Quantenmechanik, Blatt 4

Frederike Schrödel Heike Herr Jan Weber Simon Schlepphorst

2015-05-05

1. Zeitentwicklung

Betrachtet werden die ersten beiden normierten Eigenzustände des harmonischen Oszillators,

$$\psi_0 = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$
$$\psi_1 = \left(\frac{4}{\pi a^6}\right)^{\frac{1}{4}} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}},$$

mit den Eigenenergien E_0 und E_1.
Nun werden diese Überlagert zu:

$$\psi_s = N(\psi_0 + \psi_1)$$
$$\psi_a = N(\psi_0 - \psi_1)$$

Im folgenden werde ich zur Vereinfachung der Aufgaben benutzen, dass die Eigenzustände orthogonal zueinander sind, also:

Keine Vereinfachung! Hermite Polynome sind bezüglich e^{-x^2}

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi_n^* \psi_m = \delta_{nm}$$

$\int e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{nm}$ orthogonal!

1.a.

Zuerst soll der Normierungsfaktor N ausgerechnet werden. Dazu bilde ich das Skalarprodukt und fordere, dass dieses 1 sein soll:

$$\begin{aligned}\langle \psi_{s,a}, \psi_{s,a} \rangle &= N^2 \langle \psi_0 \pm \psi_1, \psi_0 \pm \psi_1 \rangle \\ &= N^2 (\langle \psi_0, \psi_0 \rangle + \langle \psi_1, \psi_1 \rangle \pm \langle \psi_0, \psi_1 \rangle \pm \langle \psi_1, \psi_0 \rangle) \\ &= 2N^2 \\ &\overset{!}{=} 1\end{aligned}$$

Also:

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ ✓

Außerdem soll der Mittelpunkt des Ortes ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned}\langle\psi_{s,a}, x\psi_{s,a}\rangle &= \frac{1}{2}\langle\psi_0 \pm \psi_1, x\psi_0 \pm x\psi_1\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle\psi_0, x\psi_0\rangle + \langle\psi_1, x\psi_1\rangle \pm \langle\psi_0, x\psi_1\rangle \pm \langle\psi_1, x\psi_0\rangle)\end{aligned}$$

An dieser Stelle betrachte ich zuerst die Parität von x, ψ_0 und ψ_1. Und zwar hat x die Parität -1, ψ_0 die Parität 1 und ψ_s die Parität -1. Da das Integral mit gleichen Grenzen über Funktionen mit Parität -1 verschwindet kann man sich zur Vereinfachung die Gesammtparität der einzelnen Skalarprodukte des obigen Summanden anschauen: Die ersten beiden Skalarprodukte haben die Parität -1, die letzten beiden haben die Parität 1, so dass folgt:

Ist zwar richtig, aber der Mittelwert der Eigenfunktionen ist eh offensichtlich $=0$.

$$= \pm\frac{1}{2}(\langle\psi_0, x\psi_1\rangle + \langle\psi_1, x\psi_0\rangle)$$

Weder ψ_0 noch ψ_1 sind komplexwertig, so dass die oben stehenden Skalarprodukte gleich sind. Es folgt:

$$\begin{aligned}&= \pm\langle\psi_0, x\psi_1\rangle \\ &= \pm\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi_0 x\psi_1 \\ &= \pm\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \frac{x^2}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2}}\end{aligned}$$

Substituiere $q = \frac{x}{a} \Rightarrow \mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}q$:

Plot hierzu?

$$\begin{aligned}&= \pm\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} a\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ q^2\mathrm{e}^{-q^2} \\ &= \pm\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} a\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-q^2} \\ &= \pm\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} a\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-q^2}}_{=\sqrt{\pi}} \\ &= \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\langle\psi_s, x\psi_s\rangle &= \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \langle\psi_a, x\psi_a\rangle &= -\frac{a}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

✓

1.b.

Nun wird der Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 0$ auf ψ_1 festgelegt. Es soll berechnet werden mit welcher Wahrscheinlichkeit der Zustand ψ_a zum Zeitpunkt t zu finden sei.
Die Wahrscheinlichkeit $P(t)$ ein System, welches sich bei $t = 0$ in einem Zustand ϕ befindet bei t im einem Zustand $\psi(t)$ zu finden ist gegeben durch das Betragsquadrat des Skalarproduktes der Wellenfunktionen, also:

$$P(t) = |\langle \phi, \psi(t) \rangle|^2$$

Da wir stationäre Zustände betrachten ist die Zeitentwicklung vollständig durch die Schrödingergleichung gegeben, so dass gilt:

$$\psi_0(t) = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}$$
$$\psi_1(t) = \left(\frac{4}{\pi a^6}\right)^{\frac{1}{4}} x e^{-\frac{x^2}{2a^2}} e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}$$

Somit ist die zu berechnende Wahrscheinlichkeit $P(t)$:

$$\begin{aligned} P(t) &= |\langle \psi_1, \psi_a(t) \rangle|^2 \\ &= |N \langle \psi_1, \psi_0(t) - \psi_1(t) \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} \langle \psi_1, \psi_0 \rangle - e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| -e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

plot?

Dieses Ergebnis ist nicht zeitabhängig. Das ist allerdings auch nicht verwunderlich, weil ein System, welches sich in einem stationären, orthonormierten Eigenzustand befindet nicht in einen anderen, orthonormierten Zustand wechseln wird. Da ψ_a und ψ_s Überlagerungen von jeweils ψ_0 und ψ_1 sind findet man das System je zur Hälfte im Zustand ψ_a und ψ_s.

schön!

1.c.

Nun befinde sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand ψ_s. Es soll erneut die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, das System im Zustand ψ_a zu finden:

$$\begin{aligned}
P(t) &= |\langle\psi_s, \psi_a(t)\rangle|^2 \\
&= \left|N^2 \langle\psi_1 + \psi_0, \psi_0(t) - \psi_1(t)\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{4} |\langle\psi_1, \psi_0(t)\rangle + \langle\psi_0, \psi_0(t)\rangle - \langle\psi_1, \psi_1(t)\rangle - \langle\psi_0, \psi_1(t)\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4} \left|e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} \langle\psi_1, \psi_0\rangle + e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} \langle\psi_0, \psi_0\rangle - e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \langle\psi_1, \psi_1\rangle - e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \langle\psi_0, \psi_1\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{4} \left|e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} - e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\right|^2 \\
&= \frac{1}{4} \left(e^{i\frac{E_0}{\hbar}t} - e^{i\frac{E_1}{\hbar}t}\right)\left(e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} - e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\right) \\
&= \frac{1}{4} \left(e^{i\frac{E_0}{\hbar}t} e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} - e^{i\frac{E_0}{\hbar}t} e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} - e^{i\frac{E_1}{\hbar}t} e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} + e^{i\frac{E_1}{\hbar}t} e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\right) \\
&= \frac{1}{4} \left(2 - 2\frac{e^{i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t} + e^{-i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{E_1 - E_0}{\hbar} t\right) ✓
\end{aligned}$$

mit dem Energiespektrum des harm. Osz. $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ folgt noch $\frac{E_1 - E_0}{\hbar} = \omega$

Die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeit von ψ_a entspricht also einem Kosinus um $\frac{1}{2}$, so dass die Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 oszilliert. Das heißt: Plot !

Das System schwingt mit der Frequenz $\omega_{10} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$ zwischen den Zuständen ψ_s und ψ_a hin und her, wobei es bei ψ_s startet.

Nun sollen noch die Erwartungswerte von $x(t)$ und $p(t)$ ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
\langle x(t)\rangle &= \langle\psi_s(t), x\psi_s(t)\rangle \\
&= \frac{1}{2}(\langle\psi_0(t) + \psi_1(t), x\psi_0(t) + x\psi_1(t)\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle\psi_0(t), x\psi_0(t)\rangle + \langle\psi_0(t), x\psi_1(t)\rangle + \langle\psi_1(t), x\psi_0(t)\rangle + \langle\psi_1(t), x\psi_1(t)\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle\psi_0, x\psi_0\rangle + e^{i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t} \langle\psi_0, x\psi_1\rangle + e^{-i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t} \langle\psi_1, x\psi_0\rangle + \langle\psi_1, x\psi_1\rangle\right)
\end{aligned}$$

In Aufgabenteil a. habe ich gezeigt, dass $\langle\psi_0, x\psi_0\rangle = \langle\psi_1, x\psi_1\rangle = 0$ und $\langle\psi_0, x\psi_1\rangle = \langle\psi_1, x\psi_0\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}$, so dass folgt:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}} e^{i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t}\right) \\
&= \frac{a}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{E_1 - E_0}{\hbar} t\right) ✓
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle p(t)\rangle &= \langle \psi_s(t), \hat{p}\psi_s(t)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle \psi_0(t)+\psi_1(t), \hat{p}\psi_0(t)+\hat{p}\psi_1(t)\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle \psi_0(t), \hat{p}\psi_0(t)\rangle + \langle \psi_0(t), \hat{p}\psi_1(t)\rangle + \langle \psi_1(t), \hat{p}\psi_0(t)\rangle + \langle \psi_1(t), \hat{p}\psi_1(t)\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle \psi_0, \hat{p}\psi_0\rangle + e^{i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t}\langle \psi_0, \hat{p}\psi_1\rangle + e^{-i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t}\langle \psi_1, \hat{p}\psi_0\rangle + \langle \psi_1, \hat{p}\psi_1\rangle\right) \\
&= -\frac{i\hbar}{2}\left(\langle \psi_0, \nabla\psi_0\rangle + e^{i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t}\langle \psi_0, \nabla\psi_1\rangle + e^{-i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t}\langle \psi_1, \nabla\psi_0\rangle + \langle \psi_1, \nabla\psi_1\rangle\right)
\end{aligned}$$

Hier hilft es wieder sich die Parität anzuschauen: Die Ableitung einer Funktion mit Parität 1 hat die Parität -1 und umgekehrt. Also ist die Gesammtparität des ersten und letzten Skalarproduktes -1 (und verschwindet somit) und die der beiden mittleren Skalarprodukte 1. Definiere außerdem $u = e^{-i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t}$. Es folgt also:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i\hbar}{2}\left(u\langle \psi_0, \nabla\psi_1\rangle + u^*\langle \psi_1, \nabla\psi_0\rangle\right) \\
&= -\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{2}{\pi a^4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(u\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\frac{\partial}{\partial x}x e^{-\frac{x^2}{2a^2}} + u^*\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\frac{\partial}{\partial x}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) \\
&= -\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{2}{\pi a^4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(u\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(e^{-\frac{x^2}{a^2}} - \frac{x^2}{a^2}e^{-\frac{x^2}{a^2}}\right) - u^*\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{x^2}{a^2}e^{-\frac{x^2}{a^2}}\right)
\end{aligned}$$

Substituiere wieder $q = \frac{x}{a} \Rightarrow dx = a\, dq$:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(u\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(e^{-q^2} - q^2 e^{-q^2}\right) - u^*\int_{-\infty}^{\infty} dx\, q^2 e^{-q^2}\right) \\
&= -\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(u\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{1}{2}e^{-q^2} - u^*\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{1}{2}e^{-q^2}\right) \\
&= -\frac{i\hbar}{4}\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(u\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-q^2} - u^*\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-q^2}\right) \\
&= -\frac{i\hbar}{4}\left(\frac{2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}(u-u^*) \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2}a}\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t} - e^{-i\frac{E_1-E_0}{\hbar}t}\right) \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2}a}\sin\left(\frac{E_1-E_0}{\hbar}t\right)
\end{aligned}$$

irgendwo ist etwas beim Vorfaktor schief gegangen $= -\frac{\hbar\sqrt{2}}{a}\sin(\omega t)$

Diese Ergebnisse waren zu Erwarten: Der Mittelwert des Ortes schwingt mit der Frequenz ω_{10} zwischen den Punkten $\frac{a}{\sqrt{2}}$ und $-\frac{a}{\sqrt{2}}$ hin und her während der Impuls mit transformierter Amplitude um $\frac{\pi}{2}$ hinterher schwingt.

1.d.

Zuletzt ist nach der Messung der Energie gefragt. Dabei sei das System wieder zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand ψ_s gegeben. Misst man jetzt nach einer Zeit t_1 die Energie des Systems, so kann man entweder die zu ψ_0 gehörende Energie E_0 oder die zu ψ_1 gehörende Energie E_1 finden. Ähnlich wie in Aufgabenteil b. folgt für die Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
P(t) &= |\langle \psi_s, \psi_1(t) \rangle|^2 \\
&= |N \langle \psi_0 + \psi_1, \psi_1(t) \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2} |\langle \psi_0, \psi_1(t) \rangle + \langle \psi_1, \psi_1(t) \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left| e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \langle \psi_0, \psi_1 \rangle + e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \langle \psi_1, \psi_1 \rangle \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left| e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \right|^2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Und wiederum ist das Ergebnis nicht überraschend: Unser Grundzustand ψ_s besteht zur Hälfte aus ψ_0 und ψ_1. Die Zeitentwicklung ändert daran nichts, sie lässt das System lediglich schwingen. Daher ist es nicht verwunderlich, dass, ohne Äußeres einwirken, die Energie des Systems erhalten bleibt.
Misst man nun die Energie E_1 so wird der Zustand des Systems festgelegt auf ψ_1. Da dies ein Energieeigenzustand ist, bleibt das System von diesem Zeitpunkt an in diesem Zustand und eine erneute Energiemessung zum Zeitpunkt $t = t_2 > t_1$ ergibt zu 100% wieder die Energie E_1. ✓

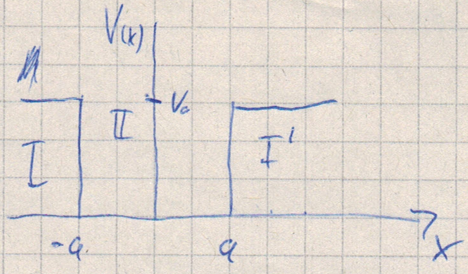
richtig

+2

2. Teilchen im Potentialtopf

Zu bestimmen, gebundene Zustände:

Potential $V(x) = \begin{cases} V_0 : |x| > a \\ 0 : |x| \leq a \end{cases}$



Stationäre Schrödinger Gl.:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + \hat{V}(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + (V-E)\psi(x)$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{2m(E-\cancel{V})}{\hbar^2}} \qquad \chi = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

Für Zone I gilt $V(x) = V_0$. Für gebundene Zustände gilt $E < V_0$

$$\Rightarrow \psi_I(x) = A_I e^{\chi x} + \cancel{B_I e^{-\chi x}}$$

nicht normierbar

Für Zone I' gilt $V(x) = V_0$ " " " "

$$\Rightarrow \psi_{I'}(x) = \cancel{A_{I'} e^{\chi x}} + B_{I'} e^{-\chi x}$$

nicht normierbar

Für Zone II gilt $V(x) = 0$.

$$\Rightarrow \psi_{II}(x) = A_{II} e^{ikx} + B_{II} e^{-ikx} = A_{II}\sin(kx) + B_{II}\cos(kx)$$

richtig, kann durch exp oder sin, cos beschrieben werden, aber Koeffizienten nicht gleich!

Stetigkeits Bedingungen:

$$\psi_I(-a) = \psi_{II}(-a), \qquad \psi_{II}(a) = \psi_{I'}(a)$$

$$\psi_I'(-a) = \psi_{II}'(-a), \qquad \psi_{II}'(a) = \psi_{I'}'(a)$$

$$A_I e^{-\chi a} = A_{II} e^{-ika} + B_{II} e^{+ika}$$

$$A_I \chi e^{-\chi a} = ik A_{II} e^{-ika} - B_{II} ik e^{+ika}$$

$$B_{I'} e^{-\chi a} = A_{II} e^{ika} + B_{II} e^{-ika}$$

$$-B_{I'} \chi e^{-\chi a} = ik A_{II} e^{-ika} - ik B e^{-ika}$$

- Symmetrische Lösung: $A_{II} = B_{II}$, $A_I = B_{I'}$
- Antisymmetrische Lösung: $A_{II} = -B_{II}$, $A_I = -B_{I'}$

Sym: $A_I e^{-\varkappa a} = A_{II} e^{-ika} + A_{II} e^{ika} = 2 A_{II} \cos(ka)$

$A_I \varkappa e^{-\varkappa a} = ik A_{II} e^{-ika} - ik A_{II} e^{ika} = ik A_{II} (-2i \sin(ka))$

$\Rightarrow \varkappa = k \tan(ka) \quad (1)$ ✓ $\qquad = 2k A_{II} \sin(ka)$

Antisym: $A_I e^{-\varkappa a} = A_{II} e^{-ika} - A_{II} e^{+ika} = -2i A_{II} \sin(ka)$

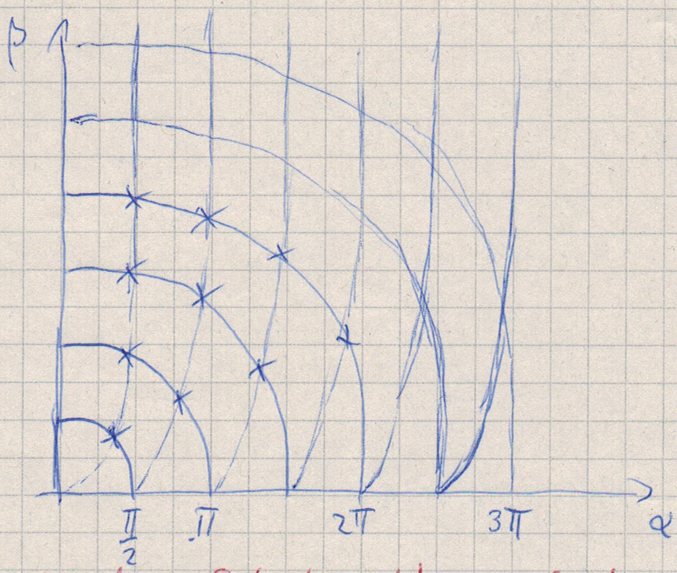
$A \varkappa e^{-\varkappa a} = ik A_{II} e^{-ika} + ik A_{II} e^{+ika} = 2ik A_{II} \cos(ka)$

$\Rightarrow \varkappa = -k \cot(ka) \quad (2)$ ✓

$$\varkappa^2 + k^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \qquad (3)$$

$\alpha = ka, \; \beta = \varkappa a$

$\Rightarrow$ 1) $\alpha \tan\alpha = \beta$, 2) $\alpha \cot\alpha = -\beta$, 3) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{2ma^2 V_0}{\hbar^2}$



Kreisgröße variert mit $a^2 V_0$

Jeder Schnittpunkt markiert Lösung!

mehr Worte hier am Ende wäre schön gewesen!

noch +2

H Ausbreitungs in zwei Dimensionen

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) + V(y) + \frac{1}{2} m\omega^2 z^2$$

$$V(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } -L<\xi<L \\ +\infty & \text{für } |\xi| \geq L \end{cases} \qquad \Big| \; L \gg a_0, \quad a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

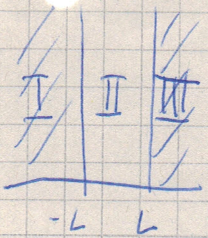
a)

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}_x &= \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_x\right)\Psi(x) \\ \hat{H}_y &= \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + V_y\right)\Psi(y) \end{aligned}\right\} \text{unendlicher Potentialtopf}$$

$$\hat{H}_z \;" = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 z^2\right)\Psi(z) \Big\} \text{ harmonischer Oszillator}$$

Für $\hat{H}_x$ und $\hat{H}_y$ löse unendlichen Potentialtopf

Löse Stationäre Schrödinger gl.



$$\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x) + V(x)\Psi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x) = (V-E)\frac{2m}{\hbar^2}\Psi(x)$$

Bereich I : $V = \infty$

$$\Psi(x) = A_I e^{kx} + B e^{-kx} \qquad \Big| \; k = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$$

$$= A e^{kx} + \cancel{B e^{-kx}}$$ nicht im Hilbertraum

Bereich III : $V = \infty$ analog

$$\Psi(x) = B_{III} e^{-kx}$$

Bereich II : $V = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi(x) \qquad \Big| \; \varkappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

$$\Psi(x) = A_{II} e^{i\varkappa x} + B_{II} e^{-i\varkappa x}$$

Stetigkeit: $\Psi_I(-L) = \Psi_{II}(-L)$ und $\Psi_{II}(L) = \Psi_{III}(L)$

$$0 = A_I e^{-kL} = A_{II} e^{-i\varkappa L} + B_{II} e^{+i\varkappa L}$$

$$0 = B_{III} e^{-kL} = A_{II} e^{i\varkappa L} + B_{II} e^{-i\varkappa L}$$

(tut ihr ja so halb)

Einfach Separation d. Variablen benutzen, dann nur Bereich $(x,y) \in [L,-L]^2$ betrachten. Außerhalb 0.
In z: Eigenfkt d. harm. Osz. + 0