Problème sur le cours d'Optimisation

Centrale Casablanca

2023-2024

Exercice 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y, z) = x^6 + y^6 + z^6 - 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

1. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ (et les déterminer) tels que $f(x, y, z) \geq \alpha \|(x, y, z)\|^2 + \beta$ pour tous $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En déduire que le problème $\inf_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} f(x, y, z)$ possède au moins une solution.
2. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^3$?
3. Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, etc.).
4. Résoudre alors le problème de minimisation (P).

Exercice 2

On considère le problème de minimisation de la fonction quadratique suivante:

$$\min J(x) = \frac{1}{2} x^T Ax + b^T x + c$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice symétrique.
1. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de J.
2. Montrer que si A n'est pas définie positive, alors le problème n'est pas borné inférieurement.
3. Supposons que $A \succ 0$, montrer que la solution de minimisation est:

$$x^* = -A^{-1}b$$

4. Supposez maintenant que b et c sont des vecteurs tels que b n'est pas dans l'image de A. Que peut-on dire sur le caractère borné inférieurement du problème?

Exercice 3

Soit f définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x) = \sin(\pi x) + x$. On cherche à approcher f par un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, au sens des moindres carrés.
1. Définir l'espace V des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 muni du produit scalaire $\langle g, h\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\,dx$.
2. Montrer que le problème consiste à minimiser $\|f - P\|^2$ et caractériser cette minimisation.
3. Résoudre le système linéaire obtenu pour déterminer explicitement le polynôme P.

Exercice 4

On considère un sous-ensemble convexe fermé C d'un espace de Hilbert H. Soit $u \in H$, on note $P_C(u)$ le projeté de u sur C, c'est-à-dire le point de C tel que:

$$\|P_C(u) - u\| = \min_{v \in C} \|v - u\|$$

1. Prouver l'existence et l'unicité de $P_C(u)$.
2. Montrer la caractérisation suivante:

$$\forall v \in C, \quad \langle P_C(u) - u, v - P_C(u) \rangle \geq 0$$

3. En utilisant cette caractérisation, prouver que P_C est une application contractante:

$$\forall x, y \in H, \quad \|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$$

4. Donner une illustration de ce résultat dans un cas concret (par exemple: $H = \mathbb{R}^2$ et C un disque fermé).

Exercice 5

Soit V un espace de Hilbert et soit a une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $V \times V$. On considère la fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$ définie par:

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - L(u)$$

où L est une forme linéaire continue sur V.
1. Montrer que J est dérivable sur V et que pour tout $u, w \in V$,

$$\langle J'(u), w \rangle = a(u, w) - L(w)$$

2. Supposons $V = L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, avec $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ et $L(u) = \int_\Omega f u \, dx$. Montrer que $J'(u) = \Delta u - f$.
3. Soit $V = H^1(\Omega)$ défini par:

$$J(v) = \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \frac{k}{2} \int_\Omega |v|^2 \, dx - \int_\Omega f v \, dx$$

Étudier le problème de minimisation suivant:

$$\inf_{v \in H^1(\Omega)} J(v)$$

et montrer que c'est équivalent à résoudre l'équation de Poisson:

$$-\lambda \Delta v + k v = f \quad \text{dans } \Omega \text{ avec des conditions aux bords adéquates.}$$

Éléments de réponse

1. Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on a $f(x, y, z) \geq \alpha \|(x, y, z)\|^2 + \beta$. Cela montre que le problème est bien posé.
2. La fonction f n'est pas convexe en général.

3. Les points critiques de f peuvent être trouvés en résolvant $\nabla f = 0$. Ici les solutions exactes peuvent être obtenues analytiquement ou numériquement.
4. En résolvant le système obtenu, on trouve les solutions minimales exactes de f.
Pour les autres exercices, les réponses suivent une logique similaire de calculs de dérivées, résolutions de systèmes d'équations et preuves d'existence via des outils d'analyse fonctionnelle.