Fonct°

$$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathcal{D} \neq 0$$

Par convent°, $\mathcal{D}$ plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel expr de f est définie.

Fonct° polynômes

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Fonctions rationelles

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$ p, q fonct° polynômes

$$\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{x \mid q(x) = 0\}}_{\text{au max degré de } q}.$$

Fonctions algébriques

fonct° construites à partir de fonct° polynômes
et un nb fini d'opérations
$+, -, \cdot, /, \sqrt[n]{}$

Fonctions transcendantes

le reste

ex : e^x, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$...

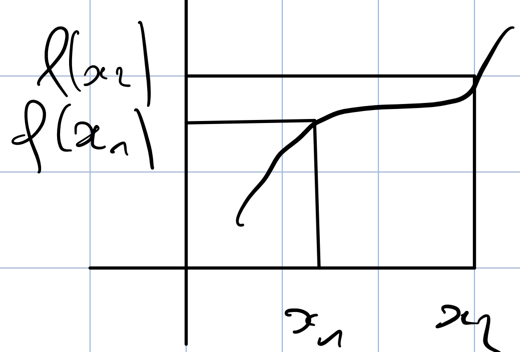
On pose $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$.

croissante : $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ croissante sur $\mathcal{D}$

$$\forall x_1, x_2 \quad (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$$

strict. croiss.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



(strictement) monotone si (strict.) croissante ou (strict.) décroissante.

Critère : une fonct° strictement monotone est injective.

Démo

$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}$

$$(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$
$$\text{ou } f(x_1) > f(x_2))$$
$$\text{donc } f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Déf

un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}$ est symétrique par rapp à 0

$$\forall x \in X, \; -x \in X$$

sinh
cosh

Remarque soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{D}$ sym.

$$f = f_+ + f_-$$

f_+ paire $\qquad$ f_- impaire

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$$ partie paire

$$f_{-}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$$

$$\frac{1}{2} f(x) + \cancel{\frac{1}{2} f(-x)} + \frac{1}{2} f(x)$$

$$- \cancel{\frac{1}{2}\left(f(-x)\right)}$$

$$= f(x)$$

Fonct° avc parité

Soient p, p_1, p_2 f paires

i, i_1, i_2 f impaires

déf sur $\mathcal{D}$

$f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$

$p_1 + p_2$ est paire $\qquad$ $p \cdot i$ impaire

$p_1 \cdot p_2$ est paire

$i_1 + i_2$ impaire

$i_1 \cdot i_2$ paire

$$(i_1 \cdot i_2)(x)$$

$$= i_1(x) \cdot i_2(x)$$
$$= -i_1(-x) \cdot -i_2(-x)$$
$$= i_1(-x) \cdot i_2(-x)$$
$$= (i_1 \cdot i_2)(-x)$$

$$i_1(x) = -i_1(-x)$$
$$i_2(x) = -i_2(-x)$$

$$(p_1 + p_2)(x)$$

$$= p_1(x) + p_2(x)$$

$$= p_1(-x) + p_2(-x)$$

$$= (p_1 + p_2)(-x)$$

$$p_1 \cdot i_1(x)$$

$$= p_1(x) \cdot i_1(x)$$

$$= p_1(-x) \cdot (-i_1)(-x)$$

$$= -(p_1 \cdot i_1)(-x)$$

$$(i_1 \circ p_1)(x)$$

$$= i_1(p_1(x))$$

$$= i_1(p_1(-x))$$

$$= -i_1(-p_1(-x))$$

$$= (i - p_1)(x)$$

$$
\begin{aligned}
(p_1 \circ i_1)(x) &= p_1(i_1(x)) \\
&= p_1(-i_1(-x)) \\
&= p_1(i_1(-x)) \\
&= (p_1 \circ i_1)(-x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f \circ p_1)(x) &= f(p(x)) \\
&= f(p(-x)) \\
&= (f \circ p)(-x)
\end{aligned}
$$

$$(i_1 \circ i_2)(x)$$

$$= i_1(i_2(x))$$

$$= -i_1(-i_2(x))$$

$$= -i_1(-(-i_2(-x)))$$

$$= i_1(-i_2(-x))$$

$$= -(i_1 \circ i_2)(-x)$$

$$\boxed{-2x-3}$$

$$2x+3$$

$$-x^2$$

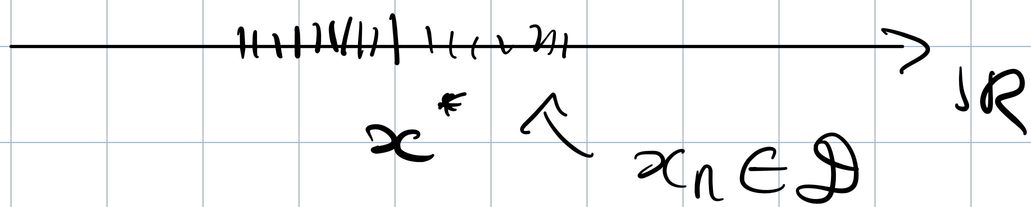
$$+x^2$$

$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{D} \subset \mathbb{R}, \mathcal{D} \neq \emptyset$

x_n, $\forall n \; (x_n \in \mathcal{D})$

x_n converge

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^* \in \mathbb{R}$$



<u>Rem</u> x^* n'est pas forcément dans $\mathcal{D}$.

Ex $\quad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$

$$x_n = \frac{1}{n} \in \mathcal{D}, \; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0 \notin \mathcal{D}.$$

<u>Question</u> <u>wab</u>. $y_n = f(x_n)$