$$\mathbb{R}^2,\ \text{rot } F(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$$

$$\mathbb{R}^3,\ \text{rot } F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \det(\nabla \times F)$$

Un ensemble $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit **convexe** si, pour tous les points $x, y \in \Omega$, le segment qui relie $x$ à $y$ est entièrement contenu dans $\Omega$. Pour prouver la convexité, on pose $a, b \in \Omega$ et $t \in [0,1]$ et on montre que $ta + (1-t)b \in \Omega$.

Un ensemble $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit **connexe** si on peut aller d'un point $x \in \Omega$ à un autre point $y \in \Omega$ en restant **entièrement à l'intérieur de** $\Omega$, c'est-à-dire si $\Omega$ est d'un seul "morceau". Un ensemble **simplement connexe** est **connexe** et n'a pas de trou.

Courbe **simple** : au moins une paramétrisation vérifie l'injectivité, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ (on ne vérifie pas uniquement la coordonnée $y$ n'est-ce pas, on vérifie que le point $\gamma(t_1)$ est différent du point $\gamma(t_2)$).
Courbe **fermée** : toutes les paramétrisations vérifient $\gamma(a) = \gamma(b)$
Courbe **régulière par morceaux** : il existe des courbes régulières dont l'union est $\Gamma$

## Champs qui dérivent d'un potentiel

Soit $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$.
$F$ **dérive d'un potentiel** sur $\Omega$ s'il existe $f \in C^1(\Omega)$ telle que $\nabla f = F$ dans $\Omega$.
Si $F$ dérive d'un potentiel, alors : $\int_\Gamma F \cdot dl = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

## Comment savoir si $F$ dérive d'un potentiel ?

**Condition nécessaire** : $\forall 1 \leq i, j \leq n, \forall x \in \Omega$, on a $\text{rot } F = 0$
**Condition suffisante** : on ajoute que $\Omega$ est simplement connexe (ou plus fort, convexe).

- si rot mais pas simplement connexe, on choisit entre ces deux méthodes :
  - choisir une courbe $\Gamma$ qui entoure un unique trou de $\Omega$. est-ce que $\int_\Gamma F \cdot dl = 0$ ? Si oui, **pas de potentiel !** Sinon, on change de trou ou on change de méthode.
  - intégrer $f(x,y,z) = \int^x F_1(t,y,z)dt$ et ajuster en ajoutant $\alpha(y,z)$ pour que $\nabla f = F$.

Note, on peut aussi poser $\gamma : [0,1], t \to (tx, ty)$ . Avec ça, on peut trouver $f$ car on sait que $f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(x,y) = \int_\gamma f$.

## Coordonnées cylindriques

**Ne pas oublier le Jacobien!**

$$\vec{r} = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}$$

intégration :

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz = \iiint f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, rdrd\theta dz$$

Un petit élément de surface est donné par $d\vec{S} = rdrd\theta\vec{e_r} \times \vec{e_\theta}$

## Coordonnées Sphériques

$$\vec{r} = r\vec{e_r}$$

intégration :

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz = \iiint f(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))\, r^2\sin(\theta)drd\theta d\varphi$$

Un petit élément de surface est donné par $d\vec{S} = r^2\sin(\theta)drd\theta d\phi\vec{e_r}$

## Green/Divergence

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. On fait une intégrale curviligne selon le vecteur tangent.

$$\iint_\Omega \text{rot } F(x,y)dxdy = \int_{\partial\Omega} F \cdot dl$$

Si $\gamma$ est une paramétrisation de $\partial\Omega$ qui laisse le domaine à gauche, alors :

$$\nu_{\gamma(t)} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$$

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier et $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ , alors: :

$$\iint_\Omega \text{div } F(x,y)dxdy = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle dl$$

On fait une intégrale selon le vecteur normal à la surface.

## Identités trigonométriques

- $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$
- $\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$
  - donc $\sin(A)\cos(B)$, assez utile pour Fourier $= \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$
- $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$
- $\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$
- $\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$
- $\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$
- $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
- $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$

- $\sin(-a) = -\sin(a)$
- $\cos(-a) = \cos(a)$

- $e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$
- $\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

## Théorèmes de base

$\text{div}(\nabla f) = \Delta f$
$\text{rot}(\nabla f) = 0$
$\text{div}(\text{rot } F) = 0$
$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

Un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ est **régulier** s'il existe $\Omega_0, \ldots, \Omega_n$ des ouverts bornés t.q :

- tous les $\Omega_i$ sont contenus dans $\Omega_0$
- ils ne se chevauchent pas
- $\Omega = \Omega_0 \backslash U_{i=1}^n \overline{\Omega_i}$ (on part de $\Omega_0$ et on enlève les trous).
- $\Gamma_j$ est une courbe fermée, simple et régulière.

### Divergence 3D

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine régulier, $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ de normales extérieures unités continu et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Alors :

$$\iiint_\Omega \text{div } F(x,y,z)dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu\rangle ds$$

Si $\partial\Omega$ est un bout du bord, on a directement une simplification de $\nu$ (pas besoin de la norme) :

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F; v\rangle ds = \iint_{\partial\Omega} \langle F(\sigma(u,v)); \sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\rangle dudv$$

### Stokes 3D

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert, $\Sigma \subseteq \Omega$ une surface orientable régulière par morceaux, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors

$$\iint_\Sigma \langle \text{rot } F(\sigma(u,v)); \nu\rangle d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \langle F; \tau\rangle \cdot dl = \left(\oint_\partial F(\sigma(\gamma_i(t))) \cdot \frac{d}{dt}(\sigma(\gamma_i(t)))\, dt\right)$$

Par exemple pour $\nu = \sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)$ puis pour $\tau$ on passe avec une paramétrisation à seule variable (bord), qu'on dérive.

### Corollaire pour le calcul d'une aire

On pose $F(x,y) = (-y, x)$ , $G(x,y) = (-y, 0)$ , $H(x,y) = (0, x)$.
Alors, on a $\text{Aire}(A) = \iint_\Omega 1dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_{\partial\Omega} G \cdot dl = \int_{\partial\Omega} H \cdot dl$
car $\text{rot } F(x,y) = 1 - (-1) = 2$ , $\text{rot } G(x,y) = -(-1) = 1$ , $\text{rot } H(x,y) = 1$

### Identités utiles

- $\iint_\Omega \Delta u dxdy = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u; \nu\rangle dl$ (car la divergence de $\nabla u$ est le laplacien de $u$)
- $\iint_\Omega (v\Delta u + \langle \nabla u; \nabla v\rangle)dxdy = \int_{\partial\Omega} \langle v \cdot \nabla u; \nu\rangle dl$
- $\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dxdy = \int_{\partial\Omega} \langle u\nabla v - v\nabla u, \nu\rangle dl$

(pareil on applique la règle des produits pour retrouver la divergence à gauche)

Comment savoir si $T$ est une distribution valide ? (si $T \in D$).

- $T$ doit être **finie**, peu importe le $\varphi$ avec laquelle on la mesure, $\forall \varphi \in D : \ |T(\varphi)| < \infty$. (les fonctions continues sur un ensemble compact sont bornées, donc montrer la continuité implique la prop de finie).
- $T$ est **linéaire**.
- $T$ doit être **continue** :

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}, \exists C > 0 \ \text{(qui peut dépendre de a, b) t.q } \forall \varphi \in D \ \text{ t.q supp } (\varphi) \subset [a,b]$$

alors :

$$|T(\varphi)| \ \leq C\sum_{i\geq 0}\max_{x\in\mathbb{R}} |\partial_x^i\varphi(x)|$$

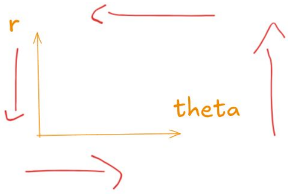
Pour montrer ça on peut par exemple prendre $i = 0$ et si ça suffit on peut s'arrêter là.

$$\left|\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx\right)\right| = \left|\left(\int_a^b \varphi(x)dx\right)\right|$$

$$\leq \max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|\int_a^b 1dx = (b-a)\max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|$$

$$\leq (b-a)\sum_{i\geq 0}\max_{x\in\mathbb{R}} \left|\left(\partial_x^i\varphi(x)\right)\right|$$

produit vectoriel dans le sens
sigma_theta cross sigma_r
implies faire la bordure
dans le sens :




### 1.4.5 Derivatives of the Dirac Delta

For the Dirac delta $\delta_0$, higher-order derivatives are defined by

$$\left\langle \delta_0^{(n)}, \varphi\right\rangle = (-1)^n\varphi^{(n)}(0).$$

This highlights the principle that differentiating a delta distribution results in a new distribution that 'samples' higher-order derivatives of the test function at the origin.

## Intégrale de surfaces

Le **vecteur normale unité** au point $u, v$ est : $\nu_{u,v} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|}$

## Paramétrisations utiles

**Cône**:
$\sigma : [0, 2\pi] \times [0,1], (\theta, z) \to (z\cos(\theta), z\sin(\theta), z)$
$\sigma_\theta = (-z\sin(\theta), z\cos(\theta), 0)$ et $\sigma_z = (\cos(\theta), \sin(\theta), 1)$
$|\sigma_\theta \times \sigma_z| \ = (z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z)$

distributional derivatives of piecewise diff.
functions

$$= \int_{-\infty}^{a_0} f'(x)\varphi(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f'(x)\varphi(x)\,dx + \int_{a_n}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

$$+ \sum_{i=0}^{n}\varphi(a_i)\underbrace{\left[f(a_i+) - f(a_i-)\right]}_{\text{jump of } f \text{ at the point } a_i}$$

### Heaviside, Dirac Delta, Dirac Comb

$$H(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } x < 0 \\ 1 \text{ if } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\delta_0 : D \to \mathbb{R}, \varphi \to \varphi(0)$$

$$\Delta_T(\varphi) \to \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(nT)$$

# Séries de Fourier

## Égalités utiles

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$ alors :

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}mx\right)dx = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}mx\right)dx = \begin{cases}1 \text{ si } n = m\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

et

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}mx\right) = 0$$

On veut écrire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique sous cette forme:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\right]$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx \qquad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$$

## Identité de Plancherel

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 < +\infty$.
Alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha$$

## Transformée de $f * g$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f * g| dx < \infty \text{ et } \mathcal{F}[f * g](\alpha) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\alpha) \cdot \hat{g}(\alpha)$$

$$\mathcal{F}[f \cdot g](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}[f](\alpha) * \mathcal{F}[g](\alpha))$$

### Séries de Fourier remarquables

$$f(x) = x \text{ pour } 0 \le x \le 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\pi n}\sin(2\pi nx)$$

$$g(x) = \begin{cases}1 & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2}\\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \le x < 1\end{cases}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^g \sin(2\pi nx) \text{ et } b_n^g = \frac{4}{\pi n} \text{ si } n \text{ odd}$$

$$h(x) = \begin{cases}2x \text{ si } 0 \le x < \frac{1}{2}\\ 2(1-x) \text{ si } \frac{1}{2} < x \le 1\end{cases}$$

$$h(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^h \cos(2\pi nx) \text{ et } a_n^h = -\frac{4}{\pi^2 n^2} \text{ si } n \text{ odd}$$

### Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique et $C^1$ par morceaux. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$Ff(x) = \lim_{t=0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2}$$

(c'est-à-dire que même si la fonction n'est pas parfaitement continue, on assigne la moyenne des deux extrémités à gauche et à droite)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue (pas par morceaux) et bornée alors $F_N f$ converge vers $f$ quand $N \to \infty$.

Note : c'est similaire pour les transformées de Fourier, en cas de discontinuité on prend la moyenne.

Exemple de convolution, on veut calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)g(x-z)dz$. On choisit une fonction qui bouge, et une fonction qui reste fixe. On va séparer notre intégrale en plusieurs intervalles. Si on a $g$ constante qui est $\neq 0$ entre $-1$ et $1$, on trouve $x - 1 \le t \le x + 1$. On sait que notre $t$ va varier entre $x - 1$ et $x + 1$ (en fait de $-\infty$ à $+\infty$ mais le produit sera 0 à cause de $g$). On pose $x$ le centre de notre $g$ et on trouve tous les intervalles qui font appel à des définitions différentes de $f$ puis on calcule les intégrales (à la fin en fonction de $x$).

# Coefficients de Fourier complexes

$$Ff(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}dx$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \text{ et } b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right) \text{ ou (plus utile), } c_n = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}$$

## Identité de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique et $C^1$ par morceaux.

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

## Dérivation termes à termes

$$Ff'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{T}n\left(-a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{f'(x-t) + f'(x+t)}{2}$$

# Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < +\infty$.

Alors la transformée de Fourier noté $\mathcal{F}[f]$ ou $\hat{f}$ est définie par :

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

(parfois il est plus simple d'écrire $e^{-i\alpha x}$ comme $\cos(\alpha x) - i\sin(\alpha x)$)

# Dérivation des distributions

Le produit scalaire mesure à quel point deux vecteurs vont dans la même direction :

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

Généralisation à des fonctions continues :

$$\langle F_1, F_2\rangle = \int_a^b F_1(x)F_2(x)dx$$

Dérivation des distributions :

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int f(x)\varphi'(x)dx$$

$$= -[f(x)\varphi(x)]_0^{\infty} + \int \varphi(x)dx \text{ or } \varphi(\infty) = 0 \text{ (une test function vaut 0 en l'infini)}$$

$$= \int \varphi(x)dx$$

## Poisson Problem

### Fourier series

On fait une odd extension de la fonction $f$.
Pour la condition $-\Delta u = f(x)$,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$u^f = \sum_{n=i}^{\infty} b_n \frac{L^2}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

Pour la condition $u^g(a) = g^a$ et $u^g(b) = g^b$ et $\Delta u = 0$,

$$u^g(x) = C_1 x + C_2$$

$$u = u^f + u^g$$

## Fourier transforms

$$-u''(x) + k^2 u(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[u](\alpha) = \frac{1}{k^2 + \alpha^2}\mathcal{F}[f](\alpha) = \mathcal{F}[g](\alpha) \cdot \mathcal{F}[f](\alpha) \text{ et } g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-k|x|}}{k}$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g * f(x)$$

$$u(x) = \frac{1}{2k}\left(e^{-k|x|} * f(x)\right)$$

## Produit de convolution

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| < +\infty$. On définit le produit de convolution comme :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

## Intégrale d'une fonction par sa série de Fourier

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \frac{a_0}{2}(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x}\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx + b_n \int_{x_0}^{x}\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$$

## Transformée inverse

$$\mathcal{F}^{-1}[\Phi] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \mathcal{F}^{-1}[\Phi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$$

# Propriétés utiles

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| < +\infty$.

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a $\mathcal{F}[a \cdot f + b \cdot g] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$
- Si $f$ paire, alors $\mathcal{F}$ réelle et paire.
- Si $f$ impaire, alors $\mathcal{F}$ imaginaire pure et impaire.
- si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $g(x) = f(ax + b)$ alors :

$$\hat{g}(\alpha) = \frac{e^{i\frac{b}{a}\alpha}}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

- si $g(x) = e^{-ibx}f(x)$ alors $\hat{g}(\alpha) = \hat{f}(\alpha + b)$
- si $g(x) = x^n f(x)$ alors $\hat{g}(\alpha) = i^n \frac{d^n \hat{f}(\alpha)}{d\alpha^n}$

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}\right](\alpha) = (i\alpha)^n \mathcal{F}[f]$$