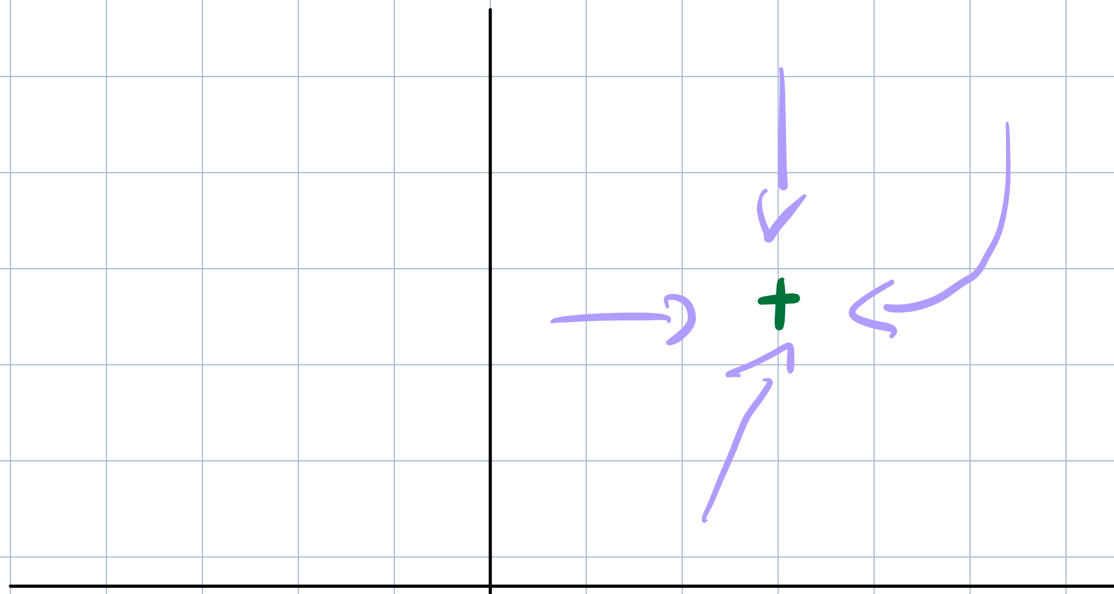

MAJORATIONS

$$|x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$2|xy| \leqslant x^2 + y^2$$

2 CHEMINS DIFF → lim N'EXISTE PAS

on annule x ou y

PASSAGE EN POLAIRE

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Exercice 1

(i) $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-3y}{x+2y^2} = \frac{1}{4}$$

(fonction continue en ce point?)

(ii) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-3y}{5|x|+2|y|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1/k,0)} \frac{\frac{2}{k}}{\frac{5}{k}} = \frac{2}{5}$$

$\neq$ pas de lim

$$\lim_{(x,y)\to(1/k,1/k)} = \frac{-\frac{1}{k}}{\frac{7}{k}} = -\frac{1}{7}$$

(iii)

Changement de variable

$$z = x^2 + y^2 \to 0$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Exercice 2

$$\frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$$

(i)

$$\lim_{(x,y) \to (1/k, 1/k)}$$

(ii) $$\lim_{(x,y) \to (0, 1/k)} \frac{x - y}{x^2 - y^2}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{-1/k}{-1/k^2} = \infty$$

pas de

$\nexists$ limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1/k)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1/k}{-1/k^2} = -\infty$$

(iv) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1/k,\,0)} = \frac{1/k^4}{1/k^4} = 1$$

$$\neq \lim_{(x,y)\to(1/k,\,1/k^2)} = \frac{1/k^4-1/k^4}{1/k^4+1/k^4}$$

$$= 0$$

iii) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^5}{(x^4+y^6)^{3/2}}$$

On pose $x=0$

$y = 1/k$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{0}{\left(\frac{1}{k}\right)^9} = 0$$

on pose $x = \frac{1}{k}$

$y = \frac{1}{k}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1/k^6}{\left[\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^6}\right]^{3/2}}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1/k^6}{\left(\frac{1}{k^4}\right)^{3/2}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{3/2}}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{\cancel{1/k^6}}{\cancel{\frac{1}{k^6}}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left[1+\frac{1}{k^2}\right]^{3/2}}$$

$$= 1$$

i) on pose $\begin{cases} x = 1/t \\ y = 2/t \end{cases}$, $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1/t \cdot 4/t^2 - 2/t \cdot 1/t^2}{(1/t^2 + 4/t^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2/t^3}{[5/t^3]^{3/2}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2}{5^{3/2}}$$

on pose $x = 0$, $y = 1/t$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{lim est } 0}$

Exercice 3

(i) $$-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right) \leqslant 1$$

$$\Rightarrow -(x^2+y^2) \leqslant f(x,y) \leqslant (x^2+y^2)$$

gendarmes ?

(ii) $(0, 1/k)$

$$\underline{\lim} \quad \frac{-1/k^2}{1/k^2} = -1$$

$(1/k, 1/k)$

$$\underline{\lim} \quad = 0$$

(iii) $(1/k, 1/k, 1/k)$

$$\frac{1/k^3 + 1/k^3}{3/k^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{2}{3k} = 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to 0$$

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$f(x, y, z) =$$

$$\frac{r\sin\theta\cos\varphi\, r\sin\theta\sin\varphi\, r\cos\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, r^2\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{r^3(\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi\cos^2\theta)}{r^2}$$

$$= \underbrace{\underset{\to 0}{r}\,(\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi\cos^2\theta)}_{\to 0}$$

(iv)

$$\lim_{t \to 0} \frac{4(1-\cos t)}{t^2} = 2$$

Exercice 4

Continuité si :

- lim existe
- a la même valeur que la lim

(i) $\lim\limits_{(x,0)\to(1/k,0)} \dfrac{3/k^3}{1/k^2} = \dfrac{3}{k} = 0$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$$\frac{3r^3\cos^3\theta + 2r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{r^3(3\cos^3\theta + 2\sin^3\theta)}{r^2}$$

$$= \underbrace{r(3\cos^3\theta + 2\sin^3\theta)}$$

qd $r \to 0$, $\to 0$

(ii)

$$\frac{1/k^2}{1/k^2 + \left(\frac{3}{k}\right)^2}$$

$$= \frac{1/k^2}{\frac{10}{k^2}} = \frac{1}{10}$$

$\neq 0$

(iii)

$$\frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

prolongement par continuité : 2

(iv) une lim peut être 0

$\frac{1}{k}$ $\frac{2}{k}$

$$\frac{\left[\frac{2}{k^2}\right]\left[\frac{1}{k^2}-\frac{4}{k^2}\right]}{\left(\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{k^4}-\frac{8}{k^4}}{\frac{1}{k^4}+}$$

$x = r\cos\theta$ $\qquad\qquad \theta(r)$

$y = r\sin\theta$

$$r\cos\theta\, r\sin\theta \; \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin\theta^2)^2}$$

$$= r^2[\cos\theta \; \sin\theta]\left[\frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^4}\right]$$

$$= [\cos\theta \sin\theta][\cos^2\theta - \sin^2\theta]$$

$$= \underline{\cos^3\theta \sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta}$$

↳ pao de limite

Exercice 5

$\forall m \in \mathbb{R} \quad \lim_{t \to 0} f(t, mt) = \ell$

$\ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \ell \quad ?$

$\boxed{(0, 1/k)} \neq \ell$

$(0,0)$

$\left(\frac{1}{k}, m\frac{1}{k}\right)$

$$\frac{xy^2 - y^3}{y^3}$$

$$= \frac{t m^2 t^2 - m^3 t^3}{m^3 t^3}$$

$$= \frac{\cancel{m^2 t^2}(t - mt)}{\cancel{m^2 t^2}(mt)}$$

$$= \frac{\cancel{t}(1 - m)}{\cancel{t}(m)}$$

$$= \frac{1-m}{m} = \frac{1}{m} - 1$$

$$y = \frac{1}{k} \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{-\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^3}} = -1$$

Exercice 6

Q01 Faux

Pour que la fonction soit continue, il faut :

- que la limite existe ET
- que $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Q02 Faux.

La limite $x \to x_0$, $x \neq x_0$
et $y \to y_0$, $y \neq y_0$

peut être différente de la limite
quand $x \to x_0$, $x \neq x_0$
et $y \to y_0$, $y = y_0$

par ex : $\begin{cases} 37, & \text{si } y = y_0 \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$

$$(x_0, y_0) = (2, 3)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x, 3) = 37$$

$$\lim_{(x,y)} f(x,y) = 1$$

(3) $g(r) = 0$

pour $\varphi_0 = 0$

on a $|f(r,0)| \leq 0$

on définit $f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 7

(i) ensemble boné : il existe un $M \in \mathbb{R}$ t.q $\forall x \in \mathbb{R}$ $|x| \leq M$

- $\neg$ boné : $\forall M$ $\exists x$ t.q $x > M$
- en particulier il existe $\{u_k\}$ t.q $|u_k| > k$.

(ii) compact : fermé et borné

continue : $\forall x \in E$ $\lim_{(x,y,\dots) \to x} f(E) = f(E)$

Supposons que E compact, f continue et $f(E)$ non bornée

f non bornée $\Rightarrow \exists \{\overline{x_k}\} \in E$ tq

$$f(\overline{x_k}) \geq k \in \mathbb{N}.$$

Or, $\{\overline{x_k}\}$ est bornée (puisqu'elle appartient à E).

Par Bolzano-Wierstrass, $\exists \{x_{k_p}\} \to \{x_0\}$ et comme E est compact

$$\Rightarrow \overline{x_0} \in E$$

Comme f est contin<u>ue</u>

$$\lim_{p \to \infty} f(x_{k_p}) = f(x_0) \in \mathbb{R}$$

iii $\inf(P) = m$ s.t. $\forall k \in \mathbb{N}$ $x_k \geq m$
$\sup(P) = M$ s.t. $\forall k \in \mathbb{N}$ $x_k \leq M$

On peut construire $y_k = M - \frac{1}{k}$

(iv)