Définitions de base

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \det \begin{pmatrix} & + & - & + \\ + & \text{axe1} & \text{axe2} & \text{axe3} \\ - & \text{vect1x} & \text{vect1y} & \text{vect1z} \\ + & \text{vect2x} & \text{vect2y} & \text{vect2z} \end{pmatrix}$$

$$\text{div } F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\vec{x})$$

La divergence est positive si elle se comporte comme une source, négative si elle se comporte comme un puit.

mathbb{R}^2, text{rot} F(x, y) = frac{partial F_2}{partial x} (x, y) - frac{partial F_1}{partial y} (x, y)

mathbb{R}^3, text{rot} F(x, y, z) = left(frac{partial F_3}{partial y} - frac{partial F_2}{partial z}, frac{partial F_1}{partial z} - frac{partial F_3}{partial x}, frac{partial F_2}{partial x} - frac{partial F_1}{partial y} right)

$$\mathbb{R}^2, \text{rot } F(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$$

$$\mathbb{R}^3, \text{rot } F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

La première coordonnée du rotationnel donne l'intensité de la rotation autour de l'axe x, la deuxième autour de l'axe y, la troisième autour de l'axe z.

$$\Delta f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{x})$$

Si le laplacien est strictement négatif, alors $f(x_0)$ est plus grande que sa valeur moyenne au tour de x_0, si le laplacien est strictement positif, alors $f(x_0)$ est plus petite que sa moyenne.

Théorèmes de base

$$\text{div}(\nabla f) = \Delta f$$

$$\text{rot}(\nabla f) = 0$$

car ∇ F pointe vers la plus grande augmentation de f. Or si le rotationnel de ∇ F était différent de zéro, cela signifierait une augmentation de f infinie (on tournerait en boucle!).

$$\text{div}(\text{rot } F) = 0$$

car le rotationnel de F est un champ de vecteurs qui tournent (et ne sortent ou ne rentrent pas dans la surface) donc la divergence, qui mesure cela, est nulle.

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

Formules

Pour une fonction f scalaire :

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))|\gamma'(t)| \ dt \in \mathbb{R}$$

Pour une fonction F à plusieurs dimensions :

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_{a}^{b} \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt \in \mathbb{R}$$