Frederike, Simon, Heike, Jean

Nr. 1

a)

Gegeben sind zwei Wellenfkt.

$$\Psi(\vec r) = \Psi_1(\vec r) \qquad (i)$$
$$\varphi(\vec r) = c_1 \varphi_1(\vec r) + c_2 e^{i\phi} \varphi_2(\vec r) \qquad (ii)$$

und eine Observable $\hat A$ mit:

$$\hat A \Psi_n = a_n \Psi_n \quad \text{bzw.} \quad \hat A \varphi_n = a_n \varphi_n$$

Es soll sowohl für $\Psi$ als auch für $\varphi$ die Varianz berechnet werden

(i)

$$\Delta A^2 = \langle \hat A^2 \rangle - \langle \hat A \rangle^2$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \Psi^* \hat A^2 \Psi \, d\vec r - \left( \int_{\mathbb{R}} \Psi^* \hat A \Psi \, d\vec r \right)^2$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \Psi_1^* \hat A^2 \Psi_1 \, d\vec r - \left( \int_{\mathbb{R}} \Psi_1^* \hat A \Psi \, d\vec r \right)^2$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \Psi_1^* a_1^2 \Psi_1 \, d\vec r - \left( \int_{\mathbb{R}} \Psi_1^* a_1 \Psi \, d\vec r \right)^2$$
$$= a_1^2 - a_1^2$$
$$= 0 \quad ✓$$

(ii)

$$\Delta A^2 = \langle \hat A^2 \rangle - \langle \hat A \rangle^2$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi^* \hat A^2 \varphi \, d\vec r - \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi^* \hat A \varphi \, d\vec r \right)^2$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (c_1^* \varphi_1^* + c_2^* e^{-i\phi} \varphi_2^*) \hat A^2 (c_1 \varphi_1 + c_2 e^{i\phi} \varphi_2) \, d\vec r$$
$$- \left( \int_{\mathbb{R}} (c_1^* \varphi_1^* + c_2^* e^{-i\phi} \varphi_2^*) \hat A (c_1 \varphi + c_2 e^{i\phi} \varphi_2) d\vec r \right)^2$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (c_1^* \varphi_1^* + c_2^* e^{-i\phi} \varphi_2^*)(c_1 a_1^2 \varphi_1 + c_2 e^{i\phi} a_2^2 \varphi_2) \, d\vec r$$
$$- \left( \int (c_1^* \varphi_1^* + c_2^* e^{-i\phi} \varphi_2^*)(c_1 a_1 \varphi_1 + c_2 a_2 e^{i\phi} \varphi_2) \, d\vec r \right)^2$$

$$\overset{*}{=} |c_1|^2 a_1^2 + |c_2|^2 a_2^2 - (|c_1|^2 a_1 + |c_2|^2 a_2)^2$$

$$= |c_1|^2 a_1^2 + |c_2|^2 a_1^2 - |c_1|^4 a_1^2 - 2|c_1|^2 |c_2|^2 a_1 a_2 - |c_2|^4 a_2^2$$

Ihr wisst dass $c_1^2 + c_2^2 = 1$!

b)

Gegeben sind 10 Messwerte und es sollen der Mittelwert $\langle x \rangle$ und die Varianz ausgerechnet werden. Es folgt

$$\langle x \rangle = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 501,3$$

$$\Delta x^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \langle x \rangle)^2 = 857$$

ihr habt durch 10 geteilt, glaube ich.

Wenn der Messvorgang unmittelbar wiederholt wird, wird immer derselbe Wert $x$ gemessen, sodass

$$\langle x \rangle = x$$

$$\Delta x^2 = 0 \checkmark$$

bzw. in Bezug auf gesamte Messreihe keine Veränderung, wenn zwischen jeder 2. Messung gewartet wird.

Die Varianz einer Nachfolgenden Impulsmessen hat eine Untere Grenze aufgrund der Unschärfe:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \iff \Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

mit $\delta x = 10\,nm$

2

+1

richtig!

* Die Integration über $\psi_n \psi_m$ ist für $n \neq m$ null

von: Heike, Simon, Jan, Frederike

3.II. $N \in \mathbb{Z}$

$$\psi(x) = \begin{cases} c & \sin\left(\frac{N\pi x}{a}\right) \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

II. a) $1 \stackrel{!}{=} \int_0^a \psi(x)\,\psi^*(x)\,dx$

$$= \int_0^a c^2 \sin^2(N\pi x/a)\,dx$$

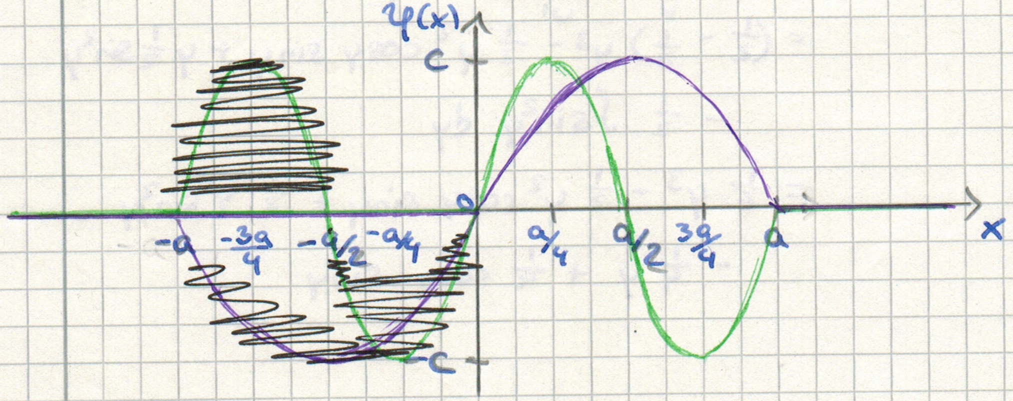
$y = \frac{N\pi x}{a}$, $\frac{a}{N\pi} dy = dx$

$$= \int_0^{N\pi} \frac{c^2 a}{N\pi} \sin^2(y)\,dy$$

$$\stackrel{NR}{=} \frac{c^2 a}{N\pi} \left( \frac{1}{2} y - \frac{1}{2}\cos y \sin y \Big|_0^{N\pi} \right)$$

$$= \frac{c^2 a}{2}$$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{2}{a}}$$




N = 1

N = 2

II b) $\langle x \rangle = \int_0^a x \frac{2}{a} \sin^2(N\pi x/a)\,dx$

$y = \frac{N\pi x}{a}$

$$= \left(\frac{a}{N\pi}\right)^2 \frac{2}{a} \int_0^{N\pi} y \sin^2(y)\,dy$$

$$= \left(\frac{a}{N\pi}\right)^2 \frac{2}{a} \left( y\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\sin y \cos y\right)\Big|_0^{N\pi} - \int_0^{N\pi} \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\cos y \sin y\right) dy \right)$$

$$\stackrel{NR}{=} \frac{2a}{(N\pi)^2} \left( \frac{1}{2}(N\pi)^2 - \frac{1}{4}(N\pi)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 y \Big|_0^{N\pi} \right)$$

$$= \frac{2a}{(N\pi)^2} \frac{1}{4}(N\pi)^2$$

$$= \frac{a}{2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^a x^2 \frac{2}{a} \sin^2(N\pi x/a)\,dx$$

$$= \left(\frac{a}{N\pi}\right)^3 \frac{2}{a} \int_0^{N\pi} y^2 \sin^2(y)\,dy$$

$$\stackrel{NR}{=} \left(\frac{a}{N\pi}\right)^3 \frac{2}{a} \left( \frac{1}{6}(N\pi)^3 - \frac{1}{4}(N\pi) \right)$$

$$= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2(N\pi)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = \sqrt{a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2(N\pi)^2} - \frac{1}{4}\right)}$$

$$= a\sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2(N\pi)^2}}$$

$$= a \frac{1}{\sqrt{12}\,N\pi} \sqrt{(N\pi)^2 - 6}$$

Nebenrechnungen:

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_{\int 1 dx - \int \sin^2 x \, dx}$$

$$\Rightarrow 2 \int \sin^2 x \, dx = x - \cos x \sin x$$

$$\int \cos x \sin x \, dx = \sin^2 x - \int \cos x \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow \int \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$$\int \underset{v}{y^2} \underbrace{\sin^2(y)}_{u'} dy = y^2 \left(\frac{1}{2} y - \frac{1}{2} \cos y \sin y\right)$$

$$- \int 2y \left(\frac{1}{2} y - \frac{1}{2} \cos y \sin y\right) dy$$

$$= \frac{1}{2} y^3 - \frac{1}{2} y^2 \cos y \sin y - \int y^2 dy$$

$$+ \int \underset{v}{y} \underbrace{\cos y \sin y}_{u'} dy$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) y^3 - \frac{1}{2} y^2 \cos y \sin y + y \frac{1}{2} \sin^2 y$$

$$- \frac{1}{2} \int \sin^2 y \, dy$$

$$= \frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{2} y^2 \cos y \sin y + \frac{1}{2} y \sin^2 y$$

$$- \frac{1}{4} y + \frac{1}{4} \cos y \sin y$$

$$\langle p \rangle = \int \psi^*(x) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)\right) dx$$

$$= \int_0^a \frac{2}{a} \sin(N\pi x/a) \left(i\hbar \frac{N\pi}{a}\right) \cos(N\pi x/a) \, dx$$

$$= \int_0^{N\pi} \frac{2}{a} \sin(y) \cos(y) \, dy$$

$$= \frac{1}{a} \sin^2 y \Big|_0^{N\pi}$$

$$= 0$$

$$\langle p^2 \rangle = \int \psi^*(x) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)\right) dx$$

$$= \int_0^a \frac{2}{a} \hbar^2 \left(\frac{N\pi}{a}\right)^2 \sin^2(N\pi x/a) \, dx$$

$$= \int_0^{N\pi} \frac{\hbar^2 \, 2N\pi}{a^2} \sin^2 y \, dy$$

$$= \hbar^2 \frac{(N\pi)^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \sqrt{\hbar^2 \frac{(N\pi)^2}{a^2}}$$

$$= \hbar \frac{N\pi}{a}$$

$$\Rightarrow \Delta x \Delta p = a \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2(N\pi)^2}} \, \hbar \frac{N\pi}{a}$$

$$= \hbar \frac{1}{\sqrt{12}} \sqrt{(N\pi)^2 - 6}$$

+2

Nr. 3

Es sollen zwei Wellenfkt. konstruiert werden, so dass:

$$\langle p \rangle = mv_0 \quad \wedge \quad \Delta p = q_0$$

Als erste Fkt. habe ich mir eine Gaussisches Wellenpaket überlegt:

$$\Psi(p) = \left(\frac{1}{q_0^2 \pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{(p-mv_0)}{2q_0^2}}$$

Für dieses ist offensichtlich (siehe vorherige Übungsblätter):

$$\langle p \rangle = mv_0$$
$$\Delta p = q_0$$
$$\Delta p \Delta x = \hbar/2$$ ✓

+1

zweite Wellenfkt. ?

4. Kommutatoren

a) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A}$

$[\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \cancel{\hat{B}\hat{A}\hat{C}} + \cancel{\hat{B}\hat{A}\hat{C}} - \hat{B}\hat{C}\hat{A}$ ✓ □

b) i) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\qquad L_k = \varepsilon_{ilk} \, r_i p_l$

$[\hat{L}_k, \hat{r}_j] = \varepsilon_{ilk} [\hat{r}_i \hat{P}_l, \hat{r}_j]$

$= \varepsilon_{ilk} \, \hat{r}_i \underbrace{[\hat{P}_l, \hat{r}_j]}_{-i\delta_{lj}} = -i\varepsilon_{ijk} \, r_i = i\,\varepsilon_{kji} \, r_i$ ✓

ii) $[\hat{L}_k, \hat{p}_j] = \varepsilon_{ilk} [\hat{r}_i \hat{p}_l, \hat{p}_j]$

$= \varepsilon_{ilk} \hat{P}_l \underbrace{[\hat{r}_i, \hat{p}_j]}_{+i\delta_{lj}} = i\varepsilon_{ijk} \hat{P}_l$

geht hier nicht so einfach!

iii) $[\hat{L}_k, \hat{L}_j] = i\,\varepsilon_{kji} \hbar \hat{L}_i$ ...

iv) $[V(|\hat{r}|), \hat{L}_j] = 0$ , weil in $L_k$ komponenten eine Ableitung nach dem Winkel beinhalten und $V$ nur von $r$ abhängt.

v) $[\hat{H}, \hat{L}_j] = \hat{H}\hat{L}_j - \hat{L}_j \hat{H}$

$= [\frac{p^2}{2m} + V(|r|), \hat{L}_j] = [\frac{p^2}{2m}, \hat{L}_j] + \underbrace{[V(|r|), \hat{L}_j]}_{0}$

$= \frac{1}{2m}[p^2, \hat{L}_j] = \frac{1}{2m}[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2, \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}]$

$= \frac{1}{2m} \varepsilon_{jlm} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, r_l p_m]$

= ?

noch +1