Un bref résumé - 1 -

Khalid Dahi

Khalid.dahi@centrale-casablanca.ma

École Centrale Casablanca

Centrale

CASABLANCA

Modélisation et Caractérisation d'un signal

- Cas des fonctions périodiques : fonctions f_p telles que

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_p(t)^2 dt < \infty$$

Décomposition en série de Fourier

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n}{T} t} \text{ avec } c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_p(t) e^{-2\pi i \frac{n}{T} t} dt$$

- $\nu = n/T$ est une fréquence, négative si $n < 0$

- les c_n caractérisent $f_p \longrightarrow$ amplitudes des composantes fréquentielles f_p

Modélisation et Caractérisation d'un signal

- Cas des fonctions non-périodiques : fonctions $f \in L_1(R)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty$$

Transformée de Fourier F de f , notée F[f] :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

Transformée de Fourier inverse, notée $\mathbf{F}^{-1}[F]$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu.$$

- F est continue et $F(\upsilon)$ tend vers 0 quand $|\upsilon| \to \infty$

Modélisation et Caractérisation d'un signal

- propriétés de la Tranformée de Fourier

Linéarité	$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$
Symétrie	$\mathcal{F}[f(-\bullet)](\nu) = F(-\nu)$
Conjugaison complexe	$\mathcal{F}\left[\overline{f(\bullet)}\right](\nu) = \overline{F(-\nu)}$
Changement d'échelle	$\mathcal{F}[f(a\bullet)](\nu) = \frac{1}{\lvert a \rvert} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$
Translation temporelle	$\mathcal{F}[f(\bullet - t_0)](\nu) = e^{-2\pi i \nu t_0} F(\nu)$
Modulation	$\mathcal{F}\left[e^{2\pi i \nu_0 \bullet} f(\bullet)\right](\nu) = F(\nu - \nu_0)$
Dérivée	$\mathcal{F}\left[f^{(n)}\right](\nu) = (2\pi i \nu)^n F(\nu)$
Intégration	$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\bullet} f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{2\pi i \bullet} F(\bullet) + \frac{1}{2} F(0)\delta$

- F obtenu à partir des propriétés + transformées élémentaires

Modélisation et Caractérisation d'un signal

Modélisation d'un signal par : une

- Fonction
- Une distribution
  - généralisation de la notion de fonction
  - Soit ψ une fonction de test, $T : \psi \rightarrow < T, \psi >$
  - distribution régulière : T_x distribution associée à une fonction x
  - Conditions suffisantes d'existence d'une transformée de Fourier de T_x x
    - est une fonction de $L_1(\mathrm{R})$ et/ou de $L_2(R)$
    - x est une fonction localement intégrable à croissante lente à l'infini
  - distribution singulière : impulsion de Dirac δ
  - quelques propriétés : $\delta_a \star \delta_b = \delta_{a+b}$, $T_x \star \delta_a = T_{x(\bullet - a)}$

Signal temporel	Transformée de Fourier
1	δ
δ	1
$\delta_a,\ a \in \mathbb{R}$	$e^{-2\pi \mathrm{i} a \bullet}$
$\mathrm{Pgn}_T,\ T \in \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{T}\mathrm{Pgn}_{\frac{1}{T}}$
Γ	$\frac{1}{2\pi \mathrm{i} \bullet} + \frac{1}{2}\delta$
$e^{-a\bullet}\Gamma,\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{2\pi \mathrm{i} \bullet + a}$
rect	sinc
sinc	rect
sinc^2	tri
tri	sinc^2
$e^{2\pi \mathrm{i} \nu_0 \bullet}$	δ_{ν_0}
$\cos(2\pi\nu_0\bullet)$	$\frac{1}{2}\left(\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0}\right)$
$\sin(2\pi\nu_0\bullet)$	$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\delta_{\nu_0} - \delta_{-\nu_0}\right)$

Etapes et outils d'analyse :

- connaissances a priori
- Tracé(s) temporel(s)
  - recherche de caractéristiques *évidentes* du signal ;
  - hypothèses sur le signal et ébauche de modèle ;
- **Tracé(s) fréquentiel(s) (Spectre)** → **Transformée de Fourier**
  - sélection des données temporelles → fonction de fenêtrage ; recherche
  - de caractéristiques *évidentes* dans le spectre du signal ; hypothèses :
  - confirmer, infirmer ;
  - construire un modèle suffisant du signal

Energie et Puissance des signaux

Signaux à énergie finie	Signaux à puissance finie
$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt < \infty$	$P_x = \lim\limits_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \lvert x(t)\rvert^2 dt \right) < \infty$
"temporellement éphémères"	*"temporellement persistants"*

Remarque : La puissance d'un signal à énergie finie est nulle

Exemple :

$x(t) = \mathrm{rect}(t)$	$x(t) = \Gamma(t)$
signal à énergie finie	signal à puissance finie
$E_x = 1$	$P_x = \frac{1}{2}$

Energie et Puissance des signaux

Remarques :

- Signaux à énergie finie ⇨ puissance moyenne nulle

  Généralement, cas des signaux représentant une grandeur physique.
  Signaux transitoires à support borné

- Signaux à énergie infinie ⇨ puissance moyenne non nulle

  Cas des signaux périodiques

Notion valable pour les signaux aléatoires et déterministes

Modélisation et Caractérisation d'un système

- Notion de Système : approche entrée-sortie

- Systèmes de convolution : **Linéaires Temps-Invariants (LTI)**
- **Réponse impulsionnelle** $h(t)$: réponse du système à une impulsion

  → Relation entrée-sortie temporelle : produit de convolution

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = h \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- **Réponse fréquentielle** $H(\upsilon)$: gain appliqué par le système dans le domaine fréquentiel

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad H(\nu) = \mathcal{F}[h](\nu)$$

$\longrightarrow$ Relation entrée-sortie dans le domaine fréquentiel :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

- **Fonction de transfert** $F(s)$: gain appliqué par le système dansle domaine de Laplace

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad F(s) = \mathcal{L}[h](s)$$

$\longrightarrow$ Relation entrée-sortie dans le domaine de Laplace :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad Y(s) = F(s)X(s)$$

$\longrightarrow$ Fonction de transfert rationnelle :

$$F(s) = \frac{b_0 + b_1 s + ... + b_{n_b} s^{n_b}}{1 + a_1 s + ... + a_{n_a} s^{n_a}} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Propriétés importantes des systèmes :

- **Stabilité** : entrée $x(t)$ bornée $\Rightarrow$ sortie $y(t)$ bornée Conditions :

  $h \in L_1(\mathbb{R})$

  H existe au sens des fonctions

  les pôles de $F(s)$ sont à partie réelle négative

  $$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad H(\nu) = F\left(e^{2i\pi\nu T_s}\right)$$

- **Causalité** : la sortie $y(t)$ ne dépend pas du futur Conditions :

  $\forall t < 0,\ h(t) = 0$

Modélisation et Caractérisation d'un signal

Déterminer les caractéristiques d'un système : *connaitre pour prévoir*

- en développant un **modèle analytique**

  nécessite une très bonne connaissance du système

- en effectuant des **mesures entrées-sorties**

  $\longrightarrow$ approche temporelle : identification de la réponse impulsionnelle

  $\Rightarrow$ signal d'excitation : $x = \delta$

$$\boxed{y(t) = h \star x(t) = h \star \delta(t) = h(t)}$$

  $\longrightarrow$ approche fréquentielle : identification de la réponse harmonique

  $\Rightarrow$ signal d'excitation : $x(t) = A \sin(2\pi\nu_0 t)$

$$y(t) = h \star x(t) = A|H(\nu_0)| \sin(2\pi\nu_0 t + \arg(H(\nu_0)))$$

Extraction d'informations sur x_u à partir d'un signal mesuré x

$$x(t) = x_u(t) + x_r(t)$$

(*Cas où les spectres de x_u et x_r n'ont pas des supports disjoints*)

- Classement de signaux : Energie finie et Puissance finie
- Mesure de similitude : Echange $\Rightarrow$ Intercorrélation

$$E_{yx} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x(t)dt \quad \Rightarrow \quad R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau)x(t)dt$$

- Autocorrélation et Intercorrélation

  Propriétés : majoration, parité, périodicité, décorrélation/blancheur

Autocorrélation et intercorrélation des signaux déterministes

— **Signaux x à énergie E_x finie**, ce qui correspond aux signaux de $L_2(\mathbb{R})$, définis par :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

— **Signaux x à puissance P_x finie** : définis par :

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \right) < \infty.$$

	Energie finie	Puissance finie
Définition	$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt < \infty$	$P_x = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \lvert x(t)\rvert^2 dt \right) < \infty$
Densité spectrale $S_x(\nu)$	d'énergie : $\lvert X(\nu)\rvert^2$	de puissance : $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \lvert X(\nu,T)\rvert^2$ $X(\nu,T) = \mathcal{F}[x.\mathrm{rect}(\bullet/T)]$
Intercorrélation	$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(t)dt$ $\mathcal{F}[R_{xy}] = S_{xy}$	$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t+\tau)y(t)dt \right)$ $\mathcal{F}[R_{xy}] = S_{xy}$
Autocorrélation	$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(t)dt$	$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t+\tau)x(t)dt \right)$
	$R_x(0) = E_x$ $\mathcal{F}[R_x] = S_x$	$R_x(0) = P_x$ $\mathcal{F}[R_x] = S_x$

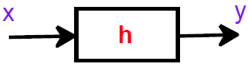
Autocorrélation et intercorrélation des signaux déterministes

- Densité Spectrale d'Energie / de Puissance (DSE / DSP) :

$$S_x(\nu) = |X(\nu)|^2 = \mathcal{F}[R_x]$$

- Densité Spectrale interspectre

$$S_{yx}(\nu) = Y(\nu)\overline{X(\nu)} = \mathcal{F}[R_{yx}]$$



$y = h \star x$
$S_{yx}(\nu) = H(\nu)S_x(\nu)$
$S_y(\nu) = \|H(\nu)\|^2 S_x(\nu)$