Optimisation TD 2

Centrale Casablanca, 2023-2024

30 avril 2024

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{+*} \times$ (et les déterminer) tels que $f(x,y) \geq \alpha \|(x,y)\|^2 + \beta$ pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, où la notation $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. En déduire que le problème
$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$$
possède au moins une solution.
2. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer les points critiques de f, et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...).
4. Résoudre alors le problème $(\mathcal{P})$.

Exercice 2(Fonctions quadratiques)

On considère le problème de minimisation de la fonction quadratique suivante :

$$\text{minimize } J(x) = \frac{1}{2}x^T A x + b^T x + r$$

où $A \in \mathbf{S}^n$.

1. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de J
2. Montre que si A n'est pas semi-définie positive, c.a.d la fonction J n'est pas convexe, alors le problème n'est pas borné inferieurement.
3. On suppose que $A \succeq 0$, c.a.d la fonction J est convexe, écrire l'equation d'Euler associée au problème.
4. Montrer que si b n'est pas dans l'image de la matrice A, le problème de minimisation n'est pas borné inferieurement.

Exercice 3 (moindres carrés)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1,1]$ par $f(x) = x^3$. L'espace $C^0([-1,1])$ des fonctions continues sur $[-1,1]$ est muni du produit scalaire défini par $\langle h, g\rangle = \int_{-1}^{1} h(x)g(x)dx$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée, définie par $\|h\| = \sqrt{\langle h,h\rangle}$, pour tous $(h,g) \in \left(C^0([-1,1])\right)^2$. On souhaite déterminer le polynôme P de degré inférieur ou égal à 1 qui approche le mieux f au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qui minimise $\|f-P\|^2$ parmi tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 (sous réserve qu'il existe et soit unique).

1. Mettre ce problème sous la forme d'un problème de moindres carrés de dimension finie. Quelle est cette dimension ?
2. Étudier l'existence/l'unicité des solutions de ce problème.
3. Résoudre ce problème.

Exercice 4

Le but de l'exercice est de prouver le théorème de projection sur convexe fermé dans un Hilbert :

Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un Hilbert V. Soit $\mathbf{u} \in V$, alors il existe un unique point $P_C(\mathbf{u}) \in \mathcal{C}$, tel que :

$$\|P_C(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\| = \min_{\mathbf{v} \in C} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

On l'appelle le projeté de u sur $\mathcal{C}$. Il est caractérisé par :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}, \langle P_C(\mathbf{u}) - \mathbf{u}, \mathbf{v} - P_C(\mathbf{u})\rangle \geqslant 0$$

De plus l'application P_C est contract ante, i.e. :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \|P_C(\mathbf{x}) - P_C(\mathbf{y})\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

1. Prouver l'existence et l'unicité de $P_C(\mathbf{u})$.
2. Prouver la caractérisation donnée de $P_C(\mathbf{u})$.
3. Utiliser cette caractérisation pour prouver que P_C est une application contractante.

Exercice 5

Soient V un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire symétrique continue sur $V \times V$. Soit L une forme linéaire continue sur V. On pose $J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u)$.

1. Montrer que J est déivable sur V et que $\langle J'(u), w\rangle = a(u,w) - L(w)$ pour tout $u, w \in V$.
2. Soit $V = L^2(\Omega) (\Omega$ ét ant un ouvert de $\mathbb{R}^N\big), a(u,v) = \int_\Omega uv dx$, et $L(u) = \int_\Omega f u dx$ avec $f \in L^2(\Omega)$. En identifiant V et V', montrer que $J'(u) = u - f$.
3. Soit $V = H^1(\Omega) := \left\{uL^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)\right\}$ munit du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ et on définit la fonctionnelle J par

$$J(v) = \frac{1}{2}\lambda \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}k \int_\Omega |v|^2 dx - \int_\Omega f(x)v(x) dx$$

Étudier la problème de minimisation suivant :

$$\inf_{v \in H^1(\Omega)} J(v)$$