CONTROLLI AUTOMATICI | THX ALKOR

• MODELLIZZAZIONE :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + P z(t) & \leadsto \text{EQ. NE DI STATO} \\ y(t) = C x(t) + D u(t) + Q z(t) & \leadsto \text{EQ. NE DI USCITA} \end{cases}$$

$A(n \times n)$ $B(n \times p)$ $P(n \times r)$

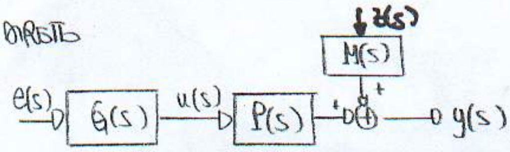
$C(q \times n)$ $D(q \times p)$ $Q(n \times r)$

$$y(s) = \underbrace{P(s)}_{\text{f. DI TRASF. ING.-USC.}} u(s) + \underbrace{M(s)}_{\text{f. DI TRASF. DIST.-USC.}} z(s)$$

$$P(s) = C(sI-A)^{-1}B + D \quad , \quad M(s) = C(sI-A)^{-1}P + Q$$

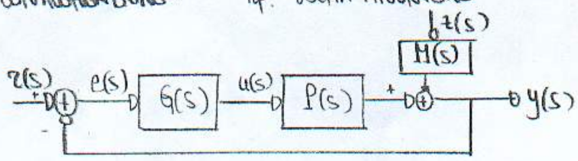
• SCHEMA DI CONTROLLO : (IN α)

- DIRETTO



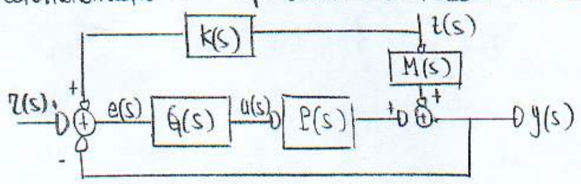
$$\begin{cases} y = Pu + Mz \\ u = Ge \end{cases} \leadsto y = PGe + Mz$$

- CONTROREAZIONE : hp. USCITA MISURABILE



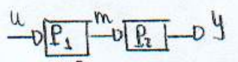
$$\begin{cases} y = Pu + Mz \\ e = r - y \\ u = Ge \end{cases} \leadsto y = \frac{PG}{1+PG} r + \frac{M}{1+PG} z$$

- CONTROREAZIONE hp. USCITA E DISTURBO MISURABILI

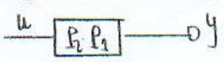


$$\begin{cases} y = Pu + Mz \\ e = r + Kz - y \\ u = Ge \end{cases} \leadsto y = \frac{PG}{1+PG} r + \frac{PGK+M}{1+PG} z$$

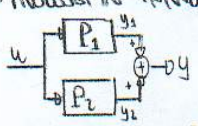
• PROCESSI IN SERIE



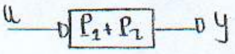
$$\begin{cases} y = P_2 m \\ m = P_1 u \end{cases} \leadsto y = P_2 P_1 u$$



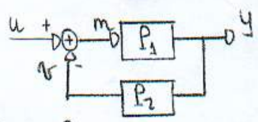
• PROCESSI IN PARALLELO



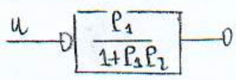
$$\begin{cases} y_1 = P_1 u \; ; \; y_2 = P_2 u \\ y = y_1 + y_2 = (P_1 + P_2) u \end{cases}$$



• PROCESSI IN CONTROREAZIONE



$$\begin{cases} y = P_1 m \\ m = u - v \\ v = P_2 y \end{cases} \leadsto y = \frac{P_1}{1+P_1P_2} u$$



• SOLUZIONE DEL SISTEMA :
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

HA SOLUZIONE DEL TIPO

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \underbrace{C e^{A(t-t_0)} x(t)}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)}_{\text{EVOLUZIONE FORZATA}}$$

PER $x(t)$:

POICHE' $e^{At} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i t}$ DOVE
- $r \leadsto$ NUMERO DEGLI AUTOVALORI DISTINTI
- $m_i \leadsto$ MOLTEPLICITA' DELL' i-ESIMO AUTOVALORE
- $R_{ik} \leadsto$ RESIDUO
- $\lambda_i \leadsto$ AUTOVALORE DI A

QUINDI $e^{At} \propto e^{\lambda_i t}$

• FORMA CANONICA RAGGIUNGIBILE: CONSIDERANDO LA

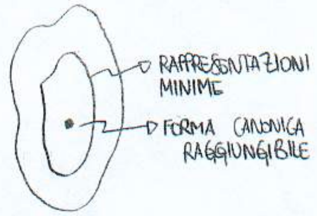
$$P(s) = D + \frac{c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

C.N.S. AFFINCHE' $D = 0$ E' CHE LA $P(s)$ SIA STRETTAMENTE PROPRIA

ALLORA

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(n \times n)$ $\quad$ $(n \times 1)$



$$C = [c_0 \; c_1 \; c_2 \; \dots \; c_{n-1}]$$

$(1 \times n)$

• TRASFORMAZIONE: DAL SISTEMA

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

SI OPERA LA TRASFORMAZIONE $\tilde{x} = Tx$, DOVE $T(n \times n) \to x = T^{-1}\tilde{x}$

$$\begin{cases} \dot{x} = T^{-1}\dot{\tilde{x}} = AT^{-1}\tilde{x} + Bu \\ y = AT^{-1}\tilde{x} + Bu \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = TAT^{-1}\tilde{x} + TBu \\ y = CT^{-1}\tilde{x} + Du \end{cases}$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1}; \quad \tilde{B} = TB; \quad \tilde{C} = CT^{-1}; \quad \tilde{D} = D$$

EQUIVALENZA $\to$ $\tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} = CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D =$ POICHE' $I = TT^{-1}$

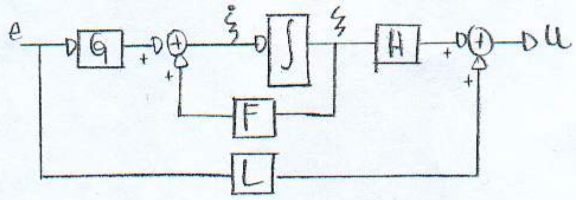
$= CT^{-1}(sTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1}TB + D =$ POICHE' $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

$= CT^{-1}(T(sI-A)T^{-1})^{-1}TB + D =$

$= CT^{-1}T(sI-A)^{-1}T^{-1}TB + D = C(sI-A)^{-1}B + D$

• CONTROLLORE FISICO:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = F\xi + Ge \\ u = H\xi + Le \end{cases}$$



• STABILITA' ASINTOTICA: TEMPO $\to$ SE AD UN INGRESSO LIMITATO NEL TEMPO CORRISPONDE UN'USCITA LIMITATA NEL TEMPO

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

POICHE'

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{SOLUZIONI}} \begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{PER } t > t_0 \text{ QUESTI TERMINI SI ANNULLANO}} \end{aligned}$$

ALLORA

$$\lim_{t \to \infty} Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) = 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} e^{At} = 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} B_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i t} \Rightarrow Re[\lambda_i] < 0 \;\; \forall i$$

LAPLACE $\to$ PER SISTEMA INGRESSO-STATO-USCITA $\quad u(s) \to \boxed{P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}} \to y(s)$

$$P(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = C\frac{[sI-A]^a}{|sI-A|}B + D$$

$$\begin{Bmatrix} \text{RADICI DI} \\ |\lambda I - A| = 0 \end{Bmatrix} \overset{def}{=} \begin{Bmatrix} \text{AUTOVALORI} \\ \text{DI } A \end{Bmatrix} \overset{def}{=} \underset{(\text{SPETTRO DI } A)}{\sigma(A)} \supseteq \begin{Bmatrix} \text{POLI DI} \\ P(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{RADICI DI} \\ D_P(s) \end{Bmatrix}$$

$\to$ L'UGUALE VALE PER LE RAPPRESENTAZIONI MINIME

$n \geq d_P$

$\to$ L'UGUALE VALE PER LE RAPPRESENTAZIONI MINIME

$$\begin{Bmatrix} \text{AUTOVALORI} \\ \text{NASCOSTI} \end{Bmatrix} = \sigma(A) - \begin{Bmatrix} \text{RADICI} \\ \text{DI } D_P(s) \end{Bmatrix}$$

$n = d_P + N_{\text{AUTOV. NASC.}}$

• CRITERIO DI ROUTH : SI CONSIDERA IL DENOMINATORE DI UNA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $W(s)$:

$D_W = s^4 - 3s^3 - 3s^2 + 7s + 6$

4	1	-3	+6
3	-3	7	
2	-1	9	
1	-20		
0	9		

$a = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}}{-(-3)} = -2/3$; $b = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & +6 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{-(-3)} = 6$ $\quad \times 3/2$

$c = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 9 \end{vmatrix}}{-(-1)} = -20$

$d = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ -20 & 0 \end{vmatrix}}{-(-20)} = 9$

$\leadsto$ OGNI CAMBIAMENTO DI SEGNO NELLA PRIMA COLONNA INDICA UN POLO NELLA $W(s)$ A PARTE $Re > 0$ CIOE' ASINTOTICAMENTE INSTABILE!

C.N. : CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHE' LE RADICI DI UN POLINOMIO ABBIANO $Re < 0$ E' CHE TUTTI I COEFFICIENTI ABBIANO LO STESSO SEGNO

CASI PARTICOLARI : a) ZERO SULLA PRIMA COLONNA

$D_W = s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 6s - 1$

4	1	2	-1
3	+3	+6	
2	$\cancel{0}\varepsilon$	-1	
1	$\frac{6\varepsilon+3}{\varepsilon}$		
0	-1		

$\leadsto$ 0 VIENE SOSTITUITO DA $\varepsilon > 0$ MOLTO PICCOLO

E' INSTABILE !

b) ZERI SU UNA RIGA

$D_W = s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 2s + 2$

5	1	5	2
4	1	5	2
3	$\cancel{0}$ 4	$\cancel{0}$ 10	
2	5	4	
1	34		
0	4		

$\Rightarrow$ RIGA NULLA ALLORA POLI A PARTE REALE NULLA

E' STABILE SEMPLICEMENTE !

$D_W = D_W' \cdot D_W''$

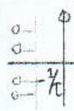
$\Rightarrow$ E' DEL GRADO DELLA RIGA SUPERIORE A QUELLA NULLA $\Rightarrow$ IV GRADO

HA TERMINI DI GRADO PARI E COEFFICIENTI DELLA RIGA SUPERIORE

$D_W' = s^4 + 5s^2 + 2$

ALLA RIGA DI ZERI SI SOSTITUISCONO I COEFFICIENTI DEL POLINOMIO $\frac{dD_W'}{ds}$, CIOE' $\frac{dD_W'}{ds} = 4s^3 + 10s \Rightarrow 4 \;\; 10$

ALCUNE SPECIFICHE RICHIEDONO CHE I POLI SI TROVINO A SX DI UN VALORE DELLA RETTA $Re(s)$



$D_W(s - 1/\tau) \xrightarrow{ROUTH} Re > -1/\tau$

$\Rightarrow$ • SISTEMA E' ASINTOTICAMENTE STABILE QUANDO I POLI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO SONO $Re < 0$

• SISTEMA HA UNA RAPPRESENTAZIONE MINIMA QUANDO $n = d_F$

$\begin{Bmatrix} \text{AUTOVALORI} \\ \text{DI } A \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \text{POLI DI} \\ F(s) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$ QUANDO NON CI SONO AUTOVALORI NASCOSTI

$n = d_F + \cancel{N_{autov.\,nasc.}}$

• SISTEMA E' STABILIZZABILE QUANDO I SUOI AUTOVALORI NASCOSTI SONO $Re < 0$

SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE INTERNAMENTE := $\sigma(A) \in \mathbb{C}^-$ $\Rightarrow$ SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE ESTERNAMENTE := TUTTI I POLI DELLA $F(s)$ SONO A $Re < 0$.

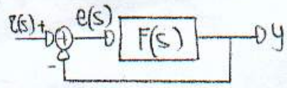
$\leadsto$ VALE $\Leftrightarrow$ SE SI TRATTA DI RAPPRESENTAZIONE MINIMA

AUTOVALORI NASCOSTI $\leadsto$ NELLA CASCATA DI DUE SISTEMI :

$e \rightarrow \boxed{G(s)} \xrightarrow{u} \boxed{P(s)} \rightarrow y$

$F(s) = \dfrac{y(s)}{e(s)} = G(s)P(s)$

$\begin{Bmatrix} \text{AUTOVALORI NASCOSTI} \\ \text{NELLA CASCATA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{AUTOVALORI} \\ \text{NASCOSTI} \\ \text{NEL PRIMO} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \text{AUTOVALORI} \\ \text{NASCOSTI} \\ \text{NEL SECONDO} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \text{COPPIE POLO-} \\ \text{-ZERO CHE} \\ \text{SI CANCELLANO} \end{Bmatrix}$

→ NELLA CONTROREAZIONE :  $W(s) = \frac{y}{r} = \frac{F(s)}{1+F(s)} = \frac{N_F(s)}{D_F(s)+N_F(s)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{AUTOVALORI NASCOSTI} \\ \text{NELLA CONTROREAZIONE} \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{AUTOVALORI NASCOSTI} \\ \text{NEL SISTEMA APERTO} \end{array} \right\}$$

· SCELTA DEL CONTROLLORE → $\underset{dim=0}{a} \rightarrow \underset{dim=1}{\frac{a}{s+b}} \rightarrow \underset{dim=1}{\frac{as+b}{s+c}} \rightarrow \underset{dim=2}{\frac{as+b}{s^2+cs+d}} \rightarrow \underset{dim=2}{\frac{as^2+bs+c}{s^2+ds+e}}$

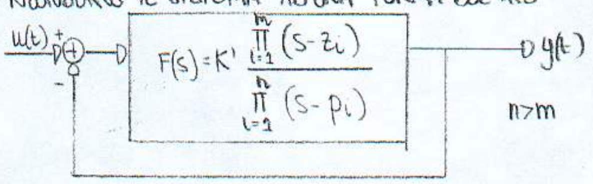
ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI → EQ.NE DIOFANTINA : a) SCEGLIERE UNA STRUTTURA DI $G(s)$ t.c.

NUMERO DI PARAMETRI DI $G(s)$ $\equiv d_W$

b) UTILIZZANDO IL PRINCIPIO DI IDENTITA' DEI POLINOMI, SI RISOLVE LA EQ.NE DIOFANTINA :

$$D_W(s) = \prod_{i=1}^{d_W} (s - s_{arb-i})$$

ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI E STABILIZZAZIONE → LUOGO DELLE RADICI : a) RICONDURRE IL SISTEMA AD UNA FORMA DEL TIPO :



$$F(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \qquad n>m$$

IL LUOGO DELLE RADICI DESCRIVE L'EVOLUZIONE DELLE RADICI DEL DENOMINATORE DELLA $W(s)$ AD ANELLO CHIUSO AL VARIARE DI K' NELL'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$

POLI : PUNTI DEL LUOGO CORRISPONDENTI AL VALORE $K'=0$.

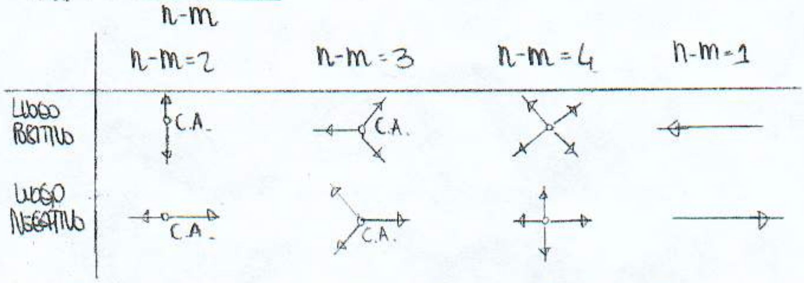
→ SE NON SI RIESCE A RICONDURLO NELLA FORMA SUDDETTA, ALLORA SI STUDIA UNA $F'(s)$ CHE HA IN COMUNE CON $F(s)$ IL DENOMINATORE $D_W(s)$ → HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO ASINTOTICO.

b) SEGNARE I POLI E GLI ZERI

c) TRACCIARE IL LUOGO SULL'ASSE REALE

d) TRACCIARE GLI ASINTOTI

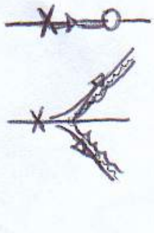
$$C.A. = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$



e) TRACCIARE IL LUOGO POSITIVO ($K' \in [0,+\infty)$) CONSIDERANDO CHE

e1) IL LUOGO POSITIVO HA n RAMI (o CAMMINI).

e2) DA OGNI POLO PARTE UNO ED UN SOLO CAMMINO AD OGNI ZERO E AD OGNI ASINTOTO ARRIVA UNO ED UNO SOLO RAMO.



e3) IL LUOGO E' SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE REALE

QUINDI PARTONO n RAMI CHE ARRIVANO IN m ZERI E $n-m$ ASINTOTI

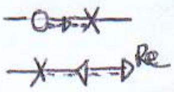
f) TRACCIARE IL LUOGO NEGATIVO ($K' \in (-\infty, 0]$) CONSIDERANDO CHE

f1) IL LUOGO NEGATIVO HA n RAMI

f2) AD OGNI POLO ARRIVA UNO ED UN SOLO RAMO DA OGNI ZERO E DA OGNI ASINTOTO PARTE UNO ED UN SOLO RAMO

f3) IL LUOGO E' SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE REALE

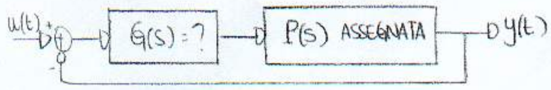
g) TROVARE, UTILIZZANDO IL CRITERIO DI ROUTH, I VALORI DEL PARAMETRO K' IN CORRISPONDENZA AI QUALI IL LUOGO DELLE RADICI INTERSECA L'ASSE IMMAGINARIO.



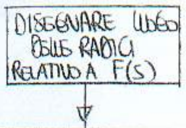
IL PUNTO DOVE SI INCROCIANO DUE CAMMINI E' DETTO P.TO SINGOLARE, LE CUI EQ.NI SONO:

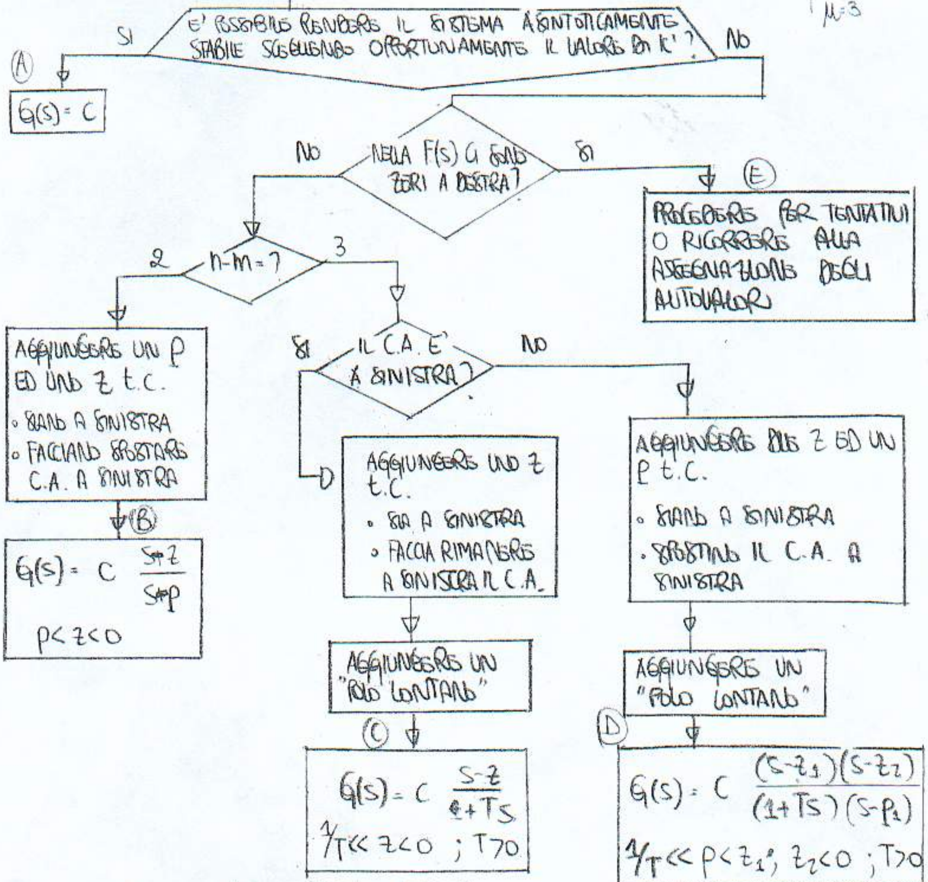
$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + K' \prod_{i=1}^{m}(s-z_i) = 0 \\ \frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + K' \frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{m}(s-z_i) = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} s = \dots \\ K' = \dots \end{cases}$$

→ AL MASSIMO CI SONO $n+m-1$ P.TI SINGOLARI ~> IN UN P.TO SINGOLARE DI MOLTEPLICITA' μ CONFLUISCONO 2μ RAMI DEL LUOGO. LE DIREZIONI DELLE tg AD ESSI FORMANO UNA STELLA REGOLARE CHE DIVIDE L'ANGOLO DI GIRO IN 2μ ANGOLI UGUALI



SINTESI PER TENTATIVI NEL DOMINIO DI LAPLACE





TEO: SE IL SISTEMA (retroazione negativa di $G(s) \to P(s)$) E' ASINTOTICAMENTE STABILE

$\Rightarrow \exists\, \bar{T} > 0$ t.c. $\forall T \in [0, \bar{T})$ ANCHE IL SISTEMA (retroazione negativa di $\frac{G(s)}{1+Ts} \to P(s)$) E' ASINTOTICAMENTE STABILE

DIAGRAMMI DI BODE:

$$M(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{Re^2\{F(j\omega)\} + Im^2\{F(j\omega)\}}$$

$$\varphi(\omega) = \angle F(j\omega) = arctg \frac{Im\{F(j\omega)\}}{Re\{F(j\omega)\}}$$

POICHÉ $F(s) = \dfrac{\sum_i a_i s^i}{\sum_j b_j s^j} = K' \dfrac{\Pi_i (s-z_i)}{\Pi_i (s-p_i)}$

DOVE NUM E DENOM HANNO LA FORMA:

$$= h' \prod_{i=1}^{n} (s-\lambda_i) \prod_{k=1}^{m} \left[s-(\alpha_k + j\omega_k)\right]\left[s-(\alpha_k - j\omega_k)\right]$$

ALLORA

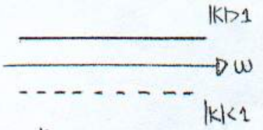
$$h' \prod_{i=1}^{n} (-\lambda_i) \prod_{i=1}^{n} (1+s\tau_i) \prod_{k=1}^{m} \omega_{kn}^2 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{s^2}{\omega_{kn}^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_{kn}} + 1\right)$$

DOVE $\tau_i = -\frac{1}{\lambda_i}$

$\omega_{kn}^2 = \alpha_k^2 + \omega_k^2$ PULSAZIONE DI RISONANZA

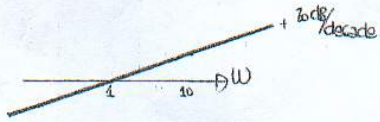
$\zeta = -\dfrac{\alpha_k}{\omega_{nk}}$ SMORZAMENTO

$K \rightarrow |K|_{dB}$:

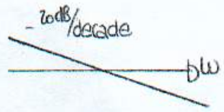


$$\angle K = \begin{cases} 0° & K>0 \\ -180° & K<0 \end{cases}$$

$j\omega \rightarrow |j\omega|_{dB}$:



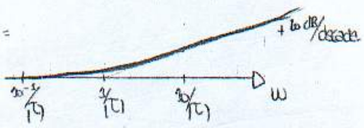
$\left|\frac{1}{j\omega}\right|_{dB}$ =



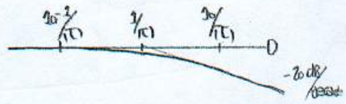
$\angle j\omega \simeq \pi/2$

$\angle \frac{1}{j\omega} \simeq -\pi/2$

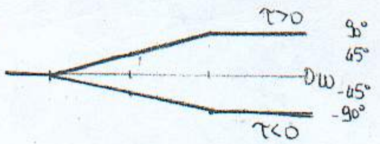
$1+j\omega\tau \rightarrow |1+j\omega\tau|_{dB}$ =



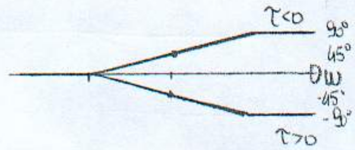
$\left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right|_{dB}$ =



$\angle 1+j\omega\tau$ =

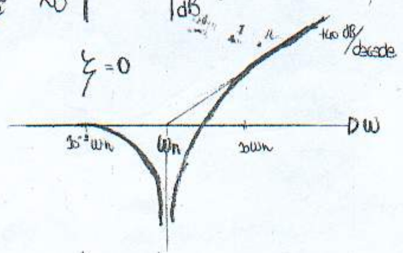


$\angle \frac{1}{1+j\omega\tau}$ =

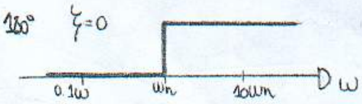


$1+\dfrac{2\zeta j\omega}{\omega_n} + \dfrac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \rightarrow |\quad|_{dB}$ =

$\zeta = 0$

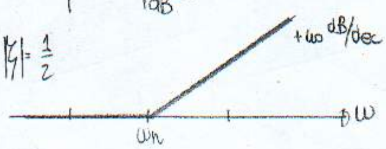


$\angle$ =



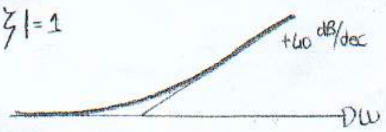
$|\quad|_{dB}$ =

$|\zeta| = \frac{1}{2}$



$0<\zeta<1$

$|\zeta| = 1$



$\zeta = 1$

• CRITERIO DI NYQUIST: IL NUMERO DI GIRI CHE COMPIE IL VETTORE $\overrightarrow{1+F(j\omega)}$ ATTORNO ALL'ORIGINE, PER $\omega \in (-\infty, +\infty)$ È UGUALE AL NUMERO DEI POLI A RE>0 DEL SISTEMA AD ANELLO CHIUSO MENO IL NUMERO DEI POLI A RE>0 DEL SISTEMA AD ANELLO APERTO.

$$\overset{\curvearrowleft}{N}^{\circ}_{\overrightarrow{1+F(j\omega)}} = n^+_{ch} - n^+_{ap}$$

$\Rightarrow$ C.N.S. PER LA STABILITÀ ASINTOTICA DEL SISTEMA AD ANELLO CHIUSO

$$\overset{\curvearrowright}{N}^{\circ}_{\overrightarrow{1+F(j\omega)}} = -n^+_{ap} \Rightarrow \overset{\curvearrowright}{N}^{-1}_{\overrightarrow{F(j\omega)}} = -n^+_{ap} \Rightarrow \overset{\curvearrowleft}{N}^{-1}_{\overrightarrow{F(j\omega)}} = n^+_{ap}$$

OGNI VOLTA CHE $F(s)$ HA POLI A PARTE RE NULLA SI DEVE TRACCIARE MEZZO GIRO IN SENSO ORARIO.

• RISPOSTA A REGIME PERMANENTE: LA RISPOSTA A REGIME PERMANENTE $\tilde{y}(t)$ ALL'INGRESSO $u(t)$ ESISTE $\Leftrightarrow$ ESISTE FINITO ED INDIPENDENTE DA $x(t_0)$ IL LIMITE

$$\tilde{y}(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \left[Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \right]$$

SISTEMA STABILE INTERNAMENTE $\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} Ce^{At} = 0 \Leftrightarrow$

- AD INGRESSO POLINOMIALE: $\tilde{u}(t) = \frac{t^k}{k!} \Rightarrow \tilde{y}(t) = c_0 \frac{t^k}{k!} + c_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + c_{k-1}t + c_k$

DOVE $c_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W(s)}{ds^i} \right|_{s=0}$

SI COSTRUISCE LA TABELLA PER SISTEMI $u(t) \to \boxed{W(s)} \to y(t)$

$W(s)$ HA IN $s=0$ UNO ZERO DI MOLTEPLICITÀ \ $u(t)$	1	t	$t^2/2$
0	$W(0) \neq 0$	$W(0)t + \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0}$	$W(0)\frac{t^2}{2} + \left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
1	0	$\left.\frac{W(s)}{s}\right\|_{s=0} = \left.\frac{dW(s)}{ds}\right\|_{s=0} \neq 0$	$\left.\frac{dW}{ds}\right\|_{s=0} t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{ds^2}\right\|_{s=0}$
2	0	0	$\left.\frac{W(s)}{s^2}\right\|_{s=0} = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W(s)}{ds^2}\right\|_{s=0} \neq 0$

SISTEMA DI CONTROLLO DI TIPO K $\Leftrightarrow$ L'ERRORE A REGIME PERMANENTE ALL'INGRESSO $\tilde{u}(t) = \frac{t^k}{k!}$ È UNA COSTANTE DIVERSA DA ZERO

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO $W_e(s)$ DEVE AVERE IN $s=0$ UNO ZERO DI MOLTEPLICITÀ K $\Leftarrow$ dimostr.

SVILUPPANDO $W_e(s)$ IN SERIE DI TAYLOR

$W_e(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ie} s^i$ DOVE $c_{ie} = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W_e(s)}{ds^i} \right|_{s=0}$

ALL'INGRESSO $\tilde{u}(t) = \frac{t^k}{k!}$ CORRISPONDE

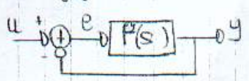
$$\tilde{e}(t) = c_{0e} \frac{t^k}{k!} + c_{1e} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + c_{k-1_e}t + c_{k_e}$$

QUINDI L'ERRORE A REGIME PERMANENTE È UNA COSTANTE QUANDO

$$\begin{cases} c_{0e} = c_{1e} = \ldots = c_{k-1_e} = 0 \\ c_{ke} \neq 0 \end{cases}$$

ALLORA $W_e(s) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ie} s^i = s^k(\ldots)$

QUINDI PER UN SISTEMA DEL TIPO



SI HA

$$W_e(s) = \frac{1}{1+F(s)} = \frac{D_F(s)}{N_F(s)+D_F(s)}$$

SISTEMA DI TIPO "0" $\to e_0 = W_e(0) = \frac{1}{1+\frac{N_F(0)}{D_F(0)}} = \frac{1}{1+K_F} \to$ GUADAGNO DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

SISTEMA DI TIPO "1" $\rightarrow$ $e_1 = \frac{W_e(s)}{s}\Big|_{s=0} = \frac{D_F(s)}{s(N_F(s)+D_F(s))}\Big|_{s=0}$

POICHÉ È DI TIPO "1" ALLORA LA $W_e(s)$ HA UNO ZERO PER $s=0$, QUINDI

$D_F(s) = s D'_F(s)$

SOSTITUENDO SI HA

$$e_1 = \frac{D'_F(s)\cancel{s}}{\cancel{s}(N_F(s)+D'_F(s)\cdot s)}\Big|_{s=0} = \frac{D'_F(s)}{N_F(s)+D'_F(s)\,s}\Big|_{s=0} =$$

$$= \frac{1}{\frac{N_F(s)}{D'_F(s)}+s}\Big|_{s=0} = \frac{1}{K_F}$$

SI HA QUINDI

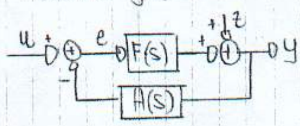
$$\begin{cases} e_0 = \frac{1}{1+K_F} & K=0 \\ e_i = \frac{1}{K_F} & K>0 \end{cases}$$

- A DISTURBI COSTANTI : SISTEMA ASTATICO RISPETTO AL DISTURBO $\Longleftrightarrow$ PER UN DISTURBO $\tilde{z}(t) = cost.$ L'USCITA È $\tilde{y}(t)=0$

QUESTA DEFINIZIONE PERMETTE DI CLASSIFICARE I SISTEMI A SECONDA CHE ESSI ABBIANO O MENO LA PROPRIETÀ DI ANNULLARE, PER $t \rightarrow \infty$, L'EFFETTO PRODOTTO SULL'EVOLUZIONE DELLA GRANDEZZA CONTROLLATA DI UN DISTURBO COSTANTE.

SISTEMA STATICO RISPETTO AL DISTURBO $\Longleftrightarrow$ PER UN DISTURBO $\tilde{z}(t) = cost.$ L'USCITA È $\tilde{y}(t) \neq 0$

RELATIVAMENTE ALLO SCHEMA



$W_z = \frac{y}{z}$; $y = z + Fe = z - FHy$

$\frac{y}{z} = \frac{1}{1+FH} = \frac{D_F D_H}{N_F N_H + D_F D_H} = W_z \Longrightarrow$ ALLORA $\tilde{y}(t)$ È NULLA QUANDO $\tilde{z}(t) = cost$ SE W_z HA ALMENO UNO ZERO PER $s=0$

COSÌ È ASTATICO QUANDO W_z HA ALMENO UNO ZERO IN ZERO.

- A INGRESSI O DISTURBI SINUSOIDALI : $\tilde{u}(t) = \sin\tilde{\omega}t$

$\tilde{y}(t) = |W(j\tilde{\omega})| \sin(\tilde{\omega}t + \angle W(j\tilde{\omega}))$

$\tilde{u}(t) = \cos\tilde{\omega}t$

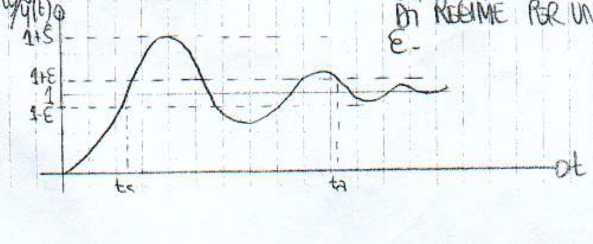
$\tilde{y}(t) = |W(j\tilde{\omega})| \cos(\tilde{\omega}t + \angle W(j\tilde{\omega}))$

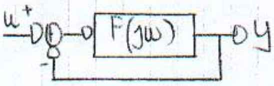
- RISPOSTA TRANSITORIA : - A INGRESSO A GRADINO :

- TEMPO DI SALITA (t_s) : TEMPO NECESSARIO PERCHÉ LA RISPOSTA RAGGIUNGA, PARTENDO DAL VALORE INIZIALE, PER LA PRIMA VOLTA IL VALORE DI REGIME

- SOVRAELONGAZIONE ($\hat{S}$) : RAPPORTO TRA IL MASSIMO SCOSTAMENTO (IN ECCESSO) DELLA RISPOSTA DAL VALORE DI REGIME E IL VALORE DI REGIME STESSO

- TEMPO DI ASSESTAMENTO (t_a) : TEMPO NECESSARIO AFFINCHÉ LA RISPOSTA DIFFERISCA DEFINITIVAMENTE DAL VALORE DI REGIME PER UNA Q.TITÀ PREFISSATA ε.



- CARTA DI NICHOLS: PER SISTEMI DEL TIPO 

I DIAGRAMMI DI NICHOLS PERMETTONO DI TROVARE MODULO E FASE DI $W(j\omega)$, COSÌ AD ANELLO CHIUSO, PARTENDO DA MODULO E FASE DI $F(j\omega)$, COSÌ AD ANELLO APERTO.

a) SI TRACCIANO I DIAGRAMMI DI BODE DELLA $F(j\omega)$

b) SI COSTRUISCE IL DIAGRAMMA DI NICHOLS, UTILIZZANDO LE COORDINATE CARTESIANE TRACCIATE SULLA CARTA ~ ASCISSE: GRADI
ORDINATE: DECIBEL

c) SI LEGGONO I VALORI DEL MODULO E DELLA FASE DELLA FUNZIONE $W(j\omega)$ UTILIZZANDO ALLO SCOPO, COME SISTEMA DI COORDINATE CURVILINEE, I LUOGHI A MODULO COSTANTE E A FASE COSTANTE TRACCIATI SULLA CARTA DI NICHOLS.

$$W(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1+F(j\omega)} = \frac{|F(j\omega)|\, e^{j\angle F(j\omega)}}{1+|F(j\omega)|\, e^{j\angle F(j\omega)}}$$

SPECIFICHE PROGETTUALI:

$W(j\omega)$

- BANDA PASSANTE B_3: PULSAZIONE OLTRE LA QUALE IL MODULO DI $W(j\omega)$ RISULTA ATTENUATO DI UN FATTORE UGUALE O SUPERIORE A 0.707 RISPETTO AL VALORE PER $\omega=0$.

  FORMULA EMPIRICA:
  - $B_3 t_s \cong 3$
  - $\omega_t < B_3 < 2\omega_t$

  $$\frac{|W(jB_3)|}{|W(0)|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; |W(jB_3)|_{dB} - |W(0)|_{dB} = -3dB$$

- MODULO ALLA RISONANZA M_R: RAPPORTO TRA IL MASSIMO VALORE DEL MODULO DELLA $W(j\omega)$ E IL VALORE PER $\omega=0$.

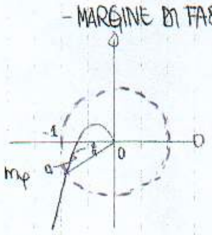
  FORMULA EMPIRICA:
  - $1+\hat{S} \cong 0.85 M_R$

  $1.3 < M_R < 1.5$

  $$\frac{\max_{\omega} |W(j\omega)|}{|W(0)|} \; ; \; \max_{\omega} |W(j\omega)|_{dB} - |W(0)|_{dB}$$

$F(j\omega)$

- MARGINE DI FASE: DIFFERENZA TRA IL VALORE DELLA FASE PER ω_t ED IL VALORE $-180°$

  $$m_\varphi = \angle F(j\omega_t) + 180°$$

  (TANTO PIÙ È GRANDE IL MARGINE DI FASE E TANTO PIÙ IL SISTEMA È CAPACE DI RESTARE STABILE IN PRESENZA DI VARIAZIONI DEI PARAMETRI).

- MARGINE DI GUADAGNO: OPPOSTO DEL VALORE DEL MODULO DELLA $F(j\omega)$ PER QUELLA ω t.c. $\angle F(j\omega) = -180°$

  $$m_g = -|F(j\omega)|^{dB}_{\omega \text{ t.c. } \angle F(j\omega) = -180°}$$

QUESTE SPECIFICHE NEL DIAGRAMMA DI NICHOLS:

- m_φ ~ L'AMPIEZZA IN GRADI DEL SEGMENTO COMPRESO TRA L'ORIGINE E IL PUNTO DI INTERSEZIONE TRA L'ASSE DELLE ASCISSE E IL DIAGRAMMA DELLA $F(j\omega)$.
- m_g ~ L'AMPIEZZA IN dB DEL SEGMENTO COMPRESO TRA IL PUNTO DI COORDINATE $(-180°, 0dB)$ E IL PUNTO IN CUI LA CURVA ATTRAVERSA L'ASSE VERTICALE DI ASCISSA $-180°$.
- B_3 ~ PULSAZIONE IN CORRISPONDENZA ALLA QUALE IL DIAGRAMMA DI NICHOLS INTERSECA LA CURVA A $-3+20\log|W(0)|$ DECIBEL.
- M_R ~ $20\log M_R$ = MASSIMO TRA I VALORI ASSOCIATI ALLE CURVE A MODULO COSTANTE TOCCATE DAL DIAGRAMMA DI NICHOLS $-20\log|W(0)|$

- FUNZIONI COMPENSATRICI ELEMENTARI: NELLA SINTESI DI UN SISTEMA A CONTROREAZIONE, UNA VOLTA CHE SIANO STATE DEFINITE LE CARATTERISTICHE DELLA RISPOSTA A REGIME PERMANENTE RISULTANO UNIVOCAMENTE DETERMINATE SIA IL NUMERO DI POLI NEL PUNTO $S=0$ SIA IL VALORE DEL COEFF. DI GUADAGNO DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL RAMO DIRETTO (K_G)

QUINDI $G(s) = R(s)\dfrac{K_G}{s^r}$ ~ K_G COEFF. DI GUADAGNO; s^r ~ r POLI NELL'ORIGINE

DOVE $R(s)$ È UNA FUNZIONE PRIVA DI POLI NELL'ORIGINE E A GUADAGNO UNITARIO.

QUINDI SI DEVE TROVARE UNA $R(s)$ t.c.

$F(s) = R(s)\,\frac{K_G}{s^r}\,P(s)$ ⇝ ABBIA LE CARATTERISTICHE DESIDERATE.

SI CONSIDERA QUINDI LA $\hat{F}(s) = \frac{F(s)}{R(s)}$ E TRACCIANDO BODE SI CONFRONTANO $\hat{m}_\varphi$ E $\hat{\omega}_t$ CON QUELLI DESIDERATI, PER STABILIRE SE AMMETTE UNA SOLUZIONE BANALE ($R(s)=1$).

$R(j\omega)$ ⇝ MODIFICA O IL MODULO E/O LA FASE DELLA $F(j\omega)$ LASCIANDO INALTERATO IL COMPORTAMENTO ASINTOTICO PER $\omega = 0$.

- MODULO MODIFICATO t.c. $|R(j\omega)\hat{F}(j\omega)|_{dB} = 0$ PER $\omega \cong \omega_t$ DESIDERATO
- FASE MODIFICATA t.c. $\underline{/R(j\omega_t)\hat{F}(j\omega_t)} + 180° \cong m_\varphi$ DESIDERATO

SINTESI PER TENTATIVI BASATI SULLA RISPOSTA IN FREQUENZA

- FUNZIONE ANTICIPATRICE:

$$R_a(s) = \frac{1+\tau_a s}{1+\frac{\tau_a}{m_a}s} \qquad \tau_a > 0 \quad m_a > 1$$

ESALTA I MODULI E ANTICIPA LE FASI ⇒ AUMENTA B_3 E ω_t E m_φ

- FUNZIONE ATTENUATRICE:

$$R_i(s) = \frac{1+\frac{\tau_i}{m_i}s}{1+\tau_i s} \qquad \tau_i > 0 \quad m_i > 1$$

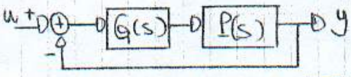
ATTENUANDO I MODULI STABILIZZA

ATTENUA I MODULI E RITARDA LE FASI ⇒ DIMINUISCE ω_t E B_3

QUINDI SI DEVONO SVOLGERE I PASSI:

a) SI ESAMINANO LE SPECIFICHE SU "REGIME PERMANENTE", DANDO PRECEDENZA A QUELLE CHE RICHIEDONO ERRORE O RISPOSTA NULLA
b) DIAGRAMMI DI BODE E NYQUIST DELLA $\hat{F}(s)$
   ↳ SE $\exists!\ \omega_t$ PER LA $\hat{F}(s)$, $\nexists$ POLI A $Re>0$ NELLA $F(s)$ ⇒ NON È NECESSARIO DISEGNARE NYQUIST
c) CONSIDERATO CHE MODIFICARE K_G NON RENDE IL SISTEMA ASINT. STABILE, SI INTRODUCONO LE FUNZIONI COMPENSATRICI ELEMENTARI
d) SI ESAMINANO LE SPECIFICHE SU $B_3, M_R, \dots$
e) DOPO AVER ANALIZZATO LE SINGOLE SPECIFICHE SI FA LA SINTESI
f) VERIFICA.

- METODI DIRETTI: PER SISTEMI DEL TIPO



DOVE $W(s) = \frac{G(s)P(s)}{1+G(s)P(s)} = \frac{F(s)}{1+F(s)}$

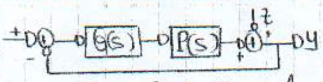
IL PRINCIPIO È DI IMPORRE AL SISTEMA UNA $W(s)$ BEN DETERMINATA. DUE FASI:

a) SULLA BASE DELLE PRESTAZIONI RICHIESTE + CARATTERISTICHE DEL PROCESSO ⇒ SI SCELGONO LE STRUTTURE ED I PARAMETRI DELLA $W(s)$ DA IMPORRE
b) SI CALCOLA $G(s)$

$$G(s) = \frac{F(s)}{P(s)} = \frac{1}{P(s)}\,\frac{W(s)}{1-W(s)}$$

SINTESI DIRETTA

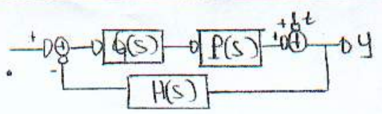
SINTESI A PIÙ OBIETTIVI: UN ALTRO ASPETTO IMPORTANTE È LA RISPOSTA AI DISTURBI ⇝ $W_z(s)$



$W_z(s) = \frac{1}{1+G(s)P(s)} = \frac{1}{1+F(s)}$

ALLORA IL PASSO b) È $G(s) = \frac{1}{P(s)}\,\frac{1-W_z(s)}{W_z(s)}$ ⇝ IN QUESTO CASO PERÒ NON È POSSIBILE IMPORRE INDIPENDENTEMENTE UNA $W(s)$ E UNA $W_z(s)$

LO SCHEMA DI CONTROLLO PRESENTA UN GRADO DI LIBERTÀ

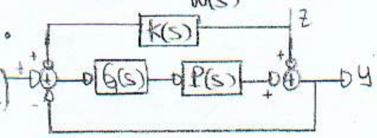


$$W(s)=\frac{G(s)P(s)}{1+G(s)P(s)H(s)}=\frac{G(s)P(s)}{1+F(s)}$$

$$W_z(s)=\frac{1}{1+G(s)P(s)H(s)}=\frac{1}{1+F(s)}$$

$$\begin{cases} G(s)=\dfrac{1}{P(s)}\,\dfrac{W(s)}{W_z(s)} \\[2mm] H(s)=\dfrac{1-W_z(s)}{W(s)} \end{cases}$$

(solo se z è misurabile!)



$$W_z(s)=\frac{1+K(s)G(s)P(s)}{1+G(s)P(s)}=\frac{1+K(s)G(s)P(s)}{1+F(s)}$$

$$K(s)=\frac{1}{G(s)P(s)}\left[\frac{W_z(s)}{1-W(s)}-1\right]$$

↳ in questo caso si può suddividere il problema in due sottoproblemi:
- tutte le specifiche che non riguardano il disturbo ⇒ $G(s)$
- che riguardano il disturbo ⇒ $K(s)$

Per quanto riguarda la realizzabilità, è noto che poiché tutti i processi fisici hanno caratteristiche passa basso allora

↳ affinché $G(j\omega)$ sia realizzabile è necessario che $d_G - m_G \geq 0$.

Poiché:

$$G(s)=\frac{1}{P(s)}\,\frac{W(s)}{1-W(s)}=\frac{D_P}{N_P}\,\frac{N_W}{D_W-N_W}$$

allora $d_G = m_P + d_W$, e affinché sia propria deve accadere che

$$m_P + d_W \geq d_P + m_W \iff m_P - d_P \geq m_W - d_W$$

Ci sono due strutture tipiche della $W(s)$:

- $$W(s)=\frac{1}{1+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove ζ è il coefficiente di smorzamento $0<\zeta<1$, ω_n è la pulsazione naturale $\omega_n>0$

$\underbrace{\zeta,\ \omega_n}_{\text{due gradi di libertà}}$

Se valgono allora il sistema è asintoticamente stabile:

$$s_{1,2}=\frac{-\zeta/\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2/\omega_n^2 - 1/\omega_n^2}}{1/\omega_n^2}=\frac{1/\omega_n\left(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right)}{1/\omega_n^2}=\omega_n\left[-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right] \Rightarrow Re<0$$

Si definisce costante di velocità:

$$K_v=\frac{\omega_n}{2\zeta}$$ ~ TAB PAG. 255

La $G(s)$ diventa:

$$G(s)=\frac{D_P}{N_P}\,\frac{1}{s\left(\frac{s}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)}$$

⇒ si può applicare la sintesi diretta anche nel caso in cui la $P(s)$ abbia un polo nell'origine.

- $$W(s)=\frac{K}{1+\tau s}$$

dove K è il guadagno, $-1/\tau$ è il polo, $\tau>0$ (per la stabilità)

La $G(s)$ diventa:

$$G(s)=\frac{D_P}{N_P}\,\frac{K}{1+\tau s-K}$$

⇝ se la $P(s)$ ha un polo nell'origine allora $K=1$ perché il sistema sia stabile asintoticamente.

• RAGGIUNGIBILITA' ~> FORMA CANONICA DI KALMAN PER LA RAGGIUNGIBILITA':

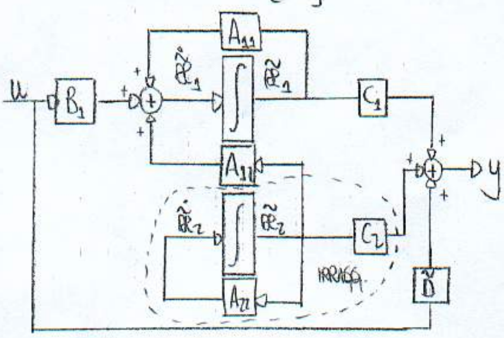
$$\tilde{A} = \begin{array}{cc} \scriptstyle m & \scriptstyle n-m \\ \end{array} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \; ; \quad \tilde{B} = \overset{ing}{\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{array}{l} \}m \\ \}n-m \end{array} \qquad m = \text{rgo} \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}_{n \cdot ing} \}n$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \; ; \quad \tilde{D} = D \quad \}usc \qquad n = \dim A$$

PONENDO $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}m \\ \}n-m \end{array}$ SI HA

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{RAGG.}{A_{11}} & A_{12} \\ 0 & \underset{IRRAGG.}{A_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2 + B_1 u \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= A_{22}\tilde{x}_2 \\ y &= C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2 + \tilde{D}u \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \tilde{D}$$



DALLA FORMULA $\tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}+\tilde{D} \Rightarrow$ SI HA:

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-A_{11} & -A_{12} \\ 0 & sI-A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{D} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [sI-A_{11}]^{-1} & [\dots] \\ 0 & [sI-A_{22}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{D} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [sI-A_{11}]^{-1}B_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{D} =$$

$$= C_1[sI-A_{11}]^{-1}B_1 + \tilde{D}$$

↳ LA PARTE RAGGIUNGIBILE E' LA PARTE CHE PUO' ESSERE INFLUENZATA DALL'INGRESSO.

$$T^{-1} \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}$$
$\underbrace{\quad}_{m}$ $\underbrace{\quad}_{n-m}$ → ARBITRARIO, t.c. T^{-1} SIA NON SINGOLARE

↳ BASE DELL'IMMAGINE DELLA $[B \; AB \dots A^{n-1}B]$ ~> m COLONNE INDIPENDENTI DELLA MATRICE O UNA QUALSIASI LORO COMBINAZIONE LINEARE.

• OSSERVABILITA' ~> FORMA CANONICA DI KALMAN PER L'OSSERVABILITA':

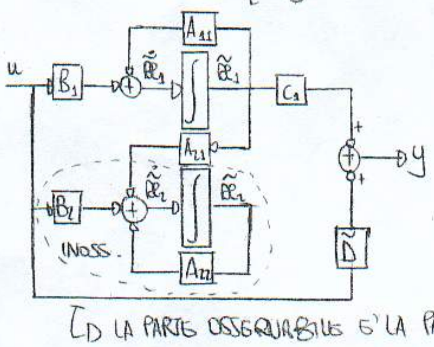
$$\tilde{A} = \begin{array}{cc} \scriptstyle p & \scriptstyle n-p \\ \end{array} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \overset{ing}{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}} \begin{array}{l} \}p \\ \}n-p \end{array} \qquad p = \text{rgo} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{D} = D \quad \}usc$$

SI HA QUINDI

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{OSS.}{A_{11}} & 0 \\ A_{21} & \underset{INOSS.}{A_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= A_{11}\tilde{x}_1 + \phantom{A_{22}\tilde{x}_2} + B_1 u \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= A_{21}\tilde{x}_1 + A_{22}\tilde{x}_2 + B_2 u \\ y &= C_1\tilde{x}_1 + \phantom{A_{22}\tilde{x}_2} + \tilde{D}u \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \tilde{D}u$$



DALLA FORMULA $\tilde{C}[sI-\tilde{A}]^{-1}\tilde{B}+\tilde{D}$ SI HA:

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-A_{11} & 0 \\ -A_{21} & sI-A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + \tilde{D} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [sI-A_{11}]^{-1} & 0 \\ [\dots] & [sI-A_{22}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + \tilde{D} =$$

$$= C_1[sI-A_{11}]^{-1}B_1 + \tilde{D}$$

↳ LA PARTE OSSERVABILE E' LA PARTE CHE INFLUENZA L'USCITA

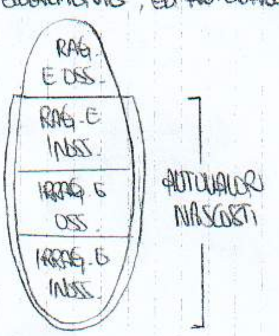
$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \quad & \Big\} & \quad \end{bmatrix}$$

$r \qquad n-r$

↳ BASE DEL NULLO DELLA $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$, CIOE' PER UNA MATRICE A: $A\,x = 0$

↳ ARBITRARIO, t.c. T^{-1} NON SIA SINGOLARE

QUINDI GLOBALMENTE, GLI AUTOVALORI DI UN SISTEMA SONO:



- TEST DI HAUTUS:
  - RAGGIUNGIBILITA'

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} A-\bar{\lambda}I & B \end{bmatrix} = \begin{cases} = n \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ E' RAGG.LE} \\ < n \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ E' IRRAGG.LE} \end{cases}$$

  - OSSERVABILITA'

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} A-\bar{\lambda}I \\ C \end{bmatrix} = \begin{cases} n \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ E' OSS.LE} \\ < n \Rightarrow \bar{\lambda} \text{ E' INOSS.LE} \end{cases}$$

- TERZA FORMA DI KALMAN:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A_{11}: RAG. E INOSS. — A_{22}: RAG. E OSS. — A_{33}: IRRAG. E INOSS. — A_{44}: IRRAGG. E OSS.

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$$

- SISTEMA RAGG.LE ⟺ TUTTI GLI n AUTOVALORI SONO RAGG.LI ⟺ $\mathrm{rg}\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$

- " " OSS.LE ⟺ TUTTI GLI n AUTOVALORI SONO OSS.LI ⟺ $\mathrm{rg}\begin{bmatrix} C \\ AC \\ \vdots \\ A^{n-1}C \end{bmatrix} = n$

- SISTEMA STABILIZZABILE CON REAZIONE DALLO STATO ⟺ TUTTI GLI AUTOVALORI IRRAGGIUNGIBILI SONO A Re<0

- SISTEMA RILEVABILE ⟺ TUTTI GLI AUTOVALORI INOSSERVABILI SONO A Re<0

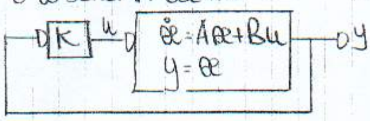
- SISTEMA STABILIZZABILE CON REAZIONE DALL'USCITA ⟺ TUTTI GLI AUTOVALORI NASCOSTI SONO A Re<0 ⟺ SISTEMA STABILIZZABILE CON REAZIONE DALLO STATO && SISTEMA RILEVABILE

- TEOREMA DELL'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI: NO! VEDI DOPO

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = x \end{cases}$$

⇒ L'USCITA COINCIDE CON LO STATO, QUINDI $C = I$, QUINDI $n = usc$

E LO SCHEMA DEL TIPO:



⇒ CONTROREAZIONE DALLO STATO.

D=0 PERCHE' MOLTO SPESSO NON CI SONO LEGAMI TRA GRANDEZZE CONTROLLATE E CONTROLLANTI.

POICHE' NON COINVOLGE LE CARATTERISTICHE DI INGRESSO-USCITA E DISTURBO-USCITA

$z(t) = u(t) = 0$

DERIVANDO LA PRIMA: $\dot{\tilde{x}}_1 = g\dot{x} = gAx + \cancel{gB}u = \tilde{x}_2$

DERIVANDO LA SECONDA: $\dot{\tilde{x}}_2 = gA\dot{x} = gA^2x + \cancel{gAB}u = \tilde{x}_3$

$\vdots$

LA n-1-esima: $\dot{\tilde{x}}_{n-1} = gA^{n-2}\dot{x} = gA^{n-1}x + \cancel{gA^{n-2}Bu} = \tilde{x}_n$

DERIVANDO L'ULTIMA: $\dot{\tilde{x}}_n = gA^{n-1}\dot{x} = gA^n x + gA^{n-1}Bu = gA^n x + u$

POICHE' $x = T^{-1}\tilde{x}$

$u = Kx = KT^{-1}\tilde{x}$ ALLORA

$$\dot{\tilde{x}}_n = gA^nT^{-1}\tilde{x} + KT^{-1}\tilde{x} = gA^nT^{-1}\tilde{x} + \left([a_0 \dots a_{n-1}]\overbrace{\begin{bmatrix} g \\ gA \\ \vdots \\ gA^{n-1}\end{bmatrix}}^{T} - gA^n\right)T^{-1}\tilde{x} =$$

$$= [-a_0 \dots -a_{n-1}]\tilde{x}$$

ALLORA $\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K})\tilde{x}$

$$\hookrightarrow \tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

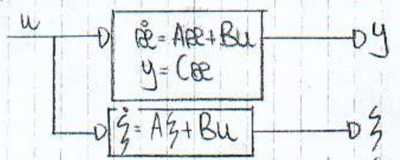
**

- CONTROLLORE STATICO $\Leftrightarrow$ A DIMENSIONE ZERO
- CONTROLLORE DINAMICO $\Leftrightarrow$ ALMENO DI DIMENSIONE 1
- SISTEMA A FASE MINIMA $\Leftrightarrow$ SISTEMA IL CUI GLI ZERI SONO A $Re<0$.

- OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO:

IN GENERALE IN UN SISTEMA INGRESSO-STATO-USCITA LO STATO NON E' MISURABILE.

a)



L'OSSERVATORE ASINTOTICO CERCA IL DISPOSITIVO CHE SFRUTTANDO u E y CERCA DI RICOSTRUIRE LO STATO x PER $t \to \infty$.

$\hookrightarrow$ E' LA STIMA DELLO STATO

SI DEFINISCE ERRORE

$e = x - \xi \Rightarrow$ LA CUI DERIVATA E'

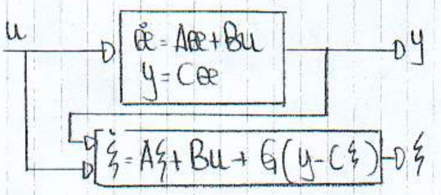
$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\xi} = Ax + \cancel{Bu} - A\xi - \cancel{Bu} = A(x - \xi) = Ae \rightsquigarrow$ LA SOLUZIONE E':

$$e(t) = e^{A(t-t_0)}\, e(t_0)$$

SE A HA GLI AUTOVALORI A $Re<0$ ALLORA $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$.

PROBLEMI:
- DEVE RISULTARE $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$
- NON SI PUO' SCEGLIERE LA VELOCITA' DI CONVERGENZA A ZERO DELL'ERRORE $e(t)$

b)



SI AGGIUNGE UN TERMINE PROPORZIONALE ALLA DIFFERENZA TRA L'USCITA E L'USCITA SE LO STATO FOSSE ξ.

$e = x - \xi$

$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\xi} = Ax + \cancel{Bu} - A\xi - \cancel{Bu} - G(y - C\xi) = Ax - A\xi - GCx + GC\xi =$

$= (A - GC)x - (A - GC)\xi = (A - \underbrace{G}_{n\times usc}\underbrace{C}_{usc\times n})_{n\times n}\, e \rightsquigarrow$ LA SOLUZIONE E':

$$e(t) = e^{(A-GC)(t-t_0)}\, e(t_0)$$

VANTAGGIO:
- SI PUO' SCEGLIERE G t.c. RISOLVE I PROBLEMI

b1) SOTTO QUALI CONDIZIONI E' POSSIBILE SCEGLIERE G t.c.

$|\lambda I - (A - GC)| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{arb-i})$ CON $Re\{\lambda_{arb-i}\} < 0 \ \forall i$?

PARTENDO DAL TEO DELL'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI:

(A,B) RAGG.LE $\Leftrightarrow \exists K$ t.c. $|\lambda I - (A+BK)| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{arb-i})$

SI HA INOLTRE PER LE PROPRIETA' DELLE MATRICI:

$\sigma(A-GC) = \sigma(A-GC)^T = \sigma(A^T + C^T(-G)^T)$

ALLORA IN BASE AL TEO SI HA

(A^T, C^T) RAGG.LE $\Leftrightarrow \exists (-G)^T$ t.c. $|\lambda I - (A^T + C^T(-G^T))| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{arb-i})$

POICHE $\det X = \det X^T$ ALLORA

" " " $\Leftrightarrow \exists G$ t.c. $|\lambda I - (A+GC)| = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{arb-i})$

(A^T, C^T) RAGG.LE $\Leftrightarrow$ rgo $[C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T] = n$

$\Updownarrow$ POICHE rgo X = rgo X^T

rgo $[C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]^T = n$

$\Updownarrow$

$$\text{rgo} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \Leftrightarrow (A,C) \text{ E' OSS.LE}$$

b2) SOTTO QUALI CONDIZIONI E' POSSIBILE SCEGLIERE G t.c.

$\sigma(A-GC) \subset \mathbb{C}^-$?

CONSIDERANDO IL PROCESSO IN FORMA DI KALMAN PER L'OSS.LITA':

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = TAT^{-1} \qquad \rho = \text{rgo} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} < n$$

$$\tilde{C} = [C_1 \ \ 0] = CT^{-1}$$

ALLORA

$$\tilde{A} - G\tilde{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} [C_1 \ 0] = \begin{bmatrix} A_{11} - G_1 C_1 & 0 \\ A_{21} - G_2 C_1 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$e(t) = e^{(\tilde{A} - G\tilde{C})(t-t_0)} e(t_0) \Rightarrow$ DEVE ACCADERE CHE $\sigma(A_{11} - G_1 C_1) \subset \mathbb{C}^-$ && $\sigma(A_{22}) \subset \mathbb{C}^-$

POICHE' (A_{11}, C_1) E' OSS.LE SULLA PRIMA SI PUO' INTERVENIRE, MENTRE SULLA SECONDA NO $\Rightarrow$ LA CONDIZIONE E' CHE IL SISTEMA SIA RILEVABILE.

****

** $\Rightarrow$ PER LA TEORIA DELL'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI, SI HA CHE (A,B) RAGG.LE $\Leftrightarrow \exists K$ t.c. .....

IN CASO DI INGRESSO SINGOLO: • SE (A_c, B_c) SONO IN FORMA CANONICA RAGG.LE:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ALLORA $K = (a_0 - \alpha_0 \ \ a_1 - \alpha_1 \ \dots \ a_{n-1} - \alpha_{n-1})$

• ALTRI CASI: SI USA LA FORMULA DI ACKERMANN

$K = -g\, p^*(A)$ DOVE g E' L'ULTIMA RIGA DI R^{-1}

$p^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$

• FORMA CANONICA DI BRUNOWSKI:

PONENDO $K^0 = -qA^n$ E VERIFICATO CHE (A,B) È RAGG.LE PER UNA OPPORTUNA CONTROREAZIONE DALLO STATO ED UNA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE T SI OTTIENE

$$T(A+BK^0)T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = A_B \qquad TB = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B_B$$

DOVE (A_B, B_B) È LA FORMA CANONICA DI BRUNOWSKI

****

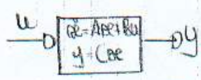
PER TROVARE G SI HA

$G = -p^*(A)\gamma$ ⇝ DOVE γ È L'ULTIMA COLONNA DELLA S^{-1} DOVE

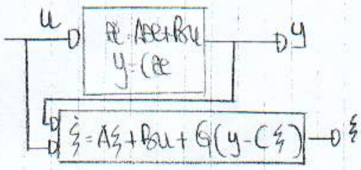
$$S = -\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

• PRINCIPIO DI SEPARAZIONE

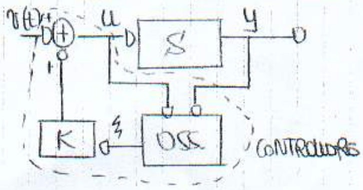
SI VUOLE ASSEGNARE UN INSIEME DI AUTOVALORI CON REAZIONE DALL'USCITA AL SISTEMA



VISTO CHE LO STATO NON È ACCESSIBILE PER MISURE, ALLORA SI AGGIUNGE UN OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO:



SI APPLICA INFINE UNA REAZIONE DALLO STATO, NON QUELLO REALE MA QUELLO STIMATO ξ:



LO STATO COMPLESSIVO È QUINDI $\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}n \end{matrix} \Big\} 2n$

⇝ ED È UNA STRUTTURA AD ANELLO CHIUSO.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\xi \quad ; \text{ VISTO CHE } u = K\xi \\ \dot{\xi} = A\xi + BK\xi + G(Cx - C\xi) \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \text{LA MATRICE DINAMICA È } A_C = \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A+BK-GC \end{bmatrix}$$

APPLICANDO UNA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE ATTRAVERSO LA MATRICE $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = T^{-1}$

$$\tilde{A}_C = TA_CT^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A+BK-GC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ A-GC & GC-A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-GC \end{bmatrix}$$ ⇝ GLI AUTOVALORI DEL SISTEMA COMPLESSIVO SI DIVIDONO IN DUE SOTTOINSIEMI:

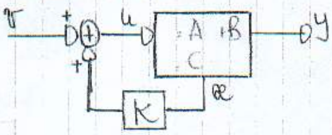
$A+BK$ ⇝ n AUTOV.
$A-GC$ ⇝ n AUTOV. $\Big\} 2n$

(A,B) RAGG.LE
(A,C) OSS.LE ⟹ TUTTI GLI AUTOVALORI POSSONO ESSERE SCELTI AD ARBITRIO

° TEOREMA DELL'ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

LO SCHEMA E' DEL TIPO:



QUINDI IL SISTEMA A CICLO CHIUSO E':

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+BK)\,x + Br \\ y = Cx \end{cases}$$

SI CERCA QUELLA K t.c. MODIFICHI GLI AUTOVALORI IN VALORI DETERMINATI.

° CASO PARTICOLARE: SE $A = A_c$ E $B = B_c$ OSSIA IN FORMA COMPAGNA, ALLORA

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A_c) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^{n-1}$$

SE GLI AUTOVALORI STABILITI SONO $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$, ALLORA IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI $A+BK$ E':

$$p^*(\lambda) = \det(\lambda I - (A+BK)) = p_0 + p_1\lambda + \ldots + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

QUINDI

$$A+BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} k_0 & \ldots & k_{n-1} \end{bmatrix}}_{K_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0+k_0 & -a_1+k_1 & -a_2+k_2 & \ldots & -a_{n-1}+k_{n-1} \end{bmatrix}$$

↳ ANCORA IN FORMA COMPAGNA.

QUINDI: $\begin{cases} -p_0 = -a_0 + k_0 \\ -p_1 = -a_1 + k_1 \\ \vdots \\ -p_{n-1} = -a_{n-1} + k_{n-1} \end{cases}$ ALLORA $\begin{cases} k_0 = a_0 - p_0 \\ k_1 = a_1 - p_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} = a_{n-1} - p_{n-1} \end{cases}$

° IN GENERALE: LE (A,B) NON SONO IN FORMA COMPAGNA, QUINDI SI CERCA DI PORTARLE IN QUESTA FORMA:

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = r + Kx \end{cases}$ PONENDO $\tilde{x} = Tx \Rightarrow x = T^{-1}\tilde{x}$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = TAT^{-1}\tilde{x} + TBu \\ u = r + KT^{-1}\tilde{x} \end{cases}$$

SI CERCA DUNQUE UN T t.c.

$$\begin{cases} TAT^{-1} = A_c \\ TB = B_c \end{cases}$$

ALLORA $K_c = KT^{-1}$
$K = K_c T$

IN GENERALE QUESTA T PUO' NON ESISTERE: T ESISTE $\Leftrightarrow$ IL SISTEMA E' RAGGIUNGIBILE.

$\Rightarrow$ SI CONSIDERA UN SISTEMA NON RAGGIUNGIBILE (T ESISTE

$$\text{rgo}\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = m < n$$

ALLORA ESISTE UNA FORMA DI KALMAN PER LA RAGGIUNGIBILITA' t.c.:

$$T^{-1}AT = \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \qquad TB = \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ALLORA

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1K_1 & A_{12} + B_1K_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

QUINDI SI RIESCE AD INTERVENIRE SOLO SUGLI AUTOVALORI DELLA PARTE RAGGIUNGIBILE; MENTRE GLI AUTOVALORI DOVUTI AD A_{22} RIMANGONO.

$\Leftarrow$ BISOGNA TROVARE T t.c. (SISTEMA È RAGGIUNGIBILE ALLORA $\exists\, T$)

$$TAT^{-1} = A_c$$
$$TB = B_c$$

SI CONSIDERA IL CASO PARTICOLARE $mg = 1$

POICHÈ IL SISTEMA È RAGGIUNGIBILE $\Longrightarrow$ $\text{rgo}\,[B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B] = n$

$\text{rgo}\ R = n$

QUINDI R È INVERTIBILE

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ -\,g\,- \end{bmatrix} \qquad R^{-1}[B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B] = I$$

ALLORA SI HA
$$\begin{cases} gB = 0 \\ gAB = 0 \\ \vdots \\ gA^{n-2}B = 0 \\ gA^{n-1}B = 1 \end{cases}$$

E SI CONSIDERA LA MATRICE
$$\underset{(n\times n)}{T} = \begin{bmatrix} g \\ gA \\ \vdots \\ gA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$TB = B_c \rightsquigarrow \begin{bmatrix} g \\ gA \\ \vdots \\ gA^{n-1} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} gB \\ gAB \\ \vdots \\ gA^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B_c$$

$$TAT^{-1} = A_c \rightsquigarrow TA = A_cT \rightsquigarrow \begin{bmatrix} g \\ gA \\ \vdots \\ gA^{n-1} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ gA \\ \vdots \\ gA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$gA = gA$$
$$gA^2 = gA^2$$
$$\vdots$$
$$gA^n = -a_0 g - a_1 gA - a_2 gA^2 - \dots - a_{n-1} gA^{n-1} =$$
$$= g(-a_0 I - a_1 A - a_2 A^2 - \dots - a_{n-1} A^{n-1})$$
$$= gA^n$$

$\rightsquigarrow$ PER IL TEO DI CALEY-HAMILTON:
- OGNI MATRICE QUADRATA ANNULLA IL SUO POLINOMIO CARATTERISTICO:

$\det(\lambda I - A) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$

ALLORA

$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$

$\Rightarrow A^n = -a_0 I - a_1 A - \dots - a_{n-1}A^{n-1}$

DUNQUE T SODDISFA LE DUE CONDIZIONI.

PER TROVARE K SI HA

$K = K_c T$

$$[a_0 - p_0\quad a_1 - p_1\ \dots\ a_{n-1} - p_{n-1}] \begin{bmatrix} g \\ gA \\ \vdots \\ gA^{n-1} \end{bmatrix} = K$$

$$\left([a_0\ a_1\ \dots\ a_{n-1}] - [p_0\ p_1\ \dots\ p_{n-1}]\right) \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = K$$

$$K = (a_0 g + a_1 gA + \dots + a_{n-1} gA^{n-1}) - (p_0 g + p_1 gA + \dots + p_{n-1} gA^{n-1}) =$$
$$= g(a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1}A^{n-1}) - g(p_0 I + p_1 A + \dots + p_{n-1}A^{n-1}) =$$
$$= -gA^n - g(p_0 I + p_1 A + \dots + p_{n-1}A^{n-1}) =$$
$$= -g(p_0 I + p_1 A + \dots + p_{n-1}A^{n-1} + A^n) = -g\,p^*(A)$$