KarNote

Résumé détaillé du cours "Modélisation et Caractérisation d'un Signal"

June 28, 2024

Introduction

Ce cours traite de la représentation mathématique des signaux (modélisation) et de l'extraction d'informations pertinentes à partir de ces représentations (caractérisation).

I. Modélisation d'un Signal

1. Signaux Périodiques

Les fonctions périodiques, notées *$f_p(t)$*, se répètent à intervalles réguliers *T*. On peut les représenter à l'aide de la **série de Fourier**:
$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n f t}$
Où :

- *$f = 1/T$* est la fréquence fondamentale,
- *$C_n = (1/T) \int_T f(t) e^{-2\pi i n f t} dt$* sont les coefficients de Fourier complexes, représentant l'amplitude et la phase de chaque composante fréquentielle.

2. Signaux Non-périodiques

Pour les fonctions non-périodiques *$f(t)$* appartenant à l'espace $L(R)$ (fonctions intégrables), on utilise la **transformée de Fourier**:
$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}dt$
Où :

- *$F(\nu)$* est la transformée de Fourier de *$f(t)$*,
- *ν* est la fréquence.

La **transformée de Fourier inverse** permet de retrouver *$f(t)$* à partir de *$F(\nu)$*:
$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)e^{2\pi i\nu t}d\nu$

Propriétés de la Transformée de Fourier:

Propriétés de la Transformée de Fourier

Propriété	**Formule**
Linéarité	*$F[af_1 + bf_2] = aF[f_1] + bF[f_2]$*
Symétrie	*$F(-\nu) = F(\nu)$*
Conjugaison Complexe	*$F^*(\nu) = F(-\nu)$*
Changement d'échelle	*$F[f(at)](\nu) = (1/\|a\|)F(\nu/a)$*
Translation Temporelle	*$F[f(t-t_0)](\nu) = e^{-2\pi i\nu t_0}F(\nu)$*
Modulation	*$F[e^{2\pi i f_0 t}f(t)](\nu) = F(\nu - f_0)$*
Dérivée	*$F[f'(t)](\nu) = 2\pi i\nu F(\nu)$*
Intégration	*$F[\int f(t)dt](\nu) = (1/2\pi i\nu)F(\nu) + F(0)\delta(\nu)$*

3. Modélisation par Distributions

On peut généraliser la notion de fonction avec les distributions. Une distribution *T_x* associe à chaque fonction test *ψ* un nombre réel : *$T_x(\psi)$*.

- Distribution régulière : *$T_x(\psi) = \int x(t)\psi(t)dt$* où *$x(t)$* est une fonction.
- Distribution singulière : Exemple : l'impulsion de Dirac *δ*.

4. Représentations Temporelles et Fréquentielles Usuelles

Représentations Temporelles et Fréquentielles Usuelles

Signal Temporel	Transformée de Fourier
$\delta(t)$	1
1	*$\delta(\nu)$*
$e^{2\pi i\nu_0 t}$	*$\delta(\nu-\nu_0)$*
$\cos(2\pi\nu_0 t)$	*$1/2[\delta(\nu-\nu_0)+\delta(\nu+\nu_0)]$*
$\sin(2\pi\nu_0 t)$	*$1/2i[\delta(\nu-\nu_0)-\delta(\nu+\nu_0)]$*
$\mathrm{rect}(t)$	*$\mathrm{sinc}(\nu)$*
$\mathrm{sinc}(t)$	*$\mathrm{rect}(\nu)$*

II. Caractérisation d'un Signal

1. Energie et Puissance

- **Energie:** *$E_x = \int \|x(t)\|^2 dt$* (signaux à énergie finie, souvent transitoires)
- **Puissance:** *$P_x = \lim_{T\to\infty}(1/T)\int_{-T/2}^{T/2} \|x(t)\|^2 dt$* (signaux à puissance finie, souvent persistants)

2. Systèmes Linéaires Temps-Invariants (LTI)

Un système LTI est caractérisé par sa réponse impulsionnelle *$h(t)$*. La relation entrée-sortie est un produit de convolution :
$y(t) = \int h(\tau)x(t-\tau)d\tau$
Représentations Fréquentielles d'un Système LTI:

- **Réponse Fréquentielle:** *$H(\nu) = F[h(t)](\nu)$*
- **Fonction de Transfert (Laplace):** *$F(s) = L[h(t)](s)$*

Propriétés Importantes des Systèmes LTI:

- **Stabilité:** Une entrée bornée produit une sortie bornée.
- **Causalité:** La sortie ne dépend que des entrées passées et présentes.

III. Analyse de Signaux et de Systèmes

- **Analyse Temporelle:** Identification de *$h(t)$* en utilisant une impulsion comme entrée.
- **Analyse Fréquentielle:** Identification de *$H(\nu)$* en utilisant une sinusoïde comme entrée.

IV. Autocorrélation et Intercorrélation

1. Définitions:

- **Autocorrélation:** *$R_{xx}(\tau) = \int x(t)x(t+\tau)dt$* (mesure la similarité d'un signal avec lui-même décalé)
- **Intercorrélation:** *$R_{xy}(\tau) = \int x(t)y(t+\tau)dt$* (mesure la similarité entre deux signaux)

2. Propriétés:

- **Majoration:** *$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{(R_{xx}(0)R_{yy}(0))}$*
- **Parité:** *$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$*
- **Périodicité:** Si *$x(t)$* et *$y(t)$* sont périodiques de période *T*, alors *$R_{xy}(\tau)$* est aussi périodique de période *T*.
- **Décorrélation/Blancheur:** Si *$R_{xy}(\tau) = 0$* pour *$\tau \neq 0$*, alors *$x(t)$* et *$y(t)$* sont décorrélés (indépendants pour des signaux aléatoires).

3. Densité Spectrale d'Energie/Puissance:

- **DSED:** *$S_{xx}(\nu) = |X(\nu)|^2 = F[R_{xx}(\tau)](\nu)$*
- **DSDP:** *$S_{xy}(\nu) = Y(\nu)X^*(\nu) = F[R_{xy}(\tau)](\nu)$*

Conclusion

En résumé, ce cours a présenté les outils mathématiques fondamentaux pour modéliser et analyser les signaux et les systèmes LTI, en mettant l'accent sur les représentations temporelles et fréquentielles et leurs relations. Les concepts d'énergie, de puissance, de stabilité, de causalité, d'autocorrélation et d'intercorrélation ont également été abordés.