Institutionen för Matematik

SF1624
Algebra och geometri
Läsåret 2022-23

Modul 5

1. Övningsuppgifter ur boken

Ch 7.4. 3, 7, 11, 17, 19, 21
Ch 7.5. 3, 9, 11, 15
Ch 7.6. 1, 11
Ch 7.7. 1, 3, 9, 15
Ch 7.8. 1, 9, 11
Ch 7.9. 1, 7, 9, 29

2. Uppgifter att arbeta med

Uppgift 0. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Beräkna $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.

Uppgift 1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm baser för ker$A$ och col$A$

(b) Vad säger dimensionssatsen i det här fallet?

(c) Stämmer det?

Uppgift 2. Bestäm en ortonormal bas för $V = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Uppgift 3. Beräkna projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ på delrummet V i uppgift 2.

Uppgift 4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$. Finns det någon vektor $\vec{x}$ sådan att $\vec{x} \in \ker A \cap \operatorname{col} A$?

Uppgift 5. Delrummet W i $\mathbf{R}^5$ ges som lösningsrummet till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Bestäm en ortonormal bas för W och skriv vektorn $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som en summa av två vektorer, den ena i W och den andra i $W^{\perp}$.

Uppgift 6. Bestäm en ortonormal bas för $W^{\perp}$, där W är som i uppgift 5. Vad säger dimensionssatsen för delrum om det här fallet (uppgift 5 och 6)? Stämmer det?

Uppgift 7. Bestäm koordinaterna för vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i basen $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Uppgift 8. Vi har en bas $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ för $\mathbf{R}^3$. För en viss vektor $\vec{v}$ gäller att $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm $[\vec{v}]_E$, där E är standardbasen.

Uppgift 9. Bestäm matrisen för den linjära avbildning P från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^3$ som projicerar alla vektorer på linjen genom origo med riktningsvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Lös detta på två olika sätt och kontrollera att det blir samma matris. Bestäm sedan ortonormala baser för kärnan och bildrummet till P .

Uppgift 10. Är basen för ett visst delrum unik, eller kan det finnas flera olika?

Uppgift 11. Är dimensionen av ett visst delrum unik, eller kan det ha flera olika?

Uppgift 12. Vi har två baser för $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \}$ och $\mathcal{C} = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \}$. Bestäm en matris P så att för alla vektorer $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ gäller att

$$P[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_C.$$

Uppgift 13. Bestäm ekvationen för den räta linje som i minstakvadratmening bäst ansluter till punkterna $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(3, 4)$.

Uppgift 14. Enligt en ny teori framtagen vid Smockholts universitet finns ett samband $y = kx + m$ mellan storheterna y (hjärnhydrosulfathalt, HHSH) och x (ålder). Ett antal mätningar utföll så här: $(x, y) = (1, 5),\ (2, 4),\ (3, 4),\ (4, 2)$. Bestäm de värden på k och m som i minstakvadratmening bäst stämmer med mätningarna.

Uppgift 15. Låt $W =$span$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Finn den vektor $\vec{x} \in W$ som minimerar avståndet till vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Lite längre uppgifter

Följande uppgifter förses inte med svar. Diskutera gärna lösningar med övningsassistenterna!

Uppgift 3.1. Den linjära avbildningen $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ är definierad genom $L(\vec{x}) = A\vec{x}$, där A är matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för *bildrummet* $\mathrm{Im(L)}$ till L. Förklara varför $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathrm{Im(L)}$.
(b) Lägg till vektorer till $\mathcal{B}$ för att bilda en bas $\mathcal{B}'$ för $\mathbb{R}^3$.

Uppgift 3.2. Låt $W = \mathrm{Ker}(A)$ vara nollrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en ortonormal bas för W.
(b) Verifiera att basen i (a) är ortonormal.

Uppgift 3.3. Låt a, b och c vara parametrar i en modell där storheten z beror på variablerna x och y enligt $z = f(x, y) = ax^2 + by + c$. Efter sex mätningar har man följande tabell av mätvärden:

x	0	0	-1	1	1	-1
y	-1	0	2	0	1	1
z	5	-3	1	-4	-2	1

(a) Vad är det bästa valet av parametrarna (a, b, c) enligt minsta-kvadratmetoden? Förklara. (OBS: man behöver inte alltid få heltal i svaret.)

(b) Blir det ett annat bästa val av parametrarna (a, b, c) (enligt minsta-kvadratmetoden) om man i stället för att använda hela tabellen endast använder första 4 mätningar? Motivera ditt svar.

4. Förslag på arbetsuppgifter till Seminarium 5

Dessa uppgifter kan användas som arbetsmaterial/diskussionsuppgifter vid seminariet.

Uppgift 4.1. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för nollrummet, $\mathrm{Null}(A)$.

(b) Bestäm en bas för kolonnrummet, $\mathrm{Col}(A)$.

(c) Avgör om vektor $\vec{v} = (3, -2,\ 5)^T$ ligger i kolonnrummet. Förklara hur man kan använda determinanten för att svara på denna fråga.

Uppgift 4.2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla vektorer som ligger i båda Col(A) och Col(B). Förklara varför alla vektorer som ligger i båda Col(A) och Col(B) bildar ett delrum i $\mathbb{R}^3$ och beräkna dess dimension.

(b) Bestäm en vektor i Col(A) som inte ligger i Col(B).

Uppgift 4.3. En linje $y = kx + m$ ska anpassas till punkterna $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 2)$ och $(7, 6)$.

(a) Bestäm de värden på konstanterna k och m som ger bäst anpassning i minsta-kvadratmening.
(b) Rita ut linjen tillsammans med punkterna i ett koordinatsystem och illustrera vad det är som har minimerats för dessa värden på konstanterna.

5. Facit och lösningstips

Titta inte i facit förrän du har löst uppgifterna så bra du kan!

0. $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

(Om något är oklart, se projektionsformeln mitt på sidan 380 i boken eller se filmen om skalärprodukt på youtube)

1. (a) Bas för ker$A$: $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$. Bas för col$A$: $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$.

(b) Dimensionssatsen säger i detta fall att 2+2=4

(c) Det stämmer!

(Kärnan är lösningsrummet till det homogena linjära ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ och är i det här fallet alltså ett delrum till $\mathbf{R}^4$. Gaussa! Col$A$ är spannet av A:s kolonner och är i det här fallet alltså ett delrum till $\mathbf{R}^3$. Kolla om kolonnerna i A är linjärt oberoende (kom ihåg modul 3). Gaussningen är samma Gaussning du nyss gjorde för kärnan. Kasta bort de kolonner i A som inte fick ledande ettor vid Gaussningen. Dimensionssatsen står på sidan 352 i boken.)

2. En ortonormal bas fås genom Gram-Schmidt: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{6} \\ -1//\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}$.

(Gram-Schmidts metod är föredömligt förklarad i boken i beviset av sats 7.9.5 på sidorna 411-412 och finns också i en film på youtube.)

3. Projektionen blir $\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

(Det är enkelt att projicera en vektor på ett delrum där man har en ON-bas! Se sats 7.92 a på sidan 408 i boken)

4. Ja men bara $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. ON-bas för W är t ex $\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} \\ -2/\sqrt{10} \\ 0 \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}\}$. Projektionen av $\vec{x}$ på W är $\begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ 0 \\ 1/5 \end{bmatrix}\}$ och den önskade uppdelning av $\vec{x}$ blir

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ 0 \\ 1/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 7/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

(Se ledningen till uppgift 2 och 3! Obs att när du har projicerat $\vec{x}$ på W så kan du ta $\vec{x}$ minus projektionen av $\vec{x}$ på W för att räkna ut komposanten i $W^{\perp}$)

6. En ON-bas för $W^{\perp}$ är t ex $\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \\ 0 \\ 2/\sqrt{10} \end{bmatrix}\}$. Dimensionssatsen säger i det här fallet att $2 + 3 = 5$. Det stämmer!

(Dimensionssatsen för delrum står på sidan 384. Annars handlar denna uppgift också om Gram-Schmidts metod, som är föredömligt förklarad i boken i beviset av sats 7.9.5 på sidorna 411-412 och också finns i en film på youtube.)

7. $\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(Lös ett ekvationssystem!)

8. $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(Vad betyder det att koordinaterna är 1, 1 respektive 1? Jo att man ska ta 1 gånger första basvektorn plus 1 gånger andra basvektorn plus 1 gånger tredje basvektorn. Vad får man om man gör det?)

9. Matrisen är $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

En ON-bas för kärnan är t ex (här finns många möjliga val) $\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\}$

En ON-bas för bildrummet är t ex (här finns två möjliga val) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

(Matrisen kan man få genom att räkna ut projektionerna av de tre basvektorerna och sätta dem i en matris. Som vanligt när det gäller linjära avbildningar. Men man kan också använda den fiffiga formeln i sats 7.7.3 på sidan 382. Den ger samma matris. När det gäller bildrummet så är det förstås linjen som spänns upp av den där vektorn. Och nollrummet är förstås det plan som är ortogonalt mot den där vektorn.)

10. En bas är inte unik

11. Dimensionen är unik

12. P ska innehålla $\mathcal{B}$:s vektorers koordinater i basen $\mathcal{C}$ så $P = \begin{bmatrix} 4/5 & 1 \\ 3/5 & 1 \end{bmatrix}$

(Detta förklaras i sats 7.11.3 på sidan 432.)

13. $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ (Minsta kvadratmetoden förklaras på sidan 395. Obs att de obekanta som ska hittas i vår uppgift är k och m!)

14. $y = -\frac{9}{10}x + 6$

(Se ledningen till förra uppgiften. Obs att teorin från SU är rent nonsens!)

15. $\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$

(Avståndet minimeras av projektionen av $\vec{x}$ på W, se sats 7.81 i boken på sidan 394. För att projicera är det bra att använda Gram-Schmidt och få en ON-bas och sedan köra den smidiga formeln i sats 7.92 a på sidan 408 i boken)