Ensembles

Notations

$$X = \{a, b, c\}$$

$$Y = \{x \in X : |x| = 2\}$$

- $\in$ "est élément de" $a \in X$
- $\notin$ "n'est pas élément de" $d \notin X$
- $\subset$ "est un sous-ensemble de" $Y \subset X$
- $\not\subset$ "n'est pas un sous-ensemble de" $Y \not\subset X$
- $=$ "est égal à" $Y = Y$
- $\neq$ "n'est pas égal à" $Y \neq X$
- $\emptyset = \{\}$

Nota bene : $\emptyset \subset X$ pour $\forall$ ensemble X
$X \subset X$ "

Définition : $P(X) :=$ l'ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensembles de X (powerset).

$\Rightarrow 2^3$ éléments
"à chaque fois, j'ai le choix entre prendre ou non l'élément"

Exemple

$$P(X) = \{ \emptyset, X, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$$

Remarque :

- $\{a\} \subset X$, $\{a\} \in P(X)$
- ordre does not matter

Le produit cartésien

X, Y, Z ensembles

ordre compte

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

produit cartésien

Exemple

$$X = \{1,2\} \quad Y = \{3,4\}$$

$$X \times Y = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

⚠ $X \times Y \neq Y \times X$

Définition :

$$X \times Y \times Z = \{(x,y,z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\}$$

$$(X \times Y) \neq Z \quad ⚠$$

Définition : Soient X et Y des ensembles.

Un sous ensemble $R \subset R \times Y$ est appelé une relation binaire sur X et Y.

Définition : Soit X un ensemble. Un sous ensemble $R \subset X \times X$ est appelé une relation binaire sur X.

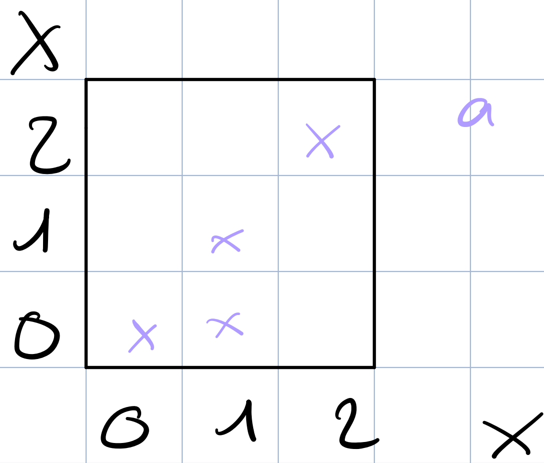
exemple : $X = \{0, 1, 2\}$

$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0)\}$

↑ il n'y en a qu'une partie

$R \subset X \times X$

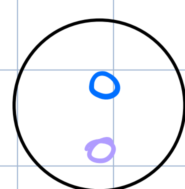
<u>Graphiquement</u> :



Classes d'équivalence

<u>Exemple</u> :

22 j. sur le foot



Les deux équipes

= "ensemble quotient"

Définition

Soit X un ensemble. Un sous-ensemble $R \subset X \times X$ est appelée relatᵒ d'équivalence sur X. (on note "$x \sim y$" pour dire que $(x,y) \in R$, si :

Règle 1 $\forall x \in X, x \sim x$ (R est réflexive)

Règle 2 $\forall x, y \in X, x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (R symétrique)

Règle 3 $\forall x, y, z \in X,$
$x \sim y \cap y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (R transitive)

exemple :

$$X = \{0, 1, 2\} \quad R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0)\} \subset X \times X.$$

⚠ extra notes.

$x \sim x$ signifie que x est en relation d'équivalence avec lui-même, donc qu'il existe le couple (x,x) dans R.

Si $x \sim y$, alors il existe un couple (x,y) dans R. et donc il existe aussi (y,x).

Si (x,y) et (y,z), alors (x,z)

On peut voir ça un peu comme l'égalité :

réflexive : pour tt a, $a=a$
symétrique : si $a=b$ alors $b=c$
transitive ; si $a=b$ et $b=c$, $a=c$

Construction de l'ensemble quotient $X/\sim$

Définition donné $x \in X$, on définit $C_x \subset X$ par

$$C_x := \{ y \in X \mid y \sim x \}$$

C_x est appelée la classe d'équivalence de x.

Remarque : $C_x = C_y$ si $x \sim y$

à montrer

Exemple $C_0 = C_1 = \{0, 1\}$

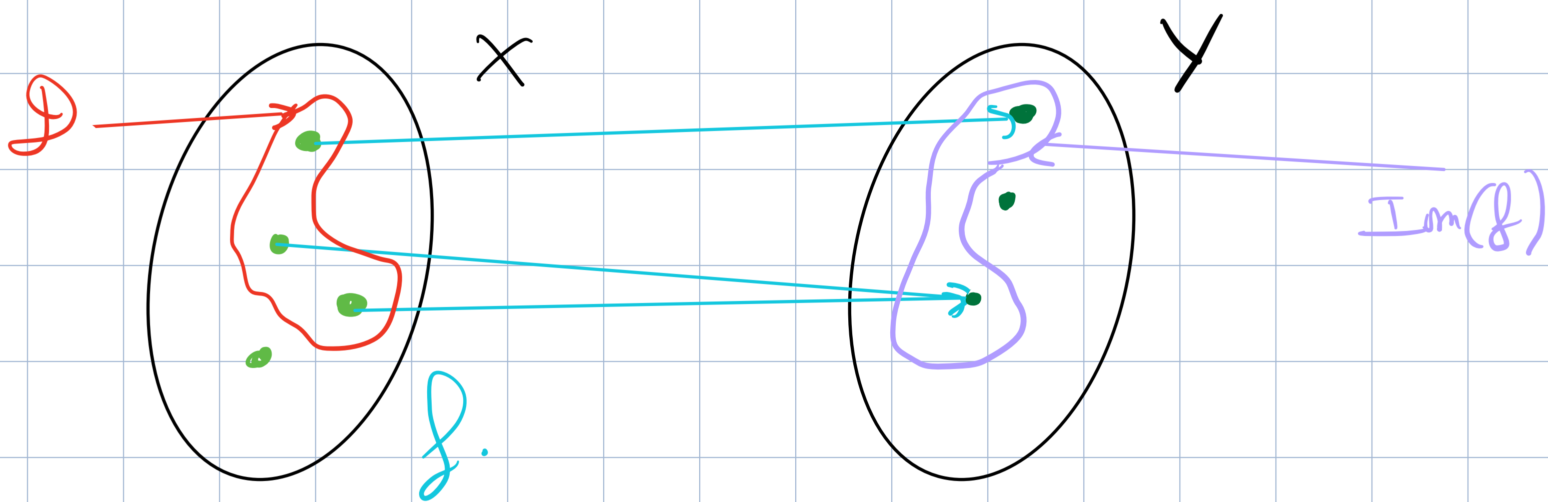
$C_2 = \{2\}$

Définition : l'ensemble quotient $X/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence de X.

$$X/\sim \;=\; \{\{0,1\},\{2\}\}.$$

Fonctions, concepts de base

Définition et notations



Une seule flèche qui part de chaque élément de X

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) \subset X \qquad \mathrm{Im}(f) = f(\mathcal{D})$

Remarque : f est spécifiée par un sous-ensemble de $\mathcal{D} \times Y$ d'un certain type.

Domaine de définition de $f \subset X$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}_f := \{ x \in X \mid$ une flèche et une seule va de $x \in X$ vers $y \in Y \}$

Notation

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\to Y \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

Image de $f \subset Y$

$$\mathrm{Im}(f) \equiv f(\mathcal{D}) := \{ y \in Y \mid \exists x \in X \mid y = f(x) \}$$

Définition : Une fonction $f : \mathcal{D} \to Y$ est

- **surjective** si $\mathrm{Im}(f) = Y$
- **injective** si $\underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{A} \Rightarrow \underbrace{x_1 = x_2}_{B}$

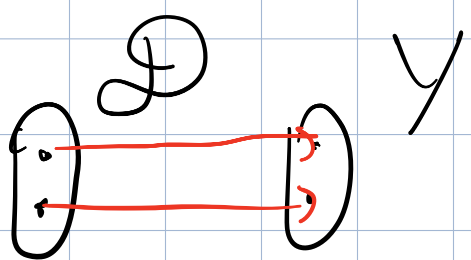
Remarque : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(contraposée)

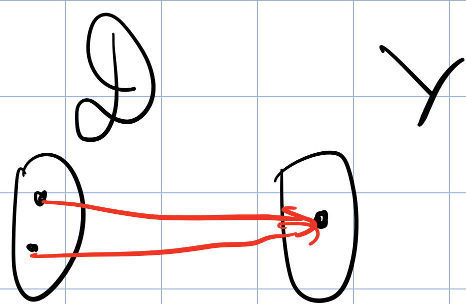
Si $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$

• Si $f : \mathcal{D} \to Y$ est surjective,

alors $\forall\, y \in Y$ est image d'au moins un $x \in \mathcal{D}$.

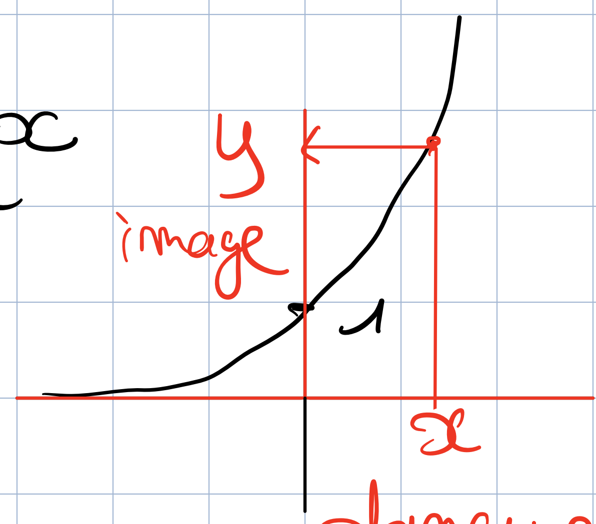


surjective
injective



surjective
~~injective~~

$$\begin{array}{cccc} & \mathcal{D} & & Y \\ f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & y = e^{x} \end{array}$$



Bijective

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} : y > 0 \}$$

f est injective, mais pas surjective

Remarque : $\forall$ fonct° $f : \mathcal{D} \to Y$ définit une fonct° surjective $f : \mathcal{D} \to \mathrm{Im}(f) \subset Y$.

logique.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \{ y \in \mathbb{R} : y > 0 \} \\ x &\longmapsto y = e^{x} \end{aligned}$$

Fonctions bijectives :

Définition : une fonctᵒ injective + surjective

$\Rightarrow$ bijective

Remarque : Ttr fonctᵒ $f : \mathcal{D} \to Y$ injective définit une fonctᵒ bijective.

$f : \mathcal{D} \to Im(f) \subset Y.$

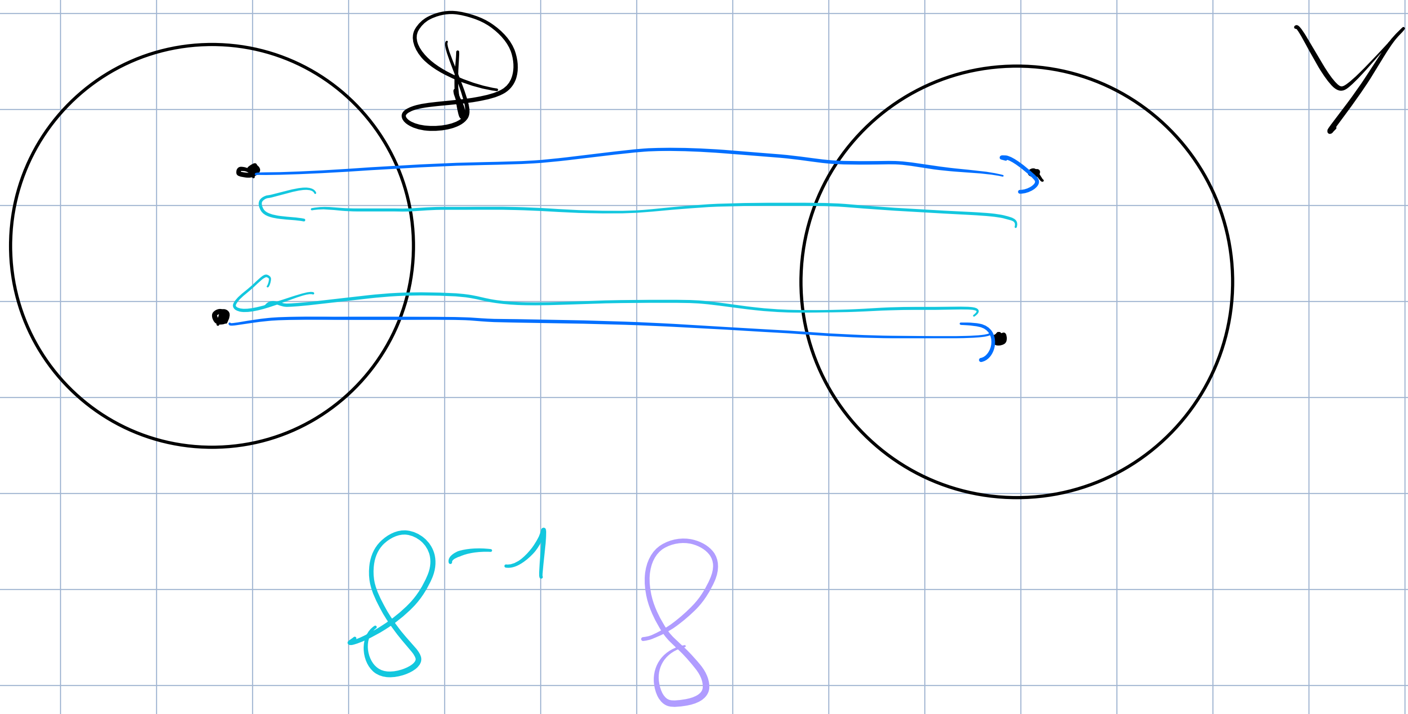
Remarque : Ttr fonctᵒ bijective $f : \mathcal{D} \to Y$ possède une fonctᵒ réciproque notée $f^{-1} : Y \to \mathcal{D}.$

Elle associe à $y \in Y$ l'unique $x \in \mathcal{D}$

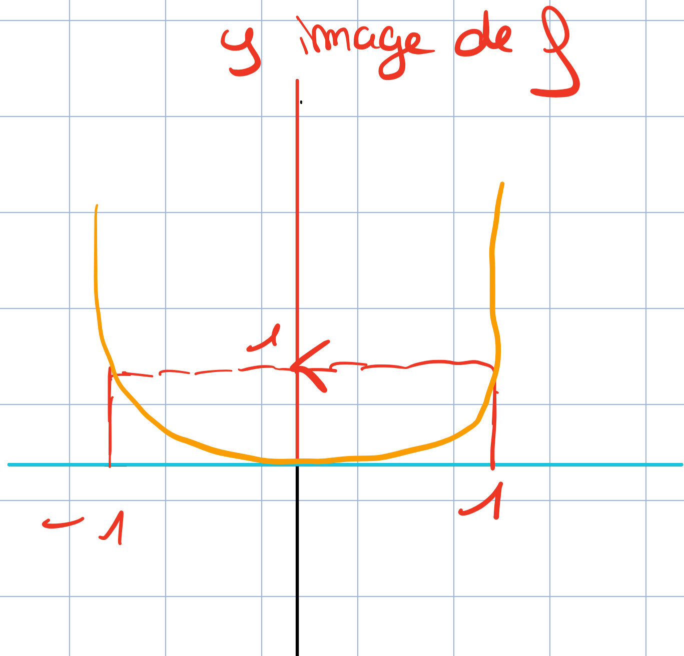
tel que $f(x) = y$, et on a

$$\forall y \in Y \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$



Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2$



f non injective, non surjective

on change dom. d'arrivée

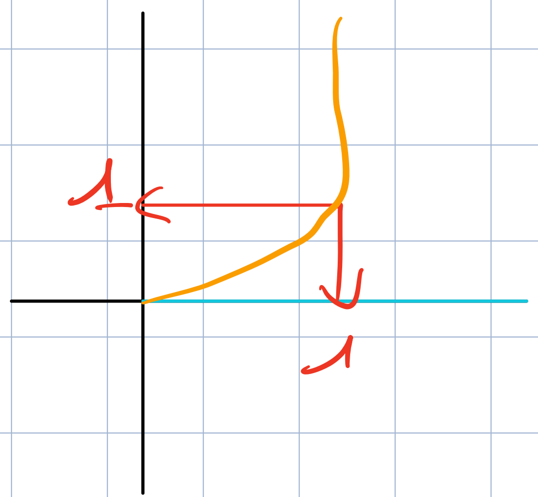
$g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{*+}$
$: x \mapsto y = x^2$

on peut enlever les valeurs négatives

de x

$$h : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^{*+}$$
$$x \longmapsto y = x^2$$

h bijective.



✓

Résumé : pour rendre $f : \mathcal{D} \to Y$ surjective, il faut réduire Y à $f(\mathcal{D})$
$= \mathrm{Im}(f) \subset Y$.

pour rendre $f : \mathcal{D} \to Y$ injective, il faut réduire le domaine de définition de façon adéquate.

$\Longrightarrow$ on a donc une fonct° réciproque.

Restrict°, prolongement d'une fonction

Soient :

- $f : \mathcal{D} \to Y$
- $g : E \to Y$

avec $\left| \begin{array}{l} E \subset D \\ \forall x \in E,\ g(x) = f(x) \end{array} \right.$

alors :

- g est appelée une restrict° de f à E
  $g = f|_E$.
- f est appelée un prolongement de g de E à $\mathcal{D}$.

Graphe d'une fonct°

Définition : le graphe d'une fonct° :

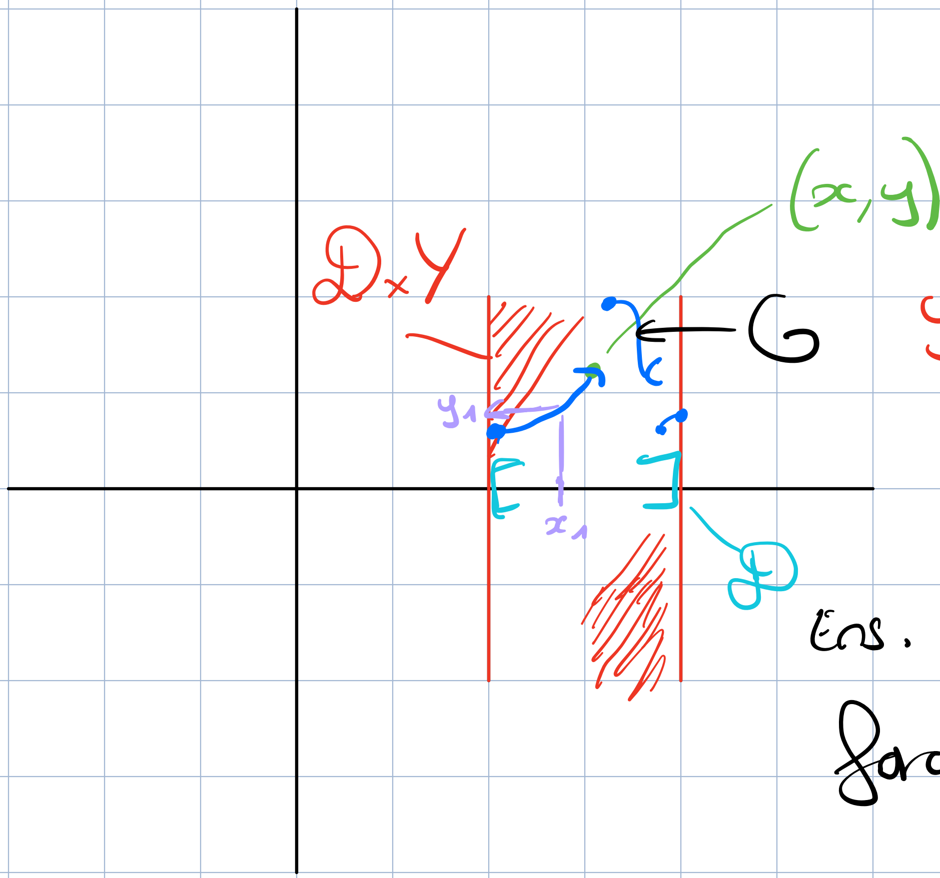
$f : \mathcal{D} \to Y$ est l'ensemble

$$G = G_f = G(f) := \{(x,y) \in \mathcal{D} \times Y \mid y = f(x)\}$$

$$\subset \mathcal{D} \times Y.$$

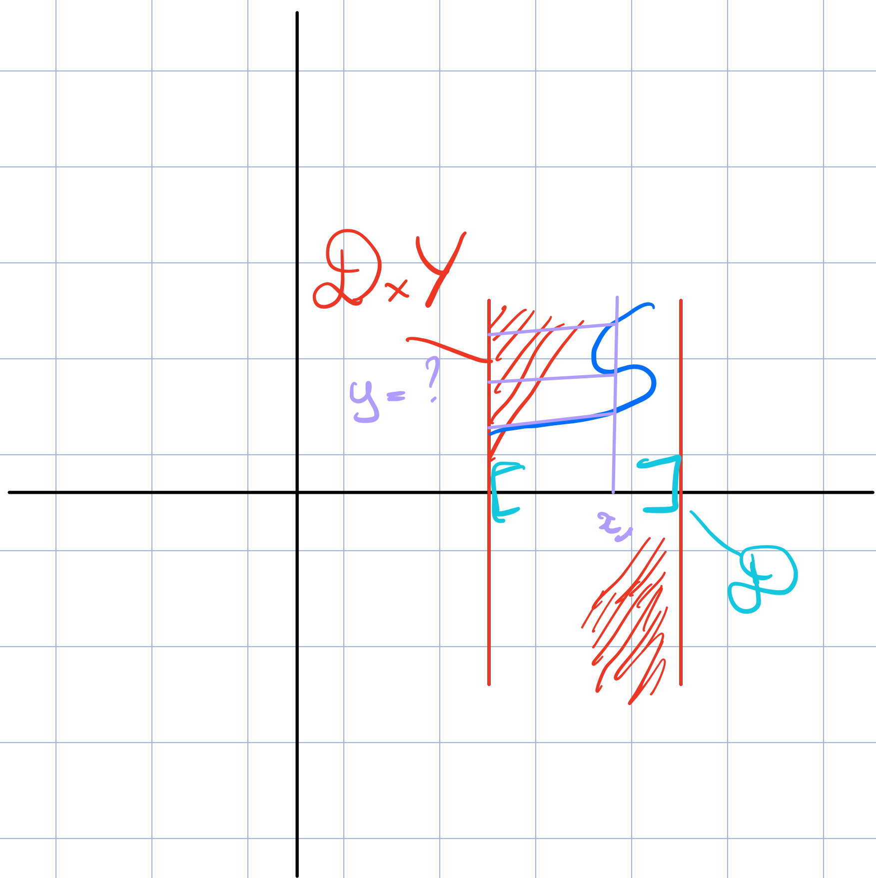
Définir d'une fonct° par son graphe

Soit $G \subset \mathcal{D} \times Y$ (= une relat° binaire) telle que $\forall x \in \mathcal{D}$, $\exists$ un y et un seul tel que $(x,y) \in G$. Alors G est le graphe d'une fonction $f : \mathcal{D} \to Y$, qui, $\forall (x,y) \in G$, associe y à x.



$Y = \mathbb{R}$

Ens. G est le graphe d'une fonction $f : \mathcal{D} \to Y$



$Y = \mathbb{R}$

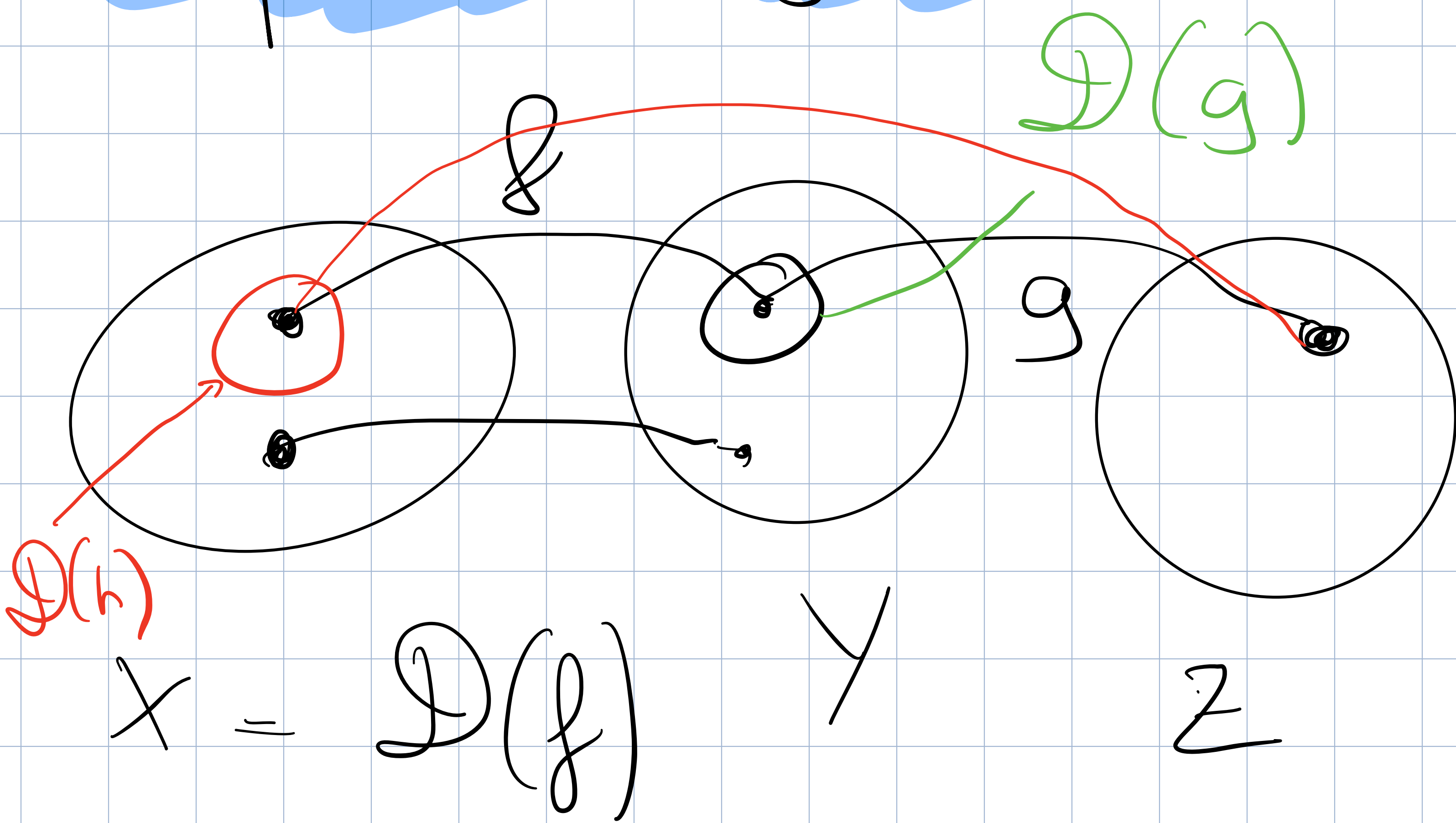
Ens. G n'est pas le graphe d'une fonction $f : \mathcal{D} \to Y$

Remarque : la relat° R définie dans l'exemple 0.1.2 n'est pas le graphe d'une fonct° $f : X \to X$.

(le vérifier).

R : il n'existe pas un et un seul y tel que $(x,y) \in G$.

Composition de fonctions



Soit $\mathcal{D}(h) := \{x \in \mathcal{D}(f) \mid y = f(x) \in \mathcal{D}(g)\}$

$\subset \mathcal{D}(f)$.

Alors on peut définir $h : \mathcal{D}(h) \to \mathbb{C}$

par $h(x) := g(f(x))$.

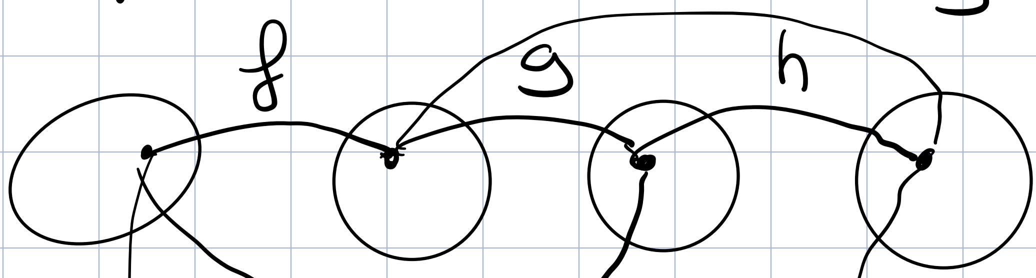
Notat° :

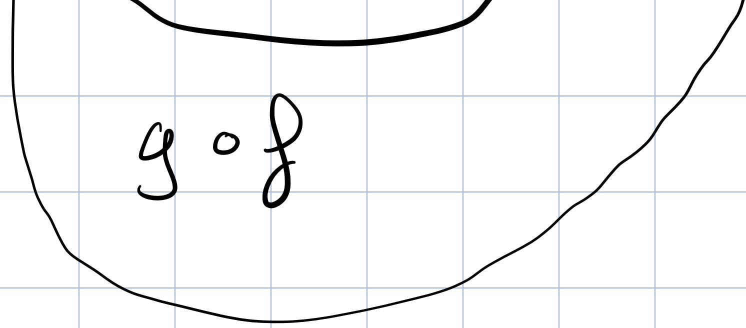
"rond"

on écrit $h = g \circ f$

h est la composition de g avec f.

Composition multiples $h \circ g$





$h \circ g \circ f$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f.$$

la loi de la compositi° est **ASSOCIATIVE**

Les entiers (ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$).

Entiers naturels $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$$

<u>Nota bene</u>: 0 est un entier naturel, pair.

Relation d'ordre (total) sur $\mathbb{N}$, "$\leq$".

$\forall x, y, z \in \mathbb{N}$

(O1) $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(O2) $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$

(O3) on a soit $x \leq y$ soit $y \leq x$ (ordre total)

ex : $2 \leq 2$, $2 \geq 3$

Notat° : $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$.
$x > y$ si $y \geq x$ et $x \neq y$.
$x \geq y$ si $y \leq x$

opérations :

"+" : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$(m, n) \to m + n$

"$\cdot$" : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$(m, n) \to m \cdot n$

éléments neutres :

0 pour "+" :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n + 0 = n$$

1 pour "·" :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \cdot 1 = n$$

Entiers relatifs $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

éléments "inverses" pour "+"

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \text{ tel que} \\ x + y = 0 \end{array} \right.$$

élément neutre

Ex : $n + (-n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

Notation : on écrit $2-3$, au lieu de $2+(-3)$.

Remarque $-(-3)=3$

On a compatibilité de "+" et "·" avec $\leq$

$\forall x,y,z \in \mathbb{N}$ on a :

(O4) si $x \leq y$, alors $x+z \leq y+z$

(O5) si $0 \leq x$ et $0 \leq y$ alors $0 \leq x \cdot y$

Le Plus Grand Commun Diviseur

Algorithme d'Euclide
" de Joseph Stein

Remarque : soit $a, b \in \mathbb{N}$, $0 \leq b \leq a$

Si $r \in \mathbb{N}^*$ divise a et b, alors $r / a-b$.

Démonstration

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{r} + \frac{(a-b)}{r}$$

$\in \mathbb{N}$ $\in \mathbb{N}$

r divise a

r divise b

r divise (a-b)

$\Rightarrow \frac{(a-b)}{r} \in \mathbb{N}$ donc

Algorithme de J. Stein :

0. $PGCD(a,b) = PGCD(b,a)$
1. $PGCD(a,b) = 2 \cdot PGCD(a,b)$ * si a et b sont pairs
2. $PGCD(a,b) = PGCD(\frac{a}{2}; b)$ * si a est pair, b impair
3. $PGCD(a,b) = PGCD(\frac{a-b}{2}, b)$ * si a et b impairs $\Rightarrow$ (a-b) pair
4. $PGCD(a,0) = a$

Exemple :

$$PGCD(727,7)$$

$$= PGCD(\frac{720}{2}, 7)$$

$$= PGCD(360, 7)$$

$$= PGCD(180,7)$$
$$= PGCD(90,7)$$
$$= PGCD(45,7)$$
$$= PGCD(19,7)$$
$$= PGCD(6,7)$$
$$= PGCD(3,7)$$
$$= PGCD(7,3)$$
$$= PGCD(2,3)$$
$$= PGCD(1,3)$$
$$= PGCD(3,1)$$
$$= PGCD(1,1) = PGCD(1,0) = 1$$

Raisonnement par récurrence

Exemple

On veut démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 3 + 5 + \dots (2n-1) = n^2 : P(n)$$

Théorème :

- si $P(n_0)$ est vraie pour $n_0 \in \mathbb{N}$.
  (initialisation)
- si pour $\forall\, n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
  (pas d'induction)

alors $P(n)$ est vraie $\forall\, n \geq n_0$

Dans l'exemple

(i) $n_0 = 1 \quad 1 = 1^2$ ✓

(ii)

$$P(n+1) : 1 + 3 + 5 + \dots + \underbrace{(2(n+1) - 1)}_{2n+1} = (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1}_{P(n) = n^2} + 2n + 1 \stackrel{?}{=} (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 \stackrel{?}{=} (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 \checkmark$$

(iii) Donc, pour $\forall n \geqslant n_0 = 1$

$P(n)$ est vrai

Attention, (i) est indispensable !!

Notations $\sum$ et $\prod$

$$\begin{cases} a_k \text{ des nombres } k = m, \dots, n, \\ n, m \in \mathbb{Z}, \ \underline{n \geqslant m} \end{cases}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 \quad , \quad \sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2$$

$$\in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + \dots + (2n-1)$$
$$= n^2$$

Définition (somme vide et produit vide)

- si $n < m$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := 1$$

Règles de calcul :

$\forall \, l, m, n \in \mathbb{Z}$, $l \leq m \leq n$ et a_k, b_k des nombres.

- $$\sum_{k=l}^{m} a_k + \sum_{k=m+l}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{n} a_k$$

- $$\left(\prod_{k=l}^{m} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m+l}^{n} a_k\right) = \prod_{k=l}^{n} a_k$$

- $$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

- $$\prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$$

Rappels de notations et identités

(i) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, $a \neq 1$

Convent° de notation $a^0 = 1$.

<u>Démo</u>: $(1-a)(1+a+a^2+a^3+\dots+a^n)$

$= 1 - \cancel{a} + \cancel{a} \pm \dots - a^{n+1}$

"n factorielle"

(ii) $n!$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Par convent°, $0! = 1$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ $n \geq 1$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad k,n \in \mathbb{N},\ k \leq n.$$

(iii) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad a,b \in \mathbb{R}.$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^{n \in \mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= a^n + n\cdot a^{n-1}b + \dots + b^n$$

Remarque : Triangle de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 &
\end{array}$$

Les nombres rationels

Opérat° algébriques

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{Z}^* \right\} \quad (= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$$

$$\text{"}+\text{"} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \longrightarrow \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\text{"}\cdot\text{"} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \longrightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Sur $\mathbb{Q}$ on a une relation d'équivalence

$$\boxed{\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \text{ ssi } a \cdot d = b \cdot c}$$

à vérifier !

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \text{ ssi } a \cdot d = b \cdot c \ ?$$

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \to a \cdot d = b \cdot c .$$

on a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{ad = bc}$. $\blacksquare$

$$a \cdot d = b \cdot c \to \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

on a $a \cdot d = b \cdot c$

$\Leftrightarrow$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. $\blacksquare$

Exemple : $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4}$ car $1 \times 4 = 2 \times 2$

Notation : $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ au lieu de $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{4}$

On devrait def les rationnels comme

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$$ pour être précis

Important : "$+$" et "$\cdot$" sont compatibles avec la relation d'équivalence. à vérifier !!

c-a-d :

Si $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}$

alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$$

Si $\dfrac{a}{b} \sim \dfrac{a'}{b'}$ | alors $ab' = ba'$

$\dfrac{c}{d} \sim \dfrac{c'}{d'}$ | $cd' = dc'$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

$$(ad+bc)(b'd') = (bd)(a'd'+b'c')$$

$$\Leftrightarrow b'd'ad + b'd'bc = bda'd' + bdb'c'$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(ab')(d'd)} + \cancel{(cd')(b'b)} - \cancel{(a'b)(dd')} - \cancel{(bb')(dc')} = 0$$

$\boxed{\text{Ok}}$

Remarque :

- le représentant privilégié d'un nombre $x \in \mathbb{Q}$ est $\frac{p}{q}$ avec $q > 0$ et $\text{pgcd}(|p|, q) = 1$.

- Soit $x = \frac{a}{1}$ et $y = \frac{b}{1}$

alors $\begin{cases} x + y = \frac{a+b}{1} \\ x \cdot y = \frac{a \cdot b}{1} \end{cases}$

et on récupère donc les opérat° de $\mathbb{Z}$ si on identifie $\frac{p}{1} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et ainsi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Opérations inverses

"inverse" pour + : pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ on déf :

$-x \in \mathbb{Q}$ par $-x := \frac{-p}{q} \left(\sim \frac{p}{-q}\right)$

et on a $x + (-x) = 0$

$\left(= \frac{0}{1} \sim \frac{0}{q},\ q \in \mathbb{Z}^*\right)$

inverse pour "·" :

Soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p \neq 0$,

alors $\boxed{y = \frac{q}{p}} \in \mathbb{Q}$ est déf

et $x \cdot y = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{pq}{qp} \underset{\text{identificat}^{\circ}}{=} \frac{1}{1} = 1$

équivalent $\frac{1}{1}$ $\in \mathbb{Z}$

Pour $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $y = \frac{q}{p}$ est l'inverse de x.

Notations pour l'inverse :

Soit $x \in \mathbb{Q}^*$, alors on note son inverse par : x^{-1} ou $\frac{1}{x}$.

Exemple

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

équivalence

car $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{6}{6} = \frac{1}{1} = 1$

identificato

$\frac{p}{1}, p \in \mathbb{Z}$