suites de Cauchy

→ critère de convergence

<u>def</u>

(a_n), $a_n \in \mathbb{R}$ st. s. Cau. si $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists n_0 \; \forall n, m \geqslant n_0$, $|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon$.

<u>rem</u> $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ ça marche aussi

si $a_n \in \mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$
suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$

Théorème

dans $\mathbb{R}$, (mais pas dans $\mathbb{Q}$!)

(a_n) est une suite de Cauchy
ssi (a_n) est convergente.

si

$\Leftarrow$ $\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0, \ \forall n \geq n_0, \\ |a_n - a| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}. \end{array}\right.$

donc $\forall n, m \geq 0$

$\cancel{\left(|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right.}$

$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)|$

$$\leq \underbrace{|a_n - a|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + |a - a_m|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Si (a_n) suite Cauchy
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0$
$|a_n - a_m| \leq \varepsilon$. (H)

une suite de Cauchy est bornée.
$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| < C$.

on utilise le théorème de
Bolzano Weierstrass pour trouver la limite

$\boxed{\text{On veut}}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \ \forall n \geqslant n_0$$

$$|a_n - a| \leq \varepsilon.$$

$$\Downarrow$$

prouver?

Construction de $\mathbb{R}$ (modèle par $\mathbb{R}$)

$X = \{$ toutes les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ $\}$

Relat° d'équiv sur X.

Soit $(a_n) \in X$ et $(b_n) \in X$.

Alors, par déf

$$(a_n) \sim (b_n) \quad \text{si}$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$$

c-à-d si $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$
$\forall n \geq n_0$, $|(a_n - b_n) - 0| = |a_n - b_n| \leq \varepsilon$.

Déf.

$\mathbb{R} := X/\sim$ avec les opérations

$+$: additio des suites $(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$

$\cdot$: multiplicatio $(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n)$

Réc. lin

Théorème

$$g(x) = q \cdot x + b, \quad b, q \in \mathbb{R}$$
$$q \neq 1$$

Soit $a := \dfrac{b}{1-q}$ et soit

$$a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_n = g(a_{n-1}), \quad n = 1, 2 \ldots$$

si $|q| < 1$ ou si $a_0 = a$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$$

si $|q| > 1$ et $a_0 \neq a$ alors la suite diverge.

$$a = \frac{b}{1-q} \Leftrightarrow a = g(a)$$

Demo

⓪ · suite bien def. ($a_n \in \mathbb{R} = \mathcal{D}(g)$)

① si la suite converge vers a, alors

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} g(a_{n-1})$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underline{(q \cdot a_{n-1} + b)}$$

$$= q \cdot a + b = g(a)$$

produit lim

(2) $n \geq 2$, $|a_n - a_{n-1}|$

$= |(q \cdot a_{n-1} + b) - (q \cdot a_{n-2} + b)|$

$= |q| \cdot |a_{n-1} - a_{n-2}|$

$= \ldots$

$= |q|^{n-1} |a_1 - a_0|$

la suite diverge si $|q| > 1$ et $a_0 \neq a$.

Montrons que $|q| < 1 \Rightarrow$ suite Cauchy.

Soient, donné $n_0 \in \mathbb{N}$,

$m \geq n_0$, $n \geq m+2$ et

$|q| < 1$.

Alors $|a_n - a_m|$

$$= |(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{m+1} - a_m)|$$

$$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \dots + |a_{m+1} - a_m|$$

$$= (|q|^{n-1} + |q|^{n-2} + \dots + |q|^{n}) |a_1 - a_0|$$

utiliser (11)

$$= |q|^m \cdot \left(1 + |q| + \dots + |q|^{n-m-1}\right) |a_1 - a_0|$$

$$= |q|^m \underbrace{\frac{1 - |q|^{n-m}}{1 - |q|}}_{\text{voir les prerequis}} |a_1 - a_0|$$

$$\leq |q|^{n_0} \frac{1}{1 - |q|} |a_1 - a_0| \leq \varepsilon$$

utiliser $m \geq n_0$ et $|q| < 1$

si $|q| < 1$,

alors $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists n_0$ t.q "$\leq$" est satisfait

(dépend de n_0 donné ε)

$\Rightarrow$ (a_n) une suite de Cauchy.

$\Rightarrow$ (a_n) une suite convergente.

$\Rightarrow$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ $(|q| < 1)$

avec i)

Théorème de Bolzano-Weierstrass

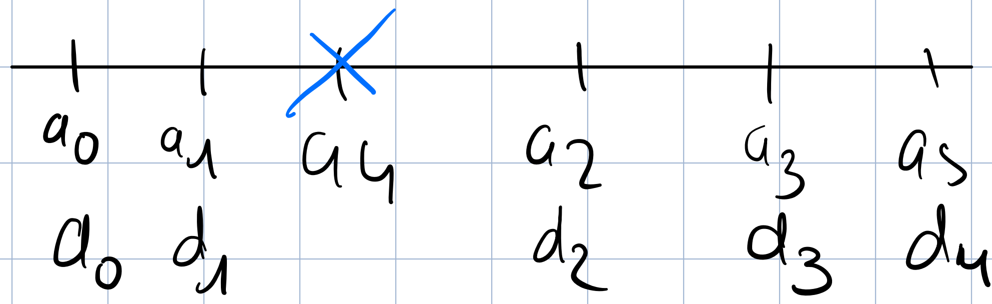
Déf

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite

$(n_k)_{k\geq 0}$ une suite $\nearrow$ (strict)

$$\begin{cases} n_k > n_\ell \text{ si } k > \ell \\ n_k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

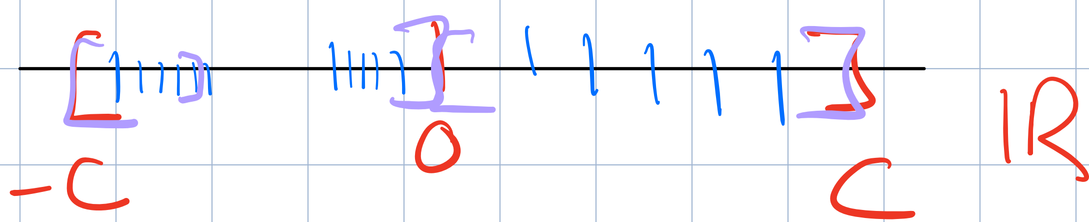
alors $(d_k)_{k\geq 0}$ où $d_k := a_{n_k}$ est appelée une sous-suite de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$



$n_0 = 0 \quad n_1 = 1 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 3 \quad n_4 = 6.$

__Théorème__ (B.W) de tt suite (a_n) __bornée__ on peut extraire une sous-suite convergente

__Argument__ :



on choisit la moitié avec une inf d'éléments
puis on refait le choix "
etc...

$\Downarrow$

par récurrence, on localise une limite possible

<u>Déf</u> : $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulat° d'une suite (a_n) s'il $\exists$ une sous-suite (d_k) t.q. $\lim_{k \to \infty} d_k = a$.

Ex 1 : $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

point acc -1 et 1.

$$\boxed{d_k = a_{2k} = 1}$$ converge vers $+1$

$$\boxed{d_k = a_{2k+1} = -1}$$ converge vers -1

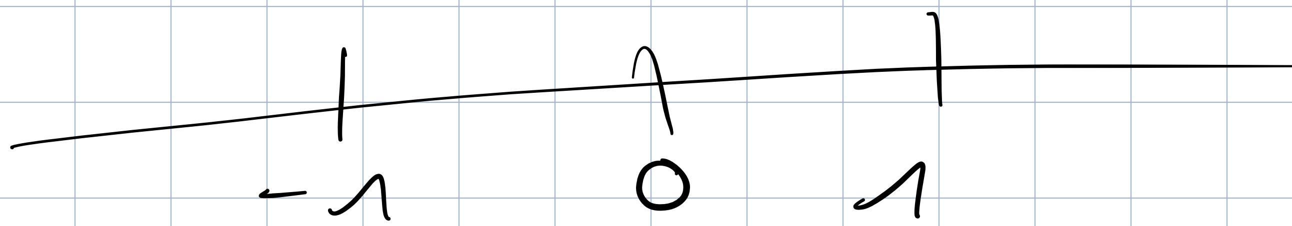
Exemple 2

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{N}^*, \ n \text{ pair}, \ n \text{ non multiple de } 3 \\ -1, & n \in \mathbb{N}^*, \ n \text{ impair}, \ n \text{ non multiple de } 3 \\ 0, & n \in \mathbb{N}^*, \ n \text{ multiple de } 3 \end{cases}$$

3 pairs ace

$d_k = a_{3k} = 0$

$= a_{2k+1}$



$\liminf_{n \to +\infty} a_n = -1$ plus petit

$\limsup_{n \to +\infty} a_n = 1$ plus grand

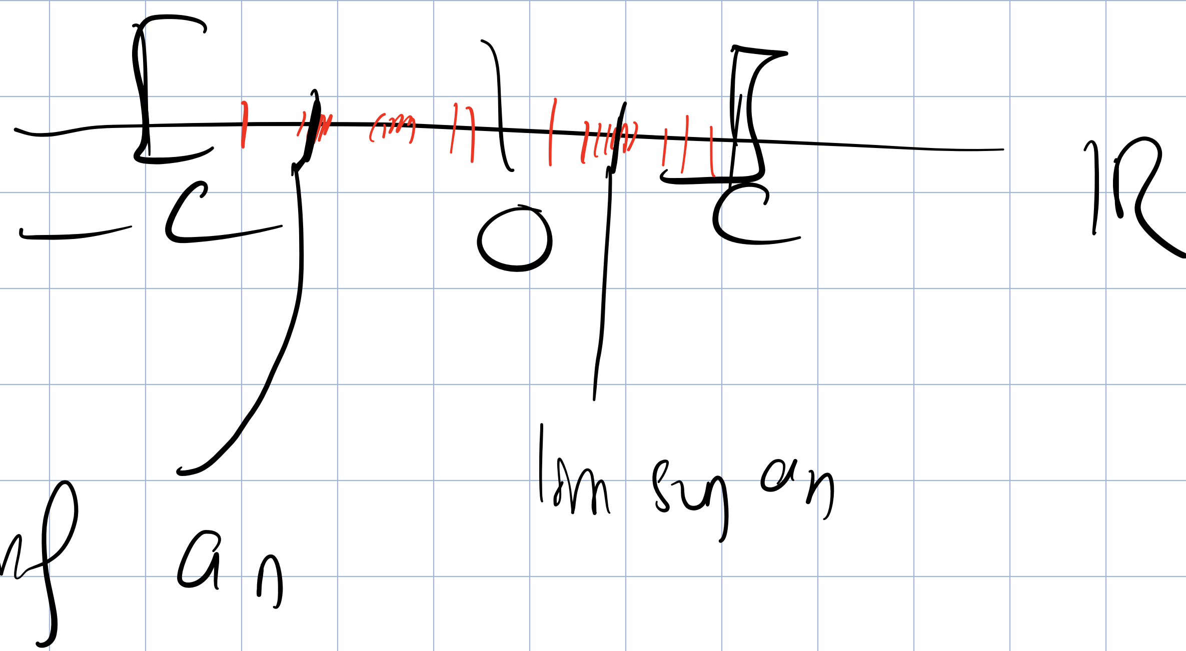
Ex 3

$a_n =$ "numérotations des nb rationnels de $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$"

$\forall x \in I$ est un point d'acc de a_n

$(a_n)_{n \geq 0}$ suit bornée

$\exists c > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq c$.



Construction

$$\lim_{n \to \infty} \inf a_n \in \mathbb{R}$$

$$A_0 := \{a_0, a_1, \ldots\}$$

$$\inf(A_0) =: b_0$$

$$c_0 := \sup(A_0) \geq \inf(A_0)$$

$$A_1 = \{a_1, a_2 \ldots\}$$

$$b_1 := \inf A_1 \geq b_0$$

$\inf A_1 \leq \sup A_1$

$c_1 \leq c_0$

b_0 est un minorant pour $A_1 \subset A_0$
mais pas f. le + grand
et $b_1 \geq b_0$

$A_n := \{a_n, a_{n+1} \dots\}$

$b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \quad b_n := \inf A_n$

(b_n) suite croissante et majorée
$\exists$ conv.

Série numérique

"sommes infinies"

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ par (a_k) une suite de réels donnée

$\Rightarrow$ série (numérique).

Déf

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \to +\infty} S_n \quad , \text{ où } S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k}$$

donc $s_0 = a_0$

$$s_1 = a_0 + a_1 = s_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2$$

$\Leftrightarrow$

$$a_0 = s_0$$

$$a_1 = s_1 - s_0$$

<u>Terminologie</u> • les a_k sont appelés les termes de la série (num.)

• la somme finie s_n $\rightarrow$ n-ième

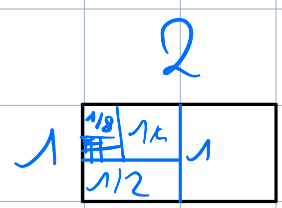
Somme partielle de la série numérique.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k := \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{= 2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$



D : une série num est convergente

ssi la suit (S_n) des sommes partielles converge.

La limite $S = \lim_{n \to +\infty} S_n \in \mathbb{R}$ est

appelée la somme de la série num.

Def : une série qui n'est pas convergente

est appelée divergente.

Def $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est

abs conv

; $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ conv.

Remarques

· Ⅳ série abs convergente est convergente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0,$$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} |a_n| - \sum_{k=0}^{\infty} |a_m| \right| < \varepsilon$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

Critères de convergence

① critère nécessaire

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} a_k = 0 .}$$