<u>Question conceptuelle</u>

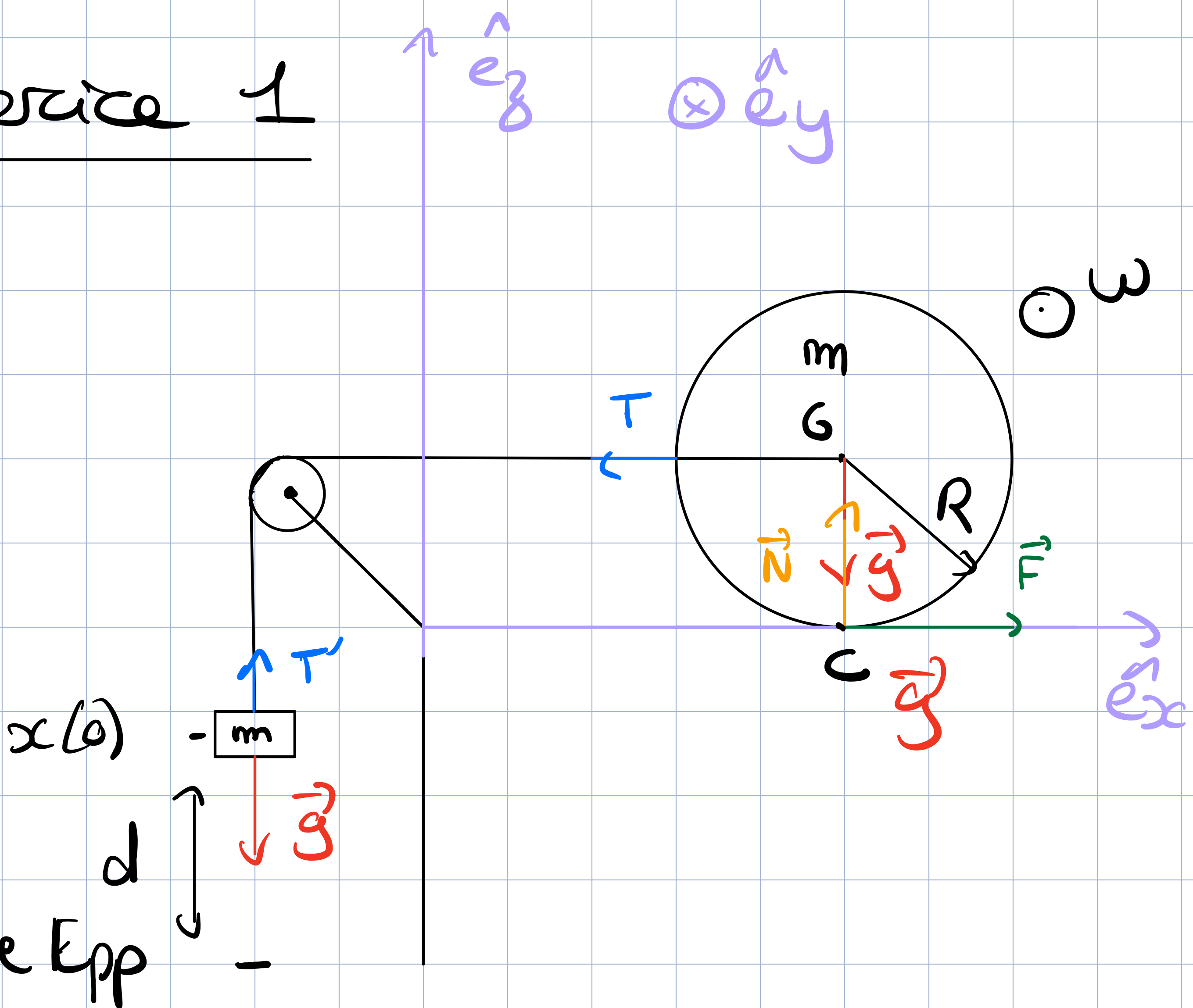
moment d'inertie $I_1 \Rightarrow$ axe $\rightarrow A$

$I_2 \Rightarrow$ axe $\rightarrow C$

$I_3 \Rightarrow$ axe $\rightarrow D$

$I_4 \Rightarrow$ axe $\rightarrow B$

Exercice 1



Bloc

$$\sum_i \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{z} = -mg + T$$

Roue

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{z} = N - mg \\ m\ddot{x} = -T - F \end{cases}$$

Conservation de l'énergie mécanique
- force de frottement + force de contact ne travaillent pas (vitesse du point d'application nulle)

- $T = -T'$ ⇒ pas de travail
- poids pour le bloc et la roue ⇒ conservatif

$$E_{m_1} = E_{m_{BLOC}} + E_{m_{ROUE}}$$

$$= \underbrace{k_{BLOC}}_{=0} + V_{BLOC} + \underbrace{k_{ROUE}}_{=0} + \underbrace{V_{ROUE}}_{=0}$$

$$= mgh = mgd$$

on sait que si a la fin la roue a avancé de d alors $h = d$

- $$E_{m_2} = k_{BLOC_2} + \underbrace{V_{BLOC_2}}_{=0} + k_{roue} + \underbrace{V_{roue}}_{=0}$$

$v_{BLOC} = v_G$?

$$= \frac{1}{2} m (v_{BLOC})^2 + \frac{1}{2} m (\vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$$

$$= m (\vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \omega^2$$

$$= m v_G^2 + \frac{1}{4} m v_G^2$$

$$\omega = \frac{v_G}{R}$$

$$= \frac{5}{4} m (v_G)^2$$

$$\frac{5}{4} m (v_0)^2 = mgd$$

$$\Leftrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{4}{5} gd}$$

(b)

$$F_{frott} \leqslant F_{frott}^{max} = \mu_s N$$

Bloc

$$\sum_i \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{z} = -mg + T$$

Roue

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{z} = N - mg = 0 \\ m\ddot{x} = -T + F \end{cases}$$

$$F_{frott} \leqslant \mu_s N$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu_s \geqslant \frac{F_{frott}}{N} = \frac{F_{frott}}{mg}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{z} = \ddot{x} \quad &\Leftrightarrow \quad -mg + T = -T + F \\ &\Leftrightarrow \quad -mg + 2T = F \end{aligned}}$$

$$\vec{L}_G = I_\Delta \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G$$

$$= \vec{GC} \wedge \vec{F}$$

$$= \boxed{-RF = I_\Delta \dot{\omega}}$$

$$\left(\dot{\omega} = \frac{a_G}{R}\right) \qquad = I_\Delta \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{-R^2F}{I_\Delta} = \frac{-R^2F}{\frac{1}{2}mR^2}$$

$$= -\frac{2F}{m}$$

- $m\ddot{x} = -2F$
- $m\ddot{x} = -mg + T \Leftrightarrow m\ddot{z} = -mg + T$
- $m\ddot{x} = -T + F$

RESOLUTION EQUATION

$$T = m\ddot{x} + mg$$

$$f = m\ddot{x} + T = 2m\ddot{x} + mg$$

$$m\ddot{x} = -2(2m\ddot{x} + mg)$$

$$= -4m\ddot{x} - 2mg$$

$$\Leftrightarrow \quad 5m\ddot{x} = -2mg$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{x} = \frac{-2}{5}g$$

$$f = 2m\left(\frac{-2}{5}g\right) + mg$$

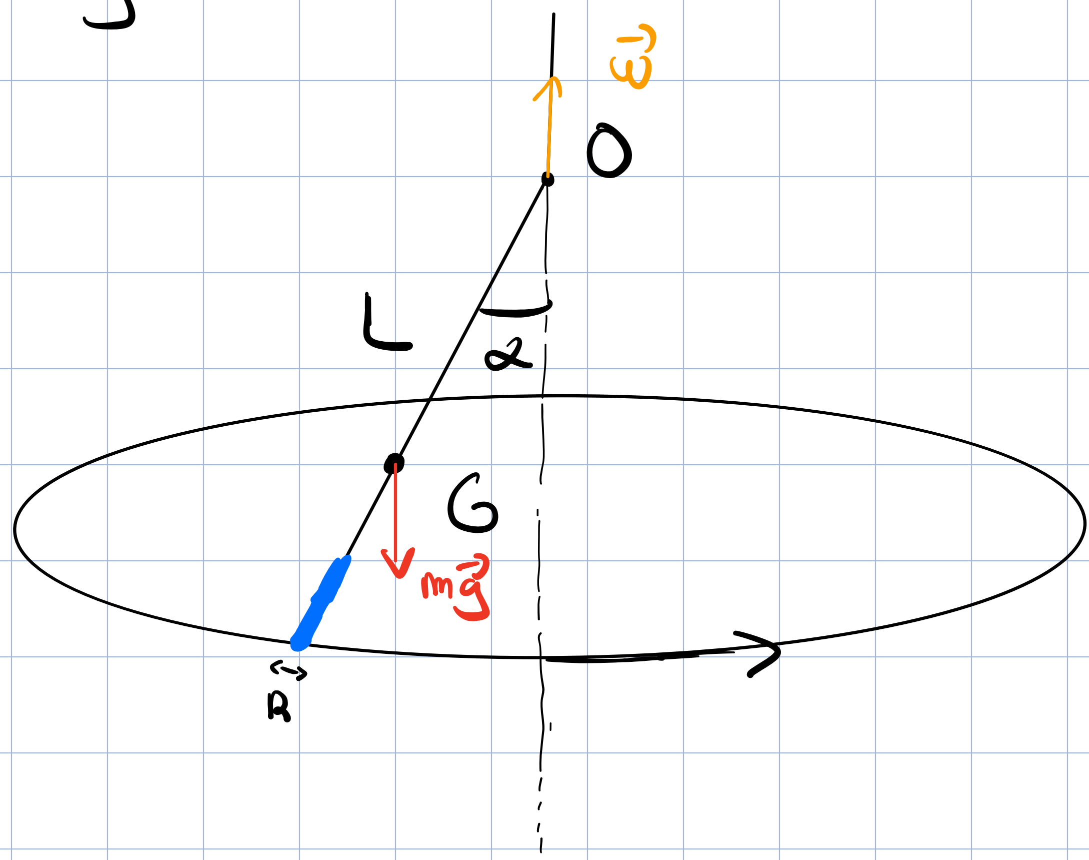
$$= \frac{-4}{5}mg + \frac{5}{5}mg = \frac{1}{5}mg$$

$$T = m\left(\frac{-2}{5}g\right) + mg = \frac{3}{5}mg.$$

$$\mu_s \geqslant \frac{1/5\, mg}{mg}$$

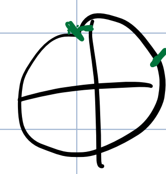
$$\Leftrightarrow \mu_s \geqslant \frac{1}{5}.$$

② Tige en rotation

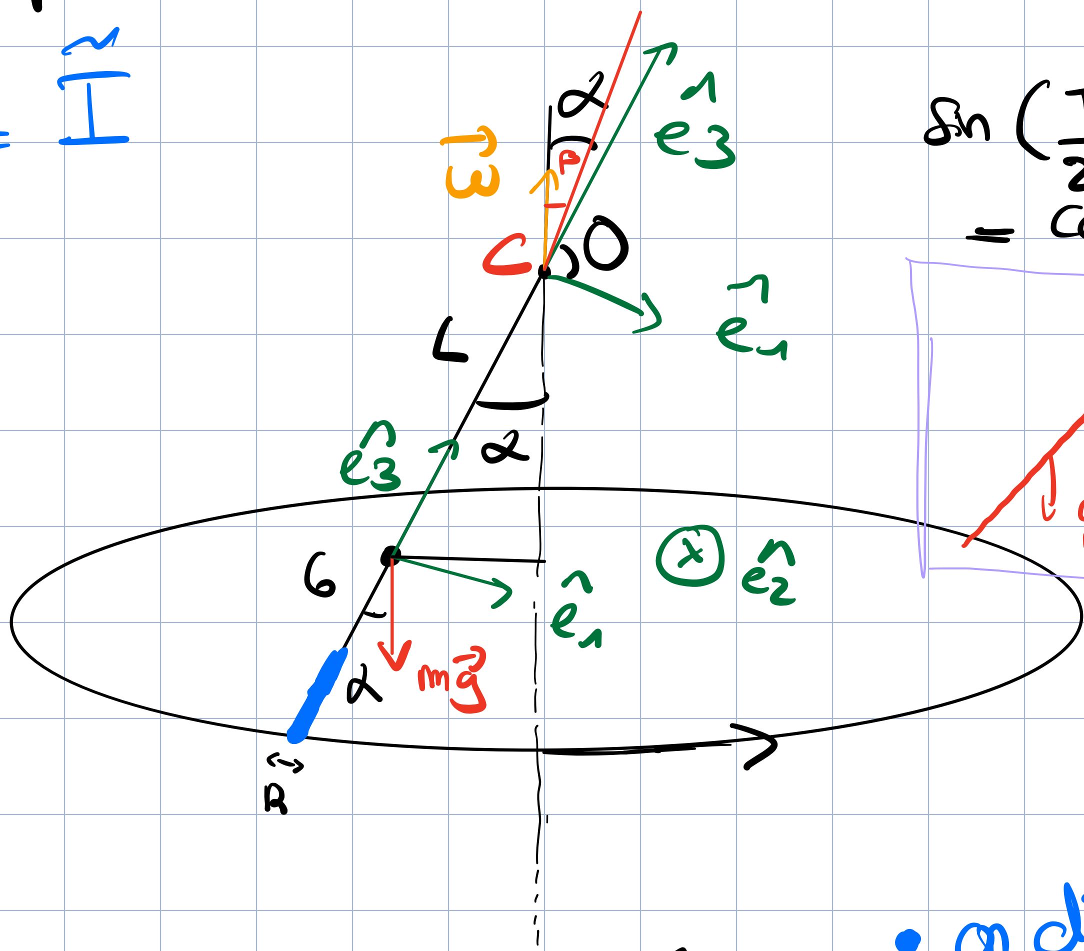


- $G \notin \Delta$ $\Rightarrow$ pas d'équilibre statique
- Δ n'est pas un axe principal d'inertie $\Rightarrow$ pas d'équilibre dynamique

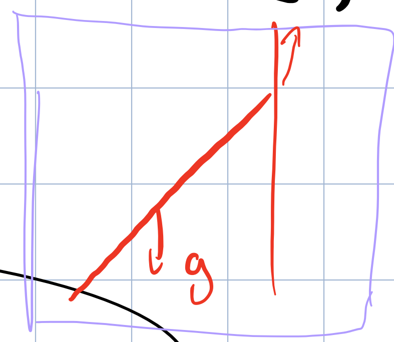
On se place dans un repère d'inertie :



$\vec{L}_x = \tilde{I}$



$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
$= \cos(\alpha)$



- on définit l'origine en G

$$\vec{\omega} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -\omega \sin\alpha \\ 0 \\ \omega\cos\alpha \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{array}$$

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega\sin\alpha \\ 0 \\ \omega\cos\alpha \end{pmatrix}$$

On calcul le tenseur au point G :

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{1}{2k}MR^2} + \frac{1}{12}ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{\frac{1}{2k}MR^2} + \frac{1}{12}ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{\frac{1}{k}MR^2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}$$

$$= \frac{1}{12}ML^2(-\omega\sin\alpha)\hat{e}_1 + \frac{1}{k}MR^2(\omega\cos\alpha)\hat{e}_3$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{1}{12}ML^2(-\omega\sin\alpha)(\vec{\omega}\wedge\hat{e}_1)$$
$$+ \frac{1}{k}MR^2(\omega\cos\alpha)(\vec{\omega}\wedge\vec{e}_3)$$

$$= \frac{1}{12}ML^2(-\omega\sin\alpha)(\omega\cos\alpha)\vec{e}_2$$
$$+ \frac{1}{k}MR^2(\omega\cos\alpha)(\omega\sin\alpha)\vec{e}_2)$$

$$= \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \, M\left(-\frac{1}{12}L^2 + \frac{1}{k}R^2\right)\vec{e_2}$$

$$= \vec{M}_G$$ pour maintenir ω constant

$$\vec{M}_G = \vec{GC} \wedge \vec{T} + \vec{GG} \wedge M\vec{g}$$

$$= -\frac{L}{2} \cdot T \cdot \sin\beta \, \hat{e_2}$$

$$\boxed{\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \, M\left(-\frac{1}{12}L^2 + \cancel{\frac{1}{k}R^2}\right) = -\frac{L}{2} \cdot T \cdot \sin\beta}$$

Le prof a dit qu'on pouvait dire que $R = 0$ (pas seulement négligé par rapport à

$L)$

$$\Leftrightarrow \omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\, M\left(\frac{-1}{12}\right)L = \frac{-1}{2} T\sin\beta$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\, M\,\frac{1}{6}L = T\sin\beta$$

$$= T\sin(\alpha-\theta)$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\, M\,\frac{1}{6}L = T(\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta)$$

<u>if</u> $\alpha = 0$, $\theta = 0$ et on a

$0 = 0$. $\boxed{\text{ok}}$

<u>else</u> :

$$\omega^2 \cos\alpha\, M\,\frac{1}{6}L = T(\cos\theta - \cot\alpha\sin\theta)$$

$$= T\cos\theta - T\cot\alpha\sin\theta$$

$$= Mg - \cos\alpha\left(\frac{L}{2}\sin\alpha\, M w^2\right)$$

$$\Leftrightarrow w^2\cos\alpha\,\frac{1}{6}L = g - \cos\alpha\,\frac{L}{2}w^2$$

$$\Leftrightarrow w^2\cos\alpha\, L + \cos\alpha\, 3Lw^2 = 6g$$

$$\Leftrightarrow w^2\cos\alpha\, L\, 4 = 6g$$

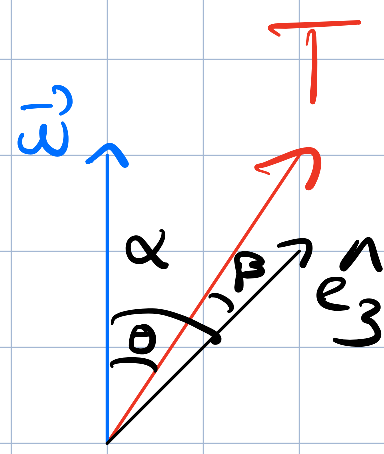
$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{g}{w^2 L}\,\frac{6}{4}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\to m\ddot{z} = T\cos\theta + Mg \boxed{= 0}$$

$$m\ddot{x} = T\sin\theta = \omega^2\left(\frac{L}{2}\sin\alpha\right)m$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \ddot{x} = \omega^2\left(\frac{L}{2}\sin\alpha\right)$$



$$\theta = \alpha - \beta$$

$$\Leftrightarrow \beta = \alpha - \theta$$

$$v_G = \frac{L}{2}\omega$$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \vec{CG}$$

$$= \vec{0} - \omega\left(\frac{L}{2}\right)\vec{e_2}$$

$$\vec{L_C} = \vec{L_G} + \vec{CG} \wedge M\vec{v_G}$$

$$= \vec{L_G} + \vec{CG} \wedge M\left(-\omega\frac{L}{2}\vec{e_2}\right)$$

$$= \vec{L_G} - \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \omega M \vec{e_1}$$

$$= \vec{L_G} - \frac{L^2}{4}\omega M \hat{e}_1$$

$$\frac{d\vec{L_C}}{dt} =$$

$$\frac{1}{12}ML^2(-\omega\sin\alpha)\hat{e}_1 + \frac{1}{K}MR^2(\omega\cos\alpha)\hat{e}_3$$

$$-\frac{L^2}{4}\omega M\hat{e}_1$$

$$= \omega^2\sin\alpha\cos\alpha\, M\left(-\frac{1}{12}L^2 + \frac{1}{K}R^2\right)\vec{e_2}$$

$$-\frac{L^2}{4}\omega M\,\underbrace{(\vec{\omega}\wedge\hat{e}_1)}_{\omega\cos\alpha\,\hat{e}_2}$$

$$= \omega^2\sin\alpha\cos\alpha\, M\left(-\frac{1}{12}L^2 + \frac{1}{K}R^2 - \frac{L^2}{4\sin\alpha}\right)$$

$$= \vec{M_C}$$

$$= \vec{CG}\wedge M\vec{g}$$

$$= -\frac{L}{2}\cdot\cancel{M}\cdot g\cdot\cancel{\sin\alpha}\,\hat{e}_2$$

$$\overset{?}{=}$$

$$w^2 \cancel{\sin\alpha}\cos\alpha \cancel{M}\left(\frac{-1}{12}L^2 + \frac{1}{K}R^2 - \frac{L^2}{4\sin\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-L}{2}g = w^2\cos\alpha\left(\frac{-1}{12}L^2 + \cancel{\frac{1}{K}R^2} - \frac{L^2}{4\sin\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}g = w^2\cos\alpha\left(\frac{-1}{12}L + \cancel{\frac{1}{KL}R^2} - \frac{L}{4\sin\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}g = w^2\cos\alpha\,\frac{-1}{12}L - w^2\cos\alpha\,\frac{L}{4\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}g = w^2\cos\alpha\,\frac{-1}{12}L - \frac{w^2 L}{4\tan\alpha}$$

La tige n'est soumise qu'à son poids, qui est une force conservative.

L'énergie mécanique est conservée.

$$E_m = K + V$$

$$= \frac{1}{2} m (V_G)^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

On connaît le tenseur d'inertie au point G, on veut le retrouver au point C ?

$$\frac{1}{2} m (\vec{V}_G)^2 + \qquad + \frac{1}{2} \tilde{I}_G \vec{\omega}$$

EL THEOREM

$$\vec{M}_C = \vec{M}_G + \vec{CG} \wedge m\vec{a}_G$$