Chapitre 5

Courant électrique, résistance, puissance et circuits DC

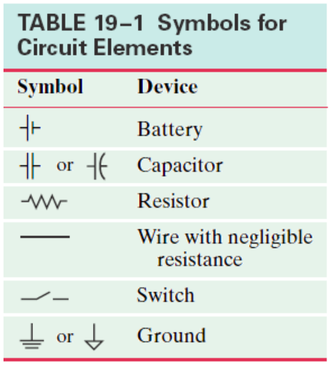
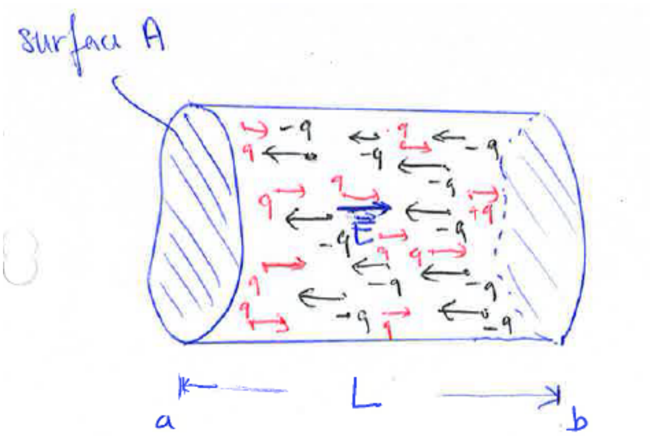


TABLE 19–1 Symbols for Circuit Elements

Symbol	Device
	Battery
or	Capacitor
	Resistor
	Wire with negligible resistance
	Switch
or	Ground

5.1 Le courant électrique

Fin de l'électrostatique : dorénavant les charges peuvent bouger. L'argument utilisé pour conclure que $\vec{E} = 0$ dans les conducteurs n'est plus valable.
Considérons un conducteur ($\vec{E} \neq 0$, et on permet aux charges de bouger...)



$$V_a - V_b = V \Rightarrow E = \frac{V}{L} \quad (5.1)$$

Déf. 'courant électrique' : quantité de charge nette qui passe à travers la surface A par unité de temps.

$$i = \frac{dQ}{dt}; \quad [i] = \frac{C}{s} = \text{A} \qquad \text{"ampère"} \tag{5.2}$$

Note 5.1. *Le courant électrique est une quantité scalaire, liée au conducteur spécifique que l'on considère.*

Note 5.2. *Le courant a un signe, donc une direction. La convention est que la direction du courant est celle du mouvement des charges positives (même si ce sont les électrons qui bougent !).*

Deux conditions pour avoir un courant :

(1) Porteurs de charge libres de bouger
(2) Champ électrique (ou différence de potentiel) $\neq 0$

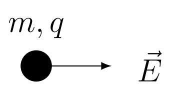
5.2 Résistivité et résistance électriques

Naturellement, le courant passe uniquement si on applique un champ $\vec{E}$, ou une différence de potentiel ΔV. Mais combien de courant passe pour un E (ou un ΔV) donné ?

⇒ **Résistivité et résistance**

Analyse microscopique.

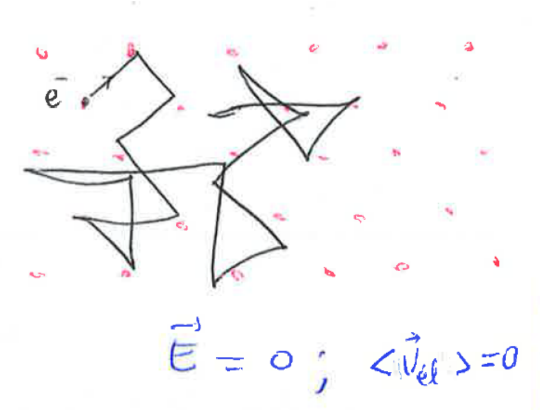
Charge q, avec masse m



Équation du mouvement :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

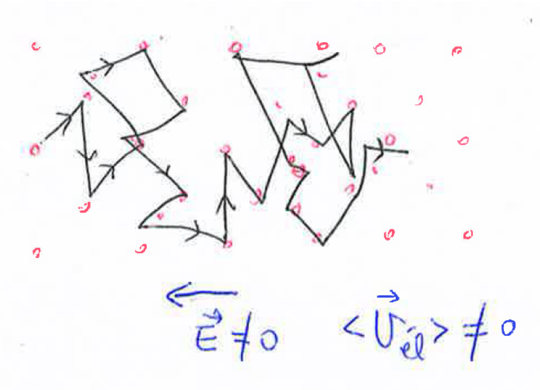
Si $|\vec{E}| \neq 0, |\vec{v}|$ augmente tout le temps : $|\vec{v}| \to \infty$
Mais est-ce possible, en particulier si les charges sont dans un objet matériel ? Non, car il y a de la résistance !
Analogie avec la gravité : si on saute avec un parachute, on n'accélère pas à l'infini, car il y a le frottement de l'air, et on atteint une 'vitesse terminale'.
Quelle est l'origine du 'frottement' (résistance) pour les charges ?
Métal : les atomes et ions forment un réseau qui vibre, mais en moyenne restent au même endroit. Par contre, un certain nombre d'électrons se déplacement librement.



La source du mouvement désordonné est la température. Les électrons sont beaucoup plus légers et mobiles, et leur mouvement thermique est bien plus significatif pour la même température. Ils rebondissent dans le réseau du métal, mais si $E = 0$, en moyenne $< \vec{v}_{él} >= 0$

Note 5.3. $< \vec{v}_{él} >= 0$, *mais* $v_{th,él.} \simeq 10^6 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *à température ambiante* $\left[v_{th,él} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_e}} \right]$

Si $\vec{E} \neq 0$, les électrons ont toujours un mouvement aléatoire très rapide, mais avec une moyenne $\neq 0$.



$$< \vec{v}_{él.} > \neq 0$$

On peut quantifier le terme de frottement contre les ions du réseau comme un terme de frottement classique, proportionnel à $|\vec{v}|$.

$$m\frac{d\vec{v}_d}{dt} = q\vec{E} - \underbrace{f\vec{v}_d}_{frottement} \tag{5.3}$$

équation du mvt. pour la vitesse ordonnée, "de dérive"

Etat stationnaire :

$$\frac{d\vec{v}_d}{dt} = 0 \tag{5.4}$$

(mais pas statique ! $\vec{v}_d \neq 0$)

$$q\vec{E} = f\vec{v}_d, \quad \text{où} \quad \vec{v}_d = \text{vitesse de dérive terminale} \tag{5.5}$$

$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{f}$; <u>note</u> $v_d << v_{\text{th, él.}}$; typiquement, dans un métal $v_d \sim 10^{-3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

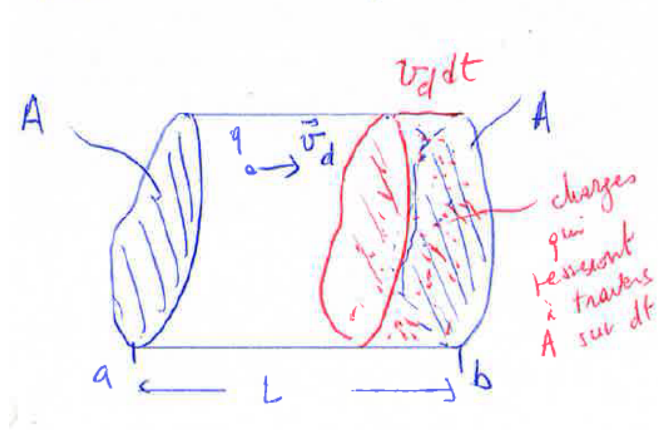
<u>Discussion</u>.

Pourquoi quand on allume une lampe, on ne doit pas attendre le temps correspondant à $\Delta t = \frac{\text{distance (lampe-interrupteur)}}{v_d}$ (qui serait assez long..) ?

...c'est comme quand un peloton de soldats est mis en marche par l'ordre d'un sergent... tous les soldats commencent à marcher en même temps, les premiers n'ont pas besoin d'attendre que les derniers arrivent là où ils sont. La commande s'est propagée bien plus vite que la marche.

Dans notre cas la 'commande' est la différence de potentiel. A quelle vitesse pensez-vous que celle-ci se propage ?

Vision microscopique de notre conducteur



$$E = \frac{V_a - V_b}{L} = \frac{V}{L} \qquad (5.6)$$

Quelles charges passent à travers A sur le temps dt ?

→ celles qui étaient à une distance de A inférieure ou égale à $v_d dt$

Donc :

$$i = \frac{\text{charge à travers } A \text{ sur } dt}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{q \times \#\text{charges dans volume } Av_d dt}{dt} = \qquad (5.7)$$

$$= q \underbrace{n_q}_{\frac{\#\text{ de charges}}{volume}} \underbrace{Av_d \cancel{dt}}_{\text{volume}} \frac{1}{\cancel{dt}} = nqv_d A; \qquad (5.8)$$

Cette valeur dépend de A, donc de la géométrie du conducteur spécifique considéré.

<u>Déf.</u>

$\vec{J}$ densité de courant $[J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

$\vec{J}$ est tel que $\vec{J} \cdot \vec{A} = i$ [i est donc équiparable à un flux]

$\vec{J}$ est une quantité locale qui décrit le flot de charge en général, indépendamment du conducteur spécifique.

Comme $i = n_q q v_d A \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = n_q q \vec{v}_d$

Note 5.4. *Si on a plusieurs (N) espèces de porteurs de charge (ex. ions et électrons), alors* $\vec{J} = \sum_{j=1}^{N} n_{q_j} q_j \vec{v}_{d_j}$

Maintenant, nous voulons revenir à l'estimation de la résistivité, pour laquelle on veut exprimer $\vec{J}$ en fonction de $\vec{E}$.
Considérons, par simplicité, une seule espèce (typiquement les électrons)

$$\underbrace{\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{f}}_{\text{vitesse "terminale"}} \quad \Rightarrow \vec{J} = n_q q \vec{v}_d = n_q q \frac{q\vec{E}}{f} = \underbrace{\left(\frac{n_q q^2}{f}\right)}_{\text{const.}} \vec{E} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\underbrace{\rho}_{\rho\ =\ \text{résistivité}}} \vec{E} \tag{5.9}$$

La résistivité $\rho = \dfrac{f}{n_q q^2}$, est donc une mesure de la friction : plus il y en a, moins de densité de courant sera générée par un E donné.

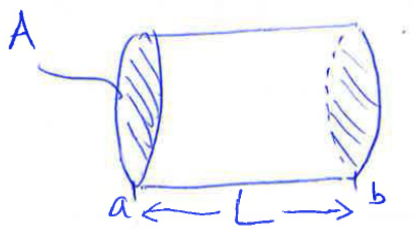
Note 5.5. *Plus de porteurs de charge (on plus de charges par porteur), plus facile sera de faire passer un courant*

$$[\rho] = \frac{\mathrm{V}}{\cancel{\mathrm{m}}} \frac{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}{\mathrm{A}} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \mathrm{m}\Omega \quad \text{"ohm-mètre"} \tag{5.10}$$

ρ dépend du matériau (isolant, semi-conducteur ou conducteur).
Question : si on applique une différence de potentiel sans augmenter la vitesse des porteurs de charges, où va notre 'travail', donc l'énergie ?
Ex. gravité : si on tombe avec un parachute, la force de gravitation fait un travail sur nous, mais une fois arrivés à notre vitesse terminale, nous n'accélérons plus. Où va le travail ?
$\rightarrow$ dans l'échauffement de l'air dû au frottement. Avec un parachute/ une personne on ne verra pas d'effet, mais avec $\sim 10^{23}$ parachutes, on devrait voir un échauffement de l'air !
Le même concept s'applique au courant électrique : l'énergie va dans l'augmentation des oscillations du réseau avec lequel les électrons rentrent en collision.
Revenons à la résistivité : on veut passer de la propriété d'un matériau en général à celle d'un bout de conducteur "réel".

$\rightarrow$ **Résistance** déf. $R \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{V}{i}$ pour un objet donné

$[R] = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega$ "ohm" ; symbole 



$$V_a - V_b = V; \qquad \vec{J} = \frac{1}{\rho}\vec{E}; \qquad \vec{J}\cdot\vec{A} = JA$$

$$i = JA = \frac{1}{\rho}EA \underset{E=\frac{V}{L}}{=} \frac{1}{\rho}\frac{V}{L}A = \frac{A}{\rho L}V$$

$$\Rightarrow R = \frac{V}{i} = \rho\frac{L}{A}$$

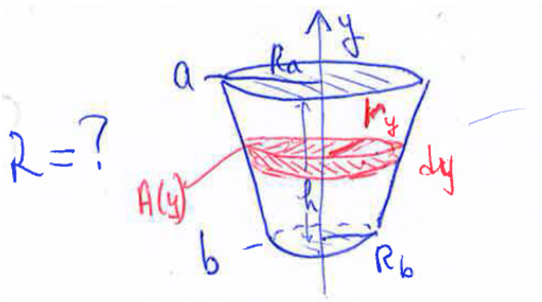
matériau

géométrie (cylindrique)

Note 5.6. *En général, nous considérons dans ce cours $\vec{J}\perp\vec{A}$, donc $\vec{J}\cdot\vec{A} = JA = i$.*

Pour résoudre les problèmes de calcul de résistance, on essaye toujours de se référer au cas du conducteur cylindrique (fil).

<u>Ex.</u> de calcul : quelle est la résistance entre les deux faces d'une tranche de cône de résistivité ρ ?

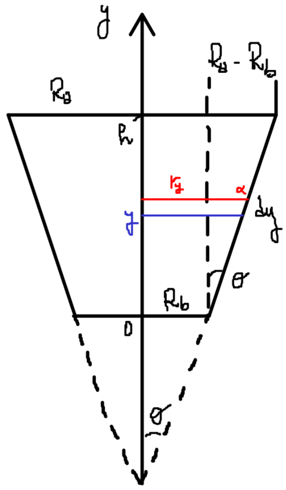


- on considère une couche d'épaisseur dy ;
- cette couche peut être considérée approximativement comme un cylindre ;
- résistance de la couche $dR = \rho\frac{dy}{A(y)}$.

La résistance totale sera, intuitivement, la somme des résistances de toutes les couches [on verra que cela est la cas en général pour les résistances en série, et les couches sont connectées en série].

$$R_{tot} = \int_0^h \rho\frac{dy}{A(y)} = \int_0^h \rho\frac{dy}{\pi r_y^2} \qquad (5.11)$$

$$r_y = ?$$



$$r_y = R_b + \alpha = R_b + y\,\mathrm{tg}\,\theta = R_b + y\frac{R_a - R_b}{h}$$

$$R_{tot} = \int_0^h \rho \frac{dy}{\pi \left[R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y\right]^2}; \qquad \xi = R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y; \qquad d\xi = \frac{R_a - R_b}{h} dy$$

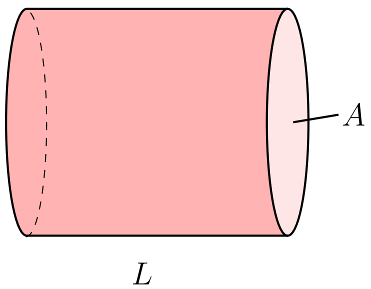
$$\Rightarrow R_{tot} = \int \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \frac{d\xi}{(\xi)^2} = \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \left[- \frac{1}{R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y} \right]_0^h =$$

$$= \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \left[\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a} \right] = \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a R_b}$$

Note 5.7. *Si* $R_a = R_b = R_0 \Rightarrow R_{tot} = \frac{\rho h}{\pi R_0^2}$, *et on retrouve le résultat qu'on devrait avoir pour un cylindre.*

5.3 Résistance électrique et loi d'Ohm

Reprenons notre "cas de base" : **conducteur cylindrique (fil)**



$$R = \rho \frac{L}{A} = \left(\frac{f}{n_q q^2} \right) \frac{L}{A} \qquad (5.12)$$

La résistance est <u>définie</u> comme $R = \frac{V}{i}$, c'est à dire le facteur de proportionnalité entre différence de potentiel et courant.
Donc en général on mesure $V = iR$.
Mais, attention ☡, la <u>loi d'Ohm</u> est $\boxed{V = iR}$, avec R indépendante de i et de V.
Si non, la relation entre i et V peut ne pas être de simple proportionnalité. Si $R = R(i)$ ou $R = R(V)$, alors la loi d'Ohm perd son sense, et on parle de conducteur "non-ohmique".
Pouvons-nous imaginer une situation dans laquelle $R = R(i)$, ou $R = R(V)$?
On peut penser aux facteurs qui peuvent influencer la valeur de $R = \frac{f}{n_q q^2} \frac{L}{A}$ (pour un conducteur cylindrique).
En effet, on peut penser de modifier le facteur f, qui quantifie le frottement, ou la difficulté des porteurs de charge à passer à travers le matériel (le réseau solide du métal par ex.).
Les oscillations du réseau sont déterminées par sa <u>température</u>. Si on le refroidit, on réduit les oscillations thermiques, en rendant plus facile le passage de charges. On devrait donc réduire f, et R. Vice versa, on augmente f et R quand on augmente la température.

Typiquement $R = R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, avec $\alpha \simeq const.$, paramètre qui dépend de la nature du matériau.

5.4 Puissance électrique

Si on fait passer un courant assez fort, on peut avoir $R = R(i)$, parce que $T = T(i)$. Ce serait un conducteur “non-ohmique”. Pour pouvoir calculer ce genre d’effet, et bien d’autres, liés au passage de courant dans un conducteur, on doit introduire le concept de **puissance électrique**.
Si on fait passer un courant dans un conducteur, on “force” les porteurs de charge à travers son réseau, et on transfert de l’énergie des porteurs de charge au réseau, par collisions. C’est comme ça qu’on maintient une vitesse de dérive (ordonnée) constante.
En effet la différence de potentiel ne peut pas accélérer les charges au-delà de leur vitesse de dérive “terminale”, et donc cette énergie doit être dissipée dans le réseau.
Dans l’unité de temps :

$$\text{puissance} = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}V = iV = \begin{cases} (V = iR) & i^2R \\ (i = \dfrac{V}{R}) & \dfrac{V^2}{R} \end{cases} \tag{5.13}$$

travail fait par V

$$[P] = \text{Watt ou [V A]} \tag{5.14}$$

Note 5.8. *Si $T = T(puissance) = T(iV)$, et $R = R(T) \rightarrow R = R(iV)$ “non-ohmique”.*

La puissance électrique dissipée dans un conducteur peut être utilisée pour :

- chauffer (chauffage électrique)
- faire de la lumière (ampoule à incandescence)
- fusibles (si trop de courant, chauffent et “sautent”, c’est-à-dire ouvrent le circuit)
- etc

Mais dans d’autres situations, elle est plutôt à éviter/minimiser, par ex. :

- chauffage des câbles/composants électriques
- pertes dans le transport de l’électricité.

Typiquement $R = R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, avec $\alpha \simeq const.$, paramètre qui dépend de la nature du matériau.

5.4 Puissance électrique

Si on fait passer un courant assez fort, on peut avoir $R = R(i)$, parce que $T = T(i)$. Ce serait un conducteur "non-ohmique". Pour pouvoir calculer ce genre d'effet, et bien d'autres, liés au passage de courant dans un conducteur, on doit introduire le concept de **puissance électrique**.
Si on fait passer un courant dans un conducteur, on "force" les porteurs de charge à travers son réseau, et on transfert de l'énergie des porteurs de charge au réseau, par collisions. C'est comme ça qu'on maintient une vitesse de dérive (ordonnée) constante.
En effet la différence de potentiel ne peut pas accélérer les charges au-delà de leur vitesse de dérive "terminale", et donc cette énergie doit être dissipée dans le réseau.
Dans l'unité de temps :

$$\text{puissance} = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}V = iV = \begin{cases} (V = iR) & i^2R \\ (i = \dfrac{V}{R}) & \dfrac{V^2}{R} \end{cases} \tag{5.13}$$

travail fait par V

$$[P] = \text{Watt ou [V A]} \tag{5.14}$$

Note 5.8. *Si $T = T(puissance) = T(iV)$, et $R = R(T) \rightarrow R = R(iV)$ "non-ohmique".*

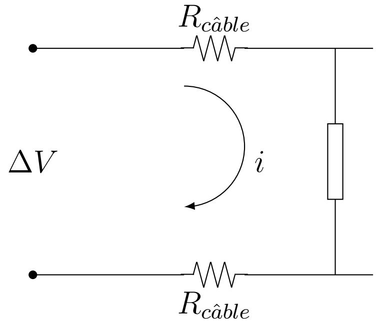
La puissance électrique dissipée dans un conducteur peut être utilisée pour :

- chauffer (chauffage électrique)
- faire de la lumière (ampoule à incandescence)
- fusibles (si trop de courant, chauffent et "sautent", c'est-à-dire ouvrent le circuit)
- etc

Mais dans d'autres situations, elle est plutôt à éviter/minimiser, par ex. :

- chauffage des câbles/composants électriques
- pertes dans le transport de l'électricité.

<u>Ex.</u> transport d'électricité. Les câbles ont forcément une résistance $\neq 0$, $R_{\text{câble}}$, qui amène une perte P_{perte} .



ΔV_u
Utilisateur : $P_u = i\Delta V_u$

$P_{\text{perte}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aller-retour}}}{2} Ri^2$, mais $i = \dfrac{P_u}{\Delta V_u}$

$$P_{\text{pertes}} = 2R\frac{P_u^2}{\Delta V_u^2} \tag{5.15}$$

Pour optimiser P_u et diminuer P_{pertes}, on augmente ΔV_u.

Note 5.9. *En réalité on transporte l'énergie en courant alternatif (AC), donc le calcul est légèrement différent...*

Ex. numérique : ligne de 100 km, $R_{\text{câble}} \sim 2\,\Omega$, $P_u \sim 400\,\text{MW}$, $\Delta V_u \sim 200\,\text{kV}$

$$\Rightarrow P_{pertes} \sim 2 \times 2 \times \frac{(400 \times 10^6)^2}{(200 \times 10^3)^2}\,\text{W} = \frac{4 \times 1\cancel{6}^4\, 10^{\cancel{16}^6}}{\cancel{4}\,10^{\cancel{10}}}\,\text{W} = 16\,\text{MW}$$

Mais si on utilise $\Delta V_u \sim 400\,\text{kV}$

$$\Rightarrow P_{\text{pertes}} \sim 2 \times 2 \times \frac{(4\cancel{0}0 \times 10^{\cancel{6}^3})^2}{(4\cancel{0}0 \times 10^3)^2} W = 4\,\text{MW}$$

Pourquoi on n'augmente pas plus ΔV_u (ou ΔV) ? $\rightarrow$ **effet corona** [décharges !]

Note 5.10. *La résistance de la peau humaine dépend du degré d'humidité,* $R_{peau} \sim 10\,\text{k}\Omega \div 1\,\text{M}\Omega$.
Mais à l'intérieur de notre corps, le sang et les liquides interstitiels extracellulaires sont des électrolytes, donc conduisent assez bien l'électricité.
Si la peau est percée, et le courant passe "à l'intérieur", il peut attendre des valeurs importantes même avec des différences de potentiel modestes.

❦ Électrocution : le problème principal (parfois létal !) est le dérangement du fonctionnement du coeur. Le coeur n'est plus "contrôlé" s'il y a $\sim 10\,\text{mA}$ qui circulent autour. Donc, si on prend le cas plus pessimiste, avec $R_{\text{peau}} \sim 10\,k\Omega$, la tension maximale devrait être :

$$\Delta V_{max} = i_{\max} R_{\text{peau}} \sim 10 \times 10^{-3} \times 10^4\,\text{V} = 100\,\text{V} \tag{5.16}$$

Typiquement, on considère pour la sécurité :

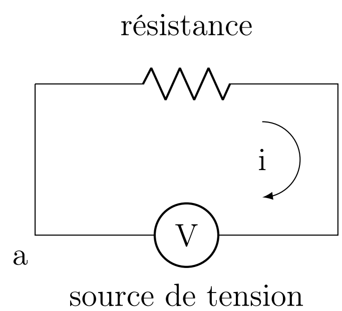
$$\begin{cases} \Delta V \leq 50\,\mathrm{V} \\ i \leq 10\,\mathrm{mA} \end{cases} \tag{5.17}$$

Donc on doit utiliser des transformateurs pour réduire la haute tension à laquelle on transporte l'électricité à des valeurs moins dangereuses.

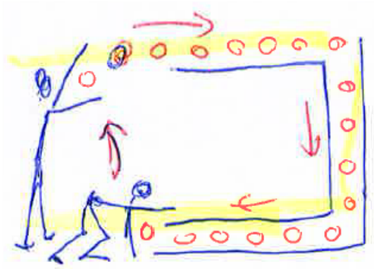
Conseil : ne touchez jamais un système électrique avec les deux mains ! Si le courant passe entre les deux mains, il passe dans la région du coeur...

5.5 Force électromotrice

Circuit électrique simple



Si l'énergie n'était pas dissipée à cause du frottement ($R = 0$), le potentiel serait le même sur tous les points du circuit : $V = V_a$ partout.
Mais s'il y a dissipation, ce qui est le cas en général (sauf en situation de super-conductivité !), on doit continuer à fournir un travail pour faire circuler les charges.



on doit continuer à pousser les charges “en haut”, pour qu'elles puissent “tomber” en bas, en perdant de l'énergie potentielle, et continuer à bouger.

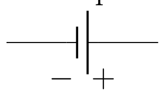
Déf. :

$$\frac{\text{travail fait sur la charge qui bouge sur circuit fermé}}{\text{charge}} = \mathscr{E}$$

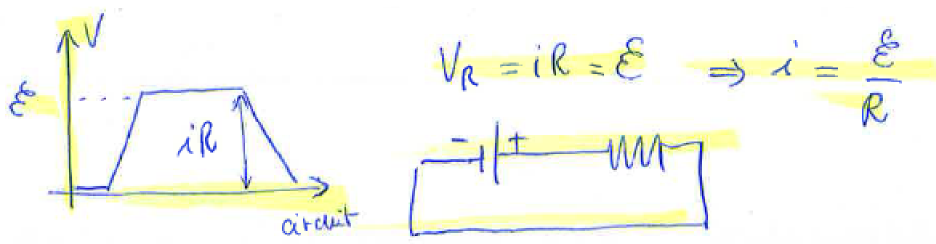
"force électro-motrice"; ou

"emf" (pour "electromotive force")

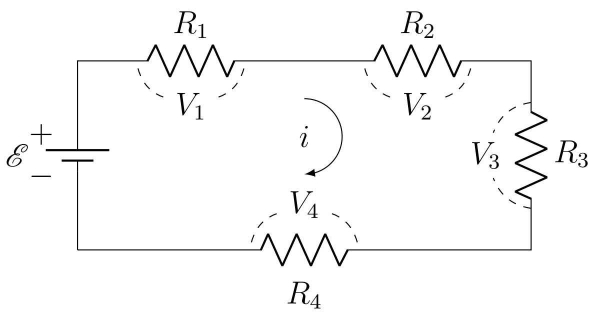
Note $[\mathscr{E}] = V$; $\mathscr{E}$ n'est pas une force !

Symbole :  batterie

Représentation utile :



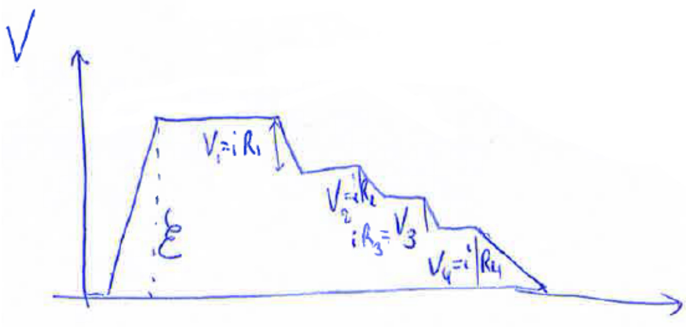
Dans un circuit avec plusieurs résistances en séries :



à travers chaque résistance

$$V_j = iR_j \text{ (i est le même)}$$

mais on doit toujours revenir au même niveau d'énergie, donc de potentiel, si on fait un tour complet.



Donc

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \mathscr{E} \tag{5.18}$$

ou, en général, $\mathscr{E} = \sum_j V_j$.

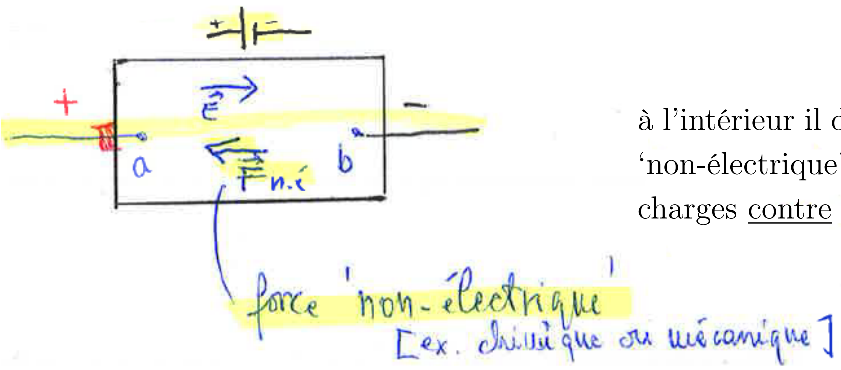
Source idéale de emf :

$$V = \mathscr{E} \qquad \text{fixe, indépendante de } i$$

Ça n'existe pas dans la réalité ! (on pourrait augmenter $i \to \infty$, et on fournirait une énergie infinie)

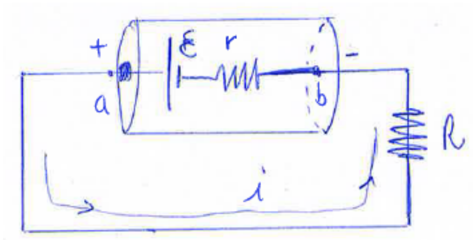
Source réelle de emf (batterie) :

regardons à l'intérieur de la batterie



à l'intérieur il doit y avoir une force 'non-électrique', $\vec{F}_{\text{n-é}}$, qui pousse les charges <u>contre</u> le champ électrique.

Mais, naturellement, comme il y a du frottement pour "descendre" dans le sens du champ, $\vec{E}$, il y a du frottement pour "remonter" contre le champ $\vec{E}$ [comme quand on prendre une remontée mécanique avec les skis...]
On appelle cette résistance à l'intérieur de la source de emf "**résistance interne, r**".
Représentation en circuit :



$$V_{ab} \neq \mathscr{E} \text{ si } i \neq 0, \text{ car} \tag{5.19}$$

$$V_{ab} = \mathscr{E} - ir \tag{5.20}$$

$$V_{ab} = iR \tag{5.21}$$

Note 5.11. *V_{ab} devient très différent de $\mathscr{E}$ lorsque r devient grande, ou lorsqu'on essaie d'extraire de la batterie un grand courant i.*

$$\Rightarrow \qquad \mathscr{E} - ir = iR \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{i = \frac{\mathscr{E}}{r+R}} \tag{5.22}$$

$\mathscr{E}$ est ce qui est spécifiée pour une batterie. Lorsque la batterie vieillie, $\mathscr{E}$ reste la même, mais r augmente, donc la batterie n'arrive plus à faire passer le courant qu'on veut à travers R.
La même chose arrive à certaines batteries lorsqu'il fait très froid : r augmente dans le fluide électrolytique et on n'a plus assez de courant. Dans ces cas on mesure une grande différence entre tension à circuit ouvert ($\mathscr{E}$) et tension à circuit fermé ($\mathscr{E} - ir$).

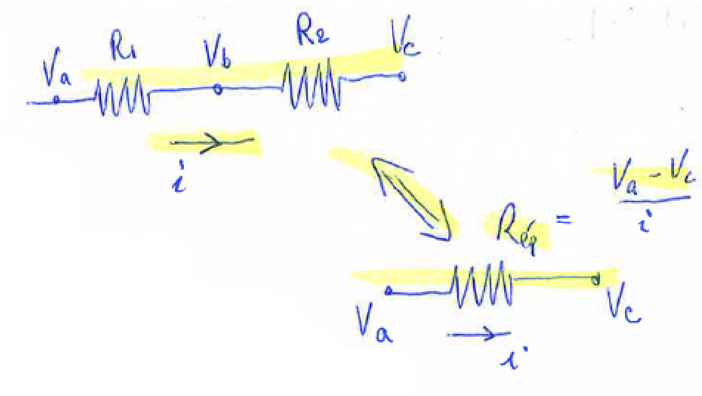
5.6 Circuits électriques à courant continu (DC) et combinaisons de résistances

Courant continu : la direction du courant ne change pas.

Combinaisons de résistances

(1) Résistances en série

La charge est la même, le courant est le même



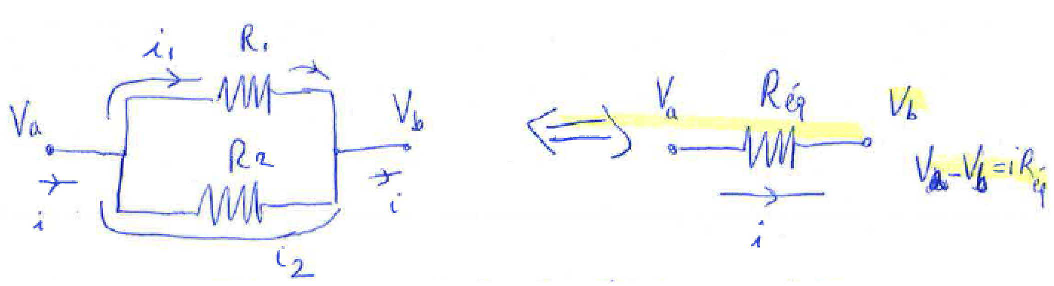
$$V_a - V_c = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) =$$

$$= iR_1 + iR_2 = i\underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_{éq.}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{éq.} = \frac{V_a - V_c}{i} = R_1 + R_2} \tag{5.23}$$

Pour plusieurs $R's$:

$$\boxed{R_{éq.} = \sum_{j=1}^{N} R_j} \tag{5.24}$$

(2) Résistances en parallèle

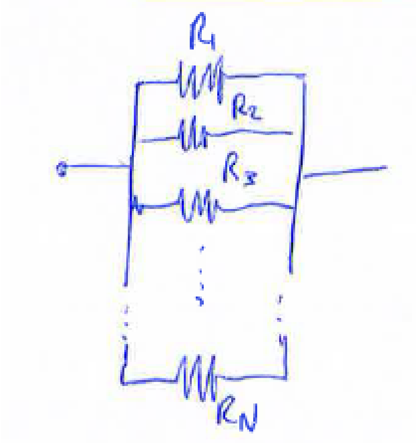


Ici la quantité commune à toutes les résistances est $V_a - V_b$.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i & \text{(conservation de la charge)} \\ \dfrac{V_a - V_b}{R_1} + \dfrac{V_a - V_b}{R_2} = \dfrac{V_a - V_b}{R_{éq.}} & \Rightarrow \quad \boxed{R_{éq.} = \left[\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right]^{-1}} \end{cases} \tag{5.25}$$

Plusieurs résistances en parallèle

$$R_{éq} = \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{R_j}\right]^{-1} \tag{5.26}$$



Note 5.12. *Sur chaque branche du circuit, le courant est inversement proportionnel à la résistance* $i_j = \dfrac{V}{R_j}$ *; le courant "choisit" le chemin avec la moindre résistance.*

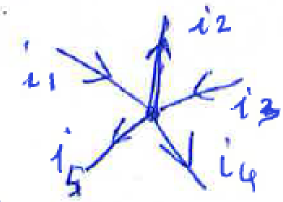
5.7 Lois de Kirchhoff

On peut résumer ces observations avec deux règles pratiques : **règles (ou lois) de Kirchhoff**

(1) **"Règle des nœuds"** (nœud ≡ intersection de fils)

conservation de la charge
La somme des intensités des courants arrivants est égale à celle des courants sortants.

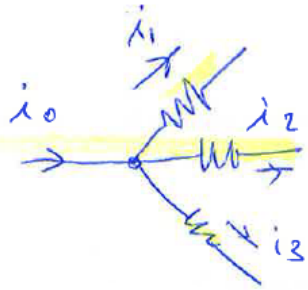
$$\sum_j i_{\text{j IN}} = \sum_h i_{\text{h OUT}} \tag{5.27}$$



Ex. 1

$i_1 + i_3 = i_2 + i_4 + i_5$

Ex. 2



$i_0 = i_1 + i_2 + i_3$

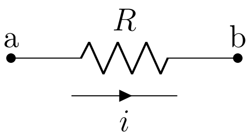
(2) **"Règle des mailles"**

La somme algébrique des différences de potentiel électrique sur une maille fermée est nulle, pour n'importe quel circuit composé de mailles.

$$\sum_j \Delta V_j = 0 \qquad \text{autour de chaque maille fermée}$$

Note 5.13. *Les ΔV_j sont toutes les emf et toutes les différences de potentiel à travers les résistances.*

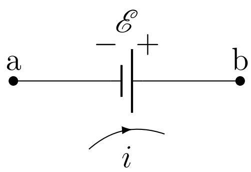
R :



La seule difficulté... les signes !
Si on passe à travers R dans la direction du courant, la différence de potentiel est négative [c'est une "chute" à travers R] :

$$V_b - V_a = V_R = -iR; \tag{5.28}$$

le potentiel est plus bas au point b.



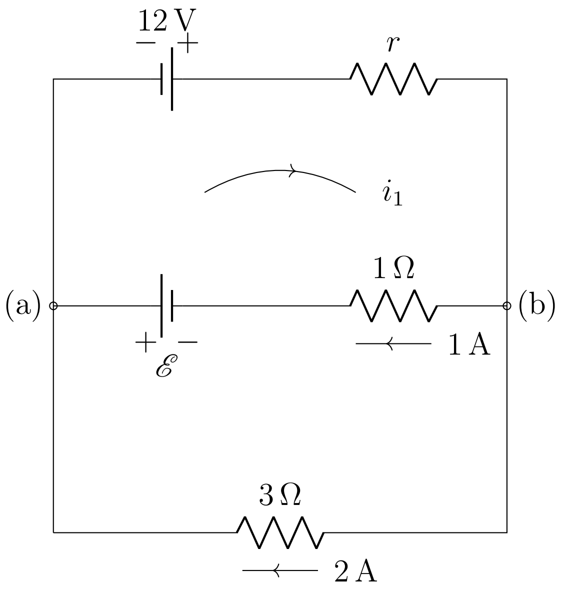
$\Rightarrow V_b - V_a = +\mathscr{E}$

Si on passe à travers une source de emf dans la même direction que l'emf : $\Delta V = +\mathscr{E}$ ("uphill"), alors que en direction opposée : $\Delta V = -\mathscr{E}$

Ces deux règles devraient permettre de résoudre les problèmes avec des circuits DC.

Exemples d'application des règles de Kirchhoff

Chargement d'une vieille batterie.



On cherche $r = ?$

$i_1 = ?$

$\mathscr{E} = ?$

(1) On choisit (arbitrairement) les signes pour i, $\mathscr{E}$ (et on les change pas au milieu du calcul !)

(2) On applique la règle des noeuds à (a) et à (b)

(a) $2\,\mathrm{A} = i_1 - 1\,\mathrm{A} \Rightarrow i_1 = 3\,\mathrm{A}$

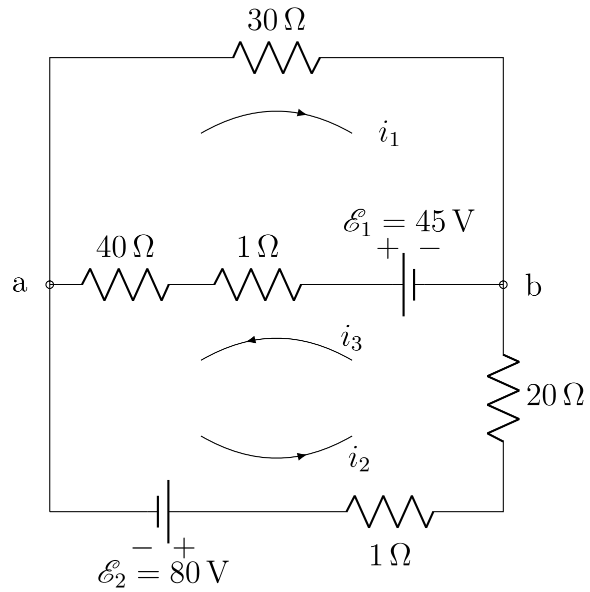
(b) $i_1 = 1\,\mathrm{A} + 2\,\mathrm{A} \Rightarrow i_1 = 3\,\mathrm{A}$ OK

(3) On applique la règle des mailles

- à la maille en haut : $12\,\mathrm{V} - (\overbrace{3\,\mathrm{A}}^{i_1})r - (1\,\mathrm{A})1\,\Omega + \mathscr{E} = 0$
- à la maille totale : $12 - (3\,\mathrm{A})r - (2\,\mathrm{A})3\,\Omega = 0$
  $\rightarrow r = \frac{6}{3}\Omega = 2\,\Omega;\ \ \mathscr{E} = (3 \times 2 + 1 - 12)\,\mathrm{V} = -5\,\mathrm{V}$

$\Rightarrow$ Ceci veut dire que le dessin devrait être corrigé car la direction/polarité de l'emf et donc de la batterie est inversée.

On cherche la valeur des courants qui passent à travers tous les composants, donc i_1, i_2, i_3.



$i_1 =?$

$i_2 =?$

$i_3 =?$

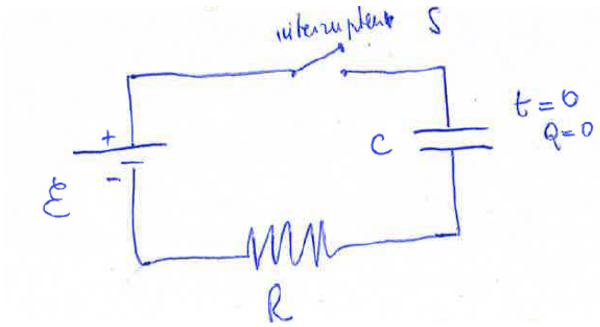
- On choisit un signe pour i_1, i_2 et i_3 et on dessine selon ce signe, puis bien entendu on calcule avec ce signe.
- Noeuds
  (a) $-i_2 + i_3 = i_1 \qquad i_3 = i_1 + i_2$
  (b) $i_1 + i_2 = i_3$
- Maille supérieure (en sense horaire)
  $-i_1 \times 30 + 45\,\text{V} - i_3 \times 41 = 0 \quad \Rightarrow \quad 30i_1 + 41i_3 = 45$
- Maille inférieure (en sense horaire)
  $+i_3 \times 41 - 45\,\text{V} + i_2 \times 20 + i_2 \times 1 - 80\,\text{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad 21i_2 + 41i_3 = 125$

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ 30i_1 + 41i_3 = 45 \\ 21i_2 + 41i_3 = 125 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} i_1 = -0.9\,\text{A} \\ i_2 = 2.65\,\text{A} \\ i_3 = 1.76\,\text{A} \end{cases}$$

5.8 Circuits RC et applications

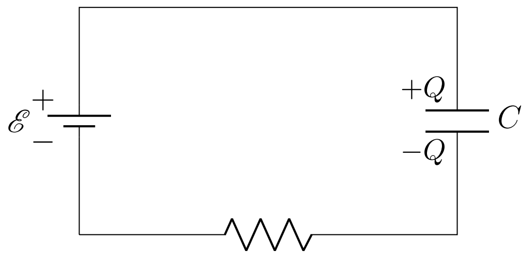
Pour l'instant, nous avons analysé les circuits DC, dans lesquels rien ne varie avec le temps. Les courants circulent (donc les charges à leur vitesse de dérivé terminale), mais toujours au même taux constant.
Mais nous avons aussi vu que les condensateurs sont des engins qui peuvent stocker de l'énergie. Le processus de charge/décharge est intrinsèquement dépendant du temps. Maintenant, sur la base des lois des circuits, on peut l'analyser quantitativement.

Circuits RC
(A) chargement d'un condensateur

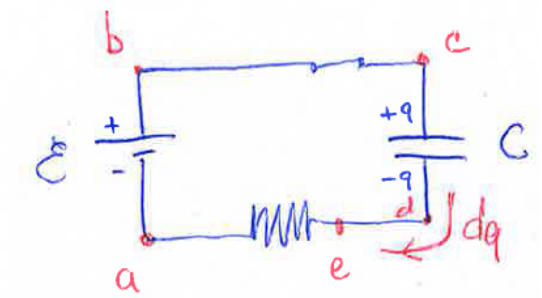


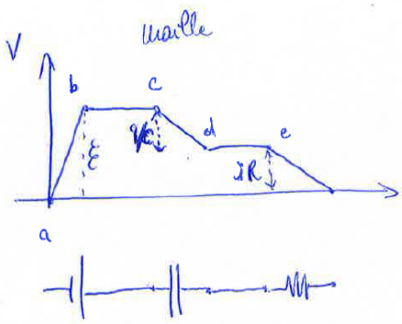
Pour charger la capacité C on a besoin de la force électromotrice $\mathscr{E}$.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur S et la charge est "poussée" d'un côté à l'autre de C par $\mathscr{E}$.
A $t \to \infty$, le condensateur aura reçu toute la charge qu'il peut recevoir étant donnée sa capacité C : $Q = CV = C\mathscr{E}$, et il n'y aura plus de courant.



Question : qu'est - ce qu'il se passe entre $t = 0$ et $t \to \infty$?
Dés qu'on ferme l'interrupteur S, la charge commence à s'écouler ($\to$ courant)





$$\mathscr{E} - \frac{q}{C} - iR = 0 \quad ; \quad \text{mais} \quad i = \frac{dq}{dt} \tag{5.29}$$

$$\mathscr{E} - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \quad : \quad \text{éq. différentielle pour } q = q(t), \tag{5.30}$$

$$\text{avec } q(0) = 0, \text{ et } q(\infty) = Q$$

Note 5.14. *À $t = 0$, $q = 0$, mais $\mathscr{E} = i(0)R \quad \Rightarrow \quad i(0) = \mathscr{E}/R \neq 0$*

En réarrangeant :

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} + \frac{\mathscr{E}}{R} \quad ; \quad \text{on sépare les variables} \tag{5.31}$$

$$dq = \left(\frac{\mathscr{E}}{R} - \frac{q}{RC}\right) dt = -(q - \mathscr{E}C)\frac{dt}{RC} \tag{5.32}$$

$$\frac{dq}{q - \mathscr{E}C} = -\frac{dt}{RC} \quad \overset{\text{on intègre}}{\Rightarrow} \quad \int_0^q \frac{dq'}{q' - \mathscr{E}C} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \tag{5.33}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q - \mathscr{E}C}{-\mathscr{E}C}\right) = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathscr{E}C - q}{\mathscr{E}C} = \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \tag{5.34}$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = \mathscr{E}C\left[1 - \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\right] \tag{5.35}$$

$$\lim_{t\to 0} q(t) = \mathscr{E}C - \mathscr{E}C = 0 \tag{5.36}$$

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \mathscr{E}C \tag{5.37}$$

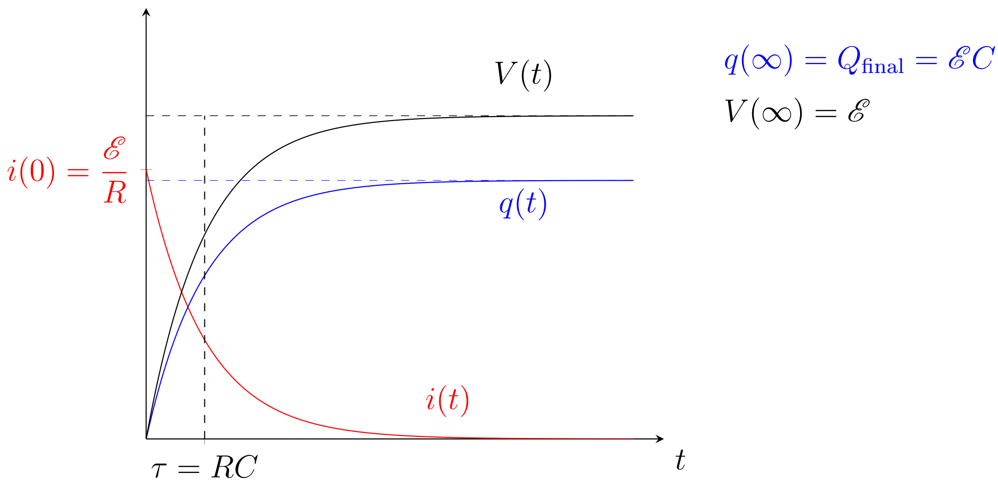
A partir de $q(t)$ on peut calculer $i(t)$ et $V(t)$:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\mathscr{E}C\exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{\mathscr{E}}{R}\exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \tag{5.38}$$

$$\rightarrow \quad i(0) = \frac{\mathscr{E}}{R} \quad ; \quad i(\infty) = 0$$

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E}\left[1 - \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V(0) = 0 \\ V(\infty) = \mathscr{E} \end{cases} \tag{5.39}$$

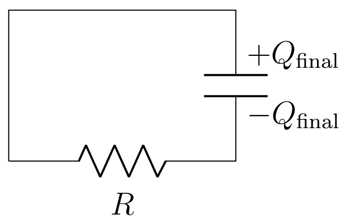
Graphiquement



$\tau = RC$ est le temps caractéristique du circuit RC, on l'appelle aussi "constante de temps", ou "temps de relaxation".

(B) Décharge d'un condensateur

Après avoir chargé, on enlève la batterie et on la remplace avec un fil (avec $R_{\text{fil}} \sim 0$)



A $t = 0$ on a $q(0) = Q_{\text{final}} = \mathscr{E}C$

On s'attend à quoi ? La charge revient là où elle était, c'est-à-dire le condensateur sera déchargé.

Maille (sans $\mathscr{E}$, ou $\mathscr{E} = 0$) :

$$-\frac{q}{C} - iR = 0 \tag{5.40}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \quad ; \quad \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \tag{5.41}$$

$$\int_{Q_{final}}^{q} \frac{dq'}{q'} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q}{Q_{final}}\right) = -\frac{t}{RC} \tag{5.42}$$

et

$$q(t) = Q_{final} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} = \mathscr{E}C \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \quad \Rightarrow \begin{cases} q(0) = Q_{final} = \mathscr{E}C \\ q(\infty) = 0 \end{cases} \tag{5.43}$$

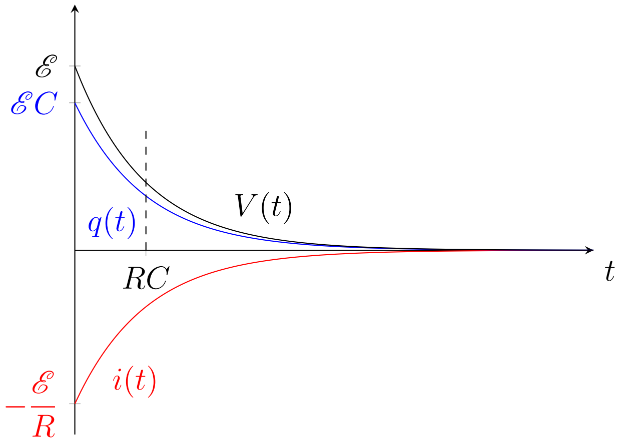
Courant

$$i(t) = \mathscr{E}C \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\left(-\frac{1}{RC}\right) = -\frac{\mathscr{E}}{R} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} < 0 \tag{5.44}$$

$$i \text{ va“a l'envers”} \quad \begin{cases} i(0) = -\frac{\mathscr{E}}{R} \\ i(\infty) = 0 \end{cases}$$

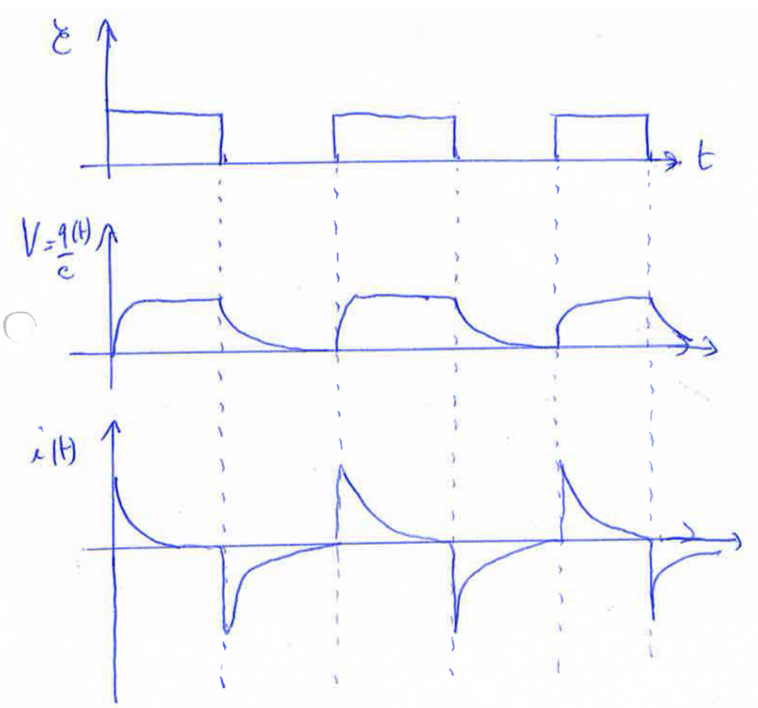
Potentiel

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E} \exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V(0) = \mathscr{E} \\ V(\infty) = 0 \end{cases} \tag{5.45}$$



La variation temporelle de toutes les quantités en jeu est déterminée par le facteur dans l'exposant : $\tau = RC$

Considérons maintenant d'alterner chargement/décharge, ce qui est équivalent à “allumer/éteindre” $\mathscr{E}$.
Que pouvons nous attendre ?

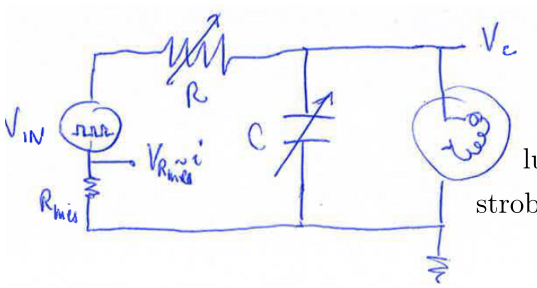


La forme de ces courbes dépend de le valeur de RC

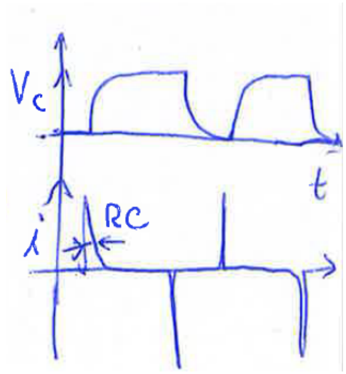
Applications du circuits RC

En voyant les différentes courbes et les variations avec les valeurs de R et C, on peut imaginer diverses applications.

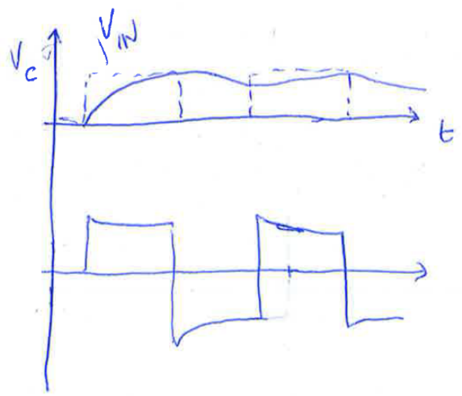
Ex. 1 - RC très court : le courant aura des très courtes impulsions, et très intenses. On pourrait aussi choisir la fréquence des impulsions de $\mathscr{E}$ pour "suivre" un certain phénomène, par ex. de la musique.
Ex. (démo) Stroboscope/oscillateur de relaxation



lumière stroboscopique

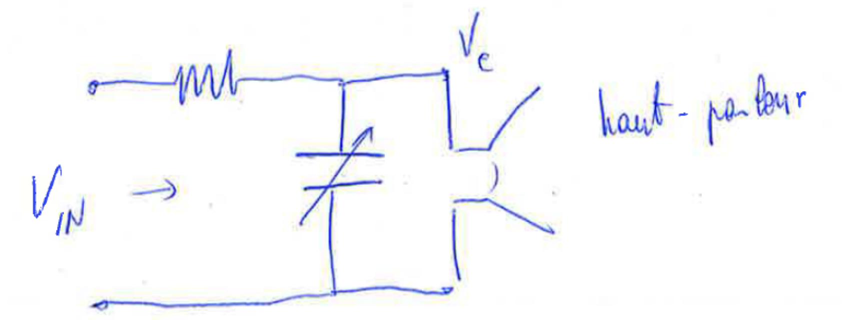


Ex. 2 - RC très long : comparé à la période Δt qui sépare les impulsions de $\mathscr{E}$

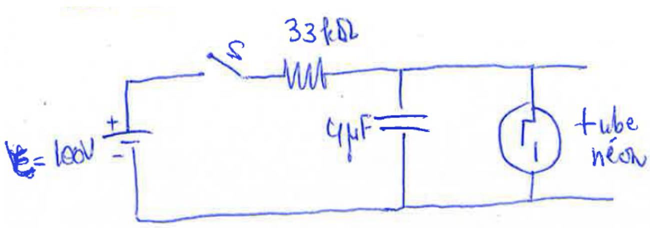


Les variations du signal de "input" sont "lissées" : filtre RC

Ce filtrage a lieu parce qui il n'y a pas assez de temps pour charger/décharger C entre les pulses. Intuition : C est un réservoir, comme un lac de montagne. Si R est grand, c'est comme si le lac avait un émissaire (un ruisseau qui en sort pour faire descendre l'eau) trop petit.
Autre façon de voir : le signal d'entrée contient différentes fréquences. Ces fréquences sont influencées par le filtre RC de façons différentes : celles qui sont élevées, avec une période courte par rapport à RC ($\Delta t << RC$) ne peuvent pas vraiment "passer" jusqu'au signal de sortie et seraient coupées. Vice-versa, les basses fréquences, correspondantes à une période $\Delta t > RC$ ne seraient pas influencées par le circuit RC, donc passeraient inaltérées à la sortie. On peut donc éliminer les hautes fréquences : filtre passe-bas.



<u>Ex.</u> de problème avec capacité



Tube neon :

$$\begin{cases} R = \infty \quad \text{pour } V < \overbrace{90\,\text{V}}^{=V_0} \\ R \simeq 0 \quad \text{pour } V \geq 90\,\text{V} \ (*) \end{cases}$$

$(*)$ mais une fois le tube “allumé”, la résistance reste nulle jusqu’à ce qu’on déscend en dessous de 70 V.
Ensuite, pour $V < 70\,\text{V}$, $R = \infty$ à nouveau (car la décharge s’éteint).
Questions :

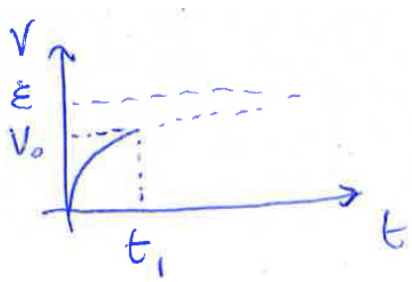
(a) A quel moment le tube commence à conduire ? (on applique 100 V a $t = 0$)

(b) A quel moment le tube reprend à conduire de nouveau ?

(c) Quel est le comportement du tube en fonction du temps ?

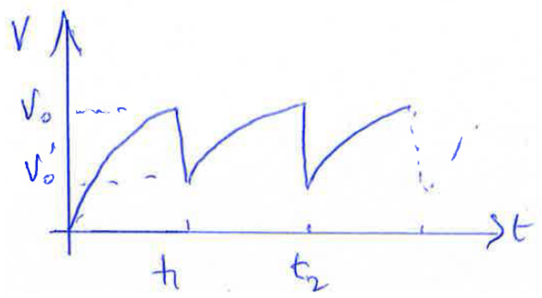
$\boxed{\text{Solution}}$
Avant d’arriver à 90 V, le tube est un circuit ouvert, donc il voit $V = \frac{q}{C}$

$$V = \mathscr{E}(1 - e^{-\frac{1}{RC}}) \tag{5.46}$$



(a) $V(t_1) = 90\,\text{V} = V_0 \Rightarrow 100(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}}) = 90 \Rightarrow e^{-\frac{t_1}{RC}} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ et $t_1 = RC\ln(10) \approx 0.3\,\text{s}$

(b) Après t_1, le tube néon devient un court circuit, et la tension tombe, mais quand elle arrive à 70 V, le tube redevient circuit ouvert, et on recommence comme circuit RC simple.



Maille :

$$\mathscr{E} - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0 \tag{5.47}$$

Même équation que dans le cas (a), mais avec nouvelle condition initiale :

$$t = t_1 \qquad V = V_0' = 70\,\mathrm{V}$$

$$q(t_1) = CV_0' = q_1$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathscr{E}}{R} \tag{5.48}$$

$$\int_{q_1}^{q} \frac{dq'}{q' - \mathscr{E}C} = -\int_{t_1}^{t} \frac{dt'}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{q - C\mathscr{E}}{q_1 - C\mathscr{E}} = e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \tag{5.49}$$

$$q(t) = C\mathscr{E} + (q_1 - C\mathscr{E})e^{-\frac{t-t_1}{RC}} = C\mathscr{E}\left[1 - e^{-\frac{t-t_1}{RC}}\right] + q_1 e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \tag{5.50}$$

et

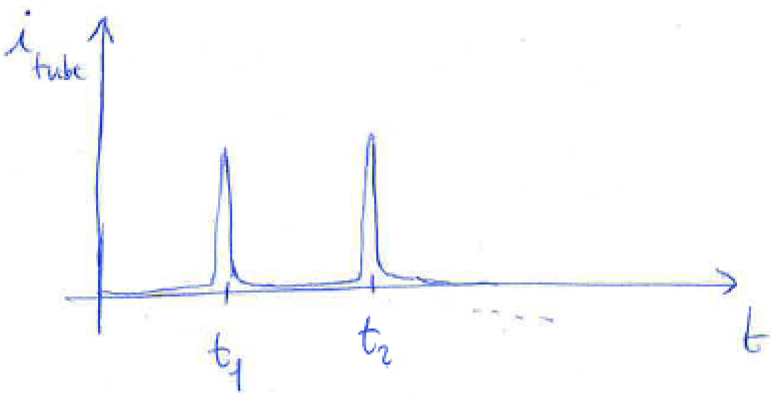
$$V(t) = \mathscr{E} + (V_0' - \mathscr{E})e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \tag{5.51}$$

à $t = t_2$ $\quad V(t_2) = 90\,\mathrm{V}$, donc

$$90 = 100 + (70 - 100)e^{-\frac{t_2-t_1}{RC}} \quad \Rightarrow \quad 10 = 30e^{-\frac{t_2-t_1}{RC}}$$

$$\Rightarrow \qquad t_2 - t_1 = RC\ln 3 = 0.145\,\mathrm{s}$$

Donc $t_2 - t_1 = 0.145\,\mathrm{s}$ est la période de la lumière produite par le tube néon.
En effet, si on regarde le courant, il devrait avoir l'allure en fonction du temps représenté ci-dessous.



Appendix

5.A Discussion sur la force agissant sur diélectrique dans condensateur

Nous avons vu qu'un diélectrique est attiré dans le volume d'un condensateur. Nous avons argumenté en termes d'énergie.
Aujourd'hui on va regarder le même effet :

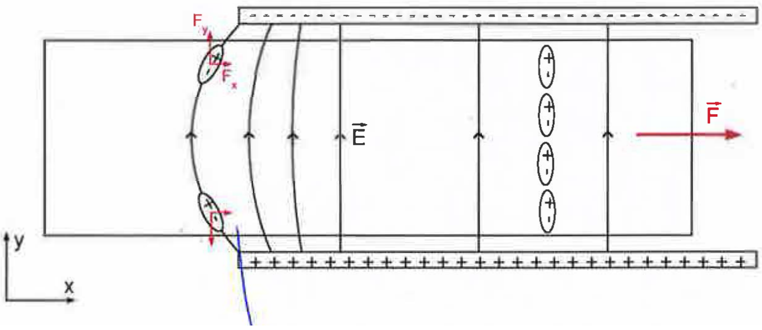
- $\rightarrow$ microscopiquement
- $\rightarrow$ force (quantifiable !)

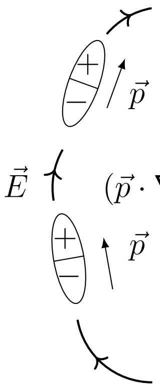
Interprétation en niveau microscopique.

Attraction d'un diélectrique solide à l'intérieur d'un condensateur

Le schéma ci-dessous représente le diélectrique situé partiellement à l'intérieur du condensateur. Ce dernier crée entre ses deux plaques un champ électrique représenté par les lignes de champ. Nous pouvons considérer l'approximation dipolaire, à savoir que le diélectrique est composé d'une grande quantité de petits dipôles qui vont chacun subir l'influence du champ électrique. Ces dipôles vont s'orienter le long des lignes de champ. Ainsi, à l'entrée du condensateur, nous voyons que les dipôles subissent également une force selon la direction x. La résultante $\vec{F}$ des forces appliquées à tous les dipôles est également dans cette même direction. Cela a pour effet d'attirer le diélectrique à l'intérieur du condensateur.

Il est à noter que si le diélectrique est complètement à l'intérieur du condensateur, il ne subit plus de force selon la direction x, et il devient statique.

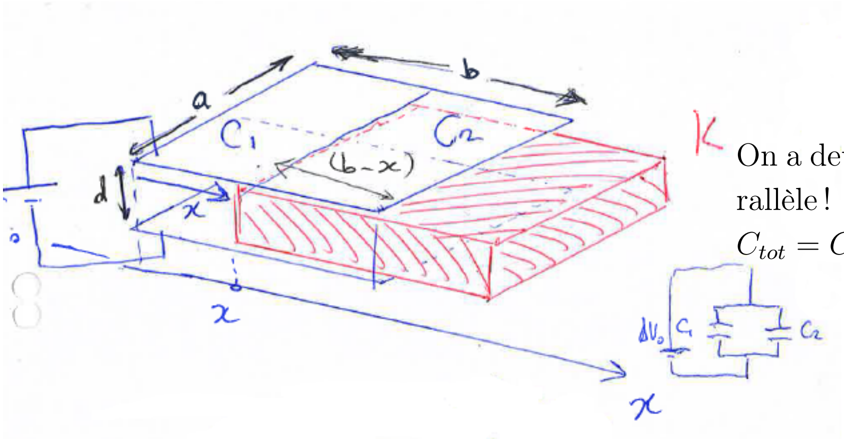




$$(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = \vec{F}$$

$$\begin{cases} p_x \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = F_x & \text{Vers la droite} \\ p_y \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = F_y & \leftarrow \text{ mais la moitié en haut} \\ & \text{est compensée par la moitié en bas} \end{cases}$$

On peut aussi considérer la force qui se met en place, à partir de l'énergie potentielle. On pourrait considérer deux cas : avec charge constante, ou différence de potentiel constante. Considérons uniquement $\Delta V = \text{const.} = \Delta V_0$



On a deux capacités en parallèle !
$C_{tot} = C_1 + C_2$

$$C_{tot}(x) = \varepsilon_0 \overbrace{\frac{ax}{d}}^{\substack{\text{surface}\\ \text{sans diélectrique}}} + \varepsilon_0 \overbrace{\frac{(b-x)a}{d}}^{\substack{\text{surface}\\ \text{avec diélectrique}}} K;$$

comme ΔV_0 est fixé, la charge dépend de la position du diélectrique

On pourrait tout simplement considérer que

$$Q(x) = C(x)\Delta V_0, \qquad \text{et } U_c(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2(x)}{C(x)} = \frac{1}{2}C(x)\Delta V_0^2$$

L'énergie stockée dans le condensateur varie avec la position, donc il y aura une force F.

$$F = -\left[\frac{dU_c}{dx}\right] = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}C(x)\Delta V_0^2\right] = -\left[\frac{1}{2}\Delta V_0^2 \frac{a\varepsilon_0}{d}\frac{d}{dx}[x + (b-x)K]\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\Delta V_0^2 \frac{a\varepsilon_0}{d}(1-K)\right] = \frac{K-1}{2}\frac{\varepsilon_0 a}{d}\Delta V_0^2 > 0$$

Ceci est correcte, mais ... le signe ? ? NON !

...si on considère le signe, on a un résultat faux !
Pourquoi ?
Parce que nous n'avons pas considéré que la batterie <u>fait</u> un travail pour garder $\Delta V_0 = const.$, lorsque le diélectrique bouge ; ce travail contribue à l'énergie totale.
Comme la tension (potentiel) reste constante, le travail de la batterie est simplement la charge qu'elle doit fournir $q\Delta V_0$:

$$U_{batt} = -\overbrace{\Delta V_0(C(x) - C(0))}^{\text{charge fournie par la batterie}} \times \Delta V_0 = -C(x)\Delta V_0^2 + C_0 \Delta V_0^2 \tag{5.52}$$

$$(C_0 \rightarrow \text{capacité initiale, par ex. à x=0}) \tag{5.53}$$

(la batterie fait un travail > 0)

Donc :

$$U_{tot} = U_C(x) + U_{batt}(x) = \frac{1}{2}C(x)\Delta V_0^2 - C(x)\Delta V_0^2 + C_0\Delta V_0^2 = -\frac{1}{2}C(x)\Delta V_0^2 + C_0\Delta V_0^2; \tag{5.54}$$

$$\text{et} \qquad F_x = -\frac{dU_{tot}}{dx} = +\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\Delta V_0^2 C(x)\right] = ... = -\frac{K-1}{2}\frac{\varepsilon_0 a}{d}\Delta V_0 \tag{5.55}$$

même résultat qu'avant mais avec signe opposé !