

# 1 Formelsammlung

## 1.1 Exponenten

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

## 1.2 Wurzeln

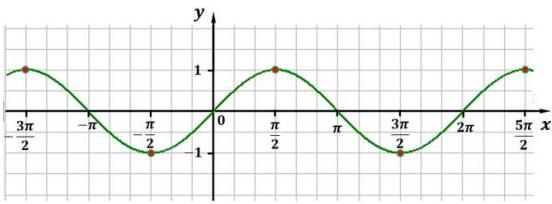
$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

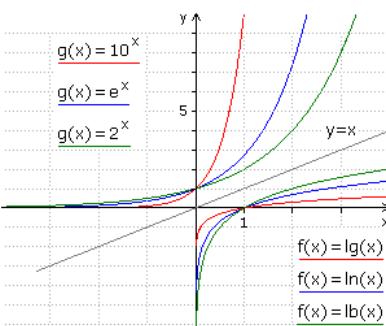
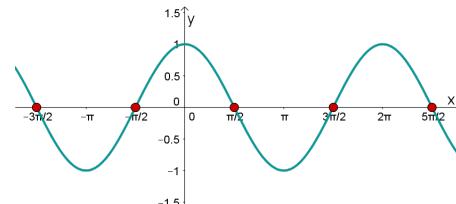
$$a\sqrt[n]{x} - b\sqrt[n]{x} = (a-b)\sqrt[n]{x}$$

## 1.3 Beispiel-Funktionen

### Sinus

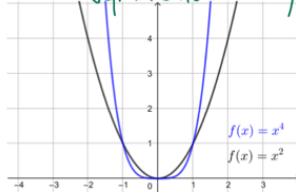


### Cosinus

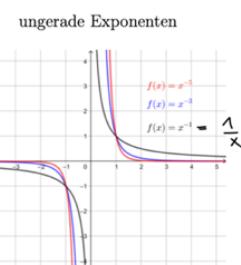
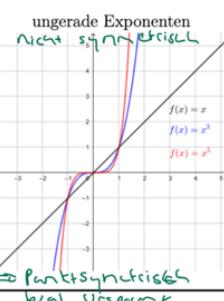
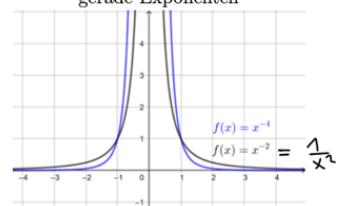


Exponentialfunktionen  
 $y = g(x) = a^x$   
 $D = \mathbb{R} = -\infty < x < \infty$   
 $W = \mathbb{R}^+ = 0 < y < \infty$   
 Logarithmusfunktionen  
 $\log_a(y) = \log_a(a^x) = x$   
 x gegen y tauschen  
 $y = f(x) = \log_a(x)$   
 $D = \mathbb{R}^+ = x > 0$   
 $W = \mathbb{R} = -\infty < y < \infty$

Parabel  $n$ -ter Ordnung  
 gerade Exponenten  
 Symmetrisch zu y



Hyperbel  $n$ -ter Ordnung  
 gerade Exponenten

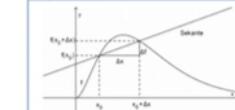


<p><b>Definition</b></p> <p>Jedem Element einer Menge <math>D</math> wird genau ein Element aus einer Menge <math>W</math> zuordnet.</p> $f: D \rightarrow W$ $x \mapsto f(x) = \dots$	
<p><b>Polynome und Polynomdivision</b></p> $\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 - 5x - 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\ \underline{- (x^3 - x^2)} \\ \quad \quad \quad -x^2 - 5x \\ \underline{- (x^2 - x)} \\ \quad \quad \quad -6x + 6 \\ \underline{- (-6x + 6)} \\ \quad \quad \quad 0 \end{array} \quad   \quad \begin{array}{l} x^3 : x = x^2 \\ -x^2 : x = -x \\ -6x : x = -6 \end{array}$	<p><b>Quadratische Funktionen</b></p> $y = ax^2 + bx + c$ <p><b>Nullstellen</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>y = a(x - x_1)(x - x_2)</math></li> <li><math>x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}</math></li> </ul> <p><b>Scheitelpunkt</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>y = a(x - x_0)^2 + y_0</math></li> <li><math>S = \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)</math></li> </ul>
<p>Eine <b>Polynomfunktion</b> vom Grad <math>n</math> hat höchstens <math>n</math> reelle Nullstellen.</p> $f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$	
<p><b>Eigenschaften von Funktionen</b></p> <p><u>Symmetrie</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>gerade <math>f(-x) = f(x)</math></li> <li>ungerade <math>f(-x) = -f(x)</math></li> </ul> <p><u>Monotonie</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>monoton wachsend <math>f(x_1) \leq f(x_2)</math></li> <li>streng monoton wachsend <math>f(x_1) &lt; f(x_2)</math></li> <li>monoton fallend <math>f(x_1) \geq f(x_2)</math></li> <li>streng monoton fallend <math>f(x_1) &gt; f(x_2)</math></li> </ul>	
<p><b>Operationen von Funktionen</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Addition <math>x \mapsto f(x) + g(x)</math></li> <li>Subtraktion <math>x \mapsto f(x) - g(x)</math></li> <li>Multiplikation <math>x \mapsto f(x) \cdot g(x)</math></li> <li>Division <math>x \mapsto f(x) / g(x)</math></li> </ul> <p><b>Komposition</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Verkettung <math>(g \circ f)(x) = g(f(x))</math></li> </ul>	<p><b>Umkehrfunktion</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Bijektive Funktion <math>f: D \rightarrow W</math></li> <li>Umkehrfunktion <math>f^{-1}: W \rightarrow D</math></li> </ul> <p><b>Vorgehen <math>f(x) = y</math></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Nach <math>x</math> auflösen <math>\rightarrow x = g(y)</math></li> <li>Variablen vertauschen <math>\rightarrow y = g(x)</math></li> </ul>
<p><b>Intervalle</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Abgeschlossen <math>[a, b] = \{x \in \mathbb{R}   a \leq x \leq b\}</math></li> <li>Offen <math>(a, b) = \{x \in \mathbb{R}   a &lt; x &lt; b\}</math></li> <li>Halboffen <math>[a, b) = \{x \in \mathbb{R}   a \leq x &lt; b\}</math></li> <li>Unendlich <math>[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}   a \leq x\}</math></li> </ul>	

## Folgen und Beiben

<p><b>Definition</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>n \in \mathbb{N}^* \rightarrow a_n \in \mathbb{R}</math></li> <li>• <math>(a_k) = (a_k)_{k \geq 1} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n-1}, \dots)</math></li> </ul> <p>Die Elemente einer Folge heissen <b>Glieder</b> der Folge <math>\rightarrow a_n</math>.</p>	<p><b>Abkürzungen</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>A</math> = Anfangs-Glied</li> <li>• <math>d</math> = Differenz</li> <li>• <math>q</math> = Quotient</li> </ul>			
<p><b>Arithmetische Folge</b></p> $a_k = (2, 3, 4, 5, \dots) \rightarrow d = 1, A = 2$	<p><b>Geometrische Folge</b></p> $a_k = \left( \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right) \rightarrow q = \frac{1}{2}, A = 1$			
<p><b>N-tes Glied</b></p> $a_n = A + (n - 1) \cdot d$	<p><b>N-tes Glied</b></p> $a_n = A \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q} \cdot q^n$			
<p><b>Mittelwert</b></p> $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$	<p><b>Mittelwert</b></p> $ a_k  = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$			
<p><b>Partial-Summe</b></p> $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \left( A + \frac{n-1}{2} \cdot d \right)$	<p><b>Partial-Summe</b></p> $S_n = A \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = A \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$			
<p><b>Grenzwerte von Folgen</b></p> <p>Eine reelle Zahlenfolge <math>(a_n)</math> hat einen <b>Grenzwert / Limes</b> falls die Zahl <math>a \in \mathbb{R}</math> jede noch so kleine Umgebung des Grenzwertes erreicht und nicht mehr verlässt.</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N:  a_n - a  < \epsilon$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 33%; vertical-align: top;"> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Folgen mit Grenzwert</li> <li>• Folgen ohne Grenzwert</li> <li>• Beliebig gross (<math>\infty</math>) / klein (<math>-\infty</math>)</li> </ul> </td> <td style="width: 33%; vertical-align: top;"> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Konvergent</li> <li>• Divergent</li> <li>• bestimmt divergent</li> </ul> </td> <td style="width: 33%; vertical-align: top;"> <math>a_n = \frac{1}{n} = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right)</math>  <math>a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)</math>  <math>a_n = 3 + 2n = (5, 7, 9, 11, \dots)</math> </td> </tr> </table> <p>Eine Folge <math>(a_n)</math> besitzt höchstens einen Grenzwert!</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Folgen mit Grenzwert</li> <li>• Folgen ohne Grenzwert</li> <li>• Beliebig gross (<math>\infty</math>) / klein (<math>-\infty</math>)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Konvergent</li> <li>• Divergent</li> <li>• bestimmt divergent</li> </ul>	$a_n = \frac{1}{n} = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right)$ $a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ $a_n = 3 + 2n = (5, 7, 9, 11, \dots)$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Folgen mit Grenzwert</li> <li>• Folgen ohne Grenzwert</li> <li>• Beliebig gross (<math>\infty</math>) / klein (<math>-\infty</math>)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Konvergent</li> <li>• Divergent</li> <li>• bestimmt divergent</li> </ul>	$a_n = \frac{1}{n} = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right)$ $a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ $a_n = 3 + 2n = (5, 7, 9, 11, \dots)$		
<p><b>Unendliche geometrische Reihe</b></p> $S = \sum_{k=1}^{\infty} A q^{k-1} = \frac{A}{1-q}$	<p><b>Beispiel</b></p> $a_k = \frac{7}{2^{k-1}} = 7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \frac{7}{8} \dots = 14$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>q = \frac{1}{2} \rightarrow</math> Die Reihe konvergiert</li> <li>• <math>S = \frac{A}{1-q} = \frac{7}{1-\frac{1}{2}} = 14</math></li> </ul>			
<p>Bedingung</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math> q  &lt; 1</math></li> </ul>				

Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

<p><b>Sekanten-Steigung</b></p> <p>Sei <math>f</math> eine Funktion und <math>[x_0, x_0 + h]</math> ein Intervall im Definitionsbereich von <math>f</math>. Der Quotient</p> $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ <p>heisst <b>Differenzenquotient</b> von <math>f</math>.</p>																															
																															
<p><b>Tangentengleichung</b></p> $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$	<p><b>"Linearisierung" (Approximation)</b></p>																														
<p><b>Grenzwert einer Funktion</b></p> <p>Die Funktion <math>y = f(x)</math> hat an der Stelle <math>x_0</math> den <b>Grenzwert</b> <math>y_0</math>, falls</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>für jede Folge <math>(x_n)</math> mit <math>\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0</math> gilt <math>\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0</math></li> </ul> <p>Bemerkungen</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Die Stelle <math>x_0</math> muss nicht im Definitionsbereich <math>D</math> sein</li> </ul> <p><b>Konvergenz / Divergenz</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Konvergenz</b> Funktion mit Grenzwert <math>x \rightarrow \infty</math></li> <li><b>Divergenz</b> Funktion ohne Grenzwert <math>x \rightarrow \infty</math></li> <li><b>Bestimmte Divergenz</b> Funktion mit <math>\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty</math></li> </ul>	<p><b>Beispiel Grenzwert</b></p> <p><math>f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}</math> an der Stelle <math>x_0 = 1</math></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th><math>n</math></th> <th><math>x_n = 1 - \frac{1}{n}</math></th> <th><math>f(x_n)</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0.5</td> <td>1.5</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0.66</td> <td>1.66</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0.75</td> <td>1.75</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0.8</td> <td>1.8</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>0.9</td> <td>1.9</td> </tr> <tr> <td>100</td> <td>0.99</td> <td>1.99</td> </tr> <tr> <td>1000</td> <td>0.999</td> <td>1.999</td> </tr> <tr> <td><math>n \rightarrow \infty</math></td> <td><math>x_0 = 1</math></td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table> <p><math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2</math></p>	$n$	$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	$f(x_n)$	1	0	1	2	0.5	1.5	3	0.66	1.66	4	0.75	1.75	5	0.8	1.8	10	0.9	1.9	100	0.99	1.99	1000	0.999	1.999	$n \rightarrow \infty$	$x_0 = 1$	2
$n$	$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	$f(x_n)$																													
1	0	1																													
2	0.5	1.5																													
3	0.66	1.66																													
4	0.75	1.75																													
5	0.8	1.8																													
10	0.9	1.9																													
100	0.99	1.99																													
1000	0.999	1.999																													
$n \rightarrow \infty$	$x_0 = 1$	2																													
<p><b>Differenzierbar</b></p> <p>Wenn für eine Funktion <math>f</math> an der Stelle <math>x_0</math> der Grenzwert</p> $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ <p>Existiert, so heisst <math>f</math> an der Stelle <math>x_0</math> <b>differenzierbar</b>. Den Grenzwert selbst bezeichnet man als <b>Ableitung</b>.</p> <p>Eine Funktion ist <b>differenzierbar</b>, falls</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Die Kurve keine Knicke macht</li> </ul> <p><b>Stetigkeit einer Funktion</b></p> <p>Eine Funktion ist <b>stetig</b>,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>die Kurve keine Sprünge macht</li> <li>man den Graphen der Funktion zeichnen kann, ohne den Stift dabei abzusetzen</li> </ul>																															

## Rechnen mit Grenzwerten

Harmonische Folge	Geometrische Folge	n-te Wurzel	Eulerzahl
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
<b>Erweitern mit <math>\frac{1}{n^k}</math></b>		<b>Erweitern mit <math>\frac{1}{a^k}</math></b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>k = \text{höchste Potenz}</math></li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li><math>k = \text{höchste Potenz}</math></li> <li><math>a = \text{größte Basis}</math></li> </ul>	
<b>Beispiel</b>		<b>Beispiel</b>	
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 4n + 2}$ $\frac{\frac{1}{n^2} \cdot 3n^2 + 2n + 1}{\frac{1}{n^2} \cdot 5n^2 + 4n + 2} = \frac{\frac{3}{n^2} + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{5}{n^2} + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}$ $\frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{5 + 0 + 0} = 1$		$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2}$ $\frac{\frac{1}{3^n} \cdot 3^{n+1} + 2^n}{\frac{1}{3^n} \cdot 3^n + 2} = \frac{\frac{3}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n} + \frac{2}{3^n}}$ $\frac{3 + \frac{2^n}{3^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3$	
<b>Erweitern mit <math>\sqrt{a(n)} + \sqrt{b(n)}</math></b>			
<b>Beispiel</b>			
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n} = \frac{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 2n}}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}}$ $\frac{(\sqrt{n^2 + n})^2 - (\sqrt{n^2 - 2n})^2}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}} = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot 3n}{\frac{1}{n} \cdot \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}}$ $\frac{\frac{3n}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot (n^2 + n) - \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot (n^2 - 2n)}}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{n^2 + n}{n^2} - \sqrt{\frac{n^2 - 2n}{n^2}}}} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}} = \frac{3}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}} = \frac{3}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} = \frac{3}{2}$			
<b>Erweitern zu <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n</math></b>			
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{5}} \right)^5 \right)^a = e^a</math></li> </ul>		$4n = \frac{3n}{2} \cdot a$ $a = \frac{4n}{\frac{3n}{2}} = \frac{8}{3}$	
<b>Beispiel</b>			
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n} = \left( \left(1 + \frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{\frac{3n}{2}} \right)^a = e^a = e^{\frac{8}{3}}$			

## 1.4 Grenzwerte von Folgen im Unendlichen

⇒ Die Folgenglieder kommen ab einem gewissen  $n$  dem Wert  $g$  (Grenzwert) beliebig nahe

• Folgen mit Grenzwert	<i>Konvergent</i>	$a_n = \frac{1}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$
• Folgen ohne Grenzwert	<i>Divergent</i>	$a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
• Beliebig gross ( $\infty$ ) / klein ( $-\infty$ )	<i>bestimmt divergent</i>	$a_n = 3 + 2n = (5, 7, 9, 11, \dots)$

Folgen haben maximal einen Grenzwert!

### 1.4.1 Rechnen mit Grenzwerten (für $n \rightarrow \infty$ )

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)}, \quad \text{falls } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) \neq 0 \text{ und } b_n \neq 0 \text{ für alle } n.$$

Falls gilt:  $\frac{\text{"Polynom}}{\text{"Polynom"}}$

**Fall 1: Zählergrad < Nennergrad.** Dann gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$

**Fall 2: Zählergrad > Nennergrad.** Dann gilt:  $\frac{g(n)}{h(n)}$  kein Grenzwert ( $\rightarrow \infty$  oder  $-\infty$ )

**Fall 3 Zählergrad = Nennergrad.** Dann gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \frac{\text{"führender Term von g"}}{\text{"führender Term von h"}}$  => Beispiel:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 + 7n}{5n^3 + 4n^2 + 17} = \frac{2}{5}$

## 1.5 Grenzwert von Reihen

$$\text{Grenzwert} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \text{ falls } |q| < 1$$

falls  $|q| > 1$  hat die Reihe keinen Grenzwert!

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3 \left( \frac{4}{5} \right)^{k-1} = 3 \cdot \frac{1}{1 - 4/5} = 15$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (8 + 7k)}{n^2} = \sum_{k=1}^n (8 + 7k) = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 7 = 15n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 7$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n (8 + 7k)}{n^2} = \frac{15n + \frac{7}{2} \cdot n(n-1)}{n^2} = \frac{\frac{7}{2}n^2 + \dots}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{7}{2}$$

## 2 Ableitung

⇒ Steigung der Tangente bei einem Funktionswert

Anzahl Wendepunkte + 1 = Grad der Funktion

### 2.1 Ableitungsregeln

- Summe / Differenz

$$f(x) = u + v$$

$$f'(x) = u' + v'$$

- Produkt

$$f(x) = u \cdot v$$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

- Quotient

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

- Kettenregel

$$f(x) = (u \circ v) = u(v)$$

$$f'(x) = u'(v) \cdot v'$$

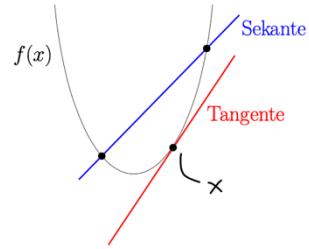
- Logarithmus

$$f(x) = u^v$$

$$f'(x) = u^v \cdot \left( v' \cdot \ln(u) + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$$

- Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



#### Kettenregel Beispiele

$$f(x) = (3x - 2)^8$$

$$v = 3x - 2 \rightarrow v' = 3$$

Äussere Funktion:  $u = v^8 \rightarrow u' = 8v^7$

$$f(x)' = 8v^7 \cdot 3 = 24v^7 = 24(3x - 2)^7$$

$$f(x) = e^{4x+2}$$

Äussere Funktion:  $F(u) = e^u \rightarrow F(u)' = e^u$

innere Funktion:  $u(x) = 4x + 2 \rightarrow u'(x) = 4$

$$f(x)' = F'(u) \cdot u'(x) = e^u * 4 = e^{4x+2} * 4$$

=> bei einem Bruch v nur im Nenner einsetzen!

$$g(x) = \sin^2(x)$$

Äussere Funktion:  $F(u) = u^2$

innere Funktion  $u(x) = \sin(x)$

$$g'(x) = F'(u) \cdot u'(x) = 2u \cdot \cos(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$$

### 2.2 Grundfunktionen

- Potenz

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sqrt{2x-1})' = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \frac{d}{dx}$$

$$(\sqrt{5x-1})' = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{3}e^x)' = \sqrt{3}e^x$$

- Exponent

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$(\ln(1-5x))' = -\frac{5}{1-5x}$$

- Logarithmus

$$f(x) = \ln(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

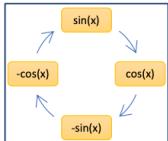
$$f(x) = \log_a(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

Ableitung      Ausgangsfunktion      Stammfunktion

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
0	$c \quad c \in \mathbb{R}$	$cx$
$c$	$cx$	$\frac{c}{2}x^2$
$r \cdot x^{r-1}$	$x^r$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$-\ln \cos x $
$e^x$	$e^x$	$e^x$
$c \cdot e^{cx}$	$e^{cx}$	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln a \cdot a^x$	$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x(\ln x  - 1)$
$\frac{1}{\ln a \cdot x}$	$\log_a x $	$\frac{x}{\ln a(\ln x -1)} = x(\log_a x  - \log_a e)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

### 2.3 Geometrische Funktionen



$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

- Tangens

$$f(x) = \tan(x)$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f(x) = \cot(x)$$

$$f'(x) = -1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

### 2.4 Differenzierbarkeit

⇒ Steigungen «Hügel» die nicht smooth aufeinander treffen sind nicht differenzierbar = es gibt keine Ableitung!

⇒ Differenzierbar an der Stelle  $x_0 \Rightarrow$  wenn die linksseitige und rechtsseitige Ableitung übereinstimmen

Differenzierbarkeit = Ableitung ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs definiert!

### 3 Integral

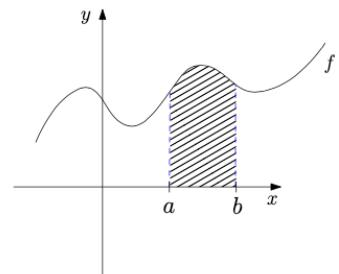
⇒ Fläche unter einem Kurvenstück

#### 3.1 Unbestimmtes Integral

⇒ Ergibt keine Zahl, sondern eine Funktion!

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

$\int_a^b f(x)dx$  ist eine Zahl,  $\int f(x)dx$  ist eine Funktion!



#### 3.2 Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

##### 3.2.1 Stammfunktion

⇒ Durch «Aufleiten» einer Funktion bestimmt man die Stammfunktion

$$F(x) = \left(\frac{1}{n+1}\right) * ax^{n+1} + \dots + c$$

Spezialfall:  $g(x) = \frac{1}{x}$ ;  $G(x) = \ln(|x|)$

##### 3.2.2 Integrationsregeln

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) \cdot g(x))dx \neq \left( \int_a^b f(x)dx \right) \cdot \left( \int_a^b g(x)dx \right) \text{ und } \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

### 3.3 Integrale bestimmter Funktionen

#### Unbestimmtes Integral

##### Potenzfunktionen

- $\int(x^\alpha) dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
- $\int\left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln|x| + C$

##### Exponential- und Logarithmusfunktionen

- $\int(e^x) dx = e^x + C$
- $\int(a^x) dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
- $\int(\ln(x)) dx = x \cdot \ln(x) - x + C$
- $\int(\log_a(x)) dx = \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C$

#### Geometrische Funktionen

- $\int(\cos(x)) dx = \sin(x) + C$
- $\int(\sin(x)) dx = -\cos(x) + C$
- $\int(\tan(x)) dx = -\ln|\cos(x)| + C$

#### Weitere Funktionen

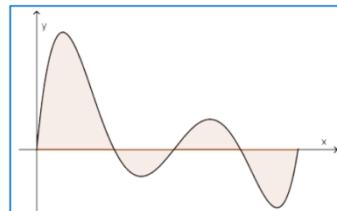
- $\int\left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \arctan(x) + C$
- $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \arcsin(x) + C$
- $\int\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \arccos(x) + C$

#### 3.3.1 Berechnungen

##### Flächeninhalt bei wechselndem Vorzeichen von $f(x)$

- $[a, b] = \text{Intervall}$
- $x_1, x_2, \dots, x_n = \text{Nullstellen}$

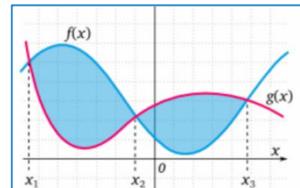
$$\left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$



##### Flächeninhalt zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$

- $[a, b] = \text{Intervall}$
- $x_1, x_2, \dots, x_n = \text{Schnittpunkte}$

$$\left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$



## 4 Integrationsmethoden

Methode	Muster	Beispiel
Substitution	$\int g(f'(x)) \cdot f(x) dx$	$\int e^{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx$
partielle Integration	$\int u \cdot v dx$ nach Ableiten einfacher      nach Integration nicht komplizierter	$\int x \cdot e^x dx$
Partialbruchzerlegung	Polynom Polynom	$\int \frac{4x^2 + x + 17}{4x^3 + 6x + 3} dx$

### 4.1 Partielle Integration

<p><b>Partielle Integration</b></p> $\int (u'(x) \cdot v(x)) \cdot dx = u(x) \cdot v(x) - \int (u(x) \cdot v'(x)) \cdot dx$ $\int_a^b (u'(x) \cdot v(x)) \cdot dx = (u(x) \cdot v(x)) _a^b - \int_a^b (u(x) \cdot v'(x)) \cdot dx$ <p><b>Faustregel</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>v</math> Polynome (<math>x^n + \dots + c</math>), <math>\ln(x)</math> Ableitung (<math>v \rightarrow v'</math>)</li> <li>• <math>u'</math> Exp- (<math>e^x, \dots</math>) / Trigo-Funktionen (<math>\sin(x), \dots</math>) Integration (<math>u' \rightarrow u</math>)</li> </ul> <p>Für <math>v</math> sollte der Faktor verwendet werden, der durch eine Ableitung vereinfacht werden kann.</p> <p><b>Trigonometrische Funktionen</b></p> $\sin^2 + \cos^2 = 1$ $1 - \sin^2 = \cos^2$ $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$ <table border="1" style="margin-top: 10px; width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td><math>\alpha</math></td> <td><math>0^\circ</math></td> <td><math>30^\circ</math></td> <td><math>45^\circ</math></td> <td><math>60^\circ</math></td> <td><math>90^\circ</math></td> </tr> <tr> <td><math>\cos(\alpha)</math></td> <td>1</td> <td><math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></td> <td><math>\frac{\sqrt{2}}{2}</math></td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td>0</td> </tr> <tr> <td><math>\sin(\alpha)</math></td> <td>0</td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td><math>\frac{\sqrt{2}}{2}</math></td> <td><math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></td> <td>1</td> </tr> <tr> <td><math>\tan(\alpha)</math></td> <td>0</td> <td><math>\frac{1}{\sqrt{3}}</math></td> <td>1</td> <td><math>\sqrt{3}</math></td> <td>—</td> </tr> </table> <table border="1" style="margin-top: 10px; width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td><math>\alpha_{DEG}</math></td> <td><math>360^\circ</math></td> <td><math>270^\circ</math></td> <td><math>180^\circ</math></td> <td><math>90^\circ</math></td> <td><math>60^\circ</math></td> <td><math>45^\circ</math></td> <td><math>30^\circ</math></td> </tr> <tr> <td><math>\alpha_{RAD}</math></td> <td><math>2\pi</math></td> <td><math>\frac{3}{2}\pi</math></td> <td><math>\pi</math></td> <td><math>\frac{\pi}{2}</math></td> <td><math>\frac{\pi}{3}</math></td> <td><math>\frac{\pi}{4}</math></td> <td><math>\frac{\pi}{6}</math></td> </tr> </table>	$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$\alpha_{DEG}$	$360^\circ$	$270^\circ$	$180^\circ$	$90^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$30^\circ$	$\alpha_{RAD}$	$2\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	<p><b>Beispiel 1</b></p> $\int (\ln(x) \cdot x^2) dx$ $\int (\underbrace{x^2 \cdot \ln(x)}_{u' \cdot v} \cdot dx = \underbrace{\frac{x^3}{3} \cdot \ln(x)}_{u \cdot v} - \int (\underbrace{\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}}_{u \cdot v'}) dx$ $\frac{x^3}{3} \cdot \ln(x) - \int \left( \frac{x^2}{3} \right) dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} = \ln(x) - \frac{2x^3}{9}$ <p><b>Beispiel 2</b></p> $\int \left( \underbrace{\frac{(x+1) \cdot e^{-x}}{v}}_{u' \cdot v'} \right) dx$ $\int \left( \frac{(x+1) \cdot e^{-x}}{v \cdot u'} \right) dx = \underbrace{\frac{(x+1) \cdot -e^{-x}}{v \cdot u}}_{v' \cdot u} - \int \left( \frac{1 \cdot -e^{-x}}{v' \cdot u} \right) \cdot dx$ $-e^{-x} \cdot (x+1) - e^{-x} + C = -e^{-x} \cdot x - 2e^{-x} + C$ <p><b>Kreisfunktion</b></p>
$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$																																				
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0																																				
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1																																				
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—																																				
$\alpha_{DEG}$	$360^\circ$	$270^\circ$	$180^\circ$	$90^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$30^\circ$																																		
$\alpha_{RAD}$	$2\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$																																		

### Beispiel 3 ("versteckte" Produkte)

$$\int \ln(x) dx = \int \ln(x) \cdot 1 dx$$

$$u(x) = \ln(x) \quad v'(x) = 1$$

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad v(x) = x$$

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int \ln(x) \cdot 1 dx = x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\ &\doteq \underline{\underline{x \cdot \ln(x) - x + C}} \end{aligned}$$

## 4.2 Partialbruchzerlegung, Substitution

### Partialbruchzerlegung

Gegeben sei eine rationale Funktion  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

- $\deg(p(x)) < \deg(q(x)) \rightarrow \text{echt gebrochen}$
- $p(x), q(x): \text{Polynome}$

Nullstellen  $(x_1 - x_n)$  bestimmen

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)(x-x_2)}}_{\text{doppelte Nullstelle } x_2} + \dots$$

Koeffizienten  $A, B_1, B_2 \dots$  bestimmen

$$p(x) = A(x-x_2)(x-x_2) + B_1(x-x_1)(x-x_2) + B_2(x-x_1) + \dots$$

### Integration durch Substitution

Ableitung umschreiben

$$\frac{d \cdot g(x)}{dx} = g'(x)$$

$$u = g(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x)$$

Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot dx = \int \phi(u) \cdot du$$

$$\int \phi(u) \cdot du = \phi(u) + C$$

Rücksubstitution

$$\phi(u) + C = \phi(g(x)) + C$$

### Beispiel - Substitution

Ableitung umschreiben

$$\frac{d \cdot x^2}{dx} = 2x$$

$$u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

Substitution

$$\int x \cdot \cos(x^2) \cdot dx = \int x \cdot \cos(u) \cdot \frac{du}{2x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int \cos(u) du = \frac{1}{2} \cdot \sin(u) + C$$

Rücksubstitution

$$\frac{1}{2} \cdot \sin(u) + C = \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2) + C$$

### Beispiel

Nullstellenform im Zähler

$$\frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}$$

Zuordnung eines Partialbruchs zu jeder Nullstelle

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)(x-2)}$$

Koeffizienten bestimmen

$$x+1 = A(x-2)(x-2) + B_1(x-1)(x-2) + B_2(x-1)$$

$$A = 2, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = 3$$

Einsetzen in ursprüngliche Gleichung

$$\frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)(x-2)}$$

Integral zu berechnen (nicht teil des Verfahrens)

$$\int \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx = 2 \cdot \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C$$

### Weiteres Grundintegral

$$\int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} dx = \ln\sqrt{(x-\beta)^2 + \gamma^2} + C$$

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} dx = \frac{1}{\gamma} \arctan\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right) + C$$

### Substitution

=> bei bestimmten Integralen muss die Funktion g auch auf die Integrationsgrenzen angewendet werden!

#### Satz

Für eine Funktion  $f$  und Konstanten  $a, b$  gilt:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$$

Beispiel:  $\int \cos(5x+7) dx$

$$f(u) = \cos(u), \quad a = 5, \quad b = 7, \quad F(u) = \sin(u)$$

$$\int \cos(5x+7) dx = \frac{1}{5} \sin(5x+7) + C$$

### Partialbruchzerlegung

#### I Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{S(x)}{Q(x)}$$

1. Reelle Nullstellen des Nenners  $h(x)$  mit Multiplizitäten bestimmen

2. Jeder dieser Nullstellen wird eine Summe von Brüchen zugeordnet:

$$\begin{aligned} x_1 \text{ ist einfache Nullstelle} &\rightarrow \frac{A}{x-x_1} \\ x_1 \text{ ist doppelte Nullstelle} &\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} \\ x_1 \text{ ist } r \text{ - fache Nullstelle} &\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r} \end{aligned}$$

$A_1, A_2, \dots, A_r$  sind (zunächst noch unbekannte) reelle Konstanten.

3.  $f(x)$  wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt.

4. Bestimmung der Konstanten  $A, A_1, A_2, \dots, A_r$  etc

(i) Alle Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen.

(ii) Durch Einsetzen von  $x$ -Werten (z.B. Nullstellen der entsprechenden Polynome) erhält man ein lineares Gleichungssystem.

(iii) Gleichungssystem lösen (z.B. mit Gauss-Algorithmus)

#### Horner-Schema

Effiziente Weise, um ein Polynom auszurechnen!

$\Rightarrow x_0 \Rightarrow$  Pröbeln (mit -1 oder 1 versuchen)

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12$$

$$\begin{array}{r} a_4 = 3 \\ a_3 = -2 \\ a_2 = 5 \\ a_1 = -7 \\ a_0 = -12 \\ \hline b_0 = 3 \\ b_1 = -8 \\ b_2 = 21 \\ b_3 = -48 \\ b_4 = 84 \end{array} \quad f(x_0) = 84$$

falls  $f(x_0) = 0 \Rightarrow q(x) = (x+2)(3x^3 - 8x^2 + 21x - 49)$

#### Zerlegungssatz

Ist  $x_0$  eine Nullstelle, dann gilt:  
 $f(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$

(x-x0): Linearfaktor = Polynom vom Grad

1. Nullstellen:  $x_1 = 2, x_2 = -2$

2. Partialbruchzerlegung:  $x_1 = 2 \rightarrow \frac{A}{x-2}, x_2 = -2 \rightarrow \frac{B}{x+2}$

3. Gleichsetzen:  $\frac{22x-26}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$  ( $= \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$ )

4. Zeilenweise Differenzieren:  $22x-26 = A(x+2) + B(x-2)$

$$\begin{cases} x=2 \text{ einsetzen: } 4A = 4A \\ x=-2 \text{ einsetzen: } -2B = -4B \end{cases} \Rightarrow A = 4, B = 13.5$$

$$\text{Somit: } \frac{22x-26}{x^2-4} = \frac{4}{x-2} + \frac{13.5}{x+2}$$

#### II Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x-x_0} dx = \ln|x-x_0| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^r} dx = \frac{1}{(1-r)(x-x_0)^{r-1}} + C$$

## 5 Uneigentliche Integrale

⇒ Unendlicher Integrationsbereich oder Polstelle

Existiert, falls der Grenzwert (rechts) berechnet werden kann:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

### 5.1 Uneigentlicher Integrationsbereich

#### Uneigentliche Integrale erster Art

$$\int_a^{\infty} f(x) \cdot dx, \quad \int_{\infty}^b f(x) \cdot dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx, \quad (f(x): stetig)$$

Integration über  $[a, \lambda]$

$$I = \int_a^{\infty} f(x) \cdot dx, \quad I(\lambda) = \int_a^{\lambda} f(x) \cdot dx$$

Grenzübergang  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda)$

$$I = \int_a^{\infty} f(x) \cdot dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \int_a^{\lambda} f(x) \cdot dx \right)$$

Falls der Grenzwert  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda)$  existiert, heisst das Integral  $\int_a^{\infty} f(x) \cdot dx$  konvergent, sonst divergent.

#### Beispiel

$$I = \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx$$

Integration über  $[1, \lambda]$

$$I(\lambda) = \int_1^{\lambda} \left( \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx = \left| \left( -\frac{1}{x} \right) \right|_1^{\lambda} = -\frac{1}{\lambda} + 1$$

Grenzübergang  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda)$

$$I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \int_1^{\lambda} \left( \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx \right) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\lambda} + 1 \right) = 1$$

Der Grenzwert  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda)$  existiert → konvergent

#### Beispiel

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\log(x)}{x^2} dx &= \left[ -\frac{1}{x} \cdot \log(x) \right]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \text{Partielle Integration} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\underbrace{\frac{\log(x)}{x}}_{\rightarrow \infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \Rightarrow \quad \text{Anwendung von Bernoulli} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} + \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} - (-1) = 1 \end{aligned}$$

### 5.2 Integration über Polstelle

#### Uneigentliche Integrale zweiter Art

Vorgehen zur Berechnung  $f(x)$ , mit Pol bei  $x = a$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

Integration über  $[a + \epsilon, b]$

$$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x) \cdot dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{a+\epsilon}^b f(x) \cdot dx \right)$$

#### Beispiel

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

$$\int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = |2\sqrt{x}|_0^1 = 2 - 2 \cdot \sqrt{\epsilon}$$

Im Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2$$

#### Beispiele

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[ \sqrt{2x} \right]_0^1 = 2 - 2\sqrt{0} \\ &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0} 2 - 2 \underbrace{\sqrt{t}}_0 = 2 - 2 \cdot 0 = 2 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \left[ \ln(1x) \right]_0^1 = \underbrace{\ln(1)}_0 - \underbrace{\ln(t)}_{-\infty} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 - (-\infty) \rightarrow \infty$$

Integral existiert nicht

## 6 Anwendungen der Integralrechnung

Der Mittelwert  $\mu$  einer Funktion  $f(x)$  auf dem Intervall von  $[a, b]$ .

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Volumen eines Rotationskörpers

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \cdot dx$$

Beispiel

$$y = -\frac{1}{16}x^2 + 5$$

$$V = \pi \int_{-4}^4 \left( -\frac{1}{16}x^2 + 5 \right)^2 \cdot dx = \frac{2624 \cdot \pi}{15}$$

Bogenlänge einer Kurve

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Beispiel

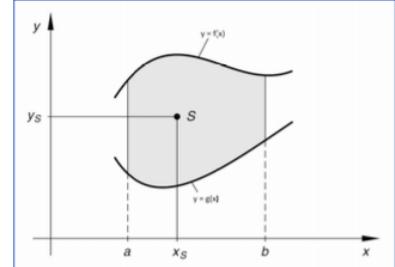
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2, I = [0, 3] \rightarrow L = \int_0^3 \sqrt{1+x^2} dx$$

Schwerpunkte von Flächen

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \cdot dx$$

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b (x \cdot (f(x) - g(x))) \cdot dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) \cdot dx$$



Schwerpunkt von Volumen

Die x-Koordinate des Schwerpunkts  $S = (x_s, 0, 0)$  eines Rotationskörpers mit Volumen  $V$ , der durch Rotation der Kurve  $y = f(x)$  um die x-Achse zwischen  $x = a$  und  $x = b$  gebildet wird, wobei  $a < b$  und  $f(x) \geq 0$  für alle  $a \leq x \leq b$  gilt, ist durch folgende Formel gegeben:

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b (x \cdot f(x)^2) \cdot dx$$

Mantelfläche eines Rotationskörpers

- $A_{Mantel} = (R + r) \cdot \pi \cdot m$

$$M = 2\pi \int_a^b (f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}) \cdot dx$$

Beispiel

$$f(x) = 3x + 2, I = [0, 2] \rightarrow M = 2\pi \int_0^2 ((3x+2) \cdot \sqrt{1+(3)^2}) \cdot dx = 62.83$$

Volumen eines Rotationskörpers (Drehung um x-Achse)

Wir betrachten eine Funktion  $f$  mit  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Dreht man das Flächenstück, das zwischen dem Graphen von  $f$ , der x-Achse und den beiden Grenzen  $x = a$  und  $x = b$  liegt, um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper mit dem folgenden Volumen:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Volumen eines Rotationskörpers (Drehung um y-Achse)

Wir betrachten eine Funktion  $y = f(x)$  mit  $x \geq 0$  für alle  $y \in [c, d]$ . Dreht man das Flächenstück, das zwischen dem Graphen von  $f$ , der y-Achse und den beiden Grenzen  $y = c$  und  $y = d$  liegt, um die y-Achse, so entsteht ein Rotationskörper mit dem folgenden Volumen:

$$V = \pi \cdot \int_c^d (g(y))^2 dy$$

wobei  $g(y)$  die nach  $x$  aufgelöste Funktionsgleichung ist

### Rotationskörper Beispiele

Beispiel

Das Kurvenstück  $y = \sqrt{x}$  wird im Intervall  $0 \leq y \leq 5$  um die y-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers?

①

$$x = y^2 \rightarrow y = \sqrt{x}$$

$$V = \pi \cdot \int_0^5 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^5 y^4 dy = \pi \left[ \frac{y^5}{5} \right]_0^5 = \pi \cdot \frac{5^5}{5} = 625\pi$$

②

$$\begin{aligned} & y = \sqrt{x} \\ & x = \ln(1/y) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & V = \pi \int_1^{10} (\ln(1/y))^2 dy \\ & \ln(1/y) \cdot \ln(1/y) \end{aligned} \right. \\ & = \pi \cdot \left[ y(\ln^2(y) - 2(\ln(y)+2) + 2) \right]_1^{10}$$

③

$$\begin{aligned} & \text{Kugelform} \quad y = (x-1)^2 \\ & F = \pi \int_0^2 (\sqrt{y} + 1)^2 dy \\ & G = \pi \int_0^2 (-\sqrt{y} + 1)^2 dy \\ & V = F - G = \pi \int_0^2 ((\sqrt{y} + 1)^2 - (-\sqrt{y} + 1)^2) dy \end{aligned}$$

# 7 Taylor-Reihen

Beispiel Taylor-Reihe mit  $f(x) = x * e^x$

(a)

**1P (Ableitungen)**

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^x \implies f(0) = 0 \\ f'(x) &= e^x + xe^x \implies f'(0) = 1 \\ f''(x) &= e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x \implies f''(0) = 2 \\ f'''(x) &= 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x \implies f'''(0) = 3 \\ f^{(n)}(x) &= ne^x + xe^x \implies f^{(n)}(0) = n \quad \text{1P (Verallgemeinerung)} \end{aligned}$$

Die Taylorreihe ist somit gegeben durch  $Tf(x) = x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n \quad \text{2P (Reihe)}$

## 1. Polynom vom Grad 1 (zwei Bedingungen)

**Repetition:** Die beste **lineare Approximation** an eine Funktion  $f$  in der Nähe einer gegebenen Stelle  $x_0$  wird durch die **Tangente** an  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  erreicht.

**Tangenten-Gleichung:**  $p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

In unserem Beispiel ( $f(x) = e^{2x}, x_0 = 1$ )  $p_1(x) = e^2 + 2e^2 \cdot (x - 1)$

**Taylorpolynom  $n$ -ter Ordnung von  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$**

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot (x - x_0)^k$$

Vorgehen

1.  **$n$ -te Ableitung** berechnen  $f^{(n)}(x) = \dots$
2.  $x_0$  in Ableitungen einsetzen  $f^{(n)}(x_0) = \dots$
3. Vorfaktoren  $a_0 - a_n$  bestimmen  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}$
4. Taylorreihe  $t_f(x)$  bestimmen  $t_f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots + a_n \cdot (x - x_0)^n$

**Binomialreihe**

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\alpha \\ t_f(x) &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 \dots \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}x^k \\ (1+x)^n &= 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^n \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{1}{2}; a_k &= \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha-3) \dots (\alpha-k+1)}{k!} \\ a_0 &= \binom{0.5}{0} = 1 \\ a_1 &= \binom{0.5}{1} = \frac{\alpha}{k!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \\ a_2 &= \binom{0.5}{2} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{k!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2!} = -\frac{1}{8} \\ a_3 &= \binom{0.5}{3} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)}{k!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

1. **4-te Ableitung** berechnen

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \\ f''(x) &= \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{5}{2}} \\ f^{(3)}(x) &= -\frac{15}{8} \cdot x^{-\frac{7}{2}} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{105}{16} \cdot x^{-\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

2.  $x_0 = 1$  in Ableitungen einsetzen

$$\begin{aligned} f(1) &= x^{-\frac{1}{2}} = 1 \\ f'(1) &= -\frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \\ f''(1) &= \frac{3}{4} \cdot 1^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4} \\ f^{(3)}(1) &= -\frac{15}{8} \cdot 1^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{8} \\ f^{(4)}(1) &= \frac{105}{16} \cdot 1^{-\frac{9}{2}} = \frac{105}{16} \end{aligned}$$

3. Vorfaktoren  $a_0 - a_n$  bestimmen

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{0!} \cdot 1 = 1 \\ a_1 &= \frac{1}{1!} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ a_2 &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \\ a_3 &= \frac{1}{3!} \cdot -\frac{15}{8} = -\frac{15}{48} = -\frac{5}{16} \\ a_4 &= \frac{1}{4!} \cdot \frac{105}{16} = \frac{105}{384} = \frac{35}{128} \end{aligned}$$

4.  $x_0 = 1$  in Taylorreihe einsetzen

$$t_f(x) = 1 + -\frac{1}{2} \cdot (x-1) + \frac{3}{8} \cdot (x-1)^2 + -\frac{5}{16} \cdot (x-1)^3 + \frac{35}{128} \cdot (x-1)^4$$

**Konvergenzradius  $\rho$  einer Potenzreihe**

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \\ \rho &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \quad \rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \end{aligned}$$

- Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < \rho$  konvergiert
- Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| > \rho$  divergiert

**Der Konvergenzbereich von  $p(x)$  ist das Intervall  $I$**

$$I = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Zusammen mit 0, 1 oder 2 Randpunkten dieses Intervalls.

**Präzision der Approximation**

Für die Abschätzung des Fehlers bzw. Restglieds

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

Es gibt ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ , so dass für das Restglied  $R_n(x)$  gilt:

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right|$$

Beispiel

Fehler bei Approximation von  $f(x) = e^x$  durch  $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$  im Intervall  $[0, 1]$

$$R_3(x) = |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{f^4(\xi)}{4!} \cdot (1-0)^4$$

$$\leq \frac{e^{\xi}}{24} \leq \frac{e}{24} \approx 0.113$$

$$x = 1 \cdot e^1 = 2.71828 \dots$$

$$p_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \approx 2.667 \rightarrow \Delta = 0.0516 (< 0.113)$$

**Bestimme den Konvergenzbereich**

$$p_1(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \dots \rightarrow a_k = \frac{1}{2^k}$$

1. **Radius berechnen**

$$\frac{\frac{1}{2^{(k)}}}{\frac{1}{2^{(k+1)}}} = \frac{1}{2^{(k)}} \cdot \frac{2^{(k+1)}}{1} = 2$$

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |2| = 2$$

2. **Randpunkte  $x = \pm \rho$  prüfen**

$$x = 2 \quad 1 + 1 + 1 + 1 \dots \rightarrow \text{divergent } (2 \notin I)$$

$$x = -2 \quad 1 - 1 + 1 - 1 \dots \rightarrow \text{divergent } (-2 \notin I)$$

$$I = (-2; 2)$$

**Regel von Bernoulli-de l'Hospital (BH)**

Ausdrücke der Form  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Vorgängige Umformungen

- $0 \cdot \infty \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
- $\infty - \infty \quad f(x) - g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)-f(x)}}$

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{0}{0} \xrightarrow{BH} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x}{1} \right) \rightarrow x = 0: \frac{e^0}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 3x + 7} \right) = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{BH} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{4x+3} \right) \rightarrow x = \infty: \frac{1}{2}$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \Rightarrow \text{für } x=0 = 0$$

abwechselnde Vorzeichen =  $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$  oder  $a_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^k}{3^k \cdot k^2}}{\frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1} \cdot (k+1)^2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^{k+1} \cdot (k+1)^2}{3^k \cdot k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot (k+1)^2}{k^2} = 3$$

# 8 Differentialgleichungen

Eine **Differentialgleichung (DGL)**  $n$ -ter Ordnung ist eine Gleichung

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Für eine gesuchte Funktion  $y = y(x)$ , in der Ableitung von  $y(x)$  bis zur  $n$ -ten Ordnung auftreten.

## Überprüfung einer Lösung

Wir können nachrechnen, ob eine Funktion tatsächlich eine Lösung einer bestimmten DGL ist.

## Zu Lösungen und Lösungsmengen einer Differentialgleichung

- $\mathbb{L} = \text{Menge von Funktionen}$
- Eine DGL ist eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen
- Die Lösung ist erst dann eindeutig, wenn man zusätzlich zur DGL noch eine oder mehrere **Anfangsbedingungen** vorgibt.
- Eine DGL zusammen mit einer Anfangsbedingung ist ein **Anfangswertproblem**.

Die Menge aller Lösungen einer DGL nennt man die **allgemeine Lösung** der DGL.

**Anfangswertproblem (spezielle / partikuläre Lösung)** AWP für explizite DGL  $n$ -ter Ordnung

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = G(x, y) & (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) = y_0 & \square \\ y'(x_0) = y_1 & \square \\ \vdots & \vdots \\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} & \square \end{cases}$$

**Anfangswertproblem AWP** für explizite DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y' = G(x, y) & (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) = y_0 & \square \end{cases}$$

## Spezielle Typen von DGL

- **Unbestimmtes Integral**  $y' = f(x)$  Das Richtungsfeld ist unabhängig von  $y$
- **Autonome DGL**  $y' = f(y)$  Das Richtungsfeld ist unabhängig von  $x$

## Beispiel

Differentialgleichung (DFG):  $y' = x + y$

Lösung zu prüfen:  $y_1 = e^x - 1$

- Linke Seite LS  $y' = (e^x - 1)' = e^x$
- Rechte Seite RS  $x + y = x + (e^x - 1)$

$LS \neq RS \rightarrow \text{Keine Lösung der DFG}$

Lösung zu prüfen:  $y_2 = -x - 1$

- Linke Seite LS  $y' = (-x - 1)' = -1$
- Rechte Seite RS  $x + y = x + (-x - 1) = -1$

$LS = RS \rightarrow \text{Lösung der DFG}$

## Beispiel

$$AWP: \begin{cases} y' = x - 4 \\ y(2) = 9 \end{cases}$$

$$y = \int (x - 4) \cdot dx$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$$

$$y(2) = 2 - 8 + C = 9 \rightarrow C = 15$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$$

## Konstante Lösungen

Falls  $f(y_0) = 0$ , ist  $y = y_0$  eine **konstante Lösung der autonomen DGL**  $y' = f(y)$ . Um die konstante Lösung der DGL zu finden, müssen wir die Gleichung  $f(y) = 0$  lösen.

- Stabil Benachbarte Lösungen werden **angezogen**
- Instabil Benachbarte Lösungen werden **abgestossen**
- Semi-Stabil **Anziehung** auf einer, **Abstossung** auf der anderen Seite

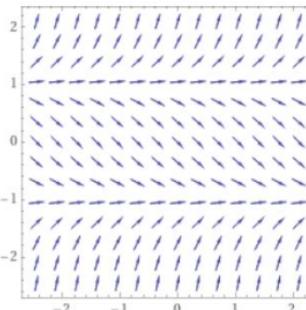
## Beispiel

$$y' = y^2 - 1$$

- $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow y = 1: \text{Konstante Lösung}$
- $f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \rightarrow y = -1: \text{Konstante Lösung}$

Werte in der Nähe der Konstanten Lösung einsetzen

- $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$
- $f(1.5) = (1.5)^2 - 1 = 1.25$
- $f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \rightarrow \text{Instabil}$
- $f(0.5) = (0.5)^2 - 1 = -0.75$
- $f(0) = (0)^2 - 1 = -1$
- $f(-0.5) = (-0.5)^2 - 1 = -0.75$
- $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow \text{Stabil}$
- $f(-1.5) = (-1.5)^2 - 1 = 1.25$
- $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$



## Euler-Schritte (Numerischer Lösungsansatz für DGL)

Beispiel:  $y' = x + y$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $h = 1$   
 $F(x, y)$  Intervall

Steigung Gerade	Berechnung	Beispiel
$g_0: m_0 = F(x_0, y_0) = 0 + 1 = 1$	$x_1 = x_0 + h$ $y_1 = y_0 + h \cdot F(x_0, y_0)$	$= 0 + 1 = 1$ $= 1 + 1 \cdot (0 + 1) = 2$
$g_1: m_1 = F(x_1, y_1) = 1 + 2 = 3$	$x_2 = x_1 + h$ $y_2 = y_1 + h \cdot F(x_1, y_1)$	$= 1 + 1 = 2$ $= 2 + 1 \cdot (1 + 2) = 5$
$g_2: m_2 = F(x_2, y_2) = 2 + 5 = 7$	$x_3 = x_2 + h$ $y_3 = y_2 + h \cdot F(x_2, y_2)$	$= 2 + 1 = 3$ $= 5 + 1 \cdot (2 + 3) = 12$

## 8.1 Separierbare DGL

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

### Separierbare Differentialgleichung

Explizite Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = F(x, y)$$

- Separierbar falls  $y' = g(x) \cdot h(y)$
- Autonom falls  $y' = f(y)$

Allgemein	Beispiel
$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$	$y' = -\frac{x}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
Trennung aller x- und y-Terme	Trennung aller x- und y-Terme
$\frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$	$y \cdot dy = -x \cdot dx$
Integration auf beiden Seiten	Integration auf beiden Seiten
$\int \left( \frac{1}{h(y)} \right) \cdot dy = \int g(x) \cdot dx$	$\int (y) \cdot dy = - \int (x) \cdot dx$ $\frac{1}{2} y^2 + C_1 = -\frac{1}{2} x^2 + C_2$
Auflösen nach y	Auflösen nach y
$\int_{y_0}^y \frac{1}{h(s)} \cdot ds = \int_{x_0}^x g(t) \cdot dt$	$y^2 = -x^2 + 2C$ $y = \pm \sqrt{K - x^2}$

Rezept für die Lösung von separierbaren Differentialgleichungen

(I)  $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

(II) Trennung der Variablen:  $\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$

(III) Integration auf beiden Seiten der Gleichung (falls möglich!)

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \, dx$$

(IV) Auflösen nach y (falls möglich!)

### Anfangsbedingung

3.  $x + y \cdot y' = 0$ , mit der Anfangsbedingung  $y(3) = -4$ .

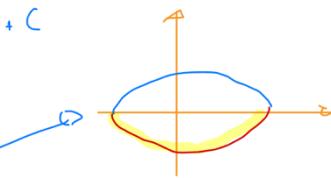
(I)  $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

(II)  $y \, dy = -x \, dx$

(III)  $\int y \, dy = \int -x \, dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$

(IV)  $y^2 = -x^2 + C$

$y = \pm \sqrt{-x^2 + C}$



Einbezug der Anfangsbedingung:

$y(3) = -4$

Einsatz 2cn:  $x = 3 \quad y = -4$

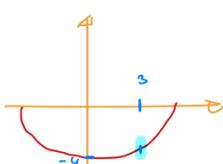
$-4 = \pm \sqrt{-9 + 2C}$

$4 = \sqrt{-9 + 2C}$

$16 = -9 + 2C$

$25 = 2C \Rightarrow C = 12,5$

$\Rightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2}$



## 8.2 Lineare DGL (Variation der Konstanten)

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

### Lösungsverfahren 'Variation der Konstanten' für lineare Differentialgleichungen

- (I) Vergleich der gegebenen Differentialgleichung mit der *allgemeinen* Form  $y' + f(x) \cdot y = g(x)$  und Bestimmung von  $f(x)$  und  $g(x)$ . ( $\triangle$  Vorzeichen)
- (II) Bestimmung der Stammfunktion  $F(x)$  von  $f(x)$ .
- (III) Einsetzen in die Formel  $y_0 = C \cdot e^{-F(x)}$  liefert die Lösung der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung.
- (IV) Das Ersetzen von  $C$  durch eine noch zu bestimmende Funktion  $K(x)$  führt zum folgenden Ansatz für die *allgemeine* Lösung:

$$y = K(x) \cdot e^{-F(x)}$$

- (V) Die Funktion  $K(x)$  lässt sich durch die folgende Formel berechnen.

$$K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$$

( $\triangle$  Integrationskonstante nicht vergessen!)

- (VI) Einsetzen von  $K(x)$  in den Ansatz aus (IV) ergibt die *allgemeine* Lösung.

**homogene DGL:**  $y' + a(x)y = b(x) = 0 \Rightarrow$  kann zu einer separierbaren DGL umgeformt werden!

#### Beispiele

Bsp (1) (Fortsetzung)  $y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$

Bereits bestimmt (vgl. Seite 33):

$$(I) f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \cos(x) \quad (II) F(x) = \ln(x) \quad (III) y_0 = \frac{C}{x}$$

$$(IV) \text{Ansatz: } y = \frac{K(x)}{x}$$

$$(V) K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx = \int \cos(x) \cdot e^{\ln(x)} dx = \int \cos(x) \cdot x dx \\ (\text{mit Hilfe einer Integraltafel, z.B. gelbe Seiten vom Papula}) = x \sin(x) + \cos(x) + C_2$$

$$(VI) K(x) \text{ in den Ansatz aus (IV) einsetzen: } y = \frac{K(x)}{x} = \frac{x \sin(x) + \cos(x) + C_2}{x}$$

Bsp (2)  $y' = 4y + e^{3x}$      $y' - 4y = e^{3x}$

$$(I) f(x) = -4 \quad g(x) = e^{3x} \quad (II) F(x) = -4x$$

$$(III) \text{Lösung der zugehörigen homogenen Dgl: } y_0 = C \cdot e^{-F(x)} = C \cdot e^{-4x}$$

$$(IV) \text{Ansatz: } y = K(x) \cdot e^{-4x}$$

$$(V) K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx = \int e^{3x} \cdot e^{-4x} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

$$(VI) K(x) \text{ in den Ansatz aus (IV) einsetzen: } y = \underline{\underline{(-e^{-x} + C)}} \cdot e^{-4x}$$