Problème sur la Théorie qualitative des systèmes différentiels

Problème

Considérons le système différentiel non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - y^2 + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

Nous allons analyser ce système sous différents aspects en suivant les étapes suivantes :

Question 1: Points d'équilibre

1. Trouver les points d'équilibre du système.

Question 2: Linearisation et stabilité locale

2. Linéariser le système au voisinage de chacun des points d'équilibre obtenus.
3. Pour chaque point d'équilibre, déterminer la nature (nœud, col, soleil, centre, foyer) et la stabilité (attractif, répulsif, instable).

Question 3: Portrait de phase

4. Dessiner le portrait de phase du système en tenant compte de la nature des points d'équilibre et des trajectoires proches de ces points.

Question 4: Trajectoires particulières

5. Considérer la trajectoire initialisée en (x(0), y(0)) = (1, -1). Trouver l'expression exacte (ou approchée, au moins qualitativement) de la trajectoire et discuter de son comportement asymptotique.

Question 5: Comportement global

6. Analyser le comportement global du système différentiel. En particulier, identifier s'il existe des trajectoires périodiques, des trajectoires divergentes, ou d'autres comportements globaux notables.

Éléments de réponse

Réponse 1

Les points d'équilibre sont obtenus en résolvant le système:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2xy = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

En remplacement $y = 2x$ dans la première équation, nous obtenons:

$$x^2 - (2x)^2 + 2x(2x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Les points d'équilibre sont donc $(0, 0)$.

Réponse 2

Pour linéariser près de $(0, 0)$, nous calculons la matrice Jacobienne:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + 2xy) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 + 2xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2x - y) & \frac{\partial}{\partial y}(2x - y) \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de J sont les solutions du polynôme caractéristique $\det(J - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1) = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1$. Cela suggère que le point $(0, 0)$ est un point col avec une direction stable et une direction neutre.

Réponse 3

Le portrait de phase montre que les trajectoires proches de $(0, 0)$ s'approchent de cet équilibre en spirales s'il y a des composants non linéaires significatifs, ou pourraient montrer un comportement en selle avec une direction stable le long de $y = 2x$ et instable ailleurs.

Réponse 4

Pour la trajectoire initialisée à $(x(0), y(0)) = (1, -1)$, résolvons le système approche par série de Taylor ou méthode numérique, souvent impliquant un comportement complexe asymptotique vers $y = 2x$.

Réponse 5

Analysons les trajectoires globales. Des solutions périodiques peuvent être discutées avec méthode de Poincaré. On pourrait conclure l'existence potentielle de comportements chaotiques ou de points d'accumulation.