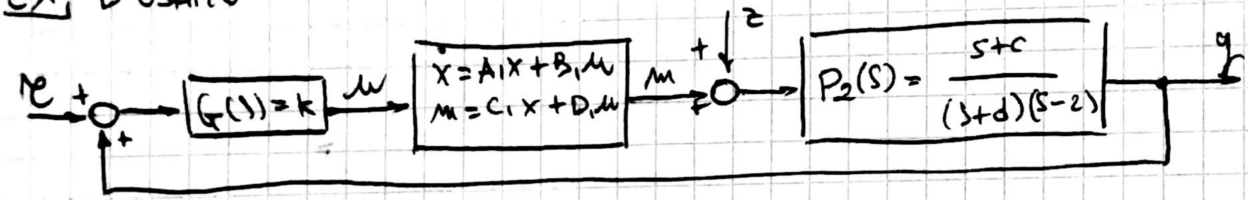
EX. D'ESAME



$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D_1 = 1$$

SPECIFICHE:

- RISPOSTA y NULLA A REG. PERM. PER DISTURBI z COSTANTI
- IL SISTEMA COMPLESSIVO ABBIA 2 AUTOVALORI COMPLESSI
- IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINT. STABILE CON TUTTI GLI AUTOVALORI COINCIDENTI
- $c \neq d$, $c \neq 0$

CALCOLIAMO $P_1(s)$:

$$P_1(s) = C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 + D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + 1 = \frac{a}{s+b} + 1 = \frac{s+a+b}{s+b}$$

OK,

LA IL SOTTOPROGETTO 1 AVEVA DUE AUTOVALORI ($\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -b$) MA AL DENOMINATORE DI $P_1(s)$ COMPARE SOLO L'AUTOVALORE $-6 \Rightarrow -2$ È NASCOSTO

VERIFICO SE HO PERSO DI RAGGIUNGIBILITÀ O/E OSSERVABILITÀ

$$\text{rango}\left(A-\lambda_1 I \mid B\right) \underset{\text{rank}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-b & a \end{pmatrix} = 1 < 2 \Rightarrow \lambda_1 = -2 \text{ è } \overline{\text{RAGG.}}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A-\lambda_1 I \\ \hline C \end{pmatrix} \overset{\text{rank}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2-b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } b \neq 2 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ è OSS} \\ 1 & \text{se } b = 2 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ è } \overline{\text{OSS}} \end{cases}$$

OSS,

TENENDO PRESENTE LA TERZA SPECIFICA DEL PROBLEMA E VISTO CHE ABBIAMO UN AUTOVALORE NASCOSTO IN -2 CHE NON POSSIAMO MODIFICARE $\longrightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI DOVRANNO ESSERE POSTI IN -2

CALCOLIAMO $W_z = \frac{y}{z}$

$$\begin{cases} y = P_2(z + m) \\ m = P_1 u \\ u = Ge \\ e = -y \end{cases} \longrightarrow y = P_2(z - P_1 G y) \longrightarrow y = \frac{P_2}{1+P_1P_2G} z$$

$$W_z = \frac{P_2}{1+P_1P_2G} \qquad G = \frac{N_G}{D_G} \qquad P_1 = \frac{N_{P_1}}{D_{P_1}} \qquad P_2 = \frac{N_{P_2}}{D_{P_2}}$$

$$W_z = \frac{\frac{N_{P_2}}{D_{P_2}}}{1+\frac{N_{P_1}}{D_{P_1}}\cdot\frac{N_{P_2}}{D_{P_2}}\cdot\frac{N_G}{D_G}} = \frac{N_{P_2} D_G D_{P_1}}{D_{P_1} D_{P_2} D_G + N_{P_1} N_{P_2} N_G}$$

PER LA PRIMA SPECIFICA E CONSULTANDO LA TABELLA DELLE USCITE A INGRESSI CANONICI VEDO CHE HO BISOGNO DI UNO ZERO IN $s=0$ CON MOLTEPLICITÀ ≥ 1.

QUINDI $N_{P_2} D_G D_{P_1}$ DEVE AVERE UNO ZERO IN $s=0$:

- PER RISPETTARE LA SPECIFICA $c \neq 0$, NON POSSO METTERLO IN N_{P_2},
- NON POSSO METTERLO IN D_G POICHÉ $D_G \equiv 1$
- NON MI RIMANE CHE $D_{P_1} \longrightarrow$ PONGO $b = 0$

POICHÉ HO BISOGNO DI DUE AUTOVALORI NASCOSTI IN -2 (PER LA SECONDA + 3ª SPECIFICA) PONGO $a = d = 2$.

INFATTI AVEVAMO:

$$\cdots \boxed{P_1(s) = \frac{s+a}{s}} \longrightarrow \oplus \longrightarrow \boxed{P_2(s) = \frac{s+c}{(s+d)(s-2)}}$$

$a = d = 2$

IN QUESTO MODO CREIAMO UNA CANCELLAZIONE ZERO-POLO RENDENDO NASCOSTO UN ALTRO AUTOVALORE IN -2

~~[illegible] LA STABILITÀ~~

$$F = G P_1 P_2 = k \cdot \frac{s+2}{s} \cdot \frac{s+c}{(s+2)(s-2)} = k \frac{s+c}{s(s-2)}$$

DEVO USARE L'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI PER ~~RENDERE~~ METTERE TUTTI GLI AUTOVALORI IN -2

N° PARAMETRI = GRADO D_F $\longrightarrow$ $2 = 2$ OK!

POICHÉ $W = \frac{N_F}{N_F + D_F} \longrightarrow D_W = N_F + D_F = k(s+c) + s(s-2) =$

$= s^2 + (k-2)s + kc$

EQ. DIOFANTINA

$$s^2 + (k-2)s + kc = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

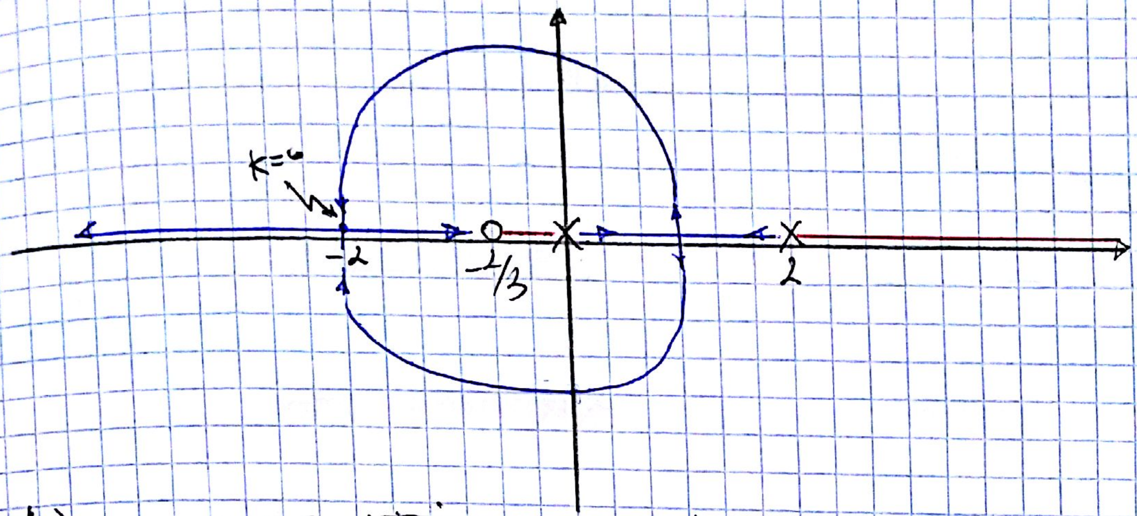
$$\begin{cases} k - 2 = 4 \\ kc = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

DOMANDA ACCESSORIA: SCRIVERE POLINOMIO CARATTERISTICO SISTEMA COMPLESSIVO CON RELATIVA RAGG. E/O OSS.

$$p(s) = \underbrace{(s+2)^2}_{\neg \text{RAGG e OSS}} \cdot \underbrace{(s+2)^2}_{\text{RAGG e OSS}}$$

DOMANDA ACCESSORIA: SI TRACCI IL LUOGO DELLE RADICI

$F(s) = k\frac{s+2/3}{s(s-2)}$ SAPPIAMO CHE PER $k=6$ ABBIAMO 2 RADICI IN $s=-2$



QUAL È IL VALORE ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ DI K PER CUI RIDUCIAMO AL ~~[illegible]~~ MAX LA VELOCITÀ DEL TRANSITORIO? $\underline{k=6}$

INFATTI PER $k=6$ $\longrightarrow$ VEL TRANSITORIO $= -2$

PER $k>6$ ~~[illegible]~~ UN AUTOVALORE MIGLIORA, L'ALTRO PEGGIORA! e PER $k<6$ TUTTI I DUE PEGGIORANO.

CALCOLIAMO I PUNTI SINGOLARI

$$\begin{cases} s^2+s(k-2)+\frac{2}{3}k=0 & \text{EQUAZIONE DEL LUOGO} \\ 2s+k-2=0 & \text{SUA DERIVATA} \end{cases}$$

$\downarrow$

$$s^2+s(\cancel{2}-2s-\cancel{2})+\frac{2}{3}(2-2s)=0 \longrightarrow -s^2-\frac{4}{3}s+\frac{4}{3}=0$$

$$\rightarrow s^2+\frac{4}{3}s-\frac{4}{3}=0$$

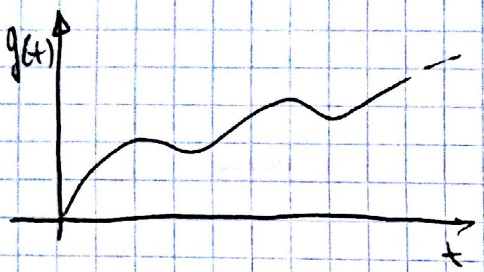
$s_1 = 0,\overline{6} \longrightarrow k_1 = -2\cdot 0,\overline{6}+2 = 0,\overline{6}$

$s_2 = -2 \longrightarrow k_2 = 2+2\cdot 2 = 6$

SISTEMI A TEMPO DISCRETO

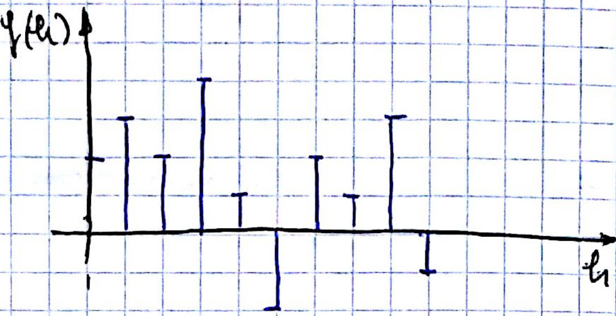
TEMPO CONTINUO

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Pz(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Qz(t)$$



TEMPO DISCRETO

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Pz(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + Qz(k)$$



TRASFORMATA DI LAPLACE

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$1/s$
t	$1/s^2$

t	s
$a f_1(t) + b f_2(t)$	$a F_1(s) + b F_2(s)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$

TRASFORMATA ZETA

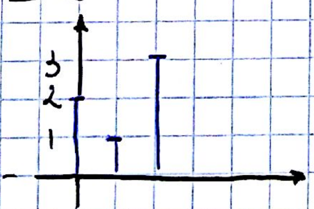
$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$\eta(k)$	$\frac{z}{z-1}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

$$\eta(k) = \begin{cases} 1 & k>0 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

k	z
$a f_1(k) + b f_2(k)$	$a F_1(z) + b F_2(z)$
$f(k-a)$	$\frac{F(z)}{z^a}$

EX



$$f(k) = 2\delta(k) + \delta(k-1) + 3\delta(k-2)$$
$$Z[f(k)] = 2 + \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2}$$

$$P(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$
$$\Pi(s) = C(sI-A)^{-1}P + Q$$

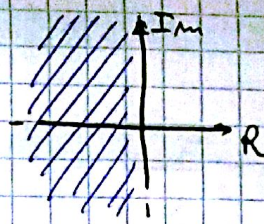
$$P(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$$
$$\Pi(z) = C(zI-A)^{-1}P + Q$$

Scanned by CamScanner

CONTINUO

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

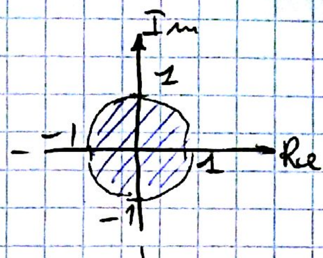
OVE $e^{At} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} R_{ik}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_i t} \xrightarrow[\text{ASINTOTICA}]{\text{STABILITÀ}} Re(\lambda_i)<0$



DISCRETO

$$y(h) = CA^{h-h_0}x(h_0) + \sum_{i=h_0}^{h-1} CA^{h-i-1}Bu(i) + Du(h)$$

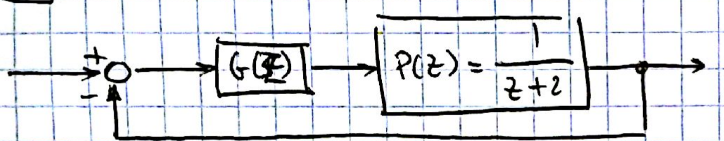
OVE $A^h = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} R_{ik}\frac{h^{[k-1]}}{(k-1)!}\lambda_i^{h-k+1} \xrightarrow[\text{ASINTOTICA}]{\text{STABILITÀ}} |\lambda_i|<1$

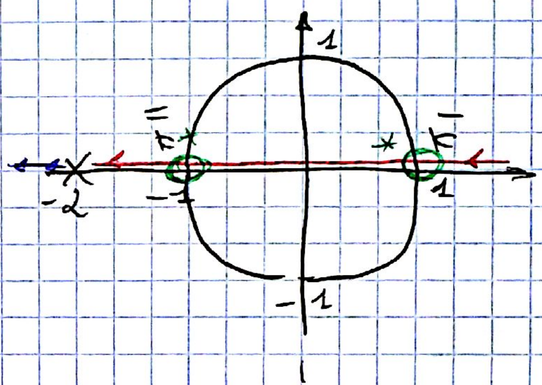


METODO PER APPLICARE IL CRITERIO DI ROUTH AL TEMPO DISCRETO

$D_W(z) \longrightarrow$ SOSTITUISCO $z = \frac{w+1}{w-1}$

EX)





$F(z) = K\frac{1}{z+2}$

VOGLIO CHE TUTTE LE RADICI SIANO DENTRO IL CERCHIO UNITARIO

IL LUOGO NEGATIVO VA BENE! PER $\underline{\underline{K}}<K<\overline{K}$ L'UNICA SOLUZIONE È ALL'INTERNO DEL CERCHIO

$D_W = N_F + D_F = z+2+K = 0 \xrightarrow[z=1\ (*)]{\text{SOSTITUISCO}} K = -3$

$\xrightarrow[z=-1\ (*)]{\text{SOSTITUISCO}} \underline{\underline{K}} = -1$

SAREMMO ARRIVATI ALLO STESSO RISULTATO APPLICANDO LA TRASF. $z=\frac{w+1}{w-1}$

$D_W(z) = z+2+K \longrightarrow z=\frac{w+1}{w-1} \longrightarrow 1+w+(2+K)(1-w)=0$

$\longrightarrow w(-1-K)+3+K=0$

APPLICO ROUTH SU W (IN QUESTO CASO BANALISSIMO)

$\begin{cases} -1-K>0 \\ 3+K>0 \end{cases} \quad \begin{cases} K<-1 \\ K>-3 \end{cases} \iff -3<K<-1$ HO RITROVATO LA CONDIZIONE DI PRIMA

Scanned by CamScanner

INGRESSI POLINOMIALI A TEMPO DISCRETO

$$u(k) = \frac{k^{[k]}}{k!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-k+1)}{k!}$$

RISPOSTA A REGIME A INGRESSI CANONICI

MOLTEPLICITÀ DELLO ZERO IN $z=1$ DELLA W_Z

	$\eta(k)$	k	$\frac{k(k-1)}{2}$
0	$W(1) \neq 0$	$W(1)k + \left.\frac{dW}{dz}\right\|_{z=1}$ $Ak+B$	$W(1)\frac{k^{[2]}}{2} + \left.\frac{dW}{dz}\right\|_{z=1} k + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dz^2}\right\|_{z=1}$ $Ak^{[2]}+Bk+C$
1	0	$\left.\frac{W(z)}{z-1}\right\|_{z=1} \neq 0$	$\left.\frac{dW}{dz}\right\|_{z=1} k + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dz^2}\right\|_{z=1}$ $Ak+B$
2	0	0	$\left.\frac{W(z)}{(z-1)^2}\right\|_{z=1} \neq 0$

RISPOSTA A REGIME A INGRESSI PERIODICI

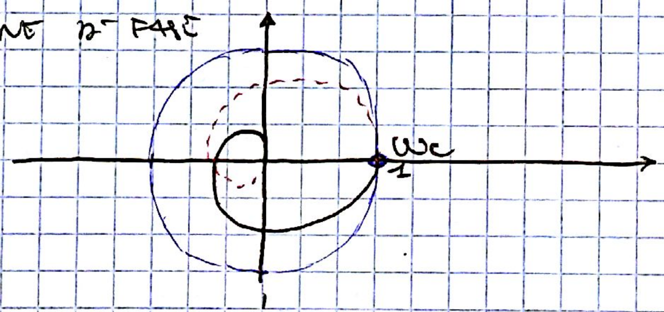
$$u(k) = \sin \theta k$$

$$\tilde{y}(k) = |W(e^{j\theta})| \sin(\theta k + \angle e^{j\theta})$$

INIZIO TUTOR

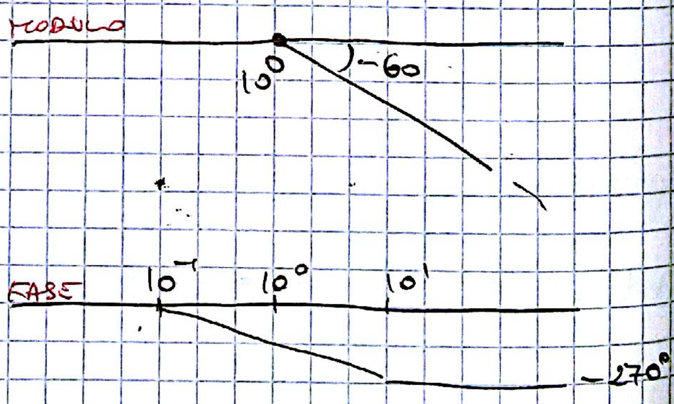
EX. TROVARE MARGINE DI FASE

$$F(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$



$$M\varphi = 180° + \angle F(j\omega_c)$$

PULSAZIONE DI ATTRAVERSAMENTO O PULSAZIONE CRITICA



$$\omega_c : \omega \text{ t.c. } |F(j\omega)| = 1$$

TROVIAMO ω_c:

$$\frac{1}{(\sqrt{1+\omega_c^2})^3} = 1 \longrightarrow \omega_c = 0$$

CALCOLIAMO $M\varphi$

$$M\varphi = 180° + \angle \frac{1}{1+0} = 180°$$

Scanned by CamScanner

EX

$$F(s) = \frac{2(1+s)}{s^2}$$

TROVIAMO ω_c : $|F(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{1+\omega_c^2}}{\omega_c^2} = 1$

$$\Rightarrow 4 + 4\omega_c^2 = \omega^4 \Rightarrow \omega^4 - 4\omega_c^2 + 4 = 0$$

$t = \omega_c^2 \longrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \quad t = 2 \pm \sqrt{4+4} = 2 \pm \sqrt{8} \quad 2 - \sqrt{8} < 0$ NON VA BENE

$\omega_c = \sqrt{t} = \pm\sqrt{2+\sqrt{8}}$ OVVERO NEGATIVA LA SOLUZIONE

$\omega_c = \sqrt{2+\sqrt{8}} \simeq 2.19$

TROVIAMO $m\varphi$:

$m\varphi = 180° + \angle F(j\omega_c) = \cancel{180°} + \arctan(\omega_c) - \cancel{180°} \simeq 65,5°$

EX

$\xrightarrow{+} \circ \longrightarrow \boxed{K} \longrightarrow \boxed{P(s)} \longrightarrow$ (retroazione $-$)

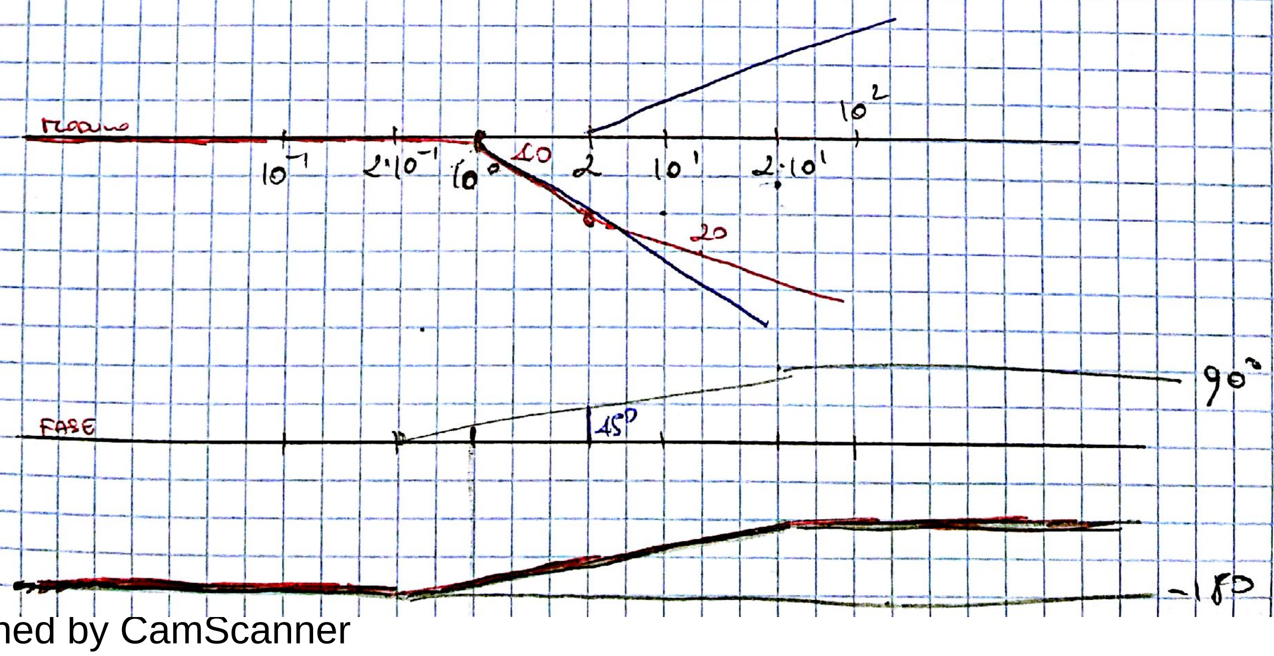
TROVARE K t.c.

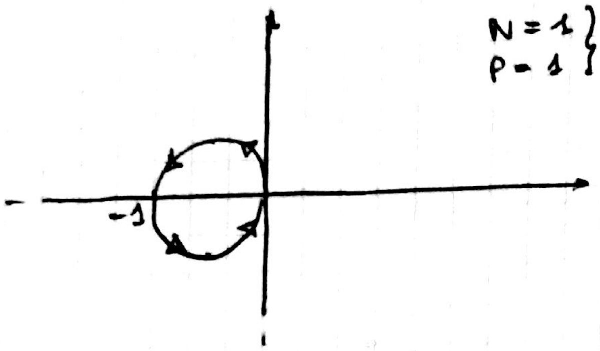
a) STABILE ASINT. CON $m\varphi \geq 45°$

b) ω_t PIÙ PICCOLO POSSIBILE

$$P(s) = -\frac{1+0{,}5s}{(1+s)(1-s)}$$

DIAGRAMMA DI BODE CON $K = 1$





$\left.\begin{array}{l} N = 1 \\ P = 1 \end{array}\right\}$ se $k > 1$

PER $k = 1$ NON È ASINT. STABILE (N NON È BEN DEFINITO)

MA BASTA $k > 1$ PER RENDERLO STABILE

CERCO k IN MODO DA SODDISFARE $m_\varphi \geq 45^\circ$

$F = k P(s)$

$$\underbrace{|F(j2)|}_{} = 1 \iff \frac{k\sqrt{1 + 4/4}}{\left(\sqrt{1+4}\right)^2} = \frac{k\sqrt{2}}{5} = 1 \iff k = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

HO PRESO $j2$ PER ISPEZIONE DEL DIAGRAMMA DI BODE

INFATTI PER $\omega = 2$

LA FASE VALE $45^\circ - 180^\circ$

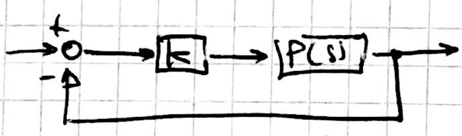
QUINDI $m_\varphi = 180^\circ + 45^\circ - 180^\circ = 45^\circ$

QUINDI PER $k \geq \frac{5}{\sqrt{2}}$ ABBIAMO RISOLTO IL PROBLEMA

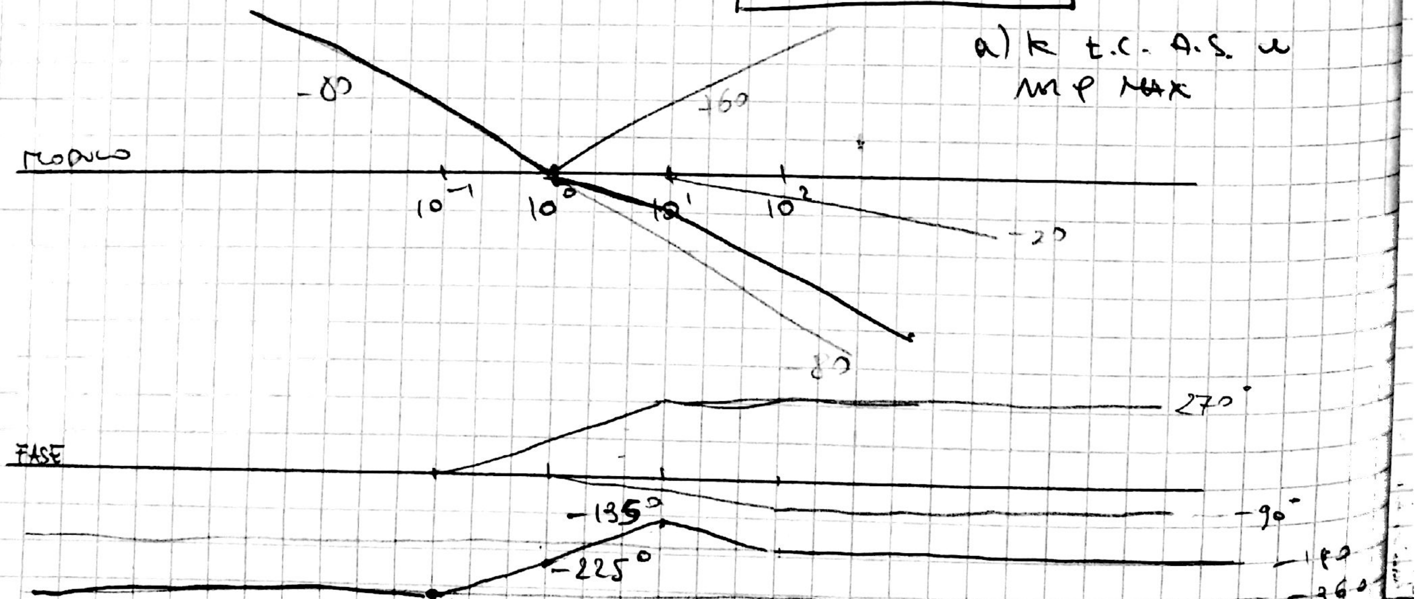
(INFATTI $k = \min\left\{(1, +\infty) \cap \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, +\infty\right)\right\}$

EX

$$P(s) = \frac{10(1+s)^3}{s^4(10+s)} = \frac{(1+s)^3}{s^4\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$



a) k t.c. A.S. e m_φ MAX

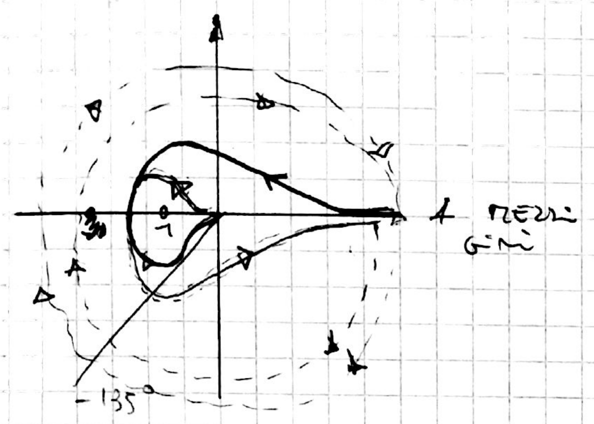


$m_\varphi = 180° + \angle F(10j)^{(*)} = 180° + 3\cdot\arctan(10) - 360° - \arctan(1) \cong 27{,}86°$

$\omega_t : \quad |F(j\omega_t)| = 1 \qquad \frac{k\left(\sqrt{1+100}\right)^3}{10^4\sqrt{1+1}} = 1 \qquad k \cong 10\sqrt{2} \cong 13{,}93$

(*) 10 LO PRENDO DAL DIAGRAMMA DI BODE! LO SFASAMENTO MAX (DA −180°) CE L'HO PER $\omega = 10$

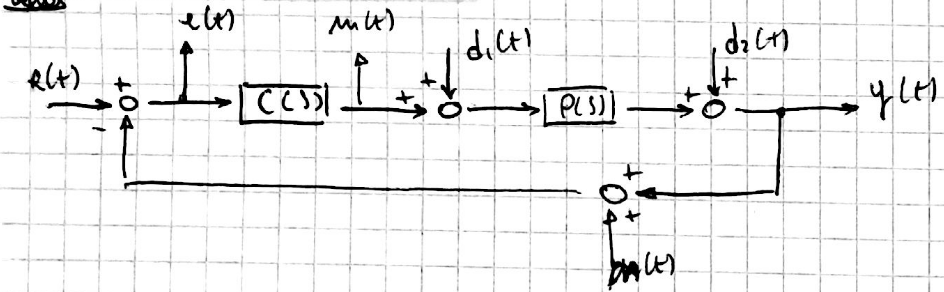
TRACCIO IL DIAGRAMMA DI NYQUIST PER VERIFICARE LA STABILITÀ



ORA FACCIAMO A CAPIRE SE $(-1, j0)$ È DENTRO IL GRAFICO INTERNO? LO VEDIAMO DAI DIAGRAMMI DI BODE

IL PUNTO È DENTRO ⇒ IL SIST. È STABILE $(N = 0 = P)$

REQUISITI SISTEMA



REQUISITI FONDAMENTALI:

1) STABILITÀ
   - NOMINALI CON DISTURBI = 0 — NYQUIST
   - PERTURBATE AMMETTIAMO CERTI DISTURBI — MARGINI DI FASE E GUADAGNO

2) PRESTAZIONI NOMINALI
   - PRESTAZIONI STATICHE CIOÈ SUL COMPORTAMENTO A REGIME
   - PRESTAZIONI DINAMICHE DURANTE IL TRANSITORIO

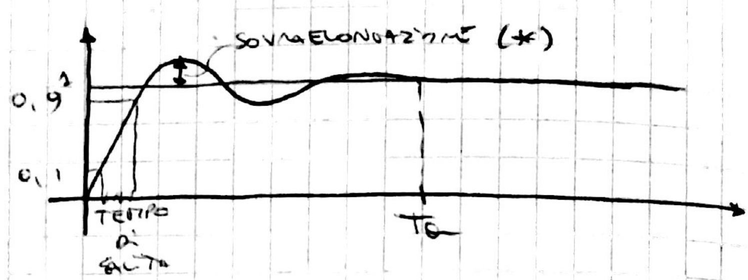
3) PRESTAZIONI ROBUSTE
   - REGIME PERMANENTE
   - TRANSITORIO

PRESTAZIONI DINAMICHE

IN GENERE SI FA RIFERIMENTO ALLA RISPOSTA INDICIALE

PARAMETRI CARATTERISTICI:

- T_s TEMPO DI SALITA
- $\hat{S}$ SOVRAELONGAZIONE
- T_a TEMPO DI ASSESTAMENTO



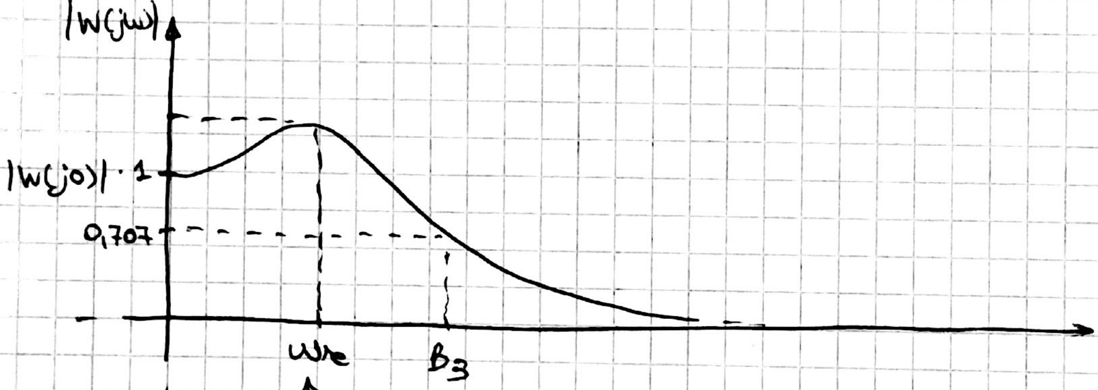
(*) IN GENERE SI INDICA IN PERCENTUALE RISPETTO AL VALORE DI REGIME

OSS

IN GENERE SI VOGLIONO T_s, $\hat{S}$ e T_a PIÙ PICCOLE POSSIBILI

ORA VOGLIAMO TRADURRE QUESTE SPECIFICHE NEL TEMPO IN SPECIFICHE SULLA $W(S)$

- B_3 BANDA PASSANTE



FASE DI RISONANZA RELATIVA A M_R MODULO DI RISONANZA

REGOLE EMPIRICHE

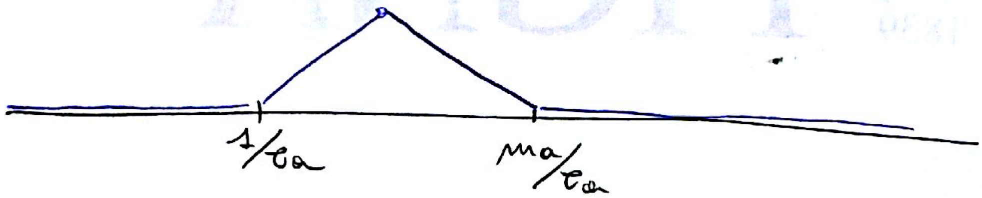
- $B_3 \cdot T_s \cong 3 \implies B_3 \cong \frac{3}{T_s}$
- $1+\hat{S} \cong 0,85\, M_R \implies \hat{S} \cong 0,85\, M_R - 1$

CONSIDERIAMO IL CONTROLLORE $C(S) = C_1(S) \cdot C_2(S)$
PER SODDISFARE LE SPECIFICHE STATICHE ()
ARRIVO A $C_1(S) = \frac{K}{S^\nu}$. VEDO SE CON $C_2(S) = 1$ RIESCO A SODDISFARE LE SPECIFICHE. SE NON LE SODDISFANO CERCO UNA $C_2(S)$ IN MODO DA SODDISFARE LE SPECIFICHE SU ω_c e φ_m

Scanned by CamScanner

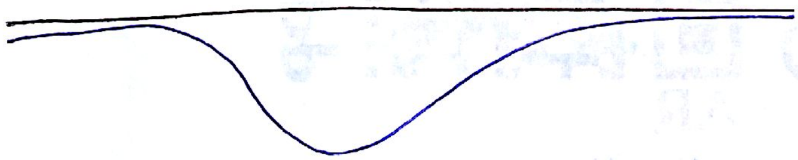
RETE ANTICIPATRICE

$$\tilde{C}_2(s) = \frac{1+\tau_a s}{1+\frac{\tau_a}{m_a}s} \quad \text{con } \tau_a>0,\ m_a>0$$



RETE ATTENUATRICE

$$C_2(s) = \frac{1+\frac{\tau_a}{m_a}s}{1+\tau_a s} \quad \text{con } \tau_a>0 \text{ e } m_a>0$$

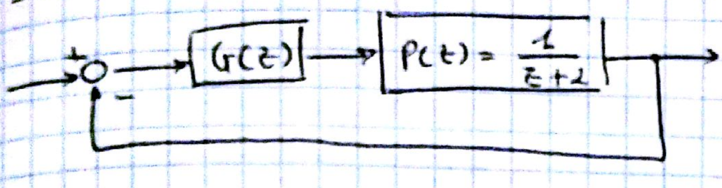


Scanned by CamScanner

OSS.

PER SISTEMI A TEMPO DISCRETO POSSIAMO IMPORRE LA CONVERGENZA DELLA RISPOSTA IN TEMPO FINITO

EX.



PROGETTARE G(z) IN MODO CHE:

1) LA RISPOSTA y CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $r(k) = \eta(k)$ SIA NULLA A PARTIRE DA UN CERTO ISTANTE ℓ (CON ℓ MINIMO)

2) IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINTOTICAMENTE STABILE

INIZIAMO DALLA SPECIFICA 1

CALCOLIAMO LA FDT INGRESSO USCITA $W = \frac{y}{r} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$

OVE $F = GP = \frac{N_F}{D_F}$

$$r(k) = \eta(k) \longrightarrow r(z) = \mathcal{Z}[\eta(k)] = \frac{z}{z-1}$$

OSS.

IL NOSTRO OBIETTIVO È FAR SÌ CHE $y(k) = 0 \quad \forall k \geq \ell$

$$y(k) = A_0 \delta(k) + A_1 \delta(k-1) + A_2 \delta(k-2) + \dots + A_{\ell-1} \delta(k - \ell + 1)$$

$$y(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_{\ell-1}}{z^{\ell-1}} = \frac{A_0 z^{\ell-1} + A_1 z^{\ell-2} + A_2 z^{\ell-3} + \dots + A_{\ell-1}}{z^{\ell-1}}$$

QUINDI $y(z) = \frac{S(z)}{z^{\ell-1}}$ ← POLINOMIO DI GRADO $\leq \ell-1$

QUINDI DEVO FARE IN MODO CHE:

$$\underbrace{y(z)}_{\frac{S(z)}{z^{\ell-1}}} = \underbrace{W(z)}_{\frac{N_F}{N_F+D_F}} \cdot \underbrace{r(z)}_{\frac{z}{z-1}}$$

$$\frac{S(z)}{z^{\ell-1}} = \frac{N_F}{N_F + D_F} \cdot \frac{z}{z-1} \iff \frac{(z-1)\,S(z)}{z^\ell} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$$

ORA EGUAGLIO IL NUMERATORE A SX E IL DEN. A SX CON NUM. E DEN. A DX

$$\begin{cases} (z-1)\,S(z) = N_F(z) \\ z^\ell = N_F(z) + D_F(z) \end{cases}$$

$(z-1)\,S(z) = N_F(z) \longrightarrow$ IMPONE SUBITO IL FATTO CHE $N_F = (z-1)\dots$

Scanned by CamScanner

LA SECONDA EQUAZIONE NON È ALTRO CHE UN EQUAZIONE DIOFANTINA

SAPPIAMO CHE PER RISOLVERLA DOBBIAMO SODDISFARE LA SEGUENTE SPECIFICA:

N° PARAMETRI $= d_W = d_F$

$$\boxed{\text{SCELGO } G(z) = a\,\frac{z-1}{z+b}} \longrightarrow F(z) = G(z)P(z) = \frac{a(z-1)}{(z+b)(z+2)}$$

N° PARAMETRI $= 2 = \delta F \longrightarrow$ ok!

$$N_F + D_F = a(z-1) + (z+b)(z+2) = z^2$$

$$\Updownarrow$$

$$z^2 + (2+b+a)z + 2b - a = z^2 \longrightarrow \begin{cases} 2b - a = 0 \\ 2 + b + a = 0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases}}$$

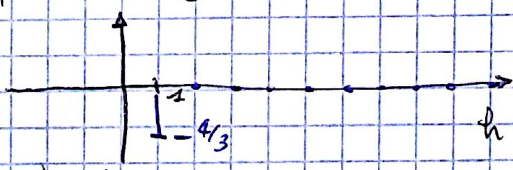
OSS, COSÌ FACENDO ABBIAMO ANCHE RESO STABILE IL SISTEMA!
ABBIAMO INFATTI ASSEGNATO GLI AUTOVALORI IN ZERO! (INFATTI $D_W = N_F + D_F$)

$$\boxed{G(z) = -\frac{4}{3}\,\frac{z-1}{z-\frac{2}{3}}}$$

QUAL È L'ANDAMENTO DI $y(z)$?

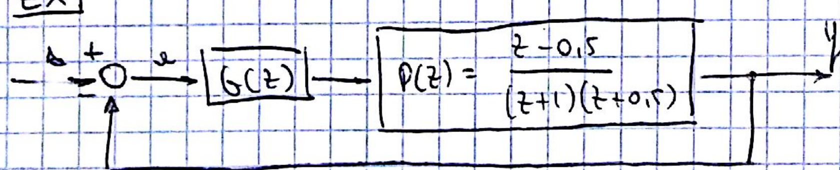
$$y(z) = \frac{N_F}{N_F + D_F} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{-4/3\,\cancel{(z-1)}}{z^2} \cdot \frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}} = \frac{-4/3}{z}$$

quindi: $y(k) = -4/3\,\delta(k-1)$



COME CI ASPETTAVAMO $y(k) = 0 \quad \forall k \geq 2$

EX



OSS: PER A, B, C ANCHE STABILITÀ ASINTOTICA

A) SI DETERMINI UN CONTROLLORE $G_A(z)$ TALE DA RENDERE NULLO L'ERRORE A REG. PERM. PER INGRESSI $r(k) = \eta(k)$

B) SI DETERMINI UN CONTROLLORE $G_B(z)$ TALE DA RENDERE NULLO L'ERRORE CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $r(k) = \eta(k)$ NEL TEMPO PIÙ BREVE POSSIBILE

C) SI DETERMINI UN CONTROLLORE $G_C(z)$ t.c. IN CORRISPONDENZA DI $r(k) = \eta(k)$ SI ABBIA: $e(0) = 1 \quad e(1) = 0 \quad e(2) = -1 \quad e(k) = 0 \quad \forall k \geq 3$

Scanned by CamScanner

A

		$\eta(h)$
TERMINI IN $t=1$ DELLA $W_e(z)$	0	$W_e(1) \neq 0$
	1	0
	2	0

$$W_e = \frac{e}{r} = \frac{D_F}{N_F + D_F}$$

$$W = \frac{y}{t} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$$

BISOGNA CONSULTARE LA TABELLA DEL REGIME PERMANENTE IN CORRISPONDENZA A INGRESSI POLINOMIALI (INFATTI LA SPECIFICA È SOLO SUL REGIME PERMANENTE)

QUINDI $G(z) = \dfrac{\ldots}{(z-1)\ldots}$

A DIFFERENZA DELL'EX PRECEDENTE MI DEVO PREOCCUPARE DELLA STABILITÀ!

(NON HO BISOGNO DELL'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI)

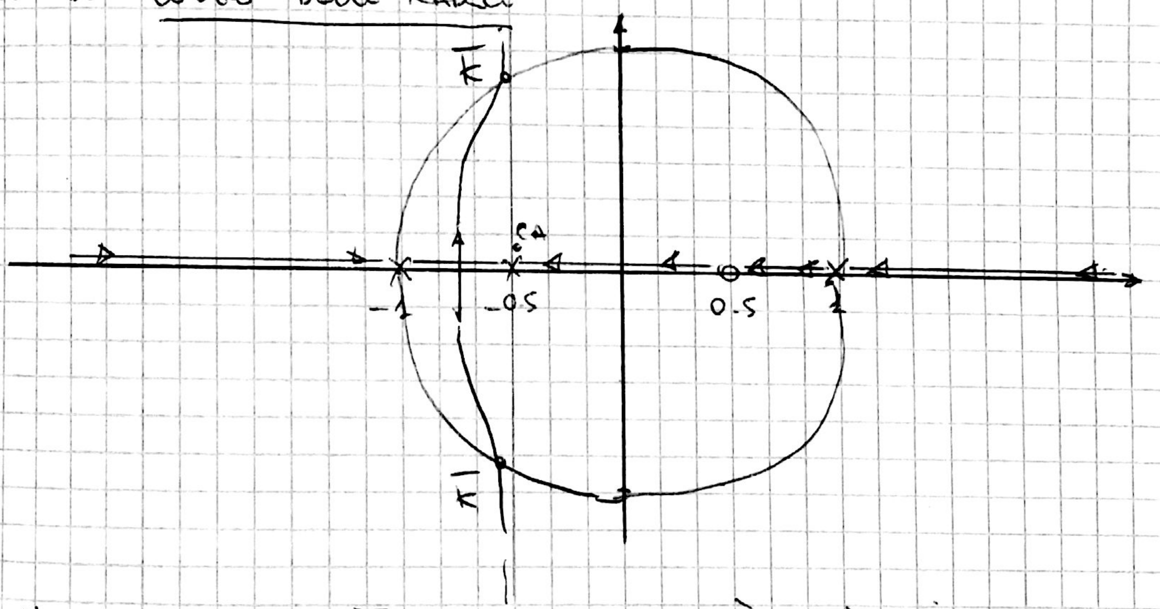
SCELGO $G(z) = \dfrac{k}{z-1}$ E VEDO SE È STABILE

$$F(z) = k\,\frac{z-0{,}5}{(z-1)(z+1)(z+0{,}5)}$$

$m=1$ $z_1 = 0{,}5$

$n=3$ $p_1 = 1$, $p_2 = -1$, $p_3 = -0{,}5$

USO IL LUOGO DELLE RADICI



QUINDI SE $0 < k < \bar{k}$ IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE

(ALL'ESAME NON BISOGNA CALCOLARE $\bar{k}$, SE PROPRIO C'È TEMPO TROVARNE UNO!)

AD EX → SOSTITUISCO $z = -0{,}7$ IN D_W E RICAVO k (CON UN VALORE COSÌ DI z È PROBABILE CHE IL k VADA BENE)

Scanned by CamScanner

B (STESSO RAGIONAMENTO DELL'EX PRECEDENTE)

$$\underbrace{\ell(z)}= W_\ell(z)\, r(z)$$

SAPPIAMO SOLO CHE $d_S \le \ell - 1$

$$\frac{S(z)}{z^{\ell-1}} = \frac{D_F}{N_F+D_F}\cdot\frac{z}{z-1} \iff \frac{(z-1)\,S(z)}{z^\ell} = \frac{D_F}{N_F+D_F}$$

$$\begin{cases}(z-1)\,S(z) = D_F & \text{———} \quad G(z) = \dfrac{\dots}{(z-1)\dots} \\ z^\ell = N_F + D_F \end{cases}$$

RISOLVIAMO L'EQ. DIOFANTINA:

DEVO SCEGLIERE LA STRUTTURA DI $G(z)$ CHE PER ORA È COSÌ: $G(z) = \frac{\dots}{(z-1)\dots}$

CONVIENE CHE CON $G(s)$ 'CANCELLO TUTTO IL CANCELLABILE' OVVERO RENDO NASCOSTI ~~IL~~ TUTTI GLI AUTOVALORI t.c. $|\lambda| < 1$ (COSÌ SEMPLIFICO I CALCOLI)

SCELGO $G(z) = \dfrac{(z+0{,}5)(az+b)}{(z-0{,}5)(z-1)}$

INFATTI SE METTEVO SOLO UN PARAMETRO IN $G(s)$ VENIVANO ~~...~~ IL ~~...~~ GRADO DI $F = 2 \neq$ N° PARAMETRI!

$$F(z) = \frac{az+b}{(z+1)(z-1)}$$

ORA POSSO RISOLVERE L'EQ.

$$N_F + D_F = az + b + (z+1)(z-1) = z^2 \iff z^2 + az + b - 1 = z^2$$

QUINDI:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

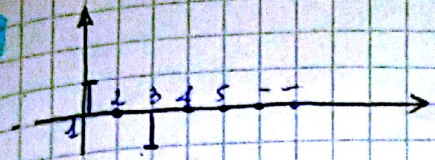
OSS
PER CASO È VENUTO CHE BASTAVA UN SOLO PARAMETRO!

$$G_B(z) = \frac{z+0{,}5}{(z-0{,}5)(z-1)}$$

POSSO ESSERE SICURO CHE IL SISTEMA È STABILE (HO ASSEGNATO GLI AUTOVALORI IN ZERO).

~~QUAL È IL POL. CARATT. DEL SISTEMA COMPLESSIVO?~~ $\underbrace{(z-0{,}5)}_{\text{RAGG. 7OSS}}\underbrace{(z+0{,}5)}_{\text{7RAGG. OSS}}\underbrace{z^2}_{\text{RAGG. OSS}} = p(z)$

C



$e(k) = \delta(k) - \delta(k-2) \longrightarrow e(z) = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{z^2-1}{z^2}$

DEVO IMPORRE CHE $e(k)$ SIA FATTA COSÌ

$e(z) = W(z)\, r(z)$

$$\frac{z^2-1}{z^2} = \frac{D_F}{N_F + D_F} \cdot \frac{z}{z-1} \iff \frac{(z-1)(z^2-1)}{z^3} = \frac{D_F}{N_F+D_F} \rightarrow \begin{cases} (z-1)(z^2-1) = D_F \\ z^3 = N_F + D_F \end{cases}$$

$(z-1)^2(z+1) = (z-1)(z^2-1)$

IN QUESTO CASO ABBIAMO $S(z)$ FISSATO!

$$G(z) = \underbrace{\frac{z+0{,}5}{z-0{,}5}}_{\text{CANCELLO IL CANCELLABILE}} \cdot \underbrace{\frac{\cdots}{(z-1)^2}}_{z+1 \text{ È GIÀ IN } P(z)!} \implies F = \frac{N_F}{(z+1)(z-1)^2}$$

$z^3 - D_F = N_F \implies N_F = z^3 - (z-1)(z^2-1) = z^2 + z - 1$

L'EX MI HA IMPOSTO ANCHE N_F

QUINDI: $G(z) = \frac{z+0{,}5}{z-0{,}5} \cdot \frac{z^2+z-1}{(z-1)^2} \longrightarrow F = GP = \frac{z^2+z-1}{(z+1)(z-1)^2}$

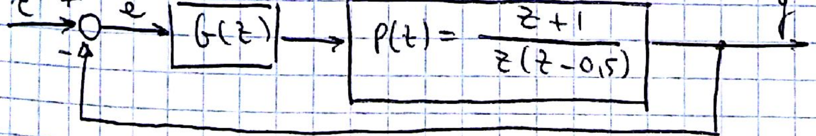
OSS

L'ESERCIZIO È STATO COSTRUITO AD ARTE, ALTRIMENTI POTEVA NON AVERE SOLUZIONE

~~QUAL È IL POLINOMIO CARATTERISTICO DEL SISTEMA COMPLESSIVO~~?

$P(z) = (z-0{,}5)(z+0{,}5)z^3$

EX



1) DETERMINARE $G(z)$ IN MODO CHE PER L'INGRESSO $r(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ L'ERRORE $e(k) = 0 \quad \forall k \geq \ell$ (ℓ PIÙ PICCOLO POSSIBILE)

$W_e = \frac{D_F}{N_F + D_F} \qquad W = \frac{N_F}{N_F + D_F} \qquad F = GP = \frac{N_F}{D_F}$

Scanned by CamScanner

$$\underbrace{e(z)}_{\frac{S(z)}{z^{\ell-1}}} = \underbrace{W_e(z)}_{\frac{D_F}{N_F+D_F}} \underbrace{r(z)}_{\frac{1}{z(z-2)}}$$

$$\frac{S(z)}{z^{\ell-1}} = \frac{D_F}{N_F+D_F} \cdot \frac{1}{z(z-2)} \iff \frac{S(z)(z-2)}{z^{\ell-2}} = \frac{D_F}{N_F+D_F}$$

$$\begin{cases} S(z)(z-2) = D_F \\ \underbrace{N_F+D_F}_{d_F} = \underbrace{z^{\ell-2}}_{\ell-2} \end{cases}$$

$d_F = \ell - 2 \Leftrightarrow \ell = d_F + 2$

$$G(z) = \frac{\dots}{(z-2)}$$

CON G(z) CANCELLO IL CANCELLABILE. $G(z) = \frac{z(z-0{,}5)}{(z-2)} \cdot \frac{a}{z+b}$

$\longrightarrow F = GP = a\frac{z+1}{(z-2)(z+b)}$ ABBIAMO CHE N° PARAMETRI $= 2 = d_F$ OK!

$$a(z+1) + (z-2)(z+b) = z^2 \implies z^2 + (b-2+a)z + a - 2b = z^2$$

$$\begin{cases} b+a-2=0 \\ a-2b=0 \end{cases} \quad b = \frac{2}{3} \quad a = \frac{4}{3}$$

QUINDI: $\boxed{G(z) = \frac{z(z-0{,}5)}{z-2} \cdot \frac{4/3}{z+2/3}}$

OSS

IL SISTEMA È ANCHE STABILE POICHÉ HO ASSEGNATO IN ZERO GLI AUTOVALORI

VEDIAMO COME È FATTO L'ERRORE DEL [illegible] DETTO:

$$e(z) = \frac{D_F}{N_F+D_F} \cdot \frac{1}{z(z-2)} = \frac{\cancel{(z-2)}(z+2/3)}{4/3(z+1)+(z-2)(z+2/3)} \cdot \frac{1}{z\cancel{(z-2)}} = \frac{z+2/3}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{2/3}{z^3}$$

Quindi: $e(k) = \delta(k-2) + 2/3\,\delta(k-3)$

POLINOMIO CARATTERISTICO DEL SISTEMA COMPLESSIVO

$$P(z) = \underbrace{z(z-0{,}5)}_{\neg\text{RAGG OSS}} \underbrace{z^2}_{\text{RAGG OSS}}$$

RISPOSTA A REGIME A INGRESSI PERIODICI

SUPPONIAMO CHE UN ESERCIZIO ABBIA LA SEGUENTE SPECIFICA:

1) $e(k)$ NULLO A REG. PERM. PER $r(k) = \sin(4k)$

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE:

$$r(k) = \sin\theta k \longrightarrow \tilde{e}(k) = |W_e(e^{j\theta})| \sin(\theta k + \angle W_e(e^{j\theta}))$$

Scanned by CamScanner

NEL NOSTRO CASO : $\theta = 4$

$$\tilde{e}(h) = |W_e(e^{j4})| = 0$$

$$W_e = \frac{D_F}{N_F + D_F} \qquad |D_F(e^{j4})| = 0 \quad \Longleftarrow \quad |D_G(e^{j4})| \cdot |D_P(e^{j4})| = 0$$

$$|D_G(e^{j4})| = 0$$

QUINDI : $D_G(z) = (z - e^{j4})\underbrace{(z - e^{-j4})}_{}\,---$

AGGIUNGO QUESTO TERMINE PER AVERE COEFF. REALI

$$D_G(z) = (z - \cos 4 - j\sin 4)(z - \cos 4 + j\sin(4)) = (z - \cos 4)^2 + \sin^2 4 =$$

$$= z^2 - 2z\cos 4 + \underbrace{\cos^2 4 + \sin^2 4}_{1} = z^2 - 2z\cos 4 + 1$$

QUINDI $\quad G(z) = \dfrac{---}{(z^2 - 2\cos 4 \cdot z + 1)\cdots}$

Scanned by CamScanner