Quantenmechanik, Blatt 6

Frederike Schrödel Heike Herr Jan Weber Simon Schlepphorst

2015-05-18

1. Operatoren - Formalismus

1.a.

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_1$ sind: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu Eigenwert 1 und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu Eigenwert -1.

  Es gilt:

  $$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  (✓)

  nicht normiert: $|+\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  $|-\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_2$ sind: $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ zu Eigenwert -1 und $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ zu Eigenwert 1.

  Es gilt:

  $$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

  (✓)

- Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_3$ sind: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu Eigenwert 1 und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu Eigenwert -1.

  Es gilt:

  $$|\psi\rangle = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  ✓

- Mittelwert von $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|\hat{\sigma}_1|\psi\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle\psi|\hat{\sigma}_2|\psi\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle\psi|\hat{\sigma}_3|\psi\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1$$ ✓

eleganter in Dirac Notation (wenn auch nicht kürzer).

1.b.

Ja, die Matrizen $\hat{A}$ und $\hat{B}$ sind hermitesch:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \hat{A}^\dagger \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix}0 & i & 0\\-i & 0 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \hat{B}^\dagger$$ ✓ ✓

Die Eigenwerte von $\hat{A}$ sind 1 und -1 und möglichen Eigenvektorbasis $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, wobei die ersten beiden Vektoren den Eigenraum zum Eigenwert 1 aufspannen und der dritte den zum Eigenwert -1 (ablesbar, da Diagonalmatrix). ✓

Die Eigenwerte von $\hat{B}$ sind auch 1 und -1 und eine mögliche Eigenvektorbasis ist $\left(\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Diese kann man ablesen, da $\hat{B}$ sich aufteilt in $-\hat{\sigma}_2$ und -1 auf der Diagonalen. Daher entsprechen die Eigenwerte den negativen von $\hat{\sigma}_2$ und -1. ✓

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 werden aufgespannt durch den Eigenvektoren von $\hat{\sigma}$ zum Eigenwert -1 mit einer zusätzlichen 0 als dritten Eintrag und die Eigenvektoren von $\hat{B}$ zum Eigenwert -1 werden aufgespannt von dem Eigenvektor von $\hat{\sigma}_2$ zum Eigenwert 1 mit zusätzlicher 0 als dritten Eintrag und dem dritten Eigenvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, der dem letzten Diagonaleintrag entspricht.

Da die beiden Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_2$ orthogonal zueinander sind und der dritte Vektor in der Basis offensichtlich orthogonal zu den anderen beiden ist, ist die Basis eine Orthogonalbasis. Wir erhalten eine Orthonormalbasis durch Normierung:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$ ✓

Somit erhalten wir die Spektralzerlegung von $\hat{B}$:

$$\begin{aligned}\hat{B} &= 1\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i & 0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i & 0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= 1\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i & 0\\-i & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\i & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

1.c.

Wir wissen aus der linearen Algebra, dass $\hat{B}$ Diagonalform hat nach konjugieren mit einer Basistransformation zu einer Basis von Eigenvektoren zu $\hat{B}$. Weiter wissen wir auch, dass die Basistransformation zwischen Orthonormalbasen eine unitäre Transformation ist, als auch dass von unitären invertierbaren Matrizen das Inverse die konjugierte transponierte Matrix ist. Somit erfüllt

$$\hat{U} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

das gewünschte (die Spalten von $\hat{U}$ sind die orthonormierte Eigenvektorbasis von $\hat{B}$).

1.d.

Ja, $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren, da $\hat{A}$ sich aufteilt in die Einheitsmatrix $\hat{I}_2$ und -1 auf der Diagonalen. Die Einheitsmatrix kommutiert mit $-\hat{\sigma}_2$, da es eine Einheitsmatrix ist, und -1 kommutiert mit -1, da die Matrizen gleich sind (als auch beide diagonal).

2. Projektoren

Gegeben ist eine Hilbert-Basis durch $|n\rangle$, $(n = 1, ..., N)$ im Hilbertraum H. Der zugehörige Projektor ist gegeben durch $\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|$. Es sollen mehrere Eigenschaften von $\hat{P}_n$ gezeigt werden.

2.a.

Es soll gezeigt werden, dass $\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n$ ist:

$$\begin{aligned}\hat{P}_n^2 &= (|n\rangle\langle n|)^2\\ &= |n\rangle\underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1}\langle n|\\ &= |n\rangle\langle n|\\ &= \hat{P}_n\end{aligned}$$

2.b.

Es soll gezeigt werden, dass $\sum_{n=1}^{N} \hat{P}_n = \hat{I}$, wobei $\hat{I}$ die Identität von H ist. Sei $|x\rangle$ ein Zustand in H. Dann kann dieser in der Basis $|n\rangle$ geschrieben werden als $\sum_{n=1}^{N} c_n |n\rangle$. Wendet man die Summe aller Projektoren auf diesen Zustand an, so folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \hat{P}_n |x\rangle &= \sum_{n=1}^{N} |n\rangle \langle n| \sum_{m=1}^{N} c_m |m\rangle \\ &= \sum_{n,m=1}^{N} c_m |n\rangle \underbrace{\langle n|m\rangle}_{=\delta_{nm}} \\ &= \sum_{n=1}^{N} c_n |n\rangle \\ &= |x\rangle \quad ✓\end{aligned}$$

2.c.

Gegeben sind die beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es soll gezeigt werden, dass diese Projektoren sind, also als $|n\rangle \langle n|$ geschrieben werden können. Offensichtlich gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n$ und $\sum_n P_n = \mathbb{1}$ zeigen

und

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die beiden Matrizen projizieren also auf die Zustände $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, welche eine Basis eines 2-Niveau-Systems bilden.

Ihre Unterräume sind $\left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} | k \in \mathbf{C} \right\}$ und $\left\{ k' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} | k' \in \mathbf{C} \right\}$. ✓

2.d.

Gegeben ist die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Es soll überprüft werden ob diese ein Projektor ist.
Man sieht:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die Matrix projiziert also auf den Zustand $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Der zugehörige Unterraum ist $\left\{ k \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} | k \in \mathbf{C} \right\}$. ✓

+2

3. Matrixdarstellung von Operatoren

3.a.

Die gesuchte Matrix ist:

berechnen über $\langle i | A | j \rangle = A_{ij}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & +\mathrm{i} & \gamma \end{pmatrix}$$

A_{23}

$\mathrm{i} = A_{32}$

$\langle 3 | \hat{A} | 2 \rangle = \langle 3 | (\beta |1\rangle + \mathrm{i} |3\rangle) = \mathrm{i} \langle 3 | 3 \rangle = \mathrm{i}$

3.b.

Damit $\hat{A}$ hermitesch ist muss gelten:

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger$$

Das ist gegeben für $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^* = \beta$. ✓

3.c.

Im folgenden wird $\alpha = \beta = 0$ gesetzt und die Matrix $\hat{A}$ genutzt.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & \gamma \end{pmatrix}$$

Es sind die Eigenvektoren zu bestimmen.

$$\det\left(\hat{A}-\lambda\mathbb{1}\right)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & \mathrm{i}\\ 0 & -\mathrm{i} & \gamma-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-5)\left(\lambda-\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+4}\right)\right)\left(\lambda-\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+4}\right)\right)\stackrel{!}{=}0$$

Setze $\gamma_\pm\equiv-\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma\pm\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\gamma^2+4}$. Damit ergeben sich die normierten Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Berechnung ?

$$\boldsymbol{v}_2=\frac{1}{\sqrt{1+|\gamma_+|^2}}\begin{pmatrix}0\\ \gamma_+\\ 1\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{v}_3=\frac{1}{\sqrt{1+|\gamma_-|^2}}\begin{pmatrix}0\\ \gamma_-\\ 1\end{pmatrix}$$

3.d.

$$\langle\hat{A}\rangle=\langle\psi^*|\hat{A}|\psi\rangle=\begin{pmatrix}a^* & b^* & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{i}\\ 0 & -\mathrm{i} & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ 0\end{pmatrix}$$
$$=5\,|a|^2$$

Schöner in Dirac Notation!

3.e.

Das System befinde sich im Zustand $|\psi\rangle$. Misst man den Operator $\hat{A}$, so können als Ergebnis nur die Eigenwerte von $\hat{A}$ auftreten. Die Wahrscheinlichkeit diese zu messen ist gegeben durch

$$P(v_1) = \left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2$$
$$= |a|^2$$
$$P(v_2) = \frac{1}{1+|\gamma_+|^2} \left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_+ \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$
$$= \frac{|b\gamma_+|^2}{1+|\gamma_+|^2}$$
$$P(v_3) = \frac{1}{1+|\gamma_-|^2} \left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_- \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$
$$= \frac{|b\gamma_-|^2}{1+|\gamma_-|^2}$$

hässliche Schreibweise ...
und übrigens falsch!

3.f.

Da $\hat{A}$ auf alle drei Zustände abbildet kann das System entweder im Zustand $|1\rangle$ oder einer Überlagerung von $|2\rangle$ und $|3\rangle$ sein, je nachdem welcher Eigenwert von $\hat{A}$ gemessen worden ist.

bzw. einfach in einen Eigenzustand von A der gemessen wurde!
da $|i\rangle$, $i=1,2,3$ keine Eigenzustände.

4. Zwei-Niveau System

4.a.

Betrachtet wird $\hat{H} = A\hat{\sigma}_3, A \in \mathbf{R}$. Es soll der Zeitentwicklungsoperator als Linearkombination von $\hat{I}$ und $\hat{\sigma}_i$ dargestellt werden.
Es gilt:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

Der Zeitentwicklungsoperator ist gegeben durch:

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{A}{\hbar}\hat{\sigma}_3 t}$$

Setzte $x \equiv \frac{A}{\hbar}t$. Die Exponentialfunktion ist durch die Reihenentwicklung gegeben:

$$
\begin{aligned}
e^{-i\frac{A}{\hbar}\hat{\sigma}_3 t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix\hat{\sigma}_3)^n}{n!} \\
&= \hat{I} - ix\hat{\sigma}_3 - \frac{x^2}{2}\hat{I} + i\frac{x^3}{6}\hat{\sigma}_3 + \frac{x^4}{24}\hat{I} - i\frac{x^5}{120}\hat{\sigma}_3 + \mathbb{O}\left(x^6\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathbb{O}\left(x^6\right)\right)\hat{I} - i\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathbb{O}\left(x^7\right)\right)\hat{\sigma}_3 \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\hat{I} - i\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\hat{\sigma}_3 \\
&= \cos(x)\hat{I} - i\sin(x)\hat{\sigma}_3 \\
&= \cos\left(\frac{A}{\hbar}t\right)\hat{I} - i\sin\left(\frac{A}{\hbar}t\right)\hat{\sigma}_3 \quad ✓
\end{aligned}
$$

+1

insgesamt 7/8