Exercice 1

a)

$A - \lambda I$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$- 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -1 \cdot ((-1) \cdot 1 - 4 \cdot 1)$$

$$-1 \cdot (8 - 3)$$

$$= S - S = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 - 21 + 9 \\ -16 + 15 + 1 \\ 8 - 12 + 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$ c'est $\boxed{\text{Ok}}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

dimension 2

Exercice 2

Une matrice $A^{n \times n}$ est diagonalisable si

$$PAP^{-1} = D,$$

si elle a n vecteurs propres

$\boxed{A}$

- $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1 \Rightarrow$ 2 vect propres

diagonalisabl

$\boxed{B}$

- $\det(B - \lambda I_2)$

$= (3-\lambda)(2-\lambda) - 2$

$= 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2$

$= \lambda^2 - 5\lambda + 4$

$\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 \neq 1$

$\Rightarrow$ diagon.

$\boxed{C}$ $\det(C-\lambda I)$

$$= (5-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} (4-\lambda) & 0 \\ 2 & (5-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= (5-\lambda)^2\cdot(4-\lambda)$$

On reste $\lambda = 5$ pour vérifier

$$\dim\ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2.$$

on a donc 3 vecteurs propres lin. indep.

$\boxed{D}$ Oui car matrice symétrique

Exercice 3

$$\det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(a-\lambda) - (-b \cdot b)$$

$$= a^2 - a\lambda - a\lambda + \lambda^2 + b^2$$

$$= \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2+b^2)$$

$$\Delta = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2+b^2)$$

$$= \cancel{4a^2} - \cancel{4a^2} - 4b^2$$

$$= -4b^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2ib$$

$$\lambda = \frac{2a \pm 2ib}{2a} = a \pm ib.$$

Exercice 4

$\Leftrightarrow A(\mu \vec{x}) = \lambda(\mu \vec{x})$

$\Leftrightarrow \cancel{\mu} A\vec{x} = \cancel{\mu} \lambda \vec{x}$ Ok

Exercice 5

$$\left| \begin{matrix} (1-\lambda) & 2 & 3 \\ 1 & (2-\lambda) & 3 \\ 1 & 2 & (3-\lambda) \end{matrix} \right)$$

$$= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} (2-\lambda) & 3 \\ 2 & (3-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$- \quad 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & (3-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$+ \ 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ (2-\lambda) & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\big((2-\lambda)(3-\lambda) - 6\big)$$

$$- \big(2(3-\lambda) - 6\big)$$

$$+ \big(6 - 3(2-\lambda)\big)$$

$$= ((2-\lambda)(3-\lambda)-6) - \lambda((2-\lambda)(3-\lambda)-6)$$

$$-(6-2\lambda-6)$$

$$+(6-(6-3\lambda))$$

$$= (\cancel{6}-2\lambda-3\lambda+\lambda^2-\cancel{6})$$

$$-\lambda(\cancel{6}-2\lambda-3\lambda+\lambda^2-\cancel{6})$$

$$+2\lambda+3\lambda$$

$$= -2\lambda-3\lambda+\lambda^2+2\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3$$

$$+2\lambda+3\lambda$$

$$= -\lambda^3+6\lambda^2$$

Si $\lambda = 0$, ok

$\lambda = 6$, ok

espace propre associé à 0:

$$\ker(A) = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker(A - 6\lambda)$$

$$= \ker \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 12 & -12 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sous-espace propre : $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Si A est diagonalisable, $\exists D$ s.t.:
et possède une valeur propre unique a de multiplicité 2 :

$$A = P^{-1} D P$$

avec $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow A = P^{-1} a I_n P$$

$$\Leftrightarrow A = a I_n$$

$$\Rightarrow \underline{b = 0}$$

NON

Exercice 7

(a) matrice A non inversible

$\Leftrightarrow \det(A) = 0$

$\Leftrightarrow \det(A - 0I) = 0$

$\Leftrightarrow$ 0 est une valeur propre de A.

Vrai

(b) Matrice A diagonalisable

$\Leftrightarrow \exists P$ t.q $PDP^{-1} = A$

Faux. ?

(c) Faux e.g $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda) - 1$$
$$= 1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 1$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda$$

$\lambda \neq 1.$

(d) Faux.

on trouve les valeurs propres de A en:

- trouvant les sol de $\det(A - \lambda I) = 0.$

Exercice 8

ⓐ $\bar{z} = z$

$\Leftrightarrow a+ib = a-ib$

$\Leftrightarrow a = a-2ib$

$\Rightarrow b=0$

ⓑ $zw = wz$

$\Leftrightarrow (a+ib)(a-ib) = (a-ib)(a+ib)$

ⓒ $\overline{w+z} = \overline{a+ib+c+id}$

$= a-ib+c-id$

$= \bar{w} + \bar{z}$

(d) $\overline{wz} = \overline{(a+ib)\cdot(c+id)}$

$= \overline{(a+ib)\cdot(c+id)}$

$= \overline{ac - bd + iad + ibc}$

$= (a-ib)\cdot(c-id)$

$= \overline{w}\cdot\overline{z}$

(e) $\overline{rz} = r\overline{z}$? si $r \in \mathbb{R}$.

$\overline{c(a+ib)} = \overline{ca + cib}$

$= ca - cib$

$= c(a-ib)$

$= c\,\overline{(a+ib}$

8 $|wz| = |w| \cdot |z|$?

$$|wz| = |(a+ib)(c+id)|$$

$$= |ac + iad + ibc + bd|$$

$$= |$$

Exercice 9

$$n_{k+1} = \frac{1}{3} n_{k-1} + \frac{2}{3} n_k$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} n_k \\ n_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{k+1} \\ n_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3\, n_{k-1} + \frac{2}{3} n_k \\ n_k \end{pmatrix}$$

$$A^1 \begin{pmatrix} n_k \\ n_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{k+1} \\ n_k \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^k \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{k+1} \\ n_k \end{pmatrix}}$$

est-ce que $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre ?

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2-3\\ 3+0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\vec{x_0} = \begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$$

$$A\,\vec{x_0} = \frac{-1}{3}\,\vec{x_0}$$

$$\Leftrightarrow A^k\,\vec{x_0} = \left(\frac{-1}{3}\right)^k \vec{x_0}$$

$$= \begin{pmatrix}n_{k+1}\\ n_k\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^k\left(\vec{x_0}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right)^k \vec{x_0}$$

avec $\vec{x_0} = \begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n_{k+1}\\ n_k\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x_i} = \lambda \vec{x_i}$$

est-ce que A est diagonale?

$$\det \begin{pmatrix} 2/3-\lambda & 1/3 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2/3-\lambda)(-\lambda) - 1/3$$

$$= -(2/3)\lambda + \lambda^2 - 1/3$$

$$= \lambda^2 - (2/3)\lambda - 1/3$$

$$\Delta = (-2/3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1/3)$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$$

$$\sqrt{\Delta} = \frac{4}{3}$$

$$\lambda = \frac{2/3 \pm 4/3}{2} \begin{cases} + \to 6/3 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ - \to -2/3 \cdot 1/2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\ker \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sous espace propre pour $\lambda = 1$,

$$\text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sous espace propre pour $\lambda = \frac{-1}{3}$

$$\text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

donc on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ det $-3 \cdot 1 - 1 = -4$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-3-1} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = A$$

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/3)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nk+1 \\ nk \end{pmatrix}$$