3, a) Vi börjar med att räkna ut A:s egenvärden genom att lösa den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3) = 0$$

Som har lösningarna $\lambda = 0$ och $\lambda = 3$

Nu tar vi fram egenvektorerna mha dessa egenvärden, genom att lösa egenvektorekvationen

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{egenvektor}}}{(A - \lambda E)\bar{v}} = \bar{0}$$

$\lambda = 0$

$$(A - 0 \cdot E)\bar{v} = A\bar{v} = \bar{0}$$

Vi vill alltså lösa systemet $A\bar{v} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Parametriserar

$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$ så lösningar är $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

en egenvektor är alltså $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3$ $(A - 3 \cdot E)\underset{\substack{\uparrow \\ \text{egenvektor}}}{\bar{v}} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-3\lambda & 2 \\ 1 & 2-3\lambda \end{bmatrix} \bar{v} = \bar{0}$

Vill alltså lösa systemet $\left[\begin{array}{cc|c} 1-3 & 2 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \end{array}\right]$
gaussar

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-3 & 2 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} r_1 \cdot (-\frac{1}{2}) \\ r_2 + r_1 \cdot (\frac{1}{2}) \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

parametriserar lösningen $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$

alltså egenvektorer till A med egenvärde 3
är

$t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$

b) Ja, vi såg att 0 är ett egenvärde till A.

Egenrummet är det vektorrum som spanns upp av de linjärt oberoende egenvektorer som har detta egenvärde. Alltså

E_0 (Egenrummet för egenvärdet 0) är

$t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$ eller på ett annat skrivsätt:

$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Scanned with CamScanner

c) Det finns en diagonalmatris D och inverterbar matris P om våra 2 vektorer är linjärt oberoende. Testar

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 + 2r_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 \cdot \frac{1}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bara ledande ettor

Vi ser att de är linjärt oberoende så D och P existerar.

Diagonalmatrisen D är helt enkelt en matris med egenvärdena på diagonalen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Den inverterbara matrisen P är en matris med egenvektorerna som kolonner (de ska stå i samma ordning som egenvärdena i D)

Alltså $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Notera att formeln $A = P^{-1} D P$ ger ett basbyte från D till A.