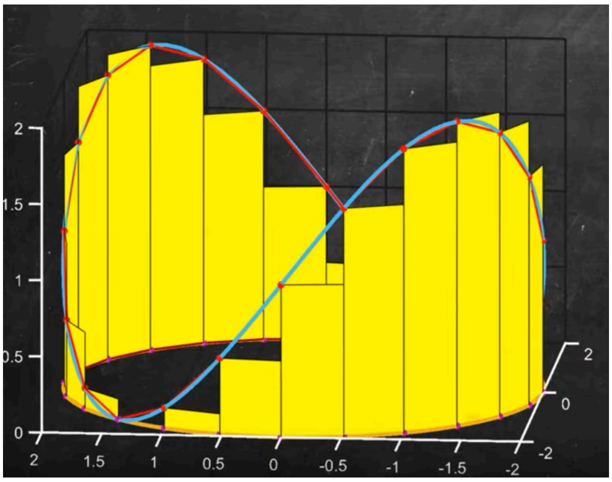
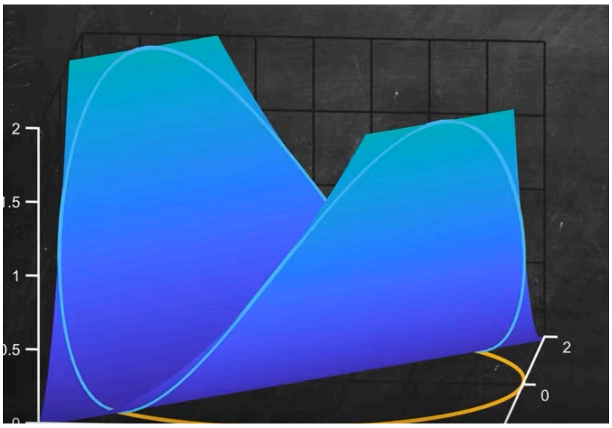
Line integrals

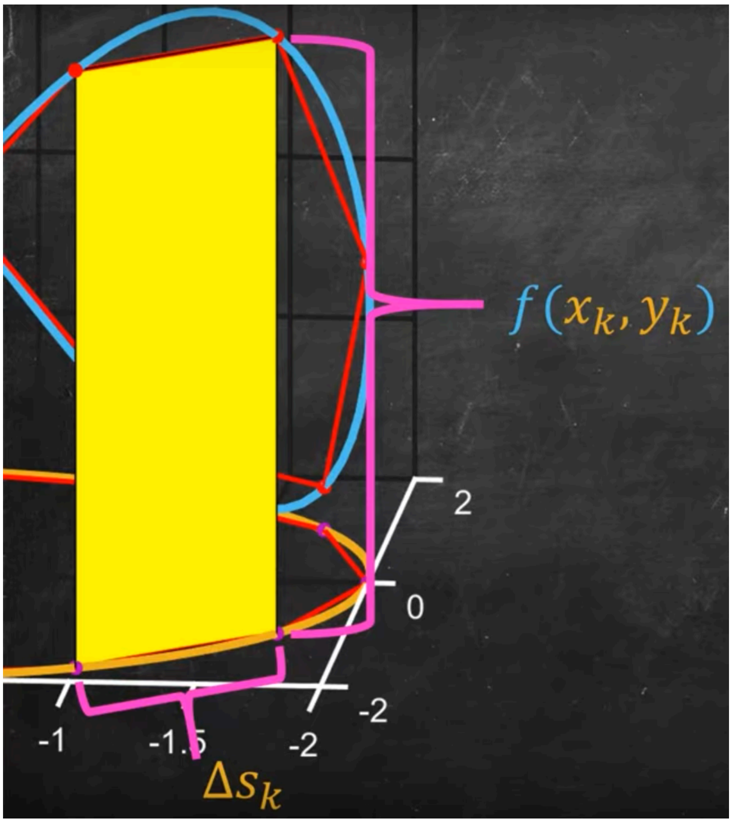
On veut intégrer $f(x, y) = z$ (en bleu) selon le cercle, que l'on paramétrise comme $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$.



On peut d'abord réécrire notre fonction comme $f(t) = f(g(t), h(t))$. Pourquoi ? Parce que les seuls points qui nous intéressent sont ceux selon $g(t), h(t)$!



Notre fonction aurait pu être comme ça, mais on veut juste être sur les points du cercle.



Ici on veut l'aire donc

$$A_k = f(x_k, y_k)\Delta s_k$$

$$A_k = f(x_k, y_k)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$\Rightarrow dA = f(g(t), h(t))\sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}dt$$

Theorem (Gauss / Green)

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ be as in the main auxiliary theorem

Let $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ be a diff'able vector field. Then

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dl$$

Gauss theorem / divergence theorem

$$\iint_{\Omega} \operatorname{curl} \vec{F}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\tau}\, dl$$

Green theorem

ccw rotation by $90°$: $(-y, x)$

cw rotation by $90°$: $(y, -x)$

Outlook

$\boxed{2D}$ $\iint \operatorname{div} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}$

area integral — line integral

$\iint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F}\,\vec{J}$

area integral — line integral

$\boxed{3D}$ $\iiint \operatorname{div} \vec{F} = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}$

volume integral — surface integral

Similar in higher dimensions:
hypervolume vs. hypersurface

$\oiint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F}\,\vec{J}$

surface integral — line integral

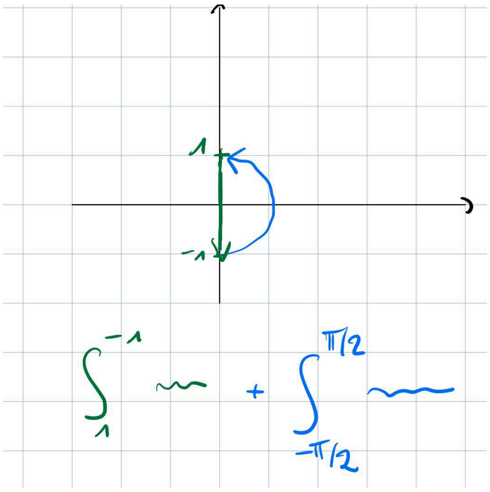
Higher dimensions:
so much more difficult

Trouver un potentiel

- compute $\int_0^x F(t)dt$
- compute $\int_x^y F(t)dt$
- sum them

Calculer une intégrale avec le Green's theorem

- bien choisir un sens pour la bordure (par ex)



- $$\int_{\delta\Omega} F \cdot d\vec{s} = \int\int_{\omega} \operatorname{div}(F) d\omega$$

Calculer une aire d'un graph

$$\text{par exemple, } \Phi(t) = \sqrt{s^2 + t^2}$$

$$\text{on définit } \vec{r} = (s, t, \Phi(t))$$

Calculer l'aire du graphe de Φ sur Ω:

$$\int_{\Omega} 1 \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dsdt$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{d\Phi}{ds} \\ 0 & 1 & \frac{d\Phi}{dt} \end{pmatrix} = \left(-\frac{d\Phi}{ds}, -\frac{d\Phi}{dt}, 1 \right)$$

$$\Rightarrow \text{ (when taking the norm)} \int_{\omega} \sqrt{1 + \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2} dsdt$$

Divergence Theorem

Il fonctionne en 2D et en 3D.

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\vec{S} = \int\int\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\int\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F(\Phi(\vec{x}))} \cdot \vec{n} \cdot \left\| \overrightarrow{\partial_s \Phi} \times \overrightarrow{\partial_t \Phi} \right\| \, d\vec{S} = \int\int\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

Avec $\vec{n}$ le vecteur normal par rapport à la surface en chaque point.
On définit une paramétrisation du volume $\varphi(x, y)$, et $\Phi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$.

Note : on ajoute $\left\|\overrightarrow{\partial_s \Phi} \times \overrightarrow{\partial_t \Phi}\right\|$ comme on ajoute la dérivée, parce que comme s et t sont perpendiculaires, le cross-product $\vec{a} \times \vec{b} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\left(\widehat{ab}\right)$ avec $\widehat{ab} = \frac{\pi}{2}$ donc juste $\|\partial_s \Phi\| \cdot \|\partial_t \Phi\|$.

Pour trouver le vecteur normal :

$$\vec{n} = \frac{\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\left\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\right\|}$$

$$\vec{n} = \frac{\partial_\varphi \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\left\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\right\|}$$

Green's Theorem

Il fonctionne en 2D uniquement. On regarde sur la bordure comment ça tourne.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{J} dl = \int \int_{\Omega} \text{curl } \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

avec $\vec{\tau}$ la dérivée de la

Stoke's Theorem

Il fonctionne en 3D.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $F = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$.

Si $n = 2$, alors le **rotationnel** de F est donné par :

$$\text{rot } F(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \in \mathbb{R}$$

Si $n = 3$, alors il est donné par :

$$\begin{aligned} \text{rot } F(x) &= \text{“}(\text{rot } F_{23}, \text{rot } F_{31}, \text{rot } F_{12})'' \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)\right) \end{aligned}$$

Déterminant Jacobienne

En coordonnées sphériques :

$\det = r^2 \sin(\theta)$

En coordonées polaires

$\det = r$

Distributions

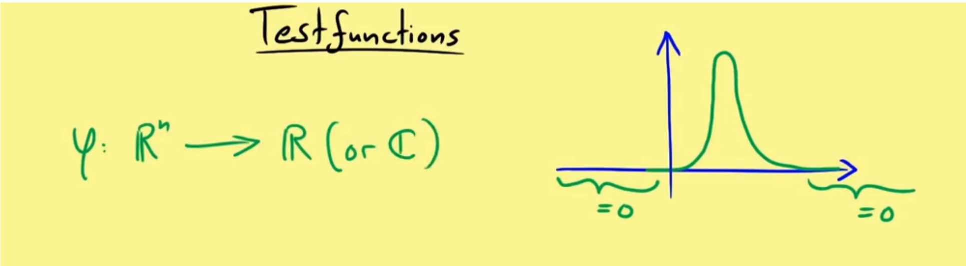
La dérivée est trop "forte" pour considérer les fonctions avec des pics, mais alors comment dériver ces fonctions ?

Dirac H

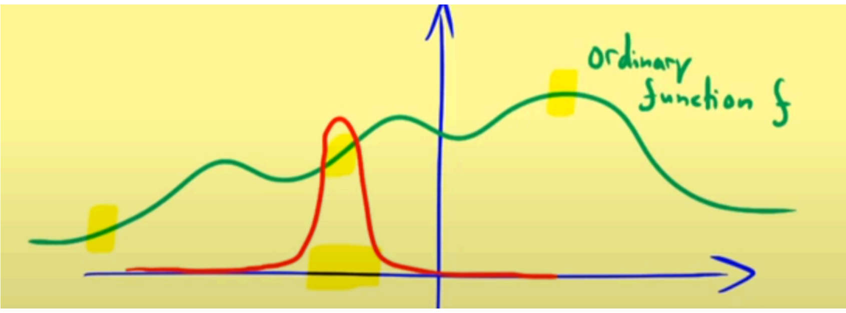
Par exemple, la Heaviside function : $H(x) = 1 \quad \text{if } x \geq 0 \quad \text{else } 0$

La dérivée $H'(x) = \varepsilon(x)$ sera quasiment partout 0 sauf en un point (le jump). Comment avoir une fonction H' comme ça ? En fait on peut considérer cette fonction comme une distribution.

On utilise ensuite une **test function** pour obtenir la densité entre deux points.



$$\varphi \to \int f(x)\varphi(x)dx$$



D c'est l'ensemble des fonctions infinement dérivables (lisses) dont le support est contenu dans un certain intervalle.

Montrer que T est une distribution

- montrer que T est finite :

$$\forall \varphi \in D : |T(\varphi)| < \infty$$

- montrer que T est continue :

$$\forall [a, b] \subset R \ \exists C > 0 \quad \text{(peut dépendre de a, b) t.q } \forall \varphi \in D \quad \text{t.q supp } (\varphi) \subset [a, b] :$$

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{i \geq 0} \max_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x^i \varphi(x)|$$

Pour montrer ça on peut par exemple prendre $i = 0$ et si ça suffit on peut s'arrêter là.

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx\right| = \left|\int_{a}^{b} \varphi(x)dx\right|$$

$$\leq \max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)| \int_a^b 1dx = (b-a) \max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|$$

$$\leq (b-a) \sum_{i\geq 0} \max_{x\in\mathbb{R}} \left|\partial_x^i \varphi(x)\right|$$

Note : le support c'est le domaine de la fonction n'est pas zéro.
Note 2 : T peut être négative et φ aussi.

Distribution derivative

Le produit scalaire mesure à quel point deux vecteurs vont dans la même direction :

$$< X, Y >= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

Généralisation pour les fonctions continues :

$$< F_1, F_2 >= \int_b^a F_1(x) F_2(x) dx$$

Distribution derivative :

$$< f', \varphi >= - < f, \varphi' >= - \int f(x) \varphi'(x) dx$$

$$= -[f(x)\varphi(x)]_0^\infty + \int \varphi(x) dx \ \text{ or } \varphi(\infty) = 0 \ \text{ (une test function vaut 0 en l'infini)}$$

$$= \int \varphi(x) dx$$

Fourier series

Parseval's theorem :

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

Dirichet

Dirichlet conditions (general version) : the Fourier series at x converges whenever $f(x)$ is continuous at x.

$$Ff(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}(f(x_0 + h) + f(x_0 - h))$$

Coefficients

Pour trouver les coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x}{T}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{T}\right) dx$$

(on intègre toujours là où la fonction est définie proprement, par exemple si on étend une fonction définie sur un intervalle fini, on étend de $-L$ à L et pas de 0 à $2L$, où il va y avoir un saut).

parce que ça se simplifie quand on multiplie :

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} mx\right) dx$$

$$= \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} mx\right) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{if } n = m \end{cases}$$

Complex Fourier series

instead of cos and sin we use e^{ix} and e^{-ix}.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} f(x) dx$$

Liens entre a_n et b_n et c_n :

$$c_n = a_n - i b_n$$

$$a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{2}$$

$$b_n = \frac{c_n - c_{-n}}{2i}$$

Transformations de Fourier

Soit $f(x)$ une série de Fourier de coefficient c_n pour une fonction de période T. Si on a une forme similaire, l'objectif c'est de toujours trouver une fonction $g(x)$ qui s'exprime en fonction de f.

Par exemple si on a :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 < x < 0.5 \\ 2 - 2x & \text{if } 0.5 < x < 1 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 < x < \pi \\ 2\pi - x & \text{if } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Là on peut trouver que $g(x) = \pi \cdot f\left(\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\pi}\right)$.

Le $\frac{1}{2\pi}$ c'est pour que la période soit 2π.

Multiplier par π parce qu'on veut que ça aille pas de zero à 1 mais de 0 à pi.

Et on voit qu'en fait seule la multiplication par une constante change les coefficients de Fourier.

Fourier Transform

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

Inverse :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

(the only change is the sign in the exponent)

En fait dans un sens on décompose notre fonction f en une somme de fonctions périodiques avec des fréquences différentes (et on obtient une fonction $\mathcal{F}[f](\alpha)$ qui nous donne les coefficients de Fourier de ces fonctions périodiques en fonction de la fréquence). Et dans l'autre sens on reconstruit notre fonction f en sommant ces fonctions périodiques.

Dérivée

Transformée de Fourier à condition que f tendent à 0 en l'infini (la preuve utilise l'intégration par partie et on utilise que $f(\infty) = f(-\infty) = 0$).

$$\mathcal{F}[f'](\alpha) = i\alpha \mathcal{F}[f](\alpha)$$

Modulation

Scale in/out

$$g(t) = e^{-ibt} f(at)$$

$$\to \hat{g}(\alpha) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\alpha + b}{a}\right)$$

Intuition

Si on connaît $\mathcal{F}[f](\alpha)$. Soit $g(x) = f(2x)$.

$$\mathcal{F}[g(x)](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(2x) e^{-i\alpha x} dx$$

On pose $y = 2x$ donc $x = \frac{y}{2}$ et $dx = \frac{1}{2} dy$.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\alpha \frac{y}{2}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\alpha \frac{y}{2}} dy$$

donc $\alpha' = \frac{\alpha}{a}$ et on multiplie par $\frac{1}{|a|}$.

Si on a $g(x) = f(x - b)$ alors $\alpha' = \alpha$ et on multiplie par $e^{-ib\alpha}$.

Décalage

$$g(x) = f(x - b)$$

$$\to \hat{g}(\alpha) = e^{-ib\alpha} \hat{f}(\alpha)$$

Intuition

$$\mathcal{F}[f(x - b)](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - b) e^{-i\alpha x} dx$$

On pose $y = x - b$ donc $x = y + b$ et $dx = dy$.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\alpha(y+b)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ib\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\alpha y} dy$$

Transformée de Fourier :

F	$\hat{f}$
$\dfrac{1}{t^2+\omega^2}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-\omega\ \lvert\alpha\rvert}$
$\dfrac{e^{-\omega\ \lvert t\rvert}}{\omega}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\dfrac{1}{\omega^2+\alpha^2}\right)$
$\dfrac{\sin(\omega t)}{t}$	$\hat{f}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{if } \lvert\alpha\rvert < \omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
$\begin{cases} 1 & \text{if } \lvert t\rvert < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(b\alpha)}{\alpha}$
$e^{-\omega^2 t^2}$	$\hat{f}(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\omega}e^{-}$
$te^{-\omega^2 t^2}$	$\hat{f}(\alpha) = \dfrac{-i\alpha}{2\sqrt{2}w^3}e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega^2}}$
$\dfrac{4t^2}{\left(\omega^2+t^2\right)^2}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{2\pi}\left(\dfrac{1}{\omega}-\lvert\alpha\rvert\right)e^{-\omega\ \lvert\alpha\rvert}$
$\begin{cases} 1 \text{ if } b < t < c \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \dfrac{e^{-ib\alpha} - e^{-ic\alpha}}{i\alpha\sqrt{2\pi}}$
$\begin{cases} e^{-\omega t} \text{ if } t > 0 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\omega+i\alpha}$
$\begin{cases} e^{-\omega t} \text{ if } t > 0 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(\omega+\alpha)}(\exp(-(\omega+i\alpha)b) - \exp(-(\omega+i\alpha)c))$
$\begin{cases} e^{-i\omega t} \text{ if } t > 0 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \dfrac{1}{i\sqrt{2\pi}(\omega+\alpha)}(\exp(-i(\omega+\alpha)b) - \exp(-i(\omega+\alpha)c))$

Poisson problem

Le petit.

Poisson problem : $-\Delta u = f$ with $a < x < b$ and $u(a) = g_a$ and $u(b) = g_b$.

Two auxiliary problems :

- $-\Delta u^g(x) = 0$ with $u^g(a) = g_a$ and $u^g(b) = g_b$. Le rôle de cette équation est de satisfaire les conditions limites. (I)
- $-\Delta u^f(x) = f(x)$ with $u^f(a) = 0$ and $u^f(b) = 0$. Le rôle de cette équation est de satisfaire $-\Delta u = f$ sans modifier les conditions limites. (II)

If we solve these two problems, we can find the solution to the Poisson problem by

$$u(x) = u^g(x) + u^f(x)$$

.

(I) We know $-u''(x) = 0$ for all x in $[a, b]$. So $u'(x) = c_1$ and $u^{g(x)} = c_1 x + c_2$. We can find c_1 and c_2 by the boundary conditions.

$g_a = C_1 a + C_2$ and $g_b = C_1 b + C_2$.

(II) We use the Fourier series to solve this! For simplicity assume $[a, b] = [0, L]$ we extend F to an odd period function with period $T = 2L$. Odd periodic $\longrightarrow$ only has sine terms. So we can write $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{T}\right)$. Useful because odd function automatically satisfies $u^f(0) = u^f(L) = 0$. (because $\sin(0) = 0$ and $\sin(n\pi) = 0$).

Le méchant.

$$-\Delta u(x) + k^2 u(x) = f(x)$$

On applique la Transformée de Fourier :

$$-\mathcal{F}[\Delta u(x)](\alpha) + k^2 \mathcal{F}[u(x)](\alpha) = \mathcal{F}[f(x)](\alpha)$$

$$-(i\alpha)^2 \mathcal{F}[u(x)](\alpha) + k^2 \mathcal{F}[u(x)](\alpha) = \mathcal{F}[f(x)](\alpha)$$

On factorise :

$$\mathcal{F}[u(x)](\alpha) = (\mathcal{F}[f(x)](\alpha)) \cdot \frac{1}{k^2 + \alpha^2}$$

On cherche $u(x)$ donc on applique la transformée inverse :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}[f(x)](\alpha)) \cdot \frac{1}{k^2 + \alpha^2} e^{i\alpha x} d\alpha$$

Convolutions

On veut calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) g(x - z) dz$$

.

Là on choisit une fonction qui bouge, et une fonction qui reste fixe. On va donc séparer notre intégrale en plusieurs intervalles.

On sait qu'on veut $\text{borne\_g\_bas} \leq x - z \leq \text{borne\_g\_haut}$.

à partir de ça on sait que

$$-\text{ borne\_g\_haut} + x \geq z \geq -\text{ borne\_g\_haut} + x$$

(et on sait que le centre est en x). donc on va déplacer x de telle sorte à ce que $-\text{ borne\_g\_haut} + x \leq x \leq \text{borne\_g\_bas} + x$ soit sur une même définition de fonction de g.

Convolution Theorem
La transformée de Fourier de $f * g$ est $\sqrt{2\pi}\hat{f}(\alpha)\hat{g}(\alpha)$.
Et la transformée de Fourier de $\mathcal{F}(fg)$ est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(\alpha) * \hat{g}(\alpha)$.