13.

Sånna här uppgifter kommer vara mycket enklare att lösa senare i kursen när ni har gått igenom gausseliminering. Men man kan tänka såhär också: Om L_1 och L_2 skär varandra kommer deras ekvationer att ge samma resultat vid den punkten

$$t \cdot (-1, 0, 2) = (1, 2, 2) + s \cdot (-1, 2, 0) \text{ där } s, t \in R$$

om man låter $t = 1, s = 2$ får man $(-1, 0, 2) = (1, 2, 2) + (-2, 4, 0) = (-1, 6, 2)$. Detta är ju sant för det första elementet i vektorerna men inte för element två och tre. Det går helt enkelt inte att uppfylla $VL = HL$ för några värden på s och t (man förstår nog detta enklast om man försöker göra så att $VL = HL$ en stund) så en lösning saknas, därför skär inte linjerna heller varandra.

Den här lösningen känns inte så bra för bara för att man själv inte hittar något s, t så att $HL = VL$ betyder ju inte att det inte finns. Lösningen nedan med gausseliminering gör åtminstonne mig mer säker på att det inte finns någon skärningspunkt.

Alternativ lösning med gausseliminering

En skärningspunkt mellan L_1 och L_2 inträffar när deras ekvationer är lika med varandra

$$\begin{aligned} t(-1, 0, 2) &= (1, 2, 2) + s(-1, 2, 0) \\ t(-1, 0, 2) - s(-1, 2, 0) &= (1, 2, 2) \\ (-t, 0, 2t) + (s, -2s, 0) &= (1, 2, 2) \\ (-t + s, -2s, 2t) &= (1, 2, 2) \end{aligned}$$

Det här ger ett ekvationssystem med tre ekvationer

$$\begin{cases} -t + s &= 1 \\ -2s &= 2 \\ 2t &= 2 \end{cases}$$

Det här ekvationssystemet kan beskrivas med totalmatrisen, och sedan lösas med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_1 \\ -\frac{r_2}{2} \\ \frac{r_3}{2} \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_3 \\ r_2 \\ r_1 + r_3 - r_2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Den här resultatet av gausselimineringen betyder att

$$\begin{cases} t & = 1 \\ s = -1 \\ 0 = 3 \ \textbf{(Det här är omöjligt)} \end{cases}$$

Att vi har fått fram som en del av lösningen att $0 = 3$ betyder att ekvationssystemet saknar lösning, vilket i sin tur betyder att linjerna L_1 och L_2 inte skär varandra.