Problème sur l'Optimisation Différentiable : Théorie et Algorithmes

Problème : Optimisation d'un Système avec Contraintes Multiples

Considérons la fonction différentiable $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T Q\mathbf{u} + \mathbf{c}^T\mathbf{u} + d$$

où $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice symétrique définie positive, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur constant et $d \in \mathbb{R}$ est une constante scalaire. On souhaite minimiser la fonction $J(\mathbf{u})$ sous les contraintes suivantes :

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad \text{(constrainte d'égalité)}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} \leq \mathbf{a} \quad \text{(constrainte d'inégalité)}$$

où $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sont des matrices, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs constants.

Questions

1. Déterminez les conditions nécessaires d'optimalité pour ce problème, en utilisant le Lagrangien.
2. Appliquez le théorème du Min-Max pour trouver les multiplicateurs de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}^p$ et $\mu \in \mathbb{R}^m$ associés, avec $\mu \geq 0$.
3. Montrez que la fonction $J(\mathbf{u})$ est strictement convexe.
4. Établissez et interprétez les conditions KKT (Karush-Kuhn-Tucker) pour ce problème.
5. En supposant que les contraintes qualifiées sont satisfaites, démontrez que les conditions KKT sont suffisantes pour qu'un point soit optimal.
6. Proposez un algorithme basé sur la méthode de Newton pour résoudre numériquement ce problème. Décrivez les étapes principales de cet algorithme en détaillant le processus de résolution des équations non linéaires.

Éléments de Réponse

1. **Conditions nécessaires d'optimalité :**

$$L(\mathbf{u}, \lambda, \mu) = J(\mathbf{u}) + \lambda^T(\mathbf{Bu} - \mathbf{b}) + \mu^T(\mathbf{Au} - \mathbf{a})$$

Les conditions nécessaires sont :

$$\begin{aligned} \nabla J(\mathbf{u}) + \mathbf{B}^T\lambda + \mathbf{A}^T\mu &= 0 \\ \mathbf{Bu} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Au} &\leq \mathbf{a} \\ \mu &\geq 0 \\ \mu_i(\mathbf{Au} - \mathbf{a})_i &= 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

2. **Multiplicateurs de Lagrange :** Pour les multiplicateurs λ et μ, le théorème du Min-Max nous donne les solutions aux équations :

$$\min_{\mathbf{u}} \max_{\lambda, \mu \geq 0} L(\mathbf{u}, \lambda, \mu) = \max_{\lambda, \mu \geq 0} \min_{\mathbf{u}} L(\mathbf{u}, \lambda, \mu)$$

3. **Strictement convexe :** Puisque Q est définie positive, alors pour tout vecteur $\mathbf{w}$ non nul :

$$\mathbf{w}^T J''(\mathbf{u})\mathbf{w} = \mathbf{w}^T Q\mathbf{w} > 0$$

Ce qui montre que $J(\mathbf{u})$ est strictement convexe.

4. **Conditions KKT :** Les conditions KKT sont données par :

$$\begin{aligned} \nabla J(\mathbf{u}) + \mathbf{B}^T\lambda + \mathbf{A}^T\mu &= 0 \\ \mathbf{Bu} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Au} &\leq \mathbf{a} \\ \mu &\geq 0 \\ \mu_i(\mathbf{Au} - \mathbf{a})_i &= 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

5. **Suffisance des conditions KKT :** Si les contraintes qualifiées sont satisfaites et $J(\mathbf{u})$ est strictement convexe (comme démontré), les conditions KKT sont suffisantes pour garantir que $\mathbf{u}$ est un point optimal.

6. **Algorithme de Newton :**

   (a) Initialiser avec un point $\mathbf{u}^{(0)}$ et des multiplicateurs $\lambda^{(0)}, \mu^{(0)}$.

   (b) Répéter jusqu'à convergence :

      i. Calculer le gradient et la Hessienne du Lagrangien.

      ii. Résoudre les équations de Newton pour mettre à jour $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} - H^{-1}\nabla L$$

      iii. Mettre à jour les multiplicateurs λ et μ en vérifiant les contraintes.

   (c) Terminer lorsque $\|\nabla L\|$ est suffisamment petit.