19.05 Theo-VL

Korrektur $|\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_R\rangle - |\Psi_L\rangle)$

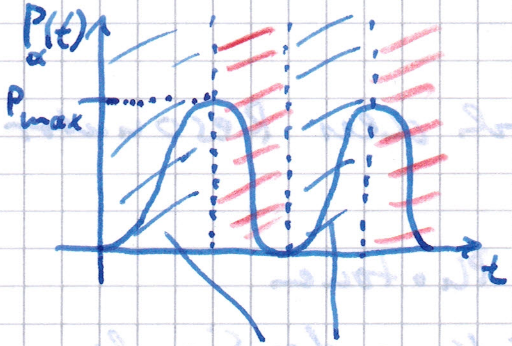
Wir betrachten einen Strahl von Molekülen, die $|\Psi_A\rangle$ zur Zeit $t=0$:

$$a(t=0) = \alpha(t=0) = 0$$

Die Wahrscheinlichkeit das Molekül nach einer Zeit t in dem Zustand $|\Psi_S\rangle$ zu finden ist:

$$P_\alpha(t) = |\alpha(t)|^2 = \frac{\omega_1^2}{(\omega-\omega_0)^2+\omega_1^2}\sin^2\left(\sqrt{\omega_1^2+(\omega-\omega_0)^2}\,\frac{t}{2}\right)$$

Rabi-Formel



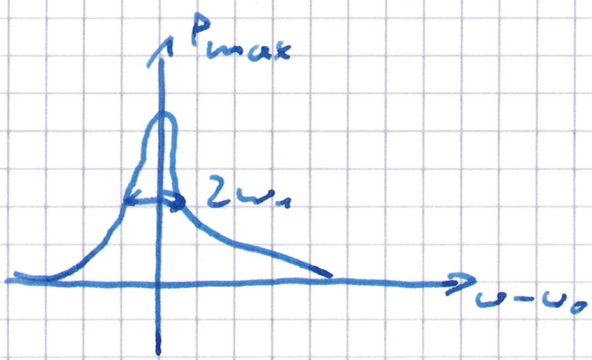
Rabioszillationen

Molekül wird abgeregt, emitiert Photon

Molekül wird angeregt, absorbiert Photon

$$P_{max} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2+(\omega-\omega_0)^2} \leq 1$$

Gleichheit bei Resonanz $\omega = \omega_0$



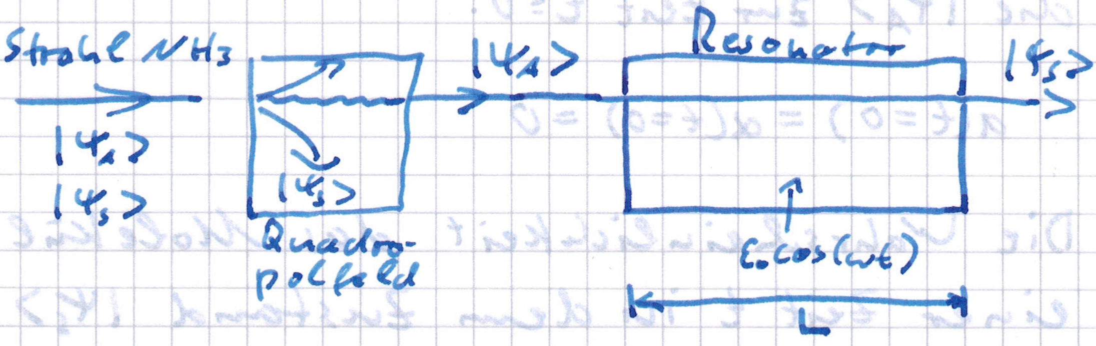
Periode auf Resonanz:

$$T = \frac{\pi}{\omega_1}$$

Für $\varepsilon_0 \approx 10^{-3}\,Vm^{-1}$ => $T \simeq 7\cdot 10^{-8}\,s$

Der Maser

microwave amplifikation by stimulated emission of radiation



Die Länge L ist so gewählt, dass die Moleküle die Zeit

$$T = \frac{(2n+1)\pi}{\omega_1}$$

benötigen, um durch den Resonator zu fliegen

⇝ Max Emission an Photonen

⇝ maximale Verstärkung des Signals $\varepsilon_0 \cos(\omega t)$

VII Anwendungen der Kommutatoren

Hier werden wir verschiedene Anwendungen der Kommutatorrelationen kennen lernen.

Unschärferelation:

Seien A und B physikalische Größen und $\hat{A}$ und $\hat{B}$ die zugehörigen Observablen und $|\psi\rangle$ der Zustand des Systems.

Sei $\langle \hat{A} \rangle = 0$ und $\langle \hat{B} \rangle = 0$ (oBdA, da Observablen verschoben werden können: $\tilde{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$).

Dann gilt:

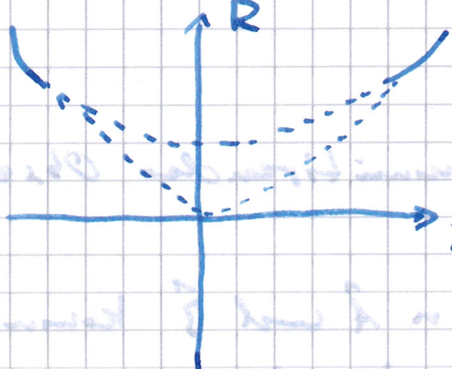
$$\Delta a \Delta b \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right|$$

Beweis:

$$0 \leq \| \hat{A} + i\lambda \hat{B} |\psi\rangle \|^2 = \overbrace{\langle \psi | (\hat{A}^\dagger - i\lambda^* \hat{B}^\dagger)(\hat{A} + i\lambda \hat{B}) | \psi \rangle}^{:= R}$$

$$\overset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \underbrace{\langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle}_{\Delta a^2 \in \mathbb{R}} + \lambda^2 \underbrace{\langle \psi | \hat{B}^2 | \psi \rangle}_{\Delta b^2 \in \mathbb{R}} + \underbrace{i\lambda \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle}_{\in \mathbb{R}}$$

Der Ausdruck muss für alle λ positiv sein.



höchstens eine Lösung kann für $R = 0$ existieren

$\Rightarrow$ Diskriminante muss negativ oder null sein

$$\Rightarrow \Delta a \Delta b \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle \right|$$

Physikalische Interpretation:

Wenn $\hat{A}$ & $\hat{B}$ nicht vertauschen, können die Varianz Δa^2 und Δb^2 nicht gleichzeitig beliebig klein werden.

Ehrenfest theorem

Zeitentwicklung eines Erwartungswerts:

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\langle\psi|\right)\hat{A}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{A}\left(\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right) + \langle\psi|\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}|\psi\rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar}\langle\psi|\hat{H}\hat{A}|\psi\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle\psi|\hat{A}\hat{H}|\psi\rangle + \langle\psi|\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \langle\psi|[\hat{A},\hat{H}]|\psi\rangle + i\hbar\langle\psi|\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}|\psi\rangle$$

Konsequenzen:

1) Erhaltungsgrößen ($\frac{d}{dt}\langle a\rangle = 0$):

- Energieerhaltung für ein isoliertes System, $\hat{H}$ nicht explizit zeitabhängig
- Normerhaltung: $i\hbar\frac{d}{dt}\langle\psi|\psi\rangle = 0$
- Impulserhaltung für ein freies Teilchen $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$:
  $i\hbar\frac{d}{dt}\langle p_i\rangle = 0$
- Bahndrehimpulserhaltung in einem Zentralpotential $V(|\vec{r}|)$:
  $\frac{d}{dt}\langle L_i\rangle = 0$

Vollständiger Satz kommutierender Observablen (vSKO)

Wenn zwei Observablen $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren, dann existiert eine Basis von dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, die aus gleichzeitigen Eigenvektoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ besteht.

Beispiel:

harmonischer Oszillator in 2D: $\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y$

$\hat{H}_x = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, $\hat{H}_y$ analog, $[\hat{H}_x, \hat{H}_y] = 0$

Man konstruiert:

$$\hat{H}_x \phi^*_{n_1}(x) = E^*_{n_1}\phi^*_{n_1}(x)$$

$$\hat{H}_y \phi^*_{n_2}(y) = E^*_{n_2}\phi^*_{n_2}(y)$$

gemeinsame Basis ist:

$$\phi_{n_1 n_2}(x,y) = \phi_{n_1}(x)\,\phi_{n_2}(y)$$

mit den Eigenwerten

$$E_{n_1 n_2} = E_{n_1} + E_{n_2} \overset{\text{harm. Osz.}}{=} \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)$$

Ein Satz von Operatoren $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \ldots$ bilden einen vollständigen Satz kommutierender Observablen, wenn die gemeinsame Eigenbasis dieser Observablen eindeutig ist, d.h. für jeden Satz von Eigenwerten gibt es genau einen Eigenvektor.

Beispiele:

- $\hat{H}_x$ und $\hat{H}_y$ bilden kein vSKO in 2D:

$$E = 2\hbar\omega \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = 1 \text{ und } n_2 = 0 \\ n_1 = 0 \text{ und } n_2 = 1 \end{array}\right\} \text{entartet}$$

Das heißt, wenn man einen Zustand durch Messen der Energie präpariert, kann man ihn nicht eindeutig festlegen.

- $\hat{H}_x$ in 1D ist ein vSKO.

Algebraische Lösung des harmonischen Oszillators

Ziel:
Wir wollen die Eigenwerte des 1D harm. Oszillators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

finden, indem wir Kommutatorrelationen benutzen.
Wir führen dimensionslose Größen ein:

$$\hat{X} = \hat{x}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \qquad \hat{P} = \hat{p}\,\frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}$$

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{\mathcal{H}}, \quad \hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$$

Wir definieren weiter die Operatoren:

Vernichtungs-/Absteigeoperator $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$

Erzeugungs-/Aufsteigeoperator $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$