Anwesenheitsübung 7 zur Vorlesung 'Numerische Methoden der Physik' SS 2014

Bastian Knippschild, Christian Jost und Mitarbeiter

Bearbeitung in den Übungen am 27. – 29. 05. 2014

In diesen Aufgaben geht es um Matrizen, Vektoren und lineare Gleichungssysteme (LGS).

Matrix-Vektor-Mulitplikation

Schreiben Sie eine Funktion, die eine beliebige $n \times n$-Matrix A mit einem Vektor multipliziert und den resultierenden Vektor zurückgibt. Diese Funktion wird im Folgenden des Öfteren benötigt werden. Zum Testen können Sie

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

verwenden. Als Ergebnis sollten Sie $(20,28,32,30)^T$ erhalten.

Rückwärtssubstitution

In der Vorlesung wurde die sogenannte Vorwärtssubstitution besprochen, die ein systematisches Lösungsverfahren für LGS der Form $Lx = b$ darstellt, wobei L eine linke, untere Dreiecksmatrix ist. Analog zu dem in der Vorlesung angegebenen Pseudocode für die Vorwärtssubstitution, sollen Sie sich nun in dieser Aufgabe überlegen, wie der analoge Algorithmus (Rückwärtssubstitution) für den Fall einer rechten, oberen Dreiecksmatrix R und das entsprechende LGS $Rx = b$ auszusehen hat.

Implementieren sie diesen Algorithmus dann für eine beliebige, rechte, obere Dreiecksmatrix. Zum Testen ihres Programms können Sie

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -10 & 7 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

verwenden. Die korrekte Lösung für das LGS ist gegeben durch $\{x_1 = 71, x_2 = -33, x_3 = -11, x_4 = 4\}$.

Gauss-Elimination

Der einfachste Fall eines Gaußschen Eliminationsverfahren ohne Pivotisierung, d.h. ohne Notwendigkeit Vertauschungen zu betrachten, ist durch den folgenden Pseudocode gegeben. Hierbei sei A eine $n \times x$-Matrix in einer Form, die keine Vertauschungen erfordert.

```
for k = 0,...,n - 1; do
  for i = k,...,n - 1; do
    for m = 0, ..., k - 1; do
      A[k][i] = A[k][i] - A[k][m]*A[m][i]
    end for
    if i != k; then
      A[k][i] = A[k][i] / A[k][k]
    end if
  end for
  A[k][k] = 1
end for
set A[i][k] = 0 for i = 0,...,n-1  and k = 0,...,i-1
return A
```

Implementieren Sie diesen Algorithmus. Überlegen sie sich dann, wie der Algorithmus noch erweitert werden muss, damit auch der Vektor b bei einem gegebenen LGS $Ax = b$ korrekt umgeformt wird.

Verwenden Sie anschließend Ihren Algorithmus zur Rückwärtssubstitution um den Lösungsvektor des LGS $Ax = b$ mit dem oben angegebenen A, b zu bestimmen. Als Lösung sollten Sie (innerhalb von Rundungsfehlern) $\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1\}$ erhalten, was Sie somit als Test für die Korrektheit Ihres Algorithmus zur Gauss-Elimination verwenden können.

Um gegebenenfalls die Fehlersuche etwas zu vereinfachen sei hier auch noch die resultierende Dreiecksmatrix angegeben:

$$A_\Delta = \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.750000 & 0.500000 & 0.250000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.857143 & 0.714286 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 & 0.833333 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$

Der zugehörige Vektor auf der rechten Seite des betrachteten LGS nach Ausführen des Algorithmus ist gegeben durch $b' = (0.250000, 0.714286, 0.833333, 1.000000)^T$.