Dans cette vidéo, nous allons voir comment trouver les points critiques d'une fonction de deux variables et déterminer leur nature.

On va d'abord faire des petits rappels de cours sur les points critiques et la nature des points critiques. Puis on appliquera le processus à la fonction $F(x, y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 3$.

Donc là on va voir. C'est un exemple qui est plutôt simple. On verra dans une 2e vidéo un exemple un peu plus compliqué où là il y a plus de cas. Mais en tout cas ici, c'est vraiment pour voir le principe général.

Alors les points critiques, ça se passe en 2 étapes. D'abord il faut déterminer les points critiques de la courbe, puis déterminer la nature de ces points. Donc ça se fait en 2 étapes.

Pour déterminer les points critiques, il faut résoudre le système $F'(x, 0) = 0$ et $F'(y, 0) = 0$. Pourquoi ? Parce qu'en fait il faut que le gradient de F soit nul. Le gradient de F est $\nabla F = (F'(x), F'(y))$. On a vu dans d'autres vidéos que $\nabla F = 0$ si et seulement si $F'(x) = 0$ et $F'(y) = 0$.

Une fois qu'on résout ce système, ça va nous donner éventuellement plusieurs points, donc A, B, C, D, etc., avec plusieurs coordonnées. Éventuellement, on peut en avoir un, comme on peut avoir 2 ou 3, ou même 0.

Et après, pour chacun de ces points, il faut déterminer la nature de ces points. La nature de ces points, on va faire ce qu'on appelle la matrice hessienne. De la manière suivante, donc c'est une matrice 2×2 qui vaut ici $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ sur la diagonale et sur les autres termes c'est $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ et pareil sur l'autre.

Puisque d'après le théorème de Schwarz, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, on peut les inverser, et donc c'est une matrice qui est symétrique. Donc souvent cette matrice on appelle H pour matrice hessienne qui s'écrit comme ça.

Cette matrice hessienne nous apporte surtout, c'est le déterminant de cette matrice, donc qu'on note comme ça :

$$\det(H) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$