- PROF: FRANCESCO DELLI PRISCOLI   MAIL: DELLIPRISCOLI@DIS.UNIROMA1.IT
- TUTOR: FRANCESCO LIBERATI

→ TESTO: ALBERTO ISIDORI - SISTEMI DI CONTROLLO VOL. 1+2 SIDEREA

→ DISPENSA: DA STAMPARE DA MAXI - PIODA

INTRODUZIONE

CONTROL ENGINEERING | DIAG.UNIROMA1.IT/AUTOMATICA

ESAMI DI BASE

ROBOTICA | FUTURE INTERNET | AUTOMOTIVE | SISTEMI INDUSTRIALI

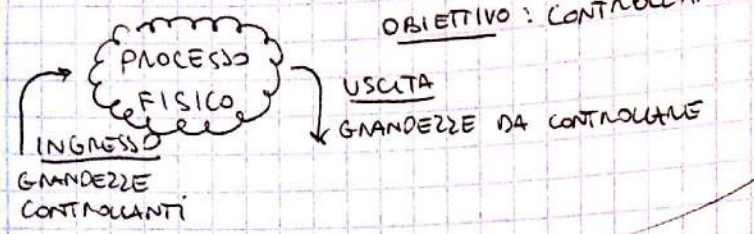
RETI DI TLC → FIWARE, FICORE, T-NOVA, SWIPE, PLATINO PON
" DI ENERGIA → SMARTV2G, MOBINCITY
" DI TRASPORTO → BONVOYAGE
SICUREZZA → TASS, COCKPIT CI, NSHIELD

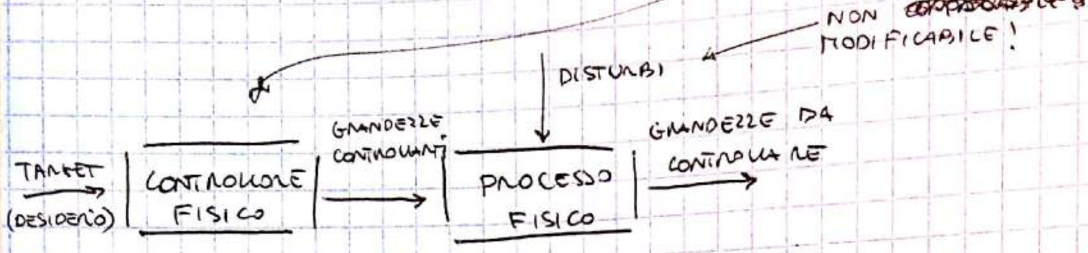
- EC.EUROPA.EU/PROGRAMME/HORIZON2020
- LABRETI.ING.UNIROMA1.IT

↑ LABORATORIO PROF

PROGRAMME

OBIETTIVO: CONTROLLARE IL PROCESSO





EX: STANZA DA RISCALDARE

USCITA (GRANDEZZA DA CONTROLLARE): TEMPERATURA

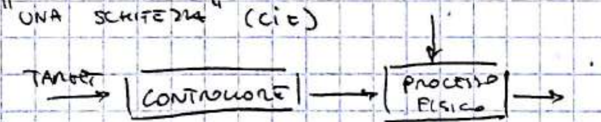
DISTURBO: (EX:) TEMPERATURA ESTERNA

Def: SISTEMA DI CONTROLLO

INSIEME DI PROCESSO FISICO $\cup$ CONTROLLORE

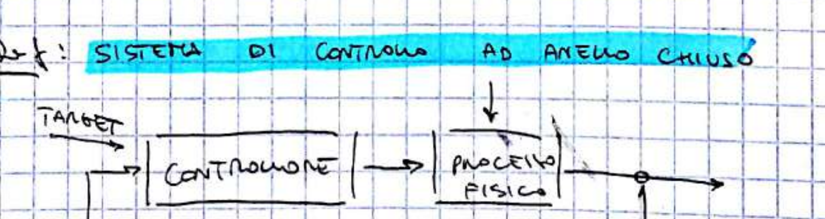
Def: SISTEMA DI CONTROLLO AD ANELLO APERTO

"UNA SCHIFEZZA" (CIT)



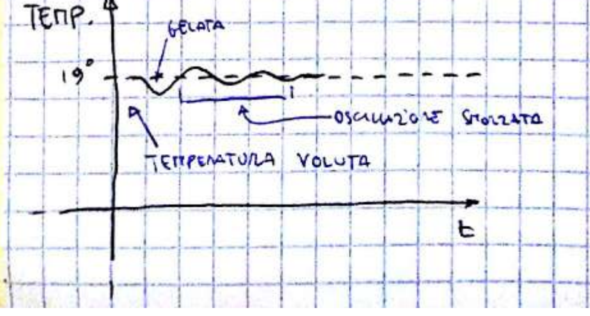
SENZA CONTROREAZIONE (FEEDBACK)

Def: SISTEMA DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO

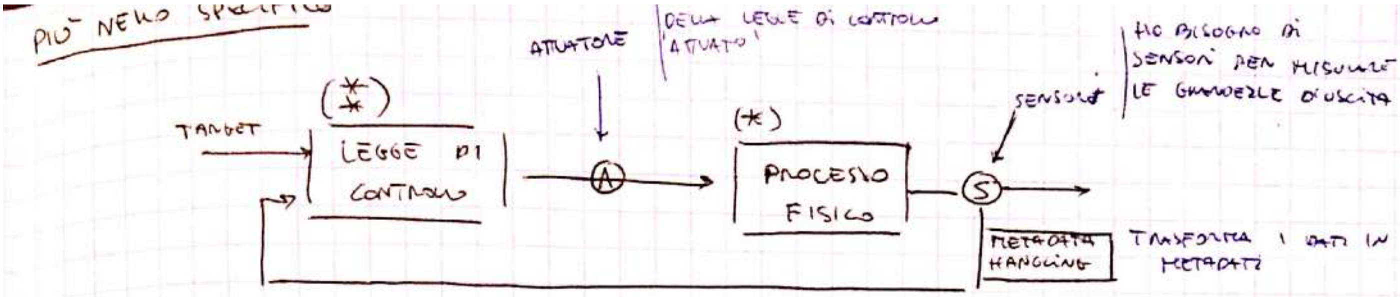


CON CONTROREAZIONE (FEEDBACK)

IL CONTROLLORE REAGISCE IN FUNZIONE DELLE GRANDEZZE LETTE ISTANTE PER ISTANTE



PIÙ NELLO SPECIFICO



(*) DEVO MODELLIZZARE IL PROCESSO FISICO: DA SISTEMA FISICO A SISTEMA DI EQ. DIFFERENZIALI

(**) TROVO IL MODELLO MATEMATICO, DEVO POI CREARE UN DISPOSITIVO FISICO CHE FA DA CONTROLLORE

IN CONTROLLI AUTOMATICI CI PREOCCUPEREMO DI CALCOLARE MATEMATICAMENTE UNA LEGGE DI CONTROLLO

Def: TECNOLOGY DEPENDENT ~ INDEPENDENT.

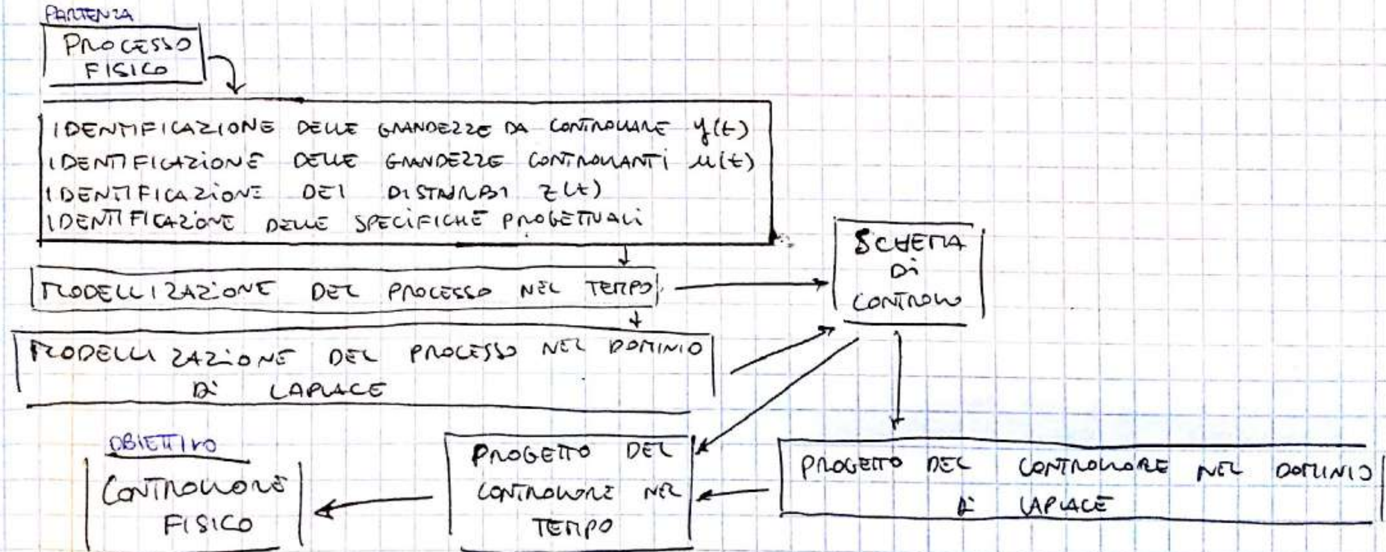
TECNOLOGY DEPENDENT : EX ATTUATORE, DIPENDE DALLA TECNOLOGIA AL QUALE APPLICO LA LEGGE

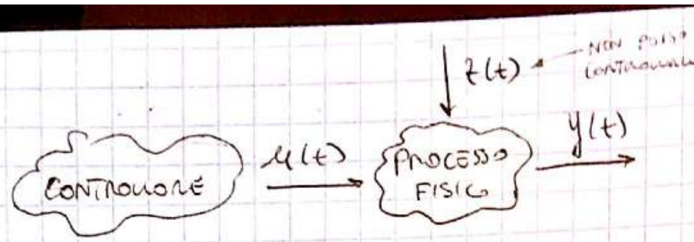
TECNOLOGY INDEPENDENT : EX LEGGE DI CONTROLLO, NON DIPENDE DALLA TECNOLOGIA CHE USO

OSS.

ALCUNE TECNICHE DI CONTROLLO PERMETTONO DI OPERARE ANCHE NELL'ASSENZA TOTALE DELLA CONOSCENZA DEL PROCESSO FISICO

SCHEMA RIASSUNTIVO DEL CORSO





$y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ \vdots \\ y_q(t)\end{pmatrix}$ $u(t)=\begin{pmatrix} u_1(t)\\ \vdots \\ u_p(t)\end{pmatrix}$

$z(t)=\begin{pmatrix} z_1(t)\\ \vdots \\ z_r(t)\end{pmatrix}$

OBIETTIVI (SPECIFICHE)

1) TRACKING
2) DISTURBANCE REJECTION
3) ASYMPTOTIC STABILITY

SOLO QUELLI AFFRONTATI NEL CORSO!
NON SONO TUTTI (OVVIAMENTE)

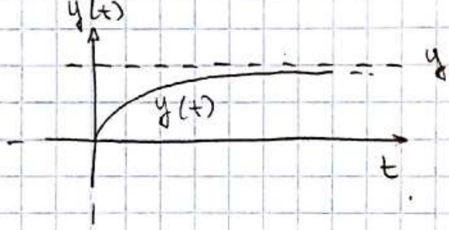
TRACKING

FAR SI CHE L'USCITA ABBIA UN VALORE PRECISO

OSS.

SPESSO SI CONSIDERA $\overset{\text{ERRORE}}{e(t)} = \overset{\text{USCITA DESIDERATA}}{y_d(t)} - \underset{\text{USCITA REALE}}{y(t)}$ CHE SECONDO LE SPECIFICHE DI TRACKING CERCHERÒ DI FAR TENDERE A ZERO. (ALMENO ASINTOTICAMENTE)

ANDAMENTO TIPICO

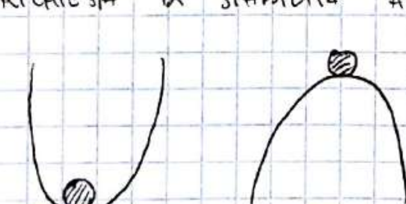


DISTURBANCE REJECTION

IL MIO SISTEMA DI CONTROLLO DEVE FUNZIONARE NONOSTANTE UNA AZIONE DI DISTURBO ESTERNA. NELLA STRAGRANDE MAGGIORANZA DEI CASI NON È POSSIBILE UNA DISTURBANCE REJECTION TOTALE, MA ALCUNI TIPI DI DISTURBO NON SARANNO CONTROLLABILI

ASYMPTOTIC STABILITY

RICHIESTA DI STABILITÀ ASINTOTICA DEL SISTEMA



SISTEMA STABILE ASINTOTICAMENTE

SISTEMA NON STABILE ASINTOTICAMENTE

$$\begin{cases} \underset{m\times 1}{\dot{x}(t)} = \underset{m\times m}{A}\,\underset{m\times 1}{x(t)} + \underset{m\times p}{B}\,\underset{p\times 1}{u(t)} + \underset{m\times r}{P}\,\underset{r\times 1}{z(t)} \\ \underset{q\times 1}{y(t)} = \underset{q\times m}{C}\,\underset{m\times 1}{x(t)} + \underset{q\times p}{D}\,\underset{p\times 1}{u(t)} + \underset{q\times r}{Q}\,\underset{r\times 1}{z(t)} \end{cases}$$ CASO LINEARE

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), z(t)) \\ y = g(x(t), u(t), u(t)) \end{cases}$$ CASO GENERALE

PRIMA PARTE DEL CORSO : $m = q = p = 1$

ULTIMA PARTE DEL CORSO : $m > 1$ ...

OSS.

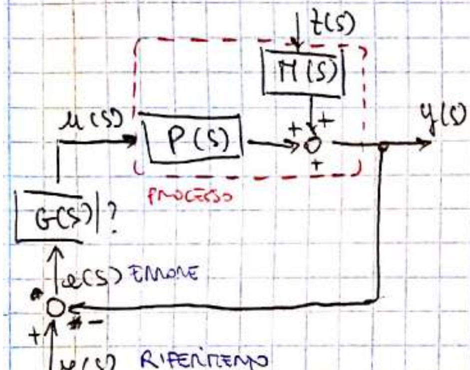
UNA VOLTA MODELIZZATO IL FENOMENO → BIVIO : DOMINIO DEL TEMPO O DI LAPLACE

O MAGGIOR PARTE DEL CORSO FAREMO METODOLOGIE CHE PASSANO NEL DOMINIO DI LAPLACE

CURIOSITÀ

NEI SISTEMI NON LINEARI NON È STATO TROVATO UN CORRISPETTIVO DI LAPLACE

NEL DOMINIO DI LAPLACE

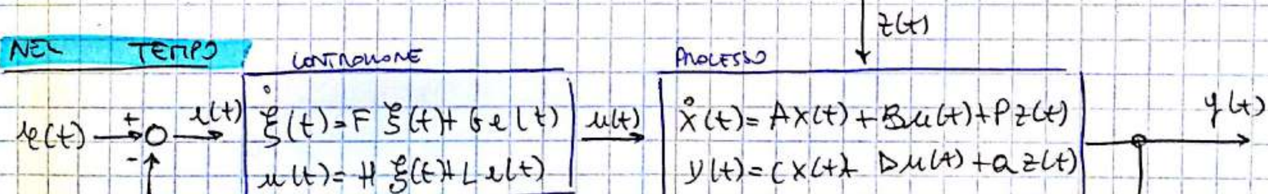


$P(s) = $ F. DI TRASF. ING-USC. DEL PROCESSO $= C(sI-A)^{-1}B + D$

$H(s) = $ F. DI TRASF. DIST-USC. DEL PROCESSO $= C(sI-A)^{-1}P + Q$

$G(s) = $ F. DI TRASF. ING-USC. DEL CONTROLLORE

NEL TEMPO



EX. BUFFER DI UN ROUTER

$[R_{out}(t)] = [R_{in}(t)] = bit/s$

$[B(t)] = bit$

$u(t) = R_{out}(t)$

$y(t) = B(t)$

$z(t) = R_{in}(t)$

$\dot{B}(t) = R_{in}(t) - R_{out}(t)$ EQUAZIONE CHE CARATTERIZZA IL SISTEMA

PONGO $x(t) = B(t)$

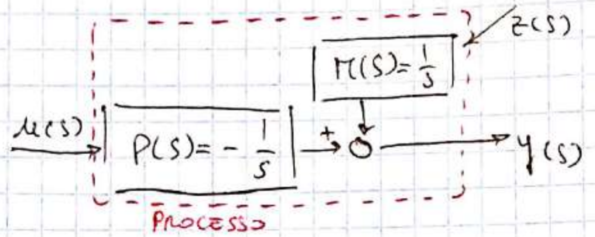
⇓

MODELLO DEL SISTEMA →
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -u(t) + z(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

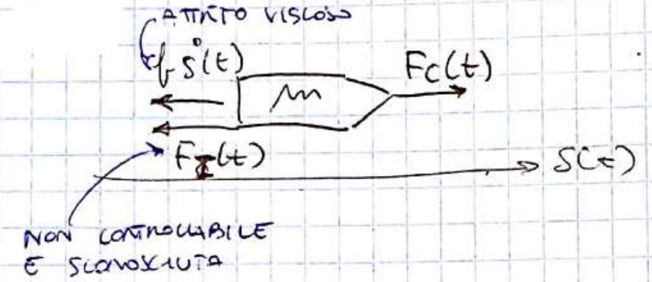
TRUCCO PRATICO!
LE COMPONENTI DELLO STATO SONO QUELLE CHE COMPAIONO CON LA DERIVATA O L'INTEGRALE
EX:
$\dot{a} + \dot{b} + \dot{c} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x$
$\ddot{d} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \dot{d} \end{pmatrix} = x$

$A=0 \quad B=-1 \quad C=1 \quad D=0 \quad P=1 \quad Q=0$

$$\left.\begin{aligned} P(s) &= 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot (-1) + 0 = -\frac{1}{s} \\ M(s) &= 1 \cdot \frac{1}{s} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{s} \end{aligned}\right\} \text{(APPLICANDO LA FORMULA)}$$



EX. MODELLO DI UN CORPO CHE SI MUOVE IN UN FLUIDO



$y(t) = s(t)$ GRANDEZZA DA CONTROLLARE

$u(t) = F_c(t)$ GRANDEZZA CONTROLLANTE

$z(t) = F_I(t)$ DISTURBO

$$m\ddot{s}(t) = F_c(t) - f\dot{s}(t) - F_I(t)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= s(t) \\ x_2(t) &= \dot{s}(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{f}{m}x_2(t) - \frac{z(t)}{m} + \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f}{m} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \overset{P}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/m \end{pmatrix}} z(t) + \overset{B}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}} u(t) \\ y(t) = \overset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

APPLICO LA TRASFORMATA DI LAPLACE AL SISTEMA

TRASFORMATE DI LAPLACE (REGOLE)

(t) $\qquad\qquad\qquad\qquad$ (s)

$$a F_1(t) + b F_2(t) \longrightarrow a f_1(s) + b f_2(s)$$

$$\dot{F}_1(t) = \frac{dF(t)}{dt} \longrightarrow s \cdot f(s) - F(0)$$

$$\int_0^t F(\tau)\, d\tau \longrightarrow \frac{1}{s} f(s)$$

$$\underbrace{F_1(t) * F_2(t)}_{} \longrightarrow f_1(s) \cdot f_2(s)$$

$$\int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau)\, d\tau$$

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + P z(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) + Q z(t) \end{cases} \xrightarrow{x(0)=0} \begin{cases} s X(s) = A X(s) + B u(s) + P z(s) \\ y(s) = C X(s) + D u(s) + Q z(s) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} (sI - A) X(s) = B u(s) + PE(s) \\ y(s) = C X(s) + D u(s) + Q z(s) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1} [B u(s) + P z(s)] \\ y(s) = C X(s) + D u(s) + Q z(s) \end{cases}$$

$$y(s) = C (sI - A)^{-1} [B u(s) + P z(s)] + D u(s) + Q z(s) =$$

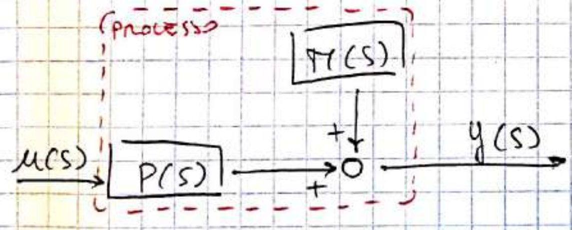
$$= \underbrace{[C (sI-A)^{-1} B + D]}_{P(s)} u(s) + \underbrace{[C (sI-A)^{-1} P + Q]}_{\Pi(s)} z(s)$$

Quindi

$$y(s) = P(s) u(s) + \Pi(s) z(s) \quad \text{con} \quad \begin{cases} P(s) = C(sI-A)^{-1} B + D \\ \Pi(s) = C(sI-A)^{-1} P + Q \end{cases}$$

FdT INGRESSO USCITA

FdT DISTURBO USCITA



EX. CALCOLO $P(s)$ e $\Pi(s)$ DELL'EX DI PRIMA CON $m = b = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0) \quad D = 0 \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Q = 0$$

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \longrightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{pmatrix} s+1 & +1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

- $P(s) = C (sI - A)^{-1} B + D = \dfrac{1}{s(s+1)}$
- $\Pi(s) = C (sI - A)^{-1} P + Q = -\dfrac{1}{s(s+1)}$

SE $u(t)=e^{-2t}$ e $z(t)=1$, $y(t)=?$ POICHÉ IL SISTEMA È LINEARE SFRUTTIAMO LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI E CALCOLIAMO SINGOLARMENTE L'USCITA A $u(t)$ e $z(t)$

FORMULE DI TRASFORMAZIONE

(t)	(s)
$u_0(t)$	1
1	$1/s$
$t^n/n!$	$1/s^{n+1}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

1° PASSO

PASSIAMO AL DOMINIO DI LAPLACE:

$$u(s)=\frac{1}{s+2} \qquad z(s)=\frac{1}{s}$$

$$y_1(s)=P(s)u(s)=\frac{1}{s(s+1)}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$y_2(s)=M(s)z(s)=-\frac{1}{s(s+1)}\cdot\frac{1}{s}$$

2° PASSO

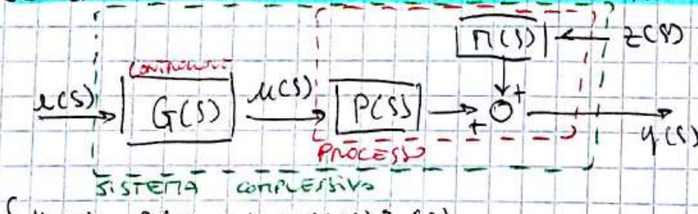
ANTITRASFORMO

$$y_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1/2}{s+2}\right]=\underbrace{1/2}_{\text{PERMANENTE}}\overbrace{-e^{-t}+1/2\,e^{-2t}}^{\text{TRANSITORIO}}$$

$$y_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right]=\underbrace{-t+1}_{\text{PERMANENTE}}\underbrace{-e^{-t}}_{\text{TRANSITORIO}}$$

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

SCHEMA DI CONTROLLO AD ANELLO APERTO (OPEN LOOP).



$$\begin{cases} y(s)=P(s)u(s)+M(s)z(s) \\ u(s)=G(s)e(s) \end{cases}$$

G(s): FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA COMPLESSIVO

TUTTE LE SPECIFICHE PROGETTUALI CHE ANDIAMO A IMPORRE DEVONO ESSERE SODDISFATTE DAL SISTEMA COMPLESSIVO

FdT DEL SISTEMA COMPLESSIVO:

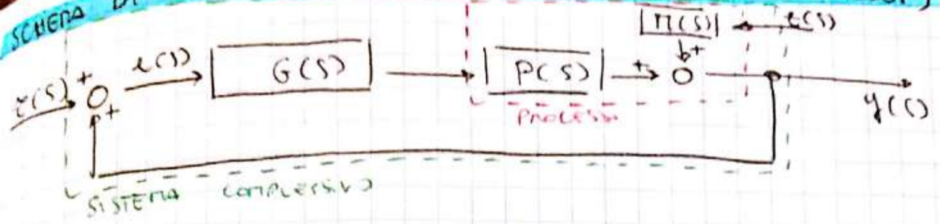
$$\begin{cases} y(s)=P(s)u(s)+M(s)z(s) \\ u(s)=G(s)e(s) \end{cases} \rightarrow y(s)=\underbrace{P(s)G(s)}_{W(s)}\overbrace{e(s)}^{\text{INGRESSO}}+\underbrace{M(s)}_{W_M(s)}\overbrace{z(s)}^{\text{DISTURBO}}$$

$W(s)$: FdT DEL SISTEMA COMPLESSIVO

$W_M(s)$: FdT DISTURBO-USCITA DEL SISTEMA COMPLESSIVO

OSS: $W_M(s)$ NON HA LA $G(s)$, QUINDI L'OPEN-LOOP NON PUÒ CONTROLLARE I DISTURBI!

SCHEMA DI CONTROLLO AD ANELLO CHIUSO (CLOSED-LOOP)



$$\begin{cases} y(s) = P(s)u(s) + \Pi(s)\,z(s) \\ u(s) = G(s)\,e(s) \\ e(s) = r(s) - y(s) \end{cases}$$

SPESSO: $r(s) = y_d(s)$ USCITA DESIDERATA

$\Downarrow$

$$y(s) = P(s)\,G(s)\,(r(s) - y(s)) + \Pi(s)\,z(s)$$

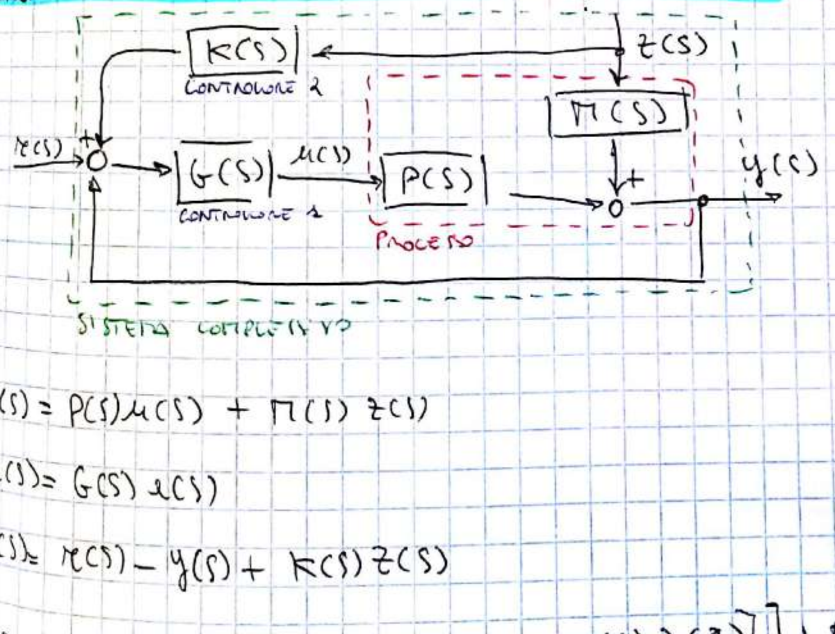
$\Downarrow$ SUPPONGO UN INGRESSO E UN'USCITA

$$y(s)\,(1 + P(s)G(s)) = P(s)G(s)r(s) + \Pi(s)\,z(s)$$

$\Updownarrow$

$$y(s) = \underbrace{\frac{P(s)G(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W(s)} r(s) + \underbrace{\frac{\Pi(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W_z(s)} z(s)$$

SCHEMA DI CONTROLLO A DOPPIA CONTROREAZIONE



OSS.
COME SCELGO QUALE SCHEMA DI CONTROLLO USARE? IN GENERALE SI USA L'ANELLO CHIUSO (INFATTI IL DISTURBO NON È MISURABILE). SE SPECIFICANO CHE IL DISTURBO È MISURABILE SI USA QUELLO A DOPPIA CONTROREAZIONE

$$y(s) = P(s)u(s) + \Pi(s)\,z(s)$$

$$u(s) = G(s)\,e(s)$$

$$e(s) = r(s) - y(s) + K(s)\,z(s)$$

$$y(s) = P(s)\big[G(s)\,[r(s) - y(s) + K(s)z(s)]\big] + \Pi(s)z(s)$$

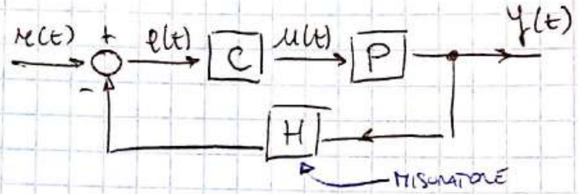
$\Updownarrow$

$$y(s) = \underbrace{\frac{P(s)\,G(s)}{1+P(s)G(s)}}_{W(s)} r(s) + \underbrace{\frac{P(s)G(s)K(s) + \Pi(s)}{1 + P(s)G(s)}}_{W_z(s)} z(s)$$

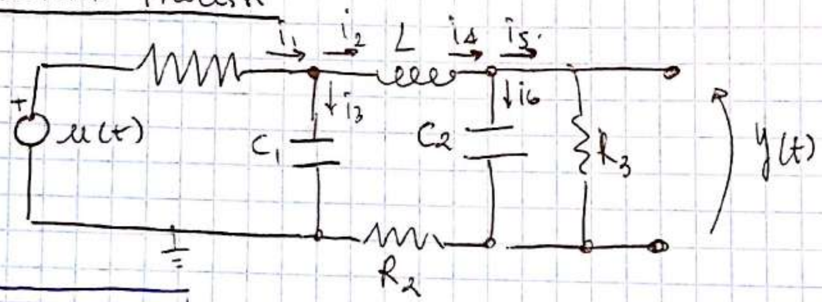
RIEPILOGO

	ANELLO APERTO	ANELLO CHIUSO	DOPPIA CONTROREAZIONE
$W(S)$	$P(S)\,G(S)$	$\frac{P(S)G(S)}{1+P(S)G(S)}$	$\frac{P(S)G(S)}{1+P(S)G(S)}$
$W_z(S)$	$M(S)$	$\frac{M(S)}{1+P(S)G(S)}$	$\frac{P(S)G(S)K(S) \pm M(S)}{1+P(S)G(S)}$

$\boxed{\text{TUTOR}}$ (RIPASSO tds)



ESEMPIO PROCESSI



$$\boxed{\begin{aligned} i &= C\frac{dv}{dt} \\ v &= L\frac{di}{dt} \\ v &= Ri \end{aligned}}$$

eq. CARATTERISTICHE

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$\frac{u(t) - v_{C_1}}{R_1} = i_L + C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} \quad (1)$$

$$i_4 = i_5 + i_6$$

$$i_L = C_2\frac{dv_{C_2}}{dt} + \frac{v_{C_2}}{R_3} \quad (2)$$

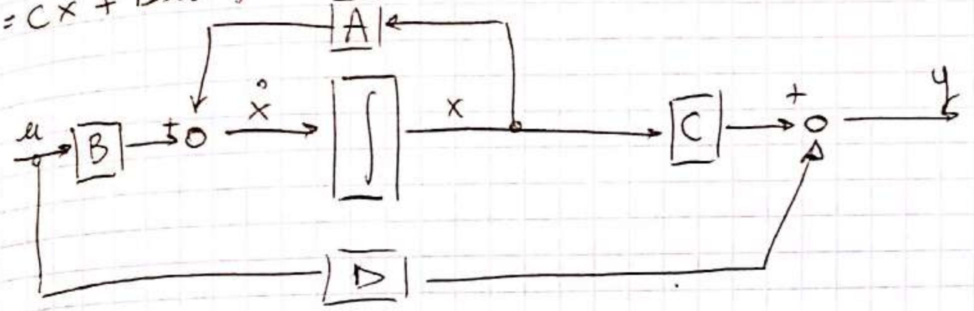
$$v_{C_1} = R_2 i_L + v_{C_2} + L\frac{di_L}{dt} \quad (3)$$

$$X = \begin{pmatrix} v_{C_1} \\ i_L \\ v_{C_2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \dot{X}_1 = -\frac{1}{R_1C_1}X_1 - \frac{1}{C_1}X_2 + \frac{1}{R_1C_1}u(t) \\ \dot{X}_2 = \frac{1}{L}X_1 - \frac{R_2}{L}X_2 - \frac{1}{L}X_3 \\ \dot{X}_3 = \frac{1}{C_2}X_2 - \frac{1}{C_2R_3}X_3 \\ y = X_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2 R_{03}} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

SCHEMA DI SIMULAZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

$$\left.\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}\right\} \text{RAPPRESENTAZIONE IMPLICITA}$$



SOLUZIONI DEL SISTEMA

$$\left.\begin{cases} x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x(t_0)}_{\text{EV. LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} B e^{A(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau}_{\text{EV. FORZATA}} \\ y(t) = \underbrace{C e^{A(t-t_0)} x(t_0)}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \left[C e^{A(t-\tau)} B + D\,\delta(t-\tau) \right] d\tau}_{\text{EVOLUZIONE FORZATA}} \end{cases}\right\} \text{RAPPRESENTAZIONE ESPLICITA}$$

RICHIAMI SULLA TRASFORMATA DI LAPLACE

$f(t)$ DEFINITA PER $t \in [0, +\infty)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

EX.

$f(t) = e^{at}$

CONVERGE SOLO SE $Re(a-s) < 0 \Leftrightarrow Re(s) > a$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

PROPRIETÀ

1) $\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$

2) $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$

APPLICHIAMO LA TRASFORMATA DI LAPLACE ALLA RAPPRESENTAZIONE IMPLICITA

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \; ; \; x(t_0) = x_0 \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}$$

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (sI - A)X(s) = x_0 + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}x_0 + (sI-A)^{-1}B \cdot U(s) \\ Y(s) = C(sI-A)^{-1}x_0 + \underbrace{\left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]}_{W(s)} U(s) \end{cases}$$

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE

$$y_r = \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

OSS.

LA RISPOSTA A REGIME DEVE ESSERE INDIPENDENTE DALLO STATO INIZIALE.
LA RISPOSTA, OLTRE A RISPOSTA LIBERA + RISPOSTA FORZATA, PUO' ESSERE SCOMPOSTA IN RISPOSTA TRANSITORIA + RISPOSTA A REGIME PERM.
N.B → LA RISPOSTA LIBERA È TUTTA COMPRESA NELLA RISPOSTA TRANSITORIA.

CALCOLIAMO LA RISPOSTA A REGIME CON UN INGRESSO SINUSOIDALE

$$\sin(t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$ CONSIDERO PRELIMINARMENTE $e^{j\omega t}$

$\xi = t - \tau$, $d\xi = -d\tau$

$$y_r = \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)e^{j\omega\tau}\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)e^{j\omega\tau}\,d\tau = -\int_{-\infty}^{t} W(\xi)e^{j\omega t}\cdot e^{-j\omega\xi}\,d\xi =$$

$$= e^{j\omega t}\int_{0}^{+\infty} W(\xi)e^{-j\omega\xi}\,d\xi = e^{j\omega t}\,W(s)\Big|_{s=j\omega}$$

$$W(j\omega) = \underbrace{M(j\omega)}_{\text{MODULO}} \cdot e^{j\overbrace{\phi(j\omega)}^{\text{FASE}}}$$

ORA CALCOLIAMO LA $y_{p}(t)$ AL SENO (t)

$$y_r(t) = \frac{e^{j\omega t} W(j\omega) - e^{-j\omega t} W(j\omega)}{2j} = \frac{e^{j\omega t} M(\omega) e^{j\phi(\omega)} - e^{-j\omega t} M(\omega) e^{-j\phi(\omega)}}{2j} =$$

$$= M(\omega) \frac{e^{j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} = M(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$$

GRANDE RISULTATO! L'INGRESSO È MODIFICATO SOLO IN MODULO E FASE!

DIAGRAMMA DI BODE

$W(s) = C(sI - A)^{-1}B$

SERVE A GRAFICARE MODULO e FASE DI $W(j\omega)$ CHE, AL VARIARE DELLA FREQUENZA ω, INDICA DI QUANTO L'INGRESSO SINUSOIDALE VIENE MODIFICATO IN MODULO e IN FASE (PER LE CONSIDERAZIONI FATTE PRIMA).

$$W(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n} \qquad n \geq m$$

$W(j\omega) = W(s)\big|_{s=j\omega}$ RISPOSTA ARMONICA

$|W(j\omega)|$ $\angle W(j\omega)$ (DUE DIAGRAMMI DIFFERENTI)

PER DISEGNARE I DIAGRAMMI ABBIAMO BISOGNO DELLA $W(s)$ IN FORMA DI BODE:

$$W(s) = K \frac{\prod \text{MONOMIO} \ \prod \text{BINOMIO} \ \prod \text{TRINOMIO}}{\prod \text{MONOMIO} \ \prod \text{BINOMIO} \ \prod \text{TRINOMIO}}$$

- MONOMIO : s
- BINOMIO : $1 + \tau s$
- TRINOMIO : $1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

- ξ SMORZAMENTO
- ω_n PULSAZIONE NATURALE

Ex,

$$W(s) = \frac{2s}{3+s} = \frac{2s}{3(1+\frac{1}{3}s)}$$

$K = \frac{2}{3}$

s MONOMIO

$1 + \frac{1}{3}s$ TERMINE BINOMIO

OSS.

$$\angle W_1 \cdot W_2 = \angle W_1 + \angle W_2$$

INFATTI:

$$\left.\begin{array}{l} W_1 = M_1 \cdot e^{j\phi_1} \\ W_2 = M_2 \cdot e^{j\phi_2} \end{array}\right\} \longrightarrow W_1 \cdot W_2 = \underbrace{M_1 \cdot M_2}_{\text{PRODOTTO! NON SOMMA BRUTTO}} e^{j\overbrace{(\phi_1+\phi_2)}^{}}$$

SOMMA DELLE FASI

OSS.

$$\angle \frac{1}{W_1} = -\angle W_1$$

OSS.

NON VALE LO STESSO PER I MODULI! PER QUESTO MOTIVO IL MODULO VIENE TRACCIATO IN DECIBEL (dB)

$$|W|_{dB} = 20 \log_{10} |W|$$

INFATTI IN dB:

$$|W_1 \cdot W_2|_{dB} = 20 \log_{10} |W_1 \cdot W_2| = 20 \log_{10} |W_1| + 20 \log_{10} |W_2| = |W_1|_{dB} + |W_2|_{dB}$$

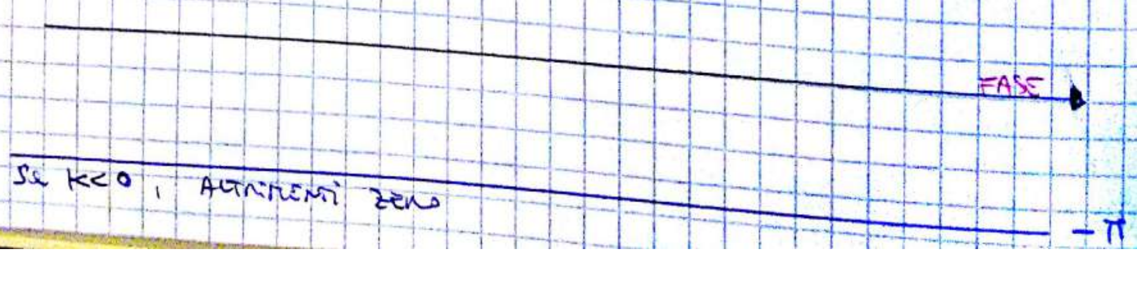
OSS.

ANCHE ω VIENE ESPRESSO IN dB NEI DIAGRAMMI DI BODE

TERMINE COSTANTE

$$\boxed{K = \text{COSTANTE} = W(j\omega)}$$

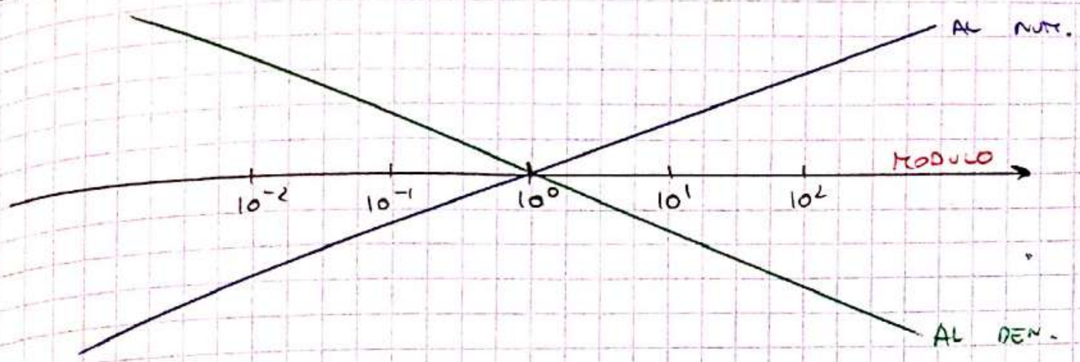
$$|K|_{dB} = 20 \log_{10} |K|$$

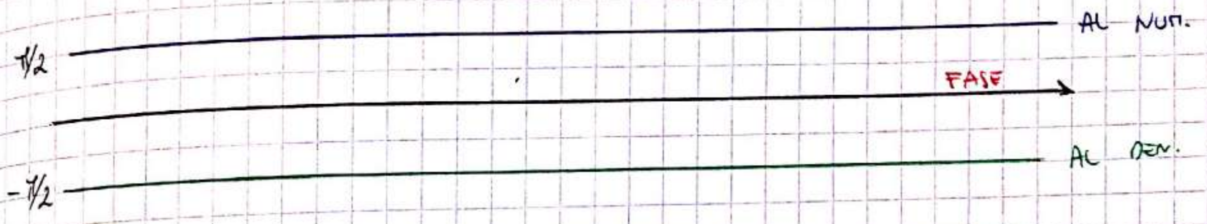


TERMINE MONOMIO

$$\boxed{j\omega = W(j\omega)}$$

$|j\omega|_{dB} = 20\log_{10}|j\omega| = 20\log_{10}\omega$ QUINDI, POICHÉ SULL'ASSE x C'È $\log_{10}\omega$, È UNA RETTA CON PENDENZA 20dB PER DECADE





TERMINE BINOMIO

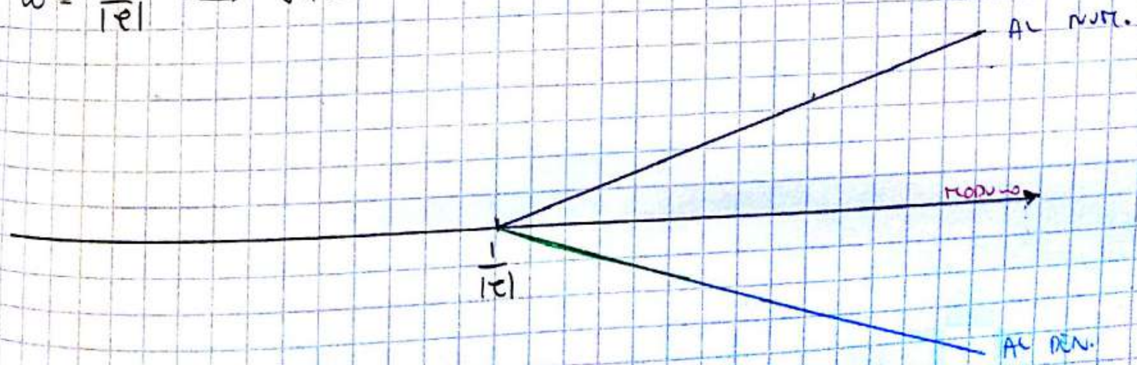
$$\boxed{W(j\omega) = 1 + \tau s}$$

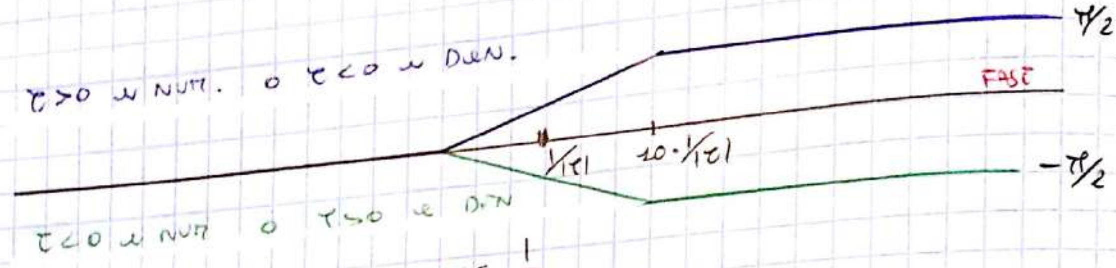
$|W(j\omega)|_{dB} = |1+\tau s|_{dB} = 20\log_{10}|1+\tau j\omega| = 20\log_{10}\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$

Se $\omega \gg \frac{1}{|\tau|} \rightarrow$ VALE $20\log_{10}\omega|\tau| = 20\log_{10}\omega + 20\log_{10}|\tau|$

Se $\omega \ll \frac{1}{|\tau|} \rightarrow$ VALE 0

Se $\omega = \frac{1}{|\tau|} \rightarrow$ VALE circa 3



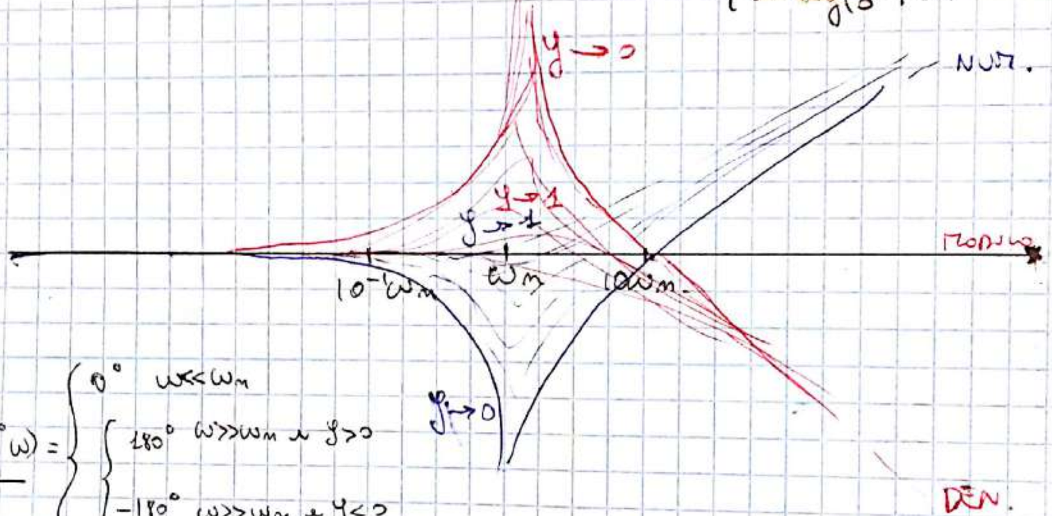


$$\angle 1+\tau\omega = \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ \pi/2 & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \text{ e } \tau>0 \\ -\pi/2 & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \text{ e } \tau<0 \end{cases}$$

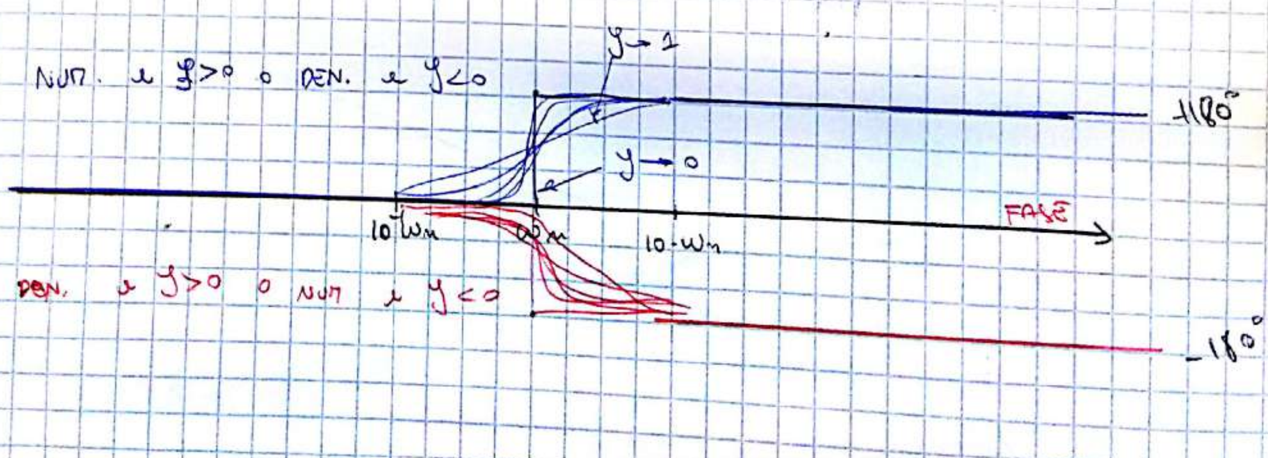
TERMINE TRINOMIO

$$\boxed{W(j\omega) = 1 + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n}}$$

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n \\ 40\log_{10}\frac{\omega}{\omega_n} & \omega \gg \omega_n \\ 20\log_{10}2|\xi| & \omega = \omega_n \end{cases}$$



$$\angle W(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \omega \ll \omega_n \\ \begin{cases} 180^\circ & \omega \gg \omega_n \text{ e } \xi>0 \\ -180^\circ & \omega \gg \omega_n \text{ e } \xi<0 \end{cases} \end{cases}$$



PASSAGGIO DAL CONTROLLORE NEL DOMINIO DI LAPLACE, AL CONTROLLORE NEL TEMPO

• TERMINI E NOZIONI PRELIMINARI

$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}$ — fdT del processo

$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$ — fdT del controllore

$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)}$ — fdT controllore + processo

$n_p = \text{grado}(N_P(s))$ $\quad n_g = \text{grado}(N_G(s))$ $\quad n_w = \text{grado}(N_W(s))$

$d_p = \text{grado}(D_P(s))$ $\quad d_g = \text{grado}(D_G(s))$ $\quad d_w = \text{grado}(D_W(s))$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO:
- STRETTAMENTE PROPRIA $n_w < d_w$
- PROPRIA $n_w = d_w$
- IMPROPRIA $n_w > d_w$ ← NON POSSONO ESISTERE PER PROBLEMI DI REALIZZABILITÀ FISICA

EX.

$$P(s) = \frac{\boxed{s(s+1)}}{\boxed{(s+2)^2(s+4)}} \qquad \begin{matrix} \leftarrow N_P(s) & n_p = 2 \\ \leftarrow D_P(s) & d_p = 3 \end{matrix}$$

Def: DIMENSIONE DI UNA RAPPRESENTAZIONE INGRESSO – STATO – USCITA

DATO $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$, LA SUA DIMENSIONE È LA DIMENSIONE DELLA MATRICE A

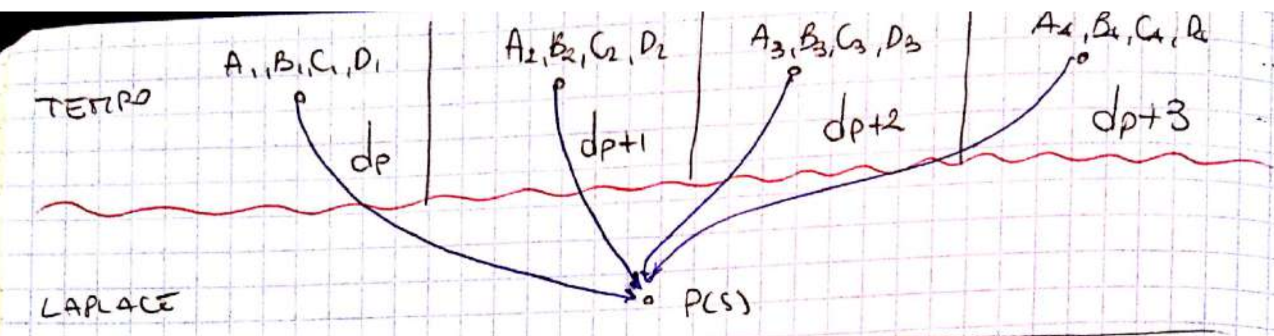
Def: POLI E ZERI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

POLI: ZERI DI $D(s)$

ZERI: ZERI DI $N(s)$

OSS.

PIÙ RAPPRESENTAZIONI INGRESSO – STATO – USCITA POSSONO ESSERE RAPPRESENTATE DA UNA SOLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO. IN PARTICOLARE UNA FDT PUÒ RAPPRESENTARE INFINITE RAPPRESENTAZIONE INGRESSO – STATO – USCITA. QUINDI NEL PASSAGGIO DALLA FDT AL TEMPO BISOGNA SCEGLIERE UNA DELLE INFINITE RAPPRESENTAZIONI



OGNI RAPPRESENTAZIONE SI DIFFERENZIA DALLA DIMENSIONE DELLA STESSA.

QUELLA A <u>DIMENSIONE MINIMA</u> È QUELLA CHE HA DIMENSIONE <u>d_p</u>

<u>OSS</u>

OVVIAMENTE QUELLO A DIMENSIONE MINIMA È IL PIÙ INTERESSANTE

DALLA FdT ALLA RAPPRESENTAZIONE INGRESSO-STATO-USCITA

$$P(s) = \underbrace{\boxed{D}}_{\text{COSTANTE}} + \boxed{\frac{C_{n-1} s^{n-1} + \cdots + C_1 s + C_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}}$$

STRETTAMENTE PROPRIA

<u>EX</u>

$$P(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

$$\begin{array}{r|l} s+1 & s+2 \\ -s-2 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$P(s) = 1 + \frac{-1}{s+2}$$

<u>OSS</u>

$$D(s) \cdot Q(s) + R(s) = N(s)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$$

RAPPRESENTAZIONE RAGGIUNGIBILE

<u>OSS</u> LA DIM. DI INGRESSO E USCITA LA CONSIDERIAMO = 1

$$\underset{n \times n}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \underset{n \times 1}{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{1 \times n}{C} = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \end{pmatrix}$$

<u>OSS</u> n È ~~LA DIM.~~ IL GRADO DEL DENOMINATORE DELLA FdT

<u>OSS</u>

PER UN INGRESSO E UNA USCITA, LA DIMENSIONE È MINIMA, E QUINDI LA RAPPRESENTAZIONE È ANCHE OSSERVABILE.

PER PIÙ INGRESSI E PIÙ USCITE QUESTO NON È PIÙ VERO. ~~[illegible]~~

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

$$A,B,C,D \xrightarrow{\quad T \quad} \tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D}$$

$\tilde{A} = TAT^{-1}$

$\tilde{B} = TB$

$\tilde{C} = CT^{-1}$

$\tilde{D} = D$

QUALUNQUE SIA LA MATRICE T, LA RAPPRESENTAZIONE CHE TROVIAMO HA LA STESSA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

DIM.

$$\tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}+\tilde{D} = CT^{-1}\left(sTT^{-1}-TAT^{-1}\right)^{-1}TB+D =$$

$$= CT^{-1}\left[T(sI-A)T^{-1}\right]^{-1}TB+D =$$

OSS
$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

$$= CT^{-1}T(sI-A)^{-1}T^{-1}TB+D = \underbrace{C(sI-A)^{-1}B+D}_{\square}$$

HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO INGRESSO – USCITA

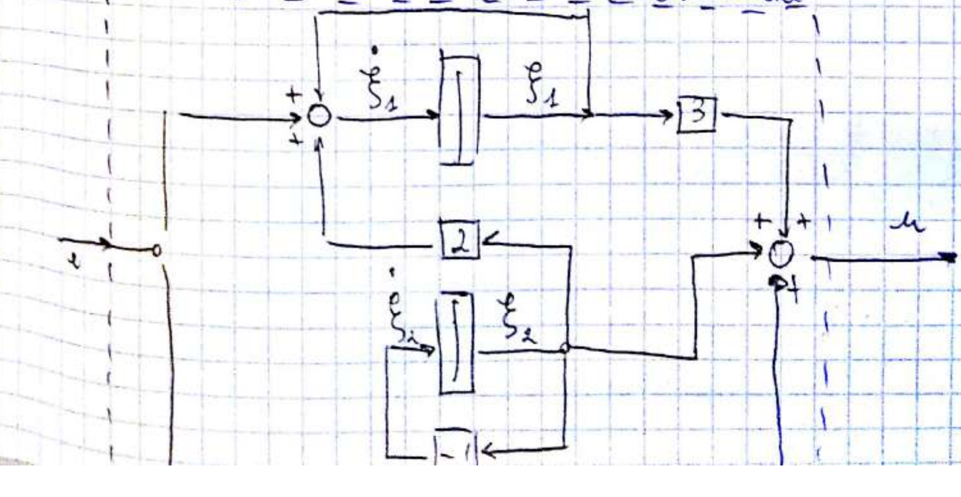
COME DETERMINARE IL PROCESSO FISICO DAL MODELLO

ES. DI CONTROLLORE

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1 + 2\xi_2 + e \\ \dot{\xi}_2 = -\xi_2 \\ u = 3\xi_1 + \xi_2 + e \end{cases}$$

$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$H = (3 \quad 1)$ $L = 1$



Def: PUNTO DI EQUILIBRIO

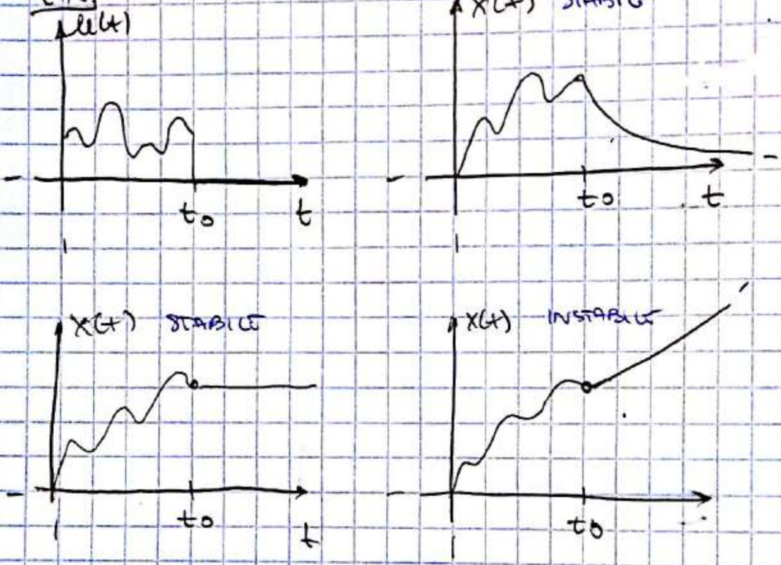
$\dot{x} = Ax \qquad \dot{x} = 0$

$Ax = 0$ INSIEME DEI PUNTI DI EQUILIBRIO

Def: SISTEMA LINEARE ASINT. STABILE

SISTEMA LIN. ASINT. STABILE $\Longleftrightarrow$ SE AD UN ISTANTE $t_0 > 0$ PONGO $u(t) = 0$ $\forall t \geq t_0$, ALLORA $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$

Es.



OSS.

$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \rightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$

INFATTI $y(t) = Ax + Bu$ e u è POSTO A ZERO

Soluzione di $\dot{x} = Ax + Bu$

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0)}_{\text{RISPOSTA IN EV. LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot Bu(\tau)\, d\tau}_{\text{RISPOSTA FORZATA}}, \quad \text{con } t_0 > 0$$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m} R_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i t}$$

λ_i: i-ESIMO AUTOVALORE DI A

r: N° DI AUTOVALORI DI A

m_i: MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA DELL'AUTOVALORE i-ESIMO

R_{ik}: RESIDUO

QUI AFFERMAZIONE STABILITÀ ASINTOTICA

PERCHÉ $x(t)$ VADA A ZERO SE $u(t)=0$, ALLORA

$$\lim_{t\to+\infty} e^{A(t-t_0)} x(t_0) = 0$$

MA PER LA DEF. DI e^{At}, QUEL LIMITE È SODDISFATTO SE GLI AUTOVALORI DI A ~~TUTTI~~ HANNO PARTE REALE < 0.

QUINDI:

SISTEMA ASINT. STABILE $\iff$ TUTTI GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE DINAMICA DEVONO AVERE PARTE REALE MINORE DI ZERO

OSS.

TANTO PIÙ I λ_i SONO NEGATIVI, TANTO PIÙ LA CONVERGENZA A ZERO È RAPIDA. IN ALCUNI CASI IL TEMPO È IMPORTANTE

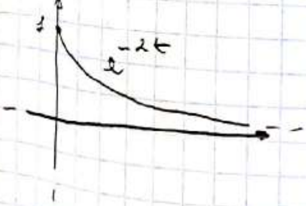
EX DOMANDA DI ESAME

VELOCITÀ DI ALMENO e^{-2t}. QUINDI GLI AUTOVALORI DEVONO AVERE PARTE REALE < -2

OSS.

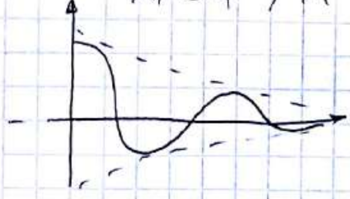
DAL MOMENTO CHE e^{At} È FORMATO DA UNA ~~SOMMATORIA~~ PRODUTTORIA DI $e^{\lambda_i t}$, QUELLO CHE CONTA ALLA FINE DELLA VELOCITÀ DI ESAURIMENTO DEL TRANSITORIO È QUELLO 'PIÙ LENTO'; QUINDI QUELLO A PARTE REALE PIÙ ALTA.

$\lambda_i \in \mathbb{R}$



CASO AUTOVALORI REALI

$\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_i = \alpha_i \pm j\omega_i$



CASO AUTOVALORI COMPLESSI E CONIUGATI

TUTTI E DUE A PARTE REALE NEGATIVA

EX

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ IL SISTEMA CARATTERIZZATO DA QUESTA MATRICE DINAMICA, È STABILE ASINTOTICAMENTE?

$n = 2$

$$|\lambda I - A| = 0 \iff \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda+1)(\lambda-1) - 2 = 0$$

$$\iff \lambda^2 - 3 = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{3}$$

QUINDI IL SISTEMA NON È ASINTOTICAMENTE STABILE.

OSS

$$P(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{C(sI-A)^{a}B}{|sI-A|} + D$$

SE NON CI SONO CANCELLAZIONI CON IL DENOMINATORE, IL DEN. DELLA $P(s)$ È IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI A.

EX

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C = (3 \ \ 1)$ $D = 1$

ESSENDO A TRIANGOLARE, I SUOI AUTOVALORI SONO $\lambda_1 = 1$ E $\lambda_2 = -1$

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \longrightarrow (sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

$$C(sI-A)^{-1}B + D = (3 \ \ 1)\begin{pmatrix} s+1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(s+1)(s-1)} + 1 = \frac{3\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s-1)} = \frac{3}{s-1} + 1$$

OSS

UN AUTOVALORE SI PERDE, SI SEMPLIFICA CON LO ZERO

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{AUTOVALORI} \\ \text{DI} \\ \text{'A'} \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{POLI DI} \\ P(s) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{AUTOVALORI} \\ \text{NASCOSTI DEL} \\ \text{PROCESSO} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{AUTOVALORI} \\ \text{DI} \\ A \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{POLI DI} \\ P(s) \end{array} \right\}$$

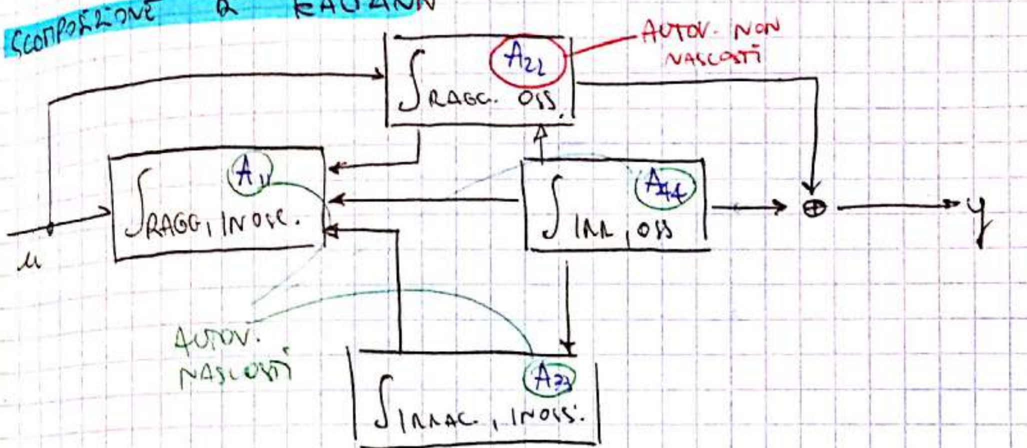
OSS. Gli autovalori nascosti NON sono controllabili. Il controllore $G(s)$ non può controllarli

Def: **STABILIZZABILITÀ**

Processo stabilizzabile $\iff$ TUTTI gli autovalori nascosti del processo sono a parte reale negativa

OSS. Il processo dell'ultimo esercizio è stabilizzabile, posso portare l'altro autovalore a un qualsiasi valore negativo, ma la velocità rimarrà sempre vincolata a quello nascosto che è '-1'.

SCOMPOSIZIONE DI KALMAN



$$
\begin{cases}
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\
y = \begin{pmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

OSS. Essendo A triangolare, ~~l'auto~~ gli autovalori che caratterizzano il sistema sono quelli che caratterizzano A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44} (cioè quelli dei singoli sistemi).

OSS

HO INFLUENZA SUGLI AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI E NON OSSERVABILI, MA NON POSSO VEDERNE GLI EFFETTI

EX

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

TRIANGOLARE A BLOCCHI:

AUTOVALORI DI $\left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 \end{array}\right)$ + AUTOVALORI DI (-2)

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = -2$

$R = \left(B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B\right) \quad m = \text{rango}(R)$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ \hline CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \qquad p = \text{rango}(O)$$

rango R = N° AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI

rango O = N° AUTOVALORI INOSSERVABILI

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}\, R = 2 \Rightarrow 2 \text{ AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI}$$

$$O = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}\, I = 1 \Rightarrow 2 \text{ AUTOVALORI OSSERVABILI}$$

TEST DI HAUTUS (RAGGIUNGIBILITÀ)

$\bar\lambda$ È RAGGIUNGIBILE?

$$\text{rango}\left(A - \bar\lambda I \mid B\right) = \begin{cases} n \Rightarrow \bar\lambda \text{ È RAGG.} \\ < n \Rightarrow \bar\lambda \text{ NON È RAGGIUNGIBILE} \end{cases}$$

$$\text{rango}(A - \bar{\lambda}_2 I \mid B) = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \bar{\lambda}_2 = 0 \text{ È RAGGIUNGIBILE}$$

$$\text{rango}(A - \lambda_1 I \mid B) = \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \bar{\lambda}_1 = -1 \text{ NON È RAGG.}$$

TEST DI HAUTUS (OSSERVABILITÀ)

$\bar{\lambda}$ È OSSERVABILE?

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A - \bar{\lambda} I \\ \hline C \end{pmatrix} = \begin{cases} n \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ È OSSERVABILE} \\ < n \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ È INOSSERVABILE} \end{cases}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \text{ è OSSERVABILE}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ È INOSS.}$$

$\lambda_2 = 0$ ragg. e oss.

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \text{ iragg. e inoss.} \\ \lambda_3 = -2 \text{ ragg. e inoss.} \end{array}\right\}$ AUTOVALORI NASCOSTI

IL SISTEMA È STABILIZZABILE

MASSIMA VELOCITÀ DI CONVERGENZA DEL TRANSITORIO ANCHE DOPO AVER COLLEGATO IL CONTROLLORE?

e^{-t}

OSS.

IL DENOMINATORE DI $P(s)$ È 's', INFATTI È CARATTERIZZATO DAGLI ~~DALL~~ ~~BOBBY~~ AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI E OSSERVABILI

INTERCONNESSIONE DI SISTEMI

$$u \rightarrow \boxed{P_1(s) = \frac{1}{s+1}}_1 \rightarrow \boxed{P_2(s) = \frac{s+1}{s-2}}_2 \rightarrow y$$

PROCESSO

$$P(s) = P_2(s) \cdot P_1(s) = \frac{1}{s-2}$$

OSS

C'È STATA UNA CANCELLAZIONE, UN AUTOVALORE DIVENTA NASCOSTO

$$u \rightarrow \boxed{P(s) = \frac{1}{s-2}} \rightarrow y$$

GLI AUTOVALORI SONO RIMASTI DUE! SOLO CHE UNO È DIVENTATO NASCOSTO.

PROCESSO 1

$A_1 = -1 \quad B_1 = 1$

$C_1 = 1$

PROCESSO 2

$A_2 = 2 \quad B_2 = 1$

$C_2 = 3 \quad D_2 = 1$

$$u \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 \\ y_1 = x_1 \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \dot{x}_2 = 2x_2 + u_2 \\ y_2 = 3x_2 + u_2 \end{matrix}} \rightarrow y$$

$$\left.\begin{matrix} u_1 = u \\ u_2 = y_1 \\ y = y_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 & u \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \\ y = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

MATRICE DINAMICA DELL'INTERCONNESSIONE DELLA CASCATA

$$A_c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_c = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D_c = 0$$

$$R = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow 2 \text{ STATI RAGGIUNGIBILI}$$

$$O = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{array}\right) \rightarrow 1 \text{ STATO OSSERVABILE}$$

Oss) L'autovalore '2' è sicuramente osservabile e raggiungibile perché compare nella FdT complessiva, quindi

$\lambda_1 = -1$ ragg.

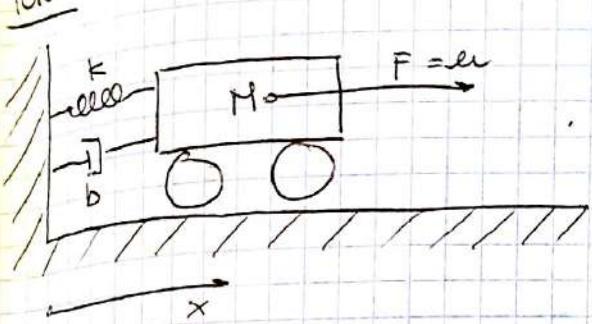
$\lambda_2 = 2$ ragg. e osservabile

Regola pratica

Cancellazione polo – zero $\longrightarrow$ autovalore ragg. e inoss.

Cancellazione zero – polo $\longrightarrow$ autovalore oss e irrag.

Tutor



$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = v = \dot{x}_1 \end{cases}$$

$$Ma = u - kx - bv \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{k}{M}x_1 - \frac{b}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

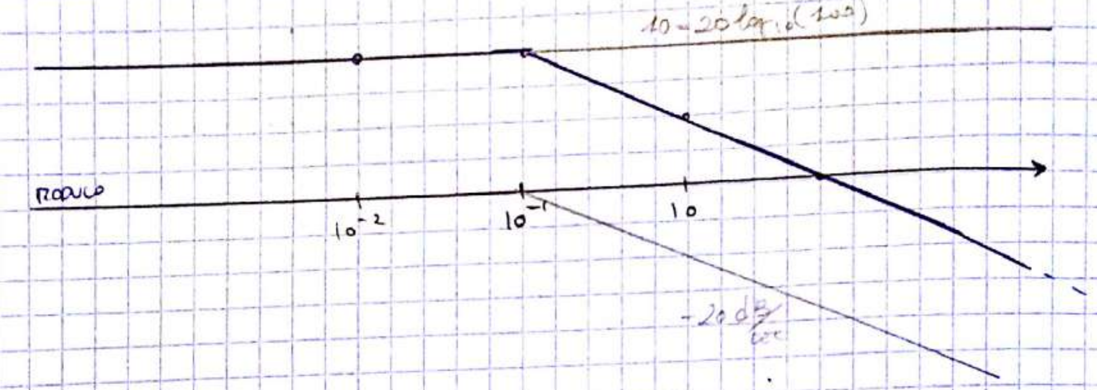
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k/M & -b/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1/M \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} u \\ y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad D = 0 \end{cases}$$

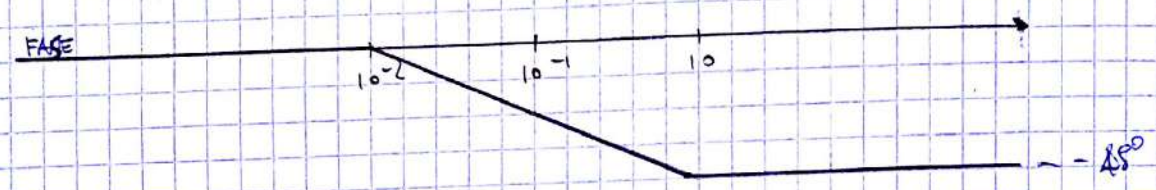
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -b/M \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/M \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + b/M & +1 \\ -k/M & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/M \end{pmatrix}}{s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{k}{M}} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$ FdT del sistema

EX (DIAGRAMMI DI BODE)

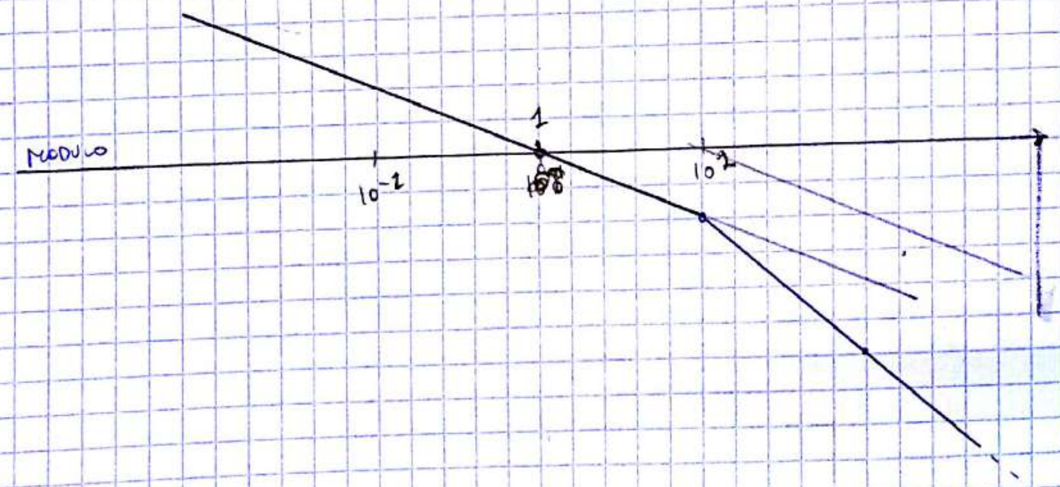
$$W(s) = \frac{10}{\left(\frac{1}{10}+s\right)} = \frac{10}{\frac{1}{10}(1+10s)} = \frac{100}{1+10s}$$

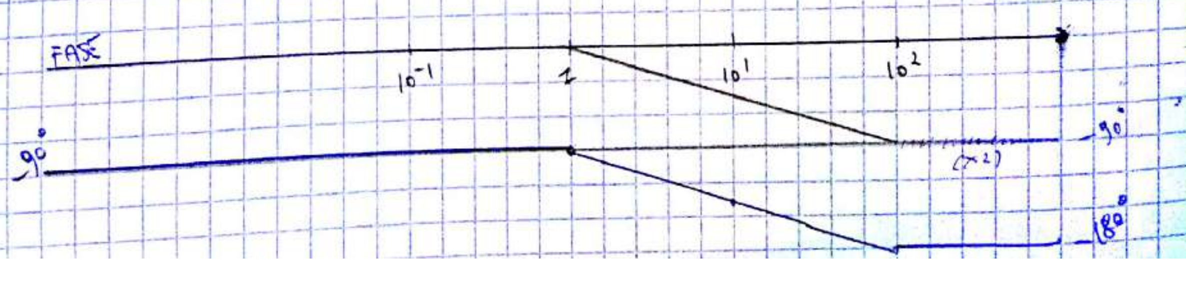




EX DIAGRAMMI DI BODE

$$W(s) = \frac{10}{s(10+s)} = \frac{\cancel{10}}{\cancel{10}\, s(1+\frac{1}{10}s)} = \frac{1}{s(1+\frac{1}{10}s)}$$





EX,

$$W(s) = \frac{2(s+2)}{(s^2-1)} = -4\,\frac{1+\frac{s}{2}}{(1+s)(1-s)}$$

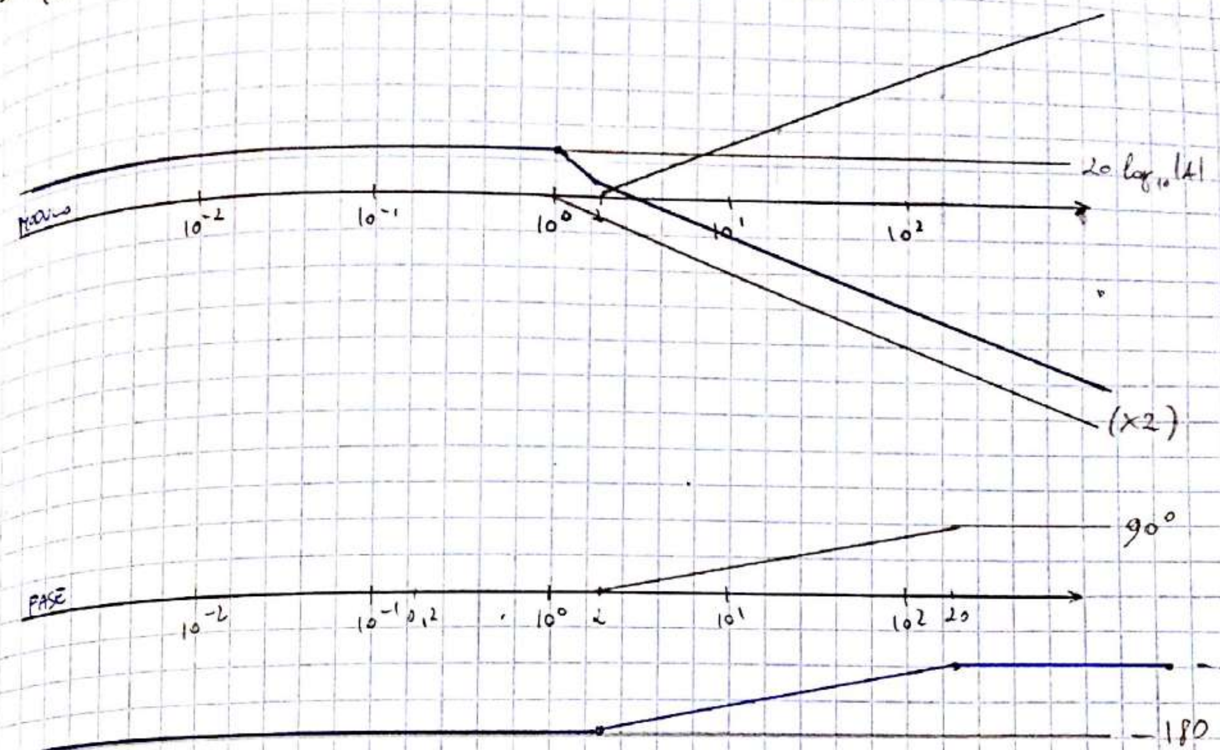
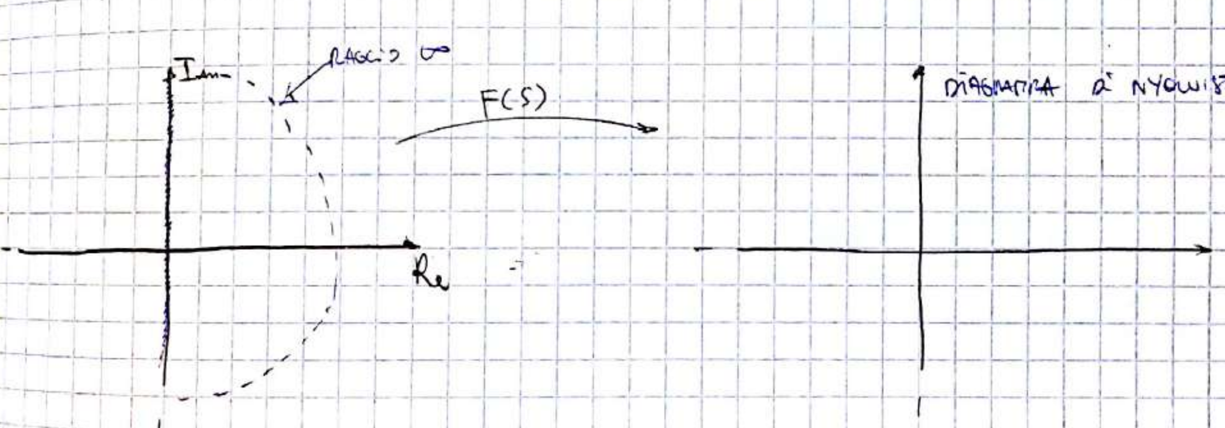


DIAGRAMMA DI NYQUIST

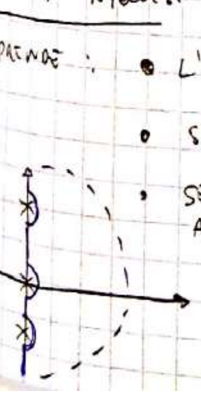
$s^* = a + jb \qquad |s^*| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \angle s^* = \arctan\frac{b}{a} \qquad s^* = \rho e^{j\phi}$

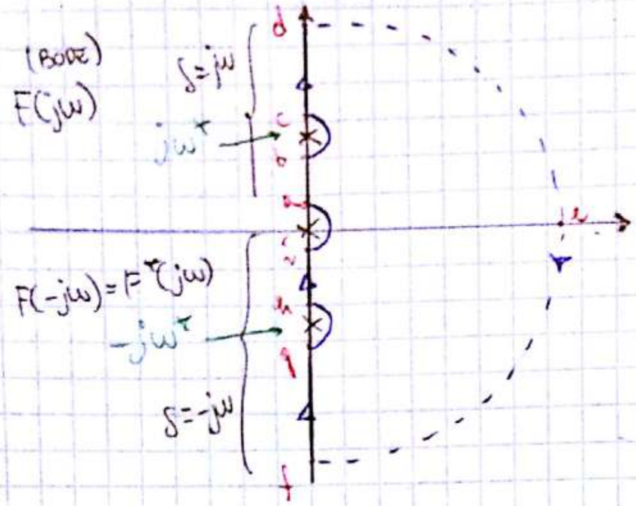


IL DIAGRAMMA DI NYQUIST MAPPA UNA FUNZIONE F(S), SULLA CURVA DI NYQUIST IN BW NEL PIANO COMPLESSO

CAMMINO DI NYQUIST:

COMPRENDE:
- L'ASSE IMMAGINARIO TRANNE I POLI DELLA F(S) A PARTE REALE NULLA
- SEMICIRCONFERENZA DESTRA DI RAGGIO INFINITO
- SEMICIRCONFERENZE DESTRE DI RAGGIO INFINITESIMO CHE LASCIA A SINISTRA GLI EVENTUALI POLI DELLA F(S)





$\overline{ab}: s=j\omega \quad 0<\omega<\omega^*$

$\overline{cd}: s=j\omega \quad \omega^*<\omega<+\infty$

$\overline{hi}: s=j\omega \quad -\omega^*<\omega<0$

$\overline{fg}: s=j\omega \quad -\infty<\omega<-\omega^*$

$c \to b: \; s=j\omega^*+\rho e^{j\phi} \quad \rho\to 0, \; -\frac{\pi}{2}<\phi$

$a \to h: \; s=\rho e^{j\phi} \quad \rho\to 0, \; -\frac{\pi}{2}<\phi$

$h \to g: \; s=-j\omega^*+\rho e^{j\phi} \quad \rho\to 0, \; -\frac{\pi}{2}<\phi<$

$d \to f: \; s=Re^{j\phi} \quad R\to+\infty, \; +\frac{\pi}{2}>\phi>$

GRAFICO

1) SEMIASSE POSITIVO IMMAGINE

$F(j\omega) \quad 0<\omega<+\infty$ → DAI DIAGRAMMI DI BODE

2) SEMIASSE NEGATIVO IMMAGINE.

$F(-j\omega) \quad 0<\omega<+\infty$ → LA OTTENGO RIBALTANDO QUELLA DI PRIMA

INFATTI PER LA PROPRIETÀ DEI NUMERI COMPLESSI: $F(j\omega)=|F(j\omega)|e^{j\angle(F(j\omega))}$

3) SEMICIRCONFERENZE INFINITESIME

POLO A PARTE REALE NULLA E CON MOLTEPLICITÀ m, VIENE MAPPATO CON m SEMICIRCONFERENZE DI RAGGIO ∞ DA TRACCIARE IN SENSO ORARIO

4) SEMICIRCONFERENZA DI RAGGIO INFINITO

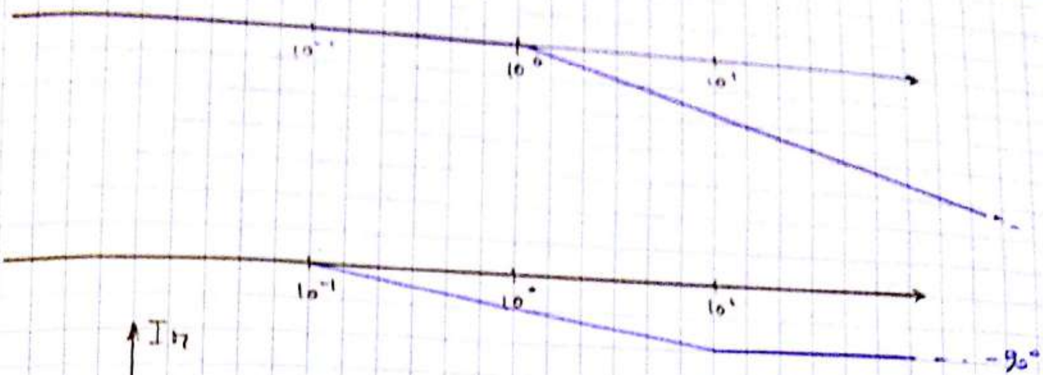
VIENE MAPPATA IN (0,0). INFATTI SE SOSTITUIAMO A s $Re^{j\phi}$ E FACCIAMO TE
R A +∞, POICHÉ IL GRADO DEL DEN. DI F È > DEL GRADO DEL NUM. F VA A ZERO

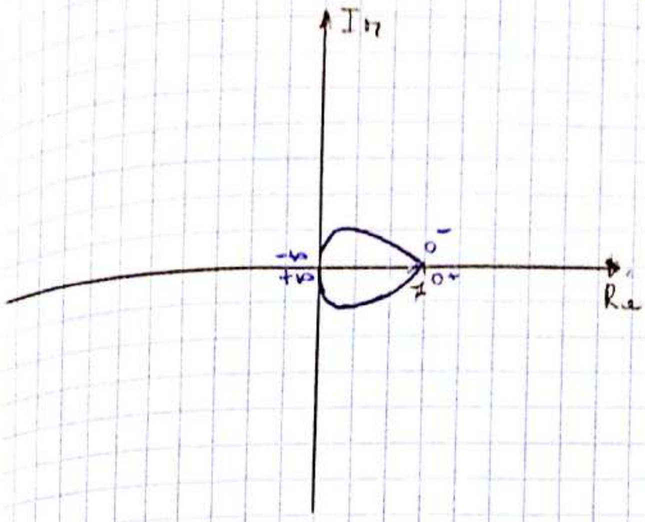
OSS.

POICHÉ PARLIAMO DI FUNZIONI RAZIONALI, $F^*(j\omega)=F(-j\omega)$; QUINDI PER TRACCIARE IL SEMIASSE NEGATIVO BASTA 'SPECCHIARE' L'ALTRA PARTE DEL DIAGRAMMA.

Ex

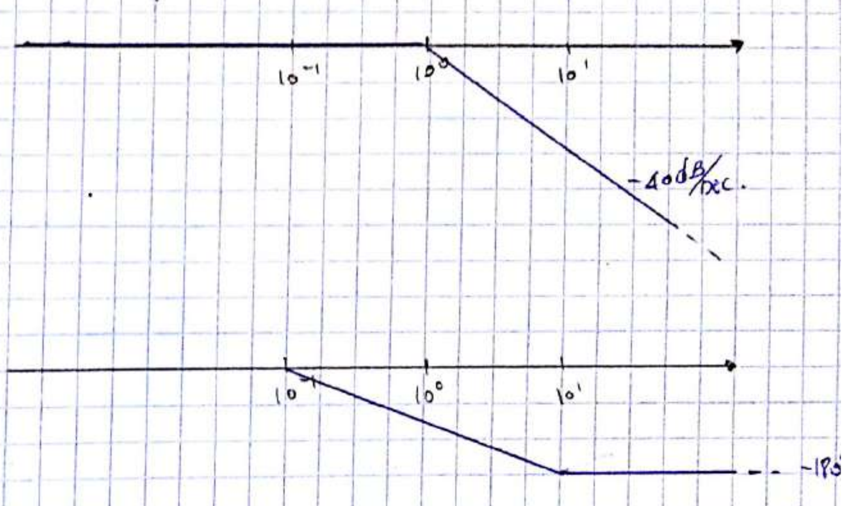
$F(s) = \frac{1}{s+1}$

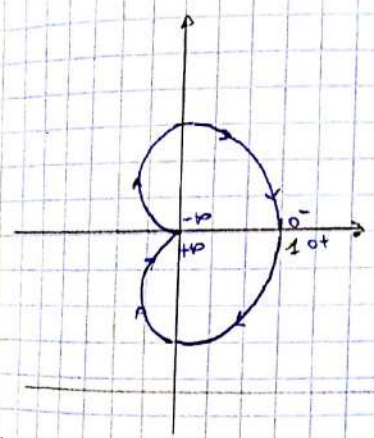




Ex

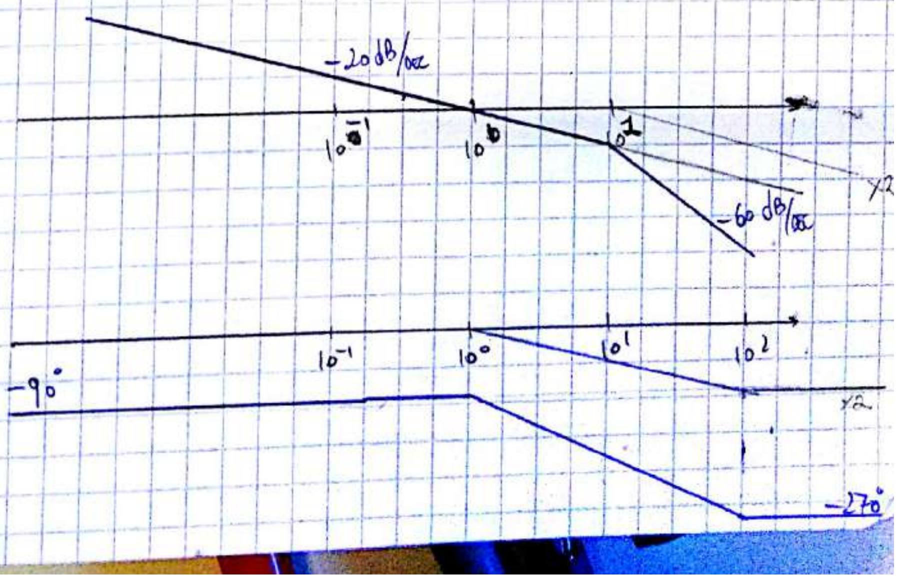
$F(s) = \frac{100}{(s+10)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}$

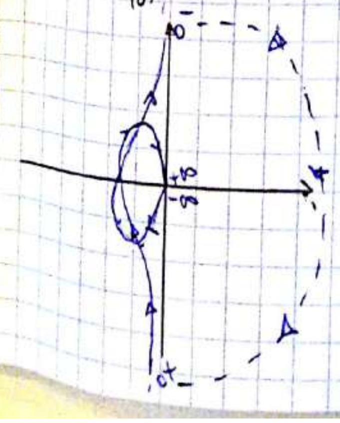




Ex

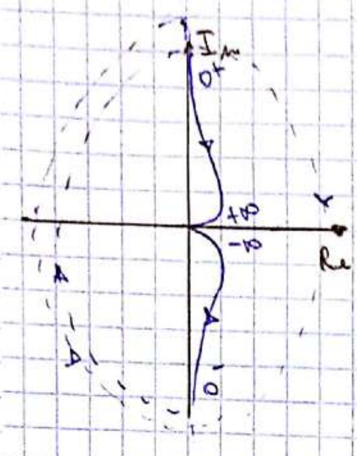
$F(s) = \frac{1}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}$

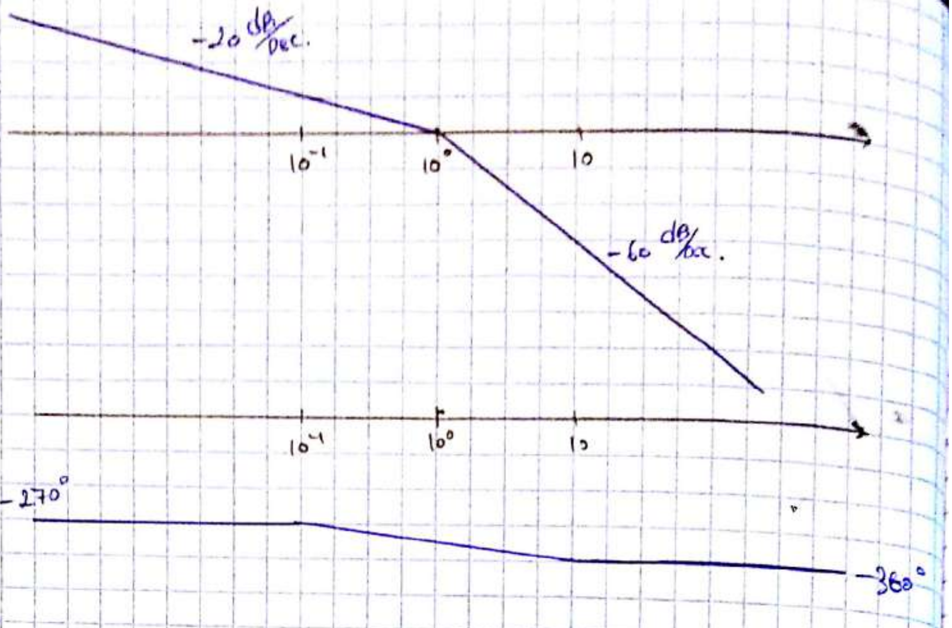




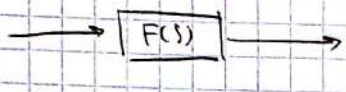
Ex

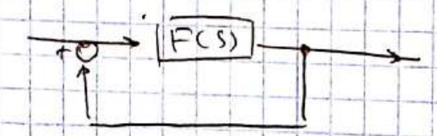
$$F(s) = \frac{1}{s^3(s+1)}$$





TEOREMA DI NYQUIST





Il teorema di Nyquist dice se il sistema controreazionato con controreazione unitaria è stabile sulla base del grafico

NOTAZIONI:

- P: n° poli a parte reale positiva di $F(s)$
- N: n° di giri che il diagramma di Nyquist di $F(s)$ compie intorno al punto $(-1, 0)$

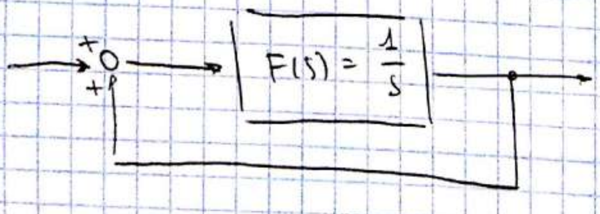
i giri sono positivi se in senso antiorario e negativi se in senso orario

N non è definito se il diagramma di Nyquist di $F(s)$ passa su $(-1, 0)$

Teo

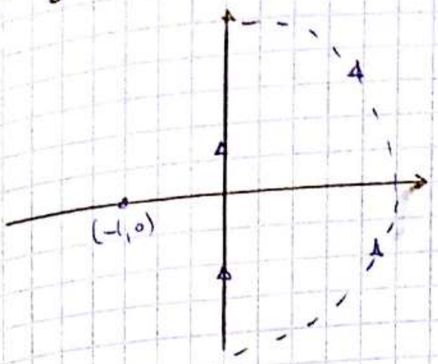
Condizione necessaria e sufficiente per stabilità asintotica della retroazione unitaria di $F(s)$ è che sia N ben definito e che si abbia $N = P$

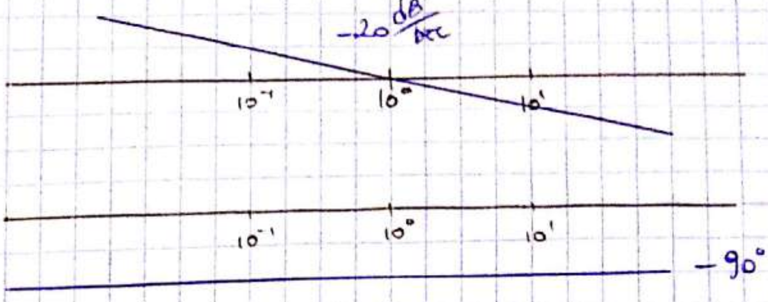
Ex



È stabile asintoticamente!

$F(s) = \frac{1}{s}$





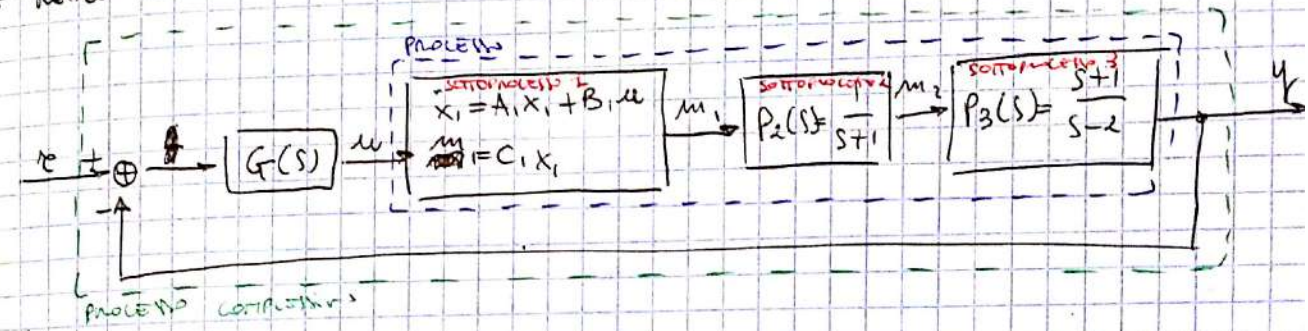
$N = P = 0 \Rightarrow$ IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE

FINE TUTOR

$$\left\{\begin{matrix}\text{AUTOVALORI DEL} \\ \text{SISTEMA COMPLESSIVO}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{AUTOVALORI NASCOSTI} \\ \text{INTRINSECI}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{AUTOVALORI NASCOSTI} \\ \text{GENERATI PER} \\ \text{INTERCONNESSIONE}\end{matrix}\right\} + \underbrace{\left\{\begin{matrix}\text{AUTOVALORI NON} \\ \text{NASCOSTI}\end{matrix}\right\}}_{\text{POLI DI } W(s)}$$

OK PERCHÈ IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA STABILE → TUTTI GLI AUTOVALORI DEVONO AVERE PARTE REALE NEGATIVA

EX,



$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

TRASFORMIAMO IL PRIMO PROCESSO NEL DOMINIO DI LAPLACE (STANDO ATTENTO A VEDERE SE PERDO INFORMAZIONI SU QUALCHE AUTOVALORE)

$rg\begin{pmatrix} B_1 & A_1B_1 \end{pmatrix} \underset{M_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \longrightarrow$ UN AUTOVALORE RAGGIUNGIBILE

$rg\begin{pmatrix} C_1 \\ C_1A_1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \longrightarrow$ UN AUTOVALORE OSSERVABILE

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

VARI CASI POSSIBILI:

$\lambda_1 = -1$ RAGG e OSS o RAGG e 7OSS

$\lambda_2 = -1$ 7RAGG e 7OSS o 7RAGG e OSS

1 2

$$P_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 = (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

$$P_1(s) = \frac{1}{s+1}$$

- POICHÉ UN AUTOVALORE COMPARE COME POLO DI $P_1(s)$, POSSIAMO DIRE CHE L'AUTOVALORE È RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE (CASO 1)
- IL PROCESSO HA UN AUTOVALORE NASCOSTO MA A PARTE REALE NEGATIVO $\Rightarrow$ NO PROBLEM

QUINDI:

IL PRIMO SOTTOPROCESSO HA UN AUTOVALORE INTRINSECO NASCOSTO $\lambda = -1$

CALCOLO LA FDT DEL PROCESSO:

$$P(s) = P_1(s) \cdot P_2(s) \cdot P_3(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

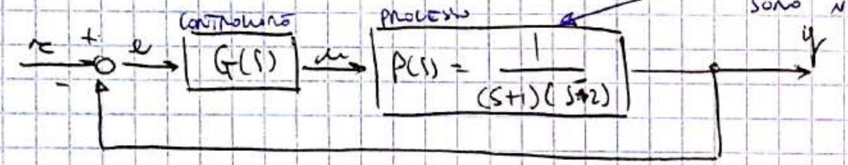
OK,

C'È STATA UNA CANCELLAZIONE POLO – ZERO $\longrightarrow$ UN AUTOVALORE È DIVENTATO NASCOSTO, IN PARTICOLARE $\lambda = -1$ È DIVENTATO NASC. 2 VOL.

MA È A PARTE REALE < 0, $\Rightarrow$ NO PROBLEM

IL SISTEMA POSSIAMO DESCRIVERLO:

HA 4 AUTOVALORI! MA DUE DEI QUALI SONO NASCOSTI



$F = GP \longrightarrow$ AD ANELLO APERTO $\quad F = \dfrac{N_F}{D_F}$

AD ANELLO CHIUSO:

$$W = \frac{PG}{1+PG} = \frac{F}{1+F} = \frac{\frac{N_F}{D_F}}{1+\frac{N_F}{D_F}} = \frac{N_F}{D_F + N_F}$$

FDT DEL SISTEMA COMPLESSIVO

$$W = \frac{N_W}{D_W} \Rightarrow N_W = N_F, \quad D_W = D_F + N_F$$

STRUTTURA $G(s)$	a	$\frac{a}{s+b}$	$\frac{as+b}{s+c}$	$\frac{as+b}{s^2+cs+d}$	$\frac{as^2+bs+c}{s^2+ds+e}$	...
N° PARAMETRI	1	2	3	4	5	...
DIMENSIONE DEL CONTROLLORE	0	1	1	2	2	...

OSS.
a NEL PRIMO CASO È REALE! ALTRIMENTI IL CONTROLLORE NON È REALIZZABILE

OSS.
PERCHÉ NON METTO $G(s) = \frac{a}{s^2+bs+c}$? PERCHÉ HO GIÀ UNA $G(s)$ CON TRE GRADI DI LIBERTÀ TRA DI DIMENSIONE PIÙ PICCOLA! IL MIO OBIETTIVO È CERCARE LA $G(s)$ CON LA DIMENSIONE PIÙ PICCOLA

ANDIAMO A TENTATIVI CON IL METODO DI ROUTH:

1) $G(s) = a$

$F = G \cdot P = \frac{a}{(s+1)(s-2)}$ $\quad N_F = a \quad D_F = (s+1)(s-2)$ $\quad N_W = N_F = a$

$D_W = N_F + D_F = a + (s+1)(s-2) =$

$= a + s^2 - s - 2 = s^2 - s - 2 + a$

VARIAZIONE!

NON È STABILE PER QUALSIASI VALORE DI a.

OSS.
CN PERCHÈ TUTTE LE SOL. SIANO A PARTE REALE NEGATIVA È CHE TUTTI I COEFF. ABBIANO LO STESSO SEGNO (LA CONDIZIONE NON È SUFF., BISOGNA USARE ROUTH SE HANNO TUTTI LO STESSO SEGNO) PER I POL. DI GRADO 1 e 2 LA CN È ANCHE SUFFICIENTE

2) $G(s) = \frac{a}{s+b}$

$F = GP = \frac{a}{(s+b)(s+1)(s-2)}$ $\quad D_W = N_F + D_F = a + (s+b)(s+1)(s-2) = s^3 + s^2(b-1) + s(-b-2)$
$+ a - 2b$

VERIFICHIAMO LA C.N.:

$b-1>0 \rightarrow b>1$
$b<-2$ IN CONTRADDIZIONE!
$a-2b>0$

PER NESSUN VALORE DI a e b IL SISTEMA È STABILE

OSS.
PIÙ SI VA AVANTI, PIÙ SI COMPLICANO I CONTI: SCELGO COSÌ LA PROPRIA $G(s) = a\frac{s+1}{s+b}$, COSÌ DA CREARE UN AUTOVALORE NASCOSTO, MA È A PARTE REALE NEGATIVA $\Rightarrow$ NO PROBLEM
(SBAGLIATISSIMO SEMPLIFICARE '$s-2$'! OTTERREI UN AUTOVALORE NASCOSTO A PARTE REALE POSITIVA!)

3) $G(s) = a\frac{s+1}{s+b}$

$$F = GP = a\frac{\cancel{s+1}}{s+b} \cdot \frac{1}{(\cancel{s+1})(s-2)} = \frac{a}{(s+b)(s-2)}$$

$$\underline{D_W} = a + (s+b)(s-2) = a + s^2 + s(b-2) - 2b = s^2 + s(b-2) + a - 2b$$

VERIFICHIAMO LA CN:

$$\begin{cases} b-2>0 \\ a-2b>0 \end{cases} \quad \begin{cases} b>2 \\ a>2b>4 \end{cases}$$

$\boxed{OK}$: CI POTREBBERO ESSERE SOLUZIONI AL PROBLEMA, ANZI CI SONO SIC. PERCHÈ IL POLINOMIO È DI GRADO 2 E LA CN È ANCHE S

SCELGO AD ESEMPIO $b = 3$ e $a = 7$

CON QUESTI VALORI DI a e b: $D_W = s^2 + s + 1$

$$s^2 + s + 1 = 0 \longrightarrow s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

IN DEFINITIVA:

NASCOSTI
$\lambda_1 = -1$ ~~RAGG.~~ RAGG. e ~~OSS.~~
$\lambda_2 = -1$ RAGG. e ~~OSS.~~
$\lambda_3 = -1$ ~~RAGG.~~ e OSS.

NON NASCOSTI
$\lambda_4 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\lambda_5 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$
POLI DI $W(s)$ QUINDI RAGG. e OSS.

AUTOVALORI DEL SISTEMA ~~COMPLESSIVO~~ COMPLESSIVO CONSIDERANDO COME $G(s)$ QUELLA APPENA CALCOLATA

OSS.
SE ALL'ESAME VIENE CHIESTO IL POLINOMIO CARATTERISTICO, NON C'È BISOGNO DI CALCOLARE LE RADICI. NELL'ESEMPIO:

$P(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda^2+\lambda+1)$ POLINOMIO CARATTERISTICO

OSS.

LA VELOCITÀ DI CONVERGENZA SI È RIDOTTA DA e^{-t} A $e^{-\frac{1}{2}t}$. POI IMPAREREMO DELLE TECNICHE PER DECIDERE IL VALORE ~~ESATTO~~ DEGLI AUTOVALORI NON NASCOSTI (NON POSSO TOCCARE QUELLI NASCOSTI)

PROVIAMO A FAR SÌ CHE LA VELOCITÀ DI CONVERGENZA NELL'EX SIA e^{-t}.

$$D_W = N_F + D_F = a + (s+b)(s-2) = s^2 + (b-2)s + a - 2b$$

FACCIO UNA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE: $s \longrightarrow s-1$

$$D_W = (s-1)^2 + (b-2)(s-1) + a - 2b = s^2 + s(b-4) + 3 + a - 3b$$

$$\begin{cases} b-4>0 \\ 3+a-3b>0 \end{cases} \quad \begin{cases} b>4 \\ a>\cancel{15}\,9 \end{cases}$$

CON QUESTI VALORI DI a e b SONO SICURO CHE LE SOLUZIONI HANNO PARTE REALE < -1

EX. $a = 16$ e $b = 6$

$$D_W = s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2 \quad \text{(HANNO PARTE REALE } < -2\text{)}$$

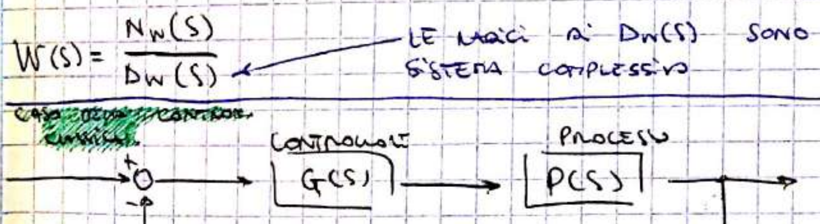
ASSEGNAZIONE DI AUTOVALORI NEL DOMINIO DI LAPLACE

TECNICA CON LA QUALE SCELGO <u>ESATTAMENTE</u> IL VALORE DEGLI AUTOVALORI NON NASCOSTI DOPO AVER APPLICATO IL CONTROLLORE.

$$W(s) = \frac{N_W(s)}{D_W(s)}$$

LE RADICI DI $D_W(s)$ SONO GLI AUTOVALORI NON NASCOSTI DEL SISTEMA COMPLESSIVO

CASO DEI CONTROLLORI CLASSICI



IN QUESTO CASO:

$$W(s) = \frac{N_F}{N_F + D_F} \quad \text{OVE} \quad F = \frac{N_F}{D_F}$$

$$D_W(s) = \prod_{i=1}^{d_W} (s - s_{ASS,i})$$

EQ. DIOFANTINA

d_W = grado di $D_W(s)$

$s_{ASS,i}$: I-ESIMO AUTOVALORE ASSEGNATO A MIO ARBITRIO

DEVO FARE IN MODO CHE $D_W(s)$ ABBIA ESATTAMENTE QUELLA FORMA.

UN'EQUAZIONE DI QUESTO TIPO SI DICE: EQ. DIOFANTINA

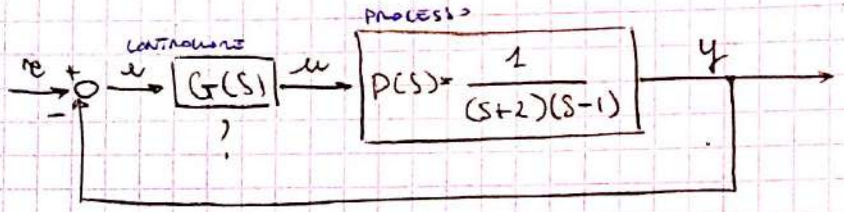
COME LA RISOLVO?

OVVIAMENTE $P(s)$ È ASSEGNATO, POSSO LAVORARE SOLO ~~...~~ SU $G(s)$

MODIFICANDOLO A PIACIMENTO.

DEVO SCEGLIERE $G(s)$ CON $\boxed{N^{o} \text{ PARAMETRI} = d_W}$

EX



VOGLIAMO TUTTI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA COMPLESSIVO IN '-1'

$$W(s) = \frac{N_F}{D_F + N_F} \quad , \quad F = PG = \frac{N_F}{D_F}$$

INFATTI È UNO SCHEMA CLASSICO A CONTROREAZIONE

OSS

d_W = GRADO DI D_W = GRADO DI D_F (INFATTI F È UNA FUNZIONE STRETTAM. PROPRIA)

VALE SOLO NEL CLASSICO SCHEMA A CONTROREAZIONE UNITARIA

1) SE $G(s) = a \longrightarrow F(s) = G(s) \cdot P(s) = \dfrac{a}{(s+2)(s-1)}$

IN QUESTO CASO: $d_F = 2$, MA LA $G(s)$ HA SOLO UN PARAMETRO!

NON VA BENE.

2) SE $G(s) = \dfrac{a}{s+b} \longrightarrow F(s) = G(s) \cdot P(s) = \dfrac{a}{(s+b)(s+2)(s-1)}$

IN QUESTO CASO: $d_F = 3$, MA LA $G(s)$ HA SOLO 2 PARAMETRI!

NON VA BENE.

3) SE $G(s) = \dfrac{as+b}{s+c} \longrightarrow F(s) = G(s) \cdot P(s) = \dfrac{as+b}{(s+c)(s+2)(s-1)}$

IN QUESTO CASO: $d_F = 3$, ESATTAMENTE IL NUMERO DI PARAMETRI DI $G(s)$, OK!

SCRIVIAMO L'EQ. DIOFANTINA:

$$D_W = N_F + D_F = \underbrace{(s+1)^3}$$

VOGLIO TUTTI E 3 GLI AUTOVALORI A '-1'

$\Updownarrow$

ALTRA PAGINA

$(as+b) + (s+c)(s+2)(s-1) = (s+1)^3$

$s^3 + s^2(c+1) + s(a+c-2) - 2c+b = s^3+3s^2+3s+1$

ADESSO LA RISOLVIAMO CON IL <u>PRINCIPIO DI IDENTITÀ</u> DEI POLINOMI

$c+1 = 3 \rightarrow \boxed{c=2}$

$\boxed{a=3}$

$-4+b = 1 \rightarrow \boxed{b=5}$

SCEGLIENDO IN QUESTO MODO I PARAMETRI DI G(s), SO CHE GLI AUTOVALORI SARANNO ESATTAMENTE QUELLI CHE HO SCELTO

OSS

CERCARE G(s) UTILIZZANDO IL METODO DI ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI APPENA FATTO, PORTA A UNA G(s) A DIMENSIONE $\geq$ A QUELLO DELLA G(s) OTTENUTA CON IL METODO A TENTATIVI CON ROUTH.

QUINDI: SE DEVO SOLO STABILIZZARE IL SISTEMA $\longrightarrow$ NON USO QUESTO METODO (IN GENERE NEI COMPITI D'ESAME È RICHIESTA UNA G(s) A DIM. MINIMA).

USIAMO IL METODO DELL'ALTRA VOLTA:

1) $G(s) = a$ • $F(s) = G(s)\cdot P(s) = \dfrac{a}{(s+2)(s-1)}$

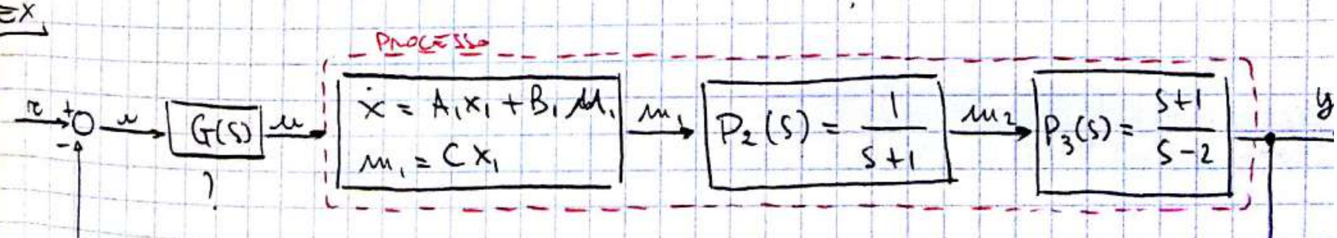
• $D_W = a + (s+2)(s-1) = s^2 + s - 2 + a$

PER IL CRIT. DI ROUTH, SE $-2+a>0 \Rightarrow \boxed{a>2}$ IL SISTEMA È STABILE.

OSS

PER LA STABILITÀ BASTA UNA G(s) A DIMENSIONE ZERO!

EX



TROVARE G(s) IN MODO CHE IL PO. CA. SIA (SE POSSIBILE) COME QUELLI INDICATI:

A) $(s+2)^N$ B) $(s+1)(s+2)^N$ C) $(s+1)^2(s+2)^N$ D) $(s+1)^3(s+2)^N$

$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ (STESSO EX. DI QUALCHE PAGINA PRIMA)

$\begin{Bmatrix} \text{AUTOVALORI} \\ \text{NASCOSTI} \end{Bmatrix} = \{-1, -1\}$

$P_1(s) = \dfrac{1}{s+1}$ $\quad P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \dfrac{1}{s+1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{s+1}} \cdot \dfrac{\cancel{s+1}}{s-2} = \dfrac{1}{(s+1)(s-2)}$

NB

A) o B) SONO IMPOSSIBILI PERCHÈ 2 AUTOVALORI SONO NASCOSTI E IN '-1', NON POSSO SPOSTARLI!

C) $G(s) = \dfrac{as+b}{s+c} \longrightarrow F = G \cdot P = \dfrac{as+b}{(s+c)(s+1)(s-2)}$

HO 3 PARAMETRI, TANTI QUANTO È IL GRADO DI D_F, OK!

$W(s) = \dfrac{N_F}{N_F + D_F}$ INFATTI È UNA CLASSICA CONTROREAZIONE UNITARIA

$D_W = as + b + (s+c)(s+1)(s-2) = (s+2)^3$

$s^3 + s^2(c-1) + s(a-c-2) + b - 2c = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$

$c - 1 = 6 \longrightarrow \boxed{c = 7}$

$a - 7 - 2 = 12 \longrightarrow \boxed{a = 21}$

$b - 14 = 8 \longrightarrow \boxed{b = 22}$

D) PRENDO $G(s)$ CON AL NUMERATORE $s+1$, COSÌ RENDO NASCOSTO L'AUTOVALORE '-1' E NON DEVO PIÙ PREOCCUPARMENE.

$G(s) = a\dfrac{s+1}{s+b} \longrightarrow F = GP = \dfrac{a}{(s+b)(s-2)}$

OK, C'È UN NUOVO AUT. NASCOSTO!

HO 2 PARAMETRI, TANTI QUANTO d_F, OK!

$D_W = a + (s+b)(s-2) =$ INFATTI È UNA CONTROREAZIONE UNITARIA

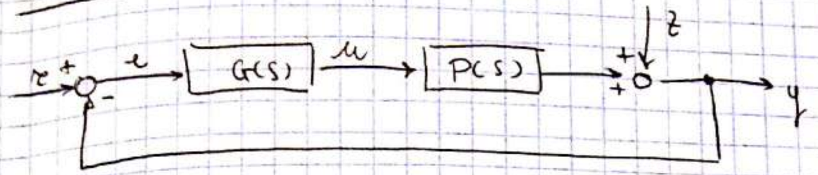
$= \cancel{a} + s^2 + (b-2)s - 2b + a = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$

$b - 2 = 4 \longrightarrow \boxed{b = 6}$

$-2b + a = 4 \longrightarrow \boxed{a = 16}$

SPECIFICHE DI TRACKING e REIEZIONE DEI DISTURBI

TRACKING



$r = y_d$ USCITA DESIDERATA

$e = r - y = y_d - y$

VOGLIO CHE $\lim_{t \to +\infty} e(t) = 0$

$e(t) = \tilde{e}(t) + e_t(t)$ — $\tilde{e}(t)$: ERRORE A REG. PER.; $e_t(t)$: ERRORE TRANS.

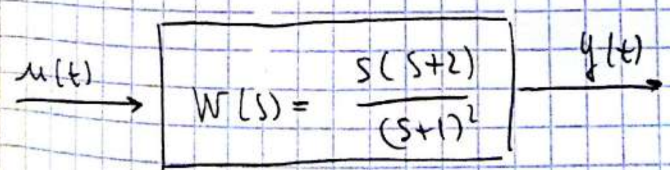
$y(t) = \tilde{y}(t) + y_t(t)$ — $\tilde{y}(t)$: RISPOSTA A REG. PER.; $y_t(t)$: RISPOSTA TRANSITORIA

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE A INGRESSI CANONICI POLINOMIALI

$u(t) = \frac{t^k}{k!}$

MOLTEPLICITÀ ZERO IN $s=0$ \ $u(t)$	1	t	$t^2/2$
0	$W(0) \neq 0$	$W(0)t + \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0}$	$W(0)\frac{t^2}{2} + \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} \cdot t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
1	0	$\left.\frac{W(s)}{s}\right\|_{s=0} \neq 0$	$\left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} \cdot t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
2	0	0	$\left.\frac{W(s)}{s^2}\right\|_{s=0}$

Ex



$u(t) = t \qquad \tilde{y}(t) = ?$

IN $s=0$, LA MOLTEPLICITÀ È $1 \Rightarrow \tilde{y}(t) = 2$

OSS

$$y(t) = \underbrace{\tilde{y}(t)}_{\text{RISPOSTA A R.P.}} + \underbrace{y_t(t)}_{\text{RISPO. TRANSITORIA}}$$

NOI LAVOREREMO SOPRATTUTTO PER MODIFICARE LA $\tilde{y}(t)$, NON POSSIAMO FARE MOLTO SUL TRANSITORIO

OSS

Se $u(t) = a\,u_1(t) + b\,u_2(t) \longrightarrow \tilde{y}(t) = a\,\tilde{y}_1(t) + b\,\tilde{y}_2(t)$

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PER LINEARITÀ

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE AD INGRESSI PERIODICI

$u(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$

$\tilde{y}(t) = |W(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \angle W(j\omega))$

UGUALE PER IL COSENO!

EX

$W(s) = \frac{1}{s+1}$ $\quad \xrightarrow{u(t)} \boxed{W(s) = \frac{1}{s+1}} \xrightarrow{y(t)}$

$u(t) = \operatorname{sen}(2t) \qquad \omega = 2$

$\tilde{y}(t) = |W(j2)| \cdot \operatorname{sen}(2t + \angle W(j2))$

$W(j2) = \frac{1}{2j+1} \cdot \frac{1-2j}{1-2j} = \frac{1-2j}{1+4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}j$

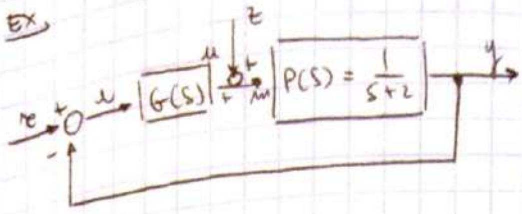
$|W(2j)| = \left|\frac{1}{2j+1}\right| = \frac{|1|}{|2j+1|} = \frac{1}{|2j+1|} = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\angle W(2j) = \angle \frac{1}{2j+1} = \angle 1 - \angle 2j+1 = -\arctan(2)$

$\Downarrow$

$\tilde{y}(t) = \frac{\sqrt{5}}{5} \sin(2t - \arctan(2))$

EX)



DOMANDE

PROGETTARE G(S) A DIMENSIONE MINIMA IN MODO DA SODDISFARE LE SEGUENTI SPECIFICHE:

1) ERRORE e(t) A REG. PER. CORRISPONDENTE A RIF. r(t) COSTANTI SIA NULLO
2) LA RISPOSTA y(t) A REG PER. CORRISPONDENTE A DISTURBI z(t) COSTANTI SIA NULLA
3) L'ERRORE e(t) A REG. PERM. CORRISPONDENTE A RIF. r(t) = t SIA IN MODULO < 1/2
4) LA RISP. A REG. PER. CORRISPONDENTE A RIF r(t) = sin(2t) SIA NULLA
5) IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINTOTICAMENTE STABILE

①,③,④ SPECIFICHE DI TRACKING

OSS

CONVIENE IN GENERE LASCIARE QUELLA STABILITÀ PER ULTIMA.

CONVIENE INIZIARE DA QUELLE SPECIFICHE CHE HANNO BISOGNO DI UN VALORE ESATTO (ex. 1 e 2) e POI QUELLE CHE DANNO UN CERTO GRADO DI LIBERTÀ (ex 3)

ESEMPIO DI SVOLGIMENTO: 1, 2, 4, 3, 5.

PARTIAMO DALLA PRIMA

SAPPIAMO CHE $y(s) = W(s) \cdot r(s)$ $\xrightarrow{r} \boxed{W(s)} \xrightarrow{y}$

INOLTRE ESISTERÀ W_e : $e = W_e r$

SAPPIAMO CHE $e = r - y$ e CHE $y = P(s) \cdot m$

OSS IMPORTANTE!

QUANDO VADO A IMPORRE CONDIZIONI DI TRACKING, PRESCINDERE DALL'ESISTENZA DEI DISTURBI (RICORDARSI CHE VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI)

ALLA LUCE DI QUANTO DETTO $\begin{cases} m = u \\ u = G(s) \cdot e \end{cases}$

QUINDI

$$\begin{cases} e = r - y \\ y = P(s) \cdot m \\ m = u \\ u = G(s) \cdot e \end{cases} \longrightarrow e = r - P(s)\,G(s)\,e \iff e = \frac{r}{(1 + P(s) \cdot G(s))}$$

QUINDI: $W_e = \frac{e}{r} = \frac{1}{1 + PG} = \frac{1}{1 + \frac{N_G}{D_G} \cdot \frac{N_P}{D_P}} = \frac{D_G D_P}{N_G \cdot N_P + D_G D_P} = W_e$ FdT INGRESSO – ERRORE

OSS

CONOSCIAMO D_P (S+2) e N_P (1) MA NON N_G e D_G (SONO QUELLE CHE DOBBIAMO TROVARE NOI).

GUARDO LA TABELLA DEGLI INGRESSI POLINOMIALI:

- SPECIFICA PER UN INGRESSO COSTANTE ⟶ PRIMA COLONNA
↳

- GUARDO LE RIGHE: LA PRIMA HA (IN COLONNA 1) UN TERMINE
DALLA SECONDA RIGA IN POI → OK!

OSS.

È MEGLIO SEGUIRE LA RIGA PIÙ RADA.

QUINDI:

- DEVO AVERE UNO ZERO IN $s=0$ IN W_e CON MOLTEPLICITÀ 1

PER COME È FATTO IL NUMERATORE DI W_e?

$N_{We} = D_G D_P$. D_P HA UNO ZERO IN $s=0$? NO! ALLORA LO DEVE AVERE D_G.

QUINDI: $G = \dfrac{N_G}{s \cdot D'_G}$

~~OSS.~~

PERCHÉ PREFERISCO MOLTEPLICITÀ $=1$? PERCHÉ ALTRIMENTI AUMENTEREI INUTILMENTE LA DIMENSIONE DI G! (CHE SE VOGLIO A DIM. MINIMA)

SECONDA SPECIFICA

OSS.

COSÌ COME PRIMA HO CONSIDERATO I DISTURBI NULLI, ORA CONSIDERO I RIFERIMENTI NULLI

$$y = \cancel{W_r\, r}^{\,0} + W_z \cdot z$$

DEVO CALCOLARE LA $W_z = \dfrac{y}{z}$

$$\begin{cases} y = P \cdot m \\ m = z + u \\ u = G e \\ e = -y \end{cases} \longrightarrow y = P(z - Gy) \Rightarrow y(1+PG) = Pz \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{P}{1+PG} = W_z$$

QUINDI: $$W_z = \frac{\dfrac{N_P}{D_P}}{1+\dfrac{N_P}{D_P}\cdot\dfrac{N_G}{D_G}} = \frac{N_P D_G}{N_P N_G + D_P D_G}$$

NON DEVO FARE NULLA! D_G HA GIÀ UNO ZERO CON MOLTEPLICITÀ $=1$ IN $s=0$.

INFATTI HO BISOGNO DI UNO ZERO IN $s=0$ CON MOLTEPLICITÀ DI ALMENO 1 NEL POLINOMIO $\overset{\text{NUM. DI } W_z}{\overline{N_P \cdot D_G}}$ PERCHÉ LA W_z AD UN INGRESSO COSTANTE SIA NULLA.

QUALITÀ SPECIFICA

$$\frac{y}{t} = W = \frac{N_G \cdot N_P}{N_G \cdot N_P + D_G \cdot D_P}$$

$$\tilde{y}(t) = |W(2j)| \sin(2t + \angle W(j2)) = 0$$

PERCHÉ QUESTO SIA VERO $\longrightarrow |W(2j)| = 0 \Longrightarrow \left| \frac{N_G(2j) \cdot N_P(2j)}{N_G(2j) \cdot N_P(2j) + D_G(2j) D_P(2j)} \right| = 0$

PERCHÉ L'ULTIMA SIA VERA, BASTA CHE $|N_G(2j) \cdot N_P(2j)| = 0$

POICHÉ $N_P = 1$, NON SI ANNULLA IN $2j$. DEVO LAVORARE SU N_G.

SE PRENDO $N_G = (s-2j) N_G'$, LA CATENA DI IMPLICAZIONI È SODDISFATTA

PERÒ NON MI BASTA, NON POSSO AVERE COEFFICIENTI IMMAGINARI IN UNA FDT, QUINDI DICO CHE $N_G = (s-2j)(s+2j) \cdot N_G'$

OSS IMPORTANTE

SE UNA FDT HA COEFFICIENTI IMMAGINARI NON È REALIZZABILE FISICAMENTE

OSS:

LA PRIMA (PIÙ SEMPLICE) STRUTTURA DI $G(s)$ CHE POSSIAMO CONSIDERARE È LA SEGUENTE: $\frac{as^2+bs+c}{s^2+ds+e} \longleftrightarrow a\frac{(s+b)(s+c)}{(s+d)(s+e)}$

DALLE CONDIZIONI IMPOSTE FIN'ORA: $b=-2j$, $c=2j$ e $d=0$

IN DEFINITIVA: $G(s) = a\frac{s^2+4}{s(s+b)}$ È UNA $G(s)$ COMPATIBILE.

D'ORA IN POI VADO A TENTATIVI! PROVO CON UNA STRUTTURA COMPATIBILE E SE ARRIVO AD UNA SOLUZIONE IMPOSSIBILE NE SCELGO UN'ALTRA PIÙ COMPLESSA MA CON PIÙ GRADI DI LIBERTÀ.

STABILITÀ SPECIFICA

CONSIDERO $G(s) = a\frac{s^2+4}{s(s+b)}$

(*) SCELGO PROPRIO LA SECONDA RIGA RIMANENDO NELL'OTTICA DI SCEGLIERE SEMPRE LA RIGA PIÙ IN ALTO.

SAPPIAMO GIÀ CHE $W_e = \frac{D_G D_P}{N_G N_P + D_G D_P}$

GUARDO SEMPRE LA TABELLA DELLE RISPOSTE A INGRESSI POLINOMIALI E VEDO CHE SIAMO SULLA SECONDA COLONNA E ABBIAMO BISOGNO DELLA RIGA DALLA 2 IN POI (*)

IL NUMERATORE DI $W_e = D_G D_P$, HA GIÀ TRA UNO ZERO IN S CON MOLTEPLICITÀ $= 1$ (PER LE CONDIZIONI IMPOSTE PRIMA).

DOBBIAMO IMPORRE, PERÒ, CHE

$$\left| \frac{W_e(s)}{s} \Big|_{s=0} \right| < \frac{1}{2} \iff \left| \frac{1}{s} \cdot \frac{D_G D_P}{N_G N_P + D_G D_P} \Big|_{s=0} \right| < \frac{1}{2}$$

$$\iff \left| \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{\cancel{s}(s+b)(s+2)}{a(s^2+4)\cdot 1 + s(s+b)(s+2)} \Big|_{s=0} \right| < \frac{1}{2} \iff \left| \frac{2b}{4a} \right| = \left| \frac{b}{2a} \right| < \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{1}{2}\left|\frac{b}{a}\right| < \frac{1}{2} \iff |b| < |a|$$ NUOVA CONDIZIONE

OSS

È SBAGLIATO ASSEGNARE VALORI AD a E b A QUESTO LIVELLO! MI GIOCHEREI I GRADI DI LIBERTÀ; DEVO LASCIARE INDICATA LA CONDIZIONE SU a E b, SOLO DOPO AVER TROVATO L'ULTIMA CONDIZIONE POSSO PROCEDERE.

QUINTA SPECIFICA

SAPPIAMO GIÀ CHE $\frac{y}{r} = W = \frac{N_G N_P}{N_G N_P + D_G D_P}$

QUINDI: $D_W = N_G N_P + D_G D_P = a(s^2+4)\cdot 1 + s(s+b)(s+2) = s^3 + s^2(a+b+2) + 2bs + 4a$

ESISTE UNA COPPIA (a,b) CHE FACCIA SÌ CHE LE RADICI DI D_W ABBIANO PARTE REALE NEGATIVA E CHE SIA SODDISFATTA LA CONDIZIONE PRECEDENTE $(|b| < |a|)$?

APPLICO IL CRITERIO DI ROUTH A D_W:

$$\begin{cases} a+b+2 > 0 \\ 2b > 0 \rightarrow b > 0 \\ 2a > 0 \rightarrow a > 0 \end{cases}$$ → ESISTONO VALORI DI a E b CHE SODDISFANO IL SISTEMA E CHE SODDISFANO $|b| < |a|$. LA C.N. È SODDISFATTA, DEVO SCRIVERE LA TABELLA DI

$$\begin{array}{c|ll} 3 & (*)\ 1 & 2b \\ 2 & (*)\ a+b+2 & 4a \\ 1 & (*)\ \frac{2ab+2b^2+4b-4a}{a+b+2} & 0 \\ 0 & (*)\ 4a & \end{array}$$

(*) DEVONO ESSERE TUTTI DELLO STESSO SEGNO. POICHÉ $1 > 0$ → TUTTI DEVONO ESSERE > 0

$$\begin{cases} a+b+2>0 \\ 2ab+2b^2+4b-4a>0 \\ a>0 \\ |b|<|a| \end{cases}$$

QUESTO SISTEMA È SODDISFATTO DA $\boxed{a=2 \text{ e } b=1}$

NB

NON DEVO TROVARE TUTTE LE COPPIE (a,b), ME NE BASTA UNA!

SAREBBE VERAMENTE COMPLICATO TROVARLE TUTTE e, INOLTRE, INUTILE!

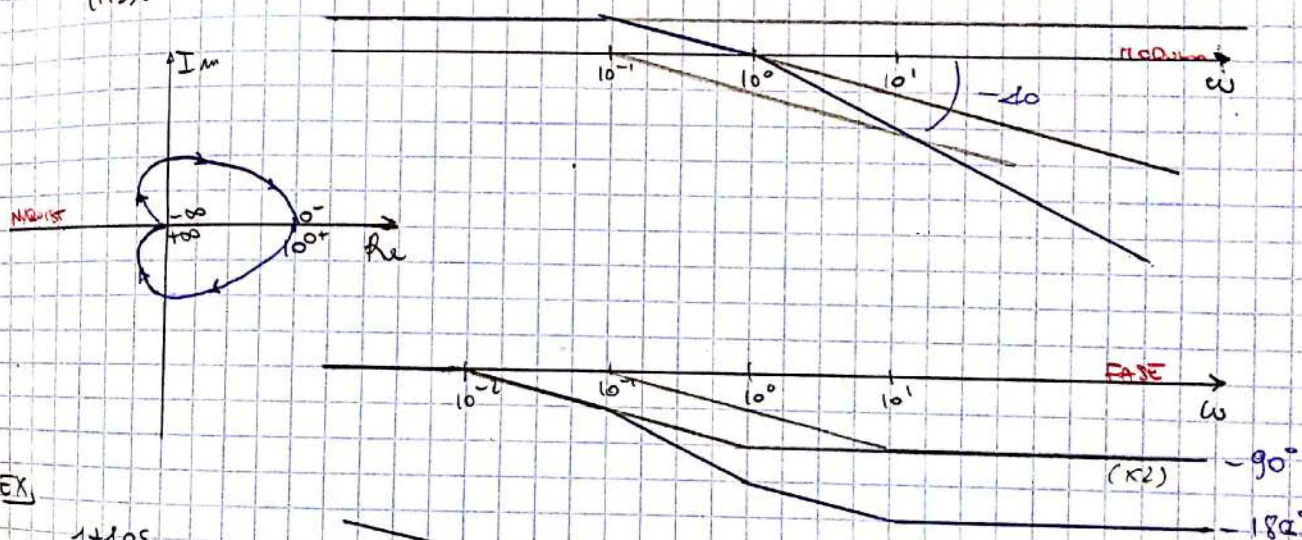
IN DEFINITIVA:

$$\boxed{G(s) = 2 \cdot \frac{s^2+4}{s(s+1)}}$$ SODDISFA TUTTE LE SPECIFICHE RICHIESTE

TUTOR

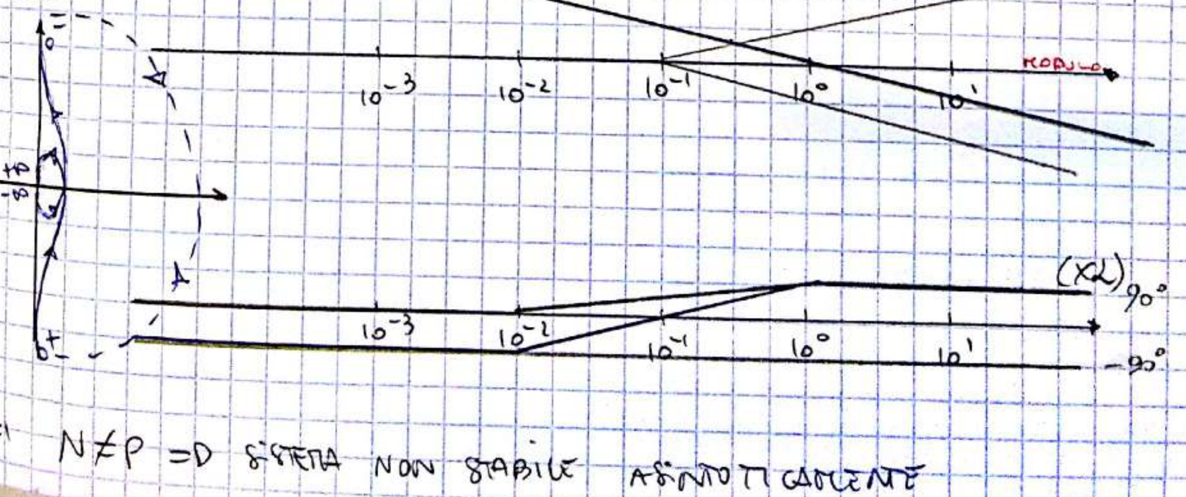
EX, DIAGRAMMI BODE e NYQUIST

$$F(s) = \frac{10}{(1+s)(1+10s)}$$



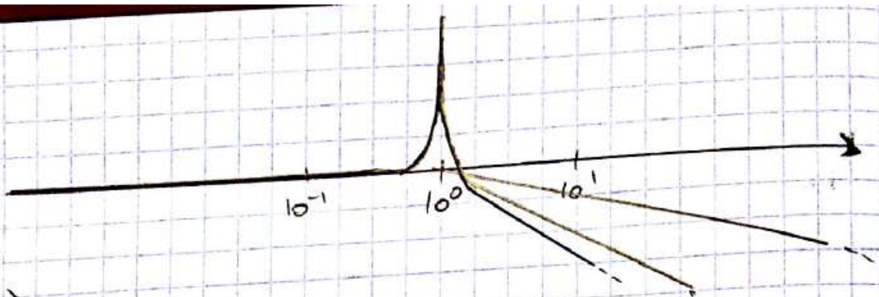
EX,

$$F(s) = \frac{1+10s}{s(1-10s)}$$



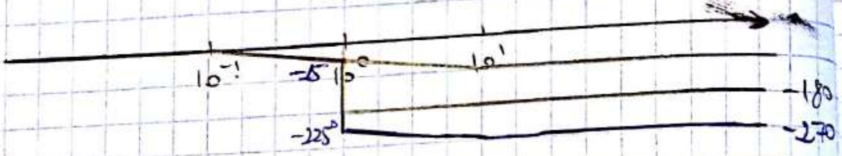
$N=0$, $P=1$ $\quad N \neq P \Rightarrow$ SISTEMA NON STABILE ASINTOTICAMENTE

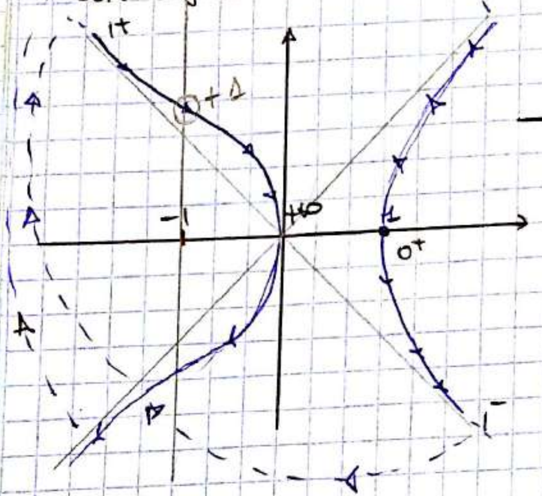
$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$



$$1+s^2 = 1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

$\rightarrow$ CON $\xi = 0$ e $\omega_n = 1$





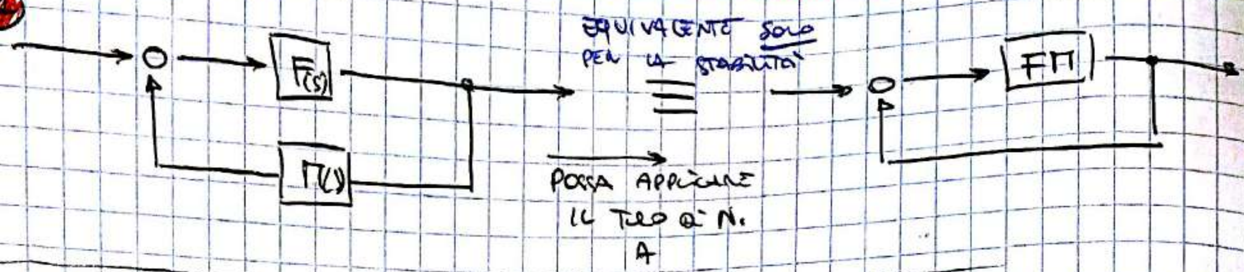
$P=0$

OSS.

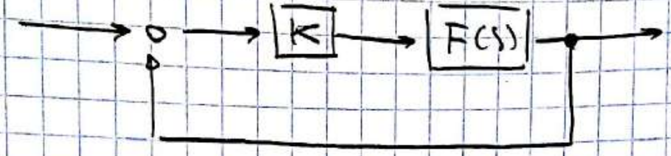
COME CONTO I G.N.? TRACCIO UNA SEMIRETTA DA $(-1, j0)$ VERSO L'ALTO E CONTO IN SENSO ALGEBRICO LE CURVE ENTRANTI E USCENTI (POSITIVE SE ENTRANTI E NEGATIVE SE USCENTI)

SISTEMI CON CONTROREAZIONE NON UNITARIA

1)

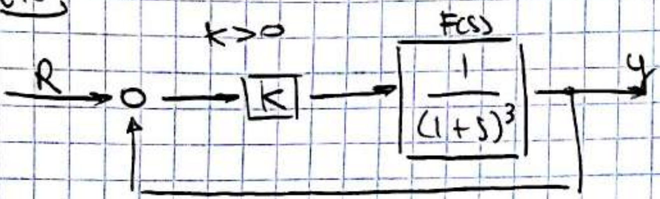


2)

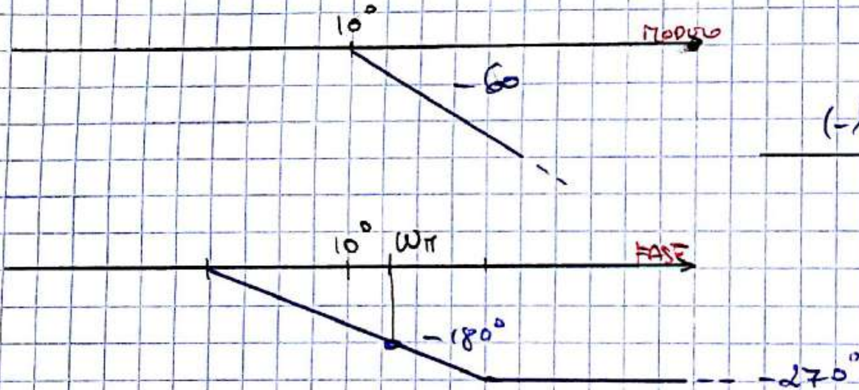


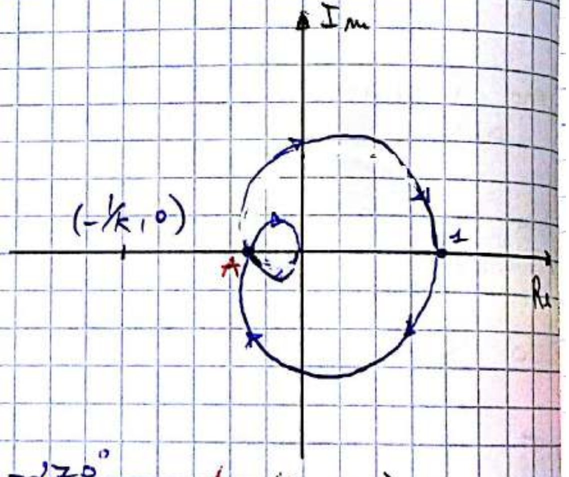
CONSIDERO I GIRI INTORNO A $(-\frac{1}{K}, j0)$ INVECE CHE $(-1, j0)$

EX)



$P = 0$





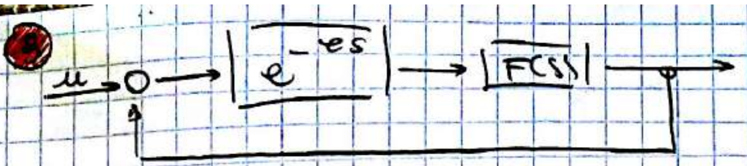
$A = (X_a, 0)$

- PER LA STABILITÀ VOGLIAMO CHE $X_a > -\frac{1}{K}$
- PER CALCOLARE X_a TROVO IL VALORE DEL MODULO DI $F(s)$ QUANDO LA FASE È $-180°$

$$\angle F(j\omega_\pi) = -180° \iff -3\arctan(\omega_\pi) = -180° \iff \omega_\pi = \tan(60°) = \sqrt{3}$$

$$|F(j\omega_\pi)| = \frac{1}{(\sqrt{1+3})^3} = \frac{1}{8} = -X_a \implies X_a = -\frac{1}{8}$$

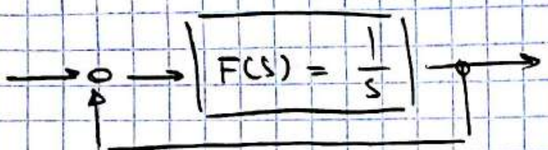
QUINDI SE $K < 8$ IL SISTEMA È STABILE.

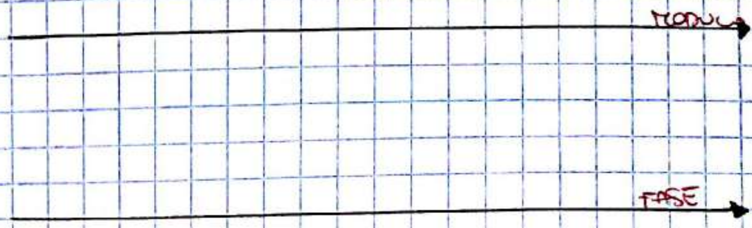


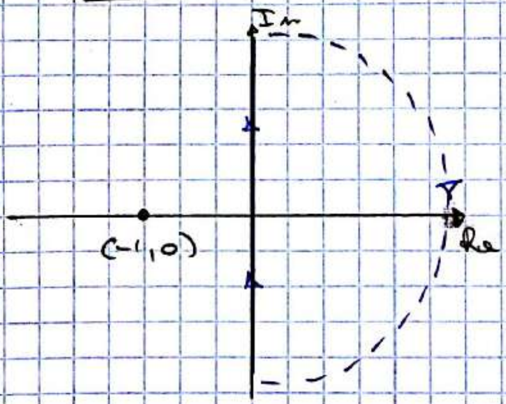
PER STUDIARE LA STABILITÀ SI TRACCIA IL DIAGRAMMA DI N. DI

$e^{-\tau s}F(s)$

ex)

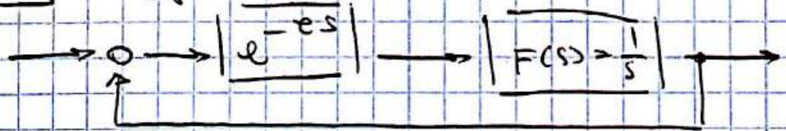




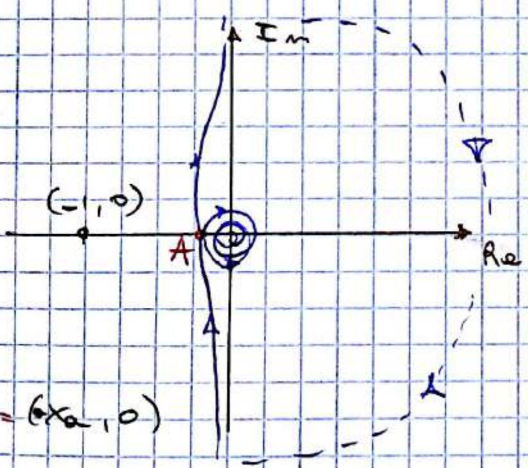


QUINDI IL SISTEMA È STABILE
SE PERÒ INTRODUCIAMO UN RITARDO
PUÒ DIVENTARE INSTABILE

Ex)



PER QUALI VALORI DI τ È INSTABILE?



$A = (x_a, 0)$

Trovo ω_π

$$\left.\angle e^{-\tau s}F(s)\right|_{s=j\omega_\pi} = -180^\circ$$

$$\angle e^{-\tau j\omega_\pi}\cdot\frac{1}{j\omega_\pi} = -180^\circ \iff -\tau\omega_\pi - 90^\circ = -180^\circ$$

$$\iff \omega_\pi = \frac{\pi}{2\tau}$$

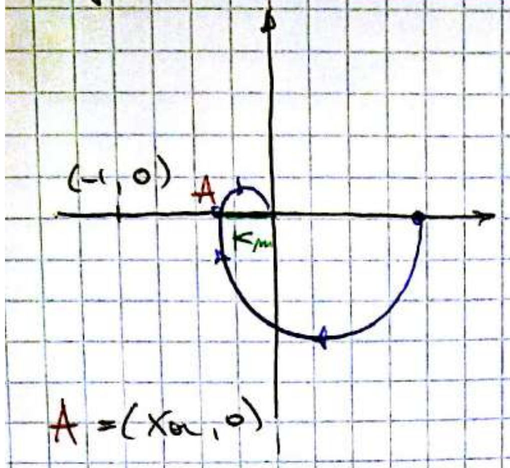
Trovo x_a

$$x_a = -\left|e^{-\tau j\omega_\pi}\cdot F(j\omega_\pi)\right| = -1\cdot\frac{1}{\omega_\pi} = -\frac{2\tau}{\pi}$$

Quindi se $-1 < -\frac{2\tau}{\pi} \iff \tau < \frac{\pi}{2}$ IL SISTEMA È STABILE ASINTOTICAMENTE

Def: MARGINE DI GUADAGNO K_m

K_m È IN dB



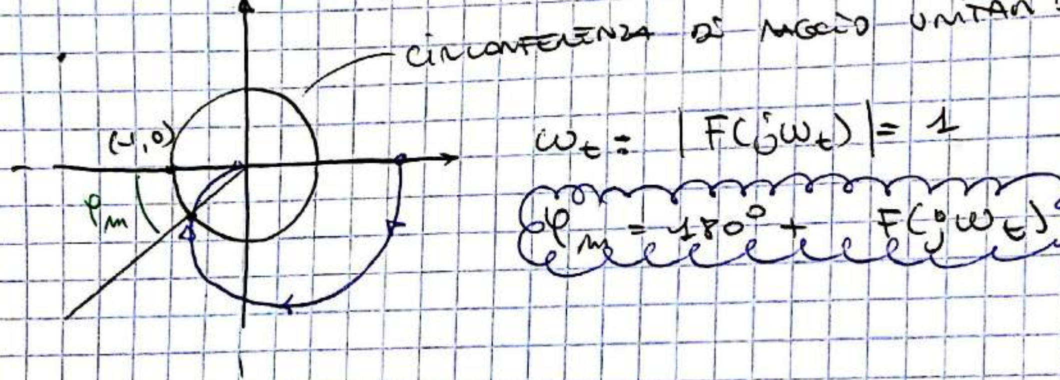
$$K_m = \frac{1}{\overline{AO}} = \frac{1}{x_a}$$

$A = (x_a, 0)$

OSS.

CON UN MARGINE DI GUADAGNO ALTO RENDIAMO IL SISTEMA PIÙ ROBUSTO RISPETTO A INCERTEZZE SUL GUADAGNO.
CI VUOLE UN GUADAGNO MOLTO ALTO PER RENDERE IL SISTEMA INSTABILE

Def: MARGINE DI FASE φ_m



$\omega_t : |F(j\omega_t)| = 1$

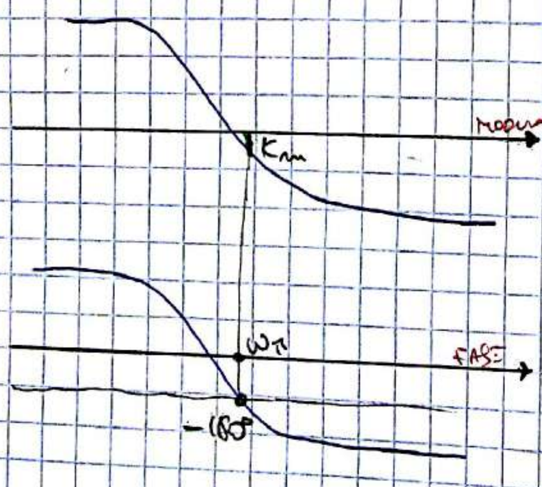
$$\varphi_m = 180° + \angle F(j\omega_t)$$

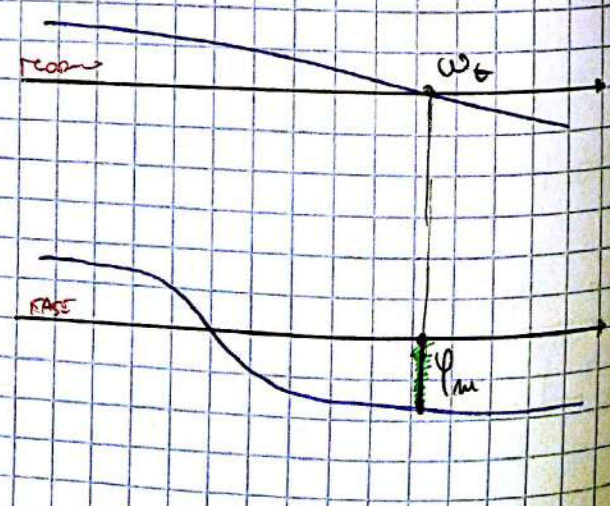
OSS.

CON UN MARGINE DI FASE GRANDE IL SISTEMA È PIÙ ROBUSTO RISPETTO A PERTURBAZIONI DELLA FASE

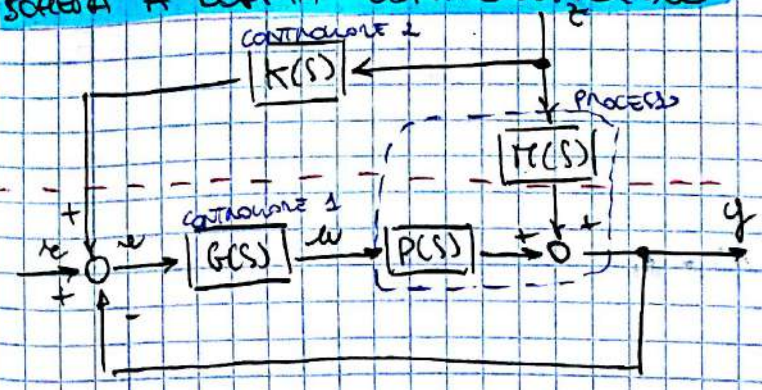
OSS.

I VALORI DI K_m E φ_m SI POSSONO OTTENERE ANCHE PER VIA GRAFICA DAI DIAGRAMMI DI BODE





SCHEMA A DOPPIA CONTROREAZIONE



OSS

SE NEL COMPITO È SCRITTO
'IL DISTURBO Z È MISURABILE'
BISOGNA USARE QUESTO SCHEMA.
ALTRIMENTI NO

SAPPIAMO CHE:

$$\frac{y}{r} = W = \frac{GP}{1+GP} \quad \text{e che} \quad \frac{y}{z} = W_z = \frac{M + GPK}{1+PG}$$

OSS

IL PROBLEMA VA DIVISO IN DUE SOTTOPROBLEMI: UNO CHE RIGUARDA IL CONTROLLORE G(S) E UNO CHE RIGUARDA IL CONTROLLORE K(S).

IL PRIMO RIGUARDA LE SPECIFICHE IN CUI NON È PRESENTE IL DISTURBO

IL SECONDO IN CUI È PRESENTE IL DISTURBO

K(S) } SOLO SPECIFICHE DEL DISTURBO

G(S) } TUTTE LE ALTRE

OSS

CON IL SECONDO CONTROLLORE SI RIESCE AD OTTENERE LA REIEZIONE (QUASI) (*) TOTALE DI TUTTI I DISTURBI. (NON AD EX SOLO QUELLI COSTANTI O DI TIPO $r = t$ ...)

SE PONGO INFATTI $W_z = 0$ (FDT DISTURBO - USCITA), PER OGNI z LA y SARÀ NULLA.

PER FARE CIÒ: $W_z = \dfrac{M + GPK}{1+PG} = 0 \iff K = -\dfrac{M}{GP}$

C'È PERÒ UN PROBLEMA (*):

POTREBBE VENIRE UNA K(S) IMPROPRIA (NON REALIZZABILE FISICAMENTE)

PER OVVIARE A QUESTO PROBLEMA VANNO AGGIUNTI DEI 'POLI LONTANI'

Def: POLO LONTANO

$$\frac{1}{1+TS} \quad \text{CON } T > 0 \text{ SUFF. PICCOLO}, \ T \in \mathbb{R}$$

TEOREMA

SE AGGIUNGO UN 'POLO LONTANO' ALLA K(S) PER RENDERLA PROPRIA, OTTENGO UN'INFLUENZA LIMITATA DEL DISTURBO SULL'USCITA. MINORE È T, MINORE È L'INFLUENZA CHE IL DISTURBO PRODUCE (MA PER T ECCESSIVAMENTE PICCOLO HO PROBLEMI DI REALIZZABILITÀ).

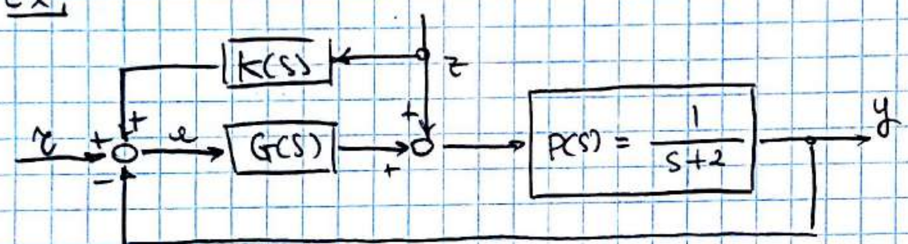
EX.

$$K(S) = -\frac{\Pi}{GP} = \frac{S(S+2)}{S+1} \longrightarrow K(S) = \frac{S(S+2)}{(S+1)(1+0.01S)}$$

EX.

$$K(S) = -\frac{\Pi}{GP} = \frac{(S+1)^2(S+2)}{S+3} \longrightarrow K(S) = \frac{(S+1)^2(S+2)}{(S+3)(1+0.01S)^3}$$

EX.



IL DISTURBO z È MISURABILE

2') LA RISPOSTA y CORRISPONDENTE AD UN QUALSIASI DISTURBO z SIA NULLA

// TUTTE LE ALTRE SPECIFICHE (2 ESCLUSA) SONO LE STESSE DELL'ULTIMO ESERCIZIO

TROVO $\frac{y}{z} = W_z$ (PONGO $r = 0$)

$$\begin{cases} y = P\cdot(z + Ge) \\ e = Kz - y \end{cases} \longrightarrow y = P(z + GKz - Gy) \longrightarrow y = \frac{P + PGK}{1+PG} z$$

OSS.

TUTTE LE SPECIFICHE AD ECCEZIONE DELLA 2 NON FANNO RIFERIMENTO AL DISTURBO. CALCOLO G(S) COSÌ COME È STATO FATTO NELL'ES. DELL'ALTRA VOLTA.

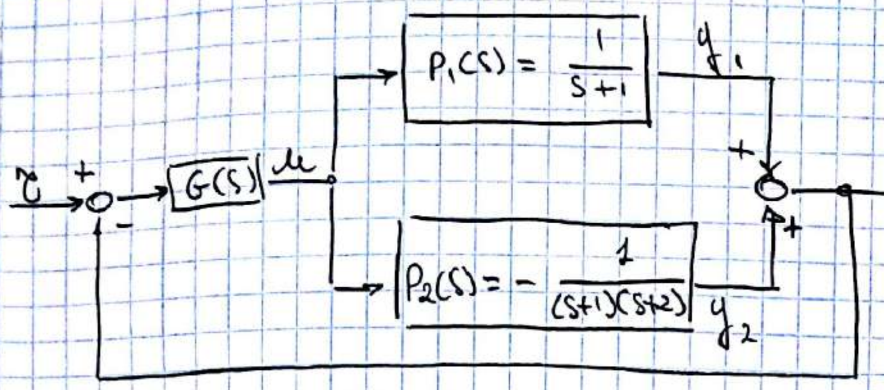
OTTENGO: $G(S) = 2 \cdot \frac{S^2+4}{S(S+1)}$

PER SODDISFARE LA SECONDA SPECIFICA PONGO $W_z = 0$

$$\longrightarrow P + PGK = 0 \longrightarrow K(S) = -\frac{1}{G} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{S(S+1)}{S^2+4}$$

NON DEVO METTERE POLI LONTANI

EX



SI DETERMINI UN CONTROLLORE $G(s)$ A DIMENSIONE MINIMA IN MODO TALE CHE:

1) IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINTOTIC. STABILE
2) IL SISTEMA COMPLESSIVO ABBIA 3 AUTOV. NASCOSTI
3) L'ERRORE A REG. PERM. CORRISPONDENTE AL RIFERIMENTO $r(t) = \sin(t)$ SIA NULLO
4) LA RISPOSTA y A REG. PERM. CORRISPONDENTE AL RIFERIMENTO $r(t) = 1$ SIA UGUALE A 0.5

<u>TROVO $P(s)$</u>:

$$\frac{y}{u} = P \qquad \begin{cases} y = y_1 + y_2 \\ y_1 = P_1 u \\ y_2 = P_2 u \end{cases} \longrightarrow y = (P_1 + P_2)u \Rightarrow P = P_1 + P_2$$

PARALLELO: SOMMA DELLE FDT

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{\cancel{s+1}}{\cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

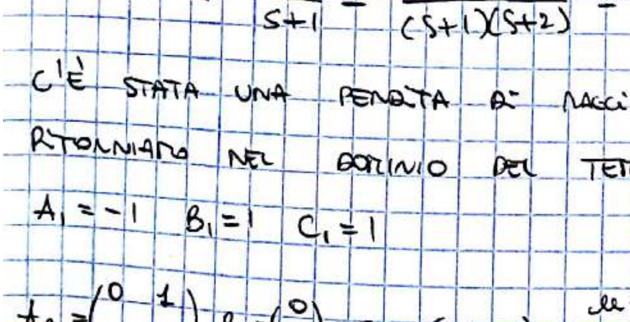
UN AUTOVALORE È DIVENTATO NASCOSTO

C'È STATA UNA PERDITA DI RAGGIUNGIBILITÀ O OSSERVABILITÀ?

RITORNIAMO NEL DOMINIO DEL TEMPO:

$A_1 = -1 \quad B_1 = 1 \quad C_1 = 1$

$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$



$$A_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad B_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -2$

$$\text{ran}\begin{pmatrix} B_P & A_P B_P & A_P^2 B_P \end{pmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{\# AUTOV. RAGG.}$$

$$\text{ran}\begin{pmatrix} C_P \\ C_P A_P \\ C_P A_P^2 \end{pmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{\# AUTOV. OSS.}$$

ADESSO, VISTO CHE SAPPIAMO CHE $\lambda_3 = -2$ È RAGG. E OSS.

POSSIAMO DEDURRE CHE $\begin{cases} \lambda_1 = -1 & \text{RAGG e } \neg\text{OSS} \\ \lambda_2 = -1 & \neg\text{RAGG. e OSS} \end{cases}$

QUINDI ABBIAMO ~~...~~ DUE AUTOVALORI NASCOSTI SOLO PER IL PARALLELO, DOBBIAMO FARNE UN TERZO.

POICHÉ IL POLO DI P(S) È A PARTE REALE < 0, POSSIAMO RENDERLO NASCOSTO CON G(S)

$$G(S) = \frac{(S+2)\ \cdots}{\cdots}$$

CANCELLAZIONE ZERO-POLO, $\lambda = -2$ PERDE LA RAGGIUNGIBILITÀ

PASSIAMO A TRATTARE LA ~~TERZA SPECIFICA~~:

$$W_e = \frac{e}{r} = \frac{D_F}{N_F + D_F} \quad \text{OVE} \quad F = GP$$

QUINDI $\tilde{e}(t) = |W_e(j1)| \sin(t + \angle W_e(j1)) = 0$

$$|W_e(j1)| = 0 \iff \left| \frac{D_F(j1)}{N_F(j1) + D_F(j1)} \right| = 0 \Leftarrow |D_F(j1)| = 0$$

$$\iff |D_G(j1) D_P(j1)| = 0 \Leftarrow |D_G(j1)| \cdot |D_P(j1)| = 0$$

POICHÉ $|D_P(j1)| \neq 0 \rightarrow$ DEVO IMPORRE $|D_G(j1)| = 0$

QUINDI G(S) DEVE AVERE UN POLO IN j. PER PROBLEMI DI REALIZZABILITÀ NE DEVE AVERE UN ALTRO IN $-j$.

QUINDI:

$$G(S) = \frac{(S+2)\ \cdots}{(S^2+1)\ \cdots}$$

PASSIAMO A TRATTARE LA QUARTA SPECIFICA

$$W = \frac{y}{r} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$$ DEVO IMPORRE $W(0) = 0{,}5$ (GUADAGNO LE TABELLE DI USCITE A INGRESSI CANONICI)

È ARRIVATO IL MOMENTO DI IPOTIZZARE LA STRUTTURA DI $G(s)$.

TENENDO CONTO CHE DEVE ESSERE A DIMENSIONE MINIMA DEVO PARTIRE DA UNA STRUTTURA A DIM 2 (DIMENSIONE ATTUALE DI $G(1)$)

IPOTIZZO LA SEGUENTE STRUTTURA:

$$G(s) = \frac{(s+2)(as+b)}{(s^2+1)} \longrightarrow F = GP = \frac{as+b}{s^2+1}$$

$$W(0) = \frac{N_F(0)}{N_F(0) + D_F(0)} = \frac{b}{b+1} = 0{,}5 \Longrightarrow b = 1$$

PRIMA SPECIFICA (STABILITÀ)

DEVO IMPORRE CHE $\overset{\text{DENOMINATORE DI } W(s)}{D_W} = N_F + D_F$ ABBIA TUTTI GLI ZERI < 0

$$D_W = as + 1 + s^2 + 1 = s^2 + as + 2$$

PER IL CRITERIO DI ROUTH, BASTA CHE $a > 0$

OSS: PER POLINOMI DI GRADO 2 LA C.N. È ANCHE S.

ALTRA DOMANDA:

QUAL È IL POLINOMIO CARATTERISTICO DEL SISTEMA COMPLESSIVO?

$$P(\lambda) = \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + 1)}_{\text{RAGG. DI OSS}}\underbrace{(\lambda+1)}_{\text{RAGG. E OSS}}\underbrace{(\lambda+1)}_{\text{TRASC. E OSS}}\underbrace{(\lambda+2)}_{\text{TRASC. E OSS}} \quad a > 0$$

QUINDI: $$G(s) = \frac{(s+2)(as+1)}{(s^2+1)} \quad \text{CON } a > 0$$

EX. VARIANTE DELL'EX PRECEDENTE

LA SPECIFICA 1) DIVERSA:

1) IL POLINOMIO CARATTERISTICO DEL SISTEMA COMPLESSIVO DEVE ESSERE $(\lambda+1)^2(\lambda+2)^N$
$N \in \mathbb{N}$

OSS

SE LA SPECIFICA NON IMPONEVA $(\lambda+1)^2 \ldots$ MA AD EX $(\lambda+1)(\lambda+2)^N$ IL PROBLEMA NON AVREBBE AVUTO SOLUZIONE. GLI AUTOVALORI NASCOSTI IN -1 NON LI POSSO CONTROLLARE!

LA PRIMA PARTE È IDENTICA:

OTTENGO $G(s) = \frac{(s+2)\cdots}{(s^2+1)}$

ORA DEVO SCEGLIERE LA STRUTTURA DI $G(s)$.

$G(s) = \frac{(s+2)(as+b)}{(s^2+1)}$ NON VA BENE! PERCHÉ SAREBBE VERO

CHE $(N°\ \overset{a\ e\ b}{\text{PARAMETRI}}) = 2 = \overset{\text{GRADO DEL DEN. di } F}{d_F} = 2$ e QUINDI POSSO APPLICARE

IL METODO DI ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI MA HO

BISOGNO DI UN ALTRO GRADO DI LIBERTÀ PER SODDISFARE LA

QUARTA SPECIFICA (QUINDI AVERE $(N°\ PAR.) = d_F+1$))

NEANCHE $G(s) = \frac{(s+2)(as+b)}{(s^2+1)(s+c)}$ VA BENE, PERCHÉ

AVREI $(N°\ PARAMETRI) = 3 = d_F = 3$

QUINDI DEVO SCEGLIERE:

$$G(s) = \frac{(s+2)(as+b)}{(s^2+1)(s^2+bs+d)}$$

~~QUARTA SPECIFICA~~:

$$W_F(0) = \frac{N_F(0)}{D_F(0)+N_F(0)} = \frac{c}{c+d} = 0{,}5 \longrightarrow c = 0{,}5c + 0{,}5d \rightarrow c = d$$

~~PRIMA SPECIFICA~~:

$$D_W = N_F + D_F = as^2+bs+c + (s^2+1)(s+d) = (s+2)^3$$

$$\Updownarrow$$

$$s^3+s^2(a+d)+s(b+1)+c+d = s^3+6s^2+12s+8$$

$$\begin{cases} a+d=6 \\ b+1=12 \\ c+d=8 \\ c=d \end{cases}$$

$c = d$ ← DERIVANTE DALLA QUARTA SPECIFICA

ALLA FINE: $\underline{a=2}$, $\underline{b=11}$, $\underline{c=d=4}$

QUINDI:

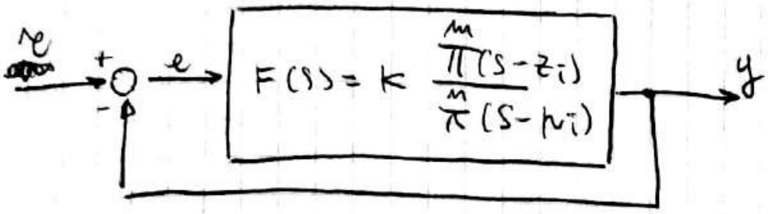
$$G(s) = \frac{(s+2)(2s+11)}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}$$

e IL POLINOMIO CARATTERISTICO:

$$P(s) = \underbrace{(s+1)}_{\text{RAGG. e OSS}}\underbrace{(s+1)}_{\text{? RAGG. e OSS}}\underbrace{(s+2)}_{\text{? RAGG. e OSS}}\underbrace{(s+2)^3}_{\text{RAGG. e OSS.}}$$

QUINDI È VENUTO $N=4$

LUOGO DELLE RADICI:



EX,

$F(s) = K \dfrac{(s+1)(s-1)}{s^2(s+3)}$ $m=2$ $n=3$ $z_1=-1$ $z_2=1$ $p_1=p_2=0$ $p_3=-3$

$$W(s) = \frac{N_F}{N_F+D_F} \longrightarrow D_W = N_F+D_F = \underbrace{K\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}_{N_F} + \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}_{D_F}$$

IL LUOGO DELLE RADICI DESCRIVE COME CAMMINANO SUL PIANO COMPLESSO LE n RADICI DI D_W AL VARIARE DI K

OSS

D_W È DI GRADO n, INFATTI PER LE FdT $n \geq m$

EX,

$F(s) = K \dfrac{1}{s(s+2)}$ $m=0$ $n=2$ $p_1=0$, $p_2=-2$

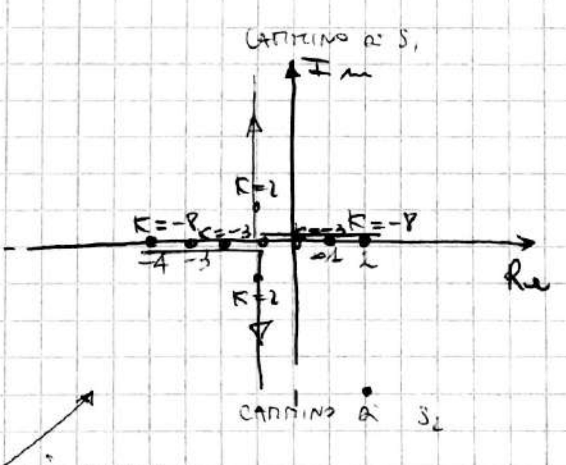
$D_W = N_F+D_F = K+s(s+2) = s^2+2s+K = 0$

$s_1 = -1+\sqrt{1-K}$

$s_2 = -1-\sqrt{1-K}$

K	s_1	s_2
-8	2	-4
-3	1	-3
0	0	-2
1	-1	-1
2	$-1+j$	$-1-j$
5	$-1+2j$	$-1-2j$

LI GRAFICO



(*)
CAMMINO DELLA RADICE: SI METTE UN VERSO (QUELLO DELLE K CRESCENTI)

OSS,
ORA DAL LUOGO DELLE RADICI DISEGNATO POSSO VEDERE PER QUALI VALORI DI K IL SISTEMA È STABILE E PER QUALI NON LO È

IL SISTEMA È STABILE ASINTOTICAMENTE SE $K>0$

OSS,
CI SONO DELLE REGOLE PER TRACCIARE IL LUOGO DELLE RADICI

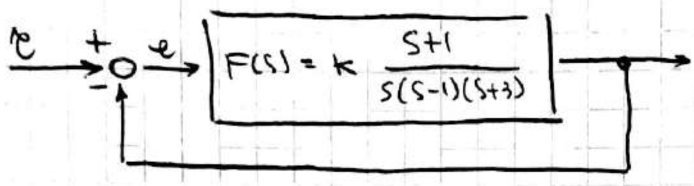
Def: LUOGO POSITIVO ——— LO INDICO CON

PARTE DEL GRAFICO CHE CORRISPONDE A VALORI POSITIVI DI K — PARTENZA 0, ARRIVO $+\infty$

Def: LUOGO NEGATIVO ——— LO INDICO CON

PARTE DEL GRAFICO CHE CORRISPONDE A VALORI NEGATIVI DI K — PARTENZA $+\infty$, ARRIVO 0

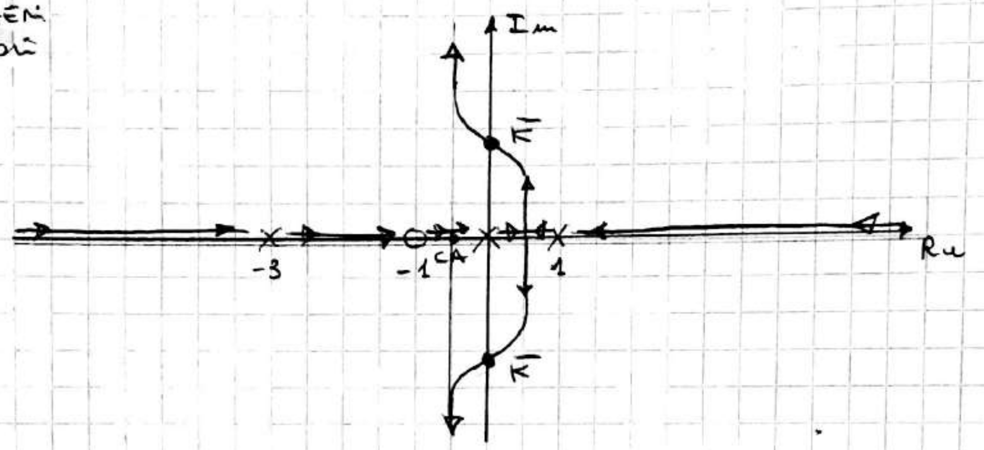
EX



$m=1 \quad z_1=1$

$n=3 \quad p_1=0,\ p_2=1,\ p_3=-3$

O: ZERI
x: POLI



- OGNI VOLTA CHE INCONTRO UNO ZERO O UN POLO IL LUOGO PASSA DA NEGATIVO A POSITIVO E VICEVERSA
- PARTO DA $+\infty$ (NEGATIVO) E VADO FINO A $-\infty$ SULL'ASSE X
- TUTTO L'ASSE X FA PARTE DEL LUOGO DELLE RADICI

	$n-m=1$	$n-m=2$	$n-m=3$
LUOGO POSITIVO		C.A.	
LUOGO NEGATIVO		C.A.	

- DISEGNO GLI ASINTOTI SEGUENDO LA TABELLA

$$C.A. = \text{CENTRO ASINTOTI} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

NELL'ESEMPIO: $n-m=2$ e $C.A. = -\frac{1}{2}$

OSS

IL DENOMINATORE DI $F(s)$ HA GRADO 3 $\Rightarrow$ CI DOBBIAMO ASPETTARE 3 CAMMINI (IN REALTÀ 3 SEMICAMMINI NEGATIVI E 3 SEMICAMMINI POSITIVI)

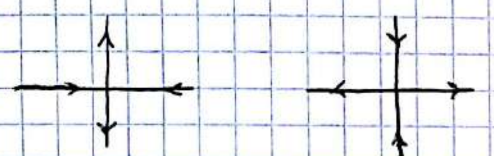
- Gli n semicammini (positivi) partono da ognuno degli n poli
(oss: metto la 'freccetta' verso la parte positiva del cammino già tracciato)

- I semicammini positivi arrivano o in un polo o in un asintoto (1 solo semicammino per polo e 1 solo semicammino per asintoto)
(metto la 'freccetta' entrante nello zero o in alto o in basso sull'asintoto)

OSS. un asintoto fra due arrivi (i suoi due capi)

OSS. se abbiamo due 'frecce' che si scontrano, o divergono, abbiamo un punto singolare

- Se ci sono scontri o divergenze accade questo:



- Completo a intuito il diagramma dei semicammini positivi

- Gli n semicammini (negativi) partono o dagli zeri o dagli asintoti (uno per ogni zero o asintoto)
- Gli n semicammini negativi arrivano ad ognuno degli n poli
- Il grafico è simmetrico rispetto all'asse reale e sono simmetrici anche i valori di K

Osserviamo il grafico → i semicammini negativi sono due a sx dell'asse y e uno a dx; i primi vanno bene, il terzo no. I semicammini positivi vanno bene per $K > \bar{K}$ ove $\bar{K}$ è il valore di K per il quale il luogo delle radici incontra l'asse degli immaginari.
Nell'esempio K negativo non andrà mai bene! uno zero rimane sempre a dx dell'asse per $K \in (-\infty, 0)$

COME TROVIAMO $\bar{k}$?

SAPPIAMO CHE $D_W = N_F + D_F = k(s+1) + s(s-1)(s+3) =$

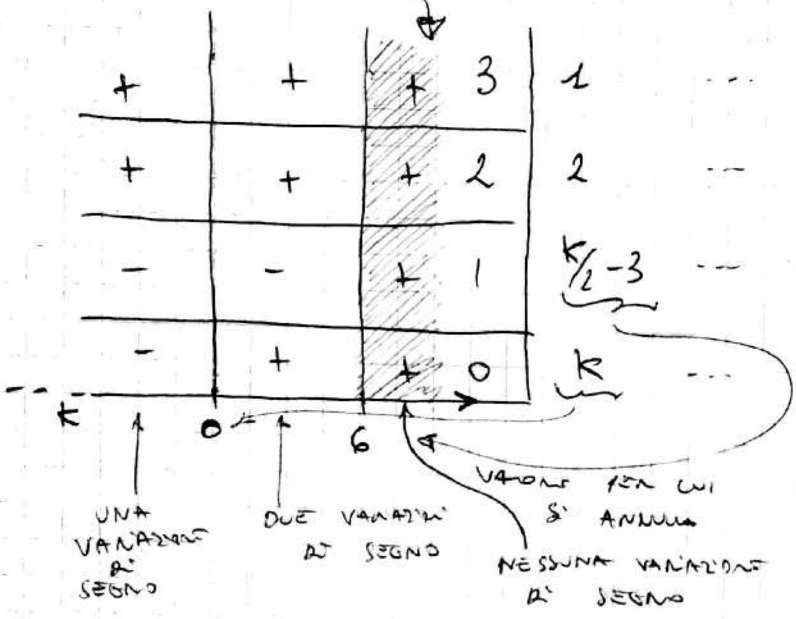
$= s^3 + 2s^2 + s(k-3) + k = 0$

USO IL CRITERIO DI ROUTH

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k-3 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & \frac{k}{2}-3 & \\ 0 & k & \end{array} \qquad \begin{cases} \frac{k}{2}-3 > 0 \\ k > 0 \end{cases} \longrightarrow k > 6$$

QUINDI SO CHE TUTTE LE SOLUZIONI HANNO PARTE REALE < 0 SE $k > 6$

$\bar{k} = 6$ È, QUINDI, IL VALORE LIMITE



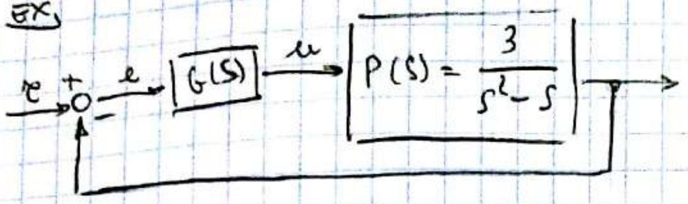
QUINDI:

PER $k \in (-\infty, 0)$ HO 1 RADICE A PARTE REALE > 0

PER $k \in (0, 6)$ HO 2 RADICI A PARTE REALE > 0

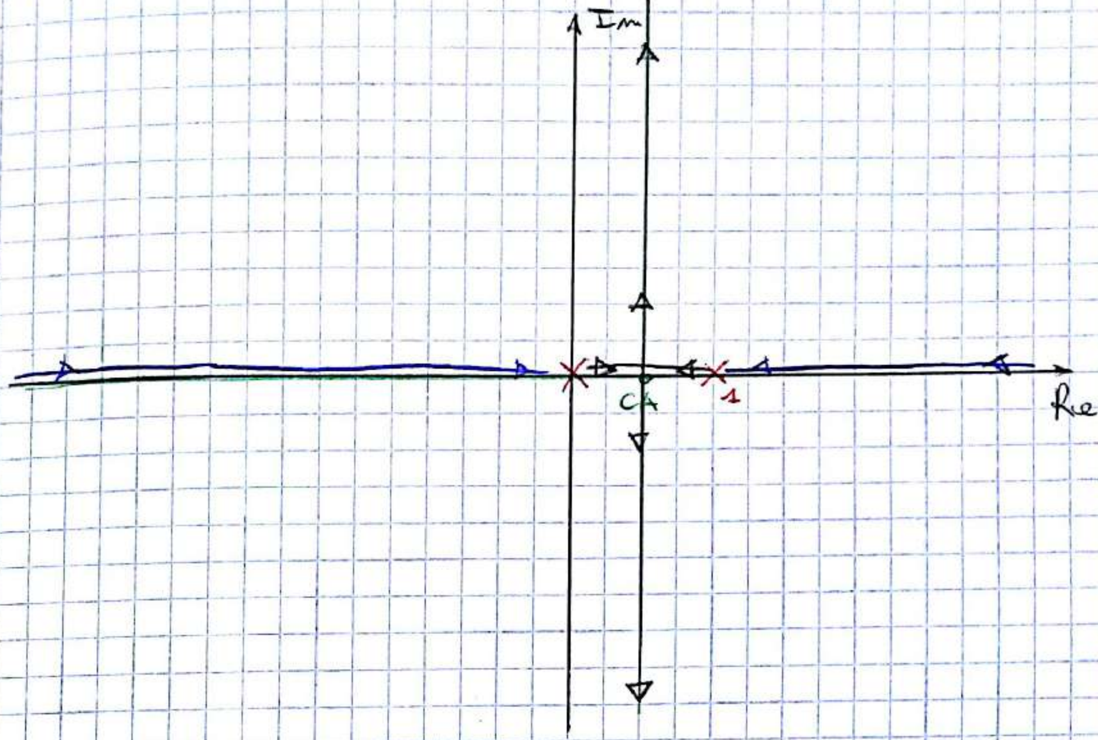
PER $k \in (6, +\infty)$ HO 0 RADICI A PARTE REALE > 0

EX.



TROVARE G(s) IN MODO DA RENDERE STABILE IL SISTEMA COMPLESSIVO

$G(s) = \frac{K}{3} \Longrightarrow F = G \cdot P = K \cdot \frac{1}{s(s-1)}$ $\quad m = 0$, $n = 2$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$



$n - m = 2 - 0 = 2$

$CA = \frac{\sum p - \sum z}{n-m} = \frac{1}{2}$

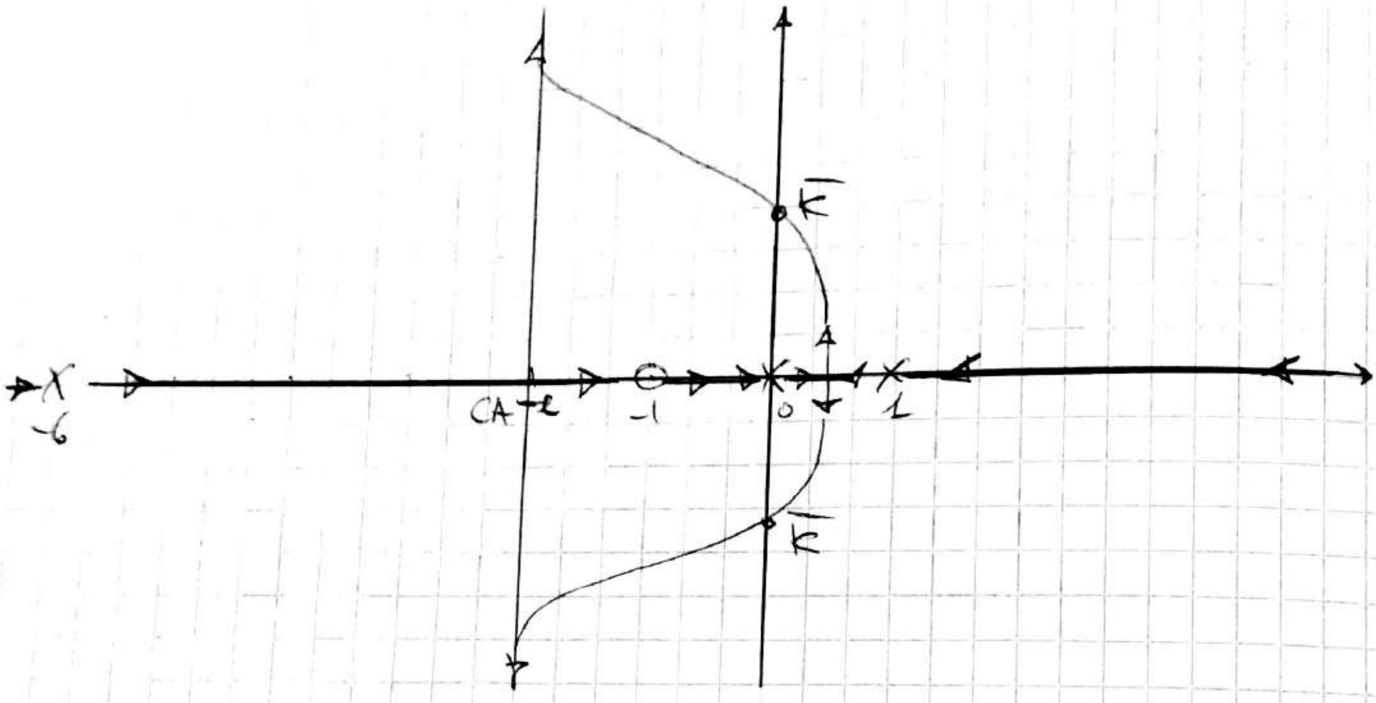
IL SISTEMA NON È STABILE PER NESSUN VALORE DI K!

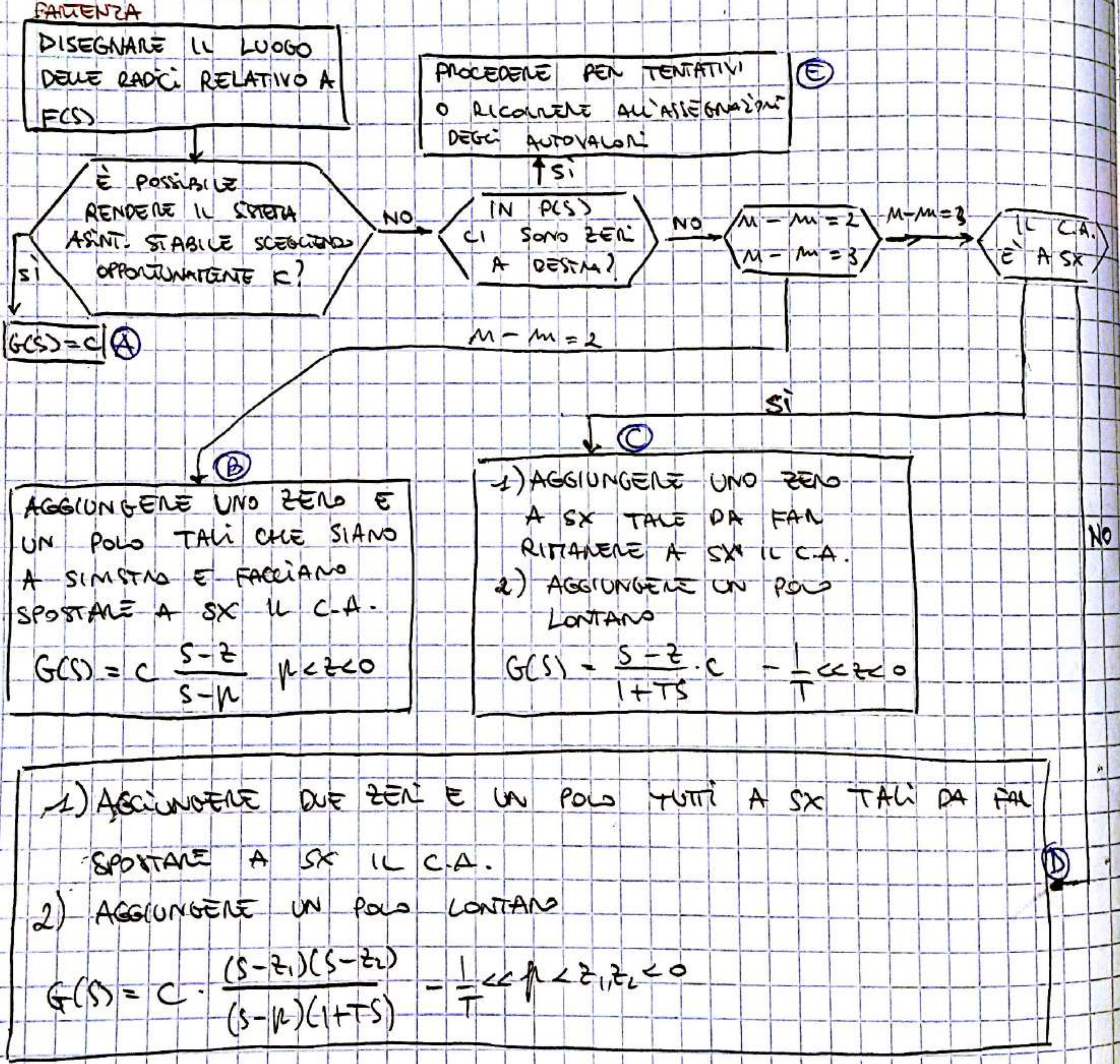
DEVO AGGIUNGERE DEI POLI O/E DEGLI ZERI A G(s)

DAL MOMENTO CHE $CA = \frac{\sum p - \sum z}{n-m}$ SE INTRODUCO DEGLI ZERI IN MODO DA RENDERE $CA < 0 \longrightarrow$ L'ASINTOTO SI SPOSTA A SINISTRA ED ESISTERÀ UN $\bar{K}$ PER CUI PER $K > \bar{K}$ IL SISTEMA È STABILE

SCELGO AD ES. $G(s) = \frac{K}{3} \cdot \frac{s+1}{s+6}$

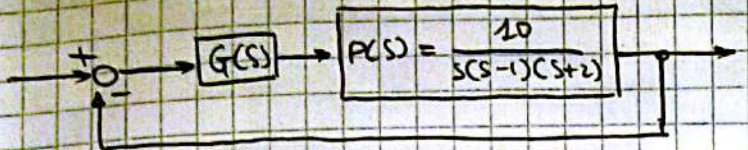
RIFACCIO IL LUOGO


-6
CA
-2
-1
0
1
K
K



OSS per $n-m > 3$ → SEMPRE PROCEDIMENTO (D)

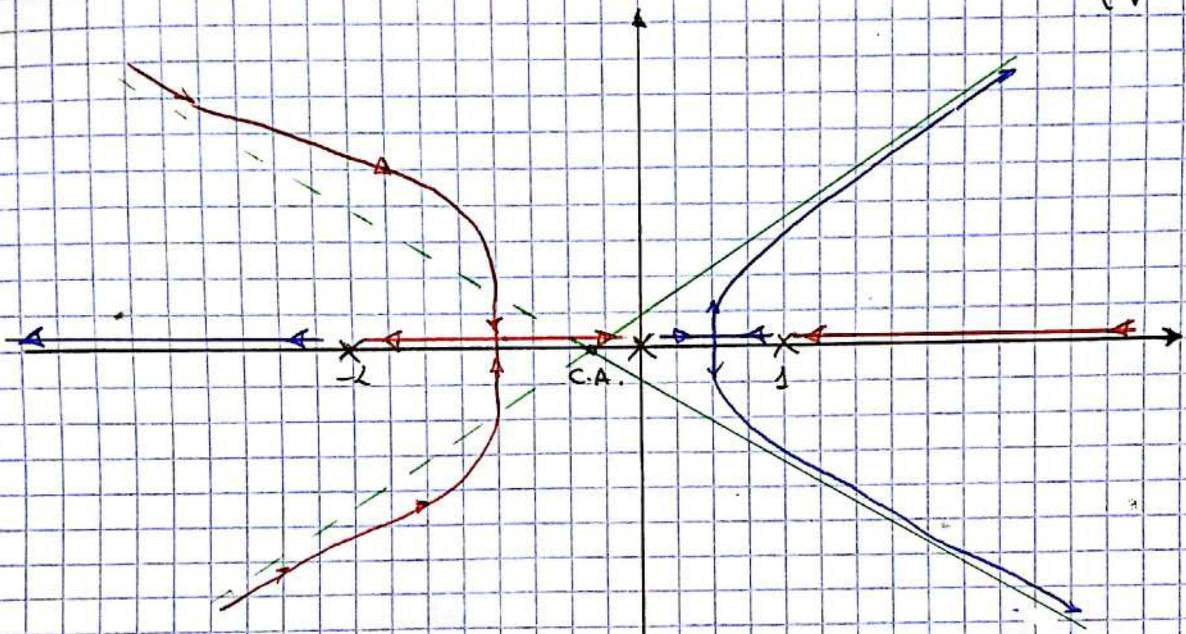
EX)



$$G(S) = \frac{k}{10} \Longrightarrow F(S) = G(S) \cdot P(S) = K \frac{1}{S(S-1)(S+2)}$$

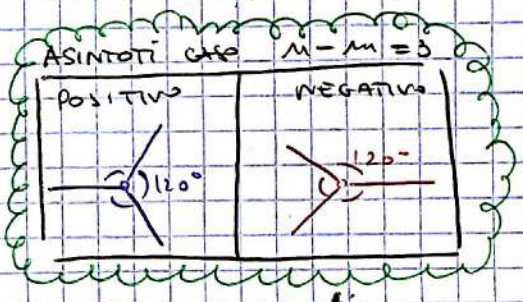
$m = 0$

$n = 3$ $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 1 \\ p_3 = -2 \end{cases}$



—— LUOGO POSITIVO   —— ASINTOTO POS.

—— LUOGO NEGATIVO   - - - ASINTOTO NEG.



$$C.A. = \frac{\sum p_n - \sum z_m}{n - m} = \frac{0 + 1 - 2}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$$

SIA IL LUOGO POSITIVO SIA QUELLO NEGATIVO HA ALMENO UNA RADICE A PARTE REALE > 0 $\forall K \Longrightarrow$ NON POSSO STABILIZZARE IL SISTEMA SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE K.

NON CI SON ZERI A DX E $n - m = 3$ $\underbrace{}_{\text{e il C.A. è a SX}}$ $\longrightarrow$ SIAMO NEL CASO ⓒ DEL DIAGRAMMA

OSS,

AGGIUNGO UNO ZERO A SX IN MODO DA "ADDRIZZARE" L'ASINTOTO FACENDO SI CHE IL LUOGO POSITIVO SI SPOSTI A SX PER DETERMINATI VALORI DI K

OSS,

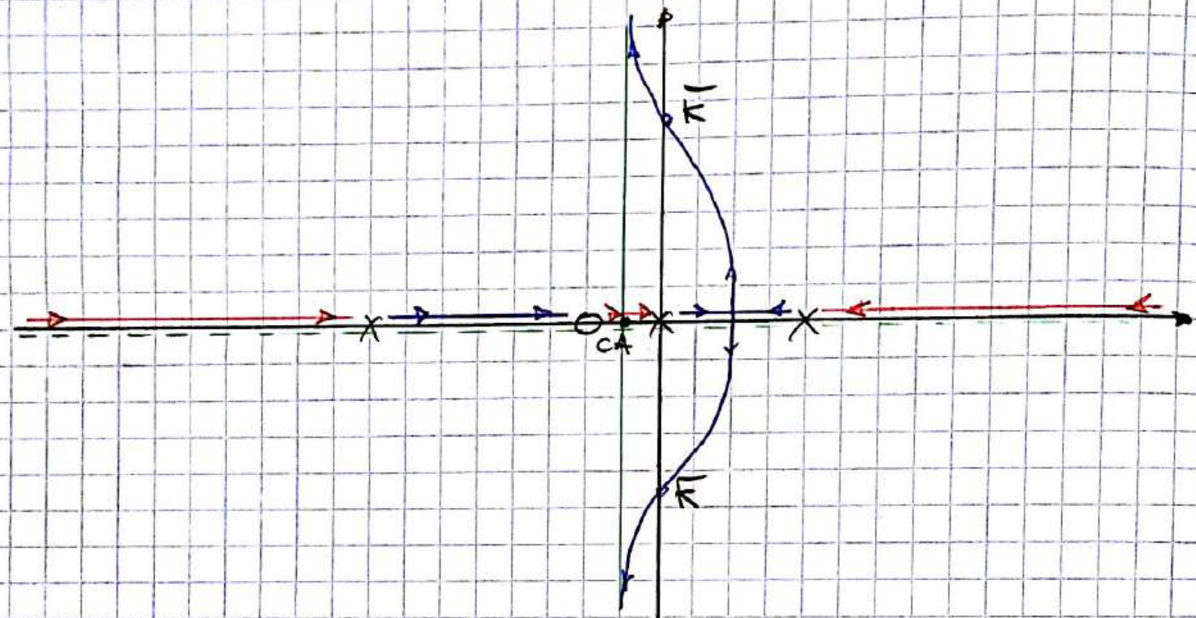
PERCHÉ VOGLIO LO ZERO A SX? PERCHÉ ALTRIMENTI SI CREA UN ASINTOTO A DX!

SCEGLIENDO $G(s) = \frac{k}{10}(s-z)$

$$\begin{cases} C.A._{NEW} = \dfrac{(0+1-2)-z}{3-1} \underbrace{<0}_{\text{VOGLIO CHE C.A. RIMANGA A SX}} \\ \underbrace{z<0}_{\text{VOGLIO LO ZERO A SX}} \end{cases}$$

SCELGO $z = -\frac{1}{2} \Rightarrow C.A._{NEW} = -\frac{1}{4}$

OSS. ORA $n-m=2$!



ORA IL LUOGO POSITIVO VA BENE PER $k > \bar{k}$!

OSS.

SE AVESSI MESSO LO ZERO A DX, AVREI AVUTO UNO ZERO TUTTO A DX ~~PARTE~~ DEL SEMIPIANO POSITIVO!

FACENDO I CALCOLI CON ROUTH VIENE $\bar{k} = 4$

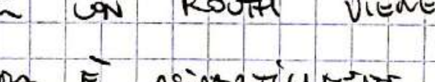
QUINDI IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE PER $k > 4$

C'È ANCORA UN PROBLEMA: $G(s)$ È IMPROPRIA → AGGIUNGO UN POLO

QUINDI: $G(s) = \frac{k}{10}\frac{s+1/2}{Ts+1}$ CON $k > 4$ e $-\frac{1}{T} << -\frac{1}{2} < 0$

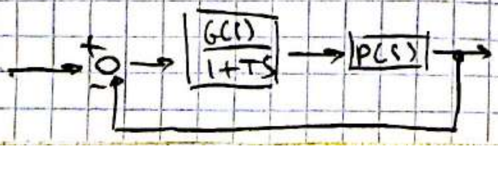
HO APPLICATO IL SEGUENTE TEOREMA

SE IL SISTEMA



È AS. STABILE

ALLORA $\exists \bar{T} > 0$ t.c. $\forall T \in (0, \bar{T})$ ANCHE IL SISTEMA



È ASINT. STABILE

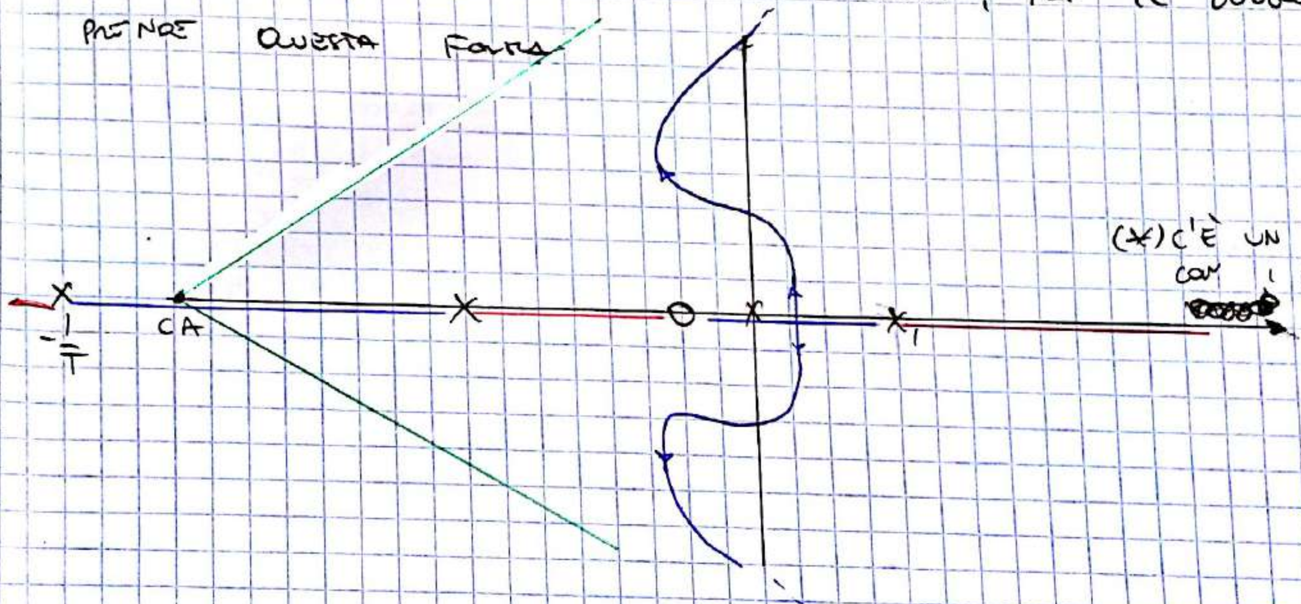
OSS, COME CALCOLO T?

PER TROVARE UN VALORE DI T, SCELGO UN VALORE DI K (ES K=10) E APPLICO IL CRITERIO DI ROUTH AL DENOMINATORE DEL SISTEMA COMPLESSIVO MANTENENDO T COME INCOGNITA

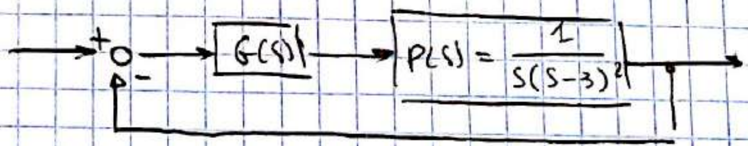
PER K = 10 SI OTTIENE $0 < T < 0,036$ PER I QUALI IL SISTEMA COMPLESSIVO RIMANE STABILE

OSS MA AGGIUNGENDO UN POLO, $n-m=3$ DI NUOVO. NON SI CREA LO STESSO PROBLEMA DI PRIMA?

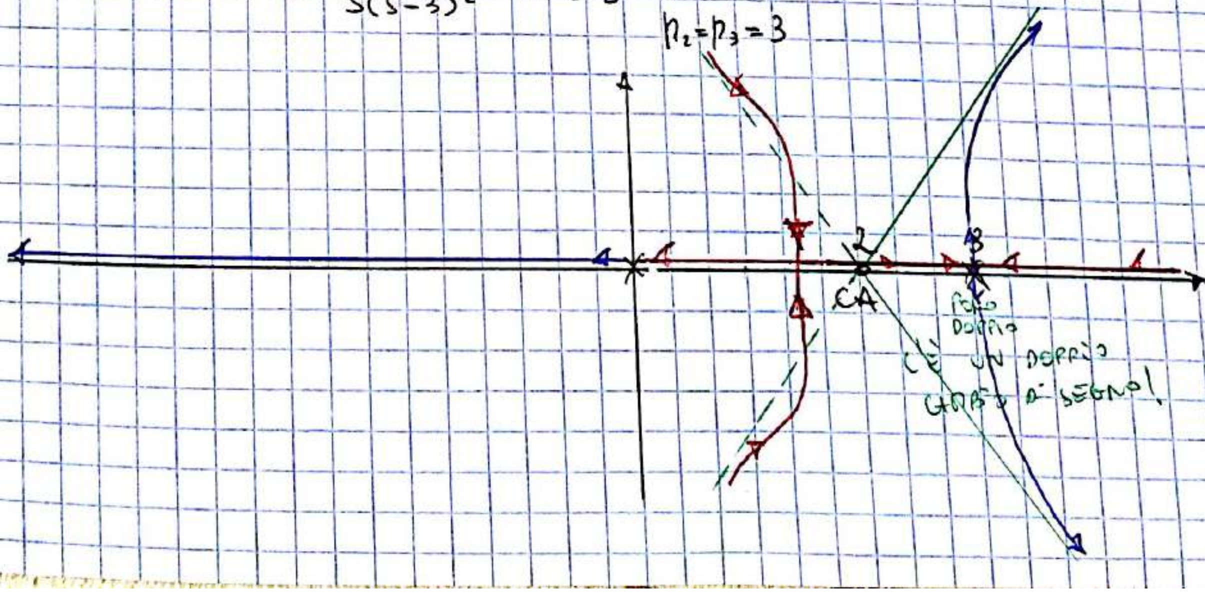
GLI ASINTOTI RITORNANO AD ESSERE OBLIQUI, MA IL LUOGO PRENDE QUESTA FORMA



EX)



$G(S) = K \rightarrow F(S) = K \frac{1}{S(S-3)^2}$ $m = 0$, $n = 3$ $p_1 = 0$, $p_2 = p_3 = 3$ $n - m = 3$



ORA ESISTE UN $\bar{K}$ t.c. PER $K > \bar{K} > 0$ IL SISTEMA È ASINT. STABILE.

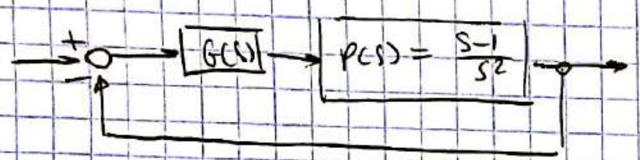
SE CALCOLO $\bar{K}$ CON ROUTH VIENE $\bar{K} = 150,1$

MA ABBIAMO ANCORA UN PROBLEMA! $G(s)$ È IMPROPRIA $\rightarrow$ DEVO AGGIUNGERE UN POLO LONTANO

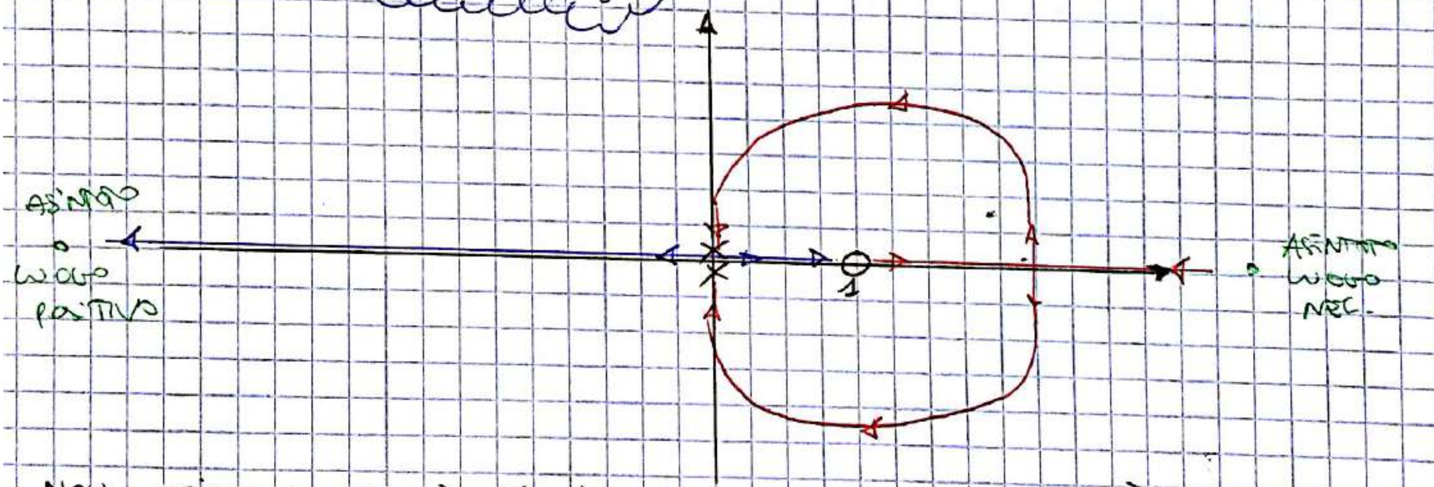
OTTENGO COSÌ $G(s) = K \frac{(s+1)^2}{(s+10)(1+Ts)}$ CON $K > 150,1$ e $T > 0$ SUFF. PICCOLO

COME AL SOLITO SI PUÒ RICAVARE T APPLICANDO ROUTH A D_W USANDO T COME INCOGNITA.

EX)



$G(s) = K \rightarrow F = GP = K \frac{s-1}{s^2}$ $\mu = m = 1$



NON ESISTONO VALORI DI K PER CUI IL SISTEMA È STABILE

SIAMO NEL CASO (E)

PROCEDO CON L'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI.

CON $G(s) = \frac{as+b}{s+c} \rightarrow F(s) = \frac{as+b}{s+c} \cdot \frac{s-1}{s^2}$ ABBIAMO CHE N° PARAM = d_F OK!

$D_W = N_F + D_F = (as+b)(s-1) + (s+c)s^2 = (s+1)^3$ METTO AD EX TUTTI IN '-1'

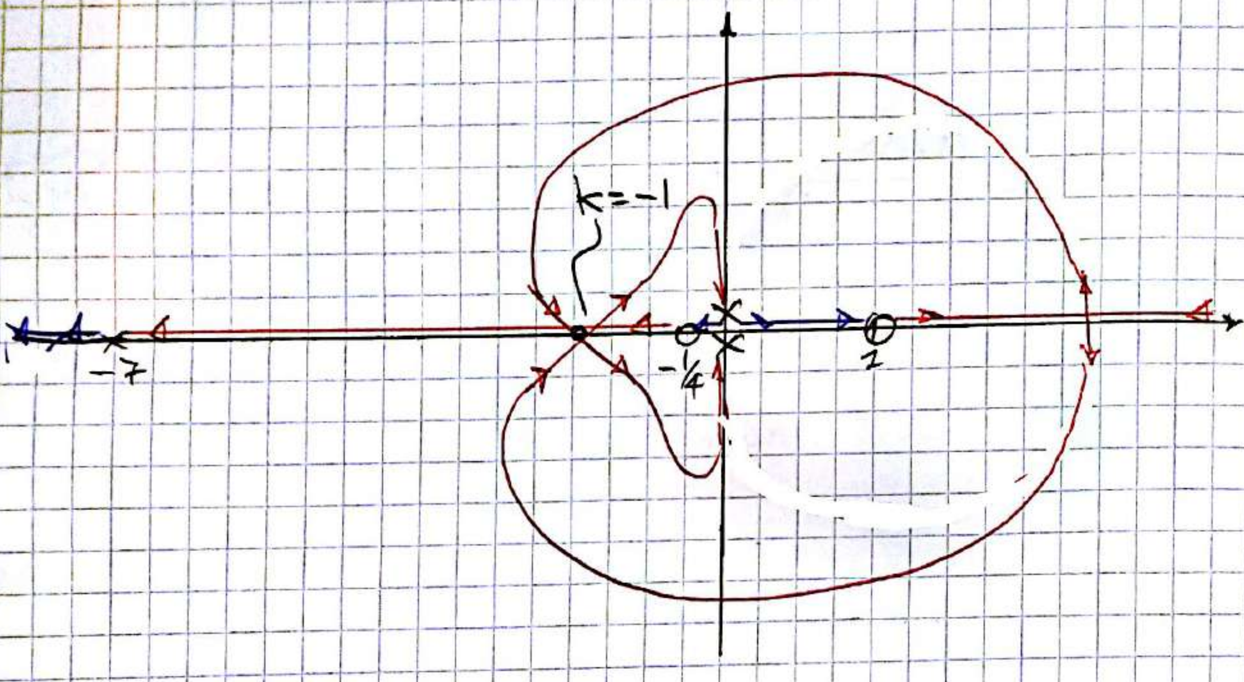
FACENDO I CALCOLI:

$a = -4 \quad b = -1 \quad e \quad c = 7$

OTTENGO COSÌ $G(s) = \frac{-4s-1}{s+7} = -4\,\frac{s+\frac{1}{4}}{s+7}$

PROVIAMO A DISEGNARE $F = GP = k\,\frac{(s+\frac{1}{4})(s-1)}{s^2(s+7)}$ PER CAPIRE COSA È

SUCCESSO (HO SOSTITUITO A -4 k PER DISEGNARLO)



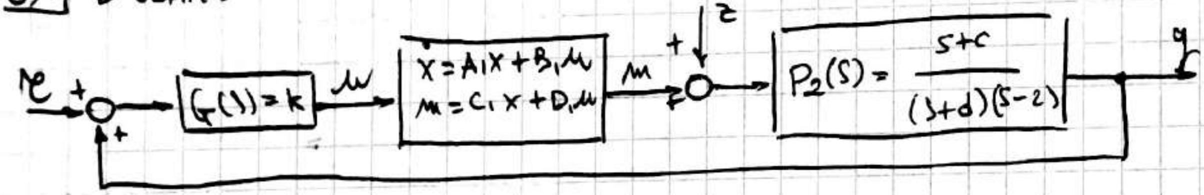
OSS.

L'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI HA CREATO IN -1 UN PUNTO

SINGOLARE ! INVISIBILE ALLE REGOLETTE DI TRACCIAMENTO

TRIPLO

EX. D'ESAME



$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad C_1 = (1 \ \ 1) \quad D_1 = 1$$

SPECIFICHE:

- RISPOSTA y NULLA A REG. PERM. PER DISTURBI z COSTANTI
- IL SISTEMA COMPLESSIVO ABBIA 2 AUTOVALORI COMPLESSI
- IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINT. STABILE CON TUTTI GLI AUTOVALORI COINCIDENTI
- $c \neq d$, $c \neq 0$

CALCOLIAMO $P_1(s)$:

$$P_1(s) = C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 + D_1 = (1 \ \ 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + 1 = \frac{a}{s+b} + 1 = \frac{s+a+b}{s+b}$$

OSS.

IL SOTTOPROGETTO 1 AVEVA DUE AUTOVALORI ($\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -b$) MA AL DENOMINATORE DI $P_1(s)$ COMPARE SOLO L'AUTOVALORE $-b \Rightarrow -2$ È NASCOSTO

VERIFICO SE MA PERSO DI RAGGIUNGIBILITÀ o/e OSSERVABILITÀ

$$\text{rango}\left(A-\lambda_1 I \mid B\right) \underset{\text{rango}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-b & a \end{pmatrix} = 1 < 2 \Rightarrow \lambda_1 = -2 \text{ è } \neg\text{RAGG.}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} A-\lambda_1 I \\ \hline C \end{pmatrix} \overset{\text{rango}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2-b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } b \neq 2 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ è OSS} \\ 1 & \text{se } b = 2 \Rightarrow \lambda = -2 \text{ è } \neg\text{OSS} \end{cases}$$

OSS.

TENENDO PRESENTE LA TERZA SPECIFICA DEL PROBLEMA E VISTO CHE ABBIAMO UN AUTOVALORE NASCOSTO IN -2 CHE NON POSSIAMO MODIFICARE $\longrightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI DOVRANNO ESSERE POSTI IN -2

CALCOLANDO $W_z = \frac{Y}{Z}$

$$\begin{cases} y = P_2(z+m) \\ m = P_1 u \\ u = Ge \\ e = -y \end{cases} \rightarrow y = P_2(z - P_1 G y) \longrightarrow y = \frac{P_2}{1+P_1P_2G} z$$

$$W_z = \frac{P_2}{1+P_1P_2G} \qquad G = \frac{N_G}{D_G} \quad P_1 = \frac{N_{P_1}}{D_{P_1}} \quad P_2 = \frac{N_{P_2}}{D_{P_2}}$$

$$W_z = \frac{\frac{N_{P_2}}{D_{P_2}}}{1+\frac{N_{P_1}}{D_{P_1}}\cdot\frac{N_{P_2}}{D_{P_2}}\cdot\frac{N_G}{D_G}} = \frac{N_{P_2} D_G D_{P_1}}{D_{P_1} D_{P_2} D_G + N_{P_1} N_{P_2} N_G}$$

PER LA PRIMA SPECIFICA E CONSULTANDO LA TABELLA DELLE USCITE A INGRESSI CANONICI VEDO CHE HO BISOGNO DI UNO ZERO IN $s=0$ CON MOLTEPLICITÀ ≥ 1.

QUINDI $N_{P_2} D_G D_{P_1}$ DEVE AVERE UNO ZERO IN $s=0$:

- PER RISPETTARE LA SPECIFICA $c \neq 0$, NON POSSO METTERLO IN N_{P_2},
- NON POSSO METTERLO IN D_G POICHÉ $D_G \equiv 1$
- NON MI RIMANE CHE $D_{P_1} \rightarrow$ PONGO $b = 0$

POICHÉ HO BISOGNO DI DUE AUTOVALORI NASCOSTI IN -2 (PER LA SECONDA + 3ª SPECIFICA) PONGO $a = b = 2$.

INFATTI AVEVAMO:

$$\cdots \to \boxed{P_1(s) = \frac{s+a}{s}} \longrightarrow \oplus \longrightarrow \boxed{P_2(s) = \frac{s+c}{(s+b)(s-2)}}$$

$$a = b = 2$$

IN QUESTO MODO CREIAMO UNA CANCELLAZIONE ZERO-POLO RENDENDO NASCOSTO UN ALTRO AUTOVALORE IN -2

~~IMPONGO LA STABILITÀ~~

$$F = G P_1 P_2 = k \cdot \frac{s+2}{s} \cdot \frac{s+c}{(s+2)(s-2)} = k \, \frac{s+c}{s(s-2)}$$

DEVO USARE L'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI PER ~~[illegible]~~ METTERE TUTTI GLI AUTOVALORI IN -2

N° PARAMETRI = GRADO $D_F \longrightarrow 2 = 2$ OK!

POICHÉ $W = \frac{N_F}{N_F + D_F} \longrightarrow D_W = N_F + D_F = k(s+c) + s(s-2) =$

$$= s^2 + (k-2)s + kc$$

EQ. DIOFANTINA

$$s^2 + (k-2)s + kc = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$$

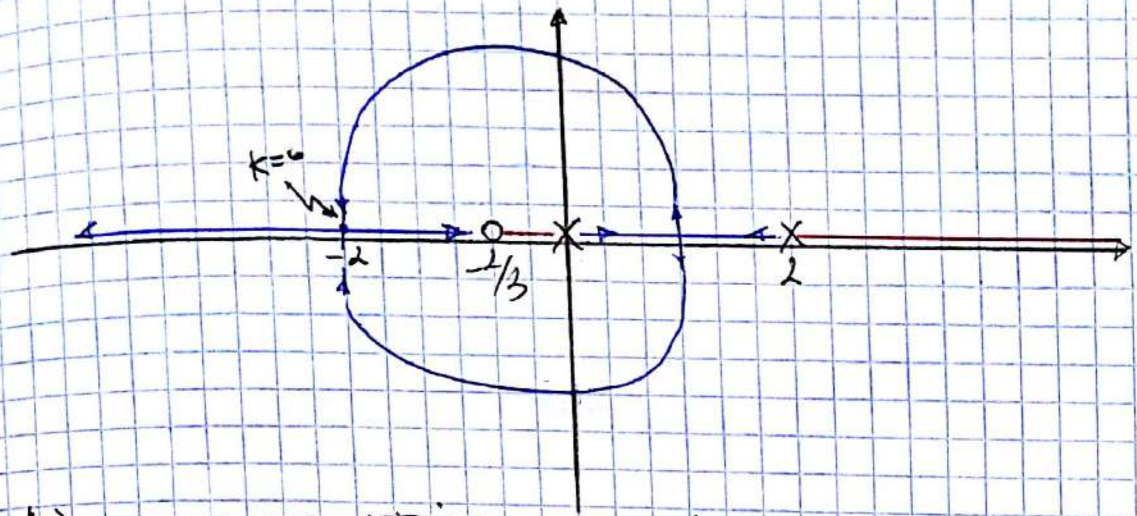
$$\begin{cases} k - 2 = 4 \\ kc = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

DOMANDA ACCESSORIA: SCRIVERE POLINOMIO CARATTERISTICO SISTEMA COMPLESSIVO CON RELATIVA RAGG. e/o OSS.

$$p(s) = \underbrace{(s+2)^2}_{\neg \text{RAGG. e OSS}} \cdot \underbrace{(s+2)^2}_{\text{RAGG. e OSS}}$$

DOMANDA ACCESSORIA: SI TRACCI IL LUOGO DELLE RADICI

$F(s) = k\frac{s+2/3}{s(s-2)}$ SAPPIAMO CHE PER $k=6$ ABBIAMO 2 RADICI IN $s=-2$



QUAL È IL VALORE DI k PER CUI RIDUCIAMO AL MAX LA VELOCITÀ DEL TRANSITORIO? $\underline{k=6}$

INFATTI PER $k=6 \rightarrow$ VEL TRANSITORIO $=-2$

PER $k>6$ UN AUTOVALORE MIGLIORA, L'ALTRO PEGGIORA! e PER $k<6$ TUTTI E DUE PEGGIORANO.

CALCOLIAMO I PUNTI SINGOLARI

$$\begin{cases} s^2+s(k-2)+\frac{2}{3}k=0 & \text{EQUAZIONE DEL LUOGO} \\ 2s+k-2=0 & \text{SUA DERIVATA} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

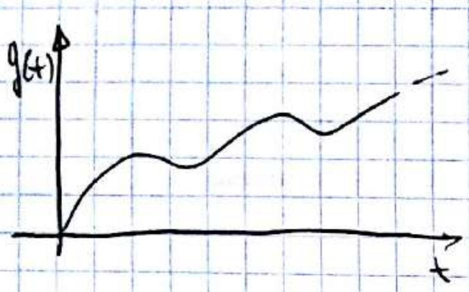
$$s^2+s(\cancel{2}-2s-\cancel{2})+\frac{2}{3}(2-2s)=0 \longrightarrow -s^2-\frac{4}{3}s+\frac{4}{3}=0$$

$$\rightarrow s^2+\frac{4}{3}s-\frac{4}{3}=0 \rightarrow \begin{cases} s_1=0{,}\bar{6} \longrightarrow k_1=-2\cdot 0{,}\bar{6}+2=0{,}\bar{6} \\ s_2=-2 \longrightarrow k_2=2+2\cdot 2=6 \end{cases}$$

Sintesi a tempo discreto

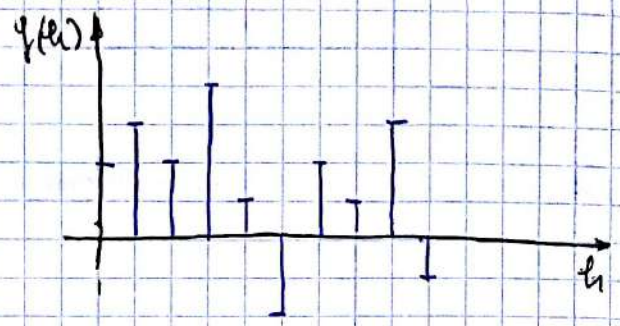
Tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Pz(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Qz(t)$$



Tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Pz(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + Qz(k)$$



Trasformata di Laplace

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$1/s$
t	$1/s^2$

t	s
$a f_1(t) + b f_2(t)$	$a F_1(s) + b F_2(s)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$

Trasformata Zeta

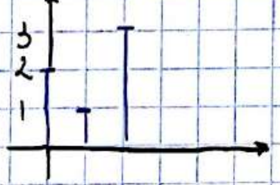
$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$\eta(k)$	$\frac{z}{z-1}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

$$\eta(k) = \begin{cases} 1 & k>0 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}$$

k	z
$a f_1(k) + b f_2(k)$	$a F_1(z) + b F_2(z)$
$f(k-a)$	$\frac{F(z)}{z^a}$

EX



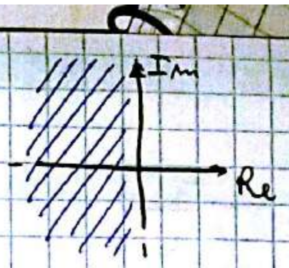
$$f(k) = 2\delta(k) + \delta(k-1) + 3\delta(k-2)$$
$$Z[f(k)] = 2 + \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2}$$

$$P(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$
$$\Pi(s) = C(sI-A)^{-1}P + Q$$

$$P(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$$
$$\Pi(z) = C(zI-A)^{-1}P + Q$$

CONTINUO

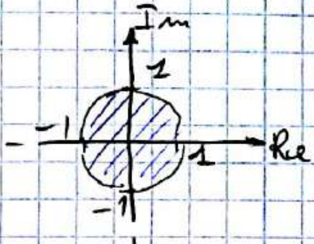
$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$



OVE $e^{At} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i t} \xrightarrow[\text{ASINTOTICA}]{\text{STABILITÀ}} Re(\lambda_i) < 0$

DISCRETO

$$y(h) = C A^{h-h_0} x(h_0) + \sum_{i=h_0}^{h-1} C A^{h-i-1} B u(i) + D u(h)$$

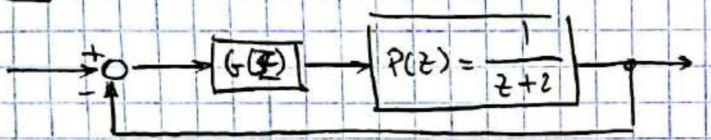


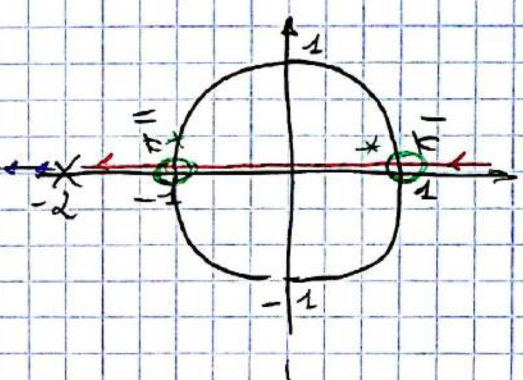
OVE $A^{h} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \frac{h^{[k-1]}}{(k-1)!} \lambda_i^{h-k+1} \xrightarrow[\text{ASINTOTICA}]{\text{STABILITÀ}} |\lambda_i| < 1$

METODO PER APPLICARE IL CRITERIO DI ROUTH AL TEMPO DISCRETO

$D_W(z) \longrightarrow$ SOSTITUISCO $z = \frac{W+1}{W-1}$

EX)





$F(z) = k \frac{1}{z+2}$

VOGLIO CHE TUTTE LE RADICI SIANO DENTRO IL CERCHIO UNITARIO

IL LUOGO NEGATIVO VA BENE! PER $\bar{\bar{k}} < k < \bar{k}$ L'UNICA SOLUZIONE È ALL'INTERNO DEL CERCHIO

$D_W = N_F + D_F = z + 2 + k = 0 \xrightarrow[z = 1\ (*)]{\text{SOSTITUISCO}} \bar{k} = -3$

SOSTITUISCO $z = -1\ (*)$ $\rightarrow \bar{\bar{k}} = -1$

SAREMMO ARRIVATI ALLO STESSO RISULTATO APPLICANDO LA TRASF. $z = \frac{W+1}{W-1}$

$D_W(z) = z + 2 + k \longrightarrow z = \frac{W+1}{W-1} \longrightarrow 1 + W + (2+k)(1-W) = 0$

$\longrightarrow W(-1-k) + 3 + k = 0$

APPLICO ROUTH SU W (IN QUESTO CASO BANALISSIMO)

$\begin{cases} -1-k > 0 \\ 3+k > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k < -1 \\ k > -3 \end{cases} \iff -3 < k < -1$ HO RITROVATO LA CONDIZIONE DI PRIMA

INGRESSI POLINOMIALI A TEMPO DISCRETO

$$u(h) = \frac{h^{[k]}}{k!} = \frac{h(h-1)\cdots(h-k+1)}{k!}$$

RISPOSTA A REGIME A INGRESSI CANONICI

MOLTEPLICITÀ DELLO ZERO IN $z=1$ DELLA W_z	$\eta(h)$	h	$\frac{h(h-1)}{2}$
0	$W(1) \neq 0$	$W(1)h + \left.\frac{dW}{dz}\right\vert_{z=1}$ $Ah+B$	$W(1)\frac{h^{[2]}}{2} + \left.\frac{dW}{dz}\right\vert_{z=1} h + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dz^2}\right\vert_{z=1}$ $Ah^{[2]}+Bh+C$
1	0	$\left.\frac{W(z)}{z-1}\right\vert_{z=1} \neq 0$	$\left.\frac{dW}{dz}\right\vert_{z=1} h + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dz^2}\right\vert_{z=1}$ $Ah+B$
2	0	0	$\left.\frac{W(z)}{(z-1)^2}\right\vert_{z=1} \neq 0$

RISPOSTA A REGIME A INGRESSI PERIODICI

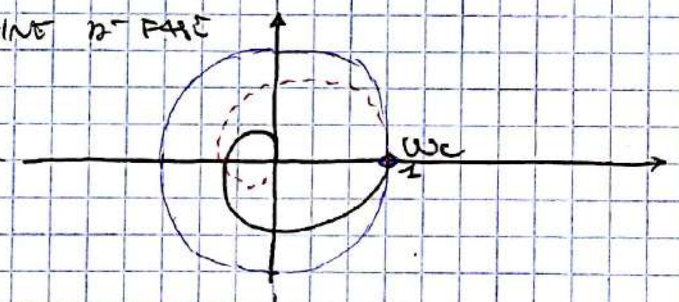
$$u(h) = \sin \theta h$$

$$\tilde{y}(h) = |W(e^{j\theta})| \sin(\theta h + \angle e^{j\theta})$$

INIZIO TUTOR

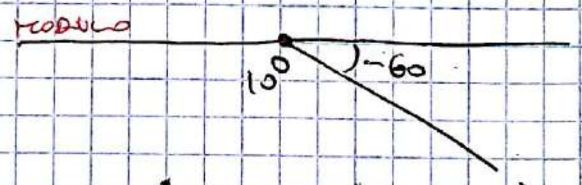
EX. TROVARE MARGINE DI FASE

$$F(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$



$$M\varphi = 180° + \angle F(j\omega_c)$$

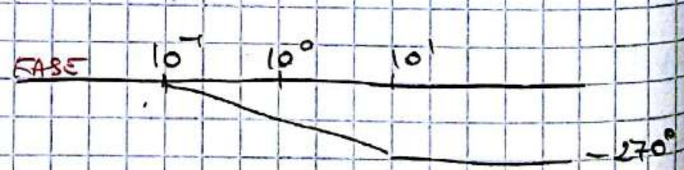
PULSAZIONE DI ATTRAVERSAMENTO O PULSAZIONE CRITICA



ω_c : ω t.c. $|F(j\omega)| = 1$

TROVIAMO ω_c :

$$\frac{1}{(\sqrt{1+\omega_c^2})^3} = 1 \longrightarrow \omega_c = 0$$



CALCOLIAMO $M\varphi$

$$\boxed{M\varphi = 180° + \angle \frac{1}{1+0} = 180°}$$

EX)

$$F(s) = \frac{2(1+s)}{s^2}$$

TROVIAMO ω_c: $\quad |F(j\omega_c)| = 1 \iff \frac{2\sqrt{1+\omega_c^2}}{\omega_c^2} = 1$

$$\Rightarrow 4 + 4\omega_c^2 = \omega^4 \Rightarrow \omega^4 - 4\omega_c^2 + 4 = 0$$

$t = \omega_c^2 \longrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \quad t = 2 \pm \sqrt{4+4} = 2 \pm \sqrt{8} \quad 2 - \sqrt{8} < 0$ NON VA BENE

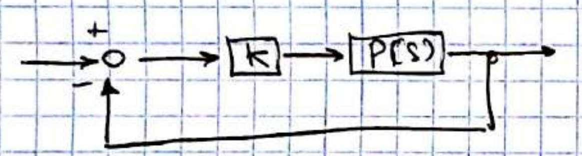
$\omega_c = \sqrt{t} = \pm\sqrt{2+\sqrt{8}}$ OVVERO NEGATIVA LA SCARTIAMO

$\omega_c = \sqrt{2+\sqrt{8}} \cong 2.19$

TROVIAMO $m\varphi$:

$$m\varphi = 180° + \underline{\angle F(j\omega_c)} = \cancel{180°} + \arctan(\omega_c) \cancel{- 180°} \cong 65{,}5°$$

EX)



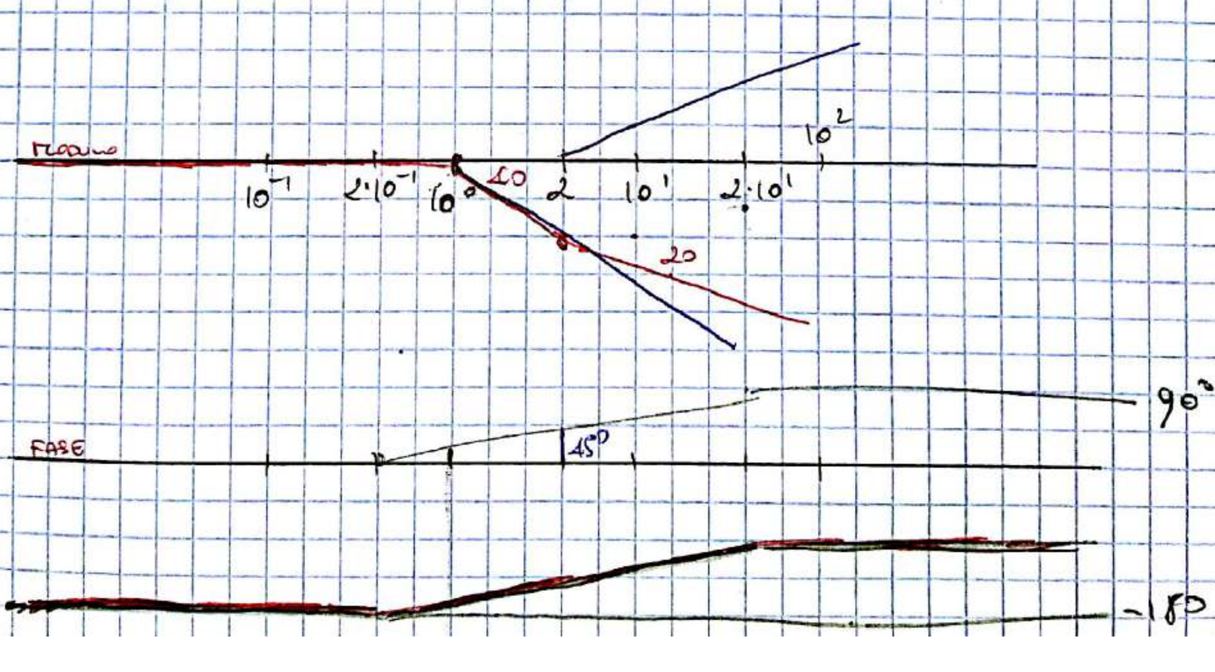
TROVARE K t.c.

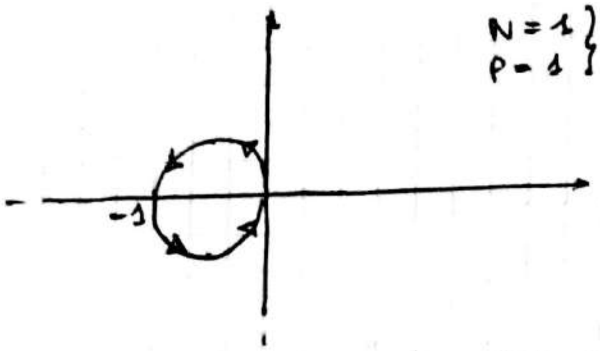
a) STABILE ASINT. CON $m\varphi \geq 45°$

b) ω_t PIÙ PICCOLO POSSIBILE

$$P(s) = -\frac{1 + 0{,}5s}{(1+s)(1-s)}$$

DIAGRAMMI DI BODE CON $K = 1$





$\left.\begin{array}{l} N=1 \\ P=1 \end{array}\right\}$ se $K>1$

PER $K=1$ NON È ASINT. STABILE (N NON È BEN DEFINITO)

MA BASTA $K>1$ PER RENDERLO STABILE

CERCO K IN MODO DA SODDISFARE $M\varphi \geq 45°$

$F = K P(s)$

$$\underbrace{|F(j2)|}_{} = 1 \iff \frac{K\sqrt{1+4/4}}{(\sqrt{1+4})^2} = \frac{K\sqrt{2}}{5} = 1 \iff K = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

HO PRESO
$j2$ PER ISPEZIONE DEL
DIAGRAMMA DI BODE
INFATTI PER $\omega=2$
LA FASE VALE $45°-180°$
QUINDI $M\varphi = 180°+45°-180° = 45°$

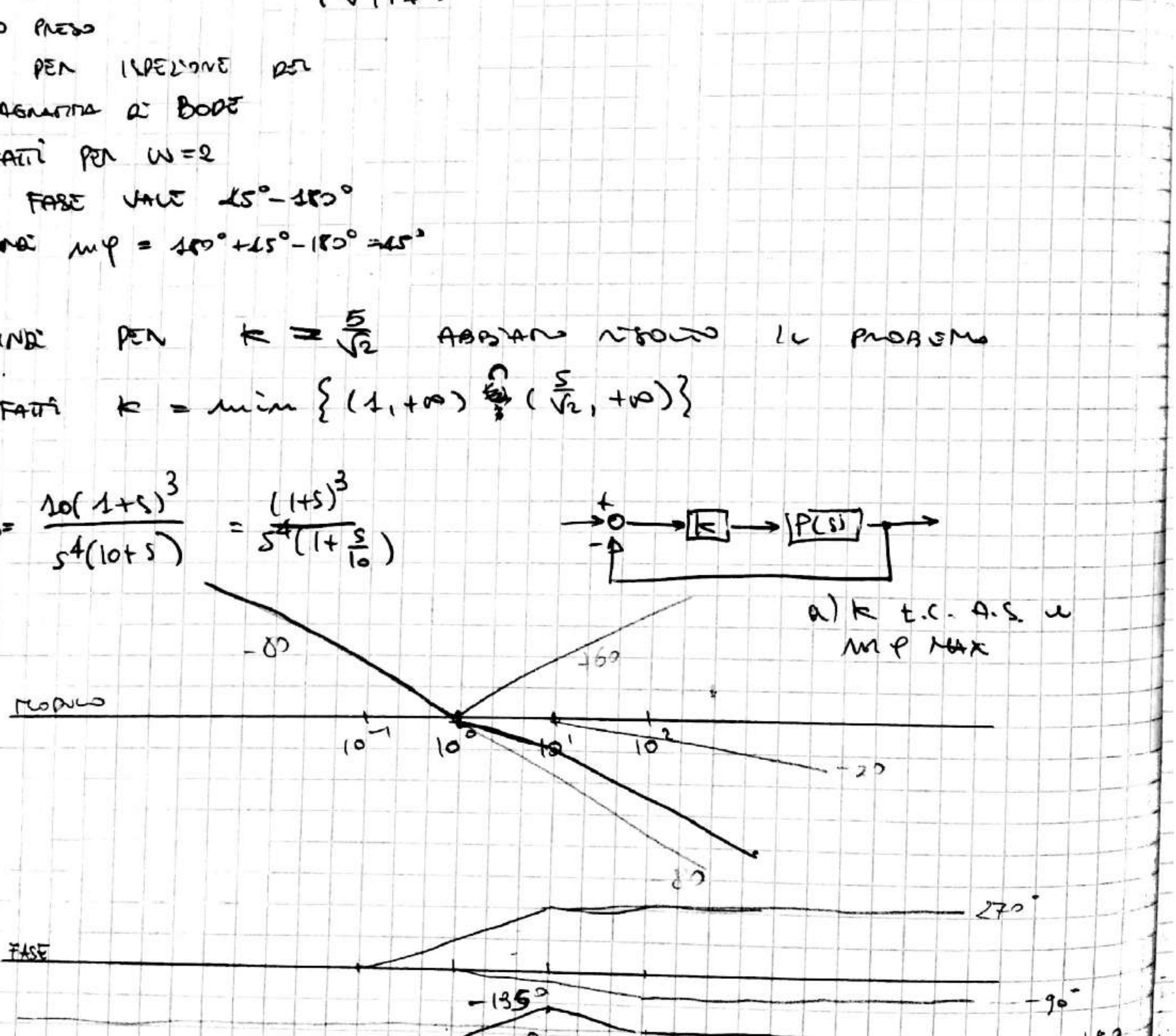
QUINDI PER $K \geq \frac{5}{\sqrt{2}}$ ABBIAMO RISOLTO IL PROBLEMA

(INFATTI $K = \min\left\{(1,+\infty) \cap \left(\frac{5}{\sqrt{2}},+\infty\right)\right\}$

EX

$$P(s) = \frac{10(1+s)^3}{s^4(10+s)} = \frac{(1+s)^3}{s^4\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

a) K t.c. A.S. e $M\varphi$ MAX

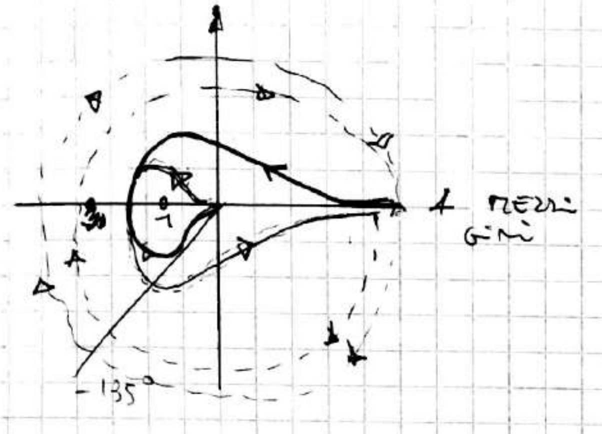


$m_\varphi = 180° + \angle F(\overset{(*)}{10}j) = 180° + 3\cdot \arctan(10) - 360° - \arctan(1) \simeq 27{,}86°$

$\omega_t : \ |F(j\omega_t)| = 1 \qquad \dfrac{k\left(\sqrt{1+100}\right)^3}{10^4\sqrt{1+1}} = 1 \qquad k \simeq 10\sqrt{2} \simeq 13{,}93$

(*) 10 LO PRENDO DAL DIAGRAMMA DI BODE! LO SFASAMENTO MAX (DA −180°) CE L'HO PER $\omega = 10$

TRACCIO IL DIAGRAMMA DI NYQUIST PER VERIFICARE LA STABILITÀ

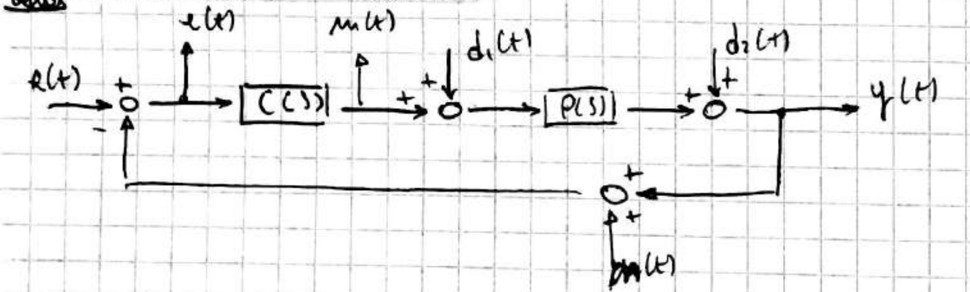


COME FACCIAMO A CAPIRE SE $(-1, j0)$ È DENTRO IL GRAFICO INTERNO?

LO VEDIAMO DAI DIAGRAMMI DI BODE

IL PUNTO È DENTRO ⇒ IL SIST. È STABILE $(N = 0 = P)$

REQUISITI SISTEMA



REQUISITI FONDAMENTALI:

1) STABILITÀ
- NOMINALE CON DISTURBI = 0 NYQUIST
- PERTURBATE AMMETTIAMO CERTI DISTURBI MARGINI DI FASE E GUADAGNO

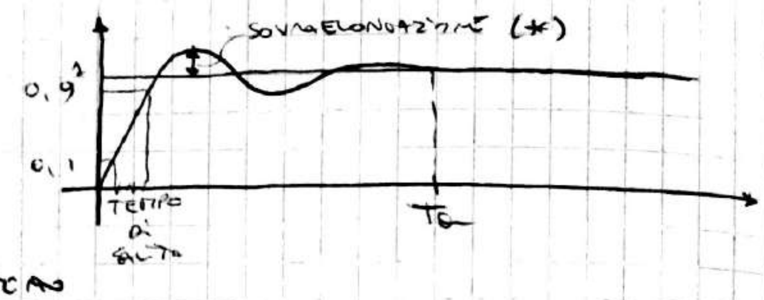
2) PRESTAZIONI NOMINALI
- PRESTAZIONI STATICHE CIOÈ SUL COMPORTAMENTO A REGIME
- PRESTAZIONI DINAMICHE DURANTE IL TRANSITORIO

3) PRESTAZIONI ROBUSTE
- REGIME PERMANENTE
- TRANSITORIO

PRESTAZIONI DINAMICHE

IN GENERE SI FA RIFERIMENTO ALLA RISPOSTA INDICIALE

PARAMETRI CARATTERISTICI:



- T_s TEMPO DI SALITA
- $\hat{S}$ SOVRAELONGAZIONE
- T_a TEMPO DI ASSESTAMENTO

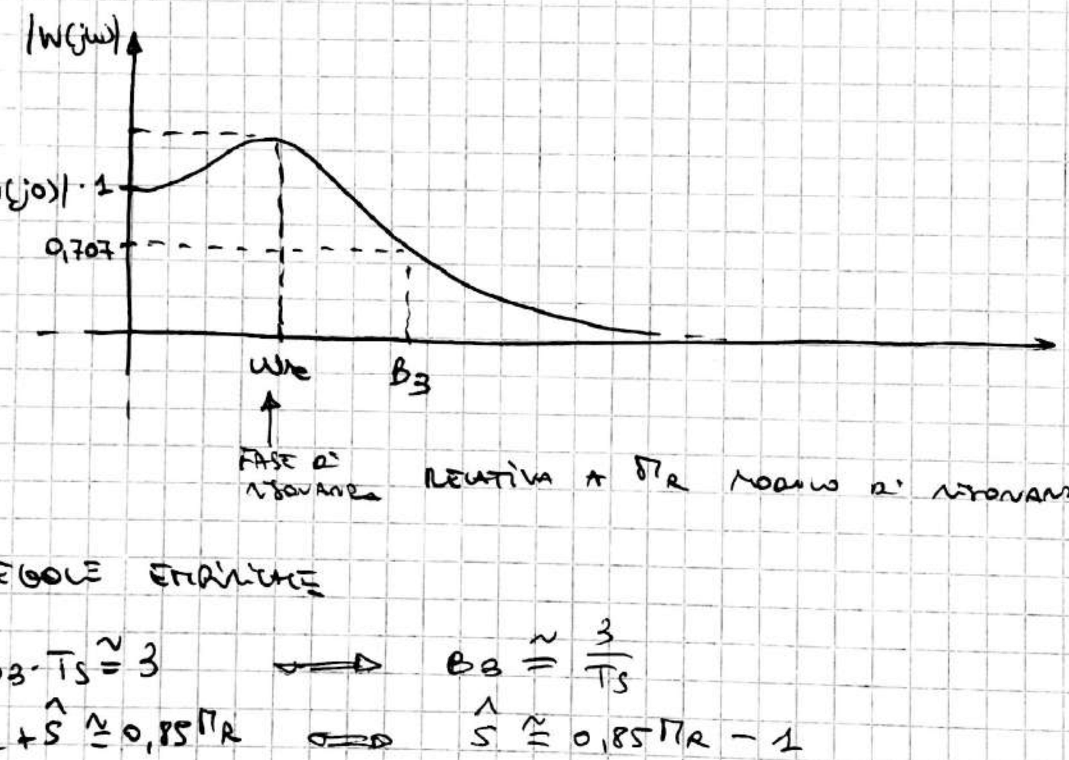
(*) IN GENERE SI INDICA IN PERCENTUALE RISPETTO AL VALORE DI REGIME

OSS

IN GENERE SI VOGLIONO T_s, $\hat{S}$ e T_a PIÙ PICCOLE POSSIBILI

ORA VOGLIAMO TRADURRE QUESTE SPECIFICHE NEL TEMPO IN SPECIFICHE SULLA $W(s)$

- B_3 BANDA PASSANTE



RELATIVA A M_R MODULO DI RISONANZA

REGOLE EMPIRICHE

- $B_3 \cdot T_s \cong 3 \Longrightarrow B_3 \cong \frac{3}{T_s}$
- $1 + \hat{S} \cong 0,85\, M_R \Longrightarrow \hat{S} \cong 0,85\, M_R - 1$

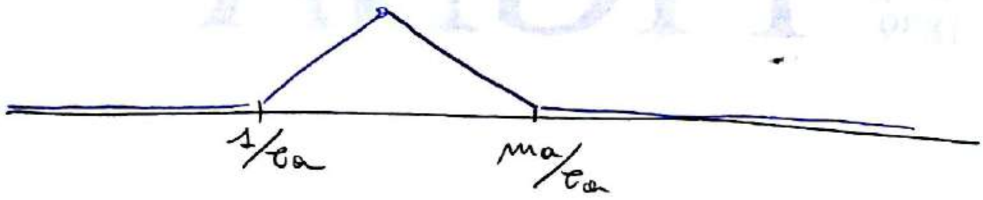
CONSIDERIAMO IL CONTROLLORE $C(s) = C_1(s) \cdot C_2(s)$

PER SODDISFARE LE SPECIFICHE STATICHE ~~[illegible]~~ (~~[illegible]~~)

ARRIVO A $C_1(s) = \frac{K}{s^2}$. VEDO SE CON $C_2(s) = 1$ RIESCO A SODDISFARE LE SPECIFICHE. SE NON LE SODDISFANO CERCO UNA $C_2(s)$ IN MODO DA SODDISFARE LE SPECIFICHE ~~[illegible]~~ SU ω_c e φ_m

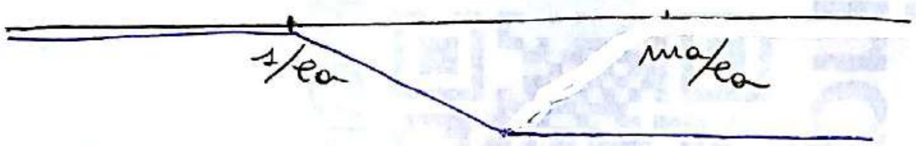
RETE ANTICIPATRICE

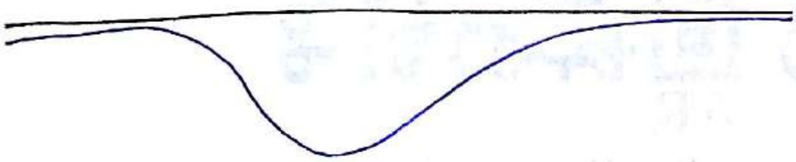
$$\tilde{C}_2(s) = \frac{1+\tau_a s}{1+\frac{\tau_a}{m_a}s} \quad \text{con } \tau_a>0,\ m_a>0$$



RETE ATTENUATRICE

$$C_2(s) = \frac{1+\frac{\tau_a}{m_a}s}{1+\tau_a s} \quad \text{con } \tau_a>0 \text{ e } m_a>0$$

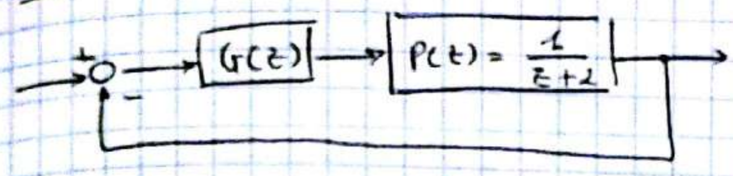




OSS.

PER SISTEMI A TEMPO DISCRETO POSSIAMO IMPORRE LA CONVERGENZA DELLA RISPOSTA IN TEMPO FINITO

EX.



PROGETTARE G(z) IN MODO CHE:

1) LA RISPOSTA y CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $r(k) = \eta(k)$ SIA NULLA A PARTIRE DA UN CERTO ISTANTE ℓ (CON ℓ MINIMO)

2) IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINTOTICAMENTE STABILE

INIZIAMO DALLA SPECIFICA 1

CALCOLIAMO LA FDT INGRESSO USCITA $W = \frac{y}{r} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$

OVE $F = GP = \frac{N_F}{D_F}$

$$r(k) = \eta(k) \longrightarrow r(z) = \mathcal{Z}[\eta(k)] = \frac{z}{z-1}$$

OSS.

IL NOSTRO OBIETTIVO È FAR SÌ CHE $y(k) = 0 \quad \forall\, k \geq \ell$

$$y(k) = A_0\,\delta(k) + A_1\,\delta(k-1) + A_2\,\delta(k-2) + \dots + A_{\ell-1}\,\delta(k-\ell+1)$$

$$y(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_{\ell-1}}{z^{\ell-1}} = \frac{A_0 z^{\ell-1} + A_1 z^{\ell-2} + A_2 z^{\ell-3} + \dots + A_{\ell-1}}{z^{\ell-1}}$$

QUINDI $y(z) = \frac{S(z)}{z^{\ell-1}}$ ← POLINOMIO DI GRADO $\leq \ell-1$

QUINDI DEVO FARE IN MODO CHE:

$$\underbrace{y(z)}_{\frac{S(z)}{z^{\ell-1}}} = \underbrace{W(z)}_{\frac{N_F}{N_F+D_F}} \cdot \underbrace{r(z)}_{\frac{z}{z-1}}$$

$$\frac{S(z)}{z^{\ell-1}} = \frac{N_F}{N_F + D_F} \cdot \frac{z}{z-1} \iff \frac{(z-1)\,S(z)}{z^{\ell}} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$$

ORA EGUAGLIO IL NUMERATORE A SX E IL DEN. A SX CON NUM. E DEN. A DX

$$\begin{cases} (z-1)\,S(z) = N_F(z) \\ z^{\ell} = N_F(z) + D_F(z) \end{cases}$$

$(z-1)\,S(z) = N_F(z)$ ⟶ IMPONE SUBITO IL FATTO CHE $N_F = (z-1)\dots$

LA SECONDA EQUAZIONE NON È ALTRO CHE UN'EQUAZIONE DIOFANTINA

SAPPIAMO CHE PER RISOLVERLA DOBBIAMO SODDISFARE LA SEGUENTE SPECIFICA:

N° PARAMETRI $= d_W = d_F$

SCELGO $G(z) = a\,\dfrac{z-1}{z+b}$ $\longrightarrow$ $F(z) = G(z)P(z) = \dfrac{a(z-1)}{(z+b)(z+2)}$

N° PARAMETRI $= 2 = d_F \longrightarrow$ OK!

$$N_F + D_F = a(z-1) + (z+b)(z+2) = z^2$$

$$\Updownarrow$$

$$z^2 + (2+b+a)z + 2b - a = z^2 \longrightarrow \begin{cases} 2b - a = 0 \\ 2 + b + a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

OSS. COSÌ FACENDO ABBIAMO ANCHE RESO STABILE IL SISTEMA! ABBIAMO INFATTI ASSEGNATO GLI AUTOVALORI IN ZERO! (INFATTI $D_W = N_F + D_F$)

$$G(z) = -\frac{4}{3}\,\frac{z-1}{z-\frac{2}{3}}$$

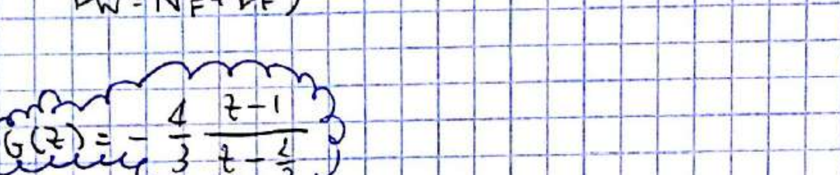
QUAL È L'ANDAMENTO DI $y(z)$?

$$y(z) = \frac{N_F}{N_F + D_F}\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{-4/3\,\cancel{(z-1)}}{z^2}\cdot\frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}} = \frac{-4/3}{z}$$

quindi: $y(k) = -4/3\,\delta(k-1)$

COME CI ASPETTAVAMO $y(k) = 0 \quad \forall k \geq 2$

EX



OSS: PER A, B, C ANCHE STABILITÀ ASINTOTICA

A) SI DETERMINI UN CONTROLLORE $G_A(z)$ TALE DA RENDERE NULLO L'ERRORE A REG. PERM. PER INGRESSI $r(k) = \eta(k)$

B) SI DETERMINI UN CONTROLLORE $G_B(z)$ TALE DA RENDERE NULLO L'ERRORE CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $r(k) = \eta(k)$ NEL TEMPO PIÙ BREVE POSSIBILE

C) SI DETERMINI UN CONTROLLORE $G_C(z)$ t.c. IN CORRISPONDENZA DI $r(k) = \eta(k)$ SI ABBIA: $e(0) = 1 \quad e(1) = 0 \quad e(2) = -1 \quad e(k) = 0 \quad \forall k \geq 3$

A

$$W_e = \frac{e}{r} = \frac{D_F}{N_F + D_F}$$

$$W = \frac{y}{r} = \frac{N_F}{N_F + D_F}$$

ZERI IN $z=1$ DELLA $W_e(z)$

	$\eta(h)$
0	$W_e(1) \neq 0$
1	0
2	0

BISOGNA CONSULTARE LA TABELLA DEL REGIME PERMANENTE IN CORRISPONDENZA A INGRESSI POLINOMIALI (INFATTI LA SPECIFICA È SOLO SUL REGIME PERMANENTE)

QUINDI $G(z) = \frac{\cdots}{(z-1)\cdots}$

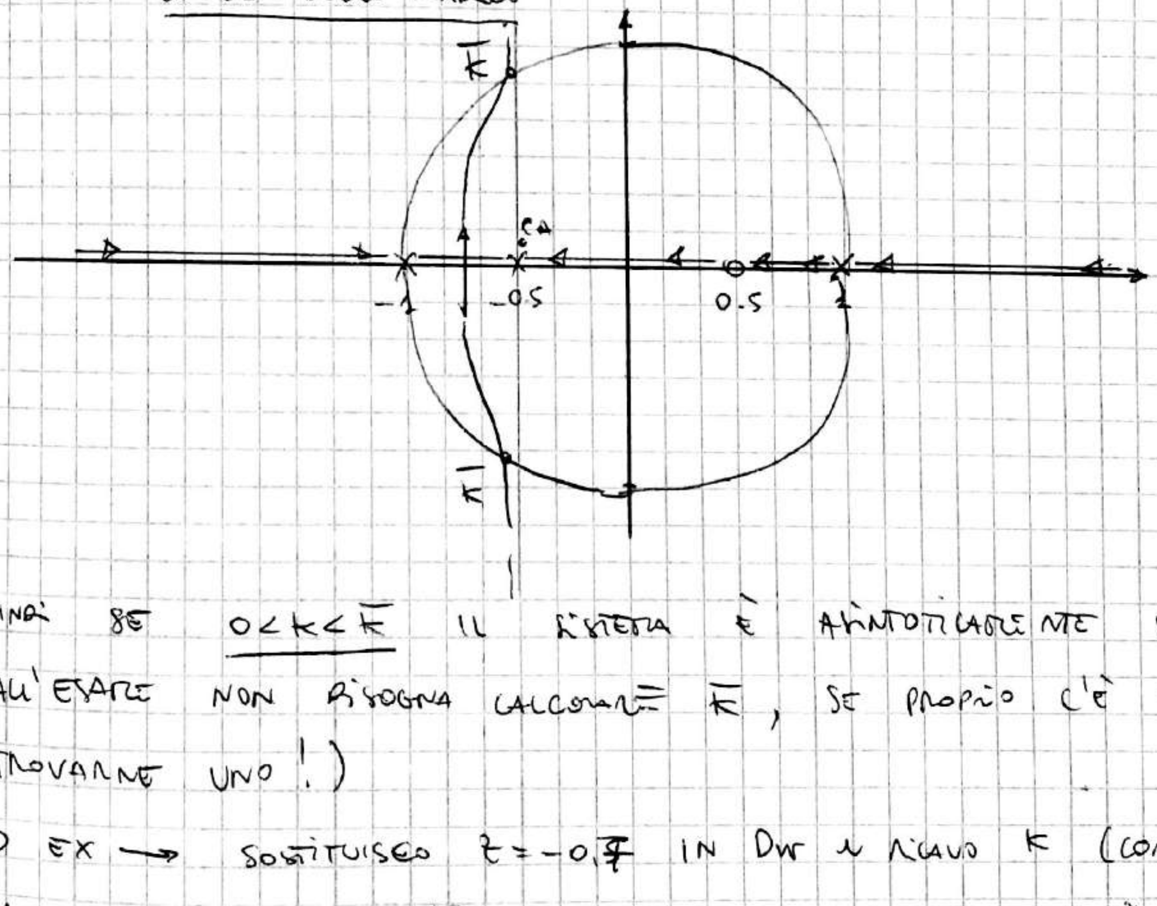
A DIFFERENZA DELL'EX PRECEDENTE MI DEVO PREOCCUPARE DELLA STABILITÀ!

(NON HO BISOGNO DELL'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI)

SCELGO $G(z) = \frac{k}{z-1}$ E VEDO SE È STABILE

$$F(z) = k \frac{z-0{,}5}{(z-1)(z+1)(z+0{,}5)} \qquad m=1 \quad z_1 = 0{,}5 \qquad n=3 \quad p_1 = 1,\ p_2 = -1,\ p_3 = -0{,}5$$

USO IL LUOGO DELLE RADICI



QUINDI SE $0 < k < \bar{k}$ IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE

(ALL'ESAME NON BISOGNA CALCOLARE $\bar{k}$, SE PROPRIO C'È TEMPO TROVARNE UNO!)

AD EX → SOSTITUISCO $z = -0{,}7$ IN D_W E RICAVO k (CON UN VALORE COSÌ DI z È PROBABILE CHE IL k VADA BENE)

B (STESSO RAGIONAMENTO DELL'EX PRECEDENTE)

$e(z) = W_e(z) r(z)$

SAPPIAMO SOLO CHE $d_S \le \ell - 1$

$$\frac{S(z)}{z^{\ell-1}} = \frac{D_F}{N_F + D_F} \cdot \frac{z}{z-1} \iff \frac{(z-1)S(z)}{z^{\ell}} = \frac{D_F}{N_F+D_F}$$

$$\begin{cases} (z-1)S(z) = D_F \quad \longrightarrow \quad G(z) = \dfrac{\cdots}{(z-1)\cdots} \\ z^{\ell} = N_F + D_F \end{cases}$$

RISOLVIAMO L'EQ. DIOFANTINA:

DEVO SCEGLIERE LA STRUTTURA DI $G(z)$ CHE PER ORA È COSÌ: $G(z) = \frac{\cdots}{(z-1)\cdots}$

CONVIENE CHE CON $G(s)$ 'CANCELLO TUTTO IL CANCELLABILE' OVVERO RENDO NASCOSTI TUTTI GLI AUTOVALORI t.c. $|\lambda| < 1$ (COSÌ SEMPLIFICO I CALCOLI)

SCELGO $G(z) = \dfrac{(z+0{,}5)(az+b)}{(z-0{,}5)(z-1)}$

INFATTI SE METTEVO SOLO UN PARAMETRO IN $G(s)$ VENIVA IL GRADO DI $F = 2 \ne$ N° PARAMETRI!

$$F(z) = \frac{az+b}{(z+1)(z-1)}$$

ORA POSSO RISOLVERE L'EQ.

$$N_F + D_F = az + b + (z+1)(z-1) = z^2 \iff z^2 + az + b - 1 = z^2$$

QUINDI:

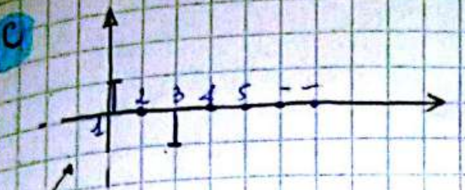
$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

OSS. PER CASO È VENUTO CHE BASTAVA UN SOLO PARAMETRO!

$$G_B(z) = \frac{z+0{,}5}{(z-0{,}5)(z-1)}$$

POSSO ESSERE SICURO CHE IL SISTEMA È STABILE (HO ASSEGNATO GLI AUTOVALORI IN ZERO).

~~QUAL È IL POL. CARATT. DEL SISTEMA COMPLESSIVO?~~ $\underbrace{(z-0{,}5)}_{\text{RAGG. 7OSS}}\underbrace{(z+0{,}5)}_{\text{7RAGG. OSS}}\underbrace{z^2}_{\text{RAGG. OSS}} = P(z)$



$e(k) = \delta(k) - \delta(k-2) \rightarrow e(z) = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{z^2-1}{z^2}$

DEVO IMPORRE CHE $e(k)$ SIA FATTA COSÌ

$e(z) = W(z)\, r(z)$

$$\frac{z^2-1}{z^2} = \frac{D_F}{N_F+D_F}\cdot\frac{z}{z-1} \iff \frac{(z-1)(z^2-1)}{z^3} = \frac{D_F}{N_F+D_F} \rightarrow \begin{cases} \overset{(z-1)^2(z+1)}{\overbrace{(z-1)(z^2-1)}} = D_F \\ z^3 = N_F+D_F \end{cases}$$

IN QUESTO CASO ABBIAMO $S(z)$ FISSATO!

$$G(z) = \underbrace{\frac{z+0,5}{z-0,5}}_{\text{CANCELLO IL CANCELLABILE}}\cdot\underbrace{\frac{\dots}{(z-1)^2}}_{z+1 \text{ È GIÀ IN } P(z)!} \Rightarrow F = \frac{N_F}{(z+1)(z-1)^2}$$

$z^3 - D_F = N_F \iff N_F = z^3 - (z-1)(z^2-1) = z^2+z-1$ L'ERRORE MI HA IMPOSTO ANCHE N_F

QUINDI: $G(z) = \frac{z+0,5}{z-0,5}\cdot\frac{z^2+z-1}{(z-1)^2} \rightarrow F = GP = \frac{z^2+z-1}{(z+1)(z-1)^2}$

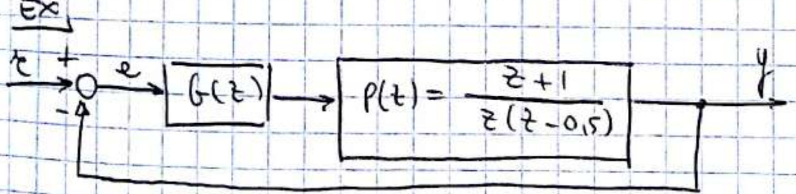
OSS

L'ESERCIZIO È STATO COSTRUITO AD ARTE, ALTRIMENTI POTEVA NON AVERE SOLUZIONE

~~QUAL È IL POLINOMIO CARATTERISTICO DEL SISTEMA COMPLESSIVO~~?

$P(z) = (z-0,5)(z+0,5)z^3$

EX



1) DETERMINARE $G(z)$ IN MODO CHE PER L'INGRESSO $r(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ L'ERRORE $e(k) = 0 \ \forall k \geq l$ (l PIÙ PICCOLO POSSIBILE)

$W_e = \frac{D_F}{N_F+D_F}$ $\quad W = \frac{N_F}{N_F+D_F}$ $\quad F = GP = \frac{N_F}{D_F}$

$$\underbrace{e(z)}_{\downarrow} = \underbrace{W_e(z)}_{\downarrow}\underbrace{r(z)}_{\downarrow}$$

$$\frac{S(z)}{z^{\ell-1}} = \frac{D_F}{N_F+D_F}\cdot\frac{1}{z(z-2)} \iff \frac{S(z)(z-2)}{z^{\ell-2}} = \frac{D_F}{N_F+D_F} \quad \begin{cases} S(z)(z-2) = D_F \\ \underbrace{N_F+D_F}_{d_F} = \underbrace{z^{\ell-2}}_{= \ell-2} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\ell = d_F + 2$$

$$G(z) = \frac{\dots}{(z-2)}$$

CON $G(z)$ CANCELLO IL CANCELLABILE. $G(z) = \frac{z(z-0{,}5)}{(z-2)}\cdot\frac{a}{z+b}$

$\longrightarrow F = GP = a\,\frac{z+1}{(z-2)(z+b)}$ ABBIAMO CHE N° PARAMETRI $= 2 = d_F$ OK!

$$a(z+1) + (z-2)(z+b) = z^2 \implies z^2 + (b-2+a)\,z + a - 2b = z^2$$

$$\begin{cases} b+a-2=0 & b = 2/3 \\ a-2b=0 & a = 4/3 \end{cases}$$ QUINDI: $G(z) = \frac{z(z-0{,}5)}{z-2}\cdot\frac{4/3}{z+2/3}$

OSS
IL SISTEMA È ANCHE STABILE POICHÉ HO ASSEGNATO IO ZERO GLI AUTOVALORI

~~VEDIAMO ORA SE È DI FATTO A RISPOSTA PIATTA~~:

$$e(z) = \frac{D_F}{N_F+D_F}\,\frac{1}{z(z-2)} = \frac{\cancel{(z-2)}(z+2/3)}{4/3(z+1)+(z-2)(z+2/3)}\cdot\frac{1}{z\cancel{(z-2)}} = \frac{z+2/3}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{2/3}{z^3}$$

QUINDI: $e(k) = \delta(k-2) + 2/3\,\delta(k-3)$

~~POLINOMIO CARATTERISTICO DEL SISTEMA COMPLESSIVO~~

$$P(z) = \underbrace{z(z-0{,}5)}_{\text{TRAGG OSS}}\underbrace{z^2}_{\text{RAGG OSS}}$$

RISPOSTA A REGIME A INGRESSI PERIODICI

SUPPONIAMO CHE UN ESERCIZIO ABBIA LA SEGUENTE SPECIFICA:

1) $e(k)$ NULLO A REG. PERM. PER $r(k) = \sin(4k)$

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE:

$$r(k) = \sin\theta k \longrightarrow \tilde{e}(k) = \left|W_e(e^{j\theta})\right| \sin\left(\theta k + \underline{/W_e(e^{j\theta})}\right)$$

NEL NOSTRO CASO: $\theta = 4$

$$\tilde{e}(h) = |W_e(e^{j4})| = 0$$

$$W_e = \frac{D_F}{N_F + D_F} \qquad |D_F(e^{j4})| = 0 \Longleftarrow |D_G(e^{j4})| \cdot |D_P(e^{j4})| = 0$$

$$|D_G(e^{j4})| = 0$$

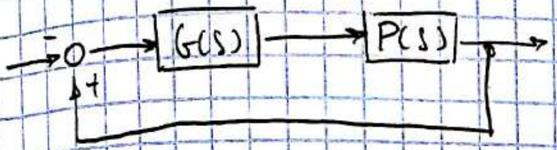
QUINDI: $D_G(z) = (z - e^{j4})\underbrace{(z - e^{-j4})}_{\text{AGGIUNGO QUESTO TERMINE PER AVERE COEFF. REALI}} \dots$

$$D_G(z) = (z - \cos 4 - j\sin 4)(z - \cos 4 + j\sin(4)) = (z - \cos 4)^2 + \sin^2 4 =$$

$$= z^2 - 2z\cos 4 + \underbrace{\cos^2 4 + \sin^2 4}_{1} = z^2 - 2z\overset{\cos 4}{\gamma} + 1$$

QUINDI: $$G(z) = \frac{\dots}{(z^2 - 2\cos 4\, z + 1)\dots}$$

SINTESI DIRETTA



$$W(s) = \frac{G(s)\,P(s)}{1 + G(s)\cdot P(s)}$$

SINTETIZZO DIRETTAMENTE W(S) RISPETTANDO LE SPECIFICHE DATE

$$W(1+GP) = GP \longleftrightarrow G(WP-P) = -W \longleftrightarrow \boxed{G = \frac{1}{P}\cdot\frac{W}{1-W}}$$

W CALCOLATA ALL'INIZIO.

DOV'È IL PROBLEMA? IL PROBLEMA È CHE SE P HA ~~A~~ POLI O ZERI A PARTE REALE POSITIVA O NULLA NON SI PUÒ USARE! PERCHÉ RENDEREI NASCOSTI AUTOVALORI A PARTE REALE ≥ 0.

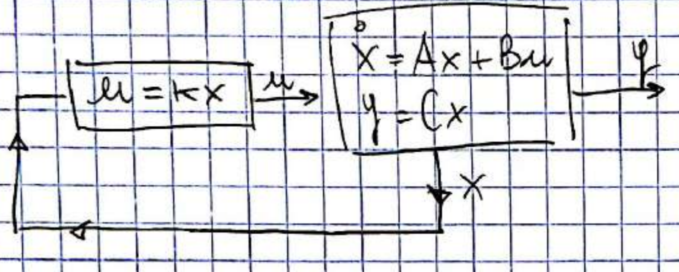
METODI DI SINTESI DEL CONTROLLORE NEL DOMINIO DEL TEMPO

A • STABILIZZAZIONE CON REAZIONE DALLO STATO

B • OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO

C • STABILIZZAZIONE CON REAZIONE DALL'USCITA

A STABILIZZAZIONE CON REAZIONE DALLO STATO



NON METTIAMO L'INGRESSO PERCHÉ COMPLICHEREBBE I CALCOLI E NON CAMBIEREBBE NULLA

OSS

QUESTE METODOLOGIE VALGONO ANCHE PER PIÙ INGRESSI E PIÙ USCITE (u e y POTREBBERO ESSERE VETTORI)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BKx \\ y = Cx \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \underline{(\overset{m\times m}{A} + \overset{m\times p}{B}\overset{p\times m}{K})}x \\ y = Cx \end{cases}$$

~~SISTEMA COMPLESSIVO~~

MATRICE DINAMICA DEL SISTEMA COMPLESSIVO $m \times m$

TEOREMA DELL'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI

ASSEGNATO UN PROCESSO, SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE K, SI PUÒ FAR SÌ CHE GLI AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI DEL PROCESSO SI "TRASFORMINO NELLA MATRICE "A+BK" IN VALORI ARBITRARI, MENTRE GLI AUTOVALORI IRRAGGIUNGIBILI DEL PROCESSO SI RITROVANO PARI PARI NELLA MATRICE A+BK

OSS

SOLO GLI AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI POSSONO ESSERE MODIFICATI | QUELLI IRRAGGIUNGIBILI NON POSSONO ESSERE TOCCATI.

OSS

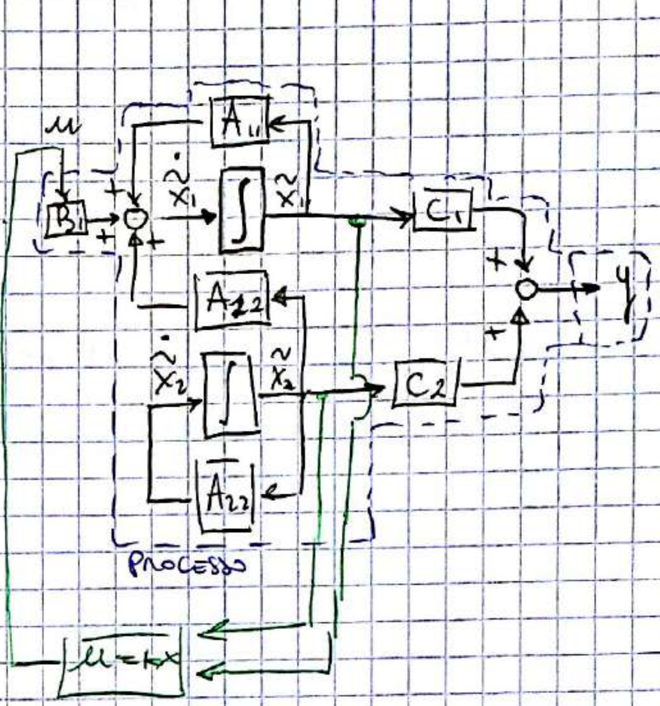
AVENDO LA POSSIBILITÀ DI MISURARE LO STATO POSSO MODIFICARE ANCHE SOLO GLI AUTOVALORI RAGGIUNGIBILI (CONDIZIONI MENO STRINGENTI RISPETTO A RAGG e OSS CHE ABBIAMO VISTO PRIMA)

OSS. possiamo considerare lo stato come un'altra uscita $y' = x$, così facendo gli autovalori diventano anche osservabili

Scomposizione raggiungibile

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_1 \neq 0$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2 + B_1 u \\ \dot{\tilde{x}}_2 = A_{22}\tilde{x}_2 \\ y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$



Come cambiamo valore agli autovalori raggiungibili?

VALORE ARBITRARIO

IMPONGO: $\left|\lambda I - (A_{11} + B_1 k_1)\right| = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_{ARB\,i})$

EX $m = 2$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right] \right| = (\lambda - \lambda_{ARB1})(\lambda - \lambda_{ARB2})$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 + k_1 & -a_1 + k_2 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - \lambda(\lambda_{ARB1} + \lambda_{ARB2}) + \lambda_{ARB1}\lambda_{ARB2}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ a_0 - k_1 & \lambda + a_1 - k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2 \qquad \lambda(\lambda + a_1 - k_2) + (a_0 - k_1) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2$$

$$\lambda^2 + (a_1 - k_2)\lambda + a_0 - k_1 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2 \rightarrow \begin{cases} a_1 - k_2 = \alpha_1 \\ a_0 - k_1 = \alpha_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k_2 = a_1 - \alpha_1 \\ k_1 = a_0 - \alpha_2 \end{cases} \quad \square$$

EX

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-(A+BK)| = \prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_{ARB_i})\prod_{i=1}^{n-m}(\lambda-\lambda_{IRRAG_i})$$

FORMULA GENERALE! NON HO BISOGNO DELLA ~~FORMA~~ SCOMPOSIZIONE DI KALMAN

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=-1$

$$\text{ran}(A+I|B)=\text{ran}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=1<2=n \Rightarrow \lambda_2=-1 \text{ IRRAGG.}$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(k_1\ \ k_2)\right]\right|=(\lambda-\lambda_{ARB})\underbrace{(\lambda+1)}_{\text{AUTOVA. NON RAGG.}}$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1+k_1&1+k_2\\0&-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1-k_1&1+k_2\\0&\lambda+1\end{pmatrix}\right|=(\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$(\lambda-1-k_1)\cancel{(\lambda+1)}=(\lambda-\lambda_{ARB})\cancel{(\lambda+1)}$$

$$\lambda_{ARB}=1+k_1 \iff k_1=\lambda_{ARB}-1$$

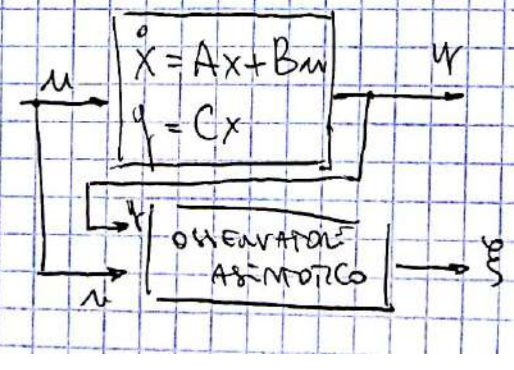
SE SCELGO $\lambda_{ARB}=-1 \longrightarrow k_1=-2$

$K=(-2\ \ *)$

VALORE ~~VALORE~~ QUALSIASI

OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO

PROBLEMA "DUALE" RISPETTO AL PRECEDENTE.
CONSISTE NELLO STIMARE LO STATO CHE NON È MISURABILE



$$\left.\begin{array}{l} e(t)=x(t)-\xi(t) \\ \lim_{t\to+\infty} e(t)=0 \end{array}\right\} \text{HA QUESTE PROPRIETÀ}$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + Gy - GC\xi$$

EQUAZIONE DELL'OSSERVATORE ASINTOTICO

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\xi} = (Ax + Bu) - (A\xi + Bu + \underbrace{GCx}_{y} - GC\xi) = (A-GC)x - (A-GC)\xi =$$

$$= (A-GC)(x-\xi) = (A-GC)e$$

$$e(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ EXP}}{e}^{(A-GC)t}\, e(0)$$

SE $A-GC$ HA TUTTI GLI AUTOVALORI A PARTE REALE $< 0 \implies \lim_{t \to +\infty} e(t) = 0$

PROBLEMA DUALE AL PRECEDENTE!

TEOREMA

ASSEGNATO UN PROCESSO SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE UNA MATRICE G SI PUO' FAR SI' CHE GLI AUTOVALORI OSSERVABILI DEL PROCESSO SI TRASFORMINO NELLA MATRICE $A-GC$ IN VALORI ARBITRARI, MENTRE GLI AUTOVALORI INOSS. DEL PROCESSO SI TROVANO PARI PARI NELLA MATRICE $A-GC$.

QUANDO È POSSIBILE PROGETTARE UN OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO?

QUANDO TUTTI GLI AUTOVALORI INOSS. DEL PROCESSO SONO A PARTE REALE NEGATIVA.

OSS

SE SI RICHIEDE CHE LA VELOCITÀ DI CONVERGENZA A ZERO DI $e = x - \xi$ DEVE ESSERE MINORE DI $-\alpha$, $\alpha > 0$, ALLORA GLI AUTOVALORI DI $A-GC$ DEVONO ESSERE $< -\alpha$

$$\left|\lambda I - (\underset{n\times n}{A} - \underset{n\times q}{G}\,\underset{q\times n}{C})\right| = \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_{ARB_i}) \cdot \prod_{i=1}^{n-p} (\lambda - \lambda_{INOSS_i})$$

$p = N°$ AUTOV. OSS $= \operatorname{ran}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

IL MIO OBIETTIVO È TROVARE G

$q = N°$ USCITE

EX

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

$$p = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = 1 < 2 = n$$

$$\lambda_2 = -1 \longrightarrow \operatorname{ran}\begin{pmatrix} A+I \\ C \end{pmatrix} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = 1 < 2 = n \implies \lambda_2 = -1 \text{ inoss}$$

L'UNICO AUTOVALORE ROK è < 0 → ok!

$$|\lambda I - A - GC| = \prod_{i=1}^{\mu}(\lambda-\lambda_{ARB\,i})\prod_{i=1}^{n-\mu}(\lambda-\lambda_{INOSS\,i})$$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}G_1\\G_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2\end{pmatrix}\right]\right| = (\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-1+G_1 & G_1/2-1\\ G_2 & \lambda+1+G_2/2\end{vmatrix} = (\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$(\lambda-1+G_1)(\lambda+1+G_2/2) - G_2(G_1/2-1) = (\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$\lambda^2+\lambda(G_1+G_2/2) - 1 - G_2/2 + G_1 + \cancel{G_1G_2/2} - \cancel{G_1G_2/2} + G_2 = (\lambda-\lambda_{ARB})(\lambda+1)$$

$$(\lambda + G_1 + G_2/2 - 1)\cancel{(\lambda+1)} = (\lambda-\lambda_{ARB})\cancel{(\lambda+1)}$$

$$G_1 + G_2/2 - 1 = -\lambda_{ARB}$$

SCELGO $\lambda_{ARB} = -1$ $\quad G_1 = -G_2/2 + 2$

POSSIAMO SCEGLIERE UNA QUALSIASI COPPIA CHE SODDISFA L'EQ.

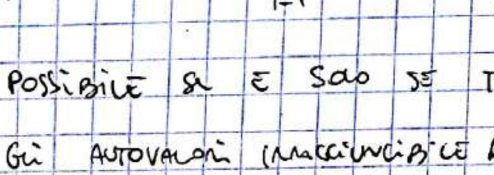
ES: $G_2 = 0 \quad G_1 = 2 \longrightarrow G = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

INFINE:

$$\boxed{\dot\xi = A\xi + Bu + Gy - GC\xi}$$ CON A, B, C DATI E G APPENA TROVATO

RIASSUNTO

STABILIZZAZIONE CON REAZIONE DALLO STATO

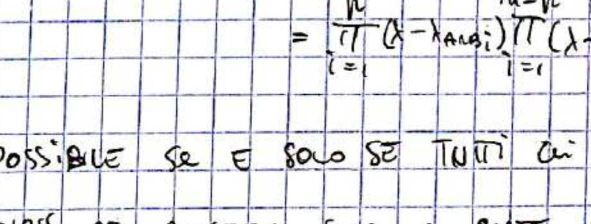


TROVARE K t.c.

$$|\lambda I - (A+BK)| = \prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda_{ARB\,i})\prod_{i=1}^{n-m}(\lambda-\lambda_{IRR})$$

POSSIBILE SE E SOLO SE TUTTI GLI AUTOVALORI IRRAGGIUNGIBILI DEL PROCESSO SONO A PARTE REALE NEGATIVA

OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO



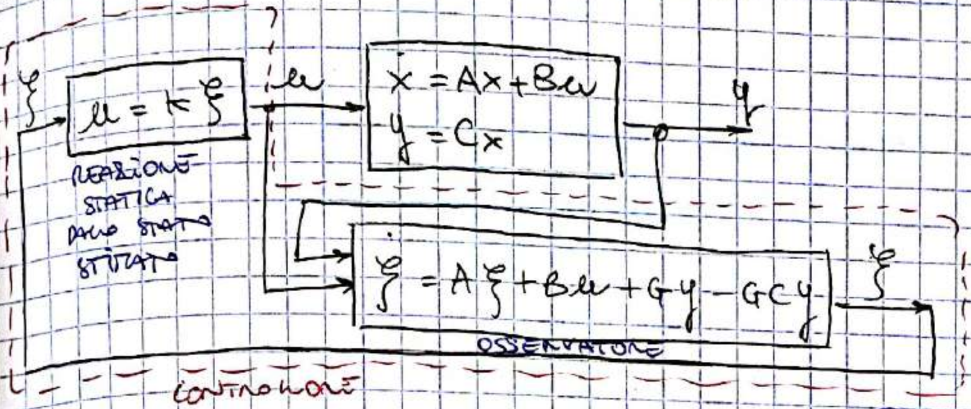
TROVARE G t.c.

$$|\lambda I - (A-GC)| = \prod_{i=1}^{\mu}(\lambda-\lambda_{ARB\,i})\prod_{i=1}^{n-\mu}(\lambda-\lambda_{INOSS\,i})$$

POSSIBILE SE E SOLO SE TUTTI GLI AUTOV. INOSS DEL PROCESSO SONO A PARTE REALE MINORE DI ZERO

C STABILIZZAZIONE CON REAZIONE DALL'USCITA

NB: NON DÀ LUOGO IN GENERALE A UN CONTROLLORE A DIMENSIONE FINITA



La dim del controllore è la dim di A!

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bk\xi \\ \dot{\xi} = A\xi + Bk\xi + GCx - GC\xi \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & Bk \\ GC & A+Bk-GC \end{pmatrix}}_{A_c} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$$

(blocchi: n righe, n colonne)

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

$$T^{-1} = T = \begin{pmatrix} I_{n\times n} & O_{n\times n} \\ I_{n\times n} & -I_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_c = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & Bk \\ GC & A+Bk-GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+Bk & -Bk \\ 0 & A-GC \end{pmatrix}$$

AVENDO APPLICATO QUESTA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE ABBIAMO RESO A_c TRIANGOLARE: SONO VISIBILI I SUOI AUTOVALORI:

$$\text{AUTOVALORI DI } A_c = \begin{cases} \text{AUTOVAL. DI } \underbrace{A+Bk}_{\text{QUELLA DELLA CONTROREAZIONE DALLO STATO}} \\ \text{AUTOVAL. DI } \underbrace{A-GC}_{\text{QUELLO DELL'OSSERVATORE}} \end{cases}$$

DUE SOTTOPROBLEMI:

- TROVARE k t.c. $A+Bk$ ABBIA TUTTI GLI AUTOVAL. A PARTE REALE NEG. (PROBLEMA DELLA CONTROREAZIONE DALLO STATO)
- TROVARE G t.c. $A-GC$ ABBIA TUTTI GLI AUTOVAL. A PARTE REALE NEG. (PROBLEMA DELL'OSSERVATORE ASINTOTICO)

QUESTO È IL PRINCIPIO DI SEPARAZIONE

OSS.

Se tutti gli autovalori sono raggiungibili e osservabili, posso assegnarli tutti

EX.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Utilizzare il principio di separazione per rendere asint. stabile il sistema complessivo.

(Esercizio già fatto singolarmente per quanto riguarda stabilizzazione dallo stato e oss. asintotico)

Avevamo ottenuto $K = (-2 \;\; *)$ e $G = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'esercizio è finito! Se metto K e G nella struttura disegnata prima ho ottenuto il risultato

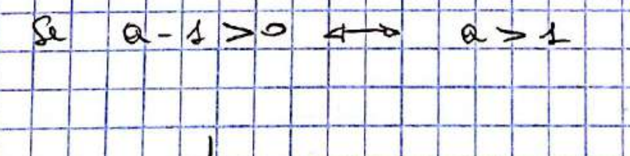
OSS.

Qual è la dimensione del controllore? È 2! Infatti è la dim. di A (non dim. minima)

Infatti, risolvendo con i metodi nel dominio di Laplace:

$$P(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{s-1}$$

Scelgo $G(s) = a$



$$W = \frac{N_F}{N_F + D_F} \Rightarrow F = GP = \frac{a}{s-1} \Rightarrow D_W = a + s - 1$$

Il sist. è stabile se $a - 1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$

OSS

Bastava un controllore costante!

All'esame: solo se espressamente chiesto usare metodi nel tempo

EX

$$u \rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{array}} \rightarrow y$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C = (0 \quad a)$ $D = 1$

A TRIANGOLARE : $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

A) DETERMINARE PER QUALI VALORI DI a NON È POSSIBILE STABILIZZARE ASINT. IL SISTEMA COMPLESSIVO

~~RAGGIUNGIBILITÀ~~

$$m = \text{ran}(B \mid AB) = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } a \neq 2 \longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \text{ RAGG.} \\ 1 & \text{se } a = 2 \longrightarrow (*) \end{cases}$$

(*) FACCIO IL TEST DI HAUTUS CON $a = 2$ PER CAPIRE CHE SUCCEDE:

$\boxed{a = 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = -1 \quad \text{ran}(A + I \mid B) = \text{ran}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 < 2$$

NON È RAGGIUNGIBILE

$\lambda_1 = 1$ RAGGIUNGIBILE

$\lambda_2 = -1$ IRRAGGIUNGIBILE

~~OSSERVABILITÀ~~

$$n = \text{ran}\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^2 & -a \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } a \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \text{ OSS.} \\ 0 & \text{se } a = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \text{ INOSS.} \end{cases}$$

QUINDI L'UNICO VALORE DI a PER CUI NON È POSSIBILE STAB. IL SISTEMA È $a = 0$ → PER QUESTO VALORE DI a INFATTI C'È UN AUTOV. A PARTE REALE > 0 NON OSS. $(\lambda_1 = 1)$

B) PER QUALI VALORI DEL PARAMETRO a NON È POSSIBILE ASSEGNARE AD ARBITRIO TUTTI GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA COMPLESSIVO?

QUESTO È POSSIBILE SE TUTTI GLI AUTOVALORI SONO NON NASCOSTI

QUESTO È POSSIBILE SE $a \neq 0$ e $a \neq 2$ QUINDI:

$a = 0$ e $a = 2$

C)
E SE CHIEDESSI LA STABILITÀ CON CONTROREAZIONE DALLO STATO?

PER LA STABILITÀ CON CONTROREAZIONE DALLO STATO CONTA SOLO LA RAGGIUNGIBILITÀ → PER TUTTI I VALORI DI α È STABILIZZABILE! (INFATTI PER $\alpha = 2$ L'UNICO AUTOV. NASCOSTO È A PARTE REALE NEG.)

D) PER QUALI VALORI DI α POSSO ASSEGNARE AD ARBITRIO GLI AUTOV. CON CONTROREAZIONE DALLO STATO?

PER $\alpha \neq 2$ POSSO (INFATTI PER $\alpha = 2$ HO UN AUTOV. NON RAGG.)

E) PER QUALI VALORI DI α ESISTE L'OSS. ASINTOTICO?

ESISTE PER $\alpha \neq 0$, INFATTI PER $\alpha = 0$ C'È $\lambda_1 = 1$ NON OSS. E A PARTE REALE POSITIVA!

PER $\alpha \neq 0$ INOLTRE TUTTI GLI AUTOV. SONO OSS. ⇒ POSSO ASSEGNARE AD ARBITRIO LA VEL. DI CONVERGENZA.

F) PER QUALI VALORI DI α IL SISTEMA È STABILIZZABILE ASINT. MA SENZA POTER ASSEGNARE TUTTI GLI AUTOVALORI?

PER $\alpha = 2$, INFATTI HA SOLO UN AUTOV. NASCOSTO MA È A PARTE REALE NEG ($\lambda_2 = -1$ IRRAG.)

G) TROVARE IL CONTROLLORE CON IL ~~[illegible]~~ PRINCIPIO DI SEPARAZIONE PER STABILIZZARE IL SISTEMA CON $\alpha = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = 1$$

$$K : |\lambda I - (A + BK)| = (\lambda - \lambda_{ARB_1})(\lambda + 1)$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right] \right| = (\lambda - \lambda_{ARB_1})(\lambda + 1)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 - k_1 & -k_2 \\ -2 - k_1 & \lambda + 1 - k_2 \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_{ARB_1})(\lambda + 1)$$

$\lambda^2 + \lambda(-k_1 - k_2) - 1 - k_1 - k_2 = (\lambda - \lambda_{ARB_1})(\lambda + 1)$

DEVO FARE LA DIVISIONE TRA POLINOMI, IL POL. A SX DEVE ESSERE DIVISIBILE PER $\lambda+1$ (ALTRIMENTI HO SBAGLIATO)

⋮

$(\lambda+1)(\lambda - k_1 - k_2 - 1) = (\lambda - \lambda_{ARB_1})(\lambda+1)$

$-k_1 - k_2 - 1 = -\lambda_{ARB}$

$G: |\lambda I - (A - GC)| = (\lambda - \lambda_{ARB_2})(\lambda - \lambda_{ARB_3})$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}G_1\\ G_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\end{pmatrix}\right]\right| = (\lambda - \lambda_{ARB_2})(\lambda - \lambda_{ARB_3}) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

⋮

$\lambda^2 + 2G_2\lambda + 4G_1 - 1 - 2G_2 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$

$$\begin{cases} 2G_2 = \alpha_1 \\ 4G_1 - 1 - 2G_2 = \alpha_2 \end{cases}$$

(SETTIMO $a = 2$)

4) SI DETERMINI UN CONTROLLORE CON REAZIONE DALL'USCITA IN CUI SI STABILIZZI IL SISTEMA COMPLESSIVO E CON DUE AUTOVAL. NASCOSTI

PER RISPONDERE A QUESTA DOMANDA DEVO PASSARE NEL DOMINIO DI LAPLACE

$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \dfrac{s+1}{s-1}$

ABBIAMO GIÀ UN AUTOVALORE NASCOSTO IN -1, COME FACCIAMO A OTTENERE L'ALTRO? PREFERIAMO $G(s) = \dfrac{---}{(s+1)---}$ IN MODO DA CANCELLARE LO ZERO DI $P(s)$

IN QUESTO MODO: $\{\text{AUTOV. NASCOSTI}\} = \{\underset{\text{7RAGG OSS}}{-1}, \underset{\text{RAGG 7OSS}}{-1}\}$ CANCELLAZIONE POLO - ZERO

SCELGO $G(s) = \dfrac{a}{s+1} \longrightarrow F = GP = \dfrac{a}{s-1} \longrightarrow P_N = s - 1 + a$

IL SIST. È STABILE PER $a - 1 > 0 \longrightarrow \boxed{a > 1}$

Ex.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & b \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = a$$

A) Si determini per quali valori di a e b non è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato

B) Si determini per quali valori di a e b è possibile costruire l'osservatore asintotico ma non è possibile assegnare arbitrariamente tutti gli autovalori

A

$$\text{rank}\begin{pmatrix} C \\ \hline CA \end{pmatrix} = \text{rank}\left(\begin{array}{c|c} 1 & b \\ 1 & ab \end{array}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } b = 0 \text{ or } a = 1 \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$$\text{rank}\begin{pmatrix} A - I \\ C \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a-1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } a \neq 1 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ è oss.} \\ 1 & \text{se } a = 1 \longrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ è inoss.} \end{cases}$$

$\underline{\lambda_2 = a}$

$$\text{rank}\begin{pmatrix} A - aI \\ C \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{altrimenti} \rightarrow \lambda_2 = a \text{ è oss.} \\ 1 & \text{se } a = 1 \text{ o } b = 0 \rightarrow \lambda_2 = a \text{ è inoss.} \end{cases}$$

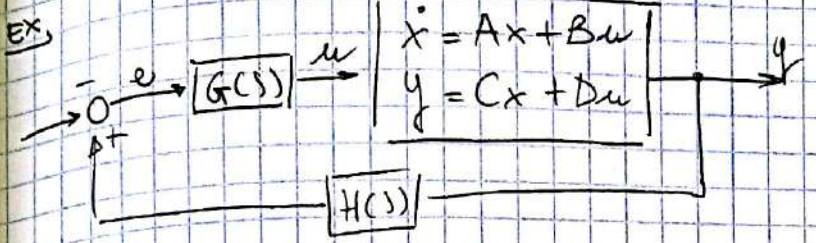
$$\nexists \text{ oss. asint.} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \text{ e } a \geq 0 \end{cases}$$

B

se $\begin{cases} b = 0 \\ a < 0 \end{cases}$ infatti in questo caso $\lambda_2 = a$ è inoss.(*) ma è a parte reale negativa (quindi l'oss. asint. esiste)

(*) quindi non posso scegliere la vel. di conv.)

EX.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad H(S) = \frac{H}{S}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = d$$

DETERMINARE G(S) A DIMENSIONE MINIMA e I PARAMETRI "d" e "H" IN MODO DA SODDISFARE LE SEGUENTI SPECIFICHE:

α) IL SISTEMA COMPLESSIVO ABBIA DUE AUTOVALORI NASCOSTI.

β) LA RISPOSTA y A REGIME PERMANENTE PER L'INGRESSO $r(t) = t$ SIA UGUALE A $1/3$.

γ) IL SISTEMA COMPLESSIVO SIA ASINTOTICAMENTE STABILE CON TUTTI GLI AUTOVALORI COINCIDENTI.

DUE AUTOVALORI: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$, VERIFICHIAMO R. e O.

$$n = \text{rank}(B \mid AB) = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \text{UNO R. e UNO } \neg R.$$

$$\nu = \text{rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{TUTTI e DUE O.}$$

VERIFICO CHE SIA $\lambda_2 = -2$ QUELLO NON RAGG. (SE COSÌ NON FOSSE IL PROBLEMA NON AVREBBE SOLUZIONE!)

$$\text{rank}(A + 2I \mid B) = \text{rank}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2 & \neg R. \text{ e O.} \\ \lambda_1 = 1 & R. \text{ e O.} \end{cases}$$

CALCOLO P(S):

$$P(S) = C(SI - A)^{-1}B + D = \frac{d(s - 1 + 1/d)}{s - 1}$$

OSS.

IL FATTO CHE ABBIAMO UN AUTOVALORE NASCOSTO IN -2 IMPLICA CHE DEVO METTERLI TUTTI IN '-2' PER SODDISFARE LA SPECIFICA (γ)

OSS.

VISTO CHE DEVO AVERE DUE AUTOV. NASCOSTI, METTO LO ZERO DI P(S) IN -2 IN MODO DA POTERLO CANCELLARE CON UN POLO IN G(S) →

$S-1+\frac{1}{d}=S+2 \longrightarrow d=\frac{1}{3} \Rightarrow P(S)=\frac{1}{3}\frac{S+2}{S-1}$

$G(S)=\frac{(\dots)}{(S+2)(\dots)}$

ABBIAMO OTTENUTO COSÌ DUE AUTOVALORI NASCOSTI IN '-2'

UNO TRAG. e OSS. e UNO RAG. e NOSS.

TROVO LA FdT RIFERIMENTO-USCITA

$W=\frac{y}{r}=\dots=\frac{N_F D_H}{N_F N_H+D_F D_H}$ OVE $F=G\cdot P=\frac{N_F}{D_F}$ $H=\frac{N_H}{D_H}$

CONSULTO LA TABELLA DELLE RISPOSTE A REGIME A INGRESSI CANONICI

DA LÌ $\longrightarrow$ DEVO METTERE UNO ZERO IN $W(S)$ e DEVO RENDERLA

t.c. $\left.\frac{W(S)}{S}\right|_{S=0}=\frac{1}{3}$

$W(S)$ HA GIÀ UNO ZERO IN $S=0$! INFATTI $N_W=N_F\cdot D_H$ e

$D_H=S$. NON DEVO FARE NULLA.

DEVO, PERÒ, IMPORRE CHE $\left.\frac{W(S)}{S}\right|_{S=0}=\frac{1}{3}$

OSS.

IL FATTO CHE HO $\left.\frac{W(S)}{S}\right|_{S=0}$ AGGIUNGE LA NECESSITÀ DI AGGIUNGERE

UN NUOVO PARAMETRO! (ASSEGNAZIONE AUTOV. FINALE + VINCOLO CHE $\left.\frac{W(S)}{S}\right|_{S=0}=\frac{1}{3}$)

IN QUESTO CASO: N° PARAMETRI $=d_W+1$

$d_W=\underbrace{d_F+d_H}=d_F+1 \longrightarrow d_F+2$

INFATTI I GRADI DEI DEN. SONO SEMPRE $\geq$ DI QUELLI DEI NUM.

$d_F+d_H\geq m_F+m_H$

POSSO ARRANGIARE LA STRUTTURA DI $G(S)$:

$G(S)=\frac{a}{S+2} \longrightarrow F=\frac{\frac{1}{3}a}{S-1}$ NO! N° PAR. $=2$ (H e a) $\neq d_F+2=3$

$G(S)=\frac{aS+b}{S+2} \longrightarrow F=GP=\frac{1}{3}\frac{aS+b}{S-1}$ OK! N° PAR $=3=d_F+2=3$

$\left.\frac{W(S)}{S}\right|_{S=0}=\frac{1}{\cancel{S}}\cdot\left.\frac{\frac{1}{3}(aS+b)\cdot\cancel{S}}{\frac{1}{3}(aS+b)H+(S-1)S}\right|_{S=0}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{H}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow H=3$

ORA ASSEGNO GLI AUTOV. DI W IN MODO DA RENDERLI TUTTI -2
(PER SODDISFARE LA SPECIFICA γ)

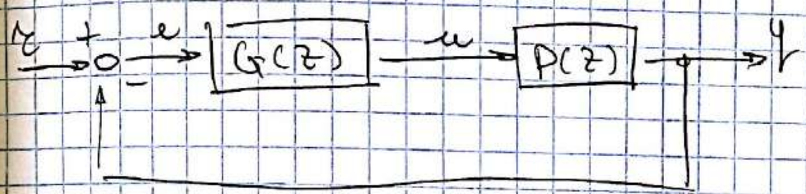
$$D_W = N_F N_H + D_F D_H = (s+2)^2$$

$$\frac{1}{3}(as+b)\cancel{3} + (s-1)s = (s+2)^2 \longrightarrow s^2 + s(a-1) + b = s^2 + 4s + 4 \quad \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$$

ABBIAMO OTTENUTO COSÌ: $\begin{cases} \alpha = 1/3 \\ \mu = 3 \\ G(s) = \dfrac{5s+4}{s+2} \end{cases}$

$$\begin{Bmatrix} \text{AUTOV.} \\ \text{SISTEMA} \\ \text{COMPL.} \end{Bmatrix} = \Big\{ \underbrace{-2}_{\text{NASC. OSS}} ; \underbrace{-2}_{\text{OSS. NASC.}} ; \underbrace{-2 ; -2}_{\text{NON NASCOSTI}} \Big\}$$

Ex



$$G(z) = k\,\frac{z+a}{z+b} \qquad P(z) = \frac{z-2}{(z-1)(z+0{,}5)}$$

DETERMINARE k, a, b t.c.

α) ERRORE $e(k)$ CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $r(k) = 1(k)$ SI ANNULLI NEL PIÙ BREVE TEMPO POSSIBILE 'ℓ'

β) IL SIST. COMPLESSIVO SIA ASINT. STABILE

$$\underbrace{e(z)} = W_e(z) \cdot r(z)$$

$$\frac{S(z)}{z^{\ell-1}} = \frac{D_F}{N_F + D_F} \cdot \frac{z}{z-1} \qquad \text{MOLTIPLICO AMBO I MEMBRI PER } \frac{z-1}{z} \qquad \frac{S(z)(z-1)}{z^{\ell}} = \frac{D_F}{N_F + D_F} \longrightarrow \begin{cases} S(z)\cdot(z-1) = D_F \\ z^{\ell} = N_F + D_F \end{cases}$$

$$G(z) = k\,\frac{z+0{,}5}{z+b} \Rightarrow F(z) = G(z)\cdot P(z) = k\,\frac{\overbrace{z-2}^{N_F}}{\underbrace{(z+b)(z-1)}_{D_F}} \qquad N_F + D_F = k(z-2) + (z+b)(z-1) = z^2$$

$$z^2 + (k+b-1)z - 2k - b = z^2$$

$$\begin{cases} k+b-1 = 0 \\ -2k-b = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

CALCOLIAMO IL TRANSITORIO:

$$e(z) = W_e(z)\cdot r(z) = \frac{D_F}{N_F+D_F}\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{(z+2)(\cancel{z-1})}{z^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}} = \frac{z+2}{z} = 1+\frac{2}{z}$$

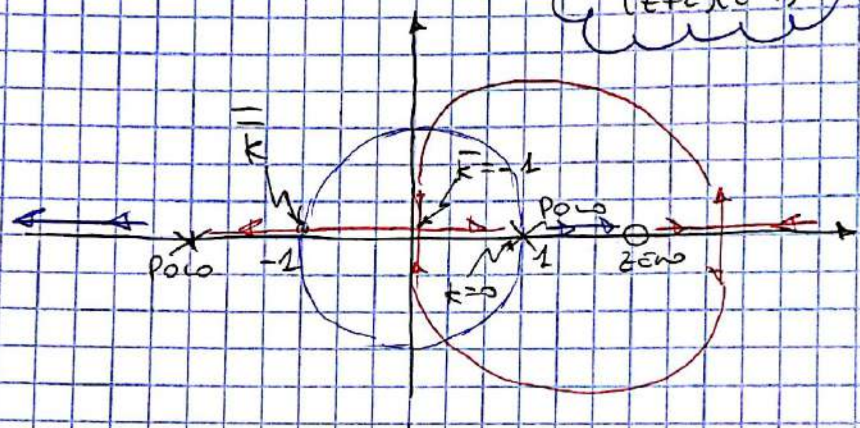
$$e(k) = \delta(k) + 2\,\delta(k-1)$$

SCELTI I PARAMETRI a e b, TRACCIARE IL LUOGO DELLE RADICI E DALL'ISPEZIONE DEL LUOGO DETERMINARE PER QUALI VALORI DI K IL SIST. È ASINTOTICAMENTE STABILE e TUTTI GLI AUTOV. REALI

TRACCIO IL LUOGO DI $F = k\,\dfrac{z-2}{(z+2)(z-1)}$

$n = 2$

$z = 1$



IL SIST. È AS. STABILE e TUTTI GLI AUTOV. REALI

se $\bar{k} < k < \bar{\bar{k}}$

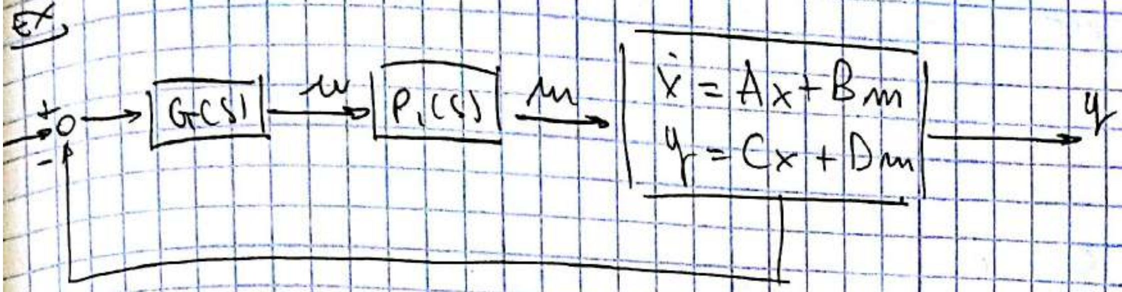
COME TROVO $\bar{\bar{k}}$? SOSTITUISCO $z=-1$ IN $k(z-2)+(z+2)(z-1)=0$ $(N_F+D_F=0)$

$\longrightarrow \bar{\bar{k}} = -2/3$

OK,

L'ALTRO RAMO SAREBBE VERO TRA $k=0$ e $k=-1$, QUINDI PIÙ GRANDE

EX.



Determiniamo "a" e "b" e un controllore G(s) a dim. minima t.c.:

1) il processo abbia 2 autovalori nascosti
2) il pol. caratteristico del sistema complessivo sia:

$(\lambda+1)^2(\lambda+2)(\lambda+4)(\lambda+6)$.

$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 1) \quad D = 1$

$P_1(s) = \dfrac{s-2}{s(s+b)}$.

(pezzo non svolto in aula)

$\lambda = a \begin{cases} \nexists \text{ ragg. se } a = -2 \\ \text{ragg. se } a \neq -2 \end{cases}$

sempre oss.

$\lambda = 1$ sempre ragg.

$\begin{cases} \text{inoss. se } a = 3 \\ \text{oss se } a \neq 3 \end{cases}$

Scelgo $a = -2$ in modo da creare un autoval. nascosto (uno dei due richiesti) nel processo.

$P_2(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \dfrac{s+4}{s-1}$

A questo punto scelgo $b = 4$ in modo da creare il secondo autov. nascosto richiesto.

$P = P_1 P_2 = \dfrac{s-2}{s\cancel{(s+4)}} \cdot \dfrac{\cancel{s+4}}{s-1} = \dfrac{s-2}{s(s-1)}$

ORA DEVO SCEGLIERE UNA STRUTTURA DI $G(S)$ IN MODO DA FARE L'ASS. DEGLI AUTOVALORI

N° PARAMETRI $= \partial W = \partial F$

SCELGO $G(S) = \dfrac{cS+d}{S+e}$, IN QUESTO MODO $F = \dfrac{(cS+d)(S-2)}{S(S-1)(S+e)}$

$\partial F = 3 =$ N° PARAMETRI $\longrightarrow$ ok!

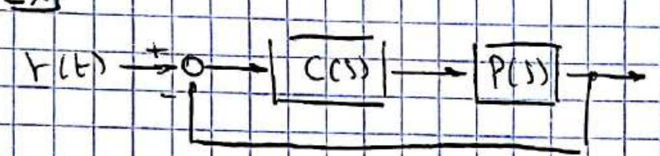
$W(S) = \dfrac{N_F}{N_F+D_F}$ $\quad D_W = N_F + D_F = (cS+d)(S-2) + S(S-1)(S+e) =$

$= (S+1)^2(S+6)$

: CALCOLI

$c = -25$
$d = -3$
$e = 34$

EX.



$C(S) = K \quad P(S) = \dfrac{10(S+1)}{S(S-1)(S+10)}$

TROVARE K t.c.:

1) ERRORE A REGIME PERMANENTE CORRISPONDENTE A INGRESSI A GRADINO SIA NULLO

2) ASINTOTICAMENTE STABILE

3) MARGINE DI FASE φ_m MASSIMO

4) ω_t PULSAZIONE DI ATTRAVERSAMENTO $= 2\,\frac{rad}{s}$ o $5\,\frac{rad}{s}$ o $20\,\frac{rad}{s}$

5) VERIFICARE IL PUNTO 2 TRAMITE NYQUIST

ORA GUARDIAMO SISTEMI DI TIPO K

LA 1) È AUTOMATICAMENTE VERIFICATA GRAZIE AL POLO IN ZERO IN $P(S)$.

2) CALCOLO $D_W = N_F + D_F$

$D_W = s(s-1)(s+10) + 10k(s+1) = s^3 + 9s^2 + s(k10-10) + 10k$

APPLICHIAMO ROUTH

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 10k-10 \\ 2 & 9 & 10k \\ 1 & \dfrac{10k-9(10k-10)}{-9} & 0 \\ 0 & 10k & \end{array}$$

$$\begin{cases} 10k>0 \longrightarrow k>0 \\ \dfrac{10k-9(10k-10)}{-9} > 0 \longrightarrow 10k-9(10k-10)<0 \end{cases}$$

$k > 9/8$

3) $\varphi_m = 180° + \underline{/F(j\omega_t)}$

DEVO ~~CALCOLARE~~ SCEGLIERE ω_t t.c. φ_m è MASSIMO

~~[illegible]~~
RISCRIVO $P(s)$ IN FORMA DI BODE (k è positivo e con fase nulla → non influisce nel calcolo della fase)

$P(s) = -\dfrac{(1+s)}{s(1-s)(1+\frac{s}{10})}$

$\underline{/F(j\omega_t)} = -180° + \arctan(\omega_t) - 90° + \arctan(\omega_t) + - \arctan(0{,}1 \cdot \omega_t) =$

$= -270° + 2 \cdot \arctan\omega_t - \arctan(0{,}1\omega_t) =$

$$= \begin{cases} -154{,}4° & \text{per } \omega_t = 2 \ \frac{rad}{s} \\ -139{,}2° & \text{per } \omega_t = 5 \ \frac{rad}{s} \\ -159{,}2° & \text{per } \omega_t = 20 \ \frac{rad}{s} \end{cases}$$

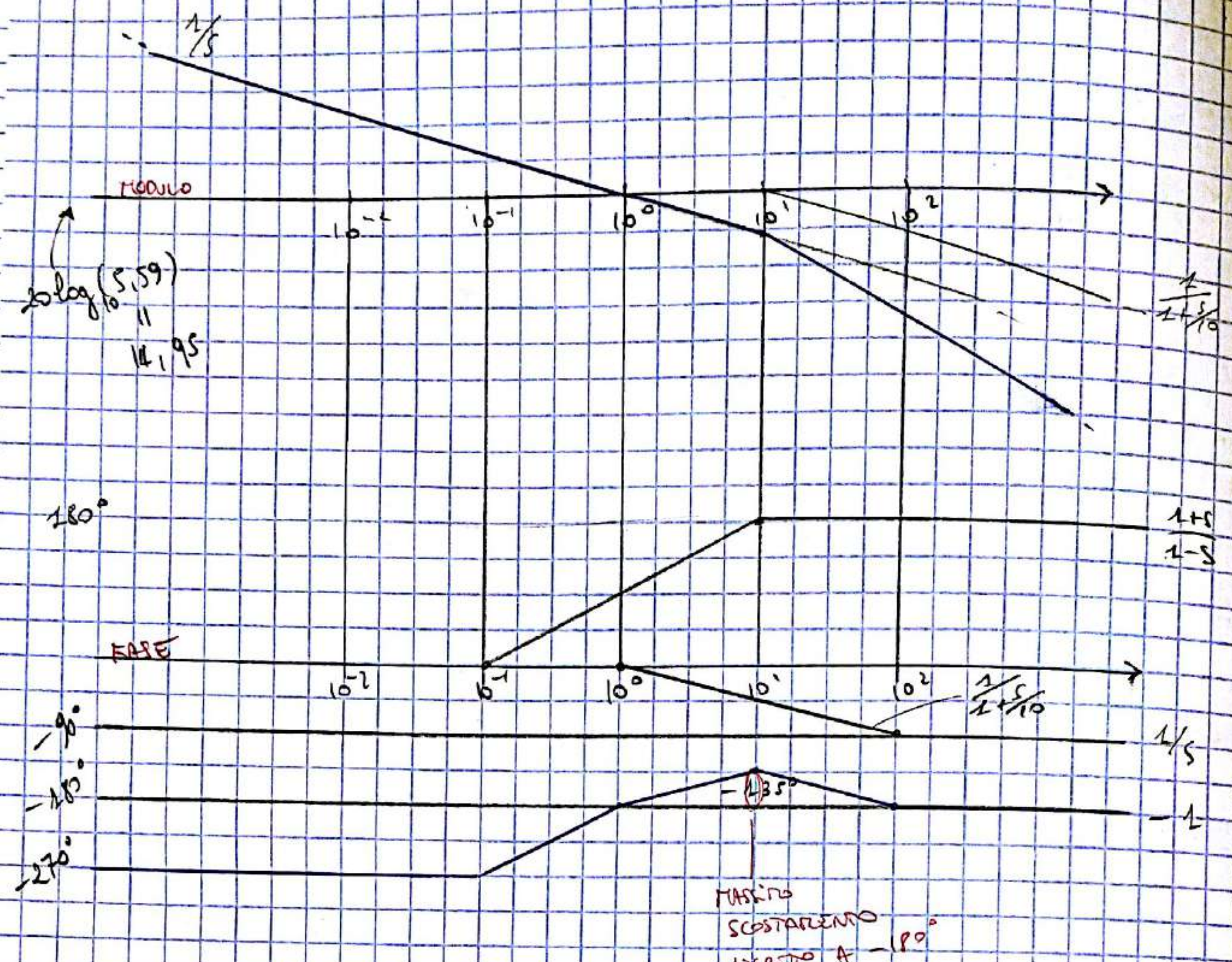
PER $\omega_t = 5$ rad/s
φ_m è MASSIMA

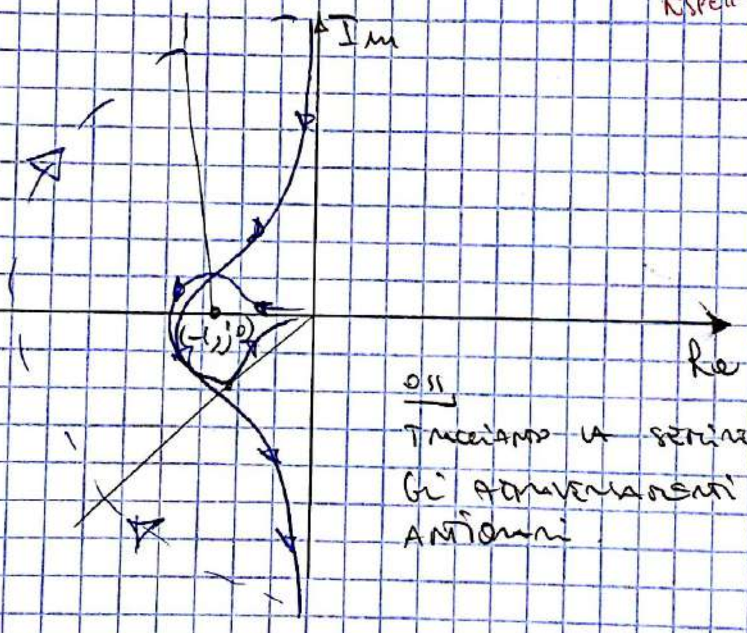
RICAVIAMO k APPLICANDO LA DEF. DI ω_t

$\omega_t : |F(j\omega_t)| = 1$

$\dfrac{k\sqrt{26}}{5\sqrt{26} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4}}} = 1 \longleftrightarrow k \cong 5{,}59$

$\varphi_m = 40{,}8° = -139{,}2° - 180°$





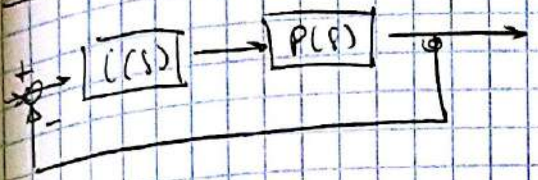
OSS

TRACCIANDO LA SEMIRETTA CONTIAMO **NEGATIVI** GLI ATTRAVERSAMENTI ORARI E POSITIVI QUELLI ANTIORARI

OSS.

PER CAPIRE DOV'È $(-1, j0)$ VEDIAMO IL DIAGRAMMA DI BODE: SE QUANDO IL DIAGRAMMA DELLE FASI ATTRAVERSA $-180°$ IL MODULO È $>1 \Rightarrow (-1, j0)$ È ALL'INTERNO DELLA 'PALLINA'

EX



$$C(s) = -\frac{1}{a}\cdot\frac{s-a}{s-b}$$

$$P(s) = \frac{1}{s-1}$$

TROVARE a e b t.c.

1) MODULO ERRORE A REGIME PERMANENTE RAMPA $r(t)=t$ SIA ≤ 2

2) AS. STABILE

3) $|a| = \{0{,}1\ ,\ 1\ ,\ 10\}$

4) VERIFICARE LA STABILITÀ CON LA D'AG. DI N.

1) $$W_e(s) = \frac{1}{1+C\cdot P} = \frac{1}{1-\frac{1}{a}\cdot\frac{s-a}{s-b}\cdot\frac{1}{s-1}} = \frac{a(s-b)(s-1)}{a(s-b)(s-1)-(s-a)}$$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} e(s)\cdot s = \lim_{s\to 0} W_e(s)\cdot\frac{1}{s^2}\cdot \cancel{s} = \lim_{s\to 0}\frac{a(s-b)(s-1)}{a\,s\left[(s-b)(s-1)-s(s-a)\right]}$$

VEDIAMO SUBITO CHE $b=0$ (INFATTI ALTRIMENTI L'$1/s$ RENDE IL LIMITE NON FINITO)

... CONTI ... $= -1$

$|e_\infty| = 1 \leq 2$ OK! SIAMO STATI SEMPLICEMENTE FORTUNATI

2)

CALCOLIAMO $D_W = N_F + D_F = -(s-a) + as(s-1) = as^2 - (a+1)s + a$

$$\begin{cases} a<0 \\ a+1>0 \\ a<0 \end{cases} \quad \text{OR} \quad \begin{cases} a>0 \\ a+1<0 \\ a>0 \end{cases}$$

IMP!

$-1 < a < 0$

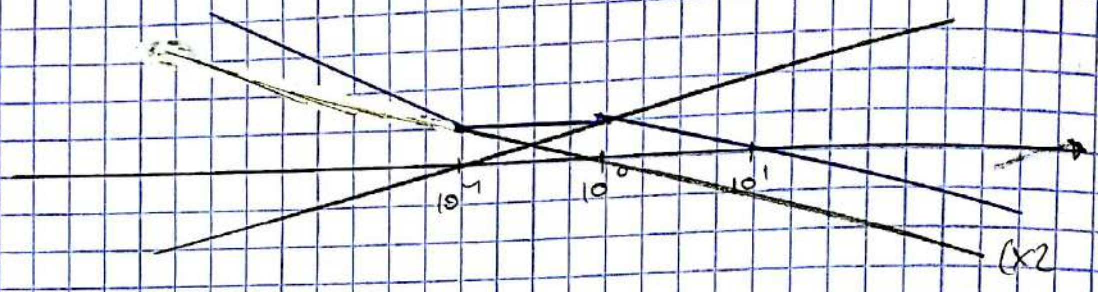
→ PER RISPETTARE LA TERZA SPECIFICA SCELGO $a = -0{,}1$

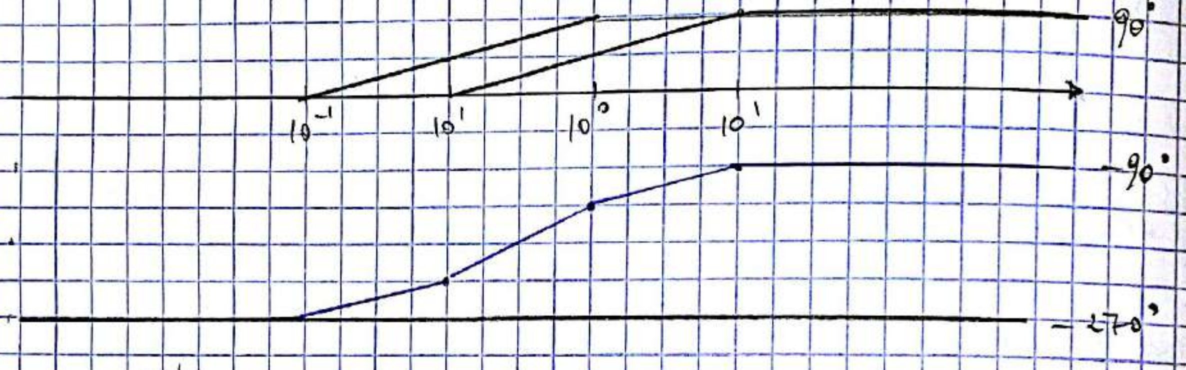
QUINDI:

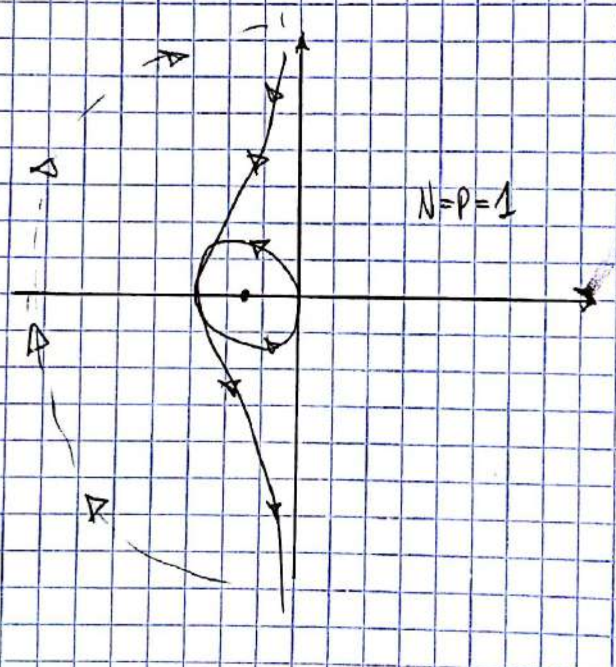
$$C(s) = 10\,\frac{s+0{,}1}{s} = 10 + 1/s$$

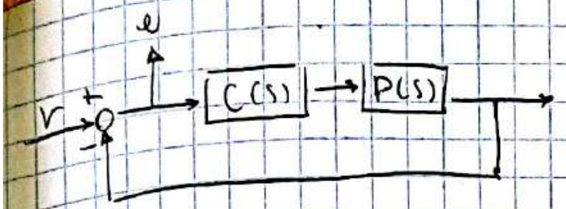
SCRIVIAMO F(S) IN FORMA DI BODE:

$$F(S) = \frac{1+10S}{S(1+S)}$$









$C(s) = k$

$P(s) = \dfrac{(s+1)^2}{s^3}$

a. TROVARE k t.c.:

1) $\omega_t \leq 10$
2) m_φ più grande possibile e calcolarne il valore
3) stabilità asintotica

b. TROVARE k t.c.

1) ω_t minore possibile
2) il sistema sia stabile asint.

c. TRACCIARE BODE e N. sulla domanda a.

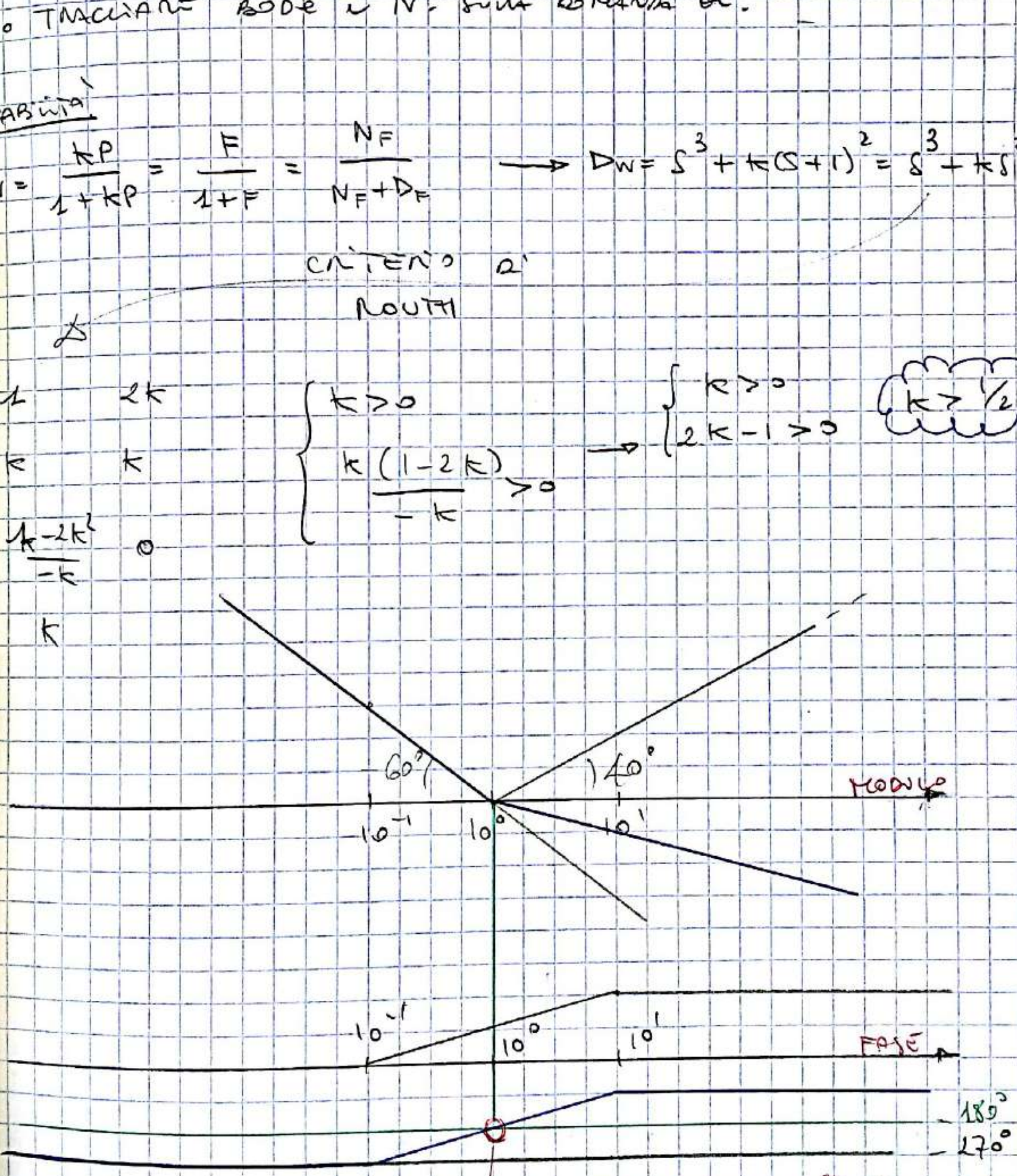
STABILITÀ

$$W = \frac{kP}{1+kP} = \frac{F}{1+F} = \frac{N_F}{N_F + D_F} \longrightarrow D_W = s^3 + k(s+1)^2 = s^3 + ks^2 + 2ks + k$$

CRITERIO DI ROUTH

3	1	$2k$
2	k	k
1	$\dfrac{k-2k^2}{-k}$	0
0	k	

$$\begin{cases} k > 0 \\ \dfrac{k(1-2k)}{-k} > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ 2k - 1 > 0 \end{cases} \quad \boxed{k > \tfrac{1}{2}}$$



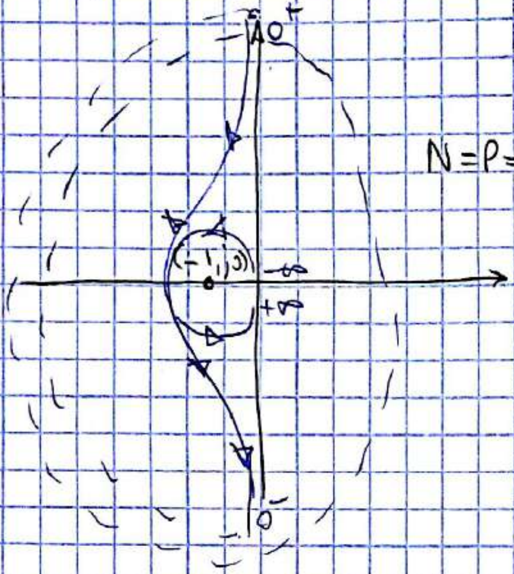
il margine di fase è circa zero!
il sist. non è asint. stabile

$\omega_t : |F(j\omega_t)| = 1$

$$\frac{k(1+100)}{1000} = \frac{101\,k}{1000} = 1 \longrightarrow \boxed{k = \frac{1000}{101} = 9,9}$$

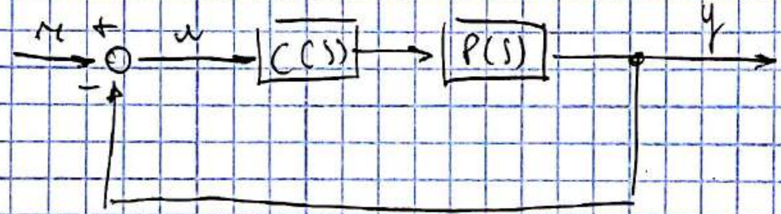
QUINDI $\omega_t = 10$ SE $k = 9,9$

$M_\varphi = 180° + \angle F(j10) = \dots = 78,57°$



$N = P = 0$ OK!

EX



$P(s) = \frac{1}{s(s-1)}$

TROVARE C(S) A DIMENSIONE FINITA t.c.:

1) S AS. STABILE CON POLINOMIO CARATTERISTICO $s^4 + 9s^3 + 10s^2 + 40s + 20$

2) ERRORE "e" A REGIME PERMANENTE NULLO PER $R(t) = t$

3) BODE + N.

$C(s) = \frac{k}{s^m} C'(s)$

PER LA 2) → METTO UN POLO IN C(S) IN ZERO

ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOV.

$D_W = N_F + D_F = \overset{N_C}{\cancel{\quad}} + s^2 D_C (s-1) = s^4 + 9s^3 + 10s^2 + 40s + 20$

PER RISOLVERE LA DIOFANTINA IN N_c E IN D_c DEVO AVERE COMPLESSIVAMENTE 5 PARAMETRI

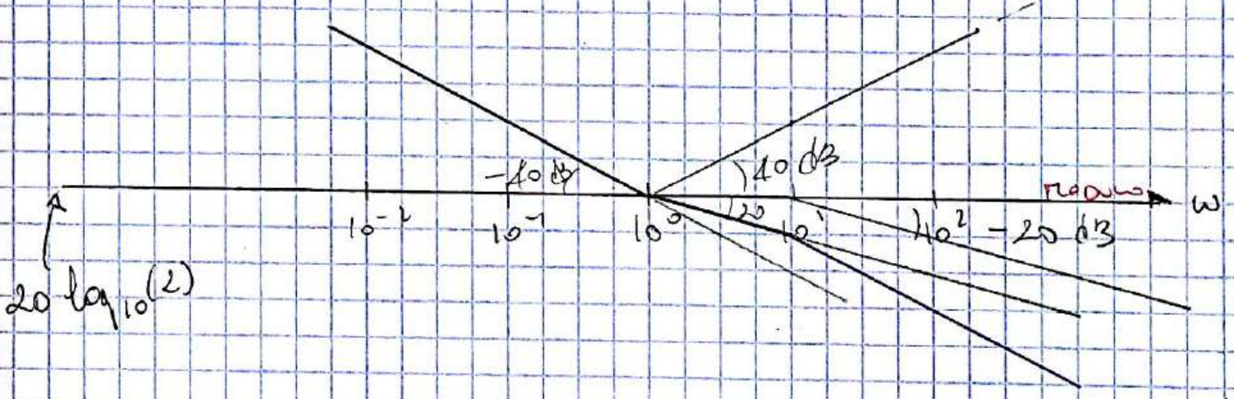
$N_c : as^2 + ds + e$

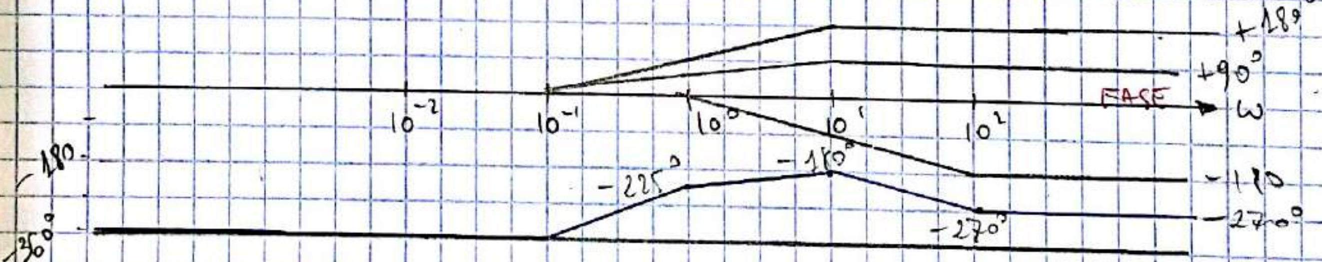
$D_c : s(as+b)$

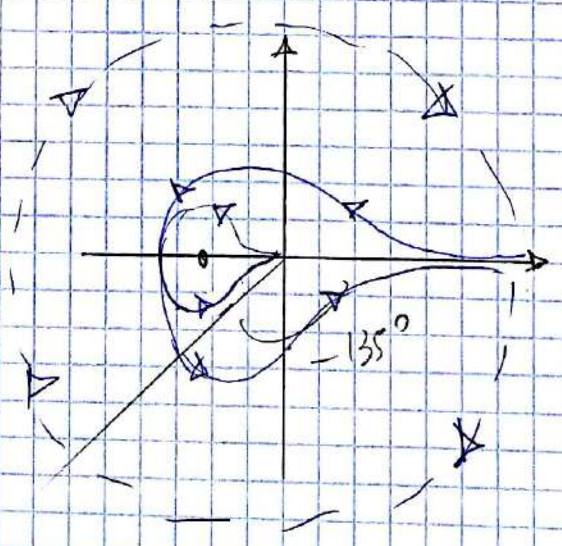
$s^2(as+b)(s-1) + cs^2 + ds + e = s^4 + 9s^3 + 10s^2 + 40s + 20$

: CALCOLI

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 10 \\ c = 20 \\ d = 40 \\ e = 20 \end{cases} \Longrightarrow F(s) = \frac{20(s+1)^2}{s^2(s+10)(s-1)} = -2\frac{(1+s)^2}{s^2(1+0.1s)(1-s)}$$







OSS.
PER CAPIRE DOV'È IL PUNTO $(-1, j0)$ GUARDO SEMPRE I DIAGRAMMI DI BODE

$N = P = 1$