Quantenmechanik, Blatt 1

Frederike Schrödel Jan Weber Simon Schlepphorst

2015-04-21

1. De Broglie Wellenlänge

Es soll die de Broglie Wellenlänge λ_{dB} berechnet werden.

Für diese gilt:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$$

Die kinetische Energie ist in erster Näherung ($E_{kin} << mc^2$) gegeben durch: Für diese gilt:

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \Leftrightarrow p = \sqrt{2mE_{kin}}$$

Es folgt:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}$$

1.a.

Zuerst von einem Elektron mit einer kinetischen Energie von 20 eV:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} \approx 2,743 \times 10^{-10}\mathrm{m}$$ ✓

1.b.

Nun von einem thermischen Neutron mit einer kinetischen Energie von 0,03 eV:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} \approx 1,652 \times 10^{-10}\mathrm{m}$$ ✓

+2

2. Zeitentwicklung einer Wellenfunktion

Betrachtet wird ein Gausspacket mit

$$\psi(x, t_0 = 0) = \left(\frac{1}{\pi a_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{(x+d)^2}{2a_0^2}}$$

Dabei sind $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ die Breite, $-d$ die Position, m die Masse und ω die Frequenz. Der Übersichtlichkeit halber definiere ich $\psi := \psi(x,t)$, $\varphi := \varphi(p,t)$, $\psi_0 := \psi(x, t_0 = 0)$ und $\varphi_0 := \varphi(p, t_0 = 0)$.

2.a.

Zuerst soll die Wahrscheinlichkeit $n(p,t) = |\varphi|^2$, ein Teilchen zum Zeitpunkt t mit Impuls p bestimmt werden.
Die Zeitentwicklung im Impulsraum ist gegeben durch die Schrödingergleichung mit:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi(p,t)}{\partial t} = \frac{p^2}{2m}\varphi(p,t) \Leftrightarrow \dot{\varphi} + i\frac{p^2}{2m\hbar}\varphi = 0$$

Die Lösung ist:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-i\frac{p^2}{2m\hbar}\cdot t}$$

Es muss also noch φ_0 bestimmt werden.
φ_0 ist über die Fouriertransformation mit ψ_0 verknüpft durch:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i\frac{px}{\hbar}}\psi_0 \\ &= \left(\frac{1}{4\pi^3 a_0^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-i\frac{px}{\hbar}} e^{-\frac{(x+d)^2}{2a_0^2}}\end{aligned}$$

Setze $y := \frac{(x+d)}{\sqrt{2}a_0} \Rightarrow dx = \sqrt{2}a_0\, dy$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{a_0^2}{\pi^3\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{p}{\hbar}d}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2 - i\frac{\sqrt{2}pa_0}{\hbar}y} \\ &= \left(\frac{a_0^2}{\pi^3\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{p}{\hbar}d}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\left(y^2 + i\frac{\sqrt{2}pa_0}{\hbar}y \pm i^2\frac{p^2a_0^2}{2\hbar^2}\right)} \\ &= \left(\frac{a_0^2}{\pi^3\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{p}{\hbar}d - \frac{p^2a_0^2}{2\hbar^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\left(y^2 + i\frac{pa_0}{\sqrt{2}\hbar}\right)^2}}_{=\sqrt{\pi}} \\ &= \left(\frac{a_0^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{p}{\hbar}d - \frac{p^2a_0^2}{2\hbar^2}} \quad \checkmark\end{aligned}$$

Schreibweise extrem unschön!

Dieser Ausdruck lässt sich noch vereinfachen zu:

$$\varphi_0 = \left(\frac{a_0^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{d^2}{2a_0}} e^{-\frac{a_0^2}{2\hbar^2}\left(p-i\frac{\hbar d}{a_0^2}\right)^2}$$ ← vereinfacht ? :O

Also ist φ:

$$\varphi = \left(\frac{a_0^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{d^2}{2a_0}} e^{-\frac{a_0^2}{2\hbar^2}\left(p-i\frac{\hbar d}{a_0^2}\right)^2} e^{-i\frac{p^2}{2m\hbar}\cdot t}$$

Mit $a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \Rightarrow m = \frac{\hbar}{a_0^2\omega}$ lässt sich dieser Ausdruck noch vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \left(\frac{a_0^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{d^2}{2a_0}} e^{-\frac{a_0^2}{2\hbar^2}\left(p-i\frac{\hbar d}{a_0^2}\right)^2} e^{-i\frac{a_0^2p^2}{2\hbar^2}\omega t} \\
&= \left(\frac{a_0^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\cancel{\frac{d^2}{2a_0}}-\frac{a_0^2p^2}{2\hbar}+i\frac{pd}{\hbar}+\cancel{\frac{d^2}{2a_0^2}}-i\frac{a_0^2p^2}{2\hbar^2}\omega t} \\
&= \left(\frac{a_0^2}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{a_0^2p^2}{2\hbar}(1+i\omega t)+i\frac{pd}{\hbar}}
\end{aligned}$$

und hier taucht das t auf einmal auf?

Es folgt für die Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
n(p,t) &= |\varphi|^2 \\
&= \frac{a_0^2}{\sqrt{\pi}\hbar^2} e^{-\frac{a_0^2p^2}{\hbar}}
\end{aligned}$$ ✓

Aufgrund der fehlenden Zeitabhängigkeit werde ich mich entweder verrechnet haben, oder aber die Impulsverteilung ist zeitlich konstant. Ist zeitlich konstant! constant of motion.

2.b.

Nun soll die zeitabhängige Wellenfunktion im Impulsraum in den Ortsraum zurück transformiert werden. Die Rücktransformation ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\psi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{i\frac{px}{\hbar}} \varphi \\
&= \left(\frac{a_0^2}{4\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{i\frac{px}{\hbar}} e^{-\frac{a_0^2p^2}{2\hbar}(1+i\omega t)+i\frac{pd}{\hbar}} \\
&= \left(\frac{a_0^2}{4\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\frac{a_0^2p^2}{2\hbar}(1+i\omega t)+i\frac{p(x+d)}{\hbar}}
\end{aligned}$$

Setze $y := \frac{a_0 p}{\sqrt{2}\hbar}\sqrt{1+\mathrm{i}\omega t} \Rightarrow \mathrm{d}p = \frac{\sqrt{2}\hbar}{a_0\sqrt{1+\mathrm{i}\omega t}}\mathrm{d}y$ benutz doch besser q oder so...

$$= \left(\frac{1}{\pi^3 a_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{i}\omega t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-y^2+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}(x+d)}{a_0\sqrt{1+\mathrm{i}\omega t}}y \pm \mathrm{i}^2\frac{(x+d)^2}{2a_0^2(1+\mathrm{i}\omega t)}}$$

$$= \left(\frac{1}{\pi^3 a_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{i}\omega t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x+d)^2}{2a_0^2(1+\mathrm{i}\omega t)}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-\left(y-\mathrm{i}\frac{(x+d)}{a_0\sqrt{2}\sqrt{1+\mathrm{i}\omega t}}\right)^2}}_{=\sqrt{\pi}}$$

$$= \left(\frac{1}{\pi a_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{i}\omega t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x+d)^2}{2a_0^2(1+\mathrm{i}\omega t)}}$$

✓

2.c.

Nun soll die Wahrscheinlichkeit $n(x,t)$ ausgerechnet werden:

$$n(x,t) = |\psi|^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{i}\omega t}} \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{i}\omega t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x+d)^2}{2a_0^2}\left(\frac{1}{(1+\mathrm{i}\omega t)}\frac{1}{(1-\mathrm{i}\omega t)}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0} \frac{1}{\sqrt{1-\omega^2 t^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x+d)^2}{2a_0^2(1-\omega^2 t^2)}}$$

f zuerst ordentlich Re + Im aufteilen und dann Ψ*Ψ berechnen.

+1

3. Interferenz von zwei Gauss'schen Wellen

Gegeben sind zwei Atomwolken, welche durch die folgenden Gauss'schen Wellenpackete beschrieben werden können:

$$\psi_1(x, t_0 = 0) = \left(\frac{1}{\pi a_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{(x+d)^2}{2a_0^2}}, \qquad \psi_2(x, t_0 = 0) = \left(\frac{1}{\pi a_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\mathrm{e}^{-\frac{(x-d)^2}{2a_0^2}}$$

Die Gesamtwellenfunktion ist gegeben durch:

$$\Psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$$

3.a.

Es soll die Wahrscheinlichkeit $n(x,t)$ berechnet werden:

$$n(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$$

$$= |\psi_1 + \psi_2|^2$$

$$= (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1^* + \psi_2^*)$$

$$= \psi_1\psi_1^* + \psi_2\psi_2^* + \psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2$$

✓

Aufgrund von Übersichtlichkeit werde ich die Summanden einzeln behandeln:

$$\begin{aligned}\psi_1\psi_1^* &= \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2t^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x+d)^2}{2a_0^2}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega t}+\frac{1}{1-\mathrm{i}\omega t}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2t^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x+d)^2}{2a_0^2(1-\omega^2t^2)}}\end{aligned}$$

Analog folgt:

$$\psi_2\psi_2^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2t^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-d)^2}{2a_0^2(1-\omega^2t^2)}}$$

Nun die Mischterme:

$$\begin{aligned}\psi_1\psi_2^* &= \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2t^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2a_0}\left(\frac{(x+d)^2}{(1+\omega^2t^2)}+\frac{(x-d)^2}{(1-\omega^2t^2)}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2t^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\mathrm{i}xd\omega t+d^2}{2a_0(1-\omega^2t^2)}}\end{aligned}$$

Und analog

$$\psi_1^*\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2t^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+2\mathrm{i}xd\omega t+d^2}{2a_0(1-\omega^2t^2)}}$$

noch gerade so +1 für III

Also insgesamt:

Kann noch schöner dargestellt werden

$$\begin{aligned}n(x,t) &= |\Psi(x,t)|^2\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2t^2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x+d)^2}{2a_0^2(1-\omega^2t^2)}}+\mathrm{e}^{-\frac{(x-d)^2}{2a_0^2(1-\omega^2t^2)}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\mathrm{i}xd\omega t+d^2}{2a_0(1-\omega^2t^2)}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+2\mathrm{i}xd\omega t+d^2}{2a_0(1-\omega^2t^2)}}\right)\end{aligned}$$

4. Ausbreitung eines freien Wellenpackets

Betrachtet wird ein freies Teilchen, welches sich entlang der x-Achse bewege.

4.a.

Aufgrund der Schrödingergleichung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\triangle\psi$$

Zunächst soll die Zeitliche Entwicklung von $\langle x^2\rangle_t$ betrachtet werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\langle x^2\rangle_t}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; x^2\psi\psi^* \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; x^2\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\psi^* + \psi\frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; x^2((\triangle\psi)\psi^* - \psi\triangle\psi^*)
\end{aligned}
$$

An dieser Stelle zeige ich einmal im Detail wie ich die Partielle Integration ausführe und überspringe das dann im folgenen:

$$
= \frac{i\hbar}{2m}\int \mathrm{d}x\; x^2((\triangle\psi)\psi^* - \psi\triangle\psi^*)
$$

Die in rot geschriebenen Variablen sind u, die in blau geschriebenen Variablen sind v', so dass folgt:

$$
uv|_{-\infty}^{\infty} = x^2((\nabla\psi)\psi^* - \psi\nabla\psi^*)|_{-\infty}^{\infty} = 0
$$

Kein Integral von uv über den gesamten Raum
Oberfläche von uv! 0, da ψ normiert.

uv über den gesamten Raum integriert ist gerade null, weil die Wellenfunktion, und auch ihre Ableitungen, quadratintegrabel sein müssen. Es folgt

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{i\hbar}{2m}\int \mathrm{d}x\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\psi^*)\nabla\psi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\psi)\nabla\psi^* \\
&= -\frac{i\hbar}{2m}\int \mathrm{d}x\; (2x\psi^* + x^2\nabla\psi^*)\nabla\psi - (2x\psi + x^2\nabla\psi)\nabla\psi^* \\
&= \frac{i\hbar}{2m}\int \mathrm{d}x\; 2x\psi\nabla\psi^* - 2x\psi^*\nabla\psi \\
&= \frac{i\hbar}{m}\int \mathrm{d}x\; x(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) \quad ✓
\end{aligned}
$$

4.b.

Als nächstes soll obiger Ausdruck ein weiteres mal zeitlich abgeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\langle x^2\rangle_t}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\; x^2\psi\psi^* \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{i\hbar}{m}\int \mathrm{d}x\; x\,(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) \\
&= \frac{i\hbar}{m}\int \mathrm{d}x\; x\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\nabla\psi^* + \psi\nabla\left(\frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{d}t}\nabla\psi - \psi^*\nabla\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m^2}\int \mathrm{d}x\; x\,(\Delta\psi\nabla\psi^* - \psi\nabla^3\psi^* + \Delta\psi^*\nabla\psi - \psi^*\nabla^3\psi) \\
&= \frac{\hbar^2}{2m^2}\int \mathrm{d}x\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\nabla\psi^*)\nabla\psi + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\nabla\psi)\nabla\psi^* - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\psi)\Delta\psi^* - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\psi^*)\Delta\psi \\
&= \frac{\hbar^2}{2m^2}\int \mathrm{d}x\; (\nabla\psi^* + x\Delta\psi^*)\nabla\psi + (\nabla\psi + x\Delta\psi)\nabla\psi^* \\
&\quad - \frac{\hbar^2}{2m^2}\int \mathrm{d}x\; (\nabla\psi + x\nabla\psi)\Delta\psi^* + (\nabla\psi^* + x\nabla\psi^*)\Delta\psi \\
&= \frac{\hbar^2}{2m^2}\int \mathrm{d}x\; \nabla\psi^*\nabla\psi + \nabla\psi\nabla\psi^* - (\psi\Delta\psi^* + \psi^*\Delta\psi) \\
&= \frac{\hbar^2}{2m^2}\int \mathrm{d}x\; \nabla\psi^*\nabla\psi + \nabla\psi\nabla\psi^* + \nabla\psi^*\nabla\psi + \nabla\psi\nabla\psi^* \\
&= \frac{2\hbar^2}{m^2}\int \mathrm{d}x\; \nabla\psi^*\nabla\psi \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

geht ein wenig eleganter.

4.c.

Als nächstes (wer hätts gedacht) soll der Ausdruck nochmal zeitlich abgeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3\langle x^2\rangle_t}{\mathrm{d}t^3} &= \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\; x^2\psi\psi^* \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2\hbar^2}{m^2}\int \mathrm{d}x\; \nabla\psi^*\nabla\psi \\
&= \frac{2\hbar^2}{m^2}\int \mathrm{d}x\; \nabla\left(\frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{d}t}\right)\nabla\psi + \nabla\psi^*\nabla\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{i\hbar^3}{m^3}\int \mathrm{d}x\; \nabla^3\psi^*\nabla\psi - \nabla\psi^*\nabla^3\psi \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{i\hbar^3}{m^3}\int \mathrm{d}x\; \Delta\psi^*\Delta\psi - \Delta\psi^*\Delta\psi \quad \checkmark \\
&= 0
\end{aligned}
$$

4.d.

An dieser Stelle wird in der Aufgabenstellung wild rumdefiniert und dann eine Gleichung für $\langle x^2\rangle_t$ angegeben. Das Rumdefinieren spare ich mir erst mal. Stattdessen betrachte ich zuerst die Taylorentwicklung von $\langle x^2\rangle_t$ um $t = 0$:

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle_t &= \langle x^2\rangle\big|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x^2\rangle_t\bigg|_{t=0} t + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\langle x^2\rangle_t\bigg|_{t=0} t^2 + \overbrace{\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\langle x^2\rangle_t\bigg|_{t=0}}^{=0} t^3 \\ &= \langle x^2\rangle_0 + \underbrace{\frac{i\hbar}{m}\int \mathrm{d}x\, x\,(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)\bigg|_{t=0}}_{:=\xi_0} t + \underbrace{\frac{2\hbar^2}{m^2}\int \mathrm{d}x\, \nabla\psi^*\nabla\psi\bigg|_{t=0}}_{:=v_1^2} t^2 \\ &= \langle x^2\rangle_0 + \xi_0 t + v_1^2 t^2 \quad ✓\end{aligned}$$

Deine Faktoren sind falsch, da du den $\frac{1}{n!}$ Term vergessen hast.

alternativ $\iint \frac{d^2\langle x^2\rangle_t}{dt^2}\, dt^2$ berechnen.

4.e.

Nun soll die Varianz Δx_t^2 betrachtet werden. Taylorentwicklung um $t = 0$ ergibt:

$$\begin{aligned}\Delta x_t^2 &= \Delta x_t^2\big|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta x_t^2\bigg|_{t=0} t + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Delta x_t^2\bigg|_{t=0} t^2 + \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\Delta x_t^2\bigg|_{t=0} t^3 \\ &= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2\big|_{t=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\langle x^2\rangle_t - \langle x\rangle_t^2\right)\bigg|_{t=0} t + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\langle x^2\rangle_t - \langle x\rangle_t^2\right)\bigg|_{t=0} t^2 - \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\langle x\rangle_t^2\bigg|_{t=0} t^3 \\ &= \Delta x_0^2 + \xi_0 t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle_t^2\bigg|_{t=0} t + v_1^2 t^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\langle x\rangle_t^2\bigg|_{t=0} t^2 - \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\langle x\rangle_t^2\bigg|_{t=0} t^3\end{aligned}$$

Gilt auch hier. $\frac{1}{n!}$ fehlt.

Als nächstes betrachten wir also die zeitlichen Ableitungen von $\langle x\rangle_t^2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle_t^2 = 2\langle x\rangle_t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle x\rangle_t$$

nach Vorlesung folgt:

$$= 2\langle x\rangle_t \underbrace{\frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi}_{:=v_0}$$

Und:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\langle x\rangle_t^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\langle x\rangle_t \frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right)\\
&= 2v_0^2 + 2\langle x\rangle_t \frac{i\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\\
&= 2v_0^2 + 2\langle x\rangle_t \frac{i\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\nabla\psi^* + \psi\nabla\left(\frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\mathrm{d}\psi^*}{\mathrm{d}t}\nabla\psi - \psi^*\nabla\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\right)\\
&= 2v_0^2 - 2\langle x\rangle_t \frac{\hbar^2}{4m^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \Delta\psi\nabla\psi^* + \psi\nabla^3\psi^* - \Delta\psi^*\nabla\psi - \psi^*\nabla^3\psi\\
&= 2v_0^2 - 2\langle x\rangle_t \frac{\hbar^2}{4m^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \underbrace{\Delta\psi\nabla\psi^* + \nabla\psi\,\Delta\psi^* - \Delta\psi^*\nabla\psi - \nabla\psi^*\,\Delta\psi}_{=0}\\
&= 2v_0^2
\end{aligned}
$$

$\frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle_t = 0\,!$

Somit folgt insgesamt:

$$
\begin{aligned}
\Delta x_t^2 &= \Delta x_0^2 + \xi_0 t - 2\langle x\rangle_0 v_0 t + v_1^2 t^2 - 2v_0^2 t^2\\
&= \Delta x_0^2 + \underbrace{(\xi_0 - 2\langle x\rangle_0 v_0)}_{=\xi_1} t + \underbrace{(v_1^2 - 2v_0^2)}_{=\Delta v^2} t^2\\
&= \Delta x_0^2 + \xi_1 t + \Delta v^2 t^2
\end{aligned}
$$

sonst ok

noch +2 für IV