Quantenmechanik, Blatt 1

Frederike Schrödel   Jan Weber   Simon Schlepphorst

2015-04-13

2. Erinnerung Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.a.

Gegeben ist die die Gausverteilung mit:

$$f(x) = \frac{1}{a_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}}$$

Gesucht sind Mittelwert und Varianz.
Der Mittelwert ist für kontinuierliche Funktionen gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{a_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

den Oberflächenterm zumindest erwähnen

Die Varianz einer kontinuierlichen Funktion ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
(\Delta x)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{a_0\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a_0^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{x}{a_0\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a_0^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x a_0}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a_0^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a_0^2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Substituiere $y = \frac{x}{a_0} \Leftrightarrow \mathrm{d}x = a_0\,\mathrm{d}y$

$$
= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_0^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y
$$

Mit $\frac{1}{2a_0^2} > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}a_0^2}} \\
&= a_0^2
\end{aligned}
$$

✓

2.b.

Gegeben ist die Poissonverteilung mit:

$$
f_\lambda(k) = \lambda^k \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \ldots, \infty \tag{1}
$$

Der Mittelwert ist gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} f_\lambda(k)\, i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i \mathrm{e}^{-\lambda}}{i!} i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+1} \mathrm{e}^{-\lambda}}{(i+1-1)!} \\
&= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

✓

Die Varianz ist gegeben durch:

$$(\Delta x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} i \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{(i-1)!} i - \lambda^2$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} (i+1) - \lambda^2 \; ?$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}(i+1) = \frac{\lambda^0}{0!} \cdot 1 + \sum_{i=1} \frac{\lambda^i}{i!}(i+1)$$

$$= 1 + \text{''}$$

$$= \lambda + \lambda e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda^0 0}{0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \right) - \lambda^2$$

stattdessen:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i \cdot \lambda^i}{i!} = e^{\lambda} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i \cdot \lambda^i}{i!}$$

Mit $n := i-1$ ergibt sich:

$$= \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

2.c. ? +1 für II

3. Fouriertransformation

Siehe beigelegtes, handgeschriebenes Blatt. ? Warum?

4. Unschärferelation

4.A

Gegeben sind die folgenden Relationen:

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{p}\; p_x \, |g(\boldsymbol{p})|$$

$$\langle p_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\boldsymbol{p}\; p_x^2 \, |g(\boldsymbol{p})|$$

Analog für $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ für $f(\boldsymbol{r})$.

Gezeigt werden soll die Ort-Zeitunschärfe in der Form

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Dabei ist der folgende Ansatz geben:

oh, ok. Das steht in meiner Version nur nicht.

$$I(\lambda) = \int \mathrm{d}k \left| kf(k) + \lambda \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}k} \right|^2$$

Wo?

Sei ψ eine Wellenfunktion im Ortsraum und $\mathcal{F}\psi$ die Fouriertransformierte von ψ im Impulsraum. Für ein eindimensionales Wellenpaket folgt:

$$I(\lambda) = \int \mathrm{d}x \left| x\psi + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2$$
$$= \int \mathrm{d}x\, x^2 \psi^* \psi + \lambda \int \mathrm{d}x\, x \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) + \lambda^2 \int \mathrm{d}x\, \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Partielle Integration des mittleren Integrales gibt:

$$= \int \mathrm{d}x\, \psi^* x^2 \psi - \lambda \underbrace{\int \mathrm{d}x\, \psi^* \psi}_{=1} - \lambda^2 \int \mathrm{d}x\, \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Nach dem Theorem von Parselval-Plancherel gilt:

$$= \int \mathrm{d}x\, \psi^* x^2 \psi - \lambda - \lambda^2 \int \mathrm{d}x\, \mathcal{F}\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \mathcal{F}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

Nach Aufgabenteil 3B gilt

$$= \int \mathrm{d}x\, \psi^* x^2 \psi - \lambda + \lambda^2 \int \mathrm{d}x\, k^2 \mathcal{F}(\psi^*) \mathcal{F}(\psi)$$

Da die Varianz der Welllenfunktion sowohl im Orts-, wie auch im Impulsraum verschwindet folgt:

$$= (\Delta x)^2 - \lambda + \lambda^2 (\Delta k)^2$$

Mit $k = \frac{p_x}{\hbar}$ folgt:

$$I(\lambda) = (\Delta x)^2 - \lambda + \frac{\lambda^2}{\hbar^2} (\Delta p_x)^2 \overset{!}{\geq} 0 \tag{2}$$

$I(\lambda)$ ist eine Parabel. Für den Scheitelpunkt ($\frac{\mathrm{d}I(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = 0$) gilt:

$$\frac{\mathrm{d}I(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -1 + \frac{2\lambda}{\hbar^2}(\Delta p_x)^2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda\,|_{\frac{\mathrm{d}I(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=0} := \lambda_S = \frac{\hbar^2}{2(\Delta p_x)^2}$$

Einsetzen in (2) gibt:

$$I(\lambda_S) = (\Delta x)^2 - \frac{\hbar^2}{2(\Delta p_x)^2} + \frac{\hbar^2}{4(\Delta p_x)^2} \stackrel{!}{\geq} 0 \Leftrightarrow (\Delta x)^2(\Delta p_x)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Und somit folgt als Endergebnis die Orts-Impulsunschärfe mit:

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \geq \frac{\hbar}{2}$$

In y- und z-Richtungen analog.

4.B

Gegeben ist die Gaussfunktion mit

$$f(x) = \left(\frac{1}{\pi a_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a_0^2}}$$

Zuerst soll diese nun fouriertransformiert werden:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left(\frac{1}{\pi a_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a_0^2}} \\ &= \left(\frac{1}{4\pi^3 a_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a_0^2}+\mathrm{i}kx}\end{aligned}$$

Setze $y \equiv \frac{x}{\sqrt{2}a_0} \Rightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{2}a_0\,\mathrm{d}y$

$$= \left(\frac{a_0^2}{\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-y^2+\mathrm{i}k\sqrt{2}a_0 y}$$

Setze $2\beta \equiv ik\sqrt{2}a_0 \Rightarrow \beta = \frac{ika_0}{\sqrt{2}}$:

$$= \left(\frac{a_0^2}{\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-y^2+2\beta y}$$

$$= \left(\frac{a_0^2}{\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-(y^2-2\beta y\pm\beta^2)}$$

$$= \left(\frac{a_0^2}{\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-(y^2-2\beta y+\beta^2)}$$

$$= \left(\frac{a_0^2}{\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-(y-\beta)^2}$$

Setze $x \equiv y - \beta \Rightarrow \mathrm{d}y = \mathrm{d}x$:

$$= \left(\frac{a_0^2}{\pi^3}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\beta^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-x^2}}_{=\sqrt{\pi}}$$

$$= \left(\frac{a_0^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\beta^2}$$

Mit der Definition von β:

$$= \left(\frac{a_0^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{a_0^2k^2}{2}}$$ ✓

+ 1 für III

III. A.2 fehlt

III. B fehlt

III. D.2 fehlt

Also 2/4 Punkte

III) $f(r) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{(i \cdot \vec{k}\vec{r})} g(\vec{k})\, d^d\vec{k}$

Inv. Fouriertrafo: $g(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-i\vec{k}\vec{r}} f(r)\, d^d\vec{r}$

A 1.) z: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x) f_2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1^*(k) g_2(k)\, dk$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\int e^{-i\vec{k}\vec{r}} g_1^*(\vec{k})\, d^d\vec{k} \right) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\int e^{(i\vec{k}\vec{r})} g_2(\vec{k})\, d^d\vec{k} \right)}$$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\int e^{-i\vec{k}\vec{r}} g_1^*(\vec{k})\, d^d\vec{k} \right) \left(\int e^{(i\vec{k}\vec{r})} g_2(\vec{k})\, d^d\vec{k} \right)}$$

$$\cancel{= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \Big(}$$

$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ixk}\, dk$

$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ixk}\, dx$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x) f_2(x)\, dx =}$$

$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(k) e^{ikx}\, dk$

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(x) f_2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1^*(k') e^{-ik'x}\, dk'\right)$$

$$\cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(k) e^{+ikx}\, dk\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1^*(k') g_2(k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}\, dx\right) dk'\, dk$$

mit $\delta(k-k') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_1^*(k')\, \delta(k-k')\, dk'\right) dk$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(k)\, g_2^*(k)\, dk$$ ✓

2.)