Institutionen för Matematik

SF1624
Algebra och geometri
Läsåret 2022-23

Modul 2

1. Övningsuppgifter ur boken

Ch 2.2: 23, 43;
Ch 3.1: 1, 11, 15, 19, 23;
Ch 3.2: 9, 21;
Ch. 3.3: 9, 15, 23.

2. Uppgifter att börja med

Uppgift 1. Skriv upp ett ekvationssystem vars lösningar är skärningspunkterna mellan planen med ekvationer $x+y+z=1$ och $x+2y+2z=0$. Kan du lösa ekvationssystemet och hitta skärningspunkterna?

Uppgift 2. Avgör om planen med ekvationer $x+y+z=1$ och $x+2y+2z=0$ och $4x+7y+7z=2$ har några gemensamma punkter.

Uppgift 3. Låt linjen L_1 ha parameterframställningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

och låt linjen L_2 ha parameterframställningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Avgör om linjerna L_1 och L_2 skär varandra.

Uppgift 4. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+2z=0 \\ 2y-z=5 \end{cases}$$

Skriv ekvationssystemet på formen $A\vec{x} = \vec{b}$, där A är en matris och $\vec{x}$ och $\vec{b}$ är vektorer.

Uppgift 5. Ge ett exempel på ett homogent linjärt ekvationssystem som är inkonsistent eller förklara varför ett sådant inte kan finnas.

Uppgift 6. Skriv vektorekvationen

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(a) på formen $A\vec{u} = \vec{v}$ där A är en matris och $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är vektorer.

(b) som ett linjärt ekvationssystem i a, b och c likt formuleringen i uppgift 7 nedan.

Lös sedan ekvationssystemet och bestäm a, b och c.

Uppgift 7. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 12 \\ -x + y + z = 7 \end{cases}$$

Uppgift 8. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 12 \\ -x - y + z = 6 \end{cases}$$

Uppgift 9. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x - y + z = 6 \\ 2x + 2y + 4z = 6 \\ -x - y - z = 6 \end{cases}$$

Uppgift 10. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ -4x - 6y - 4z = -5 \end{cases}$$

Uppgift 11. Bestäm alla eventuella skärningspunkter mellan planet $x + 2y - z = 1$ och linjen med parameterframställning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Uppgift 12. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ -4x_1 - 6x_2 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Uppgift 13. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Bestäm en till A radekvivalent reducerad trappstegsmatris. Kan det finnas flera? Vad är rangen av A?

Uppgift 14. Beräkna matrisprodukten $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Uppgift 15. Lös för varje värde på konstanten a ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 3y + 4w = 1 \\ -x - 2y + z - 3w = a. \end{cases}$$

Uppgift 16. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Bestäm en matris X sådan att $AX = B$. Kan man göra på mer än ett sätt?

Uppgift 17. Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ange ett villkor som garanterar att A är inverterbar och ange A^{-1} om detta villkor är uppfyllt.

Uppgift 18. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestäm A:s rang.

(b) Är A inverterbar? Bestäm inversen i så fall!

(c) Hur många lösningar har ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$?

(d) Använd svaret på fråga (b) för att lösa ekvationssystemet $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och förklara varför $A\vec{x} = \vec{b}$ har unik lösning för varje högerled $\vec{b}$.

Uppgift 19. Skriv vektorekvationen

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

på formen av ett linjärt ekvationssystem och avgör om det har icke-trivial lösning.

Uppgift 20. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x - y + z + w = 0 \\ 2x + 2y + 4z + 2w = 0 \\ -x - y - z + w = 0. \end{cases}$$

Svara, utan att lösa ekvationssystemet, på frågan: Har systemet ingen lösning, exakt en lösning, eller oändligt många lösningar?

Uppgift 21. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$$

skall ha någon lösning?

Uppgift 22. Bestäm alla 2×2-matriser A sådana att $AA^T = A^T A$.

3. Lite längre uppgifter

Följande uppgifter förses inte med svar. Diskutera gärna lösningar med övningsassistenterna!

Uppgift 3.1. (a) Bestäm värdet av konstanten b sådan att linjerna $L_1 : (x, y, z) = t(2, -1, 1) + (1, 2, -3)$, $t \in \mathbb{R}$, och $L_2 : (x, y, z) = t(-1, 1, 2) + (2b, 3, 2)$, $t \in \mathbb{R}$, skär varandra. För detta värdet av b, bestäm skärningspunkten.

(b) Bestäm talet a så att de tre planen saknar gemensamma punkter (dvs, det finns ingen punkt som samtidigt ligger i alla tre planen):

$$P_1 : x - 2z = -1, \quad P_2 : -ax + 6y + 12z = 1, \quad P_3 : 2ax + 3y + az = 13.$$

Uppgift 3.2. (a) Bestäm inversmatrisen till

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Bestäm reducerad trapstegsform för A. Hur många lösningar har ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$? Förklara!

(c) Använd resultatet i (a) för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 2, \\ -x + 2y - 2z = 3. \end{cases}$$

Uppgift 3.3. Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} ay + z = 0, \\ ax + y = 1, \\ 2x + y - z = b, \end{cases}$$

där a och b är konstanter.

(a) För vilka värden på a och b har systemet en unik lösning? Bestäm dessa lösningar (uttrycket kan bero på a och b). OBS: uträkningar kan bli lite jobbiga. I nästa modul kommer vi att lära oss använda *determinant* för att få en enklare lösning till denna typ av problem.

(b) För vilka värden på a och b har systemet oändligt många lösningar? Bestäm lösningsmängden i dessa fall.

4. Förslag på arbetsuppgifter till Seminarium 2

Dessa uppgifter kan användas som arbetsmaterial/diskussionsuppgifter vid seminariet.

Uppgift 4.1. För varje tal a har vi ekvationssystemet i tre okända x, y och z som ges av

$$(\star)\qquad \begin{cases} (a-3)y &= 1, \\ 2x - ax + ay - 3y + 2z - az &= 1, \\ (4-2a)x + (2a-6)y + 5z - 2az &= 3. \end{cases}$$

Visa att ekvationssystemet $(\star)$ har en unik lösning om och endast om $a \neq 2$ och $a \neq 3$. Lös sedan ekvationssystemet $(\star)$ då $a = 2$ med hjälp av radoperationer på totalmatrisen för systemet.

Uppgift 4.2. Betrakta ekvationssystemet

$$(*)\qquad \begin{cases} 17x - 13y + 2z - 7w = 5, \\ 13x + 6y - z + 11w = 3. \end{cases}$$

(a) Bestäm en lösning av systemet för vilken $x = 0$ och $w = 1$.
(b) Förklara varför systemet (*) har oändligt många lösningar.
(c) Finns det en lösning av systemet för vilken $y = -2x$ och $w = -3x$?

Uppgift 4.3. (*från Anton-Busby, Ex. 3.1.D6*)
Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(a) En matris Q kallas för *kvadratrot* till en matris M om $QQ = M$. Bestäm två kvadratrötter till A.
(b) Hur många olika kvadratrötter till B kan du hitta?
(c) Tycker du att varje matris har en kvadratrot? Motivera.

5. Facit och lösningstips

Titta inte i facit förrän du har löst uppgifterna så bra du kan!

1.
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$$
Lösningarna är linjen med parameterframställning
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Nej.

3. Nej.

4.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5. Ett sådant kan inte finnas, ty ett homogent linjärt system har alltid den s.k. triviala lösningen, då alla variabler är noll.

6. (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{cases} a+3c=0 \\ 2b-2c=0 \\ 2a-2b+3c=0 \end{cases}$$
Lösningen är $a=b=c=0$

7. Exakt en lösning: $x=-3$, $y=-2$, $z=6$

8. Exakt en lösning: $x=1$, $y=-3$, $z=4$

9. Inkonsistent system, dvs lösning saknas.

10. Oändligt många lösningar: $x = -3t/2$, $y = t$, $z = 5/4$, där t är ett godtyckligt reellt tal. Detta kan också skrivas: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

11. En enda skärningspunkt: $(5/3, 2/3, 2)$

12. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Den är unik. Rangen är 3.

14. $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 14 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

15. För $a \neq -1$ saknar systemet lösning. Då $a = -1$ har systemet lösningarna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

16. $X = \begin{pmatrix} -1 & 11/3 \\ 1 & -4/3 \\ 2 & -13/3 \end{pmatrix}$

17. $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ om villkoret att $ad - bc \neq 0$ är uppfyllt.

18. (a) 3.

(b) Ja, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

(c) Exakt en lösning, nämligen den triviala $\vec{x} = \vec{0}$.

(d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lösningen kan direkt skrivas upp som $A^{-1}\vec{b}$ vilket är entydigt bestämt för varje $\vec{b}$.

19.

$$\begin{cases} c_1 + c_3 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 - 2c_3 = 0 \\ 2c_2 = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 + c_4 = 0 \end{cases}$$

Nej, enda lösningen är den triviala $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

20. Oändligt många. Systemet är homogent vilket gör att det automatiskt är konsistent. Det har alltså minst en lösning. Eftersom det har fler obekanta än ekvationer så måste det ha oändligt många lösningar.

21. $a = 3$.

22. Alla matriser på formen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$