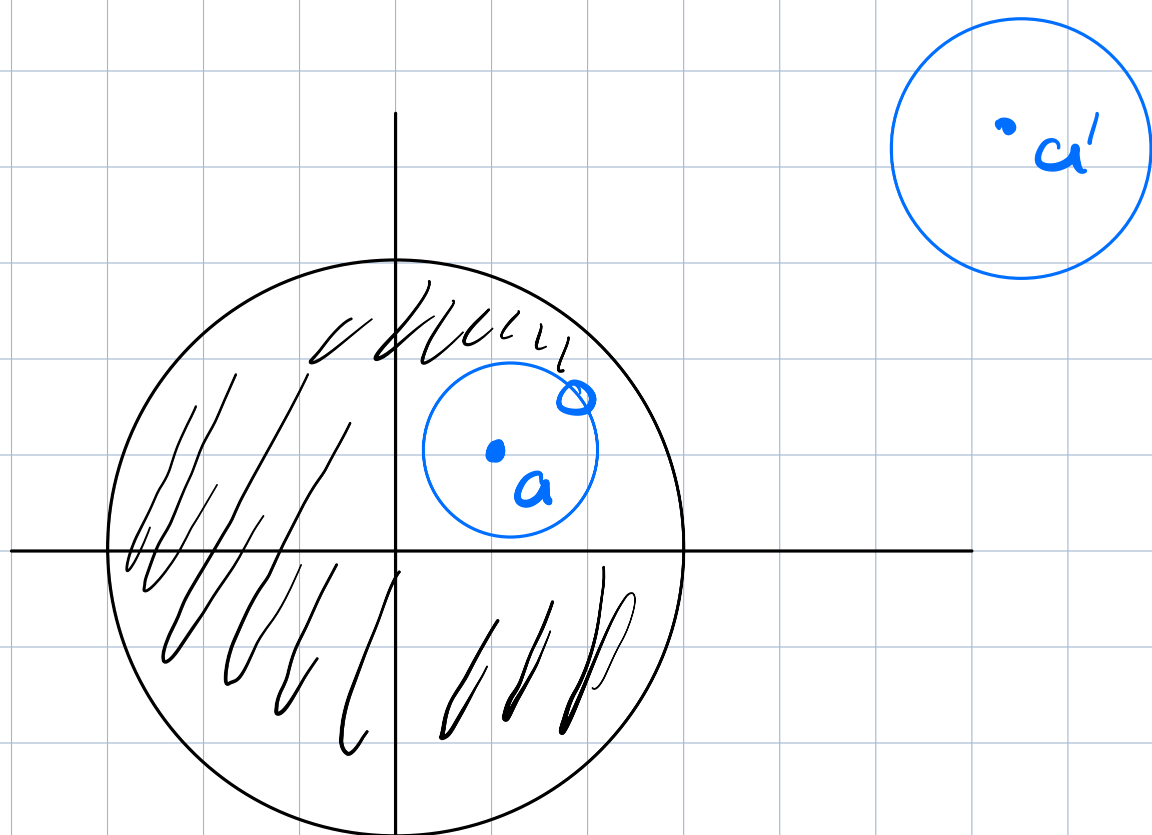
Exercice 1

(i) E est une droite (parce que i commence à 2)

Adhérence de E = $\bar{E}$ (déf.)
Frontière de E = E

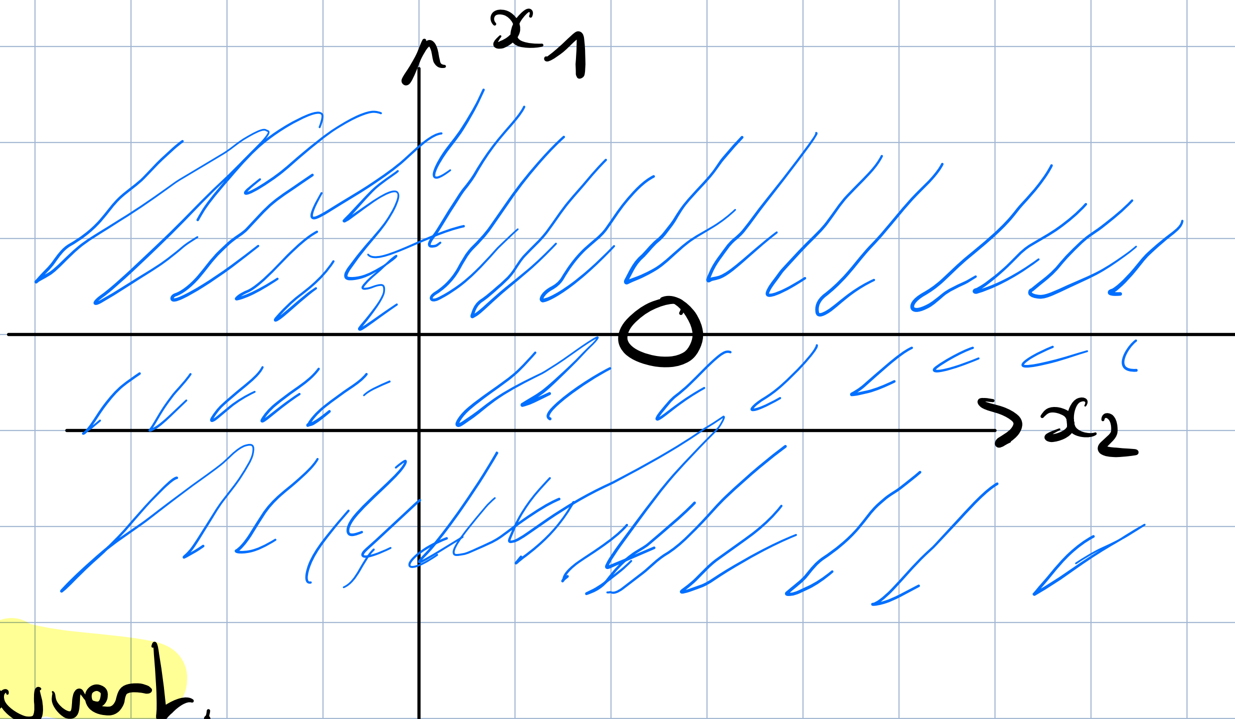
(ii)



E est ouvert.
Adhérence de E: $\{\bar{y} \in \mathbb{R}^n, \|\bar{y}\| \leq 2, \|\bar{y} - \bar{a}\| \geq 1\}$

frontière de E : $\{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n, \|\bar{y}\| = 2 \cup \|\bar{y} - \bar{a}\| = 1 \}$

(iii)



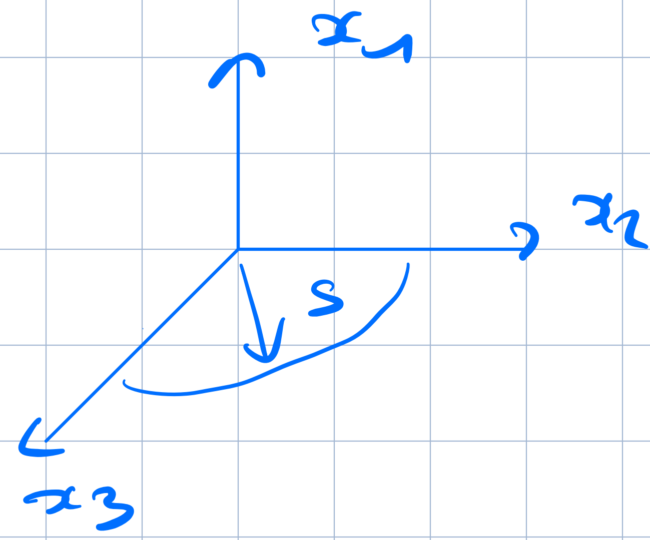
faux

E est ouvert.

Adhérence de E : $\{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n \}$

frontière de E $\{ \bar{y} \in \mathbb{R}^n, y_1 = 1 \}$

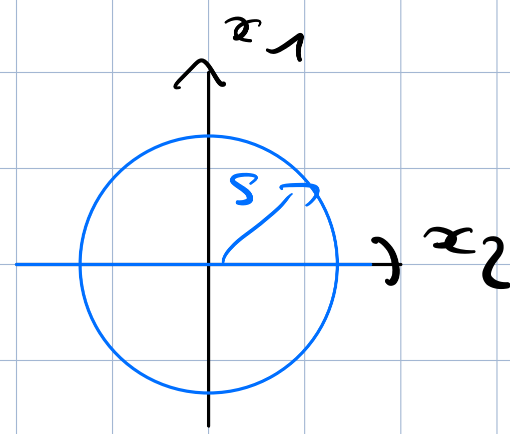
Exercice 2



ⓐ ouvert ≠

ⓑ pas fermé ≠

ⓒ oui, fermé et borné



ⓓ ~~Oui. $\exists M$ (comme 3) t.q $E \subset B(\vec{O}, 3)$ et E est fermé (point)~~

connexe pas à O

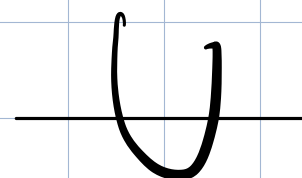
Exercice 3

i

$$(x+y)^2 - 5x - 5y + 6$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 6 < 2$$

$$a^2 - 5a + 6 < 2$$



$$\Rightarrow a^2 - 5a + 4 < 0$$

$a = 1$ ou 4 $\qquad$ $\Delta = 25 - 16 = 9$

$$a = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 4 \end{matrix}$$

$x + y = 1$

$x + y = 4$

$a^2 - 5a + 6 > 0$

$\Delta = 25 - 24$

$= 1$

$a' = \dfrac{5 \pm 1}{2}$ $\nearrow 3$ $\searrow 2$

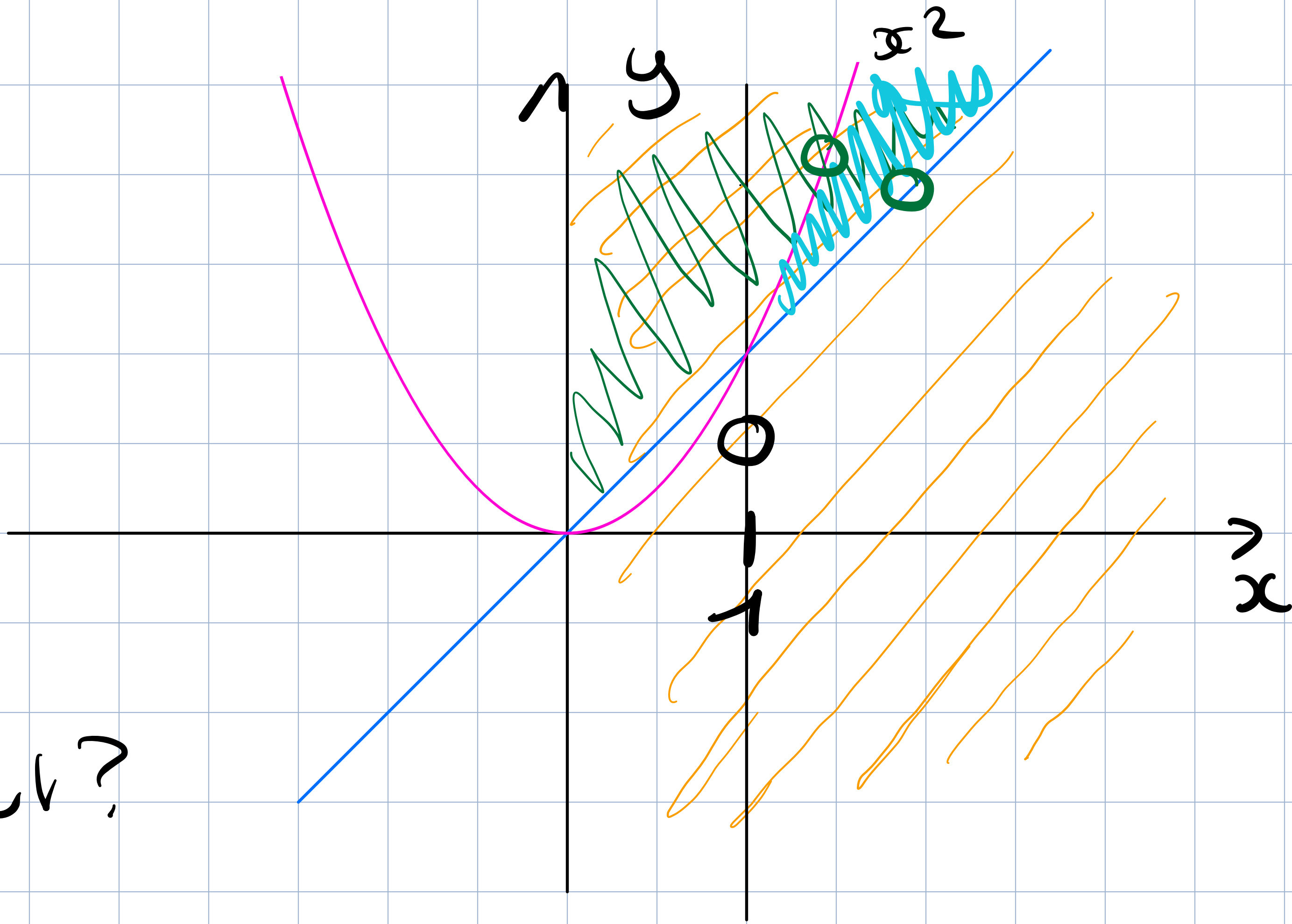
$x + y = 2$

$x + y = 3$

$x + y \in \left]1, 2\right] \cup \left[3, 4\right[.$

ni ouvert, ni fermé

(ii)



quel ?

Exercice 4

(i) $E = \overline{E}$

$F \neq \overline{F}$

Par ex:

$$F = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } \|\bar{x}\| < 1 \}$$

$$\overline{F} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } \|\bar{x}\| \leq 1 \}$$

$$E = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } \|\bar{x}\| \leq 1 \}$$

$\bar{E} \subset \bar{F}$ mais $E \not\subset F$.

(ii) Vrai... ?

(iii) Vrai... ?

(iv) Faux.

$$F = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } \|\bar{x}\| < 1 \cap x_1 > \tfrac{1}{2} \}$$

$$\bar{F} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } \|\bar{x}\| \leq 1 \}$$

$$E = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q } \|\bar{x}\| < 1 \}$$

$\delta E \subset \delta F$ mais $E \not\subset F$.

Exercice 6

(i) Soit $M = \max(\|\overline{a_1}\|, \dots, \|\overline{a_p}\|)$

Alors $A \subset \overline{B(\overline{0}, 2M)}$ donc A est borné.

$$A = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_p}\}$$
$$= \{\overline{a_1}\} \cup \{\overline{a_2}\} \cup \dots \cup \{\overline{a_p}\}$$

et chaque ensemble $\{\overline{a_1}\}, \{\overline{a_2}\}, \dots, \{\overline{a_p}\}$ est une réunion finie d'ensembles fermés, donc A est fermé.

Comme A est fermé et borné, A est compact.

(ii)

(a) Soit $D = [0, \pi]$
Soit CD le complèmentaire de D.

Soit $\bar{y} \in CD$.

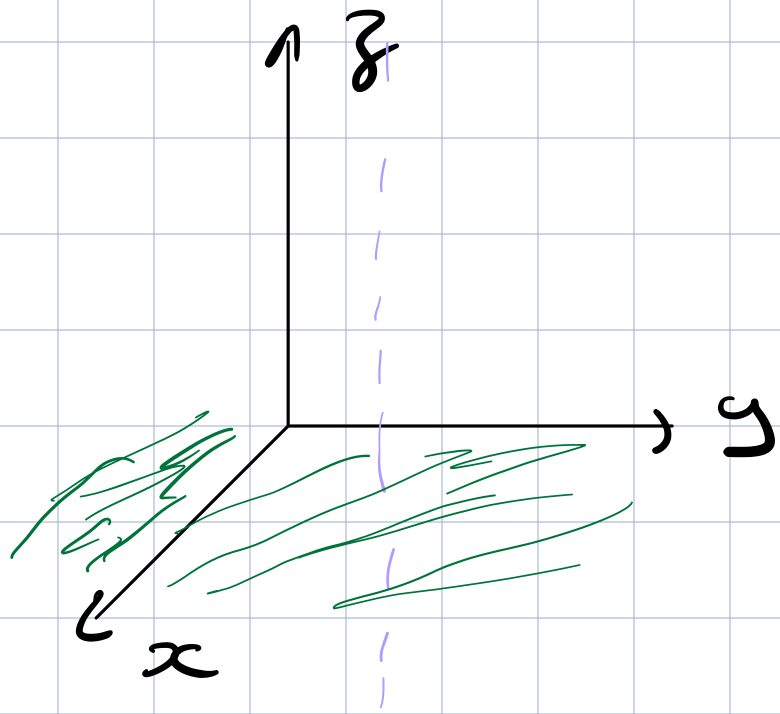
Let $\delta = \|\bar{y}\| > \pi$? $\|\bar{y}\| - \pi$: $\|\bar{y}\|$

Alors $B(\bar{y}, \frac{\delta}{2}) \in CD$ donc CD ouvert.

(b) Soit $\bar{a_3}$ la limite de E, elle appartient à $[0, \pi]$ (ensemble fermé).

alors $\cos(\bar{a_3})$, $\sin(\bar{a_3})$, $\bar{a_3} \in E$ par la définition de E.

(iii)



Soit a_n une suite d'éléments de E.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ \exists a_n$ t.q $\lim_{n \to \infty} a_n = x$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} \,\|\, \text{nème décimale de } x \\ \quad\quad \downarrow \\ \quad\quad x \cdot 10^n \,\%\, 10 \\ a_0 = 0. \text{ (première décimale de } x) \end{cases}$$

$\forall y \in \mathbb{Q}, \exists b_n$ t.q $\lim_{n \to \infty} b_n = y$

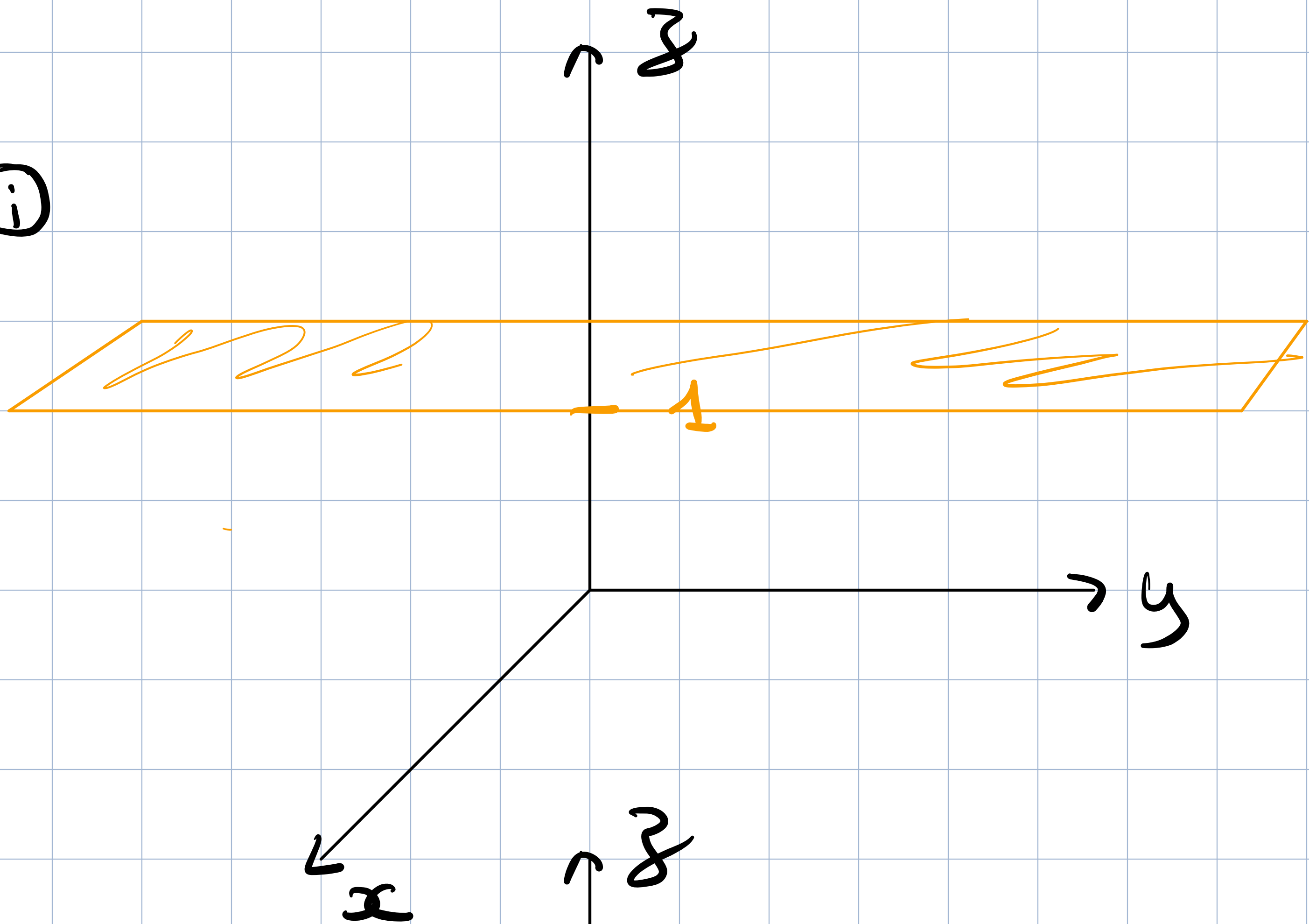
Soit a_0 un nombre irrationel

$a_{n+1} = a_n + y[n]/10^n$

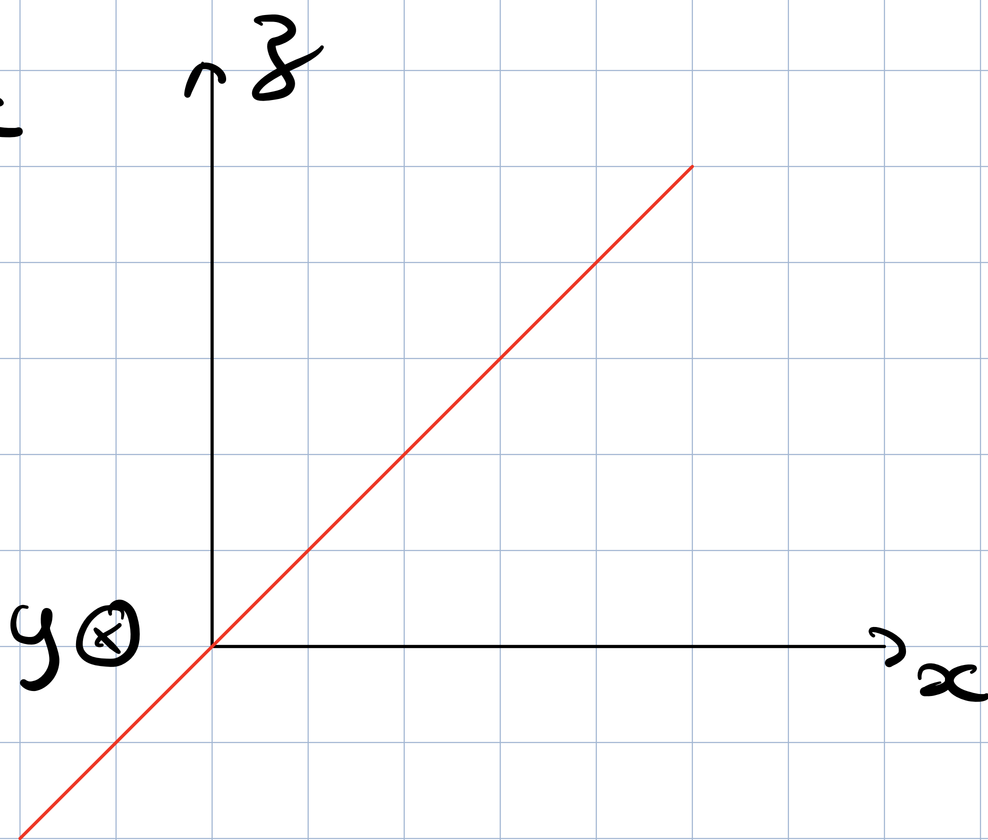
$a_{n+1} = a_n + \left(\frac{a_n - y}{2}\right)$

Exercice 5

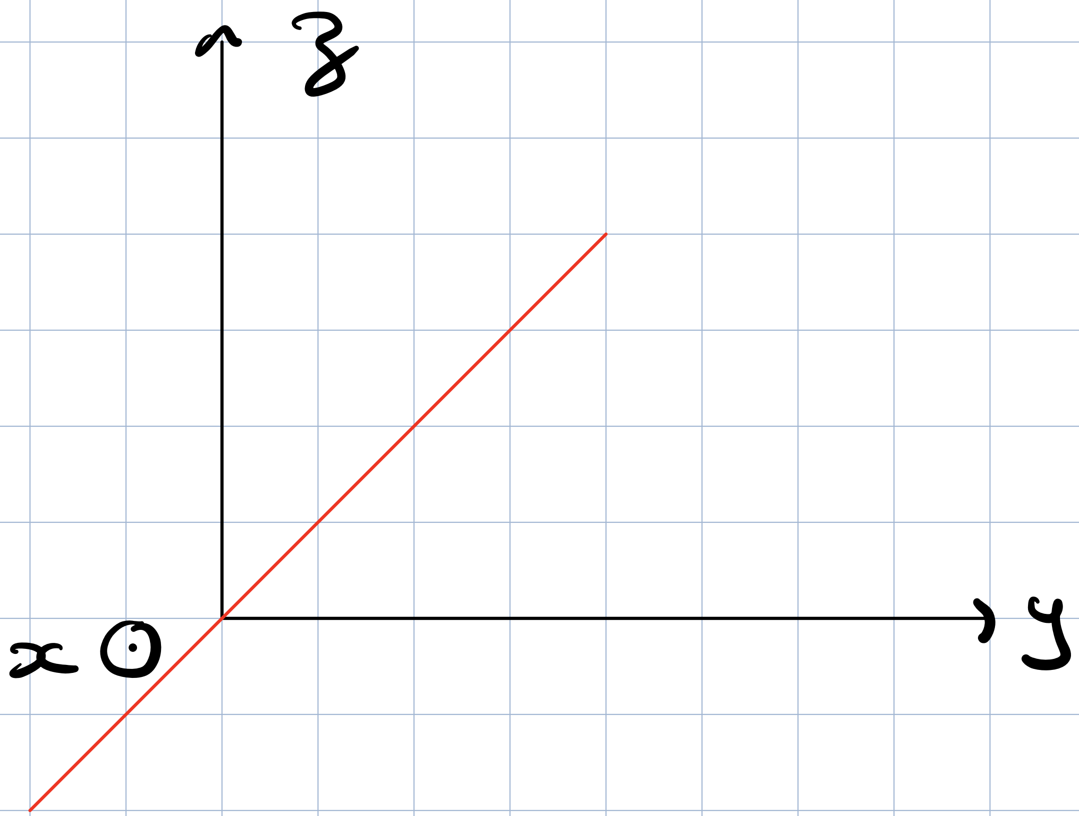
(i)



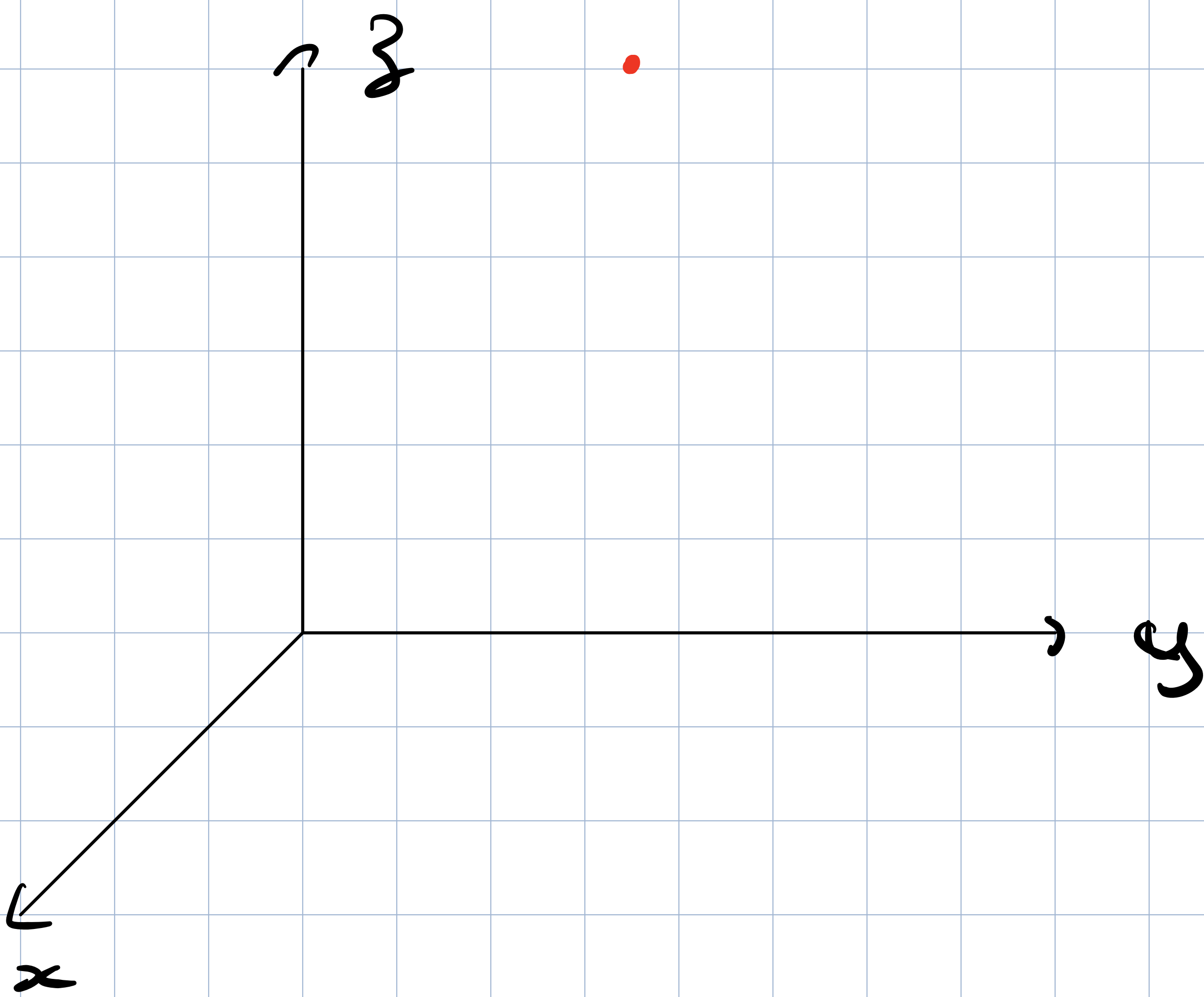
(ii)



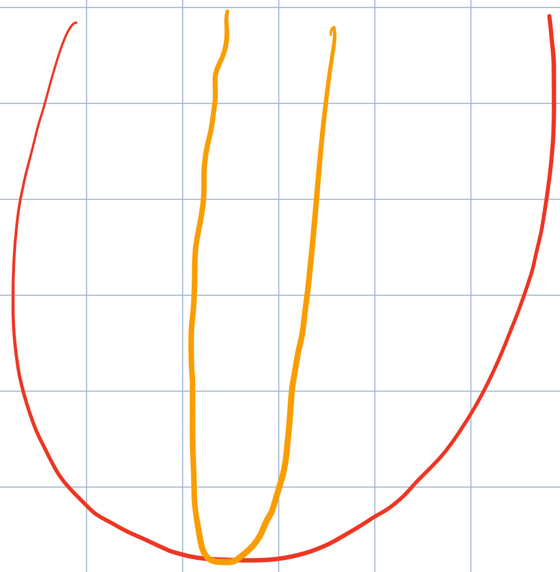
(iii)



(iv)



v



Carotte