Permutations

r-permutations (no rep.)

n = size of the set
r = number of taken elements

$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

ABC
ACB
BAC
etc.

r-permutations (with rep)

n^r

AAA
AAB
ABA
ABB
BAA
etc.

permutations of indistinguishable objects

$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$

ABAC
AABC
AACB
etc.

derangements (permutations with no objects in the original position)

$n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$

original ABCD
DCBA etc.
DACB

Principe d'exclusion-inclusion

On compte le nombre total de dispositions $4! = 24$, puis on soustrait les cas où au moins une lettre est bien placée. Mais en faisant cela, on enlève trop (ex: ABDC qu'on enlève 2x). Il sera réajusté en ajoutant les cas où 2 éléments sont à leur place initiale.

Combinations

r-combinations

n = size of the sets
r = number of taken elements

$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

ABC
AB
BC
A
B
C

r-combinations (with rep.)

$C_R(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$

AA
AB
BC
BB
CC
CB

Visualize

What do we want?

$**||$

2·A 0·B 0·C

or $*|*|$

1·A 1·B 0·C

etc ...

Therefore, we need to place
$(n-1)$ stars (that will become bars)
and r stars (that will stay stars)

$*****$ $(n-1)+r$

How many ways to turn 2 to | ?

$\binom{n-1+r}{n-1} = \binom{n-1+r}{r}$

transform n-1 stars into bars

Pigeonhole principle

k boxes
N items $\Rightarrow$ at least one box with $\lceil \frac{N}{k} \rceil = r$ items

$N_{min} = (r-1)k+1$

order matters?
- yes → repetition allowed?
  - yes → n^r
  - no → $n!$
- no → repetition allowed?
  - yes → $\binom{n-1+r}{r}$
  - no → $\binom{n}{r}$

Number of distinct poker hands containing exactly one pair.

$\binom{13}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}^3$

choose 5 kinds
choose 2 cards from main kind
choose one card per other kind

here, QQ10JK and KK10JQ are considered equals

$\neq$

$\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{3}\cdot\binom{4}{1}^3$

choose main kind
choose 2 cards from
choose 3 other kinds
choose one card per other kind

here QQ10JK and KK10JQ are distinct

Recurrence

Bit strings qui ne contiennent pas 2 zéros consécutifs (BSZC)

Supposons que l'on connaisse le nombre de BSZC de taille n-2 et n-1. Alors, pour calculer le nombre de BSZC de taille n, on peut:

* prendre toutes les BSZC de taille n-2, et leur ajouter $\boxed{10}$, on en tire donc a_{n-2} BSZC de longueur n.
* prendre toutes les BSZC de taille n-1 et leur ajouter 1, on en tire donc a_{n-1} BSZC de longueur n.

$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ → ces deux ensembles sont distincts, ceux tirés de a_{n-2} finissent par un zéro, les autres par un 1.

* Tour de Hanoi

On note H_{n-1} le nombre de coups nécessaires pour déplacer n-1 disques de la tour initiale vers la 3ème tour. Ensuite on a besoin d'un coup pour déplacer le peg restant (le + grand) vers la tour du milieu. Ensuite, il nous faut redéplacer les n-1 restants vers la tour 2. Et ça, c'est la même opération qu'au début, on le fait en H_{n-1} coups. Donc $H_n = 2H_{n-1} + 1$.