Ex 1

1. $\{0,1\}$

2. $$\text{rate} = \frac{\log_4(S)}{S}$$
$$= \frac{\log_{|A|}(M)}{n}$$

3. minimum dist $= 4$

$$d_{min} - 1 \leq n - k$$

$$\Rightarrow 3 \leq 5 - \log_4(S)$$

$$\Rightarrow 3 \leq 3.83\ldots$$

⚠ per bit, should be $\log_2$

4

$p_1 < d_{min}$

$\Rightarrow p_1 = 3$

$0****0$

5 $q_1 = 4$

$*3***$
$0****$
$****2$

6

$p_2 < d_{min}$

$\Rightarrow p_2 < 4$

$\Rightarrow p_2 = 3$

⑦

$\frac{5}{2}$

$$p_3 < \frac{d_{min}}{2}$$

$$\Rightarrow p_3 < 2$$

$$\Rightarrow p_3 = 1$$

⑧ ⓐ 00010

ⓑ 00022

ⓒ 3 1 1 2 1

HD_1 5
HD_2 4
HD_3 5
HD_4 4
HD_5 3

(9) $$r = \frac{\log_4(M)}{n} = \frac{\log_4(4)}{5} = 0.2$$

$$\Rightarrow n = 4$$

$$p_{max} < \frac{d_{min}}{2}$$

00000
11111
22222
33333

000000
011111

$S/2$

2

Problem 10.2

(1)

000	0
001	1
010	1
011	0
100	1
101	0
110	0
111	1

(2) $$r = \frac{\log_2(8)}{4} = \frac{3}{4}$$

(3) $d_{min} = 2$

(4) detect all errors $p_1 = 1$

correct all errors $p_2 = 0$

(5) compute the control bit, and if it is different than the received one, ask for the message again (we can not correct the code anyway)

(6) 0110 → 1100

(7) $$r = \frac{3m}{4(m+1)} = \frac{pm}{(p+1)(m+1)}$$

the number of really necessary bits

the number of really sent bits

$p = 3$

(8) $d_{min} = 4$?

$m = 2$

$3m = 6$

0	0	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

1	0	0	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0

si on change le moindre bit, on va faire varier de 3 la totalité du message

1	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

(9) detect errors : $p_1 < d_{min}$

$\Rightarrow p_1 = 3$

correct errors : $p_2 < \frac{d_{min}}{2} = 1$

Problem 10.3

(1) $P(\text{"k cars"}) = p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k}$

(2) $P(0) = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \cancel{\binom{100}{0}}\ 1$

$= \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100}$

$= \left(\frac{99}{100}\right)^{100}$

3 a

$$\underbrace{D_1 D_2 D_3 D_4}_{} \; P_1 \underline{P_2 P_3}$$

Si 1 change ⇒ 3 changent

Si D_1 et D_4 changent ⇒ P_3 change

d_{min} is 3

$$\omega < \frac{d_{min}}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = 1$$

b

1 000000
0100000
0010000
0001000
0000100
0000001
0000000

Soit l tte codeword. Il y a 7 positions pour faire le changement.

Si on part d'un codeword t, pourquoi on peut retrouver le mot original en 1 changement?

0100 000

D_2

en 1 changement on peut pas aller

à 0100 101
(qui validerait le bit 1 de D_2)
mais seulement à 0000 000

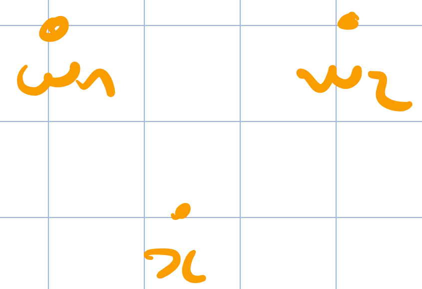
⇒ Imaginons qu'on reçoive un code x. Supposons qu'on ait w_1, w_2 tels que $d(w_1, x) = d(w_2, x) = 1$

Alors $d(w_1, w_2)$

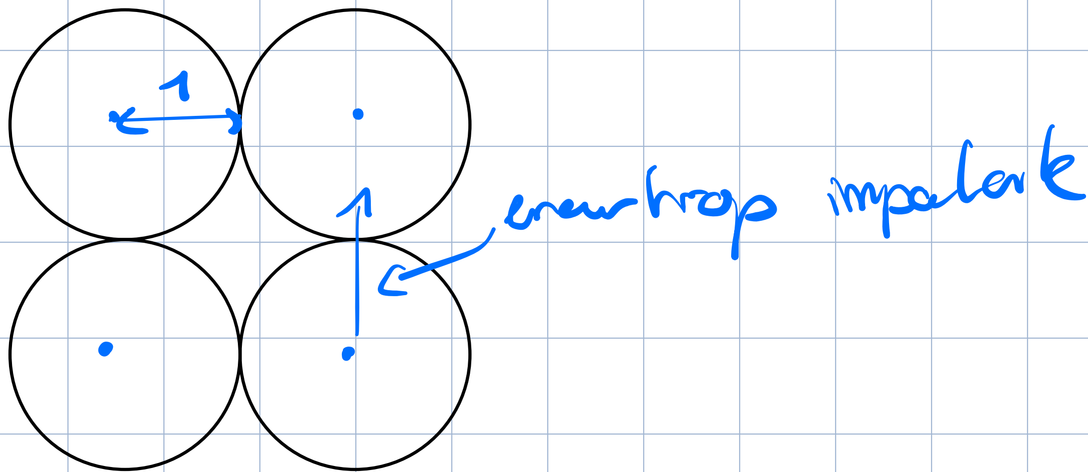
$$\leq d(w_1, x) + d(w_2, x)$$

$= 2$ → impossible!

$d_{min} = 3$!



(c) chaque codeword appartient à une boule de rayon 1 ⇒ s'il y a deux erreurs le codeword aura changé de boule... il sera dans la mémoire



(d) now we can correct errors!

$$\cancel{\binom{100}{0}\left(\frac{1}{100}\right)^{0}}\left(\frac{99}{100}\right)^{100} \qquad 0$$

$$+\binom{100}{1}\left(\frac{1}{100}\right)^{1}\left(\frac{99}{100}\right)^{99} \qquad 1$$

$$= \left(\frac{99}{100}\right)^{100} + \left(\frac{99}{100}\right)^{99}$$

$$= \left(\frac{99}{100}\right)^{99}\left(\frac{99}{100}+1\right)$$

Problem 10.4

n = 2

(1)

on veut t changements

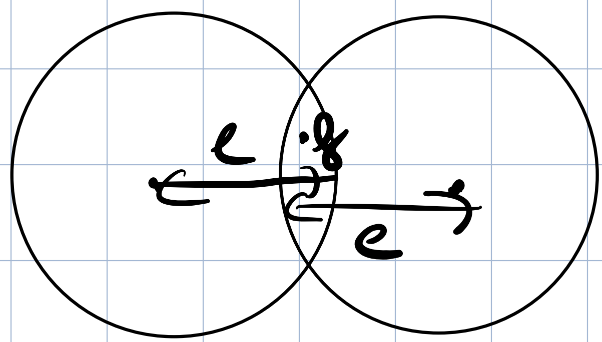
p. ex 1 changements $\Rightarrow$ n possibilités
2 ch — $\Rightarrow$ $\binom{n}{2}$

$$\binom{n}{t}$$

(2) Ball $B(x, e)$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{e}$$

(3)



Soit $f \in B(x_1, e), B(x_2, e)$

$$d(x_1, f) \leq e$$
$$d(x_2, f) \leq e$$

$$d(x_1, x_2) \leq \underbrace{d(x_1, f) + d(x_2, f)}_{\leq 2e}$$

(4) then $d_{min} = e+1$

then there can not be two codes closer than $e+1$

5

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{e} \binom{n}{t}}_{} = Z$$

le nombre d'éléments
dans une boule de
rayon e

$$\underbrace{2^k}_{}$$

le nombre de codewords

par chaque boule, il y a Z él.

$2^n \rightarrow$ tous les codes du code
block