Analyse III

Mes notes de cours (simon.lefort@epfl.ch) basées sur le cours de Martin Licht (section IC, automne 2024).

Rappels

La norme du produit vectoriel de $\vec{x}$ et $\vec{b}$:

$$\|x \wedge y\| = \det \begin{pmatrix} & + & - & + \\ + & \text{axe1} & \text{axe2} & \text{axe3} \\ - & \text{vect1x} & \text{vect1y} & \text{vect1z} \\ + & \text{vect2x} & \text{vect2y} & \text{vect2z} \end{pmatrix}$$

$$\text{div} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$$

La divergence est positive si elle se comporte comme une source, négative si elle se comporte comme un puits.

$$\mathbb{R}^2,\ \text{rot}\ F(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$$

$$\mathbb{R}^3,\ \text{rot}\ F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \det(\nabla \times F)$$

La première coordonnée du rotationnel donne l'intensité de la rotation autour de l'axe x, la deuxième autour de l'axe y, la troisième autour de l'axe z.

$$\Delta f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{x})$$

Si le laplacien est strictement négatif, alors $f(x_0)$ est plus grande que sa valeur moyenne au tour de x_0, si le laplacien est strictement positif, alors $f(x_0)$ est plus petite que sa moyenne.

Un ensemble $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit **ouvert** si, pour tout point $x \in \Omega$, il existe une petite "boule" autour de x qui est entièrement contenue dans Ω.

Un ensemble $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit **convexe** si, pour tous les points $x, y \in \Omega$, le segment qui relie x à y est entièrement contenu dans Ω.

Un ensemble $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit **connexe** si on peut aller d'un point $x \in \Omega$ à un autre point $y \in \Omega$ en restant **entièrement à l'intérieur de** Ω, c'est-à-dire si Ω est d'un seul "morceau". Un ensemble **simplement connexe** est **connexe** et n'a pas de trou.

Pour prouver la convexité, on pose $a, b \in \Omega$ et $t \in [0,1]$ et on montre que $ta + (1-t)b \in \Omega$.

La convexité est plus forte (on utilise un segment pour relier les deux points) que la simple connexité (on les relie avec un segment ou une courbe). Par exemple un domaine en étoile est simplement connexe mais pas convexe.

(et la notation $\overline{\Omega}$ **n'est pas** le complément de Ω, c'est l'adhérence, le complément est Ω^c).

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- f paire $\to f(-x) = f(x)$
- f impaire $\to f(-x) = -f(x)$
- f **et** g de même parité $\to fg$ paire
- f **et** g paires ou impaires et de parité différente $\to fg$ impaire

Dans un V/F, on peut parfois borner l'intégrale (avec le théorème de la moyenne par exemple). $(b-a) \cdot \operatorname{supp}(F) > \int_a^b F dt$.

Coordonnées cylindriques

Ne pas oublier le Jacobien!

$$\vec{r} = \rho \vec{e_\rho} + z \vec{e_z}$$

intégration :

$$\iiint f(x,y,z) dxdydz = \iiint f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z\right) r dr d\theta dz$$

Un petit élément de surface est donné par $d\vec{S} = r dr d\theta \vec{e_r} \times \vec{e_\theta}$

Coordonnées Sphériques

$$\vec{r} = r\vec{e_r}$$

intégration :

$$\iiint f(x,y,z) dxdydz = \iiint f\left(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)\right) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

Un petit élément de surface est donné par $d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \vec{e_r}$

Identités trigonométriques

- $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$
- $\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$
  - donc $\sin(A)\cos(B)$, assez utile pour Fourier $= \frac{1}{2}\left(\sin(A+B) + \sin(A-B)\right)$
- $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$
- $\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$
- $\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$

- $\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$
- $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
- $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$
- $\sin(-a) = -\sin(a)$
- $\cos(-a) = \cos(a)$
- $e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$
- $\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

Théorèmes de base

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$$

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$$

car ∇ F pointe vers la plus grande augmentation de f. Or si le rotationnel de ∇ F était différent de zéro, cela signifierait une augmentation de f infinie (on tournerait en boucle!).

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot} F\right) = 0$$

car le rotationnel de F est un champ de vecteurs qui tournent (et ne sortent ou ne rentrent pas dans la surface) donc la divergence, qui mesure cela, est nulle.

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

Intégrales curvilignes

On appelle Γ une courbe **régulière** s'il existe une fonction $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continue, dont la dérivée n'est jamais nulle (elle ne doit jamais s'arrêter sur un point), t.q γ donne pour image tous les points de Γ pour un certain $t \in [a,b]$.

Courbe **simple** : au moins une paramétrisation vérifie l'injectivité, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma\left(t_1\right) \neq \gamma\left(t_2\right)$ * (on ne vérifie pas uniquement la coordonnée y n'est-ce pas, on vérifie que le point $\gamma\left(t_1\right)$ est différent du point $\gamma\left(t_2\right)$).
Courbe **fermée** : toutes les paramétrisations vérifient $\gamma(a) = \gamma(b)$
Courbe **régulière par morceaux** : il existe des courbes régulières dont l'union est Γ

Notons que l'on peut très bien trouver une paramétrisation en polaire ($[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ par ex.).

Formule

Pour une fonction f scalaire :

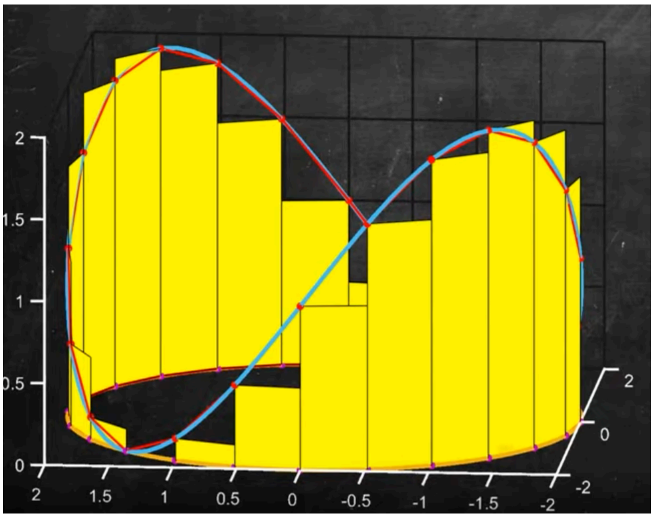
$$\int\limits_\Gamma f dl = \int\limits_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\ dt \in \mathbb{R}$$

Pour une fonction F à plusieurs dimensions :

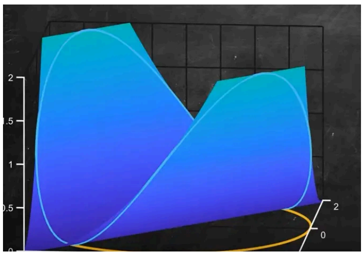
$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_{a}^{b} \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt \in \mathbb{R}$$

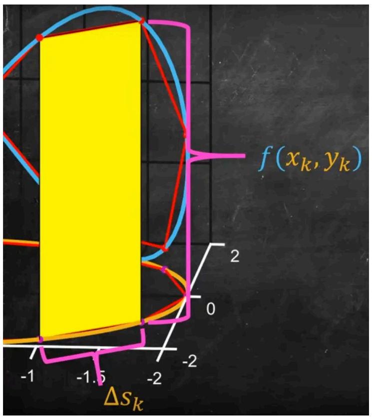
Intuition

On veut intégrer $f(x, y) = z$ (en bleu) selon le cercle, que l'on paramétrise (γ) comme $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$.



On peut d'abord réécrire notre fonction comme $f(t) = f(g(t), h(t))$. Pourquoi ? Parce que les seuls points qui nous intéressent sont ceux selon $g(t), h(t)$! Notre fonction aurait pu être comme ça (pleine), mais on veut juste être sur les points du cercle, pour les sommer (une intégrale... de courbe :).





Ici on veut l'aire donc $A_k = f(x_k, y_k)\, \Delta s_k = f(x_k, y_k) \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$
$\Rightarrow dA = f(g(t), h(t)) \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} dt$

Autres définitions utiles

Longueur de la courbe Γ : $\int_\Gamma 1dl$

Champs qui dérivent d'un potentiel

Soit $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

F **dérive d'un potentiel** sur Ω s'il existe $f \in C^1(\Omega)$ telle que $\nabla f = F$ dans Ω.

Par exemple f est un paysage montagneux, alors F décrit les directions et intensités des pentes du paysage.

Si F dérive d'un potentiel, alors :

$$\int_\Gamma F \cdot dl = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

La somme totale du potentiel est égale à l'altitude au point d'arrivée moins celle au point de départ.
S'il existe un potentiel, il en existe une infinités ($\pm c \in \mathbb{R}$).

Comment savoir si F dérive d'un potentiel ?

Condition nécessaire : $\forall 1 \leq i, j \leq n, \forall x \in \Omega$, on a :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$$

Condition suffisante : on ajoute que Ω est simplement connexe (ou plus fort, convexe).

Méthode en pratique :

- est-ce que $\operatorname{rot} F \neq 0$? si oui, **pas de potentiel** ! La condition nécessaire n'est pas respectée.
- si non, est-ce que le domaine est simplement connexe ? si oui, **il y a un potentiel** !
- si non, on choisit entre ces deux méthodes :
  - choisir une courbe Γ qui entoure un unique trou de Ω. est-ce que $\int_\Gamma F \cdot dl \neq 0$? Si oui, **pas de potentiel !** Sinon, on change de trou ou on change de méthode.
  - intégrer $f(x,y,z) = \int^x F_1(t,x,y)dt$ et ajuster en ajoutant $\alpha(y,z)$ pour que $\nabla f = F$.

Note, on peut aussi poser $\gamma : [0,1], t \to (tx, ty)$. Avec ça, on peut trouver f car on sait que $f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(x,y) = \int_\gamma f$.

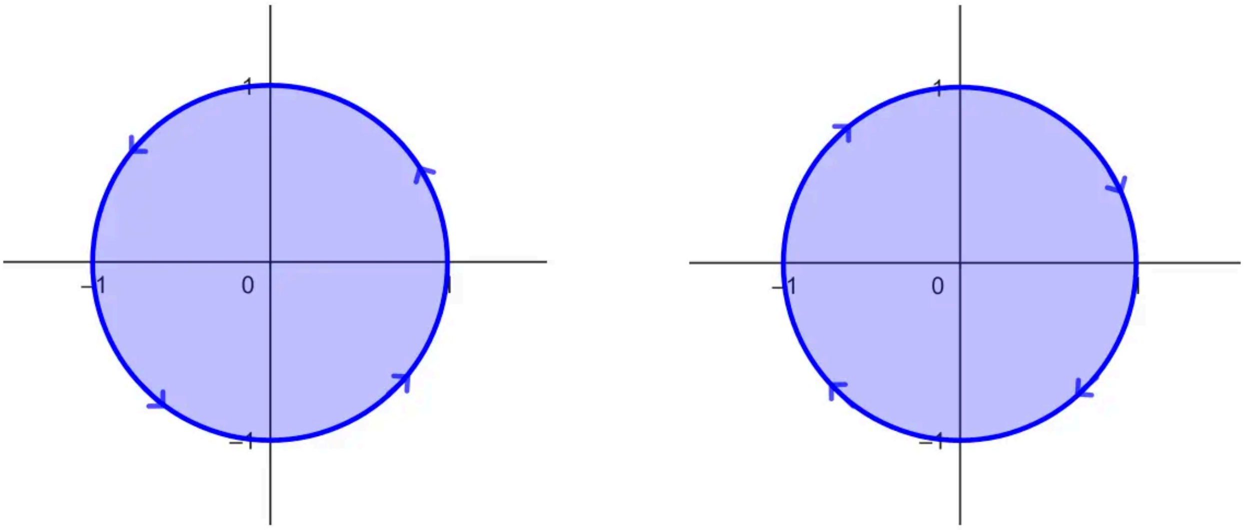
Théorème de Green

Définitions utiles

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert borné.

Le **bord** de Ω noté $\partial\Omega$ est défini comme $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall\varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ et } B_\varepsilon(x) \cap \Omega^c \neq \emptyset\}$, où $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n :\ |x - y|\ < \varepsilon\}$ (l'ensemble des points autour desquels chaque boule appartient à l'ensemble et à son complément)

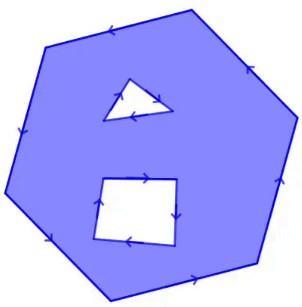
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ est une courbe simple fermée régulière. Le bord est **orienté positivement** si on le paramétrise avec γ dont le sens de parcours laisse le domaine à gauche.



Orientation positive Orientation négative

Un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ est **régulier** s'il existe $\Omega_0, \ldots, \Omega_n$ des ouverts bornés t.q :

- tous les Ω_i sont contenus dans Ω_0
- ils ne se chevauchent pas
- $\Omega = \Omega_0 \backslash U_{i=1}^{n} \overline{\Omega_i}$ (on part de Ω_0 et on enlève les trous).
- Γ_j est une courbe fermée, simple et régulìere.



Exemple de domaine régulier avec bord orienté positivement

Formule de Green

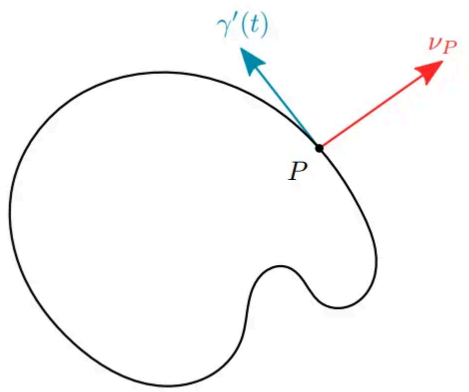
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement et $F \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^2\right)$.

$$\iint_{\Omega} \text{rot } F(x,y)dxdy = \int_{\partial\Omega} F \cdot dl$$

Définition du vecteur normal

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier et $x_0 \in \partial\Omega$. Alors $\nu_{x_0} \in \mathbb{R}^2$ est la normale extérieure (le vecteur unité perpendiculaire au domaine, qui pointe vers l'extérieur). Il respecte les propriétés suivantes :

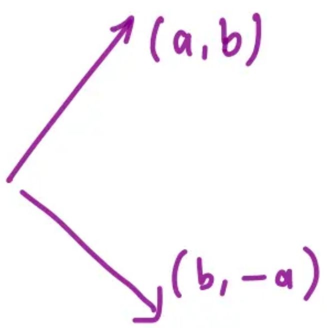
- $\|\nu_P\| = 1$
- si γ est une paramétrisation du bord et que $\gamma(t_0) = x_0$ alors $\gamma'(t_0) \cdot \nu_{x_0} = 0$. (comme γ' est le vecteur tangent au domaine)
- pour tout $\varepsilon > 0$, $P + \varepsilon\nu_{x_0} \notin \Omega$ (il va faire l'extérieur)



Si γ est une paramétrisation de $\partial\Omega$ qui laisse le domaine à gauche, alors :

$$\nu_{\gamma(t)} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$$

Intuition :



Formule (théorème de la divergence)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier et $F \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2\right)$, alors :

$$\iint_{\Omega} \text{div } F(x,y)dxdy = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle dl$$

Souvent il n'y a pas besoin de calculer la norme $|y'(t)|$ car l'intégrale sur $\partial\Omega$ fait apparaître le terme (voir intégrales curvilignes, on a la dérivée de γ qui apparaît).

Corollaire pour le calcul d'une aire

On pose $F(x,y) = (-y,x)$, $G(x,y) = (-y,0)$, $H(x,y) = (0,x)$.
Alors, on a $\text{Aire}(A) = \iint_\Omega 1dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_{\partial\Omega} G \cdot dl = \int_{\partial\Omega} H \cdot dl$
car $\text{rot } F(x,y) = 1-(-1) = 2$, $\text{rot } G(x,y) = -(-1) = 1$, $\text{rot } H(x,y) = 1$

Identités utiles

- $\iint_\Omega \Delta u dxdy = \int_{\partial\Omega}\langle\nabla u;\nu\rangle dl$ (car la divergence de ∇u est le laplacien de u)
- $\iint_\Omega (v\Delta u + \langle\nabla u;\nabla v\rangle)dxdy = \int_{\partial\Omega}\langle v\cdot\nabla u;\nu\rangle dl$
- $\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dxdy = \int_{\partial\Omega}\langle u\nabla v - v\nabla u,\nu\rangle dl$
  (pareil on applique la règle des produits pour retrouver la divergence à gauche)

Intégrales de surface

Quelques notations : $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, et $g = \left(g^1,\ldots,g^n\right)$.

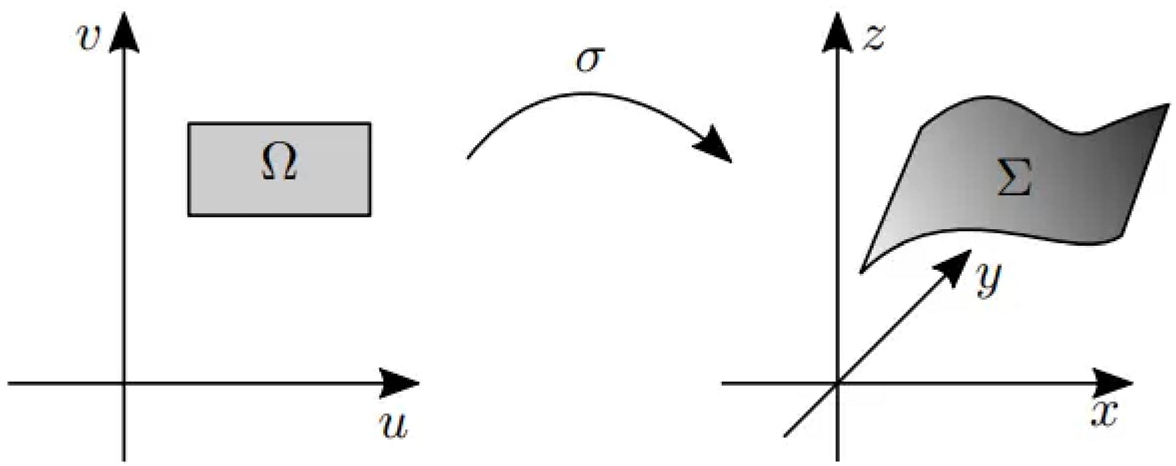
$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ est une **surface régulière** si :

- $\exists A \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert borné tel que ∂A est une courbe régulière par morceaux simple et fermée. Ce sera l'ensemble de définition de notre paramétrisation σ.
- $\exists\sigma$: $\overline{A} \to \mathbb{R}^3$ telle que $\sigma \in C^1\left(\overline{A},\mathbb{R}^3\right)$, $\sigma\left(\overline{A}\right) = \Sigma$ et σ est injective sur A.
- on veut $\sigma_u \wedge \sigma_v \neq 0$.

Le **vecteur normale unité** au point u, v est :

$$\nu_{u,v} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|}$$

Σ est régulière par morceaux s'il existe $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_k$ telle que l'union forme Σ.
Σ, si régulière, est **orientable** s'il existe un champ de vecteurs normaux unitaires et continus ν : $\Sigma \to \mathbb{R}^3$. Un tel champ est appelé une orientation de Σ.



Pour vérifier si ν est orienté correctement, on peut tester avec des valeurs faciles ($\theta = \frac{\pi}{2}$) et visualiser.

On peut aussi trouver un vecteur normal en posant $G(x,y,z)=f(x,y,z)$ et en calculant le gradient de G.

Paramétrisations/Aires/Volume utiles

Cône:
$\sigma : [0,2\pi]\times[0,1], (\theta,z)\to(z\cos(\theta), z\sin(\theta), z)$
$\sigma_\theta=(-z\sin(\theta), z\cos(\theta), 0)\ \text{ et }\ \sigma_z=(\cos(\theta),\sin(\theta),1)$
$|\sigma_\theta\times\sigma_z|\ =(z\cos(\theta), z\sin(\theta), -z)$
Aire : $\pi\cdot r^2+\pi r a$ (a l'hypoténuse)
Volume : $\frac{\pi\cdot r^2\cdot h}{3}$

Sphère, aire : $4\pi r^2$, volume : $\frac{4}{3}\pi r^3$

Formule

Pour une fonction f scalaire :

$$\iint\limits_{\Sigma} f ds=\iint\limits_{A} f(\sigma(u,v))\cdot\ |\sigma_u(u,v)\wedge\sigma_v(u,v)|\ dudv$$

Pour une fonction F à plusieurs dimensions :

$$\iint\limits_{\Sigma} F\cdot ds=\iint\limits_{A}\langle F(\sigma(u,v));\sigma_u(u,v)\wedge\sigma_v(u,v)\rangle dudv$$

Si l'on compare ces définitions avec l'intégrale curviligne, nous remarquons que ce qui change essentiellement est le fait que $\gamma(t)$ soit remplacée par $\sigma(u,v)$ et $\gamma'(t)$ soit remplacée par $\sigma_u(u,v)\wedge\sigma_v(u,v)$.

Formule (théorème de la divergence dans l'espace)

Soit $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ un domaine régulier, $\nu:\partial\Omega\to\mathbb{R}^3$ un champ de normales extérieures unités continu et $F\in C^1\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$. Alors :

$$\iiint\limits_{\Omega}\ \text{div } F(x,y,z)dxdydz=\ \iint\limits_{\partial\Omega}\langle F;\nu\rangle ds$$

Encore une fois, si $\partial\Omega$ est un bout du bord, on a directement une simplification de ν (pas besoin de la norme) :

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\langle F;v\rangle ds=\ \iint\limits_{\partial\Omega}\langle F(\sigma(u,v));\sigma_u(u,v)\wedge\sigma_v(u,v)\rangle dudv$$

Théorème de Stokes

Soit $\Sigma\subseteq\mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable, $\sigma:\overline{A}\to\Sigma$ une paramétrisation (avec ∂A une courbe simple, fermée, régulière par morceaux). Le bord de Σ noté $\partial\Sigma$ est donné par $\sigma(\partial A)$, dont on enlève :

- les courbes qui sont parcourues dans deux sens opposées
- les parties qui sont réduites à un point

(mais si on ne les enlève pas, ça fonctionnerait quand même)

Le choix du sens de parcours sur ∂A

un sens de parcours sur $\partial\Sigma$ par composition avec σ.

Formule

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert, $\Sigma \subseteq \Omega$ une surface orientable régulière par morceaux, $F \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$, alors :

$$\iint\limits_{\Sigma} \langle \text{rot } F(\sigma(u,v)); \nu\rangle d\sigma = \oint\limits_{\partial\Sigma} \langle F; \tau\rangle \cdot dl = \left(\oint\limits_{\partial} F\left(\sigma\left(\gamma_i(t)\right)\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(\sigma\left(\gamma_i(t)\right)\right) dt\right)$$

Distributions

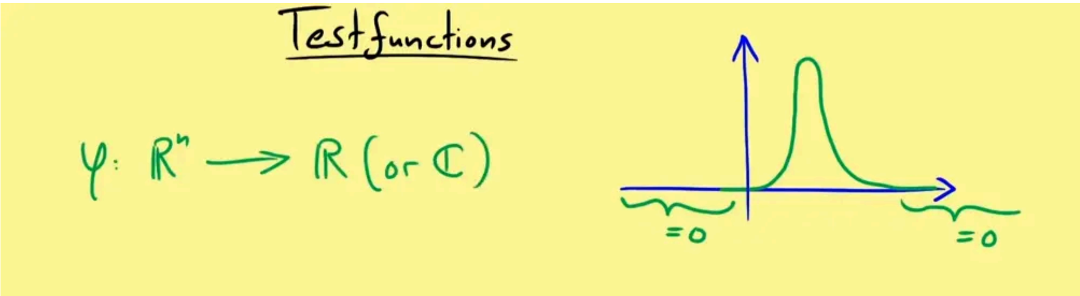
La dérivée est trop "forte" quand on considère les fonctions avec des sauts, des pics, mais alors, comment dériver ces fonctions ?

Définitions utiles

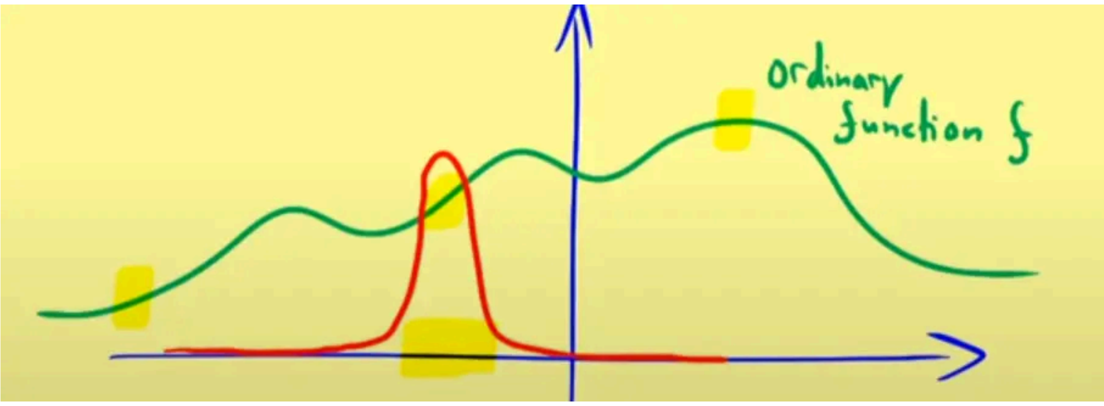
Le **support** d'une fonction f est le domaine sur lequel f n'est pas zéro.
L'ensemble **D** des fonctions infiniment dérivables (lisses) dont le support est contenu dans un
certain intervalle.

Dirac (fonction heaviside)

Par exemple la fonction heaviside $H(x) = 1 \text{ si } x > 0 \text{ sinon } 0.$
On appelle la dérivée $H'(x) = \varepsilon(x)$. Elle sera quasiment nulle partout sauf en un point (le saut). Comment représenter la dérivée comme ça ? En fait, on peut considérer $\varepsilon(x)$ comme une distribution et utiliser une **test function** pour obtenir sa densité entre deux points.



$$\varphi \to \int f(x)\varphi(x)dx$$



Comment savoir si T est une distribution valide ? (si $T \in D$).

- T doit être **finie**, peu importe le φ avec laquelle on la mesure, $\forall \varphi \in D: \ |T(\varphi)| \ < \infty$. (les fonctions continues sur un ensemble compact sont bornées, donc montrer la continuité implique la prop de finie).
- T est **linéaire**.

- T doit être **continue** :

  $$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}, \exists C > 0 \ \ (\text{qui peut dépendre de a, b}) \text{ t.q } \ \forall \varphi \in D \ \ \text{t.q supp } (\varphi) \subset [a,b]$$

  alors :

  $$|T(\varphi)| \ \leq C \sum_{i \geq 0} \max_{x \in \mathbb{R}} \ |\partial_x^i \varphi(x)|$$

  Pour montrer ça on peut par exemple prendre $i = 0$ et si ça suffit on peut s'arrêter là.

  $$|\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx\right)| \ = \ |\left(\int_a^b \varphi(x)dx\right)|$$

  $$\leq \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \int_a^b 1dx = (b-a) \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

  $$\leq (b-a) \sum_{i \geq 0} \max_{x \in \mathbb{R}} \ |\left(\partial_x^i \varphi(x)\right)|$$

Dérivation des distributions

Le produit scalaire mesure à quel point deux vecteurs vont dans la même direction :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

Généralisation à des fonctions continues :

$$\langle F_1, F_2\rangle = \int_a^b F_1(x)F_2(x)dx$$

Dérivation des distributions :

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int f(x)\varphi'(x)dx$$

$$= -[f(x)\varphi(x)]_0^\infty + \int \varphi(x)dx \text{ or } \varphi(\infty) = 0 \text{ (une test function vaut 0 en l'infini)}$$

$$= \int \varphi(x)dx$$

Heaviside, Dirac Delta, Dirac Comb

$$H(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } x < 0 \\ 1 \text{ if } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\delta_0 : D \to \mathbb{R}, \varphi \to \varphi(0)$$

$$\Delta_T(\varphi) \to \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(nT)$$

Analyse de Fourier

Séries de Fourier

Égalités utiles

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$ alors :

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}mx\right)dx = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}mx\right)dx = \begin{cases} 1 \text{ si } n = m \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}mx\right) = 0$$

Définition

On veut écrire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique sous cette forme:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\right]$$

Pour ça, on choisit :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

(on note que si f continue par morceaux, on peut calculer a_0 en évaluant a_k avec $k = 0$ mais **très généralement** en calculer les a_k il y a un facteur $\frac{c}{n}$ qui apparaît et on doit poser l'hypothèse que a_k tient uniquement $\forall n \geq 1$) :

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$$

Théorème de Dirichlet

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique et C^1 par morceaux. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$Ff(x) = \lim_{t=0}\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}$$

(c'est-à-dire que même si la fonction n'est pas parfaitement continue, on assigne la moyenne des deux extrémités à gauche et à droite)

Si f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue (pas par morceaux) et bornée alors $F_N f$ converge vers f quand $N \to \infty$.

Note : c'est similaire pour les transformées de Fourier, en cas de discontinuité on prend la moyenne.

Coefficients de Fourier complexes

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}dx$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \text{ et } b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right) \text{ ou (plus utile), } c_n = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}$$

$$Ff(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

Propositions utiles

- si f est paire, $b_n = 0$, si f impaire, $a_n = 0$

Identité de Parseval

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique et C^1 par morceaux.

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(x)^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

Dérivation termes à termes

$$Ff\text{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{T}n\left(-a_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+b_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{f\text{'}(x-t)+f\text{'}(x+t)}{2}$$

Partir d'une série connue

Supposons que l'on connaisse la série de Fourier de F de période 1 telle que :

$$F(x) = \begin{cases}1 \text{ si } \; 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -1 \text{ si } \; \frac{1}{2} \le x < 1\end{cases} \Longrightarrow b_n = \frac{4}{\pi n} \; \text{ si } \; n \; \text{ impair, sinon } 0$$

Et que l'on souhaite calculer :

$$F\text{'}(x) = \begin{cases}1 \text{ si } \; 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 \text{ si } \; \frac{1}{2} \le x < 1\end{cases}$$

Le plus difficile c'est d'exprimer $F\text{'}$ en fonction de F :

$$F\text{'}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(x)$$

et ensuite, on trouve que le $\frac{a_0}{2}$ est augmenté de $\frac{1}{2}$ et le coefficient b_n est divisé par 2.

Parfois il y a des cas un peu plus difficiles, avec un changement de fréquence par exemple. On revient alors à la formule avec l'intégrale. On connaît (période 1) :

$$G(x) = \begin{cases}2x \text{ si } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x) \text{ si } \frac{1}{2} < x \le 1\end{cases}$$

On veut calculer (période 2π) :

$$G\text{'}(x) = \begin{cases}x \text{ si } 0 \le x < \pi \\ 2\pi - x \text{ si } \pi \le x \le 2\pi\end{cases}$$

On exprime :

$$G\text{'} = \pi G\left(\frac{x}{2\pi}\right) \; \text{ et on connaît } \; a_n^G = \frac{2}{1}\int_0^1 G(x)\cos\left(\frac{2\pi}{1}nx\right)dx$$

Et on cherche :

$$a_n^{G\text{'}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G\text{'}(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\pi G\left(\frac{x}{2\pi}\right)\cos(nx)dx$$

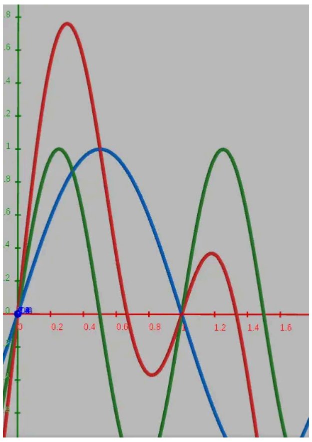
On pose $z = \frac{x}{2\pi}$:

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \pi G(z) \cos\left(\frac{2\pi}{2\pi} nx\right) 2\pi dz = 2\pi \int_0^{2\pi} G(z) \cos\left(\frac{2\pi}{2\pi} nx\right) dx$$

Il apparaît clairement que les a_n ont été multipliés par π et que la nouvelle période est 2π!

Intégrale d'une fonction par sa série de Fourier

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \frac{a_0}{2}(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx + b_n \int_{x_0}^{x} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$$



L'intégrale de notre fonction c'est la somme des intégrales de tous les cos et sin (en vert et bleu) qui la composent (+ ou - la valeur moyenne de la fonction, qui pour rappel est un shift vers le haut ou le bas).

Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < +\infty$.

Alors la transformée de Fourier noté $\mathcal{F}[f]$ ou $\hat{f}$ est définie par :

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

(parfois il est plus simple d'écrire $e^{-i\alpha x}$ comme $\cos(\alpha x) - i\sin(\alpha x)$)

Dans un sens on décompose notre fonction f en une somme de fonctions périodiques avec des fréquences différentes (et on obtient une fonction $\mathcal{F}[f](\alpha)$ qui nous donne les coefficients de Fourier de ces fonctions périodiques en fonction de la fréquence). Et dans l'autre sens on reconstruit notre fonction f en sommant ces fonctions périodiques.

Transformée inverse

$$\mathcal{F}^{-1}[\Phi] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \mathcal{F}^{-1}[\Phi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Propriétés utiles

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{\infty} \ |f(x)| \ < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \ |g(x)| \ < +\infty$.

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a $\mathcal{F}[a \cdot f + b \cdot g] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$
- Si f paire, alors $\mathcal{F}$ réelle et paire.
- Si f impaire, alors $\mathcal{F}$ imaginaire pure et impaire.
- si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $g(x) = f(ax + b)$ alors :

$$\hat{g}(\alpha) = \frac{e^{i\frac{b}{a}\alpha}}{|a|}\hat{f}(\frac{\alpha}{a})$$

- si $g(x) = e^{-ibx}f(x)$ alors $\hat{g}(\alpha) = \hat{f}(\alpha + b)$
- si $g(x) = x^n f(x)$ alors $\hat{g}(\alpha) = i^n \frac{d^n \hat{f}(\alpha)}{d\alpha^n}$

Identité de Plancherel

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{\infty} \ |f(x)| \ < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 < +\infty$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha$$

Transformée de la dérivée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{\infty} \ |f(x)| \ \leq \infty$ et pour $n \in \mathbb{N}^*, \forall k 1 \leq k \leq \ \text{ on a } \ \int_{-\infty}^{\infty} \ |f^{(k)}(x)| \ < +\infty$.

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}\right](\alpha) = (i\alpha)^n \mathcal{F}[f]$$

Produit de convolution

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\int_{-\infty}^{\infty} \ |f(x)| \ < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \ |g(x)| \ < +\infty$. On définit le produit de convolution comme :

$$f * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x - t)g(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)dt$$

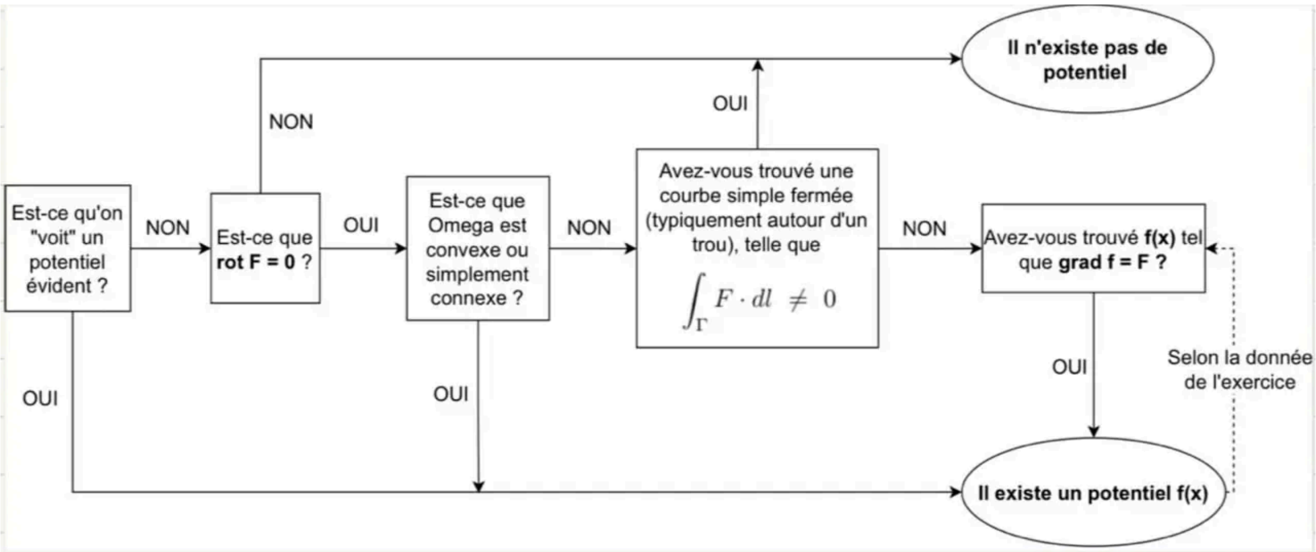
Exemple de convolution, on veut calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)g(x - z)dz$. On choisit une fonction qui bouge, et une fonction qui reste fixe. On va séparer notre intégrale en plusieurs intervalles. Si on a g constante qui est $\neq 0$ entre -1 et 1, on trouve $x - 1 \leq t \leq x + 1$. On sait que notre t va varier entre $x - 1$ et $x + 1$ (en fait de $-\infty$ à $+\infty$ mais le produit sera 0 à cause de g). On pose x le centre de notre g et on trouve tous les intervalles qui font appel à des définitions différentes de f puis on calcule les intégrales (à la fin en fonction de x).

Transformée de $f * g$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f * g| dx < \infty \text{ et } \mathcal{F}[f * g](\alpha) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\alpha) \cdot \hat{g}(\alpha)$$

$$\mathcal{F}[f \cdot g](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}[f](\alpha) * \mathcal{F}[g](\alpha))$$

	$f(y)$	$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$
1	$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lvert y\rvert < \lvert b\rvert \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lvert b\rvert\alpha)}{\alpha}$
2	$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{if } b < y < c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ib\alpha} - e^{-ic\alpha}}{i\alpha}$
3	$f(y) = \begin{cases} e^{-wy}, & \text{if } y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (w > 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w + i\alpha}$
4	$f(y) = \begin{cases} e^{-wy}, & \text{if } b < y < c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(w+i\alpha)b} - e^{-(w+i\alpha)c}}{w + i\alpha}$
5	$f(y) = \begin{cases} e^{-iwy}, & \text{if } b < y < c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(w+\alpha)b} - e^{-i(w+\alpha)c}}{w + \alpha}$
6	$f(y) = \frac{1}{y^2 + w^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\lvert w\alpha\rvert}}{\lvert w\rvert}$
7	$f(y) = \frac{e^{-\lvert wy\rvert}}{\lvert w\rvert} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2 + w^2}$
8	$f(y) = e^{-w^2 y^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\lvert w\rvert} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$
9	$f(y) = y e^{-w^2 y^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}\lvert w\rvert^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$
10	$f(y) = \frac{4y^2}{(y^2 + w^2)^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\lvert w\rvert} - \lvert\alpha\rvert \right) e^{-\lvert w\alpha\rvert}$



Problème de Poisson

Séries de Fourier

On fait une odd extension de la fonction f.

Pour la condition $-\Delta u = f(x)$,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$u^f = \sum_{n=i}^{\infty} b_n \frac{L^2}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

Pour la condition $u^g(a) = g^a$ et $u^g(b) = g^b$ et $\Delta u = 0$,

$$u^g(x) = C_1 x + C_2$$

$$u = u^f + u^g$$

Transformées de Fourier

$$-u''(x) + k^2 u(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[u](\alpha) = \frac{1}{k^2+\alpha^2}\mathcal{F}[f](\alpha) = \mathcal{F}[g](\alpha)\cdot\mathcal{F}[f](\alpha) \text{ et } g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-k\ |x|}}{k}$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g * f(x)$$

$$u(x) = \frac{1}{2k}\left(e^{-k|x|} * f(x)\right)$$

Séries de Fourier remarquables

$$f(x) = x \text{ pour } 0 \le x \le 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\pi n}\sin(2\pi n x)$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^g \sin(2\pi n x) \text{ et } b_n^g = \frac{4}{\pi n} \text{ si } n \text{ odd}$$