Exercice 1

ⓐ Faux.

$$(AB)C = ABC$$
$$(AC)B = ACB$$ $\neq$.

ⓑ Vrai $(A^{-1})^{-1} = A$.

ⓒ Faux.

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

ⓓ Vrai $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Exercice 2

① $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Qu'observez-vous ?

Exercice 3

ⓐ

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot \det (1)$$

$$= \boxed{4}$$

(b) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix}$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot (-1)$$

$$\cancel{+ 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot (0)}$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot (1)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot -1$$

$$+ 1 \cdot (1) \cdot 1$$

$$= \underline{0}$$

(c) $\det(C) = 0$

(d) $\det\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$9 \quad \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$+ \cdot$

$- \cdot$

$+ \cdot$

$- \cdot$

$$9 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \cdot (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - 6 \cdot (-6) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$
$$+ 3 \cdot (-3) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= -27 + 36 - 9 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9 \cdot 5 \cdot 1 + 8 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \cdot 2$$

$$- 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$= 0$$

$$\det(E) = \det\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(*)} - \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{(*)}$$

$$= -10 - (-94) = 94 - 10 \; \underline{= 84}.$$

$$(*) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -1 - 20 + 11 = -10.$$

$$(**) = 0 \cdot \left(\text{---} \right) - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= +6 + 4 \cdot (-25) = -94.$$

det égaux pour les transposées.

Exercice 4

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- 0 \cdot \left(\;\_\_\; \right)$$

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + (-10)$$

$$= -9.$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- 0 \left(\text{———} \right)$$

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + (-20)$$

$$= -18$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 10 = 9$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- 0 \cdot (\text{—})$$

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + (-10)$$

$$= -9.$$

Exercice 5

AB inversible

$$\Leftrightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Si A ou B non inversible, on perd la bijectivité donc on ne peut pas revenir en arrière.

Exercice 6

a)

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- 0 \left(\text{———} \right)$$

$$+ 3 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- 4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \cdot 1 \cdot 1 + 9 \cdot 5 - 4 \cdot 2 \cdot 5$$

$$= 6 + 45 - 40$$

$$= 11.$$

(b) $$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot \begin{vmatrix} a+b & c \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$- b \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ a & a \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot \left((a+b)(a) - cb \right)$$

$$- \, b \cdot \left(a^2 - ac \right)$$

$$a^3 + \cancel{a^2 b}$$

$$= - \cancel{abc} + a\left(a^2 + ab\right)$$

$$- \cancel{a^2 b} + \cancel{abc}$$

$$= a^3$$

e

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$$

$$= 1$$

La matrice rotation ne change pas les aires*, et elle est toujours logiquement bijective (chaque vecteur est associé à un vecteur unique tourné) donc inversible.

* peu importe l'angle.

d

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

⚠ on remarque que les colonnes de B sont linéairement dépendantes

$\Rightarrow$ B^{-1} n'existe pas

(avec le 18 on peut enlever ligne du bas, puis avec le 1 la ligne du haut, puis 1ère/2ème col.)

$\Rightarrow \det(AB) = 0$

Exercice 7

(A). On ajoute α · la ligne 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

B on inverse les deux premières lignes.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

C on multiplie la ligne 1 par α.

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= \underline{\alpha}$.

Exercice 8

Si deux colonnes identiques

$\Leftrightarrow$ linéairement dépendantes

$\Leftrightarrow$ matrice non inversible

$\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$

Exercice 9

~~Agrandissement de l'aire par $\det(A)$~~

~~$\Rightarrow$ on revient à l'aire d'origine par $\frac{1}{\det A}$~~

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I)$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$$

(b)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\det(QAQ^{-1})$$

$$= \det(Q)\cdot\det(A)\cdot\det(Q^{-1})$$

$$= \det(Q)\cdot\frac{1}{\det Q}\cdot\det(A)$$

$$= \det(A)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

(c) $U^T = U^{-1}$

$$\det U \cdot \det(U^T) = \det(I_n)$$

$$= 1$$

$$(\det U)^2 = 1$$

$$\det(U) = \sqrt{1} \text{ ou } -\sqrt{1}$$

d) $\det(A^3) = 0$

A^3 non inversible.

$\det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\det(A) = 0}$

Exercice 11

(a) linéairement dep $\Leftrightarrow$ matrice non inversible

Vrai.

(b) $\det(A)\cdot\det(A)\cdot\det(A) = 6$

$\Leftrightarrow \det(A) = \sqrt[3]{6}$

$\neq 2.$ Faux.

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 \neq 7.$

Faux

(d) Faux. Sauf si triangulaire stricte.

Exercice 12

(a)

■

□ non, on perd bijectivité

□ pas nécessairement si $A = -B$.

□ fausse $B^{-1}A^{-1}$

(b)

□ $B^T A^T$

■

□ fausse $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

□ fausse BA

(c) ☐ faux

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+0 \\ 0+2 & 0+2 \end{pmatrix}$$

☐

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

☐

☒

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ea + gb & fa + hb \\ ec + gd & fc + hd \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae + fc & be + df \\ ag + hc & bg + dh \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae + fc = ea + gb \\ ec + gd = ag + hc \\ fa + hb = be + af \\ bg + ah = fc + hc \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} fc = gb \\ \\ \\ \end{cases}$$

d $\quad \underset{7 \cdot 8}{A} \quad \underset{8 \cdot 7}{\vec{x}} \quad \mathbb{R}^8$

(e)

- [ ] faux incomp.

- [ ] faux $n \times m$

$3 \to 2$

2×3

- [ ] faux $n \to m$

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

- [x] AB $\quad m \times p$

$(AB)^T$ $\quad p \times m$

8

- [ ] faux. $C = 0$ par ex.
- [ ] faux. $C = -C$
- [x] $ACC^{-1} = BCC^{-1} \Leftrightarrow A = B$.
- [ ] faux ça veut dire c'est diagonale et

(g) ☐ $\det(A+I) \neq \det(A) + \det(I)$

☒ $(A-I)(A+I)$

$= A^2 + AI - IA - I^2$

$= A^2 - I^2$

☐ $(A+I)(A+I) = A^2 + AI + IA + I^2$
$= A^2 + 2A + I^2$

☐ $(\alpha A)^2 = (\alpha A)(\alpha A)$

$= \alpha A \alpha A$

$= \alpha^2 A^2$.