Exercice 1

$\boxed{\begin{array}{l}\text{pas un pivot ds chaque colone} \\ \text{car} \quad m < n. \\ \text{donc sol paramétrique}\end{array}}$

$m \times n$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + 6y + 8u - v = 0 \\ z - 3u + 4v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

u, v free

$$\begin{cases} x = -6y - 8u + v \\ z = 3u - 4v \\ w = 0 \\ u, v, y \text{ free} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -6y - 8u + v \\ y \\ 3u - 4v \\ u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = x\vec{v_1} + y\vec{v_2} + z\vec{v_3}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

ⓐ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Impossible. la seule sol à

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

est la solution triviale. Ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

théorème ?

(b)

$$2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \vec{0}$$

donc les vecteurs sont linéairement dépendants.

(c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -5/2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -5/2 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{14}{2} + 5/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$= 19/2$$

$$\begin{cases} x + \frac{19}{2} z = 0 \\ y - \frac{5}{2} z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{19}{2} z \\ y = 5/2 z \\ z \text{ libre} \end{cases}$$

usedent $\mathbb{R}^2$

$$-\frac{19}{2} z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} z \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

e.g. $z = 3$

$$\begin{pmatrix} -\frac{19}{2} z + \frac{15}{2} z + \frac{4}{2} z \\ -\frac{19}{2} z + \frac{5}{2} z + \frac{14}{2} z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\boxed{\text{Ok}}$

Exercice 3

ⓐ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -8 & 0 \\ -6 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & 14 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -14/8 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \end{array}\right)$

$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Le système n'admet que la sol. triviale,
les vecteurs sont linéairement indépendants

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \times\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2 \\ 14/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

c) non, il faut 4 vecteurs pour engendrer $\mathbb{R}^4$.

théorème ?

Exercice 4

Une application est linéaire ssi

* $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
* $f(x+v) = f(x) + f(v)$

① $\sin(x+v) \neq \sin(x) + \sin(v)$

② $(x+v, (x+v)^2)$

$\neq (x, x^2) + (v, v^2)$

③ $(x+v' + y+v'', 2(x+v')$
$- 3(y+v''))$

$$= (x+y,\ 2x-3y) + (v'+v'',\ 2v'-3v'')$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= T\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2(x_1+x_2) - z_1 - z_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \end{pmatrix}}{T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 - z_1 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 - z_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(e) pas une application linéaire car $+1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \end{pmatrix}$$

Exercice 5

(a) il y a un pivot dans chaque colonne.

(b) il y a exactement 2 variables libres
deux cols sans pivot, 2 cols avec.

(c) il y a exactement 1 variable libre.
une col sans pivot, 3 cols avec.

Exercice 6

Vrai (voir théorème du cours)

$\nexists$ comb non linéaire de p vecteurs $\rightarrow \mathbb{R}^n$.

$\neg \mathbb{R}^n \rightarrow \neg \nexists$ comb. lin. de p vect.

Exercice 7

1. $T(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\vec{x})$

(2) $T(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $T(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 8

Rotation d'un angle θ

Exercice 9

(a) Vrai

v_1 et v_2 lin dep

$\Leftrightarrow c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow c_1\vec{v_1} = -c_2\vec{v_2}$

même direction

(b) Faux.

e.g $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) Vrai. admet sol. triviale.

(d) Faux.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$