Ens. : Analyse I
Analyse I - MA
Automne 2022
Durée : 1 heures

1

Student One

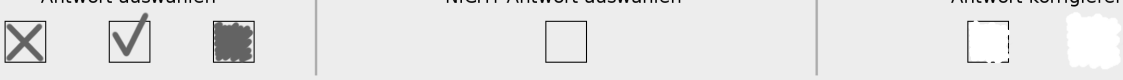
SCIPER : **111111**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

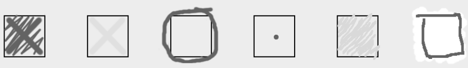
- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen — ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen — Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren



ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Question 1:

Simon LEFORT
+1/2/59+
BA1
IN

Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{j=1}^{n+1} j\,2^j = n\,2^{n+2} + 2$

On pose $P(n)$: « $\sum_{j=1}^{n+1} j\,2^j = n\,2^{n+2} + 2$ ».

Initialisation

$n=0$

- $1 \cdot 2^1 = 2$
- $0(\text{—}) + 2 = 2$

$P(0)$ vérifiée.

Hérédité

On suppose $P(n)$ vraie.

On veut montrer $P(n+1)$:

$$\text{«} \sum_{j=1}^{n+2} j\,2^j = (n+1)\,2^{n+3} + 2 = n \cdot 2^{n+3} + 2^{n+3} + 2 \text{»}$$

or

$$\sum_{j=1}^{n+2} j\,2^j = \sum_{j=1}^{n+1} j\,2^j + (n+2) \cdot 2^{(n+2)}$$

$$= n \cdot 2^{n+2} + 2 + (n+2) \cdot 2^{(n+2)}$$

$$= 2 \cdot n \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 2^{(n+2)} + 2$$

$$= n \cdot 2^{n+3} + 2^{n+3} + 2$$

$$= (n+1)^{(n+1)+2} + 2$$

✓

Conclusion

Ainsi $P(n)$ est initialisée à $= 0$ et héréditaire par récurrence donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Question 2:

Soit $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f a un maximum local strict en $x \in\ ]0,1[$ s'il existe un $\alpha > 0$ tel que $f(y) < f(x)$ pour tout $y \in\ ]0,1[$ avec $0 < |y-x| < \alpha$.

(a) Donnez un exemple de fonction continue explicite $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$ qui a un maximum local strict.

(b) Donnez un exemple de fonction continue explicite $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$ qui a un nombre infini de maximums locaux stricts.

Question 3:

Donnez un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 0}$ positive (dont tous les éléments sont ≥ 0) non bornée qui ne tend pas vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. Justifiez votre réponse.