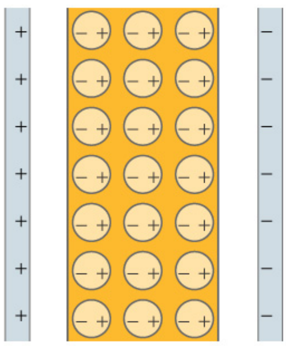
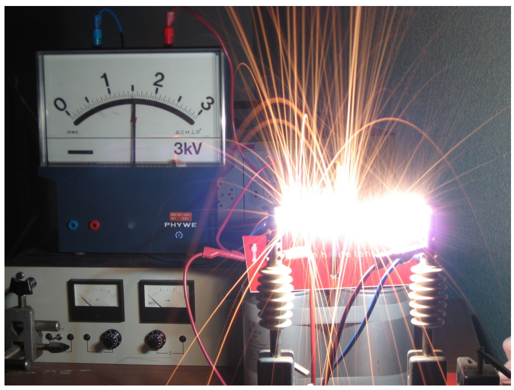
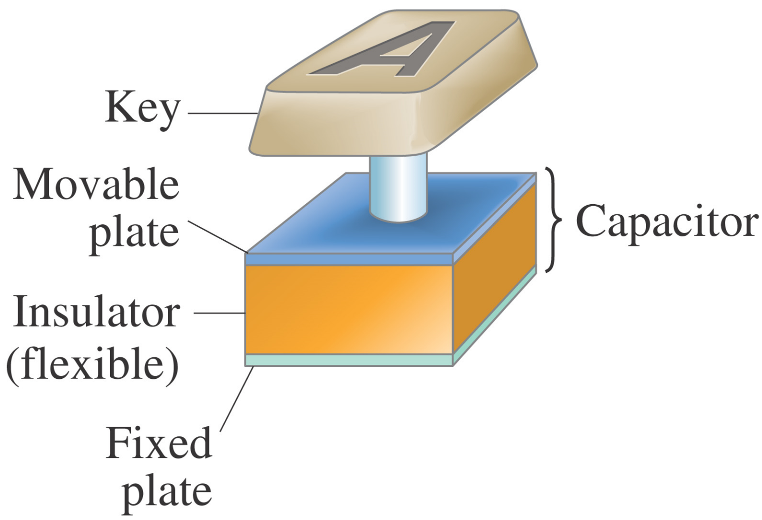
Chapitre 4

Capacité électrique, condensateurs et diélectriques







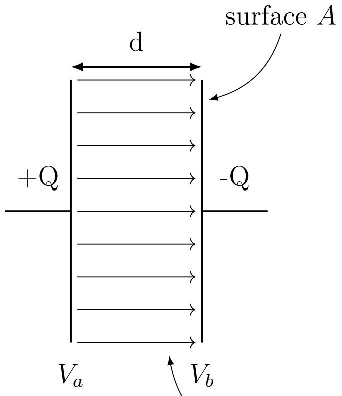
4.1 Capacité électrique et stockage d'énergie

Rappel

$$Q = \underbrace{\text{const.}}_{C} \times V \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{V} \tag{4.1}$$

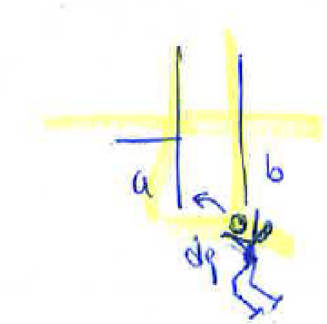
Ex.

- sphère $C = 4\pi\varepsilon_0 R$
- plaques parallèles $C = \dfrac{Q}{V_a - V_b} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$



$$E = E_{\oplus} + E_{\ominus} = 2\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q/A}{\varepsilon_0}$$

Le condensateur comme un "emaganiseur" d'énergie



"je" dois faire du travail pour transférer la charge, petit à petit, par petits pas de dq, d'un côté à l'autre

$\dfrac{dW}{dq} = V$ (c'est la définition de V !)

$\Rightarrow dW = V dq$: et le travail total ?

$$W_{tot} = \int dW = \int_{Q_{initial}}^{Q_{final}} V dq = \int_0^Q V dq \underset{V=\frac{q}{C}}{=} \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C}\left[\frac{1}{2}q^2\right]_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{4.2}$$

Le travail correspond à l'augmentation de l'énergie potentielle

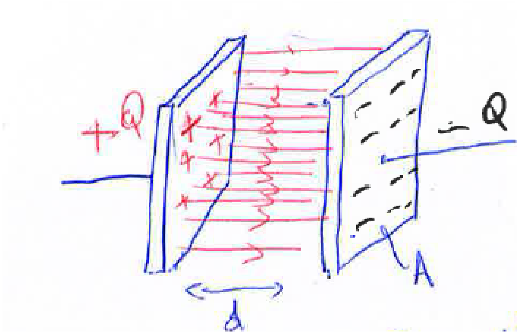
$$U_{\text{stockée}} = W_{tot} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^{\cancel{2}}}{2\frac{\cancel{Q}}{V}} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}(CV)V = \frac{1}{2}CV^2 \tag{4.3}$$

Donc, plus C est grande, et plus V est élevée, plus grande est la quantité d'énergie qu'on peut stocker.

Donc un condensateur représente une façon de stocker de l'énergie dans un circuit, que l'on utilise après pour différentes fonctions, par ex. pour faire tourner un moteur ou allumer une ampoule.

Note 4.1. *C peut stocker l'énergie, mais ne peut pas l'amplifier. Par contre, on peut accumuler de l'énergie pendant un temps relativement long, puis l'utiliser sur un temps court : dans ce cas on amplifie la puissance.*

Évaluons l'énergie emmagasinée en termes de champ électrique



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \frac{A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \underbrace{Ad}_{\text{volume}} \tag{4.4}$$

En général

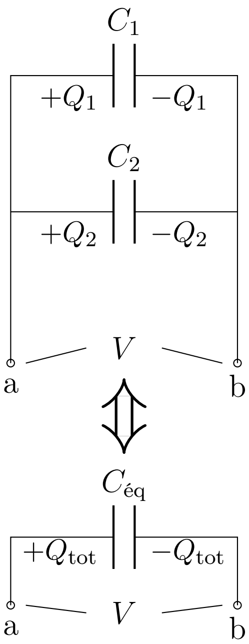
$$\frac{dU}{d\text{Volume}} = \text{densité d'énergie} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{4.5}$$

Donc l'énergie est stockée sons forme de champ électrique dans un certain volume.

4.2 Condensateurs dans les circuits électriques

Deux types de connexions : en série ou en parallèle
(1) C en parallèle → [parallèle = même potentiel, car les fils sont des surfaces équipotentielles]

V est le même!



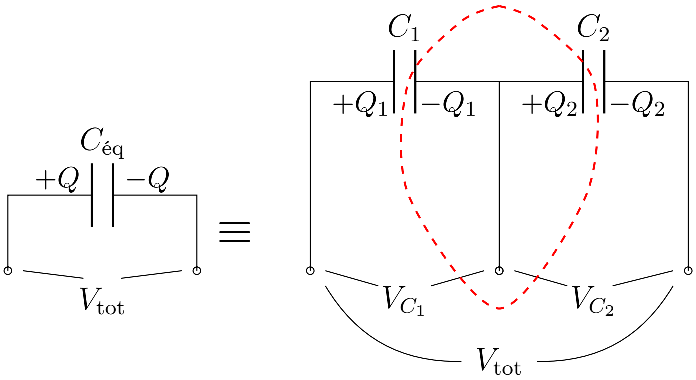
$$V_{C_1} = V_{C_2} = V \quad ; \quad V = \frac{Q}{C} \quad \text{donc}$$

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \quad ; \quad \text{et } Q_1 + Q_2 = Q_{tot}$$

$$C_{eq} = \frac{Q_{tot}}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} =$$

$$= \frac{Q_1}{V_{C_1}} + \frac{Q_2}{V_{C_2}} = C_1 + C_2 \tag{4.6}$$

Pour plusieurs C_j en parallèle : $C_{eq} = \sum_{j=1}^{N} C_j$
(2) C en série



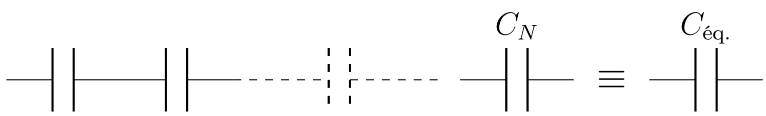
Ici $Q_1 = Q_2$ (par ex. si l'on considère la partie rouge, qui n'a aucune connexion externe)

$$\begin{cases} V_{tot} = V_{C_1} + V_{C_2} \\ Q_1 = Q_2 = Q \end{cases}$$

$$V_{tot} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right] = \frac{Q}{C_{eq}} \tag{4.7}$$

$$\Rightarrow C_{eq} = \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1} \tag{4.8}$$

Pour plusieurs C_j en série : $C_{éq} = \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{C_j}\right]^{-1}$



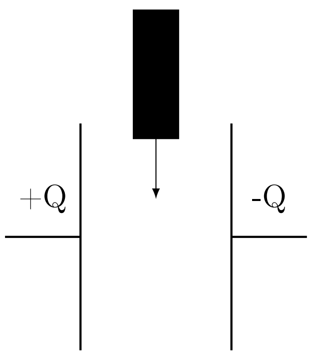
4.3 Diélectriques et polarisation

Note 4.2. *Prenons* $A \simeq 1\,\text{m}^2$; $d = 1\,\text{mm}$

$$\Rightarrow \quad C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{8.8 \times 10^{-12} \times 1}{10^{-3}} = 10^{-8}\,\text{F} = 10\,\text{nF}$$

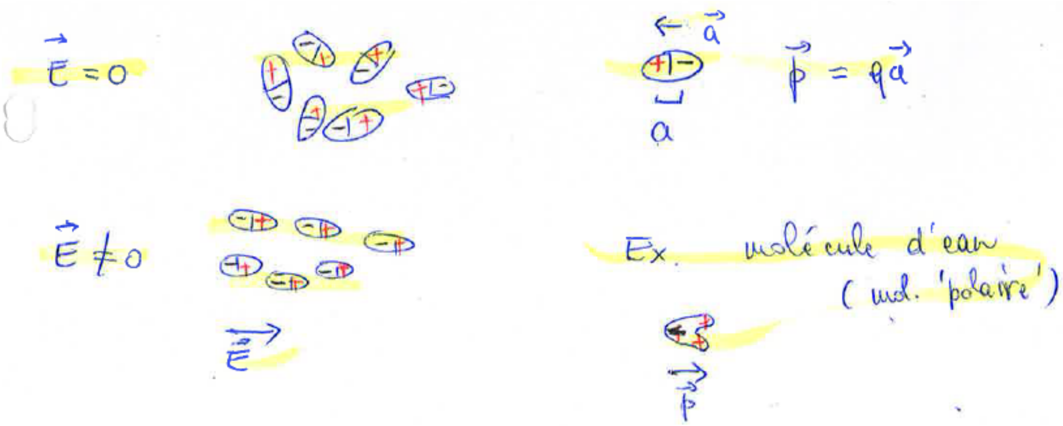
Très petite valeur ! Comment, dans la pratique, produit-on des capacités avec $C \sim \mu$F ou mF ? Diélectriques !

DEMO potentiel qui varie avec la distance entre les deux plaques, et avec l'insertion d'un diélectrique.



Q ne change pas ; mais lorsqu'on insère la plaque de diélectrique, la tension V diminue. Comme $V = \frac{Q}{C}$, cela veut dire qu'on a augmenté la valeur de C en insérant le diélectrique.
Pourquoi ? L'explication est dans le comportement des diélectriques au niveau microscopique.

Un diélectrique ($\equiv$ isolant) est fait de petits dipôles. Les charges ne peuvent pas vraiment bouger librement, mais les dipôles peuvent tourner et s'aligner avec le champ $\vec{E}$.

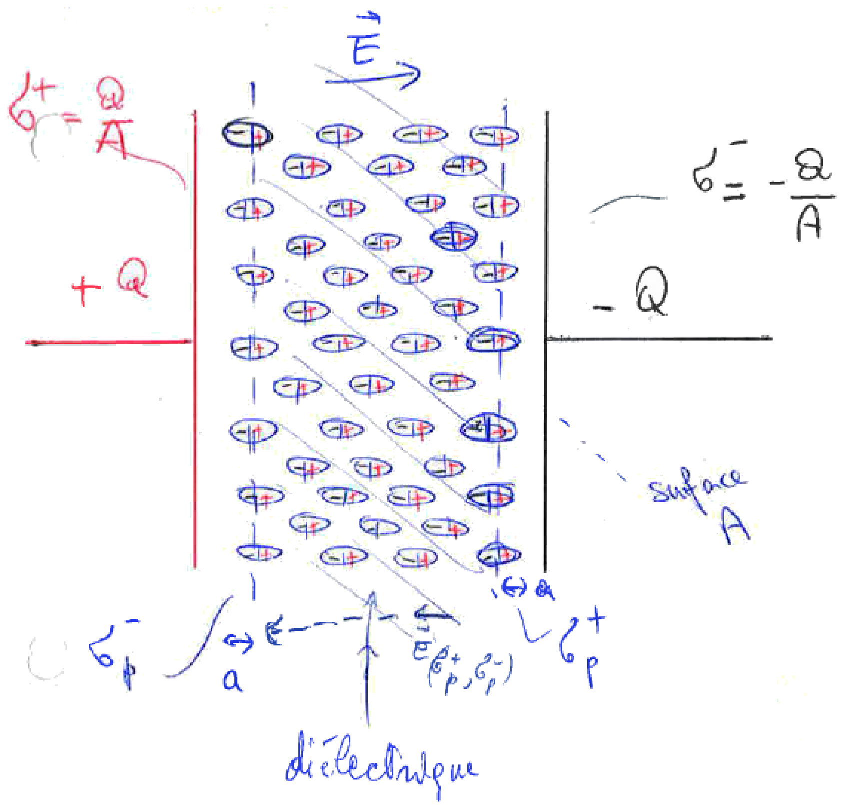


Déf. $\vec{P} = n\vec{p}$ "polarisation", où n est le nombre de dipôles par unité de volume.
Ça dépend du matériau, mais aussi du champ $\vec{E}$!
En effet plus grand est $|\vec{E}|$, plus grande est la valeur de $|\vec{P}|$ (et la direction sera la même que $\vec{E}$)

$$\vec{P} = const. \times \vec{E} = (\varepsilon_0 \chi)\vec{E} \quad \textbf{où on définit} \quad \chi \text{ "susceptibilité" diélectrique}$$

$$\chi \text{ est un scalaire sans dimensions}; \quad \chi > 0.$$

Vision microscopique à l'intérieur du condensateur avec diélectrique



Toutes les charges des dipôles se compensent, excepté pour les deux couches externes. Celles-ci ont une densité de charge superficielle de σ_p^+ et σ_p^-.
Ces couches non-équilibrées ont une épaisseur de $\sim a$ (la taille des dipôles). Ces densités de charge superficielle créent un champ qui à l'intérieur du matériel s'oppose au champ original, et le diminue.
Combien de charges de polarisation ne sont pas équilibrées ?
\# de charges non-équilibrées = $\underbrace{n}_{\frac{\text{\# de dipôles}}{\text{volume}}} \times \underbrace{aA}_{\text{volume}} = naA$

Densité superficielle

$$|\sigma_p^+| = |\sigma_p^-| = \frac{Q_p^{tot}}{A} = \frac{q \overbrace{naA}^{\#\,charges}}{A} = qna = np = P \tag{4.9}$$

$$\Rightarrow |\sigma_p^+| = |\sigma_p^-| = P \tag{4.10}$$

Champ total, réduit par l'effet de la polarisation :

$$E = \underbrace{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}_{\text{vide}} + \underbrace{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}_{\text{vide}} - \frac{|\sigma_p^+|}{2\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_p^-|}{2\varepsilon_0} = \underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}_{E_0} - \underbrace{\frac{P}{\varepsilon_0}}_{\frac{\varepsilon_0 \chi E}{\varepsilon_0} = \chi E} = E_0 - \chi E \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow E(1+\chi) = E_0 \tag{4.12}$$

$$E = \frac{E_0}{1+\chi} \stackrel{def.}{=} \frac{E_0}{K} \quad \text{avec} \quad K \stackrel{def.}{=} 1+\chi \qquad \text{“constante diélectrique”} \tag{4.13}$$

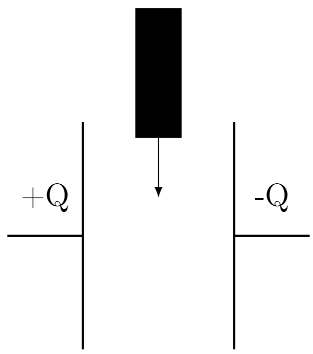
des fois on l'indique avec ε_r
“permittivité relative”

$$K > 1 \text{ car } \chi > 0$$

K donne le facteur de réduction du champ (et donc du potentiel) à cause de la présence du diélectrique et sa charge de polarisation à la surface.

On peut maintenant qualifier l'augmentation de C :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{QK}{dE_0} = KC_0 \tag{4.14}$$



où C_0 est la valeur de la capacité sans diélectrique.

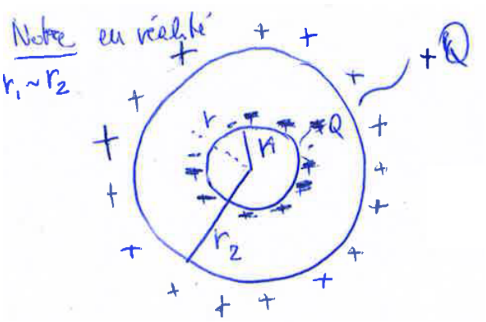
La capacité est donc augmentée d'un facteur K (le même que le facteur de réduction de E) $E \to \frac{E_0}{K}$; $V \to \frac{V_0}{K}$.
Dans la pratique, on choisit des diélectriques avec une grande valeur de K pour augmenter le valeur de C.

Ex. de valeurs de K

matériel	$K = 1 + \chi$
vide	1
air	1.0006
plexiglas	3.4
eau	80 (20°)
ethanol	23
céramique	~ 5000
verre	$5 - 15$

Effets biologiques : beaucoup d'interactions en biologie sont liées aux forces électrostatiques dans les fluides (en grande majorité, eau). Si on remplace l'eau avec d'autres liquides qui ont des valeurs très différentes de K, par ex. l'alcool, ces interactions sont fortement influencées !

Ex. Cellule vue comme un condensateur sphérique. Quelle est sa capacité ? Et la valeur du champ ? Ou de la densité de charge ?



$$E(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \tag{4.15}$$

$$V_{out} - V_{in} = \Delta V = +\int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr =$$

$$= +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] > 0 \tag{4.16}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) > 0 \tag{4.17}$$

Capacité :

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{4\pi\varepsilon_0}\left|\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right)\right|} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{|r_1 - r_2|} \tag{4.18}$$

Cellule :

$$\begin{cases} r_1 \sim r_2 \sim 10^{-5}\,\mathrm{m} \quad (= 10\,\mu\mathrm{m}) \\ r_1 - r_2 \sim 6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad C \simeq 4\pi\varepsilon_0 \frac{(10^{-5})^2}{6 \cdot 10^{-9}} \cong \frac{12 \times 8.8 \times 10^{-12} \times 10^{-10}}{6 \times 10^{-9}} \cong 1.8 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} \simeq 2\,\mathrm{pF}$$

A partir de C on peut calculer la charge sur la surface de la cellule : $|Q| = C|\Delta V|$, et typiquement $|\Delta V| \sim 0.1\,\mathrm{V} = 100\,\mathrm{mV}$

$$\Rightarrow \quad |Q| \simeq 2{\cdot}10^{-12}{\cdot}0.1\,\mathrm{C} = 2{\cdot}10^{-13}\,\mathrm{C}; \quad N = \frac{Q}{e} = \frac{2\cdot 10^{-13}\,\mathrm{C}}{1.6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} \cong 10^{6} \text{ charges élémentaires}$$

Densité de charge à la surface :

$$\sigma \sim \frac{|Q|}{4\pi r_1^2} \simeq \frac{|Q|}{4\pi r_2^2} \simeq \frac{2\cdot 10^{-13}\,\mathrm{C}}{12\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^2} = \frac{1}{6}\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \simeq 0.17\times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

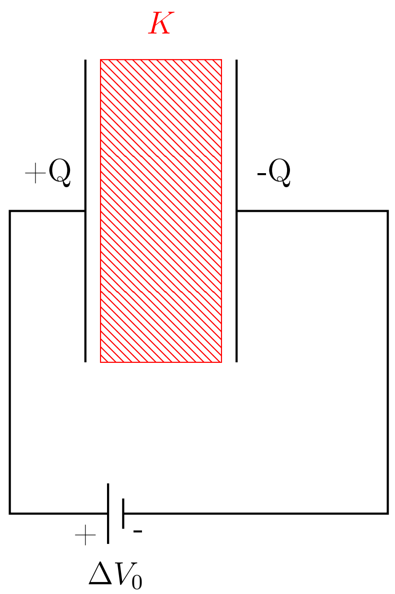
Mais quand on mesure, on trouve $\sigma_{\text{réel}} \sim 10\sigma$: pourquoi ? Parce que la membrane a des propriétés diélectriques, qui font que $C \to KC_0$, avec $K \sim 10$!

En effet, en réalité, $C \sim 20\,\mathrm{pF}$, et pas $2\,\mathrm{pF}$!

Énergie stockée dans un condensateur avec diélectrique.

On a vu que l'énergie stockée est $U_{\text{stockée}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$.

Considérons maintenant un condensateur avec diélectrique, auquel on applique une différence de potentiel ΔV_0



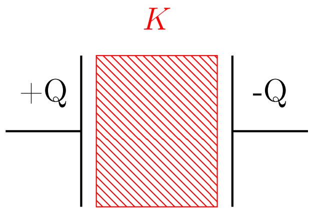
$$Q_0 = (KC_0)\Delta V_0$$

$$\text{ou} \quad \Delta V_0 = \frac{Q_0}{KC_0}$$

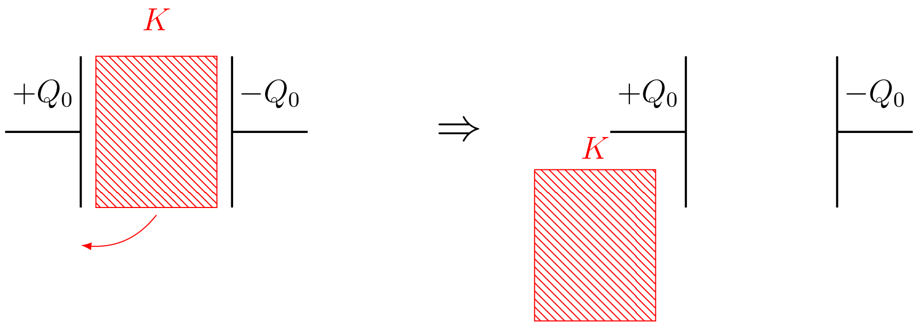
C_0 est la capacité du condensateur sans diélectrique

Détachons la batterie, en laissant donc la même charge Q_0 sur les plaques du condensateur. L'énergie stockée est donc

$$U_{avant} = \frac{1}{2}\underbrace{(KC_0)}_{C}\Delta V_0^2$$



Maintenant enlevons le diélectrique



$Q_0 = const.$
(on n'a pas enlevé la charge!)

Que vaut ΔV ? $\Delta V = \frac{Q_0}{C_0}$ (il n'y a plus de K !) Donc $\Delta V = K\Delta V_0$: la tension a augmenté ! Et l'énergie ?

$$\Rightarrow U_{apres} = \frac{1}{2}C_0\Delta V^2 = \frac{1}{2}C_0K^2\Delta V_0^2 = \underbrace{\frac{1}{2}(KC_0)\Delta V_0^2}_{U_{avant}} \times K = U_{avant} \times K \tag{4.19}$$

Donc l'énergie a augmenté

$$U_{après} - U_{avant} = (K-1)U_{avant} \tag{4.20}$$

D'où vient cette énergie ?
Idée : Nous avons dû faire un travail pour "sortir" le diélectrique du condensateur, donc ça vient de nous !
Donc, si on doit faire un travail pour extraire le diélectrique, en augmentant l'énergie du système, ça veut dire que le diélectrique devrait naturellement être attiré à l'intérieur du condensateur.

Chapitre 5

Courant électrique, résistance, puissance et circuits DC

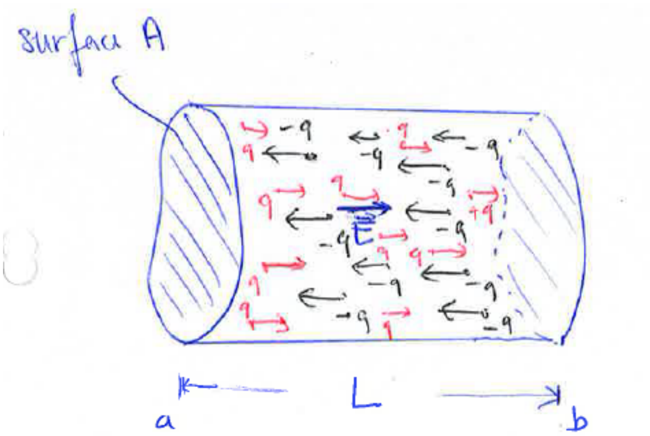
TABLE 19–1 Symbols for Circuit Elements

Symbol	Device
	Battery
or	Capacitor
	Resistor
	Wire with negligible resistance
	Switch
or	Ground

Credit : Dr. Loizu, Prof. Fasoli

5.1 Le courant électrique

Fin de l'électrostatique : dorénavant les charges peuvent bouger. L'argument utilisé pour conclure que $\vec{E} = 0$ dans les conducteurs n'est plus valable.
Considérons un conducteur ($\vec{E} \neq 0$, et on permet aux charges de bouger...)



$$V_a - V_b = V \Rightarrow E = \frac{V}{L} \quad (5.1)$$

Déf. 'courant électrique' : quantité de charge nette qui passe à travers la surface A par unité de temps.

$$i = \frac{dQ}{dt}; \quad [i] = \frac{C}{s} = \text{A} \qquad \text{“ampère”} \tag{5.2}$$

Note 5.1. *Le courant électrique est une quantité scalaire, liée au conducteur spécifique que l'on considère.*

Note 5.2. *Le courant a un signe, donc une direction. La convention est que la direction du courant est celle du mouvement des charges positives (même si ce sont les électrons qui bougent !).*

Deux conditions pour avoir un courant :

(1) Porteurs de charge libres de bouger
(2) Champ électrique (ou différence de potentiel) $\neq 0$

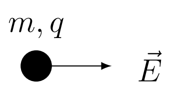
5.2 Résistivité et résistance électriques

Naturellement, le courant passe uniquement si on applique un champ $\vec{E}$, ou une différence de potentiel ΔV. Mais combien de courant passe pour un E (ou un ΔV) donné ?

⇒ **Résistivité et résistance**

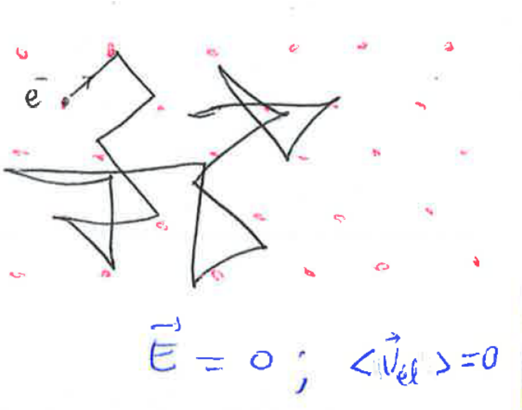
Analyse microscopique.

Charge q, avec masse m



Équation du mouvement : $$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

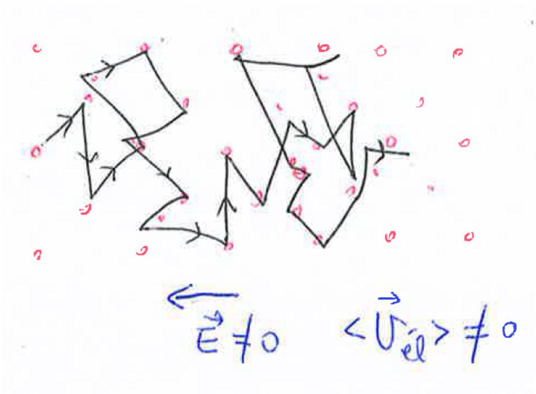
Si $|\vec{E}| \neq 0, |\vec{v}|$ augmente tout le temps : $|\vec{v}| \to \infty$
Mais est-ce possible, en particulier si les charges sont dans un objet matériel ? Non, car il y a de la résistance !
Analogie avec la gravité : si on saute avec un parachute, on n'accélère pas à l'infini, car il y a le frottement de l'air, et on atteint une 'vitesse terminale'.
Quelle est l'origine du 'frottement' (résistance) pour les charges ?
Métal : les atomes et ions forment un réseau qui vibre, mais en moyenne restent au même endroit. Par contre, un certain nombre d'électrons se déplacement librement.



La source du mouvement désordonné est la température. Les électrons sont beaucoup plus légers et mobiles, et leur mouvement thermique est bien plus significatif pour la même température. Ils rebondissent dans le réseau du métal, mais si $E = 0$, en moyenne $< \vec{v}_{él} >= 0$

Note 5.3. $< \vec{v}_{él} >= 0$, *mais* $v_{th,él.} \simeq 10^6 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *à température ambiante* $\left[v_{th,él} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_e}} \right]$

Si $\vec{E} \neq 0$, les électrons ont toujours un mouvement aléatoire très rapide, mais avec une moyenne $\neq 0$.



$$< \vec{v}_{él.} > \neq 0$$

On peut quantifier le terme de frottement contre les ions du réseau comme un terme de frottement classique, proportionnel à $|\vec{v}|$.

$$m\frac{d\vec{v}_d}{dt} = q\vec{E} - \underbrace{f\vec{v}_d}_{frottement} \tag{5.3}$$

équation du mvt. pour la vitesse ordonnée, "de dérive"

Etat stationnaire :

$$\frac{d\vec{v}_d}{dt} = 0 \tag{5.4}$$

(mais pas statique ! $\vec{v}_d \neq 0$)

$$q\vec{E} = f\vec{v}_d, \quad \text{où} \quad \vec{v}_d = \text{vitesse de dérive terminale} \tag{5.5}$$

$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{f}$; <u>note</u> $v_d << v_{\text{th, él.}}$; typiquement, dans un métal $v_d \sim 10^{-3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

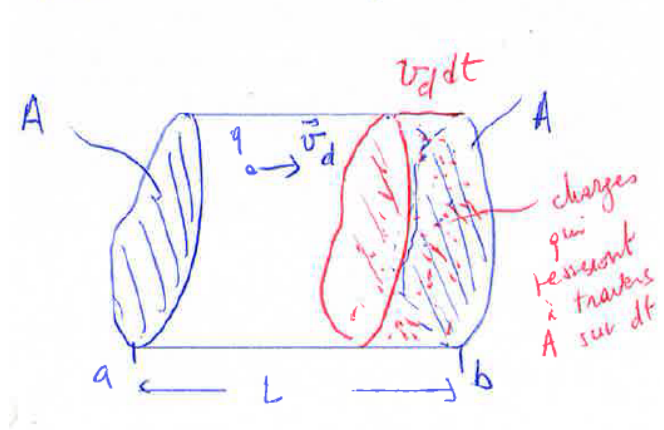
<u>Discussion</u>.

Pourquoi quand on allume une lampe, on ne doit pas attendre le temps correspondant à $\Delta t = \frac{\text{distance (lampe-interrupteur)}}{v_d}$ (qui serait assez long..) ?

...c'est comme quand un peloton de soldats est mis en marche par l'ordre d'un sergent... tous les soldats commencent à marcher en même temps, les premiers n'ont pas besoin d'attendre que les derniers arrivent là où ils sont. La commande s'est propagée bien plus vite que la marche.

Dans notre cas la 'commande' est la différence de potentiel. A quelle vitesse pensez-vous que celle-ci se propage ?

Vision microscopique de notre conducteur



$$E = \frac{V_a - V_b}{L} = \frac{V}{L} \qquad (5.6)$$

Quelles charges passent à travers A sur le temps dt ?

→ celles qui étaient à une distance de A inférieure ou égale à $v_d dt$

Donc :

$$i = \frac{\text{charge à travers } A \text{ sur } dt}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{q \times \#\text{charges dans volume } Av_d dt}{dt} = \qquad (5.7)$$

$$= q \underbrace{n_q}_{\frac{\#\text{ de charges}}{\text{volume}}} \underbrace{Av_d \cancel{dt}}_{\text{volume}} \frac{1}{\cancel{dt}} = nqv_d A; \qquad (5.8)$$

Cette valeur dépend de A, donc de la géométrie du conducteur spécifique considéré.

<u>Déf.</u>

$\vec{J}$ densité de courant $[J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

$\vec{J}$ est tel que $\vec{J} \cdot \vec{A} = i$ [i est donc équiparable à un flux]

$\vec{J}$ est une quantité locale qui décrit le flot de charge en général, indépendamment du conducteur spécifique.

Comme $i = n_q q v_d A \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = n_q q \vec{v}_d$

Note 5.4. *Si on a plusieurs (N) espèces de porteurs de charge (ex. ions et électrons), alors* $\vec{J} = \sum_{j=1}^{N} n_{q_j} q_j \vec{v}_{d_j}$

Maintenant, nous voulons revenir à l'estimation de la résistivité, pour laquelle on veut exprimer $\vec{J}$ en fonction de $\vec{E}$.
Considérons, par simplicité, une seule espèce (typiquement les électrons)

$$\underbrace{\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{f}}_{\text{vitesse "terminale"}} \quad \Rightarrow \vec{J} = n_q q \vec{v}_d = n_q q \frac{q\vec{E}}{f} = \underbrace{\left(\frac{n_q q^2}{f}\right)}_{\text{const.}} \vec{E} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\underbrace{\rho}_{\rho\ =\ \text{résistivité}}} \vec{E} \tag{5.9}$$

La résistivité $\rho = \dfrac{f}{n_q q^2}$, est donc une mesure de la friction : plus il y en a, moins de densité de courant sera générée par un E donné.

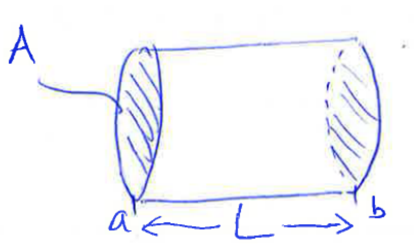
Note 5.5. *Plus de porteurs de charge (on plus de charges par porteur), plus facile sera de faire passer un courant*

$$[\rho] = \frac{\mathrm{V}}{\cancel{\mathrm{m}}}\frac{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}{\mathrm{A}} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \mathrm{m}\Omega \quad \text{"ohm-mètre"} \tag{5.10}$$

ρ dépend du matériau (isolant, semi-conducteur ou conducteur).
Question : si on applique une différence de potentiel sans augmenter la vitesse des porteurs de charges, où va notre 'travail', donc l'énergie ?
<u>Ex.</u> gravité : si on tombe avec un parachute, la force de gravitation fait un travail sur nous, mais une fois arrivés à notre vitesse terminale, nous n'accélérons plus. Où va le travail ?
$\rightarrow$ dans l'échauffement de l'air dû au frottement. Avec un parachute/ une personne on ne verra pas d'effet, mais avec $\sim 10^{23}$ parachutes, on devrait voir un échauffement de l'air !
Le même concept s'applique au courant électrique : l'énergie va dans l'augmentation des oscillations du réseau avec lequel les électrons rentrent en collision.
Revenons à la résistivité : on veut passer de la propriété d'un matériau en général à celle d'un bout de conducteur "réel".

$\rightarrow$ <u>**Résistance**</u> déf. $R \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{V}{i}$ pour un objet donné

$[R] = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega$ "ohm" ; symbole 
R



$$V_a - V_b = V; \qquad \vec{J} = \frac{1}{\rho}\vec{E}; \qquad \vec{J}\cdot\vec{A} = JA$$

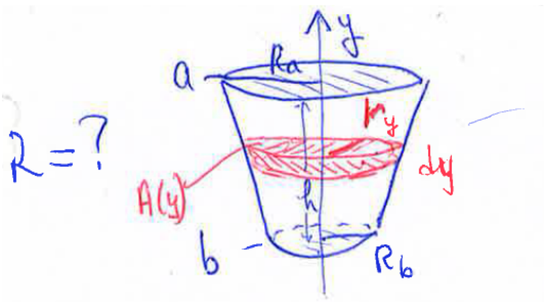
$$i = JA = \frac{1}{\rho}EA \underset{E=\frac{V}{L}}{=} \frac{1}{\rho}\frac{V}{L}A = \frac{A}{\rho L}V$$

$$\Rightarrow R = \frac{V}{i} = \underset{\text{matériau}}{\rho}\,\underset{\text{géométrie (cylindrique)}}{\frac{L}{A}}$$

Note 5.6. *En général, nous considérons dans ce cours* $\vec{J} \perp \vec{A}$*, donc* $\vec{J}\cdot\vec{A} = JA = i$*.*

Pour résoudre les problèmes de calcul de résistance, on essaye toujours de se référer au cas du conducteur cylindrique (fil).

<u>Ex.</u> de calcul : quelle est la résistance entre les deux faces d'une tranche de cône de résistivité ρ ?

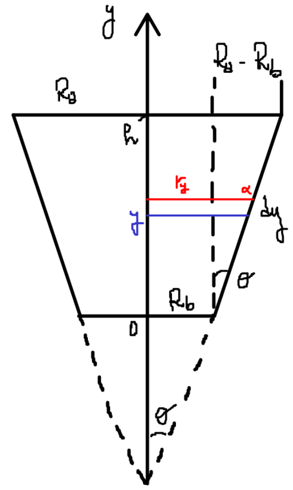


- on considère une couche d'épaisseur dy ;
- cette couche peut être considérée approximativement comme un cylindre ;
- résistance de la couche $dR = \rho\frac{dy}{A(y)}$.

La résistance totale sera, intuitivement, la somme des résistances de toutes les couches [on verra que cela est la cas en général pour les résistances en série, et les couches sont connectées en série].

$$R_{tot} = \int_0^h \rho\frac{dy}{A(y)} = \int_0^h \rho\frac{dy}{\pi r_y^2} \qquad (5.11)$$

$$r_y = ?$$



$$r_y = R_b + \alpha =$$
$$= R_b + y\,\mathrm{tg}\,\theta =$$
$$= R_b + y\,\frac{R_a - R_b}{h}$$

$$R_{tot} = \int_0^h \rho \frac{dy}{\pi \left[R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y\right]^2}; \qquad \xi = R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y; \qquad d\xi = \frac{R_a - R_b}{h} dy$$

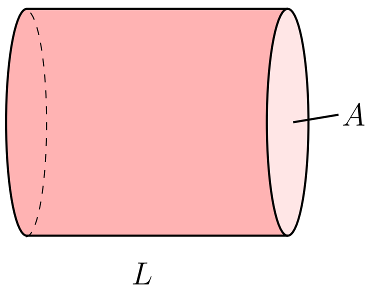
$$\Rightarrow R_{tot} = \int \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \frac{d\xi}{(\xi)^2} = \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \left[- \frac{1}{R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y} \right]_0^h =$$

$$= \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \left[\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a} \right] = \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a R_b}$$

Note 5.7. *Si* $R_a = R_b = R_0 \Rightarrow R_{tot} = \dfrac{\rho h}{\pi R_0^2}$*, et on retrouve le résultat qu'on devrait avoir pour un cylindre.*

5.3 Résistance électrique et loi d'Ohm

Reprenons notre "cas de base" : **conducteur cylindrique (fil)**



$$R = \rho \frac{L}{A} = \left(\frac{f}{n_q q^2} \right) \frac{L}{A} \qquad (5.12)$$

La résistance est définie comme $R = \dfrac{V}{i}$, c'est à dire le facteur de proportionnalité entre différence de potentiel et courant.
Donc en général on mesure $V = iR$.
Mais, attention, la loi d'Ohm est $\boxed{V = iR}$, avec R indépendante de i et de V.
Si non, la relation entre i et V peut ne pas être de simple proportionnalité. Si $R = R(i)$ ou $R = R(V)$, alors la loi d'Ohm perd son sense, et on parle de conducteur "non-ohmique".
Pouvons-nous imaginer une situation dans laquelle $R = R(i)$, on $R = R(V)$?
On peut penser aux facteurs qui peuvent influencer la valeur de $R = \dfrac{f}{n_q q^2} \dfrac{L}{A}$ (pour un conducteur cylindrique).
En effet, on peut penser de modifier le facteur f, qui quantifie le frottement, ou la difficulté des porteurs de charge à passer à travers le matériel (le réseau solide du métal par ex.).
Les oscillations du réseau sont déterminées par sa température. Si on le refroidit, on réduit les oscillations thermiques, en rendant plus facile le passage de charges. On devrait donc réduire f, et R. Vice versa, on augmente f et R quand on augmente la température.

Typiquement $R = R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, avec $\alpha \simeq const.$, paramètre qui dépend de la nature du matériau.

5.4 Puissance électrique

Si on fait passer un courant assez fort, on peut avoir $R = R(i)$, parce que $T = T(i)$. Ce serait un conducteur "non-ohmique". Pour pouvoir calculer ce genre d'effet, et bien d'autres, liés au passage de courant dans un conducteur, on doit introduire le concept de **puissance électrique**.
Si on fait passer un courant dans un conducteur, on "force" les porteurs de charge à travers son réseau, et on transfert de l'énergie des porteurs de charge au réseau, par collisions. C'est comme ça qu'on maintient une vitesse de dérive (ordonnée) constante.
En effet la différence de potentiel ne peut pas accélérer les charges au-delà de leur vitesse de dérive "terminale", et donc cette énergie doit être dissipée dans le réseau.
Dans l'unité de temps :

$$\text{puissance} = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}V = iV = \begin{cases} (V = iR) & i^2R \\ (i = \dfrac{V}{R}) & \dfrac{V^2}{R} \end{cases} \tag{5.13}$$

travail fait par V

$$[P] = \text{Watt ou [V A]} \tag{5.14}$$

Note 5.8. *Si $T = T(puissance) = T(iV)$, et $R = R(T) \to R = R(iV)$ "non-ohmique".*

La puissance électrique dissipée dans un conducteur peut être utilisée pour :

- chauffer (chauffage électrique)
- faire de la lumière (ampoule à incandescence)
- fusibles (si trop de courant, chauffent et "sautent", c'est-à-dire ouvrent le circuit)
- etc

Mais dans d'autres situations, elle est plutôt à éviter/minimiser, par ex. :

- chauffage des câbles/composants électriques
- pertes dans le transport de l'électricité.