Mécanique des Milieux Continus
–
Équations fondamentales

Adnane BOUKAMEL

adnane.boukamel@centrale-casablanca.ma

Plan du cours

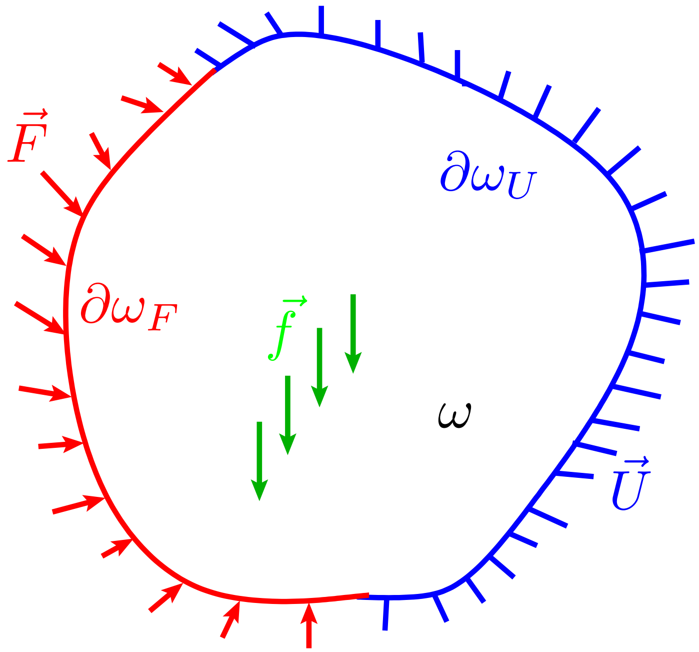
- Calcul tensoriel
- Cinématique des milieux continus
  - Généralités
  - Description de Lagrange
  - Description d'Euler
- Efforts dans les milieux continus
  - Représentations des efforts extérieurs
  - Représentations des efforts intérieurs
- Lois de conservations - Equations fondamentales

Modélisation des efforts dans un milieu continu

- Représentation des efforts extérieurs
- Représentation des efforts intérieurs
  - Forces de cohésions ; vecteur contrainte
  - Tenseur des contraintes
  - Interprétation physique des contraintes
  - Étude locale des contraintes

Représentation des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs résument les effets mécaniques, autres que cinématiques, exercés sur le milieu considéré.



- $\partial\omega = \partial\omega_F \cup \partial\omega_U$
- $\emptyset = \partial\omega_F \cap \partial\omega_U$

- forces volumiques :

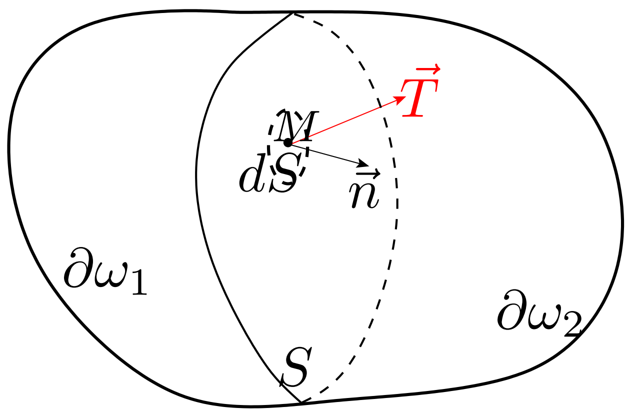
$$\vec{f}(N/m^3)$$

- forces surfaciques :

$$\vec{F}(N/m^2 = Pa)$$

Efforts intérieurs:

Forces de cohésion



On partitionne le domaine ω en: ω_1 et ω_2 via S

Les efforts extérieurs appliqués à ω_1 sont:

- les efforts extérieurs agissant sur la partie ω_1 ;
- les actions de ω_2 sur ω_1

Les efforts exercés par ω_2 sur ω_1 sont les **efforts de cohésion interne**; leur densité surfacique est notée $\vec{T}$.

Hypothèse:

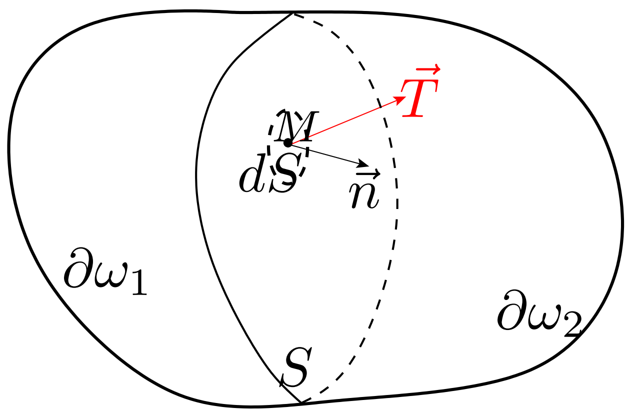
Soit $\vec{n}$ la normale unitaire à un élément dS de S.

La densité surfacique $\vec{T}$ ne dépend que du point M et de la direction $\vec{n}$:

$$\vec{T} = \vec{T}(M, \vec{n})$$

Efforts intérieurs:

Vecteur contraintes



Le vecteur $\vec{T}(M, \vec{n})$ est appelé **vecteur contraintes** en M pour la direction $\vec{n}$

Principe d'action-réaction:
La densité d'efforts de cohésion exercés par ω_1 sur ω_2 en M à travers dS est égale à l'opposé de la densité d'efforts exercés par ω_2 sur ω_1 en M à travers dS :

$$\boxed{\vec{T}(M, \vec{n}) = -\vec{T}(M, -\vec{n})}$$

Efforts intérieurs:

Tenseur des contraintes

Problème :

Afin de connaître l'état du milieu continu, il nous faut connaître $\vec{T}$:

- en tout point M de ω
- et dans toutes les directions $\vec{n}$ pour tous ces points !!!!!

Théorème de Cauchy :

En tout point M et à chaque instant t, la dépendance de $\vec{T}$ par rapport à $\vec{n}$ est linéaire.

Il existe donc un tenseur d'ordre 2, $\bar{\bar{\sigma}}$ tel que, pour tout M et pour tout t, on ait :

$$\boxed{\boxed{\vec{T}(M,\vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}}(M) \cdot \vec{n}}}$$

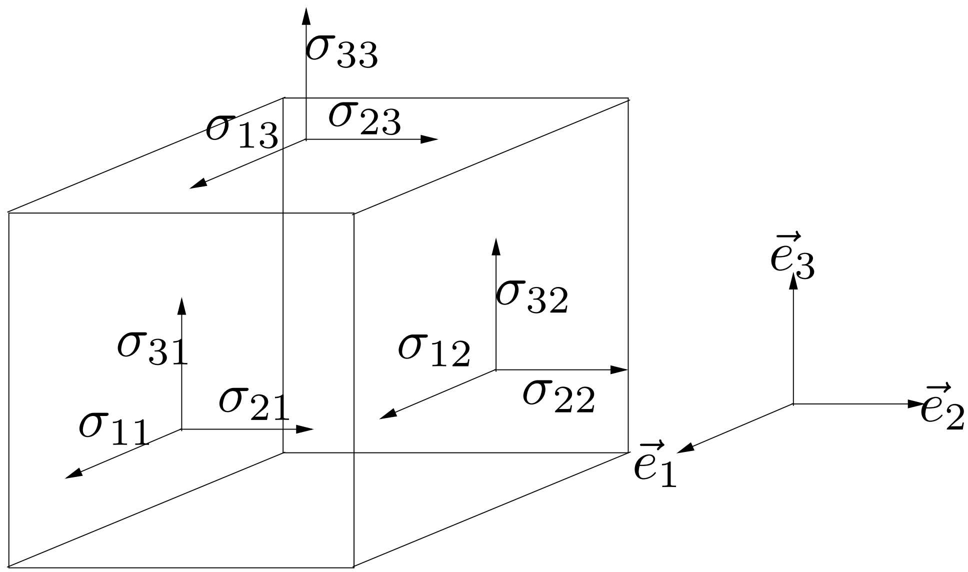
$\bar{\bar{\sigma}}$ est le **tenseur des contraintes de Cauchy**, ce tenseur est symétrique.

Efforts intérieurs:

Interprétation physique des contraintes

Si on représente $\bar{\bar{\sigma}}$ et $\vec{n}$ dans la base orthonormée

$$\vec{T} = \sigma_{ij} n_j \vec{e}_i$$



La composante σ_{ij} représente la composante, selon la direction $\vec{e}_i$ du vecteur contrainte sur la facette de normale $\vec{e}_j$.

$\boxed{\sigma_{ij} \text{ est homogène à une pression (Unité: } N/m^2 = Pa\text{)}}$

Efforts intérieurs:

Etude locale des contraintes

Autour d'un particule M, considérons une facette de normale $\vec{n}$.
On peut décomposer le vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$ sur cette facette, comme suit:

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = T_n\vec{n} + \vec{T}_t$$

avec

$$T_n = \vec{n}\cdot\vec{T} = \vec{n}\cdot\bar{\bar{\sigma}}\cdot\vec{n}, \qquad \vec{T}_t = \vec{T} - T_n\vec{n}$$

- T_n (souvent noté σ) est la contrainte normale sur la facette (Si $\sigma \geq 0$ elle est de Traction, si $\sigma \leq 0$ elle est de Compression)
- La norme du vecteur tangent à la facette $\vec{T}_t$ répresente la contrainte tangentielle (noté parfois τ) sur cette facette:

$$|\tau| = \|\vec{T}_t\| = \left(\|\vec{T}\|^2 - T_n^2\right)^{1/2}$$

Efforts intérieurs:

Etude locale des contraintes

Le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ est symétrique,il admet donc trois valeurs propres et trois vecteurs propres associés.
Ces trois directions sont appelées directions principales de contraintes.
Les valeurs propres, notées σ_i, sont appelées contraintes principales.
Elles sont solutions de:

$$P(\lambda) = det\left(\bar{\bar{\sigma}} - \lambda \bar{\bar{I}}\right) = J_3 - \lambda J_2 + \lambda^2 J_1 - \lambda^3 = 0$$

On définit ainsi les invariants de contraintes:

$$\begin{cases} J_3\left(\bar{\bar{\sigma}}\right) = det\bar{\bar{\sigma}} \\ J_2\left(\bar{\bar{\sigma}}\right) = \dfrac{1}{2}\left[(trace\bar{\bar{\sigma}})^2 - trace\bar{\bar{\sigma}}^2\right] \\ J_1\left(\bar{\bar{\sigma}}\right) = trace\bar{\bar{\sigma}} \end{cases}$$

Efforts intérieurs:

Etude locale des contraintes

On décompose le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}^S + \bar{\bar{\sigma}}^D$$

avec

- La contrainte sphérique:

$$\bar{\bar{\sigma}}^S = \frac{1}{3} trace \bar{\bar{\sigma}} \bar{\bar{1}}$$

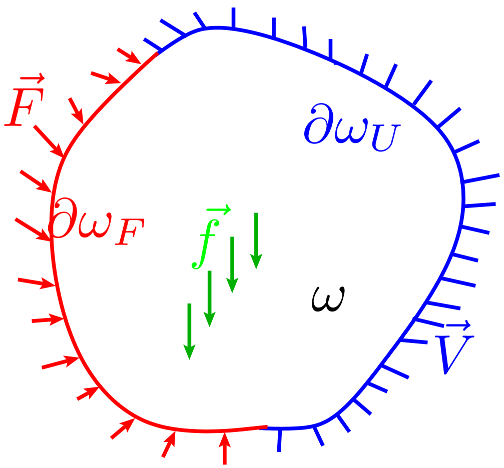
- La contrainte déviatorique:

$$\bar{\bar{\sigma}}^D = \bar{\bar{\sigma}} - \bar{\bar{\sigma}}^S$$

Lois de conservation
Equations fondamentales

- Position du problème physique
- Conservation de la masse, Equation de continuité
- Equations fondamentales de la mécanique
  - Conservation de la quantité de mouvement
  - Equations d'équilibre local
- Conservation de l'énergie.

Position du problème physique



On considère un milieu continu occupant le domaine ω, de frontière $\partial\omega = \partial\omega_F \cup \partial\omega_U$ ($\partial\omega_F \cap \partial\omega_U = \emptyset$).

Le système considéré est soumis:

- un champ de vitesse imposé $\vec{V}$ sur $\partial\omega_U$;
- des forces volumiques $\vec{f}$ dans ω;
- des forces surfaciques $\vec{F}$ sur $\partial\omega_F$

Problème:

Déterminer le champ de vitesses $\vec{v}$ et le champ de contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ en tout point de ω et à chaque instant $t > 0$

Pour cela, on utilise deux types d'équations:

- les équations de conservation;
- les équations constitutives.

Conservation de la masse:

Equation de continuité

Soient $\rho(\vec{x},t)$ la densité volumique de masse et $\vec{v}(\vec{x},t)$ la vitesse au point $\vec{x}$, à l'instant t.
La conservation de la masse pour tout sous-domaine $\mathcal{D} \subset \omega$, s'écrit en évaluant la dérivée particulaire:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\mathcal{D}} \rho(\vec{x},t)\,dv = \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho div\vec{v}\right) dv = 0$$

De façon locale, on obtient l'équation de continuité du milieu continu:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho div\vec{v} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,(\rho\vec{v}) = 0 \quad \forall t, \quad \forall\vec{x} \in \omega$$

Remarque:
Pour un milieu incompressible, l'équation de continuité s'écrit:

$$div\vec{v} = 0 \quad \forall t, \quad \forall\vec{x} \in \omega$$

Equations fondamentales:

Conservation de la quantité de mouvement

La variation du torseur cinétique est, pour un domaine $\mathcal{D}$ quelconque, égale à la somme des torseurs des efforts extérieurs exercés sur $\mathcal{D}$:

$$\forall \mathcal{D} \subset \omega \begin{cases} \dfrac{D}{Dt} \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \rho \vec{v} dv = \iint_{\partial \mathcal{D}} \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} ds + \iiint_{\mathcal{D}} \vec{f} dv \\ \\ \dfrac{D}{Dt} \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \vec{x} \wedge \rho \vec{v} dv = \iint_{\partial \mathcal{D}} \vec{x} \wedge (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}) ds + \iiint_{\omega} \vec{x} \wedge \vec{f} dv \end{cases}$$

A partir de la seconde équation, on démontre que le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}\,(\vec{x}, t)$ est symétrique.

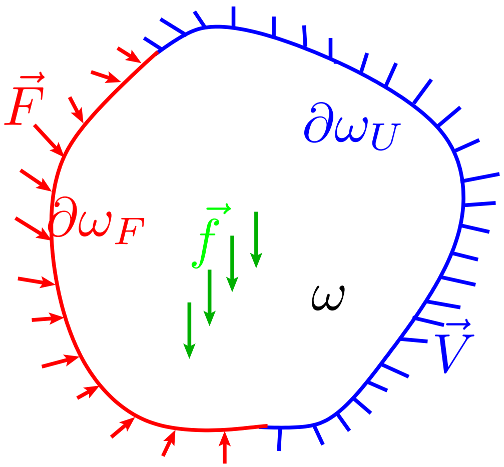
Quant à la première équation,elle conduite à:

$$\vec{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} + \vec{f} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad \forall t, \quad \forall \vec{x} \in \omega$$

C'est l'équation d'équilibre local.

Equations fondamentales:

Equations du mouvement



Reconsidérons notre milieu continu occupant le domaine ω, de frontière $\partial\omega = \partial\omega_F \cup \partial\omega_U$ ($\partial\omega_F \cap \partial\omega_U = \emptyset$) et soumis:

- aux forces volumiques $\vec{f}$ dans ω,
- aux forces surfaciques $\vec{F}$ sur $\partial\omega_F$
- au champ de vitesse imposé $\vec{V}$ sur $\partial\omega_U$.

Les équations du mouvement *(ou d'équilibre)* du milieu continu sont:

$$\forall t > 0 \qquad \begin{cases} \vec{\mathrm{div}}\,\bar{\bar{\sigma}} + \vec{f} = \rho \dfrac{D\vec{v}}{Dt} & \forall \vec{x} \in \omega \\ \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{F} & \forall \vec{x} \in \partial\omega_F \\ \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{R} & \forall \vec{x} \in \partial\omega_U \end{cases}$$

$\vec{R}$ étant la réaction surfacique au déplacement imposé sur $\partial\omega_U$

Equations fondamentales:

Equations d' équilibre statique

En statique,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = 0$$

et les équations d'équilibre du milieu continu deviennent:

$$\forall t > 0 \qquad \begin{cases} \vec{\mathrm{div}}\bar{\bar{\sigma}} + \vec{f} = 0 & \forall \vec{x} \in \omega \\ \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{F} & \forall \vec{x} \in \partial\omega_F \\ \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{R} & \forall \vec{x} \in \partial\omega_U \end{cases}$$

Conservation de l'énergie:

Premier principe de la thermodynamique

La variation de l'énergie totale (énergie cinétique et énergie interne) est, pour un domaine $\mathcal{D}$ quelconque, égale à la somme du travail des efforts extérieurs exercés sur $\mathcal{D}$ et de la quantité de chaleur apportée à $\mathcal{D}$:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{\mathcal{D}}\left[\rho e+\frac{1}{2}\rho\|\vec{v}\|^2\right]dv=\iiint_{\mathcal{D}}\vec{f}\cdot\vec{v}dv+\iint_{\partial\mathcal{D}}(\bar{\bar{\sigma}}\cdot\vec{n})\cdot\vec{v}ds+Q$$

$$\forall\mathcal{D}\subset\omega$$

Avec:

- e, la densité spécifique de l'énergie interne
- Q, le taux de chaleur apportée à $\mathcal{D}$:

$$Q=\iiint_{\mathcal{D}}rdv-\iint_{\partial\mathcal{D}}\vec{q}\cdot\vec{n}ds$$

Conservation de l'énergie:

Equation locale de conservation

En utilisant les formules de dérivation particulaire est le équations d'équilibre, on obtient la forme locale de la conservation de l'énergie:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{D}} + r - div\vec{q} \qquad \forall t, \qquad \forall \vec{x} \in \omega$$

Avec:

$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} \left[\bar{\bar{\text{grad}}}\vec{v} + \bar{\bar{\text{grad}}}^T \vec{v} \right]$$

Ou encore:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma_{ij} v_{i,j} + r - q_{i,i} \qquad \forall t, \qquad \forall \vec{x} \in \omega$$