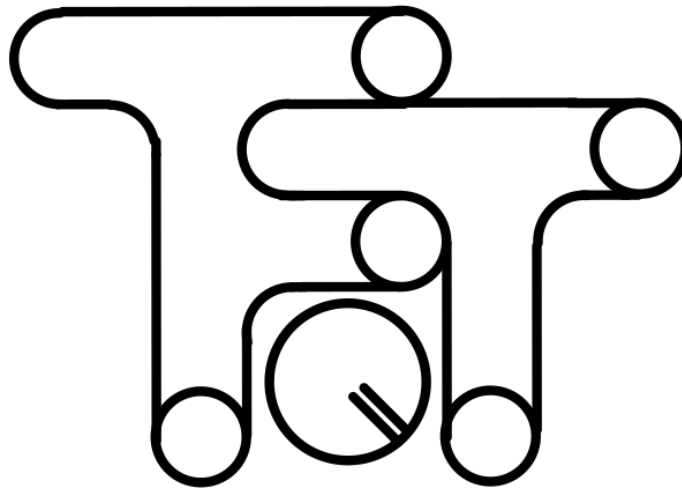


# Topologische Quantenfeld-Theorien: von Rohren zu Vektoren

Sommerakademie des CdE 2024

Simon Felten und Florian Schwarz



## Zusammenfassung

In diesem Skript erarbeiten wir die mathematischen Grundlagen topologischer Quantenfeld-Theorien. Wir definieren die Bordismen-Kategorie mittels Mannigfaltigkeiten mit Kragen und definieren topologische Quantenfeld-Theorien als symmetrisch-monoidale Funktoren in die Kategorie der Vektorräume. Wir klassifizieren TQFTs in Dimension 1 und 2.

For the purpose of making these notes publicly accessible while the copyright of the figures has not been cleared, I have replaced all figures and all tikz pictures which I did not create myself with the placeholder image



which has been created by AI based on my text instructions.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Physikalische Einordnung</b>	<b>5</b>
1.1	Spezielle Relativitätstheorie . . . . .	5
1.2	Allgemeine Relativitätstheorie . . . . .	5
1.3	Klassische Quantenmechanik . . . . .	6
1.4	Die Dirac-Gleichung . . . . .	7
1.5	Quantenfeld-Theorien . . . . .	7
1.6	Die Quantengravitation . . . . .	8
1.7	Topologische Quantenfeld-Theorien . . . . .	8
1.8	Anwendungen der topologischen Quantenfeld-Theorien . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Relationen</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Elementare Algebra</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Analysis</b>	<b>14</b>
4.1	Offene Teilmengen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ . . . . .	15
4.2	Analysis in einer Veränderlichen . . . . .	16
4.3	Analysis in mehreren Veränderlichen . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Topologie</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>Klassische Differentialgeometrie</b>	<b>22</b>
6.1	Glatte Mannigfaltigkeiten . . . . .	22
6.2	Glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Mengen-theoretische Grundlagen</b>	<b>27</b>
<b>8</b>	<b>Elementare Kategorientheorie</b>	<b>28</b>
8.1	Kategorien und Funktoren . . . . .	29
8.2	Produkte und Koprodukte . . . . .	31
<b>9</b>	<b>Die algebro-geometrische Perspektive</b>	<b>32</b>
9.1	Garben . . . . .	32
9.2	Halme . . . . .	33
9.3	Direkte Bilder . . . . .	33
9.4	Lokal geringte Räume . . . . .	33
9.5	Glatte Mannigfaltigkeiten . . . . .	35
9.6	Glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand . . . . .	37
<b>10</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>37</b>
10.1	Vektorräume . . . . .	38
10.2	Basen . . . . .	39
10.3	Direkte Summen . . . . .	40
10.4	Unter-Vektorräume und Quotienten-Vektorräume . . . . .	41
10.5	Tensorprodukte . . . . .	41
10.6	Äußere Potenzen . . . . .	43

<b>11 Vektorfelder, Differentialformen und Orientierungen</b>	<b>44</b>
11.1 Vektorfelder und Derivationen . . . . .	44
11.2 Vektorfelder auf glatten Mannigfaltigkeiten . . . . .	46
11.3 Differentialformen und das kanonische Bündel . . . . .	46
11.4 Orientierungen . . . . .	48
<b>12 Die Bordismen-Kategorie</b>	<b>49</b>
<b>13 Topologische Quantenfeld-Theorien</b>	<b>53</b>
13.1 Symmetrische monoidale Kategorien . . . . .	53
13.2 Bordismen und Vektorräume als symmetrische monoidale Kategorien . . . . .	55
13.3 Symmetrische monoidale Funktoren . . . . .	56
13.4 Topologische Quantenfeld-Theorien . . . . .	57
13.5 Elementare Eigenschaften . . . . .	57
<b>14 Die Klassifikation in Dimension 1</b>	<b>59</b>
<b>15 Symmetrische monoidale Kategorien über Erzeuger und Relationen</b>	<b>64</b>
15.1 Erzeuger von Objekten . . . . .	64
15.2 Erzeuger von Morphismen . . . . .	65
15.3 Relationen . . . . .	66
15.4 Nochmal Klassifizierung in Dimension 1 . . . . .	66
<b>16 Die Klassifikation in Dimension 2</b>	<b>67</b>
<b>17 Literatur</b>	<b>70</b>

# 1 Physikalische Einordnung

Wir verordnen topologische Quantenfeld-Theorien zwischen der allgemeinen Relativitätstheorie und den Quantenfeld-Theorien.

## 1.1 Spezielle Relativitätstheorie

Es ist schon lange bekannt, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist. In der klassischen Mechanik nehmen wir an, dass es einen absoluten Raum gibt, in dem sich das Licht mit seiner Geschwindigkeit  $c$  bewegt. Wenn wir uns also beim Messen der Lichtgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit  $v$  relativ zur Lichtrichtung bewegen, dann sollten wir  $c-v$  als Lichtgeschwindigkeit messen. Michelson und Morley haben jedoch 1887 herausgefunden, dass dem nicht so ist. Sie haben die Lichtgeschwindigkeit einmal in Richtung der Erdrotation gemessen und einmal in Gegenrichtung; dabei haben sie jedes Mal dieselbe Lichtgeschwindigkeit gemessen. Die *spezielle Relativitätstheorie* ist ein physikalisches Modell, das diesen Befund erklären kann. Wir modellieren zunächst den Raum als  $\mathbb{R}^3$  und die Zeit als  $\mathbb{R}^1$ . Im klassischen Bild ist damit jedes Ereignis durch seine drei Raumkoordinaten und seine Zeitkoordinate eindeutig lokalisiert. Statt das Universum als Raum  $\mathbb{R}^3$  zu betrachten, der sich im Laufe der Zeit ändert, können wir auch das Universum als vierdimensionale Gesamtheit  $\mathbb{R}^4$  betrachten. Jedes Punktteilchen hat eine Trajektorie oder Weltlinie, die einfach eine Funktion  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  ist, die jeden Zeitpunkt  $t$  auf Ort und Zeit  $\gamma(t)$  des Teilchens abbildet. Während in der klassischen Mechanik die Trennung von Raum und Zeit absolut ist, hängt in der speziellen Relativitätstheorie die Trennung von Raum und Zeit vom Pfad  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  des Teilchens durch das Universum ab. Damit kann die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erklärt werden: Raum und Zeit passen sich so an, dass die gemessene Lichtgeschwindigkeit immer denselben Wert hat. Wenn der Beobachter beschleunigt, dann verschieben sich Raum und Zeit derart, dass das Licht immer noch dieselbe relative Geschwindigkeit zum Beobachter hat. Als Folge dieses Modells gibt es keinen fundamentalen ontologischen Unterschied zwischen Raum und Zeit, es gibt nur eine Gesamtheit, die *Raumzeit*. Raum und Zeit als getrennte Phänomene hängen von der Perspektive ab.

## 1.2 Allgemeine Relativitätstheorie

Die *allgemeine Relativitätstheorie* befasst sich mit der globalen Geometrie des Universums. Auf kosmologischen Skalen ist die Gravitation die relevanteste Kraft; die allgemeine Relativitätstheorie ist eine Theorie der Gravitation. Sie kann die Präzession der Merkur-Bahn und die Ablenkung des Lichts um massereiche Objekte erklären. Da das Universum global beschrieben werden soll, reicht es nicht aus, es als  $\mathbb{R}^4$  zu modellieren. Stattdessen wird das Universum als eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  modelliert, also eine geometrische Struktur, die nur lokal wie  $\mathbb{R}^4$  aussieht. Grundsätzlich beschäftigt sich die allgemeine Relativitätstheorie mit der Messung von Längen und Winkeln. Dazu wird  $M$  mit einer sogenannten *Metrik*  $g$  ausgestattet, die ein Skalarprodukt  $g_x: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  in einer linearen Approximation  $T_x M$  von  $M$  um jeden Punkt  $x \in M$  herum ist. Gravitation ist in diesem Modell keine Kraft, sondern eine Verzerrung oder *Krümmung* von  $g$ . Alle Teilchen bewegen sich auf geraden Linien, aber was "gerade" heißt, hängt von  $g$  ab. Die Gravitation, also  $g$ , ist an die Verteilung von Energie und Impuls im Universum, also auch an die Masse etwa vermöge der bekannten Gleichung  $E = mc$ , durch die *Einsteinschen Feldgleichungen* gekoppelt. Die Beschreibung der Masse durch Energie und Impuls zusammen mit der Kopplung der Metrik an Energie und Impuls und dem Prinzip der geraden Bewegung gemäß  $g$  ersetzt die klassi-



Abbildung 1: Sich ausdehnendes Universum: Das Universum bleibt immer eine Kreislinie  $S^1$ , aber die Länge wird immer größer. (Platzhalter wegen ©)

sche Beschreibung der Gravitation als Kraft, die von der Masse eines Teilchens ausgeht und auf ein anderes proportional zu dessen Masse wirkt.

### 1.3 Klassische Quantenmechanik

Die klassische Quantenmechanik ist ein physikalisches Modell, das zum Beispiel das Verhalten des Wasserstoff-Atoms beschreibt. Sie ist eine Theorie der kleinen Skalen und insofern lokal, trifft also keinerlei Aussage über die globale Struktur des Universums. Die klassische Quantenmechanik arbeitet nicht mit Punktteilchen, sondern mit *Feldern*. Der Zustand eines einzelnen Teilchens zu einem gegebenen Zeitpunkt wird durch eine Funktion  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  modelliert. Die Menge der zulässigen Zustände ist üblicherweise  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ , also messbare Funktionen, die  $L^2$ -integrierbar sind.

Der Einfachheit halber wollen wir jetzt ein Teilchen im eindimensionalen Raum  $\mathbb{R}^1$  betrachten.

Während der Ort eines Punktteilchens einfach durch dessen Koordinate gegeben ist, ist die Beschreibung des Ortes von  $\phi$  komplizierter – schließlich ist  $\phi$  ja nun eine Funktion  $\phi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir fassen den Ort zunächst als Operator  $Q(\phi) = x \cdot \phi$  auf. Für  $\phi \in \mathcal{H}$  ist allerdings im Allgemeinen  $x \cdot \phi \notin \mathcal{H}$ , da der zusätzliche Faktor eben die Integrierbarkeit zerstört. Um dieses Problem zu lösen, betrachten wir einen Unterraum  $\Phi \subseteq \mathcal{H}$  von *Testfunktionen*, die besonders gute Eigenschaften haben. Beispielsweise sind glatte Funktionen mit kompaktem Träger Testfunktionen, aber man nimmt üblicherweise noch weitere hinzu. Jetzt ist für jedes  $\phi \in \Phi$  auch  $Q(\phi) = x \cdot \phi \in \Phi$ . Um  $Q$  auf  $\mathcal{H}$  zu erweitern, betrachten wir den Raum  $\Phi^\times$  der stetigen antilinearen Funktionen  $\Phi \rightarrow \mathbb{C}$ . Jedes  $\phi \in \mathcal{H}$  ist in  $\Phi^\times$  vermöge  $h \mapsto \int \phi(x) \cdot \overline{h(x)} dx$ . Dann haben wir  $Q: \Phi^\times \rightarrow \Phi^\times$  vermöge  $\chi \mapsto (h \mapsto \chi(Q(h)))$ .

Wir *definieren* jetzt, dass sich das Teilchen im Zustand  $\chi \in \Phi^\times$  am Ort  $a \in \mathbb{R}$  befindet, falls  $Q(\chi) = a \cdot \chi$  ist. Beispielsweise befindet sich  $\delta_a$  mit  $\delta_a(h) := \overline{h(a)}$  am Ort  $a$ . Die meisten Zustände haben allerdings keinen wohldefinierten Ort. Eine *Messung* des Ortes wird jetzt folgendermaßen modelliert. Vor der Messung befindet sich das Teilchen im Zustand  $\chi$ . Die Messung ist jetzt ein Prozess, der als Messergebnis einen Ort  $a \in \mathbb{R}$  liefert. In diesem Fall befindet sich das Teilchen nach der Messung im Zustand  $\delta_a$ . Das Messergebnis  $a \in \mathbb{R}$  ist nicht

deterministisch, sondern zufällig; die Wahrscheinlichkeit,  $a \in \mathbb{R}$  zu messen, hängt davon ab, wie sich  $\chi$  mittels den *Orts-Eigenzuständen*  $\delta_a$  darstellen lässt. Für  $a \neq b$  und  $\chi = \delta_a + \delta_b$  ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit  $a$  zu messen  $\frac{1}{2}$  und die Wahrscheinlichkeit  $b$  zu messen ebenfalls  $\frac{1}{2}$ .

Ohne Messung entwickelt sich das System gemäß der *Schrödinger-Gleichung*

$$i\hbar\partial_t\chi = \hat{H}\chi,$$

wo  $\hat{H}$  der *Hamilton-Operator* ist, der die Physik des konkreten betrachteten Systems beschreibt.

Die Grundprinzipien der klassischen Quantenmechanik sind also, dass sich alle physikalischen Systeme jederzeit in einem Zustand befinden, deren Gesamtheit einen Vektorraum bildet. Messgrößen sind nur für einige wenige dieser Zustände definiert. Wird eine Größe gemessen, so nimmt das System einen zufälligen neuen Zustand an, für den diese Messgröße definiert ist. Die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Messergebnisse hängen vom Ausgangszustand ab. Die berühmte *Unschärferelation* ist nichts anderes als der Umstand, dass verschiedene Größen in demselben Zustand nicht zugleich wohldefiniert sind. Messungen sind externe Prozesse, die in die innere Entwicklung eines physikalischen Systems von außen eingreifen.

## 1.4 Die Dirac-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung liefert mehr oder weniger das korrekte Wasserstoff-Spektrum, aber eben nicht ganz genau. Zusätzlich ist die klassische Quantenmechanik keine relativistische Theorie, nicht speziell-relativistisch und schon gar nicht allgemein-relativistisch. Für die Beschreibung des Elektrons im Wasserstoff-Atom aus speziell-relativistischer Perspektive ist die *Dirac-Gleichung* das korrekte Modell. Damit kann auch die sogenannte *Feinstruktur* des Wasserstoff-Spektrums erklärt werden. Ein einzelnes Teilchen wird jetzt durch vier Funktionen  $\psi_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  für  $0 \leq i \leq 3$  beschrieben. Die innere zeitliche Entwicklung des Systems genügt der Dirac-Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^3 i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc \cdot \psi,$$

wo  $\gamma^\mu$  für  $0 \leq \mu \leq 3$  bestimmte  $(4 \times 4)$ -Matrizen sind. Der Hamilton-Operator auf den Lösungen der Dirac-Gleichung liefert als Eigenwerte die möglichen Energien irgendeines Zustandes. Die Differenzen zwischen diesen Eigenwerten sagen die Feinstruktur des Wasserstoff-Spektrums korrekt vorher. Eine Theorie der *Messung* anderer Observablen mit Übergängen zwischen verschiedenen Zuständen ist aufgrund der (speziell-)relativistischen Natur der Gleichung schwierig. Wie soll ein solcher Zustandsübergang gedeutet werden, wenn die Lösung der Dirac-Gleichung das Teilchen bereits an allen Orten und zu allen Zeiten beschreibt?

Neben der Feinstruktur des Wasserstoff-Spektrums hat dieses Modell auch die Existenz des Positrons vorhergesagt, das schon 1932 entdeckt wurde.

## 1.5 Quantenfeld-Theorien

In der klassischen Quantenmechanik werden die Zustände von Teilchen durch Felder beschrieben und die Observablen, also die messbaren Größen, durch Operatoren. Während ein Feld im Wesentlichen eine Funktion  $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  ist, ist ein *Quantenfeld* eine Funktion auf  $\mathbb{R}^4$ , deren Werte selbst Operatoren sind. Quantenfeld-Theorien sind oft eher komplex. Zudem sind sie in der Regel eher ein heuristischer Rechenformalismus als ein wohldefiniertes

mathematisches Modell für ein physikalisches Phänomen. Beispielsweise ist noch unbekannt, wie das bekannte Standard-Modell der Teilchenphysik als rigoros definiertes mathematisches Modell aufgefasst werden kann. Quantenfeld-Theorien wurden entwickelt, um die Messergebnisse von Streu-Experimenten wie etwa dem Large Hadron Collider zu erklären und vorherzusagen. Diese können mit der Schrödinger-Gleichung oder auch der Dirac-Gleichung nicht sinnvoll beschrieben werden, da die klassische Quantenmechanik keine Änderung der Teilchenzahl modellieren kann; bei solchen Streu-Experimenten entstehen allerdings in der Regel viele neue Partikel, die oft auch schnell wieder zerfallen.

Die einfachste Quantenfeld-Theorie ist die Quanten-Elektrodynamik. Sie ist eine Weiterentwicklung der Dirac-Gleichung und beschreibt die Wechselwirkung zwischen dem Elektronfeld und dem Photonfeld. Die grundlegenden Prozesse sind die Schöpfung eines Elektron-Positron-Paares aus einem Photon, die Vernichtung eines Elektron-Positron-Paares in ein Photon sowie die Absorption oder Emission eines Photons durch ein Elektron (oder Positron). Die QED ist eine speziell-relativistische Theorie. Ihre Vorhersagen sind absolut akkurat und keine andere Theorie ist experimentell besser bestätigt. Trotzdem fehlt auch bei ihr nach wie vor eine vollständig rigorose mathematische Beschreibung des zugrundeliegenden Modells.

## 1.6 Die Quantengravitation

Wir haben nun einerseits die Quantenfeld-Theorien, die insbesondere die Ergebnisse von Streu-Experimenten nahezu absolut korrekt beschreiben, und andererseits die allgemeine Relativitätstheorie, die die meisten astronomischen Beobachtungen gut beschreibt. Wir kennen jedoch keine Theorie, die beides zugleich beschreiben kann. Insbesondere kennen wir keine Theorie, die die Gravitation zwischen Elementarteilchen beschreibt, also die *Quantengravitation*. Da wir noch nicht in der Lage sind, Experimente durchzuführen, deren Erklärung bekannte Quantenphänomene und Gravitation gleichermaßen berücksichtigen muss, ist derzeit noch jede solche Theorie spekulativ.

Ein wichtiges theoretisches Problem kommt daher, dass die allgemeine Relativitätstheorie einerseits und die Quantenfeld-Theorien andererseits sehr verschiedene philosophische Grundvorstellungen und sehr verschiedene Formalismen haben. Die *topologischen Quantenfeld-Theorien* sind ein einfacher Versuch, diesen Unterschied zu überbrücken. Sie sind allerdings keine realistischen Modelle, das heißt, sie machen weder überprüfbare Vorhersagen für physikalische Experimente noch haben sie den Anspruch, die Welt, in der wir leben, zu beschreiben.

## 1.7 Topologische Quantenfeld-Theorien

Um topologische Quantenfeld-Theorien zu beschreiben, lassen wir zunächst die Zeit außen vor und betrachten den Raum als ein absolut gegebenes geometrisches Gebilde  $E$ , das insbesondere die globale Geometrie des Raumes beschreibt. Als eindimensionales Beispiel betrachten wir die Kreislinie  $S^1 =: E$ . Genauso wie in der klassischen Quantenmechanik beschreiben wir den Zustand eines (masselosen skalaren) Teilchens im Raum  $E$  als eine  $L^2$ -integrierbare Abbildung  $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Für zwei Zustände  $\phi$  und  $\psi$  haben wir ein Skalarprodukt

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int_{S^1} \phi(x) \cdot \psi(x) dx = \int_0^{2\pi} \phi(e^{iz}) \psi(e^{iz}) dz.$$

Hier ist  $x$  die Koordinate auf  $S^1$  und  $z$  ist die Koordinate auf  $\mathbb{R}$ , betrachtet als Überlagerung von  $S^1$  vermöge  $\mathbb{R}^1 \rightarrow S^1, z \mapsto e^{iz}$ . Die Menge der möglichen Zustände des Systems bildet



also einen Vektorraum  $\mathcal{H}$  mit einem inneren Produkt. Dieser Vektorraum ist vollständig, also ein Hilbertraum.

Für jeden Zustand  $\phi \in \mathcal{H}$  definieren wir die *Wirkung* als

$$S[\phi] := \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial \phi(e^{iz})}{\partial z} \right)^2 dz \in \mathbb{R}.$$

Die Wirkung ist also eine Abbildung  $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ . Die eckigen Klammern statt der Runden erinnern uns daran, dass  $S$  von der Funktion  $\phi$  abhängt, nicht nur von den Werten von  $\phi$  an einigen wenigen Punkten. Das *Pfad-Integral* ist jetzt der formale Ausdruck

$$Z = \int_{\phi \in \mathcal{H}} e^{-S[\phi]} d\phi.$$

Wir stellen uns hier ein Integral über den Raum aller möglichen Zustände  $\mathcal{H}$  vor, allerdings ist die korrekte Definition dieses Integrals im Allgemeinen unklar. Wir stellen uns  $Z$  als reelle Zahl  $> 0$  vor.

Das Pfad-Integral  $Z$  spielt zunächst eine Rolle in der Definition der Erwartungswerte klassischer Observablen, wir benutzen es jedoch, um die Dynamik der topologischen Quantenfeld-Theorie zu beschreiben. Die topologische Quantenfeld-Theorie kennt keine absolute Zeit und auch keine absolute Raumzeit, in der bloß die Aufspaltung in Raum und Zeit von der Perspektive abhängt. Stattdessen kennt die topologische Quantenfeld-Theorie *Prozesse*. Ein Prozess  $M$  startet mit einem Raum  $E$  und endet mit einem Raum  $F$ . Wir wollen uns zunächst  $E = F = S^1$  und  $M = S^1 \times I$  ansetzen, wo  $I = [0, 1]$  als Zeitintervall aufgefasst ist. Wir haben dann einen Hilbertraum  $\mathcal{H}_E$  der möglichen Zustände auf  $E$  (zum Zeitpunkt  $t = 0$ ) und einen Hilbertraum  $\mathcal{H}_F$  der möglichen Zustände auf  $F$  (zum Zeitpunkt  $t = 1$ ). Wir wollen verstehen, wie sich ein Zustand  $\phi_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  bis zum Zeitpunkt  $t = 1$  entwickelt. Für jeden potentiellen Endzustand  $\phi_1$  haben wir viele mögliche *Pfade*, wie das System zu diesem Zustand gelangen könnte. Jeder solche Pfad ist eine Funktion

$$\Psi: M = S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R},$$

die  $\Psi(x, 0) = \phi_0(x)$  und  $\Psi(x, 1) = \phi_1(x)$  erfüllt. Diese bilden eine Menge  $\mathcal{P}(\phi_0; \phi_1)$ . Wir betrachten das *Pfad-Integral*

$$Z(\phi_0; \phi_1) = \int_{\Psi \in \mathcal{P}(\phi_0; \phi_1)} e^{-S[\Psi]} d\Psi$$

für eine geeignete Wirkung  $S$  wieder als eine reelle Zahl. In dieser Situation haben wir nun tatsächlich ein Integral über Pfade – wenn auch immer noch eines, das nicht wirklich definiert ist. Für den Zustand  $\chi$ , zu dem sich der Zustand  $\phi_0$  zum Zeitpunkt  $t = 1$  entwickelt hat, wollen wir jetzt, dass

$$\langle \chi, \phi_1 \rangle_F = Z(\phi_0; \phi_1)$$

gilt. Wir sagen, dass  $Z(\phi_0; \phi_1)$  die *Übergangs-Amplitude* von  $\phi_0$  nach  $\phi_1$  ist. Dieser Name ergibt Sinn, wenn wir uns einmal eine orthonormale Basis  $\{e_i\}_{i \in I}$  von  $\mathcal{H}_F$  ansehen. Dann ist  $\chi = \sum_{i \in I} Z(\phi_0; e_i) \cdot e_i$ . Mit anderen Worten, jeder mögliche Grundzustand  $e_i$  des Systems zum Zeitpunkt  $t = 1$  trägt mit Amplitude  $Z(\phi_0; e_i)$  zum Gesamtzustand des Systems nach zeitlicher Entwicklung aus  $\phi_0$  heraus bei.

Da  $\mathcal{H}_F$  ein Hilbertraum ist, ist  $\chi$  durch die Werte  $Z(\phi_0; \phi_1)$  eindeutig bestimmt (sofern existent). Das definiert eine Abbildung

$$\mathcal{H}_M: \mathcal{H}_E \rightarrow \mathcal{H}_F, \quad \phi_0 \mapsto \chi,$$

die die Dynamik des physikalischen Systems beschreibt.

Eine *topologische* Quantenfeld-Theorie kann nur Änderungen der (Differential-)Topologie des Raumes  $E$  beschreiben, also der globalen Geometrie (ohne Berücksichtigung von Längen und Winkeln). Da der Prozess  $M$  in dieser Hinsicht trivial ist, muss die Abbildung  $\mathcal{H}_M$  die identische Abbildung sein.<sup>1</sup> Es gibt jedoch durchaus interessante topologische Prozesse:



Wir starten unten mit einem Raum  $E = S^1$ , der aus einem Kreis besteht. Am Ende des Prozesses hat sich der Raum in zwei disjunkte Kreise  $F = S^1 \sqcup S^1$  aufgespalten. Auch hier haben wir wieder Hilberträume  $\mathcal{H}_E$  und  $\mathcal{H}_F$  sowie eine Abbildung

$$\mathcal{H}_M: \mathcal{H}_E \rightarrow \mathcal{H}_F,$$

die die Entwicklung eines Zustandes auf  $E$  zu einem Zustand auf  $F$  unter dem Prozess  $M$  beschreibt. Dies erfolgt wieder durch Pfad-Integrale  $Z(\phi_0; \phi_1)$ , die als Übergangs-Amplituden gedeutet werden. Eine weitere zeitliche Entwicklung wird jetzt durch die Hintereinanderausführung mehrerer Prozesse beschrieben. Gleichzeitig kann ein Prozess auch durch Zerschneiden von  $M$  in Teilprozesse zerlegt werden.

Topologische Quantenfeld-Theorien verbinden Aspekte der klassischen Quantenmechanik, nämlich die Beschreibung eines Teilchens zu einem gegebenen Zeitpunkt durch einen Vektor in einem Hilbertraum, mit Aspekten der allgemeinen Relativitätstheorie, nämlich der Einführung einer globalen Topologie / Geometrie und der Aufgabe einer absoluten Zeit. Gleichzeitig sind aber die Observablen keine Operatoren auf dem Hilbertraum, sondern erlauben eine wohldefinierte Messgröße für jeden Zustand  $\phi \in \mathcal{H}_E$ ; die Operatoren  $\mathcal{H}_M$  beschreiben lediglich die Entwicklung des Systems unter Prozessen. Ebenso kennt eine topologische Quantenfeld-Theorie keine Längen und Winkel im Raum und sie macht entsprechend auch erstmalig keine Aussage über die Gravitation. Man kann jedoch einfache Modelle für die Quantengravitation im theoretischen Rahmen der topologischen Quantenfeld-Theorien bilden.

## 1.8 Anwendungen der topologischen Quantenfeld-Theorien

Topologische Quantenfeld-Theorien dienen nicht nur als Überlegungen auf dem Weg zu einer einheitlichen Theorie, die alle physikalischen Phänomene beschreibt, sondern haben auch einige Anwendungen als Werkzeug in der Mathematik.

- (1) Ein *Knoten* ist eine stetige Abbildung  $\gamma: S^1 \rightarrow S^3$ . Das *Jones-Polynom* ist eine Invariante von Knoten und Verschlingungen (die disjunkte Vereinigung mehrerer Knoten), die insbesondere dazu dient, verschiedene Verschlingungen voneinander zu unterscheiden. Khovanov ist es gelungen, mit Hilfe topologischer Quantenfeld-Theorien eine wesentlich feinere Version des Jones-Polynoms zu entwickeln, die *Khovanov-Kohomologie*.

<sup>1</sup>Beachte, dass wir weder die Wirkung  $S$  noch das Integral über  $\mathcal{P}(\phi_0; \phi_1)$  definiert haben. Wir folgern hier, dass die Theorie nur dann eine *topologische* Theorie ist, wenn diese Übergangsabbildung die identische Abbildung ist.

- (2) *Kohomologische Feldtheorien*, eine Variante der topologischen Quantenfeld-Theorien, geben eine Beschreibung der sogenannten *Gromov-Witten-Invarianten*, die Kurven mit bestimmten Eigenschaften in geometrischen Gebilden zählen.
- (3) Topologische Quantenfeld-Theorien können zur Beschreibung der Modulräume von Hauptfaserbündeln auf Riemannschen Flächen genutzt werden.

## 2 Relationen

Wir wiederholen kurz den Begriff der Äquivalenzrelation und der Ordnungsrelation. Wir nutzen Ordnungsrelationen für die Konstruktion direkter Kolimiten.

### Äquivalenz-Relationen

Sei  $S$  eine Menge. Eine *Relation* ist eine Teilmenge  $R \subseteq S \times S$ . Relationen werden oft mit Symbolen in  $\{\sim, \simeq, \approx, =, \equiv, \cong, \leq, \geq\}$  geschrieben, und dann bedeutet beispielsweise  $x \sim y$  nichts anderes als  $(x, y) \in R$ .

Eine *Äquivalenzrelation* ist eine Relation  $\sim = R \subseteq S \times S$ , die die folgenden Eigenschaften hat:

- (a) Reflexivität: für alle  $x \in S$  gilt  $x \sim x$ ;
- (b) Symmetrie: für alle  $x, y \in S$  gilt genau dann  $x \sim y$ , wenn  $y \sim x$  gilt;
- (c) Transitivität: sind  $x, y, z \in S$  und gelten  $x \sim y$  und  $y \sim z$ , dann gilt auch  $x \sim z$ .

**Beispiel 2.1.** Sei  $p \in \mathbb{Z}$ . Sei  $S = \mathbb{Z}$  und sei  $(x, y) \in R$  genau dann, wenn  $p|(x - y)$ . Dann ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation.

Wenn  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $S$  ist, dann ist eine *Äquivalenzklasse* eine nicht-leere Teilmenge  $C \subseteq S$  mit den folgenden Eigenschaften. Für je zwei Elemente  $x, y \in C$  gilt  $x \sim y$ ; für ein Element  $x \in C$  und ein Element  $z \in S$  gilt genau dann  $x \sim z$ , wenn  $z \in C$  gilt.

**Übung 2.2.** Sei  $S$  eine Menge und  $\sim$  eine Äquivalenzrelation. Zeige, dass  $S$  die disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen ist.

Wir schreiben die Menge der Äquivalenzklassen als  $S/\sim$ . Für jedes Element  $x \in S$  gibt es genau eine Äquivalenzklasse  $C$  mit  $x \in C$ ; diese schreiben wir als  $[x] \in S/\sim$ .

### Ordnungs-Relationen

Sei  $S$  eine Menge. Eine *partielle Ordnung* ist eine Relation  $\leq$  auf  $S$ , die die folgenden Eigenschaften hat:

- (a) Reflexivität: für alle  $x \in S$  gilt  $x \leq x$ ;
- (b) Transitivität: sind  $x, y, z \in S$  und gelten  $x \leq y$  und  $y \leq z$ , dann gilt auch  $x \leq z$ ;
- (c) Antisymmetrie: wenn  $x \leq y$  und  $y \leq x$  gelten, dann gilt  $x = y$ .

Eine partielle Ordnung heißt eine *totale Ordnung*, wenn außerdem gilt:

- (d) Totalität: für alle  $x, y \in S$  gilt  $x \leq y$  oder  $y \leq x$ .

**Beispiel 2.3.** Die Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen mit der üblichen Ordnungs-Relation ist eine total geordnete Menge. Die Menge  $\mathbb{Z}^2$  mit der Ordnungs-Relation

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 \leq y_1 \text{ und } x_2 \leq y_2$$

ist eine partiell geordnete Menge, aber keine total geordnete Menge.

Sei  $(S, \leq)$  eine partiell geordnete Menge. Eine Teilmenge  $T \subseteq S$  erhält dann eine induzierte partielle Ordnung, indem man einfach  $x \leq y$  setzt genau dann, wenn  $x \leq y$  in  $S$  gilt.

### Direkte Kolimiten

Sei  $(I, \leq)$  eine partiell geordnete Menge. Dann heißt  $I$  *direkt* (im Sinne von *gerichtet*), falls es für je zwei Element  $i, j \in I$  ein  $k \in I$  mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$  gibt. Ein *direktes System* von Mengen besteht aus einer Menge  $S_i$  für jedes  $i \in I$  und einer Abbildung von Mengen  $\phi_{ij}: S_i \rightarrow S_j$  für alle  $i, j$  mit  $i \leq j$ . Diese Abbildungen müssen  $\phi_{ii} = \text{id}_{S_i}$  und  $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$  für  $i \leq j \leq k$  erfüllen.

Wir betrachten jetzt die disjunkte Vereinigung  $S = \bigsqcup_{i \in I} S_i$ . Wir schreiben ein Element  $x \in S_i$  in dieser disjunkten Vereinigung als  $(i, x)$ , um den Index klarzumachen. Wir führen auf  $S$  eine Äquivalenzrelation ein, wo  $(i, x)$  und  $(j, y)$  genau dann äquivalent sind, wenn es ein  $k \in I$  mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$  sowie ein  $z \in S_k$  mit  $\phi_{ik}(x) = z$  und  $\phi_{jk}(y) = z$  gibt. Dann ist der (*direkte*) *Kolimes* der Quotient  $S/\sim$ .

Für jedes  $i \in I$  haben wir jetzt eine Abbildung  $\phi_i: S_i \rightarrow S/\sim$ . Wenn  $i \leq j$  gilt, dann ist  $\phi_j \circ \phi_{ij} = \phi_i$ . Wenn  $T$  eine weitere Menge ist und wir Abbildungen  $\psi_i: S_i \rightarrow T$  haben, die  $\psi_j \circ \phi_{ij} = \psi_i$  für  $i \leq j$  erfüllen, dann gibt es genau eine Abbildung  $\psi: S/\sim \rightarrow T$ , die  $\psi \circ \phi_i = \psi_i$  erfüllt.

## 3 Elementare Algebra

Das grundlegendste Objekt der Arithmetik und Algebra ist die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Diese Menge hat eine Operation

$$+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

die die bekannten Eigenschaften hat:

- (1) Assoziativität:  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (2) Kommutativität:  $a + b = b + a$
- (3) Neutralelement: Es gibt ein Element  $0 \in \mathbb{N}$  derart, dass  $0 + a = a = a + 0$  gilt.

Ein Tripel  $(M, +, 0)$  mit einer Menge  $M$ , einer solchen Operation  $+$  und einem solchen Element  $0 \in M$  heißt ein *Monoid*.

**Beispiel 3.1.**  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mit der Addition  $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$  ist ein Monoid.

**Beispiel 3.2.**  $\mathbb{Z}$  mit der Multiplikation ist ein Monoid.

Das nächste elementare Objekt der Algebra ist die Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ . Diese Menge hat ebenfalls eine Operation

$$+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

die zusätzlich die folgende Eigenschaft hat:

(4) Inverses: Für jedes  $a \in \mathbb{Z}$  gibt es ein  $b \in \mathbb{Z}$  mit  $a + b = 0$ .

Ein Tripel  $(A, +, 0)$ , wo  $A$  eine Menge ist,  $+: A \times A \rightarrow A$  eine solche Operation und  $0 \in A$  ein solches Element, heißt eine *Abelsche Gruppe*.<sup>2</sup>

**Beispiel 3.3.** Die ganzen Zahlen bilden einen Monoid. Die natürliche Einbettung  $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $a \mapsto a$ , ist ein *Monoid-Homomorphismus*. Das bedeutet, dass wir  $i(0) = 0$  und  $i(a + b) = i(a) + i(b)$  haben.

**Beispiel 3.4.** Die Menge  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  der Paare  $(a, b)$  ganzer Zahlen ist eine Abelsche Gruppe. Die Addition ist durch  $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$  gegeben. Die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, b) \mapsto 3a - 2b,$$

ist ein *Homomorphismus von Abelschen Gruppen*. Es gilt also  $\varphi((0, 0)) = 0$  und  $\varphi(p + q) = \varphi(p) + \varphi(q)$  für  $p = (a, b)$  und  $q = (c, d)$ .

**Übung 3.5.** Seien  $M, N$  zwei Monoide. Konstruiere eine natürliche Monoid-Struktur auf der Menge der Monoid-Homomorphismen  $\text{Hom}(M, N)$ .

**Übung 3.6.** Seien  $A, B$  zwei Abelsche Gruppen. Konstruiere eine natürliche Gruppen-Struktur auf der Menge der Gruppen-Homomorphismen  $\text{Hom}(A, B)$ .

**Übung 3.7.** Seien  $A, B, C$  drei Abelsche Gruppen, und seien  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow C$  zwei Homomorphismen. Zeige, dass die Komposition  $g \circ f: A \rightarrow C$  ebenfalls ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Die Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  hat bekanntlich eine weitere Operation

$$\cdot: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

die ebenfalls eine Reihe bekannter Eigenschaften hat:

(5) Assoziativität:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(6) Kommutativität:  $a \cdot b = b \cdot a$

(7) Neutralelement: Es gibt ein Element  $1 \in \mathbb{Z}$  derart, dass  $1 \cdot a = a = a \cdot 1$  gilt.

(8) Distributivität:  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Ein Tupel  $(A, +, \cdot, 0, 1)$  mit diesen Eigenschaften heißt ein *Ring*.

*Bemerkung 3.8.* Wenn  $(A, +, \cdot, 0, 1)$  ein Ring ist, dann ist  $(A, \cdot, 1)$  ein Monoid.

**Übung für die Theorie 3.9.** Sei  $S$  eine nicht-leere Menge. Zeige, dass die Menge  $\text{Map}(S, \mathbb{Z})$  der Funktionen  $f: S \rightarrow \mathbb{Z}$  einen Ring bildet. Was passiert, wenn  $S = \emptyset$  leer ist?

**Übung für die Theorie 3.10.** Definiere den Begriff eines Ring-Homomorphismus. Ist die Komposition zweier Ring-Homomorphismen ein Ring-Homomorphismus? Ist die Summe zweier Ring-Homomorphismen ein Ring-Homomorphismus?

Ein weiterer Ring ist die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$ . Die beiden Operationen sind gerade die bekannte Addition und Multiplikation. Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  sind allerdings ein ganz besonderer Ring: Wenn  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  ist, und wenn gilt  $\frac{a}{b} \neq 0$ , dann ist auch  $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$  und es gilt  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \in \mathbb{Q}$ . Wir haben also die folgende weitere Eigenschaft:

---

<sup>2</sup>Eine *Gruppe* hat dieselben Eigenschaften bis auf Kommutativität. Das Adjektive “Abelsch” ehrt den norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel.

(9) Für jedes  $p \in \mathbb{Q}$  mit  $p \neq 0$  gibt es ein  $q \in \mathbb{Q}$  derart, dass  $p \cdot q = 1$  gilt.

Ein Ring mit dieser zusätzlichen Eigenschaft heißt ein *Körper*.<sup>3</sup>

**Beispiel 3.11.** Die Menge der reellen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation bildet einen Körper. Dieser Körper spielt eine wichtige Rolle in der Analysis und zugleich auch in der Geometrie.

**Übung 3.12.** Sei  $S$  eine Menge. Dann ist die Menge  $\text{Map}(S, \mathbb{R})$  der Funktionen  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  ein Ring. Welche Elemente haben ein multiplikatives Inverses? Wann ist dieser Ring ein Körper?

**Übung für die Anschauung 3.13.** Wir konstruieren den Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  aus dem Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Als Menge ist  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , die Menge der Paare reeller Zahlen. Die Addition ist durch

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

gegeben. Die Multiplikation ist durch

$$(a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

gegeben. Zeige, dass  $\mathbb{C}$  mit diesen beiden Operationen ein Körper ist. Wir schreiben üblicherweise  $1 = (1, 0)$  und  $i = (0, 1)$ . Mit dieser Notation ist  $(a, b) = a + ib$ . Es gilt dann  $i^2 = -1$ . Das Element  $i$  heißt die *imaginäre Einheit*.

**Übung für die Anschauung 3.14.** Wir konstruieren einen Zahlkörper. Als Menge ist  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ . Die Addition ist komponentenweise definiert. Die Multiplikation ist durch

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$$

gegeben. Zeige, dass  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  ein Körper ist. Wir schreiben üblicherweise  $(1, 0) = 1$  und  $(0, 1) = \sqrt{2}$ . Dann gilt  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ .

**Weiterführende Übung 3.15.** Sei  $p$  eine Primzahl. Wir definieren eine Menge  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  als die Menge der Teilmengen von  $\mathbb{Z}$ , die die Form

$$S = [a] := a + p\mathbb{Z} := \{a + pb \mid b \in \mathbb{Z}\}$$

haben. Auf dieser Menge definieren wir zwei Operationen  $[a] + [b] := [a + b]$  und  $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$ . Zeige, dass diese beiden Operationen wohldefiniert sind, und dass  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  dadurch einen Körper bildet. Was passiert, wenn  $p \geq 2$  keine Primzahl ist? Was passiert, wenn  $p = 0$  oder  $p = 1$  ist?

## 4 Analysis

Analysis ist das Studium solcher Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch lineare Funktionen approximiert werden können.

---

<sup>3</sup>Englisch: “field”    Französisch: “corps commutatif”

## 4.1 Offene Teilmengen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$

Bevor wir uns mit Funktionen beschäftigen, wollen wir erst einmal die Geometrie ihres Definitionsbereichs genauer ansehen.

**Definition 4.1.** Eine Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}$  heißt *offen*, wenn sie eine beliebige Vereinigung offener Intervalle ist.

**Beispiel 4.2.** Die leere Teilmenge  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}$  selbst sind offen. Die Teilmenge  $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  ist offen. Die Teilmenge  $\bigcup_{n \geq 0} (n, n + \frac{1}{3})$  ist ebenfalls offen. Die Teilmenge  $[17, 25) \cup (26, 412 \cdot \pi)$  ist nicht offen.

Die Besonderheit offener Teilmengen ist, dass sie lokal um jeden Punkt  $x \in U$  herum genauso aussehen, wie  $\mathbb{R}$  selbst um diesen Punkt herum aussieht. Das ist etwa bei  $[0, 1)$  anders: Um 0 herum sieht diese Menge anders aus als  $\mathbb{R}$  selbst.

Wir wollen dieses Konzept jetzt auf den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern. Wir sagen, dass ein *Produkt* offener Intervalle eine Teilmenge der Form

$$\bigtimes_{i=1}^n (a_i, b_i) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i : a_i < x_i < b_i\}$$

ist.

**Definition 4.3.** Eine Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *offen*, wenn sie eine beliebige Vereinigung von Produkten offener Intervalle ist.

**Beispiel 4.4.** Die leere Teilmenge  $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^n$  selbst sind offen. Das Produkt  $(0, 1) \times (-1, 2) \subseteq \mathbb{R}^2$  ist offen. Das Produkt  $[1, 2] \times [1, \pi]$  ist nicht offen.

Beliebig heißt tatsächlich beliebig, nicht etwa endlich. Sei

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

die *Euklidische Norm*.

**Übung für die Theorie 4.5.** Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt und sei  $\varepsilon > 0$ . Zeige die folgende Aussage: Es ist  $B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \varepsilon\}$  eine offene Teilmenge.

**Übung für die Theorie 4.6.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge. Zeige, dass  $U$  genau dann offen ist, wenn es für jedes  $x \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  derart gibt, dass  $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ .

Als Vorbereitung auf die Analysis ist folgender Begriff wichtig.

**Definition 4.7.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion. Dann heißt  $f$  *stetig im Punkt*  $x_0 \in U$ , wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt derart, dass  $\|x - x_0\| < \delta$  auch  $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$  impliziert. Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *stetig*, wenn sie stetig in jedem Punkt  $x_0 \in U$  ist.

Wir schreiben die Menge der stetigen Funktionen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  als  $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^m)$ .<sup>4</sup>

**Beispiel 4.8.** Die Abbildung  $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\delta(x) = 1$  für  $x \geq 0$  und  $\delta(x) = 0$  für  $x < 0$  ist nicht stetig. Die Abbildung  $\kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\kappa(x) = x$  für  $x \geq 0$  und  $\kappa(x) = 0$  für  $x < 0$  ist stetig.

<sup>4</sup>Die Bedeutung der "0" in der Notation wird später klar werden.

**Übung für die Theorie 4.9.** Zeige, dass eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  genau dann stetig ist, wenn für jede offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  auch das Urbild  $f^{-1}(V) := \{x \in U \mid f(x) \in V\} \subseteq U$  offen ist.

Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  eine offene Teilmenge. Dann heißt eine Abbildung  $f: U \rightarrow V$  stetig, wenn die Komposition  $U \rightarrow V \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig ist.

**Übung 4.10.** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $W \subseteq \mathbb{R}^p$  offene Teilmengen. Seien  $f: U \rightarrow V$  und  $g: V \rightarrow W$  stetige Funktionen. Zeige, dass dann auch die Komposition  $g \circ f: U \rightarrow W$  stetig ist.

**Übung 4.11.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Wir zeigen, dass  $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$  ein Ring ist.

(a) Seien  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen. Zeige, dass dann auch

$$f \oplus g: U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (f(x), g(x)),$$

stetig ist.

(b) Zeige, dass die Additionsabbildung  $+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \mapsto a + b$ , und die Multiplikationsabbildung  $\cdot: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \mapsto ab$ , stetig sind.

(c) Folgere, dass Summen und Produkte stetiger Funktionen (als Elemente des Rings  $\text{Map}(U, \mathbb{R})$ ) wieder stetig sind.

## 4.2 Analysis in einer Veränderlichen

Die fundamentale Definition ist die folgende.

**Definition 4.12.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$  eine offene Teilmenge und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Sei  $x_0 \in U$  ein Punkt. Wir betrachten die Funktion

$$\Delta[f; x_0]: U \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dann heißt  $f$  *differenzierbar im Punkt*  $x_0 \in U$ , falls  $\Delta[f; x_0]$  zu einer stetigen Funktion  $\hat{\Delta}[f; x_0]: U \rightarrow \mathbb{R}$  fortgesetzt werden kann. Diese Funktion ist eindeutig, wenn sie existiert. Die Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *differenzierbar*, wenn sie differenzierbar in jedem Punkt  $x \in U$  ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$\frac{\partial f}{\partial x}: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \hat{\Delta}[f; x](x),$$

die *Ableitung* von  $f$ . Die Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetig differenzierbar*, wenn sie differenzierbar ist und ihre Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x}$  stetig ist.

**Beispiel 4.13.** Die Abbildung  $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $|x| = x$  für  $x \geq 0$  und  $|x| = -x$  für  $x \leq 0$  ist stetig, aber nicht differenzierbar.

**Beispiel 4.14.** Die Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  und  $f(x) = x^2$  für  $x \geq 0$  ist stetig differenzierbar. Ihre Ableitung ist  $f'(x) = 0$  für  $x \leq 0$  und  $f'(x) = 2x$  für  $x \geq 0$ . Insbesondere ist die Ableitung  $f'$  zwar stetig, aber nicht differenzierbar.

Wir interessieren uns insbesondere für folgende Funktionen.



**Definition 4.15.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$  eine offene Teilmenge. Eine Funktion heißt *unendlich oft stetig differenzierbar* oder *glatt*, wenn sie die folgende rekursive Eigenschaft hat:

- (a)  $f$  ist stetig differenzierbar.
- (b) Sei  $f^{(0)} := f$ .
- (c) Sei nun  $f^{(m)}: U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Dann ist  $f^{(m)}$  stetig differenzierbar.
- (d) Wir setzen  $f^{(m+1)} = \frac{\partial f^{(m)}}{\partial x}$ .

Wir schreiben die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  als  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ .

Wir bezeichnen die stetigen Funktionen auf  $U$  mit  $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ , weil sie “(mindestens) keinmal stetig differenzierbar” sind. Stetig differenzierbare Funktionen schreiben wir als  $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ , eben weil sie einmal stetig differenzierbar sind.

### 4.3 Analysis in mehreren Veränderlichen

Der Begriff der Differenzierbarkeit kann auf mehrere Variablen verallgemeinert werden.

**Definition 4.16.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Sei  $u \in U$  ein Punkt, sei  $x_i$  eine der Variablen und sei  $\varepsilon > 0$  derart, dass  $(u_1, \dots, u_i + h, \dots, u_n) \in U$  für alle  $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  gilt. Dann heißt  $f$  *partiell differenzierbar im Punkt  $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$  nach  $x_i$* , wenn sich die Funktion

$$\Delta[f; u; x_i]: (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \mapsto \frac{f(u_1, \dots, u_i + h, \dots, u_n) - f(u_1, \dots, u_n)}{h},$$

zu einer stetigen Funktion  $\hat{\Delta}[f; u; x_i]: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  fortsetzen lässt. Eine Funktion heißt *partiell differenzierbar nach  $x_i$* , falls sie in jedem Punkt partiell differenzierbar nach  $x_i$  ist. In diesem Fall heißt die Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \hat{\Delta}[f; u; x_i](0),$$

die *partielle Ableitung nach  $x_i$* . Eine Funktion heißt *stetig partiell differenzierbar*, wenn sie partiell differenzierbar nach jeder Variablen ist und alle partiellen Ableitungen stetig sind. Wir schreiben die Menge der stetig partiell differenzierbaren Funktionen auf  $U$  als  $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ .

*Bemerkung 4.17.* Dieser Begriff ist unabhängig von der Koordinatenwahl.

**Definition 4.18.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *glatt*, wenn sie beliebig oft nach jeder beliebigen Variablen stetig partiell differenzierbar ist. Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *glatt*, falls jede Komponente  $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist.

**Übung für die Anschauung 4.19.** Berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen:

- (1)  $f(x, y) = x + 3y^2$
- (2)  $g(x, y, z) = e^x + 2z \cdot \sin(y)$
- (3)  $h(u, v) = u^2v^2 - 3uv + \cos(u - v)$

Wenn  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  eine offene Teilmenge ist, dann heißt eine Funktion  $f: U \rightarrow V$  glatt, wenn die Komposition  $U \rightarrow V \rightarrow \mathbb{R}^m$  glatt ist.

**Faktum 4.20.** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $W \subseteq \mathbb{R}^p$  offene Teilmengen. Seien  $f: U \rightarrow V$  und  $g: V \rightarrow W$  glatte Funktionen. Dann ist auch die Komposition  $g \circ f: U \rightarrow W$  glatt.

Wir können diese Tatsache jetzt benutzen, um weitere formale Eigenschaften dieses Begriffes zu beweisen.

**Übung für die Theorie 4.21.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann ist die konstante Funktion  $\kappa_a: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto a$ , glatt.
- (2) Die Additions-Abbildung  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und die Multiplikations-Abbildung  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind glatt.
- (3) Seien  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  zwei glatte Funktionen. Dann sind auch  $f + g$  und  $f \cdot g$  glatte Funktionen.
- (4)  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  ist ein Ring.

**Übung für die Theorie 4.22.** Wir sehen uns jetzt an, wie sich Funktionen, die auf verschiedenen offenen Teilmengen definiert sind, zueinander verhalten. Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Sei  $V \subseteq U$  eine offene Teilmenge und sei  $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  eine glatte Funktion. Dann ist auch die *Restriktion*  $f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v \mapsto f(v)$ , eine glatte Funktion.
- (2) Die Restriktionsabbildung  $f \mapsto f|_V$  ist ein Ring-Homomorphismus

$$(\cdot)|_V: \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}).$$

- (3) Sei  $U = \bigcup_i U_i$  eine offene Überdeckung und sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann ist  $f$  genau dann glatt, wenn alle Restriktionen  $f|_{U_i}: U_i \rightarrow \mathbb{R}$  glatt sind.

Betrachten wir die beiden Intervalle  $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  und  $(1, 2) \subseteq \mathbb{R}$ . Das sind zwar verschiedene Intervalle, aber sie sind doch im Wesentlichen gleich, weil die Abbildung  $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x+1$ , eines auf das andere abbildet—und umgekehrt, wenn man  $x \mapsto x-1$  nutzt. In dieser Situation ist die Analysis von Funktionen auf  $(0, 1)$  dieselbe wie die Analysis von Funktionen auf  $(1, 2)$ . Wir führen einen Namen ein für solche Abbildungen zwischen offenen Teilmengen.

**Definition 4.23.** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offene Teilmengen. Ein *Diffeomorphismus* ist eine bijektive glatte Abbildung  $f: U \rightarrow V$  derart, dass auch die mengen-theoretische Umkehrung  $f^{-1}: V \rightarrow U$  eine glatte Funktion ist.

**Beispiel 4.24.** Die Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto e^x$ , ist ein Diffeomorphismus.

## 5 Topologie

Wir haben oben die Stetigkeit einer Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Hilfe des  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriteriums definiert. Topologie ist eine Theorie, die dieses Phänomen von einem konzeptuelleren Standpunkt aus betrachtet und dadurch sowohl vereinfacht als auch stark verallgemeinert. Der Grundbegriff der Topologie ist ein *topologischer Raum*.

**Definition 5.1.** Ein *topologischer Raum* ist eine Menge  $X$  zusammen mit einer Menge  $\tau$  von Teilmengen von  $X$ , die die folgenden Eigenschaften hat:

- (a) Es gilt  $\emptyset, X \in \tau$ .
- (b) Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $U_i \subseteq X$  eine Teilmenge mit  $U_i \in \tau$  für jedes  $i \in I$ . Dann ist auch  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ .
- (c) Seien  $U, V \in \tau$ . Dann ist auch  $U \cap V \in \tau$ .

Elemente  $U \in \tau$  heißen *offene Teilmengen* von  $X$ . Teilmengen  $A \subseteq X$  mit  $X \setminus A \in \tau$  heißen *abgeschlossene Teilmengen*. Ein *Morphismus* oder *stetige Abbildung* von topologischen Räumen  $(X, \tau_X)$  und  $(Y, \tau_Y)$  ist eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  von Mengen derart, dass  $f^{-1}(V) \in \tau_X$  für jedes  $V \in \tau_Y$  gilt.

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und all ihre Produkte  $\mathbb{R}^n$  bilden auf natürliche Weise einen topologischen Raum:

**Übung für die Theorie 5.2.** Zeige, dass  $\mathbb{R}^n$  mit den offenen Teilmengen, die wir oben definiert haben, ein topologischer Raum ist.

Auch andere Mengen können auf natürliche Weise als topologische Räume betrachtet werden.

**Beispiel 5.3.** Der Kreisring  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ist ein topologischer Raum. Hierin ist eine Teilmenge  $U \subseteq S^1$  genau dann offen, wenn es eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $U = S^1 \cap V$  gibt.

Genauso wie der Kreisring  $S^1$  erhält jede andere Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Topologie. Allgemein kann ein topologischer Raum als *geometrisches Gebilde* aufgefasst werden. Tatsächlich bedeutet  $\tau\acute{o}\pi\omicron\varsigma$  nichts anderes als “Ort.”

Topologische Räume können allerdings sehr anders aussehen als das, was wir uns normalerweise unter geometrischen Gebilden vorstellen.

**Beispiel 5.4.** Wir beweisen, dass die Menge der Primzahlen  $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Z}$  unendlich ist. Als Menge betrachten wir  $X = \mathbb{Z}$ . Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  ist offen, falls sie eine Vereinigung von Teilmengen der Form  $N(a, b) = \{a + kb \mid k \in \mathbb{Z}\}$  ist, wo  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ . Insbesondere ist jede nicht-leere offene Teilmenge unendlich. Es ist

$$\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N(0, p).$$

Da  $\{\pm 1\}$  endlich ist, ist diese Teilmenge nicht offen, also ist  $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$  nicht abgeschlossen. Nun ist jedes  $N(0, p)$  nicht nur offen, sondern auch abgeschlossen, weil das Komplement ja gerade die offene Teilmenge  $\bigcup_{i=1}^{p-1} N(i, p)$  ist. Wäre  $\mathbb{P}$  endlich, so wäre die rechte Seite als endliche Vereinigung abgeschlossener Teilmengen abgeschlossen, ein Widerspruch.

*Topologische Mannigfaltigkeiten* sind eine Klasse topologischer Räume, die näher an unserer geometrischen Intuition liegen. Bevor wir die übliche Definition geben können, müssen wir einige wenige Eigenschaften topologischer Räume einführen.

**Definition 5.5.** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (a)  $X$  heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h., es gibt eine endliche Teilmenge  $K \subseteq I$  derart, dass bereits  $X = \bigcup_{i \in K} U_i$  gilt.



Abbildung 2: Zwei kompakte topologische Mannigfaltigkeiten (Platzhalter wegen ©)

- (b)  $X$  heißt *parakompakt*, falls jede offene Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine lokal endliche Verfeinerung hat. Das bedeutet, es gibt eine weitere Überdeckung  $X = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$  derart, dass für jedes  $\alpha \in A$  ein  $i \in I$  mit  $V_\alpha \subseteq U_i$  existiert, und derart, dass jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $x \in W \subseteq X$  hat, sodass  $W \cap V_\alpha$  nur für endlich viele  $\alpha \in A$  nicht leer ist.
- (c)  $X$  heißt *Hausdorffsch* oder ein *Hausdorff-Raum*, wenn je zwei Punkte  $x \neq y \in X$  offene Umgebungen  $U \ni x$  und  $V \ni y$  mit  $U \cap V = \emptyset$  haben.

Ein *Homöomorphismus* ist eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  derart, dass es eine stetige Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  mit  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$  gibt.

Wenn  $X$  ein topologischer Raum ist und  $x \in X$  ein Punkt ist, dann ist eine *offene Umgebung* von  $x$  eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$  mit  $x \in U$ . Jede offene Umgebung ist selbst ein topologischer Raum, indem wir eine Teilmenge  $V \subseteq U$  als offen deklarieren, falls sie offen in  $X$  ist.

**Definition 5.6.** Eine *topologische Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 0$*  ist ein parakompakter Hausdorff-Raum  $X$  mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \ni x$  hat, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  ist.

**Beispiel 5.7.** Der Kreisring  $S^1$  ist eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 1.

**Übung für die Anschauung 5.8.** Zeige, dass die Kugeloberfläche

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

**Übung für die Anschauung 5.9.** Wir betrachten auf  $B = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  die Äquivalenzrelation, die dadurch gegeben ist, dass  $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$  genau dann gilt, wenn es ein  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit

$$(\lambda \cdot x_0, \dots, \lambda \cdot x_n) = (y_0, \dots, y_n)$$



Abbildung 3: Eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand (Platzhalter wegen ©)

gibt. Sei  $\pi: B \rightarrow B/\sim$  die Quotienten-Abbildung von Mengen. Wir sagen, dass eine Teilmenge  $U \subseteq B/\sim$  offen ist, wenn  $\pi^{-1}(U) \subseteq B$  offen ist. Zeige, dass dies eine Topologie auf  $B/\sim$  definiert. Die Menge  $B/\sim$  mit dieser Topologie heißt der *reelle projektive Raum* und wird als  $\mathbb{RP}^n$  geschrieben. Zeige, dass  $\mathbb{RP}^n$  eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Nicht alle interessanten geometrischen Gebilde sind topologische Mannigfaltigkeiten. Für die Zwecke der topologischen Quantenfeld-Theorien sind insbesondere Mannigfaltigkeiten *mit Rand* von großer Bedeutung.

**Definition 5.10.** Eine *topologische Mannigfaltigkeit mit Rand* der Dimension  $n \geq 1$  ist ein parakompakter Hausdorff-Raum  $X$  mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \ni x$  hat, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge

$$V \subseteq \{x_1 \leq 0\} \times \mathbb{R}^{n-1} =: \mathbb{H}^n$$

ist.

Wenn  $n = 0$  ist, dann setzen wir  $\mathbb{H}^0 := \mathbb{R}^0$  und eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension  $n = 0$  ist dasselbe wie eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension  $n = 0$ .

**Beispiel 5.11.** Die Kreisscheibe  $D^2 = \{x^2 + y^2 \leq 1 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand ist gerade der Kreisring  $S^1$ .

**Übung für die Theorie 5.12.** Gib eine formale Definition für den Rand  $\partial X$  einer topologischen Mannigfaltigkeit  $X$  mit Rand. Zeige, dass  $\partial X$  eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

**Übung für die Praxis 5.13.** Zeige, dass das Intervall  $D^1 = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$  eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist.

## 6 Klassische Differentialgeometrie

### 6.1 Glatte Mannigfaltigkeiten

In der Physik werden Größen häufig gemessen und ihre Veränderungen in Raum und Zeit etwa durch Differentialgleichungen beschrieben. Mit anderen Worten, wir wollen Funktionen  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert auf einer topologischen Mannigfaltigkeit  $X$ , zumindest ableiten können, auch wenn das in der Regel noch nicht alles ist, was wir für Physik brauchen. Um Differenzierbarkeit zu beschreiben, reichen die Daten, die in einer topologischen Mannigfaltigkeit gegeben sind, allerdings nicht aus.

**Beispiel 6.1.** Seien  $X, Y$  zwei Kopien von  $\mathbb{R}$ . Wir betrachten die Abbildung

$$f: X \rightarrow Y, x \mapsto x^3.$$

Diese Abbildung ist eine stetige Bijektion. Ihre Inverse  $g: Y \rightarrow X, x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ , ist ebenfalls stetig, d.h.,  $f: X \rightarrow Y$  ist ein Homöomorphismus. Mit anderen Worten,  $X$  und  $Y$  sind zwei topologische Mannigfaltigkeiten, die entlang von  $f$  identifiziert werden können. Nun ist  $a: X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ , eine differenzierbare Funktion, aber die Komposition  $a \circ g: Y \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht differenzierbar, eben weil  $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$  nicht differenzierbar ist. Das zeigt, dass auf einer topologischen Mannigfaltigkeit differenzierbare Funktionen nicht sinnvoll definiert werden können.

Das Problem ist gerade, dass die Abbildung  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die die beiden topologischen Mannigfaltigkeiten  $X$  und  $Y$  identifiziert, selbst nicht differenzierbar ist. Um Differenzierbarkeit als Begriff zu erhalten, muss sicher gestellt werden, dass Identifikationen selbst differenzierbar sind. Dazu bedarf es einer Zusatz-Struktur auf der Mannigfaltigkeit, die *glatte Struktur*.

Wir haben oben definiert, dass eine Abbildung  $f: U \rightarrow V$  zwischen offenen Teilmengen  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Diffeomorphismus ist, falls sie bijektiv ist und sowohl  $f: U \rightarrow V$  als auch  $f^{-1}: V \rightarrow U$  glatte Abbildungen sind.

Für einen Diffeomorphismus  $f: U \rightarrow V$  gilt dann: Eine Funktion  $h: V \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann glatt, wenn  $h \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist. Mit dieser Einsicht können wir Mannigfaltigkeiten definieren, die einen wohldefinierten Begriff glatter Funktionen haben.

**Definition 6.2.** Sei  $X$  eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 0$ . Eine *Karte* ist ein Tupel  $(V, U, \phi)$ , wo  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge ist,  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge ist, und  $\phi: V \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist. Zwei Karten  $(V_1, U_1, \phi_1)$  und  $(V_2, U_2, \phi_2)$  heißen *kompatibel*, wenn die Komposition

$$V_1 \supseteq \phi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\phi_1} U_1 \cap U_2 \xrightarrow{\phi_2^{-1}} \phi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \subseteq V_2$$

ein Diffeomorphismus ist. Ein *glatter Atlas* für  $X$  ist eine Menge  $\mathcal{A}$  von Karten derart, dass je zwei Karten in  $\mathcal{A}$  kompatibel sind, und derart, dass  $\bigcup_{i \in \mathcal{A}} U_i = X$  eine offene Überdeckung ist. Hier schreiben wir  $i = (V_i, U_i, \phi_i)$  für eine Karte  $i \in \mathcal{A}$ . Eine *glatte Mannigfaltigkeit* (der Dimension  $n \geq 0$ ) ist ein Paar  $(X, \mathcal{A})$ , wo  $X$  eine topologische Mannigfaltigkeit (derselben Dimension) ist, und wo  $\mathcal{A}$  ein glatter Atlas ist.

**Beispiel 6.3.** Sei  $X = \mathbb{R}^2$  als topologische Mannigfaltigkeit. Wähle  $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^2$  und  $\phi = \text{id}$ . Dann ist  $(V, U, \phi)$  eine Karte und wir erkennen  $\mathbb{R}^2$  als glatte Mannigfaltigkeit mit dem Atlas  $\mathcal{A} = \{(V, U, \phi)\}$ .



Abbildung 4: Eine Mannigfaltigkeit mit zwei kompatiblen Karten (in umgekehrter Morphismen-Richtung) (Platzhalter wegen ©)

**Beispiel 6.4.** Betrachte die Abbildung  $\pi: \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ , die durch  $\pi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  gegeben ist. Dann sind

$$\pi|_{(0,1)}: (0, 1) \rightarrow S^1 \setminus \{(1, 0)\} \quad \text{und} \quad \pi|_{(-1/2, 1/2)}: \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$$

Homöomorphismen, die zusammen einen glatten Atlas  $\mathcal{A}$  definieren. Es ist  $(S^1, \mathcal{A})$  eine glatte Mannigfaltigkeit.

**Übung für die Praxis 6.5.** Gib einen glatten Atlas auf der Kugeloberfläche

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

explizit an.

Wenn wir eine glatte Mannigfaltigkeit  $(X, \mathcal{A})$  haben, dann können wir eine Funktion  $a: X \rightarrow \mathbb{R}$  als *glatt* definieren, falls für alle Karten  $i \in \mathcal{A}$  die Komposition  $a \circ \phi_i: V_i \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist. In einer Umgebung eines jeden Punktes  $x \in X$  kann dies auf einer einzelnen Karte  $\phi_i: V_i \rightarrow U_i$  überprüft werden, gerade weil die Übergangsabbildungen Diffeomorphismen sind. Wäre eine Übergangsabbildung kein Diffeomorphismus, so wäre diese Definition immer noch sinnvoll, aber es gäbe so gut wie keine glatte Funktion. Mit der Diffeomorphismen-Bedingung kann jede glatte Funktion  $a: V_i \rightarrow \mathbb{R}$  als glatte Funktion auf  $U_i \subseteq X$  aufgefasst werden. Wir schreiben die Menge der glatten Funktionen auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  als  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  oder später auch oft als  $\Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$ .

Wenn wir eine glatte Mannigfaltigkeit  $(X, \mathcal{A})$  in obiger Definition haben, dann können wir oft weitere Karten hinzufügen, nämlich all jene Karten  $(V, U, \phi)$  mit der Eigenschaft, dass die Diffeomorphismen-Bedingung für  $\mathcal{A} \cup \{(V, U, \phi)\}$  immer noch erfüllt ist. In der Regel nehmen wir an, dass wir bereits alle solchen Karten hinzugefügt haben. In diesem Fall sagen wir, der Atlas ist *maximal*. Mit diesem Vorgehen machen wir die Definition eindeutiger. Wir wollen nämlich (eigentlich)<sup>5</sup> nicht zwischen glatten Mannigfaltigkeiten unterscheiden, deren verschiedene Atlanten dieselben glatten Funktionen definieren, oder (an diesem Punkt) präziser, deren Vereinigung ebenfalls ein Atlas ist.

<sup>5</sup>Wir tun es ja formal doch ...

**Übung für die Theorie 6.6.** Zeige mit Hilfe des Zornschen Lemmas, dass jeder Atlas  $\mathcal{A}$  in einem maximalen Atlas  $\bar{\mathcal{A}}$  enthalten ist. Ist dieser maximale Atlas eindeutig?

Ähnlich wie glatte Funktionen können wir auch glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten definieren.

**Definition 6.7.** Seien  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  zwei glatte Mannigfaltigkeiten. Eine (mengen-theoretische) Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *glatt*, falls für jede Karte  $\phi_i: V_i \rightarrow U_i \subseteq X$  in  $\mathcal{A}$  und jede Karte  $\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow U_\alpha \subseteq Y$  in  $\mathcal{B}$  die Komposition  $\psi_\alpha^{-1} \circ f \circ \phi_i$  in der oberen Zeile des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} (f \circ \phi_i)^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \cap f^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{f} & U_\alpha & \xrightarrow{\psi_\alpha^{-1}} & V_\alpha \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ V_i \subseteq \mathbb{R}^n & & X & & Y & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

glatt ist.

Ein *Diffeomorphismus* ist eine bijektive glatte Abbildung  $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ , deren mengen-theoretische Umkehrung  $g = f^{-1}: (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$  ebenfalls glatt ist. Wenn es einen Diffeomorphismus zwischen  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  gibt, dann sagen wir, dass  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  *diffeomorph* sind. In diesem Fall betrachten wir  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  als strukturgleich.

**Übung für die Theorie 6.8.** Zeige, dass jede glatte Abbildung im Sinne dieser Definition stetig ist.

**Übung für die Theorie 6.9.** Sei  $(X, \mathcal{A})$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeige, dass eine Funktion  $a: X \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann glatt ist, wenn sie glatt im weiter oben definierten Sinne ist.

**Übung für die Theorie 6.10.** Seien  $(X, \mathcal{A}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{A}_Y)$  und  $(Z, \mathcal{A}_Z)$  glatte Mannigfaltigkeiten. Seien  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  glatte Abbildungen. Zeige, dass die Komposition  $g \circ f: X \rightarrow Z$  eine glatte Abbildung ist.

**Übung für die Praxis 6.11.** Bestimme, ob die Abbildung  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $(x, y) \mapsto x$ , glatt ist, wo wir  $S^1$  als glatte Mannigfaltigkeit mit dem oben beschriebenen Atlas  $\mathcal{A}$  betrachten. Bestimme ebenfalls, ob die Abbildung  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x, y)$ , glatt ist.

Glatte Abbildungen lassen sich anhand glatter Funktionen charakterisieren. Diese Charakterisierung wird später eine große Rolle spielen, wenn wir uns eine alternative Formulierung der Theorie glatter Mannigfaltigkeiten ansehen.

**Proposition 6.12.** Seien  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  zwei glatte Mannigfaltigkeiten. Eine mengen-theoretische Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann glatt, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Für jede offene Teilmenge  $W \subseteq Y$  und jede glatte Funktion  $a: W \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Komposition  $a \circ f: f^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls eine glatte Funktion.

*Beweis.* Wir nehmen zuerst an, dass  $f: X \rightarrow Y$  glatt ist. Für jede offene Teilmenge ist dann auch  $f: f^{-1}(W) \rightarrow W$  glatt. Sei  $a: W \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Wir haben in den Übungen gesehen, dass die Komposition  $a \circ f: f^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}$  jetzt ebenfalls glatt ist.

Nehmen wir umgekehrt an, dass für jede glatte Funktion  $a: W \rightarrow \mathbb{R}$  auch die Komposition  $a \circ f: f^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist. Sei  $\phi_i: V_i \rightarrow U_i$  eine Karte in  $\mathcal{A}$  und sei  $\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow U_\alpha$  eine Karte in  $\mathcal{B}$ . Auf  $U_\alpha \subseteq Y$  haben wir  $m$  Koordinaten-Funktionen

$$a_k: U_\alpha \xrightarrow{\psi_\alpha^{-1}} V_\alpha \xrightarrow{\subseteq} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_k} \mathbb{R},$$



wo  $\pi_k: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  die  $k$ -te Koordinaten-Projektion ist. Nach Annahme sind dann auch die Funktionen  $a_k \circ f: f^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Insbesondere ist  $a_k \circ f: U_i \cap f^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Dann ist aber nach Definition der Glattheit auch  $a_k \circ f \circ \phi_i: (f \circ \phi_i)^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Wir beobachten, dass jetzt auch  $a_\bullet \circ f \circ \phi_i: (f \circ \phi_i)^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^m$  glatt ist, und damit ist  $\psi_\alpha^{-1} \circ f \circ \phi_i$  glatt.  $\square$

Wenn wir eine topologische Mannigfaltigkeit  $X$  mit zwei glatten Atlanten  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  haben derart, dass  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  ebenfalls ein glatter Atlas ist, dann ist die identische Abbildung

$$f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$$

eine glatte Abbildung. Ihre Inverse  $g: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$  ist ebenfalls eine glatte Abbildung, also sind  $f$  und  $g$  Diffeomorphismen. Mit anderen Worten,  $(X, \mathcal{A})$  und  $(X, \mathcal{B})$  sind zwar zwei verschiedene glatte Mannigfaltigkeiten im Sinne obiger Definition, eben weil sie zwei verschiedene Atlanten haben, aber es gibt keinen wesentlichen strukturellen Unterschied zwischen ihnen, zumindest in Bezug auf Glattheit von Funktionen.

**Übung für die Praxis 6.13.** Sei  $\mathbb{RP}^n$  der reelle projektive Raum aus Übung 5.9. Konstruiere einen glatten Atlas auf der topologischen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{RP}^n$ .

**Übung für die Praxis 6.14.** Welche dieser topologischen Räume sind topologische Mannigfaltigkeiten? Welche lassen einen glatten Atlas zu? Für welche ist das auf eine Art möglich, sodass die angegebene Einbettung in den umgebenden Raum glatt ist?

- (1)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$
- (2)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = xyz\}$
- (3)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$
- (4)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
- (5)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = e^y\}$
- (6)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$

## 6.2 Glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand

Um die Theorie der topologischen Quantenfeld-Theorien aufzusetzen, müssen wir glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand betrachten. Mit anderen Worten, wir müssen das Konzept der Differenzierbarkeit und des Atlanten auf topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand erweitern.

**Definition 6.15.** Seien

$$V_1, V_2 \subseteq \{x_1 \leq 0\} \times \mathbb{R}^{n-1} =: \mathbb{H}^n$$

zwei offene Teilmengen. Ein Homöomorphismus  $\phi: V_1 \rightarrow V_2$  heißt ein *Diffeomorphismus*, wenn es offene Teilmengen  $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $V_i = W_i \cap \mathbb{H}^n$  und einen Diffeomorphismus  $\psi: W_1 \rightarrow W_2$  gibt derart, dass  $\psi|_{V_1} = \phi$  ist.

Beachte, dass  $\psi$  nicht eindeutig ist, auch nicht in einer Umgebung von  $V_i$ .

**Definition 6.16.** Sei  $X$  eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension  $n \geq 1$ . Eine *Karte* ist ein Tripel  $(V, U, \phi)$ , wo  $V \subseteq \{x_1 \leq 0\} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{H}^n$  und  $U \subseteq X$  offene Teilmengen sind, und wo  $\phi: V \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist. Zwei Karten  $(V_1, U_1, \phi_1)$  und  $(V_2, U_2, \phi_2)$  heißen *kompatibel*, wenn die Komposition

$$\begin{array}{ccccc} \phi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\phi_1} & U_1 \cap U_2 & \xrightarrow{\phi_2^{-1}} & \phi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \\ \textstyle\downarrow \cap & & & & \textstyle\downarrow \cap \\ V_1 & & & & V_2 \\ \textstyle\downarrow \cap & & & & \textstyle\downarrow \cap \\ \{x_1 \leq 0\} \times \mathbb{R}^{n-1} & & & & \{x_1 \leq 0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \end{array}$$

in der oberen Zeile ein Diffeomorphismus ist. Ein *glatter Atlas mit Rand* ist eine Menge  $\mathcal{A}$  von Karten derart, dass je zwei Karten  $i, j \in \mathcal{A}$  kompatibel sind, und derart, dass  $\bigcup_{i \in \mathcal{A}} U_i = X$  eine offene Überdeckung ist. Eine *glatte Mannigfaltigkeit mit Rand* der Dimension  $n \geq 1$  ist ein Paar  $(X, \mathcal{A})$ , wo  $X$  eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand (der Dimension  $n \geq 1$ ) ist, und wo  $\mathcal{A}$  ein glatter Atlas mit Rand ist.

**Übung für die Praxis 6.17.** Finde einen glatten Atlas mit Rand auf

$$D^1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\}.$$

Finde einen glatten Atlas mit Rand auf der Kreisscheibe

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Seien  $V_1 \subseteq \mathbb{H}^n$  und  $V_2 \subseteq \mathbb{H}^m$  zwei offene Teilmengen. Eine mengen-theoretische Abbildung  $f: V_1 \rightarrow V_2$  heißt *glatt*, wenn jeder Punkt  $x \in V_1$  eine offene Umgebung  $W \subseteq V_1$  und eine Abbildung  $e_x: W \rightarrow V_2$  derart zulässt, dass die Komposition  $e_x: W \rightarrow V_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  glatt ist, und dass  $f|_{W \cap V_2} = e_x|_{W \cap V_2}$  gilt. Mit dieser Definition können wir glatte Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand definieren.

**Definition 6.18.** Seien  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  zwei glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand. Eine mengen-theoretische Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt *glatt*, falls für jede Karte  $\phi_i: V_i \rightarrow U_i$  in  $\mathcal{A}$  und jede Karte  $\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow U_\alpha$  in  $\mathcal{B}$  die Komposition  $\psi_\alpha^{-1} \circ f \circ \phi_i$  in der oberen Zeile des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} (f \circ \phi_i)^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \cap f^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{f} & U_\alpha & \xrightarrow{\psi_\alpha^{-1}} & V_\alpha \\ \textstyle\downarrow \cap & & \textstyle\downarrow \cap & & \textstyle\downarrow \cap & & \textstyle\downarrow \cap \\ V_i \subseteq \mathbb{H}^n & & X & & Y & & \mathbb{H}^m \end{array}$$

glatt ist.

*Bemerkung 6.19.* Es gibt eine ganze Reihe verschiedener Definitionen von Morphismen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand in der Literatur. In diesem Skript werden wir nur diese Definition betrachten.

**Beispiel 6.20.** Die Einbettung  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand. Insbesondere muss der Rand  $\partial X$  nicht auf den Rand  $\partial Y$  abgebildet werden. Die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $x \mapsto 0$ , ist ebenfalls eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand. Insbesondere muss nicht jeder Punkt in  $X$ , der in den Rand  $\partial Y$  abgebildet wird, auch im Rand  $\partial X$  liegen.

**Übung für die Theorie 6.21.** Zeige, dass die Komposition zweier glatter Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand eine glatte Abbildung ist.

**Übung für die Theorie 6.22.** Zeige, dass eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand  $(X, \mathcal{A})$  und  $(Y, \mathcal{B})$  genau dann glatt ist, wenn für jede offene Teilmenge  $W \subseteq Y$  und jede glatte Funktion  $a: W \rightarrow \mathbb{R}$  die Komposition  $a \circ f: f^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist.

**Übung für die Praxis 6.23.** Zeige, dass die Einbettung  $i: S^1 \rightarrow D^2$  eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand ist.

## 7 Mengen-theoretische Grundlagen

Wir diskutieren die heute üblichen Grundlagen der Mathematik als Vorbereitung auf die Kategorientheorie.

### Mengen

Wir erinnern daran, dass Mengen grundsätzlich nur andere Mengen enthalten können, und dass zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie genau dieselben anderen Mengen enthalten. Damit sind der Durchschnitt  $S \cap T$  und die Vereinigung  $S \cup T$  zweier Mengen  $S$  und  $T$  definiert. Ähnlich sind die Vereinigung und der Durchschnitt über alle Mengen, die in einer Menge  $M$  enthalten sind, definiert.

**Beispiel 7.1.** Seien  $S = \{0, 1\}$  und  $T = \{1, 2\}$ . Dann ist  $S \cup T = \{0, 1, 2\}$ .

Sind  $s$  und  $t$  zwei Mengen, dann ist das *geordnete Paar*  $(s, t)$  nichts anderes als die Menge  $\{\{s\}, \{s, t\}\}$ . Damit können wir dann das *Produkt* zweier Mengen  $S$  und  $T$  als die Menge

$$S \times T := \{(s, t) \mid s \in S, t \in T\}$$

definieren.

Eine *Abbildung*  $f: S \rightarrow T$  ist nun eine Teilmenge  $f \subseteq S \times T$  derart, dass es für jedes  $s \in S$  genau ein  $t \in T$  mit  $(s, t) \in f$  gibt. In diesem Fall schreiben wir  $f(s) = t$ .

Eine *Familie* von Mengen ist eine Abbildung  $f: I \rightarrow S$  zwischen Mengen, wobei wir jetzt die Menge  $f(i) \in S$  als durch  $i \in I$  indiziert betrachten. Beachte, dass Familien stets von Mengen indiziert sein müssen, und dass es eine Menge geben muss, die jede Menge in der Familie als Element enthält.

Mit Hilfe geordneter Paare können wir auch die *disjunkte Vereinigung* über eine Familie  $(S_i)_{i \in I}$  von Mengen bilden. Diese ist durch

$$\bigsqcup_{i \in I} S_i := \{(i, s) \mid i \in I, s \in S_i\}$$

gegeben.

**Beispiel 7.2.** Sei  $I = \{+, -\}$  und seien  $S_+ = \{0, 1\}$  und  $S_- = \{1, 2\}$ . Dann ist

$$S_+ \sqcup S_- = \{(+, 0), (+, 1), (-, 1), (-, 2)\}.$$

Hier sind  $+$  und  $-$  Symbole, die bestimmte (aber hier nicht spezifizierte) Mengen bezeichnen.

### Zornsches Lemma

Sei  $(S, \leq)$  eine partiell geordnete Menge. Ein Element  $b \in S$  ist eine *obere Schranke* für  $T$ , falls  $x \leq b$  für alle  $x \in T$  gilt. Eine Teilmenge  $T \subseteq S$  heißt *total geordnet*, wenn  $(T, \leq)$  mit der induzierten partiellen Ordnung eine totale Ordnung ist. Die folgende Formulierung des Auswahl-Axioms, genannt das Zornsche Lemma, ist in der Praxis oft die nützlichste Variante.

**Axiom 7.3** (Zornsches Lemma). *Sei  $(S, \leq)$  eine partiell geordnete Menge mit der Eigenschaft, dass jede total geordnete Teilmenge  $T \subseteq S$  eine obere Schranke hat. Dann hat  $S$  ein maximales Element  $m \in S$ , das heißt, wenn  $m \leq x$ , dann ist  $m = x$ .*

### Tarski-Axiom

In der Mathematik wollen wir oft über die Menge aller Strukturen einer bestimmten Art sprechen. Bekanntlich führt ein naiver Ansatz dazu zu verschiedenen Paradoxien, die mit der axiomatischen Begründung der Mengenlehre, etwa durch Zermelo–Fraenkel, behoben wurden. Es gibt verschiedene Ansätze, um doch wieder über die Gesamtheit aller Strukturen reden zu können, etwa Theorien, die zwei verschiedene Grundbegriffe, Mengen und Klassen, unterscheiden. Hier benutzen wir den sparsamsten Ansatz, das *Tarski-Axiom*, das man genauso wie das Auswahl-Axiom zu ZF hinzufügen kann. Um das Axiom besser zu verstehen, beachte, dass grundsätzlich nur andere Mengen Elemente von Mengen sein können, und dass zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie genau dieselben Mengen enthalten.

**Axiom 7.4** (Tarski-Axiom). *Für jede Menge  $S$  gibt es eine Menge  $\kappa$  mit  $S \in \kappa$  und den folgenden Eigenschaften:*

- wenn  $A \in B$  und  $B \in \kappa$ , dann ist auch  $A \in \kappa$ ;
- wenn  $A \subseteq B$  und  $B \in \kappa$ , dann ist auch  $A \in \kappa$ ;
- wenn  $A \in \kappa$ , dann ist auch die Potenzmenge  $2^A \in \kappa$ ;
- wenn  $A \subseteq \kappa$  und  $|A| < |\kappa|$ , dann ist auch  $A \in \kappa$ .

Eine Menge  $\kappa$ , die die aufgelisteten Eigenschaften hat, heißt eine *unzugängliche Kardinalzahl*. Man kann also kurz sagen, dass jede Menge  $S$  in einer unzugänglichen Kardinalzahl enthalten sein soll. Wenn eine beliebige unzugängliche Kardinalzahl  $\kappa$  gewählt ist, dann heißt eine Menge  $S$  *klein*, wenn  $S \in \kappa$  ist. Wir können jetzt problemlos die Menge aller kleinen Mengen betrachten, weil dies eben gerade  $\kappa$  ist. Strukturen mit bestimmten Eigenschaften, solange ihre Konstruktion oder Definition nur kleine Mengen involviert, bilden jetzt wieder Mengen.

**Konvention 7.5.** Wir wählen für den Rest des Skripts eine beliebige unzugängliche Kardinalzahl  $\kappa$  mit  $\mathbb{N} \in \kappa$ .

## 8 Elementare Kategorientheorie

Die Kategorientheorie befasst sich damit, wie verschiedene mathematische Strukturen organisiert werden können, und welche Beziehungen sie zueinander haben. Der Grundbegriff ist die *Kategorie*.

## 8.1 Kategorien und Funktoren

Wir erinnern daran, dass wir oben ein für alle Mal eine unzugängliche Kardinalzahl  $\kappa$  mit  $\mathbb{N} \in \kappa$  gewählt haben.

**Definition 8.1.** Eine *Kategorie*  $\mathcal{C}$  besteht aus einer Menge  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  von *Objekten*, für alle Objekte  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  einer Menge  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  von *Morphismen* und einer *Kompositions-Abbildung*

$$- \circ - : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

für je drei Objekte  $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Diese Daten müssen die folgenden Axiome erfüllen:

- (a) Für jedes  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  existiert ein  $\text{id}_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$  derart, dass  $f \circ \text{id}_X = f$  für alle  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , und  $\text{id}_X \circ g = g$  für alle  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ .
- (b) Für je vier Objekte  $X, Y, Z, W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und Morphismen  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  und  $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, W)$  gilt *Assoziativität*  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

**Beispiel 8.2.** Einige Beispiele für Kategorien:

- (1) Kleine Mengen zusammen mit Abbildungen zwischen ihnen bilden eine Kategorie **Set**. Genauer ist  $\text{Ob}(\mathbf{Set}) = \kappa$  und  $\text{Mor}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$  ist die Menge der stetigen Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$ . Komposition ist durch “Hintereinander-Ausführung” gegeben. Der Morphismus  $\text{id}_X$  ist die identische Abbildung. Alle Mengen, im Gegensatz zu kleinen Mengen, bilden keine Kategorie im Sinne obiger Definition, weil es keine Menge gibt, die alle Mengen als Elemente enthält.
- (2) Kleine topologische Räume zusammen mit stetigen Abbildungen bilden eine Kategorie **Top**. Die Menge der Objekte  $\text{Ob}(\mathbf{Top})$  ist gegeben durch kleine topologische Räume, und  $\text{Mor}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$  ist die Menge der stetigen Abbildungen. Komposition ist durch die Komposition zugrundeliegender Mengenabbildungen gegeben.
- (3) Kleine topologische Mannigfaltigkeiten zusammen mit stetigen Abbildungen bilden eine Kategorie **TopMfd**.
- (4) Kleine glatte Mannigfaltigkeiten zusammen mit glatten Abbildungen bilden eine Kategorie **SmthMfd**.
- (5) Offene Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  (für variables  $n \geq 0$ ) zusammen mit glatten Abbildungen  $f: U \rightarrow V$  bilden eine Kategorie **Aff**<sup>∞</sup>. Das heißt, für offene Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  ist die Morphismen-Menge durch  $\mathcal{C}^\infty(U, V)$  gegeben.
- (6) Kleine Abelsche Gruppen zusammen mit Gruppen-Homomorphismen bilden eine Kategorie **Ab**.
- (7) Kleine Ringe zusammen mit Ring-Homomorphismen bilden eine Kategorie **Ring**.

Wir schreiben kurz  $X \in \mathcal{C}$ , wenn wir  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  meinen. Für  $X, Y \in \mathcal{C}$  schreiben wir kurz  $f: X \rightarrow Y$ , wenn wir  $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  meinen.

Ein *Isomorphismus* ist ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  derart, dass es einen Morphismus  $g: Y \rightarrow X$  mit der Eigenschaft  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$  gibt. Zwei Objekte  $X, Y \in \mathcal{C}$  heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus  $f: X \rightarrow Y$  gibt.

**Beispiel 8.3.** Seien  $0 = \emptyset$  und  $1 = \{\emptyset\}$  (wie in der Peano-Arithmetik). Die zwei Mengen  $\{0\}$  und  $\{1\}$  sind nicht gleich, eben weil  $\emptyset \in \{0\}$ , aber  $\emptyset \notin \{1\}$ , aber sie sind isomorph vermöge  $f: \{0\} \rightarrow \{1\}$ ,  $0 \mapsto 1$ .

**Beispiel 8.4.** Die Isomorphismen in  $\mathbf{Aff}^\infty$  sind gerade die Diffeomorphismen.

Abbildungen zwischen Kategorien heißen *Funktoren*.

**Definition 8.5.** Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  zwei Kategorien. Ein *Funktor*  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  besteht aus einer Abbildung  $F: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$  und, für alle Objekte  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , einer Abbildung  $F: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$  derart, dass

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad \text{und} \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

gelten.

Damit bilden kleine Kategorien, also Kategorien  $\mathcal{C}$ , wo sowohl  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  als auch die Menge aller Morphismen  $\bigsqcup_{X,Y \in \mathcal{C}} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  kleine Mengen sind, eine Kategorie **Cat**. Insbesondere gibt es einen natürlichen Isomorphie-Begriff zwischen Kategorien: Zwei Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  sind isomorph, falls es Funktoren  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$  und  $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$  gibt. In der Praxis ist dieser Isomorphie-Begriff allerdings zu starr, da es meist irrelevant ist, wie viele isomorphe Kopien desselben Objektes in  $\mathcal{C}$  enthalten sind. Um eine schwächere Version zu formulieren, müssen wir zunächst *natürliche Transformationen* einführen.

**Definition 8.6.** Seien  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zwei Funktoren zwischen Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$ . Eine *natürliche Transformation*  $h: F \rightarrow G$  besteht aus einem Morphismus  $h_X: F(X) \rightarrow G(X)$  für jedes Objekt  $X \in \mathcal{C}$  derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{h_X} & G(X) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{h_Y} & G(Y) \end{array}$$

für jeden Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  kommutiert. Eine *natürliche Äquivalenz* ist eine natürliche Transformation, die eine Inverse zulässt. Wir schreiben  $F \simeq G$ , wenn es eine natürliche Äquivalenz zwischen  $F$  und  $G$  gibt.

Damit können wir den Isomorphie-Begriff abschwächen. Eine *Äquivalenz von Kategorien* ist ein Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  mit der Eigenschaft, dass es einen Funktor  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  gibt, sodass  $G \circ F \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$  und  $F \circ G \simeq \text{id}_{\mathcal{D}}$  gelten. In der Praxis ist es oft einfacher, das folgende Kriterium zu überprüfen. Dazu müssen wir zunächst weitere Definitionen einführen.

**Definition 8.7.** Ein Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt *treu*, wenn

$$F: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

für alle  $X, Y \in \mathcal{C}$  injektiv ist. Er ist *voll*, wenn diese Abbildung für alle  $X, Y \in \mathcal{C}$  surjektiv ist, und *volltreu*, wenn sie bijektiv ist. Ein Funktor  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt *essenziell surjektiv*, wenn es für jedes Objekt  $A \in \mathcal{D}$  ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  gibt, sodass  $A$  isomorph zu  $F(X)$  ist.

**Beispiel 8.8.** Die vergessliche Abbildung  $V: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ , die einen topologischen Raum auf die zugrundeliegende Menge abbildet, ist ein Funktor. Dieser Funktor ist *treu* und *essenziell surjektiv*, aber nicht *voll*.

**Beispiel 8.9.** Sei  $E: \mathbf{TopMfd} \rightarrow \mathbf{Top}$  die Einbettung, die eine topologische Mannigfaltigkeit auf sich selbst, betrachtet als topologischen Raum, abbildet. Dann ist  $E$  volltreu, aber nicht essenziell surjektiv.

Unser Kriterium ist jetzt das folgende.

**Faktum 8.10.** Ein Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist genau dann ein Äquivalenz von Kategorien, wenn  $F$  treu, voll und essenziell surjektiv ist.

**Übung für die Theorie 8.11.** Sei  $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{SmthMfd}$  die Unterkategorie, deren Objekte durch glatte Mannigfaltigkeiten  $(X, \mathcal{A})$  mit einem maximalen Atlas  $\mathcal{A}$  gegeben ist, und deren Morphismen durch die Morphismen in  $\mathbf{SmthMfd}$  zwischen Objekten in  $\mathbf{M}$  gegeben sind. Zeige, dass die Einbettung  $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{SmthMfd}$  eine Äquivalenz von Kategorien ist.

## 8.2 Produkte und Koproducte

Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und seien  $\{X_i\}_{i \in I}$  Objekte von  $\mathcal{C}$  für eine kleine Indexmenge  $I$ . Dann ist ein *Produkt* der  $\{X_i\}_{i \in I}$  ein Objekt  $X \in \mathcal{C}$  zusammen mit Morphismen  $\pi_i: X \rightarrow X_i$  mit der folgenden Eigenschaft: Wann immer man ein Objekt  $Y \in \mathcal{C}$  zusammen mit Morphismen  $f_i: Y \rightarrow X_i$  hat, gibt es genau einen Morphismus  $f: Y \rightarrow X$  derart, dass  $\pi_i \circ f = f_i: Y \rightarrow X \rightarrow X_i$  für alle  $i \in I$  gilt. In diesem Fall schreiben wir  $X = \prod_{i \in I} X_i$ . Die Abbildungen  $\pi_i: X \rightarrow X_i$  heißen *Projektionen*.

**Übung 8.12.** Zeige die folgende Aussage: Seien  $X$  und  $X'$  zwei Produkte der Familie  $\{X_i\}_{i \in I}$ . Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus  $\phi: X \rightarrow X'$  derart, dass  $\pi'_i \circ \phi = \pi_i$  für alle  $i \in I$  gilt.

Produkte sind also nicht eindeutig, aber eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Das ist die beste Eindeutigkeit, die man in der Kategorientheorie erwarten kann.

**Beispiel 8.13.** Seien  $S, T$  zwei kleine Mengen. Dann ist deren Produkt in  $\mathbf{Set}$  durch  $S \times T = \{(s, t) \mid s \in S, t \in T\}$  gegeben.

**Übung 8.14.** Seien  $X$  und  $Y$  zwei kleine topologische Räume. Konstruiere deren Produkt  $X \times Y$ . *Hinweis:* Konstruiere  $X \times Y$  zuerst als Menge. Finde danach die richtige Topologie auf dieser Menge, sodass die Produkteigenschaft in  $\mathbf{Top}$  erfüllt ist.

**Übung 8.15.** Seien  $X$  und  $Y$  zwei topologische Mannigfaltigkeiten. Zeige, dass deren Produkt  $X \times Y$  in  $\mathbf{Top}$  wieder eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Gilt diese Aussage auch für topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand?

Wenn man in der Definition des Produktes alle Pfeile umkehrt, erhält man den dualen Begriff des *Koproduktes*, auch (*direkte*) *Summe* genannt. Wenn  $\{X_i\}_{i \in I}$  eine Familie von Objekten einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist, ist deren Koprodukt also ein Objekt  $X$  von  $\mathcal{C}$  zusammen mit Abbildungen  $\sigma_i: X_i \rightarrow X$  derart, dass für jedes Objekt  $Y$  von  $\mathcal{C}$  zusammen mit Morphismen  $f_i: X_i \rightarrow Y$  ein eindeutiger Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f \circ \sigma_i = f_i$  für jedes  $i \in I$  existiert.

**Beispiel 8.16.** Seien  $S$  und  $T$  zwei kleine Mengen. Dann ist deren Koprodukt in  $\mathbf{Set}$  die disjunkte Vereinigung  $S \sqcup T$ .

**Übung 8.17.** Konstruiere das Koprodukt zweier topologischer Räume  $X$  und  $Y$  in  $\mathbf{Top}$ . Ist das Koprodukt zweier topologischer Mannigfaltigkeiten wieder eine topologische Mannigfaltigkeit? Was ist mit topologischen Mannigfaltigkeiten mit Rand?

## 9 Die algebro-geometrische Perspektive

Die algebraische Geometrie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das die Nullstellenmengen von Polynom-Funktionen studiert. In diesem Kapitel betrachten wir die Differentialgeometrie mit den Methoden der algebraischen Geometrie, die sich auch hier als einfach und effektiv erweisen. Das wird uns dabei helfen, Grundbegriffe der Differentialgeometrie kurz und bündig zu definieren, auch wenn dabei die differentialgeometrische Intuition etwas verloren geht.

### 9.1 Garben

Wir haben oben eine glatte Mannigfaltigkeit als ein Paar  $(X, \mathcal{A})$  definiert, wo  $X$  eine topologische Mannigfaltigkeit ist, und wo  $\mathcal{A}$  ein glatter Atlas ist. Das war nötig, um die Klasse der glatten Funktionen auf  $X$  definieren zu können. Stattdessen können wir die Klasse der glatten Funktionen aber auch einfach direkt als das relevante Zusatz-Datum betrachten. Der richtige Begriff, um diesen Ansatz zu formalisieren, ist der einer *Garbe*.

**Definition 9.1.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Wir betrachten  $\tau$  als eine Kategorie, deren Objekte die Elemente  $U \in \tau$  sind, und worin es genau einen Morphismus  $U \rightarrow V$  gibt, falls  $U \subseteq V$ , und gar keinen Morphismus andernfalls. Eine *Prägarbe* ist ein kontravarianter Funktor

$$\mathcal{P}: \tau \rightarrow \mathbf{Set}$$

in die Kategorie der Mengen. Mit anderen Worten, eine Prägarbe besteht aus einer Menge  $\mathcal{P}(U)$  für jedes  $U \in \tau$  und einer *Einschränkungsabbildung*

$$\rho_{UV}: \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(V)$$

für jede Inklusion  $V \subseteq U$ . Eine *Garbe*  $\mathcal{P}$  ist eine Prägarbe mit der folgenden Eigenschaft:

Sei  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung einer offenen Teilmenge  $U \in \tau$  und sei  $p_i \in \mathcal{P}(U_i)$  ein Element für jedes  $i \in I$ . Sei  $U_{ij} = U_i \cap U_j$  und nimm an, dass

$$\rho_{U_i U_{ij}}(p_i) = \rho_{U_j U_{ij}}(p_j) \in \mathcal{P}(U_{ij})$$

gilt. Dann gibt es genau ein  $p \in \mathcal{P}(U)$  mit  $\rho_{U U_i}(p) = p_i$  für alle  $i \in I$ .

Wenn  $\mathcal{P}$  eine Prägarbe auf  $(X, \tau)$  ist, dann schreiben wir

$$\Gamma(U, \mathcal{P})$$

für  $\mathcal{P}(U)$ . Wenn  $p \in \Gamma(U, \mathcal{P})$  ist und wir eine Inklusion  $V \subseteq U$  haben, dann schreiben wir  $p|_V$  (sprich “ $p$  eingeschränkt (auf)  $V$ ”) für  $\rho_{VU}(p) \in \Gamma(V, \mathcal{P})$ . Elemente von  $\Gamma(U, \mathcal{P})$  heißen auch *Schnitte* von  $\mathcal{P}$  über/auf  $U$ .

**Beispiel 9.2.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und sei  $S$  eine Menge. Dann haben wir eine Garbe  $\mathcal{M}$  auf  $X$ , die durch

$$\Gamma(U, \mathcal{M}) = \{f: U \rightarrow S\}$$

gegeben ist. Für eine Inklusion  $i: V \subseteq U$  ist die Einschränkung durch  $f|_V = f \circ i: V \rightarrow S$  gegeben.



**Beispiel 9.3.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Die vielleicht wichtigste Garbe auf  $X$  ist die *Garbe der stetigen Funktionen*

$$\Gamma(U, \mathcal{C}_X^0) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}.$$

Auch hier ist die Einschränkung durch  $f|_V = f \circ i$  für eine Inklusion  $i: V \subseteq U$  gegeben.

**Übung 9.4.** Zeige, dass sowohl  $\mathcal{M}$  als auch  $\mathcal{C}_X^0$  in den beiden Beispielen nicht nur eine Prägarbe, sondern eine Garbe von Mengen ist.

## 9.2 Halme

Wir erinnern daran, dass wir im Kapitel über die Grundbegriffe gerichtete/direkte Mengen sowie direkte Systeme und deren Kolimiten besprochen haben. Eine gerichtete Menge kann auch als Kategorie aufgefasst werden, wo die Objekte die Elemente von  $I$  sind und es genau einen Morphismus  $i \rightarrow j$  gibt, falls  $i \leq j$ , und andernfalls keinen Morphismus. Ein direktes System von Mengen ist dann nichts anderes als ein Funktor  $D: I \rightarrow \mathbf{Set}$ . In diesem Fall schreiben wir den Kolimes als  $\text{colim } D$ .

Sei nun  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und sei  $\mathcal{S}$  eine Garbe von Mengen auf  $X$ . Sei  $x \in X$  ein Punkt. Die offenen Teilmengen von  $X$ , die  $x$  enthalten, bilden eine gerichtete Menge  $\tau_x$ , wobei wir  $U \leq V$  schreiben, falls  $V \subseteq U$  – die Umkehrung ist kein Fehler. Wir erhalten ein direktes System  $D_x: \tau_x \rightarrow \mathbf{Set}$  von Mengen, indem wir  $D_x(U) = \Gamma(U, \mathcal{S})$  setzen. Die Morphismen sind gerade durch die Einschränkungs-Abbildungen gegeben. Der *Halm* von  $\mathcal{S}$  an  $x \in X$  ist nun per definitionem der Kolimes

$$\mathcal{S}_x := \text{colim } D_x = \text{colim}_{x \in U \subseteq X} \Gamma(U, \mathcal{S}).$$

**Beispiel 9.5.** Wir betrachten die Garbe  $\mathcal{C}_X^0$  der stetigen Funktionen auf  $X$ . Dann sind die Elemente des Halms  $\mathcal{C}_{X,x}^0$  stetige Funktionen, die in einer Umgebung von  $x \in X$  definiert sind. Zudem identifizieren wir zwei Funktionen, wenn sie auf einer kleineren Umgebung übereinstimmen.

## 9.3 Direkte Bilder

Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wenn  $\mathcal{S}$  eine Garbe von Mengen auf  $X$  ist, dann können wir eine Prägarbe  $f_*\mathcal{S}$  auf  $Y$  bilden, indem wir

$$\Gamma(U, f_*\mathcal{S}) := \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{S})$$

setzen. Diese Prägarbe heißt das *direkte Bild* von  $\mathcal{S}$  unter  $f$ .

**Übung für die Theorie 9.6.** Zeige, dass die Prägarbe  $f_*\mathcal{S}$  eine Garbe ist.

## 9.4 Lokal geringte Räume

Die Garbe  $\mathcal{C}_X^0$  der stetigen Funktionen ist nicht nur eine Garbe von Mengen, sondern eine Garbe von *Ring*en. Es ist nämlich jede Menge  $\Gamma(U, \mathcal{C}_X^0)$  ein Ring mit punktweiser Addition und Multiplikation stetiger Funktionen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Einschränkungsabbildungen  $\rho_{VU}: \Gamma(U, \mathcal{C}_X^0) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{C}_X^0)$  sind Ring-Homomorphismen. Das bedeutet, dass  $\mathcal{C}_X^0$  eine *Ringgarbe* ist, d.h. ein Funktor

$$\mathcal{C}_X^0: \tau \rightarrow \mathbf{Ring}$$

in die Kategorie der Ringe derart, dass die Komposition  $\tau \rightarrow \mathbf{Set}$  eine Garbe ist. Wir abstrahieren diese Situation mit dem Begriff des *geringten Raumes*, dessen Ringgarbe nicht durch explizite Funktionen  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben sein muss, aber dessen Funktionen (= Elemente von  $\Gamma(U, \mathcal{C}_X^0)$ ) trotzdem addiert und multipliziert werden können.

**Definition 9.7.** Ein *geringter Raum* ist ein Tripel  $(X, \tau, \mathcal{O}_X)$ , wo  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum ist und  $\mathcal{O}_X: \tau \rightarrow \mathbf{Ring}$  eine Ringgarbe. Ein *Morphismus* zwischen geringten Räumen  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  ist ein Paar  $(f, f^\#)$ , wo  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung topologischer Räume ist, und wo

$$f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$$

ein Homomorphismus von Ringgarben ist.

**Beispiel 9.8.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Dann ist  $(X, \tau, \mathcal{C}_X^0)$  ein geringter Raum.

Wenn  $(f, f^\#)$  ein Morphismus geringter Räume ist, dann haben wir etwas expliziter für jede offene Teilmenge  $U \subseteq Y$  einen Ring-Homomorphismus

$$f^\#: \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X),$$

der kompatibel mit Einschränkungs-Abbildungen auf  $X$  und  $Y$  ist. Wir sollten über  $f^\#$  als *Rückzug* oder *Komposition* von Funktionen nachdenken.

**Beispiel 9.9.** Seien  $X$  und  $Y$  zwei topologische Räume und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Dann erhalten wir einen Morphismus von geringten Räumen

$$(f, f^\#): (X, \mathcal{C}_X^0) \rightarrow (Y, \mathcal{C}_Y^0),$$

indem wir  $f^\#(a) = f \circ a: f^{-1}(V) \rightarrow V \rightarrow \mathbb{R}$  für eine offene Teilmenge  $V \subseteq Y$  und eine stetige Abbildung  $a: V \rightarrow \mathbb{R}$  setzen.

**Übung 9.10.** Zeige, dass geringte Räume eine Kategorie **RgdSpc** bilden.

Wenn wir eine Abbildung  $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  geringter Räume haben, dann gibt es für jeden Punkt  $x \in X$  eine induzierte Abbildung

$$f_x^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x},$$

die ebenfalls ein Ring-Homomorphismus ist.

Ein Element  $f \in R$  in einem Ring  $R$  heißt *invertierbar*, wenn es ein  $g \in R$  mit  $fg = 1$  gibt. Wir schreiben die invertierbaren Element als  $R^*$ . Ein Ring heißt *lokal*, wenn die Summe zweier Element  $f, g \in R \setminus R^*$  wieder in  $R \setminus R^*$  liegt; in diesem Fall schreiben wir  $\mathfrak{m}_R := R \setminus R^*$  und nennen  $\mathfrak{m}_R$  das *maximale Ideal*.<sup>6</sup> Ein Homomorphismus  $\phi: R \rightarrow S$  zwischen lokalen Ringen heißt *lokal*, wenn  $\phi^{-1}(\mathfrak{m}_S) = \mathfrak{m}_R$  ist, was zu  $\phi^{-1}(S^*) = R^*$  äquivalent ist.

**Definition 9.11.** Ein *lokal geringter Raum* ist ein geringter Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  mit der Eigenschaft, dass für jeden Punkt  $x \in X$  der Halm  $\mathcal{O}_{X, x}$  ein lokaler Ring ist. Ein *Morphismus* zwischen lokal geringten Räumen ist ein Morphismus  $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  zwischen geringten Räumen mit der Eigenschaft, dass  $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$  für jeden Punkt  $x \in X$  ein lokaler Ring-Homomorphismus ist.

<sup>6</sup>Ein *Ideal* ist eine Teilmenge  $I \subseteq R$  derart, dass  $f, g \in I$  auch  $f + g$  in  $I$  impliziert, und derart, dass  $f \in I$  und  $a \in R$  auch  $af \in I$  impliziert. Ein Ideal  $I$  heißt *maximal*, wenn es kein größeres Ideal gibt, das  $I$  enthält – außer  $R$  selbst, wenn man  $R$  als Ideal zulässt. Ein Ring ist genau dann lokal im Sinne der obigen Definition, wenn es genau ein maximales Ideal gibt.

Auch wenn die Bedeutung der Lokalitts-Bedingung am Anfang vielleicht etwas unklar ist, hat sich diese Definition als der sinnvollste Standard erwiesen.

**Übung 9.12.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Zeige, dass  $\mathcal{C}_{X,x}^0$  ein lokaler Ring ist. Sei  $Y$  ein weiterer topologischer Raum und  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Zeige, dass  $f_x^\sharp: \mathcal{C}_{Y,f(x)}^0 \rightarrow \mathcal{C}_{X,x}^0$  ein lokaler Ring-Homomorphismus ist.

## 9.5 Glatte Mannigfaltigkeiten

Wir interpretieren jetzt glatte Mannigfaltigkeiten als lokal geringte Räume. Sei  $(X, \mathcal{A})$  eine glatte Mannigfaltigkeit und sei  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge. Wir haben bereits oben definiert, dass eine Funktion  $a: U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist, falls fur jede Karte  $i \in \mathcal{A}$  die Komposition  $a \circ \phi_i: V_i \cap \phi_i^{-1}(U) \rightarrow U_i \cap U \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion ist. Dadurch erhalten wir eine Menge

$$\Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$$

glatter Funktionen auf  $U \subseteq X$ . Wir wissen bereits, dass  $\Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$  ein Ring ist, und dass jede Einschränkungs-Abbildung  $\Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{C}_X^\infty)$  ein Ring-Homomorphismus ist. Mit anderen Worten,  $\mathcal{C}_X^\infty$  ist eine Prägarbe von Ringen.

**Lemma 9.13.** *Die Prägarbe  $\mathcal{C}_X^\infty$  der glatten Funktionen ist eine Garbe.*

*Beweis.* Sei  $W \subseteq X$  eine offene Teilmenge und sei  $\bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha = W$  eine offene uberdeckung. Sei  $a_\alpha: W_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion fur jedes  $\alpha \in I$  und nimm an, dass  $a_\alpha|_{W_{\alpha\beta}} = a_\beta|_{W_{\alpha\beta}}$  gilt. Dann gibt es eine Funktion  $a: W \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a(x) = a_\alpha(x)$  fur jedes  $x \in W_\alpha$  – es ist ja gerade so, dass  $a_\alpha(x) = a_\beta(x)$  fur jedes  $x \in W_\alpha \cap W_\beta$  gilt. Sei nun  $i \in \mathcal{A}$  eine Karte. Dann ist die Komposition  $a_\alpha \circ \phi_i: V_i \cap \phi_i^{-1}(W_\alpha) \rightarrow U_i \cap W_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Da  $W = \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$  gilt, muss dann allerdings auch  $a \circ \phi_i: V_i \cap \phi_i^{-1}(W) \rightarrow U_i \cap W \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion sein. Glattheit ist ja gerade eine lokale Eigenschaft, das heißt, eine Funktion ist glatt, wenn sie in der Umgebung eines jeden Punktes glatt ist. Jetzt ist  $a: W \rightarrow \mathbb{R}$  glatt nach Definition, d.h.,  $a \in \Gamma(W, \mathcal{C}_X^\infty)$ . Die Eindeutigkeit von  $a$  ist klar.  $\square$

Es ist also  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  ein geringter Raum. Der Raum ist sogar lokal geringt.

**Lemma 9.14.** *Der Halm  $\mathcal{C}_{X,x}^\infty$  ist fur jeden Punkt  $x \in X$  ein lokaler Ring.*

*Beweis.* Sei  $x \in U \subseteq X$  eine offene Umgebung und sei  $a: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Dann ist  $a$  genau dann in einer gegebenenfalls kleineren Umgebung von  $x$  invertierbar, wenn  $a(x) \neq 0$  gilt. Umgekehrt ist eine Funktion genau dann nicht invertierbar in jeder Umgebung, wenn  $a(x) = 0$  gilt. Fur zwei solche Funktionen gilt aber  $(a+b)(x) = 0$ , also ist deren Summe wieder nicht invertierbar. Insbesondere ist  $\mathcal{C}_{X,x}^\infty$  ein lokaler Ring.  $\square$

Wir haben eine weitere Struktur auf  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$ . Jeder Skalar  $a \in \mathbb{R}$  kann auch als konstante Funktion  $x \mapsto a$  aufgefasst werden, fur jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$ . Da alle konstanten Funktionen glatt sind, wird dadurch jeder Ring  $\Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$  zu einer  $\mathbb{R}$ -Algebra und alle Einschränkungs-Abbildungen sind damit kompatibel. Wir sagen, dass  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  ein *lokal  $\mathbb{R}$ -geringter Raum* ist. Ein Morphismus von lokal  $\mathbb{R}$ -geringten Räumen ist ein Morphismus lokal geringter Räume, der kompatibel mit der  $\mathbb{R}$ -Algebren-Struktur ist.

Aus der Konstruktion erhalten wir die folgende Definition. Der Name, den wir hier vergeben, ist kein Standard.

**Definition 9.15.** Ein *glatter Raum* ist ein parakompakter Hausdorff-Raum  $X$  zusammen mit einer Garbe von  $\mathbb{R}$ -Algebren  $\mathcal{C}_X^\infty$  derart, dass alle Halme  $\mathcal{C}_{X,x}^\infty$  lokale Ringe sind, und derart, dass jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $x \in U \subseteq X$  hat, sodass es eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  und einen Isomorphismus  $(V, \mathcal{C}_V^\infty) \rightarrow (U, \mathcal{C}_X^\infty)$  von lokal  $\mathbb{R}$ -geringten Räumen gibt. Ein *Morphismus* von glatten Räumen ist ein Morphismus von lokal  $\mathbb{R}$ -geringten Räumen. Wir bezeichnen die Kategorie der glatten Räume mit **SmthSpc**.

Wir haben bereits gesehen, dass wir auf kanonische Weise aus jeder glatten Mannigfaltigkeit  $(X, \mathcal{A})$  einen glatten Raum  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  erhalten. Der fundamentale philosophische Unterschied der Definition eines glatten Raumes zur Definition einer glatten Mannigfaltigkeit als Paar  $(X, \mathcal{A})$  mit einem Atlas  $\mathcal{A}$  ist, dass wir keine Karten mehr fixieren, sondern bloß die Existenz von Karten als Eigenschaft fordern. Außerdem sind die Funktionen auf  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  nicht mehr als mengen-theoretische Abbildungen definiert, sondern nur noch als Elemente im Ring der Funktionen  $\Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$ .

Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und sei  $v \in V$  ein Punkt. Dann erhalten wir eine *Auswertungs-Abbildung*

$$\text{ev}_v : \Gamma(V, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \mapsto a(v) \in \mathbb{R}.$$

Diese Abbildung ist surjektiv, weil die Auswertung der konstanten Funktion gerade den Skalar gibt. Wir haben oben gesehen, dass eine Funktion genau dann im maximalen Ideal  $\mathfrak{m}_v$  des Halms  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n, v}^\infty$  ist, wenn  $\text{ev}_v(a) = 0$  gilt. Mit anderen Worten,  $\text{ev}_v$  identifiziert den Quotienten  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n, v}^\infty / \mathfrak{m}_v$  mit  $\mathbb{R}$ . Ist nun  $a \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n, v}^\infty$  ein beliebiges Element, dann gibt es einen eindeutigen Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  derart, dass  $a - \lambda \in \mathfrak{m}_v$  gilt. Dieser Skalar ist gerade  $\text{ev}_v(a)$ . Wir sehen, dass wir die Auswertungs-Abbildung aus der  $\mathbb{R}$ -Algebra-Struktur von  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n, v}^\infty$  rekonstruieren können, indem wir  $\text{ev}_v(a)$  als das eindeutige Element  $\lambda \in \mathbb{R}$  *definieren*, für das  $a - \lambda \in \mathfrak{m}_v$  gilt. Ist jetzt  $X$  ein glatter Raum, dann haben wir ersteinmal keine Auswertungs-Abbildung  $\text{ev}_x : \mathcal{C}_{X,x}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir haben jedoch die  $\mathbb{R}$ -Algebra-Struktur auf  $\mathcal{C}_{X,x}^\infty$ , und wegen des  $\mathbb{R}$ -Algebren-Isomorphismus mit einem  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n, v}^\infty$  gibt es wieder ein eindeutiges  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $a - \lambda \in \mathfrak{m}_x$ . Das definiert uns die Auswertungs-Abbildung

$$\text{ev}_x : \mathcal{C}_{X,x}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$$

für einen Punkt  $x \in X$  in einem glatten Raum. Für eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$  und jedes  $x \in U$  können wir sie zu einer Auswertungs-Abbildung

$$\text{ev}_x : \Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \mapsto \text{ev}_x(a|_x) \in \mathbb{R},$$

fortsetzen. Dadurch erhalten wir eine Abbildung, die ein Element  $a \in \Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$  auf eine Abbildung  $\text{ev}(a) : U \rightarrow \mathbb{R}$  abbildet. Obwohl die Elemente  $a$  von  $\Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$  nicht per definitionem mengen-theoretische Abbildungen sind, können wir trotzdem eine mengen-theoretische Abbildung  $\text{ev}(a) : U \rightarrow \mathbb{R}$  daraus konstruieren.

**Übung für die Theorie 9.16.** Sei  $(X, \mathcal{A})$  eine glatte Mannigfaltigkeit und sei  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge. Sei  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  der assoziierte glatte Raum und sei  $a \in \Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$ . Zeige, dass die Funktion  $\text{ev}(a) : U \rightarrow \mathbb{R}$  gerade die ursprüngliche Funktion  $a : U \rightarrow \mathbb{R}$  aus der Konstruktion der Ringgarbe  $\mathcal{C}_X^\infty$  ist.

**Übung für die Theorie 9.17.** Sei  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  ein glatter Raum und sei  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge. Seien  $a, b \in \Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$  zwei Funktionen mit  $\text{ev}(a) = \text{ev}(b)$  als mengen-theoretische Abbildungen. Zeige, dass dann  $a = b$  im Ring  $\Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$  gilt.

Wenn  $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  eine glatte Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten ist, dann gibt es eine induzierte Abbildung

$$(f, f^\sharp): (X, \mathcal{C}_X^\infty) \rightarrow (Y, \mathcal{C}_Y^\infty)$$

zwischen lokal  $\mathbb{R}$ -geringten Räumen, die eine Funktion  $a: U \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $f \circ a: f^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$  abbildet.

**Übung für die Theorie 9.18.** Zeige, dass die induzierte Abbildung  $f_x^\sharp: \mathcal{C}_{Y, f(x)}^\infty \rightarrow \mathcal{C}_{X, x}^\infty$  auf Halmen ein lokaler Ring-Homomorphismus ist.

Wir erhalten also einen Funktor

$$\mathbb{V}: \mathbf{SmthMfd} \rightarrow \mathbf{SmthSpc}.$$

**Proposition 9.19.** *Der Funktor  $\mathbb{V}$  ist eine Äquivalenz von Kategorien, d.h., er ist treu, voll und essenziell surjektiv.*

**Übung für die Theorie 9.20.** Zeige die Proposition.

**Übung für die Theorie 9.21.** Bestimme, ob  $\mathbb{V}$  ein Isomorphismus von Kategorien ist.

Wir werden von jetzt an auch glatte Räume einfach als “glatte Mannigfaltigkeiten” bezeichnen. Es wird stets aus dem Kontext klar werden, ob wir ein Paar  $(X, \mathcal{A})$  oder einen lokal  $\mathbb{R}$ -geringten Raum  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  betrachten.

## 9.6 Glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand

Wir besprechen jetzt glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand als lokal geringte Räume.

Sei  $(X, \mathcal{A})$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand und sei  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge. Wir haben oben bereits definiert, wann eine Abbildung  $a: U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist.

**Übung für die Theorie 9.22.** Zeige, dass die glatten Funktionen auf  $\mathbb{H}^n = \{x_1 \leq 0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  diesen Raum zu einem lokal  $\mathbb{R}$ -geringten Raum machen.

Wir können dann einfach die Definition einer glatten Mannigfaltigkeit kopieren und fordern, dass ein glatter Raum mit Rand lokal isomorph zu  $\mathbb{H}^n$  sein soll.

**Definition 9.23.** Ein *glatter Raum mit Rand* ist ein lokal  $\mathbb{R}$ -geringter Raum  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  derart, dass  $X$  parakompakt und Hausdorffsch ist, und derart, dass jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U$  hat, die zu einer offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{H}^n$  als lokal  $\mathbb{R}$ -geringter Raum isomorph ist. Ein *Morphismus* von glatten Räumen mit Rand ist ein Morphismus von lokal  $\mathbb{R}$ -geringten Räumen.

**Übung für die Theorie 9.24.** Sei  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeige, dass es wieder eine kanonische Auswertungs-Abbildung gibt, die ein Element  $a \in \Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$  auf eine Funktion  $\text{ev}(a): U \rightarrow \mathbb{R}$  abbildet. Zeige, dass dadurch  $\mathcal{C}_X^\infty$  zu einer Untergarbe der Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen  $\mathcal{C}_X^0$  wird.

## 10 Lineare Algebra

Wir haben bereits im Abschnitt über elementare Algebra gesehen, was ein Körper ist. In diesem Abschnitt wollen wir einen Körper  $\mathbf{k}$  fixieren und die Theorie der  $\mathbf{k}$ -Vektorräume studieren, d.h., Abelscher Gruppen, auf denen  $\mathbf{k}$  operiert. In diesem Zusammenhang werden die Elemente von  $\mathbf{k}$  *Skalare* genannt. Gerade am Anfang kann es sinnvoll sein, sich  $\mathbf{k} = \mathbb{R}$  vorzustellen.

## 10.1 Vektorräume

**Definition 10.1.** Sei  $\mathbf{k}$  ein Körper. Dann ist ein  $\mathbf{k}$ -Vektorraum eine Abelsche Gruppe  $V$  zusammen mit einer Abbildung

$$\cdot: \mathbf{k} \times V \rightarrow V,$$

der  $\mathbf{k}$ -Wirkung, derart, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

- (a) Für  $\lambda \in \mathbf{k}$  und  $v, w \in V$  gilt  $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$ .
- (b) Für  $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$  und  $v \in V$  gilt  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ .
- (c) Für  $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$  und  $v \in V$  gilt  $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$ .
- (d) Es gilt  $1 \cdot v = v$ .

Wir sagen in der Regel kurz “Vektorraum” statt “ $\mathbf{k}$ -Vektorraum,” wenn  $\mathbf{k}$  aus dem Kontext klar ist.

**Beispiel 10.2.** Sei  $n \geq 1$ . Dann ist  $\mathbf{k}^n = \mathbf{k} \times \dots \times \mathbf{k}$  ein Vektorraum vermöge

$$(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) := (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

und

$$\lambda \cdot (v_1, \dots, v_n) := (\lambda \cdot v_1, \dots, \lambda \cdot v_n).$$

**Übung 10.3.** Zeige, dass  $\mathbf{k}^n$  tatsächlich ein Vektorraum ist.

Als Abbildungen zwischen Vektorräumen nehmen wir die “offensichtliche” Definition.

**Definition 10.4.** Seien  $V, W$  zwei Vektorräume. Dann ist ein *Vektorraum-Homomorphismus* eine Abbildung  $\phi: V \rightarrow W$  von Mengen mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Für  $v_1, v_2 \in V$  gilt  $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$ .
- (b) Für  $\lambda \in \mathbf{k}$  und  $v \in V$  gilt  $\phi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \phi(v)$ .

Wir bezeichnen die Menge der Homomorphismen mit  $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W)$ .

**Übung 10.5.** Zeige, dass  $\mathbf{k}$ -Vektorräume zusammen mit ihren Homomorphismen eine Kategorie  $\mathbf{Vect}(\mathbf{k})$  bilden.

**Übung 10.6.** Zeige, dass  $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W)$  selbst wieder ein  $\mathbf{k}$ -Vektorraum ist.

Homomorphismen zwischen den Vektorräumen  $\mathbf{k}^n$  und  $\mathbf{k}^m$  werden in der Regel als *Matrizen* dargestellt. Wir schreiben

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{k}^n$$

und

$$f_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad f_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad f_m = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{k}^m.$$

Dann ist jedes Element von  $\mathbf{k}^n$  beziehungsweise  $\mathbf{k}^m$  eine *Linearkombination* dieser Elemente, d.h., es gibt, für  $v \in \mathbf{k}^n$ , Elemente  $a_i \in \mathbf{k}$  mit  $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ , und für  $w \in \mathbf{k}^m$  Elemente  $b_i \in \mathbf{k}$  mit  $\sum_{i=1}^m b_i f_i$ . Ist jetzt  $\phi: \mathbf{k}^n \rightarrow \mathbf{k}^m$  ein Homomorphismus, dann ist

$$\phi(v) = \phi\left(\sum_{j=1}^n a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j \phi(e_j).$$

Außerdem gibt es Elemente  $A_{ij}^\phi \in \mathbf{k}$  derart, dass

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij}^\phi f_i$$

gilt. Dann ist

$$\phi(v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_j A_{ij}^\phi f_i.$$

Mit anderen Worten, jeder Homomorphismus  $\phi: \mathbf{k}^n \rightarrow \mathbf{k}^m$  ist durch die Skalare  $A_{ij}^\phi \in \mathbf{k}$  für  $j = 1, \dots, n$  und  $i = 1, \dots, m$  eindeutig bestimmt. Eine *Matrix* ist jetzt ein Diagramm der Form

$$\begin{pmatrix} A_{11}^\phi & A_{12}^\phi & \dots & A_{1n}^\phi \\ A_{21}^\phi & A_{22}^\phi & \dots & A_{2n}^\phi \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}^\phi & A_{m2}^\phi & \dots & A_{mn}^\phi \end{pmatrix},$$

das diese Skalare enthält.

**Übung 10.7.** Seien  $\phi, \psi: \mathbf{k}^n \rightarrow \mathbf{k}^m$  zwei Homomorphismen mit Matrizen  $(A_{ij}^\phi)$  und  $(A_{ij}^\psi)$ . Was ist die Matrix von  $\phi + \psi$ ? Was ist die Matrix von  $\lambda \cdot \phi$  für einen Skalar  $\lambda \in \mathbf{k}$ ? Was ist die Matrix der identischen Abbildung  $\mathbf{k}^n \rightarrow \mathbf{k}^n$ ?

**Übung 10.8.** Seien  $\phi: \mathbf{k}^2 \rightarrow \mathbf{k}^2$  und  $\psi: \mathbf{k}^2 \rightarrow \mathbf{k}^2$  zwei Homomorphismen. Wie berechnet sich die Matrix der Komposition  $\psi \circ \phi$  aus den Matrizen für  $\phi$  und  $\psi$ ?

## 10.2 Basen

Die Elemente  $e_1, \dots, e_n \in \mathbf{k}^n$ , die wir oben betrachtet haben, bilden eine *Basis* des Vektorraums  $\mathbf{k}^n$ . Bevor wir Basen allgemein definieren, brauchen wir noch eine kurze Übung.

**Übung 10.9.** Sei  $S$  eine Menge. Dann ist die Menge der Abbildungen  $\text{Map}^{\text{fin}}(S, \mathbf{k})$  derart, dass  $\phi(s) \neq 0$  nur für endlich viele  $s \in S$  gilt, auf natürliche Weise ein Vektorraum.

**Definition 10.10.** Sei  $V$  ein  $\mathbf{k}$ -Vektorraum. Eine *Basis* ist eine Teilmenge  $B \subseteq V$  mit der folgenden Eigenschaft: Die kanonische Abbildung

$$\text{Map}^{\text{fin}}(B, \mathbf{k}) \rightarrow V, \quad \phi \mapsto \sum_{b \in B} \phi(b) \cdot b$$

ist ein Isomorphismus. Eine Teilmenge  $B \subseteq V$  derart, dass diese Abbildung injektiv ist, heißt *linear unabhängig*, und eine Teilmenge  $B \subseteq V$  derart, dass diese Abbildung surjektiv ist, heißt ein *Erzeugendensystem*.

Mit anderen Worten: Eine Basis  $B \subseteq V$  ist eine Teilmenge derart, dass jeder Vektor  $v \in V$  auf eindeutige Weise als Linearkombination endlich vieler Elemente  $b \in B$  geschrieben werden kann.

**Beispiel 10.11.** Selbst der Vektorraum  $\mathbf{k}^1$  hat viele Basen. Beispielsweise sind  $\{1\}$ ,  $\{-1\}$  und  $\{2\}$  allesamt Basen. Die Teilmenge  $\{0\}$  ist keine Basis, weil dann  $\text{Map}^{\text{fin}}(B, \mathbf{k}) \rightarrow V$  nicht injektiv und auch nicht surjektiv ist.

**Beispiel 10.12.** Beispiele für Basen von  $\mathbf{k}^2$ :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es ist ein fundamentales Theorem der linearen Algebra, dass jeder Vektorraum eine Basis hat.

**Lemma 10.13.** *Sei  $V$  ein Vektorraum. Dann gibt es eine Basis  $B \subseteq V$ .*

*Beweis.* Sei  $\Sigma$  die Menge aller Teilmengen  $L$  von  $V$  derart, dass  $\text{Map}^{\text{fin}}(L, \mathbf{k}) \rightarrow V$  injektiv ist. Sei

$$L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Kette von Elementen von  $\Sigma$ . Dann ist auch die Vereinigung  $\bigcup_i L_i$  in  $\Sigma$ . Insbesondere zeigt das Zornsche Lemma, dass  $\Sigma$  ein maximales Element enthält. Sei  $L$  ein solches maximales Element. Wir zeigen, dass  $\text{ev}_L: \text{Map}^{\text{fin}}(L, \mathbf{k}) \rightarrow V$  surjektiv ist. Sei  $v \in V$  ein Element. Wenn  $v \in L$ , dann ist auch  $v$  im Bild von  $\text{ev}_L$ . Wenn  $v \notin L$ , dann ist  $L \subsetneq L \cup \{v\}$ . Insbesondere ist  $\text{ev}_{L \cup \{v\}}: \text{Map}^{\text{fin}}(L \cup \{v\}, \mathbf{k}) \rightarrow V$  nicht injektiv. Es gibt also ein  $\phi: L \cup \{v\} \rightarrow \mathbf{k}$  mit  $\phi(v) \cdot v + \sum_{b \in L} \phi(b)b = 0$ . Wenn  $\phi(v) = 0$  gilt, dann folgt aus der Injektivität von  $\text{ev}_L$ , dass auch  $\phi(b) = 0$  für alle  $b \in L$  gilt. Es muss also mindestens ein  $\phi$  mit  $\phi(v) \neq 0$  und  $\text{ev}_{L \cup \{v\}}(\phi) = 0$  geben. Dann ist allerdings

$$v = -\frac{1}{\phi(v)} \sum_{b \in L} \phi(b)b$$

im Bild von  $\text{ev}_L$ . □

Wenn  $B, B' \subseteq V$  zwei Basen sind, dann gibt es immer eine Bijektion  $B \cong B'$  von Mengen. Die Mächtigkeit einer Basis ist also eindeutig bestimmt. Die Mächtigkeit einer jeden Basis heißt die *Dimension* von  $V$ .

**Definition 10.14.** Ein Vektorraum  $V$  heißt *endlich-dimensional*, wenn es eine endliche Teilmenge  $B \subseteq V$  gibt, die eine Basis ist.

**Übung 10.15.** Zeige, dass ein Vektorraum genau dann endlich-dimensional ist, wenn er isomorph zu  $\mathbf{k}^n$  für ein  $n \geq 0$  ist. Es gibt also, bis auf Isomorphie, nur einen endlich-dimensionalen Vektorraum jeder Dimension.

**Übung 10.16.** Finde einen Vektorraum, dessen Dimension unendlich ist.

### 10.3 Direkte Summen

Sei  $\{V_i\}_{i \in I}$  eine Familie von Vektorräumen. Deren *direkte Summe*  $\bigoplus_{i \in I} V_i$  ist, per definitionem, das Koproduct in der Kategorie  $\mathbf{Vect}(\mathbf{k})$ .

**Lemma 10.17.** *Der Vektorraum*

$$\left\{ f: I \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} V_i \mid \forall i: f(i) \in V_i, \quad f(i) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i \in I \right\}$$

ist die direkte Summe  $\bigoplus_{i \in I} V_i$ .



*Beweis.* Sei  $P$  der Vektorraum aus der Behauptung. Sei  $W$  ein Vektorraum und seien  $\phi_i: V_i \rightarrow W$  Homomorphismen. Dann können wir eine Abbildung

$$\phi: P \rightarrow W, \quad f \mapsto \sum_{i \in I} \phi_i(f(i)),$$

definieren. Diese erfüllt offensichtlich  $\phi \circ \sigma_i = \phi_i$  für alle  $i \in I$ . Eindeutigkeit verbleibt als Übung.  $\square$

## 10.4 Unter-Vektorräume und Quotienten-Vektorräume

Sei  $V$  ein Vektorraum. Ein *Unter-Vektorraum* ist eine Teilmenge  $U \subseteq V$  derart, dass  $v_1, v_2 \in U$  auch  $v_1 + v_2 \in U$  impliziert, und derart, dass  $v \in U$  und  $\lambda \in \mathbf{k}$  auch  $\lambda \cdot v \in U$  impliziert.

**Beispiel 10.18.** Sei  $V = \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Unter-Vektorraum.

**Übung 10.19.** Sei  $\phi: V \rightarrow W$  ein Homomorphismus von Vektorräumen. Zeige, dass der *Kern*

$$\ker(\phi) := \{v \in V \mid \phi(v) = 0\}$$

ein Unter-Vektorraum ist.

Sei nun  $U \subseteq V$  ein Unter-Vektorraum. Dann bilden wir den *Quotienten-Vektorraum*  $V/U$  als die Menge der Teilmengen von  $V$ , die die Form  $[v] = \{v + u \mid u \in U\}$  haben. Die Vektorraum-Struktur ist durch  $[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2]$  und  $\lambda \cdot [v] := [\lambda \cdot v]$  definiert. Die Abbildung

$$\pi: V \rightarrow V/U, \quad v \mapsto [v],$$

heißt die *Quotienten-Abbildung* oder *Projektion*.

**Übung 10.20.** Sei  $U \subseteq V$  ein Unter-Vektorraum. Zeige die folgenden Aussagen:

- (1) Die Vektorraum-Struktur auf  $V/U$  ist wohldefiniert.
- (2)  $\pi: V \rightarrow V/U$  ist ein surjektiver Homomorphismus.
- (3)  $\ker(\pi) = U$
- (4) Sei  $\phi: V \rightarrow W$  ein Homomorphismus mit  $\phi|_U = 0$ . Dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus  $\psi: V/U \rightarrow W$  mit  $\psi \circ \pi = \phi$ .

Sei nun  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine Familie von Unter-Vektorräumen von  $V$ . Dann ist auch der Durchschnitt  $\bigcap_{i \in I} U_i \subseteq V$  ein Unter-Vektorraum. Ist  $S \subseteq V$  eine Teilmenge, so können wir insbesondere den Durchschnitt aller Unter-Vektorräume bilden, die  $S$  enthalten. Das ist der *von  $S$  erzeugte* Unter-Vektorraum  $\langle S \rangle \subseteq V$ .

## 10.5 Tensorprodukte

Seien  $U, V, W$  drei Vektorräume. Eine *bilineare Abbildung* ist eine Abbildung

$$\beta: U \times V \rightarrow W$$

derart, dass  $\beta$  linear in jeder Komponente ist, d.h., es gelten sowohl

$$\beta(u_1 + u_2, v) = \beta(u_1, v) + \beta(u_2, v) \quad \text{und} \quad \beta(\lambda \cdot u, v) = \lambda \cdot \beta(u, v)$$

als auch

$$\beta(u, v_1 + v_2) = \beta(u, v_1) + \beta(u, v_2) \quad \text{und} \quad \beta(u, \lambda \cdot v) = \lambda \cdot \beta(u, v).$$

**Definition 10.21.** Seien  $U$  und  $V$  zwei Vektorräume. Ein *Tensorprodukt* ist ein Vektorraum  $T = U \otimes V$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung  $\beta_0: U \times V \rightarrow T$  mit der folgenden Eigenschaft: Sei  $\beta: U \times V \rightarrow W$  eine bilineare Abbildung. Dann gibt es genau einen Homomorphismus  $\phi: T \rightarrow W$  derart, dass  $\phi \circ \beta_0 = \beta: U \times V \rightarrow W$  gilt.

**Übung 10.22.** Zeige, dass ein Tensorprodukt eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus ist.

Nachdem wir oben direkte Summen, Unter-Vektorräume und Quotienten-Vektorräume eingeführt haben, können wir jetzt die Existenz des Tensorproduktes zeigen.

**Proposition 10.23.** Seien  $U$  und  $V$  zwei Vektorräume. Dann gibt es ein Tensorprodukt  $U \otimes V$ .

*Beweis.* Sei

$$A = \bigoplus_{u \in U, v \in V} \mathbf{k} \cdot [u, v]$$

die direkte Summe über eine Kopie von  $\mathbf{k}$  für jedes Paar von Elementen  $u \in U$  und  $v \in V$ . Wir benutzen hier  $[u, v]$  als formales Index-Symbol, um die einzelnen Kopien von  $\mathbf{k}$  zu unterscheiden. In  $A$  betrachten wir den Unter-Vektorraum

$$I = \left\langle [u_1 + u_2, v] - [u_1, v] - [u_2, v], \quad [u, v_1 + v_2] - [u, v_1] - [u, v_2], \right. \\ \left. \lambda \cdot [u, v] - [\lambda \cdot u, v], \quad \lambda \cdot [u, v] - [u, \lambda \cdot v] \right\rangle,$$

der von Ausdrücken der angegebenen Form erzeugt wird.  $I \subseteq A$  ist also der kleinste Unter-Vektorraum, der alle diese Ausdrücke enthält. Wir definieren jetzt  $U \otimes V := A/I$  als den Quotienten-Vektorraum. Die Abbildung  $\beta_0: U \times V \rightarrow U \otimes V$  ist durch  $\beta_0(u, v) = [[u, v]]$  gegeben, die durch  $[u, v] \in A$  gegebene Klasse in  $A/I$ . Der Beweis der universellen Eigenschaft verbleibt als Übung.  $\square$

**Beispiel 10.24.** Wir geben eine etwas explizitere Konstruktion des Tensorproduktes zweier endlich-dimensionaler Vektorräume  $U$  und  $V$ . Seien  $\{u_1, \dots, u_n\}$  und  $\{v_1, \dots, v_m\}$  Basen von  $U$  beziehungsweise  $V$ . Dann setzen wir

$$U \otimes V := \bigoplus_{i,j} \mathbf{k} \cdot [u_i \otimes v_j].$$

Hier ist  $[u_i \otimes v_j]$  ein formales Symbol, dass als Index für die Kopien von  $\mathbf{k}$  dient, die wir hier addieren. Die bilineare Abbildung ist durch

$$\beta_0: U \times V, \quad \left( \sum_{i=1}^n a_i u_i, \sum_{j=1}^m b_j v_j \right) \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \cdot [u_i \otimes v_j],$$

gegeben.

**Übung 10.25.** Zeige, dass diese Konstruktion tatsächlich ein Tensorprodukt liefert.

**Übung 10.26.** Zeige, dass das Tensorprodukt assoziativ bis auf kanonischen Isomorphismus ist. Überlege dazu, wie der Vergleichs-Homomorphismus

$$(U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

definiert werden kann, und warum er ein Isomorphismus ist.

**Übung 10.27.** Zeige, dass das Tensorprodukt kommutativ bis auf kanonischen Isomorphismus ist. Überlege dazu, wie der Vergleichs-Homomorphismus

$$U \otimes V \rightarrow V \otimes U$$

definiert werden kann.

## 10.6 Äußere Potenzen

Die äußere Potenz hat eine ähnliche Definition wie das Tensorprodukt, allerdings mit einer anderen Art von Abbildung.

**Definition 10.28.** Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume. Eine *alternierende Abbildung* ist eine multilineare Abbildung

$$\alpha: V \times V \times \dots \times V \rightarrow W$$

derart, dass

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = 0$$

gilt, falls es Indizes  $i \neq j$  mit  $v_i = v_j$  gibt.

*Bemerkung 10.29.* Jede alternierende Abbildung ist *antisymmetrisch*, d.h., es gilt

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma \cdot \alpha(v_1, \dots, v_n)$$

für jede Permutation  $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Hier ist  $(-1)^\sigma$  das sogenannte *Signum* der Permutation  $\sigma$ . Das Signum ist eindeutig dadurch charakterisiert, dass das Signum einer Transposition  $-1$  ist, und dass das Signum einer Komposition von Permutationen das Produkt der Signa ist. Wenn  $2 \neq 0$  in  $\mathbf{k}$  gilt, dann ist eine multilineare Abbildung genau dann alternierend, wenn sie antisymmetrisch ist.

Genauso wie das Tensorprodukt die universelle bilineare Abbildung ist, ist die äußere Potenz die universelle alternierende Abbildung.

**Definition 10.30.** Sei  $V$  ein Vektorraum. Eine *äußere Potenz* ist ein Vektorraum  $A = \bigwedge^n V$  zusammen mit einer alternierenden Abbildung  $\alpha_0: V \times \dots \times V \rightarrow A$  mit der folgenden Eigenschaft: Sei  $\alpha: V \times \dots \times V \rightarrow W$  eine alternierende Abbildung. Dann gibt es genau einen Homomorphismus  $\phi: A \rightarrow W$  von Vektorräumen derart, dass  $\phi \circ \alpha_0 = \alpha$  gilt.

**Übung 10.31.** Zeige, dass die äußere Potenz eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus ist.

Wir bezeichnen eine  $n$ -te äußere Potenz mit  $\bigwedge^n V$ . Wir setzen  $\bigwedge^0 V := \mathbf{k}$  per Konvention.

**Übung 10.32.** Zeige, dass eine erste äußere Potenz  $\bigwedge^1 V$  gerade durch  $V$  gegeben ist.

Wir können die äußere Potenz jetzt ganz genauso konstruieren wie das Tensorprodukt. Zuerst betrachten wir die direkte Summe

$$T = \bigoplus_{v_1, \dots, v_n \in V} \mathbf{k} \cdot [v_1, \dots, v_n],$$

die mit formalen Symbolen  $[v_1, \dots, v_n]$  indiziert ist. Dann betrachten wir den Unter-Vektorraum

$$I = \langle [v_1 + w_1, v_2, \dots, v_n] - [v_1, v_2, \dots, v_n] - [w_1, v_2, \dots, v_n], \dots \rangle,$$

der von allen Relationen erzeugt wird, die wir haben wollen. Die äußere Potenz ist jetzt  $\bigwedge^n V := T/I$  und die universelle alternierende Abbildung ist  $\alpha_0(v_1, \dots, v_n) = [[v_1, \dots, v_n]]$ . Wir schreiben normalerweise

$$\alpha_0(v_1, \dots, v_n) =: v_1 \wedge \dots \wedge v_n.$$

Dann ist beispielsweise  $v \wedge v = 0$  und  $v \wedge w = -w \wedge v$  in  $\bigwedge^2 V$ .

**Übung 10.33.** Bestimme alle äußeren Potenzen von  $V = \mathbb{R} \cdot v_1 \oplus \mathbb{R} \cdot v_2$  für  $n \geq 0$ .

Die äußeren Potenzen bilden eine Algebra vermöge der Multiplikation

$$\bigwedge^k V \times \bigwedge^\ell V \rightarrow \bigwedge^{k+\ell} V, \quad (v_1 \wedge \dots \wedge v_k, w_1 \wedge \dots \wedge w_\ell) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_\ell,$$

dem sogenannten  $\wedge$ -Produkt. Dieses Produkt ist assoziativ, aber nicht kommutativ.

## 11 Vektorfelder, Differentialformen und Orientierungen

In diesem Kapitel werden wir Orientierungen auf glatten Mannigfaltigkeiten definieren, die wir für die Definition der Bordismen-Kategorie brauchen. Dazu besprechen wir Moduln, Vektorfelder und Differentialformen. Auch wenn die Theorie Erweiterungen auf Mannigfaltigkeiten mit Rand zulässt, werden wir uns hier auf den einfacheren Fall ohne Rand beschränken, der für unsere Zwecke ausreicht.

### 11.1 Vektorfelder und Derivationen

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$  eine offene Teilmenge. Die Ableitung ist eine Abbildung

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x}: \Gamma(U, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^\infty) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^\infty), \quad a \mapsto \frac{\partial a}{\partial x},$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

- (a) Additivität: für  $a, b \in \Gamma(U, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^\infty)$  gilt  $\partial(a + b) = \partial(a) + \partial(b)$ ;
- (b)  $\mathbb{R}$ -Linearität: für  $a \in \Gamma(U, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^\infty)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt  $\partial(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot \partial(a)$ ;
- (c) Leibniz-Regel: für  $a, b \in \Gamma(U, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^\infty)$  gilt  $\partial(a \cdot b) = \partial(a) \cdot b + a \cdot \partial(b)$ .

Für eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  haben die partiellen Ableitungen

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}: \Gamma(U, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^\infty) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^\infty), \quad a \mapsto \frac{\partial a}{\partial x_i},$$

ebenfalls diese Eigenschaften. Allgemein heißt eine Abbildung mit diesen Eigenschaften ein *Vektorfeld*.

**Definition 11.1.** Sei  $\phi: R \rightarrow A$  ein Homomorphismus von Ringen. Ein *Vektorfeld* ist eine Abbildung  $D: A \rightarrow A$ , die additiv und  $R$ -linear ist, und die die Leibniz-Regel erfüllt. Wir bezeichnen die Menge der Vektorfelder mit  $T_{A/R}$ .

In unserem Beispiel ist  $R = \mathbb{R}$  und  $A = \Gamma(U, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^\infty)$ . Der Homomorphismus  $\phi$  bildet einen Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  auf die konstante Funktion  $U \rightarrow \mathbb{R}$  mit Wert  $\lambda$  ab.

Die Menge der Vektorfelder  $T_{A/R}$  hat zusätzliche Struktur. Wenn  $D, E: A \rightarrow A$  zwei Vektorfelder sind, dann ist auch deren Summe, gegeben durch  $(D + E)(a) = D(a) + E(a)$ , ein Vektorfeld. Wenn  $f \in A$  ist und  $D: A \rightarrow A$  ein Vektorfeld ist, dann ist auch das Produkt, gegeben durch  $(f \cdot D)(a) = f \cdot D(a)$ , ein Vektorfeld. Die Vektorfelder bilden einen *Modul* über  $A$ .

**Definition 11.2.** Sei  $A$  ein Ring. Ein  $A$ -Modul ist eine Menge  $M$  zusammen mit zwei Operationen, der Addition

$$+ : M \times M \rightarrow M$$

und der Skalarmultiplikation

$$\cdot : A \times M \rightarrow M,$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

- (a)  $(M, +)$  ist eine Abelsche Gruppe;
- (b) für  $a \in A$  und  $m, m' \in M$  gilt  $a \cdot (m + m') = (a \cdot m) + (a \cdot m')$ ;
- (c) für  $a, a' \in A$  und  $m \in M$  gilt  $(a + a') \cdot m = (a \cdot m) + (a' \cdot m)$ ;
- (d) für  $a, b \in A$  und  $m \in M$  gilt  $a \cdot (b \cdot m) = (a \cdot b) \cdot m$ ;
- (e) für  $m \in M$  gilt  $1 \cdot m = m$ .

**Übung 11.3.** Zeige, dass jeder Ring  $A$  eine kanonische  $A$ -Modulstruktur hat. Wir schreiben diesen  $A$ -Modul zur Unterscheidung vom Ring  $A$  als  $A^1$ . Zeige, dass das mengen-theoretische Produkt  $A \times \dots \times A$  mit  $n$  Kopien von  $A$  ebenfalls eine kanonische  $A$ -Modulstruktur hat. Wir schreiben diesen  $A$ -Modul als  $A^n$ .

**Übung 11.4.** Sei  $\phi: R \rightarrow A$  ein Ring-Homomorphismus. Zeige, dass die Menge der Vektorfelder  $T_{A/R}$  ein  $A$ -Modul ist.

Die Axiome eines Vektorfeldes ergeben nun auch für Abbildungen  $D: A \rightarrow M$  mit Werten in einem beliebigen Modul  $M$  Sinn. Eine solche Abbildung heißt eine *Derivation*.

**Definition 11.5.** Sei  $\phi: R \rightarrow A$  ein Ring-Homomorphismus und  $M$  ein  $A$ -Modul. Eine *Derivation* ist eine Abbildung  $D: A \rightarrow M$  die additiv und  $R$ -linear ist, und die die Leibniz-Regel erfüllt. Wir schreiben die Menge der Derivationen als  $\text{Der}_{A/R}(M)$ .

Insbesondere ist also  $T_{A/R} = \text{Der}_{A/R}(A)$ . Ein Vektorfeld ist nichts anderes als eine Derivation mit Werten in  $A$ .

**Übung 11.6.** Konstruiere eine kanonische  $A$ -Modulstruktur auf  $\text{Der}_{A/R}(M)$ .

**Übung 11.7.** Seien  $M$  und  $N$  zwei  $A$ -Moduln. Gib eine natürliche Definition für einen  $A$ -Modul-Homomorphismus  $h: M \rightarrow N$  an. Konstruiere eine kanonische  $A$ -Modulstruktur auf der Menge  $\text{Hom}_A(M, N)$  der  $A$ -Modul-Homomorphismen.

## 11.2 Vektorfelder auf glatten Mannigfaltigkeiten

Wir haben oben gesehen, dass wir die partiellen Ableitungen als Vektorfelder im Sinne der dort angegebenen Definition auffassen können. Der wesentliche Grund, diese Perspektive einzunehmen, ist, dass sie sich sehr einfach auf glatte Mannigfaltigkeiten verallgemeinern lässt.

**Definition 11.8.** Sei  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  eine glatte Mannigfaltigkeit und sei  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge. Ein *Vektorfeld* ist eine Abbildung

$$D: \Gamma(W, \mathcal{C}_X^\infty) \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{C}_X^\infty)$$

für jede offene Teilmenge  $W \subseteq U$ , kompatibel mit Einschränkungabbildungen, die additiv und  $\mathbb{R}$ -linear ist, und die die Leibniz-Regel erfüllt. Wir bezeichnen den  $\Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$ -Modul der Vektorfelder auf  $U \subseteq X$  mit  $\Gamma(U, \mathcal{T}_X)$ . Die (Prä-)Garbe  $\mathcal{T}_X$  heißt das *Tangentialbündel* von  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$ .

Der Name “Vektorfeld” kommt daher, dass wir uns an jedem Punkt  $x \in U$  einen Richtungsvektor vorstellen, in dessen Richtung  $D$  die Funktion an der Stelle  $x$  ableitet. Dieses Bild kann in der klassischen Differentialgeometrie recht leicht präzise gemacht werden.

**Übung 11.9.** Zeige, dass die Vektorfelder eine Garbe  $\mathcal{T}_X$  von Mengen bilden.

Für jede offene Teilmenge  $U \subseteq X$  ist  $\Gamma(U, \mathcal{T}_X)$  ein  $\Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$ -Modul. Wenn  $V \subseteq U$  eine kleinere offene Teilmenge ist, dann gelten für die Einschränkungs-Abbildungen

$$(D + E)|_V = D|_V + E|_V \quad \text{und} \quad (a \cdot D)|_V = a|_V \cdot D|_V.$$

Wir sagen, dass  $\mathcal{T}_X$  eine *Garbe von  $\mathcal{C}_X^\infty$ -Moduln* ist.

**Übung 11.10.** Zeige, dass die Abbildung

$$\mathcal{C}_X^\infty \times \dots \times \mathcal{C}_X^\infty \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ein Isomorphismus von Garben von  $\mathcal{C}_X^\infty$ -Moduln ist. Die Summe und Skalar-Multiplikation auf der linken Seite sind eintragsweise definiert.

## 11.3 Differentialformen und das kanonische Bündel

Für uns ist die einfachste Definition einer Differentialform die folgende.

**Definition 11.11.** Sei  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist das *Kotangentialbündel* durch

$$\Omega_X^1 = \text{Hom}(\mathcal{T}_X, \mathcal{C}_X^\infty)$$

gegeben. Für eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$  heißen die Elemente in  $\Gamma(U, \Omega_X^1)$  *Differentialformen* oder präziser *1-Formen*.

Eine Differentialform  $\alpha \in \Gamma(U, \Omega_X^1)$  ist also eine Abbildung

$$\alpha: \Gamma(W, \mathcal{T}_X) \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{C}_X^\infty)$$

für jedes offene  $W \subseteq U$ , kompatibel mit den Einschränkungs-Abbildungen, derart, dass  $\alpha(D + E) = \alpha(D) + \alpha(E)$  und  $\alpha(f \cdot D) = f \cdot \alpha(D)$  gelten.

Wenn  $a \in \Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$  eine Funktion ist, dann bekommen wir eine Differentialform

$$d_X(a): \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{C}_X^\infty, \quad D \mapsto D(a).$$

Wir sagen, dass  $da$  die *de Rahm-Ableitung* von  $a$  ist. Die Abbildung  $d_X: \mathcal{C}_X^\infty \rightarrow \Omega_X^1$  ist eine Derivation mit Werten in  $\Omega_X^1$ .

**Übung 11.12.** Zeige, dass die Abbildung

$$\mathcal{C}_X^\infty \times \dots \times \mathcal{C}_X^\infty \rightarrow \Omega_{\mathbb{R}^n}^1, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \cdot dx_i,$$

ein Isomorphismus von  $\mathcal{C}_X^\infty$ -Modulgarben ist.

Höhere Differentialformen werden durch die äußere Potenz von  $\Omega_X^1$  gebildet. Wenn  $A$  ein Ring und  $M$  ein  $A$ -Modul ist, dann kann die äußere Potenz  $\bigwedge_A^k M$  analog zu unserer Definition und Konstruktion für Körper definiert und konstruiert werden. Für Garben wird diese Konstruktion auf jeder offenen Teilmenge  $U \subseteq X$  angewandt und dann muss man das Ergebnis vergarben, da man andernfalls nur eine Prägarbe erhält.

**Definition 11.13.** Sei  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Die *Garbe der  $k$ -Formen* ist durch

$$\Omega_X^k := \bigwedge_{\mathcal{C}_X^\infty}^k \Omega_X^1$$

gegeben.

Sei  $f: X \rightarrow Y$  ein Morphismus zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Dann gibt es eine kanonische Abbildung

$$df^*: \Omega_Y^k \rightarrow f_* \Omega_X^k.$$

Diese ist eindeutig dadurch charakterisiert, dass sie  $\mathcal{C}_Y^\infty$ -linear ist, für  $k=0$  mit  $f^\sharp: \mathcal{C}_Y^\infty \rightarrow f_* \mathcal{C}_X^\infty$  übereinstimmt, ein Element der Form  $d_Y(a)$  auf  $d_X(f^\sharp(a))$  abbildet, und dass sie  $df^*(\alpha \wedge \beta) = df^*(\alpha) \wedge df^*(\beta)$  erfüllt. Der Stern oben (im Gegensatz zu unten) erinnert uns daran, dass diese Abbildung verglichen mit  $f: X \rightarrow Y$  in die umgekehrte Richtung abbildet.

Eine ganz besondere Rolle spielen die  $n$ -Formen, wo  $n = \dim(X)$  die Dimension der glatten Mannigfaltigkeit  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  ist. Der Grund dafür ist, dass  $n$ -Formen den Funktionen sehr ähnlich sind.

**Übung 11.14.** Zeige, dass die Abbildung

$$\mathcal{C}_X^\infty \rightarrow \Omega_{\mathbb{R}^n}^n, \quad a \mapsto a \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

ein Isomorphismus von  $\mathcal{C}_X^\infty$ -Modulgarben ist.

Die  $n$ -Formen sind also lokal mehr oder weniger dasselbe wie glatte Funktionen. Sie zeigen jedoch ein anderes Transformationsverhalten unter Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten.

**Definition 11.15.** Sei  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Das *kanonische Bündel* ist  $\Omega_X^n$ .

## 11.4 Orientierungen

Der zentrale Begriff zur Definition einer Orientierung ist der folgende.

**Definition 11.16.** Sei  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Eine *Volumenform* ist ein Element  $\omega \in \Gamma(X, \Omega_X^n)$  derart, dass die induzierte Abbildung

$$\omega: \mathcal{C}_X^\infty \rightarrow \Omega_X^n, \quad a \mapsto a \cdot \omega,$$

ein Isomorphismus von  $\mathcal{C}_X^\infty$ -Moduln ist.

Der Name “Volumenform” ergibt sich aus der Integrations- bzw. Maßtheorie. Eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$  hat a priori kein Volumen, aber man kann  $n$ -Formen in der Regel über offene Teilmengen integrieren. Die Wahl einer Volumenform  $\omega$  setzt dann das Volumen einer offenen Teilmenge  $U$  als  $\int_U \omega$  fest.

Wir sagen, eine Funktion  $a \in \Gamma(U, \mathcal{C}_X^\infty)$  ist *positiv*, wenn die Auswertung  $\text{ev}(a): U \rightarrow \mathbb{R}$  nur positive Werte annimmt.

**Definition 11.17.** Sei  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Zwei Volumenformen  $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma(X, \Omega_X^n)$  sind *äquivalent*, wenn es eine positive Funktion  $a \in \Gamma(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  mit  $\omega' = a \cdot \omega$  gibt. Eine *Orientierung* ist eine Äquivalenzklasse von Volumenformen.

**Beispiel 11.18.**  $\mathbb{R}^n$  hat zwei Orientierungen, die durch  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  und  $-dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  repräsentiert werden.

**Beispiel 11.19.** Die reelle projektive Ebene  $\mathbb{RP}^2$  hat gar keine Orientierung.

**Übung 11.20.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht die disjunkte Vereinigung zweier offener echter Teilmengen ist. Sei  $(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit. Zeige, dass  $X$  höchstens zwei Orientierungen hat.

**Übung 11.21.** Bestimme, ob die Kugeloberfläche  $S^2$  eine Orientierung hat.

Eine *orientierte glatte Mannigfaltigkeit* ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer Orientierung  $[\omega_X]$  gegeben durch eine Volumenform  $\omega_X$ . Wir wollen jetzt Abbildungen definieren, die kompatibel mit Orientierungen sind.

**Definition 11.22.** Seien  $(X, [\omega_X])$  und  $(Y, [\omega_Y])$  zwei orientierte Mannigfaltigkeiten derselben Dimension  $n$ . Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  glatter Mannigfaltigkeiten heißt *orientierungserhaltend*, wenn es eine positive Funktion  $a \in \Gamma(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  mit  $df^*\omega_Y = a \cdot \omega_X$  gibt. Die Abbildung heißt *orientierungs-umkehrend*, wenn es eine negative Funktion  $a \in \Gamma(X, \mathcal{C}_X^\infty)$  mit  $df^*\omega_Y = a \cdot \omega_X$  gibt.

Beachte, dass es im Allgemeinen sogar lokal weder eine positive noch eine negative Funktion  $a$  mit dieser Eigenschaft geben muss. Es gibt durchaus Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$ , wo  $df^*\omega_Y = a \cdot \omega_X$  nur für eine Funktion  $a$  mit Nullstellen erreicht werden kann. Ebenfalls haben wir keinen Begriff für Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension definiert.

**Übung 11.23.** Zeige, dass die Begriffe der orientierungserhaltenden und orientierungs-umkehrenden Abbildung wohldefiniert sind, also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten  $\omega_X$  und  $\omega_Y$  sind. Wie verhalten sich diese Begriffe unter Komposition von Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$ ?



## 12 Die Bordismen-Kategorie

Nach unseren umfangreichen Vorbereitungen können wir jetzt die Bordismen-Kategorie einführen. Sei  $n \geq 1$ . Wir definieren die Kategorie der Bordismen  $\mathbf{Bord}_n$ . Die Objekte in  $\mathbf{Bord}_n$  sind kompakte orientierte glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n - 1$ .

**Beispiel 12.1.** Die Objekte von  $\mathbf{Bord}_1$  sind die disjunkte Vereinigung endlich vieler Punkte, jeder davon mit einer Orientierung. Die Objekte von  $\mathbf{Bord}_2$  sind die disjunkte Vereinigung endlich vieler orientierter Kopien von  $S^1$ .

Die Definition der Morphismen ist etwas komplizierter. Sei  $E \in \mathbf{Bord}_n$  eine kompakte orientierte glatte Mannigfaltigkeit. Wir schreiben  $\mathbb{I} = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ . Dann können wir die glatte Mannigfaltigkeit  $E \times \mathbb{I}$  bilden. Wir haben zwei Projektionen

$$p: E \times \mathbb{I} \rightarrow E \quad \text{und} \quad q: E \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}.$$

Wenn  $\omega_E$  die Orientierung auf  $E$  repräsentiert, dann haben wir eine  $(n - 1)$ -Form  $dp^*\omega_E$  auf  $E \times \mathbb{I}$ . Wenn  $u$  die Koordinate auf  $\mathbb{I}$  ist, dann haben wir außerdem eine 1-Form  $dq^*(du)$  auf  $E \times \mathbb{I}$ . Deren Produkt  $\omega_{E \times \mathbb{I}} := dp^*\omega_E \wedge dq^*(du)$  ist eine  $n$ -Form auf  $E \times \mathbb{I}$ .

**Übung für die Theorie 12.2.** Zeige, dass  $\omega_{E \times \mathbb{I}}$  eine Volumenform auf  $E \times \mathbb{I}$  ist. Zeige, dass die Äquivalenzklasse unabhängig von der Wahl des Repräsentanten  $\omega_E$  ist.

Wir haben also eine orientierte glatte Mannigfaltigkeit  $E \times \mathbb{I}$  der Dimension  $n$ . Wir setzen  $\mathbb{I}^+ = [0, 1)$  und  $\mathbb{I}^- = (-1, 0]$  und erhalten damit glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand  $E^+ = E \times \mathbb{I}^+$  und  $E^- = E \times \mathbb{I}^-$ . Wir können jetzt einen Bordismus definieren.

**Definition 12.3.** Seien  $E, F \in \mathbf{Bord}_n$  zwei kompakte orientierte glatte Mannigfaltigkeiten. Ein *Bordismus* ist ein Tupel  $(M, \iota_{\text{in}}, \iota_{\text{out}}, [\omega_M^\circ])$ , wo gilt:

- (a)  $M$  ist eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand;
- (b) die Abbildungen

$$\iota_{\text{in}}: E^+ \rightarrow M \quad \text{und} \quad \iota_{\text{out}}: F^- \rightarrow M$$

sind glatte Abbildungen von glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand, die einen Diffeomorphismus mit disjunkten offenen Teilmengen  $U_{\text{in}} \subseteq M$  beziehungsweise  $U_{\text{out}} \subseteq M$  induzieren;

- (c) es gilt  $\partial M \subset U_{\text{in}} \cup U_{\text{out}}$  und

$$\iota_{\text{in}} \sqcup \iota_{\text{out}}: E^+ \sqcup F^- \rightarrow U_{\text{in}} \cup U_{\text{out}}$$

identifiziert  $E \times \{0\} \sqcup F \times \{0\}$  mit  $\partial M$ ;

- (d)  $[\omega_M^\circ]$  ist eine Orientierung auf dem Inneren  $M^\circ = M \setminus \partial M$  von  $M$ ;
- (e) es gelten  $[d\iota_{\text{in}}^*\omega_M^\circ] = [\omega_{E \times \mathbb{I}}]$  und  $[d\iota_{\text{out}}^*\omega_M^\circ] = [\omega_{F \times \mathbb{I}}]$  als Orientierungen auf  $E \times (0, 1)$  beziehungsweise  $F \times (-1, 0)$ .

Der Name “Bordismus” bezieht sich darauf, dass er  $E$  und  $F$  als verschiedene Ränder derselben glatten Mannigfaltigkeit mit Rand aufzeigt. Man kann sich den Bordismus als eine Art Transformation vorstellen, die  $E$  in  $F$  überführt.

Die Morphismen in unserer Bordismen-Kategorie sind allerdings keine Bordismen, sondern Äquivalenzklassen von Bordismen.

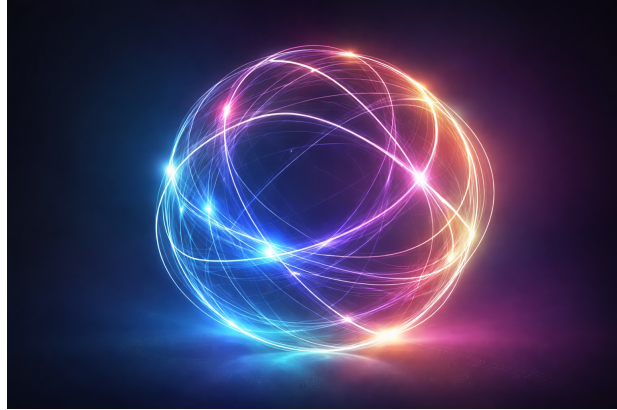


Abbildung 5: Ein Beispiel für einen Bordismus in  $\mathbf{Bord}_2$  (Platzhalter wegen ©)



Abbildung 6: Weitere Beispiele für Bordismen in  $\mathbf{Bord}_2$  (Platzhalter wegen ©)

**Definition 12.4.** Seien  $E, F \in \mathbf{Bord}_n$  zwei kompakte orientierte glatte Mannigfaltigkeiten und seien  $M = (M, \iota_{\text{in}}, \iota_{\text{out}}, [\omega_M^\circ])$  und  $N = (N, \kappa_{\text{in}}, \kappa_{\text{out}}, [\omega_N^\circ])$  zwei Bordismen. Wir sagen, dass  $M$  und  $N$  *äquivalent* sind, wenn es einen Diffeomorphismus  $\psi: M \rightarrow N$  zwischen glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand gibt, der die folgenden Eigenschaften hat:

(a) es gibt ein  $\varepsilon > 0$  derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \iota_{\text{in}} \nearrow & & \nwarrow \iota_{\text{out}} \\ E \times [0, \varepsilon) & & F \times (-\varepsilon, 0] \\ \kappa_{\text{in}} \searrow & \psi \downarrow & \swarrow \kappa_{\text{out}} \\ & N & \end{array}$$

kommutiert;

(b) der induzierte Diffeomorphismus  $\psi^\circ: M^\circ \rightarrow N^\circ$  erhält die Orientierung.

**Übung für die Theorie 12.5.** Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert.

Wir konstruieren jetzt die Komposition zweier Bordismen. Sei  $M = (M, \iota_{\text{in}}, \iota_{\text{out}}, [\omega_M^\circ])$  ein Bordismus zwischen  $E$  und  $F$  und sei  $N = (N, \kappa_{\text{in}}, \kappa_{\text{out}}, [\omega_N^\circ])$  ein Bordismus zwischen  $F$  und  $G$ . Wir werden gelegentlich  $E$  mit dem Bild von  $E \times \{0\}$  in  $M$  identifizieren, und analog für  $F$  und  $G$ ; wir haben dann also disjunkte Zerlegungen  $M = E \sqcup M^\circ \sqcup F$  und  $N = F \sqcup N^\circ \sqcup G$ . Wir konstruieren zuerst die zugrundeliegende Menge. Betrachte die disjunkte Vereinigung

$$S = M \sqcup (F \times (-1, 1)) \sqcup N.$$

Wir haben eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $S$ , wo ein Punkt  $x \in F \times (-1, 0]$  äquivalent zu  $\iota_{\text{out}}(x) \in M$  ist, und wo ein Punkt  $x \in F \times [0, 1)$  äquivalent zu  $\kappa_{\text{in}}(x) \in N$  ist. Der mengentheoretische Quotient  $P = S/\sim$  ist die zugrundeliegende Menge der Komposition  $N \circ M$  von Bordismen. Beachte, dass wir jetzt eine disjunkte Zerlegung

$$P = E \sqcup M^\circ \sqcup F \sqcup N^\circ \sqcup G$$

haben. Wenn  $\pi: S \rightarrow P$  die Quotienten-Abbildung ist, dann ist  $E \sqcup M^\circ \sqcup F$  das Bild von  $M \subseteq S$  und  $F \sqcup N^\circ \sqcup G$  das Bild von  $N \subseteq S$ .

Als disjunkte Vereinigung topologischer Räume ist  $S$  ein topologischer Raum. Wir statten  $P$  mit einer Topologie aus, indem wir eine Menge  $W \subseteq P$  für offen erklären, wenn  $\pi^{-1}(W) \subseteq S$  offen ist.

Um  $P$  zu einer glatten Mannigfaltigkeit mit Rand zu machen, müssen wir definieren, welche Funktionen auf  $P$  glatt sind. Dazu definieren wir, dass eine Funktion  $a: W \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist, falls  $a \circ \pi: \pi^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist. Hier benutzen wir die natürliche Ringgarbe auf der disjunkten Vereinigung  $S$  dreier lokal  $\mathbb{R}$ -geringter Räume.

**Lemma 12.6.** *Es ist  $P$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand.*

*Beweisskizze.* Wir können  $M$  disjunkt in drei Bereiche  $E$ ,  $M^\circ$ ,  $F$ ,  $N^\circ$  und  $G$  zerlegen. Auf  $E \cup M^\circ$  ist  $P$  isomorph zu  $M \setminus F$ . Auf  $N^\circ \cup G$  ist  $P$  isomorph zu  $N \setminus F$ . Jeder Punkt  $x \in F \subset P$  hat eine Umgebung, die isomorph zu einer offenen Teilmenge von  $F \times \mathbb{I}$  ist. Insbesondere ist  $P$  als lokal  $\mathbb{R}$ -geringter Raum lokal isomorph zu  $\mathbb{H}^n$ .  $\square$



Abbildung 7: Graphische Darstellung der Komposition (Platzhalter wegen ©)

Wir bezeichnen das Bild von  $\iota_{\text{in}}: E^+ \rightarrow M$  mit  $U_{\text{in}}$ , das Bild von  $\iota_{\text{out}}: F^- \rightarrow M$  mit  $U_{\text{out}}$ , das Bild von  $\kappa_{\text{in}}: F^+ \rightarrow N$  mit  $V_{\text{in}}$  und das Bild von  $\kappa_{\text{out}}: G^- \rightarrow N$  mit  $V_{\text{out}}$ . Weil  $U_{\text{in}}$  und  $U_{\text{out}}$  disjunkt sind, haben wir einen Diffeomorphismus

$$\lambda_{\text{in}} = \iota_{\text{in}}: E^+ \rightarrow U_{\text{in}} =: W_{\text{in}} \subseteq P,$$

und genauso haben wir einen Diffeomorphismus

$$\lambda_{\text{out}} = \kappa_{\text{out}}: G^- \rightarrow V_{\text{out}} =: W_{\text{out}} \subseteq P,$$

weil  $V_{\text{in}}$  und  $V_{\text{out}}$  disjunkt sind. Zudem sind  $W_{\text{in}}$  und  $W_{\text{out}}$  als offene Teilmengen von  $P$  disjunkt. Der Rand von  $P$  ist gerade durch  $\lambda_{\text{in}}(E \times \{0\})$  und  $\lambda_{\text{out}}(G \times \{0\})$  gegeben. Insbesondere ist er in  $W_{\text{in}} \cup W_{\text{out}}$  enthalten.

Um die Orientierung auf  $P$  zu konstruieren, brauchen wir eine *Zerlegung der Eins*.

**Faktum 12.7.** *Sei  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) und sei  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  eine lokal endliche Überdeckung durch offene Teilmengen. Dann gibt es glatte Funktionen  $\delta_i: X \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften:*

- (a) *es ist  $\delta_i(x) \geq 0$  für alle  $x \in X$ ;*
- (b) *es ist  $\sum_{i \in I} \delta_i(x) = 1$  an jedem Punkt  $x \in X$ ;*
- (c) *es ist  $\text{supp}(\delta_i) := \overline{\{x \in X \mid \delta_i(x) \neq 0\}}$  in  $U_i$  enthalten; hier bezeichnet  $\overline{\{\dots\}}$  den Abschluss der offenen Teilmenge  $\{x \in X \mid \delta_i(x) \neq 0\}$  in  $X$ .*

Wir betrachten jetzt die offene Überdeckung  $P^\circ = M^\circ \cup (F \times \mathbb{I}) \cup N^\circ$ . Dann bekommen wir drei glatte Funktionen  $\delta_M$ ,  $\delta_F$  und  $\delta_N$ . Für gewählte Repräsentanten  $\omega_M^\circ$ ,  $\omega_{F \times \mathbb{I}}$  und  $\omega_N^\circ$  der Orientierungen setzen wir jetzt

$$\omega_P^\circ := \delta_M \cdot \omega_M^\circ + \delta_F \cdot \omega_{F \times \mathbb{I}} + \delta_N \cdot \omega_N^\circ.$$

Diese Summe ergibt Sinn, weil die Funktionen  $\delta_M$ ,  $\delta_F$  und  $\delta_N$  am “Rand” des Definitionsbereichs der jeweiligen Volumenformen verschwinden. Etwas präziser kann man beispielsweise das Produkt  $\delta_M \cdot \omega_M^\circ$  dadurch definieren, dass es durch  $\delta_M \cdot \omega_M^\circ$  auf  $M^\circ \subseteq P^\circ$  gegeben ist, und durch 0 auf der offenen Teilmenge  $P^\circ \setminus \text{supp}(\delta_M)$ .

**Übung für die Theorie 12.8.** Zeige, dass  $\omega_P^\circ$  eine Volumenform auf  $P^\circ$  ist. Zeige, dass die Orientierung  $[\omega_P^\circ]$  unabhängig von allen Wahlen ist, die wir getroffen haben.

Es ist klar aus der Konstruktion, dass  $[d\lambda_{\text{in}}^*\omega_P^\circ] = [\omega_{E \times \mathbb{I}}]$  und  $[d\lambda_{\text{out}}^*\omega_P^\circ] = [\omega_{G \times \mathbb{I}}]$  als Orientierungen auf  $E \times (0, 1)$  beziehungsweise  $G \times (-1, 0)$  gelten. Damit haben wir die Komposition  $P = N \circ M$  zweier Bordismen  $M$  und  $N$  konstruiert.

**Beispiel 12.9.** Einige Bordismen und Äquivalenzen zwischen ihnen in **Bord**<sub>1</sub>:



**Übung für die Theorie 12.10.** Zeige, dass die Konstruktion der Komposition invariant unter Äquivalenzen ist. Wenn wir also sowohl  $M$  als auch  $N$  durch äquivalente Bordismen  $M'$  und  $N'$  ersetzen, dann ist auch  $N \circ M$  äquivalent zu  $N' \circ M'$ .

**Faktum 12.11.** Mit dieser Komposition ist **Bord** <sub>$n$</sub>  eine Kategorie.

**Übung für die Theorie 12.12.** Sei  $E \in \mathbf{Bord}_n$ . Zeige, dass die identische Abbildung durch  $E \times [-1, 1]$  gegeben ist.

## 13 Topologische Quantenfeld-Theorien

In diesem Abschnitt definieren wir topologische Quantenfeld-Theorien als symmetrische monoidale Funktoren

$$\mathcal{Z}: \mathbf{Bord}_n \rightarrow \mathbf{Vect}(\mathbf{k}).$$

Dazu werden wir symmetrische monoidale Kategorien und Funktoren zwischen ihnen diskutieren.

### 13.1 Symmetrische monoidale Kategorien

Die Kategorie der Vektorräume über einem Körper  $\mathbf{k}$  hat eine zusätzliche Struktur, die sich aus dem Tensorprodukt ergibt. In diesem Kapitel besprechen wir diese Zusatzstruktur aus der kategorien-theoretischen Perspektive – wir führen symmetrische monoidale Kategorien ein. Das ist der richtige Begriff, um unten topologische Quantenfeld-Theorien als Funktoren zwischen symmetrischen monoidalen Kategorien definieren zu können.

Wir haben oben definiert, dass ein Monoid eine Menge  $M$  mit einer binären Operation  $+: M \times M \rightarrow M$  ist. Eine *monoidale Kategorie* hat ebenfalls eine solche Produktstruktur.

**Definition 13.1.** Eine *monoidale Kategorie* ist ein Tupel  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ , wo gilt:

- (a)  $\mathcal{C}$  ist eine Kategorie;
- (b)  $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ist ein Bifunktor, genannt das *Tensorprodukt*;
- (c)  $I \in \mathcal{C}$  ist ein Objekt, genannt die *Einheit*;
- (d)  $\alpha_{A,B,C}: A \otimes (B \otimes C) \xrightarrow{\cong} (A \otimes B) \otimes C$  ist ein natürlicher Isomorphismus, genannt der *Assoziator*;
- (e)  $\lambda_A: I \otimes A \xrightarrow{\cong} A$  ist ein natürlicher Isomorphismus;
- (f)  $\rho_A: A \otimes I \xrightarrow{\cong} A$  ist ein natürlicher Isomorphismus;
- (g) das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A \otimes B,C,D}} & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
\text{id}_A \otimes \alpha_{B,C,D} \downarrow & & & & \uparrow \alpha_{A,B,C} \otimes \text{id}_D \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B \otimes C,D}} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & & 
\end{array}$$

kommutiert für alle Objekte  $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ ;

- (h) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes (I \otimes B) & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}} & (A \otimes I) \otimes B \\
& \searrow \text{id}_A \otimes \lambda_B & \swarrow \rho_A \otimes \text{id}_B \\
& A \otimes B & 
\end{array}$$

kommutiert für alle  $A, B \in \mathcal{C}$ .

Wir sagen, dass der Begriff der monoidalen Kategorie eine *Kategorifizierung* des Begriffs des Monoids ist. Beachte, dass hier keineswegs  $I \otimes A = A$  gelten muss; wir fixieren bloß einen Isomorphismus  $I \otimes A \cong A$  als Teil des Datums. Eine monoidale Kategorie heißt *strikt*, falls  $\alpha$ ,  $\lambda$  und  $\rho$  die Identität sind.

Wir haben oben im Abschnitt über elementare Algebra gefordert, dass alle Monoide kommutativ sein sollen. In der Tat ist auch das Tensorprodukt von Vektorräumen kommutativ, das heißt, es gibt einen Isomorphismus  $\sigma_{UV}: U \otimes V \xrightarrow{\cong} V \otimes U$ . Diese Bedingung oder eher Struktur ist noch nicht Teil der Definition einer monoidalen Kategorie. Eine monoidale Kategorie, die wir als kommutativ betrachten können, heißt eine *symmetrische monoidale Kategorie*.

**Definition 13.2.** Eine *symmetrische monoidale Kategorie* ist ein Tupel  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \sigma)$ , wo gilt:

- (a)  $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$  ist eine monoidale Kategorie;
- (b)  $\sigma_{A,B}: A \otimes B \xrightarrow{B \otimes A}$  ist ein natürlicher Isomorphismus, genannt die *Vertauschungs-Abbildung*;<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>engl.: swap map

(c) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \otimes I & \xrightarrow{\sigma_{A,I}} & I \otimes A \\ & \searrow \rho_A \quad \swarrow \lambda_A & \\ & A & \end{array}$$

kommutiert für alle  $A \in \mathcal{C}$ ;

(d) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes C & \xrightarrow{\sigma_{A,B} \otimes \text{id}_C} & (B \otimes A) \otimes C \\ \alpha_{A,B,C} \downarrow & & \downarrow \alpha_{B,A,C} \\ A \otimes (B \otimes C) & & B \otimes (A \otimes C) \\ \alpha_{A,B \otimes C} \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \otimes \sigma_{A,C} \\ (B \otimes C) \otimes A & \xrightarrow{\alpha_{B,C,A}} & B \otimes (C \otimes A) \end{array}$$

kommutiert für alle  $A, B, C \in \mathcal{C}$ ;

(e) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & B \otimes A & \\ \sigma_{A,B} \nearrow & & \searrow \sigma_{B,A} \\ A \otimes B & \xlongequal{\quad} & A \otimes B \end{array}$$

kommutiert für alle  $A, B \in \mathcal{C}$ .

Anders als im Fall der Assoziativität stellt die Vertauschung eine strikte Kommutativität dar. Verzichtet man darauf, dass  $\sigma_{A,B}$  invers zu  $\sigma_{B,A}$  sein soll, so bekommt man eine *braided monoidal category*.

### 13.2 Bordismen und Vektorräume als symmetrische monoidale Kategorien

Wir zeigen, wie unsere beiden Kategorien **Vect**(**k**) und **Bord**<sub>n</sub> symmetrische monoidale Kategorien sind. Wir haben bereits oben angesprochen, dass das übliche Tensorprodukt die Vektorräume zu einer symmetrischen monoidalen Kategorie macht.

**Proposition 13.3.** *Die Kategorie der Vektorräume **Vect**(**k**) ist eine symmetrische monoidale Kategorie.*

*Beweis.* Das Tensorprodukt ist gerade durch das Tensorprodukt von Vektorräumen gegeben. Genauer wählen wir ein solches Tensorprodukt vermöge unserer expliziten Konstruktion. Die Einheit ist  $I = \mathbf{k}^1$ . Der Assoziator ist

$$\alpha_{U,V,W}(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w.$$

Wir haben  $\lambda_V(1 \otimes v) = v$  und  $\rho_V(v \otimes 1) = v$ . Die Vertauschungs-Abbildung ist  $\sigma_{U,V}(u \otimes v) = v \otimes u$ .  $\square$

Die Bordismen werden durch die disjunkte Vereinigung zu einer symmetrischen monoidalen Kategorie.

**Proposition 13.4.** *Sei  $n \geq 1$ . Dann ist  $\mathbf{Bord}_n$  auf kanonische Weise eine symmetrische monoidale Kategorie.*

*Beweis.* Die Einheit ist die leere Mannigfaltigkeit  $\emptyset$ . Das Tensorprodukt ist durch die disjunkte Vereinigung gegeben:

$$E \odot F := E \sqcup F.$$

Die disjunkte Vereinigung von Bordismen macht diese Konstruktion zu einem Bifunktor  $\odot: \mathbf{Bord}_n \times \mathbf{Bord}_n \rightarrow \mathbf{Bord}_n$ . Die Konstruktion von  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  und  $\sigma$  ist klar.  $\square$

### 13.3 Symmetrische monoidale Funktoren

Es gibt verschiedene Begriffe von Funktoren zwischen symmetrischen monoidalen Kategorien. Für uns ist der folgende Begriff am relevantesten, da er in der Definition einer topologischen Quantenfeld-Theorie verwendet wird.

**Definition 13.5.** Seien  $(\mathcal{C}, \odot, I)$  und  $(\mathcal{D}, \otimes, J)$  symmetrische monoidale Kategorien. Ein *symmetrischer monoidaler Funktor* ist ein Tupel  $(F, \phi_{\bullet, \bullet}, \phi)$ , wo gilt:

- (a)  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist ein Funktor;
- (b)  $\phi_{A,B}: F(A) \otimes F(B) \xrightarrow{\cong} F(A \odot B)$  ist ein natürlicher Isomorphismus für alle  $A, B \in \mathcal{C}$ ;
- (c)  $\phi: J \xrightarrow{\cong} F(I)$  ist ein Isomorphismus;
- (d) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (F(A) \otimes F(B)) \otimes F(C) & \longrightarrow & F(A) \otimes (F(B) \otimes F(C)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A \odot B) \otimes F(C) & & F(A) \otimes F(B \odot C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F((A \odot B) \odot C) & \longrightarrow & F(A \odot (B \odot C)) \end{array}$$

kommutiert für alle  $A, B, C \in \mathcal{C}$ ;

- (e) die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes J & \longrightarrow & F(A) \otimes F(I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A) & \longleftarrow & F(A \odot I) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} I \otimes F(B) & \longrightarrow & F(I) \otimes F(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(B) & \longleftarrow & F(I \odot B) \end{array}$$

kommutieren für  $A, B \in \mathcal{C}$ ;

- (f) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes F(B) & \longrightarrow & F(B) \otimes F(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A \odot B) & \longrightarrow & F(B \odot A) \end{array}$$

kommutiert für alle  $A, B \in \mathcal{C}$ .



Man kann also kurz sagen, dass ein symmetrischer monoidaler Funktor ein Funktor zwischen symmetrischen monoidalen Kategorien ist, der das Tensorprodukt bis auf Isomorphismus erhält.

Symmetrische monoidale Funktoren bilden selbst wieder eine Kategorie, oder genauer ein *Gruppoid*, also eine Kategorie, in der alle Morphismen bereits Isomorphismen sind.

**Definition 13.6.** Seien  $F$  und  $G$  zwei symmetrische monoidale Funktoren zwischen zwei symmetrischen monoidalen Kategorien  $(\mathcal{C}, \odot, I)$  und  $(\mathcal{D}, \otimes, J)$ . Eine *monoidale Äquivalenz*  $F \simeq G$  ist eine natürliche Transformation  $\psi: F \Rightarrow G$  derart, dass jedes  $\psi_A: F(A) \rightarrow G(A)$  ein Isomorphismus ist und die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes F(B) & \longrightarrow & F(A \odot B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(A) \otimes G(B) & \longrightarrow & G(A \odot B) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & F(I) \\ \parallel & & \downarrow \\ J & \longrightarrow & G(I) \end{array}$$

kommutieren. Symmetrische monoidale Funktoren mit monoidalen Äquivalenzen bilden einen Gruppoid  $\mathbf{SymMonFunc}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ .

Beachte, dass die Definition einer monoidalen Äquivalenz keinen Gebrauch von der Symmetrie macht.

### 13.4 Topologische Quantenfeld-Theorien

Jetzt können wir endlich den Begriff aus dem Kurstitel definieren.

**Definition 13.7.** Sei  $n \geq 1$  und sei  $\mathbf{k}$  ein Körper. Eine *topologische Quantenfeld-Theorie* der Dimension  $n$  ist ein symmetrischer monoidaler Funktor

$$\mathcal{Z}: \mathbf{Bord}_n \rightarrow \mathbf{Vect}(\mathbf{k}).$$

Etwas ausführlicher besteht eine topologische Quantenfeld-Theorie also aus einem Vektorraum  $\mathcal{Z}(E)$  für jede orientierte kompakte glatte Mannigfaltigkeit  $E$  der Dimension  $n - 1$  zusammen mit einer linearen Abbildung

$$\mathcal{Z}(M): \mathcal{Z}(E) \rightarrow \mathcal{Z}(F)$$

für jeden Bordismus  $M$  zwischen  $E$  und  $F$ . Zudem muss

$$\mathcal{Z}(E \odot F) \cong \mathcal{Z}(E) \otimes \mathcal{Z}(F)$$

gelten.

Da symmetrische monoidale Funktoren einen Gruppoid bilden, bilden insbesondere auch topologische Quantenfeld-Theorien einer gegebenen Dimension  $n \geq 1$  einen Gruppoid  $\mathbf{TQFT}_n$ .

### 13.5 Elementare Eigenschaften

Wir zeigen einige Eigenschaften topologischer Quantenfeld-Theorien. Für  $E \in \mathbf{Bord}_n$  schreiben wir  $\overline{E}$  für die kompakte Mannigfaltigkeit  $E$  mit der umgekehrten Orientierung.

**Proposition 13.8.** Sei  $\mathcal{Z}: \mathbf{Bord}_n \rightarrow \mathbf{Vect}(\mathbf{k})$  eine topologische Quantenfeld-Theorie. Sei  $E \in \mathbf{Bord}_n$ . Dann ist  $\mathcal{Z}(E)$  endlich-dimensional und es gibt einen Isomorphismus  $\mathcal{Z}(\overline{E}) \cong \mathcal{Z}(E)^\vee$ , wo  $\mathcal{Z}(E)^\vee = \text{Hom}(\mathcal{Z}(E), \mathbf{k})$ .

*Beweis.* Sei  $E \in \mathbf{Bord}_n$ . Wir betrachten den Zylinder  $M = E \times [0, 1]$  als Bordismus



Genauso können wir den Zylinder  $E \times [0, 1]$  als Bordismus



auffassen. Wir setzen jetzt  $U := \mathcal{Z}(E)$  und  $V := \mathcal{Z}(\overline{E})$ . Damit erhalten wir zwei Abbildungen  $\langle -, - \rangle: \mathcal{Z}(\alpha_{\overline{E}}): V \otimes U \rightarrow \mathbf{k}$  und  $\gamma := \mathcal{Z}(\kappa_E): \mathbf{k} \rightarrow U \otimes V$ . Wir haben die Gleichheit



von Bordismen, sodass

$$(\langle -, - \rangle \otimes \text{id}_V) \circ (\text{id}_V \otimes \gamma) = \text{id}_V: V \rightarrow V$$

gilt. Wir können  $\gamma(1) = \sum_{i=1}^m u_i \otimes v_i$  als endliche Summe schreiben, sodass wir für jedes  $v \in V$  die Zerlegung

$$v = \sum_i \langle v, u_i \rangle v_i$$

erhalten. Insbesondere erzeugen  $v_1, \dots, v_m$  den Vektorraum  $V$ , sodass  $V$  endlich-dimensional ist. Durch Vertauschen der Rollen von  $E$  und  $\overline{E}$  erkennen wir, dass auch  $U$  endlich-dimensional ist. Der Isomorphismus  $V \cong \text{Hom}(U, \mathbf{k})$  ist durch

$$\chi: V \rightarrow \text{Hom}(U, \mathbf{k}), \quad v \mapsto (u \mapsto \langle v, u \rangle)$$

gegeben. □

**Übung für die Theorie 13.9.** Zeige, dass  $\chi$  tatsächlich ein Isomorphismus ist.

**Korollar 13.10.** Sei  $E \in \mathbf{Bord}_n$  und betrachte den Bordismus  $E \times S^1: \emptyset \rightarrow \emptyset$ . Dann ist die Abbildung  $\mathcal{Z}(E \times S^1): \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$  die Multiplikation mit  $\dim(\mathcal{Z}(E))$ .

*Beweis.* Als Bordismen gilt  $E \times S^1 = \alpha_{\overline{E}} \circ \sigma_{\overline{E}, E} \circ \kappa_E$ , wo  $\sigma_{\overline{E}, E}: \overline{E} \odot E \rightarrow E \odot \overline{E}$  die Vertauschung der Summanden ist. Damit ist  $\mathcal{Z}(E \times S^1)(\lambda) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^m \langle v_i, u_i \rangle$ , wo  $\gamma(1) = \sum_{i=1}^m u_i \otimes v_i$  gilt. Wir können jetzt die  $v_i$  so wählen, dass sie eine Basis von  $V$  bilden. Damit gilt dann  $\langle v_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$  und wir finden  $\sum_{i=1}^m \langle v_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^m 1 = m$ . □

## 14 Die Klassifikation in Dimension 1

Wir klassifizieren Schritt für Schritt alle topologischen Quantenfeld-Theorien der Dimension  $n = 1$ . Wir fangen mit den Objekten in **Bord**<sub>1</sub> an.

**Aufgabe 14.1.** Mache dir klar, dass die Menge der Objekte in **Bord**<sub>1</sub> bijektiv zur Menge der Paare  $(S, \omega)$  ist, wo  $S$  eine endliche Menge und  $\omega: S \rightarrow \{\pm 1\}$  eine Funktion ist. *Bemerkung:* Beachte, dass es hier tatsächlich um die Menge der Objekte geht; es geht nicht um eine Klassifikation der Isomorphie-Klassen von Objekten als orientierte Mannigfaltigkeiten, zumal da die kategorische Struktur von **SmthMfd** nur indirekt in die Konstruktion von **Bord**<sub>1</sub> eingeht.

Jeder Bordismus  $M: E \rightarrow F$  zwischen zwei orientierten kompakten glatten Mannigfaltigkeiten  $E$  und  $F$  besteht insbesondere aus einer glatten Mannigfaltigkeit mit Rand  $M$  und einem Isomorphismus  $E \sqcup F \cong \partial M$ .

**Aufgabe 14.2.** Zeige, dass jede glatte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension 1 isomorph (als lokal geringter Raum) zu einer disjunkten Vereinigung von Kopien des Intervalls  $D^1 = [-1, 1]$  und der Kreislinie  $S^1$  ist.

Auf diese Weise erzeugt jeder Bordismus eine Zerlegung von  $E \sqcup F$  in (ungeordnete) Paare. Sei  $\widehat{\mathcal{P}}(E, F)$  die Menge aller Zerlegungen von  $E \sqcup F$  in ungeordnete Paare. Wir haben also eine mengen-theoretische Abbildung

$$\phi_0: \mathcal{B}(E, F) \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}(E, F),$$

wo wir mit  $\mathcal{B}(E, F)$  die Morphismen-Menge in der Kategorie **Bord**<sub>1</sub> bezeichnen.

**Aufgabe 14.3.** Mache dir klar, dass  $\phi_0$  wohldefiniert ist. Beachte dabei insbesondere die Äquivalenzrelation, die wir auf der Menge der Bordismen zwischen  $E$  und  $F$  eingeführt haben. Bestimme das Bild von  $\phi_0$ , also welche Zerlegungen von  $E \sqcup F$  in Paare tatsächlich von einem Bordismus kommen.

Wir bezeichnen das Bild von  $\phi$  mit  $\mathcal{P}(E, F) \subseteq \widehat{\mathcal{P}}(E, F)$ . Die Abbildung  $\phi$  ist nicht injektiv, da man ja immer noch eine Kopie von  $S^1$  zu einem Bordismus  $M$  hinzufügen kann ohne die induzierte Zerlegung zu ändern. Wir können jedoch die Abbildung  $\phi$  erweitern, indem wir zusätzlich die Anzahl der Kreislinien in  $M$  zählen:

$$\phi: \mathcal{B}(E, F) \rightarrow \mathcal{P}(E, F) \times \mathbb{N}.$$

**Aufgabe 14.4.** Zeige, dass  $\phi$  bijektiv ist. Überlege kurz, dass  $\phi$  surjektiv ist. Zeige dann die Existenz einer Äquivalenz zwischen je zwei Bordismen, die dieselbe Zerlegung von  $E \sqcup F$  induzieren und dieselbe Anzahl an Kreislinien haben. Beachte dabei auch die Orientierungen.

Nachdem wir die Menge der Objekte und die Menge der Morphismen in **Bord**<sub>1</sub> bestimmt haben, können wir die Struktur der Kategorie genauer untersuchen. Für je zwei natürliche Zahlen  $m, n \geq 0$  betrachten wir das Objekt  $\mathbb{S}^{m,n}$  in **Bord**<sub>1</sub>, das durch die Menge

$$S^{m,n} = \{(+, 1), \dots, (+, m), (-, 1), \dots, (-, n)\}$$

und die Funktion  $\omega(+, i) = 1$  und  $\omega(-, i) = -1$  gegeben ist.

**Aufgabe 14.5.** Zeige, dass jedes Objekt  $E$  in **Bord**<sub>1</sub> zu  $\mathbb{S}^{m,n}$  für eindeutige Werte  $m$  und  $n$  isomorph ist. Ist dieser Isomorphismus eindeutig?

Wir erinnern daran, dass wir die disjunkte Vereinigung, betrachtet als Tensoroperation auf  $\mathbf{Bord}_n$ , als  $\odot$  geschrieben haben.

**Aufgabe 14.6.** Finde einen kanonischen Isomorphismus  $\mathbb{S}^{m,n} \odot \mathbb{S}^{p,q} \cong \mathbb{S}^{m+p,n+q}$  in  $\mathbf{Bord}_1$ .  
*Hinweis:* Wenn  $S_1$  und  $S_2$  Mengen sind, dann ist die disjunkte Vereinigung durch

$$S_1 \sqcup S_2 = \{(1, s) \mid s \in S_1\} \cup \{(2, s) \mid s \in S_2\}$$

gegeben. Hierbei ist  $(1, s) := \{\{1\}, \{1, s\}\}$ .

Der Punkt ist, dass  $\mathbb{S}^{m,n} \odot \mathbb{S}^{p,q}$  und  $\mathbb{S}^{m+p,n+q}$  eben nicht gleich sind und auch nicht gleich bis auf eindeutigen Isomorphismus sind, sondern dass sie nur gleich bis auf eine kanonische Wahl eines Isomorphismus sind. Insbesondere ist im Allgemeinen auch  $\mathbb{S}^{m,n} \odot \mathbb{S}^{p,q} \neq \mathbb{S}^{p,q} \odot \mathbb{S}^{m,n}$ .

Wenn wir zwei Bordismen  $M_1: E_1 \rightarrow F_1$  und  $M_2: E_2 \rightarrow F_2$  haben, dann können wir die disjunkte Vereinigung  $M_1 \sqcup M_2: E_1 \sqcup E_2 \rightarrow F_1 \sqcup F_2$  bilden. Wenn wir zwei Bordismen  $M: E \rightarrow F$  und  $N: F \rightarrow G$  haben, dann können wir die Komposition  $N \circ M: E \rightarrow G$  bilden. Auf diese Weise können wir komplexere Bordismen in einfachere zerlegen.

Wir betrachten drei spezielle einfache Bordismen. Die *Vertauschung* ist ein Bordismus

$$\sigma: \mathbb{S}^{2,0} \rightarrow \mathbb{S}^{2,0}.$$

Diese besteht aus einem Intervall, das  $(+, 1)$  im Quellbereich mit  $(+, 2)$  im Zielbereich verbindet, und einem Intervall, das  $(+, 2)$  im Quellbereich mit  $(+, 1)$  im Zielbereich verbindet:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{2,0} : & (+, 1) & \sqcup & (+, 2) \\ \uparrow \sigma & \swarrow & & \searrow \\ \mathbb{S}^{2,0} : & (+, 1) & \sqcup & (+, 2) \end{array}$$

Auch haben wir die *Paarvernichtung*  $\alpha: \mathbb{S}^{1,1} \rightarrow \mathbb{S}^{0,0}$  und die *Paarerzeugung*  $\kappa: \mathbb{S}^{0,0} \rightarrow \mathbb{S}^{1,1}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{0,0} : & & \mathbb{S}^{1,1} : \\ \uparrow \alpha & \curvearrowright & \uparrow \kappa \\ \mathbb{S}^{1,1} : & (+, 1) \sqcup (-, 1) & \mathbb{S}^{0,0} : \end{array}$$

Schließlich haben wir die Identität  $\iota^+: \mathbb{S}^{1,0} \rightarrow \mathbb{S}^{1,0}$  und die Identität  $\iota^-: \mathbb{S}^{0,1} \rightarrow \mathbb{S}^{0,1}$ .

**Aufgabe 14.7.** Zeige, dass jeder Bordismus  $M: \mathbb{S}^{m,n} \rightarrow \mathbb{S}^{p,q}$  in eine Komposition disjunkter Vereinigungen von  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\iota^+$  und  $\iota^-$  zerlegt werden kann. Hierbei benutzen wir die kanonischen Isomorphismen  $\mathbb{S}^{a,b} \odot \mathbb{S}^{c,d} \cong \mathbb{S}^{a+c,b+d}$ .

Diese Zerlegung ist nicht eindeutig.

**Aufgabe 14.8.** Zeige, dass

$$(\iota^+ \odot \alpha) \circ (\sigma \odot \iota^-) \circ (\iota^+ \odot \kappa) = \iota^+: \quad \mathbb{S}^{1,0} \odot \mathbb{S}^{0,0} \rightarrow \mathbb{S}^{1,0} \odot \mathbb{S}^{0,0}$$

und

$$(\alpha \odot \iota^-) \circ (\iota^+ \odot \bar{\sigma}) \circ (\kappa \odot \iota^-) = \iota^+: \quad \mathbb{S}^{0,0} \odot \mathbb{S}^{0,1} \rightarrow \mathbb{S}^{0,0} \odot \mathbb{S}^{0,1}$$

gelten, wo  $\bar{\sigma}: \mathbb{S}^{0,2} \rightarrow \mathbb{S}^{0,2}$  der andere Vertauschungsoperator ist. Zeichne die Diagramme. Warum verwenden wir hier den Vertauschungsoperator?

Unsere bisherigen Einsichten legen die folgende physikalische Deutung nahe:

**Interpretation 14.9.**  $\mathbb{S}^{m,n}$  ist ein System aus  $m + n$  Partikeln, wovon  $m$  eine positive Ladung und  $n$  eine negative Ladung haben. Ein Bordismus ist die zeitliche Entwicklung dieses Systems. Dabei gibt es keine absolute Zeit, sondern nur die wiederholte Anwendung von Transformationen.

Wir wenden jetzt unsere Aufmerksamkeit auf symmetrische monoidale Funktoren

$$\mathcal{Z}: \mathbf{Bord}_1 \rightarrow \mathbf{Vect}(\mathbf{k}).$$

Wir können jetzt  $\mathcal{Z}(\mathbb{S}^{m,n})$  als *Zustandsraum* des Systems aus  $m + n$  Partikeln auffassen. Der Zustand des physikalischen Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt ist ein Vektor  $z \in \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{m,n})$ ; wenn  $M: \mathbb{S}^{m,n} \rightarrow \mathbb{S}^{p,q}$  ein Bordismus ist, dann ist der Zustand des Systems zum späteren Zeitpunkt (am “Ende” des Bordismus) der Vektor  $\mathcal{Z}(M)(z) \in \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{p,q})$ .

Wenn wir eine topologische Quantenfeld-Theorie  $\mathcal{Z}$  haben, dann können wir insbesondere die beiden Vektorräume  $U := \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{1,0})$  und  $V := \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{0,1})$  betrachten. Die Paarvernichtung liefert einen Homomorphismus

$$a = a_{\mathcal{Z}}: V \otimes U \cong U \otimes V \cong \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{1,1}) \xrightarrow{\mathcal{Z}(\alpha)} \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{0,0}) \cong \mathbf{k}$$

und die Paarerzeugung liefert einen Homomorphismus

$$c = c_{\mathcal{Z}}: \mathbf{k} \cong \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{0,0}) \xrightarrow{\mathcal{Z}(\kappa)} \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{1,1}) \cong U \otimes V.$$

Diese beiden Abbildungen erfüllen

$$(V \otimes \mathbf{k} \xrightarrow{\text{id}_V \otimes c} V \otimes U \otimes V \xrightarrow{a \otimes \text{id}_V} \mathbf{k} \otimes V) = \text{id}_V \quad (1)$$

und

$$(\mathbf{k} \otimes U) \xrightarrow{c \otimes \text{id}_U} U \otimes V \otimes U \xrightarrow{\text{id}_U \otimes a} U \otimes \mathbf{k} = \text{id}_U. \quad (2)$$

Wir betrachten die Kategorie der Paare mit derartigen Abbildungen.

**Definition 14.10.** Ein *duales Paar* ist ein Tupel  $(U, V, a, c)$ , wo  $U$  und  $V$  Vektorräume sind, und wo  $a: V \otimes U \rightarrow \mathbf{k}$  und  $c: \mathbf{k} \rightarrow U \otimes V$  Homomorphismen sind, die die Gleichungen (1) und (2) erfüllen. Ein *Morphismus* zwischen dualen Paaren  $(U, V, a, c)$  und  $(U', V', a', c')$  ist ein Paar  $(f, g)$ , wo  $f: U \rightarrow U'$  und  $g: V \rightarrow V'$  Homomorphismen sind, die  $a' \circ (g \otimes f) = a$  und  $c' = (f \otimes g) \circ c$  erfüllen. Duale Paare bilden eine Kategorie  $\mathbf{DP}(\mathbf{k})$ .

Wir erinnern daran, dass Isomorphismen zwischen topologischen Quantenfeld-Theorien aus Isomorphismen

$$h_E: \mathcal{Z}_1(E) \rightarrow \mathcal{Z}_2(E)$$

für jedes  $E \in \mathbf{Bord}_1$  bestehen, die eine ganze Reihe von Kompatibilitäts-Bedingungen erfüllen.

**Aufgabe 14.11.** Mache dir klar, dass die Zuordnung

$$\mathbb{D}: \mathbf{TQFT}_1 \rightarrow \mathbf{DP}(\mathbf{k}), \quad \mathcal{Z} \mapsto (\mathcal{Z}(\mathbb{S}^{1,0}), \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{0,1}), a_{\mathcal{Z}}, c_{\mathcal{Z}}),$$

einen Funktor definiert.

Wir analysieren diesen Funktor jetzt Schritt für Schritt.

**Aufgabe 14.12.** Seien  $\mathcal{Z}_1$  und  $\mathcal{Z}_2$  zwei topologische Quantenfeld-Theorien und seien

$$g, h: \mathcal{Z}_1 \Rightarrow \mathcal{Z}_2$$

zwei Isomorphismen. Nimm an, dass  $\mathbb{D}(g) = \mathbb{D}(h)$  als Homomorphismen  $\mathbb{D}(\mathcal{Z}_1) \rightarrow \mathbb{D}(\mathcal{Z}_2)$  gilt. Zeige, dass dann  $g = h$  als Isomorphismen von TQFTs gilt. Benutze dazu, dass jedes Objekt in  $\mathbf{Bord}_1$  (nicht-eindeutig) isomorph zu einem  $\mathbb{S}^{m,n}$  ist.

Der Funktor  $\mathbb{D}$  ist also treu. Er ist außerdem voll:

**Aufgabe 14.13.** Seien  $\mathcal{Z}_1$  und  $\mathcal{Z}_2$  zwei topologische Quantenfeld-Theorien. Sei

$$(f, g): \mathbb{D}(\mathcal{Z}_1) \rightarrow \mathbb{D}(\mathcal{Z}_2)$$

ein Morphismus. Dann gibt es einen Isomorphismus  $h: \mathcal{Z}_1 \Rightarrow \mathcal{Z}_2$  topologischer Quantenfeld-Theorien mit  $\mathbb{D}(h) = (f, g)$ . Konstruiere dazu zunächst die Isomorphismen

$$h^{m,n}: \mathcal{Z}_1(\mathbb{S}^{m,n}) \rightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{S}^{m,n}).$$

Setze sie dann auf alle Objekte  $E \in \mathbf{Bord}_1$  fort. Zeige, dass deine Konstruktion wohldefiniert ist und alle Axiome eines Isomorphismus zwischen topologischen Quantenfeld-Theorien erfüllt.

Schließlich wollen wir zeigen, dass  $\mathbb{D}$  essenziell surjektiv ist. Dazu konstruieren wir eine topologische Quantenfeld-Theorie  $\mathcal{Z}$  mit  $\mathbb{D}(\mathcal{Z}) = (U, V, a, c)$  für jedes duale Paar  $(U, V, a, c)$ . Sei also ein solches duales Paar gegeben. Wir setzen zunächst

$$\mathcal{Z}(\mathbb{S}^{m,n}) := U^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} = U \otimes \dots \otimes U \otimes V \otimes \dots \otimes V.$$

Insbesondere setzen wir  $\mathcal{Z}(\mathbb{S}^{0,0}) := \mathbf{k}$ . Da wir bereits  $\mathcal{Z}(\mathbb{S}^{1,0}) = U$  und  $\mathcal{Z}(\mathbb{S}^{0,1}) \cong V$  wissen, ist diese Setzung (bis auf nicht-eindeutigen Isomorphismus) notwendig. Wir müssen jetzt  $\mathcal{Z}(\iota^+) = \text{id}_U$  und  $\mathcal{Z}(\iota^-) = \text{id}_V$  setzen. Für die anderen drei Erzeuger der Morphismen in  $\mathbf{Bord}_1$  setzen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\sigma): \quad U \otimes U &\rightarrow U \otimes U, & v \otimes w &\mapsto w \otimes v, \\ \mathcal{Z}(\alpha): \quad U \otimes V &\rightarrow \mathbf{k}, & v \otimes \phi &\mapsto a(\phi \otimes v), \\ \mathcal{Z}(\kappa): \quad \mathbf{k} &\rightarrow U \otimes V, & 1 &\mapsto c(1) \end{aligned}$$

Ähnlich wie wir einen kanonischen Isomorphismus  $\mathbb{S}^{a,b} \odot \mathbb{S}^{c,d} \cong \mathbb{S}^{a+c,b+d}$  haben, haben wir auch einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathcal{Z}(\mathbb{S}^{a,b}) \otimes \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{c,d}) \cong \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{a+c,b+d}),$$

der sich durch entsprechende Umordnung der Tensorfaktoren ergibt. Damit können wir das folgende Resultat über die Fortsetzung des bereits definierten partiellen Funktors  $\mathcal{Z}$  formulieren.

**Faktum 14.14.** *Es ist auf eindeutige Weise möglich, für jeden Bordismus*

$$M: \mathbb{S}^{m,n} \rightarrow \mathbb{S}^{p,q}$$

*einen Homomorphismus*

$$\mathcal{Z}(M): \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{m,n}) \rightarrow \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{p,q})$$

*derart zu wählen, dass die folgenden Eigenschaften gelten:*

- (a)  $\mathcal{Z}(\iota^+)$ ,  $\mathcal{Z}(\iota^-)$ ,  $\mathcal{Z}(\sigma)$ ,  $\mathcal{Z}(\alpha)$  und  $\mathcal{Z}(\kappa)$  sind die oben angegebenen Homomorphismen;
- (b)  $\mathcal{Z}$  ist kompatibel mit Kompositionen;
- (c) wenn wir Bordismen  $M: \mathbb{S}^{m,n} \rightarrow \mathbb{S}^{p,q}$  und  $N: \mathbb{S}^{a,b} \rightarrow \mathbb{S}^{c,d}$  haben, dann ist

$$\mathcal{Z}(\mathbb{S}^{m+a,n+b}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{S}^{m,n} \odot \mathbb{S}^{a,b} \xrightarrow{M \odot N} \mathbb{S}^{p,q} \odot \mathbb{S}^{c,d} \xrightarrow{\cong} \mathbb{S}^{p+c,q+d}$$

dieselbe Abbildung wie

$$\mathcal{Z}(\mathbb{S}^{m+a,n+b}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{m,n}) \otimes \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{a,b}) \xrightarrow{\mathcal{Z}(M) \otimes \mathcal{Z}(N)} \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{p,q}) \otimes \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{c,d}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{p+c,q+d}).$$

**Aufgabe 14.15.** Zeige die Eindeutigkeit oben unter Annahme der Existenz. Überlege, warum die Existenz plausibel ist.

Als nächstes wählen wir für jedes  $E \in \mathbf{Bord}_1$  einen Isomorphismus  $\chi_E: E \rightarrow \mathbb{S}^{m,n}$  in  $\mathbf{Bord}_1$ . Nach dieser Wahl können wir

$$\mathcal{Z}(E) := \mathcal{Z}(\mathbb{S}^{m,n})$$

setzen. Wenn  $M: E \rightarrow F$  ein Bordismus ist, dann definieren wir

$$\mathcal{Z}(M) = \mathcal{Z}(\chi_F^{-1} \circ \chi_F \circ M \circ \chi_E^{-1} \circ \chi_E) := \mathcal{Z}(\chi_F \circ M \circ \chi_E^{-1}).$$

Es ist nämlich  $\chi_F \circ M \circ \chi_E^{-1}$  ein Bordismus zwischen einem  $\mathbb{S}^{m,n}$  und einem  $\mathbb{S}^{p,q}$ .

**Aufgabe 14.16.** Zeige, dass dies einen Funktor

$$\mathcal{Z}: \mathbf{Bord}_1 \rightarrow \mathbf{Vect}(\mathbf{k})$$

definiert. Konstruiere Isomorphismen  $\phi_{E,F}: \mathcal{Z}(E) \otimes \mathcal{Z}(F) \cong \mathcal{Z}(E \odot F)$  derart, dass  $\mathcal{Z}$  zu einem (symmetrischen) monoidalen Funktor wird.

Damit haben wir die folgende Klassifizierung topologischer Quantenfeld-Theorien in Dimension 1 bewiesen.

**Theorem 14.17.** *Der Funktor*

$$\mathbb{D}: \mathbf{TQFT}_1 \rightarrow \mathbf{DP}(\mathbf{k})$$

*ist eine Äquivalenz von Kategorien.*

Wir wollen uns schließlich die Kategorie  $\mathbf{DP}(\mathbf{k})$  der dualen Paare etwas genauer ansehen.

**Aufgabe 14.18.** Wir betrachten die Kategorie  $\mathbf{DP}(\mathbf{k})$ .

- (1) Sei  $(f, g): (U, V, a, c) \rightarrow (U', V', a', c')$  ein Morphismus dualer Paare. Zeige, dass  $f$  und  $g$  surjektiv sind. Zeige dann, dass jeder Morphismus ein Isomorphismus ist.
- (2) Sei  $(U, V, a, c)$  ein duales Paar. Zeige, dass  $U$  und  $V$  endlich-dimensional sind.

Der vergessliche Funktor  $\mathbb{F}(U, V, a, c) = U$  bildet also in die Kategorie  $\mathbf{Vect}^\circ(\mathbf{k})$  der endlich-dimensionalen  $\mathbf{k}$ -Vektorräume mit Isomorphismen als Morphismen ab.

- (3) Konstruiere einen Funktor  $\mathbb{K}: \mathbf{Vect}^\circ(\mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{DP}(\mathbf{k})$  derart, dass  $\mathbb{F} \circ \mathbb{K}(U) = U$  gilt.

Damit ist  $\mathbb{F}$  insbesondere voll und essenziell surjektiv.

(4) Zeige, dass  $\mathbb{F}$  treu ist.

Die Kategorie der dualen Paare ist also äquivalent zur Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume, wenn wir nur Isomorphismen als Morphismen zulassen. Während diese Beschreibung intuitiver ist, ist sie weniger natürlich. Die Definition dualer Paare benötigt nur die Strukturen und Bedingungen, die als Gleichungen gegeben sind, während Endlich-Dimensionalität eine Bedingung anderer Art ist.

**Korollar 14.19.** *Der Funktor*

$$\mathbb{U} = \mathbb{F} \circ \mathbb{D}: \mathbf{TQFT}_1 \rightarrow \mathbf{Vect}^\circ(\mathbf{k})$$

*ist eine Äquivalenz von Kategorien.*

**Fazit 14.20.** Obwohl die Bordismen-Kategorie  $\mathbf{Bord}_1$  eine durchaus interessante Geometrie hat, sind topologische Quantenfeld-Theorien auf ihr eher uninteressant.

## 15 Symmetrische monoidale Kategorien über Erzeuger und Relationen

In der Übung oben haben wir eindimensionale topologische Quantenfeld-Theorien im Wesentlichen folgendermaßen klassifiziert:

- (1) Finde eine Menge  $G_0$  von Objekten in  $\mathbf{Bord}_n$  derart, dass jedes andere Objekt  $E \in \mathbf{Bord}_n$  isomorph zu einem Objekt der Form  $E_1 \odot \dots \odot E_n$  für  $E_i \in G_0$  ist.
- (2) Finde eine Menge  $G_1$  von Morphismen in  $\mathbf{Bord}_n$  derart, dass jeder Morphismus in  $\mathbf{Bord}_n$  in eine Komposition von Produkten von Morphismen in  $G_1$  zerlegt werden kann.
- (3) Finde eine Menge  $G_2$  von Paaren  $(f_1, f_2)$  formaler Kompositionen und Produkte von Morphismen in  $G_1$  derart, dass die tatsächlichen Kompositionen und Produkte als Morphismen in  $\mathbf{Bord}_n$  übereinstimmen. Wir sagen, dass  $(f_1, f_2)$  eine Relation in  $\mathbf{Bord}_n$  zwischen den formalen Kompositionen/Produkten  $f_1$  und  $f_2$  ist. Finde  $G_2$  derart, dass alle Relationen zwischen formalen Kompositionen/Produkten bereits im Wesentlichen in  $G_2$  enthalten sind.

Dann sind monoidale Funktoren  $\mathcal{Z}: \mathbf{Bord}_n \rightarrow \mathbf{Vect}(\mathbf{k})$  im Wesentlichen dasselbe wie die Wahl von Bildern  $\mathcal{Z}(E) \in \mathbf{Vect}(\mathbf{k})$  für jedes  $E \in G_0$  sowie von Bildmorphismen  $\mathcal{Z}(f)$  für jedes  $f \in G_1$  derart, dass alle Relationen in  $G_2$  erfüllt sind. Wir besprechen in diesem Abschnitt, wie diese etwas vage Beschreibung formalisiert werden kann.

### 15.1 Erzeuger von Objekten

Sei  $G_0$  eine Menge. Dann können wir  $G_0$  als Kategorie auffassen, deren Objekte durch  $G_0$  gegeben sind, und die keine anderen Morphismen als die Identitäten hat. Für jede Kategorie  $\mathcal{D}$ , insbesondere jede symmetrische monoidale Kategorie  $\mathcal{D}$ , haben wir die Kategorie  $\mathbf{Fun}(G_0, \mathcal{D})$  der Funktoren; als Morphismen in  $\mathbf{Fun}(G_0, \mathcal{D})$  wählen wir die natürlichen Äquivalenzen, also nicht alle natürlichen Transformationen.

Wenn  $\mathcal{C}$  eine weitere symmetrische monoidale Kategorie ist, dann haben wir ebenfalls die Kategorie  $\mathbf{Fun}_\otimes(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  der monoidalen Funktoren.



**Definition 15.1.** Eine *freie symmetrische monoidale Kategorie* mit Erzeugern  $G_0$  ist eine symmetrische monoidale Kategorie  $\mathcal{F}(G_0)$  zusammen mit einem Funktor  $I: G_0 \rightarrow \mathcal{F}(G_0)$  derart, dass für jede symmetrische monoidale Kategorie  $\mathcal{D}$  die Komposition

$$(-) \circ I: \text{Fun}_\otimes(\mathcal{F}(G_0), \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(G_0, \mathcal{C})$$

eine Äquivalenz von Kategorien ist.

**Übung für die Theorie 15.2.** Überlege, inwiefern eine freie symmetrische monoidale Kategorie mit Erzeugern  $G_0$  eindeutig ist.

Eine freie symmetrische monoidale Kategorie  $\mathcal{F}(G_0)$  kann recht einfach konstruiert werden. Die Objekte sind endliche Sequenzen  $(x_1, \dots, x_m)$  von Elementen  $x_i \in G_0$ . Es gibt keine Morphismen zwischen Sequenzen ungleicher Länge und die Morphismen zwischen Sequenzen  $(x_1, \dots, x_m)$  und  $(y_1, \dots, y_m)$  derselben Länge sind genau durch die Permutationen  $\pi$  mit  $y_i = x_{\pi(i)}$  gegeben.

**Übung für die Theorie 15.3.** Zeige, dass diese Konstruktion tatsächlich eine freie symmetrische monoidale Kategorie liefert.

## 15.2 Erzeuger von Morphismen

Jetzt wollen wir zu den Erzeugern  $G_0$  der Objekte von  $\mathcal{F}(G_0)$  noch weitere Erzeuger für Morphismen hinzunehmen. Dazu modifizieren wir die Funktoren-Kategorie  $\text{Fun}(G_0, \mathcal{D})$ . Wenn  $G_0$  gegeben ist, dann wollen wir das jedes Element von  $G_1$  einen neuen Morphismus zwischen Objekten in  $\mathcal{F}(G_0)$  definiert. Das relevante Datum ist dann eine Menge  $G_1$  zusammen mit zwei Mengen-Abbildungen  $s: G_1 \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{F}(G_0))$  und  $t: G_1 \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{F}(G_0))$ , die wir als Urbildbereich (“source”) und Bildbereich (“target”) von  $f \in G_1$  auffassen. Die neue Funktoren-Kategorie  $\text{Fun}(G_0, G_1; \mathcal{D})$  ist jetzt folgendermaßen gegeben:

- (1) Objekte sind Paare  $(\Phi, H)$ , wo  $\Phi: \mathcal{F}(G_0) \rightarrow \mathcal{D}$  ein monoidaler Funktor ist, und wo  $H: G_1 \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$  eine derartige Abbildung ist, dass  $\Phi(s(f))$  der Urbildbereich und  $\Phi(t(f))$  der Bildbereich des Morphismus  $H(f)$  ist;
- (2) Morphismen sind monoidale Äquivalenzen  $\phi: \Phi \Rightarrow \Phi'$  derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Phi(s(f)) & \xrightarrow{H(f)} & \Phi(t(f)) \\ \downarrow \phi_{s(f)} & & \downarrow \phi_{t(f)} \\ \Phi'(s(f)) & \xrightarrow{H'(f)} & \Phi'(t(f)) \end{array}$$

für jedes  $f \in G_1$  kommutiert.

**Definition 15.4.** Eine *freie symmetrische monoidale Kategorie* mit Erzeugern  $(G_0, G_1)$  ist eine symmetrische monoidale Kategorie  $\mathcal{F}(G_0, G_1)$  zusammen mit einem monoidalen Funktor  $J: \mathcal{F}(G_0) \rightarrow \mathcal{F}(G_0, G_1)$  und einer Abbildung  $j: G_1 \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{F}(G_0, G_1))$  derart, dass

$$\text{Fun}_\otimes(\mathcal{F}(G_0, G_1), \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(G_0, G_1; \mathcal{C}), \quad \Phi \mapsto (\Phi \circ J, \Phi \circ j),$$

für jede symmetrische monoidale Kategorie  $\mathcal{C}$  eine Äquivalenz von Kategorien ist.

### 15.3 Relationen

Im letzten Schritt wollen wir Relationen zwischen Morphismen in  $\mathcal{F}(G_0, G_1)$  forcieren. Dazu betrachten wir eine Menge  $G_2$  von Paaren  $(f_1, f_2)$ , wo  $f_1, f_2: x \rightarrow y$  zwei Morphismen in  $\mathcal{F}(G_0, G_1)$  zwischen denselben Objekten sind. Wir modifizieren die Funktoren Kategorie noch einmal und erhalten  $\text{Fun}(G_0, G_1, G_2; \mathcal{D})$  als die volle Unterkategorie von  $\text{Fun}_{\otimes}(\mathcal{F}(G_0, G_1), \mathcal{D})$ , die genau die Funktoren  $\Phi: \mathcal{F}(G_0, G_1) \rightarrow \mathcal{D}$  enthält, die  $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$  für jedes Paar  $(f_1, f_2) \in G_2$  erfüllen.

**Definition 15.5.** Eine *freie symmetrische monoidale Kategorie* mit Erzeugern  $(G_0, G_1, G_2)$  ist eine symmetrische monoidale Kategorie  $\mathcal{F}(G_0, G_1, G_2)$  zusammen mit einem monoidalen Funktor  $S: \mathcal{F}(G_0, G_1) \rightarrow \mathcal{F}(G_0, G_1, G_2)$  derart, dass  $S(f_1) = S(f_2)$  für jedes  $(f_1, f_2) \in G_2$  gilt, und derart, dass

$$\text{Fun}_{\otimes}(\mathcal{F}(G_0, G_1, G_2), \mathcal{C}) \xrightarrow{(-) \circ S} \text{Fun}(G_0, G_1, G_2; \mathcal{C})$$

für jede symmetrische monoidale Kategorie  $\mathcal{C}$  eine Äquivalenz von Kategorien ist.

### 15.4 Nochmal Klassifizierung in Dimension 1

Wir sehen aus der Definition von  $\mathcal{F}(G_0, G_1, G_2)$ , dass wir  $\mathbf{Bord}_n$  als

$$\text{Fun}(G_0, G_1, G_2; \mathbf{Vect}(\mathbf{k}))$$

berechnen können, wenn wir  $(G_0, G_1, G_2)$  mit

$$\mathbf{Bord}_n \cong \mathcal{F}(G_0, G_1, G_2)$$

finden. Das ist genau das, was wir in unserer Klassifikation der eindimensionalen topologischen Quantenfeld-Theorien gemacht haben, auch wenn unsere Behandlung dieses Themas an einigen zentralen Stellen Lücken hat. Wir formulieren die wesentliche Einsicht noch einmal aus dieser neuen Perspektive.

**Faktum 15.6.** Es gilt  $\mathbf{Bord}_1 \cong \mathcal{F}(G_0, G_1, G_2)$  für die folgenden Erzeuger und Relationen:

- (1)  $G_0 = \{U, V\}$ ;
- (2)  $G_1 = \{a, c\}$  mit  $a: V \otimes U \rightarrow \mathbf{k}$  und  $c: \mathbf{k} \rightarrow U \otimes V$ ; hier schreiben wir  $\mathbf{k}$  für das Eins-Objekt in  $\mathcal{F}(G_0)$ ;
- (3)  $G_2 = \{(f_1, f_2), (g_1, g_2)\}$  mit

$$f_1 = (V = V \otimes \mathbf{k} \xrightarrow{\text{id}_V \otimes c} V \otimes U \otimes V \xrightarrow{a \otimes \text{id}_V} \mathbf{k} \otimes V = V), \quad f_2 = \text{id}_V$$

und

$$g_1 = (U = \mathbf{k} \otimes U \xrightarrow{c \otimes \text{id}_U} U \otimes V \otimes U \xrightarrow{\text{id}_U \otimes a} U \otimes \mathbf{k} = U), \quad g_2 = \text{id}_U$$

als Morphismen in  $\mathcal{F}(G_0, G_1)$ .

**Technische Übung 15.7.** Leite die Klassifikation der eindimensionalen Quantenfeld-Theorien noch einmal aus der Beschreibung als  $\text{Fun}(G_0, G_1, G_2; \mathbf{Vect}(\mathbf{k}))$  her.

## 16 Die Klassifikation in Dimension 2

Wir können jetzt zur Klassifikation der zweidimensionalen topologischen Quantenfeld-Theorien genauso vorgehen wie im eindimensionalen Fall. Die Objekte in **Bord**<sub>2</sub> sind isomorph zu einer disjunkten Vereinigung endlich vieler Kopien von  $S^1$ . Insbesondere reicht

$$G_0 = \{S^1\}$$

als Erzeugermenge aus.

**Übung für die Praxis 16.1.** Sei  $(S^1, [\omega])$  die Kreislinie mit der Wahl einer Orientierung. Zeige, dass  $(S^1, [\omega])$  und  $(S^1, [-\omega])$  als orientierte Mannigfaltigkeiten isomorph sind.

Jeder Morphismus in **Bord**<sub>2</sub> kann in disjunkte Vereinigungen und Kompositionen der elementaren Bordismen



zerlegt werden. Die beiden Bordismen



sind bereits in  $\mathcal{F}(G_0)$  enthalten, sodass wir



als zusätzliche Erzeuger benötigen. Ein hinreichendes System von Relationen ist durch



gegeben.

**Faktum 16.2.** *Mit obigen Setzungen gilt  $\mathbf{Bord}_2 \cong \mathcal{F}(G_0, G_1, G_2)$ .*

Hierbei muss  $G_1$  als Menge von formalen Erzeugern mit den angegebenen Urbild- und Bildbereichen in  $\mathcal{F}(G_0)$  aufgefasst werden. Die Relationen sind in  $\mathcal{F}(G_0, G_1)$  zu verstehen. Insofern sind die Bilder eher eine Merkhilfe beziehungsweise die Deklaration einer Abbildung (bis auf Äquivalenz) von  $\mathcal{F}(G_0, G_1, G_2)$  nach  $\mathbf{Bord}_2$ .

Mittels Faktum 16.2 können wir jetzt  $\mathbf{TQFT}_2$  berechnen. Dazu sehen wir uns zunächst an, welche Struktur eine zweidimensionale topologische Quantenfeld-Theorie auf  $\mathbf{Vect}(\mathbf{k})$  induziert. Der Erzeuger  $S^1$  der Objekte wird auf einen Vektorraum

$$A := \mathcal{Z}(S^1)$$

abgebildet. Die vier Erzeuger der Morphismen induzieren vier Abbildungen



Die Relationen in  $\mathbf{Bord}_2$  liefern Relationen für diese vier Abbildungen. Insgesamt erhalten wir eine kommutative Frobenius-Algebra im Sinne der folgenden Definition.

**Definition 16.3.** Eine *Frobenius-Algebra* ist ein Tupel  $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ , wo:

- (a)  $A$  ist ein  $\mathbf{k}$ -Vektorraum;
- (b)  $\mu: A \otimes A \rightarrow A$  und  $\eta: \mathbf{k} \rightarrow A$  sind zwei Abbildungen derart, dass  $(A, \mu, \eta)$  eine assoziative und unitale Algebra ist; wenn wir  $1 := \eta(1)$  und  $a \cdot b := \mu(a \otimes b)$  schreiben, dann müssen also

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \text{und} \quad a \cdot 1 = a, \quad 1 \cdot a = a$$

gelten;

- (c)  $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$  und  $\varepsilon: A \rightarrow \mathbf{k}$  sind zwei Abbildungen derart, dass  $(A, \Delta, \varepsilon)$  eine koassoziative kounitale Koalgebra ist; es müssen also

$$(\Delta \otimes \text{id}_A) \circ \Delta = (\text{id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta \quad \text{und} \quad (\varepsilon \otimes \text{id}_A) \circ \Delta = \text{id}_A = (\text{id}_A \otimes \varepsilon) \circ \Delta$$

gelten;

- (d) es gilt

$$(\mu \otimes \text{id}_A) \circ (\text{id}_A \otimes \mu) = \Delta \circ \mu = (\text{id}_A \otimes \mu) \circ (\Delta \otimes \text{id}_A).$$

Eine Frobenius-Algebra heißt *kommutativ*, wenn  $a \cdot b = b \cdot a$  gilt. Ein *Morphismus* von Frobenius-Algebren ist ein Vektorraum-Homomorphismus  $\psi: A \rightarrow A'$ , der kompatibel mit allen Operationen ist. Genauer müssen

$$\mu' \circ (\psi \otimes \psi) = \psi \circ \mu, \quad \eta' = \psi \circ \eta, \quad (\psi \otimes \psi) \circ \Delta = \Delta' \circ \psi, \quad \varepsilon = \varepsilon' \circ \psi$$

gelten. Kommutative Frobenius-Algebren bilden eine Kategorie  $\mathbf{comFrob}(\mathbf{k})$ .

**Übung für die Theorie 16.4.** Zeige, dass jeder Morphismus zwischen (nicht notwendig kommutativen) Frobenius-Algebren ein Isomorphismus ist.

Wir erhalten also einen Funktor

$$\mathbb{F}: \mathbf{TQFT}_2 \rightarrow \mathbf{comFrob}(\mathbf{k})$$

und genauso haben wir einen Funktor

$$\mathbb{F}': \mathbf{Fun}_{\otimes}(\mathcal{F}(G_0, G_1, G_2), \mathbf{Vect}(\mathbf{k})) \rightarrow \mathbf{comFrob}(\mathbf{k}).$$

**Faktum 16.5.** *Der Funktor*

$$\mathbb{F}': \mathbf{Fun}_{\otimes}(\mathcal{F}(G_0, G_1, G_2), \mathbf{Vect}(\mathbf{k})) \rightarrow \mathbf{comFrob}(\mathbf{k})$$

*ist eine Äquivalenz von Kategorien.*

Wir können die Definition einer Frobenius-Algebra noch etwas vereinfachen. Wenn wir eine Frobenius-Algebra  $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  haben, dann bilden wir die Bilinearform

$$\langle -, - \rangle: A \times A \rightarrow \mathbf{k}, \quad (a, b) \mapsto \varepsilon(a \cdot b).$$

Diese ist dahingehend nicht entartet, dass bereits  $a = 0$  gilt, wenn  $\langle a, b \rangle = 0$  für alle  $b \in A$  gilt. Sie ist dahingehend invariant, dass  $\langle a \cdot b, c \rangle = \langle a, b \cdot c \rangle$  gilt. Wir sagen vorläufig, dass  $(A, \mu, \eta, \langle -, - \rangle)$  eine vereinfachte Frobenius-Algebra ist.

**Definition 16.6.** Eine *vereinfachte Frobenius-Algebra* ist ein Tupel  $(A, \mu, \eta, \langle -, - \rangle)$ , wo  $(A, \mu, \eta)$  eine assoziative und unitale  $\mathbf{k}$ -Algebra ist, und wo  $\langle -, - \rangle: A \times A \rightarrow \mathbf{k}$  eine Bilinearform ist, die invariant und nicht entartet ist. Eine vereinfachte Frobenius-Algebra ist *kommutativ*, wenn  $\mu$  kommutativ ist.

Wir erhalten also aus jeder Frobenius-Algebra eine vereinfachte Frobenius-Algebra. Die Umkehrung ist ebenfalls korrekt.

**Übung für die Theorie 16.7.** Sei  $(A, \mu, \eta, \langle -, - \rangle)$  eine vereinfachte Frobenius-Algebra. Konstruiere eine Frobenius-Algebra, deren Vereinfachung  $(A, \mu, \eta, \langle -, - \rangle)$  ist. Zeige, dass die beiden Konstruktionen invers zueinander sind.

Vereinfachte Frobenius-Algebren haben ebenfalls einen “offensichtlichen” Begriff eines Morphismus, nämlich gerade Vektorraum-Homomorphismen  $\psi: A \rightarrow A'$ , die kompatibel mit  $\mu$ ,  $\eta$  und  $\langle -, - \rangle$  sind. Dieser Morphismus-Begriff ist allerdings nicht kompatibel mit den oben definierten Morphismen zwischen Frobenius-Algebren. Mit anderen Worten, die Vereinfachung einer Frobenius-Algebra ist keine Äquivalenz von Kategorien, wenn man vereinfachte Frobenius-Algebren mit vereinfachten Morphismen betrachtet. Da die oben definierten Morphismen eine Äquivalenz von Kategorien mit den zweidimensionalen topologischen Quantenfeld-Theorien zulassen, ist es aus theoretischer Sicht besser, mit unserer ersten Definition einer Frobenius-Algebra zu arbeiten.

**Übung für die Praxis 16.8.** Sei  $G$  eine endliche Abelsche Gruppe und betrachte die Gruppen-Algebra  $\mathbf{k}[G] := \bigoplus_{g \in G} \mathbf{k} \cdot z^g$  mit  $z^g \cdot z^h := z^{g+h}$ . Wir definieren auf  $\mathbf{k}[G]$  eine Bilinearform via

$$\langle z^g, z^h \rangle := \begin{cases} 1, & \text{wenn } g + h = 0, \\ 0, & \text{wenn } g + h \neq 0. \end{cases}$$

Zeige, dass dann  $(\mathbf{k}[G], \langle -, - \rangle)$  eine kommutative Frobenius-Algebra ist.

**Übung für die Praxis 16.9.** Seien  $n \geq 1$  und  $A_n = \text{Mat}(n \times n, \mathbf{k})$ . Wir definieren eine Bilinearform  $\langle M, N \rangle := \text{Tr}(MN)$ . Zeige, dass  $(A, \langle -, - \rangle)$  eine Frobenius-Algebra ist. Wann ist  $A_n$  kommutativ?

## 17 Literatur

Das Buch [3] von Lee bietet eine allgemeine Einführung in die klassische Theorie der glatten Mannigfaltigkeiten. Das Buch [4] behandelt ebenfalls die Theorie der glatten Mannigfaltigkeiten, allerdings aus der Perspektive lokal geringter Räume, die wir auch hier eingenommen haben. Das Buch [2] von Harder ist in diesem Bereich auch sehr lesenswert, schaut aber sehr stark auf die algebraische Geometrie und beschäftigt sich mit formalen Methoden wie Spektralsequenzen.

Die Beschreibung topologischer Quantenfeld-Theorien in unserem Skript folgt weitgehend dem einführenden Artikel [1], aus dem auch einige Graphiken übernommen sind. Dieser dürfte nach der Lektüre dieses Skriptes leicht zu lesen sein.

### Literatur

- [1] Nils Carqueville and Ingo Runkel. Introductory lectures on topological quantum field theory. *Banach Center Publications*, 114:9–47, 2018.
- [2] Günter Harder. *Lectures on algebraic geometry. I*, volume E35 of *Aspects of Mathematics*. Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2008. Sheaves, cohomology of sheaves, and applications to Riemann surfaces.
- [3] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [4] Torsten Wedhorn. *Manifolds, sheaves, and cohomology*. Springer Studium Mathematik—Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016.