11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar om det finns matriser D och P så att

$$A = PDP^{-1}$$

Detta kräver att det finns 2 linjärt oberoende egenvektorer.

tar fram egenvärden

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - a = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - a = 0$$

Andragradsekvation, löser med pq-formeln

$$\lambda = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (1-a)} = -1 \pm \sqrt{1 - 1 + a} = -1 \pm \sqrt{a}$$

lösbar om $a \geq 0$

Vi ser att det finns 2 lösningar till den karaktäristiska ekvationen om $a > 0$ (om $a = 0$ finns bara en lösning)

Då har vi 2 egenvärden med algebraisk multiplicitet 1 och de egenvektorer som svarar mot dessa egenvärden kommer vara linjärt oberoende (se föreläsning 10). Alltså kommer A vara diagonaliserbar om $a > 0$.