e rifornito a sua volta da una diversa rete di distribuzione (fig.I.1a). In genere, il rifornimento del serbatoio può essere comandato a piacere attraverso il posizionamento della valvola di immissione, che varia la portata d'acqua entrante, mentre la domanda di acqua uscente può variare in modo non noto, in dipendenza delle diverse esigenze dell'utenza. Un problema elementare di controllo che si può porre in proposito, ha come obiettivo quello di assicurare la costanza del livello dell'acqua contenuta nel serbatoio, mediante un opportuno comando della valvola di immissione.

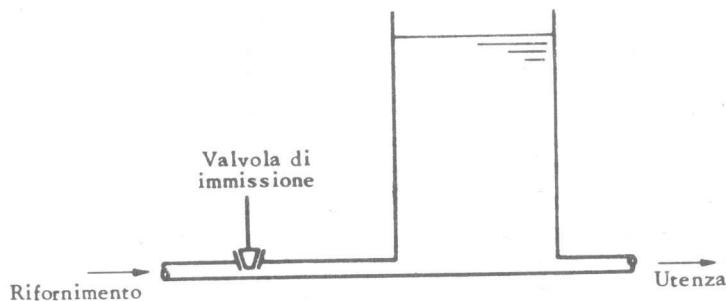


Fig.I.1a

Il controllo può essere realizzato in modo *manuale*, con l'impiego di un operatore umano il quale, valutando a vista la differenza tra il valore effettivo del livello dell'acqua contenuta nel serbatoio ed il valore desiderato per questa grandezza (ad esempio un valore di riferimento riportato sulla superficie interna del serbatoio) apre o chiude la valvola di immissione in modo tale da portare questa differenza a zero (figura I.1 b).

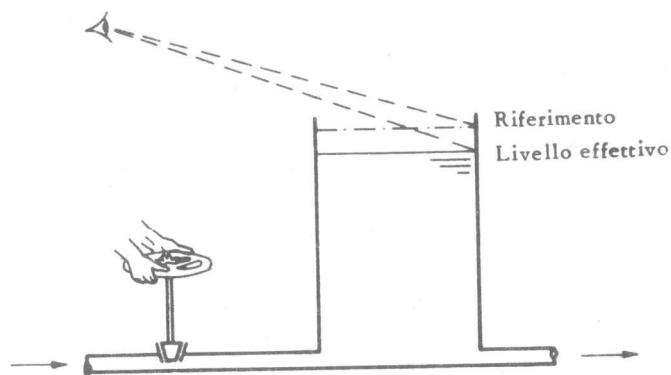


Fig.I.1b

Ovvero il controllo può essere realizzato in modo *automatico*, sostituendo lo operatore umano con semplice meccanismo costituito da un galleggiante e da una leva (fig.I.1 c). Lo scostamento del galleggiante dalla posizione corrispondente al livello di riferimento provoca uno spostamento della valvola di immissione cui corrisponde una variazione nel rifornimento del serbatoio tendente ad annullare questo scostamento.

In entrambi i casi il comando della valvola di immissione viene effettuato a partire da una valutazione (umana o automatica) dello *scostamento* tra il valore che la grandezza sottoposta a controllo assume effettivamente e quello che si desidera essa assuma.

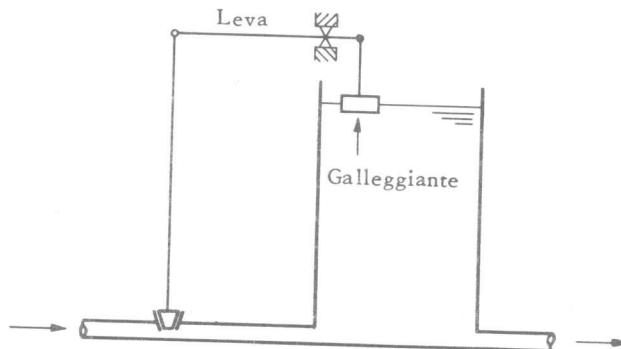


Fig.I.1c

Per riconoscere la sostanziale identità dei due metodi di controllo, è utile trarre le operazioni ivi considerate in termini di sistemi astratti interconnessi.

Innanzitutto si esamini il fenomeno sottoposto a controllo, che è costituito dal processo di riempimento del serbatoio. In esso si considera come variabile di uscita la grandezza che si desidera controllare (il livello h) e come variabili di ingresso le grandezze dalle quali la variabile di uscita può venire influenzata (la portata d'acqua che rifornisce il serbatoio Q_r e la portata d'acqua domandata dall'utenza Q_d). Il controllo avviene attraverso la sola variabile di ingresso che può essere manipolata a piacere (la portata Q_r). Tenendo conto della semplice relazione che sussiste tra le grandezze in gioco:

$$S \frac{dh}{dt} = Q_r - Q_d$$

(nella quale con S si indica la sezione del serbatoio, supposta costante) e assumendo un legame di proporzionalità tra l'apertura a della valvola e la portata entrante:

$$Q_r = K_v a$$

è immediato associare al fenomeno in esame lo schema di fig.I.2a.

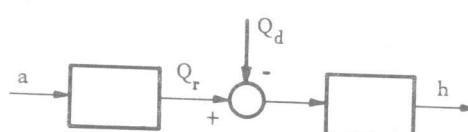


Fig.I.2a

Nel caso manuale l'operatore umano posiziona la valvola in funzione della differenza, riscontrata a vista, tra il valore di riferimento (che si indicherà con h_0) del li-

vello ed il suo valore effettivo, cioè in funzione della grandezza:

$$\Delta h = h_0 - h$$

L'operatore umano si comporta, da questo punto di vista, come un sistema che riceve come ingresso la grandezza Δh e produce come uscita un movimento diretto ad influenzare l'apertura a della valvola. Lo schema di controllo si completa allora nel modo indicato in fig.I.2 b.

Nel caso automatico lo schema di controllo è sostanzialmente analogo. Infatti, supponendo rigida la leva ed indicando con a_0 il valore assunto dall'apertura della valvola quando il galleggiante si trova nella posizione corrispondente al livello di riferimento h_0 , per piccoli spostamenti si ha:

$$a = a_0 + K_l \Delta h$$

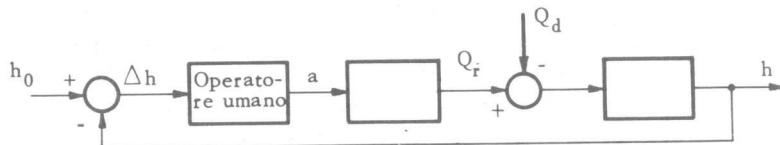


Fig.I.2 b

(essendo K_l il coefficiente di proporzionalità che sussiste tra gli spostamenti dei due estremi della leva). Lo schema corrispondente è quello indicato in fig.I.2 c.

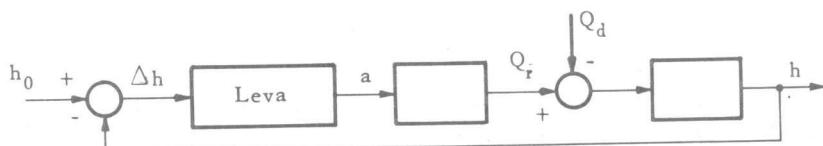


Fig.I.2 c

Esempio I.2 - Nella fig.I.3 a sono schematizzati gli elementi essenziali di un montacarichi: la cabina, la fune, l'argano di sollevamento, il motore elettrico che aziona l'argano. In questo caso, l'obiettivo di un problema di controllo può essere quello di posizionare la cabina ad una quota predeterminata, attraverso un opportuno comando elettrico sul motore.

Per realizzare il controllo in modo automatico, si può ricorrere allo schema sommariamente indicato in fig.I.3 b. Un'asta a collegata rigidamente alla cabina muove il cursore di un potenziometro lineare P_1 , che sviluppa una resistenza paria quella del tratto di corsa (della cabina) nell'ambito del quale si vuole effettuare il posizionamento. Se ρ è la resistenza per unità di lunghezza del potenziometro (che si suppone-

ne costante) ed R la sua resistenza totale, nell'ipotesi che non venga prelevata corrente attraverso il cursore, tra la quota y dell'asta a e la tensione e_1 sul cursore vale la relazione:

$$e_1 = \left(\frac{E}{R} \rho \right) y$$

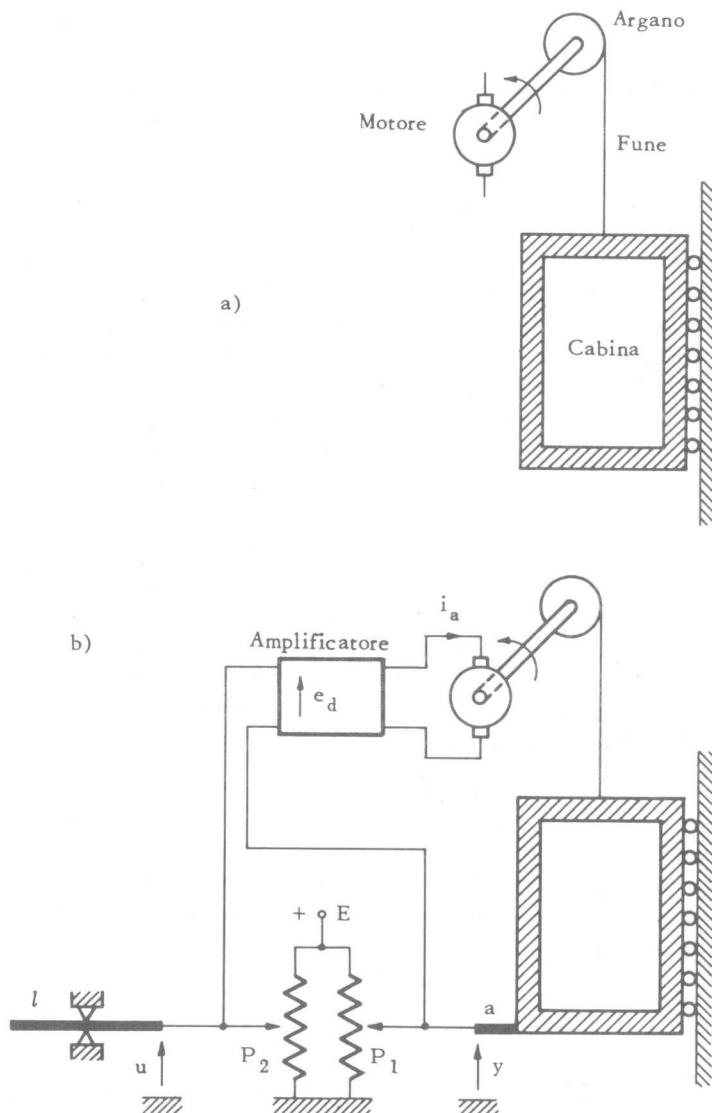


Fig.I.3

Il potenziometro si comporta cioè come un *trasduttore proporzionale posizione-tensione*, nel senso che produce una tensione e_1 proporzionale allo spostamento y .

Altrettanto si può dire per il potenziometro P_2 . In particolare, se questo è costruttivamente identico a P_1 , la tensione e_2 sul cursore è proporzionale alla quota u dell'estremo della leva l secondo la relazione:

$$e_2 = \left(\frac{E}{R} \rho \right) u$$

L'amplificatore indicato nello schema viene allora ad essere alimentato da una tensione:

$$e_d = e_2 - e_1$$

che risulta proporzionale alla differenza tra la quota u della leva e la quota y della cabina e produce in uscita una corrente $i_a = K_a e_d$ ancora proporzionale a questa differenza. Se il collegamento elettrico è effettuato in modo tale che quando $(u - y)$ è positiva l'asse del motore giri in senso antiorario, si può immediatamente constatare che il comando elettrico sul motore tende sempre a ridurre a zero la differenza tra la quota u della leva e la quota y della cabina. Si può allora concludere che lo spostamento (manuale, se si vuole) della leva l provoca uno spostamento proporzionale (automatico) della cabina che può venire in tal modo posizionata a qualsivoglia quota si desideri.

Anche per questo esempio è immediato dedurre il relativo schema di controllo ed una descrizione semplificata dei legami tra le grandezze. L'oggetto sottoposto a controllo è costituito dall'insieme del motore, dell'argano di sollevamento, della fune e della cabina. La variabile che si desidera controllare (uscita) è la quota y della cabina mentre la variabile mediante la quale si effettua il controllo (ingresso) è il comando elettrico sul motore. Se si tratta di un motore a corrente continua ad eccitazione indipendente alimentato in corrente sull'armatura, la coppia motrice prodotta C_m risulta proporzionale alla corrente stessa di armatura i_a :

$$C_m = K_m i_a$$

La coppia motrice, a sua volta, è equilibrata da una coppia resistente che, se si ipotizzano condizioni di linearità, si trascurano le masse dei diversi organi in movimento rispetto alla massa M del carico contenuto nella cabina e si ignora l'eventuale elasticità della fune, si esprime nella forma:

$$C_r = r \left[M \frac{d^2 y}{dt^2} + F \frac{dy}{dt} + Mg \right]$$

essendo r il raggio dell'argano; il secondo e terzo addendo a secondo membro rappresentano, rispettivamente, l'effetto di un attrito viscoso e dell'attrazione terrestre. La uguaglianza $C_m = C_r$ consente allora di individuare l'equazione differenziale cui sod-

disfano le coppie ingresso-uscita del sistema in esame e da questa è possibile, con procedimenti noti, dedurre ad esempio una rappresentazione ingresso-stato-uscita della forma:

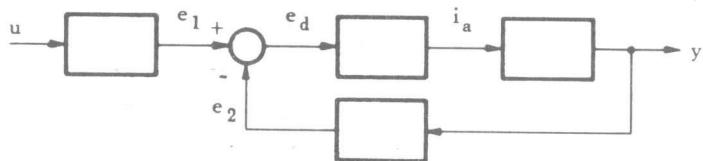
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{F}{M}x_2 - g + \frac{K_m}{rM}i_a$$

$$y = x_1$$

È utile notare che, a differenza di altri parametri del processo, la massa M è una grandezza il cui valore non è determinato a priori, ma può variare in modo non conosciuto o imprevedibile.

Fig.I.4



Tenendo poi conto dei legami tra le altre grandezze considerate nel sistema, già illustrati in precedenza, è immediato dedurre lo schema complessivo di fig.I.4. Come si può notare, esso è sostanzialmente identico a quelli considerati nell'esempio che precede.

Esempio I.3 - Nella parte superiore della fig.I.5 è schematizzata una gabbia di un trene di laminazione. Il lingotto da laminare, nel passaggio attraverso le gabbie, subisce successive riduzioni di spessore fino al raggiungimento delle dimensioni volute. I rulli di una singola gabbia ruotano a vuoto durante tutto il periodo in cui il lingotto si trova tra una gabbia e l'altra, ma, non appena il lingotto impegnava una gabbia, i rulli sono sottoposti ad una brusca variazione di carico. Ai fini del buon risultato del processo di laminazione è essenziale che durante il passaggio del lingotto i rulli ruotino a velocità costante e quindi, in altri termini, che l'effetto della variazione iniziale di carico venga assorbito e ridotto a valori tollerabili. Il problema di controllo che si pone è quindi quello di mantenere costante la velocità con cui sono posti in rotazione i rulli della gabbia.

Sulla base del principio già illustrato negli esempi precedenti, la grandezza sottoposta a controllo (la velocità ω dell'asse del motore che trascina i rulli) viene misurata mediante un dispositivo di trasduzione proporzionale velocità - tensione. Si tratta, in questo caso, di una semplice dinamo ad eccitazione indipendente il cui rotore è accoppiato meccanicamente all'asse del motore. Come è noto, in queste condizioni, la dinamo genera una tensione a vuoto proporzionale alla velocità angolare del rotore:

$$e_t = K_t \omega$$

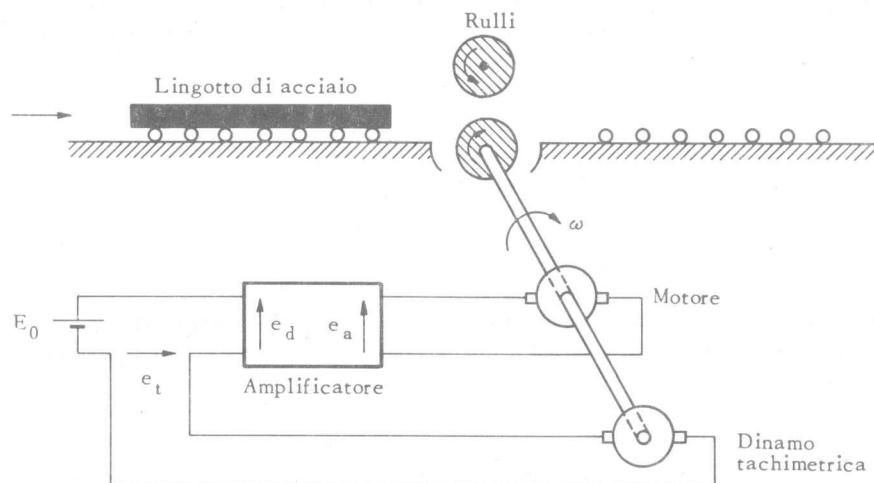


Fig.I.5

La misura e_t della grandezza sottoposta a controllo viene utilizzata per il confronto con una grandezza di riferimento che, in questo caso, è la tensione E_0 erogata da un opportuno generatore. Il valore della tensione di riferimento viene scelto in modo tale che, se ω_0 è il valore desiderato per la velocità angolare del motore, risulti:

$$E_0 = K_t \omega_0$$

In questo modo, la tensione e_a che alimenta l'amplificatore vale, nell'ipotesi che non si abbia assorbimento di corrente,

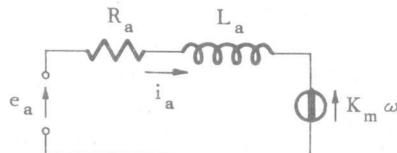
$$e_a = K_t (\omega_0 - \omega)$$

ed è quindi proporzionale alla differenza tra il valore desiderato ω_0 ed il valore effettivo ω della grandezza sottoposta a controllo.

Anche in questo caso, come nell'esempio precedente, se il collegamento elettrico è effettuato in modo tale che quando $(\omega_0 - \omega)$ è positiva il motore acceleri, si può immediatamente constatare che il comando elettrico sul motore tende sempre a ridurre a zero la differenza tra la velocità angolare desiderata ω_0 e la velocità effettiva ω .

La deduzione dello schema di controllo e dei legami tra le grandezze considerate è leggermente più laboriosa di quanto non fosse nel caso precedente, in quanto in questo caso il motore, che è sempre un motore a corrente continua ad eccitazione indipendente, viene alimentato in tensione (anziché in corrente) sull'armatura. Per dedurre la relazione tra tensione e corrente di alimentazione nel motore occorre tenere presente che il circuito di armatura può essere assimilato al circuito equivalente di figura I.6; in esso R_a ed L_a indicano, rispettivamente, i valori della resistenza e dell'induttanza totali della maglia mentre il generatore di tensione $K'_m \omega$ rappresenta l'effetto della forza controelettromotrice (la quale, come è noto, è proporzionale alla velocità

Fig. I.6



angolare del motore stesso). La relazione tra e_a ed i_a è dunque la seguente:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = e_a - K'_m \omega$$

Dal punto di vista meccanico, si può assumere che l'equilibrio tra coppia motrice e coppia resistente possa essere descritto dalla relazione:

$$J \frac{d\omega}{dt} + F \omega = K_m i_a$$

in cui F rappresenta un coefficiente di attrito viscoso e J un momento di inerzia equivalente.

Le due relazioni così trovate sono ovviamente interdipendenti, ma può essere interessante tracciare lo schema di un sistema interconnesso in cui i due aspetti, quello elettrico e quello meccanico, del funzionamento della macchina, risultano separati. A questo proposito è immediato rendersi conto che, indicata con e_m la grandezza a secondo membro nella condizione di equilibrio elettrico (cioè la tensione effettiva agente nella maglia) e con C_m la grandezza a secondo membro nella condizione di equilibrio meccanico (cioè la coppia motrice agente sul carico), si può tracciare lo schema di fig.I.7a. Il sottosistema S_{el} è descritto da una rappresentazione del tipo:

$$\dot{x} = -\frac{R_a}{L_a} x + \frac{1}{L_a} e_m$$

$$i_a = x$$

mentre il sottosistema S_{me} è descritto da una rappresentazione del tipo:

$$\dot{x} = -\frac{F}{J} x + \frac{1}{J} C_m$$

$$\omega = x$$

I blocchi contrassegnati con K_m e K'_m rappresentano sistemi istantanei caratterizzati appunto da coefficienti di proporzionalità K_m e K'_m .

Uno schema del genere rappresenta il comportamento elettromeccanico della gabbia in condizioni di assenza di carico. Se si vuole descrivere la situazione corrispondente al caso in cui il lingotto transita attraverso la gabbia, occorre sommare alla cop-

pia resistente (o, il che è lo stesso, sottrarre alla coppia motrice) un termine, che può essere qualificato come coppia di disturbo, in grado di tenere conto dell'effetto della presenza del lingotto. Corrispondentemente lo schema si modifica in quello di fig.I.7 b.

Il comportamento degli altri componenti dello schema è già stato descritto e il tutto può essere rappresentato come in fig.I.7 c. L'effetto dell'amplificatore di potenza che alimenta il motore è stato rappresentato mediante un sistema istantaneo caratterizzato da un coefficiente di proporzionalità K_a .

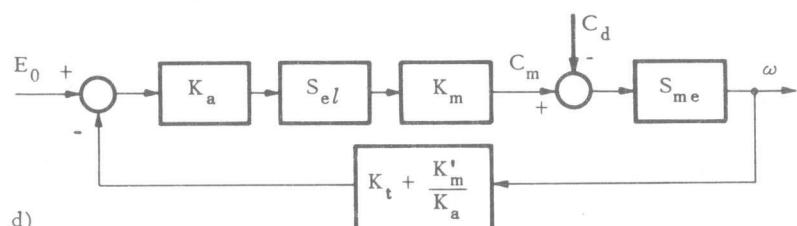
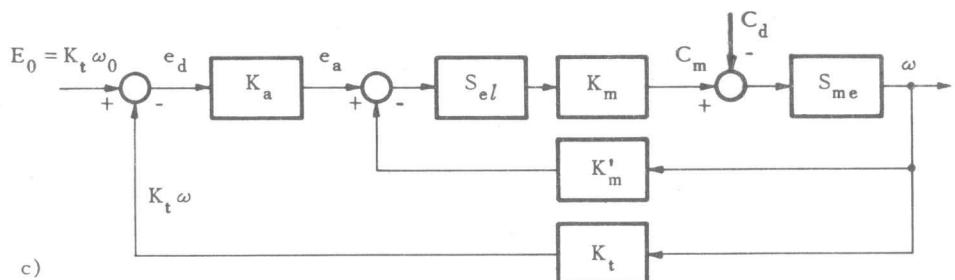
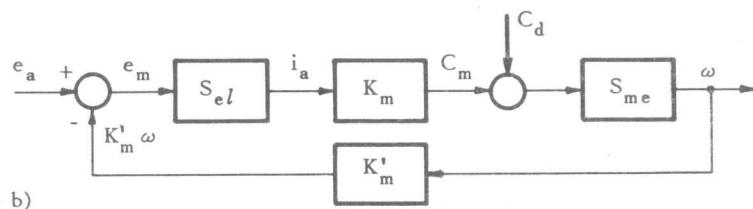
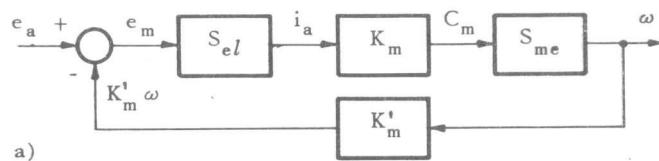


Fig.I.7

Può essere interessante osservare che già lo schema di fig.I.7b presenta la stessa struttura degli schemi di controllo esaminati negli esempi precedenti. La grandezza sottoposta a controllo (la velocità ω) è infatti portata a confronto con una grandezza di riferimento (la tensione e_a di alimentazione) attraverso un sistema che si comporta come trasduttore proporzionale velocità-tensione. In effetti questo sistema non corrisponde ad alcuna entità fisica a se stante ma è solo la descrizione, intermi astratti, del fenomeno in base al quale il circuito di armatura di un motore elettrico è sede di una forza elettromotrice che è proporzionale alla velocità del rotore (di qui la proporzionalità del fenomeno di trasduzione) e si oppone alla tensione che alimenta il circuito stesso (di qui il fenomeno di confronto). Gli ulteriori dispositivi di controllo aggiunti nello schema di fig.I.7c possono essere allora interpretati come dispositivi che rinforzano un'azione di controllo intrinsecamente presente nella macchina stessa e ciò può essere ulteriormente messo in luce osservando che lo schema di fig.I.7c è equivalente, ai fini del legame ingresso-uscita, a quello di fig.I.7d. Si noti che è proprio la presenza intrinseca di questa azione di controllo che suggerisce l'adozione di una alimentazione in tensione (anziché in corrente) per un motore impiegato in un controllo di velocità.

Esempio I.4 - In fig.I.8a è descritto schematicamente il sistema di controllo della temperatura in un forno elettrico. L'elemento riscaldatore del forno viene alimentato dall'energia elettrica di rete mediante un circuito del tipo di quello indicato sommariamente in fig.I.8b e, di conseguenza, la corrente che lo percorre assume l'andamento indicato in fig.I.8c. Se l'elettronica di comando del tiristore è realizzata in modo tale che l'angolo α di conduzione sia legato alla tensione e_d dalla relazione:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + K_a e_d$$

il riscaldatore dissipa nel forno una potenza il cui valore è una funzione della stessa tensione e_d , che assume la forma:

$$P = R I_{\text{eff}}^2 = \frac{R I_0^2}{2\pi} \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right] = \frac{R I_0^2}{2\pi} \left[\frac{1}{4} \sin 2K_a e_d + \frac{\pi}{4} + \frac{K_a e_d}{2} \right]$$

A sua volta, la quantità di calore ceduta dal riscaldatore al forno viene in parte trasmessa all'ambiente esterno ed in parte provoca l'aumento della temperatura nel forno stesso. Indicate con C_f la capacità termica del forno, con K_f il coefficiente di trasmissione del calore verso l'ambiente, con T e T_e le temperature del forno e, rispettivamente, dell'ambiente, l'equilibrio termico può essere allora descritto dalla relazione:

$$C_f \frac{dT}{dt} = P - K_f (T - T_e)$$

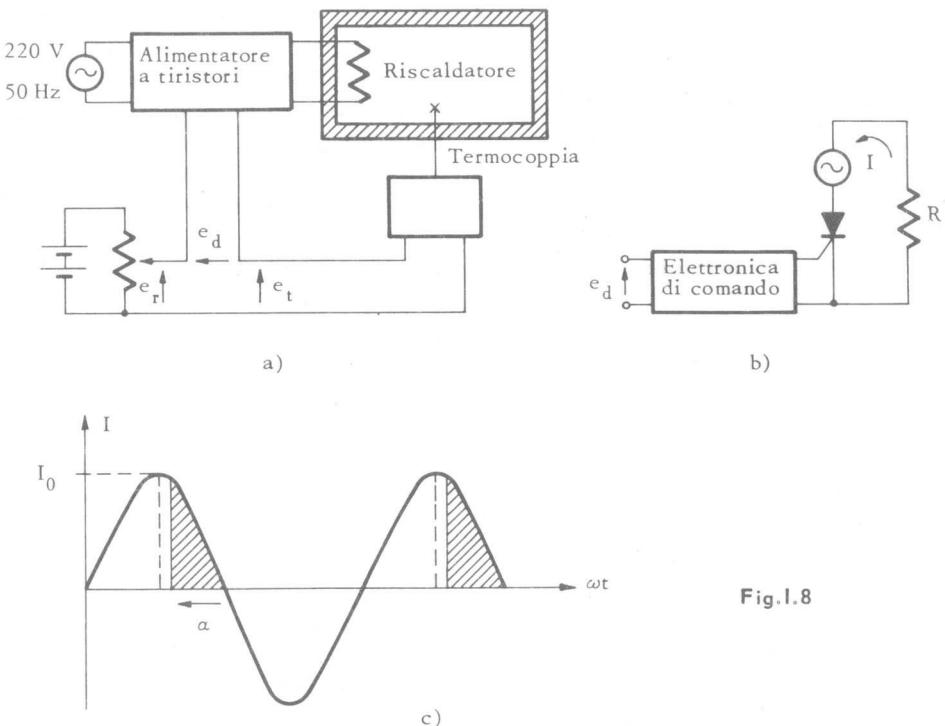


Fig.I.8

Dal punto di vista che qui interessa, al processo da controllare viene associato un sistema astratto che ha come ingresso la tensione e_d (grandezza di controllo) e come uscita la temperatura T (grandezza controllata); la relazione che sussiste tra tali grandezze è quella che risulta dalla composizione delle due espressioni introdotte immediatamente sopra. Se l'angolo $K_a e_d$ assume valori piccoli rispetto a $\pi/2$, la dipendenza di P da e_d può essere approssimata con la relazione linearizzata:

$$P = \frac{RI_0^2}{8} \left(1 + \frac{K_a}{\pi} e_d \right)$$

In queste ipotesi il processo controllato può essere descritto come un sistema avente la struttura a blocchi indicata in fig.I.9a; i blocchi contrassegnati con K_a/π , con $RI_0^2/8$ e con K_f rappresentano sistemi istantanei caratterizzati da tali coefficienti di proporzionalità, mentre il blocco contrassegnato da S_f rappresenta un sistema dinamico descritto da equazioni del tipo:

$$\dot{x} = -\frac{K_f}{C_f} x + \frac{1}{C_f} Q$$

$$T = x$$

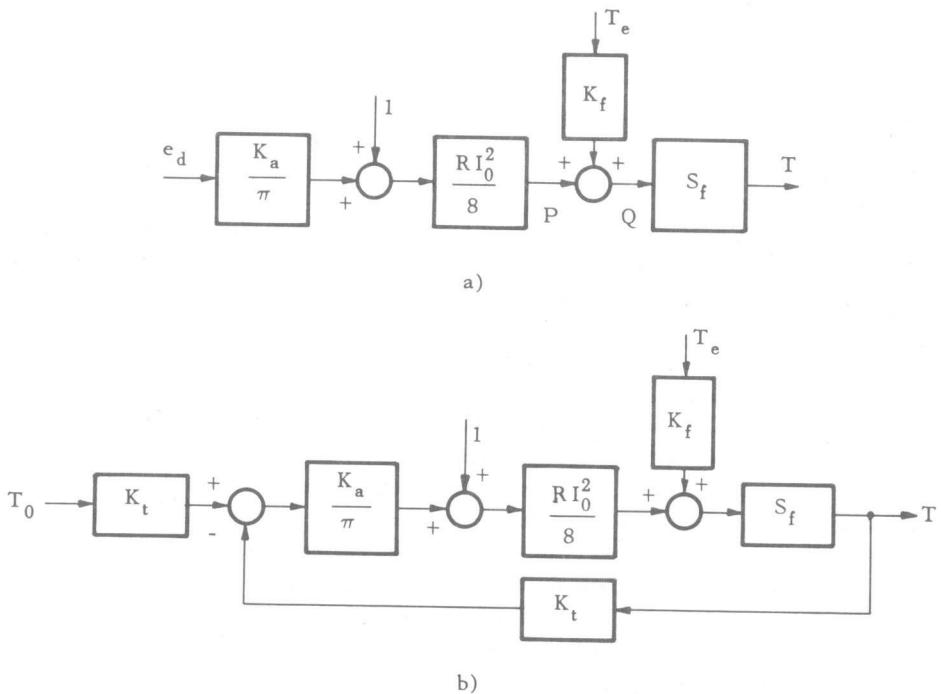


Fig.I.9

Lo schema ottenuto mette in evidenza molto chiaramente l'influenza della temperatura T_e dell'ambiente, la quale assume il ruolo di ulteriore grandezza di ingresso, ma che, a differenza di quanto avviene per e_d , non può essere manipolata a piacimento. Si noti anche che la grandezza dello schema contrassegnata con il valore 1 (adimensionale), non corrisponde ad una variabile di ingresso, ma è stata introdotta solo allo scopo di poter rappresentare correttamente i legami tra le grandezze in gioco facendo uso di operazioni lineari (somme, moltiplicazione per una costante, ecc.); il valore numerico attribuito a tale grandezza fittizia è una conseguenza delle leggi che è stata prescelta per il controllo dell'angolo di conduzione e , in particolare, del fatto che per $e_d = 0$, l'angolo di conduzione risulta pari a $\pi/2$.

Gli altri componenti del sistema sono collegati in modo tale da realizzare uno schema del tutto analogo a quelli esaminati negli esempi precedenti. La temperatura T viene misurata mediante un trasduttore proporzionale temperatura-tensione ed il risultato e_t di questa misura è portato a confronto con una opportuna tensione di riferimento e_r , il cui valore coincide con il valore assunto da e_t quando la temperatura T assume il valore desiderato T_0 . Valgono cioè le relazioni:

$$e_t = K_t T$$

$$e_r = K_t T_0$$

$$e_d = e_r - e_t = K_t (T_0 - T)$$

alle quali corrisponde, tenendo conto di quanto è già stato dedotto per le altre parti del sistema, lo schema di fig.I.9b.

Anche in questo caso, così come negli altri esaminati in precedenza, l'azione di controllo esercitata sul processo è proporzionale alla differenza tra il valore desiderato ed il valore effettivo della grandezza sottoposta a controllo.

Esempio I.5 - Strutture del tipo di quelle considerate negli esempi precedenti possono essere anche individuate nell'analisi dei fenomeni di controllo che si manifestano in settori diversi da quello tecnologico propriamente detto. Un semplice esempio relativo ad un problema di controllo di tipo gestionale è quello che descrive le relazioni fra produzione e magazzinaggio in una industria produttrice di beni di consumo. Il sistema associato è a tempo discreto e prende in considerazione come variabili di interesse, nel caso di un singolo bene, la quantità di prodotto che esce dal ciclo di produzione al termine di un intervallo prefissato di tempo (che può ad esempio risultare coincidente con il tempo di lavorazione), la quantità di prodotto che viene destinata alla vendita, e la quantità di prodotto giacente in magazzino. Indicate con $x_p(t)$, $x_v(t)$ ed $x_m(t)$ le tre variabili così individuate, è immediato constatare che vale la relazione:

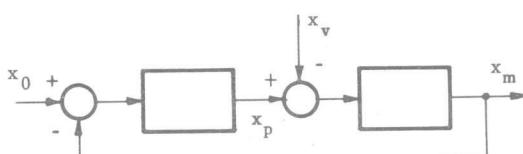
$$x_m(t+1) = x_m(t) + x_p(t) - x_v(t) \quad t \in \mathbb{Z}$$

che deriva dall'aver uguagliato la quantità di prodotto invenduto all'incremento delle scorte di magazzino tra l'istante t e l'istante $t+1$. Il problema di controllo che si pone è quello di disciplinare la produzione in modo tale che la quantità di prodotto giacente in magazzino si mantenga costante. La legge di controllo che viene scelta è del tipo seguente:

$$x_p(t+1) = a x_p(t) + b [x_0 - x_m(t)]$$

e corrisponde ad una programmazione della produzione nella quale la quantità di prodotto ad un generico istante di tempo viene imposta come media pesata (secondo opportuni coefficienti a e b) della quantità di prodotto ottenuta all'istante precedente e del difetto di scorte di magazzino rispetto alla situazione desiderata (rappresentata dal valore prefissato x_0).

Fig.I.10



Alle due equazioni così illustrate è immediato associare lo schema indicato in fig.I.10 il quale, come già detto, presenta la stessa struttura di quelli esaminati in precedenza.

Esempio I.6 - Moltissimi fenomeni di controllo che hanno luogo a livello biologico possono essere interpretati come fenomeni a contoreazione. Un esempio elementare è fornito dal processo di ossigenazione dei tessuti ad opera dei globuli rossi del sangue. Dal punto di vista che qui interessa, la quantità di ossigeno presente nei tessuti può essere considerata come grandezza controllata, mentre la quantità di globuli rossi presenti nel sangue può essere considerata come grandezza controllante. In effetti i globuli rossi agiscono da trasportatori di molecole di O_2 dall'apparato respiratorio verso i tessuti e si può assumere, trascurando i fenomeni dinamici, che l'ossigeno nei tessuti sia proporzionale al numero di globuli rossi presenti. Questi ultimi vengono prodotti nel midollo osseo mediante un processo che si ritiene sia regolato da una proteina presente nel plasma sanguigno che prende il nome di eritropoietina. L'eritropoietina, a sua volta, viene secreta in massima parte dal rene, in funzione della quantità di ossigeno presente nei tessuti. L'intero fenomeno può essere descritto mediante lo schema di figura I.11.



Fig.I.11

La funzione di secrezione dell'eritropoietina è controllata dalla quantità di ossigeno secondo una caratteristica del tipo di quella indicata in fig.I.12 a (comune, peraltro, alla maggior parte dei fenomeni di regolazione biologica). Se nell'intorno di una

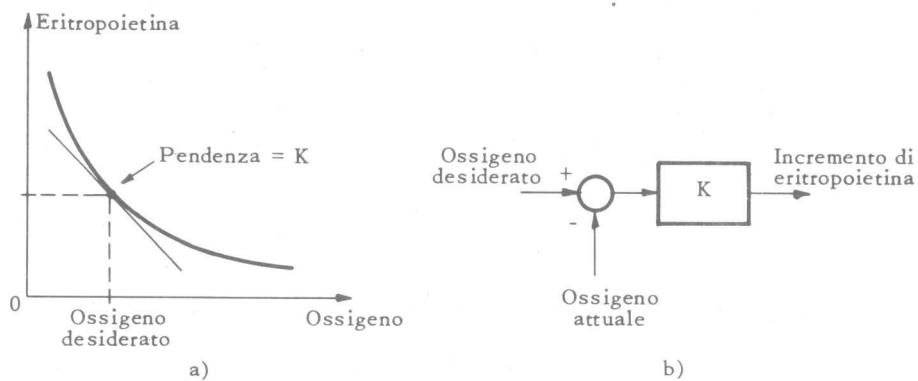


Fig.I.12

situazione di equilibrio, corrispondente al caso in cui la quantità di ossigeno assume il valore desiderato, la caratteristica viene approssimata con la retta tangente, la relazione tra quantità di ossigeno presente nei tessuti e incremento di eritropoietina si può esprimere nella forma:

$$\text{incremento di eritropoietina} = K [\text{ossigeno desiderato} - \text{ossigeno attuale}]$$

essendo K la pendenza della caratteristica nel punto di lavoro considerato. A tale relazione corrisponde l'operazione di confronto tra valore desiderato e valore effettivo della grandezza controllata, tipico di ogni sistema di controllo a controreazione, indicata in fig.I.12 b.

Come si constata facilmente, tutti gli schemi di controllo esaminati sino a questo punto hanno in comune alcune caratteristiche essenziali, consistenti nell'operazione di confronto tra il valore effettivo della grandezza sottoposta a controllo e il valore desiderato per tale grandezza, nella definizione di una grandezza proporzionale alla differenza tra i due valori in questione e, infine, nello sviluppo di un'azione di controllo sul processo proporzionale a tale differenza e tendente all'annullamento della differenza stessa. Si parla in questo caso di schema di controllo a controreazione (o reazione negativa) in quanto nello schema è presente un ritorno dell'azione di controllo a partire dalle variabili controllate verso le variabili controllanti e questo ritorno è realizzato in modo tale da contrastare la possibilità che le variabili controllate assumano valori differenti da quelli prescritti.

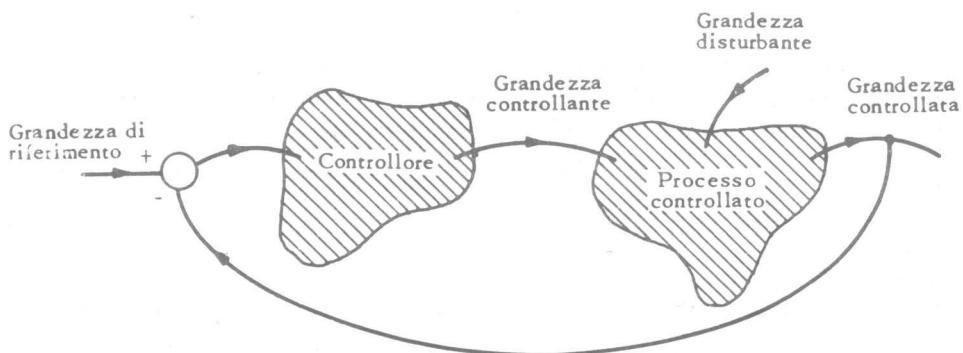


Fig.I.13

Il principio del controllo a controreazione è indicato sommariamente in fig.I.13. Come si può osservare, il controllore è in questo caso un oggetto o processo che ha il compito di imporre all'oggetto o processo controllato una legge di controllo elaborata a partire dal risultato di una operazione di confronto, che viene eseguita paragonando una si-

tuazione di *riferimento*, o desiderata, con la situazione effettivamente presente. Naturalmente, lo schema indicato è solo uno schema astratto, o di principio, e non riflette in maniera biunivoca i singoli componenti o le singole operazioni che avvengono in un caso reale; in particolare, è opportuno notare che solo raramente la grandezza che rappresenta il riferimento è fisicamente omogenea con quella controllata (così come implicitamente assunto nello schema) ma che, nella maggioranza dei casi, per necessità tecniche, il confronto avviene su grandezze fisiche non omogenee con quelle controllate. Di qui la necessità di effettuare un trasporto fedele della grandezza controllata dal supporto fisico originario ad uno adatto al confronto con la grandezza di riferimento, mediante opportuni dispositivi di *trasduzione*, che sono già stati individuati negli esempi precedenti e sui quali si avrà modo di ritornare nel seguito.

Nello schema viene messo in luce un altro aspetto essenziale dei problemi di controllo, che non era stato preso esplicitamente in esame nell'ambito delle considerazioni introduttive. Più precisamente, viene tenuto presente il fatto che l'evoluzione della grandezza controllata può essere influenzata oltre che dalle grandezze prescelte per il controllo (le quali, per ipotesi, possono essere manipolate a piacimento da parte del controllore) anche da altre grandezze sulle quali però non possono essere esercitate azioni di controllo di sorta e che anzi, in taluni casi, possono evolvere in modo imprevedibile o non conosciuto. Queste grandezze si possono certamente classificare tra gli ingressi al sistema astratto associato al processo controllato ma, allo scopo di mettere chiaramente in luce il fatto che su di esse non è possibile intervenire e che loro variazioni impreviste possono introdurre variazioni non desiderate per le grandezze sottoposte a controllo, vengono usualmente considerate a parte e denominate *grandezze disturbanti* o *disturbi*. Sull'influenza di tali grandezze si avrà modo di ritornare più volte in questo capitolo e nei successivi.

I.3 - Altri tipi di controllo.

Il principio della controcrazione, illustrato negli esempi del paragrafo precedente, trova applicazione nella grande maggioranza dei problemi di controllo. Esso, tuttavia, non è il solo ad essere utilizzato nei sistemi di controllo automatico. In talune situazioni particolari possono essere convenientemente impiegate tecniche che si rifanno al cosiddetto principio della *compensazione diretta*, che è illustrato nell'esempio che segue.

Esempio 1.7 - Si consideri ancora il problema del controllo del livello dell'acqua contenuta in un serbatoio, descritto nell'Esempio I.1. Si supponga inoltre di poter disporre, sulla condotta diretta all'utenza, di un trasduttore proporzionale portata-tensione. Un dispositivo di questo genere si realizza, ad esempio, disponendo un campo magnetico in direzione ortogonale al flusso dell'acqua; quest'ultima diviene allora sede di una differenza di potenziale, proporzionale alla velocità della corrente idrica, che può essere rilevata da una coppia di elettrodi opportunamente predisposta; si ottiene in tal modo una tensione proporzionale al flusso Q_d . La tensione prodotta dal trasduttore opportunamente amplificata, può essere utilizzata per comandare una valvola a solenoide, disposta sulla condotta di immissione (cfr. fig. I.14 a), e dotata di un dispositivo elastico di richiamo, che rende l'apertura della valvola stessa proporzionale alla corrente che percorre il solenoide. In un sistema di questo genere valgono allora le relazioni:

$$e_d = K_f Q_d$$

$$i_a = K_a e_d$$

$$a = K_s i_a$$

$$Q_r = K_v a$$

È immediato constatare che, se:

$$K_f K_a K_s K_v = 1$$

risulta:

$$Q_r = Q_d$$

La tecnica di controllo adottata è tale che la portata di acqua che rifornisce il serbatoio è sempre uguale alla portata d'acqua domandata dall'utenza, il che rende il livello dell'acqua nel serbatoio stesso indipendente dalle due variabili in questione. Il livello mantiene allora inalterato il suo valore nel tempo.

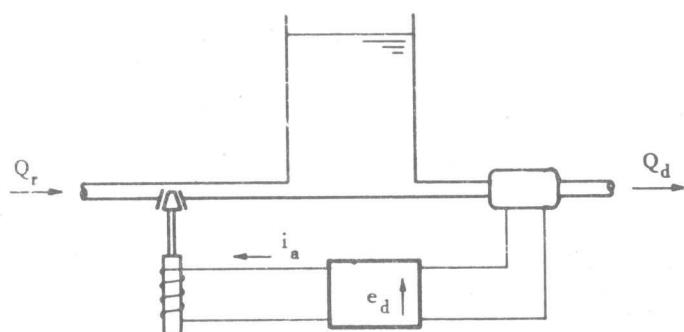


Fig.I.14 - a)

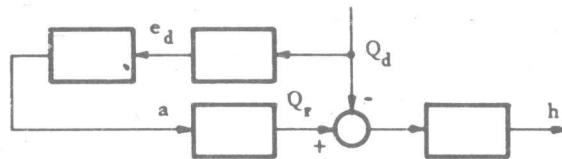


Fig.I.14 - b)

Il principio della compensazione si basa sulla possibilità di esercitare, sul processo controllato, attraverso le grandezze di controllo, un'azione tale da compensare l'azione simultaneamente esercitata dalle grandezze disturbanti. La differenza fondamentale con il principio della controreazione risiede nel fatto che l'azione di controllo si esplica non a partire dalla misura delle grandezze controllate, ma a partire dalla misura delle grandezze disturbanti (cfr. fig.I.15). Pensando al processo controllato come a un sistema astratto, si può osservare che in questo caso l'azione di controllo viene sviluppata non a partire dalla misura di grandezze di uscita, ma a partire da una misura di determinate grandezze di ingresso, le quali - per ipotesi - non possono essere manipolate a piacimento ma delle quali non è escluso si possa - sia pure in taluni casi - ottenere almeno una misura.

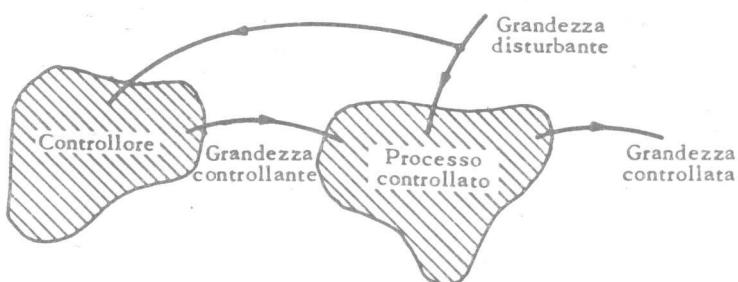


Fig.I.15

Le condizioni per poter ricorrere al principio della compensazione sono ovviamente:

- quella di poter effettuare una misura del disturbo che si vuole compensare;
- quella di essere in grado di realizzare un controllore capace di esercitare attraverso le grandezze di controllo un'azione effettivamente tale da compensare l'azione del disturbo.

Sull'importanza di questa condizione si ritornerà in seguito, dopo che saranno stati descritti i metodi per lo studio dei sistemi di controllo a controllazione, per mostrare come in effetti il ricorso al principio della compensazione possa porre problemi riguardanti la fisica realizzabilità del controllore.

Rimandando al paragrafo successivo per un primo confronto tra le tecniche basate sulla controllazione e quelle basate sulla compensazione, è utile osservare subito che le due tecniche possono essere anche impiegate simultaneamente in un problema di controllo, così come viene illustrato nel seguente esempio.

Esempio I.8 - Il problema che si considera è quello di controllare la posizione di una antenna radar destinata all'inseguimento di un oggetto mobile. Si suppone inoltre che l'antenna sia montata su di un veicolo libero di muoversi su di un terreno eventualmente accidentato (cfr. fig.I.16a). Riferendosi, per semplificare la trattazione, alla schematizzazione del problema in una sola dimensione, conviene descrivere le posizioni relative degli oggetti che interessano mediante gli angoli indicati in fig.I.16b. La posizione dell'antenna rispetto al veicolo, che può essere controllata per mezzo di un motore, è caratterizzata dall'angolo α , mentre l'eventuale sbandamento del veicolo stesso all'orizzontale è individuato dall'angolo δ . Indicata allora con θ_a la direzione dell'asse dell'antenna rispetto ad un riferimento orizzontale si ha evidentemente:

$$\theta_a = \alpha + \delta$$

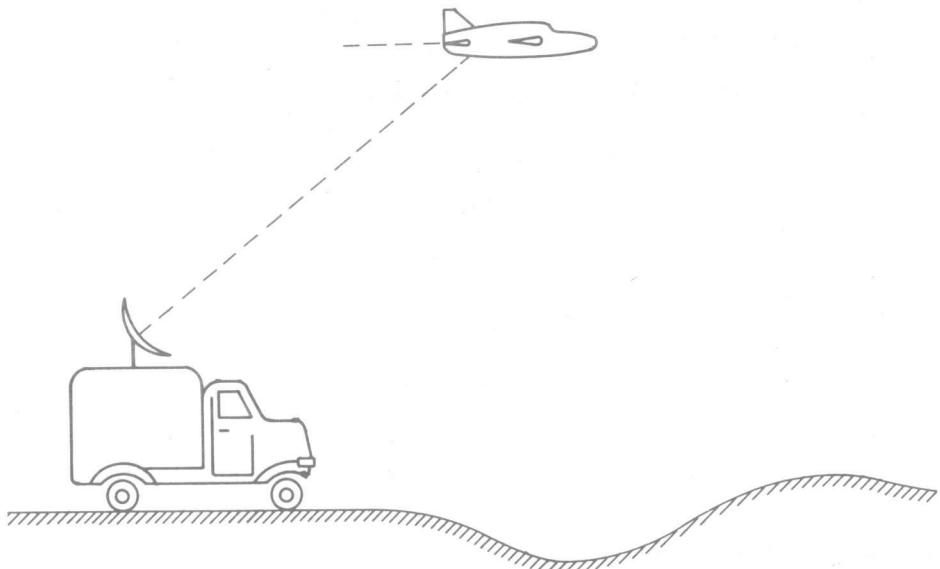


Fig.I.16 - a)

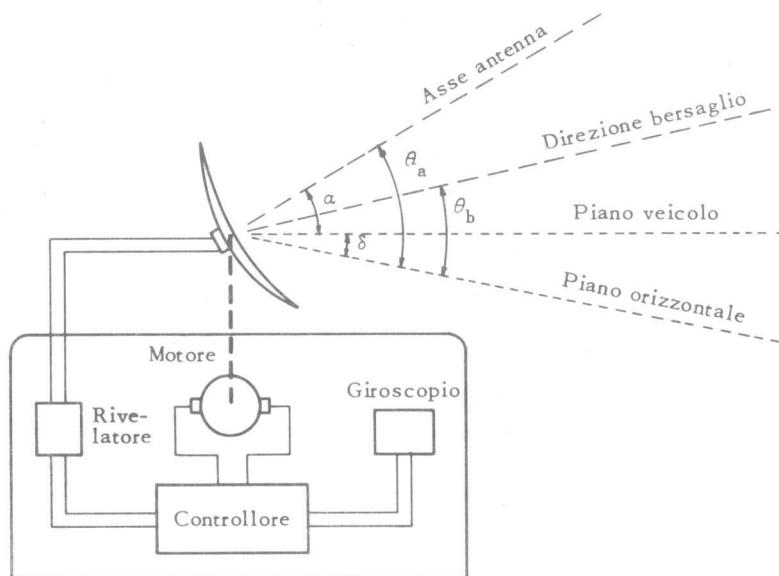


Fig.I.16 - b)

L'obiettivo del controllo è quello di tenere l'antenna puntata verso il bersaglio ovvero-sia, nei termini formali appena introdotti, quello di imporre la coincidenza dell'angolo θ_a con l'angolo θ_b caratterizzante la direzione della congiungente antenna-bersaglio rispetto ad un riferimento orizzontale.

Se si adotta il principio della contoreazione, occorre provvedere ad una misura della differenza:

$$\theta_d = \theta_b - \theta_a$$

e, sulla base di questa, procedere alla opportuna correzione dell'angolo α , tramite un adeguato comando del motore. L'esecuzione di questa misura può venire effettuata utilizzando opportunamente le proprietà direzionali dell'antenna stessa e, più precisamente, il fatto che l'ampiezza del segnale di eco è una funzione dell'angolo che la congiungente antenna-bersaglio forma con l'asse dell'antenna. Una opportuna elaborazione elettronica dei segnali può permettere, in altri termini, di ottenere all'uscita del rivelatore un segnale e_d di ampiezza proporzionale all'angolo θ_d . Questo segnale, una volta amplificato, può essere direttamente impiegato per il comando del motore, come indicato nella fig.I.16b stessa. Se il motore è alimentato in corrente sull'armatura si possono scrivere equazioni del tipo di quelle già introdotte nell'Esempio I.2 e che qui si riportano, nella forma:

$$e_d = K_d (\theta_b - \theta_a)$$

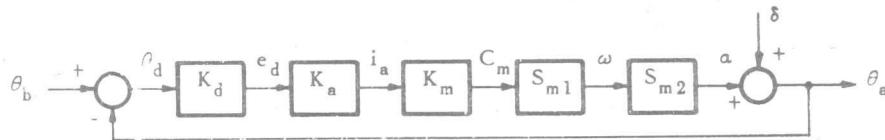
$$i_a = K_a e_d$$

$$C_m = K_m i_a$$

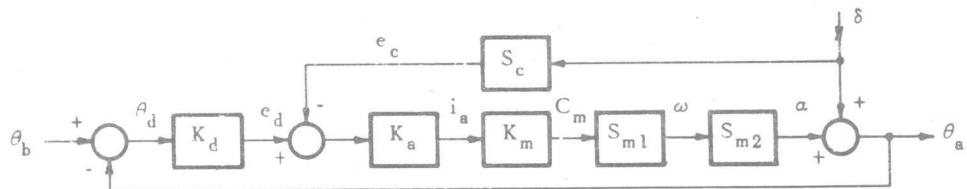
$$J \frac{d\omega}{dt} = C_m - F \omega$$

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

Le costanti K_d , K_a , K_m caratterizzano, rispettivamente, il rapporto di proporzionalità tra il segnale di eco e_d e l'angolo $\theta_b - \theta_a$, il coefficiente di amplificazione dell'apparato che alimenta (in corrente) il motore e il rapporto di proporzionalità tra coppia motrice C_m e corrente di armatura i_a ; con ω si indica la velocità di rotazione dell'asse del motore.



a)



b)

Fig.I.17

Alle equazioni così dedotte è immediato far corrispondere uno schema del tipo di quello indicato in fig.I.17a. Ai blocchi caratterizzati con S_{m1} ed S_{m2} sono associate, rispettivamente, le rappresentazioni:

$$\dot{x}_1 = -\frac{F}{J} x_1 + \frac{1}{J} C_m$$

$$\omega = x_1$$

e:

$$\dot{x}_2 = \omega$$

$$\alpha = x_2$$

della quale la seconda rappresenta, come è noto, l'effetto di integrazione implicito nella descrizione del legame tra posizione α e velocità ω .

Il principio della compensazione diretta può essere utilizzato per migliorare le prestazioni del sistema nei riguardi degli effetti di eventuali variazioni dell'angolo δ (disturbo), sicuramente presenti se il veicolo sul quale è installato il sistema avanza su terreno irregolare. In questo caso si procede ad una misura dell'angolo δ mediante un dispositivo atto a rilevare lo scostamento tra piano del veicolo e un piano orizzontale (si tratta in genere di un dispositivo basato sull'effetto giroscopico) e si utilizza il risultato di questa misura per sviluppare una azione di controllo tale da annullare gli effetti di variazioni di δ (cfr. Problema I.6).

In uno schema di questo genere il ricorso al principio della compensazione consente di neutralizzare gli effetti del disturbo δ , mentre la controreazione viene utilizzata per ottenere l'adeguamento automatico dell'angolo θ_a all'angolo di riferimento θ_b .

I.4 - Proprietà fondamentali del controllo a controreazione.

In questo paragrafo si illustrano brevemente alcune proprietà intrinseche degli schemi di controllo a controreazione e si effettua un primo paragone con altre tecniche di controllo, del tipo di quelle indicate nel par. I.3.

Un primo aspetto fondamentale che interessa analizzare è quello della capacità del sistema di assorbire gli effetti dei disturbi agenti sul processo controllato. Rimandando ad un successivo capitolo per una trattazione formale e - nei limiti qui considerati - completa, è conveniente analizzare innanzitutto da un tale punto di vista il comportamento degli schemi elementari introdotti nei vari esempi. Per rendere la presentazione il più possibile diretta, si considereranno solo situazioni particolari (ad esempio quella in cui i disturbi assumono valori costanti) e verranno esaminate solo alcune caratteristiche della risposta (ad esempio sola la componente a regime permanente di questa ultima).

Nell'esempio I.1, una variazione della portata Q_d rispetto al valore previsto assume le caratteristiche di un disturbo. Se questo disturbo è costante, la risposta del sistema in regime permanente e corrisponde alla situazione di equilibrio in cui risulta

$$\frac{dh}{dt} = 0$$

Di conseguenza si ha:

$$Q_r = Q_d$$

A sua volta, la portata Q_r può essere espressa in funzione delle altre grandezze mediante la relazione:

$$Q_r = K_v a_0 + K_v K_l (h_0 - h)$$

Combinando questa relazione con la precedente si può arrivare a esplicitare la dipendenza di h da Q_d nella forma:

$$h = h_0 + \frac{a_0}{K_l} - \frac{Q_d}{K_l K_v}$$

Esprimendo Q_d come somma di un contributo fisso $Q_{d,0}$ (valore previsto) e di una variazione ΔQ_d si ha poi:

$$h = h_0 + \frac{a_0}{K_l} - \frac{Q_{d,0}}{K_l K_v} - \frac{\Delta Q_d}{K_l K_v}$$

In generale, il dimensionamento dei componenti (il coefficiente K_l per la leva e l'apertura a_0 della valvola) è fatto in modo tale che, quando la portata Q_d assume il valore previsto, il livello assuma il valore desiderato. Se questa condizione è soddisfatta si ha allora, in definitiva,

$$h = h_0 - \frac{\Delta Q_d}{K_l K_v}$$

Il secondo addendo a secondo membro rappresenta *l'effetto del disturbo sull'uscita*. Come si vede, l'entità di questo effetto è inversamente proporzionale al coefficiente di amplificazione K_l della leva e al coefficiente K_v di apertura della valvola. Si noti che ciò è perfettamente in accordo con quanto suggerisce l'intuizione fisica; è infatti immediato constatare che, quanto più è elevato il coefficiente di amplificazione della leva, tanto più piccola è la differenza $h - h_0$ necessaria per produrre una prefissata corsa della valvola (occorrente a far fronte ad una prefissata variazione di portata ΔQ_d); così pure, tanto più elevato è il coefficiente di apertura della valvola, tanto più piccola è la corsa occorrente per produrre una prefissata variazione di portata ΔQ_d . Da un punto di vista progettuale, se l'intervallo di valori ammissibili per il disturbo è noto a priori, una opportuna predisposizione di questi parametri consente di mantenere l'effetto del disturbo stesso entro limiti prefissati.

Nell'Esempio I.3, la coppia resistente corrispondente al transito del lingotto attraverso la gabbia può essere anch'essa considerata come un'azione di disturbo. Analizzando in questo caso la risposta a regime permanente corrispondente ad un disturbo costante, si osserva che la situazione di equilibrio è caratterizzata dalle relazioni:

$$\frac{di_a}{dt} = 0 \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$$

cui corrispondono le uguaglianze:

$$R_a i_a = e_a - K_m' \omega$$

$$F \omega = K_m i_a - C_d$$

Combinando tra loro queste relazioni e tenendo presente i legami che esistono tra ω ed ω_0 , si può pervenire all'uguaglianza:

$$\frac{R_a}{K_m} (F \omega + C_d) = K_a K_t (\omega_0 - \omega) - K_m' \omega$$

dalla quale, esplicitando rispetto ad ω si ottiene:

$$\omega = \frac{\frac{K_a K_t}{K_m}}{\frac{K_a K_t}{K_m} + \frac{R_a F}{K_m}} \omega_0 - \frac{\frac{R_a}{K_m}}{\frac{K_a K_t}{K_m} + \frac{R_a F}{K_m}} C_d$$

Il secondo addendo a secondo membro rappresenta l'effetto del disturbo sull'uscita. Anche in questo caso si constata che l'entità di tale effetto decresce con il crescere del coefficiente K_d di guadagno dell'amplificatore che alimenta il motore e ciò è ancora in perfetto accordo con quanto suggerisce l'intuizione. Quanto più è elevato il coefficiente di guadagno dell'amplificatore, tanto più piccola è la tensione e_d (cioè, a parità di K_t , tanto più piccola è la differenza $\omega - \omega_0$) necessaria a produrre la variazione nella alimentazione del motore occorrente a compensare un prefissato disturbo di coppia C_d . Si noti anche che il parametro K_a è l'unico sul quale il progettista è libero di agire a piacimento, essendo gli altri vincolati alle particolari caratteristiche delle macchine utilizzate.

Nell'Esempio I.5, il ruolo di disturbo è svolto da eventuali variazioni nelle vendite. Analizzando anche in questo la situazione di equilibrio corrispondente a disturbi costanti, una volta posto:

$$x_m(t+1) = x_m(t)$$

$$x_p(t+1) = x_p(t)$$

si ha:

$$0 = x_p - x_v$$

$$(1 - a)x_p = b(x_0 - x_m)$$

da cui risulta:

$$x_m = x_0 - \frac{1-a}{b} x_v$$

Le scorte di magazzino differiscono da quelle prestabilite per una quantità che è proporzionale alle vendite (disturbo) ed inversamente proporzionale al coefficiente b secondo il quale, da parte dei responsabili della produzione, è valutata l'importanza del difetto di scorta rispetto alla situazione desiderata.

Dai semplici esempi esposti si può trarre una prima conclusione di grande interesse, osservando che gli schemi di controllo adottati sono capaci di ridurre l'effetto dei disturbi agenti sul processo controllato entro limiti prefissati, purchè vengano opportunamente dimensionati determinati componenti del sistema. Più in particolare, si può osservare che negli schemi a controreazione l'effetto dei disturbi sul funzionamento del sistema è tanto più limitato quanto più è elevato il coefficiente di proporzionalità secondo il quale l'azione di controllo esercitata sul processo viene fatta dipendere dalla differenza tra valore desiderato e valore effettivo della variabile controllata.

Un secondo aspetto fondamentale che interessa analizzare è quello della capacità del sistema di assorbire variazioni nei parametri che caratterizzano il funzionamento delle diverse parti e cioè, come si usa dire, della sua sensibilità alle variazioni parametriche. Questo punto di vista è basato sull'ovvia considerazione del fatto che i valori della risposta di un sistema (in particolare, i valori della variabile controllata in un problema di controllo) subiscono certamente variazioni in seguito a modifiche nei valori dei parametri che caratterizzano i singoli componenti. Il confronto tra la variazione relativa di questi ultimi e la variazione relativa indotta sulle grandezze di interesse dà una misura della capacità del sistema di rispondere in modo più o meno pronunciato, ovvero di essere più o meno sensibile, al fenomeno in questione.

A questo proposito, è opportuno osservare che le variazioni dei parametri possono essere interpretate sia come modifiche che si manifestano nel tempo, durante il funzionamento del sistema, sia anche come scostamenti delle caratteristiche effettive del componente rispetto a quelle considerate nella fase del progetto. In rapporto a queste considerazioni si può dire che il valore della sensibilità incide direttamente sulla scelta dei componenti sia per quanto riguarda le tolleranze ammesse per le loro caratteristiche sia per quanto riguarda la conservazione nel tempo di tali tolleranze. In altri termini, la sensibilità di un sistema alle variazioni parametriche di un determinato componente determina sia la classe sia il grado di affidamento del componente stesso.

Si vuole anche mettere in evidenza un altro punto di vista da cui si possono considerare le variazioni parametriche; queste ultime si possono infatti interpretare come una misura dell'incertezza nella conoscenza del comportamento delle varie parti del sistema e cioè anche come una misura del *grado di ignoranza* relativamente ai modelli matematici delle parti stesse. A questo proposito va tenuto presente che nel sistema di controllo, come si mostrerà in un paragrafo successivo, è individuabile una parte, il processo controllato, che generalmente è assegnata all'atto in cui si affronta il problema del controllo. In molti casi il modello matematico del processo non può essere valutato che in modo approssimato; in questo caso quindi solo il ricorso ad uno schema di controllo che garantisca una sufficiente insensibilità rispetto ai valori dei parametri può dar luogo a risultati soddisfacenti.

Gli esempi sviluppati in precedenza possono essere facilmente utilizzati per valutare le proprietà dello schema a contoreazione in rapporto al fenomeno della variazione dei parametri.

Nell'Esempio I.2, la massa M del carico costituisce, come si è detto, un parametro che può assumere valori di volta in volta differenti; ovviamente, è desiderabile che le prestazioni del sistema siano influenzate il meno possibile dalle variazioni di tale grandezza.

Analizzando il sistema in condizioni di equilibrio, caratterizzate in questo caso dalle relazioni:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

si deduce che vale l'uguaglianza:

$$r Mg = K_m K_a \frac{E}{R} \rho (u - y)$$

La quota effettiva y della cabina risulta allora legata alla quota desiderata u dalla relazione:

$$y = u - \frac{r Mg}{K_m K_a} \left(\frac{R}{E \rho} \right)$$

Si riscontra, cioè, una differenza tra il valore desiderato e quello effettivo proporzionale al valore del parametro soggetto a variazioni (la massa M) ed inversamente proporzionale al coefficiente K_a di guadagno dell'amplificatore che alimenta il motore. Si constata, in altri termini, una proprietà del tutto analoga a quella messa in evidenza in altri esempi a proposito della risposta al disturbo. Anche l'interpretazione fisica del fenomeno è sostanzialmente identica; basta osservare, allo scopo, che a pa-

rità di coppia motrice (destinata ad equilibrare la coppia rMg), più elevato è il guadagno dell'amplificatore, più piccola è la tensione e_d (ovvero, la differenza tra u ed y) che alimenta l'amplificatore stesso.

Nell'Esempio I.4, si può analizzare l'effetto sulla risposta dovuto ad una variazione nella resistenza di riscaldamento R . Se T_e si assume costante, in condizioni di equilibrio vale l'uguaglianza:

$$\frac{RI_0^2}{8} \left[1 + \frac{K_a}{\pi} K_t (T_0 - T) \right] = K_f (T - T_e)$$

Se si vuole esaminare il modo in cui una variazione della resistenza R produce una variazione della temperatura T , è sufficiente sostituire in questa relazione la quantità $R + \Delta R$ al posto di R , la quantità $T + \Delta T$ al posto di T e cercare il legame tra ΔR e ΔT . Trascurando, nell'ipotesi di variazioni piccole, il prodotto $\Delta R \Delta T$, risulta allora che:

$$\Delta T \cong \frac{K_f(T - T_e)}{K_f + \frac{RI_0^2}{8} \frac{K_a}{\pi} K_t} \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

La variazione ΔT nella temperatura del forno prodotta da una variazione ΔR nella resistenza di riscaldamento è tanto minore quanto più è elevato il coefficiente K_a che caratterizza il guadagno dell'elettronica di comando del tiristore.

Si può dunque concludere che negli schemi di controllo adottati è possibile ridurre l'effetto di variazioni dei parametri entro limiti prefissati, dimensionando convenientemente opportuni componenti del sistema. Si riscontra, cioè, una situazione del tutto analoga a quella messa in evidenza per quanto riguarda l'effetto dei disturbi.

In effetti, il motivo di questa analogia è estremamente intuitivo e giustifica di per sé la bontà della tecnica della contoreazione ai fini della riduzione degli effetti di disturbi e di variazioni dei parametri. La azione di controllo è sviluppata a partire dagli effetti complessivi di tutte le possibili cause che possono provocare lo scostamento della grandezza controllata dai valori desiderati, siano esse note a priori oppure no, misurabili o meno.

Negli schemi che adottano il principio della compensazione diretta (illustrato per il caso dei disturbi ma utilizzabile anche, con opportuno adattamento, per quello delle variazioni dei parametri) la situazione è sostanzialmente diversa. L'azione di controllo si sviluppa a partire dalle cause e, quindi, per ciascuna separatamente di queste deve

essere prevista una specifica struttura tendente a neutralizzarne gli effetti indesiderati. Ciò non toglie, naturalmente, che in alcuni casi possa essere conveniente ricorrere anche a tali tecniche soprattutto, come si è messo in evidenza in un esempio, in schemi di tipo misto. Il principio della compensazione può allora essere utilizzato per la neutralizzazione di un disturbo specifico, di importanza prevalente, assicurando nel contempo che il ricorso al principio della contoreazione garantisca una sufficiente protezione da altri disturbi e da variazioni parametriche.

Considerando l'Esempio I.7, si constata immediatamente che, se viene adottata la tecnica della compensazione, si realizza una situazione teoricamente ideale, nella quale il livello dell'acqua è indipendente dalla grandezza disturbante. Si può, cioè ottenere un risultato addirittura migliore di quello raggiunto nel caso del controllo a contoreazione, in cui una dipendenza del livello dal disturbo, sia pure limitata, è presente. La situazione è però totalmente rovesciata se si presentano altre cause disturbanti, come ad esempio può avvenire se si ammette che nel serbatoio confluiscano altre portate d'acqua, indesiderate e non misurabili (una pioggia, un fenomeno di piena, ecc.). In questo caso, lo schema a contoreazione continua a funzionare nello stesso modo, mentre lo schema a compensazione perde qualsiasi efficacia. Indicata con ΔQ_p la portata d'acqua dovuta a queste nuove cause, per lo schema a contoreazione vale la relazione:

$$h = h_0 + \frac{\Delta Q_p}{K_l K_v}$$

mentre per quello a compensazione:

$$h = h_0 + \frac{1}{S} \int_0^t \Delta Q_p d\tau$$

Il secondo addendo nella prima formula può essere limitato a piacere, mentre quello nella seconda formula cresce indefinitamente all'aumentare di t .

Il controllo a contoreazione deve dunque la sua efficacia alla possibilità di misurare lo scostamento tra il valore attuale della variabile controllata e quello desiderato. Questa caratteristica mette immediatamente in luce, da un punto di vista intuitivo, anche quelle che sono le limitazioni intriseche del principio stesso e che possono essere individuate, da un lato, nella necessità di poter accedere alla grandezza della quale si vuole effettuare il controllo e, dall'altro, in quella di dover effettuare una misura il più possibile precisa della grandezza stessa. A proposito di questo secondo punto è facile constatare, infatti, che l'apprezzamento della differenza tra il valore attuale della grandezza controllata e quello desiderato - sulla base del quale viene esercitata la

azione di controllo - è certamente affetto dagli stessi errori (eventualmente anche da altri) introdotti dal procedimento con cui la grandezza controllata viene misurata. Ne segue che la precisione del controllo non può mai spingersi oltre la precisione del dispositivo con il quale si effettua la misura. Ancora più delicata è la situazione in quei casi in cui non è possibile accedere direttamente, con un dispositivo di misura, alla variabile controllata ed occorre invece limitarsi ad una misura indiretta, effettuata ad esempio elaborando i dati ottenuti dal prelievo di altre grandezze.

A proposito di questo ultimo aspetto, può essere interessante prendere nuovamente in esame il sistema considerato nell'Esempio I.2 e domandarsi in che misura sia conveniente, dal punto di vista della bontà del controllo, sostituire il potenziometro lineare solidale alla guida del montacarichi con un potenziometro circolare solidale al supporto del motore, ottenendo in tal modo il vantaggio di una notevole semplificazione costruttiva. Ci si domanda, in altri termini, entro quali limiti sia conveniente sostituire la misura della quota y , che è la variabile controllata, con la misura dell'angolo θ di rotazione del motore.

Se l'elasticità del cavo che sostiene il montacarichi è trascurabile, tra le variabili anzidette sussiste la relazione:

$$r \theta = y$$

a meno degli errori dovuti all'eventuale scorrimento del cavo sull'argano (che è lecito supporre non avvenga) ed ai giochi degli ingranaggi disposti tra il motore e l'argano stesso. Nei limiti di questi errori, che possano essere adeguatamente previsti in sede di progetto, la misura di θ è proporzionale a quella di y e, quindi, il funzionamento di un sistema basato sulla reazione a partire da θ non differisce sostanzialmente da quello basato sulla reazione a partire da y .

La situazione è completamente diversa nei casi in cui non sia possibile trascurare l'elasticità del cavo (come accade ad esempio, quando la corsa del montacarichi è notevole). In questi casi, misurando θ , non si ottiene alcuna informazione sulla variazione di y indotta dalla deformazione del cavo e si commette, nel controllo, un errore di pari entità (cfr. Problema I.7).

I.5 - Altri esempi.

Gli esempi illustrati nei paragrafi precedenti descrivono sistemi nei quali si effettua il controllo di una singola grandezza. In molti problemi di controllo industriale, tuttavia, può avere interesse controllare diverse grandezze relative ad un medesimo oggetto o processo e può essere conveniente utilizzare allo scopo l'azione di diverse grandezze di

controllo. In generale, la caratteristica che differenzia i problemi di questo genere da quelli, più elementari, del tipo già illustrato è la presenza di fenomeni di interazione tra le diverse grandezze controllate e ciò non permette, in molti casi, di affrontare il problema del controllo considerando queste ultime indipendentemente l'una dalle altre. In questo paragrafo sono presentati due semplici esempi, che verranno anche ripresi più avanti allo scopo di illustrare alcuni metodi di controllo.

Esempio I.9 - Un classico problema di controllo automatico è quello in cui si desidera stabilizzare l'assetto laterale di un aeromobile. Lo scopo dei dispositivi di stabilizzazione è quello di controllare i valori dell'angolo di assetto ϕ e del rollio p (cfr. fig. I.18).

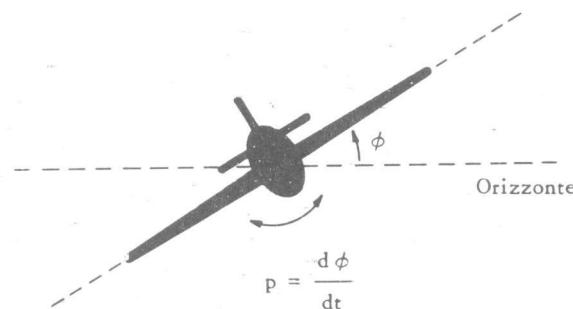


Fig. I.18

Il controllo sull'aeromobile viene effettuato intervenendo, mediante un motore destinato a questo scopo, sulla deflessione degli alettoni. Si ha così un processo caratterizzato da una sola grandezza controllante e da due grandezze controllate. Il sistema automatico di stabilizzazione viene realizzato eseguendo una misura di ciascuna delle due variabili controllate (mediante due dispositivi ad effetto giroscopico, in grado di produrre due grandezze elettriche, una proporzionale a $\phi(t)$ e l'altra proporzionale a $p(t)$), confrontando i valori così ottenuti con i valori desiderati (in generale si tratta di valori nulli, poiché si richiede che l'aeromobile sia in assetto orizzontale e privo di rollio) e sviluppando a partire dalle due differenze un'azione di controllo combinata sull'unica grandezza controllante, che è la grandezza di comando $m(t)$ del motore che aziona gli alettoni (cfr. fig. I.19).

Una descrizione matematica semplificata del processo controllato può essere ottenuta in modo molto semplice. Indicati con $\theta(t)$ l'angolo di deflessione degli alettoni ed $\omega(t)$ la velocità angolare del motore destinato al loro azionamento, si possono scrivere relazioni del tipo:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t)$$

$$J_m \frac{d\omega(t)}{dt} = K_m m(t) - F_{m,i} \chi_i(t)$$

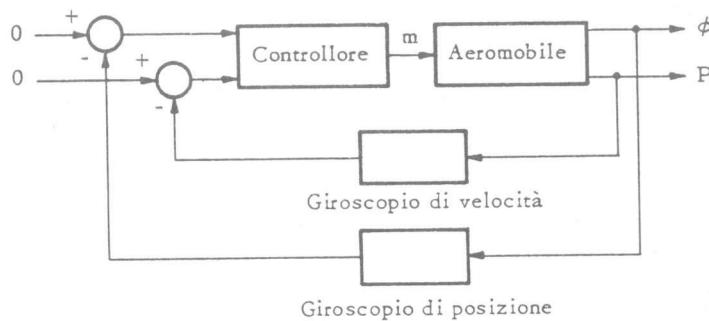


Fig.1.19

che corrispondono all'ipotesi - già introdotta in precedenza in casi analoghi - di considerare soltanto resistenze di tipo viscoso. La costante K_m rappresenta un coefficiente di proporzionalità tra grandezza di comando e coppia motrice, F_m il coefficiente di attrito viscoso, J_m un momento di inerzia equivalente. La dinamica dell'aeromobile, a sua volta, è descritta da una relazione dello stesso tipo:

$$J_a \frac{d\phi(t)}{dt} = K_a \dot{\theta}(t) - F_a p(t)$$

che corrisponde a considerare il moto attorno ad un asse longitudinale. La costante K_a rappresenta un coefficiente di proporzionalità tra coppia di raddrizzamento (esplidata dagli alettoni) e angolo di deflessione degli alettoni, F_a un coefficiente di attrito viscoso e J_a il momento di inerzia dell'aeromobile attorno all'asse del moto. A queste relazioni va poi aggiunta quella che esprime il legame fra angolo di assetto e rollio:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = p(t)$$

In definitiva, dunque, il processo può essere descritto dalla rappresentazione ingresso-stato-uscita:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F_m}{J_m} & 0 & 0 \\ \frac{K_a}{J_a} & 0 & -\frac{F_a}{J_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ p \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$\begin{pmatrix} \phi \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ p \\ \phi \end{pmatrix}$$

Esempio I.10 - In un processo di produzione della carta possono essere schematicamente individuate le operazioni descritte in fig.I.20

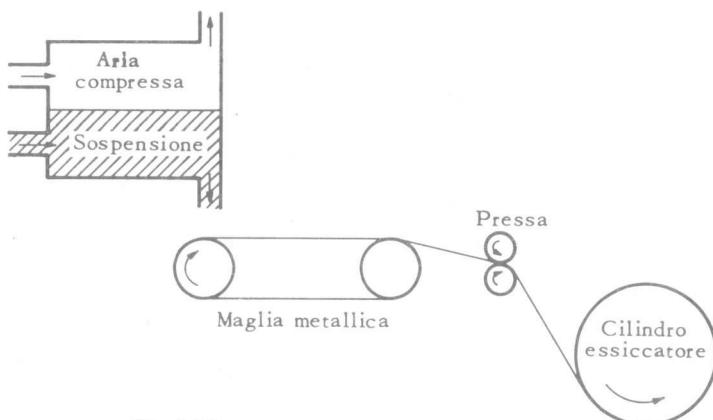


Fig.I.20

Una sospensione di polpa in acqua (meno di una parte di polpa su 100 di acqua) è pompata in un serbatoio e, attraverso una fessura rettilinea, depositata su un nastro di tela metallica, a maglie finissime, che si avvolge su due rulli. Il passaggio sulla tela (ad una velocità dell'ordine di alcuni metri al secondo) consente il deflusso dell'acqua e la formazione di uno strato umido, che viene successivamente trattato da una serie di presse sino ad ottenere un foglio il cui contenuto di acqua è ridotto al 50%; questo a sua volta viene essiccato definitivamente mentre transita su rulli riscaldati a vapore e poi avvolto su di un rullo terminale.

Il processo di formazione della carta è essenzialmente governato dal processo di caricamento del nastro metallico e in questo rivestono particolare interesse due grandezze: la quantità di liquido depositata per unità di tempo sul nastro, mediante la quale viene determinato il peso per unità di superficie del foglio prodotto, e livello di liquido all'interno del serbatoio, che influenza la distribuzione della polpa nello strato umido. Poiché le velocità di caricamento normalmente utilizzate non consentono di effettuare l'operazione soltanto per gravità (in quanto ciò richiederebbe una colonna liquida di altezza eccessiva) è conveniente riempire il volume libero di serbatoio con aria compressa.

Nel processo così descritto si possono individuare due grandezze delle quali interessa controllare l'evoluzione, che sono rispettivamente la portata di liquido depositato sul nastro ed il livello del liquido stesso nel serbatoio, e due grandezze median-

te le quali si ritiene possibile esercitare l'azione di controllo, che sono a loro volta la portata di liquido con la quale si rifornisce il serbatoio e la portata di aria compressa con la quale si riempie il volume libero.

La presenza di interazione tra le grandezze sottoposte a controllo, evidente di per se su un piano intuitivo, può essere quantitativamente messa in luce deducendo una descrizione matematica, anche elementare, del processo in questione. A questo scopo, è opportuno definire le seguenti grandezze:

- Q_0 = portata di liquido che entra nel serbatoio
- Q_1 = portata di liquido che esce dal serbatoio
- L = livello di liquido nel serbatoio
- F_0 = portata di aria compressa che entra nel serbatoio
- F_1 = portata di aria compressa che esce dal serbatoio
- M = massa di aria nel serbatoio

Ciò posto, è immediato osservare che gli scambi di liquido e di aria sono descritti dalle equazioni:

$$A \frac{dL}{dt} = Q_0 - Q_1$$

$$\frac{dM}{dt} = F_0 - F_1$$

essendo A l'area di una sezione del serbatoio (che si suppone cilindrico). È inoltre ben noto che la portata di liquido uscente dal serbatoio dipende dal livello L e dalla differenza di pressione $P_i - P_e$ tra interno ed esterno secondo una relazione del tipo:

$$Q_1 = K_q \sqrt{(L + P_i - P_e)}$$

mentre la portata di aria uscente dal serbatoio dipende a sua volta dalle pressioni P_i e P_e secondo una relazione del tipo:

$$F_1 = K_f \sqrt{1 - \frac{P_e}{P_i}}$$

La pressione P_i , il volume V e la massa M dell'aria compressa sono poi legate dalla nota legge:

$$P_i V = K_a M$$

Le equazioni così ottenute possono essere linearizzate attorno alla situazione di equilibrio; indicate allora con lettere maiuscole sopralineate le componenti delle

variabili relative allo stato di equilibrio e con lettere minuscole le componenti incrementali, si deducono equazioni del tipo:

$$A \frac{dl}{dt} = q_0 - q_1$$

$$\frac{dm}{dt} = f_0 - f_1$$

$$q_1 = \frac{\bar{Q}_1}{2(\bar{L} + \bar{P}_i - \bar{P}_e)} (l + p_i) = K_1 (l + p_i)$$

$$f_1 = K_2 p_i$$

$$\bar{V} p_i - A \bar{P}_i l = K_a m$$

Da queste è abbastanza facile ricavare una rappresentazione con lo spazio di stato. Posto:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ l \end{pmatrix}$$

si osservi che, eliminando p_i tra la terza e la quinta equazione si può scrivere:

$$q_1 = K_1 \left[\left(1 + \frac{AP}{V} \right) x_2 + \frac{K_a}{V} x_1 \right]$$

e che, eliminando ancora p_i tra la quarta e la quinta, si ha:

$$f_1 = K_2 \left[\frac{AP}{V} x_2 + \frac{K_a}{V} x_1 \right]$$

Da queste ultime e dalle prime due si deduce allora direttamente che:

$$A \frac{dx_2}{dt} = u_1 - K_1 \left(1 + \frac{AP}{V} \right) x_2 - \frac{K_1 K_a}{V} x_1$$

$$\frac{dx_1}{dt} = u_2 - K_2 \frac{\bar{AP}}{V} x_2 - \frac{K_2 K_a}{V} x_1$$

$$y_1 = K_1 \left(1 + \frac{\bar{AP}}{V} \right) x_2 + \frac{K_1 K_a}{V} x_1$$

$$y_2 = x_2$$

Una rappresentazione ingresso-stato-uscita del processo è quindi quella descritta dalle equazioni:

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{K_2 K_a}{V} & -\frac{K_2 \bar{AP}}{V} \\ -\frac{K_1 K_a}{A V} & -\frac{K_1}{A} \left(1 + \frac{\bar{AP}}{V} \right) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{A} & 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{K_1 K_a}{V} & K_1 \left(1 + \frac{\bar{AP}}{V} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Per realizzare un controllo a controllare occorre misurare le grandezze corrispondenti ad y_1 ed y_2 (portata uscente dal serbatoio ed altezza di liquido nel serbatoio), confrontare i valori così ottenuti con quelli di riferimento - o desiderati - ed utilizzare i risultati di questi confronti per esercitare l'azione di controllo sul processo, attraverso le grandezze corrispondenti ad u_1 ed u_2 (portata di liquido entrante e portata di aria compressa entrante nel serbatoio).

1.6 - Criteri di classificazione.

Un primo importante criterio sulla base del quale possono essere classificati i sistemi di controllo fa riferimento alla *natura delle grandezze controllate*. Da questo punto di vista si può innanzitutto osservare che problemi di controllo che si prestano ad una formulazione del tipo di quella considerata sino a questo punto possono essere incontrati nell'ambito delle scienze di ingegneria, delle scienze economiche, delle scienze umane e sociali, delle scienze biologiche e mediche, delle scienze ambientali. I principi, i metodi di analisi e le politiche di intervento, una volta ridotto il problema alla sua formulazione astratta, so-

no sostanzialmente affini e questo rende possibile sviluppare lo studio dei problemi in maniera pressoché unitaria, indipendente dal particolare settore disciplinare nel quale venga considerata l'applicazione.

Limitandosi al solo settore dell'ingegneria, è abituale distinguere i casi in cui le grandezze controllate sono di natura meccanica (posizione, velocità, coppia), di natura elettrica (corrente, tensione, frequenza, potenza) o in generale sono relative a processi di produzione di beni. In quest'ultimo caso il panorama delle applicazioni del controllo copre l'intera gamma delle industrie manifatturiere (industrie di raffinazione degli olii minerali, del cemento, delle materie plastiche, del vetro, della carta, ecc.); in proposito si usa parlare di *controllo di processi* e tra le grandezze per le quali si pongono problemi di controllo acquistano particolare interesse, per la loro universalità, le cosiddette *variabili fondamentali di processo* (livello, portata, pressione, temperatura).

Nel caso particolare in cui le grandezze controllate sono di natura meccanica si usa parlare di *controllo cinetico*. Si tratta in generale di controlli di posizione o di velocità ed i sistemi relativi vengono chiamati *servomeccanismi*.

Una seconda distinzione può essere fatta basandosi sul numero delle grandezze delle quali si effettua il controllo in modo coordinato. In questo caso si possono definire tre categorie, che corrispondono alla situazione in cui le variabili controllate, si riducono ad una sola, a quello in cui sono poche unità, a quello in cui sono diverse decine. Corrispondentemente, si differenziano in modo sostanziale i metodi di studio ed i principi secondo i quali viene svolta l'azione di controllo. Nel primo caso si parla di sistema di controllo *ad una sola variabile controllata* (o unidimensionale), nel secondo caso di sistema di controllo *a più variabili controllate* (o multidimensionale), nel terzo caso genericamente di *sistema complesso* (o sistema a grandi dimensioni). Si può in particolare osservare che la distinzione tra il secondo caso ed il terzo, non potendo ovviamente essere affidata al computo numerico delle variabili in gioco, risiede soprattutto nei metodi che si adottano per lo studio del problema e per la scelta delle azioni di controllo. In proposito si usa parlare di *problema complesso* quando l'analisi viene svolta o *decomponendo il processo* in più sottoprocessi, ciascuno dei quali descrivibile con le tecniche proprie dei sistemi della seconda o della prima categoria, o *decomponendo l'obiettivo* del controllo in più sottoobiettivi; corrispondentemente, anche l'azione di controllo si caratterizza come l'*aggregazione* di un certo numero di azioni parziali, tra loro coordinate. La prima e la seconda categoria di sistemi si prestano invece ad una trattazione sostanzialmente unitaria, basata essenzialmente sui metodi propri della *teoria dei sistemi dinamici*; ovviamente, la particolare semplicità del ca-

so unidimensionale ha consentito la messa a punto di un corpo di metodologia relativamente più ricco e consolidato.

Ulteriori distinzioni, importanti anche in rapporto alle prestazioni che il sistema deve fornire, sono quelle basate sulla considerazione dei diversi tipi di andamento desiderato che possono venire richiesti per le grandezze controllate. Da questo punto di vista una prima ripartizione può essere fatta distinguendo i casi in cui la grandezza controllata deve rimanere costante e quelli in cui, invece, tale grandezza deve evolvere nel tempo secondo una legge prefissata. Corrispondentemente è abituale distinguere i sistemi di controllo in *sistemi di regolazione* e *sistemi di asservimento*. I sistemi di asservimento vengono anche detti servosistemi o, semplicemente, asservimenti.

Nel caso della regolazione si tratta di sviluppare sulla grandezza controllata l'azione che è necessaria per mantenerla al livello voluto, modificandola, quando necessario, per opporsi all'azione di cause perturbatorie (variazioni di carico, effetti di ingressi non desiderati agenti sul sistema, variazioni di parametri, ecc.).

Nell'asservimento, invece, si tratta di modificare continuamente l'azione di controllo per imporre alla grandezza controllata un andamento corrispondente a quello desiderato e che essa non tenderebbe a seguire, oltre che per opporsi anche in questo caso all'azione delle cause perturbatorie.

Una seconda ripartizione può essere fatta distinguendo il caso in cui l'andamento desiderato della variabile controllata è *proporzionale* a quello di una grandezza di riferimento dal caso in cui l'andamento desiderato della variabile controllata è legato a quello della grandezza di riferimento in modo diverso. Il primo caso è largamente il più comune, specialmente quando la variabile controllata è ad un livello di potenza molto maggiore di quello dell'uscita. Il secondo si verifica soprattutto nei problemi di elaborazione di segnali, quando si tratta di generare una grandezza il cui andamento sia una funzione prefissata di quella del riferimento; corrispondentemente viene talora usata la dizione di *asservimenti funzionali*.

I.7 - Struttura dei sistemi di controllo a controllazione⁽¹⁾.

Si è già avuto modo di illustrare, nel par.I.1, la distinzione - in un problema di controllo - tra oggetto (o processo) controllato e oggetto

(1) - Questo paragrafo è tratto quasi integralmente da: A. Lepschy, A. Ruberti, *Lezioni di Controlli Automatici*, Siderea (Roma, 1965).

(o processo) controllante, accennando al fatto che un elemento di discriminazione può essere quello del livello di potenza associata alle grandezze in gioco. Un altro criterio, più empirico ma largamente in uso, consiste nell'isolare, come oggetto controllato, quella parte che è dotata di una caratterizzazione fisica autonoma in grado di svolgere il proprio compito anche in versioni non controllate in modo automatico.

La distinzione così fatta ha un rilievo notevole in quanto, generalmente, nel caso del controllo di un impianto industriale quest'ultimo viene progettato indipendentemente dalle esigenze del controllo (per quanto oggi si vada manifestando la tendenza a tenerne conto già fin dalla fase del progetto), mentre gli organi che costituiscono la parte controllante vengono progettati o scelti in una fase distinta. Inoltre ancora oggi non è facile disporre di una descrizione analitica adeguata dei processi, per cui spesso uno dei problemi più importanti da affrontare in rapporto all'introduzione di procedimenti di controllo automatico è proprio quello di individuare il modello matematico del processo stesso. Degli organi con i quali si realizza usualmente la parte controllante, invece, la descrizione analitica è generalmente nota ed abbastanza semplice.

Nel controllo cinetico l'individuazione del processo controllato ha una rilevanza molto minore, perché porta quasi sempre ad individuare un elemento - l'organo di cui si modifica la posizione, la velocità ecc. - la cui descrizione analitica è molto spesso anche più semplice che per gli altri componenti del sistema. Anzi va osservato che l'adozione dei metodi di studio usuali comporta nella maggior parte dei casi la necessità di una descrizione unica di tutti gli organi collegati e, da questo punto di vista, risulta più conveniente una distinzione del tipo di quella ricordata all'inizio. - Mentre per il sistema controllato, data l'estrema varietà degli impianti e delle apparecchiature che possono essere sottoposti a controllo, non si pone un problema di classificazione delle funzioni relative, per il sistema controllante, pur nella grande varietà delle grandezze in gioco e delle soluzioni tecnologiche (elettriche, idrauliche, pneumatiche) è possibile e comodo individuare alcune funzioni tipiche dell'azione di controllo -.

La parte controllante di un sistema a controreazione ha, come funzione intrinsecamente legata alle modalità di controllo, quella di procedere ad un confronto fra una grandezza di riferimento ed una grandezza che dipende dall'uscita (segna di controreazione).

Per la grandezza di riferimento si possono presentare due casi distinti: nel primo si desidera che l'uscita mantenga un ben determinato legame con una grandezza esistente di per sé; nel secondo si vuole invece imporre all'uscita un determinato andamento e si tratta, quindi, di generare una grandezza di riferimento adeguato allo scopo voluto. Nel primo caso saranno necessari dispositivi per il prelievo ed eventualmente

per la trasduzione della grandezza in oggetto; nel secondo caso si tratterà invece di realizzare un dispositivo atto a generare una grandezza da cui ottenere in modo più o meno diretto quella di riferimento. Questo dispositivo può avere, dal punto di vista costruttivo, una completa autonomia rispetto al sistema di controllo vero e proprio oppure può essere conglobato direttamente nella parte controllante come avviene, di norma, nei regolatori. Specialmente in quest'ultimo caso si pone il problema di designare con un nome specifico il dispositivo che fornisce la grandezza di riferimento e, a questo scopo, si possono usare i termini di sorgente o di generatore di riferimento; nel linguaggio corrente si usa anche, per brevità, il termine riferimento che è forse preferibile usare per la grandezza generata piuttosto che per il dispositivo che la fornisce.

La grandezza ottenuta dal confronto fra la grandezza di riferimento e quella di contoreazione viene spesso chiamata grandezza agente in quanto è da essa che si sviluppano in maniera diretta le azioni di controllo tendenti a modificare il comportamento del sistema controllato. La grandezza agente viene sottoposta nella quasi totalità dei casi ad *amplificazioni* di livello e di potenza; queste sono necessarie sia per assicurare buone prestazioni (come si chiarirà in seguito), sia anche per sviluppare l'azione di controllo voluta a partire dalla piccolissima potenza associata alla grandezza agente.

Il problema dell'amplificazione è estremamente importante e costituisce uno degli aspetti fondamentali della tecnica del controllo.

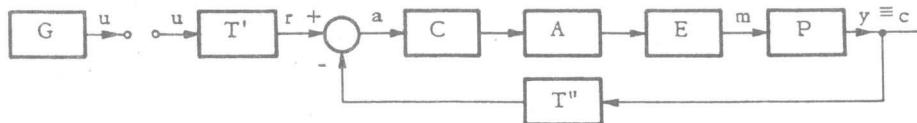
Generalmente è anche necessario operare una trasformazione della natura fisica della grandezza fornita dall'amplificatore in modo da consentirle di agire nel sistema controllato; si tratta, in pratica, di effettuare una trasduzione al livello di potenza, per la quale si usa il termine di esecuzione.

Di solito inoltre, accanto all'amplificazione ed all'esecuzione, nella parte controllante deve essere eseguita una elaborazione delle grandezze in gioco che, per ovvi motivi di semplicità e di precisione conviene avvenga al livello di basse potenze; si tratta in sostanza di ottenere da quella agente una grandezza più idonea ad esercitare l'azione di controllo voluta.

In un caso più generale si può avere l'elaborazione di una funzione opportuna della grandezza agente stessa, di quella di riferimento, di quello d'uscita e, eventualmente, anche di altre grandezze prelevate in altri punti del sistema.

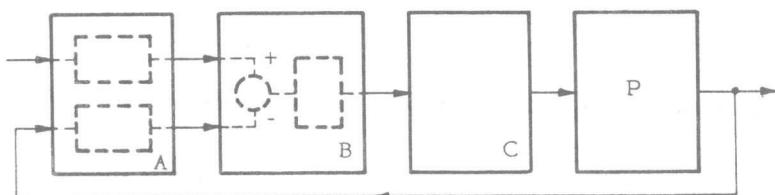
Si può allora concludere che nella parte controllante, prescindendo dall'eventuale generazione della grandezza di riferimento, si concentrano le funzioni di (cfr. fig.I.21 a):

- a) prelievo, trasduzione ed eventualmente trasporto di segnali, cui provvedono organi di collegamento, trasduttori e trasmettitori di dati;



u = comando	T' e T'' = trasduzione
r = riferimento	C = correzione
a = grandezza agente	A = amplificazione
m = grandezza controllante	E = esecuzione
$y \equiv c$ = grandezza controllata	P = processo
G = generazione del riferimento	

a)



b)

Fig. I.21

- b) confronto - cui provvedono i comparatori (detti, talora, anche differenziali);
- c) elaborazione e calcolo, cui provvedono dispositivi detti, usualmente, di correzione;
- d) amplificazione, cui provvedono gli amplificatori;
- e) esecuzione o attuazione (del controllo), cui provvedono gli esecutori.

All'operazione di confronto è stato dato un rilievo autonomo, trattandosi di un'operazione che caratterizza la controreazione nella sua versione più tipica; in effetti questa operazione di differenza potrebbe essere conglobata fra le altre operazioni di calcolo e di elaborazione di segnali.

Si può osservare, inoltre, che l'amplificazione e l'esecuzione sono realizzate mediante organi che hanno caratteri comuni, talora anzi, almeno in parte, da uno stesso organo; per questo motivo, ma anche sotto altri punti di vista, conviene quindi considerarle globalmente riunendo gli organi relativi in un unico blocco, caratterizzato dal fatto che in esso avvengono operazioni del livello di potenza.

Da queste osservazioni emerge la possibilità di raggruppare ciò che avviene nel sistema controllante in tre tipi di funzioni principali notevolmente diverse tra loro (cfr. fig.I.21 b): quelle legate al prelievo, alla trasduzione ed eventualmente al trasporto di segnali (che sono sempre quelli d'ingresso e d'uscita ma possono essere anche, nei sistemi più complessi, di altra provenienza) (blocco A di fig.I.21 b), quelle di elaborazione e calcolo (che possono essere eseguite da elementi di struttura semplicissima - comparatori e dispositivi di correzione usuali - o anche richiedere dispositivi di notevole complessità e persino vere e proprie calcolatrici) (blocco B) ed infine quelle di amplificazione e di esecuzione (blocco C).

A conclusione si osserva che quanto detto è riferito al caso del controllo di una variabile, ma può essere generalizzato in modo diretto al caso del controllo di più variabili.

I.8 - Cenni sullo sviluppo storico del controllo a controllazione.

L'uso del principio della controllazione nella soluzione di problemi di controllo si può far risalire ad epoche piuttosto remote nella storia dell'umanità. Le prime applicazioni di carattere tecnico conosciute sono quelle sviluppate in Grecia nel III secolo a.C., consistenti nella realizzazione di regolatori di livello del tipo a galleggiante. Nel I secolo a.C. Erone di Alessandria pubblicò un libro intitolato *Pneumatica* nel quale venivano descritti diversi tipi di regolatori di livello utilizzanti la gravità, i galleggianti ed il vapore.

Le prime applicazioni dell'era moderna, in Europa, risalgono al secolo XVII, ma è solo nel 1788 che si ebbe la prima utilizzazione industriale del principio della controllazione con il ben noto regolatore rotante di Watt. Il dispositivo, interamente automatico, esegue una misura della velocità dell'asse di uscita della macchina a vapore utilizzando l'effetto della forza centrifuga su un sistema di masse rotanti e si serve di questa misura per regolare la velocità controllando, mediante una valvola, l'afflusso di vapore alla macchina stessa. Al crescere della velocità, le masse rotanti si alzano e si allontanano dall'asse, provocando la chiusura della valvola.

Nel secolo XIX, accanto ad ulteriori utilizzazioni empiriche del principio della controllazione nel campo meccanico, cominciano ad apparire i primi tentativi di dare una formulazione matematica ai problemi affrontati. Nel 1868 Maxwell propose un primo studio analitico della stabilità del regolatore centrifugo.

Lo sviluppo sistematico della disciplina comincia a realizzarsi negli anni '30 di questo secolo, soprattutto negli Stati Uniti, ad opera

di ingegneri meccanici ed elettronici. Hazen, nel 1934, introdusse la parola servomeccanismo e, nello stesso periodo, Bode, Nyquist e Black svilupparono lo studio degli amplificatori a controreazione.

Un notevole impulso alla teoria ed alla tecnica del controllo automatico si ebbe durante la seconda guerra mondiale ed in questo periodo furono realizzati i primi piloti automatici per aeroplani, i sistemi per il posizionamento dei pezzi di artiglieria, i sistemi per controllo delle antenne radar e molte altre applicazioni di carattere militare. La complessità di sistemi di controllo di questo genere e la severità delle prestazioni richieste stimolarono lo sviluppo di nuove tecniche e, soprattutto, la messa a punto di metodi di studio sistematici. Parallelamente, l'ingegneria dei sistemi di controllo cominciò ad acquistare le caratteristiche di una disciplina a se stante.

Negli anni '40 ed all'inizio degli anni '50 si consolidò l'impiego di metodi di analisi e sintesi basati sull'impiego della trasformata di Laplace e della risposta armonica per descrivere il comportamento ingresso-uscita dei sistemi: l'insieme di queste metodologie è attualmente conosciuto come *teoria classica del controllo*.

Nella seconda metà degli anni '50 l'avvento dei calcolatori elettronici, da un lato, e l'inizio dell'era delle esplorazioni spaziali, dall'altro, resero possibile e motivarono un ulteriore enorme sviluppo della teoria e tecnica dei controlli automatici. Ai metodi di studio basati sull'uso di variabili complesse vennero ad affiancarsi i metodi basati sulla descrizione dei sistemi mediante le variabili di stato (molti dei quali già noti, nel campo matematico, fin dal secolo precedente). All'inizio degli anni '60, Kalman introduce concetti di raggiungibilità ed osservabilità, centrali in tutto il successivo evolversi della teoria, si afferma definitivamente l'approccio basato sull'uso delle variabili di stato per lo studio dei sistemi a più variabili controllate, Bellman e Pontryagin pongono le basi per uno sviluppo quantitativamente imponente della teoria del controllo ottimo. In tutto il decennio si consolida quell'insieme di conoscenze che va sotto il nome di *teoria moderna del controllo*. Parallelamente, le applicazioni trascendono il settore originario dell'ingegneria e cominciano ad investire le scienze di economia, la biologia, la medicina, le scienze sociali.

PROBLEMI

- I.1** - Si consideri un processo chimico nel quale si desidera controllare la composizione di un prodotto. Utilizzando il principio della controreazione, si misura la composizione per mezzo di un analizzatore ad infrarossi, come indicato schematicamente in fig.I.P.1. La composizione sottoposta a controllo può a sua volta essere manipolata agendo, tramite una valvola di controllo, sulla portata di un determinato additivo. Si completi lo schema di controllo e si associi lo schema a blocchi corrispondente, dettagliando le singole operazioni.

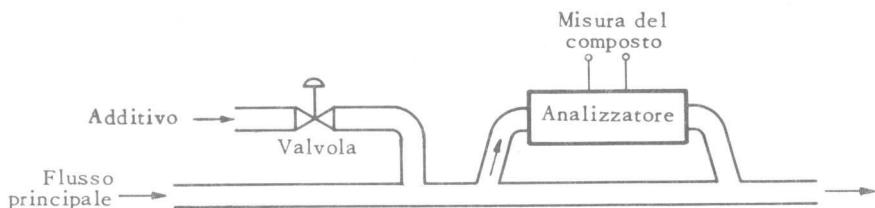


Fig.I.P.1

- I.2** - Uno dei principali problemi di controllo che si presentano nei reattori nucleari è quello del flusso neutronico. In fig.I.P.2 è indicato schematicamente il fenomeno della reazione nucleare e sono messe in evidenza le barre di controllo e la camera a ionizzazione per la misura del flusso neutronico. Si completi lo schema di controllo e si associi lo schema a blocchi corrispondente. Si descriva in forma matematica semplificata il comportamento delle singole parti.

Fig.I.P.2



- I.3** - Le navi impiegate sulle rotte oceaniche utilizzano tecniche di stabilizzazione allo scopo di minimizzare gli effetti delle oscillazioni dovute al moto ondoso. La maggior parte di esse utilizza pinne appositamente predisposte in grado di sviluppare una coppia che si oppone alla coppia di rollio provocata dal moto ondoso, come schematicamente indicato in fig.I.P.3.

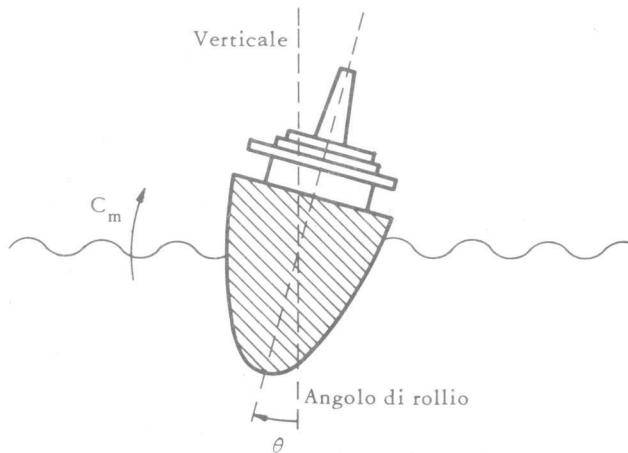


Fig.I.P.3

Da il punto di vista che qui interessa, la nave può essere considerata come un semplice pendolo smorzato; per piccole oscillazioni il legame tra l'angolo di rollio θ e la coppia disturbante C_m può essere descritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\zeta\omega_n x_2 - \omega_n^2(x_1 - C_m) \\ \theta &= x_1\end{aligned}$$

in cui, tipicamente, $\omega_n = 2$ rad/sec e $\zeta = 0,10$. Si completi uno schema di controllo a controreazione avente per scopo quello di mantenere l'angolo di rollio ad un valore desiderato nullo.

I.4 - La legge della domanda e dell'offerta è fondamentale in una economia di mercato. Questa legge può essere rappresentata come un sistema a controreazione in cui la uscita di un sistema è il prezzo di vendita di uno specifico prodotto. La legge assicura che il prezzo di un prodotto diminuisce all'aumentare del divario tra offerta e domanda del prodotto stesso e che la domanda, a sua volta, diminuisce all'aumentare del prezzo. Si individui uno schema a blocchi nel quale siano individuali i ruoli delle tre variabili sopra introdotte: domanda, offerta, prezzo.

I.5 - Nella fig.I.P.4 sono illustrati alcuni elementi essenziali del problema del controllo di profondità per un sottomarino. La variabile controllata è la profondità y , che deve essere mantenuta costante, e il controllo viene effettuato posizionando opportunamente i piani di coda. La velocità con cui il sottomarino si sposta in direzione verticale è legata alla deflessione dei timoni di profondità da una relazione che, in modo approssimato, si può descrivere con equazioni del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \theta$$

$$\frac{dy}{dt} = (-0,9 - 2) x$$

Si completa lo schema a blocchi a contoreazione, indicando anche le soluzioni tecniche per il dispositivo che misura la profondità e per quello che posiziona i piani di coda.

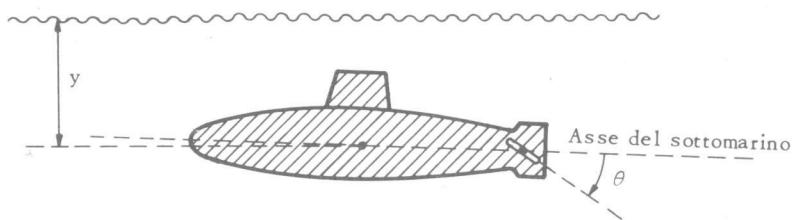


Fig.I.P.4

I.6 - Si consideri il sistema di controllo introdotto nell'Esempio I.8, e, con riferimento allo schema di fig.I.17b, si supponga che il sottosistema indicato con S_c sia in grado di produrre un'uscita proporzionale alla *velocità di variazione di δ* nel tempo (si noti che, in pratica, non è necessario ricorrere a due dispositivi separati per *misurare* l'angolo δ e per *derivare* la funzione $\delta(t)$ rispetto a t ma è possibile progettare, sempre utilizzando l'effetto giroscopico, dispositivi che forniscano direttamente una misura di $d\delta(t)/dt$). Si supponga inoltre che la grandezza così ottenuta sia moltiplicata per una opportuna costante in modo da aversi:

$$e_c = \frac{F}{K_a K_m} \frac{d\delta}{dt}$$

Si dimostri che, se si prescinde dall'effetto dell'ingresso θ_b (il che è lecito essendo il sistema caratterizzato da relazioni lineari), l'angolo θ_a è legato all'angolo δ dalla relazione:

$$J \frac{d^2 \theta_a}{dt^2} + F \frac{d\theta_a}{dt} + K_a K_m K_d \theta_a = J \frac{d^2 \delta}{dt^2}$$

il che consente di affermare che, se $d\delta/dt$ è costante, il valore dell'angolo θ_a è indipendente dal valore dell'angolo δ .

- I.7** - Si consideri il sistema di controllo introdotto nell'Esempio I.2 e si deduca una rappresentazione ingresso-stato-uscita del processo controllato nell'ipotesi che non sia trascurabile l'elasticità del cavo. Si indichino con x_1 la lunghezza che il cavo svolto avrebbe in assenza di deformazione e con x_3 l'incremento di lunghezza dovuto alla deformazione stessa. Si assuma inoltre che la deformazione abbia luogo solo nella porzione svolta di cavo, il che consente di scrivere:

$$x_1 = r \theta$$

essendo θ l'angolo di rotazione dell'asse del motore. In tali condizioni la considerazione delle equazioni di equilibrio per il gruppo motore-argano e, rispettivamente, per la cabina consente di ottenere una rappresentazione nelle variabili di stato $x_1, x_2 = \dot{x}_1, x_3, x_4 = \dot{x}_3$.

Si confrontino poi i due diversi schemi di controllo a controreazione che si ottengono effettuando il prelievo della grandezza controllata mediante un trasduttore solidale al motore (misura di x_1) oppure mediante un trasduttore solidale alla guida del montacarichi (misura di $x_1 + x_3$).

- I.8** - Il controllo a controreazione trova applicazione anche in molti problemi relativi alle comunicazioni elettriche. Un tipico esempio è l'oscillatore ad aggancio di fase, indicato in fig.I.P.5.

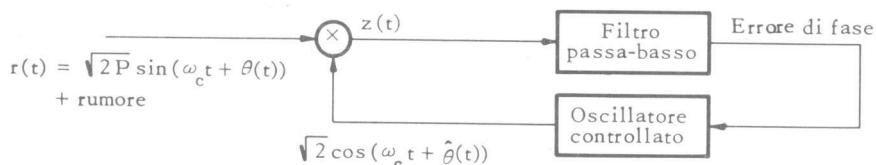


Fig.I.P.5

Il segnale di ingresso $r(t)$, il cui contenuto informativo è rappresentato dall'angolo di fase $\theta(t)$, viene moltiplicato per un segnale generato da un oscillatore locale, controllato in frequenza. L'uscita del moltiplicatore:

$$z(t) = \sqrt{P} \sin [\theta(t) - \hat{\theta}(t)] + \sqrt{P} \sin [2\omega_c t + \theta(t) + \hat{\theta}(t)] + \text{rumore}$$

contiene un termine dipendente dall'errore di fase, un termine a frequenza $2\omega_c$ e un rumore additivo. Il filtro passa basso provvede a sopprimere il termine ad alta frequenza ed il rumore.

Si associa al dispositivo in esame uno schema interpretativo a controreazione, con ingresso $\theta(t)$ ed uscita $\hat{\theta}(t)$.

*

CAPITOLO II

I METODI PER LO STUDIO DEI SISTEMI DI CONTROLLO

II.1 - Le fasi caratteristiche dello studio di un sistema di controllo.

Come si è già detto nella parte introduttiva, scopo fondamentale dei sistemi di controllo è quello di far assumere alla grandezza controllata l'andamento desiderato, malgrado disturbi e variazioni parametriche. Si è anche messo in evidenza che l'andamento desiderato della grandezza controllata, nei sistemi di controllo non funzionali (che qui si considerano) è proporzionale a quello di una grandezza detta di riferimento. Da questo punto di vista, si può allora affermare che lo scopo fondamentale di un sistema di controllo è quello di assicurare che l'uscita del sistema stesso (grandezza controllata) si evolva nel tempo riproducendo fedelmente, entro prescritti margini di tolleranza, l'andamento di una determinata grandezza di ingresso (riferimento), senza essere influenzata dell'andamento di altre grandezze di ingresso (disturbi) e in modo tale che queste proprietà si conservino anche in presenza di variazioni nei parametri che caratterizzano le relazioni tra le grandezze stesse.

Da questa impostazione si possono immediatamente far discendere quelle che sono le fasi essenziali dei procedimenti di analisi e sintesi dei sistemi di controllo (e che sono comuni, peraltro, ad ogni altro problema di ingegneria):

- a) caratterizzazione delle grandezze che agiscono sul sistema e, in particolare, individuazione degli *andamenti prevedibili per le grandezze considerate come ingresso e come disturbo*;
- b) individuazione delle parti del sistema sulle quali non è possibile o non è conveniente intervenire in sede di realizzazione del sistema di controllo (ciò si verifica, in generale, per il processo controllato) e del-

le parti che devono invece essere definite nel corso del procedimento di sintesi;

- c) definizione delle caratteristiche degli elementi che compongono il sistema, con particolare attenzione ai margini di tolleranza entro i quali sono compresi i valori dei parametri;
- d) definizione degli obiettivi, da un punto di vista quantitativo, in termini di specifiche riguardanti una o più caratteristiche della risposta del sistema di controllo agli ingressi e ai disturbi;
- e) individuazione di corrispondenze tra le caratteristiche dei singoli elementi che compongono il sistema e le caratteristiche della risposta considerate in sede di definizione degli obiettivi;
- f) definizione delle caratteristiche delle parti sulle quali il progettista è libero di intervenire, in modo tale che siano soddisfatte le specifiche prescelte;
- g) progetto e realizzazione dei componenti mediante i quali si completa il sistema di controllo.

L'oggetto dello studio cui sono dedicati i Capitoli successivi è essenzialmente limitato alle fasi indicate in d), e), f), che sono le uniche per le quali è possibile dare una impostazione metodologica di tipo generale. In proposito è opportuno osservare, sin dall'inizio, che le tre fasi in questione sono strettamente correlate, in quanto – come si avrà occasione di constatare direttamente – la definizione di specifiche mediante le quali caratterizzare il comportamento di un sistema di controllo è fortemente condizionata dalla capacità di individuare una corrispondenza diretta tra queste ultime e le caratteristiche delle parti che compongono il sistema. Si vedrà infatti più avanti che le prestazioni di un sistema vengono valutate attraverso caratteristiche convenzionali, scelte in modo tale da possedere – oltre a un interesse intrinseco – anche la proprietà di rendere il più immediata possibile la corrispondenza con le grandezze che devono o possono essere definite in sede progettuale. Si può dire anche, in altri termini, che la definizione dei criteri di valutazione della risposta, fatta in sede di analisi, non può non essere correlata ai metodi che si pensa di voler adottare in sede di sintesi.

Lo studio dei sistemi di controllo viene quindi ad essere caratterizzato essenzialmente come uno studio di metodi di sintesi, a ciascuno dei quali corrisponde la definizione di criteri convenzionali di valutazione della risposta. Tali metodi, come si vedrà, possono essere classificati in base agli strumenti matematici adottati, alla minore o maggiore complessità dei problemi di controllo presi in considerazione, agli obiettivi che possono venire raggiunti, ecc. Tra tutte le classificazioni,

sulle quali non si ritiene opportuno insistere, è utile sottolineare quella basata sulla distinzione tra *metodi per tentativi* e *metodi diretti*. I metodi del primo tipo sono quelli nei quali si procede assegnando, secondo criteri razionali, valori di primo tentativo ai parametri sui quali si può o si deve intervenire in sede di sintesi, verificando le prestazioni ottenute con tali valori, modificando i valori di primo tentativo se le prestazioni stesse non sono soddisfacenti e così via. Caratteristica tipica di questi metodi è la possibilità di soddisfare le specifiche in molti modi diversi e ad essa corrispondono ampie possibilità di scelta per le soluzioni progettuali. Nei metodi del secondo tipo, invece, i valori dei parametri vengono determinati in seguito all'applicazione di algoritmi che non prevedono il ricorso ad iterazioni del genere indicato. Se l'algoritmo è univoco, la soluzione progettuale corrispondente è obbligata; altrimenti esistono diverse soluzioni, tra le quali è possibile scegliere in modo razionale solo facendo intervenire ulteriori criteri, in aggiunta a quelli in corrispondenza ai quali è l'algoritmo stesso stato definito.

II.2 - I metodi matematici impiegati nello studio di un sistema di controllo.

Per affrontare in modo sistematico lo studio dei sistemi di controllo da un punto di vista quantitativo, è necessario disporre di una descrizione matematica delle relazioni che sussistano tra le grandezze di interesse. A questo proposito si è già messo in evidenza, nel Capitolo I, che il punto di vista usualmente adottato nella considerazione dei problemi di controllo è affine a quello adottato nella definizione di sistema astratto. Appare quindi naturale utilizzare, per descrivere in forma matematica un problema di controllo, quei tipi di rappresentazione mediante i quali è abituale descrivere un sistema astratto.

Ciò posto, si deve subito osservare che nello studio dei problemi di controllo – così come, in generale, in quello dei sistemi astratti – è opportuno procedere per classi, considerando inizialmente quelle per le quali è disponibile un corpo di metodologia sviluppato ad un livello soddisfacente. Con riferimento alle classificazioni proprie della Teoria dei Sistemi, saranno considerati in questo volume solo quei *sistemi di controllo dotati di rappresentazioni lineari, a dimensione finita, stazionarie*.

Rimandando alla lettura di un testo generale per ciò che riguarda lo studio delle principali proprietà dei sistemi così individuati, si ri-chiameranno qui brevemente alcuni elementi essenziali, soprattutto al fine di precisare gli aspetti convenzionali propri della teoria dei sistemi di

controllo. In proposito, si è già osservato in precedenza che, nel rappresentare tali sistemi, è utile distinguere le grandezze di ingresso in due categorie, corrispondenti rispettivamente, ai *riferimenti* e ai *disturbi*. Le rappresentazioni che interessa considerare possono allora essere descritte, per sistemi a tempo continuo, da relazioni del tipo:

$$(II.1) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{P}\mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{z}(t) \end{aligned}$$

nel caso implicito o del tipo:

$$(II.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \mathbf{H}_z(t-\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \Psi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{W}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \mathbf{W}_z(t-\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

nel caso esplicito. Relazioni del tutto analoghe valgono per i sistemi a tempo discreto.

I vettori $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ rappresentano, rispettivamente, i valori all'istante t dell'*ingresso o riferimento*, del *disturbo*, dell'*uscita*, dello *stato* dell'intero sistema di controllo (cfr. fig.II.1).

Si noti che il sistema di controllo è in generale un sistema interconnesso, del quale le (II.1) o (II.2) rappresentano una descrizione ingresso-stato-uscita di tipo globale. Una particolare struttura del sistema di controllo (quale, ad esempio, la struttura a controreazione), si riflette, ovviamente, nella struttura delle matrici che individuano le (II.1) o (II.2) (le $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ per il caso implicito o le $\Phi(\cdot), \Psi(\cdot), \mathbf{H}(\cdot), \mathbf{W}(\cdot), \mathbf{H}_z(\cdot), \mathbf{W}_z(\cdot)$ per il caso esplicito) e, in particolare nel modo in cui queste possono essere espresse a partire da quelle associate alle rappresentazioni di ciascun sottosistema.

Una descrizione, equivalente alla (II.2), che consente – in molti casi – di rappresentare le proprietà di un assegnato sistema di controllo in modo molto espressivo, è quella che si ottiene dopo aver effettuato la trasformazione di Laplace:

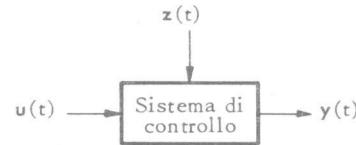


Fig.II.1

$$(II.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= \Phi(s) \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{H}(s) \mathbf{u}(s) + \mathbf{H}_z(s) \mathbf{z}(s) \\ \mathbf{y}(s) &= \Psi(s) \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{W}(s) \mathbf{u}(s) + \mathbf{W}_z(s) \mathbf{z}(s) \end{aligned}$$

(ovvero, la trasformata \mathbf{z} nel caso delle corrispondenti relazioni per i sistemi a tempo discreto). In effetti, come si è detto, la teoria classica dei sistemi di controllo fa largo uso di metodi basati sull'impiego delle trasformate (II.3) mentre la teoria moderna è sostanzialmente fondata sull'analisi delle proprietà di rappresentazioni implicite del tipo (II.1).

Nella presentazione della materia si darà maggiore rilievo al caso dei sistemi a tempo continuo, limitando l'analisi dei sistemi a tempo discreto soltanto ad alcune caratteristiche particolari (Cap.VII). Nella prima parte (dal Cap.III al Cap.VI) sono studiati i sistemi con ingresso ed uscita unidimensionali, mentre nella seconda (dal Cap.VIII al Cap.XI) sono considerati i sistemi con ingresso ed uscita multidimensionali.

II.3 - Limiti di validità dei modelli adottati.

L'impiego della teoria dei sistemi lineari nello studio dei sistemi di controllo ha reso possibile lo sviluppo di un corpo di metodologie (la cosiddetta *teoria dei sistemi di controllo lineari*) che consente, sul piano pratico, di ottenere soluzioni soddisfacenti per una vasta classe di problemi concreti di controllo e, allo stesso tempo, di interpretare in modo significativo quasi tutti i principali fenomeni propri del funzionamento dei sistemi a controllazione. È per questi motivi che si ritiene sufficiente, in una trattazione destinata a illustrare i fondamenti della teoria del controllo, limitare lo studio alla sola teoria lineare.

Può essere però utile, prima di procedere nello studio stesso, riflettere in modo esplicito sulle opportunità offerte da una tale teoria e sui limiti in essa intrinsecamente presenti. Da questo punto di vista, la prima e più importante osservazione risiede nel fatto che *una teoria lineare consente anche lo studio locale di problemi descrivibili mediante relazioni non lineari*. Una tale proprietà, il cui ruolo è peraltro ben noto nell'ambito della teoria dei sistemi, acquista un significato ancora più interessante quando viene considerata nel contesto dei sistemi a controllazione e ciò sia in relazione al fatto che la caratteristica di questi ultimi è quella di rendere piccole le differenze tra l'evoluzione delle grandezze controllate e quella delle grandezze di riferimento (che assume, pertanto, il ruolo di situazione rispetto alla quale si può effettuare uno studio locale) sia in relazione al fatto che lo scostamento tra la descrizione lineare e una nonlineare può essere sempre pensato come dovuto

all'effetto di un disturbo, nei riguardi del quale è oramai nota l'efficacia della contoreazione stessa (effetto linearizzante della contoreazione).

D'altra parte, la definizione stessa delle ipotesi in cui l'utilizzazione della teoria lineare può essere considerata con successo chiarisce anche, contestualmente, i limiti insiti nei metodi di studio che da essa derivano. Questi, sostanzialmente, risiedono nella impossibilità di applicare i metodi stessi quando o si è in presenza di *grandi variazioni delle variabili* rispetto alla situazione di riferimento o si è in presenza di *relazioni, tra variabili, che non ammettono uno studio locale*.

Un esempio tipico di caso che rientra nella prima categoria è quello dei cosiddetti sistemi a *controllo parametrico*. Con questo nome è abituale indicare sistemi dotati di rappresentazioni ingresso-stato-uscita del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}[\mathbf{u}(t)] \mathbf{x}(t)$$

e cioè di rappresentazioni nelle quali la funzione generatrice è lineare nello stato, ma l'azione del controllo viene esercitata mediante variazione dei parametri che caratterizzano la funzione stessa. In casi di questo genere il ricorso alla linearizzazione locale, quando possibile, impone di restringere le variazioni della grandezza controllante ad un intervallo di valori limitato e può far perdere alcune delle potenzialità intrinsecamente presenti nella struttura e che verrebbero esplicitate solo ammettendo grandi variazioni per questa grandezza.

Un esempio tipico ed ancora più elementare di caso che rientra nella seconda categoria è quello dei cosiddetti sistemi di controllo a *relé*, nei quali la legge di controllo assume due soli valori, in dipendenza del segno della differenza tra il valore desiderato ed il valore effettivo della grandezza controllata. Sistemi di questo genere sono largamente diffusi in pratica a causa della notevole semplificazione che introducono per quanto riguarda la realizzazione del sistema controllante (il relè, appunto) ma non possono essere studiati con i metodi della teoria lineare perché la funzione che rappresenta il legame statico ingresso-uscita in un dispositivo di questo genere non ammette sviluppo in serie di Taylor nell'intorno della situazione di riferimento.

Il secondo tipo di limitazioni che si vogliono mettere in luce si ricollega ad alcuni particolari aspetti che occorre tenere presenti, anche nell'ambito della teoria lineare stessa, quando si opera sulle descrizioni astratte dei sistemi, e che riguardano i *limiti di validità di un determinato modello in relazione al comportamento reale dell'oggetto fisico al quale è associato*. Da questo punto di vista si possono inquadrare alcune situazioni che si incontrano frequentemente nello studio dei sistemi di controllo ed alle quali sono dedicate le brevi considerazioni che seguono.

La prima di esse si ricollega direttamente a quanto osservato in precedenza e, in particolare, al fatto che in generale un modello matematico lineare interpreta correttamente il funzionamento di determinati oggetti fisici solo quando le ampiezze delle grandezze interessate sono limitate. In altri termini, sia che si ottenga un modello lineare ritenendo di interpretare fedelmente i meccanismi di funzionamento di un oggetto o processo fisico mediante relazioni lineari sia che si ottenga un modello lineare approssimando localmente un modello matematico che interpreta tali meccanismi mediante relazioni non lineari, in entrambi i casi la validità del modello è condizionata a limiti sulle grandezze in gioco. Quello che può verificarsi in pratica, tutt'al più, è che nel primo caso (quello in cui si ritiene che le leggi interpretative dei fenomeni fisici siano descrivibili con relazioni lineari) i limiti sulle grandezze in gioco possono risultare, a parità di altre situazioni, più ampi che nel secondo.

Si confrontino, ad esempio, le caratteristiche statiche corrente-tensione di un resistore e di un diodo a vuoto. La prima di esse può essere fedelmente rappresentata da una relazione lineare per valori della tensione applicata compresi in un intervallo che risulta molto ampio se paragonato a quelli in cui si potrebbe rappresentare localmente con relazioni lineari, diverse da caso a caso, la seconda. Nella pratica è allora abituale contrapporre una descrizione lineare per la prima ad una descrizione non lineare per la seconda. È però opportuno tenere sempre presente che la validità della descrizione lineare per il resistore ha anch'essa dei limiti definiti; basti pensare ad esempio (pur restando nell'ambito dei fenomeni reversibili) al fatto che il rapporto tensione/corrente è in generale una funzione crescente della temperatura e che questa è a sua volta una funzione crescente della corrente.

In secondo luogo, si ritiene opportuno mettere in evidenza il fatto che, in genere, i modelli matematici che vengono considerati interpretano correttamente il funzionamento di determinati oggetti fisici solo quando sono soddisfatte particolari ipotesi sulla variabilità nel tempo delle funzioni di ingresso.

Questo aspetto si può esemplificare in modo immediato analizzando alcuni casi elementari propri della teoria dei circuiti. A questo proposito, si osservi ad esempio che, nella misura in cui si ritiene lecito descrivere il comportamento di un elemento resistivo per mezzo della sola legge di Ohm, è possibile associare ad esso un sistema astratto *istantaneo* (assumendo come ingresso la tensione e come uscita la corrente) descritto da:

$$y(t) = \frac{1}{R} u(t)$$

È ben noto che una descrizione di questo tipo può divenire insufficiente in talune condizioni, quando ad esempio l'andamento di $u(t)$ sia tale da rendere importante l'effet-

to relativo di induttanze parassite, nel qual caso è necessario considerare un sistema *dinamico* descritto da (cfr. fig. II.2):

$$\dot{x}(t) = -\frac{R}{L}x(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

I limiti di validità del primo modello rispetto al secondo si chiariscono immediatamente se si confrontano le due risposte armoniche, che valgono rispettivamente:

$$W(j\omega) = \frac{1}{R}$$

e:

$$W(j\omega) = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

e si osserva che la seconda restituisce la prima per tutti i valori di ω in corrispondenza ai quali risulta:

$$\omega \frac{L}{R} \ll 1$$

Così pure, considerando un elemento capacitivo ed associando ad esso la relazione (nella quale si considera come ingresso la tensione e come uscita la corrente):

$$y(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

si perviene ad introdurre un sistema astratto di tipo *improprio*. In effetti una tale circostanza è conseguenza dell'aver trascurato, allo scopo di semplificare il modello, fenomeni che assumono importanza solo in corrispondenza a determinati andamenti di $u(t)$ quali, ad esempio, l'effetto relativo di resistenze parassite. Considerando anche queste ultime si può associare al dispositivo un sistema *dinamico proprio* descritto da (cfr. fig. II.3 a):

$$\dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{RC}u$$

$$y = -\frac{1}{R}x + \frac{1}{R}u$$

Anche in questo caso i limiti di validità dei due modelli si chiariscono confrontando le due risposte armoniche:

$$W(j\omega) = C j\omega$$

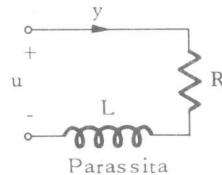
e:

$$W(j\omega) = C j\omega \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

ed osservando che la seconda restituisce la prima per tutti i valori di ω in corrispondenza ai quali risulta:

$$\omega RC \ll 1$$

Fig.II.2

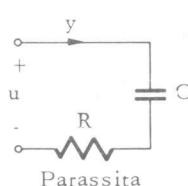


L'analisi potrebbe essere ulteriormente raffinata, considerando anche l'effetto di induttanze parassite ed associando in tal modo un sistema dinamico *strettamente proprio*, descritto da (cfr. fig.II.3 b):

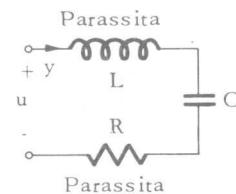
$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u$$

$$y = x_2$$



a)



b)

Fig.II.3

cui corrisponde la risposta armonica:

$$W(j\omega) = C j\omega \frac{1}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

Gli esempi considerati mettono chiaramente in evidenza il fatto che l'impiego dei sistemi astratti non *strettamente propri* nella descrizione

ne del comportamento di oggetti o processi fisici è lecito solo nel caso in cui l'andamento nel tempo delle funzioni di ingresso soddisfa particolari limitazioni (le quali, in generale, possono essere espresse confrontando le componenti armoniche delle funzioni stesse con le pulsazioni proprie del sistema astratto). Corrispondentemente, è abituale affermare che tutti gli oggetti o processi fisici hanno caratteristiche passa-basso o, il che è lo stesso, che non esistono oggetti o processi fisici in grado di realizzare il comportamento di un sistema astratto non strettamente proprio senza limitazioni sulla variabilità nel tempo delle funzioni di ingresso.

Considerazioni di questo genere sono particolarmente importanti nei problemi di analisi e sintesi dei sistemi di controllo, sia perché mettono in evidenza i limiti di validità intrinsecamente presenti nei risultati ottenuti a partire da modelli semplificati (nel senso che qui interessa), sia perchè consentono di tenere presenti sin dall'inizio gli eventuali limiti alla disponibilità concreta dei dispositivi mediante i quali si suppone di realizzare il sistema.

II.4 - Alcuni richiami di Teoria dei Sistemi.

In questo paragrafo e nel seguente si richiamano, per comodità del lettore, alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari, delle quali viene fatto uso nel seguito. Innanzitutto, si ricorda che tra le grandezze che caratterizzano una rappresentazione implicita:

$$(II.4) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

e quelle che caratterizzano una rappresentazione esplicita:

$$(II.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \Psi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{W}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

sussistono i legami indicati dalle relazioni:

$$(II.6) \quad \begin{aligned} \Phi(t) &= e^{\mathbf{A}t}, & \mathbf{H}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}, \\ \Psi(t) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}, & \mathbf{W}(t) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}, \end{aligned}$$

Inoltre, si ricorda che le trasformate di Laplace delle quattro funzioni $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$, $W(t)$ assumono le espressioni seguenti:

$$(II.7) \quad \begin{aligned} \Phi(s) &= (sI - A)^{-1}, & H(s) &= (sI - A)^{-1}B, \\ \Psi(s) &= C(sI - A)^{-1}, & W(s) &= C(sI - A)^{-1}B. \end{aligned}$$

La funzione e^{At} , che esprime la dipendenza dalla variabile t nelle (II.6), ammette lo sviluppo in serie di Taylor:

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$$

Se, in particolare, la matrice A ha n autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, indicati con $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un insieme di n autovettori destri corrispondenti e con $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l'insieme di n autovettori sinistri definiti dalle relazioni:

$$v_i^T u_j = 0 \quad \text{per } i \neq j$$

$$v_i^T u_i = 1 \quad \text{per } i = j$$

è possibile rappresentare tale matrice nella forma:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^T u_i.$$

Di conseguenza, è possibile calcolare la funzione e^{At} con la relazione:

$$(II.8) \quad e^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} v_i^T u_i.$$

La funzione $(sI - A)^{-1}$, che esprime la dipendenza dalla variabile s nelle (II.7), può essere rappresentata nella forma:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{m(s)} (I s^{r-1} + M_{r-2} s^{r-2} + \dots + M_1 s + M_0)$$

in cui con $m(s)$ si è indicato il polinomio minimo della matrice A e con r grado di $m(s)$. Se, in particolare, la matrice A ha n autovalori distinti, il polinomio $m(s)$ coincide con il polinomio caratteristico di A , $r = n$ e la funzione $(sI - A)^{-1}$ può essere sviluppata in funzioni parziali:

$$(II.9) \quad (sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - \lambda_i} R_i$$

essendo:

$$R_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) (sI - A)^{-1}$$

Dal confronto di questa con la trasformata di Laplace dell'espressione (II.8) si deduce in particolare che:

$$R_i = v_i^T u_i$$

Se T è una matrice nonsingolare, la relazione:

$$\tilde{x} = Tx$$

definisce una trasformazione di coordinate nello spazio di stato della rappresentazione (II.4). Nelle nuove coordinate, la rappresentazione del sistema assume la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}$$

con:

$$(II.10) \quad \tilde{A} = TAT^{-1}, \quad \tilde{B} = TB, \quad \tilde{C} = CT^{-1}$$

Il sistema rappresentato dalla (II.4) è stabile asintoticamente se e solo se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa. Per valutare se questa proprietà sussista o meno, si può ad esempio applicare il cosiddetto criterio di Routh al polinomio caratteristico:

$$d(\lambda) = \det(sI - A)$$

della matrice A . Altrimenti, è possibile utilizzare il cosiddetto criterio di Lyapunov, che si applica nel seguente modo. Sia Q una matrice definita positiva scelta a piacere: la matrice A ha tutti autovalori con parte reale negativa se e solo se l'equazione matriciale lineare:

$$A^T P + P A = -Q$$

ha soluzione P unica, simmetrica e definita positiva.

Il sistema rappresentato dalla (II.4) è raggiungibile se e solo se le n righe della matrice:

(II.11)

$$[\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sono indipendenti o, il che è lo stesso, se e solo se le n righe della matrice:

$$[(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \ \mathbf{B}]$$

sono indipendenti per ogni λ autovalore di \mathbf{A} .

Il sistema rappresentato dalla (II.4) è osservabile se e solo se le n colonne della matrice:

(II.12)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

sono indipendenti o, il che è lo stesso, se e solo se le n colonne della matrice:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

sono indipendenti per ogni λ autovalore di \mathbf{A} .

Se il sistema rappresentato dalla (II.4) non è raggiungibile (o, il che è lo stesso, se il rango n_1 della matrice (II.11) risulta strettamente inferiore a n), esiste una trasformazione di coordinate nello spazio di stato mediante la quale è possibile trasformare le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} in matrici della forma:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{TB} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in cui le partizioni indicate corrispondono ad una partizione del vettore di stato $\tilde{\mathbf{x}}$ in due blocchi \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 di n_1 e, rispettivamente, $n - n_1$ componenti. A questa partizione del vettore $\tilde{\mathbf{x}}$ corrisponde una scomposizione del sistema, indicata in fig. II.4, in due parti S_1 e S_2 . Di queste, la parte S_1 risulta raggiungibile mentre la parte S_2 (sottosistema non raggiungibile) non è influenzata dall'ingresso.

Per determinare la matrice \mathbf{T} che permette di ottenere tale trasformazione, è sufficiente scegliere una qualsiasi matrice \mathbf{S} le cui prime n_1 colonne siano una base nello spazio immagine della matrice (II.11) e porre successivamente $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Se il sistema rappresentato dalla (II.4) non è osservabile (o, il che è lo stesso, se il rango n_1 della matrice (II.12) risulta strettamente inferiore a n), esiste una trasformazione di coordinate nello spazio di

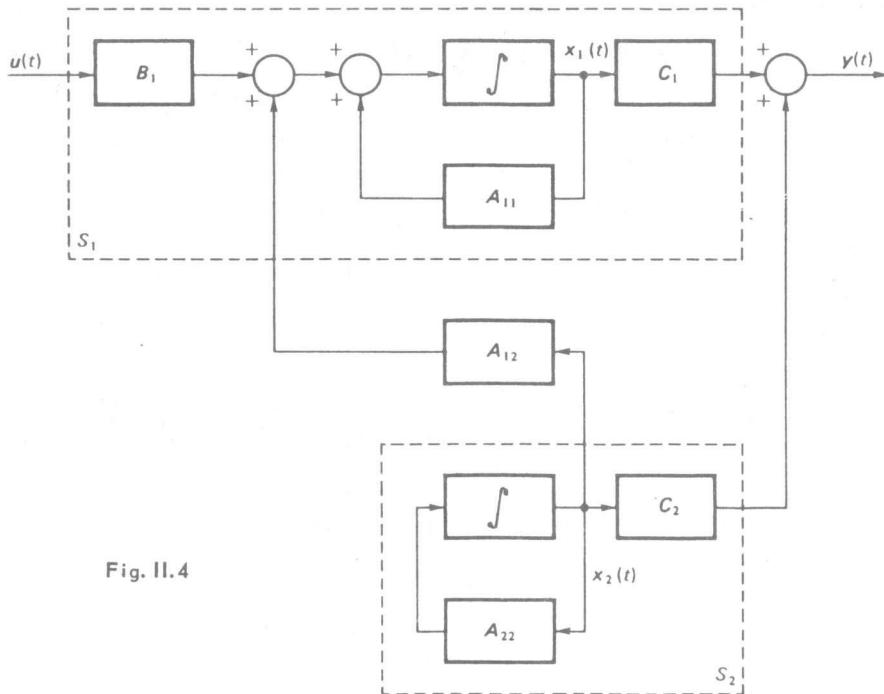


Fig. II.4

stato mediante la quale è possibile trasformare le matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} in matrici della forma:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} = [\mathbf{C}_1 \ 0]$$

in cui le partizioni indicate corrispondono ad una partizione del vettore di stato $\tilde{\mathbf{x}}$ in due blocchi \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 di n_1 e, rispettivamente $n-n_1$ componenti. A questa partizione del vettore $\tilde{\mathbf{x}}$ corrisponde una scomposizione del sistema, indicata in fig. II.5, in due parti S_1 e S_2 . Di queste, la parte S_1 risulta osservabile mentre la parte S_2 (sottosistema non osservabile) non dà contributo all'uscita.

Per determinare la matrice \mathbf{T} che permette di ottenere tale trasformazione è sufficiente scegliere una qualsiasi matrice \mathbf{S} le cui ultime $n-n_1$ colonne siano una base nello spazio nullo della matrice (II.12) e porre successivamente $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$. Le scomposizioni indicate prendono il nome di *scomposizioni canoniche di Kalman*.

Sia $\mathbf{W}(\mathbf{s})$ una matrice $q \times p$ di funzioni razionali strettamente proprie della variabile complessa s . Una sua realizzazione è una qualsiasi terna di matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, di dimensioni $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$, per la quale risulta:

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{W}(s)$$

Il numero intero n viene detto *dimensione* della realizzazione in questione. Una realizzazione viene detta *minima* se non esiste alcuna realizzazione di dimensione inferiore. Una realizzazione è minima se e solo se il sistema che ad essa si può associare mediante le (II.4) è raggiungibile e osservabile. Due diverse realizzazioni minime $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ e $\widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{\mathbf{B}}, \widetilde{\mathbf{C}}$ della stessa matrice $\mathbf{W}(s)$ sono legate da relazioni del tipo (II.10)

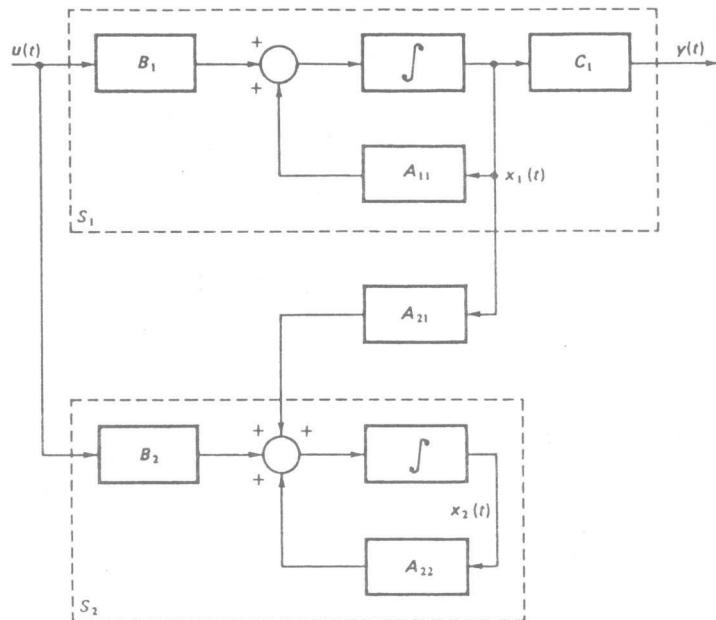


Fig. II.5

Se $\mathbf{W}(\mathbf{s})$ ha tutti poli semplici, una realizzazione di $\mathbf{W}(\mathbf{s})$ può essere ottenuta con il cosiddetto *metodo di Gilbert*. Sviluppata $\mathbf{W}(\mathbf{s})$ in frazioni parziali:

$$\mathbf{W}(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{s - \lambda_i} \mathbf{R}_i$$

si indichi con ρ_i il rango della matrice R_i e si determinino due matrici C_i e B_i , di dimensione $q \times \rho_i$ e, rispettivamente, $\rho_i \times p$ tali sia:

$$C_i B_i = R_i$$

per $i = 1, \dots, r$. Successivamente, si ponga:

$$A = \begin{bmatrix} I_{\rho_1} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{\rho_2} \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{\rho_r} \lambda_r \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix} \quad C = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_r]$$

(in cui I_{ρ_i} indica una matrice identità di dimensioni $\rho_i \times \rho_i$). La realizzazione definita in questo modo è una realizzazione minima.

II.5 - La stabilità di un sistema a controllazione.

L'analisi della stabilità asintotica è un aspetto di fondamentale importanza nello studio dei sistemi di controllo. Nel caso dei sistemi di controllo a controllazione, il principale problema che interessa affrontare è quello di individuare - a partire dalle caratteristiche del sistema ad anello aperto - se il corrispondente sistema ad anello chiuso risulta stabile asintoticamente.

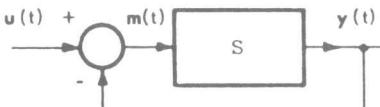


Fig. II.6

Si consideri il sistema a controllazione di fig. II.6 e si supponga che il sistema ad anello aperto S sia descritto dalla rappresentazione con lo spazio di stato:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Di conseguenza, il sistema ad anello chiuso è descritto da una rappresentazione con lo spazio di stato che assume la forma:

$$\dot{x} = (A - BC)x + Bu$$

$$y = Cx$$

Nel seguito, si riassumeranno alcune relazioni fondamentali che legano il polinomio caratteristico del sistema ad anello aperto:

$$d_{AP}(s) = \det(sI - A)$$

e il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso:

$$d_{CH}(s) = \det(sI - A + BC)$$

Come prima cosa, è importante osservare che i due polinomi in questione possono avere radici comuni. In altri termini, un numero complesso λ può essere allo stesso tempo autovalore di A e autovalore di $(A - BC)$. Ciò si verifica, ad esempio, se nel sistema ad anello aperto è presente un sottosistema non raggiungibile oppure non osservabile.

Tale affermazione può essere immediatamente verificata effettuando una trasformazione di coordinate nello spazio di stato della rappresentazione del sistema ad anello aperto in modo tale da mettere in evidenza una scomposizione canonica di Kalman (cfr. Problema II.2).

La condizione che il sistema ad anello aperto sia raggiungibile e osservabile è dunque una condizione necessaria affinché polinomi $d_{AP}(s)$ e $d_{CH}(s)$ non abbiano radici comuni. Tale condizione diviene anche sufficiente nel caso di sistemi a un solo ingresso e una sola uscita, ma è bene tenere presente che essa può non essere sufficiente per sistemi a più ingressi e più uscite.

Per verificare la prima affermazione, si osservi che, se λ è allo stesso tempo autovalore di A e $(A - BC)$, esistono vettori non nulli v e w tali che:

$$Av = \lambda v, \quad w^T A - w^T BC = \lambda w^T.$$

Queste due relazioni implicano che:

$$w^T BC v = 0$$

e questa a sua volta implica $w^T B = 0$ oppure $Cv = 0$. La prima relazione contraddice la proprietà di raggiungibilità mentre la seconda contraddice la proprietà di osservabilità.

Per verificare la seconda affermazione, è sufficiente considerare l'esempio:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è raggiungibile e osservabile, ma l'autovalore c di \mathbf{A} è anche autovalore di $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C})$.

Da queste considerazioni si può immediatamente trarre una prima conseguenza importante ai fini della valutazione della stabilità asintotica di un sistema a contoreazione: se nel sistema ad anello aperto è presente un sottosistema non raggiungibile oppure non osservabile che ha un autovalore con parte reale positiva o nulla, il sistema ad anello chiuso non può essere stabile asintoticamente.

In generale, tra i polinomi $d_{AP}(s)$ e $d_{CH}(s)$ sussiste la relazione fondamentale indicata nel seguente enunciato.

Proposizione. Tra il polinomio caratteristico $d_{AP}(s)$ del sistema ad anello aperto, il polinomio caratteristico $d_{CH}(s)$ del sistema ad anello chiuso e la matrice di funzioni di trasferimento del sistema ad anello aperto:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

sussiste la relazione:

$$(II.13) \quad \det(\mathbf{I} + \mathbf{F}(s)) = \frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)}$$

La (II.13) pone direttamente in relazione il polinomio $d_{CH}(s)$ con due grandezze associate al sistema ad anello aperto: il suo polinomio caratteristico $d_{AP}(s)$ e la sua matrice di funzioni di trasferimento $\mathbf{F}(s)$. In particolare, tale relazione mostra che la quantità $\det(\mathbf{I} + \mathbf{F}(s))$, che è una funzione razionale propria della variabile s , coincide con il rapporto tra polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso e polinomio caratteristico del sistema ad anello aperto.

La relazione (II.13) può essere utilizzata per ottenere informazioni sul numero di radici con parte reale positiva o nulla del polinomio $d_{CH}(s)$ e cioè sul numero di autovalori con parte reale positiva o nulla del sistema ad anello chiuso. Si consideri dapprima il caso in cui il sistema ad anello aperto ha un solo ingresso e una sola uscita: in questo caso, la quantità primo membro della (II.3) si riduce alla funzione $1 + F(s)$. Si indichino con Z_{AP} e Z_{CH} il numero di radici con parte reale positiva del polinomio $d_{AP}(s)$, e, rispettivamente, del polinomio $d_{CH}(s)$.

Si supponga inoltre che il polinomio $d_{AP}(s)$ e il polinomio $d_{CH}(s)$ non abbiano radici con parte reale nulla. Si può allora concludere che (criterio di Nyquist) il numero N di giri che il vettore rappresentativo di $1 + F(j\omega)$ compie attorno all'origine (o , il che è lo stesso, il vettore rappresentativo di $F(j\omega)$) compie attorno al punto -1 in senso orario quando ω varia da $-\infty$ a $+\infty$ è dato dalla relazione:

$$N = Z_{CH} - Z_{AP}$$

Questa formula stabilisce una semplice relazione tra due parametri caratteristici del sistema ad anello aperto (il numero N di giri del vettore rappresentativo di $F(j\omega)$ e il numero di autovalori con parte reale positiva del sistema ad anello aperto) e il numero di autovalori con parte reale positiva del sistema ad anello chiuso, che è proprio la quantità che interessa conoscere al fine di determinare se quest'ultimo sistema è stabile asintoticamente oppure no. Da tale relazione si deduce quindi che il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente se e solo se:

$$N = -Z_{AP}$$

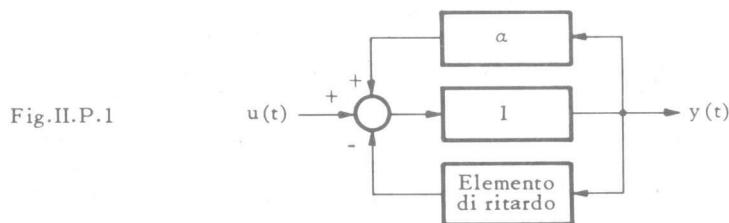
Il criterio enunciato può essere utilizzato per trattare anche i casi in cui o il polinomio $d_{AP}(s)$ o il polinomio $d_{CH}(s)$ abbiano radici con parte reale nulla. Si supponga che almeno uno dei due polinomi $d_{AP}(s)$ e $d_{CH}(s)$ abbia una radice in un certo punto $s = j\omega_0$ dell'asse immaginario; si indichino con n_{AP} e, rispettivamente, con n_{CH} le molteplicità di tale radice nel polinomio $d_{AP}(s)$ e, rispettivamente, nel polinomio $d_{CH}(s)$. Si tenga inoltre presente che, avendo la radice in questione parte reale nulla, il sistema ad anello chiuso potrà risultare stabile asintoticamente solo se $n_{CH} = 0$. La relazione (II.13) consente di trarre le conclusioni seguenti. Se risulta $F(j\omega_0) = -1$, si può affermare che $n_{CH} > n_{AP}$ e quindi il sistema ad anello chiuso non può essere stabile asintoticamente quale che sia il valore di n_{AP} . Se risulta $F(j\omega_0) \neq -1$, si può affermare che $n_{CH} = n_{AP}$ e quindi il sistema ad anello chiuso non può essere stabile asintoticamente se $n_{AP} > 0$. Se il modulo del vettore rappresentativo di $F(j\omega)$ tende all'infinito per $\omega \rightarrow \omega_0$, si può affermare che $n_{CH} < n_{AP}$. In questo caso, la fase del vettore rappresentativo di $F(j\omega)$ presenta una discontinuità, in $\omega = \omega_0$, di ampiezza pari a $(n_{AP} - n_{CH})\pi$. Di conseguenza, il sistema ad anello chiuso non può essere stabile asintoticamente se la variazione discontinua della fase del vettore rappresentativo di $F(j\omega)$ nel passaggio per $\omega = \omega_0$ è diversa da $n_{AP}\pi$. Se la variazione discontinua della fase del vettore rappresentativo di $F(j\omega)$ nel passaggio per $\omega = \omega_0$ risulta uguale a $n_{AP}\pi$, la relazione (II.14) rimane

ne valida e può essere utilizzata nella valutazione di Z_{CH} purché, nel computo di N , si tenga conto della variazione discontinua di fase di $F(j\omega)$ in $\omega = \omega_0$ attribuendo ad essa il significato di rotazione in senso orario.

Le conclusioni precedenti e in particolare la relazione (II.14) sono valide anche per sistemi a più ingressi e più uscite. In questo caso, l'intero N indica in numero di giri che il vettore rappresentativo di $\det(\mathbf{I} + \mathbf{F}(j\omega))$ compie attorno all'origine in senso orario quando ω varia da $-\infty$ a $+\infty$. In taluni casi, la valutazione di N non richiede il calcolo preventivo del determinante di $\mathbf{F}(j\omega)$. Come si vedrà più in dettaglio nel par. VIII.2, nei casi in cui la matrice $(\mathbf{I} + \mathbf{F}(j\omega))$ risulti diagonale, oppure triangolare (superiore o inferiore), oppure ancora dominante diagonale, il numero N può essere calcolato come somma dei numeri n_i di giri compiuti dai singoli vettori rappresentativi delle funzioni $f_{ii}(j\omega)$, corrispondenti agli elementi diagonali di $\mathbf{F}(j\omega)$, attorno al punto -1.

PROBLEMI

II.1 - Lo schema di fig.II.P.1 è un classico esempio nel quale si mostra che l'impiego dei sistemi astratti istantanei, se non si tengono presenti osservazioni del tipo di quelle svolte alla fine del par.3, può dar luogo a situazioni paradossali:



Ricordando che la funzione di trasferimento di un elemento di ritardo è pari a $1/z$, si calcoli la funzione di trasferimento ingresso-uscita dell'intero sistema. Si mostri che, se $a = 1$, la funzione di trasferimento si riduce a:

$$w(z) = z$$

Si osservi che, in questo caso, ingresso e uscita sono legati dalla relazione:

$$y(t) = u(t + 1)$$

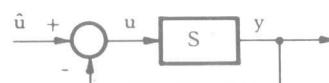
e si rifletta sulle implicazioni di una tale proprietà dal punto di vista fisico.

II.2 - Si consideri il sistema indicato in fig.II.P.2 e si supponga che il sottosistema non reazionario S sia dotato della rappresentazione con lo spazio di stato (*forma canonica di Kalman*):

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4) x(t)$$

Fig.II.P.2



Si determini una rappresentazione con lo spazio di stato del sistema reazionato e si verifichi che:

- a) la rappresentazione del sistema reazionato non è raggiungibile ed osservabile;
- b) la rappresentazione del sistema *non reazionato* e quella del sistema *reazionato* hanno in comune certi autovalori (quelli associati alle parti non raggiungibili e/o inosservabili);
- c) la funzione di trasferimento del sistema reazionato assume l'espressione;

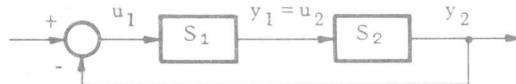
$$W(s) = C_2(sI - A_{22} - B_2 C_2)^{-1} B_2$$

II.3 - Si consideri il sistema a controreazione indicato in fig.II.P.3 e si supponga che i due sottosistemi S_1 ed S_2 siano dotati di rappresentazioni con lo spazio di stato:

$$\begin{aligned} S_1: \quad \dot{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_1(t) \\ y_1(t) &= (-1 \quad 1) x_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2: \quad \dot{x}_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_2(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2(t) \\ y_2(t) &= (1 \quad 1) x_2(t) \end{aligned}$$

Fig.II.P.3



Si verifichi che:

- a) la rappresentazione con lo spazio di stato dell'interno sistema ha un autovalore con parte reale positiva e, quindi, è instabile;
- b) la funzione di trasferimento dell'intero sistema ha solo poli con parte reale negativa;
- c) nel prodotto:

$$w_1(s) w_2(s)$$

si può cancellare uno zero (con parte reale positiva) di $w_1(s)$ con un polo di $w_2(s)$;

- d) la rappresentazione con lo spazio di stato dell'intero sistema non è raggiungibile.

CAPITOLO III

LE CARATTERISTICHE DEI SISTEMI DI CONTROLLO A CONTROREAZIONE CON UN SOLO INGRESSO E UNA SO- LA USCITA

III.1 - Generalità.

In questo Capitolo vengono illustrati i metodi più diffusi per l'analisi quantitativa e la classificazione delle prestazioni dei sistemi di controllo, limitando l'esposizione alcasopì semplice dei sistemi in cui la grandezza controllata è una sola. Prima di procedere ad uno studio sistematico, è tuttavia opportuno esaminare, in termini qualitativi, quali classi di requisiti debbano essere prese in considerazione. A questo proposito, le osservazioni introduttive svolte nei Capitoli precedenti suggeriscono di concentrare l'attenzione su quattro tipi di caratteristiche generali: la stabilità, la fedeltà di risposta, la capacità di reagire ai disturbi, la capacità di reagire alle variazioni dei parametri. L'importanza di questi requisiti può variare da sistema a sistema, ma tutti, sia pure in misura diversa, contribuiscono a definire le specifiche cui deve soddisfare un sistema di controllo. Un loro studio in termini generali consente di definire un quadro di riferimento nel quale si possono ritrovare facilmente, di volta in volta, le particolari caratteristiche di un singolo problema.

Per illustrare in che modo lo studio delle prestazioni di un sistema di controllo può venire sviluppato in modo quantitativo, si esamineremo ora con qualche dettaglio le quattro classi di caratteristiche sopra indicate.

a) **Stabilità:** È un requisito fondamentale. Da un punto di vista intuitivo, appare naturale richiedere - prima di ogni altra cosa - che in un sistema di controllo l'effetto di perturbazioni sulle grandezze che caratterizzano

l'evoluzione del sistema si estingua al passare del tempo una volta venu-
te meno le cause che possono aver prodotto queste perturbazioni. Per i
sistemi che vengono presi in considerazione in questo volume, cioè per i
sistemi dotati di rappresentazioni con lo spazio di stato a dimensione fi-
nita lineari stazionarie, un tale requisito corrisponde alla proprietà di *sta-
bilità asintotica* della rappresentazione considerata. Come è noto, la sta-
bilità asintotica è caratterizzata dall'appartenenza degli autovalori del-
la matrice che descrive - in forma implicita - l'evoluzione libera dello sta-
to a determinate regioni del piano complesso (la regione a sinistra dell'as-
se immaginario per i sistemi a tempo continuo e quella interna al cerchio
di raggio unitario per i sistemi a tempo discreto) e può essere verificata
mediante opportuni criteri di tipo algebrico predisposti allo scopo di e-
vitare il calcolo esplicito degli autovalori stessi (equazioni matriciali di
Lyapounov, criterio di Routh). Sono anche disponibili criteri che con-
sentono di valutare la stabilità asintotica di un sistema avente struc-
tura interna a controllazione, una volta note particolari caratteristiche del
sistema non reazionario; ad essi ovviamente, dato il tema allo studio, si
farà riferimento nella maggioranza dei casi. Il più comune di questi è il
criterio di Nyquist, sviluppato inizialmente per lo studio della stabilità
asintotica dei sistemi reazionati ad un solo ingresso ed una sola uscita
e successivamente esteso in modo tale da consentire lo studio dei siste-
mi a molti ingressi e molte uscite.

b) Fedeltà di risposta. Con questo nome si indica, genericamente, la pro-
prietà del sistema di produrre uscite il cui andamento nel tempo sia con-
forme a quello desiderato. A questo proposito si è già osservato nel Ca-
pitolo II che - escludendo il caso dei cosiddetti sistemi di controllo fun-
zionali - l'andamento desiderato della grandezza controllata è *proporzi-
onale* a quello di una grandezza assegnata come ingresso al sistema di con-
trollo. Con il termine *fedeltà di risposta* si indica allora la proprietà del
sistema di controllo (visto come sistema avente per ingresso le grande-
ze di riferimento e per uscita le grandezze controllate) di produrre uscite
proportionali agli ingressi.

Naturalmente una proprietà di questo genere non potrà che essere
soddisfatta in casi molto particolari. In generale, viene commesso un er-
rore, che si può definire come scostamento tra l'andamento desiderato e
quello effettivo della grandezza controllata. Indicata con $y(t)$ l'uscita
del sistema di controllo, con $u(t)$ il suo ingresso e con K_d la costante
di proporzionalità fra $u(t)$ e l'andamento desiderato $y_d(t)$ per $y(t)$,
l'errore $e(t)$ è definito dalla relazione:

$$(III.1) \quad e(t) = y_d(t) - y(t) = K_d u(t) - y(t)$$

Le prestazioni di un sistema di controllo dal punto di vista della fedeltà di risposta possono dunque essere definite in termini di caratteristiche dell'errore $e(t)$. Occorre però osservare subito che l'andamento dell'errore dipende dal tipo di funzione di ingresso considerata, dai disturbi eventualmente presenti, dallo stato iniziale del sistema stesso. Tranne che in situazioni molto particolari (ad esempio il caso dei sistemi di regolazione, in cui $u(t)$ è una funzione costante) queste grandezze possono assumere andamenti o valori diversi da situazione a situazione. Per definire qualcosa che consenta una caratterizzazione sintetica delle prestazioni di un sistema di controllo occorre evidentemente operare delle restrizioni, considerando - ad esempio - solo andamenti particolari per le funzioni in gioco e analizzando solo caratteristiche parziali della risposta. Un tale modo di procedere (che va sotto il nome di metodo della soluzione parziale) è peraltro molto efficace se la scelta delle funzioni particolari mediante le quali viene «saggiato» il comportamento del sistema è adeguatamente significativa e se, corrispondentemente, il calcolo delle caratteristiche parziali della risposta è abbastanza diretto. Resta ferma in ogni caso la possibilità di servirsi dei metodi generali per il calcolo completo delle grandezze di interesse in casi specifici.

In questo spirito il problema della risposta viene generalmente affrontato nel seguente modo. Utilizzando innanzitutto la proprietà di linearità rispetto alle sollecitazioni, si possono studiare separatamente il caso in cui è presente il solo ingresso e sono nulli i disturbi e quello in cui è nullo l'ingresso e sono presenti i disturbi. Quest'ultimo, in particolare, verrà analizzato al successivo punto c). Ciò posto, nel considerare la risposta al solo ingresso $u(t)$, si possono prendere in esame classi di ingressi per i quali - come già detto - sia immediato calcolare la risposta o almeno alcune sue caratteristiche e che, d'altra parte, sia ragionevole ritenere costituiscano adeguate schematizzazioni delle funzioni di ingresso che possono presentarsi nel sistema reale. Classi di ingressi adatte a questo scopo sono quelle in corrispondenza alle quali è possibile in opportune ipotesi definire una *risposta a regime permanente* e, in particolare, i polinomi canonici $t^k/k!$ e le funzioni sinusoidali $\sin \omega t$. Per questi ingressi, in ipotesi di stabilità asintotica, la risposta a regime permanente esiste ed il calcolo di questa può essere eseguito facilmente, a partire dalle funzioni che caratterizzano la sola risposta ingresso-uscita del sistema (la sua risposta impulsiva $W(t)$ o la sua funzione di trasferimento $W(s)$). Da questo punto di vista, se $\tilde{u}(t)$ è un ingresso del tipo predetto, e $\tilde{y}(t)$ la corrispondente risposta a regime permanente, si può definire un *errore in regime permanente* con la relazione:

$$(III.2) \quad \tilde{e}(t) = K_d \tilde{u}(t) - \tilde{y}(t)$$

e valutarne le caratteristiche in funzione dei parametri che individuano $\tilde{u}(t)$. Un'analisi di questo tipo sarà sviluppata nei par.2, 3 e 5.

Una caratterizzazione della fedeltà di risposta basata sulla considerazione del solo regime permanente non è tuttavia sufficiente a definire in modo adeguato le prestazioni di un sistema di controllo. Basta osservare, in proposito, che la risposta in regime permanente è soltanto una situazione asintotica, alla quale la risposta effettiva converge al crescere di t . La differenza tra risposta effettiva e risposta in regime permanente, come è noto, viene chiamata *risposta in regime transitorio* (o *risposta transitoria*) e svolge anch'essa un ruolo importante - come è logico attendersi - nella caratterizzazione della fedeltà di risposta di un sistema di controllo. In corrispondenza ad essa può essere definito ed analizzato l'*errore in regime transitorio*, che risulta pari alla differenza tra la (III.1) e la (III.2):

$$(III.3) \quad e_t(t) = e(t) - \tilde{e}(t)$$

In effetti la caratterizzazione dell'errore transitorio è molto meno agevole di quella dell'errore in regime permanente, sia perchè in generale $e_t(t)$ - come funzione del tempo - non è suscettibile di una rappresentazione così semplice come quelle delle funzioni $\tilde{e}(t)$ corrispondenti agli ingressi del tipo indicato, sia anche perchè - in generale - essa dipende, oltre che dal particolare ingresso, dallo stato iniziale del sistema.

Per evitare quest'ultima difficoltà si usa in genere limitare l'analisi al caso in cui l'ingresso è una funzione costante (si tratta, in effetti, della situazione più semplice possibile) e in cui lo stato iniziale è nullo. Anche in questo caso peraltro la rappresentazione di $e_t(t)$ non è immediata e si rende necessario restringere ulteriormente l'investigazione, scegliendo di rappresentare l'intera funzione $e_t(t)$ mediante un numero limitato di caratteristiche convenzionalmente definite.

Le assunzioni relative al tipo di ingresso e allo stato iniziale, sebbene molto particolari, sono nella pratica adeguate allo scopo di caratterizzare la fedeltà di risposta. Ciò è anche intuitivamente giustificato dal fatto che la risposta a una sollecitazione del tipo predetto è direttamente correlata alle caratteristiche della risposta in evoluzione libera; un sistema che ha una sufficiente *prontezza di risposta* nell'adeguarsi a questo tipo di sollecitazione è in grado di rispondere in modo altrettanto soddisfacente in situazioni corrispondenti a diverse funzioni di ingresso e/o diversi stati iniziali.

L'analisi della risposta transitoria, nelle condizioni precise, verrà sviluppata nel par.6.

c) **Risposta ai disturbi.** L'analisi della risposta di un sistema di controllo ai disturbi può venire svolta con gli stessi metodi che sono stati indicati nella sezione precedente. I disturbi, infatti, non sono altro che particolari ingressi agenti sul sistema; la differenza con il caso dell'ingresso propriamente detto (il cui andamento rappresenta quello di una grandezza di riferimento, al quale si desidera conformare l'andamento della grandezza controllata) risiede solo nei requisiti sulle caratteristiche della risposta. Mentre infatti è auspicato che la risposta all'ingresso differisca il meno possibile da una funzione proporzionale all'ingresso stesso, per quanto riguarda il disturbo la situazione desiderata è quella di risposta identicamente nulla. Come già precisato, grazie alla linearità, la risposta ai disturbi può essere considerata in condizioni di ingresso nullo. In corrispondenza a ciascun disturbo $z(t)$ (si noti che anche in un sistema con un solo ingresso ed una sola uscita possono avversi più disturbi) risulta definita la *risposta al disturbo*, o *risposta disturbata*, $y_z(t)$, le cui caratteristiche possono essere studiate nello spirito già illustrato a proposito degli ingressi.

Si possono così definire una risposta al disturbo in regime permanente, quando il disturbo stesso assume un andamento nel tempo di tipo polinomiale o sinusoidale, e una risposta in regime transitorio, usualmente in corrispondenza al caso in cui il disturbo è costante ed il sistema si trova in uno stato iniziale nullo. La considerazione di quest'ultima, tuttavia, non aggiunge in genere ulteriori elementi a quelli che possono essere dedotti dall'analisi della risposta transitoria ad un ingresso costante e questo a motivo del fatto che, come già messo in evidenza, la risposta in questione è direttamente correlata alle caratteristiche della risposta libera la quale, salvo in casi particolari, dipende solo dalle caratteristiche interne del sistema e non dalle modalità di accesso delle sollecitazioni esterne.

L'analisi della risposta al disturbo, in regime permanente, sarà svolta nel par.4.

d) **La sensibilità alle variazioni parametriche.** In questo ambito il primo obiettivo dello studio è quello di definire grandezze che consentano di valutare in che misura prefissate proprietà della risposta di un sistema di controllo possono venire alterate dalla variazione dei parametri che caratterizzano i singoli componenti. Da questo punto di vista appare naturale, una volta che si sia stabilito di valutare la risposta di un sistema di controllo in modo convenzionale, limitare l'analisi dell'influenza delle variazioni dei parametri alle sole caratteristiche della risposta che si ritengono di interesse. In accordo con quanto illustrato nelle sezioni precedenti, si può ritenere allora sufficiente limitare lo studio della sensibilità agli aspetti che riguardano la stabilità, le risposte in regime per-

manente a particolari classi di ingressi, le risposte transitorie in particolari condizioni di eccitazione. Corrispondentemente, possono venire definite grandezze che consentono, ad esempio, di riconoscere quali sono le massime variazioni di un prefissato parametro (rispetto al valore nominale) compatibili con la conservazione di una proprietà di interesse. Ovvero, si possono considerare i rapporti tra le variazioni relative di certe grandezze che caratterizzano la risposta e le variazioni relative dei parametri e misurare, attraverso di essi, l'attitudine del sistema a reagire a piccole variazioni dei parametri stessi. Il problema può essere affrontato da diversi punti di vista, in relazione alle diverse caratteristiche della risposta che vengono considerate e all'importanza dei parametri rispetto ai quali si vuole studiare la sensibilità. I metodi principali che sono alla base di questo studio saranno descritti nel par. 7.

Analizzate così, da un punto di vista generale, le quattro classi di caratteristiche adottate per descrivere le prestazioni di un sistema di controllo, prima di passare allo studio sistematico cui sono dedicati i paragrafi successivi, è interessante concludere mostrando come, anche con i pochi strumenti formali introdotti sino a questo punto, sia già possibile stabilire alcune proprietà fondamentali dei sistemi a controreazione.

Si consideri, in proposito, il caso del sistema indicato in fig. III.1 e si supponga il sistema S_1 dotato di funzione di trasferimento $G_1(s) = K_1$, il sistema S_2 dotato di funzione di trasferimento $G_2(s)$, il sistema H nel ramo di reazione dotato di funzione di trasferimento $H(s) = 1/K_d$.

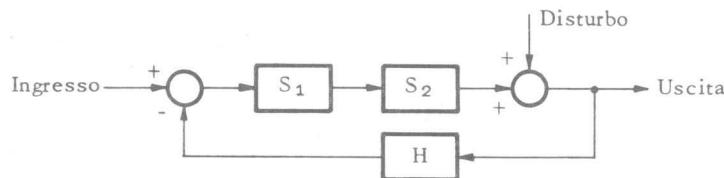


Fig. III.1

Utilizzando noti procedimenti dell'analisi dei sistemi interconnessi, è facile mostrare che la funzione di trasferimento $W(s)$ ingresso-uscita del sistema assume l'espressione:

$$W(s) = \frac{K_1 G_2(s)}{1 + K_1 G_2(s) \frac{1}{K_d}} = \frac{1}{\frac{1}{K_1 G_2(s)} + \frac{1}{K_d}}$$

mentre la funzione di trasferimento disturbo-uscita del sistema assume l'espressione:

$$W_z(s) = \frac{1}{1 + K_1 G_2(s) \frac{1}{K_d}}$$

Da queste si constata immediatamente che:

$$\lim_{K_1 \rightarrow \infty} W(s) = K_d$$

$$\lim_{K_1 \rightarrow \infty} W_z(s) = 0$$

Si ottiene cioè, una prima conferma formale di quanto già osservato sul piano intuitivo (nel corso delle considerazioni introduttive) a proposito dei sistemi a controreazione. Al tendere all'infinito del guadagno della funzione di trasferimento del ramo diretto le funzioni di trasferimento ingresso-uscita e disturbo-uscita del sistema tendono ad assumere valori che, teoricamente, danno luogo ad errore nullo. In condizioni di guadagno infinito, infatti, la risposta forzata (a partire da stato iniziale nullo) a qualsiasi ingresso $u(t)$ risulterebbe pari a $K_d u(t)$ mentre la risposta forzata a qualsiasi disturbo $z(t)$ risulterebbe identicamente nulla.

Si osserva dunque che negli schemi a controreazione l'effetto dell'aumento del guadagno della funzione di trasferimento del ramo diretto è quello di ridurre gli errori, sia dal punto di vista del legame ingresso-uscita, sia da quello del legame disturbo-uscita.

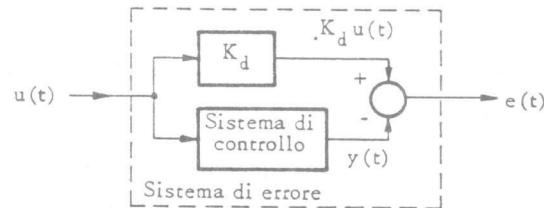
Naturalmente, queste considerazioni hanno un valore puramente indicativo e non possono essere utilizzate senza tenere presente anche altri aspetti che caratterizzano le prestazioni del sistema. Prescindendo dal fatto che difficilmente si può rendere $H(s)$ costantemente uguale a $1/K_d$ (per inevitabili costanti di tempo, le quali però influenzano il comportamento del sistema solo in corrispondenza a funzioni di ingresso variabili nel tempo molto rapidamente) occorre comunque tenere presente che non è possibile elevare indefinitamente il guadagno K_1 senza compromettere la stabilità del sistema. I modi in cui queste due esigenze contrastanti possono essere contemperate saranno ampiamente discussi nel seguito.

III.2 - La risposta in regime permanente di un sistema di controllo ad ingressi polinomiali: caso generale.

In questo paragrafo e nei successivi sarà esaminato il comportamento dei sistemi di controllo dal punto di vista della fedeltà di risposta. L'analisi è basata - come già precisato - sul confronto dell'andamento della risposta $y(t)$ con il corrispondente andamento desiderato $y_d(t)$ o, il che è lo stesso, sulla considerazione dell'errore (III.1) e tende a definire - in situazioni particolari ma significative - le modalità in cui lo scostamento tra $y(t)$ ed $y_d(t)$ può essere valutato.

Poichè ciò che interessa sono in definitiva alcune caratteristiche dell'errore, è conveniente - allo scopo di pervenire ai risultati cercati nel modo più immediato possibile - riguardare quest'ultimo come uscita di un *sistema fittizio*, introducendo il cosiddetto *sistema di errore*. A questo proposito è sufficiente osservare che il primo membro della (III.1) può essere interpretato come uscita di un sistema astratto nel quale venga effettuata la differenza tra l'uscita di un sistema istantaneo, caratterizzato da un guadagno K_d , e l'uscita del sistema di controllo effettivo. In altri termini, l'errore può essere considerato come uscita del sistema avente la struttura a blocchi indicata in fig.III.2. Poichè ciò che interessa, per un prefissato ingresso $u(t)$, è l'evoluzione dell'errore $e(t)$, il primo e più semplice passo da fare nell'analisi della fedeltà di risposta è quello di individuare opportune proprietà del sistema fittizio così definito.

Fig.III.2



Come è noto, lo studio della risposta a regime permanente può venire effettuato direttamente a partire dalle funzioni che caratterizzano il legame forzato ingresso-uscita (la risposta impulsiva, ovvero la funzione di trasferimento). Se si fa riferimento al sistema di errore, occorre allora individuare la risposta impulsiva di errore e, rispettivamente la funzione di trasferimento di errore o meglio, in termini più precisi, esaminare in che modo queste due funzioni sono legate alle omonime funzioni associate al sistema di controllo. In proposito è immediato constatare che la funzione di trasferimento di errore $W_e(s)$ è legata alla funzione di trasferimento del sistema di controllo $W(s)$ dalla relazione:

$$(III.4) \quad W_e(s) = K_d - W(s)$$

e che una relazione corrispondente sussiste per le risposte impulsive.

Ciò premesso, si passerà ora ad illustrare le modalità mediante le quali può essere caratterizzata la fedeltà di risposta in regime permanente, in corrispondenza ad ingressi di forma polinomiale. In proposito, un ruolo fondamentale è svolto dalla *classificazione dei sistemi di controllo in tipi*, che può essere introdotta sulla base della definizione seguente.

Un sistema di controllo (ad un solo ingresso ed una sola uscita) si dice di tipo k se la risposta a regime permanente all'ingresso canonico di ordine k:

$$(III.5) \quad \tilde{u}(t) = \frac{t^k}{k!}$$

differisce dalla funzione:

$$(III.5) \quad \tilde{y}_d(t) = K_d \frac{t^k}{k!}$$

per una quantità costante e diversa da zero.

In taluni casi può risultare conveniente riformulare questa stessa definizione con riferimento ai sistemi di errore. È allora immediato constatare che un sistema di controllo è di tipo k se e solo se l'errore in regime permanente corrispondente all'ingresso canonico di ordine k è pari ad una costante non nulla.

Come è noto, la stabilità asintotica è condizione sufficiente per l'esistenza della risposta a regime permanente ad ingressi del tipo considerato. Si può allora affermare che, per i sistemi di controllo stabili asintoticamente, la definizione precedente è ben posta. Riferendosi alla interpretazione sperimentale del concetto di risposta a regime permanente, si può inoltre osservare che, in un sistema di controllo di tipo k, lo errore corrispondente a un ingresso canonico di ordine k ed a stato iniziale arbitrario tende, al tendere di t all'infinito, ad un valore finito e non nullo.

I risultati relativi allo studio della risposta a regime permanente ad ingressi della forma (III.5) consentono di ottenere immediatamente, in diverse forme, le condizioni cui deve soddisfare un sistema di controllo per essere di tipo k. A questo scopo è conveniente ricordare innanzitutto che, in un generico sistema (a un solo ingresso e una sola uscita) la risposta a regime permanente ad un ingresso della forma (III.5) assume l'espressione:

$$(III.7) \quad y(t) = C_0 \frac{t^k}{k!} + C_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + C_{k-1} t + C_k$$

essendo i coefficienti C_i ($i = 0, 1, \dots, k$) legati alla risposta impulsiva $W(t)$ del sistema dalla relazione:

$$C_i = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^\infty W(t) t^i dt$$

o, il che è lo stesso, alla funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema dalla relazione:

$$C_i = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i W(s)}{ds^i} \right)_{s=0}$$

Ciò posto, è immediato dedurre le condizioni affinché un sistema di controllo sia di tipo k . La formulazione più semplice di queste fa riferimento al caso in cui si prende in esame la funzione di trasferimento di errore $W_e(s)$. Basta infatti sostituire la funzione $W_e(s)$ al posto della generica funzione di trasferimento $W(s)$ nelle formule precedenti e tenere conto delle definizioni date. Si può allora affermare che, definiti i coefficienti:

$$C_{ei} = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i W_e(s)}{ds^i} \right)_{s=0}$$

un sistema di controllo è di tipo k se e solo se nella (III.7), riferita al sistema di errore, sono nulli tutti i termini a secondo membro ad eccezione dell'ultimo e cioè, se e solo se risulta:

$$(III.8) \quad \begin{aligned} C_{e0} &= C_{e1} = \dots = C_{e,k-1} = 0 \\ C_{ek} &\neq 0 \end{aligned}$$

I coefficienti C_{ei} ($i = 0, 1, \dots$) prendono il nome di coefficienti di errore del sistema di controllo. Come è noto, essi caratterizzano lo sviluppo in serie di Taylor della funzione di trasferimento di errore $W_e(s)$ nell'intorno del punto $s = 0$, che assume infatti la forma:

$$(III.9) \quad W_e(s) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{ei} s^i$$

Imponendo a questa le condizioni (III.8) si constata direttamente che un sistema di controllo è di tipo k se e solo se la funzione di trasferimento di errore $W_e(s)$ ha nel punto $s=0$ uno zero di molteplicità k .

Il valore finito dell'errore che si verifica nella risposta a regime permanente di un sistema di controllo di tipo k in corrispondenza ad un ingresso canonico di ordine k è anch'esso immediatamente calcolabile a partire dai coefficienti di errore. Introducendo infatti nella (III.7), riferita al sistema di errore, le condizioni (III.8), si constata che l'errore in questione risulta pari al coefficiente C_{e_k} . Indicando con e_k questo valore finito e costante dell'errore, si può scrivere sinteticamente:

$$(III.10) \quad e_k = C_{e_k}$$

Si ritiene anche utile mettere in evidenza il fatto che in un sistema di controllo di tipo k , se si considera un ingresso canonico di ordine inferiore a k , la risposta in regime permanente presenta errore nullo, mentre se si considera un ingresso canonico di ordine superiore a k , la risposta in regime permanente presenta un errore illimitato. Queste proprietà si dimostrano immediatamente a partire dalle espressioni della risposta in regime permanente e dalle condizioni date sopra. In definitiva, dunque, l'errore nella risposta a regime permanente ad ingressi canonici dipende dal tipo del sistema nel modo indicato nella tabella seguente:

Tipo \ Ingresso	Costante $u(t) = 1$	Rampa $u(t) = t$	Parabola $u(t) = \frac{t^2}{2}$...
0	$e_0 \neq 0$	illimitato	illimitato	...
1	nullo	$e_1 \neq 0$	illimitato	...
2	nullo	nullo	$e_2 \neq 0$...
...

A partire dalle condizioni così dedotte, è possibile formularne altre equivalenti che si riferiscono, anziché alla funzione di trasferimento di errore, alla funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema. Condizioni di questo genere possono essere facilmente ricavate sulla base della relazione (III.4) che sussiste tra le funzioni $W(s)$ e $W_e(s)$. Così, ad esempio, se si assume che $W(s)$ sia assegnata sotto forma di rapporto di polinomi, mediante un'espressione del tipo:

$$(III.11) \quad W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

è immediato osservare che:

$$(III.12) \quad W_e(s) = \frac{(K_d a_0 - b_0) + (K_d a_1 - b_1)s + \dots + (K_d a_{n-1} - b_{n-1})s^{n-1} + K_d s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

Imponendo la condizione che $W_e(s)$ abbia nel punto $s=0$ uno zero di molteplicità k , si deduce facilmente che un sistema di controllo è di tipo k se e solo se i coefficienti a_i e b_i che caratterizzano la funzione di trasferimento ingresso-uscita soddisfano alle condizioni:

$$(III.13) \quad \begin{aligned} \frac{b_0}{a_0} &= \frac{b_1}{a_1} = \dots = \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} = K_d \\ \frac{b_k}{a_k} &\neq K_d \end{aligned}$$

L'errore finito che si verifica in regime permanente in un sistema di tipo k in corrispondenza ad un ingresso di ordine k , espresso in funzione dei coefficienti a_i e b_i , vale:

$$(III.14) \quad e_k = \frac{K_d a_k - b_k}{a_0}$$

Per dedurre questa espressione si potrebbe utilizzare la (III.10) e calcolare il coefficiente C_k effettuando la k -esima derivata della (III.12), ponendo in essa $s=0$ e tenendo presenti le (III.13). È però notevolmente più pratico osservare che in un sistema di tipo k la $W_e(s)$ ha in $s=0$ uno zero di molteplicità k , e quindi, vale per essa lo sviluppo:

$$\frac{1}{s^k} W_e(s) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{e,k+i} s^i$$

da cui segue:

$$e_k = C_{e,k} = \left[\frac{1}{s^k} W_e(s) \right]_{s=0}$$

Poichè, per le (III.13), risulta:

$$\frac{1}{s^k} W_e(s) = \frac{(K_d a_k - b_k) + (K_d a_{k+1} - b_{k+1}) s + \dots + K_d s^{n-k}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

è immediato provare la (III.14).

Quando la $W(s)$, supposta priva di poli nell'origine, è assegnata attraverso poli e zeri e cioè nella forma:

$$(III.15) \quad W(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K \frac{\prod_{i=1}^n (-p_i)}{\prod_{i=1}^m (-z_i)} \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

si tratta di esprimere le condizioni di appartenenza al tipo k delle espressioni degli errori in funzione del guadagno K , degli zeri e dei poli.

A questo scopo è utile osservare che, con riferimento all'espressione (III.15) di $W(s)$, dalla (III.9) e dalla (III.4) segue:

$$(III.16) \quad C_{e0} = [W_e(s)]_{s=0} = K_d - K$$

Si può allora affermare che un sistema di controllo è di tipo 0 se il guadagno della funzione di trasferimento ingresso-uscita è diverso dalla costante K_d ; in caso contrario è almeno di tipo 1. Per quanto riguarda il coefficiente C_{e1} , si può tenere presente che, partendo dalle relazioni:

$$\frac{d W(s)}{ds} = W(s) \frac{d \ln W(s)}{ds}$$

e:

$$\ln W(s) = \ln K' + \sum_{i=1}^m \ln (s - z_i) - \sum_{i=1}^n \ln (s - p_i)$$

si può scrivere che:

$$\frac{d W(s)}{ds} = W(s) \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} \right]$$

Ricordando allora ancora le (III.9) e (III.4) si ha:

$$(III.17) \quad C_{e1} = \left[\frac{d W_e(s)}{ds} \right]_{s=0} = K \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \right]$$

Si può allora affermare che un sistema di controllo è di tipo 1 se il guadagno K della funzione di trasferimento ingresso-uscita ed i suoi poli p_i e zeri z_i soddisfano le condizioni:

$$K = K_d$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} \neq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$$

Se poi il segno di uguaglianza vale anche nella seconda, il sistema è almeno di tipo 2.

Ovviamente, grazie alla (III.10), le espressioni precedenti sono immediatamente utilizzabili per il calcolo degli errori.

Il procedimento così descritto può essere ripetuto per trovare le condizioni che caratterizzano i sistemi di tipo superiore, dando luogo tuttavia ad espressioni di complessità crescente.

III.3 - La risposta a regime permanente in un sistema di controllo a ingressi polinomiali: caso dei sistemi a contoreazione.

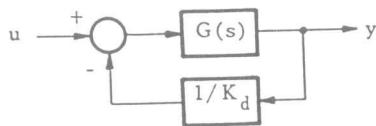
E' stato già osservato nel Cap.II che una delle fasi essenziali dello studio dei sistemi di controllo è quella in cui vengono individuate le corrispondenze tra le caratteristiche della risposta del sistema e le caratteristiche degli elementi che lo compongono. In questo paragrafo si vuole esaminare, da questo punto di vista, che tipo di corrispondenza sussiste tra le caratteristiche della risposta a regime permanente ad ingressi canonici e i parametri che caratterizzano le funzioni di trasferimento associate ai singoli componenti del sistema di controllo.

A questo scopo è necessario precisare dapprima il tipo di schema di controllo al quale ci si riferisce. In accordo con quanto illustrato nel par.1, si considera innanzitutto il caso di un sistema a contoreazione nel quale la funzione di trasferimento del ramo di reazione possa essere assimilata ad una costante pari ad $1/K_d$. In questa situazione, è molto semplice stabilire una precisa corrispondenza tra le caratteristiche della risposta a regime permanente ed i parametri che caratterizzano la funzione di trasferimento $G(s)$ del ramo diretto (cfr. fig.III.3).

L'analisi svolta nel paragrafo precedente ha messo in evidenza il fatto che la risposta a regime permanente ad ingressi canonici può venire individuata determinando il tipo del sistema e il valore dell'errore (finito e non nullo) nella risposta del sistema ad un ingresso canonico

di ordine corrispondente. Si tratta allora di esaminare come queste due caratteristiche sono legate alla funzione di trasferimento $G(s)$.

Fig.III.3



Tenendo presente che, per il sistema di controllo considerato, si ha:

$$(III.18) \quad W(s) = \frac{G(s)}{1 + \frac{G(s)}{K_d}}$$

ne risulta, per la funzione di trasferimento dell'errore:

$$(III.19) \quad W_e(s) = \frac{K_d^2}{K_d + G(s)}$$

Per individuare il tipo del sistema conviene riferirsi alla formulazione secondo la quale affinchè un sistema sia di tipo k occorre e basta che la funzione di trasferimento di errore abbia nel punto $s=0$ uno zero di molteplicità k . Osservando che, nel caso in esame, gli zeri di $W_e(s)$ coincidono con i poli di $G(s)$, si può immediatamente concludere che un sistema di controllo avente la struttura indicata in fig.III.3 è di tipo k se e solo se la funzione di trasferimento del ramo diretto $G(s)$ ha un polo di molteplicità k nel punto $s=0$.

Questa formulazione delle condizioni cui un sistema deve soddisfare per essere di tipo k , è la più diffusa ed è anche la più importante dal punto di vista pratico. Ricordando, infatti, che un polo nell'origine (cioè la presenza di un fattore $1/s$) corrisponde nel dominio del tempo ad una integrazione, la condizione sopra citata corrisponde alla presenza di k integratori in cascata nel ramo diretto.

Per individuare il valore dell'errore nella risposta a regime permanente di un sistema di tipo k ad un ingresso canonico di ordine k , è utile tenere presente che per tutti i sistemi di tipo k (e solo per essi) è valida l'espressione (III.10).

Si deduce allora dalla (III.19) che, se il sistema considerato è di tipo 0 (se cioè $G(s)$ non ha poli nell'origine), risulta:

$$(III.20) \quad e_0 = [W_e(s)]_{s=0} = \frac{K_d^2}{K_d + [G(s)]_{s=0}} = \frac{K_d^2}{K_d + K_G}$$

mentre, se il sistema è di tipo k (se cioè $G(s)$ ha un polo di molteplicità k nell'origine):

$$(III.21) \quad e_k = \left[\frac{1}{s^k} W_e(s) \right]_{s=0} = \frac{K_d^2}{[s^k G(s)]_{s=0}} = \frac{K_d^2}{K_G}$$

In tutti i casi si è indicata con K_G la costante che caratterizza il guadagno della funzione $G(s)$.

Queste formule mettono in evidenza la grandissima importanza che il guadagno K_G della funzione $G(s)$ riveste ai fini della determinazione dell'errore (a parità di tipo) a regime permanente. Si constata infatti che l'errore in questione tende a zero al tendere di K_G all'infinito. La costante K_G può venire a volte indicata in modi diversi, con riferimento ad una prassi largamente diffusa a proposito dei servomeccanismi. In questo ambito, se la variabile controllata è una posizione, i regimi relativi ad ingressi canonici di ordine 0, 1 e 2 corrispondono, rispettivamente, a regimi di posizione costante, velocità costante, accelerazione costante. Allora, se il sistema è di tipo 0, 1 o 2, la risposta in regime permanente presenta errore finito e non nullo (errore di posizione) in corrispondenza a regimi di posizione costante, velocità costante o accelerazione costante. I valori degli errori sono quelli forniti dalla (III.20) o dalla (III.21), ma la costante K_G viene rispettivamente chiamata, nei tre casi, costante di posizione, di velocità o di accelerazione e indicata con K_p , K_v o K_a .

Prima di procedere oltre nell'analisi, si ritiene interessante svolgere alcune considerazioni di carattere intuitivo sul ruolo delle azioni integratrici nella funzione $G(s)$ e sul guadagno K_G della funzione stessa. A questo proposito, si deve osservare che le azioni integratrici corrispondenti possono essere dovute o al comportamento dei componenti fondamentali del sistema di controllo ovvero a quello di componenti introdotti proprio per migliorare il comportamento a regime (aumentando l'indice k del tipo cui appartiene il sistema). Il primo caso si verifica, ad esempio, in tutti i servomeccanismi nei quali il processo controllato è costituito da un motore agente su un carico meccanico privo di resistenze elastiche e la grandezza controllata è una posizione. In questi casi la relazione tra la grandezza meccanica agente $m(t)$ (la coppia motrice) e l'uscita $y(t)$ (la posizione che si vuole controllare) si può schematizzare, nell'ambito lineare, con una equazione del tipo:

$$a_2 \ddot{y}(t) = m(t) - a_1 \dot{y}(t)$$

ed a questa corrisponde la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s(a_1 + a_2 s)}$$

che presenta un polo nell'origine. Il sistema di controllo corrispondente è allora di tipo 1. Se tuttavia lo stesso motore è impiegato in un controllo di velocità, occorre considerare una relazione diversa tra grandezza meccanica agente ed uscita, in quanto questa ultima non è più una posizione, bensì la derivata di questa rispetto al tempo. Si deve considerare cioè la relazione:

$$a_2 y(t) = m(t) - a_1 y(t)$$

alla quale corrisponde la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{a_1 + a_2 s}$$

che non ha poli nell'origine. Di conseguenza il sistema di controllo, se non si hanno azioni integratrici opportunamente predisposte, è di tipo 0. Una ulteriore chiarificazione della differenza tra i due casi può venire dal confronto dei due schemi di fig.III.4.



Fig.III.4

Si tratta di due schemi astratti che rappresentano lo stesso oggetto fisico (il motore con il suo carico meccanico), nel quale sono messe in evidenza due diverse variabili di uscita (la velocità e la posizione).

Il caso del controllo di posizione richiede, per definizione, che la reazione sia effettuata a partire da una misura della posizione, mentre in quello del controllo di velocità la reazione si sviluppa a partire da una misura di velocità. Il legame tra velocità e posizione è, ovviamente, di natura integrale e questa azione è compresa o no nella funzione di trasferimento del processo a seconda che la reazione sia prelevata sulla posizione o sulla velocità.

Le osservazioni precedenti trovano immediato riscontro anche in una analisi di tipo euristico⁽¹⁾. In un servomeccanismo di posizione di tipo 1, affinché si mantenga un regime di posizione costante, il motore non deve ricevere alcuna sollecitazione dai dispositivi che lo precedono (nel ramo diretto) ed a questo corrisponde, in condizioni di equilibrio, l'annullarsi della differenza tra la grandezza di riferimento e quel-

(1) Le considerazioni seguenti sono tratte quasi integralmente da: A. Lepschy, A. Ruberti, *Lezioni di Controlli Automatici*, Siderea (Roma, 1965).

la proveniente dal ramo di reazione. Si ha allora un errore nullo. Nel caso invece di un asservimento di velocità quando il regime considerato è un regime di velocità costante, questo può essere mantenuto solo se il motore è alimentato e cioè se la differenza tra valore desiderato e valore effettivo della grandezza controllata ha un valore non nullo e quindi l'errore è anch'esso non nullo. L'errore si può ridurre aumentando il guadagno della catena di amplificatori interposta fra il segnale agente ed il motore. L'asservimento può essere reso di tipo 1 inserendo nel ramo un integratore (eventualmente in parallelo con un elemento proporzionale, in modo da far agire sugli elementi successivi la combinazione del segnale agente e del suo integrale con il che si conserva la presenza del polo nell'origine ma si sviluppano, come si vedrà, azioni favorevoli da altri punti di vista).

Sempre sul piano intuitivo l'effetto dei poli nell'origine può essere giustificato tenendo conto che il comportamento in regime permanente nel dominio del tempo corrisponde, per il teorema del valore finale, a quello alle basse frequenze nel dominio di ω e che l'azione integratrice (che corrisponde a dividere per $j\omega$) porta, alle frequenze basse, ad un aumento di guadagno (che diviene addirittura infinito a frequenza nulla). L'aumento di guadagno del ramo diretto era stato d'altra parte già considerato come positivo ai fini del miglioramento della fedeltà di risposta; realizzandolo attraverso una integrazione, questo miglioramento viene conseguito nella zona delle basse frequenze e quindi interessa proprio quegli aspetti della fedeltà di risposta dei quali si tiene conto appunto nello studio della precisione in regime permanente.

Come già osservato in chiusura del par.1, nel considerare le grandezze che definiscono la fedeltà di risposta, è importante individuare anche il tipo di relazioni che sussistono con gli altri elementi che contribuiscono a definire le prestazioni di un sistema di controllo. Da questo punto di vista è interessante esaminare l'influenza di poli nell'origine della funzione $G(s)$ sulla stabilità di un sistema a controreazione.

In proposito si può osservare anzitutto che il sistema non reazionato con un polo semplice all'origine (ed ammesso che non vi siano altri poli con parte reale positiva) è al limite di stabilità e con un polo di molteplicità maggiore o uguale a 2 è instabile; appare intuitivo quindi che la presenza o la introduzione di azioni integratrici nel ramo diretto, rendendo instabile il sistema non reazionato, rende più problematica la stabilità del sistema complessivo. Di questa conclusione intuitiva ci si può rendere anche conto pensando alla applicazione del criterio di Nyquist per la verifica della stabilità. Facendo riferimento inizialmente a sistemi la cui $G(s)$ ha solo poli (con parte reale negativa o nulla) e guadagno positivo, si constata facilmente che un sistema di tipo 0, se la $G(s)$ ha uno o due poli, è senz'altro stabile mentre se essa ha tre o più poli (curva a di fig.III.5) è stabile solo al di sotto di certi valori del guadagno; un sistema di tipo 1, se la $G(s)$ ha un solo altro polo (oltre a quello nell'origine), è stabile ma se essa ne ha due o più, lo è solo al di sotto di certi valori del guadagno (curva b di fig.III.5); infine un sistema di tipo 2 è al limite di stabilità se la $G(s)$ non ha altri poli oltre a quello doppio nell'origine ed è intrensicamente instabile se la $G(s)$ ha anche un solo altro polo (curva c di fig.III.5).

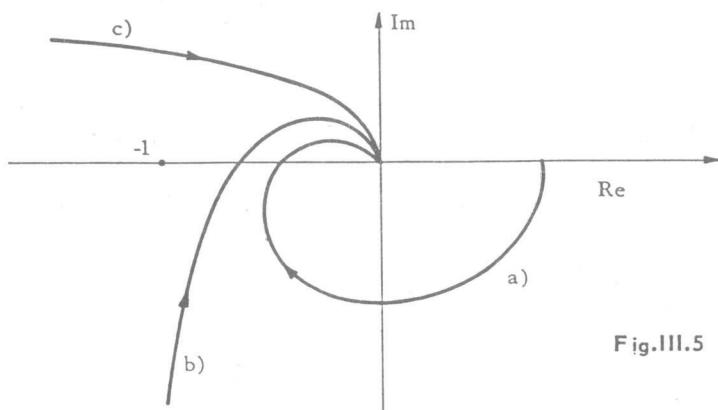


Fig.III.5

Naturalmente se la $G(s)$ ha anche degli zeri (spesso introdotti volutamente proprio in rapporto a problemi di stabilizzazione) la situazione è diversa e possono benissimo essere stabili sistemi di tipo 2 (come quello cui $G(j\omega)$ è rappresentata dalla curva a di fig.III.6) o di tipo 3 (curva b di fig.III.6) o anche di tipo più elevato.

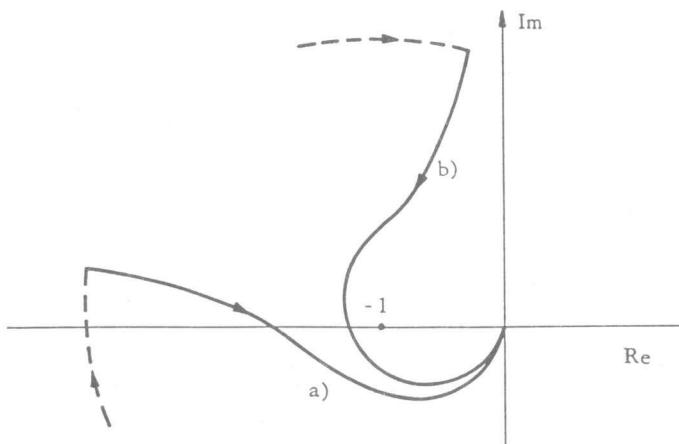


Fig.III.6

Non vi è difficoltà ad estendere il tipo di analisi qui svolta al caso in cui la funzione di trasferimento del ramo di reazione sia diversa da $1/K_d$ (ad esempio perchè non sono trascurabili gli effetti di fenomeni dinamici nei dispositivi che effettuano la misura della grandezza controllata). Si tratta ancora di particolarizzare i risultati stabiliti nella sezione precedente e che consentono di individuare il tipo del sistema e di calcolare i valori dell'errore nella risposta a regime permanente. Si possono in tal modo dedurre condizioni ed espressioni di volta in volta legate alle particolari forme nelle quali si assume vengono assegnate le funzioni di trasferimento che caratterizzano il sistema (cfr. Probl. III.1).

III.4 - La risposta in regime permanente di un sistema di controllo a contoreazione a disturbi costanti.

Lo studio della risposta in regime permanente a disturbi di tipo polinominale non è affatto differente, da un punto di vista di principio, da quella svolta per la risposta agli ingressi. Si tratta, in questo caso, di particolarizzare i risultati generali richiamati all'inizio del par.2 al caso in cui in luogo di una generica funzione di trasferimento $W(s)$ si considera la funzione di trasferimento $W_z(s)$ di un particolare disturbo.

Usualmente, piuttosto che disturbi polinomiali di ordine generico, si considerano soltanto disturbi costanti (che corrispondono alla situazione che meglio si presta alla schematizzazione della maggioranza dei casi concreti) e si distinguono i sistemi di controllo in due categorie, a seconda che la risposta a regime permanente a disturbi di questo tipo sia o no diversa da zero. Si dice allora che un sistema di controllo è statico (ovvero, astatico) rispetto a un determinato disturbo se la risposta a regime permanente corrispondente al caso in cui il disturbo ha valore costante è diversa da zero (ovvero, è nulla).

Questa definizione permette chiaramente di classificare i sistemi a seconda che essi abbiano o no la proprietà di annullare, al tendere di t all'infinito, l'effetto prodotto sull'evoluzione della grandezza controllata da un disturbo di ampiezza costante insorto in un determinato istante di tempo, peraltro arbitrario.

Per stabilire le condizioni cui deve soddisfare il sistema di controllo per essere statico o astatico, basta osservare che la risposta in regime permanente a un disturbo costante di ampiezza unitaria vale:

$$e_z = [W_z(s)]_{s=0}$$

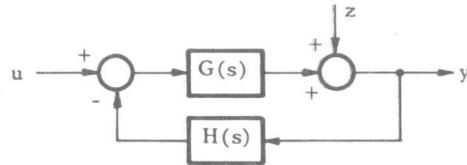
Si può allora concludere che un sistema di controllo è astatico rispetto ad un disturbo se la funzione di trasferimento di questo disturbo $W_z(s)$ ha uno zero nel punto $s=0$. In caso contrario il sistema è statico ed il valore di $W_z(s)$ per $s=0$ è pari al valore della risposta in regime permanente ad un disturbo costante di ampiezza unitaria.

Passando ad esaminare le corrispondenze tra le proprietà della risposta ai disturbi e le caratteristiche degli elementi che compongono il sistema di controllo, occorre - come già avvenuto per il caso della risposta ad ingressi canonici - precisare il tipo di schema di controllo al quale ci si riferisce. In questo caso è opportuno esaminare diverse situazioni, che schematizzano altrettante modalità di intervento dei disturbi.

Si considererà innanzitutto il caso di un sistema a contoreazione nel quale il disturbo si somma all'uscita del processo controllato e che è descrivibile con lo schema a blocchi di fig.III.7. La funzione di trasferimento disturbo-uscita assume allora l'espressione:

$$(III.22) \quad W_z(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

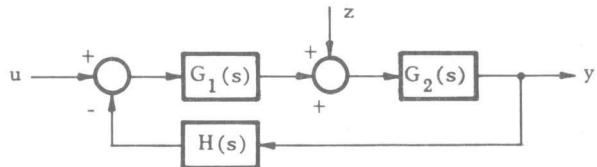
Fig.III.7



Utilizzando il criterio stabilito sopra si può affermare che il sistema è astatico rispetto al disturbo se e solo se una delle due funzioni di trasferimento, $G(s)$ oppure $H(s)$, ha un polo nel punto $s=0$. Il caso che $H(s)$ abbia un polo nell'origine deve essere escluso, poiché in questo caso la funzione di trasferimento ingresso-uscita avrebbe uno zero nell'origine e questo non è certamente ammissibile se si assume che il sistema di controllo sia di tipo proporzionale. Si conclude allora che *il sistema di controllo è astatico rispetto ad un disturbo additivo sull'uscita se e solo se la funzione di trasferimento del ramo diretto $G(s)$ ha un polo nel punto $s=0$* . Se ciò non è verificato, un disturbo costante di ampiezza unitaria dà luogo a una risposta a regime di ampiezza:

$$(III.23) \quad y_z = \frac{1}{1 + [G(s)H(s)]_{s=0}} = \frac{1}{1 + K_G K_H}$$

Fig.III.8



Nel caso in cui il disturbo si somma ad una variabile intermedia del ramo diretto, descrivibile con lo schema di fig.III.8, la funzione di trasferimento disturbo-uscita assume l'espressione:

$$(III.24) \quad W_z(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

Utilizzando ancora il criterio generale di astatismo che fa riferimento alla presenza di uno zero in $W_z(s)$ nel punto $s = 0$, vanno esclusi il caso in cui $H(s)$ ha un polo nell'origine e quello in cui $G_2(s)$ ha uno zero nell'origine, perché entrambi non compatibili con il carattere proporzionale del sistema di controllo. Si conclude allora che il sistema di controllo è astatico rispetto ad un disturbo additivo su una variabile intermedia del ramo diretto se e solo se la funzione di trasferimento $G_1(s)$ della parte di ramo che precede il punto di accesso del disturbo ha un polo nel punto $s = 0$. Se ciò non è verificato, un disturbo costante di ampiezza unitaria dà luogo ad una risposta a regime di ampiezza:

$$(III.25') \quad y_z = \frac{K_{G_2}}{1 + K_{G_1} K_{G_2} K_H}$$

se $G_2(s)$ non ha poli nell'origine, oppure:

$$(III.25'') \quad y_z = 1/K_{G_1} K_H$$

se $G_2(s)$ ha poli nell'origine.

Così come per la risposta ad ingressi polinomiali, le formule date qui per il calcolo dell'errore mettono in luce la notevole importanza del coefficiente di guadagno K_G (per lo schema di fig.III.7) o K_{G_1} (per lo schema di fig.III.8) della funzione di trasferimento di quella parte di ramo diretto che precede il punto di accesso del disturbo. Il valore della risposta a un disturbo tende infatti a zero al tendere di K_G (o K_{G_1}) all'infinito.

Da un punto di vista intuitivo, l'interpretazione dei risultati stabiliti sopra è piuttosto immediata. Un sistema di controllo è astatico quando i dispositivi che precedono il punto di accesso del disturbo sono in grado di esplicare un'azione uguale opposta a quella del disturbo stesso e quando ciò avviene in corrispondenza a valore nullo della grandezza agente. Se tali dispositivi sono in grado di esercitare un'azione integratrice, l'uscita di questi oppone al disturbo una grandezza che è pari all'integrale definito della grandezza agente. La condizione di equilibrio si raggiunge allora quando il disturbo, che è costante, è compensato da un valore costante dell'integrale della grandezza agente e cioè solo quando quest'ultima si è definitivamente annullata.

Se non vi è azione integratrice, la compensazione nel disturbo può avvenire solo in presenza di un valore non nullo della grandezza agente; questo può essere a sua volta ridotto, ferma restando l'azione compensatrice, elevando il guadagno dei dispositivi che precedono il punto di accesso del disturbo.

La necessità che l'azione integratrice preceda il punto di accesso del disturbo può rendere priva di interesse l'eventuale presenza di azioni integratrici intrinseche del processo, del tipo di quelle già esaminate nei servomeccanismi di posizione. Così,

ad esempio, se si considera il caso di un disturbo di coppia (o di forza) agente su di un motore con carico meccanico del tipo descritto nel paragrafo precedente, la situazione si presenta come indicato in fig.III.9.

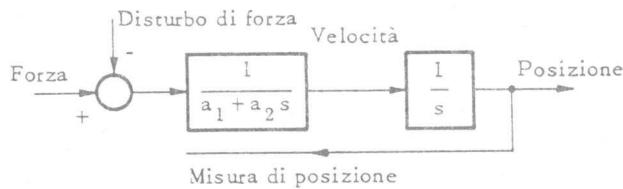
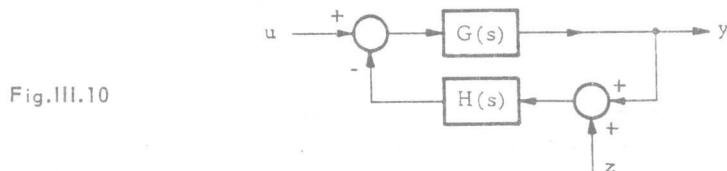


Fig.III.9

Nessun beneficio può essere tratto, ai fini dell'astatismo rispetto al disturbo, dal polo nell'origine presente nella funzione di trasferimento del motore. Per rendere il sistema astatico occorre introdurre un dispositivo apposito, a monte del punto di accesso del disturbo, in grado di esercitare un'azione integratrice. Si noti tuttavia che, operando in questo modo, si vengono ad attribuire alla funzione di trasferimento del ramo diretto due poli nell'origine, con conseguenze sul problema della stabilizzazione del tipo di quelle già viste alla fine del paragrafo precedente.

Per concludere, si ritiene utile esaminare il caso in cui il disturbo agisce sul ramo di reazione, nel modo indicato nello schema di figura III.10.



In questo caso la funzione di trasferimento del disturbo vale:

$$(III.26) \quad W_z(s) = \frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Poichè si devono escludere sia il caso in cui $G(s)$ ha uno zero nell'origine (per i motivi visti in precedenza) sia quello in cui $H(s)$ ha uno zero nell'origine (corrispondente ad un'azione derivatrice nel ramo di reazione, tale da annullare l'effetto della controreazione stessa quando la grandezza controllata è costante), si conclude che in una situazio-

ne di questo genere il sistema non è astatico. La risposta a un disturbo costante di ampiezza unitaria vale allora:

$$(III.27') \quad y_z = \frac{-K_G K_H}{1 + K_G K_H}$$

se $G(s)$ non ha poli nell'origine, oppure,

$$(III.27'') \quad y_z = -1$$

se $G(s)$ ha poli nell'origine.

In entrambi i casi le caratteristiche della risposta al disturbo appaiono sostanzialmente opposte a quelle relative alla risposta a un disturbo agente sull'uscita nel ramo diretto. Quanto più il sistema riduce l'effetto di disturbi costanti agenti nel ramo diretto (ovverosia, quanto più è elevato K_G), tanto meno i disturbi costanti agenti nel ramo di reazione vengono attenuati; al limite, se il sistema annulla l'effetto di disturbi costanti agenti nel ramo diretto, i disturbi costanti agenti nel ramo di reazione si trasmettono inalterati sull'uscita. Nel confronto, peraltro, si è portati a dare maggior importanza al caso dei disturbi agenti sul ramo diretto e questo sia perché le azioni che consentono di ridurre o annullare questi disturbi assicurano anche un miglioramento delle caratteristiche della risposta ingresso-uscita, sia perché per la realizzazione dei dispositivi che costituiscono il ramo di reazione sono in genere disponibili soluzioni tecniche che assicurano una adeguata protezione da disturbi (soprattutto per il fatto che i livelli delle potenze in gioco sono, nella maggioranza dei dispositivi di misura, trascurabili).

III.5 - La risposta a regime permanente di un sistema di controllo a contoreazione a ingressi o disturbi sinusoidali.

Un'altra classe di ingressi per la quale il calcolo della risposta a regime permanente può essere effettuato in modo molto semplice è quella delle funzioni sinusoidali. È noto infatti che in un generico sistema (a un solo ingresso e una sola uscita) la risposta in regime permanente ad un ingresso della forma:

$$(III.28) \quad \tilde{u}(t) = \sin \tilde{\omega} t$$

se esiste assume l'espressione:

$$(III.29) \quad \tilde{y}(t) = \hat{M}(\tilde{\omega}) \sin(\tilde{\omega} t + \hat{\phi}(\tilde{\omega}))$$

essendo $\hat{M}(\tilde{\omega})$ e $\hat{\varphi}(\tilde{\omega})$ i valori del modulo e della fase della risposta armonica $W(j\tilde{\omega})$ del sistema, valutata in corrispondenza al valore $\tilde{\omega}$ della pulsazione. È anche ben noto che la stabilità asintotica è condizione sufficiente per l'esistenza della risposta in regime permanente ad ingressi del tipo predetto.

Per caratterizzare la risposta in regime permanente di un sistema di controllo ad ingressi o disturbi sinuosidali è allora sufficiente limitarsi a considerare le corrispondenti risposte armoniche. Per uno schema a contoreazione del tipo indicato in fig.III.3 la risposta armonica ingresso-uscita assume l'espressione (cfr. (III.18)):

$$(III.30) \quad W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + \frac{G(j\omega)}{K_d}}$$

e la risposta armonica ingresso-errore l'espressione (cfr. (III.19))

$$(III.31) \quad W_e(j\omega) = \frac{K_d^2}{K_d + G(j\omega)}$$

Si può quindi, in definitiva, affermare che la risposta a regime permanente ad un ingresso del tipo (III.28) assume la forma:

$$\tilde{y}(t) = M(\tilde{\omega}) \sin(\tilde{\omega}t + \varphi(\tilde{\omega}))$$

nella quale $M_e(\tilde{\omega})$ e $\varphi_e(\tilde{\omega})$ sono i valori del modulo e della fase della funzione (III.30), calcolata per $\omega = \tilde{\omega}$, mentre il corrispondente errore assume la forma:

$$\tilde{e}(t) = M_e(\tilde{\omega}) \sin(\tilde{\omega}t + \varphi_e(\tilde{\omega}))$$

nella quale $M(\tilde{\omega})$ e $\varphi(\tilde{\omega})$ sono i valori del modulo e della fase della funzione (III.31), calcolata per $\omega = \tilde{\omega}$.

Le due espressioni così indicate possono essere usate indifferentemente per caratterizzare la fedeltà di risposta del sistema ad ingressi sinusoidali, a seconda del punto di vista che di volta in volta è più conveniente adottare.

In luogo dell'espressione completa di $\tilde{e}(t)$, è abituale, trattandosi di funzione sinusoidale, considerare la sola ampiezza. Da questo punto di vista, si può allora asserire che, in un sistema a contoreazione (del tipo indicato in fig.III.3), l'errore in regime permanente corrispondente all'ingresso $\tilde{u}(t) = \sin \tilde{\omega} t$ soddisfa la limitazione

$$(III.32) \quad |\tilde{e}(t)| \leq \left| \frac{K_d^2}{K_d + G(j\tilde{\omega})} \right|$$

Si noti che il primo membro è il valore assoluto di un numero reale mentre il secondo membro è il modulo di un numero complesso.

E' utile osservare la forte analogia della (III.32) con la (III.20), dedotta per ingressi costanti. In effetti, se $G(s)$ non ha poli nell'origine, il secondo membro della (III.32) si riduce - per $\omega = 0$ - al secondo membro della (III.20). Ciò corrisponde, da un punto di vista interpretativo, al fatto che una funzione costante può essere pensata come limite di una successione di funzioni sinusoidali di frequenza decrescente. La formula (III.32) mette in evidenza il fatto che l'errore nella risposta a regime permanente di un sistema a contoreazione ad un ingresso sinusoidale di pulsazione $\tilde{\omega}$ è, in ampiezza, limitato da una quantità che tende a zero al crescere del modulo della risposta armonica $G(j\omega)$ del ramo diretto, valutata in corrispondenza alla pulsazione $\omega = \tilde{\omega}$.

Può essere interessante analizzare ulteriormente le implicazioni della (III.32) servendosi di una rappresentazione grafica di $G(j\omega)$. In proposito, si riscriva la (III.32) stessa nella forma:

$$\frac{|\tilde{e}(t)|}{K_d} \leq \frac{1}{\left| 1 + \frac{G(j\tilde{\omega})}{K_d} \right|}$$

o, il che è lo stesso, nella forma:

$$(III.33) \quad \frac{|\tilde{e}(t)|}{K_d} \leq \frac{1}{|1 + F(j\tilde{\omega})|}$$

avendo indicato con $F(j\omega)$ la risposta armonica del sistema non reazionato:

$$(III.34) \quad F(j\omega) = \frac{1}{K_d} G(j\omega)$$

Si consideri inoltre il diagramma di Nyquist della funzione $F(j\omega)$ (cfr. fig.III.11). Con semplici considerazioni geometriche è immediato constatare che il numero complesso $1 + F(j\tilde{\omega})$ si rappresenta con il vettore orientato AB (essendo B il punto del diagramma di $F(j\omega)$ corrispondente alla pulsazione $\tilde{\omega}$). Si può allora concludere che l'errore a regime permanente all'ingresso $\tilde{u}(t) = \sin \tilde{\omega} t$, rapportato al coefficiente di proporzionalità K_d , è limitato, in ampiezza, da una quantità che è pari all'inverso del modulo del vettore che congiunge, sul piano complesso, il punto -1 con il punto del diagramma di $F(j\omega)$ corrispondente alla pulsazione $\tilde{\omega}$.

Questa interpretazione grafica consente di esaminare immediatamente, in modo qualitativo e quantitativo, le proprietà dei sistemi a controlloreazione dal punto di vista della fedeltà di risposta a ingressi sinusoidali. Essa permette soprattutto di analizzare, una volta fissata la funzione $F(j\omega)$, in che modo l'errore dipende dalla pulsazione $\tilde{\omega}$ della funzione di ingresso.

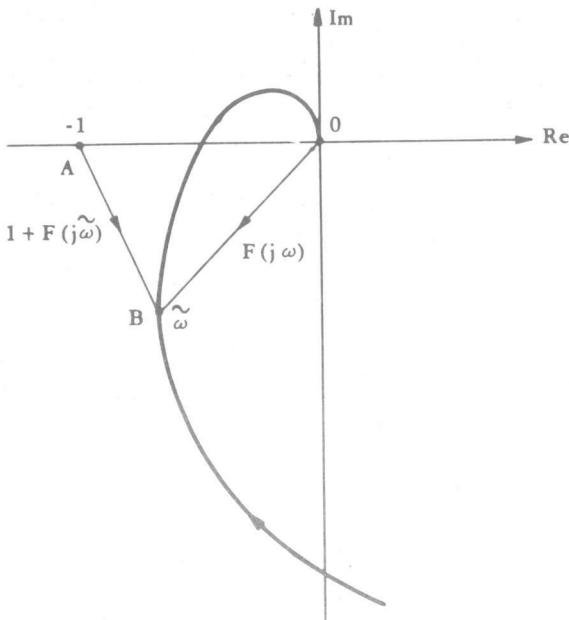


Fig.III.11

La costruzione indicata può essere utilizzata, ad esempio, per giudicare, dal punto di vista della risposta ad ingressi sinusoidali, le prestazioni di un sistema di controllo a controlloreazione nel quale la funzione di trasferimento del ramo diretto presenta un polo nell'origine. Questa caratteristica, come si è visto nel par.III.3, rende il sistema di tipo 1 ed annulla l'errore in regime permanente per ingressi costanti.

Si consideri un sistema del tipo indicato in fig.III.3 e sia:

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

Il corrispondente diagramma di Nyquist della risposta armonica del sistema non reazionato $F(j\omega)$, in ipotesi di stabilità asintotica (così come occorre che sia) assume un andamento del tipo di quello indicato in fig.III.12.

Si supponga ora di voler esaminare per quali pulsazioni l'errore in regime permanente ad ingressi sinusoidali risulta inferiore ad una quantità prefissata \bar{e} . Grazie

alla (III.33), si tratta di verificare quali valori di ω rendono soddisfatta la diseguaglianza:

$$\frac{1}{|1 + F(j\omega)|} \leq \frac{\bar{e}}{K_d}$$

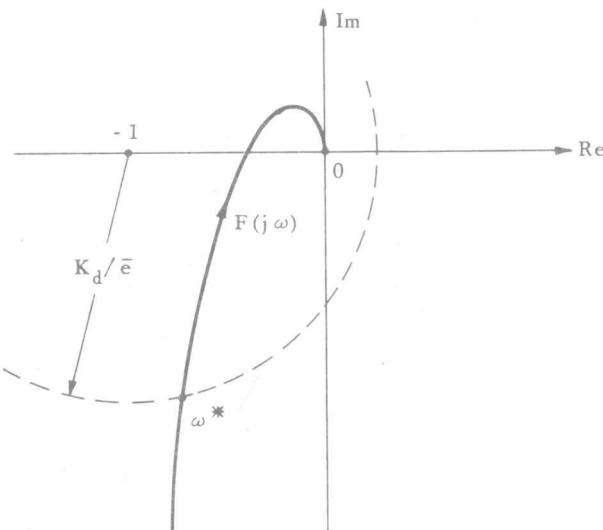


Fig.III.12

E` sufficiente, allora, tracciare un cerchio avente centro nel punto -1 e raggio K_d/\bar{e} ed individuare per quali valori di ω il vettore $F(j\omega)$ è esterno a questo cerchio. Questi valori sono tali da rendere soddisfatta la diseguaglianza:

$$|1 + F(j\omega)| \geq \frac{K_d}{\bar{e}}$$

e quindi coincidono con le pulsazioni cercate. Si noti che, con riferimento alla fig.III.12, avendo $G(s)$ un polo nell'origine, l'errore in esame è inferiore a \bar{e} per tutte le ω comprese tra 0 e ω^* .

La caratterizzazione della risposta armonica a disturbi sinusoidali è sostanzialmente analoga. Si tratta, in questo caso, di precisare lo schema al quale ci si riferisce e calcolare le corrispondenti risposte armoniche di interesse. Per lo schema di fig.III.7 si ha:

$$(III.35) \quad W_z(j\omega) = \frac{1}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

e da questa espressione è immediato dedurre, per la risposta a regime permanente ad un disturbo di pulsazione $\tilde{\omega}$, la limitazione:

$$(III.36) \quad |\tilde{y}_z(t)| \leq \frac{1}{|1 + G(j\tilde{\omega})H(j\tilde{\omega})|}$$

Si noti anche in questo caso l'analogia con la (III.23) (per la quale vale una interpretazione del tutto simile a quella data sopra a proposito della risposta ingresso-uscita).

Allo stesso modo si possono caratterizzare le risposte al disturbo nei casi in cui lo schema si presenta come in fig.III.8 o in fig.III.10. I calcoli relativi sono immediati e si lasciano, per esercizio, al lettore.

III.6 - La risposta transitoria di un sistema di controllo a contro-reazione a ingressi e disturbi a gradino.

Si è già indicato nel par.III.1 che nello studio della risposta transitoria di un sistema di controllo è abituale prendere in considerazione soltanto condizioni di eccitazione di tipo particolare, quali quelle corrispondenti ad *ingresso costante e stato iniziale nullo*. Sollecitazioni di questo genere prendono il nome di *sollecitazioni a gradino*.

L'uso di questa denominazione è largamente diffuso e si ricollega all'interpretazione sperimentale dei concetti di risposta in regime permanente e di risposta transitoria. Si consideri in proposito una rappresentazione lineare, stazionaria, a dimensione finita e sia:

$$u(t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

$$u(t) = 1 \quad \text{per } t \geq 0$$

Una funzione di questo genere viene detta, con ovvio riferimento alla rappresentazione grafica, *funzione a gradino unitaria* (o *gradino unitario*). Si supponga inoltre che, in un arbitrario istante $t_0 < 0$, sia:

$$x(t_0) = 0$$

Grazie alla particolare forma dell'ingresso e al valore dello stato iniziale, l'uscita del sistema è nulla per $t \leq 0$. Per $t > 0$ essa coincide con la risposta, a partire dallo stato iniziale $x(0) = 0$, corrispondente ad un ingresso costante di ampiezza unitaria. Per $t \rightarrow \infty$ questa risposta tende (se il sistema è stabile asintoticamente) ad un valore costante coincidente con quello della risposta in regime permanente. La differenza tra il valore effettivo della risposta ed il suo valore asintotico coincide invece con la cosiddetta risposta transitoria.

In questi termini, si può allora interpretare il fenomeno transitorio che si verifica tra il regime di uscita nulla (per $t \leq 0$) e quello di uscita costante (per $t \rightarrow \infty$) come dovuto alla variazione a gradino dell'ingresso e parlare di risposta transitoria ad una sollecitazione a gradino.

Da un punto di vista quantitativo, la risposta transitoria ad una sollecitazione a gradino può essere calcolata molto facilmente. La risposta complessiva, essendo $x(0) = 0$ ed $u(t) = 1$ per $t \geq 0$, vale:

$$y(t) = \int_0^t W(t - \tau) d\tau$$

mentre la risposta a regime permanente vale, per definizione,

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^t W(t - \tau) d\tau$$

Di conseguenza la risposta transitoria vale:

$$(III.37) \quad y_t(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = - \int_{-\infty}^0 W(t - \tau) d\tau$$

Per quanto riguarda l'errore transitorio, basta osservare che, in base alle (III.1), (III.2) e (III.3), in generale risulta (essendo $u(t) = \tilde{u}(t) = 1$):

$$e_t(t) = e(t) - \tilde{e}(t) = (K_d u(t) - y(t)) - (K_d \tilde{u}(t) - \tilde{y}(t)) = -y(t) + \tilde{y}(t)$$

e che, quindi,

$$(III.38) \quad e_t(t) = -y_t(t) = \int_{-\infty}^0 W(t - \tau) d\tau$$

Le funzioni così individuate possono essere messe in evidenza esaminando il grafico della risposta $y(t)$. Considerando, per fissare le idee, un caso in cui sia

$$\tilde{y}(t) \neq K_d$$

(corrispondente ad un sistema di tipo 0), si assuma che la risposta $y(t)$ abbia un andamento del tipo indicato in fig.III.13a. È immediato constatare che la risposta transitoria $y_t(t)$ è quella che si trova leggendo la funzione $y(t)$ in un sistema di coordinate ottenuto spostando in alto l'asse delle ascisse della quantità $\tilde{y}(t)$ (cfr. fig.III.13 b). A sua volta l'er-

rore transitorio $e_t(t)$ si trova leggendo $y_t(t)$ in un sistema di coordinate ottenuto cambiando segno ai valori delle ascisse, (cfr. fig.III.13 c).

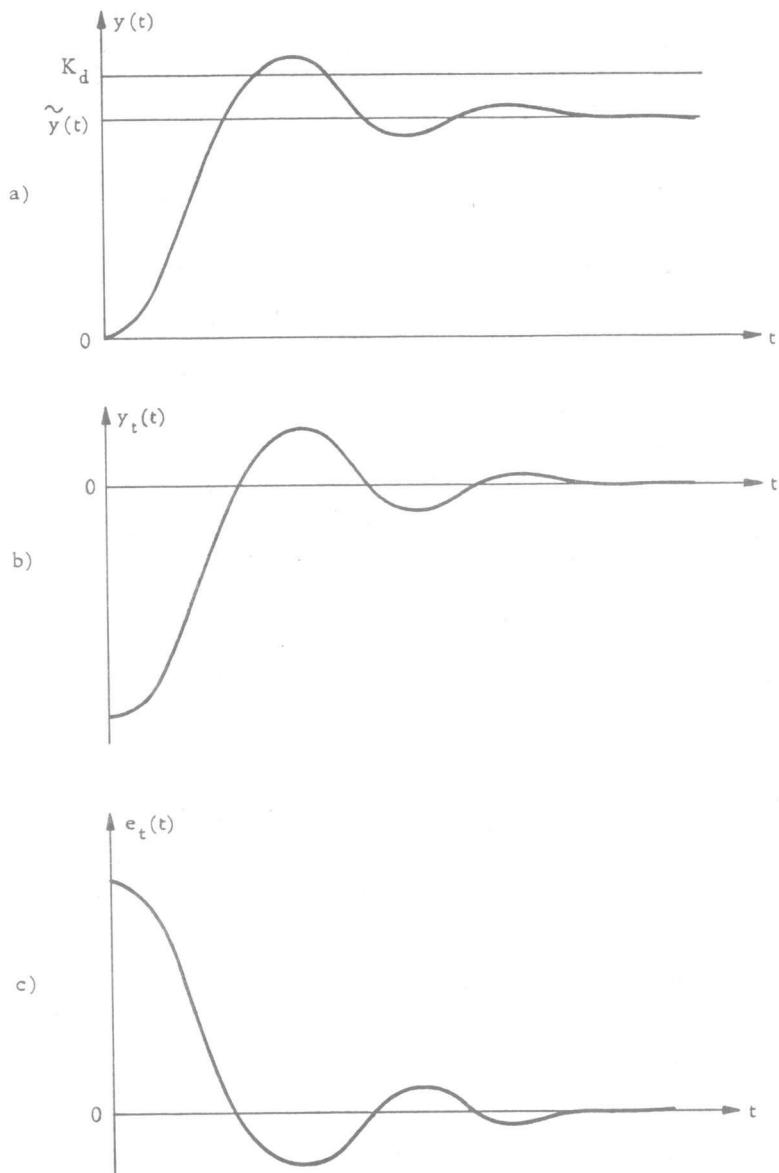


Fig.III.13

Per quanto riguarda la risposta al disturbo la situazione è perfettamente analoga; in luogo della (III.37) vale, in questo caso l'espressione:

$$(III.39) \quad y_{z,t}(t) = - \int_{-\infty}^0 W_z(t - \tau) d\tau$$

Se si considera un grafico della risposta al disturbo, come quello indicato in fig.III.14 a (corrispondente ad un sistema statico), si può immediatamente evidenziare l'andamento di $y_{z,t}(t)$ spostando in alto l'asse delle ascisse della quantità $\tilde{y}_z(t)$ (cfr. fig.III.14 b).

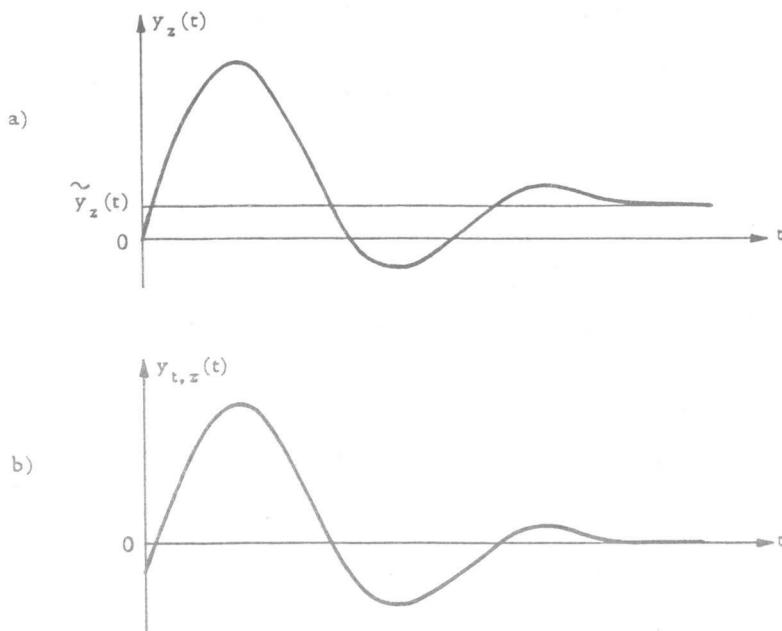


Fig.III.14

I grafici considerati nelle figg.III.13 e III.14 sono, come peraltro già messo in evidenza, relativi a situazioni particolari. Per quanto riguarda i valori finali delle risposte, si è infatti ammesso di considerare casi in cui, al tendere di t all'infinito, l'errore o la risposta al disturbo tendono a valori non nulli. In effetti, i grafici in questione corrispondono anche a precise assunzioni sui valori iniziali delle risposte, che sono stati considerati nulli in entrambi i casi. A questo proposito è bene ricordare che il limite per $t \rightarrow 0$ (da destra) della risposta al gradino di un sistema avente funzione di trasferimento $\hat{W}(s)$ coincide con il limite della funzione $\hat{W}(s)$ stessa per $s \rightarrow \infty$. Si può allora affer-

che il grafico di figura III.13 a corrisponde ad un caso in cui la funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(s)$ ha limite nullo per $s \rightarrow \infty$ e che quello di fig. III.14 a corrisponde ad un caso in cui la funzione di trasferimento disturbo-uscita $W_z(s)$ ha limite nullo per $s \rightarrow \infty$. Se viceversa si pensa a casi in cui uno o l'altro di questi limiti sono diversi da zero (funzioni di trasferimento proprie ma non strettamente) occorre riferirsi a grafici nei quali l'ordinata iniziale $y(0)$ o $y_z(0)$ sia diversa da zero.

La risposta transitoria ad una sollecitazione a gradino è dunque caratterizzata in modo completo dall'espressione (III.37) (per quanto riguarda il legame ingresso-uscita) o dalla (III.39) (per quanto riguarda il legame disturbo-uscita). Vista la sostanziale identità delle due formule, ci si può limitare a prenderne in esame soltanto una. Per esaminare più dettagliatamente la forma della risposta è opportuno sostituire a $W(t)$ (o, il che è lo stesso, a $W_z(t)$), la sua espressione in funzione dei parametri che caratterizzano i modi naturali. In proposito, occorre ricordare che una funzione di questo tipo può essere scritta, in generale, sotto la forma:

$$(III.39) \quad W(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} R_{ik} \frac{t^k}{k!} e^{p_i t}$$

Tenendo allora presente che, per la (III.37), si può scrivere:

$$y_t(t) = - \int_t^\infty W(\xi) d\xi$$

è possibile pervenire all'espressione:

$$(III.40) \quad y_t(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} R_{ik} \left(\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{p_i^{k-j}} \frac{t^j}{j!} - \frac{e^{p_i t}}{p_i} \right)$$

Nel dedurre la (III.40) si è fatto uso della relazione:

$$\int \frac{t^k}{k!} e^{p_i t} = \left(\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{p_i^{k-j}} \frac{t^j}{j!} - \frac{e^{p_i t}}{p_i} \right)$$

e si è tenuto presente che, grazie alla stabilità asintotica, risulta:

$$\operatorname{Re}[p_i] < 0$$

Ovviamente, nel caso di poli semplici, le espressioni precedenti si semplificano notevolmente. In particolare, in luogo delle (III.39) e (III.40) valgono le:

$$(III.39') \quad W(t) = \sum_{i=1}^r R_i e^{p_i t}$$

$$(III.40') \quad y_t(t) = \sum_{i=1}^r R_i \frac{e^{p_i t}}{p_i}$$

Se, accanto alle funzioni di t , si considerano le rispettive trasformate, è possibile ottenere espressioni che - da un punto di vista generale - sono perfettamente equivalenti ma che - da un punto di vista pratico - possono risultare di impiego più immediato. In proposito è utile osservare che alla (III.37) corrisponde l'espressione:

$$y_t(s) = y(s) - \tilde{y}(s) = W(s) \frac{1}{s} - ([W(s)]_{s=0}) \frac{1}{s}$$

(si tenga presente che $\tilde{y}(t) = 1$ per $t \geq 0$ e che $\tilde{y}(t) = [W(s)]_{s=0}$ per $t \geq 0$). Se ora si considera per la funzione $W(s)/s$ uno sviluppo in frazioni parziali è immediato constatare che tra i termini di questo sviluppo è compresa anche la frazione $([W(s)]_{s=0})/s$, corrispondente al polo (semplice) che la funzione $W(s)/s$ ha nel punto $s=0$. Poiché il termine in questione è uguale e opposto al termine che caratterizza $\tilde{y}(s)$, si può in definitiva affermare che lo sviluppo in frazioni parziali di $y_t(s)$ è deducibile direttamente da quello di $W(s)/s$ sopprimendo il termine relativo al polo in $s=0$.

In particolare, nel caso di autovalori distinti, si può concludere che lo sviluppo di $y_t(s)$ assume l'espressione:

$$(III.41) \quad y_t(s) = \sum_{i=0}^r \frac{\hat{R}_i}{(s-p_i)}$$

essendo \hat{R}_i il residuo, nel polo $s = p_i$, della funzione $W(s)/s$. Un tale risultato è perfettamente in accordo, come è facile verificare, con la (III.40').

Tutte le espressioni fin qui dedotte definiscono in modo preciso l'andamento della risposta transitoria ad una sollecitazione a gradino. Il loro impiego comporta tuttavia - in genere - l'esecuzione di calcoli piuttosto laboriosi, nel corso dei quali viene inevitabilmente a mancare la

possibilità di stabilire un collegamento diretto e semplice tra le caratteristiche della risposta e i parametri sui quali è possibile intervenire in sede di sintesi. Se si vuole conseguire un risultato di questo genere occorre, come si vedrà più avanti, rinunciare ad una individuazione precisa della risposta e scegliere di classificare quest'ultima in base alla considerazione di un numero ridotto di grandezze, di significato più o meno convenzionale. Naturalmente le scelte possono essere diverse e a ciascuna di esse corrisponde un modo particolare di analizzare la risposta transitoria.

Per chiarire meglio questo punto e per individuare una prima possibile scelta, è utile considerare l'espressione (III.40¹) ed osservare che, in accordo con ben noti risultati della teoria dei sistemi lineari, le funzioni a secondo membro possono essere distinte a seconda che esse corrispondano a poli reali o a coppie di poli complessi e coniugati. Gli andamenti temporali delle funzioni nelle due categorie differiscono soltanto per i valori dei parametri che caratterizzano le funzioni stesse e cioè, in definitiva, per i valori della costante di tempo τ nel caso delle funzioni del tipo:

$$(III.42) \quad e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(corrispondenti a poli reali) e per i valori della pulsazione naturale ω_n e del coefficiente di smorzamento ζ nel caso delle funzioni del tipo:

$$(III.43) \quad e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)$$

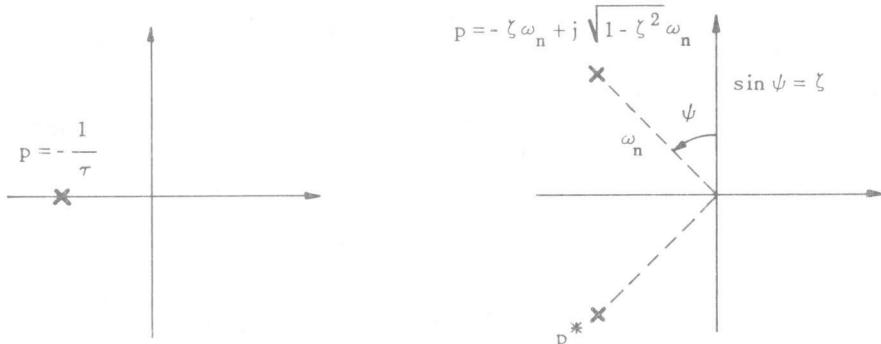


Fig.III.15

(corrispondenti a coppie di poli complessi e coniugati). I parametri τ , ω_n , ζ sono, d'altro canto, immediatamente individuabili una volta noti i poli della funzione $W(s)$ (cfr. fig.III.15). Gli andamenti temporali delle due funzioni (III.42) e (III.43) sono riportati in fig.III.16, in forma normalizzata rispetto a τ ed a ω_n . Dall'esame di questi andamenti si

possono trarre alcune conclusioni di carattere elementare relativamente alla caratterizzazione del transitorio.

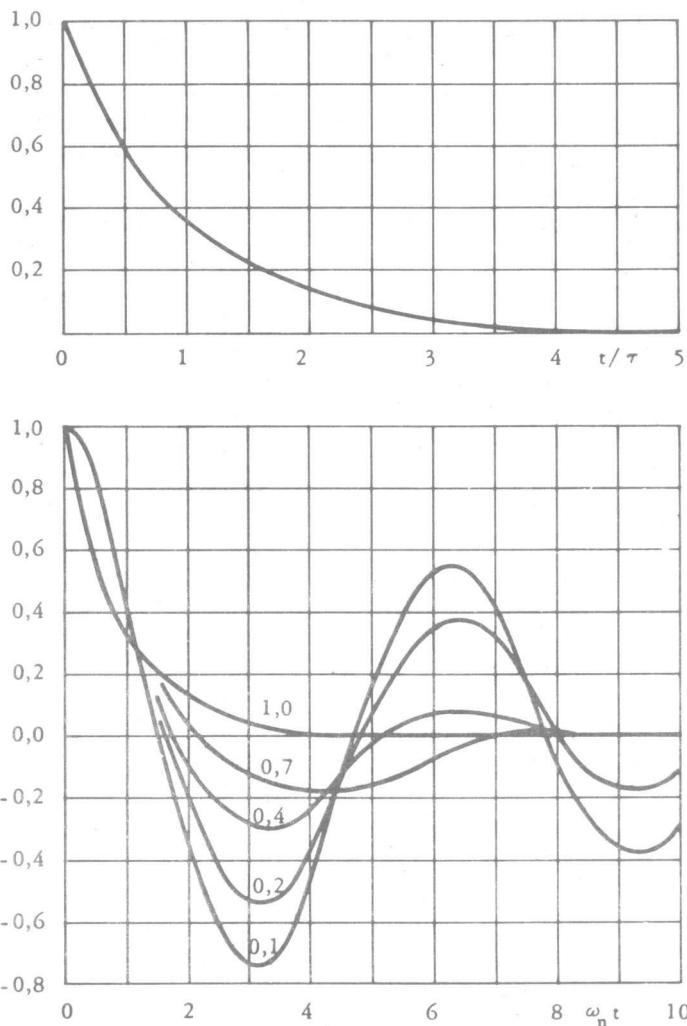


Fig.III.16

Per quanto riguarda i termini cosiddetti *aperiodici*, si constata infatti che il decadimento è tanto più lento quanto più è elevato il valore della costante di tempo τ (cioè quanto più il polo è vicino all'asse immaginario). Per quanto riguarda i termini cosiddetti *pseudoperiodici*, a parità di valori di ζ , il decadimento è tanto più lento quanto più è piccolo il valore della pulsazione naturale ω_n (cioè quanto più i poli sono

vicini all'origine) mentre, a parità di valori di ω_n , il carattere oscillatorio è tanto più pronunciato quanto più è piccolo il valore del coefficiente di smorzamento ζ (cioè quanto più piccolo è l'angolo ψ).

Sulla base di queste semplici osservazioni appare ragionevole ritenere che, se si desidera che il decadimento della risposta transitoria sia sufficientemente rapido (compatibilmente con altre esigenze progettuali sulle quali si avrà occasione di ritornare nel seguito) e sia privo di fenomeni oscillatori particolarmente vistosi, si debba imporre l'appartenenza dei poli della funzione di trasferimento $W(s)$ ad una regione del tipo di quella indicata in fig.III.17.

In questo modo, infatti, si vengono a limitare i valori massimi delle costanti di tempo:

$$\max \tau < \frac{1}{OA}$$

i valori minimi delle pulsazioni naturali:

$$\min \omega_n > OA'$$

e i minimi valori del coefficiente di smorzamento:

$$\min \zeta > \sin \psi_0$$

Le limitazioni sulle costanti di tempo e sulle pulsazioni naturali vengono fissate, in sede di definizione delle specifiche, stabilendo un compromesso tra l'esigenza di ottenere un decadimento rapido della risposta transitoria e quella di rispettare eventuali vincoli inerenti alla natura fisica delle grandezze controllate.

Per chiarire meglio quest'ultimo aspetto, può essere utile analizzare in dettaglio un esempio. Si supponga di controllare a controcetazione un processo termico governato da un'equazione del tipo (cfr. Esempio I.4):

$$C_f \frac{dT}{dt} = P - K_f (T - T_e)$$

nella quale T è una temperatura interna (grandezza controllata), P una quantità di calore (grandezza controllante), C_f una capacità termica, K_f un coefficiente di trasmissione del calore, T_e una temperatura esterna (disturbo). Il sistema di controllo può essere schematizzato, nelle sue linee essenziali, nel modo indicato in fig.III.18. Il processo è dotato di una funzione di trasferimento:

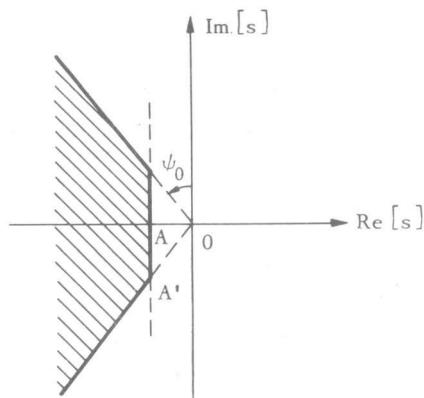


Fig.III.17

$$G(s) = \frac{1}{K_f} \cdot \frac{1}{1 + \tau s}$$

essendo $\tau = C_f / K_f$. Per il riscaldatore si assumerà invece una funzione di trasferimento costante, di valore K_r . In condizioni di equilibrio, la temperatura T assume il valore:

$$T = \frac{1}{1 + K_f / K_r} T_d + \frac{1}{1 + K_r / K_f} T_e$$

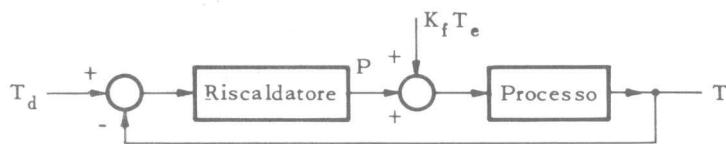


Fig.III.18

Si vuole esaminare il transitorio provocato da una variazione a gradino del riferimento, di ampiezza ΔT_d . Per linearità, è sufficiente calcolare la risposta del sistema di fig.III.18 ad una variazione (a gradino) unitaria del riferimento, ponendo $K_f T_e = 0$. La funzione di trasferimento riferimento-uscita vale:

$$W(s) = \frac{K_r G(s)}{1 + K_r G(s)} = \frac{\frac{K_r}{K_r + K_f}}{1 + \left(\frac{K_f}{K_r + K_f} \right) \tau s}$$

Di conseguenza, sulla base di quanto mostrato in precedenza, si può affermare che la temperatura evolve verso il nuovo valore di regime con un transitorio della forma (cfr. fig.III.19):

$$- e^{-\frac{t}{\tau'}} \frac{K_r}{K_r + K_f} \Delta T_d$$

essendo:

$$\tau' = \frac{K_f}{K_r + K_f} \tau$$

la nuova costante di tempo del sistema reazionato.

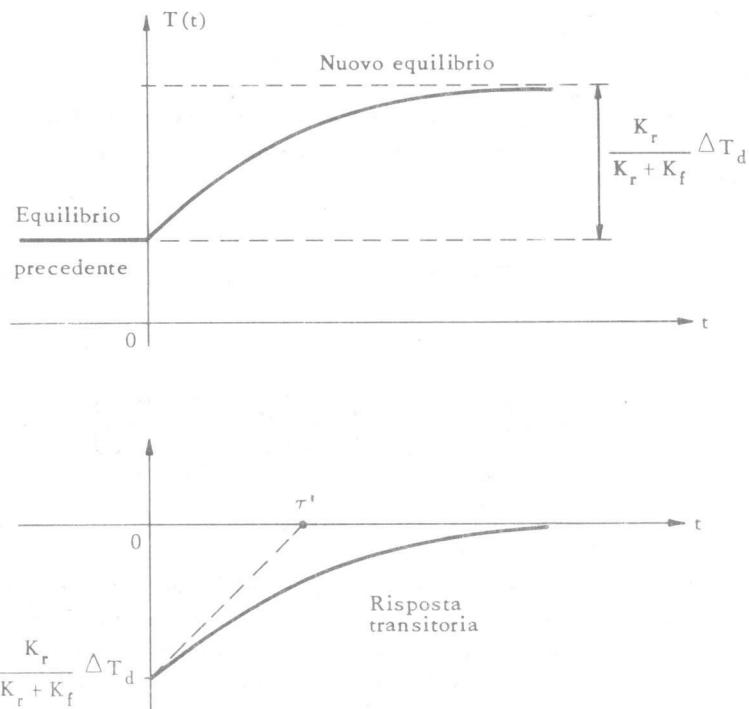


Fig.III.19

Le relazioni così trovate mostrano che la costante di tempo τ' del sistema reazionato può essere resa piccola a piacere aumentando il valore del coefficiente K_r di guadagno del riscaldatore. A questo fatto corrisponde, almeno sul piano teorico, la possibilità di avere un decadimento arbitrariamente rapido dell'errore transitorio.

In effetti, da un punto di vista pratico, è necessario tenere in evidenza anche altri aspetti, connessi alla natura fisica delle grandezze che caratterizzano il sistema. Se si analizza, in corrispondenza alla medesima sollecitazione a gradino, l'andamento della quantità di calore P ceduta al processo, si constata che:

$$P(t) = \mathcal{L} \left[\frac{K_r}{1 + K_r G(s)} \cdot \frac{1}{s} \right] = \frac{K_r}{K_r + K_f} \left[K_f + K_r e^{-\frac{t}{\tau'}} \right]$$

La funzione $P(t)$ è riportata in fig.III.20. Come si può osservare, se si aumenta K_r (allo scopo di ridurre τ'), aumenta anche il valore di picco della funzione $P(t)$. Ovviamente, esistono dei limiti fisici che non possono essere superati; a questi è immediato far corrispondere una limitazione inferiore sui valori che possono essere effettivamente attribuiti a τ' .

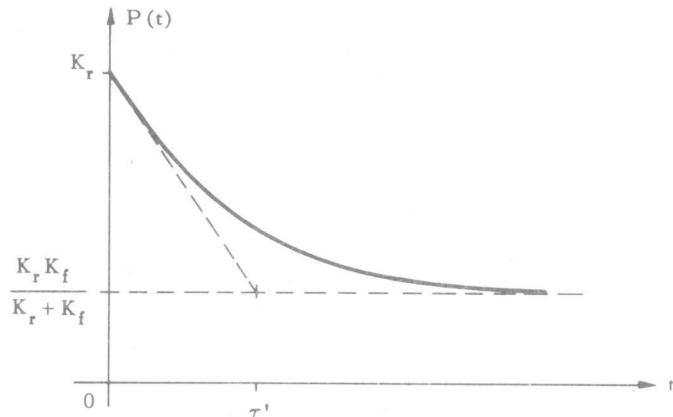


Fig.III.20

Per quanto riguarda il coefficiente di smorzamento, a proposito del quale non sussistono - in genere - problemi di compatibilità con la natura fisica del processo, la scelta si orienta generalmente verso una soluzione che contemperi l'esigenza di una soddisfacente prontezza con quella di evitare oscillazioni troppo ampie. L'esame della fig.III.16 suggerisce come convenienti, in sede di definizione di specifiche, i valori compresi tra 0,6 e 0,7.

Prima di concludere queste considerazioni sull'analisi della risposta transitoria in termini di collocazione dei poli di \$W(s)\$ sul piano complesso, è importante anche sottolineare che la valutazione della rapidità di decadimento dei termini che compongono un'espressione del tipo (III.40') non può essere considerata prescindendo dall'importanza relativa dei termini stessi nello sviluppo. Da questo punto di vista, potrebbe infatti risultare tollerabile la presenza di termini di per se insoddisfacenti, se caratterizzati da un peso relativo trascurabile rispetto alla risposta nel suo complesso. Un esame di questo genere può venire effettuato paragonando i valori dei residui \$R_i\$ relativi a ciascuno dei termini dello sviluppo in frazioni parziali di \$y_t(s)\$. In proposito, è allora interessante osservare che, per una funzione razionale caratterizzata da poli e zeri semplici, l'importanza relativa di un residuo rispetto ad un altro può essere valutata - in termini qualitativi - esaminando se nelle vicinanze del polo in cui si calcola il residuo esistono o no zeri della funzione stessa. Poiché il residuo di una funzione razionale, con \$m\$ zeri semplici \$(z_1, z_2, \dots, z_m)\$ ed \$n\$ poli semplici \$(p_1, p_2, \dots, p_n)\$, relativo al generico polo \$p_i\$ assume un'espressione del tipo:

$$K' \frac{(p_i - z_1) \cdots (p_i - z_m)}{(p_i - p_1) \cdots (p_i - p_{i-1})(p_i - p_{i+1}) \cdots (p_i - p_n)}$$

è immediato concludere che, a parità di altre situazioni, quanto più sono piccole le distanze del polo p_i dagli zeri z_1, \dots, z_m della funzione, tanto più il residuo relativo è piccolo rispetto agli altri. Grazie a quanto mostrato in precedenza, è indifferente, ai fini di una valutazione qualitativa dell'importanza dei residui, considerare la posizione relativa di poli e zeri della funzione $y_t(s)$ o della funzione $W(s)$; il generico residuo R_i relativo al polo p_i della funzione $y_t(s)$ differisce infatti dal corrispondente residuo R_i relativo alla funzione $W(s)$ per il solo fattore $1/p_i$ (cfr. (III.41)).

La caratterizzazione della risposta transitoria nei termini fin qui esposti presuppone, evidentemente, la capacità di calcolare i poli e gli zeri della funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema e la possibilità di stabilire, ai fini della sintesi, un collegamento diretto tra queste grandezze e i parametri del sistema che possono essere definiti in sede di progetto. Rimandando ad uno studio successivo l'analisi di questo punto (cfr. cap.V), si prenderà ora in esame un altro punto di vista dal quale può essere valutata la risposta transitoria, che non richiede il calcolo di poli e zeri ed è largamente diffuso in pratica. Il punto di vista in questione è basato sulla individuazione, su grafico della risposta stessa, di un numero limitato di caratteristiche atte a definire la rispondenza ad esigenze di tipo generale (quali, ad esempio, la rapidità di decadimento, l'esistenza di oscillazioni, ecc.).

In proposito, si osservi che, considerato un grafico del tipo riportato in fig.III.21, l'andamento della risposta transitoria può essere caratterizzato in modo significativo introducendo:

- a) il tempo di salita t_s , che viene definito usualmente come il tempo necessario perché la risposta raggiunga, partendo dal valore iniziale, per la prima volta il valore di regime;
- b) la sovraelongazione \hat{s} , che viene definita come rapporto tra il massimo scostamento (in eccesso) della risposta dal valore di regime e il valore di regime stesso;
- c) il tempo di assestamento t_a , che è il tempo necessario affinché la risposta differisca definitivamente dal valore di regime per una quantità prefissata ϵ .

Nel caso che la risposta non abbia caratteristiche oscillatorie, per quanto riguarda il tempo di salita si considera, in luogo della quantità definita sopra, l'intervallo di tempo impiegato per passare dal 10% al 90% del valore finale.

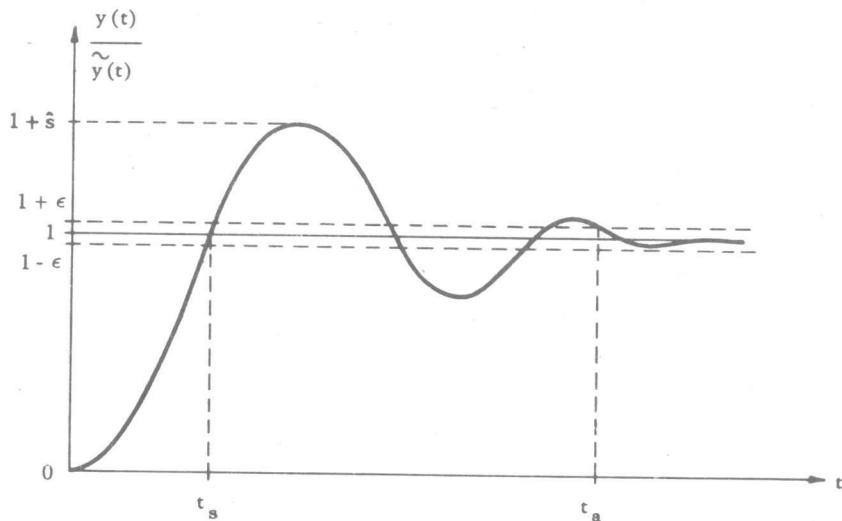
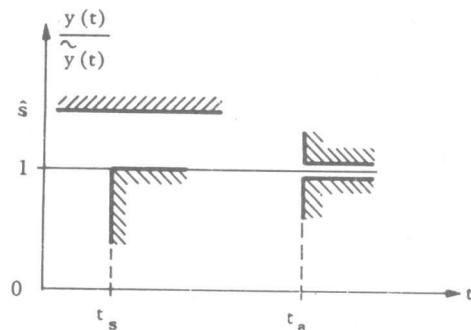


Fig.III.21

Le quantità così definite possono essere considerate come specifiche caratterizzanti il comportamento transitorio. Da questo punto di vista, l'assegnazione di valori per il tempo di salita, per il tempo di assettamento e per la sovraelongazione, equivale ad imporre alla risposta transitoria una configurazione compatibile con le limitazioni evidenziate in fig.III.22.

Fig.III.22



Come si vede, la classificazione del comportamento transitorio viene fatta in base ad un numero estremamente limitato di parametri; tuttavia, la scelta è tale (soprattutto nel caso di sistemi in cui la funzione di trasferimento è caratterizzata da un numero limitato di poli e di zeri) da fornire risultati soddisfacenti in molte applicazioni concrete. Anzi, in taluni casi si può addirittura omettere di indicare la prescrizione riguardante il

tempo di assestamento, il cui valore - per sistemi di ordine limitato - non è indipendente da quelli del tempo di salita e della sovraelongazione.

Uno degli aspetti che rendono interessante la considerazione di tali parametri è la possibilità di stabilire un collegamento immediato con alcune caratteristiche della risposta armonica $W(j\omega)$ del sistema. A questo proposito si osservi che, considerato un grafico del tipo riportato in fig.III.23, l'andamento del modulo della risposta armonica può essere caratterizzato in modo significativo introducendo:

- a) la banda passante B_3 , definita come pulsazione oltre la quale il modulo di $W(j\omega)$ risulta attenuato di un fattore uguale a 0,707 (pari a -3 dB) rispetto al valore per $\omega = 0$;
- b) il modulo alla risonanza M_r , definito come rapporto tra il massimo valore del modulo della $W(j\omega)$ e il valore per $\omega = 0$.

Anche le quantità così definite possono essere usate come specifiche di sintesi. In questo caso l'assegnazione di banda passante e modulo alla risonanza equivale ad imporre alla risposta armonica una configurazione compatibile con le limitazioni evidenziate in fig.III.24.

Tra le grandezze usate per caratterizzare la risposta ad una sollecitazione a gradino e quelle introdotte a proposito della risposta armonica sussistono come si è detto, importanti correlazioni.

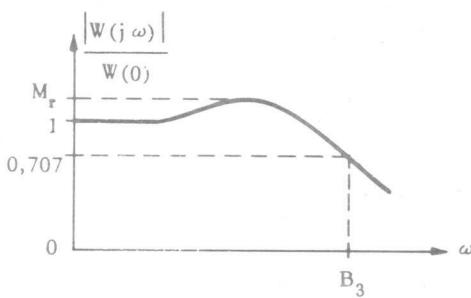


Fig.III.23

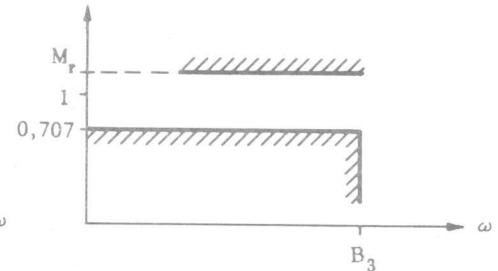


Fig.III.24

Per illustrare questo punto conviene partire dalla considerazione di un esempio particolare. In proposito, si prenda in esame un sistema avente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

con $0 < \zeta < 1$, cui corrisponde una risposta al gradino unitario della forma:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \left[\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right]$$

In un sistema di questo genere i parametri caratteristici della risposta transitoria e della risposta armonica, sopra introdotti, possono essere calcolati senza eccessiva difficoltà. Applicando direttamente le definizioni date, si ottengono:

- per la sovraelongazione \hat{s} , l'espressione:

$$\hat{s} = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

- per il modulo alla risonanza M_r , l'espressione:

$$M_r = \frac{1}{2 \zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{per } \zeta \leq (1/\sqrt{2}))$$

- per la banda passante B_3 , l'espressione:

$$B_3 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

- per il tempo di salita t_s , l'espressione:

$$t_s = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\pi - \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right]$$

Si constata allora, immediatamente, che la dipendenza delle grandezze \hat{s} , M_r , B_3 , t_s dai parametri ζ e ω_n che caratterizzano la funzione di trasferimento di tale sistema può essere sinteticamente indicata mediante espressioni del tipo:

$$\hat{s} = f_1(\zeta)$$

$$M_r = f_2(\zeta)$$

$$B_3 = \omega_n f_3(\zeta)$$

$$t_s = (1/\omega_n) f_4(\zeta)$$

essendo $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$, $f_3(\zeta)$, $f_4(\zeta)$ opportune funzioni della sola ζ e non di ω_n .

Le formule così dedotte consentono di mettere in evidenza le correlazioni di cui si è parlato all'inizio. Più precisamente, esse possono essere utilizzate per mostrare che il rapporto:

$$\frac{1 + \hat{s}}{M_r}$$

assume, in funzione del parametro ζ , l'andamento indicato in fig.III.25 a e che il prodotto:

$$B_3 \cdot t_s$$

è indipendente dal parametro ω_n ed assume, in funzione del parametro ζ , l'andamento indicato in fig.III.25 b. L'esame di tali andamenti consente di affermare che, in un sistema del tipo considerato, il rapporto tra il valore massimo $(1 + \hat{s})$ della risposta al gradino e il valore massimo M_r della risposta armonica, da un lato, e il prodotto tra la banda passante B_3 e il tempo di salita t_s , dall'altro, sono sensibilmente costanti entro un ampio intervallo di valori del parametro ζ .

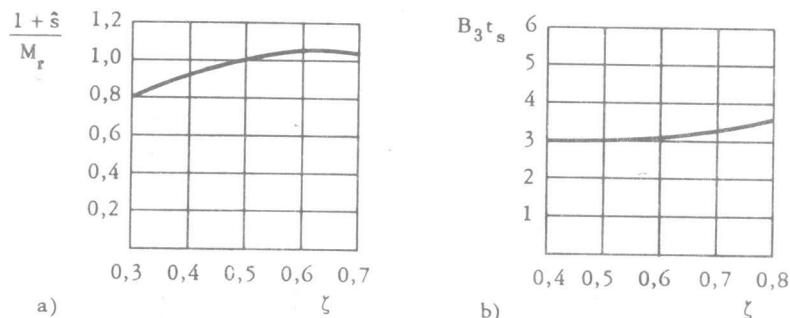


Fig.III.25

Le considerazioni precedenti possono essere estese a classi più generali di sistemi facendo uso di un elaboratore elettronico. In tal caso, infatti, per un sistema caratterizzato da una funzione di trasferimento del tipo:

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$

è possibile calcolare direttamente per via numerica, una volta assegnati i valori numerici dei parametri $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$, le quattro grandezze \hat{s}, M_r, B_3, t_s . Iterando il procedimento su di una serie sufficientemente estesa di dati iniziali si può ottenere una serie di risultati che consentono di individuare le correlazioni cercate. In effetti, un'analisi di questo genere, mostra che - per sistemi di ordine limitato - le correlazioni tra \hat{s}, M_r, B_3, t_s sono dello stesso tipo di quelle dedot-

te nell'esempio precedente; il rapporto:

$$\frac{1 + \hat{s}}{M_r}$$

tra il valore massimo della risposta al gradino e il valore massimo della risposta indiciale, è il prodotto:

$$B_3 \cdot t_s$$

tra la banda passante ed il tempo di salita, sono sensibilmente costanti al variare dei parametri che caratterizzano la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema.

In effetti, per quanto riguarda il primo sussiste la relazione:

$$(III.44) \quad 1 + \hat{s} \cong 0,85 M_r$$

(valida per sistemi nei quali M_r sia compreso tra 1,3 ed 1,5), mentre per il secondo si può ritenere che sia:

$$(III.45) \quad B_3 \cdot t_s \cong 3$$

Le due relazioni (III.44) e (III.45), stabiliscono, sia pure in modo empirico, un'importante correlazione tra le grandezze che caratterizzano la risposta transitoria e quelle che caratterizzano la risposta armonica ed in genere vengono utilizzate come indicazione di larga massima, nei procedimenti di sintesi pertentativi, per trasferire specifiche assegnate sulla risposta nel tempo a specifiche sulla risposta in frequenza.

La definizione di specifiche di questo tipo è generalmente ispirata a considerazioni analoghe a quelle precedentemente svolte a proposito dei parametri che caratterizzano il decadimento dei termini della risposta transitoria (costanti di tempo, pulsazioni naturali, coefficienti di smorzamento). La scelta del tempo di salita (e, quindi, quella della banda passante) viene definita cercando di stabilire un compromesso tra l'esigenza di un decadimento sufficientemente rapido e quella del rispetto di vincoli inerenti alla natura fisica delle grandezze controllate. La scelta della sovraelongazione (e, quindi, quella del modulo alla risonanza) cerca invece di contemperare l'esigenza di un decadimento rapido con quella di evitare oscillazioni troppo pronunciate; se non vi sono limiti tassativi su \hat{s} dettati da considerazioni di carattere fisico ci si orienta su valori compresi tra il 15% e il 25% del valore finale.

Al di là dell'interesse legato alle correlazioni stabilite con la risposta transitoria, la considerazione della risposta armonica fornisce di per sé un criterio autonomo di valutazione della fedeltà di risposta.

La definizione di un modulo alla risonanza e di una banda passante contribuisce infatti ad individuare le componenti armoniche della funzione ingresso in corrispondenza alle quali il sistema introduce in uscita una amplificazione o un'attenuazione contenuta entro limiti prestabiliti. Considerazioni di questo genere possono allora portare a specificare il modulo alla risonanza e la banda passante in relazione alle caratteristiche delle funzioni di ingresso, nell'ipotesi che queste ultime siano conosciute a priori o siano prevedibili entro ragionevoli margini di incertezza.

A questo proposito, è anche importante osservare che, molte volte, alla funzione di ingresso che deve essere fedelmente riprodotta in uscita possono essere sovrapposti *rumori* (usualmente aventi carattere aleatorio). In questo caso è interesse che il sistema riproduca con minimo di alterazione la prima e attenuti il più possibile i secondi. Se le componenti armoniche della prima occupassero una banda completamente distinta da quelle dei secondi, la situazione ideale si avrebbe con una funzione di trasferimento di valore costantemente pari a K_d nella banda occupata dalla funzione di ingresso e pari a 0 nella banda occupata dai rumori. Di fatto una situazione di questo genere si verifica raramente e perciò, nel definire le caratteristiche che la risposta armonica deve avere, si deve esaminare volta per volta il problema concreto e realizzare un compromesso tra le due esigenze contrastanti.

III.7 - La sensibilità alle variazioni dei parametri.

In questo paragrafo vengono introdotti alcuni criteri atti a valutare l'influenza di variazioni nei parametri sulla risposta di un sistema di controllo. La scelta, effettuata sin dall'inizio, di caratterizzare quest'ultima in base alla considerazione di un numero limitato di aspetti significativi induce ad esaminare separatamente l'influenza di variazioni su ciascuno di tali aspetti. Ciò posto, il primo problema che si pone è quello di analizzare l'effetto di variazioni dei parametri sulla stabilità di un sistema di controllo. Riferendosi, come di consueto, al caso di un sistema con struttura interna a controreazione, si tratta di esaminare se ed in che misura variazioni nei parametri che caratterizzano il sistema non reazionato possono portare alla perdita di stabilità del sistema reazionato. Il problema si presta ad una soluzione piuttosto agevole se il parametro di cui si vuole valutare l'effetto è il guadagno della funzione di trasferimento $F(s)$ del sistema non reazionato (cfr. fig.III.26). In questo caso è infatti possibile individuare, utilizzando il cosiddetto *margine di guadagno* m_g , il massimo intervallo entro il quale variazioni di questo parametro (rispetto al valore nominale) sono compatibili con la stabilità del sistema reazionato.

Come è noto, il margine di guadagno si definisce usualmente considerando i valori critici che delimitano gli intervalli entro i quali il sistema reazionato è stabile e rapportando questi ultimi al valore nominale K del guadagno stesso. Se il sistema è, come si usa dire, a stabilità regolare, vi è un solo valore critico K_c ed in questo caso il margine di guadagno è definito mediante il rapporto:

$$m_g = \frac{K_c}{K}$$

La grandezza così introdotta si presta ad essere caratterizzata molto bene sulle rappresentazioni grafiche della funzione $F(j\omega)$. Nel caso di una rappresentazione polare (diagramma di Nyquist), il margine m_g è pari all'inverso del modulo della funzione $F(j\omega)$ calcolato per quel valore di ω in corrispondenza al quale il grafico della funzione stessa attraversa il semiasse reale negativo (cfr. fig.III.27 a). Nel caso di una rappresentazione logaritmica (diagramma di Bode), il margine m_g espresso in dB è pari all'opposto del valore del modulo della funzione $F(j\omega)$ calcolato per quel valore di ω in corrispondenza al quale la fase della funzione stessa è pari a -180° . (cfr. fig.III.27 b).

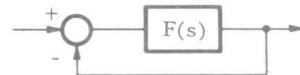


Fig.III.26

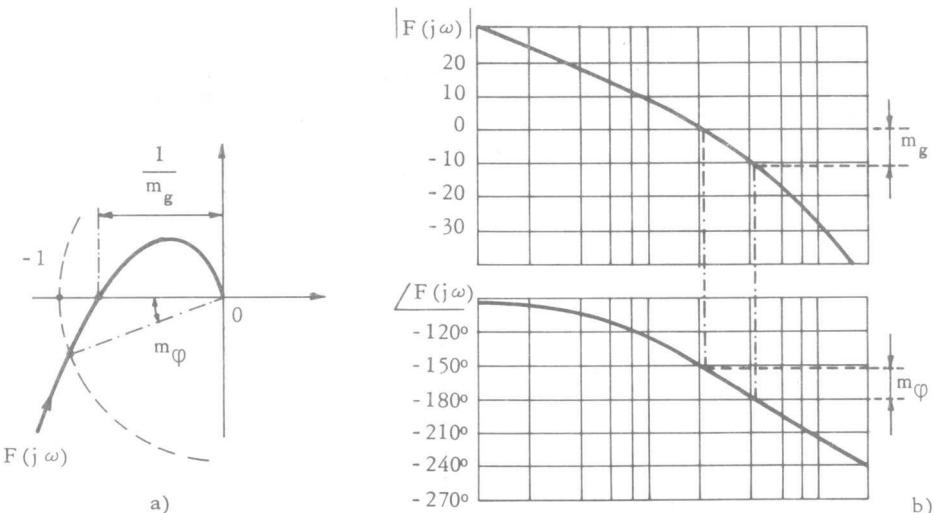


Fig.III.27

Il significato del margine di guadagno, dal punto di vista che qui interessa, è immediato. Se, ad esempio, $m_g = 2$, si possono tollerare, senza perdita di stabilità, variazioni del guadagno K sino al 100% del valore nominale.

La valutazione dell'effetto di variazioni di altri parametri del sistema non reazionato sulla stabilità è molto meno diretta. In mancanza di criteri specifici, è abituale considerare il cosiddetto *margine di fase* m_ϕ , definito come differenza tra il valore della fase della funzione $F(j\omega)$, calcolato per quel valore di ω in corrispondenza al quale il modulo della funzione stessa è unitario, ed il valore - 180°. Anche il margine m_ϕ si presta ad essere immediatamente individuato sulle rappresentazioni grafiche di $F(j\omega)$ (cfr. figg. III.27 a e III.27 b).

La grandezza così introdotta caratterizza, in modo qualitativo, la capacità del sistema di restare stabile in presenza di variazioni generiche di tutti i parametri che individuano la funzione $F(j\omega)$; quanto più grande è il margine di fase tanto maggiori devono essere le variazioni dei parametri necessarie per passare dalla $F(j\omega)$ nominale ad una in corrispondenza alla quale il sistema reazionato non sia più stabile. A questo proposito, l'esperienza relativa a sistemi di ordine limitato indica come opportuni valori del margine di fase superiori a 40°.

Il secondo aspetto che si vuole prendere in considerazione è quello riguardante l'esame dell'influenza delle variazioni dei parametri sulle grandezze che caratterizzano la fedeltà di risposta. Lo strumento che meglio si adatta a questo scopo è quello delle cosiddette *funzioni di sensibilità*, la cui definizione formalizza il concetto intuitivo di sensibilità intesa come rapporto tra la variazione percentuale di certe grandezze (conseguente alla variazione di certi parametri) e la variazione percentuale dei parametri stessi. Se la grandezza che si ritiene di interesse è la stessa funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema di controllo e p è il parametro che si suppone soggetto a variazioni, il rapporto in questione può essere scritto nella forma:

$$\frac{\frac{\Delta W(s)}{W(s)}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\Delta W(s)}{\Delta p} \frac{p}{W(s)}$$

Ispirata alla forma del secondo membro di questa uguaglianza, la *funzione di sensibilità* S_p^W della funzione di trasferimento $W(s)$ rispetto al parametro p è definita dalla relazione:

$$(III.46) \quad S_p^W = \frac{\partial W(s)}{\partial p} \frac{p}{W(s)}$$

Prima di procedere oltre nell'uso della (III.46) conviene osservare che la grandezza così definita si presta a valutare in maniera diretta l'influenza di variazioni dei parametri (genericamente, di un parametro p) sulle grandezze che sono state scelte convenzionalmente per caratterizzare la fedeltà di risposta. In termini generali, si può dire che, se il secondo membro della (III.46) assume valori in modulo molto inferiori all'unità, il sistema di controllo ha una funzione di trasferimento $W(s)$ che è poco sensibile alle variazioni del parametro p ; in ogni caso, quindi, la risposta del sistema stesso non si modifica apprezzabilmente in seguito a variazioni di tale parametro. Se invece il secondo membro della (III.46) assume valori in modulo prossimi o, peggio, superiori all'unità, la funzione $W(s)$ subisce variazioni di pari (o maggiore) entità, a quella del parametro p e lo stesso accade per la risposta ad una generica funzione di ingresso. Più in particolare, si può osservare che la funzione $W(s)$, calcolata per $s=0$, fornisce il valore della risposta in regime permanente ad un ingresso costante di ampiezza unitaria. Il secondo membro della (III.46), calcolato per $s=0$, può essere allora utilizzato per valutare la sensibilità di questa particolare risposta a variazioni del parametro p . Nello stesso spirito, calcolando il modulo del secondo membro della (III.46) per $s=j\tilde{\omega}$, si valuta la sensibilità della risposta in regime permanente (in ampiezza) ad un ingresso sinusoidale $\tilde{u}(t) = \sin\tilde{\omega}t$, ecc.

Una delle caratteristiche più interessanti della funzione definita con la (III.46) consiste nella possibilità di evidenziare l'importanza della struttura interna di un sistema di controllo sulla sensibilità alle variazioni dei parametri. In proposito, si può osservare che, se p è uno dei parametri che caratterizzano una funzione di trasferimento $P(s)$ associata ad una parte qualsiasi del sistema, grazie al teorema della derivazione delle funzioni composte, si può scrivere:

$$S_p^W = \frac{\partial W(s)}{\partial p} \frac{p}{W(s)} = \frac{\partial W(s)}{\partial P(s)} \frac{\partial P(s)}{\partial p} \frac{p}{P(s)} \frac{P(s)}{W(s)} = S_P^W S_p^P$$

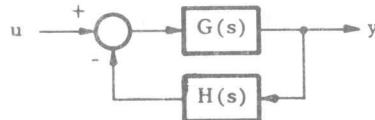
La sensibilità S_p^W della funzione $W(s)$ rispetto al parametro p è dunque pari al prodotto della sensibilità S_P^W della funzione $W(s)$ rispetto alla funzione $P(s)$ per la sensibilità S_p^P della funzione $P(s)$ rispetto al parametro p . Questo risultato consente di considerare separatamente, nello studio della sensibilità, l'effetto delle variazioni di un parametro sulla funzione di trasferimento di quella parte del sistema nel quale le variazioni stesse hanno luogo (la funzione S_p^P) e l'effetto della struttura del sistema di controllo sulle modalità con cui variazioni nella funzione di trasferimento della parte considerata si trasmettono sulla funzione di trasferimento complessiva (la funzione S_P^W).

Ciò posto, è interessante esaminare la forma delle funzioni di sensibilità per un sistema con struttura interna a controreazione, del tipo

indicato in fig.III.28. Per un sistema di questo genere la funzione di trasferimento $W(s)$ assume la forma:

$$(III.47) \quad W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Fig.III.28



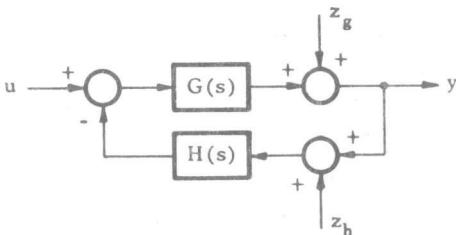
Di conseguenza, la sensibilità S_G^W di $W(s)$ rispetto alla funzione di trasferimento $G(s)$ del ramo diretto è pari a:

$$(III.48) \quad S_G^W = \frac{1}{(1 + G(s)H(s))^2} \frac{G(s)}{G(s)/(1 + G(s)H(s))} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

A sua volta, la sensibilità S_H^W di $W(s)$ rispetto alla funzione di trasferimento $H(s)$ del ramo di reazione è pari a:

$$(III.49) \quad S_H^W = \left(\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right)^2 \frac{-H(s)}{G(s)/(1 + G(s)H(s))} = \frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Fig.III.29



Le espressioni così dedotte possono essere utilizzate per valutare l'influenza, sulla risposta di un sistema a controllareazione, di variazioni parametriche presenti in organi del ramo diretto o, rispettivamente, nel ramo di controllareazione. In proposito, è importante osservare che le due funzioni coincidono, ordinatamente, con le funzioni di trasferimento relative a disturbi agenti sull'uscita del ramo diretto e, rispettivamente, sull'ingresso del ramo di reazione. Infatti, considerati nello schema di fig.III.28 due disturbi z_g e z_h agenti (in modo additivo) nei punti predetti (cfr. fig.III.29), si ha:

$$W_{z_g}(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad ; \quad W_{z_h}(s) = \frac{-G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

e quindi, in definitiva,

$$(III.50) \quad S_G^W(s) = W_{z_g}(s)$$

$$(III.51) \quad S_H^W(s) = W_{z_h}(s)$$

La correlazione che si è stabilita tra le funzioni di trasferimento dei disturbi e le funzioni di sensibilità consente di utilizzare immediatamente, ai fini che qui interessano, i risultati acquisiti nei paragrafi precedenti a proposito della risposta ai disturbi. In particolare si può dedurre che, in un sistema di controllo avente la struttura indicata in fig.III.28:

- la sensibilità $S_G^W(0)$ della risposta in regime permanente ad un ingresso costante rispetto a variazioni nella funzione di trasferimento $G(s)$ del ramo diretto, coincide con il valore della risposta a regime permanente ad un disturbo costante di ampiezza unitaria agente sull'uscita del ramo in questione; se la funzione $H(s)$ coincide con una costante di valore $1/K_d$, risulta allora:

$$S_G^W(0) = \frac{K_d}{K_d + K_G}$$

oppure:

$$S_G^W(0) = 0$$

a seconda che la funzione $G(s)$ non abbia o, rispettivamente, abbia almeno un polo nel punto $s = 0$;

- la sensibilità $S_H^W(0)$ della risposta in regime permanente ad un ingresso costante rispetto a variazioni nella funzione di trasferimento $H(s)$ del ramo di reazione, coincide con il valore della risposta a regime permanente ad un disturbo costante di ampiezza unitaria agente sull'ingresso del ramo in questione; se $H(s) = 1/K_d$, risulta allora;

$$S_H^W(0) = \frac{-K_G}{K_d + K_G}$$

oppure:

$$S_H^W(0) = -1$$

a seconda che la funzione $G(s)$ non abbia o, rispettivamente, abbia almeno un polo nel punto $s = 0$.

Queste espressioni mettono chiaramente in luce l'importanza del guadagno della funzione di trasferimento del ramo diretto nei riguardi della sensibilità alle variazioni dei parametri (si osservi, in proposito, che la seconda e la quarta coincidono con i limiti, per $K_G \rightarrow \infty$, della prima e, rispettivamente della seconda). In particolare, si osserva che al crescere di K_G , diminuisce la sensibilità alle variazioni della funzione $G(s)$ e tende a divenire unitaria la sensibilità alle variazioni della funzione $H(s)$. Una tale circostanza riproduce, così come era naturale attendersi, le caratteristiche della risposta a disturbi per un sistema del tipo indicato in fig.III.29: una situazione di conflitto - per lo schema a contoreazione - tra le prestazioni nei riguardi di variazioni di parametri, a seconda che si tratti di parametri, appartenenti a funzioni relative al ramo diretto o a quelle relative al ramo di contoreazione. In tale situazione, tenendo presente che nel ramo diretto sono generalmente presenti componenti destinati a sviluppare azioni di potenza e che per questi ultimi è difficile e costoso ottenere buona precisione e costanza di caratteristiche, si privilegia la scelta che contribuisce a ridurre la sensibilità rispetto ai parametri che caratterizzano le funzioni di trasferimento di questo ramo. Naturalmente, ciò porta come conseguenza la necessità di utilizzare componenti ad elevata precisione nella realizzazione del ramo di contoreazione.

Le considerazioni precedenti possono essere estese considerando, in luogo della risposta ad ingressi costanti, la risposta in regime permanente a ingressi sinusoidali. Si può allora dedurre facilmente che, per quanto riguarda la sensibilità della risposta ad un ingresso $\tilde{u}(t) = \sin \tilde{\omega} t$, valgono le relazioni:

$$S_G^W(j\tilde{\omega}) = \frac{1}{1 + G(j\tilde{\omega})H(j\tilde{\omega})}$$

$$S_H^W(j\tilde{\omega}) = \frac{-G(j\tilde{\omega})H(j\tilde{\omega})}{1 + G(j\tilde{\omega})H(j\tilde{\omega})}$$

Esaminando queste espressioni, si constata immediatamente che le proprietà del sistema nei riguardi di variazioni dei parametri dipendono dalla pulsazione $\tilde{\omega}$ della funzione in ingresso. Per mettere in luce il ruolo di tale grandezza, può essere utilizzata una costruzione grafica del tipo di quella introdotta nel par.IV. Considerato il grafico polare della funzione (cfr. fig.III.30)

$$F(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$$

e tracciato il cerchio di raggio unitario avente centro nel punto -1, si può osservare che, per tutti i valori di ω in corrispondenza ai quali lo

estremo del vettore $F(j\omega)$ cade al di fuori del cerchio suddetto, la sensibilità $S_G^W(j\omega)$ della risposta in regime permanente all'ingresso $\tilde{u}(t) = \sin \tilde{\omega} t$ rispetto a variazioni nella funzione di trasferimento $G(s)$ del ramo diretto, è in modulo inferiore all'unità. Per gli altri valori di ω , viceversa, la sensibilità $S_G^W(j\omega)$ è in modulo superiore all'unità. Si conclude allora che per le ω in corrispondenza alle quali la condizione suddetta è soddisfatta, la struttura a contoreazione svolge un ruolo positivo nei riguardi delle variazioni di parametri di $G(s)$; per le altre, invece, il ruolo svolto è negativo.

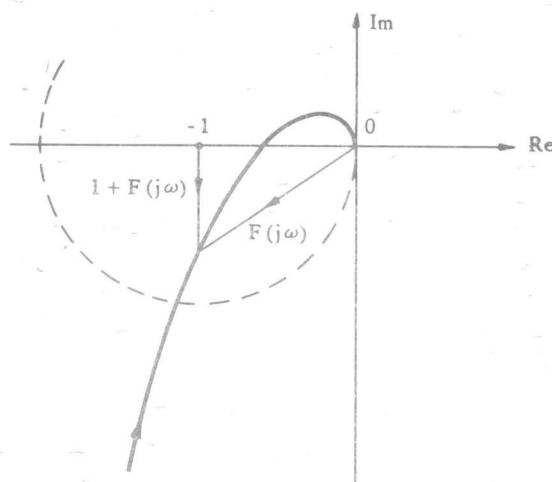


Fig.III.30

Le funzioni di sensibilità introdotte con la (III.46) possono essere convenientemente usate, come si è visto, per determinare l'influenza di variazioni dei parametri sullarisposta in regime permanente a particolari funzioni di ingresso. In tale ambito, considerando ingressi sinusoidali, si è potuta analizzare l'influenza di variazioni dei parametri sulle caratteristiche della risposta armonica di un sistema. Appare allora lecito affermare, nello spirito delle osservazioni svolte alla fine del paragrafo precedente, che le funzioni di sensibilità possono essere utilizzate anche per valutare almeno da un punto di vista qualitativo l'influenza di variazioni dei parametri sulla risposta transitoria di un sistema. In molti casi, tuttavia, un approccio di questo genere può non risultare soddisfacente e può rendersi necessaria un'analisi più particolareggiata, rife-

rita a nozioni che caratterizzano in maniera più definita il comportamento transitorio quali, ad esempio, la distribuzione dei poli della funzione $W(s)$ nel piano complesso, la presenza, in prossimità di ciascuno di questi, di zeri della funzione stessa e così via. Analisi di questo genere non presentano particolari difficoltà di impostazione ma danno luogo, generalmente, a sviluppi analitici notevoli e non si prestano sempre ad interpretazioni così dirette come quelle consentite dall'uso delle funzioni di sensibilità.

Un caso particolarmente semplice e significativo che si inquadra in questa tematica è quello che si presenta quando, in un sistema avente struttura a controreazione, si vuole determinare l'effetto di variazioni del guadagno della funzione di trasferimento del sistema non reazionato sulla posizione dei poli della funzione di trasferimento del sistema reazionato. Questo problema può essere, infatti, facilmente formalizzato nei termini seguenti. Si consideri un sistema avente la struttura indicata in fig.III.28, alla quale corrisponde la funzione di trasferimento (III.47). Se si esclude il caso in cui uno o più poli della funzione $G(s)$ coincidono con altrettanti zeri della funzione $H(s)$, si può affermare che i poli della funzione $W(s)$ sono tutti e soli i valori di s che risolvono l'equazione:

$$(III.52) \quad 1 + G(s) H(s) = 0$$

Si assuma ora che la funzione $G(s) H(s)$ abbia m zeri (z_1, \dots, z_m) ed n poli (p_1, \dots, p_n), con $n > m$, e si ponga:

$$G(s) H(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Ciò consente di riscrivere la (III.52) nella forma:

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K' \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

Per esaminare l'influenza di variazioni del parametro K' sui valori delle radici conviene riguardare quest'ultima come un'equazione del tipo:

$$(III.53) \quad f(s, K') = 0$$

che lega tra loro la variabile complessa s e la variabile reale K' e pensare la s come funzione implicita di K' . Ciò permette di utilizzare un teorema fondamentale di Analisi, che fornisce immediatamente la risposta al problema posto⁽¹⁾.

Si può infatti scrivere, per la funzione $s = s(K')$ implicitamente definita dalla (III.53):

$$(III.54)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{ds}{dK'} \right]_{(\bar{s}, \bar{K}')} &= \left[- \frac{\frac{\partial f}{\partial K'}}{\frac{\partial f}{\partial s}} \right]_{(\bar{s}, \bar{K}')} = \\ &= \left[- \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{s - p_j} + K' \prod_{i=1}^m (s - z_i) \sum_{j=1}^m \frac{1}{s - z_j}} \right]_{(\bar{s}, \bar{K}')} = \\ &= \frac{\frac{1}{\bar{K}'}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\bar{s} - z_j} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{s} - p_i}} \end{aligned}$$

avendo, nell'ultimo passaggio, diviso numeratore e denominatore per $\prod_{i=1}^m (s - z_i)$ e tenuto conto del fatto che (\bar{s}, \bar{K}') soddisfano la (III.53).

(1) - Il risultato in questione è il Teorema della Funzione Implicita (o Teorema del Divenire). Dal punto di vista che qui interessa il Teorema assicura che, se \bar{s} e \bar{K}' sono una coppia di valori che soddisfano la (III.53) (cioè, se \bar{s} è una radice della (III.53) corrispondente al valore \bar{K}' del parametro K') e se risulta:

$$\left[\frac{\partial f(s, K')}{\partial s} \right]_{(\bar{s}, \bar{K}')} \neq 0$$

(Segue)

Un'espressione alternativa, anche più semplice, può essere ottenuta indicando con s_2, s_3, \dots, s_n le altre radici della (III.52) corrispondenti al valore K' del parametro K' , diverse da \bar{s} (si noti che \bar{s} deve essere necessariamente semplice, in quanto le ipotesi del teorema della funzione implicita richiedono che sia $[\partial f / \partial s]_{(\bar{s}, \bar{K}')} \neq 0$). Tenendo allora presente che:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial s} \right]_{\bar{s}, \bar{K}'} = \prod_{i=2}^n (\bar{s} - s_i)$$

si può scrivere direttamente:

$$(III.55) \quad \left[\frac{ds}{dK'} \right]_{(\bar{s}, \bar{K}')} = - \frac{\prod_{i=1}^m (\bar{s} - z_i)}{\prod_{i=2}^n (\bar{s} - s_i)}$$

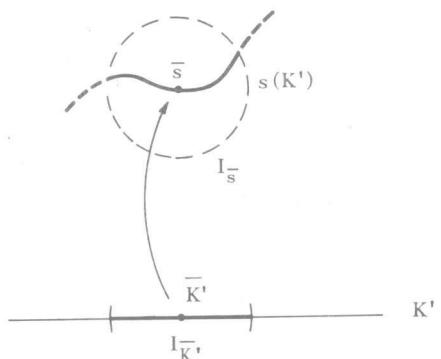
Utilizzando la formula (III.55) è possibile giudicare, sia in modo qualitativo sia anche in modo quantitativo, in che modo le variazioni del parametro K' influiscono sulla posizione dei poli s_1, \dots, s_n della funzione $W(s)$. In particolare, ricordando alcune osservazioni già fatte nel corso del par. III.4 a proposito del ruolo degli zeri nei riguardi dell'importanza relativa dei residui di una funzione razionale, si può affermare che la variazione del generico polo s_i della funzione di trasferimento del si-

allora esistono un intervallo aperto $I_{\bar{K}'}$ dell'asse reale centrato sul valore \bar{K}' ed un intorno circolare aperto $I_{\bar{s}}$ del piano complesso centrato sul valore \bar{s} tali che, in corrispondenza ad ogni valore $K' \in I_{\bar{K}'}$, esiste uno ed un solo valore $s \in I_{\bar{s}}$ che, assieme a \bar{K}' , fornisce una soluzione della (III.52) (resolubilità locale della (III.52) rispetto ad s). La funzione (cfr. figura):

$$s = s(K')$$

che in tal modo viene localmente ad essere definita è una funzione olomorfa e si ha:

$$\left[\frac{ds}{dK'} \right]_{\bar{K}'} = - \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial K'} \right]_{(\bar{s}, \bar{K}')}}{\left[\frac{\partial f}{\partial s} \right]_{(\bar{s}, \bar{K}')}}$$



stema reazionato $W(s)$ provocata da variazioni del parametro K' è tanto più piccola, a parità di altre situazioni, quanto più sono piccole le distanze tra il polo in questione e gli zeri z_1, \dots, z_m della funzione di trasferimento del sistema non reazionato.

III.8 - Esempi.

I concetti introdotti in questo Capitolo possono trovare immediata applicazione in alcuni degli esempi di sistemi di controllo già considerati nel Capitolo I.

Nel problema della regolazione di livello di cui all'Esempio I.1 sussistono, tra le grandezze in gioco, relazioni corrispondenti a quelle indicate nello schema a blocchi di Fig.III.31. Come si è già osservato a suo tempo, il sistema è dimensionato in modo tale che, se $h = h_0$, l'apertura a della valvola coincida con il valore a_0 neces-

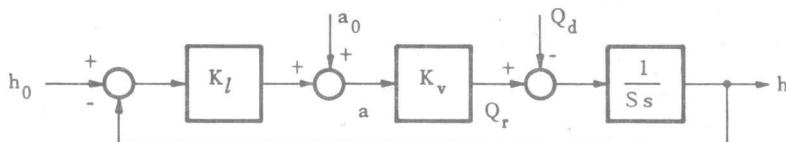


Fig.III.31

sario a stabilire una portata Q_r esattamente uguale alla portata Q_d richiesta dall'utenza in condizioni nominali. Per ritrovare questo risultato utilizzando i metodi generali presentati in questo Capitolo, si deve tenere presente che l'uscita h del sistema in questione è legata ai due ingressi h_0 , a_0 e al disturbo Q_d dalle funzioni di trasferimento:

$$W_{h_0}(s) = \frac{K_l K_v \frac{1}{Ss}}{1 + K_l K_v \frac{1}{Ss}} = \frac{K_l K_v}{K_l K_v + Ss}$$

$$W_{a_0}(s) = \frac{K_v \frac{1}{Ss}}{1 + K_l K_v \frac{1}{Ss}} = \frac{K_v}{Ss + K_l K_v}$$

$$W_{Q_d}(s) = \frac{-\frac{1}{Ss}}{1 + K_l K_v \frac{1}{Ss}} = \frac{-1}{K_l K_v + Ss}$$

In corrispondenza ai valori costanti \tilde{h}_0 , \tilde{a}_0 , \tilde{Q}_d delle tre grandezze di ingresso h_0 , a_0 , Q_d , la risposta a regime permanente assume il valore (anch'esso costante)

$$(III.56) \quad \tilde{h} = W_{h_0}(0)\tilde{h}_0 + W_{a_0}(0)\tilde{a}_0 + W_{Q_d}(0)\tilde{Q}_d = \tilde{h}_0 + \frac{1}{K_l}\tilde{a}_0 - \frac{1}{K_l K_v}\tilde{Q}_d$$

Se allora \tilde{a}_0 è scelto in modo tale che sia $\tilde{a}_0 = \tilde{Q}_d/K_v$, risulta (come peraltro richiesto) $\tilde{h} = \tilde{h}_0$.

Si noti che lo stesso risultato avrebbe potuto essere dedotto anche in modo più diretto, senza calcolare esplicitamente le funzioni di trasferimento. Sarebbe bastato, infatti, osservare che lo schema di controllo considerato ha una struttura a contoreazione e tenere presenti i risultati dedotti nel par. III.3. Per quanto riguarda il legame tra h_0 ed h , il sistema è caratterizzato da una struttura nella quale la funzione di trasferimento del ramo diretto ha un polo nell'origine; per avere la risposta in regime permanente ad un ingresso costante \tilde{h}_0 basta allora moltiplicare la costante \tilde{h}_0 stessa per l'inverso del coefficiente di guadagno del ramo di contoreazione che, nel caso in esame, è unitario. Si ottiene così il primo addendo della (III.56). Per quanto riguarda il legame tra a_0 ed h il sistema è ancora caratterizzato da una struttura nella quale la funzione di trasferimento del ramo diretto ha un polo nell'origine ma, questa volta, il coefficiente di guadagno del ramo che appare (rispetto al punto di accesso della grandezza a_0) in contoreazione è pari a K_l ; la risposta in regime permanente corrispondente ad un ingresso costante \tilde{a}_0 vale allora $(1/K_l)\tilde{a}_0$, così come indicato nel secondo addendo della (III.56). Lo stesso tipo di ragionamento permette poi di dedurre, a proposito legame tra Q_d ed h , che la risposta in regime permanente ad un disturbo costante \tilde{Q}_d vale $(1/K_l K_d)\tilde{Q}_d$ e ciò completa la verifica della (III.56).

Nell'ipotesi che sia $\tilde{a}_0 = \tilde{Q}_d/K_v$, l'uscita del sistema, in condizioni di regime, assume un valore \tilde{h} coincidente con il valore desiderato \tilde{h}_0 . Può essere interessante, a questo punto, esaminare il comportamento del sistema in corrispondenza ad una variazione a gradino della portata Q_d . Grazie alla linearità, è sufficiente limitarsi a calcolare la risposta del sistema ad un gradino di ampiezza $\Delta\tilde{Q}_d$ e sommare quest'ultima alla risposta precedentemente ottenuta. La risposta in questione, a sua volta, si ottiene semplicemente come somma di due termini, uno corrispondente al regime permanente e uno corrispondente al regime transitorio, entrambi calcolabili in maniera molto semplice sulla base delle considerazioni svolte nei par. III.4 e III.6. Per quanto riguarda la risposta a regime, sulla base delle stesse considerazioni precedenti, si ottiene direttamente il valore

$$(III.57) \quad \Delta\tilde{h} = \frac{-1}{K_l K_v} \Delta\tilde{Q}_d$$

Per quanto riguarda la risposta transitoria occorre invece prendere in esame la funzione di trasferimento $W_{Q_d}(s)$. Essendo la funzione caratterizzata da un solo polo nel punto $s = -K_l K_v/S$ la risposta transitoria assume un'espressione del tipo

$$(III.58) \quad \frac{\Delta \tilde{Q}_d}{K_l K_v} e^{-K_l K_v t/S}$$

(si tenga presente, in proposito, la (III.40). Il comportamento del sistema ad una variazione a gradino della portata Q_d è allora quello rappresentato nella Fig.III.32.

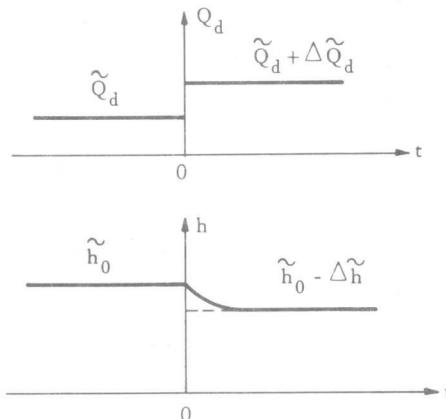


Fig.III.32

Il valore di regime della risposta non coincide più con il valore desiderato, ma differisce per la quantità (III.57); ciò è perfettamente in accordo con il fatto che il sistema in questione è statico, in quanto la funzione di trasferimento di quella parte di ramo diretto che precede il punto di accesso del disturbo è sprovvista di poli nell'origine. Lo scostamento (III.57) può essere peraltro reso arbitrariamente piccolo proporzionando opportunamente la costante K_l che rappresenta il coefficiente di amplificazione della leva che aziona la valvola. La scelta di K_l influenza anche sul comportamento transitorio, nel passaggio dall'una all'altra situazione di regime, così come indicato nell'espressione (III.58); all'aumentare di K_l corrispondono transitori via via più rapidi.

Nel problema del controllo della posizione di un montacarichi, di cui all'esempio I.2 sussistono, tra le grandezze in gioco, relazioni corrispondenti a quelle indicate nello schema di Fig.III.33. Se si vuole calcolare la risposta in regime permanente corrispondente a sollecitazioni costanti si può procedere, così come nell'esempio precedente, analizzando separatamente l'effetto dell'ingresso u e quello della grandezza M_{gr} , assimilabile ad un disturbo.

Per ottenere la risposta in regime permanente ad un ingresso costante di valore u , tenuto presente che il sistema ha una struttura a contoreazione e che la funzione di trasferimento del ramo diretto è dotata di un polo nel punto $s = 0$, è sufficiente moltiplicare per l'inverso del coefficiente di guadagno del ramo di contoreazione la grandezza presente nel punto indicato con e_1 . Si ha allora la risposta:

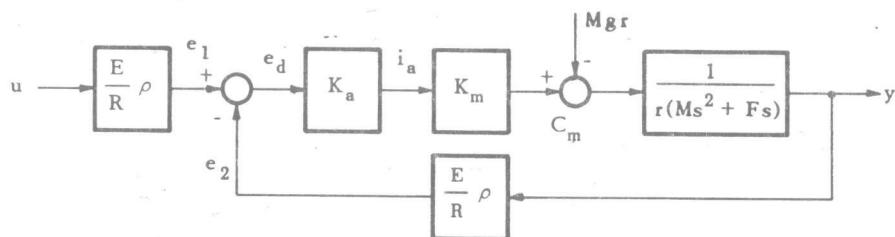


Fig.III.33

$$\tilde{y} = \frac{R}{E} \frac{1}{\rho} \frac{E}{R} \tilde{u} = \tilde{u}$$

Rispetto al disturbo $Mg r$ (che è costante) il sistema è statico e dà quindi luogo ad una risposta non nulla, il cui valore in regime permanente assume il valore (cfr.(III.25")):

$$\frac{-1}{\frac{E}{R} \frac{1}{\rho} K_a K_m} Mg r$$

In definitiva, si può concludere che la risposta complessiva, quando l'ingresso assume il valore costante \tilde{u} , assume in regime permanente il valore:

$$\tilde{u} = \frac{R Mg r}{E \rho K_a K_m}$$

Come si può constatare, il valore effettivo della risposta coincide con il valore desiderato a meno di una quantità costante, dovuta all'effetto del peso della cabina. Per rendere quest'ultima inferiore ad una quantità prefissata occorre proporzionare convenientemente il guadagno K_a dell'amplificatore presente nel ramo diretto.

Se il valore dell'ingresso u subisce una variazione a gradino, passando dal valore costante \tilde{u}_1 al valore costante \tilde{u}_2 , la risposta y evolve anch'essa dal corrispondente valore:

$$\tilde{u}_1 = \frac{R Mg r}{E \rho K_a K_m}$$

al corrispondente valore:

$$\tilde{u}_2 = \frac{R Mg r}{E \rho K_a K_m}$$

con un transitorio la cui forma dipende dai parametri della funzione di trasferimento del sistema. Essendo:

$$W(s) = \frac{\frac{E}{R} \rho K_a K_m \frac{1}{r(Ms^2 + Fs)}}{1 + \frac{E}{R} \rho K_a K_m \frac{1}{r(Ms^2 + Fs)}} = \frac{1}{1 + \frac{Rr}{E \rho K_a K_m} (Ms^2 + Fs)}$$

si può concludere che la risposta transitoria è caratterizzata da due termini aperiodici o da un termine pseudoperiodico, a seconda che il polinomio:

$$RrMs^2 + RrFs + E\rho K_a K_m$$

abbia radici reali o, rispettivamente, complesse e coniugate. La collocazione effettiva di tali radici sul piano complesso (in corrispondenza ai valori effettivamente assunti dai parametri) consente di riconoscere immediatamente se nella risposta sono presenti o meno oscillazioni, se il decadimento è rapido oppure lento, ecc.

Il sistema di controllo descritto nel Problema I.3, il cui scopo è quello di rendere l'assetto verticale di una nave il più possibile indipendente da perturbazioni dovute al moto ondoso, può essere schematicamente rappresentato mediante lo schema a blocchi di Fig.III.34.

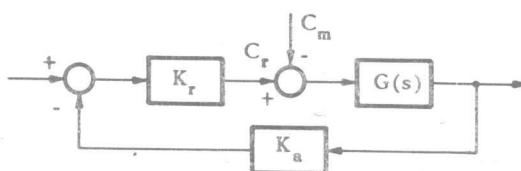


Fig.III.34

Le grandezze indicate con C_m e con C_r rappresentano, rispettivamente, la coppia di disturbo dovuta al moto ondoso e la coppia di raddrizzamento sviluppata dalle pinne stabilizzatrici. Con il coefficiente K_a si è indicato il guadagno del dispositivo che rileva l'angolo di sbandamento rispetto alla verticale. Al servomotore che posiziona le pinne stabilizzatrici in funzione dell'angolo di sbandamento è stata associata una funzione di trasferimento costante, di guadagno pari a K_r , in quanto si è ritenuto di poter trascurare - in una prima approssimazione - la dinamica propria del servomotore rispetto a quella che caratterizza il rollio della nave. Quest'ultima, a sua volta, può essere descritta mediante la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 0,1s + 0,25s^2}$$

Il disturbo agente sul sistema di controllo è di forma periodica e può essere schematizzato con la funzione:

$$C_m(t) = C_m \sin \frac{2\pi}{T} t$$

nella quale T può assumere valori compresi tra 2-3 sec. e 10 sec.

L'analisi svolta nel par.III.5 consente immediatamente di calcolare le prestazioni di questo sistema di controllo. Tenendo infatti presente che la funzione di trasferimento relativa al disturbo ha l'espressione:

$$W_{C_m}(s) = \frac{G(s)}{1 + K_a K_r G(s)} = \frac{1}{K_a K_r + 0,1 s + 0,25 s^2 + 1}$$

si può concludere che, in condizioni di regime, la nave compie oscillazioni periodiche, attorno alla verticale, di ampiezza:

$$\left| \frac{1}{1 + K_a K_r + j 0,1 \frac{2\pi}{T} - 0,25 \frac{4\pi^2}{T^2}} \right| C_m$$

Aumentando opportunamente il guadagno K_r l'ampiezza di tali oscillazioni può essere resa inferiore ad un qualsivoglia valore prefissato.

PROBLEMI

III.1 - Si consideri lo schema indicato in Fig.III.P.1 e si supponga che il ramo di reazione, pur avendo guadagno $1/K_d$, non abbia funzione di trasferimento indipendente da s . Si supponga, in altri termini, che sia:

$$H(s) = \frac{1 (1 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots)}{K_d (1 + \gamma_1 s + \gamma_2 s^2 + \dots)}$$

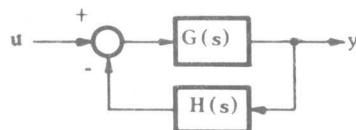


Fig.III.P.1

Si assuma inoltre, per $G(s)$, un'espressione del tipo:

$$G(s) = \frac{1 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \dots}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots}$$

Utilizzando i risultati generali dedotti nel paragrafo III.2, si determini a quali condizioni devono soddisfare i coefficienti a_1 , β_1 , γ_1 , δ_1 e K_d affinché il sistema sia di tipo 1 o di tipo 2 (si consiglia di scrivere la funzione di trasferimento di errore sotto forma di rapporto di polinomi e di imporre la presenza di uno o due zeri nell'origine).

III.2 - Il sistema di regolazione della velocità per un laminatoio considerato nell'Esempio I.3 è caratterizzato dallo schema a blocchi indicato in Fig.III.P.2. Si determini il valore assunto dalla velocità angolare ω in regime permanente quando l'ingresso E_0 ed il disturbo di coppia C_d assumono valori costanti.

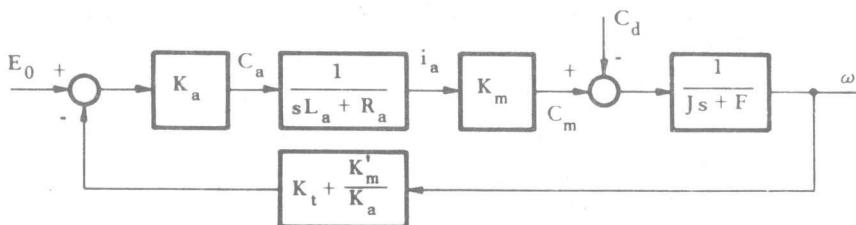


Fig.III.P.2

III.3 - Il sistema di regolazione della temperatura di un forno considerato nell'esempio E.1.4 è caratterizzato dallo schema a blocchi indicato in Fig.III.P.3. Si determini la risposta in regime permanente del sistema corrispondente a valori costanti di T_0 e di T_e . Si determini altresì l'andamento transitorio della temperatura T corrispondente ad una variazione, a gradino, del riferimento T_0 . Si calcoli la sensibilità della risposta in regime permanente (a valori costanti di T_0 e di T_e) rispetto a variazioni della resistenza R di riscaldamento del forno.

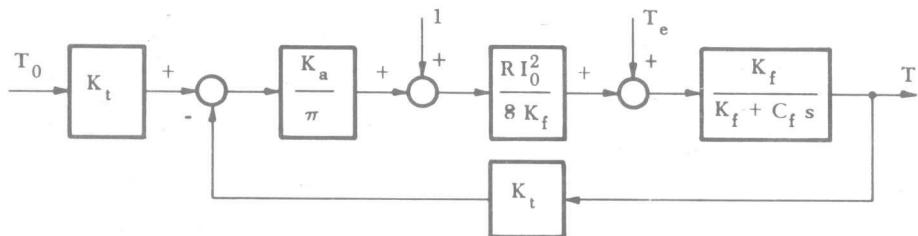
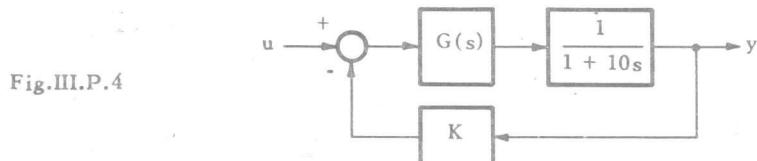


Fig.III.P.3

III.4 - Si consideri un sistema di controllo caratterizzato da uno schema del tipo indicato in Fig.III.P.4.



Si determinino la funzione $G(s)$ e la costante K che consentono al sistema di rispondere, ad un ingresso a gradino di ampiezza unitaria, con un'uscita della forma:

$$y(t) = 10(1 - e^{-10t})$$

Nel caso siano possibili più scelte, si discutano le diverse opportunità in relazione ai altri aspetti del comportamento, quali la risposta ad eventuali disturbi e la sensibilità a variazioni dei parametri.

III.5 - Nell'oscillatore ad aggancio di fase, già introdotto nel Problema I.8, la frequenza istantanea $\omega(t)$ di un oscillatore locale è controllata da un segnale di ampiezza proporzionale alla differenza tra la fase istantanea $\theta(t)$ del segnale di ingresso e la fase istantanea $\hat{\theta}(t)$ del segnale generato localmente. Al sistema può essere associato uno schema a contoreazione del tipo indicato in Fig.III.P.5

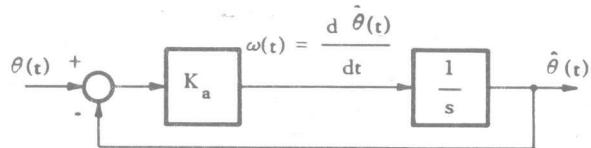


Fig.III.P.5

Si analizzi il comportamento del sistema in regime permanente, considerando funzioni di ingresso costanti o sinusoidali.

*

CAPITOLO IV

METODI DI SINTESI PER TENTATIVI BASATI SULL'IMPIEGO DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

IV.1 - Generalità.

Come si è detto all'inizio del Cap. II, un sistema di controllo è costituito dalla interconnessione di più parti o componenti. Alcune di queste hanno struttura e caratteristiche sulle quali non è possibile o conveniente agire, in sede di sintesi del sistema di controllo; ciò si verifica, ad esempio, tutte le volte che il processo (o impianto) è stato progettato in tempi diversi da quelli in cui viene realizzato il sistema di controllo e senza esplicito riferimento alle esigenze specifiche di quest'ultimo. Altre parti invece devono essere definite proprio in relazione al problema del controllo ed è su queste che il progettista è libero di intervenire in sede di sintesi, assegnandone le caratteristiche ed i parametri. In accordo anche con una terminologia già introdotta nel Cap. I, è abituale indicare l'insieme delle prime con il nome di *parte* (o processo) *controllata* e quello delle seconde con il nome di *parte controllante* (o controllore).

In questi termini, il problema della *sintesi* di un sistema di controllo può essere definito come il problema di assegnare le caratteristiche (la struttura) ed i parametri della parte controllante, in modo tale che il sistema complessivo risponda a prefissati requisiti di comportamento.

Riferendosi ai sistemi di controllo caratterizzati da una struttura interna a controreazione, si inizierà con il considerare il caso più semplice, che è quello in cui la parte controllante è costituita dal dispositivo destinato alla trasduzione della grandezza controllata in una atta al confronto con quella di riferimento, dal dispositivo che esegue l'operazione di confronto e, infine, da quei dispositivi destinati ad elaborare la differenza tra la grandezza di riferimento e quella proveniente dal ramo di reazione, che vengono introdotti nel ramo diretto, a monte del proces-

so controllato, con lo scopo di rendere il comportamento del sistema soddisfacente in base ai punti di vista prescelti (cfr. fig.I.4).

In sede di sintesi, il progettista è chiamato a definire le caratteristiche del dispositivo di trasduzione e di quelli destinati alla elaborazione della grandezza agente, assicurando il soddisfacimento di specifiche espresse sulla base di criteri di analisi del tipo di quelli introdotti nel Capitolo precedente (stabilità, fedeltà di risposta, risposta ai disturbi, sensibilità alle variazioni parametriche). Da questo punto di vista si può anzitutto osservare che per il dispositivo di trasduzione non si pongono particolari problemi di scelta in quanto, come si è visto, le sue caratteristiche risultano definite in modo pressoché completo una volta assegnato il coefficiente K_d secondo il quale la grandezza controllata dovrebbe risultare (in condizioni ideali) proporzionale alla grandezza di riferimento. In termini astratti, il problema di definire le caratteristiche di tale elemento si esaurisce infatti nell'imporre una funzione di trasferimento indipendente da s e pari ad $1/K_d$. Viceversa, per quanto riguarda i dispositivi di elaborazione della grandezza agente sono generalmente possibili molte soluzioni diverse e ciò soprattutto a causa del fatto che le specifiche di progetto non definiscono sempre in modo univoco le caratteristiche del sistema di controllo che si vuole realizzare.

Ciò premesso, si può allora affermare che il problema della sintesi di un sistema di controllo a controreazione, nella sua accezione più semplice, si riduce essenzialmente a quello di definire la struttura ed i parametri di quella parte di sistema che - nel ramo diretto - si trova a monte del processo controllato, in modo tale che il sistema di controllo nel suo complesso soddisfi a specifiche prestabiliti.

Chiariti così i termini del problema, da un punto di vista generale si tratta ora di analizzare in dettaglio i diversi aspetti operativi. In proposito, si può osservare che la prima fase di ogni procedimento di sintesi consiste essenzialmente nella ricognizione delle diverse specifiche progettuali e nella loro eventuale classificazione sulla base delle modalità che verranno scelte, nel corso del procedimento, per soddisfare ad esse; da questo punto di vista, si può anzi affermare (come si è già osservato) che la scelta (o la classificazione) delle specifiche è molto spesso funzione del metodo stesso di sintesi che si intende adottare e viceversa,

Nei procedimenti di sintesi per tentativi, che sono basati sulla esecuzione iterata di una successione di passi ciascuno dei quali consiste di opportune scelte, di verifiche, di modifiche delle scelte iniziali, la ricognizione e la classificazione delle specifiche viene in generale effettuata in modo tale da razionalizzare il più possibile l'esecuzione dei tentativi stessi. Da questo punto di vista, la distinzione più rilevante è quella tra specifiche che possono essere soddisfatte in modo univoco e specifiche a proposito delle quali sussistono diverse soluzioni progettua-

li equivalenti. Nella prima classe rientrano di norma le specifiche riguardanti il comportamento del sistema in condizioni asintotiche: la stabilità, che vincola in modo univoco le parti reali degli autovalori del sistema; la risposta in regime permanente, nei suoi diversi aspetti legati alla scelta delle classi di ingressi e/o disturbi, alla definizione del tipo del sistema, dei valori degli errori, che vincola in modo univoco i valori dei coefficienti delle diverse funzioni di trasferimento (ingresso-uscita, disturbo-uscita) considerate. Nella seconda classe possono invece essere fatte rientrare le specifiche riguardanti il comportamento transitorio in corrispondenza a sollecitazioni a gradino e/o le diverse risposte in frequenza del sistema stesso (rispetto all'ingresso, rispetto ai disturbi).

Il soddisfacimento delle specifiche della prima classe non richiede, usualmente, l'esecuzione di tentativi e può quindi venire risolto in maniera diretta al primo passo del procedimento. Prescrizioni riguardanti il tipo del sistema o l'astatismo rispetto a disturbi comportano di norma la presenza di poli nell'origine nella funzione di trasferimento del ramo diretto; limiti superiori sui valori degli errori o sulle risposte a disturbi si traducono a loro volta, immediatamente, in limitazioni inferiori sul valore del coefficiente di guadagno della stessa funzione.

Il soddisfacimento di specifiche appartenenti alla seconda classe è invece la fase del procedimento nella quale si cerca di raggiungere il risultato per approssimazioni successive. Usualmente le prescrizioni riguardano alcuni parametri della risposta transitoria a sollecitazioni a gradino, ovvero i corrispondenti parametri della risposta armonica; in taluni casi possono tuttavia essere richieste specifiche più rigide, in corrispondenza a funzioni di ingresso e/o a disturbi di importanza particolare con riferimento al problema considerato. In questo ambito si procede assegnando inizialmente, sulla base di considerazioni razionali del tipo di quelle che verranno discusse più avanti, una struttura alla parte controllante e determinando un insieme di valori di primo tentativo per i parametri liberi. Successivamente si effettua una verifica, calcolando la risposta di interesse e valutandone la rispondenza alle specifiche considerate, al termine della quale si decide se è necessario iterare il procedimento, modificando i valori inizialmente attribuiti ai parametri, oppure se ci si può arrestare, ritenendosi raggiunto l'obiettivo con un grado di approssimazione soddisfacente.

Le operazioni implicate possono essere eseguite utilizzando come strumento di lavoro le rappresentazioni grafiche delle risposte armoniche delle varie parti che compongono il sistema, nel qual caso si usa dire che il procedimento è basato sull'impiego delle risposte in frequenza, ovvero utilizzando direttamente le relative funzioni di trasferimento, nel qual caso si usa dire che il procedimento è basato sull'impiego delle funzioni di variabile complessa.

Accanto alle specifiche riguardanti la risposta è in genere presente anche l'esigenza di garantire una adeguata protezione nei riguardi degli effetti delle variazioni dei parametri. Da questo punto di vista, occorre però osservare che, nei procedimenti elementari di sintesi, si rinuncia quasi sempre a considerare prescrizioni di tipo particolare, sulla base del fatto che già le stesse scelte messe in atto per ridurre gli effetti dei disturbi assicurano di per se - in un sistema a contoreazione - una sensibilità alle variazioni dei parametri sufficientemente bassa. Il solo aspetto che, per la sua importanza, viene sempre tenuto in evidenza è quello relativo alla conservazione della stabilità in presenza di variazioni dei parametri. Le grandezze che consentono di valutare questa proprietà, cioè il margine di guadagno ed il margine di fase, sono peraltro facilmente individuabili e le eventuali prescrizioni ad esse relative possono essere molto semplicemente messe in conto accanto a quelle considerate a proposito della risposta transitoria, dalle quali - come si mostrerà più avanti - non sono in generale indipendenti.

IV.2 - La carta di Nichols.

Lo scopo di questo paragrafo è quello di presentare un procedimento grafico, molto diffuso in pratica, che consente di correlare in maniera diretta le rappresentazioni grafiche di due funzioni, $F(j\omega)$ e $W(j\omega)$, legate dalla relazione:

$$(IV.1) \quad W(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)}$$

Il procedimento in questione può essere utilizzato, nello studio di un sistema a contoreazione, per correlare talune caratteristiche delle risposte armoniche del sistema reazionato e, rispettivamente, del sistema non reazionato, nonché - più in generale - per la soluzione dei problemi di sintesi nei procedimenti per tentativi basati sull'impiego della risposta in frequenza.

Prima di descrivere il procedimento, conviene ricordare innanzitutto che le funzioni che si stanno considerando, essendo funzioni complesse della variabile reale ω , possono essere rappresentate graficamente mediante un diagramma di Nyquist (nel qual caso si associa alla funzione una sola curva, nella quale la variabile ω appare come parametro corrente), o mediante un diagramma di Bode (nel qual caso si associa alla funzione una coppia di curve, che descrivono rispettivamente la dipendenza del modulo della funzione - in dB - e della fase dalla va-

rispetto alle coordinate del piano cartesiano (ω). Un terzo tipo di rappresentazione, al quale si fa abitualmente riferimento in relazione a problemi del tipo di quelli considerati in questo paragrafo, è quello in cui la funzione è rappresentata associando, in un piano cartesiano, a ciascun valore di ω il punto che ha come ascissa ed ordinata i valori della fase e, rispettivamente, del modulo - in dB - della funzione stessa. In tal modo la funzione viene ad essere rappresentata da una sola curva, parametrizzata in ω , differente però dal diagramma di Nyquist per il fatto che le ascisse e le ordinate di un generico punto definiscono fase e modulo, anziché parte reale e parte immaginaria, del numero complesso esprimente il valore della funzione in corrispondenza al generico valore di ω . I diagrammi così definiti prendono il nome di *diagrammi di Nichols*.

Da un punto di vista pratico, il modo più immediato per ottenere il diagramma di Nichols di una funzione è quello di tracciare, inizialmente la coppia di curve che ne definiscono il diagramma di Bode. A partire da queste si tratta allora di costruire, in un piano cartesiano, una curva parametrizzata in ω luogo dei punti le cui coordinate coincidono rispettivamente con i valori della fase e del modulo definiti - per ciascun ω - dalla coppia di curve inizialmente tracciate.

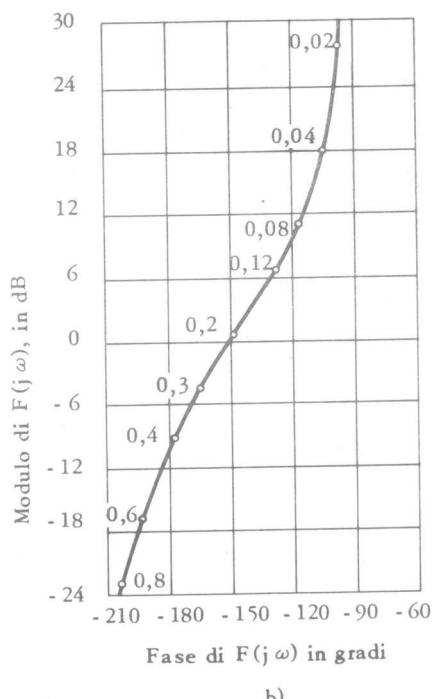
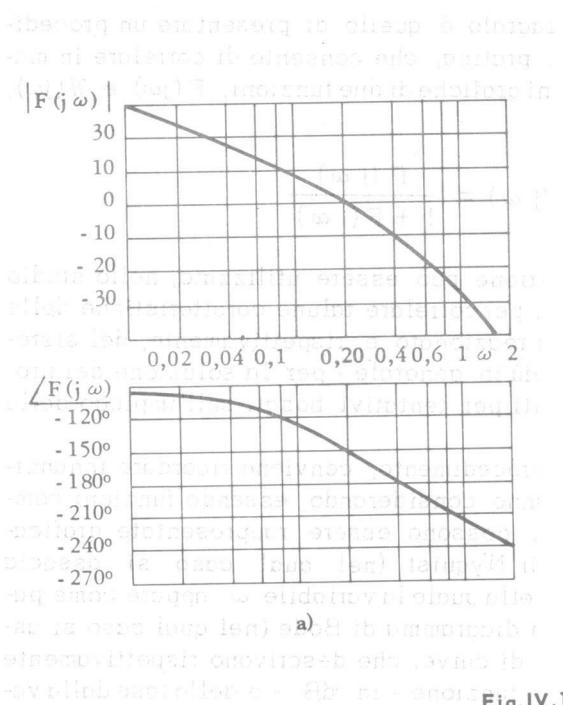


Fig. IV.1

Esaminando la Fig.IV.1a) e b) nella quale vengono riportati, a titolo di esempio, diagrammi di Bode e di Nichols relativi alla funzione:

$$F(j\omega) = \frac{\sqrt{0,1}}{j\omega(1+j\omega)(1+j5\omega)}$$

ci si può facilmente rendere conto dell'immediatezza con la quale si può passare da un diagramma di Bode al corrispondente diagramma di Nichols.

Ciò posto, si tenga presente che il problema considerato all'inizio, se si prescinde dal fatto che le quantità interessate sono dipendenti dalla variabile ω , si riduce semplicemente a quello di stabilire una corrispondenza tra rappresentazioni grafiche di due numeri complessi F e W tra i quali sussista la relazione:

$$(IV.2) \quad W = \frac{F}{1 + F}$$

A questo proposito conviene osservare che il numero indicato con W non è altro che una funzione, complessa, della variabile complessa indicata con F e che, di conseguenza, il problema in esame si può risolvere direttamente rappresentando la dipendenza delle due quantità reali che definiscono W (ad esempio il suo modulo M e la sua fase φ) dalle due quantità reali che definiscono F (ad esempio il suo modulo A e la sua fase α). Si tratta, in altri termini, di dare le rappresentazioni grafiche di due funzioni reali di variabili reali, della forma

$$M = M(A, \alpha) = \left| \frac{A e^{j\alpha}}{1 + A e^{j\alpha}} \right|$$

$$\varphi = \varphi(A, \alpha) = \angle \frac{A e^{j\alpha}}{1 + A e^{j\alpha}}$$

Se alle coppie di valori (A, α) si fanno corrispondere i punti di un piano, una rappresentazione piana delle funzioni in questione si può ottenere assegnando, per ciascuna di esse, le famiglie di luoghi di punti sui quali le funzioni stesse assumono valore costante. Si ottengono allora due famiglie di curve, che prendono rispettivamente il nome di *luoghi a modulo costante* (definiti da relazioni del tipo $M(A, \alpha) = \text{cost.}$) e *luoghi a fase costante* (definiti da relazioni del tipo $\varphi(A, \alpha) = \text{cost.}$).

Ovviamente, sono possibili diverse rappresentazioni della funzione (IV.1) e ciò in dipendenza delle diverse modalità di associare punti

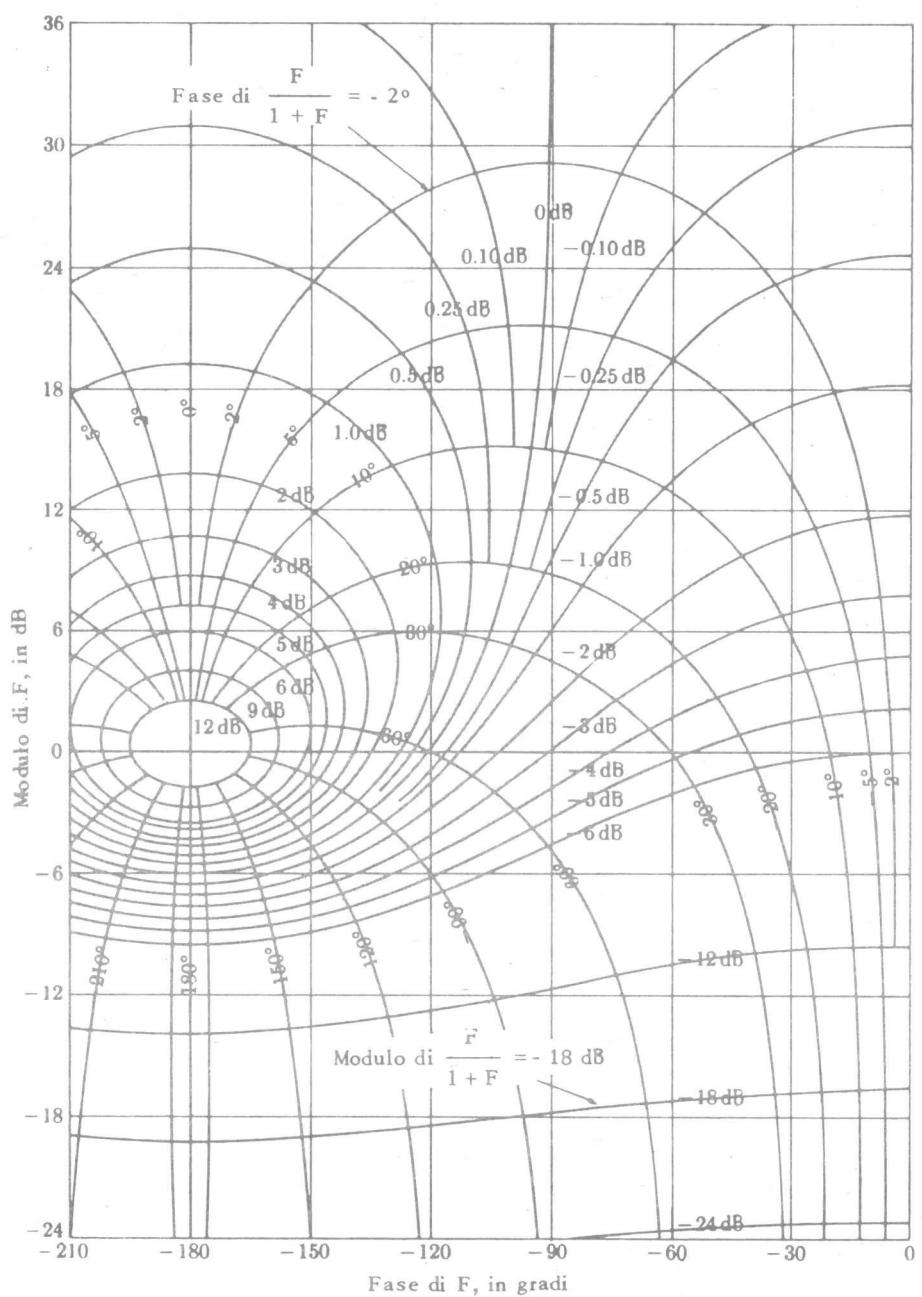


Fig. IV.2

del piano alle coppie (A, α) . In vista dell'uso cui tali rappresentazioni sono destinate (passaggio da $F(j\omega)$ a $W(j\omega)$ e viceversa) è abituale utilizzare, per rappresentare il numero complesso caratterizzato dalla coppia (A, α) , convenzioni consistenti con quelle adottate per rappresentare modulo e fase della funzione $F(j\omega)$. In relazione alle rappresentazioni che fanno uso dei diagrammi di Nyquist, ci si riferisce allora al caso in cui il punto associato alla coppia (A, α) è il punto di coordinate polari A ed α . In relazione invece alle rappresentazioni che fanno uso dei diagrammi di Nichols, ci si riferisce al caso in cui il punto associato alla coppia (A, α) è il punto di coordinate cartesiane α ed A (in dB).

Quest'ultimo caso è il più diffuso in pratica e in corrispondenza ad esso le famiglie di luoghi a modulo costante e a fase costante, associati alla funzione (IV.2), assumono la configurazione indicata in fig.IV.2. Una tale configurazione prende il nome di *carta di Nichols*.

Si noti in proposito che, essendo la fase α del numero complesso F definita a meno di un multiplo intero di 2π , le famiglie dei luoghi a modulo costante e a fase costante si ripetono per fasce verticali con periodicità 360° . Inoltre, poiché la (IV.2) è una funzione razionale a coefficienti reali della variabile complessa F , risulta:

$$M(A, -\alpha) = M(A, \alpha)$$

$$\varphi(A, -\alpha) = -\varphi(A, \alpha)$$

il che comporta la simmetria dei luoghi a modulo costante e l'antisimmetria dei luoghi a fase costante rispetto all'asse verticale $\alpha = 0$. Di conseguenza, per definire completamente i luoghi basta assegnarli in corrispondenza ad una fascia verticale di piano estesa per 180° ; poiché, in generale, i valori assunti dalla fase delle funzioni $F(j\omega)$ considerate nei sistemi di controllo sono sempre negative, è abituale assegnare i luoghi sulla fascia verticale in cui risulta $-180^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$.

Si noti infine che, se $|F| \gg 1$, risulta $|W| \approx 1$ e che, se $|F| \ll 1$, risulta $|W| \approx |F|$. Grazie a queste proprietà è sufficiente considerare l'andamento dei luoghi in corrispondenza ad una regione di piano limitata, superiormente ed inferiormente, così come peraltro indicato in Fig.IV.2.

La disponibilità della carta rappresentata in fig.IV.2 consente di risolvere i diversi problemi citati all'inizio. Come primo esempio di impiego si può considerare il caso in cui si desidera passare da una rappresentazione grafica di una funzione $F(j\omega)$ (risposta armonica di un sistema non reazionato) a quella della funzione $W(j\omega)$ definita dalla (IV.1) (risposta armonica del sistema reazionato). I passi da eseguire sono i seguenti:

- a) si tracciano inizialmente i diagrammi di Bode del modulo $|F(j\omega)|$ in dB e della fase $\angle F(j\omega)$ della funzione $F(j\omega)$ assegnata;

- b) si costruisce, a partire dai diagrammi così ottenuti, un diagramma di Nichols della funzione in questione, utilizzando le coordinate cartesiane tracciate sulla carta di Nichols;
- c) si leggono, o direttamente o per interpolazione, i valori del modulo e della fase della funzione $W(j\omega)$ utilizzando allo scopo, come sistema di coordinate curvilinee, i luoghi a modulo costante e a fase costante tracciati sulla carta di Nichols;
- d) se si desidera, si tracciano le curve che rappresentano la dipendenza delle quantità $|W(j\omega)|$ e $\angle W(j\omega)$, individuate nella fase (c), dalla variabile ω , in modo tale da ottenere i diagrammi di Bode della funzione $W(j\omega)$ cercata.

Quanto sopra può essere immediatamente esemplificato riferendosi alla funzione $F(j\omega)$ diagrammata nelle Fig.IV.1 a) e b). La fase a) corrisponde al tracciamento dei diagrammi di Fig.IV.1 a). La fase b) corrisponde al tracciamento del diagramma di figura IV.1 b), riferito però al sistema di coordinate cartesiane presenti sulla carta di Nichols (cfr.IV.3 a). La fase c) consiste nell'individuare, in corrispondenza a ciascun punto del diagramma (e, quindi, a ciascun valore di ω) i valori del modulo e della fase che caratterizzano la curva a modulo costante e la curva a fase costante passanti per il punto. In questo modo si vengono ad associare, a ciascun ω , i valori del modulo e della fase della funzione cercata $W(j\omega)$. La fase d) si completa disegnando le curve che rappresentano la dipendenza delle due quantità così individuate dalla variabile ω .

Una seconda importante applicazione della carta di Nichols consiste nella possibilità di stabilire, per i sistemi a controreazione, una correlazione diretta e semplice tra i parametri che caratterizzano la risposta armonica del sistema reazionato e opportune grandezze che possono essere definite sulla risposta armonica del sistema non reazionato. A questo proposito, conviene innanzitutto fare riferimento, per semplicità di esposizione, al caso di un sistema a reazione unitaria(cfr. fig.IV.4), nel quale le due funzioni di ω che si considerano sono legate dalla (IV.1). Si supponga inoltre che il diagramma di Nichols della funzione $F(j\omega)$ presenti una sola intersezione con l'asse delle ascisse. Tenendo presente che tale intersezione individua quel valore di ω in corrispondenza al quale è soddisfatta la condizione $|F(j\omega)| = 1$ e ricordando la definizione di *margine di fase*, si può allora concludere che - se il sistema reazionato è stabile asintoticamente - il margine m_ϕ si identifica con l'ampiezza del segmento compreso tra il punto considerato e il punto di coordinate (-180°, 0 dB) (cfr. fig.IV.5). Osservazioni del tutto analoghe permettono di concludere anche che il margine di guadagno si identifica con l'ampiezza del segmento compreso tra il punto di coordinate (-180°, 0 dB) e il punto in cui la curva attraversa l'asse verticale di ascissa -180°. Tra

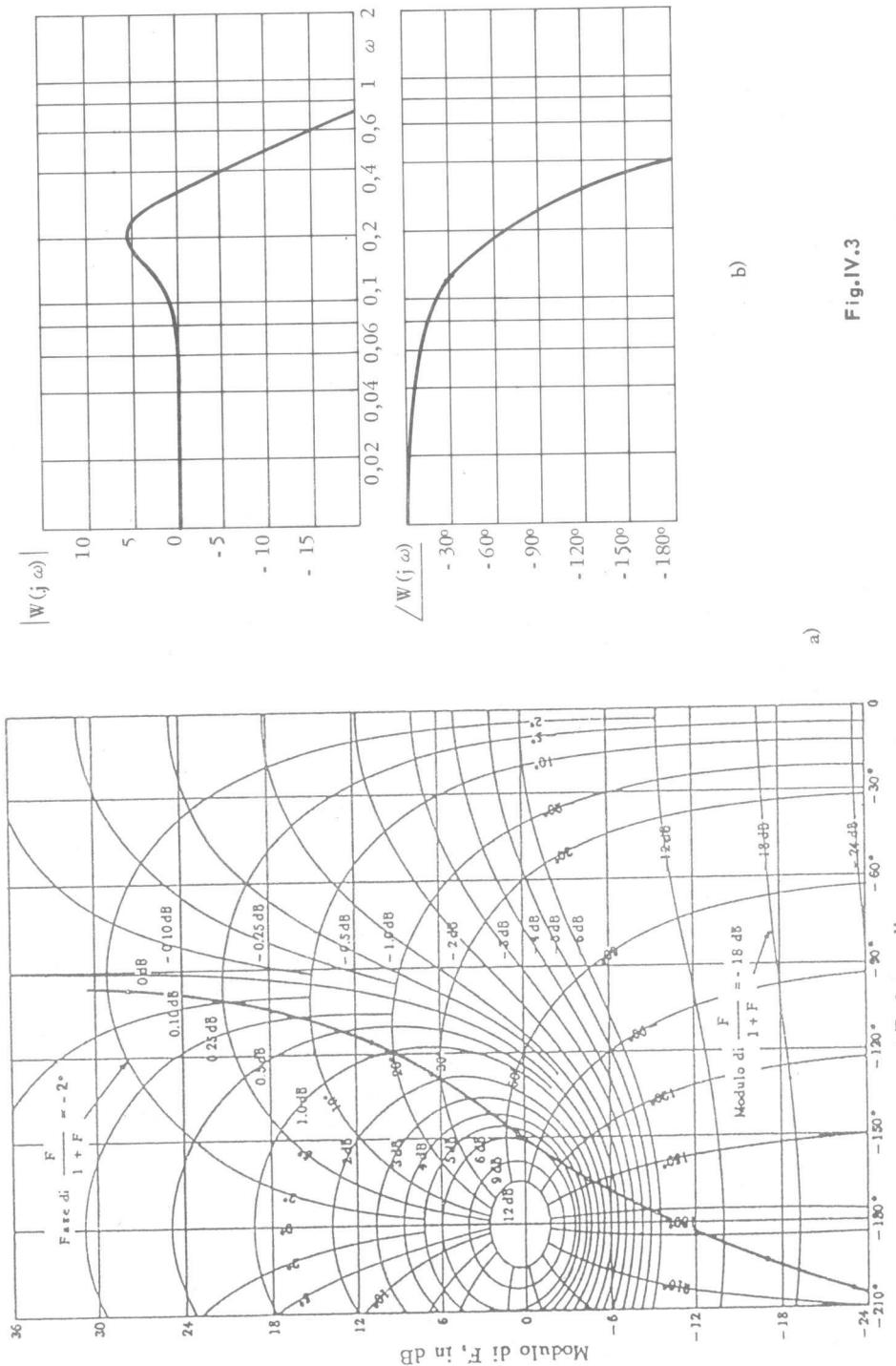


Fig. IV.3

a)

b)

le due intersezioni che così vengono messe in evidenza, quella in corrispondenza alla quale la curva attraversa l'asse delle ascisse riveste particolare importanza in relazione ai problemi qui considerati; la pulsazione ω_t che la caratterizza prende il nome di *pulsazione di attraversamento*.

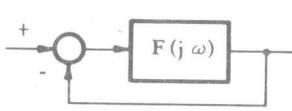


Fig.IV.4

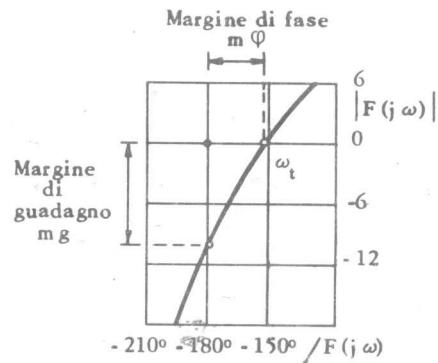


Fig.IV.5

La carta di Nichols consente di porre in relazione, in maniera diretta, alcune delle grandezze così individuate (più precisamente, il margine di fase m_ϕ e la pulsazione di attraversamento ω_t), che sono caratteristiche della risposta armonica $F(j\omega)$ del sistema non reazionato con le grandezze che usualmente vengono considerate per caratterizzare la risposta armonica $W(j\omega)$ del sistema reazionato (in particolare, il modulo alla risonanza M_r e la banda passante B_3).

Per giustificare questa asserzione si mostrerà innanzitutto che, una volta tracciato il diagramma della funzione $F(j\omega)$ direttamente su una carta di Nichols, è possibile dedurre immediatamente i valori di M_r e di B_3 , senza che sia necessario procedere al tracciamento completo - in un eventuale diagramma a parte - della funzione $|W(j\omega)|$, relativamente alla quale tali grandezze sono definite.

A tale scopo, è conveniente distinguere il caso in cui $F(s)$ ha poli nell'origine da quello in cui il limite di $F(s)$ per $s \rightarrow 0$ assume un valore finito. Nel primo caso (che corrisponde al caso dei sistemi di tipo I), risulta:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W(s) = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} F(s)}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} F(s)} = 1$$

il che consente di affermare che il modulo alla risonanza M_r coincide con il massimo valore del modulo di $W(j\omega)$ e che la banda passante B_3 coincide con il valore della pulsazione oltre la quale il modulo di $W(j\omega)$ assume, in dB, valori inferiori a -3. Esaminando il diagramma della $F(j\omega)$ tracciato sulla carta di Nichols (cfr. fig. IV.6), è possibile identificare M_r

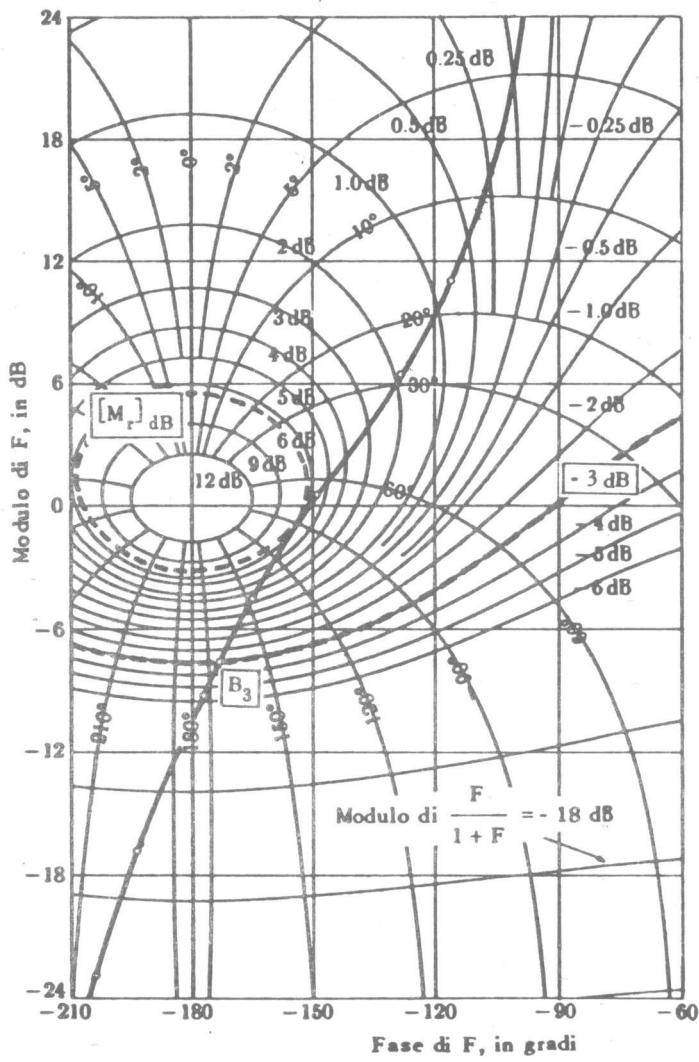


Fig.IV.6

come il valore del modulo associato al particolare luogo (a modulo costante) che separa i luoghi intersecati almeno una volta dalla curva rappresentativa di $F(j\omega)$ da quelli che non vengono mai intersecati. Questo luogo,

infatti, caratterizza il massimo valore assunto dal modulo della funzione $W(j\omega) = F(j\omega)/[1 + F(j\omega)]$. In modo analogo, è possibile concludere che la banda passante B_3 coincide con quella pulsazione in corrispondenza alla quale la curva rappresentativa di $F(j\omega)$ interseca il luogo a modulo costante caratterizzato dal valore $M = -3 \text{ dB}$ e a partire dalla quale interseca, successivamente, luoghi relativi a valori di modulo via via inferiori.

Se viceversa la $F(s)$ non ha poli nell'origine, le quantità M_r e B_3 , che per definizione sono riferite al valore assunto da $|W(j\omega)|$ per $\omega = 0$, devono essere calcolate con una procedura leggermente diversa. Tenendo presente che

$$[M_r]_{dB} = [\text{massimo di } |W(j\omega)|]_{dB} - [W(0)]_{dB}$$

per calcolare M_r basta sottrarre al massimo valore del modulo di $W(j\omega)$, determinato con la procedura indicata sopra, il valore in dB assunto da $W(0)$. Così pure, tenendo presente che:

$$[W(jB_3)]_{dB} = [W(0)]_{dB} - 3$$

per calcolare B_3 basta individuare l'intersezione della curva rappresentativa di $F(j\omega)$ con il luogo a modulo costante caratterizzato dal valore $M = [W(0)]_{dB} - 3$. La quantità $[W(0)]_{dB}$, a sua volta, si può immediatamente calcolare a partire da $F(0)$ con la relazione

$$[W(0)]_{dB} = \left[\frac{F(0)}{1 + F(0)} \right]_{dB}$$

È utile peraltro osservare che, generalmente, il valore $W(0)$ è molto prossimo all'unità (si ricordi che, in un sistema a reazione unitaria, la quantità $1 - W(0)$ è pari all'errore e_0 in regime permanente corrispondente ad ingressi costanti) o, il che è lo stesso, che $[W(0)]_{dB}$ è un numero in valore assoluto molto piccolo rispetto ad 1. Una tale circostanza consente di sostituire alle relazioni precedenti le relazioni approssimate:

$$[M_r]_{dB} \approx [\text{massimo di } |W(j\omega)|]_{dB}$$

$$[|W(jB_3)|]_{dB} \approx -3$$

e di valutare M_r e B_3 , senza apprezzabili errori, con la stessa procedura che si è seguita nel caso in cui $F(s)$ ha poli nell'origine.

Ciò premesso, si consideri ancora la carta di Nichols e si prenda in esame il luogo a modulo costante relativo ad un prefissato valore $M > 0$.

(cfr. fig.IV.7). Riferendosi alla costruzione indicata sopra per il calcolo di M_r , si può immediatamente affermare che ogni funzione $W(j\omega)$ avente un modulo alla risonanza pari a M proviene da una funzione $F(j\omega)$ il cui diagramma non interseca in alcun punto il luogo in questione. In particolare, si può affermare che una tale funzione $W(j\omega)$ proviene da una funzione $F(j\omega)$ che attraversa l'asse delle ascisse in un punto che si trova alla destra del punto in cui tale asse è attraversato dal luogo a modulo costante relativo al valore M (punti A e A' in fig.IV.7). Ricordando quanto si è osservato a proposito della individuazione del margine di fase sui diagrammi di Nichols, si può allora concludere che, se la funzione $W(j\omega)$ ha un modulo a risonanza pari a M , la funzione $F(j\omega)$ è caratterizzata da un margine di fase la cui ampiezza è certamente superiore a quella del segmento che ha per estremi, sull'asse dell'ascissa, il punto di intersezione con il luogo relativo al particolare valore M e il punto di ascissa -180° .

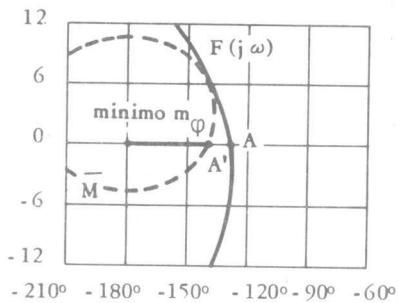


Fig.IV.7

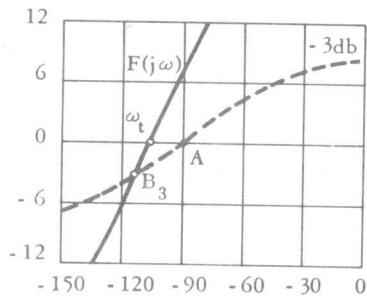


Fig.IV.8

Questa costruzione mette chiaramente in evidenza il fatto che, nei sistemi di controllo del tipo qui considerato (sistemi a reazione unitaria), il modulo della risonanza M_r ed il margine di fase m_ϕ non sono caratteristiche indipendenti. Se, in particolare, si chiede che il modulo alla risonanza non superi un valore prefissato, è necessario assicurare che il margine di fase risulti superiore ad un opportuno valore minimo, peraltro facilmente determinabile con la costruzione indicata sopra.

L'altra correlazione che si può stabilire sulla carta di Nichols riguarda, come si è detto, la pulsazione di attraversamento ω_t e la banda passante B_3 . A questo proposito, conviene esaminare il luogo relativo al valore $M = -3\text{dB}$ ed osservare che l'intersezione di quest'ultimo con l'asse delle ascisse avviene in corrispondenza al punto di ascissa -90° (punto A di fig.IV.8). Ricordando allora la definizione di pulsazione di attraversamento, si può affermare che, se la fase di $F(j\omega)$ in cor-

rispondenza alla pulsazione ω_t è superiore a -90° (se cioè il margine di fase m_φ è superiore a 90°), risulta $\omega_t > B_3$; se invece la fase di $F(j\omega)$ per $\omega = \omega_t$ è inferiore a -90° (se cioè $m_\varphi < 90^\circ$), risulta $\omega_t < B_3$.

Quanto osservato porta chiaramente a concludere che, nei sistemi di controllo che si sono considerati (sistemi a reazione unitaria), la banda passante B_3 e la pulsazione di attraversamento ω_t non sono caratteristiche indipendenti. Nel caso, più frequente in pratica, in cui sia $m_\varphi < 90^\circ$ la banda passante assume sempre valori superiori a quelli della pulsazione di attraversamento.

Tutte le considerazioni fin qui esposte, relative alla individuazione del modulo alla risonanza e della banda passante, nonché alle correlazioni che si possono stabilire tra tali grandezze, margine di fase e pulsazione di attraversamento, possono essere facilmente estese ai sistemi nei quali la funzione di trasferimento, anziché essere unitaria, assuma il valore $1/K_d$. In proposito, è sufficiente osservare che, indicata con $G(j\omega)$ la risposta armonica del ramo diretto, (cfr. fig. IV.9 a), la risposta armonica $W(j\omega)$ del sistema complessivo può essere posta nella forma

$$(IV.3) \quad W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + \frac{G(j\omega)}{K_d}} = \frac{\frac{G(j\omega)}{K_d}}{1 + \frac{G(j\omega)}{K_d}} K_d = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)} K_d$$

avendo posto:

$$F(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{K_d}$$

A una tale operazione corrisponde peraltro la trasformazione dello schema a blocchi considerato nello schema equivalente di fig. IV.9 b.

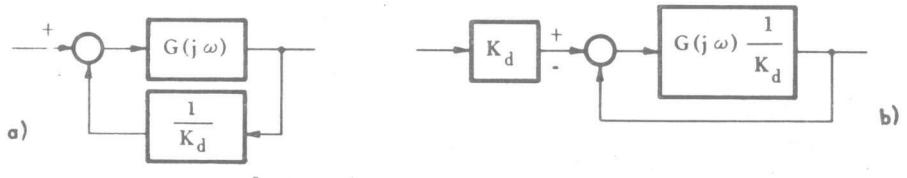


Fig. IV.9

Poiché sia M_r sia B_3 sono grandezze riferite al valore iniziale di $W(j\omega)$, esse coincidono con quelle della funzione $F(j\omega) / [1 + F(j\omega)]$, che differisce dalla (IV.3) per il solo fattore moltiplicativo

costante K_d . Di conseguenza tali grandezze possono essere individuate, a partire dal diagramma di Nichols della funzione $F(j\omega)$, con procedimenti totalmente identici a quelli esposti per il caso di reazione unitaria.

Si noti peraltro che, se la funzione di trasferimento del ramo di reazione non è costante, i procedimenti in questione perdono di validità. In tal caso la $W(j\omega)$ risulta legata alla risposta armonica del sistema non reazionato $F(j\omega)$ e alla risposta armonica del ramo di reazione $H(j\omega)$ dalla relazione:

$$(IV.4) \quad W(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)} \cdot \frac{1}{H(j\omega)}$$

e la dipendenza di $H(j\omega)$ da ω può influire in maniera determinante ai fini della individuazione di M_r e di B_3 .

Prima di concludere, può essere utile osservare che, oltre che per eseguire l'operazione $F/(1 + F)$, i luoghi a modulo costante ed a fase costante possono venire utilizzati per calcolare in modo altrettanto semplice ulteriori funzioni di interesse. A questo scopo, si usa abitualmente trasformare la funzione in questione in modo tale da ridurre il problema a quello per la soluzione del quale i luoghi sono stati predisposti.

Una delle funzioni di maggior interesse che possono essere calcolate in questo modo è la funzione:

$$W_z(j\omega) = \frac{1}{1 + F(j\omega)}$$

che rappresenta la funzione di trasferimento per un disturbo agente all'uscita nel sistema di Fig.IV.4. Questa funzione rappresenta anche la sensibilità alle variazioni parametriche di F , sempre nel caso di sistema a reazione unitaria.

Per calcolare tale funzione basta tenere presente l'identità

$$\frac{1}{1 + F} = \frac{\frac{1}{F}}{1 + \frac{1}{F}}$$

per cui, in definitiva, basta applicare i procedimenti già esposti alla funzione $1/F$.

Ulteriori esempi di applicazione, individuabili in modo del tutto analogo, possono essere ritrovati direttamente dal lettore.

IV.3 - Funzioni compensatrici elementari.

Si è già osservato nel par. IV.1 che, nella sintesi di un sistema di controllo a controllazione, una volta che siano state definite le caratteristiche della risposta a regime permanente (rispetto agli ingressi e/o rispetto ai disturbi, in corrispondenza a funzioni di tipo polinomiale e/o sinusoidale) risultano univocamente individuati sia il numero di poli nel punto $s = 0$ sia il valore del coefficiente di guadagno della funzione di trasferimento del ramo diretto. L'univocità di una tale corrispondenza induce a compiere, nella prima fase del procedimento di sintesi, le scelte alte ad assicurare che la funzione di trasferimento del ramo diretto possieda le caratteristiche predette. Questa operazione si esaurisce, in effetti, nell'attribuzione, alla funzione di trasferimento di quella parte di sistema che precede - nel ramo diretto - il processo controllato, di un opportuno numero di poli nel punto $s = 0$ e di un opportuno coefficiente di guadagno. I primi sono evidentemente in numero pari alla differenza tra il numero di poli (nell'origine) necessari ad assicurare le caratteristiche desiderate per la risposta a regime permanente e il numero di quelli già presenti nella funzione di trasferimento del processo. Il secondo è pari al rapporto tra il guadagno necessario ad assicurare i valori desiderati per l'errore e/o per le risposte ai disturbi e il guadagno della funzione di trasferimento del processo.

Ciò posto, si tratta di definire ulteriormente la funzione di trasferimento del ramo diretto in modo tale che siano soddisfatte specifiche riguardanti la risposta transitoria.

A questo proposito conviene osservare che, nel caso in cui sia stato deciso di rappresentare la qualità della risposta transitoria mediante un numero limitato di caratteristiche significative (così come indicato nel par. III.4), è possibile tradurre queste ultime direttamente in termini di caratteristiche della risposta armonica del sistema non reazionato. Basta utilizzare allo scopo, i legami tra i parametri che caratterizzano la risposta al gradino (tempo di salita t_s e sovraelongazione \hat{s}) e i parametri che caratterizzano la risposta armonica (banda passante B_3 e modulo alla risonanza M_r) e, successivamente, le correlazioni individuate tra questi ultimi e opportuni parametri della risposta armonica del sistema non reazionato (pulsazione di attraversamento ω_t e margine di fase m_ϕ). Naturalmente, occorre tenere presente che tali corrispondenze non sono rigide e che, pertanto, esse possono essere usate solo per stabilire indicativamente i valori di primo tentativo dei parametri in questione.

Una volta tradotte le caratteristiche della risposta transitoria in termini di caratteristiche della risposta armonica del sistema non reazionato, è possibile passare alla seconda fase del procedimento di sintesi, nella quale vengono compiute le scelte atte ad assicurare che la risposta armonica del sistema non reazionato risulti caratterizzata da un margine di fase ed una pulsazione di attraversamento rispondenti ai requisiti imposti sulla risposta transitoria.

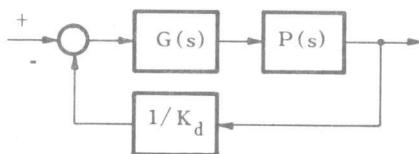


Fig.IV.10

Da questo punto di vista, conviene osservare che, con riferimento allo schema di controllo fin qui considerato (cfr. fig.IV.10) la funzione di trasferimento del sistema non reazionato, indicate con $P(s)$ e con $G(s)$ le funzioni di trasferimento del processo e - rispettivamente - dei dispositivi che lo precedono nel ramo diretto, assume la forma

$$(IV.5) \quad F(s) = G(s) P(s) \frac{1}{K_d}$$

La funzione $G(s)$, a sua volta, può scriversi, separando i fattori già individuati nel corso del primo passo del procedimento (un fattore $1/s^r$ se sono stati introdotti r poli nell'origine e un fattore \hat{K} se è stato modificato il coefficiente di guadagno), in una forma del tipo:

$$(IV.6) \quad G(s) = R(s) \frac{\hat{K}}{s^r}$$

essendo $R(s)$ una funzione, ancora da determinarsi, priva di poli nell'origine e dotata di guadagno unitario.

Il problema che si deve affrontare è in definitiva quello di scegliere una funzione $R(s)$ in modo tale che la funzione

$$F(s) = R(s) \frac{\hat{K}}{s^r} P(s) \frac{1}{K_d}$$

abbia le caratteristiche desiderate. A questo proposito, conviene innanzitutto considerare autonomamente la funzione

$$(IV.7) \quad \hat{F}(s) = \frac{\hat{K}}{s^r} P(s) \frac{1}{K_d}$$

è tracciare i diagrammi di Bode della corrispondente risposta armonica $F(j\omega)$. Esaminando tali diagrammi e, in particolare, confrontando i valori della pulsazione di attraversamento $\hat{\omega}_t$ e del margine di fase m_ϕ propri della funzione $\tilde{F}(j\omega)$ con i valori desiderati si può subito stabilire se il problema ammette una soluzione banale (il caso in cui si può porre $R(s) = 1$) oppure se è necessario procedere oltre, individuando opportunamente una funzione $R(s)$ atta a modificare le caratteristiche della $F(s)$ nel modo stabilito.

Nel caso non banale, la funzione $R(j\omega)$ deve svolgere un'azione atta a modificare o il modulo o la fase della funzione $\tilde{F}(j\omega)$, o entrambi, lasciando inalterato il comportamento assintotico di questa funzione in prossimità della pulsazione $\omega = 0$. Più in particolare, la funzione $R(j\omega)$ deve modificare il modulo in modo tale che la condizione $|R(j\omega)\tilde{F}(j\omega)| = 1$ sia soddisfatta per un valore ω prossimo al valore $\hat{\omega}_t$ desiderato e, corrispondentemente, modificare la fase in modo tale che la quantità $\angle R(j\omega_t)\tilde{F}(j\omega_t) + 180^\circ$ assuma un valore prossimo al valore m_ϕ prescritto.

Una funzione che consente di ottenere un risultato di questo genere viene abitualmente chiamata funzione *compensatrice*. Tra le funzioni di questo tipo, le più comuni sono le cosiddette funzioni compensatrici elementari, caratterizzate dal fatto di possedere un solo polo ed un solo zero (oltre che, come già detto, dall'avere quadagno unitario), le quali - a seconda della posizione reciproca del polo e dello zero - prendono a loro volta il nome di funzione *anticipatrice* e di funzione *attenuatrice*.

La funzione *anticipatrice* è caratterizzata da una funzione di trasferimento parametrizzata nella forma

$$(IV.8) \quad R_a(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s} \quad (m_a > 1)$$

e corrisponde al caso in cui la pulsazione associata allo zero è inferiore alla pulsazione associata al polo ($1/\tau_a < m_a/\tau_a$). L'azione svolta da una funzione di questo genere nell'ambito del problema in esame può essere immediatamente dedotta esaminando i diagrammi di Bode del modulo e delle fasi della corrispondente $R_a(j\omega)$, riportati nelle figg. IV.11 a e IV.11 b. Come si vede, si tratta di un'azione di esaltazione dei moduli e di anticipo delle fasi (da cui il nome di *funzione anticipatrice*).

La funzione *attenuatrice* è caratterizzata da una funzione di trasferimento parametrizzata nella forma

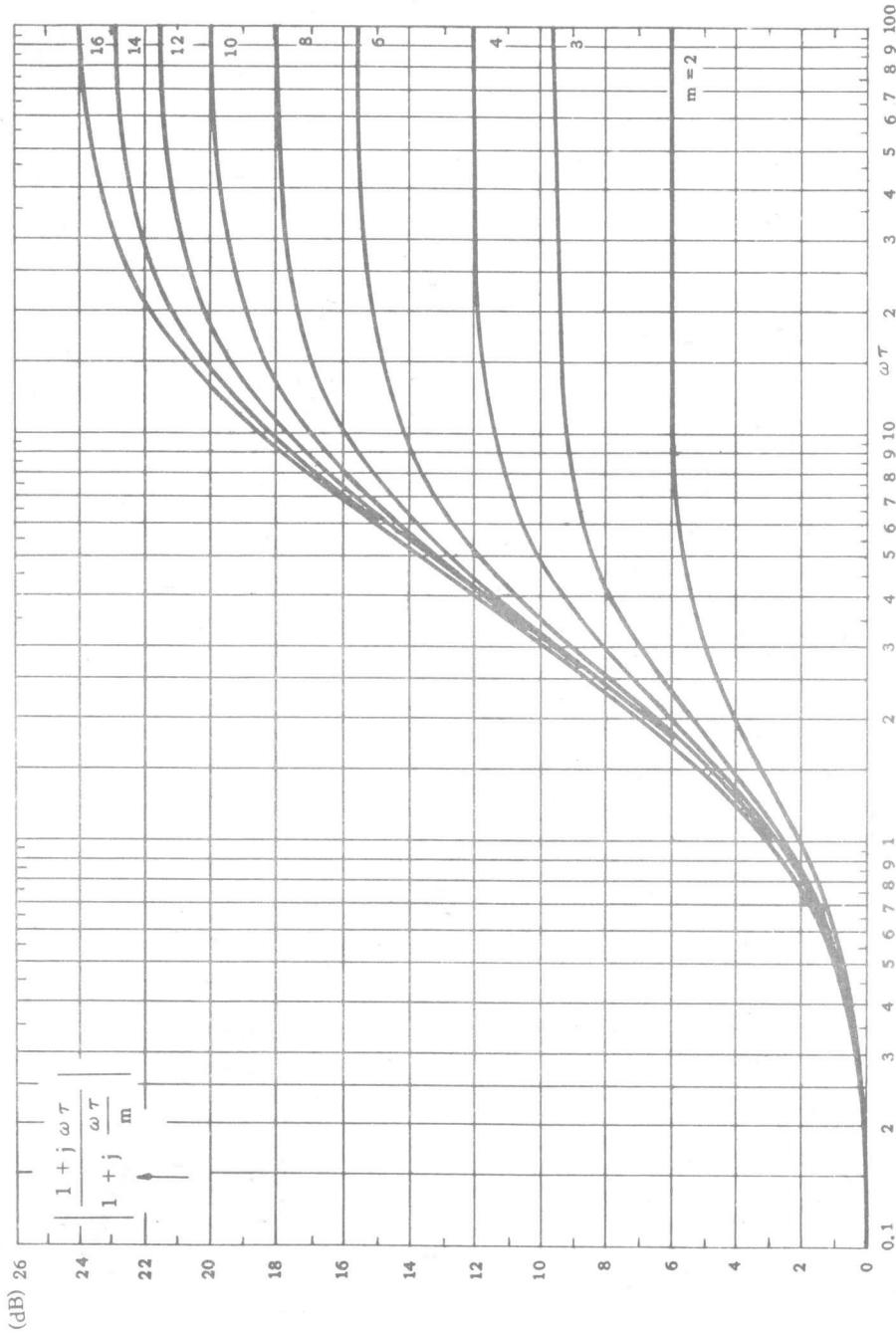


Fig. IV.11 a)

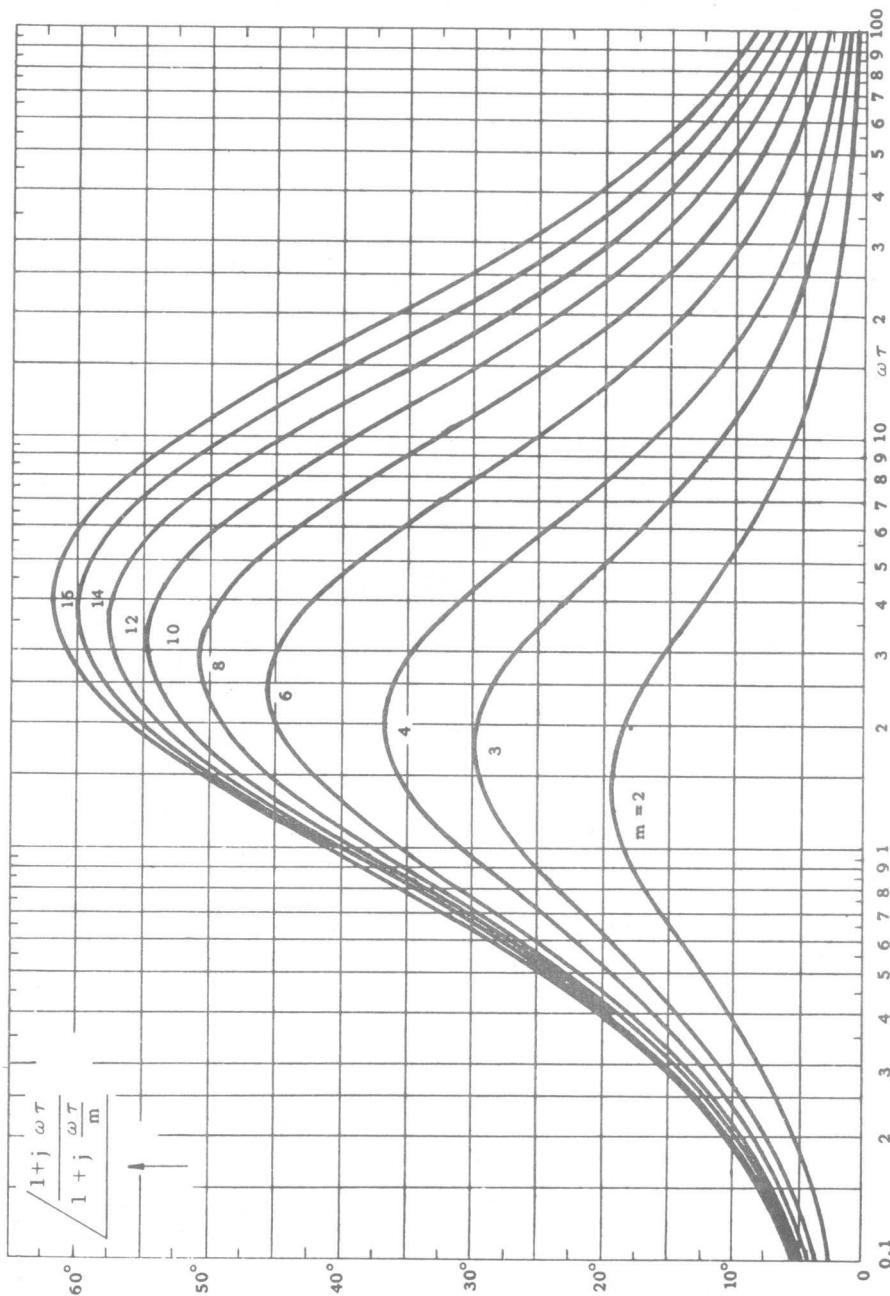


Fig. IV.11 b)

$$(IV.9) \quad R_i(s) = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} s}{1 + \tau_i s} \quad (m_i > 1)$$

e corrisponde al caso in cui la pulsazione associata al polo è inferiore alla pulsazione associata allo zero ($1/\tau_i < m_i/\tau_i$). Anche in questo caso, l'azione svolta da una tale funzione può essere immediatamente detta esaminando i corrispondenti diagrammi di Bode, i quali, come è facile verificare, si possono ottenere direttamente dai diagrammi normalizzati di figg. IV.11 a e IV.11 b attribuendo segno negativo ai valori riportati sulle ordinate. Si tratta di un'azione di attenuazione dei moduli (da cui il nome di *funzione attenuatrice*) e di ritardo delle fasi.

Introducendo funzioni del tipo (IV.8) o (IV.9) è possibile, così come sarà mostrato in dettaglio nel paragrafo successivo, modificare opportunamente le caratteristiche della funzione di trasferimento del sistema non reazionato in modo tale da renderle conformi alle prescrizioni stabilità. È importante tuttavia osservare che le (IV.8) e (IV.9), costituendo la soluzione strutturalmente più semplice al problema della compensazione, solo in alcuni casi possono consentire, da sole, il raggiungimento dell'obiettivo desiderato; nella maggioranza dei casi può risultare necessario impiegare le due funzioni contemporaneamente oppure impiegare più volte una stessa funzione (con valori diversi dei parametri).

Prima di concludere può essere utile rilevare la dissimmetria delle denominazioni usate per le due funzioni compensatrici elementari. In effetti, la denominazione riportata, largamente in uso, privilegia il tipo di azione che ciascuna funzione svolge nei riguardi del problema della *stabilizzazione*. La funzione anticipatrice può svolgere un ruolo positivo, ai fini della stabilità, grazie alla proprietà di aumentare – in corrispondenza a certi valori della pulsazione – i valori della fase della funzione $F(j\omega)$; la funzione attenuatrice, a sua volta, può svolgere un ruolo positivo nei riguardi della stabilità grazie alla proprietà di attenuare – in corrispondenza a certi valori della pulsazione – i valori del modulo della funzione $F(j\omega)$.

È anche interessante osservare che, da un punto vista pratico, la realizzazione concreta di dispositivi caratterizzati da funzioni di trasferimento del tipo (IV.8) o (IV.9) è un problema resolubile in modo molto semplice. Nel caso in cui si pensi di utilizzare componenti elettrici, entrambi le funzioni possono essere realizzate impiegando resistori e condensatori. Per quanto riguarda la (IV.8), si tratta di utilizzare la rete due-porte di Fig. IV.12, alla quale è associata la funzione di trasferimento:

$$\frac{V_y(s)}{V_u(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_1 C s}{1 + \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) R_1 C s}$$

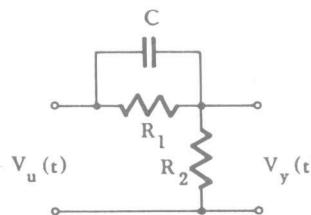


Fig.IV.12

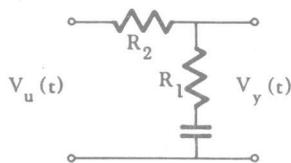


Fig.IV.13

amplificando poi la tensione di uscita secondo il coefficiente $(R_1 + R_2)/R_2$. Per quanto riguarda la (IV.9) si tratta invece di utilizzare semplicemente la rete due-porte di Fig.IV.13, alla quale è associata la funzione di trasferimento:

$$\frac{V_y(s)}{V_u(s)} = \frac{1 + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) (R_1 + R_2) C s}{1 + (R_1 + R_2) C s}$$

IV.4 - Sintesi delle funzioni compensatrici.

In questo paragrafo si illustreranno alcune situazioni tipiche nelle quali, scegliendo opportunamente i parametri delle funzioni compensatrici elementari, è possibile modificare le caratteristiche della funzione di trasferimento del sistema non reazionato, in modo tale da renderle conformi alle specifiche progettuali. Come già indicato nel paragrafo precedente, il primo passo consiste nell'esaminare i diagrammi di Bode della funzione $F(j\omega)$ (cfr. (IV.7)) al fine di individuare i corrispondenti valori della pulsazione di attraversamento $\hat{\omega}_t$ e del margine di fase \hat{m}_ϕ . Confrontando questi ultimi con i valori ω_t e m_ϕ corrispondenti alle prestazioni desiderate, si può stabilire il tipo di compensazione più conveniente e se ne possono determinare abbastanza agevolmente i parametri.

Le situazioni che si presentano più comunemente sono le seguenti:

- I) Caso in cui si vuole aumentare il margine di fase senza modificare la pulsazione di attraversamento.

Si tratta di introdurre un'azione destinata ad aumentare le fasi lasciando pressoché inalterati i valori del modulo della funzione $F(j\omega)$.

in prossimità della pulsazione $\hat{\omega}_t$, in corrispondenza alla quale il diagramma dei moduli di tale funzione attraversa l'asse delle ascisse; ciò può essere conseguito utilizzando opportunamente la funzione anticipatrice (IV.8).

La scelta dei parametri m_a e τ_a che caratterizzano la (IV.8) è resa agevole dall'uso dei diagrammi di fig.IV.11. Stabilito infatti che l'introduzione di questa funzione deve produrre, in prossimità della pulsazione $\hat{\omega}_t$, un anticipo di fase superiore alla differenza $[m_\varphi - \hat{F}(j\hat{\omega}_t) - 180^\circ]$, si può scegliere innanzitutto m_a individuando, tra i diagrammi di fig.IV.11 b, quelli che assicurano un anticipo massimo di pari entità. Ciò

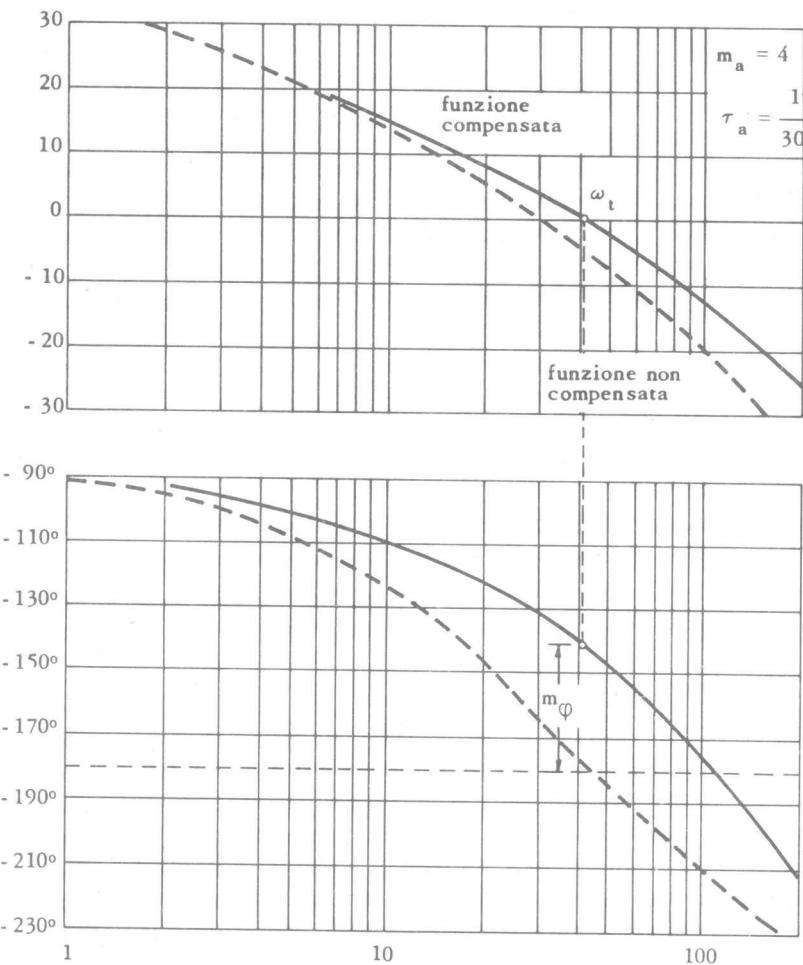


Fig.IV.14

posto, si tratta di scegliere il valore di τ_a , facendo in modo che l'antico massimo di fase disponibile venga ad essere localizzato in prossimità della pulsazione $\hat{\omega}_t$. In linea di massima, questa scelta deve essere tale da collocare le due pulsazioni $1/\tau_a$ ed m_a/τ_a , corrispondenti allo zero ed al polo della funzione (IV.8), a sinistra e a destra della $\hat{\omega}_t$ stessa. Occorre però tenere presente che l'introduzione della funzione anticipatrice, modificando il diagramma dei moduli, produce anche una variazione - in aumento - della pulsazione di attraversamento. Volendo allora mantenere questa modifica entro limiti tollerabili (in quanto il valore di $\hat{\omega}_t$ è già prossimo a quello desiderato) si deve anche fare attenzione a scegliere τ_a in modo tale che la pulsazione $1/\tau_a$, corrispondente allo zero della funzione (IV.8), sia il più possibile prossima alla $\hat{\omega}_t$ stessa.

Una volta scelti m_a e τ_a , si tratta poi di verificare che la funzione compensata $R_a(j\omega)\hat{F}(j\omega)$ possieda un margine di fase m_φ ed una pulsazione di attraversamento ω_t corrispondenti ai valori richiesti; in caso negativo si deve procedere a successive modifiche sino ad ottenere il risultato desiderato. Alla fine del procedimento risulta individuata una funzione del tipo (IV.8) tale da assicurare il soddisfacimento delle specifiche prescritte; corrispondentemente, i diagrammi della funzione compensata presentano un andamento del tipo di quelli indicati in fig.IV.14.

II) Caso in cui si vuole aumentare il margine di fase ed è ammissibile una diminuzione della pulsazione di attraversamento.

Si tratta in questo caso di introdurre un'azione destinata ad alterare i moduli sino ad ottenere per la pulsazione di attraversamento un valore in corrispondenza al quale il margine di fase risulti soddisfacente e ciò può essere conseguito utilizzando opportunamente la funzione attenuatrice (IV.9).

Per scegliere i valori dei parametri τ_i ed m_i occorre innanzitutto individuare la pulsazione ω in corrispondenza alla quale il diagramma delle fasi della funzione $\hat{F}(j\omega)$ attraversa la retta orizzontale $\varphi = -180^\circ + m_\varphi$. L'azione attenuatrice deve essere infatti scelta in modo tale che il diagramma dei moduli della funzione compensata $R_i(j\omega)\hat{F}(j\omega)$ attraversi l'asse dell'ascisse in prossimità di $\omega = \bar{\omega}$. Ciò posto, si può scegliere m_i individuando, tra i diagrammi di fig.IV.11 a (utilizzati attribuendo segno negativo ai valori delle ordinate), quelli che assicurano un'attenuazione massima di entità pari ad $\hat{F}(\bar{\omega})$. Per quanto riguarda

la scelta di τ_i occorre tenere presente che l'introduzione della funzione attenuatrice, modificando il diagramma delle fasi, produce anche uno sfasamento in ritardo in corrispondenza alla pulsazione ω scelta come pulsazione di attraversamento. Volendo mantenere questa modifica entro limiti tollerabili (per mantenere il valore del margine di fase prossimo a quello desiderato) si deve fare attenzione a scegliere τ_i in modo tale che la pulsazione m_i/τ_i , corrispondente allo zero della funzione (IV.9), sia sufficientemente inferiore alla ω stessa.

Anche in questo caso, una volta scelti m_i e τ_i si tratta di verificare che la funzione compensata $R_i(j\omega)\hat{F}(j\omega)$ possieda un margine di fase m_φ corrispondente al valore richiesto; in caso negativo, si procede ulteriormente modificando i valori già scelti. Alla fine si arriva a

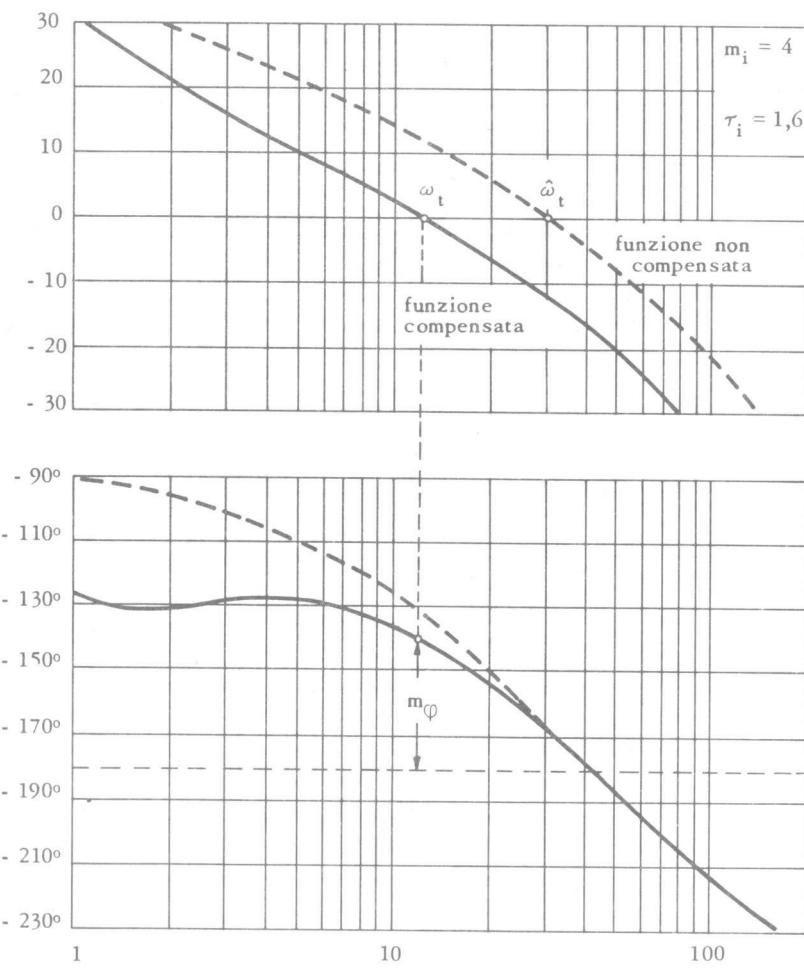


Fig.IV.15

individuare una funzione compensatrice il cui effetto appare del tipo di quello indicato in Fig.IV.15.

III) Caso in cui si vuole aumentare la pulsazione di attraversamento.

In questa situazione, occorre innanzitutto individuare il valore della fase della funzione $F(j\omega)$ in corrispondenza alla pulsazione ω_t che si desidera divenga pulsazione di attraversamento (si veda, ad esempio, la fig.IV.16) e confrontare quest'ultimo con il valore che sarebbe necessario per avere un margine di fase conveniente.

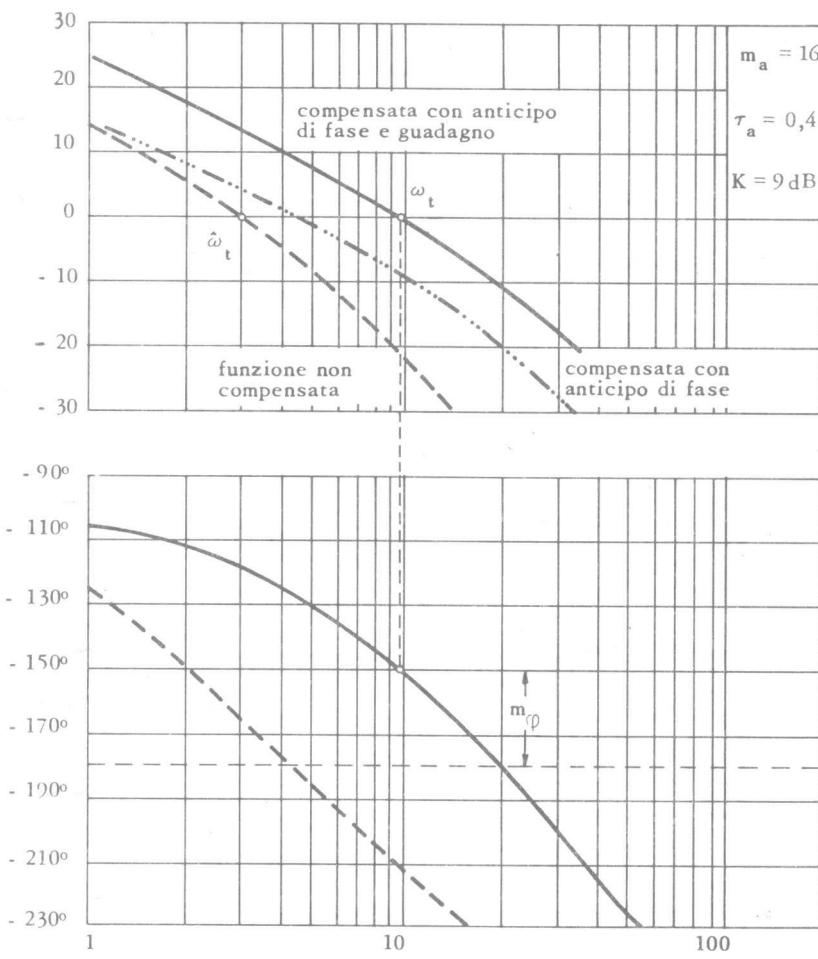


Fig.IV.16

Se risulta $\hat{F}(j\omega_t) > (m_\varphi - 180^\circ)$, il problema può essere semplicemente risolto introducendo, in luogo di una funzione compensatrice, un coefficiente moltiplicativo costante K , scelto in modo tale che sia $K_{dB} = -|\hat{F}(j\omega_t)|_{dB}$. Questo tipo di compensazione, che è compatibile con il soddisfacimento delle specifiche riguardanti la risposta a regime permanente, assicura infatti alla funzione $KF(j\omega)$ una pulsazione di attraversamento di valore pari a quello desiderato, senza che vengano ad essere alterati i valori delle fasi.

Se risulta $\hat{F}(j\omega_t) < (m_\varphi - 180^\circ)$ la soluzione deve essere cercata introducendo un'opportuna funzione anticipatrice. In questi casi, la scelta dei parametri si effettua sulla base di considerazioni simili a quelle già presentate al punto (I), tenendo però presente il fatto che questa volta occorre sia aumentare i moduli (per spostare la pulsazione di attraversamento verso destra di una quantità prefissata) sia anticipare le fasi (per raggiungere, in corrispondenza alla ω_t , il margine di fase desiderato).

A volte, in luogo della sola azione anticipatrice, può risultare conveniente introdurre anche un coefficiente moltiplicativo costante K , nel qual caso il procedimento di scelta dei parametri diviene al quanto più diretto. Si determina innanzitutto il valore di m_a sulla base dell'anticipo di fase che deve essere introdotto in prossimità della pulsazione ω_t ; successivamente si sceglie τ_a in modo tale da assicurare che l'anticipo di fase disponibile venga localizzato in corrispondenza alla ω_t stessa; infine si fissa il valore del coefficiente K in modo tale che il diagramma dei moduli della funzione compensata $KR_a(j\omega)\hat{F}(j\omega)$ presenti una pulsazione di attraversamento di valore pari a quello desiderato. Nello scegliere τ_a non occorre (entro certi limiti) preoccuparsi delle modifiche introdotte dalla funzione anticipatrice sul diagramma dei moduli, potendosi poi comunque procedere ad una ulteriore modifica del diagramma così ottenuto nel momento in cui viene scelto il valore del coefficiente K . I diagrammi di Bode relativi ad un caso di questo genere sono riportati in fig.IV.16.

IV) Caso in cui si vuol ridurre la pulsazione di attraversamento.

Anche in questo caso è necessario confrontare innanzitutto il valore della fase della funzione $\hat{F}(j\omega)$ in corrispondenza alla pulsazione prefissata come pulsazione di attraversamento con il valore necessario ad assicurare un margine di fase conveniente (si veda, ad esempio, la fig.IV.17).

Se risulta $\hat{F}(j\omega_t) > (m_\varphi - 180^\circ)$, il problema si riduce a quello considerato al punto (II). In caso contrario, occorre provvedere sia ad un'attenuazione dei moduli (per spostare la pulsazione di attraversamen-

to verso sinistra) sia ad un anticipo delle fasi (per assicurare un margine di fase conveniente). Si tratta dunque di utilizzare, in cascata, sia la funzione compensatrice (IV.9), sia la funzione compensatrice (IV.8).

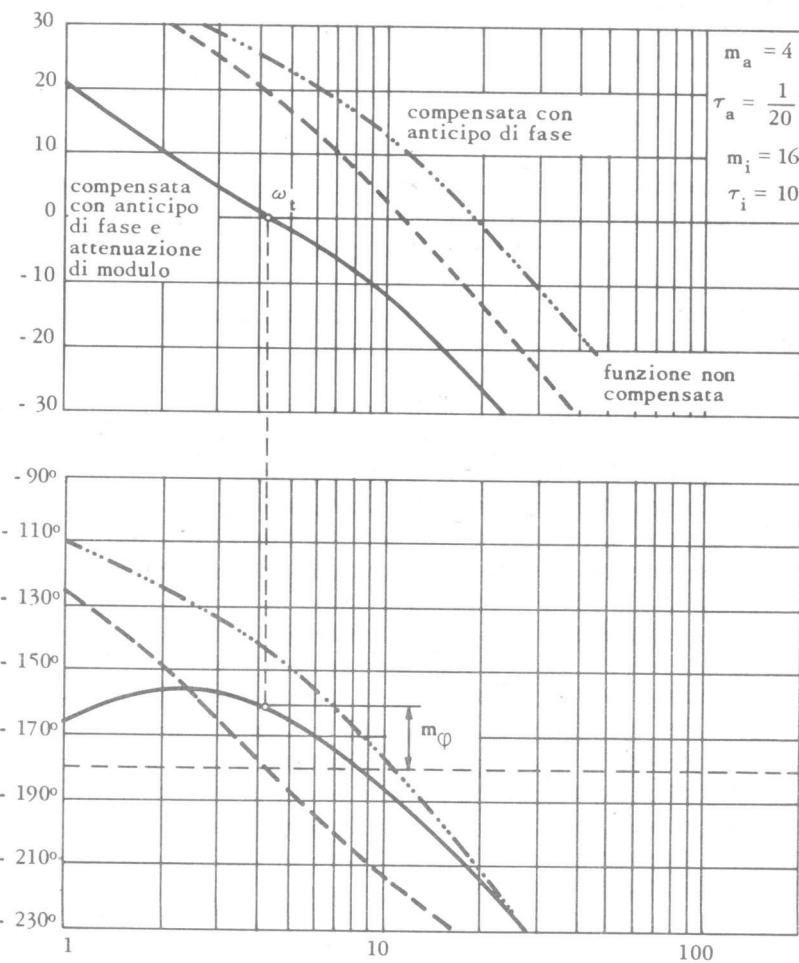


Fig. IV.17

La determinazione dei quattro parametri liberi τ_i , m_i , τ_a , m_a non richiede particolari difficoltà. Così come suggerito a proposito del caso (III), si determina innanzitutto il valore di m_a sulla base dell'anticipo di fase che deve essere introdotto in prossimità della pulsazione ω_t e si sceglie successivamente τ_a in modo tale che l'anticipo di fase disponibile venga localizzato in corrispondenza alla ω_t stessa. Si ottiene in tal modo una funzione $R_a(j\omega)F(j\omega)$ che deve essere ulteriormente compensata, mediante azione attenuatrice, in modo tale da portare

la pulsazione di attraversamento della funzione complessiva $R_i(j\omega)$ $R_a(j\omega)F(j\omega)$ a corrispondere con il valore ω_t desiderato; questa ulteriore compensazione, se eseguita sulla base delle indicazioni date per il caso (II), consente anche di ottenere un valore del margine di fase prossimo a quello prefissato. Nella fig.IV.17 sono riportati i diagrammi di Bode relativi ad un caso in cui è stata utilizzata una compensazione del tipo descritto.

IV.5 - Ulteriori considerazioni sulla sintesi.

Le considerazioni fin qui svolte hanno avuto come obiettivo quello di definire le caratteristiche di quella parte di sistema che - nel ramo diretto - si trova a monte del processo controllato, in modo tale da assicurare al sistema di controllo un adeguato comportamento ingresso-uscita. Per completare lo studio, almeno nelle sue linee essenziali, si esaminerà ora brevemente un caso in cui sono assegnate anche prescrizioni relative al comportamento disturbi-uscita e si concluderà con alcune considerazioni a proposito del problema della stabilità.

Per quanto riguarda la risposta ai disturbi, è opportuno tenere innanzitutto presente che i casi di maggior interesse, nei sistemi di controllo a controreazione del tipo fin qui considerato, sono quelli in cui i punti di accesso dei disturbi sono situati sul ramo diretto. In questo ambito si può poi, per brevità, limitare l'analisi al caso di un solo punto di accesso coincidente con l'uscita del processo controllato (cfr. fig.IV.18), in quanto tutti gli altri casi possono essere facilmente trattati in modo sostanzialmente simile.

Nel caso in esame, se occorre soddisfare specifiche riguardanti la sola risposta a regime permanente a disturbi di tipo polinomiale, si tratta di svolgere considerazioni del tutto analoghe a quelle a suo tempo introdotte a proposito del comportamento ingresso-uscita e, ove necessario, fissare il numero di poli nel punto $s = 0$ ed il valore del coefficiente di guadagno della funzione $G(s)$ in modo tale da garantire il comportamento desiderato in presenza di entrambe le sollecitazioni.

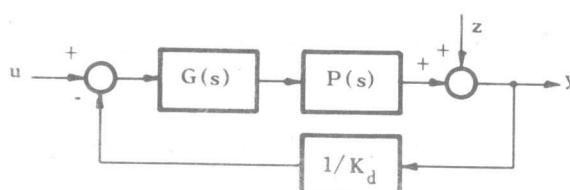


Fig.IV.18

Se viceversa occorre soddisfare specifiche riguardanti ad esempio la risposta a regime permanente a disturbi di tipo sinusoidale, può essere necessario fare intervenire le prescrizioni ad essa relative anche in quella fase del procedimento in cui vengono individuate le caratteristiche della funzione compensatrice. In proposito si tratta di tenere presente che la risposta armonica disturbo-uscita del sistema indicato in fig.IV.18 assume l'espressione

$$W_z(j\omega) = \frac{1}{1 + F(j\omega)}$$

e che, quindi, il valore della risposta in regime permanente ad un disturbo sinusoidale di pulsazione $\tilde{\omega}$ è direttamente legato al valore che la funzione di trasferimento del sistema non reazionato $F(s)$ assume per $s = j\tilde{\omega}$.

La situazione più semplice che si può verificare è quella in cui è richiesto che la risposta a regime permanente ad un disturbo

$$Z(t) = \sin \tilde{\omega} t$$

non ecceda, in valore assoluto, una quantità prefissata e_z . Si tratta allora di soddisfare la relazione

$$(IV.10) \quad |W_z(j\omega)| < e_z$$

il che è certamente garantito se si fa in modo che sia

$$(IV.11) \quad |F(j\omega)| > \frac{1}{e_z} + 1$$

Questa è appunto la condizione che deve essere tenuta esplicitamente in conto al momento in cui vengono scelte le caratteristiche della funzione compensatrice, se si vuole che la risposta armonica disturbo-uscita soddisfi alla limitazione (IV.10).

Da questo punto di vista è anche importante sottolineare che, in molti casi, può essere proprio la considerazione di condizioni del tipo della (IV.11) a orientare nella scelta del tipo di compensazione e a segnalare la maggiore convenienza di una scelta rispetto a un'altra.

L'esemplificazione più semplice di quanto affermato si può trovare esaminando i casi in cui la compensazione è effettuata usando funzioni attenuatrici (caso II) del paragrafo precedente). In questi casi, se si tengono presenti soltanto specifiche riguardanti il legame ingresso - uscita, che si traducono sulla $F(j\omega)$ in specifiche relative a m_ϕ ed ω_t , la scelta del parametro τ_i non viene ad essere influenzata da alcuna particolare condizione se non da quella di contenere entro limiti prestabiliti lo sfasamento in

ritardo introdotto dalla funzione stessa in corrispondenza alla pulsazione ω_t . È infatti possibile che due diverse compensazioni, caratterizzate da uno stesso valore di m_i , diano luogo a due diverse funzioni compensate $F_1(j\omega)$ ed $F_2(j\omega)$ (cfr. Fig.IV.19) caratterizzate da valori pressoché identici della pulsazione attraversamento ω_t e del margine di fase m_ϕ . A tale situazione corrisponde una sostanziale identità (nei limiti di tolleranze facilmente riconoscibili) delle risposte armoniche ingresso-uscita $W_1(j\omega)$ e $W_2(j\omega)$, che sono caratterizzate da valori pressoché identici della banda passante B_3 e del modulo alla risonanza M_r . Se però si considera anche una condizione del tipo (IV.11) il paragone delle due compensazioni risulta totalmente a sfavore di quella caratterizzata dal valore più alto del parametro τ_i . Può esistere infatti un intervallo di valori di ω (cfr. ancora Fig.IV.19) entro il quale una delle due funzioni compensate (la $F_1(j\omega)$) è caratterizzata da valori del modulo apprezzabilmente inferiori a quelli dell'altra (la $F_2(j\omega)$) e ciò può rilevarsi poco conveniente tutte le volte che sia richiesto di soddisfare specifiche del tipo della (IV.10).

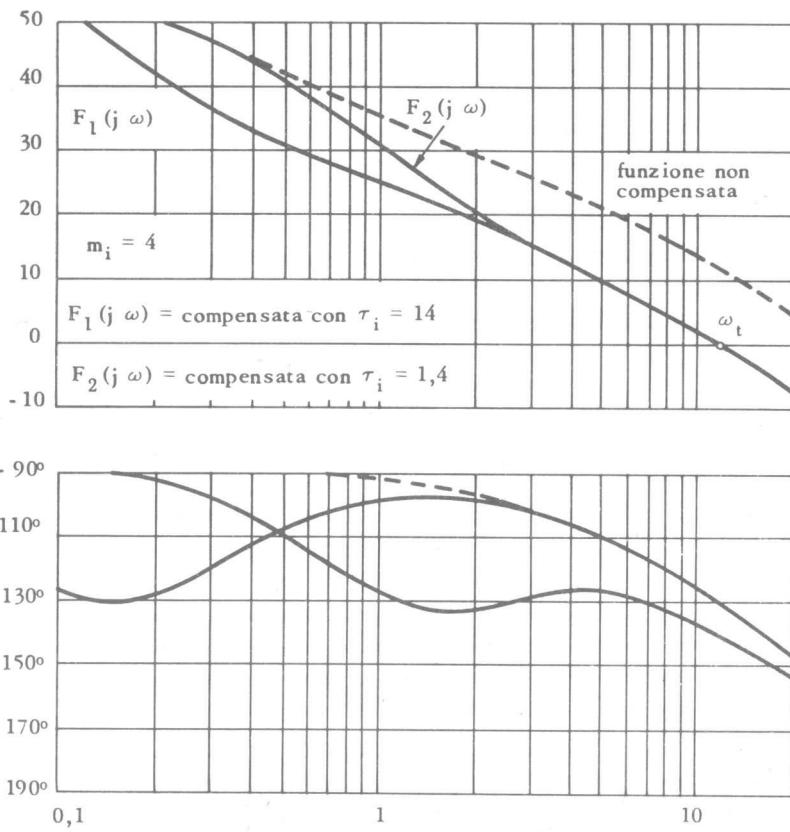


Fig.IV.19

Esaminati così i diversi problemi che si possono presentare nella sintesi per tentativi, in relazione alle molteplici prescrizioni cui il

progetto deve soddisfare, si ritiene interessante concludere con alcune osservazioni riguardanti il problema della stabilità. Da questo punto di vista occorre tenere presente il fatto che in tutti i metodi di sintesi descritti sino a questo punto si tende ad assicurare la stabilità (del sistema di controllo) introducendo azioni compensatrici atte a modificare il modulo e la fase della risposta armonica $F(j\omega)$ del sistema non reazionato, in modo tale che risulti

$$(IV.12) \quad F(j\omega) > -180^\circ + m_\varphi \quad \text{per } \omega = \omega_t$$

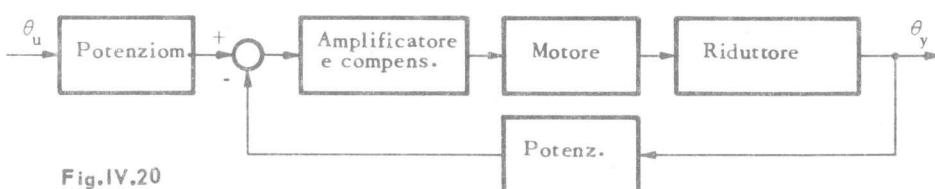
È bene però osservare che questa condizione solo in determinati casi garantisce la stabilità del sistema reazionato. Si tratta, in effetti, dei soli casi in cui il sistema non reazionato è privo di autovalori con parte reale positiva (in questi casi, affinché il sistema reazionato sia stabile asintoticamente occorre e basta che il numero N di giri, valutato per ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$, che l'estremo del vettore rappresentativo della funzione $F(j\omega)$ compie intorno al punto $(-1; j0)$ sia nullo) e in cui il diagramma polare della funzione $F(j\omega)$ attraversa una sola volta il cerchio di raggio unitario che ha centro nell'origine (in questi casi il numero N è nullo se e solo se in corrispondenza a tale attraversamento - cioè in corrispondenza alla ω_t - la fase del vettore rappresentativo di $F(j\omega)$ è maggiore di -180°).

Si deve dunque concludere che è sempre opportuno verificare la stabilità del sistema avendo bene presenti le eventuali limitazioni alla validità del criterio particolare adottato e, se necessario, riferirsi a criteri di validità più generale.

IV.6 - Un esempio.

Allo scopo di illustrare i procedimenti di sintesi per tentativi, descritti in questo capitolo, si considererà ora in dettaglio un esempio.

Esempio IV.1 - Si desidera realizzare un asservimento di posizione impiegando un motore elettrico a corrente continua, di piccole dimensioni, controllato sull'eccitazione con corrente di armatura costante. A questo proposito si pensa di adottare uno schema a controreazione del tipo indicato in Fig.IV.20.



I due potenziometri impiegati sono identici e dotati una costante di trasduzione pari a:

$$K_p = 4 \frac{\text{Volt}}{\text{rad}}$$

Per quanto riguarda il motore elettrico si può ritenere valida una funzione di trasferimento del tipo:

$$P(s) = \frac{K_m}{s(1 + \tau_e s)(1 + \tau_m s)}$$

avendo indicato con:

$$\tau_e = \frac{L_e}{R_e}$$

il rapporto tra induttanza e resistenza del circuito di eccitazione, con:

$$\tau_m = \frac{J}{F}$$

il rapporto tra momento di inerzia e coefficiente di attrito viscoso del carico meccanico, con:

$$K_m = \frac{K_c}{R_e F}$$

il rapporto tra il coefficiente di coppia K_c (coefficiente di proporzionalità tra coppia motrice e corrente di eccitazione) e il prodotto $R_e F$. Per calcolare i valori numerici dei parametri del motore, si è eseguita una misura di risposta armonica (considerando come ingresso la tensione di eccitazione e come uscita la velocità angolare) interpolando poi i risultati sperimentali mediante una funzione della forma:

$$\frac{K_m}{(1 + j \omega \tau_e)(1 + j \omega \tau_m)}$$

In questo modo si sono ottenuti, come risultato della migliore interpolazione, i valori:

$$K_m = 65 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \cdot \frac{1}{\text{Volt}}$$

$$\tau_m = 0,2 \text{ sec}$$

$$\tau_e = 0,03 \text{ sec}$$

Si è inoltre misurato direttamente il valore di R_e , ottenendo:

$$R_e = 1,5 \text{ k}\Omega$$

e si è calcolato, sulla base delle caratteristiche meccaniche del carico, il valore di J , ottenendo:

$$J = 200 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

Il riduttore impiegato è caratterizzato da un rapporto:

$$K_r = \frac{1}{70}$$

Le misure ed i calcoli effettuati sono sufficienti ad individuare i restanti valori numerici dei parametri in gioco; risulta infatti:

$$F = \frac{J}{\tau_m} = 1000 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^2}{\text{sec}}$$

$$K_c = K_m R_e F = 9,7 \cdot 10^4 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^2}{\text{sec}^2} \frac{\text{rad}}{\text{Amp}}$$

Il progetto del sistema di controllo deve soddisfare le seguenti specifiche:

- a) l'errore in regime permanente corrispondente ad ingressi costanti sia nullo;
- b) l'errore in regime permanente corrispondente ad un ingresso $\theta_u(t) = t(\text{rad})$ sia non superiore a 0,01 rad;
- c) l'errore in regime permanente corrispondente ad un disturbo di coppia, sull'asse del motore, di ampiezza pari a $10 \text{ Kg} \cdot \text{cm}^2/\text{sec}^2$ sia non superiore a 0,01 rad;
- d) la risposta armonica ingresso-uscita presenti una banda passante B_3 approssimativamente pari a 18 rad/sec ed un modulo alla risonanza non superiore a 2 dB.

Come noto, per quanto riguarda le specifiche a), b), c), relative al comportamento in regime permanente, occorre assicurarsi che la funzione di trasferimento del ramo diretto presenti un polo in $s = 0$ (specifica a)) ed abbia un coefficiente di guadagno di valore opportuno (specifiche b) e c)). A questo scopo conviene dettagliare meglio lo schema di Fig.IV.20, introducendo esplicitamente una grandezza rappresentativa del disturbo di coppia, così come indicato in Fig.IV.21.

Sulla base dei risultati stabiliti nel capitolo III, si deduce immediatamente che, per soddisfare la specifica a), non è necessario introdurre poli in $s = 0$ nella funzione

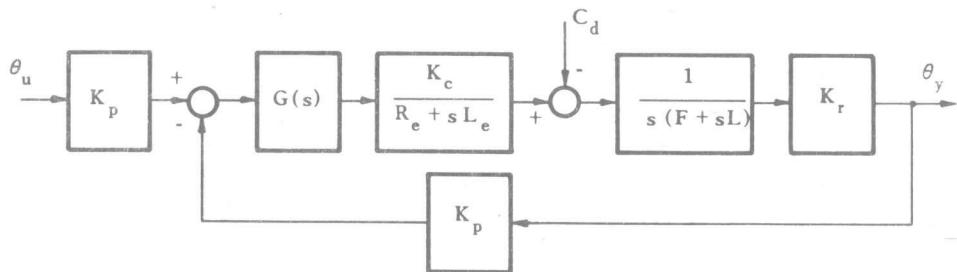


Fig.IV.21

$G(s)$, in quanto è di per sé sufficiente quello già presente nella funzione di trasferimento del motore stesso. Il guadagno della funzione $G(s)$ deve essere invece proporzionato opportunamente, sulla base delle specifiche b) e c). A questo proposito, si osservi che l'errore in regime permanente nella risposta ad un ingresso $\theta_u(t) = t$ assume il valore:

$$e_1 = \frac{(1/K_p)^2}{K_G K_m K_r} K_p$$

essendo K_G il coefficiente di guadagno della funzione $G(s)$; la risposta in regime permanente ad un disturbo costante di coppia di ampiezza C_d assume invece il valore:

$$y_z = \frac{1}{K_m F K_p K_G} C_d$$

Utilizzando queste relazioni ed i valori numerici sopra individuati, si deduce che, affinché siano soddisfatte le specifiche b) e c), deve avversi:

$$\frac{1}{K_G (3,7)} \leq 0,01$$

$$\frac{1}{K_G (26)} \leq 0,01$$

o, il che è lo stesso,

$$K_G \geq 27$$

Ciò posto, si tratta di proporzionare ulteriormente $G(s)$ in modo tale che sia soddisfatta la specifica d). Tenendo presenti i legami tra B_3 ed ω_t e tra M_r ed m_ϕ , illustrati in questo capitolo, si può decidere di impostare i tentativi imponendo che il margine di fase assuma il valore:

$$m_\varphi \approx 50^\circ$$

e che la pulsazione di attraversamento assuma il valore:

$$\omega_t = 10 \text{ rad/sec}$$

Si procede quindi al tracciamento dei diagrammi di Bode della funzione $F(j\omega)$ la quale, nel caso presente, assume l'espressione:

$$\hat{F}(j\omega) = \frac{K_G K_m K_r K_p}{(j\omega)(1 + j\omega\tau_m)(1 + j\omega\tau_e)} = \frac{100}{(j\omega)(1 + j\omega 0,2)(1 + j\omega 0,03)}$$

e si ottengono i diagrammi riportati in Fig.IV.22 (curve a tratto).

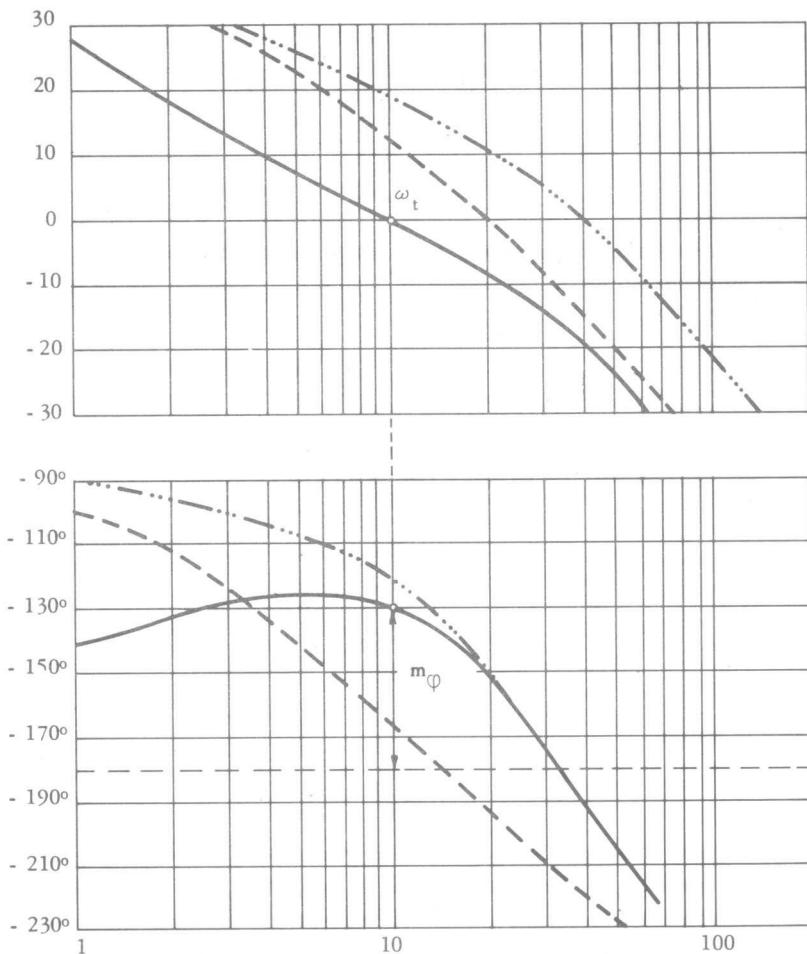


Fig.IV.22

Dall'esame di questi diagrammi si deduce immediatamente che occorre effettuare la compensazione in modo tale da ridurre la pulsazione di attraversamento (dal valore $\hat{\omega}_t = 20 \text{ rad/sec}$ proprio della $\hat{F}(j\omega)$ al valore stabilito $\omega_t = 10 \text{ rad/sec}$) e, contemporaneamente, tale da assicurare in corrispondenza alla pulsazione $\omega_t = 10 \text{ rad/sec}$ un anticipo di fase (di ampiezza pari a $m_p - \angle \hat{F}(j\omega_t) - 180^\circ$). Occorre quindi utilizzare sia un'azione anticipatrice, sia un'azione attenuatrice.

Per quanto riguarda la prima, tenendo presente che l'anticipo di fase richiesto deve essere superiore a circa 40° , si sceglie $m_a = 6$. Inoltre, poiché l'anticipo deve essere localizzato in prossimità della pulsazione $\omega = 10 \text{ rad/sec}$, si sceglie $\tau_a = 0,2 \text{ sec}$. In questo modo viene scelta una compensazione che modifica la funzione $\hat{F}(j\omega)$ nella funzione $R_a(j\omega)\hat{F}(j\omega)$ rappresentata dalla curva a tratto-punto di Fig.IV.22.

L'azione attenuatrice viene individuata osservando che, per fare in modo che il diagramma dei moduli della funzione compensata attraversi l'asse delle ascisse in corrispondenza alla pulsazione $\omega = 10 \text{ rad/sec}$, occorre introdurre, in prossimità di tale pulsazione, un'attenuazione pari a circa 18 dB. Si sceglie allora $m_i = 8$ e, successivamente, $\tau_i = 5$ in modo tale da assicurare che il ritardo di fase introdotto dalla funzione non riduca il margine al di là del valore richiesto.

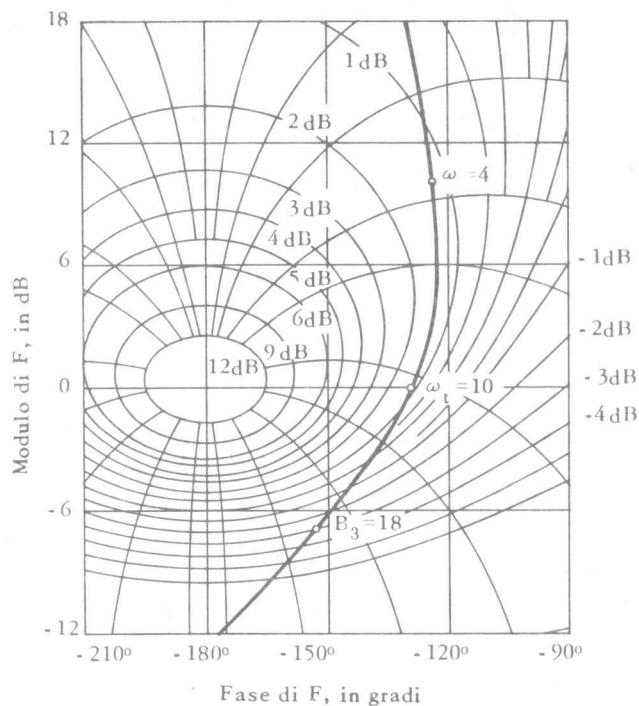


Fig.IV.23

La funzione compensata $R_i(j\omega) R_a(j\omega) \hat{F}(j\omega)$ è rappresentata anch'essa in Fig.IV.22 (curve continue).

In definitiva, la funzione $G(s)$ che si è scelta assume la forma:

$$G(s) = 27 \frac{(1 + 0,2 s)(1 + 0,62 s)}{(1 + 1,2 s)(1 + 5 s)}$$

A titolo di verifica, si è costruito un diagramma di Nichols della funzione compensata (cfr. Fig.IV.23). Come si può constatare, il modulo alla risonanza corrispondente assume un valore compreso tra 1 dB e 2 dB, mentre la banda passante è prossima al valore desiderato 18 rad/sec.

IV.7 - I controllori PID.

Come osservato nei parr. IV.3 e IV.4, nei problemi di sintesi si presenta abbastanza di frequente la necessità di aggiungere un polo nell'origine (al fine di ottenere errore nullo in regime permanente a ingressi e/o disturbi costanti) e di incrementare i valori della fase della funzione di trasferimento del ramo diretto (per aumentare il relativo margine e ridurre in conseguenza la sovraelongazione nella risposta al gradino). Risultati di questo genere si possono conseguire, come si è visto, utilizzando un controllore caratterizzato da una funzione di trasferimento della forma:

$$G(s) = \frac{K}{s} \frac{(1 + \tau_a s)}{\left(1 + \frac{\tau_a}{m_a} s\right)}$$

con $m_a > 1$.

Se il valore di m_a è sufficientemente elevato, risulta:

$$\omega \frac{\tau_a}{m_a} \ll 1$$

per tutti i valori di ω nella banda di frequenze di interesse e si può dunque approssimare la funzione $G(s)$ con la funzione:

$$G(s) = \frac{K}{s} (1 + \tau_a s) .$$

Un controllore caratterizzato da una funzione di trasferimento di questo tipo viene detto controllore ad *azione proporzionale ed integrale*.

(abbreviato: controllore PI). Infatti, la funzione $G(s)$ si può riscrivere nella forma:

$$(IV.13) \quad G(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

con:

$$K_P = K \tau_a, \quad K_I = K$$

mettendo così in evidenza il fatto che il controllore in questione, inserito nello schema a controreazione di fig.IV.10, impone al processo una legge di controllo che consiste nella somma di azioni proporzionali all'errore e al suo integrale rispetto al tempo. Infatti, nello schema di figura IV.10, l'ingresso al blocco caratterizzato dalla funzione di trasferimento $G(s)$ risulta pari a:

$$\frac{e(t)}{K_d}$$

e quindi, se $G(s)$ ha la forma (IV.13), l'uscita di questo blocco assume l'espressione:

$$m(t) = \frac{K_P}{K_d} e(t) + \frac{K_I}{K_d} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

I parametri K_P e K_I prendono il nome di guadagno dell'azione proporzionale e, rispettivamente, dell'azione integrale.

Un controllore ad azione proporzionale ed integrale può essere impiegato, in molti casi pratici, allo scopo di ottenere un sistema di controllo stabile, con margine di stabilità prefissato ed errore nullo in regime permanente a ingressi e/o disturbi costanti. Per la determinazione dei valori da attribuire ai parametri K_P e K_I , si può procedere nel modo seguente. Dall'ispezione dei diagrammi di Bode della funzione (IV.13) (cfr. fig. IV.24), si osserva innanzitutto che il contributo della funzione $G(j\omega)$ alla fase della funzione $F(j\omega) = G(j\omega)P(j\omega)$ risulta sempre negativo (si è supposto, per semplicità, che sia $K_d = 1$). Per ridurre l'effetto di tale contributo, è ragionevole allora scegliere la quantità τ_a in modo tale che la pulsazione $1/\tau_a$ risulti abbastanza a sinistra di quella che sarà la pulsazione di attraversamento. Ad esempio, se $1/\tau_a = 0,1 \omega_t$, il contributo negativo della funzione $G(j\omega)$ alla fase della funzione $F(j\omega)$ in $\omega = \omega_t$ è di soli 6 gradi. Si supponga che il diagramma delle fasi della funzione non compensata $P(j\omega)$ sia sempre decrescente, per ω che varia da 0 a ∞ . In questo caso, risulta individuato univocamente un valore ω_0 di

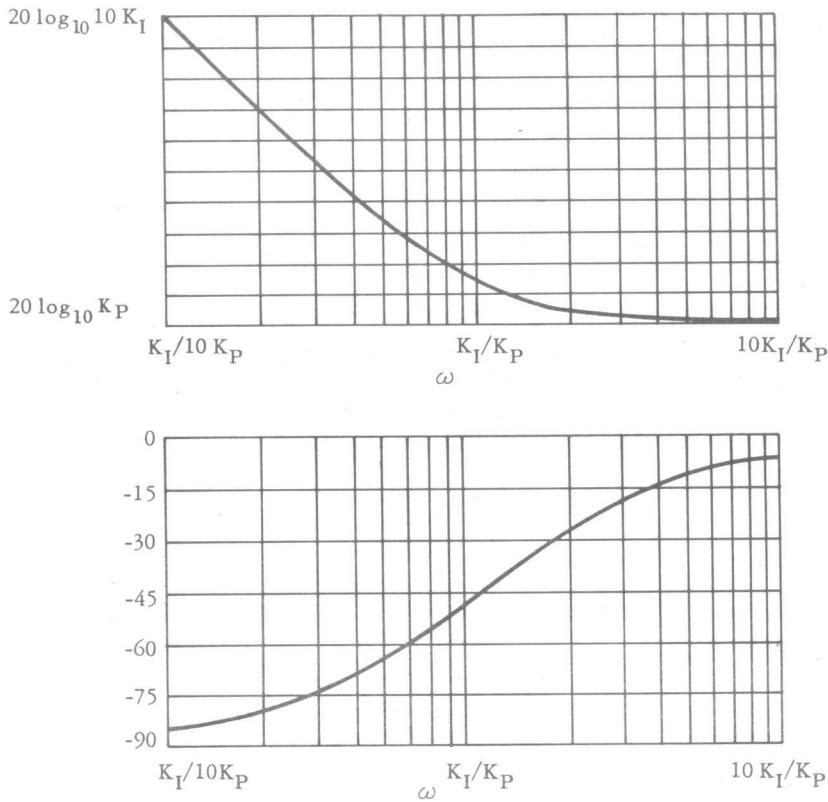


Fig. IV.24

ω per il quale la fase di $P(j\omega_0)$ risulta pari a $-180 + (m_\varphi + 6)$ gradi. Si ponga:

$$\frac{K_I}{K_P} = 0,1 \omega_0$$

Risulta allora chiaro, da quanto descritto sopra, che se la pulsazione di attraversamento del sistema compensato risultasse pari esattamente a ω_0 , il sistema stesso avrebbe il margine di fase desiderato m_φ . Per ottenere che sia $\omega_t = \omega_0$, è sufficiente intervenire sulla costante K_P , determinando questa in modo tale che si abbia:

$$|F(j\omega_0)| = |G(j\omega_0)| |P(j\omega_0)| = 1 .$$

Osservando che:

$$|G(j\omega_0)| = K_P \left| 1 + \frac{K_I}{K_P j \omega_0} \right| = K_P |1 - 0,1| \cong K_P$$

si dovrà porre:

$$K_P = \frac{1}{|P(j\omega_0)|}$$

Se il diagramma di Bode della funzione $P(j\omega)$ non è disponibile, le relazioni precedenti non si possono utilizzare. Può tuttavia essere possibile, effettuando opportune misure sul processo controllato, determinare il valore ω_{cr} della pulsazione per la quale la fase di $P(j\omega_{cr})$ è pari a -180° e valutare la corrispondente ampiezza $|P(j\omega_{cr})|$. Una misura di questo genere si può ottenere sostituendo a $G(s)$ un guadagno puro K e variando quest'ultimo sino ad ottenere un valore \tilde{K} per il quale il sistema ad anello chiuso si porta in oscillazione sinusoidale permanente. Indicata con $\tilde{\omega}$ la pulsazione di tale oscillazione, si osservi che deve risultare necessariamente:

$$\tilde{K} P(j\tilde{\omega}) = -1$$

il che consente di concludere che $\omega_{cr} = \tilde{\omega}$ e che $|P(j\omega_{cr})| = 1/\tilde{K}$.

Disponendo di questi dati è consigliabile di scegliere i parametri K_P e K_I ponendo:

$$\frac{K_I}{K_P} = 0,05 \omega_{cr} \quad K_P = \frac{1}{4 |P(j\omega_{cr})|}$$

Relazioni di questo genere ed altre simili, che qui non si riportano, sono state suggerite da Ziegler e Nichols sulla base dell'analisi di un certo numero di casi particolari ed hanno pertanto un fondamento sostanzialmente empirico. Si noti che le relazioni qui indicate corrispondono a ritenere che sia:

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \omega_{cr}, \quad |P(j\omega_0)| = 4 |P(j\omega_{cr})|.$$

Si noti che, se si utilizza un controllore della forma indicata, il cui contributo alla fase della funzione compensata è sempre negativo, il conseguimento del margine di fase desiderato può comportare una riduzione del guadagno della funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto. Possono dunque presentarsi casi in cui una compensazione di questo tipo dia luogo a valori eccessivamente bassi per K_P . In questi casi, è opportuno introdurre nel controllore stesso una specifica azione di anticipo della fase, considerando in luogo della (IV.13) una funzione di trasferimento della forma:

$$G(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) \frac{(1 + \tau s)}{\left(1 + \frac{\tau}{m} s \right)}$$

con $m > 1$. Supponendo anche in questo caso $m \gg 1$, la funzione in questione può essere approssimata con:

$$G(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) (1 + \tau s)$$

e riscritta nella forma:

$$G(s) = \hat{K}_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

ove:

$$\hat{K}_P = K_P + K_I \tau, \quad K_D = K_P \tau.$$

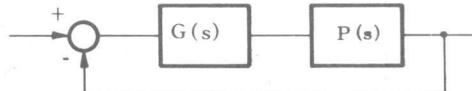
Un controllore caratterizzato da una funzione di trasferimento della forma indicata viene detto controllore ad *azione proporzionale, integrale e derivativa* (abbreviato: controllore PID). Il parametro K_D prende il nome di guadagno dell'azione derivativa. La determinazione dei parametri K_P , K_I e K_D , in un caso concreto, può essere fatta sulla base di considerazioni che estendono in modo naturale quelle svolte a proposito della determinazione dei parametri che caratterizzano il controllore PI.

PROBLEMI

IV.1 - Si consideri il sistema di controllo indicato in Fig.IV.P.1. Si assuma, per la funzione di trasferimento del processo, l'espressione:

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

Fig.IV P.1



Si progetti una funzione compensatrice in modo tale che la risposta a gradino del sistema reazionato abbia una sovraelongazione non superiore al 20 %.

IV.2 - Si consideri il sistema di controllo indicato in Fig.IV.P.1. Si assuma, per la funzione di trasferimento del processo, l'espressione:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Si progetti una funzione compensatrice in modo tale che il sistema reazionato presenti un errore massimo di 0,05 in corrispondenza ad un ingresso $\tilde{u}(t) = t$ ed un margine di fase non inferiore a 45° .

IV.3 - Si consideri il sistema di controllo indicato in Fig.IV.P.1. Si assuma, per la funzione di trasferimento del processo, l'espressione:

$$P(s) = \frac{10}{s(1+0,1s)^2}$$

Si progetti una funzione compensatrice in modo tale che il sistema reazionato presenti un errore massimo di 0,01 in corrispondenza ad un ingresso $\tilde{u}(t) = t$ ed una sovraelogazione nella risposta al gradino non superiore al 15 %.

IV.4 - Nei sistemi di trasporto per nastro magnetico di alta qualità (ad esempio quelli impiegati negli elaboratori per usi militari), il posizionamento del nastro è controllato automaticamente. Un sistema di trasporto alimentato con un motore in c.c. è indicato in Fig.IV.P.2; il relativo schema a blocchi in Fig.IV.P.3. I valori numerici delle costanti sono i seguenti:

$$K_b = 0,4; \quad K_p = 1; \quad \tau_1 = 1 \text{ m sec};$$

$$K_T/L = 2,0; \quad L/R = 0,5 \text{ m sec}; \quad r = 0,2;$$

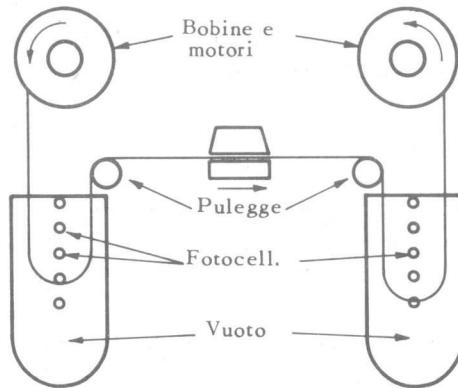


Fig.IV.P.2

Il momento di inerzia del motore e della bobina è pari a $2,5 \times 10^{-3}$ quando la bobina è vuota ed a 5×10^{-3} quando la bobina è piena.

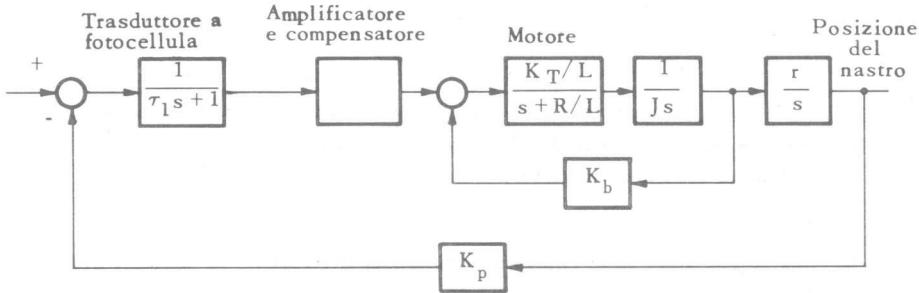


Fig.IV.P.3

Si determinino i valori dei parametri dell'amplificatore e della funzione di compensazione in modo tale che, quando la bobina è piena, il sistema risponda ad una sollecitazione a gradino con un tempo di salita non superiore a 3 msec e con una sovraelongazione non superiore al 25 %.

IV.5 - In Fig.IV.P.4 è indicato, schematicamente, un sistema per l'inseguimento di un solco inciso su una superficie plastica, realizzato sfruttando la riflessione di un fascio elettronico la cui deflessione è controllata a controc reazione. I sistemi di questo genere garantiscono alte densità di immagazzinamento e alte velocità di accesso ai dati. Uno schema a blocchi del sistema è riportato in Fig.IV.P.5. La tensione E_p sulle placche di deflessione determina uno spostamento del fascio elettronico, sulla superficie incisa, pari a $K_p E_p$, ove $K_p = 25,6 \times 10^{-3} \text{ mm/volt}$. Il sensore fotosensibile è caratterizzato da una costante pari a $K_d = 39,1 \times 10^{-6} \text{ volt/mm}$. I due amplificatori hanno una banda passante a 3 db approssimativamente uguale e pari a 5 MHz.

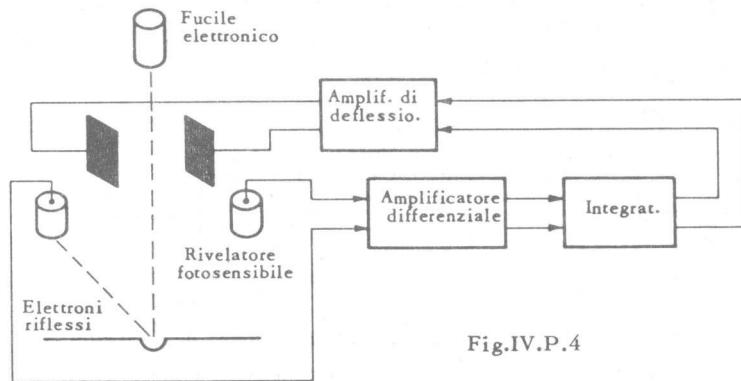


Fig.IV.P.4

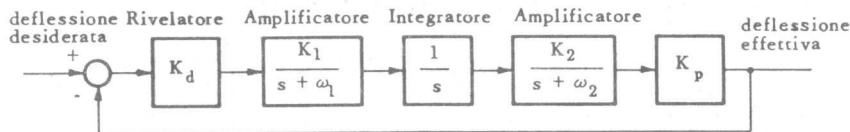


Fig.IV.P.5

Si tracci il diagramma della risposta in frequenza del sistema reazionato e si determini se è possibile, assegnando opportunamente la sola costante K_1 K_2 , ottenere un margine di fase di 45° ed una banda passante di 1 MHz per il sistema reazionato.

IV.6 - Un sistema di controllo della concentrazione di un prodotto chimico è indicato schematicamente in Fig.IV.P.6. In un mescolatore vengono versati un composto granulare ed un solvente e si desidera mantenere costante la concentrazione del prodotto regolando la valvola di caricamento.

In Fig.IV.P.7 è riportato uno schema a blocchi del sistema.

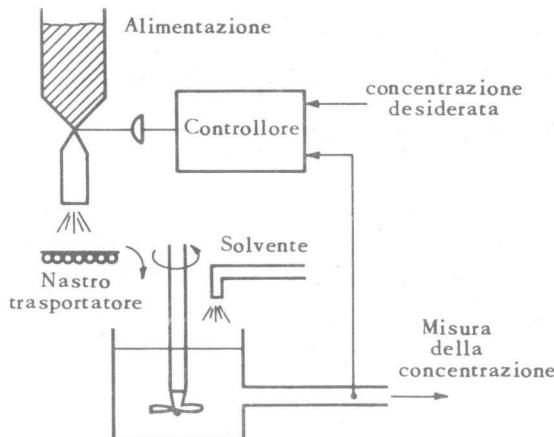


Fig.IV.P.6

Il tempo di ritardo del nastro trasportatore è pari a $T = 2$ sec. Si determini la funzione di trasferimento $G(s)$ del controllore in modo tale che il sistema sia di tipo 1 e presenti un margine di fase di 40° .

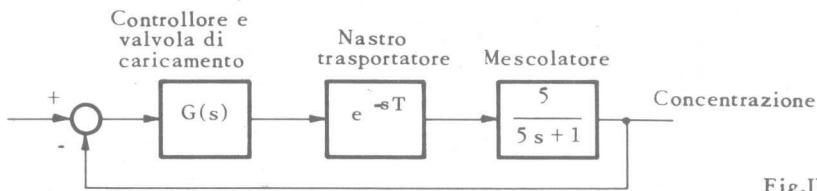


Fig.IV.P.7

IV.7 - In Fig.IV.P.8 è indicato schematicamente un sistema di controllo nel quale la variabile controllata è la posizione dell'asse di un motore elettrico in c.c. Oltre alla reazione di posizione è presente una reazione, interna, di velocità. Quest'ultima è realizzata (cfr. esempio I.3) mediante una dinamo tachimetrica.

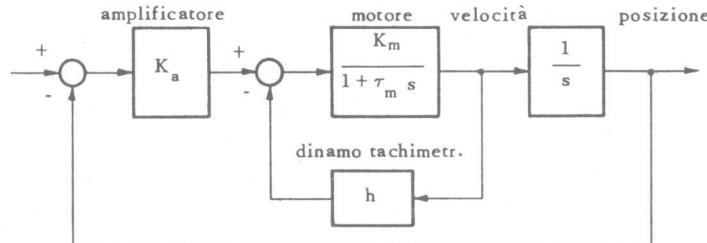


Fig.IV.P.8

Si dimostri che, dal punto di vista della funzione di trasferimento ingresso-uscita, lo schema indicato è equivalente a quello di Fig.IV.P.9, ove si ponga:

$$R(s) = \frac{1}{1 + K_m h} \frac{1 + \tau_m s}{1 + \frac{\tau_m}{1 + K_m h} s}$$

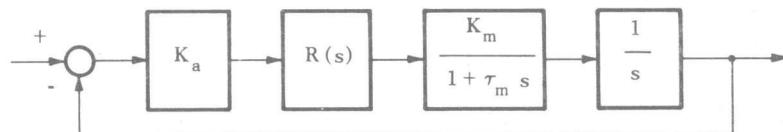


Fig.IV.P.9

Si osservi che l'effetto della *reazione di velocità*, in questo caso, è equivalente a quello di una *funzione anticipatrice* disposta in cascata, caratterizzata da una costante di tempo τ_a coincidente con la costante di tempo τ_m del motore e da un coefficiente $m_a = 1 + k_m h$.

CAPITOLO V

METODI DI SINTESI PER TENTATIVI BASATI SULL'IMPIEGO DEL LUOGO DELLE RADICI

V.1 - Generalità.

Il problema della sintesi di un sistema di controllo, ad un solo ingresso ed una sola uscita già considerato nel capitolo precedente, può essere anche affrontato utilizzando metodi basati sulla considerazione diretta delle grandezze che caratterizzano le funzioni di trasferimento del sistema e delle sue parti (poli, zeri, coefficienti di guadagno), in luogo di quelli basati sulla considerazione delle risposte in frequenza.

Come già si è precisato nel capitolo precedente, una volta che siano state definite le caratteristiche della risposta a regime permanente, la prima fase della sintesi si esaurisce nell'attribuzione, alla funzione di trasferimento $G(s)$ di quella parte del sistema che precede - nel ramo diretto - il processo controllato (cfr. fig. IV.10), di un numero opportuno di poli nel punto $s = 0$ e di un opportuno coefficiente di guadagno. Corrispondentemente, si viene ad attribuire alla funzione $G(s)$ una struttura del tipo (cfr. (IV.6)):

$$G(s) = R(s) \frac{\hat{K}}{s^r}$$

nella quale $R(s)$ è una funzione da determinare, priva di poli nell'origine e dotata di guadagno unitario. La seconda fase della sintesi è centrata sulla scelta della funzione $R(s)$, che deve essere tale da assicurare il soddisfacimento di specifiche riguardanti la stabilità e la risposta transitoria.

Se si è deciso di utilizzare direttamente le funzioni di trasferimento, in luogo delle risposte in frequenza, per descrivere le prestazioni del sistema, la qualità della risposta transitoria può essere facilmente correlata (cfr. par. III.6) con l'allocazione, sul piano complesso, dei poli della funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema. Come si è visto, precisazioni relative al decadimento dell'errore transitorio (nella sollecitazione a gradino) portano ad imporre l'appartenenza dei poli della funzione $W(s)$ ad una regione del piano complesso del tipo di quella indicata in Fig. III.17. Il problema che si presenta è allora quello di analizzare in che modo può essere scelta la funzione $R(s)$ in modo tale da assicurare l'appartenenza dei poli di $W(s)$ alla regione indicata.

L'influenza della scelta della $R(s)$ può essere valutata in modo molto semplice per quanto riguarda la funzione di trasferimento dell'anello aperto (cfr. IV.10):

$$F(s) = G(s) P(s) \frac{1}{K_d} = R(s) \frac{\hat{K}}{s^r} P(s) \frac{1}{K_d}$$

ma solo in modo indiretto per quanto riguarda la $W(s)$, che è legata ad $F(s)$ dalla nota relazione:

$$W(s) = K_d \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

Si pone allora in modo naturale il problema, peraltro analogo a quello risolto nel par. IV.2 per il caso delle risposte in frequenza, di mettere a punto un metodo di studio che consenta di correlare facilmente i parametri che caratterizzano la funzione di trasferimento del sistema non reazionato $F(s)$ con quelli che caratterizzano la funzione di trasferimento dell'intero sistema $W(s)$. In termini più esplicativi, con riferimento alle grandezze che sono state scelte per valutare il comportamento transitorio, il problema che si pone è quello di correlare i valori dei poli, degli zeri e del coefficiente di guadagno di $F(s)$ con i valori dei poli e degli zeri di $W(s)$.

A questo proposito, va subito osservato che, per i sistemi di controllo che possono essere descritti con lo schema di Fig. IV.10 (nei quali la funzione di trasferimento del ramo diretto è assunta indipendente da s), il problema della valutazione degli zeri di $W(s)$ di fatto non si pone in quanto questi coincidono, ordinatamente, con gli zeri di $F(s)$. Nel passaggio da una struttura non reazionata ad una reazionata, gli zeri della funzione di trasferimento conservano il loro valore.

Il problema principale è allora sostanzialmente quello di valutare in che modo l'aggiunta di poli e/o zeri alla funzione di trasferimento

del sistema non reazionato (in altri termini, la scelta della funzione $R(s)$) influisce sui valori dei poli della funzione $W(s)$.

V.2 - Il luogo delle radici.

Lo scopo di questo paragrafo è quello di presentare un procedimento grafico, molto diffuso in pratica, mediante il quale è possibile stabilire interessanti correlazioni tra i valori dei poli p_i ($i = 1, \dots, n$), degli zeri z_i ($i = 1, \dots, m$), del coefficiente moltiplicativo K' che caratterizzano la funzione razionale di variabile complessa:

$$(V.1) \quad F(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

e i valori delle radici dell'equazione algebrica:

$$(V.2) \quad \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K' \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

Poichè, come è noto, le radici di tale equazione coincidono con i poli della funzione razionale:

$$(V.3) \quad W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

il procedimento in questione può venire utilizzato, nello studio di un sistema di controllo a controllazione, per correlare alcune importanti caratteristiche della funzione di trasferimento del sistema reazionato (in particolare, i valori dei poli) ai valori dei parametri che caratterizzano la funzione di trasferimento del sistema non reazionato.

Il procedimento consiste essenzialmente nella individuazione, esatta o qualitativa a seconda della difficoltà del caso, del luogo geometrico dei punti del piano complesso descritto dalle radici dell'equazione (V.2) al variare del parametro K' .

Nel caso, ad esempio, in cui la funzione $F(s)$ assuma l'espressione:

$$F(s) = \frac{K'}{s(s + p)}$$

le radici dell'equazione (V.2):

$$s^2 + ps + K' = 0$$

si calcolano molto facilmente con la relazione:

$$s_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - K'}$$

Al variare di K' nell'intervallo $[0, \infty)$ tali grandezze descrivono il luogo di punti indicato in Fig. V.1.a. A ciascun valore del parametro K' corrisponde una ben precisa coppia di radici o punti al luogo. Per $K' < p^2/4$ le radici sono reali e distinte; per $K' > p^2/4$ esse sono complesse e coniugate.

Osservando la forma del luogo ed in particolare le modalità con cui le radici stesse variano al variare del parametro K' , è possibile dedurre facilmente l'influenza dei parametri che caratterizzano la funzione $F(s)$ sui valori dei poli che caratterizzano la funzione $W(s)$. Ad esempio, si osserva che a parità di valori del parametro p , all'aumento di K' (oltre il valore $K' = p^2/4$) corrisponde, per i poli in questione, un aumento della pulsazione naturale ed una diminuzione del coefficiente di smorzamento.

Al variare di K' nell'intervallo $(-\infty, 0]$ le radici considerate descrivono il luogo dei punti indicati in Fig. V.1.b. In questo caso le radici sono sempre reali ma di segno discordo.

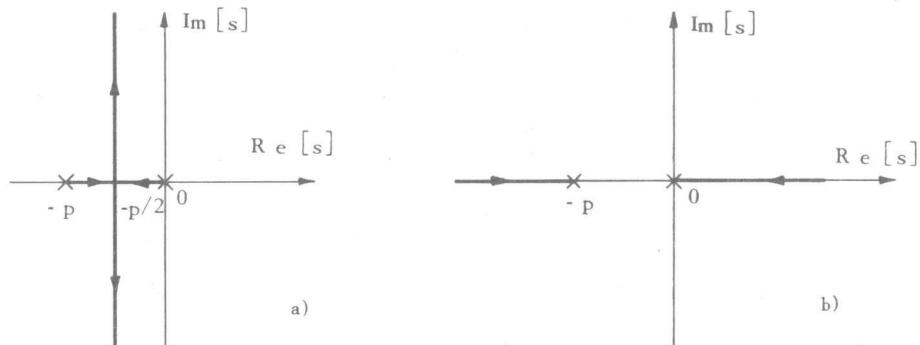


Fig.V.1

Il luogo geometrico delle radici della (V.2) corrispondente a valori positivi del parametro K' viene detto luogo *positivo* delle radici. Se viceversa K' assume soltanto valori negativi, il luogo prende il nome di luogo *negativo*. In pratica, nell'uso corrente, quando non vi è possibilità di confusione, è abituale riferirsi al luogo positivo senza specificarlo esplicitamente.

Da un punto di vista generale, per individuare il luogo delle radici (positivo o negativo) corrispondente ad un'assegnata funzione del tipo (V.1), è conveniente riscrivere dapprima l'equazione (V.2) nella forma:

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) = -K' \prod_{i=1}^m (s - z_i)$$

e, successivamente, sostituire a questa la coppia di uguaglianze tra grandezze reali:

$$\prod_{i=1}^n |s - p_i| = |K'| \prod_{i=1}^m |s - z_i|$$

$$\sum_{i=1}^n \angle s - p_i = \pi + \angle K' + \sum_{i=1}^m \angle s - z_i + h \cdot 2\pi$$

essendo h un qualsiasi numero intero, positivo o negativo.

La prima di queste viene detta *condizione di modulo* (o di ampiezza) e la seconda *condizione di argomento* (o di fase). L'interesse a considerare queste ultime in luogo dell'equazione di partenza (V.2) è legato alla possibilità di associare a ciascuna di esse un significato geometrico molto immediato. Riferendosi infatti alla interpretazione delle grandezze complesse del tipo $(s - p_i)$ ovvero $(s - z_i)$ come vettori aventi per estremi i punti rappresentativi di s e p_i (ovvero z_i), orientati da p_i (rispettivamente da z_i) verso s , è immediato osservare che la prima di tali condizioni, riscritta nella forma:

$$(V.4) \quad |K'| = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}$$

corrisponde alla proprietà che, in ogni punto del luogo delle radici associato alla funzione $F(s)$, il valore assoluto del parametro K' è pari al prodotto delle lunghezze dei vettori che congiungono il punto stesso con i poli della funzione $F(s)$, diviso per il prodotto delle lunghezze dei vettori congiungenti il punto stesso con gli zeri della funzione $F(s)$.

La seconda condizione si presta ad una interpretazione del tutto analoga, che fa intervenire somme e differenze degli argomenti dei vettori congiungenti un punto generico del luogo con i poli e gli zeri di $F(s)$. La condizione in questione assume due diverse forme a seconda che il parametro K' (che si suppone reale) assuma valore positivo (luogo positivo) o negativo (luogo negativo):

$$(V.5) \quad \sum_{i=1}^n \angle s - p_i - \sum_{i=1}^m \angle s - z_i = \begin{cases} \pi + h \cdot 2\pi & \text{(luogo positivo)} \\ h \cdot 2\pi & \text{(luogo negativo)} \end{cases}$$

e corrisponde alla proprietà che la somma degli argomenti dei vettori orientati dai poli della funzione $F(s)$ verso un punto del luogo diminuita dalla somma degli argomenti dei vettori orientati dagli zeri della funzione $F(s)$ verso lo stesso punto del luogo è pari a π o a 0 (a meno di un multiplo intero di 2π) a seconda che si tratti del luogo positivo o negativo.

A titolo di esempio, per una funzione $F(s)$ i cui zeri e poli assumano le posizioni indicate in Fig. V.2, i punti del luogo *positivo* coincidono con tutti e soli i punti P per i quali siano soddisfatte le relazioni:

$$\frac{|PA_1| |PA_2|}{|PB_1|} = K'$$

$$\psi_1 + \psi_2 - \varphi_1 = \pi + h 2\pi$$

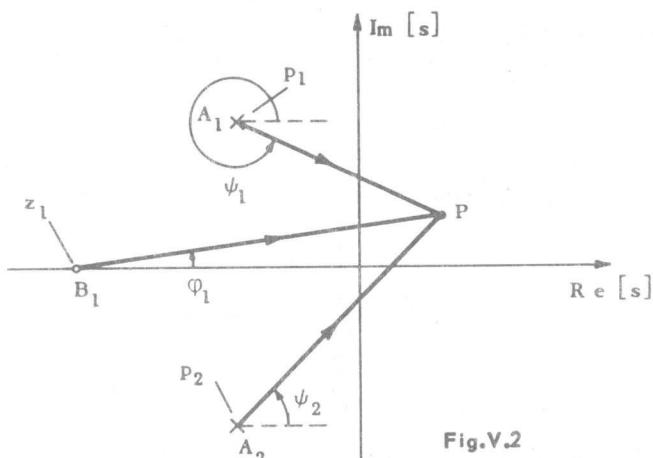


Fig.V.2

È interessante osservare che la seconda condizione, nella quale non compare il parametro K' , può essere interpretata come l'equazione del luogo allo studio e, in conseguenza, utilizzata per individuare i punti del piano complesso appartenenti al luogo (tracciamento del luogo). In tal caso, la prima condizione può essere allora utilizzata per far corrispondere a ciascuno dei punti del luogo così individuato il valore del parametro K' in corrispondenza al quale il punto stesso diviene radice della (V.2) (giaduazione del luogo).

Dal punto di vista pratico, l'impiego diretto della condizione di fase (V.5) per il tracciamento del luogo delle radici è conveniente soltanto in presenza di particolari simmetrie. Ai fini che interessano nell'ambito dei problemi di sintesi dei sistemi di controllo, è più opportuno

no, in molti casi, riferirsi ad ulteriori condizioni che consentono di pervenire al tracciamento esatto di alcune parti del luogo ed a quello approssimato o qualitativo di altre. All'esposizione di queste condizioni, che prendono anche il nome di *regole* per il tracciamento del luogo, è dedicato il seguito di questo paragrafo. Per semplicità di esposizione si farà riferimento, in accordo con le assunzioni usualmente considerate, al caso in cui la funzione razionale $F(s)$ è strettamente propria ($n > m$).

In proposito, è utile innanzitutto osservare che alcune proprietà di carattere generale del luogo possono essere dedotte riguardando la (V.2) come un'equazione del tipo:

$$(V.6) \quad f(s, K') = 0$$

e considerando le diverse radici come *funzioni implicite* del parametro K' . In tal caso, l'impiego del teorema della funzione implicita (cfr. par. III.7) consente di stabilire immediatamente che se \bar{s} è un punto del luogo, corrispondente al valore $K' = \bar{K}'$, per il quale risulti:

$$(V.7) \quad \left[\frac{\partial f(s, K')}{\partial s} \right]_{(\bar{s}, \bar{K}')} \neq 0$$

in un opportuno intorno di \bar{s} il luogo coincide con un arco di curva regolare (l'immagine di una funzione $s = s(K')$, definita implicitamente in tale intorno dalla (V.2), che è dotata di derivate di ordine comunque elevato). I diversi archi di curva regolare (rami) si raccordano nei cosiddetti *punti singolari* del luogo, ovverosia nei punti in cui è violata la condizione (V.7).

Ogni punto singolare è radice *multipla* della (V.2) in quanto, in corrispondenza al medesimo valore K' , annulla sia il primo membro della (V.2) stessa, sia la sua derivata rispetto ad s . Tutti gli altri punti del luogo (punti regolari) sono radici *semplici*.

Ciò premesso, si enunceranno alcune regole fondamentali, dandone anche la relativa giustificazione.

1) I punti singolari del luogo sono calcolabili mediante il sistema di equazioni:

$$(V.8') \quad \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K' \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

$$(V.8'') \quad \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i) + K' \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

il quale, peraltro, fornisce sia i punti singolari del luogo positivo sia quelli del luogo negativo.

Come già osservato, i punti singolari sono i punti del luogo nei quali non è soddisfatta la (V.7). Essi pertanto corrispondono alle coppie di valori (s, K') che soddisfano le due equazioni:

$$f(s, K') = 0$$

$$\frac{\partial f(s, K')}{\partial s} = 0$$

Queste coincidono, ordinatamente, con le (V.8).

Si noti che, eliminando K' tra la prima e la seconda delle (V.8), si può scrivere un'equazione nella sola incognita s , che assume la forma⁽¹⁾:

$$(V.9) \quad \prod_{i=1}^m (s - z_i) \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i) - \prod_{i=1}^n (s - p_i) \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

Ogni punto singolare del luogo è radice della (V.9), ma non viceversa, in quanto può darsi che una radice di tale equazione soddisfi le (V.8) in corrispondenza a valori complessi di K' .

Poiché la (V.9) ha grado pari ad $n + m - 1$, il luogo è dotato al più di $n + m - 1$ punti singolari (alcuni dei quali, eventualmente, coincidenti) disposti simmetricamente rispetto all'asse reale. Individuare direttamente i punti singolari come soluzioni della (V.9) non è, in generale, agevole; molte volte, tuttavia, è possibile determinarne qualitativamente la posizione sulla base di semplici considerazioni di carattere intuitivo, del tipo di quelle che verranno illustrate negli esempi del paragrafo III.

2) I poli p_1, p_2, \dots, p_n della $F(s)$ sono punti del luogo, corrispondenti al valore 0 del parametro K' .

Per $K' = 0$, infatti, la (V.2) si riduce all'equazione:

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) = 0$$

(1) - Molti autori preferiscono dare alla (V.9) l'espressione:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} = 0$$

3) Quando K' tende a $+\infty$ (per il luogo positivo) o a $-\infty$ (per il luogo negativo), m rami del luogo convergono sugli zeri z_1, \dots, z_m della funzione $F(s)$ ed altri $n - m$ rami divergono verso il punto improprio.

Utilizzando la condizione di fase, si può mostrare innanzitutto che su ciascuno degli zeri della $F(s)$ converge un ramo del luogo delle radici. A questo scopo, si pensi applicata la condizione stessa ai punti di un intorno circolare I_δ di raggio δ dello zero z_i e si distinguano, nel primo membro della (V.5), i termini relativi allo zero in questione (che possono essere più di uno se lo zero è multiplo) dagli altri. In questo modo la condizione di fase, in particolare quella per il luogo positivo, può essere riscritta nella forma:

$$(V.10) \quad -\mu \angle \underline{s - z_i} = \varphi(s) + \pi + 2\pi h$$

avendo indicato con μ la molteplicità dello zero z_i e genericamente con $\varphi(s)$ la somma dei termini relativi a tutti i poli e a tutti gli altri zeri diversi da z_i . Si verifica facilmente, sulla base di semplici considerazioni geometriche, che nei punti della frontiera di I_δ , il termine $\varphi(s)$ differisce da $\varphi(z_i)$ per una quantità che risulta infinitesima al tendere di δ a 0. D'altra parte, quale che sia δ , sulla frontiera di I_δ il termine $\angle \underline{s - z_i}$ può assumere tutti i valori compresi tra 0 e 2π . Si può allora affermare, sulla base della (V.10) stessa, che se δ è sufficientemente piccolo, il luogo delle radici interseca la frontiera di I_δ , in μ punti distinti.

Rimanè così dimostrato che allo zero z_i , di molteplicità μ , convergono μ rami del luogo. Per provare che tale convergenza avviene al tendere di K' all'infinito, basta poi utilizzare la condizione di modulo (V.4).

La prova del fatto che $n - m$ rami del luogo divergono verso il punto improprio può essere svolta con argomenti sostanzialmente analoghi. Si tratta, questa volta, di considerare una circonferenza C_ρ di raggio ρ sufficientemente elevato e di mostrare, servendosi della condizione di fase, che il luogo la interseca in $n - m$ punti. La condizione di modulo può essere impiegata per verificare che la divergenza dei rami verso il punto improprio avviene al tendere di K' all'infinito.

4) Alluogo positivo appartengono i punti dell'asse reale che lasciano alla loro destra un numero dispari di zeri e/o di poli (contati con la loro molteplicità) della funzione $F(s)$. I restanti punti dell'asse reale appartengono al luogo negativo.

Scrivendo la condizione di fase per un punto dell'asse reale, si constata immediatamente che i termini corrispondenti a poli e/o zeri coniugati danno contributo complessivamente nullo e che quelli corrispon-

denti a poli e/o zeri reali posti a sinistra del punto stesso sono nulli. Sono diversi da zero i soli contributi relativi a poli e/o zeri situati alla destra del punto in questione. La condizione di fase relativa al luogo positivo è soddisfatta solo se il numero complessivo di questi è dispari; quella relativa al luogo negativo solo se il numero è pari.

5a) Se \bar{s} è un punto regolare, corrispondente al valore $K' = \bar{K}'$, la tangente al ramo del luogo passante per \bar{s} , orientata concordemente con il verso nel quale K' risulta crescente, forma con l'asse delle ascisse un angolo pari a:

$$(V.10) \quad \varphi_s = \sum_{i=1}^m \angle \bar{s} - z_i - \sum_{i=2}^n \angle \bar{s} - s_i + \pi$$

essendo s_2, \dots, s_n gli altri punti del luogo corrispondenti al medesimo valore \bar{K}' .

Se \bar{s} è un punto regolare, la (V.6) definisce implicitamente una funzione $s = s(K')$, per la quale risulta (cfr. (III.55)):

$$\left[\frac{ds}{dK'} \right]_{(\bar{s}, \bar{K}')} = - \frac{\prod_{i=1}^m (\bar{s} - z_i)}{\prod_{i=2}^n (\bar{s} - s_i)}$$

Essendo la tangente al ramo che passa per \bar{s} orientata come $[ds/dK']$ in (\bar{s}, \bar{K}') , si deduce immediatamente la (V.10).

Si noti che, in particolare, se p_k è un polo semplice di $F(s)$ (e quindi un punto di regolarità del luogo, corrispondente a $K' = 0$) la tangente al ramo passante per p_k forma con l'asse delle ascisse un angolo:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^m \angle p_k - z_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle p_k - p_i + \pi$$

5b) In un punto singolare del luogo, di molteplicità μ , confluiscono 2μ rami del luogo, alternativamente convergenti e divergenti. Le direzioni delle tangenti a questi rami, nel punto singolare, formano una stella regolare che divide l'angolo giro in 2μ angoli uguali.

Per verificare questa proprietà conviene partire dalla considerazione del caso particolare in cui la singolarità si verifica in corrispondenza al valore $K' = 0$. Questo caso si presenta, in effetti, se e soltanto se i poli della funzione $F(s)$ risultano coincidenti (essendo, ovvia-

mente, $\mu \geq 2$). Svolgendo considerazioni perfettamente analoghe a quelle impiegate per verificare quanto asserito al punto 3, è facile constatare che sul polo in questione convergono (per K' crescente da valori negativi verso il valore 0) μ rami del luogo negativo e che da esso divergono (per K' crescente in valori positivi) altri μ rami del luogo positivo. La condizione di fase, scritta in forma analoga alla (V.10) per i rami del luogo positivo o nella forma corrispondente (priva del termine πa secondo membro) per i rami del luogo negativo, permette di verificare che i rami divergenti si alternano a quelli convergenti e che le tangenti rispettive dividono l'angolo 2π in 2μ parti uguali (cfr. Fig. V.3, in cui sono esemplificati due casi, corrispondenti a $\mu = 2$ e $\mu = 3$).

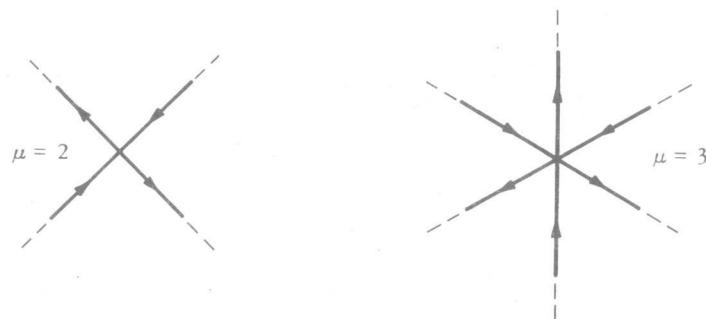


Fig.V.3

Ciò posto, per verificare la proprietà enunciata per un generico punto singolare \bar{s} , di molteplicità μ , corrispondente al valore $K' = \bar{K}' \neq 0$, è sufficiente osservare che il luogo delle radici relativo alla funzione (V.1) differisce da quello della funzione:

$$\hat{F}(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) + \bar{K}' \prod_{i=1}^m (s - z_i)}$$

solo nella graduazione, che è alterata (rispetto a quella del luogo relativo alle (V.1)) di una quantità costante pari a K' . Infatti l'equazione corrispondente alla (V.2) per la funzione $\hat{F}(s)$ si scrive nella forma:

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + (K' + \bar{K}') \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

Il punto \bar{s} , che è una radice della (V.2), di molteplicità μ , corrispondente al valore $K' = \bar{K}'$, è anche un polo, di molteplicità μ , della funzione $F(s)$. Per esso quindi si possano utilizzare i risultati delle considerazioni svolte all'inizio, completando la verifica di quanto asserto.

5c) I rami del luogo che divergono verso il punto improprio tendono asintoticamente a $n-m$ semirette che formano, con l'asse delle ascisse, angoli pari a:

$$\varphi_+ = \frac{\pi + 2h\pi}{n-m} \quad (h = 1, 2, \dots, n-m)$$

nel luogo positivo ed a:

$$\varphi_- = \frac{2h\pi}{n-m} \quad (h = 1, 2, \dots, n-m)$$

nel luogo negativo. Tutte queste semirette hanno in comune il punto dell'asse reale di ascissa:

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

che viene detto centro degli asintoti.

Per verificare questa proprietà conviene dapprima mostrare che il luogo delle radici associato alla funzione (V.1) tende a coincidere, in prossimità del punto improprio del piano complesso, con quello della funzione:

$$(V.11) \quad \tilde{F}(s) = \frac{K'}{(s - s_0)^{n-m}}$$

purchè il valore dell'unico polo s_0 che la caratterizza sia scelto opportunamente. A questo scopo, si indichi con \bar{s} un punto del luogo associato alla (V.11), corrispondente al valore $K' = \bar{K}'$ e con $\bar{s} + \Delta s$ un punto del luogo associato alla (V.1), corrispondente al medesimo valore di K' . Si possono allora scrivere le relazioni:

$$(\bar{s} - s_0)^{n-m} + \bar{K}' = 0$$

$$\prod_{i=1}^n (\bar{s} + \Delta s - p_i) + \bar{K}' \prod_{i=1}^m (\bar{s} + \Delta s - z_i) = 0$$

Eliminando \bar{K}' tra le due, si ottiene l'equazione:

$$\prod_{i=1}^n (\bar{s} + \Delta s - p_i) - (\bar{s} - s_0)^{n-m} \prod_{i=1}^m (\bar{s} + \Delta s - z_i) = 0$$

che può essere riguardata come un'equazione in Δs , i coefficienti dipendenti da \bar{s} . Ciò posto, si può facilmente dimostrare che, al tendere di \bar{s} all'infinito, almeno una delle radici di tale equazione tende a zero, purché il valore di s_0 sia scelto opportunamente. Basta infatti dividere tutti i coefficienti di tale equazione per \bar{s}^{n-1} (il che non altera i valori delle radici essendo \bar{s} finito e non nullo) ed osservare, nell'equazione così ottenuta, l'espressione del coefficiente relativo a $(\Delta s)^0$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{s}^{n-1}} \left[\prod_{i=1}^n (\bar{s} - p_i) - (\bar{s} - s_0)^{n-m} \prod_{i=1}^m (\bar{s} - z_i) \right] = \\ & = \frac{1}{\bar{s}^{n-1}} \left[\bar{s}^n + \left(- \sum_{i=1}^n p_i \right) \bar{s}^{n-1} + \dots - \bar{s}^n + (n-m)s_0 \bar{s}^{n-1} - \left(- \sum_{i=1}^m z_i \right) \bar{s}^{n-1} + \dots \right] = \\ & = \left[- \sum_{i=1}^n p_i + (n-m)s_0 + \sum_{i=1}^m z_i \right] + [\dots] \frac{1}{\bar{s}} + \dots \end{aligned}$$

Se s_0 è tale da annullare il primo addendo di questa espressione, il coefficiente relativo a $(\Delta s)^0$ nell'equazione precedente tende a 0 per $\bar{s} \rightarrow \infty$; di conseguenza, almeno una delle radici di tale equazione tende anche essa a 0 per $\bar{s} \rightarrow \infty$.

Rimane così dimostrato che, se s_0 è scelto nel modo indicato, almeno un ramo del luogo delle radici associato alla (V.2) (il ramo cui appartiene $\bar{s} + \Delta s$) converge ad un ramo del luogo delle radici associato alla (V.11) (il ramo cui appartiene \bar{s}). Usando lo stesso argomento per tutti i rami del luogo associato alla (V.11), si verifica facilmente che i due luoghi tendano a coincidere in prossimità del punto improprio.

Si osservi ora che il luogo delle radici associato alla (V.11), definito dall'equazione:

$$(s - s_0)^{n-m} + K' = 0$$

è costituito da $n-m$ semirette, che passano tutte per il punto s_0 e formano con l'asse delle ascisse angoli pari a $(\pi + 2h\pi)/(n-m)$ se $K' > 0$ o pari a $2h\pi/(n-m)$ se $K' < 0$ (con $h = 0, 1, \dots, n-m$). Infatti i punti di questo luogo corrispondenti ad un fissato K' si ottengono sommando ad s_0 le $(n-m)$ radici (complesse) $(n-m)$ -esime del numero reale $-K'$. Si conclude che il luogo corrispondente alla (V.11) coincide con la stella di semirette indicate nell'enunciato. Queste ultime, per quanto mostrato all'inizio, individuano dunque gli assintoti del luogo.

In Fig. V.4 sono riportate, a titolo di esempio, le configurazioni assunte dagli asintoti in alcuni casi semplici.

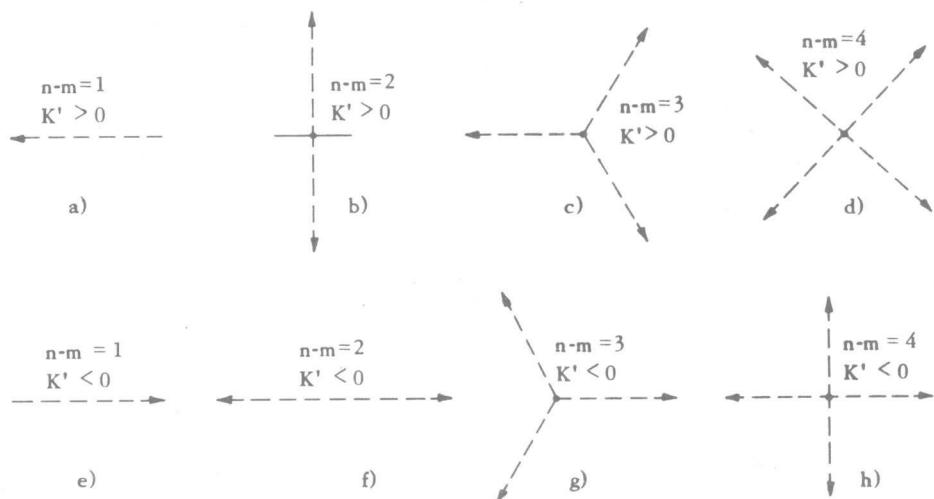


Fig. V.4

6) Gli eventuali punti di attraversamento dell'asse immaginario da parte del luogo si possono determinare applicando l'algoritmo di Routh all'equazione (V.2).

Dopo aver scritto la tabella di Routh relativamente a questa equazione, si calcolano il valore (o i valori) di K' che annulla tutti gli elementi di una riga; sostituendo tale valore nella riga precedente, si può costruire - come è noto - un polinomio (in cui sono presenti solamente potenze pari) le cui radici (a simmetria quadrantale) sono soluzioni della (V.2), corrispondenti al valore di K' che si è considerato, e quindi punti del luogo. Le eventuali radici immaginarie di questo polinomio corrispondono pertanto ad altrettanti punti di attraversamento dell'asse immaginario da parte del luogo.

La tabella di Routh può essere anche utilizzata per stabilire per quali valori di K' i punti del luogo si trovano a sinistra dell'asse immaginario e per quali valori i punti si trovano a destra. A questo scopo è sufficiente individuare i valori di K' in corrispondenza ai quali gli elementi della prima colonna cambiano segno. Tali valori possono essere utilizzati per ripartire l'intero intervallo di variazione del parametro K' in intervalli contigui, su ciascuno dei quali ogni elemento della prima colonna della tabella ha segno costante. In corrispondenza a ciascuno di tali intervalli il numero di variazioni di segno negli elementi della pri-

ma colonna della tabella risulta costante ed è pari al numero di punti del luogo che si trovano a destra dell'asse immaginario.

Utilizzando le regole esposte è possibile, nella maggioranza dei casi pratici, individuare in modo preciso alcune porzioni del luogo (quelle appartenenti all'asse reale, i punti di attraversamento dell'asse immaginario, i punti singolari) ed in modo approssimato alcune altre (per esempio, l'andamento asintotico). Complessivamente queste consentono quasi sempre di tracciare un grafico completo, anche se qualitativo, dell'intero luogo.

Da un punto di vista operativo, conviene innanzitutto individuare le porzioni di luogo appartenenti all'asse reale (regola 4), tracciare gli asintoti (regola 5c) e, quando ciò non sia troppo oneroso, calcolare i punti singolari (regola 1). Sulla base di questi elementi è in genere possibile eseguire un tracciato qualitativamente plausibile. Questo può essere poi ulteriormente precisato individuando gli eventuali attraversamenti con l'asse immaginario (regola 6) e le tangenti in qualche punto di interesse (regole 5a e 5b). In molti casi può essere utile avvalersi di particolari simmetrie; una simmetria sempre presente è quella rispetto all'asse reale, dovuta al fatto che i coefficienti della (V.2) sono reali. Le parti del luogo determinate in modo esatto possono essere graduate utilizzando la condizione (V.4) di modulo; in ogni caso è comunque utile indicare con una freccia il verso corrispondente allo spostamento delle radici al crescere del parametro K' (regole 2 e 3).

V.3 - Esempi di tracciamento qualitativo del luogo delle radici.

Si daranno ora alcuni esempi di tracciamento qualitativo del luogo delle radici, basati sull'impiego delle regole esposte sul paragrafo precedente.

Esempio V.1 - Si consideri il caso in cui:

$$F(s) = \frac{K'}{s(s+1)(s+2)}$$

Tale funzione ha tre poli reali ($n = 3$) e non ha zeri ($m = 0$).

Il sistema di equazioni che caratterizza i punti singolari del luogo:

$$s(s+1)(s+2) + K' = 0$$

$$3s^2 + 6s + 2 = 0$$

si presta in questo caso ad essere risolto in modo molto semplice. Sostituendo le due radici della seconda equazione:

$$-1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \begin{cases} -0,422 \\ -1,578 \end{cases}$$

nella prima, si ottengono le coppie (s, K') :

$$s = -0,422 \quad \text{per} \quad K' = 0,385$$

$$s = -1,578 \quad \text{per} \quad K' = -0,910$$

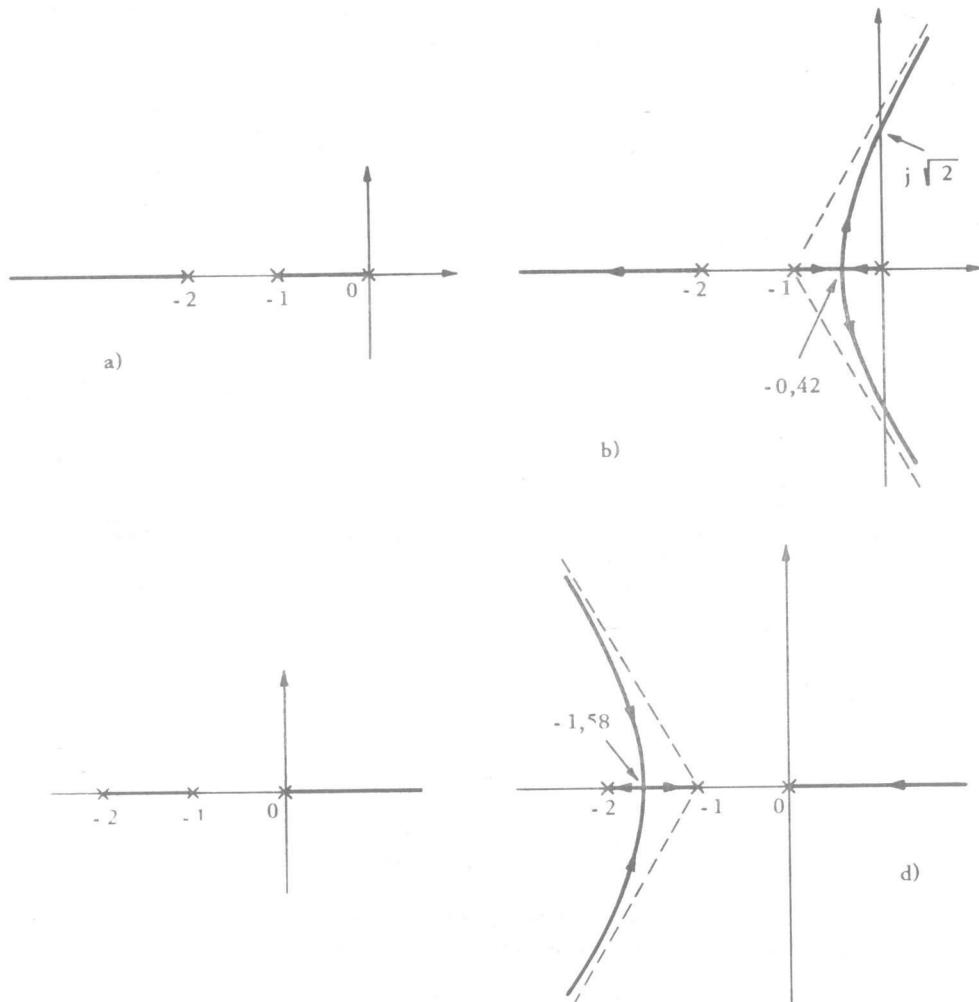


Fig.V.5

delle quali una appartenente al luogo positivo e l'altra al luogo negativo.

Nel *luogo positivo*, appartengono all'asse reale il segmento compreso tra i punti 0 e -1 e la semiretta che si trova a sinistra del punto -2 (Fig.V.5.a). Divergono all'infinito tre rami del luogo, che hanno per asintoti le semirette della stella indicata in Fig.V.4.c; il centro degli asintoti è il punto dell'asse reale di ascissa -1. Il luogo ha pertanto un andamento qualitativo del tipo di quello indicato in Fig.V.5.b. I punti di attraversamento dell'asse immaginario possono venire individuati considerando la tabella di Routh:

1	2
3	K'
$\frac{6 - K'}{3}$	
3	
K'	

nella quale la penultima riga si annulla per $K' = 6$. In corrispondenza a questo valore l'equazione che definisce il luogo ha due radici immaginarie coniugate, che si possono anche individuare a partire dagli elementi della penultima riga della tabella di Routh, risolvendo l'equazione:

$$3s^2 + K' = 3s^2 + 6 = 0$$

Tali radici valgono, rispettivamente, $+j\sqrt{2}$ e $-j\sqrt{2}$.

Nel *luogo negativo*, appartengono all'asse reale il segmento compreso tra i punti -2 e -1 e la semiretta che si trova a destra del punto 0 (Fig.V.5.c). Divergono all'infinito tre rami del luogo, che hanno per asintoti le semirette della stella indicata in Fig.V.4.g. Il luogo ha pertanto un andamento qualitativo del tipo di quello indicato in Fig.V.5.d.

Esempio V.2 - Si consideri il caso in cui:

$$F(s) = \frac{K'(s+1,5)(s+5,5)}{s(s+1)(s+5)}$$

Tale funzione ha tre poli reali ($n = 3$) e due zeri reali ($m = 2$). Per risolvere il sistema di equazioni che caratterizza i punti singolari del luogo:

$$s(s+1)(s+5) + K'(s+1,5)(s+5,5) = 0$$

$$3s^2 + 12s + 5 + K'(2s+7) = 0$$

occorre innanzitutto eliminare tra le due il parametro K' , passando così all'equazione di quarto grado:

$$(3s^2 + 12s + 5)(s + 1,5)(s + 5,5) - s(s + 1)(s + 5)(2s + 7) = \\ = s^4 + 14s^3 + 61,75s^2 + 99s + 41,25 = 0$$

la cui soluzione non è evidentemente immediata. Risolvendola, con metodi numerici si trovano le quattro radici reali $-0,63$, $-2,5$ (esatta), $-3,59$, $-7,28$. Corrispondentemente, i punti singolari sono caratterizzati dalle coppie di valori:

$$s = -0,63 \text{ per } K' = 0,24$$

$$s = -2,5 \text{ per } K' = 2,34$$

$$s = -3,59 \text{ per } K' = 3,28$$

$$s = -7,28 \text{ per } K' = 10,13$$

tutte appartenenti al luogo positivo.

Nel luogo positivo, appartengono all'asse reale il segmento compreso tra i punti 0 e -1 , quello compreso tra i punti $-1,5$ e -5 , la semiretta che si trova a sinistra del punto $-5,5$ (Fig.V.6 a). Diverge all'infinito un solo ramo, lungo il semiasse reale negativo. Tenendo conto anche della posizione dei punti singolari si deduce immediatamente, per il luogo, un andamento qualitativo del tipo di quello indicato in Fig.V.6. b.

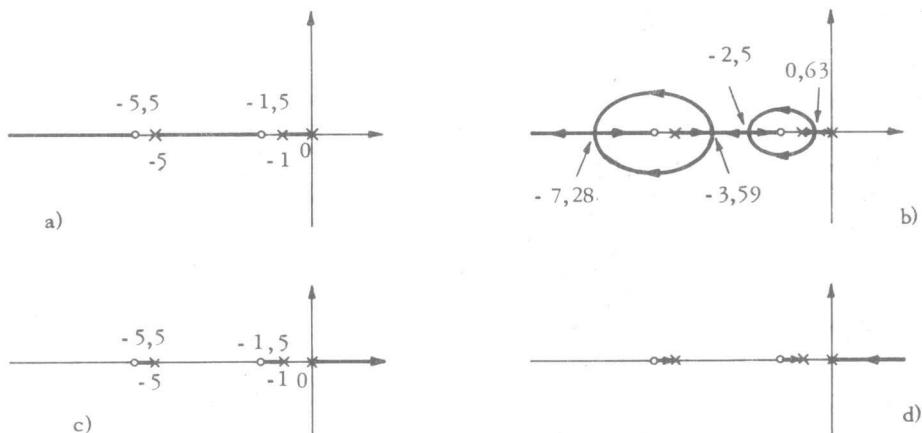


Fig.V.6

È interessante osservare che, anche senza aver risolto il sistema di equazioni che individua i punti singolari, la posizione di alcuni di essi viene immediatamente suggerita dall'esame della Fig.V.6 a. Nel segmento compreso tra i poli 0 e -1 deve essere certamente presente almeno un punto singolare, poiché i versi di percorrenza, per K' crescente, dei due rami passanti per i poli in questione sono discordi. Così pure si deduce la presenza di un punto singolare nella semiretta a sinistra dello zero $-5,5$, in quanto

sono discordi i versi di percorrenza del ramo che converge verso lo zero e di quello che diverge verso il punto improprio. Un simile ragionamento non è tuttavia di aiuto per stabilire l'esistenza di punti singolari nel segmento compreso tra lo zero -1,5 ed il polo -5.

L'assenza di attraversamenti dell'asse reale, assunta nella Fig. V.6 b, può essere verificata constatando che nella tabella di Routh:

$$\begin{array}{ll}
 1 & 5 + 7 K' \\
 6 + K' & 8,25 K' \\
 \hline
 7(K')^2 + 38,75 K' + 30 & \\
 6 + K' & \\
 8,25 K' &
 \end{array}$$

la penultima riga si annulla soltanto in corrispondenza a valori negativi di K' (pari, rispettivamente, a -0,93 ed a -4,61).

Nel luogo negativo, appartengono all'asse immaginario il segmento compreso tra i punti -5,5 e -5, quello compreso tra i punti -1,5 e -1, la semiretta a destra del punto 0. Diverge all'infinito un solo asintoto, lungo il semiasse reale positivo. Poiché i punti singolari del luogo appartengono tutti al luogo positivo, è immediato concludere che il luogo negativo coincide con le porzioni di asse reale già indicate (Fig. V.6 d). In particolare si può osservare che anche il luogo negativo non attraversa l'asse immaginario. È utile peraltro notare che, in corrispondenza ai due valori negativi di K' che annullano la penultima riga della tabella di Routh, risultano definiti punti del luogo appartenenti all'asse reale e non all'asse immaginario. Per $K' = -0,93$ tali punti si ottengono considerando l'equazione:

$$(6 + K') s^2 + 8,25 K' = 5,07 s^2 - 7,67 = 0$$

che ha come radici +1,23 e -1,23. Per $K' = -4,61$ i punti si ottengono invece considerando l'equazione:

$$1,39 s^2 - 38,03 = 0$$

che ha come radici +5,23 e -5,23.

Esempio V.3 - Si consideri il caso in cui:

$$F(s) = \frac{K' (s + 1)}{s^2 (s + 3)}$$

Così come negli esempi precedenti, per risolvere il sistema di equazioni che caratterizza i punti singolari del luogo:

$$s^2(s+3) + K'(s+1) = 0$$

$$3s^2 + 6s + K' = 0$$

si elimina K' tra le due, ottenendo l'equazione di terzo grado:

$$2s^3 + 6s^2 + 6s = 0$$

Questa equazione ha come radici $0, (-3 + j\sqrt{3})/2, (3 - j\sqrt{3})/2$. La prima corrisponde al valore 0 del parametro K' (cioè, del resto, è conseguenza del fatto che $F(s)$ ha un polo doppio in 0). Le rimanenti due non sono punti del luogo in quanto i corrispondenti valori di K' :

$$K' = -(3s+6)s = \pm j3\sqrt{3}$$

non sono reali. Il luogo ha dunque un solo punto singolare in 0.

Nel *luogo positivo*, appartengono all'asse reale il punto 0 ed il segmento compreso tra i punti -1 e -3. Divergono all'infinito due rami del luogo, che hanno per asintoti le semirette della stella indicata in Fig.V.4b; il centro degli asintoti è il punto dell'asse reale di ascissa -1. Il luogo ha pertanto un andamento qualitativo del tipo di quello indicato in Fig.V.7a.

Nel *luogo negativo*, appartengono all'asse reale la semiretta a sinistra del punto -3 e la semiretta a destra del punto -1. Divergono all'infinito due rami, che hanno per asintoti le semirette della stella indicata in Fig.V.4f. Il luogo ha pertanto un andamento qualitativo del tipo di quello indicato in Fig.V.7b.

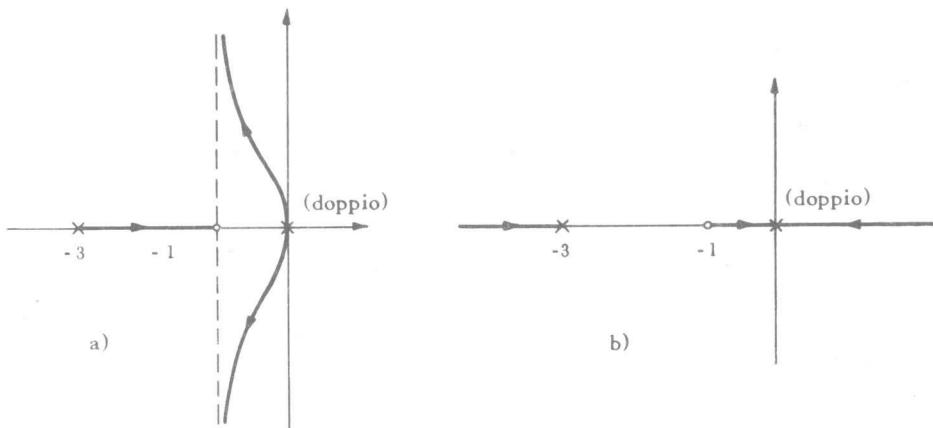


Fig.V.7

La mancanza di attraversamenti dell'asse immaginario, implicitamente assunta nelle Fig.V.7 a e V.7 b, può venire verificata considerando la tabella di Routh:

1	K'
3	K'
2	K'
3	K'
	K'

nella quale la penultima riga si annulla solo per $K' = 0$.

Esempio V.4 - Si consideri il caso in cui:

$$F(s) = \frac{K'}{(s-2)^2 (s^2 + 1) (s+1)^2}$$

Procedendo nel modo consueto, si esamina dapprima il sistema di equazioni che definisce i punti singolari:

$$(s-2)^2 (s^2 + 1) (s+1)^2 + K' = 0$$

$$2(s-2)(s^2 + 1)(s+1)^2 + (s-2)^2 2s(s+1)^2 + (s-2)^2 (s^2 + 1) 2(s+1) = 0$$

Questa volta non occorre eliminare K' tra le due, in quanto la seconda è già indipendente da questo parametro. Riscritta questa nella forma:

$$(s-2)(s+1)(6s^3 - 4s^2 - 2) = 0$$

si individuano immediatamente due radici in $+2$ e -1 . Poiché inoltre il terzo fattore si annulla in $s = 1$, si può scrivere:

$$6s^3 - 4s^2 - 2 = (s-1)(6s^2 + 2s + 2)$$

e dedurre facilmente che le ulteriori tre radici sono in $+1$ e in $(-1 \pm j\sqrt{11})/6$. Le radici reali sono tutte punti singolari del luogo, precisamente:

$$\begin{array}{lll} s = +2 & \text{per} & K' = 0 \\ s = -1 & \text{per} & K' = 0 \\ s = +1 & \text{per} & K' = -8 \end{array}$$

mentre le due radici complesse non appartengono al luogo in quanto corrispondenti a valori complessi di K' .

Al luogo positivo non appartengono tratti di asse reale (fatta eccezione per i punti -1 e $+2$). Divergono all'infinito sei rami, che hanno per asintoti le semirette della stessa indicata in Fig.V.8 a. Costruita la tabella di Routh:

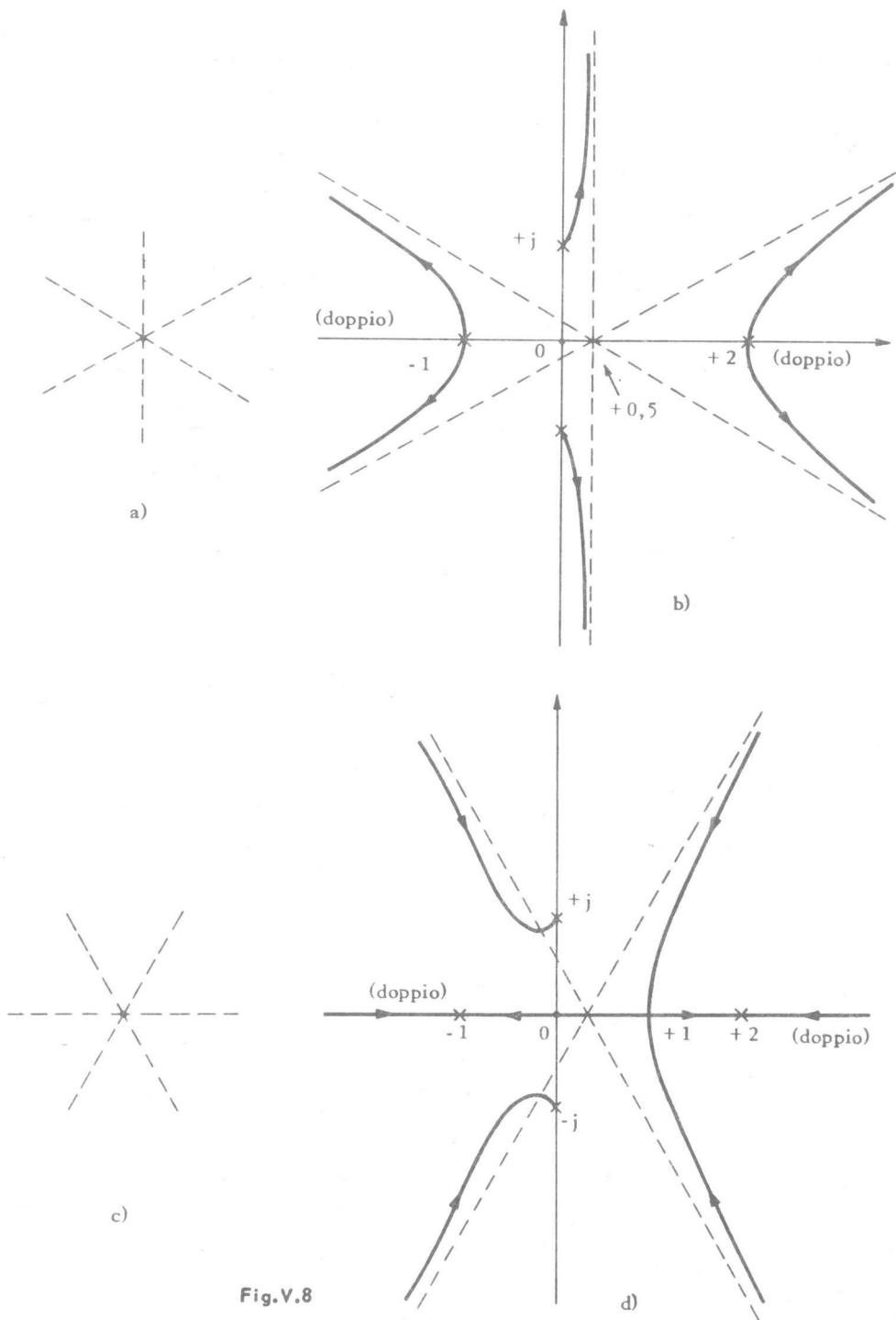


Fig.V.8

$$\begin{array}{cccc}
 1 & -2 & 1 & 4 + K' \\
 -2 & 2 & 4 & \\
 -1 & 3 & 4 + K' \\
 -2 & -2 - K' \\
 8 + K' & 8 + 2 K' \\
 \hline
 -K' (K' + 6) & & & \\
 8 + K' & & & \\
 4 + K' & & &
 \end{array}$$

si osserva che la penultima riga si annulla per $K' = 0$ e per $K' = -6$.

Il primo valore, sostituito nella riga precedente, fornisce l'equazione:

$$8 s^2 + 8 = 0$$

che restituisce i due punti $+j$ e $-j$. Il secondo caratterizza punti del luogo negativo (peraltro non appartenenti all'asse immaginario, perché soluzioni dell'equazione $2 s^2 - 4 = 0$). L'ultima riga si annulla per $K' = -4$, ma anche in questo caso il punto corrispondente, che è il punto $s = 0$, appartiene al luogo negativo. Si può allora affermare che il luogo positivo non attraversa l'asse immaginario. In definitiva, l'andamento qualitativo risulta del tipo di quello indicato in Fig. V.8 b.

Al luogo negativo appartiene tutto l'asse reale. Divergono all'infinito sei rami, che hanno per asintoti le semirette della stella indicata in Fig. V.8 c. Il luogo possiede un punto singolare in $+1$ e attraversa l'asse immaginario nel punto $s = 0$. Si può allora assumere per il luogo negativo l'andamento qualitativo indicato in Fig. V.8 d.

V.4 - Sintesi delle funzioni compensatrici elementari.

Si vuole ora mostrare come il tracciamento del luogo delle radici può essere utilizzato nella scelta della funzione compensatrice $R(s)$, ai fini del soddisfacimento di specifiche riguardanti il comportamento transitorio.

Così come per il caso in cui si fa riferimento alle risposte in frequenza, un passo preliminare consiste nel prendere in esame la funzione (cfr. IV.7):

$$\hat{F}(s) = \frac{\hat{K}}{s^r} P(s) \frac{1}{K_d}$$

la quale riassume già eventuali interventi legati alla necessità di soddisfare specifiche riguardanti il comportamento a regime. Dopo avere

tracciato il luogo delle radici corrispondente a tale funzione, si procede a stabilire se il problema della sintesi ammette una soluzione banale (il caso in cui si può porre $R(s) = 1$) oppure se è necessario intervenire ulteriormente, utilizzando una opportuna funzione compensatrice.

La verifica in questione è molto semplice; si tratta infatti di controllare se, in corrispondenza al valore numerico del coefficiente K' che caratterizza la funzione $\hat{F}(s)$, si ottengono tutte radici comprese all'interno del settore di piano complesso assegnato in sede di definizione delle specifiche. In pratica, una volta tracciato il luogo delle radici relativo alla funzione $\hat{F}(s)$, si determinano i punti di intersezione del luogo con la frontiera del settore assegnato ed i corrispondenti valori del parametro K' (utilizzando la condizione di modulo). Tali valori delimitano uno o più intervalli all'interno dei quali deve trovarsi il valore effettivamente assunto dal parametro K' che caratterizza la funzione $\hat{F}(s)$ affinché i poli di $W(s)$ rispettino le specifiche desiderate.

Si consideri ad esempio il caso in cui:

$$\hat{F}(s) = \frac{10}{s(s+4)}$$

Esaminando il luogo delle radici di Fig. V.9 si individuano nei punti A e B le intersezioni con la frontiera della regione ammissibile.

Corrispondentemente,
si ha:

$$K'_A = OA \cdot CA = 0,5 \times 3,5 = 1,75$$

$$K'_B = OB \cdot BC = 4 \times 4 = 16$$

I poli di $W(s)$ appartengono al settore desiderato se e solo se il valore numerico del parametro K' soddisfa la relazione:

$$1,75 \leq K' \leq 16$$

Poiché nella $\hat{F}(s)$ considerata $K' = 10$, i poli della corrispondente $W(s)$ appartengono al settore desiderato.

I casi non banali sono evidentemente quelli in cui il valore del parametro K' risulta esterno all'intervalle (o agli intervalli) così individuati.

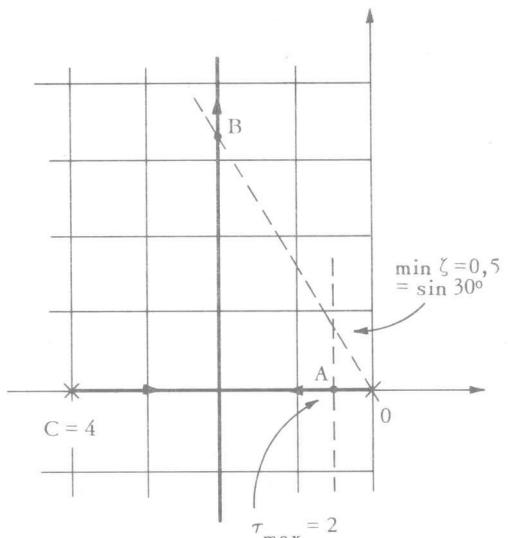


Fig.V.9

Così come per la sintesi basata sulle risposte in frequenza, non è possibile dare un procedimento generale che consenta di pervenire alla scelta della funzione compensatrice in modo diretto e univoco. È tuttavia abbastanza semplice analizzare l'effetto, in casi concreti, dell'insersione delle funzioni compensatrici elementari già considerate nel par. IV.3 (funzione anticipatrice e funzione attenuatrice) e da questa analisi si possono trarre considerazioni peraltro sempre a livello qualitativo, utili anche nello studio di situazioni più complesse.

Si supponga di considerare un caso in cui il luogo delle radici della funzione $\hat{F}(s)$ assume l'andamento indicato in Fig. V.10a (caso di una funzione $\hat{F}(s)$ con due poli reali - di cui uno in $s = 0$ - e nessuno zero). Affinchè siano soddisfatte le specifiche sul comportamento transitorio, il valore del parametro K' che compete alla $\hat{F}(s)$ in base a quanto stabilito nella fase precedente del procedimento di sintesi (soddisfacimento delle specifiche riguardanti il regime permanente) deve risultare inferiore al valore massimo ammissibile K'_m (corrispondente all'intersezione del luogo con la frontiera del settore cui devono appartenere i poli di $W(s)$). Deve risultare, cioè,

$$(V.12) \quad K' < K'_m$$

Assumendo che una tale limitazione non sia soddisfatta, si può procedere utilizzando la funzione anticipatrice:

$$(V.13) \quad R_a(s) = \frac{\frac{1 + \tau_a s}{\tau_a}}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s} = m_a \frac{s + \frac{1}{\tau_a}}{s + \frac{m_a}{\tau_a}}$$

Se si sceglie in questa:

$$\frac{1}{\tau_a} \approx p$$

il luogo delle radici della funzione compensata $F(s) = R_a(s) \hat{F}(s)$ viene ad assumere una configurazione del tipo di quella indicata in figura V.10b. Si tratta ora di verificare se, in questa nuova situazione, il valore del parametro K' che compete alla $F(s)$, che sarà indicato con $(K')_{comp}$ per distinguerlo da quello relativo alla $\hat{F}(s)$, può risultare - grazie ad una opportuna scelta di m_a - inferiore al valore massimo ammissibile, che sarà indicato con $(K'_m)_{comp}$.

Sulla base della forma del terzo membro della (V.13), si deduce subito che:

$$(K')_{\text{comp}} = m_a K'$$

Per quanto riguarda i valori massimi, nel caso della $\hat{F}(s)$, tenendo presente la condizione di modulo, si ha dalla Fig. V.10a:

$$K'_m = \overline{BO} \cdot \overline{BC} = (\overline{BO})^2$$

Nel caso invece della $F(s)$, si ha dalla Fig. V.10 b.

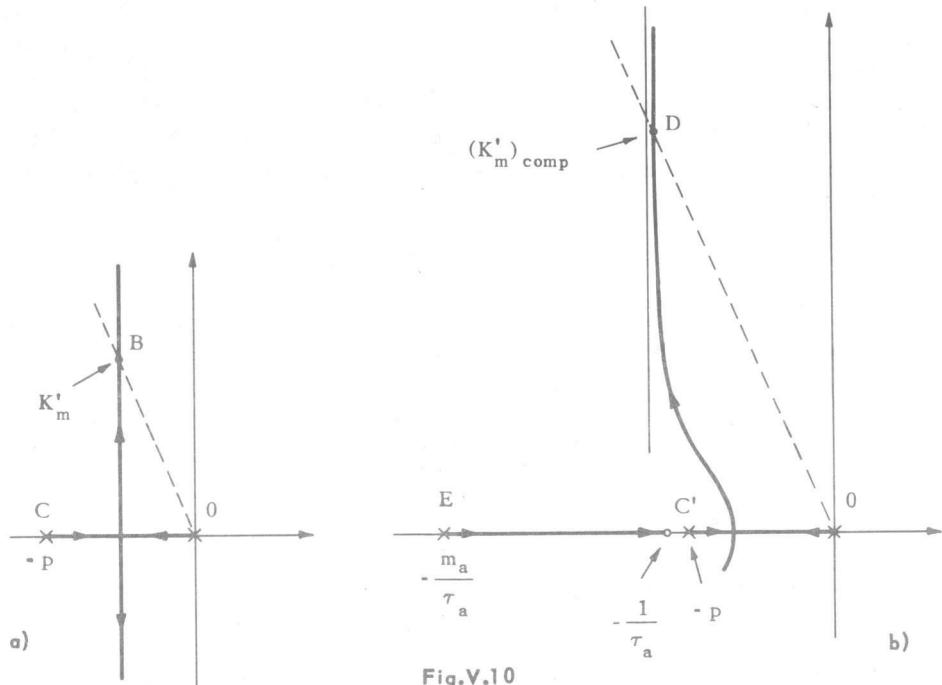


Fig.V.10

$$(K'_m)_{\text{comp}} = \frac{\overline{DO} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{DE}}{\overline{DC'}}$$

Essendo il punto C' all'incirca coincidente con il punto C , si può ritenere:

$$\overline{DC'} \cong \overline{DC}$$

e, inoltre,

$$\overline{OD} \cong \overline{DE} \cong m_a (\overline{BO})$$

(i due triangoli OBC ed ODE sono all'incirca simili, secondo il fattore m_a). Da ciò segue che:

$$(K'_m)_{\text{comp}} \cong m_a^2 (BO)^2$$

Per esaminare se la limitazione corrispondente alla (V.12):

$$(K')_{\text{comp}} \leq (K'_m)_{\text{comp}}$$

può essere soddisfatta, conviene introdurre in essa le quantità dedotte sopra, pervenendo alla limitazione:

$$m_a K' \leq m_a^2 (\overline{BO})^2 = m_a^2 K'_m$$

e in definitiva, alla:

$$(V.12') \quad K' \leq m_a K'_m$$

Essendo $m_a > 1$, la (V.12') può essere soddisfatta anche se la (V.12) non lo è: l'introduzione della funzione (V.13) consente in effetti di ampliare di un fattore pari ad m_a l'intervallo dei valori ammissibili per K' .

È bene osservare che il confronto tra le due situazioni avviene a parità di prestazioni per quanto riguarda il comportamento a regime permanente. Grazie alla forma della (V.13) le funzioni $\hat{F}(s)$ ed $F(s)$ hanno infatti ugual numero di poli in $s = 0$ ed uguali coefficienti di guadagno.

Una soluzione alternativa al problema considerato si ottiene utilizzando la funzione attenuatrice:

$$(V.14) \quad R_i(s) = \frac{1 + \frac{\tau_i}{m_i} s}{1 + \tau_i s} = \frac{1}{m_i} \frac{s + \frac{m_i}{\tau_i}}{s + \frac{1}{\tau_i}}$$

e scegliendo:

$$\frac{1}{\tau_i} \ll p$$

Il luogo delle radici della funzione compensata $F(s) = R_i(s) \hat{F}(s)$ viene allora ad assumere una forma del tipo di quella indicata in Fig. V.10c.

Per procedere ad un confronto analogo a quello eseguito prima, si deve osservare che, questa volta,

$$(K')_{\text{comp}} = \frac{1}{m_i} K'$$

e che (cfr. Fig. V.10c):

$$(K'_m)_{\text{comp}} = \frac{\overline{B'O} \cdot \overline{B'D} \cdot \overline{B'C}}{\overline{B'E}}$$

Essendo il polo $-1/\tau_i$ e lo zero $-m_i/\tau_i$ molto prossimi all'origine (relativamente a p), si può ritenere che il punto B' di Fig. IV.10c sia all'incirca coincidente con il punto B di Fig. IV.10a (i due termini $s - 1/\tau_i$ ed $s - m_i/\tau_i$ nella condizione di fase sono all'incirca uguali ed opposti) e quindi scrivere:

$$\overline{B'O} \cdot \overline{B'C} \cong (\overline{BO})^2$$

Per lo stesso motivo si può poi anche ritenere giustificata l'approssimazione:

$$\overline{BD} \cong \overline{B'E}$$

e dedurre, in definitiva,

$$(K'_m)_{\text{comp}} \cong K'_m$$

In questo caso, la limitazione corrispondente alla (V.12):

$$(K')_{\text{comp}} \leq (K'_m)_{\text{comp}}$$

equivale allora alla:

$$(V.12'') \quad K' \leq m_i K'_m$$

che può essere soddisfatta anche se non lo è la (V.12), grazie al fatto che $m_i > 1$; anche in questo caso si può concludere che l'introduzione della funzione (V.14) consente di ampliare di un fattore pari ad m_i l'intervallo dei valori ammissibili di K' .

Le considerazioni fin qui svolte consentono di valutare l'effetto delle funzioni compensatrici elementari (V.13) o (V.14). Come era prevedibile, sulla base anche di quanto discusso nel par. IV.4, in entrambi i casi l'effetto è quello di rendere compatibili elevati valori di K' con l'appartenenza dei poli di $W(s)$ a settori del piano complesso caratterizzati da valori non troppo bassi del coefficiente di smorzamento e non troppo elevati delle costanti di tempo.

Tali considerazioni suggeriscono anche una nuova interpretazione del significato dei parametri m_a ed m_i che caratterizzano i due tipi di compensazione, almeno per il caso particolare esaminato e per quelli ad esso direttamente riconducibili. Il valore di questi parametri misura infat-

ti - sia pure approssimativamente - l'entità dell'ampliamento dell'intervallo dei valori ammissibili per K' .

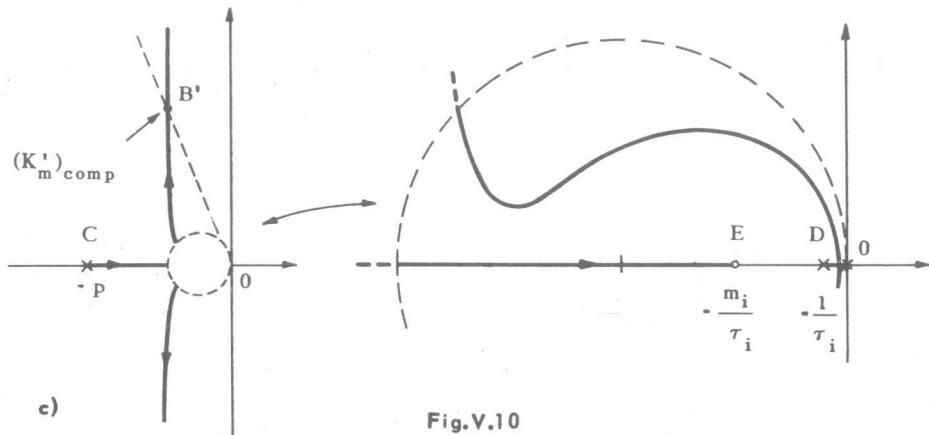


Fig. V.10

Da un punto di vista pratico, questo risultato è molto utile nella sintesi in quanto consente di scegliere immediatamente il valore di m_a o quello di m_i a partire dalla conoscenza di K'_m (che, si ricordi, è il valore corrispondente ai punti di intersezione del luogo delle radici relativo ad $\hat{F}(s)$ con la frontiera della regione ammessa per i poli di $W(s)$) e del parametro K' che effettivamente compete alla $F(s)$. Per soddisfare la (V.12') o (V.12'') basterà infatti porre:

$$\left. \begin{array}{c} m_a \\ m_i \end{array} \right\} \geq \frac{K'}{K'_m}$$

Per quanto riguarda invece le scelte di τ_a e di τ_i , le indicazioni date sopra non differiscono sostanzialmente da quelle suggerite nel già citato par. IV.4. Fissare lo zero $-1/\tau_a$ della (V.13) in prossimità di p corrisponde, in linea di massima, ad effettuare la compensazione (anticipo) del diagramma delle fasi di $\hat{F}(j\omega)$ in prossimità della pulsazione di attraversamento $\hat{\omega}_t$. Così pure, fissare il polo $-1/\tau_i$ della (V.14) in prossimità dell'origine corrisponde ad effettuare la compensazione (attenuazione) del diagramma dei moduli di $\hat{F}(j\omega)$ a partire da valori di ω sufficientemente inferiori ad $\hat{\omega}_t$.

Ad ulteriore conferma del sostanziale parallelismo tra i risultati ottenuti in questo paragrafo e quelli presentati nel par. IV.4 (casi (I) e (II)), si può concludere questa analisi osservando che la compensazione per mezzo della funzione attenuatrice comporta una risposta transitoria generalmente più lenta di quella corrispondente alla compensazione mediante funzione anticipatrice (si ricordi che il primo tipo di compensazione comporta una banda passante generalmente più ristretta). Se il valore di K' è tale che due delle radici si trovano sulla frontiera del setto-

re permesso (punto D di Fig. IV.10b o punto B' di Fig. IV.10c) la terza radice si trova sull'asse reale, piuttosto vicina alla zero, che vale $-1/\tau_a$ in Fig. IV.10b e $-m_i/\tau_i$ in Fig. IV.10c). In entrambi i casi la risposta transitoria è dunque caratterizzata dalla presenza di un modo aperiodico. Essendo però:

$$-\frac{1}{\tau_a} \approx -p \ll -\frac{m_i}{\tau_i}$$

si vede facilmente che la costante di tempo che caratterizza il modo aperiodico è sensibilmente superiore nel caso di correzione mediante funzione attenuatrice.

Naturalmente, tutte le situazioni considerate hanno soltanto carattere esemplificativo e sono riferite a un caso particolarmente semplice, in cui gli obiettivi della sintesi possano essere conseguiti usando usando una compensazione di tipo elementare. In generale, potrà essere necessario ricorrere ad azioni compensatrici più complesse, del tipo di quelle che verranno sommariamente considerate nel prossimo paragrafo.

V.5 - Sintesi mediante il luogo delle radici.

La possibilità di prevedere, anche solo in termini qualitativi, lo effetto della scelta di una determinata azione compensatrice sulla collocazione dei poli della funzione di trasferimento rende il tracciamento del luogo delle radici un utile complemento ai metodi di sintesi per tentativi basati sulla considerazione delle risposte in frequenza. In molti casi, anzi, questo strumento può addirittura rivelarsi come il più adatto per la soluzione di particolari classi di problemi di sintesi.

Una situazione, ad esempio, nella quale non è facile basarsi sui metodi considerati nel capitolo precedente è quella in cui la funzione di trasferimento del processo controllato presenta poli con parte reale positiva. In questo caso non è immediato utilizzare direttamente le tecniche di compensazione illustrate nel par. IV.4 in quanto non è possibile correlare in modo semplice la stabilità del sistema (che è un requisito sempre presente) con l'andamento del diagramma delle fasi della funzione $F(j\omega)$ in prossimità della pulsazione di attraversamento; ciò essenzialmente perché in questi casi la verifica della stabilità non può essere ridotta alla semplice verifica che l'argomento di $F(j\omega_0)$ sia superiore a -180° ma deve essere eseguita valutando il numero di giri compiuti in senso antiorario dal vettore rappresentativo della funzione $F(j\omega)$ attorno al punto $-1+j0$, al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$, e verificando che questo

sia esattamente coincidente con il numero di poli con parte reale positiva della funzione $F(s)$ stessa.

Si illustreranno ora alcune situazioni tipiche nelle quali è relativamente agevole individuare struttura e parametri di una funzione compensatrice $R(s)$, in maniera tale da ottenere che il luogo delle radici associato alla funzione compensata $F(s) = R(s)F(s)$ appartenga, almeno in corrispondenza ad alcuni valori di K' , al settore di piano complesso assegnato in sede di definizione di specifiche. In particolare, in questo paragrafo, si discuterà il caso in cui gli zeri della funzione non compensata hanno parte reale negativa.

In questo caso la compensazione può essere ottenuta in modo sistematico, secondo una procedura che si ispira al principio di attribuire valori elevati al parametro K' , in modo tale da spostare le radici in prossimità degli zeri di $F(s)$ o degli asintoti del luogo. Un simile approccio è motivato dall'osservazione che, se tutti gli zeri di $F(s)$ hanno parte reale negativa e se gli asintoti del luogo (positivo) appartengono al semipiano sinistro, i punti del luogo corrispondenti a valori elevati di K' risultano certamente compresi nel semipiano sinistro. In pratica è utile distinguere diverse situazioni, a seconda del valore assunto dalla differenza $n-m$ tra numero di poli e numero di zeri della funzione $F(s)$.

Se $n-m=1$, il luogo positivo ha un solo asintoto, coincidente con l'asse reale ed orientato verso sinistra. Per avere tutte le radici nella parte sinistra del piano complesso, è sufficiente attribuire a K' valori sufficientemente elevati. Il minimo valore di K' necessario allo scopo verrà individuato utilizzando, ad esempio, il criterio di Routh.

Se $n-m=2$, il luogo positivo ha due asintoti, paralleli all'asse immaginario, passanti per il centro s_0 . Se $s_0 < 0$, per avere tutte le radici nella parte sinistra del piano complesso, è sufficiente attribuire a K' valori sufficientemente elevati. Se $s_0 > 0$ una tale tecnica non è evidentemente più accettabile, in quanto le due radici che convergono sugli asintoti avranno, da un certo valore di K' in poi, parte reale positiva. In tale caso, occorre procedere preliminarmente a spostare il centro degli asintoti nella metà sinistra del piano complesso, il che è sempre possibile utilizzando una funzione compensatrice del tipo:

$$(V.15) \quad R(s) = \frac{(s+z)}{(s+p)}$$

L'introduzione di questa funzione non altera in numero degli asintoti, ma solo il loro centro. Quest'ultimo passa infatti - come è immediato verificare - dal valore s_0 (per la funzione $F(s)$) al valore:

$$s'_0 = s_0 - (p-z)/2$$

Nella precedente espressione z è un numero positivo, in quanto corrisponde ad uno zero che viene aggiunto a sinistra nel piano complesso (in maniera tale che tutti gli zeri di $R(s)F(s)$ rimangano con parte reale negativa). Per avere $s'_0 < 0$ si dovranno quindi attribuire a p valori sufficientemente superiori a quello di z . Una volta scelta la funzione $R(s)$, occorre attribuire a K' valori sufficientemente elevati, cui corrispondono - sul luogo delle radici associato a $R(s)F(s)$ - punti appartenenti alla metà sinistra del piano complesso. Il valore minimo di K' può venire individuato, come in precedenza, per mezzo del criterio di Routh.

Se $n-m$ è superiore a 2, si può procedere nel seguente modo. Si aggiungono innanzitutto alla funzione $F(s)$ un numero di zeri (con parte reale negativa) pari ad $n-m-2$. Si fissano cioè $n-m-2$ numeri $z_1, z_2, \dots, z_{n-m-2}$ con parte reale negativa e si considera, in luogo della funzione $F(s)$, la funzione:

$$F'(s) = (s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_{n-m-2}) F(s)$$

In quest'ultima funzione la differenza tra numero di poli e numero di zeri è pari a 2 ed è quindi possibile, facendo ricorso al procedimento descritto sopra per il caso in cui $n-m=2$, trovare una funzione compensatrice, del tipo (V.15), tale da assicurare che il centro dei due asintoti di $R(s)F'(s)$ appartenga alla metà sinistra del piano complesso. Scegliendo una tale $R(s)$ e valori di K' superiori ad un certo valore minimo (individuabile, come al solito, utilizzando il criterio di Routh), si otterranno - sul luogo delle radici della funzione $R(s)F'(s)$ - punti appartenenti alla metà sinistra del piano complesso. I passi così indicati portano a individuare una funzione compensatrice della forma:

$$R'(s) = K' \frac{(s+z)(s+z_1) \dots (s+z_{n-m-2})}{(s+p)}$$

Questa risolve certamente il problema di collocare le radici nella metà sinistra del piano complesso, ma non è fisicamente realizzabile, in quanto possiede un numero di zeri maggiore del numero dei poli. Per completare la sintesi, occorre passare da essa ad una funzione realizzabile e ciò può essere ottenuto aggiungendo $n-m-2$ poli sufficientemente a sinistra nel piano complesso.

Si può infatti dimostrare che, se un sistema a controreazione caratterizzato da una funzione di trasferimento ad anello aperto $F(s)$ è stabile asintoticamente, lo è anche un qualsiasi sistema caratterizzato dalla funzione di trasferimento ad anello aperto $F(s)/(1+Ts)$, purché la costante reale T sia positiva e sufficientemente piccola.

Questo risultato può essere verificato utilizzando, per esempio, il criterio di Nyquist, ed osservando che l'aggiunta di un fattore $1/(1+Ts)$, se T è positivo e molto piccolo, altera il diagramma della funzione $F(jw)$ solo nell'intorno del punto 0, il che non modifica il numero di giri che il vettore rappresentativo di $F(jw)$ compie attorno al punto $-1+j0$.

Risulta allora evidente che lo scopo di collocare le radici nella metà sinistra del piano complesso può essere raggiunto mediante una funzione del tipo:

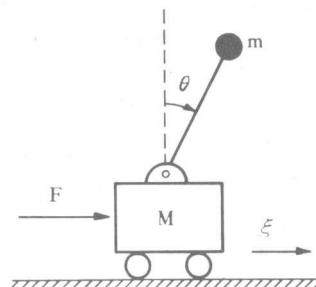
$$R''(s) = K' \frac{(s+z)(s+z_1)\dots(s+z_{n-m-2})}{(s+p)(1+T_1 s)\dots(1+T_{n-m-2} s)}$$

Una volta fissati i valori di z_i , $i=1,\dots,n-m-2$ (arbitrariamente purché con parte reale negativa), di z e p (per spostare eventualmente il centro degli asintoti di $R'(s)F(s)$), di K' (con riferimento al luogo delle radici di $R'(s)F(s)$), la scelta dei valori opportuni di T_j , $i=1,\dots,n-m-2$, può essere effettuata applicando ancora, sequenzialmente, il criterio di Routh.

Si daranno ora alcuni semplici esempi di applicazione di questi concetti.

Esempio V.5 - Il problema di controllare l'assetto di un missile durante la fase iniziale del lancio non è dissimile dal classico problema del controllo del cosiddetto pendolo invertito montato su un carrello mobile, che viene indicato schematicamente in figura V.11. Il carrello deve essere mosso in modo che la massa m rimanga sempre in posizione eretta.

Fig.V.11



Per descrivere il sistema si possono scrivere due equazioni, che rappresentano l'equilibrio delle forze lungo la direzione orizzontale e l'equilibrio dei momenti attorno al perno di rotazione. Se si trascurano gli attriti e si considerano piccole deviazioni θ rispetto alla verticale, in modo da ottenere relazioni lineari, l'equilibrio delle forze in direzione orizzontale è descritto dall'equazione:

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + m l \frac{d^2 \theta}{dt^2} - F = 0$$

nella quale M indica la massa del carrello, l la lunghezza dell'asta che sostiene la massa m ed F la forza applicata al carrello per controllare la posizione dell'asta. L'equilibrio dei momenti attorno al perno di rotazione è descritto a sua volta dall'equazione:

$$m l \frac{d^2 \xi}{dt^2} + m l^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} - m l g \theta = 0$$

Eliminando $d^2 \xi / dt^2$ tra le due si ottiene l'equazione:

$$(M - m) l \frac{d^2 \theta}{dt^2} - M g \theta = -F$$

cui corrisponde, per il processo che si vuole controllare, la funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{-1}{(M - m) l s^2 - M g}$$

Se si assume $M > m$, questa funzione ha due poli reali, in $\pm \sqrt{M g / (M - m) l}$.

Per realizzare un controllo a controreazione, si deve misurare la deviazione θ ed utilizzare il risultato di questa misura per intervenire sulla forza F (fig.V.12); l'obiettivo è quello di ottenere un sistema stabile asintoticamente. Per scegliere la struttura ed i parametri della parte controllante, è utile esaminare innanzitutto il luogo delle radici associato alla funzione di trasferimento del processo. Poiché questa funzione ha soltanto due poli reali disposti simmetricamente rispetto all'origine, il luogo positivo delle radici risulta composto dal segmento di asse reale compreso tra questi poli e dall'intero asse immaginario; si può allora constatare facilmente che per ogni valore di $K' > 0$ il sistema reazionato è instabile.

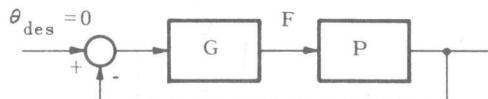


Fig.V.12

La stabilizzazione può essere ottenuta introducendo opportunamente uno zero ed un polo, entrambi reali e negativi, in modo tale da spostare verso sinistra il centro dei due asintoti. A questo scopo basta osservare che, indicate con $-z$ e con $-p$ le ascisse dello zero e del polo che si vogliono introdurre, si ha:

$$a_0 = \frac{+ \sqrt{M g / (M - m) l} - \sqrt{M g / (M - m) l} - p + z}{3 - 1} = -\frac{1}{2} (p - z)$$

e scegliere $p > z$. Nel sistema così compensato, sia il ramo che converge sullo zero $-z$, sia i due rami che divergono verso il punto improprio lungo i due asintoti, a partire da un certo valore di K' in poi sono tutti compresi nel semipiano sinistro; basta allora assumere K' sufficientemente elevato per ottenere che il sistema reazionato sia stabile asintoticamente (fig.V.13).

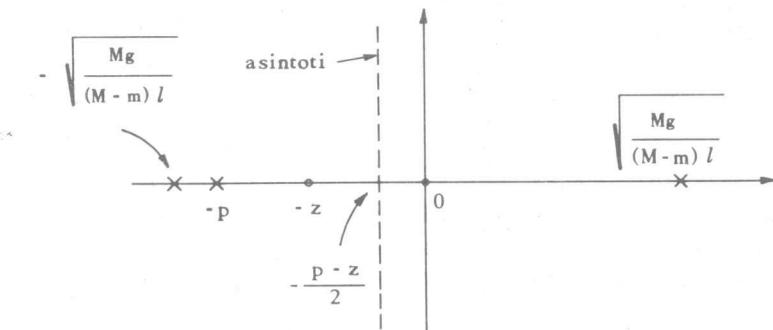


Fig.V.13

La funzione compensatrice assume in questo caso la struttura:

$$G(s) = K \frac{s + z}{s + p}$$

con il vincolo che sia $p > z$; deve inoltre essere $K < 0$ affinché il coefficiente K' associato alla funzione $F(s) = G(s) p(s)$ risulti, come si è ammesso, positivo.

Scelta la struttura della funzione compensatrice, si può poi passare a determinarne i parametri in modo tale da imporre l'appartenenza delle radici ad un settore prefissato del piano complesso. Questa parte dell'esempio viene lasciata, per esercizio, al lettore.

Esempio V.6 - Si consideri il problema della stabilizzazione di un processo dotato di funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{1}{s(s^2 - 1)}$$

La stabilizzazione non può essere ottenuta semplicemente scegliendo un opportuno valore di K' , in quanto l'equazione caratteristica, che ha la forma $s^3 - s - K' = 0$, ha sempre radici a destra dell'asse immaginario (perché priva del termine in s^2). In altre parole, sul luogo delle radici associato alla funzione $P(s)$, per ogni valore di K' si trovano punti appartenenti alla metà destra del piano complesso.

Adottando il procedimento indicato sopra, si aggiunge innanzitutto alla funzione $P(s)$ uno zero con parte reale negativa, ad esempio in -2 . La funzione così ottenuta:

$$F'(s) = \frac{(s+2)}{s(s^2-1)}$$

ha centro degli asintoti $s_0 = +1$. Occorre dunque spostarlo a sinistra, aggiungendo una coppia zero-polo $(s+z)/(s+p)$. Se si vuole il nuovo centro in -1 , si deve scegliere $p-z=4$ e cioè, ad esempio, $z=2$ e $p=6$. In questo modo si è individuata una funzione:

$$F''(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s^2-1)(s+6)}$$

Il luogo delle radici associato a questa funzione ha due zeri con parte reale negativa, due asintoti nel semipiano sinistro (per la parte positiva) ed è quindi possibile, per valori sufficientemente elevati di K' ottenere tutte radici comprese nella metà sinistra del piano complesso. La tabella di Routh associata a K' è la seguente:

1	$K' - 1$	$4K'$
6	$4K' - 6$	
K'	$12K'$	
	$2K' - 39$	
	K'	

e da essa si deduce che il valore minimo ammissibile per K' è 19,5. Il corrispondente luogo (positivo) delle radici è quello tracciato in Fig. V.14.

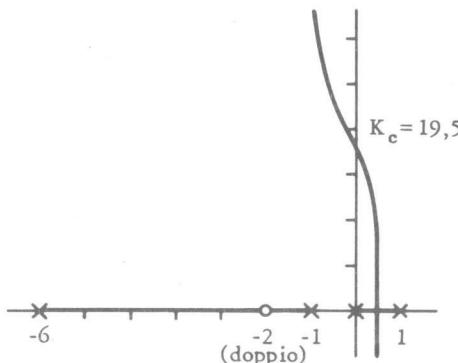


Fig. V.14

Per completare la sintesi, occorre ora aggiungere alla funzione compensatrice un polo «lontano», cioè un fattore $(1+Ts)$ con T sufficientemente piccolo. Per trovare il valore massimo attribuibile a T , si può procedere in questo modo. Si scelga per K' un valore tale da garantire stabilità al sistema corrispondente alla funzione ad anello aperto $F'(s)$, ad esempio $K' = 50$. Successivamente, si scriva l'equazione caratteristica del sistema, considerando T come parametro:

$$(s^4 + 6s^3 - s^2 - 6s)(1 + Ts) + 50(s^2 + 4s + 4) = 0$$

A questa corrisponde una tabella di Routh che, con opportune semplificazioni, si scrive nella forma:

T	6 - T	194
1 + 6T	49 - 6T	200
3 - 7T	97 - 482T	
50 - 1425T - 2934T ²	600 - 2100T	
3050 - 103655T - 986148T ² - 1414188T ³		
600 - 2100T		

Per ottenere sulla prima colonna termini positivi si deve prendere $T < 0,023$. Si scelga, ad esempio, $T = 0,02$. Sulla base di quanto discusso in precedenza, si può allora concludere che la funzione compensatrice:

$$R''(s) = \frac{50(s+2)^2}{(s+6)(1+0,02s)} = \frac{2500(s+2)^2}{(s+6)(s+50)}$$

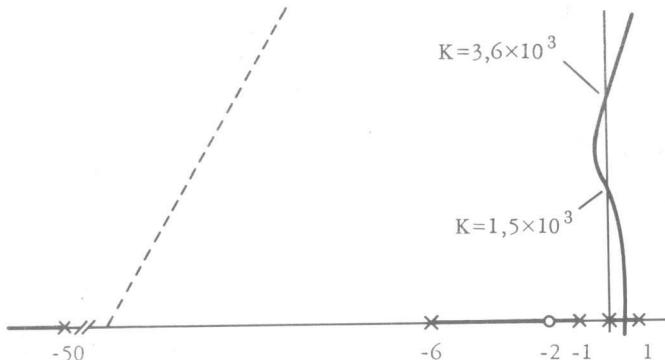
risolve il problema di stabilizzare il processo in questione.

Per ottenere ulteriori informazioni sulla collocazione, sul piano complesso, delle radici dell'equazione caratteristica, può essere utile tracciare il luogo (positivo) delle radici della funzione compensata:

$$F(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s^2 - 1)(s+6)(1+0,02s)}$$

riportato in Fig. V.15. Come si vede, per valori di K' compresi in un opportuno intervallo le 5 radici del sistema sono tutte con parte reale negativa. È tuttavia da osservare che le due radici complesse e coniugate presentano un coefficiente di smorzamento troppo basso e che quindi ulteriori compensazioni si rendono comunque necessarie.

Fig. V.15



Dall'analisi che precede, appare chiaro che, in tutti i casi in cui la funzione non compensata $F(s)$ ha soltanto zeri con parte reale negativa, è sempre possibile rendere stabile il sistema utilizzando una funzione compensatrice $R(s)$ avente $n-m-1$ poli e $n-m-1$ zeri (ove n ed m sono il numero di poli e, rispettivamente, di zeri della funzione $F(s)$). In tali casi, tuttavia, è possibile adottare opportuni accorgimenti che consentono di ridurre la complessità della funzione compensatrice.

Si consideri, ad esempio, il caso in cui si deve risolvere un problema di sintesi per un sistema avente la struttura indicata in fig.IV.10, per un processo la cui funzione di trasferimento $P(s)$ ha n poli, $n-2$ zeri, nessun polo in $s=0$, uno o più poli con parte reale positiva e tutti zeri con parte reale negativa. Si supponga inoltre che le specifiche di progetto prevedano di ottenere un sistema di tipo 1.

In tal caso, come indicato nel par.IV.3 il primo passo della sintesi consiste nell'attribuire - al fine di soddisfare la specifica sulla risposta a regime permanente - un polo in $s=0$ alla funzione $G(s)$ (in quanto, per ipotesi, a funzione $P(s)$ ne è sprovvista). Successivamente, si procede alla scelta di una funzione $R(s)$ che stabilizzi il sistema. Poiché la funzione non compensata, che ha la forma:

$$F(s) = \frac{1}{K_d s} P(s)$$

ha per ipotesi tutti zeri con parte reale negativa (e uno o più poli con parte reale positiva), può essere conveniente determinare $R(s)$ servendosi del metodo indicato in precedenza. Osservando che la differenza tra numero di poli e numero di zeri della funzione non compensata $F(s)$ è pari a 3 (si tenga presente che, per ipotesi, tale differenza è pari a 2 nella funzione $P(s)$) si sarebbe portati a considerare una funzione $R(s)$ avente 2 zeri e 2 poli, dei quali uno aggiunto molto a sinistra nel piano complesso al fine di rendere la $R(s)$ stessa una funzione razionale propria e quindi fisicamente realizzabile.

È opportuno tuttavia osservare che, nel contesto in esame, il requisito di realizzabilità fisica deve essere riferito non tanto alla funzione $R(s)$ quanto all'intera funzione $G(s)$ che caratterizza il dispositivo di controllo e che questa assume l'espressione:

$$G(s) = \frac{1}{s} R(s)$$

È quindi evidente che tale funzione risulterà fisicamente realizzabile anche se $R(s)$ ha una struttura del tipo:

$$R(s) = K' \frac{(s+z)(s+z_1)}{(s+p)}$$

in cui, come indicato in precedenza, il fattore $(s-z_1)$ ha il ruolo di ridurre a 2 la differenza tra numero di poli a numero di zeri nella funzione $F(s)$ mentre il fattore $(s+z)/(s+p)$ ha il ruolo di spostare a sinistra, nel piano complesso, il centro degli asintoti.

Si può dunque concludere che, in un caso di questo genere, non essendo necessario attribuire alla $R(s)$ un ulteriore polo al fine di garantirne la realizzabilità (in quanto il ruolo di quest'ultimo viene già svolto dal polo in $s=0$ originariamente attribuito alla funzione $G(s)$ al fine di soddisfare la specifica sul comportamento a regime permanente) la determinazione della funzione $R(s)$ stessa risulta più agevole.

Esempio V.7 - Si consideri il problema di stabilizzare e rendere di tipo 1 un sistema a controlloreazione in cui il processo sia dotato di funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{1}{(s^2 - 1)}$$

Tenendo presente quanto indicato sopra e quanto già stabilito nel corso dell'esempio V.6, si constata facilmente che una soluzione al problema si ottiene scegliendo per il dispositivo di controllo una funzione di trasferimento del tipo:

$$G(s) = \frac{K'(s+2)^2}{s(s+6)}$$

con K' maggiore di 19,5.

Un'altra tipica possibilità di semplificare la procedura per la determinazione della funzione $R(s)$ consiste nello scegliere alcuni zeri e/o poli di quest'ultima coincidenti con altrettanti poli e/o zeri della funzione $F(s)$. È evidente, infatti, che, se si sceglie una funzione $R(s)$ della forma:

$$R(s) = R'(s)(s-z)$$

e il parametro z coincide con un polo della funzione $P(s)$, i calcoli successivi possono risultare semplificati in quanto grado dell'equazione caratteristica si è ridotto di una unità. Un simile risultato si ottiene, ovviamente, nel caso in cui si attribuisca alla $R(s)$ un polo coincidente con uno zero di $P(s)$.

È tuttavia estremamente importante osservare che una procedura di questo genere è ammissibile solo in determinati casi: più precisamente

te, solo nei casi in cui la cancellazione riguardi poli e/o zeri contenuti nel settore di piano complesso al quale, secondo quanto stabilito in sede di definizione delle specifiche, devono appartenere le radici della equazione caratteristica.

Si consideri infatti un sistema interconnesso del tipo di quello indicato in Fig. V.16 a e si supponga che un fattore della forma $(s - \lambda)$, presente a numeratore (ovvero a denominatore) della funzione di trasferimento $G(s)$, coincida con un identico fattore presente a denominatore (ovvero, rispettivamente, a numeratore) della funzione di trasferimento $P(s)$. In questo caso, è facile dimostrare l'esistenza, nel sistema in questione di un sottosistema che risulta o non raggiungibile o non osservabile e possiede, in particolare, un autovalore esattamente nel punto $s = \lambda$.

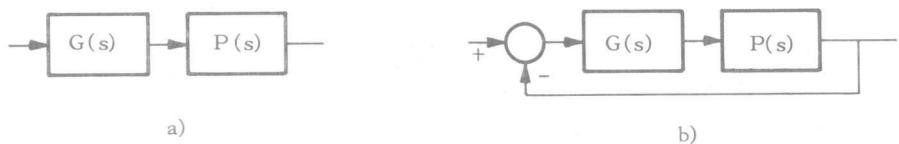


Fig. V.16

Per verificare questa affermazione, si supponga, senza perdita di generalità, che numeratore e denominatore di $P(s)$ siano polinomi primi, che anche numeratore e denominatore di $G(s)$ siano polinomi primi, si indichi con n_p il grado del denominatore di $P(s)$ e con n_G il grado del denominatore di $G(s)$. È ben noto che una realizzazione minima di $P(s)$ ha dimensione n_p e polinomio caratteristico coincidente con il denominatore $D_p(s)$ di $P(s)$, mentre una realizzazione minima di $G(s)$ ha dimensione n_G e polinomio caratteristico coincidente con il denominatore $D_G(s)$ di $G(s)$. Di conseguenza, la rappresentazione con lo spazio di stato del sistema interconnesso di Fig. V.16 a ha dimensione $n_p + n_G$ e il suo polinomio caratteristico coincide con il prodotto $D_p(s) \cdot D_G(s)$. Se nel prodotto $G(s)P(s)$ non intervengono cancellazioni tra fattori a numeratore e fattori a denominatore, il grado del denominatore di $F(s) = G(s)P(s)$ è pari a $n_p + n_G$ e di conseguenza la rappresentazione con lo spazio di stato del sistema interconnesso di Fig. V.16 a è minima, ovverosia raggiungibile e osservabile. Se viceversa tali cancellazioni hanno luogo, il grado del denominatore di $F(s)$ è inferiore a $n_p + n_G$, la rappresentazione con lo spazio di stato del sistema interconnesso di Fig. V.16 a non è minima ed è pertanto presente un sottosistema o non raggiungibile o non osservabile. In particolare, nel denominatore di $F(s)$ non è presente il fattore di $D_p(s) D_G(s)$ che è stato oggetto della cancellazione, la cui radice - come si è detto - è radice del polinomio caratteristico della rappresentazione con lo spazio di stato del sistema di fig. V.16 a. Di conseguenza, la radice in questione è necessariamente autovalore di un sottosistema o non raggiungibile o non osservabile.

Poiché una retroazione dall'uscita non ha influenza su eventuali sottosistemi non raggiungibili e/o non osservabili (si veda, in proposito, il par. II.5), si può affermare che anche nel sistema reazionato di fig. V.16b è presente un sottosistema che risulta *o non raggiungibile o non osservabile* e possiede, in particolare, un autovalore esattamente nel punto $s = \lambda$.

Da tali considerazioni discende immediatamente la conclusione che se un fattore della forma $(s - \lambda)$, presente a numeratore (ovvero a denominatore) della funzione di trasferimento $G(s)$, coincide con un identico fattore presente a denominatore (ovvero, rispettivamente, a numeratore) della funzione di trasferimento $P(s)$, il sistema reazionato di fig. V.16 b possiede un *autovalore* nel punto $s = \lambda$. Un risultato di questo genere è ammissibile soltanto se il punto $s = \lambda$ è compreso in quel settore di piano complesso al quale, secondo quanto stabilito in sede di definizione delle specifiche, devono appartenere le radici dell'*equazione caratteristica*. In particolare, la *cancellazione di poli e/o zeri con parte reale positiva o nulla* di $P(s)$ dà in ogni caso luogo ad un sistema che *non è stabile* asintoticamente. La cancellazione di poli e/o zeri con parte reale negativa è ammissibile solo se detti poli e/o zeri sono contenuti nel settore di piano complesso designato dalle specifiche di progetto.

Da un altro punto di vista, più euristico, si osservi che una coincidenza *perfetta* tra parametri della funzione $G(s)$ e parametri della funzione $P(s)$ non può mai susseguire in pratica. Di conseguenza, il meglio che si può ottenere è una funzione $G(s)$ della quale un certo zero (o polo) sia molto prossimo ad un certo polo (o zero) della funzione $P(s)$. La funzione $F(s)$ risultante avrà uno zero e un polo molto vicini tra loro, congiunti da un ramo di luogo delle radici. Al variare parametro K' , una delle radici dell'*equazione caratteristica* percorrerà questo ramo e si troverà quindi comunque sempre in prossimità dello zero (o polo) del quale è stata tentata la cancellazione.

V.6 - Ulteriori considerazioni sulla sintesi.

I procedimenti indicati nel paragrafo precedente perdono di validità generale nei casi in cui la funzione non compensata $F(s)$ presenta *zeri con parte reale positiva o nulla*. In situazioni di questo tipo, infatti, non è più possibile procedere in modo sistematico, in quanto non è possibile pervenire a situazioni in cui per valori elevati di K' i punti del luogo sono tutti a sinistra dell'asse immaginario. Esistono tuttavia ancora alcuni casi particolari in cui il risultato desiderato può essere ottenuto in modo abbastanza diretto.

Se la funzione ha soltanto poli con parte reale negativa, per mantenere tutte le radici nel semipiano sinistro occorre (e basta) scegliere valori di K' non troppo elevati. Se la funzione ha uno zero ed un polo con parte reale positiva (e gli eventuali altri zeri e poli sono tutti a sinistra dell'asse immaginario), occorre distinguere due casi, a seconda della loro posizione relativa.

Se lo zero positivo è a destra del polo positivo, può essere che sia sufficiente scegliere opportunamente K' . In questo caso, sul ramo di luogo negativo a destra dello zero positivo è presente certamente, per motivi di consistenza, un punto singolare. Se, sul ramo di luogo compreso tra l'origine e il polo positivo (ramo che appartiene necessariamente al luogo negativo) non sono presenti punti singolari, il luogo negativo, per quanto riguarda la parte a destra dell'asse immaginario, può presentare una configurazione del tipo di quella indicata in Fig.V.17. In questa situazione esistono due valori critici negativi del coefficiente K' , K'_1 e K'_2 , e per tutti i valori di K' che soddisfano la relazione:

$$K'_1 < K' < K'_2$$

i punti del luogo appartengono al semipiano sinistro.

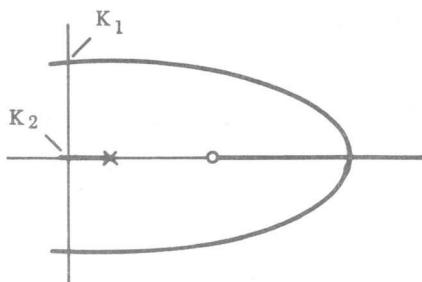


Fig. V.17

Se lo zero positivo è a sinistra del polo positivo, si può fare in modo di indurre una situazione analoga a quella precedente aggiungendo un altro polo positivo a destra dello zero positivo. In questo caso si può venire a creare una situazione del tipo di quella indicata in Fig. V.18 (relativa ora ad una porzione di luogo positivo) nella quale, per valori di K' interni ad un opportuno intervallo, i punti del luogo sono tutti interni al semipiano sinistro.

Una situazione particolarmente delicata, è quella in cui la funzione non compensata presenti, in aggiunta a un polo positivo e uno zero a destra di quest'ultimo, anche un polo in $s=0$. In questo caso, infatti, al luogo positivo appartiene in ogni caso il segmento di asse reale positivo compreso tra zero e polo mentre sul luogo negativo (vedi Figu-

ra V.19) sono presenti, per motivi di consistenza, almeno due punti singolari, uno compreso tra l'origine e il polo positivo, l'altro alla destra dello zero positivo. Se il ramo di luogo negativo che congiunge questi due punti singolari è tutto contenuto nel semipiano positivo, il sistema reazionato risulta instabile per ogni valore (positivo e negativo) del parametro K^1 . Inoltre, non è immediato immaginare in che modo l'aggiunta di ulteriori poli e zeri possa modificare la situazione.

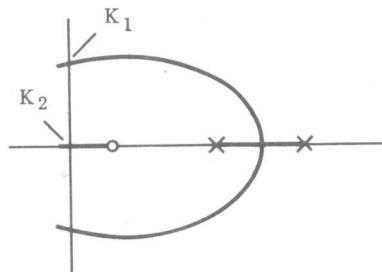


Fig. V.18

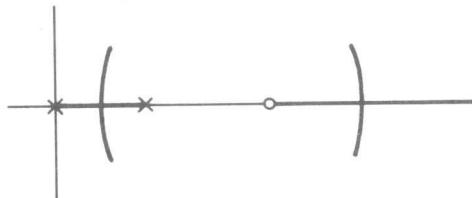


Fig. V.19

Nel seguente esempio si mostra come un problema di questo genere può essere risolto, facendo ricorso a un procedimento che in realtà non si basa sull'analisi delle proprietà del luogo delle radici, ma su semplici considerazioni di tipo analitico. Successivamente, si descriverà il procedimento in questione da un punto di vista più generale.

Esempio V.8 - Si consideri il problema dei stabilizzare di un processo dotato di funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{(s-2)}{s(s-1)}$$

Non essendo facile individuare in che modo devono essere scelti struttura e parametri di una funzione compensatrice $R(s)$, si prova ad assumere:

$$R(s) = \frac{(as+b)}{(s+p)}$$

e si cerca di determinare analiticamente valori di a , b , e p che rendano il sistema stabile asintoticamente. Una possibilità, a questo proposito, è quella di fare in modo che le tre radici del polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso, che in questo caso assume la forma:

$$f(s) = s(s-1)(s+p) + (s-2)(as+b)$$

coincida con un polinomio (di terzo grado) prefissato aventi radici con parte reale negativa. Scelto ad esempio quest'ultimo come il polinomio:

$$p(s) = (s+1)^3$$

si tratta di rendere soddisfatta l'identità:

$$s(s-1)(s+p) + (s-2)(as+b) = (s+1)^3$$

che si traduce nel sistema lineare di tre equazioni in tre incognite:

$$p - 1 + a = 3 \quad b - 2a - p = 3 \quad -2b = 1$$

Quest'ultimo ha soluzione:

$$b = -0,5, \quad a = -7,5, \quad p = 11,5$$

il che dà luogo alla funzione compensatrice:

$$R(s) = -7,5 \frac{(s+1/15)}{(s+11,5)}$$

È interessante, ai fini della comprensione di come il problema è stato risolto costruire il luogo delle radici corrispondente alla funzione così individuata. La determinazione precisa del luogo comporta il calcolo dei punti singolari. Poiché:

$$f(s, K') = s(s-1)(s+11,5) + K'(s+1/15)(s-2)$$

i punti in questione si ottengono come radici del polinomio di quarto grado:

$$p(s) = -15s^4 + 58s^3 + 138s^2 + 42s - 23$$

È però utile osservare che due delle radici di questo polinomio sono certamente coincidenti nel punto $s = -1$. Infatti, i parametri della funzione $R(s)$ sono stati scelti in modo tale che per $K' = -7,5$ l'equazione caratteristica abbia una radice tripla in $s = -1$; il punto in questione è pertanto necessariamente un punto singolare del lu-

go, in particolare radice *doppia* dell'equazione che fornisce i punti singolari. Dividendo il polinomio in questione per $(s+1)^2$ si ottiene un quoziente pari a:

$$p^*(s) = -15s^2 + 88s - 23$$

le cui radici forniscono gli altri due punti singolari, rispettivamente in $s=0,27$ e $s=5,59$.

In particolare il luogo *negativo* delle radici assume la configurazione indicata in Fig. V.20. Come previsto, per $K' = -7,5$ le tre radici coincidono nel punto $s = -1$.

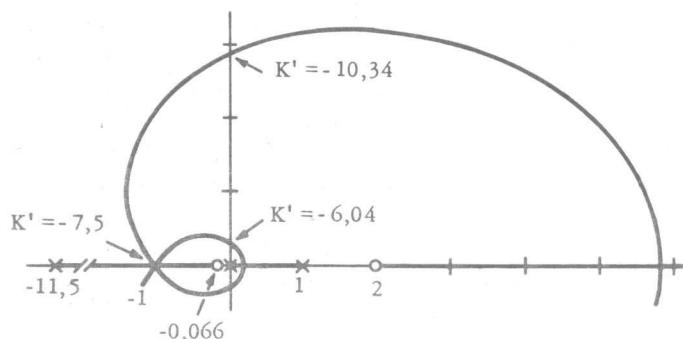


Fig. V.20

Lo spirito del procedimento di stabilizzazione utilizzato nell'esempio precedente è stato quello di scegliere i parametri della funzione compensatrice in maniera tale da imporre la coincidenza del polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso con un polinomio prefissato (avente tutte radici con parte reale negativa). Ovviamenete, il procedimento in questione può essere generalizzato al caso in cui la funzione di trasferimento $P(s)$ del processo controllato abbia un numero arbitrario di poli e di zeri. Allo scopo, si ponga:

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad R(s) = \frac{N_R(s)}{D_R(s)}$$

con:

$$N_P(s) = b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0$$

$$D_P(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

$$N_R(s) = d_r s^r + \dots + d_1 s + d_0$$

$$D_R(s) = s^r + c_{r-1} s^{r-1} + \dots + c_1 s + c_0$$

e si osservi che il corrispondente sistema ad anello chiuso ha un polinomio caratteristico che assume l'espressione:

$$D_R(s)D_P(s) + N_R(s)N_P(s)$$

e risulta di grado pari a $n+r$. Si indichi poi con $D(s)$ un polinomio arbitrario (avente tutte radici con parte reale negativa) di grado $n+r$. È facile allora constatare che, per il principio di identità dei polinomi, la uguaglianza:

$$(V.16) \quad D_R(s)D_P(s) + N_R(s)N_P(s) = D(s)$$

tra il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso e il polinomio $D(s)$ si traduce in un sistema di $n+r$ equazioni *lineari*, nelle $2r+1$ incognite $d_r, \dots, d_1, d_0, c_{r-1}, \dots, c_1, c_0$ che caratterizzano il numeratore e il denominatore della funzione compensatrice $R(s)$.

È possibile mostrare che, se numeratore $N_P(s)$ e denominatore $D_P(s)$ della funzione di trasferimento $P(s)$ sono polinomi primi e se $r = n-1$ (se cioè il numero di poli della funzione $R(s)$ è inferiore di una sola unità inferiore al numero di poli della funzione $P(s)$), il sistema di equazioni in questione ha sempre soluzione o, il che è lo stesso, l'identità (V.16) può essere sempre soddisfatta comunque venga scelto il polinomio $D(s)$.

A tale scopo, si osservi innanzitutto che se $r = n-1$, il sistema in questione è costituito da un numero di equazioni pari al numero delle incognite. Per verificarne la resolubilità, si può pensare, ad esempio, ad una prova per induzione su m . Si prova dapprima il risultato nel caso di $m=0$, in cui il polinomio $N_P(s)$ degenera in una costante ed è quindi primo con $D_P(s)$. Successivamente, si mostra che se l'identità (V.16) può essere soddisfatta per qualunque $D(s)$, allora anche l'identità:

$$(V.16') \quad D_R(s)D_P(s) + N_R(s)N_P(s)(s-z) = D(s)$$

può essere soddisfatta per qualunque $D(s)$, purché il numero z non sia una radice di $D_P(s)$. I dettagli sono lasciati, per esercizio, al lettore.

Il procedimento indicato fornisce un semplice metodo per l'individuazione di una funzione $R(s)$ mediante la quale si può assegnare, al sistema ad anello chiuso, un polinomio caratteristico (che risulta di grado $2n-1$) le cui radici coincidono con $2n-1$ numeri (reali o a coppie complessi e coniugati) prescelti arbitrariamente. Il procedimento in questione si presta quindi a risolvere molto semplicemente il pro-

blema della stabilizzazione di un sistema a controllazione. È tuttavia importante notare che il soddisfacimento del requisito, peraltro essenziale, della stabilità non esaurisce in genere del problema della sintesi di un sistema di controllo e che occorre solitamente contemperare anche altre esigenze, quali ad esempio quelle relative alla precisione nella risposta a regime permanente e alla risposta al disturbo. Nel contesto più generale della sintesi, l'utilizzo del procedimento di assegnazione del polinomio caratteristico – che fissa rigidamente i valori dei parametri della funzione compensatrice – deve essere integrato dallo studio degli altri aspetti del comportamento di un sistema, effettuato con l'aiuto dei metodi discussi in questo capitolo e nei precedenti. Così, ad esempio, una volta scelta $R(s)$ in modo tale da assegnare il polinomio caratteristico, può essere utile esaminare la struttura assunta dal corrispondente luogo delle radici (si veda, in proposito, l'esempio precedente), per determinare – qualitativamente e quantitativamente – l'effetto di eventuali diverse scelte del parametro K' e di poli e zeri della funzione $R(s)$.

V.7 - Altre applicazioni del luogo delle radici.

L'impiego del luogo delle radici nei metodi di sintesi è interessante non soltanto perché consente di avere una rappresentazione immediata degli effetti della compensazione sulla collocazione dei poli della funzione di trasferimento, ma anche perché può essere utilizzato dal progettista per avere indicazioni sugli effetti prodotti da variazioni di parametri.

Da questo punto di vista, la situazione che può venire trattata nel modo più immediato è quella in cui il parametro soggetto a variazioni è il coefficiente di guadagno della funzione di trasferimento del sistema non reazionato. Questo parametro (o una grandezza ad esso proporzionale) è infatti proprio la grandezza che viene utilizzata per graduare i diversi rami del luogo. Se il campo di variabilità di tale coefficiente è noto ed il luogo è stato graduato, risulta immediato individuare i segmenti di ramo lungo i quali si possono spostare i poli della funzione di trasferimento (per effetto delle variazioni di guadagno). Il progettista ha così la possibilità di verificare se nei limiti di variabilità previsti le prestazioni del sistema rimangono soddisfacenti; in caso negativo, dovrà procedere ad una rettifica delle scelte iniziali, cercando di modificare l'andamento del luogo in modo opportuno.

Nel caso in cui si vogliono esaminare gli effetti di variazioni di parametri diversi dal coefficiente di guadagno, le indicazioni che possono essere tratte dall'esame del luogo delle radici assumono un carattere

necessariamente più qualitativo. Molto spesso, peraltro, si può ancora ricondurre il problema ad uno resolubile mediante il tracciamento di un opportuno luogo delle radici. Si tratta dei casi in cui i coefficienti della equazione caratteristica di cui si vogliono studiare le radici sono funzioni lineari del parametro soggetto a variazioni. In questi casi l'equazione può essere posta nella forma:

$$(V.17) \quad P_1(s) + k P_2(s) = 0$$

avendo indicato con k il parametro di interesse; $P_1(s)$ e $P_2(s)$ sono due polinomi in s i cui coefficienti non dipendono da k . Poiché l'equazione (V.15) ha una struttura del tutto simile alla (V.2), è naturale pensare di poter ricorrere al tracciamento di un luogo delle radici per mettere in evidenza il modo in cui le radici stesse vengono influenzate da variazioni di k . Basta, a questo scopo, identificare i polinomi $P_1(s)$ e $P_2(s)$ con il denominatore e, rispettivamente, il numeratore di una funzione razionale e procedere al tracciamento del luogo delle radici associato a quest'ultima.

Nel problema del controllo della posizione di un montacarichi (cfr. Es.I.2), la massa M del carico può essere considerata, in modo naturale, come un parametro soggetto a variazioni. Per mettere in evidenza l'effetto delle variazioni di M sulle prestazioni del sistema di controllo, si può utilizzare il metodo del luogo delle radici, procedendo nel seguente modo. Si associa innanzitutto a ciascuna parte del sistema la rispettiva funzione di trasferimento, pervenendo così allo schema di fig.V.21.

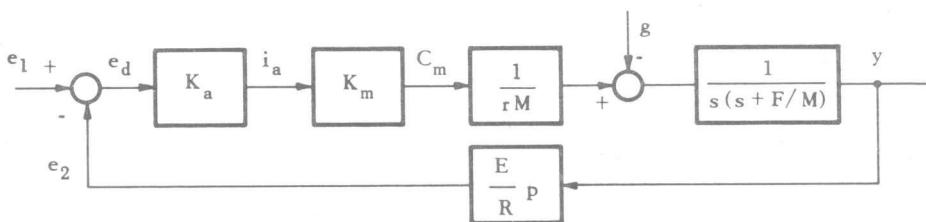


Fig. V.21

Successivamente si calcola l'equazione caratteristica, della quale interessa studiare le radici. Ponendo, per semplificare le espressioni:

$$\frac{E}{R} \rho K_a K_m \frac{1}{r} = K_0$$

si ottiene allora l'equazione:

$$\frac{K_0}{M} + s \left(s + \frac{F}{M} \right) = 0$$

Poiché i coefficienti di questa equazione sono lineari nella grandezza $1/M$, si può applicare il procedimento descritto sopra. Allo scopo, si riscrive quest'ultima nella forma:

$$s^2 + \frac{F}{M} \left(s + \frac{K_0}{F} \right) = 0$$

a partire dalla quale si può effettuare il tracciamento di un luogo delle radici, interpretando il polinomio s^2 come denominatore (le sue radici come *poli*), il polinomio $(s + K_0/F)$ come numeratore (le sue radici come *zeri*) di una funzione $F(s)$ ed identificando il coefficiente F/M con il parametro K' .

Si tratta, in altri termini, di tracciare il luogo positivo (perché sia K_0 che M sono positive) associato alla funzione:

$$F(s) = K' \frac{s + K_0/F}{s^2}$$

Nel caso particolare, è possibile e conveniente considerare una normalizzazione delle scale sugli assi coordinati, ponendo $K_0/F = 1$.

La funzione ha due poli reali (nel punto $s = 0$) e uno zero reale (nel punto $s = -1$). Il luogo ha un solo asintoto, orientato come fig.V.4 a. Appartengono al luogo il punto $s = 0$ e la porzione di asse reale a sinistra del punto $s = 1$ (che si identifica con l'asintoto). Il luogo ha due punti doppi, in $s = 0$ (per $K' = 0$) e in $s = -2$ (per $K' = 4$). Di conseguenza, l'andamento del luogo è quello indicato in fig.V.22. In effetti, si può verificare con semplici calcoli che la parte del luogo non appartenente all'asse reale è una circonferenza di raggio unitario centrata in $s = -1$.

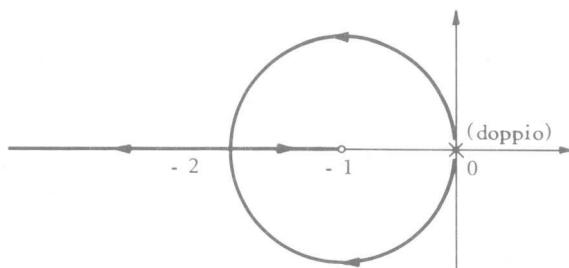


Fig. V.22

Al variare di M, le radici dell'equazione caratteristica descrivono il luogo indicato. Se sono noti i valori massimi e minimi di questo parametro, è facile individuare - una volta effettuata la graduazione - i segmenti di ramo sui quali tali radici si possono spostare.

PROBLEMI

V.1 - Il sistema di controllo a controllazione di fig.V.P.1 è caratterizzato dalla funzione:

$$F(s) = \frac{K' (s + 1)^2}{s (s^2 + 1) (s + 4)}$$

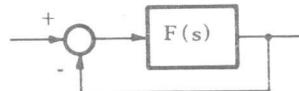


Fig.V.P.1

Tracciato il luogo positivo delle radici, si determini l'intervallo di valori di K' per i quali il sistema è stabile. Si determini anche l'intervallo di valori di K' in corrispondenza ai quali le radici sono tutte reali.

V.2 - Si consideri ancora il sistema di fig.V.P.1, con:

$$F(s) = \frac{K'(s^2 + 4s + 8)}{s^2(s + 4)}$$

Tracciato il luogo positivo delle radici, si determini in corrispondenza a quale valore di K' due radici sono complesse coniugate con un coefficiente di smorzamento pari a 0,5. Si mostri che le radici in questione valgono $-1,3 \pm j2,2$.

V.3 - Si consideri il sistema di fig.V.P.1, con:

$$F(s) = \frac{K'(s^2 + 0,105625)}{s(s^2 + 1)}$$

e si traccino i luoghi positivi e negativi delle radici. In corrispondenza a quali valori di K' il sistema è stabile?

V.4 - Si consideri la funzione:

$$F(s) = \frac{K'(s^2 + 4)}{s(s^2 + 1)}$$

e si traccino i luoghi positivi e negativi delle radici.

V.5 - Si consideri la funzione:

$$F(s) = \frac{K_1(1-s)}{s(1+s)(1+0,5s)(1+0,25s)}$$

e si tracci il luogo delle radici corrispondente a valori positivi del parametro K_1 .

V.6 - Nel sistema di controllo di fig.V.P.2 le funzioni di trasferimento hanno le seguenti espressioni:

$$G_1(s) = \frac{1}{1+10s}$$

$$G_2(s) = 5$$

$$G_3(s) = \frac{1,7}{(1+0,25s)(1+s)}$$

$$G_4(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(s) = K$$

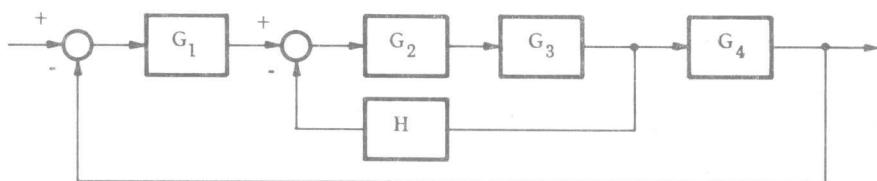


Fig.V.P.2

Se si vuole determinare il luogo dei valori assunti dai poli della funzione di trasferimento complessiva al variare del parametro K nell'intervallo $(0, +\infty)$.

*

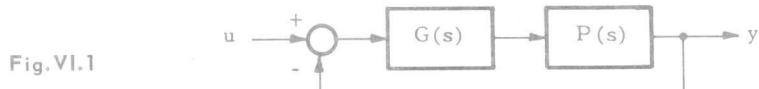
CAPITOLO VI

METODI DIRETTI DI SINTESI

VI.1 - Il principio dei metodi diretti.

I metodi di sintesi che verranno considerati in questo capitolo consentono di individuare le funzioni che caratterizzano la parte controlante per mezzo *algoritmi diretti*; in ciò si differenziano essenzialmente da quelli esaminati in precedenza, nei quali l'obiettivo viene raggiunto mediante successive rettifiche di una scelta iniziale.

Per illustrare la filosofia che è alla base di tali metodi conviene considerare per primo il caso più semplice, peraltro già esaminato a fondo per quanto concerne i metodi di sintesi per tentativi, in cui il sistema di controllo è riconducibile allo schema di fig.VI.1, ove $P(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento di quella parte di sistema su cui non è possibile o conveniente agire in sede di sintesi, mentre $G(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento di quella parte che deve essere definita, nella struttura e nei parametri.



Se, tra i diversi aspetti mediante i quali - convenzionalmente - si caratterizzano le prestazioni di un sistema di controllo (cfr. par.III.1), si sceglie di fissare l'attenzione sulla *fedeltà di risposta*, il comportamento del sistema di fig.VI.1 è completamente riassunto dalla funzione di trasferimento ingresso-uscita:

$$(VI.1) \quad W(s) = \frac{G(s)P(s)}{1 + G(s)P(s)} = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

Nei metodi sin qui esaminati l'obiettivo è stato quello di imporre particolari *caratteristiche* alla funzione $W(s)$ (ad esempio determinate relazioni tra i coefficienti al fine di assicurare una risposta soddisfacente in condizioni di regime, l'appartenenza dei poli ad un determinato settore del piano complesso per garantire un certo transitorio, ecc.); viceversa, nei metodi che verranno discussi in questo capitolo, il principio è quello di imporre *integralmente* al sistema una funzione $W(s)$ ben determinata.

Impostato in questi termini, il problema della sintesi si scinde in due fasi tra loro abbastanza distinte:

- a) una prima fase nella quale, sulla base delle prestazioni richieste e delle caratteristiche del processo da controllare, si scelgono la struttura ed i parametri della funzione $W(s)$ che si vuole imporre al sistema;
- b) una seconda fase, essenzialmente algoritmica, nella quale si calcola $G(s)$, esplicitandola dalla (VI.1).

Quando si parla di metodi diretti di sintesi, si fa abitualmente riferimento a metodi che si basano su procedimenti di questo genere. E' peraltro opportuno notare che la contrapposizione tra metodi diretti e metodi per tentativi va intesa sostanzialmente in senso *relativo*; nei metodi della seconda categoria l'esecuzione del singolo tentativo interessa tutti i passi del procedimento (scelta dei parametri di $G(s)$, calcolo di $W(s)$, verifica dei risultati ottenuti) mentre nei metodi della prima categoria l'esecuzione di tentativi - se necessaria - è confinata alla sola fase iniziale, in cui si cerca di individuare la funzione $W(s)$ che meglio si adatta al tipo di prestazioni che vengono richieste e alle caratteristiche del processo da controllare.

Delle due fasi in cui si articola un metodo diretto di sintesi, quella che necessita di un'approfondita analisi è evidentemente la prima, in quanto la seconda si esaurisce nell'uso, più che altro automatico, della relazione:

$$(VI.2) \quad G(s) = \frac{F(s)}{P(s)} = \frac{1}{P(s)} \frac{W(s)}{1 - W(s)}$$

nella quale $P(s)$ e $W(s)$ sono note, una perché assegnata come dato iniziale, l'altra perché scelta nella prima fase.

Prima di affrontare in dettaglio i problemi che si aprono in tale contesto, è tuttavia utile illustrare anche l'applicazione di questo tipo di approccio a casi meno semplici di quello considerato sopra.

VI.2 - Problemi di sintesi a più obiettivi.

Un altro aspetto che caratterizza le prestazioni di un sistema di controllo, accanto alla fedeltà di risposta, è quello della *risposta ai disturbi*. Da questo punto di vista, il comportamento del sistema è completamente riassunto dalla funzione di trasferimento $W_z(s)$ che caratterizza il legame disturbo-uscita. Se, per fissare le idee, si considera il caso di uno schema di controllo in cui vi è un solo disturbo che si somma all'uscita del processo controllato, la funzione $W_z(s)$ assume l'espressione (cfr. fig. VI.2).

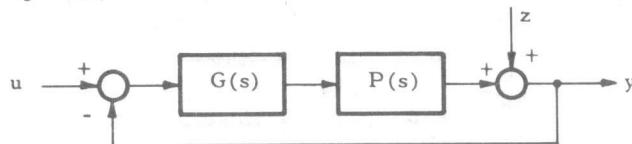


Fig.VI.2

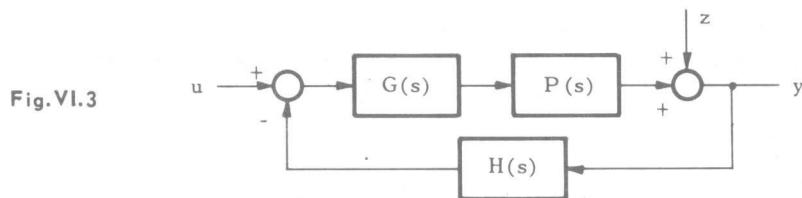
$$(VI.3) \quad W_z(s) = \frac{1}{1 + G(s)P(s)} = \frac{1}{1 + F(s)}$$

Così come si è fatto nel paragrafo precedente per quanto riguarda il legame ingresso-uscita, se si vuole risolvere in modo diretto un problema di sintesi fissando l'attenzione sulle prestazioni nella risposta al disturbo, si tratta di imporre al sistema di controllo ma ben determinata funzione $W_z(s)$. Le due fasi caratteristiche del metodo vengono in questo caso ad essere sostituite da due fasi perfettamente analoghe, nella prima delle quali si scelgono la struttura ed i parametri di $W_z(s)$, sulla base delle prestazioni richieste e delle caratteristiche del processo; nella seconda si esplicita $G(s)$ dalla (VI.3) attraverso la relazione:

$$(VI.4) \quad G(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{1 - W_z(s)}{W_z(s)}$$

Non è viceversa possibile, se lo schema di controllo è quello di fig.VI.2, risolvere in modo diretto un problema di sintesi nel quale si desideri imporre *indipendentemente* al sistema una funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(s)$ ed una funzione di trasferimento disturbo-uscita $W_z(s)$. Il progettista ha infatti a disposizione soltanto la funzione $G(s)$ scegliendo la quale non è possibile ottenere per $W(s)$ e $W_z(s)$ espressioni che siano in relazione diversa da quella che scaturisce dalle (VI.1) e (VI.3). Si usa dire che, in questo caso, lo schema di controllo presenta un solo grado di libertà.

Per risolvere il problema posto occorre considerare uno schema di controllo meno particolare quale, ad esempio, quello di fig.VI.3. Lo schema si differenzia dal precedente per la presenza, nel ramo di reazione, di un dispositivo dotato di funzione di trasferimento $H(s)$, la cui struttura e i cui parametri possono essere liberamente scelti in sede di sintesi.



In questo schema le funzioni di trasferimento ingresso-uscita e disturbo-uscita assumono le espressioni:

$$(VI.5) \quad W(s) = \frac{G(s)P(s)}{1 + G(s)P(s)H(s)} = \frac{G(s)P(s)}{1 + F(s)}$$

$$(VI.6) \quad W_z(s) = \frac{1}{1 + G(s)P(s)H(s)} = \frac{1}{1 + F(s)}$$

Come è immediato constatare, la possibilità di assegnare le funzioni $G(s)$ ed $H(s)$ consente di imporre al sistema una ben determinata funzione di trasferimento ingresso-uscita e, indipendentemente, una ben determinata funzione di trasferimento disturbo-uscita. Corrispondentemente, si può pensare ad un metodo di sintesi articolato anche questa volta in due fasi, nella prima delle quali si scelgono $W(s)$ e $W_z(s)$ in relazione alle prestazioni richieste ed alle caratteristiche del processo. La seconda fase consiste nel calcolo di $G(s)$ ed $H(s)$ dalle (VI.5) ed (VI.6); in proposito; con semplici trasformazioni si può pervenire alle relazioni esplicite;

$$(VI.7) \quad G(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{W(s)}{W_z(s)}$$

$$(VI.8) \quad H(s) = \frac{1 - W_z(s)}{W(s)}$$

A secondo membro di queste espressioni compaiono tutte quantità note al progettista, o perché assegnate come dato iniziale (la $P(s)$) o perché scelte nella prima fase (la $W(s)$ e la $W_z(s)$).

Esempio VI.1 - Nel problema del controllo della temperatura di un forno (cfr. anche Esempio I.4) il processo può essere descritto mediante lo schema di fig.VI.4 a). Le grandezze indicate con P e con T rappresentano, rispettivamente, la quantità di calore sviluppata dal riscaldatore e la temperatura interna del forno; la grandezza indicata con \tilde{T}_e rappresenta l'influenza esercitata su T dalla temperatura dell'ambiente (si tenga presente - con riferimento a quanto discusso nell'Esempio I.4 - che la temperatura dell'ambiente T_e influisce su T attraverso la funzione di trasferimento $-1/(1 + \tau_f s)$).

Sisupponga ora di voler sintetizzare il sistema di controllo, utilizzando un metodo diretto, in modo tale da soddisfare indipendentemente a determinate prescrizioni ingresso-uscita e disturbo-uscita. Lo schema che si adotta è quello di fig.VI.4 b).

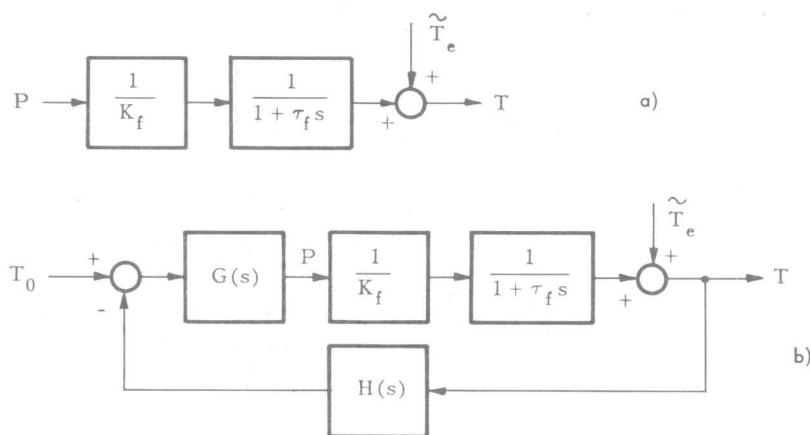


Fig.VI.4

Per quanto riguarda il legame ingresso-uscita, si richiede che ad un ingresso a gradino unitario corrisponda un'uscita $T(t) = 1 - e^{-t/\tau_1}$; ciò equivale a richiedere che la funzione di trasferimento assuma l'espressione:

$$(VI.9) \quad W(s) = \frac{1}{1 + \tau_1 s}$$

Per quanto riguarda il legame disturbo-uscita, si richiede che, in condizioni di regime, i disturbi costanti vengano annullati e i disturbi sinusoidali (di qualsiasi frequenza) vengano attenuati di un fattore almeno pari a $1/100$. Questi due requisiti impongono che sia:

$$W_z(0) = 0$$

$$|W_z(j\omega)| \leq \frac{1}{100} \quad \text{per ogni } \omega$$

Una funzione $W_z(s)$ in grado di assicurare tali prestazioni è la seguente:

$$(VI.10) \quad W_z(s) = \frac{s}{1 + 100s}$$

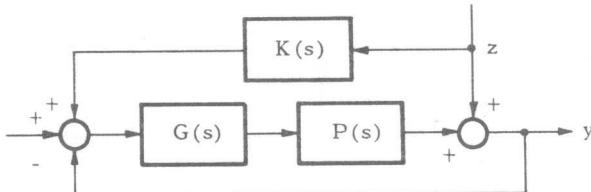
come si può facilmente constatare osservandone il diagramma di Bode.

Si tratta ora di imporre al sistema le funzioni (VI.9) e (VI.10), scegliendo opportunamente $G(s)$ e $H(s)$. In proposito, si possono usare le formule (VI.7) ed (VI.8), dalle quali si ottiene:

$$G(s) = \frac{K_f(1 + \tau_f s)(1 + 100s)}{s(1 + \tau_1 s)}$$

$$H(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + 99s)}{(1 + 100s)}$$

Fig.VI.5



Si noti che la seconda di queste non è una funzione propria; su questo aspetto si ritornerà nel par.VI.3.

Un altro modo di risolvere il problema considerato si basa sulla tecnica della compensazione diretta (cfr. par.I.3). In questo caso lo schema adatto è quello indicato in fig.VI.5. La corrispondente funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(s)$ è identica alla (VI.1), mentre la funzione di trasferimento disturbo uscita $W_z(s)$ assume l'espressione:

$$(VI.11) \quad W_z(s) = \frac{1 + K(s)G(s)P(s)}{1 + G(s)P(s)} = \frac{1 + K(s)G(s)P(s)}{1 + F(s)}$$

Per imporre al sistema una determinata $W(s)$ è sufficiente fissare $G(s)$ nel modo indicato dalla (VI.2). Successivamente, scegliendo opportunamente $K(s)$, si può imporre una ben determinata $W_z(s)$; basta infatti porre, grazie alla (VI.11):

$$K(s) = \frac{1}{G(s)P(s)} \left[\frac{W_z(s)}{1 - W(s)} - 1 \right]$$

Gli schemi di fig.VI.3 e fig.VI.5, se le funzioni $H(s)$ e - rispettivamente - $K(s)$ possono essere liberamente scelte in sede di sintesi, consentono dunque al progettista di soddisfare indipendentemente specifiche riguardanti il comportamento ingresso-uscita e specifiche riguardanti il comportamento disturbo-uscita. Si usa dire, in questi casi, che lo schema di controllo presenta due *gradi di libertà*.

Esempio VI.2 - Si consideri il problema del controllo della posizione di un'antenna radar montata su veicolo, già illustrato nell'Esempio I.8 e si supponga di avere adottato uno schema di controllo misto, usando la contoreazione e la compensazione diretta del disturbo (cfr. fig.I.17 b). Lo schema di controllo consente di soddisfare indipendentemente a prescrizioni ingresso-uscita e disturbo-uscita.

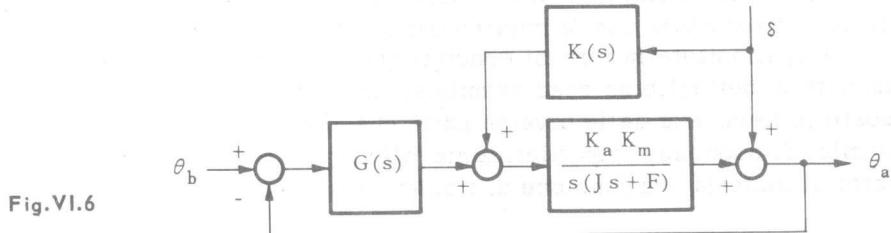


Fig.VI.6

Per le prime, si può richiedere - ad esempio - che sia:

$$W(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

con ω_n e ζ opportune (cfr. in proposito il successivo par.VI.5). Per le seconde si può richiedere che sia:

$$W_z(s) = 0$$

(compensazione totale del disturbo).

Esplcitando $G(s)$ dalla (VI.1) si ottiene l'espressione:

$$G(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{W(s)}{1 - W(s)} = \frac{s(Js + F)}{K_a K_m} \cdot \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{K_a K_m} \frac{Js + F}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

Per quanto riguarda invece $K(s)$, dovendo essere:

$$W_z(s) = \frac{1 + K(s)P(s)}{1 + F(s)} = 0$$

si ottiene:

$$K(s) = -\frac{1}{P(s)} = -\frac{s(Js + F)}{K_a K_m}$$

VI.3 - Problemi di realizzabilità e di stabilità.

Come già esplicitamente osservato nel par.VI.1, la fase più importante dei metodi di sintesi qui considerati è quella della scelta della struttura e dei parametri della funzione di trasferimento che si pensa di voler imporre al sistema. Questa scelta è influenzata essenzialmente da due ordini di considerazioni: *il soddisfacimento delle specifiche progettuali, la compatibilità con le caratteristiche del processo.*

Per illustrare in termini concreti questo secondo aspetto, è utile esaminare in dettaglio un caso semplice, analizzando in particolare le risposte in frequenza delle diverse parti che compongono il sistema di controllo. Si supponga, con riferimento allo schema di fig.VI.1, di voler imporre al sistema una funzione di trasferimento del tipo:

$$W(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Affinché ciò avvenga, il sistema non reazionato deve avere una funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_n} \left(\frac{s}{\omega_n} + 2\zeta \right)}$$

Le risposte in frequenza corrispondenti a tali funzioni sono riportate in fig.VI.7 a; per fissare le idee si è considerato il caso in cui $\zeta = 0,7$.

A partire da $F(s)$, il calcolo di $G(s)$ si effettua molto semplicemente dividendo per la funzione di trasferimento $P(s)$ del processo:

$$G(s) = \frac{F(s)}{P(s)}$$

Corrispondentemente, per quanto riguarda i diagrammi delle risposte in frequenza, vale la relazione:

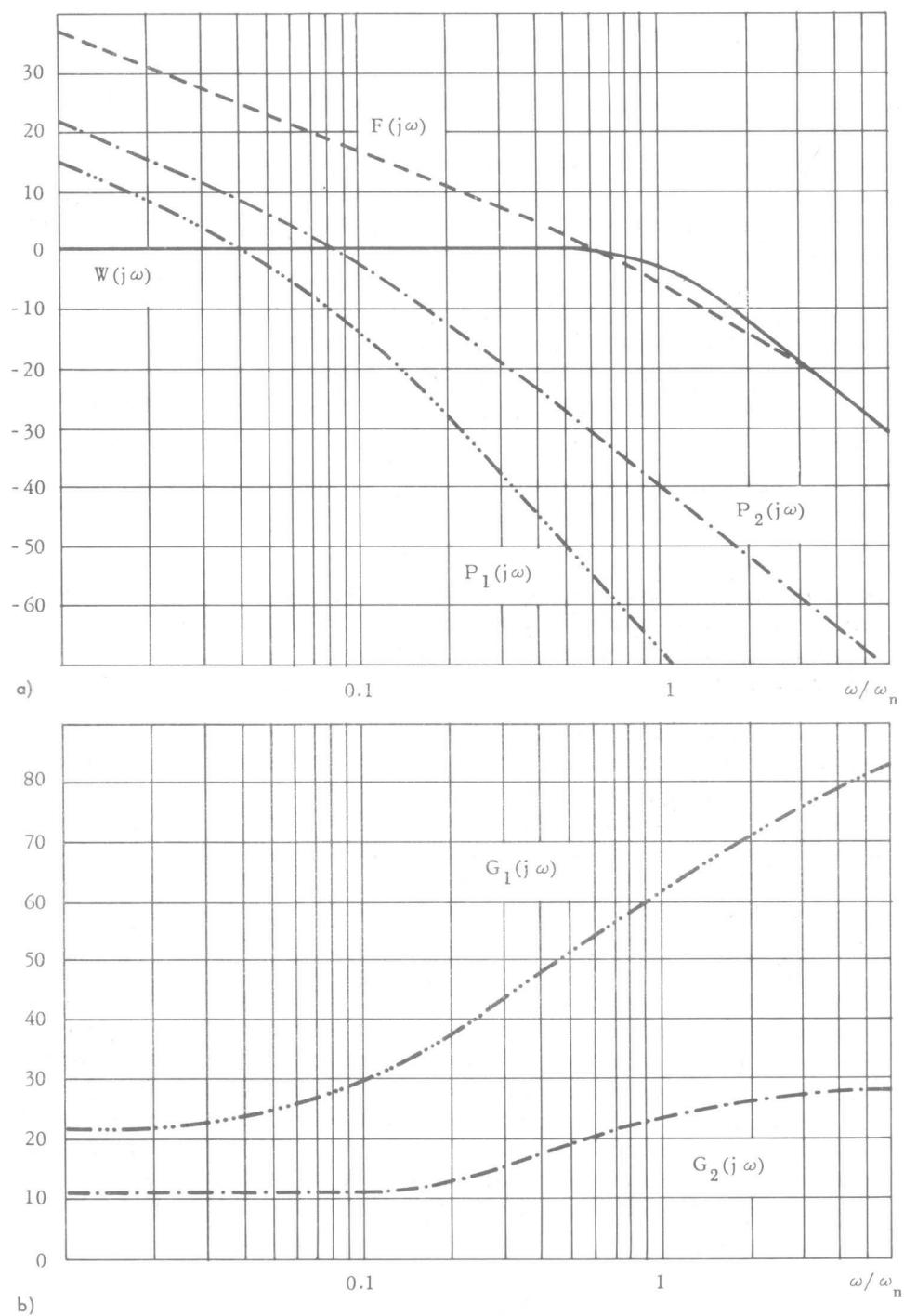


Fig.VI.7

$$[G(j\omega)]_{dB} = [F(j\omega)]_{dB} - [P(j\omega)]_{dB}$$

Ciò consente di dedurre immediatamente l'andamento della risposta in frequenza relativa al dispositivo di compensazione, come differenza tra la risposta in frequenza del sistema non reazionato e quella del processo controllato.

In fig.VI.7 a sono riportati, a titolo di esempio, due casi, corrispondenti a due diversi andamenti della risposta armonica del processo; nella sottostante fig.VI.7 b sono indicate le risposte armoniche che, in ciascun caso, competono al dispositivo di compensazione.

Dall'esame di queste figure si possono trarre le seguenti osservazioni:

- a) se la pendenza del diagramma di Bode di $[F(j\omega)]_{dB}$ per $\omega \rightarrow \infty$ è superiore a quella di $[P(j\omega)]_{dB}$, la funzione $G(j\omega)$ diviene infinita per $\omega \rightarrow \infty$;
- b) se le due pendenze sono uguali la funzione $G(j\omega)$ ha limite finito per $\omega \rightarrow \infty$, ma il valore di questo limite è tanto più elevato quanto più la pulsazione di attraversamento ω_t di $F(j\omega)$ è elevata rispetto a quella propria di $P(j\omega)$.

Da un punto di vista funzionale, il ruolo del dispositivo di compensazione altro non è, in effetti, che quello di adeguare le caratteristiche del sistema non reazionato a quelle che vengono imposte attraverso $W(j\omega)$ o, in altri termini quello di colmare il divario tra la risposta propria del processo e quella corrispondente in termini di $F(j\omega)$, alla $W(j\omega)$ prescelta. È chiaro che l'azione del dispositivo di compensazione dovrà essere tanto più energica quanto più è carente, rispetto agli obiettivi, la risposta del processo.

Quanto si è osservato ha un'immediata riflessione sul problema della realizzabilità del dispositivo di controllo. È ben noto infatti (cfr. paragrafo II.3) che una funzione $G(j\omega)$ che diviene infinita per $\omega \rightarrow \infty$ non può essere realizzata da un dispositivo fisico perché tutti gli oggetti o processi fisici hanno caratteristiche passa-basso. Affinché $G(j\omega)$ non sia infinita per $\omega \rightarrow \infty$, occorre che la differenza tra il numero di poli ed il numero di zeri di $G(s)$ non sia negativa o, il che è lo stesso, che la differenza tra il numero di poli e il numero di zeri di $P(s)$ non sia superiore a quella relativa a $F(s)$. Quest'ultima coincide con quella di $W(s)$, in quanto:

$$F(s) = \frac{W(s)}{1 - W(s)}$$

e $W(s)$, dovendo avere caratteristiche passa-basso, è infinitesima per $s \rightarrow \infty$. Se ne conclude che, affinché la funzione $G(s)$ possa essere realizzata, è necessario che la differenza tra il numero di poli e il numero di zeri della funzione $W(s)$ non sia inferiore a quella della funzione $P(s)$.

Questo è un primo esempio di limitazione imposta alla $W(s)$ dalle caratteristiche del processo che si vuole controllare.

Un'altro tipo di limitazione riconducibile alle considerazioni svolte sopra, anche se meno facilmente quantificabile, riguarda l'ampiezza del modulo di $G(j\omega)$. Come è noto, questa rappresenta il coefficiente secondo il quale viene modificata, in regime permanente, l'ampiezza dei segnali sinusoidali. Se il valore di questo coefficiente è molto elevato, l'ampiezza dei segnali può risultare eccessiva rispetto a eventuali limiti fisici inerenti ai dispositivi che devono produrli (compensatore) o riceverli (processo controllato). Affinché questi limiti non siano superati, l'ampiezza del modulo di $G(j\omega)$ o, il che è lo stesso, l'ampiezza del modulo del rapporto $F(j\omega)/P(j\omega)$ deve risultare inferiore ad un opportuno valore massimo, dipendente dalle caratteristiche dei dispositivi con cui viene realizzato il sistema.

Limitazioni di questo tipo sono sempre presenti nei problemi di sintesi dei sistemi di controllo anche se, molto spesso, il tipo di analisi che si svolge, limitata allo studio dei legami funzionali tra le grandezze in gioco, rinuncia a prenderli esplicitamente in considerazione. Può essere utile, da questo punto di vista, confrontare queste osservazioni con quanto discusso nel par. III.6 a proposito della scelta del tempo di risposta e nel par. VII.7 a proposito della scelta del passo di campionamento nei sistemi a controllo numerico.

Tutte queste osservazioni si possono estendere immediatamente anche ai casi in cui la sintesi prevede più obiettivi, ottenendo limitazioni sugli altri tipi di risposte che si desidera imporre.

Per quanto riguarda, ad esempio, lo schema di Fig. VI.2, si osservi che la funzione di trasferimento disturbo-uscita $W_z(s)$ [cfr. (VI.3)] soddisfa la relazione:

$$1 - W_z(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

La funzione a secondo membro è identica alla funzione di trasferimento ingresso-uscita dello schema di Fig. VI.1 [cfr. (VI.1)]. Sulla base dei risultati stabiliti a proposito della risposta ingresso-uscita si può allora immediatamente concludere che, se si vuole ottenere una prefissata funzione di trasferimento disturbo-uscita $W_z(s)$ rispettando il vincolo di realizzabilità di $G(s)$, è necessario che la differenza tra il numero di poli e il numero di zeri della funzione $1 - W_z(s)$ non sia inferiore a quello della funzione $P(s)$.

Questo risultato è stato messo indirettamente in luce nell'Esempio VI.6. Nello schema considerato non è possibile fare in modo che i disturbi sinusoidali di *qualsiasi frequenza* vengano attenuati di un fattore pari almeno ad 1/100 in quanto, in tal caso, dovrebbe risultare:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_z(j\omega)| \leq \frac{1}{100}$$

e ciò sarebbe in contrasto con quanto stabilito sopra.

Da un punto di vista pratico, occorre ridursi a considerare una *banda limitata* di frequenze ed imporre solo in essa l'attenuazione dei disturbi. Ad esempio, scegliendo:

$$W_z(s) = \frac{s}{1 + 100s} \cdot \frac{100s + \omega_0}{s + \omega_0}$$

si ottiene una funzione che, per $s \rightarrow \infty$, rispetta la condizione di realizzabilità e che soddisfa al vincolo:

$$|W_z(j\omega)| \leq \frac{1}{100}$$

(entro ± 3 dB) per tutti gli ω compresi nella banda $[0, \omega_0]$.

Se si considera lo schema di fig.VI.5 e si pensa, ad esempio, di imporre la compensazione totale del disturbo ($W_z(s) = 0$), si perviene immediatamente alla condizione:

$$K(s) = -\frac{1}{G(s)P(s)} = -\frac{1}{F(s)}$$

che non è realizzabile in quanto $F(s)$ ha caratteristiche passa-basso. Anche in questo caso, per la realizzabilità di $K(s)$ è necessario che sia (cfr. VI.11):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W_z(s) = 1$$

Si è già visto nell'Esempio VI.2 che l'imposizione $W_z(s) = 0$ porta ad una funzione $K(s)$ non realizzabile. A questo proposito, può essere istruttivo discutere anche la soluzione proposta nell'Esempio I.6. L'adozione di un giroscopio per misurare $d\delta(t)/dt$ potrebbe permettere di realizzare, in luogo della funzione:

$$(VI.12) \quad K(s) = -\frac{s(Js + F)}{K_a K_m}$$

dedotta nell'Esempio VI.2, la funzione:

$$(VI.12') \quad K_1(s) = - \frac{s F}{K_a K_m}$$

In questo modo non si otterrebbe più $W_z(s) = 0$ ma, se non altro, risulterebbe:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_z(s) = 0$$

Oppure si potrebbe usare l'uscita del giroscopio per alimentare un dispositivo dotato di funzione di trasferimento:

$$\tilde{K}(s) = \frac{1 + (J/F)s}{1 + \tau_0 s}$$

ottenendosi, in tal modo, una funzione:

$$(VI.12'') \quad K_2(s) = K_1(s) \tilde{K}(s) = - \frac{s (J s + F)}{K_a K_m (1 + \tau_0 s)}$$

che, se $\tau_0 \ll J/F$, approssima la (VI.12) meglio della (VI.12')(su una banda più larga).

È anche importante notare che la stessa funzione (VI.12), che si è attribuita al giroscopio, appare non realizzabile. In effetti la (VI.12) descrive correttamente il funzionamento del giroscopio solo se lo spettro dei segnali in gioco è limitato (cfr. par. II.3).

Una volta assicurato, al momento della scelta di $W(s)$, $W_z(s)$, ecc., che le funzioni $G(s)$, $H(s)$, ecc. rispettino i vincoli di realizzabilità fisica imposti dalle caratteristiche del processo controllato, rimane da affrontare il problema della realizzazione pratica dei dispositivi di controllo; in questa fase si possono adottare procedimenti che si differenziano a seconda del particolare settore tecnologico nel quale si opera. Nel caso elettrico, il problema può essere risolto determinando innanzitutto una rappresentazione con lo spazio di stato del sistema che si vuole realizzare (a partire dalla funzione $G(s)$, $H(s)$, ecc. che ne descrive il comportamento ingresso-uscita) e, successivamente, realizzando questa per mezzo di integratori, di sommatori e di moltiplicatori. Esempi in proposito saranno esaminati al successivo par. VI.5.

Prima di concludere il paragrafo, è inoltre importante osservare che uno degli aspetti caratteristici di metodi di sintesi esaminati in questo capitolo si riscontra nel fatto che ai dispositivi di controllo viene attribuito *il ruolo di cancellare la dinamica propria del processo*. La cosa è particolarmente evidente nel caso semplice considerato nel paragrafo VI.1; la funzione $G(s)$ deve assolvere al duplice compito di cancellare $P(s)$ e dar luogo alla $F(s)$ desiderata; $G(s)$ deve dunque avere tra i suoi poli gli zeri di $P(s)$ e tra i suoi zeri i poli di $P(s)$, oltre agli zeri e ai poli relativi alla $F(s)$ considerata. Solo in caso eccezionali, infatti, può accadere che poli e/o zeri di $F(s)$ coincidono con poli e/o zeri di $P(s)$.

Di conseguenza, in base a quanto osservato nel par. V.5, si deduce che se la funzione di trasferimento del processo controllato $P(s)$ ha poli o zeri con parte reale positiva o nulla, un procedimento di sintesi del tipo qui descritto non può essere impiegato. Infatti un tale procedimento darebbe luogo a un sistema non stabile asintoticamente.

VI.4 - Scelta della funzione di trasferimento ingresso - uscita.

In questo paragrafo si esaminerà con maggiore dettaglio il problema della scelta della struttura e dei parametri della funzione di trasferimento che si pensa di voler imporre al sistema, in modo tale che vengano soddisfatte specifiche progettuali del tipo di quelle usualmente prese in considerazione nell'ambito dei metodi di sintesi per tentativi. Per semplicità di esposizione, l'analisi è riferita soltanto al caso contemplato nel par. VI.1, in cui l'unico obiettivo della sintesi è quello di imporre una determinata funzione di trasferimento ingresso - uscita.

Si tratta, innanzitutto, di definire le classi di specifiche che si vuole poter soddisfare. Per quanto riguarda il *comportamento a regime*, il sistema può venire caratterizzato dalla indicazione del tipo e dall'entità del corrispondente errore; il caso più semplice al quale conviene fare riferimento è quello in cui si vuole che il sistema sia di tipo 1 e che l'errore in regime permanente in corrispondenza all'ingresso $\tilde{u}(t) = t$ non superi un valore prestabilito. Queste specifiche possono essere immediatamente tradotte in condizioni sulla funzione di trasferimento $W(s)$, sulla base dei risultati stabiliti nel par. III.2. Nell'ipotesi che il rapporto K_d fra il valore desiderato per l'uscita e quello dell'ingresso sia unitario (ipotesi peraltro tacitamente presente nello schema di Fig. VI.1) dovrà aversi, per quanto riguarda il tipo;

$$(VI.14) \quad W(0) = 1$$

e, per quanto riguarda l'errore, con ovvio significato dei simboli:

$$(VI.15) \quad e_1 = - \left[\frac{d W(s)}{ds} \right]_{s=0} = \frac{a_1 - b_1}{a_0} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \leq (e_1)_{\max}$$

Spesso, l'errore in regime permanente viene assegnato specificando il suo inverso, che è pari al valore del guadagno della corrispondente funzione $F(s)$ (la costante di velocità K_v) (cfr. par.III.3). In questo caso, in luogo della (VI.15) si può dare la limitazione:

$$(VI.15') \quad K_v \geq (K_v)_{\min} = \frac{1}{(e_1)_{\max}}$$

sottintendendo, per il primo membro, una delle qualsiasi espressioni che corrispondono alle espressioni a primo membro della (VI.15).

Per quanto riguarda il comportamento transitorio, il sistema può venire caratterizzato assegnando un limite al valore \hat{s} della sovraelongazione nella risposta al gradino unitario:

$$(VI.16) \quad \hat{s} \leq (\hat{s})_{\max}$$

e specificando, per la risposta armonica, l'ampiezza B della banda passante:

$$(VI.17) \quad B = (B)_{des}$$

(si confrontino, in proposito, le considerazioni svolte nel par.III.6).

Questa volta non è altrettanto immediato (così come per il caso della risposta a regime) porre in relazione tali specifiche con i parametri di $W(s)$; per la determinazione di questi ultimi è spesso conveniente servirsi di diagrammi universali (analoghi a quello che verrà introdotto più avanti a proposito della (VI.18)) o approssimare i calcoli in modo opportuno (così come verrà indicato a proposito della (VI.20)).

Ciò posto, si può passare all'esame di due casi particolari, nei quali vengono proposte due diverse strutture per la funzione $W(s)$ e si mostra in che modo i vincoli imposti dalle specifiche precedenti si riflettono sui valori dei parametri che le caratterizzano.

I) Modello elementare. La struttura più semplice che si può prendere in esame è quella in cui la funzione di trasferimento ha due soli poli, complessi e coniugati, e nessuno zero:

$$(VI.18) \quad W_I(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

In questo caso, le grandezze \hat{s} e B che si sono scelte per caratterizzare il transitorio sono legate ai parametri ζ ed ω_n che caratterizzano la (VI.18) da espressioni relativamente semplici, già presentate nel par. III.6. A queste, deve essere aggiunta l'espressione della costante di velocità:

$$(VI.19) \quad K_v = \frac{\omega_n}{2\zeta}$$

A partire da tali espressioni è possibile calcolare i valori che devono essere attribuiti a ζ ed ω_n per soddisfare specifiche del tipo (VI.15), (VI.16) e (VI.17). Da un punto di vista pratico, è tuttavia più conveniente fare riferimento ad una rappresentazione grafica di questi legami; ciò è reso particolarmente semplice dal fatto che \hat{s} non dipende da ω_n e che sia B che K_v sono proporzionali ad ω_n . Si possono allora costruire grafici nei quali il solo parametro ζ appare come variabile indipendente. In Fig. VI.9 sono stati riportati i diagrammi delle funzioni $\hat{s}(\zeta)$ e $[B/\omega_n](\zeta)$; in luogo della funzione $[K_v/\omega_n](\zeta)$ è stata considerata la funzione $[K_v/B](\zeta)$, per un motivo che apparirà chiaro dal seguito.

Con l'aiuto di queste curve è immediato passare dai valori di $(e_1)_{\max}$, $(s)_{\max}$, $(B)_{\text{des}}$ ai valori di ζ ed ω_n , in modo tale da soddisfare le specifiche considerate.

In proposito, si deve osservare che con la struttura (VI.18) non è possibile soddisfare in qualsiasi caso a tutte e tre le condizioni, come del resto si poteva prevedere avendo osservato che i parametri a disposizione sono solo due. In effetti, la limitazione (VI.16) su \hat{s} si traduce (cfr. Fig. VI.8) in una limitazione inferiore ai valori di ζ e questa (cfr. ancora Fig. VI.8) induce una limitazione superiore ai valori del rapporto $[K_v/B]$. In altri termini, la struttura proposta non è compatibile con valori arbitrari di ζ e del rapporto $[K_v/B]$; se il valore di quest'ultimo è troppo elevato occorre di norma ricorrere a strutture che consentano una maggiore libertà.

II) Modello compensato. La limitazione incontrata nel caso precedente corrisponde sostanzialmente a ciò che si verifica nella sintesi per tentativi quando il valore del coefficiente K' che compete ad $F(s)$ in base a specifiche riguardanti il regime permanente è tale da portare i poli della funzione di trasferimento del sistema al di fuori del settore prescritto

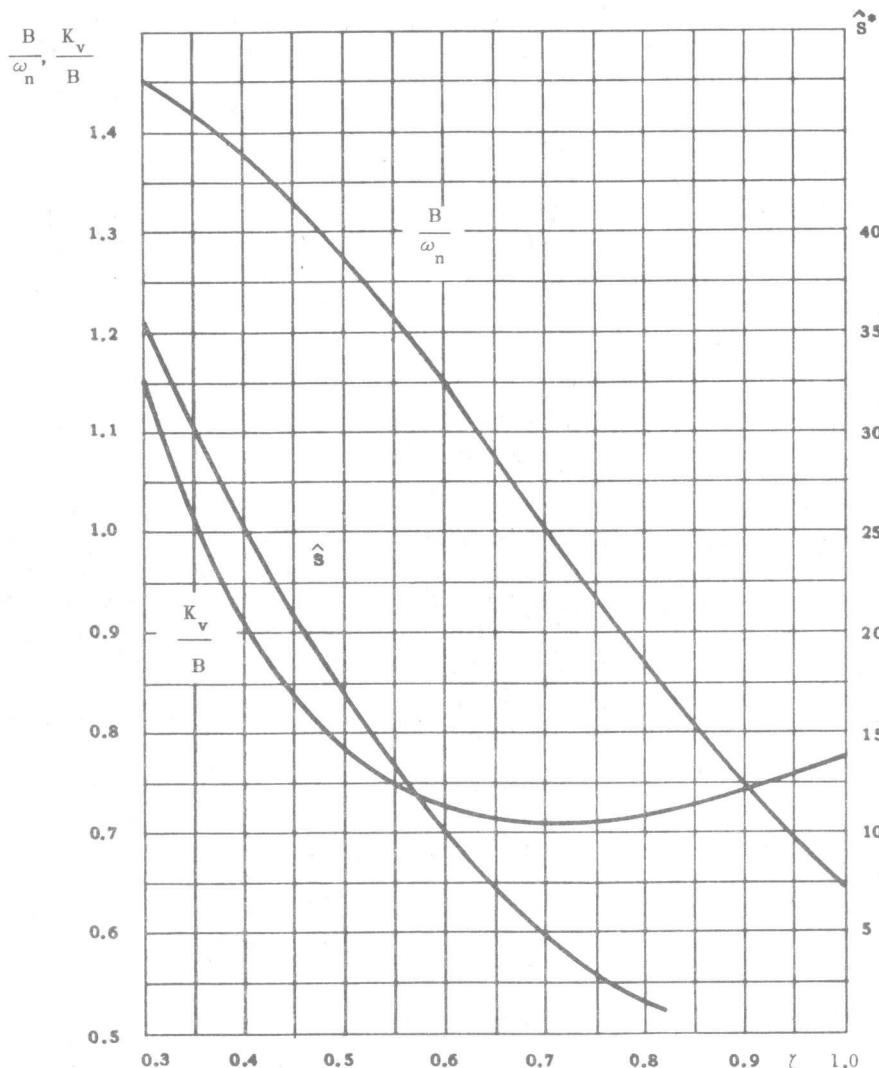


Fig. VI.8

(cfr. par. V.4). In questo caso, per rendere compatibili le specifiche riguardanti il regime permanente con quelle relative al comportamento transitorio, si ricorre ad una compensazione consistente nell'introduzione di un polo e di uno zero in posizioni opportune. In entrambi i casi esaminati nel par. V.4, la $W(s)$ risultante è caratterizzata da due poli complessi e coniugati, da uno zero reale (nel punto $-1/\tau_a$ per il caso contemplato

nella Fig.V.10 b; nel punto $-m_i/\tau_i$ per il caso contemplato nella Figura V.10 c) e da un ulteriore polo reale il quale, se K' è relativamente elevato - come peraltro accade quando i due poli complessi e coniugati sono prossimi alla frontiera del settore ammissibile - si trova alla sinistra dello zero e ad esso relativamente vicino.

Questo risultato suggerisce di assumere, allo scopo di superare la limitazione incontrata nel caso del modello elementare, una struttura di funzione di trasferimento caratterizzata da due poli complessi e coniugati, da uno zero reale e da un ulteriore polo reale posto a sinistra di questo zero. Tale funzione può essere rappresentata nella forma:

$$(VI.20) \quad W_{II}(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{m(s+z)}{(s+mz)}$$

essendo $m > 1$; si noti, in proposito, che il coefficiente m a numeratore viene aggiunto per soddisfare la condizione (VI.14).

Per individuare i legami tra i parametri ζ , ω_n , z ed m che caratterizzano la (VI.20) e le grandezze s , B e K_v scelte per individuare le prestazioni del sistema, è utile stabilire innanzitutto alcune semplici relazioni tra le risposte corrispondenti alla struttura (VI.18) e quelle corrispondenti alla struttura (VI.20).

Per quanto riguarda l'errore a regime (per un ingresso $\tilde{u}(t) = t$) si ha, dalla (VI.15);

$$(e_1)_{II} = \frac{\alpha_1 - b_1}{\alpha_0} = \frac{1}{mz} \left(mz \frac{2\zeta}{\omega_n} + 1 - m \right) = \frac{2\zeta}{\omega_n} - \frac{m-1}{mz}$$

il che consente di scrivere, tenendo conto della (VI.19);

$$(VI.21) \quad (e_1)_{II} = (e_1)_I - \frac{m-1}{mz}$$

o, il che è lo stesso;

$$(VI.21') \quad \frac{1}{(K_v)_{II}} = \frac{1}{(K_v)_I} - \frac{m-1}{mz}$$

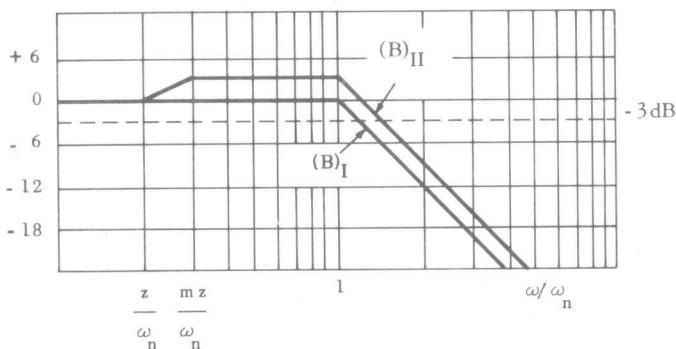
Per quanto riguarda la banda passante, conviene confrontare i diagrammi di Bode di $|W_{II}(j\omega)|$ e $|W_I(j\omega)|$, i quali differiscono per la quantità:

$$m \left| \frac{j\omega + z}{j\omega + mz} \right|$$

Se la pulsazione mz , corrispondente al polo reale di $W_{II}(s)$, è a sinistra di ω_n , così come indicato in Fig. VI.9, si può scrivere la relazione:

$$\frac{(B)_{II}}{(B)_I} = \sqrt{m}$$

Fig.VI.9



Negli altri casi il rapporto tra $(B)_{II}$ e $(B)_I$ assume valori inferiori. Se poi, come spesso accade in pratica, si sceglie per m un valore molto prossimo ad 1, risulta $\sqrt{m} \approx 1$ e si ha quindi, in ogni caso;

$$(VI.22) \quad (B)_{II} \approx (B)_I$$

Per esaminare la relazione tra le sovraelongazioni, conviene osservare che:

$$W_{II}(s) \cdot \frac{1}{s} = W_I(s) \frac{1}{s} + W_I(s) \frac{m-1}{s+mz}$$

Questa uguaglianza consente di individuare immediatamente la differenza tra la risposta al gradino unitario del sistema che ha come funzione di trasferimento la (VI.20) e quella del sistema che ha come funzione di trasferimento la (VI.18). L'espressione di questa differenza come funzione di t può essere dedotta utilizzando il teorema della convoluzione; si ottiene in tal modo:

[risposta al gradino del modello (II)] - [risposta al gradino del modello (I)] =

$$= \mathcal{L} \left[W_I(s) \frac{m-1}{s+mz} \right] = (m-1) \int_0^t W_I(\tau) e^{-mz(t-\tau)} d\tau$$

Poichè si ricerca un legame tra le sovraelongazioni (e quindi non interessa il valore di questa funzione per ogni t) è conveniente cercare una maggiorante di tale espressione; in proposito, osservando che:

$$0 \leq e^{-mz(t-\tau)} \leq 1$$

se $t \geq \tau$ e che:

$$\int_0^t W_I(\tau) d\tau \leq 1 + (\hat{s})_I$$

si ottiene immediatamente:

$$(m-1) \int_0^t W_I(\tau) e^{-mz(t-\tau)} d\tau \leq (m-1) \int_0^t W_I(\tau) d\tau \leq (m-1)(1 + (\hat{s})_I)$$

Si può allora affermare che le due sovraelongazioni differiscono per una quantità inferiore a $(m-1)(1 + (\hat{s})_I)$ ovvero, in definitiva, che:

$$(VI.23) \quad (\hat{s})_{II} \leq m (\hat{s})_I + (m-1)$$

Utilizzando le relazioni così trovate e i diagrammi della Figura VI.9, si può procedere alla determinazione dei parametriche caratterizzano la struttura (VI.20). In effetti, limitazioni del tipo (VI.15'), (VI.16) e (VI.17) possono essere soddisfatte se i valori di ζ ed ω_n che caratterizzano la (VI.20) sono tali da rendere soddisfatte le disuguaglianze:

$$(VI.24) \quad (\hat{s})_I \leq \frac{1}{m} [(\hat{s})_{max} - (m-1)]$$

$$(VI.25) \quad (B)_I = (B)_{des}$$

$$(VI.26) \quad \left(\frac{1}{K_v} \right)_I < (e_1)_{max} + \frac{m-1}{mz}$$

Per determinare tali parametri, si fissa innanzitutto m , in modo arbitrario, assegnandogli un valore di poco superiore ad 1 (ad esempio

nell'intervallo $1,0 \div 1,2$; introducendo questo nella (VI.24) si ottiene, a partire dal valore di $(\hat{s})_{\max}$ fissato dalle specifiche, il valore che deve essere attribuito ad $(\hat{s})_I$. Una volta calcolato $(\hat{s})_I$ si può utilizzare il diagramma di Fig.VI.9 per determinare il valore di ζ e, successivamente, grazie alla (VI.25), il valore di ω_n a partire dalla specifica $(B)_{des}$. Fissati ζ , ed ω_n il terzo dei diagrammi di Fig.VI.9 consente di calcolare il valore che compete a $(K_v)_I$; si tratta allora di introdurre questo valore nella (VI.26) e di individuare un opportuno valore di z che la renda soddisfatta.

Come si è visto, il soddisfacimento delle specifiche progettuali può essere in ogni caso ottenuto facendo riferimento a l'uno o all'altro dei modelli (VI.18) o (VI.20). Non è detto però che questi modelli siano sempre compatibili con le caratteristiche del processo, nel senso chiarito nel par. VI.3. In particolare, per quanto riguarda la realizzabilità, è immediato affermare che tali modelli possono essere adottati solo nei casi in cui la differenza tra il numero di poli ed il numero degli zeri della funzione $P(s)$ non è superiore a 2. In tutti gli altri casi occorre prendere in considerazione modelli diversi, caratterizzati da un numero maggiore di poli.

Il modo più semplice di affrontare questo problema è quello di cercare di ridursi ad una delle situazioni già esaminate. In proposito, si può osservare che se $W(s)$ è una funzione determinata in modo tale da soddisfare le specifiche (VI.15), (VI.16), (VI.17), anche la funzione:

$$\hat{W}(s) = W(s) \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_0}\right)^r}$$

può soddisfare le stesse specifiche purchè il valore ω_0 sia opportunamente elevato. Infatti, la corrispondente risposta armonica $\hat{W}(j\omega)$ differisce dalla risposta $W(j\omega)$ solo in corrispondenza a valori molto elevati di ω e ciò garantisce la coincidenza del tipo, del valore della costante di velocità e la sostanziale coincidenza della banda passante e della sovraelongazione (essendo, quest'ultima, legata all'ampiezza del modulo alla risonanza). D'altro canto, la $\hat{W}(s)$ ha r poli in più rispetto alla $W(s)$ e ciò può essere utilizzato per rendere questa compatibile, dal punto di vista della realizzabilità di $G(s)$, con le caratteristiche del processo.

Sulla base di queste osservazioni, la scelta del modello può avvenire nel modo seguente: si determina innanzitutto una funzione $W(s)$, del tipo (VI.18) o (VI.20), che soddisfi alle specifiche progettuali e, successivamente, si modifica quest'ultima con l'aggiunta di uno o più poli reali,

sufficientemente lontani dall'asse immaginario, in modo tale da ottenere una funzione $\hat{W}(s)$ caratterizzata da una differenza poli-zeri coincidente con quella di $P(s)$.

Resta da chiarire il senso in cui si deve intendere che i poli aggiunti a $\hat{W}(s)$ siano sufficientemente lontani. Come si è detto, quanto più ω_0 è elevato, tanto più le caratteristiche delle risposte corrispondenti a $\hat{W}(s)$ e, rispettivamente, a $W(s)$ coincidono. È però anche vero che, quanto più ω_0 è elevato, tanto più sono elevati i valori del modulo della funzione $G(j\omega)$ nella zona delle alte frequenze (si vedano, in proposito, le considerazioni svolte all'inizio del par.VI.3). La scelta di ω_0 deve quindi essere operata in modo tale da realizzare un compromesso tra queste due situazioni; in pratica, è spesso conveniente assumere per ω_0 un valore 3 o 4 volte superiore a quello della banda passante richiesta.

VI.5 - Esempi.

Si daranno ora alcuni esempi di applicazione dei procedimenti illustrati nel paragrafo precedente. In tutti i casi, la struttura cui si fa riferimento è quella indicata in Fig.VI.1.

Esempio VI.3 - Si desidera realizzare un sistema di controllo per un processo dotato di funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

in modo tale da soddisfare le specifiche:

$$K_v \geq 15$$

$$\hat{s} \leq 20\%$$

$$B = 20 \text{ rad/sec}$$

Se si vuole adottare il modello elementare (VI.18) occorre prima esaminare se i valori del rapporto K_v/B ed \hat{s} sono compatibili. In effetti, come si vede dal diagramma di Fig.VI.9, il minimo valore di ζ ammesso per quanto riguarda la specifica su \hat{s} è pari a 0,46; a questo valore corrisponde un rapporto $K_v/B = 0,83$ compatibile con le specifiche richieste e, pertanto, il modello può essere adottato. Scelto allora $\zeta = 0,46$, dal terzo dei diagrammi si ottiene $B/\omega_n = 1,32$; si deve dunque scegliere $\tilde{\omega_n} = 15 \text{ rad/sec}$.

Il modello che si vuole imporre ha la seguente espressione:

$$W_I(s) = \frac{1}{1 + 0,92 \frac{s}{15} + \frac{s^2}{225}}$$

alla quale corrisponde, per il sistema non reazionato, la funzione:

$$F(s) = \frac{225}{s(s + 13,8)}$$

Di conseguenza, per il compensatore dovrà aversi:

$$G(s) = \frac{F(s)}{P(s)} = 22,5 \frac{s + 2}{s + 13,8}$$

Per realizzare il compensatore, è utile determinare innanzitutto una rappresentazione con lo spazio di stato. Dop aver isolato la parte strettamente propria di $G(s)$, posto:

$$G(s) = 22,5 - \frac{265,5}{s + 13,8}$$

con metodi noti si deduce una forma implicita della rappresentazione, che ha dimensione 1 ed è descritta dalle equazioni:

$$\dot{x} = -13,8x + u$$

$$y = -265,5x + 22,5u$$

A queste corrisponde lo schema realizzativo di Fig. VI.10.

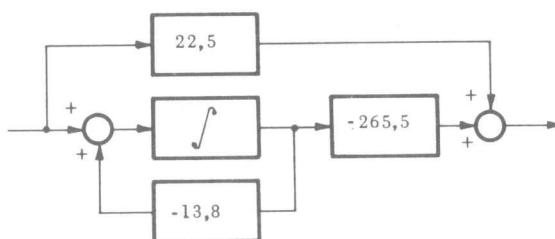


Fig. VI.10

Esempio VI.4 - Si desidera realizzare un sistema di controllo per un processo dotato di funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{50}{s(s + 5)}$$

in modo tale da soddisfare le specifiche:

$$K_v \geq 60$$

$$\hat{s} \leq 15 \%$$

$$B = 40 \text{ rad/sec}$$

In questo caso il modello (VI.18) non può essere adottato perchè il valore $K_v/B = 1,5$ è incompatibile con la specifica riguardante \hat{s} (cfr. Fig.VI.8). Si sceglie allora il modello compensato (VI.20).

Posto $m = 1,03$, si ottiene, dalla (VI.24):

$$(s)_I \leq \frac{1}{1,03} [0,13 - 0,03] = 0,097$$

Per soddisfare questa condizione si deve scegliere (cfr. Fig.VI.8) $\zeta = 0,6$. Corrispondentemente si ha:

$$\frac{(K_v)_I}{B} = 0,72$$

$$\frac{B}{\omega_n} = 1,15$$

La seconda di queste fornisce $\omega_n = 35$. La prima fornisce $(K_v)_I = 29$; introdotto questo valore nella (VI.26) e tenuto conto che $m = 1,03$, si ottiene $z = 1,63$.

Il modello che si vuole imporre ha la seguente espressione:

$$W_{II}(s) = \frac{1,03}{1 + 1,2 \frac{s}{35} + \frac{s^2}{1225}} \cdot \frac{s + 1,63}{s + 1,68}$$

alla quale corrisponde, per il sistema non reazionato, la funzione:

$$F(s) = \frac{1,035 + 1,68}{s(s^2 + 43,6s + 33,8)}$$

Di conseguenza, per il compensatore dovrà aversi:

$$(VI.27) \quad G(s) = \frac{F(s)}{P(s)} = \frac{24,5(1,035 + 1,68)(s + 5)}{s^2 + 43,6s + 33,8}$$

Ovviamente, il modello considerato non è l'unico che soddisfa le specifiche imposte. Il lettore può ad esempio verificare, a titolo di esercizio, che, se si sceglie inizialmente $m = 1,10$, gli altri parametri assumono i valori:

$$\zeta = 0,8$$

$$\omega_n = 46$$

$$z = 5,1$$

Le risposte al gradino, nei due casi, sono sostanzialmente simili (cfr. Fig. VI.11). Quella corrispondente alla scelta $m = 1,03$ è caratterizzata da un tempo di salita leggermente maggiore e si assesta più lentamente, a causa del fatto che il polo reale ($z = 1,68$) di $W_{II}(s)$ è più vicino all'origine di quello ($z = 5,61$) che si otterrebbe scegliendo $m = 1,1$.

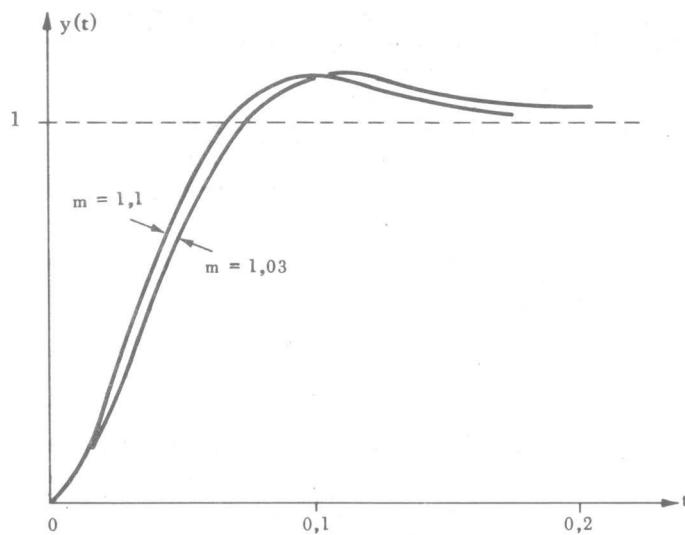


Fig. VI.11

Per realizzare la funzione (VI.27) si procede, al solito, ad isolare la parte strettamente propria, scrivendo:

$$G(s) = 25 \cdot \frac{10(93,7s + 64,8)}{s^2 + 43,6s + 33,8}$$

Da questa si deduce una rappresentazione con lo spazio di stato, che ha dimensione 2 ed è descritta dalle equazioni:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -33,8 & -43,6 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} u$$

$$y = (-64,8 \quad -93,7) \mathbf{x} + 25 u$$

Ad esse corrisponde lo schema realizzativo di Fig. VI.12.

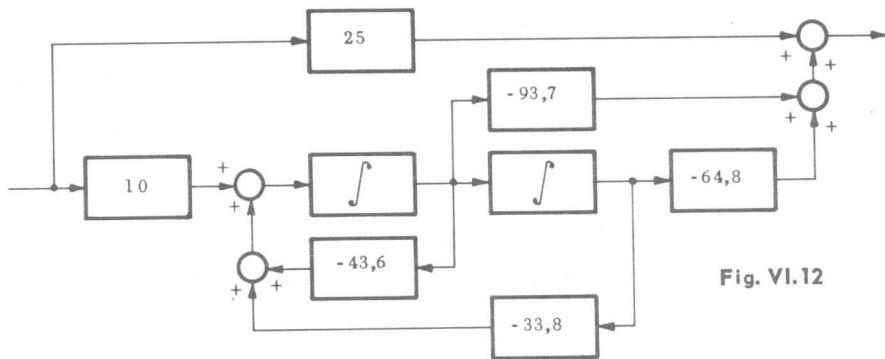


Fig. VI.12

Esempio VI.5 - Si desidera realizzare un sistema di controllo per un processo dotato di funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+5)}$$

in modo tale da soddisfare le specifiche già considerate nell'Esempio VI.3.

In questo caso il modello (VI.18), scegliendo per i parametri ζ ed ω_n i valori già indicati nell'Esempio VI.3, è in grado di soddisfare le specifiche, ma non può essere adottato direttamente in quanto la differenza poli-zeri relativa a $P(s)$ è pari a 3. Se ne adottato direttamente in quanto la differenza poli-zeri relativa a $P(s)$ è pari a 3. Seguendo le indicazioni date alla fine del par. VI.5, si tratta di modificare questo modello aggiungendo un polo reale, nel punto di ascissa $-\omega_0$. Scelto $\omega_0 = 3B = 60 \text{ sec}^{-1}$, si ottiene il modello:

$$W(s) = \frac{1}{1 + 0,92 \frac{s}{15} + \frac{s^2}{225}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{120}}$$

che soddisfa ancora le specifiche ed è compatibile con le caratteristiche del processo.

VI.6 - Pregi relativi dei metodi diretti e di quelli per tentativi.

Può essere interessante confrontare brevemente le caratteristiche dei metodi di sintesi descritti in questo capitolo con quelli illustrati nel capitolo IV.

La caratteristica che rende particolarmente interessanti i metodi qui esposti è quella di consentire la determinazione delle funzioni che caratterizzano la parte controllante in modo sistematico, senza passare attraverso la successione di verifiche e rettifiche che caratterizzano i metodi per tentativi. Per contro, il principale inconveniente dei metodi diretti è da attribuirsi al fatto che questi prescindono, almeno in linea di principio, dalla considerazione dei vantaggi offerti dalla struttura a controllazione.

A questo proposito è utile ricordare che le motivazioni a suo tempo addotte per giustificare il ricorso alla struttura a controllazione (cfr. par.I.4) sono tutte sostanzialmente riconducibili al fatto che tale struttura permette di soddisfare contemporaneamente diverse esigenze progettuali (fedeltà di risposta, indipendenza ai disturbi, insensibilità alle variazioni dei parametri) attraverso il dimensionamento opportuno dei dispositivi destinati ad elaborare la differenza tra i valori desiderati ed i valori effettivi della grandezza controllata. Quale che sia la causa di errore il sistema reagisce ad essa essenzialmente allo stesso modo. È quindi naturale che nella sintesi di un sistema a controllazione si dia la massima importanza alle modalità di elaborazione dell'errore e cioè, in definitiva, quando si considerano le risposte in frequenza, alle caratteristiche della funzione $F(j\omega)$.

In questo spirito, i metodi per tentativi rispondono al principio secondo cui un'appropriata scelta di $F(j\omega)$, grazie alle proprietà della struttura a controllazione, mette in grado di soddisfare contemporaneamente diverse esigenze progettuali. Viceversa, i metodi diretti prescindono, almeno formalmente, dalla considerazione dei vantaggi intrinseci di questa struttura e tendono al soddisfacimento delle diverse specifiche mediante l'imposizione di ben determinate caratteristiche alle diverse risposte che interessa prendere in considerazione.

I metodi per tentativi sono indubbiamente più laboriosi ma possono consentire, anche restando nell'ambito di una struttura ad un solo grado di libertà (cfr. Fig.VI.1), il soddisfacimento simultaneo di specifiche progettuali fra loro indipendenti. In quanto il progetto verte essenzialmente sulla funzione $F(j\omega)$ (che, in questa struttura, caratterizza tutti gli aspetti di interesse). I metodi diretti, invece, pur essendo sistematici sono più rigidi e impongono, quando si debbano raggiungere più obiettivi, il ricorso a schemi di controllo meno elementari di quello a un solo grado di libertà.

Un altro aspetto importante è il fatto che, in pratica è la funzione $F(s)$ quella che deve essere realizzata fisicamente. Se il progettista lavora direttamente su $F(s)$, è facile per lui tenere presente ogni eventuale vincolo riguardante la costruzione dei dispositivi di correzione (la differenza poli-zeri, le ampiezze di $G(j\omega)$, ecc.); al contrario, se si procede partendo dalla funzione $W(s)$, questi vincoli intervengono inizialmente in modo indiretto (cfr. par. VI.3) e soltanto dopo che è stata calcolata $G(s)$, cioè al termine del procedimento, essi possono essere considerati in modo esplicito. Può quindi accadere che, dopo avere scelto la corrispondente funzione $G(s)$, ci si renda conto che questa non può essere di fatto realizzata, il che comporta, ovviamente, di dover ripetere tutto il procedimento a partire da una diversa funzione $W(s)$.

PROBLEMI

- VI.1** - Si risolva, usando un metodo diretto, il problema di sintesi già considerato al n. IV.2. A questo scopo, si dovrà preliminarmente trasformare, usando i legami descritti nel par. III.6, la specifica sul margine di fase in specifica sulla sovraelongazione nella risposta al gradino. Per quanto riguarda la banda passante, si assuma $(B)_{des} = 10 \text{ rad/sec}$.
- VI.2** - Con riferimento al problema VI.2, si determini quale è il massimo valore che si può imporre alla banda passante compatibilmente con il vincolo che il modulo della funzione $G(j\omega)$, per $\omega \rightarrow \infty$, non superi il valore di 40 dB. A questo scopo, sarà utile considerare una costruzione del tipo di quelle indicate in Fig.VI.7.
- VI.3** - Si risolva, usando un metodo diretto, il problema di sintesi già considerato al n. IV.3. Per quanto riguarda la banda passante, si assuma $(B)_{des} = 1 \text{ rad/sec}$.
- VI.4** - Quale modifica sarebbe necessaria alla funzione $G(s)$ sintetizzata nel corso del problema precedente per avere una banda passante di 100 rad/sec? Quale conseguenza ciò avrebbe sulla realizzabilità di $G(s)$?
- VI.5** - Si risolva, usano un metodo diretto, il problema di sintesi già considerato al n. IV.4. A questo scopo, si dovrà preliminarmente trasformare, usando i legami descritti nel par. III.6, la specifica sul tempo di salita in una sulla banda passante. Si determini una realizzazione fisica del dispositivo di compensazione.
- VI.6** - Si consideri il problema del controllo di assetto di una nave, già esaminato al n. I.3. Si determini, usando i metodi della sintesi diretta, uno schema di controllo avente come scopo quello di attenuare le oscillazioni dovute al moto ondoso di un fattore pari almeno a 1/10, nella banda compresa tra 0 e 4 rad/sec.

*

CAPITOLO VII

SISTEMI A CONTROLLO NUMERICO

VII.1 - Generalità.

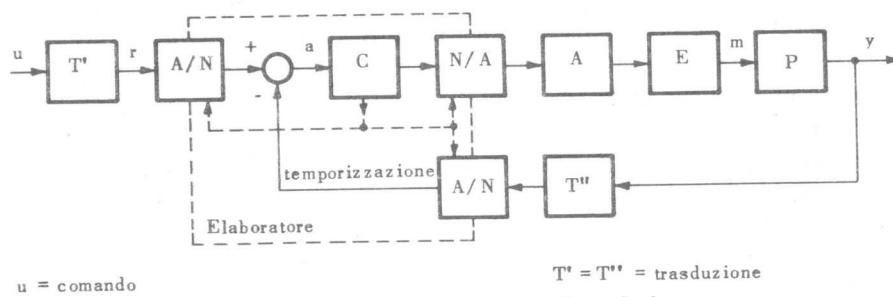
Un sistema di controllo a controllazione viene detto *sistema a controllo numerico diretto* quando le funzioni attribuite ai dispositivi di controllo vengono svolte, in parte o totalmente, da elaboratori elettronici. Facendo riferimento alle strutture di controllo del tipo fin qui considerato, tutte sostanzialmente riconducibili a quella descritta nel par.I.7 (strutture nelle quali è possibile isolare, come *processo controllato*, una parte che è dotata di caratterizzazione fisica autonoma rispetto al sistema nel suo complesso), i sistemi a controllo numerico diretto sono quelli nei quali viene impiegato un elaboratore elettronico allo scopo di generare la cosiddetta grandezza agente (*confronto* tra la grandezza di riferimento e quella corrispondente alla grandezza controllata) e allo scopo di calcolare, a partire da questa, la legge di controllo che deve essere imposta al processo attraverso la grandezza controllante (*elaborazione della grandezza agente*). Poiché, in generale, il processo controllato è un oggetto fisico cui corrispondono grandezze di ingresso e di uscita che sono funzioni continue del tempo, per poter affidare all'elaboratore elettronico le funzioni predette, è necessario interporre, tra questo e le restanti parti del sistema di controllo, opportuni dispositivi di conversione *analogico-numerica* e *numerico-analogica*. Il sistema di controllo, in questo caso, viene ad assumere una struttura di massima del tipo di quella indicata in Fig.VII.1 (si confronti, in proposito, lo schema di Figura I.21 a).

Il ruolo dei dispositivi di conversione analogico-numerica è quello di produrre in uscita, a partire dalla funzione di variabile continua presente in ingresso, una funzione di variabile discreta, o intera, i cui valo-

ri coincidono con i valori assunti dalla prima funzione in istanti di tempo ugualmente intervallati, a meno di una quantità prefissata il cui valore dipende dalla lunghezza di parola prevista per l'elaboratore. In questo dispositivo hanno luogo un processo di *campionamento*, nel quale a partire da una funzione $f(t)$ della variabile reale t si produce la funzione di variabile intera h :

$$(VII.1') \quad f_T^l(h) = f(hT) \quad h = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

(essendo T l'ampiezza del cosiddetto *intervallo di campionamento*) e un processo di *arrotondamento* o quantizzazione, nel quale ciascuno dei valori assunti della funzione $f_T^l(h)$ viene rappresentato mediante un numero definito di cifre, corrispondente alla lunghezza di parola prescelta.



u = comando

r = riferimento

a = grandezza agente

m = grandezza controllante

y = grandezza controllata

A/N = conversione analogica \rightarrow numerica

N/A = conversione numerica \rightarrow analogica

$T' = T''$ = trasduzione

C = calcolo

A = amplificazione

E = esecuzione

P = processo

Fig.VII.1

Il ruolo dei dispositivi di conversione numerico-analogica, sostanzialmente reciproco del precedente, è quello di produrre in uscita, a partire da una funzione di variabile intera $g_T^l(h)$ presente in ingresso, una funzione di variabile continua $g(t)$ soddisfacente alla condizione:

$$(VII.1'') \quad g(hT) = g_T^l(h)$$

Il ruolo dell'elaboratore, come già detto, è quello di effettuare la differenza tra la grandezza di riferimento e quella corrispondente alla grandezza controllata e di generare, a partire da tale differenza, una legge di controllo (sotto forma di funzione di variabile intera, a valori arrotondati) atta a far assumere alla grandezza controllata l'andamento desiderato. In questo ambito l'elaboratore provvede anche alla opportuna sin-

cronizzazione di tutte le operazioni di conversione e di quelle corrispondenti alla generazione della legge di controllo.

L'interesse all'impiego dell'elaboratore come componente di un sistema di controllo può essere esaminato sotto diversi aspetti. Un *primo aspetto* è essenzialmente legato al fatto che il compito di generazione della legge di controllo, affidato all'elaboratore, si materializza nello svolgimento di un programma di calcolo. Da questo punto di vista appare evidente la grande *versatilità* di un sistema a controllo numerico diretto, nel quale ad ogni modifica della struttura e dei parametri del controllore corrisponde sostanzialmente una modifica della struttura e dei parametri di un programma di calcolo.

Un *secondo aspetto*, che va considerato soprattutto in relazione al problema del controllo di impianti industriali, è legato alla possibilità di affidare ad un medesimo elaboratore il compito di controllare simultaneamente un numero elevato di variabili relative al medesimo impianto, operando per *divisione di tempo*.

Un *terzo aspetto* è legato alla possibilità di affidare all'elaboratore ulteriori compiti di controllo, di tipo diverso da quelli considerati sino a questo punto. Questi possono essere, tra gli altri, compiti di sorveglianza, di gestione o, più in generale, compiti legati al *controllo gerarchico di un sistema complesso*. Con questo termine si caratterizzano generalmente quei problemi di controllo che vengono affrontati cercando di decomporre il problema originario in un certo numero di sotto-problemi più semplici. Nel caso in cui è possibile decomporre il processo in più sotto-processi, il controllo può venire effettuato secondo una struttura gerarchica detta a due livelli: ai dispositivi del *livello inferiore* è affidato il compito di controllare, a contoreazione, le uscite di ciascun sotto-processo, ignorando le interazioni tra questo e gli altri, mentre a quello del *livello superiore* è affidato il compito di coordinare le diverse azioni di controllo esercitate al livello inferiore in modo tale da compensare l'effetto delle interazioni tra i sotto-processi. Nel caso in cui è possibile decomporre l'obiettivo in più sotto-obiettivi, definiti in rapporto ad aspetti parziali del problema, si effettua il controllo secondo una struttura gerarchica detta a più strati: ad un *primo strato* si può affidare il compito di tener conto della dinamica del processo, eliminando i disturbi con maggiore rapidità di variazione, ad un *secondo strato* la funzione di variare i valori dei riferimenti in maniera da adeguarsi al varia-re delle condizioni operative, ad un *terzo livello* quella di identificare il processo elaborando una stima aggiornata e di adattare in conseguenza le azioni controllanti, ecc.

In questo capitolo ci si limiterà essenzialmente a considerare i problemi che si pongono nel progetto di un sistema a controllo numerico diretto con un solo ingresso ad una sola uscita. Come si mostrerà, questi

problemi possono essere essenzialmente ricondotti (par. VII.2) al problema della sintesi di un sistema di controllo a tempo discreto, che può venire risolto sia mediante procedimenti del tutto analoghi a quelli sviluppati per i sistemi a tempo continuo (par. VII.3, VII.4 e VII.5) sia mediante procedimenti che sono caratteristici di questa classe particolare di sistemi (par. VII.6). Una considerazione particolare è dedicata poi all'analisi dell'influenza esercitata dai parametri che caratterizzano i dispositivi di conversione sulle prestazioni del sistema nel suo complesso (par. VII.7).

VII.2 - Analisi della risposta di un sistema a controllo numerico.

Come si è già osservato, la struttura di massima di un sistema a controllo numerico è del tipo di quella indicata in Fig.VII.1. In questa struttura sono presenti parti alle quali è abituale associare sistemi astratti a tempo continuo (tipicamente, il processo controllato) e parti alle quali è naturale associare sistemi astratti a tempo discreto (l'elaboratore destinato al controllo). Per analizzare la risposta di un sistema di questo genere si rende dunque necessario mettere dapprima a punto un metodo di studio che consenta di utilizzare in modo consistente le diverse rappresentazioni che si possono dare per ciascuno dei sottosistemi, almeno nell'ambito del particolare problema che si è considerato.

A questo scopo è utile innanzitutto formalizzare le funzioni dei dispositivi di conversione interposti tra la parte a tempo continuo e quella a tempo discreto. Per quanto riguarda il convertitore analogico-numerico, risulta conveniente, in una prima approssimazione, trascurare il fenomeno dell'arrotondamento e riguardare questo come un *campionatore ideale*, con passo di campionamento T . Un campionatore ideale è un ente astratto che associa, ad una funzione di ingresso $f(t)$ della variabile reale t , la funzione di uscita $f'_T(h)$ della variabile intera h definita dalla (VII.1') e viene rappresentato col simbolo indicato in Fig.VII.2.

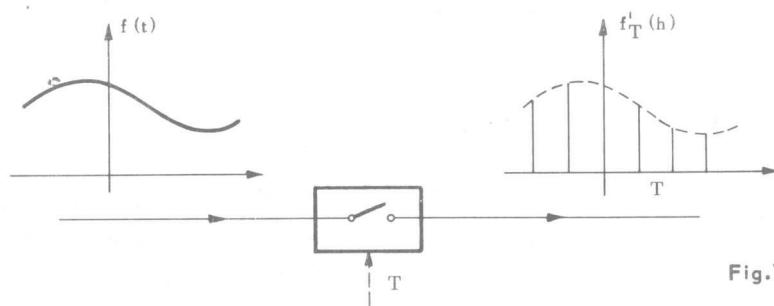


Fig.VII.2

Ovviamente l'approssimazione che si introduce in questo modo è tanto migliore quanto più è piccolo l'errore che il convertitore commette nell'arrotondare i valori della funzione $f_T^i(h)$ e cioè, in definitiva, quanto è maggiore la lunghezza di parola su cui opera l'elaboratore.

Per quanto riguarda il convertitore *numerico-analogico*, si può pensare di descriverne il funzionamento, in modo astratto, come quello di un ente il quale associa, ad una funzione di ingresso $g_T^i(h)$ della variabile intera h , la funzione di uscita $g(t)$ della variabile continua t definita dalla relazione:

$$(VII.2) \quad g(t) = g_T^i(h) \quad \text{per} \quad hT \leq t < hT + T$$

In questo caso, la funzione $g(t)$ è una funzione che assume nell'intervalllo $[hT, (h+1)T]$, un valore costante pari al valore della funzione di ingresso in corrispondenza all'intero h . Un tale dispositivo prende il nome di organo di *tenuta di ordine zero* (cfr. Fig. VII.3 a).

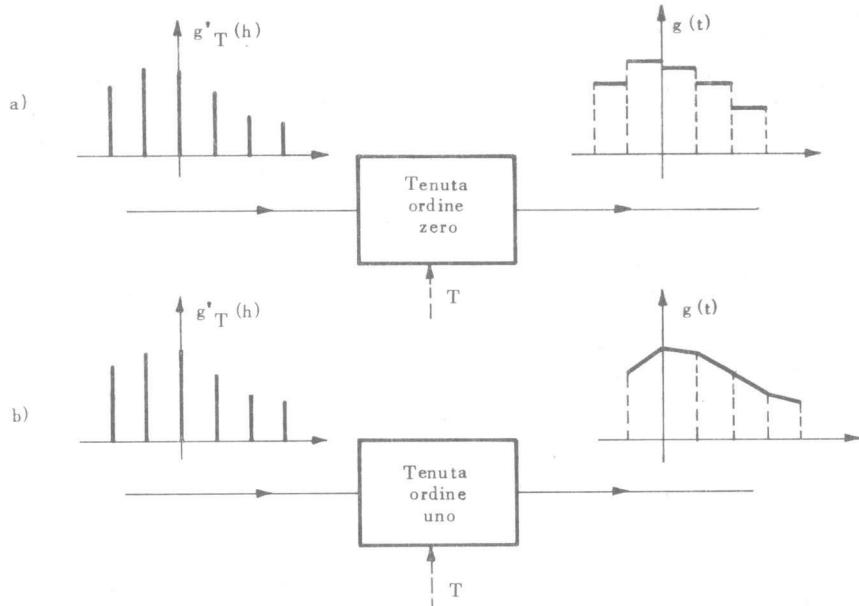


Fig.VII.3

Talvolta si può avere a che fare con un dispositivo che produce in uscita una funzione che ha pendenza costante nell'intervalllo $[hT, (h+1)T]$ ed assume, negli estremi di tale intervallo, valori corrispondenti a quelli della funzione $g_T^i(h)$; in tal caso si ha a che fare con un organo di *tenuta di ordine uno* (cfr. Fig. VII.3 b).

Si noti che, in Fig. VII.3b, la funzione di uscita è ritardata, rispetto a quella di ingresso, di una quantità pari a T . Questo perché, se si sceglie di attribuire a $g(t)$ un andamento del tipo:

$$g(t) = g'_T(h) + \frac{t}{T} (g'_T(h+1) - g'_T(h)),$$

è necessario attendere l'acquisizione del valore $g'_T(h+1)$ prima di poter generare tale funzione.

Ciò posto, si può osservare che il sistema considerato presenta una struttura del tipo di quella indicata in Fig. VII.4. In tale schema sono indicate anche le diverse funzioni del tempo (continuo o discreto) corrispondenti alle diverse grandezze, facendo riferimento, per quanto riguarda l'organo di tenuta, ad una tenuta di ordine zero.

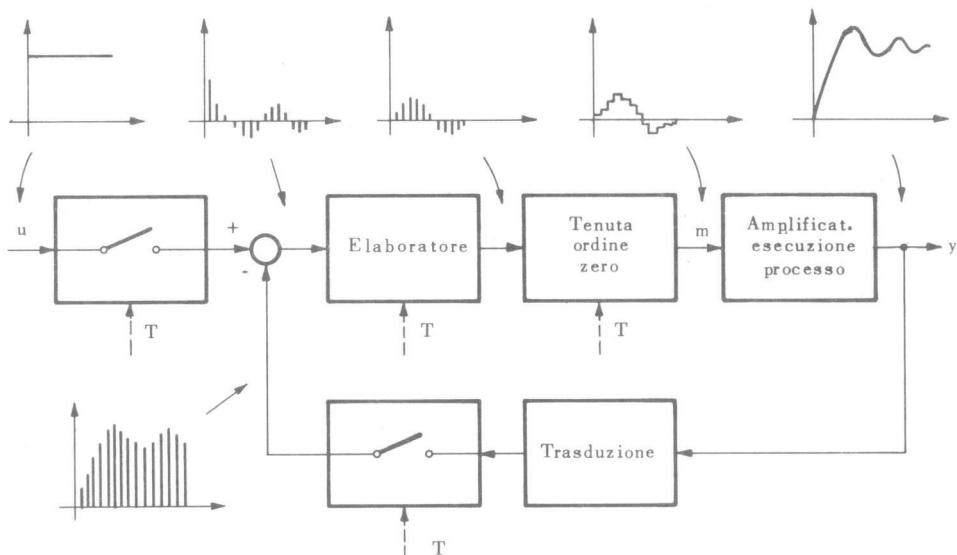


Fig.VII.4

La parte dello schema corrispondente agli organi di amplificazione, di esecuzione o al processo è composta da sottosistemi a tempo continuo e, come tale, può essere caratterizzata da unica funzione di trasferimento, che si indicherà con $P(s)$. La parte invece corrispondente all'elaboratore è relativa ad un sottosistema a tempo discreto e può essere caratterizzata da una funzione di trasferimento che si indicherà con $G(z)$. Nell'ipotesi (peraltro già accettata) che il dispositivo di trasduzione (il quale, nello schema di Fig. VII.4, corrisponde ad un sistema a tempo

continuo) si possa ritenere istantaneo, è possibile passare ad un tipo di descrizione nella quale tutti i sottosistemi che compongono lo schema sono caratterizzati da grandezze omogenee. In tali ipotesi è lecito sostituire allo schema di Fig. VII.4 uno schema in cui, nel ramo di reazione, il campionatore precede il blocco corrispondente al dispositivo di trasduzione (il quale, in tal caso viene ad essere considerato come un sistema a tempo discreto). Indicato con K_H il coefficiente moltiplicativo che caratterizza il dispositivo di trasduzione, allo schema può essere data la forma indicata in Fig. VII.5.

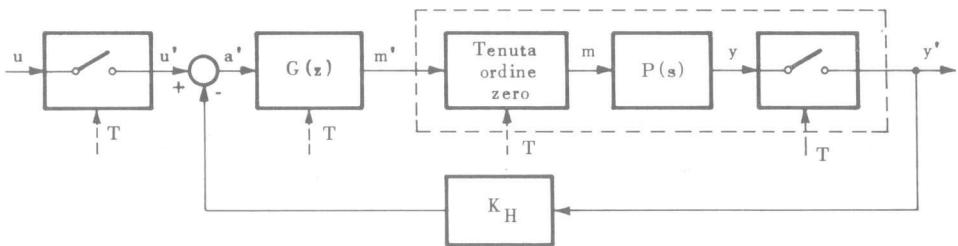


Fig.VII.5

In proposito, si può osservare che l'uscita y' dello schema di figura VII.5 è una funzione di variabile discreta coincidente, negli istanti di campionamento, con i valori assunti dall'uscita y (funzione di variabile continua) dello schema di fig. VII.4.

Il sistema indicato nel blocco tratteggiato è un sistema a tempo discreto: le funzioni di ingresso e di uscita ad esso relative sono funzioni di variabile discreta. Si può allora descrivere tale sistema con una funzione di trasferimento, che sarà indicata con $P(z)$. In tal caso, la dipendenza tra le grandezze u' ed y' del sistema di Fig. VII.5 può essere rappresentata con un anello composto di soli sottosistemi a tempo discreto, come indicato in Fig. VII.6.

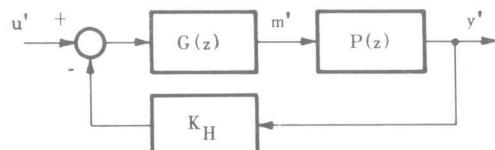


Fig.VII.6

Risulta da quanto precede che lo studio del funzionamento del sistema di fig. VII.6 sottoposto ad un ingresso u' ottenuto dal campionamento dell'ingresso u del sistema di fig. VII.5 permette di conoscere esattamente i valori assunti dall'uscita y del sistema di fig. VII.5, purchè ci si limiti a considerare questi ultimi solo negli istanti di campionamento. In

altri termini, lo schema di Fig.VII.6 è equivalente a quello di Fig.VII.5 solo ai fini del calcolo dell'uscita negli istanti di campionamento.

Per utilizzare queste considerazioni ai fini dello studio della risposta del sistema (nei limiti precisati) occorre ora:

- analizzare come sia possibile ottenere, a partire dalla funzione $P(s)$ che caratterizza il processo nello schema di Fig.VII.5 e dalla descrizione del comportamento dell'organo di tenuta, la funzione $P(z)$ che caratterizza il processo nello schema di Fig.VII.6;
- studiare, con i metodi propri della teoria dei sistemi a tempo discreto, il sistema descritto in Fig.VII.6.

Al primo di questi due punti è dedicato il seguito di questo paragrafo.

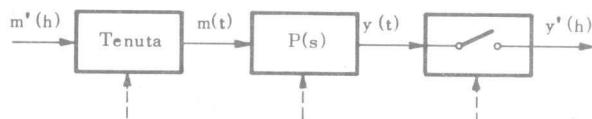


Fig.VII.7

Si consideri in proposito il sistema descritto in Fig.VII.7 (corrispondente alla parte entro il riquadro tratteggiato in Fig.VII.5) e si indichino con $m'(h)$ e, rispettivamente, $m(t)$ la funzione (di variabile discreta e, rispettivamente, continua) presente all'ingresso e all'uscita dell'organo di tenuta (per semplicità di notazione si è omesso di indicare, come pedice ad $m'(t)$ ed $y'(t)$, la grandezza T rappresentativa dell'ampiezza di intervallo di campionamento). Facendo riferimento, come si è detto, ad una tenuta di ordine zero, si può pensare di rappresentare la funzione $m(t)$ come somma indefinita di funzioni del tipo:

$$m_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < hT \\ m'(h) & \text{per } t \in [hT, (h+1)T) \\ 0 & \text{per } t \geq (h+1)T \end{cases}$$

e cioè di funzioni di forma rettangolare del tipo indicato in Fig.VII.8. Poiché per ciascuna di queste funzioni si può scrivere:

$$\mathcal{L}[m_h(t)] = m'(h) \frac{1 - e^{-sT}}{s} e^{-shT}$$

è immediato dedurre che:

$$(VII.3) \quad \mathcal{L}[m(t)] = \sum_{h=0}^{\infty} m'(h) \frac{e^{-shT} - e^{-(h+1)T}}{s}$$

Si noti che la (VII.3) si può interpretare come trasformata di Laplace della risposta di un sistema a tempo continuo avente come funzione di trasferimento la funzione:

$$(VII.4) \quad T(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

e sottoposto ad un ingresso costituito da una successione di impulsi di Dirac, ciascuno centrato nell'istante T e di area pari a $m^*(h)$. Tale ingresso si può indicare con l'espressione:

$$(VII.5) \quad m^*(t) = \sum_{h=0}^{\infty} m^*(h) \delta(t - hT)$$

La suddetta interpretazione consente di ridurre lo schema di figura VII.7 allo schema di Fig.VII.9.

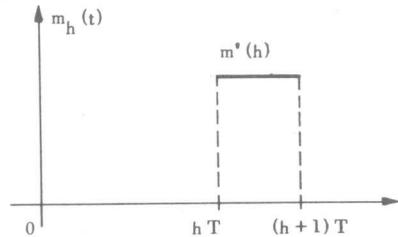


Fig.VII.8

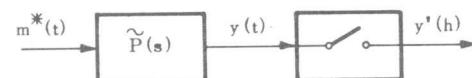


Fig.VII.9

nel quale si è indicata $\tilde{P}(s)$ la funzione:

$$(VII.6) \quad \tilde{P}(s) = T(s) P(s)$$

Si tratta ora di calcolare l'uscita $y(t)$ del sistema a tempo continuo avente funzione di trasferimento $\tilde{P}(s)$, sottoposto all'ingresso $m^*(t)$, e poi di considerarne i campioni agli istanti $t = hT$. Indicata con $\tilde{P}(t)$ la risposta impulsiva del sistema (trasformata inversa di $\tilde{P}(s)$) si ha evidentemente, grazie alla forma dell'ingresso $m^*(t)$ indicata nella (VII.5):

$$(VII.7) \quad y(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \tilde{P}(t - hT) m^*(h)$$

Essendo interessati solamente al calcolo dei campioni della (VII.7) agli istanti $t = hT$ è sufficiente scrivere (indicando con k la variabile rispetto alla quale si somma):

$$\begin{aligned}
 y'(h) &= y(hT) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}(hT - kT) m'(k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(h - k) m'(k) \\
 (VII.8) \quad &= \sum_{k=0}^h P(h - k) m'(k)
 \end{aligned}$$

avendo posto, consistentemente con le convenzioni già adottate,

$$(VII.9) \quad P(h) = \tilde{P}(hT) \quad h = 0, 1, \dots$$

Nell'ultimo passaggio si è poi tenuto conto che $P(h) = 0$ per $h < 0$.

La (VII.8) caratterizza il legame tra la funzione di variabile discreta $m'(h)$, presente in ingresso al sistema di Fig.VII.7, e la funzione di variabile discreta $y'(h)$, presente in uscita. Essa dunque definisce il sistema a tempo discreto equivalente (nei limiti precisati più sopra) al sistema in esame. Questo sistema a tempo discreto è lineare e la sua risposta all'impulso $P(h)$ si ottiene mediante un campionamento uniforme della risposta impulsiva $\tilde{P}(t)$ del sistema a tempo continuo individuato attraverso la (VII.6).

La suddetta costruzione esaurisce completamente il problema considerato. Da un punto di vista computazionale, per applicare quanto discusso è necessario specificare la forma in cui sono disponibili i dati di partenza (se si dispone della funzione di trasferimento del processo $P(s)$ o della sua risposta impulsiva $P(t)$) e la forma in cui si desidera siano disponibili i dati di arrivo (se si desidera la risposta all'impulso $P(h)$ del sistema a tempo discreto equivalente ovvero la sua trasformata $P(z)$). Il caso più comune è quello in cui si desidera passare da $P(s)$ a $P(z)$. Pur essendo disponibili procedimenti generali e diretti (per passare da una funzione $\tilde{P}(s)$ alla trasformata della funzione di variabile discreta che si otterrebbe campionando uniformemente la trasformata inversa della $\tilde{P}(s)$ data), in molti casi è conveniente eseguire i passaggi nel modo corrispondente alla procedura indicata sopra. Si tratta cioè di passare dalla $\tilde{P}(s)$ alla $\tilde{P}(t)$, da questa alla $P(h)$ e, poi, da quest'ultima ancora alla $P(z)$; si ricordi, peraltro, che $\tilde{P}(s)$ si ottiene da $P(s)$ per mezzo delle (VII.6) e (VII.4). Con tale procedura si risolve il problema nell'esempio che segue.

Esempio VII.1 - Sia data:

$$P(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

il che, per la (VII.6), comporta:

$$\tilde{P}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s^2(1+s)}$$

Grazie al teorema della traslazione in t ed alla linearità della trasformata di Laplace, per calcolare $P(t)$ è sufficiente calcolare la trasformata inversa di:

$$\tilde{Q}(s) = \frac{1}{s} P(s) = \frac{1}{s^2(1+s)}$$

Si ha, in proposito:

$$\tilde{Q}(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

ovverosia:

$$(VII.10) \quad \tilde{Q}(t) = (t - 1 + e^{-t})$$

e, inoltre,

$$\tilde{P}(t) = \tilde{Q}(t) - \tilde{Q}(t-T)$$

Ponendo ora $t = hT$ e $\tilde{Q}(h) = \tilde{Q}(hT)$ si ha da questa:

$$P(h) = Q(h) - Q(h-1)$$

e, quindi, per il teorema della traslazione in z :

$$(VII.11) \quad P(z) = Q(z) - \frac{1}{z} Q(z) = \frac{z-1}{z} Q(z)$$

(essendo $Q(z) = \mathcal{Q}[Q(h)]$).

Rimane dunque da calcolare la funzione $Q(z)$. Ponendo $t = hT$ nella (VII.10), si ha:

$$Q(h) = hT - 1 + (e^{-T})^h$$

$$Q(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}$$

Sostituendo questa nella (VII.11) ed effettuando le semplificazioni si ottiene, in definitiva;

$$P(z) = \frac{T}{(z-1)} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-T}} = \frac{T}{z-1} + \frac{e^{-T}-1}{z-e^{-T}} = \frac{(T+e^{-T-1})z - Te^{-T} - e^{-T} + 1}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

VII.3 - La risposta in regime permanente nei sistemi di controllo a tempo discreto.

In questo paragrafo si passeranno brevemente in rassegna le caratteristiche della risposta in regime permanente in un sistema di controllo a contoreazione a tempo discreto, considerando il caso di ingressi e/o disturbi polinomiali e sinusoidali. Come si vedrà, l'analisi può essere impostata in maniera sostanzialmente analoga a quella svolta nei par. III.2, III.3, III.4 e III.5; per questo motivo quasi tutti i risultati verranno presentati senza soffermarsi in dettaglio sugli aspetti dimostrativi, che si lasciano per esercizio al lettore.

Per snellire la notazione si ometterà, non essendovi possibilità di confusione, di indicare con un apice le funzioni di variabile discreta che saranno di volta in volta considerate; l'uso di tale notazione sarà peraltro ripreso, a scopo di maggiore chiarezza, a partire dal par. VII.5.

Per affrontare l'analisi della risposta ad ingressi di forma polinomiale conviene innanzitutto ricordare che, in un sistema a tempo discreto caratterizzato da una funzione di trasferimento $W(z)$, la risposta in regime permanente ad un ingresso della forma:

$$(VII.12) \quad \tilde{u}(h) = \frac{h^{(k)}}{k!} = \frac{h(h-1)\dots(h-k+1)}{k!}$$

(polinomio fattoriale canonico di ordine k) assume l'espressione:

$$\hat{y}(h) = \hat{C}_0 \frac{h^{(k)}}{k!} + \hat{C}_1 \frac{h^{(k-1)}}{(k-1)!} + \dots + \hat{C}_{k-1} h^{(1)} + \hat{C}_k$$

(del tutto analoga alla (III.7)), essendo:

$$\hat{C}_i = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i W(z)}{dz^i} \right)_{z=1}$$

Di conseguenza, definendo di tipo k un sistema di controllo a tempo discreto nel quale la risposta a regime permanente all'ingresso (VII.12) differisca dalla risposta desiderata:

$$y_d(h) = K_d \frac{h^{(k)}}{k!}$$

per una quantità costante e diversa da zero, si può facilmente mostrare che un sistema assegnato è di tipo k se e solo se la corrispondente funzione di trasferimento di errore:

(VII.13) $W_e(z) = K_d - W(z)$

ha nel punto $z = 1$ uno zero di molteplicità k . Il valore finito dell'errore e_k presente nella risposta in regime permanente di un sistema di tipo k all'ingresso (VII.12) si può calcolare con le espressioni:

(VII.14') $e_0 = [W_e(z)]_{z=1} = K_d - [W(z)]_{z=1}$

(VII.14'') $e_k = \left[\frac{1}{(z-1)^k} W_e(z) \right]_{z=1}$

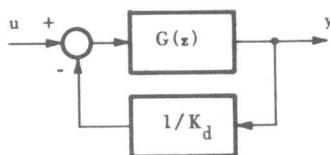


Fig.VII.10

Se il sistema presenta una struttura a controllazione, del tipo di quella indicata in Fig.VII.10, la funzione di trasferimento $W(z)$ assume l'espressione:

(VII.15) $W(z) = \frac{G(z)}{1 + \frac{G(z)}{K_d}}$

e, quindi, la funzione di trasferimento di errore $W_e(z)$ l'espressione:

(VII.16) $W_e(z) = \frac{K_d^2}{K_d + G(z)}$

Tale sistema è di tipo k se e solo se la funzione di trasferimento del ramo diretto $G(z)$ ha un polo di molteplicità k nel punto $z = 1$. Corrispondentemente, l'errore e_k può essere calcolato con le formule:

$$e_0 = \frac{K_d^2}{K_d + [G(z)]_{z=1}} = \frac{K_d^2}{K_d + K_G}$$

$$e_k = \frac{K_d^2}{[(z-1)^k G(z)]_{z=1}} = \frac{K_d^2}{K_G}$$

Queste formule sono sostanzialmente coincidenti con le (III.20) e (III.21); l'unica differenza riguarda l'espressione del coefficiente di guadagno K_G della funzione di trasferimento del ramo diretto, che questa volta viene definito considerando il valore di $(z-1)^k G(z)$ (nell'ipotesi che $G(z)$ abbia nel punto $z=1$ un polo di molteplicità k) nel punto $z=1$.

In modo del tutto analogo a quello considerato nel par. III.4 si può studiare la risposta in regime permanente di un sistema di controllo a controllazione, a tempo discreto, a disturbi costanti. Il lettore non avrà difficoltà a ritrovare risultati corrispondenti a quelli già stabiliti per i sistemi a tempo continuo.

Per quanto riguarda la risposta a ingressi o disturbi di tipo sinusoidale, occorre ricordare che un sistema a tempo discreto caratterizzato da una funzione di trasferimento $W(z)$, ad un ingresso della forma:

$$(VII.17) \quad \tilde{u}(h) = \sin \tilde{\theta} h$$

risponde, in regime permanente, con un'uscita della forma:

$$(VII.18) \quad y(h) = M(e^{j\tilde{\theta}}) \sin [\tilde{\theta}h + \varphi(e^{j\tilde{\theta}})]$$

essendo $M(e^{j\tilde{\theta}})$ e $\varphi(e^{j\tilde{\theta}})$ i valori del modulo e della fase della funzione $W(z)$ calcolata per $z = e^{j\tilde{\theta}}$ (risposta armonica di un sistema a tempo discreto). Grazie a questa proprietà è possibile dedurre tutta una serie di risultati corrispondenti a quelli già stabiliti nel par. III.5, a seconda del particolare schema di controllo che si prende di volta in volta in considerazione.

Un aspetto particolare che caratterizza i sistemi a tempo discreto e che è importante mettere in evidenza a proposito della risposta ad ingressi o disturbi sinusoidali riguarda i valori del parametro $\tilde{\theta}$ che individua la funzione (VII.17). Si può immediatamente constatare, tenendo presente note proprietà trigonometriche, che due diversi ingressi del tipo (VII.17):

$$\tilde{u}_1(h) = \sin \tilde{\theta}_1 h$$

$$\tilde{u}_2(h) = \sin \tilde{\theta}_2 h$$

risultano coincidenti se la differenza $\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2$ è un multiplo intero di 2π , ovvero differiscono soltanto per il segno se $\tilde{\theta}_1 = -\tilde{\theta}_2$. Di conseguenza, quando si considerano ingressi del tipo (VII.17) ha senso riferirsi esclusivamente a valori di θ compresi nell'intervallo $[0, \pi]$. Questo fatto non trova un riscontro immediato nel caso dei sistemi a tempo continuo, essendo possibile considerare per la pulsazione $\tilde{\omega}$ che caratterizza la funzione (III.28) valori comunque elevati.

Questa osservazione può essere ulteriormente approfondita se si pensa di considerare il caso di un sistema a controllo numerico del tipo esaminato all'inizio di questo capitolo. In un sistema di questo genere gli ingressi effettivi (siano essi ingressi propriamente detti o disturbi) sono funzioni continue del tempo; di conseguenza, se si decide - come si è fatto - di studiare tali sistemi riducendoli inizialmente a sistemi in cui tutti i componenti siano sottosistemi a tempo discreto, le funzioni di ingresso che occorrerà considerare per questi ultimi saranno funzioni di variabile intera ottenute mediante campionamento di funzioni di variabile continua (si confronti, ad esempio, lo schema di fig. VII.5, osservando che la funzione di variabile intera $u'(h)$ proviene dal campionamento della funzione di variabile continua $u(t)$).

Nel caso di funzioni sinusoidali può accadere che due diversi ingressi al sistema:

$$\tilde{u}_1(t) = \sin \tilde{\omega}_1 t$$

$$\tilde{u}_2(t) = \sin \tilde{\omega}_2 t$$

una volta campionati, diano luogo alla stessa funzione di variabile intera e cioè, in altri termini, a due ingressi identici per quella parte di sistema che viene considerata a tempo discreto. Perchè ciò accada, occorre che sia:

$$(VII.19) \quad \sin \tilde{\omega}_1 h T = \sin \tilde{\omega}_2 h T;$$

per ogni intero h , e questa uguaglianza è soddisfatta se e solo se le due pulsazioni $\tilde{\omega}_1$ ed $\tilde{\omega}_2$ differiscono per un multiplo intero della pulsazione di campionamento:

$$(VII.20) \quad \omega_c = \frac{2\pi}{T}$$

Affinché la (VII.19) sia soddisfatta occorre e basta che, per ogni h , sia possibile trovare un intero $n(h)$ (dipendente, se occorre, da h) per il quale si abbia:

$$\tilde{\omega}_1 h T = \tilde{\omega}_2 h T + n(h) 2\pi$$

Questa uguaglianza, sulla base della posizione (VII.20), può essere soddisfatta ponendo $n(h) = nh$ (con n intero) e si riduce alla:

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 + n \omega_c$$

Il sistema considerato risponde in modo identico a due ingressi sinusoidali le cui pulsazioni differiscano per un multiplo intero di ω_c . Ciò consente anche di affermare che il sistema, quando è sollecitato con un ingresso di pulsazione $\tilde{\omega}$ superiore a quella di campionamento, risponde come se fosse sollecitato con un ingresso di pulsazione $\tilde{\omega}^1$ compresa nell'intervallo $[0, \omega_c]$ (essendo $\tilde{\omega}^1 = \tilde{\omega} - n\omega_c$). Tale fenomeno, detto di *mascheramento della frequenza*, riveste un'importanza particolare nel caso in cui alle funzioni ingresso sono sovrapposti *rumori*, che in generale possono essere caratterizzati da componenti armoniche di pulsazione superiore ad ω_c . Sugli inconvenienti che questo fenomeno può produrre si ritornerà più in dettaglio nel par.VII.7.

VII.4- La risposta transitoria nei sistemi di controllo a tempo discreto.

Lo studio della risposta transitoria di un sistema a tempo discreto in corrispondenza ad una sollecitazione di tipo a gradino è del tutto simile a quello svolto nel par.III.6. Senza particolari difficoltà il lettore può da sé ritrovare le espressioni corrispondenti alla (III.40) e alla (III.40') (quest'ultima nel caso in cui i poli della funzione $W(z)$ sono tutti distinti). Ci si può in tal modo rendere conto che la risposta transitoria viene ad essere caratterizzata da funzioni del tipo:

$$(VII.21) \quad p_0^h$$

(in corrispondenza ad un polo reale p_0) o del tipo:

$$(VII.22) \quad \operatorname{Re}[p_0^h] = \operatorname{Re}[(|p_0| e^{j\theta_0})^h] = |p_0|^h \cos \theta_0 h$$

(in corrispondenza ad una coppia di poli complessi e coniugati p_0 e p_0^* , di modulo $|p_0|$ e fase $\pm \theta_0$).

Al fine di trarre indicazioni sulla qualità della risposta transitoria, è importante stabilire una corrispondenza tra gli andamenti temporali delle funzioni così introdotte e la collocazione dei poli della funzione di trasferimento $W(z)$ sul piano complesso. In particolare, è utile esaminare in che modo è possibile dare una caratterizzazione della risposta transitoria analoga a quella che si conviene di adottare nei sistemi a tempo continuo quando si impone l'appartenenza dei poli della funzione di trasferimento $W(s)$ ad una regione di piano complesso del tipo di quella indicata in Fig.III.17.

A questo scopo conviene osservare che i valori delle due funzioni di variabile intera sopra considerate coincidono con i valori assunti, agli istanti di tempo $t = hT$, dalle funzioni di variabile continua:

$$e^{(\ln p_0) \frac{t}{T}}$$

$$\operatorname{Re} \left[e^{(\ln p_0) \frac{t}{T}} \right] = \operatorname{Re} \left[e^{(\ln |p_0| + j\theta_0) \frac{t}{T}} \right] = e^{(\ln |p_0|) \frac{t}{T}} \cos \theta_0 \frac{t}{T}$$

Si noti che l'introduzione del parametro T non è di per sé necessaria, se non a scopo dimensionale, ma è utile se vogliono identificare i valori delle funzioni considerate con quelli ottenibili campionando, con intervallo T , le funzioni che caratterizzano la risposta transitoria di un sistema a tempo continuo. Le espressioni che si sono scritte consentono infatti di stabilire una corrispondenza, agli istanti $t = hT$, della risposta aperiodica (VII.21) con la risposta aperiodica (III.42) nella quale si sia posto:

$$(VII.23) \quad -\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T} \ln p_0$$

e della risposta pseudoperiodica (VII.22) con la risposta pseudoperiodica (III.43), nella quale si sia posto:

$$(VII.24) \quad \begin{aligned} -\zeta \omega_n &= \frac{1}{T} \ln |p_0| \\ \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n &= \frac{1}{T} \theta_0 \end{aligned}$$

Ciò che ora interessa è sapere a quale regione del piano z deve appartenere un polo reale p_0 (o una coppia di poli complessi e coniugati p_0 e p_0^*) di $W(z)$ affinché il numero complesso (o la coppia di complessi e coniugati) identificato in base a questa corrispondenza appartenga ad una regione del tipo di quella indicata in Fig.III.17. Poiché tale corrispondenza è individuabile con la regola:

$$p_0 \rightarrow \frac{1}{T} \ln p_0 = \frac{1}{T} (\ln |p_0| + j\theta_0)$$

è immediato constatare subito che la regione compresa all'interno della circonferenza di raggio unitario centrata sull'origine nel piano z si trasforma nella regione rettangolare del piano s , indicata in Fig.VII.11.

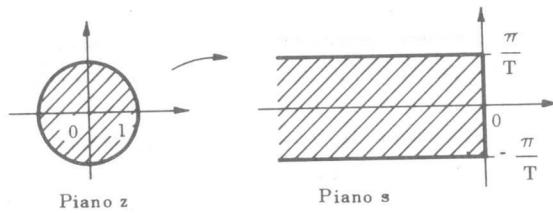


Fig.VII.11

All'interno del cerchio unitario, occorre individuare le curve che si trasformano nelle frontiere che delimitano la regione indicata in figura III.17. I punti del piano z che si trasformano in punti del piano s appartenenti a una retta verticale di ascissa $-1/\tau_0$ sono i punti caratterizzati dalla relazione:

$$\ln |p_0| = - \frac{T}{\tau_0}$$

e sono pertanto disposti lungo una circonferenza centrata sull'origine; i punti interni a questa circonferenza si trasformano in punti del piano s a sinistra della retta verticale di ascissa $-1/\tau_0$.

I punti del piano z che si trasformano in punti del piano s caratterizzati da un valore ζ prefissato sono i punti individuati dalla relazione:

$$(VII.25) \quad \ln |p_0| = - \theta_0 \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

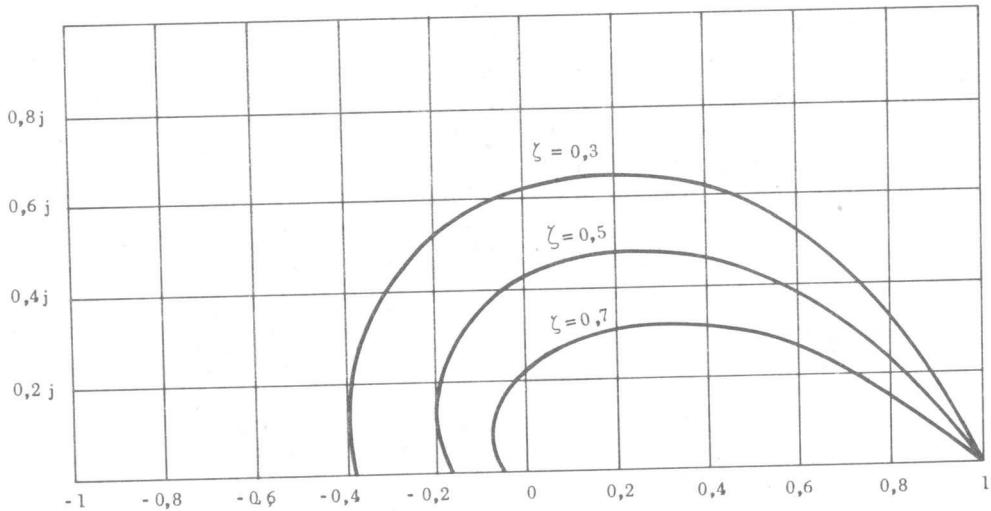


Fig.VII.12

In Fig.VII.12 sono riportati alcuni esempi di luoghi di punti soddisfacenti a questa relazione, per diversi valori di ζ . Ovviamente, i punti interni a questi luoghi si trasformano in punti del piano s interni alle due semirette corrispondenti al valore di ζ che si è considerato. Combinando le due limitazioni si ottiene una regione di piano entro la quale devono essere compresi i poli di $W(z)$ affinché, nell'ambito della corrispondenza che si è stabilita, la qualità del transitorio risulti soddisfacente. Le regioni in questione si presentano come quella esemplificata in Fig.VII.13.

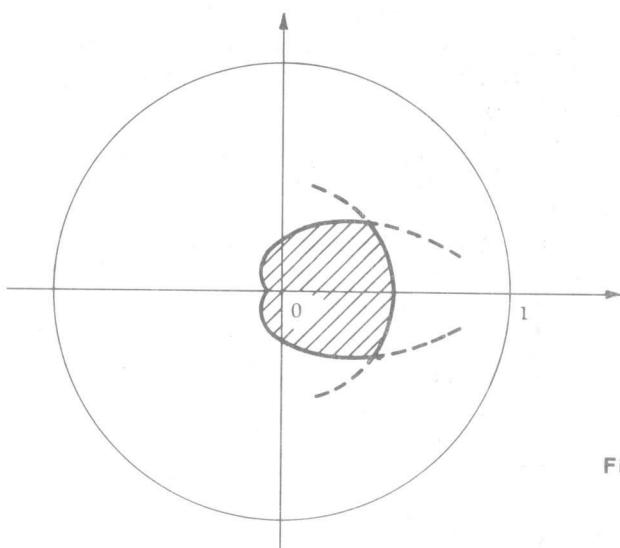


Fig.VII.13

Gli altri criteri mediante i quali, nel caso dei sistemi a tempo continuo, può essere valutata la qualità della risposta transitoria, cioè i metodi basati sulla considerazione del tempo di salita e della sovraelargazione (e, corrispondentemente, della banda passante e del modulo alla risonanza nella risposta armonica) non trovano applicazione frequente nel caso dei sistemi a tempo discreto, soprattutto a causa del fatto che non è particolarmente diffuso l'impiego della funzione $W(e^{j\theta})$ (corrispondente alla risposta armonica $W(j\omega)$ dei sistemi a tempo continuo) come modello matematico del sistema. Per contro, è possibile caratterizzare il transitorio considerando un particolare aspetto della risposta dei sistemi a tempo discreto, che non trova riscontro nei sistemi a tempo continuo; si tratta del fenomeno del *tempo finito di risposta*.

È noto che in un sistema a tempo discreto stabile asintoticamente la risposta libera può convergere a zero in un intervallo di tempo finito. Poiché, come si osservato, la risposta transitoria in una sollecitazione a gradino è composta essenzialmente delle stesse funzioni che

caratterizzano la risposta libera, è ragionevole attendersi che sia possibile, sotto opportune ipotesi, ottenere un sistema nel quale la risposta transitoria converga a zero in un intervallo di tempo finito. Per analizzare questa possibilità conviene, riferendosi ad esempio al caso della risposta ingresso-uscita (considerazioni del tutto analoghe valgono per il caso di una risposta disturbo-uscita) distinguere la situazione in cui il valore (costante) dell'errore in regime permanente è diverso da zero (sistema di tipo 0) da quella in cui questo valore è nullo (sistema di tipo 1).

Se il sistema è di tipo 0, l'errore:

$$e(h) = K_d u(h) - y(h)$$

converge, al tendere di h all'infinito, al valore che si è indicato con e_0 (cfr. (VII.14')). Questa convergenza può essere, nel caso generale, di tipo assintotico oppure può accadere, in casi particolari, che il valore di regime e_0 venga raggiunto e mantenuto dopo un intervallo di tempo finito (cfr. Fig. VII.14 a). In questo caso, esiste un intero l a partire dal quale si ha:

$$(VII.26) \quad e(h) = e_0 \quad \text{per } h = l, l+1, l+2, \dots$$

Per trovare le condizioni affinché ciò avvenga, è utile considerare l'espressione della trasformata della funzione $e(h)$. Essendo, per definizione:

$$e(z) = [e(h)]_{h=0} + \frac{1}{z} [e(h)]_{h=1} + \frac{1}{z^2} [e(h)]_{h=2} + \dots$$

se si impone la condizione (VII.26) si ottiene:

$$e(z) = [e(h)]_{h=0} + \frac{1}{z} [e(h)]_{h=1} + \dots + \frac{1}{z^{l-1}} [e(h)]_{h=l-1} + \frac{1}{z^l} e_0 + \frac{1}{z^{l+1}} e_0 + \dots$$

Quest'ultima può essere successivamente manipolata, con semplici passaggi, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} e(z) &= \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{z^i} [e(h)]_{h=i} + \sum_{i=l}^{\infty} \frac{e_0}{z^i} = \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{z^i} \{ [e(h)]_{h=i} - e_0 \} + \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_0}{z^i} = \frac{N(z)}{z^{l-1}} + e_0 \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

Per scrivere l'ultimo si è tenuto conto del fatto che per gli l addendi del primo termine è possibile individuare un denominatore comune pari a $1/z^{l-1}$ (e, di conseguenza, un numeratore comune $N(z)$ che è un polinomio di grado $l-1$ in z) e del fatto che il secondo termine corrisponde alla trasformata di una funzione costante di ampiezza e_0 .

Si noti che l'espressione (VII.27) di $e(z)$ è valida anche se il sistema è di tipo 1, purchè in essa si ponga, ovviamente, $e_0 = 0$ (cfr. figura VII.14 b)).

In conclusione, si può affermare che la (VII.26) è soddisfatta e, cioè, l'errore converge al valore di regime dopo un intervallo di tempo finito, se e solo se la funzione $e(z)$, trasformata della funzione $e(h)$, ha tutti i poli coincidenti nel punto $z=0$, salvo, al più, un polo semplice nel punto $z=1$ nel caso in cui il valore di regime dell'errore è diverso da zero.

Questa condizione può essere immediatamente trasferita in una condizione sulla funzione di trasferimento di errore $W_e(z)$. Tenendo infatti presente che, nel caso in esame,

$$e(z) = W_e(z) u(z) = W_e(z) \frac{z}{z-1}$$

si deduce che:

- in un sistema di tipo 0, l'errore converge al valore di regime e_0 in tempo finito se e solo se la funzione di trasferimento di errore $W_e(z)$ ha tutti i poli coincidenti nel punto $z = 0$;
- in un sistema di tipo 1, l'errore converge a 0 in tempo finito se e solo se la funzione di trasferimento di errore $W_e(z)$ ha tutti i poli coincidenti nel punto $z = 0$ ed uno zero nel punto $z = 1$.

L'ultima condizione comprende, come era naturale attendersi, la condizione cui deve soddisfare $W_e(z)$ affinché il sistema sia di tipo 1.

Nella caratterizzazione della risposta transitoria di un sistema di controllo a tempo discreto è dunque possibile prevedere anche la situazione

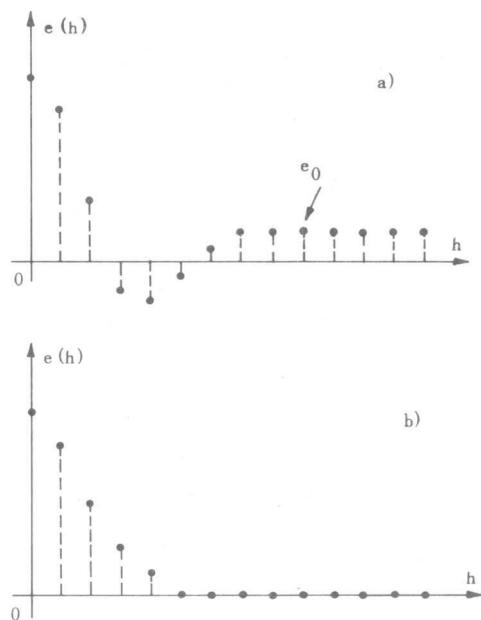


Fig.VII.14

zione in cui il transitorio si esaurisce in tempo finito. Nel par.VII.6 si esporrà un metodo di sintesi predisposto per soddisfare questo tipo di requisito.

VII.5 - Un esempio di sintesi basato sull'impiego del luogo delle radici.

Si è osservato nel par. precedente che l'impiego delle rappresentazioni grafiche della risposta armonica non è molto diffuso per l'analisi della risposta di un sistema a tempo discreto. Di conseguenza, per impostare un procedimento di sintesi per tentativi è più conveniente fare riferimento ai metodi di analisi basati sulla considerazione del luogo delle radici.

Il procedimento si articola in fasi del tutto analoghe a quelle considerate nel caso di un sistema a tempo continuo; per questo motivo, piuttosto che ripetere una presentazione che si differenzierebbe da quella esposta nel Cap.V solo per aspetti formali, si preferisce svolgere per intero lo studio di un caso.

Esempio VII.2 - Si vuole sintetizzare un sistema a controllo numerico secondo lo schema di Fig.VII.1 (o, il che è lo stesso, di Fig.VII.4). Il processo è caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

con $\tau = 10$ sec.

Si vuole ottenere un sistema che soddisfi alle seguenti specifiche:

- a) l'errore in regime permanente corrispondente ad ingressi costanti sia nullo;
- b) il sistema a tempo discreto corrispondente (cfr.Fig.VII.6) sia caratterizzato da una funzione di trasferimento ingresso - uscita $W(z)$ con poli compresi nella regione indicata in Fig.VII.13.

Si è scelto di adottare un organo di tenuta di ordine zero ed un passo di campionamento $T = 5$ sec. La costante di proporzionalità desiderata tra ingresso e uscita è pari a $K_d = 1$.

Come prima cosa, si tratta di passare dalla funzione $P(s)$ alla corrispondente funzione $P(z)$, secondo la procedura indicata nel par.VII.2, in modo tale da poter effettuare la sintesi di un sistema composto di soli sottosistemi a tempo discreto.

In breve, seguendo l'ordine di operazioni già descritto nell'Esempio VII.1, si passa da $P(s)$ a:

$$\tilde{Q}(s) = \frac{1}{s} P(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \tau s} = \frac{1}{s} \frac{\tau}{1 + \tau s} ;$$

da questa a:

$$\tilde{Q}(t) = 1 - e^{-t/\tau} ;$$

da questa a:

$$Q(h) = \tilde{Q}(hT) = 1 - (e^{-T/\tau})^h = 1 - (e^{-0.5})^h = 1 - (0.6)^h$$

da questa a:

$$Q(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-0.6}$$

e, finalmente, da questa a:

$$(VII.28) \quad P(z) = \frac{z-1}{z} Q(z) = 1 - \frac{z-1}{z-0.6} = \frac{0.4}{z-0.6}$$

Il sistema a tempo discreto che si vuole sintetizzare, essendo $K_d = 1$, ha la struttura indicata in fig.VII.6. Affinchè sia soddisfatta la specifica a) occorre innanzitutto che $G(z)$ abbia un polo nel punto $z = 1$. La scelta del valore del coefficiente di guadagno della funzione $G(z)$ può viceversa essere posticipata, in quanto non sono assennate specifiche riguardanti il valore dell'errore a regime (per un ingresso di ordine $k = 1$). Ciò posto, è immediato constatare che se si pensa di scegliere per $G(z)$ una struttura del tipo:

$$G(z) = \frac{K_G}{z-1}$$

non è possibile soddisfare alla specifica b) in quanto per nessun valore di K_G il luogo delle radici associato alla corrispondente funzione:

$$F(z) = \frac{0.4 K_G}{(z-1)(z-0.6)}$$

risulta interno alla regione prescritta (il luogo in questione è costituito da un segmento di asse reale, compreso tra i punti di ascissa 0,6 ed 1, e da una retta verticale passante per il punto di ascissa 0,8).

Si può allora tentare di soddisfare le specifiche scegliendo per $G(z)$ una struttura del tipo:

$$G(z) = A \frac{z - a}{z - 1}$$

con $0 < a < 0,6$. In questo caso il luogo delle radici associato alla funzione:

$$F(z) = \frac{0,4 A (z - a)}{(z - 1)(z - 0,6)}$$

risulta costituito da due segmenti di asse reale (quello compreso tra i punti di ascissa 0,6 ed 1 e quello a sinistra del punto di ascissa a) e da un cerchio, centrato nel punto dell'asse reale di ascissa a, avente un raggio pari a $\sqrt{0,6 - a}$. Si constata facilmente che, scegliendo opportunamente la costante a che caratterizza lo zero di $G(z)$, è possibile fare in modo che, per opportuni valori del parametro $K' = 0,4 A$, una porzione del luogo risulti interna alla regione prescritta. Scegliendo ad esempio $a = 0,45$ ed $A = 2,5$, i punti del luogo corrispondenti a $K' = 1$ si trovano sulla frontiera di tale regione (cfr. Fig.VII.15).

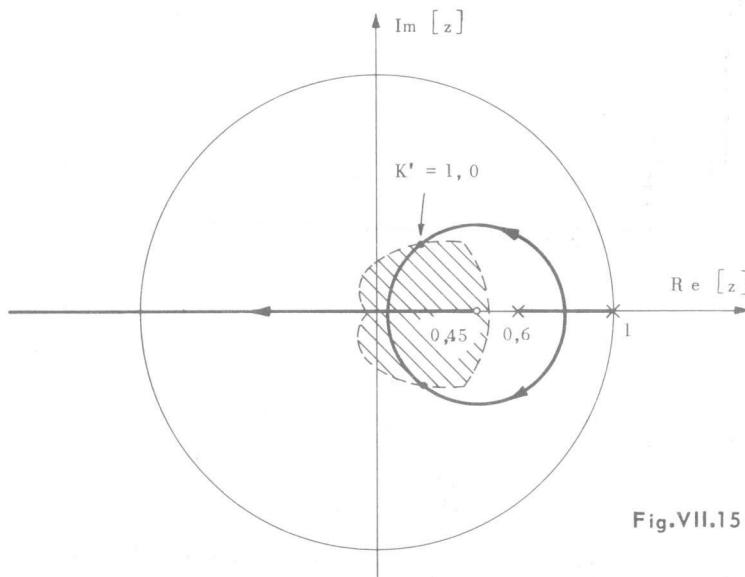


Fig.VII.15

In definitiva, si possono soddisfare entrambi le specifiche a) e b) scegliendo:

$$(VII.29) \quad G(z) = 2,5 \frac{z - 0,45}{z - 1}$$

A scopo di completezza può essere interessante esaminare la risposta del sistema di controllo ad una sollecitazione a gradino, mettendo in evidenza le funzioni del tempo corrispondenti all'evoluzione delle diverse grandezze. In proposito, si deve ricor-

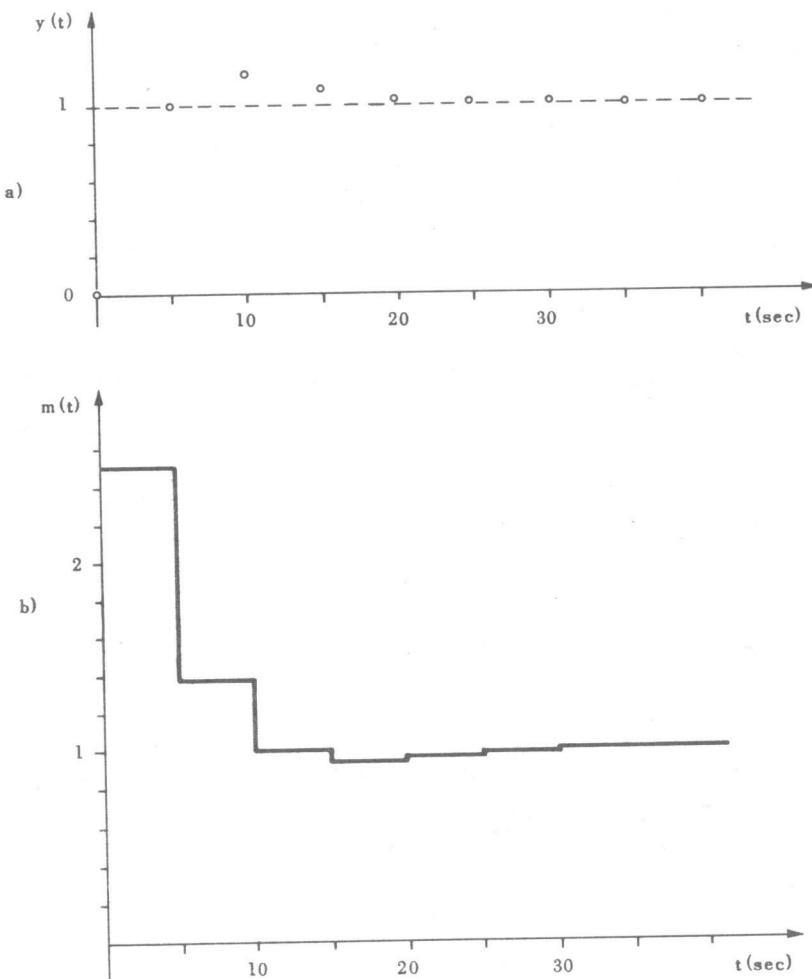


Fig.VII.16

dare che la struttura alla quale si fa riferimento è quella di Fig.VII.5. Al sistema a tempo discreto indicato nel blocco tratteggiato corrisponde la funzione di trasferimento (VII.28), a quello che lo precede nel ramo diretto la funzione di trasferimento (VII.29) ed inoltre risulta $K_H = 1$. Ad una variazione a gradino (unitaria) dell'ingresso $u(t)$ corrisponde la funzione $u'(h) = 1$. La relativa uscita $y'(h)$ può essere facilmente calcolata come funzione di z essendo:

$$y'(z) = W(z) u'(z) = \frac{G(z) P(z)}{1 + G(z) P(z)} \cdot \frac{z}{z - 1} = \frac{z - 0,45}{z^2 - 0,6z + 0,15} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

Per avere la trasformata inversa, si può usare il metodo della divisione formale, ottenendo:

$$y'(z) = 0 + \frac{1}{z} + \frac{1,15}{z^2} + \frac{1,09}{z^3} + \frac{1,03}{z^4} + \frac{1,006}{z^5} + \dots$$

Come è noto, il coefficiente del generico termine $(1/z)^h$ coincide con $y'(h)$ e, quindi, con il valore dell'uscita $y(t)$ all'istante di campionamento $t = hT$ (cfr. figura VII.16 a). Per avere i valori dell'uscita negli altri istanti di tempo occorre procedere nel seguente modo. Si calcolano innanzitutto i valori della funzione di variabile intera $m'(h)$, antitrasformando la funzione:

$$\begin{aligned} m'(z) &= \frac{G(z)}{1 + G(z)P(z)} \quad u'(z) = \frac{2,5(z^2 - 1,052z + 0,27)}{z^2 - 0,6z + 0,15} \frac{z}{z - 1} = \\ &= 2,5 + \frac{1,38}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{0,94}{z^3} + \frac{0,97}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

Questo calcolo consente di valutare la funzione $m(t)$, che è costante sull'intervallo $[hT, (h+1)T]$ ed ivi coincidenti con $m'(h)$ (cfr. Fig. VII.16 b). Ciò posto, il problema è ridotto a quello del calcolo della risposta di un sistema a tempo continuo, di cui è nota la funzione di trasferimento $P(s)$, ad una funzione nota del tempo e può essere risolto con i procedimenti abituali di analisi dei sistemi a tempo continuo.

VII.6 - Sintesi di sistemi a tempo di risposta finito.

Per ottenere un sistema di controllo a tempo discreto in cui la risposta ad un ingresso a gradino converga al valore desiderato in un intervallo di tempo finito occorre, come si è mostrato, fare in modo che la funzione di trasferimento di errore $W_e(z)$ abbia uno zero nel punto $z = 1$ e tutti i poli coincidenti nel punto $z = 0$.

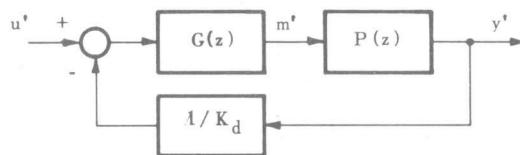


Fig.VII.17

Con riferimento allo schema indicato in Fig.VII.17, in cui $W_e(z)$ assume l'espressione:

$$W_e(z) = \frac{K_d^2}{K_d + G(z) P(z)} = \frac{K_d}{1 + F(z)}$$

(essendosi posto, come al solito, $F(z) = (1/K_d)G(z)P(z)$), occorre dunque assicurare che la funzione $1 + F(z)$ abbia un polo nel punto $z = 1$ e tutti gli zeri coincidenti nel punto $z = 0$. In termini esplicativi, si deve fare in modo che risulti soddisfatta una condizione del tipo:

$$(VII.30) \quad \frac{1}{1 + F(z)} = \frac{(z - 1) Q(z)}{z^l}$$

essendo l un intero di valore opportuno e $Q(z)$ un polinomio nella variabile z .

Così impostato, il problema è sostanzialmente dello stesso tipo di quelli che possono essere risolti con metodi diretti (cfr. par.VI.2); l'obiettivo è quello di imporre, mediante la scelta di un'opportuna funzione $G(z)$, una struttura prefissata (anche se non in modo completo) alla funzione $1 + F(z)$. Come per tutti i problemi di questo tipo, nel ricercare la soluzione occorre assicurarsi che la formulazione del problema sia compatibile con eventuali condizioni riguardanti la realizzabilità della soluzione stessa (si veda, in proposito, il par.VI.3); nel caso in esame, a tali condizioni corrispondono, in effetti, limitazioni riguardanti il valore dell'intero l e il polinomio $Q(z)$ che caratterizzano (VII.30). In particolare, può essere interessante individuare il minimo valore di l (il quale, si ricordi, caratterizza l'ampiezza dell'intervallo di tempo entro il quale l'errore converge a zero) compatibile con la realizzabilità di $G(z)$. Limitandosi a considerare il caso, peraltro molto comune, in cui la funzione di trasferimento del processo $P(z)$ ha un numero di poli (che si indicherà con n) superiore al numero di zeri (che si indicherà con m) e tenendo presente che la funzione $G(z)$, come ogni funzione realizzabile, deve comunque essere una funzione propria, è possibile pervenire alla conclusione (cfr. Problema VII.1) che il minimo valore ammissibile per l è pari alla differenza $n - m$. Per realizzare questa condizione si deve scegliere:

$$Q(z) = z^{n-m-l} + z^{n-m-2} + \dots + z + 1$$

Corrispondentemente si ottiene, dalla (VII.30):

$$F(z) = \frac{1}{z^{n-m} - 1}$$

ed il problema di sintesi è risolto ponendo:

$$(VII.31) \quad G(z) = \frac{K_d}{P(z)} \frac{1}{z^{n-m} - 1}$$

Il sistema di controllo a tempo discreto realizzato in questo modo prende il nome di *sistema a tempo di risposta minimo*.

Se si vuole utilizzare questo risultato per affrontare il problema della sintesi di un sistema a controllo numerico, basta, in definitiva, assegnare alla funzione $G(z)$ l'espressione indicata a secondo membro nella (VII.31). Nell'esempio, che segue è illustrata una semplice applicazione.

Esempio VII.3 - Si vuole sintetizzare un sistema a controllo numerico, il cui schema è riconducibile a quello di Fig.VII.4. Il processo è caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

Si è scelto di adottare un organo di tenuta di ordine zero ad un passo di campionamento $T = 1$ sec. La costante di proporzionalità desiderata tra ingresso ed uscita è pari a $K_d = 1$.

La funzione di trasferimento del processo equivalente a tempo discreto assume in questo caso l'espressione (cfr. Esempio VII.1):

$$P(z) = \frac{0,37(z + 0,72)}{(z - 1)(z - 0,37)}$$

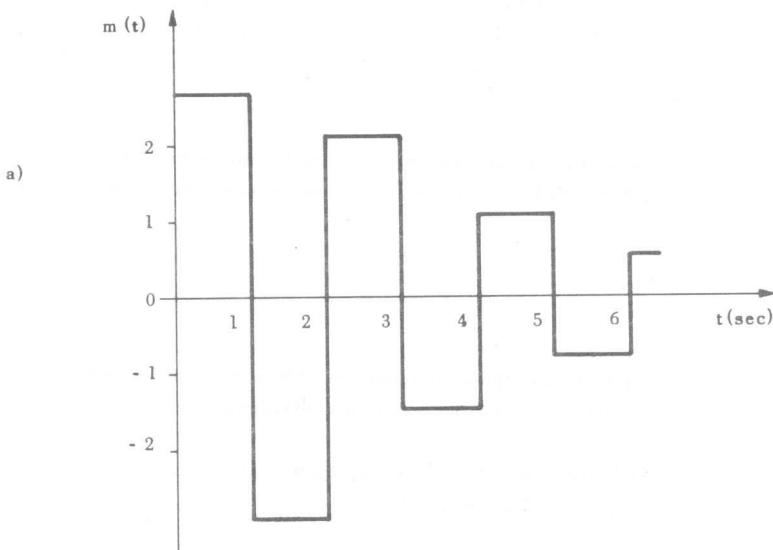
Essendo $n-m=1$, per realizzare un sistema a tempo di risposta minimo occorre, in questo caso, assumere:

$$G(z) = \frac{K_d}{P(z)} \frac{1}{z - 1} = \frac{1}{0,37} \frac{(z - 0,37)}{(z + 0,72)}$$

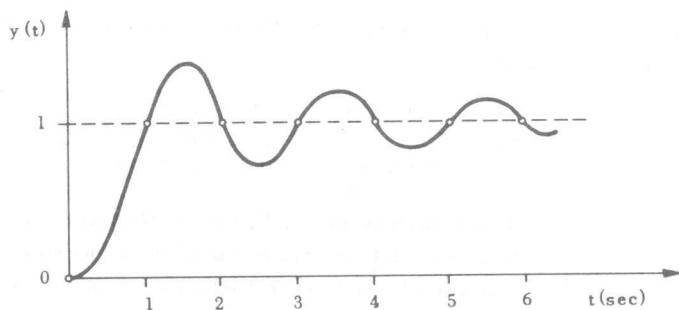
A titolo di verifica, è interessante analizzare in dettaglio - così come si è fatto nell'Esempio VII.2 - la risposta del sistema di controllo ad una sollecitazione a grido, ricordando che la struttura alla quale si fa riferimento è quella di Fig.VII.5. L'uscita $y(t)$ del processo può essere calcolata individuando, preliminarmente, l'andamento della funzione $m(t)$; allo scopo, basta calcolare i valori della funzione $m'(h)$. In proposito, facendo riferimento alla corrispondente funzione di z , si ottiene:

$$\begin{aligned}
 m'(z) &= \frac{G(z)}{1 + F(z)} u'(z) = G(z) \frac{1}{1 + \frac{1}{z-1}} \cdot \frac{z}{z-1} = G(z) = \frac{1}{0,37} \frac{(z - 0,37)}{(z + 0,72)} = \\
 &= 2,70 - 2,94 \frac{1}{z} + 2,21 \frac{1}{z^2} - 1,53 \frac{1}{z^3} + 1,10 \frac{1}{z^4} - 0,79 \frac{1}{z^5} + 0,79 \frac{1}{z^6} - \dots
 \end{aligned}$$

A questa funzione corrisponde una funzione $m(t)$ il cui andamento è quello indicato in Fig. VII.18 a. Per calcolare la risposta $y(t)$ ci si può avvalere della nota relazione:



a)



b)

Fig.VII.18

$$y(t) = \int_0^t P(\tau) m(t - \tau) d\tau$$

nella quale si è indicata con $P(\tau)$ la risposta impulsiva del processo, che in questo caso assume l'espressione:

$$P(\tau) = \tau \cdot (1 - e^{-\tau})$$

Utilizzando questa relazione si ottiene la risposta indicata in Fig. VII.18 b. Come previsto l'errore è unitario all'istante $t = 0$ e nullo agli istanti $t = hT$ ($h = 1, 2, 3, \dots$ sec).

La risposta transitoria di un sistema a controllo numerico diretto progettato sulla base di questo metodo di sintesi può, in taluni così, risultare insoddisfacente. In effetti, così come si è anche visto nell'esempio precedente, si ottiene un errore nullo agli istanti $t = hT$ con $h = n-m, n-m+1, \dots$ ma non si ha modo di influire sui valori assunti da quest'ultimo in tutti gli altri istanti di tempo. Ciò è peraltro naturale conseguenza dell'aver utilizzato, nel corso del procedimento di sintesi, una descrizione matematica del sistema di controllo valida solamente ai fini del calcolo dei valori assunti dalla risposta agli istanti di campionamento.

Può essere allora interessante esaminare se esiste la possibilità di modificare il metodo in questione in modo tale da influire in modo più completo sull'andamento della risposta. In particolare, è interessante individuare sotto quali condizioni è possibile ottenere l'annullarsi definitivo dell'errore a partire da un istante di tempo opportuno.

In effetti, un risultato di questo genere può essere ottenuto abbastanza facilmente, sulla base delle considerazioni qui appresso riportate. Si indichi con P^* il valore del limite, per $s \rightarrow 0$, della funzione $1/P(s)$:

$$P^* = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{P(s)}$$

e si noti che questo limite è nullo nel caso in cui la funzione $P(s)$ abbia un polo nel punto $s=0$. Si consideri inoltre lo schema di Fig. VII.17. È possibile dimostrare che, se a partire da un certo intero k :

- l'errore $e^l(h)$ si annulla:

$$(VII.32) \quad e^l(h) = 0 \quad \text{per} \quad h \geq k$$

- la grandezza $m^l(h)$ assume un valore costante pari a $P^* K_d$:

$$(VII.33) \quad m^l(h) = P^* K_d \quad \text{per} \quad h \geq k$$

l'uscita $y(t)$ del processo assume identicamente un valore pari al valore desiderato K_d a partire dall'istante $t = kT$ in poi, purché sia stata assunta una certa precauzione nella scelta del passo di campionamento T .

Per dimostrare questa asserzione si farà, per semplicità, riferimento al caso di un processo con autovalori distinti. L'estensione al caso generale non riveste particolari difficoltà. Si supponga soddisfatta la condizione (VII.33). In questo caso, l'uscita dell'organo di tenuta è una funzione (tempo - continuo) costante di valore pari a $P^* K_d$, dall'istante $t = kT$ in poi. A partire da questo istante la risposta $y(t)$ del processo assume una forma del tipo:

$$y(t) = \psi(t - kT) \mathbf{x}(kT) + \left(\int_{kT}^t p(t - \tau) d\tau \right) P^* K_d$$

essendo $\mathbf{x}(kT)$ il valore (in generale diverso da zero) dello stato del processo all'istante $t = kT$. La funzione $p(\cdot)$ caratterizza la risposta impulsiva del processo, mentre $\psi(\cdot)$ è un vettore riga ad n componenti che caratterizza l'effetto dello stato iniziale sulla risposta. Passando alle trasformate di Laplace, tenendo presente che per $P(s)$ e $\psi(s)$ si possono scrivere espressioni del tipo:

$$P(s) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i}$$

$$\psi(s) = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{s - \lambda_i}$$

(in cui \mathbf{Y}_i è un vettore riga $1 \times n$) e ricordando anche le proprietà di traslazione nel tempo, si ottiene, per la trasformata della funzione $y(t + kT)$, l'espressione:

$$y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i \mathbf{x}(kT)}{s - \lambda_i} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} \right) \frac{P^* K_d}{s}$$

Il secondo termine a secondo membro è non nullo solo se $P(s)$ non ha poli in $s = 0$. Se questo è il caso, esso può essere sviluppato in frazioni parziali:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} \right) \frac{P^* K_d}{s} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - \lambda_i} + \frac{A_0}{s}$$

ed osservando che, in base alla definizione di P^* , se P^* è diverso da zero (se cioè $P(s)$ non ha un polo in $s = 0$):

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{P^* K_d}{s} \left(\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} P^* K_d P(s) = K_d$$

I precedenti sviluppi consentono di affermare che la funzione $y(t-kT)$ - che rappresenta la risposta del processo a partire dall'istante kT in poi - ha per trasformata di Laplace una funzione che, se il processo non ha un polo in $s=0$, assume la forma:

$$(VII.34) \quad y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{s - \lambda_i} + \frac{K_d}{s}$$

ovvero che, se il processo ha un polo in $s=0$ (sia esso λ_n), la forma:

$$(VII.34') \quad y(s) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_i}{s - \lambda_i} + \frac{M_n}{s}$$

Ritornando alle funzioni del tempo, la (VII.34) si riscrive come:

$$(VII.35) \quad y(t+kT) = \sum_{i=1}^n M_i \exp(\lambda_i t) + K_d$$

ed un'espressione analoga vale per la trasformata inversa della (VII.34') (ove il posto del termine costante K_d è preso dal residuo M_n del polo $\lambda_n=0$). Si tenga ora presente che, in base alla condizione (VII.32), che è supposta soddisfatta, i valori della $y(t)$ agli istanti $t=hT$ devono coincidere, per $h \geq k$, con il valore desiderato K_d . Risulta allora, per la (VII.35):

$$\sum_{i=1}^n M_i \exp(\lambda_i T) h = 0$$

per ogni $h \geq 0$.

Si riscriva quest'ultima relazione n volte, per $h=0, 1, \dots, n-1$. Tenendo presente che la somma indicata può essere espressa come prodotto di un vettore riga:

$$(\exp(\lambda_1 T) h \quad \exp(\lambda_2 T) h \dots \exp(\lambda_n T) h)$$

per un vettore colonna che ha per elementi M_1, M_2, \dots, M_n , le relazioni in questione si possono raggruppare nell'unica relazione:

$$(VII.36) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \exp(\lambda_1 T) & \exp(\lambda_2 T) & \dots & \exp(\lambda_n T) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \exp(\lambda_1 T)(n-1) & \exp(\lambda_2 T)(n-1) & \dots & \exp(\lambda_n T)(n-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdot \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si supponga ora che il valore T del passo di campionamento sia tale da rendere soddisfatta la condizione:

$$\exp(\lambda_i T) \neq \exp(\lambda_j T)$$

per ogni coppia di interi i, j diversi. Se ciò è vero, la matrice a sinistra della (VII.36), che è una matrice di Vandermonde, è nonsingolare. Dunque la (VII.36) implica necessariamente $M_1 = M_2 = \dots = M_n = 0$. Queste condizioni, riportate nella (VII.35), mostrano che:

$$y(t + hT) = K_d$$

per ogni $t \geq hT$ e cioè che la risposta del processo (nel tempo continuo) assume un valore identicamente pari al valore desiderato.

Conclusioni del tutto analoghe possono essere tratte nel caso in cui, in luogo della (VII.34), vale la (VII.34') e cioè nel caso in cui il processo ha un polo in $s=0$.

Si è così provato che, se il valore del passo di campionamento T è scelto in modo tale che sia:

$$(VII.37) \quad \exp(\lambda_i T) \neq \exp(\lambda_j T)$$

in corrispondenza ad ogni coppia di interi i, j diversi tra loro, le condizioni (VII.32) e (VII.33) garantiscono l'annullarsi definitivo dell'errore - nella risposta al gradino - a partire dall'istante di tempo $t = kT$. Un sistema a controllo numerico che presenta questo tipo di risposta prende il nome di *sistema a risposta piatta*,

È utile sottolineare che le modalità di controllo proposte con le condizioni (VII.32) e (VII.33) consentono di ottenere il risultato desiderato sia che $P(s)$ non abbia un polo in $s=0$ sia che lo abbia. Nel secondo caso, in particolare, la (VII.33) si riduce alla condizione:

$$(VII.33') \quad m^t(h) = 0 \quad \text{per} \quad h \geq k .$$

Si tenga inoltre presente che il soddisfacimento delle (VII.37) non è particolarmente limitativo. Poiché gli autovalori del processo sono in numero finito, l'insieme dei valori di T che non rendono soddisfatte le (VII.37) è un insieme discreto, mentre T può essere evidentemente qualsiasi numero reale.

Individuate così delle condizioni che consentono di ottenere una risposta effettivamente coincidente con quella desiderata a partire da un certo istante finito di tempo, si passerà ora ad esporre un procedimento per la costruzione di un controllore capace di impostare il soddisfacimento delle condizioni in questione.

In proposito, conviene innanzitutto trasformare le formule (VII.32) e (VII.33) in condizioni sulle funzioni $e(z)$ ed $m(z)$. La prima si riscrive semplicemente come:

$$(VII.38) \quad e(z) = \frac{Q(z)}{z^{k-1}}$$

(essendo $Q(z)$ un polinomio arbitrario di grado non superiore a $k-1$), mentre la seconda - ricordando il fatto che la trasformata z di una funzione costante di valore unitario è pari a $z/(z-1)$ - si riscrive come:

$$(VII.39) \quad m(z) = \frac{S(z)}{z^{k-1}} + \frac{z}{z-1} P^* K_d$$

(essendo $S(z)$ un polinomio arbitrario di grado non superiore a $k-1$).

Conviene anche tenere presente che, se $P(s)$ non ha un polo in $s=0$, $P(z)$ non ha un polo in $z=1$ e si ha:

$$P^* = \lim_{z \rightarrow 1} 1/P(z)$$

La stessa espressione, con $P^*=0$, vale anche se $P(s)$ ha un polo in $s=0$, in quanto in questo caso $P(z)$ ha un polo in $z=1$.

Il lettore potrà facilmente verificare questa affermazione ripercorrendo la costruzione, indicata nel par. VII.2, che consente di ottenere $P(z)$ a partire da $P(s)$.

Con riferimento allo schema di Fig. VII.17 si scriva, come d'abitudine:

$$F(z) = (1/K_d) G(z) P(z)$$

e si ponga:

$$F(z) = N_F(z)/D_F(z)$$

essendo $N_F(z)$ e $D_F(z)$ due polinomi primi fra loro.

Si dimostrerà ora che le condizioni (VII.38) e (VII.39) (le quali, come si è detto, sono equivalenti alle (VII.32) e (VII.33)) risultano soddisfatte se e solo se:

- $D_F(z)$ ha una radice in $z=1$;
- $N_F(z) + D_F(z) = z^k$;
- nessun polo di $G(z)$ coincide con uno zero di $P(z)$.

A questo proposito si ricordi che:

$$e(z) = \frac{K_d}{1 + F(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{K_d D_F(z)}{D_F(z) + N_F(z)} \frac{z}{z-1}$$

Dovendo il secondo membro in questa espressione coincidere con quello della (VII.38), si deduce che il polinomio $D_F(z)$ deve avere una radice in $z=1$ (che si cancella con il fattore $(z-1)$ a denominatore) e che il polinomio $D_F(z) + N_F(z)$ deve coincidere con z^k (a meno di un fattore costante).

Per provare che nessun polo di $G(z)$ può coincidere con uno zero di $P(z)$, si scrivano $G(z)$ e $P(z)$ nella forma:

$$G(z) = \frac{N_G(z) M(z)}{D_G(z) R(z)} \quad P(z) = \frac{N_P(z) R(z)}{D_P(z) M(z)}$$

essendo $N_G(z) M(z)$ e $D_G(z) R(z)$ polinomi primi tra loro, $N_P(z) R(z)$ e $D_P(z) M(z)$ polinomi primi fra loro. $R(z)$ rappresenta un polinomio che ha come radici eventuali poli di $G(z)$ coincidenti - come peraltro le posizioni adottate indicano - con altrettanti zeri di $P(z)$. Viceversa, $M(z)$ rappresenta un polinomio che ha come radici eventuali zeri di $G(z)$ coincidenti con altrettanti poli di $P(z)$. Da queste posizioni segue che:

$$F(z) = \frac{N_G(z) N_P(z)}{K_d D_G(z) D_P(z)}$$

ed inoltre, poiché $N_G(z) N_P(z)$ e $D_G(z) D_P(z)$ sono per definizione primi tra loro, si ha:

$$N_G(z) N_P(z) + K_d D_G(z) D_P(z) = z^k$$

Ricordiamo che:

$$m(z) = \frac{G(z)}{1 + F(z)} \frac{z}{z-1}$$

si ottiene allora:

$$(VII.40) \quad m(z) = \frac{K_d N_G(z) M(z) D_P(z)}{(K_d D_G(z) D_P(z) + N_G(z) N_P(z)) R(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{K_d N_G(z) M(z) D_P(z)}{z^{k-1}(z-1) R(z)}$$

Si tenga ora presente che $R(z)$ è primo per definizione con $N_G(z)$, con $D_P(z)$ e con $M(z)$ e quindi non esistono suoi fattori che possono essere cancellati con fattori del numeratore. Viceversa, la (VII.39) impone che $m(z)$ abbia $k-1$ poli in $z=0$ ed un po-

lo in $z = 1$. Ne segue che $R(z)$ è necessariamente una costante e cioè che non sono ammissibili cancellazioni di poli di $G(z)$ con zeri di $P(z)$.

Viceversa, se nelle precedenti espressioni $R(z) = 1$, cioè se non esistono poli di $G(z)$ coincidenti con zeri di $P(z)$, si ottiene dalla (VII.40):

$$m(z) = \frac{K_d N_G(z) M(z) D_P(z)}{z^{k-1} (z-1)}$$

Questa può essere riscritta, separando il termine relativo al polo in $z = 1$ nella forma:

$$(VII.41) \quad m(z) = \frac{S(z)}{z^{k+1}} + \frac{z}{z-1} A$$

essendo, come è noto:

$$A = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} m(z)$$

Calcolando questo limite si ottiene:

$$A = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K_d N_G(z) M(z) D_P(z)}{z^k} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K_d N_G(z) N_P(z)}{z^k P(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K_d F(z)}{1 + F(z)} \frac{1}{P(z)}$$

Poiché $F(z)$ ha un polo in $z = 1$ risulta:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{F(z)}{1 + F(z)} = 1$$

e quindi:

$$A = K_d \lim_{z \rightarrow 1} (1/P(z))$$

Sia che $P(z)$ abbia, sia che non abbia, un polo in $z = 1$, risulta allora:

$$A = K_d P^*$$

e si può concludere che l'espressione (VII.41) di $m(z)$ assume esattamente la forma desiderata (VII.39).

Il risultato così provato si presta immediatamente ad essere utilizzato per la sintesi di un sistema di controllo nel quale siano verificate le proprietà (VII.32) e (VII.33).

Si consideri per primo il caso in cui $P(z)$ non ha poli nel punto in $z = 1$. Si tratta allora di trovare una funzione $G(z)$ che abbia un polo in $z = 1$ (affinché ivi lo abbia la funzione $F(z)$), non abbia poli coincidenti con zeri di $P(z)$ e sia tale da soddisfare la condizione:

$$(VII.42) \quad N_F(z) + D_F(z) = z^k$$

per un opportuno k , essendo $N_F(z)$ e $D_F(z)$ due polinomi primi, rispettivamente numeratore e denominatore di:

$$F(z) = (1/K_d) G(z) P(z)$$

Per imporre la (VII.42) conviene attribuire a $G(z)$ e $P(z)$ opportune espressioni, mettendo esplicitamente in evidenza la presenza di eventuali fattori del numeratore di $G(z)$ coincidenti con fattori del denominatore di $P(z)$ (si tenga presente che ciò non è in contrasto con le condizioni che si vogliono ottenere). Tenendo conto del fatto che nella funzione $F(z)$ compare anche il fattore $(1/K_d)$, conviene poi adottare per $G(z)$ un'espressione contenente il parametro K_d a fattore, in modo tale da semplificare la scrittura delle successive relazioni. Sulla base di tutto ciò si scriverà dunque:

$$P(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{(z^r + \alpha_{r-1}z^{r-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0)M(z)}$$

$$G(z) = \frac{(d_s z^s + \dots + d_1z + d_0)K_d M(z)}{(z^m + c_{m-1}z^{m-1} + \dots + c_1z + c_0)(z-1)}$$

essendo $M(z)$ il fattore comune di cui si è detto ed r, s, m interi opportuni. L'intero n , come d'abitudine, indica il grado del denominatore di $P(z)$ e quindi:

$$n = r + \text{grado}(M(z))$$

mentre, dovendo essere $G(z)$ propria, si avrà:

$$m + 1 = s + \text{grado}(M(z))$$

Si noti, in particolare, che:

$$(VII.43) \quad m + r + 1 = n + s$$

Con queste posizioni, la (VII.42) si traduce nella relazione:

$$(VII.42') \quad z^k = (b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0)(d_s z^s + \dots + d_1 z + d_0) + \\ + (z^r + a_{r-1} z^{r-1} + \dots + a_1 z + a_0)(z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + c_0)(z-1)$$

Il secondo membro di questa relazione è un polinomio in z , di grado pari a $r+m+1$ (infatti $n+s-1$ è strettamente inferiore a $r+m+1$). Quindi la relazione stessa potrà esser soddisfatta se e soltanto se i coefficienti di tutti i termini del polinomio a secondo membro sono nulli ad eccezione di quello (non nullo per costruzione) relativo alla potenza più elevata di z . Poichè i coefficienti di tale polinomio sono espressioni lineari nei parametri incogniti, imporre la (VII.42') equivale a risolvere un sistema di $r+m+1$ equazioni lineari, nelle $s+m+1$ incognite $d_s, \dots, d_0, c_{m-1}, \dots, c_0$. Se si vuole che il numero delle equazioni non superi il numero delle incognite, si dovrà porre:

$$(VII.44) \quad s \geq r$$

Da queste considerazioni si deduce anche che il valore di k che può rendere soddisfatta la (VII.42) è pari all'interno $r+m+1$ o, il che è lo stesso, che:

$$(VII.45) \quad k = n + s$$

Una tale relazione mostra che il valore di k non può mai essere inferiore al grado del denominatore di $P(z)$.

Il soddisfacimento della (VII.42) (ovvero della (VII.42')) si presta ad una certa arbitrarietà, legata, come si è visto, alla individuazione del polinomio $M(z)$ comune a numeratore di $G(z)$ e denominatore di $P(z)$ ed alla scelta dei gradi s ed m degli altri polinomi che caratterizzano $G(z)$. Dalla scelta di queste entità dipende, secondo la (VII.45), il valore di k che caratterizza la durata del transitorio.

Volendo ottenere il minimo valore possibile per k , si deve scegliere $s=0$. A questa scelta si accompagna la scelta $r=0$, conseguente alla (VI.44). In tale situazione particolare, il polinomio $M(z)$ viene a coincidere con l'intero denominatore di $P(z)$, mentre l'espressione proposta per $G(z)$ assume la forma:

$$(VII.46) \quad G(z) = \frac{d_0 K_d M(z)}{(z^{n-1} + c_{n-2} z^{n-2} + \dots + c_1 z + c_0)(z-1)}$$

dovendo essere $m=n-1$.

La relazione (VII.42¹) diviene in questo caso:

$$(VII.47) \quad z^n = (b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0)d_0 + \\ + (z^{n-1} + c_{n-2}z^{n-2} + \dots + c_1 + c_0)(z-1)$$

che corrisponde al sistema di n equazioni lineari:

$$(VII.47^1) \quad \begin{aligned} b_0d_0 - c_0 &= 0 \\ b_1d_0 + c_0 - c_1 &= 0 \\ b_2d_0 + c_1 - c_2 &= 0 \\ \dots &\dots \\ b_{n-2}d_0 + c_{n-3} - c_{n-2} &= 0 \\ b_{n-1}d_0 + c_{n-2} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

nelle n incognite $d_0, c_0, c_1, \dots, c_{n-2}$. Riscritto questo in forma matriciale e calcolato, con semplici manipolazioni, il relativo determinante, è facile constatare che un tale sistema di equazioni è resolubile se e solo se:

$$b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1} = 0$$

Questa condizione corrisponde al non annullarsi in $z=1$ del numeratore di $P(z)$, cioè all'assenza di zeri nel punto $z=1$ per la funzione di trasferimento del processo. Assumendo che una tale condizione sia soddisfatta (e si noti che, in caso contrario, la funzione $F(z)$ non avrebbe potuto avere, come richiesto, il polo in $z=1$), la soluzione (unica) delle (VII.47¹) è la seguente:

$$(VII.48) \quad \begin{aligned} d_0 &= 1/(b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1}) \\ c_0 &= d_0 b_0 \\ c_1 &= d_0 (b_0 + b_1) \\ \dots &\dots \\ c_{n-2} &= d_0 (b_0 + b_1 + \dots + b_{n-2}) \end{aligned}$$

Volendo riassumere le considerazioni svolte sino a questo punto si può concludere quanto segue. Supposto che $P(z)$ non abbia né poli né zeri nel punto $z=1$, il minimo valore di k per cui possono essere soddisfatte le (VII.32) e (VII.33) è pari al grado n del denominatore di $P(z)$.

La funzione $G(z)$ che assicura il soddisfacimento di tali relazioni con $k = n$ è data dalla (VII.46), con d_0, c_0, \dots, c_{n-2} nella forma (VII.48), essendo $M(z)$ e b_0, b_1, \dots, b_{n-1} individuati dalla seguente espressione della funzione $P(z)$:

$$P(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{M(z)}$$

Si noti che la funzione $G(z)$ così individuata può essere riscritta nella forma:

$$(VII.46') \quad G(z) = \frac{K_d M(z)}{((b_{n-1} + \dots + b_1 + b_0)z^{n-1} + \dots + (b_1 + b_0)z + b_0)(z-1)}$$

Se si adotta questa espressione, in luogo della (VII.42) è soddisfatta la relazione:

$$N_F(z) + D_F(z) = (b_{n-1} + \dots + b_1 + b_0) z^n$$

ma le (VII.32), (VII.33), come peraltro è facile verificare, continuano ad essere soddisfatte (con $k = n$).

La funzione $G(z)$ ottenuta nel modo sopra descritto ha la caratteristica di cancellare tutti i poli di $P(z)$. Un tale risultato può essere inaccettabile se qualche polo di $P(z)$ è esterno al cerchio unitario, in quanto causa di instabilità interna (cfr. par. V.5). Si potrebbe pensare allora di scegliere per $G(z)$ una struttura che cancelli solo i poli di $P(z)$ interni al cerchio unitario, assumendo per $M(z)$ non l'intero denominatore di $P(z)$ ma solo il fattore corrispondente a radici interne al cerchio unitario. In tal caso risulterà $r > 0$ e quindi (vedi (VII.44)) $s > 0$; l'intero k che caratterizza la durata del transitorio risulterà allora strettamente maggiore di n . È tuttavia opportuno osservare, in proposito, che una sintesi di questo genere può comunque dar luogo ad un andamento insoddisfacente per la risposta $y(t)$, nell'intervallo di tempo $(0, kT)$ durante il quale si esaurisce il transitorio. Infatti, in ciascuno dei k intervalli di tempo, di ampiezza T , nel quale si può pensare scomposto il transitorio, il processo è sollecitato con un ingresso di valore costante e risponde con un'uscita in cui sono presenti funzioni del tempo divergenti, corrispondenti ai poli di $P(s)$ con parte reale positiva. Ciò può dar luogo ad oscillazioni della risposta, che ovviamente si annulleranno una volta esaurito il transitorio, ma che nell'ambito del transitorio stesso potrebbero raggiungere ampiezze inaccettabili.

Per concludere l'argomento, rimane da esaminare il caso in cui $P(z)$ ha già un polo (e, ovviamente, nessuno zero) nel punto $z=1$. In proposito, non occorrerà attribuire un polo in $z=1$ alla funzione $G(z)$ e quindi si partirà da espressioni di $P(z)$ e $G(z)$ della forma:

$$P(z) = \frac{b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{(z^r + a_{r-1} z^{r-1} + \dots + a_1 z + a_0)(z - 1) M(z)}$$

$$G(z) = \frac{(d_s z^s + \dots + d_1 z + d_0) K_d M(z)}{(z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z + c_0)}$$

essendo $M(z)$ ancora un fattore del denominatore di $P(z)$ coincidente con un fattore del numeratore di $G(z)$. Si noti tuttavia che gli interi r, s, m hanno un ruolo diverso da quello indicato nel caso precedente, poiché dovrà risultare:

$$n = r + 1 + \text{grado } (M(z))$$

e

$$m = s + \text{grado } (M(z))$$

Tuttavia, la relazione (VII.43) rimane valida.

Con le posizioni indicate, la (VII.42) si traduce ancora formalmente nella (VII.42') e quindi si possono ripetere le considerazioni già svolte in proposito. In particolare, si può affermare che il valore di k che può rendere soddisfatta la (II.42) è ancora esprimibile come $k = n + s$.

Volendo ottenere $k = n$, cioè il minimo valore possibile, si deve porre come già nel caso precedente $s = r = 0$ e, quindi, scegliere per $M(z)$ un polinomio che comprenda tutti i fattori del denominatore di $P(z)$ tranne il fattore $(z-1)$. Ciò posto, la (VII.42') si traduce ancora nel sistema di equazioni lineari (VII.47').

Prima di concludere il paragrafo con alcune osservazioni di carattere generale, è utile esaminare due semplici esempi di applicazione.

Esempio VII.4 - Si vuole sintetizzare un sistema a controllo numerico secondo lo schema di Fig.VII.4. Il processo è caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$

Si vuole ottenere un sistema con risposta piatta per variazioni a gradino dell'ingresso. Si è scelto di adottare un organo di tenuta di ordine zero ed un passo di campionamento $T = 1$ sec. La costante di proporzionalità desiderata tra ingresso e uscita è pari a $K_d = 1$.

La funzione di trasferimento del processo equivalente a tempo discreto assume in questo caso l'espressione (cfr. Esempio VII.1):

$$P(z) = \frac{0,37(z + 0,72)}{(z - 1)(z - 0,37)}$$

Questa funzione ha $n = 2$ poli di cui uno nel punto $z = 1$. Ci si trova dunque nel secondo dei due casi esaminati. Posto:

$$M(z) = z - 0,37$$

$$G(z) = \frac{M(z) d_0}{c - c_0}$$

la (VII.48) forniscono i valori:

$$d_0 = 1,57$$

$$c_0 = 0,42$$

Per analizzare la risposta del sistema ad una variazione a gradino dell'ingresso si può seguire il procedimento indicato nell'Esempio VII.3. Per quanto riguarda $e'(z)$ si ottiene:

$$e'(z) = W_e(z) u'(z) = \frac{1}{1 + F(z)} \frac{z}{z - 1} = \frac{(z - 1)(0,637z + 0,267)}{0,637z^2} \frac{z}{z - 1} = 1 + 0,42 \frac{1}{z}$$

Corrispondentemente,

$$y'(z) = u'(z) - e'(z) = 0 + 0,58 \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots$$

Si vede facilmente che, a partire dal secondo campione in poi, $y(hT)$ assume costantemente un valore pari a quello desiderato. Per calcolare la funzione $y(t)$ ad ogni istante di tempo occorre determinare prima $m'(h)$ e, da questa, $m(t)$. Essendo:

$$m'(z) = \frac{(z - 1)(z - 0,37)}{0,637z^2} \frac{z}{z - 1} = 1,58 - 0,58 \frac{1}{z}$$

la funzione $m(t)$ ha un andamento pari a quello indicato in Fig.VII.19 a. Corrispondentemente, la funzione $y(t)$ assume l'andamento indicato in Fig.VII.19 b.

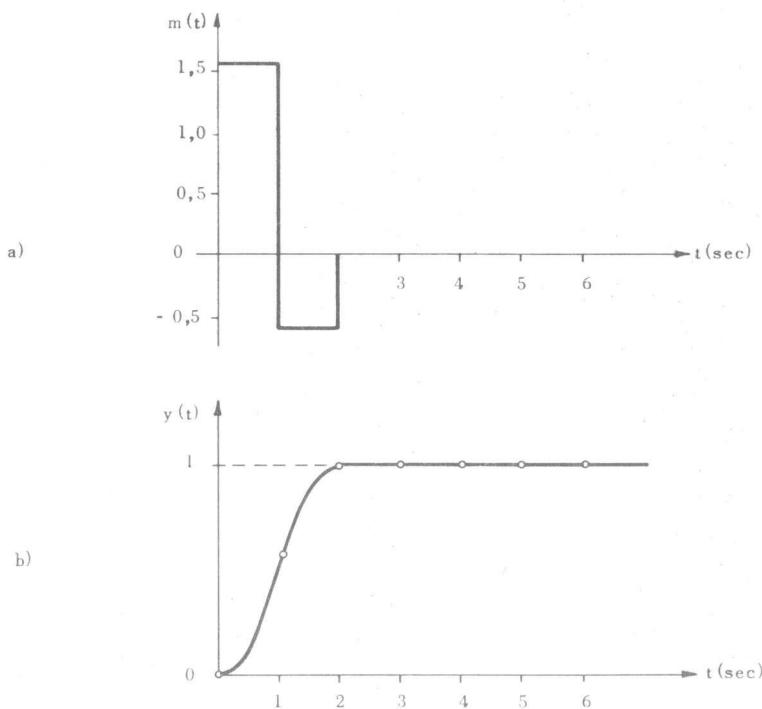


Fig.VII.19

Esempio VII.5 - Si consideri ancora un problema di sintesi di un sistema a risposta piatta, ma sia questa volta:

$$P(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

La funzione di trasferimento del processo equivalente a tempo discreto assume in questo caso l'espressione (per $T=1$):

$$P(z) = \frac{b_1 z + b_0}{(z-1)(z+a_0)}$$

con:

$$b_1 = -0,72$$

$$b_0 = -1$$

$$a_0 = -2,72$$

Questa funzione ha un polo in $z=1$ e quindi corrisponde ancora al secondo dei due casi esaminati. Tuttavia l'altro polo è esterno al cerchio unitario e non può venire cancellato. Si deve quindi affrontare il problema ponendo $M(z)=1$. Poiché $r=1$, se si vuole che la (VII.42') corrisponda ad un sistema con uguale numero di equazioni ed incognite si deve assumere $s=1$, il che comporta anche $m=1$, e scrivere $G(z)$ nella forma:

$$G(z) = \frac{d_1 z + d_0}{z + c_0}$$

Ciò posto, la (VII.42') diviene:

$$(b_1 z + b_0)(d_1 z + d_0) + (z-1)(z+a_0)(z+c_0) = z^3$$

che corrisponde al sistema di tre equazioni nelle tre incognite c_0, d_0, d_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ a_0 - 1 & b_1 & b_0 \\ -a_0 & b_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a_0 \\ a_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Attribuendo ai coefficienti i valori numerici e risolvendo si ottiene:

$$c_0 = 1,11$$

$$d_0 = 3,03$$

$$d_1 = -3,61$$

Per analizzare la risposta del sistema ad una variazione a gradino dell'ingresso si procede come nell'esempio precedente. Essendo:

$$\begin{aligned} m'(z) &= \frac{G(z)}{1+F(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{(z-1)(z+a_0)(d_1 z + d_0)}{z^3} \frac{z}{z-1} = \\ &= d_1 + \frac{d_0 + a_0 d_1}{z} + \frac{a_0 d_0}{z^2} = -3,61 + \frac{12,85}{z} - \frac{8,24}{z^2} \end{aligned}$$

la funzione $m(t)$ ha un andamento pari a quello indicato in Fig. VII.20 a.

Corrispondentemente, la funzione $y(t)$ assume l'andamento indicato in Figura VII.20 b. Come si vede, la risposta che si ottiene nel periodo transitorio è alquanto insoddisfacente.

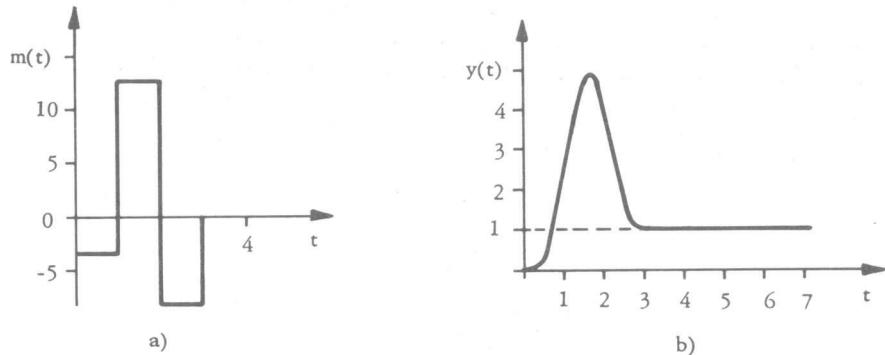


Fig. VII.20

Come già osservato, i metodi esposti sono sostanzialmente metodi *diretti* di sintesi. L'obiettivo che si vuole raggiungere è infatti quello di imporre alle diverse funzioni che caratterizzano la risposta del sistema una struttura ben definita (ad esempio, per quanto riguarda la funzione di trasferimento di errore, l'avere tutti i poli coincidenti nel punto $z=0$ ed uno zero nel punto $z=1$). Di conseguenza i metodi, dei quali il secondo - peraltro - presenta l'indubbio vantaggio di consentire - mediante un procedimento sistematico - al progettista di imporre al sistema un transitorio di durata prefissata, sono soggetti essenzialmente alle stesse limitazioni a suo tempo discusse a proposito dei metodi diretti di sintesi dei sistemi di controllo a tempo continuo (par. VI.3).

VII.7 - Ulteriori considerazioni sul controllo numerico diretto.

Per completare lo studio, almeno nelle sue linee essenziali, dei sistemi a controllo numerico diretto, si esamineranno ora alcuni aspetti più propriamente realizzativi, riguardanti la sintesi della funzione $G(z)$, la scelta del passo di campionamento T , l'influenza dell'errore di arrotondamento, il filtraggio dei rumori.

Si è già osservato all'inizio che, in un sistema a controllo numerico diretto, l'elaboratore elettronico viene introdotto allo scopo di generare la legge di controllo che deve essere imposta al processo attraverso la grandezza controllante. L'elaboratore calcola innanzitutto i valori della grandezza agente a' (cfr. Fig. VII.5), come semplice differenza tra i valori della grandezza di riferimento ed i valori della grandezza proveniente, attraverso il ramo di reazione, dall'uscita del sistema. Suc-

cessivamente la grandezza agente viene elaborata, al fine di produrre la grandezza che verrà utilizzata per controllare il processo. In questa fase, il ruolo dell'elaboratore è quello di produrre, a partire dalla successione:

$$(VII.49) \quad a^r(0), a^r(1), a^r(2), \dots$$

la successione:

$$(VII.50) \quad m^r(0), m^r(1), m^r(2), \dots$$

Tenendo conto del fatto che tra le trasformate $a^r(z)$ e $m^r(z)$ delle due funzioni di variabile intera $a^r(h)$ e $m^r(h)$ deve sussistere il legame:

$$(VII.51) \quad m^r(z) = G(z) a^r(z)$$

è immediato individuare il tipo di elaborazione cui deve essere sottoposta la successione (VII.49) allo scopo di ottenere la successione (VII.50). Posto:

$$G(z) = \frac{d_r z^r + \dots + d_1 z + d_0}{z^r + c_{r-1} z^{r-1} + \dots + c_1 z + c_0}$$

si può riscrivere la (VII.51) nella forma:

$$\begin{aligned} z^r m^r(z) + c_{r-1} z^{r-1} m^r(z) + \dots + c_1 z m^r(z) + c_0 m^r(z) &= d_r z^r a^r(z) + \dots + \\ &+ \dots + d_1 z a^r(z) + d_0 a^r(z) \end{aligned}$$

e, da questa, dedurre la relazione tra funzioni di variabile intera:

$$\begin{aligned} m^r(h+r) &= -c_{r-1} m^r(h+r-1) - \dots - c_1 m^r(h+1) - c_0 m^r(h) + \\ (VII.52) \quad &+ d_r a^r(h+r) + \dots + d_1 a^r(h+1) + d_0 a^r(h) \end{aligned}$$

Come si vede, il compito dell'elaboratore è quello di calcolare ricorsivamente il valore della funzione $m^r(h)$, a partire da una successione di r valori (già calcolati) di questa funzione e dai $r+1$ valori (noti) della funzione $a^r(h)$.

Il secondo aspetto che si vuole esaminare riguarda la scelta del passo di campionamento T . In proposito, è immediato dedurre dai risultati dell'analisi svolta in precedenza che la scelta di T influenza in modo determinante le caratteristiche della risposta transitoria del sistema. Basti

considerare il caso dei sistemi a risposta piatta ed osservare che in tali sistemi la durata del transitorio è direttamente proporzionale all'ampiezza di T . In generale, quindi, per avere un transitorio soddisfacente, sarebbe opportuno adottare per T valori più bassi possibile. Occorre tuttavia tenere presente che esistono almeno due ordini di considerazioni che sconsigliano la scelta di valori troppo bassi di T . Il primo riguarda i casi in cui viene utilizzato un solo elaboratore per effettuare il controllo simultaneo di un numero elevato di variabili relative ad uno stesso impianto industriale; in questi casi la scelta di T è vincolata dall'esistenza di un minimo dipendente sia dai tempi di calcolo propri dell'elaboratore (sostanzialmente, i tempi richiesti per eseguire l'operazione indicata nella (VII.52)), sia dal numero delle grandezze controllate simultaneamente. L'altro ordine di considerazioni che mette in evidenza l'esistenza di una limitazione, inferiore, sulla scelta di T riguarda l'influenza di questo parametro sull'ampiezza della variabile attraverso la quale si effettua il controllo sul processo. Si può constatare, in proposito, la seguente situazione: l'ampiezza della funzione a tempo discreto $m'(h)$ (quindi anche l'ampiezza della funzione a tempo continuo $m(t)$) tende, in generale, a valori arbitrariamente elevati al tendere di T a zero.

Si consideri, a titolo di esempio, il caso in cui la funzione di trasferimento del processo assume l'espressione:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

e si desidera realizzare un sistema di controllo a risposta piatta. Nell'esempio VII.4 il problema è stato affrontato e risolto ponendo inizialmente $T = 1$ sec.

Non vi è, però, difficoltà a risolvere il medesimo problema considerando T come un parametro. In questo caso, si deve partire dall'espressione di $P(z)$ in funzione di T , che è del tipo (cfr. Esempio VII.1):

$$P(z) = \frac{b_1(T)z + b_0(T)}{(z-1)(z - e^{-T})}$$

con:

$$b_1(T) = T + e^{-T} - 1$$

$$b_0(T) = -T e^{-T} - e^{-T} + 1$$

Ciò posto, si scrive $G(z)$ nella forma:

$$G(z) = \frac{z - e^{-T}}{c_1(T)z + c_0(T)}$$

e si calcolano $c_1(T)$ e $c_0(T)$ come soluzioni del sistema (VII.40). Si ottiene, in proposito:

$$c_0(T) = b_0(T)$$

$$c_1(T) = b_0(T) + b_1(T) = T(1 - e^{-T})$$

La funzione $m'(h)$ si determina calcolando dapprima $m'(z)$, che assume la forma:

$$m'(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)P(z)} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{(z-1)(z - e^{-T})}{c_1(T)z^2} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{c_1(T)} \cdot \frac{e^{-T}}{z} \cdot \frac{1}{z}$$

Come si può facilmente constatare, i valori di $m'(h)$ agli istanti $h = 0$ ed $h = 1$ sono illimitati al tendere di T a zero.

Poiché l'ampiezza della variabile attraverso la quale si effettua il controllo non può assumere valori troppo elevati (per la presenza di limiti di carattere fisico inerenti sia al dispositivo che la deve produrre sia al processo controllato), non si possono scegliere valori troppo bassi per il passo di campionamento T . In definitiva, quindi, nella scelta di questo parametro occorre realizzare un compromesso tra l'esigenza di ottenere un transitorio soddisfacente e quella di rispettare le due limitazioni che si sono indicate.

Per quanto riguarda il fenomeno dell'arrotondamento, presente nel dispositivo che converte i valori della grandezza controllata in una successione di valori numerici destinata ad essere elaborata ai fini del controllo, é da prevedersi, trattandosi di un fenomeno che influenza la misura della grandezza controllata, un legame diretto con la precisione del sistema. Per analizzare il fenomeno in termini quantitativi, conviene introdurre cosiddetto *passo di quantizzazione* Δ che viene definito come rapporto tra la massima escursione (in valore assoluto) prevedibile per la grandezza controllata e l'intero 2^q , essendo q la lunghezza di parola adottata nell'elaborazione numerica. Ovviamente, nella conversione analogico/numerica, la misura della grandezza controllata viene ad essere influenzata da un errore che, in termini assoluti, può essere compreso tra $-\Delta/2$ e $+\Delta/2$. Il sistema si comporta come se fosse presente, nel ramo di reazione, un disturbo la cui entità - istante per istante - é pari a quella dell'errore commesso nel processo di conversione (cfr. Fig.VII.21). L'in-

fluenza di questo errore può essere valutata molto semplicemente nel caso in cui ci si limiti a considerare la risposta a regime permanente ad ingressi costanti. È infatti immediato, in questo caso, concludere, sulla base di considerazioni del tipo di quelle svolte alla fine del par. III.4, che il sistema di controllo è affetto da un errore (differenza tra valore desiderato e valore effettivo della grandezza controllata) di entità pari a quella dell'errore ϵ commesso nel processo di conversione.

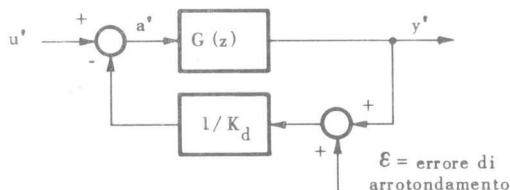


Fig. VII.21

Da un punto di vista pratico, si può ad esempio osservare che, se la lunghezza utile di parola è di 8 bit, tenuto conto della necessità di rappresentare il segno, risulta $q = 7$. Il passo di quantizzazione Δ è pari a $(1/128)$ -esimo del valore massimo ammisible; la precisione del sistema è dunque pari a $(1/256)$ -esimo (circa il 4%) del valore massimo ammmissible.

Un ultimo aspetto che è importante tenere presente, in relazione a problemi realizzativi, riguarda l'opportunità di *filtrare i segnali che vengono sottoposti a campionamento*, onde evitare la generazione di rumori a bassa frequenza per effetto di spostamento di frequenze (cfr. par. VII.3). In generale il contenuto armonico dei rumori sovrapposti alle grandezze controllate (o anche al riferimento) è scarso in corrispondenza all'intervallo di frequenze di interesse per il funzionamento del sistema e, viceversa, prevalente in corrispondenza a valori di frequenza esterni a tale intervallo. Di conseguenza, in un sistema di controllo a tempo continuo, per eliminare sostanzialmente i rumori, basta dimensionare opportunamente la banda passante del sistema (cfr. par. III.7). Nei sistemi a tempo discreto una tale soluzione risulta inefficiente in quanto, per effetto dei fenomeni di spostamento di frequenze, tutte le componenti armoniche del rumore corrispondenti a frequenze superiori a quella di campionamento vengono ad interessare l'intervallo di frequenze proprio dei segnali utili. La tecnica più naturale per eliminare questo fenomeno è quella di limitare la banda dei segnali che devono essere campionati, filtrando le componenti armoniche del rumore corrispondenti a frequenze superiori a quella di campionamento. In pratica, un filtro caratterizzato da una banda passante $B \cong 2/T$ rad/sec. (in cui T rappresenta l'inter-

vallo di campionamento) è sufficiente ad ottenere risultati soddisfacenti. Se B assume valori non inferiori all'unità, sono possibili realizzazioni analoghe del filtro in questione. Altrimenti, si rende necessario un filtraggio di tipo numerico, che viene eseguito elaborando opportunamente funzioni a tempo discreto prodotte dal dispositivo di campionamento.

PROBLEMI

VII.1 - Si dimostri che il minimo valore per il quale può essere soddisfatta la (VII.30) è pari alla differenza tra il numero n di poli ed il numero m di zeri della funzione $P(z)$. (Si assuma $n > m$ e si tenga presente che, se $G(z)$ è una funzione razionale propria, il numero di poli di $G(z) P(z)$, anche se $G(z)$ è scelta in modo tale da cancellare il massimo numero fattori - a numeratore ed a denominatore - in $P(z)$, non può comunque essere inferiore ad $n - m$).

VII.2 - Si consideri il sistema di controllo indicato in Fig.VII.5 e si assuma $G(z) = 1$, $K_H = 1$ e $T = 1$ sec. Nell'ipotesi che la funzione di trasferimento del processo sia:

$$P(s) = \frac{K}{s^2(s + 4)}$$

si risponda ai seguenti quesiti:

- a) in corrispondenza a quali valori di K il sistema è stabile?
- b) quali sono i valori, agli istanti $0, T, 2T, \dots$, della risposta ad una variazione a gradino dell'ingresso?

VII.3 - Si risolva il problema VII.2 assumendo questa volta:

$$P(s) = \frac{K(s + 2)}{s(s + 4)(s + 8)}$$

VII.4 - È possibile, per il sistema di controllo considerato nel problema VII.2, scegliere $G(z)$ in modo tale da avere una risposta piatta?

VII.5 - Si consideri il problema VII.2 e si assuma per $P(s)$ l'espressione indicata nel problema VII.3. Si determinino le espressioni di $G(z)$ in corrispondenza alle quali si ottiene un sistema a tempo di risposta minimo ovvero, in alternativa, un sistema a risposta piatta. Si calcolino, nei due casi, gli andamenti della grandezza presente all'uscita del dispositivo di tenuta.

VII.6 - Si consideri il sistema di controllo indicato in Fig.VII.5 e si assuma $K_H = 1$, $T = 1$ sec. e:

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)}$$

Adottando opportune modifiche al procedimento indicato nel par. VII.6 (per tenere conto del fatto che, in questo caso, la funzione $P(s)$ non ha poli nell'origine), si determini $G(z)$ in modo tale da ottenere un sistema a risposta piatta.

- VII.7** - Si consideri il sistema di controllo già esaminato nell'Esempio VII.4 e si supponga di aver determinato $G(z)$, al fine di ottenere un sistema a risposta piatta, conservando esplicitamente la dipendenza dal parametro T dei coefficienti che caratterizzano tale funzione (par. VII.7). Si calcoli il minimo valore che può essere attribuito a T , compatibilmente con la limitazione:

$$|m(t)| \leq 10$$

*

CAPITOLO VIII

METODI DI SINTESI PER TENTATIVI DI SISTEMI DI CONTROLLO A PIÙ INGRESSI E PIÙ USCITE

VIII.1 - Generalità.

In questo Capitolo e nei successivi si affronta lo studio di quei sistemi in cui vengono controllate più grandezze relative ad un medesimo oggetto o processo. Nel presente Capitolo, in particolare, vengono introdotti i metodi di analisi e di sintesi che si presentano come l'estensione più naturale, al caso di sistemi con più ingressi e più uscite, dei metodi elementari utilizzati per lo studio dei sistemi con un solo ingresso ed una sola uscita introdotti in alcuni dei Capitoli precedenti. Si tratta, in termini più esplicativi, di metodi nei quali le proprietà di un sistema di controllo vengono caratterizzate valutando un numero limitato di aspetti convenzionali della risposta (risposta a regime permanente per ingressi costanti, banda passante, margini di stabilità, ecc.) e che fanno uso sistematico di rappresentazioni grafiche (delle risposte armoniche) nella descrizione delle diverse parti che compongono il sistema. Successivamente, nei Capitoli IX, X e XI, verranno presentati metodi di tipo diverso, che si basano sostanzialmente sull'analisi di proprietà delle rappresentazioni con lo spazio di stato delle diverse parti che compongono il sistema.

Lo studio svolto in questo Capitolo si colloca essenzialmente nello stesso quadro di riferimento che si è introdotto nel par. III.1 e che ha portato a concentrare l'attenzione su quattro tipi di caratteristiche generali: la stabilità, la fedeltà di risposta, la capacità di reagire ai disturbi, la capacità di reagire a variazioni dei parametri. L'analisi di questi aspetti del comportamento di un sistema verrà però svolta ad un li-

vello di dettaglio inferiore a quello adottato nel caso dei sistemi ad un solo ingresso ed una sola uscita e questo sia per le difficoltà intrinsecamente presenti in uno studio che riveste un carattere di maggiore generalità, sia per mantenere la trattazione entro quei limiti di semplicità che si sono adottati nell'esposizione delle altre parti della materia. Corrispondentemente, nei problemi di sintesi verranno presi in considerazione soltanto alcuni degli aspetti cui si fa abitualmente riferimento per caratterizzare un sistema di controllo a un solo ingresso e una sola uscita.

Se, tra i diversi aspetti del comportamento di un sistema di controllo messi in luce nel corso del Capitolo III si vogliono individuare quelli a carattere - per così dire - irrinunciabile, si è immediatamente portati a fissare l'attenzione del requisito della *stabilità*. Ciò che appare essenziale assicurare, da questo punto di vista, non è soltanto la stabilità asintotica del sistema in corrispondenza alle condizioni nominali di progetto, ma anche e soprattutto la *capacità del sistema di rimanere stabile in presenza di variazioni nei parametri* che caratterizzano le diverse parti del sistema. Come si è visto, per descrivere in modo semplice questa proprietà, soprattutto nel caso in cui si utilizzano le risposte armoniche per descrivere le diverse parti che compongono il sistema stesso, si possono introdurre i cosiddetti margini di stabilità. Oltre tutto, una tale caratterizzazione si presta anche ad una valutazione, sia pure largamente qualitativa, della qualità della risposta transitoria. L'estensione di questo tipo di analisi al caso di sistemi a più variabili controllate è alquanto diretta e si basa sull'introduzione, con riferimento al criterio generale di stabilità di Nyquist-Gershgorin-Rosenbrock, di una opportuna estensione del concetto di *margine di fase* (cfr. par.VIII.2).

Per caratterizzare la fedeltà di risposta di un sistema di controllo a più variabili si può adottare un punto di vista sostanzialmente identico a quello introdotto per i sistemi a un solo ingresso e una sola uscita. Considerato un vettore di ingresso $\mathbf{u}(t)$ a p componenti ed un vettore di uscita $\mathbf{y}(t)$ a q componenti ed indicata con \mathbf{K}_d una matrice $q \times p$ di costanti, mediante la quale è possibile definire l'andamento desiderato:

$$(VIII.1) \quad \mathbf{y}_d(t) = \mathbf{K}_d \mathbf{u}(t)$$

del vettore di uscita, si può introdurre un errore (vettore a q componenti):

$$(VIII.2) \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{K}_d \mathbf{u}(t) - \mathbf{y}(t)$$

Trattando separatamente il caso in cui è presente il solo ingresso e sono nulli i disturbi da quello in cui è nullo l'ingresso e sono presenti i disturbi, si può caratterizzare il comportamento del sistema analizzando le proprietà della risposta a regime permanente in corrispondenza a particolari classi di ingressi (o disturbi). Da questo punto di vista, l'aspetto

più semplice che può essere preso in considerazione è quello della *risposta a regime permanente a funzioni di ingresso costanti* (cfr. par.VIII.3).

I procedimenti di sintesi che vengono considerati in questo capitolo fanno essenzialmente riferimento a questi due aspetti fondamentali del comportamento di un sistema di controllo.

Prima di passare ad uno studio dettagliato dei vari problemi di analisi che si sono indicati e dei corrispondenti problemi di sintesi, è utile concludere queste brevi considerazioni preliminari introducendo alcuni strumenti formali per il calcolo della risposta di un sistema di controllo a più variabili.

Uno schema a controllazione, a più variabili, non differisce formalmente da quelli considerati fino a questo punto se non nel fatto che le grandezze associate ai diversi segmenti orientati rappresentano entità vettoriali. Se sono date le matrici di trasferimento $\mathbf{G}(s)$ e, rispettivamente, $\mathbf{H}(s)$, corrispondenti ai due sottosistemi presenti nel ramo diretto e, rispettivamente, nel ramo di reazione (Fig.VIII.1), la matrice di trasferimento complessiva si può calcolare risolvendo l'uguaglianza:

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(s) [\mathbf{u} - \mathbf{H}(s) \mathbf{y}]$$

nella forma:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s) \mathbf{H}(s)]^{-1} \mathbf{G}(s) \mathbf{u}$$

Si ottiene in questo modo:

$$(VIII.3) \quad \mathbf{W}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s) \mathbf{H}(s)]^{-1} \mathbf{G}(s)$$

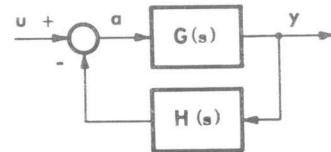


Fig.VIII.1

Si noti che, se ingresso ed uscita hanno rispettivamente p e q componenti, per motivi di consistenza $\mathbf{G}(s)$ deve essere una matrice $q \times p$, $\mathbf{H}(s)$ una matrice $p \times q$ e \mathbf{I} una matrice (identità) $q \times q$. Alternativamente, si può risolvere l'uguaglianza:

$$\mathbf{a} = \mathbf{u} - \mathbf{H}(s) \mathbf{G}(s) \mathbf{a}$$

nella forma:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{I} + \mathbf{H}(s) \mathbf{G}(s)]^{-1} \mathbf{u}$$

e tenere presente che:

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(s) \mathbf{a}$$

Si ottiene in questo modo:

$$(VIII.4) \quad \mathbf{W}(s) = \mathbf{G}(s) [\mathbf{I} + \mathbf{H}(s) \mathbf{G}(s)]^{-1}$$

Questa volta \mathbf{I} è una matrice (identità) $p \times p$. La (VIII.3) e la (VIII.4) sono due espressioni alternative della matrice di trasferimento del sistema di Fig.VIII.1.

In modo perfettamente analogo si possono trattare i casi in cui si desidera calcolare la risposta a un vettore $\mathbf{z}(t)$ di disturbi. Ad esempio, per lo schema di Fig.VIII.2, risolvendo l'uguaglianza (valida quando $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$):

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{G}(s) \mathbf{H}(s) \mathbf{y}$$

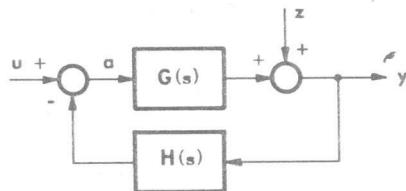
nella forma:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s) \mathbf{H}(s)]^{-1} \mathbf{z}$$

si ottiene:

$$(VIII.5) \quad \mathbf{W}_z(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s) \mathbf{H}(s)]^{-1}$$

Fig.VIII.2



Utilizzando le espressioni così dedotte è possibile mettere in luce un risultato che, in un certo senso, estende al caso dei sistemi a più variabili le considerazioni svolte alla fine del par.III.1 a proposito del ruolo del coefficiente di guadagno della funzione di trasferimento del ramo diretto, in un sistema a controllareazione. A questo scopo conviene fare riferimento allo schema di controllo indicato in Fig.VIII.3, nel quale è possibile identificare direttamente l'errore $e(t)$ (cfr. (VIII.2)) con la grandezza presente all'uscita del dispositivo di confronto.

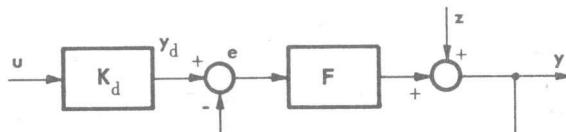


Fig.VIII.3

Nello schema di Fig.VIII.2, se si assume che ingresso ed uscita siano unidimensionali, scegliendo $H(s) = 1/K_d$ si ottiene un sistema nel quale la grandezza pre-

sente all'uscita del dispositivo di confronto è pari a $(1/K_d) e(t)$. Lo stesso risultato si ottiene anche nel caso multidimensionale, se K_d è una matrice quadrata e non singolare; basta porre $H(s) = K_d^{-1}$. D'altra parte, se vale questa ipotesi e se $F(s) = G(s)K_d^{-1}$, i due schemi di Fig.VIII.2 e VIII.3 risultano equivalenti; quello di Fig.VIII.3 è però più generale in quanto non viene presa in considerazione la necessità di invertire K_d .

Nello schema considerato la matrice di trasferimento ingresso - errore $W_e(s)$ e la matrice di trasferimento disturbo - uscita $W_z(s)$ assumono le espressioni:

$$(VIII.6) \quad W_e(s) = [I + F(s)]^{-1} K_d$$

$$(VIII.7) \quad W_z(s) = [I + F(s)]^{-1}$$

La matrice $[I + F(s)]^{-1}$, che caratterizza entrambe queste espressioni, è dotata di un'interessante proprietà asintotica, che si può mettere in evidenza considerando le seguenti trasformazioni (scritte per il caso in cui F sia 2×2 , ma immediatamente estensibili al caso generale):

$$\begin{aligned} [I + F]^{-1} &= \begin{bmatrix} (1+f_{11}) & f_{12} \\ f_{21} & (1+f_{22}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/f_{11} & 0 \\ 0 & 1/f_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/f_{11} & 0 \\ 0 & 1/f_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1/f_{11} & 0 \\ 0 & 1/f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+f_{11}) & f_{12} \\ f_{21} & (1+f_{22}) \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1/f_{11} & 0 \\ 0 & 1/f_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1+f_{11}}{f_{11}} & \frac{f_{12}}{f_{11}} \\ \frac{f_{21}}{f_{22}} & \frac{1+f_{22}}{f_{22}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{f_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_{22}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se gli elementi f_{11} ed f_{22} tendono entrambi all'infinito, il primo fattore dell'ultimo membro di questa uguaglianza tende alla matrice identità, mentre il secondo fattore tende alla matrice nulla. Di conseguenza risulta:

$$\lim_{\substack{f_{11} \rightarrow \infty \\ f_{22} \rightarrow \infty}} W_e(s) = \lim_{\substack{f_{11} \rightarrow \infty \\ f_{22} \rightarrow \infty}} W_z(s) = 0$$

Questi risultati estendono immediatamente i risultati illustrati alla fine del par. III.1. In particolare essi consentono di affermare che, nei sistemi di controllo a più uscite, i coefficienti di guadagno degli elementi diagonali della matrice $\mathbf{F}(s)$ svolgono un ruolo che è analogo a quello svolto dal coefficiente di guadagno della funzione $F(s)$ in un sistema di controllo a una sola uscita. Al tendere all'infinito di questi coefficienti, le funzioni di trasferimento ingresso-errore e disturbo-uscita tendono ad assumere valori che, teoricamente, danno luogo a errore nullo.

VIII.2 - Sulla stabilità di un sistema a controreazione con più ingressi e più uscite.

Per valutare stabilità asintotica del sistema a controreazione considerato in Fig. VIII.3, al quale si farà normalmente riferimento nel seguito, è utile tenere presente le considerazioni generali svolte nel paragrafo II.5. Alla luce di tali considerazioni, è opportuno innanzitutto verificare che nel sistema ad anello aperto non siano presenti sottosistemi non raggiungibili e/o non osservabili con autovalori a parte reale positiva o nulla. Se ciò avviene, infatti, il sistema ad anello chiuso non può essere stabile asintoticamente.

In molti casi, il sistema ad anello aperto è costituito dalla cascata di un compensatore e del processo controllato. Anche se ciascuna delle due parti è raggiungibile ed osservabile, la cascata può non risultare tale, così come è stato messo in luce nel par. VI.5 per processi con un solo ingresso ed una sola uscita. Per valutare se la connessione in cascata di due sottosistemi a più ingressi e più uscite è non raggiungibile oppure non osservabile, può essere conveniente far uso del risultato, ricordato nel par. II.4, che lega le molteplicità degli autovalori in una realizzazione minima alle matrici residue dello sviluppo in funzioni parziali della funzione di trasferimento. Tale risultato consente di affermare che, se p è una radice semplice del minimo denominatore comune di $\mathbf{P}(s)$, la molteplicità dell'autovalore p nel polinomio caratteristico associato ad una realizzazione minima di $\mathbf{P}(s)$ è pari al rango r della matrice di residui di $\mathbf{P}(s)$ in p , cioè all'intero:

$$r = \text{rango} (\lim_{s \rightarrow p} (s-p) \mathbf{P}(s))$$

Un risultato del genere può essere utilizzato nel modo seguente. Si supponga, ad esempio, che la rappresentazione del processo sia rag-

giungibile e osservabile e che la sua matrice di $\mathbf{P}(s)$ abbia tutti poli semplici. Si supponga che ipotesi analoghe valgano per il compensatore e che anche nella sua matrice di trasferimento $\mathbf{G}(s)$. In questo caso è possibile, valutando i ranghi delle matrici residue di $\mathbf{G}(s)$ e $\mathbf{P}(s)$, calcolare esattamente le molteplicità degli autovalori associati alle rappresentazioni con lo spazio di stato della cascata compensatore - processo. Si consideri ora la funzione $\mathbf{F}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{G}(s)$ e si supponga che anche essa abbia tutti poli semplici. Valutando i ranghi delle matrici residue corrispondenti a tali poli, si possono calcolare esattamente le molteplicità degli autovalori associati a una realizzazione minima di $\mathbf{F}(s)$, cioè alla parte raggiungibile e osservabile della cascata compensatore - processo. Se le molteplicità così valutate risultano inferiori a quelle ottenute in precedenza, si può affermare che la cascata compensatore - processo è non raggiungibile oppure non osservabile.

Si consideri il seguente esempio:

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s-1}{s+2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cui corrisponde la funzione:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{s+3} & \frac{7s+4}{(s-1)(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

Utilizzando i ranghi delle matrici residue per il calcolo della dimensione delle realizzazioni minime di $\mathbf{P}(s)$, $\mathbf{G}(s)$ e $\mathbf{F}(s)$, si vede che la realizzazione minima di $\mathbf{P}(s)$ ha dimensione 4, quella di $\mathbf{G}(s)$ dimensione 1 e quella di $\mathbf{F}(s)$ dimensione ancora 4. Di conseguenza, si deduce che la cascata compensatore - processo non è raggiungibile e osservabile. La perdita di raggiungibilità e/o osservabilità non riguarda però autovalori con parte reale positiva. Essa riguarda in particolare l'autovalore -2, che è presente nel processo e nel compensatore, ma che nella parte raggiungibile e osservabile della cascata presenta molteplicità unitaria.

Una volta verificata l'assenza di parti non raggiungibili e/o non osservabili dotate di autovalori con parte reale positiva o nulla, si può

procedere a valutare la stabilità secondo il criterio di Nyquist, verificando che il numero N di giri che l'estremo del vettore rappresentativo della funzione $\det(I + F(j\omega))$ compie in senso antiorario attorno alla propria origine quando ω varia da $-\infty$ a $+\infty$ sia pari al numero Z_{AP} di autovalori con parte reale positiva presenti nella rappresentazione del sistema ad anello aperto.

Per utilizzare in pratica questo criterio occorre conoscere sia N che Z_{AP} . Nei casi in cui la matrice $I + F(j\omega)$ risulti *diagonale*, oppure *triangolare* (superiore o inferiore), oppure ancora *dominante diagonale*, il numero N può essere calcolato come somma dei numeri n_i di giri compiuti dai singoli vettori rappresentativi delle funzioni $f_{ii}(j\omega)$, corrispondenti agli elementi diagonali di $F(j\omega)$, attorno al punto $-1+j0$. Le ipotesi di diagonalità o di triangolarità si constatano evidentemente per ispezione della $F(j\omega)$, quella di dominanza diagonale può a sua volta esser verificata a partire dall'osservazione delle rappresentazioni grafiche degli elementi della matrice $F(j\omega)$, costruendo le cosiddette fasce di Gershgorin attorno alle rappresentazioni di ciascuno degli elementi diagonali $f_{ii}(j\omega)$ e verificando che il punto $-1+j0$ risulti, in ciascuno dei casi, esterno a queste fasce.

Per quanto riguarda la valutazione di Z_{AP} può essere utile servirsi ancora del risultato, richiamato sopra, che lega le molteplicità degli autovalori in una realizzazione minima alle matrici residue dello sviluppo in funzioni parziali della funzione di trasferimento.

Sia:

$$F(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{(s-2)} \\ \frac{s-1}{s(s+1)} & \frac{5}{(s+4)} \end{bmatrix}$$

In questo caso, il minimo denominatore comune di $F(s)$ ha una radice semplice in $s=2$ e la corrispondente matrice residua:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 1. Se il sistema ad anello aperto è raggiungibile ed osservabile, si può concludere che $Z_{AP} = 1$.

Sia:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1)} & \frac{1}{(s-2)(s-4)} \\ \frac{s+1}{s(s-2)} & \frac{5}{(s+4)} \end{bmatrix}$$

In questo caso, il minimo denominatore comune di $\mathbf{F}(s)$ ha una radice semplice in $s=1$ ed una radice semplice in $s=2$. La matrice residua in $s=1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 1. La matrice residua in $s=2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1,5 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 2. Se il sistema ad anello aperto è raggiungibile ed osservabile, si può concludere che $Z_{AP}=3$.

Prima di concludere il paragrafo, si ritiene utile osservare che, in casi particolari, la costruzione delle fasce di Gershgorin consente non solo di valutare la stabilità di un sistema, ma anche di ottenere informazioni sulla conservazione della stabilità in presenza di variazioni dei parametri. A questo proposito, si osservi innanzitutto che, se $Z_{AP}=0$, una condizione sufficiente per la stabilità asintotica di un sistema reazionato a più variabili può essere ottenuta nel seguente modo:

- si tracciano i diagrammi polari delle funzioni $f_{ij}(\omega)$ (per $i=1, \dots, q$ e $j=1, \dots, q$);
- si costruiscono, per ciascuno degli elementi diagonali, le famiglie di cerchi che hanno centro nell'estremo del vettore $f_{ii}(j\omega)$ e raggio:

$$d_i(\omega) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |f_{ij}(j\omega)|$$

se si considera il caso della dominanza per righe, ovvero:

$$d_i^1(\omega) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |f_{ji}(j\omega)|$$

se si considera il caso della dominanza per colonne;

- se l'inviluppo di ciascuna famiglia (fascia di Gershgorin) non include il punto $(-1, j0)$ e se il vettore rappresentativo della funzione $f_{ii}(j\omega)$ non compie alcuna rotazione attorno al punto $(-1, j0)$, quando ω varia da $-\infty$ a $+\infty$, il sistema a controreazione di Fig.VIII.3 è stabile asintoticamente.

Tale criterio è, come si è detto, soltanto un criterio sufficiente; infatti la condizione di dominanza diagonale non è di per sé una condizione necessaria di stabilità, così come non è necessario imporre, anche nel caso di dominanza, che sia $\nu_i = 0$ per verificare che sia $N = \nu_1 + \dots + \nu_q = 0$. Tuttavia il criterio è molto semplice e si presta ad un uso sostanzialmente analogo a quello del criterio di Nyquist nella sintesi dei sistemi a controreazione.

La caratteristica più interessante di questo criterio risiede nella possibilità, che esso offre, di evidenziare la maggiore o minore capacità del sistema di rimanere stabile in presenza di variazioni nei para-

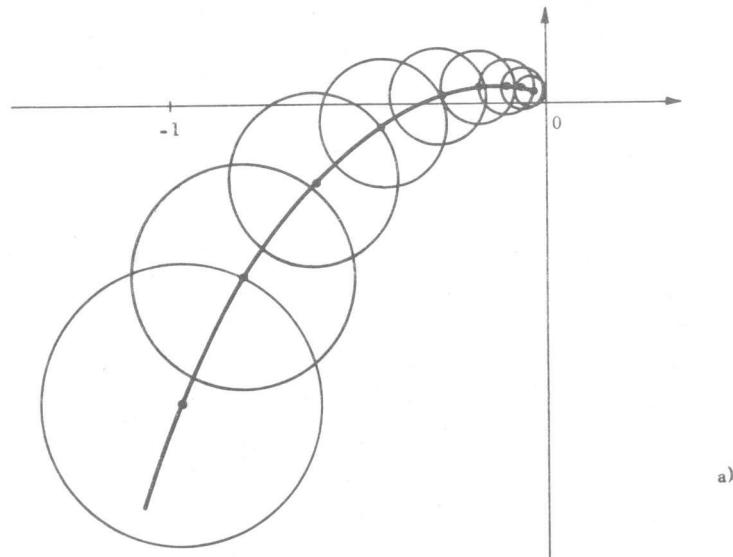


Fig.VIII.4

metri che caratterizzano la matrice $\mathbf{F}(j\omega)$, attraverso l'introduzione di un opportuno margine di fase. Quest'ultimo è definito considerando il più piccolo tra gli angoli φ_i formati (cfr. Fig. VIII.4 b) dai vettori orientati $O A_i$ con il semiasse reale negativo:

$$m_\varphi = \min \{\varphi_i\}$$

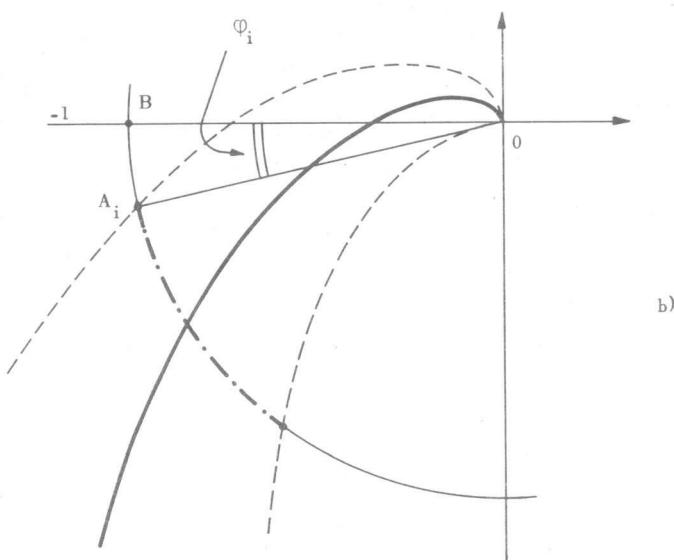


Fig.VIII.4

Così come nel caso dei sistemi ad una sola variabile controllata, quanto più grande è il valore del margine così introdotto, tanto maggiori devono essere le variazioni dei parametri necessarie per passare dalla $\mathbf{F}(j\omega)$ nominale ad una in corrispondenza alla quale il sistema non sia più stabile. Si può anzi osservare che, rispetto al caso dei sistemi a una sola variabile controllata, il margine così introdotto fornisce una valutazione anche più prudente della capacità del sistema a rimanere stabile in presenza di variazioni dei parametri e ciò a causa del carattere di sufficienza del criterio di stabilità cui si fa riferimento.

VIII.3 - Le caratteristiche della risposta in regime permanente ad ingressi costanti.

Lo studio delle caratteristiche della risposta in regime permanente di un sistema di controllo a più variabili a ingressi di forma polinomiale, affrontato ad un livello di generalità corrispondente a quello considerato nei par. III.2 e III.3, è un problema di analisi la cui soluzione comporta un impegno che supera i limiti imposti alla presente trattazione. In questo paragrafo viene quindi considerata esclusivamente una situazione particolare, peraltro di notevole interesse ai fini delle applicazioni a problemi di sintesi. In accordo con quanto anticipato nel paragrafo VIII.1, si prende in esame soltanto il caso di ingressi costanti, utilizzando le proprietà della corrispondente risposta come base per una classificazione dei sistemi di controllo.

Un sistema a più variabili controllate si dice di tipo 1, se il valore della risposta in regime permanente ad ogni ingresso costante $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_0$ coincide con il valore desiderato $\tilde{y}_d(t) = K_d \tilde{u}_0$. Questa definizione generalizza la definizione data nel par. VIII.1, ma non è la sola generalizzazione possibile. Mentre infatti questa definizione prevede che, in corrispondenza ad ogni valore (costante) dell'ingresso, tutte le componenti dell'uscita assumano (in regime permanente) un valore pari a quello desiderato, si potrebbe pensare di prendere in considerazione soltanto alcune particolari componenti dell'ingresso e/o alcune particolari componenti dell'uscita, ottenendo in tal modo classificazioni anche meno vincolanti di quella data. La definizione proposta, tuttavia, è quella cui corrisponde l'analisi più semplice possibile.

Volendo individuare condizioni affinché un sistema assegnato sia di tipo 1 si possono prendere in considerazione sia la matrice di trasferimento ingresso - uscita $W(s)$, sia la matrice di trasferimento ingresso - errore $W_e(s)$. In proposito è facile verificare, sulla base di un ragionamento del tutto analogo a quello svolto nel par. III.2, che un sistema è di tipo 1 se e solo se è soddisfatta una delle due condizioni equivalenti:

$$(VIII.8') \quad \lim_{s \rightarrow 0} W(s) = K_d$$

$$(VIII.8'') \quad \lim_{s \rightarrow 0} W_e(s) = 0$$

A partire da queste condizioni è possibile formularne altre, riferite alla matrice di trasferimento del ramo diretto $F(s)$ del sistema a con-

troreazione indicato in Fig.VIII.3. Tenendo presenti le (VIII.5) e (VIII.6), si constata immediatamente che una qualsiasi delle due condizioni equivalenti:

$$(VIII.9') \quad \lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{F}(s) [\mathbf{I} + \mathbf{F}(s)]^{-1} = \mathbf{I}$$

$$(VIII.9'') \quad \lim_{s \rightarrow 0} [\mathbf{I} + \mathbf{F}(s)]^{-1} = \mathbf{0}$$

è una condizione sufficiente per il verificarsi delle (VIII.8) (si noti che queste condizioni sono anche necessarie nel caso in cui le righe della matrice \mathbf{K}_d risultino linearmente indipendenti).

Alle condizioni (VIII.9) può essere data una formulazione equivalente che, come si vedrà, risulta più utile nelle applicazioni a problemi di sintesi; si può, in effetti, provare che la (VIII.9') (o, il che è lo stesso, la (VIII.9'')) è soddisfatta se e solo se la funzione $\det[\mathbf{F}(s)]$ non è identicamente nulla e risulta:

$$(VIII.10) \quad \lim_{s \rightarrow 0} [\mathbf{F}(s)]^{-1} = \mathbf{0}$$

Si noti che, se la funzione $\det[\mathbf{F}(s)]$ non è identicamente nulla, è possibile le individuare un intorno, sul piano s,

$$I_\rho = \{s \in \mathbb{C} : 0 < |s| < \rho\}$$

nei punti del quale la funzione stessa, che è una funzione razionale, assume valore finito e non nullo (il punto $s=0$ viene escluso perché ivi la funzione $\det[\mathbf{F}(s)]$ potrebbe avere un polo o uno zero). In ogni punto dell'intorno I_ρ risulta allora possibile definire la matrice (di funzioni razionali) $[\mathbf{F}(s)]^{-1}$ ed effettuare le trasformazioni:

$$\mathbf{F}(s) [\mathbf{I} + \mathbf{F}(s)]^{-1} = \mathbf{F}(s) \{ [[\mathbf{F}(s)]^{-1} + \mathbf{I}] [\mathbf{F}(s)] \}^{-1} = \{ [\mathbf{F}(s)]^{-1} + \mathbf{I} \}^{-1}$$

Di conseguenza, risulta:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{F}(s) [\mathbf{I} + \mathbf{F}(s)]^{-1} = \lim_{s \rightarrow 0} \{ [\mathbf{F}(s)]^{-1} + \mathbf{I} \}^{-1}$$

Se vale la condizione (VIII.10), la matrice $[\mathbf{F}(s)]^{-1}$ è definita anche in $s=0$ e si ha:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{ [\mathbf{F}(s)]^{-1} + \mathbf{I} \} = \mathbf{I} = \lim_{s \rightarrow 0} \{ [\mathbf{F}(s)]^{-1} + \mathbf{I} \}^{-1}$$

Da questa relazione e dalla precedente discende direttamente la (VIII.9'). Si è così provata la *sufficienza* della condizione data; la prova della *necessità* può essere svolta con argomenti del tutto analoghi e si lascia, per esercizio, al lettore.

Si può affermare, pertanto, che se la matrice $[\mathbf{F}(s)]^{-1}$ è nulla nel punto $s=0$, il sistema a controreazione indicato in Fig.VIII.7 è di tipo 1.

Per interpretare il significato di questa condizione, conviene anzitutto osservare che, nel caso particolare in cui il sistema di controllo ha un solo ingresso ed una sola uscita essa si riduce alla ben nota condizione stabilità nel par.III.2. Infatti la funzione $[\mathbf{F}(s)]^{-1} = 1 / [\mathbf{F}(s)]$ si annulla nel punto $s=0$ se e solo se questo punto è un polo di $\mathbf{F}(s)$. In generale, tuttavia, non è altrettanto immediato ridurre la condizione data ad una condizione formulata esclusivamente in termini di presenza di poli nel punto $s=0$ per gli elementi della matrice $\mathbf{F}(s)$. In effetti, affinché $[\mathbf{F}(s)]^{-1}$ si annulli nel punto $s=0$ è necessario che in ogni riga e in ogni colonna di $\mathbf{F}(s)$ sia presente almeno un elemento dotato di un polo in $s=0$ (cfr. Problema VIII.1), ma una tale condizione non garantisce, in generale, che il sistema sia astatico. In casi particolari, tuttavia, è possibile dare anche formulazioni più semplici alla condizione trovata; ad esempio, nel caso in cui:

$$(VIII.11) \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \mathbf{F}(s) < \infty$$

la condizione (VIII.10) è soddisfatta se e solo se risulta (cfr. Problema VIII.2):

$$(VIII.12) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \det [s \mathbf{F}(s)] \neq 0$$

La verifica di quest'ultima condizione non richiede il calcolo di una matrice inversa ma soltanto quello di un determinante.

L'analisi di alcuni esempi può essere utile per illustrare le diverse situazioni che si possono presentare. Un sistema in cui:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

è di tipo 1, perché la matrice:

$$s \mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{s+1} \\ \frac{s}{s+1} & 1 \end{bmatrix}$$

soddisfa la condizione:

$$[\det s \mathbf{F}(s)]_{s=0} = 1 \neq 0$$

(questa condizione sostituisce la condizione generale in quanto il limite di $s \mathbf{F}(s)$ per $s \rightarrow 0$ è finito).

Utilizzando lo stesso criterio per un sistema in cui:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+1)} \\ \frac{2}{s} & \frac{2}{s(s+1)} \end{bmatrix}$$

si constata che $[\det s \mathbf{F}(s)]_{s=0} = 0$. In effetti il sistema non è di tipo 1, come si può anche vedere considerando lo sviluppo:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{W}_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} [I + \mathbf{F}(s)]^{-1} \mathbf{K}_d =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{s^2 + s + 2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2} & \frac{s}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2} \\ \frac{-2s^2 - 2s}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2} & \frac{s^3 + 2s^2 + s}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2} \end{bmatrix} \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_d$$

Un sistema in cui:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2} & \frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

è di tipo 1, perché la matrice:

$$[\mathbf{F}(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s^2}{s+1} & \frac{s^2}{s+1} \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

è nulla in $s=0$. Viceversa, un sistema in cui

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

non soddisfa una tale condizione, perché:

$$[\mathbf{F}(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

non è nulla in $s=0$; il sistema non è astatico e risulta:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [\mathbf{I} + \mathbf{F}(s)]^{-1} \mathbf{K}_d = \lim_{s \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & -\frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{s}{s+1} \end{bmatrix} \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_d$$

Se la condizione (VIII.10) non è soddisfatta, la risposta del sistema in regime permanente ad un ingresso costante $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_0$ presenta un errore pari a:

$$(VIII.13) \quad \tilde{e}_0 = [\mathbf{I} + \mathbf{F}(s)]_{s=0}^{-1} \mathbf{K}_d \tilde{u}_0$$

L'interesse di questa relazione, da un punto di vista pratico, è però sostanzialmente inferiore a quello della corrispondente relazione (III.20) dedotta per il caso dei sistemi a una sola variabile controllata, in quanto non è possibile, se non in situazioni particolari, dedurre a partire da essa un legame diretto tra i valori dell'errore e i valori dei coefficienti di quadagno degli elementi che compongono la $\mathbf{F}(s)$. Nel caso in cui ogni elemento $f_{ij}(s)$ ammetta limite finito per $s \rightarrow 0$, la (VIII.13) può essere riscritta nella forma:

$$\tilde{e}_0 = [\mathbf{I} + [\mathbf{F}(s)]_{s=0}]^{-1} \mathbf{K}_d \tilde{u}_0$$

Se, inoltre, per ogni elemento diagonale di $\mathbf{F}(s)$ vale la condizione:

$$\left| [f_{ii}(s)]_{s=0} \right| \gg 1$$

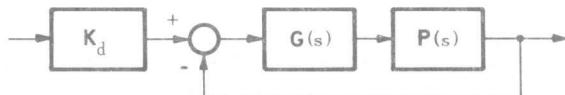
si può ritenere valida l'approssimazione:

$$\tilde{\mathbf{e}}_0 \cong [\mathbf{F}(s)]_{s=0}^{-1} \mathbf{K}_d \tilde{\mathbf{u}}_0$$

VIII.4 - Metodi di sintesi per tentativi.

I metodi di sintesi per sistemi di controllo a più variabili descritti in questo Capitolo si presentano come l'estensione naturale dei metodi considerati nel Capitolo IV. Con riferimento allo schema di controllo indicato in Fig.VIII.5, del quale sono già state illustrate alcune caratteristiche generali alla fine del par.VIII.1, si vuole considerare il problema di definire la struttura ed i parametri di quella parte di sistema che - nel ramo diretto - si trova a monte del processo controllato (in termini più esplicativi, di trovare l'espressione della matrice di trasferimento $\mathbf{G}(s)$), in modo tale che il sistema di controllo nel suo complesso soddisfi a specifiche prestabilite, sostanzialmente del tipo di quelle considerate nei paragrafi VIII.2 e VIII.3.

Fig.VIII.5



Così come per i sistemi ad un solo ingresso ed una sola uscita, il procedimento di sintesi può essere convenientemente scomposto in due fasi distinte; nella prima di queste si operano interventi atti ad assicurare il soddisfacimento di specifiche riguardanti la risposta in regime permanente, le quali generalmente vincolano in modo univoco le caratteristiche della funzione di trasferimento del ramo diretto; nella seconda fase, viceversa, si cerca di raggiungere, per tentativi, il soddisfacimento di specifiche riguardanti il margine di stabilità (cfr. par.IV.1).

Se, ad esempio, si deve ottenere un sistema di tipo 1, si cerca in primo luogo di individuare interventi atti a modificare la funzione di trasferimento del processo, allo scopo di rendere soddisfatta una condizione del tipo di quelle illustrate nel par.VIII.3. In concreto, tenendo presente la (VIII.10), si può cercare di determinare una matrice di trasferimento $\mathbf{K}(s)$ che renda soddisfatta la condizione:

$$(VIII.14) \quad \lim_{s \rightarrow 0} [\mathbf{P}(s) \mathbf{K}(s)]^{-1} = \mathbf{0}$$

L'individuazione di questa funzione non è così immediata come nel caso dei sistemi ad una sola variabile controllata. In generale, per arrivare a determinare una soluzione del problema possono essere necessari diversi tentativi; in taluni casi, inoltre, il problema di per sé può risultare privo di soluzioni.

Prescindendo, per restare nei limiti della presente trattazione, dalla considerazione dei problemi di esistenza, è possibile utilizzare le conclusioni dell'analisi svolta nel par. VIII.3 al fine di dedurre alcune indicazioni pratiche per la ricerca di una matrice $\mathbf{K}(s)$ che renda soddisfatta la (VIII.14), con riferimento al caso in cui la matrice di trasferimento del processo $\mathbf{P}(s)$ è quadrata. Questo caso è molto frequente nella pratica e corrisponde ad una situazione in cui il numero delle grandezze utilizzate per controllare il processo uguaglia il numero delle grandezze controllate.

Un intervento che, in ogni caso, deve essere compiuto è quello inteso ad assicurare la presenza del polo in $s=0$ in almeno un elemento di ogni riga ed ogni colonna di $\mathbf{P}(s) \mathbf{K}(s)$ (questa condizione, come si è osservato, è necessaria affinché valga la (VIII.14)). Questo risultato può essere ottenuto, ad esempio, utilizzando una matrice $\mathbf{K}(s)$ quadrata e diagonale e ponendo:

$$k_{ii}(s) = \frac{1}{s} \text{ oppure } 1$$

a seconda che sia o no necessario introdurre il fattore $1/s$ nell' i -esima colonna di $\mathbf{P}(s)$. Da un punto di vista realizzativo, a tale struttura della matrice $\mathbf{K}(s)$ corrisponde l'introduzione di un'azione integratrice su alcune componenti della grandezza controllante.

Ciò posto, si tratta di verificare se la (VIII.14) è soddisfatta. In caso positivo si passa alla seconda fase del procedimento; altrimenti occorre ritornare sulla scelta di $\mathbf{K}(s)$, modificandone la struttura in modo tale da evitare il verificarsi di quelle situazioni da cui si può pensare sia dipeso il mancato soddisfacimento della (VIII.14).

L'esame di alcuni esempi può chiarire la comprensione di questi concetti. Sia:

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

In questa funzione gli elementi della seconda colonna sono privi del polo in $s=0$; per avere un sistema di tipo 1 risulta quindi necessario introdurre opportune azioni integrali. Scegliendo

$$\mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

in modo tale da introdurre il fattore $1/s$ negli elementi della seconda colonna, si ottiene:

$$\mathbf{P}(s) \mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s(s+3)} \end{bmatrix}$$

In questo caso la verifica della (VIII.14) è positiva; la scelta effettuata ha reso il sistema di tipo 1.

Sia ora:

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

In questo caso gli elementi della seconda riga sono privi del polo in $s=0$. Scegliendo $\mathbf{K}(s)$ come nell'esempio precedente si riesce ad introdurre il fattore $1/s$ nell'unico elemento non nullo della seconda riga, ma la matrice:

$$\mathbf{P}(s) \mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s^2(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s(s+3)} \end{bmatrix}$$

non soddisfa la condizione (VIII.14) perchè l'elemento di posto (1,2) di $[\mathbf{P}(s) \mathbf{K}(s)]^{-1}$, che vale:

$$-\frac{(s+3)(s+1)}{(s+2)}$$

non si annulla per $s=0$. Se invece si pone:

$$\mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

si ottiene una matrice:

$$\mathbf{P}(s) \mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2(s+1)} & \frac{1}{s^2(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s(s+3)} \end{bmatrix}$$

in corrispondenza alla quale la verifica della (VIII.14) dà esito positivo.

Risolto il problema di attribuire alla matrice:

$$(VIII.15) \quad \hat{\mathbf{F}}(s) = \mathbf{P}(s) \mathbf{K}(s)$$

caratteristiche che rendono soddisfatte le specifiche riguardanti la risposta in regime permanente, si può passare alla seconda fase del procedimento. Questa consiste essenzialmente nell'individuazione di opportune azioni compensatrici, che saranno introdotte a monte delle azioni integratrici già individuate nella prima fase, allo scopo di assicurare al sistema il prescritto margine di stabilità. Si tratta, in concreto, di determinare una matrice di trasferimento $\mathbf{R}(s)$ che modifichi in modo opportuno i valori del modulo e della fase degli elementi della matrice (cfr. figura VIII.6):

$$(VIII.16) \quad \mathbf{F}(j\omega) = \hat{\mathbf{F}}(j\omega) \mathbf{R}(j\omega) = \mathbf{P}(j\omega) \mathbf{K}(j\omega) \mathbf{R}(j\omega)$$

lasciando peraltro inalterato il comportamento asintotico di queste funzioni in prossimità della pulsazione $\omega = 0$.

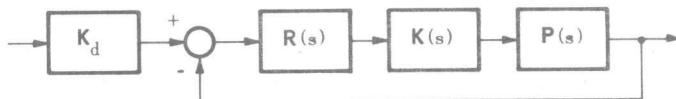


Fig.VIII.6

Il problema di determinare una matrice $\mathbf{R}(s)$ soddisfacente a tale requisito può essere, ovviamente, affrontato in molti modi. Un primo tentativo che conviene fare, in proposito, è quello di cercare di utilizzare in modo opportuno le cosiddette funzioni compensatrici elementari, introdotte nello studio dei sistemi ad una sola variabile controllata. Si tratta, in termini più esplicativi, di tentare soddisfare le specifiche utilizzando una matrice $\mathbf{R}(s)$ quadrata e diagonale, in cui sia:

$$r_{ii}(s) = R_{ai}(s)$$

(cfr. (IV.8)); ciò corrisponde ad introdurre, in tutti gli elementi della i -esima colonna della matrice:

$$(VIII.17) \quad \mathbf{F}(s) = \hat{\mathbf{F}}(s) \mathbf{R}(s)$$

un medesimo fattore moltiplicativo pari a $R_a(s)$. L'introduzione di questo fattore provoca una modifica del grafico dell'elemento diagonale, che in $\mathbf{F}(j\omega)$ assume l'espressione:

$$(VIII.18) \quad f_{ii}(j\omega) = \hat{f}_{ii}(j\omega) R_a(j\omega)$$

ma non altera il rapporto tra il modulo dell'elemento diagonale e la somma dei moduli degli altri elementi della colonna; risulta infatti, per ogni valore di ω ,

$$\begin{aligned} d_i^i(j\omega) &= \frac{\sum_{j=1}^n |f_{ji}(j\omega)|}{|f_{ii}(j\omega)|} = \frac{\sum_{j=1}^n |\hat{f}_{ji}(j\omega) R_a(j\omega)|}{|\hat{f}_{ii}(j\omega) R_a(j\omega)|} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n |\hat{f}_{ji}(j\omega)|}{|\hat{f}_{ii}(j\omega)|} = \frac{\hat{d}_i^i(j\omega)}{|\hat{f}_{ii}(j\omega)|} \end{aligned}$$

L'introduzione di questo fattore modifica dunque il grafico dell'elemento diagonale della colonna, senza modificare le ampiezze relative dei cerchi di Gershgorin. Tenendo presente questo fatto, conviene allora cercare di attribuire ai parametri m_a e τ_a , che caratterizzano la (IV.8), valori tali da assicurare che la distanza tra l'estremo del vettore rappresentativo di $f_{ii}(j\omega)$ ed il punto $(-1, j0)$ si mantenga, al variare di ω , sufficientemente elevata. Se le ampiezze relative dei cerchi di Gershgorin associati alla i -esima colonna della matrice non compensata $\hat{\mathbf{F}}(j\omega)$ non sono molto elevate (almeno in corrispondenza ai valori più critici di ω), si può riuscire in questo modo a incrementare la distanza tra la curva che delimita l'inviluppo dei cerchi di Gershgorin ed il punto $(-1, j0)$ e cioè, in definitiva, a migliorare i margini di stabilità.

Può essere utile illustrare queste considerazioni con un esempio. È data la matrice:

$$\hat{\mathbf{F}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s(1+s)} & \frac{1}{1+s} \\ \frac{5}{(1+10s)(1+0,5s)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

e si deve determinare una matrice $\mathbf{R}(s)$ in modo tale da dotare la funzione (VIII.17) di un margine di fase soddisfacente.

Per risolvere il problema, si procede innanzitutto alla costruzione delle fasce di Gershgorin associate alle due colonne della matrice non compensata $\hat{\mathbf{F}}(j\omega)$, ottenendo i due grafici indicati in Fig.VIII.7. A questo punto si constata che, per migliorare il margine di fase del sistema, occorre introdurre una compensazione atta a modificare la fascia di Gershgorin associata alla prima colonna della matrice $\mathbf{F}(j\omega)$ (cfr. Fig.VIII.7 a).

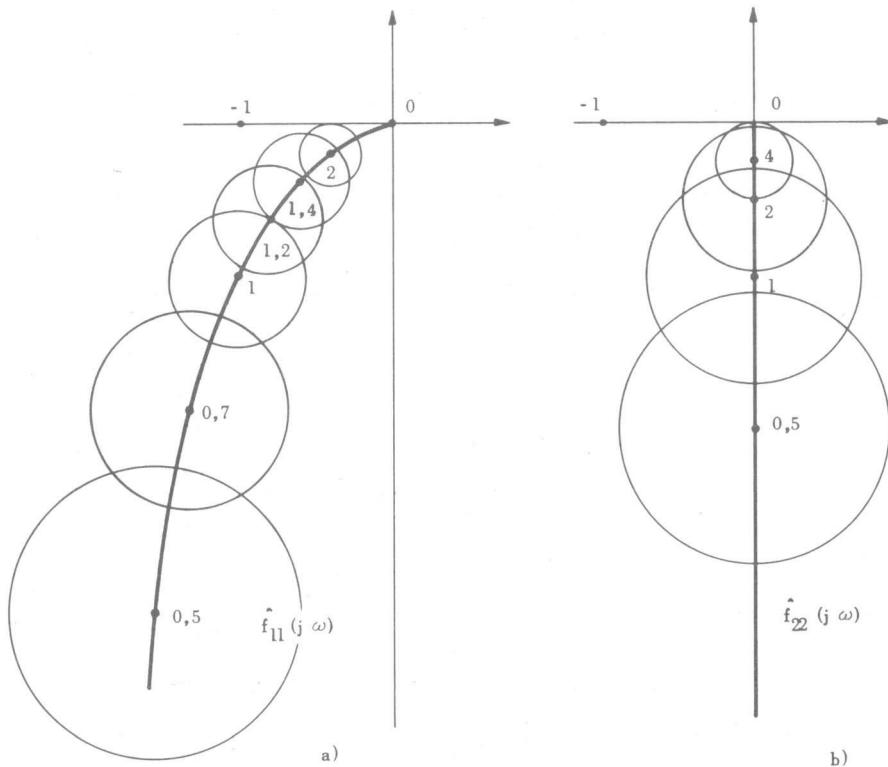


Fig.VIII.7

Seguendo le indicazioni date in precedenza, si decide di scegliere per $\mathbf{R}(s)$ una struttura del tipo:

$$\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} R_a(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con $R_a(s)$ della forma (IV.8). I valori di τ_a ed m_a che caratterizzano tale funzione devono essere determinati in modo tale da introdurre un congruo anticipo di fase in corrispondenza a quei valori di ω che rendono l'estremo del vettore $\hat{f}_{11}(j\omega)$ prossimo al punto critico. Scegliendo, ad esempio,

$$\frac{1}{\tau_a} = 1 \quad e \quad \frac{m_a}{\tau_a} = 4$$

si ottiene per $R_a(s)$ l'espressione:

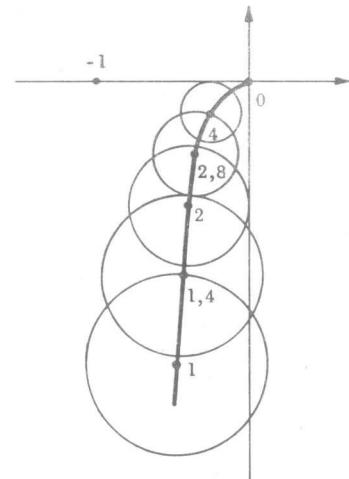
$$R_a(s) = \frac{1+s}{1+0,25s}$$

Corrispondentemente, la fascia di Gershgorin associata alla prima colonna della matrice $\mathbf{F}(j\omega) = \hat{\mathbf{F}}(j\omega) \mathbf{R}(j\omega)$ assume la forma indicata in Fig.VIII.8. Come si può facilmente constatare, il tipo di compensazione introdotta ha consentito di migliorare sensibilmente il margine di fase del sistema, che passa dal valore $m_\varphi \approx 15^\circ$ proprio del grafico di Fig.VIII.7 a valore $m_\varphi = 40^\circ$ proprio del grafico di Fig.VIII.8.

Il tipo di compensazione proposta tende a modificare la matrice $\hat{\mathbf{F}}(j\omega)$ in modo tale da raggiungere le condizioni di dominanza diagonale per colonne, unitamente ad un valore soddisfacente per il margine di fase. In tali casi tuttavia, può risultare più agevole trasformare la matrice $\hat{\mathbf{F}}(j\omega)$ in modo tale da ottenere la dominanza per righe, introducendo un medesimo fattore moltiplicativo pari ad $R_a(j\omega)$ in tutti gli elementi dell' i -esima riga di tale matrice. Per ottenere questo risultato è necessario considerare, in luogo della trasformazione indicata nella (VIII.17), la trasformazione:

$$(VIII.19) \quad \mathbf{F}(s) = \mathbf{R}(s) \hat{\mathbf{F}}(s)$$

utilizzando una matrice $\mathbf{R}(s)$ quadrata e diagonale in cui sia:



$$\hat{f}_{11}(j\omega) R_a(j\omega)$$

Fig.VIII.8

$$r_{ii}(s) = R_a(s)$$

Occorre osservare che la trasformazione così individuata non si presta ad essere direttamente interpretata come il risultato di azioni compensatrici poste a monte del processo controllato, bensì piuttosto come risultato di azioni poste a valle del processo stesso. Si può tuttavia mostrare che se la matrice $R(s)$ utilizzata nella trasformazione (VIII.19) viene posta a destra della $\hat{F}(s)$ (come già precisato, si assume che la matrice di trasferimento del processo $P(s)$ sia quadrata), si ottiene una matrice che, pur risultando diversa dalla (VIII.19), è altrettanto soddisfacente, dal punto di vista che qui interessa. Basta ricordare - in proposito - che, date due qualsiasi matrici quadrate P e Q , sussiste la relazione:

$$\det [I + QP] = \det [I + PQ]$$

Di conseguenza, si ha:

$$\det [I + R(j\omega) \hat{F}(j\omega)] = \det [I + \hat{F}(j\omega) R(j\omega)]$$

Questa uguaglianza consente di affermare che, per quanto riguarda la stabilità, un sistema a controreazione in cui la funzione di trasferimento del ramo diretto assuma l'espressione (VIII.19) è equivalente ad un sistema in cui tale funzione assuma l'espressione:

$$(VIII.20) \quad F(s) = \hat{F}(s) R(s)$$

La stabilità di questi sistemi è infatti legata alle caratteristiche della funzione $\det [I + F(j\omega)]$, che risulta identica nei due casi. Per quanto riguarda il problema della sintesi, si può allora concludere che ogni matrice $R(s)$, determinata allo scopo di rendere stabile un sistema a controreazione in cui $F(s)$ assuma l'espressione (VIII.19), può essere anche utilizzata per render stabile un sistema in cui $F(s)$ assuma l'espressione (VIII.20).

VIII.5 - Impiego delle trasformazioni elementari.

In questo paragrafo si illustrerà brevemente l'uso delle cosiddette *trasformazioni elementari su matrici* nei problemi di sintesi per tentativi dei sistemi a più variabili controllate. Con questo nome si indicano abitualmente operazioni mediante le quali si scambiano di posto gli elementi di una riga (o colonna) con quelli di un'altra, si sommano agli elementi di una riga (o colonna) opportuni multipli degli elementi di un'altra,

ecc.. Come è noto, tali trasformazioni si possono ottenere moltiplicando la matrice in questione a sinistra (se si tratta di operazioni sulle righe) o a destra (se si tratta di operazioni sulle colonne) per una opportuna matrice quadrata non singolare, detta *matrice elementare di trasformazione*.

Nei problemi di sintesi, eseguendo trasformazioni del tipo indicato sulla matrice di trasferimento $\mathbf{P}(s)$ del processo (o sulla matrice (VIII.15) nel caso in cui, in una prima fase, sia stato affrontato il problema di soddisfare specifiche riguardanti la risposta a regime permanente) si possono ottenere risultati di un certo interesse dal punto di vista del soddisfacimento di specifiche riguardanti il margine di stabilità.

Per illustrare meglio questa possibilità, si descriveranno ora i due tipi particolari di trasformazione elementare ai quali conviene, a seconda dei casi, fare riferimento. Per semplicità, si considererà soltanto il caso di operazioni eseguite sulle colonne, alle quali corrisponde, dal punto di vista della realizzazione del sistema di controllo, l'introduzione di azioni compensatrici a monte del processo controllato. Nel caso in cui risultasse più conveniente effettuare (con procedimenti peraltro del tutto analoghi a quelli che vengono descritti per le colonne) operazioni sulle righe, per passare alla realizzazione pratica delle azioni di controllo basterà tenere presenti le considerazioni svolte alla fine del paragrafo precedente.

Moltiplicando a destra la matrice $\hat{\mathbf{F}}(s)$ per una matrice quadrata \mathbf{R} ottenuta dalla matrice identità \mathbf{I} scambiando tra loro di posto gli elementi della colonna i -esima con i corrispondenti elementi della colonna j -esima, si ottiene una matrice:

$$\mathbf{F}(s) = \hat{\mathbf{F}}(s) \mathbf{R}$$

coincidente con $\hat{\mathbf{F}}(s)$ in tutte le colonne tranne che nelle colonne i -esima e j -esima, i cui elementi risultano scambiati di posto. Tale operazione viene detta *scambio di colonne*.

In molti casi pratici questa operazione (che, di fatto, corrisponde concretamente a uno scambio di posto riguardante due variabili di ingresso) può consentire di rendere dominante diagonale una matrice che non lo era o, addirittura, di incrementare il margine di stabilità. Naturalmente, i casi in cui questa operazione può aver successo non sono facilmente identificabili a priori e solo ripetuti tentativi o l'esperienza possono consentire al progettista di giudicare sull'opportunità o meno di un ricorso ad essa.

È facile costruire casi in cui l'impiego di questa operazione si rivela conveniente. Si consideri, ad esempio, il caso in cui sia:

$$\hat{\mathbf{F}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{0,5}{1+s} \end{bmatrix}$$

La matrice $I + \hat{\mathbf{F}}(j\omega)$ non soddisfa le condizioni di dominanza diagonale per colonne, in quanto, come è facile constatare, sia per la prima che per la seconda colonna le bande di Gershgorin includono il punto critico (senza neppure costruire i grafici, basta osservare che, al tendere di ω a 0, i vettori $f_{11}(j\omega)$ e $f_{22}(j\omega)$ tendono entrambi a valori finiti mentre le ampiezze dei cerchi di Gershgorin:

$$d'_1(j\omega) = |\hat{f}_{21}(j\omega)|$$

$$d'_2(j\omega) = |\hat{f}_{12}(j\omega)|$$

tendono entrambe a ∞).

Se, tuttavia, si trasforma $\hat{\mathbf{F}}(s)$ scambiando di posto le due colonne, si ottiene una matrice:

$$\mathbf{F}(s) = \hat{\mathbf{F}}(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{1+s} \\ \frac{0,5}{1+s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

che rende soddisfatte le condizioni di dominanza diagonale per colonne. Il lettore può verificare, per esercizio, che in questo caso è assicurato un margine di fase pari a circa 45° (la fascia di Gershgorin associata alla seconda colonna di $\mathbf{F}(j\omega)$ è identica a quella riportata in Fig.VIII.7b; quella associata alla prima colonna differisce da essa per un fattore di proporzionalità pari a 0,5).

L'altro tipo di operazione che interessa considerare si effettua moltiplicando a destra la matrice $\hat{\mathbf{F}}(s)$ per una matrice quadrata \mathbf{R} ottenuta dalla matrice identità I aggiungendo ad un elemento che si trova al di fuori della diagonale principale, ad esempio a quello di posto (i, j) , una costante c . La matrice:

$$\mathbf{F}(s) = \hat{\mathbf{F}}(s) \mathbf{R}$$

che si ottiene coincide con $\hat{\mathbf{F}}(s)$ in tutte le colonne tranne che nella colonna j -esima, i cui elementi assumono la forma:

$$\hat{f}_{kj}(s) = \hat{f}_{kj}(s) + c \hat{f}_{ki}(s)$$

(per $k = 1, \dots, q$). Tale operazione viene detta *combinazione di colonne*.

Anche questa volta si può verificare facilmente, su un esempio, l'effetto di tale operazione. Sia:

$$\hat{\mathbf{F}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,1}{1+s} & \frac{0,1}{1+s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s(1+s)} \end{bmatrix}$$

La matrice $I + \hat{\mathbf{F}}(j\omega)$ non è dominante diagonale per colonne perché, almeno per quanto riguarda gli elementi della prima colonna, si presenta la stessa situazione vista nell'esempio precedente. Né, d'altra parte, è possibile ottenere una matrice dominante scambiando di posto le colonne in quanto anche gli elementi della seconda colonna si trovano in una relazione del tutto analoga ($\lim_{\omega \rightarrow 0} |\hat{f}_{22}(j\omega)| = \infty$ e $\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{f}_{12}(j\omega) = 0,1$).

Viceversa, sommando agli elementi della prima colonna quelli della seconda colonna, si ottiene una funzione:

$$\mathbf{F}(s) = \hat{\mathbf{F}}(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1,1}{1+s} & \frac{0,1}{1+s} \\ -\frac{1}{1+s} & \frac{1}{s(1+s)} \end{bmatrix}$$

cui corrisponde una matrice $I + \mathbf{F}(j\omega)$ dominante diagonale per colonne.

Come si è visto, l'uso delle trasformazioni elementari può consentire di risolvere, in modo molto semplice, il problema di rendere dominante diagonale una matrice assegnata o di incrementarne il margine di stabilità. In situazioni meno semplici di quelle illustrate nei due esempi precedenti, in cui il risultato desiderato si ottiene effettuando una sola trasformazione elementare, si tratta di procedere per passi, eseguendo sia scambi di colonne, sia combinazioni di colonne; sia anche scambi e/o combinazioni di righe, sino ad ottenere, quando possibile, una matrice $\mathbf{F}(s)$ avente le caratteristiche desiderate. In genere, conviene cercare innanzitutto di ottenere una matrice dominante diagonale (per righe o per colonne, a seconda che sia più semplice ottenere l'una o l'altra condizione) e, successivamente, se occorre, di incrementarne il margine di fase. Questo ultimo risultato, a sua volta, può essere ottenuto sia per mezzo di trasformazioni elementari, sia mediante le tecniche di compensazione basate sull'impiego delle funzioni anticipatrici o attenuatrici già illustrate nel par. precedente.

Più in particolare, il procedimento si può pensare articolato nei seguenti passi. Ad ogni trasformazione elementare che viene eseguita su $\mathbf{F}(s)$ viene associata una matrice elementare di trasformazione (che deve

moltiplicare $\hat{\mathbf{F}}(s)$ a sinistra o a destra a seconda che si tratti di operazioni sulle righe o sulle colonne). Il prodotto di tutte le matrici elementari che corrispondono a operazioni sulle righe e, rispettivamente, il prodotto di tutte quelle che corrispondono a operazioni sulle colonne individuano due matrici quadrate, che si possono indicare rispettivamente con \mathbf{R}_r e rispettivamente \mathbf{R}_c , utilizzando le quali la matrice $\hat{\mathbf{F}}(s)$ viene trasformata in una matrice:

$$\hat{\mathbf{F}}(s) = \mathbf{R}_r \hat{\mathbf{F}}(s) \mathbf{R}_c$$

che soddisfa una condizione di dominanza diagonale (per righe o per colonne). Nel caso in cui il margine di fase associato alla matrice $\hat{\mathbf{F}}(s)$ non risulti soddisfacente, la matrice stessa viene ulteriormente modificata utilizzando, a sinistra o a destra a seconda dei casi, una matrice $\hat{\mathbf{R}}(s)$ che potrà risultare o una matrice elementare di trasformazione o una matrice di compensazione del tipo di quelle introdotte nel par.VIII.4 (in questo caso la matrice risulterà funzione della variabile s , a differenza delle matrici elementari di trasformazione, i cui elementi sono indipendenti dalla variabile s). In definitiva, dunque, la matrice $\hat{\mathbf{F}}(s)$ viene trasformata in una matrice:

$$(VIII.21') \quad \mathbf{F}(s) = \mathbf{R}_r \hat{\mathbf{F}}(s) \mathbf{R}_c \hat{\mathbf{R}}(s)$$

ovvero in una matrice:

$$(VIII.21'') \quad \mathbf{F}(s) = \hat{\mathbf{R}}(s) \mathbf{R}_r \hat{\mathbf{F}}(s) \mathbf{R}_c$$

che soddisfa alle condizioni desiderate.

A questo punto, il procedimento di sintesi può considerarsi concluso. Per quanto riguarda la realizzazione concreta dei dispositivi di controllo, si deve tenere presente quanto osservato alla fine del paragrafo VIII.4 e cioè, in definitiva, considerare in luogo della (VIII.21'), ovvero della (VIII.21''), un'espressione per $\mathbf{F}(s)$ che ha, in tutti e due i casi, la forma:

$$(VIII.22) \quad \mathbf{F}(s) = \hat{\mathbf{F}}(s) \mathbf{R}_c \hat{\mathbf{R}}(s) \mathbf{R}_r$$

Corrispondentemente (cfr. (VIII.15)) la funzione di trasferimento $\mathbf{G}(s)$ di tutta quella parte del sistema di controllo che - nel ramo diretto - si trova a monte del processo controllato (cfr. Fig.VIII.5), assume un'espressione del tipo:

$$(VIII.23) \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{K}(s) \mathbf{R}_c \hat{\mathbf{R}}(s) \mathbf{R}_r$$

Per concludere il paragrafo, si illustrerà ora un semplice esempio di applicazione concreta dei concetti esposti al caso del controllo di un processo a due ingressi e due uscite già introdotto nel par. I.5.

Esempio VIII.1 - Un processo per la produzione della carta, del tipo di quello descritto nell'Esempio I.10, è caratterizzato da un serbatoio di caricamento largo 4m, alto 0,8 m e lungo 2m. Le condizioni nominali di funzionamento, in condizioni di equilibrio, sono le seguenti:

$$\bar{Q}_0 = \text{portata di liquido entrante} = 0,3 \text{ m}^3/\text{sec}$$

$$\bar{F}_0 = \text{portata di aria compressa entrante} = 7,5 \text{ gr/sec}$$

$$\bar{L} = \text{livello del liquido nel serbatoio} = 0,45 \text{ m}$$

$$\bar{M} = \text{massa di aria nel serbatoio} = 3,7 \text{ kg}$$

Nel corrispondente modello linearizzato, il legame ingresso - uscita (a partire da stato iniziale nullo) che, con riferimento ai simboli già introdotti nell'Es.I.10, si può rappresentare in termini di funzioni di s nella forma:

$$\begin{bmatrix} q_1(s) \\ l(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0(s) \\ f_0(s) \end{bmatrix}$$

è descritto dalla funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{1}{1 + 4,5 \times 10^3 s + 1,1 \times 10^4 s^2} \begin{bmatrix} 1 + 4,6 \times 10^3 s & -76 s \\ 7,6(1 + 125 s) & 6,3 \end{bmatrix}$$

Si vuole progettare un sistema di controllo a controllazione, secondo lo schema indicato in Fig.VIII.5, dotato di un margine di stabilità pari a 45° .

Come primo passo, conviene innanzitutto esaminare la forma delle fascie di Gershgorin associate alle righe e, rispettivamente, alle colonne della matrice $P(j\omega)$. I cerchi di Gershgorin associati alla prima riga hanno un'ampiezza pressoché trascurabile in quanto, come è facile verificare, risulta:

$$|p_{12}(j\omega)| < 0,017$$

I cerchi associati alla seconda riga assumono invece le configurazioni indicate in figura VIII.9. La matrice $P(j\omega)$ non soddisfa le condizioni di dominanza diagonale per righe.

La matrice non soddisfa neppure le condizioni di dominanza diagonale per colonne, come si può constatare osservando le ampiezze dei cerchi associati alla prima

Impiego delle trasformazioni elementari

VIII.5

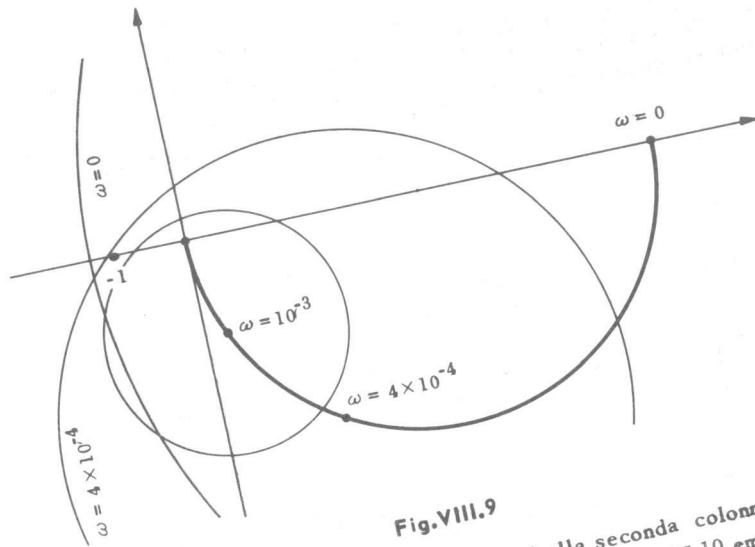


Fig.VIII.9

colonna, riportati in Fig.VIII.10 (i cerchi associati alla seconda colonna hanno invece un'ampiezza trascurabile). Dal confronto delle Figg.VIII.9 e VIII.10 emerge chiaramente l'opportunità di indirizzare i tentativi verso il raggiungimento della condizione di dominanza diagonale per righe, in quanto è questa la situazione alla quale la matrice $P(j\omega)$

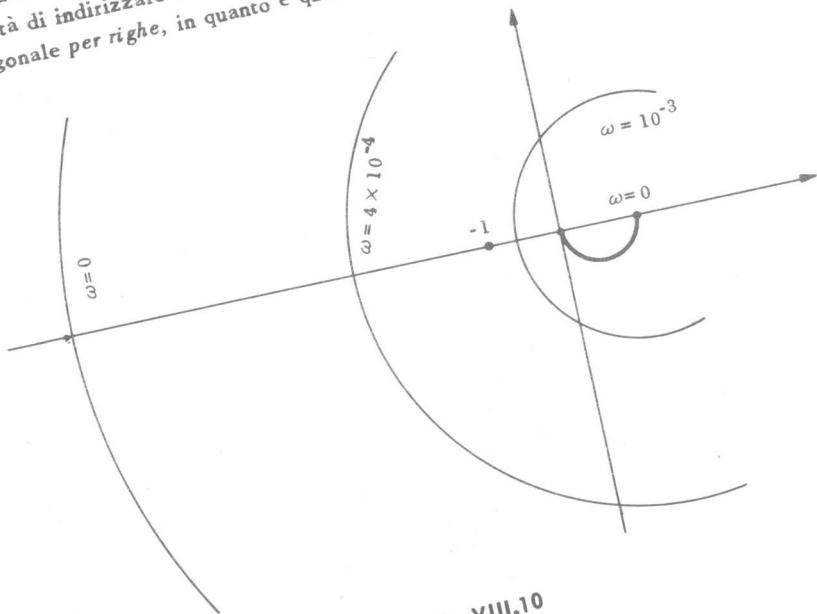


Fig.VIII.10

é più prossima. A questo scopo, si introduce una trasformazione, sulle colonne, tendente a ridurre il modulo dell'elemento $p_{21}(j\omega)$ in prossimità del valore $\omega=0$, in quanto si riconosce che la mancanza di dominanza è dovuta all'eccessiva ampiezza dei cerchidi Gershgorin in corrispondenza a valori di ω inferiori a $10^{-2} \div 10^{-3}$. Posto:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{7,6}{6,3} & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene direttamente una matrice:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{P}(s) \mathbf{R} = \frac{1}{1 + 4,5 \times 10^{-3} s + 1,1 \times 10^4 s^2} \begin{bmatrix} 1 + 4,69 \times 10^3 s & -76 s \\ 950 s & 6,3 \end{bmatrix}$$

avente le caratteristiche desiderate. I cerchi di Gershgorin associati a entrambe le righe hanno un'ampiezza trascurabile, in quanto risulta:

$$|f_{12}(j\omega)| < 0,016$$

$$|f_{21}(j\omega)| < 0,21$$

Il sistema così compensato ha un margine di fase di circa 85° (cfr. Fig. VIII.11).

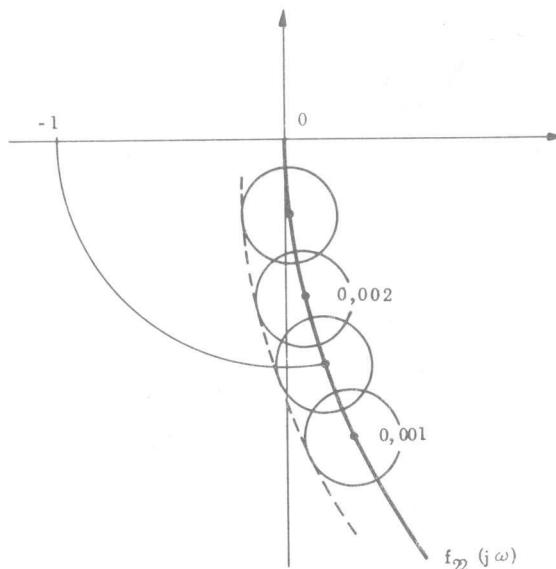


Fig.VIII.11

VIII.6 - Pseudodiagonalizzazione.

In questo paragrafo si descriverà una tecnica che, in molti casi pratici, può consentire di trasformare una matrice assegnata in una matrice dominante diagonale. Questa tecnica, che viene spesso indicata come tecnica di pseudodiagonalizzazione, si basa sull'esecuzione ripetuta di trasformazioni tendenti a minimizzare l'ampiezza della fascia di Gershgorin associata ad una determinata riga o colonna della matrice, in corrispondenza ad un valore prefissato di ω . Le trasformazioni vengono eseguite moltiplicando a destra o a sinistra, a seconda dei casi, la matrice assegnata per una matrice quadrata ad elementi costanti.

Facendo riferimento, per fissare le idee, al caso in cui si vuole ridurre l'ampiezza della fascia di Gershgorin associata alla colonna j -esima, in corrispondenza alla pulsazione $\bar{\omega}$, operando trasformazioni sulle colonne, il problema può essere formulato nel seguente modo. È data la matrice $\mathbf{F}(j\omega)$ e si vuole determinare una matrice \mathbf{R} in modo tale che il raggio del cerchio di Gershgorin associato alla j -esima colonna della matrice:

$$\mathbf{F}(j\omega) = \hat{\mathbf{F}}(j\omega) \mathbf{R}$$

risulti, in corrispondenza al valore $\bar{\omega}$ di ω , il minimo possibile. Osservando che tra gli elementi $f_{ij}(j\omega)$, $\hat{f}_{ik}(j\omega)$ e r_{kj} delle matrici considerate sussiste la relazione:

$$f_{ij}(j\omega) = \sum_{k=1}^q \hat{f}_{ik}(j\omega) r_{kj}$$

e ricordando l'espressione che definisce il raggio del cerchio di Gershgorin associato alla j -esima colonna di $\mathbf{F}(j\omega)$, si vede facilmente che il problema considerato equivale al problema della determinazione dei q valori reali r_{kj} ($k = 1, \dots, q$) che rendono minima la quantità:

$$(VIII.24) \quad Q_j(\bar{\omega}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^q |f_{ij}(j\bar{\omega})|^2 = \sum_{i=1}^q \left| \sum_{k=1}^q \hat{f}_{ik}(j\bar{\omega}) r_{kj} \right|^2$$

Ovviamente, nella ricerca di questo minimo devono essere stabiliti dei vincoli, allo scopo di escludere la soluzione banale:

$$r_{kj} = 0$$

che risulta priva di interesse da un punto di vista pratico. Un vincolo piuttosto naturale è quello che consiste nell'imporre la costanza del coe-

ticiente di guadagno dell'elemento diagonale nella j -esima colonna; in questo modo viene ad essere assicurata (cfr. par.VIII.1) la costanza delle caratteristiche che, sostanzialmente, influenzano il comportamento del sistema in regime permanente. In termini concreti, un tale vincolo può essere formulato nel modo seguente: indicato con K_{ik} il valore del coefficiente di guadagno della funzione $f_{ik}(j\omega)$, si vuole imporre che sia soddisfatta la condizione:

$$(VIII.25) \quad \sum_{k=1}^q K_{jk} r_{kj} = K_{jj}$$

Il problema è dunque quello di rendere minima la funzione (VIII.24) in presenza del vincolo espresso dalla (VIII.25).

Allo scopo, ci si può avvalere del metodo detto dei moltiplicatori di Lagrange⁽¹⁾, effettuando prima alcune manipolazioni che consentono di scrivere espressioni di facile interpretazione. Posto:

$$\alpha_{ik} = \operatorname{Re} [\hat{f}_{ik}(j\bar{\omega})]$$

$$\beta_{ik} = \operatorname{Im} [\hat{f}_{ik}(j\bar{\omega})]$$

la (VIII.24) si riscrive come:

$$(VIII.26) \quad Q_j(\bar{\omega}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^q \left[\left(\sum_{k=1}^q \alpha_{ik} r_{kj} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^q \beta_{ik} r_{kj} \right)^2 \right]$$

A sua volta, il vincolo (VIII.25) si può riscrivere nella forma:

$$(VIII.27) \quad V_j = 2 \sum_{k=1}^q K_{jk} r_{kj} - 2K_{jj} = 0$$

(1)- Il metodo in questione consente di risolvere molto semplicemente il problema di trovare i punti di massimo o minimo relativo di una funzione di n variabili $f(x_1, \dots, x_n)$ in presenza di un vincolo del tipo $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$. Considerata la funzione di $n+1$ variabili:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

si può dimostrare che i punti cercati rendono soddisfatte le $n+1$ condizioni:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Le condizioni di minimo si trovano imponendo l'annullarsi delle derivate parziali dell'espressione:

$$L(r_{1j}, \dots, r_{qj}, \lambda) = Q_j(\bar{\omega}) + V_j \lambda$$

rispetto alle variabili $r_{1j}, \dots, r_{qj}, \lambda$. Tenendo presente che:

$$\frac{\partial L}{\partial r_{hj}} = 2 \sum_{i=1}^q \left[\left(\sum_{k=1}^q \alpha_{ik} r_{kj} \right) \alpha_{ih} + \left(\sum_{k=1}^q \beta_{ik} r_{kj} \right) \beta_{ih} \right] + 2 \lambda K_{jh}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2 \sum_{k=1}^q K_{jk} r_{kj} - 2 K_{jj}$$

e ponendo:

$$(VIII.28) \quad \alpha_{kh}^{(j)}(\bar{\omega}) = \sum_{i=1}^q (\alpha_{ik} \alpha_{ih} + \beta_{ik} \beta_{ih})$$

$i \neq j$

le condizioni di minimo:

$$\frac{\partial L}{\partial r_{1j}} = \dots = \frac{\partial L}{\partial r_{qj}} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

si possono riscrivere sotto forma di un sistema di equazioni lineari:

$$(VIII.29) \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{(j)}(\bar{\omega}) & \dots & \alpha_{q1}^{(j)}(\bar{\omega}) & K_{j1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1q}^{(j)}(\bar{\omega}) & \dots & \alpha_{qq}^{(j)}(\bar{\omega}) & K_{jq} \\ K_{j1} & \dots & K_{jq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1j} \\ \vdots \\ r_{qj} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{jj} \end{bmatrix}$$

La soluzione di questo sistema fornisce i valori cercati r_{1j}, \dots, r_{qj} (gli elementi della j -esima colonna della matrice trasformante \mathbf{R}). I coefficienti del sistema sono tutte quantità calcolabili molto facilmente a partire dalla matrice nota $\hat{\mathbf{F}}(j\omega)$; essi dipendono, ovviamente, dal valore della pulsazione ω in corrispondenza alla quale si vuole effettuare la minimizzazione e dall'indice j che caratterizza la colonna che si sta considerando.

La trasformazione che si è considerata individua in modo univoco soltanto gli elementi appartenenti alla j -esima colonna di \mathbf{R} ; gli elementi appartenenti alle altre colonne potranno allora essere scelti o impostando altri problemi di minimizzazione di cerchi di Gershgorin (eventualmente in corrispondenza a valori di ω anche diversi da quello considerato per la colonna j -esima) o cercando di ottenere trasformazioni del tipo di quelle illustrate nei par. VIII.4 e VIII.5.

È possibile anche tentare di minimizzare simultaneamente le ampiezze dei cerchi di Gershgorin corrispondenti a diversi valori di ω , relativamente ad una colonna prefissata. Indicati con $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n$ i valori di ω che interessano, si può minimizzare in luogo della quantità (VIII.26), la somma:

$$Q_j(\bar{\omega}_1) + Q_j(\bar{\omega}_2) + \dots + Q_j(\bar{\omega}_n)$$

In proposito, non è difficile verificare che i valori cercati r_{1j}, \dots, r_{qj} si ottengono come soluzioni di un sistema di equazioni lineari del tutto analogo al sistema (VIII.29) nel quale, in luogo dei coefficienti $a_{kh}^{(j)}(\omega)$ (cfr. (VIII.28)), siano posti i coefficienti:

$$a_{kh}^{(j)}(\bar{\omega}_1) + a_{kh}^{(j)}(\bar{\omega}_2) + \dots + a_{kh}^{(j)}(\bar{\omega}_n)$$

Scegliendo opportunamente i valori $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n$, si può ridurre l'ampiezza della fascia di Gershgorin in corrispondenza ad un intervallo prefissato di valori di ω .

PROBLEMI

VIII.1 - Si dimostri la seguente proposizione: se tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) di $\mathbf{F}(s)$ sono privi del polo in $s=0$, la matrice $[\mathbf{F}(s)]^{-1}$ non può annullarsi in questo punto. Allo scopo, conviene sviluppare il determinante di $\mathbf{F}(s)$ nella forma:

$$\det \mathbf{F}(s) = f_{11} \Delta_{11} + \dots + f_{iq} \Delta_{iq}$$

e verificare che, se gli elementi di f_{11}, \dots, f_{iq} sono tutti privi del polo in $s=0$, almeno un elemento della colonna i -esima di $[\mathbf{F}(s)]^{-1}$ è diverso da zero in questo punto.

VIII.2 - Si dimostri che, nell'ipotesi (VIII.11), la (VIII.10) è soddisfatta se e solo se vale la (VIII.12). Allo scopo, conviene osservare che, nell'ipotesi (VIII.1), la matrice $\mathbf{F}(s)$ può essere scomposta nel modo seguente:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{s} \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1(s)$$

essendo \mathbf{F}_0 una matrice costante ed $\mathbf{F}_1(s)$ una matrice i cui elementi sono privi del polo in $s=0$. La condizione (VIII.12) corrisponde alla condizione che la matrice \mathbf{F}_0 sia invertibile. Ciò posto, basta considerare lo sviluppo:

$$[\mathbf{F}(s)]^{-1} = \left[\frac{1}{s} \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1(s) \right]^{-1} = s \mathbf{F}_0^{-1} [I + s \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{F}_1(s)]^{-1}$$

VIII.3 - Si consideri un sistema di controllo del tipo indicato in Fig.VIII.3 e sia:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s^2} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

Si verifichi che il sistema è stabile asintoticamente e di tipo 1.

VIII.4 - Si consideri un sistema di controllo del tipo indicato in Fig.VIII.5 e sia:

$$\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 1 \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

Si scelga la matrice $\mathbf{G}(s)$ in modo tale da ottenere un sistema di controllo di tipo 1 e stabile asintoticamente.

VIII.5-In Fig. P.VIII.1 è riportato lo schema di massima di una caldaia destinata al riscaldamento di quattro correnti fluide indipendenti. L'afflusso del combustibile

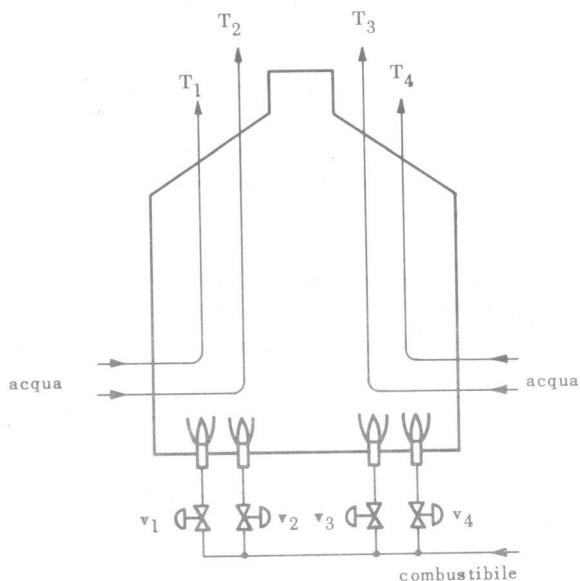


Fig. P.VIII.1

è controllato da quattro valvole, che alimentano quattro gruppi di bruciatori.

Considerando come grandezze di controllo le aperture delle quattro valvole (v_1, v_2, v_3, v_4) e come grandezze controllate le temperature delle quattro correnti fluide in uscita (T_1, T_2, T_3, T_4), si può definire un processo il cui comportamento, per piccole variazioni attorno ad una situazione di equilibrio, è rappresentato da una funzione di trasferimento del tipo:

$$\mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+4s} & \frac{0,7}{1+5s} & \frac{0,3}{1+5s} & \frac{0,2}{1+5s} \\ \frac{0,6}{1+5s} & \frac{1}{1+4s} & \frac{0,4}{1+5s} & \frac{0,35}{1+5s} \\ \frac{0,35}{1+5s} & \frac{0,4}{1+5s} & \frac{1}{1+4s} & \frac{0,6}{1+5s} \\ \frac{0,2}{1+5s} & \frac{0,3}{1+5s} & \frac{0,7}{1+5s} & \frac{1}{1+4s} \end{pmatrix}$$

Si vuole ottenere il controllo delle quattro temperature T_1, T_2, T_3, T_4 , adottando uno schema a controllazione. Riferendosi allo schema di Fig.VIII.5 (con $K_d = I$), si scelga la matrice $G(s)$ in modo tale da ottenere un sistema di controllo dotato di un margine di fase pari a 60° .

*

INDICE

Prefazione alla prima edizione
Prefazione alla seconda edizione

CAPITOLO I: Introduzione ai sistemi di controllo a contro-reazione

I.1	Concetto di controllo	3
I.2	Il controllo a controlloreazione	5
I.3	Altri tipi di controllo	21
I.4	Proprietà fondamentali del controllo a controlloreazione	27
I.5	Altri esempi	34
I.6	Criteri di classificazione	40
I.7	Struttura dei sistemi di controllo a controlloreazione	42
I.8	Cenni sullo sviluppo storico del controllo a controlloreazione	46
	Problemi	48

CAPITOLO II: I metodi per lo studio dei sistemi di controllo

II.1	Le fasi caratteristiche dello studio di un sistema di controllo	52
II.2	I metodi matematici impiegati nello studio di un sistema di controllo	54
II.3	Limiti di validità dei modelli adottati	56
II.4	Alcuni richiami di Teoria dei Sistemi	61
II.5	La stabilità di un sistema a controlloreazione	67
	Problemi	72

CAPITOLO III: Le caratteristiche dei sistemi di controllo a controlloreazione con un solo ingresso e una sola uscita

III.1	Generalità	74
III.2	La risposta in regime permanente di un sistema di controllo ad ingressi polinomiali: caso generale	81
III.3	La risposta a regime permanente in un sistema di controllo ad ingressi polinomiali: caso dei sistemi a controlloreazione	87
III.4	La risposta in regime permanente di un sistema di controllo a controlloreazione a disturbi costanti	93
III.5	La risposta a regime permanente di un sistema di controllo a controlloreazione a ingressi o disturbi sinusoidali	97

III.6 La risposta transitoria di un sistema di controllo a controcrazione a ingressi e disturbi a gradino	102
III.7 La sensibilità alle variazioni dei parametri	120
III.8 Esempi	131
Problemi	137
 CAPITOLO IV: Metodi di sintesi per tentativi basati sull'impiego della risposta in frequenza	
IV.1 Generalità	140
IV.2 La carta di Nichols	143
IV.3 Funzioni compensatrici elementari.....	157
IV.4 Sintesi delle funzioni compensatrici.....	162
IV.5 Ulteriori considerazioni sulla sintesi	169
IV.6 Un esempio	172
IV.7 I controllori PID	178
Problemi	183
 CAPITOLO V: Metodi di sintesi per tentativi basati sull'impiego del luogo delle radici	
V.1 Generalità	187
V.2 Il luogo delle radici.....	189
V.3 Esempi di tracciamento qualitativo del luogo delle radici	201
V.4 Sintesi delle funzioni compensatrici elementari.....	209
V.5 Sintesi mediante il luogo delle radici	216
V.6 Ulteriori considerazioni sulla sintesi	227
V.7 Altre applicazioni del luogo delle radici	233
Problemi	237
 CAPITOLO VI: Metodi diretti di sintesi	
VI.1 Il principio dei metodi diretti	239
VI.2 Problemi di sintesi a più obiettivi	241
VI.3 Problemi di realizzabilità e di stabilità.....	246
VI.4 Scelta della funzione di trasferimento ingresso-uscita	252
VI.5 Esempi	260
VI.6 Pregi relativi dei metodi diretti e di quelli per tentativi	265
Problemi	267
 CAPITOLO VII: Sistemi a controllo numerico	
VII.1 Generalità	268
VII.2 Analisi della risposta di un sistema a controllo numerico	271
VII.3 La risposta in regime permanente nei sistemi di controllo a tempo discreto	279
VII.4 La risposta transitoria nei sistemi di controllo a tempo discreto.....	283
VII.5 Un esempio di sintesi basato sull'impiego del luogo delle radici	289
VII.6 Sintesi di sistemi a tempo di risposta finito.....	293
VII.7 Ulteriori considerazioni sul controllo numerico diretto	312
Problemi	318

CAPITOLO VIII: Metodi di sintesi per tentativi di sistemi di controllo a più ingressi e più uscite	
VIII.1 Generalità	305
VIII.2 Sulla stabilità di un sistema a controreazione con più ingressi e più uscite	325
VIII.3 Le caratteristiche della risposta in regime permanente ad ingressi costanti.....	331
VIII.4 Metodi di sintesi per tentativi.....	336
VIII.5 Impiego delle trasformazioni elementari	343
VIII.6 Pseudodiagonalizzazione	351
Problemi	355
Indice	359
