

Teacher: Tanja Käser

Advanced information, computation, communication I

19/12/2023

Duration: 45 minutes

1

Anonymous Student

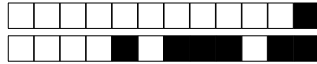
SCIPER: 0

Do not turn the page before the start of the exam. This document is double-sided, has 16 pages, the last ones possibly blank. Do not unstaple.

- This exam is closed book. We have provided you a cheat sheet to use. In addition, you are allowed to use a simple calculator (not programmable).
- Place all your personal items on the floor. Leave only a pen, your calculator, and your ID on the desk. If you need extra scratch paper, please ask for it by raising your hand.
- Please do not cheat. We will report any such occurrence to the legal service of EPFL.
- **Please be aware that this exam is quite long. We do not necessarily expect you to solve all the problems. Start with the problems which seem the easiest to you and try to collect as many points as you can.**
- The questions are of different degrees of difficulty. The order of questions is random. So don't get stuck, try to solve simple problems first and keep the hard ones for the remaining time.
- For each of the multiple choice questions, **only one answer is correct** among the 4 choices offered.

correct answer ticked	wrong answer ticked	no answer/more than one answer ticked
full points	-1/3 of the points	no points













- If a question is not completely clear to you, don't waste time and ask for clarification.
- Use a **black or dark blue ballpen** and clearly erase with **correction fluid** if necessary.



- Cet examen est à livre fermé. Nous vous avons fourni une "cheat sheet" à utiliser. En outre, vous êtes autorisé à utiliser une calculatrice simple (non programmable).
- Posez tous vos objets personnels sur le sol. Ne laissez qu'un stylo, votre calculatrice et votre ID sur le bureau. Si vous avez besoin de papier brouillon supplémentaire, veuillez le demander en levant la main.
- Veuillez ne pas tricher. Nous signalerons tout incident de ce type au service juridique de l'EPFL.
- **Veuillez noter que cet examen est assez long. Nous n'attendons pas nécessairement de vous que vous résolviez tous les problèmes. Commencez par les problèmes qui vous semblent les plus faciles et essayez d'obtenir le plus de points possible.**
- Les questions sont de différents degrés de difficulté. L'ordre des questions est aléatoire. Ne restez donc pas bloqué, essayez de résoudre d'abord les problèmes simples et gardez les plus difficiles pour le reste du temps.
- Pour chacune des questions suivantes, **une seule réponse est correcte** parmi les 4 choix proposés.

réponse correcte cochée mauvaise réponse cochée pas de réponse/plus d'une réponse cochée
totalité des points -1/3 des points pas de points

- Si une question n'est pas tout à fait claire pour vous, ne perdez pas de temps et demandez des précisions.
- Utilisez un stylo à bille **noir ou bleu foncé** et effacez clairement avec du **liquide correcteur** si nécessaire.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Question 1 : This question is worth 4 points

(English) A computer system considers a string of decimal digits as a valid codeword if it contains an even number of 0 digits. Note that a codeword containing no 0 digits is considered valid. Let a_n be the number of valid n -digit codewords. Then, the recurrence relation for a_n is:

- ☐ $a_n = 8a_{n-1} + 9a_{n-2}, a_1 = 9$
- ☐ $a_n = 9a_{n-1} + 10, a_1 = 9$
- ☐ $a_n = 9a_{n-1}, a_1 = 9$
- ☒ $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_1 = 9$

a_{n-1} contains even?
 $a_{n-1} + \textcircled{8}$
 $a_{n-2} + \textcircled{20}$
 \nwarrow can be

Question 2 : This question is worth 2 points

(English) Let \sim be the relation on $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ defined by $(a, b) \sim (c, d)$ if and only if $ad + bc = 0$. Which one of the following propositions is correct ?

(Français) Soit \sim la relation sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ définie par $(a, b) \sim (c, d)$ si et seulement si $ad + bc = 0$. Laquelle des propositions suivantes est correcte ?

- ☐ The equivalence class of $(1, 2)$ is $\{(2a, -a) | a \in \mathbf{R}\}$
 La classe d'équivalence de $(1, 2)$ est $\{(2a, -a) | a \in \mathbf{R}\}$
- ☒ None of the other answers are correct
 Aucune des autres réponses n'est correcte
- ☐ The equivalence class of $(1, 2)$ is $\{(a, 2a) | a \in \mathbf{R}\}$
 La classe d'équivalence de $(1, 2)$ est $\{(a, 2a) | a \in \mathbf{R}\}$
- ☐ The equivalence class of $(1, 2)$ is $\{(2a, a) | a \in \mathbf{R}\}$
 La classe d'équivalence de $(1, 2)$ est $\{(2a, a) | a \in \mathbf{R}\}$

$\{ -c, 2a \}$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $c \quad d$
 $1d + 2c = 0$

Question 3 : This question is worth 2 points

(English) Let us consider $R = \emptyset$ the empty relation on set $A \neq \emptyset$ (A is not empty). Therefore:

(Français) Considérons $R = \emptyset$ la relation vide sur l'ensemble $A \neq \emptyset$ (A n'est pas vide). Par conséquent:

- ☐ R is not transitive
 R n'est pas transitive $\rightarrow \text{si}$
- ☐ R is not symmetric
 R n'est pas symétrique $\rightarrow \text{si}$
- ☐ R is not anti-symmetric
 R n'est pas anti-symétrique $\rightarrow \text{si}$
- ☒ None of the other answers are correct
 Aucune des autres réponses n'est correcte



Question 4 : *This question is worth 2 points*

(English) The compound proposition $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg(r \vee q) \vee q)$ is

(Français) La proposition composée $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg(r \vee q) \vee q)$ est:

- ☐ A contradiction
Une contradiction
- ☐ None of the other answers are correct
Aucune des autres réponses n'est correcte
- ☒ A tautology
Une tautologie
- ☐ A contingency
Une contingence

$q \text{ faux} \rightarrow T$
 $q \text{ vrai} \rightarrow T$

$$\neg(\neg p \wedge q) \vee (\neg(r \vee q) \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg q) \vee q$$

\Leftrightarrow



Open questions

(English) Answer in the empty space below. Your answer should be carefully justified, and all the steps of your argument should be discussed in details. Leave the check-boxes empty, they are used for the grading.

(Français) Répondez dans l'espace vide ci-dessous. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, et toutes les étapes de votre argumentation doivent être détaillées. Laissez les cases à cocher vides, elles sont utilisées pour la notation.

Question 5: *This question is worth 8 points.*

☐₀ ☐₁ ☐₂ ☐₃ ☐₄ ☐₅ ☐₆ ☐₇ ☐₈

Do not write here.

(English) You are in charge of quality control in a dice factory. Your job is to design protocols to find if a dice is normal or rigged. A normal dice has a uniform probability distribution of outcomes: each face has a probability of $1/6$ to occur. A rigged dice has a probability of $5/6$ to land on a 6 and a probability of $1/30$ to land on any other value. A dice produced in the factory has a probability of $5/6$ to be normal.

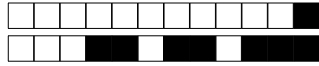
- (a) You pick a dice at random from the the production of the factory. You throw it and it lands on a 6. What is the probability that the dice is rigged ?
- (b) You pick a dice at random from the the production of the factory. You throw it two times and both times it lands on a 6. What is the probability that the dice is rigged ?
- (c) You pick a dice at random from the the production of the factory. You throw it n times and every time it lands on a 6. What is the minimal value of n for which you can say that the dice is rigged with a probability > 0.99 ?

Help: $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$, $6^2 = 36$, $6^3 = 216$ and $6^4 = 1296$ (not all the values are useful)

(Français) Vous êtes responsable du contrôle de la qualité dans une usine de fabrication de dés. Votre travail consiste à concevoir des protocoles permettant de déterminer si un dé est normal ou truqué. Un dé normal a une distribution de probabilité uniforme des résultats : chaque face a une probabilité de $1/6$ d'apparaître. Un dé truqué a une probabilité de $5/6$ de tomber sur un 6 et une probabilité de $1/30$ de tomber sur toute autre valeur. Un dé fabriqué en usine a une probabilité de $5/6$ d'être normal.

- (a) Vous prenez un dé au hasard parmi la production de l'usine. Vous le lancez et il tombe sur un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
- (b) Vous prenez un dé au hasard dans la production de l'usine. Vous le lancez deux fois et les deux fois il tombe sur un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
- (c) Vous prenez un dé au hasard dans la production de l'usine. Vous le lancez n fois et à chaque fois il tombe sur un 6. Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle on peut dire que le dé est truqué avec une probabilité > 0.99 ?

Aide : $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$, $6^2 = 36$, $6^3 = 216$ et $6^4 = 1296$ (toutes les valeurs ne sont pas utiles)



$$\textcircled{a} \quad P(N|V_6) = \frac{P(N) P(V_6|N) \text{ } \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}{P(V_6)}$$

$$P(V_6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \quad \frac{1}{2} ?$$

$$\textcircled{b} \quad P(T|V_6) = \frac{\frac{1}{6} \cdot (5/6 \cdot 5/6)}{P(V_6)} = \frac{P(T) \cdot P(V_6|T)}{P(V_6)}$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

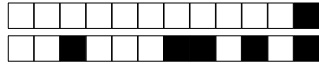
$$\frac{\frac{1}{6} \cdot (5/6 \cdot 5/6)}{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}$$

83%0



$$\frac{1/6 \cdot (5/6)^n}{1/6 \cdot (5/6)^n + \frac{5}{6} \cdot (1/6)^n} \Rightarrow \frac{(5/6)^n}{(5/6)^n + 5(1/6)^n} = 9$$

\Rightarrow
à partir de la loi



DRAFT



Question 6: This question is worth 4 points.

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Do not write here.

(English) For a given n , what does the **mystery**(n : integer) procedure return? The parameter n is always $n \geq 0$. Formally demonstrate your answer.

(Français) Pour un paramètre n donné, que retourne la procédure **mystery**(n : integer) ? Le paramètre n est toujours $n \geq 0$. Démontrez formellement votre réponse.

mystery(n : integer)

if $n == 0$ then

return 0

else

return **mystery**($n-1$) + $2(n-1) + 1 = 2n - 2 + 1 = 2n - 1$

$$1 + 2(n-1) + 1 + 2(n-2) + 1 + 2(n-3) \dots$$

mystery renvoie :

$$n + 2n^2 - 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= n + 2n^2 - n^2 - n$$

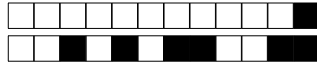
$$= n^2$$

Base Step

$$3 + 1 = 4$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$n = 0 \Rightarrow \boxed{0k}$$



Inductive Step

$P(n+1)$:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n^2$$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
mystery(n) 1

DRAFT



Question 7: *This question is worth 3 points.*

☐₀ ☐₁ ☐₂ ☐₃

Do not write here.

(English) Order the following functions so that each function is big-O of the next function.
For example if f is $O(g)$ and g is $O(h)$, the order should be f, g, h . Justify your choices.

(Français) Ordonnez les fonctions suivantes de façon à ce que chaque fonction soit un big-O de la fonction suivante. Par exemple, si f est $O(g)$ et g est $O(h)$, l'ordre doit être f, g, h . Justifiez vos choix.

$$f_1(n) = 2^{100000}$$

$$f_2(n) = (\log_2(n^2))^2$$

$$f_3(n) = 0.001n!$$

$$f_4(n) = n^{0.01}$$

④
③
① → *cas ds't matter*
②





DRAFT



Question 8: *This question is worth 8 points.*

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
0	1	2	3	4	5	6	7	8	

Do not write here.

(English) In the given figure, 6 points are located on $[AB]$, 5 on $[BC]$, and 4 on $[CA]$. If we draw all possible lines connecting these 15 points, what will be the **maximum** possible number of intersection points which lie within triangle ABC ? The placements of the points on the figure are arbitrary.

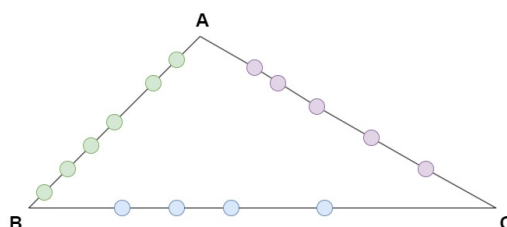


Figure 1: Triangle ABC

Hint: Realize that **at most two lines** should pass from an intersection point in order to **maximize** the number of intersection points.



Figure 2: Hint

(Français) Dans la figure donnée, 6 points sont situés sur $[AB]$, 5 sur $[BC]$, et 4 sur $[CA]$. Si nous traçons toutes les lignes possibles reliant ces 15 points, quel sera le nombre **maximum** possible de points d'intersection situés dans le triangle ABC ? Les positions des points sur la figure sont arbitraires.

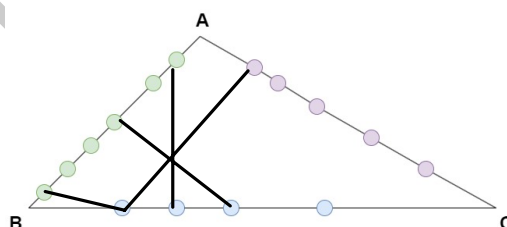


Figure 3: Triangle ABC

Indication: Notez que **au plus deux lignes** doivent passer par un point d'intersection afin de maximiser le nombre de points d'intersection.

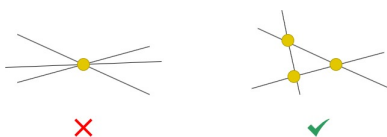
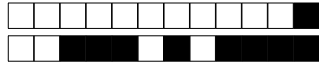


Figure 4: Indication



DRAFT



DRAFT

