Résumé détaillé du cours "Séries numériques"

Ce cours introduit les séries numériques, explore différents types de séries et leurs propriétés de convergence, et fournit des techniques pour étudier la convergence des séries.

1. Généralités sur les séries

1.1 Étude d'un exemple

Le paradoxe de Zénon illustre la notion de somme infinie. On montre que la somme des termes de la suite géométrique $(1/2)^n$ converge vers 1, introduisant ainsi l'idée de série convergente.

1.2 Définitions

- **Série de terme général u_n:** Suite (S_n) des sommes partielles, où $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
- **Convergence d'une série:** La série converge si la suite des sommes partielles converge. La limite de (S_n) est alors appelée la somme de la série.
- **Divergence d'une série:** La série diverge si la suite des sommes partielles diverge.
- **Série grossièrement divergente:** La série diverge et $\lim(u_n) \neq 0$.

On démontre le théorème : **Si la série de terme général u_n converge, alors $\lim(u_n) = 0$.** La réciproque est fausse.

Exemples

- La série harmonique $(1/n)$ diverge, bien que $1/n$ tende vers 0.
- La série de terme général $2/n$ converge.

1.3 Reste à l'ordre n d'une série convergente

Pour une série convergente de somme S, le reste à l'ordre n est $R_n = S - S_n$. On a le théorème : **Si la série de terme général u_n converge, alors la suite des restes (R_n) converge vers 0.**

1.4 Propriétés

- La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes.
- La linéarité de la somme s'applique aux séries convergentes : $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n = \sum(\lambda u_n + \mu v_n)$
- La convergence d'une série est équivalente à la convergence de la série des parties réelles et imaginaires.

1.5 Lien suites-séries. Séries télescopiques

Théorème : **La suite (u_n) et la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).** Ce théorème est utile pour les séries télescopiques, où la plupart des termes s'annulent dans la somme partielle.

2. Séries de référence

2.1 Séries géométriques

Théorème : **La série géométrique de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, sa somme vaut $1/(1-q)$.**

2.2 Séries de Riemann

Théorème : **La série de Riemann de terme général $1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.**

3. Étude des séries à termes réels positifs

3.1 Généralités

Pour une série à termes positifs, la suite des sommes partielles est croissante. Ainsi, la série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

3.2 Utilisation des relations de comparaison

Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs :
- Si $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $u_n = O(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

4. Comparaison séries-intégrales

Cette section généralise l'approche utilisée pour les séries de Riemann. On établit un lien entre la convergence d'une série et celle d'une intégrale, permettant d'étudier la convergence de séries plus générales.

5. Séries absolument convergentes

5.1 Les suites (u_n+) et (u_n-)

Définition des parties positive et négative d'une suite réelle, permettant d'étudier la convergence absolue.

5.2 Définition de la convergence absolue

Une série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

5.3 Application à la convergence d'une série

Théorème : **Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.** La réciproque est fausse.

5.4 Exemples de séries semi-convergentes

Définition: Une série semi-convergente est convergente mais pas absolument convergente.
Exemples : - La série de terme général $(-1)^{n-1}/n$ est semi-convergente.
- La série de terme général $(-1)^n/(2n+1)$ est semi-convergente.

Points importants à retenir :

- La convergence d'une série implique que le terme général tend vers 0, mais la réciproque est fausse.
- Différents types de séries ont des propriétés de convergence spécifiques (géométrique, Riemann).
- Les relations de comparaison sont des outils puissants pour étudier la convergence de séries à termes positifs.
- La convergence absolue implique la convergence, mais la réciproque est fausse.
- Il existe des séries semi-convergentes, convergentes mais pas absolument convergentes.

Le cours est illustré par de nombreux exemples et exercices pour faciliter la compréhension et l'application des concepts.