

# Rappels

## Théorème Spectral

On peut décomposer une matrice symétrique  $A$  en  $A = Q\Lambda Q^T$  où  $Q$  est une matrice orthogonale (rotation) et  $\Lambda$  est une matrice diagonale (scalation).

## Série de Taylor

Expontielle :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

## Valeur d'une somme

$$\sum_{x=0}^{\infty} q^x = \frac{1}{1-q} \text{ si } |q| < 1$$

## Indicator Function

$$I(\text{some expression}) = \begin{cases} 1 & \text{if the expression is true} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

## Analyse dimensionnelle

Si on intègre  $f_X$  on trouve une probabilité, donc par exemple une CDF.

Si on intègre  $f_{XY}$  une fois, on trouve une autre fonction de densité de probabilité (de  $X$  ou de  $Y$ ), qu'on peut intégrer pour trouver une probabilité.<sup>21</sup>

## Conditional probability

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

## McLaurin series

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

## Distributions

- **probability mass function** pour les distributions discrètes (binomiale, poisson, etc), **probability density function** pour les distributions continues (exponentielle, normale, etc).
- “distribution function” = “cumulative distribution function”. Donc quand on nous demande la distribution function d'une variable c'est la fonction qui  $\forall t$  donne  $P(X \leq t)$ .
- Quand on demande la PDF souvent c'est plus simple de trouver la CDF puis de dériver.

### P.D.F $\Leftrightarrow$ CDF

On a la P.D.F  $f(x)$  et on veut la C.D.F  $G(y)$ , avec  $Y = \frac{1}{X}$ .

D'abord on définit nos fonctions pour passer de  $x$  à  $y$  :

$$r(x) = \frac{1}{x} \text{ et } s(y) = \frac{1}{y}$$

$$G(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{y}\right)$$

$$G(y) = 1 - F\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{dG(y)}{dy} = \frac{d\left(1 - F\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{dy}$$

$$g(y) = -\frac{dF}{dy}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left|-\frac{1}{y^2}\right| \text{ (on s'intéresse à la croissance, on enlève le signe -)}$$

$$g(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2}$$

Et ensuite pour trouver  $G(y)$  on intègre.

## Expected Value

Continue :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_D(x)xdx$$

Attention, c'est la P.D.F. qu'on intègre, parfois il faut dériver la C.D.F.

## Variance

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

donc, quand continue :

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_D(x)x^2dx - E(X)^2$$

Standard deviation :

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(X)}$$

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2 \text{ cov}(X, Y)$$

$$\text{var}(aX + Y) = a^2 \text{ var}(X) + 2a \text{ cov}(X, Y) + \text{var}(Y)$$

## Covariance

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

if  $X, Y$  are independent then the covariance is zero (the converse is false!).

Linearité de la covariance :

$$\text{cov}(X + Y, Z + W) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(X, W) + \text{cov}(Y, Z) + \text{cov}(Y, W)$$

Nous permet de réécrire la variance de la somme de variables aléatoires :

$$\text{var}(a + bX + cY) = b^2\text{var}(X) + 2bc \text{ cov}(X, Y) + c^2 \text{ var}(Y)$$

## Covariance matrix

Pour un vecteur de variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_p)$

$$\text{var}(X) = \Omega = \begin{pmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{cov}(X_1, X_p) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{var}(X_2) & \dots & \text{cov}(X_2, X_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(X_p, X_1) & \text{cov}(X_p, X_2) & \dots & \text{var}(X_p) \end{pmatrix}$$

Sachant que  $\text{cov}(X_i, X_j) = (\text{notamment}) \text{ corr}(X_i, X_j)\sigma_i\sigma_j$

Pour un vecteur  $(X_1, X_2)$  de correlation  $p$  et de variance  $\sigma_1, \sigma_2$  :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & p\sigma_1\sigma_2 \\ p\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

## Correlation

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\{\text{var}(X)\text{var}(Y)\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\{\text{var}(X)\text{var}(Y)\}^{\frac{1}{2}}}$$

toujours entre  $-1$  et  $1$ .

une corrélation de  $0$  ne signifie pas que les variables sont indépendantes (il peut y avoir d'autres types de corrélation).

On a  $X, Y$  gaussiennes jointes  $\Rightarrow (X, Y \text{ indépendantes} \Leftrightarrow \text{cov}(X, Y) = 0)$

## Moments

On appelle  $E(X^r)$  le  $r$ th moment de  $X$ .

## Moment Generating Function

$$\psi(t) = E(e^{tX})$$

$$= E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n)$$

(on peut sortir les  $t$  et  $n$  de l'espérance car ils ne dépendent pas de  $X$ )

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

Comme on sait que dériver l'espérance de  $X$  revient à prendre l'espérance de la dérivée de  $X$  (ça apparemment ça marche pas dans tous les cas mais ici oui) :

$$E(X^n) = \varphi^{(n)}(0)$$

Comme ça le  $t$  s'annule et il reste juste tous les facteurs  $X$  devant qui s'accumulent.

$$E(X) = \varphi'(0) \text{ et } E(X^2) = \varphi''(0)$$

$$\text{var}(X) = \varphi''(0) - (\varphi'(0))^2$$

On sait que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $E(f(X) \cdot g(Y)) = E(f(X)) \cdot E(g(Y))$  (prouver avec l'intégrale de  $xyf_{X,Y}(x,y)$ ) donc on peut souvent exprimer la MGF d'une variable aléatoire comme le produit des MGF de ses composantes.

## Pour un vecteur

Soit  $X \in \mathbb{R}^p$  un vecteur aléatoire et  $t \in \mathbb{R}^p$  :

En fait les  $t$  c'est juste des points dans l'espace par rapport auxquels on va dériver. On utilise que  $t = 0$  pour avoir la valeur.

On transpose  $t$  pour pouvoir faire le produit scalaire.

$$\begin{aligned} \psi(t) &= E(e^{t^T X}) = E(e^{t_1 X_1 + \dots + t_p X_p}) = E(e^{t_1 X_1} \dots e^{t_p X_p}) \\ &= \psi_1(t_1) \dots \psi_p(t_p) \end{aligned}$$

L'espérance de la  $i$ ème composante du vecteur  $X$  :  $\frac{\partial \psi(t)}{\partial t_i} |_{t=0} = E(X_i)$   
Le vecteur d'espérance est :  $\nabla \psi(t) |_{t=0} = E(X)$

## Cumulant Generating Function

$$K(t) = \log(\psi(t))$$

Pratique car moins de calcul que la MGF pour trouver :

$$K'(0) = E(X) = \mu \text{ et } K''(0) = \text{var}(X) = \sigma^2$$

## Central Limit Theorem

$X_1, X_2, \dots, X_n$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) avec une moyenne  $\mu$  et une variance  $\sigma^2$ .

### Somme de IIDs → normale

Soit  $S = X_1 + \dots + X_n$ .

Le résultat le plus important :

$$S \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

À partir de ça, on peut retrouver une normale centrée en zéro et de variance 1 (on décale de  $n$  fois la moyenne)

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- on décale de  $n \cdot \mu$  la moyenne
- on normalise car  $\text{var}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n\right) = \frac{1}{\sigma^2 n} \text{var}(S_n) = \frac{1}{\sigma^2 n} n\sigma^2 = 1$ .

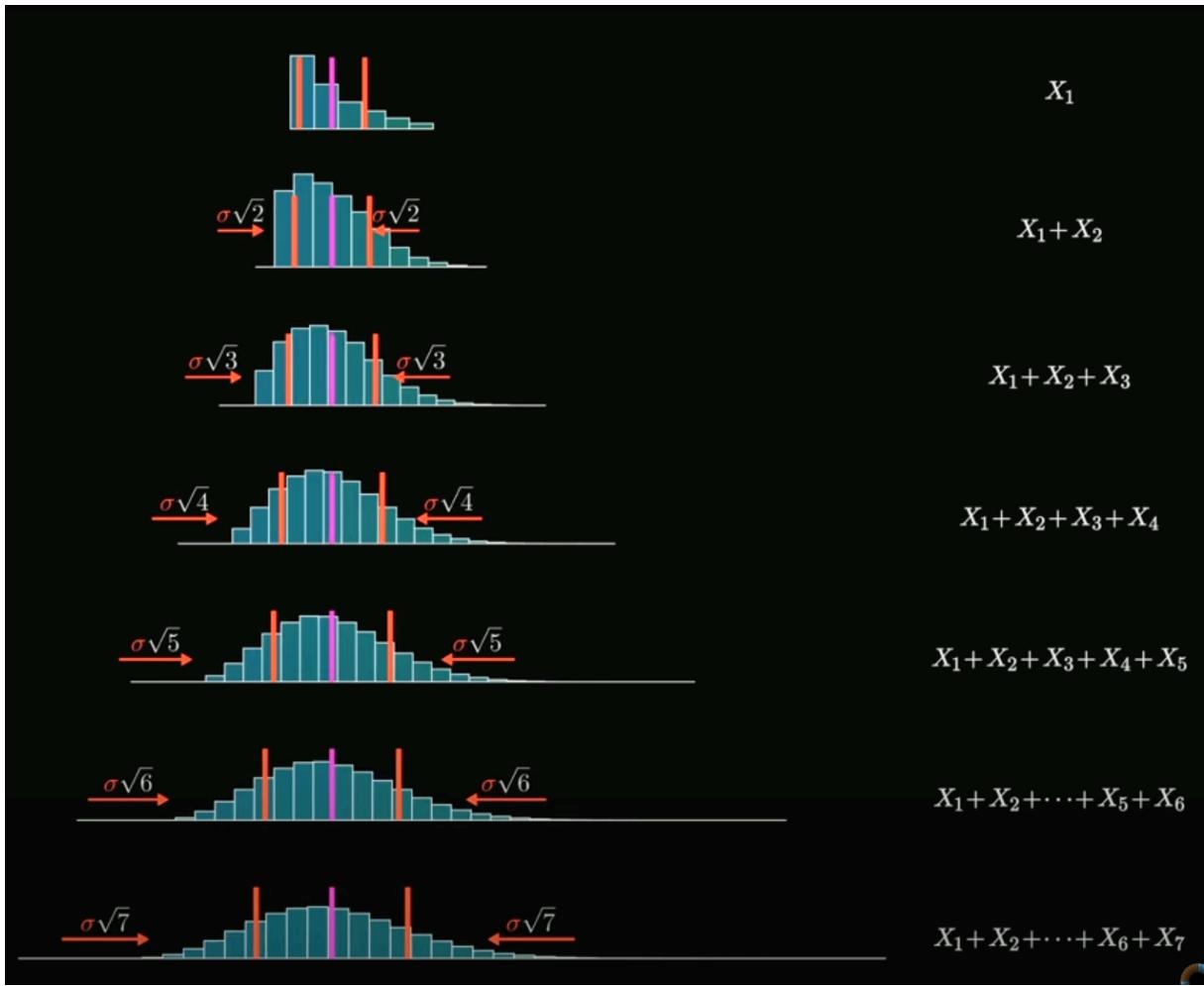
Et en moyenne,

$$\overline{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

On retrouve

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

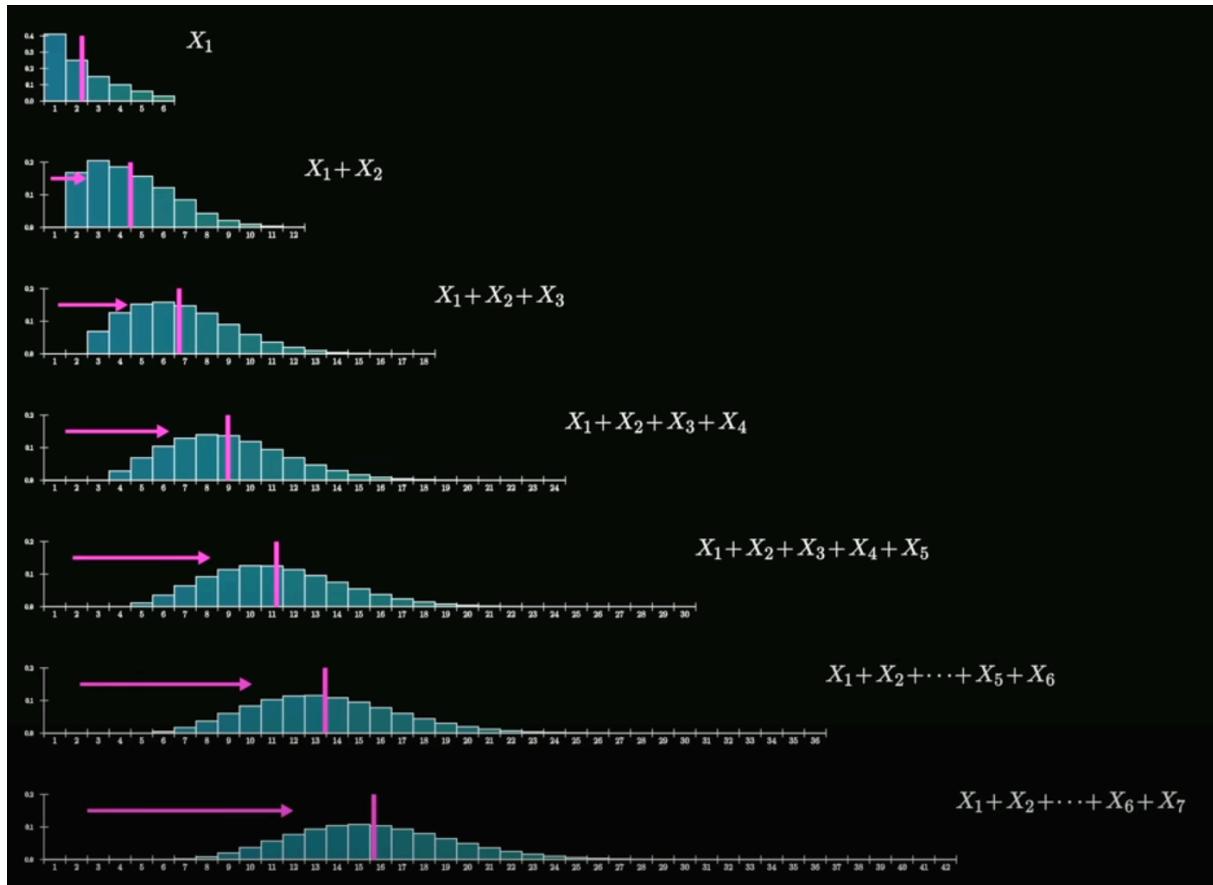
(la variance augmente avec la taille de l'échantillon, et on doit multiplier par  $\sqrt{n}$  pour “rescale” – voir les captures dessous).



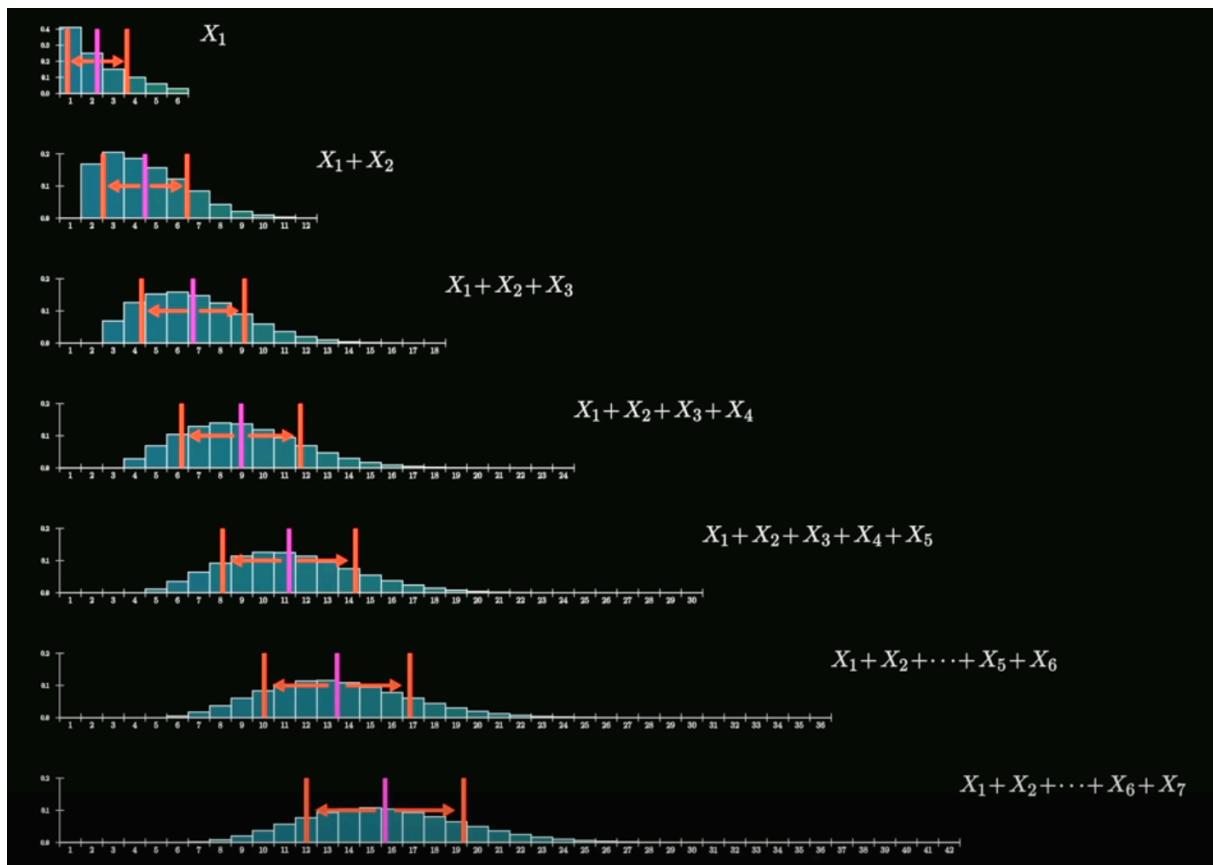
attention quand on approime avec des nombres petits on doit faire attention à utiliser les bonnes bornes  $P(X \leq x) \neq 1 - P(X > x)$  mais  $P(X \leq x) = 1 - P(X < x + \varepsilon)$  (ou  $\varepsilon = 1$  dans le cas d'un entier)

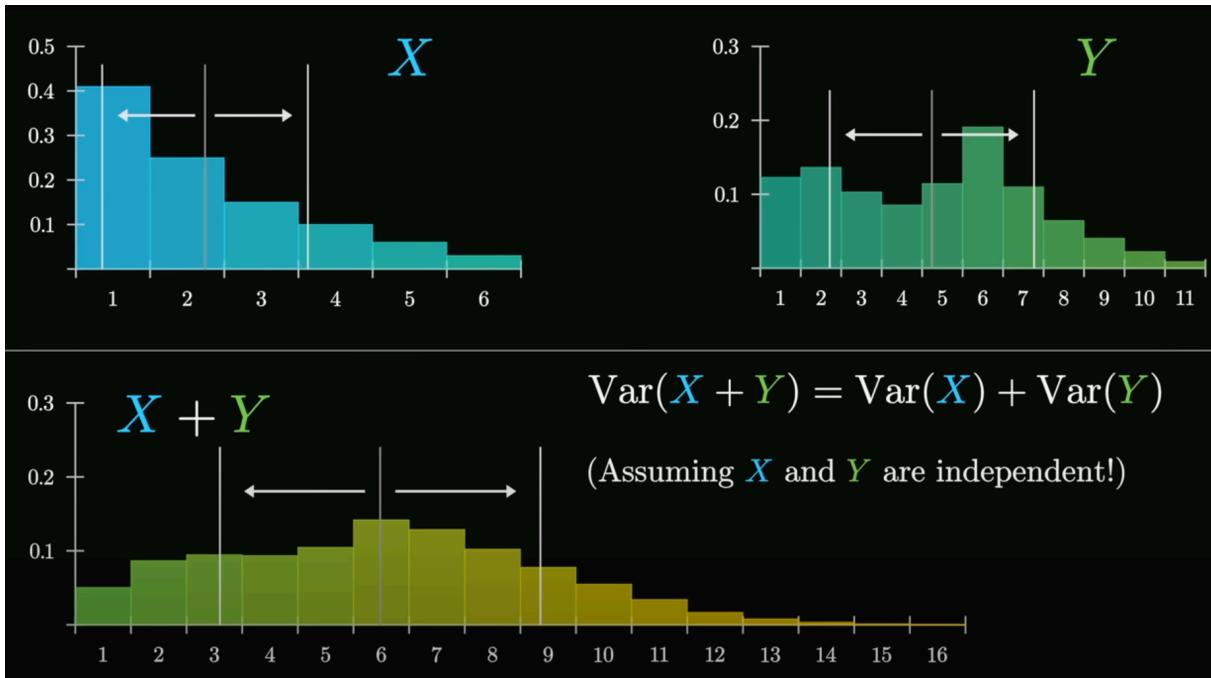
## Intuition

Quand on calcule une somme de variables aléatoires, la moyenne est multipliée par  $n$ :



mais change également la standard deviation :





Du résultat ci-dessus, on sort :  $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$  donc pour  $n$ , on a  $\sigma_{X+X+\dots+X}^2 = n\sigma_X^2$ .

### Continuity Correction

When we use the normal approximation to the binomial distribution, we often use a continuity correction. This means that we adjust the boundaries of the interval by 0.5 in each direction.

For instance, let's say that we want to find  $P(X \leq 3)$  where  $X$  is a binomial random variable with parameters  $n = 10$  and  $p = 0.3$ . We can use the normal approximation to find  $P(X \leq 3.5)$ .

En fait je pense que c'est lié au fait que la valeur 3.5 n'existe pas dans la binomiale mais elle existe bien dans la normale. Il faut donc rattacher tout ce qui va de 3 à 3.5 à 3.

## Joint random variables

Conditional pdf (2 variables)

$$f_{X/Y}(x/y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) f_Y(y) dy$$

## Law of total variance

$$\text{var}(Y) = E[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}(E[Y|X])$$

Le premier terme a du sens : la variance de  $Y$  c'est la moyenne des variances de  $Y$  sachant que  $X$  est égal à une valeur particulière. Mais on doit aussi prendre en compte que le fait que  $Y/X$  varie beaucoup ou soit lisse influence aussi la variance de  $Y$ .

[See this thread.](#)

## Multivariate normal distributions

Le vecteur  $X$  suit une distribution normale multivariée si toute combinaison linéaire de ses composantes suit une distribution normale univariée, c-a-d  $\forall u \in \mathbb{R}^p$ :

$$u^T X \sim \mathcal{N}(u^T \mu, u^T \Omega u)$$

## Combinaisons linéaires de normales

Les combinaisons linéaires de variables normales sont normales :

$$a_{r \times 1} + B_{r \times p} X \sim \mathcal{N}(a + B\mu, B\Omega B^T)$$

## indépendants

Si on a  $X_1, \dots, X_n$  indépendants  $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  then  $X_{n \times 1} = (X_1, \dots, X_n)^T \sim \mathcal{N}_{n(\mu 1_n, \sigma^2 I_n)}$

Le  $1_n$  c'est pour transformer la moyenne en un vecteur de taille  $n$ .

Le  $I_n$  c'est pour avoir une matrice diagonale de taille  $n$  (parce que comme les variables sont indépendantes, la matrice de covariance est diagonale).

## Conditional

Let

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_{p \times 1}, \Omega_{p \times p})$$

(en bref,  $X$  est une variable aléatoire normale de dimension  $p$ ).

Maintenant, si on connaît une ou plusieurs des composantes (normales, donc) de  $X$ , on peut calculer la distribution conditionnelle des autres composantes. Et ce sera une distribution normale aussi.

Mettons qu'on connaisse l'ensemble  $\mathcal{B}$  des composantes et qu'on cherche la distribution conditionnelle des autres, on obtient

$$(X_{\mathcal{A}} | X_{\mathcal{B}} = x_{\mathcal{B}}) \sim \mathcal{N}(\mu_A + \Omega_{A,B} \Omega_{B,B}^{-1} (x_B - \mu_B), \Omega_{A,A} - \Omega_{A,B} \Omega_{B,B}^{-1} \Omega_{B,A})$$

où  $\Omega_{A,B}$  est la matrice des covariances où on garde les lignes  $A$  et les colonnes  $B$ .

Parfois  $\Omega_{A,A}$  s'écrit  $\Omega_A$ .

## Transformations

p. ex. on veut savoir si le résultat du dé est pair ou non :

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = g^{-1}(\mathcal{B}) \quad \{0, 1\} = \mathcal{B}$$

On prend un sous-ensemble de  $B$ .

## Markov inequality

If  $X$  takes only real positive values. Let  $a \in \mathbb{R}^*$ . Then :

$$P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

## Convolution

$$f_{Z(z)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

En fait là on cherche tous les moyens d'arriver à un certain  $z$  donc on ne fait varier que  $y$ , et après on complète avec le  $x$  qui reste.

maintenant, si on cherche :

$$\begin{aligned} F_{Z(z)} &= P(Z \leq z) \\ &= \int_0^z \int_0^{z-y} f_X(z-y) f_Y(y) dx dy \end{aligned}$$

## Inequalities

Let  $X$  a random variable,  $a > 0$ ,  $h$  a non-negative function and  $g$  a convex function.

Basic inequality :

$$P(h(X) > a) \leq \frac{E(h(X))}{a}$$

Markov's inequality :

$$P(|X| > a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Chebyshov's inequality :

$$P(|X| > a) \leq \frac{E(X^2)}{a^2}$$

or

$$P(|X - E(X)| > a) \leq \frac{\text{var}(X)}{a^2}$$

Jensen's inequality :

$$E(g(X)) \geq g(E(X))$$

## Convergence

From the strongest to the weakest. Note that these are examples in the general cases, but there are exceptions (for instance conv. in distrib.  $\rightarrow$  conv. in probability if they converge to a constant).

### in mean square

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E((X_n - X)^2) = 0$$

where  $E(X_n^2), E(X^2) < \infty$

### in probability

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

for all  $\varepsilon > 0$

(square it and use Markov's inequality to prove that mean square convergence implies convergence in probability)

### in distribution

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

for all  $x$  where  $F$  is continuous.

### conv. probability $\not\Rightarrow$ conv. mean square

On prend  $X_n$  telle que la proba d'être zéro est forte et la proba d'être très grand est faible et  $X = 0$ .

- $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$
- $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$

On a  $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = \frac{1}{n}$  qui tend vers 0 à l'infini donc  $X_n$  converge en probabilité vers 0.

$(E((X_n - X)^2) = E(X_n^2) = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n)$  donc  $X_n$  ne converge pas en moyenne quadratique).

### conv. in distribution $\not\Rightarrow$ conv. in probability

On prend  $X_0$  choisi uniformément entre 0 et 1 et  $X_{2n} = X_0$  (donc  $X_{2n}$  est constant). On prend  $X_{2n+1} = 1 - X_0$ .

$X_{2n}$  suit donc une distribution uniforme  $\sim U[0, 1]$  et  $X_{2n+1} \sim U[0, 1]$  aussi (montrons-le avec la CDF, si on veut la probabilité que  $X_{2n+1} \leq 0.2$  on veut la probabilité que  $1 - X_0 \leq 0.2$  on veut  $X_0 \geq 0.8$ , or  $X_0$  est uniforme donc  $\mathbb{P}(X_0 \leq 0.2) = \mathbb{P}(X_0 \geq 0.8)$ ). Donc  $X_n$  converge en distribution vers  $X_0$ .

Par contre,  $X_n$  ne converge pas en probabilité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n - X_0| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|X_{2n} - X_0| > \varepsilon \wedge |X_{2n+1} - X| > \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(|X_0 - X_0| > \varepsilon \wedge |1 - X_0 - X_0| > \varepsilon) \\ &= 0 + q \end{aligned}$$

$q \neq 0$  car il y a des exemples où  $1 - 2X_0 \neq 0$  (par exemple si  $X_0 = 0.2$ ).

Donc  $X_n$  ne converge pas en probabilité.

## Law of large numbers

Let  $X_1, X_2, \dots, X_n$  be i.i.d. random variables with  $E(X_i) = \mu$  (finite), then the sample average  $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  converges in probability to  $\mu$ .

## Maximum and minimum distributions

$$\begin{aligned} & P(\min(X_1, \dots, X_n) < x) \\ &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) \geq x) \\ &= 1 - P(X_1 \geq x, \dots, X_n \geq x) \\ &= 1 - P(X_1 \geq x) \dots P(X_n \geq x) \\ &= 1 - (1 - F(x))^n \end{aligned}$$

## Statistics

$Y_1, \dots, Y_n$  are i.i.d. random variables and  $y_1, \dots, y_n$  are the observed values.

We will assume that the distribution of  $Y$  is  $f(y, \theta)$  where  $\theta$  is a parameter.

### Method of moments

We have this dataset from that we want to recover normal distribution parameters.

We know that theoretically  $E(Y) = \mu$  and that

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \mu$$

. We also know that theoretically  $\text{var}(Y) = \sigma^2$  and that

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 = \sigma^2$$

Therefore we can estimate  $\mu$  and  $\sigma^2$  from the dataset.

### Maximum likelihood estimation (MLE)

The **likelihood** is defined as  $L(\theta) = f(x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$  (since all the  $x_i$  are independent)

We want to find the value of  $\theta$  that maximizes the likelihood.

To do so, we usually take the log of the likelihood - because it's easier to work with and because the log is a monotonic function - and then we differentiate it with respect to  $\theta$  (e.g. with respect to  $\mu$  and  $\sigma^2$ ) and set it to zero, then solve for  $\theta$ .

En fait en faisant ça on maximise la probabilité que les données observées soient générées par le modèle.

### M-estimation

généralisation de la méthode du MLE

On utilise pas forcément L, mais n'importe quelle fonction  $\rho$ . Dans le cas du MLE  $\rho(x, \theta) = \log(f(x, \theta))$ .

$\rho$  est souvent concave (comme ça on a un seul maximum) et différentiable.

On peut p. ex prendre  $\rho(x, \theta) = -(x - \mu)^2$  pour la "least squares estimation".

### Bias

$$\text{bias}(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

p. ex. pour une distrib normale :

$$\text{bias}(\hat{\mu}) = E(\hat{\mu}) - \mu = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) - \mu = \mu - \mu = 0$$

mais

$$\text{bias}(\hat{\sigma}^2) = E(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 = \dots = -\frac{\sigma^2}{n}$$

For example, an estimator that is equally likely to underestimate  $g(\theta)$  by 1,000,000 units or to overestimate  $g(\theta)$  by 1,000,000 units would be an unbiased estimator, but it would never yield an estimate close to  $g(\theta)$ . Therefore, the mere fact that an estimator is unbiased does not necessarily imply that the estimator is good or even reasonable.

## Pivotal

Un pivot c'est p. ex. le maximum d'une distribution uniforme  $[0, \theta]$  divisé par  $\theta$ . En fait on normalise pour que notre variable ne dépende plus de  $\theta$ .

## Confidence intervals

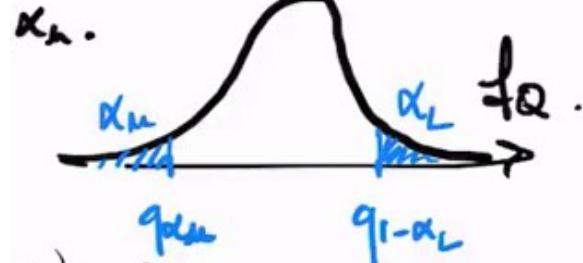
On a des données  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , on a estimé un paramètre. On construit un intervalle de confiance :

- lower confidence bound  $L$
- upper confidence bound  $U$

$L = l(Y)$ ,  $U = u(Y)$ . They do not depend on the parameter.

Si on veut un intervalle de confiance de 95%, on prend  $\alpha = 0.05$ ,  $\alpha_U = 0.025 = \alpha_L$ .

- find a pivotal quantity  $Q(Y, \theta)$
- obtain the associated quantiles  $q_U$  and  $q_L$  of  $Q(Y, \theta)$



- transform the equation  $P(q_{\alpha_U} \leq Q(Y, \theta) \leq q_{\alpha_L}) = (1 - \alpha_L) - \alpha_U$  into  $P(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha_L - \alpha_U$

$q_{\alpha_U}$  c'est la valeur telle que  $P(Q \leq q_{\alpha_U}) = \alpha_U$ .

**On a pas de pivot simple → normal approximation**

[https://en.wikipedia.org/wiki/97.5th\\_percentile\\_point](https://en.wikipedia.org/wiki/97.5th_percentile_point)

$Y$  doit être une variable aléatoire normale ou peut être approximée à une normale en faisant une approximation avec le théorème central limite.

$$\bar{Y} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

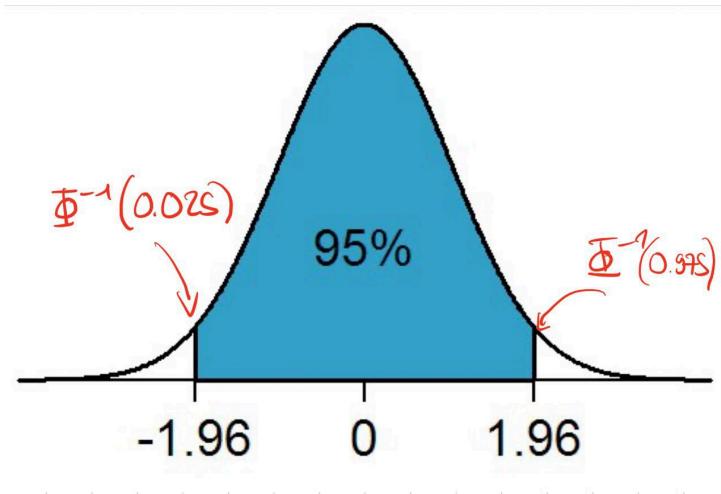
$$Z = \frac{\bar{Y} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ on isole } \mu = \bar{Y} - Z\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

ça nous permet de trouver un intervalle de confiance pour  $\mu$  (sachant que  $Y$  n'est pas forcément centrée en zéro) :

$$\bar{Y} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{Y} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\bar{Y} - 1.96 \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{Y} + 1.96 \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Si on a  $\alpha = 0.05$  (on veut un intervalle de confiance de 0.95), on prend  $\Phi^{-1}(0.025) = -1.96$  et  $\Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ .



### Améliorer l'intervalle de confiance

pour diviser l'intervalle de confiance, ce qui compte c'est le terme  $+ -d$ . Même si le  $\hat{Y}$  bouge, ce qui compte pour la longueur de l'intervalle donc si on fait 4 fois plus de mesures  $n' = 4 \cdot n$ , la longueur de l'intervalle sera divisée par 2.

## Hypothesis testing

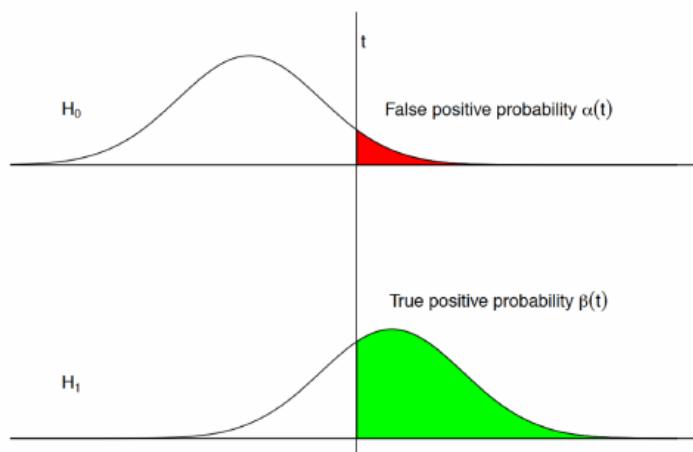
null hypothesis  $H_0$  and alternative hypothesis  $H_1$ . Elle couvre toutes les possibilités non couvertes par  $H_1$ , car, pour que la logique soit respectée ( $\neg H_1 \rightarrow H_0$ ).

### Faux positifs et faux négatifs

- false positive : on dit que  $H_0$  est fausse alors qu'elle est vraie. (en fait un **positif** revient à détecter une valeur bizarre qui va faire rejeter  $H_0$ ).
- false negative : on dit que  $H_0$  est vraie alors qu'elle est fausse. (une valeur aurait dû être détectée et nous faire rejeter  $H_0$ ).

La taille d'un test c'est la probabilité de faux positifs (rejeter  $H_0$  alors qu'elle est vraie).

La puissance d'un test c'est  $1 - P_{\text{faux negatifs}}$ . C'est la capacité du test à rejeter  $H_0$  quand elle est fausse.



On ne peut pas minimiser les false positive sans commencer à rendre notre test incapable de détecter les true positive.

### Simple/Composite hypothesis

Simple hypothesis entirely specifies the distribution of the data while composite hypothesis does not.

### Pearson/Chi-Square statistics

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$T \sim \chi_{k-1}^2$$

avec  $k - 1 = v$  le degré de liberté. Ici le degré de liberté est  $k - 1$  car on a  $k$  catégories et on a fixé la somme des  $O_i$  (on sait que  $O_1 + \dots + O_k = n$ ).

On a une table qui nous donne, pour un degré de liberté donné, la valeur de la cumulative de la distrib. du chi-square.

$$p_{\text{obs}} = \mathbb{P}_0(T \geq t_{\text{obs}}) \text{ avec } t_{\text{obs}} \text{ la valeur calculée comme } \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}.$$

### Neyman-Pearson lemma

On définit une statistique de test  $R = \sum_{j=1}^n Y_j$ .

On introduit la fonction :

$$g(r) = \frac{f_1(y)}{f_0(y)} = \frac{f_1(y_1) \cdot f_1(y_2) \cdot \dots \cdot f_1(y_n)}{f_0(y_1) \cdot f_0(y_2) \cdot \dots \cdot f_0(y_n)}$$

Notez qu'il s'agit d'un produit, et non d'une somme, car nous voulons que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  soient chacun probables sous  $H_1$ .

On définit  $g(r)$  en fonction de la somme des variables, et non de chaque variable individuelle :

$$g(r) = \frac{f_1(y)}{f_0(y)} > t$$

Ensuite, nous nous demandons : si  $r$  augmente (c'est-à-dire que la valeur globale des  $Y$  augmente), la probabilité d'accepter  $H_1$  augmente-t-elle ? Si oui, nous déterminons le seuil  $r_\alpha$  au-delà duquel  $H_1$  devient significativement plus probable que  $H_0$ . À l'inverse, si diminuer  $r$  augmente la probabilité d'accepter  $H_1$ , nous trouvons le seuil  $r_\alpha$  en dessous duquel  $H_0$  est rejeté.

Nous choisissons une probabilité de faux positifs  $\alpha$  (par exemple, 0.05). Ensuite, nous trouvons  $r_\alpha$  tel que la probabilité sous  $H_0$  que  $R$  dépasse (ou est inférieure)  $r_\alpha$  est égale à  $\alpha$  :

$$P_{H_0}(R \geq r_\alpha) = \alpha.$$

Comme  $R$  est typiquement une somme de variables aléatoires indépendantes, nous pouvons l'approximer à l'aide du théorème central limite :

$$P_{H_0}(R \geq r_\alpha) = P_{H_0}\left(\frac{R - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \geq \frac{r_\alpha - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{r_\alpha - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}}\right) = \alpha.$$

Pour trouver  $r_\alpha$ , on l'isole en utilisant l'inverse de la fonction de répartition cumulative  $\Phi^{-1}$ .