Exercise 1

$$\begin{cases} a = 3k. \\ a = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \dots + a_n \cdot 10^n \end{cases}$$

$$= a_0 + a_1(3^2+1) + a_2(3^2+6+1) + \dots +$$

↳ ici on voit qu'il ne va rester que la somme des a_k, le reste aura des 3 ou des 6 devant

$$10 \equiv 1 \; [3]$$
$$10^k \equiv 1^k [3]$$

$$a_i \cdot 10^i \equiv a_i \; [3]$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cdot 10^k\right) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \; [3]$$

Si $\sum_{k=0}^{n} a_k = 3k$, alors le nombre est divisible par 3.

Exercise 2

$(111\ldots111)_2$

$= 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 + \ldots + 1\cdot 2^n$

$\Rightarrow$ somme des termes de 0 à n d'une suite géométrique de raison $q = 2$.

$$(111\ldots111) = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$$

$111\ldots111 =$

$2^0 + 2^1 + 2^2 = 7$

$$2^3 = 8 = 7+1$$

on peut aussi écrire

$$111\ldots111 = 2^n - 1.$$

$$\frac{1-x^n}{1-x} = x^{n-1} - 1$$

Exercise 3

procedure binary_difference $((a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_0)$
$(b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots b_0))$

```
result := ()
deduction := 0
for j := 0 to n-1 :
    temp_res := a[j] - b[j] - deducti
    if temp_res < 0 :
        deduction = 1
        temp_res = temp_res + 2
    else :
        deduction = 0
```

```
result.add(temp_res);

return result;
```

1

11

11

0

Exercise 4

$$A = \{A, B, C, \dots, Z\}$$
$$B = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

calculate everything without the "2 digits" constraint then remove the passwords with only 1/0 digit

$$|(A \cup B)^7| = |A \cup B|^7$$
$$= |26 + 10|^7$$
$$= 36^7 \quad (+36^8)$$

passwords without digits:

$$|A^7| = |A|^7 \quad (+|A|^8)$$

passwords with one digit:

(for each digit 0, 1, ..., 9, we look at how many combination is possible)

$$\begin{cases} \text{for } 0: & 7 \text{ slots possible} \\ 7 \cdot |A|^6 & \end{cases}$$

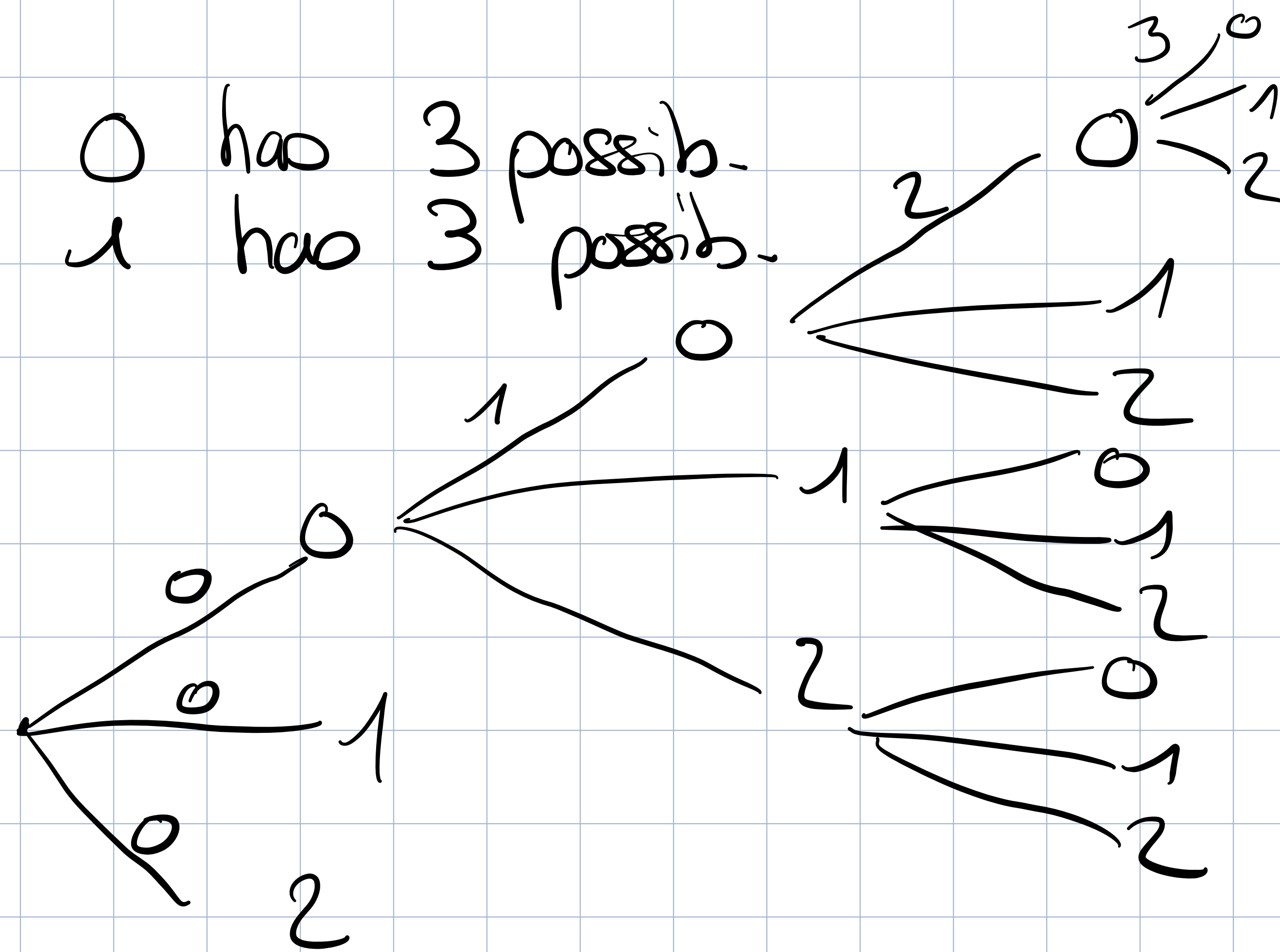
for each digit $\Rightarrow 10 \cdot 7 \cdot |A|^6$
$+ 10 \cdot 8 \cdot |A|^7$

$$\Rightarrow 36^7 - 26^7 - 10 \cdot 7 \cdot 26^6$$
$$+ 36^8 - 26^8 - 10 \cdot 8 \cdot 26^7$$

$\approx$ 2 018 milliards.

Exercise 5

(1) 0 has 3 possib.
1 has 3 possib.



$$|B|^{|A|} = 3^4 = \underline{81}$$

(2) Au début, on a 7 choix, puis 6, puis 5, puis 4.

$$\frac{7!}{3!} = \underline{840}$$

Exercice 6

row of 2n people

we start with a man:

$$n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-2) \ldots$$

$$(n)!^2$$

we start with a women:

$$(n)!^2$$

$$\Rightarrow 2(n!)^2$$

② 3 women, 3 men

$$\begin{pmatrix}3\\10\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix} = \frac{10!}{3!\,7!} \cdot \frac{15!}{3!\,12!}$$

$$= 120 + 455$$

$$= \underline{575}$$

Exercise 7

COUNTRY $\begin{cases} |C| = 10 \\ 10^1 + 10^2 + 10^3 = \underline{1110}. \end{cases}$

1st BLOCK $\begin{cases} |P| = 8 \\ |P \times C \times C| = |P| \cdot |C|^2 = \underline{800} \end{cases}$

LAST BLOCK $\begin{cases} |C|^4 = 10\,000 \end{cases}$

$\Rightarrow nb = 1110 \cdot 800 \cdot 800 \cdot 10\,000$

$\otimes\ 7.104 \cdot 10^{12}.$

Exercise 8

$$\binom{n+r-1}{r} \rightarrow$$

Une combinaison permet de sélectionner des éléments à partir d'un ensemble + grand, où l'ordre ne compte pas

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$\Rightarrow$ Combinaisons avec répétitions

$$\binom{n+r-1}{r}$$

illustration avec des barres séparateurs.
On veut 3 groupes:

||oooooooo $\Rightarrow$ 0, 0, 8

oooo|oo|oo $\Rightarrow$ 4, 2, 2

on veut sélectionner $r-1$ emplacements pour les séparateurs parmi $n+(r-1)$ emplacements.

$$\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\,2!}$$

$$= \underline{45}$$

2. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

$$\binom{8+4-1}{4-1} = \frac{11!}{3!\,8!}$$

$$= \underline{165}$$

3. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7.$

$$\binom{7+5-1}{5-1} = \frac{11!}{4!\,7!}$$

$$= \underline{330}$$

④ $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \Big\} \; x_5$

① ② ③ ④

on a forcement 10 déjà placés

$18 - 10 = 8$

on réapplique

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$$

$$\binom{8+5-1}{5-1} = \underline{495}$$

5 tous les cas sans contrainte sur x_5 $\binom{9+6-1}{6-1}$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 23$$

3 3 8 1

on pose $x_5 = 0$

$23 - 14 = 9$ $\binom{9+5-1}{5-1}$

5 car on ne compte pas la variable x_5 mais que $x_1 x_2 x_3 x_4 x_6$.

+

$23 - 14 - x_5 = 23 - 14 - 1 = 8$

on pose $x_5 = 1$

$\binom{8+5-1}{5-1}$

+ ... pour $x_5 = 2$ et $x_5 = 3$

$= \underline{1750}$

Exercise 9

- 52 cards
- 13 kinds

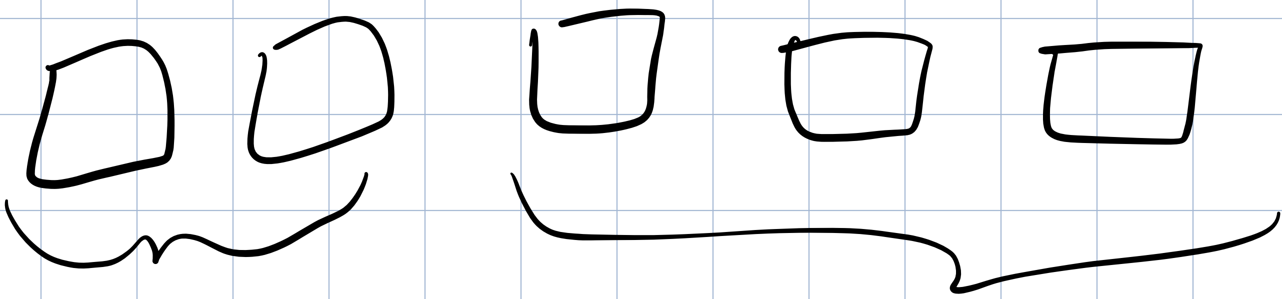
$$
\overset{\text{kind}}{\downarrow}\qquad\qquad \overset{\text{2 colors}}{\swarrow}
$$

(1) $$13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(12 \cdot \binom{4}{1} \cdot 11 \cdot \binom{4}{1} \cdot 10 \cdot \binom{4}{1}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{5!}}$$

$\boxed{\text{Q R♡ 10♡ et Q 10♡ R♡}}$

ce cas est le même

on doit diviser par le nb de permutations 3!



$13 \cdot \binom{4}{2}$

$\underbrace{12 \cdot 4 \quad 11 \cdot 4 \quad 10 \cdot 4}$

3! façon de les ordonner.

MISSISSIPPI

$$\frac{11!}{4!\,4!\,2!}$$

EXCUSARE

VOS EXCUSATIS

SCUSATE EXCUSEZ SCUZATI

2

$$\underbrace{\square\,\square}\quad\underbrace{\square\,\square}\quad\underbrace{\square}$$

$$\underbrace{13\cdot\binom{4}{2}\cdot 12\cdot\binom{4}{2}\cdot 11}_{3!}\cdot\binom{4}{1}$$

3

$$\underbrace{\square \; \square \; \square}_{13 \cdot \binom{4}{3}} \cdot \underbrace{\square \; \square}_{12 \cdot \binom{4}{2}}$$