Exemple

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{h}\left(\sin(x+h) - \sin(x)\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Comme $\cos \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\sin(x+h) - \sin(x)\right] = \cos x$$

$$\sin(a)-\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

donc $\mathcal{D}(\sin') = \mathbb{R}$

et $\sin'(x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

dérivez toutes vos fonct° préférées

Proposition (règles de calcul)

Soient f, g dérivables au point $a \in \mathbb{R}$.

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est aussi dérivable au point a, et on a

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

(ii) $(fg)'(a)$

$$= f'(a)g(a) + f(a)g(a)$$

Formule de leibniz

iii $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)$

$$= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Si g dérivable au point a et

f dérivable au point $b = g(a)$

alors $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))\underbrace{g'(a)}_{\text{dérivée interne}}$

règle de la chaîne

$\cancel{f(x) = x^2}$ à retester

$\cancel{g(t) =}$

$\cancel{(g \circ f)' = g'(f)\, f'}$

$2x$

Remarque

$$(f \circ g \circ h)'(a) = f'(g(h(a)))\, g'(h(a))\, h'(a)$$

f, g dérivables sur un intervalle ouvert I, $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Conséquence : $C^n(I)$ est un espace vectoriel.

Ex :

$$f(x) = tg(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$= \tan(x)$$

$$\mathcal{D}(tg) = \{x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \neq 0\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Alors, $\forall x \in \mathcal{D}(\tan)$, $\tan'(x)$

$$= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Continuité de f :

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composit° de fonct° continues.

En $x = 0$, on a :

$$|f(x) - f(0)|$$

$$= x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \xrightarrow{x \to 0} 0$$

car $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ est borné.

Donc f est continue en $x = 0$.

Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Dérivabilité</u> sur $\mathbb{R}^*$ f dérivable comme composée de fonctions dérivables.

En $x=0$, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

la quest° est : "est-ce que la lim existe ?"

$$= \lim_{x \to 0} x \overbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}^{\underline{\text{borné}}}$$

$$= 0$$

donc f est dérivable en $x=0$ et $f'(0)=0$.

<u>Conclusion</u> f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

? $f \in C^1(\mathbb{R})$

f' est-elle continue ?

en calculant explicitement $f'(x)$, $x \neq 0$, on se convainc que f' est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{\cancel{x^2}}\right)$$

$$\text{Ainsi } f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \ ? \\ \underset{\text{(n'existe pas)}}{\text{NON}} \Rightarrow f' \text{ non continue en } 0 \end{array}}$$

$\Downarrow$

en effet on suppose qu'elle existe

$$\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f'(x) \ \underline{\text{existe}}$$

C^0 : classe fonct° continues

C^1 : classe dont la dérivée 1ère est continue

C^2 : classe dont " 2ème est continue.

Dérivée de la fonction inverse (réciproque)

Soit $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$

et I un intervalle ouvert,

$I \subset \mathcal{D}(f)$ t.q

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

On a pour $x \in I$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$$
$$= x$$

Par la règle de chaîne

$$(f^{-1})'(f(x))\, f'(x) = 1 \quad \forall x \in I$$

$$(f^{-1})' f(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

$y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$,

on obtient $(f^{-1})'(y)$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

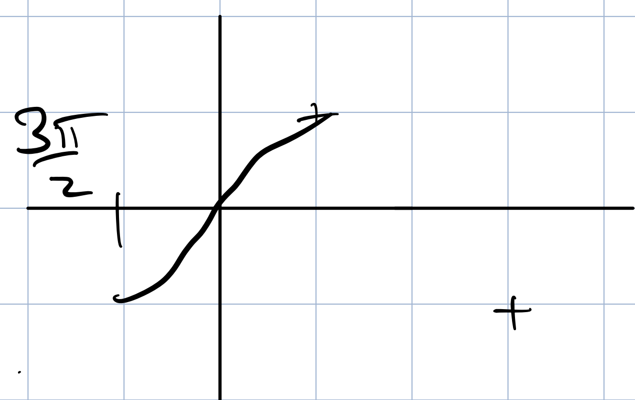
$\forall y \in f(I)$

Ex :

- $f : \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1 ; 1]$

$f(x) = \sin(x)$

f est bijective (on dit que l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ est la détermination principale du sinus).



Sa fonction inverse est $\arcsin : [-1 ; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

On calcule $\arcsin'$ sur $]-1 ; 1[$

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$$

$$\arcsin'(\sin(x)) \cos(x) = 1.$$

$$\arcsin'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)}$$

On pose $y = \sin(x)$ donc $\cos(x) = \sqrt{1-y^2}$

$x \in]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

$$(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = 1$$

avec $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[.$

Conclusion

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\forall\ y \in]-1,1[$$

Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle

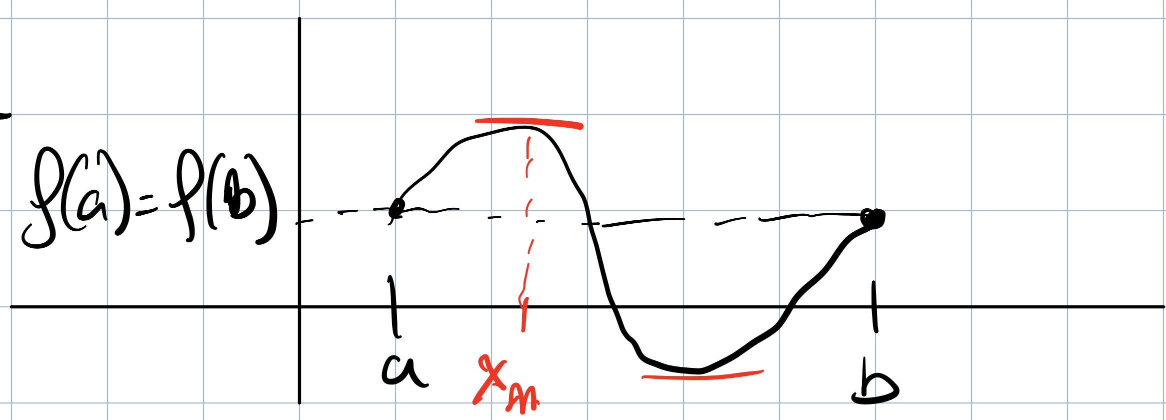
Soit $-\infty < a < b < \infty$

f continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

On suppose que $f(a) = f(b)$

Alors $\exists\, \tilde{x} \in]a,b[$ t.q $f'(\tilde{x}) = 0$.

Preuve



Par le théorème du x_{min}, x_{max}

$\in [a,b]$

t.q $m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

$= M_{max}$

$\forall x \in [a,b]$.

En particulier, $m \leq f(a) = f(b) \leq M$

Si $m = M$, $f \equiv f(a)$ sur $[a,b]$ donc

$f' = 0$ sur $]a,b[$.

Supposons donc $m < M$.

Supposons s.p.d.g que $M \neq f(a)$

alors $x_M \in]a,b[$

(sinon $M = f(x_M) = f(a)$)

et on a $f(x) - f(x_M) \leq 0$
$\forall x \in]a,b[$.

Alors $\dfrac{f(x) - f(x_m)}{x - x_m} \begin{cases} \geq 0 \text{ si } x \in]a, x_m[\\ \leq 0 \text{ si } x \in]x_m, b[\end{cases}$

$$\Rightarrow f'(x_M^-) = \lim_{x \to x_M^-} \frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} \geq 0$$

$$f'(x_M^+) = \lim_{x \to x_M^+} \frac{f(x) - f(x_m)}{x - x_m} \leq 0$$

Comme f est dérivable en x_M, on conclut

$$f'(x_m) = f'(x_M^-)$$

$= f'(x_M^+) = 0$ #

Théorème des accroissements finis généralisé

Deux fonct° continues sur $[a,b]$

dérivables sur $]a,b[$

$\exists\ \hat{x} \in (a,b)$ t.q

$[f(b)-f(a)]\,g'(\hat{x})$

$= [g(b)-g(a)]\,f'(\hat{x})$

Corollaire (TAC)

f continue sur $[a,b]$, dérivable

sur $]a,b[$.

$\exists\ \tilde{x} \in \,]a,b[$ t.q

$$f(b) - f(a) = f'(\tilde{x})(b-a)$$