Problem 12.1

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 10 \end{pmatrix} \cdot 12 \quad +$$

$12 \cdot 3$
$= 36$
$= [10]_{13}$

13
26
39
52

$12 \cdot 4$
$= 49$
$= [9]_{13}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 10 & 4 \\ 0 & 12 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 10 \end{pmatrix} \qquad 12 \cdot 2 = 11$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 10 \end{pmatrix} + \qquad 11 + 10 = 21$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} - \qquad 4 - 10 - 6 = 7$$

$$-2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

②

$$H = \left(\begin{array}{ccc|cc} -8 & -7 & -12 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 8 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \checkmark$$

③

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

↳ impossible d'éteindre complètement une ligne

~~test all codewords~~

$$d_{min} - 1 \leq n - k$$

$$2 \leq 5 - 3$$

$\Rightarrow$ juste, c'est un MDS

4 1 a

39
52

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 8 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1×5 $\qquad$ 5×2

$$\begin{pmatrix} 0, 7, 11, 12, 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot 6 - 2 - 1 \\ 4 - 2 \cdot 7 + 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \;{=39} \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$(8, 12, 11, 12, 10) \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{1}{\widetilde{8 \cdot 5}} \; \overset{-9}{\widetilde{-6-2}} -1 \\ 8 \cdot 10 - 8 - 2 \cdot 7 + 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \cdot 8 - 8 - 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -24 - 12 = -36 = 3 \end{pmatrix}$$

ⓒ y_3

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 12 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot 6 + 8 + 12 \\ 7 \cdot 8 + 8 \cdot 7 + 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 8 - 1 \\ 4 + 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ⓑ

on choisit une position

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ on enlève le zéro

(c) non, pas le zéro

(d) $\mathcal{E}_1 \to \mathbb{F}_{13}^2$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5a \\ 10a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} H^T = \begin{pmatrix} 6a \\ 8a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

etc...

donc on peut obtenir $\begin{pmatrix} 5a & 6a & 1a & a & 0 \\ 10a & 8a & 7a & 0 & a \end{pmatrix}$

maintenant la Question c'est peut-on

obtenir deux résultats identiques
gene

$$\begin{pmatrix} 5a \\ 10a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot \overset{\rightarrow b}{2a} \\ 8 \cdot 2a \end{pmatrix} ?$$

Pr ça on check
PAIRWISE

$$\begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \neq k' ($$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

si on a weight 2, plus injective

↓

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

7 6 5

car on peut faire des combin. linéaires de 2 pour former 3

(e) A chaque $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3

$\underbrace{(a\ 0\ 0\ 0\ 0)}_{\text{5 positions possibles}}$

$\Rightarrow$ 5 entrées indépendantes (on l'a montré dans la question précédente)

qu'on peut multiplier par un scalaire

$12 \cdot 5$ ✓

(f) même cardinalité entre l'antécédent et l'image ✓

(9) $\vec{s} = (\vec{e} + \vec{x}) H^T$

$= \vec{e} H^T + \underbrace{\vec{x} H^T}_{\text{0 car un valide codeword}}$

$= \vec{e} H^T$

(h) $\vec{s} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\vec{y} H^T = \vec{s}$$

$$H \vec{y}^T =$$

$$\begin{pmatrix} a & b+\Delta & c & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5a + 6(b+\Delta) + c + d \\ 10a + 8(b+\Delta) + 7c + e \end{pmatrix}$$

$$= \quad 5a$$

$$\vec{s} \longrightarrow \vec{e} H^T$$

$(0\ 1\ 0\ 0\ 0)$

$$f^{-1}(\vec{s}) = \vec{e}$$

pour retrouver la magnitude

$\frac{x_1}{x_2} = \omega$

$\vec{s}_y = \vec{0}$ $\quad \vec{s}_e = \begin{pmatrix} [5]^{-1} 5 & \lambda \\ [10]^{-1} 10 & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}^2$

1 des

60

$$\left(\vec{y} + \overset{\vec{e}}{(0 \ldots \lambda \ldots 0)}\right) \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \end{matrix} =$$

$\begin{matrix} \cdot 5 \lambda \\ \cdot 10 \lambda \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} \cdot 6 \lambda \\ \cdot 8 \lambda \end{matrix}$

on trouve le "ratio"

$\frac{5}{10}$ on fait $5 \cdot [i.mde\ 10]$

$\begin{pmatrix} \cdot 5 & \lambda \\ 10 & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\circ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{5}{10} = 5 \cdot 10^{-1}$

11

$5 \cdot 4 =$

$= 20 = 7$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \lambda \qquad \frac{x_1}{x_2} \qquad \frac{10}{7}$

i

$$\left(\vec{y} + \left(0 \ldots \lambda_1 \lambda_2 0\right) \right) \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}$

$$\begin{pmatrix} 5\lambda_1 + \lambda_2 \\ 10\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 6$

$\lambda_2 = 4$

$4 \cdot 10x = 8$

$x = 4 \cdot 8 = 32 = [6]$

$6 \cdot 5 = (4]$

$$\begin{pmatrix} 4 + 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \checkmark$$

122

① ⓐ

$$\begin{pmatrix} -P \\ I_{n-k} \end{pmatrix}$$

pas forcément (car range)

$$\left[\ \overbrace{\cancel{I_k} \;\Big|\; \cancel{P_{n_1-k}}}^{d_1} \;\Big|\; \overbrace{I_k \;\Big|\; P'_{n_2-k}}^{d_2}\ \right]$$

on concatène les deux

condition : lignes lin. indépendantes

✓ (à cause des identité)

ⓑ $d_1 + d_2$

② ⓐ

pas forcement, on peut trouver un code de cette forme en bijection avec G

$$\left[\begin{array}{c|c} \cancel{I_{k_1} \mid P_{n_1-k_1}} \; G_1 & 000 \\ & G_2 \\ 000 & \cancel{I_{k_2} \mid P'_{n_2-k_2}} \end{array}\right]$$

aussi lin indep (de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

(b) $d_{min} = \min(d_1, d_2)$

si on choisit $(\ldots, 000)$ on a d_1

sinon $(000, \ldots)$ on a d_2

Problem 12.3

(1) Si ce n'était pas le cas, alors deux codes auraient la même erreur

$$H = \begin{array}{cc} k & n-k \\ \left(-P^T \right. & \left. I_{n-k} \right) \end{array}$$

$1 \times n$

$\vec{y}$

lin indep

n-k indep

$$d_{min} - 1 \leq n - k$$

Supposons qu'un subset de taille

col de H

$d_{min}-1$ est lin dep

H^T

→

a 2a

b 2a

$$(c\ d)\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$$

$ca + d2a$

$cb + 2bd$

$c = -2d$

lin indep

$$\Big(\overbrace{-P^T}^{k}\ \overbrace{I_{n-k}}^{n-k}\Big)$$

$\boxed{\text{rang } n-k}$

(slide 736)

il vient des lignes de A, d'une matrice generatrice dont les lignes sont indep donc P^T col indep

$$d_{min} - 1 \leq n-k$$

Suppose there is a code x d_m
and columns lin. indep.

voir la correct°

c'est impossible d'avoir
un code avec un poids $d_{min} - 1$,
si 2 codes diff ont au min
d_{min} de
diff !

Problem 12.4

①

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = G$$

② $H = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$d_{min} = 3$

$(1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0)$

④ 1 0 1 0

$x_1 = 1$

$x_2 = 0$

$x_3 = ?\ 0$

$x_4 = 1$

$$x_5 = 1 = \overset{0}{x_2} + \overset{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = 1$$

$x_6 = 1+$

(5)

$c_1 = 1$

$c_2 = \cancel{0}\ 1$

$c_3 = 1$

$c_4 = 0 = x_1 + x_2$

$c_5 = 0 = x_2 + x_3$

$c_6 = 1 = x_1 + x_2 + x_3$

$c_1 = 1$
$c_2 = 0$
$c_3 = 1$

$c_4 = 1 = x_1 + x_2$
$c_5 = 1 = x_2 + x_3$
$c_6 = 0 = x_1 + x_2 + x_3$

$$(101001)\left(H^T\right) = \underbrace{(111)}$$

3 parity bits modifié

$\Rightarrow x_2$ modifié

$$(101111)\, H^T = (001)$$

seulement 1

moelfré