22.05
Theo-Vl

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \frac{1}{2}\underbrace{[\hat{X}, -i\hat{P}]}_{=1} + \frac{1}{2}\underbrace{[i\hat{P}, \hat{X}]}_{1}$$

$$= 1$$

Anzahloperator: $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - 1)$
mit

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}]$$
$$= \hat{a}^+[\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^+, \hat{a}]\hat{a}$$
$$= -\hat{a}$$

$$[\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+$$

Wir können schreiben

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{N} + \frac{1}{2} \quad , [\hat{\mathcal{H}}, \hat{N}] = 0$$

$\hat{\mathcal{H}}$ und $\hat{N}$ haben dieselben Eigenvektoren.
Die Eigenwerte ν von $\hat{N}$ sind nicht entartet und positive, ganz Zahlen oder Null.
Beweis in mehreren Schritten:

1. Die Eigenwerte ν sind positiv oder Null:
Sei $|\phi_\nu\rangle$ ein Eigenvektor.

$$0 \leq \| \hat{a} |\phi_\nu\rangle \|^2 = \langle\phi_\nu | \hat{a}^+\hat{a} | \phi_\nu\rangle$$
$$= \langle\phi_\nu | \hat{N} | \phi_\nu\rangle$$
$$= \nu \langle\phi_\nu | \phi_\nu\rangle$$

$$\Rightarrow 0 \leq \nu \| |\phi_\nu\rangle \|^2$$

$$\Rightarrow \nu \geq 0$$

2. $\hat{N}(\hat{a}|\phi_\nu\rangle) = (\nu-1)(\hat{a}|\phi_\nu\rangle)$, d. h. $\hat{a}|\phi_\nu\rangle$ ist auch ein Eigenvektor von $\hat{N}$ (oder der Nullvektor):

$$[\hat{N},\hat{a}] = -\hat{a} \iff \hat{N}\hat{a} = \hat{a}\hat{N} - \hat{a}$$

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{a}|\phi_\nu\rangle) &= (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|\phi_\nu\rangle \\ &= \hat{a}\nu|\phi_\nu\rangle - \hat{a}|\phi_\nu\rangle \\ &= (\nu-1)\hat{a}|\phi_\nu\rangle \end{aligned}$$

analog: $\hat{N}(\hat{a}^+|\phi_\nu\rangle) = (\nu+1)\hat{a}^+|\phi_\nu\rangle$

3. Die Eigenwerte von $\hat{N}$ sind Elemente von $\mathbb{N}$.

Sei $|\phi_\nu\rangle$ der Eigenvektor des Eigenwerts ν:

$$|\phi_\nu\rangle, \hat{a}|\phi_\nu\rangle, \hat{a}^2|\phi_\nu\rangle, \dots$$

sind Eigenvektoren zu $\nu, \nu-1, \nu-2, \dots$

Da die Eigenwerte positiv sind, gibt es einen minimalen Wert ν_{min}:

$$0 = \|\hat{a}|\phi_{\nu_{min}}\rangle\|^2 = \nu_{min}\langle\phi_{\nu_{min}}|\phi_{\nu_{min}}\rangle$$

$\Rightarrow \nu_{min} = 0$

Wegen 2. müssen dann die Eigenwerte positiv, ganze Zahlen oder Null sein.

Die Eigenwerte von $\hat{\mathcal{H}}$ des harm. Oszillators sind:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega(\hat{N} + \tfrac{1}{2}) \qquad \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2}),\ n \in \mathbb{N}$$

Eigenvektoren:

Nullvektor $|0\rangle$ (Vakuumzustand)

Es ist

$$\hat{\mathcal{H}}\,|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \quad , \quad \hat{N}\,|0\rangle = 0$$

$$\hat{a}\,|0\rangle = 0 \quad , \quad (\hat{X} + i\hat{P})\,|0\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right)\varphi_0(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left(m\omega x + \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_0(x) = c_0\, e^{-m\omega\frac{x^2}{2\hbar}}$$

angeregte Zustände:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n\,|0\rangle$$

in der Sprache der Wellenflkt.:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right.$$

Die Eigenniveaus sind nicht entartet:

Bew.:

Sei $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ ein nicht entartetes Niveau und $|n\rangle$ der Eigenzustand. Sei $|\varphi_{n+1}\rangle$ der Eigenvektor mit Eigenwert E_{n+1}.

Wir wollen zeigen, dass E_{n+1} nicht entartet ist:

$$\hat{a}\,|\varphi_{n+1}\rangle = \gamma\,|n\rangle \quad , \text{ da } |n\rangle \text{ nicht entartet ist}$$

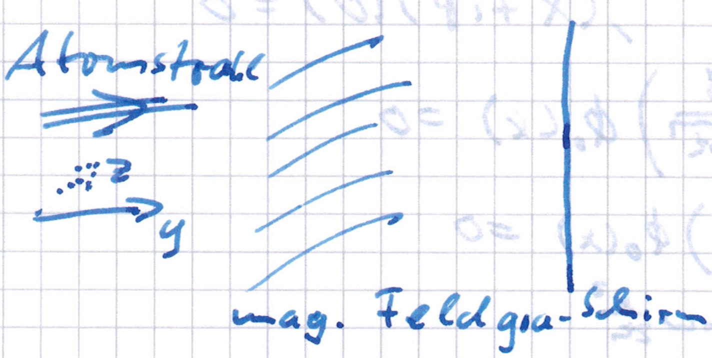
$$\hat{a}^+\hat{a}\,|\varphi_{n+1}\rangle = \gamma\,\hat{a}^+|n\rangle$$

$$\hat{N}\,|\varphi_{n+1}\rangle = (n+1)\,|\varphi_{n+1}\rangle$$

$\Rightarrow |\Phi_{n+1}\rangle = \frac{\gamma}{n+1} \hat{a}^\dagger |n\rangle$ eindeutig definiert

Setze: $|\Phi_{n+1}\rangle \equiv |n+1\rangle$

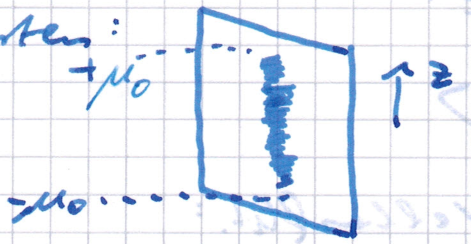
VIII Das Stern-Gerlach-Experiment



Klassische Analyse: Keine Lorentzkraft, da neutrale Atome, aber:

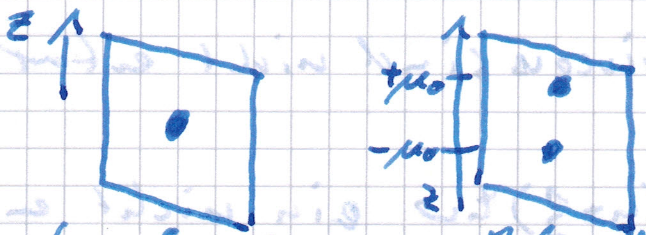
$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$\Rightarrow$ Erwarten:



falls die Atome anfangs zufällige Richtungen haben

Experimentelles Ergebnis:



ohne Grad. (oder für He) — mit Grad. für Silber

$$\mu_0 = \frac{\hbar |e|}{2 m_e}$$ Bohr-Magneton

Für andere Atome findet man 3, 4, ... Flecken

Quantenmechanische Beschreibung:
Man assoziert einen internen Freiheitsgrad mit den Atomen:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ext} \otimes \mathcal{H}_{int}$$

Hilbertraum L^2 Tensorprodukt

Man interpretiert das Experiment als Messungen der Observablen $\hat{\mu}_z$ "magn. Moment d. Atoms in z-Richtung".
Zwei Flecken bei $\pm\mu_0 \rightsquigarrow$ mindestens zwei Eigenwerte von $\hat{\mu}_z$ mit $\pm\mu_0$ mit zugehörigen Eigenvektoren $|+\rangle_z$, $|-\rangle_z$.
Wir nehmen daher diese minimale Dimension $n=2$ an.
Dann bilden $|+\rangle_z, |-\rangle_z$ eine Basis $\mathcal{H}_{int}$ und jeder Zustand kann geschrieben werden als

$$|\mu\rangle = \alpha\,|+\rangle_z + \beta\,|-\rangle_z$$

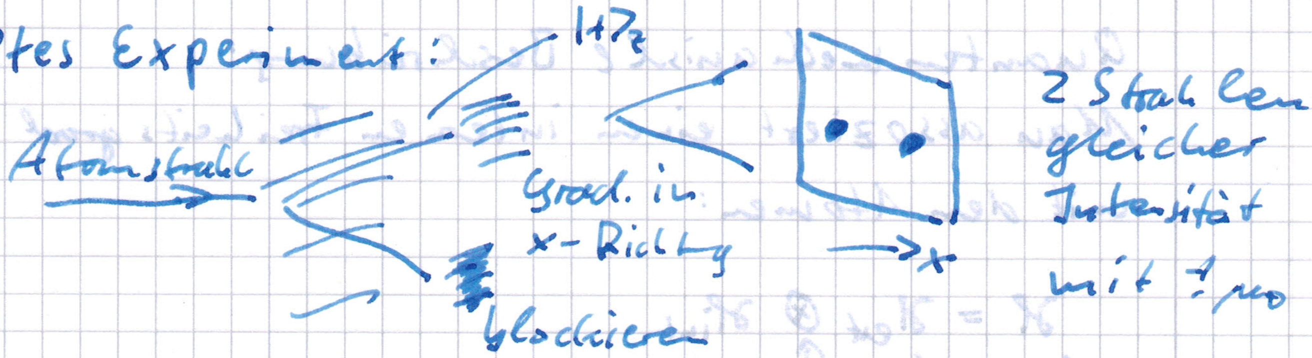
mit $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$.
Eine Messung von $\hat{\mu}_z$ gibt:

$$\begin{matrix}\mu_0 \\ -\mu_0\end{matrix} \quad \text{mit Wahrsch.} \quad \begin{matrix}|\alpha|^2 \\ |\beta|^2\end{matrix}$$

Wir können die Darstellung $|+\rangle_z = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|-\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$:

$$\hat{\mu}_z = \mu_0 \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \mu_0\,\hat{\sigma}_3 = \mu_0\,\hat{\sigma}_z$$

2tes Experiment:



Wir suchen $\hat{\mu}_x = \mu_0 \begin{pmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \gamma_x & \delta_x \end{pmatrix}_z$ ist hermitisch, also

$\alpha_x, \delta_x \in \mathbb{R}$
$\gamma_x = \beta_x^*$

Außerdem muss gelten:

$$\underbrace{{}_z\langle +| \hat{\mu}_x |+\rangle_z}_{\mu_0 \alpha_x} \underset{\uparrow}{=} 0$$

Beobachtung des Experiments

$\Rightarrow \alpha_x = 0$

Die 1te Messung aber in x-Richtung gibt die Eigenwerte $\pm\mu_0$:

Spur — $Tr(\hat{\mu}_x) = 0$

da die Spur unabh. von der Basis $|\pm\rangle_x$

$$\Rightarrow Tr(\hat{\mu}_x) = Tr\begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 \end{pmatrix}_x = \mu_0 \, Tr\begin{pmatrix} 0 & \gamma_x^* \\ \gamma_x & \delta_x \end{pmatrix}_z = \mu_0 \delta_x$$

$\Rightarrow \delta_x = 0$

Weiter ist die Determinante Basisunabh.:

$$Det \, \hat{\mu}_x = Det\begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 \end{pmatrix} = -\mu_0^2 \stackrel{!}{=} Det\begin{pmatrix} 0 & \mu_0 \gamma_x^* \\ \mu_0 \gamma_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\mu_0^2 \gamma_x \gamma_x^*$$

$\Rightarrow \gamma_x \gamma_x^* = 1$

$\Rightarrow \gamma_x^* = e^{-i\phi x}$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_x = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi x} \\ e^{i\phi x} & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenvektoren $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + e^{i\phi x}|-\rangle_z)$,
$|-\rangle_{\cancel{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle_z - e^{i\phi x}|-\rangle_z)$

Analog:

$$\hat{\mu}_y = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi x} \\ e^{i\phi x} & 0 \end{pmatrix}$$

Um einen Zusammenhang zwischen ϕ_x und ϕ_y zu finden machen wir Experiment 2 entlang x und y Richtung.

Also:

$$\langle +|_x \hat{\mu}_y |+\rangle_x = 0 = \frac{\mu_0}{2}\left(e^{i(\phi_x - \phi_y)} + e^{i(\phi_y - \phi_x)}\right)$$
$$= \mu_0 \cos(\phi_x - \phi_y)$$

$\Rightarrow \cos(\phi x - \phi_y) = 0$

$\Rightarrow \phi_x - \phi_y = \frac{\pi}{2} + n\pi$

Wähle $\phi_x = 0$, $\phi_y = \frac{\pi}{2}$.

Dann folgt:

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 \hat{\sigma}_x \qquad \hat{\mu}_y = \mu_0 \hat{\sigma}_y \qquad \hat{\mu}_z = \mu_0 \hat{\sigma}_z$$