Quantenmechanik, Blatt 13

Frederike Schrödel Heike Herr Jan Weber Simon Schlepphorst

2015-07-14

Aufgabe	1	2	Σ
Punkte	~~8~~ 7/12	5/8	12/20

1. Variationsansatz

1.a.

Es gilt:

$$[g] = \frac{kg\ m}{s^2} \qquad [\hbar] = \frac{kg\ m^2}{s} \qquad [m] = kg \qquad [E] = \frac{kg\ m^2}{s^2}$$

Somit erhalten wir durch Dimensionsanalyse für die Abhängigkeit der Energie E von $\hbar$, m und g:

$$\cancel{E \sim \sqrt{\frac{\hbar^2 g^2}{m}}}$$

$$[E] = \left(\frac{\hbar^2 g^2}{m}\right)^{1/3}$$

benutzt LaTeX anständig :P

haha

(−1) → +3

1.b.

Normierung von $\psi_{a,c}$:

$$
\begin{aligned}
1 \overset{!}{=} & \langle \psi_{a,c} | \psi_{a,c} \rangle \\
= & \int c^2 \theta(x+a)\theta(a-x)\left(1-\frac{|x|}{a}\right)^2 \mathrm{d}x \\
= & c^2 \int_{-a}^{a} \left(1-\frac{|x|}{a}\right)^2 \mathrm{d}x \\
= & 2c^2 \int_{0}^{a} \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 \mathrm{d}x \\
= & 2c^2 \int_{0}^{a} \left(1-2\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right) \mathrm{d}x \\
= & 2c^2 \left[x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} \right]_0^a \\
= & 2c^2 \left(a - a + \frac{a}{3} \right) \\
= & \frac{2}{3} c^2 a
\end{aligned}
$$

Somit muss gelten: $c = \sqrt{\frac{3}{2a}}$

Weiter gilt für die Grundzustandenergie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{d^2}{dx^2} \psi \, dx = \dots = -\frac{3}{\cancel{a}a^2}$$

$$E_0 \leq \langle \psi_{a,c} | \hat{H} | \psi_{a,c} \rangle,$$

+

wobei $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + g|\hat{x}|$. Es gilt außerdem $\cancel{\hat{p}^2|x|} = 0$. Damit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_{a,c} | \hat{H} | \psi_{a,c} \rangle = & c^2 \int_{-a}^{a} g|x| \left(1-\frac{|x|}{a}\right)^2 \mathrm{d}x \\
= & \frac{3}{2a} 2g \int_0^a \left(x - 2\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} \right) \mathrm{d}x \\
= & \frac{3g}{a} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} \right]_0^a \\
= & \frac{3g}{a} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{2a^2}{3} + \frac{a^2}{4} \right) \\
= & \frac{3g}{a} \frac{a^2}{12} \\
= & \frac{ga}{4}
\end{aligned}
$$

Da $a > 0$ (da sonst ψ nicht normierbar bzw. $\psi = 0$) erhalten wir $E_0 \leq 0$ bzw. hier als Approximation $E_0 = 0$.

+4

$\hat{H} = \frac{3\hbar^2}{2ma^2} + \frac{ga}{4}$ Dann $\frac{\delta \hat{H}}{\delta a} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow a = \left(\frac{12\hbar^2}{gm} \right)^{1/3}$

↳ a zurück in $\hat{H}$.

2. Spin-Bahn-Kopplung

Gegeben ist ein Hamiltonoperator der Form

$$\hat{H} = a\hat{\boldsymbol{L}}\hat{\boldsymbol{S}}$$

mit den Quantenzahlen $l = 2$ und $s = 1$. Es sollen die Eigenenergien und die zugehörigen Entartungen gefunden werden.
Dazu definiere ich:

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} \pm \hat{\boldsymbol{S}}$$ + !

Es folgt:

$$\hat{\boldsymbol{L}}\hat{\boldsymbol{S}} = \pm\frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hat{\boldsymbol{S}}^2\right)$$

Und somit:

$$\hat{H} = \pm\frac{1}{2}a\left(\hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hat{\boldsymbol{S}}^2\right)$$

Eine Eigenfunktion von $\hat{H}$ muss auch Eigenfunktion von $\hat{\boldsymbol{J}}^2$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ sein.
Es folgt für die Energie:

$$\hat{H}\left|\psi\right\rangle = \pm\frac{1}{2}a\left(\hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{\boldsymbol{L}}^2 - \hat{\boldsymbol{S}}^2\right)\left|\psi\right\rangle = E_{jls}\left|\psi\right\rangle$$

Mit

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{J}}^2\left|\psi\right\rangle &= \hbar^2 j\,(j+1)\left|\psi\right\rangle \\
\hat{\boldsymbol{L}}^2\left|\psi\right\rangle &= \hbar^2 l\,(l+1)\left|\psi\right\rangle \\
\hat{\boldsymbol{S}}^2\left|\psi\right\rangle &= \hbar^2 s\,(s+1)\left|\psi\right\rangle
\end{aligned}$$

folgt

$$E_{jls} = \pm\frac{\hbar^2}{2}a\,(j\,(j+1) - l\,(l+1) - s\,(s+1))$$

Für j gilt $j = l \pm s$, so dass $j \in \{1, 3\}$. $J = L + S \rightarrow j \in \{1, 2, 3\}$
Für $j = 3$ folgt:

$$\begin{aligned}
E_{jls} &= \frac{\hbar^2}{2}a\,(3\,(3+1) - 2\,(2+1) - (1+1)) \\
&= \frac{\hbar^2}{2}a\,(12 - 6 - 2) \\
&= 2\hbar^2 a
\end{aligned}$$

Da für die zu j gehörende Magnetquantenzahl m_j gilt $-j < m_j < j$ ist der Zustand 7-Fach entartet.
Für $j = 1$ folgt:

$$
\begin{aligned}
E_{jls} &= -\frac{\hbar^2}{2} a\left((1+1) - 2(2+1) - (1+1)\right)\\
&= -\frac{\hbar^2}{2} a\,(2-6-2)\\
&= 3\hbar^2 a
\end{aligned}
$$

Da für die zu j gehörende Magnetquantenzahl m_j gilt $-j < m_j < j$ ist der Zustand 3-Fach entartet.

jetzt fehlt noch $j=2$...

+5