- PROF: FRANCESCO DELLI PRISCOLI   MAIL: DELLIPRISCOLI@DIS.UNIROMA1.IT
- TUTOR: FRANCESCO LIBERATI

→ TESTO: ALBERTO ISIDORI - SISTEMI DI CONTROLLO VOL. 1+2 SIDEREA

→ DISPENSA: DA STAMPARE DA MAXI-PIODA

INTRODUZIONE

CONTROL ENGINEERING | DIAG.UNIROMA1.IT/AUTOMATICA

ESAMI DI BASE

ROBOTICA

FUTURE INTERNET

AUTOMATIVE

SISTEMI INDUSTRIALI

RETI DI TLC → FIWARE, FICORE, T-NOVA, SWIPE, PLATINO PON

" DI ENERGIA → SMARTV2G, MOBINCITY

" DI TRASPORTO → BON VOYAGE

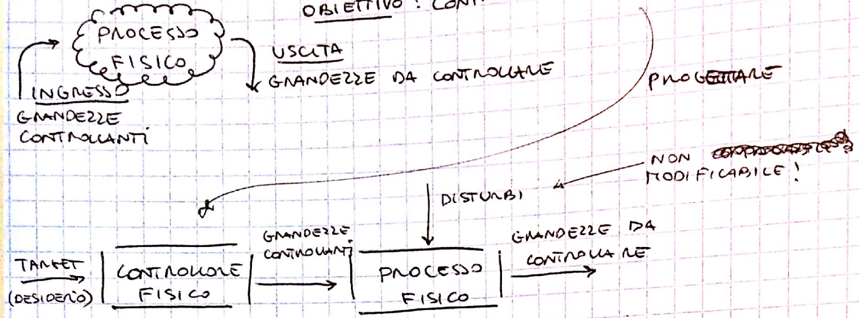
SICUREZZA → TASS, COCKPIT CI, INSHIELD

- EC.EUROPA.EU/PROGRAMME/HORIZON2020
- LABRETI.ING.UNIROMA1.IT

LABORATORIO PROF

PROGRAMME

OBIETTIVO: CONTROLLARE IL PROCESSO



EX: STANZA DA RISCALDARE

USCITA (GRANDEZZA DA CONTROLLARE): TEMPERATURA

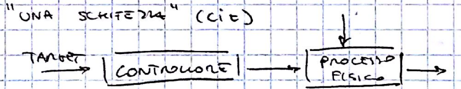
DISTURBO: (EX:) TEMPERATURA ESTERNA

Def: SISTEMA DI CONTROLLO

INSIEME DI PROCESSO FISICO ∧ CONTROLLORE

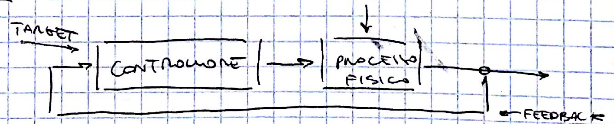
Def: SISTEMA DI CONTROLLO AD ANELLO APERTO

"UNA SCHIFEZZA" (CIT)



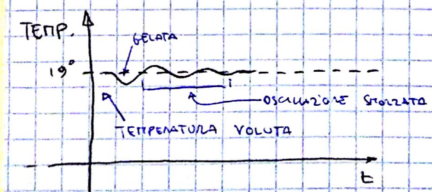
SENZA CONTROREAZIONE (FEEDBACK)

Def: SISTEMA DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO

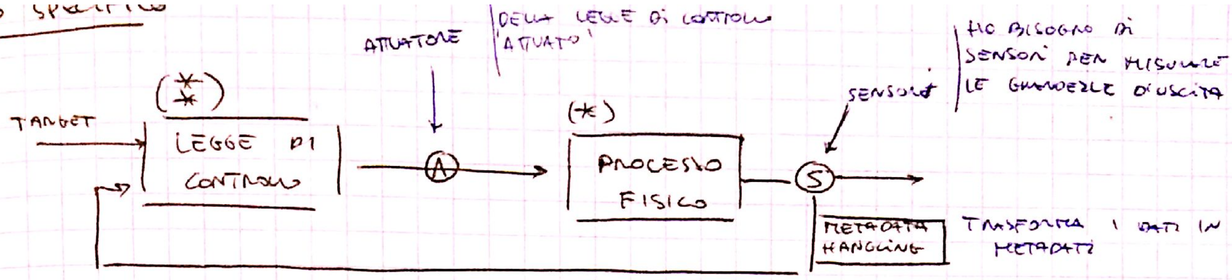


CON CONTROREAZIONE (FEEDBACK)

IL CONTROLLORE REAGISCE IN FUNZIONE DELLE GRANDEZZE LETTE ISTANTE PER ISTANTE



PIÙ NELLO SPECIFICO



(*) DEVO MODELLIZZARE IL PROCESSO FISICO: DA SISTEMA FISICO A SISTEMA DI EQ. DIFFERENZIALI

(**) TROVO IL MODELLO NUMERICO, DEVO POI CREARE UN DISPOSITIVO FISICO CHE FA DA CONTROLLORE

IN CONTROLLI AUTOMATICI CI PREOCCUPEREMO DI CALCOLARE MATEMATICAMENTE UNA LEGGE DI CONTROLLO

Def: TECNOLOGY DEPENDENT VS INDEPENDENT.

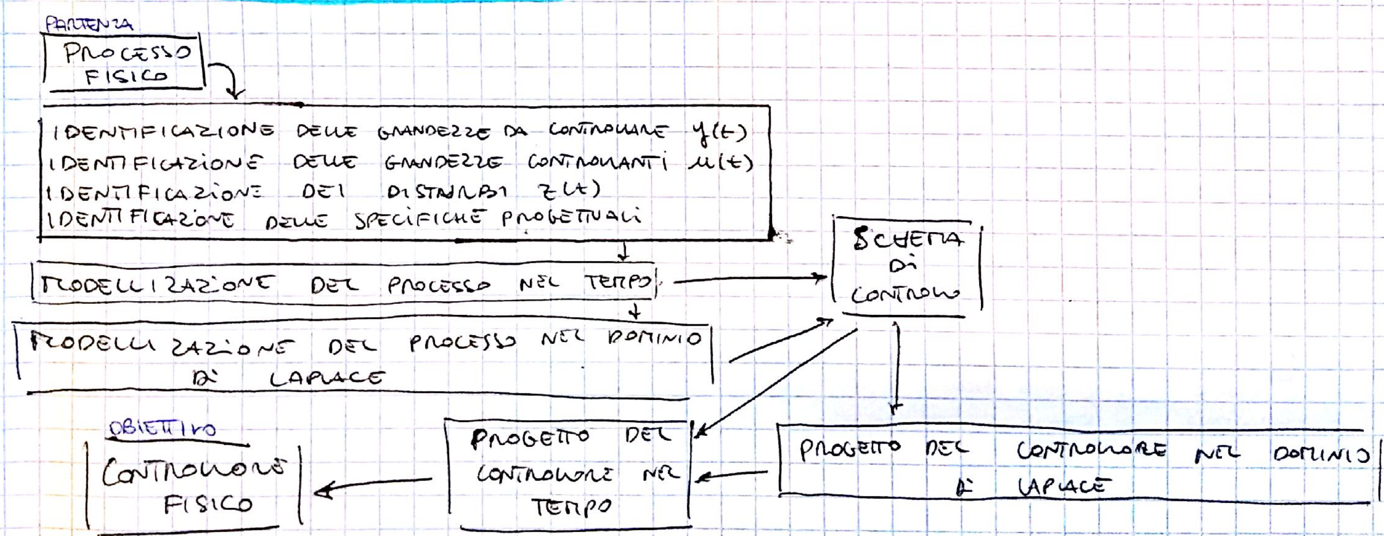
TECNOLOGY DEPENDENT: EX ATTUATORE, DIPENDE DALLA TECNOLOGIA AL QUALE APPLICO LA LEGGE

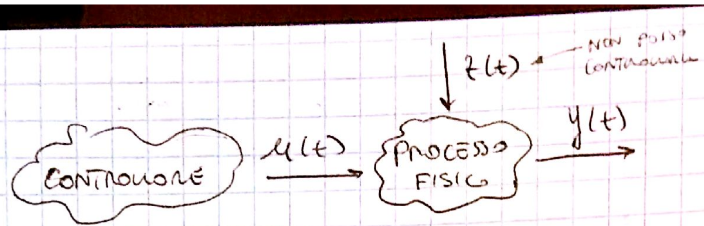
TECNOLOGY INDEPENDENT: EX LEGGE DI CONTROLLO, NON DIPENDE DALLA ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ TECNOLOGIA CHE USO

OSS

ALCUNE TECNICHE DI CONTROLLO PERMETTONO DI OPERARE ANCHE NELL'ASSENZA TOTALE DELLA CONOSCENZA DEL PROCESSO FISICO

SCHEMA RIASSUNTIVO DEL CORSO





$$y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{pmatrix} \qquad u(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{pmatrix}$$

$$z(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_r(t) \end{pmatrix}$$

OBIETTIVI (SPECIFICHE)

1) TRACKING
2) DISTURBANCE REJECTION
3) ASYMPTOTIC STABILITY

SOLO QUELLI AFFRONTATI NEL CORSO! NON SONO TUTTI (OVVIAMENTE)

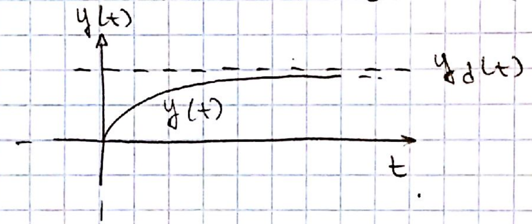
TRACKING

FAR SI CHE L'USCITA ~~...~~ ABBIA UN VALORE PRECISO

OSS.

SPESSO SI CONSIDERA $\underbrace{e(t)}_{\text{ERRORE}} = \underbrace{y_d(t)}_{\text{USCITA DESIDERATA}} - \underbrace{y(t)}_{\text{USCITA REALE}}$ CHE SECONDO LE SPECIFICHE DI TRACKING CERCHERÒ DI FAR TENDERE A ZERO. (ALMENO ASINTOTICAMENTE)

ANDAMENTO TIPICO

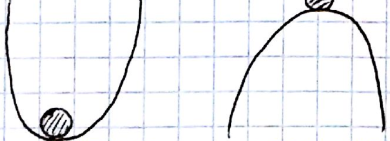


DISTURBANCE REJECTION

IL MIO SISTEMA DI CONTROLLO DEVE FUNZIONARE NONOSTANTE UNA AZIONE DI DISTURBO ESTERNA. NELLA STRAGRANDE MAGGIORANZA DEI CASI NON ~~...~~ È POSSIBILE UNA DISTURBANCE REJECTION TOTALE, MA ALCUNI TIPI DI DISTURBO NON SARANNO CONTROLLABILI

ASYMPTOTIC STABILITY

RICHIESTA DI STABILITÀ ASINTOTICA DEL SISTEMA



SISTEMA STABILE ASINTOTICAMENTE — SISTEMA NON STABILE ASINTOTICAMENTE

$$\begin{cases} \underset{n\times 1}{\dot{x}(t)} = \underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x(t)} + \underset{n\times p}{B}\,\underset{p\times 1}{u(t)} + \underset{n\times r}{P}\,\underset{r\times 1}{z(t)} \\ \underset{q\times 1}{y(t)} = \underset{q\times n}{C}\,\underset{n\times 1}{x(t)} + \underset{q\times p}{D}\,\underset{p\times 1}{u(t)} + \underset{q\times r}{Q}\,\underset{r\times 1}{z(t)} \end{cases}$$ CASO LINEARE

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), z(t)) \\ y = g(x(t), u(t), u(t)) \end{cases}$$ CASO GENERALE

PRIMA PARTE DEL CORSO : $m = q = p = 1$

ULTIMA PARTE DEL CORSO : $m > 1$ ...

OSS.

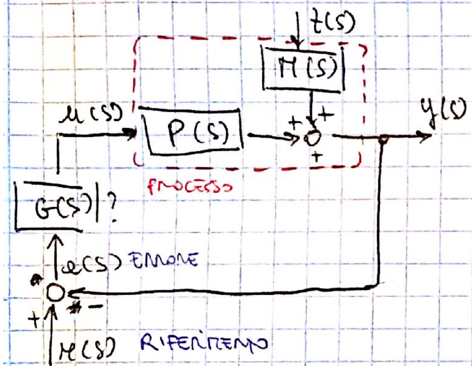
UNA VOLTA MODELLIZZATO IL FENOMENO $\longrightarrow$ BIVIO : DOMINIO DEL TEMPO O DI LAPLACE

O MAGGIOR PARTE DEL CORSO FAREMO METODOLOGIE CHE PASSANO NEL DOMINIO DI LAPLACE

CURIOSITÀ

NEI SISTEMI NON LINEARI NON È STATO TROVATO UN CORRISPETTIVO DI LAPLACE

NEL DOMINIO DI LAPLACE

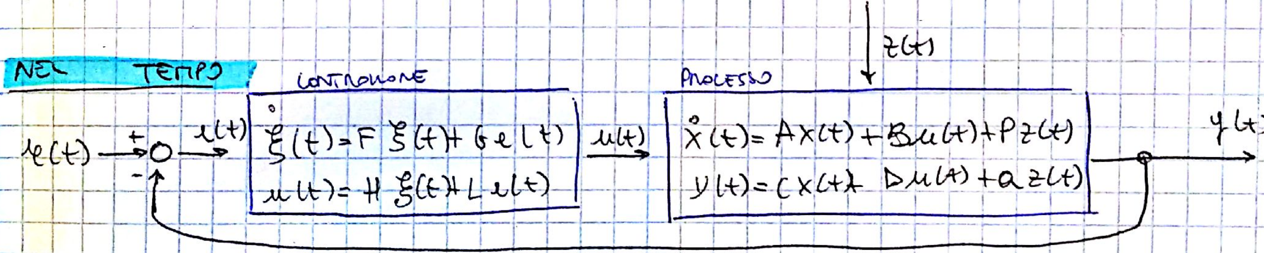


$P(S) = $ F. DI TRASF. ING-USC. DEL PROCESSO $= C(sI - A)^{-1}B + D$

$M(S) = $ F. DI TRASF. DIST-USC. DEL PROCESSO $= C(sI - A)^{-1}P + Q$

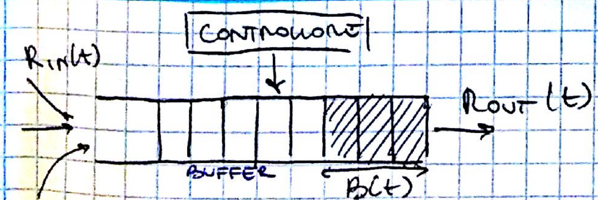
$G(S) = $ F. DI TRASF. ING-USC. DEL CONTROLLORE

NEL TEMPO



$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = F\xi(t) + G e(t) \\ u(t) = H\xi(t) + L e(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Pz(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Qz(t) \end{cases}$$

EX. BUFFER DI UN ROUTER



$[R_{OUT}(t)] = [R_{IN}(t)] = bit/s$

$[B(t)] = bit$

$u(t) = R_{OUT}(t)$

$y(t) = B(t)$

$z(t) = R_{IN}(t)$

$\dot{B}(t) = R_{IN}(t) - R_{OUT}(t)$ EQUAZIONE CHE CARATTERIZZA IL SISTEMA

PONGO $x(t) = B(t)$

$\Downarrow$

MODELLO DEL SISTEMA $\longrightarrow$ $\begin{cases} \dot{x}(t) = -u(t) + z(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$

TRUCCO PRATICO!

LE COMPONENTI DELLO STATO SONO QUELLE CHE COMPAIONO CON LA DERIVATA O L'INTEGRALE

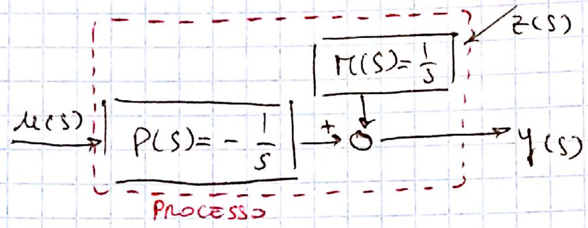
EX:

$\dot{a} + \dot{b} + \dot{c} = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x$

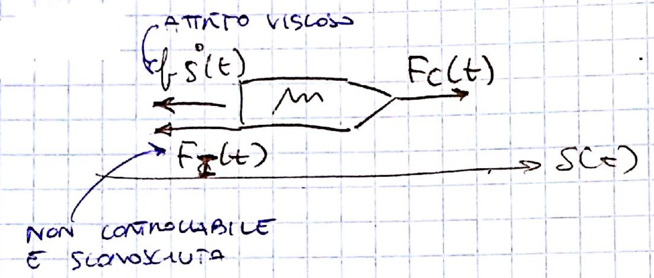
$\ddot{d} = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \dot{d} \end{pmatrix} = x$

$A=0 \quad B=-1 \quad C=1 \quad D=0 \quad P=1 \quad Q=0$

$$\left.\begin{array}{l} P(s) = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot (-1) + 0 = -\frac{1}{s} \\ M(s) = 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{s} \end{array}\right\} \text{(APPLICANDO LA FORMULA)}$$



EX: MODELLO DI UN CORPO CHE SI MUOVE IN UN FLUIDO



$y(t) = s(t)$ GRANDEZZA DA CONTROLLARE

$u(t) = F_c(t)$ GRANDEZZA CONTROLLANTE

$z(t) = F_I(t)$ DISTURBO

$$m\ddot{s}(t) = F_c(t) - f\dot{s}(t) - F_I(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = s(t) \\ x_2(t) = \dot{s}(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{f}{m} x_2(t) - \frac{z(t)}{m} + \frac{1}{m} u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f}{m} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/m \end{pmatrix}}_{P} z(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

APPLICO LA TRASFORMATA DI LAPLACE AL SISTEMA

TRASFORMATE DI LAPLACE (REGOLE)

(t)		(s)
$a F_1(t) + b F_2(t)$	$\longrightarrow$	$a f_1(s) + b f_2(s)$
$\dot{F}_1(t) = \dfrac{dF(t)}{dt}$	$\longrightarrow$	$s \cdot f(s) - F(0)$
$\int_0^t F(\tau)\,d\tau$	$\longrightarrow$	$1/s\, f(s)$
$\underbrace{F_1(t) * F_2(t)}$	$\longrightarrow$	$f_1(s) \cdot f_2(s)$

$$\int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau)\,d\tau$$

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + P z(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) + Q z(t) \end{cases} \xrightarrow{x(0)=0} \begin{cases} s X(s) = A X(s) + B u(s) + P z(s) \\ y(s) = C X(s) + D u(s) + Q z(s) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} (sI - A) X(s) = B u(s) + P z(s) \\ y(s) = C X(s) + D u(s) + Q z(s) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}[B u(s) + P z(s)] \\ y(s) = C X(s) + D u(s) + Q z(s) \end{cases}$$

$$y(s) = C(sI-A)^{-1}[B u(s) + P z(s)] + D u(s) + Q z(s) =$$

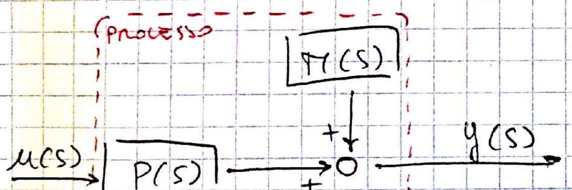
$$= \underbrace{[C(sI-A)^{-1}B + D]}_{P(s)} u(s) + \underbrace{[C(sI-A)^{-1}P + Q]}_{\Pi(s)} z(s)$$

Quindi

$$y(s) = P(s) u(s) + \Pi(s) z(s) \quad \text{CON} \quad \begin{cases} P(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \\ \Pi(s) = C(sI-A)^{-1}P + Q \end{cases}$$

FdT INGRESSO USCITA

FdT DISTURBO USCITA



EX. CALCOLO $P(s)$ e $\Pi(s)$ DELL'EX DI PRIMA CON $m = b = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0) \quad D = 0 \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Q = 0$$

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \longrightarrow (sI-A)^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

- $P(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \dfrac{1}{s(s+1)}$
- $\Pi(s) = C(sI-A)^{-1}P + Q = -\dfrac{1}{s(s+1)}$

SE $u(t) = e^{-2t}$ e $z(t) = 1$, $y(t) = ?$ POICHÉ IL SISTEMA È LINEARE SFRUTTIAMO LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI e CALCOLIAMO SINGOLARMENTE L'USCITA A $u(t)$ e $z(t)$

FORMULE DI TRASFORMAZIONE

(t)	(s)
$u_0(t)$	1
1	$1/s$
$t^n/n!$	$1/s^{n+1}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

1° PASSO

PASSIAMO AL DOMINIO DI LAPLACE:

$$u(s) = \frac{1}{s+2} \qquad z(s) = \frac{1}{s}$$

$$y_1(s) = P(s)u(s) = \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$y_2(s) = \Pi(s)\, z(s) = -\frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

2° PASSO

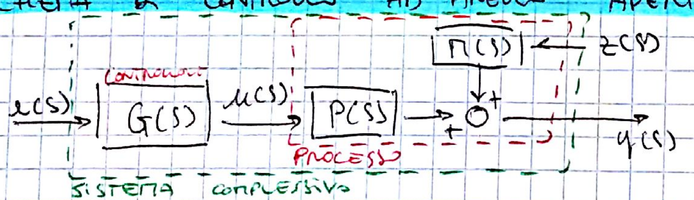
ANTITRASFORMO

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}\right] = \underbrace{1/2}_{\text{PERMANENTE}} \overbrace{- e^{-t} + 1/2\, e^{-2t}}^{\text{TRANSITORIO}}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] = \underbrace{-t+1}_{\text{PERMANENTE}} \underbrace{- e^{-t}}_{\text{TRANSITORIO}}$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

SCHEMA DI CONTROLLO AD ANELLO APERTO (OPEN LOOP)



$$\begin{cases} y(s) = P(s)u(s) + \Pi(s)z(s) \\ u(s) = G(s)e(s) \end{cases}$$

$G(s)$: FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA COMPLESSIVO

TUTTE LE SPECIFICHE PROGETTUALI CHE ANDIAMO A IMPORRE DEVONO ESSERE SODDISFATTE DAL SISTEMA COMPLESSIVO

FdT DEL SISTEMA COMPLESSIVO:

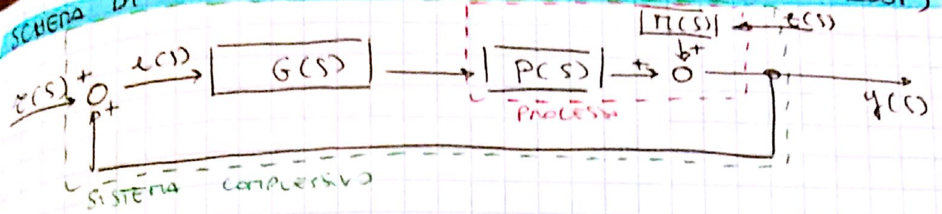
$$\begin{cases} y(s) = P(s)u(s) + \Pi(s)\, z(s) \\ u(s) = G(s)e(s) \end{cases} \rightarrow y(s) = \underbrace{P(s)G(s)}_{W(s)} \overbrace{e(s)}^{\text{INGRESSO}} + \underbrace{\Pi(s)}_{W_\Pi(s)} \overbrace{z(s)}^{\text{DISTURBO}}$$

$W(s)$: FdT DEL SISTEMA COMPLESSIVO

$W_\Pi(s)$: FdT DISTURBO - USCITA DEL SISTEMA COMPLESSIVO

OSS: $W_\Pi(s)$ NON HA LA $G(s)$, QUINDI L'OPEN-LOOP NON PUÒ CONTROLLARE I DISTURBI!

SCHEMA DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO (CLOSED-LOOP)



SPESSO: $r(s) = y_d(s)$ USCITA DESIDERATA

$$\begin{cases} y(s) = P(s)\,u(s) + \Pi(s)\,z(s) \\ u(s) = G(s)\,e(s) \\ e(s) = r(s) - y(s) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$y(s) = P(s)\,G(s)\,(r(s) - y(s)) + \Pi(s)\,z(s)$$

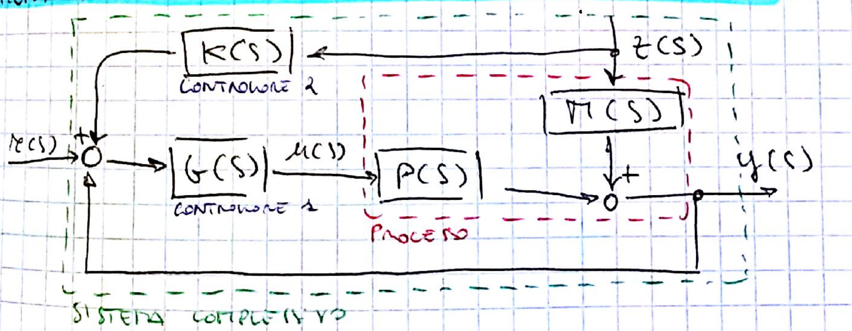
$\Updownarrow$ SUPPONGO UN INGRESSO e UN'USCITA

$$y(s)\,(1 + P(s)G(s)) = P(s)\,G(s)\,r(s) + \Pi(s)\,z(s)$$

$\Updownarrow$

$$y(s) = \underbrace{\frac{P(s)G(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W(s)}\,r(s) + \underbrace{\frac{\Pi(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W_z(s)}\,z(s)$$

SCHEMA DI CONTROLLO A DOPPIA CONTROREAZIONE



OSS. COME SCELGO QUALE SCHEMA DI CONTROLLO USARE? IN GENERALE SI USA L'ANELLO CHIUSO (INFATTI IL DISTURBO NON È MISURABILE). SE SPECIFICANO CHE IL DISTURBO È MISURABILE SI USA QUELLO A DOPPIA CONTROREAZIONE

$$y(s) = P(s)\,u(s) + \Pi(s)\,z(s)$$

$$u(s) = G(s)\,e(s)$$

$$e(s) = r(s) - y(s) + K(s)\,z(s)$$

$$y(s) = P(s)\left[G(s)\left[r(s) - y(s) + K(s)\,z(s)\right]\right] + \Pi(s)\,z(s)$$

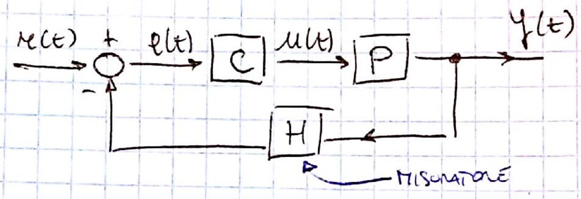
$\Updownarrow$

$$y(s) = \underbrace{\frac{P(s)G(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W(s)}\,r(s) + \underbrace{\frac{P(s)G(s)K(s) + \Pi(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W_z(s)}\,z(s)$$

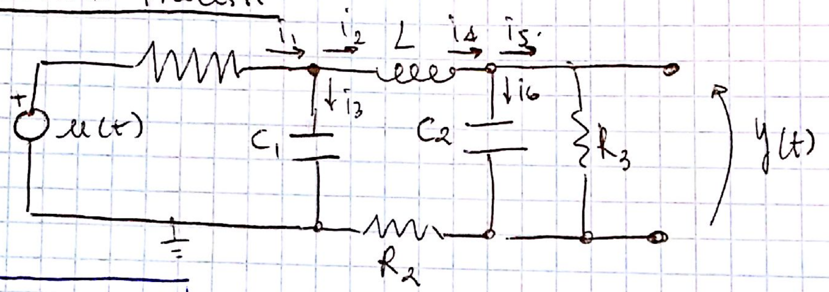
RIEPILOGO

	ANELLO APERTO	ANELLO CHIUSO	DOPPIA CONTROREAZIONE
$W(S)$	$P(S)G(S)$	$\frac{P(S)G(S)}{1+P(S)G(S)}$	$\frac{P(S)G(S)}{1+P(S)G(S)}$
$W_z(S)$	$M(S)$	$\frac{M(S)}{1+P(S)G(S)}$	$\frac{P(S)G(S)K(S) \pm M(S)}{1+P(S)G(S)}$

$\boxed{\text{TUTOR}}$ (RIPASSO tds)



ESEMPIO PROCESSI



$$\boxed{\begin{aligned} i &= C\frac{dv}{dt} \\ v &= L\frac{di}{dt} \\ v &= Ri \end{aligned}}$$

eq. CARATTERISTICHE

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$\frac{u(t) - v_{C_1}}{R_1} = i_L + C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} \quad (1)$$

$$i_4 = i_5 + i_6$$

$$i_L = C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} + \frac{v_{C_2}}{R_3} \quad (2)$$

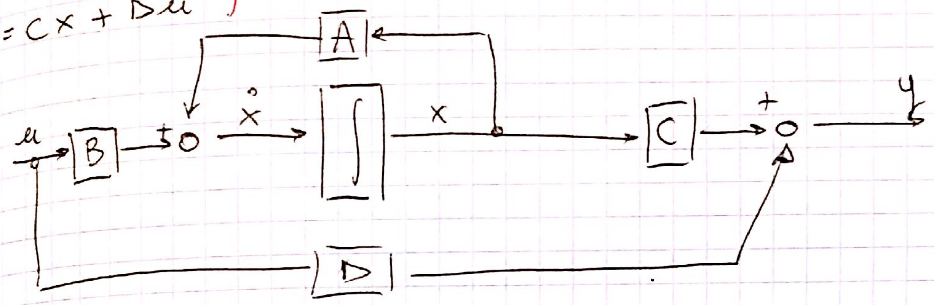
$$v_{C_1} = R_2 i_L + v_{C_2} + L\frac{di_L}{dt} \quad (3)$$

$$X = \begin{pmatrix} v_{C_1} \\ i_L \\ v_{C_2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \dot{X}_1 = -\frac{1}{R_1C_1}X_1 - \frac{1}{C_1}X_2 + \frac{1}{R_1C_1}u(t) \\ \dot{X}_2 = \frac{1}{L}X_1 - \frac{R_2}{L}X_2 - \frac{1}{L}X_3 \\ \dot{X}_3 = \frac{1}{C_2}X_2 - \frac{1}{C_2R_3}X_3 \\ y = X_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2R_{03}} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

SCHEMA DI SIMULAZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$ RAPPRESENTAZIONE IMPLICITA



SOLUZIONI DEL SISTEMA

$$\begin{cases} x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{EV. LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} B e^{A(t-\tau)} u(\tau)\,d\tau}_{\text{EV. FORZATA}} \\ y(t) = \underbrace{C e^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \left[C e^{A(t-\tau)} B + D\,\delta(t-\tau)\right] d\tau}_{\text{EVOLUZIONE FORZATA}} \end{cases}$$ RAPPRESENTAZIONE ESPLICITA

RICHIAMI SULLA TRASFORMATA DI LAPLACE

$f(t)$ DEFINITA PER $t \in [0, +\infty)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st}\,dt$$

Ex

$f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

CONVERGE SOLO SE $Re(a-s) < 0 \Leftrightarrow Re(s) > a$

PROPRIETÀ

1) $\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)]\ \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$

2) $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$

APPLICHIAMO LA TRASFORMATA DI LAPLACE ALLA RAPPRESENTAZIONE IMPLICITA

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \; ; \; x(t_0) = x_0 \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (sI - A)X(s) = x_0 + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}x_0 + (sI-A)^{-1}B \cdot U(s) \\ Y(s) = C(sI-A)^{-1}x_0 + \underbrace{[C(sI-A)^{-1}B + D]}_{W(s)}U(s) \end{cases}$$

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE

$$y_{re} = \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

OSS

LA RISPOSTA A REGIME DEVE ESSERE INDIPENDENTE DALLO STATO INIZIALE.

LA RISPOSTA, OLTRE A RISPOSTA LIBERA + RISPOSTA FORZATA, PUÒ ESSERE SCOMPOSTA IN RISPOSTA TRANSITORIA + RISPOSTA A REGIME PERM.

N.B. → LA RISPOSTA LIBERA È TUTTA ~~AE~~ COMPRESA NELLA RISPOSTA TRANSITORIA.

CALCOLIAMO LA RISPOSTA A REGIME CON UN INGRESSO SINUSOIDALE

$$\sin(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$ CONSIDERO PRELIMINARMENTE $e^{j\omega t}$

$$y_r = \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)e^{j\omega\tau}\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)e^{j\omega\tau}\,d\tau \overset{\substack{\xi = t-\tau \\ d\xi = -d\tau}}{=} -\int_{-\infty}^{t} W(\xi)e^{j\omega t}\cdot e^{-j\omega\xi}\,d\xi =$$

$$= e^{j\omega t}\int_{0}^{+\infty} W(\xi)e^{-j\omega\xi}\,d\xi = e^{j\omega t}\, W(s)\Big|_{s=j\omega}$$

$$W(j\omega) = \underbrace{M(j\omega)}_{\text{MODULO}} \cdot e^{j\overbrace{\phi(j\omega)}^{\text{FASE}}}$$

ORA CALCOLIAMO LA $y_r(t)$ AL SENO (t)

$$y_r(t) = \frac{e^{j\omega t} W(j\omega) - e^{-j\omega t} W(j\omega)}{2j} = \frac{e^{j\omega t} M(\omega) e^{j\phi(\omega)} - e^{-j\omega t} M(\omega) e^{-j\phi(\omega)}}{2j} =$$

$$= M(\omega) \frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} = M(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

GRANDE RISULTATO! L'INGRESSO È MODIFICATO SOLO IN MODULO E FASE!

DIAGRAMMA DI BODE

$W(s) = C(sI-A)^{-1}B$

SERVE A GRAFICARE MODULO e FASE DI $W(j\omega)$ CHE, AL VARIARE DELLA FREQUENZA ω, INDICA DI QUANTO L'INGRESSO SINUSOIDALE VIENE MODIFICATO IN MODULO e IN FASE (PER LE CONSIDERAZIONI FATTE PRIMA).

$$W(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n} \qquad n \geq m$$

$W(j\omega) = W(s)\big|_{s=j\omega}$ RISPOSTA ARMONICA

$|W(j\omega)|$ $\quad \angle W(j\omega)$ (DUE DIAGRAMMI DIFFERENTI)

PER DISEGNARE I DIAGRAMMI ABBIAMO BISOGNO DELLA $W(s)$ IN FORMA DI BODE:

$$W(s) = K \frac{\prod \text{MONOMIO} \ \prod \text{BINOMIO} \ \prod \text{TRINOMIO}}{\prod \text{MONOMIO} \ \prod \text{BINOMIO} \ \prod \text{TRINOMIO}}$$

- MONOMIO : s
- BINOMIO : $1 + \tau s$
- TRINOMIO : $1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

  - ζ SMORZAMENTO
  - ω_n PULSAZIONE NATURALE

Ex.

$$W(s) = \frac{2s}{3+s} = \frac{2s}{3(1+\frac{1}{3}s)}$$

$K = \frac{2}{3}$

s MONOMIO

$1 + \frac{1}{3}s$ TERMINE BINOMIO

OSS

$$\angle W_1 \cdot W_2 = \angle W_1 + \angle W_2$$

INFATTI:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= M_1 \cdot e^{j\phi_1} \\ W_2 &= M_2 \cdot e^{j\phi_2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow W_1 \cdot W_2 = \underbrace{M_1 \cdot M_2}_{\text{PRODOTTO! NON SOMMA BRUTTO}} e^{\overbrace{j(\phi_1+\phi_2)}^{}}$$

SOMMA DELLE FASI

OSS

$$\angle \frac{1}{W_1} = -\angle W_1$$

OSS

NON VALE LO STESSO PER I MODULI! PER QUESTO MOTIVO IL MODULO VIENE TRACCIATO IN DECIBEL (dB)

$$|W|_{dB} = 20 \log_{10} |W|$$

INFATTI IN dB:

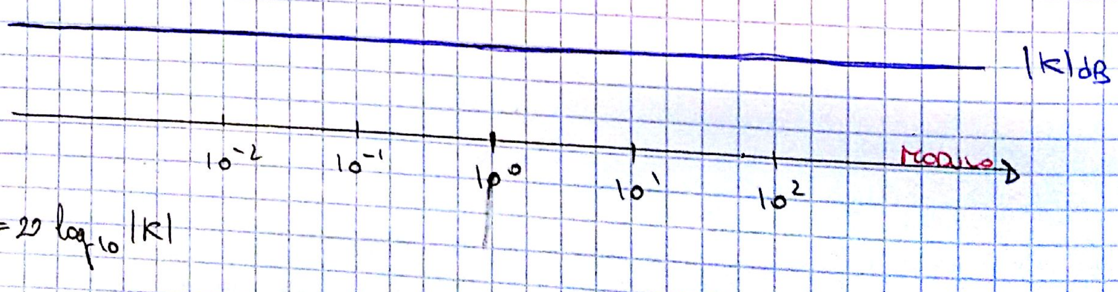
$$|W_1 \cdot W_2|_{dB} = 20 \log_{10} |W_1 \cdot W_2| = 20 \log_{10} |W_1| + 20 \log_{10} |W_2| = |W_1|_{dB} + |W_2|_{dB}$$

OSS

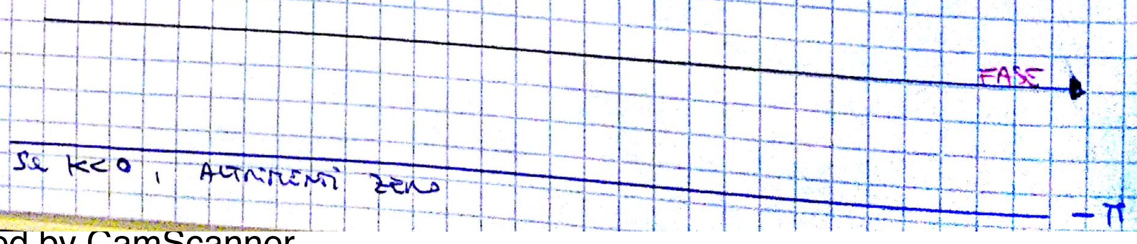
ANCHE ω VIENE ESPRESSO IN dB NEI DIAGRAMMI DI BODE

TERMINE COSTANTE

$$\boxed{K = \text{COSTANTE} = W(j\omega)}$$



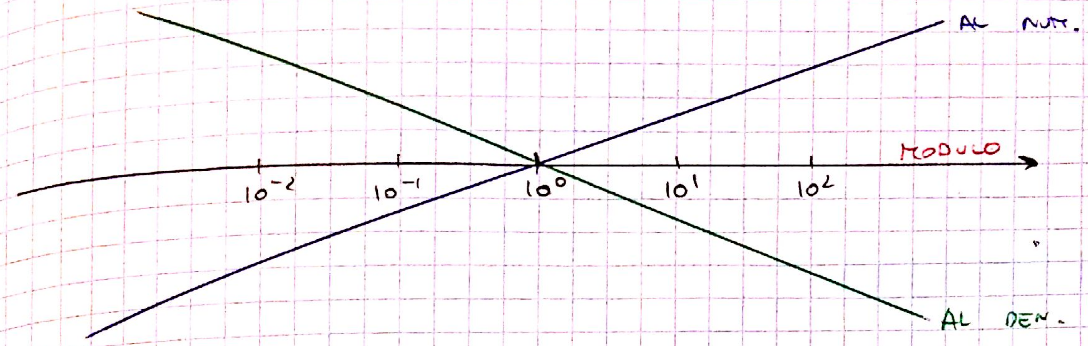
$$|K|_{dB} = 20 \log_{10} |K|$$

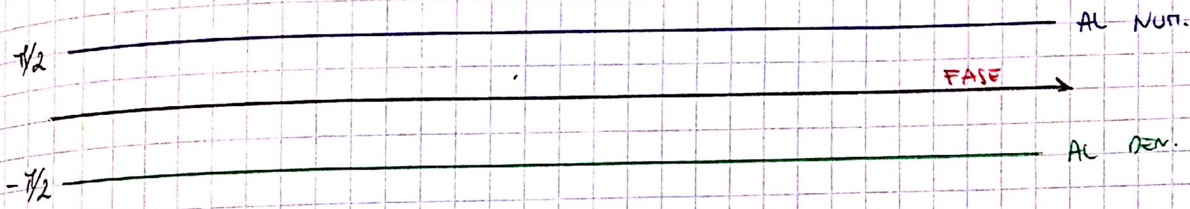


TERMINE MONOMIO

$\boxed{j\omega = W(j\omega)}$

$|j\omega|_{dB} = 20\log_{10}|j\omega| = 20\log_{10}\omega$ QUINDI, POICHÉ SULL'ASSE x C'È $\log_{10}\omega$, È UNA RETTA CON PENDENZA 20dB PER DECADE





TERMINE BINOMIO

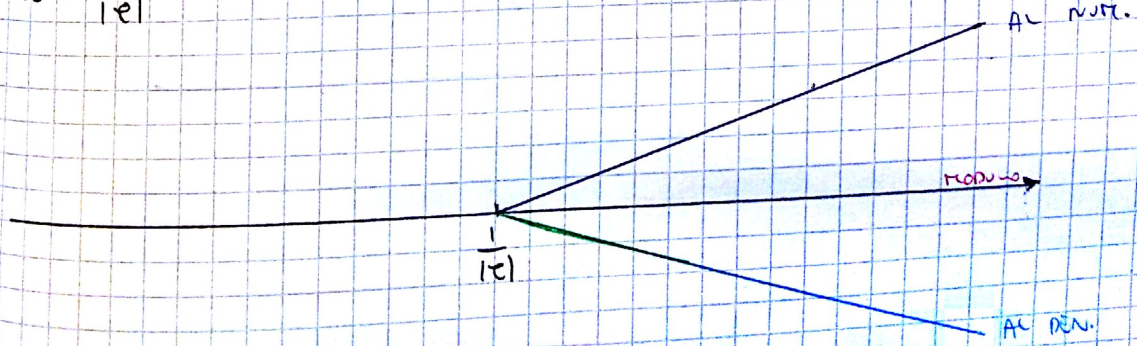
$\boxed{W(j\omega) = 1+\tau s}$

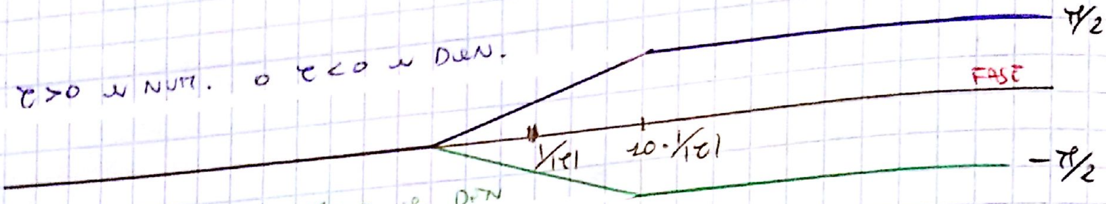
$|W(j\omega)|_{dB} = |1+\tau s|_{dB} = 20\log_{10}|1+\tau j\omega| = 20\log_{10}\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$

Se $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$ $\longrightarrow$ VALE $20\log_{10}\omega|\tau| = 20\log_{10}\omega + 20\log_{10}|\tau|$

Se $\omega \ll \frac{1}{|\tau|}$ $\longrightarrow$ VALE 0

Se $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ $\longrightarrow$ VALE CIRCA 3



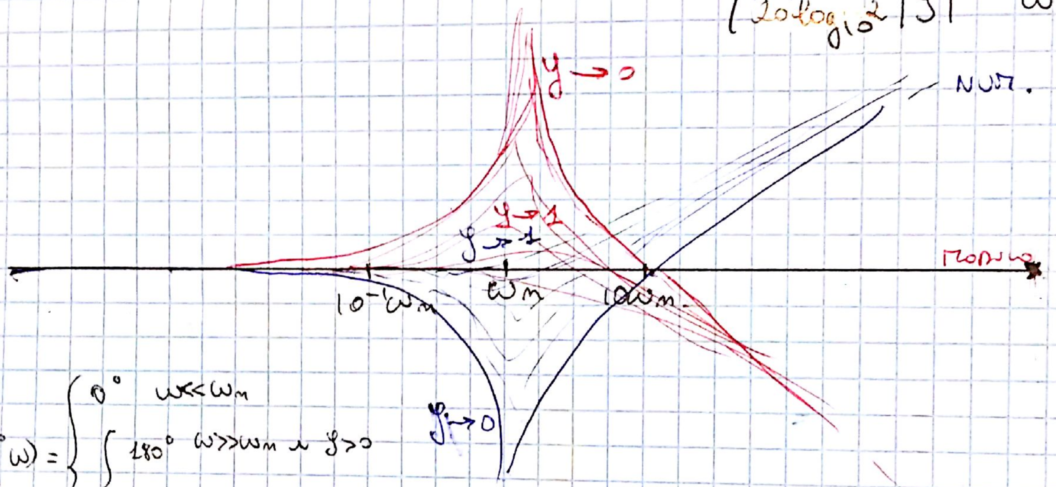


$$\angle 1+\tau\omega = \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ \pi/2 & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \text{ e } \tau>0 \\ -\pi/2 & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \text{ e } \tau<0 \end{cases}$$

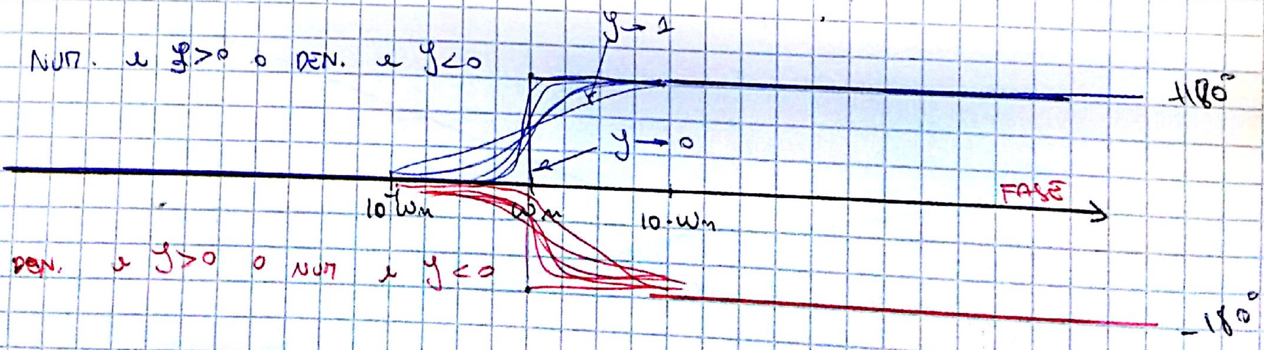
TERMINE TRINOMIO:

$$\boxed{W(j\omega) = 1 + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n}}$$

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n \\ 40\log_{10}\frac{\omega}{\omega_n} & \omega \gg \omega_n \\ 20\log_{10} 2|\xi| & \omega = \omega_n \end{cases}$$



$$\angle W(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \ll \omega_n \\ \begin{cases} 180^\circ & \omega \gg \omega_n \text{ e } \xi>0 \\ -180^\circ & \omega \gg \omega_n \text{ e } \xi<0 \end{cases} \end{cases}$$



PASSAGGIO DAL CONTROLLORE NEL DOMINIO DI LAPLACE, AL CONTROLLORE NEL TEMPO

• TERMINI E NOZIONI PRELIMINARI

$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}$ fdT del processo

$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$ fdT del controllore

$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)}$ fdT controllore + processo

$m_p = \text{grado}(N_P(s))$ $m_g = \text{grado}(N_G(s))$ $m_w = \text{grado}(N_W(s))$

$d_p = \text{grado}(D_P(s))$ $d_g = \text{grado}(D_G(s))$ $d_w = \text{grado}(D_W(s))$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO:
- STRETTAMENTE PROPRIA $m_w < d_w$
- PROPRIA $m_w = d_w$
- IMPROPRIA $m_w > d_w$ ← NON POSSONO ESISTERE PER PROBLEMI DI REALIZZABILITÀ FISICA

EX.

$$P(s) = \frac{\boxed{s(s+1)}}{\boxed{(s+2)^2(s+4)}}$$

$s(s+1) \leftarrow N_P(s)$ $m_p = 2$

$(s+2)^2(s+4) \leftarrow D_P(s)$ $d_p = 3$

Def: DIMENSIONE DI UNA RAPPRESENTAZIONE INGRESSO - STATO - USCITA

DATO $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$, LA SUA DIMENSIONE È LA DIMENSIONE DELLA MATRICE A

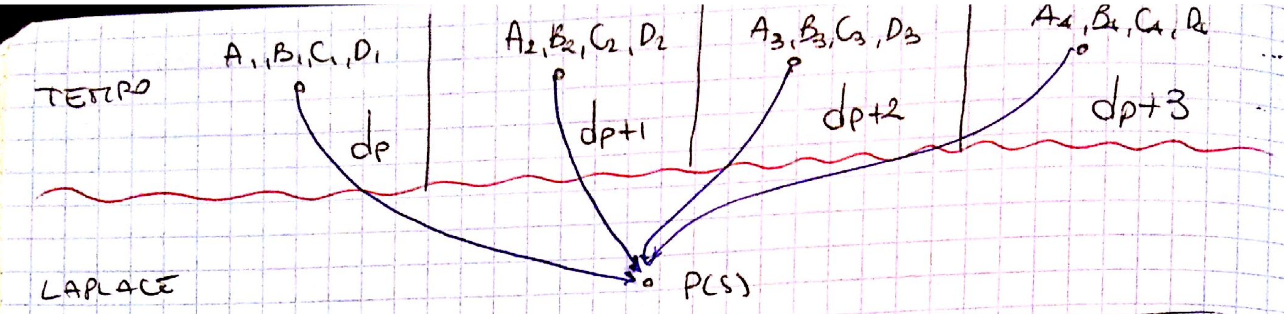
Def: POLI E ZERI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

POLI: ZERI DI $D(s)$

ZERI: ZERI DI $N(s)$

OSS.

PIÙ RAPPRESENTAZIONI INGRESSO - STATO - USCITA POSSONO ESSERE RAPPRESENTATE DA UNA SOLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO. IN PARTICOLARE UNA FDT PUÒ RAPPRESENTARE INFINITE RAPPRESENTAZIONE INGRESSO - STATO - USCITA. QUINDI NEL PASSAGGIO DALLA FDT AL TEMPO BISOGNA SCEGLIERE UNA DELLE INFINITE RAPPRESENTAZIONI



OGNI RAPPRESENTAZIONE SI DIFFERENZIA DALLA DIMENSIONE DELLA STESSA.
QUELLA A DIMENSIONE MINIMA È QUELLA CHE HA DIMENSIONE d_p

OSS

OVVIAMENTE QUELLO A DIMENSIONE MINIMA È IL PIÙ INTERESSANTE

DALLA FDT ALLA RAPPRESENTAZIONE INGRESSO-STATO-USCITA

$$P(s) = \underbrace{\boxed{D}}_{\text{COSTANTE}} + \boxed{\frac{c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}}$$

STRETTAMENTE PROPRIA

EX

$$P(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

$$\begin{array}{r|l} s+1 & s+2 \\ -s-2 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

$\Updownarrow$

$$P(s) = 1 + \frac{-1}{s+2}$$

OSS

$$D(s) \cdot Q(s) + R(s) = N(s)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$$

RAPPRESENTAZIONE RAGGIUNGIBILE

OSS LA DIM. DI INGRESSO E USCITA LA CONSIDERIAMO $= 1$

$$\underset{m\times m}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{m-1} \end{pmatrix} \quad \underset{m\times 1}{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underset{1\times m}{C} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{m-1} \end{pmatrix}$$

OSS
m È ~~LA~~ ~~DIM.~~ GRADO DEL DENOMINATORE DELLA FDT

OSS

PER UN INGRESSO E UNA USCITA, LA DIMENSIONE È MINIMA, E QUINDI LA RAPPRESENTAZIONE È ANCHE OSSERVABILE.

PER PIÙ INGRESSI E PIÙ USCITE QUESTO NON È PIÙ VERO. ~~[illegible]~~

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

$$A,B,C,D \xrightarrow{T} \tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D}$$

$\tilde{A} = TAT^{-1}$

$\tilde{B} = TB$

$\tilde{C} = CT^{-1}$

$\tilde{D} = D$

QUALUNQUE SIA LA MATRICE T, LA RAPPRESENTAZIONE CHE TROVIAMO HA LA STESSA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

DIM.

$$\tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}+\tilde{D} = CT^{-1}\left(sTT^{-1} - TAT^{-1}\right)^{-1}TB+D =$$

$$= CT^{-1}\left[T(sI-A)T^{-1}\right]^{-1}TB+D =$$

OSS.

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$$= CT^{-1}T(sI-A)^{-1}T^{-1}TB+D = \underbrace{C(sI-A)^{-1}B+D}_{D}$$

HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO INGRESSO – USCITA

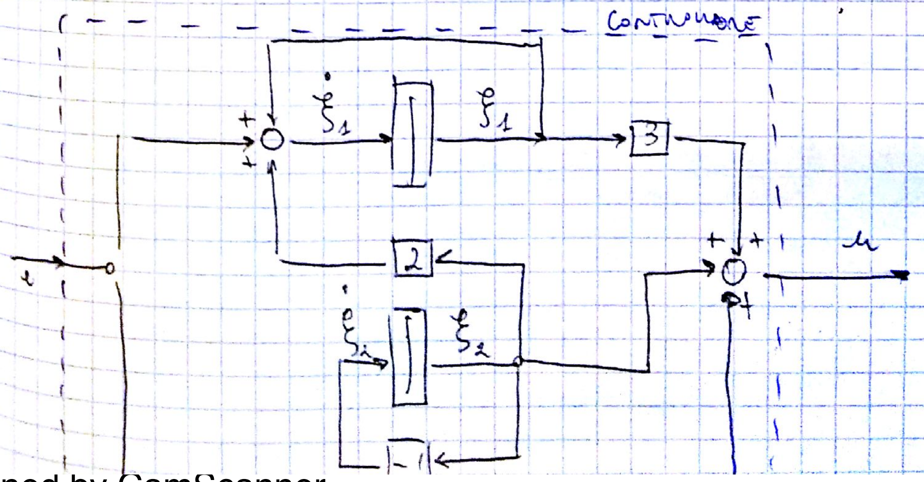
COME DETERMINARE IL PROCESSO FISICO DAL MODELLO

ES. DI CONTROLLORE

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1 + 2\xi_2 + e \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_2 \\ u = 3\xi_1 + \xi_2 + e \end{cases}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \quad L = 1$$



Def: PUNTO DI EQUILIBRIO

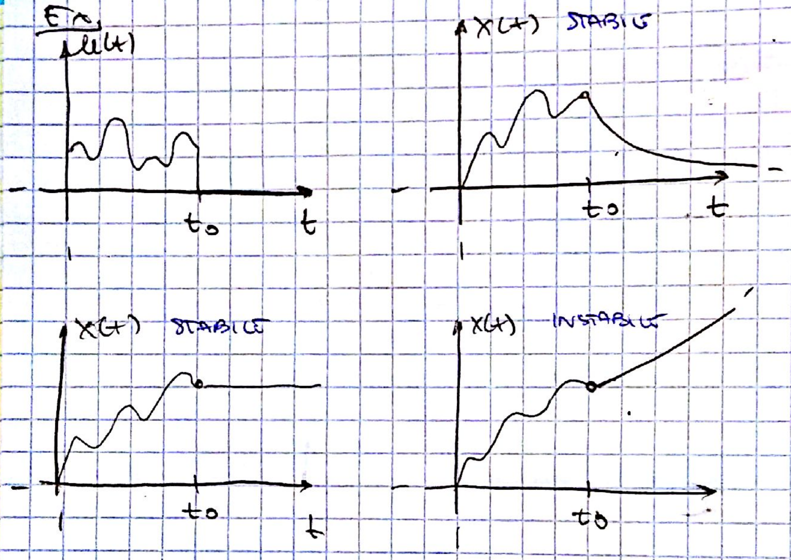
$\dot{x} = Ax$ $\qquad$ $\dot{x} = 0$

$Ax = 0$ insieme dei punti di equilibrio

Def: SISTEMA LINEARE ASINT. STABILE

Sistema lin. asint. stabile $\Longleftrightarrow$ se ad un istante $t_0 > 0$ pongo $u(t) = 0$ $\forall t \geq t_0$, allora $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

Es



OSS

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

Infatti $y(t) = Ax + Bu$ e u è posto a zero

Soluzioni di $\dot{x} = Ax + Bu$

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0)}_{\text{risposta in ev. libera}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot Bu(\tau)\, d\tau}_{\text{risposta forzata}}, \quad \text{con } t_0 > 0$$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} R_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i t}$$

- λ_i : i-esimo autovalore di A
- r : n° di autovalori di A
- m_i : molteplicità geometrica dell'autovalore i-esimo
- R_{ik} : residuo