Théorie qualitative des systèmes différentiels
ECC

Abdelilah Hakim

Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Informatique
Faculté des Science et Techniques
Université Cadi Ayyad

22/04/2024

Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Considérons le système différentiel du premier ordre

$$X'(t) = f(X(t)) \qquad (1)$$

Une solution du système est une fonction $X : I \to \Omega$, qu'on notera

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

définie sur un intervalle ouvert I, dérivable en tout point de I et vérifiant, pour tout $t \in I$,

$$X'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t)) = f\left((x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\right)$$

Les solutions de (1) sont les courbes paramétrées de Ω dont les vecteurs vitesse sont donnés par le champ de vecteurs sur $\Omega : X \to f(X)$.

Trajectoires et portrait de phases

Définition

Soit $X : I \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une solution maximale du système différentiel

$$X'(t) = f(X(t))$$

Le sous-ensemble de Ω

$$X(I) = \{X(t) \mid t \in I\}$$

orienté dans le sens croissant de la variable t, est une trajectoire du système (1)

1. Une trajectoire d'un système différentiel est l'ensemble des positions prises par une solution maximale.
2. C'est une «courbe» dans l'ouvert Ω dont on a «oublié la paramétrisation», ne gardant que l'orientation.
3. Les trajectoires sont tangentes au champ de vecteurs $X \to f(X)$

Définition

Le portrait de phases d'un système différentiel est l'ensemble des trajectoires (orientées) du système

Remarques

1. Ne pas confondre la trajectoire $X(I)$ avec le graphe de la solution $X : I \to \Omega$, qui est le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \Omega$ défini par

$$\{(t, X(t)) \mid t \in I\}$$

2. Si X_0 est un point d'équilibre du système ($f(X_0) = 0$), alors $\{X_0\}$ est une trajectoire de (1) (elle correspond à la solution constante $t \to X_0$).

Exemple 1

On Considère l'équation différentielle

$$x'(t) = \frac{1}{5}x(t)$$

Il s'agit d'un cas particulier de système (1) : $n = 1, \Omega = \mathbb{R}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x/5$.

Les solutions maximales de (1) sont les fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$x(t) = Ce^{t/5}$$

pour tout $C \in \mathbb{R}$.

On peut tracer les graphes des solutions dans le repère Otx du plan et visualiser les trajectoires de (1) comme des sous-ensembles de l'axe Ox.

1. Si $C = 0, x(\mathbb{R}) = \{0\}$: la trajectoire correspondante est l'origine de l'axe Ox (le seul point d'équilibre de l'equation).
2. Pour tout $C > 0, x(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$. Les trajectoires données par toutes ces solutions sont identiques : il s'agit de la demi-droite «positive» de l'axe Ox orientée vers $+\infty$.
3. Si $C < 0$ on a $x(\mathbb{R}) =]-\infty, 0[$ et on obtient une seule et même trajectoire : la demi-droite «négative»de l'axe Ox orientée vers $-\infty$.

Il n'y a donc que trois trajectoires pour l'équation .

Exemple 2

Soit λ un réel non nul. On considère le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

1. Les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ par$(x(t), y(t)) = e^{\lambda t}(C_1, C_2)$ pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
2. L'origine est le seul point d'équilibre du système. La solution correspondante est obtenue pour $C_1 = C_2 = 0$.
3. Soit $(C_1, C_2) \neq (0,0)$ fixé, lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, le réel $e^{\lambda t}$ décrit l'intervalle $]0, +\infty[$ (dans le sens croissant si $\lambda > 0$, décroissant si $\lambda < 0$) : la trajectoire correspondante à cette solution est la demi-droite issue de l'origine passant par (C_1, C_2) (orientée vers l'infini si $\lambda > 0$ ou vers l'origine si $\lambda < 0$).

Flot d'un système différentiel

Soit $X_0 \in \Omega$ et $X : I_{X_0} \to \Omega$ la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = f(X(t)) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{2}$$

L'intervalle ouvert I_{X_0} contient 0 et $I_{X_0} = \mathbb{R}$ si la solution est globale.

On notera

$$\Phi(t, X_0) = X(t)$$

Ceci définit une application Φ sur une partie de $\mathbb{R} \times \Omega$ à valeurs dans Ω, elle s'appelle le flot du système différentiel (2).

1. Dans le cas où toute solution maximale de (S) est globale alors Φ, le flot du système, est défini sur $\mathbb{R} \times \Omega$:

$$\Phi : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \Omega$$

2. Pour tout $(t, X) \in \mathbb{R} \times \Omega$, la valeur $\Phi(t, X)$ est la position à l'instant t de la solution maximale du système (2) qui passe par X à l'instant 0. $t \to \Phi(t, X)$ est donc cette solution.
3. On note parfois $\Phi(t, X) = \Phi_t(X)$.
4. A partir de la définition, on a directement $\Phi(0, X) = X$ pour tout $X \in \Omega$. Autrement dit $\Phi_0 : \Omega \to \Omega$ est l'application identité.

Exemple 1

Les solutions maximales de l'équation

$$x'(t) = 3x(t)$$

sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = Ce^{3t}$.

Puisque $x(0) = C$, la solution qui passe par x à l'instant $t = 0$ est $t \to xe^{3t}$.

Le flot de cette equation differentiel est donné par l'application

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\Phi(t, x) = xe^{3t}$$

Exemple 2

Système differentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Les solutions maximales du système différentiel

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(x(0), y(0)) = (C_1, C_2)$: la solution passant par (x, y) à l'instant 0 s'écrit

$$t \longrightarrow xe^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + ye^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

le flot du système est l'application $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(t, (x, y)) = xe^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + ye^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemple 3

Système differentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Les solutions maximales du système différentiel sont :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{5t} \\ -e^{3t} & -3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Pour déterminer le flot $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ du système, nous devons identifier $t \to \Phi(t, (x, y))$: la solution passant par (x, y) à l'instant 0

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} x(\\ y(\end{matrix} \right.$$

et le flot est donné par

$$\Phi(t, (x, y)) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{5t} \\ -e^{3t} & -3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Point d'équilibre stable, asymptotiquement stable

*) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

*) Soit $X_0 \in \Omega$ un point d'équilibre du système différentiel

$$X'(t) = f(X(t)) \tag{3}$$

Définition

On dit que $X_0 \in \Omega$ est un point d'équilibre stable du système (4) si pour toute boule ouverte $B(X_0, \epsilon) \subset \Omega$, il existe une boule ouverte $B(X_0, \delta) \subset B(X_0, \epsilon)$ telle que, pour tout $X \in B(X_0, \delta)$:

1. $\Phi(t, X)$ est défini pour tout $t \geq 0$.
2. $\Phi(t, X) \in B(X_0, \epsilon)$ pour tout $t \geq 0$.

Définition

On dit que le point d'équilibre X_0 est instable s'il n'est pas stable : c.a.d il existe une boule ouverte $B(X_0, \epsilon) \subset \Omega$ telle que pour toute boule ouverte $B(X_0, \delta) \subset B(X_0, \epsilon)$ on peut trouver $X \in B(X_0, \delta)$ et $t > 0$ tels que $\Phi(t, X) \notin B(X_0, \epsilon)$.

Définition

Le point d'équilibre X_0 est attractif (respectivement répulsif) s'il existe une boule ouverte $B(X_0, \eta) \subset \Omega$ telle que, pour tout $X \in B(X_0, \eta)$

1. $\Phi(t, X)$ est défini pour tout $t \geq 0$ (resp. $t \leq 0$).
2. $\lim_{t \to +\infty} \Phi(t, X) = X_0$ (resp. $\lim_{t \to -\infty} \Phi(t, X) = X_0$)

On dit qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

Résolution de $X' = AX$ et portraits de phase

Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} X' & = AX, \\ X(0) & = X_0. \end{cases} \tag{4}$$

D'après les résultats de l'algèbre linéaire, on sait que A est semblable à l'une des 3 matrices B suivantes :

(i) $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ (iii) $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

On est alors ramené à résoudre

$$\begin{cases} Y' & = BY, \\ Y(0) & = Y_0. \end{cases} \tag{5}$$

où $P^{-1}AP = B$, $Y_0 = P^{-1}X_0$ et P est inversible.

Les trois cas correspondent aux 3 situations suivantes :

(i) A est diagonalisable de valeurs propres λ_1, λ_2 (réelles).

(ii) A a deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$.

(iii) A a une valeur propre réelle double λ mais n'est pas diagonalisable.

Cas (i) A est diagonalisable

Il existe P inversible telle que

$$P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

En notant $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

le système (5) est découplé en

$$\begin{cases} x' &= \lambda_1 x, & x(0) &= x_0 \\ y' &= \lambda_2 y, & y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Chaque équation admet pour unique solution maximale

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

soit

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} Y_0,$$

d'où la solution globale unique de (4) est :

$$X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} Y_0 = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

On a aussi la formulation équivalente suivante :

$$X(t) = \alpha_1 \cdot e^{\lambda_1 t} V_1 + \alpha_2 \cdot e^{\lambda_1 t} V_2$$

où V_1, V_2 sont les vecteurs propres de A associés à λ_1, λ_2 respectivement.

Portraits de phase

1. Pour Dessiner le portrait de phase du système $X' = AX$, c'est-à-dire des trajectoires dans le plan $\mathbb{R}^2$, appelé plan de phase, représentatives de solutions $t \mapsto X(t) = (x(t), y(t))$ du système.

2. Il suffit de dessiner le portrait de phase de $Y' = BY$ et de lui appliquer la transformation P.

3. distinguer 5 cas, en supposant d'abord
$\lambda_1 < \lambda_2$: (1) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, (2) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, (3) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
puis
(4) $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$ ou $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$.
et enfin
(5) $\lambda_1 = \lambda_2$.

Cas : $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Les solutions de $Y' = BY$ sont

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

* Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, on trouve la solution stationnaire $Y(t) = (0,0)$.
* Si $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0, \mathbb{R} \ni t \mapsto \left(0, \alpha_2 e^{\lambda_2 t}\right)$ décrit l'un des demi-axes de $Oy \backslash \{(0,0)\}$ (selon le signe de α_2). Puisque $\lambda_2 > 0, \|Y(t)\| \to \infty$ quand $t \to \infty$ et $\|Y(t)\| \to 0$ quand $t \to -\infty$.
* Si $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \mathbb{R} \ni t \mapsto= \left(\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, 0\right)$ décrit l'un des demi-axes de $Ox \backslash \{(0,0)\}$. Puisque $\lambda_1 < 0, \|Y(t)\| \to 0$ quand $t \to \infty$ et $\|Y(t) \to \infty$ quand $t \to -\infty$.

Si $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0, \mathbb{R} \ni t \mapsto Y(t)$ est dans un des 4 quadrants du plan (selon les signes de α_1 et α_2).
Lorsque $t \to \infty$,

$$X(t) = e^{\alpha_2 t} \left(\begin{array}{c} \alpha_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \\ \alpha_2 \end{array} \right) \approx \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right),$$

la courbe est asymptote à l'axe Oy.
Lorsque $t \to \infty$,

$$Y(t) = e^{\alpha_1 t} \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \end{array} \right) \approx \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right),$$

la courbe est asymptote à l'axe Ox.
On peut se faire une idée de la trajectoire en remarquant que, pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$,

$$y^{\lambda_1} = x^{\lambda_2}, \text{ soit } y = x^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = x^{\gamma} \text{ pour } \gamma < 0.$$

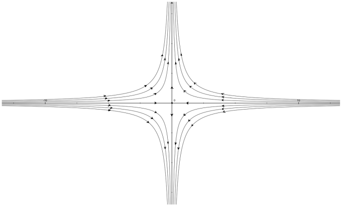


Figure – Point Selle

1. Revenons maintenant à $X' = AX$, de solution $X(t) = PY(t)$.
2. Le portrait de phase de $X' = AX$ s'obtient donc en appliquant la transformation linéaire P au portrait de phase de $Y' = BY$
3. figure 2.

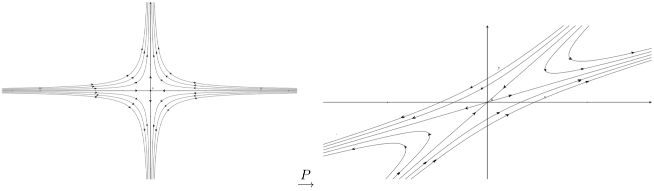


FIGURE 3.2 – P transforme $Y' = BY$ en $X' = AX$

Observons que les demi-axes trajectoires ont désormais pour vecteur directeur $V_1 = PE_1$ et $V_2 = PE_2$.

Figure – Point selle après transformation

Systèmes différentiels linéaires dans le plan

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.La matrice A est semblable à une matrice M :

$$M = P^{-1}AP$$

cette matrice est de la forme :

1. Cas 1 : Une matrice diagonale $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Cas 2 : une matrice triangulaire $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (c'est le cas si A admet une unique valeur propre réelle et elle n'est pas diagonalisable).
3. Cas 3 : Une matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $b \neq 0$ (c'est le cas si A admet deux valeurs propres non réelles $a - ib, a + ib$).

1. Pour étudier le système différentiel de matrice A il suffira d'étudier le système différentiel de matrice $M = P^{-1}AP$
2. Les trajectoires du premier sont les images par l'endomorphisme associé à P des trajectoires du deuxième
3. Cet endomorphisme préserve la nature des points d'équilibre.

Cas 1 : Le système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Soit le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Les solutions sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\mu t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $C_1 = x(0)$ et $C_2 = y(0)$, le flot du système est

$$\Phi(t,(x,y)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Cas 1.1. $\lambda = \mu = 0$

Tout $X \in \mathbb{R}^2$ est point d'équilibre (stable, non asymptotiquement stable) du système.

Cas 1.2 : Une valeur propre nulle, une valeur propre non nulle

Supposons par exemple que $\lambda \neq 0, \mu = 0$.

La matrice est donc :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont $(x(t), y(t)) = \left(C_1 e^{\lambda t}, C_2\right)$.

- Tout point de l'axe Oy est point d'équilibre du système.
- Les autres trajectoires sont les demi-droites horizontales issues des points d'équilibre.
- Les points d'équilibre sont :
    * Instables, si $\lambda > 0$.
    * Stables, non asymptotiquement stables, si $\lambda < 0$.
- Le cas $\lambda = 0, \mu \neq 0$ est analogue (changer le rôle des axes).

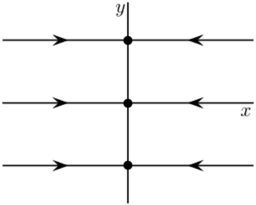


Figure – 1 : Portrait de phases du système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $avec \lambda < 0$.

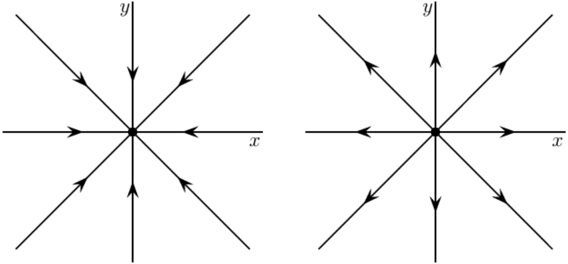
Cas 1.3 : $\lambda = \mu \neq 0$: SOLEIL

La matrice du système est :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont $(x(t), y(t)) = e^{\lambda t}\,(C_1, C_2)$.

- L'origine est le seul point d'équilibre du système.
- Les autres trajectoires sont les demi-droites issues de l'origine, orientés vers lui si $\lambda < 0$, vers l'infini sinon.
- Si $\lambda < 0$, l'origine est asymptotiquement stable, on dit qu'il est un soleil attractif.
- Si $\lambda > 0$, l'origine est instable et répulsif, on dit que c'est un soleil répulsif.



(a) Soleil attractif ($\lambda < 0$).   (b) Soleil répulsif ($\lambda > 0$)

Figure – 2 Soleil : Système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $avec \lambda \neq 0$

Cas 1.4 : Valeurs propres non nulles de signes contraires : COL

Soit le système de matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

avec, par exemple, $\lambda < 0 < \mu$
Les solutions sont

$$(x(t), y(t)) = \left(C_1 e^{\lambda t}, C_2 e^{\mu t}\right)$$

.

- L'origine est le seul point d'équilibre du système.
- Les trajectoires rectilignes du système sont les quatre demi-droites issues de l'origine sur les axes Ox et Oy (elles correspondent aux solutions où seulement l'une des constantes C_i est nulle).
- Sur l'axe Ox elles sont orientées vers l'origine (puisque $\lambda < 0$), sur Oy vers l'infini ($\mu > 0$).

- Fixons maintenant $x(0) = C_1 > 0$ et $y(0) = C_2 > 0$.

- Alors $y(t) = C_2 e^{\mu t} = C_2 \left(e^{\lambda t}\right)^{\mu/\lambda} = C_2 \left(\frac{x(t)}{C_1}\right)^{\mu/\lambda}$

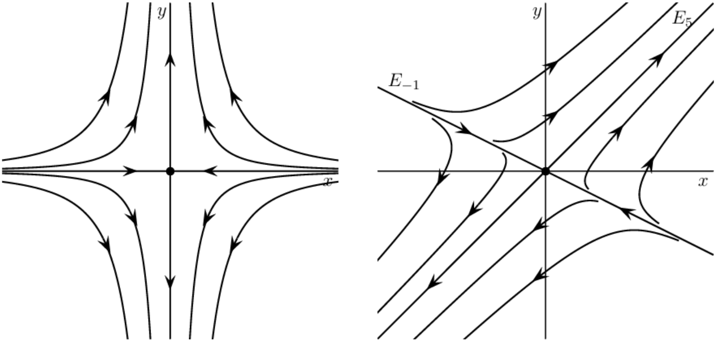
- La trajectoire correspondante est la partie du premier quadrant du plan d'équation $y = C_2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^{\mu/\lambda}$, avec $x \in]\,0, +\infty[$.

- On a $\frac{\mu}{\lambda} < 0$ ce qui détermine l'allure de la trajectoire, en particulier

$$\lim_{x \to 0^+} C_2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^{\mu/\lambda} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} C_2 \left(\frac{x}{C_1}\right)^{\mu/\lambda} = 0$$

- Pour l'orientation, on remarque que $x(t) = C_1 e^{\lambda t}$ parcourt l'intervalle $]0, +\infty[$ dans le sens décroissant car $\lambda < 0$.

- Les autres cas pour les signes de C_1 et C_2 donnent des trajectoire symétriques (par rapport à Ox, Oy ou O) de celles qu'on vient d'étudier.



(a) Matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Les espaces propres sont $E_{-1} = \mathrm{Vect}((-2,1))$ et $E_5 = \mathrm{Vect}((1,1))$.

Figure – 3 : Col

- L'origine est instable, ni attractif, ni répulsif. On dit que c'est un col.
- Le cas $\lambda > 0 > \mu$ est analogue (changer le rôle des axes).
- Dans le cas général , on retiendra que pour tracer le portrait de phases du système différentiel de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, possédant deux valeurs propres non nulles de signes contraires $\lambda < 0 < \mu$:

  1) Commencer par dessiner les droites propres de A : elles portent les quatre trajectoires rectilignes du système, qu'on orientera selon les signes des valeurs propres.
  2) Les deux droites propres sont les asymptotes des trajectoires non rectilignes : on esquisse de manière évidente l'allure de ces trajectoires.
  3) En effet, on sait que A est semblable à

  $$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

  $\left(\ M = P^{-1}AP\right)$. Par conséquent les trajectoires du système de matrice A sont les images par l'endomorphisme associé à P des trajectoires du système de matrice M.

Cas 1.5 : Valeurs propres non nulles, distinctes de même signe : NEUD

a) Signe positif : Noeud répulsif

Soit le système de matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

où, par exemple, $0 < \lambda < \mu$:

Les solutions sont $(x(t), y(t)) = \left(C_1 e^{\lambda t}, C_2 e^{\mu t}\right)$.

- L'origine est le seul point d'équilibre du système.
- Les quatre demi-droites sur les axes coordonnées sont les trajectoires rectilignes du système.Elles sont orientées vers l'infini.

Soit $x(0) = C_1 > 0$ et $y(0) = C_2 > 0$.

$$y(t) = C_2 e^{\mu t} = C_2 \left(e^{\lambda t}\right)^{\mu/\lambda} = C_2 \left(\frac{x(t)}{C_1}\right)^{\mu/\lambda}$$

La trajectoire correspondante est la partie du premier quadrant du plan d'équation

$$y = y(x) = C_2 \left(\frac{x}{C_1} \right)^{\mu/\lambda} \text{ avec } x \in \left] 0, +\infty \right[$$

avec, $\frac{\mu}{\lambda} > 1$.

Par consequent :

1) $\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0$ et la trajectoire est tangente à l'axe Ox si $x \to 0^+$.

2) Elle présente une branche infinie quand $x \to +\infty \left(\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty \right)$ qui est une branche parabolique d'axe Oy $\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty \right)$

3) La trajectoire est orientée dans le sens croissant de x puisque $\lambda > 0$.

4) Les autres cas pour les signes de C_1 et C_2 donnent des trajectoire symétriques (par rapport à Ox, Oy ou O) de celles qu'on vient d'étudier.

5) L'origine est instable et répulsif. On dit que c'est un nœud répulsif. Si $0 < \mu < \lambda$ l'étude est analogue (changer le rôle des axes).

b) Signe négatif : NCEUD ATTRACTIF

Considérons maintenant le système de matrice

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

avec $\mu < \lambda < 0$ par exemple.

*) L'allure des trajectoires est celle du cas précédent, mais l'orientation change.

*) les trajectoires sont orientées vers l'origine.

*) On se ramene au cas a) en étudiant le système de matrice $-M$.

On a pour tout $t \geq 0$

$$\|\Phi(t,(x,y))\| = \left\|\left(xe^{\lambda t}, ye^{\mu t}\right)\right\| = \sqrt{x^2\left(e^{\lambda t}\right)^2 + y^2\left(e^{\mu t}\right)^2} \leq e^{\lambda t}\sqrt{x^2+y^2} =$$

Ainsi, l'origine est attractif :

$$\lim_{t\to+\infty} \Phi(t,(x,y)) = (0,0)$$

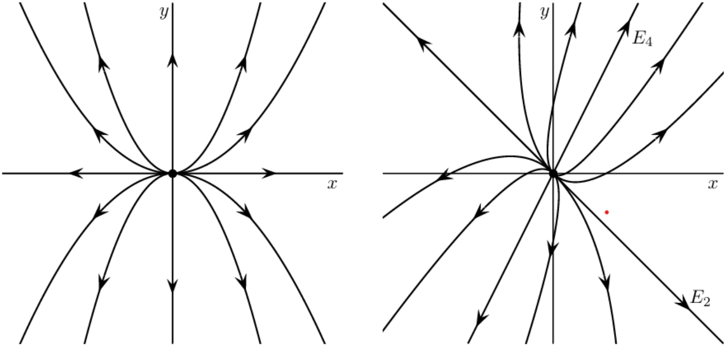
et stable car

$$\Phi_t\left(B_\epsilon(O)\right) \subset B_{e^{\lambda t}\epsilon} \subset B_\epsilon(O)$$

si $t \geq 0$.

En résumé, l'origine est asymptotiquement stable, on dit que c'est un nœud attractif.

Le cas $\lambda < \mu < 0$ est analogue (changer le rôle des axes).



(a) Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$. Les espaces propres sont $E_2 = \mathrm{Vect}((-1,1))$ et $E_4 = \mathrm{Vect}((1,2))$.

Figure – Noeud répulsif

Dans le cas général on retiendra que :

Pour donner l'allure du portrait de phases du système différentiel de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, possédant deux valeurs propres non nuls et de même signe :

1) Commencer par tracer les quatre trajectoires rectilignes du système (sur les deux droites propres de A) et les orienter selon le signe des valeurs propres.

2) Chaque trajectoire non rectiligne est tangente en $(0,0)$ à la droite propre correspondante à la valeur propre de plus petite valeur absolue , elle présente une branche parabolique dont l'axe est l'autre droite propre.

Cas 2 : Le système de matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Considérons maintenant le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Les solutions sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda t} + & C_2 t e^{\lambda t} \\ y(t) = & C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Comme $x(0) = C_1$ et $y(0) = C_2$ le flot du système est défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ par

$$\Phi(t,(x,y)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Cas 2.1 : $\lambda = 0$

Les solutions sont
$$(x(t), y(t)) = (C_1 + C_2 t, C_2)$$

.

1) Les points d'équilibre du système sont les points de l'axe Ox.

2) Les autres trajectoires du système sont les droites $y = C_2$, pour tout $C_2 \neq 0$.

3) Tous les points d'équilibre sont instables.

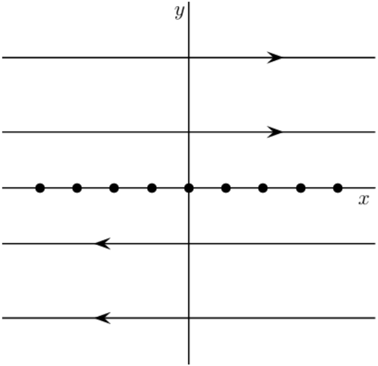


Figure – Portrait de phases du système de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cas 2.2 : $\lambda \neq 0$. NEUD IMPROPRE

*) L'étude des cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$ est analogue

*) Il ne suffit pas d'inverser l'orientation des trajectoires pour passer d'un portrait de phases à l'autre

*) Le champ de vecteurs du système donné par la matrice correspondante à λ n'est pas l'opposé du champ donné par la matrice correspondante à $-\lambda$.

Cas 2.2 : a) $\lambda > 0$ NEUD IMPROPRE REPULSIF

- L'origine est le seul point d'équilibre du système.
- Les deux demi-droites issues de O sur l'axe Ox sont les trajectoires rectilignes du système $(C_2 = 0)$. Elles sont orientées vers l'infini.

Fixons maintenant $y(0) = C_2 > 0$ et $x(0) = C_1$.

Puisque $y(t) = C_2 e^{\lambda t}$, il vient $e^{\lambda t} = \dfrac{y(t)}{C_2}$ et $\lambda t = \ln\left(\frac{y(t)}{C_2}\right)$.

Par conséquent,

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = C_1 \frac{y(t)}{C_2} + C_2 \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{y(t)}{C_2}\right) \frac{y(t)}{C_2}$$

et la trajectoire correspondante est la partie du plan d'équation

$$x = x(y) = \left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda} \ln\left(\frac{y}{C_2}\right)\right) \frac{y}{C_2} \text{ avec } y \in \left]\, 0, +\infty\right[$$

orientée dans le sens croissant de y $\Big($car $y(t) = C_2 e^{\lambda t}$ décrit $]0, +\infty[$ dans le sens croissant).

On remarque alors que :

1) La fonction $x = x(y)$ présente une branche infinie si $y \to +\infty$ ($\lim_{y\to+\infty} x(y) = +\infty$).

   Il s'agit d'une branche parabolique d'axe Ox ($\lim_{y\to+\infty} x(y)/y = +\infty$).

2) On a $\lim_{y\to 0^+} x(y) = 0^-$et la trajectoire est tangente à Ox si $y \to 0^+$ ($\lim_{y\to 0^+} x(y)/y = -\infty$).

3) L'étude si $C_2 < 0$ est analogue.

4) L'origine est instable et répulsif, on dit que c'est un nœud impropre répulsif.

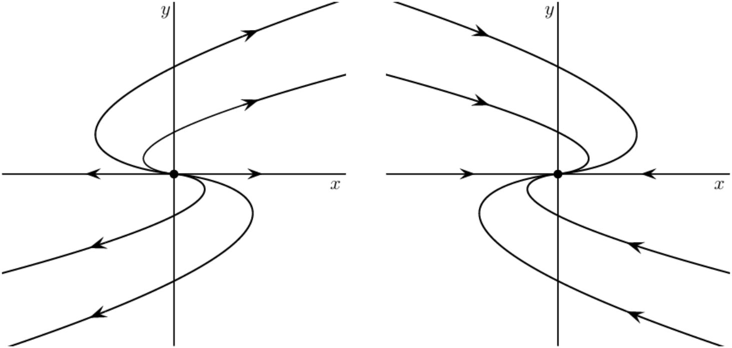
Cas 2.2 : b) $\lambda < 0$. NEUD IMPROPRE ATTRACTIF

L'étude des trajectoires est analogue, l'orientation change :

*) Toutes les trajectoires sont orientées vers l'origine.

*) L'origine est donc un point d'équilibre attractif

*) On peut montrer qu'il est aussi stable.



(a) Répulsif. Matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. (b) Attractif. Matrice $\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

Figure – Noeud impropre

Dans le cas général :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possédant une unique valeur propre $\lambda \neq 0$ mais non diagonalisable.

A est semblable à

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$(M = P^{-1}AP, \lambda \neq 0)$

Pour tracer le portrait de phases du système de matrice A :

1) Dessiner D, la droite propre de A (elle porte les deux trajectoires rectilignes du système).

2) Les trajectoires non rectilignes sont tangentes en $(0,0)$ à la droite propre D, elles présentent une branche parabolique dont l'axe est cette droite propre.

Cas 3 : Le système de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$

Soit le système différentiel :

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

avec $b \neq 0$.

Il est utile ici d'identifier le plan $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$

$$(x, y) \longleftrightarrow z = x + iy$$

ce qui induit le changement de fonction inconnue

$$(x(t), y(t)) \longleftrightarrow z(t) = x(t) + iy(t)$$

D'après la définition de la dérivée d'une fonction de variable réelle à valeurs complexes

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

.

Par conséquent, l'identification fait correspondre $(x'(t), y'(t))$ à $z'(t)$.

Remarquons aussi que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow (ax - by) + i(bx + ay) = (a + ib)(x + iy) = (a + ib)z$$

Le système différentiel s'écrit :

$$z'(t) = (a + ib)z(t)$$

Les solutions sont les fonctions $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définies par

$$z(t) = Ke^{(a+ib)t}$$

pour tout $K \in \mathbb{C}$.

Si $K = C_1 + iC_2$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$z(t) = (C_1 + iC_2)\, e^{at} e^{ibt} = (C_1 + iC_2)\, e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

$$= \underbrace{e^{at}\,(C_1 \cos bt - C_2 \sin bt)}_{x(t)}$$

$$+\, i\, \underbrace{e^{at}\,(C_1 \sin bt + C_2 \cos bt)}_{y(t)}$$

Les solutions du système sont :

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}\left(C_1 \cos bt - C_2 \sin bt\right) \\ y(t) = e^{at}\left(C_1 \sin bt + C_2 \cos bt\right) \end{cases}$$

Puisque $x(0) = C_1$ et $y(0) = C_2$, le flot du système est :

$$\Phi(t,(x,y)) = e^{at}\begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x+iy)e^{(a+ib)t}$$

pour tout $(t,(x,y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Cas 3.1 $a = 0$: CENTRE

- L'origine est le seul point d'équilibre du système.
- Les trajectoires du système sont les cercles centrés en $(0, 0)$
- Elles sont orientées dans le sens trigonométrique si $b > 0$, dans le sens horaire si $b < 0$.
- L'origine est stable, ni attractif, ni répulsif. On dit que c'est un centre.

Dans le cas général :

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres $\pm ib$, avec $b \neq 0$, alors elle est semblable à la matrice

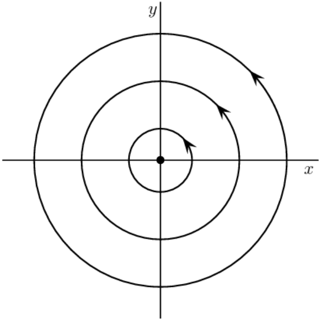
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$(M = P^{-1}AP)$

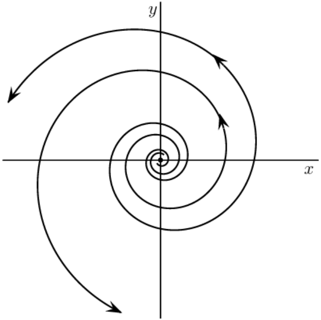
Dans ce cas :

- Les trajectoires du système différentiel de matrice A sont des ellipses centrées en $(0,0)$ (les images par l'endomorphisme f_P des cercles centrés en $(0,0)$).

- Le sens de rotation est préservé si f_P conserve l'orientation $(\det(P) > 0$).



(a) Centre. Matrice $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ (ici $b > 0$: sens de rotation direct).



(b) Foyer. Matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Ici $a = 0.2 > 0$ (foyer répulsif) et $b = 1 > 0$ (sens de rotation direct).

Figure – Centre et foyer repulsif

Cas 3.2. $a \neq 0$: FOYER

*) L'origine est le seul point d'équilibre du système.

*) $t \to Ke^{ibt}$ parcourt le cercle centré en $(0, 0)$ de rayon $|K|$:

- Si $a < 0, e^{at} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ et $z(t)$ tend vers l'origine en spiralant.
- Si $a > 0, e^{at} \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$ et $z(t)$ s'éloigne de l'origine ($\|z(t)\| \to +\infty$) en spiralant.

Mis à part le point d'équilibre, toutes les trajectoires sont des spirales :

- Si $a < 0$ l'origine est stable et attractif. En effet :
  - $|z(t)| = e^{at}|k|$, autrement dit $\|\Phi(t,(x,y))\| = e^{at}\|(x,y)\|$
  - Donc
$$\Phi_t\left(B_\epsilon((0,0))\right) \subset B_{e^{at}\epsilon}((0,0))$$
  - On dit que l'origine est un foyer attractif.

- Si $a > 0$ l'origine est instable et répulsif, on dit que c'est un foyer répulsif.

En conclusion :

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres $a \pm ib$, avec a et b non nuls, alors elle est semblable à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$(M = P^{-1}AP)$. Dans ce cas :

- Les trajectoires du système différentiel de matrice A sont des spirales orientés vers l'origine si $a < 0$ où vers l'infini si $a > 0$.
- Il s'agit des images par l'endomorphisme f_P des spirales du système de matrice M
- Le signe de b détermine le sens de rotation pour les spirales du système de matrice M.
- Le signe sera préservé si f_P conserve l'orientation.

Le portrait de phases de $X'(t) = AX(t)$ à partir de trace (A) et $\det(A)$

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Le polynôme caractéristique de A s'écrit

$$P_A(x) = x^2 - \text{trace}(A)x + \det(A)$$

.

- Le discriminant est $\Delta = \text{trace}(A)^2 - 4\det(A)$.
- Caractériser à partir des valeurs de Δ, trace (A) et $\det(A)$ tous les cas étudiés précédemment pour le système différentiel

$$X'(t) = AX(t)$$

- Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.

La discussion s'articule sur le signe du discriminant :

a) $\Delta > 0$.
La matrice A possède deux valeurs propres réelles $\lambda \neq \mu$. Elle est diagonalisable et semblable à

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Par conséquent trace $(A) = \lambda + \mu$ et $\det(A) = \lambda\mu$.

a.1) $\det(A) < 0$.

Les valeurs propres sont de signe opposé : l'origine est un col(cas 1.4).

a.2) $\det(A) > 0$.

Les valeurs propres sont de même signe :

- Positif si trace $(A) > 0$: l'origine est un nœud répulsif(cas 1.5a)
- Négatif si trace $(A) < 0$: l'origine est un nœud attractif(cas 1.5b)

a.3) $\det(A) = 0$.

Une valeur propre est nulle, l'autre non nulle (cas 1.2)

b) $\Delta = 0$.

La matrice A possède une unique valeur propre réelle λ.

b.1) $A = \lambda I$

- Si $\lambda = 0$ nous sommes dans le Cas 1.1.
- Si $\lambda < 0$, l'origine est un soleil attractif (Cas 1.3).
- Si $\lambda > 0$, l'origine est un soleil répulsif (Cas 1.3).

b.2) $A \neq \lambda I$.
La matrice A n'est pas diagonalisable, elle est donc semblable à

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Par conséquent trace $(A) = 2\lambda$.

- Si trace$(A) = 0$ nous sommes dans le Cas 2.1.
- Si trace$(A) < 0$ l'origine est un nœud impropre attractif (Cas 2.2 b))
- Si trace$(A) > 0$ l'origine est un nœud impropre répulsif (Cas 2.2 a))

c) $\Delta < 0$

La matrice A possède deux valeurs propres non réelles $a - ib, a + ib (b \neq 0)$. Elle est semblable à

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Par conséquent trace $(A) = 2a$.

c.1) Si trace$(A) = 0$ l'origine est un centre (Cas 3.1).

c.2) Si trace $(A) \neq 0$ nous sommes dans le Cas 3.2, l'origine est un :

- Foyer attractif si trace$(A) < 0$.
- Foyer répulsif si trace $(A) > 0$.