1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Rechenregeln zur Multiplikation

Addition und Subtraktion

Dimensionen beider Matrizen identisch sind.

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5&2+6\\3+7&4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8\\10&12\end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation

Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix.

$$5\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot1&5\cdot2\\5\cdot3&5\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10\\15&20\end{pmatrix}$$

Transponierte einer Matrix

$$\begin{pmatrix}\#1\rightarrow\\\#2\rightarrow\\\#3\rightarrow\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}\#1&\#2&\#3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&11\\2&12\\3&13\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\11&12&13\end{pmatrix}$$

$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

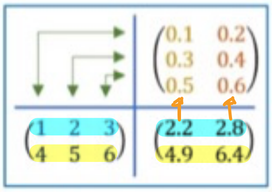
$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

Multiplikation

$2\times 1 \cdot 1\times 2 = 2\times 2$

- Bedingungen für $A\cdot B$ — $A_{Zeilenanz} = B_{Spalten}$
- Resultat von $A\cdot B$ — $A_{Zeilenanz}\times B_{Spalten}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.1&0.2\\0.3&0.4\\0.5&0.6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.2&2.8\\4.9&6.4\end{pmatrix}$$



⇨ Nicht kommutativ -> Reihenfolge spielt eine Rolle!

Assoziativ-Gesetz: $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

Distributiv-Gesetze: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ und $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

Regel zur Multiplikation mit einem Skalar: $(\lambda\cdot A)\cdot B=\lambda\cdot(A\cdot B)=A\cdot(\lambda\cdot B)$

Zeilenstufenform (Gauss)

1. Nullzeilen stehen zuunterst
2. Die erste Zahl $\neq 0$ ist eine *führende Eins*
3. *Führende Einsen*, die weiter unten stehen → nach rechts versetzt

Reduzierte Zeilenstufenform (Gauss-Jordan)

- Spalten mit *führender Eins* enthalten sonst nur Nullen

Rang einer Matrix

Rang $rg(A)$ einer Matrix A (Zeilenstufenform) mit n = Anzahl Spalten.

$$rg(A) = Anzahl\ Zeilen - Anzahl\ Nullzeilen$$

- Lösbar — $rg(A)=rg(A|\vec{c})$
- Genau eine Lösung — $rg(A)=n$
- Unendlich viele Lösungen — $rg(A)<n$

Bestimmung der Lösungen aus der reduzierten Zeilenstufenform

- *Führende Unbekannte* — Spalte mit führender Eins
- *Freie Unbekannte* — Spalte ohne führende Eins

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Auflösen nach der *führenden Unbekannten*

- $1x_1-2x_2+0x_3+3x_4=5$ — $x_2=\lambda$ — $x_1=5+2\cdot\lambda-3\cdot\mu$
- $0x_1+0x_2+1x_3+1x_4=3$ — $x_4=\mu$ — $x_3=3-\mu$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+2\cdot\lambda-3\cdot\mu\\\lambda\\3-\mu\\\mu\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}5\\0\\3\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\-1\\1\end{pmatrix}}_{Parameterdarstellung}$$

2 Vektorgeometrie

Ein Vektor ist ein Objekt, das ein *Betrag* und eine *Richtung* hat.

- $\vec{0}$ = *Nullvektor* — Vektor mit dem Betrag 0
- $\vec{e}$ = *Einheitsvektor* — Vektor mit Betrag 1
- $-\vec{a}$ = *Gegenvektor* von $\vec{a}$

Addition

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation

$$\lambda\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_x\\\lambda\cdot a_y\end{pmatrix}$$

Gegenvektor

$$-\vec{a}=\begin{pmatrix}-a_x\\-a_y\end{pmatrix}$$

Betrag eines Vektors

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

Orthogonale Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ $\left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$ 90°

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\rightarrow orthogonal$

Orthogonale Projektion $\vec{b_a}$ eines Vektors $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$

$$\vec{b_a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a},\qquad |\vec{b_a}|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Skalarprodukt $|a|\cdot|b|\cdot\cos(\varphi)$

$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Winkelberechnung

$$\cos(\varphi)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Einheitsvektor

Gegeben ist ein Vektor mit Betrag $a=|\vec{a}|$.

$$\vec{a}\cdot\frac{1}{|\vec{a}|}=\vec{e_a}$$

Vektorprodukt

- $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)$
- $\vec{a}\times\vec{b}$ **ist orthogonal zu** $\vec{a}$ und **zu** $\vec{b}$

(1) $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$ **sind genau dann kollinear, wenn** $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

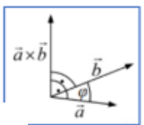
(2) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

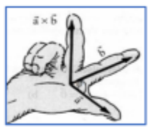
(3) *Antikommutativ-Gesetz*: $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

(4) *Distributiv-Gesetze*: $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ und $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

(5) *Gemischtes Assoziativ-Gesetz*: $\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\cdot\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\cdot\vec{b})$

(6) Das normale *Assoziativ-Gesetz* gilt im Allgemeinen nicht: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$



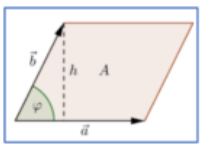


$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

a_1 b_1

Fläche des aufgespannten Parallelogramms

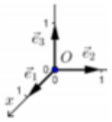
- $h=|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)$
- $A=|\vec{a}|\cdot h=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)=|\vec{a}\times\vec{b}|$



Räumliches Koordinatensystem

$\mathbb{R}^3$ = *Räumliches Koordinatensystem*

- O = *Ursprung*
- $\vec{e_1}$ = *Einheitsvektor*
- $\vec{e_2}$ = *Einheitsvektor* um 90° gedreht
- $\vec{e_3}$ = *Einheitsvektor*
  - Orthogonal zu $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$
  - Rechtwinklig zu $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$



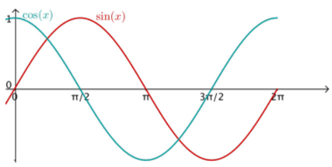
Kollinear (Parallel)

Sind zwei Vektoren *kollinear*, so ist ein Vektor an Vielfaches des anderen.

Komplanar (Auf gleicher Ebene)

Drei Vektoren sind *komplanar*, wenn sie auf der gleichen Ebene sind.

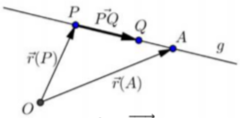
Orthogonaler Vektor zu a: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_2\\-a_1\end{pmatrix},\lambda\in R$



2.1 Geraden & Ebenen

Gerade in der Ebene und im Raum

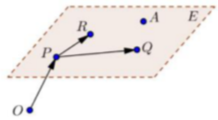
- $\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$
- $g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$



Der Punkte P heisst *Aufpunkt*, der *Richtungs-Vektor* $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ von g.

Eine **Ebene** kann durch drei Punkte festgelegt werden

- Die Vektoren $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PQ}$ gilt, sie sind *komplanar*
- $\overrightarrow{PA} = \lambda \cdot \overrightarrow{PR} + \mu \cdot \overrightarrow{PQ}$



$\vec{r}(A) = \vec{r}(P) + \lambda \cdot \overrightarrow{PR} + \mu \cdot \overrightarrow{PQ}$

Lage von Geraden im Raum

1. Richtungsvektoren kollinear?
2. Gemeinsame Punkt(e)?

Kollinear	Gemeinsame Punkte	
	Ja	Nein
Ja	Identisch	Echt parallel
Nein	Schneidend	Windschief

$g: \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind nicht parallel.

$\rightarrow$ *Schneidend oder Windschief*

Parameterdarstellung der Ebene

$$E: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$$

$$E: \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$E: 2x + 7y - 4z + 1 = 0$$

Punkte einsetzen $(1; 0; z)$, $(0; 1; z)$, $(0; 0; z)$

$E: 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \rightarrow P = (0; 0; 1/4)$

$E: 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 4 \cdot z + 1 = 0 \rightarrow P = (1; 0; 3/4)$

$E: 2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 - 4 \cdot z + 1 = 0 \rightarrow P = (0; 1; 2)$

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7/4 \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung der Ebene

$\vec{n} \perp E$ $\qquad E: ax + by + cz + d = 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 2 \\ 2 + 4 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

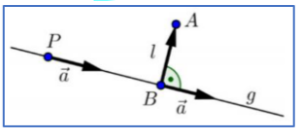
$$E: -14x + 6y - 4z + d = 0$$

Aufpunkt einsetzen: $-14 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + d = 0 \rightarrow d = 8$

Abstand Punkt-**Gerade**

$A = (x_A; y_A; z_A), \quad g: \vec{r}(P) + \lambda \cdot \vec{a}$

$$L = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$



Koordinatendarstellung der Gerade

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g: \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & x \\ -5 & 1 & y \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} (1)\ x = 2 - 3\lambda \\ (2)\ y = -5 + \lambda \end{matrix}$$

Additionsverfahren anwenden

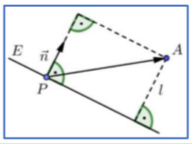
$$(1) + 3 \cdot (2) = x + 3y = 2 - 15$$

$$x + 3y + 13 = 0$$

Abstand Punkt-**Ebene**

$A = (x_A; y_A; z_A), \quad E: ax + by + cz + d = 0$

$$L = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{|\vec{n}|}$$



Gegenseitige Lage von Ebenen

Identisch: $a_1 = p \cdot a_2 \cdot b_1 = p \cdot b_2, c_1 = p \cdot c_2$ **und** $\boldsymbol{d_1 = \rho \cdot d_2}$

Parallel: Normalenvektoren von E1 & E2 sind kollinear + $a_1 = p \cdot a_2 \cdot b_1 = p \cdot b_2, c_1 = p \cdot c_2$ **und** $\boldsymbol{d_1 \neq p \cdot d_2}$

Weder identisch noch parallel: Schnittgerade

3 Quadratische Matrizen

Inverse einer Quadratischen Matrix A

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Beispiel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Inverse einer 2x2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Invertierbar falls $ad - bc \neq 0$!

Inverse einer Quadratischen Matrix A

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right)$$

Reduzierte Zeilenstufenform (linke Seite)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 17 & 8 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -6 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrizen umformen

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Matrix X, für die gilt: $A - X \cdot B = 3 \cdot X$.

$A - X \cdot B = 3 \cdot X$

$A = 3 \cdot X + X \cdot B$

$A = X \cdot 3 \cdot E + X \cdot B$

$A = X \cdot (3 \cdot E + B) \quad | \cdot (3E + B)^{-1}$

$A \cdot (3E + B)^{-1} = X$

$3 \cdot E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$3E + B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(3E + B)^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Linear unabhängig

Die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_k}$ sind *linear unabhängig*, wenn gilt:

- $0 \cdot \vec{a_1} + 0 \cdot \vec{a_2} + \dots + 0 \cdot \vec{a_k}$ ist die einzige Linearkombination, die $\vec{0}$ ergibt
- $\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \dots + \lambda_k \cdot \vec{a_k} \neq \vec{0}$ $(\lambda > 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R})$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent: $(n \times n)$

- $\det(A) \neq 0$
- Spalten von A sind *linear unabhängig*
- Zeilen von A sind *linear unabhängig*
- $rg(A) = n$
- A ist invertierbar
- Das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Determinante

Gegeben sei eine $n \times n$ Matrix.

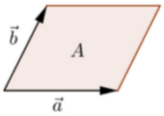
- $\det(A) \quad = \det(A^T)$
- $\det(AB) \quad = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) \quad = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(E) \quad = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$
- $\det(\lambda \cdot A) \quad = \lambda^n \cdot \det(A)$
- $\det(A^\lambda) \quad = \det(A)^\lambda$

Geometrische Interpretation der Determinante

Der Betrag einer Determinante entspricht … beschrieben wird.

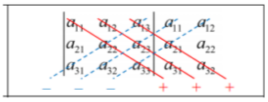
- dem *Flächeninhalt*, der durch eine 2x2-Matrix
- dem *Volumen*, das durch eine 3x:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right|$$



Determinante einer $2 \times 2 -$ Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det(A) = |A| = a \cdot d - b \cdot c$$



Determinante einer $3 \times 3 -$ Matrix $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = |A| = x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 + y_1 \cdot z_2 \cdot x_3 + z_1 \cdot x_2 \cdot y_3 - z_1 \cdot y_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot z_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot x_2 \cdot z_3$$

Determinante $n \times n -$ Matrix

Um die Determinante einer $n \times n$-Matrix zu berechnen, wählen wir $i =$ Zeilen, $j =$ Spalten

Entwicklung nach der i −ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Tipp: Entwickeln nach Spalte / Zeile mit vielen Nullen!

Entwickeln nach Zeile / Spalte

$$\begin{pmatrix} 1^+ & 5 & 9 & 13 \\ 2^- & 6 & 10 & 14 \\ 3^+ & 7 & 11 & 15 \\ 4^- & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 6 & 10 & 14 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = +6 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} = 6 \cdot -4 - 7 \cdot -8 + 8 \cdot -4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = +5 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 6 & 10 & 14 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} = +5 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 11 & 15 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} = \cdots$$

4 Vektorräume

Reeller Vektorraum

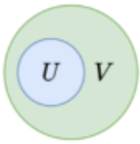
Ein reeller Vektorraum ist eine Menge V ($\neq \emptyset$) mit zwei Verknüpfungen:

- $+: V \times V \to V: (\vec{a}; \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$ Addition
- $\cdot: \mathbb{R} \times V \to V: (\lambda; \vec{b}) \mapsto \lambda \cdot \vec{b}$ Skalare Multiplikation
- Der Nullpunkt muss zwingend enthalten sein!

Eine Teilmenge U eine Vektorraums V heisst ***Unterraum*** von V, wenn U selbst auch ein *Vektorraum* ist.

Unterraumkriterien

1. Für beliebige Elemente $\vec{a}, \vec{b} \in U$ ist $\boldsymbol{\vec{a} + \vec{b} \in U}$
2. Für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{a} \in U$ ist $\boldsymbol{\lambda \cdot \vec{a} \in \mathbb{R}}$



Linearer Spann

Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}$ in einem reellen Vektorraum V.

$$span(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}) = \{\lambda_1 \cdot \vec{b_1} + \lambda_2 \cdot \vec{b_2} + \lambda_n \cdot \vec{b_n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

Schreibt man die Vektoren $\vec{b_k} \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander so entsteht die $m \times n -$ Matrix B.

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

1. Die Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}$ sind ***linear unabhängig***
2. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat nur eine Lösung nämlich $\vec{x} = \vec{0}$
3. Es gilt $rg(B) = n$

Erzeugendensystem

Eine Menge $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$ von Vektoren $\vec{b_k}$ im Vektorraum V heisst *Erzeugendensystem* von V, wenn gilt:

$$V = span(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n})$$

Schreibt man die Vektoren $\vec{b_k} \in \mathbb{R}^m$ nebeneinander so entsteht die $m \times n -$ Matrix B.

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

- mindestens m-Vektoren

1. Die Vektoren $\vec{b_k}$ bilden ein ***Erzeugendensystem*** $\mathbb{R}^m$
2. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{a}$ ist für jedes $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ lösbar
3. Es gilt $rg(B) = m$

Dimensionen

Für jeden reellen Vektorraum V gilt: Jede Basis von V hat gleich viele Elemente.

Die *Anzahl Vektoren*, die eine Basis von V bilden, heisst *Dimension* von $V = \dim(V)$.

- Eine Basis von $\mathbb{R}^n$ hat n Elemente $\to \dim(\mathbb{R}^n) = n$

Beispiel 7

Ist die Menge $U = \left\{\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \middle| \mu \in \mathbb{R}\right\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$?

(1) $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix} \in U$

(2) $\lambda \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \mu \\ \lambda \cdot \mu \end{pmatrix} \in U$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$

} U ist Unterraum von V

Beispiel 8

Ist die Menge $U = \left\{\begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \mu \in \mathbb{R}\right\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$?

(1) $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U \Rightarrow$ U ist kein Unterraum von V $\Rightarrow$ U ist kein Vektorraum

Beispiel 9

Basis

Eine Menge $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$ von Vektoren $\vec{b}_k$ im Vektorraum V heisst *Basis* von V, wenn

1. $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$ ist ein Erzeugendensystem von V
2. Die Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}$ sind linear unabhängig

Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

1. Die Vektoren $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}$ bilden eine ***Basis*** von $\mathbb{R}^n$
2. $rg(B) = n$
3. $\det(B) \neq 0$
4. B ist invertierbar
5. Das LGS $B \cdot \vec{x} = \vec{c}$ hat eine eindeutige Lösung

Beliebige Basis $B \rightarrow$ Standard-Basis S $\quad B \rightarrow S$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S \right\}, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{b_1} + a_2 \cdot \vec{b_2} + \dots + a_n \cdot \vec{b_n}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B$$

$$\vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_S$$

Standard-Basis $S \rightarrow$ Beliebige Basis B $\quad S \rightarrow B$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}_S \right\}, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$B \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_S$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \right\}, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}^{B^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}_S$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \\ -1 \cdot -7 + 1 \cdot -4 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ oder Gauss: $(\vec{b_1}\ \vec{b_2} \mid \vec{a})$

Standardbasis von $\mathbb{R}^n$

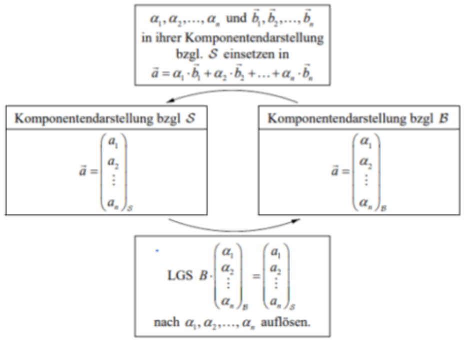
$$S = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$$

Monomonbasis von $\mathbb{P}_n[x]$

$$M = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

Polynom-Vektorraum $\mathbb{P}_3[x]$

- Basis mit $n + 1 = 4$ Elementen
- $\dim(\mathbb{P}_3[x]) = 4$
- $\dim(\mathbb{P}_n[x]) = n + 1$



5 Lineare Abbildungen

Gegeben sind zwei Vektorräume V und W. Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heisst *lineare Abbildung*, wenn für alle Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

1. $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $f(\vec{x} \cdot \vec{y}) = f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})$ $\Rightarrow f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$

Erlaubte Operationen	*Verbotene Operationen*	
$\lambda \cdot x_i$	$x_i + c$	$(x_i)^n$
$x_i + x_j$	$x_i \cdot x_j$	$\cos(x_i)$

Das ***Bild*** $im(A)$ einer $m \times n$ -Matrix A, ist der Unterraum des m-dimensionalen Vektorraum W, der von den Spalten $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ der Matrix aufgespannt wird:

$$im(A) = span(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}) = \{\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \dots + \lambda_n \vec{a_n} \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$$

Der ***Kern*** einer $m \times n$ -Matrix A ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Der *Kern* $\ker(A)$ ist der folgende Unterraum von V

$$\ker(A) = \{\vec{x} \in V \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$$

Für jede $m \times n$ – Matrix A gilt:

$$\dim(im(A)) = rg(A) \ \ und\ \ \dim(\ker(A)) + \dim(im(A)) = n$$ $\rightarrow$ Spalten

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Spalten mit *führenden Unbekannten* bilden das *Bild* (*ablesen*)

$$im(A) = \left(\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \vec{x} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mu, v \in \mathbb{R} \right)$$

Spalten **ohne** *führenden Unbekannten* werden verwendet, um den *Kern* zu berechnen

$$x_1 = 2\lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = \lambda$$

$$\ker(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim(\ker(A)) = \underline{1} \Rightarrow \dim(im(A)) = 3 - \underline{1} = 2$

Überprüfung der **Linearität**

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- $f\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2 \cdot (x_2 + y_2) \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$
- $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \rightarrow OK$
- $f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 + 2 \cdot (\lambda \cdot x_2) \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}$
- $\lambda \cdot f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + 2x_2) \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix} \rightarrow OK$

Die Abbildung ist *linear*.

Wir betrachten zwei lineare Abbildungen

- $f: U \rightarrow V$ mit Abbildungsmatrix A
- $g: V \rightarrow W$ mit Abbildungsmatrix B

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{g \circ f}{\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}} & & \\ U & \overset{f}{\rightrightarrows} & V & \overset{g}{\rightrightarrows} & W \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & g(f(\vec{x})) \\ \vec{x} & \mapsto & A \cdot \vec{x} & \mapsto & B \cdot A \cdot \vec{x} \end{array}$$

Die Verknüpfung $g \circ f$ ist wieder eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $B \cdot A$.

Werte bereich von f = Definitions bereich von g

$\Rightarrow$ invertierbar, falls $im(A) = \mathbb{R}^n$

$n = 4$

Abbildungsmatrix

Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$, mit der jeweiligen Standardbasis. Dann lässt sich jede *lineare Abbildung* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$ – Matrix A darstellen

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Die Spalten der Matrix A sind die Bilder der Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & \dots & f(\vec{e_n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} & f\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} & \dots & f\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

<u>Beispiel</u>

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\3x_2\\-4x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1x_1 - 1x_2\\0x_1 + 3x_2\\-4x_1 + 0x_2\end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 3\\-4 & 0\end{pmatrix}$$

Wir betrachten zwei endliche Vektorräume

- V mit Basis $B = \{\vec{b_1}; \vec{b_2}; \dots; \vec{b_n}\}$
- W mit Basis $C = \{\vec{c_1}; \vec{c_2}; \dots; \vec{c_n}\}$

Jede *lineare Abbildung* $f: V \to W$ durch eine $m \times n$ – Matrix ${}_C A_B$ darstellen

$$\left(f(\vec{x})\right)_C = {}_C A_B \cdot \vec{x}_B$$

Die Spalten der Matrix ${}_C A_B$ sind die Bilder der Elemente von B in der Komponentendarstellung bezüglich der Basis C:

$${}_C A_B = {}_C\begin{pmatrix} \left(f(\vec{b_1})\right)_C & \left(f(\vec{b_2})\right)_C & \dots & \left(f(\vec{b_n})\right)_C \end{pmatrix}_B$$

<u>Beispiel</u> (Kann mittels Inverser oder Gauss berechnet werden)

↳ ${}_C A_B$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-x_2\\2x_1\\x_2 - x_1\end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}_S\right\}, \qquad C = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}_S; \begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}_S\right\}$$

$${}_C A_B = {}_C\begin{pmatrix} \left(f\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)_C & \left(f\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)_C \end{pmatrix}_B$$

$$\left(f\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)_C = \left(\begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}\right)_C = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & -5\\0 & 2 & -4 & 4\\1 & 1 & 1 & 3\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -11\\0 & 1 & 0 & 14\\0 & 0 & 1 & 6\end{array}\right)$$

$$\left(f\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)_C = \left(\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}\right)_C = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & -3\\0 & 2 & -4 & -2\\1 & 1 & 1 & 4\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -11\\0 & 1 & 0 & 15\\0 & 0 & 1 & 8\end{array}\right)$$

$${}_C A_B = {}_C\begin{pmatrix}-11 & -11\\14 & 15\\6 & 8\end{pmatrix}_B$$

Die Abbildungsmatrix ${}_B T_S$ für den **Basiswechsel** von S nach B

- ${}_B T_S = \left({}_S T_B\right)^{-1}$
- ${}_S A_S = {}_S T_B \cdot {}_B A_B \cdot {}_B T_S$

${}_B A_B = {}_B T_S \cdot {}_S A_S \cdot {}_S T_B$

$$\begin{array}{ccc} \vec{x} & \xrightarrow{{}_S A_S} & f(\vec{x}) \\ {\scriptstyle {}_B T_S} \big\downarrow & & \big\uparrow {\scriptstyle {}_S T_B} \\ \vec{x} & \xrightarrow[{}_B A_B]{} & f(\vec{x}) \end{array}$$

→ in Gegenuhrzeigersinn !

Streckung	**Orthogonale Projektion**	**Spiegelung**	**Rotation**	**Scherung**
• x-Richtung λ_1 • y-Richtung λ_2 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix}$	• Gerade $g: ax + by = 0$ • Mit $a^2 + b^2 = 1$ $\begin{pmatrix}1-a^2 & -ab\\-ab & 1-b^2\end{pmatrix}$	• Geraden $g: ax + by = 0$ • Mit $a^2 + b^2 = 1$ $\begin{pmatrix}1-2a^2 & -2ab\\-2ab & 1-2b^2\end{pmatrix}$	• Um den Ursprung • Um den Winkel φ $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$	• In x-Richtung • Mit Faktor m $\begin{pmatrix}1 & m\\0 & 1\end{pmatrix}$
• x-Richtung 3 • y-Richtung -1 $\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$	• Gerade $g: 2x - y = 0$ • Normiert $g: \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y = 0$ $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$	• Geraden $g: x + 7y = 0$ • Normiert $g: \frac{1}{\sqrt{50}}x + \frac{7}{\sqrt{50}}y = 0$ $\frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix}48 & -14\\-14 & -48\end{pmatrix}$	• Um den Ursprung • Winkel $\varphi = 90°$ $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$	• In x-Richtung • Mit Faktor 3 $\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$
Zentrische Streckung • Faktor λ $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$	**Orthogonale Projektion** auf die Ebene • $E: ax + by + cz = 0$ • $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ $P = \begin{pmatrix}1-a^2 & -ab & -ac\\-ab & 1-b^2 & -bc\\-ac & -bc & 1-c^2\end{pmatrix}$ $P = E - \vec{n} \cdot \vec{n}^T$	**Spiegelung** an der Ebene • $E: ax + by + cz = 0$ • $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ $S = \begin{pmatrix}1-2a^2 & -2ab & -2ac\\-2ab & 1-2b^2 & -2bc\\-2ac & -2bc & 1-2c^2\end{pmatrix}$ $S = E - 2\vec{n} \cdot \vec{n}^T$	**Rotation** um den Winkel φ $x-Achse: \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$ $y-Achse: \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi)\\0 & 1 & 0\\-\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$ $z-Achse: \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	

Rotation um den Winkel φ um die Achse durch den Ursprung, deren Richtung durch den normierten Vektor $\vec{a}$ festgelegt ist.

$$x-Achse: \begin{pmatrix}\cos(\varphi) + a_1^2(1-\cos(\varphi)) & a_1a_2(1-\cos(\varphi)) - a_3\sin(\varphi) & a_1a_3(1-\cos(\varphi)) - a_2\sin(\varphi)\\a_1a_2(1-\cos(\varphi)) + a_3\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_2^2(1-\cos(\varphi)) & a_2a_3(1-\cos(\varphi)) - a_1\sin(\varphi)\\a_1a_3(1-\cos(\varphi)) - a_2\sin(\varphi) & a_2a_3(1-\cos(\varphi)) + a_1\sin(\varphi) & \cos(\varphi) + a_3^2(1-\cos(\varphi))\end{pmatrix}$$

Rotation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um φ um den Ursprung	**Translation** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$	**Rotation** und **Translation** in einem
$\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & a_1\\0 & 1 & a_2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & a_1\\\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & a_2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Bsp.: $S \cdot R$

wird <u>zuerst</u> ausgeführt !

5.4.2 Orthogonale Projektionen und Spiegelungen

Orthogonale Projektion auf die x/y-Ebene	Spiegelung an der x/y-Ebene	Orthogonale Projektion auf die x-Achse	Spiegelung an der x-Achse
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die x/z-Ebene	**Spiegelung** an der x/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die y-Achse	**Spiegelung** an der y-Achse
$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$
Orthogonale Projektion auf die y/z-Ebene	**Spiegelung** an der y/z-Ebene	**Orthogonale Projektion** auf die z-Achse	**Spiegelung** an der z-Achse
$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

6 Beispiele 1: LGS, Linearkombination, Parameterdarstellung, Geraden

LGS im Restklassensystem $\mathbb{Z}_{11}$ (modulo 11)

$$\begin{array}{ccccccccc} & & [x_1] & + & [2] & \cdot & [x_2] & = & [3] \\ [4] & \cdot & [x_1] & + & [5] & \cdot & [x_2] & = & [6] \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} [1] & [2] & [3] \\ [4] & [5] & [6] \end{array}\right) \Big| \cdot [-4] \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} [1] & [2] & [3] \\ [0] & [-3] & [-6] \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} [1] & [2] & [3] \\ [0] & [8] & [5] \end{array}\right) \cdot [7] \quad \text{da}$$

$$[8^{-1}] = [7] \quad \left(\begin{array}{cc|c} [1] & [2] & [3] \\ [0] & [1] & [2] \end{array}\right) \Big| \cdot [-2] \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} [1] & [0] & [-1] \\ [0] & [1] & [2] \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} [1] & [0] & [10] \\ [0] & [1] & [2] \end{array}\right)$$

Das System hat also eine Lösung $([x_1],[x_2]) = ([10],[2])$

Linearkombination eines Vektors bestimmen

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Stellen Sie den Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

Parameterdarstellung einer Geraden

Gegeben sind die Punkte $P = (3;-2;-2)$ und $Q = (5;0;1)$.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g durch die Punkte P und Q

(b) Liegen die Punkte $A = (1;-4;7)$ und $B = (9;4;7)$ auf der Geraden g?

(a) $g: \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} 1 = 3 + 2\lambda_A \\ -4 = -2 + 2\lambda_A \\ 7 = -2 + 3\lambda_A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda_A = -1 \\ -4 = -2 + 2 \cdot (-1) \ \ ok \\ 7 \neq -2 + 3 \cdot (-1) \end{array}$

Es gibt kein λ_A, das alle drei Komponentengleichungen erfüllt; A liegt nicht auf g.

$\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} 9 = 3 + 2\lambda_B \\ 4 = -2 + 2\lambda_B \\ 7 = -2 + 3\lambda_B \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda_B = 3 \\ 4 = -2 + 2 \cdot 3 \ \ ok \\ 7 = -2 + 3 \cdot 3 \ \ ok \end{array}$

Das gleiche λ_B erfüllt alle drei Komponentengleichungen; B liegt auf g.

LGS: Für welche Werte des Parameters a gibt es wie viele Lösungen?

$$\left. \begin{array}{rcrcl} x & + & ay & = & 1 \\ ax & + & y & = & a^2 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{array}\right) \Big| \cdot (-a) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & a^2 - a \end{array}\right)$$

Im nächsten Schritt müssten wir nun durch $1 - a^2 = (1-a)(1+a)$ dividieren.
Aber aufgepasst: $(1-a)(1+a)$ könnte 0 sein, und eine Division durch 0 ist verboten!
Also müssen wir an diesem Punkt eine Fallunterscheidung vornehmen: Wir betrachten zunächst die Werte von a, für die $(1-a)(1+a) = 0$ ist, dann die übrigen.

Fall 1: $a = 1$
Wir setzen $a = 1$ in die obige erweiterte Koeffizientenmatrix ein und erhalten:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Hier ist $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|\vec{c}) = 1 < n = 2 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen.

Fall 2: $a = -1$
Wir setzen $a = -1$ in die obige erweiterte Koeffizientenmatrix ein und erhalten:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ Hier ist $\operatorname{rg}(A) = 1 \neq \operatorname{rg}(A|\vec{c}) = 2 \Rightarrow$ keine Lösung.

Fall 3: $a \neq \pm 1$
Hier ist $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|\vec{c}) = 2 = n \Rightarrow$ genau eine Lösung.

Welche Punkte haben einen gewissen Abstand zu einer Geraden?

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P = (6;-8;3)$ und $Q = (-6;8;7)$. Welche Punkte von g haben vom Punkt $A = (1;-2;3)$ den Abstand 3?
Hinweis: Strecken Sie den Richtungsvektor von g so, dass Sie nette Zahlen erhalten.

$$g: \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten einen Punkt B auf der Geraden. Dann gilt:

$$\overline{AB} = \left| \begin{pmatrix} 6 - 3\lambda_B \\ -8 + 4\lambda_B \\ 3 + \lambda_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(5 - 3\lambda_B)^2 + (-6 + 4\lambda_B)^2 + \lambda_B^2} = \sqrt{26\lambda_B^2 - 78\lambda_B + 61}$$

$$\overline{AB} = 3 \Leftrightarrow 26\lambda_B^2 - 78\lambda_B + 61 = 9 \Leftrightarrow \lambda_B^2 - 3\lambda_B + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{B1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$$

Punkte auf g im Abstand 3 von A:

$B_1 = (6 - 3 \cdot 2; -8 + 4 \cdot 2; 3 + 2) = (0;0;5)$ und $B_2 = (6 - 3 \cdot 1; -8 + 4 \cdot 1; 3 + 1) = (3;-4;4)$.

7 Beispiele 2: Geraden, Ebenen

Welcher Punkt C einer Geraden hat von zwei Punkten A und B gleiche Abstände?

Gegeben ist die Gerade $g: \begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$. Welcher Punkt C von g hat von den Punkten $A=(3;4;0)$ und $B=(1;4;2)$ gleiche Abstände?

Der Punkt C liegt auf der Geraden g; es gilt also:

$$\vec{r}(C)=\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}+\lambda_C\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-\lambda_C\\-3+\lambda_C\\2+2\lambda_C\end{pmatrix}$$

$$\overline{AC}=\left|\begin{pmatrix}0-\lambda_C\\-3+\lambda_C\\2+2\lambda_C\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-3-\lambda_C)^2+(-7+\lambda_C)^2+(2+2\lambda_C)^2}=\sqrt{6\lambda_C^2+62}$$

$$\overline{BC}=\left|\begin{pmatrix}0-\lambda_C\\-3+\lambda_C\\2+2\lambda_C\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1-\lambda_C)^2+(-7+\lambda_C)^2+(2\lambda_C)^2}=\sqrt{6\lambda_C^2-12\lambda_C+50}$$

$$\overline{AC}=\overline{BC} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{6\lambda_C^2+62}=\sqrt{6\lambda_C^2-12\lambda_C+50} \;\Leftrightarrow\; 62=-12\lambda_C+50 \;\Leftrightarrow\; \lambda_C=-1$$

$C=(0+1;-3-1;2-2)=(1;-4;0)$

Die gegenseitige Lage zweier Geraden g und h bestimmen

$$g:\begin{pmatrix}9\\5\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\quad h:\begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

1. Sind die Richtungsvektoren kollinear? Nein: $\begin{array}{rcl}2&=&2\cdot 1\\1&\neq&2\cdot 0\\-2&\neq&2\cdot(-3)\end{array}$.

2. Haben g und h einen gemeinsamen Punkt S?
Wenn ja, dann gibt es ein λ_S und ein μ_S, so dass gilt:

$$\begin{pmatrix}9+2\lambda_S\\5+\lambda_S\\-2\lambda_S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+\mu_S\\3\\1-3\mu_S\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{array}{lrcrcr}(1)&2\lambda_S&-&\mu_S&=&-3\\(2)&\lambda_S&&&=&-2\\(3)&-2\lambda_S&+&3\mu_S&=&1\end{array}\right\}$$

(2) $2\cdot(-2)-\mu_S=-3 \;\Rightarrow\; \mu_S=-1$ (3) $-2\cdot(-2)+3\cdot(-1)=1$ o.k.

Das Gleichungssystem ist lösbar; g und h haben einen gemeinsamen Punkt:

$$\vec{r}(S)=\begin{pmatrix}9\\5\\0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}\text{, also } S=(5;3;4).$$

Also schneiden sich g und h im Punkt $S=(5;3;4)$.

Umwandlung Parameter- in Koordinatendarstellung (Gerade)

$$g:\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

Für jeden Punkt $(x;y)$ der Gerade gilt: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{array}{ll}(1)&x=2-3\lambda\\(2)&y=-5+\lambda\end{array}\right\}$

Wir rechnen $(1)+3\cdot(2)$: $x+3y=2-15$.
Also ist $x+3y+13=0$ eine Koordinatendarstellung von g.

Umwandlung Koordinaten- in Parameterdarstellung (Gerade)

$g:\; 7x-2y+3=0$.

Um zwei Punkte auf g zu bestimmen, wählen wir zwei x-Koordinaten:

$x_P=0 \;\Rightarrow\; -2y_P+3=0 \;\Rightarrow\; y_P=1.5 \;\Rightarrow\; P=(0;1.5)$

$x_Q=1 \;\Rightarrow\; 7-2y_Q+3=0 \;\Rightarrow\; y_Q=5 \;\Rightarrow\; Q=(1;5)$

$$g:\;\vec{r}(P)+\lambda\cdot\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}0\\1.5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\3.5\end{pmatrix}$$

Umwandlung Parameter- in Koordinatendarstellung (Ebene)

$$E:\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\-22\\10\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; E:24x-22y+10z+d=0$$

Koordinaten des Aufpunkts einsetzen: $24\cdot 5-22\cdot 0+10\cdot(-1)+d=0 \;\Rightarrow\; d=-110$

$E:\; 24x-22y+10z-110=0$

Umwandlung Koordinaten- in Parameterdarstellung (Ebene)

$E:\; 2x+7y-4z+1=0$

Ich wähle x- und y-Koordinaten für drei Punkte auf E und berechne die z-Koordinate:

$x=0,\; y=0$ $-4z+1=0 \;\Rightarrow\; z=1/4 \;\Rightarrow\; P=(0;0;1/4)$

$x=1,\; y=0$ $2-4z+1=0 \;\Rightarrow\; z=3/4 \;\Rightarrow\; Q=(1;0;3/4)$

$x=0,\; y=1$ $7-4z+1=0 \;\Rightarrow\; z=2 \;\Rightarrow\; R=(0;1;2)$

Eine mögliche Parameterdarstellung der Ebene $E:\begin{pmatrix}0\\0\\1/4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\7/4\end{pmatrix}$.

8 Beispiele 3: Ebenen, Lineare Hülle, Erzeugendensystem

Gegeben sind die Ebenen $E: x+3y+5z+11=0$ und $F: 2x+y-3=0$ sowie die Gerade $g: \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$.

Schnittgerade zweier Ebenen berechnen

(a) $\begin{matrix} x &+& 3y &+& 5z &+& 11 &=& 0 \\ 2x &+& y && &-& 3 &=& 0\end{matrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&5&-11\\2&1&0&3\end{array}\right) \cdot(-2) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&5&-11\\0&-5&-10&25\end{array}\right):(-5) \quad \cdot(-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&4\\0&1&2&-5\end{array}\right) \qquad z=\mu,\ y=-5-2\mu,\ x=4+\mu \qquad \text{Schnittgerade } h: \begin{pmatrix}4\\-5\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Schnittwinkel zweier ~~Ebenen~~ berechnen bzw. Geraden

Schnittwinkel α: $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|}$ (TR auf DEG)

$$=\arccos\left(\frac{1\cdot 2+3\cdot 1+5\cdot 0}{\sqrt{1^2+3^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+0^2}}\right)=\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{5}}\right)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=67.8°$$

Neigungswinkel einer Geraden gegenüber einer Ebenen

$$\beta=\arccos\left(\frac{\vec{n}_E\cdot\vec{a}}{|\vec{n}_E|\cdot|\vec{a}|}\right)-90°$$

Richtungsvektor von g

$$=\arccos\left(\frac{1\cdot 2+3\cdot(-5)+5\cdot 1}{\sqrt{1^2+3^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+(-5)^2+1^2}}\right)-90°=\arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{30}}\right)-90°=14.3°$$

Erzeugendensystem überprüfen

Bilden die Polynome

$$p(x)=1-x+2x^2;\quad q(x)=5-x+4x^2;\quad r(x)=3+x;\quad s(x)=-2-2x+2x$$

ein Erzeugendensystem des Vektorraums $\mathbb{P}_2[x]$?

$$\begin{pmatrix}1&5&3&-2\\-1&-1&1&-2\\2&4&0&2\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \leftarrow \cdot 1 \\ \leftarrow \cdot(-2)\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}1&5&3&-2\\0&4&4&-4\\0&-6&-6&6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ :4 \\ \leftarrow \cdot 6\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&5&3&-2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Der Rang dieser Matrix $2<3=m$, also bilden p,q,r und s kein Erzeugendensystem von $\mathbb{P}_2[x]$.

Gegeben ist der Punkt $A=(3;-4;1)$ und die Ebene $E: 3x-6y-2z+67=0$

Abstand von Punkt zu Ebene

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-6\\-2\end{pmatrix} \qquad |\vec{n}|=\sqrt{3^2+(-6)^2+(-2)^2}=7$$

normierte Koordinatendarstellung von $E: 3/7\cdot x-6/7\cdot y-2/7\cdot z+67/7=0$

Abstand von A zu E: $l=|3/7\cdot 3-6/7\cdot(-4)-2/7\cdot 1+67/7|=14$

Fusspunkt B einer Ebene

$\vec{r}(B)=\vec{r}(A)+14/7\cdot\vec{n}$ oder $\vec{r}(B)=\vec{r}(A)-14/7\cdot\vec{n}$

Im ersten Fall wäre $B=(9;-16;-3)$, was aber nicht auf der Ebene E liegt.

Also brauchen wir die zweite Formel: $B=(-3;8;5)$ (liegt tatsächlich auf E).

$$\vec{r}(B)=\vec{r}(A)\pm\frac{l}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}$$

Lineare Hülle überprüfen

Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\ \vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{span}(\vec{c},\vec{d})=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ mit } \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

Alternativ hätten wir auch prüfen können, ob die beiden Vektoren $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\ \vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ sich jeweils als Linearkombination $\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ darstellen lassen.

Fläche Parallelogramm / Volumen Spat

Fläche F eines **Parallelogramms**: $\boldsymbol{a}=\binom{3}{4},\boldsymbol{b}=\binom{2}{1}\Rightarrow F=\left|\det\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}\right|$

Volumen V eines **Spats**: $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow V=\left|\det\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\right|$

9 Beispiele 4: Basis, Standardbasis, Abbildungsmatrix SAS/BAB, Monombasis

Lineare Unabhängigkeit von Matrizen / Basis

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-9 & -2\\ 6 & 3\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

LGS lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3 & -9 & -2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 6 & 3 & -5 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)$$

Resultat:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Das lineare Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen bzw. die erweiterte Koeffizientenmatrix hat den Rang 3. Somit sind die Matrizen A, B, C und D linear abhängig. Daher bilden die vier Matrizen keine Basis.

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{S}},\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}\right\}$$

Komponentendarstellung bezüglich B

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}11\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$$

$$\text{LGS } \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\2\end{pmatrix} \text{ lösen}$$

$$\text{Also gilt: } \vec{a}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Komponentendarstellung bezüglich S

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}+3\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$$

Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis der linearen Abbildung $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, für die gilt:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}0.333\\ -0.333\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}0.333\\ 0.166\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Wir betrachten die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}\mapsto\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$. Dabei ist $\mathcal{S}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie

Abbildungsmatrix SAS von f bezüglich S

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{S}},\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}\right)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{S}},\quad {}_{\mathcal{S}}A_{\mathcal{S}}={}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$$

Abbildungsmatrix BAB von f bezüglich B

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{S}};\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}\right\}$$

$$f(\vec{b}_1)=f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}\right)=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}=2\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}\right)=2\vec{b}_1+2\vec{b}_2=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{b}_2)=f\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}\right)=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}=-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{S}}=-\vec{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}={}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Abbildungsmatrix bezüglich einer Monombasis

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$f:\mathbb{P}_3[x]\to\mathbb{P}_3[x]: p(x)\mapsto\int_0^1 p(x)\,dx$ bezüglich der Monombasis $\mathcal{M}_3$ und $\mathbb{R}$

$$f(1)=\int_0^1 1\,dx=[x]_0^1=1\qquad f(x)=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\qquad f(x)=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$f(x)=\int_0^1 x^3\,dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

$${}_{\mathbb{R}}A_{\mathcal{M}_3}={}_{\mathbb{R}}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}_{\mathcal{M}_3}$$

10 Beispiele 5: Basiswechsel

Basiswechsel von BAB nach SAS

Wir betrachten die Standardbasis $\mathcal{S}$ sowie die Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{S}} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{S}} \right\}$ von $\mathbb{R}^2$

$${}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad {}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}}^{-1} = {}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$$

zur Erinnerung: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Basiswechsel von BAB nach SAS

(a) Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Bestimmen Sie **mithilfe eines Basiswechsels** die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{S}}A_{\mathcal{S}}$ von f bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S}$.

(a) $${}_{\mathcal{S}}A_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$$

$$= {}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$$

Basiswechsel von SAS nach BAB

(b) Eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat bezüglich der Standardbasis $\mathcal{S}$ die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{S}}A_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$. Bestimmen Sie **mithilfe eines Basiswechsels** die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$ von g bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ (vgl. Aufgabe 2.6).

(b) $${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}} \cdot {}_{\mathcal{S}}A_{\mathcal{S}} \cdot {}_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{S}} \cdot {}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{S}} \cdot {}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{S}} \cdot {}_{\mathcal{S}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$= {}_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Satz 11.23 (Rangsatz) Für jede (m, n)-Matrix A gilt:

$$\dim \operatorname{Kern}(A) + \dim \operatorname{Bild}(A) = n.$$