Problème sur Mécanique des Milieux Continus - Équations fondamentales

Problème

Soit un milieu continu isotrope homogène déformé par des forces extérieures. On se propose d'étudier le comportement de ce milieu à travers différentes étapes et questions couvrant l'ensemble du cours de mécanique des milieux continus.

Partie 1: Modélisation des Efforts

Question 1.1 Considérons un cube élémentaire de côté a soumis à des forces volumiques $\bar{f} = (\rho g, 0, 0)^T$ (g étant l'accélération due à la gravité) et des forces surfaciques nulles sur les faces latérales. Écrivez les équations traduisant l'équilibre des forces pour ce cube en tenant compte des forces intérieures décrites par le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$.

Question 1.2 Utilisez le théorème de Cauchy pour exprimer le vecteur contrainte sur une face de normale $\bar{n} = (1, 0, 0)^T$ du cube. Décomposez ce vecteur en une composante normale et une composante tangentielle.

Question 1.3 Étant donné que le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ est symétrique, écrivez son expression générale en termes des contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3 et les directions principales associées.

Partie 2: Lois de Conservation

Question 2.1 En utilisant l'équation de continuité, démontrez que pour un milieu incompressible soumis à un champ de vitesses $\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$, on a $div(\bar{v}) = 0$.

Question 2.2 Considérez le champ de vitesse $\bar{v} = (u(y, z), v, w(y, z))^T$. Exprimez les termes de l'équation de continuité en fonction des composantes de la vitesse et commentez sur les implications pour ces composantes.

Question 2.3 En utilisant les équations d'équilibre local, exprimez l'équation pour la conservation de la quantité de mouvement dans la direction x en présence des forces volumiques $\bar{f} = (\rho g, 0, 0)^T$.

Question 2.4 Spécifiez les conditions aux limites nécessaires pour résoudre les équations d'équilibre dans un cas de traction uniaxiale sur un cylindre de rayon R soumis à une force axiale F.

Question 2.5 En statique, l'accélération est nulle ($\frac{D\bar{v}}{Dt} = 0$). Démontrez comment les équations d'équilibre se simplifient.

Question 2.6 Le premier principe de la thermodynamique s'écrit $\rho\frac{De}{Dt} = \bar{\sigma} : D + r - div(\bar{q})$. Expliquez ce que représentent chacun des termes et comment ce principe se relie aux concepts de mécanique des milieux continus.

Éléments de Réponse

Réponse 1.1 Les équations d'équilibre pour le cube élémentaire sous les forces volumiques sont:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho g = 0,\\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0,\\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0.\end{aligned}$$

Réponse 1.2 Le vecteur contrainte sur la face de normale $\bar{n} = (1,0,0)^T$ est:

$$\bar{T} = \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix}$$

Décomposition:

$$\sigma_n = \sigma_{xx}, \quad \bar{T}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix}$$

Réponse 1.3 Le tenseur des contraintes peut être diagonal dans la base des directions principales:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Réponse 2.1 Pour un milieu incompressible:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \bar{v}) = 0 \Rightarrow div(\bar{v}) = 0$$

Réponse 2.2 Pour $\bar{v} = (u(y,z), v, w(y,z))^T$, l'équation de continuité devient:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Implies v is constant.
Réponse 2.3 Conservation de la quantité de mouvement, direction x:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho g = \rho \frac{Dv_x}{Dt}$$

Réponse 2.4 Conditions aux limites: - Traction sur les faces : $\sigma_{xx} = \frac{F}{A}$ - Symétrie ou libre sur les autres faces.
Réponse 2.5 En statique:

$$div(\bar{\sigma}) + \bar{f} = 0$$

Réponse 2.6 1er principe de la thermodynamique:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \bar{\sigma} : D + r - div(\bar{q})$$

- e: énergie interne par unité de masse - $\bar{\sigma} : D$: terme de puissance mécanique - r: source de chaleur volumique - $div(\bar{q})$: divergence du flux de chaleur.