Exercice 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(i) $Df((0,0), \bar{e})$

$$= \langle \nabla f(0,0), (\cos\varphi, \sin\varphi) \rangle$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0 + t\cos\varphi, 0 + t\sin\varphi) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cos^2\varphi \, t \sin\varphi}{t^3}$$

$$= \cos^2\varphi \sin\varphi$$

ii

$$\lim_{(x,y)\to(0,1/t)} f(x,y) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1/t,1/t)} f(x,y) = +\infty$$

non dérivable.

on choisit $\ell = 0$, on obtient $\vec{k} = (1,0)$

$$\frac{\delta f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$f(x,y) = f(0,0) + L_{(0,0)}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + r(x,y)$$

$= r(x,y) \longrightarrow$ doit rendre vers 0 par cons-able

$$\lim_{(x,y)\to(0,1/t)} \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1/t,1/t)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \frac{1/t^3}{\left(\frac{\sqrt{2}}{t}\right)\left(\frac{2}{t^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \; !$$

$$\frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} \neq 0 \quad \text{qd } (x,y)\to 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2xy)(x^2+y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2)(x^2+y^2) - x^2y(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 + x^2y^2 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Exercice 2

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tu, tv) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{tu\, t^2 v^2}{t^2 u^2 + t^4 v^4} \frac{1}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{uv^2}{u^2 + t^2 v^4}$$

$$= \frac{uv^2}{u^2} = \frac{v^2}{u} \quad \text{si } u \neq 0$$

sinon 0

Exercice 3

(i)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(1+\frac{2}{3}t, -1-\frac{1}{3}t, 2+\frac{2}{3}t) - f(1,-1,2)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{(1+\frac{2}{3}t)(-1-\frac{1}{3}t)(2+\frac{2}{3}t) + 2}{t} \right]$$

$\Rightarrow$ calculer le gradient est plus rapide

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y,z) = xy$$

$$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$$

$$D_f((1,-1,2),\vec{v})$$

$$= \langle \nabla f(1,-1,2), \vec{v} \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-4-2-2)$$

$$= \frac{-8}{3}.$$

ii

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= -2\sin\theta\cos\varphi + 2\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta$$

we are looking for the max $\Rightarrow$ need derivative

iii) $$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 2\sin\theta\sin\varphi + 2\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -2\cos\theta\cos\varphi + 2\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta \partial \varphi} = 2\cos\theta\sin\varphi + 2\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta \;) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi \partial \theta} = 2\cos\theta\sin\varphi + 2\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta = 2\cos\theta(\sin\varphi + \cos\varphi) - \sin\theta$$

la pente est maximale dans
la direction du gradient et égale à
la norme du gradient

la pente est minimale dans
la direction opposée au gradient
la norme du

$$\nabla f(1,-1,2)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

on cherche la direction du gradient :

$$\frac{\nabla f(1,-1,2)}{\|\nabla f(1,-1,2)\|}$$

$$= \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$$

$$-2\sin\theta\cos\varphi + 2\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \arccos(-1/3)}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\varphi = \frac{-2}{3}$$

$$= \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \varphi = \frac{3\pi}{4} \\ \varphi = \frac{5\pi}{4} \end{array}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \sin\varphi = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \varphi = \frac{3\pi}{4} \\ \varphi \quad \frac{\pi}{4} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

pour la perte maximale on veut

$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

// minimale on veut

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\varphi = \frac{7\pi}{4}$$

Exercice 4

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & , (x,y) \neq 0 \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) + xy\left(\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) + xy\left(\frac{2xy^2+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$+ \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$+ xy\left(\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$+ xy\left(\frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0, 0+t) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-t^2}{t^2} \cdot \frac{1}{t} = 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$\boxed{\text{Ok}}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{-t^3}{t^2} = -1$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} \quad \nexists$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{t^3}{t^2} = 1$$

$\nexists \Rightarrow$ pas continue donc pas de classe C^2

Exercice 5

$$J_{f \circ g}(\bar{a}) = J\bar{f}(\bar{g}(\bar{a})) \cdot J\bar{g}(\bar{a})$$

$$Jf(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\cos(2x)$

(i) $$\left[e^{\ln(\ln(t))\cdot\sin(t)}\right]'$$

$$= \left[\ln(\ln(t))\cdot\sin(t)\right]' \underbrace{e^{\ln(\ln(t))\cdot\sin(t)}}_{=g}$$

$$= \left(\left[\ln(\ln(t))\right]'\sin(t) + \ln(\ln(t))\cos(t)\right)g$$

$$= \left(\frac{1}{\ln(t)}\cdot\frac{1}{t}\cdot\sin(t) + \ln(\ln(t))\cos(t)\right)g$$

$$h(a) = (\ln(t), \sin(t))$$

ii

$$J_{g\circ h}(\bar{a}) = J_{\bar{g}}(\bar{h}(\bar{a})) \cdot J_{\bar{h}}(\bar{a})$$

$$J_{\bar{h}}(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ \cos(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \ln(t) \\ \sin(t) \end{matrix}$$

$$\left(e^{\ln(x) y}\right)'$$

$$J_{\bar{g}}(\bar{x}) = \left(\frac{y}{x} x^{y}, \ \ln(x)\, x^{y} \right)$$

$$J_{\bar{g}}(\bar{h}(t)) = \left(\frac{\sin(t)}{\ln(t)} \ln(t)^{\sin(t)}, \ \ln(\ln(t)) \ln(t)^{\sin(t)} \right)$$

$$\left(\frac{\sin(t)}{\ln(t)} \ln(t)^{\sin(t)}, \ \ln(\ln(t)) \ln(t)^{\sin(t)} \right) \begin{pmatrix} 1/t \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sin(t)}{\ln(t)t} \ln(t)^{\sin(t)-1} + \ln(\ln(t)) \ln(t)^{\sin(t)} \cos(t)$$

Exercice 6

①

Initialisation

$n = 2$ $\{1\}$ ok

Hérédité

$P(n)$ vrai

le nombre de tt les suites jusqu'à n, incrémentées d'un 1

+ le nombre de tt les suites jusqu'à $n-2$, incrémentées d'un 2

$\Rightarrow P(n+1)$ vrai

<u>Conclusion</u>

$P(n)$ vraie $\forall\, n \geqslant 2 \in \mathbb{N}^*$
par récurrence

(ii) <u>Initialisation</u>

$P(1) = 2^0 = 1$

<u>Hérédité</u>

On suppose que $P(n)$ est vraie
On veut prouver $P(n+1)$.

$n+1 = 2^{k_0} + 2^{k_1} + \dots + 2^{k_n} + 2^0$

Si $k_0 = 0$, alors on peut combiner les deux 2^0 et 2^{k_0} en 2^1.
Si $k_1 = 1$, alors ....
etc.

Comme p est fini, $P(n+1)$ vrai

<u>Conclusion</u>

$P(n)$ vraie $\forall\, n \geq 1 \in \mathbb{N}^*$
par récurrence

Exercice 7

(i) ~ dépend de si on pose $\left| \begin{array}{l} P(1) \\ P(2) \\ P(3) \end{array} \right.$

(ii) ✗

(iii) ✓

(iv) ~ dépend de si on pose $P(69)$

(v) ~ dépend des conditions initiales

(vi) ~ $P(6)$ peut être faux et $P(18)$ vraie

$$J_f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

h prend une seule variable $\to \mathbb{R}^2$

donc $J_h(t) = \begin{pmatrix} h_1'(t) \\ h_2'(t) \end{pmatrix}$ 2×1

g prend deux variables $\to \mathbb{R}$

$$J_g(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad 1 \times 2$$

$\Rightarrow$ produit compatible