



Quiz : Théorie qualitative des systèmes différentiels

Instructions: Répondez aux questions suivantes, du plus facile au plus difficile. Les réponses brèves sont fournies à la fin du quiz.

Question 1

Qu'est-ce qu'une trajectoire d'un système différentiel ?

Question 2

Quel est le lien entre le champ de vecteurs d'un système différentiel et ses trajectoires ?

Question 3

Soit le système différentiel $x' = -x$. Décrivez ses trajectoires.

Question 4

Qu'est-ce qu'un point d'équilibre d'un système différentiel ?

Question 5

Définissez un point d'équilibre stable d'un système différentiel.

Question 6

Soit le système différentiel $x' = 2x - y$, $y' = x + 2y$. Trouvez la nature du point d'équilibre $(0,0)$ en utilisant la trace et le déterminant de la matrice du système.

Question 7

Quelle est la différence entre un nœud et un foyer dans le portrait de phase d'un système linéaire ?

Question 8

Un système linéaire dans le plan a une valeur propre double négative. Décrivez les portraits de phase possibles.

Question 9

Un système linéaire dans le plan a un centre à l'origine. Que pouvez-vous dire des valeurs propres de la matrice du système ?

Question 10

Soit le système différentiel $x' = -y + x(x^2 + y^2), y' = x + y(x^2 + y^2)$. Montrez que l'origine est un foyer instable. (Indice : utilisez les coordonnées polaires).

Réponses brèves

- 1: Ensemble des positions prises par une solution maximale.
- 2: Les trajectoires sont tangentes au champ de vecteurs.
- 3: Demi-droites de l'axe Ox orientées vers l'origine.
- 4: Point où le champ de vecteurs s'annule.
- 5: Un point tel que les solutions qui démarrent près de ce point restent près de ce point pour tout temps positif.
- 6: Nœud répulsif (trace=4, det=5).
- 7: Nœud : trajectoires similaires à des paraboles; Foyer: trajectoires spiralées.
- 8: Nœud attractif (stable ou impropre).
- 9: Complexes conjuguées avec partie réelle nulle.
- 10: En coordonnées polaires, l'équation pour le rayon devient $r' = r^3$, montrant une croissance exponentielle du rayon.