

# Permutations

## r-permutations (no rep.)

n = size of the set  
r = number of taken elements

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$\begin{cases} ABC \\ ACB \\ BAC \\ \text{etc.} \end{cases}$

## r-permutations (with rep.)

$$n^r$$

$\begin{cases} AAA \\ AAB \\ ABA \\ ABG \\ BAA \\ \text{etc.} \end{cases}$

## permutations of indistinguishable objects

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

$\begin{cases} ABAC \\ AABC \\ AACB \\ \text{etc.} \end{cases}$

## dérangements (permutations with no objects in the original position)

$$n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

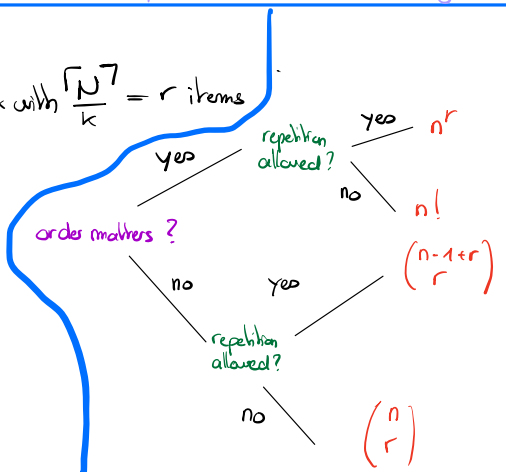
original ABCD  
DCBA etc.  
DACB

## Principe d'exclusion-inclusion

On compte le nombre total de dispositions  $4! = 24$ , puis on soustrait les cas où au moins une lettre est bien placée. Mais en faisant cela, on enlève trop (ex: ABCD qu'on enlève 2x). Il sera réajusté en ajoutant les cas où 2 éléments sont à leur place initiale.

## Pigeonhole principle

k boxes  
N items  
 $N_{min} = (r-1)k + 1$



# Combinations

## r-combinations

n = size of the sets  
r = number of taken elements

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! r!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$\begin{cases} ABC \\ AB \\ BC \\ A \\ B \\ C \end{cases}$

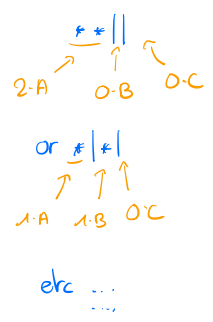
## r-combinations (with rep.)

$$C_R(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$$

$\begin{cases} AA \\ AB \\ BC \\ BB \\ CC \\ CB \end{cases}$

## Visualize

What do we want?



Therefore, we need to place  $(n-1)$  stars (that will become bars) and  $r$  stars (that will stay stars)

$$*** \quad (n-1) + r$$

How many ways to turn 2 to 1?

$$\binom{n-1+r}{n-1} = \binom{n-1+r}{r}$$

transform n-1 stars into bars

## Number of distinct poker hands containing exactly one pair

$$\binom{13}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1}^3$$

choose 5 kinds      choose 2 cards from main kind      choose one card per other kind equals

here, QQ-105k and KK-105Q are considered equals

$$\neq \binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{4}{1}^5$$

choose main kind      choose 2 cards from      choose 3 other kinds      choose one card per other kind

here QQ-105k and KK-105Q are distinct

## Recurrence

### Bit strings qui ne contiennent pas 2 zéros consécutifs (BSZC)

Supposons que l'on connaisse le nombre de BSZC de taille n-2 et n-1. Alors, pour calculer le nombre de BSZC de taille n, on peut:

- \* prendre toutes les BSZC de taille n-2, et leur ajouter 10, on en tire donc  $a_{n-2}$  BSZC de longueur n.
- \* prendre toutes les BSZC de taille n-1 et leur ajouter 1, on en tire donc  $a_{n-1}$  BSZC de longueur n.

$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$  → ces deux ensembles sont disjoints, ceux finissant par un zéro, les autres par un 1.

### \* Tour de Hanoi

On note  $H_{n-1}$  le nombre de coups nécessaires pour déplacer n-1 disques de la tour initiale vers la 3ème tour. Ensuite on a besoin d'un coup pour déplacer le peg restant (le + grand) vers la tour du milieu. Ensuite, il nous faut redéplacer les n-1 restants vers la tour 2. Et ça, c'est la même opération qu'au début, on le fait en  $H_{n-1}$  coups. Donc  $H_n = 2H_{n-1} + 1$ .

