Physik 421

Übung 12

Frederike Schrödel, Lino Lemmer, Simon Schlepphorst

12.1. Wasserstoffatom im Magnetfeld

1. Wir haben den Eigenzustand $|n l m_l m_s\rangle$ und den Energiewert E_n

Wie ändert sich der Eigenzustand und EW bei konstantem B_z

$$H' = H_{coulomb} - \mu B$$
$$= H_c - \frac{e}{2m_e} L - \frac{e}{m_e} S = H_c + \frac{e}{2m_e} L_z B_z + \frac{e}{m_e} S_z B_z$$

$$L_z |n l m_l m_s\rangle = m_l \hbar |n l m_l m_s\rangle$$

$$S_z |n l m_l m_s\rangle = m_s \hbar |n l m_l m_s\rangle$$

$$H' |n l m_l m_s\rangle = \left(\frac{e}{2m_e} B_z m_l \hbar + \frac{e}{m_e} B_z m_s \hbar + H\right) |n l m_l m_s\rangle$$

$\Rightarrow$ Die Eigenzustände ändern sich nicht, aber die Eigenwerte ändern sich von $-\frac{R_y}{n^2}$ zu $-\frac{R_y}{n^2} + \frac{e}{2m_e} B_z m_l \hbar + \frac{e}{m} m_s \hbar$

12.1.2.

$$\left.\begin{array}{l} l = 0, \dots, n-1 \\ m_l = -l, \dots, l \\ m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2$$

12.2.1

Gegeben ist $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{\rho})$

z: $[\hat{H}, \hat{L}_z] \overset{!}{=} 0$

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = \left[\left(\frac{1}{2m}\left(\cancel{\vec{p}_\rho^2} + \vec{p}_z^2 + \cancel{\left(\frac{1}{\rho^2}\left(-i\hbar\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right)}\right) + \cancel{V(\rho)}, \vec{L}_z\right]$$ Vertauscht mit allem was nicht von z abhängt

$$= \left[\frac{1}{2m} \vec{p}_z^2, \vec{L}_z\right] = \left[\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

$$= 0$$

z: $[\hat{H}, \hat{p}_z] \overset{!}{=} 0$

$$= \left[\frac{1}{2m}\left(\cancel{\vec{p}_\rho^2} + \vec{p}_z^2 + \cancel{\left(\frac{1}{\rho}\left(-i\hbar\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right)}\right) + \cancel{V(\rho)}, \vec{p}_z\right]$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\vec{p}_z^2, \vec{p}_z\right] = 0$$

12.2.2 $\hat{H}\,\Phi = E\,\Phi$

$$\left(\frac{\hat{P}^2}{2m_e} + V(\varrho)\right)\phi = E\,\phi$$

$$\frac{1}{2m_e}\left(\hat{P}_\varrho^2 + \hat{P}_z^2 + \frac{1}{\varrho^2}\hat{L}_z^2\right)\phi = (E - V(\varrho))\,\phi \qquad \Big|\ \hat{L}_z^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\left(-\left(2m_e(E-V(\varrho)) - \hat{P}_\varrho^2 - \hat{P}_z^2\right)\frac{\varrho^2}{\hbar}\right)\phi = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,\phi$$

$$\left(-\frac{\varrho^2}{\hbar}\left(2m_e(E-V(\varrho)) - \hat{P}_\varrho^2 - \hat{P}_z^2\right)\right) f_{nm}(\varrho)e^{im\varphi}e^{ikz} = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\, f_{nm}(\varrho)e^{im\varphi}e^{ikz}$$

$$\left(-\frac{\varrho^2}{\hbar}\left(2m_e(E-V(\varrho)) - \hat{P}_\varrho^2 + \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right) f_{nm}(\varrho)e^{im\varphi}e^{ikz} = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\, f_{nm}(\varrho)e^{im\varphi}e^{ikz}$$

$$\left(-\frac{\varrho^2}{\hbar}\left(2m_e(E-V(\varrho)) - \hat{P}_\varrho^2\right)\right) f_{nm}(\varrho)\cancel{e^{im\varphi}e^{ikz}} - \hbar^2k^2 f_{nm}(\varrho)\cancel{e^{im\varphi}e^{ikx}}$$

$$= -m^2 f_{nm}(\varrho)\cancel{e^{im\varphi}e^{ikx}}$$

$$\hbar\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} f_{nm}(\varrho) = \left(-m^2 + \hbar^2k^2 + \frac{\varrho^2}{\hbar}\left(2m_e(E-V(\varrho))\right)\right) f_{nm}(\varrho)$$

12.3.3

$$[\hat{H}, \hat{\Sigma}_y] = \left[\frac{1}{2m}\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \hat{\Sigma}_y\right] = \frac{1}{2m\varrho^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \hat{\Sigma}_y\right]$$

$$= \frac{1}{2m\varrho^2}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Sigma_y\,\Psi(\varrho,-\varphi,z)\right) - \Sigma_y\,\partial_z^2\,\Psi(\varrho,\varphi,z)\right)$$

$$= \frac{1}{2m\varrho^2}\left(\left(\partial_z^2\,\Psi(\varrho,-\varphi,z)\right) - \partial_z^2\,\Psi(\varrho,-\varphi,z)\right) = 0$$

$\hat{H}$ und $\hat{\Sigma}_y$ kommutieren also, Ψ ist eine Testfunktion.

z.z. $\{\hat{\Sigma}_y, \hat{L}_z\} \overset{!}{=} (\hat{\Sigma}_y\hat{L}_z + \hat{L}_z\hat{\Sigma}_y) \overset{!}{=} 0$

$$= (\hat{\Sigma}_y\hat{L}_z + \hat{L}_z\hat{\Sigma}_y)\,\Psi(\varrho,\varphi,z)$$

$$= \hat{\Sigma}_y\hat{L}_z\,\Psi(\varrho,\varphi,z) + \hat{L}_z\hat{\Sigma}_y\,\Psi(\varrho,\varphi,z)$$

$$= \hat{\Sigma}_y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\Psi(\varrho,\varphi,z) + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\Psi(\varrho,-\varphi,z)$$

$$= \hat{\Sigma}_y\left(-i\hbar\,\partial_z\,\Psi(\varrho,\varphi,z)\right) + \left(i\hbar\,\partial_z\,\Psi(\varrho,-\varphi,z)\right)$$

$$= -i\hbar\,\partial_z\,\Psi(\varrho,\varphi,z) + i\hbar\,\partial_z\,\Psi(\varrho,\varphi,z) = 0 \quad \square$$

z.z. $\hat{L}_z\left(\hat{\Sigma}_y|\phi_{nmk}\rangle\right) = \lambda\left(\hat{\Sigma}_y|\phi_{nmk}\rangle\right)$ | aus antikommutation

$$-\hat{\Sigma}_y\left(\hat{L}_z|\phi_{nmk}\rangle\right) = \hbar m\left(-\hat{\Sigma}_y|\phi_{nmk}\rangle\right)$$

$$= -\hbar m\left(\hat{\Sigma}_y|\phi_{nmk}\rangle\right)$$

Also ist $\hat{\Sigma}_y|\phi\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{L}_z$ mit Eigenwert $-\hbar m$

12.3.1

$$\frac{i}{\hbar}[H, \hat{r}\cdot\hat{p}] = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega\hat{r}^2, \hat{r}\cdot\hat{p}\right]$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{r}\cdot\hat{p}\right] + \left[\frac{1}{2}m\omega\hat{r}^2, \hat{r}\cdot\hat{p}\right]\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2m}[p_n p_n, r_m p_m] + \frac{1}{2}m\omega[r_l r_l, r_k p_k]\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2m}\left(p_n[p_n, r_m p_m] + [p_n, r_m p_m]p_n\right) + \frac{1}{2}m\omega\left(r_l[r_l, r_k p_k] + [r_l, r_k p_k]r_l\right)\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2m}\left(p_n\underbrace{[p_n, r_m]}_{i\hbar\delta_{nm}}p_m - \underbrace{[p_n, r_m]}_{i\hbar\delta_{nm}}p_n p_m\right) + \frac{1}{2}m\omega\left(r_l\underbrace{[r_l, p_k]}_{i\hbar\delta_{lk}}r_k + \underbrace{[r_l, p_k]}_{i\hbar\delta_{lk}}r_l r_k\right)\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(\frac{i\hbar}{m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega(2i\hbar\hat{r}^2)\right)$$

$$= -\frac{\hat{p}^2}{m} + m\omega\hat{r}^2 = -2\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega r^2\right)$$

12.3.2

$$\langle\psi|[\hat{H}, \hat{r}\cdot\hat{p}]|\psi\rangle \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \langle\psi|\hat{H}\hat{r}\cdot\hat{p} - \hat{r}\cdot\hat{p}\hat{H}|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\hat{H}\hat{r}\cdot\hat{p}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{r}\cdot\hat{p}\hat{H}|\psi\rangle$$

$$= E\langle\psi|\hat{r}\cdot\hat{p}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{r}\cdot\hat{p}E|\psi\rangle$$

$$= E(\langle\psi|\hat{r}\cdot\hat{p}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{r}\cdot\hat{p}|\psi\rangle) = 0$$

12.3.3

$$0 = \langle\psi| -2\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega r^2\right)|\psi\rangle$$

$$= -2\langle\psi|T - V|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|T|\psi\rangle - \langle\psi|V|\psi\rangle$$

$$= \langle T\rangle - \langle V\rangle$$

$n = 1$

vorher

$-R_y$

nachher

$-R_y + \frac{e}{m} \frac{1}{2} B_z \hbar$

$-R_y - \frac{e}{m} \frac{1}{2} B_z \hbar$

$n = 2$:

$-\frac{R_y}{4}$

$-\frac{R_y}{4} + \frac{e}{2m} \hbar B_z \cdot *$

$\lvert 2\,0\,0\,0\,\tfrac{1}{2}\rangle$	1
$\lvert 2\,0\,0\,0\,-\tfrac{1}{2}\rangle$	-1
$\lvert 2\,1\,1\,1\,\tfrac{1}{2}\rangle$	2
$\lvert 2\,1\,1\,1\,-\tfrac{1}{2}\rangle$	0
$\lvert 2\,1\,1\,-1\,\tfrac{1}{2}\rangle$	0
$\lvert 2\,1\,1\,-1\,-\tfrac{1}{2}\rangle$	-2
$\lvert 2\,1\,1\,0\,\tfrac{1}{2}\rangle$	1
$\lvert 2\,1\,1\,0\,-\tfrac{1}{2}\rangle$	-1

$\underline{n=3}$: $\frac{-R_y}{9}$

$\lvert 3\,0\,0\,+\rangle$	1
$\lvert 3\,0\,0\,-\rangle$	-1
$\lvert 3\,1\,1\,+\rangle$	2
$\lvert 3\,1\,1\,-\rangle$	0
$\lvert 3\,1\,0\,+\rangle$	1
$\lvert 3\,1\,0\,-\rangle$	-1
$\lvert 3\,1\,-1\,+\rangle$	0
$\lvert 3\,1\,-1\,-\rangle$	-2
$\lvert 3\,2\,2\,+\rangle$	3
$\lvert 3\,2\,2\,-\rangle$	1
$\lvert 3\,2\,1\,+\rangle$	2
$\lvert 3\,2\,1\,-\rangle$	0
$\lvert 3\,2\,0\,+\rangle$	1
$\lvert 3\,2\,0\,-\rangle$	-1
$\lvert 3\,2\,-1\,+\rangle$	0
$\lvert 3\,2\,-1\,-\rangle$	-2
$\lvert 3\,2\,-2\,+\rangle$	-1
$\lvert 3\,2\,-2\,-\rangle$	-3

3	1
2	2
1	4
0	4
-1	4
-2	2
-3	1