I Def du corps des nb complexes $\mathbb{C}$.

Soit $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad (=: \mathbb{R}^2)$

$(a,b), (c,d) \in X$.

$\mathbb{C} := (X, +, \cdot)$ ← sur X deux operat° + et ·

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\qquad$ le plus dans $\mathbb{R}$

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$$

le $\oplus$ dans $\mathbb{C}$

$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$(a,b)\cdot(c,d) := (a\cdot c - b\cdot d,\ a\cdot d + b\cdot c)$$

$\mathbb{C}$ est un corps (à vérifier !) (avec triviale)

$\mathbb{C}$ n'est pas ordonné.

2.2 Représentation cartésiene

zéro

On a $(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$

$$(a,0)\cdot(b,0)$$
$$=(a\cdot b-0\cdot 0,\ a\cdot 0+0\cdot b)$$
$$=(a\cdot b,0)$$

Ce qui permet d'identifier $(x,0)\in\mathbb{C}$

avec $x\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

$i\mathbb{R}$ = l'axe imaginaire

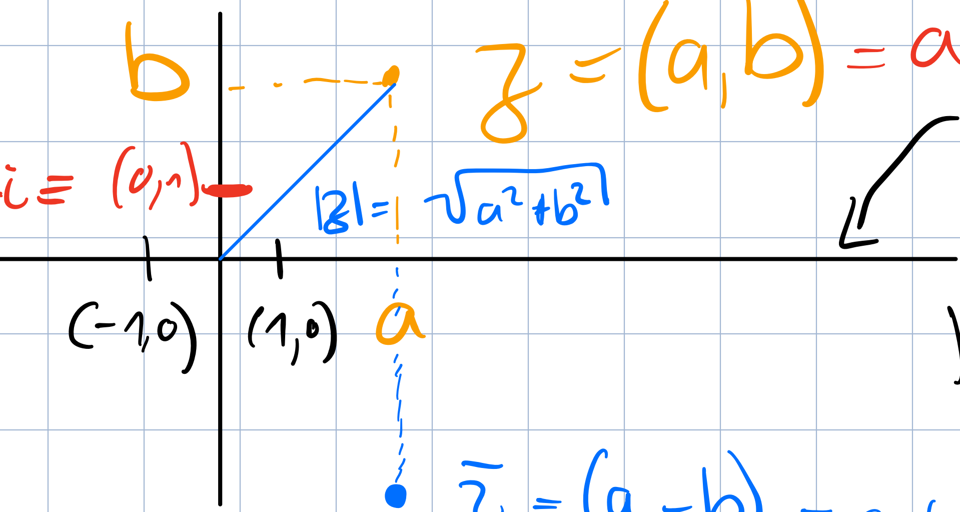
partie réel $Re(z)$

$z = (a,b) = a + ib$ = partie imag. $Im(z)$

$i \equiv (0,1)$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$(x,0) \equiv x \in \mathbb{R}$



$\mathbb{R}$, l'axe réel

$\bar{z} = (a,-b) = a + i(-b) \equiv a - ib$.

On a $\underbrace{(0,1)}_{\equiv i} \cdot \underbrace{(0,1)}_{\equiv i} = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0)$

$= (-1,0)$

Notation : $\boxed{(0,1) \equiv i}$ "unité imaginaire"

On a donc $i^2 = -1$ ou encore
$i^2 + 1 = 0$.

$\forall z = (a,b) \in \mathbb{C}$, on a

$$z = (a,b) = (1,0)\cdot(a,0) + (0,1)\cdot(b,0)$$

$$= \boxed{a + ib}.$$

représentat° cartésienne

Soit $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
En utilisant les règles de calcul "habituelles" et $i^2 = -1$.

alors :

$$z_1 + z_2 = a+c + i(b+d)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+id)$$

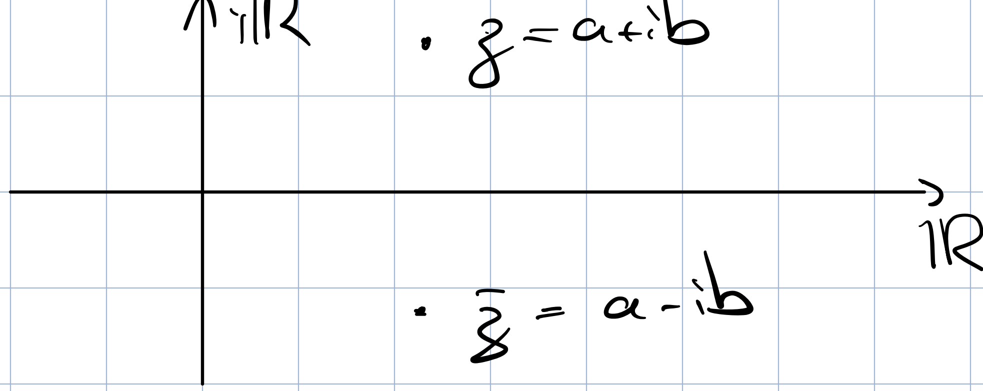
$$= ac-bd + i(ad+bc)$$

Définitions additionnelles

Soit $z = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$

Le (complexe) conjugué de z :

$$\bar{z} := a - ib$$



Propriétés :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \overline{\overline{z}} = z.$$

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Partie réelle de $z = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$Re(z) = a \in \mathbb{R}$$
$$Im(z) = b \in \mathbb{R}$$

a, b coordonnées cartésiennes de z.

<u>Remarque</u> :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$$

Valeur absolue (ou module) de $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$|z| := (z \cdot \bar{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

En effet, si $z = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (a+ib) \cdot (a-ib) = a^2 - (ib)^2 = (a^2+b^2)$$

On a $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 \cdot z_2|$

$$= |z_1| \cdot |z_2|$$

vérifier !

Application à la géométrie

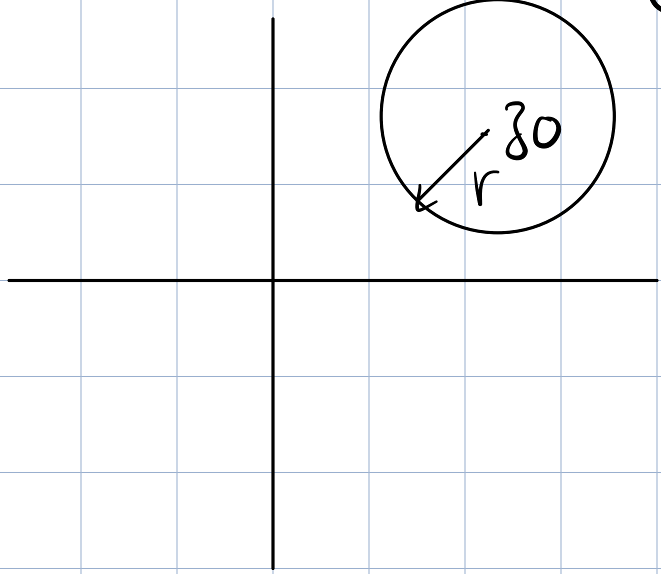
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors :

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \}$$

est l'ensemble des points sur le cercle de rayon r, centré en z_0.

$S \subset \mathbb{C}$



2.4 Elément inverse par la multiplicat°

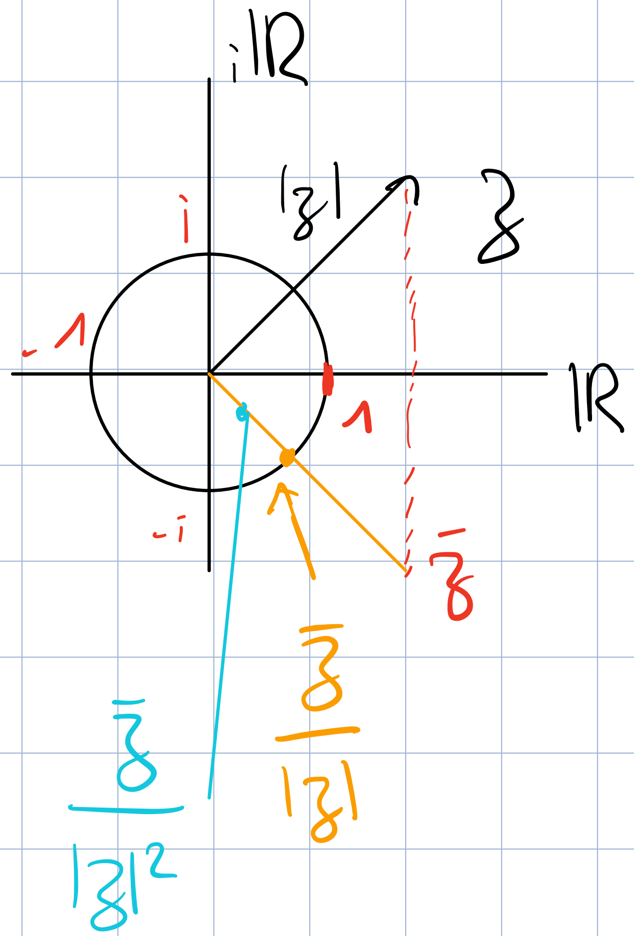
Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0 \equiv (0,0)$

On cherche $z_1 \in \mathbb{C}$ t.q :

$$\boxed{z \cdot z_1 = (1,0) \equiv 1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

<u>Proposition</u>

$$z_1 = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} =: \frac{1}{z}$$



En effet :

$$z \cdot z^{-1} = z \cdot \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$$

$$= \underbrace{z \cdot \bar{z}}_{|z|^2} \cdot \frac{1}{|z|^2}$$

$$= 1.$$

Notation pour l'inverse :

$$\frac{1}{z}, \quad z^{-1}$$

Remarque : "$\displaystyle \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}}$

$$= \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \bar{z}$$

$$= \frac{1}{|z|^2} \bar{z} \text{"}$$

Remarque : $\displaystyle \left| \frac{1}{|z|^2} \bar{z} \right| = \frac{1}{|z|^2} |\bar{z}|$

$$= \frac{1}{|z|^2} |z|$$

$$= \frac{1}{|z|}$$

Explicitement pour $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a^2+b^2}(a-ib)$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Donc pr $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = (a+ib) \cdot \frac{1}{c^2+d^2}(c-id)$$

$$= \underbrace{\frac{a \cdot c + bd}{c^2 + d^2}}_{\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + i \, \underbrace{\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}}_{\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

Formule Euler / Moivre

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$.

On pose :

$$\boxed{e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

formule d'Euler

On a pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$$

$$= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= \dots$$

$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$= e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^{z} &= e^{a+ib} \\ &= e^{a} \cdot e^{ib} \end{aligned}}$$

exponentielle réelle

on a la règle habituelle pour la fonction exponentielle.

$$\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}} \qquad (*)$$

ainsi

$$\boxed{\overline{e^{z}} = e^{\overline{z}}}$$

à vérifier !

De $(*)$ il suit en particulier

$\forall n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{(e^{z})^{n} = e^{n \cdot z}}$$

démo par récurrence

Formule de Moivre

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$, on a (formule de Moivre)

$$\cos(n \cdot \varphi) + i\sin(n\varphi)$$

$$= e^{in\varphi}$$ Euler
$$= \left(e^{i\varphi}\right)^n$$
$$= \left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)^n$$

$\underline{n = 2}$: formules de l'angle double

$$\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)$$
$$= \left(\cos\varphi + i\sin(\varphi)\right)^2$$
$$= \left(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2\right) + i\left(2\cos\varphi \cdot \sin\varphi\right)$$

$\Rightarrow$ même point dans $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2$$
$$\sin(2\varphi) = 2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$$

$n = 3$

$$\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi) = \left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)^3$$

$$\Rightarrow \quad \cos(3\varphi) = \cos(\varphi)^3 - 3\cos(\varphi)\sin(\varphi)^2$$

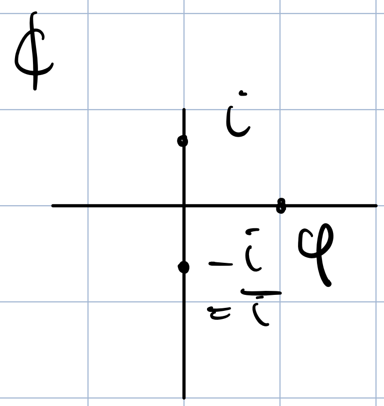
$$\sin(3\varphi) = 3\cos(\varphi)^2\sin\varphi - \sin(\varphi)^3$$

Remarque

Puisque $\boxed{e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)}$ on a

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin(\varphi) &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}\right\} (**)}$$

car on a $\overline{e^{i\varphi}} = e^{\overline{i\varphi}} = e^{\overline{i}\varphi}$
$= e^{-i\varphi}$



<u>Remarque</u> on peut utiliser (**) pour généraliser la définition de sin et cos aux nb complexes

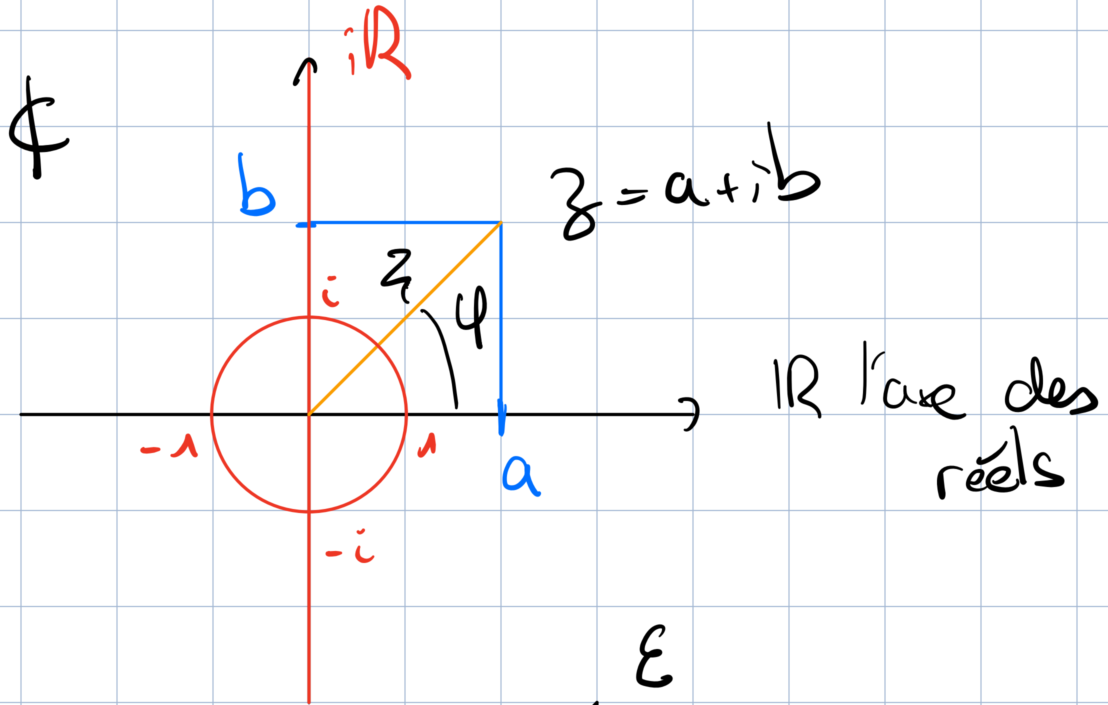
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

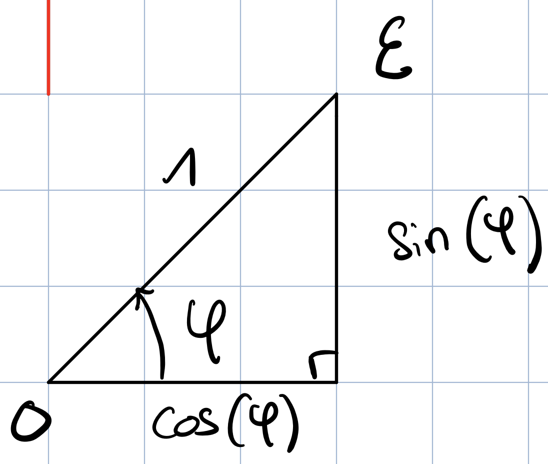
$$, z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Forme polaire d'un nb complexe

Définitions





Soit $z \neq 0$, alors $z = |z| \, \mathcal{E}$ et

$|\varepsilon| = \frac{1}{z} z$ et $|\varepsilon| = \frac{1}{|z|}|z| = 1$

utilise que

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$|\varepsilon| = 1$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$
$$= e^{i\varphi}$$

Tout $z = a+ib \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ est donc de la forme :

$$a+ib = z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

(φ est déterminé à $k \cdot 2\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)

repres. polaire de z.

$$\begin{cases} \varphi \in \left]-\pi ; \pi\right[& \rightarrow \text{argument de } z. \\ \varphi = \arg(z) \end{cases}$$

pour $z \in \mathbb{R}^*_+ \subset \mathbb{C}^*$ on

$$\varphi = \arg(z) = 0.$$

$\mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}$ on a

$$\varphi = \arg(z) = \pi$$

pour $z = a + ib \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^*_-$ on a :

$$\varphi = \arg(z) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{b}{a + |z|}\right)$$

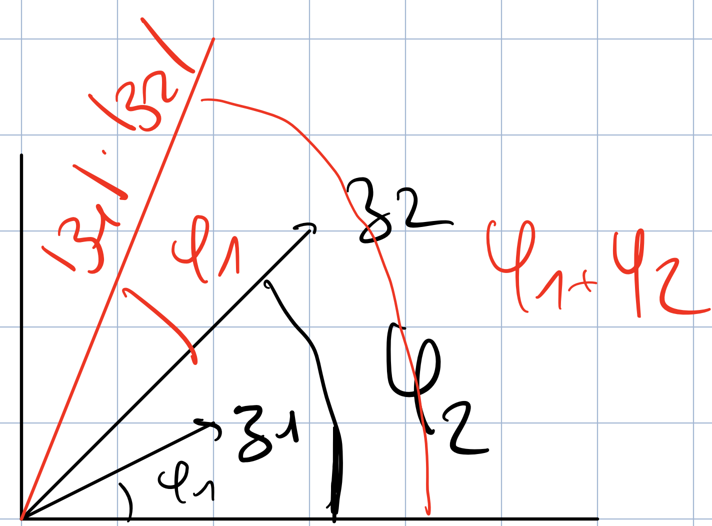
$$= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{si } a > 0)$$

· la forme polaire est + adaptée à la multiplication des nb complexes

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$

$$z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$$
$$z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}$$
$$= |z_1| \, |z_2| \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



$r > 0$ $\varphi \in \mathbb{R}$ mv. $z = re^{i\varphi}$

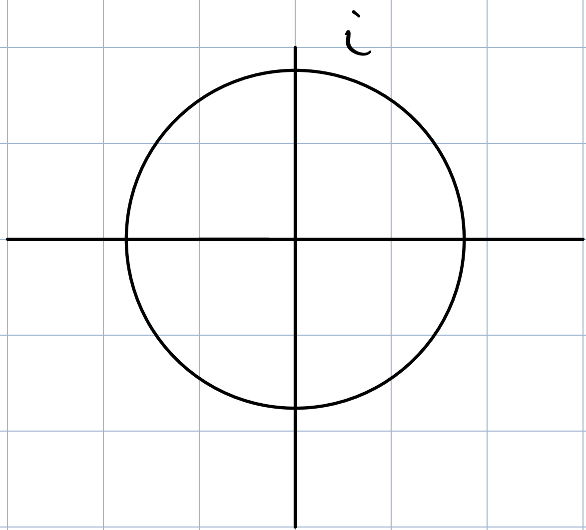
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\,\bar{z} = \frac{1}{r^2}\, r e^{-i\varphi}$$

$$= \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$$

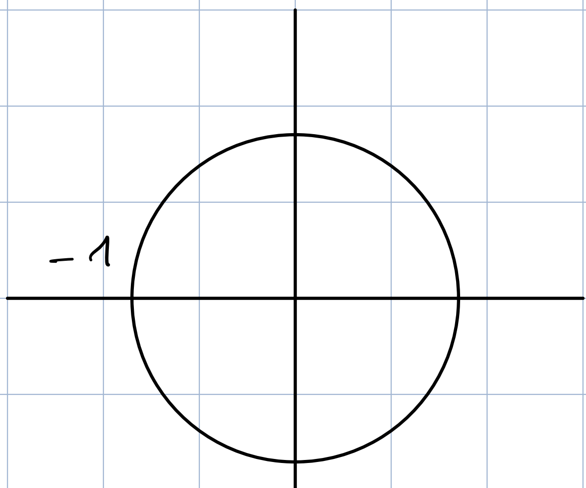
en effet

$$z \cdot \frac{1}{z} = re^{i\varphi} \cdot \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$$

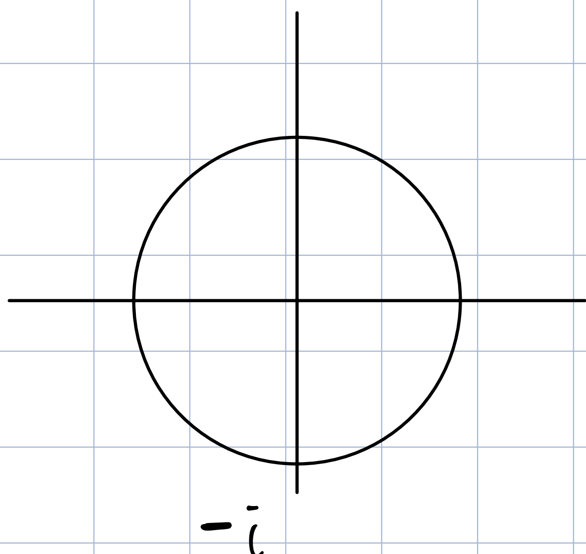
$$= 1 \cdot 1 = 1.$$



$$i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= e^{i\frac{\pi}{2}}$$

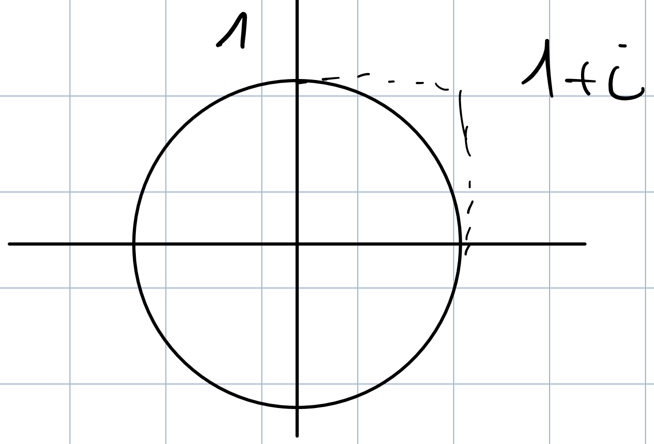


$$e^{i\pi}$$



$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\pi} = i$$

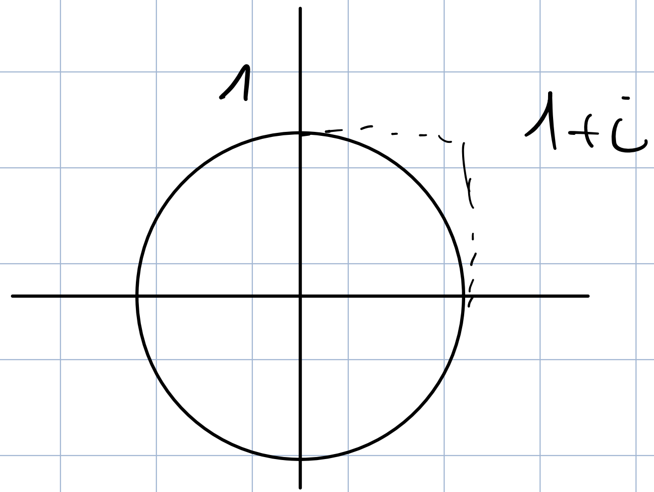
$$\arg(-i) = \frac{-\pi}{2} \text{ (conventº)}$$



$$1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\left[= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= 1+i$$

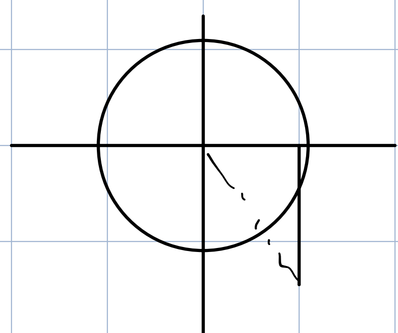


$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\left[= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

(6)



$$1-\sqrt{3}i$$

$$= 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$(1-\sqrt{3}i)^{30} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2^{30}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{30}$$

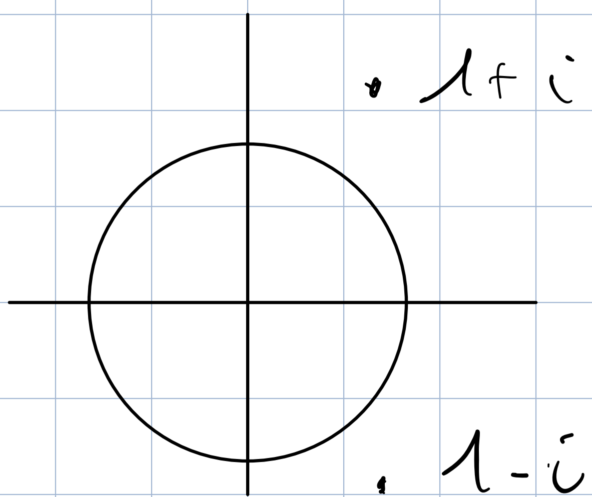
$$= 2^{30} e^{-i\pi 10}$$

$$= 2^{30} \left(e^{-i\pi 2}\right)^5$$

$$= 2^{30} (1)^5$$

$$= 2^{30}.$$

7



$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}$$

$$= 1.$$

Racines n-ièmes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Alors $z^n = \omega$ (*)

admet n solutions $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.
c-a-d $(z_k)^n = \omega$, $k = 1 \dots$ à n.

$\uparrow$

n "racines" de *

Si $\omega = 0$, une sol, $z = 0$.

Méthode polaire

i) $\omega = |\omega| e^{i(\varphi + 2\pi . k)}$ $k = 0, 1, \dots, n-1$.

ii) $z_{k+1} = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \frac{k}{n}\right)}$

Exemples

$$z^2 = 1$$

$$1 = e^{i(0+2\pi k)} \qquad k = 0, 1$$

$$z_{k+1} = e^{i\frac{k}{2}\cdot 2\pi} = e^{ik\pi} \qquad k = 0, 1$$

$$z_1 = e^{i} = 1$$

$$z_2 = e^{i\pi} = -1$$

$$z^3 = 1 \qquad k = 0, 1, 2$$

$$= e^{i(0 + 2\pi k)}$$

$$z_{k+1} = e^{i\left(\frac{k}{3} \cdot 2\pi\right)}$$

$$z_1 = e^{i0} = 1$$

$$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-\frac{2\pi}{3}} = \overline{z_2}$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ sol donnent un polygone régulier méthode cartésienne

$$z^2 = 3+4i \quad (*)$$

$$z = a+ib, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

$$(a+ib)^2 = 3+4i$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + i2ab - b^2 = 3+4i$$

$$a^2 - b^2 = 3 \quad (1)$$
$$2 \cdot a \cdot b = 4 \quad (2) \Rightarrow a \neq 0 \text{ et } b \neq 0$$

$$(2) \quad b = \frac{2}{a} \underset{(1)}{\Rightarrow} a^2 - \frac{4}{a^2} =$$

$\Rightarrow (a^2)^2 - 3(a^2) - 4 = 0$

$\Rightarrow (a^2 - 4)(a^2 + 1) = 0$

$\Rightarrow a = 2, \ b = 1$
$\quad\ \ a = -2, \ b = -1$

formule de 1ère identité rem. 4

<u>Solutions :</u>

$z_1 = 2 + i$

$z_2 = -2 - i = -z_1$

<u>Rem</u> attention aux sol éventuelles de (**)

Théorème fondamental de l'algèbre

$\forall$ polynôme $P(z) = a_n \cdot z^n + \dots + a_1 \cdot z + a_0$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$

st donné,

Card $\exists\ z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ t.q

$p(z_k) = 0$, $k = 1, \dots, n$ et

t.q l'on ait la représentation:

$$p(z) = a_n (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

Si $p(z) = a_n z^n \dots + a_1 z + a_0$

où $n \in \mathbb{N}^*$

et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

et $a_n \neq 0$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$ que

$$\overline{p(z)} = p(\overline{z})$$

donc $p(z_k) = 0$, $p(\overline{z_k}) = 0$

<u>Conséquence</u> : les racines d'un polynome à coeff réels sont ou bien des nb réels ou des paires de nombres complexes conjugués.

Tout polynôme à coefficients réels peut être factorisé dans $\mathbb{R}$ en facteurs linéaires et quadratiques