KarNote

Problème sur *Modélisation et Caractérisation d'un signal*

Un système de transmission de données utilise une sinusoidal $x(t)$ pour envoyer des informations à travers un canal de communication présentant du bruit et des distorsions. On souhaite analyser ce système à travers plusieurs perspectives: temporelles, fréquentielles, en énergie et en puissance, et par autocorrélation. Voici les éléments détaillés du problème.

1. Analyse Temporelle et Fréquentielle

(a) Soit $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$, où A est l'amplitude et f_0 la fréquence du signal. Décomposez $x(t)$ en série de Fourier.

(b) Supposons que le canal introduit un retard τ et une atténuation α. Modèle la réponse impulsionnelle du système $h(t)$ associée, et trouve l'expression temporelle de la sortie $y(t)$ du système.

(c) Utilise la transformée de Fourier pour montrer comment la fonction de transfert $H(\nu)$ modifie $X(\nu)$ dans le domaine fréquentiel.

(d) Montre comment le théorème de modulation est utilisé lorsque le signal $x(t)$ est modulé par une porteuse de fréquence f_c. Donne l'expression fréquentielle du signal modulé.

2. Énergie et Puissance du Signal

(a) Calculez l'énergie totale E_x du signal $x(t)$ sur une période T.

(b) Considérant un signal $g(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ avec $f_1 \neq f_0$, calculez la puissance moyenne P_g. Comparez-la avec P_x.

(c) Si le signal $x(t)$ contient du bruit additif $n(t)$ avec une certaine densité spectrale de puissance, comment cela affecte-t-il l'analyse en énergie et en puissance?

3. Autocorrélation et Intercorrélation

(a) Déterminez la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ du signal $x(t)$.

(b) Déterminez et interprétez la densité spectrale d'énergie (DSE) $S_x(\nu)$ à partir de $R_{xx}(\tau)$.

(c) Si le signal de sortie $y(t)$ est une version atténuée et décalée en temps de $x(t)$, déterminez l'intercorrélation $R_{xy}(\tau)$.

(d) Trouvez l'expression de la densité spectrale interspectrale $S_{xy}(\nu)$ et interprétez-la.

Éléments de Réponse

1. Analyse Temporelle et Fréquentielle

(a) La décomposition en série de Fourier de $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ est $x(t) = \frac{A}{2}\left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)$.

(b) La réponse impulsionnelle du système avec un retard τ et une atténuation α est $h(t) = \alpha\delta(t-\tau)$. La sortie du système sera $y(t) = \alpha x(t-\tau) = \alpha A\cos(2\pi f_0(t-\tau))$.

(c) La fonction de transfert $H(\nu) = \alpha e^{-j2\pi\nu\tau}$ modifie $X(\nu)$ tel que $Y(\nu) = H(\nu)X(\nu) = \alpha e^{-j2\pi\nu\tau}(A/2)[\delta(\nu-f_0)+\delta(\nu+f_0)]$.

(d) En considérant $x_c(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t)$, la transformée de Fourier correspondante $X_c(\nu) = \frac{1}{2}[X(\nu-f_c)+X(\nu+f_c)]$ déduit que $\mathbf{X}_c(\nu) = ((A/4)[\delta(\nu-(f_0+f_c))+\delta(\nu-(f_0-f_c))+\delta(\nu+(f_0+f_c))+\delta(\nu+(f_0-f_c))]$ montre la modulation.

2. Énergie et Puissance du Signal

(a) L'énergie totale du signal $E_x = \frac{A^2}{2}T$, où T est la période.

(b) La puissance moyenne de $g(t)$ $P_g = \frac{1}{2}A^2$ est identique à P_x démontrant la conservation d'énergie en l'absence de bruit.

(c) Si $n(t)$ est un bruit blanc additif avec $S_n(\nu) = N_0/2$, il augmente $S_x(\nu)$, résultatant en un E_x et $P_{Tot} = P_x + P_n$. Le bruit influence l'analyse en ajoutant une composante spectrale de puissance.

3. Autocorrélation et Intercorrélation

(a) La fonction d'autocorrélation est $R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$.

(b) La DSE est $S_x(\nu) = \frac{A^2}{4}[\delta(\nu-f_0)+\delta(\nu+f_0)]$.

(c) Pour $y(t) = \alpha x(t-\tau)$, on a $R_{xy}(\tau) = \alpha\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0(\tau-\tau)) = \alpha R_{xx}(\tau)$.

(d) La densité spectrale interspectrale $S_{xy}(\nu) = \alpha S_x(\nu)$. Ceci montre que le signal de sortie conserve la structure fréquentielle du signal d'entrée atténué par α.