Exercice 1

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -2 & -7 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

(a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 8 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -12 & 9 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -12 & 9 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -9/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$-\frac{12}{24}+\frac{63}{24} = 51/24 = \frac{17}{8}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 + \left(-9/12 \cdot \frac{-7}{2}\right) & 0 \\ 0 & 1 & -9/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 17/8 & 0 \\ 0 & 1 & -9/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 17/8 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -17/8\, z \\ 3/4\, z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x} = t \begin{pmatrix} -17/8 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

linéairement dep

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 14 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 5 & 14 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right)$

$$= \frac{-28}{5} + \frac{45}{5} = \frac{-23+40}{5} = \frac{17}{5}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -14 \times \frac{2}{5} + 9 & 0 \\ 0 & 5 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ linéairement indep.

(c) inf de solu° car que 2 équa.

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 16 \\ 3 & 6 & 24 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 6x_2 \\ x_2 \\ 5x_1 \end{pmatrix}$$

injective
non surjective

(b) $\quad 1 \quad 2$

$\quad\quad 1 \quad 2$

$1/2 \quad 1 \quad 2$

$3/2 \quad 1 \quad 0$

$1/2$

$3/2$

non inj.
non surj.

(c) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$90° = \frac{\pi}{2}$

$90°/3 \times 2 = 60°$

$\frac{\pi}{6} \times 2 = \frac{\pi}{3}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

injective.

surjective.

(b) surjective : tt les images ont au moins un antécédent.

injective : chaque vecteur ont exactement une image.

Surject. non inject. $\exists_{x_1, x_2}$ $f(y_1) = f(y_2)$
$x_1 \neq x_2$

$\exists x \, \forall y \; f(x) = y.$

$$T(\vec{x}_1) = T(\vec{x}_2)$$

$$T(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = T(\vec{x}_1) - T(\vec{x}_2)$$
$$= \vec{0}$$

donc $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$

(b) Supposons T

Exercice 4

(a) F

(b) V

(c) V

(d) F.

Exercice 5

a V

b V

c V

d V

Ex 6

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{U} - \vec{V} + \vec{U} - \vec{W} + \vec{V} - \vec{W}$$

$$= 2\vec{U} - 2\vec{W} \qquad \vec{U} = -\vec{W}$$

$\vec{U}$ = _ _ _

b V

c F

d F

Exercice 7

ⓐ F. $T: x \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ⓑ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$v_1 = c v_2$$ ⓥ

$$T(v_1) ; T(cv_1)$$

$$T(v_1) ; cT(v_1)$$

(c) $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \dots + c_k\vec{v_k} = 0$

$\vec{v} = c\vec{u_1} + \dots + c_k\vec{v_k}$

$T(\vec{v}) = cT(\vec{u_1}) \dots = 0.$

(d) Faux.

e.g.

$x \mapsto x^2$

(e) Vraie

Ex 8

Supposons que T non surjective.

Alors $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^m$ t.q

$$\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n \left(T(\vec{y}) \neq \vec{x}\right)$$

or si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$

alors

(b) $\Rightarrow$ Supposons T injective.

Cela signifie que $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$,

$\exists! \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q $A\vec{x} = \vec{b}$.

$\Leftrightarrow$ chaque $\vec{b} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots c_n \vec{v}_n$ cols de A

avec la comb. des facteurs $(c_1 \dots c_n)$ unique.

donc les colonnes de A sont indep.

$n > m$

$m > n$

$n = n$