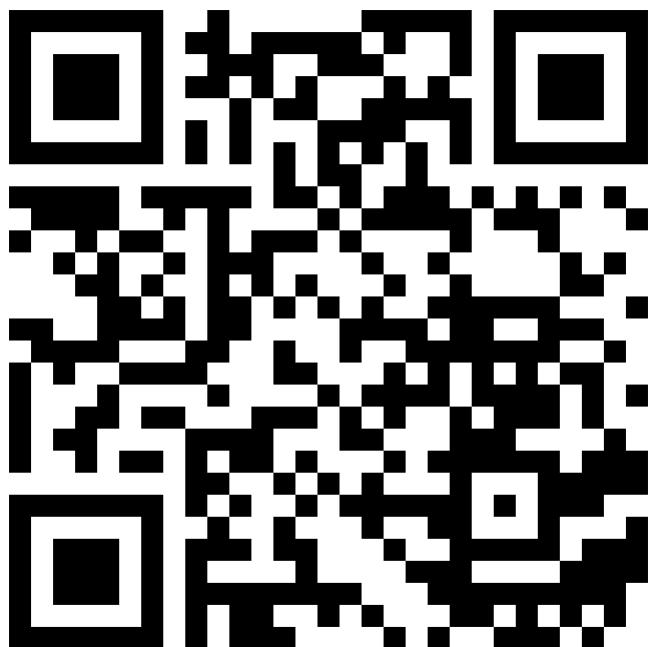


SF1624 - Algebra och geometri
detaljerade lösningar till rekommenderade uppgifter



work in progress, hämta senaste versionen på
https://github.com/simon-rosen/linalg-2022/blob/main/linalg_2022.pdf

9 december 2022

Innehåll

1 modul 1	6
1.1 Teori	6
1.2 Uppgifter att börja med	7
1	7
2	7
3	9
4	9
5	10
6	13
7	13
8	14
9	14
10	15
11	15
12	16
13	16
14	17
15	18
16	18
17	19
18	19
19	21
20	22
21	23
22	24
23	24
24- lösning saknas	24
25	24
26- lösning saknas	25
2 modul 2	25
2.1 Teori	25
2.1.1 Gauss-Jordans metod	25
2.1.2 Homogena ekvationssystem	26
2.1.3 Matriser	26
2.2 Uppgifter att börja med	26
1	26
2- lösning saknas	26
3	26
4	26
5	27
6	27
7	28
8	29

9	29
10	30
11	30
12	30
13	31
14	31
15	32
16- lösning saknas	33
17- lösning saknas	33
18- lösning saknas	33
19- lösning saknas	33
20- lösning saknas	33
21- lösning saknas	33
22- lösning saknas	33
3 modul 3	33
3.1 Teori	33
3.1.1 Linjära höljen och delrum	33
3.2 Uppgifter att börja med	34
1	34
2- lösning saknas	34
3	34
4- lösning saknas	35
5	35
6- lösning saknas	35
7	35
8- lösning saknas	36
9	36
10- lösning saknas	36
11	36
12- lösning saknas	37
13	37
14- lösning saknas	38
15	38
16- lösning saknas	39
17	39
18- lösning saknas	39
19	39
4 modul 4	40
4.1 Teori	40
4.2 Linjära avbildningar	40
4.3 Linjäritet	41
4.4 Bildrum (im)/ Värderum / Kolonrum (col)	41
4.5 Nollrum / Kärna (ker)	41
4.6 Uppgifter att börja med	41

1	41
2- lösning saknas	42
3	42
4- lösning saknas	42
5	42
6- lösning saknas	43
7	43
8- lösning saknas	43
9	43
10	44
11- lösning saknas	44
12- lösning saknas	44
13	44
14	45
15	45
16- lösning saknas	46
17	46
18- lösning saknas	47
19- lösning saknas	47
20- lösning saknas	47
21- lösning saknas	47
5 modul 5	47
5.1 Teori	47
5.2 Uppgifter att börja med	47
1- lösning saknas	47
2- (inskannad lösning)	47
3- (inskannad lösning)	50
4- lösning saknas	51
5- (inskannad lösning)	51
6- (inskannad lösning)	53
7- (inskannad lösning)	54
8- (inskannad lösning)	55
9- lösning saknas	56
10- lösning saknas	56
11- lösning saknas	56
12- (inskannad lösning)	56
13- (inskannad lösning)	57
14- lösning saknas	58
15- lösning saknas	58
6 modul 6	58
6.1 Teori	58
6.2 Metod för att ta fram egenvärden och egenvektorer till en matris	58
6.2.1 ta fram egenvärden	58
6.3 Ta fram egenvektorer	59

6.4	Diagonalisering	60
6.5	Uppgifter att börja med	60
1	60
2-	(inskannad lösning)	60
3-	(inskannad lösning)	62
4	65
5- lösning saknas	65
6- lösning saknas	65
7- lösning saknas	65
8- lösning saknas	65
9- lösning saknas	65
10- lösning saknas	65
11- (inskannad lösning)	65
12- lösning saknas	67
13	67
14- lösning saknas	67
15- lösning saknas	67
16- lösning saknas	67
17- lösning saknas	67
18	67
19- lösning saknas	68

1 modul 1

1.1 Teori

Vektorerna och punkterna i dessa exempel är tre dimensioner (\mathbb{R}^3). Men formlerna fungerar på liknande sätt för en godtycklig dimension (\mathbb{R}^n).

Formel 1 (vektoraddition)

Två vektorer $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adderas så här:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Kom ihåg att $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$

Formel 2 (vektormultiplikation med ett tal)

Ett tal t och en vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ multipliceras så här:

$$t \cdot \vec{u} = (t \cdot u_1, t \cdot u_2, t \cdot u_3)$$

Formel 3 Längden $|\vec{v}|$ av en vektor $\vec{v} = (x, y, z)$ fås genom:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Formel 4 En enhetsvektor $\vec{e}_{\vec{v}}$ i samma riktning som en vektor \vec{v} fås genom:

$$\vec{e}_{\vec{v}} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

Man skalar alltså om vektorn så att den får längd ett.

Formel 5 En vektor som går från punkten $P = (p_1, p_2, p_3)$ till punkten $Q = (q_1, q_2, q_3)$ fås genom

$$\vec{OQ} - \vec{OP} = (q_1, q_2, q_3) - (p_1, p_2, p_3)$$

Notera att \vec{OP} och \vec{OQ} är punkternas ortsvektorer (vektorer från origo till punkten), för tekniskt sätt kan man inte addera / subtrahera två punkter.

Formel 6 (skalärprodukt) Skalärprodukten av två vektorer $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

En annan formel som kan användas är:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\alpha)$$

Där α är vinkeln mellan vektorerna \vec{u} och \vec{v} . Denna formel är särskilt användbar om man vill räkna ut vinkeln mellan två vektorer.

Skalärprodukten av två vektorer är ett tal.

Formel 7 En linje kan beskrivas med en parameterframställning om man har en punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$ och en vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ som pekar i linjens riktning (som man skalar om med ett tal $t \in R$ för att kunna komma till alla punkter på linjen)

$$(x, y, z) = P + t \cdot \vec{v} = (p_1, p_2, p_3) + t \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Formel 8 Ett plan kan beskrivas med en parameterframställning om man har en punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$ samt två vektorer $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ och $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ som är parallella med planet (om man skalar dessa vektorer med två tal $s, t \in R$ ska man kunna komma till alla punkter i planet)

$$(x, y, z) = P + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} = (p_1, p_2, p_3) + s \cdot (u_1, u_2, u_3) + t \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Formel 9 Ett plan som beskrivs med en ekvation $ax + by + cz = d$ har en normalvektor $\vec{n} = (a, b, c)$ som har en rät vinkel till planet.

Formel 10 För att projicera en vektor \vec{u} på en annan vektor \vec{v} kan vi använda projekionsformeln

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

1.2 Uppgifter att börja med

1.

Rent intuitivt borde det finnas två stycken enhetsvektorer parallella till $(3, -4)$, en som pekar åt samma håll och en som pekar åt motsatt håll.

Dessa kan beräknas med hjälp av formel 4:

$$\vec{e}_{\vec{v}} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} =$$

Och med formel 3:

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \cdot (3, -4) = \pm \frac{1}{5} \cdot (3, -4)$$

Här kan man nöja sig eller så kan man utveckla ytterligare till:

$$\vec{e}_{\vec{v}} = \pm\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

Notera att det finns två stycken lösningar pga \pm tecknet.

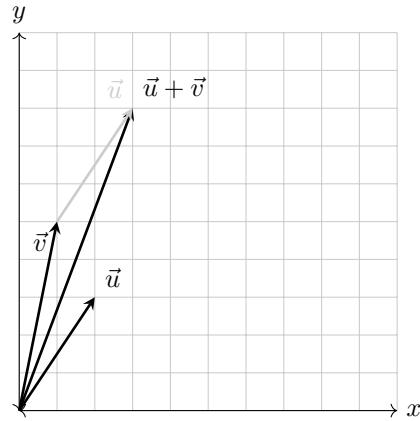
2.

a)

Använder formel 1:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) + (1, 5) = (2 + 1, 3 + 5)$$

Bild:



b)

Använder först formel 2:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v} = (2, 3) + (-1, -5)$$

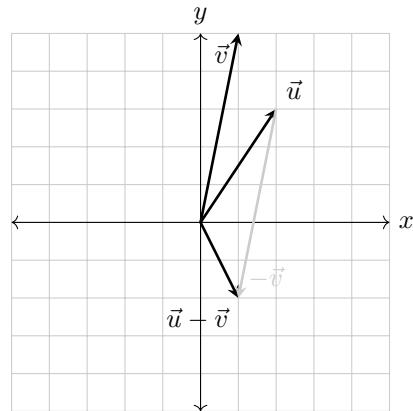
Nu är det lätt att använda formel 1:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) + (-1, -5) = (1, -2)$$

Det här var en övertydlig lösning, enklare skulle vara att bara göra så här direkt:

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1, 3 - 5) = (1, -2)$$

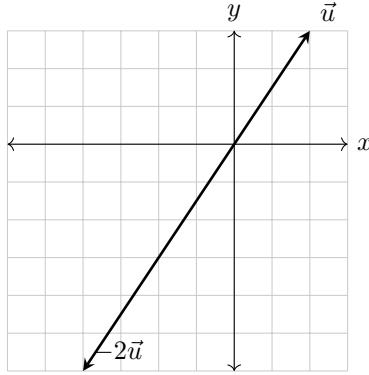
Bild:



c)

Använder formel 2:

$$-2\vec{u} = (-2 \cdot 2, -2 \cdot 3) = (-4, -6)$$



3.

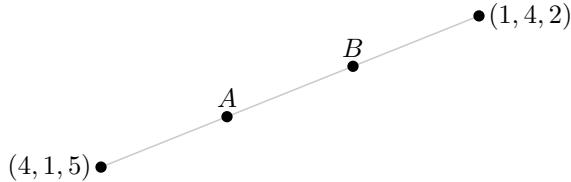
Vi vill beräkna skalärprodukten $\vec{u} \cdot \vec{u}$. För att göra detta använder vi den första varianten av formel 6:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (1, 2, 3) \cdot (1, 2, 3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1 + 4 + 9 = 14$$

Notera att $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = |\vec{u}|^2$.

4.

Den här uppgiften är enklare än den verkar. A och B ligger på en linje mellan $(4, 1, 5)$ och $(1, 4, 2)$ och de delar upp den här linjen i tre delar. Det kan se ut såhär:



En metod för att bestämma A och B är:

1. Välj en startpunkt.
2. Ta fram en vektor som går mellan punkterna.
3. börja vid startpunkten och skala om vektorn så att den når till punkt A respektive B .

Jag väljer $(1, 4, 2)$ som startpunkt. En vektor mellan $(1, 4, 2)$ och $(4, 1, 5)$ är (enligt formel 5)

$$(4, 1, 5) - (1, 4, 2) = (3, -3, 3)$$

A ligger en tredjedel från A till B och blir alltså

$$(1, 4, 2) + \frac{1}{3} \cdot (3, -3, 3) = (1, 4, 2) + (1, -1, 1) = (2, 3, 3)$$

Och B som ligger två tredjedelar från A till B blir

$$(1, 4, 2) + \frac{2}{3} \cdot (3, -3, 3) = (1, 4, 2) + (2, -2, 2) = (3, 2, 4)$$

5.

Vi söker de enhetsvektorer som är ortogonala mot vektorerna $(2, -6, -3)$ **och** $(4, 3, -1)$. Kom ihåg att enhetsvektorer är vektorer av längd ett och att ortogonalitet betyder vinkelrät. Två vektorer är ortogonala om vinkeln mellan dom är $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ radiener.

Vi döper våra kända vektorer till $\bar{v} = (2, -6, -3)$ och $\bar{u} = (4, 3, -1)$. Sedan definierar vi, till att börja med, en av våra sökta enhetsvektor $\bar{x} = (x, y, z)$. Med dessa definierade kan vi nu skriva upp våra villkor med matematisk notation.

Att \bar{x} är en enhetsvektor ger oss att $|\bar{x}| = 1$ vilket vi utvecklar till $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$. Sedan har vi villkoren att \bar{x} är ortogonal mot \bar{v} **och** \bar{u} vilket ger oss följande ekvationer

$$\begin{aligned}\bar{x} \cdot \bar{v} &= |\bar{x}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} \\ \bar{x} \cdot \bar{u} &= |\bar{x}| \cdot |\bar{u}| \cdot \cos \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Vilka vi kan förenkla genom att använda oss av skalärprodukter och villkoret att $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ till

$$\begin{aligned}(x, y, z) \cdot (2, -6, -3) &= 0 \\ (x, y, z) \cdot (4, 3, -1) &= 0,\end{aligned}$$

och vidare utveckla till

$$\begin{aligned}2x - 6y - 3z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0.\end{aligned}$$

Vi söker nu de tre variablerna x, y, z som löser ekvationssystemet från våra tre villkor.

$$\begin{cases} 2x - 6y - 3z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= 1. \end{cases}$$

Viktigt att notera att vi inte har ett linjärt ekvationssystem då den tredje ekvationen har variabler av grad 2. Vi börjar därför med att lösa de två linjära ekvationerna.

Multiplicerar vi den övre ekvationen med -2 och adderar till den undre ekvationen får vi följande

$$\begin{cases} 2x - 6y - 3z &= 0 \\ 4x + 3y - z + (-2) \cdot (2x - 6y - 3z) &= 0 + (-2 \cdot 0) \end{cases}$$

vilket vi förenklar till

$$\begin{cases} 2x - 6y - 3z &= 0 \\ 15y + 5z &= 0. \end{cases}$$

Vi delar sedan den övre ekvationen med 2 och den undre ekvationen med 15 och får

$$\begin{cases} x - 3y - \frac{3}{2}z &= 0 \\ y + \frac{1}{3}z &= 0 \end{cases}$$

sedan uttrycker vi den undre ekvationen i termer av z

$$\begin{cases} x - 3y - \frac{3}{2}z &= 0 \\ y &= -\frac{1}{3}z \end{cases}$$

och upptäcker att genom insättning av den undre ekvationen i den övre ekvationen får vi att

$$x - 3y - \frac{3}{2}z = x - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}z\right) - \frac{3}{2}z = x + z - \frac{3}{2}z = x - \frac{1}{2}z.$$

vilket då ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = -\frac{1}{3}z. \end{cases}$$

Eftersom vi nu uttryck x och y i termer av z kan vi sätta in dessa i ekvationen för $|\bar{x}|$, då förenklar vi vänsterledet genom att låta

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(-\frac{z}{3}\right)^2 + z^2} = \sqrt{z^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 1\right)} = \sqrt{z^2 \left(\frac{49}{36}\right)} = \frac{7z}{6}.$$

Detta kombinerat med högerledet ger oss att

$$\frac{7z}{6} = 1$$

vilket är ekvivalent med att

$$z = \frac{6}{7}.$$

Då får vi att

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} = -\frac{2}{7}. \end{cases}$$

vilket ger oss att

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(3, -2, 6).$$

Nu kan vi välja den andra ortogonalala vektorn till

$$-\bar{x} = -\frac{1}{7}(3, -2, 6)$$

och på så vis har vi hittat två ortogonala enhetsvektorer till vektorerna $(2, -6, -3)$ och $(4, 3, -1)$.

Svar: $\bar{x} = \pm \frac{1}{7}(3, -2, 6)$.

Alternativ lösning med kryssprodukt

Det här är ett typiskt tillfälle där kryssprodukten (formel 11) är användbar, eftersom att den ger just en vektor som är ortogonal mot de vektorer man tar kryssprodukten av. Jag tar fram den direkt med hjälp av formel 11

$$(2, -6, -3) \times (4, 3, -1) = (6 - (-9), -12 - (-2), 6 - (-24)) = (15, -10, 30)$$

Längden av den här vektorn tas fram med 3 och är $\sqrt{15^2 + (-10)^2 + 30^2} = \sqrt{1225}$. En av de enhetsvektorer vi söker är alltså enligt formel 4

$$\frac{1}{\sqrt{1225}} \cdot (15, -10, 30)$$

. Den andra pekar åt motsatt håll och är alltså

$$\frac{-1}{\sqrt{1225}} \cdot (15, -10, 30)$$

Man skulle kunna förenkla ytterligare om man vill för $\sqrt{1225} = 35$ (vilket inte alls är uppenbart om man saknar miniräknare)

$$\frac{1}{\sqrt{1225}} \cdot (15, -10, 30) = \frac{1}{35} \cdot (15, -10, 30) = \frac{1}{7} \cdot (3, -2, 6)$$

6.

Uppgifter där man ska visa saker kan vara lite svåra att börja med, men ofta kan man börja testa sig fram med hjälp av den info som ges.

Här handlar det om ortogonalitet så då skulle man kunna börja testa att använda skalärprodukten (formel 6), eftersom att den ska vara 0 om två vektorer är ortogonalala

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (u_1 + v_1) \cdot (u_1 - v_1) + (u_2 + v_2) \cdot (u_2 - v_2) + \dots + (u_n + v_n) \cdot (u_n - v_n) =$$

Notera att varje term i högerledet går att utveckla med konjugatregeln. Då får vi

$$= (u_1^2 - v_1^2) + (u_2^2 - v_2^2) + \dots + (u_n^2 - v_n^2) =$$

Uppgiften handlar ju också om att vektorerna ska ha samma längd och detta börjar ju likna formeln för vektorers längd (formel 3) lite. Jag skriver om den så här

$$\begin{aligned} &= (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2) - (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) = \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)} - \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)} = \\ &|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \\ \iff &|\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 \\ \iff &|\vec{u}| = \pm |\vec{v}| \end{aligned}$$

En vektors längd är ju positiv så $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

7. a)

Vi vill skapa en parameterframställning med formel 7. En vektor som går från $(1, 0, -1)$ till $(2, 3, -5)$ är

$$(2, 3, -5) - (1, 0, -1) = (1, 3, -4)$$

En möjlig parameterframställning är alltså

$$L = (1, 0, -1) + t \cdot (1, 3, -4)$$

Där $t \in R$

b)

Det här är enkelt eftersom att vi redan har vektorn som är parallell med linjen L

$$(0, 0, 0) + t \cdot (1, 3, -4), t \in R$$

8.

Den vektor som är ortogonal mot planet kallas för planets normalvektor. Planet har normalvektor $n = (1, 2, 3)$, detta fås genom att man kollar på koefficienterna till x, y, z i planets ekvation $x+2y+3z=5$. Eftersom att vi vet att linjen kommer gå genom origo kan vi välja parameterformen

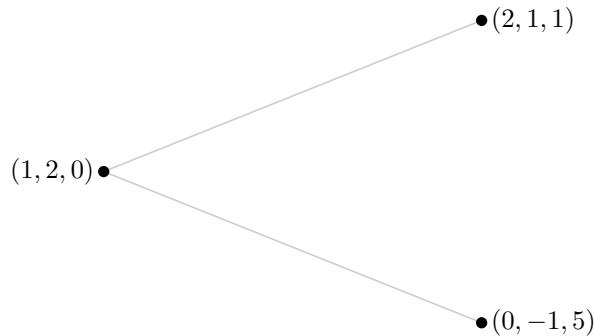
$$L = (0, 0, 0) + t \cdot (1, 2, 3) = t \cdot (1, 2, 3), t \in R$$

9.

En parameterform för ett plan består av

- 1 punkt som ligger i planet.
- 2 vektorer som är parallella med planet.

Vi har tre punkter som ligger i planet. Man kan välja en av dessa som 'startpunkt' och sedan ta fram de två vektorerna genom subtraktion. Låt oss välja $(1, 2, 0)$ som startpunkt, då ser det ut såhär



En vektor från $(1, 2, 0)$ till $(2, 1, 1)$ är

$$(2, 1, 1) - (1, 2, 0) = (1, -1, 1)$$

En vektor från $(1, 2, 0)$ till $(0, -1, 5)$ är

$$(0, -1, 5) - (1, 2, 0) = (-1, -3, 5)$$

En parameterframställning för planet är alltså

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + s \cdot (1, -1, 1) + t \cdot (-1, -3, 5) \text{ där } s, t \in R$$

10.

Den här uppgiften är lite klurig. Vi vet från formel 8 att man för att kunna beskriva ett plan på parameterform behöver en punkt och två vektorer, men vi har bara en punkt och en linje. Men eftersom att vi har fått en linje som ligger i planet

$$(x, y, z) = t \cdot (-1, 0, 2) = (0, 0, 0) + t \cdot (-1, 0, 2)$$

kan vi ta en punkt på denna linje för att få fram en vektor som är parallell med planet. Låt till exempel $t = 0$, då får vi en punkt i planet

$$(x, y, z) = 0 \cdot (-1, 0, 2) = (0, 0, 0)$$

En vektor som är parallell med planet är då

$$(1, 1, 0) - (0, 0, 0) = (1, 1, 0)$$

Vi har nu allt som krävs för att skriva planet på parameterform

- två punkter: $(1, 1, 0)$ och origo $(0, 0, 0)$. Det är enklast att välja origo.
- två vektorer som är parallella med planet: $(-1, 0, 2)$ och $(1, 1, 0)$.

Parameterframställningen blir därför

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + s \cdot (-1, 0, 2) + t \cdot (1, 1, 0) = s \cdot (-1, 0, 2) + t \cdot (1, 1, 0) \text{ där } s, t \in R$$

11.

Följande behövs för parameterframställningen av en linje som ligger i planet

- En punkt i planet.
- En vektor som är parallell med planet.

$x + y + z = 1$ uppfylls t.ex. av punkten $(1, 0, 0)$, så här har vi en punkt som ligger i planet.

En vektor som är parallell med planet ska vara ortogonal med planets normalvektor. Vi ser från planets ekvation att denna är $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Använder skalärprodukten (formel 6) för att ta fram en vektor \vec{v} som är ortogonal mot \vec{n}

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (1, 1, 1) \cdot (v_1, v_2, v_3) = v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

Detta uppfylls t.ex. av $v_1 = -1, v_2 = 1, v_3 = 0$. En parameterframställning av linjen är alltså

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + t \cdot (-1, 1, 0), t \in R$$

12.

Den här uppgiften bygger vidare på uppgift 11 så se till att göra den först.

En parameterframställning av en linje som inte skär planet ska innehålla

- En punkt som inte ligger i planet.
- En vektor som är parallell med planet (det här är viktigt för annars kommer den skära planet någon gång).

Vi har en vektor $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ som är parallell med planet från uppgift 11. Det enda vi behöver nu är en punkt som inte ligger i planet. En sådan punkt ska uppfylla $x + y + z \neq 1$. Vi testar med origo $(0, 0, 0)$

$$0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$$

Nu har vi allt som krävs

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + t \cdot (-1, 1, 0) = t \cdot (-1, 1, 0), t \in R$$

13.

Såna här uppgifter kommer vara mycket enklare att lösa senare i kursen när ni har gått igenom gausseliminering. Men man kan tänka så här också: Om L_1 och L_2 skär varandra kommer deras ekvationer att ge samma resultat vid den punkten

$$t \cdot (-1, 0, 2) = (1, 2, 2) + s \cdot (-1, 2, 0) \text{ där } s, t \in R$$

om man låter $t = 1, s = 2$ får man $(-1, 0, 2) = (1, 2, 2) + (-2, 4, 0) = (-1, 6, 2)$. Detta är ju sant för det första elementet i vektorerna men inte för element två och tre. Det går helt enkelt inte att uppfylla $VL = HL$ för några värden på s och t (man förstår nog detta enklast om man försöker göra så att $VL = HL$ en stund) så en lösning saknas, därför skär inte linjerna heller varandra.

Den här lösningen känns inte så bra för bara för att man själv inte hittar något s, t så att $HL = VL$ betyder ju inte att det inte finns. Lösningen nedan med

gausseliminering gör åtminstone mig mer säker på att det inte finns någon skärningspunkt.

Alternativ lösning med gausseliminering

En skärningspunkt mellan L_1 och L_2 inträffar när deras ekvationer är lika med varandra

$$\begin{aligned} t(-1, 0, 2) &= (1, 2, 2) + s(-1, 2, 0) \\ t(-1, 0, 2) - s(-1, 2, 0) &= (1, 2, 2) \\ (-t, 0, 2t) + (s, -2s, 0) &= (1, 2, 2) \\ (-t + s, -2s, 2t) &= (1, 2, 2) \end{aligned}$$

Det här ger ett ekvationssystem med tre ekvationer

$$\begin{cases} -t + s = 1 \\ -2s = 2 \\ 2t = 2 \end{cases}$$

Det här ekvationssystemet kan beskrivas med totalmatrisen, och sedan lösas med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} r_1 & & \\ -\frac{r_2}{2} & & \\ \frac{r_3}{2} & & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} & r_3 & \\ & r_2 & \\ r_1 + r_3 - r_2 & & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Den här resultatet av gausselimineringen betyder att

$$\begin{cases} t = 1 \\ s = -1 \\ 0 = 3 \text{ (Det här är omöjligt)} \end{cases}$$

Att vi har fått fram som en del av lösningen att $0 = 3$ betyder att ekvationssystemet saknar lösning, vilket i sin tur betyder att linjerna L_1 och L_2 inte skär varandra.

14.

Skärningspunkter mellan linjen och planet ska uppfylla

- Linjens ekvation
- Planets ekvation

Linjens ekvation $(x, y, z) = (1, 2, 2) + t \cdot (-1, 2, 0)$, $t \in R$ kan också skrivas som $(x, y, z) = (1 - t, 2 + 2t, 2)$. Vi sätter in dessa x, y, z i planets ekvation

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ (1 - t) + 2(2 + 2t) - (2) &= 1 \\ 3t + 3 &= 1 \\ t &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

Detta betyder att när $t = \frac{-2}{3}$ så skär linjen planet. Vi tar fram skärningspunkten genom att sätta in detta värde på t i linjens ekvation

$$(x, y, z) = (1, 2, 2) + \frac{-2}{3} \cdot (-1, 2, 0) = (1, 2, 2) - \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0\right) = \left(1 + \frac{2}{3}, 2 - \frac{4}{3}, 2 - 0\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)$$

15.

Två vektorer har en rät vinkel mellan sig (de är ortogonala) om deras skalärprodukt är lika med 0. Utvecklar skalärprodukten (formel 6) mellan \vec{u} och \vec{v}

$$\begin{aligned} (1, 2, 2) \cdot (-1, 1, a) &= 0 \\ -1 + 2 - 2a &= 0 \\ 2a + 1 &= 0 \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

16.

För att beräkna vinkeln mellan två vektorer kan man använda den andra varianten av skalärprodukten (formel 6)

$$|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha = \text{skalärprodukt} \iff \cos \alpha = \frac{\text{skalärprodukt}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Nu behöver vi alltså beräkna skalärprodukten (med den första varianten av formel 6) och längden av vektorerna (med formel 3)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 1, 0, 0) \cdot (2, 0, 2, 0) = 2$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{8}$$

Vinkeln α kan nu beräknas

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

17.

I den här uppgiften vill vi använda båda varianterna av skalärprodukten (formel 6). Börja med att observera att skalärprodukten mellan en vektor $\vec{v} = (x, y, z)$ och x-, y- och z-axeln (med den första varianten av skalärprodukten) är

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = x$$

$$(x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = y$$

$$(x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = z$$

Nu använder den andra varianten av skalärprodukten för att räkna ut x, y, z . Den vektor vi söker har längd 2, $|\vec{v}| = 1$, och enhetsvektorn för x-, y- och z-axeln har längd ett.

Börjar med x-axeln

$$2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Sedan y-axeln

$$2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = 2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Och till sist z-axeln

$$2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{-1}{2} = -1$$

Eftersom att båda varianterna skalärprodukterna beräknar samma sak får vi $x = 1, y = -\sqrt{2}, z = -1$, vektorn vi söker är alltså $(1, -\sqrt{2}, -1)$.

18.

a)

Punkten ligger i planet om den uppfyller planets ekvation. Testar

$$z = 19 - 2x - 3y$$

$$(12) = 19 - 2(2) - 3(1) = 19 - 4 - 3 = 12$$

Punkten uppfyller planets ekvation och ligger alltså i planet.

b)

Jag börjar med att skriva om planets ekvation på en mer bekant form

$$\begin{aligned} z &= 19 - 2x - 3y \\ 2x + 3y + z &= 19 \end{aligned}$$

Enligt formel 9 har planet normalvektorn $\vec{n} = (2, 3, 1)$.

c)

För att beräkna avståndet mellan planeten och punkten skulle vi kunna dra en linje som är rät mot planeten till punkten och sedan mäta denna linje. Detta är dock lite svårt eftersom att vi inte vet vilken punkt på planeten som 'ligger under' punkten.

Men vi känner till planets normalvektorer så ett annat tillvägagångssätt är att flytta punkten en viss sträcka (parallellelt med normalvektorn) så att den hamnar i planeten, och sedan mäta hur stor denna sträcka var. Möjliga positioner för punkten beskrivs då av följande ekvation

$$(x, y, z) = (2, 3, 13) + t \cdot (2, 3, 1) = (2 + 2t, 3 + 3t, 13 + t), t \in R$$

Att hitta när denna linje skär planeten kan göras med insättning i planets ekvation

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 19 \\ 2(2 + 2t) + 3(3 + 3t) + (13 + t) &= 19 \\ 4 + 4t + 9 + 9t + 13 + t &= 19 \\ 14t + 26 &= 19 \\ t &= -\frac{7}{14} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Så när $t = -\frac{1}{2}$ kommer punkten att ha flyttats till planeten. Hur lång är då denna vektor som beskriver denna förflyttning? Vektorn är $-\frac{1}{2} \cdot (2, 3, 1) = \frac{1}{2} \cdot (-2, -3, -1)$ och den har längden

$$\frac{1}{2}|(-2, -3, -1)| = \frac{1}{2}\sqrt{4+9+1} = \frac{1}{2}\sqrt{14} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 14} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

Alternativ lösning med projektionsformeln

sökt: avstånden från punkten $q = (2, 3, 13)$ till planeten $2x + 3y + z = 19$. Med avståndet menar vi alltid det kortaste avståndet.

Detta kan vi göra med hjälp av projektionsformeln!

Vi vill projicera en vektor från planeten Π till punkten q på normalvektorn $\vec{n} = (2, 3, 1)$. För att göra detta väljer vi en godtycklig punkt i planeten $p = (x, y, z)$ där $(x, y, z) \in \Pi$. Till exempel kan vi välja $p = (2, 3, 6)$ ty det uppfyller planets ekvation och således är $(2, 3, 6) \in \Pi$.

Då skapar vi vår vektor

$$\vec{pq} = (2, 3, 13) - (2, 3, 6) = (0, 0, 7)$$

och med det kan vi nu använda projektionsformeln

$$proj_{\vec{n}}(\vec{pq}) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{pq}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}$$

och förenklar vi högerledet får vi

$$\frac{(2, 3, 1) \cdot (0, 0, 7)}{|(2, 3, 1)|^2} \cdot (2, 3, 1) =$$

$$\frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 7}{(\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2})^2} \cdot (2, 3, 1) =$$

$$\frac{7}{(\sqrt{14})^2} \cdot (2, 3, 1) = \frac{7}{14} \cdot (2, 3, 1) = \frac{1}{2} \cdot (2, 3, 1).$$

Då får vi att $proj_{\vec{n}}(\vec{pq}) = \frac{1}{2} \cdot (2, 3, 1)$ och eftersom vi vill veta avståndet så beräknar vi absolutbeloppet

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \cdot (2, 3, 1) \right| = \\ & \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 (2^2 + 3^2 + 1^2)} = \\ & \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 14} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

Svar: Avståndet är $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

19.

Två plan kommer skära varandra med en rät vinkel om deras normalvektorer är ortogonalala. Alltså om skalärprodukten (formel 6) = 0

$$(1, 2, 2) \cdot (a, b, c) = 0 \iff a + 2b + 2c = 0$$

Vi vill nu bestämma a, b, c som uppfyller detta (det finns flera möjligheter). Ett sådant val är

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Det sökta planeten har alltså normalen $(2, -1, 0)$ och ekvationen

$$2x - 1 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \iff 2x - y = 0$$

20.

Ekvationssystemet är

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ x + 2y + 2z = 0. & (2) \end{cases}$$

Tar $(2) - (1)$ och får

$$y + z = -1 \iff y = -z - 1 \quad (3)$$

Insättning av (3) i (1) ger

$$\begin{aligned} x + (-z - 1) + z &= 1 \\ x - z - 1 + z &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{cases} x &= 2 \\ y + z &= -1. \end{cases}$$

Det finns alltså inte en entydig lösning. Men detta är inte heller så konstigt eftersom att skärningen mellan två plan är en linje. Vi skulle vilja ge svaret till den här uppgiften som denna linje på parameterform.

Man kan parametrisera $z = t$ och får då

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

Med hjälp av denna kan vi enkelt skriva linjens ekvation på parameterform

$$(x, y, z) = (2, -t - 1, t) = (2, -1, 0) + t \cdot (0, -1, 1)$$

Alternativ lösning med gausseliminering

Ekvationssystemet är

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ x + 2y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

Det kan representeras med totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Och lösas med Gauss-Jordans metod

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} r_1 & & & \\ r_2 - r_1 & & & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} r_1 - r_2 & & \\ r_2 & & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Vilket betyder att ekvationssystemet har lösningsmängden

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Detta beskriver en linje i \mathbb{R}^3 som kan beskrivas på parameterform på samma sätt som ovan.

21.

Den här uppgiften går bara ut på att använda projektionsformeln (formel 10)

$$\text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v}) = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}|^2} \cdot \vec{w} = \frac{-1 + 15}{26} \cdot (-1, 5) = \frac{7}{13}(-1, 5) = \left(-\frac{7}{13}, \frac{35}{13}\right)$$

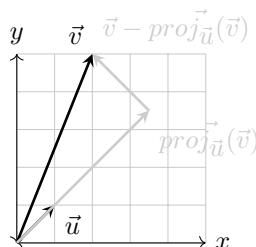
22.

Vi kallar riktningsvektorn till linjen för $\vec{u} = (2, 1, -2)$ och använder sedan projektionsformeln (formel 10) för \vec{v} på \vec{u}

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \cdot \vec{u} = \frac{2 + 2 - 2}{9} \cdot (2, 1, -2) = \frac{2}{9}(2, 1, -2) = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$$

23.

Vi kallar $(1, 1) = \vec{u}$. Knepet för att lösa den här uppgiften är att använda projektionen av \vec{v} på \vec{u} , och sedan skriva \vec{v} som en summa av denna projektion och en vektor som är vinkelrät mot denna. Det kan visualiseras så här



Vi beräknar projektionen (formel 10)

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \cdot \vec{u} = \frac{2 + 5}{2} \cdot (1, 1) = \frac{7}{2}(1, 1) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Nu kan vi beräkna den vektor som är ortogonal genom att ta $\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$

$$\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = (2, 5) - \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

\vec{v} kan alltså skrivas som

$$\vec{v} = (2, 5) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

25.

Vi ska bestämma avståndet från punkten $q = (1, 5)$ till linjen med ekvation $y = 3x$.

Detta kan vi göra med projektionsformeln!

Vi väljer en godtycklig punkt $p = (1, 3)$ på linjen $y = 3x$. Skapar en vektor från punkten p på linjen till punkten q enligt $\vec{pq} = (1, 3) - (1, 5) = (0, -2)$. Sedan projiceras vi \vec{pq} på normallinjen till $y = 3x$ vilket vi får $y - 3x = 0$ med projectionsformlen så får vi fram svaret $\sqrt{\frac{2}{5}}$ genom att projicera vektorn $(0, -2)$ på normalvektorn $(1, -3)$.

2 modul 2

2.1 Teori

Här används främst 3×3 matriser, för andra dimensioner fungerar det på samma sätt.

2.1.1 Gauss-Jordans metod

Gauss-Jordans metod går ut på att man steg för steg gör om en matris tills den har formen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right)$$

Man kan tolka detta som lösningen till ett ekvationssystem: $x = a, y = b, z = c$.

De elementära radoperationerna (som man får använda för att förändra matrisen) är:

- Man får byta plats på rader i matrisen.
- Man får multiplicera varje rad med en skalär.
- Man får addera en rad till en annan (det är tillåtet att addera en rad + ett tal till en annan rad).

Om man skulle få en matris som ser ut typ så här

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

är systemet inkonsistent (olösbart), eftersom att det betyder att $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1$ vilket är omöjligt.

Om man skulle få typ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

d.v.s att det finns så kallade fria variabler, betyder det att det inte finns en unik lösning till systemet utan det kommer finnas oändligt många lösningar. I det här exemplet är lösningen en linje i \mathbb{R}^3 .

2.1.2 Homogena ekvationssystem

Ett Homogent ekvationssystem är ett ekvationssystem där alla ekvationer har $HL = 0$. T.ex

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ett sådant system kan alltid lösas med den triviala lösningen där man sätter $x = y = z = 0$.

2.1.3 Matriser

Definition 1 En matris rang kan fås genom att man räknar antalet ledande ettor i den matris man får genom gausseliminering.

Exempelvis har vi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}(A) = 2$$

2.2 Uppgifter att börja med

1.

Det här är samma uppgift som uppgift 20 i modul 1. Så se den lösningen.

3.

Det här är samma uppgift som uppgift 13 i modul 1. Så kolla på den lösningen (speciellt den lösningen som använder gausseliminering).

4.

Ekvationssystemet kan skrivas på formen $A\vec{x} = \vec{b}$ så här

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Om man utför multiplikationen mellan A och \vec{x} får man vektorekvationen

$$\begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2y + 2z \\ 2y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vilket kan skrivas som ekvationssystemet vi började med

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ 2y - z = 5 \end{cases}$$

5.

Ett homogen ekvationssystem är t.ex

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Det går alltid att lösa ett sådant system genom att sätta $x = y = z = 0$, och eftersom att det finns en lösning så är systemet inte inkonsistent. (se sektion 2.1.2)

6.

a)

Vi söker någon matris A och någon vektor \vec{x} så att

$$A\vec{x} = a \cdot (1, 0, 2) + b \cdot (0, 2, -2) + c \cdot (3, -2, 3)$$

Detta uppfylls om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ och } \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(Utför multiplikationen och kontrollera att $A\vec{x} = a \cdot (1, 0, 2) + b \cdot (0, 2, -2) + c \cdot (3, -2, 3)$ uppfylls om det inte känns självklart att vi valde dessa värden på A och \vec{c})

b)

Jag skriver först om vektorekvationen lite för att vara övertydlig varför ekvationssystemet blir som det blir

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot b + 3 \cdot c \\ 0 \cdot a + 2 \cdot b - 2 \cdot c \\ 2 \cdot a - 2 \cdot b + 3 \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ekvationssystemet blir alltså

$$\begin{cases} a + 3c = 0 \\ 2b - 2c = 0 \\ 2a - 2b + 3c = 0 \end{cases}$$

Nu skriver vi om det som en totalmatris och löser med gaussning (se sektion 2.1.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} r_1 & & & \\ \frac{1}{2} \cdot r_2 & & & \\ r_3 - 2r_1 & & & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} r_1 & & & \\ r_2 & & & \\ r_3 + 2r_2 & & & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

Man kan redan här se att vi kommer att komma fram till matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Detta betyder att ekvationssystemet har lösningen $a = b = c = 0$, a.k.a. den triviala lösningen.

7.

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 12 \\ -x + y + z = 7 \end{cases}$$

Kan skrivas på matrisform, och sedan lösas med 'gaussning' (se sektion 2.1.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} r_1 & \\ r_2 - 2 \cdot r_1 & \\ r_3 + r_1 & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} r_1 - r_2 & \\ r_2 & \\ r_3 - 2 \cdot r_2 & \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} r_1 & \\ r_2 & \\ -\frac{1}{2} \cdot r_3 & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} r_1 + r_3 & \\ r_2 - 2 \cdot r_3 & \\ r_3 & \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Detta betyder att en lösning till ekvationssystemet är $x = -3, y = -2, z = 6$. Notera att det finns exakt en lösning. En geometrisk tolkning av ekvationssystemet är som skärningspunkten mellan tre plan, och om en sådan finns är det en punkt.

8.

Vi skriver om ekvationssystemet på matrisform och löser med gaussning (se sektion 2.1.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 12 \\ -1 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Det finns alltså en lösning till det här ekvationssystemet.

9.

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x - y + z = 6 \\ 2x + 2y + 4z = 6 \\ -x - y - z = 6 \end{cases}$$

Kan skrivas på matrisform, och sedan lösas med 'gaussning' (se sektion 2.1.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} -1 \cdot r_1 & \\ r_2 + 2 \cdot r_1 & \\ r_3 - r_1 & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim$$

Det går redan här att se att systemet är inkonsistent eftersom att det säger att $2z = 18$ och att $-2z = 0$, vilket inte kan ske samtidigt. Men jag fortsätter här

för att vara extra tydlig

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} r_1 & & & -6 \\ \frac{1}{2} \cdot r_2 & & & 9 \\ r_3 + r_2 & & & 18 \end{array} \right)$$

På sista raden har vi alltså bara 0:or till vänster, men totalmatrisen har ändå ett tal $\neq 0$ till höger, vilket betyder att systemet är inkonsistent.

10.

Vi skriver om ekvationssystemet på matrisform och löser med gaussning (se sektion 2.1.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -4 & -6 & -4 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Det finns alltså oändligt många lösningar till det här ekvationssystemet. Vilka är det?

Parametrисerar $y = t$ och får följande ekvationssystem som beskriver lösningarna

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}t \\ y = t \\ z = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Vilket kan skrivas på vektorform som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t \\ t \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösningen är alltså en linje.

11.

Det här är samma uppgift som modul 1 uppgift 14.

12.

Vi skriver om ekvationssystemet på matrisform och löser med gaussning (se sektion 2.1.1). Notera att ekvationssystemet är i fem variabler x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Vi ser att den radreducerade matrisen på trappstegsform har två fria variabler som vi kan parametrisera $x_4 = s, x_5 = t$. Detta ger oss lösningen

$$\begin{cases} x_1 = 2x_4 - \frac{3}{2}x_5 = 2s - \frac{3}{2}t \\ x_2 = -2x_4 + x_5 = -2s + t \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Skriver detta på vektorform

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s - \frac{3}{2}t \\ -2s + t \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$$

13.

Vi använder gausseliminering på matrisen A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 - 2 \cdot r_1 \\ r_3 - r_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_1 + 2 \cdot r_2 \\ -1 \cdot r_2 \\ r_3 - r_2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_1 + 2 \cdot r_3 \\ r_2 - 3 \cdot r_3 \\ r_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Det här är en matris på reducerad trappstegsform: Vi har bara ledande ettor, och de tal som är över/under ettorna är alla nollor. Man kan utföra gausse-limineringen på olika sätt men man kommer alltid komma fram till den här matrisen, så den är unik.

Vi har tre stycken ledande ettor i matrisens radekvivalenta matris på trappstegsform, alltså är matrisens rang = 3. Se definition 1.

14.

Vi kan börja med att kolla om det ens är möjligt att utföra matrismultiplikationen, dvs kolla om dimensionerna stämmer överens. Den vänstra matrisen har dimensionen 3×4 och den högra har dimensionen 4×2 så det funkar (de 'inre siffrorna' är samma för båda) och resultatet kommer bli en matris av dimensionen 3×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1) & (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 3) \\ (5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1) & (5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 3) \\ (1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) & (1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 14 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

15.

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 3y + 4w = 1 \\ -x - 2y + z - 3w = a \end{cases}$$

Kan lösas med gausseliminering (se sektion 2.1.1). Skriver först om ekvationssystemet som en totalmatris (notera att det finns fyra variabler)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} r_1 & \\ r_2 - 2 \cdot r_1 & \\ r_3 + r_1 & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} r_1 & \\ r_2 & \\ r_3 + r_2 & \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right)$$

Kom ihåg att ekvationssystemet blir inkonsistent om vi får någon rad som ser ut som $(0 \ 0 \ 0 \ 0 | 1)$, så för att undvika detta måste vi sätta $a = -1$. Några andra värden på a , som löser ekvationssystemet finns inte.

Nu sätter vi in $a = -1$ och löser ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)+1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} r_1 - r_2 & \\ r_2 & \\ r_3 & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Vi ser på den reducerade matrisen att det finns oändligt många lösningar. Vi får parametrisera så här

$$\begin{cases} z = s \\ w = t \\ x + 3z - w = x + 3s - t = -1 \\ y - 2z + 2w = y - 2s + 2t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3s + t - 1 \\ y = 2s - 2t + 1 \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

Som kan skrivas på vektorform som

$$(x, y, z, w) = (-3s+t-1, 2s-2t+1, s, t) = (-1, 1, 0, 0) + s \cdot (-3, 2, 1, 0) + t \cdot (1, -2, 0, 1)$$

Lösningen är alltså ett plan.

3 modul 3

3.1 Teori

Formel 11 (kryssprodukt) Kryssprodukten av två vektorer $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

En viktig egenskap kryssprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$ är att den är en vektor som är ortogonal mot båda vektorerna \vec{u} och \vec{v} .

Formel 12 Storleken av kryssprodukten av två vektorer \vec{u} och \vec{v} är

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\alpha)$$

Där α är vinkeln mellan \vec{u} och \vec{v} .

3.1.1 Linjära höljen och delrum

Ett linjärt hölje ska uppfylla följande krav

- Det ska vara slutet under
 - Skalärmultiplikation - dvs om man vet att en vektor \vec{v} ligger i rummet så ska även $t \cdot \vec{v}$ ligga i rummet.
 - Vektoraddition med vektorer i rummet - dvs om man har två vektorer \vec{u} och \vec{v} i rummet så ska även $\vec{u} + \vec{v}$ ligga i rummet.
- Det måste innehålla nollvektorn $\vec{0}$.

Ett delrum är lite som en delmängd till ett linjärt höjle. Det måste uppfylla samma krav som det linjära höljet det är ett delrum till, men det kan ha lägre dimension.

Exempel: \mathbb{R}^2 är ett delrum till \mathbb{R}^3 . Ett till exempel (specialfall): \mathbb{R}^3 är ett delrum till \mathbb{R}^3 . Ett annat viktigt specialfall är $\{\vec{0}\}$ som är delrum till alla \mathbb{R}^n .

3.2 Uppgifter att börja med

1.

a)

Kom ihåg att vektorer är linjärt oberoende om man inte kan skapa någon av dom genom en linjärkombination av de andra vektorerna. Om de skulle vara linjärt beroende skulle vi kunna uppfylla vektorekvationen

$$s\vec{u} + t\vec{v} = \vec{w} \iff s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Låt oss testa detta med gaussning

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Det här systemet går alltså inte att lösa (det är inkonsistent), vilket betyder att vi inte kan skriva \vec{w} som en linjärkombination av \vec{u} och \vec{v} , alltså är vektorerna linjärt oberoende.

b)

Nej, eftersom att de är linjärt oberoende kan vi inte skriva någon av dom som en linjärkombination av de andra.

c)

Ja, eftersom att de tre vektorerna är linjärt oberoende kommer de att spänna upp hela \mathbb{R}^3 . Och \mathbb{R}^3 är ett delrum till \mathbb{R}^3 .

3.

Ekvationssystemet kan lösas med gaussning

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{3} \end{array} \right)$$

Vi ser att det finns en unik lösning till systemet, lösningsmängden är alltså en punkt.

Men ett delrum måste innehålla nollvektorn $\vec{0}$ (se sektion 3.1.1) så den här lösningsmängden är inte ett delrum till \mathbb{R}^3 .

5.

Kom ihåg att ett vektorrum ska uppfylla följande

- Det ska vara slutet under skalärmultiplikation. Dvs för varje vektor som tillhör vektorrummet så ska man kunna multiplicera den med en skalär och få en ny vektor som också ligger i rummet, om man skulle få en vektor som inte tillhör rummet så är det inte ett vektorrum.
- Det ska vara slutet under vektoraddition. Dvs för alla par av vektorer \vec{u} och \vec{v} som tillhör vårt rum så måste $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ också tillhöra vårt rum, annars är det inget vektorrum.
- Vektorrummet måste innehålla nollvektorn $\vec{0}$.

Ett delrum till \mathbb{R}^2 ska uppfylla dessa krav och dessutom ha en dimension ≤ 2 . Det finns många val på mängder av vektorer som inte är giltiga delrum till \mathbb{R}^2 . Här är några exempel

- linjer som inte går igenom origo, eftersom att de då inte innehåller nollvektorn.
- Ändliga mängder av vektorer, eftersom att man då kommer kunna skapa nya vektorer genom vektoraddition och multiplikation med skalärer som inte ingår i den ändliga mängden av vektorer. Det finns ett specialfall av en ändlig mängd vektorer som faktiskt är ett giltigt delrum till alla \mathbb{R}^n : $\{\vec{0}\}$, dvs mängden av vektorer som endast innehåller nollvektorn (den uppfyller alla krav som ställs på delrum).

7.

Ekvationssystemet kan lösas med gaussning. Notera också att det är ett homogent ekvationssystem så vi vet att det minst kommer ha en lösning. Vi vet också att det har tre ekvationer och fyra variabler, så det kommer ha minst en fri variabel.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Vi parametrисerar $z = s$ och $w = t$ och får lösningsmängden

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = -s + t \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

Detta är ett plan i \mathbb{R}^4 och kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

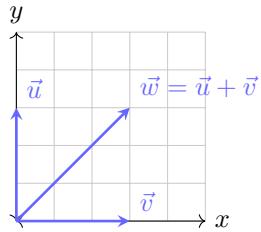
Eftersom att detta plan innehåller nollvektorn $\vec{0}$ kan vi skriva det som spannet av de två riktningsvektorerna i denna linje

$$span((0, -1, 1, 0), (-3, 1, 0, 1))$$

Det är två vektorer som spänner upp lösningsmängden (som är ett plan) och därför har den dimension 2.

9.

Nej, det är inte sant. Här är ett exempel



Det är uppenbart att de är linjärt beroende eftersom att $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, och man ser också att inte några av dom är parallella.

11.

a)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Jag väljer att kofaktorutveckla längs första raden

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-1) - 0(4-0) + 2(2-0) = 1+4=5$$

b)

Eftersom att $\det B \neq 0$ så vet vi att matrisen är inverterbar.

c)

Nej, det har ingen icke-trivial lösning. Anledningen är att $\det B = 0 \iff$ Ekvationssystemet har en unik lösning, och eftersom att vi vet att den triviala lösningen är en lösning så är det den enda lösningen som finns.

d)

Vi kan börja med att ta fram B^T (B:s transponat)

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Man byter alltså så att kolumner blir rader och vice versa. Låt oss nu beräkna $\det B^T$

$$\det B^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Jag väljer nu att kofaktorutveckla längs den första kolumnen

$$\det B^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-1) - 0(4-0) + 2(2-0) = 1+4 = 5$$

Alltså $\det B = \det B^T$.

13.

Vi har tre punkter som ligger i planet. Låt oss kalla dom för

$$\begin{cases} A = (1, 0, 1) \\ B = (2, 1, 1) \\ C = (-1, 3, 5) \end{cases}$$

Med dessa punkter kan vi ta fram två rikningsvektorer som är parallella med planet

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

För att ta fram planets standardekvation behöver vi en vektor som är ortogonal mot planeten. Denna fås genom att ta kryssprodukten av de två vektorerna som är parallella med planeten

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 0-4 \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nu behöver vi bara sätta in en punkt i ekvationen

$$4(x - x_0) - 4(y - y_0) + 5(z - z_0) = 0$$

Jag väljer punkten A

$$\begin{aligned} 4(x - 1) - 4(y - 0) + 5(z - 1) &= 0 \\ 4x - 4 - 4y + 5z - 5 &= 0 \\ 4x - 4y + 5z &= 9 \end{aligned}$$

15.

Vi kan lösa ekvationssystemet med gaussning

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & a & 0 \end{array} \sim \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & (a+1) & 0 \end{array} \sim \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + r_2 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (a+3) \end{array}$$

Om lösningsrummet ska bli 2-dimensionellt, dvs om lösningsmängden till systemet ska bilda ett plan, vill vi ha två fria variabler i ekvationssystemet. Alltså ska vi sätta $a = -3$.

Fortsätter gaussningen med detta värde på a .

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3+3) & 0 \end{array} \sim \begin{array}{c} r_1 - r_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Vi parametrисerar $z = s$ och $w = t$, där $s, t \in R$, och får att lösningen till ekvationssystemet är

$$\begin{cases} x = -3s + t \\ y = 2s - 2t \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

Lösningsrummet kan beskrivas av spannet

$$span\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Notera att detta är de riktningsevektorer som skulle angivits om vi hade beskrivit lösningen som ett plan på parameterform. Man säger att de vektorer som spänner upp det här vektorrummet utgör en bas för det (på samma sätt som x- och y-axeln utgör en bas för xy-planet som ni är vana vid).

17.

Den första linjen har riktningsevektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och den andra har $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi vill ta fram kryssprodukten av dessa för att kunna skriva planet på standardform

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 0 - 1 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Båda linjerna innehåller punkten $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Vi sätter alltså in den punkten i ekvationen

$$\begin{aligned} -3(x - x_0) - 1(y - y_0) + 2(z - z_0) &= 0 \\ -3(x - 0) - 1(y - 0) + 2(z - 0) &= 0 \\ -3x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Svaret är alltså $-3x - y + 2z = 0$. I facit skriver de att svaret är $3x + y - 2z = 0$, detta är också giltigt och man får det om man byter plats på vektorerna vi tog kryssprodukten av.

19.

Man skulle kunna beräkna matrisen som ges av $B^{-1}AB$ och sedan ta determinanten av denna. Men vi kan använda några räkneregler för determinanter som gör denna uppgift mycket enklare (se föreläsning 6)

$$\begin{cases} \det AB = \det A \cdot \det B \\ \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \end{cases}$$

Notera att för att kunna använda den andra regeln så måste A vara en inverterbar matris. Men här kan vi anta att B är inverterbar för annars skulle det inte gå att beräkna $\det B^{-1}AB$. Låt oss utveckla uttrycket med hjälp av räknereglerna

$$\det B^{-1}AB = \det B^{-1} \cdot \det A \cdot \det B = \frac{1}{\det B} \cdot \det A \cdot \det B = \det A$$

$\det B^{-1}$ och $\det B$ tog alltså ut varandra. Nu räcker det alltså att beräkna $\det A$

$$\det B^{-1}AB = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$$

svar: $\det B^{-1}AB = 2$

4 modul 4

4.1 Teori

4.2 Linjära avbildningar

Ni är ju vana med begreppet funktion. Man kan till exempel tala om en funktion $f(x) = kx + m$. Man skulle kunna lägga till i den här funktionsdefinitionen att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dvs att f är en funktion som accepterar värden från de reella talen och ger tillbaka värden från de reella talen.

Linjära avbildningar är också funktioner $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, men de kan gå mellan olika (eller samma) dimensioner. Den tar alltså en vektor i \mathbb{R}^m och ger tillbaka en vektor i \mathbb{R}^n . I praktiken är linjära avbildningar är egentligen bara matrismultiplikation mellan en matris A (som kallas avbildningsmatris) och en vektor \vec{u} . En sådan multiplikation kommer ge tillbaka en ny vektor \vec{v} . Vi säger att vektorn avbildas på en annan vektor.

$$A\vec{u} = \vec{v}$$

Ett exempel på en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$: De tar något som händer i vår värld (3D) och gör om det till ett fotografi (2D).

4.3 Linjäritet

Att en linjär avbildning är linjär betyder att den inte innehåller termer som inte är linjära. Jämför med funktioner i en variabel: $f(x) = x^2$ är inte linjär medan $g(x) = 3x + 1$ är det. Att $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ är linjär medför att den har följande räkneregler

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
- $T(k \cdot \vec{u}) = k \cdot T(\vec{u})$

4.4 Bildrum (im)/ Värderum / Kolonnum (col)

I envarren talade ni om begreppen definitionsmängd och värdemängd för en funktion. Bildrummet är lite som värdemängden för en linjär avbildning.

Bildrummet är alla vektorer som den linjära avbildningen avbildar på. Kom ihåg att en linjär tar vektorer (indata) och producerar nya vektorer (utdata). Alla dessa nya vektorer bildar bildrummet till den linjära avbildningen.

I praktiken blir bildrummet spannet av de linjärt oberoende kolonnerna i matrisen (det kallas därför även för kolonnum).

4.5 Nollrum / Kärna (ker)

Nollrummet är alla de vektorer som avbildas på nollvektorn $\vec{0}$ av den linjära avbildningen.

Det är alltså lite som nollställen för funktioner i en variabel.

I praktiken tar man fram nollrummet genom att parametrisera lösningsmängden till ekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$

Formel 13 Dimensionssatsen

För en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gäller att summan av dimensionerna för dess bildrum och nollrum är lika med dimensionen vektorerna som den tar som indata.

$$\dim(\text{im}(T)) + \dim(\text{ker}(T)) = m$$

4.6 Uppgifter att börja med

1.

a)

Dimensionerna av matrisen A är 3×4 , Alltså kommer man kunna utföra multiplikationen $A\vec{v}$ med vektorer \vec{v} av längd 4 och resultatet kommer vara vektorer av längd 3.

b)

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0+0 \\ 0+1+0+0 \\ 0+5+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(Svaret är alltså bara den andra kolumnen)

3.

Vi vet att den linjära avbildningen går från \mathbb{R}^2 till \mathbb{R}^2 så dess matris är en 2×2 matris. Denna matris A ska uppfylla

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Alltså är den första kolumnen i $A \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ och den andra $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$. Detta ger att

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Så

$$T\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+6 \\ 15+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 33 \end{pmatrix}$$

5.

Vi vet att en linjär avbildning tar en vektor och ger tillbaka en ny vektor. En linje kan ses som en mängd av punkter (och beskrivs av linjens parameterform som ortsvektorer till dessa punkter).

För att göra det lättare att förstå vad som händer skriver jag om linjen som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3t \\ -1+t \end{pmatrix}, t \in R$$

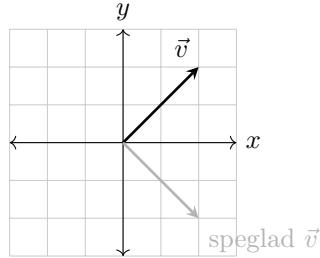
Nu kan vi lätt ta fram den linjära avbildningen av alla linjens punkter direkt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+3t \\ -1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1+3t)+2(-1+t) \\ 3(1+3t)+4(-1+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+5t \\ -1+13t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Den här omskrivningen som jag gjorde är faktiskt inte nödvändig. Man hade lika gärna kunnat projicera linjens startpunkt $(1, -1)$ och dens riktningsvektor $(3, 1)$ för sig.

7.

Vi vill ha en linjär avbildning som speglar alla vektorer $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ i x-axeln.



Alltså söker vi en avbildningsmatris som gör så att vektorer behåller samma x-värde men multiplicerar sitt y-värde med -1 . Denna matris är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi kan testa att multiplicera $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och se om vi får fram $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ efter matrismultiplikationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I den här uppgiften kan man se vad avbildningsmatrisen ska vara utan att göra några beräkningar.

9.

När vektorer $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ projiceras på x_1x_2 -planet kommer det resultera i vektorer på formen $= (u_1, u_2, 0)$. Alltså kommer dessa vektorer ha $x_3 = 0$, medan u_1 och u_2 är oförändrade. Den avbildningsmatris som åstadkommer detta är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi testar med en vektor $\vec{v} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Projektionen av denna vektor på x_1x_2 -planet borde vara vektorn $(1, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 \\ 0+1+0 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I den här uppgiften kan man se vad avbildningsmatrisen ska vara utan att göra några avancerade beräkningar.

10.

En vektor \vec{v} kan skrivas som summan av dess projektion på planets normalvektor $\text{proj}_{\vec{n}}(\vec{v})$ plus en vektor som är ortogonal mot denna projektion $\vec{v} - \text{proj}_{\vec{n}}(\vec{v})$ (alltså en vektor i planet).

$$\vec{v} = \underbrace{\text{proj}_{\vec{n}}(\vec{v})}_{\text{projektion på normalvektor}} + \underbrace{(\vec{v} - \text{proj}_{\vec{n}}(\vec{v}))}_{\text{projektion på plan}}$$

Projektionen på ett plan kan alltså beräknas med hjälp av formeln $\vec{v} - \text{proj}_{\vec{n}}(\vec{v})$. Detta kan vi använda för att ta fram avbildningsmatrisen som projiceras alla vektorer i \mathbb{R}^3 på planet $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Detta plan har normalvektorn $\vec{n} = (2, 2, 1)$

Vi projiceras en godtycklig vektor $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ på planet

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\text{planet}}(\vec{u}) &= \vec{u} - \text{proj}_{\vec{n}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{2x_1 + 2x_2 + x_3}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\frac{2x_1 + 2x_2 + x_3}{9}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4x_1 + 4x_2 + 2x_3}{9} \\ \frac{4x_1 + 4x_2 + 2x_3}{9} \\ \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{4x_1 + 4x_2 + 2x_3}{9} \\ x_2 - \frac{4x_1 + 4x_2 + 2x_3}{9} \\ x_3 - \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3}{9} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{9x_1}{9} - \frac{4x_1 + 4x_2 + 2x_3}{9} \\ \frac{9x_2}{9} - \frac{4x_1 + 4x_2 + 2x_3}{9} \\ \frac{9x_3}{9} - \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3}{9} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 8x_3 \end{pmatrix}}_{\text{avbildningsmatris}} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13.

Vi reducerar matrisen med gaussning

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{skriver inte ut hela}}{\sim \dots \sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Detta betyder att de första kolonnerna är linjärt oberoende och att de utgör bildrummet till den linjära avbildningen som ges av matrisen A . Alltså

$$\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Nollrummet tas fram genom att vi parametrисerar lösningsmängden till

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I den sista kolonnen har vi en fri variabel, lösningsmängden till den här ekvationen, alltså nollrummet till vår linjära avbildning, blir alltså

$$\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Jag såg på matrisen att det här är svaret, men om man inte tycker att det är uppenbart än kan börja med att parametrисera lösningsmängden (repetera uppgifterna från modul 3 om det är svårt)

$$\begin{cases} x + w = 0 \\ y - 2w = 0 \\ z + w = 0 \\ w = t \end{cases}$$

14.

Om den tillhör nollrummet kommer den avbildas på $(0, 0)$. Vi testar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 + 0 \\ 1 - 2 + 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

svar: Nej, den tillhör inte nollrummet för den här linjära avbildningen

15.

$(1, -1, -2)$ ligger i bildrummet till den linjära avbildningen om vi kan lösa ekvationssystemet med totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Vi testar med gaussning

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{skriver inte ut hela}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -5 \end{array} \right)$$

Vi ser att det här systemet är inkonsistent, så $(1, -1, -2)$ ligger inte i bildrummet till den linjära avbildningen (det finns inget sätt att skriva kolonnerna i matrisen så att vi får vektorn $(1, -1, -2)$).

svar: Nej

17.

Vi börjar med gaussning på matrisen.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{skriver inte ut hela}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

De tre första kolonnerna är linjärt oberoende och utgör alltså bildrummet. Alltså är bildrummet

$$span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

För att bestämma nollrummet parametriserar vi lösningsmängden skriver vi på formen $Ax = \vec{0}$.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nollrummet till matrisen är alltså $\text{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

5 modul 5

5.1 Teori

5.2 Uppgifter att börja med

6. Ov9 (2)

4
Ov9

Bestimmen der Orthonormal Basis für

$$V = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{u}_3$

$$\textcircled{1} \quad \bar{v}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} = \bar{u}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad U_1 = \{\bar{v}_1\}$$

$$\textcircled{2} \quad \bar{v}_2 = \frac{\text{Perp}_{U_1}(\bar{u}_2)}{\|\text{Perp}_{U_1}(\bar{u}_2)\|}, \quad \text{Perp}_{U_1}(\bar{u}_2) = \bar{u}_2 - \text{Proj}_{U_1}(\bar{u}_2)$$

$$= (\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_1$$

$$= (2, 0, 1, 1) \cdot (1, 0, 0, 0) \cdot \bar{v}_1 = 2 \cdot \bar{v}_1 = (2, 0, 0, 0)$$

$$\text{Perp}_{U_1}(\bar{u}_2) = (2, 0, 1, 1) - (2, 0, 0, 0) = (0, 0, 1, 1)$$

$$\bar{v}_2 = \frac{(0, 0, 1, 1)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0, 1, 1)$$

$$U_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$$

$$\textcircled{3} \quad \bar{v}_3 = \frac{\text{Perp}_{U_2}(\bar{u}_3)}{\|\text{Perp}_{U_2}(\bar{u}_3)\|}, \quad \text{Perp}_{U_2}(\bar{u}_3) = \bar{u}_3 - \text{Proj}_{U_2}(\bar{u}_3)$$

$$\text{Proj}_{U_2}(\bar{u}_3) = (\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_1 + (\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_2) \cdot \bar{v}_2$$

$(0 \vee g)$. ②

$$\begin{aligned}
 ③ \quad \text{Proj}_{U_2} \bar{u}_3 &= (\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_1 + (\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_2) \cdot \bar{v}_2 \\
 &= (1, 1, 0, 1) \cdot (1, 0, 0, 0) \cdot \bar{v}_1 + (1, 1, 0, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0, 1, 1) \cdot \bar{v}_2 \\
 &= 1 \cdot \bar{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{v}_2 = (1, 0, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0, 1, 1) \\
 &= (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Perp}_{U_2}(\bar{u}_3) &= \bar{u}_3 - \text{Proj}_{U_2}(\bar{u}_3) = \\
 &= (1, 1, 0, 1) - (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Normierung: } \frac{\text{Perp}_{U_2}(\bar{u}_3)}{\|\text{Perp}_{U_2}(\bar{u}_3)\|} &= \frac{(0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}} (0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} (0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{2}{3}} (0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{2} (0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 2 \cdot 2}} (0, 2, -1, 1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (0, 2, -1, 1).
 \end{aligned}$$

Start: ein ON-Basis für V Bsp. d.

$$V_{ON} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Übung

③ Berechnung Projektionen von \bar{v}

$$\text{Vektoren } \bar{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{P: Drehumfang}$$

V i. Uppg. f. ②.

$$V_1 \text{ Fisch ON-Basis } V_{ON} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Satz Proj $_{V_{ON}}(\bar{r}) =$

$$\text{Proj}_{V_{ON}}(\bar{r}) = (\bar{r} \cdot \bar{v}_1) \bar{v}_1 + (\bar{r} \cdot \bar{v}_2) \bar{v}_2 + (\bar{r} \cdot \bar{v}_3) \bar{v}_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \bar{v}_1 + 0 \cdot \bar{v}_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \bar{v}_3 =$$

$$= (1, 0, 0, 0) + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} (0, 2, -1, 1) = (1,$$

$$= (1, 0, 0, 0) + \frac{1}{3} (0, 2, -1, 1) = (1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

Skizz: Projektionen blau

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(i) Y
CV.10

5) Det räummat $W \subseteq \mathbb{R}^5$ ges som
lösningsrummet till det linjära
ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Bestäm en ON-BAS

för W och skriv

$$\text{vektorn } \vec{x} = (1, 1, 1, 0, 1)^T$$

Som en summa av

två vektorer, den ena
i W och den andra i
 W^\perp .

1) Hitta W , via
lösningsrummet till
ekv. sys

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{E1} - \text{E2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{E2} \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{E3} - \text{E2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{E2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{E3} - \text{E2}}$$

$$x_1 = -x_3 - x_5$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = -x_3$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = s, s \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = 0$$

$$\vec{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_5 = t, t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vidare ges att $W = \text{Span} \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5 \}$.

Undersök om $\vec{x} \in W$.

$$\text{om intet } \vec{x} = \text{Proj}_{W^\perp}(\vec{x}) + \vec{y}$$

Öv10

5) ii) Bestäm en ON-BAS för W'

$$\text{Sätt } \bar{V}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\|\bar{U}_1\|} = \frac{(-1, 0, 0, 0, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{U}_1, U_1 = \sqrt{2} \bar{U}_1$$

$$\text{Sätt } \bar{V}_2 = \frac{\text{Perp}_{U_1}(\bar{U}_2)}{\|\text{Perp}_{U_1}(\bar{U}_2)\|}. \quad \text{Perp}_{U_1}(\bar{U}_2) = \bar{U}_2 - \text{Proj}_{U_1}(\bar{U}_2)$$

$$\text{Proj}_{U_1}(\bar{U}_2) = (\bar{U}_2 \cdot \bar{V}_1) \cdot \bar{V}_1$$

$$\text{Proj}_{U_1}(\bar{U}_2) = (-1, -1, 1, 0, 0) \cdot (-1, 0, 0, 0, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \bar{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \bar{V}_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 0, 0, 1) = \frac{1}{2} (-1, 0, 0, 0, 1).$$

$$\text{Perp}_{U_1}(\bar{U}_2) = (-1, -1, 1, 0, 0) - \frac{1}{2} (-1, 0, 0, 0, 1)$$

$$= \left(\frac{-1}{2}, -1, 1, 0, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (-1, -2, 2, 0, -1)$$

$$\|\text{Perp}_{U_1}(\bar{U}_2)\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$

$$\bar{V}_2 = \frac{\frac{1}{2} (-1, -2, 2, 0, -1)}{\frac{1}{2} \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} (-1, -2, 2, 0, -1)$$

Då har v_i en ON-BAS för W

$$\text{Normalgon } W_{ON} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Om v_i är en uttryckning i \bar{x} som är vektor i W och en vektor i W^\perp kan v_i delas upp till i

kompositioner GENOM ATT Proj.era \bar{x} PÅ W_{ON} .

$$\text{Proj}_{W_{ON}}(\bar{x}) = (\bar{x} \cdot \bar{V}_1) \cdot \bar{V}_1 + (\bar{x} \cdot \bar{V}_2) \cdot \bar{V}_2 = 0 \cdot \bar{V}_1 + \frac{-2}{\sqrt{10}} \cdot \bar{V}_2$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} (-1, -2, 2, 0, -1) = \frac{1}{5} (-1, -2, 2, 0, -1). \quad \text{Då } för v_i$$

$$\bar{x} = \text{Proj}_{W_{ON}}(\bar{x}) + \bar{y} \quad \bar{x} - \text{Proj}_{W_{ON}}(\bar{x}) = \bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Så } \bar{x} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(OV10)

(6)

$$W^\perp \text{ F.S } \left(\begin{array}{c|c} -\bar{v}_1 & | \frac{1}{0} \\ -\bar{v}_{22} & | \downarrow \end{array} \right)$$

$$W^\perp = \left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & | & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & | & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot -\sqrt{2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & | & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_5, & x_3 = s, x_4 = t, \\ x_2 = x_3 - x_5 & x_5 = u, s, t, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_1 & | & 0 \\ x_2 & | & 1 \\ x_3 & = s & | & + & 0 & | & 0 \\ x_4 & | & 0 & + & 1 & | & 0 \\ x_5 & | & 0 & - & \bar{u}_2 & | & 0 \\ & & & & \bar{u}_1 & | & 1 \\ & & & & \bar{u}_3 & | & -1 \end{matrix}$$

$$W^\perp = \text{span} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix} \right\} \quad \bar{v}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} = (0, 0, 1, 0, 0) \quad U_1 = \{\bar{v}_1\}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\text{Perp}_{U_1}(\bar{u}_2)}{\|\text{Perp}_{U_1}(\bar{u}_2)\|}$$

$$\text{Perp}_{U_1}(\bar{u}_2) = \bar{u}_2 - \text{Proj}_{U_1}(\bar{u}_2)$$

$$= (0, 1, 1, 0, 0) - ((\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_1) = (0, 1, 1, 0, 0) - 0$$

$$|\text{Perp}_{U_1}(\bar{u}_2)| = \sqrt{2} \Rightarrow \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 1, 0, 0) \quad U_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$$

$$\bar{v}_3 = \frac{\text{Perp}_{U_2}(\bar{u}_3)}{\|\text{Perp}_{U_2}(\bar{u}_3)\|} = \frac{\bar{u}_3 - ((\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_1 + (\bar{u}_3 \cdot \bar{v}_2) \bar{v}_2)}{|\text{Perp}_{U_2}(\bar{u}_3)|} =$$

$$(1, -1, 0, 0) + \frac{1}{2} (0, 1, 1, 0, 0) = \frac{(1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} (2, 1, 1, 0, 0)$$

$$|\text{Perp}_{U_2}(\bar{u}_3)| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} \quad \dim(w) + \dim(w^\perp)$$

$$W_{\text{ON}}^\perp = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{Dim, Satz 15}$$

$$\dim(w) + \dim(w^\perp) = \dim(U^3)$$

$$2 + 3 = 5 \quad \text{Skizze}$$

7. Bestäm koordinaterna för vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i basen

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Vill skriva något som

$$s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

↑
↑
↑
koordinater
i
basen B

Gaußska systemet

$$\begin{array}{c|cc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 + \frac{2}{3}r_3 \\ r_3 - \frac{2}{3}r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 + r_3/3 \\ r_2 - r_3 \cdot \frac{2}{3} \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Alltså $\begin{cases} s = 2/3 \\ t = -1/3 \\ r = 1 \end{cases}$ så koordinaten i basen B är $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$

8. Vi har en bas $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ för \mathbb{R}^3 . För en viss vektor \vec{v} gäller att $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

\vec{v} i basen
 B

Bestäm $[\vec{v}]_E$, där E är enhetsbasen.

\vec{v}
i
basen E

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2+1 \\ 0+0+1 \\ 2+1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

U
Ov 10

(12) vi har två basor för

$$\mathbb{R}^2, B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Baslämningsmatris P så att för alla vektorer $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ gäller att

$$P(\vec{v})_B = (\vec{v})_C.$$

$$(\vec{v})_C = P_{C \leftarrow B} (\vec{v})_B \quad P_{C \leftarrow B} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{pmatrix}_C$$

uttryck $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i basen C

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \kappa_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \kappa_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \cdot 2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \cdot (-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 1 & -3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \cdot 3} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & \frac{4}{5} \end{array} \right) \quad (1,1) \text{ i basen } C \text{ är } \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

uttryck $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $C \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \cdot 2} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(1) \cdot \frac{1}{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \cdot (-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1,1,2) \text{ i } C \text{ är } (1,1)$$

$$P_{C \leftarrow B} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Att } 2: \quad P_{C \leftarrow E} = P_{C \leftarrow E} \cdot P_{E \leftarrow B}$$

$$P_{C \leftarrow E} = P_{E \leftarrow C}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_{C \leftarrow B} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

(CV 10)

Baser.

$$\text{Vi har en Bas } B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

För \vec{v}^3 .

För en viss vektor \vec{v} så gäller

$$\begin{aligned} (\vec{v})_B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \vec{u}_1 + 2 \cdot \vec{u}_2 + 1 \cdot \vec{u}_3 \\ &= (1, 0, 2) + (2, 0, 1) + (1, 1, 0) \\ &= (4, 1, 3) \end{aligned}$$

Svar: $(\vec{v})_E = (4, 1, 3)$

(13)

Bestäm enr för den räta linje som MVM
mötning beståt av slutor punktorna

$$(-1, 1), (1, 1), (3, 4) . \quad y = kx + m$$

i) Räta linjens ekvation:

Sätt in punktorna i enr \Leftrightarrow bilden enr. sys

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \text{ii)} \text{ Ta bort om tills A} \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \vec{w} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d)} \begin{array}{l} k+m=1 \\ 3k+m=4 \end{array} \\ \text{iii)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{iii)} \text{ Skapar } A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och beräknar } A^T A$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv)} \text{ Lös } A^T A \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = A^T \vec{v}.$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 3 & | & 12 \\ 3 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{3}} \sim \begin{pmatrix} 11 & 3 & | & 12 \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-11)} \sim \begin{pmatrix} 0 & -8 & | & -10 \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{8}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & | & \frac{5}{4} \\ 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\leftarrow} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & \frac{5}{4} \\ 1 & 0 & | & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \text{Svar: Den räta linjen}$$

är $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$

6 modul 6

6.1 Teori

Definition 2 *Egenvektor* En egenvektor \vec{v} för en matris A är en vektor som bevarar sin riktning under en linjär avbildning med avbildningsmatris A . Detta skrivs

$$T(\vec{v}) = A\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

Alltså, det enda som händer med \vec{v} under avbildningen är att den skalas om med någon skalfaktor λ .

Definition 3 *Egenvärde* Ett egenvärde λ för en matris A är skalfaktorn hos för någon av dess eigenvektorer till A .

6.2 Metod för att ta fram egenvärden och eigenvektorer till en matris

6.2.1 ta fram egenvärden

När man vill ta fram eigenvektorer till en matris A börjar man alltid med att ta fram egenvärdena. Dessa fås genom att man löser matrisens karakteristiska ekvation

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Där λ står för ett egenvärde till matrisen och *Erenhetsmatrisen*. Vi kan utveckla detta lite. Låt oss ta en exemplarmatris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Då får vi

$$\det(A - \lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Vi beräknar determinanten som vanligt och får ett polynom

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 &= 0 \\ 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Som har lösningarna $\lambda = 0$ och $\lambda = 3$. Det här betyder att matrisen har egenvärdena 0 och 3.

6.3 Ta fram egenvektorer

Man kan ta fram egenvektorer till en matris när man har tagit fram dess egenvärden. Man gör detta genom att lösa ekvationen

$$(A - \lambda E) = \vec{0}$$

Där man sätter in ett av de egenvärden som man har tagit fram som λ i ekvationen. Resultatet kommer bli de egenvektorer som hör till det egenvärdet. Dessa vektorer kommer under en linjär avbildning med A som avbildningsmatris att behålla sin riktning, och de kommer att skalas om med skalfaktorn λ .

Låt oss fortsätta med exemplet ovan. Vi har beräknat egenvärdena till vår exempelmatris $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ till 0 och 3. Vi får nu använda dessa egenvärden för att ta fram de egenvektorer som hör till dessa

fallet när $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} (A - \lambda E) &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\lambda & 0 \\ 0 & 0\lambda \end{pmatrix} &= \vec{0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Det här kan vi lösa med gaussning

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \underset{\text{skriver inte ut hela}}{\sim\sim\sim} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Lösningsmängden till det här ekvationssystemet blir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Detta bildar en linje i \mathbb{R}^2 , och alla vektorer som tillhör den är egenvektorer till A med egenvärdet 0.

fallet när $\lambda = 0$

Man gör på samma sätt när man vill beräkna de egenvektorer som hör till egenvärdet 3.

När man har beräknat de egenvektorer som hör till respektive egenvärde är man klar, då har man tagit fram matrisens egenvektorer.

6.4 Diagonalisering

6.5 Uppgifter att börja med

1.

En egenvektor till en matris ändrar inte riktning efter multiplikation med denna matris. Vi testar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 \\ 0+1+1 \\ 2+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Den här nya vektorn har uppenbarligen ändrat riktning under multiplikationen med A , så $(1, 1, 1)$ kan inte vara en egenvektor till A .

2. Om den är en egenvektor till B kommer den bevara sin riktning under avbildningen

Detta skrivs matematiskt som

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Omkalningsfaktor / egenvärde

Vi testar

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 \\ 0+1+1 \\ 0+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svar: Vi ser att vektorn är en egenvektor till matrisen B , eftersom att den bara skalar om vektorn (rikningen behålls).

Vi ser även att omkalisningsfaktorn är 2, dvs egenvärdet som hör till egenvektorn är 2.

3. a) Vi börjar med att näkna ut A:s egenvärden genom att lösa den karaktäristiska ekvationen

$$\begin{aligned}
 & \det(A - \lambda E) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2) - 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3) = 0
 \end{aligned}$$

Som har lösningarna $\lambda = 0$ och $\lambda = 3$

Nu tar vi fram egenvektorerna till dessa egenvärden, genom att lösa egenvekorekvationen

$$(A - \lambda E) \vec{v} = \vec{0}$$

↑
egenvektor

$$\lambda = 0$$

$$(A - 0 \cdot E) \vec{v} = A \vec{v} = \vec{0}$$

Vi vill alltså lösa systemet $A \vec{v} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} r_1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Parametrisering

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \quad \text{så lösningar är } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en egenvektor är alltså $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\textcircled{X=3} \quad (A - 3 \cdot E) \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

↑
eigenvektor

Vill alltså lösa systemet gausssar $\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix}, \left| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \end{array} \right|$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix}, \left| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \end{array} \right| \sim \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \left| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \end{array} \right| \sim \begin{bmatrix} n_1 + (-\frac{1}{2}) & 0 \\ n_2 + n_3 - (\frac{1}{2}) & 0 \end{bmatrix}, \left| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \left| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \end{array} \right|$$

parametriserar lösningen $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$

Alltså eigenvektorer till A med egenvärde 3 är $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$

b) Ja, vi såg att 0 är ett egenvärde till A.

Egenrummet är det vektorrum som spänns upp av de linjärt oberoende eigenvektorer som har detta egenvärde. Alltså

E_0 (Egenrummet för egenvärdet 0) är

$t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$ eller på ett annat skrivsätt:

$$\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

c) Det finns en diagonalmatris D och inverterbar matris P om våra 2 vektorer är linjärt oberoende. Tillsätt

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 + 2r_2 & r_2 \\ r_2 & r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_2 & \frac{1}{3} \\ r_2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_2 & r_2 \\ r_2 & r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser att de är linjärt oberoende så D och P existerar.

Barn
ledande
ekor

Diagonalmatrisen D är helt enkelt en matris med egenvärdena på diagonalen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Den inverterbara matrisen P är en matris med egenvektorer som kolonner (de ska stå i samma ordning som egenvärdena i D)

$$\text{Alltså } P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notera att formeln $A = P^{-1} D P$ ger oss barbyte från D till A .

4.

a)

Vi börjar med att bestämma egenvärden till A .

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1 - \lambda)^2 = 0$$

Man ser direkt att lösningarna till den karakteristiska ekvationen är $\lambda = 1$. Vi har alltså bara ett egenvärde till A (och det egenvärdet har algebraisk multiplicitet 2 eftersom att det är en dubbelrot).

Nu använder vi detta egenvärde för att bestämma egenvektorer till A

$$\begin{pmatrix} 1 - 1 & 1 \\ 0 & 1 - 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

Detta är samma sak som om vi hade gaussat och kommit fram till totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Vad betyder detta? Jo om vi läser första raden ser vi att, $0x + 1y = 0$ vilket betyder att x kan vara vad som helst men y måste vara 0. Detta betyder att egenvektorer som hör till egenvärdet 1 tillhör

$$span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

b)

En bas för \mathbb{R}^2 kräver ju 2 linjärt oberoende vektorer, och vi har bara en linjärt oberoende egenvektor, så det går inte i det här fallet.

c)

En diagonalisering kräver en inverterbar matris P med egenvektorerna som kolumner, och eftersom att vi bara har en egenvektor kommer vi inte kunna skapa en sådan.

II. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ är diagonalisierbar om det finns matrisen D och P så att

$$A = PDP^{-1}$$

Detta kräver att det finns 2 linjärt oberoende egenvektorer,

tar fram egenvärden

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - a = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - a = 0 \end{aligned}$$

Andragrads ekvation, löser med pq-formeln

$$\lambda = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (1-a)} = -1 \pm \sqrt{1-1+a} = -1 \pm \sqrt{a}$$

lösbar om
 $a \geq 0$

Vi ser att det finns 2 lösningar till den karakteristiska ekvationen om $a \geq 0$ (om $a = 0$ finns bara en lösning)

Då har vi 2 egenvärden med algebraiskt multiplicitet 1 och de egenvektorer som svänger mot dessa egenvärden kommer vara linjärt oberoende (se föreläsning 10). Alltså kommer A vara diagonalisierbar om $a \geq 0$.

13.

Vi börjar med att beräkna egenvärdena till A

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \{\text{kofaktorutvecklar längs första kolumnen}\} =$$
$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] - 1[(1-\lambda) - 1] + 1[1 - (1-\lambda)]$$

18.

(I den här modulen är det viktigt att man förstår egenvektorer osv. Uppgift 18 och 19 är inte så relaterade till det. Kvadratiska former återkommer dock i flervarren så det här blir inte sista gången ni ser dom.)

a)

$Q(x, y) = x^2 + 6xy + 4y^2 = xx + 6xy + 4yy$ är en kvadratisk form eftersom att varje term har grad 2. När vi skriver den på matrisform vill vi ha en matris så att ekvationen nedan uppfylls

$$(x \ y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 6xy + y^2$$

(Notera att matrismultiplikationen fungerar eftersom att vi har en kolonnvektor till höger och en radvektor till vänster)

Vi kan utveckla uttrycket lite så blir det enklare att se varför svaret blir som det blir

$$(x \ y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{21}xy + a_{22}y^2$$
$$= x^2 + 6xy + 4y^2$$

Från detta kan vi direkt bestämma värdena på konstanterna $a_{11} = 1$ och $a_{22} = 4$. Vi ser även att $a_{12}xy + a_{21}xy = 6xy$, och eftersom att matriser som beskriver kvadratiska former ska vara symmetriska kan vi även bestämma $a_{12} = a_{21} = 3$.

svar: Matrisen som är associerad till Q är $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b)

Först lite om begreppen

- *Positivt (semi-)definit* betyder att $Q(x, y) \geq 0$ för alla värden på x och y .
- *Indefinit* betyder att $Q(x, y)$ antar både positiva och negativa värden när x och y varierar.
- *Negativt (semi-)definit* betyder att $Q(x, y) \leq 0$ för alla värden på x och y .

(positivt definit är egentligen $Q(x, y) > 0$ (strikt större), och positivt semidefinit är $Q(x, y) \geq 0$)

Vi kan undersöka $Q(x, y) = x^2 + 6xy + 4y^2$. Termerna x^2 och y^2 kommer bara kunna anta positiva värden (eller 0) men termen $6xy$ kommer kunna anta både positiva och negativa värden. Några exempel:

- $Q(1, 1) = 1^2 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1^2 = 11 > 0$
- $Q(1, -1) = 1^2 + 6 \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1^2 = -1 < 0$

Alltså, $Q(x, y)$ kan anta både positiva och negativa värden och är därav *indefinit*.