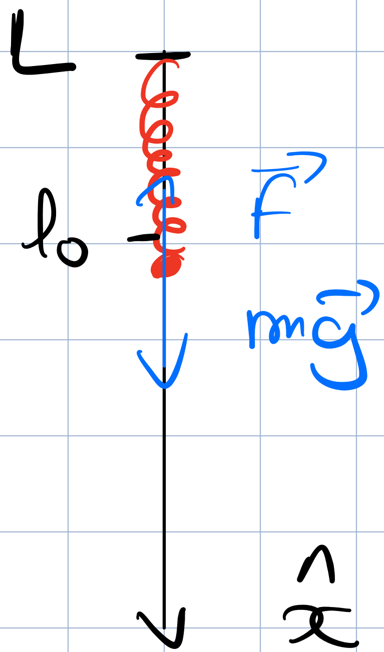
1



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$= m\vec{g} + \vec{F}$$

$$= m\vec{g} - k\Delta\vec{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} = mg - k(x - l_0)}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + x_{eq}$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$m\left(-A\omega^2\cos(\omega t + \phi)\right)$$

$$= mg - k\left(A\cos(\omega t + \phi) + x_{eq} - l_0\right)$$

$$-kA = -\omega^2 A m$$

$$\Leftrightarrow k = \omega^2 m$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= mg - kA\cos(\omega t + \phi) - kx_{eq} + kl_0$$

$$mg - kx_{eq} + kl_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{eq} = \frac{kl_0 + mg}{k} = \frac{mg}{k} + l_0$$

d) $$\boxed{m\ddot{x} = -\eta\dot{x} - k(x - l_0) + mg}$$

On pose $\gamma = \dfrac{\eta}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

$$\ddot{x} = -2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x + \frac{k}{m}l_0 + g.$$

On veut $\gamma < \omega_0$ (sous-critique).

$$\frac{\eta}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\eta < \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 2m.$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\eta}{2m}}$$

On a donc, pour les mvts sous-critiques :

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(C\cos(\omega_1 t + \phi)\right)$$

On pose :

$$x(t_2) = \frac{1}{2}x(t_1)$$

$$e^{-\gamma t_2} = \frac{1}{2}e^{-\gamma t_1}$$

$$\Leftrightarrow -\gamma t_2 = \ln\left(\frac{1}{2}e^{-\gamma t_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\gamma t_2 = -\ln(2) - \gamma t_1$$

$$\Leftrightarrow t_2 = \frac{\ln(2)}{\gamma} - t_1.$$

Une pulsation prend une période

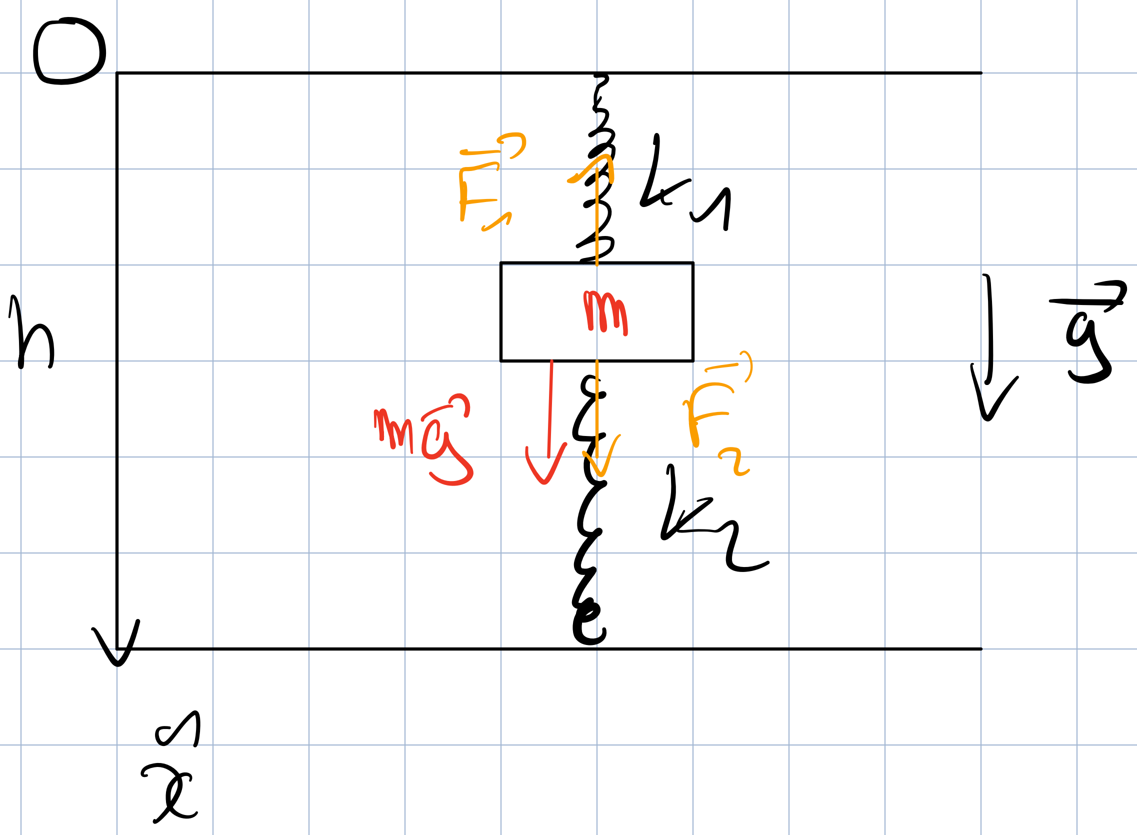
$T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ à s'effectuer.

On veut le nb de périodes en $\frac{\ln(2)}{\gamma}$ s.

$$\frac{2\pi}{\omega_1} \cdot \frac{\gamma}{\ln(2)} = N.$$

②

a



b

$$m\ddot{x} = mg - k_1(x) - k_2(x-h)$$

$$= mg - x(k_1+k_2) + k_2 h$$

$$= mg - kx + k_2 h$$

$$\boxed{-\frac{m}{k}\ddot{x} = x - \frac{mg}{k} - \frac{k_2 h}{k}}$$

on pose $u = x - \dfrac{mg}{k} - \dfrac{k_2 h}{k}$

donc on a :

pulsation $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (cours)

$$-\frac{m}{k}\ddot{u} = u$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{mg}{k} + \frac{k_2 h}{k}$$

or $x(0) = x_0 \Rightarrow A = \left(-\dfrac{mg}{k} - \dfrac{k_2 h}{k}\right)$

$\dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B = \dfrac{v_0}{\omega}$

$$\boxed{x(t) = \left(-\frac{mg}{k} - \frac{k_2 h}{k}\right)\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{mg}{k} + \frac{k_2 h}{k}}$$

c) $T_{1/2} = \frac{\pi}{\omega}$, le bloc sera au + bas.

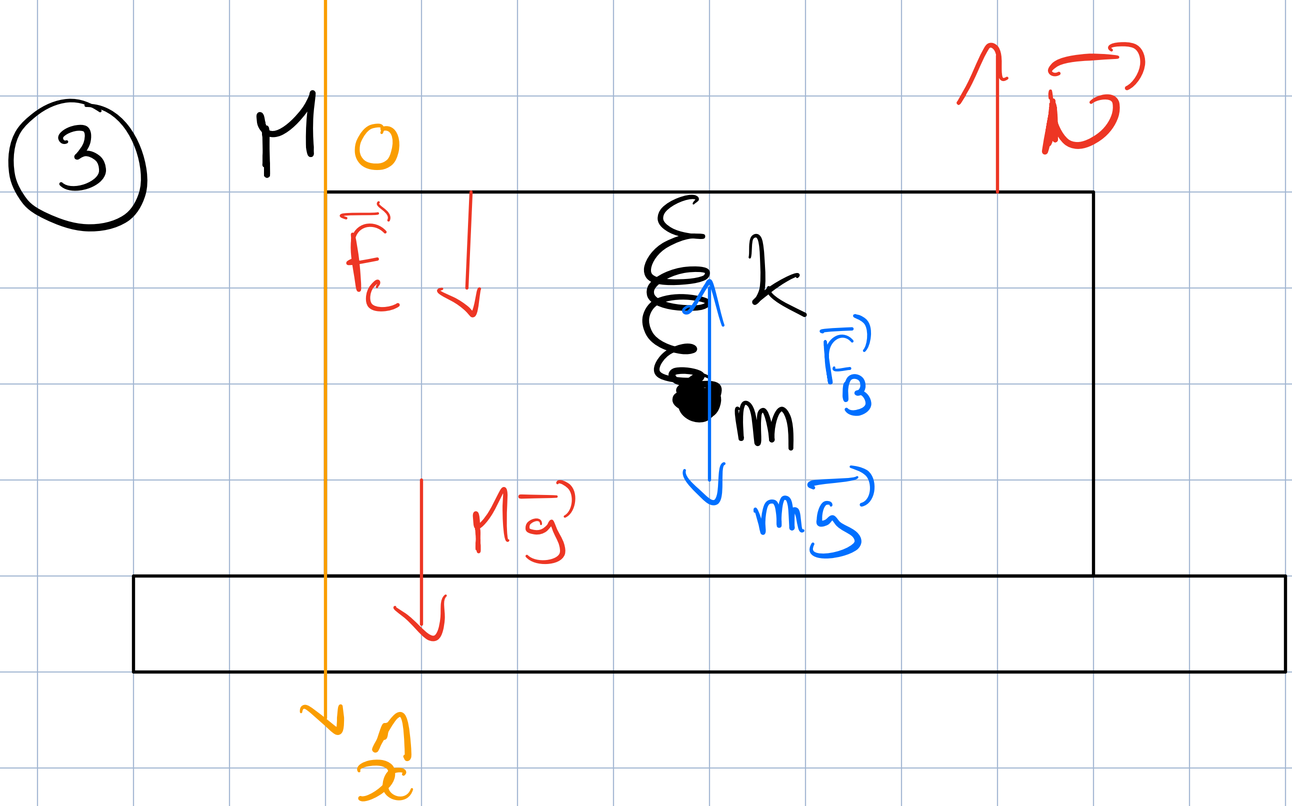
$$x(T_{1/2}) = x\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$$

$$= \left(\frac{mg}{k} + \frac{k_2 h}{k}\right) + \frac{mg}{k} + \frac{k_2 h}{k}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2}\right)$$

$$= \underline{3\,m}$$

③



On étudie la caisse :

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}$$

$$= M\vec{g} + \vec{F_c} + \vec{N}$$

On projette sur $\hat{x}$:

$$m\ddot{x} = Mg + F_c - N$$

On étudie la bille :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$= m\vec{g} + \vec{F_B}$$

$$= m\vec{g} - k(x - l_0)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = Mg + k(x - l_0) - N$$

$$(\text{car } F_c = -F_B).$$

On veut que la boîte décolle, donc que N soit nulle.

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow Mg + k(x - l_0) = N$$

$$N \leq 0 \Rightarrow Mg + k(x_{min} - l_0) \leq 0$$

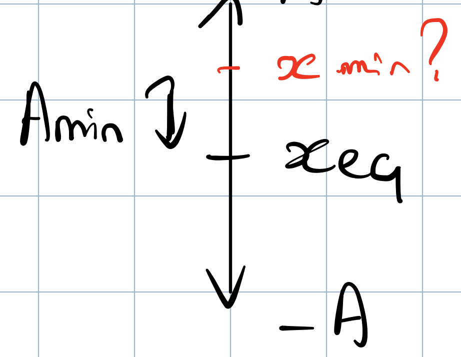
$$\Leftrightarrow Mg + kx_{min} - kl_0 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow kx_{min} \leq kl_0 - Mg.$$

$$\Leftrightarrow x_{min} \leq \frac{kl_0 - Mg}{k}$$

il faut que x arrive à être plus petit que cette valeur (en gros quand il sera à cette hauteur, c'est que la boîte pourra décoller).

On sait que



On veut $A \geq x_{eq} - x_{min}$

or on sait que :

$$m\ddot{x} = mg - kx + kl_0$$

et $m\ddot{x}_{eq} = 0 = mg - kx_{eq} + kl_0$

$$\Leftrightarrow kx_{eq} = mg + kl_0$$

$$\Leftrightarrow x_{eq} = \frac{mg}{k} + l_0.$$

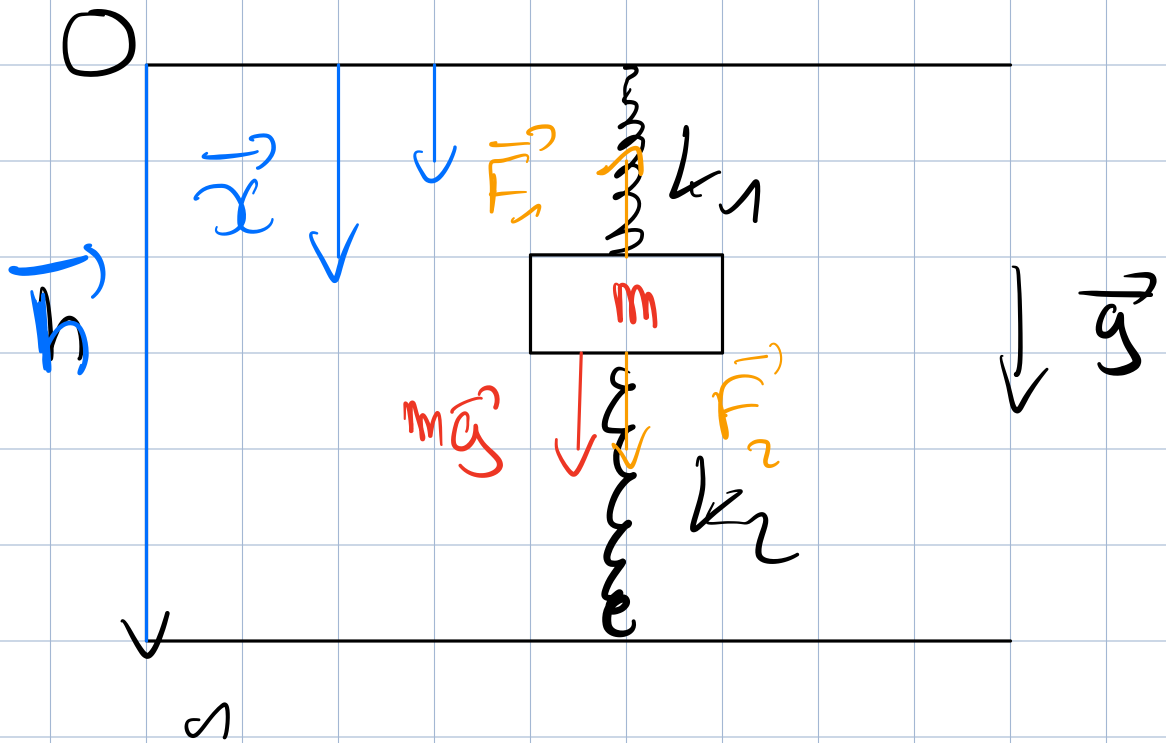
$$\Rightarrow x_{min} \geq x_{eq} - A$$

$$\Rightarrow x_{eq} - A \leq \frac{kl_0 - Mg}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{mg}{k} + l_0 - A \leq l_0 - \frac{Mg}{k}$$

$$\Leftrightarrow -A \leq \frac{(-M - m)g}{k}$$

$$\Leftrightarrow A \geq (M+m)g/k.$$



longueur actuelle $= h - x$

naturelle $= 0$.

$h = 3m$

$x = 1m$

$h - x = 2m$