Digitaltechnik

Gatter

Function	Boolean Algebra [1]	IEC 60617-12 since 1997	US ANSI 91 1984
AND	A & B	&	
OR	A # B	≥ 1	
Buffer	A	1	
XOR	A $ B	= 1	
NOT	!A	1	
NAND	!(A & B)	&	
NOR	!(A # B)	≥ 1	
XNOR	!(A $ B)	= 1	

N Eingänge: $2^N Möglichkeiten$

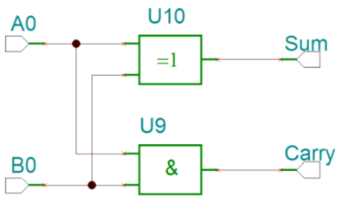
=> Um aus einer Wahrheitstabelle ein Schaltplan zu zeichnen, bildet man die <u>**DNF** $(A \land B) \lor$.. von den Werten die true</u> ergeben im Resultat

Kombinatorische Logik

⇨ System ohne Speicher (Ausgänge ändern sich nur in Abhängigkeit von den Eingängen)

1-Bit Halb-Addierer

- Addition von zwei 1-Bit Inputs



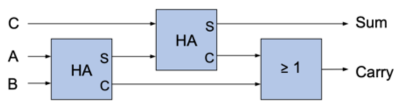
A0	B0	Sum	Carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Sum = A0 $ B0
Carry = A0 & B0

```
    0  1  1  1
+   0  1  0  1
0   1  1  1      Carry
-----------------------
0   1  1  0  0   Sum
```

1-Bit Voll-Addierer

Addition mit Carry-In



C	A	B	Sum	Carry
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

```
    0  1  1  1
+   0  1  0  1
0   1  1  1      Carry
-----------------------
0   1  1  0  0   Sum
```

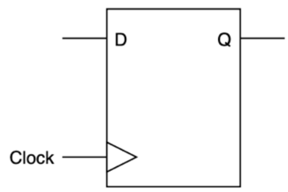
Sequentielle Logik

Flipflop

- Flanken-getriggertes Speicher-Element
- Bei jedem ↑ Takt-Signal wird der Speicher aktualisiert

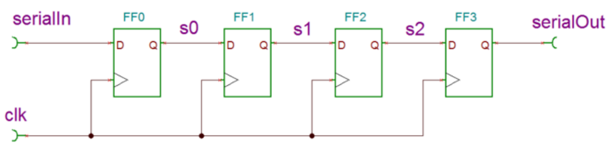
Das D-Flip-Flop nimmt einen Input D und gibt diesen beim nächsten Takt an Q aus.

D	Q Next
0	0
1	1

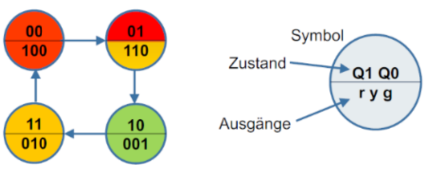


Typische Schaltungen

- Zähler
  - Neuer Zustand ist vorgegeben durch jetzigen Zustand
- Zustandsautomaten / Finite State Machine
  - Speicherzellen stellen den Systemzustand dar
- Schieberegister
  - Mehrere in Reihe geschaltete Flip-Flops



Ampel-Steuerung



state		outputs		
Q1	Q0	red_on	yellow_on	green_on
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0

Zahlensysteme

Binär- und Hexsystem

Name	Basis	Bereich	Beispiel
Dezimal	10er	0123456789	$0D123 = 1*10^2 + 2*10^1 + 3*10^0$
Binär	2er	01	$0B1110 = 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 = 14d$
Hex	16er	0123456789ABCDEF	$0X5b = 5*16^1 + b*16^0 = 91$

Binäre Addition und Subtraktion

Erster Summand			1	0	1	1.	1	$_b$
Zweiter Summand	+		1	1	0	1.	0	$_b$
Übertrag		1	1	1	1			
Resultat		1	1	0	0	0.	1	$_b$

Binäre Multiplikation   Binäre Division

Beispiel: 5 * 14

		1 0 1 $_b$	x	1	1	1	0 $_b$		
				1	1	1	0		
	+		0	0	0	0			
	+	1	1	1	0				
Übertrag		1	1						
Resultat	1	0	0	0	1	1	0 $_b$		

Beispiel: 54 : 10 = 5 Rest 4

```
 1 1 0 1 1 0 : 1 0 1 0 = 1 0 1
-1 0 1 0
 0 0 1 1 1
  <1 0 1 0
     1 1 1 0
    -1 0 1 0
     0 1 0 0
```

Hornerschema

Dezimal zu Binär

10-er ins 2-er System Wir wollen nun noch sehen, wie Zahlen mit Kommastellen unzuwandeln sind. Wir wählen den Wert 26.6875_d. Diesen Wert zerlegen wir:

$$26.6875_d = 26_d + 0.6875_d$$

Zuerst wandeln wir den ganzzahligen Teil um:

$$\begin{array}{llllll} 26_d & \div & 2 & = & 13 & \text{Rest } 0 \\ 13_d & \div & 2 & = & 6 & \text{Rest } 1 \\ 6_d & \div & 2 & = & 3 & \text{Rest } 0 \\ 3_d & \div & 2 & = & 1 & \text{Rest } 1 \\ 1_d & \div & 2 & = & 0 & \text{Rest } 1 \end{array}$$

Wir erhalten:

$$26_d = 11010_b$$

Das Horner-Schema für die Nachkommastellen geht so:

$$\begin{array}{lllllll} 0.6875_d & \cdot & 2 & = & 0.3750 & + & 1 \\ 0.3750_d & \cdot & 2 & = & 0.7500 & + & 0 \\ 0.7500_d & \cdot & 2 & = & 0.5000 & + & 1 \\ 0.5000_d & \cdot & 2 & = & 0.0000 & + & 1 \end{array}$$

Hier lesen wir die Spalte ganz rechts von oben nach unten aus:

$$0.6875_d = 0.1011_b$$

Es folgt das Resultat:

$$26.6875_d = 11010.1011_b$$

Dezimal zu Hex

$$\begin{array}{llllll} 100_d & \div & 16 & = & 6 & \text{Rest } 4 \\ 6_d & \div & 16 & = & 0 & \text{Rest } 6 \end{array}$$

Es folgt:

$$100_d = 64_h$$

Das Resultat können wir leicht überprüfen:

$$64_h = 6 \cdot 16_d^1 + 4 \cdot 16_d^0 = 100_d$$

Negative Zahlen   Überlauf

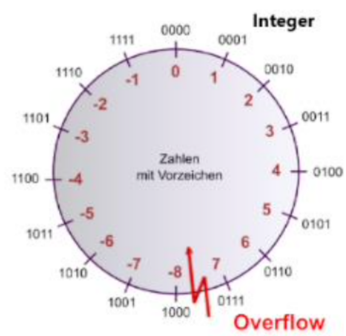
- **Verfahren:**
  - invertieren:
  - 1 addieren:

	+ 2 → -2	- 2 → +2
	0 0 0 0 0 0 1 0	1 1 1 1 1 1 1 0
invertieren:	1 1 1 1 1 1 0 1	0 0 0 0 0 0 0 1
1 addieren:	0 0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 0 1
	1 1 1 1 1 1 1 0	0 0 0 0 0 0 1 0

- **Spezialfälle:**

	0 → 0	- 128 → Überlauf
	0 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 0
1er-Komplement	1 1 1 1 1 1 1 1	0 1 1 1 1 1 1 1
	0 0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 0 1
	1 0 0 0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 0
	└ Überzählig	└ Vorzeichen

- Integer: ganze Zahlen Z -> Overflow
- Unsigned: natürliche Zahlen N -> Carry
=> Overflow / Underflow, dort wo das MSB seinen Wechsel macht



Informationstheorie

Information

⇨ Je seltener ein Ereignis, desto grösser ist die Entropie (durchschnittlicher Informationsgehalt)

Entropie: Anzahl Bits / Symbol für eine optimale binäre Codierung (=> 0 Redundanz)

Discrete Memoryless Source (DMS)

- Symbole sind (statistisch) unabhängig voneinander

Binary Memoryless Source (BMS)

- DMS, die nur zwei verschiedene Ereignisse liefert

Formeln

Beschreibung	Abkürzung	Einheit	Formel
Anzahl mögliche Fälle	N		
Anzahl Ereignisse	K		
Absolute Häufigkeit	$k(x_n)$		$P(x_n) = \frac{k(x_n)}{K}$
Information	I	Bit	$I(x_n) = \log_2 \frac{1}{P(x_n)}$
Wahrscheinlichkeit Doppelsymbole	P		$P(AA) = P(A) * P(A)$
Entropie (Mittlerer Informationsgehalt)	H(X)	Bit / Symbol	$H(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(x_n) \cdot \log_2 \frac{1}{P(x_n)}$
Entropie BMS (2 Symbole)		Bit / Symbol	$H_{\mathrm{BMS}} = p \cdot \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \cdot \log_2 \frac{1}{1-p}$
Entropie max. (identische Wahrscheinlichk.)		Bit / Symbol	$H_{max} = \log_2 N$
Codewortlänge	L	Bit	
Mittlere Codewortlänge		Bit / Symbol	$L = \sum_{n=0}^{N-1} P(x_n) * l_n$
Coderate	R		$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{N}} = \frac{\text{durchschnittliche Codewortlänge}}{\mathrm{N}}$
Redundanz	R	Bit / Symbol	$L - H(x)$

Codes unterschiedlicher Länge

Voraussetzung: Präfixfreiheit!

Symbol	Code	Codewortlänge
x_0	$\underline{c}_0 = (10)$	$\ell_0 = 2$ Bit
x_1	$\underline{c}_1 = (110)$	$\ell_1 = 3$ Bit
x_2	$\underline{c}_2 = (1110)$	$\ell_2 = 4$ Bit

Verlustlose Quellencodierung

⇨ Redundanzreduktion (Anteil in einer Codierung, der keine Information trägt => mehr Bits als nötig pro Codewort)

<u>Verlustlose Komprimierung</u>: Redundanz eines Codes > 0
<u>Verlustbehaftete Komprimierung:</u> Redundanz eines Codes < 0

Lauflängencodierung RLE

- Marker = seltenes Zeichen
- Token = [Marker, Anzahl, Zeichen]
- Einzelne Zeichen ohne Marke
  - Ausnahme: Code = Marker => z.B. A01A
- Bit / Token: Marker-Bits + Zählerbreite + Zeichen -Bits
  - Zählerbreite: Beispiel 4-Bit Zähler => 1..16 als Zählerbreite möglich

- Original:

...TERRRRRRRRRMAUIIIIIIIIIIIIIIIIIWQCSSSSSSSSSSL...

- RLE komprimiert:

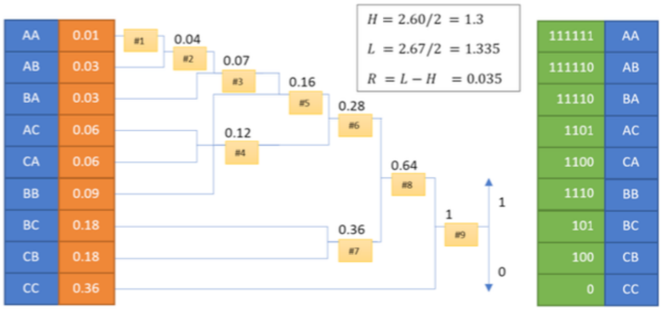
...TEA09RMA01AUA17IWQCA10SL...

Huffman

Häufige Symbole erhalten kurze Codes;
Seltene Symbole erhalten lange Codes

⇨ Automatisch präfixfrei, optimal

1. Reihenfolge nach P aufsteigend ordnen
2. Kleinste Werte addieren
3. Codes «ablesen»



LZ77

1. Länge Übereinstimmung mit dem Vorschau-Buffer im Such-Buffer suchen
2. Verschieben um Übereinstimmung + nächstes Zeichen

<u>Encoder</u>

Ausgangslage

C C A C B C C C B B C C B C C B C C A B

Wert	Token: Offset	Länge	Zeichen	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0							
				Suchbuffer															Vorschau-Buffer							
C	0	0	C																C	C	A	C	B	C	C	C
CA	1	1	A															C	C	A	C	B	C	C	C	B
CB	2	1	B													C	C	A	C	B	C	C	C	B	B	C
CCC	5	2	C											C	C	A	C	B	C	C	C	B	B	C	C	B
BB	4	1	B								C	C	A	C	B	C	C	C	B	B	C	C	B	C	C	B
CCBC	4	3	C						C	C	A	C	B	C	C	C	B	B	C	C	B	C	C	B	C	C
CBCCA	11	4	A		C	C	A	C	B	C	C	C	B	B	C	C	B	C	C	B	C	C	A	B		
B...	?	?	?	B	C	C	C	B	B	C	C	B	C	C	B	C	C	A	B							

Maximale Länge eines Tokens: Vorschau-Buffer Länge - 1

Kompressionsrate R: $\frac{\text{Codierte Bits}}{\text{Originale Bits}} = \frac{\text{Anzahl Token * Bits pro Token}}{\text{Anzahl Zeichen * Bit pro Zeichen}}$

<u>Decoder</u>

Encoder

Token → (Offset, Länge, Zeichen)		
0	0	A
0	0	M
2	2	M
4	2	A
6	4	T

Decoder

Buffer: ...	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
													A
												A	M
									A	M	A	M	M
						A	M	A	M	M	M	A	A
	A	M	A	M	M	M	A	A	A	M	M	M	T

nächster Zeichen

13 Zeichen à 8 Bit

5 Token à 16 Bit (5 + 3 + 8)

Wertebereich:	0..31	0..7	0..255
Token-Bits:	5 Bit	3 Bit	8 Bit

— ASCII

Vorschau-Buffer

LZW (Dictionary)

1. Zeichen-Kette im Wörterbuch suchen
2. Neuer-Eintrag im Wörterbuch

Token = Verweis
String = Zeichenkette (Verweis + nächstes Zeichen)
Index = Wörterbuch-Identifikator

Kompressionsrate = = $\frac{\text{Anzahl Tokens (ohne Vorinitialisierung) * Bits pro Token (Wörterbuch-Index)}}{\text{Anzahl Zeichen * Bit pro Zeichen}}$

A M A M M M A A A M M M T A A T ...

Index	String	Token
...	...	
65	A	
...	...	
77	M	
...	...	
84	T	
...	...	
255	?	
256	AM	(65)
257	MA	(77)

Index	String	Token
258	AMM	(256)
259	MM	(77)
260	MAA	(257)
261	AA	(65)
262	AMMM	(258)
263	MT	(77)
264	TA	(84)
265	AAT	(261)
...	...	...

Beispiel: (87), (69), (73), (83), (69), (32), (82), (257), (259), (78), (68)...

Index	Eintrag
32	␣
33	!
44	,
68	D
69	E
73	I
76	L
78	N
82	R
83	S
87	W

Vorinitialisierung 0 .. 255

Fortsetzung →→→

Input (Token)	Index	Eintrag	Output (String)
(87)	256	W E	W
(69)	257	E ␣	E
(73)	258	I S	I
(83)	259	S E	S
(69)	260	E ␣	E
(32)	261	␣ R	␣
(82)	262	R E	R
(257)	263	E I S	E I
(259)	264	S E N	S E
(78)	265	N D	N
(68)	266	D ␣	D

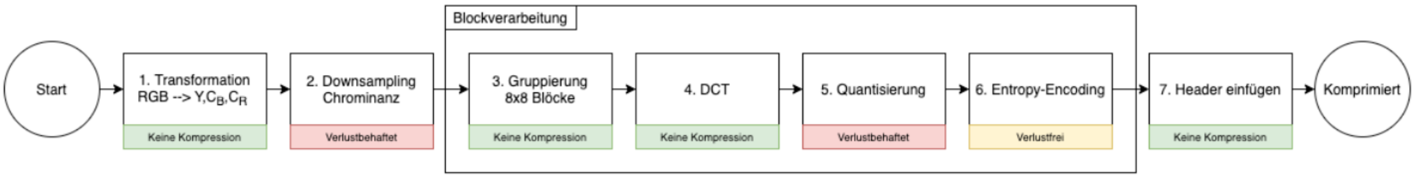
nicht codiert

Letztes Zeichen wird nicht empfangen!

Verlustbehaftete Quellencodierung

⇨ Irrelevante Informationen, die der Empfänger nicht braucht, entfernen = weniger Informationen

JPEG



1. Transformation von RGB => Luminanz / Chrominanz

Luminanz: Helligkeitskanal, Chrominanz: Farbkanäle (Blau, Rot)

Y :	Luminanz	(Graustufenintensität)
C_B:	Chrominanz	(Blauanteil)
C_R:	Chrominanz	(Rotanteil)

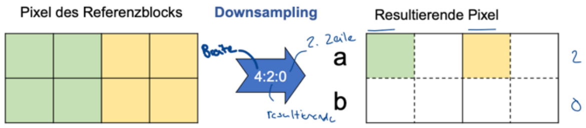
R:	Rot
G:	Grün
B:	Blau

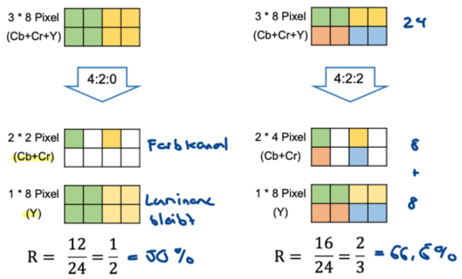
Das Auge ist viel empfindlicher auf kleine Helligkeitsunterschiede als auf kleine Farbunterschiede
⇒ Farbinformationen höher komprimieren.
⇒ Vorbereitung für Datenkompression = reversibel

2. Downsampling der beiden Chrominanz-Komponenten

Signifikanter Informationsanteil wird reduziert. Farbkanal ist weniger wichtig wie die Luminanz (⇒ menschliches Auge).
⇒ Auflösung der Chrominanz (Farbkanäle) wird reduziert

$$\frac{1}{3} \cdot Y + \frac{2}{3} \cdot (C_B \cdot C_R) = \text{Kompression}$$





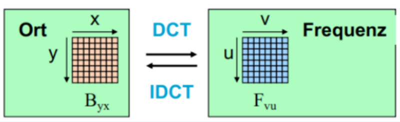
3. Pixel-Gruppierung der Farbkomponenten in 8x8 Blöcke

4. Diskrete Cosinus Transformation

Transformation in den Frequenzbereich

$$F_{vu} = \frac{1}{4} C_u C_v \sum_{x=0}^{7} \sum_{y=0}^{7} B_{yx} \cos\left(\frac{(2x+1)u\Pi}{16}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\Pi}{16}\right)$$

$C_u, C_v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für $u = 0$ oder $v = 0$
$C_u, C_v = 1$ für alle anderen Fälle ($u \neq 0$ und $v \neq 0$)



5. Quantisierung einzelner Frequenzkomponenten

Frequenzkomponenten mit viel bzw. wenig Bildinformation werden fein bzw. grob quantisiert
=> Irrelevanzreduktion = Informationsverlust

6. Entropy-Coding der quantisierten Frequenzkomponenten

verlustlos, Kombination von RLE und Huffman-Encoding
⇒ Lauflängencodierung bis zum End-Of-Block (alles Nullen) ⇒ Zick-Zack-Scan der AC-Koeffizienten

RLE: (DC-Wert)(Anzahl Nullen, Koeffizient)…(EOB)

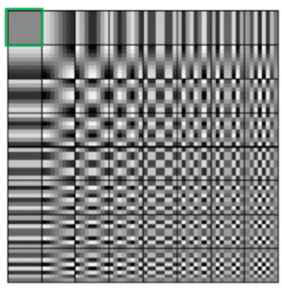
79	0	-1	0	0	0	0	0
-2	-1	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

(79) (1,-2) (0,-1) (0,-1) (0,-1) (2,-1) (0,-1) (EOB) ← Token

7. Erstellen von Header mit JPEG-Parameter

DCT-Basisfunktion

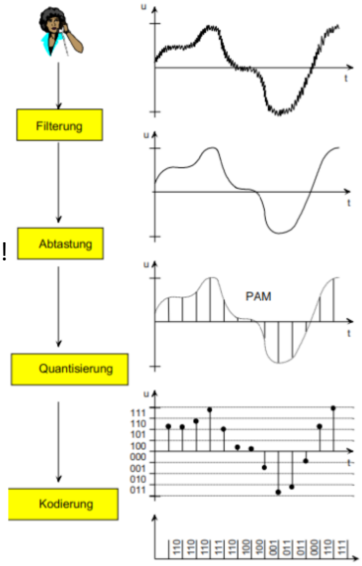
- F(0,0) = DC-Wert (durchschnittliche Helligkeit)
- Restliche = AC-Werte (Amplituden der Ortsfrequenzen)



Audiocodierung

Filterung

Hohe und tiefe Frequenzen werden entfernt



Abtastung

Abtastung des Signals mit dem Abtasttheorem:

$F_{\text{abtast}} > 2 * f_{max}$

⇨ Ab der halben Abtastfrequenz gibt es eine Spiegelung (falsch interpretiert!

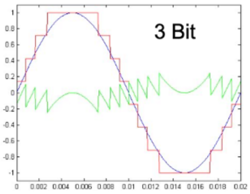
Abtastfrequenz = Samples pro Sekunde

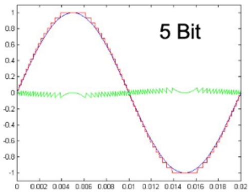
= Anzahl Stützstellen pro Sekunde * Anzahl Kanäle

Quantisierung des Analogsignals

Quantisierungsrauschen: Differenz Quantisierung <-> Signal

⇨ Wird kleiner bei einer grösseren Anzahl Bits (-6dB pro Bit)





Anzahl Stützstellen = Samplingrate / Frequenz

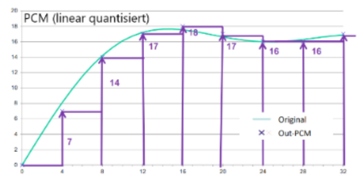
Quantisierungsrauschabstand gegenüber einem Signal mit maximaler Amplitude: 6 * Auflösung [bit]

Codierung

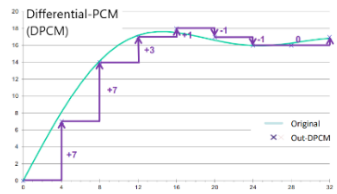
Grösse der Audiodatei: Abtastfrequenz [Hz] * Auflösung [Byte] * Anzahl Känäle * Dauer [s] = [Byte]

Pulse Code Manipulation

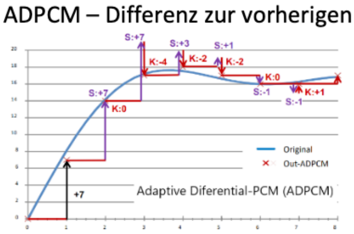
PCM – Absoluter Wert



DPCM – Differenz zum vorherigen Wert



ADPCM – Differenz zur vorherigen Korrektur



Wave File Format

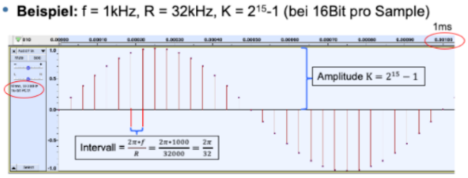
- Audio unkomprimiert
- Enthält PCM-Rohdaten
- Header-Informationen vor den Daten

Tonerzeugung eines reinen Sinustones

- Die einzelnen Samples S_i für eine gewünschte Frequenz f kann in Abhängigkeit der Abtastrate R, und dem Skalierungsfaktor K berechnet werden:

$$S_i = K * \sin\left(\frac{i * 2\pi * f}{R}\right)$$

- **Beispiel:** f = 1kHz, R = 32kHz, K = 2^{15}-1 (bei 16Bit pro Sample)



Schalldruckpegel SPL

- Logarithmische Grösse in Dezibel [dB] zur Beschreibung der Stärke eines Schallereignisses

Schallpegel $L = 20 * \log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right)$

p: Effektiver Schalldruck [Pa]

p_0: Bezugsschalldruck (Hörschwelle p_0 = 0.00002 Pa)

Eine Verdoppelung des SPL entspricht ca. +6 dB:

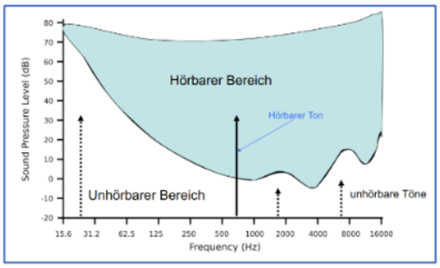
$$20 * \log_{10}(2) = 6.02dB$$

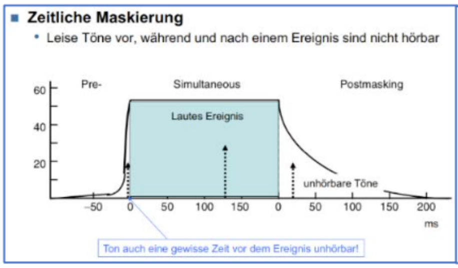
und 6 dB ca. einem Faktor 2:

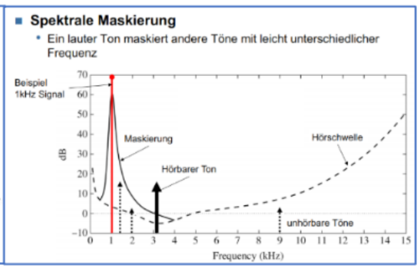
$$10^{\frac{6\,dB}{20}} = 1.995$$

Verlustbehaftete Audio Codierung (MPEG)

1. Ausnutzung der menschlichen Hörschwelle
2. Ausnutzung des Maskierung-Effekts
   a. Zeitliche Maskierung
   b. Spektrale Maskierung

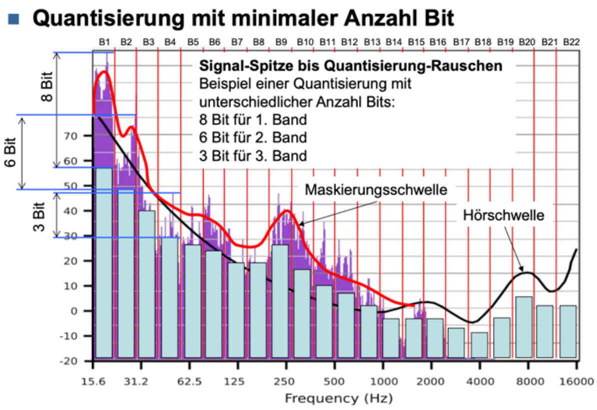






Sub-Band Coding

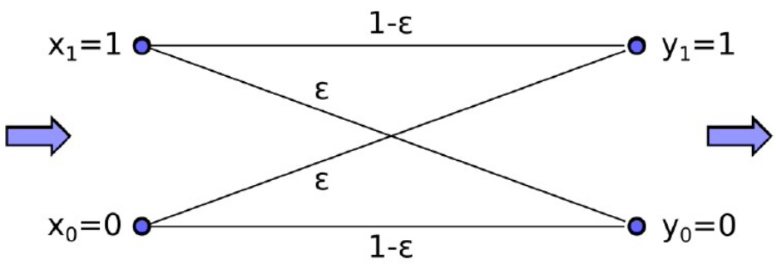
- Frequenz-Spektrum wird in Sub-Bänder unterteilt
- Nur so viele Bits zum Quantisieren wie nötig
  - verbessert Kompression, Quantisierungsrauschen wird allerdings erhöht
  - Ziel: Quantisierungsrauschen gerade unter die Maskierungsschwelle



Kanalcodierung

BSC

- Fehlerwahrscheinlichkeit ε ist unabhängig vom Eingangssymbol



Mit der BER ε kann man die Wahrscheinlichkeit $P_{0,N}$ ausrechnen, mit der eine Sequenz von N Datenbits korrekt (d.h. mit 0 Bitfehlern) übertragen wird.

- **Erfolgswahrscheinlichkeit**: $P_{0,N} = \frac{A_N}{A} = (1-\varepsilon)^N$
- **Fehlerwahrscheinlichkeit auf N Datenbits**: $1 - P_{0,N} = 1 - (1-\varepsilon)^N$

Die Wahrscheinlichkeit, $P\ _{F,N}$ dass in einer Sequenz von *N* Datenbits <u>genau *F* Bitfehler</u> auftreten ist:

$$P_{F,N} = \binom{N}{F} \cdot \varepsilon^F \cdot (1-\varepsilon)^{N-F}$$

<u>Legende</u>

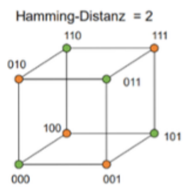
- $\binom{N}{F}$ Anzahl Möglichkeiten genau *F* fehlerhafte Bits in *N* zu haben.
- ε^F Wahrscheinlichkeit, dass *F* Bits fehlerhaft übertragen werden
- $(1-\varepsilon)^{N-F}$ Wahrscheinlichkeit, dass die restlichen *N-F* Bits korrekt übertragen werden

<u>Maximal F Fehler</u> bei einer Übertragung mit N Datenbits: $P_{\leq F,N} = \sum_{t=0}^{F} \binom{N}{t} \cdot \varepsilon^t \cdot (1-\varepsilon)^{N-t}$

<u>Mehr als F Fehler</u> bei einer Übertragung mit N Datenbits: $P_{>F,N} = 1 - P_{\leq F,N}$

<u>Hamming-Distanz</u>

⇨ Anzahl wechselnde Bits



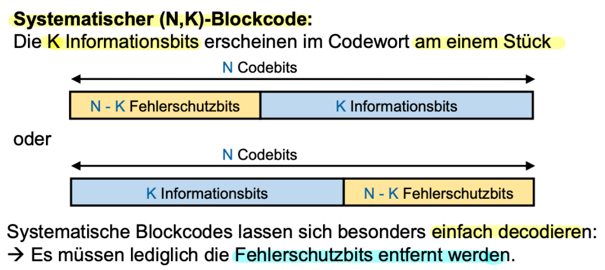
- Fehler-Erkennung möglich ab: $d_H \geq 2$
- Fehler-Korrektur möglich ab: $d_{min} \geq 3$
- Erkennbare Fehler: $\mathrm{d}_{min} - 1$

<u>Hamming-Gewicht</u>

⇨ Anzahl Einsen

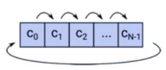
- $d_H = (c_j, c_k) = w_H(c_j XOR c_k)$

Systematisch



Zyklisch

- Zyklische Verschiebung (Rotation) -> gültiges Codewort



Perfekt

- Alle Codwörter haben die gleiche Hamming-Distanz

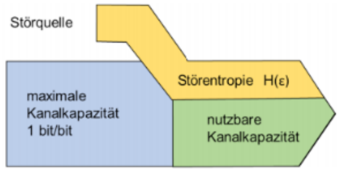
Linear

- $c_j XOR c_i$ -> gültiges Codewort
- Null-Codewort ist zwingend
- $d_{min}(C) = \min_{j \neq 0} w_h(c_j)$

Sobald ein Code eine <u>Generatormatrix</u> hat, ist er <u>automatisch linear</u>!

Kanalkapazität [bit / bit]

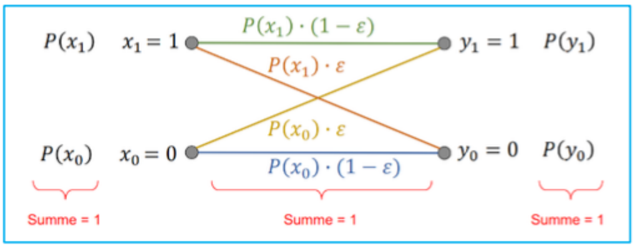
- Maximale Kanalkapazität = 1 Bit / Symbol
- Entropie der Störquelle $= H_b(\varepsilon)$
  $= \varepsilon \cdot \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + (1-\varepsilon) \cdot \log_2 \frac{1}{1-\varepsilon}$
- Nutzbare Kanalkapazität $= C_{BSC}(\varepsilon) = 1 - H_b(\varepsilon)$



Wahrscheinlichkeiten eines BSC (Ein-/Ausgang)

$$P(y_1) = P(x_1) \cdot (1-\varepsilon) + P(x_0) \cdot \varepsilon = 1$$

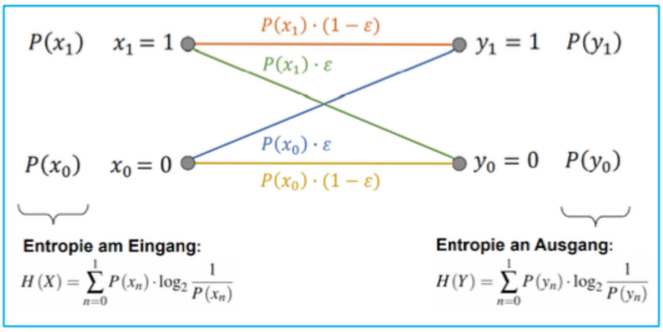
$$= P(x_1)_{Fehlerfrei} + P(x_0)_{Fehlerhaft} = 1$$



Entropien eines BSC (Ein-/Ausgang)

$$H(Y) = P(y_0) \cdot \log_2 \frac{1}{P(y_0)} + P(y_1) \cdot \log_2 \frac{1}{P(y_1)}$$

$$= P(y_0) \cdot I(y_0) + P(y_1) \cdot I(y_1)$$



Kanalcodierungstheorem

Die Restfehlerwahrscheinlichkeit soll beliebig klein gemacht werden, so muss $R < C$ sein!

- R Coderate [Bit / Bit]
- C Kanalkapazität [Bit / Bit]

Coderate R:

$$R = \frac{K}{N}$$

Fehlerkennung, CRC

- 2^N mögliche Codewörter
- 2^K gültige Codewörter

1-Bit Arithmetik

- Addition $\quad r = a + b\ (XOR)$
- Multiplikation $\quad r = a \cdot b\ (AND)$

Addition $r = a \oplus b$ (XOR)

a	b	r
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Multiplikation $r = a \cdot b$ (AND)

a	b	r
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1-Bit Polynom-Arithmetik

Bei CRC werden einzelne Bits als Koeffizienten eines Polynoms aufgefasst.

Das binäre Datenwort $u = (\mathbf{1}0\mathbf{1}00\mathbf{1})$ wird zum Polynom U(z)

- $U(z) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{z^5} + 0 \cdot z^4 + \mathbf{1} \cdot \mathbf{z^3} + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 + \mathbf{1} \cdot \mathbf{z^0}$
- $U(z) = \mathbf{z^5} + \mathbf{z^3} + \mathbf{1}$

<u>Multiplikation</u>

- $(z^2 + z + 1) \cdot (z + 1) = (z^3 + z^2) + (z^2 + z) + (z + 1) = z^3 + 1$

<u>Cyclic Redundancy Check CRC</u>

- 1-Bit Arithmetik!
- Ein Bitfehler soll sich auf möglichst viele Bits der Prüfsumme auswirken

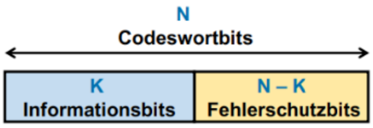
<u>Generator-Polynom</u>

$X^4 + X + 1 = 1 \cdot X^4 + 0 \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + 1 \cdot X^1 + 1 \cdot X^0$ entspricht 10011b

<u>Voraussetzungen</u>

- Generatorpolynom vom Grad m
- Polynom p (Nachricht der Länge K)

Anzahl Prüfbits = m -1



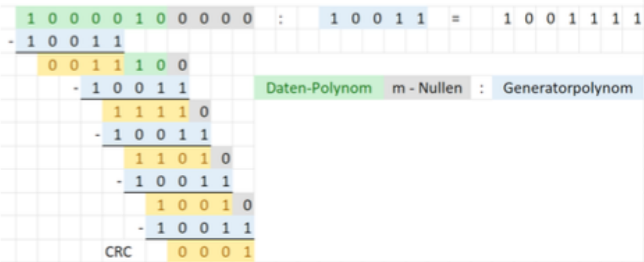
Encoder	Decoder
1. m Nullen anhängen $\quad f = p \cdot z^m$ 2. Polynomdivision $\quad f : g \rightarrow Rest\ r = CRC$ 3. m Nullen ersetzen $\quad f + r = h$	1. Polynomdivision $\quad h : g \rightarrow Rest\ r$ 2. Prüfbits abschneiden $\quad p = h : z^m$

<u>Beispiel</u>

- Generatorpolynom $\quad g = z^4 + z + 1 \quad = 10011 \quad (m = 4)$
- Daten-Polynom $\quad p = z^6 + z \quad = 1000010 \quad (k = 6)$

<u>Encoding</u>

1. $f = p \cdot z^m \quad = (z^6 + z) \cdot z^4 = z^{10} + z^5 \quad = 10000100000$
2. $f : g \rightarrow Rest\ r \quad = 10000100000 : 10011 \quad \rightarrow Rest\ r = 0001$



3. $f + r = h \quad = 10000100001$

<u>Decoding</u>

1. $h : g \rightarrow Rest\ r \quad = 10000100001 : 10011 \quad \rightarrow Rest\ r = 0000 \rightarrow Kein\ Fehler!$
2. $p = h : z^m \quad = (z^{10} + z^5 + 1) : z^4 \quad = z^6 + z = 1000010$

Fehlerkorrektur, Hamming-Codes, Matrix

Lineare Blockcodes

Ein Blockcode der Länge *n* besteht aus *k* Datenbits und *p* Prüfbits.

- *n* = Länge
- *k* = Datenbits
- *p* = Prüfbits

Matrizen Übersicht

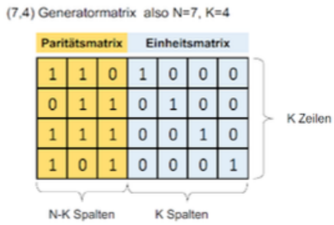
- *P* = Paritäts-Matrix
- *I* = Einheits-Matrix
- *G* = Generator-Matrix
- *H* = Paritäts-Prüf-Matrix

Hamming Codes

Codes mit d_{min} = 3 und *p* = $\log_2(N+1)$ besitzen genau die minimale Anzahl benötigter Prüfbits um einen Fehler zu korrigieren.

- Erkennbare Fehler = $d_{min} - 1$
- Korrigierbare Fehler = $(d_{min} - 1) : 2$

Generatormatrix

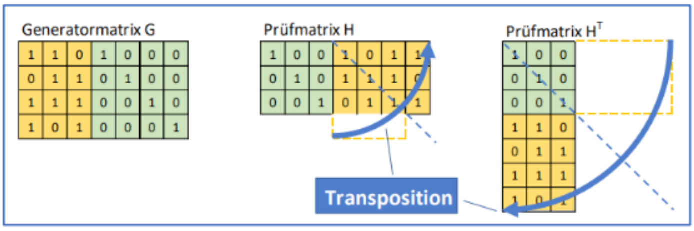


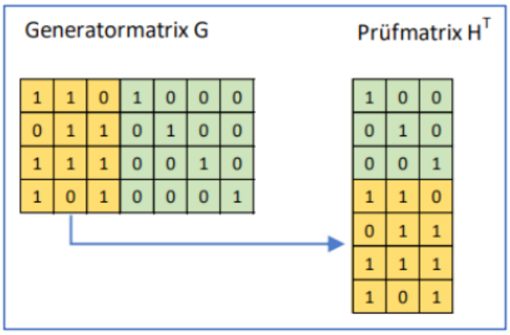
Eine Generatormatrix *G* setzt sich zusammen aus

- *P* = Paritätsmatrix $(n-k) \cdot k$
- *I* = Einheitsmatrix $(k \cdot k)$

Ob die Einheitsmatrix rechts oder links ist macht keinen Unterschied. Jedoch muss darauf geachtet werden, dass die Paritätsprüf-Matrix entsprechend erstellt wird.

- $G_r = (P \quad I) \rightarrow H_l(I \quad P^T)$
- $G_l = (I \quad P) \rightarrow H_r(P^T \quad I)$

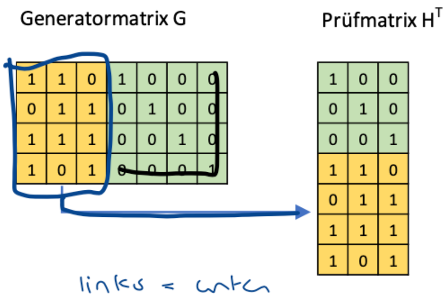


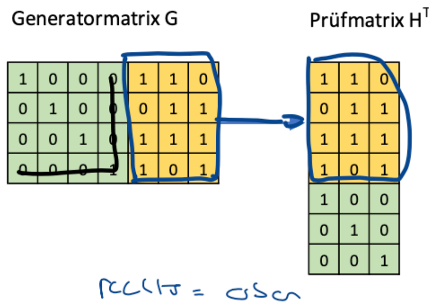


Ist die Einheitsmatrix I in der Generator-Matrix G_r auf der rechten Seite, so ist sie in der Paritätsprüfmatrix H_l auf der linken Seiten.

⇨ **Jede Zeile der Generatormatrix entspricht einem gültigen Codewort!**

<u>Bildung der Prüfmatrix</u>





⇨ **Zeilen bei der im Codewort eine 1 steht addieren**

⇨ **Gerade Anzahl 1 = 0**
⇨ **Ungerade Anzahl 1 = 1**

Encoder

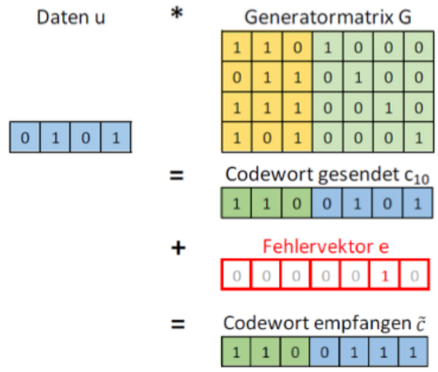
Durch die Multiplikation des Datenvektors *u* mit der Generatormatrix *G* entsteht ein Codewort *c*.
Das Codewort *c* besteht aus

- *k* Datenbits
- *p* Prüfbits ($p = n - k$)

Das generierte Codewort *c* resp. c_{10} kann nun übertragen werden.
Bei dieser Übertragung können Fehler auftreten.

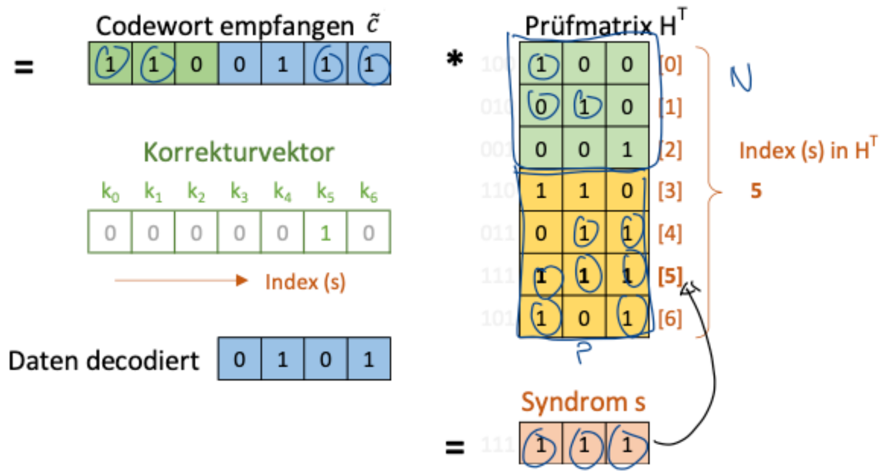
Fehler können mit einem Fehlervektor *e* beschrieben werden.

Das empfangene Codewort $\tilde{c}$ ist die Summe aus Fehlervektor *e* und dem gesendeten Codewort c_{10}. $\tilde{c} = c_{10} + e$



Decoder

Durch die Multiplikation des empfangenen Codeworts *c* mit der Prüfmatrix H^T wird das Syndrom *s* bestimmt.



Syndrom

Das Syndrom *s* ist gleich dem Produkt von Fehlervektor *e* und Paritätsprüfmatrix H^T. Jedes gültige Codewort c_j multipliziert mit der Prüfmatrix H^T ergibt 0.

Das Syndrom *s* ist ein Vektor der Länge $n - k$. <u>Anzahl Syndrome = 2^{n-k}</u>. Um 1 Bitfehler zu korrigieren, braucht es aber nur n + 1 Syndrome (+1 da das 0-Syndrom noch dazu gezählt wird).

Anzahl Syndrome, um alle Fehler bis zu einer bestimmten Anzahl zu korrigieren:
Beispiel mit 2 korrigierbaren Fehlern: $\binom{N}{2} + \binom{N}{1} + \binom{N}{0}$

Faltungscodes

Eigenschaften

- *Lineare Codes*
- Leicht und preiswert in HW realisierbar
- *Streaming Code* (Beliebig langer Eingangs-Vektor)

m	$\gamma = 2$ Generatoren		d_{free}
2	$(101_b, 111_b)$	$(5_o, 7_o)$	5
3	$(1101_b, 1111_b)$	$(15_o, 17_o)$	6
4	$(10011_b, 11101_b)$	$(23_o, 35_o)$	7
5	$(101011_b, 111101_b)$	$(53_o, 75_o)$	8
6	$(1011011_b, 1111001_b)$	$(133_o, 171_o)$	10
7	$(10100111_b, 11111001_b)$	$(247_o, 371_o)$	10
8	$(101110001_b, 111101011_b)$	$(561_o, 753_o)$	12

- Gedächtnislänge m = Anzahl Flip-Flops (= Anzahl Tailbits)
- Einflusslänge $L = m + 1$
- Generatoren γ = Gewichtungsvektoren (= Impulsantworten)
- Impulsfunktion (Eingang) $u = \delta$ (Länge L)

Freie Distanz

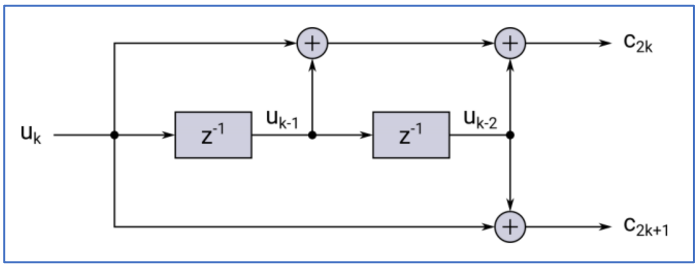
- $d_{min} \rightarrow d_{free} = w_{min}$
- $d_{free} \rightarrow$ Korrigierbare Fehler pro «Abschnitt»

Coderate

- $R = \frac{K}{N} = \frac{K}{2 \cdot (K+m)}$
- $K \gg m \rightarrow R \approx \frac{1}{2}$

Hardware

- Gedächtnislänge m $= 2$
- Einflusslänge L $= 3$
- $c_{2k} = u_k \oplus u_{k-1} \oplus u_{k-2}$
- $c_{2k+1} = u_k \oplus u_{k-2}$
- $g1 = 111 \rightarrow$ $G_1 = z^2 + z + 1$
- $g2 = 101 \rightarrow$ $G_2 = z^2 + 1$



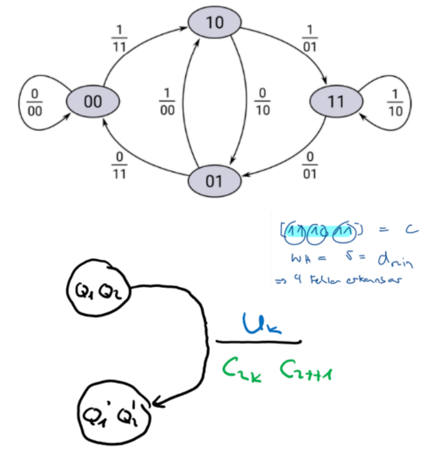
Beispiel Encoderlauf

- $u = 1011 \rightarrow u^+ = u + (m = 2\,Tailbits) = 101100$
- Ausgangspolynom: $C_x = G_x \cdot U$
- $C_1 = G_1 \cdot U = (z^2 + z + 1) \cdot (z^3 + z + 1) = z^5 + z^4 + 1 = 110001$
- $C_2 = G_2 \cdot U = (z^2 + 1) \cdot (z^3 + z + 1) = z^5 + z^2 + z + 1 = 100111$
- Kombination von C_1 und C_2 $\rightarrow c = 11\ 10\ 00\ 01\ 01\ 11$

Takt	Eingang	Zustand		Ausgang	
k	u_k^+	u_{k-1}^+	u_{k-2}^+	c_{2k}	c_{2k+1}
0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	1	1	0	0	1
4	0	1	1	0	1
5	0	0	1	1	1
0	...	0	0	...	...

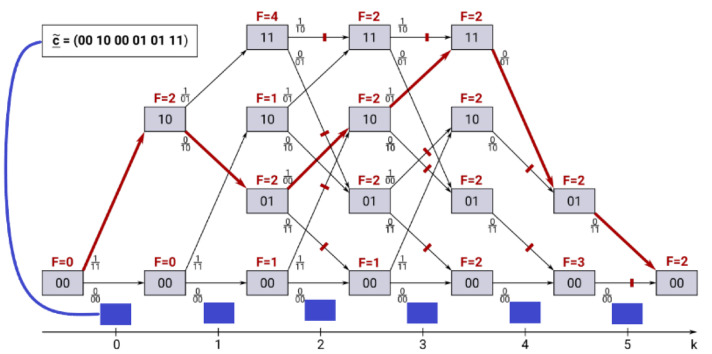
Zustandsdiagramm

- $c = 11\ 10\ 00\ 01\ 01\ 11$



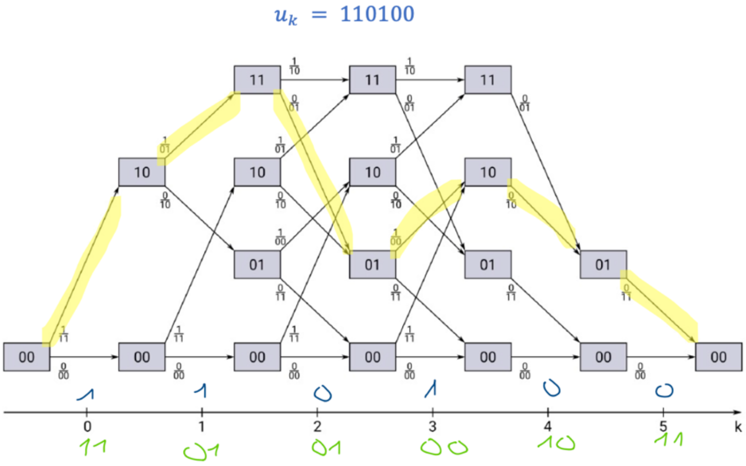
Trellis-Diagramm

1. Zustände mit Code vergleichen
2. Fehler eintragen
3. Verbindung einzeichnen (kleinster Fehler)
4. Bits wechseln $00\ 10\ 00\ 01\ 01\ 11 \rightarrow 11\ 10\ 00\ 01\ 01\ 11$



Tailbits: Anzahl Stellen zum Nullzustand

Bildung der Codeworte mit dem Trellis-Diagramm (Decodierung)



Viterbi-Decoder

- ⇨ Effiziente Methode, um die wahrscheinlichste gesendete Bitfolge zu ermitteln
- ⇨ Wahrscheinlichster Pfad = Pfad mit den kleinsten Kosten-Metriken (Fehlern)