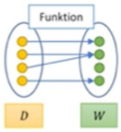
Funktionen

Definition

Jedem Element einer Menge D wird genau ein Element aus einer Menge W zuordnet.

$$f: D \to W$$
$$x \to f(x) = \cdots$$



Polynome und Polynomdivision

$$(x^3 - 2x^2 - 5x - 6):(x-1) = x^2 - x - 6 \quad | \; x^3 : x = x^2$$
$$-(x^3 - x^2)$$
$$-x^2 - 5x \quad | -x^2 : x = -x$$
$$-(x^2 - x)$$
$$-6x + 6 \quad | -6x : x = -6$$
$$-(-6x+6)$$
$$0$$

Eine *Polynomfunktion* vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Quadratische Funktionen

$y = ax^2 + bx + c$

Nullstellen

- $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
- $x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

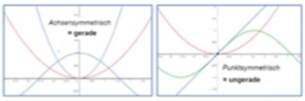
Scheitelpunkt

- $y = a(x - x_0)^2 + y_0$
- $S = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

Eigenschaften von Funktionen

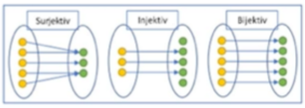
Symmetrie

- *gerade* $\quad f(-x) = f(x)$
- *ungerade* $\quad f(-x) = -f(x)$



Monotonie

- *monoton wachsend* $\quad f(x_1) \le f(x_2)$
- *streng monoton wachsend* $\quad f(x_1) < f(x_2)$
- *monoton fallend* $\quad f(x_1) \ge f(x_2)$
- *streng monoton wachsend* $\quad f(x_1) > f(x_2)$



Operationen von Funktionen

- Addition $\quad x \to f(x) + g(x)$
- Subtraktion $\quad x \to f(x) - g(x)$
- Multiplikation $\quad x \to f(x) \cdot g(x)$
- Division $\quad x \to f(x) \,/\, g(x)$

Komposition

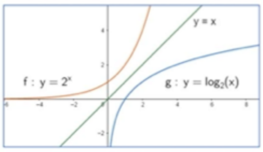
- Verkettung $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Umkehrfunktion

- Bijektive Funktion $\quad f: D \to W$
- Umkehrfunktion f^{-1} $\quad g: W \to D$

Vorgehen $f(x) = y$

- Nach x auflösen $\quad \to x = g(y)$
- Variablen vertauschen $\to y = g(x)$



Intervalle

- Abgeschlossen $\quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$
- Offen $\quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- Halboffen $\quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$
- Unendlich $\quad [a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \le x\}$

Folgen und Reihen

Definition

- $n \in \mathbb{N}^* \to a_n \in \mathbb{R}$
- $(a_k) = (a_k)_{k \ge 1} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n-1}, \ldots)$

Die Elemente einer Folge heissen *Glieder* der Folge $\to a_n$.

Abkürzungen

- A = Anfangs-Glied
- d = Differenz
- q = Quotient

Arithmetische Folge	Geometrische Folge
$a_k = (2,3,4,5,\ldots) \to d = 1, A = 2$	$a_k = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right) \to q = \frac{1}{2}, A = 1$
N-tes Glied: $a_n = A + (n-1) \cdot d$	N-tes Glied: $a_n = A \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q} \cdot q^n$
Mittelwert: $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$	Mittelwert: $\lvert a_k \rvert = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$
Partial-Summe: $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \left(A + \frac{n-1}{2} \cdot d\right)$	Partial-Summe: $S_n = A \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Grenzwerte von Folgen

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) hat einen *Grenzwert / Limes* falls die Zahl $a \in \mathbb{R}$ jede noch so kleine Umgebung des Grenzwertes erreicht und nicht mehr verlässt.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N: |a_n - a| < \epsilon$$

- Folgen mit Grenzwert — *Konvergent* — $a_n = \frac{1}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots)$
- Folgen ohne Grenzwert — *Divergent* — $a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, -1 \ldots)$
- Beliebig gross (∞) / klein $(-\infty)$ — *bestimmt divergent* — $a_n = 3 + 2n = (5, 7, 9, 11, \ldots)$

Eine Folge (a_n) besitzt höchstens einen Grenzwert!

Unendliche geometrische Reihe

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} A q^{k-1} = \frac{A}{1-q}$$

Bedingung

- $|q| < 1$

Beispiel

$$a_k = \frac{7}{2^{k-1}} = 7 + \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \frac{7}{8} \ldots = 14$$

- $q = \frac{1}{2} \to$ Die Reihe *konvergiert*
- $S = \frac{A}{1-q} = \frac{7}{1-\frac{1}{2}} = 14$

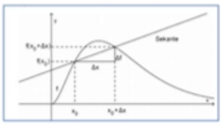
Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Sekanten-Steigung

Sei f eine Funktion und $[x_0, x_0 + h]$ ein Intervall im Definitionsbereich von f. Der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

heisst *Differenzenquotient* von f.



Tangentengleichung

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

"Linearisierung" (Approximation)

Grenzwert einer Funktion

Die Funktion $y = f(x)$ hat an der Stelle x_0 den *Grenzwert* y_0, falls

- für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$

Bemerkungen

- Die Stelle x_0 muss nicht im Definitionsbereich D sein

Konvergenz / Divergenz

- *Konvergenz* — Funktion mit Grenzwert $x \to \infty$
- *Divergenz* — Funktion ohne Grenzwert $x \to \infty$
- *Bestimmte Divergenz* — Funktion mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$

Beispiel *Grenzwert*

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ an der Stelle $x_0 = 1$

n	$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	$f(x_n)$
1	0	1
2	0.5	1.5
3	0.66	1.66
4	0.75	1.75
5	0.8	1.8
10	0.9	1.9
100	0.99	1.99
1000	0.999	1.999
$n \to \infty$	$x_0 = 1$	2

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Differenzierbar

Wenn für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Existiert, so heisst f an der Stelle x_0 *differenzierbar*. Den Grenzwert selbst bezeichnet man als *Ableitung*.

Eine Funktion ist *differenzierbar, falls*

- Die Kurve keine Knicke macht

Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion ist *stetig*, falls

- die Kurve keine Sprünge macht
- man den Graphen der Funktion zeichnen kann, ohne den Stift dabei abzusetzen

Rechnen mit Grenzwerten

Harmonische Folge	Geometrische Folge	n-te Wurzel	Eulerzahl
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Erweitern mit $\frac{1}{n^k}$

- k = höchste Potenz

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 4n + 2}$$

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{3n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 4n + 2} = \frac{\frac{3n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2} + \frac{4n}{n^2} + \frac{2}{n^2}}$$

$$\frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{5 + 0 + 0}$$

Erweitern mit $\frac{1}{a^k}$

- k = höchste Potenz
- a = grösste Basis

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2}$$

$$\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} \cdot \frac{3 \cdot 3^n + 2^n}{3^n + 2} = \frac{\frac{3 \cdot 3^n}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n} + \frac{2}{3^n}}$$

$$\frac{3 + \frac{2^n}{3^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} = \frac{3 + 0}{1 + 0}$$

Erweitern mit $\sqrt{a(n)} + \sqrt{b(n)}$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n} = \frac{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 2n}}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 2n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}}{1}$$

$$\frac{\left(\sqrt{n^2 + n}\right)^2 - \left(\sqrt{n^2 - 2n}\right)^2}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}} = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{3n}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}}$$

$$\frac{\frac{3n}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot (n^2 + n)} - \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot (n^2 - 2n)}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{n^2 + n}{n^2}} - \sqrt{\frac{n^2 - n}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{3}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

Erweitern zu $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n$

- $\lim_{x\to\infty} \left(\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^a\right) = e^a$

Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{4n} = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{3n}{2}}\right)^{\frac{3n}{2}}\right)^a = e^a = e^{\frac{8}{3}}$$

$$4n = \frac{3n}{2} \cdot a$$

$$a = \frac{4n}{\frac{3n}{2}} = \frac{8}{3}$$

1.1 Grenzwerte von Folgen im Unendlichen

⇨ Die Folgenglieder kommen ab einem gewissen n dem Wert g (Grenzwert) beliebig nahe

- Folgen mit Grenzwert — *Konvergent* — $a_n = \frac{1}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots)$
- Folgen ohne Grenzwert — *Divergent* — $a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, -1 \dots)$
- Beliebig gross (∞) / klein (−∞) — *bestimmt divergent* — $a_n = 3 + 2n = (5, 7, 9, 11, \dots)$

Folgen haben maximal einen Grenzwert!

1.1.1 Rechnen mit Grenzwerten (für $\boldsymbol{n} \to \infty$)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) - \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)}$, $\quad$ falls $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n.

<u>Falls gilt</u>: $\frac{\text{"Polynom"}}{\text{"Polynom"}}$

Fall 1: **Zählergrad < Nennergrad**. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(n)}{h(n)} = 0$

Fall 2: Zählergrad $>$ Nennergrad. Dann gilt: $\dfrac{g(n)}{h(n)}$ kein Grenzwert (→ ∞ oder - ∞)

Fall 3 Zählergrad $=$ Nennergrad. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(n)}{h(n)} = \dfrac{\text{"führender Term von g"}}{\text{"führender Term von h"}}$ => Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 + n^2 + 7n}{5n^3 + 4n^2 + 17} = \dfrac{2}{5}$

1.2 Grenzwert von Reihen

Grenzwert = $a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$ $falls\ |q| < 1$

falls $|q| > 1$ hat die Reihe keinen Grenzwert!

<u>Beispiel</u>

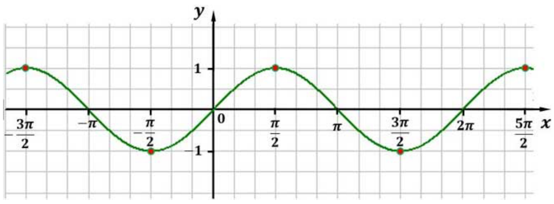
$$\sum_{k=1}^{\infty} 3 \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = 3 \cdot \frac{1}{1 - 4/5} = 15$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} (8 + 7k)}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} (8 + 7k) = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 7 = 15n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 7$$

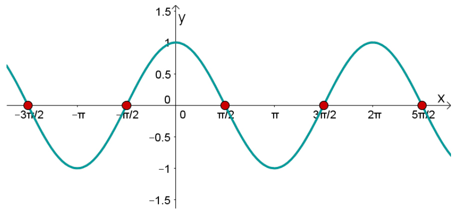
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} (8 + 7k)}{n^2} = \frac{15n + \frac{7}{2} \cdot n(n-1)}{n^2} = \frac{\frac{7}{2} n^2 + \cdots}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{2}$$

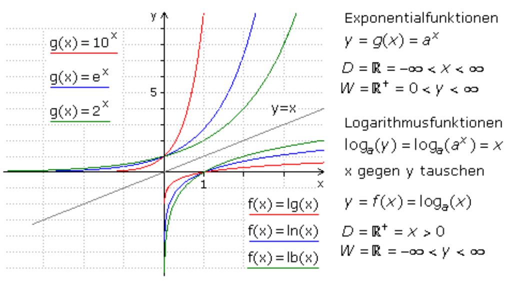
1.3 Beispiel-Funktionen

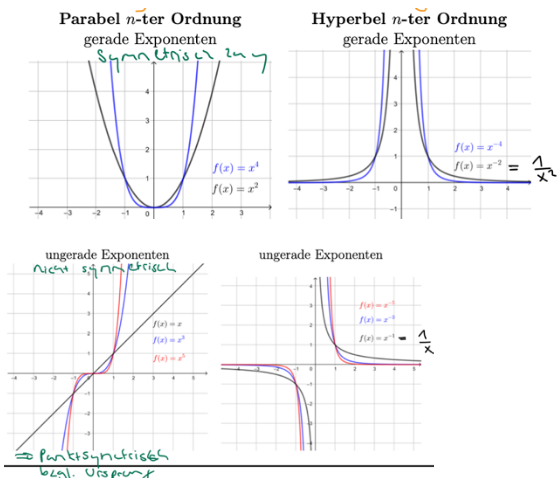
Sinus



Cosinus

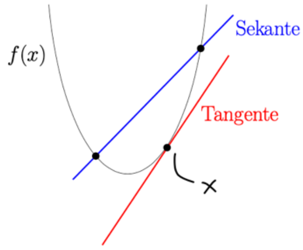






2 Ableitung

⇨ **Steigung der Tangente bei einem Funktionswert**



Anzahl Wendepunkte + 1 = Grad der Funktion

2.1 Ableitungsregeln

- Summe / Differenz

  $f(x) = u + v$ $\qquad$ $f'(x) = u' + v'$

- Produkt

  $f(x) = u \cdot v$ $\qquad$ $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

- Quotient

  $f(x) = \frac{u}{v}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

- Kettenregel

  $f(x) = (u \circ v) = u(v)$ $\qquad$ $f'(x) = u'(v) \cdot v'$

- Logarithmus

  $f(x) = u^v$ $\qquad$ $f'(x) = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln(u) + v \cdot \frac{u'}{u}\right)$

- Umkehrfunktion

  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

<u>Kettenregel Beispiele</u>

$f(x) = (3x-2)^8$
$\text{v} = 3x - 2 \rightarrow v' = 3$
Äussere Funktion: $u = v^8 \rightarrow u' = 8v^7$
$f(x)' = 8v^7 \cdot 3 = 24v^7 = 24(3x-2)^7$

$f(x) = e^{4x+2}$
Äussere Funktion: $\text{F}(u) = e^u \rightarrow F(u)' = e^u$
innere Funktion: $\text{u}(x) = 4x + 2 \rightarrow u'(x) = 4$
$f(x)' = F'(u) \cdot u'(x) = e^u * 4 = e^{4x+2} * 4$
<u>=> bei einem Bruch v nur im Nenner einsetzen!</u>

$g(x) = \sin^2(x)$
Äussere Funktion: $F(u) = \text{u}^2$
innere Funktion $u(x) = \sin(x)$
$g'(x) = F'(u) \cdot u'(x) = 2u \cdot \cos(x)$
$\qquad = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$

2.2 Grundfunktionen

- **Potenz**

  $f(x) = x^n$ $\qquad$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

- **Exponent**

  $f(x) = a^x$ $\qquad$ $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
  $f(x) = e^x$ $\qquad$ $f'(x) = e^x$

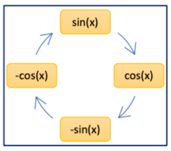
- **Logarithmus**

  $f(x) = \ln(x)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{x}$
  $f(x) = \log_a(x)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \frac{d}{dx}$$
$$(\sqrt{5x-1})' = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$
$$\left(\sqrt{3}e^x\right)' = \sqrt{3}e^x$$
$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$
$$(\ln(1-5x))' = -\frac{5}{1-5x}$$

Ableitung $f'(x)$	Ausgangsfunktion $f(x)$	Stammfunktion $\int f(x)dx$
0	$c \quad c \in \mathbb{R}$	cx
c	cx	$\frac{c}{2}x^2$
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln a \cdot a^x$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x(\ln\lvert x\rvert - 1)$
$\frac{1}{\ln a \cdot x}$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\ln a(\ln\lvert x\rvert-1)} = x(\log_a\lvert x\rvert - \log_a e)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

2.3 Geometrische Funktionen



$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- Tangens

  $f(x) = \tan(x)$ $\qquad$ $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

  $f(x) = \cot(x)$ $\qquad$ $f'(x) = -1 - \cot^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

2.4 Differenzierbarkeit

⇨ Steigungen «Hügel» die <u>«nicht smooth»</u> aufeinander treffen sind nicht differenzierbar = es gibt keine Ableitung!
⇨ Differenzierbar an der Stelle x0 => wenn die <u>linksseitige und rechtsseitige Ableitung übereinstimmt</u>

Differenzierbarkeit = Ableitung ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs definiert!

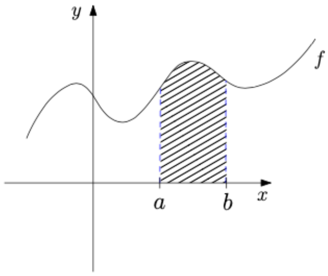
3 Integral

⇨ Fläche unter einem Kurvenstück

3.1 Unbestimmtes Integral

⇨ Ergibt keine Zahl, sondern eine Funktion!

$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$



$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ist eine Zahl, $\int f(x)\mathrm{d}x$ ist eine Funktion!

3.2 Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \; = \; [F(x)]_a^b$$

3.2.1 Stammfunktion

⇨ Durch «Aufleiten» einer Funktion bestimmt man die Stammfunktion

$$F(x) = \left(\frac{1}{n+1}\right) * \; ax^{n+1} + \cdots + c$$

$$f'''(x) = 12x + 6$$
$$f''(x) = 6x^2 + 6x + c$$
$$f'(x) = 2x^3 + 3x^2 + cx + d$$
$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx \cdot e$$

Spezialfall: $g(x) = \frac{1}{x}: G(x) = \ln(|x|)$

3.2.2 Integrationsregeln

$$\int_a^b c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) \cdot g(x))\mathrm{d}x \neq \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right) \text{ und } \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x \neq \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

3.3 Integrale bestimmter Funktionen

Unbestimmtes Integral

Potenzfunktionen

- $\int(x^\alpha)\,dx \quad = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
- $\int\left(\frac{1}{x}\right)dx \quad = \ln|x| + C$

Exponential- und Logarithmusfunktionen

- $\int(e^x)\,dx \quad = e^x + C$
- $\int(a^x)\,dx \quad = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
- $\int(\ln(x))\,dx \quad = x \cdot \ln(x) - x + C$
- $\int(\log_a(x))\,dx \quad = \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C$

Geometrische Funktionen

- $\int(\cos(x))\,dx \quad = \sin(x) + C$
- $\int(\sin(x))\,dx \quad = -\cos(x) + C$
- $\int(\tan(x))\,dx \quad = -\ln|\cos(x)| + C$

Weitere Funktionen

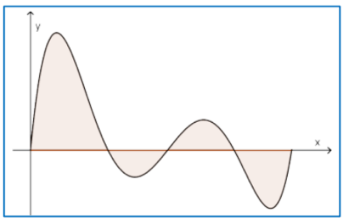
- $\int(\frac{1}{1+x^2})\,dx \quad = \arctan(x) + C$
- $\int(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\,dx \quad = \arcsin(x) + C$
- $\int(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\,dx \quad = \arccos(x) + C$

3.3.1 Berechnungen

Flächeninhalt bei **wechselndem Vorzeichen** von $f(x)$

- $[a, b] = \text{Intervall}$
- $x_1, x_2, \ldots, x_n = Nullstellen$

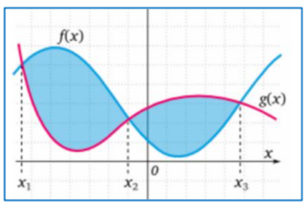
$$\left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \cdots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)\,dx\right|$$



Flächeninhalt zwischen **zwei Kurven** $f(x)$ und $g(x)$

- $[a, b] = \text{Intervall}$
- $x_1, x_2, \ldots, x_n = Schnittpunkte$

$$\left|\int_a^{x_1} (f(x) - g(x))\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\right| + \cdots + \left|\int_{x_n}^{b} (f(x) - g(x))\right|$$



4 Integrationsmethoden

Methode	Muster	Beispiel
Substitution	$\int g(f'(x))\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$	$\int e^{\cos(x)}\cdot\sin(x)$
partielle Integration	$\int \underset{\text{nach Ableiten einfacher}}{\underset{\uparrow}{u}} \cdot \underset{\text{nach Integration nicht komplizierter}}{\underset{\uparrow}{v}}$	$\int x\cdot e^x\,\mathrm{d}x$
Partialbruchzerlegung	$\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$	$\int\frac{4x^2+x+17}{4x^3+6x+3}\,\mathrm{d}x$

4.1 Partielle Integration

Partielle Integration

$$\int(u'(x)\cdot v(x))\cdot dx = u(x)\cdot v(x) - \int(u(x)\cdot v'(x))\cdot dx$$

$$\int_a^b(u'(x)\cdot v(x))\cdot dx = (u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b(u(x)\cdot v'(x))\cdot dx$$

Faustregel

- v Polynome $(x^n+\dots+c)$, $\ln(x)$ Ableitung $(v\to v')$
- u' Exp- $(e^x,\dots)$ / Trigo-Funktionen $(\sin(x),\dots)$ Integration $(u'\to u)$

Für v sollte der Faktor verwendet werden, der durch eine Ableitung vereinfacht werden kann.

Trigonometrische Funktionen

$$sin^2+cos^2=1$$

$$1-sin^2=cos^2$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan(α)	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–

α_{DEG}	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°
α_{RAD}	2π	$\frac{3}{2}\pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Beispiel 1

$$\int(\ln(x)\cdot x^2)dx$$

$$\int(\underbrace{x^2\cdot\ln(x)}_{u'\cdot v})\cdot dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}\cdot\ln(x)}_{u\cdot v} - \int(\underbrace{\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}}_{u\cdot v'})\,dx$$

$$\frac{x^3}{3}\cdot\ln(x) - \int\left(\frac{x^2}{3}\right)dx = \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} = \ln(x) - \frac{2x^3}{9}$$

Beispiel 2

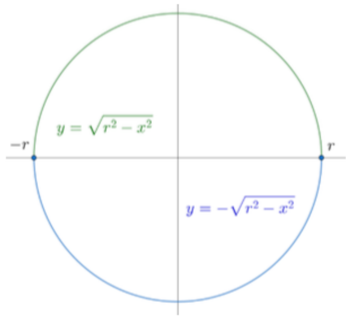
$$\int\left(\underbrace{(x+1)}_{v}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{u'}\right)dx$$

$$\int\left(\underbrace{(x+1)\cdot e^{-x}}_{v\cdot u'}\right)dx = \underbrace{(x+1)\cdot -e^{-x}}_{v\cdot u} - \int\left(\underbrace{1\cdot -e^{-x}}_{v'\cdot u}\right)\cdot dx$$

$$-e^{-x}\cdot(x+1) - e^{-x} + C = -e^{-x}\cdot x - 2e^{-x} + C$$

Kreisfunktion

$$y=\sqrt{x^2-r^2}$$



Beispiel 3 ("versteckte" Produkte)

$\int\ln(x)\,\mathrm{d}x$ $= \int\ln(x)\cdot 1\,dx$

$u(x) =$ $\ln(x)$ $v'(x) =$ 1

$u'(x) =$ $\frac{1}{x}$ $v(x) =$ x

$\int\ln(x)\,\mathrm{d}x =$ $\int\ln(x)\cdot 1\,dx = x\cdot\ln(x) - \int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$= x\cdot\ln(x) - \int 1\,dx$

$= \underline{\underline{x\cdot\ln(x) - x + C}}$

4.2 Partialbruchzerlegung, Substitution

Partialbruchzerlegung

Gegeben sei eine rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

- $\deg(p(x)) < \deg(q(x)) \rightarrow echt\ gebrochen$
- $p(x), q(x)$: *Polynome*

Nullstellen $(x_1 - x_n)$ bestimmen

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \underbrace{\frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)(x - x_2)}}_{doppelte\ Nullstelle\ x_2} + \cdots$$

Koeffizienten A, B_1, B_2 ... bestimmen

$$p(x) = A(x - x_2)(x - x_2) + B_1(x - x_1)(x - x_2) + B_2(x - x_1) + \cdots$$

Beispiel

Nullstellenform im Zähler

$$\frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}$$

Zuordnung eines Partialbruchs zu jeder Nullstelle

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)(x-2)}$$

Koeffizienten bestimmen

$$x + 1 = A(x-2)(x-2) + B_1(x-1)(x-2) + B_2(x-1)$$

$$A = 2, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = 3$$

Einsetzen in ursprüngliche Gleichung

$$\frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)(x-2)}$$

Integral zu berechnen (*nicht teil des Verfahrens*)

$$\int \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = 2 \cdot \ln|x-1| - 2 \cdot \ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C$$

Integration durch Substitution

Ableitung umschreiben

$$\frac{d \cdot g(x)}{dx} = g'(x)$$

$$u = g(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x)$$

Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot dx = \int \varphi(u) \cdot du$$

$$\int \varphi(u) \cdot du = \phi(u) + C$$

Rücksubstitution

$$\phi(u) + C = \phi(g(x)) + C$$

Beispiel - Substitution

Ableitung umschreiben

$$\frac{d \cdot x^2}{dx} = 2x$$

$$u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

Substitution

$$\int x \cdot \cos(x^2) \cdot dx = \int x \cdot \cos(u) \cdot \frac{du}{2x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int \cos(u)\, du = \frac{1}{2} \cdot \sin(u) + C$$

Rücksubstitution

$$\frac{1}{2} \cdot \sin(u) + C = \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2) + C$$

Weiteres Grundintegral

$$\int \frac{x - \beta}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} dx = \ln\sqrt{(x-\beta)^2 + \gamma^2} + C$$

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2 + \gamma^2} dx = \frac{1}{\gamma} \arctan\left(\frac{x - \beta}{\gamma}\right) + C$$

Substitution

=> bei **bestimmten** Integralen muss die Funktion g auch auf die Integrationsgrenzen angewendet werden!

Satz

Für eine Funktion f und Konstanten a, b gilt:

$$\int f(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax + b)$$

Beispiel: $\int \cos(5x + 7)\, dx$

$f(u) = \cos(u)$, $a = 5$, $b = 7$, $F(u) = \sin(u)$

$\int \cos(5x + 7)\, dx = \frac{1}{5} \sin(5x + 7) + C$

Partialbruchzerlegung

I Partialbruchzerlegung $f(x) = \frac{s(x)}{h(x)}$

1. Reelle Nullstellen des Nenners $h(x)$ mit Multiplizitäten bestimmen
2. Jeder dieser Nullstellen wird eine Summe von Brüchen zugeordnet:

$$x_1 \text{ ist einfache Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A}{x - x_1}$$

$$x_1 \text{ ist doppelte Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2}$$

$$x_1 \text{ ist } r-\text{fache Nullstelle} \quad \rightarrow \quad \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_r$ sind (zunächst noch unbekannte) reelle Konstanten.

3. $f(x)$ wird mit der Summe aller Partialbrüche gleichgesetzt.
4. Bestimmung der Konstanten $A, A_1, A_2, \ldots A_r$ etc
   (i) Alle Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen.
   (ii) Durch Einsetzen von x-Werten (z.B. Nullstellen der entsprechenden Polynome) erhält man ein lineares Gleichungssystem.
   (iii) Gleichungssystem lösen (z.B. mit Gauss-Algorithmus)

II Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x - x_0} dx = \ln|x - x_0| + C$$

$$\int \frac{1}{(x - x_0)^r} dx = \frac{1}{(1 - r)(x - x_0)^{r-1}} + C$$

Horner-Schema

Effiziente Weise, um ein Polynom auszurechnen!

⇒ X0 => Pröbeln (mit -1 oder 1 versuchen)

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x - 12$

	$a_4 = 3$	$a_3 = -2$	$a_2 = 5$	$a_1 = -7$	$a_0 = -12$
$x_0 = -2$		$b_3 \cdot x_0 = -6$	$b_2 \cdot x_0 = 16$	$b_1 \cdot x_0 = -42$	$b_0 \cdot x_0 = 98$
		+	+	+	+
	$b_3 = 3$	$b_2 = -8$	$b_1 = 21$	$b_0 = -49$	$f(x_0) = 86$

falls f(x0) = 0 => q(x) = $(x + 2)(3x^3 - 8x^2 + 21x - 49)$

Zerlegungssatz

Ist x0 eine Nullstelle, dann gilt:

$f(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$

(x-x0): Linearfaktor = Polynom vom Grad

1. Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$
2. Partialbruchzerlegung: $x_1 = 2 \rightarrow \frac{A}{x-2}$, $x_2 = -2 \rightarrow \frac{B}{x+2}$
3. gleichsetzen: $\frac{22x - 26}{x^2 - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \quad \left(= \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)} \right)$
4. Zähler gleichsetzen: $22x - 26 = A(x+2) + B(x-2)$

   $x = 2$ einsetzen: $18 = 4A$
   $x = -2$ einsetzen: $-70 = -4B$
   $\Rightarrow A = 4{,}5$, $B = 17.5$

   Somit: $\frac{22x - 25}{x^2 - 4} = \frac{4{,}5}{x-2} + \frac{17{,}5}{x+2}$

5 Uneigentliche Integrale

⇨ Unendlicher Integrationsbereich oder Polstelle

Existiert, falls der Grenzwert (rechts) berechnet werden kann:

$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\mathrm{d}x \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\mathrm{d}x$

5.1 Uneigentlicher Integrationsbereich

Uneigentliche Integrale erster Art

$$\int_a^\infty f(x)\cdot dx\,, \qquad \int_\infty^b f(x)\cdot dx\,, \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\cdot dx\,, \qquad (f(x)\colon stetig)$$

Integration über $[a, \lambda]$

$$I = \int_a^\infty f(x)\cdot dx\,, \qquad I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\cdot dx$$

Grenzübergang $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$

$$I = \int_a^\infty f(x)\cdot dx = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_a^\lambda f(x)\cdot dx\right)$$

Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$ existiert, heisst das Integral $\int_a^\infty f(x)\cdot dx$ *konvergent*, sonst *divergent*.

Beispiel

$$I = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx$$

Integration über $[1, \lambda]$

$$I(\lambda) = \int_1^\lambda \left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx = \left|\left(-\frac{1}{x}\right)\right|_1^\lambda = -\frac{1}{\lambda} + 1$$

Grenzübergang $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$

$$I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_1^\lambda \left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot dx\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda} + 1\right) = 1$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I(\lambda)$ existiert → *konvergent*

5.2 Integration über Polstelle

Uneigentliche Integrale zweiter Art

Vorgehen zur Berechnung $f(x)$, mit Pol bei $x = a$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx$$

Integration über $[a+\epsilon, b]$

$$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)\cdot dx = \lim_{\epsilon\to0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to0}\left(\int_{a+\epsilon}^b f(x)\cdot dx\right)$$

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx$$

$$\int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx = |2\sqrt{x}|_\epsilon^1 = 2 - 2\cdot\sqrt{\epsilon}$$

Im Grenzübergang $\epsilon \to 0$ ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx = \lim_{\epsilon\to0}\left(\int_{0+\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx\right) = \lim_{\epsilon\to0}(2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2$$

Beispiele

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\sqrt{2x}\right]_t^1 = 2 - 2\sqrt{t}$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{t\to0}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to0} 2 - 2\underbrace{\sqrt{t}}_{0} = 2 - 2\cdot0 = \underline{\underline{2}}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ $\quad \displaystyle\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln(|x|)\right]_t^1 = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \underbrace{\ln(t)}_{-\infty} \xrightarrow[t\to0]{} 0 - (-\infty) \to \infty$

Integral existiert nicht

6 Anwendungen der Integralrechnung

Der **Mittelwert** μ einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall von $[a, b]$.

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Volumen eines Rotationskörpers

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \cdot dx$$

Beispiel

$$y = -\frac{1}{16}x^2 + 5$$

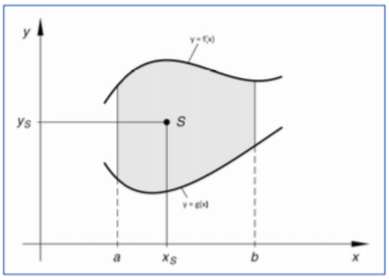
$$V = \pi \int_{-4}^{4} \left(-\frac{1}{16}x^2 + 5\right)^2 \cdot dx = \frac{2624 \cdot \pi}{15}$$

Schwerpunkte von Flächen

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) \cdot dx$$

$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b \left(x \cdot \left(f(x) - g(x)\right)\right) \cdot dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) \cdot dx$$



Schwerpunkt von Volumen

Die x -Koordinate des Schwerpunkts $S = (x_S, 0, 0)$ eines Rotationskörpers mit Volumen V, der durch Rotation der Kurve $y = f(x)$ um die x - Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ gebildet wird, wobei $a < b$ und $f(x) \geq 0$ für alle $a \leq x \leq b$ gilt, ist durch folgende Formel gegeben:

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b \left(x \cdot f(x)^2\right) \cdot dx$$

Bogenlänge einer Kurve

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2, I = [0, 3] \rightarrow L = \int_0^3 \sqrt{1 + x^2}\, dx$$

Mantelfläche eines Rotationskörpers

- $A_{Mantel} = (R + r) \cdot \pi \cdot m$

$$M = 2\pi \int_a^b \left(f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\right) \cdot dx$$

Beispiel

$$f(x) = 3x + 2, I = [0, 2] \rightarrow M = 2\pi \int_0^2 \left((3x + 2) \cdot \sqrt{1 + (3)^2}\right) \cdot dx = 62.83$$

Volumen eines Rotationskörpers (Drehung um x-Achse)

Wir betrachten eine Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dreht man das Flächenstück, das zwischen dem Graphen von f, der x-Achse und den beiden Grenzen $x = a$ und $x = b$ liegt, um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper mit dem folgenden Volumen:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Volumen eines Rotationskörpers (Drehung um y-Achse)

Wir betrachten eine Funktion $y = f(x)$ mit $x \geq 0$ für alle $y \in [c, d]$. Dreht man das Flächenstück, das zwischen dem Graphen von f, der y-Achse und den beiden Grenzen $y = c$ und $y = d$ liegt, **um die y-Achse**, so entsteht ein Rotationskörper mit dem folgenden Volumen:

$$V = \pi \cdot \int_c^d (g(y))^2 \, dy$$

wobei $g(y)$ die nach x aufgelöste Funktionsgleichung ist

Rotationskörper Beispiele

Beispiel

Das Kurvenstück $y = \sqrt{x}$ wird im Intervall $0 \leq y \leq 5$ um die y-Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen des entsprechenden Rotationskörpers?

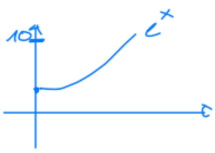
1

$x = y^2 \rightarrow g(y) = y^2$

$V = \pi \cdot \int_0^5 (y^2)^2 \, dy = \pi \int_0^5 y^4 \, dy$

$= \pi \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^5 = \pi \cdot \frac{5^5}{5} = \underline{\underline{625\pi}}$

2

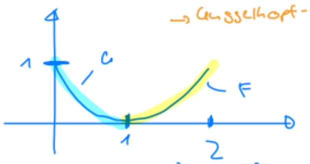


$\left.\begin{array}{l} y = e^x \\ x = \ln(|y|) \end{array}\right\} V = \pi \int_1^{10} \underbrace{(\ln(|y|))^2}_{\ln(|y|) \cdot \ln(|y|)} \, dy$

$= \pi \cdot \left[y(\ln^2(y) - 2(\ln(y)) + 2) + 2\right]_1^{10}$

3

→ Gugselhopf-Form



$y = (x-1)^2$

$\sqrt{y} = (x-1)$

$\pm\sqrt{y} + 1 = x$

$F = +\sqrt{y} + 1 = \pi \cdot \int_1^{?} (\sqrt{y}+1)^2 \, dy$

$G = -\sqrt{y} + 1 = \pi \cdot \int_0^1 (-\sqrt{y}+1)^2 \, dy$

$V = F - G = \pi \cdot \int_0^1 (\sqrt{y}+1)^2 \, dy - \pi \cdot \int_0^1 (-\sqrt{y}+1)^2 \, dy$

7 Taylor-Reihen

1. Polynom vom Grad 1 (zwei Bedingungen)

Repetition: Die beste *lineare Approximation* an eine Funktion f in der Nähe einer gegebenen Stelle x_0 wird durch die Tangente an f im Punkt (x_0, y_0) erreicht.

Tangenten-Gleichung: $p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

In unserem Beispiel $(f(x) = e^{2x}, x_0 = 1)$ $p_1(x) = e^2 + 2e^2 \cdot (x-1)$

Taylorpolynom *n-ter* Ordnung von $f(x)$ an der Stelle x_0

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

Vorgehen

1. *n-te* Ableitung berechnen
$$f^{(n)}(x) = \cdots$$
2. x_0 in Ableitungen einsetzen
$$f^{(n)}(x_0) = \cdots$$
3. Vorfaktoren $a_0 - a_n$ bestimmen
$$a_n = \frac{f^n(x)}{k!}$$
4. Taylorreihe $t_f(x)$ bestimmen
$$t_f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + a_n \cdot (x - x_0)^n$$

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

1. *4-te* Ableitung berechnen
$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$
$$f''(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$$
$$f^{(3)}(x) = -\frac{15}{8} \cdot x^{-\frac{7}{2}}$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{105}{16} \cdot x^{-\frac{9}{2}}$$
2. $x_0 = 1$ in Ableitungen einsetzen
$$f(1) = x^{-\frac{1}{2}} = 1$$
$$f'(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$$
$$f''(1) = \frac{3}{4} \cdot 1^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}$$
$$f^{(3)}(1) = -\frac{15}{8} \cdot 1^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{8}$$
$$f^{(4)}(1) = \frac{105}{16} \cdot 1^{-\frac{9}{2}} = \frac{105}{16}$$
3. Vorfaktoren $a_0 - a_n$ bestimmen
$$a_0 = \frac{1}{0!} \cdot 1 = 1$$
$$a_1 = \frac{1}{1!} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{1}{2!} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$
$$a_3 = \frac{1}{3!} \cdot -\frac{15}{8} = -\frac{15}{48} = -\frac{5}{16}$$
$$a_4 = \frac{1}{4!} \cdot \frac{105}{16} = \frac{105}{384} = \frac{35}{128}$$
4. $x_0 = 1$ in Taylorreihe einsetzen
$$t_f(x) = 1 + -\frac{1}{2} \cdot (x-1) + \frac{3}{8} \cdot (x-1)^2 + -\frac{5}{16} \cdot (x-1)^3 + \frac{35}{128} \cdot (x-1)^4$$

Binomialreihe

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$
$$t_f(x) = 1 + \binom{\alpha}{k} x + \binom{\alpha}{k} x^2 + \binom{\alpha}{k} x^3 \ldots \sum_{x=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$
$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{k} x + \binom{n}{k} x^2 + \cdots + \binom{n}{k} x^n$$

Beispiel

$$\alpha = \frac{1}{2}: a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha-3) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$
$$a_0 = \binom{0.5}{0} = 1$$
$$a_1 = \binom{0.5}{1} = \frac{\alpha}{k!} = \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \binom{0.5}{2} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{k!} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\right)}{2!} = -\frac{1}{8}$$
$$a_3 = \binom{0.5}{3} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)}{k!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16}$$

Konvergenzradius ρ einer Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$
$$\rho = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \qquad \rho = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$ *konvergiert*
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$ *divergiert*

Der **Konvergenzbereich** von $p(x)$ ist das Intervall I

$$I = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Zusammen mit *0, 1 oder 2 Randpunkten* dieses Intervalls.

Bestimme den *Konvergenzbereich*

$$p_1(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots \to a_k = \frac{1}{2^k}$$

1. Radius berechnen

$$\frac{\frac{1}{2^{(k)}}}{\frac{1}{2^{(k+1)}}} = \frac{1}{2^{(k)}} \cdot \frac{2^{(k+1)}}{1} = 2$$
$$\rho = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \to \infty} |2| = 2$$

2. Randpunkte $x = \pm\rho$ prüfen

$x = 2$ $\quad 1 + 1 + 1 + 1 \ldots \to$ divergent $(2 \notin I)$

$x = -2$ $\quad 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \to$ divergent $(-2 \notin I)$

$$I = (-2; 2)$$

Präzision der Approximation

Für die Abschätzung des Fehlers bzw. Restglieds

$$R_n(x) = f(x) - p_{n(x)}$$

Es gibt ein ξ zwischen x_0 und x, so dass für das Restglied $R_n(x)$ gilt:

$$|R_{n(x)}| \leq \left| \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right|$$

Beispiel

Fehler bei Approximation von $f(x) = e^x$ durch $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ im Intervall $[0, 1]$

$$R_3(x) = |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{f^4(\xi)}{4!} \cdot (1-0)^4$$
$$\leq \frac{e^\xi}{24} \leq \frac{e}{24} \approx 0.113$$
$$x = 1: e^1 = 2.71828\ldots$$
$$p_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \approx 2.667 \to \Delta = 0.0516 \ (< 0.113)$$

Regel von **Bernoulli-de l'Hospital** (BH)

Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Vorgängige Umformungen

- $0 \cdot \infty \qquad f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
- $\infty - \infty \qquad f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{0}{0} \overset{BH}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x}{1} \right) \to x = 0: \frac{e^0}{1} = 1$$
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{2x^2 + 3x + 7} \right) = \frac{\infty}{\infty} \overset{BH}{\Rightarrow} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x}{4x + 3} \right) \to x = \infty: \frac{1}{2}$$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ => für x0 = 0

abwechselnde Vorzeichen = $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$ oder $a_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$

8 Differentialgleichungen

Eine *Differentialgleichung (DGL)* n-ter Ordnung ist eine Gleichung

$$F\left(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}\right) = 0$$

Für eine gesuchte Funktion $y = y(x)$, in der Ableitung von $y(x)$ bis zur n-ten Ordnung auftreten.

Überprüfung einer Lösung

Wir können nachrechnen, ob eine Funktion tatsächlich eine Lösung einer bestimmten *DGL* ist.

Zu Lösungen und Lösungsmengen einer Differentialgleichung

- $\mathbb{L} = \textit{Menge von Funktionen}$
- Eine *DGL* ist eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen
- Die Lösung ist erst dann eindeutig, wenn man zusätzlich zur *DGL* noch eine oder mehrere *Anfangsbedingungen* vorgibt.
- Eine DGL zusammen mit einer Anfangsbedingung ist ein *Anfangswertproblem.*

Die Menge aller Lösungen einer DGL nennt man die *allgemeine Lösung* der DGL.

Beispiel

Differentialgleichung (DFG): $y' = x + y$

Lösung zu prüfen: $y_1 = e^x - 1$

- Linke Seite *LS* $y' = (e^x - 1)' = e^x$
- Rechte Seite *RS* $x + y = x + (e^x - 1)$

$$LS \neq RS \rightarrow Keine\ Lösung\ der\ DFG$$

Lösung zu prüfen: $y_2 = -x - 1$

- Linke Seite *LS* $y' = (-x - 1)' = -1$
- Rechte Seite *RS* $x + y = x + (-x - 1) = -1$

$$LS = RS \rightarrow Lösung\ der\ DFG$$

Anfangswertproblem (spezielle / partikuläre Lösung) AWP für explizite DGL n-ter Ordnung

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^n) & = & G(x, y) & (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) & = & y_0 & \\ y'(x_0) & = & y_1 & \\ & \vdots & & \\ y^{n-1}(x_0) & = & y_{n-1} & \end{cases}$$

Anfangswertproblem AWP für explizite DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y' & = & G(x, y) & (x, y, y') \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ y(x_0) & = & y_0 & \end{cases}$$

Spezielle Typen von DGL

- *Unbestimmtes Integral* $y' = f(x)$ Das Richtungsfeld ist unabhängig von y
- *Autonome DGL* $y' = f(y)$ Das Richtungsfeld ist unabhängig von x

Beispiel

$$AWP: \begin{cases} y' = x - 4 \\ y(2) = 9 \end{cases}$$

$$y = \int (x - 4) \cdot dx$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$$

$$y(2) = 2 - 8 + C = 9 \rightarrow C = 15$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$$

Konstante Lösungen

Falls $f(y_0) = 0$, ist $y = y_0$ eine *konstante Lösung der autonomen DGL* $y' = f(y)$. Um die konstante Lösung der DGL zu finden, müssen wir die Gleichung $f(y) = 0$ lösen.

- Stabil Benachbarte Lösungen werden *angezogen*
- Instabil Benachbarte Lösungen werden *abgestossen*
- Semi-Stabil *Anziehung* auf einer, *Abstossung* auf der anderen Seite

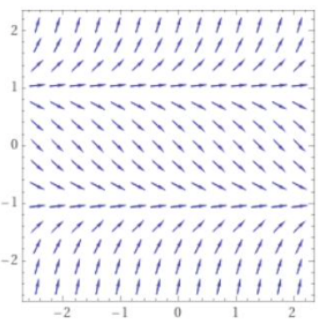
Beispiel

$$y' = y^2 - 1$$

- $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow y = 1$: *Konstante Lösung*
- $f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \rightarrow y = -1$: *Konstante Lösung*

Werte in der Nähe der *Konstanten Lösung* einsetzen

- $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$
- $f(1.5) = (1.5)^2 - 1 = 1.25$
- $\boldsymbol{f(1) = (1)^2 - 1 = 0 \rightarrow Instabil}$
- $f(0.5) = (0.5)^2 - 1 = -0.75$
- $f(0) = (0)^2 - 1 = -1$
- $f(-0.5) = (-0.5)^2 - 1 = -0.75$
- $\boldsymbol{f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \rightarrow Stabil}$
- $f(-1.5) = (-1.5)^2 - 1 = 1.25$
- $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$



Euler-Schritte (Numerischer Lösungsansatz für DGL)

Beispiel: $y' = \underbrace{x + y}_{F(x,y)}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 1$
↳ Intervall

Steigung Gerade	Berechnung	Beispiel
g_0: $m_0 = F(x_0, y_0) = x_0 + y_0$	$x_1 = x_0 + h$ $y_1 = y_0 + h \cdot F(x_0, y_0)$	$= 0 + 1 = 1$ $= 1 + 1(0 + 1) = 2$
g_1: $m_1 = F(x_1, y_1) = x_1 + y_1$	$x_2 = x_1 + h$ $y_2 = y_1 + h \cdot F(x_1, y_1)$	$= 1 + 1 = 2$ $= 2 + 1 \cdot (1 + 2) = 5$
g_2: $m_2 = F(x_2, y_2) = x_2 + y_2$	$x_3 = x_2 + h$ $y_3 = y_2 + h \cdot F(x_2, y_2)$	$= 2 + 1 = 3$ $= 5 + 1 \cdot (2 + 5) = 12$

8.1 Separierbare DGL

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

Separierbare Differentialgleichung

Explizite Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = F(x,y)$$

- *Separierbar* falls $\quad y' = g(x) \cdot h(y)$
- *Autonom* falls $\quad y' = f(y)$

<u>Allgemein</u>	<u>Beispiel</u>
$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ Trennung aller x- und y-Terme $\frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$	$y' = -\frac{x}{y} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ Trennung aller x- und y-Terme $y \cdot dy = -x \cdot dx$
Integration auf beiden Seiten $\int \left(\frac{1}{h(y)}\right) \cdot dy = \int g(x) \cdot dx$	Integration auf beiden Seiten $\int (y) \cdot dy = -\int (x) \cdot dx$ $\frac{1}{2}y^2 + C_1 = -\frac{1}{2}x^2 + C_2$
Auflösen nach y $\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(s)} \cdot ds = \int_{x_0}^{x} g(t) \cdot dt$	Auflösen nach y $y^2 = -x^2 + 2C$ $y = \pm\sqrt{K - x^2}$

Rezept für die Lösung von separierbaren Differentialgleichungen

(I) $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y)$

(II) Trennung der Variablen: $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x) \cdot \mathrm{d}x$

(III) Integration auf beiden Seiten der Gleichung (falls möglich!)

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

(IV) Auflösen nach y (falls möglich!)

<u>Anfangsbedingung</u>

3. $x + y \cdot y' = 0$, mit der Anfangsbedingung $y(3) = -4$.

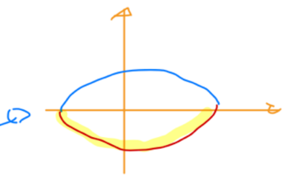
(I) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

(II) $y\,dy = -x\,dx$

(III) $\int y\,dy = \int -x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + C$

(IV) $y^2 = -x^2 + C$

$y = \pm\sqrt{-x^2 + 2C}$



Einbezug der Anfangsbedingung:

$y(3) = -4$

einsetzen: $x = 3 \quad y = -4$

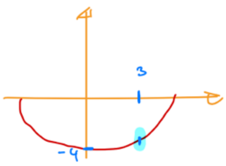
$-4 = -\sqrt{-9 + 2C}$

$4 = \sqrt{-9 + 2C}$

$16 = -9 + 2C$

$25 = 2C \Rightarrow \underline{C = 12{,}5}$

$\Rightarrow y = -\sqrt{25 - x^2}$



8.2 Lineare DGL (Variation der Konstanten)

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Lösungsverfahren 'Variation der Konstanten' für lineare Differentialgleichungen

(I) Vergleich der *gegebenen* Differentialgleichung mit der *allgemeinen* Form $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ und Bestimmung von $f(x)$ und $g(x)$. (⚠ **Vorzeichen**)

(II) Bestimmung der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.

(III) Einsetzen in die Formel $y_0 = C \cdot e^{-F(x)}$ liefert die Lösung der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung.

(IV) Das Ersetzen von C durch eine noch zu bestimmende Funktion $K(x)$ führt zum folgenden *Ansatz* für die *allgemeine* Lösung:

$$y = K(x) \cdot e^{-F(x)}$$

(V) Die Funktion $K(x)$ lässt sich durch die folgende Formel berechnen.

$$K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} \, dx$$

(⚠ Integrationskonstante nicht vergessen!)

(VI) Einsetzen von $K(x)$ in den Ansatz aus **(IV)** ergibt die *allgemeine* Lösung.

Beispiele

Bsp (1) (Fortsetzung) $y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$

Bereits bestimmt (vgl. Seite 33):

(I) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \cos(x)$ **(II)** $F(x) = \ln(x)$ **(III)** $y_0 = \frac{C}{x}$

(IV) Ansatz: $y = \frac{K(x)}{x}$

(V) $K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} \, dx = \int \cos(x) \cdot e^{\ln(x)} dx = \int \cos(x) \cdot x \, dx = x\sin(x) + \cos(x) + C_2$

(mit Hilfe einer Integraltabelle, z.B. gelbe Seiten vom Papula)

(VI) $K(x)$ in den Ansatz aus **(IV)** einsetzen: $y = \frac{K(x)}{x} = \frac{x\sin(x) + \cos(x) + C_2}{x}$

Bsp (2) $y' = 4y + e^{3x}$ $y' - 4y = e^{3x}$

(I) $f(x) = -4$ $g(x) = e^{3x}$ **(II)** $F(x) = -4x$

(III) Lösung der zugehörigen homogenen Dgl: $y_0 = C \cdot e^{-F(x)} = C \cdot e^{4x}$

(IV) Ansatz: $y = K(x) \cdot e^{4x}$

(V) $K(x) = \int g(x) \cdot e^{F(x)} \, dx = \int e^{3x} \cdot e^{-4x} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$

(VI) $K(x)$ in den Ansatz aus **(IV)** einsetzen: $y = \underline{\underline{(-e^{-x} + C_2) \cdot e^{4x}}}$