Quantenmechanik, Blatt 5

Frederike Schrödel Heike Herr Jan Weber Simon Schlepphorst

11. Mai 2015

1 Potentialstufen

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{für } a < x \end{cases}$$

$$I = (-\infty, 0),\ II = [0, a],\ III = (a, \infty)$$

Fall: $E < V_0$
Wähle einfallende Amplitude= 1
Ansatz:

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= e^{ikx} + B_I e^{-ikx} \\ \psi_{II}(x) &= A_{II} e^{-\kappa x} + B_{II} e^{\kappa x} \\ \psi_{III}(x) &= A_{III} e^{ikx} \end{aligned}$$

wobei $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ und $\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$
Wir haben die Anschlussbedingungen:

1. $\psi_I(0) = \psi_{II}(0):$ $\quad 1 + B_I = A_{II} + B_{II}$
2. $\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0):$ $\quad ik - ikB_I = -\kappa A_{II} + \kappa B_{II}$
3. $\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a):$ $\quad A_{II} e^{-\kappa a} + B_{II} e^{\kappa a} = A_{III} e^{ika}$
4. $\psi_{II}'(a) = \psi_{III}'(a):$ $\quad -\kappa A_{II} e^{-\kappa a} + \kappa B_{II} e^{\kappa a} = ikA_{III} e^{ika}$

Aus 1. erhalten wir:

$$B_I = A_{II} + B_{II} - 1$$

in 2.) eingesetzt:

$$\begin{aligned} && ik(1 - A_{II} - B_{II} + 1) &= -\kappa A_{II} + \kappa B_{II} \\ \iff && (ik - \kappa) A_{II} &= 2ik + (-\kappa - ik) B_{II} \\ \iff && A_{II} &\overset{*}{=} \frac{2ik + (-\kappa - ik) B_{II}}{ik - \kappa} \end{aligned}$$

in 3.) eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
A_{III}e^{ika} &= \frac{2ik + (-\kappa - ik)B_{II}}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} + B_{II}e^{\kappa a} \\
&\overset{**}{=} \frac{2ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} + B_{II}(\frac{-\kappa - ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} + e^{\kappa a})
\end{aligned}
$$

(*) in 4.) ergibt:

$$
\begin{aligned}
& -\kappa\frac{2ik + (-\kappa - ik)B_{II}}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} + \kappa B_{II}e^{\kappa a} = ikA_{III}e^{ika} \\
\Leftrightarrow\quad & B_{II}(\kappa\frac{\kappa + ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} + \kappa e^{\kappa a}) = ikA_{III}e^{ika} + \kappa\frac{2ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} \\
\Leftrightarrow\quad & B_{II}(\frac{\kappa + ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} + e^{\kappa a}) = \frac{ik}{\kappa}A_{III}e^{ika} + \frac{2ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a}
\end{aligned}
$$

mit (**) ergibt:

$$
\begin{aligned}
& B_{II}(\frac{\kappa + ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} + e^{\kappa a} + \frac{ik}{\kappa}\frac{\kappa + ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} - \frac{ik}{\kappa}e^{\kappa a}) = \frac{2ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} + \frac{ik}{\kappa}\frac{2ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} \\
\Leftrightarrow\quad & B_{II}(\frac{(ik+\kappa)^2}{(ik-\kappa)\kappa}e^{-\kappa a} + (1 - \frac{ik}{\kappa})e^{\kappa a}) = \frac{2ik(ik+\kappa)}{(ik-\kappa)\kappa}e^{-\kappa a} \\
\Leftrightarrow\quad & B_{II}(\frac{(ik+\kappa)^2}{(ik-\kappa)}e^{-\kappa a} + (\kappa - ik)e^{\kappa a}) = \frac{2ik(ik+\kappa)}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} \\
\Leftrightarrow\quad & B_{II}\frac{(ik+\kappa)^2e^{-\kappa a} - (ik-\kappa)^2e^{\kappa a}}{ik-\kappa} = \frac{2ik(ik+\kappa)}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} \\
\Leftrightarrow\quad & B_{II} = \frac{2ik(ik+\kappa)e^{-\kappa a}}{(ik+\kappa)^2e^{-\kappa a} - (ik-\kappa)^2e^{\kappa a}}
\end{aligned}
$$

„schön"

in (**) eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
A_{III}e^{ika} &= \frac{2ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} + \frac{2ik(ik+\kappa)e^{-\kappa a}}{(ik+\kappa)^2e^{-\kappa a} - (ik-\kappa)^2e^{\kappa a}}(\frac{-\kappa - ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} + e^{\kappa a}) \\
&= \frac{2ik}{ik-\kappa}e^{-\kappa a} + \frac{2ik(ik+\kappa)e^{-2\kappa a}(-\kappa - ik)}{(ik-\kappa)((ik+\kappa)^2e^{-\kappa a} - (ik-\kappa)^2e^{\kappa a})} + \frac{2ik(ik+\kappa)}{(ik+\kappa)^2e^{-\kappa a} - (ik-\kappa)^2e^{\kappa a}} \\
&= 2ik\frac{e^{-\kappa a}((ik+\kappa)^2e^{-\kappa a} - (ik-\kappa)^2e^{\kappa a}) + (ik+\kappa)e^{-2\kappa a}(-\kappa - ik) + (ik+\kappa)(ik-\kappa)}{(ik-\kappa)((ik+\kappa)^2e^{-\kappa a} - (ik-\kappa)^2e^{\kappa a})} \\
&= 2ik\frac{e^{-2\kappa a}(ik-\kappa)(ik+\kappa-\kappa-ik) + (ik-\kappa)(-ik+\kappa+ik+\kappa)}{(ik-\kappa)((ik+\kappa)^2e^{-\kappa a} - (ik-\kappa)^2e^{\kappa a})} \\
&= 2ik\frac{2\kappa}{(k+i\kappa)^2e^{\kappa a} - (k-i\kappa)^2e^{-\kappa a}}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\quad A_{III} = \frac{4ik\kappa e^{-ika}}{(k+i\kappa)^2e^{\kappa a} - (k-i\kappa)^2e^{-\kappa a}} \quad ✓
$$

Damit ergibt sich für den Transmissionskoeffizient $|A_{III}|^2$:

$$\begin{aligned}
|A_{III}|^2 =& |\frac{4ik\kappa e^{-ika}}{(k+i\kappa)^2 e^{\kappa a} - (k-i\kappa)^2 e^{-\kappa a}}|^2 \\
=& 16k^2\kappa^2 \frac{1}{|(k^2+2ik\kappa-\kappa^2)e^{\kappa a} - (k^2-2ik\kappa-\kappa^2)e^{-\kappa a}|^2} \\
=& 16k^2\kappa^2 \frac{e^{-2\kappa a}}{|k^2+2ik\kappa-\kappa^2-(k^2-2ik\kappa-\kappa^2)e^{-2\kappa a}|^2} \\
=& 16k^2\kappa^2 \frac{e^{-2\kappa a}}{|(k^2-\kappa^2)(1-e^{-2\kappa a})+i2k\kappa(1+e^{-2\kappa a})|^2} \\
=& 16k^2\kappa^2 \frac{e^{-2\kappa a}}{((k^2-\kappa^2)(1-e^{-2\kappa a})+i2k\kappa(1+e^{-2\kappa a}))((k^2-\kappa^2)(1-e^{-2\kappa a})-i2k\kappa(1+e^{-2\kappa a}))} \\
=& \frac{16k^2\kappa^2 e^{-2\kappa a}}{(k^2-\kappa^2)^2(1-e^{-2\kappa a})^2+4k^2\kappa^2(1+e^{-2\kappa a})^2}
\end{aligned}$$

(✓) ← glaub ihr habt das richtige

und den Reflexionskoeffizienten $|B_I|^2$:

$$\begin{aligned}
|B_I|^2 =& 1-|A_{III}|^2 \\
=& 1-\frac{16k^2\kappa^2 e^{-2\kappa a}}{(k^2-\kappa^2)^2(1-e^{-2\kappa a})^2+4k^2\kappa^2(1+e^{-2\kappa a})^2}
\end{aligned}$$

Fall: $E > V_0$
Wähle einfallende Amplitude=1:
Ansatz:

$$\begin{aligned}
\psi_I(x) =& e^{ik_1x} + B_I e^{-ik_1x} \\
\psi_{II}(x) =& A_{II} e^{ik_2x} + B_{II} e^{-ik_2x} \\
\psi_{III}(x) =& A_{III} e^{ik_1x}
\end{aligned}$$

wobei $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ und $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$
Aus der gleichen Rechnung wie im Fall $E < V_0$ mit $k_2 = i\kappa$ erhalten wir für A_{III}:

$$A_{III} = \frac{-4k_1k_2e^{-ik_1a}}{(k_1-k_2)^2e^{ik_2a}-(k_1+k_2)^2e^{-ik_2a}}$$

und damit den Transmissionskoeffizienten $|A_{III}|^2$:

$$|A_{III}|^2 = \frac{16k_1^2k_2^2}{|(k_1-k_2)^2e^{ik_2a}-(k_1+k_2)^2e^{-ik_2a}|^2}$$

(✓)

+2. Das Prinzip ist richtig, die Rechnungen im Prinzip auch...

Quantenmechanik, Blatt 5

Frederike Schrödel Heike Herr Jan Weber Simon Schlepphorst

2015-05-12

2. Gebundene Zustände eines δ-Potentials

Betrachtet wird ein Teilchen mit Masse m, dass sich in einem Potential

$$V(x) = V_0\delta(x) \qquad V_0 < 0$$

bewege.
Es sollen die gebundenen Zustände und Eigenenergie bestimmt werden.
Ansatz:

$$\psi_- = Ae^{qx} + A'e^{-qx}$$
$$\psi_+ = B'e^{qx} + Be^{-qx}$$

Dabei ist

$$q = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} \qquad E < 0$$

Da die Wellenfunktionen ψ_- und ψ_+ normierbar sein sollen muss gelten:

$$\psi_- = Ae^{qx}$$
$$\psi_+ = Be^{-qx}$$

Aufgrund der Stetigkeit muss

$$\psi_-(0) = \psi_+(0)$$
$$\Rightarrow A = B$$

sein.
Um den Normierungsfaktor auszurechnen bilde ich das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
\langle\psi,\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\psi^*\psi \\
&= |A|^2\left(\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{2qx} + \int_{0}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-2qx}\right) \\
&= |A|^2\left(\left[\frac{1}{2q}\mathrm{e}^{2qx}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{1}{2q}\mathrm{e}^{-2qx}\right]_{0}^{\infty}\right) \\
&= \frac{|A|^2}{q}
\end{aligned}$$

Wegen $\langle\psi,\psi\rangle \overset{!}{=} 1$ folgt

$$\Rightarrow A = \sqrt{q}$$

Also:

$$\begin{aligned}
\psi_- &= \sqrt{q}\mathrm{e}^{qx} \\
\psi_+ &= \sqrt{q}\mathrm{e}^{-qx}
\end{aligned}$$

Um die Energie zu bestimmen löse ich die Schrödingergleichung:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + E\psi = V_0\delta(x)\psi$$

Integration von ϵ bis ϵ über x und bilden des Limes gibt:

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\mathrm{d}x\,\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\mathrm{d}x\,E\psi\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\mathrm{d}x\,V_0\delta(x)\psi$$

Die Integration beim zweiten Integral gibt nach dem ausführen des Limes null für den Rest ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\right) = V_0\psi(0) \qquad \longleftarrow \psi' \text{ hat Sprung bei } x=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\hbar^2}{2m}\lim_{\epsilon\to 0}\left(-\sqrt{q}q\mathrm{e}^{-q\epsilon} - \sqrt{q}q\mathrm{e}^{-q\epsilon}\right) = V_0\sqrt{q} \\
&\Leftrightarrow -\frac{\hbar^2 q}{m} = V_0
\end{aligned}$$

Einsetzen von q gibt:

$$\Leftrightarrow -\frac{2E\hbar^2}{m} = V_0^2$$
$$\Leftrightarrow E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$$ ✓ schön! +2

4. Adjungieren

Gegeben sind mehrere Ausdrücke. Es sollen der Typ und das Adjungierte bestimmt werden.

4.a.

$$\left(\hat{A} + \lambda\hat{B}^\dagger\right)|\psi_1\rangle$$

ist ein Zustand, das Adjungierte ist:

$$\langle\psi_1|\left(\hat{A}^\dagger + \lambda^*\hat{B}\right)$$ ✓

4.b.

$$\hat{A}|\psi_1\rangle\langle\psi_2|\lambda\hat{B}\hat{C}$$

ist ein Operator, das Adjungierte ist:

$$\lambda^*\hat{C}^\dagger\hat{B}^\dagger|\psi_2\rangle\langle\psi_1|\hat{A}^\dagger$$ ✓

4.c.

$$\langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle|\psi_1\rangle$$

ist ein Zustand, das Adjungierte ist:

$$\langle\psi_1|\langle\psi_2|\hat{A}^\dagger|\psi_1\rangle$$ ✓

4.d.

$$\langle\psi_2|\hat{A}\hat{B}^\dagger\hat{C}^\dagger|\psi_1\rangle$$

ist ein Skalar, das Adjungierte ist:

$$\langle\psi_1|\,\hat{C}\hat{B}\hat{A}^\dagger\,|\psi_2\rangle$$

4.e.

$$\langle\psi_1|\left(\hat{C}+\hat{D}^\dagger\right)\left(\hat{A}-\mathrm{i}\hat{B}\right)|\psi_2\rangle$$

ist ein Skalar, das Adjungierte ist:

$$\langle\psi_2|\left(\hat{A}^\dagger+\mathrm{i}\hat{B}^\dagger\right)\left(\hat{C}^\dagger+\hat{D}\right)|\psi_1\rangle$$

3. Gebundene Zustände von zwei δ-Potential

$$V(x) = V_0 \left[\delta(x-a) + \delta(x-a) \right] \quad \text{mit } V_0 < 0 \text{ und } a > 0$$

a)

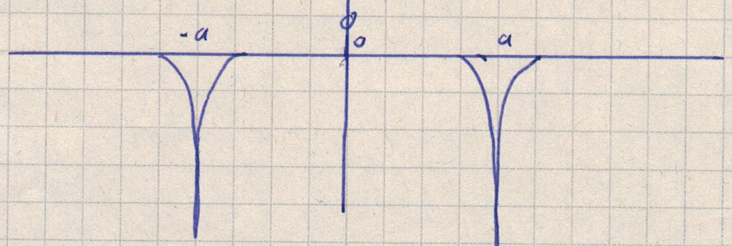
$$\psi_\pm(x) = \begin{cases} A e^{\varkappa x} + A' e^{-\varkappa x} & x \leq -a \\ B e^{\varkappa x} \pm B e^{-\varkappa x} & -a \leq x \leq a \\ \pm A e^{-\varkappa x} \pm A' e^{\varkappa x} & a \leq x \end{cases}$$

Warum kann es so vereinfacht werden!

vereinfacht:

$$\psi_\pm(x) \begin{cases} A e^{\varkappa x} & x \leq -a \\ B e^{\varkappa x} \pm B e^{-\varkappa x} & -a \leq x \leq a \\ \pm A e^{-\varkappa x} & a \leq x \end{cases}$$

b)



Aufgrund der Symmetrie des Potentials kommt es bei den Eigenfunktionen des Hamiltonoperators zu symmetrischen oder antisymmetrischen Lösungen. Sym: $\psi_s(x) = \psi_s(-x)$. Antisym. $\psi_A(x) = -\psi_A(x)$

=> für

$$\Rightarrow \psi_s = \begin{cases} A e^{\varkappa x} \\ B \cosh(\varkappa x) \\ A e^{-\varkappa x} \end{cases} \qquad \Rightarrow \psi_A(x) = \begin{cases} -A e^{\varkappa x} \\ B \sinh(\varkappa x) \\ A e^{-\varkappa x} \end{cases}$$

Um eine Beziehung zwischen A und B

+0