Wie man neue Begriffe einführt . . .

Simon Felten

... oder wie die noch junge Geschichte der fast log-glatten Familien begann. Was fast log-glatte Familien sind, erfahrt ihr, wenn ihr den Artikel weiter lest. Mein Name ist Simon Felten, ich promoviere jetzt seit Januar 2017 an der JGU Mainz in Algebraischer Geometrie, einem Teilgebiet der Mathemathik. In der algebraischen Geometrie untersuchen wir im Kern die Nullstellenmengen von Polynom-Gleichungen, also etwa den Kreis $\{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$. Den Kreis betrachte ich aber nicht einfach als Menge, sondern mit deutlich mehr Struktur, nämlich als Schema. Hierbei handelt es sich um eine geometrische Interpretation algebraischer Objekte, die vom berühmten Alexander Grothendieck und anderen in den 60er Jahren entwickelt wurde. Im Beispiel des Kreises wird konkret der Ring $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ geometrisch interpretiert, für diejenigen, die wissen, was Ringe und Ideale für uns Mathematiker sind. Ich will euch aber alle mitnehmen, deswegen erspare ich euch derart komplizierte Strukturen wie Schemata (seht euch mal Grothendiecks Schicksal an), und rede stattdessen über Mannigfaltigkeiten. Eine Mannigfaltigkeit ist ein geometrisches Objekt, das lokal um jeden Punkt aussieht wie $\mathbb{R}^n$, also z. B. eine Fläche im (dreidimensionalen) Raum. Mannigfaltigkeiten kennt ihr auch in eurem Alltag, etwa die Oberfläche eines Balls oder einer Tasse.

Über Kurven und deren Anzahl

Die Spiegelsymmetrie, jetzt ein großes Forschungsgebiet an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Physik, nahm ihren Anfang in der String-Theorie, also in der theoretischen Physik. Worum genau es in der String-Theorie geht, kann ich euch nicht erklären, fragt jemand anderen. Als Kikkawa und Yamasaki 1984 beobachteten, dass die String-Ausbreitung auf Kreisen vom Radius R äquivalent ist zu der auf Kreisen vom Radius $1/R$ (was auch immer das bedeutet), später bekannt als T-Dualität, ahnten sie sicher noch nicht, welch umfangreiches Forschungsgebiet aus derartigen Beobachtungen einmal entstehen sollte. Zunächst nur in der Physik beachtet, sind sie auf eine tiefliegende Äquivalenz geometrischer Räume gestoßen, die seit etwa 1990 auch für uns Mathematiker interessant ist.

Candelas und andere bemerkten, dass man derartige Äquivalenzen verwenden könnte, um rationale Kurven auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten (kurz CY und nicht zu verwechseln mit Kabeljau; das ist ein Fisch) zu zählen. CYs sind eine spezielle Klasse von Mgf. mit besonders schönen Eigenschaften. Das zu erklären würde hier zu weit führen, aber die wesentliche Idee ist, dass auf einer CY mehr Struktur existiert als auf einer allgemeinen Mgf.Diese Struktur können wir dann verwenden, um schöne Eigenschaften zu zeigen, die nicht gelten, wenn man diese Struktur nicht zur Verfügung hat. Rationale Kurven sind bestimmte Kurven, die durch Polynom-Gleichungen gegeben sind. Geometrische Objekte, die durch Polynom-Gleichungen gegeben sind, heißen auch algebraisch. (Vorsicht! Die Umkehrung ist falsch: Wir nennen auch viele Dinge algebraisch, wenn sie nicht durch Polynom-Gleichungen gegeben sind.) $\{x = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ ist z. B. eine rationale Kurve, und $\{y^2 - x^3 - x = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ ist zwar algebraisch, aber nicht rational. Der Graph der Sinusfunktion ist nicht algebraisch, aber trotzdem eine Kurve. Ihn wollen wir nicht mitzählen.

Bild und Spiegelbild

Es gibt verschiedene Ansätze, die Beobachtungen der Physiker mathematisch präzise zu fassen. Ein Ansatz, die sogenannte homologische Spiegelsymmetrie, wurde von Kontsevich 1994 vorgeschlagen. Lasst uns sehen, was das bedeutet: Bei einem Spiegel gibt es immer einen Gegenstand und sein Spiegelbild. Einerseits kann eine CY durch Polynom-Gleichungen gegeben sein. Sie ist dann z. B. die Teilmenge von $\mathbb{C}^3$, deren Koordinaten $x + y^2 + z = 42$ erfüllen (keine Ahnung, ob das wirklich eine CY ist). In diesem Fall nennen wir sie eine algebraische Varietät; sie ist ja durch Polynom-Gleichungen gegeben. Andererseits kann eine CY eine ausgezeichnete 2-Form haben, in diesem Fall nennen wir sie eine symplektische Mannigfaltigkeit. Was genau symplektische Geometrie ist, müsst ihr auch jemand anderen fragen. Beides sind Zusatz-Informationen, aus denen wir weitere Strukturen konstruieren können. Für die algebraische Varietät ist das die Kategorie der kohärenten Garben. Eine Garbe alleine ist bereits ein kompliziertes Objekt, dass ich hier nicht näher erklären will. Wenn sie kohärent ist, finden wir Mathematiker sie besonders schön, wir hätten sie also auch einfach eine schöne Garbe nennen können. Tun wir aber nicht, weil wir dafür viel zu viele verschiedene Eigenschaften von Garben schön finden. Deren Kategorie fasst sie alle und deren Abbildungen zusammen. Wir abstrahieren also nochmal von der Garbe. Für die symplektische Mgf. konstruieren wir aus der Zusatz-Information die Fukaya-Kategorie. Fragt auch hier jemand anderen, was die Fukaya-Kategorie eigentlich ist. Kontsevich vermutet nun, dass sich diese beiden Kategorien irgendwie ähneln, wenn man eine algebraische CY und eine andere dazu spiegelduale symplektische betrachtet.

Symmetrische Diamanten

Warum heißt das ganze jetzt homologische Spiegelsymmetrie? Gut, wir haben zwei Seiten, aber ein Blatt Papier hat auch zwei Seiten. Der Schlüssel dazu ist einfach, und eine wesentlich ursprünglichere Beobachtung. Man kann zu jeder komplexen Mgf. (d. h. definiert über $\mathbb{C}$, nicht das sie ein Mindestmaß an Komplexität erfüllen muss) ein viereckiges Schema (im intuitiven Sinne) mit ganzen Zahlen, den sogenannten Kohomologiedimensionen (komplizierter Name für ein kompliziertes Objekt), assoziieren, den sogenannten Hodge-Diamanten (weil ein Mann namens Hodge da einen Beitrag geleistet hat, und Diamant, weil man das Ding immer schräg zeichnet). Man kann nun Paare finden, sodass dieses Diagramm genau gespiegelt ist; die Zahlen in dem Diagramm lassen sich sowohl mit den kohärenten Garben beschreiben als auch mit der Fukaya-Kategorie, und siehe da, ein Zusammenhang zwischen diesen beiden komplizierten Objekten bringt einen Zusammenhang zwischen zwei einfachen Diagrammen.

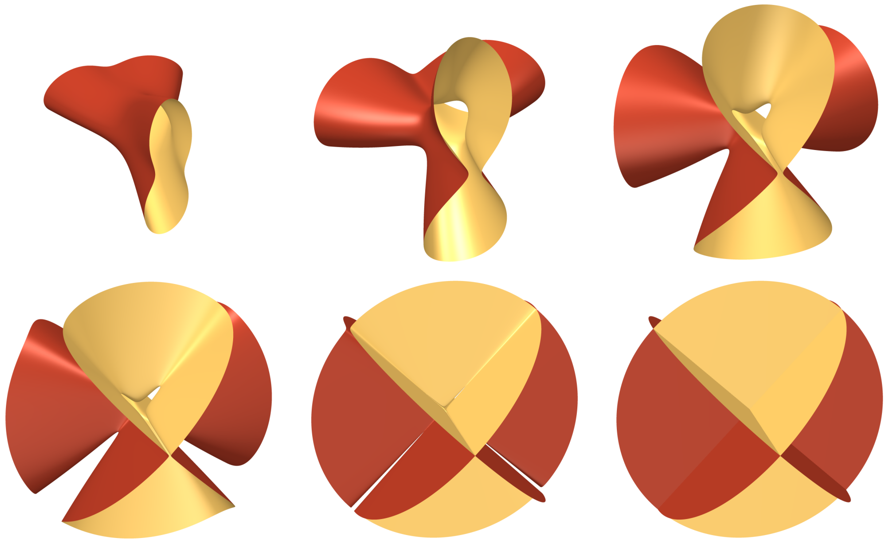

Figure 1: Fasern einer Familie, die zu drei Ebenen entartet. Unten rechts sehen wir die hässliche Verwandte der anderen fünf Flächen. Abbildung erstellt mit SURFER

Auf der Suche nach einem Beweis

Wie aber kann man eine solche Vermutung zwischen so unterschiedlichen Objekten beweisen? Es gibt kaum Menschen, die Experten auf beiden Seiten der homologischen Spiegelsymmetrie sind, die also sowohl mit Varietäten als auch mit symplektischen Mgf. arbeiten können. Die einen können nur mit Räumen umgehen, die durch Polynom-Gleichungen gegeben sind, die anderen nur mit solchen, die zusätzlich eine symplektische 2-Form haben. Gross und Siebert haben dazu die folgende Idee: Erst einmal betrachten wir nur Objekte auf der einen Seite, der algebraischen. Es könnte ja sein, dass das symplektische Objekt ohnehin auch eine algebraische Varietät ist.

Wir geben uns aber nicht mit einer einzigen CY zufrieden, sondern betrachten gleich eine ganze Familie. Wenn wir Mathematiker viele ähnliche Dinge haben, die wir auch noch auf natürliche Weise 'abzählen' können, nennen wir sie eine Familie. Das ist hier eine Kurve, also z. B. die komplexe Gerade $\mathbb{C}$, die die Nummern stellt, und über jedem Punkt der Kurve eine CY, die Faser über diesem Punkt. Das ist also das Objekt, das mit der Zahl nummeriert ist. Die Abbildung (ja, die graphische Abbildung auf diesem Bildschirm) zeigt sechs Fasern einer Familie, die ersten fünf sind glatt, und die sechste hat Singularitäten, nämlich die drei Schnittgeraden der Ebenen.

Deformieren, Deformieren, Deformieren

Die Eigenschaften, die uns interessieren, hängen manchmal nicht von dem gewählten Punkt ab. Wir stellen also an vielen Nummern dieselbe Frage und bekommen immer dieselbe Antwort. Um also zwei gegebene CYs zu vergleichen, können wir auch zwei andere CYs der jeweiligen Familie auswählen, und diese vergleichen. Wir wissen ja, dass wir da dieselben Antworten auf unsere Fragen bekommen. Der Vergleich ist besonders einfach für entartete CYs. Das Vorgehen, um Spiegelpaare zu finden, also konkrete Räume, zwischen denen die erhofften Beziehungen bestehen, ist jetzt wie folgt: Wir starten mit einer CY und konstruieren eine Familie, die eine entartete Faser hat. (Wir erkennen also, dass unsere schöne CY Verwandte hat, die nicht so schön sind, die wir dafür aber vielleicht besser verstehen können). Daraus konstruieren wir eine affine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer polyedrischen Zerlegung und ein paar weiteren Daten. Es ist nicht so wichtig für euch, was das genau ist. Wichtig ist nur, dass man aus der Familie von CYs Daten einer anderen Art extrahiert, mit denen wir Mathematiker besser umgehen können. Dazu müssen wir auch tatsächlich die ganze Familie betrachten. Im nächsten Schritt dualisieren wir dann diese abgeleiteten Daten, und zeigen, dass eine andere entartete Familie von CYs existiert, aus der man die neue affine Mgf. erhalten kann. Wir konstruieren also noch eine Familie von CYs, extrahieren daraus nochmal auf gleiche Art Daten und stellen fest, dass das genau die dualen Daten der ersten Familie sind. Die Fasern dieser zweiten Familie sind dann die Spiegelpartner der ursprünglichen CY. Wir betrachten also von beiden Spiegelpartnern zuerst die ganze Familie, bevor wir erkennen können, dass sie Spiegelpartner sind, und wenn wir eine Familie haben, dann wissen wir auch, wie die andere Familie aussehen sollte.

Ein Logarithmus behebt den Unterschied

Hier habe ich euch aber einen wesentlichen Punkt vorenthalten. Die Daten, die uns interessieren, hängen eben doch von der gewählten Faser ab. (Verwandte sind halt nicht dieselbe Person.) Ist das ganze Verfahren jetzt nutzlos? Nein, wir können noch etwas retten. Für manche Fasern ist es unabhängig, und zwar für die, die uns eigentlich interessieren. Jetzt definieren wir uns etwas Neues, dass für alle dasselbe ist, wo wir wirklich immer dieselbe Antwort erhalten, egal welchen Verwandten wir fragen, und bei den wirklich interessanten Fasern mit dem ursprünglichen übereinstimmt. Dazu brauchen wir eine sogenannte logarithmische Struktur. Ja, wir müssen unsere Objekte komplizierter machen, um die gewünschte Eigenschaft definieren zu können. Ohne diese Komplexität wissen wir nicht, was wir definieren könnten, das für schöne Flächen das ist, was uns interessiert, und für hässliche dasselbe ist, wie das, was uns an schönen interessiert.

Logarithmische Strukturen sind im wesentlichen Logarithmen für Funktionen, die aber selbst keine Funktionen sind. Wir haben also eine zweite Klasse von Objekten auf der Mgf., die Logarithmen, und eine Exponentialabbildung, die aus jedem Logarithmus eine Funktion macht. Wir müssen jetzt für jede CY dazu sagen, was ihre Logarithmen sind. Für die interessanten Fasern (also die schönen Mitglieder der Familie) sagen wir einfach, Funktionen ohne Nullstellen (die also klassisch einen Logarithmus als Funktion haben) sind auch Logarithmen, und dann bleibt hier alles, wie es war. Auf den anderen Fasern sagen wir irgendetwas anderes, was uns gerade weiterhilft. Außerdem können wir erst jetzt wirklich die oben beschriebene Information aus der Familie extrahieren (affine Mgf. und so ein Kram).

Der Blick nach Vorne

Da solche Mgf. mit Logarithmen auch an sich interessant sind, haben manche Mathematiker eine eigene Theorie für solche log-Räume entwickelt, die besonders schön sind. Hier gelten viele Resultate ganz analog dem Fall ohne Logarithmen, doch leider sind die log-Räume, die uns im Gross-Siebert-Programm (kurz GS) interessieren, nicht so schön. Es muss also eine stärkere Theorie her, die auch mit diesen Räumen umgehen kann. Genau hier sehe ich gegenwärtig meine Aufgabe. Ich sehe mir an, welche Eigenschaften ich bei den CY-Familien des GS zur Verfügung habe, und versuche möglichst viel unter diesen Voraussetzungen zu zeigen. Das tue ich aber nicht konkret an eben diesen Familien, sondern gleich möglichst allgemein. Wir Mathematiker vermeiden da nämlich gerne unnötigen Aufwand. Wenn ich es gleich allgemein beweise, braucht der nächste es für seinen Fall nicht nochmal extra zu beweisen. Ich habe eine Liste von Eigenschaften, die in meinem Beispiel erfüllt ist, dafür zeige ich etwas, und jeder, der ein anderes hat, das dieselbe Liste von Eigenschaften hat, kann meine Resultate verwenden. Etwas, das diese Liste erfüllt, nenne ich eine fast log-glatte Familie, und auf diese Weise habe ich einen neuen Begriff eingeführt. So einfach geht das.

Epilog

Wenn ihr euch durch den ganzen Text bis hierhin vorgewagt habt, seht ihr noch etwas, das typisch für uns Mathematiker ist: Egal wie chaotisch der Weg war, auf dem wir zu einem Ziel gelangt sind, am Ende stellen wir das immer als Abfolge von logischen, geradezu zwingenden Schritten dar.