Institutionen för Matematik

SF1624
Algebra och geometri
Läsåret 2022-23

Modul 3

1. Övningsuppgifter ur boken:

Ch. 3.4: 9, 13, 19, 25
Ch. 3.5: 1, 9, 15
Ch. 4.1: 1, 9, 13, 27
Ch. 4.2: 11, 27
Ch. 4.3: 19, 27, 33, 35, 37

2. Fler uppgifter att arbeta med

Uppgift 1. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Är $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ linjärt oberoende?

(b) Går det att skriva någon av vektorerna som en linjärkombination av de övriga? Gör det i så fall.

(c) Är $S = \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ ett delrum till $\mathbf{R}^3$?

Uppgift 2. Låt $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(a) Är $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ linjärt oberoende?

(b) Går det att skriva någon av vektorerna som en linjärkombination av de övriga? Gör det i så fall.

(c) Är $T = \text{span}\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ ett delrum till $\mathbf{R}^4$?

Uppgift 3. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+2z=0 \\ 2y-z=5. \end{cases}$$

Är lösningsmängden S ett delrum till $\mathbf{R}^3$?

Uppgift 4. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+2y+2z-w=0 \\ 2y-z+w=0. \end{cases}$$

Är lösningsmängden S ett delrum till $\mathbf{R}^4$? Går det att bestämma ett antal vektorer, säg $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$, så att $S = \text{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$? Gör det i så fall!

Uppgift 5. Ge exempel på en mängd av vektorer i $\mathbf{R}^2$ som inte utgör ett delrum av $\mathbf{R}^2$.

Uppgift 6. Avgör om $W = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \|\vec{x}\| = 1\}$ är ett delrum till $\mathbf{R}^3$.

Uppgift 7. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z+2w=0 \\ 2x+4y+4z+2w=0 \\ -x+y+z-4w=0 \end{cases}$$

och skriv lösningsmängden som span av ett antal vektorer. Vilken dimension har lösningsrummet?

Uppgift 8. Vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbf{R}^3$ är alla parallella med det plan som har ekvation $x+y+z=0$. Är vektorerna linjärt oberoende?

Uppgift 9. Vektorerna $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ i $\mathbf{R}^3$ är linjärt beroende. Är det sant att minst två av dem då måste vara parallella?

Uppgift 10. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna $\det A$.

(b) Avgör (utan att försöka beräkna inversen) om A är inverterbar.

(c) Avgör (utan att Gaussa) om ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har unik lösning för varje högerled $\vec{b}$

(d) Beräkna $\det(A^3)$.

Uppgift 11. Låt $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna $\det B$.

(b) Avgör (utan att försöka beräkna inversen) om B är inverterbar.

(c) Avgör (utan att Gaussa) om ekvationssystemet $B\vec{x} = \vec{0}$ har icke-trivial lösning.

(d) Beräkna $\det B^T$

Uppgift 12. Låt $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Beräkna $\det C$.

(b) Avgör (utan att försöka beräkna inversen) om C är inverterbar.

(c) Avgör (utan att Gaussa) om ekvationssystemet $C\vec{x} = \vec{0}$ har icke-trivial lösning.

(d) Om C är inverterbar, vad är $\det C^{-1}$?

Uppgift 13. Bestäm standardekvationen för det plan i $\mathbf{R}^3$ som innehåller punkterna $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 1)$ och $(-1, 3, 5)$.

Uppgift 14. Beräkna volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, och $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Uppgift 15. Bestäm konstanten a så att lösningsrummet till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 3y + 4w = 0 \\ -x - 2y + z + aw = 0 \end{cases}$$

blir 2-dimensionellt och ange en bas för lösningsrummet i detta fall.

Uppgift 16. Skriv vektorn $\vec{u} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ som en summa av två vektorer, där den ena är ortogonal mot planet $x + 2y - 2z = 0$ och den andra är parallell med samma plan.

Uppgift 17. Bestäm standardekvationen för det plan genom origo som innehåller linjerna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}$$

och

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

Uppgift 18. Kan man använda kryssprodukten i $\mathbf{R}^3$ för att beräkna arean av den parallellogram i $\mathbf{R}^2$ som har hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$ och $(3, 7)$?

Uppgift 19. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Beräkna $\det(B^{-1}AB)$.

3. Lite längre uppgifter

Följande uppgifter förses inte med svar. Diskutera gärna lösningar med övningsassistenterna!

Uppgift 3.1. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Är kolumnvektorerna av matrisen A linjärt oberoende? Förklara.
(b) Låt $\vec{b} = [1,\ 4,\ 1]^T$ (T står för transponat). Avgör om $\vec{b}$ tillhör kolumnrummet av A (engl: column space) som betecknas $\mathrm{Col(A)}$.
(c) Avgör om radvektorerna av A är linjärt oberoende. Förklara! Bestäm lösningsmängden till ekvationssystemet $A^T\vec{x} = \vec{0}$.

Uppgift 3.2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Hitta värden på a sådana att $\det A = 0$.

(b) Använd $\det A$ för att svara på följande två frågor:
(i) För vilka a har motsvarande system $A\vec{x} = \vec{b}$ en unik lösning för varje $\vec{b}$?
(ii) Finns det värden på a sådana att det homogena systemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har icke-triviala lösningar? Förklara!

Uppgift 3.3. Fyra punkter i rymden är givna:

$$A = (0, 1, 2), \quad B = (1, 1, 4), \quad C = (1, 0, 1), \quad D = (-2, 1, -2).$$

(a) Bestäm arean av triangel ABC.
(b) Skriv en skalärekvation till planet som inehåller triangel ABC. Avgör om punkten D ligger detta plan.
(c) Bestäm volymen av den parallellepiped som spänns upp av $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ och $\vec{OC}$ (där O är origo).

4. Förslag på arbetsuppgifter till Seminarium 3

Dessa uppgifter kan användas som arbetsmaterial/diskussionsuppgifter vid seminariet.

Uppgift 4.1. Låt A vara en $m \times n$-matris (d.v.s. m ekvationer i n variabler) och låt $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ vara en vektor. Betrakta ett linjärt ekvationssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ samt motsvarande homogena systemet $A\vec{x} = \vec{0}$. Motivera varför var och ett av följande påståenden är sant eller falskt:

- Om $A\vec{x} = \vec{0}$ har en nollskild lösning, så har $A\vec{x} = \vec{b}$ också en lösning;
- Om $A\vec{x} = \vec{b}$ har en lösning, så har $A\vec{x} = \vec{0}$ en nollskild lösning.
- Om $m < n$ så kan $A\vec{x} = \vec{b}$ inte ha en unik lösning.
- Om $m > n$ så kan $A\vec{x} = \vec{b}$ inte ha en unik lösning.
- Om $A\vec{x} = \vec{b}$ har en unik lösning så är $\vec{x} = \vec{0}$ den enda lösningen till $A\vec{x} = \vec{0}$.

Ett enkelt motexempel är den bästa motiveringen till varför ett påstående är fel!

Uppgift 4.2. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

är ett specialfall av en typ av matriser som ofta förekommer i olika tillämpningar, exempelvis i samband med diskretisering av differentialekvationer för numerisk lösning. Använd rad- eller kolumnoperationer för att beräkna determinanten av matrisen A.

Uppgift 4.3. De fyra vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^4$ är linjärt beroende. Skriv en av dem som en linjärkombination av de andra.

5. Facit och lösningstips

Titta inte i facit förrän du har löst uppgifterna så bra du kan!

1. (a) Ja . (b) Nej. (c) Ja

2. (a) Nej. (b) Ja, $\vec{w} = 2\vec{u} - 4\vec{v} + \vec{z}$. (c) Ja

3. Nej.

4. Ja. $S = \text{span}\{\begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}\}$

5. Finns många möjligheter här... Ta, t.ex., ett ändligt antal vektorer, vilka som helst (som inte alla är $\vec{0}$).

6. Nej. Nollvektorn tillhör ju inte W.

7. Lösningsrummet är $\text{span}\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ (där de två vektorerna är linjärt oberoende), så dimensionen är 2.

8. Nej

9. Nej

10. (a) 2 (b) Ja (c) Ja (d) 8

11. (a) 5 (b) Ja (c) Nej (d) 5

12. (a) 6 (b) Ja (c) Nej (d) $1/6$

13.$4x - 4y + 5z = 9$

14. 4

15. $a = -3$. Lösningen är då $\text{span}\{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ och de två vektorer som står inom klamrarna utgör en bas för lösningsrummet.

16. $\begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 26/3 \\ -5/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$

17. $3x + y - 2z = 0$.

18. Ja. Arean är $\| \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \|$

19. 2 (obs att man varken behöver räkna ut $\det B$ eller $\det B^{-1}$ för att komma fram till svaret)