Optimisation TD 1

Centrale Casablanca, 2023-2024

18 avril 2024

Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

   (a) Montrer que f admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur non nul au point $(0,0)$,

   (b) Monter que f mais n'est pas différentiable en $(0,0)$

2. Prenons $U = \mathbb{R}^2, F = \mathbb{R}$ et f définie par $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Étudions f au point $(0,0)$.

Exercice 2 : Application bilinéaire continue

1. Soit E, F et G des espaces normés et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Alors B est continue si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F, \|B(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\|$. Dans ce cas B est différentiable dans $E \times F$ et pour tout $(x,y) \in E \times F, DB(x,y)$ est l'application linéaire continue de $E \times F$ dans G donnée par

$$(h,k) \mapsto DB(x,y) \cdot (h,k) = B(x,k) + B(h,y)$$

2. Soit E un espace normé et $L(E)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans E. Étudier l'application $B : L(E) \times L(E) \to L(E)$ définie par $(u,v) \mapsto u \circ v$
3. Si E est muni d'un produit scalaire $E \times E \to \mathbb{R}$ noté $\langle x,y \rangle$ et si la norme sur E est la norme associée : $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$, Étudier l'application $B : E \times E \to \mathbb{R}$, $B(x,y) = \langle x,y \rangle$

Exercice 3 :

Soient $f, g \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\to \left(f\left(x^2 y, z^2 x\right), g\left(x^y, zx\right)\right) \end{aligned}$$

Calculer, si elle existe, la différentielle de φ.

Exercice 4 : Fonction quadratique

On considère la fonction quadratique $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, donné par

$$f(x) = (1/2)x^T Px + q^T x + r$$

avec $P \in \mathbf{S}^n$, ensemble des matrices symétriques d'ordre n, $q \in \mathrm{R}^n$, et $r \in \mathrm{R}$.

1. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de f
2. Donner une condition pour que f soit convexe.
3. En déduire que la fonction $d_{\mathrm{y}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathrm{x} \mapsto \|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2$ est strictement convexe pour tout $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 5

1. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de fonctions convexes de $U \subset V \to \mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $\sup_{i\in I} f_i$ est convexe.
2. Montrer l'inégalité de Young : $\forall a, b > 0, \forall p, q \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$
3. Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall (\lambda_i)_{1\leq i\leq p} \in (\mathbb{R}^+)^p \text{ t. q. } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \forall (x_i)_{1\leq i\leq p} \in (\mathbb{R}^n)^p, \quad f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

Exercice 6 : Fonction log-sum-exp

On considère Ia fonction suivante : $f(x) = \log(e^{x_1} + \cdots + e^{x_n})$ définie sur $\mathbf{R}^n$.

1. Montrer que la Hessienne de f est donnée par

$$\nabla^2 f(x) = \frac{1}{(1^T z)^2}\left(\left(1^T z\right)\operatorname{diag}(z) - zz^T\right),$$

où $z = (e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$

2. Montrer que

$$v^T \nabla^2 f(x) v = \frac{1}{(1^T z)^2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i z_i\right)^2\right).$$

3. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(a^T a\right)\left(b^T b\right) \geq \left(a^T b\right)^2$$

appliquée aux vecteurs $a_i = v_i\sqrt{z_i}, b_i = \sqrt{z_i}$ montrer que Ia fometion f est convexe.

Exercice 7

On dit qu'une fonction $\psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est monotone si pour tout $x, y \in \operatorname{dom} \psi$,

$$(\psi(x) - \psi(y))^T (x - y) \geq 0$$

On suppose que $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est comvexe et differentiable.

1. Montrer que le gradient ∇f est monotone.

2. Soit la fonction suivante :

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1/2 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

   (a) Montrer que ψ est monotone

   (b) Montrer qu'il n'e xiste pas de fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ telle que $\psi(x) = \nabla f(x)$,