Anwesenheitsübung 6 zur Vorlesung 'Numerische Methoden der Physik' SS 2014

Bastian Knippschild, Christian Jost und Mitarbeiter

Bearbeitung in den Übungen am 20. – 22. 05. 2014

Nullstellen-Bestimmung

Betrachten Sie die folgende nichtlineare Gleichung

$$2x - \cos(x) = 0.5 \tag{1}$$

Bringen Sie diese Gleichung zunächst auf Fixpunktform $x = F(x)$ und überlegen Sie sich auf welchem Intervall die Funktion $F(x)$ kontrahierend ist. Implementieren Sie dann ein 1-Punkt Iterationsverfahren um den Fixpunkt x_0 zu bestimmen.

Als Ergebnis sollten Sie $x_0 = 0.648496$ erhalten.

Bisektion

Nun wollen wir uns einem Verfahren höherer Ordnung zuwenden. Ein einfaches Beispiel für ein solches Verfahren ist die Bisektionsmethode. Implementieren Sie dieses Verfahren. Benutzen Sie dann Ihren Code um für

$$f(x) = x^3 - 7x + 6 \tag{2}$$

alle Nullstellen im Intervall $[-10.0,10.0]$ zu bestimmen.

Warum ist die alleinige Verwendung eines Bisektion-Verfahrens für beliebige Polynome im Allgemeinen problematisch?

Newton-Verfahren

In dieser Aufgabe soll das in der Vorlesung diskutierte Newton-Verfahren zu Bestimung von Nullstellen implementiert werden. Die Verwendung dieses i.A. sehr schnell konvergierenden Verfahrens setzt vorraus, dass die Ableitung der Funktion, deren Nullstellen bestimmt werden sollen sich ohne großen Aufwand bestimmen lässt (im Idealfall analytisch). Dies ist für die folgende Beispielfunktion offensichtlich der Fall:

$$f(x) = \exp(-2x) - \sin(x) - 2 \tag{3}$$

Bestimmen Sie die (positive) Nullstelle von $f(x)$ mit dem Newton-Verfahren. Als Ergebnis sollten Sie $x_0 = -0.273915$ erhalten.

Variieren Sie auch den Startwert für das Newton-Verfahren im Intervall $[-5.0,5.0]$. Warum tritt ein Problem auf für bestimmte Startwerte?