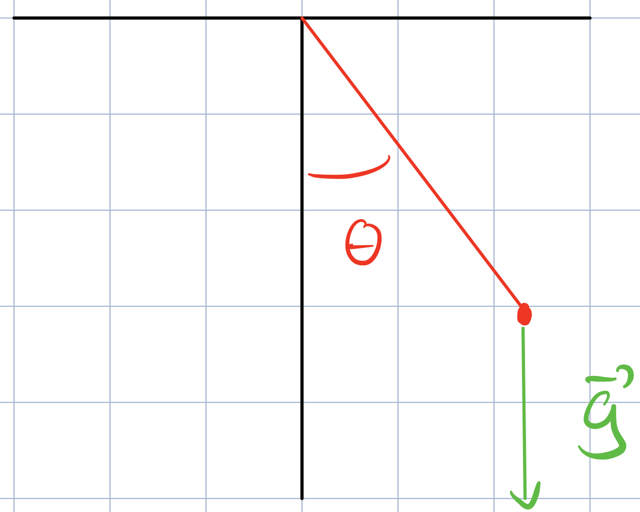
Questions conceptuelles

(a)

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \dfrac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ \dot{x}(t) = x_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t) + v_0 \sin(\omega_0 t) \\ \ddot{x}(t) = x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + v_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

$$\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2\omega_0}$$



$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_{autre} = \sin \theta$$

$$\begin{cases} \theta = 0 & \dot{x} \text{ max} \\ \theta = \frac{\pi}{2} [\pi] & \dot{x} \text{ nulle} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} [\pi] & \ddot{x} \text{ max} \\ \theta = 0 & \ddot{x} \text{ nulle} \end{cases}$$

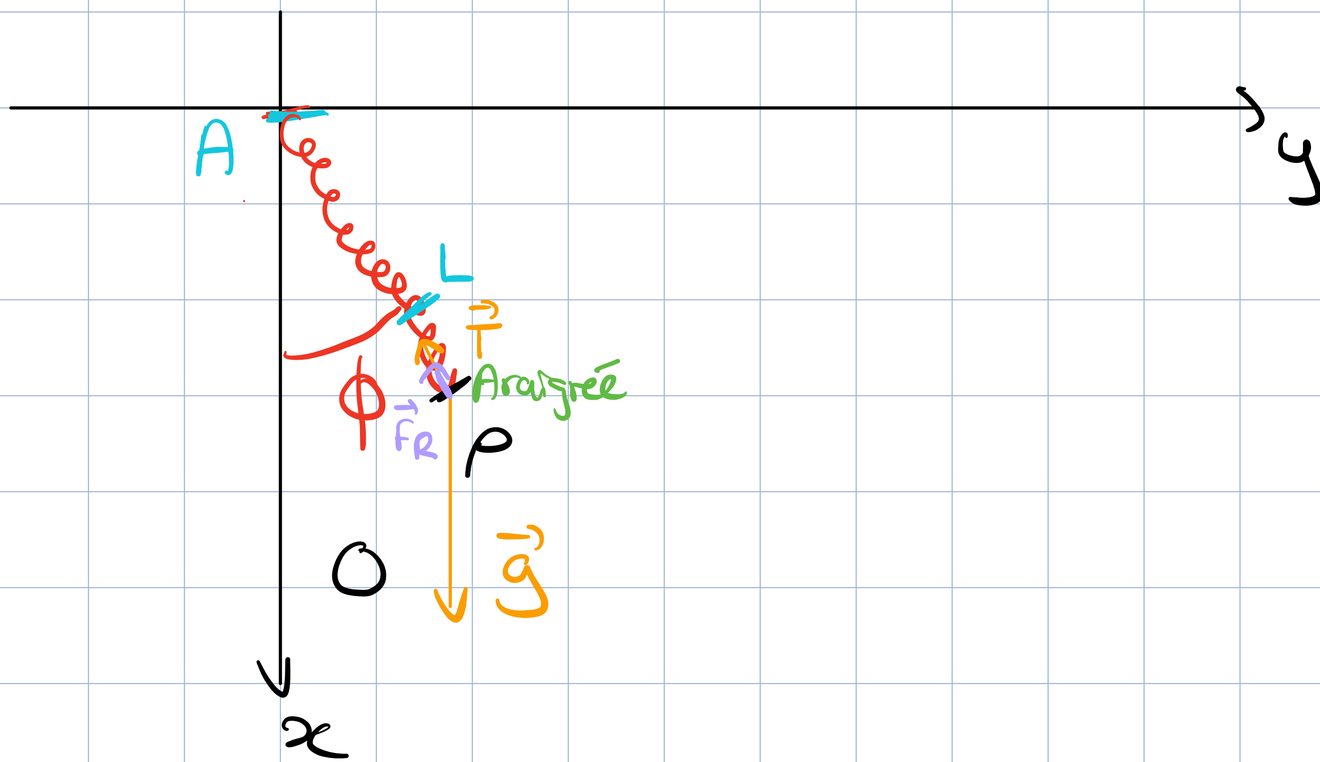
(b) peu importe si l'accélération diminue ou non, ce qui compte c'est qu'elle soit positive (par ex si $\Theta_1 = 2\varepsilon$, $v = v_1$,

puis $\Theta_2 = \varepsilon$, $v = v_2$,

et comme $a > 0$ entre Θ_1 et Θ_2

alors $v_2 > v_1$)

① Araignée suspendue à un fil élastique



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

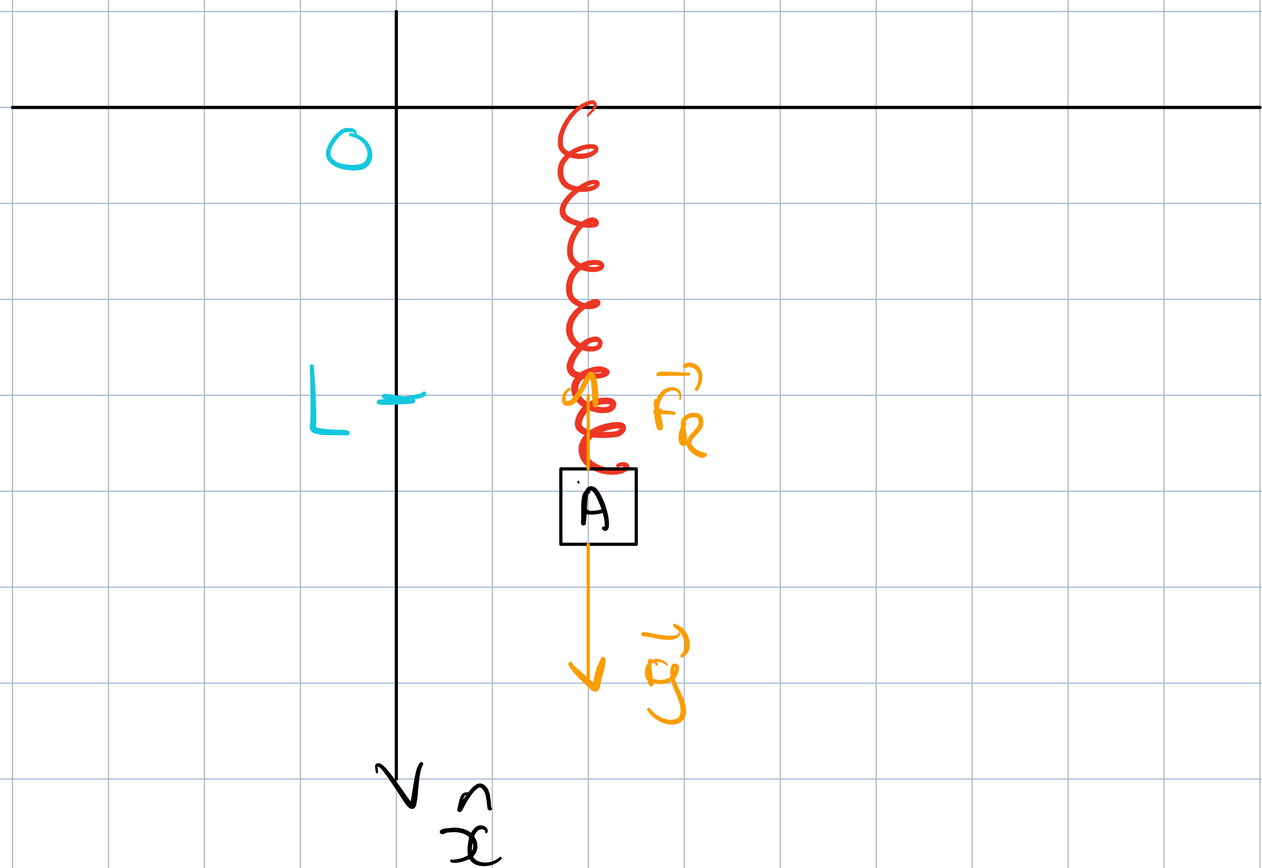
$$\Leftrightarrow m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{T} + \vec{F_R}$$

On projette

$$\vec{F_R} = -k\vec{d}$$
$$= -k(L-\rho)\,\vec{e}^{\,n}_y$$

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -\sin\phi\,(T + k(L-\rho)) \\ m\ddot{x} = -\cos\phi\,(T + k(L-\rho)) - mg \end{cases}$$

1) Araignée suspendue à un fil élastique



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad m\vec{g} + \vec{F_R} = m\vec{a}$$

On projette :

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - k(x - x_{nat}) \\ &= mg - k(x - L) \end{aligned}}$$

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{x} = mg - kx + kL$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + \bar{x}$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = V_0$$

$$\lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} x(t) = x_{eq}.$$

$$\cancel{m}\left(A\omega^2\cos(\omega t+\phi)\right)$$

$$= \cancel{m}g - \frac{k}{m}\left(A\cos(\omega t+\phi)+\bar{x}\right) + \frac{k}{m}L$$

on doit avoir

$$A\omega^2 = \frac{k}{m}A$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$g + \frac{k}{m}L - \frac{k}{m}\bar{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow g + \frac{k}{m}(L-\bar{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{m}(L-\bar{x}) = -g$$

$$\Leftrightarrow L-\bar{x} = \frac{-gm}{k}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{gm}{k} + L$$

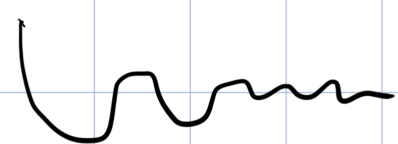
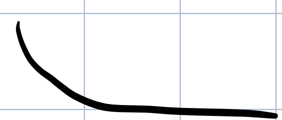
(d) $m\ddot{x} = mg - k(x-L) + \eta\dot{x}$

$$\ddot{x} = g - \frac{k}{m}x + \frac{k}{m}L + \frac{\eta}{m}\dot{x}$$

on pose $\gamma = \frac{\eta}{2m}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x - \left(g + \frac{k}{m}L\right) = 0$$

- sous-critique $_{\cos/\sin}$ 
- sur critique $_{\exp}$ 
- $\gamma = \omega_0$ 

e)$_1$ Si $\gamma < \omega_0$ alors mvt sous-critique.

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{n < \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 2m.}$$

e)$_2$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

(donc $< \omega_0$)
car amorti

$$t_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, k\, t_1$$

8) $$x(t) = e^{-\gamma}\left(A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)\right)$$

$$e^{-\gamma t_1}\left(A\cos(\omega_1 t_1) + B\sin(\omega_1 t_1)\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\gamma t_2}\left(A\cos(\omega_1 t_2) + B\sin(\omega_1 t_2)\right)$$

$$-\gamma t_1 \cdot \ln\left(A\cos(\omega_1 t_1) + B\sin(\omega_1 t_1)\right)$$

$$= -\ln(2) \cdot (-\gamma t_2) \cdot \ln\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2}$$

8) $x(t) = e^{-\gamma t}\left(C\cos(\omega_1 t + \phi)\right)$

Amplitude est $Ce^{-\gamma t}$

Au bout de dn de temps

$$Ce^{-\gamma t_2} = \frac{1}{2}Ce^{-\gamma t_1}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\gamma t_2} = \frac{1}{2}e^{-\gamma t_1}$$

$$\Leftrightarrow -\gamma t_2 = -\ln(2) + (-\gamma)\cdot t_1$$

$$\Leftrightarrow t_2 = \frac{\ln(2)}{\gamma} + t_1$$

~~Au bout de $\frac{\ln(2)}{\gamma}$ s, l'amplitude /2.~~

~~$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ rad.s^{-1}.~~

~~$\sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2} \cdot \frac{\ln(2)}{\gamma} = N$~~

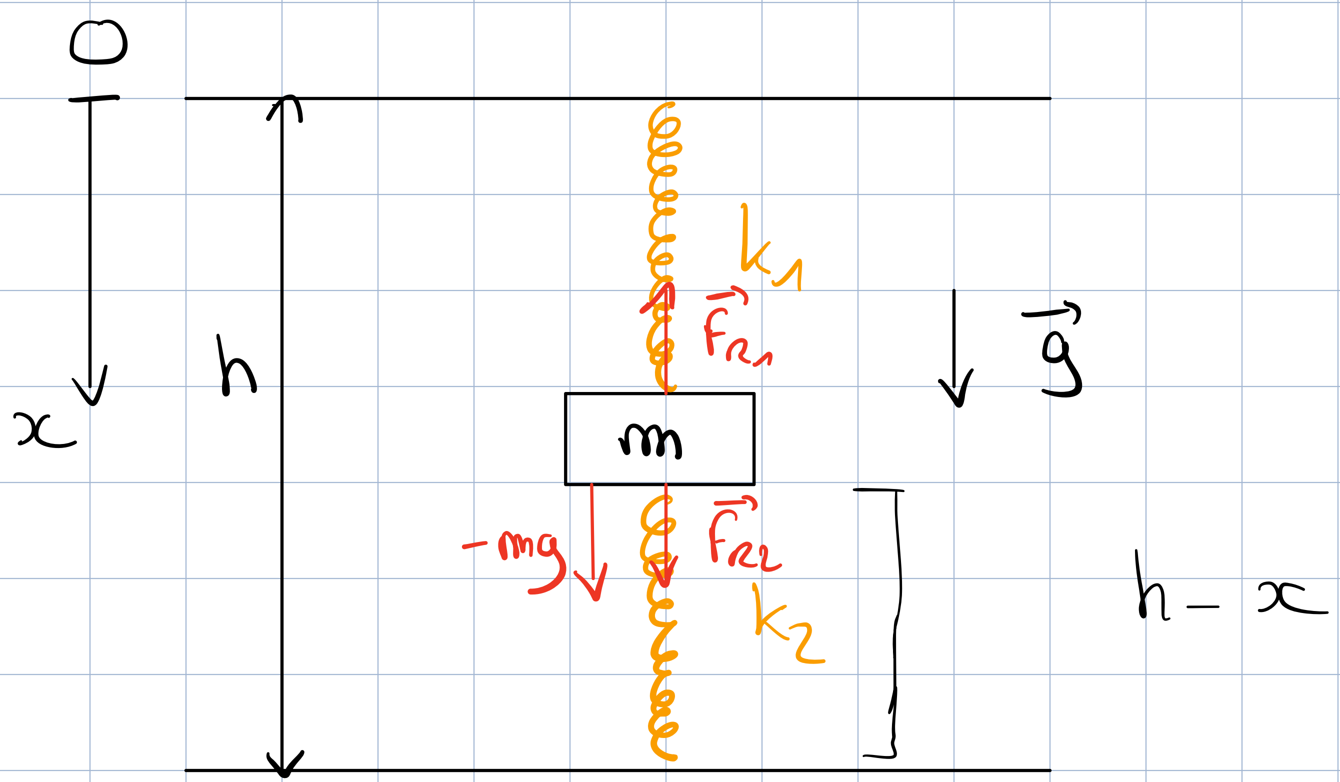
$$\cancel{\frac{\omega_0^2 \cdot \ln(2)^2}{r^2} + \gamma^2 \cdot \frac{\ln(2)}{r^2} = N^2}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{\ln(2)\left(\gamma^2 + \ln(2)\,\omega_0^2\right)}{r^2} = N^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{rad} \cdot s^{-1}} = s\right]$$

$$\frac{\frac{\ln(2)}{r}}{T} = \frac{\frac{\ln(2)}{r}}{\frac{2\pi}{\omega_1}} = \frac{\omega_1 \ln(2)}{2\pi\, r}$$

Oscillateur à deux ressorts



(A) $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, On projette.

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{x} = -k_1 x + k_2(h-x) + mg$$

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{x} = x(-k_1 - k_2) + mg + k_2 h.$$

$\Leftrightarrow \quad m\ddot{x} = (-k_1 - k_2)x + mg + k_2 h$

Soit $k = -(-k_1 - k_2) = k_1 + k_2$.

$\Leftrightarrow m\ddot{x} = -kx + mg + k_2 h$

B

Solution de la forme

USELESS
mais intéressant

$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{k} + \frac{k_2 h}{k}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega_0 t) + B\omega \cos(\omega_0 t)$

$\dot{x}(0) = B\omega = v_0 \Leftrightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$

$x(0) = A + \frac{mg}{k} + \frac{k_2 h}{k} \Leftrightarrow A = x_0 - \frac{mg}{k} - \frac{k_2 h}{k}$

$x(t) = \left(x_0 - \frac{mg}{k} - \frac{k_2 h}{k}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{k} + \frac{k_2 h}{k}$

Pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$

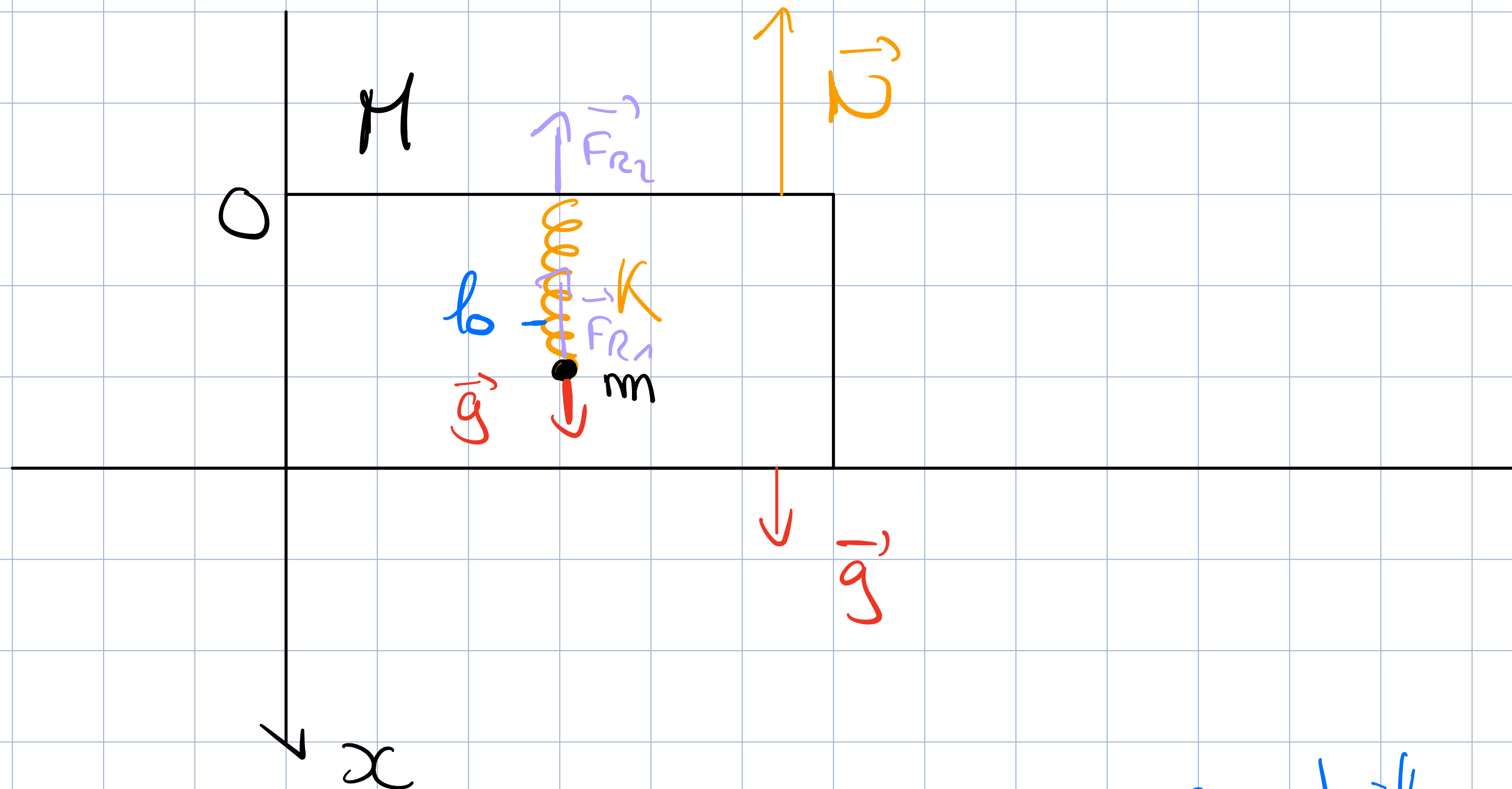
(c) à $\frac{1}{2}$ période, théoriquement le point le plus bas est atteint $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \left(\frac{-mg}{k} - \frac{k_2 h}{k}\right)\cos(\pi) + \frac{mg}{k} + \frac{k_2 \cdot h}{k}$$

$$= \left(\frac{mg}{k} + \frac{k_2 h}{k}\right) \cdot 2$$

$$= 3m$$

③ Ressort dans une boîte



sur bille

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{P}_m + \vec{F}_R \\ m\ddot{x} = mg - k(x - l_0) \end{cases}$$

$$\left\{ \sum \vec{F} = M\vec{a} = \vec{P}_M + \vec{N} - \vec{F}_R = \vec{0} \right.$$

On pose les contraintes $z_M = z_0 \Rightarrow \dot{z} = 0$.

Qd la boîte décolle, on a :

$$\|\vec{N}\| \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -F_R + P_M \leqslant 0$$

$$Mg + kx - l_0 k \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Mg + k(x - l_0) \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad My - l_0 k \leqslant -kx$$

$$\Leftrightarrow \quad -Mg + l_0 k \geqslant kx$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-Mg + l_0 k}{k} \geqslant x$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad \frac{-Mg}{k} + l_0 \geqslant x}$$

$$m\ddot{x} = mg - kx + kl_0$$

$$= -k\left(x - l_0 - \frac{mg}{k}\right)$$

$$= -k(\tilde{x})$$

$$x = \hat{x} + l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = A\cos(\omega t + \phi) \\ \dot{\tilde{x}} = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega + \phi) \\ \ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} = -\omega^2 (x) \end{cases}$$

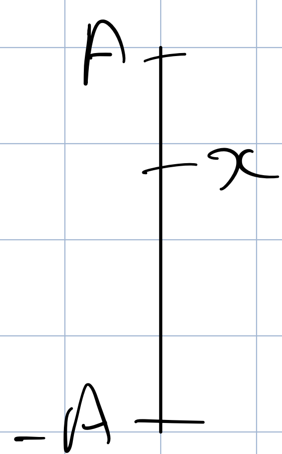
$$A = x_0 + l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$\tilde{x} = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$\dot{\tilde{x}} = -A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\tilde{x}^2 + \dot{\tilde{x}}^2 = A^2(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi))$$

$$\tilde{x}^2 + \dot{\tilde{x}}^2 = A^2$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + l_0 + \frac{mg}{k}$$



$$-A + l_0 + \frac{mg}{k} \leq x \leq A + l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$-A + l_0 + \frac{mg}{k} \leq x \leq \frac{-Mg}{k} + l_0$$

$$\Leftrightarrow -A + \cancel{l_0} + \frac{mg}{k} \leq \frac{-Mg}{k} \cancel{+ l_0}$$

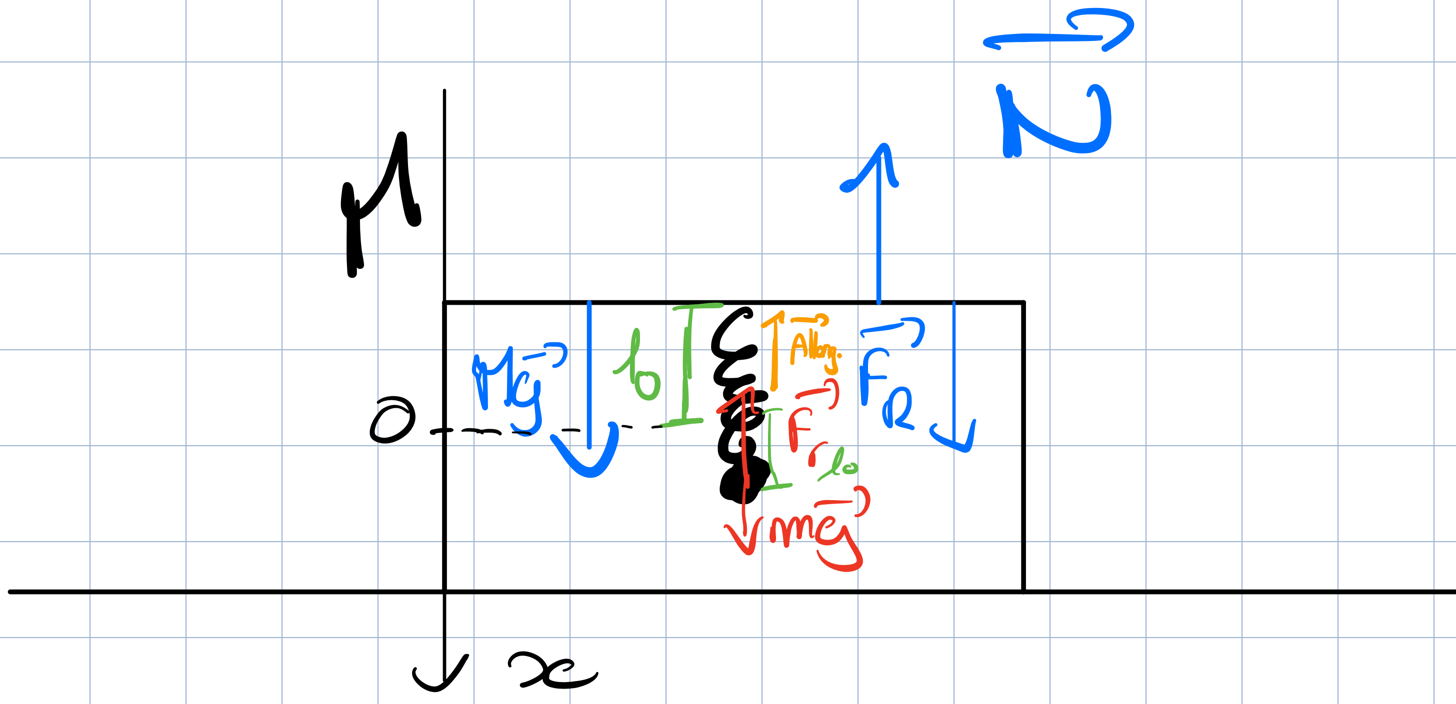
$$\Leftrightarrow -A \leq -\frac{(M+m)g}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(M+m)g}{k} \leq A$$

CORRIGE

EX 3

PAR PROF



Système 1 : boîte

- masse M
- Forces :

⚠ on sait que $N_x < 0$

- $\vec{N} = N_x \hat{e}_x$
- $M\vec{g} = Mg\hat{e}_x$
- $\vec{F}_R = -k(O-(x-l_0))\hat{e}_x$
  $= -k(-x+l_0)\hat{e}_x$

Système 2 : bille

- masse m
- Forces :
  - $\vec{P} = mg\hat{e}_x$
  - $\vec{F}_r = -k(O+l_0)\hat{e}_x$

$$\begin{cases} \vec{N} + M\vec{g} + \vec{F_R} = \vec{0}. \\ m\vec{g} + \vec{f_r} = dm\vec{a} \end{cases}$$

Pour simplifier les calculs, on peut placer l'origine à l_0, à x_{eq} ou au point d'attache.

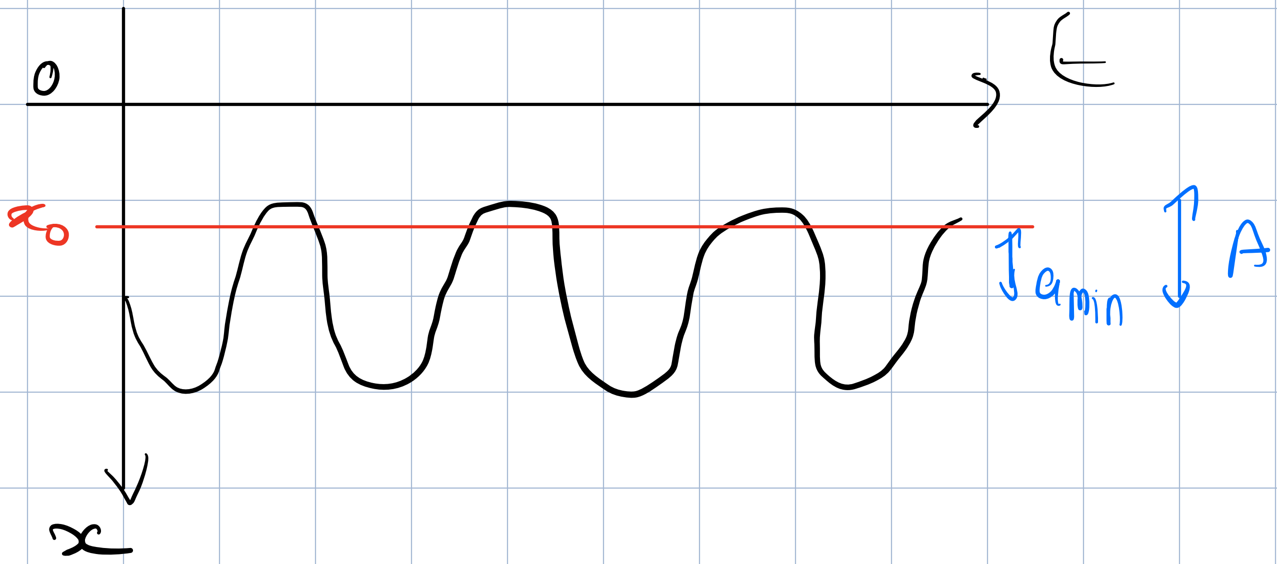
$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_x + Mg + kx - kl_0 = 0 \\ mg - k(x - l_0) = m\ddot{x} \end{cases}$$

décollage si $N_x = 0$ (ou $N_x \geq 0$)

$$\Rightarrow Mg + kx_0 - kl_0 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = l_0 - \frac{Mg}{k}$$

($\leq$)



On a x_0. On cherche x_{eq}, parce que $A_{min} = x_{eq} - x_0$

$$mg - kx + kl_0 = m\ddot{x} \quad , \quad \ddot{x} = 0$$
(équilibre)

$$mg - kx_{eq} + kl_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -kx_{eq} = -mg - l_0k$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{eq} = \frac{mg}{k} + l_0$$

$$A \geq |x_0 - x_{eq}|$$

$$\geq \frac{(M+m)a}{k}$$