Institutionen för Matematik

SF1624
Algebra och geometri
Läsåret 2022-23

Modul 1

1. Uppgifter att börja med

Uppgift 1. Bestäm en enhetsvektor som är parallell med vektorn $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Finns det mer än en?

Uppgift 2. Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(a) Beräkna $\vec{u} + \vec{v}$. Rita även figur.
(b) Beräkna $\vec{u} - \vec{v}$. Rita även figur.
(c) Beräkna $-2\vec{u}$. Rita även figur.

Uppgift 3. Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Beräkna $\vec{u} \cdot \vec{u}$ och förklara vad detta tal har att göra med $\|\vec{u}\|$.

Uppgift 4. Punkterna A och B delar sträckan mellan punkterna $(1, 4, 2)$ och $(4, 1, 5)$ i tre lika delar. Bestäm A och B.

Uppgift 5. Bestäm de båda enhetsvektorer som är ortogonala mot vektorerna $(2, -6, -3)$ och $(4, 3, -1)$.

Uppgift 6. Visa att vektorerna $u+v$ och $u-v$ är ortogonala om och endast om vektorerna u och v har samma längd.

Uppgift 7. Låt L vara linjen genom punkterna $(1, 0, -1)$ och $(2, 3, -5)$.

(a) Bestäm en parameterframställning av L.
(b) Bestäm en parameterframställning av linjen genom origo som är parallell med L.

Uppgift 8. Bestäm en parameterform för den linje genom origo i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonal mot planet med ekvation $x + 2y + 3z = 5$.

Uppgift 9. Bestäm en parameterform för planet genom punkterna $(1, 2, 0)$, $(2, 1, 1)$ och $(0, -1, 5)$.

Uppgift 10. Bestäm en parameterform för planet som innehåller både punkten $(1, 1, 0)$ och linjen med parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Uppgift 11. Bestäm en parameterform för en linje som ligger i planet $x + y + z = 1$.

Uppgift 12. Bestäm en parameterform för en linje som inte skär planet $x + y + z = 1$.

Uppgift 13. Låt linjen L_1 ha parameterframställningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

och låt linjen L_2 ha parameterframställningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Avgör om linjerna L_1 och L_2 skär varandra.

Uppgift 14. Bestäm alla eventuella skärningspunkter mellan planet $x + 2y - z = 1$ och linjen med parameterframställning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Uppgift 15. Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. Bestäm talet a så att vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ blir rät.

Uppgift 16. Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestäm vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Uppgift 17. Bestäm en vektor vars vinklar med positiva x-, y- och z-axlarna är $\pi/3$, $3\pi/4$ resp $2\pi/3$ och vars längd är 2.

Uppgift 18. Betrakta planet med ekvation $z = 19 - 2x - 3y$.

(a) Avgör om punkten $(2, 1, 12)$ ligger i planet.

(b) Bestäm en normalvektor till planet.

(c) Bestäm avståndet till planet från punkten $(2, 3, 13)$.

Uppgift 19. Bestäm en ekvation för ett plan som skär planet $x + 2y + 2z = 0$ under rät vinkel.

Uppgift 20. Skriv upp ett ekvationssystem vars lösningar är skärningspunkterna mellan planen med ekvationer $x+y+z = 1$ och $x+2y+2z = 0$. Kan du lösa ekvationssystemet och hitta skärningspunkterna?

Uppgifter 21–25 är överkurs just nu, men man måste behärska dem om ett par veckor:

Uppgift 21. Låt $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Bestäm projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{w}$.

Uppgift 22. Låt $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm projektionen av $\vec{v}$ på linjen genom origo med riktningsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Uppgift 23. Skriv vektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ som en summa av två vektorer, den ena parallell med vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och den andra ortogonal mot samma vektor.)

Uppgift 24. Skriv vektorn $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ som en summa av två vektorer, den ena parallell med vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ och den andra ortogonal mot samma vektor.

Uppgift 25. Bestäm avståndet från punkten $(1, 5)$ till linjen med ekvation $y = 3x$.

Uppgift 26. Bestäm avståndet från punkten $(5, 4, 2)$ till planet med ekvation $x + 2y - 2z = 6$.

2. LITE LÄNGRE UPPGIFTER

Följande uppgifter förses inte med svar. Diskutera gärna lösningar med övningsassistenterna!

Uppgift 2.1. Punkterna $A = (1, 1, -1)$, $B = (0, 3, 0)$ och $C = (2, -4, 2)$ bestämmer en triangel som har en trubbig vinkel θ.

(a) Vid vilket av hörnen i triangeln (A, B eller C) ligger vinkeln θ?

(b) Är θ mindre än $3\pi/4$, lika med $3\pi/4$, eller större än $3\pi/4$?

Uppgift 2.2. Tre punkter i rymden är givna:

$$A = (0, 0, 1), \quad B = (-1, 1, 3), \quad D = (2, 1, -1).$$

(a) Bestäm koordinaterna för punkten C sådan att $ABCD$ är en parallellogram.

(b) Beräkna längderna av parallelogramets sidor.

(c) Beräkna cosinus av vinkeln mellan vektorerna $\vec{AB}$ och $\vec{AD}$.

Uppgift 2.3. Betrakta punkterna $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, 0, 1)$ och $C = (3, 4, -1)$, samt planet P som ges av ekvationen

$$2x - y + 2z = 3.$$

(a) Bestäm en parameterform till linjen L som går genom A och B.

(b) Går linjen L genom punkten C?

(c) Avgör om P och L skär varandra. Bestäm koordinater för skärningen i så fall.

3. Förslag på arbetsuppgifter till Seminarium 1

Dessa uppgifter kan användas som arbetsmaterial/diskussionsuppgifter vid seminariet.

Uppgift 3.1. Till varje tal t betrakta triangeln T med hörn $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, -2)$, $C = (t, t, 1)$.

(a) För vilket värde på t har T en rät vinkel vid A?
(b) För detta värde på t bestäm längder av sidorna AC och BC.
(c) För samma värde på t beräkna cosinus av vinkeln vid C. Avgör om denna vinkel är större, lika med eller mindre än $\pi/4$.

Uppgift 3.2. (a) Bestäm en ekvation för det plan som består av alla punkter med lika långt avstånd till punkten $A = (1, 2, 3)$ som till punkten $B = (3, -2, -1)$. (Ledning: Mittpunkten på sträckan mellan A och B ligger i planet.)

(b) Bestäm konstanten c så att punkten $P = (3, -2, c)$ ligger i detta plan.

Uppgift 3.3. (a) Bestäm en ekvation på parameterform för skärningslinjen L mellan planen $x + 2y - z = 0$ och $2x + y + z = 0$.

(b) Bestäm avståndet mellan punkten $P = (2, 4, 4)$ och linjen L;

För diskussion

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- Vad är den förväntade skärningen av två plan i $\mathbb{R}^3$, i $\mathbb{R}^4$ och i $\mathbb{R}^5$?
- Vad kan menas med vinkeln mellan en linje och ett plan eller mellan två plan i $\mathbb{R}^3$? Hur kan man beräkna denna vinkel?

4. FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

Titta inte i facit förrän du har löst uppgifterna så bra du kan!

1. Det finns två: $\begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$.

2. (a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

2. (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. (c) $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

3. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 14$ vilket är detsamma som $\|\vec{u}\|^2$.

4. $(2, 3, 3)$ och $(3, 2, 4)$.

5. $\pm\frac{1}{7}(3, -2, 6)$.

6. –

7. (a) Till exempel (det finns många möjliga rätta svar)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Till exempel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Du kan kolla ditt svar på (a) genom att se om det finns t-värden som ger de två punkterna i uppgiften. Ditt svar på (b) bör ha samma riktningsvektor som (a) och samtidigt ge punkten $(0, 0, 0)$ för något t-värde)

8. Till exempel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(Planets normalvektor bör bli riktningsvektor för din linje!)

9. Till exempel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

10. Till exempel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

(Obs att linjen går genom origo, så då måste planet också göra det)

11. Till exempel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Ett sätt att lösa uppgiften är först hitta två punkter som ligger i planet och sedan skriva upp en parameterframställning av linjen genom dessa punkter. Jag tog punkterna $(1, 0, 0)$ och $(0, 1, 0)$ men det finns ju fler.....)

12. Till exempel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

13. Nej. (En eventuell skärningspunkt (x, y, z) måste uppfylla båda parameterframställningarna för något värde på s och något värde på t. Speciellt måste $x = -t$ och samtidigt $x = 1 - s$, och $y = 0$ och samtidigt $y = 2 + 2s$, och $z = 2t$ och samtidigt $z = 2$. Dessa villkor går inte att lösa för s och t.)

14. En enda skärningspunkt: $(5/3, 2/3, 2)$. (Eventuella skärningspunkter (x, y, z) måste uppfylla både planets ekvation och linjens parameterframställning. Man kan alltså ta uttrycken för x, y och z på linjen och stoppa in dem i planets ekvation och se om det går att bestämma t så att det funkar.)

15. $a = -1/2$ (Skalärprodukten ska bli 0)

16. 60 grader. (Använd att $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$. Vilken vinkel är det som har cosinusvärdet $1/2$?)

17. $(1, -\sqrt{2}, -1)$.

18. (a) Ja.

(b) T ex $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\sqrt{7/2}$

19. Till exempel $2x - y = 0$

20.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Lösningarna är linjen med parameterframställning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

21. $\begin{pmatrix} -7/13 \\ 35/13 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 4/9 \\ 2/9 \\ -4/9 \end{pmatrix}$.

23.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

24.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

25. $\sqrt{2/5}$

26. 1