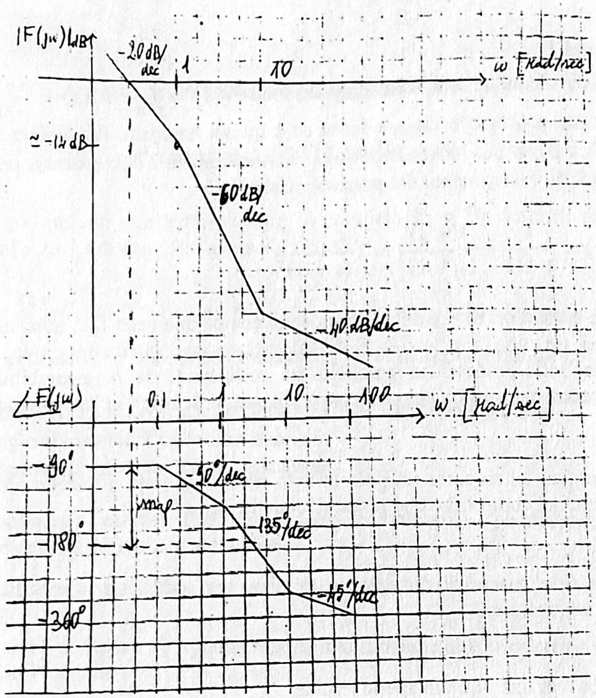
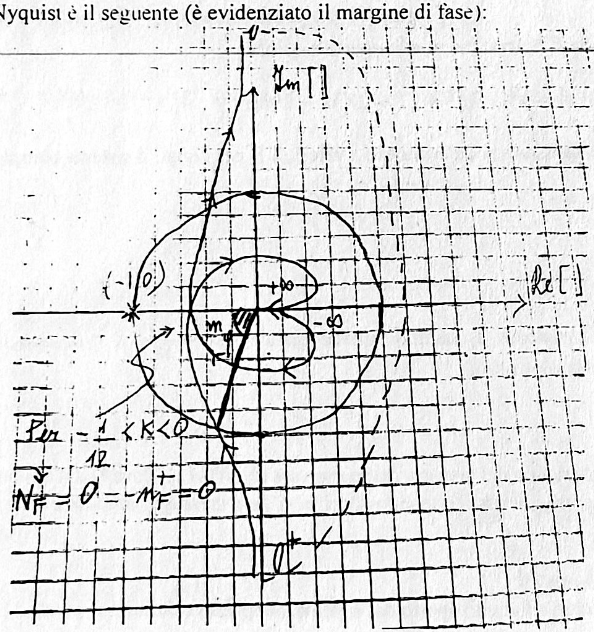


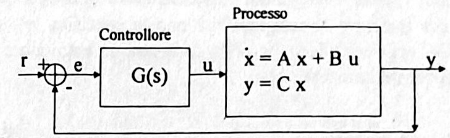
B) Il diagramma di Nyquist è il seguente (è evidenziato il margine di fase):



Il sistema è asintoticamente stabile poiché non vi sono giri del diagramma attorno al punto critico e non ci sono poli a parte rale positiva della F(s).

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 21 marzo 2018

PROBLEMA 1 Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



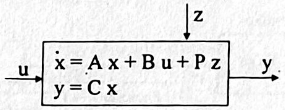
con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$

A) Si determinino il parametro "a" ed un controllore G(s) a <u>dimensione minima</u> in modo che:
  (α) il processo abbia tutti gli autovalori raggiungibili ed osservabili;
  (β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
  ~~(γ) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a $(s+2)^3$.~~

B) Si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità degli autovalori del sistema complessivo individuato nella domanda A).

C) Con riferimento al sistema complessivo individuato nella domanda A), si determini l'errore "e" a regime permanente corrispondente al riferimento r(t) = t.

PROBLEMA 2 Si consideri il processo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Il disturbo z è misurabile.</u>

A) Si progetti uno schema di controllo a dimensione minima *in maniera da* verificare le seguenti specifiche:
  α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
  β) la risposta "y" corrispondente a qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

B) Con riferimento alla soluzione individuata nella domanda A), si tracci il luogo delle radici di interesse e si indichi su tale luogo (senza calcolarlo) il valore del parametro K (il parametro che caratterizza il luogo delle radici) in corrispondenza al quale la velocità di convergenza del transitorio è massima.

TEMA

L'assegnazione degli autovalori nel dominio del tempo.

Si dimostri il principio di separazione.

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \frac{s+3}{s\,(s+a)}$.

Dato che il processo deve avere tutti gli autovalori raggiungibili ed osservabili non ci possono essere autovalori intrinseci del processo; quindi l'autovalore nascosto deve generarsi per interconnessione tra controllore e processo. Allora, per garantire la compatibilità con la specifica (γ), si deve necessariamente scegliere a=2 e porre uno zero in -2 nel controllore, in modo da creare un autovalore irragg. e oss. in -2.

Si può allora scegliere un controllore della forma

$$G(s) = b\,\frac{s+2}{s+c} \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = b\,\frac{s+3}{s\,(s+c)}$$

Per soddisfare la specifica (γ) si procede all'assegnazione degli autovalori:

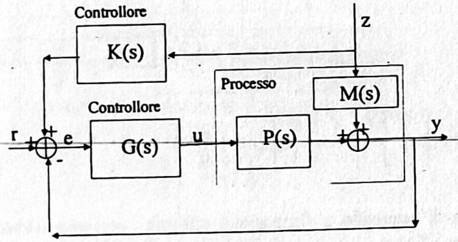
$$D_W = N_F + D_F = s\,(s+c) + b(s+3) = (s+2)^2 \qquad \Rightarrow \qquad b=4/3 \quad c=8/3$$

B) il sistema complessivo ha 3 autovalori in -2 di cui uno irragg. e oss. e due ragg. e oss.

C) La risposta richiesta è pari a $\left.\frac{W_e(s)}{s}\right|_{s=0} = 2/3$.

Soluzione del problema 2

A) Dato che il disturbo è misurabile, è possibile progettare uno schema di controllo a doppia controreazione del tipo:



dove $P(s) = M(s) = \frac{s-1}{s\,(s+2)}$

Si può tentare allora di stabilizzare il sistema complessivo con un controllore G(s) a dim. zero del tipo

$$G(s) = K \;\Rightarrow F(s) = K\,\frac{s-1}{s\,(s+2)}$$

Applicando il criterio di Routh al polinomio

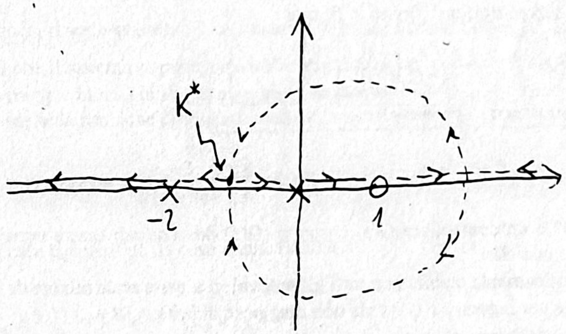
$$D_W = N_F + D_F = K\,(s-1) + s\,(s+2) = s^2 + s\,(2+K) - K$$

si deduce che deve essere $0 > K > -2$.

Si deve infine scegliere il controllore K(s) in modo da imporre $W_z(s)=0$ ottenendo la reiezione completa del disturbo. Svolgendo i conti si ottiene:

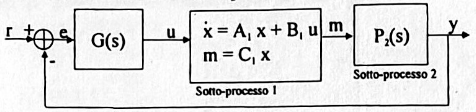
$$K(s) = -\frac{M(s)}{G(s)\,P(s)} = -\frac{1}{K}$$

B) Dal luogo delle radici di F(s) (disegnato qui di seguito) è evidente che la velocità di convergenza risulta massima in corrispondenza del punto singolare tra i punti di ascissa -2 e 0, indicato come K*.



CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 13 giugno 2018

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $A_1 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $C_1 = [\,1 \quad 0\,]$ $\qquad P_2(s) = \dfrac{s-b}{s+1}$.

A) Si determinino i parametri "a", "b" e un controllore G(s) <u>costante</u> (G(s) deve quindi essere uguale ad una costante K opportuna) in modo tale che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori a parte reale minore di -4;
   β) l'errore "e" a regime permanente per ingresso r(t) = t sia non maggiore di 0,03;
   γ) il sistema complessivo abbia <u>un</u> autovalore nascosto.

B) Si disegni il luogo delle radici relativo alla domanda A) evidenziandone la congruenza con la stabilizzazione di cui alla specifica α).
   Si indichino tutti i valori di K in corrispondenza dei quali tutte le specifiche della domanda A) sono soddisfatte. Nell'ambito di tali valori si calcoli il valore di K in corrispondenza del quale tutti gli autovalori del sistema complessivo sono reali e la velocità di esaurimento del transitorio è massima (si determini tale velocità di esaurimento).

C) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domande A; si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2.
Si consideri ancora lo schema di controllo del problema 1 (A_1, B_1, C_1 e $P_2(s)$ sono gli stessi del problema 1)

A) Si determinino i parametri "a", "b" ed un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> in modo tale che:
   α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con polinomio caratteristico pari a
   $(s+3)\,(s+4)^2\,(s+5)$;
   β) l'errore "e" a regime permanente per ingresso r(t) costante sia nullo;
   γ) il sistema complessivo abbia <u>due</u> autovalori nascosti <u>entrambi irraggiungibili ed osservabili</u>.

B) Si disegni il luogo delle radici relativo alla domanda A) <u>evidenziando la congruenza con l'assegnazione degli autovalori effettuata in tale domanda</u>.

TEMA
Si descriva il ruolo degli elementi fondamentali dell'automatica (sensori, attuatori, leggi/algoritmi di controllo, schema di controllo).
Facendo riferimento ai suddetti elementi, si descriva un settore applicativo ritenuto particolarmente significativo (tralasciando il settore della robotica).

Soluzione del problema 1

A) Il sotto-processo 1 ha funzione di trasferimento $P_1(s) = \dfrac{s+3}{(s-a)\,(s+5)}$. In base alla specifica β), la funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) deve avere un polo in s=0. Per fare comparire tale polo (che non può evidentemente essere presente né nel controllore, né nel sotto-processo 2) si deve scegliere a=0. In questo modo, il sotto-processo 1 ha funzione di trasferimento $P_1(s) = \dfrac{s+3}{s\,(s+5)}$. A questo punto, l'unico modo per far sì che il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto è scegliere b= -5, creando un autovalore nascosto (ragg. e inoss.) in -5 (compatibile con la specifica α).
Con tale scelte la funzione di trasferimento ad anello aperto F(s) risulta pari a:

$$F(s) = K\,P_1(s)\,P_2(s) = K\,\frac{s+3}{s\,(s+1)}$$

Per verificare la specifica β) deve anche risultare:

$$\left.\frac{W_e(s)}{s}\right|_{s=0} \le 0{,}03 \text{ con } W_e(s) = \frac{D_F}{N_F + D_F}$$

Svolgendo i cónti, la condizione precedente è verificata se risulta $K \ge 11{,}11$
Per verificare la specifica α) si deve considerare il denominatore della funz. di trasf. ad anello chiuso:

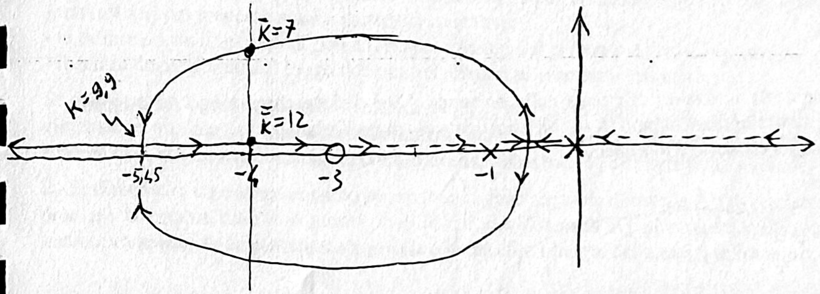
$$D_W = N_F + D_F = K(s+3) + s(s+1) = s^2 + s\,(K+1) + 3K$$

ed applicare il criterio di Routh dopo aver effettuato nel polinomio suddetto la sostituzione s -> s-4. Il polinomio ottenuto è

$$s^2 + s\,(K-7) + 12-K$$

Applicando il criterio di Routh, si deduce che il sistema è stabile asintoticamente per 12 > K > 7.
Considerando anche la condizione su K derivante dalla specifica β), si deduce che i valori di K che consentono di verificare tutte le specifiche sono quelli compresi nell'intervallo $12 > K \ge 11{,}11$.

B) Il luogo delle radici di $F(s) = K\,P_1(s)\,P_2(s) = K\,\dfrac{s+3}{s\,(s+1)}$ è il seguente (nel disegno si evidenziano i valori di K che delimitano l'intervallo (7, 12) entro il quale il sistema è asintoticamente stabile con tutti gli autovalori a parte reale minore di -4):



Come già evidenziato dalla risposta alla domanda A), i valori di K che consentono di verificare tutte le specifiche sono quelli compresi nell'intervallo $12 > K \ge 11{,}11$. In corrispondenza di tutti i valori di K in tale intervallo il sitema complessivo ha 2 autovalori reali come si può desumere dall'esame visivo del luogo e dal calcolo del punto singolare che risulta in -5,45 in corrispondenza di K=9,9, (tale calcolo poteva essere evitato osservando che per K=11,11 entrambe le radici del polinomio $D_W = s^2 + s\,(K+1) + 3K = s^2 + 12{,}11\,s + 33{,}33$ sono reali).

Ancora dall'esame visivo del luogo è evidente che, nell'ambito dell'intervallo $12 > K \geq 11{,}11$, la velocità di esaurimento del transitorio è massima per K =11,11 poiché per tale valore è minimo il maggiore dei due autovalori del sistema complessivo. Le due radici dell'equazione $s^2 + 12{,}11\, s + 33{,}33$ sono -4,23 e -7,88; quindi la massima velocità di esaurimento del transitorio è pari ad $e^{-4{,}23t}$.

C) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è pari a $[s^2 + s\,(K+1) + 3K](s+5)$ (con $12 > K \geq 11{,}11$) dove le due radici del polinomio tra parentisi quadra sono autovalori ragg. ed oss., mentre l'autovalore in -5 è un autovalore ragg. ed inoss.

Soluzione del problema 2

A) Differentemente dal problema 1, non conviene scegliere a=0 per soddisfare la specifica sul regime permanente, altrimenti la specifica γ) diventerebbe impossibile da soddisfare. La specifica β) potrà essere soddisfatta inserendo un polo in s=0 nel controllore.

Utilizzando il test di Hautus è facile constatare che per a=-3 il sotto-processo 1 ha un autovalore irrag. ed oss. in -3 compatibile con la specifica α).

Con tale scelta il sotto-processo 1 ha funzione di trasferimento $P_1(s)=\dfrac{1}{s+5}$.

Per creare un secondo autovalore nascosto irrag. ed oss. si deve creare una cancellazione zero-polo. A questo punto l'unica possibilità è inseire un fattore s+5 a numeratore del controllore, creando una cancellazione zero-polo in -5 e quindi un autovalore in -5 irrag. ed oss. compatibile con la specifica α).

Considerando la specifica α), si noti che, a questo punto, rimangono da assegnare, mediante equazione Diofantina, solamente i due autovalori in -4.
In base alle considerazioni precedenti ed osservando che il parametro "b" deve ancora essere scelto, la struttura del controllore corretta (poiché il numero di parametri ancora liberi tra controllore e processo (2) è pari al grado del denominatore della F(s) (d_F=2)) è la seguente:

$$G(s) = K\,\frac{s+5}{s} \quad \Rightarrow \quad F(s) = K\,\frac{s-b}{s\,(s+1)}$$

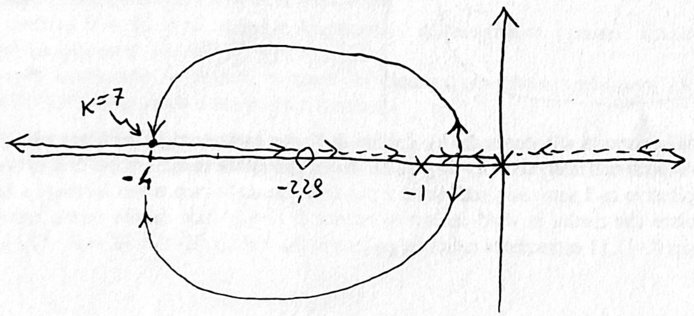
La corrispondente assegnazione degli autovalori risulta:

$$D_W = N_F + D_F = K(s-b) + s(s+1) = (s+4)^2 \Rightarrow \qquad K=7,\ b = -16/7 = -2{,}29$$

B) Il luogo delle radici relativo alla domanda A) è

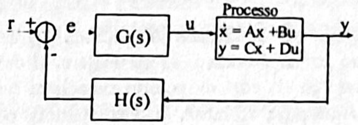
$$F(s) = K\,\frac{s+2{,}29}{s\,(s+1)}$$

Inoltre, dall'assegnazione degli autovalori effettuata nella domanda A) si deduce che il luogo delle radici suddetto deve avere un punto singolare doppio in -4 corrispondente al valore K=7.
Pertanto, il luogo delle radici richiesto è il seguente:



CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta dell' 11 luglio 2018

PROBLEMA 1
Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



dove $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [\,1 \quad 0\,]$, $D = b$, $H(s) = \dfrac{1}{s+c}$

A) Si determinino i parametri "a", "b", "c" ed un controllore G(s), a dimensione uno, in modo tale che:
α) il sistema complessivo abbia tutti gli autovalori in -1;
β) il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti;
γ) l'errore "e" a regime permanente corrispondente ad un ingresso r(t)=1 sia uguale a 3.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A), specificando le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2.

Si consideri lo stesso processo del problema 1 (con le stesse matrici A, B, C, D).
A) Si specifichi per quali valori del parametro "a" esiste un osservatore asintotico dello stato del processo.
B) Scelto a=4 si costruisca un osservatore asintotico dello stato. Quale risulta essere la massima velocità di convergenza a zero dell'errore tra il valore stimato dello stato del processo e il valore reale di tale stato?

PROBLEMA 3.

A) Si consideri un processo con le seguenti caratteristiche:
- il processo è instabile e non può essere stabilizzato con un controllore pari ad una costante;
- tutti gli zeri del processo sono a parte reale negativa;
- la differenza tra il numero di poli e il numero di zeri del processo è pari a 3 (n-m=3);
- il centro degli asintoti del luogo delle radici relativo al processo è negativo.

Si descriva, in termini generali, il metodo, basato sul luogo delle radici, per progettare un controllore a dimensione minima che renda asintoticamente stabile il sistema complessivo costituito da un "classico" schema di controllo a retroazione in cui il processo abbia tutte le caratteristiche suddette.

B) Si illustri con un esempio quanto presentato in generale nella domanda A): in particolare, si determini un processo che abbia tutte le caratteristiche di cui alla domanda A), si progetti un controllore che renda il sistema complessivo asintoticamente stabile e si traccino i luoghi delle radici di interesse.

Soluzione del problema 1

A) Si nota innanzitutto che il processo ha un autovalore nascosto (ragg. ed inoss.) in 1-a; dato che tutti gli autovalori del sistema complessivo devono essere in -1 (specifica α)) deve necessariamente risultare 1-a= -1, ossia a=2.

La funzione di trasferimento del processo risulta quindi $P(s) = \frac{bs + 1 - 2b}{s - 2} = b\,\frac{s + (1 - 2b)/b}{s - 2}$

L'altro autovalore nascosto (necessario per soddisfare la specifica β)) si deve necessariamente generare dall'interconnessione del controllore con il processo. In particolare, si deve scegliere il parametro "b" in modo che il processo abbia uno zero in -1, così da poterlo cancellare con un polo in -1 del controllore, creando in tal modo un altro autovalore ragg. ed inoss. in -1 compatibile con la specifica α). Si deve quindi scegliere "b" in modo tale che (1-2b)/b = 1, ossia b= 1/3.
Alla luce di quanto sopra, tenendo conto che il controllore deve essere a dimensione 1, la sua struttura dovrà essere del tipo:

$$G(s) = \frac{ds + e}{s+1} \Rightarrow F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{1/3\,(ds + e)}{s-2}$$

La funzioni di trasferimento di interesse del sistema risultano:

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}\,,\quad W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con} \quad F(s) = G(s)\,P(s)$$

Per soddisfare la specifica γ) deve risultare

$$W_e(0)=3 \Rightarrow \frac{-2c}{1/3\,e - 2c} = 3 \quad \Rightarrow e = 4c \; (*)$$

Considerata l'equazione di cui sopra, per effettuare l'assegnazione degli autovalori con l'equazione diofantina sono necessari d_W+1 parametri; dalla struttura di W(s) si nota che risulta d_W=d_F+d_H; quindi, in definitiva, sono necessari d_F+d_H+1 parametri, ossia, con la struttura del controllore ipotizzata, 1+1+1=3 parametri, ossia esattamente il numero di parametri ancora disponibile ("c", "d" ed "e").

Si procede quindi con la seguente assegnazione degli autovalori:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = 1/3\,(ds + e) + (s-2)\,(s+c) = (s+1)^2$$

Dall'equazione diofantina suddetta, utilizzando il principio di identità dei polinomi, si deducono le due equazioni:

d= -3c+12 , e= 6c +3

Il sistema costituito dall'equazione (*) più le 2 equazioni suddette fornisce c= -3/2, d= 33/2 , e=-6

B) In base alle considerazioni di cui sopra, il polinomio caratteristico risulta $(s + 1)^4$ con due autovalori in -1 raggiungibili ed inosservabili, e due autovalori in -1 raggiungibili ed osservabili.

Soluzione del problema 2

A) La condizione di esistenza dell'osservatore asintotico è che gli eventuali autovalori inosservabili devono essere a parte reale negativa. Dato che il processo ha un autovalore inosservabile in 1-a, deve risultare 1-a<0, ossia a>1.

B) Si nota che per a=4 il processo ha un autovalore inosservabile in -3 che limita la velocità di convergenza richiesta a e^{-3t}.
Progettati lo schema di controllo e l'equazione che caratterizza l'osservatore asintotico, si nota che tale struttura dipende dalla matrice G per determinare la quale si deve imporre l'equazione:

$$|\lambda I - (A\text{-}GC)| = (\lambda+3)(\lambda-\lambda_{arb})$$

dove λ_{arb} è un autovalore negativo che può essere scelto arbitrariamente (conviene comunque sceglierlo non superiore a -3 per non limitare ulteriormente la velocità di convergenza). Scegliendo, ad esempio λ_{arb} = -3 si ottiene:

$G= \begin{bmatrix} 7 \\ * \end{bmatrix}$ dove "*" è un numero qualsiasi.

Soluzione del problema 3

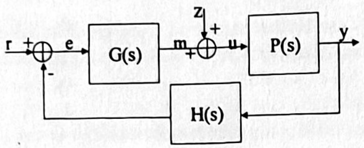
A) Il problema proposto si risolve con un controllore del tipo:

$$G(s) = K\,\frac{s - z}{1 + Ts}$$

Il metodo consiste nel considerare un controllore, momentaneamente improprio, nella forma G(s) = K(s-z), che, grazie all'introduzione dello zero in "z", rende la differenza tra poli e zeri uguale a 2 (n-m=2) e quindi rende verticali gli asintoti del luogo positivo; lo zero "z" deve essere scelto negativo e tale da far rimanere negativo il centro degli asintoti del luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento ad anello aperto.
Una volta scelto z secondo i criteri di cui sopra, K deve essere scelto positivo e sufficientemente elevato (K deve essere maggiore di un valore limite che può essere determinato utilizzando il criterio di Routh), in modo che le due radici relative ai due cammini che convergono verso gli asintoti positivi verticali siano a parte reale negativa.
Una volta scelti z e K secondo i criteri di cui sopra, si deve aggiungere al denominatore di G(s) il fattore 1+Ts per rendere proprio il controllore; in particolare, sfruttando un opportuno teorema, si deve scegliere T positivo e sufficientemente piccolo, in modo tale che le due radici di cui sopra rimangano a parte reale negativa, poiché "risucchiate" nell' "ansa" del luogo delle radici che si viene a creare in virtù dell'introduzione del fattore 1+Ts.

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 10 settembre 2018

PROBLEMA 1 Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

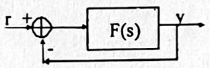


dove $P(s) = \dfrac{s+3}{(s+a)(s+1)}$, $H(s) = \dfrac{1}{s+b}$

A) Si determinino i parametri "a" e "b" (con $a \neq 3$) ed un controllore G(s), a dimensione minima, in modo tale che:
α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile con tutti gli autovalori <u>coincidenti</u> e <u>minori di -2</u>;
β) il sistema complessivo abbia un autovalore nascosto;
γ) la risposta y a regime permanente corrispondente al disturbo z(t) = costante sia nulla.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domande A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:

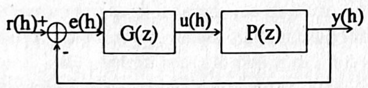


con $F(s) = K\dfrac{s+1}{s\,(s^2+as+b)}$

A) Si determinino i parametri "a" e "b", in modo che il corrispondente luogo delle radici abbia un punto singolare triplo (ossia un punto in cui si intersecano tre cammini delle radici) in -2; si disegni il luogo corrispondente.

B) Con riferimento al luogo delle radici individuato nella domanda A), si determini il valore del parametro K in corrispondenza del quale la velocità di esaurimento del transitorio è la più elevata. Si determini tale velocità?

TEMA
Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Sia assegnato un processo P(z). Si dimostri come sia possibile progettare un controllore G(z) in modo che l'errore e(h), corrispondente ad un ingresso r(h) = h, sia nullo a partire da un certo istante finito (istante tempo discreto "l").

Soluzione del problema 1

A) Posto $F = GP = N_F / D_F$, le f. di trasf. di interesse sono le seguenti:

$$W(s) = \frac{D_H N_F}{D_H D_F + N_H N_F}$$

$$W_z(s) = \frac{N_P D_G D_H}{D_H D_F + N_H N_F}$$

Per verificare la specifica γ), senza aumentare la dimensione del controllore, è necessario scegliere b=0.
Per verificare la specifica β), rispettando la specifica α) (autovalori minori di -2), e' necessario introdurre un polo in -3 nel controllore in modo da creare una cancellazione polo-zero in -3 (autovalore nascosto ragg. ed inoss. del sistema complessivo); in base alla specifica α) (autovalori coincidenti), questa sceita vincoia anche tutti gli altri autovalori del sistema complessivo ad essere assegnati in -3.
Si può quindi risolvere il problema con un controllore con due parametri incogniti che diventano tre considerando il paramtero "a" del controllore ancora da determinare; in questo modo il numero dei parametri incogniti è uguale al grado di D_W (d_H=3):

$$G(s) = \frac{cs+d}{s+3} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{cs+d}{(s+a)\,(s+1)}$$

Gli autovalori ragg. ed oss. del sistema complessivo coincidono con le radici del denominatore della W(s), ossia:

$$D_W = D_H D_F + N_H N_F = s\,(s+a)\,(s+1) + cs + d = (s+3)^3 \quad \Rightarrow \quad a=8 \;\; c=19 \;\; d=27$$

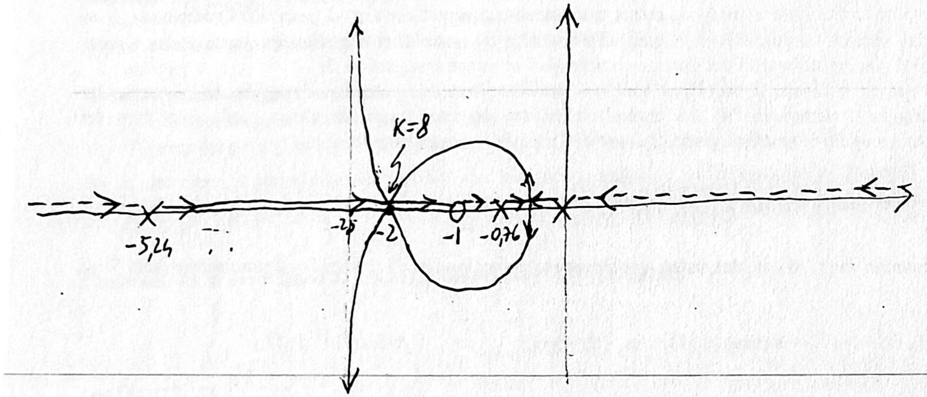
B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(s+3)^4$ dove un autovalore in -3 è rag. e inoss, mentre gli altri tre autovalori in -3 sono rag. e oss.

Soluzione del problema 2

A) La presenza di un punto singolare triplo nel luogo delle radici significa che deve esistere valori di K e dei parametri "a" e "b" in corrispondenza dei quali i 3 autovalori del sistema complessivo sono tutti in -2. Tali valori possono essere determinati imponendo:

$$D_W = N_F + D_F = s(s^2+as+b) + K(s+1) = (s+2)^3 \quad \Rightarrow \quad a=6,\ b=4,\ K=8$$

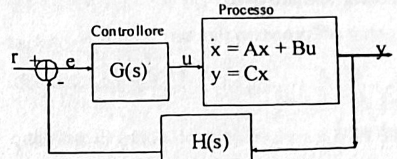
Da quanto sopra si evince che il luogo delle radici della funzione $F(s) = K\dfrac{s+1}{s(s^2+6s+4)} = K\dfrac{s+1}{s(s+0{,}76)(s+5{,}24)}$ ha un punto singolare triplo in -2 corrispondente al valore K=8. Tenendo presente tale informazione, il luogo delle radici è il seguente:



B) Dall'esame visivo del luogo, risulta evidente che il valore del parametro K in corrispondenza del quale la parte reale del massimo dei tre autovalori del sistema complessivo è la minima, coincide con il valore di K corrispondente al punto singolare triplo, ossia K=8. Quindi, la velocità di esaurimento del transitorio più elevata è pari a e^{-2t}.

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 15 ottobre 2018

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



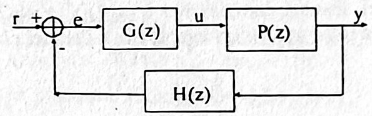
Il processo P(s) è caratterizzato dalle matrici: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad C = [\ a \quad 1/3\ ]$.

Risulta inoltre $H(s) = \dfrac{s+b}{s}$

A) Si determinino i parametri "a" e "b", nonché un controllore G(s) <u>a dimensione minima</u> in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) la risposta y, a regime permanente, corrispondente ad un riferimento r(t) = t (rampa) sia uguale a 4;
   β) il <u>processo</u> abbia un autovalore nascosto;
   γ) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

B) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{z - 0{,}2}{(z+b)(z-0{,}7)(z-0{,}4)}$, $\quad H(z) = \dfrac{z+a}{z-1}$

A) Si determinino i parametri "a" e "b", nonché un controllore G(z) <u>a dimensione minima</u> in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h)= η(h) (gradino) si annulli nel tempo più breve possibile (si indichi l'istante "l" a partire dal quale l'errore si annulla);
   β) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile e tutti gli autovalori del sistema complesivo abbiano modulo minore di 0,5.

B) Utilizzando i parametri "a" e "b", nonché il controllore G(z) calcolati nella domanda A), si calcoli l'espressione completa della risposta y(h) all'ingresso r(h)= η(h) (gradino).

C) Si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo individuato nella domanda A) e si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà ed osservabilità dei vari autovalori.

TEMA

Con riferimento al luogo delle radici, si discuta come, nei vari casi, devono essere progettati i controllori che stabilizzano asintoticamente il sistema complessivo.

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha autovalori +1 e –2 entrambi raggiungibili. Come si può verificare utilizzando il test di Hautus, scegliendo a=2/3 l'autovalore -2 diviene inosservabile permettendo di verificare la specifica β) senza inficiare la stabilizzabilità del sistema complessivo.

Con tale scelta, la funzione di trasferimento del processo risulta:

$$P(s) = \frac{1/3}{s-1}$$

Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}, \quad \text{con } F(s) = G(s)\, P(s) = \frac{N_F}{D_F}, \; H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

La specifica α) impone che (i) il polinomio $N_F D_H$ abbia una radice singola in zero (condizione automaticamente soddisfatta dato che tale radice è già presente in D_H) e (ii) che risulti $W(s)/s|_{s=0} = 4$.

Si può allora tentare di risolvere il problema con un controllore di dimensione zero:

$$G(s) = K \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{K/3}{s-1}$$

La condizione (ii) di cui sopra impone:

$$W(s)/s|_{s=0} = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 1/4$$

Il denominatore della W(s) risulta allora:

$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = (K/3)(s+1/4) + s(s-1) = s^2 + s(K/3-1) + K/12$$

In base al criterio di Routh, il sistema è asint. stabile scegliendo K>3.

B) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(s+2)[s^2 + s(K/3-1) + K/12]$ (con K>3) dove l' autovalore 2 è rag. e inoss, mentre i due autovalori uguali alle radici del polinomio tra parentisi quadra sono ragg. e oss.

Soluzione del problema 2

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}, \quad W_e(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(z) = G(z)\, P(z) = \frac{N_F}{D_F}, \; H(z) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per verificare la specifica α), deve risultare:

$$e(z) = W_e(z)\, r(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}\frac{z}{z-1} = \frac{S(z)}{z^{l-1}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} = \frac{S(z)\, z-1}{z^l}$$

dove S(z) è un polinomio qualsiasi di grado non superiore a *l*-1 e *l* è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Per verificare la condizione suddetta è sufficiente che (i) il polinomio $D_F D_H$ abbia una radice singola in +1 (condizione automaticamente soddisfatta dato che tale radice è già presente in D_H) e (ii) si imponga l'assegnazione degli autovalori $N_F N_H + D_F D_H = z^l$ (si noti che tale assegnazione degli autovalori rende il sistema complessivo asintoticamente stabile consentendo di verificare anche la specifica β)). Inoltre, per minimizzare l'istante "l" a partire dal quale l'errore si annulla, conviene cancellare il polo del processo in 0,4 e lo zero del processo in 0,2 (tali zero e polo sono cancellabili in quanto hanno modulo minore di 0,5, circostanza non vera per il polo del processo in 0,7 che quindi non può essere cancellato). Le due cancellazioni suddette creano un autovalore rag. e inoss. in 0,2 (cancellazione polo-zero) ed un autovalore irrag. e oss. in 0,4 (cancellazione zero-polo).

Inoltre, tenendo conto che il numero di parametri per l'assegnazione degli autovalori deve essere pari a $d_W = d_F + 1$ e che possiamo disporre dei parametri "a" e "b" conviene scegliere la seguente struttura del controllore (a dimensione 1), in corrispondenza della quale il numero dei parametri (tre, ovvero "a", "b" e "c") è uguale a $d_W = d_F + 1 = 2+1 = 3$:

$$G(z) = c\,\frac{z-0{,}4}{z-0{,}2} \qquad \Rightarrow \qquad F(z) = \frac{c}{(z+b)\,(z-0.7)}$$

Si impone allora l'assegnazione degli autovalori:

$$N_F N_H + D_F D_H = c\,(z+a) + (z-1)(z+b)(z-0{,}7) = z^3 \qquad \Rightarrow \qquad l=3$$

Applicando il principio di identità dei polinomi. si ottiene a= -0,54 , b= 1,7, c= 2,19.

B) Dalla domanda A) risulta

$$y(z) = W(z)\, r(z) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}\frac{z}{z-1} = \frac{c\,(z-1)}{z^3}\frac{z}{z-1} = \frac{c}{z^2} = \frac{2{,}19}{z^2}$$

Effettuando l'antitrasformata zeta si ottiene:

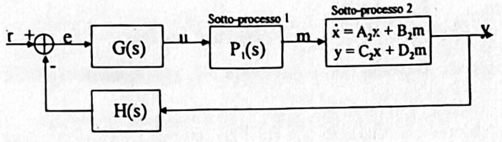
$$y(h) = 2{,}19\, \delta(h-2)$$

C) Il polinomio caratteristico del sistema complessivo è $(z-0{,}2)\,(z-0{,}4)\,z^3$ dove l' autovalore 0,2 è rag. e inoss., l'autovalore 0,4 è irrag. e oss., mentre i tre autovalori in zero sono ragg. e oss.

662

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 17 gennaio 2019

PROBLEMA 1. Si consideri il seguente processo:

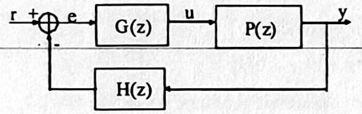


dove $P_1(s) = \dfrac{s+5}{s-1}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C_2 = [\ a \quad 3\ ]$, $D_2 = 1$ $\qquad H(s) = \dfrac{1}{s-2}$

A) Si determini il parametro "a", nonchè un controllore G(s), <u>a dimensione minima</u>, in modo tale che:
   α) il sistema complessivo abbia tre autovalori nascosti;
   β) l'errore "e" a regime permanente, corrispondente ad un riferimento r(t) costante, sia nullo;
   γ) il polinomio caratteristico del sistema complessivo sia pari a (s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)(s+6).

B) Si specifichino inoltre le caratteristiche di raggiungibilità ed osservabilità degli autovalori del sistema complessivo.

PROBLEMA 2. Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



dove $P(z) = \dfrac{z-0{,}4}{z+0{,}7}$, $\quad H(z) = \dfrac{1}{z-1}$

A) Si determini un controllore G(z) a dimensione minima in modo da verificare le seguenti specifiche:
   α) l'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h) = h si annulli nel più breve tempo possibile (si indichi l'istante a partire dal quale l'errore si annulla);
   β) tutti gli autovalori del sistema complessivo abbiano modulo minore di 0,5.

B) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini il polinomio caratteristico del sistema complessivo, specificandone le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità.

C) Con riferimento al controllore individuato nella domanda A), si determini l'andamento completo dell'errore e(h) corrispondente all'ingresso r(h) = h.

TEMA.

Si descrivano i criteri per la scelta della struttura di un controllore.

663

Soluzione del problema 1

A) Conviene creare un primo autovalore nascosto nel sotto-processo 2 scegliendo opportunamente il valore del parametro "a". Aiutandosi con il test di Hautus, si constata che, scegliendo a=3, l'autovalore -2 del sotto-processo 2 risulta nascosto (raggiungibile ed inosservabile).

Per tale scelta risulta $P_2(s) = \dfrac{s+6}{s}$ $\;\Rightarrow\;$ $P(s) = P_1(s)\,P_2(s) = \dfrac{(s+5)(s+6)}{s(s-1)}$

Le funz. di trasf. ing.-uscita ed errore uscita sono pari a

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}\ ,\ W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(s) = \frac{N_F}{D_F} = G(s)\,P(s),\ \ H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

La specifica β) richiede che nella $W_e(s)$ ci sia uno zero di molteplicità uno in s=0: tale specifica è automaticamente soddisfatta grazie alla presenza del polo in s=0 in $P_2(s)$.

Per creare gli altri 2 autovalori nascosti richiesti dalla specifica α) e, al contempo, avere una struttura a dimensione minima con un numero di parametri che consenta di risolvere il problema di assegnazione degli autovalori di cui alla specifica γ), si deve necessariamente scegliere una struttura del tipo:

$$G(s) = \frac{bs^2 + cs + d}{(s+5)(s+6)} \quad \Rightarrow \quad F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{bs^2 + cs + d}{s(s-1)}$$

Con tale struttura si vengono a creare due cancellazioni polo-zero (autovalori ragg. ed inoss.) in -5 ed in -6. Procedendo all'assegnazione dei residui tre autovalori e risolvendo con il principio di identità dei polinomi si ottiene:

$D_W = N_F N_H + D_F D_H = bs^2 + cs + d + s(s-1)(s-2) = (s+1)(s+3)(s+4) \;\Rightarrow\;$ b=11, c=17, d=12.

B) Come si evince dalla domanda A), gli autovalori -2, -5 e -6 risultano ragg. ed inoss., mentre gli autovalori -1, -3, -4 risultano ragg. ed oss.

Soluzione del problema 2

A) Le funz. di trasf. di interesse sono le seguenti

$$W(z) = \frac{N_F N_H}{N_F N_H + D_F D_H},\ W_e(z) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \quad \text{con } F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{N_F}{D_F}\ ,\ H(z) = \frac{N_H}{D_H}$$

Per verificare la specifica α), deve essere presente uno zero di molteplicità due in +1 nella $W_e(z)$ (uno zero è già presente, grazie al polo in +1 di H(z)) e si deve imporre $N_F N_H + D_F D_H = z^l$ dove l è l'istante a partire dal quale l'errore si annulla.

Si puo' allora scegliere:

$$G(z) = \frac{a z^2 + bz + c}{(z-1)(z-0{,}4)} \quad \Rightarrow \quad F(z) = G(z)\,P(z) = \frac{a z^2 + bz + c}{(z-1)(z+0{,}7)}$$

Si noti che la cancellazione di una coppia polo-zero in 0,4 provoca la comparsa di un autovalore ragg. ed inoss. in 0,4. Si noti inoltre che il polo in -0,7 di P(z) non può essere cancellato per non violare la specifica β).

Si impone allora:

$N_F N_H + D_F D_H = a z^2 + bz + c + (z-1)^2 (z+0{,}7) = z^3 \qquad \Rightarrow \qquad$ l=3

Applicando il principio di identità dei polinomi, si ottiene a=1,3 ; b= 0,4 ; c= -0,7.

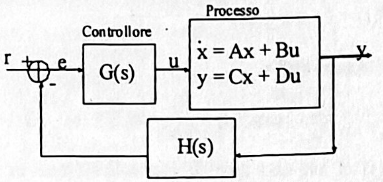
B) Il polinomio caratteristico richiesto è $z^3(z-0{,}4)$ dove i tre autovalori in zero sono ragg. e oss., mentre l'autovalore in 0,4 è ragg. e inoss..

C) $e(z) = W_e(z)\,r(z) = \dfrac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H}\,\dfrac{z}{(z-1)^2} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{0{,}7}{z^2}$

$e(h) = \delta(h-1) + 0{,}7\,\delta(h-2)$

CONTROLLI AUTOMATICI
Prova scritta del 12 febbraio 2019

PROBLEMA 1. Si consideri lo schema di controllo riportato in figura:



Il processo P(s) è caratterizzato dalle matrici: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad C = [\,6 \;\; 3\,]$ $\quad D = 1$.

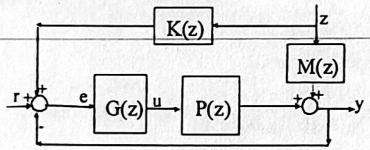
Risulta inoltre $H(s) = \dfrac{1}{s-1}$.

A) Si determini un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che
   - il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
   - l'errore "e" a regime permanente corrispondente all'ingresso $r(t) = \eta(t)$ (gradino unitario) sia minore di 0,1.

B) Si determini un controllore G(s), a dimensione minima, in modo che il sistema complessivo abbia due autovalori nascosti e tutti gli autovalori coincidenti.

C) Si determinino i due polinomi caratteristici dei due sistemi complessivi individuati nelle domande A) e B). Si specifichino le caratteristiche di raggiungibiltà/osservabilità degli autovalori.

PROBLEMA 2.
Si consideri il seguente schema di controllo tempo discreto:



con $P(z) = M(z) = \dfrac{z-2}{(z-1)\,(z-0{,}5)}$.

Si determinino i controllori G(z) e K(z) in modo che:
- α) il sistema complessivo sia asintoticamente stabile;
- β) l'errore "e" corrispondente all'ingresso $r(h) = \eta(h)$ (gradino unitario), sia nullo a partire da un istante "l" più piccolo possibile;
- γ) la risposta "y" corrispondente ad un qualsiasi disturbo "z" sia nulla.

PROBLEMA 3

A) Si descriva, in generale, la struttura dell'osservatore asintotico dello stato di un processo e si dimostri che, nell'ipotesi in cui tutti gli autovalori inosservabili del processo siano a parte reale negativa, l'osservatore asintotico è in grado di ricostruire asintoticamente lo stato.

B) Con riferimento al processo di cui al problema 1, si costruisca un osservatore asintotico dello stato (è sufficiente impostare il problema di determinazione della matrice G senza effettuare i relativi calcoli).

Soluzione del problema 1

A) Il processo ha funzione di trasferimento $P(s) = \dfrac{s+2}{s-1}$. Nel processo è presente un autovalore ragg. ed inoss. in -2 che non inficia la stabilità asintotica di cui alla domanda A).

Le funz. di trasf. di interesse del sistema complessivo sono

$$W(s) = \frac{N_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H},\quad W_e(s) = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} \text{ con } F(s) = G(s)\,P(s) = \frac{N_F}{D_F},\quad H(s) = \frac{N_H}{D_H}$$

Scegliendo un controllore di dimensione zero G(s) = K, la specifica sul regime permanente impone:

$W_e(0) < 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad K > 4{,}5$

Affinché il sistema complessivo sia asintoticamente stabile, deve risultare:

$D_W = N_F N_H + D_F D_H = K(s+2) + (s-1)^2 = s^2 + s(K-2) + 2K + 1$

In base al criterio di Routh, il sistema è asint. stabile per K>2.

Quindi, entrambi le specifiche sono soddisfatte per K>4,5 .

B) Conviene scegliere un controllore di dimensione uno nella forma:

$$G(s) = \frac{as+b}{s+2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{as+b}{s-1}$$

La suddetta scelta di G(s) causa la cancellazione di una coppia polo-zero in -2 e quindi la presenza di un secondo (oltre quello presente intrinsecamente nel processo) autovalore nascosto in -2 (anche questo ragg. ed inoss.). Quindi, per rispettare la specifica, tutti gli autovalori del sistema complessivo devono essere coincidenti in -2.

Si può quindi procedere all'assegnazione dei due restanti autovalori (che necessariamente risulteranno non nascosti e quindi ragg. ed oss.) e risolvere con il principio di identità dei polinomi:

$D_W = N_F N_H + D_F D_H = as+b + (s-1)^2 = (s+2)^2 \quad \Rightarrow \quad a=6\,,\ b=3$

C) Il polinomio caratteristico individuato nella domanda A) è $[s^2 + s(K-2) + 2K + 1](s+2)$ (con K>4,5) dove l'autovalore -2 è ragg. e inoss., mentre i due autovalori radici del polinomio tra parentesi quadra sono ragg. ed oss.

Il polinomio caratteristico individuato nella domanda A) è $(s+2)^4$ dove due autovalori in -2 sono ragg. ed inoss., mentre gli altri due sono ragg. ed oss.

Soluzione del problema 2.

A) Per soddisfare le specifiche α) e β) si deve sceglie un controllore a dimensione uno, nella forma

$$G(z) = a\,\frac{z-0{,}5}{z+b} \quad \Rightarrow \quad F(z) = a\,\frac{z-2}{(z-1)\,(z+b)}$$

ed imporre la seguente equazione (da risolvere con il principio di identità dei polinomi):

$D_W = N_F + D_F = a\,(z-2) + (z-1)(z+b) = z^2 \quad \Rightarrow \quad a=-1\,,\ b=2$

Infine, per verificare la specifica γ), si deve imporre:

$$W_z(s) = \frac{M+PGK}{1+PG} = 0 \;\Rightarrow\; K = -\frac{M}{PG} = -\frac{1}{G} = \frac{z+2}{z-0{,}5}.$$

Soluzione del problema 3

666

B) Dato che nel processo è presente un autovalore ragg. ed inoss. in -2, tale autovalore deve essere necessariamente presente nell'equazione per la determinazione della matrice G che caratterizza l'osservatore asintotico. Tale equazione è quindi la seguente:

$$|\lambda I - (A-GC)| = (\lambda+2)(\lambda-\lambda_{arb})$$

dove λ_{arb} è un autovalore negativo che può essere arbitrariamente scelto.

Ponendo $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$, e risolvendo l'equazione di cui sopra con il principio di identità dei polinomi, si può determinare la matrice G.