(4, 7)

**Öv. 10** (5) Delrummet $W$ i $\mathbb{R}^5$ ges som lösningsrummet till det linjära ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Bestäm en ON-BAS för $W$ och skriv vektorn $\vec{x} = (1,1,1,0,1)$ som en summa av två vektorer, den ena i $W$ och den andra i $W^\perp$.

i) Hitta $W$, via lösningsrummet till ekv. sys

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot 4 \quad (-1) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(-\tfrac{1}{3}\right) \cdot \tfrac{1}{3} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = s, \ s \in \mathbb{R} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi får att $W = \text{Span}\left\{ \overset{\bar{u}_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{\bar{u}_1}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$.

Undersök om $\bar{x} \in W$.

om inte $\bar{x} = \text{proj}_W(\bar{x}) + \bar{y}$

Övn 10 (5) ii) Bestäm en ON-bas för W

Sätt $\bar{v}_1 = \frac{\bar{u}_1}{|\bar{u}_1|} = \frac{(-1,0,0,0,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{u}_1$, $V_1 = \{\bar{v}_1\}$

Sätt $\bar{v}_2 = \frac{\mathrm{Perp}_{V_1}(\bar{u}_2)}{|\mathrm{Perp}_{V_1}(\bar{u}_2)|}$. $\mathrm{Perp}_{V_1}(\bar{u}_2) = \bar{u}_2 - \mathrm{Proj}_{V_1}(\bar{u}_2)$

$\mathrm{Proj}_{V_1}(\bar{u}_2) = (\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1)\cdot \bar{v}_1$

$\mathrm{Proj}_{V_1}(\bar{u}_2) = (-1,-1,1,0,0)\cdot(-1,0,0,0,1)\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \bar{v}_1$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,0,1) = \frac{1}{2}(-1,0,0,0,1)$.

$\mathrm{Perp}_{V_1}(\bar{u}_2) = (-1,-1,1,0,0) - \frac{1}{2}(-1,0,0,0,1)$

$= \left(\frac{-1}{2}, -1, 1, 0, \frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}(-1,-2,2,0,-1)$

$|\mathrm{Perp}_{V_1}(\bar{u}_2)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2+0^2+(-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

$\bar{v}_2 = \frac{\frac{1}{2}(-1,-2,2,0,-1)}{\frac{1}{2}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-2,2,0,-1)$

Då har vi en ON-bas för W

nämligen $W_{ON} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\0\\-1\end{bmatrix} \right\}$.

Om vi vill uttrycka $\bar{x}$ som en vektor i W och en vektor i $W^\perp$ kan vi dela upp den i komposanter genom att projicera $\bar{x}$ på $W_{ON}$.

$\mathrm{Proj}_{W_{ON}}(\bar{x}) = (\bar{x}\cdot\bar{v}_1)\cdot\bar{v}_1 + (\bar{x}\cdot\bar{v}_2)\cdot\bar{v}_2 = 0\cdot v_1 + \frac{-2}{\sqrt{10}}\cdot\bar{v}_2$

$= \frac{-2}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-2,2,0,-1) = \frac{1}{5}(-1,-2,2,0,-1)$. Då får vi

$\bar{x} = \mathrm{Proj}_{W_{ON}}(\bar{x}) + \bar{y}$ $\quad \bar{x} - \mathrm{proj}_{W_{ON}}(\bar{x}) = \bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}6\\7\\3\\0\\6\end{bmatrix}$

Så $\bar{x} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix}6\\7\\3\\0\\6\end{bmatrix}$.