2.4 Tschebyscheff Polynome

Man sucht ein Interpolationspolynom, das durch die Wertepaare (x_i, f_i) geht (bisher). Das muss nicht notwendiger Weise optimal sein, insbesondere am Rand kann es zu großen Abweichungen kommen.

Beispiel: Runges Problem - Approximation von $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ auf $[-1,1]$ mit den Stützstellen
$x_i = -1 + (i-1)\frac{2}{n}$, $i = 1, \dots, n+1$

$\Rightarrow$ Die Abweichungen am Rand werden immer größer. (im $\lim_{n \to \infty}$ sogar ∞)

Wie müssen die Stützstellen gelegt werden, damit das nicht passiert? Gesucht sind Stützstellen $\{x_i\}$ so, dass

$$\max_{x \in I} |f(x) - P_n(x, \{x_i\})|$$

minimal wird. Das entsprechende Polynom wird Minimaxpolynom genannt, welches sehr schwer zu bestimmen ist. Da der Fehler der Approximation hauptsächlich von den zugeordneten Polynomen stammt, betrachten wir stattdessen:

$$\Delta^{(n)}(x) = \omega_{n+1}(x) \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}$$

$$\max_{x \in I} |f(x) - P_n(x, \{x_i\})| \leq \max_{x \in I} |\omega_{n+1}(x)| \max_{x \in I} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \{x_i\} = \underset{\{x_i'\}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \max_{x \in I} |\omega_{n+1}(x, \{x_i'\})| \right\}$$

Für $I = [-1, 1]$ wird dieses Problem durch die Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome gelöst.

__Definition:__

Tschebyscheff-Polynome 1. Art sind durch folgende Rekursion definiert:

$$T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x \quad , \quad T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Die Definition folgt aus den trigonometrischen Beziehungen:

$$\cos(0) = 1 \quad , \quad \cos(\varphi) = \cos(\varphi)$$
$$\cos(2\varphi) = 2\cos(\varphi)\cos(\varphi) - 1$$
$$\cos((n+1)\varphi) = 2\cos(\varphi)\cos(n\varphi) - \cos((n-1)\varphi)$$

wenn wir folgende Identifikation vornehmen:

$$T_n(x) = T_n(\cos(\varphi)) = \cos(n\varphi) = \cos(n \arccos(x))$$

mit der Hilfsvariable $\varphi = \arccos(x)$.
Aus der Rekursionsbeziehung folgt sofort, dass

$$T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + \dots$$
also $P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$

normalisiert ist, wie es die zugeordneten Polynome ω_n sind.
Aus $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ folgt, dass $T_n(x)$ folgende $(n-1)$ Nullstellen hat:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(k+1/2)}{n}\right) \quad ; k = 0, \dots, n-1 \qquad \text{da } \cos\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) = 0$$

Außerdem hat $T_n(x)$ n Extrema $x_k' = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $k = 0, \dots, n$ mit $T_n(x_k') = \pm 1$. Die Nullstellen sind symmetrisch um 0 und dichter am Rand des Intervalls.

Konstruktion des Tschebyscheff-Interpolationspolynoms

Wir nutzen die $(n+1)$ Nullstellen von $T_{n+1}(x)$ als Stützstellen für unser Polynom $g_n(x)$ mit der Forderung:

$$g_n(x_k) = f(x_k) \qquad k = 0, \dots, n$$

Das gilt genau dann, wenn $g_n(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(x)$

mit den Koeffizienten:

$$c_k = \frac{2}{n+1} \sum_{l=0}^{n} T_k(x_l) f(x_l) = \frac{2}{n+1} \sum_{l=0}^{n} \cos\left(k \frac{\pi(l+1/2)}{n+1}\right) f(x_l)$$

Um zu zeigen, dass damit tatsächlich

$$g_n(x_l) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x_l) + \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(x_l) = f(x_l) \qquad (*)$$

gilt, benötigt man

$$\sum_{l=0}^{n} T_i(x_l) T_j(x_l) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1/2\, n & i = j \neq 0 \qquad 0 < i,j \leq n \\ n & i = j = 0 \end{cases}$$

Damit sind die Spalten der Matrix des linearen Gleichungssystems paarweise orthogonal und die c_k sind die entsprechenden Lösungen.

In der Praxis:

Generiere die Koeffizienten c_k für gegebenes n gemäß

$$c_k = \frac{2}{n+1} \sum_{l=0}^{n} \cos\left(k \frac{\pi(l+\frac{1}{2})}{n+1}\right) f(x_l)$$

Dabei muss die Funktion f gegebenenfalls von $[a,b]$ auf das Intervall $[-1,1]$ skaliert werden

$$f(y) = f\left(x \frac{(b-a)}{2} - \frac{b+a}{2}\right) \qquad \begin{array}{l} x \in [-1,1] \\ y \in [a,b] \end{array}$$

Auswertung des Polynoms g_n mit Hilfe der Clenshaw-Rekursion:

<u>Algorithmus:</u> Clenshaw-Rekursion

Input: c_k, $x \in [-1,1]$

$b_{m+1} = b_m = 0$

for $i = m-1, m-2, \dots, 1$

$b_i = 2x\, b_{i+1} - b_{i+2} + c_i$

output: $g_n(x) = x b_1 - b_2 + \frac{c_0}{2}$

(zu zeigen durch langes und langweiliges Nachrechnen)

<u>Bemerkung:</u>

a) Für jede Folge von Funktionen der Form

$$P_{n+1}(x) = \alpha(n,x)\, P_n(x) + \beta(n,x)\, P_{n-1}(x)$$

kann eine Clenshaw Rekursion formuliert werden, um

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k$$

zu berechnen. (Spezialfall: Horner-Schema)

b) Die Rekursion ist fast immer numerisch stabil.

2.5 Interpolation mit Rationalen Funktionen

Gesucht ist eine rationale Funktion

$$\phi^{\mu\nu}(x) := \frac{P^{\mu\nu}(x)}{Q^{\mu\nu}(x)} := \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_\mu x^\mu}{b_0 + b_1 x + \dots + b_\nu x^\nu}$$

deren Zählergrad höchstens μ und deren Nennergrad höchstens ν ist und damit die Werte $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ verläuft.
Da $\phi^{\mu\nu}(x)$ nur bis auf einen Faktor $g \neq 0$ bestimmt ist, benötigt man $\mu+\nu+1$ Interpolationsbedingungen

$$\phi^{\mu\nu}(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, \dots, \mu+\nu$$

Daraus folgt das homogene lineare Gleichungssytem.

$$P^{\mu\nu}(x_i) - f_i\, Q^{\mu\nu}(x_i) = 0 \qquad i = 0, 1, \dots, \mu+\nu$$

aus dem die Koeffizienten $\{a_i\}$ und $\{b_i\}$ bestimmt werden können.

Beispiel:

x_i	0	1	2
f_i	1	2	2

$$\begin{aligned} a_0 + \quad & - b_0 &= 0 \\ a_0 + a_1 & - 2(b_0 + b_1) &= 0 \\ a_0 + 2a_1 & - 2(b_0 + 2b_1) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0,\ b_0 = 0,\ a_1 = 2,\ b_1 = 1$$

und damit $\phi^{1,1}(x) := \frac{2x}{2} = 2$ $\lightning$ verläuft nicht durch alle Stützwerte $\lightning$

Diese Punkte nennt man unerreichbare Punkte, welche in der Praxis aber selten auftreten.

Interessiert man sich nur für die Werte der Interpolationsfunktion an bestimmten x, aber nicht für die Koeffizienten $\{a_i\}\{b_i\}$, so bietet sich der folgende Algorithmus an:

<u>Algorithmus:</u> Interpolation mit rationalen Funktionen nach Neville

Input: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_{\mu+\nu}, f_{\mu+\nu}), x$

for $i = 0, \ldots, \mu+\nu$

$\quad T_{i,0} = f_i \quad , \quad T_{i,-1} = 0$

$\quad$ for $k = 1, \ldots, i$

$$T_{i,k} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\frac{x - x_{i-k}}{x - x_i}\left[1 - \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-2}}\right] - 1}$$

Output: $T_{\mu+\nu,\mu+\nu} \; (:= \phi^{\mu\nu}(x))$

mit if-Statement die 0 abfangen, sonst gibt es Probleme

Bemerkungen:

- Die rationale Funktion ist eindeutig bestimmt, sofern $b_0 = 1$.
- Rationale Interpolation bietet sich besonders für Funktionen mit Polstellen an.
- Stichwort: Padé-Approximation.