Enrichissement et correction de la prise de note sur les applications linéaires :

Prise de note originale :

application linéaire :
f $^2 \to$ ^{2}
(, ,)=(+ , 2+2)
U=(x,y)
V=(x+y,2y)
(U+V)=(U)+(V)
(U+V)=((x+y, +y))
=((x, y)= (+2,) +2(+2))
= (+ + +*())
= (+2

Version enrichie et corrigée :

Définition d’une application linéaire:

Une application ‘f: E → F‘ entre deux espaces vectoriels E et F sur un corps K (par exemple, ou) est dite **linéaire** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. **Additivité:** Pour tous vecteurs u et v de E, ‘f(u + v) = f(u) + f(v)‘. 2. **Homogénéité:** Pour tout vecteur u de E et tout scalaire de K, ‘f(u) = f(u)‘.

Exemple:

L’application ‘f: ^{2} → ^{2}‘ définie par ‘f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)‘ est-elle linéaire ?

Vérification:

Soient ‘(x, y)‘ et ‘(x, y)‘ deux vecteurs de ^{2} et un réel.

Additivité:

f((x, y) + (x, y)) = f(x + x, y + y) = ((x + x) + (y + y), 2(x + x) + 2(y + y)) = (x + y + x + y, 2x + 2y + 2x + 2y) = (x + y, 2x + 2y) + (x + y, 2x + 2y) = f(x, y) + f(x, y)

Homogénéité:

$$f((x, y)) = f(x, y) = (x + y, 2x + 2y) = (x + y, 2x + 2y) = f(x, y)$$

Conclusion:

L'application 'f' est bien linéaire car elle vérifie les propriétés d'additivité et d'homogénéité.

Remarques: * La notation U = (x, y) et V = (x + y, 2y) n'est pas pertinente ici car elle ne sert pas dans la démonstration. * L'égalité (U+V)=(U)+(V) est la définition même de la linéarité et n'a pas besoin d'être démontrée. * Les calculs effectués dans la prise de note originale semblent incorrects et confus.

Enrichissements: * **Noyau et Image:** Le noyau d'une application linéaire f, noté Ker(f), est l'ensemble des vecteurs de E qui sont envoyés sur le vecteur nul de F. L'image de f, notée Im(f), est l'ensemble de tous les vecteurs de F qui sont l'image d'au moins un vecteur de E. Ces notions sont fondamentales pour étudier les applications linéaires.

* **Théorème du rang:** Pour une application linéaire f: E → F, où E est de dimension finie, on a la relation dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(E). Ce théorème est très utile pour déterminer si une application linéaire est injective, surjective ou bijective.

* **Matrices et applications linéaires:** Toute application linéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie peut être représentée par une matrice. L'étude des matrices permet d'utiliser des outils algorithmiques pour analyser les applications linéaires.