Démonstrations Analyse II

Laura Paraboschi et Simon Lefort

Enoncés et démonstrations des théorèmes à l'examen d'analyse II (Printemps 2024).

Merci à Naïl Laraqui pour la relecture et la correction d'erreurs dans le document.

Contents

1 Méthodes de démonstration

1.1 Méthode : directe

$\text{P}_{\text{conditions données}} \implies$ Implications logiques, axiomes, propositions connues $\implies \text{Q}_{\text{proposition désirée}}$

1.2 Méthode : par contraposée

$\text{P} \implies \text{Q} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{non Q} \implies \text{non P} \qquad \Leftrightarrow \qquad \neg\, \text{Q} \implies \neg\, \text{P}$

1.3 Méthode : par disjonction de cas

Soient P, Q deux propositions. Pour montrer que $P \implies Q$ on séparer l'hypothèse P de départ en différents cas possibles et on montre pour chacun des cas que $P_i \implies Q$. **Il est important de considérer tous les cas possibles**.

Exemple 1 Pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, on a :

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

1. $|\mathbf{x}| \geq |\mathbf{y}| \implies ||x| - |y|| = |x| - |y| = |x - y + y| - |y| \leq |x - y| + |y| - |y| = |x - y|$
2. $|\mathbf{x}| < |\mathbf{y}| \implies ||x| - |y|| = -|x| + |y| = -|x| + |y - x + x| \leq -|x| + |y - x| + |x| = |y - x|$

1.4 Méthode : par l'absurde

Pour démontrer P, on essaie de démontrer que ¬P implique une proposition F qui est connue d'être fausse. (Donc ¬ P $\implies$ F qui est contradictoire aux axiomes, ou au propositions vraies préalablement établies)

1.5 Méthode : montrer une double implication

Pour montrer P $\iff$ Q il y a 2 méthodes

1. P $\implies$ Q **et** Q $\implies$ P
2. Suite d'équivalences : $P \iff R_1 \iff R_2 \iff ... \iff Q$. **Il faudra vérifier que chaque implication est une équivalence**

1.6 Méthode : par le principe des tiroirs

Le pigeonhole principle vu en AICC I. Si $n + 1$ objets sont placés dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contient 2 objets ou plus.

Plus généralement : si n objets sont placés dans k tiroirs, alors au moins un tiroir contient $\lceil \frac{n}{k} \rceil = min(m \in \mathbb{N} : m \geq \frac{n}{k})$ objets ou plus.

1.7 Méthode : par récurrence

Le principe fondamental de récurrence. Soit S $\subset \mathbb{N}$ sous-ensemble : $0 \in S$, et pour tout $n \in S$ on a $(n + 1) \in S$. Alors $S = \mathbb{N}$.

La méthode de récurrence : Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$.
Supposons que:

- $P(n_0)$ est vraie
- $P(n)$ implique $P(n + 1)$ pour tout $n \geq n_0$ naturel.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

1.7.1 La méthode de récurrence généralisée

: Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$:
Supposons que:

- $P(n_0), .., P(n_0 + k)$ sont vraies pour un $k \in \mathbb{N}$
- $\{P(n), P(n+1), ..., P(n+k)\}$ impliquent $P(n+k+1)\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}$

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}$.

1.7.2 La méthode de récurrence forte

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N} : n \geq n_0$.
Supposons que

- $P(n_0)$ est vraie
- $\{P(n_0), P(n_0+1), ..., P(n)\}$ impliquent $P(n+1)\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}$

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$. (différence avec la récurrence généralisée : $P(n_0)$ implique déjà $P(n_0+1)$ alors que dans la généralisée on a besoin de démontrer $P(n_0)$ ET $P(n_0+1)$).

1.7.3 La méthode de récurrence par deux variables

Soit $P(n, m)$ une proposition, $n, m > 0$.

Méthode carré

- $P(0, 0)$ est vraie
- $P(n, 0) \implies P(n+1, 0) \forall n \geq 0$
- $\forall m, n\ P(n, m) \implies P(n, m+1)$

$\implies P(n, m)$ est vraie $\forall n, m \in N$.

Méthode diagonale

- $P(0, 0)$ est vraie
- $P(n, 0) \implies P(n+1, 0) \forall n \geq 0$
- $\forall m, n\ P(n+1, m) \implies P(n, m+1)$

$\implies P(n, m)$ est vraie $\forall n, m \in \mathbb{N}$

Méthode de deux directions

- $P(0, 0)$ est vraie
- $\forall m, n\ P(n, m) \implies P(n, m+1) \wedge P(n+1, m)$

$\implies P(n, m)$ est vraie $\forall n, m \in \mathbb{N}$

2 Existence (et unicité) d'une solution pour EDVS $f(y) \neq 0$

En résumé : si on a une équation pour laquelle on peut séparer les variables, il n'y a pas deux fonctions différentes qui la vérifient sur le même intervalle.
On utilise les intégrales de F et de G car elles nous permettent de tomber exactement sur la forme cherchée. Dans un premier temps, on montre que x est une solution de l'équation et dans un second temps on montre qu'elle vérifie les conditions initiales.

2.1 Enoncé

Soient :

- $f : I \to \mathbb{R}$ continue t.q. $\forall y \in I, f(y) \neq 0$ (condition nécessaire, sinon il peut ne pas exister de solution, ou plusieurs)
- $g : J \to \mathbb{R}$ continue
- et l'équation $f(y) \cdot y' = g(x)$ qui lie les deux

Alors (existence) :

$$\forall (b_0 \in I, x_0 \in J),\ \text{l'équation } f(y) \cdot y'(x) = g(x)$$

admet une unique solution telle que :

$$y : J' \subset J \to I \text{ et vérifiant } y(x_0) = b_0$$

De plus (unicité) :

$$\exists y_1 : J_1 \to I \text{ et } \exists y_2 : J_2 \to I \text{ vérifiant les conditions initiales } \implies y_1(x) = y_2(x), \forall x \in J_1 \cap J_2$$

2.2 Démonstration

Idée (esquisse de la démo)

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx \implies F(y) = G(x) \implies y(x) = F^{-1}(G(x))$$

Soit :

$$F(y(x)) = \int_{b_0}^{y(x)} f(t)dt \text{ pour avoir 0 quand une fonction } y \text{ donne } b_0.$$

$$\text{Alors F(y) est dérivable et monotone car } f(y) \text{ (continue) } = F'(y) \neq 0 \text{ sur } I$$

Donc F est bijective et inversible sur I.

Soit:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt \implies G \text{ dérivable sur } J \text{ et } G'(x) = g(x) \text{ et } G(x_0) = 0$$

Soit:

$$y(x) = F^{-1}(G(x)) \text{ dans un voisinage de } x_0 \text{ (c'est l'idée de la preuve de poser ça)}$$

On va montrer que $y(x)$ est une solution de l'équation $f(y) \cdot y'(x) = g(x)$ dans un voisinage de $x_0 \in J$, et de plus $y(x_0) = b_0$.
On a $F(y(x)) = G(x)$ dans un voisinage de $x_0 \in J$

$$\implies F'(y(x)) \cdot y'(x) = G'(x) \implies_{\text{par la def de } F'(x), G(x)} f(y) \cdot y'(x) = g(x)$$

De plus:

$$y(x_0) = F^{-1}(G(x_0)) =_{G(x_0)=0 \text{ par déf de } G(x)} F^{-1}(0) =_{F(b_0)=0 \text{ par def de F, F bijective}} = b_0$$
$$\implies y(x_0) = b_0$$

3 La solution générale d'une EDL1 est (particulière $+Ce^{-P(x)}$)

Pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 (de la forme $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$) :
On cherche une solution pour l'équation homogène associée (ici $Ce^{-P(x)}$).
On cherche une solution pour l'équation non homogène (ici $v_0(x)$).

Ce théorème affirme que la solution **générale** de l'équation non homogène est:
$v(x) =$ particulière $+$ homogène $= v_0(x) + Ce^{-P(x)}$.

3.1 Enoncé

Soient $p, f : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.
Supposons que $v_0 : I \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation $y'(x)+p(x)y(x) = f(x)$. Alors la solution générale de cette équation est donnée par :

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}, \forall C \in \mathbb{R}$$

où $P(x)$ est **UNE** primitive de $p(x)$ sur I (sans constante).

3.2 Démonstration

Soit $v_0(x)$ une solution particulière de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$.
Soit $v_1(x)$ une solution arbitraire de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$.
On va démontrer que:

$$\exists C \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } v_1(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : v_1(x) - v_0(x) = Ce^{-P(x)}$$

Par le principe de superposition des solutions, la fonction $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation homogène associée*.

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0 \text{ est une EDVS}$$

$$\implies \text{ la solution générale de cette équation est donnée par } v(x) = Ce^{-P(x)}$$

$$\text{où } C \in \mathbb{R} \text{ et } P(x) \text{ est une primitive de } p(x) \text{ sur } I$$

(on a trouvé ce résultat avec une méthode heuristique (**Ansatz**), pas d'algorithme ou de méthode pour être certain que le résultat marche sans tester).

Alors il existe une valeur de $C \in \mathbb{R}$ telle que $v_1(x) - v_0(x) = Ce^{-P(x)}$. Puisque $v_1(x)$ était une solution arbitraire, on obtient que l'ensemble des solutions de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est de la forme $v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$.
Donc par la définiton $v(x)$ est la solution **GENERALE**.

***Preuve (non demandée):** si $v_0(x)$ et $v_1(x)$ sont des solutions alors:

- $v_0'(x) + p(x)v_0(x) = f(x)$
- $v_1'(x) + p(x)v_1(x) = f(x)$
- et $v_1(x) - v_0(x)$
  $= v_1'(x) + p(x)v_1(x) - v_0'(x) - p(x)v_0(x) = f(x) - f(x) = 0$
  $\Leftrightarrow v_1'(x) - v_0'(x) + p(x)(v_1(x) - v_0(x)) = 0$

Donc $v_1(x) - v_0(x)$ est bien une solution de l'équation homogène associée.

4 Wronskien non nul $\Leftrightarrow v_1(x), v_2(x)$ lin. indép.

4.1 Définition

Soit $v_1, v_2 : I \to R$ deux fonctions dérivables sur $I \subset R$.
La fonction $\mathbb{W}(v_1, v_2) : I \to R$ définie par :

$$\mathbb{W}(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$$

est appelée le **Wronskien** de v_1 et v_2.

4.2 Enoncé

Soient $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation homogène : $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$.
Alors :

$$v_1(x) \text{ et } v_2(x) \text{ sont linéairement indépendantes (P) } \Leftrightarrow \mathbb{W}(v_1, v_2) \neq 0, \ \forall x \in I \text{ (Q)}$$

4.3 Démonstration

4.3.1 $\neg P \implies \neg Q$

Les solutions sont linéairement dépendantes
$\implies$ sans perte de généralité, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v_2(x) = c \cdot v_1(x)$ $\forall x \in I$.
Alors on a :

$$W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & c \cdot v_1(x) \\ v_1'(x) & c \cdot v_1'(x) \end{pmatrix} = c \cdot v_1(x)v_1'(x) - c \cdot v_1(x)v_1'(x) = 0, \ \forall x \in I$$

4.3.2 $\neg Q \implies \neg P$

Supposons qu'il existe un $x_0 \in I : W[v_1, v_2](x_0) = 0$

$$\implies \det \begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0 \implies \text{ il existe un vecteur non nul } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que :}$$

$$\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} av_1(x_0) + bv_2(x_0) = 0 \\ av_1'(x_0) + bv_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Soit $v(x) = av_1(x) + bv_2(x)$.
Alors $v(x)$ est aussi une solution de l'EDL2 homogène et de plus $v(x_0) = 0$ et $v'(x_0) = 0$.

Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution de l'EDL2 homogène satisfaisant les conditions initiales $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$ et comme la solution triviale $y(x) = 0$ $\forall x \in I$ satisfaisait l'équation et ces mêmes conditions initiales $\implies$ $v(x) = a \cdot v_1(x) + b \cdot v_2(x) = y(x) = 0$ $\forall x \in I$.

Ainsi, puisque a et b ne sont pas tous les deux nuls:

$$\implies \begin{cases} v_1(x) = -\frac{b}{a} v_2(x) \ \forall x \in I \\ v_2(x) = -\frac{a}{b} v_1(x) \ \forall x \in I \end{cases}$$

Donc v_1 et v_2 sont linéairement dépendantes.

5 La solution générale d'une EDL2 est C_1(lin. indép. 1) + C_2(lin. indép. 2)

5.1 Enoncé

Soient $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$. Alors la solution générale de cette équation est de la forme :

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

5.2 Démonstration

Soit $\tilde{v}(x)$ une solution de l'équation donnée. Soit $x_0 \in I$. Alors $\tilde{v}(x_0) = a_0 \in \mathbb{R}$ et $\tilde{v}'(x_0) = b_0 \in \mathbb{R}$.

Soient deux solutions de l'équation linéairement indépendantes $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$.
Alors en particulier on sait que:

$$\mathbb{W}[v_1, v_2](x) \neq 0\ \forall x \in I \implies \mathbb{W}[v_1, v_2](x_0) \neq 0$$

Comme le Wronskien est non-nul (notamment en x_0), alors la matrice associée au Wronskien est inversible (donc injective), donc uniques constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ t.q :

$$\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 v_1(x_0) + c_2 v_2(x_0) = a_0 \\ c_1 v_1'(x_0) + c_2 v_2'(x_0) = b_0 \end{cases}$$

Considérons la fonction $v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$. Alors :

- $v(x)$ est une solution de l'équation, puisque $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont des solutions (superposition des solutions pour une équation homogène)
- $v(x_0) = a_0$, $v'(x_0) = b_0$

Par le théorème de l'existence et l'unicité de solutions de l'EDL2 homogène satisfaisant les conditions initiales données $v(x_0) = a_0, v'(x_0) = b_0$. On a :

$$\tilde{v}(x) = v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) \forall x \in I$$

6 Sous-ensemble E fermé ⇔ tt suite de E qui converge a pour lim. un él. de E

(Cours 8)

On va montrer que si la limite n'appartient pas à E fermé alors il existe une boule de rayon δ autour de la valeur de la limite de la suite telle qu'elle n'intersecte pas avec E (car CE est ouvert), donc avec l'ensemble des valeurs de la suite (qui elles sont dans E). Sauf... que par la définition de la limite il **va** y avoir un moment où les termes de la suite auront comme distance entre eux plus petite que δ (par exemple elle vaut $\frac{\delta}{2}$). Donc l'intersection n'est pas nulle.

Ensuite, on veut montrer que si E n'est pas fermé (mais pas nécessairement ouvert) alors il existe une suite dont la limite est en dehors de E.

6.1 Enoncé

Un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé (P) ⇔ toute suite $x_k \in E$ qui converge a pour limite un élément de E (Q).

6.2 Démonstration

6.2.1 sens direct (par l'absurde) $P \wedge \neg Q$

Soit $\lim_{k\to\infty} \bar{x_k} = \bar{x}$ et $\bar{x_k} \in E \ \forall k \in \mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que $\bar{x} \notin E$ et que E est fermé.

$$\implies \bar{x} \in CE \text{ où } CE \text{ est ouvert dans } \mathbb{R}^n$$

$$\implies \exists \delta > 0 : \mathbf{B}(\bar{x}, \delta) \subset CE \text{ et donc } \{\bar{x_k} \ \forall k \in \mathbb{N}\} \cap B(\bar{x}, \delta) = \emptyset$$

D'un autre côté :

$$\lim_{k\to\infty} \bar{x_k} = \bar{x} \implies \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q } \forall k \in \mathbb{N} \geq k_0, \bar{x_k} \in \overline{B(\overline{x}, \delta/2)} \subset B(\bar{x}, \delta)$$

Absurde. Alors $P \implies Q$.

6.2.2 sens inverse (par contraposée) $\neg P \implies \neg Q$

Supposons que E n'est pas fermé. Alors CE n'est pas ouvert.

$$\implies \exists \bar{y} \in CE : \forall k \in \mathbb{N}_+ \ B(\bar{y}, 1/k) \cap E \neq \emptyset$$

$$\implies \exists \bar{y_k} \in B(\bar{y}, 1/k) \text{ tel que } \bar{y_k} \in E$$

$$\text{on a obtenu une suite } \{\bar{y_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E \text{ et } \lim_{k\to\infty} \bar{y_k} = \bar{y} \in CE \Leftrightarrow \bar{y} \notin E. \implies \neg Q$$

Alors $Q \implies P$.

7 Caractérisation de la limite à partir des suites convergentes

(Cours 9)

Dans un premier temps, on écrit la définition de la limite d'une fonction à plusieurs variables (elle ressemble à celle d'analyse I, mais ici on pose que pour n'importe quel point $\overline{x}$ proche d'une distance δ du point de calcul de la limite (on regarde la norme, et non l'index de l'élément comme en Analyse 1), alors la valeur de f en ce point est d'une distance inférieure à ϵ de la valeur de la limite).
Ensuite on montre que si on prend une suite a_k qui converge vers le point considéré pour la limite de f, alors au bout d'un moment ses termes seront tous proches d'une distance inférieure à δ de ce point de calcul de la limite donc si on évalue f en ce point on obtiendra bien une valeur d'une distance inférieure à ϵ de la valeur de la limite.

Dans un second temps on montre qu'on peut trouver une suite qui se rapproche infiniment du point de calcul de la limite de f mais telle que f évaluée en ces points ne converge pas vers la limite de f (elle reste supérieure à un delta). On prend la suite t.q la différence entre x_0 et l'élément de la suite est de $\frac{1}{k}$.

7.1 Enoncé

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\bar{x_0}$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $\bar{x} \to \bar{x_0}$ (P)
$\Leftrightarrow$ pour toute suite d'éléments $\{\bar{a_k}\}$ de $\{\bar{x} \in E : \bar{x} \neq \bar{x_0}\}$ qui converge vers $\bar{x_0}$, la suite $\{f(\bar{a_k})\}$ converge vers l (Q).

7.2 Démonstration

7.2.1 P $\implies$ Q

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} f(\bar{x}) = l \implies \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \text{ t.q } 0 < ||\bar{x} - \bar{x_0}|| \leq \delta \implies |f(\bar{x}) - l| \leq \epsilon$$

Si on prend pour une suite arbitraire $\{\bar{a_k}\}$ t.q :

$$\lim_{k \to \infty} \bar{a_k} = \bar{x_0}$$

$$\begin{aligned} \implies \quad \text{pour ce même } \delta > 0 \ \exists k_0 : \forall k \geq k_0 \implies ||\bar{a_k} - \bar{x_0}|| \leq \delta \\ \implies |f(\bar{a_k}) - l| \leq \epsilon \\ \implies \lim_{k \to \infty} f(\bar{a_k}) = l \end{aligned}$$

7.2.2 $\neg$ P $\implies$ $\neg$ Q

Supposons que :

$$\lim_{x \to x_0} f(\bar{x}) \neq l \implies \exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists \bar{x_\delta} : ||\bar{x_\delta} - \bar{x_0}|| \leq \delta \text{ et } |f(\bar{x_\delta}) - l| > \epsilon$$

On peut choisir:

$$\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbf{N}^* \implies \exists \bar{x_k} \in E : ||\bar{x_k} - \bar{x_0}| \leq \frac{1}{k} \text{ et } |f(\bar{x_k}) - l| > \epsilon$$

On obtient la suite:

$$\{\bar{x_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \to \infty} \bar{x_k} = \bar{x_0} \text{ mais } |f(\bar{x_k}) - l| > \epsilon \forall k \in N^* \implies \lim_{k \to \infty} f(\bar{x_k}) \neq l$$

8 Maximum et minimum d'une fonction sur un compact

(Cours 10)

On veut montrer que si f est continue sur E alors il existe bien un $\overline{a}$ et un $\overline{b}$ dans E tels que $f(a) = \min f(E)$ et $f(b) = \max f(E)$ (en résumé, que le min et le max ne sont pas uniquement des limites non atteintes).

D'abord on veut montrer que f est bornée (sinon il n'y a pas de min ni de max). On suppose qu'elle ne l'est pas et on construit une suite telle que la valeur de f évaluée en x_k est supérieure à k (elle doit exister si f n'est pas bornée). Cette suite qui n'est composée que d'éléments de l'ensemble E (qui est compact donc borné), est forcément bornée. D'une suite bornée on peut toujours extraire une suite convergente qui tend vers un élément de cette suite, qu'on appelle x_0. Puisque f est continue, évaluer sa valeur en ce point ou au voisinage de ce dernier (par la limite) donne la même valeur. Seulement, nous utilisons le fait que f, par définition de la suite x_{k_p}, ne peut pas converger vers une valeur quand k_p tend vers l'infini or c'est la définition de la continuité. Donc f est bornée.

Maintenant on sait qu'il existe un sup et un inf aux valeurs de f dans E (mais on ne sait pas encore si elles sont **atteintes** pour un a, b dans E). L'idée c'est qu'on sait qu'on peut créer deux suites d'éléments de E convergentes t.q leur limite évaluée par f est le sup et l'inf de f dans E. Comme E est fermé, on sait que ces limites sont dans E. Donc f atteint son min et son max sur E.

8.1 Enoncé

Une fonction f **continue** sur un sous-ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^2$ atteint son maximum et son minimum.

8.2 Démonstration

8.2.1 $\{f(\bar{x})\}_{\bar{x}\in E}$ est bornée (démo par l'asburde)

Supposons que f n'est pas bornée sur E.

$$\implies \forall k \geq 0, \exists \bar{x_k} \in E \text{ t.q. } |f(\bar{x_k})| \geq k$$

Ceci nous donne une suite $\{\bar{x_k}\} \in E$. Comme E est un ensemble compact, nous savons qu'il est borné donc $\{\bar{x_k}\}$ est bornée.

$\implies$ Par Bolzano-Weirstrass, on peut trouver une sous-suite convergente telle que :

$$\{\overline{x_{k_p}}\}_{p=0}^{\infty} \text{ dont la limite est } \bar{x_0} \text{ quand } p \text{ tend vers l'infini}$$

Et comme E est fermé $\implies \bar{x_0} \in E$.

Puisque f est continue, $\lim_{p\to\infty} f(\overline{x_{kp}}) = f(\bar{x_0}) \in \mathbb{R}, \bar{x_0} \in E$ donc $f(\overline{x_{kp}})$ doit être bornée et converger
Mais c'est impossible puisque par construction $|f(\bar{x_k})| \geq k \ \forall k \in \mathbb{N} \implies |f(\overline{x_{kp}})| > k_p$ pour des $k_p$tendant à l'infini donc $f(\overline{x_{kp}})$ n'est pas bornée et ne peut donc pas converger (ce qui est nécessaire pour admettre une limite).

$\implies$ f est bornée sur E.

8.2.2 f atteint son min et son max sur E

$f(E)$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R} \implies$

- $\exists m = \inf \{f(\bar{x}), \bar{x} \in E\}$
- $\exists M = \sup \{f(\bar{x}), \bar{x} \in E\}$

$\implies \exists \{\bar{a_k}\}, \{\bar{b_k}\} \subset E : \lim_{k\to\infty} f(\bar{a_k}) = m,\ \lim_{k\to\infty} f(\bar{b_k}) = M$ (par la déf de sup et inf, on peut se rapprocher arbitrairement des points de sup et d'inf)

$\{\bar{a_k}\}, \{\bar{b_k}\} \subset E$ bornées $\implies \exists$ sous-suites convergentes $\bar{a_{k_p}} \to \bar{a}$ et $\bar{b_{k_p}} \to \bar{b}$
Puisque E est fermé $\implies \bar{a} \in E$ et $\bar{b} \in E$.

$$\text{Comme } f \text{ est continue alors } \lim_{p\to\infty} f(\bar{a_{k_p}}) = f(\bar{a})$$

$$\text{et par construction } \lim_{p\to\infty} f(\bar{a_{k_p}}) = m$$

$$\implies \exists \bar{a} \in E : f(\bar{a}) = m = \min_{\bar{x}\in E} f(\bar{x})$$

(même chose pour b)

9 Condition suffisante pour un extremum local de $f : E \to \mathbb{R}$ en $\overline{a} \in E$

(Cours 19)

9.1 Critère de Sylvester

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $E, \overline{a} \in E$ un point stationnaire: $\nabla f(\overline{a}) = 0$.

Soit $\text{Hess}_f(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix} (\overline{a})$

Alors :

- si toutes les valeurs propres de $\text{Hess}_f(\overline{a})$ sont positives $\implies$ minimum local en $\overline{a}$.
- si toutes les valeurs propres de $\text{Hess}_f(\overline{a})$ sont négatives $\implies$ maximum local en $\overline{a}$.
- s'il y a des valeurs positives et négatives $\implies$ $\overline{a}$ n'est pas un point d'extremim local.

9.2 Énoncé

Cas n = 2. Les conditions du théorème sur la matrice $\text{Hess}_f(\overline{a})$ sont équivalentes aux conditions suivantes :
Soit $\text{Hess}_f(\overline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} (\overline{a}) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

- (a) $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det(\text{Hess}_f(\overline{a})) > 0$ et $r > 0$.
- (b) $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \det(\text{Hess}_f(\overline{a})) > 0$ et $r < 0$.
- (c) les valeurs propres sont de signes différents $\Leftrightarrow \det(\text{Hess}_f(\overline{a})) < 0$.

9.3 Démonstration

Le déterminant et la trace d'une matrice sont des invariants de conjugaison.
On peut diagonaliser et garder $\det ODO^{-1} = \det D$:

$$\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = ODO = O \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} O^{-1}$$

$$\implies \det \text{Hess}_f(\overline{a}) = rt - s^2 = det(D) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\implies \text{trace de } \text{Hess}_f(\overline{a}) = r + t = \text{Tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2$$

(c) $\det \text{Hess}_f(\overline{a}) < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \lambda_1$ et λ_2 de signes opposés.

(a) **(sens direct)** Supposons que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \implies \det \text{Hess}_f(\overline{a}) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$
Alors $r > 0$ et $t > 0$ **car :**
$\lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2 > 0 \implies rt > s^2 > 0 \implies r$ et t sont de même signe.
Trace de $\text{Hess}_f(\overline{a}) = \lambda_1 + \lambda_2 = r + t > 0$
Alors $\det(\text{Hess}_f(\overline{a})) > 0$ et $r > 0$.

(sens inverse) Supposons que $\det(\text{Hess}_f(\overline{a})) > 0$ et $r > 0 \implies \det(\text{Hess}_f(\overline{a})) = \lambda_1 \lambda_2 > 0 \implies \lambda_1$ et λ_2 sont de même signe, $rt > s^2 \geq 0 \implies rt > 0$.
$rt > 0 \wedge r > 0 \implies t > 0 \implies$ Trace de $\text{Hess}_f(\overline{a}) = r + t = \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \implies \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 > 0$

Même raisonnement pour b).

10 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

(Cours 22)

10.1 Énoncé

Cas n = 2. Condition nécessaire pour un extremum sous contrainte. Soient les fonctions $f, g : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Supposons que $f(x, y)$ admet un extremum en $(a, b) \in E$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$ et que $\nabla g(x, y) \neq 0$ pour $g(x, y) = 0$.

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$.

10.2 Démonstration

Supposons que $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$ (le cas $\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) \neq 0$ est similaire).
On a $g(a, b) = 0$ puisque (a, b) satisfait $g(x, y) = 0$.
Par le TFI il existe une fonction $y = h(x)$ de classe C^1 au voisinage de $x = a$ telle que

$$h'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))} \text{ et } g(x, h(x)) = 0$$

Si (x, y) satisfait la contrainte autour de (a, b) alors on peut remplacer $y = h(x)$ dans l'expression $f(x, y)$ pour obtenir une fonction d'une seule variable. Donc, sous contrainte de $g(x, y) = 0$:

$$f(x, y) = f(x, h(x)) \implies \text{extrema locaux de f lorsque } f'(x, h(x)) = 0$$

$$\begin{aligned} f'(x, h(x)) = \nabla f(x, h(x)) \cdot J_{x,h(x)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) \cdot h'(x) \end{aligned}$$

Si (a, b) est un point d'extremum local de f sous la contrainte alors:

$$\implies \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot h'(a)$$

Par le TFI $h'(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}$

$$\begin{aligned} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)} \\ &\equiv v_1 = v_2 \cdot \frac{u_1}{u_2} \end{aligned}$$

$u_2 \neq 0$

(1) Si $u_1 = 0 \implies v_1 = 0 \implies \nabla f(a, b) = (0, v_2), \nabla g(a, b) = (0, u_2) \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : v_2 = \lambda u_2 \implies \nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$

(2) Si $u_1 \neq 0 \implies \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} := \lambda \in \mathbb{R} \implies (v_1, v_2) = \lambda(u_1, u_2) \Leftrightarrow \nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$