① Enoncé

Une famille de deux vecteurs $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est linéairement indépendante ssi $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ non colin.

Preuve

Supposons $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ non colinéaires.

$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ t.q $c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$ t.q :

$$c_1 \vec{v_1} + c_2 \vec{v_2} = \vec{0}$$

Si $c_1 \neq 0$, $\vec{v_1} = \frac{-c_2}{c_1} \vec{v_2}$

$c_2 \neq 0$, $\vec{v_2} = \frac{-c_1}{c_2} \vec{v_1}$

$\Rightarrow$ donc $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ colinéaires.

② Enoncé

Une famille de p vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est nécessairement linéairement dépendante si $p > n$.

Preuve

Soit $A = [\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$

- colonnes de A lin. dep. ssi $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale.

- n équations pour $p > n$ variables $\Rightarrow$ une variable libre $\Rightarrow$ $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une infinité de solutions.

③ Enoncé

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.
$\exists$ une unique matrice A t.q $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

De plus, A est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} T(\vec{e_1}) & \dots & T(\vec{e_n}) \end{bmatrix}$$

où $\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}$ sont les colonnes de la matrice identité

Preuve

Tout $\vec{x}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{e_1} \dots \vec{e_n}$.

Puisque T est linéaire:

$$T(\vec{x}) = T(x_1 \vec{e_1} + \dots + x_n \vec{e_n}) = x_1 T(\vec{e_1}) + \dots + x_n T(\vec{e_n})$$

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} T(\vec{e_1}) & \dots & T(\vec{e_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\vec{x}.$$

4 **Énoncé**

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une appli. linéaire.
T est injective ssi l'équation $T(\vec{x}) = 0$ admet uniqu. la solution triviale pour sol.

Preuve

1. Supposons T injective. Alors $T(\vec{0}) = \vec{0}$ et comme T injective, pas d'autres sols. pour $T(\vec{x}) = \vec{0}$.

2. Supposons que $T(\vec{x}) = \vec{0}$ a pour seule sol. $\vec{x} = \vec{0}$.
$T(\vec{x})$ est une appli lin $\Rightarrow \exists! A$ t.q $A\vec{x} = T(\vec{x})$.
T injective ssi $A\vec{x} = \vec{b}$ a au plus une sol $\forall \vec{b}$.
Comme $T(\vec{x})$ a une uniqu. sol $\Rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ aussi.
Or toutes les sols de $A\vec{x} = \vec{b}$ s'écrivent comme
$$\vec{x} = \vec{p} + \vec{h}$$
sol du système homogène
solution particulière de $A\vec{x} = \vec{b}$.

Or $\vec{h} = \vec{0}$ uniquement, donc $A\vec{x} = \vec{b}$ admet au plus une solution.

5 **Enoncé**

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Preuve

Soit M la forme échelonnée réduite de A.
$\exists$ une séquence de matrices élémentaires t.q

$$M = E_k \dots E_2 E_1 A$$

$$\Rightarrow \det(M) = \underbrace{\det(E_k)}_{\neq 0} \cdot \dots \cdot \underbrace{\det(E_1)}_{\neq 0} \det(A)$$

Si A est inversible, elle a n pivots. Donc $M = I_n$.

$$\Rightarrow \det(M) = \det(I_n) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0.$$

Sinon, au moins une ligne de 0 dans M :

$$\det(M) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0.$$

⑥ Énoncé

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Preuve

Si A non inversible $\Rightarrow$ AB non plus

$\Rightarrow \det(AB) = 0 = \det(A) \cdot \det(B)$.

Sinon :

$I_n = E_k \dots E_1 A$ (on va jusqu'à échelonnement réduit)

$\Rightarrow A^{-1} = E_k \dots E_1$

$\Rightarrow A = (E_k \dots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1^{-1} \dots E_k^{-1} B) \\ &= \det(E_1^{-1} \dots E_k^{-1}) \det(B) \\ &= \det(A) \cdot \det(B)\end{aligned}$$

7 Énoncé

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$$

Lemme

Soit A et B deux matrices t.q AB compatible.
B inversible $\Rightarrow \text{Im}(A) = \text{Im}(AB)$ *

Preuve

Soit M une une forme échelonnée de A.
$\exists\, E$ inversible t.q $M = EA$.
$\Rightarrow M^T = A^T E^T$ et E inversible $\Rightarrow E^T$ inversible.

$$\text{Im}(M^T) = \text{Im}(A^T E^T) \overset{(*)}{=} \text{Im}(A^T)$$

or $\dim(\text{Im}(M^T)) = \dim(\text{Im}(M))$
$= \dim(\text{Im}(A))$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

8 Énoncé

Si A et B sont semblables $\Rightarrow p_A = p_B$.

Preuve

A et B semblables $\Rightarrow B = P^{-1}AP$

(de plus, $I_n = P^{-1}P = P^{-1}I_nP$)

$$\Rightarrow B - \lambda I_n = (P^{-1}AP) - \lambda(P^{-1}I_nP)$$

$$\Leftrightarrow B - \lambda I_n = P^{-1}AP - (P^{-1}\lambda I_n P)$$

$$= P^{-1}(A - \lambda I_n)P$$

$$\Rightarrow \det(B - \lambda I_n) = \underbrace{\det(P^{-1}) \cdot \det(P)}_{= \det(I_n) = 1} \cdot \det(A - \lambda I_n)$$

$$\Rightarrow p_B(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda)$$

9 Enoncé

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonalisable ssi elle a n vecteurs propres $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$ linéairement indep.

(donc diago. si elle a n valeurs propres distinctes).
(mais pas une condition nécessaire)

Preuve

On choisit $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$AP = A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & \dots & A\vec{v}_n \end{bmatrix}$$

or $PD = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \vec{v}_1 & \dots & \lambda_n \vec{v}_n \end{bmatrix}$

or comme $\vec{v}_i$ vecteur propre $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$

$\Rightarrow$ + on veut P inversible donc les colonnes de A doivent être lin indep.

10 Énoncé

$W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Preuve

1. Soit $\vec{w} \in W$ quelconque

$\vec{0} \cdot \vec{w} = \vec{0}$ donc $\vec{0}$ orthogonal à tous les vecteurs de W.

2. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in W^\perp$ et soit $w \in W$ quelconque.
On a
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$$
$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W^\perp$$

3. Soit $\vec{u} \in W^\perp$ et c un scalaire quelconque.

On a $(c\vec{u}) \cdot \vec{w} = 0$
$$\Rightarrow c(\vec{u}) \in W^\perp.$$

(11) **Enoncé**

Soit A quelconque. $\mathrm{Im}(A^T)^\perp = \ker(A)$.

Preuve

On veut montrer $\ker(A) \subseteq \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Soit $\vec{x}$ un vecteur $\in \ker(A)$. $A\vec{x} = \vec{0}$.
Soit $\vec{\omega}$ un vecteur $\in \mathrm{Im}(A^T)$. $\exists \vec{c}$ t.q $\vec{\omega} = A^T\vec{c}$.
$\vec{x} \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega}^T \vec{x} = (A^T\vec{c})^T \vec{x} = \vec{c}^T A \vec{x} = \vec{0}$.
donc $\vec{x} \in \mathrm{Im}(A)^\perp$

On veut montrer $\mathrm{Im}(A^T)^\perp \subseteq \ker(A)$.
Soit $\vec{x}$ un vecteur quelconque de $\mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
$\vec{x}$ est donc orthogonal à chaque colonne de A^T.
en particulier, $\vec{x}$ orthogonal à chaque ligne de A.
donc $A\vec{x} = 0 \Rightarrow x \in \ker(A)$.

(12) Enoncé

Si les vecteurs $(\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p)$ sont tous non-nuls et forment une famille orthogonale, alors ils sont lin. indep.

Preuve

Posons $0 = c_1\vec{u}_1 + \dots + c_p\vec{u}_p$ et montrons que $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, etc.

$$0 = 0 \cdot \vec{u}_1$$

$$= (c_1\vec{u}_1 + \dots + c_p\vec{u}_p) \cdot \vec{u}_1$$

$$= c_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = c_1 \|\vec{u}_1\|^2$$

or $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ donc $\|\vec{u}_1\|^2 \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0$.
On répète ça pour tous les vecteurs $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_p$.

(13) Énoncé

Soit $(\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p)$ une base orthogonale d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\vec{y} \in W$, les coefficients $c_1, \dots c_p$ de $\vec{y} = c_1\vec{u}_1 + \dots + c_p\vec{u}_p$ sont donnés par

$$c_i = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_i}{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i} \quad , \quad i = 1, \dots, p$$

Preuve

On sait qu'il existe un unique choix de coefs t.q

$$\vec{y} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots c_p\vec{u}_p$$

Pour trouver c_i :

$$\vec{y} \cdot \vec{u}_i = (c_1\vec{u}_1 + \dots + c_p\vec{u}_p) \cdot \vec{u}_i$$

(car les vecteurs sont orthogonaux)

$$= c_i \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i$$

$$\Rightarrow \quad c_i = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_i}{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i}$$