KarNote

Votre prise de note contient des éléments intéressants, mais elle manque de structure et de précision. Voici une version enrichie et corrigée, incluant des informations importantes et des exemples pour une meilleure compréhension.

I. Applications Linéaires : Définition et Propriétés

1. Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K (par exemple, K = ou K =).
Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- **Additivité :** Pour tous vecteurs u, v E, on a f(u + v) = f(u) + f(v).
- **Homogénéité :** Pour tout vecteur u E et tout scalaire K, on a f(u) = f(u).

Ces deux propriétés peuvent être combinées en une seule :

- Pour tous vecteurs u, v E et scalaires , K, on a f(u + v) = f(u) + f(v).

Remarques Importantes :

- Une application linéaire **préserve les combinaisons linéaires**.
- L'image du vecteur nul est toujours le vecteur nul : **f(0E) = 0F**.
- Les applications linéaires transforment les droites en droites ou en points.

2. Exemples

- **Applications linéaires dans ^{2}:**

  L'application f : ^{2} → ^{2} définie par f(x, y) = (x + y, 2x + 2y) est linéaire.

  Vérification :

  Soient (x1, y1), (x2, y2) ^{2} et .

  f((x1, y1) + (x2, y2)) = f(x1 + x2, y1 + y2) = ((x1 + x2) + (y1 + y2), 2(x1 + x2) + 2(y1 + y2)) = (x1 + y1, 2x1 + 2y1) + (x2 + y2, 2x2 + 2y2) = f(x1, y1) + f(x2, y2)

  f((x1, y1)) = f(x1, y1) = (x1 + y1, 2x1 + 2y1) = (x1 + y1, 2x1 + 2y1) = f(x1, y1)

- **Autres exemples:**
  - La fonction identité idE : E → E, idE(x) = x.
  - La multiplication par un scalaire : f : E → E, f(x) = x.
  - La dérivation : f : P() → P(), f(p) = p', où P() est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

3. Matrice Associée à une Application Linéaire

Soit f : n → m une application linéaire. Soit B = (e1, ..., en) une base de n et C = (f1, ..., fm) une base de m. La matrice A associée à f dans les bases B et C est la matrice dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de f(ej) dans la base C.
Exemple :
Reprenons l'application f : ^{2} → ^{2} définie par f(x, y) = (x + y, 2x + 2y). Dans la base canonique de ^{2}, la matrice associée à f est :

```
M =
| 1  1 |
| 2  2 |
```

Car f(1, 0) = (1, 2) et f(0, 1) = (1, 2).

II. Noyau et Image d'une Application Linéaire

1. Définitions

Soit f : E → F une application linéaire.

- Le **noyau** de f, noté Ker(f), est l'ensemble des vecteurs de E qui sont envoyés sur le vecteur nul de F :

  Ker(f) = x E — f(x) = 0F.

- L'**image** de f, notée Im(f), est l'ensemble de tous les vecteurs de F qui sont l'image d'un vecteur de E :

  Im(f) = f(x) — x E.

2. Propriétés

- **Ker(f) est un sous-espace vectoriel de E.**
- **Im(f) est un sous-espace vectoriel de F.**
- **f est injective si et seulement si Ker(f) = {0E}.**
- **f est surjective si et seulement si Im(f) = F.**

III. Théorème du Rang

Enoncé : Soit f : E → F une application linéaire, où E est un espace vectoriel de dimension finie. Alors :
dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)).
Conséquences :

- **Si f est injective, alors dim(Im(f)) = dim(E).**
- **Si f est surjective, alors dim(Im(f)) = dim(F).**
- **Si dim(E) = dim(F) et f est injective, alors f est surjective (et donc bijective).**
- **Si dim(E) = dim(F) et f est surjective, alors f est injective (et donc bijective).**

IV. Types Particuliers d'Applications Linéaires

1. Isomorphisme

Une application linéaire $f : E \to F$ est un **isomorphisme** si elle est bijective. Dans ce cas, l'application réciproque $f^{1} : F \to E$ est aussi linéaire.

2. Endomorphisme

Une application linéaire $f : E \to E$ (de E dans lui-même) est appelée **endomorphisme** de E.

3. Automorphisme

Un endomorphisme bijectif est appelé **automorphisme**.

V. Familles d'Applications Linéaires

- **Projections :** Une projection est une application linéaire idempotente ($f^2 = f$). Elle "projette" les vecteurs sur un sous-espace vectoriel parallèlement à un autre.
- **Symétries :** Une symétrie est une application linéaire involutive ($f^2 = id$). Elle "renverse" les vecteurs par rapport à un sous-espace vectoriel parallèlement à un autre.
- **Homothéties :** Une homothétie est une application linéaire qui "dilate" ou "contracte" les vecteurs par rapport à un point fixe.
- **Rotations :** Une rotation est une application linéaire qui "tourne" les vecteurs d'un certain angle autour d'un point fixe (dans le plan) ou d'un axe (dans l'espace).

VI. Conclusion

Les applications linéaires sont des objets mathématiques fondamentaux qui apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques et de leurs applications. Le fait qu'elles préservent les combinaisons linéaires les rend particulièrement utiles pour étudier les espaces vectoriels et résoudre des équations linéaires.
N'hésitez pas à me poser d'autres questions si vous souhaitez approfondir un point particulier !