Institutionen för Matematik

SF1624
Algebra och geometri
Läsåret 2022-23

Modul 6

1. Övningsuppgifter ur boken

Ch 7.11. 1, 5, 7, 11, 17
Ch 8.1. 1, 3, 5, 15, 19
Ch 8.2. 3, 9, 15, 19
Ch 8.3. 9, 19
Ch 8.4. 1, 3, 11, 17, 19, 23, 25, 31
Ch 9.1. 7, 9, 12, 19, 21
Ch 9.3. 3, 5, 13, 15, 16, 19, 21, 38

2. Uppgifter att arbeta med

Uppgift 1. Avgör om vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm i så fall egenvärdet.

Uppgift 2. Avgör om vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm i så fall egenvärdet.

Uppgift 3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A.
(b) Är 0 ett egenvärde till A? Bestäm i så fall egenrummet E_0.
(c) Finns det en diagonal matris D och en inverterbar matris P så att $D = P^{-1}AP$?

Uppgift 4. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A.

(b) Finns det en bas för $\mathbf{R}^2$ som består av egenvektorer till A?

(c) Kan A diagonaliseras?

Uppgift 5. Låt $A = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ 20 & -18 \end{bmatrix}$. Bestäm alla egenvärden till A och deras egenrum. Ange, om möjligt, en bas för $\mathbf{R}^2$ som uteslutande består av egenvektorer till A och finn matriser D (som är diagonal) och P så att $D = P^{-1}AP$.

Uppgift 6. Låt $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -7 & 9 & -5 \\ -7 & 7 & -3 \end{bmatrix}$. Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenrum till A.

Uppgift 7. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenrum till A. Finns det en bas för $\mathbf{R}^3$ som består av egenvektorer till A? Bestäm, om möjligt en matris P och en diagonal matris D så att $D = P^{-1}AP$.

Uppgift 8. Den linjära avbildningen $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ges av standardmatrisen $A_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Bestäm matrisen för S i basen $\mathcal{F} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

Uppgift 9. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$. Ange en matris P och en diagonal matris D sådana att $D = P^{-1}AP$.

Uppgift 10. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 11 & -4 & -7 \\ -7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Ange en matris P och en diagonal matris D sådana att $D = P^{-1}AP$.

Uppgift 11. Bestäm alla värden på konstanten a för vilka matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar.

Uppgift 12. För vilka värden på konstanten k är matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{bmatrix}$ symmetrisk? För vilka värden på k är A ortogonalt diagonaliserbar?

Uppgift 13. Bestäm de algebraiska och geometriska multipliciteterna hos egenvärdena till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Uppgift 14. Bevisa att similära matriser har samma egenvärden och samma spår.

Uppgift 15. 3×3-matrisen A har egenvärdena $1, 2$ och -5. Är A diagonaliserbar? Skriv i så fall upp en diagonal matris D som är similär med A. Kan det finnas flera?

Uppgift 16. Betrakta den linjära avbildning S från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$ som gör projektion på linjen $y = 2x$.

(a) Bestäm standardmatrisen A till S.

(b) Bestäm nollrum och bildrum till S

(c) Bestäm matrisen för S i basen $\mathcal{F} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \}$

(d) Bestäm en matris P och en diagonal matris P så att $D = P^{-1}AP$.

Uppgift 17. Betrakta den linjära avbildning T från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^3$ som gör projektion på linjen med riktningsvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm standardmatrisen A till T.

(b) Bestäm nollrum och bildrum till T

(c) Bestäm matrisen för T i basen $\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$

Uppgift 18. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x, y) = x^2 + 6xy + 4y^2$.

(a) Bestäm den symmetriska matris som är associerad till Q.

(b) Är Q positivt definit, negativt definit, indefinit eller inget av detta?

Uppgift 19. Betrakta den kvadratiska formen $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz$.

(a) Bestäm den symmetriska matris som är associerad till Q.

(b) Är Q positivt definit, negativt definit, indefinit eller inget av detta?

3. LITE LÄNGRE UPPGIFTER

Följande uppgifter förses inte med svar. Diskutera gärna lösningar med övningsassistenterna!

Uppgift 3.1. Låt $u = [1,\ -1,\ 0]^T$, $v = [-1,\ 2,\ 1]^T$, $w = [0,\ 1,\ -2]^T$.

(a) Visa att $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{e}_1 = [1,\ 0,\ 0]^T$ med avseende på basen $\mathcal{B}$.

(c) Bestäm övergångsmatrisen från basen $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ till standardbasen.

(d) Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning som uppfyller $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bestäm matrisen till T i standardbasen.

Uppgift 3.2. (a) Vad menas med begreppet egenvektor?

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm egenvärden och baser för tillhörande egenrum till matrisen A.

(c) Är matrisen A diagonaliserbar? Om A är diagonaliserbar, bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$. Om A inte är diagonaliserbar, bevisa att den inte är det.

(d) Låt $\vec{v} = [-1\ 1\ 1]^T$. Beräkna $A^{151}\vec{v}$.
OBS: Om man får potenser av naturliga tal i svaret, får man ange svaret i potensform.

Uppgift 3.3. Den kvadratiska formen Q pa $\mathbb{R}^2$ ges av

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

(a) Ange den symmetriska matrisen A som uppfyller $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$.

(b) Bestäm en ortogonalmatris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

(c) Avgör om Q är positivt definit, negativt definit, positivt semidefinit, negativt semidefinit eller indefinit.

4. FÖRSLAG PÅ ARBETSUPPGIFTER TILL SEMINARIUM 6

Dessa uppgifter kan användas som arbetsmaterial/diskussionsuppgifter vid seminariet.

Uppgift 4.1. Låt $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ vara övergångsmatrisen från basen $\mathcal{V}$ till basen $\mathcal{W}$ av ett delrum U av $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm övergångsmatrisen från basen $\mathcal{W}$ till basen $\mathcal{V}$.

(b) Låt $f : U \to U$ vara en linjär avbildning som uppfyller $[f]_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm $[f]_{\mathcal{V}}$.

Uppgift 4.2. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

där a är en reell parameter.

(a) Bestäm egenvärdena till A och egenrum till varje egenvärde.

(b) För vilka val av a är A diagonaliserbar?

(c) Bestäm för $a = 0$ en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

Uppgift 4.3. Betrakta följande avbildning:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (0, x).$$

(a) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenrum till F.

(b) Avgör om matrisen till F är diagonaliserbar.

Uppgift 4.4. Låt V vara det tvådimensionella delrum av $\mathbb{R}^4$ som utgör lösningsmängden till det homogena linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Den ortogonala projektionen $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow V$ är en linjär avbildning och kan beskrivas med hjälp av en matris om vi väljer en bas för definitionsmängden $\mathbb{R}^4$ och en bas för värdemängden V. Vissa baser leder till enklare uttryck för denna avbildning.

(a) Bestäm en ortogonal bas B för V.

(b) Lägg till vektorer till B för att få en bas B' för $\mathbb{R}^4$. Hur ska man göra det för att få ett enklare uttryck för avbildningen T?

(c) Bestäm matrisen för avbildningen T med avseende på basen B' för $\mathbb{R}^4$ och basen B för V.

Uppgift 4.5. Vilka av följande mänger är vektorrum? Bestäm en bas och dimensionen till dem som är vektorrum.

(a) Alla vektorer $[x,\ y,\ z,\ w]^T$ sådana att $x + y + z - w = 1$;

(b) Alla polynomfunktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ av grad ≥ 5 (dvs, funktioner $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$);

(c) Alla inverterbara 3×3 matriser;

(d) Alla 3×3 matriser som uppfyller $A^T = -A$.

(Här, som ovan, A^T betecknar transponat av A).

5. Facit och lösningstips

Titta inte i facit förrän du har löst uppgifterna så bra du kan!

1. Nej
(Ta matrisen gånger vektorn. Är resultatet lika med något tal gånger vektorn?)

2. Ja. Egenvärdet är 2. (Se ledningen ovan)

3. (a) Egenvärde 0 med egenvektorer $t\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$, $t \neq 0$. Egenvärde 3 med egenvektorer $t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $t \neq 0$

(b) Ja, egenrummet är span$\{\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\}$

(c) Ja, t ex $D = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$ och $P = \begin{bmatrix}-2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ (omvända ordningen på kolonnerna också möjlig)

(Obs att egenvektorer inte får vara $\vec{0}$ men när man bildar egenrummet så ska nollvektorn ändå vara med!)

(Se exempel 2 i kapitel 4.4!)

4. (a) Enda egenvärdet är 1 med egenvektorer $t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

(b) Nej
(c) Nej

5. (a) Egenvärde -3 med egenrum $t\begin{bmatrix}3/4\\1\end{bmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Egenvärde 2 med egenrum $t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. En bas för $\mathbf{R}^2$ som uteslutande består av egenvektorer till A är $\{\begin{bmatrix}3/4\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\}$. Och med $P = \begin{bmatrix}3/4 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix}-3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ så är $D = P^{-1}AP$

6. Egenvärde 2 med egenrum $t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Egenvärde 4 med egenrum $t\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Egenvärde -3 med egenrum $t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$.

7. Egenvärde 3 med egenrum span $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. Egenvärde 0 med egenrum span$\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\}$.

En bas för $\mathbf{R}^3$ som består av egenvektorer till A är $\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\}$. Svar på sista frågan, t ex: $D = \begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\}$ och $P = \begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\}$ (andra men liknande svar är möjliga)

8. $\begin{bmatrix}3&0\\0&0\end{bmatrix}$.

9. $D = \begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}$

10. t ex $D = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ och $P = \begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-3&-1\\1&1&2\end{bmatrix}$

11. $a > 0$

12. $k = 2$ är rätt svar på båda frågorna.

13. Egenvärdet 3 har algebraisk och geometrisk multiplicitet ett, egenvärdet 0 har algebraisk och geometrisk multiplicitet två.

14. Visa att de har samma karaktäristiska ekvation. Se bokens sats 8.2.3 på sid 457.

15. Ja. En similär diagonal matris är t ex $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-5\end{bmatrix}$. Det finns fler alternativ, beroende på i vilken ordning man sätter basvektorerna. Alla möjliga diagonaliseringar av A har dock egenvärdena på diagonalen och alla andra element 0.

16. (a) $\begin{bmatrix}1/5&2/5\\2/5&4/5\end{bmatrix}$

(b) Nollrum: span$\{\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\}$. Bildrum: span$\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\}$

(c) $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

17. (a) $\begin{bmatrix} 1/9 & 2/9 & -2/9 \\ 2/9 & 4/9 & -4/9 \\ -2/9 & -4/9 & 4/9 \end{bmatrix}$

(b) Nollrum: planet med ekvation $x + 2y - 2z = 0$. Bildrum: span$\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

18. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(b) Indefinit

19. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Indefinit