# Equa° linéaires

Pour ds variables inconnues $x_1, \dots, \dots x_n$
une équa° lin. est de la forme
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \dots, + a_nx_n = b$$

→ si 2 variables → équa lin est une ligne (droite).

un syst. linéaire st collect° de plusieurs équa linéaires.

m équa° n variables

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots, + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

solu° = liste de nombres qui vérifient les m équa°

2 syst. équivalents ssi ensemble de solut° égal.

---

Si $n = 3$, équat° définit un plan

Un syst. linéaire à $m$ équat° avec $n=3$ définit $m$ plans.

Ensemble solut° peut être 1 droite, 1 point, 1 plan, etc.

**Théorème :** un système linéaire a zero, une ou une infinité de solutions.

## Proof

- zero solution : on a vu plusieurs exemples
- une solut° : même chose
- + qu'une solut° : à démontrer par l'absurde $s_1$ et $s_2$ satisfasant l'égalit°

# Comment trouver les solut° ?

Syst. linéaire de taille $m \times n$ avec coef $a_{ij}$

nb variables : $n$ — $j = \{1, \dots, n\}$

nb équat° : $m$ — $i = \{1, \dots, m\}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 2x_2 = 3 \\ 4x_3 = 2 \end{cases}$$

"général" "triangulaire" "diagonal"

$$\xrightarrow{\text{simple}}$$

Un syst. est triangulaire si la $k^{\text{ème}}$ équat° a un coef nul devant tt les variables $x_1, \dots, x_{k-1}$.

$\Rightarrow$ transformer notre syst. SANS PERDRE SOLUTIONS

**Théorème** : les opérat° suivantes ne changent pas l'ensemble de solut° :

1. Permuter deux équations
2. Multiplier une équat° par un nombre non-nul
3. Soustraire un multiple d'une équat° à une autre

On les appelle des opérations élémentaires.

Preuve : TODO

Remarque : ces opérat° sont réversibles.

- Exemple

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 8 & (\mathrm{I}) \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -7 & (\mathrm{II}) \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

- $(\mathrm{II}) \leftarrow (\mathrm{II}) - 2(\mathrm{I})$
- $(\mathrm{III}) \leftarrow (\mathrm{III}) - 4(\mathrm{I})$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -7 \\ \quad -5x_2 + 11x_3 = 22 \end{cases}$$

$$-2x_2 + 14x_3 = 28$$

- $(\text{III}) - \frac{2}{5}(\text{II})$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -7 \\ -5x_2 + 11x_3 = 22 \\ \frac{22}{5}x_3 = \frac{56}{5} \end{cases}$$

- $(\text{III}) \leftarrow 5(\text{III})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -7 \\ -5x_2 + 11x_3 = 22 \end{cases}$$

# Notation matricielle

Seulement seuls les coefs et les solut° importent

**matrice des coefficients** $\xrightarrow{\text{avec solut°}}$ **matrice augmentée**

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}, & \dots, & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, & \dots, & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

taille $m \times n$ $\qquad$ taille $m \times (n+1)$

Les opérat° (élémentaires) sur les équat° sont les mêmes sur les lignes.

---

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & -3 & -7 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -7 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -5 & 11 & 22 \\ 0 & -2 & 14 & 28 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -1 & 11/5 & 22/5 \\ 0 & -2 & 14 & 28 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & -11/5 & -22/5 \\ 0 & 0 & (14-22/5) & (28-44/5) \end{array}\right)$$