Introduzione

martedì 4 marzo 2014 11.12

Professore: S. Tasso

Dispense: collegamento

Esame: Scritto (2 esercizi) + Orale (simulatore progetto)

Simulazione

Imitazione delle operazioni eseguite nel tempo da un sistema o processo reale.
Fornisce la risposta alla domanda “cosa accade se…”

Metodologie di valutazione delle prestazioni di sistemi:

- Misurazioni
- Modellistiche

Inadeguatezza della simulazione:

metodi matematici
sperimentazione diretta
costo
convalida (sia riferito alla implementazione del modello nel simulatore, sia a quella del modello)

tendenza ad estrapolare i risultati del modello oltre al suo campo di applicabilità

impossibile prendere appunti sulle slides XD => stampate e scritte a mano

Lezione 3

martedì 11 marzo 2014 11.10

Diapositive Parte I da pag. 85

- Simulatore A Processi
- Ripasso probabilità e Statistica
- Generazione di numeri casuali

Lezione 4

mercoledì 12 marzo 2014 09.42

Diapositive Parte I da pag. 110

Tabella riassuntiva dei valori dei percentili di accettazione del chi-quadro

CAMPO DI V	CLASSIFICAZIONE
$p_0 - p_1, p_{99} - p_{100}$	Rigetto
$p_1 - p_5, p_{95} - p_{99}$	Sospetto
$p_5 - p_{10}, p_{90} - p_{95}$	Quasi Sospetto
$p_{10} - p_{90}$	Accettato

ESERCIZIO SU CHI-quadro

Generata la sequenza numerica pseudo-casuale di 100 valori compresi tra 0 e 1 mediante il generatore congruente lineare $X_{I+1} = \frac{[(aX_I+c) mod\ m]}{m}$ $(c = 0, a = 75, m = 2^{31} - 1)$:

0.0001, 0.3154, 0.5561, 0.5865, 0.3277, 0.1896, 0.4704, 0.7886, 0.7930, 0.3469, 0.8350, 0.1942, 0.3097, 0.3457, 0.5346, 0.2970, 0.7115, 0.0770, 0.8342, 0.6684, 0.1749, 0.8677, 0.8898, 0.3044, 0.4617, 0.2693, 0.9196, 0.5392, 0.1600, 0.0119, 0.1032, 0.6220, 0.6245, 0.4746, 0.3608, 0.2823, 0.3264, 0.5641, 0.9104, 0.6534, 0.4704, 0.8255, 0.2266, 0.5336, 0.5152, 0.7269, 0.3163, 0.8471, 0.7271, 0.3641, 0.6649, 0.7773, 0.3777, 0.7491, 0.5926, 0.6651, 0.8652, 0.9766, 0.0921, 0.6056, 0.0465, 0.0452, 0.1629, 0.0071, 0.8414, 0.7708, 0.1382, 0.2975, 0.6445, 0.4098, 0.6825, 0.2954, 0.3622, 0.2541, 0.9946, 0.8857, 0.3319, 0.0632, 0.5102, 0.1327, 0.9111, 0.4598, 0.1208, 0.4151, 0.6932, 0.1539, 0.5008, 0.6151, 0.7020, 0.2782, 0.3641, 0.6649, 0.7773, 0.3777, 0.7491, 0.5926, 0.6651, 0.1629, 0.0927, 0.0954

convalidare con il test chi-quadro l'ipotesi di uniformità della sequenza generata.

Soluzione:

Per convalidare o meno l'ipotesi di Uniformità della distribuzione generata, devo calcolare $V = \sum_{s=1}^{k} \frac{(Ys - np_s)^2}{np_s}$ e confrontare il valore ottenuto con la tabella dei percentili della distribuzione chi-quadro. (sopra)

Tramite un foglio di calcolo (Bisogna riconvertire prima i 100 valori sopra in una tabella tramite della virgola e lo spazio con un carattere di tabulazione, e la sostituzione del punto con una virgola) creo alcune categorie per suddividere i dati, 5 nel mio caso.

Spiegazione dei simboli:

- k, è il numero di categorie.
- n è un campione di n numeri.
- Y_s individua il numero di valori denerati casualmente compresi nell'intervallo indicato da p_s.
- p_s è la probabilità di estrarre un valore nella categoria s.
- np_s è il numero di valori che dovrei avere in ogni intervallo se la distribuzione fosse uniforme.

NOTA: Il valore k, che rappresenta il numero di categorie, è arbitrario, ma affiche valgano i dati presenti nella tabella del CHI-quadro, deve valere la seguente relazione:

$$n > 5k \Rightarrow \frac{n}{k} > 5 \Rightarrow np_s > 5 \Rightarrow \forall k\ Ys_{(k)} > 5$$

Ovvero, nel nostro esercizio, che i dati in ogni categoria siano non meno di 6

- Conto quante occorrenze ci sono per ogni categoria, calcolando quindi Y_s.
- p_s e np_ss sono calcolati di conseguenza dalla loro definizione.
- Si calcola poi il numeratore $(Y_s - np_s)^2$ e il rapporto $\frac{(Y_s-np_s)^2}{np_s}$, per ottenere alla fine $V = \sum_{s=1}^{k} \frac{(Y_s-np_s)^2}{np_s}$
- Ottenuto il valore, si calcolano i gradi di libertà come k-1 e si cerca il valore V ottenuto in corrispondenza della riga pari al grado di libertà. Si incrocia la cella trovata con il percentile di riferimento per la colonna trovata e si confronta il risultato con la tabella riassuntiva dei valori dei percentili del chi-quadro.

Nel nostro caso si ottiene un V=3.3 con un grado di libertà pari a 4=5-1. Si ottiene quindi un valore di V compreso fra 1,064 e 7,78 che è quello per i percentili P_{10} e P_{90}. Quindi il generatore congruente lineare è accettato.

NOTA: nella tabella (vedi libro) le righe rappresentano i gradi di libertà. Le colonne invece i range dei percentili. Si cerca fra quali colonne è compreso il nostro valore V, nella riga corrispondente al grado di libertà.

Test
Chi-quadr...

Oltre al test del chi-quadro, esistono altri test legati alla bontà di un generatore, ovvero il TEST GAP, Il TEST SERIALE (coppie) e il TEST POKER.

Lezione 5

martedì 18 marzo 2014 11.00

Saltata,

- Metodo della TRASFORMAZIONE INVERSA

Lezione 6

mercoledì 19 marzo 2014 09.00

Diapositive Parte II capitolo 2

Lezione 7

mercoledì 26 marzo 2014 10.27

Diapositive Parte II capitolo 3

Lezione 8

mercoledì 26 marzo 2014 10.27

Diapositive Parte II capitolo 3

Esercizio Esame 25/11/2010

Testo

SOLUZIONE

NOTA: l'1 a pedice indica le misurazioni dei valori per la 1° parte dell'esercizio

1) M/M/1 visto che c'è un servizio, con distribuzione esponenziale e coda poissoniana (singola).
La notazione di Kemdall M/M/1 denota un sistema aperto formato da un singolo centro di servizio con distribuzione del tempo di inter arrivo esponenziale, di parametro lambda. La seconda M denota il tempo di servizio degli utenti indipendente e con identica distribuzione esponenziale di parametro μ . L'1 indica un singolo servente.

1b) Bisogna calcolare λ_1, μ_1, ρ_1

OSSERVAZIONE : bisogna fare attenzione all'unita di misura temporale. Deve essere omogenea all'interno del simulatore, o tutto in minuti o in ore... giorni....

$\lambda_1 = 10/60$ = 1/6. -> tempo di interarrivo

5 minuti è il tempo medio di servizio, indicabile con $E(t_s)$ = media del tempo di servizio

$$\mu_1 = \frac{1}{E(T_s)_1} = \frac{1}{5}$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6} < 1$$

=> OK, siamo in condizioni di stabilità, questo ci dice che possiamo applicare le formule.

2) $N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{\frac{5}{6}}{\left(1-\frac{5}{6}\right)} = 5$

3) $R_1 = \frac{N_1}{\lambda_1} = \frac{\frac{1}{\mu_1}}{1-\rho_1} = \frac{5}{\frac{1}{6}} = 30$ minuti

Parte 2 esercizio (vedi Lezione 12 per la soluzione)

OSSERVAZIONE: Dal testo si capisce che non rimane una distribuzione del tempo di servizio esponenziale (o meglio non si sa) => il modello di simulatore diviene M/**G**/1 e quindi per ora non sappiamo risolvere le domande da 4 a 8

Lezione 9

martedì 1 aprile 2014 11.44

Diapositive Parte II capitolo 3

- Modello M/M/∞
- Modello M/M/m

Esercizio Clinica Oculistica

La clinica oculistica dell'ospedale offre ogni mercoledì pomeriggio test gratuiti della vista. Ci sono 3 oculisti in contemporanea. Un test impiega in media 20 minuti ed il tempo reale è stato riscontrato distribuirsi in maniera esponenziale attorno a questa media.
I clienti arrivano in accordo ad un processo di Poisson con una media di 6 all'ora e i clienti sono serviti con una politica FIFO.
I dirigenti dell'ospedale sono interessati a conoscere:

1. Numero medio di persone in attesa (W=utenti in coda)
2. Tempo medio speso da un paziente nella clinica (R=tempo medio di risposta)
3. Percentuale media del tempo in cui i dottori non lavorano
4. La frazione di tempo nella quale un cliente che arriva trova almeno un dottore libero

Dati e considerazioni a priori

Il tempo di arrivo è modellabile mediante un processo di Poisson, i tempi di servizon seguono una distribuzione esponenziale e ho 3 serventi. Sistema **M/M/m**
PARAMETRI: λ, μ, ρ, m ; m=3
$\lambda = \frac{6}{60} = \frac{1}{60}$ tempo di interarrivo, 1 cliente ogni 10 minuti.
$\mu = \frac{1}{20}$ tempo di servizio, = 20 minuti.

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{\frac{6}{60}}{3 * \frac{1}{20}} = \frac{20 * 6}{3 * 60} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} < 1\ OK!$$

Svolgimento

1. $$W = \pi_m * \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \pi_3 * \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \pi_3 * \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4}{27} * 6 = \frac{2 * 3 * 4}{27} = \frac{8}{9}$$

   $$\pi_3 = \frac{(m\rho)^k}{k!}\pi_0 = \frac{\left(3 * \frac{2}{3}\right)^3}{3!}\pi_0 = \frac{8}{6}\pi_0 = \frac{4}{3}\pi_0 = \frac{4}{3} * \frac{1}{9} = \frac{4}{27}$$

   $$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{2}\frac{2^k}{k!} + 4\right]^{-1} = [5+4]^{-1} = \frac{1}{9}$$

2. $$R = \frac{1}{\mu} + \frac{\pi_m}{(m\mu(1-\rho)^2)} = 20 + \frac{\frac{4}{27}}{3 * \frac{1}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 20 + \frac{\frac{4}{27}}{\frac{3}{20} * \frac{1}{9}} = 20 + \frac{4}{27} * \frac{180}{3} = 20 + \frac{240}{27} = \frac{(540+240)}{27} = \frac{780}{27}$$

   $$= \frac{260}{9}\ in\ minuti$$

   oppure

   $$R = \frac{N}{\lambda} = \frac{m\rho + W}{\lambda} = \frac{2 + \frac{8}{9}}{\frac{1}{10}} = 10\left(2 + \frac{8}{9}\right) = 20 + \frac{80}{9} = \frac{180+80}{9} = 28{,}8\ min$$

   Riportando i calcoli in ore, ottengo $\frac{260}{9} * \frac{1}{60} = \frac{13}{27}h$.

3. Devo calcolare $1 - U$ dove U è il tempo di utilizzo. Ma

$U = 1 - \pi_0 = \rho$ quando la coda è congestionata, cioè l'indice di Utilizzo U si riduce a quelo di in un sistema M/M/1 dove $U = \rho$
$\Rightarrow 1 - U = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

4. Possiamo calcolarlo come:
$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 - prob(coda) = 1 - \left[\pi_0 * \frac{(m\rho)^m}{m!} * \frac{1}{1-\rho}\right] = 1 - \left[\frac{1}{9} * \frac{8}{6} * \frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right] = 1 - \left[\frac{1}{9} * \frac{4}{3} * 3\right] = 1 - \frac{4}{9}$
$= \frac{5}{9}$
NOTA: prob(coda) è la formula di pag. 50, cap. 3 - Balsamo

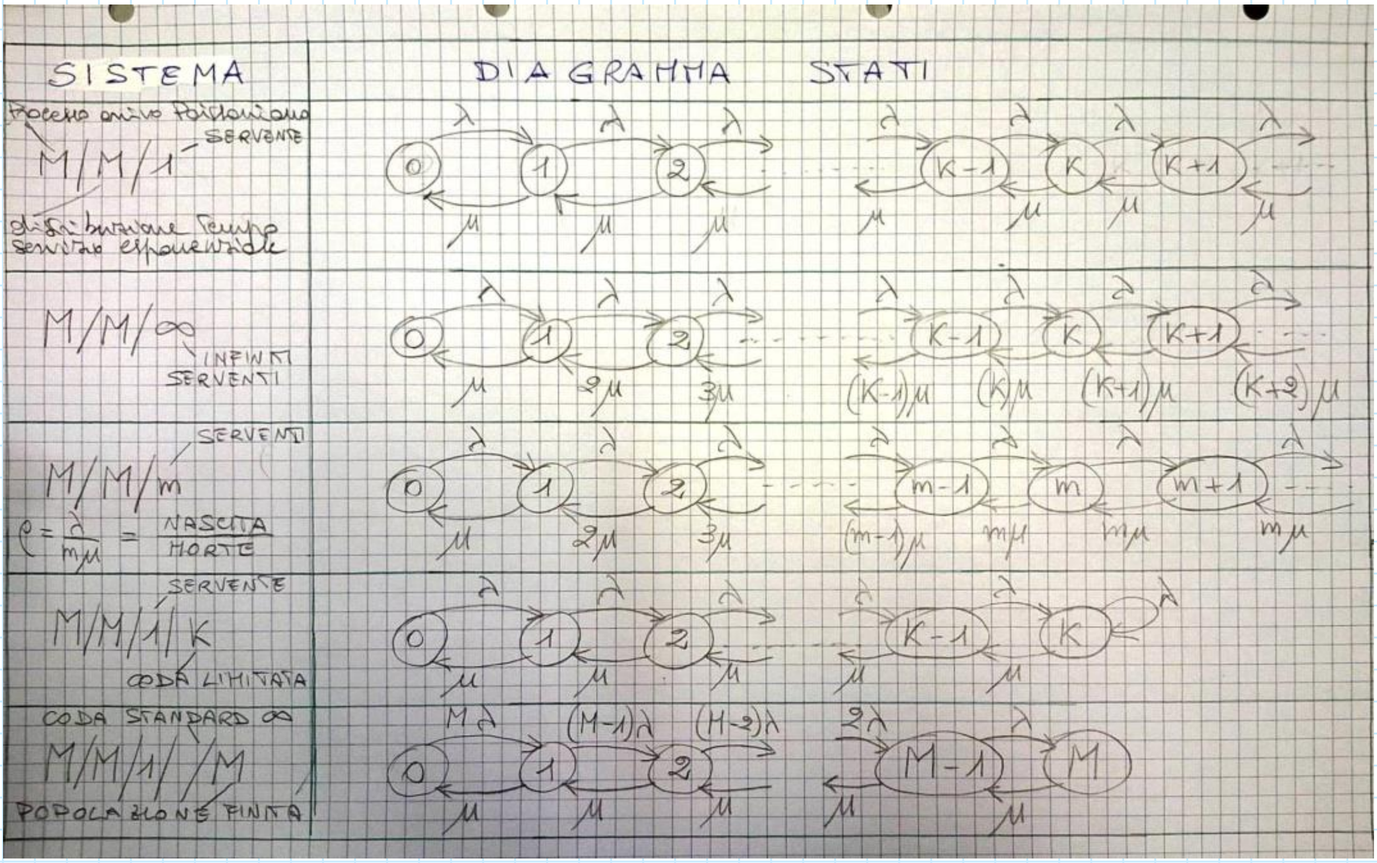
Lezione 10

mercoledì 2 aprile 2014 09.57

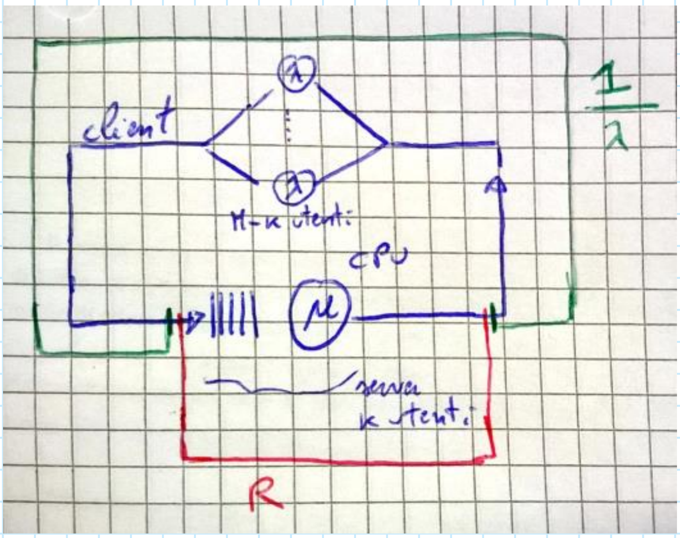
Diapositive Parte II capitolo 3

- Modello M/M/1/K (Coda finita)
- Modello M/M/1/M (Popolazione finita)

Schema riepilogativo degli stati



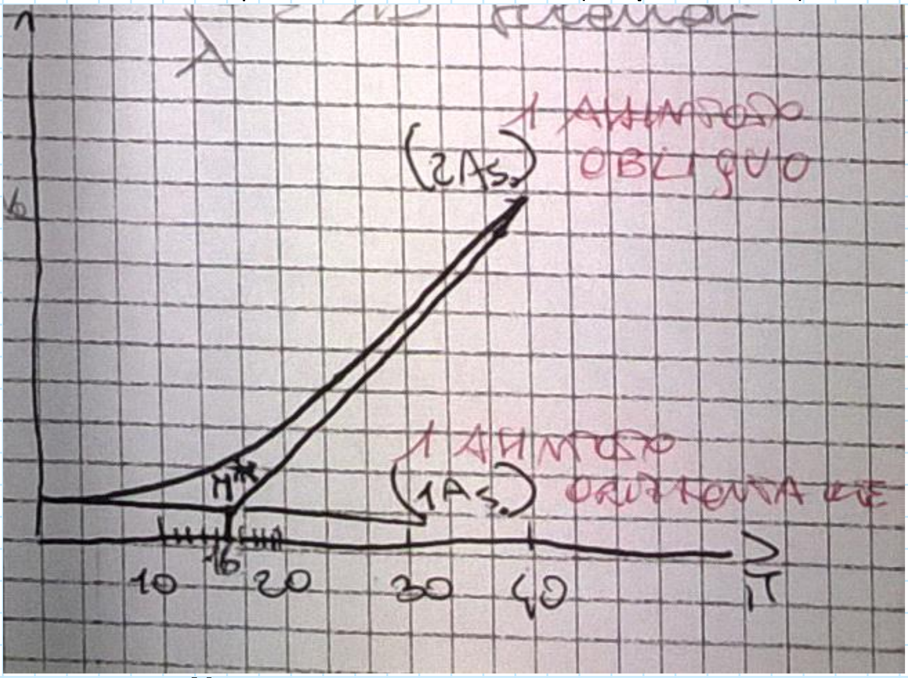
ESEMPIO su M/M/1/M



Consideriamo un sistema CPU con M jobs, in cui i tempi individuali di inter arrivo sono distribuiti uniformemente

con una media di $E(t_a) = \frac{1}{\lambda}$ secondi. Supponiamo che il tempo di servizio sia distribuito esponenzialmente con media $E(t_s) = \frac{1}{\mu}$ sec. La probabilità nello stato stazionario che ci siano k richieste alla CPU è $\pi_k = \pi_0 \rho^k * \frac{M!}{(M-k)!}$ $con\ 0 \leq k \leq M$. Mentre la probabilità che la CPU sia libera è esattamente π_0. L'utilizzazione della CPU in questo caso è $U = 1 - \pi_0$. La frequenza media di completamento delle richieste (Throughput) $X = \mu(1-\pi_0) = \mu * U = \frac{U}{E(t_s)}$. Il tempo medio di risposta è dato da R; Il tempo che ciascun utente impiega per la prossima richiesta è $R + \frac{1}{\lambda}$ secondi e la frequenza media di generazione di richieste è $\frac{M}{R+\frac{1}{\lambda}}$.
In stato stazionario, le frequenze di generazione e il tempo di completamento delle richieste devono essere uguali:
$X = \mu(1-\pi_0) = \frac{M}{R+\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow R = \frac{M}{\mu(1-\pi_0)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{M}{X} - \frac{1}{\lambda}$

Se $\frac{1}{\lambda} = 15\ sec$, ovvero ogni 15 secondi arriva n nuovo utente (**tempo di interarrivo**) e $\frac{1}{\mu} = 1\ sec$, è il tempo necessario alla CPU per soddisfare una richiesta (**tempo di servizio**) si ottiene il seguente grafico



$$R = 1sec * \frac{M}{(1-\pi_0)} - 15sec$$
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{t_s}{t_a} = \frac{1}{15}$$
=>

- M = 1 -> no coda, e il tempo medio di risposta è $R = E(t_s)$ (indicato nel grafico dall'asintoto orizzontale)
- $M \to \infty \Rightarrow < U_0 \to 1\ ed\ R = \frac{M}{X} - \frac{1}{\lambda} = \frac{M}{\frac{U_0}{E(t_s)}} - \frac{1}{\lambda} \Rightarrow M * E(t_s) - \frac{1}{\lambda}\ (asintoto\ light\ load)$
- Asintoto HeavyLoad
  $E(t_s) = M^* * E(t_s) - \frac{1}{\lambda}$,
  $$M^* = \frac{E(t_s) + \frac{1}{\lambda}}{E(t_s)} = \frac{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\mu}} = 1 + \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1+15}{1} = 16\ utenti$$

Lezione 11

martedì 8 aprile 2014 11.22

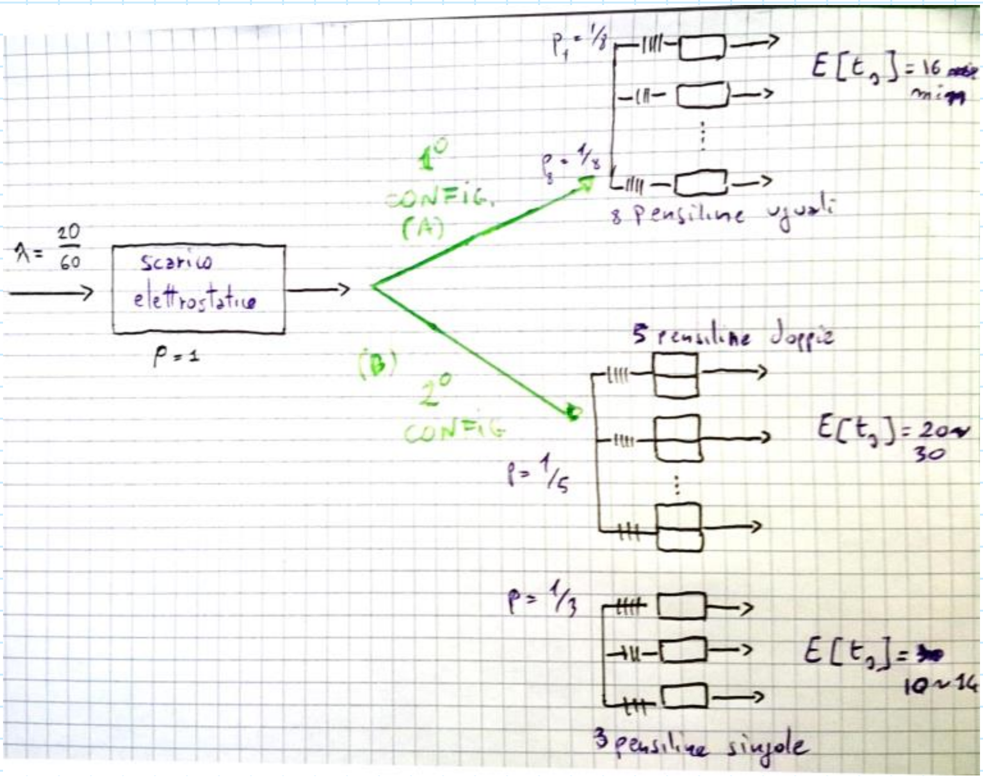
Esercizio B 13/06/2012

Quesito B. (punti 15)

Un centro per il rifornimento di autoarticolati (camion) che trasportano carburante dispone di 8 pensiline per il riempimento delle cisterne. Gli autoarticolati sono di due tipi: a singola cisterna o a doppia cisterna. Ogni autoarticolato, prima di procedere al riempimento, deve effettuare una procedura di scarico dell'elettricità statica. Questa viene effettuata connettendo a terra con opportuni conduttori i camion. Supponiamo che ci sia a disposizione un numero di conduttori sufficiente a far si che questa procedura, che ha una durata deterministica pari a tre minuti, sia effettuata dagli autoarticolati senza fare coda. Dopo aver effettuato lo scarico elettrostatico i camion, che arrivano al sistema secondo un processo poissoniano con valor medio pari a 20 camion/ora, e che sono a cisterna singola o doppia con uguale probabilità 1/2, indipendente dagli arrivi precedenti, si mettono in coda per il rifornimento andando nella coda a loro assegnata dal personale del centro. Si assuma che la pensilina a cui vengono indirizzati i camion sia decisa assegnando a ogni camion una pensilina con probabilità uniforme p e che non siano possibili cambiamenti di fila. Sono possibili due configurazioni: nella prima i camion sono indirizzati, con probabilità p = 1/8, indistintamente a una qualunque delle pensiline, e vengono riforniti con un tempo di servizio che risulta distribuito esponenzialmente con valor medio pari a 16 minuti. Nella seconda configurazione i camion a due cisterne vengono distribuiti con probabilità p = 1/5 sulle prime 5 pensiline, e il tempo di servizio risulta distribuito uniformemente tra 20 e 30 minuti, e i camion a una cisterna vengono distribuiti con probabilità p = 1/3 sulle restanti 3 pensiline, e il tempo di servizio risulta essere distribuito uniformemente tra 10 e 14 minuti. Si assuma l'intero sistema in condizioni stazionarie.

1) Quale è la distribuzione di probabilità dei tempi di interarrivo dei camion al sistema?
2) Quale è il modello adatto a descrivere la procedura di scarico elettrostatico? questo modello, a partire dai parametri dati, ha una distribuzione stazionaria?
3) Quale è il modello adatto a descrivere il servizio di riempimento delle pensiline nella prima configurazione? perché? con quali parametri?
4) Quale è il modello adatto a descrivere il servizio di riempimento delle pensiline nella seconda configurazione? perché? con quali parametri?
5) Si confrontino attraverso il tempo atteso in coda le prestazioni delle due configurazioni.
6) Quale è il numero totale di camion nel servizio (scarico elettrostatico + pensiline) nella prima configurazione?

Schema



Risposte

1. tempo di arrivo = 3 minuti, un camion ogni 3 minuti

   I camion arrivano secondo un processo Poissoniano, $\lambda = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ min^{-1}. (-1 perché il tempo di arrivo sta al denominatore)

   Per una distribuzione esponenziale (negativa), la densità di probabilità è f(t) = $f(t) = \lambda e^{-\lambda t_s} = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}t}$

   mentre la distribuzione di probabilità (cumulativa) è $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{t}{3}}$

? Perché se arrivano secondo un processo Poissoniano, si utilizza una esponenziale negativa ???

2. Il sistema ammette infiniti serventi. Gli arrivi sono poissoniani. Il tempo di servizio è deterministico pari a 3 minuti, quindi il modello che descrive il processo è M/D/∞. Ha una distribuzione stazionaria
   - $\lambda_a = \frac{20}{60} = \frac{1}{3},$
     $\mu_a = \frac{1}{3} = \frac{1}{E(t_s)} = \frac{1}{t_s} \textit{ in questo caso},$
     $\rho_a = \frac{\lambda}{\mu}$
     $= 1$ ovvero l'utilizzazione al 100%, appena un camion parte ce ne è uno che prende il suo posto. Tanti ne arrivano e tanti ne servo($\Rightarrow$ assumo il valore ∞ anche se nella realtà sono limitati)

   NOTA: La distribuzione che governa il numero di camion presenti allo scarico elettrostatico è $f(t) = 1e^{-1t} = e^{-t}$ Il che significa che non c'è mai coda. Processo Poissoniano che converge sempre

   NOTA: è un Delay

3. Nella prima configurazione ho 8 Pensiline, con probabilità di ognuna 1/8, e con tempo di servizio che risulta distribuito secondo un esponenziale con valore medio di 16 minuti => 8*(M/M/1) e non M/M/8.

   Spiegazione: il primo M lo metto perché il tempo di inter arrivo mi si conserva visto che la parte in cui si scarica l'elettricità statica del camion è solo un Delay.

   Il secondo M è perché viene detto nel testo

   Ho 8 code da un servente l'una e non un'unica coda con 8 serventi perché i camion non possono cambiare servente durante il processo. Vengono assegnati ad uno e questo rimane.
   - I parametri sono:
     $\lambda = \lambda_a * p = \frac{1}{8} * \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$ min^{-1}
     $E(t_s) = 16 \text{ min} \Rightarrow \mu = \frac{1}{16}$ min^{-1}
     $\rho = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{16}} = \frac{16}{24} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1 \; OK$

4. Nella seconda configurazione ho 8 pensiline con una distribuzione 8*(M/G/1) ma M e G avranno valori diversi nel caso in cui sono pensiline con doppia cisterna o meno.
   - I parametri per le pensiline con doppia cisterna (DC) sono:
     $\lambda_{DC} = \lambda_a * p(DC) * p(pensilina) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} * \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$ min^{-1} Bisogna considerare il tempo con cui arrivano i camion, quanti di essi sono a doppia cisterna (1/2) ed infine la probabilità di essere assegnato ad una delle 5 pensiline con doppia cisterna (1/5)
     $E_{DC}(t_s) = \frac{30+20}{2} = 25 \text{ min} \Rightarrow \mu = \frac{1}{25}$ min^{-1}
     $\rho_{DC} = E_{DC}(t_s) * \lambda_{DC} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} < 1$
     $\sigma^2_{DC} = \frac{(b-a)^2}{12}$ ← varianza della distribuzione uniforme con parametri a=20, b=30 => $\sigma^2_{DC} = \frac{(30-20)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$ min^{-2}
   - I parametri per le pensiline con singola cisterna (SC) sono:
     $\lambda_{SC} = \lambda_a * p(SC) * p(pensilina) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ min^{-1}
     $E_{SC}(t_s) = \frac{14+10}{2} = 12 \text{ min} \Rightarrow \mu = \frac{1}{12}$ min^{-1}

$\rho_{SC} = E_{SC}(t_s) * \lambda_{SC} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} < 1$

$\sigma_{SC}^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ ← varianza della distribuzione uniforme $= \frac{(14-10)^2}{12} = \frac{4^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ min^{-2}

5. In base al tempo di attesa in coda scelgo quale configurazione è migliore.
   - La prima Configurazione è quella di 8*(M/M/1)
     (**formula 3.11**)
     $$T_W = \frac{\rho}{\mu} * \frac{1}{1-\rho} = \frac{2}{3} * \frac{1}{\frac{1}{16}} * \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 32\ minuti$$
   - La seconda configurazione è quella di 8*(M/G/1)
     $$T_W = \frac{N-\rho}{\lambda}\ (dalla\ formula\ 3.21, pgg\ 55), W = N-\rho, W = \lambda T_W\ (LITTLE) \Rightarrow T_W = \frac{W}{\lambda} = \frac{N-\rho}{\lambda}$$
     $$N = \rho + \frac{\rho^2(1+C_B^2)}{2(1-\rho)}\left(dalla\ formula\ pag. 53\ (C_B)^2 = \left(\frac{\sigma}{E(T_s)}\right)^2 = (\sigma * \mu)^2\right), nota\ che\ \frac{1}{E(T_s)} = \mu \Rightarrow E(T_s) = 1/\mu$$
     $$T_W = \left\{\rho + \rho^2 * \frac{\left(1+\left(\frac{\sigma}{E(T_s)}\right)^2\right)}{2(1-\rho)} - \rho\right\} * \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$$

     Per le pensiline a 2 cisterne, allora
     $$T_{W_1} = \frac{\left(\frac{25}{3} * \frac{1}{900}\right)}{2 * \left(1-\frac{5}{6}\right) * \frac{1}{30}} = \frac{\frac{75+1}{363}}{8 * \frac{1}{30} *} = \frac{190}{3} \cong 63\ minuti$$
     Per le pensiline a 1 cisterna allora,
     $$T_{W_2} = \frac{109}{9} \cong 12\ minuti$$
     Con una configurazione media di 37,5 min

   OSSERVAZIONE: La configurazione migliore è la prima, poiché ha un tempo di attesa medio di 32 minuti mentre la seconda un tempo di attesa medio di 37,5. Si potrebbe però diminuire il tempo di attesa per le pensiline a 2 cisterne (che è enorme, ben 63 minuti circa), ad esempio aumentandole a 6 e riducendo da 3 a 2 quelle con cisterna singola.

6. Il numero totale dei camion nella prima configurazione è dato dalla formula di pag. 46, visto che ho 8 code M/M/1

   $$N_i = \frac{\rho_i}{(1-\rho_1)}\ \forall\, i\ 1 \le i \le 8$$
   Siccome ho 8 pensiline più lo scarico elettrostatico,
   $N = 8 * N_i + N_a$
   dove
   $N_a = \rho_a = 1$
   $$N_i = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2 \Rightarrow$$
   $N = 8 * 2 + 1 = 17$

Lezione 12

martedì 15 aprile 2014 11.32

Svolgimento Esercizio Esame 25/11/2010 2° parte (Testo)

4. **NOTA:** il due a pedice si riferisce a misurazioni per la 2° parte dell'esercizio.

   $\sigma_2 = 4 \text{ min}$
   $E(T_s)_2 = 5{,}5\ min$
   Il problema non mi dice direttamente un modello di arrivo dei clienti o di servizio, quindi è modellato da una distribuzione Generale **M/G/1**.
   I Parametri sono:

   $\lambda_2 = \frac{1}{6} = \lambda_1$ (non c'è nessun tipo di cambiamento nella distribuzione degli arrivi)

   $$\mu_2 = \frac{1}{5{,}5} = \frac{1}{\frac{11}{2}} = \frac{2}{11}$$

   $$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{11}} = \frac{11}{12} < 1$$

   => Stazionario.

   $\sigma_2 = 4\ min$

   $E(T_s)_2 = 5{,}5\ min$

5. Ci chiede N, ovvero il numero di utenti (lavori) nel sistema. È dato dalla formula di Khintchine-Pollaczek (3.21)

   $$N_2 = \rho + \frac{\rho^2(1 + C_B^2)}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{\rho^2(1 + (\sigma\mu)^2)}{2(1-\rho)} = \frac{11}{12} + \frac{\frac{121}{144}\left(1 + \frac{64}{121}\right)}{2\left(1 - \frac{11}{12}\right)} = \frac{11}{12} + \left[\frac{121}{144} * \left(\frac{\frac{185}{121}}{\frac{1}{6}}\right)\right]$$
   $$= \frac{11}{12} + \frac{185}{144} * 6 = \frac{22 + 185}{24} = \frac{207}{24} \cong 8{,}625$$

6. Si può applicare Little.

   $$R_2 = \frac{N_2}{\lambda} = \frac{\frac{207}{24}}{\frac{1}{6}} = \frac{207}{24} * 6 = \frac{207}{4} = 51{,}750\ min$$

   (invece dei 30 precedenti) è aumentato ma il numero medio di utenti è salito da 7 a 8.

7. È possibile ridurre la varianza in modo tale che l'incremento della media del tempo di servizio rimanga lo stesso, avendo però le stesse prestazioni del punto 2?
   $N = \rho + \frac{\rho^2(1+(\sigma\mu)^2)}{2(1-\rho)}$ dove l'incognita è $\sigma \Rightarrow \rho = \frac{11}{12}\ e\ \mu = \frac{2}{11}$

   $$5 = \frac{11}{12} + \frac{\left(\frac{11}{12}\right)^2\left(1 + \sigma^2 * \left(\frac{2}{11}\right)^2\right)}{2\left(1 - \frac{11}{12}\right)} = \frac{11}{12} + \left(\frac{11}{12}\right)^2 * \left(\frac{1 + \sigma^2\left(\frac{4}{11^2}\right)}{2\left(1 - \frac{11}{12}\right)}\right) = \frac{11}{12} + \frac{11^2}{12^2} * \frac{11^2 + 4\sigma^2}{11^2} * 6$$
   $$= \frac{22 + 121 + 4\sigma^2}{24} = \frac{143}{24} + \frac{\sigma^2}{6} \Rightarrow \frac{\sigma^2}{6} = 5 + \frac{143}{24} = \frac{120 - 143}{24} \Rightarrow \sigma^2 = -\frac{23}{24} * 6 = -\frac{23}{4}$$

   $$\sigma = \sqrt{-\frac{23}{4}}$$

   Quindi siccome non è possibile che un quadrato sia un numero negativo, allora significa che non è possibile ridurre la varianza in modo tale da ottenere l'incremento della media del tempo di servizio, mantenendo però le stesse prestazioni in termini di lavori presenti nel sistema calcolato al punto 2

METODO ALTERNATIVO (caso limite di riduzione): Nel caso migliore possibile, ovvero dove ho varianza 0 nel tempo di servizio (avrei una distribuzione deterministica di tipo M/**0**/1) , e inserendo questo valore nella stessa equazione ottengo

$$N = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{11}{12} + \frac{\left(\frac{11}{12}\right)^2}{2\left(\frac{1}{12}\right)} = 6$$

Che è comunque maggiore rispetto al valore ottenuto al punto 2.

8. Devo calcolare una nuova sigma (deviazione standard) mantenendo lo stesso numero di lavori del sistema calcolato al punto 2 (N=5) con il tempo medio di servizio di 5,2 invece che 5,5. Quindi cambiano i valori di mu e rho.

$$\mu_3 = \frac{1}{5{,}2} = \frac{10}{52} = \frac{5}{26}$$

$$\rho_3 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{26}} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15} < 1\ OK!$$

Ricorda che $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$N = 5 = \rho_3 + \frac{(\rho_3)^2(1+\sigma^2 * (\mu_3)^2)}{2(1-\rho_3)} \Rightarrow \frac{13}{15} + \left[\left(\frac{13}{15}\right)^2 \left(\frac{26^2 + 25\sigma^2}{26^2}\right) * \frac{1}{\frac{4}{15}}\right] = 5 \Rightarrow \frac{13 * 16 + 26^2 + 25\sigma^2}{15 * 16}$$

$$= 5 * 15 * 16 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1200 - 884}{25} = \frac{316}{25} \cong 12{,}64 \Rightarrow \sigma = \sqrt{12{,}64} < 4$$

Quindi ho un miglioramento rispetto alla 2° parte

⭐ Passaggi non propriamente corretti ??? . Il risultato è giusto

Lezione 13

mercoledì 16 aprile 2014 09.23

Esercizio B Esame 26/01/12

Quesito B. (punti 15)

Ai banchi del check-in di una compagnia aerea i viaggiatori arrivano con tempi di arrivo distribuiti esponenzialmente con valor medio pari a 1 minuto. I tempi di servizio degli operatori sono anch'essi distribuiti esponenzialmente, con valor medio pari a 2 minuti e 30 secondi. I viaggiatori appartengono a due classi: business e economy. Si assuma che con probabilità indipendente ogni viaggiatore sia di business class con probabilità 1/4 e di economy class con probabilità 3/4. I banchi del check-in possono essere configurati in due modi diversi: nella prima configurazione i viaggiatori di business class hanno un loro banco riservato, in cui vengono serviti con disciplina FIFO, e i viaggiatori di economy dispongono di due banchi, che lavorano sempre con disciplina FIFO un'unica coda. Nella seconda configurazione i tre banchi lavorano entrambi le classi, un sistema di transenne previene i cambiamenti di coda, e i viaggiatori di business class sono serviti in ciascuna coda con priorità senza interruzione del servizio. Si assuma che il flusso in arrivo si distribuisca con probabilità 1/3 su ciascuno dei banchi. Si assuma l'intero sistema in condizioni stazionarie.

1) Qual è la distribuzione di probabilità del numero di arrivi al minuto al sistema?
2) Quali sono i modelli adatti a descrivere i tre banchi nella prima configurazione? Con quali parametri?
3) Qual è il valore aspettato nella prima configurazione del tempo passato in coda per i clienti di business class? E per i clienti di economy class?
4) Quali sono i modelli adatti a descrivere i tre banchi nella seconda configurazione? Con quali parametri?
5) Qual è la probabilità nella seconda configurazione che ci sia almeno un banco con il servente inattivo?
6) Discutere comparativamente efficienza e affidabilità delle due configurazioni.

Svolgimento

Tutto l'esercizio può assumere due configurazioni, quindi ogni punto sarà sdoppiato per mostrare i calcoli relativi.

La notazione è la seguente:

- Pedice e1 per l'economy class della prima configurazione
- Pedice b1 per la business class della prima configurazione
- Pedice e2/b2 per la seconda configurazione

Parametri dell'esercizio:

$tempo\ medio\ di\ interarrivo\ E(t_a) = 1\ minuto$

$\lambda = \frac{1}{E(t_a)} = \frac{1}{1} = 1\ minuti^{-1}$

$E(t_s) = tempo\ di\ servizio \Rightarrow 2{,}30\ minuti = \frac{150}{60} = \frac{25}{10}$

$\mu = \frac{1}{E(t_s)} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

Classe business $\rightarrow p = \frac{1}{4}$

Classe economy $\rightarrow p = \frac{3}{4}$

=>

Nella 1° configurazione ho

Business Class modello M/M/1 (pag. 46)

Economy Class modello M/M/2 (pag. 49)

Nella 2° configurazione invece ho

3 code con priorità PASP (priorità astratta senza prelazione). $p = \frac{1}{3}$ distribuzione sui 3 banchi (pag. 56)

1) La formula di distribuzione esponenziale negativa

   $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{t}{1}}$

2) Quali sono i modelli adatti a descrivere i tre banchi nella prima configurazione? Con quali parametri?

a. Nella **prima configurazione**, per la **business class**, ho bisogno di un modello M/M/1 con

$$\lambda_{b1} = \lambda * p_{b1} = 1 * \frac{1}{4} = \frac{1}{4} minuti^{-1}$$

$$E(t_s) = \frac{5}{2} minuti \Rightarrow \mu_{b1} = \frac{2}{5} minuti^{-1}$$

$$\rho_{b1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4} * \frac{5}{2} = \frac{5}{8} < 1$$

b. Per **l'economy class** invece ho bisogno di un modello M/M/2, perché ho 2 serventi ma una unica coda (e non quindi un 2*M/M/1), di parametri

$$\lambda_{e1} = \lambda * p_{e1} = 1 * \frac{3}{4} = \frac{3}{4} minuti^{-1}$$

$$\mu_{e1} = \frac{2}{5} minuti^{-1}$$

$$\rho_{e1} = \frac{\lambda_{e1}}{m\mu_{e1}} = \frac{\frac{3}{4}}{2\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} * \frac{5}{4} = \frac{15}{16} < 1$$

3) Qual è il valore aspettato (atteso) nella prima configurazione del tempo passato in coda per i clienti di business class? E per i clienti di economy class?

a. La **business class** (M/M/1) ha

$$T_{Wb1} = \frac{\rho_{b1}}{\mu_{b1}} * \frac{1}{1-\rho_{b1}} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{5}} * \frac{1}{1-\frac{5}{8}} = \frac{5}{8} * \frac{5}{2} * \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{8} * \frac{5}{2} * 1 * \frac{8}{3} = \frac{25}{6} \cong 4\ minuti$$

b. L'**economy class** (M/M/2) invece

$$T_{We1} = \frac{\pi_m}{m\mu(1-\rho)^2} = \frac{\frac{225}{3968}}{2 * \frac{2}{5}\left(1-\frac{15}{16}\right)^2} = \frac{\frac{225}{3968}}{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^2} = \frac{\frac{225}{3968}}{\frac{4}{5} * \frac{1}{16} * \frac{1}{16}} = \frac{\frac{225}{3968}}{\frac{1}{320}} = \frac{225}{3968} * 320 = \frac{225}{62} * 5$$

$$= \frac{1125}{62} \cong 18{,}15\ minuti$$

c'è coda, quindi k>m

Il denominatore sopra è stato calcolato mediante: (le variabili sono quelle per e1)

$$\pi_k = \frac{m^m \rho^k}{m!} \pi_0 \Rightarrow$$

$$\pi_m = \frac{2^2\left(\frac{15}{16}\right)^2}{2!}\pi_0 = \frac{4 * \frac{15}{16} * \frac{15}{16}}{2}\pi_0 = \frac{4 * \frac{225}{256}}{2}\pi_0 = \frac{225}{64} * \frac{1}{2} * \pi_0 = \frac{225}{128}\pi_0 = \frac{225}{128} * \frac{1}{31} = \frac{225}{3968}$$

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} * \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{1} \frac{\left(2 * \frac{15}{16}\right)^k}{k!} + \frac{4\left(\frac{15}{16}\right)^2}{2!} * \frac{1}{1-\frac{15}{16}}\right]^{-1}$$

$$= \left[\left(\frac{\left(2 * \frac{15}{16}\right)^0}{0!} + \frac{\left(2 * \frac{15}{16}\right)^1}{1!}\right) + \frac{225}{128} * \frac{1}{\frac{1}{16}}\right]^{-1} = \left[\left(1 + 2 * \frac{15}{16}\right) + \frac{225}{128} * 1 * 16\right]^{-1}$$

$$= \left[\left(1 + \frac{15}{8}\right) + \frac{225}{8}\right]^{-1} = \left[\frac{23}{8} + \frac{225}{8}\right]^{-1} = \frac{8}{248} = \frac{1}{31}$$

4) Quali sono i modelli adatti a descrivere i tre banchi nella seconda configurazione? Con quali parametri?

$$\lambda_2 = \lambda * p_2 = 1 * \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E(t_s) = 2{,}3\ minuti = \frac{150}{60} = \frac{25}{10} \Rightarrow \mu_2 = \frac{2}{5}$$

$$\rho_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{3} * \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$

Per le code PASP valgono le formule a pag. 56 e poi quelle per le code M/M/1 (visto che sono code FIFO)

5) Qual è la probabilità nella seconda configurazione che ci sia almeno un banco con il servente inattivo?
Devo trovare il tempo di non utilizzo del sistema. Tramite la formula di pag. 48

$$P = 1 - prob\{numero - utenti \geq 3\} = 1 - (\rho_2)^3 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \cong 0.42$$

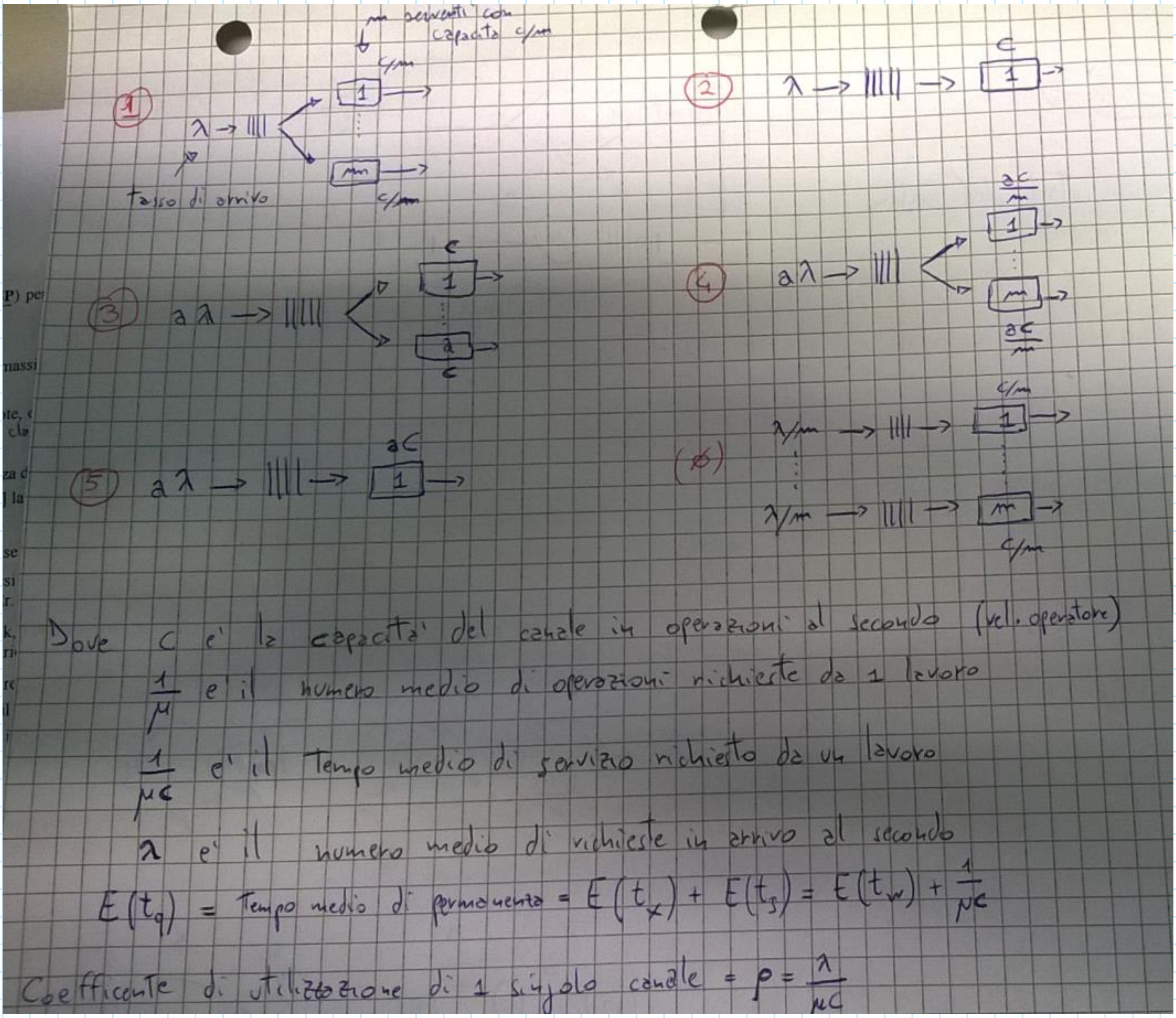
6) Discutere comparativamente efficienza e affidabilità delle due configurazioni.
...
Calcolo il tempo di attesa per il modello PASP (pag. 56)

?

$$E_{[t_{wk}]} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \lambda_i E\left[t_{s_i}^2\right]}{\left[1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i\right]\left[1 - \sum_{i=1}^{k} \rho_i\right]}$$

Tipologie Di Reti Di Code

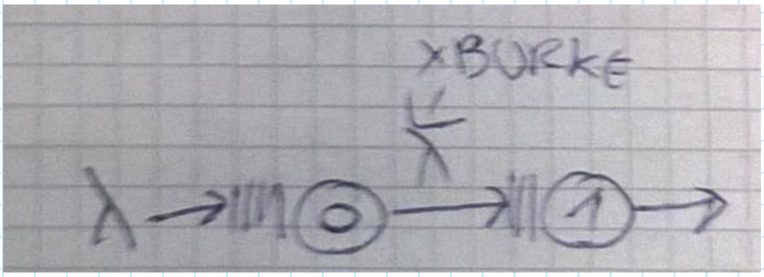
Schema grafico delle tipologie di reti, pag. 59, Parte II Cap 3.



Esercizio Reti di Code Tandem (Pipeline) (testo)

Una struttura di riparazione condivisa da un gran numero di macchine ha 2 stazioni sequenziali con tassi rispettivamente di 1 per ora e 2 per ora. Il tasso di fallimento cumulativo di tutte le macchine è di 0,5 per ora. Assumiamo che il comportamento del sistema può essere approssimativamente rappresentato da una rete di tipo tandem a 2 nodi, processi di arrivo di Poisson, tempo di servizio ai 2 nodi distribuito esponenzialmente e discipline di servizio FIFO.
Determinare il tempo medio di riparazione, dettagliandone poi i vari tempi di attesa e di servizio nelle 2 stazioni.
Determinare la probabilità di trovare ad un certo istante entrambe le stazioni libere.

Svolgimento



Il problema ha i seguenti parametri:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda = 0.5 = \frac{1}{2}\,; \mu_0 = 1\,; \mu_1 = 2$$

$$\rho_0 = \frac{\lambda}{\mu_0} = \frac{1}{2} < 1\,; \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} < 1$$

- Il tempo medio di riparazione è $R = R_0 + R_1 \; dove \; R_0 = \frac{N_0}{\lambda} \; e \; R_1 = \frac{N_1}{\lambda}$

  Siccome $N_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i} \; allora \; N_0 = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \; e \; N_1 = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

  $$R_o = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2ore$$

  $$R_1 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} ore$$

  $$R = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} ora$$

- I tempi di attesa e di servizio sono rispettivamente:

  $T_{W_0} = \frac{\rho_o}{\mu_0(1-\rho_0)} = \frac{\frac{1}{2}}{1\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 1 \; ora$ Quindi delle 2 ore , una ne passo in coda ed una in servizio.

  $T_{W_0} = \frac{\rho_1}{\mu_1(1-\rho_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{2\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{6} \; ora$ Quindi solo 10 minuti di attesa in 40 minuti totali al nodo 2

- La probabilità di trovare ad un certo istante entrambe le stazioni libere è calcolabile tramite $\pi(i,j) = \pi_0(i) * \backslash\mathrm{pi}_1(j) = [\rho_0^i(1-\rho_0)] * [\rho_1^j(1-\rho_1)]$

  $$\pi(0,0) = \pi_0(0) * \pi_1(0) = \rho_0^0(1-\rho_0) * \rho_1^0(1-\rho_1) = \left[1\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] * \left[1\left(1-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{2} * \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

Lezione Call Center

Tuesday, February 17, 2015 3:27 PM

VEDI 17/04/2013
CORRETTO E ABBASTANZA COMPLETO

Un call center svolge il servizio di assistenza per le reti telematiche di due grossi clienti: banca e compagnia assicurativa.
Al call center lavorano 2 tecnici che rispondono alle chiamate.
Il centralino può tenere in attesa un numero illimitato di clienti.
Per ogni chiamata in arrivo il tecnico che risponde tenta di risolvere il problema direttamente, quando questo non è possibile viene mandato un altro tecnico che risolve il problema sul posto.
Si supponga che:

- Le chiamate della banca arrivino secondo un processo di poissoniano di 20 chiamate l'ora
- Le chiamate della compagnia di assicurazione arrivino secondo un processo poissoniano di 10 chiamate l'ora
- Il tempo necessario ai tecnici che rispondono al telefono per gestire le telefonate indipendentemente dal cliente sia una variabile aleatoria distribuita esponenzialmente con valore medio 3 minuti
- La disciplina dei tecnici al telefono sia FIFO
- Indipendentemente dal cliente ogni chiamata abbia probabilità 1/10 di essere inviata al III tecnico
- Il tempo complessivo (trasporto+ intervento) per eseguire il suo intevento sia distribuito esponenzialmente con un valor medio pari a 14 minuti per i clienti della banca e 20 minuti per i clienti della compagnia assicurativa.

Si supponga, poi, che per contratto il call center sia impegnato a far sì che il valor medio del tempo di attesa sul posto sia minore di 1 ora per la banca e minore di 2 ore per la compagnia assicurativa.
Trovare:

1) Qual è la distribuzione di probabilità dei tempio di interarrivo delle telefonate al centralino?
2) Dire quale modello di coda è adatto a descrivere il servizio telefonico dei tecnici ed esplicitare il parametri significativi?
3) Qual è la probabilità che una telefonata in arrivo al call center non venga messa in attesa?
4) Quale modello di coda è adatto a descrivere il servizio del tecnico che esegue le riparazioni sul posto?
5) E' possibile tenere fede all'impegno contrattuale sul valor medio del tempo di attesa del tecnico per effettuare le riparazioni sul posto?

Svolgimento:

1. Si parla di un processo poissoniano e tempi di servizio esponenziali, dobbiamo quindi trovare il parametro lambda come prima cosa, perché la formula è $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

   $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ dove $\lambda_1 = 20$ arrivi/ora e $\lambda_2 = 10$ arrivi/ora
   $\Rightarrow \lambda = 30$ arrivi l'ora
   In minuti $\lambda = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ arrivi al minuto

   La densità di probabilità è pertanto: $f(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}$

2. Servizio telefonico con **2** tecnici che rispondono al telefono. m = 2, significa che il modello è un M/M/2

   $T_s = 3\ minuti \Rightarrow \mu = \frac{1}{3}$

   $$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{\frac{1}{2}}{2 * \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \frac{3}{4} < 1$$

   OK, c'è stabilità.

3. Probabilità niente coda:
   $P\{no-attesa\} = P\{0-utenti\} + P\{1-utente\} = \pi_0 + \pi_1$ $(guardare\ pg. 50)$

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!} * \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2\rho)^k}{k!} + \frac{(2\rho)^2}{2!} * \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1} = \left[\frac{(2\rho)^0}{0!} + \frac{(2\rho)^1}{1!} + \frac{4p^2}{2} * \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$$
$$= \left[1 + 2\rho + \frac{2\rho^2}{1-\rho}\right]^{-1} = \left[\frac{1 * (1-\rho) + 2\rho(1-\rho) + 2\rho^2}{1-\rho}\right]^{-1} = \left(\frac{1-\rho+2\rho-2\rho^2+2\rho^2}{1-\rho}\right)^{-1} = \left(\frac{1+1\rho}{1-\rho}\right)^{-1}$$
$$= \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

$$\pi_1 = \frac{(2\rho)^{-1}}{1|} * \pi_0 = \frac{(2\rho)^{-1}}{1|} * \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{2\rho(1-\rho)}{1+\rho} = \frac{2\rho - 2\rho^2}{1+\rho}$$

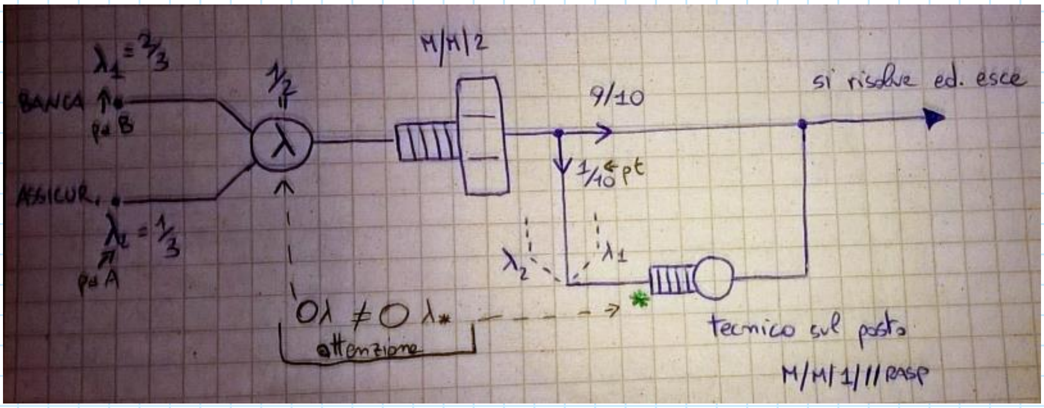
$$P = \pi_0 + \pi_1 = \frac{1-\rho}{1+\rho} + \frac{2\rho-2\rho^2}{1+\rho} = \frac{1+\rho-2\rho^2}{1+\rho} = \frac{1-\frac{3}{4}-2*\frac{9}{16}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{8+6-9}{8}}{\frac{7}{4}} = \frac{5}{14} = 0{,}357$$

Questa è la probabilità di trovare un tecnico che mi risponde immediatamente.

4. Questo punto ha due possibili soluzioni:

- *Prima soluzione, tramite il modello M/M/1 PASP (Priorità Astratta Senza Prelazione)*

  I parametri del modello sono:
  $r = 2, (2\ classi)$
  $k = 1\ classe\ 1\ la\ Banca$
  $k = 2\ classe\ 2\ l'assicurazione$



  Sul totale delle chiamate, i 2/3 arrivano alla banca, e 1/3 arrivano all'assicurazione.

  * la coda in questo punto è pari a: (formule a pg. 55)

$$\lambda_1 = \lambda * paB * pt = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{1}{10} = \frac{1}{30}$$
$$\lambda_2 = \lambda * paA * pt = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{10} = \frac{1}{60}$$
$$\mu_1 = \frac{1}{14}, \mu_2 = \frac{1}{20}$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{14}} = \frac{14}{30} < 1$$

  OK

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{1}{20}} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} < 1$$

  OK

- *Seconda soluzione, tramite il modello M/G/1 FIFO*

  Posso risolvere anche con un modello M/G/1 FIFO perché ho una sola coda e non più le due astratte del punto prima. =>

$\lambda = lambda\ complessiva\ * quella\ che\ arriva\ al\ tecnico = \frac{1}{2} * \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$

$p_B = \frac{2}{3}$ indica la probabilità che la chiamata arrivi dalla banca.

$p_A = \frac{1}{3}$ indica la probabilità che la chiamata arrivi dall'assicurazione.

Calcolo il tempo medio di arrivo: $E(t_s)$

$$E(t_s) = \frac{2}{3} * 14 + \frac{1}{3} * 20 = \frac{48}{3} = 16$$

Quindi $\mu = \frac{1}{16}$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{16}} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} < 1$$

5. Per rispondere al quesito devo calcolare il <u>tempo medio di attesa.</u> Questo punto ha due possibili soluzioni:
   - *1)mediante modello M/M/1 PASP*

     Calcolare mediante le formule di pag. 55,56

     $E_{[t_{wk}]}$

     $E_{[t_{wk_1}]}$

     $E_{[t_{wk_2}]}$

   - *Mediante modello M/G/1*

     (formula generale 3.21 pag. 54)

$$N = \rho + \frac{\rho^2 * (1 + C_B^2)}{2(1-\rho)}$$

Ci serve di calcolare

$$T_W = \frac{N - \rho}{\lambda}$$

$W = \lambda T_w \Rightarrow W = N - \rho$

Siccome il processo ha una distribuzione esponenziale, $N = \frac{\rho}{(1\text{-}\rho)}$ e la formula sopra diviene:

$$T_W = \frac{\frac{\rho}{1-\rho} - \rho}{\lambda} = \frac{\frac{\rho - \rho(1-\rho)}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{\frac{\rho - \rho + \rho^2}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{\frac{\rho^2}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{\frac{\frac{16}{25}}{1-\frac{4}{5}}}{\frac{1}{20}} = \frac{\frac{16}{25} * 5}{\frac{1}{20}} = \frac{16}{5} * 20 = 16 * 4$$

$= 64\ minuti$

Quindi, per la compagnia di assicurazione si riesce ad evadere la pratica nel tempo medio di attesa. Non è così per la banca.

Lezione 14

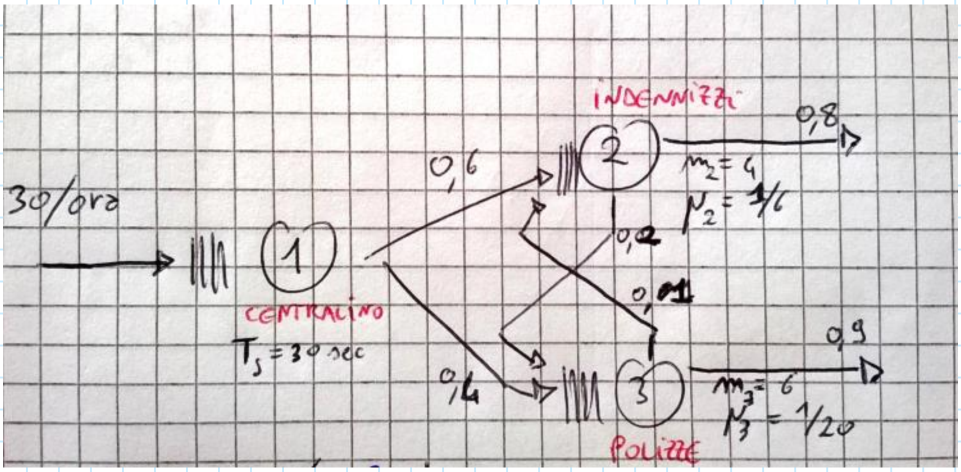
martedì 29 aprile 2014 11.38

Dispense Parte II Cap 4

Esercizio Reti di Jackson

esercizio reti di Jac...

Dei tre nodi del sistema un nodo è la centralina di smistamento, un secondo nodo è il servizio indennizzi e l'ultimo nodo è il servizio polizze. **Va sempre disegnata la rete all'inizio!**



0. I parametri iniziali sono:

   M=3, ovvero il numero di nodi della rete.

- $i = 1, m_1 = 1$
- $i = 2, m_2 = 4$
- $i = 3, m_3 = 6$

$\lambda_1 = 30\ all'ora = 1\ ogni\ 2\ minuti = \frac{1}{2};\ T_{s_1} = 30\ sec; \mu_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\ ;\ m_2 = 4\ ;\ \mu_2 = \frac{1}{6}\ ; m_3 = 6\ ;\ \mu_3 = \frac{1}{20}$

La matrice di Routing o delle probabilità è: (si legge ad esempio come "la probabilità di andare dal nodo 1 al nodo 2 è 0.6")

r_{xy}	**1**	**2**	**3**	**u**
1	-	0.6	0.4	-
2	-	-	0.2	0.8
3	-	0.1	-	0.9
u	-	-	-	-

1. La distribuzione di probabilità dei tempi di inter arrivo delle telefonate al centralino è: $\lambda_1 = \frac{30}{h} = \frac{1}{2}$. La densità di probabilità è $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$. La distribuzione di probabilità (cumulativa) è invece

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$

2. Per il nodo 1 ho una M/M/1, ho un solo servente perché solo una chiamata alla volta può essere processata,

$$\lambda_1 = \lambda = \frac{1}{2}, \mu_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\ minuti, \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} < 1\ OK!$$

Per il nodo 2 ho una M/M/4, e tramite l'equazione di bilanciamento del carico 4.4 (pag. 71) ricavo i vari parametri. Necessito di calcolare lambda3 in contemporanea

$$\begin{cases} \lambda_2 = p_{12}\lambda_1 + p_{32}\lambda_3 = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}\lambda_3 \\ \lambda_3 = (p_{13} * \lambda_1) + (p_{23} * \lambda_2) = \frac{2}{10} + \frac{2}{10}\lambda_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 10\lambda_2 = 3 + \lambda_3 \\ 10\lambda_3 = 2 + 2\lambda_2 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_2 = \frac{3}{10} + \frac{\lambda_3}{10} \\ 10\lambda_3 = 2 + \frac{3}{5} + \frac{\lambda_3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \frac{32}{98} = \frac{16}{49} \\ \lambda_3 = \frac{160}{49} - 3 = \frac{160 - 147}{49} = \frac{13}{49} \end{cases}$$

Ricapitolando per il nodo 2 ho

$\lambda_2 = \frac{16}{49}$

$\mu_2 = \frac{1}{6}$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{m_2\mu_2} = \frac{\lambda_2}{4\mu_2} = \frac{\frac{16}{49}}{\frac{4}{6}} = \frac{16}{49} * \frac{3}{2} = \frac{48}{98} = \frac{24}{49} < 1\ OK!\ (condizione\ di\ stazionarit\grave{a})$$

Per il nodo 3 ho M/M/6

$\mu_3 = \frac{1}{20}$

$\lambda_3 = \frac{13}{49}$

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{m_3\rho_3} = \frac{\frac{13}{49}}{\frac{6}{20}} = \frac{13}{49} * \frac{10}{3} = \frac{130}{147} < 1\ OK!$$

3. Le lunghezze medie delle code sono:

   1°: $W_1 = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} = \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{12}$ (formula pag. 46)

   2°: $W_2 = \pi_{m_2} * \frac{\rho_2}{(1-\rho_2)^2} = \frac{(m_2\rho_2)^{m_2}}{m_2!} * \pi_0 * \frac{\rho_2}{(1-\rho_2)^2} = \frac{\left(4 * \frac{24}{49}\right)^4}{4!} * \frac{14}{100} * \frac{\frac{24}{49}}{\left(1 - \frac{24}{49}\right)^2} \cong 0.35$

   Dove $\pi_0 = \left[\sum_0^{m-1}\left(\frac{(m_2\rho_2)^k}{k!}\right) + \frac{(m_2\rho_2)^{m_2}}{m_2!} * \frac{1}{1-\rho_2}\right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{\left(4*\frac{24}{49}\right)^k}{k!}\right) + \frac{\left(4*\frac{24}{49}\right)^4}{4!} * \frac{1}{1-\frac{24}{49}}\right]^{-1} \cong \frac{14}{100}$

   (formule M/M/m II parte 3.16 e 3.18 pag. 50)

   3°: $W_3 \cong 5$
   Nota: Siccome ρ_3 è molto vicino a 1 avrò di sicuro + coda. Di solito se ρ è basso, non avrò molti utenti in coda.

4. Il tempo medio totale speso da un utente nel sistema è calcolabile tramite Little:

$$Little = T_{W_1} = \frac{W_1}{\lambda_1} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$T_{W_2} = \frac{W_2}{\lambda_2} = \frac{1}{3} * \frac{49}{16} = \frac{49}{48} \cong 1, \dots$$

$T_{W_3} = \frac{W_3}{\lambda_3} = \frac{5}{\frac{13}{49}} \cong 16$ *minuti di attesa al nodo 3.*

Il tempo di risposta è (T=tempo di attesa + tempo medio di risposta per ogni nodo)

$$T_{R_1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} min$$

$$T_{R_2} = 1 + 6 = 7\ min$$

$$T_3 = 16 + 20 = 36\ min$$

$T_{R_{tot}} = \frac{2}{3} + 7 + 36 \cong 44$ *minuti*, $\leftarrow$ *tempo medio totale speso da un utente nel sistema. condizionato per la maggior parte dal nodo* 3.

Lezione 15

mercoledì 30 aprile 2014 09.27

Dispense Parte II Cap. 4

Esercizio Reti di Gordon Newell

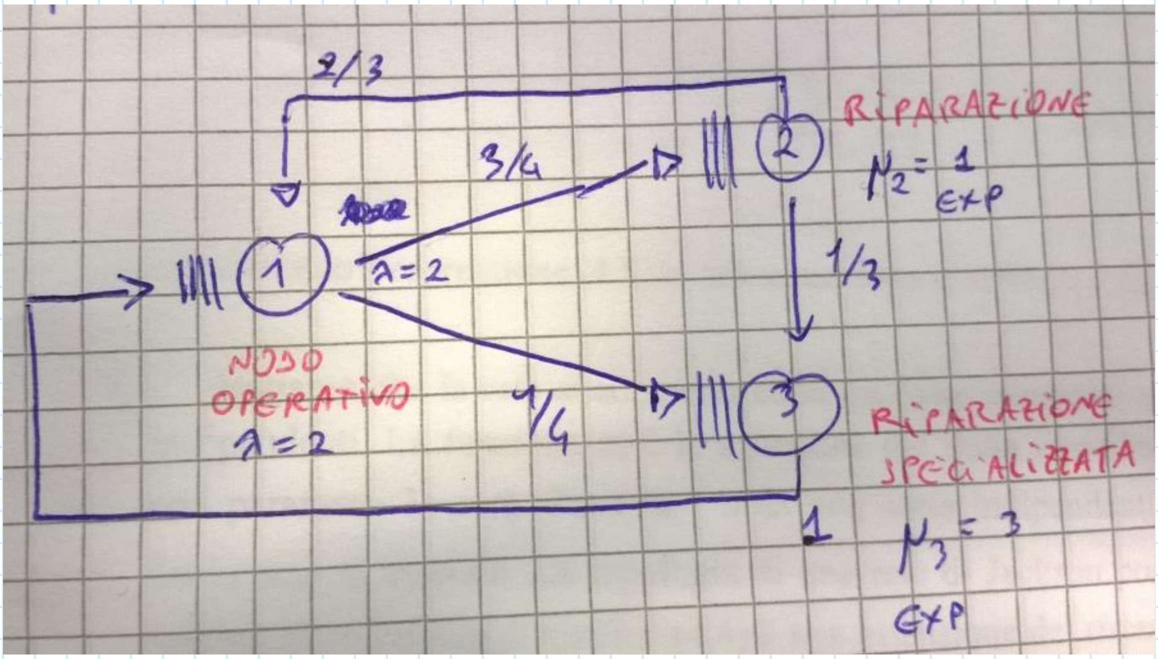
esercizio
GN

NOTE SUL TESTO

- "dovrebbero essere operative incessantemente" : funzionano normalmente e costantemente senza uscita finché non si guasta.
- "chiamiamo nodo 1" : entrambe le macchine sono al nodo 2
- Nel testo non viene specificata una unità di misura temporale,
- "risolvere la rete in termini di distribuzione stazionaria di stato" vuol dire calcolare i π

SVOLGIMENTO

Si capisce che è una rete chiusa perché non ci sono ingressi nel sistema ma solo "ritorni" dai nodi. Le macchine sono "fisse" nel nodo 1 quando sono in funzione correttamente. Con un certo tasso λ si guastano e si spostano negli altri sue nodi per essere riparate.



Il problema mi chiede di calcolare i π. Devo iniziare con il calcolare $e_i = \mu_i \rho_i = \sum_{j=1}^{3} (\mu_j p_{ji} \rho_j)$

La matrice di propagazione (che indichiamo con R di routing o P per le probabilità) è : (si legge ad esempio come "la probabilità di andare dal nodo 1 al nodo 2 è 0.75")

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 1 - r_{12} \\ 1 - r_{23} & 0 & r_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

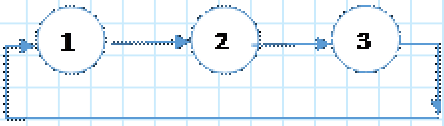
r_{xy}	**1**	**2**	**3**
1	-	0.75	0.25

2	0.66	-	0.33
3	1	-	-

Imposto il seguente sistema utilizzando l'equazione di Gordon Newell $e_i = \mu_i\rho_i = \sum_{j=1}^{k}\mu_j p_{ji}\rho_j$ (vedi la formula 4.6 nelle dispense nella versione modificata)
Inoltre, in ogni equazione dovrei avere 3 componenti nella sommatoria visto che k=3, ma visto che non ci sono transizioni da uno stato a se stesso, il termine è 0. Infatti la diagonale della matrice di propagazione è vuota.

$$\begin{cases} \mu_1\rho_1 = \lambda\rho_1 = \mu_2(1-r_{23})\rho_2 + \mu_3 * 1\rho_3 \\ \mu_2\rho_2 = \mu_1 r_{12}\rho_1 = \lambda r_{12}\rho_1 \\ \mu_3\rho_3 = \mu_1(1-r_{12})\rho_1 + \mu_2 r_{23}\rho_2 \end{cases} = \begin{cases} 2\rho_1 = 1\left(1-\frac{1}{3}\right)\rho_2 + 3\rho_3 \\ 1\rho_2 = 2 * \frac{3}{4}\rho_1 \\ 3\rho_3 = 2\left(1-\frac{3}{4}\right)\rho_1 + 1 * \frac{1}{3}\rho_2 \end{cases}$$

NB: Nel sistema ho una 3 equazione in 3 incognite ma una informazione ridondante, ma in realtà va aggiunta una in più sula costante di normalizzazione. Logicamente posso pesare ad una rete chiusa nella quale il valore in uscita dell'ultimo nodo è uguale al valore in ingresso del primo nodo



In pratica quello che si fa per aggirare il problema è imporre arbitrariamente $\rho_2 = 1$
Comunque C(k), che è la costante di normalizzazione, mi sistema i calcoli garantendomi dei valori corretti qualsiasi sia l'incognita che ho posto uguale ad 1. ⇒

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{2}{3} \\ \rho_2 = 1 \\ 3\rho_3 = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} + \frac{1}{3} * 1 \Rightarrow 3\rho_3 = \frac{2}{3} \Rightarrow \rho_3 = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Ora che ho calcolato i ρ posso applicare il Teorema di Gordon Newell per calcolare la distribuzione stazionaria di stato (equazione 4.7 pag.74).

$$\pi(n_1 \dots n_M) = \frac{1}{C(K)} * \prod_{i=1}^{M} g_i(n_i)$$

Dove $n_1 \dots n_M$ rappresenta lo stato con il numero di utenti presenti in ogni nodo:

Per tutti e tre i nodi ho la possibilità che le macchine in quel nodo siano 0, 1 oppure 2.⇒ $n_1 = n_2 = n_3 = \{0,1,2\}$

Determino i vari g_i considerando quali sono le possibilità di avere le macchine nei vari nodi:

- Il numero di nodi della rete è M = 3
- Il numero di utenti in tutta la rete K = 2 (le due macchine)
- Il numero dei serventi ai nodi sarà:
  - $m_1 = 2$ (le due macchine contano sia come serventi che come l'utenza di un ciclo infinito di richieste completate istantaneamente)
    $m_2 = 1$ (l'operatore)
    $m_3 = 1$ (l'operatore specializzato)

I possibili stati sono un numero minore rispetto a tutte le possibili configurazioni dei vari n nei vari nodi del modello ($27 = 3^3$), siccome la rete è chiusa, ho un numero ridotto di stati possibili limitato dalla equazione $n_1 + n_2 + n_3 = 2 \Rightarrow (2,0,0); (0,2,0); (0,0,2); (1,1,0); (1,0,1); (0,1,1)$. Le macchine sono solo due !!!

Le formule per il calcolo degli stati sono

$$\begin{cases} (A)\ g_i(n_i) = \dfrac{\rho_i^{n_i}}{n_i!}\ se\ 0 \le n_i \le m_i \\ (B)\ g_i(n_i) = \dfrac{\rho_i^{n_i}}{m_i!\, m_i^{n_i - m_i}}\ se\ n_i > m_i \end{cases}$$

- $\pi_{2,0,0} = \frac{1}{C(2)}[g_1(2) * g_2(0) * g_3(0)] = (applicando\ A, A, A) = \frac{1}{C(2)}\left[\frac{\rho_1^2}{2!} * \frac{\rho_2^0}{0!} * \frac{\rho_3^0}{0!}\right] = \frac{1}{2}\frac{\rho_1^2}{C(2)}$
- $\pi_{0,2,0} = \frac{1}{C(2)}[g_1(0) * g_2(2) * g_3(0)] = (applicando\ A, B, A) = \frac{1}{C(2)} * \frac{\rho_2^2}{1!\,1^{2-1}} = \frac{\rho_2^2}{C(2)}$
- $\pi_{0,0,2} = \frac{1}{C(2)}[g_1(0) * g_2(0) * g_3(2)] = (A, A, B) = \frac{1}{C(2)} * \frac{\rho_3^2}{1!\,1^{2-1}} = \frac{\rho_3^2}{C(2)}$
- $\pi_{1,1,0} = \frac{1}{C(2)}[g_1(1) * g_2(1) * g_3(0)] = (A, A, A) = \frac{1}{C(2)} * \frac{\rho_1^1}{1!} * \frac{\rho_2^1}{1!} = \frac{\rho_1\rho_2}{C(2)}$
- $\pi_{1,0,1} = \frac{1}{C(2)}[g_1(1) * g_2(0) * g_3(1)] = (A, A, A) = \frac{1}{C(2)} * \frac{\rho_1^1}{1!} * \frac{\rho_3^1}{1!} = \frac{\rho_1\rho_3}{C(2)}$
- $\pi_{0,1,1} = \frac{1}{C(2)}[g_1(0) * g_2(1) * g_3(1)] = (A, A, A) = \frac{1}{C(2)} * \frac{\rho_2^1}{1!} * \frac{\rho_3^1}{1!} = \frac{\rho_2\rho_3}{C(2)}$

Ora che ho i vari π posso calcolare grazie all'equazione 4.8 pag.75 il valore di della costante di normalizzazione

$$C(2) = \sum_{6\ stati} \prod\nolimits_{i=1}^{3} g_i(n_i) = \frac{1}{2}\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^3 + \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \frac{2}{3} * 1 + \frac{2}{3} * \frac{2}{9} + 1 * \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + 1 + \frac{4}{81} + \frac{2}{3} + \frac{4}{27} + \frac{2}{9} = \frac{18 + 81 + 4 + 54 + 12 + 18}{81}$$

$$= \frac{187}{81}$$

Andando quindi a sostituire sia ρ che C nelle formule con π ottengo che

- $\pi_{2,0,0} = \frac{1}{2}\frac{\rho_1^2}{C(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 * \frac{81}{187} = \frac{18}{187} = 0{,}0962\ probabilità\ di\ avere\ due\ macchine\ operativex$
- $\pi_{0,2,0} = \frac{\rho_2^2}{C(2)} = 1 * \frac{81}{187} = 0{,}4332$
- $\pi_{0,0,2} = \frac{\rho_3^2}{C(2)} = \left(\frac{2}{9}\right)^2 * \frac{81}{187} = \frac{4}{187} = 0{,}0214$
- $\pi_{1,1,0} = \frac{\rho_1\rho_2}{C(2)} = \frac{2}{3} * 1 * \frac{81}{187} = \frac{54}{187} = 0{,}2888$
- $\pi_{1,0,1} = \frac{\rho_1\rho_3}{C(2)} = \frac{2}{3} * \frac{2}{9} * \frac{81}{187} = \frac{12}{187} = 0{,}0642$
- $\pi_{0,1,1} = \frac{\rho_2\rho_3}{C(2)} = 1 * \frac{2}{9} * \frac{81}{187} = \frac{18}{187} = 0{,}0962$

Quindi nell'esercizio
La probabilità di avere entrambe le macchine operative è solo il 9,62% del tempo;
Quella di averne almeno una in funzione è data dalla somma della 1°, la 4° e la 5° equazione, ovvero $0.0962 + 0.2888 + 0.0642 = 0.4492 = 44.92\%$ del tempo.

Lezione 16

martedì 6 maggio 2014 11.31

Dispense Parte II Cap. 4

Reti BCMP

Esensione delle reti Jackson e Gordon-Newell ed è costituita da reti aperte, chiuse e miste, multi classe, con topologia probabilistica arbitraria e con centri di servizio

Disciplina di servizio Distribuzione del tempo di servizio

(1) FIFO esponenziale

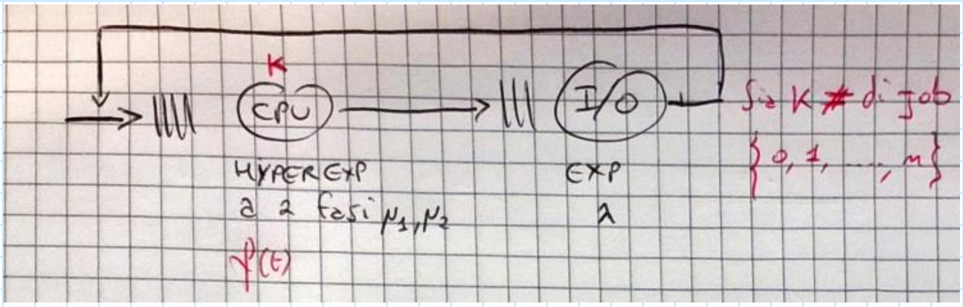
(2) PS (Processor Sharing) Coxiana

(3) IS (Infiniti Serventi) Coxiana

(4) LIFOPr (LIFO con Prelazione)Coxiana

ESERCIZIO (Modello di reti di code Ciclica)

Consideriamo una coda ciclica. Supponiamo che la CPU sia gestita in modo ipersonenziale a 2 fasi μ_1, μ_2 e l' I/O è gestito in modo esponenziale λ.



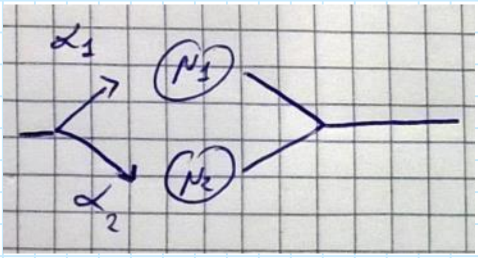
l'iperesponenziale ha funzione di densità di probabilità data da $f(t) = \alpha_1 \mu_1 e^{-\mu_1 t} + \alpha_2 \mu_2 e^{-\mu_2 t}$

Sia K il numero di job = {0,1,…,n}.

? Il processo non è markoviano, perché quando K >0 ???? ….

$\tau \rightarrow (k, \tau)$ stato del sistema al tempo τ dato un job sotto servizio della CPU.

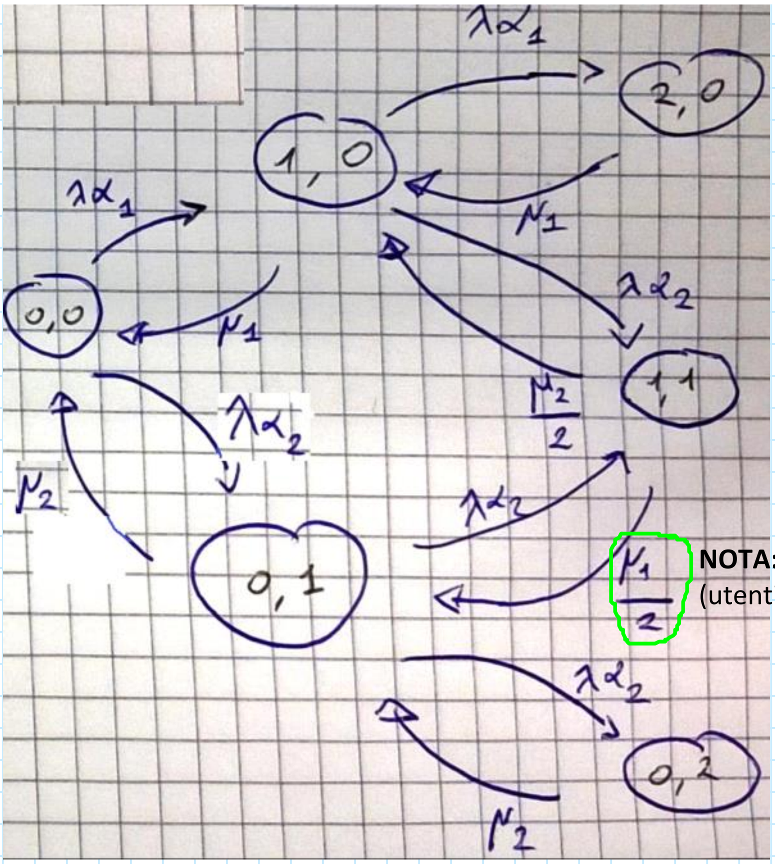
Gestione CPU:



Consideriamo per semplicità n=2 e che la disciplina della CPU sia Processor Sharing (PS)

L'insieme dei possibili stati è $E = \{(0,0); (1,0); (0,1); (2,0); (0,2); (1,1)\}$

Il diagramma a stati è:



NOTA: la velocità viene partizionata in 2 job (utenti).

NOTA: i job presenti in μ_1 sono indicati con i mentre j indica quelli in μ_2 nel caso dell'esempio avrò $i \geq 0, j \geq 0, i+j \leq 2$.
In questo modo sono riuscito a rappresentare il problema comunque grazie ad una catena di Markov.

Le equazioni di bilanciamento sono: (ovvero tutto ciò che esce in un nodo deve essere uguale a quello che entra, come il teorema di Norton per le maglie dei circuiti elettrici)

$$Esce = Entra$$
$$\lambda\pi(0{,}0) = \mu_1\pi(1{,}0) + \mu_2\pi(0{,}1)$$
$$(\mu_1 + \lambda)\pi(1{,}0) = \mu_1\pi(2{,}0) + \lambda\alpha_1\pi(0{,}0) + \frac{\mu_2}{2}\pi(1{,}1)$$
$$(\mu_2 + \lambda)\pi(0{,}1) = \mu_2\pi(0{,}2) + \lambda\alpha_2\pi(0{,}0) + \frac{\mu_1}{2}\pi(1{,}1)$$
$$\mu_1\pi(2{,}0) = \lambda\alpha_1\pi(1{,}0)$$
$$\mu_2\pi(0{,}2) = \lambda\alpha_2\pi(0{,}1)$$
$$\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}\right)\pi(1{,}1) = \lambda\alpha_1\pi(0{,}1) + \lambda\alpha_2\pi(1{,}0)$$

Risolvendo le equazioni nel sistema sopra ed esprimendo tutto in funzione di α e μ e $\pi(0{,}0)$ si ottiene :

$$\begin{cases} \pi(1{,}0) = \dfrac{\lambda\alpha_1}{\mu_1}\pi(0{,}0) \\ \pi(0{,}1) = \dfrac{\lambda\alpha_2}{\mu_2}\pi(0{,}0) \\ \pi(0{,}2) = \left(\dfrac{\lambda\alpha_2}{\mu_2}\right)^2\pi(0{,}0) \\ \pi(2{,}0) = \left(\dfrac{\lambda\alpha_1}{\mu_1}\right)^2\pi(0{,}0) \\ \pi(1{,}1) = \dfrac{2(\lambda\alpha_1)(\lambda\alpha_2)}{\mu_1\mu_2}\pi(0{,}0) \end{cases}$$

La condizione di normalizzazione da cui si ricava $\pi(0{,}0)$ è:
$$\pi(0{,}0) + \pi(1{,}0) + \pi(0{,}1) + \pi(2{,}0) + \pi(0{,}2) + \pi(1{,}1) = 1$$

Supponiamo ora di ridurre il problema, e di ridurre gli stati nel seguente modo:

Stato 0 (che semplicemente indica il numero di utenti/job da qualche parte nel sistema)	(0,0)
Stato 1	(1,0) (0,1)
Stato 2	(2,0) (0,2) (1,1)

Allora le equazioni di prima divengono

$$\begin{cases} \pi(0) = \pi(0,0) \\ \pi(1) = \pi(1,0) + \pi(0,1) \\ \pi(2) = \pi(2,0) + \pi(0,2) + \pi(1,1) \end{cases}$$

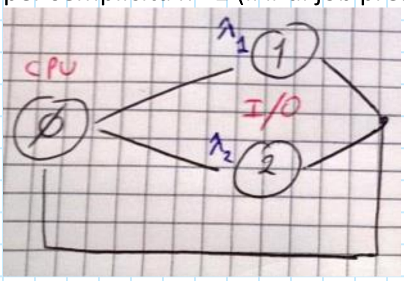
$$\begin{cases} \pi(0) = \pi(0,0) \\ \pi(1) = \lambda\left(\frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2}\right)\pi(0) \\ \pi(2) = \lambda^2\left(\frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2}\right)^2 \pi(0) \end{cases}$$

$\frac{1}{\mu} = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2}$ è il tempo medio di servizio della CPU per ogni visita alla CPU

Allora le equazioni che abbiamo visto sono quelle della "nascita morte" ed il sistema ha la soluzione nella forma prodotto.

ESERCIZIO

Consideriamo una rete che rappresenta un server centrale con 3 nodi, con diversi tipi di job e distribuzione generale. In dettaglio abbiamo un nodo CPU, etichettato con 0, e poi due nodi di I/O etichettati con 1 e con 2. Sia per semplicità n= 2 (il # di job presenti nella rete).



Supponiamo che il job 1 non possa andare nel nodo di I/O 2; e così anche il job 2 non possa andare nel nodo di I/O 1 (può stare quindi solo nella CPU e nel nodo I/O 2).

$T_{S_{CPU J1}} = \frac{1}{\mu_1}$

$T_{S_{CPU J2}} = \frac{1}{\mu_2}$

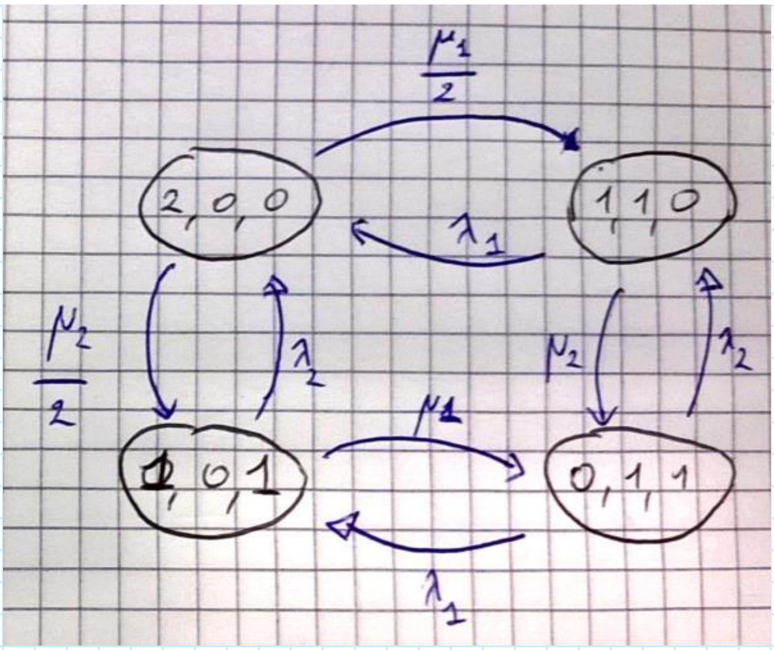
$T_{S_{I.O1 J1}} = \frac{1}{\lambda_1}$

$T_{S_{I.O2 J2}} = \frac{1}{\lambda_2}$

La disciplina di schedulazione è processor sharing (PS).

Lo stato del sistema è definito da una tripla (K_0, K_1, K_2) dove rispettivamente sono il numero di job alla CPU, il numero di job al nodo di I/O 1 e il numero di job al nodo di I/O 2.

Il diagramma degli stati è :



RICORDA: Tempi di servizio "Generale"
Dal diagramma degli stati è possibile scrivere le seguenti equazioni di bilanciamento:

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{2}\pi(2,0,0) = \lambda_1\pi(1,1,0) + \lambda_2\pi(1,0,1)$$
$$(\lambda_1+\mu_2)\pi(1,1,0) = \lambda_2\pi(0,1,1) + \frac{\mu_1}{2}\pi(2,0,0)$$
$$(\lambda_2+\mu_1)\pi(1,0,1) = \lambda_1\pi(0,1,1) + \frac{\mu_2}{2}\pi(2,0,0)$$
$$(\lambda_1+\lambda_2)\pi(0,1,1) = \mu_1\pi(0,1,1) + \mu_2\pi(1,1,0)$$

inoltre c'è l'equazione di normalizzazione e inoltre il sistema possiede un ciclo quindi una equazione è superflua e posso riscriverlo come (espresso tutto in funzione di (0,1,1)):

$$\begin{cases} \pi(2,0,0) = \dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}\pi(0,1,1) \\ \pi(1,1,0) = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}\pi(0,1,1) \\ \pi(1,0,1) = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1}\pi(0,1,1) \end{cases}$$

Andando a risolvere il sistema sopra, indicando ogni stato con una variabile ho 4 variabili e 4 equazioni.

x	(2,0,0)
y	(1,1,0)
z	(1,0,1)
k	(0,1,1)

Esprimendo alla fine tutto in funzione di k si ottiene

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}k \\ x = \dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2}k\ (superflua\ quindi) \\ y = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}k \\ z = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1}k \end{cases}$$

Ricavando k dalla condizione di normalizzazione $x+y+z+k=1$ si ottiene la soluzione del sistema $\pi(0,1,1)$...

L'utilizzazione di uno dei device di I/O è
$U_1 = \pi(1,1,0) + \pi(0,1,1) = \pi(y) + \pi(k)$
$U_2 = \pi(1,1,0) + \pi(0,1,1) = \pi(z) + \pi(k)$

Il throughput medio dei job di tipo 1 è $X_1 = U_1\lambda_1$
E per il job di tipo 2 è $X_2 = U_2\lambda_2$

Lezione 17

mercoledì 7 maggio 2014 09.12

Dispense Parte II Cap. 5

Lezione 18

martedì 13 maggio 2014 11.22

Dispense Parte III, (dispense Iazeolla)
Saltata la seconda ora

Esercizio A, Esame 26 gennaio 2012 , Goodness of fit distribuzione esponenziale

Vedi testo e soluzione:

EsercizioGo
odnessEs...

Per risolvere l'esercizio devo:

Domanda 1:

a) Calcolare il coefficiente di variazione con la formula $V = \frac{\sigma}{n}$

trovando la deviazione standard con la formula 5.6 pag 188 Cap. 5 Iazzeolla

$$\sigma \to s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \chi)^2}$$

e la media campionaria con la formula 5.1 pag 186 Cap. 5 Iazzeolla

$$n = \chi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

b) Considerare il valore del coefficiente di variazione

se vicino o uguale ad 1 posso prendere in considerazione una esponenziale

Domanda 2:

Test di Goodness of fit

a) Stabilisco il numero di categorie

Per decidere quante categorie devo innanzitutto verificare che le quantità osservate siano > 5 e posso tenere conto di uno di questi due parametri

- uniformità degli intervalli (stessa o quasi differenza tra gli estremi)
- uniformità delle quantità osservate (stesso o quasi numero di quantità in ogni intervallo

b) Calcolo le quantità teoriche tenendo conto della di distribuzione dell'esponenziale

$1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$ (x= valore dell'intervallo e beta = media)

c) Effettuo il test del X^2 (Chi quadro)

d) Controllo il valore ottenuto nella tabella dei percentili della distribuzione Chi quadro considerando che df= k-1-(numero di parametri stimati)

con K è il numero di categorie o classi e (numero di parametri stimati) dipende dalle distribuzioni:

per la normale sono la media e la varianza parametri 2

per l'esponenziale sono solo la media parametri 1

in questo caso df=5-1-1=3

per 3 gradi di libertà, il valore 1,94... ricade fra i percentili 5 e 90, quindi è accettato.

Lezione 19

mercoledì 14 maggio 2014 09.00

Saltata

Esercizio Goodness of fit , distribuzione poissoniana

EsercizioGDFPoiss

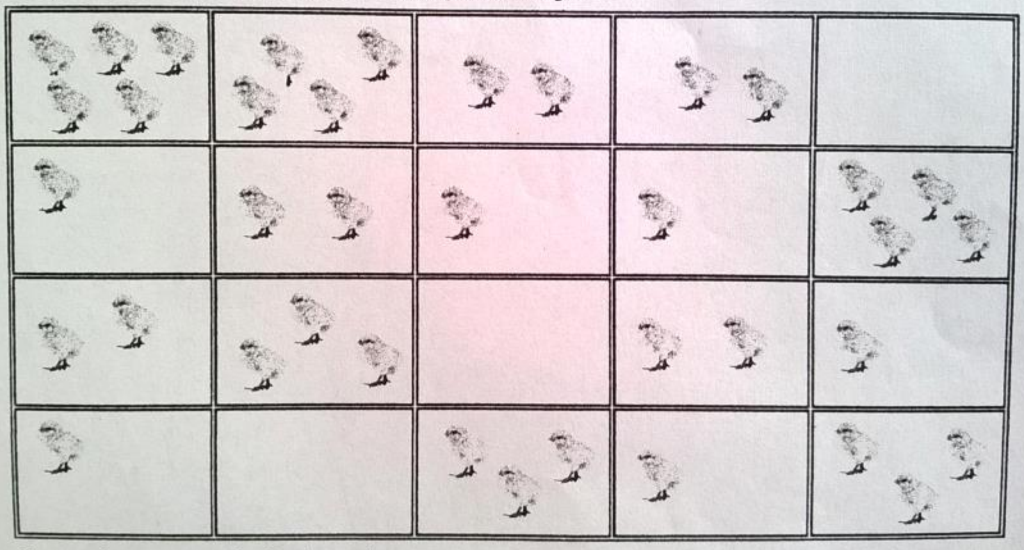
Esercizio

Eserciziopag197

Esercizio GOF Pulcini

Appello del 13 giugno 2012

Quesito A. (punti 15)
Supponiamo di voler stimare la distribuzione che governa il numero di pulcini nati per nido, osservata in 20 nidi (il nido è l'unità campionaria) così come riportato in figura.



Cercare di trovare una distribuzione adatta e provare a convalidarla.

Soluzione:

Esercizio Pulcini

Lezione 20

martedì 20 maggio 2014 11.23

Dispense Parte III, (dispense Iazeolla). Pagg 200-tutte

Esercizio Kolmogorov-Smirnov (pag. 199-200)

Eserciziopa
g199-200

Lezione 20

martedì 20 maggio 2014 12.18

Iniziate Dispense Parte 4

Algoritmi per sistemi di simulazione parallela/distribuita

Lezione 21

mercoledì 21 maggio 2014 09.35

Dispense Parte 4 - continua