SF1624 - Algebra och geometri

detaljerade lösningar till rekommenderade uppgifter

work in progress, hämta senaste versionen på

`https://github.com/simon-rosen/linalg-2022/blob/main/linalg_2022.pdf`

28 november 2022

Innehåll

1 modul 1

1.1 Teori

Vektorerna och punkterna i dessa exempel är tre dimensioner (R^3). Men formlerna fungerar på liknande sätt för en godtycklig dimension (R^n).

Formel 1 *(vektoraddition)*
Två vektorer $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adderas såhär:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Kom ihåg att $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$

Formel 2 *(vektormultiplikation med ett tal)*
Ett tal t och en vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ multipliceras såhär:

$$t \cdot \vec{u} = (t \cdot u_1, t \cdot u_2, t \cdot u_3)$$

Formel 3 *Längden $|\vec{v}|$ av en vektor $\vec{v} = (x, y, z)$ fås genom:*

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Formel 4 *En enhetsvektor $\vec{e}_{\vec{v}}$ i samma riktning som en vektor $\vec{v}$ fås genom:*

$$\vec{e}_{\vec{v}} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

Man skalar alltså om vektorn så att den får längd ett.

Formel 5 *En vektor som går från punkten $P = (p_1, p_2, p_3)$ till punkten $Q = (q_1, q_2, q_3)$ fås genom*

$$\vec{OQ} - \vec{OP} = (q_1, q_2, q_3) - (p_1, p_2, p_3)$$

Notera att $\vec{OP}$ och $\vec{OQ}$ är punkternas ortsvektorer (vektorer från origo till punkten), för tekniskt sätt kan man inte addera / subtrahera två punkter.

Formel 6 *(skalärprodukt) Skalärprodukten av två vektorer $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

En annan formel som kan användas är:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|cos(\alpha)$$

Där α är vinkeln mellan vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Denna formel är särskilt användbar om man vill räkna ut vinkeln mellan två vektorer.

Skalärprodukten av två vektorer <u>är ett tal</u>.

Formel 7 *En linje kan beskrivas med en parameterframställning om man har en punkt* $P = (p_1, p_2, p_3)$ *och en vektor* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *som pekar i linjens riktning (som man skalar om med ett tal* $t \in R$ *för att kunna komma till alla punkter på linjen)*

$$(x, y, z) = P + t \cdot \vec{v} = (p_1, p_2, p_3) + t \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Formel 8 *Ett plan kan beskrivas med en parameterframställning om man har en punkt* $P = (p_1, p_2, p_3)$ *samt två vektor* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *och* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *som är parallella med planet (om man skalar dessa vektorer med två tal* $s, t \in R$ *ska man kunna komma till alla punkter i planet)*

$$(x, y, z) = P + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} = (p_1, p_2, p_3) + s \cdot (u_1, u_2, u_3) + t \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Formel 9 *Ett plan som beskrivs med en ekvation* $ax + by + cz = d$ *har en normalvektor* $\vec{n} = (a, b, c)$ *som har en rät vinkel till planet.*

Formel 10 *För att projicera en vektor* $\vec{u}$ *på en annan vektor* $\vec{v}$ *kan vi använda projektionsformeln*

$$proj_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

1.2 Uppgifter att börja med

1.

Rent intuitivt borde det finnas två stycken enhetsvektorer parallella till $(3, -4)$, en som pekar åt samma håll och en som pekar åt motsatt håll.

Dessa kan beräknas med hjälp av formel 4:

$$\vec{e}_{\vec{v}} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} =$$

Och med formel 3:

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \cdot (3, -4) = \pm\frac{1}{5} \cdot (3, -4)$$

Här kan man nöja sig eller så kan man utveckla ytterligare till:

$$\vec{e}_{\vec{v}} = \pm(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5})$$

Notera att det finns två stycken lösningar pga $\pm$ tecknet.

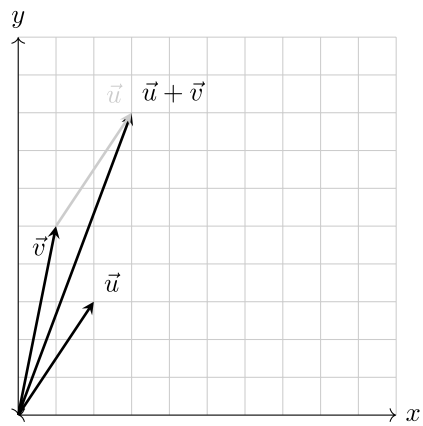
2.

a)

Använder formel 1:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) + (1, 5) = (2 + 1, 3 + 5)$$

Bild:



b)

Använder först formel 2:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v} = (2, 3) + (-1, -5)$$

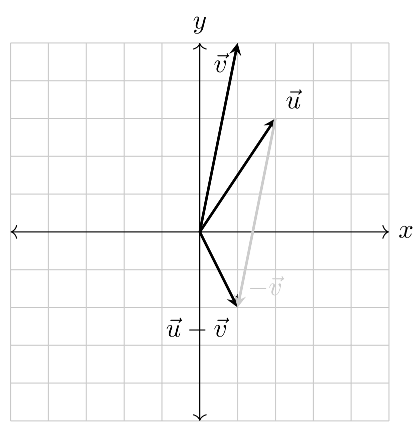
Nu är det lätt att använda formel 1:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) + (-1, -5) = (1, -2)$$

Det här var en övertydlig lösning, enklare skulle vara att bara göra såhär direkt:

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1, 3 - 5) = (1, -2)$$

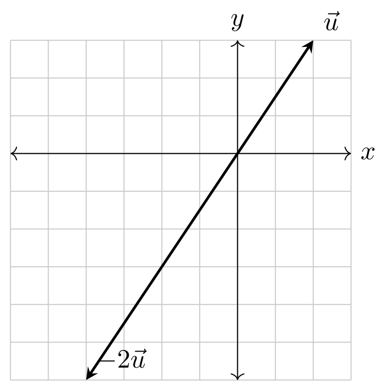
Bild:



c)

Använder formel 2:

$$-2\vec{u} = (-2 \cdot 2, -2 \cdot 3) = (-4, -6)$$



3.

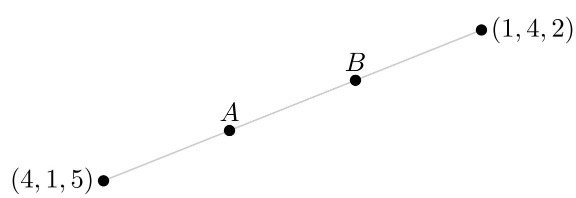
Vi vill beräkna skalärprodukten $\vec{u} \cdot \vec{u}$. För att göra detta använder vi den första varianten av formel 6:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (1, 2, 3) \cdot (1, 2, 3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1 + 4 + 9 = 14$$

Notera att $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = |\vec{u}|^2$.

4.

Den här uppgiften är enklare än den verkar. A och B ligger på en linje mellan (4, 1, 5) och (1, 4, 2) och de delar upp den här linjen i tre delar. Det kan se ut såhär:



En metod för att bestämma A och B är:

1. Välj en startpunkt.
2. Ta fram en vektor som går mellan punkterna.
3. börja vid startpunkten och skala om vektorn så att den når till punkt A respektive B.

Jag väljer $(1, 4, 2)$ som startpunkt. En vektor mellan (1, 4, 2) och (4, 1, 5) är (enligt formel 5)

$$(4, 1, 5) - (1, 4, 2) = (3, -3, 3)$$

A ligger en tredjedel från A till B och blir alltså

$$(1, 4, 2) + \frac{1}{3} \cdot (3, -3, 3) = (1, 4, 2) + (1, -1, 1) = (2, 3, 3)$$

Och B som ligger två tredjedelar från A till B blir

$$(1,4,2) + \frac{2}{3} \cdot (3,-3,3) = (1,4,2) + (2,-2,2) = (3,2,4)$$

5.

Vi söker de enhetsvektorer som är ortogonala mot vektorerna $(2,-6,-3)$ **och** $(4,3,-1)$. Kom ihåg att enhetsvektorer är vektorer av längd ett och att ortogonalitet betyder vinkelrät. Två vektorer är ortogonala om vinkeln mellan dom är $90° = \frac{\pi}{2}$ radiener.

Vi döper våra kända vektorer till $\overline{v} = (2,-6,-3)$ och $\overline{u} = (4,3,-1)$. Sedan definierar vi, till att börja med, en av våra sökta enhetsvektor $\overline{x} = (x,y,z)$. Med dessa definierade kan vi nu skriva upp våra villkor med matematisk notation.

Att $\overline{x}$ är en enhetsvektor ger oss att $|\overline{x}| = 1$ vilket vi utvecklar till $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$. Sedan har vi villkoren att $\overline{x}$ är ortogonal mot $\overline{v}$ **och** $\overline{u}$ vilket ger oss följande ekvationer

$$\begin{aligned}\overline{x} \cdot \overline{v} &= |\overline{x}| \cdot |\overline{v}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} \\ \overline{x} \cdot \overline{u} &= |\overline{x}| \cdot |\overline{u}| \cdot \cos\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Vilka vi kan förenkla genom att använda oss av skalärprodukter och villkoret att $cos\frac{\pi}{2} = 0$ till

$$\begin{aligned}(x,y,z) \cdot (2,-6,-3) &= 0 \\ (x,y,z) \cdot (4,3,-1) &= 0,\end{aligned}$$

och vidare utveckla till

$$\begin{aligned}2x - 6y - 3z &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0.\end{aligned}$$

Vi söker nu de tre variablerna x, y, z som löser ekvationssystemet från våra tre villkor.

$$\begin{cases} 2x - 6y - 3z & = 0 \\ 4x + 3y - z & = 0. \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & = 1. \end{cases}$$

Viktigt att notera att vi inte har ett linjärt ekvationssystem då den tredje ekvationen har variabler av grad 2. Vi börjar därför med att lösa de två linjära ekvationerna.

Multiplicerar vi den övre ekvationen med -2 och adderar till den undre ekvationen får vi följande

$$\begin{cases} 2x - 6y - 3z & = 0 \\ 4x + 3y - z + (-2) \cdot (2x - 6y - 3z) & = 0 + (-2 \cdot 0) \end{cases}$$

vilket vi förenklar till

$$\begin{cases} 2x - 6y - 3z & = 0 \\ 15y + 5z & = 0. \end{cases}$$

Vi delar sedan den övre ekvationen med 2 och den undre ekvationen med 15 och får

$$\begin{cases} x - 3y - \frac{3}{2}z & = 0 \\ y + \frac{1}{3}z & = 0 \end{cases}$$

sedan uttrycker vi den undre ekvationen i termer av z

$$\begin{cases} x - 3y - \frac{3}{2}z & = 0 \\ y & = -\frac{1}{3}z \end{cases}$$

och upptäcker att genom insättning av den undre ekvationen i den övre ekvationen får vi att

$$x - 3y - \frac{3}{2}z = x - 3 \cdot (-\frac{1}{3}z) - \frac{3}{2}z = x + z - \frac{3}{2}z = x - \frac{1}{2}z.$$

vilket då ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = -\frac{1}{3}z. \end{cases}$$

Eftersom vi nu uttryck x och y i termer av z kan vi sätta in dessa i ekvationen för $|\overline{x}|$, då förenklar vi vänsterledet genom att låta

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(-\frac{z}{3}\right)^2 + z^2} = \sqrt{z^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+1\right)} = \sqrt{z^2\left(\frac{49}{36}\right)} = \frac{7z}{6}.$$

Detta kombinerat med högerledet ger oss att

$$\frac{7z}{6} = 1$$

vilket är ekvivalent med att

$$z = \frac{6}{7}.$$

Då får vi att

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7} & = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7} & = -\frac{2}{7}. \end{cases}$$

vilket ger oss att

$$\overline{x} = \frac{1}{7}(3,-2,6).$$

Nu kan vi välja den andra ortogonala vektorn till

$$-\overline{x} = -\frac{1}{7}(3,-2,6)$$

och på så vis har vi hittat två ortogogonala enhetsvektorer till vektorerna $(2,-6,-3)$ och $(4,3,-1)$.

Svar: $\overline{x} = \pm\frac{1}{7}(3,-2,6)$.

Alternativ lösning med kryssprodukt

Det här är ett typiskt tillfälle där kryssprodukten (formel 11) är användbar, eftersom att den ger just en vektor som är ortogonal mot de vektorer man tar kryssprodukten av. Jag tar fram den direkt med hjälp av formel 11

$$(2,-6,-3)\times(4,3,-1) = (6-(-9), -12-(-2), 6-(-24)) = (15,-10,30)$$

Längden av den här vectorn tas fram med 3 och är $\sqrt{15^2+(-10)^2+30^2} = \sqrt{1225}$. En av de enhetsvektorer vi söker är alltså enligt formel 4

$$\frac{1}{\sqrt{1225}} \cdot (15, -10, 30)$$

. Den andra pekar åt motsatt håll och är alltså

$$\frac{-1}{\sqrt{1225}} \cdot (15, -10, 30)$$

Man skulle kunna förenkla ytterligare om man vill för $\sqrt{1225} = 35$ (vilket inte alls är uppenbart om man saknar miniräknare)

$$\frac{1}{\sqrt{1225}} \cdot (15, -10, 30) = \frac{1}{35} \cdot (15, -10.30) = \frac{1}{7} \cdot (3, -2, 6)$$

6.

Uppgifter där man ska visa saker kan vara lite svåra att börja med, men ofta kan man börja testa sig fram med hjälp av den info som ges.

Här handlar det om ortogonalitet så då skulle man kunna börja testa att använda skalärprodukten (formel 6), eftersom att den ska vara 0 om två vektorer är ortogonala

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = (u_1+v_1)\cdot(u_1-v_1)+(u_2+v_2)\cdot(u_2-v_2)+...+(u_n+v_n)\cdot(u_n-v_n) =$

Notera att varje term i högerledet går att utveckla med konjugatregeln. Då får vi

$$= (u_1^2 - v_1^2) + (u_2^2 - v_2^2) + ... + (u_n^2 - v_n^2) =$$

Uppgiften handlar ju också om att vektorerna ska ha samma längd och detta börjar ju likna formeln för vektorers längd (formel 3) lite. Jag skriver om den såhär

$= (\mathrm{u}_1^2+u_2^2+...+u_n^2)-(v_1^2+v_2^2+...+v_n^2) = \sqrt{(u_1^2+u_2^2+...+u_n^2)}-\sqrt{(v_1^2+v_2^2+...+v_n^2)} =$
$|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$
$\iff |\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2$
$\iff |\vec{u}| = \pm|\vec{v}|$

En vektors längd är ju positiv så $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

7.
a)

Vi vill skapa en parameterframställning med formel 7. En vektor som går från (1, 0, -1) till (2, 3, -5) är

$$(2, 3, -5) - (1, 0, -1) = (1, 3, -4)$$

En möjlig parameterframställning är alltså

$$L = (1, 0, -1) + t \cdot (1, 3, -4)$$

Där $t \in R$

b)

Det här är enkelt eftersom att vi redan har vektorn som är parallell med linjen L

$$(0, 0, 0) + t \cdot (1, 3, -4), t \in R$$

8.

Den vektor som är ortogonal mot planet kallas för planets normalvektor. Planet har normalvektor $n = (1, 2, 3)$, detta fås genom att man kollar på koefficienterna till x, y, z i planets ekvation $x+2y+3z = 5$. Eftersom att vi vet att linjen kommer gå genom origo kan vi välja parameterformen

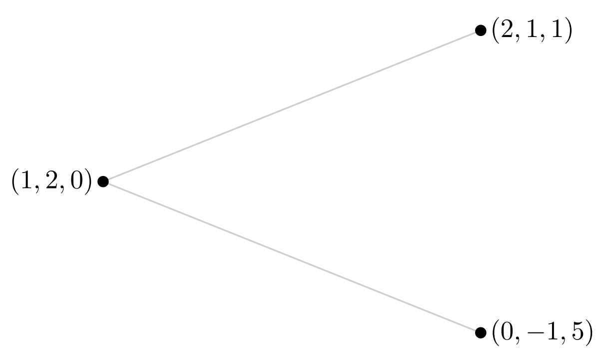
$$L = (0, 0, 0) + t \cdot (1, 2, 3) = t \cdot (1, 2, 3), t \in R$$

9.

En parameterform för ett plan består av

- 1 punkt som ligger i planet.
- 2 vektorer som är parallella med planet.

Vi har tre punkter som ligger i planet. Man kan välja en av dessa som 'startpunkt' och sedan ta fram de två vektorerna genom subtraktion. Låt oss välja (1, 2, 0) som startpunkt, då ser det ut såhär



En vektor från (1, 2, 0) till (2, 1, 1) är

$$(2, 1, 1) - (1, 2, 0) = (1, -1, 1)$$

En vektor från (1, 2, 0) till (0, -1, 5) är

$$(0,-1,5)-(1,2,0)=(-1,-3,5)$$

En parameterframställning för planet är alltså

$$(x,y,z)=(1,2,0)+s\cdot(1,-1,1)+t\cdot(-1,-3,5) \text{ där } s,t\in R$$

10.

Den här uppgiften är lite klurig. Vi vet från formel 8 att man för att kunna beskriva ett plan på parameterform behöver en punkt och två vektorer, men vi har bara en punkt och en linje. Men eftersom att vi har fått en linje som ligger i planet

$$(x,y,z)=t\cdot(-1,0,2)=(0,0,0)+t\cdot(-1,0,2)$$

kan vi ta en punkt på denna linje för att få fram en vektor som är parallell med planet. Låt till exempel $t=0$, då får vi en punkt i planet

$$(x,y,z)=0\cdot(-1,0,2)=(0,0,0)$$

En vektor som är parallell med planet är då

$$(1,1,0)-(0,0,0)=(1,1,0)$$

Vi har nu allt som krävs för att skriva planet på parameterform

- två punkter: (1, 1, 0) och origo (0, 0, 0). Det är enklast att välja origo.
- två vektorer som är parallella med planet: (-1, 0, 2) och (1, 1, 0).

Parameterframställningen blir därför

$$(x,y,z)=(0,0,0)+s\cdot(-1,0,2)+t\cdot(1,1,0)=s\cdot(-1,0,2)+t\cdot(1,1,0) \text{ där } s,t\in R$$

11.

Följande behövs för parameterframställningen av en linje som ligger i planet

- En punkt i planet.
- En vektor som är parallell med planet.

$x+y+z=1$ uppfylls t.ex. av punkten (1, 0, 0), så här har vi en punkt som ligger i planet.

En vektor som är parallell med planet ska vara ortogonal med planets normalvektor. Vi ser från planets ekvation att denna är $\vec{n}=(1,1,1)$. Använder skalärprodukten (formel 6) för att ta fram en vektor $\vec{v}$ som är ortogonal mot $\vec{n}$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (1,1,1) \cdot (v_1, v_2, v_3) = v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

Detta uppfylls t.ex. av $v_1 = -1, v_2 = 1, v_3 = 0$. En parameterframställning av linjen är alltså

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + t \cdot (-1, 1, 0), t \in R$$

12.

Den här uppgiften bygger vidare på uppgift 11 så se till att göra den först.

En parameterframställning av en linje som inte skär planet ska innehålla

- En punkt som inte ligger i planet.
- En vektor som är parallell med planet (det här är viktigt för annars kommer den skära planet någon gång).

Vi har en vektor $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ som är parallell med planet från uppgift 11. Det enda vi behöver nu är en punkt som inte ligger i planet. En sådan punkt ska uppfylla $x + y + z \neq 1$. Vi testar med origo (0, 0, 0)

$$0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$$

Nu har vi allt som krävs

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + t \cdot (-1, 1, 0) = t \cdot (-1, 1, 0), t \in R$$

13.

Sånna här uppgifter kommer vara mycket enklare att lösa senare i kursen när ni har gått igenom gausseliminering. Men man kan tänka såhär också: Om L_1 och L_2 skär varandra kommer deras ekvationer att ge samma resultat vid den punkten

$$t \cdot (-1, 0, 2) = (1, 2, 2) + s \cdot (-1, 2, 0) \text{ där } s, t \in R$$

om man låter $t = 1, s = 2$ får man $(-1, 0, 2) = (1, 2, 2) + (-2, 4, 0) = (-1, 6, 2)$. Detta är ju sant för det första elementet i vektorerna men inte för element två och tre. Det går helt enkelt inte att uppfylla $VL = HL$ för några värden på s och t (man förstår nog detta enklast om man försöker göra så att $VL = HL$ en stund) så en lösning saknas, därför skär inte linjerna heller varandra.

Den här lösningen känns inte så bra för bara för att man själv inte hittar något s, t så att $HL = VL$ betyder ju inte att det inte finns. Lösningen nedan med gausseliminering gör åtminstonne mig mer säker på att det inte finns någon skärningspunkt.

Alternativ lösning med gausseliminering

En skärningspunkt mellan L_1 och L_2 inträffar när deras ekvationer är lika med varandra

$$\begin{aligned} t(-1,0,2) &= (1,2,2) + s(-1,2,0) \\ t(-1,0,2) - s(-1,2,0) &= (1,2,2) \\ (-t,0,2t) + (s,-2s,0) &= (1,2,2) \\ (-t+s,-2s,2t) &= (1,2,2) \end{aligned}$$

Det här ger ett ekvationssystem med tre ekvationer

$$\begin{cases} -t+s & = 1 \\ -2s & = 2 \\ 2t & = 2 \end{cases}$$

Det här ekvationssystemet kan beskrivas med totalmatrisen, och sedan lösas med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_1 \\ -\frac{r_2}{2} \\ \frac{r_3}{2} \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_3 \\ r_2 \\ r_1 + r_3 - r_2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Den här resultatet av gausselimineringen betyder att

$$\begin{cases} t & = 1 \\ s = -1 & \\ 0 = 3 \text{ \textbf{(Det här är omöjligt)}} & \end{cases}$$

Att vi har fått fram som en del av lösningen att $0 = 3$ betyder att ekvationssystemet saknar lösning, vilket i sin tur betyder att linjerna L_1 och L_2 inte skär varandra.

14.

Skärningspunkter mellan linjen och planet ska uppfylla

- Linjens ekvation
- Planets ekvation

Linjens ekvation $(x, y, z) = (1, 2, 2) + t \cdot (-1, 2, 0), t \in R$ kan också skrivas som $(x, y, z) = (1 - t, 2 + 2t, 2)$. Vi sätter in dessa x, y, z i planets ekvation

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ (1 - t) + 2(2 + 2t) - (2) &= 1 \\ 3t + 3 &= 1 \\ t &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

Detta betyder att när $t = \frac{-2}{3}$ så skär linjen planet. Vi tar fram skärningspunkten genom att sätta in detta värde på t i linjens ekvation

$$(x, y, z) = (1, 2, 2) + \frac{-2}{3} \cdot (-1, 2, 0) = (1, 2, 2) - (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0) = (1 + \frac{2}{3}, 2 - \frac{4}{3}, 2 - 0) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 2)$$

15.

Två vektorer har en rät vinkel mellan sig (de är ortogonala) om deras skalärprodukt är lika med 0. Utvecklar skalärprodukten (formel 6) mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$

$$\begin{aligned} (1, 2, 2) \cdot (-1, 1, a) &= 0 \\ -1 + 2 - 2a &= 0 \\ 2a + 1 &= 0 \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

16.

För att beräkna vinkeln mellan två vektorer kan man använda den andra varianten av skalärprodukten (formel 6)

$$|\vec{u}||\vec{v}| cos\alpha = \text{skalärprodukt} \iff cos\alpha = \frac{\text{skalärprodukt}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Nu behöver vi alltså beräkna skalärprodukten (med den första varianten av formel 6) och längden av vektorerna (med formel 3)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 1, 0, 0) \cdot (2, 0, 2, 0) = 2$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{8}$$

Vinkeln α kan nu beräknas

$$cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$$

17.

I den här uppgiften vill vi använda båda varianterna av skalärprodukten (formel 6). Börja med att observera att skalärprodukten mellan en vektor $\vec{v} = (x, y, z)$ och x-, y- och z-axeln (med den första varianten av skalärprodukten) är

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = x$$
$$(x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = y$$
$$(x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = z$$

Nu använder den andra varianten av skalärprodukten för att räkna ut x, y, z. Den vektor vi söker har längd 2, $|\vec{v}| = 1$, och enhetsvektorn för x-, y- och z-axeln har längd ett.

Börjar med x-axeln

$$2 \cdot 1 \cdot cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Sedan y-axeln

$$2 \cdot 1 \cdot cos\frac{3\pi}{4} = 2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Och till sist z-axeln

$$2 \cdot 1 \cdot cos\frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{-1}{2} = -1$$

Eftersom att båda varianterna skalärprodukterna beräknar samma sak får vi $x = 1, y = -\sqrt{2}, z = -1$, vektorn vi söker är alltså $(1, -\sqrt{2}, -1)$.

18.

a)

Punkten ligger i planet om den uppfyller planets ekvation. Testar

$$z = 19 - 2x - 3y$$
$$(12) = 19 - 2(2) - 3(1) = 19 - 4 - 3 = 12$$

Punkten uppfyller planets ekvation och ligger alltså i planet.

b)

Jag börjar med att skriva om planets ekvation på en mer bekant form

$$
\begin{aligned}
z &= 19 - 2x - 3y \\
2x + 3y + z &= 19
\end{aligned}
$$

Enligt formel 9 har planet normalvektorn $\vec{n} = (2, 3, 1)$.

c)

För att beräkna avståndet mellan planet och punkten skulle vi kunna dra en linje som är rät mot planet till punkten och sedan mäta denna linje. Detta är dock lite svårt eftersom att vi inte vet vilken punkt på planet som 'ligger under' punkten.

Men vi känner till planets normalvektor så ett annat tillvägagångssätt är att flytta punkten en viss sträcka (parallellt med normalvektorn) så att den hamnar i planet, och sedan mäta hur stor denna sträcka var. Möjliga positioner för punkten beskrivs då av följande ekvation

$$(x, y, z) = (2, 3, 13) + t \cdot (2, 3, 1) = (2 + 2t, 3 + 3t, 13 + t), t \in R$$

Att hitta när denna linje skär planet kan göras med insättning i planets ekvation

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + z &= 19 \\
2(2 + 2t) + 3(3 + 3t) + (13 + t) &= 19 \\
4 + 4t + 9 + 9t + 13 + t &= 19 \\
14t + 26 &= 19 \\
t = -\frac{7}{14} &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Så när $t = -\frac{1}{2}$ kommer punkten att ha flyttats till planet. Hur lång är då denna vektor som beskriver denna förflyttning? Vektorn är $-\frac{1}{2} \cdot (2, 3, 1) = \frac{1}{2} \cdot (-2, -3, -1)$ och den har längden

$$\frac{1}{2}|(-2, -3, -1)| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 9 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{14} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 14} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

Alternativ lösning med projektionsformeln

sökt: avstånden från punkten $q = (2, 3, 13)$ till planet $2x + 3y + z = 19$. Med avståndet menar vi alltid det kortaste avståndet.

Detta kan vi göra med hjälp av projektionsformeln!

Vi vill projicera en vektor från planet Π till punkten q på normalvektorn $\vec{n} = (2,3,1)$. För att göra detta väljer vi en godtycklig punkt i planet $p = (x,y,z)$ där $(x,y,z) \in \Pi$. Till exempel kan vi välja $p = (2,3,6)$ ty det uppfyller planets ekvation och således är $(2,3,6) \in \Pi$.

Då skapar vi vår vektor

$$\vec{pq} = (2,3,13) - (2,3,6) = (0,0,7)$$

och med det kan vi nu använda projektionsformeln

$$proj_{\vec{n}}(\vec{pq}) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{pq}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}$$

och förenklar vi högerledet får vi

$$\frac{(2,3,1) \cdot (0,0,7)}{|(2,3,1)|^2} \cdot (2,3,1) =$$

$$\frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 7}{\left(\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}\right)^2} \cdot (2,3,1) =$$

$$\frac{7}{\left(\sqrt{14}\right)^2} \cdot (2,3,1) = \frac{7}{14} \cdot (2,3,1) = \frac{1}{2} \cdot (2,3,1).$$

Då får vi att $proj_{\vec{n}}(\vec{pq}) = \frac{1}{2} \cdot (2,3,1)$ och eftersom vi vill veta avståndet så beräknar vi absolutbeloppet

$$|\frac{1}{2} \cdot (2,3,1)| =$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 (2^2 + 3^2 + 1^2)} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 14} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Svar: Avståndet är $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

19.

Två plan kommer skära varandra med en rät vinkel om deras normalvektorer är ortogonala. Alltså om skalärprodukten (formel 6) = 0

$$(1,2,2)\cdot(a,b,c)=0 \iff a+2b+2c=0$$

Vi vill nu bestämma a, b, c som uppfyller detta (det finns flera möjligheter). Ett sådant val är

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

Det sökta planet har alltså normalen $(2,-1,0)$ och ekvationen

$$2x-1\cdot y+0\cdot z=0 \iff 2x-y=0$$

20.

Ekvationssystemet är

$$\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ x+2y+2z=0. & (2) \end{cases}$$

Tar (2) – (1) och får

$$y+z=-1 \iff y=-z-1 \ (3)$$

Insättning av (3) i (1) ger

$$\begin{aligned} x+(-z-1)+z&=1 \\ x-z-1+z&=1 \\ x&=2 \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{cases} x &= 2 \\ y+z &= -1. \end{cases}$$

Det finns alltså inte en entydig lösning. Men detta är inte heller så konstigt eftersom att skärningen mellan två plan är en linje. Vi skulle vilja ge svaret till den här uppgiften som denna linje på parameterform.

Man kan parametrisera $z = t$ och får då

$$\begin{cases} x & = 2 \\ y & = -t - 1. \\ z & = t \end{cases}$$

Med hjälp av denna kan vi enkelt skriva linjens ekvation på parameterform

$$(x, y, z) = (2, -t - 1, t) = (2, -1, 0) + t \cdot (0, -1, 1)$$

Alternativ lösning med gausseliminering

Ekvationssystemet är

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ x + 2y + 2z = 0. & (2) \end{cases}$$

Det kan representeras med totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Och lösas med Gauss-Jordans metod

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Vilket betyder att ekvationssystemet har lösningsmängden

$$\begin{cases} x & = 2 \\ y + z & = -1 \end{cases}$$

Detta beskriver en linje i R^3 som kan beskrivas på parameterform på samma sätt som ovan.

21.

Den här uppgiften går bara ut på att använda projektionsformeln (formel 10)

$$proj_{\vec{w}}(\vec{v}) = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{w}|^2} \cdot \vec{w} = \frac{-1+15}{26} \cdot (-1,5) = \frac{7}{13}(-1,5) = (-\frac{7}{13}, \frac{35}{13})$$

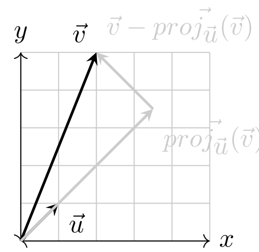
22.

Vi kallar riktningsvektorn till linjen för $\vec{u} = (2, 1, -2)$ och använder sedan projektionsformeln (formel 10) för $\vec{v}$ på $\vec{u}$

$$proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \cdot \vec{u} = \frac{2+2-2}{9} \cdot (2,1,-2) = \frac{2}{9}(2,1,-2) = (\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9})$$

23.

Vi kallar $(1, 1) = \vec{u}$. Knepet för att lösa den här uppgiften är att använda projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{u}$, och sedan skriva $\vec{v}$ som en summa av denna projektion och en vektor som är vinkelrät mot denna. Det kan visualiseras såhär



Vi beräknar projektionen (formel 10)

$$proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2} \cdot \vec{u} = \frac{2+5}{2} \cdot (1,1) = \frac{7}{2}(1,1) = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$$

Nu kan vi beräkna den vektor som är ortogonal genom att ta $\vec{v} - proj_{\vec{u}}(\vec{v})$

$$\vec{v} - proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = (2,5) - (\frac{7}{2}, \frac{7}{2}) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$$

$\vec{v}$ kan alltså skrivas som

$$\vec{v} = (2,5) = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2}) + (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$$

25.

Vi ska Bestämma avståndet från punkten $q = (1,5)$ till linjen med ekvation $y = 3x$.

Detta kan vi göra med projektionsformeln!

Vi väljer en godtycklig punkt $p = (1,3)$ på linjen $y = 3x$. Skapar en vektor från punkten p på linjen till punkten q enligt $\vec{pq} = (1,3) - (1,5) = (0,-2)$ Sedan projicerar vi $\vec{pq}$ på normallinjen till $y = 3x$ vilket vi får $y - 3x = 0$ med projectionsformlen så får vi fram svaret $\sqrt{\frac{2}{5}}$ genom att projicera vektorn $(0,-2)$ på normalvektorn $(1,-3)$.

2 modul 2

2.1 Teori

Här används främst 3x3 matriser, för andra dimensioner fungerar det på samma sätt.

2.1.1 Gauss-Jordans metod

Gauss-Jordans metod går ut på att man steg för steg gör om en matris tills den har formen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

Man kan tolka detta som lösningen till ett ekvationssystem: $x = a, y = b, z = c$.

De elementära radoperationerna (som man får använda för att förändra matrisen) är:

- Man får byta plats på rader i matrisen.
- Man får multiplicera varje rad med en skalär.
- Man får addera en rad till en annan (det är tilllåtet att addeda en rad $\cdot$ ett tal till en annan rad).

Om man skulle få en matris som ser ut typ såhär

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

är systemet <u>inkonsistent</u> (olösbart), eftersom att det betyder att $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1$ vilket är omöjligt.

Om man skulle få typ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

d.v.s att det finns så kallade fria variabler, betyder det att det inte finns en unik lösning till systemet utan det kommer finnas oändligt många lösningar. I det här exemplet är lösningen en linje i R^3.

2.1.2 Homogena ekvationssystem

Ett Homogent ekvationssystem är ett ekvationssystem där alla ekvationer har $HL = 0$. T.ex

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ett sådant system kan alltid lösas med den triviala lösningen där man sätter $x = y = z = 0$.

2.1.3 Matriser

Definition 1 *En matris rang kan fås genom att man räknar antalet ledande ettor i den matris man får genom gausseliminering.*

Exempelvis har vi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang(A) = 2

2.2 Uppgifter att börja med

1.

Det här är samma uppgift som uppgift 20 i modul 1. Så se den lösningen.

3.

Det här är samma uppgift som uppgift 13 i modul 1. Så kolla på den lösningen (speciellt den lösningen som använder gausseliminering).

4.

Ekvationssystemet kan skrivas på formen $A\vec{x} = \vec{b}$ såhär

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Om man utför multiplikationen mellan A och $\vec{x}$ får man vektorekvationen

$$\begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2y + 2z \\ 2y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vilket kan skrivas som ekvationssystemet vi började med

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ 2y - z = 5 \end{cases}$$

5.

Ett homogen ekvationssystem är t.ex

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Det går alltid att lösa ett sådant system genom att sätta $x = y = z = 0$, och eftersom att det finns en lösning så är systemet inte inkonsikvent. (se sektion 2.1.2)

6.

a)

Vi söker någon matris A och någon vektor $\vec{x}$ så att

$$A\vec{x} = a \cdot (1, 0, 2) + b \cdot (0, 2, -2) + c \cdot (3, -2, 3)$$

Detta uppfylls om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ och } \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

(Utför multiplikationen och kontrollera att $A\vec{x} = a \cdot (1, 0, 2) + b \cdot (0, 2, -2) + c \cdot (3, -2, 3)$ uppfylls om det inte känns självklart att vi valde dessa värden på A och $\vec{c}$)

b)

Jag skriver först om vektorekvationen lite för att vara övertydlig varför ekvationssystemet blir som det blir

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot a+0\cdot b+3\cdot c\\0\cdot a+2\cdot b-2\cdot c\\2\cdot a-2\cdot b+3\cdot c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ekvationssystemet blir alltså

$$\begin{cases}a+3c=0\\2b-2c=0\\2a-2b+3c=0\end{cases}$$

Nu skriver vi om det som en totalmatris och löser med gaussning (se sektion 2.1.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&2&-2&0\\2&-2&3&0\end{array}\right)\sim\begin{pmatrix}r_1\\\frac{1}{2}\cdot r_2\\r_3-2r_1\end{pmatrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&-1&0\\0&-2&-3&0\end{array}\right)\sim\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3+2r_2\end{pmatrix}\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&0\\0&1&-1&0\\0&0&-5&0\end{array}\right)$$

Man kan redan här se att vi kommer att komma fram till matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

Detta betyder att ekvationssystemet har lösningen $a=b=c=0$, a.k.a. den triviala lösningen.

7.

Ekvationssystemet

$$\begin{cases}x+y+z=1\\2x+3y+4z=12\\-x+y+z=7\end{cases}$$

Kan skrivas på matrisform, och sedan lösas med 'gaussning' (se sektion 2.1.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 - 2 \cdot r_1 \\ r_3 + r_1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \\ r_3 - 2 \cdot r_2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ -\frac{1}{2} \cdot r_3 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_1 + r_3 \\ r_2 - 2 \cdot r_3 \\ r_3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Detta betyder att en lösning till ekvationssystemet är $x = -3, y = -2, z = 6$. Notera att det finns exakt en lösning. En geometrisk tolkning av ekvationssystemet är som skärningspunkten mellan tre plan, och om en sådan finns är det en punkt.

8.

Vi skriver om ekvationssystemet på matrisform och löser med gaussning (se sektion 2.1.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 12 \\ -1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Det finns alltså <u>en</u> lösning till det här ekvationssystemet.

9.

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x - y + z = 6 \\ 2x + 2y + 4z = 6 \\ -x - y - z = 6 \end{cases}$$

Kan skrivas på matrisform, och sedan lösas med 'gaussning' (se sektion 2.1.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} -1 \cdot r_1 \\ r_2 + 2 \cdot r_1 \\ r_3 - r_1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Det går redan här att se att systemet är inkonsikvent eftersom att det säger att $2z = 18$ och att $-2z = 0$, vilket inte kan ske sammtidigt. Men jag fortsätter här för att vara extra tydlig

$$\sim \begin{pmatrix} r_1 \\ \frac{1}{2} \cdot r_2 \\ r_3 + r_2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right)$$

På sista raden har vi alltså bara 0:or till vänster, men totalmatrisen har ändå ett tal $\neq 0$ till höger, vilket betyder att systemet är inkonsistent.

10.

Vi skriver om ekvationssystemet på matrisform och löser med gaussning (se sektion 2.1.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -4 & -6 & -4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det finns alltså oändligt många lösningar till det här ekvationssystemet. Vilka är det?

Parametriserar $y = t$ och får följande ekvationssystem som beskriver lösningarna

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}t \\ y = t \\ z = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Vilket kan skrivas på vektorform som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t \\ t \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösningen är alltså en linje.

11.

Det här är samma uppgift som modul 1 uppgift 14.

12.

Vi skriver om ekvationssystemet på matrisform och löser med gaussning (se sektion 2.1.1). Notera att ekvationssystemet är i fem variabler x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim ... \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Vi ser att den radreducerade matrisen på trappstegsform har två fria variabler som vi kan parametrisera $x_4 = s, x_5 = t$. Detta ger oss lösningen

$$\begin{cases} x_1 = 2x_4 - \frac{3}{2}x_5 = 2s - \frac{3}{2}t \\ x_2 = -2x_4 + x_5 = -2s + t \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Skriver detta på vektroform

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s - \frac{3}{2}t \\ -2s + t \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in R$$

13.

Vi använder gausseliminering på matrisen A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 - 2 \cdot r_1 \\ r_3 - r_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_1 + 2 \cdot r_2 \\ -1 \cdot r_2 \\ r_3 - r_2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_1 + 2 \cdot r_3 \\ r_2 - 3 \cdot r_3 \\ r_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Det här är en matris på reducerad trappstegsform: Vi har bara ledande ettor, och de tal som är över/under ettorna är alla nollor. Man kan utföra gausselimineringen på olika sätt men man kommer alltid komma fram till den här matrisen, så den är unik.

Vi har tre stycken ledande ettor i matrisens radekvivalenta matris på trappstegsform, alltså är matrisens rang = 3. Se definition 1.

14.

Vi kan börja med att kolla om det ens är möjligt att utföra matrismultiplikationen, dvs kolla om dimensionerna stämmer överens. Den vänstra matrisen har dimensionen 3×4 och den högra har dimensionen 4×2 så det funkar (de 'inre siffrorna' är samma för båda) och resultatet kommer bli en matris av dimensionen 3×2

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 5 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\\ 2 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}(1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 2+0\cdot 1) & (1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot(-2)+0\cdot 3)\\ (5\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 2+1\cdot 1) & (5\cdot 1+2\cdot 3+0\cdot(-2)+1\cdot 3)\\ (1\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot 2+1\cdot 1) & (1\cdot 1+1\cdot 3+2\cdot(-2)+1\cdot 3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 1\\ 6 & 14\\ 6 & 3\end{pmatrix}$$

15.

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z+w=0\\ 2x+3y+4w=1\\ -x-2y+z-3w=a\end{cases}$$

Kan lösas med gausseliminering (se sektion 2.1.1). Skriver först om ekvationssysyemet som en totalmatris (notera att det finns fyra variabler)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1\\ -1 & -2 & 1 & -3 & a\end{array}\right) \sim \begin{pmatrix}r_1\\ r_2-2\cdot r_1\\ r_3+r_1\end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -2 & a\end{array}\right) \sim \begin{pmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3+r_2\end{pmatrix}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1\end{array}\right)$$

Kom ihåg att ekvationssystemet blir inkonsistent om vi får någon rad som ser ut som $\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$, så för att undvika detta måste vi sätta $a=-1$. Några andra värden på a, som löser ekvationssystemet finns inte.

Nu sätter vi in $a=-1$ och löser ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)+1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \begin{pmatrix}r_1-r_2\\ r_2\\ r_3\end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 3 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Vi ser på den reducerade matrisen att det finns oändligt många lösningar. Vi får parametrisera såhär

$$\begin{cases} z=s\\ w=t\\ x+3z-w=x+3s-t=-1\\ y-2z+2w=y-2s+2t=1\end{cases} \iff \begin{cases} x=-3s+t-1\\ y=2s-2t+1\\ z=s\\ w=t\end{cases}$$

Som kan skrivas på vektorform som

$$(x, y, z, w) = (-3s+t-1, 2s-2t+1, s, t) = (-1, 1, 0, 0)+s\cdot(-3, 2, 1, 0)+t\cdot(1, -2, 0, 1)$$

Lösningen är alltså ett plan.

3 modul 3

3.1 Teori

Formel 11 *(kryssprodukt) Kryssprodukten av två vektorer $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

En viktig egenskap kryssprodukten $\vec{u}\times\vec{v}$ är att den <u>är en vektor</u> som är ortogonal mot båda vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Formel 12 *Storleken av kryssprodukten av två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är*

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sin(\alpha)$$

Där α är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

3.1.1 Linjära höljen och delrum

Ett linjärt hölje ska uppfylla följande krav

- Det ska vara slutet under
  - Skalärmultiplikation - dvs om man vet att en vektor $\vec{v}$ ligger i rummet så ska även $t \cdot \vec{v}$ ligga i rummet.
  - Vektoraddition med vektorer i rummet - dvs om man har två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i rummet så ska även $\vec{u} + \vec{v}$ ligga i rummet.
- Det måste innehålla nollvektorn $\vec{0}$.

Ett delrum är lite som en delmängd till ett linjärt höjle. Det måste uppfylla samma krav som det linjära höljet det är ett delrum till, men det kan ha lägre dimension.

Exempel: R^2 är ett delrum till R^3. Ett till exempel (specialfall): R^3 är ett delrum till R^3. Ett annat viktigt speciallfall är $\{\vec{0}\}$ som är delrum till alla R^n.

3.2 Uppgifter att börja med

1.

a)

Kom ihåg att vektorer är linjärt oberoende om man inte kan skapa någon av dom genom en linjärkombination av de andra vektorerna. Om de skulle vara linjärt beroende skulle vi kunna uppfylla vektorekvationen

$$s\vec{u} + t\vec{v} = \vec{w} \iff s\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Låt oss testa detta med gaussning

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 1\\2 & 2 & 0\\3 & 1 & 0\end{array}\right) \sim ... \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 1\\0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Det här systemet går alltså inte att lösa (det är inkonsistent), vilket betyder att vi inte kan skriva $\vec{w}$ som en linjärkombination av $\vec{u}$ och $\vec{v}$, alltså är vektorerna linjärt oberoende.

b)

Nej, eftersom att de är linjärt oberoende kan vi inte skriva någon av dom som en linjärkombination av de andra.

c)

Ja, eftersom att de tre vektorerna är linjärt oberoende kommer de att spänna upp hela R^3. Och R^3 är ett delrum till R^3.

3.

Ekvationssystemet kan lösas med gaussning

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2 & 0\\0 & 2 & -1 & 5\end{array}\right) \sim ... \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & \frac{4}{3}\\0 & 0 & 1 & \frac{-7}{3}\end{array}\right)$$

Vi ser att det finns en unik lösning till systemet, lösningemängden är alltså en punkt.

Men ett delrum måste innehålla nollvektorn $\vec{0}$ (se sektion 3.1.1) så den här lösningsmängden är inte ett delrum till R^3.

5.

Kom ihåg att ett vektorrum ska uppfylla följande

- Det ska vara slutet under skalärmultiplikation. Dvs för varje vektor som tillhör vektorrumet så ska man kunna multiplicera den med en skalär och få en ny vektor som också ligger i rummet, om man skulle få en vektor som inte tillhör rummet så är det inte ett vektorrum.
- Det ska vara slutet under vektoraddition. Dvs för alla par av vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ som tillhör vårt rum så måste $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ också tillhöra vårt rum, annars är det inget vektorrum.
- Vektorrummet måste innehålla nollvektorn $\vec{0}$.

Ett delrum till R^2 ska uppfylla dessa krav och dessutom ha en dimension ≤ 2. Det finns många val på mängder av vektorer som inte är giltiga delrum till R^2. Här är några exempel

- linjer som inte går igenom origo, eftersom att de då inte innehåller nollvektorn.
- Ändliga mängder av vektorer, eftersom att man då kommer kunna skapa nya vektorer genom vektoraddition och multiplikation med skalärer som inte ingår i den ändliga mängden av vektorer. Det finns ett specialfall av en ändlig mängd vektorer som faktiskt är ett giltigt delrum till alla R^n: $\{\vec{0}\}$, dvs mängden av vektorer som endast innehåller nollvektorn (den uppfyller alla krav som ställs på delrum).

7.

Ekvationssystemet kan lösas med gaussning. Notera också att det är ett homogent ekvationssystem så vi vet att det minst kommer ha en lösning. Vi vet också att det har tre ekvationer och fyra variabler, så det kommer ha minst en fri variabel.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim ... \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi parametriserar $z = s$ och $w = t$ och får lösningsmängden

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = -s + t \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

Detta är ett plan i R^4 och kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

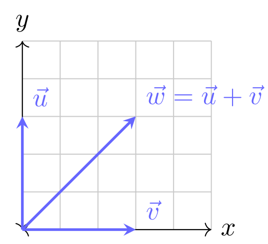
Eftersom att detta plan innehåller nollvektorn $\vec{0}$ kan vi skriva det som spannet av de två riktningsvektorerna i denna linje

$$span((0, -1, 1, 0), (-3, 1, 0, 1))$$

Det är två vektorer som spänner upp lösningsmängden (som är ett plan) och därför har den dimension 2.

9.

Nej, det är inte sant. Här är ett exempel



Det är uppenbart att de är linjärt beroende eftersom att $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, och man ser också att inte några av dom är parallella.

11.

a)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Jag väljer att kofaktorutveckla längs första raden

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-1) - 0(4-0) + 2(2-0) = 1 + 4 = 5$$

b)

Eftersom att $\det B \neq 0$ så vet vi att matrisen är inverterbar.

c)

Nej, det har ingen icke-trivial lösning. Anledningen är att $\det B = 0 \iff$ Ekvationssystemet har en unik lösning, och eftersom att vi vet att den triviala lösningen är en lösning så är det den enda lösningen som finns.

d)

Vi kan börja med att ta fram B^T (B:s transponat)

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Man byter alltså så att kolumner blir rader och vice versa. Låt oss nu beräkna $\det B^T$

$$\det B^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Jag väljer nu att kofaktorutveckla längs den första kolumnen

$$\det B^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-1) - 0(4-0) + 2(2-0) = 1 + 4 = 5$$

Alltså $\det B = \det B^T$.

13.

Vi har tre punkter som ligger i planet. Låt oss kalla dom för

$$\begin{cases} A = (1, 0, 1) \\ B = (2, 1, 1) \\ C = (-1, 3, 5) \end{cases}$$

Med dessa punkter kan vi ta fram två riktningsvektorer som är parallella med planet

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

För att ta fram planets standardekvation behöver vi en vektor som är ortogonal mot planet. Denna fås genom att ta kryssprodukten av de två vektorerna som är parallella med planet

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 0-4 \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nu behöver vi bara sätta in en punkt i ekvationen

$$4(x - x_0) - 4(y - y_0) + 5(z - z_0) = 0$$

Jag väljer punkten A

$$\begin{aligned} 4(x-1) - 4(y-0) + 5(z-1) &= 0 \\ 4x - 4 - 4y + 5z - 5 &= 0 \\ 4x - 4y + 5z &= 9 \end{aligned}$$

15.

Vi kan lösa ekvationssystemet med gaussning

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & (a+1) & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + r_2 \end{pmatrix} \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a+3) & 0 \end{array}\right)$$

Om lösningsrummet ska bli 2-dimensionellt, dvs om lösningsmängden till systemet ska bilda ett plan, vill vi ha två fria variabler i ekvationssystemet. Alltså ska vi sätta $a = -3$.

Fortsätter gaussningen med detta värde på a.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3+3) & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi parametriserar $z = s$ och $w = t$, där $s, t \in R$, och får att lösningen till ekvationssystemet är

$$\begin{cases} x = -3s + t \\ y = 2s - 2t \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

Lösningsrummet kan beskrivas av spannet

$$span(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Notera att detta är de riktningsvektorer som skulle angivits om vi hade beskrivit lösningen som ett plan på parameterform. Man säger att de vektorer som spänner upp det här vektorrummet utgör en bas för det (på samma sätt som x- och y-axeln utgör en bas för xy-planet som ni är vana vid).

17.

Den första linjen har riktningsvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och den andra har $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi vill ta fram kryssprodukten av dessa för att kunna skriva planet på standardform

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 0 - 1 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Båda linjerna innehåller punkten $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Vi sätter alltså in den punkten i ekvationen

$$\begin{aligned} -3(x - x_0) - 1(y - y_0) + 2(z - z_0) &= 0 \\ -3(x - 0) - 1(y - 0) + 2(z - 0) &= 0 \\ -3x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Svaret är alltså $-3x - y + 2z = 0$. I facit skriver de att svaret är $3x + y - 2z = 0$, detta är också giltigt och man får det om man byter plats på vektorerna vi tog kryssprodukten av.

19.

Man skulle kunna beräkna matrisen som ges av $B^{-1}AB$ och sedan ta determinanten av denna. Men vi kan använda några räkneregler för determinanter som gör denna uppgift mycket enklare (se föreläsning 6)

$$\begin{cases} \det AB = \det A \cdot \det B \\ \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \end{cases}$$

Notera att för att kunna använda den andra regeln så måste A vara en inverterbar matris. Men här kan vi anta att B är inverterbar för annars skulle det inte gå att beräkna $\det B^{-1}AB$. Låt oss utveckla uttrycket med hjälp av räknereglerna

$$\det B^{-1}AB = \det B^{-1} \cdot \det A \cdot \det B = \frac{1}{\det B} \cdot \det A \cdot \det B = \det A$$

$\det B^{-1}$ och $\det B$ tog alltså ut varandra. Nu räcker det alltså att beräkna $\det A$

$$\det B^{-1}AB = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$$

svar: $\det B^{-1}AB = 2$

4 modul 4

4.1 Teori

4.2 Linjära avbildningar

Ni är ju vana med begreppet funktion. Man kan till exempel tala om en funktion $f(x) = kx + m$. Man skulle kunna lägga till i den här funktionsdefinitionen att $f : R \to R$, dvs att f är en funktion som accepterar värden från de reella talen och ger tillbaka värden från de reella talen.

Linjära avbildningar är också funktioner $T : R^m \to R^n$, men de kan gå mellan olika (eller samma) dimensioner. Den tar alltså en vektor i R^m och ger tillbaka en vektor i R^n. I praktiken är linjära avbildningar är egentligen bara matrismultiplikation mellan en matris A (som kallas avbildningsmatris) och en vektor $\vec{u}$. En sådan multiplikation kommer ge tillbaka en ny vektor $\vec{v}$. Vi säger att vektorn avbildas på en annan vektor.

$$A\vec{u} = \vec{v}$$

Ett exempel på en linjär avbildning $T : R^3 \to R^2$: De tar något som händer i vår värld (3D) och gör om det till ett fotografi (2D).

4.3 Linjäritet

Att en linjär avbildning är linjär betyder att den inte innehåller termer som inte är linjära. Jämför med funktioner i en variabel: $f(x) = x^2$ är inte linjär medans $g(x) = 3x + 1$ är det. Att $T : R^m \rightarrow R^n$ är linjär medför att den har följande räkneregler

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
- $T(k \cdot \vec{u}) = k \cdot T(\vec{v})$

4.4 Bildrum (im)/ Värderum / Kolonnrum (col)

I envarren talade ni om begreppen definitionsmängd och värdemängd för en funktion. Bildrummet är lite som värdemängden för en linjär avbildning.

Bildrummet är alla vektorer som den linjära avbildningen avbildar på. Kom ihåg att en linjär tar vektorer (indata) och producerar nya vektorer (utdata). Alla dessa nya vektorer bildar bildrummet till den linjära avbildningen.

I praktiken blir bildrummet spannet av de linjärt oberoende kolonnerna i matrisen (det kallas därför även för kolonnrum).

4.5 Nollrum / Kärna (ker)

Nollrummet är alla de vektorer som avbildas på nollvektorn $\vec{0}$ av den linjära avbildningen.

Det är alltså lite som nollställen för funktioner i en variabel.

I praktiken tar man fram nollrummet genom att parametrisera lösningsmängden till ekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$

Formel 13 *Dimensionssatsen*

För en linjär avbildning $T : R^m \rightarrow R^n$ gäller att summan av dimensionerna för dess bildrum och nollrum är lika med dimensionen vektorerna som den tar som indata.

$$dim(im(T)) + dim(ker(T)) = m$$

4.6 Uppgifter att börja med

1.

a)

Dimensionerna av matrisen A är 3×4, Alltså kommer man kunna utföra multiplikationen $A\vec{v}$ med vektorer $\vec{v}$ av längd 4 och resultatet kommer vara vektorer av längd 3.

b)

$$T(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\0 & 1 & 7 & 4\\2 & 5 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+1+0+0\\0+1+0+0\\0+5+0+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$$

(Svaret är alltså bara den andra kolumnen)

3.

Vi vet att den linjära avbildningen går från R^2 till R^2 så dess matris är en 2×2 matris. Denna matris A ska uppfylla

$$\begin{cases} A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix} \end{cases}$$

Alltså är den första kolumnen i A $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ och den andra $\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$. Detta ger att

$$A = \begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 9\end{pmatrix}$$

Så

$$T(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6+6\\15+18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\33\end{pmatrix}$$

5.

Vi vet att en linjär avbildning tar en vektor och ger tillbaka en ny vektor. En linje kan ses som en mängd av punkter (och beskrivs av linjens parameterform som ortsvektorer till dessa punkter).

För att göra det lättare att förstå vad som händer skriver jag om linjen som

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+3t\\-1+t\end{pmatrix}, t \in R$$

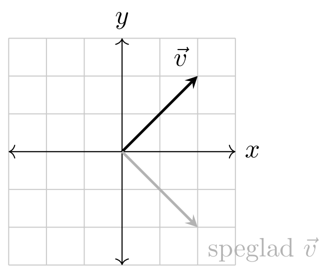
Nu kan vi lätt ta fram den linjära avbildningen av alla linjens punkter direkt

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+3t\\-1+t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1(1+3t)+2(-1+t)\\3(1+3t)+4(-1+t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+5t\\-1+13t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\13\end{pmatrix}$$

Den här omskrivningen som jag gjorde är faktiskt inte nödvändig. Man hade lika gärna kunnat projicera linjens startpunkt $(1, -1)$ och dens riktningsvektor $(3, 1)$ för sig.

7.

Vi vill ha en linjär avbildning som speglar alla vektorer $\vec{v} \in R^2$ i x-axeln.



Alltså söker vi en avbildningsmatris som gör så att vektorer behåller samma x-värde men multiplicerar sitt y-värde med -1. Denna matris är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi kan testa att multiplicera $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och se om vi får fram $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ efter matrismultiplikationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 \\ 0 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I den här uppgiften kan man se vad avbildningsmatrisen ska vara utan att göra några beräkningar.

9.

När vektorer $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ projiceras på x_1x_2-planet kommer det resultera i vektorer på formen $= (u_1, u_2, 0)$. Alltså kommer dessa vektorer ha $x_3 = 0$, medans u_1 och u_2 är oförändrade. Den avbildningsmatris som åstadkommer detta är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi testar med en vektor $\vec{v} = (1, 1, 1) \in R^3$. Projektionen av denna vektor på x_1x_2-planet borde vara vektorn $(1, 1, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 \\ 0+1+0 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I den här uppgiften kan man se vad avbildningsmatrisen ska vara utan att göra några avancerade beräkningar.

10.

En vektor $\vec{v}$ kan skrivas som summan av dess projektion på planets normalvektor $proj_{\vec{n}}(\vec{v})$ plus en vektor som är ortogonal mot denna projektion $\vec{v} - proj_{\vec{n}}(\vec{v})$ (alltså en vektor i planet).

$$\vec{v} = \underbrace{proj_{\vec{n}}(\vec{v})}_{\text{projektion på normalvektor}} + \underbrace{(\vec{v} - proj_{\vec{n}}(\vec{v}))}_{\text{projektion på plan}}$$

Projektionen på ett plan kan alltså beräknas med hjälp av formeln $\vec{v} - proj_{\vec{n}}(\vec{v})$. Detta kan vi använda för att ta fram avbildningsmatrisen som projicerar alla vektorer i R^3 på planet $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Detta plan har normalvektorn $\vec{n} = (2, 2, 1)$

Vi projicerar en godtycklig vektor $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ på planet

$$proj_{planet}(\vec{u}) = \vec{u} - proj_{\vec{n}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}{| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} |^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{2x_1 + 2x_2 + x_3}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}^2}}_{\frac{2x_1+2x_2+x_3}{9}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ \frac{2x_1+2x_2+x_3}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ x_2 - \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ x_3 - \frac{2x_1+2x_2+x_3}{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9x_1}{9} - \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ \frac{9x_2}{9} - \frac{4x_1+4x_2+2x_3}{9} \\ \frac{9x_3}{9} - \frac{2x_1+2x_2+x_3}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5x_1-4x_2-2x_3}{9} \\ \frac{-4x_1+5x_2-2x_3}{9} \\ \frac{-2x_1-2x_2+8x_3}{9} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{avbildningsmatris}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

13.

Vi reducerar matrisen med gaussning

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim \ldots \sim}_{\text{skriver inte ut hela}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Detta betyder att de första kolonnerna är linjärt oberoende och att de utgör bildrummet till den linjära avbildningen som ges av matrisen A. Alltså

$$span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\})$$

Nollrummet tas fram genom att vi parametriserar lösningsmängden till

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I den sista kolonnen har vi en fri variabel, lösningsmängden till den här ekvationen, alltså nollrummet till vår linjära avbildning, blir alltså

$$span(\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\})$$

Jag såg på matrisen att det här är svaret, men om man inte tycker att det är uppenbart än kan börja med att parametrisera lösningsmängden (repetera uppgifterna från modul 3 om det är svårt)

$$\begin{cases} x + w = 0 \\ y - 2w = 0 \\ z + w = 0 \\ w = t \end{cases}$$

14.

Om den tillhör nollrummet kommer den avbildas på $(0, 0)$. Vi testar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 + 0 \\ 1 - 2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

svar: Nej, den tillhör inte nollrummet för den här linjära avbildningen

15.

$(1, -1, -2)$ ligger i bildrummet till den linjära avbildningen om vi kan lösa ekvationssystemet med totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Vi testar med gaussning

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \underbrace{\sim ... \sim}_{\text{skriver inte ut hela}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

Vi ser att det här systemet är inkonsistent, så $(1, -1, -2)$ ligger inte i bildrummet till den linjära avbildningen (det finns inget sätt att skriva kolonnerna i matrisen så att vi får vektorn $(1, -1, -2)$.

svar: Nej

17.

Vi börjar med gaussning på matrisen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sim ... \sim}_{\text{skriver inte ut hela}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De tre första kolonnerna är linjärt oberoende och utgör alltså bildrummet. Alltså är bildrummet

$$span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

För att bestämma nollrummet parametriserar vi lösningsmängden skriver vi på formen $Ax = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nollrummet till matrisen är alltså $span(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

5 modul 5

5.1 Teori

5.2 Uppgifter att börja med

6 modul 6

6.1 Teori

6.2 Uppgifter att börja med