Série 6

Ex 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ker (A) est le Sous-espace vectoriel engendré ar les vecteurs $A\vec{x} = 0$.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -2x_2 \; 3x_3$

x_2, x_3 free

$x_4 = 0$

$$\vec{x} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

base : $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$A^{3\times 4}$

$\mathrm{Im}(A)$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{y} = A\vec{x}$.

base $\mathrm{Im}(A)$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ engendre un plan dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Si H sous-espace de V :

a • H contient le vect nul de V.
b • $u+v$ est dans H
c • cu est dans H

polynôme dont tt les coefs sont nuls

E_1 a

$$\begin{pmatrix} 4 + a_1 t + 2t^2 + \\ 16 + a_1' t + 4t^2 \end{pmatrix}$$
$$= 20 + (a_1 + a_1')t + 6t^2$$

E_2

élement nul $\quad p_n(t) = 0$

et $p_n(0) \neq 1$

E_3 (a) ok

(b) ok

(c) Ok

(E_3 contient des réels)

E_4 (a) Ok

(b) Ok

(c) Ok

Exercice 3

Si $q(t)$ est ds le span alors

$$c_1(1-t) + c_2(t^3) + c_3(t^2-t+1)$$
$$= t^3 - 2t + 1$$

$$c_1 - c_3 - (c_1+c_3)t + c_3 t^2 + c_2 t^3$$

$$c_3 = 0$$
$$c_2 = 1$$
$$c_1 + c_3 = 2 \Rightarrow c_1 = 2 \qquad \rightarrow\!\leftarrow$$
$$c_1 - c_3 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

Exercice 4

- $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in H$

- $T(c\vec{u}_1 + d\vec{u}_2) = cT(\vec{u}_1) + dT(\vec{u}_2)$

l'ensemble image ; lk les vecteurs $A\vec{u}_1$.

Exercice 5

a

p_1 combili $\vec{0}$? NON

p_2 combili p_1 ? NON

p_3 combili p_1 et p_2 ? NON

$\Rightarrow$ OUI

p_2 combilc p_1 ? $\Rightarrow$ NON

p_3 combili p_1 et p_2 ? $\Rightarrow$ NON

(b) Non, Il manque un vect $\in$ 3.

Exercice 6

ⓐ $$T(\vec{0}) = \begin{pmatrix} p_0(0) \\ p_0(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ⓑ $$T(\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \begin{pmatrix} (a+b)(0) \\ (a+b)(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(0) + b(0) \\ a(0) + b(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(0) \\ a(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b(0) \\ b(0) \end{pmatrix}$$

$$= T(\vec{a}) + T(\vec{b})$$

$$T(c\vec{a}) = \begin{pmatrix} (ca)(0) \\ (ca)(0) \end{pmatrix}$$

$$= c\begin{pmatrix} a(0) \\ a(0) \end{pmatrix}$$

$$= c\,T(\vec{a})$$

(b)

$$T(\vec{x}) = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Ker T est l'ensemble des polyn. de la forme $0 + at + bt^2$!

$$p_1(t) = t$$
$$p_2(t) = t^2 .$$

(c) $\mathrm{Im}(T)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 7

a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

On veut former $at^2 + bt + c$.

$$c_1(1+t^2) + c_2(t+t^2) + c_3(1+2t+t^2)$$
$$= (c_1+c_3) + (c_2+2c_3)t + (c_2+c_3)t^3$$

$$c = c_1 + c_3$$
$$b = c_2 + 2c_3$$
$$a = c_2 + c_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & (b-a) \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c-b+a \\ 0 & 1 & 0 & \cancel{b-b}+a \\ 0 & 0 & 1 & b-a \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = a-b+c \\ x_2 = a \\ x_3 = -a+b \end{cases}$$

d)

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + c_4 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 + c_3 & 0 \end{pmatrix}$$

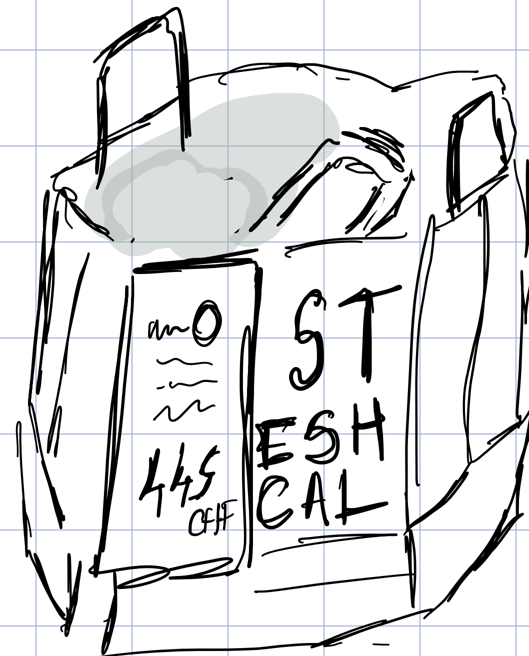
$$c_1 + c_4 = 0$$
$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$
$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

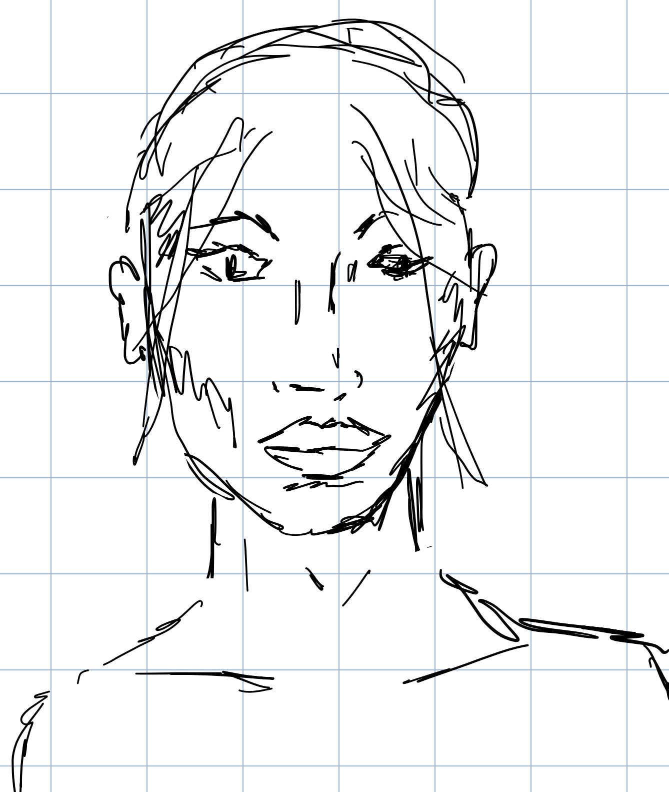
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

une seule sol $\Rightarrow$ Sol triviale

Exercice 8





Ex 8

(a) Si on a $v_p = c\, v_q$

alors on a

$$T(c\, v_q) = c\, T(v_q) = c\, T(v_p)$$

et donc $c\,T(v_p) = T(v_p)$.

(b) Si ora a per unica sol banale

$$c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_p V_p = 0$$

$$T(0) = 0$$

$$T(c_1 V_1 + \dots + c_p V_p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad T(c_1 V_1) + T(c_1 V_2) + \dots + \dots = 0$$

Exercice 9

① lin indep

② lin dep.

$3 \cdot 5 = 15$ $\qquad$ $-6 \cdot 5 = 30$

$-5 \cdot (-3) = 15$ $\qquad$ $-2 \cdot (-3) = 6$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 9 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 9 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) lin dep.

2) a) non

b) oui

c) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -6 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oui

Exercice 10

(a) Matrice A.

$A\vec{x} = \vec{0}$

$A^{1\times 3}$

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x = y - z$

$\begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Base : $y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

(b) $A\vec{x} = 0$

$A^{1\times 2}$

$p(1) = a(1) + b(1) + c$

$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $a = -b - c$

$p(t) = (-b-c)t^2 + bt + c$

$= -b(t^2 - t) - c(t^2 + 1)$