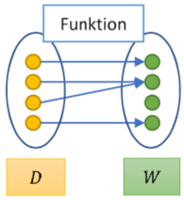
Funktion

Definition

Jedem Element einer Menge D wird genau ein Element aus einer Menge W zuordnet.

$$f: D \to W$$
$$x \to f(x) = \cdots$$



Polynome und Polynomdivision

$$(x^3 - 2x^2 - 5x - 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \qquad | \quad x^3 : x = x^2$$
$$\underline{-(x^3 - x^2)}$$
$$-x^2 - 5x \qquad | -x^2 : x = -x$$
$$\underline{-(x^2 - x)}$$
$$-6x + 6 \qquad | -6x : x = -6$$
$$\underline{-(-6x + 6)}$$
$$0$$

Eine *Polynomfunktion* vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Quadratische Funktionen

$y = ax^2 + bx + c$

Nullstellen

- $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

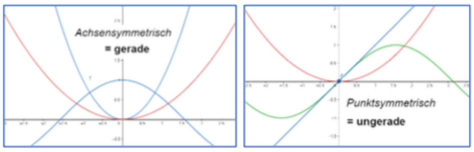
Scheitelpunkt

- $y = a(x - x_0)^2 + y_0$
- S = $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

Eigenschaften von Funktionen

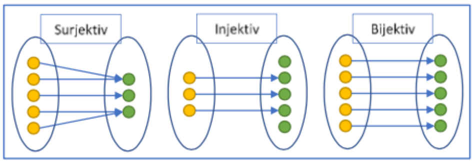
<ins>Symmetrie</ins>

- *gerade* $\quad f(-x) = f(x)$
- *ungerade* $\quad f(-x) = -f(x)$



<ins>Monotonie</ins>

- *monoton wachsend* $\quad f(x_1) \leq f(x_2)$
- *streng monoton wachsend* $\quad f(x_1) < f(x_2)$
- *monoton fallend* $\quad f(x_1) \geq f(x_2)$
- *streng monoton wachsend* $\quad f(x_1) > f(x_2)$



Operationen von Funktionen

- Addition $\quad x \to f(x) + g(x)$
- Subtraktion $\quad x \to f(x) - g(x)$
- Multiplikation $\quad x \to f(x) \cdot g(x)$
- Division $\quad x \to f(x) \,/\, g(x)$

Komposition

- Verkettung $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Intervalle

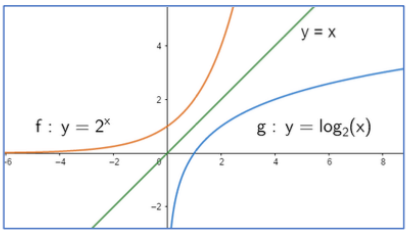
- Abgeschlossen $\quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
- Offen $\quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Halboffen $\quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
- Unendlich $\quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$

Umkehrfunktion

- Bijektive Funktion $\quad f: D \to W$
- Umkehrunktion f^{-1} $\quad g: W \to D$

Vorgehen $f(x) = y$

- Nach x auflösen $\quad \to x = g(y)$
- Variablen vertauschen $\to y = g(x)$



Arithmetische Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Horner-Schema

Effiziente Weise, um ein Polynom auszurechnen!

$\Rightarrow$ X0 => Pröbeln (mit -1 oder 1 versuchen)

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12$$

$x_0 = -2$	$a_4 =$ 3	$a_3 =$ -2	$a_2 =$ 5	$a_1 =$ -7	$a_0 =$ -12
		$b_3 \cdot x_0 =$ -6	$b_2 \cdot x_0 =$ 16	$b_1 \cdot x_0 =$ -42	$b_0 \cdot x_0 =$ 98
		+	+	+	+
	$b_3 =$ 3	$b_2 =$ -8	$b_1 =$ 21	$b_0 =$ -49	$\underline{\underline{f(x_0) = 86}}$

falls f(x0) = 0 => q(x) = $(x + 2)(3x^3 - 8x^2 + 21x - 49)$

Zerlegungssatz

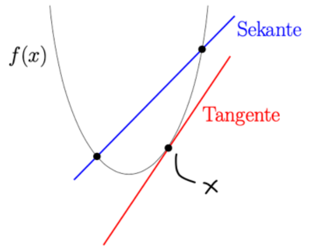
Ist x0 eine Nullstelle, dann gilt:

$f(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$

(x-x0): Linearfaktor = Polynom vom Grad

Ableitung

⇨ **Steigung der Tangente bei einem Funktionswert**



Anzahl Wendepunkte + 1 = Grad der Funktion

Ableitungsregeln

- Summe / Differenz

$f(x) = u + v$ $\qquad f'(x) = u' + v'$

- Produkt

$f(x) = u \cdot v$ $\qquad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

- Quotient

$f(x) = \frac{u}{v}$ $\qquad f'(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

- Kettenregel

$f(x) = (u \circ v) = u(v)$ $\qquad f'(x) = u'(v) \cdot v'$

- Logarithmus

$f(x) = u^v$ $\qquad f'(x) = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln(u) + v \cdot \frac{u'}{u}\right)$

- Umkehrfunktion

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

<u>Kettenregel Beispiele</u>

$f(x) = (3x-2)^8$
$\mathrm{v} = 3x - 2 \rightarrow v' = 3$
Äussere Funktion: $u = v^8 \rightarrow u' = 8v^7$
$f(x)' = 8v^7 \cdot 3 = 24v^7 = 24(3x-2)^7$

$f(x) = e^{4x+2}$
Äussere Funktion: $\mathrm{F}(u) = e^u \rightarrow F(u)' = e^u$
innere Funktion: $\mathrm{u}(x) = 4x + 2 \rightarrow u'(x) = 4$
$f(x)' = F'(u) \cdot u'(x) = e^u * 4$
$= e^{4x+2} * 4$
<u>=> bei einem Bruch v nur im Nenner einsetzen!</u>

$g(x) = \sin^2(x)$
Äussere Funktion: $F(u) = \mathrm{u}^2$
innere Funktion $u(x) = \sin(x)$
$g'(x) = F'(u) \cdot u'(x) = 2u \cdot \cos(x)$
$= 2\sin(x) \cdot \cos(x)$

Grundfunktionen

- **Potenz**

$f(x) = x^n$ $\qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

- **Exponent**

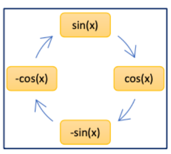
$f(x) = a^x$ $\qquad f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
$f(x) = e^x$ $\qquad f'(x) = e^x$ $\qquad \frac{d}{dx}(\sqrt{3}e^x) = \sqrt{3}e^x \qquad (e^{2x})' = 2e^{2x}$

- **Logarithmus**

$f(x) = \ln(x)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \log_a(x)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

Geometrische Funktionen



$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- Tangens

$f(x) = \tan(x)$ $\qquad f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$f(x) = \cot(x)$ $\qquad f'(x) = -1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

Differenzierbarkeit

⇨ Steigungen «Hügel» die <u>«nicht smooth»</u> aufeinander treffen sind nicht differenzierbar = es gibt keine Ableitung!
⇨ Differenzierbar an der Stelle x0 => wenn die <u>linksseitige und rechtsseitige Ableitung übereinstimmt</u>

Differenzierbarkeit = Ableitung ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs definiert!

Bestimmung der Tangente

Tangente von der Funktion f(x) an der Stelle x0

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Aufgabe Gesucht ist die Gleichung der Tangente für

$$f(x) = x^3 - 8x \text{ und } x_0 = 1$$

Hinweis: Denken Sie daran, dass die Ableitung von f als Steigung der Tangente interpretiert werden kann.

↳ Ableitung

$f'(x) = 3x^2 - 8$

$f'(1) = 3 \cdot 1 - 8 = -5$ ⇒ Steigung der Geraden

$f(1) = 1 - 8 = -7$ ⇒ Gerade geht durch $(1,-7)$

Ansatz: $y = -5x + b$

$(1,-7)$ einsetzen ergibt: $-7 = -5 \cdot 1 + b$

$b = -2$

⇒ gesuchte Gerade: $\underline{\underline{-5x - 2}}$

Aufgabe 12

(a) Bestimmen Sie die Tangenten an die Kurve $f(x) = x^2$, die durch den Punkt $(2,3)$ gehen.

Formel für Tangentengleichung: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = 2x_0 \cdot (x - x_0) + x_0^2$. Einsetzen vom Punkt $(2,3)$ ergibt $3 = 2x_0(2 - x_0) + x_0^2$, resp.

$$\begin{aligned} -x_0^2 + 4x_0 - 3 &= 0 \\ x_0^2 - 4x_0 + 3 &= 0 \\ (x_0 - 1)(x_0 - 3) &= 0 \end{aligned}$$

1. Lösung: $x_0 = 1 \Rightarrow y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$
2. Lösung: $x_0 = 3 \Rightarrow y = 6(x-3) + 9 = 6x - 9$

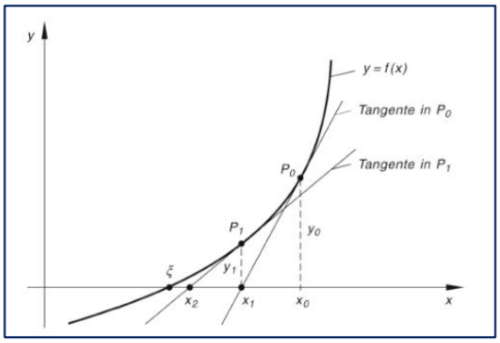
Newton-Verfahren

Sukzessive Approximation der Funktionskurve $y = f(x)$ durch Tangenten, deren Schnittpunkt mit der x-Achse problemlos berechnet werden kann. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ξ der Gleichung $f(x) = 0$.

Algorithmus

Lösung ξ der Gleichung $f(x) = 0$ finden.

- Startwert x_0 nahe bei ξ wählen
- Iterationsvorschrift $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$



Beispiel

- Gleichung $x = e^{-x}$
- Startwert $x_0 = 0.5$

1. Gleichung = 0 setzen
   - $f(x) = 0 = x - e^{-x}$
2. Gleichung ableiten
   - $f'(x) = 1 + e^{-x} \cdot -1$
3. Startwert x_0 einsetzen
   - $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
4. Gleichung ableiten
   - $f'(x) = 1 + e^{-x} \cdot -1$
5. Startwert x_0 einsetzen
   - $x_1 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} = 0.566\ldots$
6. Letzten Schritt wiederholen
   - $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Fixpunkte

⇨ X-Koordinate, wo das Verfahren «stehen» bleibt = Approximation wird nicht mehr besser

$$x_{n+1} = x_n = x$$

⇨ Fixpunkte müssen mit den Nullstellen übereinstimmen

Beispiel

Fixpunkte von:

$x_{n+1} = x^2$

$x = x^2$

Dies führt zu den Lösungen $x = 0, x = 1$

löse: $x = \frac{3x^2+1}{4x} \quad | \cdot 4x$

$4x^2 = 3x^2 + 1$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 1$

Lösungen: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; Stimmen mit Nullstellen überein!

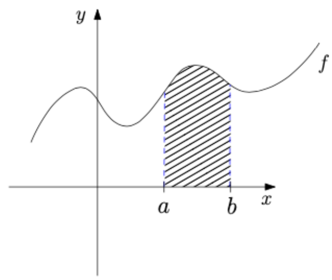
Integral

➪ Fläche unter einem Kurvenstück

Unbestimmtes Integral

➪ Ergibt keine Zahl, sondern eine Funktion!

$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$



$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ist eine Zahl, $\int f(x)\mathrm{d}x$ ist eine Funktion!

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \;=\; [F(x)]_a^b$$

Stammfunktion

➪ Durch «Aufleiten» einer Funktion bestimmt man die Stammfunktion

$$F(x) = \left(\frac{1}{n+1}\right) * \; ax^{n+1} + \cdots + c$$

$$f'''(x) = 12x + 6$$
$$f''(x) = 6x^2 + 6x + c$$
$$f'(x) = 2x^3 + 3x^2 + cx + d$$
$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx \cdot e$$

Spezialfall: $g(x) = \frac{1}{x}: G(x) = \ln(|x|)$

Integrationsregeln

$$\int_a^b c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) \cdot g(x))\mathrm{d}x \neq \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right) \text{ und } \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x \neq \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

Integrale bestimmter Funktionen

Unbestimmtes Integral

Potenzfunktionen

- $\int (x^\alpha)\,dx \quad = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
- $\int \left(\frac{1}{x}\right)\,dx \quad = \ln|x| + C$

Exponential- und Logarithmusfunktionen

- $\int (e^x)\,dx \quad = e^x + C$
- $\int (a^x)\,dx \quad = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
- $\int (\ln(x))\,dx \quad = x \cdot \ln(x) - x + C$
- $\int (\log_a(x))\,dx \quad = \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C$

Geometrische Funktionen

- $\int (\cos(x))\,dx \quad = \sin(x) + C$
- $\int (\sin(x))\,dx \quad = -\cos(x) + C$
- $\int (\tan(x))\,dx \quad = -\ln\,|\cos(x)| + C$

Weitere Funktionen

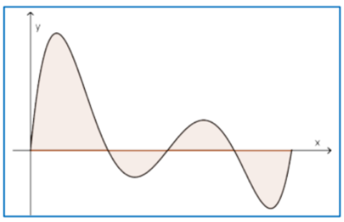
- $\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \quad = \arctan(x) + C$
- $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\,dx \quad = \arcsin(x) + C$
- $\int \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\,dx \quad = \arccos(x) + C$

Berechnungen

Flächeninhalt bei **wechselndem Vorzeichen** von $f(x)$

- $[a, b] = \text{Intervall}$
- $x_1, x_2, \ldots, x_n = Nullstellen$

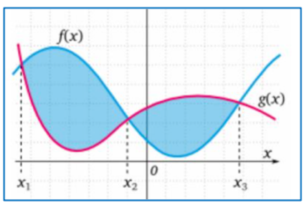
$$\left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \cdots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)\,dx\right|$$



Flächeninhalt zwischen **zwei Kurven** $f(x)$ und $g(x)$

- $[a, b] = \text{Intervall}$
- $x_1, x_2, \ldots, x_n = Schnittpunkte$

$$\left|\int_a^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\right| + \cdots + \left|\int_{x_n}^{b} (f(x) - g(x))\right|$$



Folgen und Reihen

d: Differenz; q: Quotient

Arithmetische Folge

⇨ Jede Arithmetische Reihe divergiert -> kein Grenzwert!

explizit	Implizit	Summe von n Elementen
$\boldsymbol{a_n = c + (n-1) \cdot d}$	$a_1 = c$ $a_{n+1} = a_n + d$	$s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ d = Schritt

Geometrische Folge

explizit	Implizit	Summe von n Elementen
$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$	$a_1 = c$ $a_{n+1} = q \cdot a_n$	$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

Grenzwerte von Folgen im Unendlichen

⇨ Die Folgenglieder kommen ab einem gewissen n dem Wert g (Grenzwert) beliebig nahe

- Folgen mit Grenzwert *Konvergent* $a_n = \frac{1}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots)$
- Folgen ohne Grenzwert *Divergent* $a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, -1 \ldots)$
- Beliebig gross (∞) / klein ($-\infty$) *bestimmt divergent* $a_n = 3 + 2n = (5, 7, 9, 11, \ldots)$

Folgen haben maximal einen Grenzwert!

Rechnen mit Grenzwerten (für $\boldsymbol{n} \to \infty$)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) - \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)}$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n.

Falls gilt: $\frac{\text{"Polynom"}}{\text{"Polynom"}}$

Fall 1: **Zählergrad < Nennergrad**. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$

Fall 2: Zählergrad $>$ **Nennergrad**. Dann gilt: $\frac{g(n)}{h(n)}$ kein Grenzwert ($\to \infty$ oder - ∞)

Fall 3 Zählergrad $=$ **Nennergrad**. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \frac{\text{"führender Term von g"}}{\text{"führender Term von h"}}$

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3 + n^2 + 7n}{5n^3 + 4n^2 + 17} = \frac{2}{5}$

Grenzwert von Reihen

Grenzwert = $a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$ $falls\ |q| < 1$

falls $|q|$ > 1 hat die Reihe keinen Grenzwert!

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = 3 \cdot \frac{1}{1 - 4/5} = 15$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} (8 + 7k)}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} (8 + 7k) = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 7 = 15n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 7$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} (8 + 7k)}{n^2} = \frac{15n + \frac{7}{2} \cdot n(n-1)}{n^2} = \frac{\frac{7}{2} n^2 + \cdots}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{2}$$

Rechnen mit Grenzwerten (für $n \to \infty$)

Harmonische Folge	Geometrische Folge	n-te Wurzel	Eulerzahl
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$

- $k =$ höchste Potenz

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2}$$

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+4n+2} = \frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}$$

$$\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{3+0+0}{5+0+0}$$

Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$

- $k =$ höchste Potenz
- $a =$ grösste Basis

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+2}$$

$$\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} \cdot \frac{3\cdot 3^n+2^n}{3^n+2} = \frac{\frac{3\cdot 3^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{2}{3^n}}$$

$$\frac{3+\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}} = \frac{3+0}{1+0}$$

Erweitern mit $\sqrt{a(n)}+\sqrt{b(n)}$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n} = \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}}{1}$$

$$\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-\left(\sqrt{n^2-2n}\right)^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}} = \frac{3n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{3n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}}$$

$$\frac{\frac{3n}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n^2+n)}+\sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot(n^2-2n)}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

Erweitern zu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^a\right) = e^a$

Beispiel

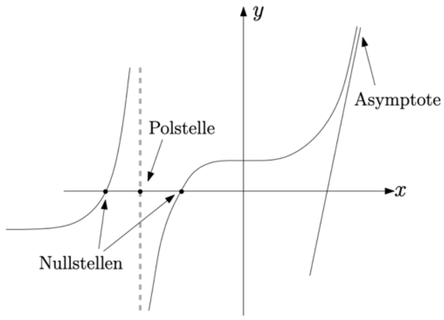
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{4n} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{\frac{3n}{2}}\right)^a = e^a = e^{\frac{8}{3}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 4n &= \frac{3n}{2}\cdot a \\ a &= \frac{4n}{\frac{3n}{2}} = \frac{8}{3} \end{aligned}}$$

Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Grenzwert einer Funktion im Endlichen

$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$



$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 15} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+5)} - \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x+5} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Gebrochenrationale Funktionen

$$\text{gebrochenrationale Funktion } = \frac{\text{Polynom 1}}{\text{Polynom 2}}$$

Wir betrachten die gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$

Begriff	Wert
Nullstellen	Nullstellen von p1(x), die nicht Nullstellen von p2(x) sind
Definitionslücken hebbare Definitionslücke Polstelle	Nullstellen von p2(x) Nullstelle von p1(x) **und** Nullstelle von p2(x) => x0 kann gestopft werden mit $\lim_{x \to x_0} f(x_0)$ Nur Nullstelle vom Nennerpolynom (nach allfälligem Kürzen)
Vorzeichenwechsel	Graph springt an dieser Stell über die x-Achse => bei allen Nullstellen und Polstellen x0 (nach allfälligem Kürzen), bei denen (x – x0) einen ungeraden Exponenten hat.
Asymptote	Funktion lässt sich darstellen als: $f(x) = p(x) + \frac{g(x)}{h(x)}$ => Polynomdivision Nähert sich asymptotisch an p(x)

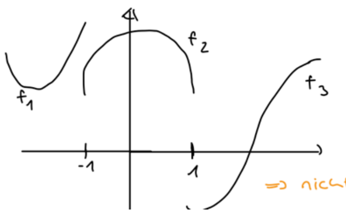
Stetigkeit & Differenzierbarkeit

- ⇨ Wenn sich der Graph der Funktion ohne absetzen zeichnen lässt
- ⇨ Kurve macht keine Sprünge

Stetigkeit: Funktionswerte müssen an den Punkten gleich sein

(i) Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass die Funktion $f(x)$ überall stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2a, & x < -1 \\ -x^2 + 5, & -1 \le x \le 1 \\ x^3 - 3bx, & x > 1 \end{cases}$$



=> nicht stetig

Ziel: Enden zusammenbringen

① $f_1(-1) = f_2(-1)$
② $f_2(1) = f_3(1)$ } stetig Bedingungen

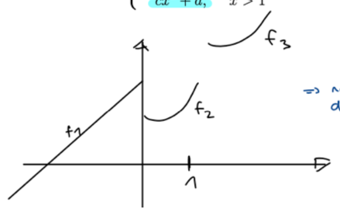
① $1 + 2a = 4$
② $4 = 1 - 3b$ } einsetzen

Auflösen gibt => $a = 1{,}5$ $b = -1$

Differenzierbarkeit: 1. Ableitung muss den gleichen Funktionswert ergeben

(ii) Bestimmen Sie die Parameter a, b, c und d so, dass die Funktion $f(x)$ überall differenzierbar ist.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0 \\ x^2 + x + 4, & 0 \le x \le 1 \\ cx^2 + d, & x > 1 \end{cases}$$



=> nicht stetig und nicht differenzierbar

ii) ① $f_1(0) = f_2(0)$
② $f_2(1) = f_3(1)$ } gleiche Funktionswert => Stetigkeit

③ $f_1'(0) = f_2'(0)$
④ $f_2'(1) = f_3'(1)$ } Ableitung muss gleich sein => Differenzierbarkeit

① $b = 4$ $f_1'(x) = a$
② $6 = c + d$ $f_2'(x) = 2x + 1$
③ $a = 1$ $f_3'(x) = 2cx$
④ $3 = 2c$

Auflösen => $a = 1$ ③ $b = 4$ ①
$c = 1{,}5$ ④ $d = 6 - 1{,}5 = 4{,}5$ ②

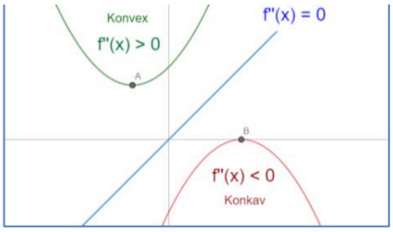
Anwendungen der Ableitung

Krümmungsverhalten

⇨ Die 2. Ableitung beschreibt das Krümmungsverhalten des Graphen

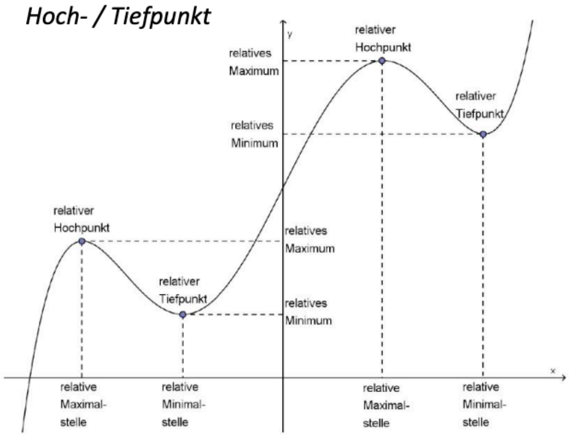
Zusammenhang zwischen 2. Ableitung und Krümmung

- $f''(x_0) > 0$ *Konvex* Nach links gekrümmt
- $f''(x_0) < 0$ *Konkav* Nach rechts gekrümmt
- $f''(x_0) = 0$ Keine eindeutige Krümmung



Relative Extrema

- *Relative Extremal-**Stelle*** x_0 *Minimal- / Maximalstelle*
- *Relatives Extremum* y_0 *Maximum / Minimum*
- *Relativer Extremal-**Punkt*** $P_0 = (x_0, y_0)$ *Hoch- / Tiefpunkt*



Berechnung

Ermittlung durch Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$.

<u>Bedingungen</u>

- $f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) \neq 0$

Typenbestimmung

- $f''(x_0) < 0 \rightarrow relatives\ Maximum$
- $f''(x_0) > 0 \rightarrow relatives\ Minimum$

Vorgehen – Relative Extrema

$$f(x) = y$$

1. Erste Ableitung
2. Extremalstellen x_0 bestimmen
   - $f'(x) = 0 \rightarrow x_0$
3. Zweite Ableitung
4. Typenbestimmung
   - $f''(x_0) < 0 \rightarrow Relatives\ Maximum$
   - $f''(x_0) > 0 \rightarrow Relatives\ Minimum$
5. In Gleichung $f(x_0) = y_0$ einsetzen
   - Hochpunkt / Tiefpunkt $= P(x_0, y_0)$

<u>Beispiel</u>

$$f(x) = x^5 - \frac{65}{3}x^3 + 180x$$

1. $y' = 5x^4 - 65x^2 + 180$
2. $y' = 0$
   - $\rightarrow x_0 = 2 \pm \sqrt{3}$
3. $y'' = 20x^3 - 130x$
4. $f''(x_0) = 20 \cdot (2 \pm \sqrt{3})^3 - 130 \cdot (2 \pm \sqrt{3})$
   - $f''(2 - \sqrt{3}) = -34 \rightarrow Maximum$
   - $f''(2 + \sqrt{3}) = 554 \rightarrow Minimum$
5. Gleichung $f(x_0) = y_0$
   - Hochpunkt / Tiefpunkt $= P(x_0, y_0)$

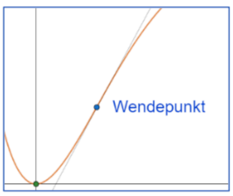
Wendepunkte und Sattelpunkte

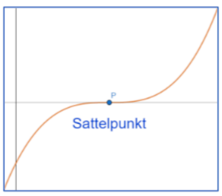
Definition

Als Wendepunkte werden Punkte bezeichnet bei denen sich der «Drehsinn» ändert. *Wendepunkte* mit horizontaler Tangente werden als *Sattelpunkte* oder *Terrassenpunkte* bezeichnet

<u>Wendetangente</u>

- Tangente an einem Wendepunkt





Berechnung

Ermittlung durch Lösen der Gleichung $f''(x) = 0 \rightarrow x_0$.

<u>Bedingungen</u>

Sei $y = f(x)$ *dreimal differenzierbar*

- $f''(x_0) = 0$
- $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ → Wendepunkt
- Falls zusätzlich $f'(x_0) = 0$ → Sattelpunkt

Vorgehen zur Bestimmung der Wendepunkte / Sattelpunkte

1. Erste und zweite Ableitung
2. Wendepunkt bestimmen
   - $f''(x_0) = 0 \rightarrow x_0$
   - $f^{(3)}(x_0) \neq 0$
3. Sattelpunkte bestimmen
   - $f'(x_0) = 0$
   - $f''(x_0) = 0$
   - …
   - $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
     - Gerade → relatives Extremum
     - Ungerade → Sattelpunkt
4. x_0 in ursprüngliche Gleichung einsetzen

Kurvendiskussion

Vorgehen

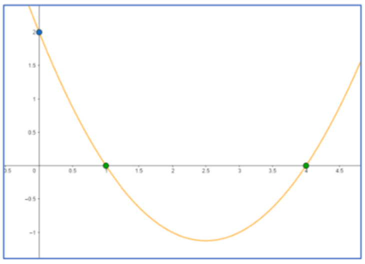
Kurvendiskussion für eine Funktion $y = f(x)$

- Definitionsbereich
- Symmetrie
  - Gerade / Ungerade
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
  - Nullstellen
  - Schnittpunkte mit Y-Achse
- Verhalten für $x \rightarrow \infty$
- Relative Extrema, inkl. Typbestimmung
- Wendepunkte, insbesondere Sattelpunkte

Skizze

Graphen skizzieren

$y = 0.5 \cdot (x^2 - 5x + 4)$



Nullstellen

- $0 = 0.5 \cdot (x - 1) \cdot (x - 4) \qquad \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$

Y-Achsenabschnitt

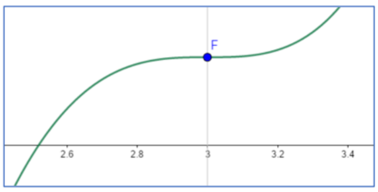
- $y = 0.5 \cdot x^2 - 2.5 \cdot x + 2 \qquad \rightarrow y_0 = 2$

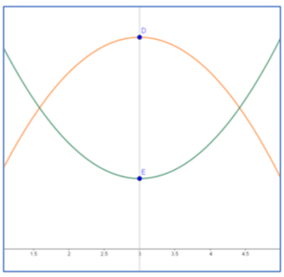
Relative Extrema $n = gerade\ (n > 1)$

- Positiv $\quad y = 0.5 \cdot (x - 3)^n \cdot (\dots) + 3 \qquad \rightarrow D = Hochpunkt$
- Negativ $\quad y = -0.5 \cdot (x - 3)^n \cdot (\dots) + 1 \qquad \rightarrow E = Tiefpunkt$

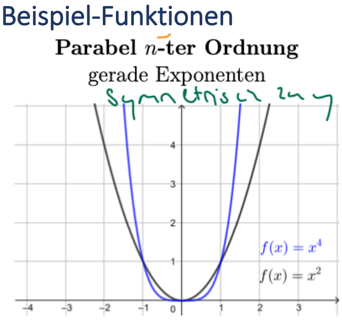
Wechselpunkte $n = ungerade\ (n > 2)$

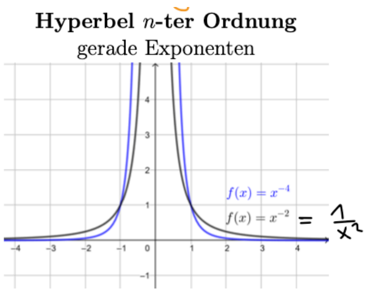
- $y = 0.5 \cdot (x - 3)^n \cdot (\dots) + c \qquad \rightarrow F = Wechselpunkt$

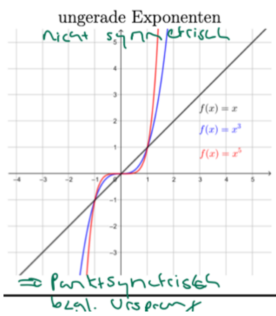


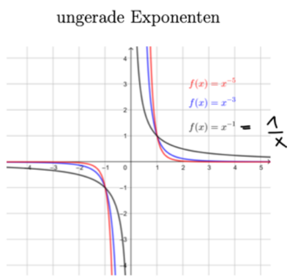


Beispiel-Funktionen









Extremwertprobleme

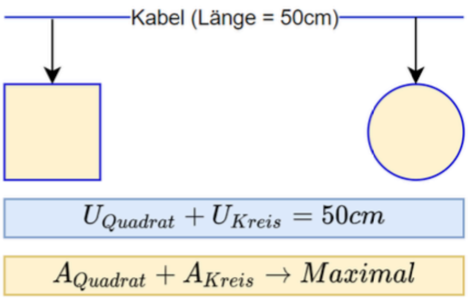
Vorgehen

1. **Zielgrösse** identifizieren
2. Unabhängige Variablen identifizieren
3. **Definitionsbereich** bestimmen
4. Zielgrösse als Funktion der unabhängigen Variablen ausdrücken; ev. eine **qualitative Skizze** (Nullstellen) des Graphen machen.
5. **Relative Maxima resp. Minima** bestimmen
6. **Analyse der Randpunkte**
   Beispiel Definitionsbereich: [0, 2] => Randpunkte bei x = 0 und x = 2
   Wenn die Funktion z.B. gegen links und rechts monoton fallend ist sind es Tiefpunkte!
7. Untersuchen, welche der relativen Extrema auch **absolute Extrema** sind (Betrachtung der Funktion in der Nähe des Randes)
   $\lim_{x \to 0} f(x)$ für x in der Nähe des Randes => falls $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ => absolutes Extrema

Randpunkte

(a, b): keine Randpunkte
$[a, b)$: Randpunkt a
$(a, b]$: Randpunkt b
$[a, b]$: Randpunkte a, b

<u>Beispiel</u>



Zielfunktion

- $A_{Max} = A_{Quadrat} + A_{Kreis}$
- $A_{Quadrat} = s^2$
- $A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$

Nebenbedingungen

- $U_{Quadrat} = 4s \quad \to s = \frac{U_Q}{4}$
- $U_{Kreis} = 2r\pi \quad \to r = \frac{U_K}{2\pi}$
- $U_Q = 50 - U_K \quad \to r = \frac{50 - U_Q}{2\pi}$

Nebenbedingungen einsetzen

- $A_{Max}(r, s) = s^2 + r^2 \cdot \pi$
- $A_{Max}(U_Q) = \left(\frac{U_Q}{4}\right)^2 + \left(\frac{50 - U_Q}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi$

Erste Ableitung $f'(x) = 0$

- $A'(U_Q) = \frac{U_Q}{8} + \frac{25}{\pi} + \frac{U_Q}{2\pi}$
- $A'(U_Q) = 0 \qquad \to \boldsymbol{U_Q \approx 28}$

Zweite Ableitung $f''(x)$

- $A''(U_Q) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} \to relative\ Minimalstelle$