

SF1624 - Algebra och geometri

detaljerade lösningar till rekommenderade uppgifter

work in progress, hämta senaste versionen på
<https://github.com/simon-rosen/linalg-2022>

October 2022

Innehåll

1	modul 1	2
1.1	Teori	2
1.2	Uppgifter att börja med	3
2	modul 2	7
2.1	Teori	7
2.2	Uppgifter att börja med	7
3	modul 3	8
3.1	Teori	8
3.2	Uppgifter att börja med	8
4	modul 4	8
4.1	Teori	8
4.2	Uppgifter att börja med	8
5	modul 5	9
5.1	Teori	9
5.2	Uppgifter att börja med	9
6	modul 6	9
6.1	Teori	9
6.2	Uppgifter att börja med	9

1 modul 1

1.1 Teori

Vektorerna och punkterna i dessa exempel är tre dimensioner (R^3). Men formelerna fungerar på liknande sätt för en godtycklig dimension (R^n).

Formel 1 (vektoraddition)

Two vektorer $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adderas såhär:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Kom ihåg att $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v}$

Formel 2 (vektormultiplikation med ett tal)

Ett tal t och en vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ multipliceras såhär:

$$t \cdot \vec{u} = (t \cdot u_1, t \cdot u_2, t \cdot u_3)$$

Formel 3 Längden $|\vec{v}|$ av en vektor $\vec{v} = (x, y, z)$ fås genom:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Formel 4 En enhetsvektor $\vec{e}_{\vec{v}}$ i samma riktning som en vektor \vec{v} fås genom:

$$\vec{e}_{\vec{v}} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

Man skalar alltså om vektorn så att den får längd ett.

Formel 5 (skalärprodukt) Skalärprodukten av två vektorer $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

En annan formel som kan användas är:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\alpha)$$

Där α är vinkeln mellan vektorerna \vec{u} och \vec{v} . Denna formel är särskilt användbar om man vill räkna ut vinkeln mellan två vektorer.

Skalärprodukten av två vektorer är ett tal.

Formel 6 (kryssprodukt) Kryssprodukten av två vektorer $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)$$

En annan formel som kan användas för att beräkna kryssprodukten är

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\alpha)$$

Där α är vinkeln mellan \vec{u} och \vec{v} .

En viktig egenskap kryssprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$ är att den är en vektor som är ortogonal mot båda vektorerna \vec{u} och \vec{v} .

Formel 7 Storleken av kryssprodukten av två vektorer \vec{u} och \vec{v} är

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\alpha)$$

Där α är vinkeln mellan \vec{u} och \vec{v} .

Formel 8 En linje kan beskrivas med en parameterframställning om man har en punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$ och en vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ som pekar i linjens riktning (som man skalar om med ett tal $t \in \mathbb{R}$ för att kunna komma till alla punkter på linjen)

$$L = P + t \cdot \vec{v} = (p_1, p_2, p_3) + t \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

1.2 Uppgifter att börja med

1.

Rent intuitivt borde det finnas två stycken enhetsvektorer parallella till $(3, -4)$, en som pekar åt samma håll och en som pekar åt motsatt håll.

Dessa kan beräknas med hjälp av formel 4:

$$\vec{e}_{\vec{v}} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} =$$

Och med formel 3:

$$= \frac{1}{\pm \sqrt{3^2 + (-4)^2}} \cdot (3, -4) = \pm \frac{1}{5} \cdot (3, -4)$$

Här kan man nöja sig eller så kan man utveckla ytterligare till:

$$\vec{e}_{\vec{v}} = \pm \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right)$$

Notera att det finns två stycken lösningar.

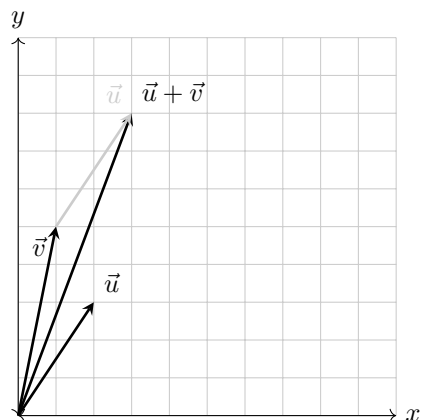
2.

a)

Använder formel 1:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) + (1, 5) = (2 + 1, 3 + 5)$$

Bild:



b)

Använder först formel 2:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{v} = (2, 3) + (-1, -5)$$

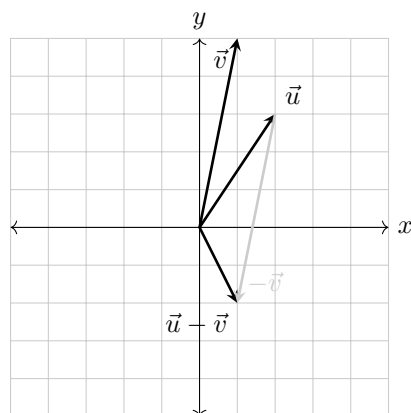
Nu är det lätt att använda formel 1:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) + (-1, -5) = (1, -2)$$

Det här var en övertydlig lösning, enklare skulle vara att bara göra såhär direkt:

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1, 3 - 5) = (1, -2)$$

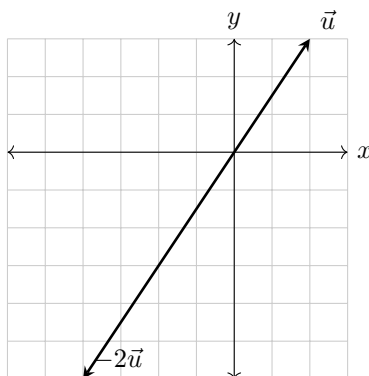
Bild:



c)

Använder formel 2:

$$-2\vec{u} = (-2 \cdot 2, -2 \cdot 3) = (-4, -6)$$



3.

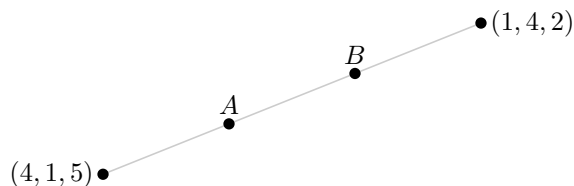
Vi vill beräkna skalärprodukten $\vec{u} \cdot \vec{u}$. För att göra detta använder vi den första varianten av formel 5:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (1, 2, 3) \cdot (1, 2, 3) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1 + 4 + 9 = 14$$

Notera att $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = |\vec{u}|^2$.

4.

Den här uppgiften är enklare än den verkar. A och B ligger på en linje mellan $(4, 1, 5)$ och $(1, 4, 2)$ och de delar upp den här linjen i tre delar. Det kan se ut såhär:



En metod för att bestämma A och B är:

1. Välj en startpunkt.
2. Ta fram en vektor som går mellan punkterna.
3. börja vid startpunkten och skala om vektorn så att den når till punkt A respektive B .

Jag väljer $(1, 4, 2)$ som startpunkt. En vektor mellan $(1, 4, 2)$ och $(4, 1, 5)$ är

$$(4, 1, 5) - (1, 4, 2) = (3, -3, 3)$$

A ligger en tredjedel från A till B och blir alltså

$$(1, 4, 2) + \frac{1}{3} \cdot (3, -3, 3) = (1, 4, 2) + (1, -1, 1) = (2, 3, 3)$$

Och B som ligger två tredjedelar från A till B blir

$$(1, 4, 2) + \frac{2}{3} \cdot (3, -3, 3) = (1, 4, 2) + (2, -2, 2) = (3, 2, 4)$$

5.

Kom ihåg att enhetsvektorer är vektorer av längd ett och att ortogonal betyder vinkelrät (dvs två vektorer är ortogonala om vinkeln mellan dem är 90° eller $\frac{\pi}{2}$ radiener).

Det här är ett typiskt tillfälle där kryssprodukten (formel 6) är användbar, eftersom att den ger just en vektor som är ortogonal mot de vektorer man tar kryssprodukten av. Jag tar fram den direkt med hjälp av formel 6

$$(2, -6, -3) \times (4, 3, -1) = (6 - (-9), -12 - (-2), 6 - (-24)) = (15, -10, 30)$$

Längden av den här vektorn tas fram med 3 och är $\sqrt{15^2 + (-10)^2 + 30^2} = \sqrt{1225}$. En av de enhetsvektorer vi söker är alltså enligt formel 4

$$\frac{1}{\sqrt{1225}} \cdot (15, -10, 30)$$

. Den andra pekar åt motsatt håll och är alltså

$$\frac{-1}{\sqrt{1225}} \cdot (15, -10, 30)$$

Man skulle kunna förenkla ytterligare om man vill för $\sqrt{1225} = 35$ (vilket inte alls är uppenbart om man saknar miniräknare)

$$\frac{1}{\sqrt{1225}} \cdot (15, -10, 30) = \frac{1}{35} \cdot (15, -10, 30) = \frac{1}{7} \cdot (3, -2, 6)$$

lösning saknas till uppgift 6

7.

Vi vill skapa en parameterframställning med formel 8. En vektor som går från $(1, 0, -1)$ till $(2, 3, -5)$ är

$$(2, 3, -5) - (1, 0, -1) = (1, 3, -4)$$

En möjlig parameterframställning är alltså

$$L = (1, 0, -1) + t \cdot (1, 3, -4)$$

Där $t \in \mathbb{R}$

lösning saknas till uppgift 8

lösning saknas till uppgift 9

lösning saknas till uppgift 10
lösning saknas till uppgift 11
lösning saknas till uppgift 12
lösning saknas till uppgift 13
lösning saknas till uppgift 14
lösning saknas till uppgift 15
lösning saknas till uppgift 16
lösning saknas till uppgift 17
lösning saknas till uppgift 18
lösning saknas till uppgift 19
lösning saknas till uppgift 20
lösning saknas till uppgift 21
lösning saknas till uppgift 22
lösning saknas till uppgift 23
lösning saknas till uppgift 24
lösning saknas till uppgift 25
lösning saknas till uppgift 26

2 modul 2

2.1 Teori

2.2 Uppgifter att börja med

lösning saknas till uppgift 1
lösning saknas till uppgift 2
lösning saknas till uppgift 3
lösning saknas till uppgift 4
lösning saknas till uppgift 5
lösning saknas till uppgift 6
lösning saknas till uppgift 7
lösning saknas till uppgift 8
lösning saknas till uppgift 9
lösning saknas till uppgift 10
lösning saknas till uppgift 11
lösning saknas till uppgift 12
lösning saknas till uppgift 13
lösning saknas till uppgift 14
lösning saknas till uppgift 15
lösning saknas till uppgift 16
lösning saknas till uppgift 17
lösning saknas till uppgift 18
lösning saknas till uppgift 19
lösning saknas till uppgift 20
lösning saknas till uppgift 21

lösning saknas till uppgift 22

3 modul 3

3.1 Teori

3.2 Uppgifter att börja med

lösning saknas till uppgift 1
lösning saknas till uppgift 2
lösning saknas till uppgift 3
lösning saknas till uppgift 4
lösning saknas till uppgift 5
lösning saknas till uppgift 6
lösning saknas till uppgift 7
lösning saknas till uppgift 8
lösning saknas till uppgift 9
lösning saknas till uppgift 10
lösning saknas till uppgift 11
lösning saknas till uppgift 12
lösning saknas till uppgift 13
lösning saknas till uppgift 14
lösning saknas till uppgift 15
lösning saknas till uppgift 16
lösning saknas till uppgift 17
lösning saknas till uppgift 18
lösning saknas till uppgift 19

4 modul 4

4.1 Teori

4.2 Uppgifter att börja med

lösning saknas till uppgift 1
lösning saknas till uppgift 2
lösning saknas till uppgift 3
lösning saknas till uppgift 4
lösning saknas till uppgift 5
lösning saknas till uppgift 6
lösning saknas till uppgift 7
lösning saknas till uppgift 8
lösning saknas till uppgift 9
lösning saknas till uppgift 10

lösning saknas till uppgift 11
lösning saknas till uppgift 12
lösning saknas till uppgift 13
lösning saknas till uppgift 14
lösning saknas till uppgift 15
lösning saknas till uppgift 16
lösning saknas till uppgift 17
lösning saknas till uppgift 18
lösning saknas till uppgift 19
lösning saknas till uppgift 20
lösning saknas till uppgift 21

5 modul 5

5.1 Teori

5.2 Uppgifter att börja med

lösning saknas till uppgift 1
lösning saknas till uppgift 2
lösning saknas till uppgift 3
lösning saknas till uppgift 4
lösning saknas till uppgift 5
lösning saknas till uppgift 6
lösning saknas till uppgift 7
lösning saknas till uppgift 8
lösning saknas till uppgift 9
lösning saknas till uppgift 10
lösning saknas till uppgift 11
lösning saknas till uppgift 12
lösning saknas till uppgift 13
lösning saknas till uppgift 14
lösning saknas till uppgift 15

6 modul 6

6.1 Teori

6.2 Uppgifter att börja med

lösning saknas till uppgift 1
lösning saknas till uppgift 2
lösning saknas till uppgift 3
lösning saknas till uppgift 4

lösning saknas till uppgift 5
lösning saknas till uppgift 6
lösning saknas till uppgift 7
lösning saknas till uppgift 8
lösning saknas till uppgift 9
lösning saknas till uppgift 10
lösning saknas till uppgift 11
lösning saknas till uppgift 12
lösning saknas till uppgift 13
lösning saknas till uppgift 14
lösning saknas till uppgift 15
lösning saknas till uppgift 16
lösning saknas till uppgift 17
lösning saknas till uppgift 18
lösning saknas till uppgift 19