10.

En vektor $\vec{v}$ kan skrivas som summan av dess projektion på planets normalvektor $proj_{\vec{n}}(\vec{v})$ plus en vektor som är ortogonal mot denna projektion $\vec{v} - proj_{\vec{n}}(\vec{v})$ (alltså en vektor i planet).

$$\vec{v} = \underbrace{proj_{\vec{n}}(\vec{v})}_{\text{projektion på normalvektor}} + \underbrace{(\vec{v} - proj_{\vec{n}}(\vec{v}))}_{\text{projektion på plan}}$$

Projektionen på ett plan kan alltså beräknas med hjälp av formeln $\vec{v} - proj_{\vec{n}}(\vec{v})$. Detta kan vi använda för att ta fram avbildningsmatrisen som projicerar alla vektorer i R^3 på planet $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Detta plan har normalvektorn $\vec{n} = (2, 2, 1)$

Vi projicerar en godtycklig vektor $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ på planet

$$proj_{planet}(\vec{u}) = \vec{u} - proj_{\vec{n}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}|^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{2x_1 + 2x_2 + x_3}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}^2}}_{\frac{2x_1+2x_2+x_3}{9}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ \frac{2x_1+2x_2+x_3}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ x_2 - \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ x_3 - \frac{2x_1+2x_2+x_3}{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9x_1}{9} - \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ \frac{9x_2}{9} - \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ \frac{9x_3}{9} - \frac{2x_1+2x_2+x_3}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5x_1-4x_2-2x_3}{9} \\ \frac{-4x_1+5x_2-2x_3}{9} \\ \frac{-2x_1-2x_2+8x_3}{9} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{avbildningsmatris}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$