

# **Programación del método de los elementos finitos aplicado al análisis mecánico estático de sólidos**

---

D. L. Linero, M. Estrada y D. Garzón

Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de Colombia

20 de junio de 2020



# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivo y alcance . . . . .	2
1.2	Herramientas utilizadas en el libro . . . . .	3
1.3	Descripción del contenido del libro . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Formulación del problema mecánico elástico lineal unidimensional</b>	<b>7</b>
2.1	Barras sometidas a fuerza axial . . . . .	7
2.1.1	Desplazamiento y funciones de forma de un elemento finito . .	9
2.1.1.1	Elemento unidimensional lineal de continuidad $C_0$ . .	10
2.1.1.2	Elemento unidimensional cuadrático de continuidad $C_0$	10
2.1.2	Componentes de deformación infinitesimal y matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento . . . . .	11
2.1.2.1	Elemento unidimensional lineal de continuidad $C_0$ . .	11
2.1.2.2	Elemento unidimensional cuadrático de continuidad $C_0$	12
2.1.3	Esfuerzo normal y fuerza axial . . . . .	12
2.1.4	Principio de los Trabajos Virtuales . . . . .	12
2.1.5	Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el elemento finito . . . . .	13

2.1.5.1	Elemento unidimensional lineal de continuidad $C_0$	15
2.1.5.2	Elemento unidimensional cuadrático de continuidad $C_0$	15
2.1.6	Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el sólido	16
2.1.7	Vector de desplazamientos nodales en el sólido	20
2.1.8	Vector de fuerzas en el sólido	21
2.1.9	Desplazamiento, deformación, esfuerzo y fuerza axial en el interior de cada elemento	22
2.1.10	Resumen de resultados obtenidos	23
2.2	Vigas sometidas a flexión	23
2.2.1	Elemento de viga y su matriz de funciones de forma	26
2.2.2	Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento de viga	27
2.2.3	Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes del elemento finito unidimensional de viga	27
2.2.4	Tabla de conectividades, tablas de numeración de grados de libertad por nudo y por elemento	30
2.2.5	Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el sólido	31
2.2.6	Vector de desplazamientos nodales y fuerzas totales en el sólido	32
2.2.7	Vector de fuerzas internas en los nudos de cada elemento	34
2.2.8	Resumen de resultados obtenidos	35
<b>3</b>	<b>Formulación del problema mecánico elástico lineal bidimensional</b>	<b>37</b>
3.1	Formulación general en el interior de un elemento finito	38
3.1.1	Desplazamiento y funciones de forma de un elemento finito	39
3.1.2	Componentes de deformación infinitesimal	41
3.1.3	Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento	42
3.1.4	Componentes de esfuerzo y matriz constitutiva elástica	42
3.1.5	Esfuerzos principales	44
3.1.6	Criterio de fallo del material de von Mises	46
3.1.7	Deformaciones principales	47

3.2	Formulación general en la malla de elementos finitos . . . . .	49
3.2.1	Principio de los Trabajos Virtuales . . . . .	50
3.2.2	Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el elemento finito . . . . .	51
3.2.3	Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el sólido .	53
3.2.4	Vector de desplazamientos nodales en el sólido . . . . .	54
3.2.5	Vector de fuerzas en el sólido . . . . .	55
3.2.6	Componentes de desplazamiento, deformación y de esfuerzo en el interior de cada elemento . . . . .	55
3.2.7	Resumen de resultados obtenidos . . . . .	56
3.3	Formulación del elemento triangular lineal . . . . .	56
3.3.1	Matriz de funciones de forma . . . . .	57
3.3.2	Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma . . . . .	58
3.3.3	Matriz de rigidez . . . . .	58
3.3.4	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme en sistema coordenado global . . . . .	58
3.3.5	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme normal y tangencial . . . . .	60
3.3.6	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión hidrostática . . . . .	62
3.3.7	Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso específico del material . . . . .	63
3.4	Formulación del elemento cuadrilateral bilineal . . . . .	64
3.4.1	Matriz de funciones de forma . . . . .	66
3.4.2	Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma . . . . .	66
3.4.3	Matriz de rigidez . . . . .	68
3.4.4	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme en sistema coordenado global . . . . .	69

3.4.5	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme normal y tangencial . . . . .	71
3.4.6	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión hidrostática . . . . .	71
3.4.7	Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso específico del material . . . . .	72
3.5	Ejemplo demostrativo . . . . .	73
3.5.1	Conectividades y grados de libertad de los elementos finitos .	73
3.5.2	Matriz de rigidez de los elementos finitos y de la malla . . . .	76
3.5.3	Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio en los elementos finitos y en la malla . . . . .	80
3.5.4	Vector de fuerzas equivalentes a la acción presión en los elementos finitos y en la malla . . . . .	82
3.5.5	Vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla	83
3.5.6	Vector de fuerzas totales en la malla . . . . .	84
3.5.7	Vector y tabla de desplazamientos nodales en la malla . . . .	84
3.5.8	Vector y tabla de fuerzas totales en los nudos de la malla . .	85
3.5.9	Vector de desplazamientos nodales de cada elemento finito ..	86
3.5.10	Componentes de deformación y de esfuerzo en el interior de los elementos finitos . . . . .	87
3.5.11	Componentes de deformación y de esfuerzo promedio en los nudos de la malla . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Formulación del problema mecánico elástico lineal tridimensional</b>	<b>91</b>
4.1	Campo del desplazamiento, de la deformación y del esfuerzo en un punto material . . . . .	92
4.2	Esfuerzos principales y esfuerzo equivalente de von Mises . . . . .	95
4.3	Deformaciones principales . . . . .	97
4.4	Desplazamiento y matriz de funciones de forma de un elemento tetraédrico lineal . . . . .	99

4.5	Deformación, esfuerzo y matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento tetraédrico lineal . . . . .	102
4.6	Formulación general en la malla de elementos finitos y principio de los Trabajos Virtuales . . . . .	103
4.7	Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en un elemento finito	105
4.8	Matriz de rigidez y vectores fuerzas equivalentes del elemento tetraédrico lineal . . . . .	106
4.8.1	Matriz de rigidez . . . . .	107
4.8.2	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme en sistema coordenado global . . . . .	110
4.8.3	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme normal a una cara del elemento . . . . .	111
4.8.4	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión hidrostática . . . . .	114
4.8.5	Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso específico del material . . . . .	115
4.9	Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el sólido . . . . .	116
4.10	Vector de desplazamientos nodales en el sólido . . . . .	117
4.11	Vector de fuerzas totales y reacciones en el sólido . . . . .	118
4.12	Componentes de desplazamiento, deformación y de esfuerzo en el interior de cada elemento . . . . .	118
4.13	Resumen de resultados obtenidos . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Generalidades y estructura del programa PEFiCA 2.0</b>	<b>121</b>
5.1	Antecedentes . . . . .	121
5.2	Objetivo . . . . .	122
5.3	Alcance . . . . .	123
5.4	Características . . . . .	124
5.5	Estructura general . . . . .	125
5.6	Formatos de los archivos de entrada y de salida . . . . .	126
5.7	Instalación del programa PEFiCA 2.0 . . . . .	128

<b>6 Lenguaje y compilador GNU–Octave</b>	<b>131</b>
6.1 Interfaz gráfica de usuario . . . . .	131
6.1.1 Selección del directorio de trabajo . . . . .	133
6.1.2 Archivos de entrada de datos tipo <i>script</i> . . . . .	133
6.1.3 Edición de archivos de la función principal de las demás funciones propias . . . . .	134
6.2 Limites del programa PEFICA 2.0 compilado en GNU–Octave . . . . .	134
6.3 Ejecución de la rutina principal del programa . . . . .	135
6.3.1 Opciones para el análisis bidimensional . . . . .	136
6.3.2 Opciones para el análisis tridimensional . . . . .	137
<b>7 Implementación de la solución del problema mecánico elástico lineal unidimensional</b>	<b>139</b>
7.1 Archivo de entrada tipo <i>script</i> de GNU–Octave y variables de datos del programa . . . . .	140
7.1.1 Parámetros generales del problema . . . . .	140
7.1.2 Tabla de categorías . . . . .	141
7.1.3 Tabla de conectividades y categorías de los elementos . . . . .	142
7.1.4 Tabla de coordenadas de los nudos . . . . .	143
7.1.5 Tabla de desplazamientos conocidos en los nudos . . . . .	144
7.1.6 Tabla de fuerzas aplicadas en los nudos . . . . .	145
7.1.7 Tabla de cargas distribuidas uniformes en los elementos . . . . .	146
7.2 Variables del proceso de cálculo . . . . .	147
7.2.1 Variables escalares . . . . .	148
7.2.2 Variables matriciales . . . . .	150
7.3 Variables de resultados del programa . . . . .	153
7.4 Rutina principal del programa PEFICA.m . . . . .	158
7.4.1 Ubicación de archivos y lectura de datos de entrada . . . . .	158
7.4.2 Grados de libertad de nudos y elementos . . . . .	159
7.4.3 Matriz de rigidez de los elementos y de la malla . . . . .	159
7.4.4 Vector de fuerzas equivalentes de los elementos y de la malla .	161

7.4.5	Vector de fuerzas en los nudos de la malla . . . . .	162
7.4.6	Vector y tabla de desplazamientos en los nudos de la malla . .	162
7.4.7	Vector y tabla de reacciones en los nudos de la malla . . . .	163
7.4.8	Resultados en el interior de cada elemento . . . . .	164
7.4.8.1	Problema unidimensional de barras sometidas a fuerza axial . . . . .	164
7.4.8.2	Problema unidimensional de barras sometidas a flexión	167
7.5	Funciones propias del programa . . . . .	170
7.5.1	Función propia de la matriz de funciones de forma del elemento: NELEME . . . . .	170
7.5.2	Función propia de la matriz operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma del elemento: BELEME . . . . .	171
7.5.3	Función propia de la matriz de rigidez del elemento: KELEME	172
7.5.4	Función propia del vector de fuerzas equivalentes del elemento: FELEMD . . . . .	172
7.5.5	Funciones propias de construcción de la tabla de grados de libertad por nudo y por elemento: NGLUCO y NGLELE . . .	173
7.5.6	Funciones propias de organización de vectores y tablas de valores nodales: ORTAEX, ORTAVE y ORVETA . . . . .	175
7.5.7	Función propia de extracción de vectores elementales: EXTRAV	176
7.5.8	Funciones propias de presentación de resultados: IMREAX, IMREFL y IMTIEM . . . . .	177
7.5.9	Otras funciones propias . . . . .	178
7.6	Ejemplos de aplicación de barras sometidas a fuerza axial . . . . .	179
7.6.1	Barra doblemente empotrada con malla de 3 elementos lineales	179
7.6.2	Barra doblemente empotrada con malla de 10 elementos lineales	182
7.6.3	Barra doblemente empotrada con malla de 32 elementos lineales	185
7.6.4	Barra doblemente empotrada con malla de elementos cuadráticos	186
7.7	Ejemplos de aplicación de barras sometidas a flexión . . . . .	190
7.7.1	Viga empotrada–articulada sometida a cargas transversal distribuida y puntual . . . . .	190

7.7.2	Viga doblemente empotrada con sección transversal variable . . . . .	193
<b>8</b>	<b>Implementación de la solución del problema mecánico elástico lineal bidimensional</b>	<b>199</b>
8.1	Archivo de entrada de datos para PEFICA 2.0 . . . . .	199
8.1.1	Archivo de entrada tipo <i>script</i> de GNU–Octave . . . . .	200
8.1.2	Archivo de entrada tipo <i>mesh</i> de GMSH . . . . .	200
8.2	Variables de datos del programa . . . . .	200
8.2.1	Parámetros generales del problema . . . . .	201
8.2.2	Tabla de categorías . . . . .	203
8.2.3	Tabla de conectividades y categorías de los elementos . . . . .	204
8.2.4	Tabla de coordenadas de los nudos . . . . .	205
8.2.5	Tabla de desplazamientos conocidos en los nudos . . . . .	205
8.2.6	Tabla de fuerzas aplicadas en los nudos . . . . .	206
8.2.7	Tabla de cargas distribuidas en los elementos . . . . .	207
8.3	VARIABLES DEL PROCESO DE CÁLCULO . . . . .	208
8.3.1	VARIABLES ESCALARES . . . . .	208
8.3.2	VARIABLES MATRICIALES . . . . .	212
8.4	VARIABLES DE RESULTADOS DEL PROGRAMA . . . . .	215
8.5	RUTINA PRINCIPAL DEL PROGRAMA PEFICA.m . . . . .	217
8.5.1	Ubicación de archivos y lectura de datos de entrada . . . . .	218
8.5.2	Grados de libertad de nudos y elementos . . . . .	220
8.5.3	Matriz de rigidez de los elementos y de la malla . . . . .	220
8.5.4	Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material en los elementos y en la malla . . . . .	222
8.5.5	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de cargas distribuidas en los elementos y en la malla . . . . .	223
8.5.6	Vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla y vector de fuerzas totales . . . . .	224
8.5.7	Vector y tabla de desplazamientos en los nudos de la malla . . . . .	224
8.5.8	Vector y tabla de fuerzas totales en los nudos de la malla . . . . .	225

8.5.9	Vector y tabla de fuerzas aplicadas directamente en nudos y reacciones de la malla . . . . .	226
8.5.10	Deformaciones y esfuerzos en el interior de cada elemento finito	227
8.5.11	Presentación de resultados . . . . .	229
8.6	Formatos de las tablas de desplazamientos conocidos y fuerzas puntuales	230
8.7	Funciones propias del programa . . . . .	231
8.7.1	Función de lectura de datos del programa GMSH: LEGMSH .	232
8.7.2	Función de la matriz de funciones de forma del elemento: NEL LEME . . . . .	232
8.7.3	Función de la matriz de operadores diferenciales actuando so- bre funciones de forma del elemento: BELEME . . . . .	233
8.7.4	Función de la matriz constitutiva elástica del material asociado al elemento: DELEME . . . . .	234
8.7.5	Función propia de la matriz de rigidez del elemento: KELEME	234
8.7.6	Función propia del vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio: FELEM C . . . . .	235
8.7.7	Función propia del vector de fuerzas equivalentes a la acción de las presiones: FELEMS . . . . .	235
8.7.8	Funciones propias de construcción de la tabla de grados de libertad por nudo y por elemento: NGLUCO y NGLELE . .	236
8.7.9	Funciones propias de organización de vectores y tablas de va- lores nodales: ORTAEX, ORTAVE y ORVETA . . . . .	237
8.7.10	Función propia de extracción de vectores elementales: EXTRAV	239
8.7.11	Funciones propias de presentación de resultados: IMRESU, IM- GIDR y IMGMSH . . . . .	239
8.7.12	Otras funciones propias . . . . .	240
8.8	Ejemplos de aplicación . . . . .	242
8.8.1	Lámina sometida a carga distribuida y fuerza puntual longitu- dinal . . . . .	242
8.8.1.1	Postproceso gráfico en GMSH . . . . .	243
8.8.1.2	Postproceso gráfico en GiD y en ventana de comandos	244

8.8.2	Ménsula sometida a una carga distribuida transversal . . . . .	246
8.8.2.1	Preproceso y postproceso gráfico en GiD . . . . .	246
8.8.2.2	Postproceso gráfico en GMSH a partir del archivo .m	249
8.8.2.3	Preproceso y postproceso gráfico en GMSH . . . . .	249
8.8.3	Lámina cuadrada con orificio sometida a presiones axiales . .	249
8.8.4	Aplicación del principio de Saint-Venant a una lámina con car- ga puntual . . . . .	252
8.8.5	Puente romano de seis luces . . . . .	256
8.8.6	Estructura de drenaje sometida a carga distribuida uniforme .	261
8.8.7	Presa hidráulica de sección constante . . . . .	263
8.8.7.1	Resultados evaluados en el interior de los elementos .	265
8.8.7.2	Resultados promedio en los nudos y suavizados . . . .	265
8.8.8	Suelo sometido a una carga vertical bajo una zapata de cimen- tación . . . . .	266
<b>9</b>	<b>Implementación de la solución del problema elástico lineal tridi- mensional</b>	<b>271</b>
9.1	Archivo de entrada de datos para PEFiCA 2.0 . . . . .	271
9.1.1	Archivo de entrada tipo <i>script</i> de GNU–Octave . . . . .	272
9.1.2	Archivo de entrada tipo <i>mesh</i> de GMSH . . . . .	272
9.2	Variables de datos del programa . . . . .	272
9.2.1	Parámetros generales del problema . . . . .	273
9.2.2	Tabla de categorías . . . . .	274
9.2.3	Tabla de conectividades y categorías de los elementos . . . . .	275
9.2.4	Tabla de coordenadas de los nudos . . . . .	276
9.2.5	Tabla de desplazamientos conocidos en los nudos . . . . .	277
9.2.6	Tabla de fuerzas aplicadas en los nudos . . . . .	278
9.2.7	Tabla de cargas distribuidas en los elementos . . . . .	278
9.3	Variables del proceso de cálculo . . . . .	280
9.3.1	Variables escalares . . . . .	280
9.3.2	Variables matriciales . . . . .	283

9.4	Variables de resultados del programa . . . . .	286
9.5	Rutina principal del programa PEFICA.m . . . . .	289
9.5.1	Ubicación de archivos y lectura de datos de entrada . . . . .	289
9.5.2	Grados de libertad de nudos y elementos . . . . .	291
9.5.3	Matriz de rigidez de los elementos y de la malla . . . . .	292
9.5.4	Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material en los elementos y en la malla . . . . .	293
9.5.5	Vector de fuerzas equivalentes a la acción de cargas distribuidas en los elementos y en la malla . . . . .	294
9.5.6	Vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla y vector de fuerzas totales . . . . .	295
9.5.7	Vector y tabla de desplazamientos en los nudos de la malla . .	296
9.5.8	Vector y tabla de fuerzas totales en los nudos de la malla . .	296
9.5.9	Vector y tabla de fuerzas aplicadas directamente en nudos y reacciones de la malla . . . . .	297
9.5.10	Deformaciones y esfuerzos en el interior de cada elemento finito	298
9.5.11	Presentación de resultados . . . . .	301
9.6	Formatos de las tablas de desplazamientos conocidos y fuerzas puntuales	301
9.7	Funciones propias del programa . . . . .	302
9.7.1	Función de lectura de datos del programa GMSH: LEGMSH .	303
9.7.2	Función de la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma: BELEME . . . . .	303
9.7.3	Función de la matriz de rigidez: KELEME . . . . .	304
9.7.4	Función de la matriz constitutiva del material asociado a un elemento: DELEME . . . . .	304
9.7.5	Función del vector de fuerzas equivalentes a la acción una presión en un elemento: FELEMS . . . . .	305
9.7.6	Función del vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio de un elemento: FELEMС . . . . .	306
9.7.7	Funciones propias de construcción de la tabla de grados de libertad por nudo y por elemento: NGLUCO y NGLELE . .	307

9.7.8	Funciones propias de organización de vectores y tablas de valores nodales: ORTAEX, ORTAVE y ORVETA . . . . .	308
9.7.9	Función propia de extracción de vectores elementales: EXTRAV310	
9.7.10	Función propia de presentación de resultados: IMGMSH . . .	310
9.7.11	Otras funciones propias . . . . .	310
9.8	Ejemplos de aplicación . . . . .	312
9.8.1	Bloque empotrado sometido a carga distribuida y puntual . .	313
9.8.1.1	Resultados evaluados en el interior de los elementos a partir de un archivo de datos <i>script</i> . . . . .	313
9.8.1.2	Resultados promedio en los nudos y suavizados en la malla a partir de los archivos de datos de GMSH . .	314
9.8.2	Cabezal de pilotes sometido a una carga transmitida por una columna . . . . .	315
9.8.3	Presa de bóveda sometida a la presión hidráulica y su peso propio	317
9.8.4	Ensayo de resistencia al arrancamiento del concreto . . . .	320
9.8.5	Ensayo de compresión de un cilindro de concreto como material formado por agregados y mortero . . . . .	327
<b>10</b>	<b>Programa GMSH en el preproceso</b>	<b>331</b>
10.1	Procedimiento general . . . . .	332
10.2	Deshacer en GMSH . . . . .	332
10.3	Comenzar a utilizar GMSH . . . . .	333
10.4	Opciones de presentación de las entidades geométricas . . . .	333
10.5	Construcción directa de entidades geométricas . . . . .	336
10.5.1	Construcción de puntos . . . . .	336
10.5.2	Construcción de líneas . . . . .	337
10.5.3	Construcción de superficies . . . . .	339
10.5.4	Construcción de volúmenes . . . . .	340
10.6	Construcción de formas habituales con una instrucción . . . .	341
10.6.1	Construcción de un rectángulo . . . . .	341
10.6.2	Construcción de un círculo . . . . .	342

10.6.3 Construcción de un paralelepípedo regular . . . . .	342
10.6.4 Construcción de un cilindro . . . . .	343
10.6.5 Construcción de una esfera . . . . .	344
10.7 Operaciones booleanas entre entidades geométricas . . . . .	344
10.7.1 Resta entre superficies . . . . .	345
10.7.2 Resta entre la entidad objeto y la herramienta, conservando la herramienta . . . . .	346
10.7.3 Intersección entre superficies . . . . .	347
10.7.4 Unión entre superficies mediante la operación Union . . . . .	349
10.7.5 Unión entre todas las superficies mediante la operación Coherence	350
10.7.6 División de una superficie mediante una línea . . . . .	351
10.7.7 Fusionar puntos y líneas superpuestas . . . . .	353
10.7.8 Operaciones booleanas entre volúmenes . . . . .	355
10.8 Construcción de entidades geométricas mediante extrusión de entidades de menor jerarquía . . . . .	355
10.8.1 Construcción de volúmenes a partir de la extrusión por traslación de superficies . . . . .	355
10.8.2 Construcción de volúmenes a partir de la extrusión por rotación de superficies . . . . .	357
10.9 Preparación de entidades físicas en GMSH para el proceso en PEFiCA en problemas bidimensionales . . . . .	358
10.9.1 Definición del espesor y las propiedades mecánicas del material	359
10.9.2 Definición de desplazamientos conocidos: condiciones de borde	360
10.9.3 Aplicación de cargas puntuales . . . . .	361
10.9.4 Aplicación de cargas distribuidas . . . . .	363
10.10 Preparación de entidades físicas en GMSH para el proceso en PEFiCA en problemas tridimensionales . . . . .	365
10.10.1 Definición de las propiedades mecánicas del material . . . . .	365
10.10.2 Definición de desplazamientos conocidos: condiciones de borde	366
10.10.3 Aplicación de cargas puntuales . . . . .	368
10.10.4 Aplicación de cargas distribuidas . . . . .	369

10.11 Generación de malla de elementos finitos en GMSH para problemas bidimensionales . . . . .	371
10.11.1 Opciones de presentación de la malla . . . . .	372
10.11.2 Generación de mallas no estructuradas uniformes con elementos triangulares lineales . . . . .	375
10.11.2.1 Generación de malla utilizando <b>Characteristic Length</b> . . . . .	375
10.11.2.2 Generación de malla utilizando un parámetro en la definición de los puntos . . . . .	377
10.11.3 Apariencia y diferenciación de los elementos finitos en la malla generada . . . . .	380
10.11.4 Generación de mallas no estructuradas con elementos triangulares lineales de diferente tamaño . . . . .	380
10.11.4.1 Definición del tamaño del elemento finito sobre puntos . . . . .	381
10.11.4.2 Definición del número de nudos sobre una línea . . . . .	383
10.11.5 Generación de mallas estructuradas con elementos triangulares lineales . . . . .	385
10.11.6 Generación de mallas elementos cuadrilaterales bilineales . . . . .	387
10.11.7 Generación de mallas elementos triangulares lineales y cuadrilaterales bilineales . . . . .	389
10.11.8 Tipos de elementos finitos generados por GMSH . . . . .	389
10.12 Generación de malla de elementos finitos en GMSH para problemas tridimensionales . . . . .	389
10.12.1 Generación de mallas uniformes no estructuradas con elementos tetraédricos lineales . . . . .	391
10.12.2 Generación de mallas no uniformes y no estructuradas con elementos tetraédricos lineales . . . . .	392
10.12.3 Generación de mallas no estructuradas con elementos tetraédricos lineales con una cara estructurada . . . . .	393
10.12.4 Generación de mallas estructuradas con elementos tetraédricos lineales . . . . .	394
10.13 Opciones de visibilidad de entidades específicas . . . . .	397

10.13.1 Visualizar un elemento escogiéndolo de una lista . . . . .	399
10.13.2 Visualizar un elemento escribiendo su número identificador . .	400
10.13.3 Ocultar un elemento haciendo clic sobre él . . . . .	402
10.14 Producción del archivo de características del problema . . . . .	403
10.15 Obtención del archivo de la malla de elementos finitos . . . . .	404
10.16 Tipos de entidad física y tipos de elementos finitos definidos en GMSH	409
<b>11 Programa GMSH en el postproceso</b>	<b>411</b>
11.1 Archivo de resultados gráficos para GMSH . . . . .	411
11.1.1 Bloques de la malla de elementos finitos . . . . .	412
11.1.2 Generalidades sobre la representación gráfica de resultados mediante <i>vistas</i> . . . . .	413
11.1.3 Formato de un bloque de resultado en los nudos . . . . .	414
11.1.4 Formato de un bloque de resultado en el interior de los elementos	416
11.2 Malla de elementos finitos utilizada para el análisis . . . . .	418
11.3 Opciones en la presentación de resultados de la malla . . . . .	418
11.3.1 Opciones gráficas generales . . . . .	419
11.3.2 Opciones gráficas de los ejes . . . . .	422
11.3.3 Opciones en el aspecto del gráfico . . . . .	422
11.3.4 Opciones de visualización de la malla sobre el resultado . . . .	424
11.3.5 Opciones de color de la malla sobre el resultado . . . . .	424
11.3.6 Opciones de la escala de colores del resultado . . . . .	424
11.3.7 Superposición de la geometría con los resultados . . . . .	425
11.4 Presentación del desplazamiento, la deformada, y las fuerzas en los nudos de la malla . . . . .	426
11.5 Presentación de las componentes de esfuerzo y de deformación en problemas bidimensionales . . . . .	428
11.5.1 Problema bidimensional con una categoría de material y espesor	428
11.5.2 Problema bidimensional con varias categoría de material o espesor . . . . .	429

11.6 Presentación de las componentes de esfuerzo y de deformación en problemas tridimensionales . . . . .	430
11.6.1 Problema tridimensional con una categoría de material . . . . .	431
11.6.2 Problema tridimensional con varias categoría de material o espesor . . . . .	431
11.6.3 Problema tridimensional incluyendo direcciones principales de esfuerzo . . . . .	434
11.7 Presentación de resultados nodales a partir de resultados elementales en GMSH: suavizado . . . . .	434
11.8 Presentación de resultados de problemas bidimensionales sobre líneas de corte . . . . .	436
11.9 Presentación de resultados de problemas tridimensionales en el interior del sólido . . . . .	439
11.9.1 Presentación de resultados mediante superficies de igual valor .	440
11.9.2 Presentación interactiva de resultados en planos de corte . . .	441
11.9.3 Presentación en una vista nueva de resultados en un plano de corte . . . . .	442
<b>12 Programa de preproceso y postproceso GiD para problemas bidimensionales</b>	<b>443</b>
12.1 Instalación del <i>problem type</i> en GiD . . . . .	444
12.2 Preproceso: construcción del archivo de entrada en GiD . . . . .	445
12.2.1 Geometría del problema . . . . .	446
12.2.2 Condiciones de borde del problema . . . . .	447
12.2.3 Cargas aplicadas al problema . . . . .	450
12.2.4 Propiedades del material y espesor del sólido . . . . .	450
12.2.5 Parámetros generales y opciones de postproceso del problema	451
12.2.6 Generación de una malla no estructurada de elementos triangulares lineales . . . . .	452
12.2.7 Eliminar una malla generada y sus parámetros . . . . .	453

12.2.8 Generación de una malla estructurada de elementos cuadrilaterales bilineales . . . . .	454
12.2.9 Generación de una malla estructurada de elementos triangulares lineales . . . . .	455
12.2.10 Construcción del archivo de datos de entrada . . . . .	455
12.3 Proceso de cálculo en PEFiCA 2.0 . . . . .	458
12.4 Postproceso: representación gráfica de los resultados en GiD . . . . .	459
12.4.1 Configuración deformada y desplazamientos . . . . .	459
12.4.2 Esfuerzo o deformación en el interior de los elementos . . . . .	461
12.4.3 Esfuerzo o deformación promedio en los nudos de la malla: suavizado . . . . .	462
12.4.4 Definición de opciones de representación gráfica . . . . .	463



# Capítulo 1

## Introducción

Desde la década de los sesenta el método de los elementos finitos ha sido utilizado para representar el comportamiento mecánico de sólidos, mejorando progresivamente su aproximación mediante diferentes modelos constitutivos de los materiales, relaciones entre la deformación y el desplazamiento y formulaciones de los elementos, entre otras. Por otro lado, la capacidad de cálculo y la facilidad de programación de los computadores ha evolucionado rápidamente desde entonces, proporcionando actualmente la posibilidad de realizar análisis complejos con un costo computacional bajo.

El método de los elementos finitos requiere indudablemente la implementación de un programa de computador para resolver problemas con un nivel de precisión aceptable. Por lo tanto, el oficio de programar es importante para comprender esta técnica numérica. Los lenguajes de programación interpretados o de alto nivel facilitan esa tarea sacrificando un poco la eficiencia. GNU–Octave y Matlab son lenguajes de este tipo muy similares, preparados con funciones de cálculo numérico útiles para el análisis con matrices.

La generación de una malla de elementos finitos asociada a las condiciones de borde, las acciones externas y las propiedades mecánicas de los materiales, es un proceso previo al análisis, el cual requiere conocimiento en computación gráfica para su desarrollo. Después del proceso de cálculo, también se necesita conocimiento en dicha área para representar de forma gráfica los resultados sobre la malla. Cuando la

meta es entender el método de los elementos finitos y como se implementa, es práctico utilizar herramientas que realicen el pre y postproceso alrededor del análisis. Existen programas de este tipo como GMSH y GiD, los cuales permiten crear el archivo de datos de la malla de elementos finitos de un problema y presentar de forma gráfica los resultados obtenidos de su análisis.

## 1.1 Objetivo y alcance

El principal objetivo de este libro es contribuir al proceso de aprendizaje del método de los elementos finitos aplicado a la mecánica de sólidos, a través de tres estrategias: la presentación resumida de los conceptos del modelo numérico, la descripción detallada del proceso de análisis y su implementación en un lenguaje de programación interpretado, y la preparación de ejemplos de aplicación mediante la construcción de la malla de elementos finitos y la representación gráfica de sus resultados.

El problema planteado y resuelto consiste en obtener las componentes del desplazamiento, la deformación y el esfuerzo en cada punto material de un sólido, el cual está sometido a acciones externas estáticas como desplazamiento impuesto, carga puntual, presión y peso propio. Se considera que los materiales que conforman el sólido exhiben un comportamiento elástico, lineal e isotrópico cumpliendo la ley de Hooke. Asimismo, la relación entre las componentes de deformación y desplazamiento está definida por la teoría de deformación infinitesimal. El problema se formula e implementa en el método de los elementos finitos sobre un espacio tridimensional. Asimismo, éste se resuelve de forma simplificada en dominios unidimensionales y bidimensionales.

Este libro está dirigido a estudiantes de grado y postgrado en ingeniería civil e ingeniería mecánica, interesados en el campo de la mecánica computacional de sólidos. El texto requiere un conocimiento básico en mecánica de sólidos y puede apoyarse en textos sobre el método de los elementos finitos para profundizar sus conceptos.

Si el lector está familiarizado con la programación estructurada de computadores y el lenguaje interpretado de GNU-Octave o Matlab, se facilitará su comprensión con respecto a la implementación numérica del método.

En algunos capítulos del libro, el lector podría entrenarse en la generación de mallas de elementos finitos para problemas bidimensionales y tridimensionales mediante el programa GMSH. Asimismo, podría prepararse para representar los resultados gráficamente de cada simulación utilizando el mismo programa. También podría entrenarse en el uso del programa GiD para problemas mecánicos bidimensionales.

## 1.2 Herramientas utilizadas en el libro

Adicional al libro, se proporciona al lector el código fuente en lenguaje interpretado de los procedimientos de cálculo y de las rutinas de entrada y salida de datos para el pre y postproceso gráfico. Este programa ha sido desarrollado por los autores con el nombre de PEFiCA 2.0. Las rutinas de éste programa han sido escritas en el lenguaje interpretado GNU–Octave o Matlab, por las razones indicadas a continuación. Primero, conserva la compatibilidad entre sistemas operativos diferentes y el carácter gratuito de sus licencias, buscando que el método de los elementos finitos esté al alcance de todos. Segundo, permite cálculos entre matrices de una forma sencilla, asegurando una capacidad y eficiencia aceptable para problemas con muchos grados de libertad. Tercero, utiliza una herramienta habitual en ingeniería y ciencias aplicadas, la cual cuenta con amplia documentación.

El libro presenta una colección de ejemplos de aplicación en el dominio unidimensional, bidimensional y tridimensional, cuyos archivos de datos y resultados están incluidos. El preprocesso y postproceso de la mayoría de estos ejemplos fueron realizados con el programa GMSH. Este último fue escogido por la primera razón indicada en el párrafo anterior y por su estabilidad y capacidad gráfica.

### 1.3 Descripción del contenido del libro

Los capítulos 2, 3 y 4 de este libro describen la formulación del problema mecánico elástico lineal en sólidos mediante el método de los elementos finitos, considerando un dominio unidimensional, bidimensional y tridimensional, respectivamente.

El segundo capítulo aborda la solución del problema de barras sometidas a fuerza axial y de vigas sujetas a flexión, bajo cargas distribuidas y puntuales. En cambio, el tercer capítulo ilustra la solución del problema mecánico en condición plana de esfuerzos y de deformaciones, mientras que el cuarto capítulo describe la solución general en tres dimensiones de un sólido sometido a presión en su contorno, cargas puntuales y peso propio del material.

El capítulo 5 incluye los objetivos, el alcance, las características técnicas, la estructura, los formatos de los archivos de entrada y salida, y el proceso de instalación del programa PEFiCA 2.0. Mientras que el siguiente capítulo describe brevemente el lenguaje de programación interpretado GNU–Octave, indicando el uso de la interfaz gráfica y el procedimiento de ejecución del programa PEFiCA 2.0 compilado por éste.

Los capítulos 7, 8 y 9, presentan la implementación del método de los elementos finitos del problema mecánico elástico lineal en dominios unidimensional, bidimensional y tridimensional, respectivamente. Allí se describen las variables de datos, cálculo y resultados del programa, las rutina principal de análisis y las demás funciones propias del programa. Asimismo, se presentan varios ejemplos de aplicación.

Los capítulos 10, 11 y 12 describen las herramientas gráficas del preproceso de generación de la malla de elementos finitos y del postproceso de presentación de los resultados utilizando los programas GMSH y GiD. Con respecto al capítulo 10, inicialmente se indica la construcción de entidades geométricas del problema y las operaciones entre ellas, después se muestra la preparación de entidades físicas que serán usadas en el programa PEFiCA 2.0, y finalmente se describe la generación de la malla de elementos finitos y la producción del respectivo archivo de datos. En cambio, en el capítulo 11 se explica la estructura del archivo de resultados de GMSH y se presentan las opciones de representación gráfica de la configuración deformada, desplazamientos, fuerzas totales, deformaciones, esfuerzos y direcciones

principales en los nudos y en el interior de los elementos finitos. El último capítulo indica el uso del programa GiD como herramienta de pre y postproceso gráfico de problemas bidimensionales.



## Capítulo 2

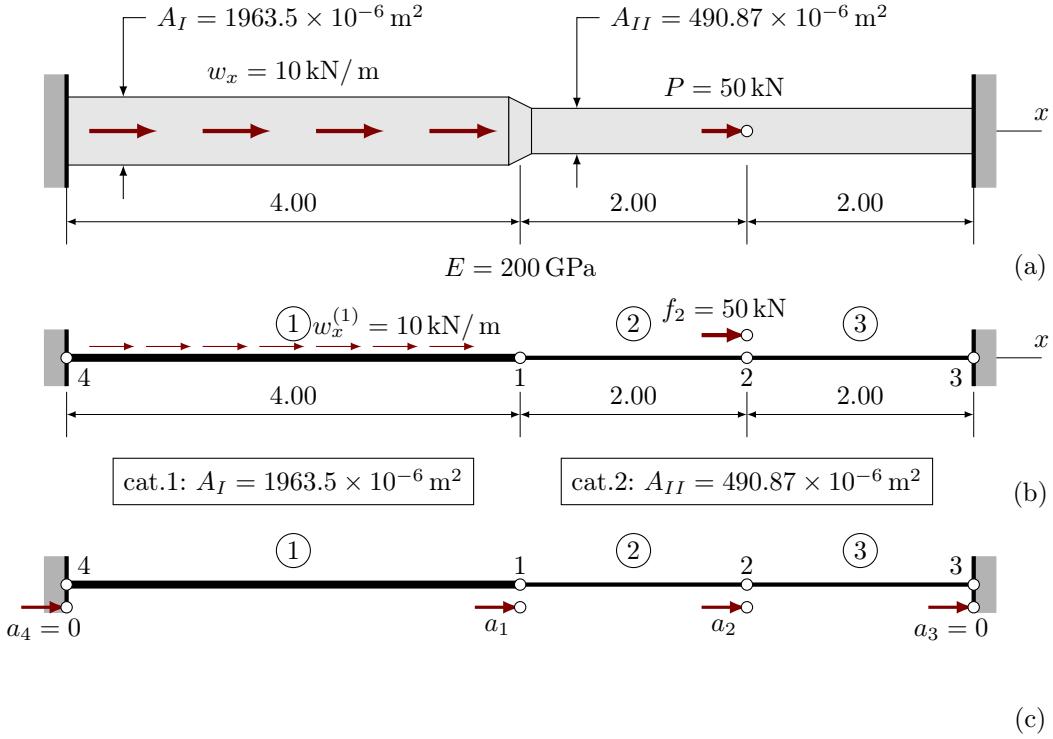
# Formulación del problema mecánico elástico lineal unidimensional

Este capítulo presenta la formulación del método de los elementos finitos, aplicada a la solución un problema mecánico elástico lineal unidimensional, particularmente en barras sometidas a fuerza axial y en vigas sujetas a flexión. Los materiales que conforman la barra o la viga exhiben un comportamiento elástico, lineal e isotrópico determinado por la ley de Hooke. Asimismo, la relación entre el campo del desplazamiento y el campo de la deformación está definida por la teoría de deformación infinitesimal.

Los conceptos indicados a continuación se basan en la mecánica de materiales (Gere & Goodno, 2009) y en el método de los elementos finitos aplicados a la mecánica elástica lineal (Hughes, 2000; Oñate, 2009; Linero, Garzon, & Ramirez, 2013).

### 2.1 Barras sometidas a fuerza axial

El primer tipo de problema tiene como objetivo determinar el campo del desplazamiento, la deformación longitudinal, la fuerza axial y el esfuerzo normal de barras sometidas a fuerzas en la dirección de su eje. Allí se considera una distribución uniforme del esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$  sobre la sección transversal y se desprecian las demás componentes de esfuerzo. Asimismo, la cinemática del problema establece un desplazamiento longitudinal  $u(x)$  uniforme en la sección transversal y una deformación longitudinal  $\varepsilon_{xx}$  obtenida de la variación de  $u(x)$  con respecto a la posición  $x$ .



**Figura 2.1:** Ejemplo de un problema unidimensional en barras sometidas a fuerza axial: (a) esquema general y (b) malla de elementos unidimensionales lineales, condiciones de borde y cargas aplicadas, (c) desplazamientos nodales asociados a los grados de libertad de la malla.

Un ejemplo de este tipo de problema se ilustra en la Figura 2.1(a), donde una barra empotrada en ambos extremos, con dos secciones transversales diferentes, está sometida a una carga distribuida uniforme y a una fuerza puntual. La barra se podría dividir en 3 elementos unidimensionales lineales de continuidad  $C_0$  y 4 nudos, como se indica en la Figura 2.1(b). Allí se considera un grado de libertad por nudo asociado al desplazamiento en la dirección longitudinal (Figura 2.1(c)).

### 2.1.1 Desplazamiento y funciones de forma de un elemento finito

Un elemento finito  $e$  definido en un dominio unidimensional tiene una función de aproximación correspondiente en este caso al desplazamiento  $u(x)$ . El valor de dicho desplazamiento en una posición  $x$  se puede obtener mediante la interpolación de los valores en sus nudos  $u_i^{(e)}$ . Estos últimos se denominan valores nodales y determinan los grados de libertad del elemento.

Cada elemento unidimensional de continuidad  $C_0$  tiene  $nn$  valores nodales  $u_1^{(e)}$ ,  $u_2^{(e)}$ , ...,  $u_{nn}^{(e)}$  asociados a sus nudos, los cuales hacen parte del vector de desplazamientos nodales del elemento finito  $\mathbf{a}^{(e)}$ , así:

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & u_2^{(e)} & \cdots & u_{nn}^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (2.1)$$

El desplazamiento  $u^{(e)}(x)$  en una posición  $x$  del interior del elemento se calcula como:

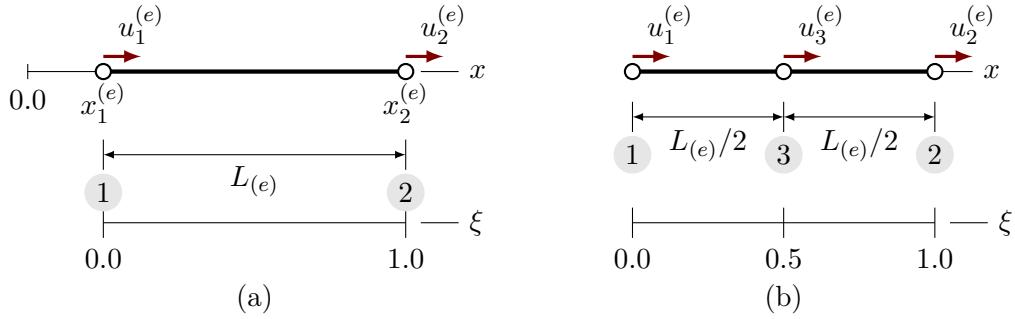
$$u^{(e)}(x) = N_1^{(e)}(x)u_1^{(e)} + \cdots + N_{nn}^{(e)}(x)u_{nn}^{(e)} \quad (2.2)$$

donde  $N_i^{(e)}(x)$  es la función de forma del nudo  $i$  del elemento  $e$ , evaluada en la posición  $x$ . La expresión anterior se puede presentar como una operación matricial así:

$$u^{(e)}(x) = \mathbf{N}^{(e)}(x) \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.3a)$$

siendo,

$$\mathbf{N}^{(e)}(x) = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & \cdots & N_{nn}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.3b)$$



**Figura 2.2:** Elementos unidimensionales de continuidad  $C_0$ : (a) elemento lineal y (b) elemento cuadrático.

### 2.1.1.1 Elemento unidimensional lineal de continuidad $C_0$

El elemento unidimensional lineal de continuidad  $C_0$  tiene un nudo en cada extremo e interpola la función de aproximación  $u^{(e)}(x)$  de forma lineal. La Figura 2.2(a) indica los desplazamientos  $u_1^{(e)}$  y  $u_2^{(e)}$  en los nudos 1 y 2, respectivamente. La posición  $\xi$  en el sistema coordenado natural es igual a  $\xi = (x - x_1^{(e)})/L_{(e)}$ , donde  $L_{(e)}$  es la longitud del elemento,  $x$  es la posición en sistema coordenado global en el interior y  $x_i^{(e)}$  es la posición en sistema coordenado global del nudo 1 en el extremo izquierdo.

La matriz de funciones de forma del elemento unidimensional lineal de continuidad  $C_0$  corresponde a:

$$\mathbf{N}^{(e)}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \xi) & \xi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.1.1.2 Elemento unidimensional cuadrático de continuidad $C_0$

El elemento unidimensional cuadrático de continuidad  $C_0$  tiene tres nudos dispuestos en cada extremo y en la mitad del elemento, como lo indica el Figura 2.2(b). Los parámetros  $u_1^{(e)}$ ,  $u_2^{(e)}$  y  $u_3^{(e)}$  corresponden a los desplazamientos en los nudos 1, 2 y 3, respectivamente.

La función de aproximación  $u^{(e)}(x)$  se interpola de forma cuadrática. En consecuencia, la matriz de funciones de forma del elemento unidimensional cuadrático de

continuidad  $C_0$  corresponde a:

$$\mathbf{N}^{(e)}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.5a)$$

$$N_1^{(e)}(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^2 \quad N_2^{(e)}(\xi) = -\xi + 2\xi^2 \quad N_3^{(e)}(\xi) = 4\xi - 4\xi^2 \quad (2.5b)$$

### 2.1.2 Componentes de deformación infinitesimal y matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento

La componente de deformación infinitesimal representativa  $\varepsilon_{xx}$  se obtiene en el continuo como  $\partial_x u(x)$ . En consecuencia, tal deformación en el interior de un elemento finito  $\varepsilon_{xx}^{(e)}$  es igual a:

$$\varepsilon_{xx}^{(e)} = \frac{\partial}{\partial x} u^{(e)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{N}^{(e)}(x) \mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)}(x) \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.6)$$

siendo  $\mathbf{B}^{(e)}$  la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma del elemento  $e$ . En consecuencia, el operador diferencial para problemas de barras sometidas a fuerza axial está definido como el escalar  $\tilde{\nabla} = \partial/\partial x$ , el cual se puede aplicar sobre las funciones de forma con respecto a la coordenada natural  $\xi$ , utilizando la regla de la cadena.

Las componentes de esta matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma  $\mathbf{B}^{(e)}$  corresponden a:

$$\mathbf{B}^{(e)}(x) = \begin{bmatrix} \partial_x N_1^{(e)} & \dots & \partial_x N_n^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

#### 2.1.2.1 Elemento unidimensional lineal de continuidad $C_0$

Particularmente, la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma  $\mathbf{B}_{(e)}$  de un elemento unidimensional lineal de continuidad  $C_0$  es:

$$\mathbf{B}_{(e)} = \begin{bmatrix} B_1^{(e)} & B_2^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Se observa que la matriz  $\mathbf{B}_{(e)}$  de este tipo de elemento no depende de  $\xi$ .

### 2.1.2.2 Elemento unidimensional cuadrático de continuidad $C_0$

En cambio, la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma  $\mathbf{B}_{(e)}$  del elemento unidimensional cuadrático de continuidad  $C_0$  en un punto interior de coordenada natural  $\xi$ , es:

$$\mathbf{B}_{(e)} = \begin{bmatrix} B_1^{(e)} & B_2^{(e)} & B_3^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.9a)$$

$$B_1^{(e)} = \frac{1}{L_{(e)}}(-3 + 4\xi) \quad B_2^{(e)} = \frac{1}{L_{(e)}}(-1 + 4\xi) \quad B_3^{(e)} = \frac{1}{L_{(e)}}(4 - 8\xi) \quad (2.9b)$$

### 2.1.3 Esfuerzo normal y fuerza axial

De acuerdo con la ley de Hooke, un material elástico lineal isotrópico de módulo de Young  $E$  exhibe una relación constitutiva entre el esfuerzo normal y la deformación longitudinal  $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$ . Por lo tanto, el esfuerzo normal en la posición  $x$  del interior de un elemento finito  $e$ , es igual a:

$$\sigma_{xx}^{(e)}(x) = E\varepsilon_{xx}^{(e)}(x) = E\mathbf{B}^{(e)}(x)\mathbf{a}^{(e)} \quad (2.10)$$

El esfuerzo normal se distribuye de forma uniforme en el área de la sección transversal del elemento  $A_{(e)}$ , en consecuencia la fuerza axial equivalente es igual a:

$$\mathcal{N}^{(e)} = \sigma_{xx}^{(e)}A_{(e)} \quad (2.11)$$

### 2.1.4 Principio de los Trabajos Virtuales

El trabajo virtual producido por las fuerzas reales se puede dividir en dos partes: el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas denominado trabajo virtual interno y el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas llamado trabajo virtual externo (Oñate, 1995).

Una barra representada por  $ne$  elementos finitos de longitud  $L^{(e)}$  y área de sección transversal  $A^{(e)}$ , está sometido a fuerzas por unidad de longitud en cada elemento  $w_x^{(e)}$ , y a fuerzas puntuales  $P_1, \dots, P_{nn}$  aplicadas sobre los nudos  $nn$ .

Las condiciones de frontera sobre el cuerpo corresponden a valores conocidos del desplazamiento real  $u(x) = u^*$  en los puntos materiales que hacen parte de un contorno definido  $\Gamma_u$ .

El campo del desplazamiento virtual  $\delta u(x)$ , definido como una variación del desplazamiento, corresponde a una función cualquiera que cumple con la condición de borde de la forma:

$$\delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_u \quad (2.12)$$

El trabajo virtual externo en cada elemento  $e$  se realizan por las fuerzas reales externas  $w_x^{(e)}$  y  $P_1, \dots, P_{nn}$  mientras se presenta un desplazamiento virtual  $\delta u_{(e)}$ . En cambio, el trabajo virtual interno es producido por el esfuerzo  $\sigma_{xx}^{(e)}$  mientras ocurren deformaciones generadas por desplazamientos virtuales  $\partial_x \delta u_{(e)}$ , es decir, es igual a la densidad de energía de deformación  $\partial_x \delta u_{(e)} \cdot \sigma_{xx}^{(e)}$  integrada en el volumen  $A_{(e)} dx$  del elemento finito.

El principio de los Trabajos Virtuales establece que un cuerpo está en equilibrio sí y solo sí, el trabajo virtual realizado por todas las acciones internas y externas es nulo, es decir:

$$\sum_{e=1}^{ne} \int_{L^{(e)}} \partial_x \delta u_{(e)} \cdot \sigma_{xx}^{(e)} A_{(e)} dx = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Gamma_w^{(e)}} \delta u_{(e)} \cdot w_x^{(e)} dx + \sum_{n=1}^{nn} \delta u(x_n) \cdot P_n \quad (2.13)$$

### 2.1.5 Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el elemento finito

De la misma forma como se expresa el desplazamiento real en términos de las funciones de forma y los valores nodales, el desplazamiento virtual  $\delta u_{(e)}$  y la deformación virtual  $\partial_x \delta u_{(e)}$  en un elemento finito son iguales a:

$$\delta u_{(e)} = \mathbf{N}_{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)}, \quad \partial_x \delta u_{(e)} = \mathbf{B}_{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)} \quad (2.14)$$

siendo  $\delta\mathbf{a}_{(e)}$  el vector de valores nodales de desplazamiento virtual del elemento finito. Sustituyendo las expresiones 2.10 y 2.14 en la Ecuación 2.13, se obtiene lo siguiente:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \left[ \int_{L^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T E_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} t dx \right] \mathbf{a}_{(e)} = \sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \left[ \int_{\Gamma_w^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T w_x^{(e)} dx \right] + \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \quad (2.15)$$

donde  $\delta\mathbf{a}$  y  $\mathbf{f}^{(n)}$  corresponden al vector de desplazamiento virtual y al vector de fuerza real en los nudos de la malla de elementos finitos.

El término entre paréntesis cuadrado a la izquierda de la igualdad anterior se define como la matriz de rigidez del elemento finito  $\mathbf{K}^{(e)}$ , y corresponde a:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T(x) E_{(e)} \mathbf{B}_{(e)}(x) A_{(e)} dx \quad (2.16a)$$

con respecto al sistema coordenado global  $x$ , y

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^1 \mathbf{B}^{(e)T}(\xi) E_{(e)} \mathbf{B}^{(e)}(\xi) A_{(e)} L_{(e)} d\xi \quad (2.16b)$$

con respecto al sistema coordenado natural  $\xi$ .

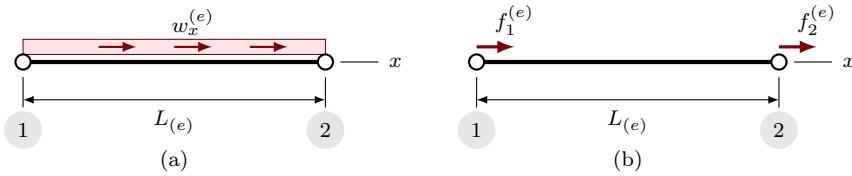
En cambio, el término entre paréntesis a la derecha  $\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$  es el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de una carga uniforme por unidad de longitud  $w_x^{(e)}$ , en la dirección del eje  $x$  del elemento (Figura 2.3(a)), de la forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(e)} = \int_{L^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T(x) w_x^{(e)} dx \quad (2.17a)$$

con respecto al sistema coordenado global  $x$ , y

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(e)} = \int_0^1 \mathbf{N}^{(e)T}(\xi) w_x^{(e)} L_{(e)} d\xi \quad (2.17b)$$

con respecto al sistema coordenado natural  $\xi$ .



**Figura 2.3:** Fuerzas equivalentes del elemento unidimensional lineal: (a) carga distribuida uniforme en la dirección del eje  $x$  del elemento  $w_x^{(e)}$ , y (b) fuerzas equivalentes en los nudos.

### 2.1.5.1 Elemento unidimensional lineal de continuidad $C_0$

Particularmente, la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  de un elemento unidimensional lineal de continuidad  $C_0$  para barras sometidas a fuerza axial es:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{E_{(e)} A_{(e)}}{L_{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

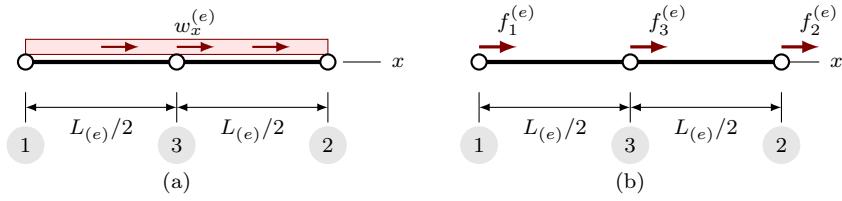
El vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$ , contiene las fuerzas en los nudos de un elemento unidimensional lineal de continuidad  $C_0$ , que son equivalentes a la acción de una carga distribuida uniforme, como lo muestra la Figura 2.3. Los términos del vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$  son:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{(e)} = \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} w_x^{(e)} L_{(e)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

### 2.1.5.2 Elemento unidimensional cuadrático de continuidad $C_0$

La matriz de rigidez del elemento unidimensional cuadrático de continuidad  $C_0$  para barras sometidas a fuerza axial, cuyo módulo de Young es  $E_{(e)}$ , el área de la sección transversal es  $A_{(e)}$  y su longitud es  $L_{(e)}$ , se obtiene a partir de la Ecuación 2.16b. El resultado corresponde a:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} \\ k_{31}^{(e)} & k_{32}^{(e)} & k_{33}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{E_{(e)} A_{(e)}}{3L_{(e)}} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$



**Figura 2.4:** Fuerzas equivalentes del elemento unidimensional cuadrático: (a) carga distribuida uniforme en la dirección del eje  $x$  del elemento  $w_x^{(e)}$ , y (b) fuerzas equivalentes en los nudos.

El vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$  de un elemento unidimensional cuadrático de continuidad  $C_0$  para barras a fuerza axial, contiene las fuerzas equivalentes en los nudos a la acción de una carga distribuida uniforme  $w_x^{(e)}$ , como lo ilustra la Figura 2.4. Este vector se obtiene a partir de la Ecuación 2.17b, así:

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(e)} = \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \\ f_3^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} w_x^{(e)} L_{(e)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

### 2.1.6 Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el sólido

Remplazando las expresiones que definen a la matriz de rigidez y al vector de fuerzas equivalentes de los elementos (2.16a) y (2.17a), en la Ecuación 2.15 se tiene:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} - \sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \tilde{\mathbf{f}}^{(e)} - \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} = 0 \quad (2.22)$$

El triple producto  $\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)}$  de la Ecuación 2.22 se puede expresar en función de todos los grados de libertad de la malla como  $\delta \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a}$ , donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez del sólido, y  $\delta \mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}$  son los vectores de desplazamientos nodales virtuales y reales de la malla, respectivamente.

De igual forma, el producto  $\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$  se puede escribir como  $\delta \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{f}}$ , donde  $\tilde{\mathbf{f}}$  es el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de cargas distribuidas en la malla.

Definiendo al vector  $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{f}^{(n)}$ , se tiene que:

$$\delta \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \delta \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{f}} - \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} = \delta \mathbf{a}^T (\mathbf{K} \mathbf{a} - \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}^{(n)}) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.23)$$

La matriz de rigidez del sólido  $\mathbf{K}$  se obtiene del procedimiento de *ensamblaje* de las matrices de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  de los  $ne$  elementos que conforman la malla. Tal procedimiento se indica de la forma:

$$\mathbf{K} = \bigwedge_{e=1}^{ne} [\mathbf{K}^{(e)}] \quad (2.24)$$

El ensamblaje consiste en la adición de cada término de la matriz de rigidez del elemento  $\mathbf{K}^{(e)}$ , a la matriz de rigidez del sólido  $\mathbf{K}$ , de acuerdo con los grados de libertad asociados al elemento  $e$ . El proceso de ensamblaje de las matrices de rigidez de los tres elementos finitos unidimensionales lineales del ejemplo de la Figura 2.1(b), es el siguiente:

- Se construye la matriz de rigidez inicial de la malla, la cual es cuadrada llena de ceros y de tamaño igual al número de grados de libertad de la malla, en este caso 4, es decir:  $\mathbf{K}' = \mathbf{0}_{4 \times 4}$ .
- Se calcula la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(1)}$  del elemento 1, mediante la Ecuación 2.18. Se identifica que los grados de libertad asociados al elemento 1 son 4 y 1. Se adiciona el coeficiente  $k_{11}^{(1)}$  de la matriz de rigidez del elemento 1 al término  $k_{44}$  de la matriz  $\mathbf{K}''$ . Asimismo, se adicionan:  $k_{12}^{(1)}$  a  $k_{41}$ ,  $k_{21}^{(1)}$  a  $k_{14}$  y  $k_{22}^{(1)}$  a  $k_{11}$ , así:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ sim. & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}'' = \bigwedge_{e=1}^1 [\mathbf{K}^{(e)}] = \begin{bmatrix} k_{22}^{(1)} & 0 & 0 & k_{21}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ sim. & & & k_{11}^{(1)} \end{bmatrix}$$

- Se calcula la matriz de rigidez del elemento 2, como  $\mathbf{K}^{(2)}$ . Se identifica que los grados de libertad asociados al elemento 2 son 1 y 2. Se adiciona el coeficiente  $k_{11}^{(2)}$  de la matriz de rigidez del elemento 2 al término  $k_{11}$  de la matriz  $\mathbf{K}'''$ .

Asimismo, se adicionan:  $k_{12}^{(2)}$  a  $k_{12}$ ,  $k_{21}^{(2)}$  a  $k_{21}$  y  $k_{22}^{(2)}$  a  $k_{22}$ , así:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ sim. & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}''' = \bigwedge_{e=1}^2 \left[ \mathbf{K}^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} (k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)}) & k_{12}^{(2)} & 0 & k_{21}^{(1)} \\ k_{22}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ sim. & & & k_{11}^{(1)} \end{bmatrix}$$

- Se calcula la matriz de rigidez del elemento 3, como  $\mathbf{K}^{(3)}$ . Se identifica que los grados de libertad asociados al elemento 3 son 2 y 3. Se adiciona el coeficiente  $k_{11}^{(3)}$  de la matriz de rigidez del elemento 3 al término  $k_{22}$  de la matriz  $\mathbf{K}$ . Asimismo, se adicionan:  $k_{12}^{(3)}$  a  $k_{23}$ ,  $k_{21}^{(3)}$  a  $k_{32}$  y  $k_{22}^{(3)}$  a  $k_{33}$ , así:

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ sim. & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \bigwedge_{e=1}^{ne=3} \left[ \mathbf{K}^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} (k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)}) & k_{12}^{(2)} & 0 & k_{21}^{(1)} \\ (k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)}) & k_{12}^{(3)} & 0 & 0 \\ k_{22}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ sim. & & & k_{11}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Los términos resaltados en las matrices  $\mathbf{K}''$ ,  $\mathbf{K}'''$  y  $\mathbf{K}$ , corresponden a los coeficientes adicionados de la matriz  $\mathbf{K}^{(1)}$ ,  $\mathbf{K}^{(2)}$  o  $\mathbf{K}^{(3)}$ , respectivamente.

Por otro lado, el vector  $\mathbf{f}$  contiene las fuerzas nodales totales en la malla y se obtiene de la suma entre el vector de fuerzas nodales aplicadas directamente en los nudos  $\mathbf{f}^{(n)}$  y el vector  $\tilde{\mathbf{f}}$ , es decir:

$$\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{f}^{(n)} \quad (2.25)$$

El vector  $\tilde{\mathbf{f}}$  es el resultado del proceso de ensamblaje de los vectores de fuerza nodales equivalentes a la acción de las cargas distribuidas en cada uno de los elementos finitos  $\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$ , lo cual se indica como:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \bigwedge_{e=1}^{ne} \left[ \tilde{\mathbf{f}}^{(e)} \right] \quad (2.26)$$

El ejemplo de la Figura 2.1(b) muestra la aplicación de una carga distribuida uniforme sobre el elemento 1. El proceso de ensamblaje del vector de fuerzas equivalentes de la malla del ejemplo es el siguiente:

- Se construye el vector de fuerzas equivalentes de la malla, de tamaño 4 y lleno de ceros, así:  $\tilde{\mathbf{f}}' = \mathbf{0}_{4 \times 1}$ .
- Se calcula el vector de fuerzas equivalentes a la acción de  $w_x^{(1)}$  sobre el elemento 1, como  $\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}$ . Se identifica que los grados de libertad asociados al elemento 1 son 4 y 1. Se adiciona el coeficiente  $\tilde{f}_1^{(1)}$  del vector de fuerzas equivalentes del elemento 1 al término  $\tilde{f}_4$  del vector  $\tilde{\mathbf{f}}'$ . Asimismo, se adiciona el coeficiente  $\tilde{f}_2^{(1)}$  a  $\tilde{f}_1$ , así:

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1^{(1)} \\ \tilde{f}_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{f}} = \bigwedge_{e=1}^1 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{f}_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

- No se ensamblan más vectores  $\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$  porque los elementos 2 y 3 no tienen carga distribuida aplicada.

El vector de fuerzas nodales aplicadas directamente en los nudos  $\mathbf{f}^{(n)}$  está formado por: (i) el subvector conocido  $\mathbf{f}_\alpha^{(n)}$  asociado a los grados de libertad donde el desplazamiento es desconocido, y (ii) el subvector desconocido  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$  asociado a los grados de libertad donde el desplazamiento es conocido, es decir las reacciones. El subvector  $\mathbf{f}_\alpha^{(n)}$  se construye mediante la operación de *ordenar de acuerdo a la numeración de los grados de libertad* a los valores de fuerzas nodales organizados por componentes  $x$  y  $y$  en cada nudo dada en una tabla FUN. Tal operación se indica de la forma  $\mathbf{f}_\alpha^{(n)} = \mathbb{V}[\text{FUN}]$ . En particular para el ejemplo ilustrado en la Figura 2.1(b), se tiene que:

$$\begin{array}{c} \text{nudo} & f_x^{(n)} \\ \hline 1 & f_1^{(n)} \\ 2 & f_2^{(n)} \end{array} \quad \rightarrow \quad \mathbf{f}_\alpha^{(n)} = \mathbb{V}[\text{FUN}] = \begin{bmatrix} f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

### 2.1.7 Vector de desplazamientos nodales en el sólido

El vector de desplazamientos nodales del sólido  $\mathbf{a}$  se puede descomponer en los subvectores de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{a}_\alpha$  y conocidos  $\mathbf{a}_\beta$ . Estos últimos están definidos por los valores nodales de desplazamiento impuesto en la malla  $\mathbf{a}^*$ . En consecuencia, la Ecuación 2.23 se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \hline \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\alpha \\ \mathbf{a}_\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  se ha dividido en las submatrices  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ ,  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$  y  $\mathbf{K}_{\beta\beta}$ , de acuerdo con el número de desplazamientos nodales o grados de libertad que son desconocidos y conocidos de la malla. De igual forma el vector de fuerzas nodales  $\mathbf{f}$  está conformado por los subvectores  $\mathbf{f}_\alpha$  y  $\mathbf{f}_\beta$ . En consecuencia, la expresión anterior corresponde a dos ecuaciones matriciales de la forma:

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\alpha = \mathbf{0} \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\beta = \mathbf{0} \quad (2.28b)$$

El vector de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{a}_\alpha$  se obtiene despejando la Ecuación 2.28a, así:

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} (\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta) \quad (2.29)$$

El subvector de desplazamientos nodales conocidos  $\mathbf{a}_\beta$  se construye mediante la operación de *ordenar de acuerdo a la numeración de los grados de libertad* a los valores de desplazamientos nodales organizados por componentes  $x$  y  $y$  en cada nudo dada en una tabla denominada UCO. Tal operación se indica de la forma  $\mathbf{a}_\beta = \mathbb{V}[UCO]$ . En particular para el ejemplo ilustrado en la Figura 2.1(c), se tiene que:

$$\begin{array}{c} \text{nudo} \quad u \\ \hline \text{3} \quad a_3 \\ \text{4} \quad a_4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}_\beta = \mathbb{V}[UCO] = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamientos nodales completo se construye con los subvectores  $\mathbf{a}_\alpha$  y  $\mathbf{a}_\beta$ , de la forma  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta^T]^T$ . Tal vector contiene las componentes de desplazamiento en los nudos de la malla ordenada de acuerdo a la numeración de los grados de libertad. Para facilitar la identificación de este resultado, se puede *ordenar por componentes x y y en cada nudo* a los valores de desplazamientos en una tabla UXY, definida como  $UXY = \mathbb{T}[\mathbf{a}]$ . En particular para el ejemplo ilustrado en la Figura 2.1(c), se tiene que:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \rightarrow UXY = \mathbb{T}[\mathbf{a}] = \begin{array}{c|c} \hline & \text{nodo} & u \\ \hline & 1 & a_1 \\ & 2 & a_2 \\ & 3 & a_3 \\ & 4 & a_4 \\ \hline \end{array}$$

### 2.1.8 Vector de fuerzas en el sólido

El subvector de fuerzas totales  $\mathbf{f}_\beta$  se puede calcular despejando el término correspondiente de la Ecuación 2.28b, así:

$$\mathbf{f}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta \quad (2.30)$$

De acuerdo con la Ecuación 2.25, este resultado corresponde a la suma de los vectores  $\tilde{\mathbf{f}}_\beta$  y  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ , de la forma:

$$\mathbf{f}_\beta = \tilde{\mathbf{f}}_\beta + \mathbf{f}_\beta^{(n)} \quad (2.31)$$

los cuales corresponden a la parte asociada a los grados de libertad cuyo desplazamiento es conocido de los vectores  $\tilde{\mathbf{f}}$  y  $\mathbf{f}^{(n)}$ , respectivamente.

En este tipo de problemas, los términos de  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$  son desconocidos y corresponden a las reacciones en los apoyos del sólido. Por lo tanto, tal vector se puede calcular así:

$$\mathbf{f}_\beta^{(n)} = \mathbf{f}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta \quad (2.32)$$

### 2.1.9 Desplazamiento, deformación, esfuerzo y fuerza axial en el interior de cada elemento

El vector de desplazamientos nodales completo  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta^T]^T$ , contiene las componentes de desplazamiento en los nudos de la malla ordenada de acuerdo a la numeración de los grados de libertad. En cada elemento finito  $e$  se define un vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{a}^{(e)}$ , conformado por aquellos desplazamientos  $a_i$ , correspondientes a sus grados de libertad.

El vector  $\mathbf{a}^{(e)}$  se obtiene a partir de un proceso de *extracción*, el cual consiste en definir cada coeficiente de  $\mathbf{a}^{(e)}$ , como el término de  $\mathbf{a}$ , cuyo grado de libertad está asociado al elemento  $e$ . Éste proceso se representa como:

$$\mathbf{a}^{(e)} = \mathbb{E}_{(e)}[\mathbf{a}] \quad (2.33)$$

En el ejemplo ilustrado en la Figura 2.1(b), el procedimiento de extracción de los vectores  $\mathbf{a}^{(e)}$  en cada elemento, es el siguiente:

- Se identifica que los grados de libertad asociados al elemento 1 son 4 y 1. Se busca el término  $a_4$  del vector  $\mathbf{a}$  de la malla y se define el coeficiente  $a_1^{(1)}$  del vector  $\mathbf{a}^{(1)}$  del elemento 1 como  $a_4$ . Asimismo, se busca el término  $a_1$  del vector  $\mathbf{a}$ , el cual establece que el coeficiente  $a_2^{(1)} = a_1$ . Es decir:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbb{E}_{(1)}[\mathbf{a}] = \mathbb{E}_{(1)} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{a}_1 & a_2 & a_3 & \textcolor{red}{a}_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_4 & a_1 \end{bmatrix}^T$$

- Se identifica que los grados de libertad asociados al elemento 2 son 1 y 2. Se busca el término  $a_1$  del vector  $\mathbf{a}$  de la malla y se establece que el coeficiente  $a_1^{(2)}$  del vector  $\mathbf{a}^{(2)}$  del elemento 2 es igual a  $a_1$ . Asimismo, se busca el término  $a_2$  del vector  $\mathbf{a}$ , el cual determina que el coeficiente  $a_2^{(2)} = a_2$ . Es decir:

$$\mathbf{a}^{(2)} = \mathbb{E}_{(2)}[\mathbf{a}] = \mathbb{E}_{(2)} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{a}_1 & \textcolor{red}{a}_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T$$

- Se identifica que los grados de libertad asociados al elemento 3 son 2 y 3. Se busca el término  $a_2$  del vector  $\mathbf{a}$  de la malla y se establece que el coeficiente

$a_1^{(3)}$  del vector  $\mathbf{a}^{(3)}$  del elemento 3 es igual a  $a_2$ . Asimismo, se busca el término  $a_3$  del vector  $\mathbf{a}$ , el cual determina que el coeficiente  $a_2^{(3)} = a_3$ . Es decir:

$$\mathbf{a}^{(3)} = \mathbb{E}_{(3)}[\mathbf{a}] = \mathbb{E}_{(3)} \begin{bmatrix} a_1 & \textcolor{red}{a_2} & \textcolor{red}{a_3} & a_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1^{(3)} & a_2^{(3)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T$$

Los coeficientes resaltados del vector  $\mathbf{a}$  indican aquellos términos que conforman el respectivo vector  $\mathbf{a}^{(e)}$ .

Conocido el vector  $\mathbf{a}^{(e)}$  se puede calcular el desplazamiento en una posición  $x$  del interior del elemento finito  $u^{(e)}(x)$ , mediante la Ecuación 2.3.

La deformación longitudinal  $\varepsilon_{xx}^{(e)}(x)$  se calcula a través de la Ecuación 2.6. Asimismo, el esfuerzo normal  $\sigma_{xx}^{(e)}(x)$  y la fuerza axial se evalúan mediante las ecuaciones 2.10 y 2.11.

### 2.1.10 Resumen de resultados obtenidos

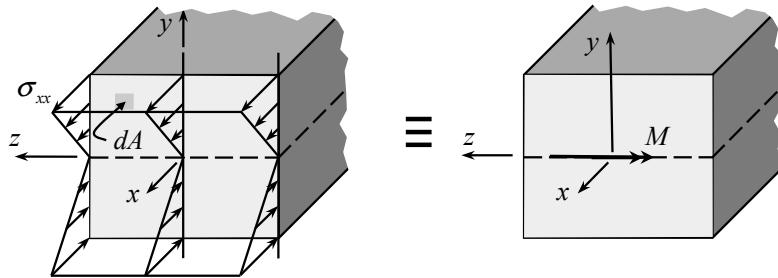
El análisis por el método de los elementos finitos del problema mecánico elástico lineal unidimensional de barras sometidas a fuerza axial, permite obtener los siguientes resultados: (i) el vector de desplazamientos nodales en la malla  $\mathbf{a}$ , (ii) el vector de fuerzas totales en la malla  $\mathbf{f}$ , (iii) la deformación longitudinal en el interior de cada elemento  $\varepsilon_{xx}^{(e)}$ , (iv) el esfuerzo normal en el interior de cada elemento  $\sigma_{xx}^{(e)}$ , y (v) la fuerza axial en el interior de cada elemento  $\mathcal{N}^{(e)}$ .

## 2.2 Vigas sometidas a flexión

El segundo tipo de problema tiene como objetivo obtener la deflexión, la rotación normal al plano, la fuerza cortante y el momento flector, de una viga sometida a cargas transversales distribuidas y puntuales.

La solución del problema se basa en el método de los elementos finitos aplicado a la teoría de vigas de Euler–Bernoulli (Oñate, 2009). Tal teoría establece que la variación del desplazamiento transversal o deflexión  $v(x)$  con respecto a la posición  $x$ , determinan la rotación normal al plano  $\theta(x)$  y la curvatura  $\kappa(x)$  de la forma:

$$\theta(x) = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \kappa(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.34)$$



**Figura 2.5:** Esfuerzo normal a la sección transversal de una viga  $\sigma_{xx}$ , sometida a un momento flector  $M$ .

La deformación longitudinal  $\varepsilon_{xx}$  depende de la curvatura  $\kappa$  y varía de forma lineal con respecto a la posición transversal en la viga  $y$ , es decir  $\varepsilon_{xx}(x, y) = -y\kappa(x)$ . De acuerdo con la ley de Hooke, el esfuerzo normal  $\sigma_{xx}(x, y) = E\varepsilon_{xx}(x, y)$ , para un material elástico lineal isotrópico de módulo de Young  $E$ .

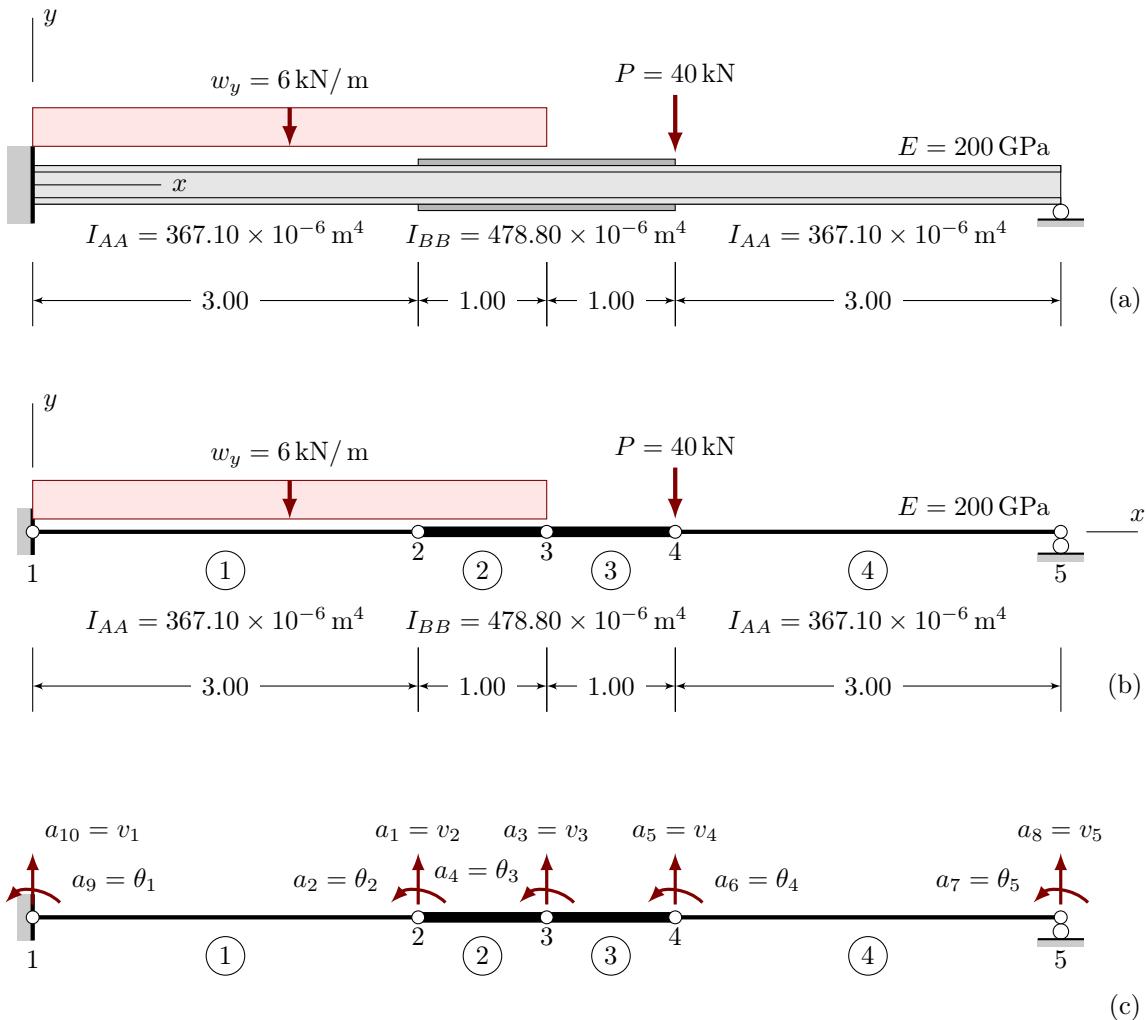
Por otro lado, el momento flector  $M$  se obtiene de la sumatoria de momentos producidos por el esfuerzo normal a la sección transversal de la viga  $\sigma_{xx}$  en diferenciales de área  $dA$ , como lo ilustra la Figura 2.5. El resultado corresponde a:

$$\mathcal{M} = - \int_A y \sigma_{xx} dA = EI\kappa \quad (2.35)$$

donde  $I = \int_A y^2 dA$  y corresponde al momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje  $z$ .

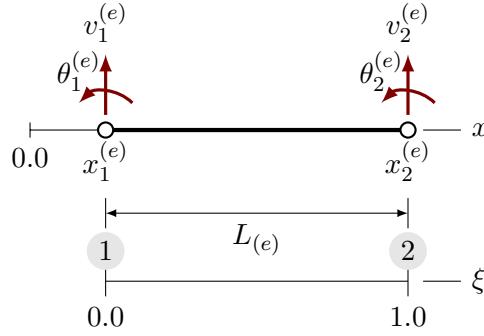
El comportamiento mecánico de vigas sometidas a flexión se describe dividiendo el dominio en elementos finitos conectados entre sí por nudos. En cada nudo  $n$  se define el desplazamiento transversal  $v_n^{(e)}$  y la rotación normal al plano  $\theta_n^{(e)}$ , como los grados de libertad del problema.

Un ejemplo de este tipo de problema se ilustra en la Figura 2.6(a), donde una viga empotrada en un extremo y articulada en el otro, con dos secciones transversales diferentes, está sometida a una carga transversal distribuida uniforme y a una fuerza puntual. La viga se divide en  $ne = 4$  elementos unidimensionales cúbicos de continuidad  $C_1$  y  $nn = 5$  nudos, como se indica en la Figura 2.6(b). Asimismo, en la Figura 2.6(c) se muestra un desplazamiento transversal  $v_n$  y una rotación nor-



**Figura 2.6:** Ejemplo de un problema unidimensional de barras sometidas a flexión: (a) esquema general, (b) malla de elementos finitos y (c) desplazamientos transversales y rotaciones en los nudos de acuerdo a la numeración de los grados de libertad.

mal al plano  $\theta_n$  en cada nudo de la malla  $n = 1, \dots, nn$ , el cual corresponde a un grado de libertad  $a_l$ , siendo  $l = 1, \dots, nl$  y  $nl = 5 \times 2 = 10$  el total de grados de libertad de la malla.



**Figura 2.7:** Elementos unidimensionales de continuidad  $C_1$  para flexión en vigas.

### 2.2.1 Elemento de viga y su matriz de funciones de forma

El elemento de viga se define como un elemento finito unidimensional cúbico de continuidad  $C_1$ , el cual tiene una función de aproximación polinómica cúbica del desplazamiento transversal o deflexión  $v^{(e)}(\xi)$ . Tal función se interpola mediante cuatro valores nodales correspondientes al desplazamiento transversal y la rotación normal al plano en los dos nudos:  $v_1^{(e)}$ ,  $\theta_1^{(e)}$ ,  $v_2^{(e)}$  y  $\theta_2^{(e)}$ , como se ilustra en la Figura 2.7.

La función de aproximación  $v^{(e)}(\xi)$  se calcula en la posición con respecto a un sistema coordenado natural  $\xi$ , de la forma:

$$v^{(e)}(\xi) = N_1^{(e)}(\xi)v_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\xi)\theta_1^{(e)} + N_3^{(e)}(\xi)v_2^{(e)} + N_4^{(e)}(\xi)\theta_2^{(e)} \rightarrow v^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)}\mathbf{a}^{(e)} \quad (2.36)$$

donde  $\mathbf{a}^{(e)} = [v_1^{(e)} \quad \theta_1^{(e)} \quad v_2^{(e)} \quad \theta_2^{(e)}]$  corresponde al vector de desplazamientos nodales del elemento. Asimismo, la matriz de funciones de forma  $\mathbf{N}^{(e)}$  y sus componentes son iguales a:

$$\mathbf{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} & N_3^{(e)} & N_4^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.37a)$$

$$N_1^{(e)}(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad N_2^{(e)}(\xi) = L_{(e)}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad (2.37b)$$

$$N_3^{(e)}(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad N_4^{(e)}(\xi) = L_{(e)}(-\xi^2 + \xi^3) \quad (2.37c)$$

### 2.2.2 Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento de viga

La curvatura del elemento finito tipo viga  $\kappa_{(e)}$  es igual a la segunda derivada de la desplazamiento transversal o deflexión con respecto a la posición y se puede expresar como:

$$\kappa_{(e)} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathbf{N}^{(e)}) \mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.38)$$

donde  $\mathbf{B}^{(e)}$  es la matriz resultante de aplicar el operador diferencial  $\tilde{\nabla} = \partial^2 / \partial x^2 = \partial_x^2$  a las funciones de forma, es decir:

$$\mathbf{B}^{(e)} = \begin{bmatrix} B_1^{(e)} & B_2^{(e)} & B_3^{(e)} & B_4^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x^2 N_1^{(e)} & \partial_x^2 N_2^{(e)} & \partial_x^2 N_3^{(e)} & \partial_x^2 N_4^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.39a)$$

Los coeficientes de la matriz  $\mathbf{B}^{(e)}$  se obtienen derivando las funciones de forma y utilizando la regla de la cadena entre  $x$  y  $\xi$ , así:

$$B_1^{(e)}(\xi) = \frac{1}{L_{(e)}^2}(-6 + 12\xi) \quad B_2^{(e)}(\xi) = \frac{1}{L_{(e)}}(-4 + 6\xi) \quad (2.39b)$$

$$B_3^{(e)}(\xi) = \frac{1}{L_{(e)}^2}(6 - 12\xi) \quad B_4^{(e)}(\xi) = \frac{1}{L_{(e)}}(-2 + 6\xi) \quad (2.39c)$$

### 2.2.3 Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes del elemento finito unidimensional de viga

El Principio de los Trabajos Virtuales aplicado al dominio de una viga sometida a flexión se puede expresar como:

$$\int \int \delta \varepsilon_{xx} \cdot \sigma_{xx} dA dx = \int \delta v \cdot w_y dx + \sum_{n=1}^r \delta v(x_n) \cdot P_n \quad (2.40)$$

siendo  $\delta v$  el desplazamiento virtual en  $y$  y  $\delta\varepsilon_{xx}$  la deformación longitudinal virtual, la cual es función de la curvatura virtual o segunda derivada de la deflexión virtual  $\delta\kappa = \partial_x^2(\delta v)$  de la forma  $\delta\varepsilon_{xx} = -y\delta\kappa$ .

Los términos a la derecha de la igualdad representan el trabajo virtual externo realizado por una fuerza distribuida por unidad de longitud  $w_y$  y por una fuerza puntual transversal  $P_n$  en cada punto material  $x_n$ .

El dominio de la viga se divide en un conjunto de  $ne$  elementos finitos conectados entre sí por  $nn$  nudos, como se indica en el ejemplo de la Figura 2.6(b). En consecuencia, el Principio de los Trabajos Virtuales se reescribe de la forma:

$$\sum_{e=1}^{ne} \left[ \int_0^{L_{(e)}} \delta\kappa_{(e)} \cdot E_{(e)} I_{(e)} \cdot \kappa_{(e)} dx \right] = \sum_{e=1}^{ne} \left[ \int_0^{L_{(e)}} \delta v \cdot w_y dx \right] + \sum_{n=1}^{nn} \delta v(x_n) \cdot P_n \quad (2.41)$$

donde  $E_{(e)}$  es el módulo de Young,  $I_{(e)}$  el momento de inercia con respecto al eje  $z$  y  $L_{(e)}$  es la longitud del elemento finito  $e$ .

La deflexión y la curvatura virtual en el interior del elemento finito  $\delta\kappa_{(e)}$  se define de la misma forma que la deflexión y la curvatura real indicada en las ecuaciones 2.36 y 2.38, como:

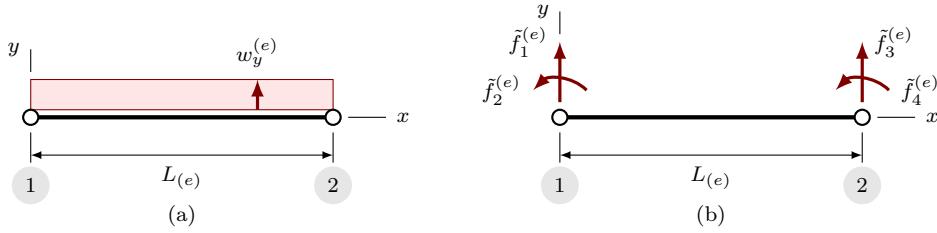
$$\delta v_{(e)} = \mathbf{N}_{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)} = \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{N}_{(e)}^T \quad (2.42a)$$

$$\delta\kappa_{(e)} = \mathbf{B}_{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)} = \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{B}_{(e)}^T \quad (2.42b)$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales de tiene que:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} = \sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \tilde{\mathbf{f}}^{(e)} + \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \quad (2.43)$$

donde  $\delta \mathbf{a}$  y  $\mathbf{f}^{(n)}$  corresponden a los vectores de desplazamientos virtuales y de acciones reales en los nudos de la malla de elementos finitos. Asimismo, se define la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  y vector de fuerzas equivalentes  $\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$  del elemento finito, considerando que el módulo de Young, el momento de inercia y la carga distribuida son



**Figura 2.8:** Fuerzas equivalentes del elemento unidimensional cúbico de una viga a flexión: (a) carga distribuida uniforme transversal del elemento  $w_y^{(e)}$ , y (b) fuerzas equivalentes en los nudos.

constantes en su interior, así:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_0^{L_{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T}(x) E_{(e)} I_{(e)} \mathbf{B}^{(e)}(x) dx = E_{(e)} I_{(e)} L_{(e)} \int_0^1 \mathbf{B}^{(e)T}(\xi) \mathbf{B}^{(e)}(\xi) d\xi \quad (2.44a)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{(e)} = \int_0^{L_{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T}(x) w_y^{(e)} dx = w_y^{(e)} L_{(e)} \int_0^1 \mathbf{N}^{(e)T}(\xi) d\xi \quad (2.44b)$$

Sustituyendo la matriz  $\mathbf{B}^{(e)}$  del elemento unidimensional cúbico de continuidad  $C_1$  en la Ecuación 2.44a se obtiene su matriz de rigidez. Los coeficientes  $k_{ij}^{(e)}$  de tal matriz conservan el orden de los grados de libertad del elemento, asociados a los desplazamientos y rotaciones  $v_1^{(e)}, \theta_1^{(e)}, v_2^{(e)}$  y  $\theta_2^{(e)}$ , ilustrados en la Figura 2.7. La matriz de rigidez de un elemento finito tipo viga corresponde a:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{E_{(e)} I_{(e)}}{L_{(e)}^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_{(e)} & -12 & 6L_{(e)} \\ & 4L_{(e)}^2 & -6L_{(e)} & 4L_{(e)}^2 \\ & & 12 & -6L_{(e)} \\ & & & 4L_{(e)}^2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

La acción de una carga distribuida uniforme transversal sobre la viga  $w_y^{(e)}$  ilustrada en la Figura 2.8, es equivalente a la fuerza transversal  $\tilde{f}_1^{(e)}$  y el momento  $\tilde{f}_2^{(e)}$  en el nudo inicial, y a la fuerza transversal  $\tilde{f}_3^{(e)}$  y el momento  $\tilde{f}_4^{(e)}$  en el nudo final.

El vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga distribuida  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$  se calcula sustituyendo la matriz de funciones de forma  $\mathbf{N}^{(e)}$  del elemento unidimensional cúbico de continuidad  $C_1$  en la Ecuación 2.44b, obteniendo:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{(e)} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1^{(e)} \\ \tilde{f}_2^{(e)} \\ \tilde{f}_3^{(e)} \\ \tilde{f}_4^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} w_y^{(e)} L_{(e)} \begin{bmatrix} 6 \\ L_{(e)} \\ 6 \\ -L_{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

#### 2.2.4 Tabla de conectividades, tablas de numeración de grados de libertad por nudo y por elemento

Los elementos finitos de la malla están conectados entre sí por nudos. La tabla de conectividades contiene la numeración asignada a los nudos asociados a cada elemento finito. Por ejemplo, la Tabla 2.1 ilustra tal información para el problema mostrado en la Figura 2.6(c).

En los nudos de la malla el desplazamiento transversal y la rotación normal al plano establecen los grados de libertad del problema. Algunos de estos tienen un valor conocido dado por las condiciones de apoyo. La cantidad de grados de libertad conocidos y desconocidos se indican como  $n_{glc}$  y  $n_{gld}$ , respectivamente y el total de grados de libertad es  $n_{glt} = n_{glc} + n_{gld}$ . Por ejemplo en la Figura 2.6(c),  $v_1 = 0$ ,  $\theta_1 = 0$  y  $v_5 = 0$ , es decir que  $n_{glc} = 3$ ,  $n_{gld} = 7$  y  $n_{glt} = 10$ .

Los grados de libertad desconocidos se pueden numerar de forma secuencial ascendente desde 1, mientras que los grados de libertad conocidos de numeran de forma descendente desde  $n_{glt}$ . Para el ejemplo en cuestión, el desplazamiento transversal del nudo 1 es conocido  $v_1 = 0$ , por lo tanto corresponde al desplazamiento nodal  $a_{nglt=10}$ , y la rotación en el mismo nudo  $\theta_1 = 0$  también es conocida y corresponde al desplazamiento nodal  $a_{nglt-1=9}$  (Tabla 2.4). En cambio, la deflexión y la rotación del nudo 2 son desconocidas y en consecuencia corresponden a los desplazamientos nodales  $a_1$  y  $a_2$ , respectivamente. La numeración establecida para los grados de libertad en cada nudo de la malla se presenta en las columnas 3 y 4 de la Tabla 2.2.

elem.	nudo 1°	nudo 2°
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

**Tabla 2.1:** Tabla de conectividades de los elementos finitos.

nudo	$x(\text{ m})$	gl 1°	gl 2°
1	0.00	10	9
2	3.00	1	2
3	4.00	3	4
4	5.00	5	6
5	8.00	8	7

**Tabla 2.2:** Tabla de coordenadas y de los grados de libertad gl 1° y gl 2° en los nudos, asociados a la deflexión  $v_n$  y a la rotación  $\theta_n$ , respectivamente.

elem.	gl 1°	gl 2°	gl 3°	gl 4°
1	10	9	1	2
2	1	2	3	4
3	3	4	5	6
4	5	6	8	7

**Tabla 2.3:** Tabla de incidencias de la malla.

nudo	$v(\text{ m})$	$\theta(\text{ rad})$
1	$a_{10} = 0$	$a_9 = 0$
2	$a_1 = \text{des.}$	$a_2 = \text{des.}$
3	$a_3 = \text{des.}$	$a_4 = \text{des.}$
4	$a_5 = \text{des.}$	$a_6 = \text{des.}$
5	$a_8 = 0$	$a_7 = \text{des.}$

**Tabla 2.4:** Tabla de valores conocidos de la deflexión y rotación en los nudos: **UCO**.

La tabla de incidencias contiene la numeración de los grados de libertad que están asociados a cada elemento finito en sus nudos. Por ejemplo en el problema ilustrado en la Figura 2.6(c), tal información está contenida en la Tabla 2.3.

### 2.2.5 Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el sólido

A partir del Principio de los Trabajos Virtuales aplicado a vigas a flexión se obtiene la Ecuación 2.22, la cual se puede expresar en términos de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , del vector de fuerzas totales  $\mathbf{f}$  y del vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{a}$  asociados a la malla, como lo indica la Ecuación 2.23. Tales matrices se obtienen mediante el procedimiento de *ensamblaje* dado en las ecuaciones 3.41 y 2.26, y explicado en la Subsección 2.1.6.

### 2.2.6 Vector de desplazamientos nodales y fuerzas totales en el sólido

El vector de desplazamientos nodales contiene la deflexión y la rotación de cada nudo de la malla y está conformado por dos subvectores de la forma  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta^T]^T$ . El subvector de desplazamientos nodales conocidos  $\mathbf{a}_\beta$  se obtiene *organizando por numeración de grados de libertad* a la tabla de valores de deflexión y rotación UCO, de la forma  $\mathbf{a}_\beta = \mathbb{V}[UCO]$ . Para el ejemplo en cuestión, el vector  $\mathbf{a}_\beta$  se obtiene de la Tabla 2.4, así:

$$\mathbf{a}_\beta = \mathbb{V}[UCO] = [a_8 = 0 \quad a_9 = 0 \quad a_{10} = 0]^T$$

En cambio, el subvector de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{a}_\alpha$  se calcula como lo indica la Ecuación 2.29.

Después de obtenido el vector de desplazamientos nodales organizado de acuerdo a la numeración de los grados de libertad  $\mathbf{a}$ , se puede facilitar la identificación de este resultado mediante su *organización por componentes asociadas a cada nudo*, la cual está definida como  $UXY = \mathbb{T}[\mathbf{a}]$ . Esta operación construye una tabla de deflexión y rotación por nudo UXY, a partir del vector de desplazamientos nodales organizados por grados de libertad  $\mathbf{a}$ . En el ejemplo ilustrado en la Figura 2.6(c), se tiene que:

nudo	$v_n$	$\theta_n$
1	$a_{10}$	$a_9$
2	$a_1$	$a_2$
3	$a_3$	$a_4$
4	$a_5$	$a_6$
5	$a_8$	$a_7$

$$UXY = \mathbb{T}[\mathbf{a}] = \mathbb{T} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{bmatrix}^T \rightarrow UXY =$$

El vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos  $\mathbf{f}^{(n)}$ , está conformado por dos subvectores de tal forma que  $\mathbf{f}^{(n)} = [\mathbf{f}_\alpha^{(n)T} \quad \mathbf{f}_\beta^{(n)T}]^T$ .

El subvector  $\mathbf{f}_\alpha^{(n)}$  contiene las fuerzas transversales y momentos conocidos aplicados directamente en los nudos. Tal subvector se obtiene *organizando por numeración de grados de libertad* a la tabla de valores de fuerzas aplicadas directamente en los nudos FUN, de la forma  $\mathbf{f}_\alpha^{(n)} = \mathbb{V}[FUN]$ . Para el ejemplo en cuestión, el vector  $\mathbf{f}_\alpha^{(n)}$

se obtiene así:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|cc}
 \text{nudo} & f_{yn}(\text{kN}) & m_{zn}(\text{kN} \cdot \text{m}) \\ \hline
 1 & f_{10}^{(n)} = \text{des.} & f_9^{(n)} = \text{des.} \\
 \text{FUN} = & 2 & f_1^{(n)} = 0 \quad f_2^{(n)} = 0 \\
 & 3 & f_3^{(n)} = 0 \quad f_4^{(n)} = 0 \\
 & 4 & f_5^{(n)} = -40 \quad f_6^{(n)} = 0 \\
 & 5 & f_9^{(n)} = \text{des.} \quad f_7^{(n)} = 0
 \end{array} \\
 \rightarrow \mathbf{f}_\alpha^{(n)} = \mathbb{V}[\text{FUN}] = \begin{bmatrix} f_1^{(n)} = 0 \\ f_2^{(n)} = 0 \\ f_3^{(n)} = 0 \\ f_4^{(n)} = 0 \\ f_5^{(n)} = -40 \\ f_6^{(n)} = 0 \\ f_7^{(n)} = 0 \end{bmatrix} \text{ kN}
 \end{array}$$

En cambio, el subvector de fuerzas desconocidas aplicadas directamente en nudos  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$  contiene las reacciones en los apoyos.

El vector de fuerzas equivalentes a la acción de cargas distribuidas en la malla  $\tilde{\mathbf{f}}$  se obtiene del proceso de *ensamblaje* de los vectores de fuerzas equivalentes de los elementos finitos  $\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$ , como se indicó en la Ecuación 2.26.

El vector de fuerzas totales en los nudos de la malla  $\mathbf{f}$  es la suma de los vectores de fuerzas aplicadas directamente en los nudos y de fuerzas equivalentes a la acción de cargas distribuidas, como lo indica la Ecuación 2.25.

De acuerdo a lo anterior, el subvector de fuerzas desconocidas aplicadas directamente en nudos  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$  se calcula mediante la Ecuación 2.32.

Ahora se obtiene el subvector de fuerzas totales  $\mathbf{f}_\beta$  con la Ecuación 2.31 y se reconstruye el vector  $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_\alpha^T \quad \mathbf{f}_\beta^T]^T$ .

Con la misma operación se construye la tabla FXY a partir del vector de fuerzas totales organizados por grados de libertad  $\mathbf{f}$ , es decir  $\text{FXY} = \mathbb{T}[\mathbf{f}]$ . Esta tabla contiene la fuerza transversal y el momento en cada uno de los nudos de la malla.

Para facilitar la identificación de este resultado se *organiza por componentes asociadas a cada nudo*, al vector de fuerzas totales organizado por grados de libertad  $\mathbf{f}$ . Tal operación se define como  $\text{FXY} = \mathbb{T}[\mathbf{f}]$ . Allí se construye la tabla FXY que contiene la fuerza transversal y el momento total en cada nudo. En el ejemplo ilustrado en

la Figura 2.6(c), se tiene que:

nudo	$f_y$	$m_z$
1	$f_{10}$	$f_9$
2	$f_1$	$f_2$
3	$f_3$	$f_4$
4	$f_5$	$f_6$
5	$f_8$	$f_7$

### 2.2.7 Vector de fuerzas internas en los nudos de cada elemento

En cada elemento finito se define un vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{a}^{(e)}$ , conformado por las componentes de deflexión y rotación en sus nudos, el cual se obtiene del proceso de *extracción* explicado en la Subsección 2.1.9 de la forma  $\mathbf{a}^{(e)} = \mathbb{E}_{(e)} \mathbf{a}$ .

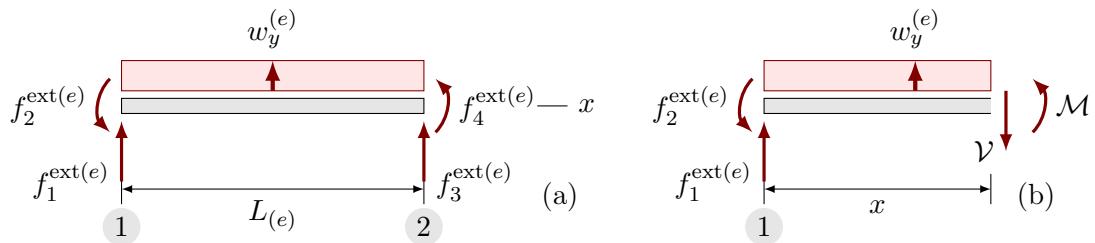
Por otro lado, el equilibrio en cada elemento finito se puede plantear de forma análoga a la presentada para la malla en las ecuaciones 2.23 y 2.25, así:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} = \tilde{\mathbf{f}}^{(e)} + \mathbf{f}^{\text{ext}(e)}$$

siendo  $\mathbf{f}^{\text{ext}(e)} = [f_1^{\text{ext}(e)} \quad f_2^{\text{ext}(e)} \quad f_3^{\text{ext}(e)} \quad f_4^{\text{ext}(e)}]^T$  el vector de fuerzas en los nudos del elemento o también denominado vector de acciones en sus extremos. Las componentes de este vector corresponden a: la fuerza transversal  $f_1^{\text{ext}(e)}$  y el momento  $f_2^{\text{ext}(e)}$  en el nudo 1 y la fuerza transversal  $f_3^{\text{ext}(e)}$  y el momento  $f_4^{\text{ext}(e)}$  en el nudo 2, como se ilustra en la Figura 2.9(a). Despejando  $\mathbf{f}^{\text{ext}(e)}$  de la ecuación anterior se tiene que:

$$\mathbf{f}^{\text{ext}(e)} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} - \tilde{\mathbf{f}}^{(e)} \quad (2.47)$$

Adicionalmente, se calcula la fuerza cortante  $\mathcal{V}(x)$  y el momento flector  $\mathcal{M}(x)$  a una distancia  $x$  del extremo 1 del elemento, a partir del equilibrio estático del tramo de viga mostrado en la Figura 2.9(b).



**Figura 2.9:** Elemento de viga sometido a flexión: (a) acciones en los extremos y carga distribuida en el elemento, y (b) diagrama de cuerpo libre de un tramo de viga mostrando la fuerza cortante y el momento flector.

### 2.2.8 Resumen de resultados obtenidos

El análisis por el método de los elementos finitos del problema mecánico elástico lineal unidimensional de vigas sometidas a flexión, permite obtener en una posición  $x$  los siguientes resultados: (i) el desplazamiento transversal o deflexión  $v(x)$ , (ii) la fuerza cortante  $\mathcal{V}(x)$  y el momento flector  $\mathcal{M}(x)$ .

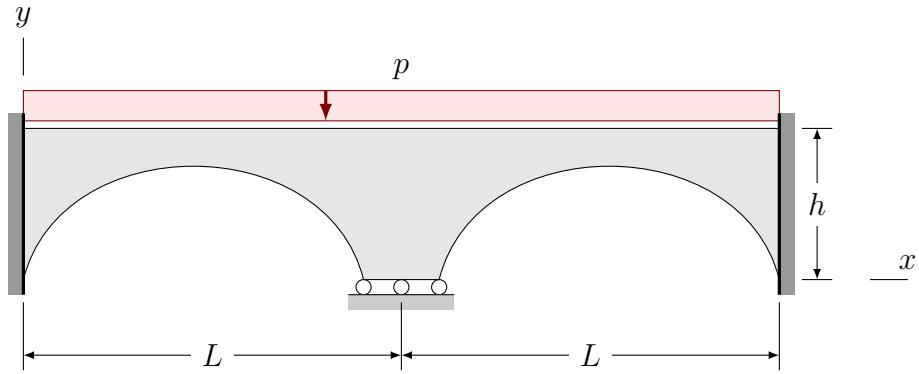


## Capítulo 3

# Formulación del problema mecánico elástico lineal bidimensional

Este capítulo presenta la formulación del método de los elementos finitos para la solución un problema mecánico elástico lineal bidimensional. El objetivo consiste en calcular el campo del desplazamiento, la deformación y el esfuerzo, en un sólido cuya geometría, cargas externas y condiciones de borde se pueden simplificar a un dominio bidimensional, en condición plana de esfuerzos o de deformaciones. Dicho sólido puede estar sometido a acciones estáticas contenidas en su plano como: fuerzas puntuales, presiones, pesos específicos y desplazamientos impuestos. Los materiales que conforman el sólido exhiben un comportamiento elástico, lineal e isotrópico determinado por la ley de Hooke. La relación entre el campo del desplazamiento y el campo de la deformación está definida por la teoría de deformación infinitesimal.

Los conceptos indicados a continuación se basan en la mecánica del continuo de cuerpos sólidos (Lai & Saibel, 1965; Malvern, 1969; Timoshenko & Goodier, 1970; Lemaitre & Chaboche, 1990; Oliver & Agelet, 2002; Linero & Garzón, 2010) y en el método de los elementos finitos aplicados a la mecánica de sólidos elásticos lineales (Hughes, 2000; Cook, Malkus, Plesha, & Witt, 2001; O. Zienkiewicz & Taylor, 2005; Oñate, 2009; Linero *et al.*, 2013).



**Figura 3.1:** Ejemplo de un problema en condición plana de esfuerzos: puente en arco de dos luces sometido a carga distribuida uniforme.

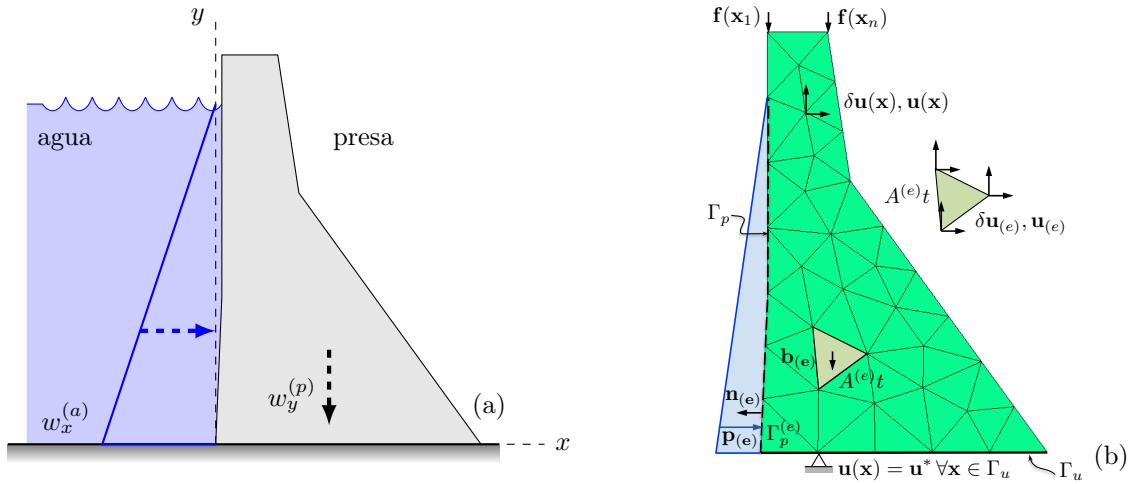
### 3.1 Formulación general en el interior de un elemento finito

En un problema bidimensional definido en el plano \$xy\$, las componentes del desplazamiento en las direcciones \$x\$ y \$y\$, denominadas \$u(x, y)\$ y \$v(x, y)\$, son independientes de la coordenada \$z\$ y representan la cinemática del problema. En cambio el desplazamiento en dirección \$z\$ indicado como \$w(x, y)\$ se considera despreciable.

La condición plana de esfuerzo establece que las componentes de esfuerzo normal \$\sigma\_{xx}\$ y \$\sigma\_{yy}\$ y de esfuerzo cortante \$\sigma\_{xy}\$ describen el comportamiento del sólido, mientras que las componentes \$\sigma\_{zz}\$, \$\sigma\_{xz}\$ y \$\sigma\_{yz}\$ se consideran iguales a cero. Un ejemplo de esta condición es el puente en arco de dos luces sometido a carga distribuida uniforme, ilustrado en la Figura 3.1.

En cambio, la condición plana de deformaciones exige que las componentes de deformación longitudinal \$\varepsilon\_{xx}\$ y \$\varepsilon\_{yy}\$ y de deformación angular \$\gamma\_{xy}\$ representen el comportamiento de sólido, mientras que las componentes \$\varepsilon\_{zz}\$, \$\gamma\_{xz}\$ y \$\gamma\_{yz}\$ se consideren nulas. La Figura 3.2(a) presenta una presa de sección constante sometida a la presión del agua y a su peso propio, como ejemplo de un problema en condición plana de deformaciones.

En las condiciones mencionadas, el sólido de espesor \$t\$ y área de sección transversal \$A\$, es aproximadamente igual a suma de \$ne\$ subdominios de geometría simple con área \$A^{(e)}\$, denominados elementos finitos, como se ilustra en la Figura 3.2(b). En



**Figura 3.2:** Ejemplo de un problema en condición plana de deformaciones. Presa de sección constante sometida a la presión del agua y a su peso propio: (a) esquema, y (b) malla de elementos finitos.

el interior de cada uno se establece el campo del desplazamiento, la deformación y el esfuerzo de forma continua.

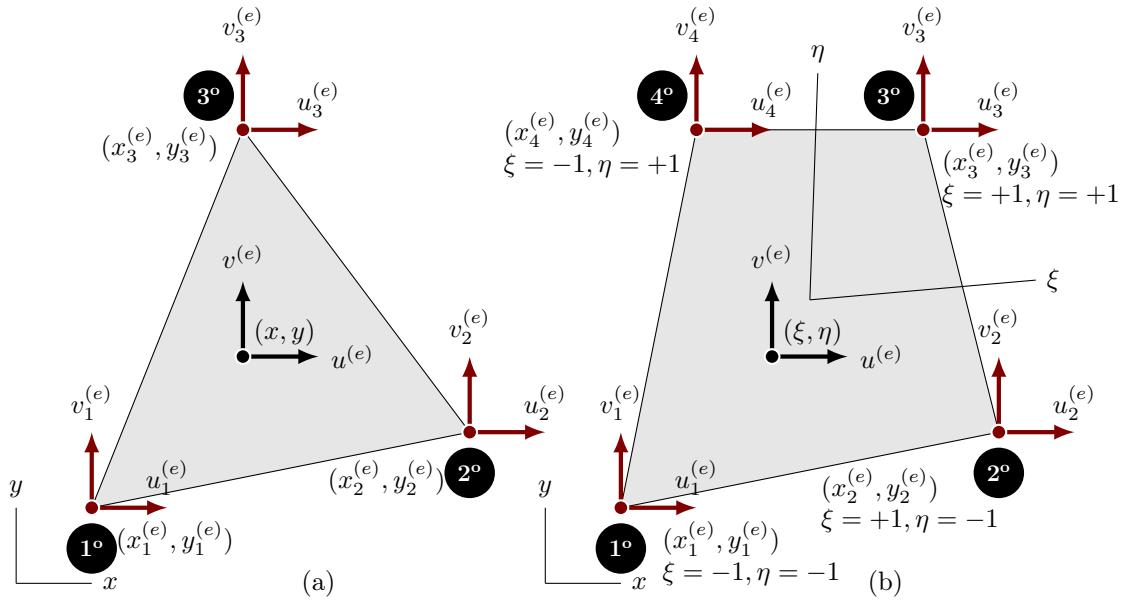
### 3.1.1 Desplazamiento y funciones de forma de un elemento finito

Para este tipo de problema se divide el dominio en elementos finitos bidimensionales de continuidad  $C_0$ , como el elemento triangular lineal o el cuadrilátero bilineal, mostrados en las Figuras 3.3(a) y (b), respectivamente.

Las componentes de desplazamiento  $u_i^{(e)}$  y  $v_i^{(e)}$ , de cada nudo  $i$  en las direcciones  $x$  y  $y$ , se denominan valores nodales de desplazamiento y son los grados de libertad del elemento finito. Tales valores conforman el vector de desplazamiento nodal  $\mathbf{a}^{(e)}$ , así:

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & \dots & \dots & u_{nn}^{(e)} & v_{nn}^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (3.1)$$

siendo  $nn$  el número de nudos del elemento finito  $e$ .



**Figura 3.3:** Elementos finitos bidimensionales: (a) triangular lineal y (b) cuadrilateral bilineal.

Las componentes de desplazamiento en el interior del elemento  $u^{(e)}(x, y)$  y  $v^{(e)}(x, y)$  se calculan por interpolación de los valores nodales  $u_i^{(e)}$ , como:

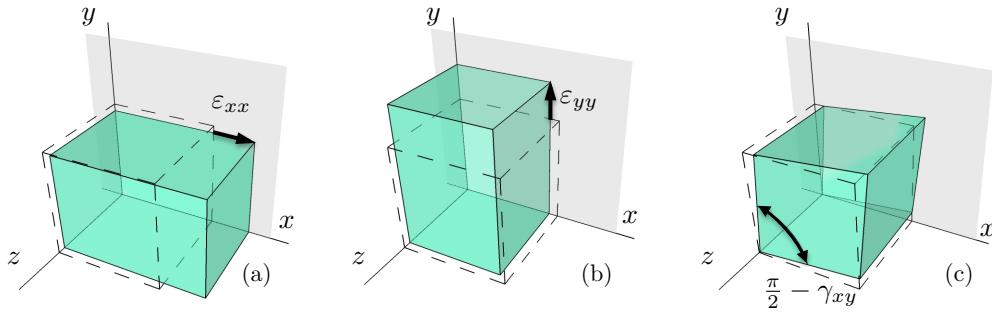
$$u^{(e)}(x, y) = N_1^{(e)}(x, y)u_1^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(x, y)u_n^{(e)} \quad (3.2a)$$

$$v^{(e)}(x, y) = N_1^{(e)}(x, y)v_1^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(x, y)v_n^{(e)} \quad (3.2b)$$

donde  $N_i^{(e)}(x, y)$  es la función de forma del nudo  $i$  del elemento  $e$ , evaluada en la posición  $(x, y)$ .

El vector del desplazamiento  $\mathbf{u}^{(e)} = [u^{(e)}, v^{(e)}]^T$  en un punto del interior del elemento finito de coordenadas  $(x, y)$ , se pueden calcular por interpolación de los valores nodales del vector  $\mathbf{a}^{(e)}$ , utilizando la matriz de funciones de forma del elemento  $\mathbf{N}^{(e)}$ , así:

$$\mathbf{u}^{(e)}(x, y) = \mathbf{N}^{(e)}(x, y) \mathbf{a}^{(e)} \quad (3.3)$$



**Figura 3.4:** Componentes de deformación en un cubo diferencial para problemas bidimensionales: (a) y (b) deformación longitudinal en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente; (c) deformación angular en el plano  $xy$ .

donde,

$$\mathbf{N}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & \dots & \dots & N_{nn}^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & \dots & \dots & 0 & N_{nn}^{(e)} \end{bmatrix}$$

### 3.1.2 Componentes de deformación infinitesimal

Las componentes de deformación infinitesimal representativas del problema bidimensional en el plano  $xy$  son las deformaciones longitudinales  $\varepsilon_{xx}$  y  $\varepsilon_{yy}$ , y la deformación angular  $\gamma_{xy}$ , mostradas en la Figura 3.4. Estas tres componentes son los coeficientes de la siguiente matriz columna de deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T \quad (3.4)$$

En condición plana de deformaciones las componentes  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  son nulas, mientras que en condición plana de esfuerzos éstas componentes son:  $\varepsilon_{zz} = -(\nu/(1-\nu))(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$ ,  $\gamma_{xz} = 0$  y  $\gamma_{yz} = 0$ .

La relación entre las componentes de deformación y de desplazamiento establecida por la teoría de deformaciones infinitesimales, se puede expresar de forma matricial, como  $\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\nabla} \mathbf{u}$ , donde el operador diferencial  $\tilde{\nabla}$  corresponde a:

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

En consecuencia, la matriz de componentes de deformación en un punto  $(x, y)$  del interior de un elemento finito  $e$  es igual a:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \tilde{\nabla} \mathbf{u}^{(e)}(x, y) = \tilde{\nabla} \mathbf{N}^{(e)}(x, y) \mathbf{a}^{(e)} \quad (3.6)$$

### 3.1.3 Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento

En la Ecuación 3.6 se observa que la matriz operador diferencial  $\tilde{\nabla}$  está actuando sobre la matriz de funciones de forma del elemento  $\mathbf{N}^{(e)}(x, y)$  exclusivamente, dado que el vector  $\mathbf{a}^{(e)}$  es independiente de la posición  $(x, y)$ . Se define entonces la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma del elemento finito  $\mathbf{B}^{(e)}(x, y)$ , para un problema mecánico bidimensional como:

$$\mathbf{B}^{(e)}(x, y) = \tilde{\nabla} \mathbf{N}^{(e)}(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_x N_1^{(e)} & 0 & \dots & \dots & \partial_x N_{nn}^{(e)} & 0 \\ 0 & \partial_y N_1^{(e)} & \dots & \dots & 0 & \partial_y N_{nn}^{(e)} \\ \partial_y N_1^{(e)} & \partial_x N_1^{(e)} & \dots & \dots & \partial_y N_{nn}^{(e)} & \partial_x N_{nn}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

donde  $\partial_x N_i^{(e)}$  y  $\partial_y N_i^{(e)}$  son las primeras derivadas de las funciones de forma con respecto a  $x$  y  $y$ .

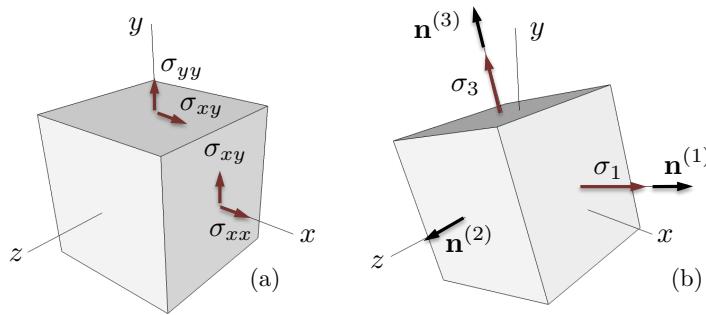
En consecuencia, la matriz columna de componentes de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(x, y)$  se simplifica a:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(x, y) = \mathbf{B}^{(e)}(x, y) \mathbf{a}^{(e)} \quad (3.8)$$

### 3.1.4 Componentes de esfuerzo y matriz constitutiva elástica

Las componentes de esfuerzo consideradas en el problema mecánico bidimensional corresponden a los esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{yy}$ , y el esfuerzo cortante  $\sigma_{xy}$ , mostrados en la Figura 3.5. Tales componentes son los términos de la matriz columna de esfuerzos definida como:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T \quad (3.9)$$



**Figura 3.5:** Componentes de esfuerzo en un cubo diferencial para problemas bidimensionales: (a) esfuerzos contenidos en el plano  $xy$ , y (b) esfuerzos y direcciones principales.

De acuerdo con la ley de Hooke generalizada, un material elástico lineal isotrópico de módulo de Young  $E$  y relación de Poisson  $\nu$ , exhibe una relación constitutiva entre la matriz columna de esfuerzos y de deformaciones de la forma  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}$ , donde  $\mathbf{D}$  es la matriz constitutiva elástica del material.

En condición plana de esfuerzos las componentes  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$  son iguales a cero y la matriz constitutiva elástica  $\mathbf{D}$  es igual a:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (3.10a)$$

En cambio, para condición plana de deformaciones las componentes de esfuerzo  $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ ,  $\sigma_{xz} = 0$  y  $\sigma_{yz} = 0$ . Asimismo, la matriz constitutiva elástica  $\mathbf{D}$  es igual a:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (3.10b)$$

En un punto  $(x, y)$  del interior de un elemento finito  $e$ , la matriz columna de componentes de esfuerzo es igual a:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)}(x, y) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(x, y) = \mathbf{D}\mathbf{B}^{(e)}(x, y)\mathbf{a}^{(e)} \quad (3.11)$$

### 3.1.5 Esfuerzos principales

El estado de esfuerzos general de un punto material está definido por seis componentes diferentes con respecto a tres planos mutuamente ortogonales, asociados a un sistema coordenado cartesiano  $xyz$ . Las componentes de esfuerzo se pueden representar mediante una matriz simétrica de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{xyz} \quad (3.12)$$

donde,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$ , corresponden a los esfuerzos normales a los planos de normal  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. En cambio,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$ , son las componentes de esfuerzo cortante sobre los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$ , respectivamente.

Los esfuerzos principales  $\sigma_p$  corresponden a los esfuerzos normales máximo y mínimo, que pueden actuar sobre una superficie asociada el estado de esfuerzos. Tales  $\sigma_p$  y sus respectivas direcciones  $\mathbf{n}^{(p)}$  se calculan resolviendo un problema de valores y vectores propios de tamaño 3, así:

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_p \mathbf{I}) \mathbf{n}^{(p)} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

Siendo  $\|\mathbf{n}^{(p)}\|$  diferente de cero, la expresión anterior establece que  $\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_p \mathbf{I}) = 0$  y en consecuencia:

$$\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0 \quad (3.14a)$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (3.14b)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 + \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xz}^2 + 2\sigma_{yz}^2) \quad (3.14c)$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.14d)$$

Particularmente en condición plana de esfuerzos donde  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\sigma_{xz} = 0$  y  $\sigma_{yz} = 0$ , la expresión anterior se simplifica a:

$$\sigma_p (\sigma_p^2 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\sigma_p + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2)) = 0 \quad (3.15)$$

Las soluciones de la ecuación polinómica de tercer orden son los esfuerzos principales  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  y  $\sigma_c$ , iguales a:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 - 4\sigma_{xy}^2} \right] \quad (3.16a)$$

$$\sigma_b = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 - 4\sigma_{xy}^2} \right] \quad (3.16b)$$

$$\sigma_c = 0 \quad (3.16c)$$

En general, los esfuerzos principales mayor  $\sigma_1$ , menor  $\sigma_3$  e intermedio  $\sigma_2$  están definidos como:

$$\sigma_1 = \max[\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c] \quad (3.17a)$$

$$\sigma_3 = \min[\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c] \quad (3.17b)$$

$$\sigma_2 = \sigma_a, \sigma_b \text{ o } \sigma_c \neq \sigma_1 \text{ o } \sigma_3 \quad (3.17c)$$

En consecuencia, los esfuerzos principales máximo  $\sigma_1$  y mínimo  $\sigma_3$  en condición plana de esfuerzos, corresponden a aquellos contenidos en el plano  $xy$ , es decir:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 - 4\sigma_{xy}^2} \right] \quad (3.18a)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 - 4\sigma_{xy}^2} \right] \quad (3.18b)$$

$$\sigma_2 = 0 \quad (3.18c)$$

Por otro lado, en condición plana de deformaciones donde  $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ ,  $\sigma_{xz} = 0$  y  $\sigma_{yz} = 0$ , la ecuación 3.14 se simplifica a:

$$(\sigma_p - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) (\sigma_p^2 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\sigma_p + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2)) = 0 \quad (3.19)$$

Las soluciones de la ecuación polinómica de tercer orden son los esfuerzos principales  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  y  $\sigma_c$ , iguales a:

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 - 4\sigma_{xy}^2} \right] \quad (3.20a)$$

$$\sigma_b = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 - 4\sigma_{xy}^2} \right] \quad (3.20b)$$

$$\sigma_c = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.20c)$$

Asimismo, los esfuerzos principales mayor  $\sigma_1$ , menor  $\sigma_3$  e intermedio  $\sigma_2$  se obtienen como lo indica la Ecuación 3.17.

### 3.1.6 Criterio de fallo del material de von Mises

El criterio de fallo de von Mises establece que un punto del sólido mantiene comportamiento elástico, si la densidad de energía de deformación por distorsión actuante es menor que la correspondiente densidad de energía admisible del material. Esta última se evalúa en un ensayo uniaxial, cuyo esfuerzo límite de elasticidad del material es conocido.

Para materiales dúctiles en los cuales su fluencia coincide con el final de su comportamiento elástico, la desigualdad entre densidades de energía se puede reescribir

de la siguiente manera: un punto conserva un comportamiento elástico si  $\sigma_{vm} \leq \sigma_y$ , siendo  $\sigma_y$  el esfuerzo de fluencia del material y  $\sigma_{vm}$  el esfuerzo equivalente de von Mises actuante. Tal esfuerzo está definido como:

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (3.21)$$

### 3.1.7 Deformaciones principales

El estado de deformaciones general de un punto material está definido por seis componentes diferentes con respecto a tres planos mutuamente ortogonales, asociados a un sistema coordenado cartesiano  $xyz$ . Las componentes de deformación se pueden representar mediante una matriz simétrica de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{xyz} \quad (3.22)$$

donde,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\varepsilon_{zz}$ , corresponden a las deformaciones longitudinales las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. En cambio,  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$  y  $\varepsilon_{yz}$ , son las componentes de deformación angular en notación científica sobre los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$ , respectivamente.

Habitualmente en el método de los elementos finitos, las componentes de deformación se indican en notación de ingeniería, donde las deformaciones longitudinales son iguales a las presentadas en notación científica, mientras que las deformaciones angulares en notación de ingeniería  $\gamma_{ij}$  se relacionan así:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} \quad (3.23)$$

Dos de las deformaciones principales  $\varepsilon_p$  son aquellas deformaciones longitudinales de valor máximo y mínimo, que pueden actuar sobre una superficie. Tales  $\varepsilon_p$  y sus respectivas direcciones  $\mathbf{m}^{(p)}$  se calculan resolviendo un problema de valores y vectores

propios de tamaño 3, así:

$$(\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_p \mathbf{I}) \mathbf{m}^{(p)} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

Siendo  $\|\mathbf{m}^{(p)}\|$  diferente de cero, la expresión anterior establece que  $\det(\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_p \mathbf{I}) = 0$  y en consecuencia:

$$\varepsilon_p^3 - I'_1 \varepsilon_p^2 + I'_2 \varepsilon_p - I'_3 = 0 \quad (3.25a)$$

$$I'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (3.25b)$$

$$I'_2 = \frac{1}{2}(I'^2 + \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2) \quad (3.25c)$$

$$I'_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.25d)$$

Particularmente en condición plana de deformaciones donde  $\varepsilon_{zz} = 0$ ,  $\varepsilon_{xz} = 0$  y  $\varepsilon_{yz} = 0$ , la expresión anterior se simplifica a:

$$\varepsilon_p (\varepsilon_p^2 - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\varepsilon_p + (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xy}^2)) = 0 \quad (3.26)$$

Las soluciones de la ecuación polinómica de tercer orden son las deformaciones principales  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$  y  $\varepsilon_c$ , iguales a:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 - 4\varepsilon_{xy}^2} \right] \quad (3.27a)$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 - 4\varepsilon_{xy}^2} \right] \quad (3.27b)$$

$$\varepsilon_c = 0 \quad (3.27c)$$

En general, las deformaciones principales mayor  $\varepsilon_1$ , menor  $\varepsilon_3$  e intermedia  $\varepsilon_2$  están definidos como:

$$\varepsilon_1 = \max[\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c] \quad (3.28a)$$

$$\varepsilon_3 = \min[\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c] \quad (3.28b)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_a, \varepsilon_b \text{ o } \varepsilon_c \neq \varepsilon_1 \text{ o } \varepsilon_3 \quad (3.28c)$$

En consecuencia, las deformaciones principales máxima  $\varepsilon_1$  y mínima  $\varepsilon_3$  en condición plana de deformaciones, corresponden a aquellas contenidas en el plano  $xy$ , es decir:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 - 4\varepsilon_{xy}^2} \right] \quad (3.29a)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 - 4\varepsilon_{xy}^2} \right] \quad (3.29b)$$

$$\varepsilon_2 = 0 \quad (3.29c)$$

Por otro lado, en condición plana de esfuerzos donde  $\varepsilon_{zz} = -(\nu/(1-\nu))(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$ ,  $\varepsilon_{xz} = 0$  y  $\varepsilon_{yz} = 0$ , la ecuación 3.25 se simplifica a:

$$(\varepsilon_p + (\nu/(1 - \nu))(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}))(\varepsilon_p^2 - (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})\varepsilon_p + (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xy}^2)) = 0 \quad (3.30)$$

Las soluciones de la ecuación polinómica de tercer orden son las deformaciones principales  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$  y  $\varepsilon_c$ , correspondientes a:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 - 4\varepsilon_{xy}^2} \right] \quad (3.31a)$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 - 4\varepsilon_{xy}^2} \right] \quad (3.31b)$$

$$\varepsilon_c = -(\nu/(1 - \nu))(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (3.31c)$$

De igual manera, las deformaciones principales mayor  $\varepsilon_1$ , menor  $\varepsilon_3$  e intermedia  $\varepsilon_2$  se obtienen como lo indica la ecuación 3.28.

## 3.2 Formulación general en la malla de elementos finitos

Un sólido de espesor  $t$  y área de sección transversal constante  $A$ , sometido a acciones externas y restringido por condiciones de apoyo, se representa con una malla de elementos finitos, como se ilustra en la Figura 3.2(b). Cada elemento finito tiene nudos en sus vértices que comparte con su elemento vecino. En tales nudos se definen las componentes de desplazamiento como grados de libertad del problema.

### 3.2.1 Principio de los Trabajos Virtuales

El trabajo virtual producido por las fuerzas reales se puede dividir en dos partes: el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas denominado trabajo virtual interno y el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas llamado trabajo virtual externo (Oñate, 1995).

Un sólido representado por  $ne$  elementos finitos de área  $A^{(e)}$  y espesor  $t$ , está sometido a fuerzas por unidad de volumen en cada elemento  $\mathbf{b}_{(e)}$ , a fuerzas por unidad de área  $\mathbf{p}_{(e)}$  en el contorno  $\Gamma_p^{(e)} \subset \Gamma_p$  y a fuerzas puntuales  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  aplicadas sobre  $r$  nudos, como lo indica la Figura 3.2(b).

Las condiciones de frontera sobre el cuerpo corresponden a valores conocidos del desplazamiento real  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [u \ v]^T = \mathbf{u}^*$  en los puntos materiales que hacen parte de un contorno definido  $\Gamma_u$ .

El campo del desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\delta u \ \delta v]^T$ , definido como una variación del desplazamiento, corresponde a una función cualquiera que cumple con la condición de borde de la forma:

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (3.32)$$

El trabajo virtual externo en cada elemento  $e$  se realiza por las fuerzas reales externas  $\mathbf{b}_{(e)}$ ,  $\mathbf{p}_{(e)}$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  mientras se presenta un desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{u}_{(e)}$ . En cambio, el trabajo virtual interno es producido por el esfuerzo  $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}$  mientras ocurren deformaciones generadas por desplazamientos virtuales  $\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}_{(e)}$ , es decir, es igual a la densidad de energía de deformación  $(\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}_{(e)})^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)}$  integrada en el volumen del elemento finito.

El principio de los Trabajos Virtuales establece que un cuerpo está en equilibrio sí y solo sí, el trabajo virtual realizado por todas las acciones internas y externas

es nulo, es decir:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{ne} \int_{A^{(e)}} (\tilde{\nabla} \delta \mathbf{u}_{(e)})^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)} t dA = \\ &= \sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{\Gamma_p^{(e)}} \delta \mathbf{u}_{(e)}^T \mathbf{p}_{(e)} dS + \int_{A^{(e)}} \delta \mathbf{u}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} t dA \right) + \sum_{n=1}^r \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_n)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \end{aligned} \quad (3.33)$$

La ecuación anterior es válida para todo campo de desplazamientos virtuales que cumpla con las condiciones de frontera cinemáticas dadas en la Ecuación 3.32.

Los vectores de fuerzas puntuales en los nudos  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ , de fuerzas de superficie  $\mathbf{p}_{(e)}$  y de cuerpo  $\mathbf{b}_{(e)}$  en los elementos, son de la forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{p}_{(e)} = \begin{bmatrix} p_x^{(e)} & p_y^{(e)} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x^{(e)} & b_y^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (3.34)$$

### 3.2.2 Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el elemento finito

De la misma forma como se expresa el desplazamiento real en términos de las funciones de forma y los valores nodales, el desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}_{(e)}$  y la deformación virtual  $\tilde{\nabla} \delta \mathbf{u}_{(e)}$  en un elemento finito son iguales a:

$$\delta \mathbf{u}_{(e)} = \mathbf{N}_{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)}, \quad \delta \mathbf{u}_{(e)}^T = \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{N}_{(e)}^T \quad (3.35a)$$

$$\tilde{\nabla} \delta \mathbf{u}_{(e)} = \mathbf{B}_{(e)} \delta \mathbf{a}_{(e)}, \quad (\tilde{\nabla} \delta \mathbf{u}_{(e)})^T = \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{B}_{(e)}^T \quad (3.35b)$$

siendo  $\delta \mathbf{a}_{(e)}$  el vector de valores nodales de desplazamiento virtual del elemento finito.

Sustituyendo las expresiones (3.11) y (3.35) en la Ecuación 3.33, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T & \left( \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} t dA \right) \mathbf{a}_{(e)} = \\ \sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T & \left( \int_{\Gamma_p^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{P}_{(e)} t dL + \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} t dA \right) + \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde  $\delta \mathbf{a}$  y  $\mathbf{f}^{(n)}$  corresponden al vector de desplazamiento virtual y al vector de fuerza real en los nudos de la malla de elementos finitos.

El término entre paréntesis a la izquierda de la igualdad anterior se define como la matriz de rigidez del elemento finito  $\mathbf{K}^{(e)}$ , y corresponde a:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} t dA \quad (3.37)$$

En cambio, el término entre paréntesis a la derecha  $\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$  es la suma del vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de superficie  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  más el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de cuerpo  $\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)}$  del elemento, es decir:

$$\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{P}_{(e)} t dL \quad (3.38a)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} t dA \quad (3.38b)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(e)} = \tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)} + \tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)} \quad (3.38c)$$

Remplazando las ecuaciones (3.37) y (3.38) en la expresión (3.36) se tiene:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} - \sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{a}_{(e)}^T \tilde{\mathbf{f}}^{(e)} - \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} = 0 \quad (3.39)$$

### 3.2.3 Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el sólido

El triple producto  $\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)}$  de la Ecuación 3.39 se puede expresar en función de todos los grados de libertad de la malla como  $\delta \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a}$ , donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez del sólido, y  $\delta \mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}$  son los vectores de desplazamientos nodales reales y virtuales de la malla, respectivamente.

De igual forma, el producto  $\delta \mathbf{a}_{(e)}^T \tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$  se puede escribir como  $\delta \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{f}}$ , donde  $\tilde{\mathbf{f}}$  es el vector de fuerzas nodales equivalentes en la malla. Por lo tanto:

$$\delta \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \delta \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{f}} - \delta \mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} = \delta \mathbf{a}^T (\mathbf{K} \mathbf{a} - \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}^{(n)}) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{K} \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{f}^{(n)} \quad (3.40)$$

La matriz de rigidez del sólido  $\mathbf{K}$  se obtiene del procedimiento de *ensamblaje* de las matrices de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  de los  $ne$  elementos que conforman la malla. Tal procedimiento se indica de la forma:

$$\mathbf{K} = \bigwedge_{e=1}^{ne} [\mathbf{K}^{(e)}] \quad (3.41)$$

El ensamblaje consiste en la adición de cada término de la matriz de rigidez del elemento  $\mathbf{K}^{(e)}$ , a la matriz de rigidez del sólido  $\mathbf{K}$ , de acuerdo con los grados de libertad asociados al elemento  $e$ .

El vector  $\mathbf{f}$  contiene las fuerzas nodales totales en la malla y se obtiene de la suma entre el vector de fuerzas nodales aplicadas directamente en los nudos  $\mathbf{f}^{(n)}$  y el vector  $\tilde{\mathbf{f}}$ , es decir:

$$\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{f}^{(n)} \quad (3.42)$$

Éste último es el resultado del proceso de ensamblaje de los vectores de fuerza nodales equivalentes a la acción de presiones y peso específico en cada uno de los elementos finitos  $\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$ , lo cual se indica como:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \bigwedge_{e=1}^{ne} [\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}] \quad (3.43)$$

Los procesos de ensamblaje de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas equivalentes se describe en las subsecciones 3.5.2, 3.5.3 y 3.5.4, por medio de un ejemplo demostrativo.

### 3.2.4 Vector de desplazamientos nodales en el sólido

El vector de desplazamientos nodales del sólido  $\mathbf{a}$  se puede descomponer en los subvectores de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{a}_\alpha$  y conocidos  $\mathbf{a}_\beta$ . Estos últimos están definidos por los valores nodales de desplazamiento impuesto en la malla  $\mathbf{a}^*$ . En consecuencia, la Ecuación 3.40 se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\alpha \\ \mathbf{a}_\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  se ha dividido en las submatrices  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ ,  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$  y  $\mathbf{K}_{\beta\beta}$ , de acuerdo con el número de desplazamientos nodales (o grados de libertad) desconocidos y conocidos de la malla. Por las mismas razones el vector de fuerzas nodales  $\mathbf{f}$  está conformado por los subvectores  $\mathbf{f}_\alpha$  y  $\mathbf{f}_\beta$ . En consecuencia, la ecuación anterior corresponde a dos ecuaciones matriciales de la forma:

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\alpha = \mathbf{0} \quad (3.45a)$$

$$\mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\beta = \mathbf{0} \quad (3.45b)$$

El vector de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{a}_\alpha$  se obtiene despejando la Ecuación 3.45a, así:

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} (\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta) \quad (3.46)$$

### 3.2.5 Vector de fuerzas en el sólido

El subvector  $\mathbf{f}_\beta$  se puede calcular despejando la Ecuación 3.45b, así:

$$\mathbf{f}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta \quad (3.47)$$

De acuerdo con la Ecuación 3.42, este resultado corresponde a la suma de los vectores  $\tilde{\mathbf{f}}_\beta$  y  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ , de la forma:

$$\mathbf{f}_\beta = \tilde{\mathbf{f}}_\beta + \mathbf{f}_\beta^{(n)} \quad (3.48)$$

los cuales corresponden a la parte asociada a los grados de libertad cuyo desplazamiento es conocido de los vectores  $\tilde{\mathbf{f}}$  y  $\mathbf{f}^{(n)}$ , respectivamente.

En este tipo de problemas, los términos de  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$  son desconocidos y corresponden a las reacciones en los apoyos del sólido. Por lo tanto, tal vector se puede calcular así:

$$\mathbf{f}_\beta^{(n)} = \mathbf{f}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta \quad (3.49)$$

### 3.2.6 Componentes de desplazamiento, deformación y de esfuerzo en el interior de cada elemento

El vector de desplazamientos nodales completo  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta^T]^T$ , contiene las componentes de desplazamiento en los nudos de la malla ordenada de acuerdo a la numeración de los grados de libertad. En cada elemento finito se define un vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{a}^{(e)}$ , conformado por las componentes de desplazamiento en sus nudos. Éste último se obtiene a partir de un proceso de *extracción*, el cual consiste en construir el vector  $\mathbf{a}^{(e)}$  que contiene aquellos coeficientes del vector  $\mathbf{a}$ , correspondientes a los grados de libertad del elemento  $e$ . Lo anterior se representa como:

$$\mathbf{a}^{(e)} = \mathbb{E}_{(e)} [\mathbf{a}] \quad (3.50)$$

En la Subsección 3.5.9 se describe tal procedimiento a través de un ejemplo demostrativo.

Conocido el vector  $\mathbf{a}^{(e)}$  se puede calcular el vector de desplazamiento en un punto  $(x, y)$  del interior del elemento finito  $\mathbf{u}^{(e)}(x, y) = [u^{(e)} \ v^{(e)}]^T$ , mediante la Ecuación 3.3.

Las componentes de la matriz columna de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(x, y) = [\varepsilon_{xx}^{(e)} \ \varepsilon_{yy}^{(e)} \ \gamma_{xy}^{(e)}]^T$  se calcula en un punto  $(x, y)$  a través de la Ecuación 3.8. Asimismo, las componentes de la matriz columna de esfuerzo  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}(x, y) = [\sigma_{xx}^{(e)} \ \sigma_{yy}^{(e)} \ \sigma_{xy}^{(e)}]^T$  se evalúa en  $(x, y)$  mediante la Ecuación 3.11.

### 3.2.7 Resumen de resultados obtenidos

El análisis por el método de los elementos finitos del problema mecánico elástico lineal, permite obtener en cada nudo y en el interior de los elementos de la malla los siguientes resultados: (i) el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  conformado por las componentes  $u$  y  $v$ , (ii) el vector de fuerzas totales  $\mathbf{f}$ , (iii) las componentes de deformación en notación de ingeniería  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\gamma_{xy}$ , (iv) las componentes de esfuerzo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$ , (v) los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , (vi) el esfuerzo de von Mises  $\sigma_{vm}$  y (vii) las deformaciones principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$ .

## 3.3 Formulación del elemento triangular lineal

El elemento finito triangular lineal de continuidad  $C_0$ , mostrado en la Figura 3.3(a), cuenta con 6 grados de libertad correspondientes a las componentes de desplazamiento en sus 3 nudos. Tales componentes conforman el vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{a}^{(e)}$  de la forma:

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & u_2^{(e)} & v_2^{(e)} & u_3^{(e)} & v_3^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (3.51)$$

### 3.3.1 Matriz de funciones de forma

El vector del desplazamiento  $\mathbf{u}^{(e)} = [u^{(e)} \ v^{(e)}]^T$  en un punto del interior del elemento finito de coordenadas globales  $(x, y)$ , se puede calcular en general como lo indica la Ecuación 3.3. Particularmente, la matriz de funciones de forma de un elemento triangular lineal  $\mathbf{N}_{(e)}(x, y)$ , para un problema mecánico estático bidimensional está definida como:

$$\mathbf{N}_{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

En la expresión anterior,  $N_1^{(e)}$ ,  $N_2^{(e)}$  y  $N_3^{(e)}$  son las funciones de forma asociadas a los nudos 1, 2 y 3, respectivamente. Tales funciones son:

$$N_1^{(e)}(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}}(a_1 + b_1x + c_1y) \quad (3.53a)$$

$$N_2^{(e)}(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}}(a_2 + b_2x + c_2y) \quad (3.53b)$$

$$N_3^{(e)}(x, y) = \frac{1}{2A^{(e)}}(a_3 + b_3x + c_3y) \quad (3.53c)$$

donde, el área del triángulo  $A^{(e)}$  y los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  y  $c_i$  se obtienen así:

$$2A^{(e)} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (3.54a)$$

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2, \quad b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2 \quad (3.54b)$$

$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3, \quad b_2 = y_3 - y_1, \quad c_2 = x_1 - x_3 \quad (3.54c)$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2, \quad c_3 = x_2 - x_1 \quad (3.54d)$$

### 3.3.2 Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma

Los coeficientes de la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma  $\mathbf{B}^{(e)}$  se obtienen derivando las funciones de forma en cada nudo dadas en la Ecuación 3.53, con respecto a  $x$  y a  $y$ . El resultado es el siguiente:

$$\mathbf{B}^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

### 3.3.3 Matriz de rigidez

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  se obtiene analíticamente sustituyendo en la Ecuación 3.37 a la matriz anterior  $\mathbf{B}^{(e)}$  del elemento y a la matriz constitutiva elástica del material  $\mathbf{D}$  dada por la Ecuación 3.10, alcanzando el siguiente resultado:

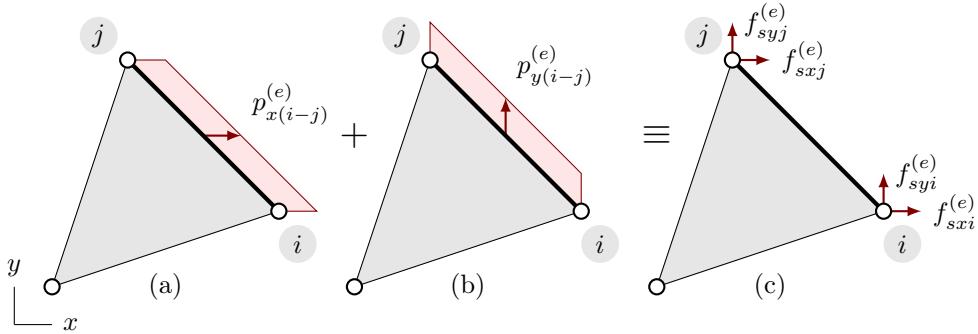
$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(e)} & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} \\ sim & & \mathbf{K}_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.56a)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \frac{t}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} (b_i b_j D_{11} + c_i c_j D_{33}) & (b_i c_j D_{12} + c_i b_j D_{33}) \\ (c_i b_j D_{12} + b_i c_j D_{33}) & (b_i b_j D_{33} + c_i c_j D_{22}) \end{bmatrix} \quad (3.56b)$$

donde el área  $A^{(e)}$  y las diferencias entre las coordenadas de los nudos  $b_i, b_j, c_i, c_j$  están expresados en la Ecuación 3.54.

### 3.3.4 Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme en sistema coordenado global

Sobre la cara  $i - j$  de un elemento triangular lineal  $e$  se puede aplicar una presión uniforme de componentes  $p_{x(i-j)}^{(e)}$  y  $p_{y(i-j)}^{(e)}$ , con respecto al sistema coordenado global  $xy$ , como se ilustra en la Figura 3.6. La acción de dicha presión es igual a las fuerzas  $f_{sxi}^{(e)}$ ,  $f_{syi}^{(e)}$ ,  $f_{sxj}^{(e)}$  y  $f_{syj}^{(e)}$  en los nudos que conforman la cara cargada, representadas en



**Figura 3.6:** Fuerza equivalente a la acción de una presión sobre un lado de un elemento triangular lineal: (a) presión en dirección  $x$ , (b) presión en dirección  $y$ , (c) fuerzas equivalentes en los nudos de la cara.

el vector de fuerzas equivalentes  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$ . Éste vector se obtiene sustituyendo la matriz de funciones de forma del elemento de la expresión 3.52, en la Ecuación 3.38a.

En general, cuando actúa una presión uniforme de componentes  $p_{x(1-2)}^{(e)}$  y  $p_{y(1-2)}^{(e)}$  sobre la cara  $1 - 2$  del elemento, una presión  $p_{x(2-3)}^{(e)}$  y  $p_{y(2-3)}^{(e)}$  sobre la cara  $2 - 3$ , y otra presión  $p_{x(1-3)}^{(e)}$  y  $p_{y(1-3)}^{(e)}$  sobre la cara  $1 - 3$ , el vector de fuerzas equivalentes a la acción de la presión corresponde a:

$$\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)} = \begin{bmatrix} f_{sx1}^{(e)} \\ f_{sy1}^{(e)} \\ f_{sx2}^{(e)} \\ f_{sy2}^{(e)} \\ f_{sx3}^{(e)} \\ f_{sy3}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{tL_{1-2}^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} p_{x(1-2)}^{(e)} \\ p_{y(1-2)}^{(e)} \\ p_{x(1-2)}^{(e)} \\ p_{y(1-2)}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{tL_{2-3}^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{x(2-3)}^{(e)} \\ p_{y(2-3)}^{(e)} \\ p_{x(2-3)}^{(e)} \\ p_{y(2-3)}^{(e)} \end{bmatrix} + \frac{tL_{1-3}^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} p_{x(1-3)}^{(e)} \\ p_{y(1-3)}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ p_{x(1-3)}^{(e)} \\ p_{y(1-3)}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

donde  $L_{(i-j)}$  es la longitud de la cara  $i - j$ .

### 3.3.5 Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme normal y tangencial

Cuando la presión se aplica en dirección normal y tangencial a la cara del elemento, como se ilustra en la Figura 3.7, se define un sistema coordenado local mediante el siguiente procedimiento:

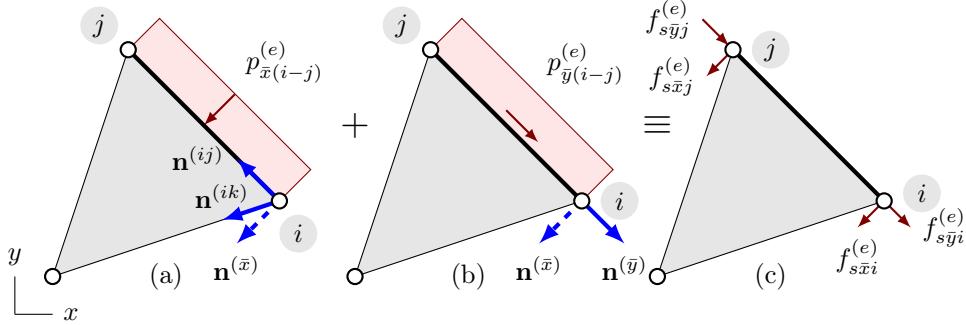
- Obtener el vector unitario  $\mathbf{n}^{(ij)}$  que determina la dirección del lado cargado  $i - j$  y el vector unitario  $\mathbf{n}^{(ik)}$  que determina la dirección del lado sin carga  $i - k$ .
- Calcular el vector normal a la cara cargada  $\hat{\mathbf{n}}^{(\bar{x})}$ , que sea una dirección del sistema coordenado cartesiano derecho con vectores unitarios direccionales  $\mathbf{n}^{(ij)}$ ,  $\hat{\mathbf{n}}^{(\bar{x})}$  y  $\mathbf{k}$ . Éste vector se obtiene de la operación  $\hat{\mathbf{n}}^{(\bar{x})} = \mathbf{k} \times \mathbf{n}^{(ij)}$ , siendo  $\mathbf{k}$  el vector unitario direccional del eje global  $z$ .
- Calcular el vector normal a la cara cargada entrando al elemento finito  $\mathbf{n}^{(\bar{x})}$ , de la forma:

$$\mathbf{n}^{(\bar{x})} = \begin{cases} \hat{\mathbf{n}}^{(\bar{x})} & \text{si } \hat{\mathbf{n}}^{(\bar{x})} \cdot \mathbf{n}^{(ik)} > 0 \\ -\hat{\mathbf{n}}^{(\bar{x})} & \text{si } \hat{\mathbf{n}}^{(\bar{x})} \cdot \mathbf{n}^{(ik)} < 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

- Determinar un vector unitario en la dirección de la cara cargada  $\mathbf{n}^{(\bar{y})}$  que constituya el *sistema coordenado local* cartesiano derecho  $\bar{x}\bar{y}z$ , formado por los vectores unitarios direccionales  $\mathbf{n}^{(\bar{x})}$ ,  $\mathbf{n}^{(\bar{y})}$  y  $\mathbf{k}$ . Éste vector se obtiene de la operación:

$$\mathbf{n}^{(\bar{y})} = \mathbf{k} \times \mathbf{n}^{(\bar{x})} \quad (3.59)$$

De acuerdo a lo anterior y como se observa en la Figura 3.7, la presión normal  $p_{\bar{x}(i-j)}^{(e)}$  actuando sobre una cara  $i - j$  tiene la dirección  $\bar{x}$  del vector  $\mathbf{n}^{(\bar{x})}$  y es positiva entrando al elemento finito. En cambio, la presión tangencial  $p_{\bar{y}(i-j)}^{(e)}$  actuando sobre una cara  $i - j$  tiene la dirección y sentido del eje local  $\bar{y}$ , dado por el vector  $\mathbf{n}^{(\bar{y})}$ .



**Figura 3.7:** Fuerza equivalente a la acción de una presión sobre un lado de un elemento triangular lineal: (a) presión normal entrando al elemento en dirección local  $\bar{x}$ , (b) presión tangencial en dirección local  $\bar{y}$ , (c) fuerzas equivalentes en los nudos de la cara en sistema coordenado local  $\bar{x}\bar{y}$  asociado al lado.

Las fuerzas equivalentes a la acción de la presión normal y tangencial en sistema coordenado local  $f_{s\bar{x}i}^{(e)}$ ,  $f_{s\bar{y}i}^{(e)}$ ,  $f_{s\bar{x}j}^{(e)}$  y  $f_{s\bar{y}j}^{(e)}$ , mostradas en la Figura 3.7(c) son:

$$f_{s\bar{x}i}^{(e)} = f_{s\bar{x}j}^{(e)} = \frac{1}{2}tL_{i-j}^{(e)}p_{\bar{x}(i-j)}^{(e)} \quad f_{s\bar{y}i}^{(e)} = f_{s\bar{y}j}^{(e)} = \frac{1}{2}tL_{i-j}^{(e)}p_{\bar{y}(i-j)}^{(e)} \quad (3.60)$$

Conociendo los vectores unitarios  $\mathbf{n}^{(\bar{x})} = [n_x^{(\bar{x})} \quad n_y^{(\bar{x})}]^T$  y  $\mathbf{n}^{(\bar{y})} = [n_x^{(\bar{y})} \quad n_y^{(\bar{y})}]^T$ , las fuerzas indicadas en la ecuación anterior se pueden transformar a fuerzas equivalentes en sistema coordenado global  $f_{sxi}^{(e)}$ ,  $f_{syi}^{(e)}$ ,  $f_{sxj}^{(e)}$  y  $f_{syj}^{(e)}$ , mediante la siguiente operación matricial:

$$\begin{bmatrix} f_{sxi}^{(e)} \\ f_{syi}^{(e)} \\ f_{sxj}^{(e)} \\ f_{syj}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^{(\bar{x})} & n_x^{(\bar{y})} & 0 & 0 \\ n_y^{(\bar{x})} & n_y^{(\bar{y})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x^{(\bar{x})} & n_x^{(\bar{y})} \\ 0 & 0 & n_y^{(\bar{x})} & n_y^{(\bar{y})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s\bar{x}i}^{(e)} \\ f_{s\bar{y}i}^{(e)} \\ f_{s\bar{x}j}^{(e)} \\ f_{s\bar{y}j}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

### 3.3.6 Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión hidroestática

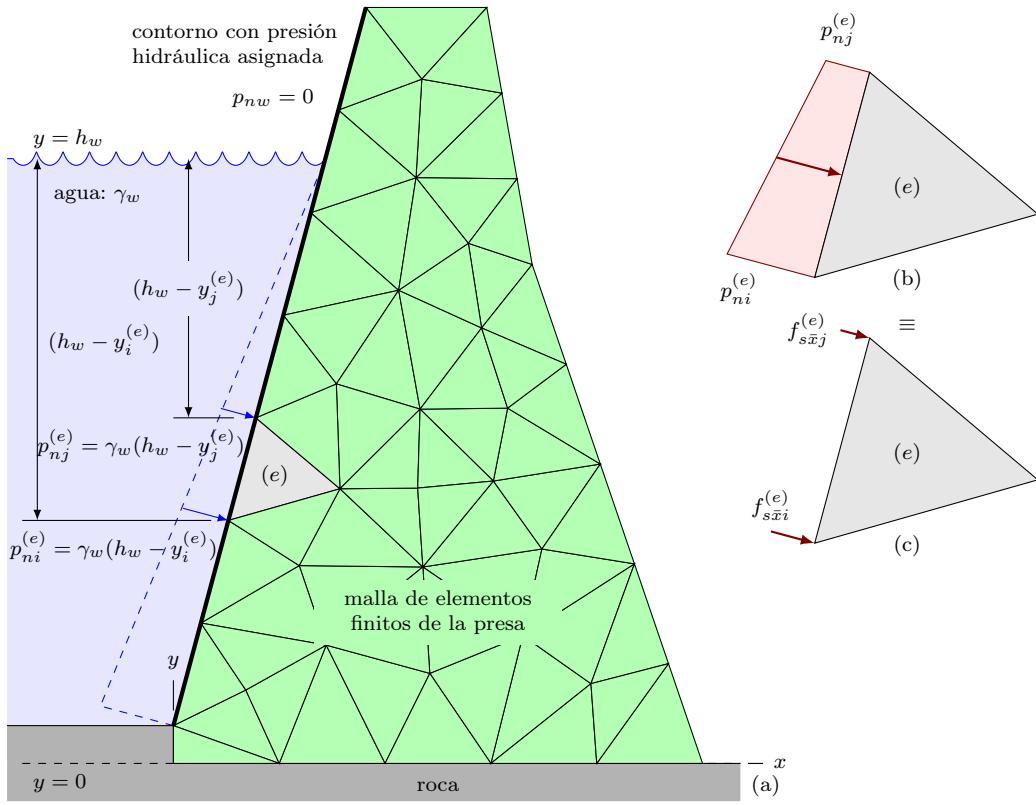
La presión causada por el agua sobre la superficie de un sólido en función de su profundidad en dirección  $y$ , se puede representar a partir del peso específico del líquido  $\gamma_w$  y la posición en  $y$  de la capa de agua  $h_w$ . La Figura 3.8(a) ilustra un ejemplo en el cual una presa de concreto soporta una presión hidroestática producida por un volumen de agua, sobre una línea de su contorno. Tal presión es función de la profundidad así:

$$p_n = \begin{cases} \gamma_w(h_w - y) & \text{si } y < h_w \\ 0 & \text{si } y \geq h_w \end{cases} \quad (3.62)$$

En la cara  $(i - j)$  del elemento finito  $e$  actúa una presión normal de variación lineal, cuyos valores en los extremos son  $p_{ni}^{(e)}$  y  $p_{nj}^{(e)}$ . Dicha acción mostrada en la Figura 3.8(b), es equivalente a las fuerzas en los nudos  $f_{s\bar{x}i}^{(e)}$  y  $f_{s\bar{x}j}^{(e)}$ , presentadas en la Figura 3.8(c). Estas fuerzas se obtienen sustituyendo la función lineal de la presión normal sobre el lado en la Ecuación 3.38a, con el siguiente resultado:

$$f_{s\bar{x}i}^{(e)} = \frac{1}{6}tL_{i-j}^{(e)}(2p_{ni}^{(e)} + p_{nj}^{(e)}), \quad f_{s\bar{x}j}^{(e)} = \frac{1}{6}tL_{i-j}^{(e)}(p_{ni}^{(e)} + 2p_{nj}^{(e)})$$

Cuando un nudo de la cara cargada del elemento está por debajo de la capa de agua y el otro está por encima, es decir,  $y_i^{(e)} < h_w$  y  $y_j^{(e)} > h_w$ , se aproxima la presión hidroestática suponiendo una variación de presión entre  $p_{ni}^{(e)} = \gamma_w(h_w - y_i^{(e)})$  en el nudo inferior y  $p_{nj}^{(e)} = 0$  en el nudo superior.



**Figura 3.8:** Presión hidrostática de variación lineal con respecto a la profundidad en  $y$  del agua: (a) acción sobre una línea de contorno de la malla de elementos finitos de una presa, (b) presión normal de variación lineal sobre una cara de un elemento triangular lineal  $e$ , y (c) fuerzas equivalentes en los nudos del lado cargado del elemento triangular lineal.

### 3.3.7 Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso específico del material

El vector de fuerzas equivalentes a la acción de cargas por unidad de volumen  $\mathbf{b}^{(e)} = [b_x^{(e)} \ b_y^{(e)}]^T$ , denominado  $\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)}$ , se obtiene sustituyendo las funciones de forma del elemento triangular lineal en la Ecuación 3.38b, cuyo resultado es:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)} &= \left[ f_{bx1}^{(e)} \ f_{by1}^{(e)} \ f_{bx2}^{(e)} \ f_{by2}^{(e)} \ f_{bx3}^{(e)} \ f_{by3}^{(e)} \right]^T = \\ &= \frac{tA_{(e)}}{3} \left[ b_x^{(e)} \ b_y^{(e)} \ b_x^{(e)} \ b_y^{(e)} \ b_x^{(e)} \ b_y^{(e)} \right]^T\end{aligned}\quad (3.63a)$$

Considerando que la carga por unidad de volumen es el peso específico del material  $\gamma$  y la gravedad tiene la dirección y sentido del semi-eje global  $-y$ , el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)}$  se simplifica al vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$ , así:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)} = -\frac{\gamma t A_{(e)}}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.63b)$$

### 3.4 Formulación del elemento cuadrilateral bilineal

La geometría de un elemento isoparamétrico como el cuadrilateral bilineal está definida por interpolación de las coordenadas de sus nudos, considerando la mismas funciones de forma utilizadas para interpolar las componentes de desplazamiento (Oñate, 2009; Weaver & Johnson, 1984).

Se define un sistema coordenado natural de ejes  $\xi$  y  $\eta$ , cuyos valores están limitados entre  $-1$  y  $+1$  en los nudos del elemento, como lo ilustra la Figura 3.3(b). Por lo tanto, la posición de un punto en el interior del elemento de coordenadas  $x^{(e)}(\xi, \eta)$  y  $y^{(e)}(\xi, \eta)$  será:

$$x^{(e)}(\xi, \eta) = N_1^{(e)}(\xi, \eta)x_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\xi, \eta)x_2^{(e)} + N_3^{(e)}(\xi, \eta)x_3^{(e)} + N_4^{(e)}(\xi, \eta)x_4^{(e)} \quad (3.64a)$$

$$y^{(e)}(\xi, \eta) = N_1^{(e)}(\xi, \eta)y_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\xi, \eta)y_2^{(e)} + N_3^{(e)}(\xi, \eta)y_3^{(e)} + N_4^{(e)}(\xi, \eta)y_4^{(e)} \quad (3.64b)$$

Las derivadas de las coordenadas globales  $x^{(e)}, y^{(e)}$  con respecto las coordenadas naturales  $\xi, \eta$ , conforman la matriz Jacobiano del elemento  $\mathbf{J}^{(e)}(\xi, \eta)$ , así:

$$\mathbf{J}^{(e)}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} J_{11}^{(e)} & J_{12}^{(e)} \\ J_{21}^{(e)} & J_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

donde,

$$J_{11}^{(e)} = \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} x_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} x_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} x_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} x_4^{(e)} \quad (3.66a)$$

$$J_{21}^{(e)} = \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} x_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} x_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} x_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \eta} x_4^{(e)} \quad (3.66b)$$

$$J_{12}^{(e)} = \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} y_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} y_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} y_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi} y_4^{(e)} \quad (3.66c)$$

$$J_{22}^{(e)} = \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} y_1^{(e)} + \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} y_2^{(e)} + \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} y_3^{(e)} + \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \eta} y_4^{(e)} \quad (3.66d)$$

Por lo tanto,  $\mathbf{J}^{(e)}(\xi, \eta)$  se puede expresar de forma matricial así:

$$\mathbf{J}^{(e)}(\xi, \eta) = \hat{\mathbf{B}}^{(e)}(\xi, \eta) \mathbf{c}^{(e)} \quad (3.67)$$

donde la matriz reducida de operadores diferenciales en coordenadas naturales actuando sobre funciones de forma  $\hat{\mathbf{B}}^{(e)}$  y la matriz de coordenadas de los nudos  $\mathbf{c}^{(e)}$ , corresponden a:

$$\hat{\mathbf{B}}^{(e)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (3.68a)$$

$$\mathbf{c}^{(e)} = \begin{bmatrix} x_1^{(e)} & y_1^{(e)} \\ x_2^{(e)} & y_2^{(e)} \\ x_3^{(e)} & y_3^{(e)} \\ x_4^{(e)} & y_4^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.68b)$$

El elemento finito cuadrilateral bilineal de continuidad  $C_0$ , mostrado en la Figura 3.3(b), cuenta con 8 grados de libertad, que corresponden a las componentes de desplazamiento en sus 4 nudos. Tales componentes conforman el vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{a}^{(e)}$  de la forma:

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1^{(e)} & v_1^{(e)} & u_2^{(e)} & v_2^{(e)} & u_3^{(e)} & v_3^{(e)} & u_4^{(e)} & v_4^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (3.69)$$

### 3.4.1 Matriz de funciones de forma

El vector del desplazamiento  $\mathbf{u}^{(e)} = [u^{(e)} \ v^{(e)}]^T$  en un punto del interior del elemento finito de coordenadas naturales  $(\xi, \eta)$ , se puede calcular como lo indica la Ecuación 3.3. En particular, la matriz de funciones de forma de un elemento cuadrilateral bilineal  $\mathbf{N}_{(e)}(\xi, \eta)$ , para un problema mecánico estático bidimensional está definida como:

$$\mathbf{N}_{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 & N_4^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 & N_4^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.70a)$$

En la expresión anterior,  $N_1^{(e)}$ ,  $N_2^{(e)}$ ,  $N_3^{(e)}$  y  $N_4^{(e)}$  son las funciones de forma asociadas a los nudos 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Tales funciones son:

$$\begin{aligned} N_1^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & N_2^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ N_3^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & N_4^{(e)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.70b)$$

Las derivadas de las funciones de forma con respecto a  $x$  y a  $y$ , se obtienen aplicando la regla de la cadena, así:

$$\frac{\partial N_i^{(e)}(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial N_i^{(e)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(e)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.71a)$$

$$\frac{\partial N_i^{(e)}(\xi, \eta)}{\partial y} = \frac{\partial N_i^{(e)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i^{(e)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (3.71b)$$

### 3.4.2 Matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma

La matriz de operadores diferenciales con respecto a las coordenadas globales actuando sobre funciones de forma  $\mathbf{B}^{(e)}$  es igual a:

$$\mathbf{B}^{(e)} = \mathbf{G}^{(e)} \tilde{\mathbf{B}}^{(e)} \quad (3.72)$$

siendo,

$$\mathbf{G}^{(e)} = \frac{1}{\det \mathbf{J}^{(e)}} \begin{bmatrix} J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} \\ -J_{21}^{(e)} & J_{11}^{(e)} & J_{22}^{(e)} & -J_{12}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.73a)$$

$$\det \mathbf{J}^{(e)} = J_{11}^{(e)} J_{22}^{(e)} - J_{12}^{(e)} J_{21}^{(e)} \quad (3.73b)$$

La matriz de operadores diferenciales con respecto al sistema natural actuando sobre funciones de forma  $\tilde{\mathbf{B}}^{(e)}(\xi, \eta)$  es igual a:

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

El procedimiento para calcular la matriz  $\mathbf{B}^{(e)}$  en un punto  $(\xi, \eta)$  del interior de un elemento cuadrilateral bilineal de coordenadas nodales  $(x_i^{(e)}, y_i^{(e)})$  es el siguiente. Primero se construye la matriz de coordenadas de los nudos del elemento  $\mathbf{c}^{(e)}$  como lo indica la Ecuación 3.68b. A continuación se obtiene la matriz reducida de operadores diferenciales con respecto al sistema coordenado natural actuando sobre las funciones de forma  $\hat{\mathbf{B}}^{(e)}$ , para el punto  $(\xi, \eta)$  mediante la Ecuación 3.68a. Después se calcula la matriz Jacobiano  $\mathbf{J}^{(e)}$  en  $(\xi, \eta)$  y su determinante, con las ecuaciones 3.67 y 3.73b. A continuación se calcula la matriz  $\mathbf{G}^{(e)}$  a partir de los coeficientes de la matriz Jacobiano  $J_{11}^{(e)}, J_{12}^{(e)}, J_{21}^{(e)}, J_{22}^{(e)}$ , utilizando la Ecuación 3.73a. Después se obtiene la matriz completa de operadores diferenciales con respecto al sistema coordenado natural actuando sobre funciones de forma  $\tilde{\mathbf{B}}^{(e)}$ , para el punto  $(\xi, \eta)$  mediante la Ecuación 3.74. Finalmente se calcula la matriz  $\mathbf{B}^{(e)}$  utilizando la Ecuación 3.72.

### 3.4.3 Matriz de rigidez

La matriz de rigidez de un elemento cuadrilateral bilineal se obtiene sustituyendo la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de la expresión 3.72 en la Ecuación 3.37 y evaluando numéricamente la integral sobre el área del elemento finito.

La integral de área planteada en la expresión de la matriz de rigidez se puede escribir en términos de las coordenadas naturales, considerando que  $dA = dxdy = \det \mathbf{J}^{(e)} d\xi d\eta$ , así:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} t \det \mathbf{J}^{(e)} d\xi d\eta \quad (3.75)$$

Tal integral se calcula numéricamente mediante el método de la cuadratura de Gauss, el cual aproxima la integral a la sumatoria ponderada de la función evaluada en lugares especiales, denominados puntos de Gauss  $g$ . La cantidad de puntos de evaluación  $ng$  determina la aproximación al valor exacto de la integral.

De acuerdo a lo anterior, la matriz de rigidez se puede expresar de la forma:

$$\mathbf{K}^{(e)} \cong \sum_{g=1}^{ng} W(\xi_g) W(\eta_g) \mathbf{B}_{(e)}^T(\xi_g, \eta_g) \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)}(\xi_g, \eta_g) t \det \mathbf{J}^{(e)}(\mathbf{c}_{(e)}, \xi_g, \eta_g) \quad (3.76)$$

donde cada punto de Gauss está ubicado en la coordenada natural  $(\xi_g, \eta_g)$  y tiene un valor de ponderación correspondiente al  $W(\xi_g) \cdot W(\eta_g)$ . La Tabla 3.1 indica los valores de  $(\xi_g, \eta_g)$ ,  $W(\xi_g)$  y  $W(\eta_g)$  para tres ordenes de aproximación:  $ng = 1$ ,  $ng = 4$  y  $ng = 9$ . Las coordenadas de los nudos del elemento están almacenadas en la matriz  $\mathbf{c}_{(e)}$  como lo indica la Ecuación 3.68b.

El procedimiento para obtener la matriz de rigidez de un elemento cuadrilateral bilineal consiste en: (i) calcular la matriz constitutiva elástica del material  $\mathbf{D}_{(e)}$  a partir del módulo de Young  $E$ , la relación de Poisson  $\nu$  y el tipo de condición plana, con la Ecuación 3.10, y (ii) realizar las siguientes operaciones en un ciclo por puntos de Gauss desde  $g = 1$  hasta  $ng$ :

- Leer  $(\xi_g, \eta_g)$ ,  $W(\xi_g)$  y  $W(\eta_g)$  de la Tabla 3.1,

$ng = np \times nq$	$g$	$(\xi_g, \eta_g)$	$W(\xi_g) \cdot W(\eta_g)$
$1 = 1 \times 1$	1	(0, 0)	$2 \cdot 2 = 4$
$4 = 2 \times 2$	1	$(-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$	$1 \cdot 1 = 1$
	2	$(-\sqrt{3}/3, +\sqrt{3}/3)$	$1 \cdot 1 = 1$
	3	$(+\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$	$1 \cdot 1 = 1$
	4	$(+\sqrt{3}/3, +\sqrt{3}/3)$	$1 \cdot 1 = 1$
$9 = 3 \times 3$	1	$(-\sqrt{(3/5)}, -\sqrt{(3/5)})$	$5/9 \cdot 5/9 = 25/81$
	2	$(0, -\sqrt{(3/5)})$	$8/9 \cdot 5/9 = 40/81$
	3	$(+\sqrt{(3/5)}, -\sqrt{(3/5)})$	$5/9 \cdot 5/9 = 25/81$
	4	$(-\sqrt{(3/5)}, 0)$	$5/9 \cdot 8/9 = 40/81$
	5	(0, 0)	$8/9 \cdot 8/9 = 64/81$
	6	$(+\sqrt{(3/5)}, 0)$	$5/9 \cdot 8/9 = 40/81$
	7	$(-\sqrt{(3/5)}, +\sqrt{(3/5)})$	$5/9 \cdot 5/9 = 25/81$
	8	$(0, +\sqrt{(3/5)})$	$8/9 \cdot 5/9 = 40/81$
	9	$(+\sqrt{(3/5)}, +\sqrt{(3/5)})$	$5/9 \cdot 5/9 = 25/81$

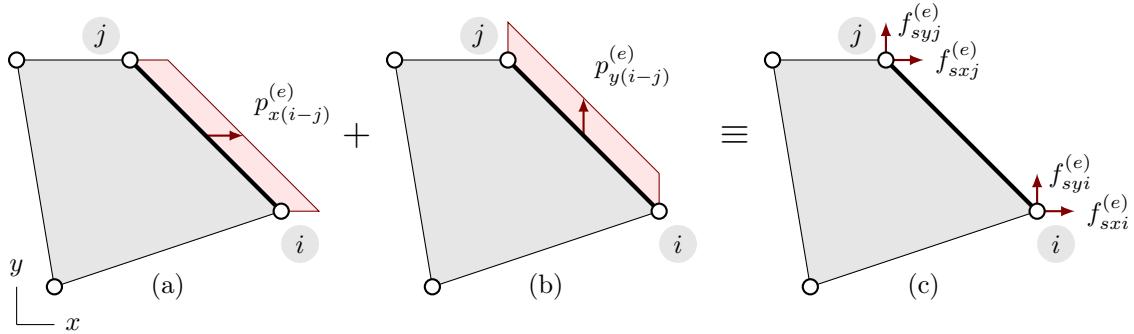
**Tabla 3.1:** Puntos de integración y ponderaciones en el método de integración numérica de cuadratura de Gauss, para una integral doble.

- Calcular la matriz  $\mathbf{B}^{(e)}(\xi_g, \eta_g)$  y  $\det \mathbf{J}^{(e)}(\mathbf{c}_{(e)}, \xi_g, \eta_g)$  como se indicó en la Subsección 3.4.2,
- Calcular  $\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)} + W(\xi_g)W(\eta_g)\mathbf{B}_{(e)}^T(\xi_g, \eta_g)\mathbf{D}_{(e)}\mathbf{B}_{(e)}(\xi_g, \eta_g)t\det \mathbf{J}^{(e)}(\mathbf{c}_{(e)}, \xi_g, \eta_g)$

### 3.4.4 Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme en sistema coordenado global

En la cara  $i - j$  de un elemento cuadrilátero bilineal puede actuar una presión uniforme, cuyas componentes  $p_{x(i-j)}^{(e)}$  y  $p_{y(i-j)}^{(e)}$  están referidas a los ejes  $x$  y  $y$  del sistema coordenado global, respectivamente. Tal acción es equivalente a la aplicación de las fuerzas  $f_{sxj}^{(e)}$ ,  $f_{syj}^{(e)}$ ,  $f_{sxi}^{(e)}$  y  $f_{syi}^{(e)}$  en los nudos del lado, como lo ilustra la Figura 3.9.

El vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme en sistema coordenado global  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$ , se obtiene a partir de una integral de línea sobre la cara del

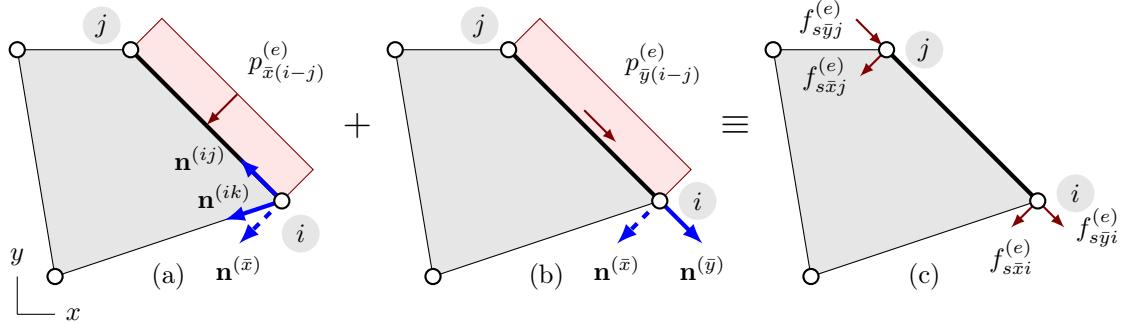


**Figura 3.9:** Fuerza equivalente a la acción de una presión sobre un lado  $i - j$  de un elemento cuadrilátero bilineal: (a) presión en dirección global  $x$ , (b) presión en dirección global  $y$ , (c) fuerzas equivalentes en los nudos de la cara en sistema coordenado global  $xy$ .

elemento a partir de la Ecuación 3.38a. Este resultado coincide con el calculado para un elemento triangular lineal. Por lo tanto el vector de fuerzas equivalentes  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  a la acción de presiones uniformes  $p_{x(1-2)}^{(e)}$  y  $p_{y(1-2)}^{(e)}$  en la cara 1–2,  $p_{x(2-3)}^{(e)}$  y  $p_{y(2-3)}^{(e)}$  en la cara 2–3,  $p_{x(3-4)}^{(e)}$  y  $p_{y(3-4)}^{(e)}$  en la cara 3–4, y  $p_{x(4-1)}^{(e)}$  y  $p_{y(4-1)}^{(e)}$  en la cara 4–1, es igual a:

$$\begin{bmatrix} f_{sx1}^{(e)} \\ f_{sy1}^{(e)} \\ f_{sx2}^{(e)} \\ f_{sy2}^{(e)} \\ f_{sx3}^{(e)} \\ f_{sy3}^{(e)} \\ f_{sx4}^{(e)} \\ f_{sy4}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{tL_{1-2}^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} p_{x(1-2)}^{(e)} \\ p_{y(1-2)}^{(e)} \\ p_{x(1-2)}^{(e)} \\ p_{y(1-2)}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{tL_{2-3}^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{x(2-3)}^{(e)} \\ p_{y(2-3)}^{(e)} \\ p_{x(2-3)}^{(e)} \\ p_{y(2-3)}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{tL_{3-4}^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{x(3-4)}^{(e)} \\ p_{y(3-4)}^{(e)} \\ p_{x(3-4)}^{(e)} \\ p_{y(3-4)}^{(e)} \end{bmatrix} + \frac{tL_{4-1}^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} p_{x(4-1)}^{(e)} \\ p_{y(4-1)}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_{x(4-1)}^{(e)} \\ p_{y(4-1)}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

donde  $L_{(i-j)}^{(e)}$  es la longitud de la cara  $i - j$  del elemento  $e$  y  $t$  es el espesor del sólido.



**Figura 3.10:** Fuerza equivalente a la acción de una presión sobre un lado  $i - j$  de un elemento cuadrilátero bilineal: (a) presión normal entrando al elemento en dirección local  $\bar{x}$ , (b) presión tangencial en dirección local  $\bar{y}$ , (c) fuerzas equivalentes en los nudos de la cara en sistema coordenado local  $\bar{x}\bar{y}$  asociado al lado.

### 3.4.5 Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión normal y tangencial

El vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme normal y tangencial para el lado de un elemento cuadrilátero bilineal, que se muestra en la Figura 3.10, se obtiene de la misma forma explicada en la Subsección 3.3.5, para el lado de un elemento triangular lineal.

### 3.4.6 Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión hidroestática

El vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión hidroestática para un elemento cuadrilátero bilineal, se calcula mediante el mismo procedimiento indicado en la Subsección 3.3.6, para un elemento triangular lineal.

### 3.4.7 Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso específico del material

El vector de fuerzas equivalentes a la acción del cargas por unidad de volumen  $\mathbf{b}_{(e)}$  de un elemento cuadrilateral bilineal se obtiene sustituyendo la matriz de funciones de forma de la expresión 3.70 en la Ecuación 3.38b y evaluando numéricamente la integral sobre el área del elemento finito.

De la misma forma de obtención de la matriz de rigidez, el diferencial de área del elemento es  $dA = dx dy = \det \mathbf{J}^{(e)} d\xi d\eta$ , por lo tanto:

$$\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} t \det \mathbf{J}^{(e)} d\xi d\eta \quad (3.78)$$

La integral doble se calcula numéricamente mediante el método de la cuadratura de Gauss, de la forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)} \cong \sum_{g=1}^{ng} W(\xi_g) W(\eta_g) \mathbf{N}_{(e)}^T(\xi_g, \eta_g) \mathbf{b}_{(e)} t \det \mathbf{J}^{(e)}(\mathbf{c}_{(e)}, \xi_g, \eta_g) \quad (3.79)$$

donde cada punto de Gauss está ubicado en la coordenada natural  $(\xi_g, \eta_g)$  y tiene un valor de ponderación correspondiente al producto  $W(\xi_g) \cdot W(\eta_g)$ , indicado en la Tabla 3.1. Las coordenadas de los nudos del elemento están almacenadas en la matriz  $\mathbf{c}_{(e)}$ .

El procedimiento para calcular el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)}$  de un elemento cuadrilateral bilineal consiste en realizar las siguientes operaciones un ciclo por puntos de Gauss desde  $g = 1$  hasta  $ng$ , así:

- Leer  $(\xi_g, \eta_g)$ ,  $W(\xi_g)$  y  $W(\eta_g)$  de la Tabla 3.1.
- Calcular la matriz  $\mathbf{N}^{(e)}(\xi_g, \eta_g)$  y  $\det \mathbf{J}^{(e)}(\mathbf{c}_{(e)}, \xi_g, \eta_g)$  como se indicó en las ecuaciones 3.70 y 3.73b.
- Calcular  $\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)} = \tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)} + W(\xi_g) W(\eta_g) \mathbf{N}_{(e)}^T(\xi_g, \eta_g) \mathbf{b}_{(e)} t \det \mathbf{J}^{(e)}(\mathbf{c}_{(e)}, \xi_g, \eta_g)$ .

Particularmente el vector  $\mathbf{b}_{(e)}$  es igual a  $[0 \ -\gamma]^T$ , cuando las cargas por unidad de volumen corresponden exclusivamente al peso propio del material, considerado en dirección  $-y$  y con peso específico  $\gamma$ . En este caso se designa al vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio como  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$ .

### 3.5 Ejemplo demostrativo

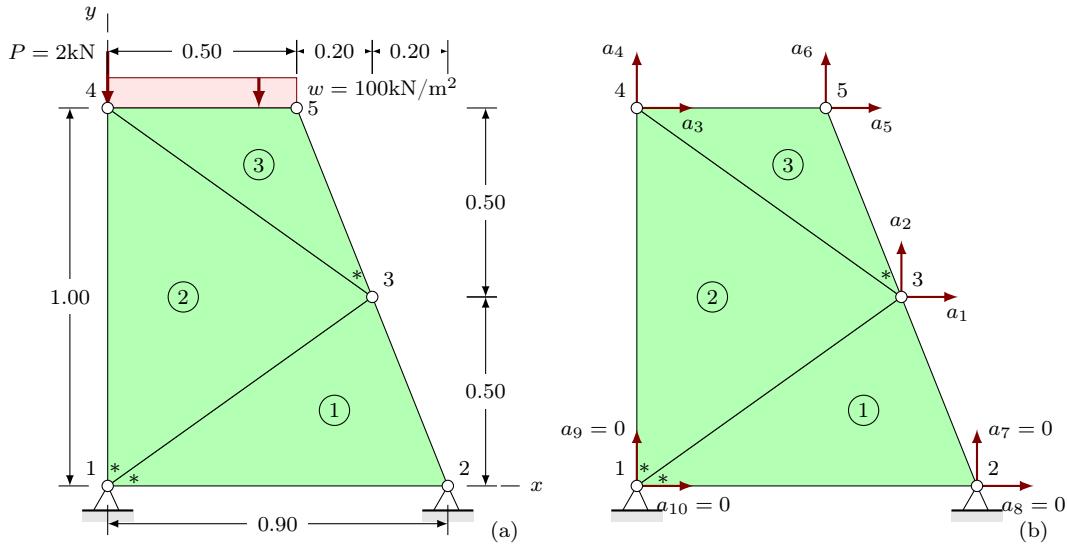
A continuación se describe un ejemplo demostrativo de análisis mecánico estático bidimensional mediante el método de los elementos. El ejemplo muestra una malla de muy pocos elementos finitos con la intención de describir algunos aspectos de la formulación general del problema, a pesar que sus resultados tengan una aproximación muy baja.

La Figura 3.11(a) ilustra un muro de espesor  $t = 0.20$  m, cuyo material tiene módulo de Young  $E = 20 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>, relación de Poisson  $\nu = 0.25$  y peso específico  $\gamma = 26$  kN/m<sup>3</sup>. El muro está apoyado en su base con desplazamientos nulos en las direcciones  $x$  y  $y$ , y está sometido al peso propio, a una carga puntual  $P = 2$  kN y a una presión uniforme  $w = 100$  kN/m<sup>2</sup> en su cara superior. El problema se considera plano de esfuerzos. La malla está conformada por 3 elementos triangulares lineales y 5 nudos.

#### 3.5.1 Conectividades y grados de libertad de los elementos finitos

Los elementos finitos están conectados entre sí por los nudos de la malla. Cada elemento triangular lineal tiene 3 nudos ubicados en sus extremos ilustrados en la Figura 3.11(a), donde el asterisco indica el primer nudo de cada elemento finito. Los identificadores de los nudos de cada elemento se presentan en la Tabla 3.2, recordando que los nudos 1°, 2° y 3° de un elemento triangular lineal están definidos en sentido antihorario, como se observa en la Figura 3.3(a).

El número identificador de cada grado de libertad de la malla se organiza de la siguiente manera: (i) se numeran de forma ascendente desde 1 a los grados de libertad desconocidos en los nudos, y (ii) se numeran de forma descendente desde el último a los grados de libertad conocidos.



**Figura 3.11:** Ejemplo de un problema elástico lineal bidimensional: (a) malla de elementos finitos, condiciones de apoyo y cargas aplicadas, y (b) malla de elementos finitos y identificadores de los grados de libertad en los nudos.

elem.	nudo 1°	nudo 2°	nudo 3°
1	1	2	3
2	1	3	4
3	3	5	4

**Tabla 3.2:** Tabla de conectividades de los elementos finitos.

nudo	$x(\text{m})$	$y(\text{m})$	gl 1°	gl 2°
1	0.00	0.00	10	9
2	0.90	0.00	8	7
3	0.70	0.50	1	2
4	0.00	1.00	3	4
5	0.50	1.00	5	6

**Tabla 3.3:** Tabla de coordenadas y de los grados de libertad gl 1° y gl 2° en los nudos, asociados a las componentes de desplazamiento  $u_n$  y  $v_n$ , respectivamente.

Particularmente en el ejemplo, las componentes del desplazamiento en los nudos 1 y 2 son conocidas e iguales a cero, debido a la imposición de apoyos de segundo género. En cambio, las componentes de desplazamiento en los demás nudos son desconocidas. El total de grados de libertad de la malla es 10, obtenido del producto entre 5 nudos por 2 componentes de desplazamientos por nudo. El desplazamiento en  $x$  del nudo 1 cuyo valor es conocido, se designa con el grado de libertad número 10, es decir  $u_1 = a_{10}$ . El desplazamiento en  $y$ , también conocido, se designa como el grado de

elemento	gl 1°	gl 2°	gl 3°	gl 4°	gl 5°	gl 6°
1	10	9	8	7	1	2
2	10	9	1	2	3	4
3	1	2	5	6	3	4

**Tabla 3.4:** Tabla de incidencias de la malla.

libertad 9, es decir  $v_1 = a_9$ . Asimismo, los desplazamientos del nudo 2 corresponden a los grados de libertad 8 y 7, es decir  $u_2 = a_8$  y  $v_2 = a_7$ . En cambio, el desplazamiento en dirección  $x$  del nudo 3 cuyo valor es desconocido, se designa al grado de libertad 1, es decir  $u_3 = a_1$ . El desplazamiento en  $y$  del nudo 3 de valor desconocido, se designa al grado de libertad 2, es decir  $v_3 = a_2$ . Con el mismo procedimiento se designan los identificadores de los grados de libertad de los demás nudos. La Tabla 3.3 y la Figura 3.11(b) presentan tales identificadores por nudo.

De acuerdo a lo anterior, la malla de elementos finitos del problema cuenta con  $n_{gld} = 6$  grados de libertad desconocidos y  $n_{glc} = 4$  conocidos. El vector de desplazamientos nodales de la malla se divide en los subvectores de desplazamientos desconocidos  $\mathbf{a}_\alpha$  y conocidos  $\mathbf{a}_\beta$ , así:

$$\mathbf{a} = \left[ \begin{array}{cccccc|cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{array} \right]^T = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{a}_\alpha^T & \mathbf{a}_\beta^T \end{array} \right]^T$$

$$\mathbf{a}_\alpha^T = \left[ \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \right] \quad \mathbf{a}_\beta^T = \left[ \begin{array}{cccc} a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

La tabla de incidencias se define como aquella que contiene el identificador de los grados de libertad asociados a cada elemento finito. A partir de las tablas 3.2 y 3.3, se puede construir la tabla de incidencias del ejemplo en cuestión, como lo ilustra la Tabla 3.4.

### 3.5.2 Matriz de rigidez de los elementos finitos y de la malla

La matriz de rigidez del elemento triangular lineal 1 se calcula sustituyendo el espesor  $t = 0.20 \text{ m}$ , el módulo de Young  $E = 20 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  y la relación de Poisson  $\nu = 0.25$  en la Ecuación 3.10, y reemplazando en la Ecuación 3.56, las coordenadas de los nudos 1, 2 y 3, de la Tabla 3.3. El resultado corresponde a:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} +1256 & +296.3 & -936.3 & +237 & -320 & -533.3 \\ +296.3 & +634.1 & +503.7 & +219.3 & -800 & -853.3 \\ -936.3 & +503.7 & +2056 & -1037 & -1120 & +533.3 \\ +237 & +219.3 & -1037 & +2767 & +800 & -2987 \\ -320 & -800 & -1120 & +800 & +1440 & +0 \\ -533.3 & -853.3 & +533.3 & -2987 & +0 & +3840 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kN/m}$$

De la misma forma se obtienen las matrices de rigidez de los elementos triangulares lineales 2 y 3, así:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} +1322 & +666.7 & -1524 & -800 & +201.9 & +133.3 \\ +666.7 & +1779 & -533.3 & -571.4 & -133.3 & -1208 \\ -1524 & -533.3 & +3048 & +0 & -1524 & +533.3 \\ -800 & -571.4 & +0 & +1143 & +800 & -571.4 \\ +201.9 & -133.3 & -1524 & +800 & +1322 & -666.7 \\ +133.3 & -1208 & +533.3 & -571.4 & -666.7 & +1779 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kN/m}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} +800 & +0 & -1120 & -800 & +320 & +800 \\ +0 & +2133 & -533.3 & -2987 & +533.3 & +853.3 \\ -1120 & -533.3 & +3701 & +1867 & -2581 & -1333 \\ -800 & -2987 & +1867 & +4981 & -1067 & -1995 \\ +320 & +533.3 & -2581 & -1067 & +2261 & +533.3 \\ +800 & +853.3 & -1333 & -1995 & +533.3 & +1141 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kN/m}$$

El proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez de un elemento finito  $\mathbf{K}^{(e)}$  en la matriz de rigidez del sólido  $\mathbf{K}$ , consiste en sumar cada coeficiente  $k_{ij}^{(e)}$  de  $\mathbf{K}^{(e)}$  al término  $k_{st}$  de la matriz  $\mathbf{K}$ , en la fila  $s$  y columna  $t$ , definida por los grados de libertad del elemento finito dados en la tabla de incidencias (Tabla 3.4). La Figura 3.12 indica de forma esquemática los coeficientes de las matrices de rigidez de los elementos finitos  $\mathbf{K}^{(1)}$ ,  $\mathbf{K}^{(2)}$  y  $\mathbf{K}^{(3)}$ . En esta misma figura se presenta el ensamblaje de la matriz

de rigidez  $\mathbf{K}^{(1)}$  del elemento 1, asociado a los grados de libertad 10, 9, 8, 7, 1 y 2 (Tabla 3.4), en la matriz  $\mathbf{K}$ , es decir  $\mathbf{K}' = \mathbb{A}_{e=1}^1[\mathbf{K}^{(e)}]$ . Por ejemplo, el coeficiente  $k_{12}^{(1)}$  asociado a los grados de libertad  $s = 10$  y  $t = 9$  según lo indica la tabla de incidencias, se suma al término  $k_{10,9} = k_{9,10}$  de la matriz de rigidez del sólido.

En el siguiente paso mostrado en la Figura 3.13, se ensambla  $\mathbf{K}^{(2)}$  de acuerdo a los grados de libertad 10, 9, 1, 2, 3 y 4 asociados al elemento 2, es decir  $\mathbf{K}'' = \mathbb{A}_{e=1}^2[\mathbf{K}^{(e)}]$ . Por ejemplo, el coeficiente  $k_{44}^{(2)}$  asociado a los grados de libertad  $s = 2$  y  $t = 2$  según lo indica la tabla de incidencias, se suma al término  $k_{2,2}$  de la matriz de rigidez del sólido, para un valor igual a  $k_{66}^{(1)} + k_{44}^{(2)}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{(1)} &= \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ & k_{12}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} \\ & & k_{23}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} \\ & & & k_{34}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} \\ & & & & k_{45}^{(1)} & k_{55}^{(1)} \\ & & & & & k_{56}^{(1)} \\ & & & & & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \quad sim. \\
&\quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ & k_{12}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} \\ & & k_{23}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} \\ & & & k_{34}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} \\ & & & & k_{45}^{(2)} & k_{55}^{(2)} \\ & & & & & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \quad sim. \\
&\quad \mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & k_{13}^{(3)} & k_{14}^{(3)} & k_{15}^{(3)} & k_{16}^{(3)} \\ & k_{12}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & k_{23}^{(3)} & k_{24}^{(3)} & k_{25}^{(3)} \\ & & k_{23}^{(3)} & k_{33}^{(3)} & k_{34}^{(3)} & k_{35}^{(3)} \\ & & & k_{33}^{(3)} & k_{44}^{(3)} & k_{45}^{(3)} \\ & & & & k_{45}^{(3)} & k_{55}^{(3)} \\ & & & & & k_{66}^{(3)} \end{bmatrix} \quad sim. \\
&\quad \mathbf{K}' = \bigwedge_{e=1}^1 \left[ \mathbf{K}^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} k_{55}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{35}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{25}^{(1)} \\ k_{56}^{(1)} & k_{66}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & k_{45}^{(1)} & k_{26}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{44}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \\ & & & & & & k_{12}^{(1)} & k_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \quad sim.
\end{aligned}$$

**Figura 3.12:** Construcción de la matriz de rigidez del sólido.  $\mathbf{K}^{(1)}$ ,  $\mathbf{K}^{(2)}$  y  $\mathbf{K}^{(3)}$  matriz de rigidez del elemento 1, 2 y 3, respectivamente.  $\mathbf{K}' = \bigwedge_{e=1}^1 [\mathbf{K}^{(e)}]$  ensamblaje de la matriz de rigidez del elemento 1.

**Figura 3.13:** Construcción de la matriz de rigidez del sólido:  $\mathbf{K}'' = \mathbb{A}_{e=1}^2[\mathbf{K}^{(e)}]$  ensamblaje de la matriz de rigidez de los elementos 1 y 2,  $\mathbf{K}$  =  $\mathbb{A}_{e=1}^3[\mathbf{K}^{(e)}]$  ensamblaje de la matriz de rigidez de todos los elementos.

Finalmente, se ensambla  $\mathbf{K}^{(3)}$  de acuerdo a los grados de libertad 1, 2, 5, 6, 3 y 4 del elemento 3, es decir  $\mathbf{K} = \mathbb{A}_{e=1}^{ne=3}[\mathbf{K}^{(e)}]$ . Por ejemplo, el coeficiente  $k_{36}^{(3)}$  asociado a los grados de libertad  $s = 5$  y  $t = 4$  según la tabla de incidencias, se suma al término  $k_{5,4} = k_{4,5}$  de la matriz de rigidez del sólido. Los coeficientes resaltados en las figuras 3.12 y 3.13 corresponden a aquellos que han sido sumados en el proceso de ensamblaje.

Después de realizado el proceso de ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos se obtiene la matriz de rigidez del sólido  $\mathbf{K} \times 10^3 \text{ kN/m}$ , de la forma:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc|cccc} +5288 & +0 & -1204 & +1333 & -1120 & -800 & +800 & -1120 & -1333 & -1844 \\ +0 & +7116 & +1333 & +281.9 & -533.3 & -2987 & -2987 & +533.3 & -1425 & -1333 \\ -1204 & +1333 & +3583 & -133.3 & -2581 & -1067 & +0 & +0 & -133.3 & +201.9 \\ +1333 & +281.9 & -133.3 & +2920 & -1333 & -1995 & +0 & +0 & -1208 & +133.3 \\ -1120 & -533.3 & -2581 & -1333 & +3701 & +1867 & +0 & +0 & +0 & +0 \\ -800 & -2987 & -1067 & -1995 & +1867 & +4981 & +0 & +0 & +0 & +0 \\ \hline +800 & -2987 & +0 & +0 & +0 & +0 & +2767 & -1037 & +219.3 & +237 \\ -1120 & +533.3 & +0 & +0 & +0 & +0 & -1037 & +2056 & +503.7 & -936.3 \\ -1333 & -1425 & -133.3 & -1208 & +0 & +0 & +219.3 & +503.7 & +2413 & +963 \\ -1844 & -1333 & +201.9 & +133.3 & +0 & +0 & +237 & -936.3 & +963 & +2578 \end{array} \right]$$

La condición de equilibrio del sólido presentada en la Ecuación 3.44, establece que la matriz de rigidez se divide en las submatrices  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$  de tamaño  $n_{gld} \times n_{gld} = 6 \times 6$ ,  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$  de  $n_{gld} \times n_{glc} = 6 \times 4$ ,  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$  de  $n_{glc} \times n_{gld} = 4 \times 6$  y  $\mathbf{K}_{\beta\beta}$  de  $n_{glc} \times n_{glc} = 4 \times 4$ , como lo indican las líneas punteadas de la matriz  $\mathbf{K}$ , así:

$$\mathbf{K} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \hline \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{array} \right]$$

### 3.5.3 Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio en los elementos finitos y en la malla

El peso propio del sólido cuyo material tiene un peso específico  $\gamma = 26 \text{ kN/m}^3$ , se convierte fuerzas equivalentes en los nudos de cada elemento finito, las cuales conforman el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$ . Particularmente para los elementos triangulares lineales de este ejemplo, tal vector se calcula con la Ecuación 3.63b a partir de su área y del

espesor  $t = 0.20$  m, con los siguientes resultados:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(1)} = \begin{bmatrix} +0 \\ -0.39 \\ +0 \\ -0.39 \\ +0 \\ -0.39 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(2)} = \begin{bmatrix} +0 \\ -0.6067 \\ +0 \\ -0.6067 \\ +0 \\ -0.6067 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(3)} = \begin{bmatrix} +0 \\ -0.2167 \\ +0 \\ -0.2167 \\ +0 \\ -0.2167 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Cada uno de los vectores  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  se ensambla al vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio de la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_b$ , sumando el coeficiente  $f_{b\gamma i}^{(e)}$  de  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  al término  $f_{bs}$  de  $\tilde{\mathbf{f}}_b$  asociado al grado de libertad  $s$ . Las figuras 3.14 y 3.15 muestran de forma esquemática tal procedimiento de ensamblaje del vector fuerza en el ejemplo, donde los coeficientes resaltados son aquellos que se suman en cada etapa de ensamblaje.

$$\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(1)} = \begin{bmatrix} f_{b\gamma 1}^{(1)} \\ f_{b\gamma 2}^{(1)} \\ f_{b\gamma 3}^{(1)} \\ f_{b\gamma 4}^{(1)} \\ f_{b\gamma 5}^{(1)} \\ f_{b\gamma 6}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(2)} = \begin{bmatrix} f_{b\gamma 1}^{(2)} \\ f_{b\gamma 2}^{(2)} \\ f_{b\gamma 3}^{(2)} \\ f_{b\gamma 4}^{(2)} \\ f_{b\gamma 5}^{(2)} \\ f_{b\gamma 6}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(3)} = \begin{bmatrix} f_{b\gamma 1}^{(3)} \\ f_{b\gamma 2}^{(3)} \\ f_{b\gamma 3}^{(3)} \\ f_{b\gamma 4}^{(3)} \\ f_{b\gamma 5}^{(3)} \\ f_{b\gamma 6}^{(3)} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{f}}'_b = \coprod_{e=1}^1 \left[ \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} f_{b\gamma 5}^{(1)} \\ f_{b\gamma 6}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ f_{b\gamma 4}^{(1)} \\ f_{b\gamma 3}^{(1)} \\ f_{b\gamma 2}^{(1)} \\ f_{b\gamma 1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

**Figura 3.14:** Construcción del vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio en la malla.  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(1)}$  vector de fuerzas equivalentes de los elementos 1, 2 y 3, respectivamente. Primera etapa del ensamblaje  $\tilde{\mathbf{f}}'_b$  del vector de fuerzas equivalentes del elemento 1.

Después del proceso anterior se obtiene el vector de fuerza equivalente a la acción del peso propio del sólido en el ejemplo, como:

$$\tilde{\mathbf{f}}_b = \left[ \begin{array}{cccccc|cccc} +0 & -1.213 & +0 & -0.8233 & +0 & -0.2167 & -0.39 & +0 & -0.9967 & +0 \end{array} \right]^T \text{ kN}$$

La línea punteada de la expresión anterior divide al vector de la forma  $\tilde{\mathbf{f}}_b = [\tilde{\mathbf{f}}_{b\alpha}^T \quad \tilde{\mathbf{f}}_{b\beta}^T]^T$ .

$$\tilde{\mathbf{f}}_b'' = \bigwedge_{e=1}^2 \left[ \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} f_{b\gamma 5}^{(1)} + f_{b\gamma 3}^{(2)} \\ f_{b\gamma 6}^{(1)} + f_{b\gamma 6}^{(2)} \\ f_{b\gamma 5}^{(2)} \\ f_{b\gamma 6}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ f_{b\gamma 4}^{(1)} \\ f_{b\gamma 3}^{(1)} \\ f_{b\gamma 2}^{(1)} + f_{b\gamma 2}^{(2)} \\ f_{b\gamma 1}^{(1)} + f_{b\gamma 1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_b = \bigwedge_{e=1}^{ne=3} \left[ \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} f_{b\gamma 5}^{(1)} + f_{b\gamma 3}^{(2)} + f_{b\gamma 1}^{(3)} \\ f_{b\gamma 6}^{(1)} + f_{b\gamma 6}^{(2)} + f_{b\gamma 2}^{(3)} \\ f_{b\gamma 5}^{(2)} + f_{b\gamma 5}^{(3)} \\ f_{b\gamma 6}^{(2)} + f_{b\gamma 6}^{(3)} \\ f_{b\gamma 3}^{(3)} \\ f_{b\gamma 4}^{(3)} \\ f_{b\gamma 4}^{(1)} \\ f_{b\gamma 3}^{(1)} \\ f_{b\gamma 2}^{(1)} + f_{b\gamma 2}^{(2)} \\ f_{b\gamma 1}^{(1)} + f_{b\gamma 1}^{(2)} \end{bmatrix}$$

**Figura 3.15:** Construcción del vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio en la malla. Segunda y tercera etapa del  $\tilde{\mathbf{f}}'_b$  y  $\tilde{\mathbf{f}}''_b$  del ensamblaje del vector de fuerzas equivalentes de los elementos 2 y 3, respectivamente

### 3.5.4 Vector de fuerzas equivalentes a la acción presión en los elementos finitos y en la malla

Sobre el lado entre los nudos 4 y 5 del elemento finito 3 se aplica una presión uniforme  $w = 100 \text{ kN/m}^2$  en dirección  $-y$ . La acción de tal presión es equivalente a fuerzas en los nudos 4 y 5 definida con la Ecuación 3.57, así:

$$\tilde{\mathbf{f}}_s^{(3)} = \begin{bmatrix} +0 & -0 & +0 & -5 & +0 & -5 \end{bmatrix}^T \text{ kN}$$

El vector  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(3)}$  se ensambla al vector de fuerzas equivalentes a acción de la presión de la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_s$ , mediante el mismo procedimiento indicado en la subsección anterior. El resultado corresponde a:

$$\tilde{\mathbf{f}}_s = \bigwedge_{e=3} \left[ \tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)} \right] = \left[ \begin{array}{cccccc|cccc} +0 & +0 & +0 & -5 & +0 & -5 & +0 & +0 & +0 & +0 \end{array} \right]^T \text{ kN}$$

La línea punteada de la expresión anterior divide al vector de la forma  $\tilde{\mathbf{f}}_s = [\tilde{\mathbf{f}}_{s\alpha}^T \quad \tilde{\mathbf{f}}_{s\beta}^T]^T$ .

nudo	$f_x^{(n)}$ (kN)	$f_y^{(n)}$ (kN)
1	$f_{10}$	$f_9$
2	$f_8$	$f_7$
3	$f_1 = 0.0$	$f_2 = 0.0$
4	$f_3 = 0.0$	$f_4 = -2.0$
5	$f_5 = 0.0$	$f_6 = 0.0$

**Tabla 3.5:** Tabla de fuerzas aplicadas directamente en los nudos ordenada por componentes en  $x$  y  $y$ : [FUN].

$$\mathbf{f}^{(n)} = \mathbb{V}[\text{FUN}] = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -2.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ \hline f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \end{bmatrix}$$

**Tabla 3.6:** Vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos.

### 3.5.5 Vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla

En el nudo 4 se aplica una carga puntual  $P = 2\text{kN}$  en dirección  $-y$ , el cual corresponde al grado de libertad 4, de acuerdo con la Tabla 3.3. La Tabla 3.5 indica la fuerza actuante en cada uno de los nudos de la malla [FUN], donde se observa que las fuerzas en los nudos 1 y 2 son desconocidas porque corresponden a las reacciones. Mediante una operación de *organización por grado de libertad* aplicada a la tabla [FUN], se obtiene el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla  $\mathbf{f}^{(n)}$ , como lo ilustra la Tabla 3.6.

El vector  $\mathbf{f}^{(n)}$  no es completamente conocido a diferencia de los vectores de fuerzas equivalentes. En consecuencia se divide en los subvectores:  $\mathbf{f}_\alpha^{(n)}$  conocido que contiene las fuerzas aplicadas y  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$  desconocido que incluye las fuerzas de reacción, de la forma:

$$\mathbf{f}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha^{(n)} \\ \mathbf{f}_\beta^{(n)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_\alpha^{(n)} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -2.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \text{ kN} \quad \mathbf{f}_\beta^{(n)} = \begin{bmatrix} f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \end{bmatrix}$$

### 3.5.6 Vector de fuerzas totales en la malla

La suma de los vectores de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio, equivalentes a la acción de la presión y directamente aplicadas sobre los nudos, se denomina vector de fuerzas totales en la malla  $\mathbf{f}$ . Tal vector se divide en los subvectores  $\mathbf{f}_\alpha$  de fuerzas conocidas y  $\mathbf{f}_\beta$  de fuerzas desconocidas, así:

$$\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}_b + \tilde{\mathbf{f}}_s + \mathbf{f}^{(n)} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{b\alpha} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{b\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{s\alpha} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{s\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha^{(n)} \\ \mathbf{f}_\beta^{(n)} \end{bmatrix}$$

En particular para el ejemplo, el subvector de fuerzas totales asociado a los grados de libertad de desplazamiento desconocido  $\mathbf{f}_\alpha$  es igual a:

$$\mathbf{f}_\alpha = \begin{bmatrix} +0 & -1.213 & +0 & -7.823 & +0 & -5.217 \end{bmatrix}^T \text{ kN}$$

### 3.5.7 Vector y tabla de desplazamientos nodales en la malla

El vector de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{a}_\alpha$  se calcula mediante la Ecación 3.46, de la forma:

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} (\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta)$$

obteniendo el siguiente resultado:

$$\mathbf{a}_\alpha = \begin{bmatrix} -0.1325 & -1.322 & -2.821 & -6.604 & -2.466 & -4.186 \end{bmatrix}^T \times 10^{-6} \text{ m}$$

El vector de desplazamientos nodales de la malla está formado por el subvector  $\mathbf{a}_\alpha$  que se acaba de calcular y el subvector  $\mathbf{a}_\beta$  que contiene los desplazamientos nodales impuestos por las condiciones de apoyo. Recordando que  $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{0}$  en este ejemplo, se tiene:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -0.1325 & -1.322 & -2.821 & -6.604 & -2.466 & -4.186 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \times 10^{-6} \text{ m}$$

El vector anterior tiene los valores del desplazamiento ordenado de acuerdo con la numeración de los grados de libertad. Para facilitar la interpretación de éste resultado nodal, se realiza sobre el vector  $\mathbf{a}$  la operación denominada *organización de acuerdo*

nudo	$u(\times 10^{-6} \text{ m})$	$v(\times 10^{-6} \text{ m})$	$\ \mathbf{u}\  (\times 10^{-6} \text{ m})$
1	+0.000	+0.000	+0.000
2	+0.000	+0.000	+0.000
3	-0.1325	-1.322	+1.3284
4	-2.821	-6.604	+7.1815
5	-2.466	-4.186	+4.8580

**Tabla 3.7:** Tabla de desplazamientos en los nudos ordenados por componentes en  $x$  y  $y$ : [UXY].

con las componentes en  $x$  y  $y$  por nudo, de la forma  $[UXY] = \mathbb{T}[\mathbf{a}]$ , obteniendo la segunda y tercera columna de la Tabla 3.7. La norma del vector de desplazamiento de cada nudo  $\|\mathbf{u}\| = \|u\mathbf{i} + v\mathbf{j}\|$  se presenta en la cuarta columna dicha tabla.

### 3.5.8 Vector y tabla de fuerzas totales en los nudos de la malla

Los coeficientes del vector  $\mathbf{f}$  corresponden a las fuerzas totales en los nudos de la malla, el cual se divide en los subvectores  $\mathbf{f}_\alpha$  y  $\mathbf{f}_\beta$ . Siendo este último igual a:

$$\mathbf{f}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta$$

como lo establece la Ecuación 3.47. Particularmente para este ejemplo, tal subvector es igual a:

$$\mathbf{f}_\beta = \begin{bmatrix} +3.842 & -0.5566 & +10.41 & +0.5566 \end{bmatrix}^T \text{ kN}$$

Retomando el subvector ya conocido  $\mathbf{f}_\alpha$  se obtiene el vector de fuerza total en los nudos de la forma:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} +0 & -1.213 & +0 & -7.823 & +0 & -5.217 & | & +3.842 & -0.5566 & +10.41 & +0.5566 \end{bmatrix}^T \text{ kN}$$

El vector anterior tiene los valores del fuerzas totales ordenado de acuerdo con la numeración de los grados de libertad. Para facilitar la interpretación de éste resultado nodal, se realiza sobre el vector  $\mathbf{f}$  la operación denominada *organización de acuerdo con las componentes en x y y por nudo*, de la forma  $[FXY] = \mathbb{T}[\mathbf{f}]$ , obteniendo la Tabla 3.8.

Las reacciones en los apoyos son los coeficientes del subvector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ . Éste subvector es igual a  $\mathbf{f}_\beta^{(n)} = \mathbf{f}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_{b\beta} - \tilde{\mathbf{f}}_{s\beta}$ .

nudo	$f_x$ (kN)	$f_y$ (kN)
1	+0.5566	+10.41
2	-0.5566	+3.842
3	+0	-1.213
4	+0	-7.823
5	+0	-5.217

**Tabla 3.8:** Tabla de fuerzas totales en los nudos ordenados por componentes en  $x$  y  $y$ :  $[\mathbf{FXY}]$ .

nudo	$f_x^{(n)}$ (kN)	$f_y^{(n)}$ (kN)
1	+0.5566	+11.41
2	-0.5566	+4.232
3	0.0	0.0
4	0.0	-2.0
5	0.0	0.0

**Tabla 3.9:** Tabla de fuerzas aplicadas directamente en los nudos ordenada por componentes en  $x$  y  $y$ :  $[\mathbf{FRN}]$ .

El resultado es:

$$\mathbf{f}_\beta^{(n)} = \begin{bmatrix} +4.232 & -0.5566 & +11.41 & +0.5566 \end{bmatrix}^T \text{ kN}$$

La Tabla 3.5 se puede reescribir organizando por componentes  $x$  y  $y$  en los nudos, a las reacciones calculadas  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$  dadas en los nudos 1 y 2. Tal resultado se muestra en la Tabla 3.9.

### 3.5.9 Vector de desplazamientos nodales de cada elemento finito

El vector de desplazamientos nodales en un elemento finito  $e$  se puede obtener de la operación de *extracción* del vector de desplazamientos nodales en la malla  $\mathbf{a}$ . Tal operación consiste en construir un vector cuyos coeficientes correspondan a los valores de desplazamiento asociados cada grado de libertad del elemento finito. Por ejemplo, dado el vector de desplazamientos nodales de la malla:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \end{bmatrix}^T$$

el vector de desplazamientos nodales del elemento 1, asociado a los grados de libertad 10, 9, 8, 7, 1 y 2, de acuerdo con la tabla de incidencias (Tabla 3.4), es de la forma:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbb{E}_{(e=1)}[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} a_{10} & a_9 & a_8 & a_7 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T$$

Sustituyendo los valores de desplazamiento nodal del ejemplo se obtiene:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbb{E}_{(e=1)}[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} +0 & +0 & +0 & +0 & -0.1325 & -1.322 \end{bmatrix}^T \times 10^{-6} \text{ m}$$

### 3.5.10 Componentes de deformación y de esfuerzo en el interior de los elementos finitos

El vector de componentes de deformación en el interior del elemento triangular lineal 1 es igual a  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = [\varepsilon_{xx}^{(1)} \quad \varepsilon_{yy}^{(1)} \quad \gamma_{xy}^{(1)}]^T = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{a}^{(1)}$  de acuerdo con la Ecuación 3.8. Recordando que la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma  $\mathbf{B}^{(1)}$ , se obtiene sustituyendo las coordenadas y el área del elemento finito 1 en la Ecuación 3.55, se tiene que  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$  es igual a:

$$\begin{bmatrix} -1.111 & +0 & +1.111 & +0 & +0 & +0 \\ +0 & -0.4444 & +0 & -1.556 & +0 & +2 \\ -0.4444 & -1.111 & -1.556 & +1.111 & +2 & +0 \end{bmatrix} m^{-1} \cdot \begin{bmatrix} +0 \\ +0 \\ +0 \\ +0 \\ -0.1325 \\ -1.322 \end{bmatrix} \times 10^{-6} m = \begin{bmatrix} +0 \\ -2.644 \\ -0.265 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

El vector de las componentes de esfuerzo interior del elemento triangular lineal 1 se calcula a partir de la Ecuación 3.11, de la forma  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = [\sigma_{xx}^{(1)} \quad \sigma_{yy}^{(1)} \quad \sigma_{xy}^{(1)}]^T = \mathbf{D}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$ . Después de calcular con la Ecuación 3.10a la matriz constitutiva elástica en condición plana de esfuerzos del material  $\mathbf{D}^{(1)}$ , cuyo módulo de Young es  $E = 20 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup> y su relación de Poisson es  $\nu = 0.25$ , se tiene que  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$  es igual a:

$$\begin{bmatrix} +21330 & +5333 & +0 \\ +5333 & +21330 & +0 \\ +0 & +0 & +8000 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ kN/m}^2 \cdot \begin{bmatrix} +0 \\ -2.644 \\ -0.265 \end{bmatrix} \times 10^{-6} = \begin{bmatrix} -14.1 \\ -56.4 \\ -2.12 \end{bmatrix} \text{ kN/m}^2$$

Particularmente, las componentes de deformación y de esfuerzo tienen valor constante en el interior de un elemento triangular lineal, debido a que la matriz de operadores diferenciales no depende de la posición  $(x, y)$ .

El procedimiento indicado en esta subsección se aplica a los elementos triangulares lineales 2 y 3, obteniendo los siguientes resultados:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1.826 \\ -6.604 \\ +0.008126 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(2)} \\ \sigma_{yy}^{(2)} \\ \sigma_{xy}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3.725 \\ -131.2 \\ +0.065 \end{bmatrix} \text{ kN/m}^2$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.7096 \\ -3.792 \\ +0.4542 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(3)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(3)} \\ \sigma_{yy}^{(3)} \\ \sigma_{xy}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.087 \\ -77.12 \\ +3.634 \end{bmatrix} \text{ kN/m}^2$$

### 3.5.11 Componentes de deformación y de esfuerzo promedio en los nudos de la malla

Cada componente de deformación o de esfuerzo presenta un valor continuo en el interior del elemento. Sin embargo, tal valor es discontinuo en los nudos de la malla. Para suavizar el resultado, se evalúa el promedio de la componente de deformación o esfuerzo dado por cada uno de los elementos que comparten un mismo nudo. Finalmente se utilizan las funciones de forma del elemento para interpolar el resultado en su interior.

Particularmente, el nudo 1 es uno de los nudos de los elementos 1 y 2, por lo tanto, el valor promedio de la componente de deformación o esfuerzo  $\bar{\varphi}_1$  es igual a:

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)})$$

siendo  $\varphi_1^{(1)}$  y  $\varphi_1^{(2)}$  los valores de la componente de deformación o esfuerzo en el nudo 1 de los elementos 1 y 2, respectivamente. De igual forma, los valores promedio de una componente de deformación o esfuerzo en los nudos 2, 3, 4 y 5, corresponden a:

$$\bar{\varphi}_2 = \varphi_2^{(1)} \quad \bar{\varphi}_3 = \frac{1}{3}(\varphi_3^{(1)} + \varphi_3^{(2)} + \varphi_3^{(3)}) \quad \bar{\varphi}_4 = \frac{1}{2}(\varphi_4^{(2)} + \varphi_4^{(3)}) \quad \bar{\varphi}_5 = \varphi_5^{(3)}$$

Por ejemplo, el esfuerzo normal promedio en los nudos  $\bar{\sigma}_{yy}$  es igual a:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{yy1} &= \frac{1}{2}(-56.4 - 131.2) = -93.80 \text{ kN/m}^2 & \bar{\sigma}_{yy2} &= -56.40 \text{ kN/m}^2 \\ \bar{\sigma}_{yy3} &= \frac{1}{3}(-56.4 - 131.2 - 77.12) = -88.24 \text{ kN/m}^2 \\ \bar{\sigma}_{yy4} &= \frac{1}{2}(-131.2 - 77.12) = -104.16 \text{ kN/m}^2 & \bar{\sigma}_{yy5} &= -77.12 \text{ kN/m}^2\end{aligned}$$



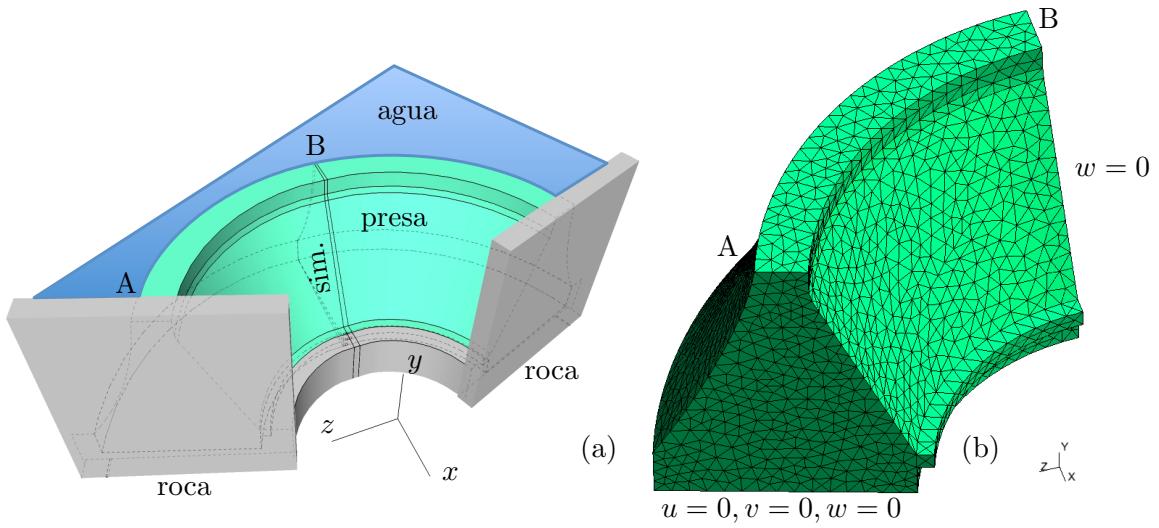
## Capítulo 4

# Formulación del problema mecánico elástico lineal tridimensional

Este capítulo presenta la formulación del método de los elementos finitos para la solución un problema mecánico elástico lineal tridimensional. El objetivo consiste en calcular el campo del desplazamiento, la deformación y el esfuerzo, en un sólido sometido a acciones estáticas como cargas puntuales, presiones, pesos específicos y desplazamientos impuestos. Los materiales que conforman el sólido exhiben un comportamiento elástico, lineal e isotrópico determinado por la ley de Hooke generalizada. La relación entre el campo del desplazamiento y el campo de la deformación está definida por la teoría de deformación infinitesimal.

Un ejemplo del problema mecánico elástico lineal tridimensional se ilustra en la Figura 4.1(a). Allí se observa una presa en forma de bóveda apoyada en la roca y sometida a la presión hidráulica y a su peso propio, en la cual se desea calcular el campo del desplazamiento, la deformación y el esfuerzo, considerando simetría con respecto al plano  $xy$ . Tal problema se representa mediante una malla de la mitad del dominio conformada por elementos finitos tetraédricos lineales, como se indica en la Figura 4.1(b).

Los conceptos indicados a continuación se basan en la mecánica del continuo de cuerpos sólidos (Lai & Saibel, 1965; Malvern, 1969; Timoshenko & Goodier, 1970; Lemaitre & Chaboche, 1990; Oliver & Agelet, 2002; Linero & Garzón, 2010) y en el método de los elementos finitos aplicados a la mecánica elástica lineal (Hughes,



**Figura 4.1:** Ejemplo de una presa de bóveda sometida a la presión hidráulica y su peso propio: (a) esquema general tridimensional y (b) malla de elementos finitos tetraédricos lineales correspondiente a la mitad de la presa.

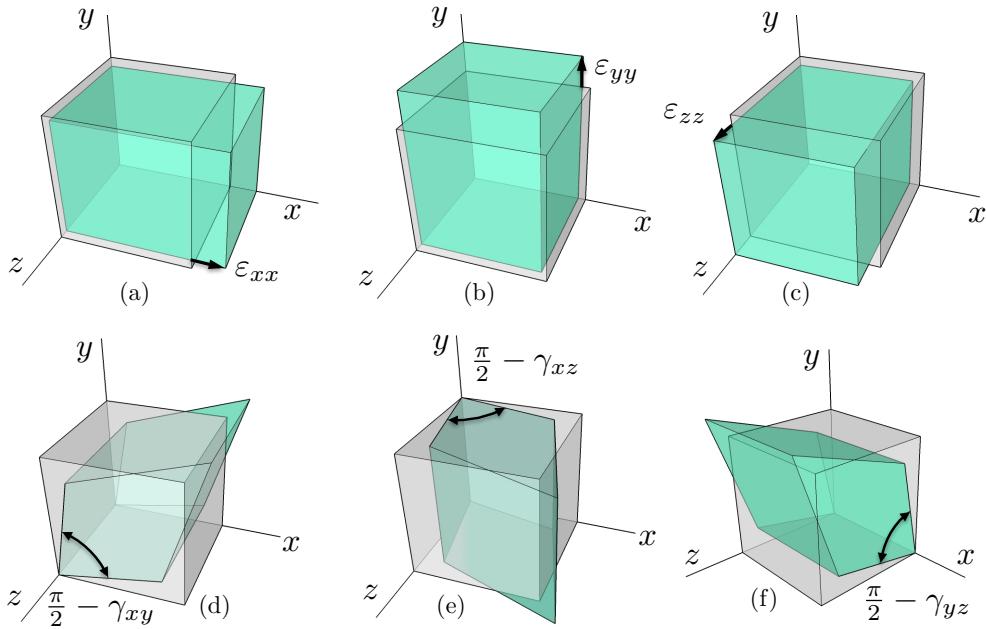
2000; Cook *et al.*, 2001; O. Zienkiewicz & Taylor, 2005; Oñate, 2009; Linero *et al.*, 2013), al igual que en el Capítulo 3.

## 4.1 Campo del desplazamiento, de la deformación y del esfuerzo en un punto material

En un problema tridimensional definido en un sistema coordenado  $xyz$ , el campo vectorial del desplazamiento  $\mathbf{u}(x, y, z)$  de cada punto material ubicado en una posición  $(x, y, z)$  está formado por las componentes  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  y  $w(x, y, z)$ , en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Por lo tanto, el vector desplazamiento de un punto se puede escribir como:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = [u \quad v \quad w]^T \quad (4.1)$$

De acuerdo con la teoría de deformación infinitesimal, cada partícula de un sólido presenta tres componentes de deformación longitudinal  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\varepsilon_{zz}$ , en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Asimismo, cada partícula exhibe tres componentes



**Figura 4.2:** Componentes de deformación en un cubo diferencial para problemas tridimensionales: (a), (b) y (c) deformación longitudinal en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente; (d), (e) y (f) deformación angular en los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$ , respectivamente.

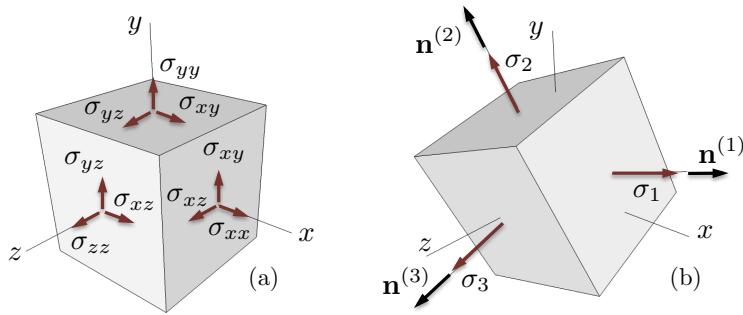
de deformación angular  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  sobre los planos  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. La Figura 4.2 ilustra tales componentes de deformación en un elemento diferencial en forma de cubo.

La matriz columna  $\boldsymbol{\varepsilon}$  contiene las componentes de deformación longitudinal y angular en notación de ingeniería, de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T \quad (4.2)$$

La relación entre el campo del desplazamiento y el campo de la deformación infinitesimal está definida como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\nabla} \mathbf{u} \quad (4.3)$$



**Figura 4.3:** Componentes de esfuerzo en un cubo diferencial para problemas tridimensionales: (a) esfuerzos con respecto al sistema coordenado  $xyz$ , y (b) esfuerzos y direcciones principales.

donde, la matriz del operador diferencial  $\tilde{\nabla}$  incluye las derivadas con respecto a los ejes coordinados, de la forma:

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

El estado de esfuerzos de una partícula está definido por las componentes de esfuerzo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$  que actúan en dirección normal sobre las caras  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y las componentes de esfuerzo cortante  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$  que actúan en dirección tangencial a cada cara. La Figura 4.3(a) muestra las componentes de esfuerzo en un cubo diferencial.

El matriz columna  $\boldsymbol{\sigma}$  que contiene las componentes de esfuerzo normal y cortante es de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}]^T \quad (4.5)$$

La relación constitutiva de un material elástico lineal isotrópico definida por la ley de Hooke generalizada establece que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.6)$$

La matriz constitutiva elástica  $\mathbf{D}$  de un material elástico lineal e isotrópico de la ecuación anterior, corresponde a:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

donde  $E$  y  $\nu$  son el módulo de Young y la relación de Poisson del material.

## 4.2 Esfuerzos principales y esfuerzo equivalente de von Mises

El estado de esfuerzos general de un punto material está definido por seis componentes diferentes con respecto a tres planos mutuamente ortogonales, asociados a un sistema coordenado cartesiano  $xyz$ . Las componentes de esfuerzo se pueden representar mediante una matriz simétrica de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{xyz} \quad (4.8)$$

donde,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$ , corresponden a los esfuerzos normales a los planos de normal  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. En cambio,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$ , son las componentes de esfuerzo cortante sobre los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$ , respectivamente.

Los esfuerzos principales  $\sigma_p$  corresponden a los esfuerzos normales máximo y mínimo, que pueden actuar sobre una superficie asociada al estado de esfuerzos. Tales  $\sigma_p$  y sus respectivas direcciones  $\mathbf{n}^{(p)}$  se calculan resolviendo un problema de

valores y vectores propios de tamaño 3, así:

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_p \mathbf{I}) \mathbf{n}^{(p)} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Siendo  $\|\mathbf{n}^{(p)}\|$  diferente de cero, la expresión anterior establece que  $\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_p \mathbf{I}) = 0$  y en consecuencia:

$$\sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 + I_2 \sigma_p - I_3 = 0 \quad (4.10a)$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (4.10b)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 + \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xz}^2 + 2\sigma_{yz}^2) \quad (4.10c)$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.10d)$$

Los valores propios obtenidos en la solución de la Ecuación 4.9 son iguales a las raíces de la expresión polinómica de tercer orden (4.10), y corresponden a los esfuerzos principales  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  y  $\sigma_c$ .

En general, los esfuerzos principales mayor  $\sigma_1$ , menor  $\sigma_3$  e intermedio  $\sigma_2$  están definidos como:

$$\sigma_1 = \max[\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c] \quad (4.11a)$$

$$\sigma_3 = \min[\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c] \quad (4.11b)$$

$$\sigma_2 = \sigma_a, \sigma_b \text{ o } \sigma_c \neq \sigma_1 \text{ o } \sigma_3 \quad (4.11c)$$

Los vectores propios normalizados obtenidos de la solución de la Ecuación 4.9, corresponden a las direcciones principales  $\mathbf{n}^{(1)}$ ,  $\mathbf{n}^{(2)}$  y  $\mathbf{n}^{(3)}$ , asociadas a los esfuerzos principales mayor, intermedio y menor, respectivamente. La Figura 4.3(b) ilustra los esfuerzos y las direcciones principales actuantes sobre un cubo diferencial.

El criterio de fallo de von Mises establece que un punto del sólido mantiene comportamiento elástico, si la densidad de energía de deformación por distorsión actuante es menor que la correspondiente densidad de energía admisible del material. Ésta ultima se evalúa en un ensayo uniaxial, cuyo esfuerzo límite de elasticidad del material es conocido.

Para materiales dúctiles en los cuales su fluencia coincide con el final de su comportamiento elástico, la desigualdad entre densidades de energía se puede reescribir de la siguiente manera: un punto conserva un comportamiento elástico si  $\sigma_{vm} \leq \sigma_y$ , siendo  $\sigma_y$  el esfuerzo de fluencia del material y  $\sigma_{vm}$  el esfuerzo equivalente de von Mises actuante. Tal esfuerzo está definido como:

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (4.12)$$

### 4.3 Deformaciones principales

El estado de deformaciones general de un punto material está definido por seis componentes diferentes con respecto a tres planos mutuamente ortogonales, asociados a un sistema coordenado cartesiano  $xyz$ . Las componentes de deformación se pueden representar mediante una matriz simétrica de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{xyz} \quad (4.13)$$

donde,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\varepsilon_{zz}$ , corresponden a las deformaciones longitudinales las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. En cambio,  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$  y  $\varepsilon_{yz}$ , son las componentes de deformación angular en notación científica sobre los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$ , respectivamente.

Habitualmente en el método de los elementos finitos, las componentes de deformación se indican en notación de ingeniería, donde las deformaciones longitudinales son iguales a las presentadas en notación científica, mientras que las deformaciones angulares en notación de ingeniería  $\gamma_{ij}$  se relacionan así:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} \quad (4.14)$$

Dos de las deformaciones principales  $\varepsilon_p$  son aquellas deformaciones longitudinales de valor máximo y mínimo, que pueden actuar sobre una superficie. Tales  $\varepsilon_p$  y sus respectivas direcciones  $\mathbf{m}^{(p)}$  se calculan resolviendo un problema de valores y vectores

propios de tamaño 3, así:

$$(\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_p \mathbf{I}) \mathbf{m}^{(p)} = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

Siendo  $\|\mathbf{m}^{(p)}\|$  diferente de cero, la expresión anterior establece que  $\det(\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_p \mathbf{I}) = 0$  y en consecuencia:

$$\varepsilon_p^3 - I'_1 \varepsilon_p^2 + I'_2 \varepsilon_p - I'_3 = 0 \quad (4.16a)$$

$$I'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (4.16b)$$

$$I'_2 = \frac{1}{2}(I'^2_1 + \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2) \quad (4.16c)$$

$$I'_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4.16d)$$

Los valores propios obtenidos en la solución de la Ecuación 4.15 son iguales a las raíces de la expresión polinómica de tercer orden (4.16), y corresponden a los esfuerzos principales  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  y  $\sigma_c$ .

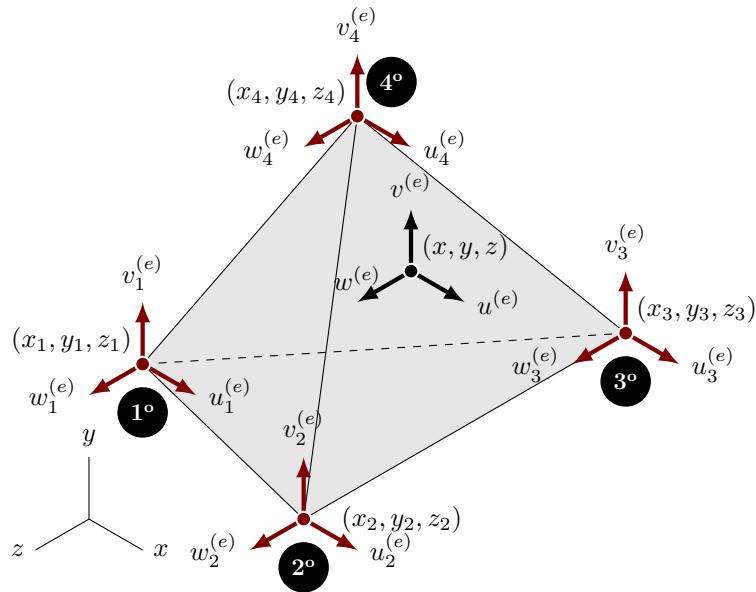
En general, las deformaciones principales mayor  $\varepsilon_1$ , menor  $\varepsilon_3$  e intermedia  $\varepsilon_2$  están definidos como:

$$\varepsilon_1 = \max[\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c] \quad (4.17a)$$

$$\varepsilon_3 = \min[\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c] \quad (4.17b)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_a, \varepsilon_b \text{ o } \varepsilon_c \neq \varepsilon_1 \text{ o } \varepsilon_3 \quad (4.17c)$$

Los vectores propios normalizados obtenidos de la solución de la Ecuación 4.15, corresponden a las direcciones principales  $\mathbf{m}^{(1)}$ ,  $\mathbf{m}^{(2)}$  y  $\mathbf{m}^{(3)}$ , asociadas a las deformaciones principales mayor, intermedia y menor, respectivamente.



**Figura 4.4:** Elemento finito tetraédrico lineal.

## 4.4 Desplazamiento y matriz de funciones de forma de un elemento tetraédrico lineal

Para este tipo de problemas se define un elemento finito tetraédrico lineal de continuidad  $C_0$ , el cual permite evaluar tres funciones de aproximación lineal en su interior, correspondientes a las componentes de desplazamiento  $u^{(e)}(x, y, z)$ ,  $v^{(e)}(x, y, z)$  y  $w^{(e)}(x, y, z)$ . La Figura 4.4 ilustra el elemento finito, conformado por un nudo  $i$  en cada vértice de coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  y tres grados de libertad por cada uno o valores nodales, asociados a las componentes de desplazamiento  $u_i^{(e)}$ ,  $v_i^{(e)}$  y  $w_i^{(e)}$ .

El denominado vector de desplazamientos nodales del elemento  $\mathbf{a}^{(e)}$ , corresponde a una matriz columna que contiene las componentes de desplazamiento en los

nudos, así:

$$\mathbf{a}^{(e)} = \left[ \mathbf{a}_1^{(e)T} \mid \mathbf{a}_2^{(e)T} \mid \mathbf{a}_3^{(e)T} \mid \mathbf{a}_4^{(e)T} \right]^T \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = \left[ u_i^{(e)} \quad v_i^{(e)} \quad w_i^{(e)} \right]^T \quad (4.18b)$$

Las componentes de desplazamiento en el interior del elemento se calculan por interpolación de los valores nodales como:

$$u^{(e)}(x, y, z) = N_1^{(e)}u_1^{(e)} + N_2^{(e)}u_2^{(e)} + N_3^{(e)}u_3^{(e)} + N_4^{(e)}u_4^{(e)} \quad (4.19a)$$

$$v^{(e)}(x, y, z) = N_1^{(e)}v_1^{(e)} + N_2^{(e)}v_2^{(e)} + N_3^{(e)}v_3^{(e)} + N_4^{(e)}v_4^{(e)} \quad (4.19b)$$

$$w^{(e)}(x, y, z) = N_1^{(e)}w_1^{(e)} + N_2^{(e)}w_2^{(e)} + N_3^{(e)}w_3^{(e)} + N_4^{(e)}w_4^{(e)} \quad (4.19c)$$

donde  $N_i^{(e)}(x, y, z)$  es la función de forma del nudo  $i$  en el elemento  $e$ , evaluada en la posición  $(x, y, z)$ .

El vector del desplazamiento  $\mathbf{u}^{(e)} = [u^{(e)} \quad v^{(e)} \quad w^{(e)}]^T$  en un punto del interior del elemento finito de coordenadas  $(x, y, z)$ , se pueden calcular de forma matricial así:

$$\mathbf{u}^{(e)}(x, y, z) = \mathbf{N}^{(e)}(x, y, z) \mathbf{a}^{(e)} \quad (4.20)$$

La matriz de funciones de forma del elemento  $\mathbf{N}^{(e)}$  se puede conformar por 4 submatrices cuadradas  $\mathbf{N}_i^{(e)}$ , una por cada nudo  $i$ , así:

$$\mathbf{N}^{(e)} = \left[ \mathbf{N}_1^{(e)} \mid \mathbf{N}_2^{(e)} \mid \mathbf{N}_3^{(e)} \mid \mathbf{N}_4^{(e)} \right] \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{N}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (4.21b)$$

donde la función de forma del nudo  $i$  es igual a:

$$N_i^{(e)}(x, y, z) = \frac{1}{6V_{(e)}}(a_i + b_ix + c_iy + d_iz) \quad (4.21c)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \det \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} & a_2 &= -\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} & a_3 &= \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \\
a_4 &= -\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} & b_1 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} & b_2 &= \det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \\
b_3 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} & b_4 &= \det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} & c_1 &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{bmatrix} \\
c_2 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{bmatrix} & c_3 &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{bmatrix} & c_4 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{bmatrix} \\
d_1 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{bmatrix} & d_2 &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{bmatrix} & d_3 &= -\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{bmatrix} \\
d_4 &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**Tabla 4.1:** Coeficientes de las funciones de forma de un elemento tetraédrico lineal

Esta función depende del volumen del elemento finito tetraédrico  $V_{(e)}$  calculado como:

$$V_{(e)} = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (4.21d)$$

y de los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  y  $d_i$ , los cuales dependen de las coordenadas de los nudos  $(x_i, y_i, z_i)$  como se indica en la Tabla 4.1.

## 4.5 Deformación, esfuerzo y matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento tetraédrico lineal

La matriz columna  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$  que contiene las componentes de deformación en notación de ingeniería de un elemento finito tridimensional  $e$ , se puede expresar de la misma forma dada en las ecuaciones (4.2) y (4.3) para un punto material, es decir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\varepsilon_{xx}^{(e)} \quad \varepsilon_{yy}^{(e)} \quad \varepsilon_{zz}^{(e)} \quad \gamma_{xy}^{(e)} \quad \gamma_{xz}^{(e)} \quad \gamma_{yz}^{(e)}]^T \quad (4.22a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \tilde{\nabla} \mathbf{u}^{(e)} = \tilde{\nabla} \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} \quad (4.22b)$$

El resultado de aplicar el operador diferencial  $\tilde{\nabla}$  de la Ecuación 4.4 sobre la matriz de funciones de forma del elemento  $e$ , corresponde a la matriz  $\mathbf{B}^{(e)}$ , así:

$$\mathbf{B}^{(e)} = \tilde{\nabla} \mathbf{N}^{(e)} = \left[ \mathbf{B}_1^{(e)} \mid \mathbf{B}_2^{(e)} \mid \mathbf{B}_3^{(e)} \mid \mathbf{B}_4^{(e)} \right] \quad (4.23a)$$

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x N_i^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z N_i^{(e)} \\ \partial_y N_i^{(e)} & \partial_x N_i^{(e)} & 0 \\ \partial_z N_i^{(e)} & 0 & \partial_x N_i^{(e)} \\ 0 & \partial_z N_i^{(e)} & \partial_y N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (4.23b)$$

Sustituyendo la expresión de las funciones de forma de un elemento tetraédrico dada en la Ecuación 4.21c se obtiene la siguiente submatriz de operadores diferen-

ciales actuando sobre funciones de forma para cada nudo  $i$ :

$$\mathbf{B}_i^{(e)} = \frac{1}{6V_{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ d_i & 0 & b_i \\ 0 & d_i & c_i \end{bmatrix} \quad (4.23c)$$

donde los coeficientes  $b_i$ ,  $c_i$  y  $d_i$  están definidos en la Tabla 4.1.

La matriz de componentes de deformación en el elemento  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$  se calcula mediante la Ecuación 4.22b.

La matriz de componentes de esfuerzo  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$  se obtiene reescribiendo la Ecuación 4.6, en el elemento finito de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (4.24)$$

donde la matriz constitutiva elástica del material asociado al elemento  $\mathbf{D}^{(e)}$  está definida en la Ecuación 4.7.

Se observa que los términos de la matriz  $\mathbf{B}^{(e)}$  son constantes con respecto a la posición en el interior del elemento. En consecuencia las matrices  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$  y  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ , también son constantes dentro del elemento tetraédrico lineal.

## 4.6 Formulación general en la malla de elementos finitos y principio de los Trabajos Virtuales

Un sólido de volumen  $V$  sometido a acciones externas y restringido por condiciones de apoyo, se representa con una malla de elementos finitos tridimensionales, como se ilustra en la Figura 4.1(b). Cada elemento finito tiene nudos en sus vértices que comparte con su elemento vecino. En tales nudos se definen las componentes de desplazamiento como grados de libertad del problema.

El trabajo virtual producido por las fuerzas reales se puede dividir en dos partes: el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas denominado trabajo virtual interno y el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas llamado trabajo virtual externo (Oñate, 1995).

Un sólido representado por  $ne$  elementos finitos de volumen  $V_{(e)}$ , está sometido a fuerzas por unidad de volumen en cada elemento  $\mathbf{b}_{(e)}$ , a fuerzas por unidad de área  $\mathbf{p}_{(e)}$  en el contorno  $\Gamma_p^{(e)} \subset \Gamma_p$  y a fuerzas puntuales  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  aplicadas sobre  $r$  nudos.

Las condiciones de frontera sobre el cuerpo corresponden a valores conocidos del desplazamiento real  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [u \ v \ w]^T = \mathbf{u}^*$  en los puntos materiales que hacen parte de un contorno definido  $\Gamma_u$ .

El campo del desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\delta u \ \delta v \ \delta w]^T$ , definido como una variación del desplazamiento, corresponde a una función cualquiera que cumple con la condición de borde de la forma:

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (4.25)$$

El trabajo virtual externo en cada elemento  $e$  se realiza por las fuerzas reales externas  $\mathbf{b}_{(e)}$ ,  $\mathbf{p}_{(e)}$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  mientras se presenta un desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{u}_{(e)}$ . En cambio, el trabajo virtual interno es producido por el esfuerzo  $\boldsymbol{\sigma}_{(e)}$  mientras ocurren deformaciones generadas por desplazamientos virtuales  $\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}_{(e)}$ , es decir, es igual a la densidad de energía de deformación  $(\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}_{(e)})^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)}$  integrada en el volumen del elemento finito.

El principio de los Trabajos Virtuales establece que un cuerpo está en equilibrio sí y solo sí, el trabajo virtual realizado por todas las acciones internas y externas es nulo, es decir:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^{(e)}} (\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}_{(e)})^T \boldsymbol{\sigma}_{(e)} dV = \\ &= \sum_{e=1}^{ne} \left( \int_{\Gamma_p^{(e)}} \delta\mathbf{u}_{(e)}^T \mathbf{p}_{(e)} dS + \int_{V^{(e)}} \delta\mathbf{u}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV \right) + \sum_{n=1}^r \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_n)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \end{aligned} \quad (4.26)$$

La ecuación anterior es válida para todo campo de desplazamientos virtuales que cumpla con las condiciones de frontera cinemáticas dadas en la Ecuación 4.25.

Los vectores de fuerzas puntuales en los nudos  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ , de fuerzas de superficie  $\mathbf{p}_{(e)}$  y de cuerpo  $\mathbf{b}_{(e)}$  en los elementos, son de la forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{p}_{(e)} = \begin{bmatrix} p_x^{(e)} & p_y^{(e)} & p_z^{(e)} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x^{(e)} & b_y^{(e)} & b_z^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (4.27)$$

## 4.7 Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en un elemento finito

De la misma forma como se expresa el desplazamiento real en términos de las funciones de forma y los valores nodales, el desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{u}_{(e)}$  y la deformación virtual  $\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}_{(e)}$  en un elemento finito son iguales a:

$$\delta\mathbf{u}_{(e)} = \mathbf{N}_{(e)}\delta\mathbf{a}_{(e)}, \quad \delta\mathbf{u}_{(e)}^T = \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{N}_{(e)}^T \quad (4.28a)$$

$$\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}_{(e)} = \mathbf{B}_{(e)}\delta\mathbf{a}_{(e)}, \quad (\tilde{\nabla}\delta\mathbf{u}_{(e)})^T = \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{B}_{(e)}^T \quad (4.28b)$$

siendo  $\delta\mathbf{a}_{(e)}$  el vector de valores nodales de desplazamiento virtual del elemento finito.

Sustituyendo las expresiones 4.28 y Ecuación 4.22b en la Ecuación 4.26, se obtiene lo siguiente:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \left( \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} dV \right) \mathbf{a}_{(e)} = \sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \left( \int_{\Gamma_p^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{p}_{(e)} dS + \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV \right) + \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} \quad (4.29)$$

donde  $\delta\mathbf{a}$  y  $\mathbf{f}^{(n)}$  corresponden al vector de desplazamiento virtual y al vector de fuerza real en los nudos de la malla de elementos finitos.

El término entre paréntesis a la izquierda de la igualdad anterior se define como la matriz de rigidez del elemento finito  $\mathbf{K}^{(e)}$ , y corresponde a:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_{(e)} dV \quad (4.30)$$

En cambio, el término entre paréntesis a la derecha  $\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$  es la suma del vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de superficie  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  más el vector de fuerzas nodales equivalentes a la acción de fuerzas de cuerpo  $\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)}$  del elemento, es decir:

$$\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{P}_{(e)} dS \quad (4.31a)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b}_{(e)} dV \quad (4.31b)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(e)} = \tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)} + \tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)} \quad (4.31c)$$

Remplazando las ecuaciones 4.30 y 4.31 en la expresión 4.29 se tiene:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)} - \sum_{e=1}^{ne} \delta\mathbf{a}_{(e)}^T \tilde{\mathbf{f}}^{(e)} - \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} = 0 \quad (4.32)$$

## 4.8 Matriz de rigidez y vectores fuerzas equivalentes del elemento tetraédrico lineal

A continuación se presenta la matriz de rigidez y los vectores de fuerzas equivalentes a diferentes acciones sobre el elemento tetraédrico lineal de continuidad  $C_0$ , para un problema mecánico elástico lineal tridimensional.

#### 4.8.1 Matriz de rigidez

La matriz de rigidez del elemento finito tetraédrico lineal se obtiene sustituyendo en la Ecuación 4.30 a la matriz  $\mathbf{B}_{(e)}$  que fue presentada en la Ecuación 4.23. El resultado alcanzando se indica en la Ecuación 4.33 o Tabla 4.2. Los coeficientes  $D_{ij}$  que allí se indican corresponden a los términos de la matriz constitutiva elástica del material dada en la Ecuación 4.7, cuyo módulo de Young es  $E$  y su relación de Poisson es  $\nu$ . Asimismo, el volumen del elemento  $V_{(e)}$  y los coeficientes  $b_i$ ,  $b_j$ ,  $c_i$  y  $c_j$ , han sido definidos en la Ecuación 4.21d y la Tabla 4.1, respectivamente.

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{13}^{(e)} & \mathbf{K}_{14}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{12}^{(e)} & \mathbf{K}_{22}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} & \mathbf{K}_{24}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{13}^{(e)} & \mathbf{K}_{23}^{(e)} & \mathbf{K}_{33}^{(e)} & \mathbf{K}_{34}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{14}^{(e)} & \mathbf{K}_{24}^{(e)} & \mathbf{K}_{34}^{(e)} & \mathbf{K}_{44}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (4.33a)$$

sim

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_i^{(e)T} \mathbf{D}_{(e)} \mathbf{B}_j^{(e)} dV \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (4.33b)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = k \begin{bmatrix} (D_{11}b_i b_j + D_{44}c_i c_j + D_{55}d_i d_j) & (D_{12}b_i c_j + D_{44}c_i b_j) & (D_{13}b_i d_j + D_{55}d_i b_j) \\ (D_{12}c_i b_j + D_{44}b_i c_j) & (D_{22}c_i c_j + D_{44}b_i b_j + D_{66}d_i d_j) & (D_{23}c_i d_j + D_{66}d_i c_j) \\ (D_{13}d_i b_j + D_{55}b_i d_j) & (D_{23}d_i c_j + D_{66}c_i d_j) & (D_{33}d_i d_j + D_{55}b_i b_j + D_{66}c_i c_j) \end{bmatrix} \quad (4.33c)$$

$$k = \frac{1}{36V_{(e)}} \quad (4.33d)$$

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = \frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (4.33e)$$

$$D_{12} = D_{13} = D_{23} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (4.33f)$$

$$D_{44} = D_{55} = D_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.33g)$$

**Tabla 4.2:** Ecuaciones de la matriz de rigidez del elemento tetraédrico lineal de continuidad  $C_0$

$$\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)} = \sum_{c=1}^{n_c} \tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)(c)}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)(c)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{s1}^{(e)(c)} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{s2}^{(e)(c)} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{s3}^{(e)(c)} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{s4}^{(e)(c)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_c^{(e)} = \begin{bmatrix} p_{xc}^{(e)} \\ p_{yc}^{(e)} \\ p_{zc}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (4.34a)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{sci}^{(e)} = \int_{A_c^{(e)}} \mathbf{N}_i^{(e)T} \mathbf{p}_c^{(e)} dA = \frac{A_c^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} p_{xc}^{(e)} \\ p_{yc}^{(e)} \\ p_{zc}^{(e)} \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4 \\ c = (123), (124), (234), (134) \end{array} \right. \quad (4.34b)$$

donde para cada cara se tiene:

$$\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)(123)} = \frac{A_{123}^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} p_{x123}^{(e)} & p_{y123}^{(e)} & p_{z123}^{(e)} & p_{x123}^{(e)} & p_{y123}^{(e)} & p_{z123}^{(e)} & p_{x123}^{(e)} & p_{y123}^{(e)} & p_{z123}^{(e)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.34c)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)(124)} = \frac{A_{124}^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} p_{x124}^{(e)} & p_{y124}^{(e)} & p_{z124}^{(e)} & p_{x124}^{(e)} & p_{y124}^{(e)} & p_{z124}^{(e)} & 0 & 0 & 0 & p_{x124}^{(e)} & p_{y124}^{(e)} & p_{z124}^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (4.34d)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)(234)} = \frac{A_{234}^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p_{x234}^{(e)} & p_{y234}^{(e)} & p_{z234}^{(e)} & p_{x234}^{(e)} & p_{y234}^{(e)} & p_{z234}^{(e)} & p_{x234}^{(e)} & p_{y234}^{(e)} & p_{z234}^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (4.34e)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)(134)} = \frac{A_{134}^{(e)}}{3} \begin{bmatrix} p_{x134}^{(e)} & p_{y134}^{(e)} & p_{z134}^{(e)} & 0 & 0 & p_{x134}^{(e)} & p_{y134}^{(e)} & p_{z134}^{(e)} & p_{x134}^{(e)} & p_{y134}^{(e)} & p_{z134}^{(e)} \end{bmatrix}^T \quad (4.34f)$$

**Tabla 4.3:** Ecuaciones del vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme sobre las caras del elemento tetraédrico lineal de continuidad  $C_0$

#### 4.8.2 Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme en sistema coordenado global

A continuación se define el vector de fuerzas nodales equivalentes  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$ , generadas por la acción de una presión uniforme  $\mathbf{p}^{(e)}$ , la cual actúa sobre cada una de las  $nc$  caras de un elemento tetraédrico lineal, considerando que las componentes de  $\mathbf{p}^{(e)}$  están referidas a un sistema coordenado global.

El vector  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  se obtiene reemplazando la matriz  $\mathbf{N}_{(e)}$  de la Ecuación 4.21, en la Ecuación 4.31a. El resultado alcanzando se presenta en la Ecuación 4.34 o Tabla 4.3. Por ejemplo, la presión  $p_{x124}^{(e)}$  aplicada en la dirección  $x$  sobre la cara conformada por los nudos 1, 2 y 4, que se muestra en la Figura 4.5(a), es equivalente a las fuerzas en dichos nudos, definidas como  $\tilde{f}_{x1}^{(e)(124)}$ ,  $\tilde{f}_{x2}^{(e)(124)}$  y  $\tilde{f}_{x4}^{(e)(124)}$  en la Figura 4.5(d). Asimismo, las componentes de presión  $p_{y124}^{(e)}$  y  $p_{z124}^{(e)}$  de las figuras 4.5(b) y (c), son equivalentes a las fuerzas en los nudos  $\tilde{f}_{y1}^{(e)(124)}$ ,  $\tilde{f}_{y2}^{(e)(124)}$  y  $\tilde{f}_{y4}^{(e)(124)}$ , y  $\tilde{f}_{z1}^{(e)(124)}$ ,  $\tilde{f}_{z2}^{(e)(124)}$  y  $\tilde{f}_{z4}^{(e)(124)}$ , presentadas en la Figura 4.5(d). Tales fuerzas equivalentes corresponden a:

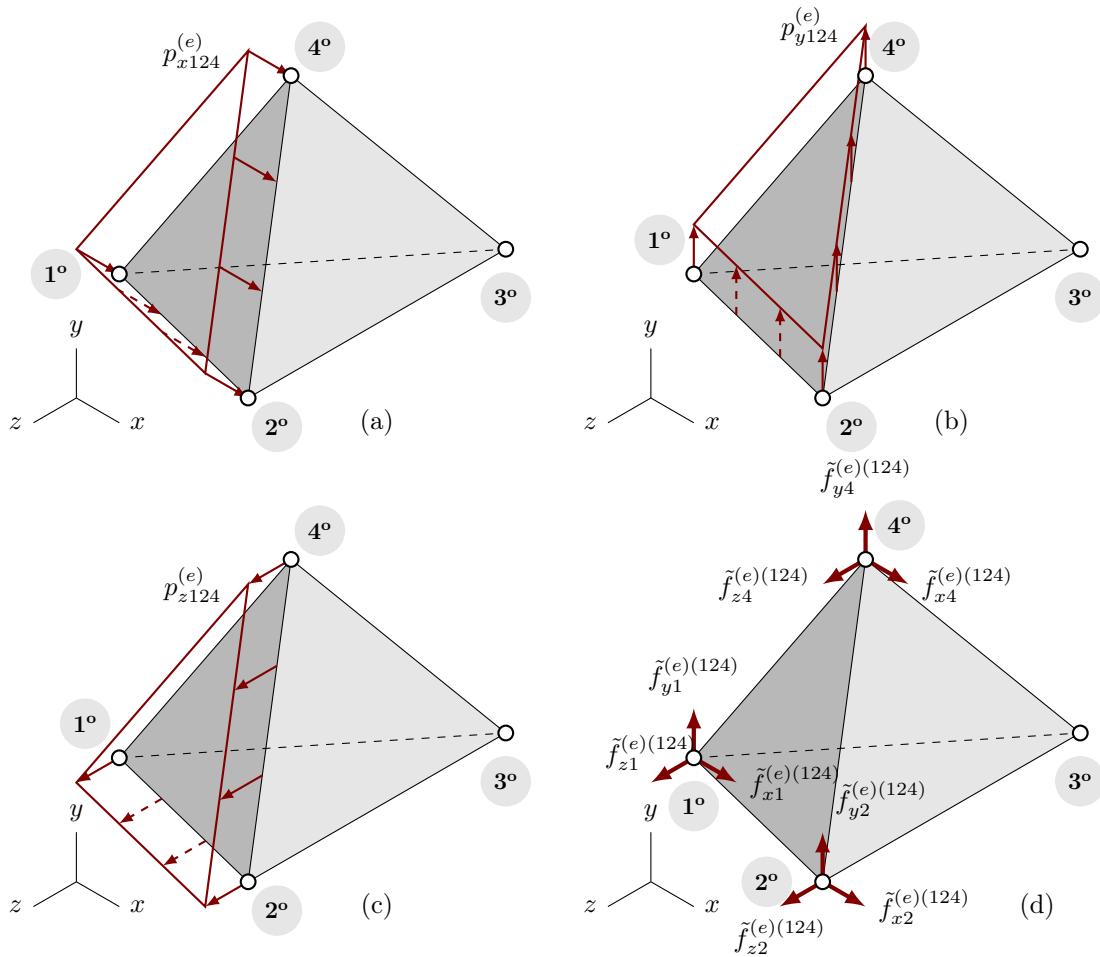
$$\tilde{f}_{x1}^{(e)(124)} = \tilde{f}_{x2}^{(e)(124)} = \tilde{f}_{x3}^{(e)(124)} = \frac{1}{3} A_{124}^{(e)} p_{x124}^{(e)} \quad (4.35a)$$

$$\tilde{f}_{y1}^{(e)(124)} = \tilde{f}_{y2}^{(e)(124)} = \tilde{f}_{y3}^{(e)(124)} = \frac{1}{3} A_{124}^{(e)} p_{y124}^{(e)} \quad (4.35b)$$

$$\tilde{f}_{z1}^{(e)(124)} = \tilde{f}_{z2}^{(e)(124)} = \tilde{f}_{z3}^{(e)(124)} = \frac{1}{3} A_{124}^{(e)} p_{z124}^{(e)} \quad (4.35c)$$

Finalmente, el vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  sobre la cara 1-2-4 de un elemento tetraédrico lineal, es de la forma:

$$\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)(124)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{s1}^{(e)(124)} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{s2}^{(e)(124)} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{s3}^{(e)(124)} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{s4}^{(e)(124)} \end{bmatrix} \quad \text{siendo, } \tilde{\mathbf{f}}_{si}^{(e)(124)} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{xi}^{(e)(124)} \\ \tilde{f}_{yi}^{(e)(124)} \\ \tilde{f}_{zi}^{(e)(124)} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

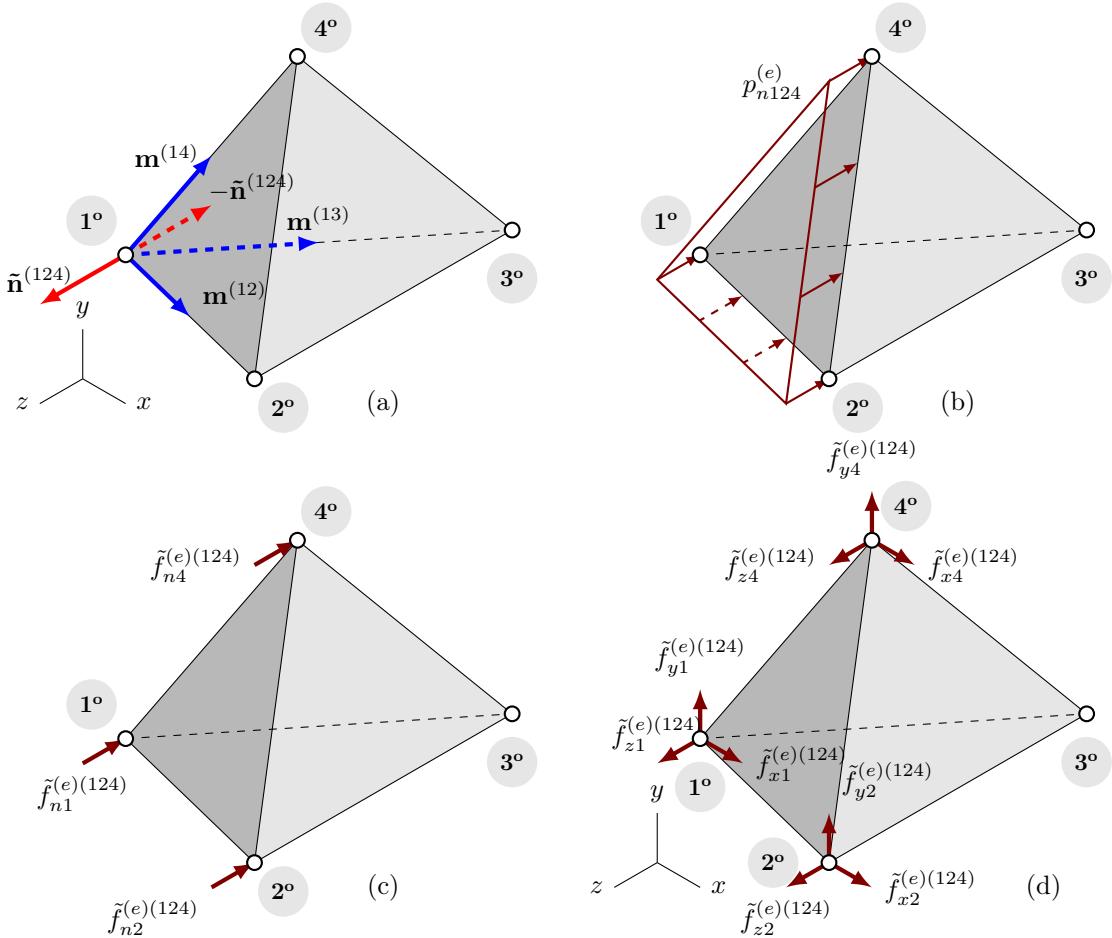


**Figura 4.5:** Aplicación de presión uniforme sobre la cara 1-2-4 de un elemento finito tetraédrico lineal: (a) presión en dirección  $x$ , (b) presión en dirección  $y$ , (c) presión en dirección  $z$  y (d) fuerzas equivalentes en los nudos a la acción de las componentes de presión.

#### 4.8.3 Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme normal a una cara del elemento

Un elemento tetraédrico lineal de nudos 1, 2, 3 y 4, está sometido a una presión uniforme normal  $p_{n124}^{(e)}$  que entra a la cara 1-2-4, como se ilustra en la Figura 4.6(b).

El vector unitario normal que entra a la cara 1-2-4, denominado  $\mathbf{n}^{(124)}$  se puede obtener mediante el siguiente procedimiento (Figura 4.6(a)):



**Figura 4.6:** Aplicación de una presión uniforme normal que entra a la cara 1-2-4 de un elemento finito tetraédrico lineal: (a) vectores direccionalles de los lados del elemento y normales a la cara cargada, (b) presión uniforme normal que entra a la cara 1-2-4, (c) fuerzas equivalentes en dirección normal, y (d) componentes de las fuerzas equivalentes en sistema coordenado global.

- Calcular los vectores unitarios  $\mathbf{m}^{(12)}$  y  $\mathbf{m}^{(14)}$ , que determinan la dirección de los lados 1-2 y 1-4, los cuales hacen parte de la cara cargada 1-2-4.
- Calcular el vector unitario  $\mathbf{m}^{(13)}$  que define la dirección del lado 1-3, el cual no pertenece a la cara cargada 1-2-4.
- Calcular el vector normal a la cara cargada  $\tilde{\mathbf{n}}^{(124)}$ , mediante la operación  $\tilde{\mathbf{n}}^{(124)} = \mathbf{m}^{(12)} \times \mathbf{m}^{(14)}$ .

- Establecer el vector normal a la cara cargada entrando al elemento finito  $\mathbf{n}^{(124)}$ , de la forma:

$$\mathbf{n}^{(124)} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{n}}^{(124)} & \text{si } \tilde{\mathbf{n}}^{(124)} \cdot \mathbf{m}^{(13)} > 0 \\ -\tilde{\mathbf{n}}^{(124)} & \text{si } \tilde{\mathbf{n}}^{(124)} \cdot \mathbf{m}^{(13)} < 0 \end{cases} \quad (4.37a)$$

La representación matricial de este vector con respecto al sistema coordenado global  $xyz$  es:

$$\mathbf{n}^{(124)} = \begin{bmatrix} n_x^{(124)} & n_y^{(124)} & n_z^{(124)} \end{bmatrix}^T \quad (4.37b)$$

Las fuerzas equivalentes a la acción de la presión normal a la cara 1-2-4, indicadas como  $\tilde{f}_{n1}^{(e)(124)}$ ,  $\tilde{f}_{n2}^{(e)(124)}$  y  $\tilde{f}_{n3}^{(e)(124)}$  en la Figura 4.6(c) son:

$$\tilde{f}_{n1}^{(e)(124)} = \tilde{f}_{n2}^{(e)(124)} = \tilde{f}_{n3}^{(e)(124)} = \frac{1}{3} p_{n124}^{(e)} A_{124}^{(e)} \quad (4.38)$$

Las figuras 4.6(c) y (d) ilustran como la fuerza equivalente normal a la cara  $\tilde{f}_{ni}^{(e)(124)}$  ubicada en el nudo  $i$  se puede transformar en las componentes de fuerza en sistema coordenado global  $\tilde{f}_{xi}^{(e)(124)}$ ,  $\tilde{f}_{yi}^{(e)(124)}$  y  $\tilde{f}_{zi}^{(e)(124)}$ . Tales componentes se calculan así:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{si}^{(e)(124)} = \tilde{f}_{ni}^{(e)(124)} \mathbf{n}^{(124)} \quad (4.39a)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{si}^{(e)(124)} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{xi}^{(e)(124)} & \tilde{f}_{yi}^{(e)(124)} & \tilde{f}_{zi}^{(e)(124)} \end{bmatrix}^T = \tilde{f}_{ni}^{(e)(124)} \begin{bmatrix} n_x^{(124)} & n_y^{(124)} & n_z^{(124)} \end{bmatrix}^T \quad (4.39b)$$

siendo  $\tilde{\mathbf{f}}_{si}^{(e)(124)}$  el subvector de fuerzas equivalentes en el nudo  $i$  con respecto al sistema coordenado global. El vector de fuerzas equivalentes completo  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)(124)}$  se construye mediante la Ecuación 4.36.

El mismo procedimiento descrito en esta subsección permite calcular las fuerzas equivalentes a la acción de una presión uniforme normal en las demás caras de un elemento tetraédrico lineal.

#### 4.8.4 Vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión hidroestática

La presión causada por el agua sobre la superficie de un sólido en función de su profundidad en dirección  $y$ , es igual a:

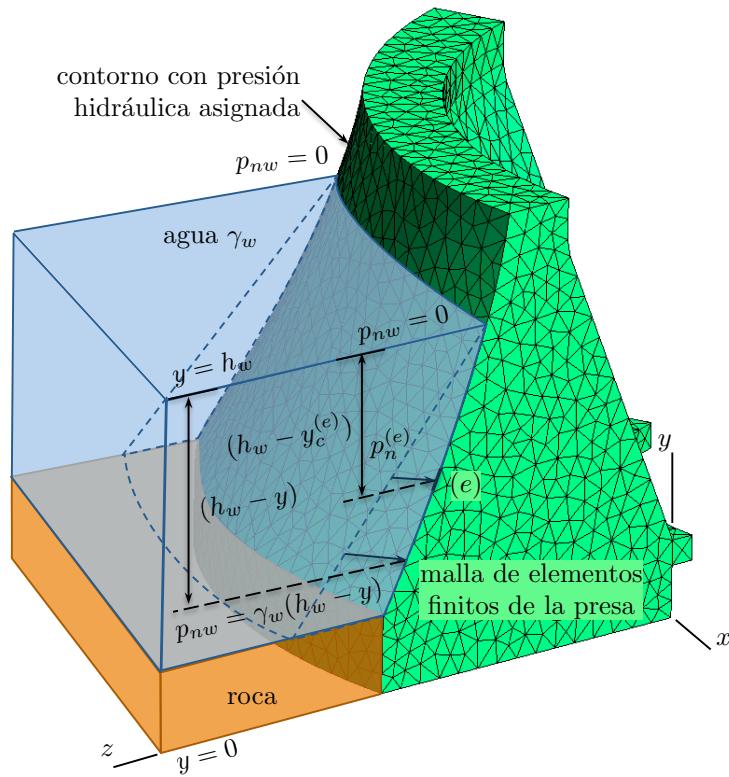
$$p_{nw} = \begin{cases} \gamma_w(h_w - y) & \text{si } y < h_w \\ 0 & \text{si } y \geq h_w \end{cases} \quad (4.40)$$

donde,  $\gamma_w$  es el peso específico del agua y  $h_w$  corresponde a la posición de su capa límite con respecto a  $y$ .

La Figura 4.7 muestra un ejemplo en el cual una presa de bóveda soporta una presión hidroestática producida por un volumen de agua, sobre una superficie de su contorno. Allí se detalla la presión normal  $p_n^{(e)}$  que entra a una cara de un elemento finito  $e$ . Tal presión se considera aproximadamente uniforme y corresponde al valor de la presión hidroestática  $p_{nw}$ , evaluada a una profundidad dada por el centroide de la cara del elemento finito  $y_c^{(e)}$ . En consecuencia, la presión uniforme normal sobre la cara de un elemento finito  $e$  que conforma el contorno donde actúa una presión hidroestática, es igual a:

$$p_n^{(e)} = \begin{cases} \gamma_w(h_w - y_c^{(e)}) & \text{si } y_c^{(e)} < h_w \\ 0 & \text{si } y_c^{(e)} \geq h_w \end{cases} \quad (4.41)$$

Las fuerzas en los nudos con respecto al sistema coordenado global  $xyz$ , equivalentes a la acción de  $p_n^{(e)}$ , se puede calcular como lo describe la Subsección 4.8.3.



**Figura 4.7:** Presión hidroestática de variación lineal con respecto a la profundidad en  $y$  del agua, actuando sobre un contorno de la malla de elementos finitos de una presa. Detalle de la presión uniforme normal  $p_n^{(e)} = \gamma_w(h_w - y_c^{(e)})$  que entra a una cara de un elemento finito tetraédrico lineal  $e$ .

#### 4.8.5 Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso específico del material

El vector de fuerzas equivalentes a la acción del cargas por unidad de volumen  $\mathbf{b}_{(e)} = [b_x^{(e)} \ b_y^{(e)} \ b_z^{(e)}]$  de un elemento tetraédrico lineal  $\mathbf{f}_b^{(e)}$ , se obtiene sustituyendo la Expresión 4.21 de matriz de funciones de forma en la Ecuación 4.31b. El resultado es el siguiente:

$$\tilde{\mathbf{f}}_b^{(e)} = \left[ \tilde{\mathbf{f}}_{b1}^{(e)T} \ \tilde{\mathbf{f}}_{b2}^{(e)T} \ \tilde{\mathbf{f}}_{b3}^{(e)T} \ \tilde{\mathbf{f}}_{b4}^{(e)T} \right]^T \quad \tilde{\mathbf{f}}_{bi}^{(e)} = \frac{V^{(e)}}{4} \left[ b_x^{(e)} \ b_y^{(e)} \ b_z^{(e)} \right]^T \quad (4.42)$$

Particularmente la acción del peso propio corresponde a un vector  $\mathbf{b}_{(e)} = [0 \ -\gamma \ 0]^T$ , considerando la gravedad en dirección  $-y$  y el peso específico del material  $\gamma$ . En este caso se obtiene al vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio como:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)} = [\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma 1}^{(e)T} \ \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma 2}^{(e)T} \ \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma 3}^{(e)T} \ \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma 4}^{(e)T}]^T \quad \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma i}^{(e)} = \frac{V^{(e)}\gamma}{4} [0 \ -1 \ 0]^T \quad (4.43)$$

## 4.9 Matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en el sólido

El triple producto  $\delta\mathbf{a}_{(e)}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}_{(e)}$  de la Ecuación 4.32 se puede expresar en función de todos los grados de libertad de la malla como  $\delta\mathbf{a}^T \mathbf{K}\mathbf{a}$ , donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez del sólido, y  $\delta\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}$  son los vectores de desplazamientos nodales virtuales y reales de la malla, respectivamente.

De igual forma, el producto  $\delta\mathbf{a}_{(e)}^T \tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$  se puede escribir como  $\delta\mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{f}}$ , donde  $\tilde{\mathbf{f}}$  es el vector de fuerzas nodales equivalentes en la malla. Por lo tanto:

$$\delta\mathbf{a}^T \mathbf{K}\mathbf{a} - \delta\mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{f}} - \delta\mathbf{a}^T \mathbf{f}^{(n)} = \delta\mathbf{a}^T (\mathbf{K}\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}^{(n)}) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{f}^{(n)} \quad (4.44)$$

Se define el vector de fuerzas nodales totales en la malla  $\mathbf{f}$  como la suma entre el vector de fuerzas nodales aplicadas directamente en los nudos  $\mathbf{f}^{(n)}$  y el vector  $\tilde{\mathbf{f}}$ , es decir:

$$\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{f}^{(n)} \quad (4.45)$$

La matriz de rigidez del sólido  $\mathbf{K}$  se obtiene del procedimiento de *ensamblaje* de las matrices de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  de los  $ne$  elementos que conforman la malla. Tal procedimiento se indica de la forma:

$$\mathbf{K} = \bigwedge_{e=1}^{ne} [\mathbf{K}^{(e)}] \quad (4.46)$$

El ensamblaje consiste en la adición de cada término de la matriz de rigidez del elemento  $\mathbf{K}^{(e)}$ , a la matriz de rigidez del sólido  $\mathbf{K}$ , de acuerdo con los grados de libertad asociados al elemento  $e$ .

El vector de fuerzas equivalentes en la malla  $\tilde{\mathbf{f}}$  es el resultado del proceso de ensamblaje de los vectores de fuerza nodales equivalentes a la acción de presiones y peso específico en cada uno de los elementos finitos  $\tilde{\mathbf{f}}^{(e)}$ , lo cual se indica como:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \bigwedge_{e=1}^{ne} \left[ \tilde{\mathbf{f}}^{(e)} \right] \quad (4.47)$$

Los procesos de ensamblaje de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas equivalentes se describe en las subsecciones 3.5.2, 3.5.3 y 3.5.4, por medio de un ejemplo demostrativo bidimensional.

## 4.10 Vector de desplazamientos nodales en el sólido

El vector de desplazamientos nodales del sólido  $\mathbf{a}$  se puede descomponer en los subvectores de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{a}_\alpha$  y conocidos  $\mathbf{a}_\beta$ . Estos últimos están definidos por los valores nodales de desplazamiento impuesto en la malla  $\mathbf{a}^*$ . En consecuencia, la Ecuación 4.44 se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\alpha \\ \mathbf{a}_\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  se ha dividido en las submatrices  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ ,  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$  y  $\mathbf{K}_{\beta\beta}$ , de acuerdo con el número de desplazamientos nodales (o grados de libertad) desconocidos y conocidos de la malla. Por las mismas razones el vector de fuerzas nodales  $\mathbf{f}$  está conformado por los subvectores  $\mathbf{f}_\alpha$  y  $\mathbf{f}_\beta$ . En consecuencia, la ecuación anterior corresponde a dos ecuaciones matriciales de la forma:

$$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\alpha = \mathbf{0} \quad (4.49a)$$

$$\mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\beta = \mathbf{0} \quad (4.49b)$$

El vector de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{a}_\alpha$  se obtiene despejando la Ecuación 4.49a, así:

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} (\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta) \quad (4.50)$$

## 4.11 Vector de fuerzas totales y reacciones en el sólido

El subvector de fuerzas totales en el sólido  $\mathbf{f}_\beta$  se puede calcular despejando la Ecuación 4.49b, así:

$$\mathbf{f}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta \quad (4.51)$$

De acuerdo con la Ecuación 4.45, este resultado corresponde a la suma de los vectores  $\tilde{\mathbf{f}}_\beta$  y  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ , de la forma:

$$\mathbf{f}_\beta = \tilde{\mathbf{f}}_\beta + \mathbf{f}_\beta^{(n)} \quad (4.52)$$

los cuales corresponden a la parte asociada a los grados de libertad cuyo desplazamiento es conocido de los vectores  $\tilde{\mathbf{f}}$  y  $\mathbf{f}^{(n)}$ , respectivamente.

Las reacciones en los apoyos del sólido corresponden a los términos de  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ , los cuales son desconocidos y se calcular así:

$$\mathbf{f}_\beta^{(n)} = \mathbf{f}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta \quad (4.53)$$

## 4.12 Componentes de desplazamiento, deformación y de esfuerzo en el interior de cada elemento

El vector de desplazamientos nodales completo  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta^T]^T$ , contiene las componentes de desplazamiento en los nudos de la malla ordenada de acuerdo a la numeración de los grados de libertad. En cada elemento finito se define un vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{a}^{(e)}$ , conformado por las componentes de desplazamiento en sus nudos. Éste último se obtiene a partir de un proceso de *extracción*, el cual consiste

en construir el vector  $\mathbf{a}^{(e)}$  que contiene aquellos coeficientes del vector  $\mathbf{a}$ , correspondientes a los grados de libertad del elemento  $e$ . Lo anterior se representa como:

$$\mathbf{a}^{(e)} = \mathbb{E}_{(e)} [\mathbf{a}] \quad (4.54)$$

En la Subsección 3.5.9 se describe tal procedimiento a través de un ejemplo demostrativo bidimensional.

Conocido el vector  $\mathbf{a}^{(e)}$  se puede calcular el vector de desplazamiento en un punto  $(x, y, z)$  del interior del elemento finito  $\mathbf{u}^{(e)}(x, y) = [u^{(e)} \ v^{(e)} \ w^{(e)}]^T$ , mediante la Ecuación 4.20.

Las componentes de la matriz columna de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$  se calculan en el interior del elemento  $e$  a través de la Ecuación 4.22b. Asimismo, las componentes de la matriz columna de esfuerzo  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$  se evalúa mediante la Ecuación 4.24.

## 4.13 Resumen de resultados obtenidos

El análisis por el método de los elementos finitos del problema mecánico elástico lineal tridimensional, permite obtener los siguientes resultados en los nudos: (i) el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  y (ii) el vector de fuerza total  $\mathbf{f}$ . Asimismo, se calcula en el interior de los elementos finitos: (iii) las componentes de deformación  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$ , (iv) las componentes de esfuerzo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$ , (v) los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , (vi) el esfuerzo equivalente de von Mises  $\sigma_{vm}$ , (vii) las direcciones principales de esfuerzo  $\mathbf{n}^{(1)}$  y  $\mathbf{n}^{(3)}$ , y (viii) las deformaciones principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$ .



## Capítulo 5

# Generalidades y estructura del programa PEFiCA 2.0

En este capítulo se describe el programa didáctico de elementos finitos a código abierto PEFiCA 2.0, desarrollado en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia desde 2017. El programa PEFiCA 2.0 permite resolver problemas mecánicos de sólidos mediante el método de los elementos finitos, considerando material elástico lineal isotrópico, deformación infinitesimal y cargas estáticas. El programa ha sido desarrollado en el lenguaje de programación interpretado GNU–Octave, cuidando su compatibilidad con el Matlab y con los sistemas operativos Windows, Mac y Linux. Asimismo, puede leer los datos y representar gráficamente los resultados de los programas GMSH o GiD.

### 5.1 Antecedentes

Poco antes de este siglo se desarrollo el programa didáctico de elementos finitos *Euler* en la Universidad Nacional de Colombia, con el fin de contribuir al proceso de aprendizaje en las asignaturas relacionadas con el método de los elementos finitos, asociadas a los programas curriculares de pregrado en Ingeniería Civil y Maestría en Ingeniería Estructural (Linero, 1999, 2000). El código del programa se proporcionaba a los estudiantes para que ellos pudiesen ver, modificar y compilar las rutinas del procedimiento de cálculo en lenguaje Microsoft Visual Basic.

Basado en *Euler* se desarrolló el programa de elementos finitos a código abierto PEFiCA (Linero, 2009; Linero & Garzón, 2012), el cual mejoró los procedimientos de entrada de datos y salida de resultados en el entorno de Microsoft Excel, implementando sus rutinas en el lenguaje de alto nivel Visual Basic for Application. Este programa permite la simulación de problemas de campo gobernados por la ecuación de Poisson y de problemas mecánicos estáticos en espacios uni y bidimensionales (Segerlind, 1984; O. C. Zienkiewicz, Taylor, & Zhu, 2005; Linero *et al.*, 2013). En ese programa se introducían los datos construyendo tablas en Excel y se observaban los resultados mediante una limitada herramienta de postproceso gráfico.

## 5.2 Objetivo

El programa PEFiCA 2.0 tiene como objetivo principal motivar, estimular y facilitar el aprendizaje en el análisis estructural mediante el método de los elementos finitos para problemas mecánicos en una, dos y tres dimensiones, utilizando subrutinas propias y algunas funciones preestablecidas.

PEFiCA 2.0 es un programa a código abierto conformado por subrutinas para cada procedimiento, que permiten la construcción del proceso principal de cálculo. Esta estructura busca que el usuario participe activamente en su proceso de aprendizaje, proporcionándole las operaciones básicas utilizadas por el método de los elementos finitos. La transparencia y flexibilidad de este tipo programas permiten que sus algoritmos sean comprendidos, modificados y ampliados.

Este programa también pretende que la construcción de los parámetros del problema sea fácil y que la representación gráfica de los resultados sea clara y versátil. Para ello cuenta con rutinas que permiten leer los datos de entrada y escribir los resultados en herramientas de preprocessamiento y postproceso gráfico como GMSH o GiD.

### 5.3 Alcance

PEFiCA 2.0 cuenta con subrutinas que en conjunto, permiten resolver un problema de mecánico mediante el método de elementos finitos. Por ejemplo, tiene una rutina capaz de numerar los grados de libertad de la malla, otra que permite construir las matrices características de un elemento finito y otra que extrae el vector elemental a partir de un vector del sistema. Asimismo, tiene funciones que permiten leer los datos de entrada el problema y escribir en archivos de texto los resultados obtenidos. El código fuente de tales rutinas puede ser observado y modificado por el usuario. Algunas funciones propias del lenguaje interpretado de GNU–Octave son útiles en el método de los elementos finitos como: la suma, resta y multiplicación de matrices, el cálculo de la transpuesta y el determinante de una matriz y la solución de un sistema de ecuaciones simultaneas.

Por otro lado, el módulo de preprocesso de los programas GMSH y GiD permiten construir el archivo de datos del problema definiendo la geometría, las propiedades mecánicas de los materiales, los desplazamientos conocidos y las cargas aplicadas. A partir de esta información, estos programas generan la malla de elementos finitos. El primer paso en el procedimiento principal del programa PEFiCA 2.0, consiste en leer el archivo de datos construido previamente en GMSH o GiD.

Después de realizado el análisis, PEFiCA 2.0 construye los archivos necesarios para que el módulo de postproceso de GMSH o GiD representen gráficamente los resultados de campos escalares, vectoriales o tensoriales, mediante configuraciones deformadas, flechas y mapas de colores o de líneas.

El programa PEFiCA 2.0 permite obtener el campo del desplazamiento, de la deformación y del esfuerzo en sólidos bajo cargas estáticas y considerando deformaciones infinitesimales y material elástico lineal isotrópico. Se pueden aplicar cargas sobre puntos, presiones sobre superficies y peso específico del material. También, se pueden imponer desplazamientos sobre puntos. En problemas simplificados al dominio unidimensional el programa cuenta con elementos lineales y cuadráticos de continuidad  $C_0$  para barras sometidas a fuerza axial y con elementos cúbicos de continuidad  $C_1$  para vigas sometidas a flexión. En condición plana de esfuerzos o de deformaciones, el

programa tiene elementos finitos triangulares lineales y cuadrilaterales bilineales, los cuales podrían tener diferentes parámetros mecánicos de material y diferente espesor. En problemas tridimensionales, PEFiCA 2.0 cuenta con elementos finitos tetraédricos lineales, los cuales pueden representar materiales diferentes dentro de la malla.

La capacidad del programa está limitada por el tamaño máximo admisible de una matriz cuadrada en el lenguaje interpretado GNU–Octave.

## 5.4 Características

Las principales características del programa de elementos finitos a código abierto PEFiCA 2.0 son las siguientes:

- *Funcionalidad.* El programa tiene un conjunto de funciones y subrutinas escritas en el lenguaje interpretado de GNU–Octave, las cuales permiten resolver los problemas indicados en el apartado anterior mediante método de los elementos finitos.
- *Estabilidad.* Las subrutinas del programa cuentan con controles y trampas de error que garantizan la estabilidad del mismo durante su ejecución. Asimismo, en los programas a código abierto escritos en GNU–Octave como éste, se pueden capturar los errores utilizando las herramientas de ejecución por paso y de presentación de variables.
- *Usabilidad.* El programa PEFiCA 2.0 puede leer los datos del problema generados por una interfaz gráfica ágil y potente como GMSH o GiD, la cual se encarga de la generación de la malla de elementos finitos a partir de la geometría, los materiales, las condiciones de borde y las acciones aplicadas en el sólido. Asimismo, PEFiCA 2.0 produce los archivos de resultados en el formato de estos mismos dos programas. En general, el programa se puede utilizar casi con la misma comodidad de una herramienta comercial.
- *Eficiencia.* Debido a sus fines didácticos, el programa guarda en la memoria RAM algunas matrices características de las etapas intermedias del procedimiento.

miento. Sin embargo, los usuarios podrán evitar que dichas matrices sean almacenadas. El tiempo de ejecución depende del número de grados de libertad que tenga el problema y de la cantidad de resultados intermedios y finales que se desean presentar.

- *Extendibilidad.* Al ser un programa a código abierto es fácil adicionar nuevas subrutinas que permitan incluir diferentes tipos de elementos finitos, solucionar otro tipo de problemas, establecer diferentes técnicas de cálculo, entre otras.
- *Portabilidad.* El programa requiere la instalación de GNU–Octave para compilar el proceso de cálculo y los programas GMSH o GiD para el preprocesso y el postproceso gráfico. Estas herramientas son programas libres y gratuitos (hasta 1000 elementos finitos en el caso de GiD). El programa está conformado por un grupo de archivos planos de extensión .m, que contienen a la rutina principal de cálculo y a las funciones propias. Además, PEFiCA 2.0 está diseñado para conservar su compatibilidad con Matlab y con los sistemas operativos Windows, Mac y Linux.
- *Documentación.* Algunos capítulos de este libro describen el programa PEFiCA 2.0 e ilustran como usarlo. Asimismo, también se describe la construcción del archivo de datos del problema y la representación de sus resultados, mediante los programas GMSH y GiD. Este documento cuenta con una colección de ejemplos de aplicación en los dominios uni, bi y tridimensional, cuyos archivos de datos y de resultados están incluidos.

## 5.5 Estructura general

El programa PEFiCA 2.0 está conformado por un conjunto de subprogramas que permiten resolver un tipo de problema mecánico específico. Cada subprograma cuenta con un grupo de rutinas ubicadas en diferentes carpetas, como lo ilustra la Figura 5.1. En particular:

- La carpeta \PEFUNI cuenta con las subrutinas necesarias para resolver dos tipos de problemas mecánicos en un espacio unidimensional. El primero corresponde al problema de barras sometidas a fuerza axial con un grado de libertad por nudo  $i$ , asociado al desplazamiento longitudinal  $u_i$ . El segundo corresponde al problema de barras sometidas a flexión con dos grados de libertad por nudo  $i$ , asociados al desplazamiento transversal  $v_i$  y a la rotación  $\theta_i$ .
- La carpeta \PEFBID contiene las rutinas de solución de un problema bidimensional en condición plana de esfuerzos o de deformaciones, considerando como grados de libertad por nudo  $i$  a los desplazamientos  $u_i$  y  $v_i$  en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente.
- El contenido de la carpeta \PEFTRI permite resolver problemas tridimensionales donde cada nudo  $i$  tiene como grados de libertad los desplazamientos  $u_i$ ,  $v_i$  y  $w_i$ , en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Tales carpetas contienen su propio archivo PEFICA.m y sus propias sub-carpetas \FUNCIONES y \DATOS. La carpeta \FUNCIONES contiene archivos de extensión .m con cada una de las subrutinas propias escritas en lenguaje GNU-Octave. En cambio, la carpeta \DATOS contiene los archivos de entrada de datos y de presentación de resultados de cada problema resuelto. El archivo PEFICA.m contiene la rutina principal del programa en lenguaje GNU-Octave, desde donde se llaman a las funciones propias del programa almacenadas en la carpeta \FUNCIONES y se leen los datos y se escriben los resultados contenidos en la carpeta \DATOS.

## 5.6 Formatos de los archivos de entrada y de salida

El programa lee los datos de un problema desde un archivo de entrada y escribe los resultados en un archivo de salida. En particular, los archivos de entrada del problema pueden escribirse de dos formas:

- Como *script* de GNU-Octave con extensión .m, el cual puede ser generado por el programa GiD o puede escribirse directamente.

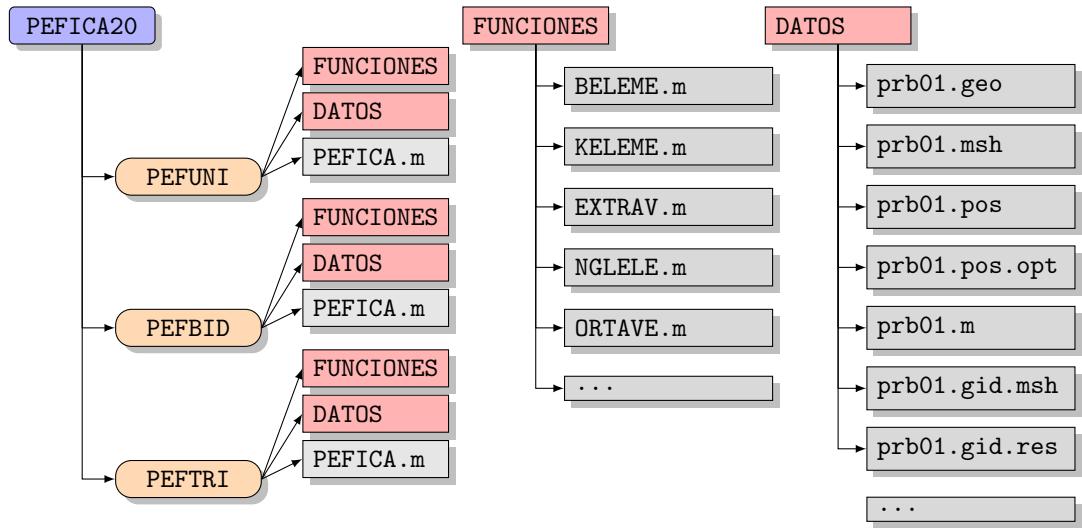


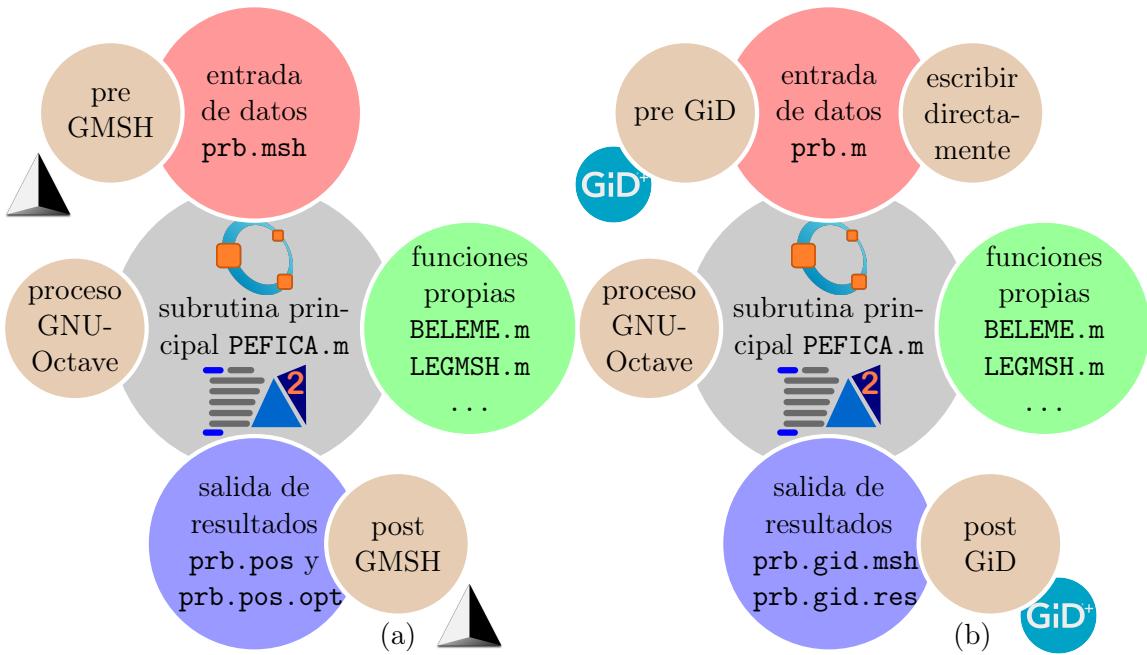
Figura 5.1: Árbol de carpetas y archivos del programa PEFiCA 2.0

- En formato de GMSH con extensión .msh.

Se pueden presentar tablas de resultados directamente en la ventana de comando de GNU-Octave. Asimismo, el programa puede generar los archivos de salida para la representación gráfica de los resultados de dos maneras diferentes:

- En formato de GMSH con extensiones .pos y .pos.opt.
- En formato de GiD con extensiones .gid.res y .gid.msh.

El nombre del archivo de entrada se utiliza para designar a los archivos de salida cambiando su extensión. Por ejemplo, si se ejecuta el programa PEFiCA 2.0 con los datos del archivo de entrada prb.msh en formato GMSH, se obtienen los archivos de salida prb.pos y prb.pos.opt, o si se ejecuta el programa con los datos de entrada prb.m exportados de GiD, se obtienen los archivos de salida prb.gid.msh y prb.gid.res. La Figura 5.2(a) y (b) describen la estructura de PEFiCA 2.0 utilizando preproceso y postproceso con el programa GMSH y con GiD, respectivamente. Además, se puede combinar una lectura de datos de GMSH, con una salida de resultados con GiD, o viceversa.



**Figura 5.2:** Estructura del programa PEFICA 2.0 para cada tipo de problema utilizando: (a) preproceso con GMSH y postproceso con GMSH, (b) preproceso con GiD o escrito directamente y postproceso con GiD.

## 5.7 Instalación del programa PEFICA 2.0

La instalación del programa PEFICA 2.0 en los sistemas operativos Windows, Linux o MacOS, requiere los siguientes procedimientos:

- Descargar e instalar el programa gratuito GNU-Octave con interfaz gráfica (GUI) desde su página web <https://www.gnu.org/software/octave/>. El código fuente de PEFICA 2.0 se puede compilar con este programa. Particularmente para sistema operativo MacOS, se recomienda descargar e instalar la versión *Octave 4.0.3 with graphical user interface*, la cual no depende de emuladores de otro sistema operativo o de la conexión a Internet.
- Descargar e instalar el programa gratuito GMSH desde su página web <http://gmsh.info/>. El preproceso de los datos de entrada y el postproceso de los

resultados de problemas en dos y tres dimensiones se pueden realizar con este programa.

- Descargar el programa PEFICA 2.0 desde el vínculo <https://www.dropbox.com/s/or6atr96ffeuois5/PEFICA20.zip?dl=0>. El archivo PEFICA20.zip descargado, se descomprime y se ubica en el disco duro.

Como alternativas a los programas GNU–Octave y GMSH se pueden utilizar los programas Matlab y GiD, respectivamente. Es posible descargar e instalar versiones limitadas de estos programas de forma gratuita. El programa Matlab dispone de una versión de prueba por 30 días que se puede descargar en su página web <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>. En cambio, el programa GiD cuenta con una versión limitada a mallas de 1000 elementos finitos que se puede descargar en <https://www.gidhome.com/>.



## Capítulo 6

# Lenguaje y compilador GNU–Octave

GNU–Octave es un lenguaje de programación interpretado o de alto nivel, preparado para cálculos numéricos de diferentes tipos (Eaton, Bateman, Hauberg, & Wehbring, 2019). Actualmente, las instrucciones de este programa se pueden ejecutar desde una consola de líneas de comandos (CLI) o utilizando una interfaz gráfica de usuario (GUI), mucho más amigable.

Las rutinas o funciones del programa PEFiCA 2.0 han sido escritas en archivos `.m` en el lenguaje interpretado de GNU–Octave cuidando su compatibilidad con el lenguaje de Matlab. Por lo tanto, una de estas dos herramientas es necesaria para compilar y ejecutar dichas rutinas.

### 6.1 Interfaz gráfica de usuario

La interfaz gráfica de usuario (GUI) del programa GNU–Octave contiene un menú superior y varias ventanas distribuidas en la pantalla, como se indica en la Figura 6.1. Por defecto a la izquierda de la pantalla se encuentran las ventanas: Explorador de archivos (o File Browser), Espacio de trabajo (o Workspace) e Historial de comandos (o Command History).

El Explorador de archivos permite buscar y seleccionar un archivo o una carpeta específica. Ésta última está sincronizada con el Directorio actual del menú superior.

El **Espacio de trabajo** indica el nombre, el valor y los atributos de las variables definidas directamente en la **Ventana de comandos**. Las funciones y los *scripts* de GNU–Octave mantienen sus variables como internas y no son cargadas al espacio de trabajo. En consecuencia, cuando se ejecuta la función principal las variables no aparecen en la ventana **Espacio de trabajo**.

El **Historial de comandos** contiene una lista las instrucciones establecidas previamente desde la **Ventana de comandos**, que permite la selección de tales instrucciones.

El área de la pantalla está ocupada en su mayoría por las ventanas: **Ventana de Comandos** (o **Command Window**), **Editor** (o **Editor**) y **Documentación** (o **Documentation**), que por defecto están superpuestas y se pueden activar haciendo clic en la pestaña con su nombre ubicada en la parte inferior.

La **Ventana de Comandos** permite la ejecución de las instrucciones, funciones y *scripts* del programa. Se utiliza de la misma forma que el entorno de consola de líneas de comandos (CLI).

La ventana de **Editor** permite crear, ver y modificar un archivo de extensión **.m**, en el cual se escriben funciones o los *scripts* en el lenguaje de GNU–Octave.

La ventana **Documentación** contiene la ayuda inmediata de las instrucciones propias del programa.

Con el fin de conservar los caracteres del idioma español de los comentarios en los archivos **.m**, en el programa GNU–Octave para sistema operativo Windows se sugiere seleccionar la pestaña **Editor** en el menú **Editar > Preferencias ...** y escoger la opción **UTF-8** en la codificación de texto usado para cargar y guardar.

Particularmente, para visualizar correctamente los saltos de línea de los archivos **.m**, utilizando un editor de texto en sistema operativo Mac, se sugiere que en el programa GNU–Octave se realice lo siguiente: seleccionar la pestaña **Editor** en el menú **Editar > Preferencias ...** y escoger la opción **Windows(CRLF)** en la identificador de fin de línea por defecto.

Para utilizar PEFICA 2.0 se debe: (i) establecer el directorio de trabajo, (ii) tener o construir el archivo de entrada de datos y (iii) ejecutar el programa. A continuación se describen estas etapas.

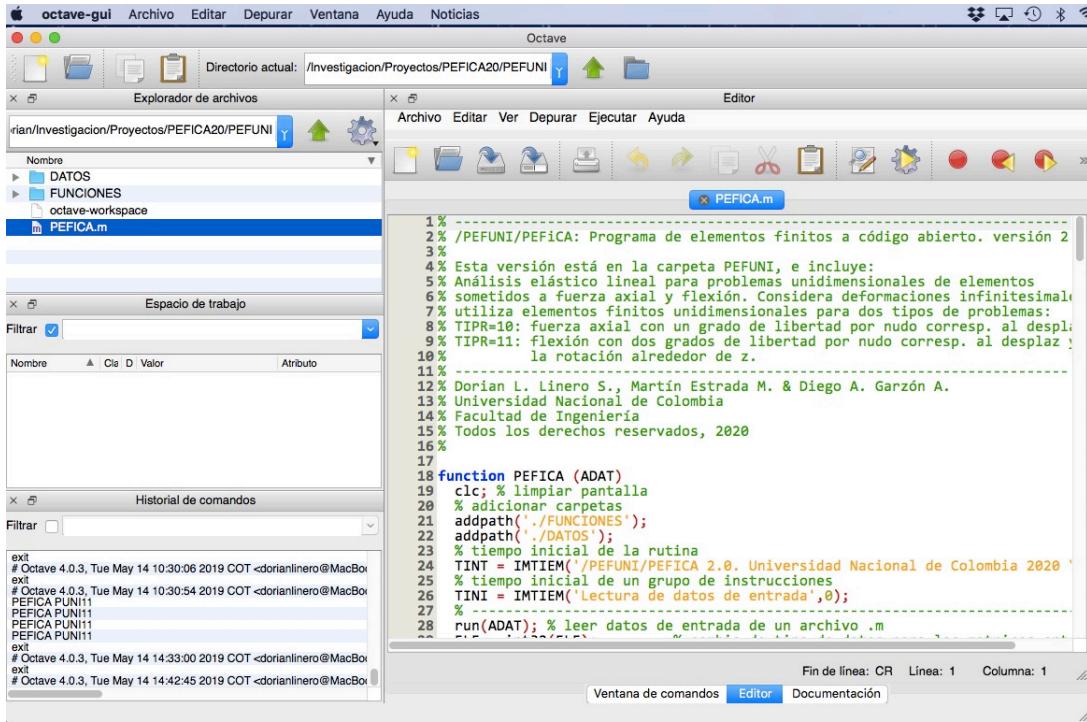


Figura 6.1: GNU–Octave. Interfaz gráfica de usuario (GUI).

### 6.1.1 Selección del directorio de trabajo

El directorio de trabajo de PEFiCA 2.0 es la carpeta \PEFUND, \PEFBID o \PEFTRI, que contiene al archivo PEFICA.m correspondiente al tipo de problema. En la interfaz gráfica de usuario de GNU–Octave, el directorio de trabajo se selecciona en la caja de texto Directorio actual del menú superior directamente o escogiendo dicha carpeta en el Explorador de archivos.

### 6.1.2 Archivos de entrada de datos tipo *script*

El paquete del programa PEFiCA 2.0 contiene ejemplos de cada tipo de problema, cuyos archivos de entrada están localizados en la sub-carpeta \DATOS. Asimismo, los archivos de entrada construidos por el usuario deben estar ubicados en esta misma carpeta y su extensión debe ser .m. La sintaxis de este tipo de archivos se describe en las Subsecciones 7.1, 8.1.1 y 9.1.1, para cada tipo de problema.

Un archivo de entrada se puede editar en la ventana **Editor**, seleccionándolo y haciendo doble clic sobre él en el **Explorador de Archivos** de la interfaz gráfica del usuario (GUI).

### 6.1.3 Edición de archivos de la función principal de las demás funciones propias

Cada tipo de problema se resuelve ejecutando la función principal PEFICA contenida en un archivo **PEFICA.m**. La función principal utiliza instrucciones intrínsecas de GNU-Octave y funciones propias de PEFICA 2.0 ubicadas en la sub-carpetas \FUNCTIONES.

La función principal o las demás funciones propias se pueden editar en la ventana **Editor**. Esto se realiza haciendo doble clic sobre una de ellas en el **Explorador de Archivos** del GUI.

Después de modificar o crear una función, el archivo que la contiene se guarda seleccionando **Archivo > Guardar Archivo** (o **File > Save File**) en el menú superior de la ventana **Editor**.

## 6.2 Limites del programa PEFICA 2.0 compilado en GNU-Octave

El programa GNU-Octave permite construir matrices cuyo número de coeficientes sea menor a  $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$  cuando ha sido compilado en un interpretador a 32 bits y de  $2^{63} - 1 = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,807$  para 64 bits. En consecuencia el tamaño máximo de una matriz cuadrada almacenada será de 46 340 para 32 bits y de  $3.037 \times 10^9$  para 64 bits.

El arreglo matricial de mayor tamaño en la formulación del método de los elementos finitos corresponde a la matriz de rigidez, la cual se puede almacenar de diferentes formas. Particularmente, el programa PEFICA 2.0 construye la matriz de rigidez cuadrada sin estrategias que reduzcan su tamaño.

Dim.	Problema	GL por nudo	máx. nudos 32-bit	máx. nudos 64-bit
1D	Barra axial	1	46 340	$3\ 037 \times 10^6$
1D	Barra flexión	2	23 170	$1\ 518 \times 10^6$
2D	Barra axial*	2	23 170	$1\ 518 \times 10^6$
2D	Pórtico*	3	15 446	$1\ 012 \times 10^6$
2D	Sólido	2	23 170	$1\ 518 \times 10^6$
3D	Pórtico*	6	7 723	$506 \times 10^6$
3D	Cascaron*	6	7 723	$506 \times 10^6$
3D	Sólido	3	15 446	$1\ 012 \times 10^6$

**Tabla 6.1:** Número máximo de nudos del programa PEFICA 2.0 limitado por su compilación en GNU–Octave, sin considerar las características técnicas del computador. (\*) tipos de problema que serán desarrollados en nuevas versiones del programa.

De acuerdo a lo anterior, PEFICA 2.0 está limitado por GNU–Octave, a un número máximo de nudos para cada tipo de problema como lo indica la Tabla 6.1. Sin embargo, el número máximo de nudos se reduce en función del procesador y la memoria RAM que tenga el computador.

### 6.3 Ejecución de la rutina principal del programa

Después de construido el archivo de entrada se puede analizar el problema ejecutando la rutina `PEFICA.m` como una función de GNU–Octave. En la Ventana de Comandos se escribe la siguiente instrucción seguida de la tecla `enter`:

```
>> PEFICA <adat> <ople>
```

donde `<adat>` es el nombre del archivo de entrada de datos escrito sin extensión, que debe estar contenido en la sub-carpeta `\DATOS`. De acuerdo con la opción de lectura y escritura, PEFICA 2.0 lee:

- un archivo de extensión `.m`, el cual se genera con el programa GiD o se escribe directamente, o
- un archivo de extensión `.msh`, el cual se exporta desde GMSH como Version 2 ASCII.

La opción de lectura de datos y escritura de resultados se establece con el parámetro  $\langle ople \rangle$ . Éste último se omite en el análisis de problemas unidimensionales con el programa \PEFUNI\PEFICA. En cambio, tal opción se aplica a los análisis bi- o tridimensionales, realizados con los programas \PEFBID\PEFICA o \PEFTRI\PEFICA, respectivamente.

### 6.3.1 Opciones para el análisis bidimensional

Las opciones en un análisis bidimensional ejecutando el programa \PEFBID\PEFICA, son las siguientes:

- Si  $\langle ople \rangle=04$ , se leen los datos de un archivo .m y se dibuja la malla en mediante la sintaxis Tikz para LaTeX.
- Si  $\langle ople \rangle=05$ , se leen los datos de un archivo .m y se escribe de acuerdo con el parámetro interno IMPR. Si IMPR=2 se escriben los resultados en .gid.res y .gid.msh de GiD.
- Si  $\langle ople \rangle=06$ , se leen los datos de un archivo .m y se escriben los resultados en .gid.res y .gid.msh de GiD, y en la ventana de comando de GNU-Octave.
- Si  $\langle ople \rangle=07$ , se leen los datos de un archivo .m y se escriben los resultados en los archivos .pos y .pos.opt de GMSH. Tales resultados incluyen esfuerzos y deformaciones promedio en nudos (parámetro interno PRO=0).
- Si  $\langle ople \rangle=08$ , se leen los datos de un archivo .m y se escriben los resultados en los archivos .pos y .pos.opt de GMSH. Tales resultados incluyen esfuerzos y deformaciones evaluados en el interior de los elementos (parámetro interno PRO=1).
- Si  $\langle ople \rangle=10$ , se leen los datos de un archivo .msh de GMSH y se escriben los resultados en los archivos .pos y .pos.opt de GMSH. Tales resultados incluyen esfuerzos y deformaciones promedio en nudos (parámetro interno PRO=0). Si se omite  $\langle ople \rangle$  se tomará un valor por defecto de 10.

- Si  $\langle ople \rangle = 11$ , se leen los datos de un archivo `.msh` de GMSH y se escriben los resultados en los archivos `.pos` y `.pos.opt` de GMSH. Tales resultados incluyen esfuerzos y deformaciones en el interior de cada elemento (parámetro interno `PRO=1`).
- Si  $\langle ople \rangle = 12$ , se leen los datos de un archivo `.msh` de GMSH y se escriben los resultados en los archivos `.pos` y `.pos.opt` de GMSH. Tales resultados incluyen esfuerzos y deformaciones promedio en nudos (parámetro interno `PRO=2`), separados por categorías de material y espesor. Adicionalmente, se imprime en la ventana de comandos las fuerzas de reacción del problema.
- Si  $\langle ople \rangle = 17$ , se leen los datos de un archivo `.msh` de GMSH y se escriben los resultados en `.gid.res` y `gid.msh` de GiD.
- Si  $\langle ople \rangle = 19$ , se leen los datos de un archivo `.msh` de GMSH y se dibuja la malla en mediante la sintaxis Tikz para LaTeX.

### 6.3.2 Opciones para el análisis tridimensional

Las opciones en un análisis tridimensional realizado con el programa \PEFTRI\PEFICA son las siguientes:

- Si  $\langle ople \rangle = 10$ , se leen los datos de un archivo `.msh` de GMSH y se escriben los resultados en los archivos `.pos` y `.pos.opt` de GMSH. Tales resultados incluyen esfuerzos y deformaciones promedio en nudos (parámetro interno `PRO=0`). Si se omite  $\langle ople \rangle$  se tomará este valor por defecto.
- Si  $\langle ople \rangle = 11$ , se leen los datos de un archivo `.msh` de GMSH y se escriben los resultados en los archivos `.pos` y `.pos.opt` de GMSH. Tales resultados incluyen esfuerzos y deformaciones en el interior de cada elemento (parámetro interno `PRO=1`).
- Si  $\langle ople \rangle = 12$ , se leen los datos de un archivo `.msh` de GMSH y se escriben los resultados en los archivos `.pos` y `.pos.opt` de GMSH. Tales resultados incluyen esfuerzos y deformaciones promedio en nudos (parámetro interno `PRO=2`),

separados por categorías de material. Adicionalmente, se imprime en la ventana de comandos las fuerzas de reacción del problema.

- Si  $\langle ople \rangle = 13$ , se leen los datos de un archivo .msh de GMSH y se escriben los resultados en los archivos .pos y .pos.opt de GMSH. Tales resultados incluyen esfuerzos y deformaciones en el interior de cada elemento (parámetro interno PRO=3), separados por categorías de material.
- Si  $\langle ople \rangle = 14$ , se leen los datos de un archivo .msh de GMSH y se escriben los resultados en los archivos .pos y .pos.opt de GMSH. Tales resultados incluyen esfuerzos, deformaciones y direcciones principales de esfuerzo promedio en nudos (parámetro interno PRO=4), separados por categorías de material.
- Si  $\langle ople \rangle = 07$ , se leen los datos de un archivo .m y se escriben los resultados en los archivos .pos y .pos.opt de GMSH. Tales resultados incluyen esfuerzos y deformaciones en el interior de los elementos (parámetro interno PRO=1).

Durante la ejecución de la instrucción anterior se observará el progreso de las etapas de cálculo y el tiempo empleado, en la misma ventana de comandos. Por ejemplo, durante la ejecución de un problema se observa el Listado 6.1.

```

1000 -----
1001 PEFICA 2.0. Universidad Nacional de Colombia 2020
1002 -----
1003 PEFTRI/PEFICA: Analisis tridimensional elastico lineal
1004 escriba PEFICA <nombre archivo datos .m o .msh> <opciones lectura>
1005 el parametro <opciones lectura> puede ser igual a:
1006 ...
1007 -----
1008 Inicio de ejecucion del programa
1009 Lectura de datos de entrada de archivo .msh de GMSH ( 0.11 seg.)
1010 Grados de libertad de nudos y elementos ( 0.02 seg.)
1011 Malla de 8 nudos, 5 elementos y 24 GLs
1012 Matriz de rigidez del solido ( 0.10 seg.)
1013 Vectores de fuerzas en los nudos del solido ( 0.01 seg.)
1014 Desplazamientos y reacciones en los nudos del solido ( 0.01 seg.)
1015 Deformaciones y esfuerzos en cada elemento ( 0.11 seg.)
1016 Presentacion de resultados en GMSH (.pos y .pos.opt) ( 0.08 seg.)
1017 Tiempo total de ejecucion del programa ( 0.45 seg.)

```

---

**Listado 6.1:** Ventana de comandos de GNU–Octave durante la ejecución del programa PEFICA.

## Capítulo 7

# Implementación de la solución del problema mecánico elástico lineal unidimensional

Este capítulo presenta algunos aspectos de la implementación del método de los elementos finitos para la solución dos tipos de problema mecánico elástico lineal unidimensional mediante funciones escritas en GNU–Octave. Tales funciones están almacenadas en la carpeta \PEFUNI del programa didáctico de elementos finitos a código abierto PEFiCA 2.0, incluido en este libro. La rutina principal del programa está contenida en el archivo \PEFUNI\PEFICA.m.

El primer tipo de problema corresponde al comportamiento mecánico de barras sometidas a fuerza axial con un grado de libertad por nudo, el cual está asociado al desplazamiento en la dirección longitudinal, como se indica en la Figura 2.1.

El segundo tipo de problema corresponde al comportamiento mecánico de barras sometidas a flexión con dos grados de libertad por nudo, los cuales corresponden al desplazamiento transversal y a la rotación normal al plano, como se muestra en la Figura 2.6.

## 7.1 Archivo de entrada tipo *script* de GNU–Octave y variables de datos del programa

El archivo de entrada tipo *script* de GNU–Octave para problemas unidimensionales contiene la definición de variables escalares y matriciales que describen: la malla de elementos finitos, las propiedades mecánicas y geométricas, las condiciones de borde y las cargas aplicadas del problema. Los nombres designados a dichas variables son los mismos utilizados posteriormente en la rutina principal de proceso. Estos archivos de entrada deben estar ubicados en la sub-carpeta \DATOS dentro de la carpeta \PEFUNI.

### 7.1.1 Parámetros generales del problema

Inicialmente se define el tipo de problema y las opciones de impresión de resultados mediante las variables escalares **TIPR** y **IMPR**, respectivamente. Si **TIPR=10** el programa resuelve un problema de barra sometida a fuerza axial, en cambio, si **TIPR=11** soluciona un problema de barra sometida a flexión. Asimismo, la impresión de resultados cuentan con las siguientes opciones:

- **IMPR=0** establece que no se imprimen o presentan resultados.
- **IMPR=1** imprime resultados en la ventana de comando.
- **IMPR=2** presenta resultados mediante gráficas de GNU–Octave.
- **IMPR=3** escribe un archivo fuente para LaTeX que contiene la malla de elementos finitos dibujada con las instrucciones del paquete TikZ.
- **IMPR=4** presenta los resultados promedio en los nudos en la ventaja de comando y mediante gráficas de GNU–Octave, para problemas de barras sometidas a fuerza axial.
- **IMPR=8** imprime los resultados en la ventana de comando y presenta gráficas en GNU–Octave. Equivale a las opciones **IMPR=1** y **IMPR=2** simultáneamente.
- **IMPR=9** imprime los resultados en todas las opciones anteriores.

### 7.1.2 Tabla de categorías

La tabla de categorías o matriz **CAT** contiene en cada fila las propiedades mecánicas del material, los parámetros de la geometría y el tipo de elemento finito, en unidades consistentes de fuerza y de longitud. El número de la fila identifica el número de la categoría.

Para el problema unidimensional de barras sometidas a fuerza axial (**TIPR=10**), cada categoría contiene: el módulo de elasticidad o módulo de Young del material  $\langle eyou \rangle$ , el área de la sección transversal  $\langle area \rangle$  y el tipo de elemento finito  $\langle tipe \rangle$ . Se cuenta con elementos unidimensionales de continuidad  $C_0$ , de aproximación lineal cuando  $\langle tipe \rangle=101$  y de aproximación cuadrática cuando  $\langle tipe \rangle=102$ . El formato de cada fila de la matriz **CAT** en problemas de barras sometidas a fuerza axial es de la forma:

$$\text{CAT} = [ \langle eyou \rangle \langle area \rangle \langle tipe \rangle ;$$

donde la última fila termina con `];.`

En el ejemplo mostrado en la Figura 2.1, se definen dos categorías que difieren en el área de la sección transversal ( $A_I = 1963.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2$  y  $A_{II} = 490.87 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ ) y conservan el mismo módulo de elasticidad de  $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  y el mismo tipo de elemento unidimensional lineal ( $\langle tipe \rangle=101$ ). En este caso se escribe la tabla de categorías en el archivo de entrada de datos del ejemplo de la forma indicada en el Listado 7.1.

---

```
1000 CAT = [ ...
 200E6 1963.5E-06 101 ;      % 1
1002 200E6 490.87E-06 101 ];    % 2
```

---

**Listado 7.1:** Tabla de categorías del ejemplo de barra sometida a fuerza axial.

En cambio, para el problema unidimensional de barras sometidas a flexión (**TIPR=11**), cada categoría contiene: el módulo de elasticidad o módulo de Young del material  $\langle eyou \rangle$ , la inercia a la flexión de la sección transversal  $\langle iner \rangle$  y el tipo de elemento finito  $\langle tipe \rangle$ . Se cuenta con un tipo de elemento unidimensional de continuidad  $C_1$  y aproximación cúbica, identificado como  $\langle tipe \rangle=111$ . El formato de cada fila de la matriz **CAT** en problemas de barras sometidas a flexión es de la forma:

```
CAT = [ <eyou> <iner> <tipe> ;
```

donde la última fila termina con ] ;.

En el ejemplo mostrado en la Figura 2.6, se definen dos categorías que difieren en el momento de inercia de la sección transversal ( $I_{AA} = 367.10 \times 10^{-6} \text{ m}^4$  y  $I_{BB} = 478.80 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ) y conservan el mismo módulo de elasticidad de  $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  y el mismo tipo de elemento unidimensional lineal ( $\langle tipe \rangle = 111$ ). En este caso se escribe la tabla de categorías en el archivo de entrada de datos del ejemplo de la forma indicada en el Listado 7.2.

```
1000 CAT = [ ...
200E6 3.6710E-04 111 ;      % 1
1002 200E6 4.7880E-04 111 ];    % 2
```

**Listado 7.2:** Tabla de categorías del ejemplo de barra sometida a flexión.

### 7.1.3 Tabla de conectividades y categorías de los elementos

La tabla de conectividades y categorías de los elementos o matriz ELE contiene en cada fila los identificadores de la categoría  $\langle icat \rangle$  y de los nudos de cada elemento  $\langle nud_i \rangle \langle nud_j \rangle \dots$ . En consecuencia el número de filas de ELE corresponde al número de elementos finitos NELE y el número de columnas será 1 más la cantidad de nudos de un elemento NNUE. El número de la fila identifica al número del elemento finito de forma secuencial. El formato de cada fila de la matriz ELE con elementos de dos nudos es de la forma:

```
ELE = [ <icat> <nudi> <nudj> ;
```

donde la última fila termina con ] ;.

La Figura 2.1 ilustra una malla de 3 elementos unidimensionales lineales con 2 nudos por elemento. La tabla de conectividades y categorías por elemento se escribe en el archivo de entrada como lo indica el Listado 7.3.

```
1000 ELE = [ ...
1 4 1 ;      % 1
1002 2 1 2 ;    % 2
2 2 3 ];      % 3
```

---

**Listado 7.3:** Tabla de conectividades y categorías de los elementos del ejemplo de barra sometida a fuerza axial.

La Figura 2.6(b) ilustra una malla de 4 elementos unidimensionales de 2 nudos, con aproximación cúbica y continuidad  $C_1$  para problemas de flexión. La tabla de conectividades y categorías por elemento se escribe en el archivo de entrada como lo indica el Listado 7.4.

```
1000 ELE = [ ...
 1002   1 1 2 ; % 1
 1002   2 2 3 ; % 2
 1002   2 3 4 ; % 3
 1004   1 4 5 ]; % 4
```

---

**Listado 7.4:** Tabla de conectividades y categorías de los elementos del ejemplo de barra sometida a flexión.

#### 7.1.4 Tabla de coordenadas de los nudos

La tabla de coordenadas de los nudos o matriz XYZ de problemas unidimensionales contiene en cada fila la coordenada  $x$  de los nudos de la malla. En la única columna se introduce el valor  $\langle xnud \rangle$  de la coordenada  $x$  del nudo en la unidad de longitud escogida para el problema. El número de la fila identifica al número del nudo de forma secuencial. El formato de cada fila de la matriz XYZ en problemas unidimensionales es de la forma:

$$XYZ = [ \langle xnud \rangle ;$$

donde la última fila termina con  $] ;$ .

En el archivo de entrada se escribe la tabla de coordenadas de los nudos del ejemplo de barras a fuerza axial de la Figura 2.1, como se indica en el Listado 7.5.

```
1000 XYZ = [ ...
 1002   4.00 ; % 1
 1002   6.00 ; % 2
 1002   8.00 ; % 3
 1004   0.00 ]; % 4
```

---

**Listado 7.5:** Tabla de coordenadas de los nudos del ejemplo de barra sometida a fuerza axial.

Para el ejemplo de barras sometidas a flexión de la Figura 2.6(b), la tabla de coordenadas escrita en el archivo de entrada se indica en el Listado 7.6.

```
1000 XYZ = [ ...
1002   0.00 ;      % 1
1002   3.00 ;      % 2
1004   4.00 ;      % 3
1004   5.00 ;      % 4
1004   8.00 ];      % 5
```

**Listado 7.6:** Tabla de coordenadas de los nudos del ejemplo de barra sometida a flexión.

### 7.1.5 Tabla de desplazamientos conocidos en los nudos

La tabla de desplazamientos conocidos en los nudos o matriz UCO establece cuáles desplazamientos en los nudos son conocidos y su respectivo valor en unidades consistentes de longitud.

En problemas unidimensionales de barras sometidas a fuerza axial ( $TIPR=10$ ), la primera columna de la matriz UCO contiene el identificador del nudo  $\langle inud \rangle$ , la segunda columna indica con  $\langle dcux \rangle=1$  si el desplazamiento en dirección  $x$  es conocido y con  $\langle dcux \rangle=0$  si es desconocido, y la tercera columna almacena el valor de dicho desplazamiento  $\langle vaux \rangle$ , en el caso que sea conocido. El formato de cada fila de la matriz UCO en problemas de barras sometidas a fuerza axial es de la forma:

$$UCO = [ \langle inud \rangle \langle dcux \rangle \langle vaux \rangle ; ]$$

donde la última fila termina con  $] ;$ .

En el ejemplo de barra a fuerza axial mostrado en la Figura 2.1, el desplazamiento en dirección  $x$  en los nudos 3 y 4 es conocido e igual a 0. Por lo tanto, la matriz UCO es de la forma mostrada en el Listado 7.7.

```
1000 UCO = [ ...
1002   003 1 0.0000 ;
1002   004 1 0.0000 ];
```

**Listado 7.7:** Tabla de desplazamientos conocidos del ejemplo de barra sometida a fuerza axial.

En cambio, para el problema unidimensional de barras sometidas a flexión ( $TIPR=11$ ), la matriz UCO contiene en la primera columna el identificador del nudo  $\langle inud \rangle$ , en la

segunda columna se indica con  $\langle dcuy \rangle = 1$  si el desplazamiento en dirección  $y$  es conocido y con  $\langle dcuy \rangle = 0$  si es desconocido, en la tercera columna se indica con  $\langle dcrz \rangle = 1$  si la rotación en dirección  $z$  es conocida y con  $\langle dcrz \rangle = 0$  si es desconocida, en la cuarta columna se almacena el valor del desplazamiento en  $y$   $\langle vauy \rangle$ , y en la quinta columna se escribe el valor de la rotación alrededor de  $z$  en radianes  $\langle varz \rangle$ . El formato de cada fila de la matriz UCO en problemas de barras sometidas a flexión es de la forma:

$$\text{UCO} = [ \langle inud \rangle \langle dcuy \rangle \langle dcrz \rangle \langle vauy \rangle \langle varz \rangle ;$$

donde la última fila termina con  $] ;$ .

En el ejemplo de barra a flexión mostrado en la Figura 2.6(c), el empotramiento en el extremo izquierdo establece que el desplazamiento en dirección  $y$  y la rotación alrededor de  $z$  en el nudo 1 es conocida e igual a 0. Asimismo, la articulación del extremo derecho o nudo 5 define al desplazamiento en  $y$  como conocido e igual a 0. Por lo tanto, la matriz UCO correspondiente es indicada en el Listado 7.8.

```
1000 UCO = [ ...
001 1 1 0.0000 0.0000 ;
1002 005 1 0 0.0000 0.0000 ];
```

**Listado 7.8:** Tabla de desplazamientos conocidos del ejemplo de barra sometida a flexión.

### 7.1.6 Tabla de fuerzas aplicadas en los nudos

La tabla de fuerzas aplicadas en los nudos o matriz FUN indica el nudo y el valor de la fuerza aplicada en unidades consistentes.

En problemas unidimensionales de barras sometidas a fuerza axial (TIPR=10), la primera columna de la matriz FUN contiene el identificador del nudo donde ocurre la fuerza puntual  $\langle inud \rangle$  y la segunda columna establece su valor  $\langle funx \rangle$ . El signo positivo de la fuerza puntual corresponde con el sentido positivo del eje  $x$ . El formato de cada fila de la matriz FUN en problemas de barras sometidas a fuerza axial es de la forma:

$$\text{FUN} = [ \langle inud \rangle \langle funx \rangle ;$$

donde la última fila termina con  $] ;$ .

En el ejemplo de barra sometida a fuerza axial mostrado en la Figura 2.1, se aplica una fuerza puntual de 50 kN dirección  $x$  en el nudo 2. Por lo tanto, la matriz FUN es de la forma mostrada en el Listado 7.9.

---

```
1000 FUN = [ 002 50.0 ];
```

---

**Listado 7.9:** Tabla de fuerzas puntuales en los nudos del ejemplo de barra sometida a fuerza axial.

En cambio, para el problema unidimensional de barras sometidas a flexión (**TIPR=11**), la matriz FUN contiene: el identificador del nudo cargado  $\langle inud \rangle$  en la primera columna, el valor de la carga puntual en dirección  $y$   $\langle funy \rangle$  en la segunda columna, y el valor del momento alrededor del eje  $z$   $\langle fumz \rangle$ . El signo positivo de la fuerza puntual y del momento corresponden con el sentido positivo de los ejes  $y$ , y  $z$ , respectivamente. El formato de cada fila de la matriz FUN en problemas de barras sometidas a flexión es de la forma:

$$UCO = [ \langle inud \rangle \langle funy \rangle \langle fumz \rangle ] ;$$

donde la última fila termina con  $] ;$ .

En el ejemplo de barra sometida a flexión mostrado en la Figura 2.6(b), se aplica una fuerza puntual de 40 kN dirección  $-y$  en el nudo 4. Por lo tanto, la matriz FUN es de la forma mostrada en el Listado 7.10.

---

```
1000 FUN = [ 004 -40.0 0.00 ];
```

---

**Listado 7.10:** Tabla de fuerzas puntuales en los nudos del ejemplo de barra sometida a flexión.

### 7.1.7 Tabla de cargas distribuidas uniformes en los elementos

La tabla de cargas distribuidas uniformes aplicadas en los elementos o matriz FDI indica los elementos finitos sobre los cuales actúa una carga distribuida uniforme y su respectiva magnitud en unidades consistentes de fuerza y longitud.

En problemas unidimensionales de barras sometidas a fuerza axial (**TIPR=10**), la matriz FDI contiene: el identificador del elemento finito  $\langle ie \rangle$  en la primera columna y el valor de la carga distribuida aplicada en dirección  $x$   $\langle we \rangle$  en la segunda columna. El signo positivo de la carga corresponde con el sentido positivo del eje  $x$ .

El formato de cada fila de la matriz FDI en problemas unidimensionales en general es de la forma:

$$\text{FDI} = [ \langle \text{inud} \rangle \langle \text{wele} \rangle ;$$

donde la última fila termina con ].

En el ejemplo de barra sometida a fuerza axial mostrado en la Figura 2.1, se aplica una carga distribuida uniforme de 10 kN/m sobre el elemento 1. Por lo tanto, la matriz FDI es de la forma mostrada en el Listado 7.11.

---

```
1000 FDI = [ 001 10.0 ];
```

---

**Listado 7.11:** Tabla de de cargas distribuidas uniformes en los elementos del ejemplo de barra sometida a fuerza axial.

En cambio, en problemas unidimensionales de barras sometidas a flexión (TIPR=11), la matriz FDI contiene: el identificador del elemento finito  $\langle iele \rangle$  en la primera columna y el valor de la carga distribuida aplicada en dirección  $y$   $\langle wele \rangle$  en la segunda columna. El signo positivo de la carga corresponde con el sentido positivo del eje  $y$ .

En el ejemplo de barra sometida a flexión mostrado en la Figura 2.6(b), se aplica una carga distribuida uniforme de 6 kN/m en dirección  $-y$  sobre los elementos 1 y 2. Por lo tanto, la matriz FDI es de la forma mostrada en el Listado 7.12.

---

```
1000 FDI = [ ...
 001 -6.0 ;
1002 002 -6.0 ];
```

---

**Listado 7.12:** Tabla de de cargas distribuidas uniformes en los elementos del ejemplo de barra sometida a flexión.

## 7.2 Variables del proceso de cálculo

La subrutina principal PEFICA.m define un conjunto de variables escalares y matriciales para el análisis por elementos finitos.

### 7.2.1 Variables escalares

Las variables escalares utilizadas en la rutina principal de cálculo son las siguientes:

- **ADAT** es una variable tipo cadena de caracteres que contiene el nombre del archivo de entrada de datos sin extensión.
- **TINT, TINI** y **TFIN** contienen el tiempo medido por el reloj del computador en segundos, para el inicio de la rutina principal, para el inicio de un grupo de instrucciones y para el final de un grupo de instrucciones o de la rutina principal, respectivamente.
- **NELE** contiene el número de elementos finitos de la malla. Esta variable se obtiene del número de filas de la matriz **ELE**.
- **NNUD** contiene el número de nudos de la malla. Esta variable se obtiene del número de filas de la matriz **XYZ**.
- **NDIM** corresponde al número de dimensiones del problema y se obtiene del número de columnas de la matriz **XYZ**. En particular **NDIM=1** para problemas unidimensionales.
- **NGLN** corresponde al número de grados de libertad asociados a cada nudo. Esta variable se obtiene del número de columnas de la tabla **UC0** que indican el valor de los desplazamientos conocidos.
- **NGLT** contienen el número de grados de libertad total de la malla, calculado como **NGLT=NGLN\*NNUD**.
- **NGLC** y **NGLD** contienen el número de grados de libertad conocidos y desconocidos de la malla, respectivamente. **NGLC** se obtiene del número de condiciones de borde impuestas en la tabla **UC0**. Mientras que **NGLD** se calcula como **NGLD=NGLT-NGLC**.

- **IELE** es el identificador de un elemento finito, que se utiliza habitualmente como el contador en un ciclo definido por las instrucciones de GNU–Octave `for ... end`.
- **NUEL** corresponde al número de nudos de un elemento finito específico. Esta variable se obtiene de la función **PELEME** a partir del identificador del tipo de elemento.
- **NKEL** es el tamaño de la matriz de rigidez de un elemento finito específico, almacenada en **KEL**.
- **IKEL** y **JKEL** son los números de fila y de columna dentro de la matriz de rigidez de un elemento **KEL**, respectivamente. Se utilizan como contadores en ciclos definido por las instrucciones de GNU–Octave `for ... end`.
- **WELE** es el valor de la carga distribuida uniforme de un elemento finito específico, extraído de la tabla de cargas distribuidas **FDI**.
- **ICAT** es el identificador de la categoría correspondiente a un elemento finito específico, extraída de la tabla de conectividades y categorías de los elementos **ELE**.
- **NFEL** es el número de columnas del vector de fuerzas equivalentes a cargas distribuidas en un elemento finito específico, almacenada en **FEL**.
- **IFEL** indica el número de fila dentro del vector **FEL**. Se utilizan como contadores en ciclos definido por las instrucciones de GNU–Octave `for ... end`.
- **NXIP** corresponde al número de partes en que se divide un elemento de barra sometida a flexión, para calcular su desplazamiento transversal, fuerza cortante y momento flector.
- **IXIP** es el índice del punto en el interior de un elemento de barra sometido a flexión, en cuyo interior se calculará desplazamiento transversal, fuerza cortante y momento flector. Se utiliza como contador en un ciclo definido por las instrucciones de GNU–Octave `for ... end`.

- **LELE** es la longitud de un elemento finito unidimensional específico. Esta variable se calcula como la diferencia entre las coordenadas  $x$  de los extremos final e inicial del elemento.
- **XIPN** corresponde a la coordenada natural  $0 < \xi < 1$  en la cual se evalúa la función de forma de un elemento finito específico o su derivada.
- **IPOS** define el número de la fila en la tabla de resultados en el interior de los elementos **RIL**, para problemas de barras sometidas a flexión.

### 7.2.2 Variables matriciales

Las variables matriciales utilizadas en la rutina principal de cálculo son las siguientes:

- La tabla de grados de libertad por nudo **MGL** es una matriz de **NNUD** filas por **NGLN** columnas, que contiene los identificadores de los grados de libertad por nudo.
- **UBB** es el sub-vector de desplazamientos nodales conocidos de la malla  $\mathbf{a}_\beta$ , ordenado de acuerdo con la numeración de los grados de libertad. Esta matriz se construye con la información de la tabla de desplazamientos conocidos **UCO**.
- La tabla de incidencias **INC** es una matriz de **NELE** filas por **NGLN\*NNUE** columnas, que contiene en cada fila los identificadores de los grados de libertad de cada elemento finito.
- **XYE** es una matriz que contiene las coordenadas de los nudos de un elemento específico. En particular, para elementos unidimensionales de dos nudos (lineales de continuidad  $C_0$  o cúbicos de continuidad  $C_1$ ) esta matriz es de la forma:

$$\mathbf{XYE} = [ \langle xyei \rangle ; \langle xyej \rangle ]$$

Mientras que para elementos unidimensionales de 3 nudos (cuadráticos de continuidad  $C_0$ ) su formato es:

$$\mathbf{XYE} = [ \langle xyei \rangle ; \langle xyej \rangle ; \langle xyek \rangle ]$$

donde  $\langle xyei \rangle$  y  $\langle xyej \rangle$  son las coordenadas  $x$  de los nudos inicial  $i$  y final  $j$  del elemento, respectivamente. Asimismo,  $\langle xyek \rangle$  corresponde a la coordenada  $x$  del nudo intermedio  $k$  del elemento cuadrático.

- CAE es una matriz fila que contiene las propiedades de la categoría de un elemento, la cual corresponde a la fila de la tabla categorías de un elemento finito específico. En consecuencia su formato es casi el mismo de la matriz CAT, así:

$$\mathbf{CAE} = [ \langle eyou \rangle \langle sect \rangle \langle tipe \rangle ]$$

donde  $\langle eyou \rangle$  es el módulo de elasticidad,  $\langle tipe \rangle$  es el identificador del tipo de elemento y  $\langle sect \rangle$  corresponde al área de la sección transversal para problemas de barras a fuerza axial  $\langle area \rangle$  o a la inercia de la sección transversal para problemas de barras a flexión  $\langle iner \rangle$ . El identificador del tipo de elemento  $\langle tipe \rangle$  corresponde a  $\langle tipe \rangle = 101$  para un elemento lineal de continuidad  $C_0$  en barras sometidas a fuerza axial,  $\langle tipe \rangle = 102$  para un elemento cuadrático de continuidad  $C_0$  en barras sometidas a fuerza axial, y a  $\langle tipe \rangle = 111$  para un elemento cúbico de continuidad  $C_1$  en barras sometidas a flexión.

- KEL y KGS son las matrices de rigidez de un elemento finito específico de tamaño NCEL y la matriz de rigidez de la malla de tamaño NGLT, respectivamente. La matriz de rigidez de la malla KGS se obtiene del proceso de ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos finitos KEL. En cambio, la matriz de rigidez del elemento se calcula con la función KELEME.
- KAA es la sub-matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ , conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas 1 a NGLD y las columnas 1 a NGLD. En cambio KAB es la sub-matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ , conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas 1 a NGLD y las columnas NGLD+1 a NGLT. La sub-matriz de rigidez de la malla KBA definida como  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$ , está conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas

NGLD+1 a NGLT y las columnas 1 a NGLD. Finalmente, KBB es la sub-matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}_{\beta\beta}$ , conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas NGLD+1 a NGLT y las columnas NGLD+1 a NGLT.

- FEL y FGS son los vectores de fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas en un elemento finito específico  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$  y en la malla  $\tilde{\mathbf{f}}$ , respectivamente. FEL y FGS son matrices columna con NKEL y NGLT filas, respectivamente. El vector de fuerzas equivalentes de la malla FGS se obtiene del proceso de ensamblaje de los vectores de fuerzas equivalentes de los elementos finitos FEL. En cambio, el vector de fuerzas equivalentes del elemento se calcula con la función FELEMD.
- FGN es el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla  $\mathbf{f}^{(n)}$ , la cual se obtiene de la tabla de fuerzas nodales FUN, utilizando la función ORTAVE.
- FGT es el vector de fuerzas totales  $\mathbf{f}$ , que resulta de la suma entre las fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas y las fuerzas aplicadas directamente sobre los nudos, es decir FGS+FGN.
- FAA es el sub-vector de fuerzas totales  $\mathbf{f}_\alpha$ , conformado por los coeficientes del vector FGT ubicados en las filas 1 a NGLD.
- FGB es el sub-vectores de fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas en la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_\beta$ , que contiene los coeficientes del vector FGS desde la fila NGLD+1 hasta NGLT.
- NEL es la matriz de funciones de forma de un elemento finito específico  $\mathbf{N}_{(e)}$ . Esta matriz se calcula mediante al función NELEME.
- BEL es la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento finito específico  $\mathbf{B}_{(e)}$ . Esta matriz se calcula mediante al función BELEME.
- TEM es una matriz de se utiliza en varios líneas del código, para almacenar valores temporales del análisis.

### 7.3 Variables de resultados del programa

Los resultados obtenidos con el programa PEFICA se almacenan en varias matrices, las cuales se describen a continuación:

- UAA es el sub-vector de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{u}_\alpha$ , el cual se obtiene al resolver un sistema de ecuaciones simultáneas de la forma  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{u}_\beta$ , que se calcula en GNU–Octave con la siguiente instrucción:

$$\text{UAA} = (\text{KAA}) \setminus (\text{FAA} - \text{KAB} * \text{UBB});$$

- UTO es el vector de desplazamientos nodales completo  $\mathbf{u}^T = [\mathbf{u}_\alpha^T \ \mathbf{u}_\beta^T]$ , construido a partir de los vectores de desplazamientos nodales desconocidos y conocidos, así:  $\text{UTO} = [\text{UAA} ; \text{UBB}]$ ;
- La tabla UXY contiene en cada fila las componentes de desplazamiento calculadas en cada nudo de la malla. En particular para problemas unidimensionales de barras sometidas a fuerza axial, el formato de una fila esta tabla es:

$$\text{UXY} = [ \langle \text{desx} \rangle ;$$

donde  $\langle \text{desx} \rangle$  es el desplazamiento en dirección  $x$  en el nudo identificado por el número de la fila, dado en la unidad de longitud del problema. En cambio, para problemas unidimensionales de barras sometidas a flexión, el formato de una fila de la tabla UXY es:

$$\text{UXY} = [ \langle \text{desy} \rangle \ \langle \text{rotz} \rangle ;$$

donde  $\langle \text{desx} \rangle$  es el desplazamiento en dirección  $y$  dado en la unidad de longitud del problema y  $\langle \text{rotz} \rangle$  es el ángulo de rotación en radianes alrededor del eje  $z$  sobre el nudo identificado por el número de la fila.

- $\mathbf{F}_{BB}$  es el sub-vector de las fuerzas desconocidas aplicadas directamente sobre los nudos  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ , que corresponden a las fuerzas de reacción en los grados de libertad donde el desplazamiento es conocido. Se calcula en GNU-Octave de la forma:

$$\mathbf{F}_{BB} = \mathbf{K}_{BA} * \mathbf{U}_{AA} + \mathbf{K}_{BB} * \mathbf{U}_{BB} - \mathbf{F}_{GB};$$

- La tabla  $\mathbf{FXY}$  contiene en cada fila las componentes de fuerzas de reacción calculadas y las fuerzas aplicadas directamente en cada nudo de la malla. En particular para problemas unidimensionales de barras sometidas a fuerza axial, el formato de una fila esta tabla es:

$$\mathbf{FXY} = [ \langle f_{ux} \rangle;$$

donde  $\langle f_{ux} \rangle$  es la fuerza puntual en dirección  $x$  en el nudo identificado por el número de la fila. En cambio, para problemas unidimensionales de barras sometidas a flexión, el formato de una fila de la tabla  $\mathbf{FXY}$  es:

$$\mathbf{FXY} = [ \langle f_{uy} \rangle \langle mom_z \rangle;$$

donde  $\langle f_{uy} \rangle$  es la fuerza en dirección  $y$  y  $\langle mom_z \rangle$  es el momento alrededor del eje  $z$  en el nudo identificado por el número de la fila. Tales fuerzas y momentos corresponden a las reacciones en los nudos de desplazamiento conocido.

- $\mathbf{UEL}$  es el vector de desplazamientos nodales de un elemento finito específico, el cual se obtiene extrayendo sus coeficientes del vector de desplazamientos nodales de la malla  $\mathbf{UT0}$ , mediante la función **EXTRAV**.
- Para problemas unidimensionales de barras sometidas a fuerza axial, **EPEI**, **STEI** y **NFEI** son un variables escalares que contienen la deformación longitudinal, el esfuerzo normal y la fuerza axial en el nudo inicial de un elemento finito específico (en la coordenada natural  $\xi = 0.0$ ). Cada uno de estos resultado se calculan en GNU-Octave así:

```

XYP = 0.0;
BEL = BELEME(XYE,XYP, TIPE);
EPEI = BEL * UEL;
STEI = EYOU * EPEI;
NFEI = STEI * AREA;

```

Si el elemento es de aproximación lineal estos resultados son constantes con respecto a la posición. En cambio para elementos de aproximación cuadrática, tales valores presentan variación lineal y en consecuencia se calculan en el extremo final del elemento (en la coordenada natural  $\xi = 1.0$ ) de la forma:

```

XYP = 1.0;
BEL = BELEME(XYE,XYP, TIPE);
EPEJ = BEL * UEL;
STEJ = EYOU * EPEJ;
NFEJ = STEJ * AREA;

```

- Para problemas unidimensionales de barras sometidas a flexión, FIE es un vector o matriz columna que contiene la fuerza transversal  $\langle fuy_i \rangle$  y el momento flector  $\langle mozi \rangle$  en el nudo inicial, y la fuerza transversal  $\langle fuy_j \rangle$  y el momento flector  $\langle moz_j \rangle$  en el nudo final del elemento finito. El formato de esta matriz columna es el siguiente:

$$\text{FIE} = [ \langle fuy_i \rangle; \langle mozi \rangle; \langle fuy_j \rangle; \langle moz_j \rangle; ]$$

y se calcula para cada elemento en GNU–Octave así:

$$\text{FIE} = \text{KEL} * \text{UEL} - \text{FEL};$$

- Para problemas de barras sometidas a flexión, DESE es una variable escalar que contiene el desplazamiento transversal (o deflexión) en un punto específico  $\xi$  del interior del elemento finito. Tal variable se calcula de la forma:

$$\text{DESE} = \text{NEL} * \text{UEL};$$

- La tabla **REL** para barras sometidas a fuerza axial contiene en cada fila los resultados asociados a un elemento finito. Tales resultados son: la deformación longitudinal en los nudos inicial y final  $\langle defi \rangle$  y  $\langle defj \rangle$ , el esfuerzo normal en los nudos inicial y final  $\langle esfi \rangle$  y  $\langle esfj \rangle$ , y la fuerza axial en los nudos inicial y final  $\langle naxi \rangle$  y  $\langle naxj \rangle$ . El formato de cada fila de esta tabla es el siguiente:

$$\text{REL} = [ \langle defi \rangle \langle defj \rangle \langle esfi \rangle \langle esfj \rangle \langle naxi \rangle \langle naxj \rangle ] ;$$

En cambio, la tabla **REL** para barras sometidas a flexión contiene en cada fila los resultados asociados a un elemento finito. Tales resultados son: el desplazamiento  $\langle deyi \rangle$  y la rotación  $\langle rozi \rangle$  en el nudo inicial, el desplazamiento  $\langle deyj \rangle$  y la rotación  $\langle rozj \rangle$  en el nudo final, la fuerza transversal  $\langle fuyi \rangle$  y el momento flector  $\langle mozi \rangle$  en el nudo inicial, y la fuerza transversal  $\langle fuyj \rangle$  y el momento flector  $\langle mozj \rangle$  en el nudo final del elemento. El formato de cada fila de esta tabla es el siguiente:

$$\text{REL} = [ \langle deyi \rangle \langle rozi \rangle \langle deyj \rangle \langle rozj \rangle \langle fuyi \rangle \langle mozi \rangle \langle fuyj \rangle \langle mozj \rangle ] ;$$

- La tabla de resultados en el interior del elemento **RIL** para barras sometidas a flexión contiene la posición global  $\langle posx \rangle$ , el desplazamiento transversal  $\langle desy \rangle$ , la fuerza cortante  $\langle fuvy \rangle$  y el momento flector interno  $\langle mofz \rangle$ , en  $\text{NXIP}+1$  posiciones del interior de cada elemento finito. Por defecto cada elemento finito se divide en  $\text{NXIP}=10$  partes. En consecuencia esta tabla tendrá un número de filas igual a la cantidad de elementos multiplicada por  $\text{NXIP}+1=11$ , mientras que el número de columnas será igual a 4. El desplazamiento transversal se calcula como el producto entre la matriz de funciones de forma y el vector de valores nodales de desplazamiento. En cambio, la fuerza cortante y el momento flector se obtienen planteando las ecuaciones de equilibrio de una porción de elemento finito sometido a las acciones en sus extremos (y en algunos casos a una carga distribuida uniforme). El formato de cada fila de esta tabla es el siguiente:

$$\text{RIL} = [ \langle posx \rangle \langle desy \rangle \langle fuvy \rangle \langle mofz \rangle ] ;$$

En la rutina principal se puede modificar el número de partes `NXIP` en que se divide el elemento para calcular sus resultados. Los coeficientes de `RIL` y la forma como está organizada permite construir gráficas en GNU-Octave del desplazamiento transversal, la fuerza cortante y el momento flector en función de la posición  $x$ .

En cambio para elementos cuadráticos sometidos a fuerza axial, la tabla `RIL` contiene la posición  $\langle posx \rangle$  y el desplazamiento en  $x$   $\langle desy \rangle$  en el interior de cada elemento finito. De igual forma, se divide el elemento en `NXIP` partes iguales. El formato de cada fila de la tabla es:

$$\text{RIL} = [ \langle posx \rangle \langle desx \rangle ;$$

- La tabla `URI` contiene los índices que establecen la ubicación los nudos de los elementos en la tabla `RIL`. Esta tabla tiene una sola columna en la cual se almacena el identificador del índice de la tabla `RIL` que corresponde al nudo inicial  $\langle indi \rangle$  y al nudo final  $\langle indj \rangle$  de cada elemento. En consecuencia el número de filas corresponde al doble del número de elementos finitos. El formato de las dos primeras filas de esta tabla es el siguiente:

$$\text{URI} = [ \langle indi \rangle; \langle indj \rangle; \dots$$

Por ejemplo, si el número de posiciones en las cuales se calculan los resultados en la tabla `RIL` es 11, y el número de elementos es 3, la matriz columna `URI` será:

$$\text{URI} = [ 1; 11; 12; 22; 23; 33 ]$$

## 7.4 Rutina principal del programa PEFICA.m

La rutina principal del programa corresponde al conjunto de instrucciones que permiten la solución de un tipo de problema de elementos finitos específico. Tales instrucciones son operaciones y llamados a funciones propias del lenguaje o proporcionadas como parte de PEFICA 2.0.

En particular, el archivo `PEFICA.m` de la carpeta `\PEFUNI`, resuelve dos tipos de problemas unidimensionales: barras sometidas a fuerza axial y barras sometidas a flexión. Este archivo utiliza operaciones y funciones de GNU–Octave, y las funciones contenidas en la sub-carpeta `\PEFUNI\FUNCIONES`.

A continuación se describen las instrucciones de la rutina principal del programa en bloques relacionados a tareas específicas.

### 7.4.1 Ubicación de archivos y lectura de datos de entrada

En el Listado 7.13, inicialmente se adicionan las ubicaciones de las carpetas de las funciones propias del programa y de los datos de entrada de los problemas. Esto permite el acceso directo a los archivos contenidos en dichas carpetas sin necesidad de escribir la ruta completa. En las siguientes líneas de calcula el tiempo en que comienza la ejecución de la rutina y en el cual inicia la lectura de datos. Después se ejecuta el *script* que contiene los datos de entrada del problema de nombre `ADAT`. A partir de las matrices leídas, se define el número de elementos finitos `NELE`, el número máximo de nudos por elemento `NEMX`, el número de nudos `NNUD` y el número de dimensiones `NDIM`. Al final se calcula y presenta en pantalla el tiempo transcurrido durante la lectura de datos.

---

```

1000 function PEFICA (ADAT)
1001 clc; % limpiar pantalla
1002 addpath('~/FUNCIONES'); addpath('~/DATOS'); % adicionar carpetas
1003 % tiempo inicial de la rutina
1004 TINT = IMTIEM('/PEFUNI/PEFICA 2.0. Universidad Nacional de Colombia 2020 \n',0);
1005 % tiempo inicial de un grupo de instrucciones
1006 TINI = IMTIEM('Lectura de datos de entrada',0);
1007 % -----
1008 run(ADAT); % leer datos de entrada de un archivo .m
1009 ELE = int32(ELE); % cambio de tipo de datos para las matrices enteras

```

---

```

1010 [NELE,NEMX] = size(ELE); % numero de elementos
1011 NEMX = NEMX - 1; % numero max de nudos por elem
1012 [NNUD,NDIM] = size(XYZ); % numero de nudos y numero de dimensiones
    TFIN = IMTIEM(,,TINI);

```

**Listado 7.13:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA (archivo PEFICA.m), donde se establecen las ubicaciones de los archivos y se leen los datos de entrada.

### 7.4.2 Grados de libertad de nudos y elementos

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 7.14 define las tablas de los grados de libertad asociadas a los nudos y a los elementos a partir de las tablas de desplazamientos conocidos UCO y de conectividades ELE. Aquí se crea la tabla de grados de libertad por nudo MGL, el sub-vector de desplazamientos conocidos UBB y se obtiene el numero de grados de libertad por nudo NGLN y el numero de grados de libertad conocidos NGLC. Además se construye la tabla de incidencias o grados de libertad por elemento INC.

```

1000 TINI = IMTIEM('Grados de libertad de nudos y elementos',0);
1001 % -----
1002 [MGL,UBB,NGLN,NGLC] = NGLUCO(UCO,NNUD);
1003 NGLT = NNUD*NGLN; % numero de grados de libertad del sólido
1004 NGLD = NGLT-NGLC; % numero de grados de libertad conocidos
1005 % Se crea la tabla de GLs por elemento o matriz de incidencias
1006 [INC] = NGLELE(ELE,MGL);
    TFIN = IMTIEM(,,TINI);

```

**Listado 7.14:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se definen las tablas de grados de libertad asociadas a los nudos y a los elementos.

### 7.4.3 Matriz de rigidez de los elementos y de la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 7.15 calcula la matriz de rigidez de cada elemento finito  $\mathbf{K}_{(e)}$  y la suma a la matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}$  en los grado de libertad correspondientes, es decir ensambla la matriz  $\mathbf{K}_{(e)}$  en  $\mathbf{K}$ . Inicialmente se establece un ciclo por elemento finito en donde se calcula la matriz de rigidez de un elemento KEL, a partir de: (i) las características geométricas y de material CAE extraídas de la tabla de categorías CAT, y (ii) de las coordenadas de

los nudos XYE extraía de las tablas XYZ. A continuación se suman los coeficientes de la matriz de rigidez del elemento KEL a la matriz de rigidez de la malla KGS, de acuerdo con los grados de libertad del elemento indicados en la matriz de incidencias INC. Después de finalizado el ciclo por elemento, se establecen las sub-matrices de rigidez de la malla  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ ,  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$  y  $\mathbf{K}_{\beta\beta}$ , cuyo tamaño está definido por los grados de libertad desconocidos y conocidos.

```

1000 TINI = IMTIEM('Matriz de rigidez del solido',0);
% -----
1002 KGS = zeros(NGLT,NGLT); % definicion de tamano de la matriz de rigidez solido
for IELE = 1:NELE
    % matriz de rigidez de elemento
    CAE = CAT(ELE(IELE,1),:); % propiedades de la categ eleme IELE
    NUEL = PELEME(CAT(ELE(IELE,1),3)); % numero de nudos del elemento IELE
    XYE(1:NUEL,1:NDIM) = XYZ(ELE(IELE,2:NUEL+1),1:NDIM); % coor nud de elem IELE
    [KEL] = KELEME(XYE,CAE); % matriz de rigidez del elem IELE
    % ensamblaje de KEL() del elemento IELE en KGS() del solido
    NKEL = size(KEL,1); % tamano de la matriz de rigidez del elemento
    for IKEL=1:NKEL
        for JKEL=1:NKEL
            if ( INC(IELE, IKEL) ~= 0 & INC(IELE, JKEL) ~= 0 )
                KGS(INC(IELE, IKEL), INC(IELE, JKEL)) = ...
                KGS(INC(IELE, IKEL), INC(IELE, JKEL)) + KEL(IKEL, JKEL);
            end % endif
        end % endfor JKEL
    end % endfor IKEL
end % endfor fin matriz de rigidez del solido
% submatrices de rigidez del solido
1020 KAA = KGS(1:NGLD,1:NGLD); % submatriz K_{alpha,alpha}
1022 KAB = KGS(1:NGLD,NGLD+1:NGLT); % submatriz K_{alpha,beta}
1024 KBA = KGS(NGLD+1:NGLT,1:NGLD); % submatriz K_{beta,alpha}
KBB = KGS(NGLD+1:NGLT,NGLD+1:NGLT); % submatriz K_{beta,beta}
TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

```

**Listado 7.15:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se obtiene la matriz de rigidez de los elementos y de la malla.

#### 7.4.4 Vector de fuerzas equivalentes de los elementos y de la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 7.16 calcula el vector de fuerzas equivalentes a la carga distribuida en cada elemento finito  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$  y la suma al vector de fuerzas equivalentes de la malla  $\tilde{\mathbf{f}}$  en los grado de libertad correspondientes, es decir ensambla el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$  en  $\tilde{\mathbf{f}}$ . Inicialmente se establece un ciclo desde 1 hasta el número de cargas distribuidas impuestas en la tabla FDI. A continuación se calcula el vector de fuerzas equivalentes a carga distribuida en el elemento finito, a partir de: (i) las características geométricas y de material CAE extraídas de la tabla de categorías CAT, (ii) de las coordenadas de los nudos XYE extraídas de las tablas XYZ, y (iii) de la carga distribuida WELE tomada de la tabla FDI. Después se suman los coeficientes del vector de fuerzas equivalentes del elemento FEL al vector de fuerzas equivalentes de la malla FGS, de acuerdo con los grados de libertad del elemento indicados en la matriz de incidencias INC.

```

1000 TINI = IMTIEM('Vector de fuerzas distribuidas',0);
%
1002 % -----
1003 NFDI = size(FDI,1); % numero de cargas distribuidas en elementos
1004 FGS = zeros(NGLT,1); % definicion de tamano del vec fuerz distribu de la malla
1005 for IFDI = 1:NFDI % ciclo por carga distribuida
1006     if FDI(IFDI,1) ~= 0; % control de problemas sin fuerzas distribuidas
1007         IELE = FDI(IFDI,1); % identificador del elemento finito
1008         WELE = FDI(IFDI,2); % carga distribuida
1009         ICAT = ELE(IELE,1); % identific de la categ del elemento cargado
1010         CAE = CAT(ICAT,:); % propiedades de la categ eleme IELE
1011         NUEL = PELEME(CAT(ELE(IELE,1),3)); % numero de nudos del elemento IELE
1012         XYE(1:NUEL,1:NDIM) = XYZ(ELE(IELE,2:NUEL+1),1:NDIM); % coor nud de elem IELE
1013         [FEL] = FELEM(FELEM(XYE,CAE,WELE)); % vec fuerza de distrib del element
1014         % ensamblaje de FEL() del elemento IELE en FGS() del solido
1015         NFEL = size(FEL,1); % tamano de vector del elemento
1016         for IFEL=1:NFEL
1017             if INC(IELE, IFEL) ~= 0
1018                 FGS(INC(IELE, IFEL), 1) = FGS(INC(IELE, IFEL), 1) + FEL(IFEL,1);
1019             end % endif
1020         end % endfor IFEL
1021         % fin ensamblaje
1022     end % endif
1023 end % endfor
1024 TFIN = IMTIEM('',TINI);

```

**Listado 7.16:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se obtiene el vector de fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas de los elementos y de la malla.

#### 7.4.5 Vector de fuerzas en los nudos de la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 7.17 calcula el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos  $\mathbf{f}^{(n)}$  y el vector de fuerzas totales  $\mathbf{f}$ . Inicialmente se construye un vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos ordenado por grado de libertad FGN, a partir de la tabla de fuerzas en los nudos FUN. A continuación se calcula el vector de fuerzas nodales totales como la suma de los vectores de fuerza equivalente FGS y de fuerza directamente en los nudos FGN, es decir  $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{f}^{(n)}$ . Finalmente se extrae el sub-vector  $\mathbf{f}_\alpha$  de  $\mathbf{f}$ , asociado a los grados de libertad desconocidos FAA.

---

```

1000 TINI = IMTIEM('Vector de fuerzas aplicadas direct en los nudos del solido',0);
%
1002 [TEM] = ORTAEX(FUN,NNUD); % tabla de fuerzas puntuales extendida a todos nuds
1004 [FGN] = ORTAVE(TEM,MGL); % vector de fuerzas en los nudos del solido
% solo es valido del GL=1 hasta GL=NGLD, los terminos donde GL>NGLD son las
% reacciones en los apoyos que aun son desconocidas
1006 TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

1008 TINI = IMTIEM('Vector de fuerzas totales equival en los nudos del solido',0);
%
1010 % fuer.totales = fuer.eq.distribuidas + fuer.aplic.dirrec.nudos
1012 FGT = FGS + FGN;
1012 FAA = FGT(1:NGLD,1); % subvec.fuer.totales conocidas alpha, entre 1<=GL<=NGLD
TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

```

---

**Listado 7.17:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos y el vector de fuerzas totales.

#### 7.4.6 Vector y tabla de desplazamientos en los nudos de la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 7.18 calcula el vector de desplazamientos en los nudos de la malla  $\mathbf{a}$  y la respectiva tabla organizada por nudos UXY. Primero calcula el sub-vector de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{a}_\alpha$  o UAA, resolviendo un sistema de ecuaciones simultaneas de la forma  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{a}_\beta$ . Después se construye el vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{a}^T = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta]^T$  o UTO, a partir del resultado anterior  $\mathbf{a}_\alpha$  y del sub-vector de desplazamientos conocidos  $\mathbf{a}_\beta$  o UBB. Finalmente se construye una tabla de resultados UXY que contiene las componentes de desplazamiento ordenados por nudo.

```

1000 TINI = IMTIEM('Desplazamientos en los nudos del sólido',0);
% -----
1002 UAA = (KAA) \ (FAA - KAB * UBB);
UTO = [ UAA ; UBB ]; % vector de desplaz. nodales completo
1004 [UXY] = ORVETA(UTO,MGL); % tabla de desplaz. nodales en formato UX,UY
TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

```

**Listado 7.18:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula el vector y la tabla de desplazamientos en los nudos de la malla.

#### 7.4.7 Vector y tabla de reacciones en los nudos de la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 7.19 calcula el vector de reacciones en los nudos de la malla  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$  y la respectiva tabla ordenada por nudos FXY. Inicialmente se extrae el sub-vector de fuerzas equivalentes de la malla asociado a los grados de libertad conocidos  $\tilde{\mathbf{f}}_\beta$  o FGB. Después se calcula el sub-vector de fuerzas nodales desconocidas  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$  o FBB, de la operación matricial  $\mathbf{f}_\beta^{(n)} = \mathbf{K}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{u}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta$ . Ahora se extrae el sub-vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos asociado a los grados de libertad desconocidos  $\mathbf{f}_\alpha^{(n)}$  o FNA. A continuación se construye el vector de fuerzas nodales sin incluir las fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas  $\mathbf{f}^{(n)T} = [\mathbf{f}_\alpha^{(n)T} \mathbf{f}_\beta^{(n)T}]$  o FTO. Finalmente, se construye una tabla de resultados FXY que contiene las componentes de fuerzas aplicadas directamente, ordenadas por nudo. Los valores de esta tabla asociados a los desplazamientos impuestos corresponden a las reacciones.

```

1000 TINI = IMTIEM('Reacciones en los nudos del sólido',0);
% -----
1002 FGB = FG(S,NGLD+1:NGLT,1); % subvector beta de fuer.equival.distribuidas
FBB = KBA * UAA + KBB * UBB - FGB; % subvector de fuerzas desconoc = reacciones
1004 FNA = FGN(1:NGLD,1); % subvec.fuer.en nudos conocidas alpha
FTO = [ FNA ; FBB ]; % vector completo de fuerzas en nudos (sin equival a
distribuidas)
1006 [FXY] = ORVETA(FTO,MGL); % tabla de fuerzas nodales en formato FX,FY
TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

```

**Listado 7.19:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula el vector y la tabla de reacciones en los nudos de la malla.

### 7.4.8 Resultados en el interior de cada elemento

En la siguiente etapa del procedimiento se obtienen los resultados en el interior de cada elemento finito. Esta etapa es diferente según el tipo de problema.

#### 7.4.8.1 Problema unidimensional de barras sometidas a fuerza axial

En particular para problemas unidimensionales de barras sometidas a fuerza axial (**TIPR=10**), éste procedimiento se muestra en el Listado 7.20. Allí, inicialmente se establece un ciclo por elemento en el cual se realizan las siguientes tareas:

- Se extraen las coordenadas de los nudos del elemento **XYE**, a partir de la tabla de coordenadas de todos los nudos de la malla **XYZ**.
- Se extrae el vector de desplazamientos nodales del elemento  $\mathbf{a}_{(e)}$  o **UEL**, a partir del vector de desplazamientos nodales de la malla **a** y la tabla de incidencias **INC**.
- Se obtiene la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma  $\mathbf{B}_{(e)}(0)$  o **BEL** en la coordenada natural  $\xi = 0.0$  o **XYP=0.0** (que corresponde al nudo en el extremo inicial del elemento).
- Se calcula la deformación longitudinal  $\varepsilon_{(e)}(0)$  o **EPEI**, como  $\varepsilon_{(e)}(0) = \mathbf{B}_{(e)}(0) \cdot \mathbf{a}_{(e)}$ .
- Se calcula el esfuerzo normal  $\sigma(0)$  o **STEI**, como  $\sigma(0) = E_{(e)} \cdot \varepsilon_{(e)}(0)$ .
- Se calcula la fuerza axial  $N(0)$  o **NFEI**, como  $N(0) = \sigma_{(e)}(0) \cdot A_{(e)}$ .
- Si la malla tiene elementos finitos de aproximación lineal (**NEMX=2**), la deformación longitudinal el esfuerzo normal y la fuerza axial serán constantes en el interior. En consecuencia se almacena el mismo resultado para los dos extremos del elemento en la tabla **REL**.

- Si la malla tiene por lo menos un elemento finito de aproximación cuadrática ( $NEMX=3$ ), la deformación longitudinal, el esfuerzo normal y la fuerza axial tendrán variación lineal en el interior. En consecuencia, tales entidades  $\mathbf{B}_{(e)}(1.0)$ ,  $\varepsilon_{(e)}(1.0)$ ,  $\sigma_{(e)}(1.0)$  y  $\mathcal{N}_{(e)}(1.0)$ , se calculan para el extremo final del elemento  $\xi = 1.0$  y se almacenan en las variables **BEL**, **EPEJ**, **STEJ** y **NFEJ**, respectivamente. Los resultados en los extremos de cada elemento se guardan en la tabla **REL**.
- Se establece un ciclo por puntos en el interior del elemento para coordenadas naturales  $\xi$  entre 0.0 y 1.0, en el cual se calcula y se almacena en la tabla **RIL**, lo siguiente:
  - La posición global  $x$  a partir de la coordenada natural  $\xi$  y la longitud del elemento  $L_{(e)}$ .
  - El desplazamiento  $u_{(e)}(\xi)$  en puntos internos de cada elemento, el cual se obtiene de la operación  $u_{(e)}(\xi) = \mathbf{N}_{(e)}(\xi) \cdot \mathbf{a}_{(e)}$ .

Después de terminado el ciclo por elemento, se presentan los resultados en la ventana de comandos o en gráficas de GNU–Octave, mediante la instrucción **IMREAX**.

```

1000 % acciones internas en los elementos
1001 %
1002 switch TIPR
1003 % problema de fuerza axial: deformac, esfuerzo y fuerza axial en los elementos
1004 %
1005 case 10
1006 TINI = IMTIEM('Deformacion, esfuerzo y fuerza axial en cada elemento',0);
1007 REL = zeros(NELE,6); % crear tabla de resultados en los elementos
1008 NXIP = 10; % numero de partes de calculo del desplazamiento en el elemento
1009 RIL = zeros((NXIP+1)*NELE,2); % tabla de resultados en el interior de elem
1010 for IELE = 1:NELE % ciclo por elemento
1011 TIPE = CAT(ELE(IELE,1),3); % codigo tipo del elemento
1012 [NUEL] = PELEME(TIPE); % numero de nudos del elemento IELE
1013 NGLE = NUEL*NGLN; % numero de GL por elemento
1014 XYE(1:NUEL,1:NDIM) = XYZ(ELE(IELE,2:NUEL+1),1:NDIM); % coor nud de elem IELE
1015 UEL = EXTRAV(UTO,INC,IELE,NGLE); % vec despl nodales del elem
1016 EYOU = CAT(ELE(IELE,1),1); % modulo de Young del elemento
1017 AREA = CAT(ELE(IELE,1),2); % area de secc trans del elemento
1018 % deformacion, esfuerzo y fuerza axial en el extremo inicial del elemento
1019 XYP = 0.0; % coord natural de evaluacion de B. No afecta elementos lineales

```

```

1020      BEL = BELEME(XYE,XYP, TIPE); % matriz B evaluada en el punto XYP en coor nat
1022      EPEI = BEL * UEL;      % deformacion en el elem
1023      STEI = EYOU * EPEI;    % esfuerzo en el elem
1024      NFEI = STEI * AREA;    % fuerza axial en el elem
1025
1026      if NEMX==2 % malla de elementos con 2 nudos como maximo
1027          % tabla de deformacion, esfuerzo y fuerza axial por nudo y por elemento
1028          REL(IELE,1) = EPEI; % deformacion nudo inicial del elemento IELE
1029          REL(IELE,2) = EPEI; % deformacion nudo final del elemento IELE
1030          REL(IELE,3) = STEI; % esfuerzo nudo inicial del elemento IELE
1031          REL(IELE,4) = STEI; % esfuerzo nudo final del elemento IELE
1032          REL(IELE,5) = NFEI; % fuerza axial nudo inicial del elemento IELE
1033          REL(IELE,6) = NFEI; % fuerza axial nudo final del elemento IELE
1034      elseif NEMX==3 % malla de elementos con 3 nudos como maximo 3
1035          % deformacion, esfuerzo y fuerza axial en el extremo inicial del elemento
1036          XYP = 1.0; % coord natural de evaluacion de B.
1037          BEL = BELEME(XYE,XYP, TIPE); % matriz B evaluada en el punto XYP en coor nat
1038          EPEJ = BEL * UEL;      % deformacion en el elem
1039          STEJ = EYOU * EPEJ;    % esfuerzo en el elem
1040          NFEJ = STEJ * AREA;    % fuerza axial en el elem
1041          % tabla de deformacion, esfuerzo y fuerza axial por nudo y por elemento
1042          REL(IELE,1) = EPEI; % deformacion nudo inicial del elemento IELE
1043          REL(IELE,2) = EPEJ; % deformacion nudo final del elemento IELE
1044          REL(IELE,3) = STEI; % esfuerzo nudo inicial del elemento IELE
1045          REL(IELE,4) = STEJ; % esfuerzo nudo final del elemento IELE
1046          REL(IELE,5) = NFEI; % fuerza axial nudo inicial del elemento IELE
1047          REL(IELE,6) = NFEJ; % fuerza axial nudo final del elemento IELE
1048          % posicion, desplazamiento en el interior del elemento IELE
1049          LELE = XYE(2,1) - XYE(1,1);
1050          for IXIP = 1:(NXIP+1)
1051              XIPN = (IXIP-1) / NXIP; % posicion en coord naturales
1052              NEL = NELEME(XYE,XIPN, TIPE); % matriz de funciones de forma
1053              DESE = NEL * UEL; % desplazamiento en x
1054              IPOS = (NXIP+1)*(IELE-1) + IXIP;
1055              RIL(IPOS,1) = XYE(1,1) + XIPN*LELE; % posicion global
1056              RIL(IPOS,2) = DESE; % desplazamiento en x
1057          end % endfor IXIP
1058      end %endif TIPE
1059
1060      end % endfor IELE
1061
1062      % presentacion de resultados
IMREAX(IMPR,XYZ,ELE,CAT,UCO,FUN,UXY,FXY,REL,RIL,ADAT);
TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

```

**Listado 7.20:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula las acciones internas en cada elemento.

#### 7.4.8.2 Problema unidimensional de barras sometidas a flexión

En particular para problemas unidimensionales de barras sometidas a flexión (**TIPR=11**), éste procedimiento se muestra en el Listado 7.21. Allí, inicialmente se establece un ciclo por elemento en el cual se realizan las siguientes tareas:

- Se extraen las coordenadas de los nudos del elemento **XYE**, a partir de la tabla de coordenadas de todos los nudos de la malla **XYZ**.
- Se extrae el vector de desplazamientos nodales del elemento  $\mathbf{a}_{(e)}$  o **UEL**, a partir del vector de desplazamientos nodales de la malla **a** y la tabla de incidencias **INC**.
- Se extraen las características geométricas y de material **CAE**, a partir de la tabla de categorías **CAT**.
- Se obtiene la matriz de rigidez del elemento  $\mathbf{K}_{(e)}$  o **KEL** a partir de **XYE** y **CAE**.
- Se identifica la carga distribuida que actúa sobre el elemento finito **WELE** a partir de la tabla **FDI**, y se calcula el vector de fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$  o **FEL**.
- Se calcula el vector de acciones en los extremos del elemento finito  $\mathbf{f}_{(e)}^{int}$  o **FIE**, el cual está conformado por la fuerza transversal y el momento flector en el nudo inicial y en el nudo final. La operación matricial es de la forma  $\mathbf{f}_{(e)}^{int} = \mathbf{K}_{(e)} \cdot \mathbf{a}_{(e)} - \tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$ .
- Se almacenan en la tabla **REL** los resultados de desplazamientos, rotaciones, fuerzas transversales y momentos en los nudos de cada elemento.
- Se establece un ciclo por puntos en el interior del elemento para coordenadas naturales  $\xi$  entre 0.0 y 1.0, en el cual se calcula y se almacena en la tabla **RIL**, lo siguiente:
  - La posición global  $x$  a partir de la coordenada natural  $\xi$  y la longitud del elemento  $L_{(e)}$ .

- El desplazamiento transversal  $v_{(e)}(x)$  en puntos internos de cada elemento, el cual se obtiene de la operación  $v_{(e)}(x) = \mathbf{N}_{(e)}(\xi) \cdot \mathbf{a}_{(e)}$ .
- La fuerza cortante  $\mathcal{V}_{(e)}(x)$  y el momento flector  $\mathcal{M}_{(e)}(x)$  en puntos internos de cada elemento, obtenidos del equilibrio en una porción de elemento entre el extremo inicial y la posición  $x$ .

Después de terminado el ciclo por elemento, se presentan los resultados en la ventana de comandos o en gráficas de GNU–Octave, mediante la instrucción **IMREFL**.

```

1000 % problema de flexion: desplaz, rotaciones, fuerzas internas en los elementos
1001 % -----
1002 case 11
1003 TINI = IMTIEM('Desplaz, rotac, fuerza interna en cada elemento',0);
1004 NXIP = 10; % numero de partes de calculo del desplazamiento en el elemento
1005 REL = zeros(NELE,8); % crear tabla de resultados en los nudos de los elem
1006 RIL = zeros((NXIP+1)*NELE,4); % tabla de resultados en el interior de elem
1007 URI = zeros(2*NELE,1); % tabla de indices que ubican a los nudos de cada elem
1008
1009 for IELE = 1:NELE % ciclo por elemento
1010
1011 % desplazamientos en los nudos de un elemento IELE
1012 TIPE = CAT(ELE(IELE,1),3); % codigo tipo del elemento
1013 [NUEL] = PELEME(TIPE); % numero de nudos del elemento IELE
1014 NGLE = NUEL*NGLN; % numero de GL por elemento
1015 XYE(1:NUEL,1:NDIM) = XYZ(ELE(IELE,2:NUEL+1),1:NDIM); % coor nud de elem IELE
1016 UEL = EXTRAV(UTO,INC,IELE,NGLE); % vec despl nodales del elem
1017
1018 % matriz de rigidez del elemento IELE
1019 CAE = CAT(ELE(IELE,1),:); % propiedades de la categ elem IELE
1020 [KEL] = KELEME(XYE,CAE); % matriz de rigidez del elem IELE
1021
1022 % vector de fuerza equivalente a la carga distribuida en el elem IELE
1023 WELE = 0;
1024 NFDI = size(FDI,1); % numero de elementos con cargas distribuidas
1025 for IFDI = 1:NFDI
1026   if FDI(IFDI,1) == IELE
1027     WELE = FDI(IFDI,2); % carga distribuida
1028   end % endif
1029 end % endfor IFDI
1030 [FEL] = FELEMD(XYE,CAE,WELE); % vec fuerza de distrib del elem IELE
1031
1032 % fuerza transversal y momento flector en los nudos del elemento IELE
1033 FIE = KEL * UEL - FEL;
1034

```

```

1036      % tabla de resultados en los elementos
1037      REL(IELE,1) = UEL(1,1); % desplaza en y nudo inicial del elemento IELE
1038      REL(IELE,2) = UEL(2,1); % rotacion en z nudo inicial del elemento IELE
1039      REL(IELE,3) = UEL(3,1); % desplaza en y nudo final del elemento IELE
1040      REL(IELE,4) = UEL(4,1); % rotacion en z nudo final del elemento IELE
1041      REL(IELE,5) = FIE(1,1); % fuerza en y nudo inicial del elemento IELE
1042      REL(IELE,6) = FIE(2,1); % momento en z nudo inicial del elemento IELE
1043      REL(IELE,7) = FIE(3,1); % fuerza en y nudo final del elemento IELE
1044      REL(IELE,8) = FIE(4,1); % momento en z nudo final del elemento IELE

1045
1046      % posicion, desplazam, f cortante y momento en el inter del elemento IELE
1047      LELE = XYE(2,1) - XYE(1,1);
1048      for IXIP = 1:(NXIP+1)
1049          XIPN = (IXIP-1) / NXIP;
1050          [NEL] = NELEME(XYE,XIPN,TIPE);
1051          DESE = NEL * UEL;
1052          IPOS = (NXIP+1)*(IELE-1) + IXIP;
1053          RIL(IPOS,1) = XYE(1,1) + XIPN*LELE; % posicion global
1054          RIL(IPOS,2) = DESE; % desplazamiento en y
1055          RIL(IPOS,3) = FIE(1,1) + WELE*XIPN*LELE; % fuerza cortante
1056          RIL(IPOS,4) = -FIE(2,1) + FIE(1,1)*XIPN*LELE + 0.5*WELE*(XIPN*LELE)^2; %M
1057      end % endfor IXIP
1058      % indice que ubican los nudos de los elementos en RIL()
1059      URI(2*IELE-1) = (NXIP+1)*(IELE-1) + 1;
1060      URI(2*IELE) = (NXIP+1)*IELE;

1061
1062      end % endfor IELE
1063
1064      IMREFL(IMPR,XYZ,ELE,UXY,FXY,REL,RIL,URI);
1065
1066      TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

1067      otherwise
1068          error('PEFICA. Tipo de problema no identificado.')
1069      end % endswitch TIPR
1070
1071      % mostrar tiempo final
1072      TFIN = IMTIEM('Tiempo total de ejecucion',TINT);
1073  end

```

**Listado 7.21:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula las acciones internas en cada elemento.

## 7.5 Funciones propias del programa

El programa PEFICA incluye un conjunto de funciones desarrolladas para realizar tareas específicas de cálculo y organización en el marco del método de los elementos finitos. Cada función está escrita en un archivo de extensión .m, con la sintaxis del lenguaje GNU–Octave. El conjunto de archivos está incluido en la sub-carpeta \FUNCIONES. A continuación se describen las funciones propias del programa.

### 7.5.1 Función propia de la matriz de funciones de forma del elemento: NELEME

El programa PEFICA 2.0 proporciona un grupo de funciones que construyen las matrices particulares de cada elemento finito. Particularmente, La función NELEME calcula la matriz de funciones de forma de un elemento finito  $\mathbf{N}_{(e)}(\xi)$ , la cual será almacenada en una matriz de GNU–Octave de nombre  $\langle nel \rangle$ .

Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: la matriz que contiene las coordenadas de los nudos de un elemento  $\langle xye \rangle$ , la coordenada del punto  $\langle xipn \rangle$  donde se evalúa la función de forma dentro del elemento en sistema coordenado natural  $0 < \xi < 1$ , y el identificador del tipo de elemento finito  $\langle tipe \rangle$ .

La posición  $\xi$  en el sistema coordenado natural es igual a  $\xi = (x - x_1^{(e)})/L_{(e)}$ , donde  $L_{(e)}$  es la longitud del elemento,  $x$  es la posición en sistema coordenado global de evaluación y  $x_1^{(e)}$  es la posición en sistema coordenado global del nudo 1 en el extremo izquierdo.

El formato para utilizar la función NELEME desde otra rutina es el siguiente:

$$[\langle nel \rangle] = \text{NELEME}(\langle xye \rangle, \langle xipn \rangle, \langle tipe \rangle);$$

Cuando  $\langle tipe \rangle=101$ , la subrutina calcula la matriz de funciones de forma del elemento unidimensional lineal de continuidad  $C_0$ , ilustrado en la Figura 2.2(a). Tal matriz está definida en la Ecuación 2.4.

Cuando  $\langle tipe \rangle=102$ , la subrutina calcula la matriz de funciones de forma del elemento unidimensional cuadrático de continuidad  $C_0$ , ilustrado en la Figura 2.2(b). Los coeficientes de dicha matriz fueron obtenidos en la Ecuación 2.5.

Cuando  $\langle tipe \rangle = 111$ , la subrutina calcula la matriz de funciones de forma del elemento unidimensional cúbico de continuidad  $C_1$ , mostrado en la Figura 2.7. Los coeficientes de tal matriz se presentan en la Ecuación 2.37.

### 7.5.2 Función propia de la matriz operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma del elemento: BELEME

La función BELEME calcula la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma  $\mathbf{B}_{(e)}(\xi)$ , la cual se almacena en la matriz de GNU–Octave de nombre  $\langle bel \rangle$ .

Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: la matriz que contiene las coordenadas de los nudos de un elemento  $\langle xye \rangle$ , la coordenada del punto  $\langle xipn \rangle$  donde se evalúa la función de forma dentro del elemento en sistema coordenado natural  $0 < \xi < 1$ , y el identificador del tipo de elemento finito  $\langle tipe \rangle$ . La posición  $\xi$  en el sistema coordenado natural está definida en la Subsección 7.5.1.

La instrucción que llama a la función BELEME tiene el siguiente formato:

$$[\langle bel \rangle] = \text{BELEME}(\langle xye \rangle, \langle xipn \rangle, \langle tipe \rangle);$$

Particularmente, cuando  $\langle tipe \rangle = 101$ , la subrutina BELEME calcula la matriz  $\mathbf{B}_{(e)}$  de un elemento unidimensional lineal de continuidad  $C_0$ . Dicha matriz está definida en la Ecuación 2.8.

Se observa que el parámetro  $\langle xipn \rangle$  no es necesario para obtener la matriz  $\mathbf{B}_{(e)}$  de un elemento unidimensional lineal, sin embargo se requiere definir una variable ficticia para tal parámetro.

Si  $\langle tipe \rangle = 102$ , la subrutina calcula la matriz  $\mathbf{B}_{(e)}$  del elemento unidimensional cuadrático de continuidad  $C_0$ . Los términos de dicha matriz se muestran en la Ecuación 2.9.

Si  $\langle tipe \rangle = 111$ , la subrutina calcula la matriz  $\mathbf{B}_{(e)}$  del elemento unidimensional cúbico de continuidad  $C_1$  de barra a flexión. Dicha matriz está dada en la Ecuación 2.39.

### 7.5.3 Función propia de la matriz de rigidez del elemento: KELEME

La función KELEME calcula la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{(e)}$ , la cual se almacena en la matriz de GNU-Octave de nombre  $\langle kel \rangle$ .

Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: una matriz que contiene las coordenadas de los nudos del elemento  $\langle xye \rangle$ , y una matriz fila que contiene las propiedades de la categoría de un elemento  $\langle cae \rangle$ .

La instrucción que llama a esta función tiene el siguiente formato:

$$[\langle kel \rangle] = \text{KELEME}(\langle xye \rangle, \langle cae \rangle);$$

Como se indicó en la Subsección 7.2.2, el parámetro  $\langle cae \rangle$  contiene el modulo de Young del material  $\langle eyou \rangle$  y el identificador del tipo de elemento finito  $\langle tipe \rangle$ . Asimismo, el término  $\langle sect \rangle$  corresponde al área de la sección transversal para problemas de barras sometidas a fuerza axial o el momento de inercia para problemas de barras sometidas a flexión.

Cuando  $\langle tipe \rangle=101$ , la subrutina KELEME construye la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  de un elemento unidimensional lineal de continuidad  $C_0$  para barras sometidas a fuerza axial. Los coeficientes de tal matriz están dados en la Ecuación 2.18.

En cambio, si  $\langle tipe \rangle=102$ , la subrutina KELEME construye la matriz de rigidez del elemento unidimensional cuadrático de continuidad  $C_0$  para barras sometidas a fuerza axial. La matriz y sus coeficientes está definida en la Ecuación 2.20.

Cuando  $\langle tipe \rangle=111$ , la subrutina KELEME obtiene la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  de un elemento unidimensional cúbico de continuidad  $C_1$  para barras sometidas a flexión. Tal matriz está definida en la Ecuación 2.45.

### 7.5.4 Función propia del vector de fuerzas equivalentes del elemento: FELEMD

La función FELEMD calcula el vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga uniforme distribuida sobre el elemento  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$ , el cual se almacena en la matriz columna de GNU-Octave de nombre  $\langle fel \rangle$ .

Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: una matriz que contiene las coordenadas de los nudos del elemento  $\langle xye \rangle$ , una matriz fila que contiene las propiedades de la categoría de un elemento  $\langle cae \rangle$ , y una variable escalar que contiene el valor de la carga distribuida uniforme  $\langle wele \rangle$ . Uno de los términos del parámetro  $\langle cae \rangle$  indica el tipo de elemento finito  $\langle tipe \rangle$ , como se explica en la Subsección 7.2.2.

Esta función se invoca mediante una instrucción con el siguiente formato:

$$[\langle fel \rangle] = \text{FELEMD}(\langle xye \rangle, \langle cae \rangle, \langle wele \rangle);$$

Cuando  $\langle tipe \rangle=101$ , la subrutina FELEMD construye el vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga distribuida  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$ , en los nudos de un elemento unidimensional lineal de continuidad  $C_0$  para barras a fuerza axial, como lo muestra la Figura 2.3. Los términos del vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$  están definidos en la Ecuación 2.19.

En cambio, el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$  de un elemento unidimensional cuadrático de continuidad  $C_0$  para barras a fuerza axial, se construye con la función FELEMD cuando  $\langle tipe \rangle=102$ . Los términos del vector de fuerzas equivalentes  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$  a la acción de la carga uniforme distribuida mostrada en la Figura 2.4, está definida en la Ecuación 2.21.

Cuando  $\langle tipe \rangle=111$ , la subrutina FELEMD construye el vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga distribuida uniforme perpendicular al eje  $x$  del elemento de viga  $w_y^{(e)}$ , mostrado en la Figura 2.8(a). Los términos de tal vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{(e)}$  indicados en la Ecuación 2.46, corresponden a la fuerza transversal y el momento en el nudo inicial  $f_1^{(e)}$  y  $f_2^{(e)}$ , y a la fuerza transversal y el momento en el nudo final  $f_3^{(e)}$  y  $f_4^{(e)}$ .

### 7.5.5 Funciones propias de construcción de la tabla de grados de libertad por nudo y por elemento: NGLUCO y NGLELE

Las tablas que contienen la numeración de grados de libertad asociados a los nudos y a los elementos de la malla se designa mediante las funciones NGLUCO y NGLELE, respectivamente.

La tabla de grados de libertad asociados a los nudo almacenada en la matriz de GNU-Octave MGL contiene en cada fila el identificador de los grados de libertad de cada nudo de la malla. En consecuencia, su número de filas y de columnas corresponde

a la cantidad de nudos de la malla **NNUD** y a la cantidad de grados de libertad por nudo **NGLN**. El número de la fila coincide con el identificador del nudo.

La primera tarea de la función **NGLUC0** es numerar de forma especial los grados de libertad asociados a cada nudo de la malla. Tal numeración asegura que los grados de libertad con desplazamiento desconocido estén numerados de manera consecutiva ascendente desde 1, y que los grados de libertad con desplazamiento conocido estén numerados de forma consecutiva desde el número de grados de libertad desconocidos más uno **NGLD+1** hasta el número de grados de libertad total **NGLT**. La segunda tarea de **NGLUC0** consiste en crear el sub-vector de desplazamientos conocidos de la malla. La instrucción que invoca a esta función puede escribirse de la forma:

$$[MGL, UBB, NGLN, NGLC] = NGLUC0(UC0, NNUD);$$

En esta expresión se consideran como parámetros de entrada: la tabla de desplazamientos conocidos almacenada en la matriz **UC0** y el número de nudos corresponde a la variable escalar **NNUD**. Asimismo, los parámetros de salida serán: la tabla de grados de libertad por nudo almacenada en la matriz **MGL**, el sub-vector de desplazamientos nodales conocidos almacenada en la matriz columna **UBB**, el número de grados de libertad por nudo correspondiente a la variable escalar **NGLN** y el número de grados de libertad conocidos de la malla guardada en la variable escalar **NGLC**.

La función **NGLELE** tiene como objetivo construir la tabla de incidencias o tabla de grados de libertad por elemento, la cual se almacena en la matriz de nombre **INC**. Esta tabla contiene en cada fila el identificador de los grados de libertad de cada elemento de la malla. En consecuencia, su número de filas y de columnas corresponde a la cantidad de elementos de la malla **NELE** y a la cantidad de grados de libertad por nudo multiplicado por el número de nudos de un elemento **NGLE = NGLN\*NNUE**. El número de la fila coincide con el identificador del nudo. El orden de los coeficientes de una fila de la matriz **INC** corresponde al mismo orden establecido a los grados de libertad del elemento finito en sus matrices características, como por ejemplo en su matriz de rigidez. La instrucción que ejecuta a esta función se puede escribir así:

$$[INC] = NGLELE(ELE, MGL);$$

siendo **ELE** y **MGL** los nombres de las matrices que contienen la tabla de conectividades de los elementos y la tabla de grados de libertad por nudo, respectivamente como parámetros de entrada.

### 7.5.6 Funciones propias de organización de vectores y tablas de valores nodales: **ORTAEX**, **ORTAVE** y **ORVETA**

Las funciones propias del programa PEFICA 2.0 dedicadas a la organización de vectores y tablas de valores nodales, como fuerzas y desplazamientos, se describen a continuación:

- Dada una tabla que contiene entidades asociadas a algunos nudos específicos  $\langle tal \rangle$ , la función **ORTAEX** construye una tabla extendida y ordenada de tales entidades  $\langle tex \rangle$  para todos los nudos de la malla  $\langle nnud \rangle$ , considerando un valor de cero en las entidades no incluidas en  $\langle tal \rangle$ . El formato de la instrucción que ejecuta esta función es:

$$[\langle tex \rangle] = \text{ORTAEX}(\langle tal \rangle, \langle nnud \rangle);$$

Es habitual utilizar esta función para extender la tabla de fuerzas puntuales aplicadas en los nudos **FUN** a una tabla que incluya las fuerzas puntuales aplicadas en todos los nudos de la malla **FEX**, así:

$$[\text{FEX}] = \text{ORTAEX}(\text{FUN}, \text{NNUD});$$

- La función **ORTAVE** crea un vector de fuerzas (o desplazamientos) nodales de la malla ordenado por sus grados de libertad, a partir de la tabla de fuerzas (o desplazamientos) ordenada por la numeración de los nudos en cada fila. Como ejemplo, se considera conocida una tabla de fuerzas (o desplazamientos) donde cada fila contiene los valores de las componentes de fuerza (o desplazamiento) de cada nudo, denominada **TAB**. Asimismo, la tabla de grados de libertad por nudo también es conocida y almacenada en la matriz **MGL**. La función **ORTAVE** construye una matriz columna o vector **VEC**, que contiene el valor de fuerza (o

desplazamiento) en el grado de libertad correspondiente al número de la fila. La instrucción de este procedimiento es la siguiente:

```
[VEC] = ORTAVE(TAB,MGL);
```

- La función **ORVETA** crea una tabla de fuerzas (o desplazamientos) ordenada por la numeración de los nudos en cada fila, a partir del vector de fuerzas (o desplazamientos) nodales de la malla ordenado por sus grados de libertad. Considerando que se conoce la matriz columna o vector **VEC**, que contiene el valor de fuerza (o desplazamiento) en el grado de libertad correspondiente al número de la fila, y que también se conoce la tabla de grados de libertad por nudo **MGL**, la función **ORVETA** construye una tabla de fuerzas (o desplazamientos) **TAB**, donde cada fila contiene los valores de las componentes de fuerza (o desplazamiento) de cada nudo. La instrucción de este procedimiento es la siguiente:

```
[TAB] = ORVETA(VEC,MGL);
```

### 7.5.7 Función propia de extracción de vectores elementales: EXTRAV

La función **EXTRAV** construye el vector de desplazamientos nodales asociado a un elemento específico  $\mathbf{a}^{(e)}$ , a partir del vector de desplazamientos nodales asociado a todos los grados de libertad de la malla **a**. El formato de la instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

```
VEL = EXTRAV(VGL,INC,IELE,NGLE);
```

donde los parámetros de entrada son: el vector de desplazamientos nodales de la malla almacenado en la matriz columna **VGL**, la tabla de incidencias **INC**, el identificador del elemento finito **IELE**, y el número de grados de libertad del elemento **NGLE**. Si se introduce **NGLE=0**, su valor se modifica al número de columnas de la matriz **INC**. El parámetro de salida de la función es el vector de desplazamientos nodales de un elemento finito, el cual se almacena en la matriz columna **VEL**.

### 7.5.8 Funciones propias de presentación de resultados: IMREAX, IMREFL y IMTIEM

Este conjunto de funciones tiene como objetivo presentar resultados obtenidos del análisis por elementos finitos de diferentes maneras.

La función **IMREAX** presenta resultados de barras sometidas a fuerza axial como: desplazamientos y reacciones en los nudos, deformaciones longitudinales, esfuerzos normales y fuerzas axiales en el interior de cada elemento. Además, construye un archivo en la sintaxis de TikZ de LaTeX para dibujar la malla de elementos finitos. La instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

```
IMREAX(IMPR,XYZ,ELE,CAT,UCO,FUN,UXY,FXY,REL,RIL,ADAT);
```

Los parámetros de entrada de la función son los siguientes: **IMPR** que establece la opción de impresión de resultados, indicada en la Subsección 7.1.1, tabla de coordenadas de los nudos **XYZ**, tabla de conectividades de los elementos **ELE**, tabla de categorías **CAT**, tabla de desplazamientos conocidos **UCO**, tabla de fuerzas aplicadas en los nudos **FUN**, tabla de desplazamientos en los nudos **UXY**, tabla de fuerzas y reacciones **FXY**, tabla de resultados en los elementos **REL**, tabla de desplazamientos en el interior de elementos cuadráticos **RIL** y nombre del archivo de entrada de datos sin extensión **ADAT**.

La función **IMREFL** presenta resultados en los nudos de barras sometidas a flexión como: desplazamientos transversales, rotaciones, fuerzas y momentos de reacción. Asimismo, presenta las fuerzas transversales y los momentos de flexión en los extremos de cada elemento finito. La instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

```
IMREFL(IMPR,XYZ,ELE,UXY,FXY,REL,RIL,URI);
```

A diferencia de los parámetros de entrada mostrados en la anterior función, **IMREFL** requiere la tabla de resultados en el interior de cada elemento **RIL**, y la tabla índice **URI** que ubican los nudos de los elementos en la tabla **RIL**.

La función **IMTIEM** imprime en la ventana de comando un texto que indica el comienzo de un grupo de instrucciones y calcula el tiempo al final. La instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

$$\langle tfin \rangle = \text{IMTIEM}(\langle text \rangle, \langle tini \rangle);$$

donde  $\langle text \rangle$  corresponde al texto que se desea imprimir en la ventana de comando,  $\langle tini \rangle$  es la variable que establece el tiempo inicial del grupo de instrucciones y  $\langle tfin \rangle$  es el tiempo al comienzo del grupo de instrucciones si  $\langle tini \rangle=0$  o corresponde al tiempo al final del grupo de instrucciones si  $\langle tini \rangle$  es diferente de 0. En el ejemplo mostrado en el Listado 7.22, la primera línea escribe el texto **Reacciones en los nudos** en la ventana de comando y se establece la variable TINI en el tiempo actual, mientras que la última línea calcula y escribe el tiempo transcurrido desde la primera hasta la última línea en segundos TFIN.

```

1000 TINI = IMTIEM('Reacciones en los nudos',0);
% -----
1002 FGE = FGS; % vector de fuerzas equival. distribuidas
FGB = FGE(NGLD+1:NGLT,1); % subvector beta de fuer.equival.distribuidas
1004 FBB = KBA * UAA + KBB * UBB - FGB; % subvector de fuerzas desconoc = reacciones
FNA = FGN(1:NGLD,1); % subvec.fuer.en nudos conocidas alpha
1006 FTO = [ FNA ; FBB ]; % vector completo de fuerzas en nudos (sin equival a distr)
[FXY] = ORVETA(FTO,MGL); % tabla de fuerzas nodales en formato FX,FY
1008 % -----
1009 TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

```

**Listado 7.22:** Ejemplo de la función IMTIEM tomado de la rutina principal PEFICA.m.

### 7.5.9 Otras funciones propias

La función PELEME indica algunas características específicas del tipo de elemento finito. En particular para problemas unidimensionales, esta función obtiene el número de nudos  $\langle nuel \rangle$  que están asociados a un tipo elemento identificado con el código  $\langle type \rangle$ . El formato de la instrucción que ejecuta esta función es el siguiente:

$$[\langle nuel \rangle] = \text{PELEME}(\langle type \rangle);$$

La función PRONUD construye una tabla de resultados promedio en cada nudo a partir de la tabla de resultados en los elementos. Los parámetros de entrada de esta función son: el número de nudos de la malla NNUD, la tabla de conectividades ELE y la tabla de resultados en los elementos REL. La tabla de resultados promedio en los

nudos obtenida se almacena en la matriz PRO, cuyo tamaño corresponde al número de nudos por el número de resultados establecidos en la tabla REL. La instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

```
[PRO] = PRONUD(NNUD,ELE,REL);
```

## 7.6 Ejemplos de aplicación de barras sometidas a fuerza axial

A continuación describen algunos problemas mecánicos de barras sometidas a fuerza axial que han sido resueltos con el programa \PEFUNI\PEFICA.m. Aquí se indica la geometría, los desplazamientos conocidos y las acciones aplicadas del problema, como también la malla de elementos finitos utilizada. Asimismo, se presentan los resultados más representativos calculados por el programa.

La carpeta \PEFUNI\DATOS suministrada con el paquete PEFICA20, contiene los archivos de datos y resultados de cada uno de los ejemplos ilustrados en esta sección.

### 7.6.1 Barra doblemente empotrada con malla de 3 elementos lineales

Una barra empotrada en sus extremos está conformada por dos tramos de 4.00 m de longitud cada uno, y con sección transversal circular de 0.050 m y 0.025 m diámetro, como lo ilustra la Figura 2.1(a). La barra está sometida a una carga distribuida uniforme parcial a lo largo de su eje igual a 10 kN/m y a una carga puntual 50 kN.

El dominio del problema se divide en diferentes mallas de elementos finitos unidimensionales de continuidad  $C_0$ , para barras sometidas a fuerza axial. La primera malla tiene 3 elementos unidimensionales lineales y 4 nudos, como se indica en la Figura 2.1(b).

El archivo PUNI01.m almacenado en la carpeta \PEFUNI\DATOS contiene los datos de entrada de este problema. Los listados impares entre el Listado 7.1 y el Listado 7.11 presentan dicho contenido.

El parámetro IMPR=8 en el archivo PUNI01.m establece que los resultados se presentan en cuatro ventanas gráficas (Figura 7.1) y en tres tablas dentro de la ventana de comandos de GNU-Octave (Listado 7.23). Tales resultados tienen las mismas

unidades de fuerza y posición que fueron definidas en el archivo de entrada. Particularmente, kN y m son las unidades de fuerza y longitud utilizadas en este ejemplo. En consecuencia, el desplazamiento está dado en m, el esfuerzo normal en kN/m<sup>2</sup> y la fuerza axial interna y las fuerzas externas en kN.

```

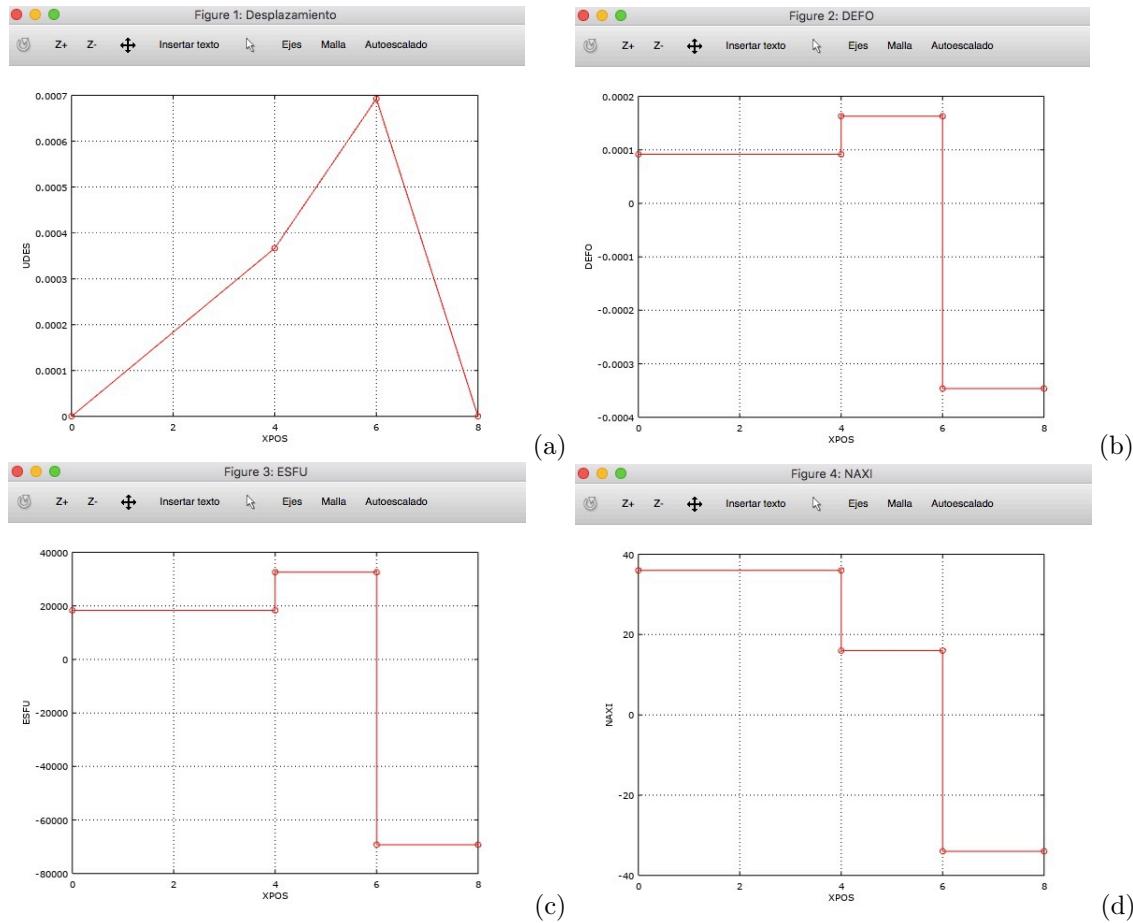
1000 -----
1001 Resultados en los nudos
1002 Desplazamientos en los nudos
1003 [ INUD DESX ]ans =
1004 1.00000 0.00037
1005 2.00000 0.00069
1006 3.00000 0.00000
1007 4.00000 0.00000
1008
1009 Fuerzas en los nudos
1010 [ INUD FUEX ]ans =
1011 1.00000 0.00000
1012 2.00000 50.00000
1013 3.00000 -33.99993
1014 4.00000 -56.00007
1015
1016 Resultados en los elementos
1017 [ IELE DEFI DEFJ ESFI ESFJ NAXI NAXJ ]ans =
1018 1 9.1673e-05 9.1673e-05 1.8335e+04 1.8335e+04 3.6000e+01 3.6000e+01
1019 2 1.6298e-04 1.6298e-04 3.2595e+04 3.2595e+04 1.6000e+01 1.6000e+01
1020 3 -3.4632e-04 -3.4632e-04 -6.9265e+04 -6.9265e+04 -3.4000e+01 -3.4000e+01
1021
1022 (0.6371 seg.)
Tiempo total de ejecucion (0.7425 seg.)

```

**Listado 7.23:** Ejemplo de una barra doblemente empotrada con malla de 3 elementos unidimensionales lineales. Resultados presentados en la ventana de comandos.

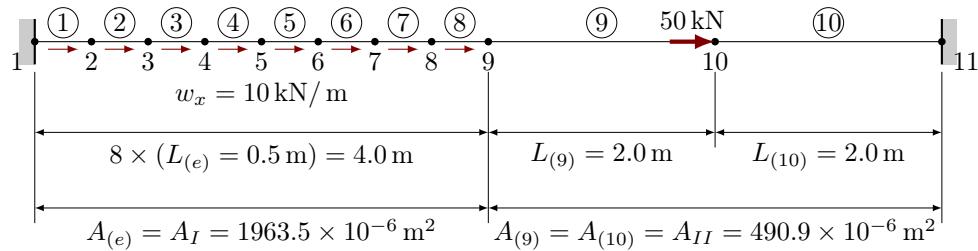
La primera tabla en la ventana de comandos contiene en cada fila el número del nudo INUD y el desplazamiento longitudinal DESX. La segunda tabla contiene el número del nudo INUD y la fuerza externa FUEX. La última tabla presenta en cada fila el número del elemento IELE, la deformación longitudinal en los extremos DEFI y DEFJ, el esfuerzo normal en los extremos ESFI y ESFJ, y la fuerza axial interna en los extremos NAXI y NAXJ.

La primera ventana gráfica presenta en la abscisa la posición XPOS y en la ordenada el desplazamiento longitudinal UDES (Figura 7.1(a)). La segunda ventana gráfica tiene la relación entre la posición y la deformación longitudinal DEFO (Figura 7.1(b)).



**Figura 7.1:** Ejemplo de una barra doblemente empotrada con malla de 3 elementos unidimensionales lineales. Ventanas de gráficos en GNU–Octave que contienen resultados en los nudos de (a) desplazamiento longitudinal, y los resultados en el interior de los elementos de: (b) deformación longitudinal, (c) esfuerzo normal y (d) fuerza axial.

La tercera ventana gráfica presenta la relación entre la posición y el esfuerzo normal ESFU (Figura 7.1(c)). La última ventana ilustra la fuerza axial interna NAXI en función de la posición (Figura 7.1(d)).



**Figura 7.2:** Ejemplo de barra doblemente empotrada con malla de 10 elementos unidimensionales lineales.

### 7.6.2 Barra doblemente empotrada con malla de 10 elementos lineales

La segunda malla del problema descrito en la Subsección 7.6.1, contiene 10 elementos unidimensionales lineales y 11 nudos, como se indica en la Figura 7.2.

En la carpeta \PEFUNI\DATOS se encuentra el archivo de entrada de la malla de 10 elementos unidimensionales lineales, denominado PUNI02.m. El Listado 7.24 muestra el contenido de tal archivo.

```

1000 % datos generales
1001 TIPR = 10;    % codigo del tipo de problema
1002 IMPR = 9;     % tipo de impresion de los resultados
1003 % tabla de categorias: CAT()
1004 CAT = [ ...
1005     200E6 1963.5E-06 101 ;      % 1
1006     200E6 490.87E-06 101 ];    % 2
1007 % tabla de conectividades de los elementos: ELE()
1008 ELE = [ ...
1009     1 1 2 ;      % 1
1010     1 2 3 ;      % 2
1011     1 3 4 ;      % 3
1012     1 4 5 ;      % 4
1013     1 5 6 ;      % 5
1014     1 6 7 ;      % 6
1015     1 7 8 ;      % 7
1016     1 8 9 ;      % 8
1017     2 9 10 ;     % 9
1018     2 10 11 ];    % 10
1019 % tabla de coordenadas de los nudos: XYZ()
1020 XYZ = [ ...
1021     0.00 ;      % 1
1022     0.50 ;      % 2
1023     1.00 ;      % 3
1024     1.50 ;      % 4

```

```

1026    2.00 ;      % 5
1027    2.50 ;      % 6
1028    3.00 ;      % 7
1029    3.50 ;      % 8
1030    4.00 ;      % 9
1031    6.00 ;      % 10
1032    8.00 ];      % 11
1033    % tabla de desplazamientos conocidos: UCO()
1034    UCO = [ ...
1035        001 1 0.0000 ;
1036        011 1 0.0000 ];
1037    % Tabla de fuerzas aplicadas en los nudos: FUN()
1038    FUN = [ ...
1039        010 50.0 ];
1040    % tabla de fuerzas distribuidas uniformes aplicadas
1041    % sobre los elementos: FDI()
1042    FDI = [ ...
1043        001 10.0 ;
1044        002 10.0 ;
1045        003 10.0 ;
1046        004 10.0 ;
1047        005 10.0 ;
1048        006 10.0 ;
1049        007 10.0 ;
1050        008 10.0 ];

```

**Listado 7.24:** Ejemplo de una barra doblemente empotrada con malla de 3 elementos unidimensionales lineales. Resultados presentados en la ventana de comandos.

El parámetro **IMPR=9** en el archivo **PUNI02.m** indica que programa PEFiCA 2.0 se presentará los resultados en la ventana de comandos y en siete ventanas de gráficos de GNU-Octave. Tales resultados son: el desplazamiento longitudinal y la fuerza externa en los nudos, y la deformación, el esfuerzo y la fuerza axial en el interior de los elementos y mediante valores promedio en los nudos.

Los resultados mostrados en la ventana de comandos se ilustran en el Listado 7.25. Adicionalmente a las tres primeras tablas descritas en la Subsección 7.6.1, se presenta una tabla que contiene en cada fila el número del nudo **INUD** y los valores promedio de la deformación longitudinal **DEF0**, el esfuerzo normal **ESFU** y la fuerza axial interna **NAXI**.

```

1000 Desplazamientos en los nudos
1001 [ INUD DESX ]ans =
1002 1.00000 0.00000

```

```

2.00000 0.00007
1004 3.00000 0.00013
4.00000 0.00019
1006 5.00000 0.00023
6.00000 0.00028
1008 7.00000 0.00031
8.00000 0.00034
1010 9.00000 0.00037
10.00000 0.00069
1012 11.00000 0.00000

1014 Fuerzas en los nudos
[ INUD FUEX ]ans =
1016 1.00000 -56.00007
2.00000 0.00000
1018 3.00000 0.00000
4.00000 0.00000
1020 5.00000 0.00000
6.00000 0.00000
1022 7.00000 0.00000
8.00000 0.00000
1024 9.00000 0.00000
10.00000 50.00000
1026 11.00000 -33.99993

1028 Resultados en los elementos
[ IELE DEFI DEFJ ESFI ESFJ NAXI NAXJ ]ans =
1030 1 1.3624e-04 1.3624e-04 2.7247e+04 2.7247e+04 5.3500e+01 5.3500e+01
2 1.2350e-04 1.2350e-04 2.4701e+04 2.4701e+04 4.8500e+01 4.8500e+01
1032 3 1.1077e-04 1.1077e-04 2.2154e+04 2.2154e+04 4.3500e+01 4.3500e+01
4 9.8039e-05 9.8039e-05 1.9608e+04 1.9608e+04 3.8500e+01 3.8500e+01
1034 5 8.5307e-05 8.5307e-05 1.7061e+04 1.7061e+04 3.3500e+01 3.3500e+01
6 7.2575e-05 7.2575e-05 1.4515e+04 1.4515e+04 2.8500e+01 2.8500e+01
1036 7 5.9842e-05 5.9842e-05 1.1968e+04 1.1968e+04 2.3500e+01 2.3500e+01
8 4.7110e-05 4.7110e-05 9.4220e+03 9.4220e+03 1.8500e+01 1.8500e+01
1038 9 1.6298e-04 1.6298e-04 3.2595e+04 3.2595e+04 1.6000e+01 1.6000e+01
10. -3.4632e-04 -3.4632e-04 -6.9265e+04 -6.9265e+04 -3.4000e+01 -3.4000e+01

1040
Resultados promedio en los nudos
1042 [ INUD DEFO ESFU NAXI ]ans =
1.0000e+00 1.3624e-04 2.7247e+04 5.3500e+01
1044 2.0000e+00 1.2987e-04 2.5974e+04 5.1000e+01
3.0000e+00 1.1714e-04 2.3428e+04 4.6000e+01
1046 4.0000e+00 1.0441e-04 2.0881e+04 4.1000e+01
5.0000e+00 9.1673e-05 1.8335e+04 3.6000e+01
1048 6.0000e+00 7.8941e-05 1.5788e+04 3.1000e+01
7.0000e+00 6.6208e-05 1.3242e+04 2.6000e+01

```

```

1050 8.0000e+00 5.3476e-05 1.0695e+04 2.1000e+01
1051 9.0000e+00 1.0504e-04 2.1009e+04 1.7250e+01
1052 1.0000e+01 -9.1673e-05 -1.8335e+04 -8.9999e+00
1.1000e+01 -3.4632e-04 -6.9265e+04 -3.4000e+01

```

**Listado 7.25:** Resultados presentados en la ventana de comandos en el problema de una barra sometida a carga axial con malla de 10 elementos finitos.

Las primeras cuatro ventanas gráficas mostradas en la Figura 7.3 presentan el desplazamiento en los nudos, la deformación longitudinal, el esfuerzo normal y la fuerza axial evaluada en el interior de los elementos, con el mismo formato indicado en la Subsección 7.6.1.

Las últimas tres ventanas gráficas mostradas en la Figura 7.4, relacionan la posición **XPOS** con los valores promedio en los nudos de deformación longitudinal **DEPR**, esfuerzo normal **ESPR** y fuerza axial interna **NAPR**.

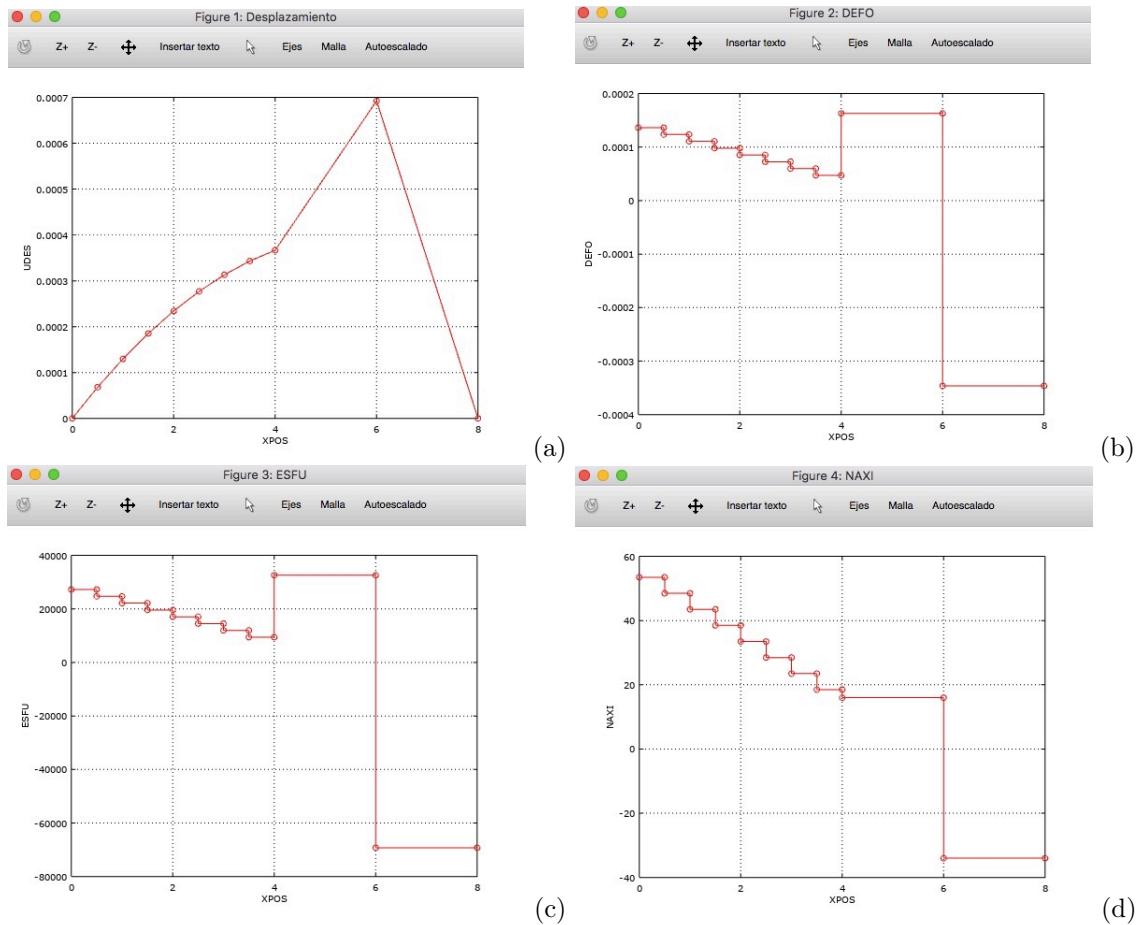
En este problema, el cambio en la sección transversal de la barra produce dos valores diferentes de esfuerzo y deformación para  $x = 3.0$  m. En la Figura 7.4(b) y (c), se observa que el cálculo del promedio suaviza los resultados, sin embargo, genera un error sobre el valor real en aquellas ubicaciones donde existen dos cantidades diferentes.

### 7.6.3 Barra doblemente empotrada con malla de 32 elementos lineales

La tercera malla del problema descrito en la Subsección 7.6.1, contiene 32 elementos unidimensionales lineales y 33 nudos, como se indica en la Figura 7.5.

En la carpeta **\PEFUNDATOS** se encuentra el archivo de entrada de la malla de 32 elementos unidimensionales lineales, denominado **PUNI03.m**.

Las ventanas gráficas mostradas en la Figura 7.6 presentan el desplazamiento en los nudos, y la deformación longitudinal, el esfuerzo normal y la fuerza axial evaluada en el interior de los elementos, con el mismo formato indicado en la Subsección 7.6.1.



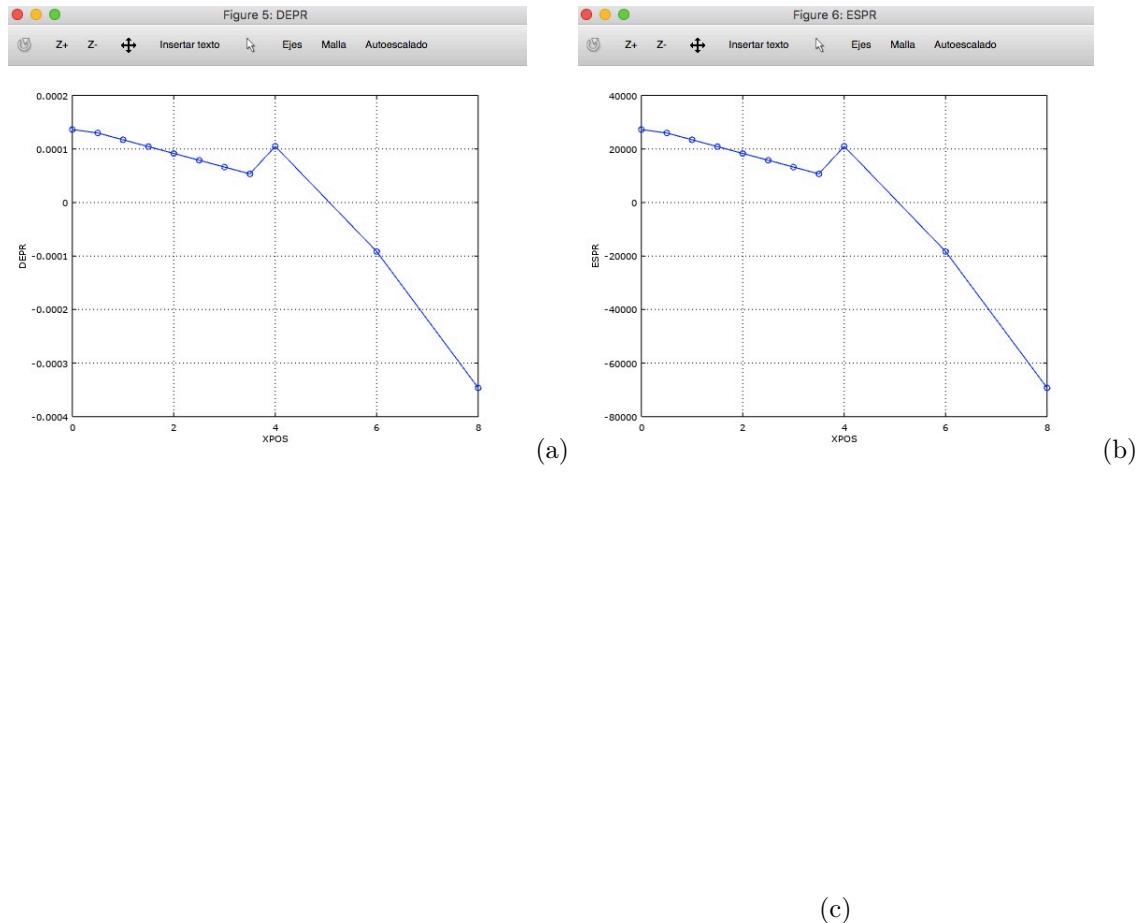
**Figura 7.3:** Ejemplo de una barra doblemente empotrada con malla de 10 elementos unidimensionales lineales. Ventanas de gráficos en GNU–Octave que contienen resultados en los nudos de (a) desplazamiento longitudinal, y los resultados en el interior de los elementos de: (b) deformación longitudinal, (c) esfuerzo normal y (d) fuerza axial.

#### 7.6.4 Barra doblemente empotrada con malla de elementos cuadráticos

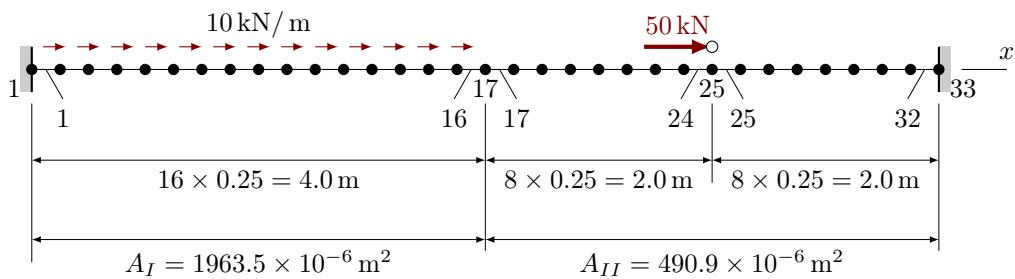
El problema de una barra doblemente empotrada presentado en la Subsección 7.6.1, se simula con la malla de 3 elementos finitos unidimensionales cuadráticos y 7 nudos, indicada en la Figura 7.7.

En la carpeta \PEFUNI\DATOS se encuentra el archivo de entrada de la malla de 3 elementos unidimensionales cuadráticos, denominado PUNI05.m.

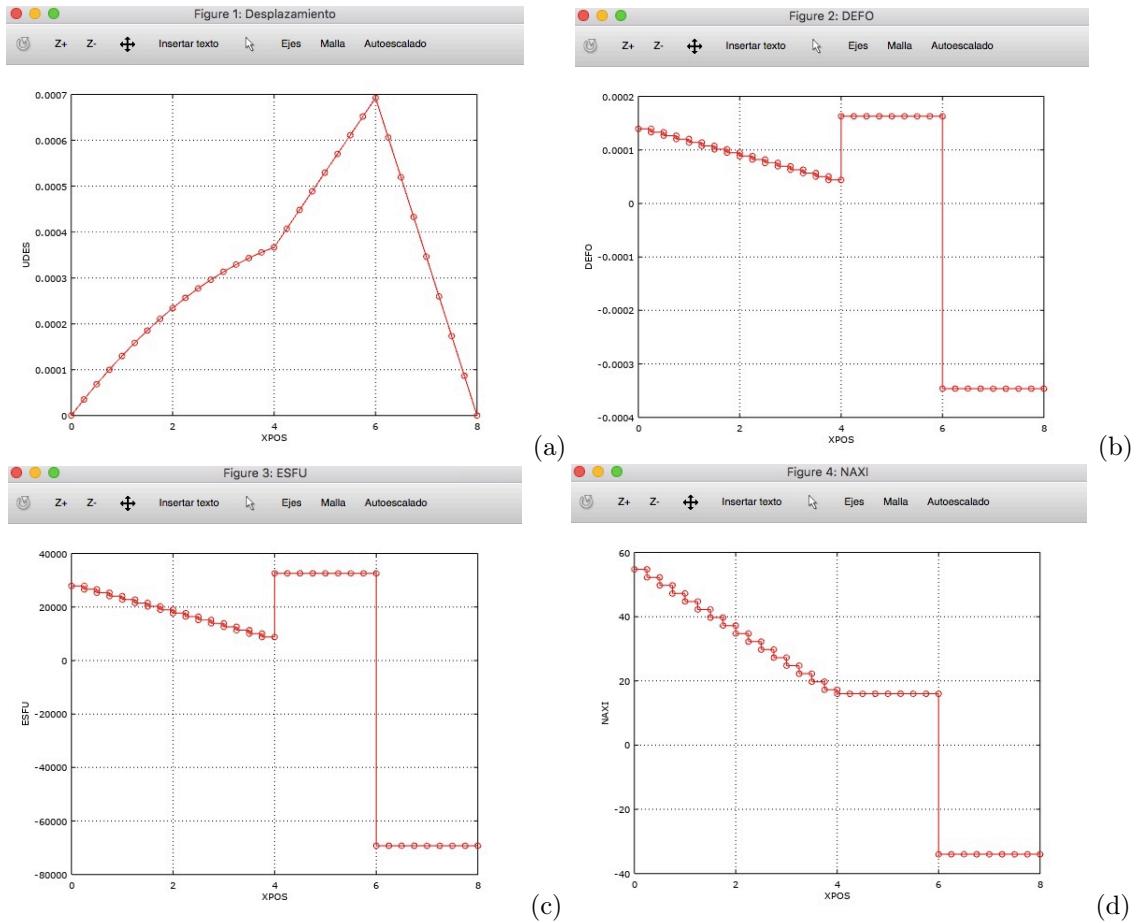
Las ventanas gráficas mostradas en la Figura 7.8 presentan el desplazamiento en los nudos, y la deformación longitudinal, el esfuerzo normal y la fuerza axial evaluada



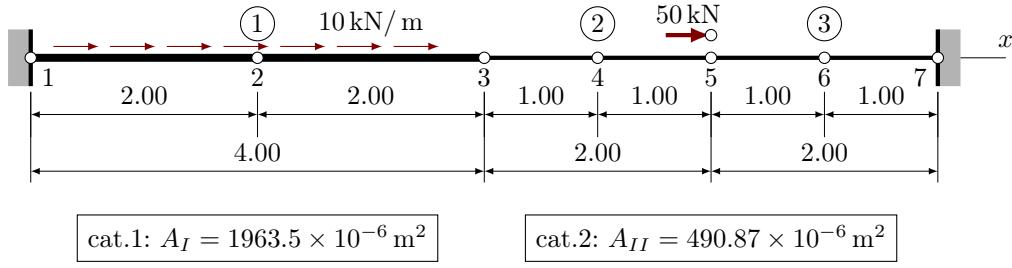
**Figura 7.4:** Ejemplo de una barra doblemente empotrada con malla de 10 elementos unidimensionales lineales. Ventanas de gráficos en GNU–Octave que contienen resultados promedio en los nudos de: (c) deformación longitudinal, (b) esfuerzo normal y (c) fuerza axial.



**Figura 7.5:** Ejemplo de barra doblemente empotrada con malla de 32 elementos.

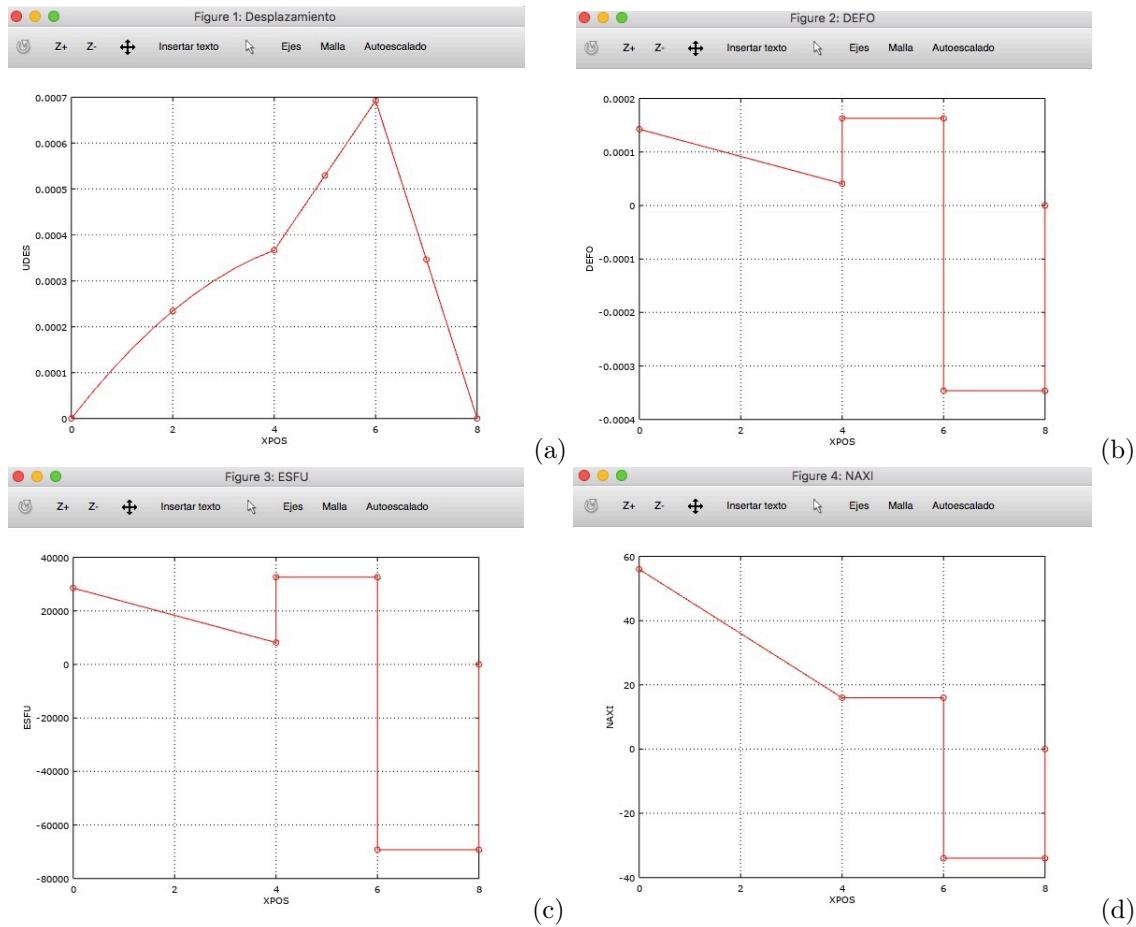


**Figura 7.6:** Ejemplo de una barra doblemente empotrada con malla de 32 elementos unidimensionales lineales. Ventanas de gráficos en GNU–Octave que contienen resultados en los nudos de (a) desplazamiento longitudinal, y los resultados en el interior de los elementos de: (b) deformación longitudinal, (c) esfuerzo normal y (d) fuerza axial.



$$E = 200 \text{ GPa}$$

**Figura 7.7:** Ejemplo de barra doblemente empotrada con malla de 3 elementos unidimensionales cuadráticos.



**Figura 7.8:** Ejemplo de una barra doblemente empotrada con malla de 3 elementos unidimensionales cuadráticos. Ventanas de gráficos en GNU–Octave que contienen resultados en los nudos de (a) desplazamiento longitudinal, y los resultados en el interior de los elementos de: (b) deformación longitudinal, (c) esfuerzo normal y (d) fuerza axial.

en el interior de los elementos, con el mismo formato indicado en la Subsección 7.6.1. Se observa como pocos elementos cuadráticos representan la variación cuadrática del desplazamiento y la variación lineal de la deformación, aproximando adecuadamente la solución del problema.

Finalmente, se simuló este problema con una malla de 6 elementos unidimensionales cuadráticos y 13 nudos, obteniendo resultados similares a los mostrados en la Figura 7.8. El archivo de entrada que contiene tal simulación se denomina `PUNI06.m` y está guardado en la misma carpeta de datos indicada anteriormente.

## 7.7 Ejemplos de aplicación de barras sometidas a flexión

A continuación describen algunos problemas mecánicos de barras sometidas a flexión, los cuales han sido resueltos utilizando el programa \PEFUNI\PEFICA.m. Aquí se indica la geometría, los desplazamientos conocidos y las acciones aplicadas del problema, como también la malla de elementos finitos. Asimismo, se presentan los resultados más representativos calculados por el programa.

La carpeta \PEFUNI\DATOS suministrada con el paquete PEFICA20, contiene los archivos de datos y resultados de cada uno de los ejemplos ilustrados en esta sección.

### 7.7.1 Viga empotrada–articulada sometida a cargas transversal distribuida y puntual

Una viga de acero empotrada en un extremo y articulada en el otro, está sometida a una carga distribuida uniforme de  $6 \text{ kN/m}$  y una carga puntual de  $40 \text{ kN}$ , como lo ilustra la Figura 2.6(a). La sección transversal de la viga es un perfil W14×85 con inercia a la flexión  $I_{AA} = 367.10 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ , el cual está reforzado en los dos metros centrales de la viga con dos platinas que aumentan la inercia a  $I_{BB} = 478.80 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ .

El dominio de la viga se divide en 5 nudos y 4 elementos unidimensionales cúbicos de continuidad  $C_1$  para barras a flexión, como se indica en la Figura 2.6(b).

El archivo PUNI11.m almacenado en la carpeta \PEFUNI\DATOS contiene los datos de entrada de este problema. Los listados pares entre el Listado 7.2 y el Listado 7.12 presentan dicho contenido.

El parámetro IMPR=8 en el archivo PUNI11.m establece que los resultados se presentan en tres ventanas gráficas (Figura 7.9) y en tres tablas dentro de la ventana de comandos de GNU-Octave (Listado 7.26). Tales resultados tienen las mismas unidades de fuerza y posición que fueron definidas en el archivo de entrada. Particularmente, kN y m son las unidades de fuerza y longitud utilizadas en este ejemplo. En consecuencia, la deflexión está dada en m, la fuerza cortante en kN y el momento flector en kN · m.

1000

-----

Resultados en los nudos

```

1002 Desplazamientos en los nudos
[ INUD DESY ROTZ ]ans =
1004 1.00000 0.00000 0.00000
      2.00000 -0.00226 -0.00082
1006 3.00000 -0.00291 -0.00044
      4.00000 -0.00308 0.00014
1008 5.00000 0.00000 0.00147

1010 Fuerzas en los nudos
[ INUD FUEY MOMZ ]ans =
1012 1.00000 42.33318 74.66544
      2.00000 0.00000 0.00000
1014 3.00000 0.00000 0.00000
      4.00000 -40.00000 0.00000
1016 5.00000 21.66682 0.00000

1018 Resultados en los elementos
[ IELE DEYI ROZI DEYJ ROZJ FUYI MOZI FUYJ MOZJ ]ans =
1020 1 0.00000 0.00000 -0.00226 -0.00082 42.33318 74.66544 -24.33318 25.33410
      2 -0.00226 -0.00082 -0.00291 -0.00044 24.33318 -25.33410 -18.33318 46.66728
1022 3 -0.00291 -0.00044 -0.00308 0.00014 18.33318 -46.66728 -18.33318 65.00046
      4 -0.00308 0.00014 0.00000 0.00147 -21.66682 -65.00046 21.66682 -0.00000

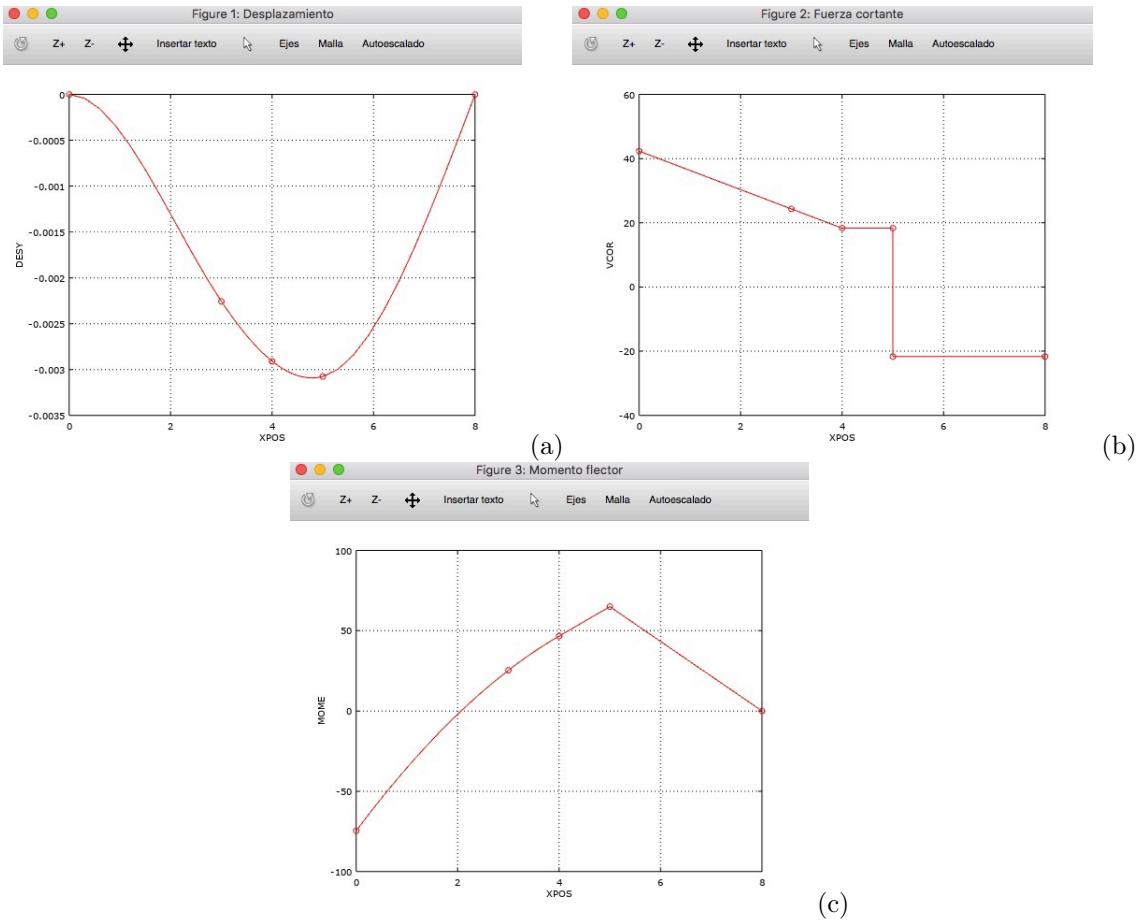
1024 Tiempo total de ejecucion ( 0.678 seg.)

```

**Listado 7.26:** Ejemplo de una viga empotrada – articulada con malla de 4 elementos unidimensionales cúbicos de continuidad  $C_1$ . Resultados presentados en la ventana de comandos.

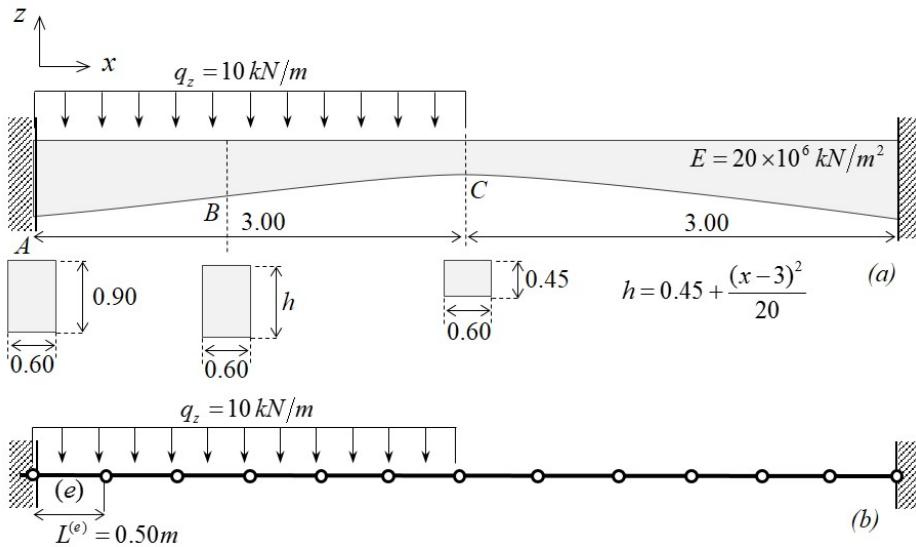
La primera tabla en la ventana de comandos contiene en cada fila el número del nudo INUD, el desplazamiento transversal o deflexión DESY y el ángulo de rotación de la sección en radianes ROTZ. La segunda tabla contiene el número del nudo INUD, la fuerza transversal externa FUEY y el momento externo MOMZ. La última tabla presenta en cada fila el número del elemento IELE, la deflexión DEYI y la rotación ROTI en el extremo inicial, la deflexión DEYJ y la rotación ROTJ en el extremo final, la fuerza cortante FUYI y el momento flector interno MOZI en el extremo inicial, y la fuerza cortante FUYJ y el momento flector interno MOZJ en el extremo final.

Para cada elemento finito, en el postproceso se calcula el valor de la deflexión cada décima parte de su longitud, mediante su función de aproximación y a partir del desplazamiento transversal y la rotación en sus extremos. Éste resultado se representa en la primera ventana gráfica (Figura 7.9(a)), donde la abscisa tiene la posición XPOS y la ordenada tiene la deflexión DESY. Por otro lado el programa calcula la fuerza



**Figura 7.9:** Ejemplo de una viga empotrada – articulada con malla de 4 elementos unidimensionales cúbicos de continuidad  $C_1$ . Ventanas de gráficos en GNU–Octave que contienen resultados en función de la posición de: (a) desplazamiento transversal o deflexión, (b) fuerza cortante y (c) momento flector.

cortante y el momento flector en el interior de cada elemento finito a partir de los valores en sus extremos y de las cargas distribuidas, mediante las ecuaciones de equilibrio estático. Tales resultados se describen en las ventanas gráficas mostradas en la Figura 7.9(b) y (c), donde la abscisa tiene la posición **XPOS** y las ordenadas indican la fuerza cortante **VCOR** y el momento flector **MOME**, respectivamente.



**Figura 7.10:** Ejemplo de una viga doblemente empotrada con sección transversal variable: (a) esquema general y (b) malla de elementos finitos.

### 7.7.2 Viga doblemente empotrada con sección transversal variable

Una viga simétrica doblemente empotrada está sometida a una carga distribuida uniforme  $q_x = 10 \text{ kN/m}$  aplicada en su primera mitad, como lo indica la Figura 7.10(a). La viga tiene una sección transversal rectangular cuya base es constante  $b = 0.60 \text{ m}$  y su altura varía de la forma  $h(x) = 0.45 + (x - 3)^2 / 20$  entre  $h(0) = h(6 \text{ m}) = 0.90 \text{ m}$  y  $h(3 \text{ m}) = 0.45 \text{ m}$ . El material de la viga tiene un módulo de Young de  $20 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ . Se desea calcular la deflexión y las acciones internas a lo largo de la viga.

Se representa la variación de la sección transversal de la viga, mediante una malla de 12 elementos unidimensionales cúbicos de continuidad  $C_1$ , de sección transversal constante y longitud  $L^{(e)} = 0.50 \text{ m}$ , como lo ilustra la Figura 7.10(b).

El archivo `PUNI12.m` almacenado en la carpeta `\PEFUND\DATOS` contiene los datos de entrada de este problema, como lo ilustra el Listado 7.27.

```

1000 % datos generales
1001 TIPR = 11;    % código del tipo de problema:
1002 IMPR = 8;     % tipo de impresión de los resultados
1003 % Tabla de categorías: CAT().

```

```

1004 CAT = [ ...
1005 20E6 0.028396 111 ; % 1
1006 20E6 0.017381 111 ; % 2
1007 20E6 0.010970 111 ; % 3
1008 20E6 0.007365 111 ; % 4
1009 20E6 0.005465 111 ; % 5
1010 20E6 0.004652 111 ]; % 6
1011 % Tabla de conectividades de los elementos: ELE()
1012 ELE = [ ...
1013 1 1 2 ; %1
1014 2 2 3 ; %2
1015 3 3 4 ; %3
1016 4 4 5 ; %4
1017 5 5 6 ; %5
1018 6 6 7 ; %6
1019 6 7 8 ; %7
1020 5 8 9 ; %8
1021 4 9 10 ; %9
1022 3 10 11 ; %10
1023 2 11 12 ; %11
1024 1 12 13 ]; %12
1025 % Tabla de coordenadas de los nudos: XYZ()
1026 XYZ = [ ...
1027 0.0 ; %1
1028 0.5 ; %2
1029 1.0 ; %3
1030 1.5 ; %4
1031 2.0 ; %5
1032 2.5 ; %6
1033 3.0 ; %7
1034 3.5 ; %8
1035 4.0 ; %9
1036 4.5 ; %10
1037 5.0 ; %11
1038 5.5 ; %12
1039 6.0 ]; %13
1040 % Tabla de desplazamientos conocidos: UCO()
1041 UCO = [ ...
1042 001 1 1 0.0000 0.0000 ;
1043 013 1 1 0.0000 0.0000 ];
1044 % Tabla de fuerzas aplicadas en los nudos de la malla.
1045 FUN = [ 0 0.0 0.00 ];
1046 % Tabla de fuerzas distribuidas uniformes aplicadas sobre los elementos FDI()
1047 FDI = [ ...
1048 001 -10.0 ;
1049 002 -10.0 ;
1050 003 -10.0 ;

```

```

1052 004 -10.0 ;
005 -10.0 ;
006 -10.0 ];

```

**Listado 7.27:** Ejemplo de una viga empotrada – articulada con malla de 4 elementos unidimensionales cúbicos de continuidad  $C_1$ . Resultados presentados en la ventana de comandos.

La inercia a la flexión de cada elemento finito se calcula de la forma  $I^{(e)} = I(\bar{x}^{(e)}) = \frac{1}{12} \cdot 0.60 \cdot (0.45 + (\bar{x}^{(e)} - 3)^2/20)^3$ , siendo  $\bar{x}^{(e)}$  la posición en la mitad del elemento  $e$ . En consecuencia, la tabla de categorías CAT en el archivo de entrada contendrá 6 diferentes inercias y la tabla de conectividades de los elementos ELE relacionará esas 6 inercias con los elementos finitos correspondientes.

Los resultados se presentan tres tablas dentro de la ventana de comandos de GNU-Octave, de las cuales se muestran dos de ellas en el Listado 7.28. Tales resultados tienen las mismas unidades de fuerza y posición que fueron definidas en el archivo de entrada. Particularmente, kN y m son las unidades de fuerza y longitud utilizadas en este ejemplo. En consecuencia, la deflexión está dada en m, la fuerza cortante en kN y el momento flector en kN · m.

```

1000 -----
1001 Resultados en los nudos
1002 Desplazamientos en los nudos
1003 [ INUD DESY ROTZ ]ans =
1004 1 0.0000e+00 0.0000e+00
1005 2 -4.9481e-06 -1.8127e-05
1006 3 -1.8315e-05 -3.3219e-05
1007 4 -3.7177e-05 -3.9817e-05
1008 5 -5.5761e-05 -3.2343e-05
1009 6 -6.6701e-05 -1.0389e-05
1010 7 -6.5059e-05 1.5923e-05
1011 8 -5.2650e-05 3.1563e-05
1012 9 -3.5830e-05 3.3883e-05
1013 10 -2.0157e-05 2.7449e-05
1014 11 -8.6531e-06 1.7654e-05
1015 12 -2.0919e-06 8.0151e-06
1016 13 0.0000e+00 0.0000e+00

1017 :
1018 :
1019 :
1020 Resultados en los elementos
1021 [ IELE DEYI ROZI DEYJ ROZJ FUYI MOZI FUYJ MOZJ ]ans =
1022 1 0.0000e+00 0.0000e+00 -4.9481e-06 -1.8127e-05 2.5194e+01 2.6472e+01 -2.0194e+01 -1.5124e+01
1023 2 -4.9481e-06 -1.8127e-05 -1.8315e-05 -3.3219e-05 2.0194e+01 1.5124e+01 -1.5194e+01 -6.2772e+00
1024 3 -1.8315e-05 -3.3219e-05 -3.7177e-05 -3.9817e-05 1.5194e+01 6.2772e+00 -1.0194e+01 6.9978e-02
1025 4 -3.7177e-05 -3.9817e-05 -5.5761e-05 -3.2343e-05 1.0194e+01 -6.9978e-02 -5.1944e+00 3.9172e+00
1026 5 -5.5761e-05 -3.2343e-05 -6.6701e-05 -1.0389e-05 5.1944e+00 -3.9172e+00 -1.9438e-01 5.2644e+00
1027 6 -6.6701e-05 -1.0389e-05 -6.5059e-05 1.5923e-05 1.9438e-01 -5.2644e+00 4.8056e+00 4.1115e+00
1028 7 -6.5059e-05 1.5923e-05 -5.2650e-05 3.1563e-05 -4.8056e+00 -4.1115e+00 4.8056e+00 1.7087e+00
1029 8 -5.2650e-05 3.1563e-05 -3.5830e-05 3.3883e-05 -4.8056e+00 -1.7087e+00 4.8056e+00 -6.9408e-01
1030 9 -3.5830e-05 3.3883e-05 -2.0157e-05 2.7449e-05 -4.8056e+00 6.9408e-01 4.8056e+00 -3.0969e+00

```

```

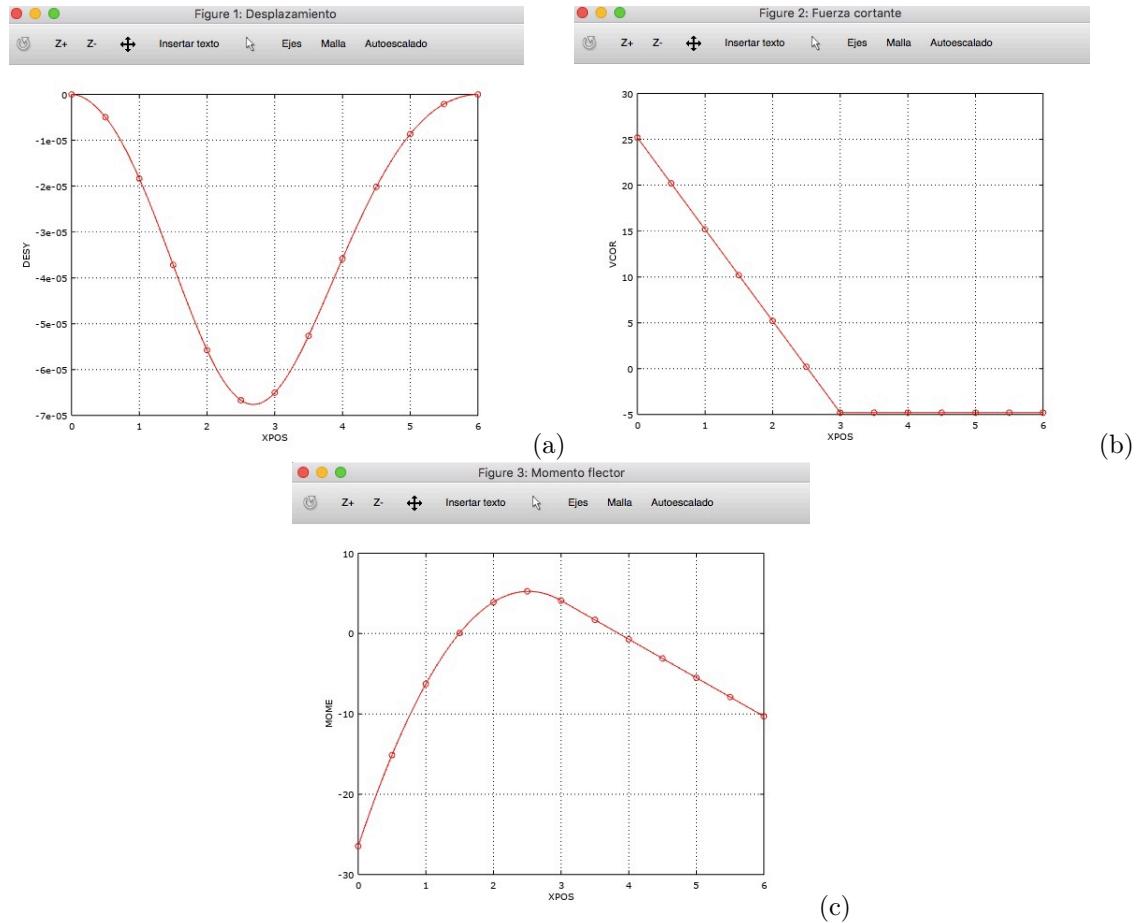
1032 10 -2.0157e-05 2.7449e-05 -8.6531e-06 1.7654e-05 -4.8056e+00 3.0969e+00 4.8056e+00 -5.4997e+00
1033 11 -8.6531e-06 1.7654e-05 -2.0919e-06 8.0151e-06 -4.8056e+00 5.4997e+00 4.8056e+00 -7.9025e+00
1034 12 -2.0919e-06 8.0151e-06 0.0000e+00 0.0000e+00 -4.8056e+00 7.9025e+00 4.8056e+00 -1.0305e+01

1036 ( 11.54 seg.)
Tiempo total de ejecucion ( 11.59 seg.)

```

**Listado 7.28:** Ejemplo de una viga doblemente empotrada con sección transversal variable y malla de 12 elementos unidimensionales cúbicos de continuidad  $C_1$ . Resultados presentados en la ventana de comandos.

Asimismo, el programa genera tres ventanas gráficas mostradas en la Figura 7.11, las cuales contienen el desplazamiento transversal, la fuerza cortante y el momento flector. El formato de éstas gráficas y de las tablas anteriores es el mismo indicado en el ejemplo de la Subsección 7.7.1.



**Figura 7.11:** Ejemplo de una viga doblemente empotrada con sección transversal variable y malla de 12 elementos unidimensionales cúbicos de continuidad  $C_1$ . Ventanas de gráficos en GNU-Octave que contienen resultados en función de la posición de: (a) desplazamiento transversal o deflexión, (b) fuerza cortante y (c) momento flector.



## Capítulo 8

# Implementación de la solución del problema mecánico elástico lineal bidimensional

Este capítulo presenta algunos aspectos de la implementación del método de los elementos finitos para la solución un problema mecánico elástico lineal bidimensional, mediante funciones escritas en GNU–Octave. Tales funciones están almacenadas en la carpeta \PEFBID del programa didáctico de elementos finitos a código abierto PEFiCA 2.0, incluido en este libro. La rutina principal del programa está contenida en el archivo \PEFBID\PEFiCA.m.

### 8.1 Archivo de entrada de datos para PEFiCA 2.0

El archivo de entrada de datos para el programa PEFiCA 2.0 contiene la malla de elementos finitos, las propiedades mecánicas y geométricas, las condiciones de borde y las cargas aplicadas del problema. Este archivo de entrada debe estar ubicado en la sub-carpeta \DATOS dentro de la carpeta \PEFBID. El programa puede leer los datos a partir de los dos tipos de archivos de entrada indicados a continuación.

### 8.1.1 Archivo de entrada tipo *script* de GNU–Octave

El archivo de entrada tipo *script* de GNU–Octave con extensión `.m` contiene directamente la definición de variables escalares y matriciales que describen el problema. Los nombres designados a dichas variables son los mismos utilizados posteriormente en la rutina principal de proceso. El programa PEFiCA 2.0 lee éste tipo de archivo de entrada, cuando el parámetro  $\langle ople \rangle$  descrito en la Subsección 6.3.1 es igual a 04, 05, 06, 07 o 08.

### 8.1.2 Archivo de entrada tipo *mesh* de GMSH

El archivo de entrada tipo *mesh* con extensión `.msh` para PEFiCA 2.0, es aquel que se exporta desde el programa GMSH en formato ASCII versión 2, como lo describe Sección 10.15. El programa PEFiCA 2.0 lee éste tipo de archivo de entrada, cuando el parámetro  $\langle ople \rangle$  descrito en la Subsección 6.3.1 es igual a 10, 11, 12, 17 o 19.

## 8.2 Variables de datos del programa

Las variables de datos del programa son escalares y matrices que representan la geometría, las condiciones de borde, las propiedades mecánicas y las cargas aplicadas sobre el sólido. A continuación se describen tales variables y se indica su valor en un ejemplo particular.

El ejemplo consiste en una lámina empotrada en su extremo izquierdo, sometida en su extremo derecho a dos cargas: una distribuida uniforme de  $w = 1\,000 \text{ kN/m}^2$  y una puntual de  $P_7 = 1.0 \text{ kN}$ . La lámina está hecha de acero con módulo de Young de  $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  y relación de Poisson igual a  $\nu = 0.25$ . Además tiene un espesor constante de  $t = 0.010 \text{ m}$ . El dominio del problema se divide en un elemento cuadrilateral bilineal y 4 elementos triangulares lineales, como lo indica la Figura 8.1.

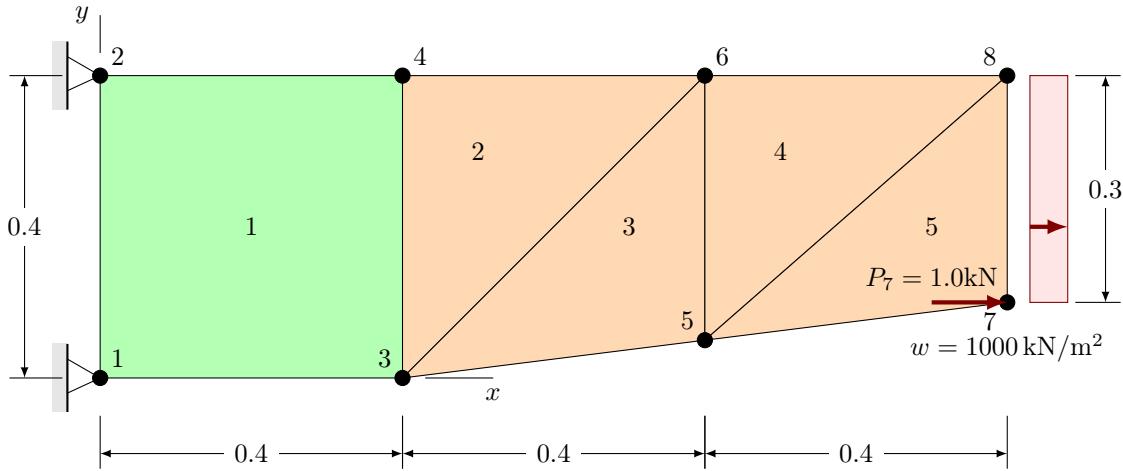


Figura 8.1: Malla de elementos finitos de una barra sometida a una carga distribuida y una carga puntual.

### 8.2.1 Parámetros generales del problema

La variable `TLEN` corresponde al parámetro `ople`, que determina el tipo de entrada de datos y de salida de resultados en la ejecución de la función `PEFiCA`. Asimismo, la variable `PRO` depende de `TLEN` y establece el tipo de evaluación de los resultados así:

- `PRO=0` calcula los resultados promedio en los nudos.
- `PRO=1` obtiene los resultados en el interior de los elementos con una sola categoría de material.
- `PRO=2` calcula los resultados en el interior de los elementos con varias categorías.

La presentación de resultados está definida con la variable `IMPR`, la cual cuenta con las siguientes opciones:

- `IMPR=0` establece que no se imprimen o presentan resultados.
- `IMPR=1` se presentan resultados en la ventana de comandos de GNU-Octave.
- `IMPR=2` se presentan resultados en archivos `.gid.msh` y `.gid.res` para GiD.

- **IMPR=3** se presentan resultados en la ventana de comandos de GNU-Octave y en archivos **.gid.msh** y **.gid.res** para GiD.
- **IMPR=4** escribe un archivo fuente para LaTeX que contiene la malla de elementos finitos dibujada con las instrucciones del paquete TikZ.
- **IMPR=5** se presentan resultados en archivos **.pos** y **.pos.opt** para GMSH.

El tipo de evaluación de los esfuerzos y las deformaciones en el elemento se define con la variable **ENNU**. Para evaluar los esfuerzos y las deformaciones en los puntos de Gauss, en los nudos o en el centro del elemento, se establece **ENNU=0**, **ENNU=1** o **ENNU=2**, respectivamente.

Las variables **NNUE** y **NGAU** establecen el número máximo de nudos y de puntos de Gauss por elemento, respectivamente. Por ejemplo, en una malla que combina elementos triangulares lineales (de 3 nudos) y cuadrilaterales bilineales (de 4 nudos y 4 puntos de Gauss), **NNUE=4** y **NGAU=4**.

El tipo de problema bidimensional está determinado por la variable **TIPR**. En particular **TIPR=20** establece una condición plana de esfuerzos, mientras que **TIPR=21** indica una condición plana de deformaciones.

A pesar que la rutina principal \PEFBID\PEFICA es particular de problemas bidimensionales, se conserva la variable **NDIM=2**, para identificar el número de dimensiones del problema.

El número de elementos, de nudos y de categorías de la malla se definen con las variables **NELE**, **NNUD** y **NCAT**, respectivamente.

Para el ejemplo ilustrado en la Figura 8.1, los parámetros generales que se escriben en el archivo de entrada tipo *script* son:

```

1000 % parametros generales
1001 NELE = 5;      % numero de elementos
1002 NNUD = 8;      % numero de nudos
1003 NNUE = 4;      % numero maximo de nudos por elemento
1004 NGAU = 4;      % numero maximo de puntos de Gauss por elemento
1005 NDIM = 2;      % numero de dimensiones
1006 NCAT = 2;      % numero de categorias de elementos
1007 TIPR = 20;      % codigo del tipo de problema:
1008                      % 20: plano de esfuerzos, 21: plano de deformaciones

```

```

1010 ENNU = 0;      % tipo de evaluacion de esfuerzos/deformaciones en el elemento
                  % 0: eval en PG, 1: eval en los nudos, 2: eval en centro del elemen
1011 IMPR = 2;      % tipo de impresion de los resultados
                  % 0: ninguno, 1: en ventana de comandos, 2: en GiD,
1012                  % 3: en VC, GiD y Tikz LaTeX
1013                  % 4: en Tikz LaTeX
1014

```

Listado 8.1: Ejemplo de problema bidimensional. Parámetros generales

### 8.2.2 Tabla de categorías

La tabla de categorías o matriz CAT contiene en cada fila las propiedades mecánicas del material, los parámetros de la geometría y el tipo de elemento finito, en unidades consistentes de fuerza y de longitud. El número de la fila identifica el número de la categoría.

Cada categoría contiene: el módulo de Young  $\langle eyou \rangle$ , la relación de Poisson  $\langle pois \rangle$  y el peso específico  $\langle gamm \rangle$  del material; el espesor  $\langle tesp \rangle$ , el tipo  $\langle tipe \rangle$ , el número de nudos  $\langle nuel \rangle$  y el número de puntos de Gauss  $\langle pgau \rangle$  del elemento finito. Se cuenta con los elementos bidimensionales de continuidad  $C_0$ : triangular lineal y cuadrilateral bilineal, designados como:  $\langle tipe \rangle=201$  y  $\langle tipe \rangle=202$ , respectivamente. El formato de cada fila de la matriz CAT es de la forma:

```
CAT = [ <eyou> <pois> <gamm> <tesp> <tipe> <nuel> <pgau>];
```

donde la última fila termina con `]`. En el análisis se considera el peso propio del material en dirección  $-y$ , cuando el valor del parámetro  $\langle gamm \rangle$  es diferente de cero.

En el ejemplo mostrado en la Figura 8.1, se definen dos categorías que difieren en el tipo de elemento. La categoría 1 define el elemento cuadrilateral bilineal ( $\langle tipe \rangle=202$ ) de 4 nudos ( $\langle nuel \rangle=4$ ) y 4 puntos de Gauss ( $\langle pgau \rangle=4$ ), mientras que la categoría 2 indica los elementos triangulares lineales ( $\langle tipe \rangle=201$ ) de 3 nudos ( $\langle nuel \rangle=3$ ) y 1 punto de Gauss ( $\langle pgau \rangle=1$ ). En este caso la tabla de categorías escrita en el archivo de entrada de datos contiene lo siguiente:

```

1000 CAT = [ ...
1001 200E6 0.25 0.00 0.01 202 4 4 ;      % 1
1002 200E6 0.25 0.00 0.01 201 3 1 ];      % 2

```

---

**Listado 8.2:** Ejemplo de problema bidimensional. Tabla de categorías

### 8.2.3 Tabla de conectividades y categorías de los elementos

La tabla de conectividades y categorías de los elementos o matriz ELE contiene en cada fila los identificadores de la categoría  $\langle icat \rangle$  y de los nudos de cada elemento  $\langle nud_i \rangle$   $\langle nud_j \rangle \dots$ . En consecuencia el número de filas de ELE corresponde al número de elementos finitos NELE y el número de columnas será 1 más la cantidad de nudos de un elemento NNUE. El número de la fila identifica al número del elemento finito de forma secuencial. El formato de cada fila de la matriz ELE es de la forma:

$$\text{ELE} = [ \langle icat \rangle \langle nud_i \rangle \langle nud_j \rangle \dots ;$$

donde la última fila termina con `]`;

La Figura 8.1 muestra una malla de un elemento cuadrilateral bilineal de 4 nudos y 4 elementos triangulares lineales de 3 nudos. En consecuencia la tabla de conectividades y categorías por elemento se escribe en el archivo de entrada como:

---

```

1000 ELE = [ ...
001 001 003 004 002 ; % 1
1002 002 003 006 004 000 ; % 2
002 003 005 006 000 ; % 3
1004 002 005 008 006 000 ; % 4
002 005 007 008 000 ]; % 5

```

---

**Listado 8.3:** Ejemplo de problema bidimensional. Tabla de conectividades y categorías de los elementos

Se observa que la última columna de la tabla indica el cuarto nudo en el elemento cuadrilateral, mientras que en los elementos triangulares se llena con valor de cero.

### 8.2.4 Tabla de coordenadas de los nudos

La tabla de coordenadas de los nudos o matriz XYZ de problemas bidimensionales contiene en cada fila las coordenadas  $x$  y  $y$  de los nudos de la malla. El valor  $\langle xnud \rangle$  de la coordenada  $x$  y  $\langle ynud \rangle$  de la coordenada  $y$  de cada nudo se introducen en la unidad de longitud escogida para el problema. El número de la fila identifica al número del nudo de forma secuencial. El formato de cada fila de la matriz XYZ es de la forma:

$$\text{XYZ} = [ \langle xnud \rangle \langle ynud \rangle ;$$

donde la última fila termina con  $] ;$ .

El ejemplo mostrado en la Figura 8.1 indica que la malla cuenta con 8 nudos referidos al sistema coordenado  $xy$ . Por lo tanto la tabla de coordenadas de los nudos que se debe escribir en el archivo de entrada es:

```

1000 XYZ = [ ...
1001   0.00 0.00 ; % 1
1002   0.00 0.40 ; % 2
1003   0.40 0.00 ; % 3
1004   0.40 0.40 ; % 4
1005   0.80 0.05 ; % 5
1006   0.80 0.40 ; % 6
1007   1.20 0.10 ; % 7
1008   1.20 0.40 ]; % 8

```

**Listado 8.4:** Ejemplo de problema bidimensional. Tabla de coordenadas de los nudos

### 8.2.5 Tabla de desplazamientos conocidos en los nudos

La tabla de desplazamientos conocidos en los nudos o matriz UCO establece cuáles desplazamientos en los nudos son conocidos y su respectivo valor en unidades consistentes de longitud.

La primera columna de la matriz UCO contiene el identificador del nudo  $\langle inud \rangle$ , la segunda columna indica con  $\langle dcux \rangle=1$  si el desplazamiento en dirección  $x$  es conocido y con  $\langle dcux \rangle=0$  si es desconocido, la tercera columna indica con  $\langle dcuy \rangle=1$  si el desplazamiento en dirección  $y$  es conocido y con  $\langle dcuy \rangle=0$  si es desconocido, y la cuarta

y la quinta columna,  $\langle vaux \rangle$  y  $\langle vauy \rangle$ , almacenan los valores de los desplazamientos en  $x$  y en  $y$ , en el caso que sean conocidos.

El formato de cada fila de la matriz UCO en problemas mecánicos bidimensionales es de la forma:

$$\text{UCO} = [ \langle inud \rangle \langle dcux \rangle \langle dcuy \rangle \langle vaux \rangle \langle vauy \rangle ; ];$$

donde la última fila termina con  $] ;$ .

El ejemplo ilustrado en la Figura 8.1 establece que el desplazamiento en  $x$  y en  $y$  de los nudos 1 y 2 es conocido e igual a 0.00. Para tal caso el archivo de entrada debe incluir lo siguiente:

```
1000 UCO = [ ...
001 1 1 0.0000 0.0000 ; ...
1002 002 1 1 0.0000 0.0000 ; ...
] ;
```

**Listado 8.5:** Ejemplo de problema bidimensional. Tabla de desplazamientos conocidos

### 8.2.6 Tabla de fuerzas aplicadas en los nudos

La tabla de fuerzas aplicadas en los nudos o matriz FUN indica el nudo y el valor de la fuerza aplicada en unidades consistentes. La primera columna de la matriz FUN contiene el identificador del nudo donde ocurre la fuerza puntual  $\langle inud \rangle$ , la segunda y la tercera columna establecen el valor  $\langle funx \rangle$  y  $\langle funy \rangle$  de dicha fuerza en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. El signo positivo de la fuerza puntual indica que ésta tiene el sentido del semi-eje positivo  $x$  o  $y$ . El formato de cada fila de la matriz FUN en problemas mecánicos bidimensionales es de la forma:

$$\text{FUN} = [ \langle inud \rangle \langle funx \rangle \langle funy \rangle ; ];$$

donde la última fila termina con  $] ;$ .

La lámina ilustrada en la Figura 8.1 está sometida a una carga puntual en el nudo 7, en dirección  $x$  de 1.0 kN. Por lo tanto, la matriz FUN es de la forma:

```
1000 FUN = [ ...
007 1.0 0.0 ; ...
```

1002 ] ;

**Listado 8.6:** Ejemplo de problema bidimensional. Tabla de fuerzas puntuales en los nudos

### 8.2.7 Tabla de cargas distribuidas en los elementos

La tabla de cargas distribuidas aplicadas en los elementos o matriz FDI indica las presiones en sistema global, local o asociadas a la acción hidrostática, que ocurren sobre los lados de algunos elementos finitos.

Particularmente, el formato de cada fila de la matriz FDI, cuando se aplican cargas distribuidas uniformes en sistema coordenado global, es de la forma:

$$\text{FDI} = [ \langle \text{rele} \rangle \langle \text{nudi} \rangle \langle \text{nudj} \rangle \langle \text{prex} \rangle \langle \text{prey} \rangle 0 ]$$

donde la última fila termina con ]. El parámetro  $\langle \text{rele} \rangle$  indica el número del elemento finito cargado y los parámetros  $\langle \text{nudi} \rangle$  y  $\langle \text{nudj} \rangle$  establecen los números de los nudos que delimitan la cara del mismo. El valor de la carga distribuida en las direcciones  $x$  y  $y$  están definidos por los parámetros  $\langle \text{prex} \rangle$  y  $\langle \text{prey} \rangle$ , respectivamente en unidades consistentes de fuerza por longitud al cuadrado. El signo positivo de estos últimos corresponde a la dirección positiva de los ejes  $x$  y  $y$ .

En cambio, el formato de cada fila de la matriz FDI, cuando se aplican cargas distribuidas uniformes en sistema coordenado local es:

$$\text{FDI} = [ \langle \text{rele} \rangle \langle \text{nudi} \rangle \langle \text{nudj} \rangle \langle \text{pren} \rangle \langle \text{pret} \rangle 1 ]$$

donde la última fila termina con ]. El parámetro  $\langle \text{rele} \rangle$  indica el número del elemento finito cargado y los parámetros  $\langle \text{nudi} \rangle$  y  $\langle \text{nudj} \rangle$  establecen los números de los nudos que delimitan la cara del mismo. El valor de la carga distribuida en las direcciones normal y tangencial están definidos por los parámetros  $\langle \text{pren} \rangle$  y  $\langle \text{pret} \rangle$ , respectivamente en unidades consistentes de fuerza por longitud al cuadrado. La dirección normal positiva  $\bar{x}$  está definida por el vector normal a la cara cargada entrando al elemento finito  $\mathbf{n}^{(\bar{x})}$ , descrito en la Ecuación 3.58 y la Figura 3.7(a). Mientras que la dirección tangencial positiva  $\bar{y}$  es perpendicular a la normal conformando un sistema coordenado local derecho, como se indica en la Ecuación 3.59 y la Figura 3.7(b).

Sobre una línea del contorno del sólido, se puede aplicar la presión normal de variación lineal entre los valores  $\langle prei \rangle$  en el nudo  $i$  y  $\langle prej \rangle$  en el nudo  $j$ , como lo ilustra la Figura 3.8(b). Tales valores son positivos entrando al elemento finito. El formato de cada fila de la matriz FDI es:

$$\text{FDI} = [ \langle rele \rangle \langle nud_i \rangle \langle nud_j \rangle \langle prei \rangle \langle prej \rangle 2 ]$$

donde la última fila termina con  $] ;$ . Éste tipo de carga aplicada puede representar la presión hidroestática del agua con peso específico  $\langle gawa \rangle$ , a un nivel con respecto al origen coordenado global  $\langle hewa \rangle$ , como lo ilustra la Figura 3.8. Los parámetros  $\langle gawa \rangle$  y  $\langle hewa \rangle$ , se pueden definir en el preproceso gráfico realizado con el programa GMSH, como se explicará en Subsección 10.9.4.

La lámina del ejemplo ilustrado en la Figura 8.1 está sometida a una carga distribuida uniforme entre los nudos 7 y 8 del elemento 5, en dirección  $x$  de  $1\,000.0 \text{ kN/m}^2$ . Por lo tanto, la matriz FDI es de la forma:

```
1000 FDI = [ ...
005 007 008 1000.0 0.0 0 ;...
1002 ];
```

**Listado 8.7:** Ejemplo de problema bidimensional. Tabla de cargas distribuidas en los elementos

## 8.3 Variables del proceso de cálculo

La subrutina principal PEFICA.m define un conjunto de variables escalares y matriciales para el análisis por elementos finitos.

### 8.3.1 Variables escalares

Las variables escalares utilizadas en la rutina principal de cálculo son las siguientes:

- ADAT es una variable tipo cadena de caracteres que contiene el nombre del archivo de entrada de datos sin extensión.
- TLEN, PRO y IMPR son variables enteras que determinan: el tipo de entrada de datos y de salida de resultados en la ejecución PEFICA 2.0, el tipo de evaluación

de los resultados, y el modo de presentación de resultados, como se indica en la Subsección 8.2.1.

- **TINT**, **TINI** y **TFIN** contienen el tiempo medido por el reloj del computador en segundos, para el inicio de la rutina principal, para el inicio de un grupo de instrucciones y para el final de un grupo de instrucciones o de la rutina principal, respectivamente.
- **NELE** contiene el número de elementos finitos de la malla. Esta variable se obtiene del número de filas de la matriz **ELE**.
- **NNUD** contiene el número de nudos de la malla. Esta variable se obtiene del número de filas de la matriz **XYZ**.
- **NDIM** corresponde al número de dimensiones del problema y se obtiene del número de columnas de la matriz **XYZ**. En particular **NDIM=2** para problemas bidimensionales.
- **NNUE** es el número máximo de nudos de los tipos de elementos finitos de la malla.
- **NGAU** corresponde al número máximo de puntos de Gauss de los tipos de elementos finitos de la malla.
- **NCAT** es el número de categorías de material, espesor o tipo de elemento utilizadas en la malla.
- **ENNU** establece el tipo de evaluación de los esfuerzos y las deformaciones en el elemento finito. **ENNU=0** indica evaluación en los puntos de Gauss, **ENNU=1** en los nudos y **ENNU=2** en el centro del elemento finito.
- **TIPR** indica el tipo de problema bidimensional. Para condición plana de esfuerzos **TIPR=20** y para condición plana de deformaciones **TIPR=21**.

- **PMAT=3, PELE=4** y **PCAT**, corresponden al número de propiedades de material, de los elementos y de la categoría de un problema bidimensional. Este último es igual a  $\text{PCAT}=\text{PMAT}+\text{PELE}$ .
- **NCOM** es el número de componentes de esfuerzo o de deformación obtenidas en un problema mecánico. Particularmente  $\text{NCOM}=3$  para problemas bidimensionales.
- **NGLN** corresponde al número de grados de libertad asociados a cada nudo. Esta variable es igual al número de columnas de la tabla de desplazamientos conocidos **UC0** menos 1 y dividido en 2.
- **NGLT** contienen el número de grados de libertad total de la malla, calculado como  $\text{NGLT}=\text{NGLN}*\text{NNUD}$ .
- **NGLC** y **NGLD** contienen el número de grados de libertad conocidos y desconocidos de la malla, respectivamente. **NGLC** se obtiene del número de condiciones de borde impuestas en la tabla **UC0**. Mientras que **NGLD** se calcula como  $\text{NGLD}=\text{NGLT}-\text{NGLC}$ .
- **IELE** es el identificador de un elemento finito, que se utiliza habitualmente como el contador en un ciclo definido por las instrucciones de GNU-Octave **for ... end**.
- **NUEL** corresponde al número de nudos de un elemento finito específico. Se designa automáticamente cuando se leen los datos de un archivo **.msh**.
- **NKEL** es el tamaño de la matriz de rigidez de un elemento finito específico, almacenada en **KEL**.
- **IKEL** y **JKEL** son los números de fila y de columna dentro de la matriz de rigidez de un elemento **KEL**, respectivamente. Se utilizan como contadores en ciclos definidos por las instrucciones de GNU-Octave **for ... end**.
- **GAMT** es la suma del peso específico de los materiales establecidos en la tabla **CAT**. Este parámetro tiene como objetivo indicar si se considera o no el peso propio del material en el análisis.

- **ICAT** es el identificador de la categoría correspondiente a un elemento finito específico, extraída de la tabla de conectividades y categorías de los elementos ELE.
- **NFEL** es el número de columnas del vector de fuerzas equivalentes a cargas distribuidas en un elemento finito específico, almacenada en FEL.
- **IFEL** indica el número de fila dentro del vector FEL. Se utilizan como contadores en ciclos definidos por las instrucciones de GNU–Octave `for ... end`.
- **NFDI** corresponde al número fuerzas distribuidas definidas en la tabla FDI.
- **IFDI** indica el contador de las fuerzas distribuidas en la tabla FDI.
- **NEVA** establece el número de puntos evaluados en el interior de un elemento finito. Si **ENNU=0** el parámetro **NEVA=NGAU**. Si **ENNU=1** entonces **NEVA=NNUE** y si **ENNU=2** el parámetro **NEVA=1**.
- **IEVA** es el identificador de un punto de evaluación en el elemento, el cual se utiliza como el contador en un ciclo definido por las instrucciones de GNU–Octave `for ... end`.
- **IRES** es un entero que indica la ubicación de un resultado en la tabla SRE o ERE.
- **ICOM** es el identificador de la componente de esfuerzo o deformación en el elemento. Se utiliza como el contador en un ciclo definido por las instrucciones de GNU–Octave `for ... end`.
- **JCOM** es el identificador de los esfuerzos o deformaciones principales en el elemento. Se utiliza como el contador en un ciclo definido por las instrucciones de GNU–Octave `for ... end`.
- **STVM** corresponde al esfuerzo de von Mises obtenido a partir de los esfuerzos principales con la función **TRPRIN**.

- **POIS** contiene temporalmente la relación de Poisson del material leída de la tabla **CAT**.

### 8.3.2 Variables matriciales

Las variables matriciales utilizadas en la rutina principal de cálculo son las siguientes:

- **SUP** es una tabla auxiliar que identifica el número de la superficie asociada al elemento finito (triangular o cuadrilateral), definida en archivo de entrada de datos **.msh** de GMSH.
- La tabla de grados de libertad por nudo **MGL** es una matriz de **NNUD** filas por **NGLN** columnas, que contiene los identificadores de los grados de libertad por nudo.
- **UBB** es el sub-vector de desplazamientos nodales conocidos de la malla  $\mathbf{a}_\beta$ , ordenado de acuerdo con la numeración de los grados de libertad. Esta matriz se construye con la información de la tabla de desplazamientos conocidos **UC0**.
- La tabla de incidencias **INC** es una matriz de **NELE** filas por **NGLN\*NNUE** columnas, que contiene en cada fila los identificadores de los grados de libertad de cada elemento finito.
- **XYE** es una matriz que contiene las coordenadas de los nudos de un elemento específico. En particular, para elementos triangulares lineales esta matriz es de la forma:

$$\text{XYE} = [ \langle xnui \rangle \langle ynui \rangle ; \langle xnuj \rangle \langle ynuj \rangle ; \langle xnuk \rangle \langle ynuk \rangle ]$$

Mientras que para elementos cuadrilaterales bilineales su formato es:

$$\text{XYE} = [ \langle xnui \rangle \langle ynui \rangle ; \langle xnuj \rangle \langle ynuj \rangle ; \langle xnuk \rangle \langle ynuk \rangle ; \langle xnul \rangle \langle ynul \rangle ]$$

donde  $\langle xnui \rangle$  y  $\langle ynui \rangle$  son las coordenadas  $x$  y  $y$  del nudo inicial  $i$ . Asimismo,  $\langle xnuj \rangle$ ,  $\langle ynuj \rangle$ ,  $\langle xnuk \rangle$ ,  $\langle ynuk \rangle$ ,  $\langle xnul \rangle$  y  $\langle ynul \rangle$  indican las coordenadas  $x$  y  $y$  de los nudos  $j$ ,  $k$  y  $l$  del elemento.

- CAE es una matriz fila que contiene las propiedades de la categoría de un elemento, la cual corresponde a la fila de la tabla categorías de un elemento finito específico. En consecuencia su formato es casi el mismo de la matriz CAT, así:

$$\text{CAE} = [\langle \text{eyou} \rangle \langle \text{pois} \rangle \langle \text{gamm} \rangle \langle \text{tesp} \rangle \langle \text{tipe} \rangle \langle \text{nuel} \rangle \langle \text{pgau} \rangle]$$

donde  $\langle \text{eyou} \rangle$ ,  $\langle \text{pois} \rangle$  y  $\langle \text{gamm} \rangle$  son el módulo de elasticidad, la relación de Poisson y el peso específico del material. Asimismo,  $\langle \text{tesp} \rangle$ ,  $\langle \text{tipe} \rangle$ ,  $\langle \text{nuel} \rangle$  y  $\langle \text{pgau} \rangle$  corresponden al espesor, el tipo, el número de nudos y el número de puntos de Gauss del elemento.

- KEL y KGS son las matrices de rigidez de un elemento finito específico de tamaño NCEL y la matriz de rigidez de la malla de tamaño NGLT, respectivamente. La matriz de rigidez de la malla KGS se obtiene del proceso de ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos finitos KEL. En cambio, la matriz de rigidez del elemento se calcula con la función KELEME.
- KAA es la sub-matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ , conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas 1 a NGLD y las columnas 1 a NGLD. En cambio KAB es la sub-matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ , conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas 1 a NGLD y las columnas NGLD+1 a NGLT. La sub-matriz de rigidez de la malla KBA definida como  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$ , está conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas NGLD+1 a NGLT y las columnas 1 a NGLD. Finalmente, KBB es la sub-matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}_{\beta\beta}$ , conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas NGLD+1 a NGLT y las columnas NGLD+1 a NGLT.
- FEL y FGS son los vectores de fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas en un elemento finito específico  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  y en la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_s$ , respectivamente. FEL y FGS son matrices columna con NCEL y NGLT filas, respectivamente. El vector de fuerzas equivalentes de la malla FGS se obtiene del proceso de ensamblaje de los vectores de fuerzas equivalentes de los elementos finitos FEL. En cambio,

el vector de fuerzas equivalentes a la acción de las presiones en las caras del elemento se calcula con la función **FELEMS**.

- **FEL** y **FGC** son los vectores de fuerzas equivalentes al peso propio en un elemento finito específico  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  y en la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_b$ , respectivamente. **FEL** y **FGC** son matrices columna con **NKEL** y **NGLT** filas, respectivamente. El vector de fuerzas equivalentes de la malla **FGC** se obtiene del proceso de ensamblaje de los vectores de fuerzas equivalentes de los elementos finitos **FEL**. En cambio, el vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del elemento se calcula con la función **FELEMC**.
- **FGN** es el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla  $\mathbf{f}^{(n)}$ , la cual se obtiene de la tabla de fuerzas nodales **FUN**, utilizando la función **ORTAVE**.
- **FGT** es el vector de fuerzas totales **f**, que resulta de la suma entre las fuerzas equivalentes de cuerpo y de superficie, y las fuerzas aplicadas directamente sobre los nudos sin conocer las reacciones, es decir  $\text{FGT}=\text{FGC}+\text{FGS}+\text{FGN}$ .
- **FAA** es el sub-vector de fuerzas totales  $\mathbf{f}_\alpha$ , conformado por los coeficientes del vector **FGT** ubicados en las filas 1 a **NGLD**.
- **FGE** es el vector de fuerzas equivalentes de cuerpo y superficie, calculado como  $\text{FGE}=\text{FGC}+\text{FGS}$ .
- **FGB** es el sub-vector de fuerzas equivalentes de cuerpo y de superficie de la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_\beta$ , que contiene los coeficientes del vector **FGE** desde la fila **NGLD+1** hasta **NGLT**.
- **FNA** es el sub-vector de fuerzas conocidas aplicadas directamente sobre los nudos  $\mathbf{f}_\alpha^{(n)}$ , el cual se obtiene como  $\text{FNA}=\text{FGN}(1:\text{NGLD}, 1)$ .
- **NEL** es la matriz de funciones de forma de un elemento finito específico  $\mathbf{N}_{(e)}$ . Esta matriz se calcula mediante la función **NELEME**.

- **BEL** es la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento finito específico  $\mathbf{B}_{(e)}$ . Esta matriz se calcula mediante al función **BELEME**.
- **TEM** es una matriz que se utiliza en varios líneas del código para almacenar valores temporales del análisis.

## 8.4 Variables de resultados del programa

Los resultados obtenidos con el programa PEFiCA 2.0 se almacenan en varias matrices, las cuales se describen a continuación:

- **UAA** es el sub-vector de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{u}_\alpha$ , el cual se obtiene al resolver un sistema de ecuaciones simultaneas de la forma  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{u}_\beta$ , que se calcula en GNU–Octave con la siguiente instrucción:

$$\text{UAA} = (\text{KAA}) \setminus (\text{FAA} - \text{KAB} * \text{UBB});$$

- **UTO** es el vector de desplazamientos nodales completo  $\mathbf{u}^T = [\mathbf{u}_\alpha^T \quad \mathbf{u}_\beta^T]$ , construido a partir de los vectores de desplazamientos nodales desconocidos y conocidos, así:  $\text{UTO} = [\text{UAA} ; \text{UBB}]$ ;
- La tabla **UXY** contiene en cada fila las componentes de desplazamiento calculadas en cada nudo de la malla. En particular para problemas bidimensionales, el formato de una fila esta tabla es:

$$\text{UXY} = [ \langle \text{desx} \rangle \langle \text{desy} \rangle ;$$

donde  $\langle \text{desx} \rangle$  y  $\langle \text{desy} \rangle$  son las componentes de desplazamiento en las direcciones  $x$  y  $y$  en el nudo identificado por el número de la fila. Tales desplazamientos son calculados en la misma unidad de longitud utilizada en los datos de entrada.

- **FBB** es el sub-vector de fuerzas totales  $\mathbf{f}_\beta$ , conformado por los coeficientes del vector **FGT** ubicados en las filas **NGLD+1** y **NGLT**. Este sub-vector se calcula de la forma  $\text{FBB}=\text{KBA}*\text{UAA}+\text{KBB}*\text{UBB}$ .

- $\mathbf{FT0}$  es el vector de fuerzas totales  $\mathbf{f}$ , que resulta de la unión de los sub-vectores  $\mathbf{FAA}$  y  $\mathbf{FBB}$ , mediante la operación  $\mathbf{FT0} = [\mathbf{FAA}; \mathbf{FBB}]$ .
- La tabla  $\mathbf{FXY}$  contiene en cada fila las componentes de fuerzas totales en cada nudo de la malla. En particular para problemas bidimensionales, el formato de una fila esta tabla es:

$$\mathbf{FXY} = [ \langle f_{ux} \rangle \langle f_{uy} \rangle ;$$

donde  $\langle f_{ux} \rangle$  y  $\langle f_{uy} \rangle$  son las componentes de la fuerza total en direcciones  $x$  y  $y$  en el nudo identificado por el número de la fila.

- $\mathbf{FNB}$  es el sub-vector de fuerzas desconocidas aplicadas directamente sobre los nudos o reacciones  $\mathbf{f}_{\beta}^{(n)}$ , el cual se obtiene como  $\mathbf{FNB} = \mathbf{FBB} - \mathbf{FGB}$ .
- $\mathbf{FNT}$  es vector de fuerzas aplicadas en los nudos  $\mathbf{f}^{(n)}$ , el cual se obtiene como  $\mathbf{FNT} = [\mathbf{FNA}; \mathbf{FNB}]$ .
- $\mathbf{UEL}$  es el vector de desplazamientos nodales de un elemento finito específico, el cual se obtiene extrayendo sus coeficientes del vector de desplazamientos nodales de la malla  $\mathbf{UT0}$ , mediante la función **EXTRAV**.
- $\mathbf{DEL}$  corresponde a la matriz constitutiva del material elástico lineal e isotrópico, obtenida con la función **DELEME**.
- $\mathbf{EPE}$  y  $\mathbf{STE}$  son los matrices columna que contienen las componentes de deformación  $[\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}]$  y de esfuerzo  $[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}]$  evaluado en un punto del interior de un elemento finito. Tales vectores se calculan así:  $\mathbf{EPE} = \mathbf{BEL} * \mathbf{UEL}$ ;  $\mathbf{STE} = \mathbf{DEL} * \mathbf{EPE}$ ;
- $\mathbf{SPR}$  es una matriz columna que contiene los esfuerzos principales  $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ , calculado con la función **TRPRIN**.
- $\mathbf{EPR}$  es una matriz columna que contiene las deformaciones principales  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]$ , calculado con la función **TRPRIN**.

- SRE es una tabla que contiene los valores de esfuerzo por punto en los nudos o en los puntos de Gauss de cada elemento. El formato de cada fila de esta tabla es el siguiente:

$$\text{SRE} = [\langle iele \rangle \langle ieva \rangle \langle stxx \rangle \langle styy \rangle \langle stxy \rangle \langle stp1 \rangle \langle stp2 \rangle \langle stp3 \rangle \langle stvm \rangle];$$

donde  $\langle iele \rangle$  y  $\langle ieva \rangle$  son los identificadores del elemento y del punto de evaluación. Asimismo,  $\langle stxx \rangle$ ,  $\langle styy \rangle$  y  $\langle stxy \rangle$  son las componentes de esfuerzo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$ . Los parámetros  $\langle stp1 \rangle$ ,  $\langle stp2 \rangle$ ,  $\langle stp3 \rangle$  y  $\langle stvm \rangle$  corresponden a los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  y el esfuerzo de von Mises  $\sigma_{vm}$ .

- ERE es una tabla que contiene los valores de deformación por punto en los nudos o en los puntos de Gauss de cada elemento. El formato de cada fila de esta tabla es el siguiente:

$$\text{ERE} = [\langle iele \rangle \langle ieva \rangle \langle epxx \rangle \langle epyy \rangle \langle gaxy \rangle \langle epp1 \rangle \langle epp2 \rangle \langle epp3 \rangle];$$

donde  $\langle iele \rangle$  y  $\langle ieva \rangle$  son los identificadores del elemento y del punto de evaluación. Asimismo,  $\langle epxx \rangle$ ,  $\langle epyy \rangle$  y  $\langle gaxy \rangle$  son las componentes de deformación  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\gamma_{xy}$ . Los parámetros  $\langle epp1 \rangle$ ,  $\langle epp2 \rangle$  y  $\langle epp3 \rangle$  corresponden a las deformaciones principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$ .

## 8.5 Rutina principal del programa PEFICA.m

La rutina principal del programa corresponde al conjunto de instrucciones que permiten la solución de un tipo de problema de elementos finitos específico. Tales instrucciones son operaciones y llamados a funciones propias del lenguaje o proporcionadas como parte de PEFiCA 2.0.

En particular, el archivo `PEFICA.m` de la carpeta `\PEFBID`, resuelve problemas mecánicos estáticos bidimensionales. Este archivo utiliza operaciones y funciones de GNU-Octave, y las funciones contenidas en la sub-carpeta `\PEFBID\FUNCIONES`.

A continuación se describen las instrucciones de la rutina principal del programa en bloques relacionados a tareas específicas.

### 8.5.1 Ubicación de archivos y lectura de datos de entrada

En el Listado 8.8, inicialmente se adicionan las ubicaciones de las carpetas de las funciones propias del programa y de los datos de entrada de los problemas. Esto permite el acceso directo a los archivos contenidos en dichas carpetas sin necesidad de escribir la ruta completa. En las siguientes líneas de calcula el tiempo en que comienza la ejecución de la rutina y en el cual inicia la lectura de datos. Después se leen los datos del problema ejecutando un archivo de extensión .m tipo *script* o interpretando un archivo de extensión .msh generado por GMSH. Los escalares y matrices leídas son: NNUD, NELE, NNUE, NGAU, NDIM, NCAT, TIPR, ENNU, IMPR, XYZ, ELE, CAT, UCO, FUN, FDI, SUP

Al final se calcula y presenta en pantalla el tiempo transcurrido durante la lectura de datos.

```

1000 function PEFICA (ADAT,TLEC)
1002 %-----
1002 % control de ausencia de argumentos
1003 if exist('ADAT') == 0
1004     fprintf('PEFICA. La funcion requiere <nombre archivo datos>.\n')
1005     return
1006 end
1007 if exist('TLEC') == 0
1008     TLEC='10';
1009     fprintf('PEFICA. La funcion tomara por defecto a <opciones lectura>=10.\n')
1010 end
1011 ADAD = strcat('./DATOS/',ADAT);
1012 TLEN = str2num(TLEC);

1014 % adicionar carpetas y tomar tiempo inicial
1015 addpath('./FUNCIONES');
1016 addpath('./DATOS');
1017 TINT = IMTIEM('Inicio de ejecucion del programa \n',0);

1018 % lectura de archivo de entrada de datos
1019 % -----
1020 if TLEN<10
1021     % opcion de lectura de entrada de datos de archivo .m (de GiD o escrito direc)
1022     TINI = IMTIEM('Lectura de datos de entrada de archivo .m ',0);
1023     run(ADAT);
1024     % sub opciones
1025     if TLEN==06
1026         % escribir resultados en GiD y en ventana de comandos

```

```

1028     IMPR=3;
1029     elseif TLEN==07 || TLEN==08
1030         % escritura resultados en .pos de GMSH
1031         % esfuerzos y deformaciones promedio en nudos o en el interior de los elem
1032         IMPR=5; PRO=TLEN-7; ENNU=1;
1033         SUP=ELE(:,1)';
1034     elseif TLEN==04
1035         % escritura malla en TikZ
1036         IMPR=4;
1037     end % endif
1038
1039 else
1040     % opcion de lectura de entrada de datos de archivo .msh de GMSH
1041     TINI = IMTIEM('Lectura de datos de entrada de archivo .msh de GMSH ',0);
1042     [NNUD,NELE,NNUE,NGAU,NDIM,NCAT,TIPR,ENNU,IMPR,...
1043      XYZ,ELE,CAT,UCO,FUN,FDI,SUP] = LEGMSH(ADAD);
1044     % convertir despl conoc de formato B a formato A
1045     % para este tipo de problema NDIM=NGLN el cual aun no ha sido calculado
1046     [TEM] = ORVEBA(UCO,TLEN,NDIM,0); UCO=TEM;
1047     % convertir FUN de formato B a formato A
1048     [TEM] = ORVEBA(FUN,TLEN,NDIM,1); FUN=TEM;
1049
1050     % sub opciones
1051     if TLEN==10 || TLEN==11 || TLEN==12
1052         % esfuerzos y deformaciones promedio en nudos o en el interior de los
1053         % elementos con una o varias categorias
1054         PRO=TLEN-10;
1055     elseif TLEN==17
1056         % opcion de lectura de .msh de GMSH y escritura de resultados en GiD
1057         ENNU=0; IMPR=2;
1058     elseif TLEN==19
1059         % opcion de lectura de .msh de GMSH y escritura de malla en TikZ
1060         IMPR=4;
1061     end % endif
1062
1063 end %endif
1064
1065 ELE = int64(ELE); % cambio de tipo de datos para las matrices enteras
1066 if (TIPR==20 || TIPR==21)
1067     PMAT = 3;    % numero de propiedades de cada material [ EYOU POIS GAMM ]
1068     PELE = 4;    % numero de propiedades de cada elemento [ TESP TIPE NUEL PGAU ]
1069     PCAT = PMAT+PELE; % numero de propiedades en cada categoria
1070     NCOM=3; % NCOM: numero de componentes de esfuerzo o deformacion
1071 else
1072     error('PEFiCA. Tipo incorrecto de problema');
1073 end % endif problema bidimensional, material isotropico
1074 TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

```

---

**Listado 8.8:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA (archivo PEFICA.m), donde se establecen las ubicaciones de los archivos y se leen los datos de entrada.

### 8.5.2 Grados de libertad de nudos y elementos

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 8.9 define las tablas de los grados de libertad asociadas a los nudos y a los elementos a partir de las tablas de desplazamientos conocidos UCO y de conectividades ELE. Aquí se crea la tabla de grados de libertad por nudo MGL, el sub-vector de desplazamientos conocidos UBB y se obtiene el numero de grados de libertad por nudo NGLN y el numero de grados de libertad conocidos NGLC. Además se construye la tabla de incidencias o grados de libertad por elemento INC.

```

1000 TINI = IMTIEM('Grados de libertad de nudos y elementos ',0);
%
1002 [MGL ,UBB ,NGLN ,NGLC] = NGLUCO(UCO ,NNUD);
NGLT = NNUD*NGLN; % numero de grados de libertad del sólido
1004 NGLD = NGLT-NGLC; % numero de grados de libertad conocidos
% Se crea la tabla de GLs por elemento o matriz de incidencias
1006 [INC] = NGLELE(ELE ,MGL);
TFIN = IMTIEM(' ',TINI);
1008 % indicador de parametros de la malla
fprintf('Malla de %g nudos, %g elementos y %g GLs\n', NNUD ,NELE ,NGLT);

```

---

**Listado 8.9:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se definen las tablas de grados de libertad asociadas a los nudos y a los elementos.

### 8.5.3 Matriz de rigidez de los elementos y de la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 8.10 calcula la matriz de rigidez de cada elemento finito  $\mathbf{K}_{(e)}$  y la suma a la matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}$  en los grado de libertad correspondientes, es decir ensambla la matriz  $\mathbf{K}_{(e)}$  en  $\mathbf{K}$ . Inicialmente se establece un ciclo por elemento finito en donde se calcula la matriz de rigidez de un elemento KEL, a partir de: (i) las características geométricas y de material CAE extraídas de la tabla de categorías CAT, y (ii) de las coordenadas de los nudos XYE extraída de las tablas XYZ. A continuación se suman los coeficientes

de la matriz de rigidez del elemento KEL a la matriz de rigidez de la malla KGS, de acuerdo con los grados de libertad del elemento indicados en la matriz de incidencias INC. Después de finalizado el ciclo por elemento, se establecen las sub-matrices de rigidez de la malla  $K_{\alpha\alpha}$ ,  $K_{\alpha\beta}$ ,  $K_{\beta\alpha}$  y  $K_{\beta\beta}$ , cuyo tamaño está definido por los grados de libertad desconocidos y conocidos.

```

1000 TINI = IMTIEM('Matriz de rigidez del sólido ',0);
% -----
1002 KGS = zeros(NGLT,NGLT); % definición de tamaño de la matriz de rigidez sólido
for IELE = 1:NELE
    % matriz de rigidez de elemento
    CAE(1:PCAT) = CAT(ELE(IELE,1),1:PCAT); % propiedades de la categ elem IELE
1006 NUEL = CAE(1,PMAT+3); % numero de nudos del elemento IELE
    XYE(1:NUEL,1:NDIM) = XYZ(ELE(IELE,2:NUEL+1),1:NDIM); % coor nud de elem IELE
1008 [KEL] = KELEME(TIPR,XYE,CAE); % matriz de rigidez del elem IELE
    % ensamblaje de KEL() del elemento IELE en KGS() del sólido
1010 NKEL = size(KEL,1); % tamaño de la matriz de rigidez del elemento
    for IKEL=1:NKEL
        for JKEL=1:NKEL
            if ( INC(IELE, IKEL) ~= 0 & INC(IELE, JKEL) ~= 0)
                KGS(INC(IELE, IKEL), INC(IELE, JKEL)) = ...
                    KGS(INC(IELE, IKEL), INC(IELE, JKEL)) + KEL(IKEL, JKEL);
            end % endif
        end % endfor JKEL
    end % endfor IKEL
    % fin del ensamblaje
1020 end
    % submatrices de rigidez del sólido
1022 KAA = KGS(1:NGLD,1:NGLD); % submatriz K_{alpha,alpha}
1023 KAB = KGS(1:NGLD,NGLD+1:NGLT); % submatriz K_{alpha,beta}
1024 KBA = KGS(NGLD+1:NGLT,1:NGLD); % submatriz K_{beta,alpha}
1025 KBB = KGS(NGLD+1:NGLT,NGLD+1:NGLT); % submatriz K_{beta,beta}
1026 TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

```

**Listado 8.10:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se obtiene la matriz de rigidez de los elementos y de la malla.

### 8.5.4 Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material en los elementos y en la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 8.11 calcula el vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material en cada elemento finito  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  y la respectiva suma de éste con el vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material en la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}$  en los grados de libertad correspondientes, es decir, se ensambla el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  en  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}$ . Inicialmente se determina si el peso propio del material se ha definido en la tabla CAT, mediante el escalar GAMT. A continuación se realiza un ciclo desde 1 hasta el número de elementos finitos dentro del cual se realizan las siguientes tareas: (i) se calcula el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  de acuerdo con las características del elemento y el peso propio del material correspondiente y se guarda en la matriz FEL, (ii) se ensambla el vector anterior en el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}$  en los grados de libertad indicados en la matriz de incidencia INC y se almacena en la matriz FGC.

```

1000 TINI = IMTIEM('Vectores de fuerzas en los nudos del sólido ',0);
    % Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio en el sólido
    %
1002 FGC = zeros(NGLT,1); % definición de tamaño del vector de fuerza en el sólido
1004 GAMT = sum(CAT(:,3));
    if GAMT~=0; % control de problemas sin fuerzas de cuerpo GAMM=0
        for IELE = 1:NELE
            % vector de fuerza equivalente en el elemento
            CAE(1:PCAT) = CAT(ELE(IELE,1),1:PCAT); % propiedades de la categoría IELE
            NUEL = CAE(1,PMAT+3); % número de nudos del elemento IELE
            XYE(1:NUEL,1:NDIM) = XYZ(ELE(IELE,2:NUEL+1),1:NDIM); % coordenadas de los nodos del elemento IELE
            [FEL] = FELEM(XYE,CAE); % vector de fuerzas de cuerpo del elemento
            % ensamblaje de FEL() del elemento IELE en FGC() del sólido
            NFEL = size(FEL,1); % tamaño del vector del elemento
            for IFEL=1:NFEL
                if INC(IELE, IFEL) ~= 0
                    FGC(INC(IELE, IFEL), 1) = FGC(INC(IELE, IFEL), 1) + FEL(IFEL,1);
                end % endif
            end % endfor IFEL
            % fin ensamblaje
        end % endfor
    end % endif

```

**Listado 8.11:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se obtiene el vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material sobre los elementos y sobre la malla.

### 8.5.5 Vector de fuerzas equivalentes a la acción de cargas distribuidas en los elementos y en la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 8.12 calcula el vector de fuerzas equivalentes a la acción de cargas distribuidas en cada elemento finito  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  y la respectiva suma de éste con el vector de fuerzas equivalentes a la acción de cargas distribuidas en la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_s$  en los grados de libertad correspondientes, es decir, se ensambla el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  en  $\tilde{\mathbf{f}}_s$ . En esta parte del código se realiza un ciclo desde 1 hasta el número de cargas distribuidas NFDI definidas en la tabla FDI. Dentro de tal ciclo se realizan las siguientes tareas: (i) se calcula el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  de acuerdo con las características del elemento y de la carga distribuida y se guarda en la matriz FEL, (ii) se ensambla el vector anterior en el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_s$  en los grados de libertad indicados en la matriz de incidencia INC y se almacena en la matriz FGS.

```

1000 % Vector de fuerzas de superficie en el sólido
%
1002 NFDI = size(FDI,1); % numero de cargas distribuidas en elementos
FGS = zeros(NGLT,1); % definicion de tamano del vec fuerz superf del sólido
1004 for IFDI = 1:NFDI % ciclo por carga distribuida
if FDI(IFDI,1) ~= 0; % control de problemas sin fuerzas de superficie
1006 FDE = FDI(IFDI,:); % caracteristicas del lado
ICAT = ELE(FDI(IFDI,1),1); % identific de la categ del elemento cargado
1008 CAE = CAT(ICAT,:); % propiedades de la categ eleme IELE
[NLA,LLAD,VLA] = PBLADO(XYZ,ELE,FDE); % numero de lado y longitud
1010 [FEL] = FELEMS(CAE,LLAD,NLA,VLA,FDE); % vec fuerza de superf del element
IELE=FDI(IFDI,1);
1012 % ensamblaje de FEL() del elemento IELE en FGS() del sólido
NFEL = size(FEL,1); % tamano de vector del elemento
1014 for IFEL=1:NFEL
if INC(IELE, IFEL) ~= 0
1016 FGS(INC(IELE, IFEL), 1) = FGS(INC(IELE, IFEL), 1) + FEL(IFEL,1);
end % endif
1018 end % endfor IFEL
% fin ensamblaje
1020 end % endif
end % endfor

```

**Listado 8.12:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se obtiene el vector de fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas de los elementos y de la malla.

### 8.5.6 Vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla y vector de fuerzas totales

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 8.15 tiene las tareas indicadas a continuación. Primero calcular el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla  $\mathbf{f}^{(n)}$ , mediante el proceso de organización por grados de libertad, definido por las funciones `ORTAEX` y `ORTAVE`, cuyo resultado se guarda en la matriz FGN. Después se calculan las fuerzas totales equivalentes en los nudos de la malla, como  $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma} + \tilde{\mathbf{f}}_s + \mathbf{f}^{(n)}$ . Tal resultado se almacena en la matriz FGT. Finalmente se extrae el sub-vector  $\mathbf{f}_\alpha$  de  $\mathbf{f}$ , asociado a los grados de libertad desconocidos, el cual se guarda en la matriz FAA.

---

```

1000 % Vector de fuerzas aplicadas direct en los nudos del solido
% -----
1002 [TEM] = ORTAEX(FUN,NNUD); % tabla de fuerzas puntuales extendida a todos nuds
[FGN] = ORTAVE(TEM,MGL); % vector de fuerzas en los nudos del solido
1004 % solo es valido del GL=1 hasta GL=NGLD, los terminos donde GL>NGLD son las
% reacciones en los apoyos que aun son desconocidas
1006
% Vector de fuerzas totales equival en los nudos del solido
% -----
1008 % fuer.totales = fuer.eq.cuerpo + fuer.eq.superficie + fuer.aplic.dirrec.nudos
1010 FGT = FGC + FGS + FGN;
FAA = FGT(1:NGLD,1); % subvec.fuer.totales conocidas alpha, entre 1<=GL<=NGLD

```

---

**Listado 8.13:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se obtiene el vector de fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas de los elementos y de la malla.

### 8.5.7 Vector y tabla de desplazamientos en los nudos de la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 8.14 calcula el vector de desplazamientos en los nudos de la malla  $\mathbf{a}$  y la respectiva tabla organizada por nudos UXY. Primero calcula el sub-vector de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{u}_\alpha$  almacenados en la matriz UAA, resolviendo un sistema de ecuaciones simultaneas de la forma  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{a}_\beta$ . Después se construye el vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta]^T$ , almacenado en la matriz UTO,a partir del resultado anterior  $\mathbf{a}_\alpha$  y del sub-vector de desplazamientos conocidos  $\mathbf{a}_\beta$ , almacenado en la matriz UBB.

Finalmente se construye una tabla de resultados UXY que contiene las componentes de desplazamiento ordenados por nudo.

---

```

1000 TINI = IMTIEM('Desplazamientos y reacciones en los nudos del sólido ',0);
% Desplazamientos en los nudos del sólido
1002 % -----
1003 % solución de un sistema de ecuaciones simultáneas para obtener el
1004 % subvector de desplazamientos nodales desconocidos u_{alpha}
1005 UAA = (KAA) \ (FAA - KAB * UBB);
1006UTO = [ UAA ; UBB ]; % vector de desplaz. nodales completo
[UXY] = ORVETA(UTO,MGL); % tabla de desplaz. nodales en formato UX,UY

```

---

**Listado 8.14:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula el vector y la tabla de desplazamientos en los nudos de la malla.

### 8.5.8 Vector y tabla de fuerzas totales en los nudos de la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 8.15 calcula el sub-vector de fuerzas totales en los nudos de la malla  $\mathbf{f}_\beta$  y la respectiva tabla ordenada por nudos FXY.

Inicialmente se calcula el sub-vector de fuerzas nodales totales desconocidas  $\mathbf{f}_\beta$  mediante la operación matricial  $\mathbf{f}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta$ , y se almacena en la matriz FBB. Después se construye el vector de fuerzas nodales totales  $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_\alpha^T \ \mathbf{f}_\beta^T]^T$  y se almacena en la matriz FTO. Finalmente, se genera una tabla de resultados FXY, que contiene las componentes de fuerza total ordenadas por nudo.

---

```

1000 % Fuerzas totales en los nudos del sólido
1001 % -----
1002 FBB = KBA * UAA + KBB * UBB; % subvector de fuerzas totales desconoc
1003 FTO = [ FAA ; FBB ]; % vector de fuerzas totales
1004 [FXY] = ORVETA(FTO,MGL); % tabla de fuerzas totales nodales en formato FX,FY

```

---

**Listado 8.15:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula el vector y la tabla de reacciones en los nudos de la malla.

### 8.5.9 Vector y tabla de fuerzas aplicadas directamente en nudos y reacciones de la malla

La parte opcional de la rutina principal mostrada en el Listado 8.16, permite calcular el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla  $\mathbf{f}^{(n)}$  y la respectiva tabla ordenada por nudos FNX. Las componentes de  $\mathbf{f}^{(n)}$  asociadas a los desplazamientos conocidos corresponden a las reacciones en los nudos de la malla  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ .

Éste procedimiento se realiza cuando se escoge el parámetro  $\langle ople \rangle = 12$  o  $\langle ople \rangle = 06$ , en la ejecución del programa indicada en la Subsección 6.3.1.

Inicialmente se suman las fuerzas equivalentes a la acción del peso propio y de las presiones de la forma  $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma} + \tilde{\mathbf{f}}_s$  y se almacena su resultado en la matriz FGE. De tal vector se extrae el sub-vector  $\tilde{\mathbf{f}}_\beta$ , el cual se guarda en la matriz FGB. Después se calcula el sub-vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos mediante la resta  $\tilde{\mathbf{f}}_\beta^{(n)} = \mathbf{f}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta$  y se almacena en la matriz FNB. A continuación se extrae el sub-vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos  $\tilde{\mathbf{f}}_\alpha^{(n)}$  y se reconstruye el vector  $\tilde{\mathbf{f}}^{(n)}$ , el cual se almacena en la matriz FNT. Finalmente se genera una tabla de resultados FNX que contiene las componentes de las fuerza aplicadas directamente y ordenadas por nudo, excluyendo las fuerzas equivalentes. Las siguientes líneas de código en el Listado 8.16 permiten la presentación de los resultados diferentes de cero en la ventana de comandos.

```

1000 % Reacciones en los nudos del sólido
1001 if TLEN==12 || IMPR==3
1002   FGE = FGC + FGS; % vector de fuerzas equival. de cuerpo y superficie
1003   FGB = FGE(NGLD+1:NGLT,1); % subvector beta de fuer. equival. de cuerpo y superf
1004   FNB = FBB - FGB; % subvector de fuerzas desconocidas en los nudos = reacciones
1005   FNA = FGN(1:NGLD,1); % subvec. fuer. totales conocidas alpha, entre 1<=GL<=NGLD
1006   FNT = [ FNA ; FNB ]; % vector de fuerzas en los nudos
1007   [FNX] = ORVETA(FNT,MGL); % tabla de fuerzas nodales (reacciones) en formato FX,FY
1008   IMTBXY(FNX,'\\nFuerzas directamente en los nudos (reacciones)\\n',...
1009           ' INUD          FX          FY\\n');
1010 end % endif
1011 TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

```

**Listado 8.16:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula el vector y la tabla de reacciones en los nudos de la malla.

### 8.5.10 Deformaciones y esfuerzos en el interior de cada elemento finito

Los valores de las componentes de deformación y de esfuerzo en el interior de cada elemento se calculan en la parte del código ilustrada en el Listado 8.17. Allí, se establece un ciclo por elemento en el cual se realizan las siguientes tareas:

- Se extrae el vector de desplazamientos nodales del elemento  $\mathbf{a}_{(e)}$ , almacenado en la matriz UEL, a partir del vector de desplazamientos nodales de la malla  $\mathbf{a}$  y la tabla de incidencias INC.
- Se extraen las coordenadas de los nudos del elemento XYE, a partir de la tabla de coordenadas de todos los nudos de la malla XYZ.
- Se extraen las características de la categoría específica CAE, a partir de la tabla de categorías CAT.
- Se obtiene la matriz constitutiva del material DEL, utilizando la función DELEM.
- Se define si se evalúan los resultados en los puntos de Gauss o en los nudos con la variable ENNU.
- Se establece un ciclo por puntos en el elemento de contador IEVA, en el cual se realizan las siguientes tareas:
  - Se define la posición en coordenadas naturales de un punto en el elemento finito y se almacena en XYP.
  - Se obtiene la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma del elemento en ese punto BEL, utilizando la función BELEM.
  - Se calcula el vector de deformación del elemento en ese punto mediante el producto  $EPE=DEL*UEL$ .
  - Se calcula el vector de esfuerzo del elemento en ese punto mediante el producto  $STE=DEL*EPE$ .
  - Se obtienen los esfuerzos principales SPR y el esfuerzo de von Mises SVM, utilizando la función TRPRIN.

- Se obtienen las deformaciones principales EPR utilizando la función TRPRIN.
- Se almacenan los resultados de esfuerzo y de deformación en las tablas SRE y ERE.

```

1000 TINI = IMTIEM('Deformaciones y esfuerzos en cada elemento ',0);
% -----
1002 if ENNU==0; NEVA=NGAU; end; % evaluada en los puntos de Gauss
1003 if ENNU==1; NEVA=NNUE; end; % evaluada en los nudos
1004 if ENNU==2; NEVA=1; end; % evaluada en el centro del elemento

1006 SRE = zeros(NELE*NEVA,NCOM+6); % crear tabla de esfuerzos por elemento
1007 ERE = zeros(NELE*NEVA,NCOM+5); % crear tabla de deformaci por elemento
1008 IRES = 0; % indice de la tabla de esfuerzos y deformaciones

1010 for IELE = 1:NELE % ciclo por elemento
    NUEL = CAT(ELE(IELE,1),6); % numero de nudos del elemento
1012    NGLE = NUEL*NGLN; % numero de GL por elemento
    UEL = EXTRAV(UTO,INC,IELE,NGLE); % vector de despl nodales del elemento

1014 TIPE = CAT(ELE(IELE,1),5); % codigo tipo del elemento
1016 XYE(1:NUEL,1:NDIM) = XYZ(ELE(IELE,2:NUEL+1),1:NDIM); % coor nud de elem IELE
    CAE = CAT(ELE(IELE,1),:); % propiedades de la categ eleme IELE
1018 [DEL] = DELEME(CAE,TIPR); % matriz constitutiva del material
    [TEM] = PBPGAU(NEVA, NDIM, ENNU); % ubicacion y ponder de puntos de Gauss
    POIS = CAE(2); % relacion de Poisson

1022 for IEVA = 1:NEVA % ciclo por punto de Gauss o por nudo
    XYP = TEM(IEVA,1:2); % ubicacion de puntos de Gauss o por nudos
1024    % fprintf('elemento %g en el punto %g: \n',IELE,IEVA);
    BEL = BELEME(XYE,XYP, TIPE); % matriz B en el punto de Gauss o nudo IGAU
1026    EPE = BEL * UEL; % vector de deformaciones del elem. IELE en el punto IGAU
    STE = DEL * EPE; % vector de esfuerzos del elem. IELE en el punto IGAU
    [SPR,STVM] = TRPRIN(STE,POIS,TIPR,0); % vector de esfuerzo principales
    [EPR,DUMY] = TRPRIN(EPE,POIS,TIPR,1); % vector de deformac principales

1030 % preparar tabla de esfuerzos y de deformaciones por elemento
1032 % con elemento de valor constante en su interior
    IRES = IRES+1; % ubicacion del resultado en la tabla SRE() o ERE()

1034 SRE(IRES,1) = IELE; % tabla de esfuerzos, numero del elemento IELE
1036 ERE(IRES,1) = IELE; % tabla de deformaci, numero del elemento IELE
1037 if ENNU==0
    % evaluacion en puntos de Gauss
    SRE(IRES,2) = IEVA; % tabla de esfuerzos, numero del PG
    ERE(IRES,2) = IEVA; % tabla de deformaci, numero del PG

```

```

1042     elseif ENNU==1
1043         % evaluacion en los extremos de cada elemento
1044         SRE(IRES,2) = ELE(IELE,IEVA+1); % tabla de esfuerzo, numero del nudo
1045         ERE(IRES,2) = ELE(IELE,IEVA+1); % tabla de deformac, numero del nudo
1046     elseif ENNU==2
1047         % evaluacion en el centro
1048         SRE(IRES,2) = 0; % tabla de esfuerzo, 0 indica el centro
1049         ERE(IRES,2) = 0; % tabla de deformac, 0 indica el centro
1050     end % endif
1051
1052     for ICOM = 1:NCOM % componente de esfuerzo leida
1053         SRE(IRES, ICOM+2) = STE(ICOM, 1); % tabla de esfuerzos SXX, SYY, SXY
1054         ERE(IRES, ICOM+2) = EPE(ICOM, 1); % tabla de deformaciones EXX, EYY, GXY
1055     end % endfor ICOM
1056     for JCOM = 1:3 % esfuerzos o deformaciones principales
1057         SRE(IRES, JCOM+NCOM+2) = SPR(JCOM, 1); % tabla esf.princ SP1,SP2,SP3
1058         ERE(IRES, JCOM+NCOM+2) = EPR(JCOM, 1); % tabla defor.princ EP1,EP2,EP3
1059     end % endfor JCOM
1060     SRE(IRES, NCOM+6) = STVM; % esfuerzo de von Mises
1061
1062     end % endfor IEVA
1063 end % endfor IELE
1064
1065 TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

```

**Listado 8.17:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula las deformaciones y los esfuerzos en cada elemento.

### 8.5.11 Presentación de resultados

El siguiente listado indica la parte del código del programa PEFICA 2.0 que presenta los resultados del análisis en la ventana de comandos, para el programa GiD o para el programa GMSH.

```

1000    % Presentacion de resultados
1001    % -----
1002    if (IMPR==1 || IMPR==3)
1003        TINI = IMTIEM('Presentacion de resultados en ventana de comandos ',0);
1004        % -----
1005        IMRESU(NNUD,ENNU,UXY,FXY,SRE,ERE); % imprimir resultados en ventana
1006        TFIN = IMTIEM(' ',TINI); % tiempo de ejecucion
1007    end % endif
1008
1009    if (IMPR==2 || IMPR==3)
1010        TINI = IMTIEM('Impresion de resultados en GiD (.gid.msh y .gid.res) ',0);

```

```

1012      % -----
1013      ADAD = strcat('./DATOS/',ADAT);
1014      IMGIDM(ADAD,NNUD,NELE,NNUE,XYZ,ELE); % imprimir archivo de GiD .gid.msh
1015      IMGIDR(ADAD,NNUD,NELE,NNUE,NGAU,UXY,FXY,SRE,ERE); % imprimir archivo de GiD .
1016      gid.res
1017      TFIN = IMTIEM(' ',TINI); % tiempo de ejecucion
1018  end % endif IMPR

1019
1020      if (IMPR==4)
1021          TINI = IMTIEM('Dibujar geometria en Tikz LaTeX ',0);
1022          % -----
1023          ADAD = strcat('./DATOS/',ADAT);
1024          TIPN = 0; % 0=sin numeracion, 1=numeracion nudos
1025                  2=numeracion elementos, 3=numeracion nudos y elementos.
1026          % previamente estan convertidos UCO y FUN de formato B a formato A
1027          IMTIKZ(ADAD,NNUD,NELE,NNUE,XYZ,ELE,UCO,FUN,TIPN);
1028          TFIN = IMTIEM(' ',TINI); % tiempo de ejecucion
1029  end % endif IMPR

1030
1031      if (IMPR==5)
1032          TINI = IMTIEM('Presentacion de resultados en GMSH (.pos y .pos.opt) ',0);
1033          % -----
1034          ADAD = strcat('./DATOS/',ADAT);
1035          % imprimir GMSH .pos y .pos.opt
1036          IMGMSH(ADAD,NNUD,NELE,NNUE,NGAU,NCAT,XYZ,ELE,SUP,UXY,FXY,SRE,ERE,PRO);
1037          TFIN = IMTIEM(' ',TINI); % tiempo de ejecucion
1038  end % endif IMPR

1039
1040      % mostrar tiempo final
1041      TFIN = IMTIEM('Tiempo total de ejecucion del programa ',TINT);

```

**Listado 8.18:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se presentan los resultados.

## 8.6 Formatos de las tablas de desplazamientos conocidos y fuerzas puntuales

Los desplazamientos conocidos y las fuerzas puntuales se escriben en dos formatos. El Formato A fue presentado en la Subsección 8.2.5 para el desplazamiento y en la Subsección 8.2.6 para la fuerza. Este formato se obtiene cuando los datos de entrada se construyen con el programa GiD o cuando se escriben directamente un archivo .m.

La primera columna de la matriz **UC0** contiene el identificador del nudo  $\langle inud \rangle$ , la segunda columna indica con  $\langle dcux \rangle = 1$  si el desplazamiento en dirección  $x$  es conocido y con  $\langle dcux \rangle = 0$  si es desconocido, la tercera columna indica con  $\langle dcuy \rangle = 1$  si el desplazamiento en dirección  $y$  es conocido y con  $\langle dcuy \rangle = 0$  si es desconocido, y la cuarta y la quinta columna,  $\langle vaux \rangle$  y  $\langle vauy \rangle$ , almacenan los valores de los desplazamientos en  $x$  y en  $y$ , en el caso que sean conocidos.

Por otro lado, el Formato B se genera a partir del pre-proceso realizado con el programa GMSH. En este formato cada fila de la matriz de desplazamientos conocidos **UC0** tiene la siguiente sintaxis:

$$\text{UC0} = [ \langle inud \rangle \langle dcid \rangle \langle dcva \rangle ;$$

donde  $\langle inud \rangle$  es el número del nudo,  $\langle dcva \rangle$  es el valor del desplazamiento conocido y  $\langle dcid \rangle$  corresponde al identificador de la componente de desplazamiento.  $\langle dcid \rangle = 1$  indica la componente de desplazamiento en dirección  $x$ , mientras que  $\langle dcid \rangle = 2$  determina la componente en dirección  $y$ .

El Formato B de cada fila de la tabla de fuerzas aplicadas en los nudos **FUN** tiene la siguiente sintaxis:

$$\text{FUN} = [ \langle inud \rangle \langle dcid \rangle \langle dcva \rangle ;$$

donde  $\langle inud \rangle$  es el número del nudo,  $\langle dcva \rangle$  es el valor de la fuerza puntual y  $\langle dcid \rangle$  corresponde al identificador de la componente de fuerza.  $\langle dcid \rangle = 1$  indica la componente de la fuerza en dirección  $x$ , mientras que  $\langle dcid \rangle = 2$  determina la componente en dirección  $y$ .

## 8.7 Funciones propias del programa

El programa PEFICA 2.0 incluye un conjunto de funciones desarrolladas para realizar tareas específicas de cálculo y organización en el marco del método de los elementos finitos. Cada función está escrita en un archivo de extensión **.m**, con la sintaxis del lenguaje GNU–Octave. El conjunto de archivos está incluido en la sub-carpeta **\FUNCIONES**. A continuación se describen las funciones propias del programa.

### 8.7.1 Función de lectura de datos del programa GMSH: LEGMSH

La función **LEGMSH** lee los datos de entrada de un problema a partir de un archivo ADAD con extensión **.msh** generado por el programa GMSH. La sintaxis de dicha función es de la forma:

```
[NNUD,NELE,NNUE,NGAU,NDIM,NCAT,TIPR,ENNU,IMPR,...  
XYZ,ELE,CAT,UCO,FUN,FDI,SUP] = LEGMSH(ADAD);
```

Esta instrucción genera una tabla de desplazamientos conocidos UCO y una tabla de fuerzas puntuales FUN en Formato B (Sección 8.6).

### 8.7.2 Función de la matriz de funciones de forma del elemento: NELEME

La función **NELEME** calcula la matriz de funciones de forma de un elemento finito  $\mathbf{N}_{(e)}$ , la cual será almacenada en una matriz de GNU–Octave de nombre  $\langle nel \rangle$ . Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: la matriz que contiene las coordenadas de los nudos de un elemento  $\langle xye \rangle$ , la coordenada del punto  $\langle xip \rangle$  donde se evalúa la función de forma dentro del elemento y el identificador del tipo de elemento finito  $\langle tipe \rangle$ . El formato para utilizar tal función desde otra rutina es:

```
[\langle nel \rangle] = NELEME(\langle xye \rangle, \langle xip \rangle, \langle tipe \rangle);
```

La matriz de funciones de forma  $\mathbf{N}_{(e)}(x, y)$  del elemento triangular lineal mostrado en la Figura 3.3(a), se puede evaluar en la posición  $(x, y)$  dentro del elemento, utilizando esta función. Para ello se definen sus parámetros de la siguiente manera:  $\langle tipe \rangle=201$ ,  $\langle xye \rangle$  es una tabla de 3 filas y 2 columnas que contiene en cada fila las coordenadas globales  $x_i, y_i$  en el nudo  $i$  del elemento finito, es decir:

$$\langle xye \rangle = [ x_1 \ y_1; \ x_2 \ y_2; \ x_3 \ y_3];$$

y  $\langle xip \rangle$  es un arreglo de una fila y dos columnas que contiene las coordenadas  $(x, y)$  del punto en sistema coordenado global, así:

$$\langle xip \rangle = [ x \ y ];$$

En cambio, la matriz  $\mathbf{N}_{(e)}(\xi, \eta)$  del elemento cuadrilateral bilineal mostrado en la Figura 3.3(b), se puede evaluar en la posición  $(\xi, \eta)$  dentro del elemento, utilizando esta función. Para ello se definen sus parámetros de la siguiente manera:  $\langle tipe \rangle = 202$ ,  $\langle xye \rangle$  como una tabla de 4 filas y 2 columnas que contiene en cada fila las coordenadas globales  $x_i, y_i$  en el nudo  $i$  del elemento finito, es decir:

$$\langle xye \rangle = [ x_1 \ y_1; \ x_2 \ y_2; \ x_3 \ y_3; \ x_4 \ y_4];$$

y  $\langle xip \rangle$  es un arreglo de una fila y dos columnas que contiene las coordenadas  $(\xi, \eta)$  del punto en sistema coordenado natural  $0 < \xi < 1$  y  $0 < \eta < 1$ , así:

$$\langle xip \rangle = [ \xi \ \eta ];$$

Las ecuaciones 3.52, 3.53 y 3.54, y la Ecuación 3.70, indican las matrices  $\mathbf{N}_{(e)}$  que se construyen con ésta instrucción, para un elemento triangular lineal y un elemento cuadrilateral bilineal, respectivamente.

### 8.7.3 Función de la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma del elemento: BELEME

La función BELEME calcula la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma  $\mathbf{B}_{(e)}(\xi, \eta)$ , la cual se almacena en la matriz de GNU–Octave de nombre  $\langle bel \rangle$ . Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: la matriz que contiene las coordenadas de los nudos de un elemento  $\langle xye \rangle$ , la coordenada del punto  $\langle xip \rangle$  donde se evalúa  $\mathbf{B}_{(e)}(\xi, \eta)$  dentro del elemento en sistema coordenado natural  $0 < \xi < 1$  y  $0 < \eta < 1$ , y el identificador del tipo de elemento finito  $\langle tipe \rangle$ . El parámetro  $\langle xip \rangle$  no es necesario para obtener la matriz  $\mathbf{B}_{(e)}$  de un elemento triangular lineal, sin embargo se requiere definir una variable que no modificará el cálculo para utilizar la función. La instrucción que llama a esta función tiene el siguiente formato:

$$[\langle bel \rangle] = \text{BELEME}(\langle xye \rangle, \langle xip \rangle, \langle tipe \rangle);$$

Los parámetros de la función se definen de la misma forma como se indicó en la Subsección 8.7.2, para los elementos finitos triangular lineal y cuadrilateral bilineal.

En las secciones 3.3.2 y 3.4.2 se describen las matrices  $\mathbf{B}_{(e)}$  construidas con ésta instrucción, para un elemento triangular lineal y un elemento cuadrilateral bilineal, respectivamente.

#### **8.7.4 Función de la matriz constitutiva elástica del material asociado al elemento: DELEME**

La función DELEME calcula la matriz constitutiva del material asociado al elemento  $\mathbf{D}_{(e)}$ , la cual se almacena en la matriz de GNU–Octave de nombre  $\langle del \rangle$ . Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: un escalar que indica el tipo de problema  $\langle tipr \rangle$  y una matriz fila que contiene las propiedades de la categoría de un elemento  $\langle cae \rangle$ , como el módulo de Young  $E$  y la relación de Poisson  $\nu$ . La instrucción que llama a esta función tiene el siguiente formato:

$$[\langle del \rangle] = \text{DELEME}(\langle cae \rangle \langle tipr \rangle);$$

La Ecuación 3.10 indica la matriz constitutiva elástica del material en problemas en condición plana de esfuerzos y en condición plana de deformaciones.

#### **8.7.5 Función propia de la matriz de rigidez del elemento: KELEME**

La función KELEME calcula la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{(e)}$ , la cual se almacena en la matriz de GNU–Octave de nombre  $\langle kel \rangle$ . Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: un escalar que indica el tipo de problema  $\langle tipr \rangle$ , una matriz que contiene las coordenadas de los nudos del elemento  $\langle xye \rangle$ , y una matriz fila que contiene las propiedades de la categoría de un elemento  $\langle cae \rangle$ . La instrucción que llama a esta función tiene el siguiente formato:

$$[\langle kel \rangle] = \text{KELEME}(\langle tipr \rangle \langle xye \rangle, \langle cae \rangle);$$

Las secciones 3.3.3 y 3.4.3 describen la matriz de rigidez de un elemento triangular lineal y cuadrilateral bilineal, respectivamente.

### 8.7.6 Función propia del vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio: FELEM**C**

La función FELEM**C** calcula el vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material sobre el elemento  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$ , el cual se almacena en la matriz columna de GNU–Octave de nombre  $\langle fel \rangle$ . Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: una matriz que contiene las coordenadas de los nudos del elemento  $\langle xye \rangle$  y una matriz fila que contiene las propiedades de la categoría  $\langle cae \rangle$ . Esta función se invoca mediante una instrucción con el siguiente formato:

$$[\langle fel \rangle] = \text{FELEM**C**}(\langle xye \rangle, \langle cae \rangle);$$

Las componentes del vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  están definidas en las ecuaciones 3.63b y 3.79, para los elementos triangular lineal y cuadrilateral bilineal, respectivamente.

### 8.7.7 Función propia del vector de fuerzas equivalentes a la acción de las presiones: FELEM**S**

La función FELEM**S** calcula el vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga distribuida o presión sobre el elemento  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$ , el cual se almacena en la matriz columna de GNU–Octave de nombre  $\langle fel \rangle$ . Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: la categoría del elemento  $\langle cae \rangle$ , la longitud del lado cargado del elemento,  $\langle llad \rangle$ , el vector identificador del lado  $\langle nla \rangle$ , el vector unitario direccional normal al lado  $\langle vnr \rangle$  y las características de la carga distribuida extraídas de la tabla FDI llamada  $\langle fde \rangle$ . Esta función se invoca mediante una instrucción con el siguiente formato:

$$[\langle fel \rangle] = \text{FELEM**S**}(\langle cae \rangle, \langle llad \rangle, \langle nla \rangle, \langle vnr \rangle, \langle fde \rangle);$$

El parámetro  $\langle fde \rangle$  es una matriz fila de 6 coeficientes que corresponden a: los identificadores del elemento y de los nudos del lado cargado  $\langle iele \rangle$ ,  $\langle nud_i \rangle$  y  $\langle nud_j \rangle$ , respectivamente. Asimismo, contiene a los valores de presión  $\langle prex \rangle$  y  $\langle prey \rangle$ , y el identificador del tipo de acción aplicada  $\langle gloc \rangle$ . Para  $\langle gloc \rangle=0$ ,  $\langle prex \rangle$  y  $\langle prey \rangle$  son las componentes de presión uniforme en las direcciones  $x$  y  $y$  del sistema coordenado global, mostradas en las figuras 3.6 y 3.9. Si  $\langle gloc \rangle=1$ ,  $\langle prex \rangle$  y  $\langle prey \rangle$  son las

componentes de presión uniforme en las direcciones normal entrando al elemento y tangencial del sistema coordenado local, como se ilustra en las figuras 3.7 y 3.10. Para  $\langle gloc \rangle = 2$ ,  $\langle prex \rangle$  y  $\langle prey \rangle$  corresponden a los valores de la presión normal de variación lineal en los nudos  $i$  y  $j$ , respectivamente mostrado en la Figura 3.8(c).

El vector  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  que equivale a la acción de una presión uniforme en sistema coordenado global, está definido por las ecuaciones 3.57 y 3.77, para los elementos triangular lineal y cuadrilateral bilineal, respectivamente. De igual forma, en las subsecciones 3.3.5 y 3.3.6 se describe el cálculo del vector de fuerzas equivalentes a la aplicación de una presión uniforme normal y tangencial, como también de la presión hidroestática.

### 8.7.8 Funciones propias de construcción de la tabla de grados de libertad por nudo y por elemento: NGLUCO y NGLELE

Las tablas que contienen la numeración de grados de libertad asociados a los nudos y a los elementos de la malla se designa mediante las funciones **NGLUCO** y **NGLELE**, respectivamente. Estos procedimientos han sido explicados en la Subsección 3.5.1, mediante un ejemplo demostrativo.

La tabla de grados de libertad asociados a los nudo almacenada en la matriz de GNU-Octave **MGL**, contiene en cada fila el identificador de los grados de libertad de cada nudo de la malla. En consecuencia, su número de filas y de columnas corresponde a la cantidad de nudos de la malla **NNUD** y a la cantidad de grados de libertad por nudo **NGLN**. El número de la fila coincide con el identificador del nudo.

La primera tarea de la función **NGLUCO** es numerar de forma especial los grados de libertad asociados a cada nudo de la malla. Tal numeración asegura que los grados de libertad con desplazamiento desconocido estén numerados de manera consecutiva ascendente desde 1, y que los grados de libertad con desplazamiento conocido estén numerados de forma consecutiva desde el número de grados de libertad desconocidos más uno **NGLD+1** hasta el número de grados de libertad total **NGLT**. La segunda tarea de **NGLUCO** consiste en crear el sub-vector de desplazamientos conocidos de la malla. La instrucción que invoca a esta función puede escribirse de la forma:

```
[MGL, UBB, NGLN, NGLC] = NGLUCO(UCO, NNUD);
```

En esta expresión se consideran como parámetros de entrada: la tabla de desplazamientos conocidos almacenada en la matriz UCO y el número de nudos corresponde a la variable escalar NNUD. Asimismo, los parámetros de salida serán: la tabla de grados de libertad por nudo almacenada en la matriz MGL, el sub-vector de desplazamientos nodales conocidos almacenada en la matriz columna UBB, el número de grados de libertad por nudo correspondiente a la variable escalar NGLN y el número de grados de libertad conocidos de la malla guardada en la variable escalar NGLC.

La función NGLELE tiene como objetivo construir la tabla de incidencias o tabla de grados de libertad por elemento, la cual se almacena en la matriz de nombre INC. Esta tabla contiene en cada fila el identificador de los grados de libertad de cada elemento de la malla. En consecuencia, su número de filas y de columnas corresponde a la cantidad de elementos de la malla NELE y a la cantidad de grados de libertad por nudo multiplicado por el número de nudos de un elemento  $\text{NGLE} = \text{NGLN} * \text{NNUE}$ . El número de la fila coincide con el identificador del nudo. El orden de los coeficientes de una fila de la matriz INC corresponde al mismo orden establecido a los grados de libertad del elemento finito en sus matrices características, como por ejemplo en su matriz de rigidez. La instrucción que ejecuta a esta función se puede escribir así:

```
[INC] = NGLELE(ELE,MGL);
```

siendo ELE y MGL los nombres de las matrices que contienen la tabla de conectividades de los elementos y la tabla de grados de libertad por nudo, respectivamente como parámetros de entrada.

### 8.7.9 Funciones propias de organización de vectores y tablas de valores nodales: ORTAEX, ORTAVE y ORVETA

Las funciones propias del programa PEFiCA 2.0 dedicadas a la organización de vectores y tablas de valores nodales, como fuerzas y desplazamientos, se describen a continuación:

- Dada una tabla que contiene entidades asociadas a algunos nudos específicos  $\langle tal \rangle$ , la función ORTAEX construye una tabla extendida y ordenada de tales

entidades  $\langle tex \rangle$  para todos los nudos de la malla  $\langle nnud \rangle$ , considerando un valor de cero en los entidades no incluidas en  $\langle tal \rangle$ . El formato de la instrucción que ejecuta esta función es:

$$[\langle tex \rangle] = \text{ORTAEX}(\langle tal \rangle, \langle nnud \rangle);$$

Es habitual utilizar esta función para extender la tabla de fuerzas puntuales aplicadas en los nudos FUN a una tabla que incluya las fuerzas puntuales aplicadas en todos los nudos de la malla FEX, así:

$$[\text{FEX}] = \text{ORTAEX}(\text{FUN}, \text{NNUD});$$

- La función ORTAVE crea un vector de fuerzas (o desplazamientos) nodales de la malla ordenado por sus grados de libertad, a partir de la tabla de fuerzas (o desplazamientos) ordenada por la numeración de los nudos en cada fila. Como ejemplo, se considera conocida una tabla de fuerzas (o desplazamientos) donde cada fila contiene los valores de las componentes de fuerza (o desplazamiento) de cada nudo, denominada TAB. La función ORTAVE construye una matriz columna o vector VEC, que contiene el valor de fuerza (o desplazamiento) en el grado de libertad correspondiente al número de la fila. La instrucción de este procedimiento es la siguiente:

$$[\text{VEC}] = \text{ORTAVE}(\text{TAB}, \text{MGL});$$

siendo MGL la tabla conocida que contiene los grados de libertad por nudo.

- La función ORVETA crea una tabla de fuerzas (o desplazamientos) ordenada por la numeración de los nudos en cada fila, a partir del vector de fuerzas (o desplazamientos) nodales de la malla ordenado por sus grados de libertad. Considerando que se conoce la matriz columna o vector VEC, que contiene el valor de fuerza (o desplazamiento) en el grado de libertad correspondiente al número de la fila, y que también se conoce la tabla de grados de libertad por

nudo MGL, la función **ORVETA** construye una tabla de fuerzas (o desplazamientos) TAB, donde cada fila contiene los valores de las componentes de fuerza (o desplazamiento) de cada nudo. La instrucción de este procedimiento es la siguiente:

```
[TAB] = ORVETA(VEC,MGL);
```

### **8.7.10 Función propia de extracción de vectores elementales: EXTRAV**

La función **EXTRAV** construye el vector de desplazamientos nodales asociado a un elemento específico, a partir del vector de tal entidad asociado a todos los grados de libertad de la malla. El formato de la instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

```
VEL = EXTRAV(VGL,INC,IELE,NGLE);
```

donde los parámetros de entrada son: el vector de desplazamientos nodales de la malla almacenado en la matriz columna **VGL**, la tabla de incidencias **INC**, el identificador del elemento finito **IELE**, y el número de grados de libertad del elemento **NGLE**. Si se introduce **NGLE=0**, su valor se modifica al número de columnas de la matriz **INC**. El parámetro de salida de la función es el vector de desplazamientos nodales de un elemento finito, el cual se almacena en la matriz columna **VEL**.

### **8.7.11 Funciones propias de presentación de resultados: IMRESU, IMGIDR y IMGMSH**

Este conjunto de funciones tiene como objetivo presentar resultados obtenidos del análisis por elementos finitos de diferentes maneras. Tales resultados son: desplazamientos, fuerzas, deformaciones y esfuerzos.

La función **IMRESU** presenta resultados en la ventana de comandos de GNU-Octave. La instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

```
IMRESU(NNUD,ENNU,UXY,FXY,SRE,ERE);
```

Las funciones `IMGIDM` y `IMGIDR` crean los archivos `.gid.msh` y `.gid.res` que contienen los resultados en el formato del programa GiD, respectivamente. Las instrucciones que ejecutan estas funciones son de la forma:

```
IMGIDM(ADAD,NNUD,NELE,NNUE,XYZ,ELE) ;
IMGIDR(ADAD,NNUD,NELE,NNUE,NGAU,UXY,FXY,SRE,ERE) ;
```

La función `IMGMESH` crea los archivos `.pos` y `.pos.opt` que contienen los resultados en el formato del programa GMSH. La instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

```
IMGMESH(ADAD,NNUD,NELE,NNUE,NGAU,NCAT,XYZ,ELE,SUP,UXY,FXY,SRE,ERE,PRO) ;
```

### 8.7.12 Otras funciones propias

La función `IMTIEM` imprime en la ventana de comando un texto que indica el comienzo de un grupo de instrucciones y calcula el tiempo al final. La instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

$$\langle tfin \rangle = \text{IMTIEM}(\langle text \rangle, \langle tini \rangle) ;$$

donde  $\langle text \rangle$  corresponde al texto que se desea imprimir en la ventana de comando,  $\langle tini \rangle$  es la variable que establece el tiempo inicial del grupo de instrucciones y  $\langle tfin \rangle$  es el tiempo al comienzo del grupo de instrucciones si  $\langle tini \rangle=0$  o corresponde al tiempo al final del grupo de instrucciones si  $\langle tini \rangle$  es diferente de 0.

La función `IMTBXY` imprime en la ventana de comando una tabla de resultados ordenada por componentes en las direcciones  $x$  y  $y$ , excluyendo aquellas iguales a cero. La instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

$$\text{IMTBXY}(\langle mxy \rangle, \langle tit1 \rangle, \langle tit2 \rangle) ;$$

donde  $\langle mxy \rangle$  es la matriz de resultados, mientras que  $\langle tit1 \rangle$  y  $\langle tit2 \rangle$  son las cadenas de caracteres del título de la tabla y del rótulo de sus columnas.

La función **ORSOCA** obtiene una tabla de promedio de cada componente sobre los nudos a partir de la misma cantidad obtenida en los vértices de los elementos cuando existen varias categorías. El formato de la instrucción que ejecuta esta función es el siguiente:

$$[NUD,NUCA] = ORSOCA(ELE,REL,NNUD,NCOM,ICAT);$$

donde **ELE** es la tabla de categorías y conectividades de los elementos, **REL** es tabla con la cantidad especificada en los extremos de cada elemento, **NNUD** es el número de nudos, **NCOM** es el número de componentes de resultados y **ICAT** es el identificador de la categoría de elementos que será presentada. Esta función obtiene la tabla de resultados promedio de la cantidad en los nudos **NUD** y el número de nudos de la categoría **ICAT**, denominado **NUCA**.

La función **ORSONO** obtiene una tabla de promedio de cada componente sobre los nudos a partir de la misma cantidad obtenida en los vértices de los elementos, aplicable a mallas de una categoría y un tipo de elemento. El formato de la instrucción que ejecuta esta función es el siguiente:

$$[RNU] = ORSONO(ELE,REL,NNUD,NCOM);$$

donde **ELE** es la tabla que contiene las categorías y conectividades de los elementos, **REL** es tabla con la cantidad especificada en los vértices de cada elemento, **NNUD** es el número de nudos y **NCOM** es el número de componentes de resultados. Esta función obtiene la tabla de resultados promedio de la cantidad en los nudos **RNU**.

La función **ORVEBA** crea una tabla de desplazamientos conocidos o fuerzas puntuales en Formato A a partir de la respectiva tabla en Formato B (Sección 8.6). Esta instrucción se escribe así:

$$[VUA] = ORVEBA(VUB,TLEN,NGLN,TASK);$$

donde **VUB** es la tabla de desplazamientos o fuerzas puntuales en Formato B, **TLEN** es el indicador del tipo de lectura de datos y escritura de resultados, **NGLN** es el número de grados de libertad por nudo, **TASK** es el indicador de la tarea el cual corresponde a **TASK=0** para desplazamientos conocidos y **TASK=1** para fuerzas puntuales. La función

obtiene la matriz **VUA** que contiene la tabla de desplazamientos conocidos o fuerzas puntuales en Formato A.

## 8.8 Ejemplos de aplicación

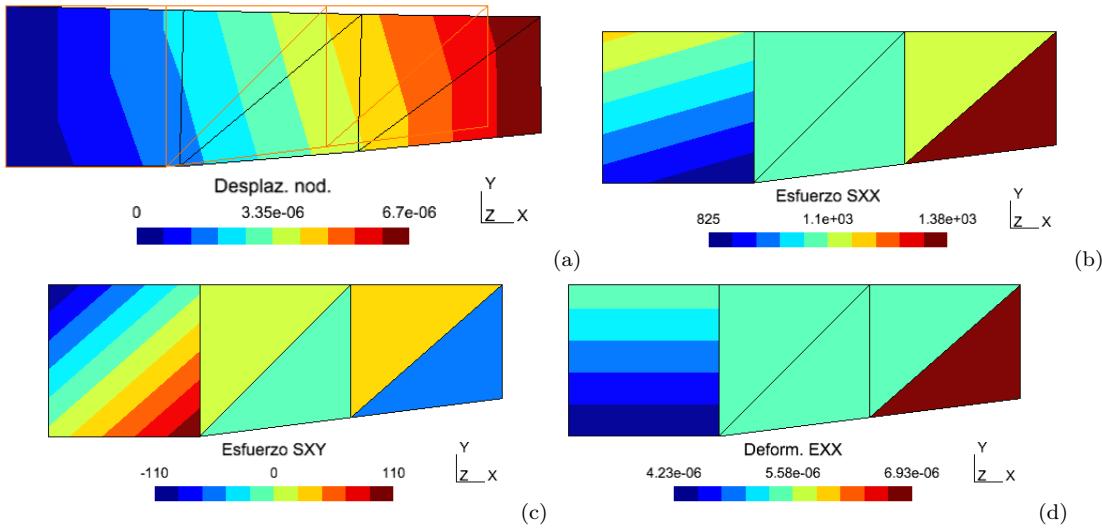
A continuación describen algunos problemas mecánicos de sólidos en condición plana de esfuerzos o de deformaciones que han sido resueltos con el programa \PEFBID\PEFICA.m. Aquí se indica la geometría, los desplazamientos conocidos y las acciones aplicadas del problema, como también la malla de elementos finitos utilizada. Asimismo, se presentan los resultados más representativos calculados por el programa.

La carpeta \PEFBID\DATOS suministrada con el paquete PEFICA20, contiene los archivos de datos y resultados de cada uno de los ejemplos ilustrados en esta sección. Las unidades utilizadas para definir las características del problema son las mismas presentadas en los resultados. En general los ejemplos descritos a continuación utilizan kN y m como unidades de fuerza y longitud, respectivamente.

### 8.8.1 Lámina sometida a carga distribuida y fuerza puntual longitudinal

Una lámina empotrada en su extremo izquierdo está sometida en su extremo derecho a dos cargas en dirección  $x$ : una distribuida uniforme de  $1\,000\text{ kN/m}^2$  y una puntual de  $1.0\text{ kN}$ , como lo ilustra la Figura 8.1. La lámina está hecha de acero con módulo de Young  $E = 200 \times 10^6\text{ kN/m}^2$  y relación de Poisson  $\nu = 0.25$ . Además tiene un espesor constante de  $t = 0.010\text{ m}$ . El dominio del problema se divide en un elemento cuadrilateral bilineal y 4 elementos triangulares lineales.

El archivo LIBR01.m contiene los datos de entrada del problema que se ilustran entre el Listado 9.1 y el Listado 9.7.



**Figura 8.2:** Ejemplo de una lámina sometida a carga distribuida y fuerza puntual longitudinal: (a) norma del vector desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  en metros en la configuración deformada, y resultados en el interior de los elementos de: (b) el esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$  en  $\text{kN/m}^2$ , (c) el esfuerzo cortante  $\sigma_{xy}$  en  $\text{kN/m}^2$ , y (d) la deformación longitudinal  $\varepsilon_{xx}$ .

### 8.8.1.1 Postproceso gráfico en GMSH

Cuando se escribe en la línea de comando de GNU-Octave la instrucción PEFICA LIBR01 08, el programa PEFICA 2.0 soluciona el problema y almacena los resultados en los archivos LIBR01.pos y LIBR01.pos.opt, que pueden visualizarse en el programa GMSH.

En la Figura 8.2(a) se muestra la norma del vector desplazamiento en metros, comparando la configuración deformada y la malla antes de aplicadas las cargas indicada el líneas de color naranja. La Figura 8.2(b), (c) y (d) presenta algunos resultados en el interior de los elementos como: el esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$  en  $\text{kN/m}^2$ , el esfuerzo cortante  $\sigma_{xy}$  en  $\text{kN/m}^2$  y la deformación longitudinal  $\varepsilon_{xx}$ , respectivamente. Se observa la discontinuidad de los resultados en lados compartidos entre los elementos finitos. Asimismo, se identifica que el esfuerzo o de la deformación es constante en los elementos triangulares lineales, mientras que tiene variación lineal en el interior del elemento cuadrilateral bilineal.

### 8.8.1.2 Postproceso gráfico en GiD y en ventana de comandos

Si ahora se escribe en la línea de comando de GNU–Octave la instrucción PEFICA LIBR01 06, el programa PEFICA 2.0 soluciona el problema y presenta los resultados en la ventana de comandos y en archivos compatibles con el postproceso gráfico de GiD.

El Listado 8.19 muestra la ventana de comandos con los resultados del problema. La primera tabla contiene en cada fila, el número del nudo INUD y las componentes de desplazamiento UX y UY en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente en metros. La segunda tabla contiene el número del nudo INUD y las componentes de las fuerzas aplicadas directamente en los nudos FX y FY en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente en kN.

```

1000 Presentacion de resultados en ventana de comandos
Desplazamientos en los nudos
1002   INUD      UX      UY
1004   1 +0.0000e+00 +0.0000e+00
1004   2 +0.0000e+00 +0.0000e+00
1004   3 +1.6927e-06 +3.7814e-08
1006   4 +2.2041e-06 -5.4918e-07
1006   5 +3.8863e-06 -5.8650e-07
1008   6 +4.3521e-06 -1.0363e-06
1008   7 +6.6435e-06 -7.9481e-07
1010   8 +6.5550e-06 -1.3712e-06

1012 Fuerzas aplicadas directamente en los nudos (reacciones)
1014   INUD      FX      FY
1014   1 -1.8750e+00 -3.4999e-01
1014   2 -2.1250e+00 +3.4999e-01
1016   3 +0.0000e+00 +0.0000e+00
1016   4 +0.0000e+00 +0.0000e+00
1018   5 +0.0000e+00 +0.0000e+00
1018   6 +0.0000e+00 +0.0000e+00
1020   7 +1.0000e+00 +0.0000e+00
1020   8 +0.0000e+00 +0.0000e+00

1022 Esfuerzos en los elementos
1024   IELE    IGAU      STXX      STYY      STXY      STP1      STP2      STP3      STVM
1024   1 1 +9.4386e+02 +1.7394e+02 +4.3664e+00 +9.4389e+02 +1.7392e+02 +0.0000e+00 +8.7007e+02
1026   1 2 +8.9868e+02 -6.8039e+00 +6.3414e+01 +9.0310e+02 +0.0000e+00 -1.1223e+01 +9.0876e+02
1026   1 3 +1.0561e+03 +3.2561e+01 -4.3664e+00 +1.0562e+03 +3.2542e+01 +0.0000e+00 +1.0403e+03
1028   1 4 +1.1013e+03 +2.1331e+02 -6.3414e+01 +1.1058e+03 +2.0880e+02 +0.0000e+00 +1.0176e+03
1028   2 1 +1.0673e+03 -2.6659e+01 +4.8495e+00 +1.0674e+03 +0.0000e+00 -2.6680e+01 +1.0810e+03
1030   2 2 +1.0673e+03 -2.6659e+01 +4.8495e+00 +1.0674e+03 +0.0000e+00 -2.6680e+01 +1.0810e+03
1030   2 3 +1.0673e+03 -2.6659e+01 +4.8495e+00 +1.0674e+03 +0.0000e+00 -2.6680e+01 +1.0810e+03
1032   2 4 +1.0673e+03 -2.6659e+01 +4.8495e+00 +1.0674e+03 +0.0000e+00 -2.6680e+01 +1.0810e+03
1032   3 1 +1.0659e+03 +9.4441e+00 -5.5423e+00 +1.0659e+03 +9.4150e+00 +0.0000e+00 +1.0612e+03
1034   3 2 +1.0659e+03 +9.4441e+00 -5.5423e+00 +1.0659e+03 +9.4150e+00 +0.0000e+00 +1.0612e+03
1034   3 3 +1.0659e+03 +9.4441e+00 -5.5423e+00 +1.0659e+03 +9.4150e+00 +0.0000e+00 +1.0612e+03
1036   3 4 +1.0659e+03 +9.4441e+00 -5.5423e+00 +1.0659e+03 +9.4150e+00 +0.0000e+00 +1.0612e+03
1036   4 1 +1.1063e+03 +1.9559e+01 +3.9480e+01 +1.1078e+03 +1.8126e+01 +0.0000e+00 +1.0988e+03
1038   4 2 +1.1063e+03 +1.9559e+01 +3.9480e+01 +1.1078e+03 +1.8126e+01 +0.0000e+00 +1.0988e+03
1038   4 3 +1.1063e+03 +1.9559e+01 +3.9480e+01 +1.1078e+03 +1.8126e+01 +0.0000e+00 +1.0988e+03
1040   4 4 +1.1063e+03 +1.9559e+01 +3.9480e+01 +1.1078e+03 +1.8126e+01 +0.0000e+00 +1.0988e+03
1040   5 1 +1.3759e+03 -4.0303e+01 -4.6060e+01 +1.3774e+03 +0.0000e+00 -4.1799e+01 +1.3988e+03

```

```

1042 5      2 +1.3759e+03 -4.0303e+01 -4.6060e+01 +1.3774e+03 +0.0000e+00 -4.1799e+01 +1.3988e+03
1043 5      3 +1.3759e+03 -4.0303e+01 -4.6060e+01 +1.3774e+03 +0.0000e+00 -4.1799e+01 +1.3988e+03
1044 5      4 +1.3759e+03 -4.0303e+01 -4.6060e+01 +1.3774e+03 +0.0000e+00 -4.1799e+01 +1.3988e+03

1046 Deformaciones en elementos
IELE   IGAU      EPXX      EPYY      EPXY      EPP1      EPP2      EPP3
1048 1      1 +4.5019e-06 -3.1012e-07 +5.4580e-08 +4.5025e-06 +0.0000e+00 -3.1073e-07
1049 1      2 +4.5019e-06 -1.1574e-06 +7.9267e-07 +4.6108e-06 +0.0000e+00 -1.2663e-06
1050 1      3 +5.2400e-06 -1.1574e-06 -5.4580e-08 +5.2404e-06 +0.0000e+00 -1.1578e-06
1051 1      4 +5.2400e-06 -3.1012e-07 -7.9267e-07 +5.3510e-06 +0.0000e+00 -4.2111e-07
1052 2      1 +5.3701e-06 -1.4675e-06 +6.0619e-08 +5.3706e-06 +0.0000e+00 -1.4680e-06
1053 2      2 +5.3701e-06 -1.4675e-06 +6.0619e-08 +5.3706e-06 +0.0000e+00 -1.4680e-06
1054 2      3 +5.3701e-06 -1.4675e-06 +6.0619e-08 +5.3706e-06 +0.0000e+00 -1.4680e-06
1055 2      4 +5.3701e-06 -1.4675e-06 +6.0619e-08 +5.3706e-06 +0.0000e+00 -1.4680e-06
1056 3      1 +5.3176e-06 -1.2851e-06 -6.9279e-08 +5.3184e-06 +0.0000e+00 -1.2859e-06
1057 3      2 +5.3176e-06 -1.2851e-06 -6.9279e-08 +5.3184e-06 +0.0000e+00 -1.2859e-06
1058 3      3 +5.3176e-06 -1.2851e-06 -6.9279e-08 +5.3184e-06 +0.0000e+00 -1.2859e-06
1059 3      4 +5.3176e-06 -1.2851e-06 -6.9279e-08 +5.3184e-06 +0.0000e+00 -1.2859e-06
1060 4      1 +5.5073e-06 -1.2851e-06 +4.9350e-07 +5.5429e-06 +0.0000e+00 -1.3208e-06
1061 4      2 +5.5073e-06 -1.2851e-06 +4.9350e-07 +5.5429e-06 +0.0000e+00 -1.3208e-06
1062 4      3 +5.5073e-06 -1.2851e-06 +4.9350e-07 +5.5429e-06 +0.0000e+00 -1.3208e-06
1063 4      4 +5.5073e-06 -1.2851e-06 +4.9350e-07 +5.5429e-06 +0.0000e+00 -1.3208e-06
1064 5      1 +6.9300e-06 -1.9214e-06 -5.7575e-07 +6.9673e-06 +0.0000e+00 -1.9587e-06
1065 5      2 +6.9300e-06 -1.9214e-06 -5.7575e-07 +6.9673e-06 +0.0000e+00 -1.9587e-06
1066 5      3 +6.9300e-06 -1.9214e-06 -5.7575e-07 +6.9673e-06 +0.0000e+00 -1.9587e-06
1067 5      4 +6.9300e-06 -1.9214e-06 -5.7575e-07 +6.9673e-06 +0.0000e+00 -1.9587e-06

```

**Listado 8.19:** Ejemplo de una lámina sometida a carga distribuida y fuerza puntual longitudinal. Resultados presentados en la ventana de comandos.

La tercera tabla de resultados contiene en cada fila el número del elemento finito IELE, el número del punto de Gauss IGAU y los siguientes valores de esfuerzo en  $\text{kN/m}^2$ :

- Las componentes de esfuerzo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$ , definidas en las columnas STXX, STYY, STXY, respectivamente.
- Los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , presentados en las columnas STP1, STP2 y STP3, respectivamente.
- El esfuerzo equivalente de von Mises  $\sigma_{vm}$  en la columna STVM.

La última tabla contiene en cada fila el número del elemento finito IELE, el número del punto de Gauss IGAU y los siguientes valores de deformación:

- Las componentes de deformación en notación de ingeniería  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\gamma_{xy}$ , definidas en las columnas EPXX, EPYY, EPXY, respectivamente.

- Las deformaciones principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$ , presentados en las columnas EPP1, EPP2 y EPP3, respectivamente.

Particularmente en este ejemplo, la malla tiene un elemento cuadrilateral bilineal con 4 puntos de Gauss y 4 elementos finitos triangulares lineales de deformación constante. Sin embargo, las dos últimas tablas muestran 4 puntos de Gauss para todos los elementos. Esto ocurre porque GiD requiere que todos los elementos cuenten con el mismo número de puntos de Gauss y PEFiCA 2.0 prepara los resultados para la ventana de comandos y para GiD en el mismo arreglo.

Adicionalmente, después de ejecutada la línea de comando PEFICA LIBR01 06, los resultados se almacenan en los archivos LIBR01.gid.res y LIBR01.gid.msh, los cuales pueden leerse desde el postproceso gráfico de GiD. Éste último visualiza los resultado de forma similar a la ilustrada en la Figura 8.2.

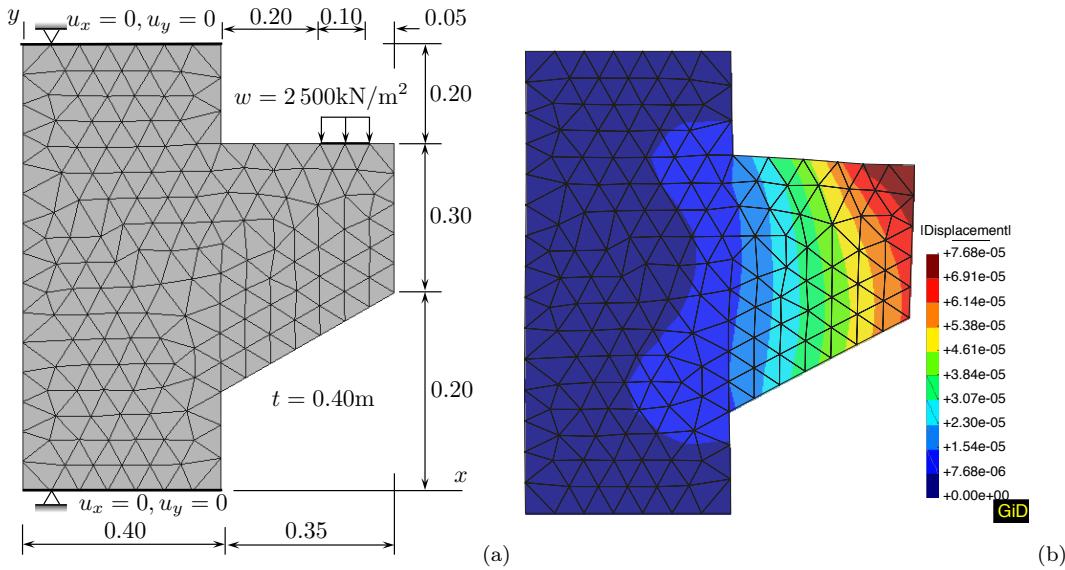
### 8.8.2 Ménsula sometida a una carga distribuida transversal

Una ménsula de concreto está sometida a una carga distribuida uniforme  $w = 2500 \text{ kN/m}^2$ , perpendicular a una parte de su cara superior, como lo ilustra la Figura 8.3(a). El concreto tiene un módulo de Young  $E = 20 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  y una relación de Poisson  $\nu = 0.25$ . El espesor de la ménsula es igual a  $t = 0.40 \text{ m}$ . El dominio del problema incluye un tramo de columna de  $0.20 \text{ m}$  por encima y por debajo de la ménsula, donde se consideran las restricciones del desplazamiento en  $x$  y  $y$ .

#### 8.8.2.1 Preproceso y postproceso gráfico en GiD

Se divide el dominio en una malla no estructurada uniforme de 309 elementos finitos triangulares lineales y 182 nudos, como se ilustra en la Figura 8.3(a). Para construir la geometría del problema y la malla se utiliza el programa GiD, como se describe en el Capítulo 12. En GiD se definen las características del problema incluyendo la malla y se almacenan en un conjunto de archivos dentro de la carpeta LIBR02.gid. A continuación se genera el archivo LIBR02.m con el formato requerido por PEFiCA 2.0.

En una línea de comando de GNU-Octave se puede ejecutar la instrucción PEFICA LIBR02 05 con el fin de: leer el archivo LIBR02.m, resolver el problema y escribir los

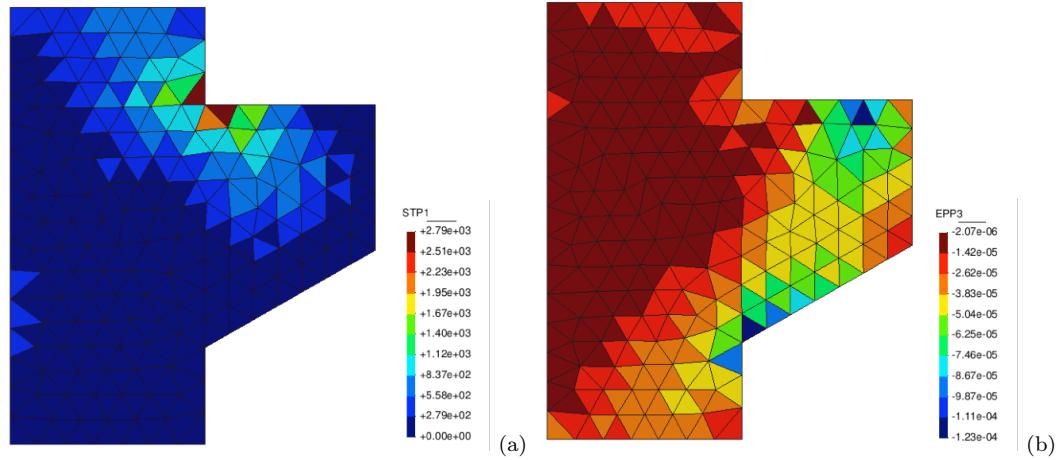


**Figura 8.3:** Ejemplo de una ménsula sometida a una carga distribuida transversal. Pre- y post-proceso en GiD: (a) malla de elementos finitos, condiciones de apoyo y cargas, y (b) norma del vector desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  en la configuración deformada. Distancias y desplazamientos dados en metros.

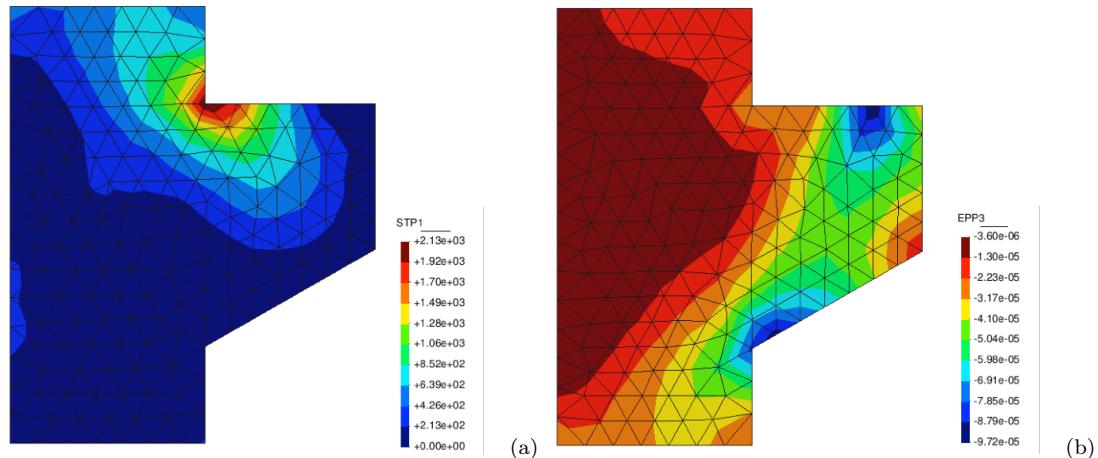
resultados en los archivos `LBR02.gid.res` y `LBR02.gid.msh`. Éstos últimos permiten la visualización utilizando el entorno de postproceso gráfico de GiD.

La norma del vector desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  medida en metros y obtenida sobre la malla en la configuración deformada se presenta en la Figura 8.3(b). Asimismo, algunos resultados en el interior de los elementos se presentan en la Figura 8.4, como el esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$  en  $\text{kN/m}^2$  y de la deformación principal menor  $\varepsilon_3$ .

En el entorno de GiD se pueden calcular y presentar los resultados suavizados en la malla a partir de los valores promedio en los nudos. Por ejemplo, la Figura 8.5 ilustra de forma suavizada a  $\sigma_1$  y  $\varepsilon_3$ .



**Figura 8.4:** Ejemplo de una ménsula sometida a una carga distribuida transversal. Resultado en el interior de los elementos: (a) esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$  en kN/m<sup>2</sup> y (b) deformación principal menor  $\varepsilon_3$ .



**Figura 8.5:** Ejemplo de una ménsula sometida a una carga distribuida transversal. Resultados promedio en los nudos: (a) esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$  en kN/m<sup>2</sup> y (b) deformación principal menor  $\varepsilon_3$ .

### 8.8.2.2 Postproceso gráfico en GMSH a partir del archivo .m

Por otro lado, se pueden ejecutar las instrucciones PEFICA LIBR02 07 o PEFICA LIBR02 08 en una línea de comando de GNU–Octave para: leer el archivo LIBR02.m, resolver el problema y escribir los archivos LIBR02.pos y LBR02.pos.opt, que contienen los resultados para el postproceso gráfico de GMSH, evaluados como promedio en los nudos o en el interior de los elementos, respectivamente.

### 8.8.2.3 Preproceso y postproceso gráfico en GMSH

El mismo problema se construyó en el entorno de pre-proceso gráfico de GMSH y se almacenó en el archivo LIBR12.geo. Allí se estableció el parámetro  $lc=0.05$  para indicar un tamaño promedio de los elementos finitos de 0.05 m. En consecuencia, GMSH generó la malla no estructurada de 560 elementos triangulares lineales y 313 nudos, que almacena en el archivo LIBR12.msh y se muestra en la Figura 8.6(a).

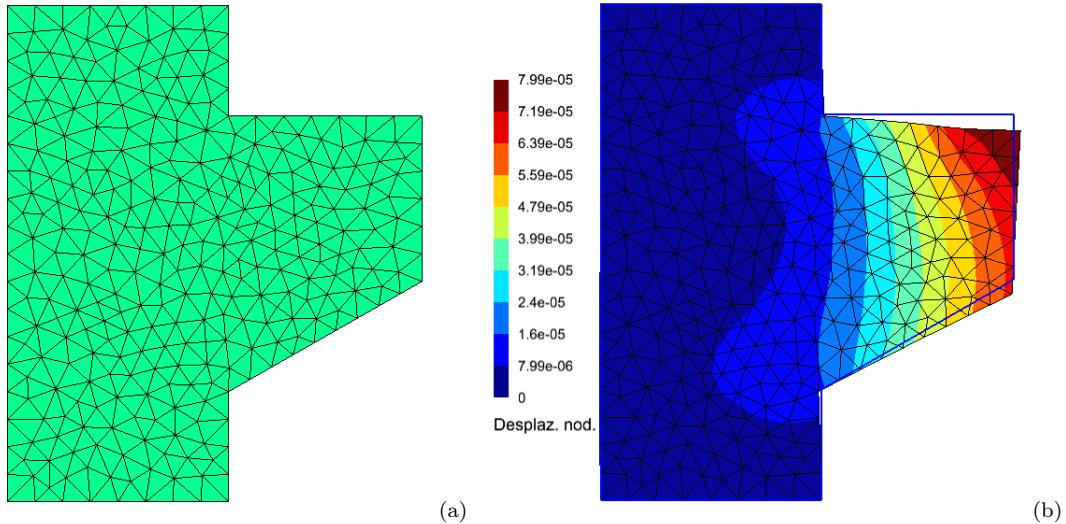
A continuación se ejecuta PEFICA LIBR12 10 desde la línea de comando de GNU–Octave, generando los archivos de resultados LIBR12.pos y LIBR12.pos.opt, los cuales se pueden visualizar en el entorno de postproceso gráfico de GMSH.

En la Figura 8.6(b) se muestra la norma del vector desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  medida en metros, presentada en configuración deformada. Allí la línea de contorno azul indica la configuración no deformada del problema. Este resultado es similar al calculado con la malla anterior.

### 8.8.3 Lámina cuadrada con orificio sometida a presiones axiales

Una lámina cuadrada de lado  $l = 1.00$  m y espesor  $t = 0.025$  m, tiene un orificio en su centro de diámetro  $d = 0.125$  m y está sometida a presión uniforme axial  $p = 100 \times 10^3$  kN/m<sup>2</sup>, como se ilustra en la Figura 8.7(a). La lámina está hecha de acero con módulo de Young  $E = 200 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup> y relación de Poisson  $\nu = 0.3$ . Se desea encontrar el esfuerzo normal máximo sobre la lámina  $\sigma_1^{\text{máx}}$ .

De acuerdo con la geometría y las condiciones de carga se puede considerar este problema como doblemente simétrico y en consecuencia se puede analizar una cuarta parte de la lámina como lo indica la Figura 8.7(b). Allí se considera que el



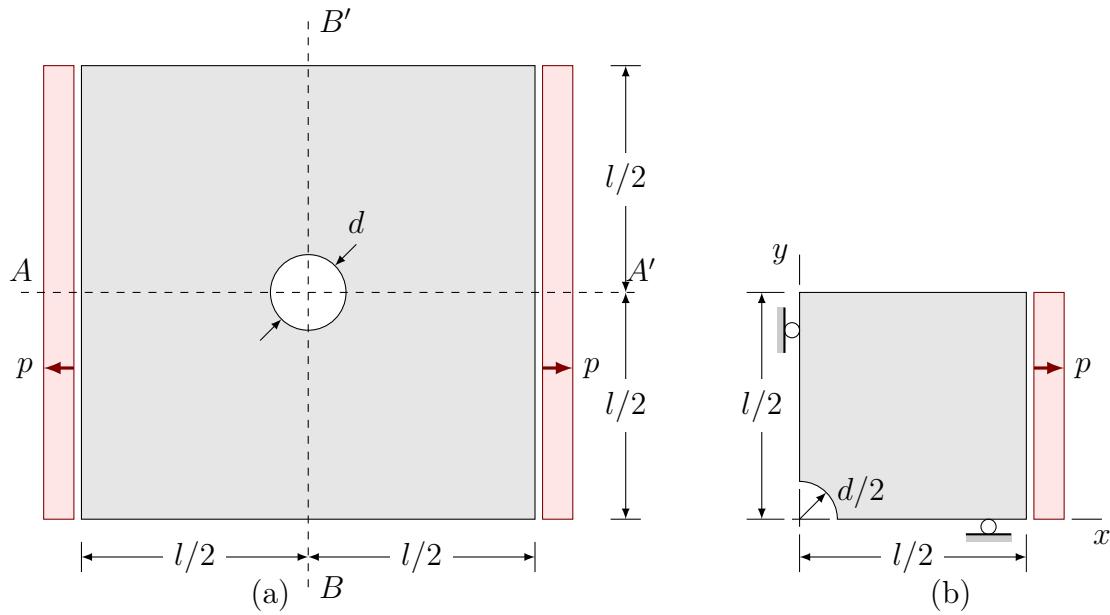
**Figura 8.6:** Ejemplo de una ménsula sometida a una carga distribuida transversal. Pre- y post-proceso en GMSH: (a) malla de elementos finitos y (b) norma del vector desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  en la configuración deformada. Los desplazamientos están dados en metros y la línea de contorno azul indica la configuración no deformada.

desplazamiento en  $x$  es cero sobre el eje vertical de simetría, es decir  $u(x = 0, y) = 0$  y que el desplazamiento en  $y$  es nulo sobre el eje horizontal de simetría, es decir  $v(x, y = 0) = 0$ .

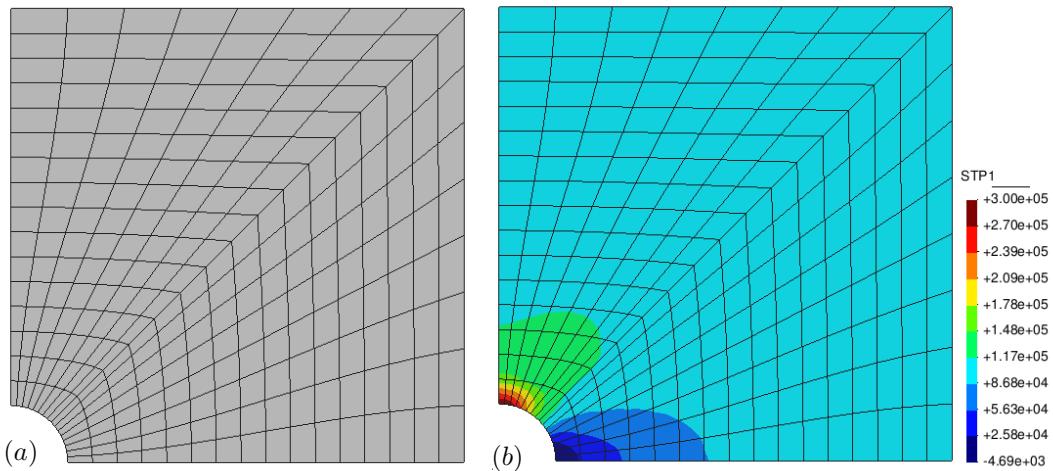
La carpeta LIBR11.gid contiene los archivos de datos del problema y la malla de elementos finitos construida en GiD. Esta última corresponde a la malla estructurada de 256 elementos cuadrilaterales bilineales y 289 nudos, mostrada en la Figura 8.8(a).

Desde el entorno de preproceso de GiD se genera el archivo LIBR11.m, que tiene el formato de lectura de PEFICA 2.0. Después se ejecuta PEFICA LIBR11 05 desde la línea de comandos de GNU-Octave. El resultado del análisis se almacena en los archivos LIBR11.gid.res y LIBR11.gid.msh, compatibles con el postproceso gráfico de GiD.

En la Figura 8.8(b) se presenta la distribución del esfuerzo principal mayor promedio  $\sigma_1$  en  $\text{kN/m}^2$ . Allí se observa que el valor máximo del esfuerzo normal está ubicado en la intersección entre el eje de simetría vertical y el orificio, y que su valor corresponde a  $\sigma_1^{\text{máx}} = 300\,000 \text{ kN/m}^2$ , es decir a 3 veces la presión aplicada  $p$ .



**Figura 8.7:** Ejemplo de una lámina cuadrada con orificio sometida a presiones axiales: (a) esquema general y (b) dominio de modelación correspondiente a una cuarta parte de la lámina.



**Figura 8.8:** Ejemplo de una lámina cuadrada con orificio sometida a presiones axiales: (a) malla de elementos finitos y (b) distribución del esfuerzo principal mayor promedio  $\sigma_1$  en  $\text{kN/m}^2$ .

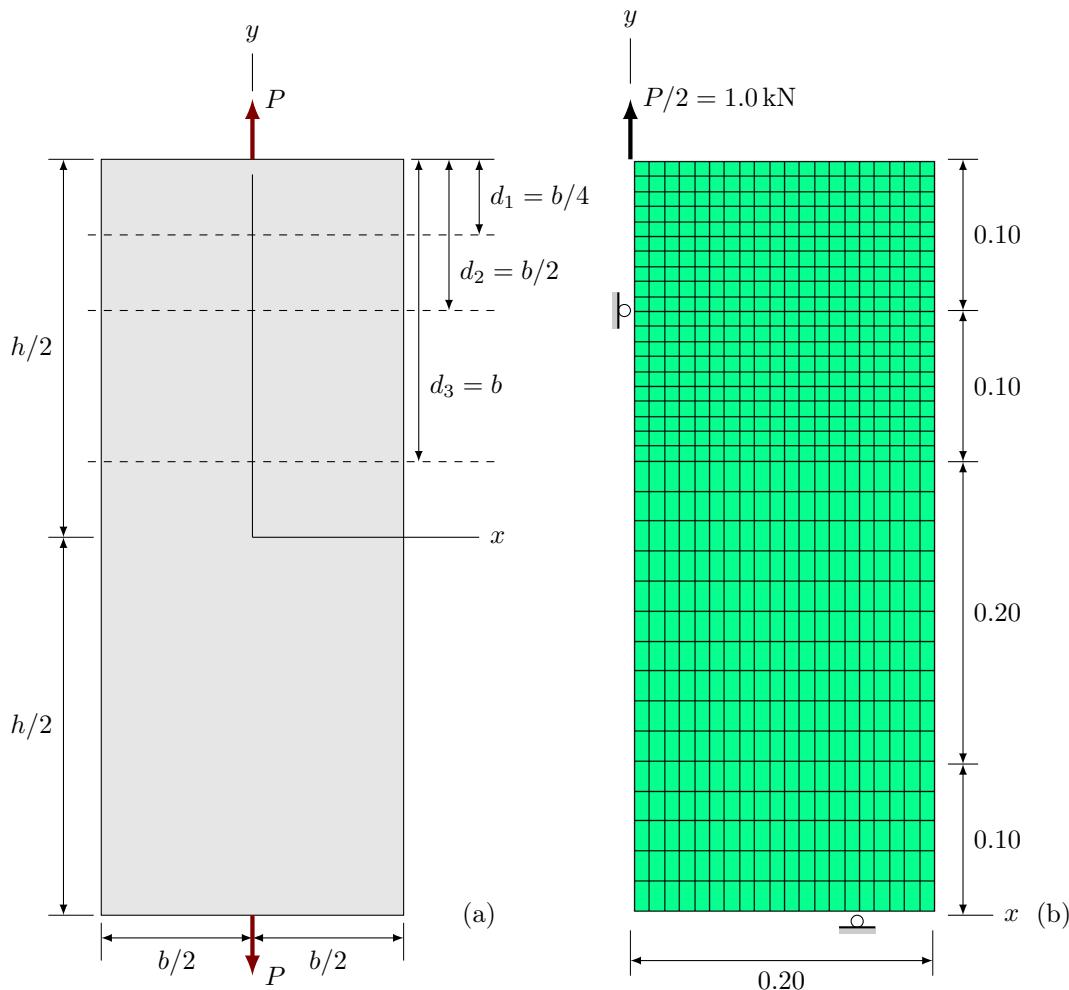
### 8.8.4 Aplicación del principio de Saint-Venant a una lámina con carga puntual

El principio de concentración de esfuerzos de Saint-Venant establece que: el esfuerzo normal sobre la sección transversal de una barra sometida a una carga puntual  $P$  en un extremo, es igual a  $\sigma = P/A$ , sólo si tal sección transversal está alejada de la carga  $P$  a una distancia  $d > b$ , siendo  $b$  la dimensión lateral más grande de la barra, como su ancho (Timoshenko & Goodier, 1970; Gere & Goodno, 2009). Tal principio se puede demostrar simulando una lámina rectangular sometida a carga puntual como se indica a continuación.

Una lámina de acero rectangular con base  $b = 0.40$  m, altura  $h = 1.00$  m y espesor  $t = 0.01$  m, está sometida a una carga puntual  $P = 2$  kN en cada extremo, como lo muestra la Figura 8.9(a). El acero tiene un módulo de Young  $E = 200 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup> y una relación de Poisson  $\nu = 0.25$ . El objetivo del ejemplo es obtener los esfuerzos normales a la sección transversal  $\sigma_{yy}$ , para distancias con respecto a la carga  $d_1 = b/4$ ,  $d_2 = b/2$  y  $d_3 = b$ .

En virtud de la doble simetría del problema se puede simular la cuarta parte de la lámina como lo ilustra la Figura 8.9(b). Sobre el eje de simetría paralelo a  $x$  se establece que el desplazamiento en  $y$  es nulo, es decir  $v(x, y = 0) = 0$ . Asimismo, sobre el eje de simetría paralelo a  $y$  se impone un desplazamiento en  $x$  igual a cero, es decir  $u(x = 0, y) = 0$ . Inicialmente, se construye una malla estructurada de 700 elementos finitos cuadrilaterales bilineales y 756 nudos.

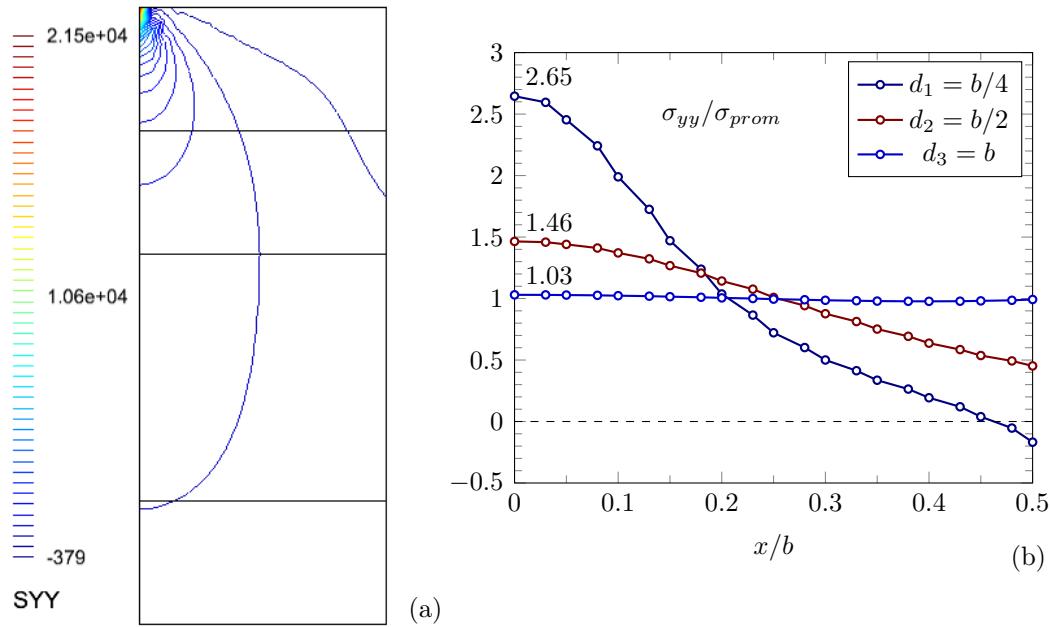
El archivo `LIBR03.geo` contiene la geometría, las condiciones de borde, la carga puntual, las propiedades mecánicas del material y los parámetros de la generación malla. A partir de tal archivo y con el programa GMSH, se construye la malla de elementos finitos y se almacena en el archivo `LIBR03.msh`. Despues se analiza el problema con la instrucción `PEFICA LIBR03 10` desde la línea de comando del programa GNU-Octave en la carpeta `PEFBID`. Los resultados generados por PEFICA 2.0 se almacenan en los archivos `LIBR03.pos` y `LIBR03.pos.opt`, los cuales se visualizan en GMSH.



**Figura 8.9:** Ejemplo de la aplicación del principio de Saint Venant a una lámina con carga puntual: (a) esquema general y (b) malla de elementos finitos de una cuarta parte de la lámina.

La distribución del esfuerzo normal  $\sigma_{yy}$  en la malla se ilustra en la Figura 8.10(a), mediante líneas de igual valor de  $\sigma_{yy}$  en  $\text{kN/m}^2$ . Se observa que tal esfuerzo es máximo en el mismo lugar de aplicación de la carga  $P$  y se reduce rápidamente a poca distancia de ella.

El programa GMSH genera resultados sobre líneas de corte mediante el procedimiento indicado en la Sección 11.8. La Figura 8.10(b) muestra el cociente entre el esfuerzo normal  $\sigma_{yy}$  y el esfuerzo promedio  $\sigma^{prom} = P/bt$  evaluado sobre los cor-

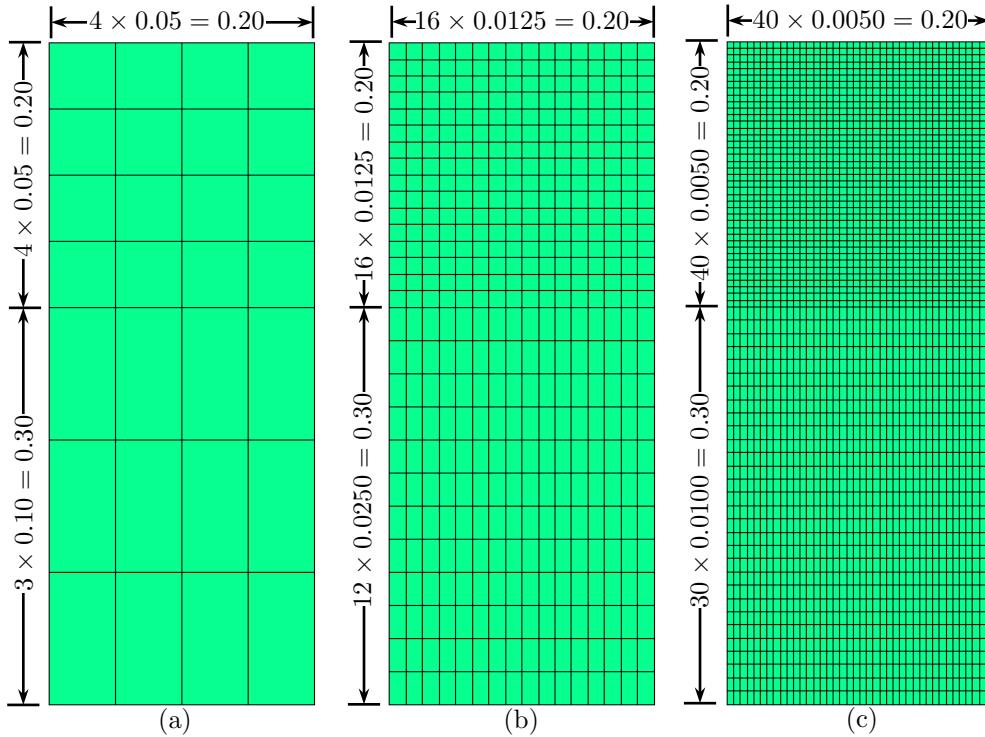


**Figura 8.10:** Ejemplo de la aplicación del principio de Saint Venant a una lámina con carga puntual. Distribución del esfuerzo normal: (a) líneas de igual esfuerzo normal  $\sigma_{yy}$  sobre la malla medida en  $\text{kN/m}^2$ , y (b) relación entre el esfuerzo normal  $\sigma_{yy}$  y el esfuerzo promedio  $\sigma^{prom} = P/bt$  evaluado a  $d_1 = b/4$ ,  $d_2 = b/2$  y  $d_3 = b$ .

tes a diferentes distancias de la carga  $d_1 = b/4$ ,  $d_2 = b/2$  y  $d_3 = b$ . En los cortes  $d_1 = b/4$  y  $d_2 = b/2$  se observa que el esfuerzo normal varía fuertemente con respecto a  $x$ , mostrando un valor máximo 2.65 y 1.46 veces mayor al esfuerzo promedio, respectivamente. En el corte a una distancia  $d_3 = b$  de la carga, se observa que el esfuerzo normal es uniforme y de valor aproximadamente igual al esfuerzo promedio con un error menor al 3%.

Después se realizó un análisis de sensibilidad de la malla, en el cual se simuló el mismo problema con 10 mallas estructuradas de elementos cuadrilaterales lineales con diferente densidad. La Figura 8.11 ilustra tres de ellas donde el número de elementos  $n_e$  es 28, 448 y 2800.

Para construir las mallas de elementos finitos se escribió el archivo **LIBR05.geo**, el cual contiene las características del problema y un parámetro que determina la densidad de la malla. El dominio simulado corresponde a la cuarta parte de la lámina y está dividido en cuatro superficies rectangulares de ancho común  $b/2 = 0.20 \text{ m}$



**Figura 8.11:** Ejemplo de la aplicación del principio de Saint Venant a una lámina con carga puntual. Algunas mallas estructuradas de elementos finitos cuadrilaterales lineales, con un número de elementos  $n_e$  igual a: (a) 28, (b) 448 y (c) 2800.

y alturas 0.10 m, 0.20 m, 0.10 m y 0.10 m, respectivamente, como lo indica la Figura 8.9(b). Las dos superficies más cercanas a la carga  $P$  tendrán elementos cuadrados, mientras que las superficies más alejadas de  $P$  tendrán elementos rectangulares de relación 2 a 1. El parámetro `nd` dentro del archivo `LIBR05.geo`, corresponde al número de divisiones en la altura de 0.10 m de la superficie más alejada de la carga.

El programa GMSH permite generar la malla de elementos finitos a partir del archivo `LIBR05.geo`, de acuerdo con el valor del parámetro `nd`. El resultado se almacena en el archivo `LIBR05.msh`.

A continuación se simula el problema con una malla específica, ejecutando la instrucción `PEFICA LIBR05 10`, desde la línea de comando del programa GNU–Octave. Los resultados generados por PEFICA 2.0 se almacenan en los archivos `LIBR05.pos`

y `LIBR05.pos.opt`, los cuales se pueden visualizar en GMSH. De cada simulación se obtiene el esfuerzo normal máximo  $\sigma_{yy}^{max}$  a las distancias  $d_1 = b/4$ ,  $d_2 = b/2$  y  $d_3 = b$ .

La relación entre el esfuerzo normal máximo  $\sigma_{yy}^{max}$  y el esfuerzo promedio  $\sigma^{prom} = P/bt$  en función del número de elementos finitos de cada malla  $n_e$ , se representan en la gráfica en escala semi-logarítmica de la Figura 8.12. Allí se observa que el esfuerzo normal máximo converge a un valor de  $2.64\sigma^{prom}$  para  $d_1 = b/4$ ,  $1.47\sigma^{prom}$  para  $d_2 = b/2$  y  $1.03\sigma^{prom}$  para  $d_3 = b$ .

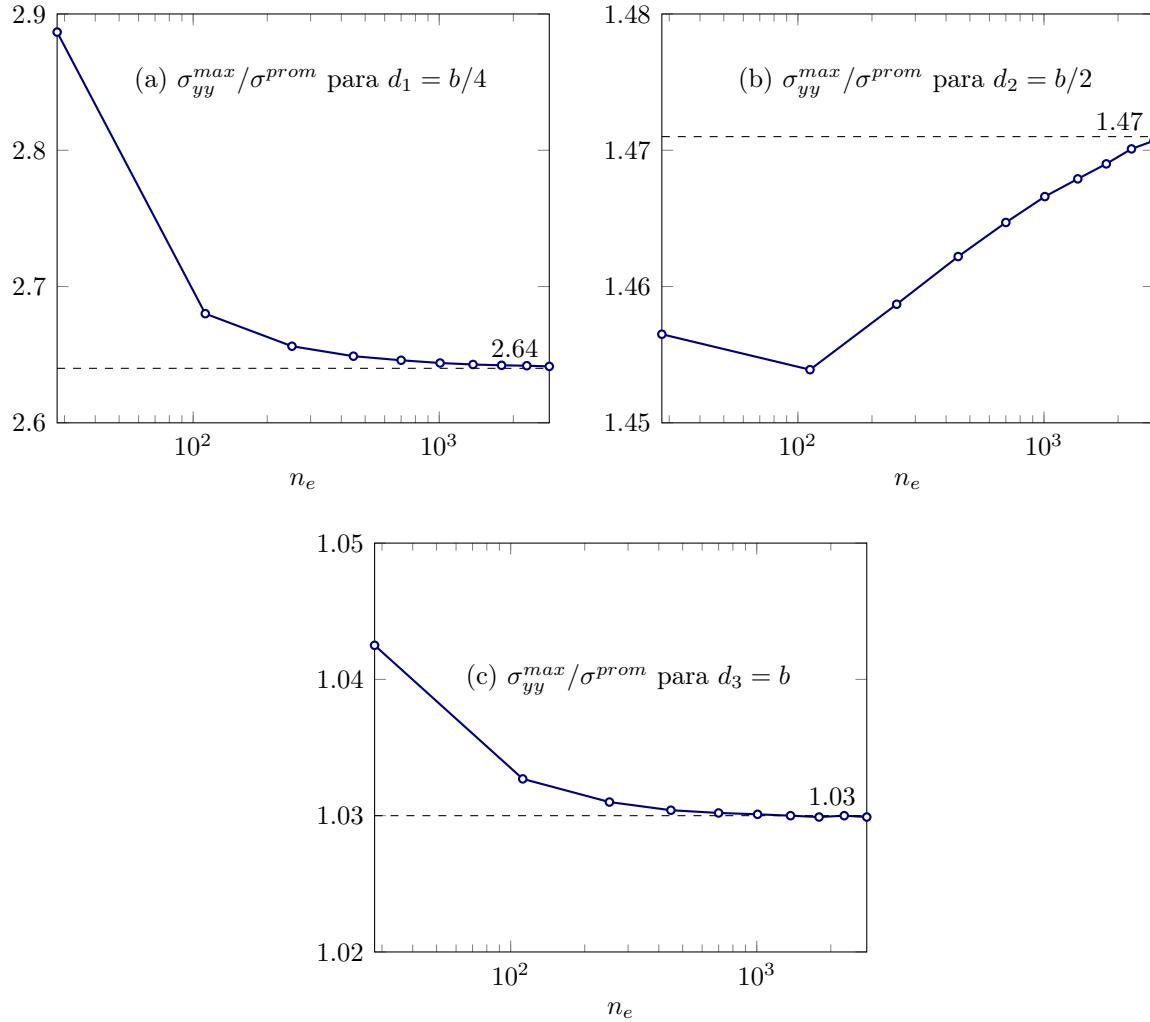
### 8.8.5 Puente romano de seis luces

El puente de Alcántara en España fue construido por los romanos en el año 105 d.C. y consta de siete pilares de diferente altura y seis luces desiguales en forma de arco semicircular. La geometría aproximada del puente se ilustra la Figura 8.13(a), despreciando los cambios de sección en las pilas y excluyendo el arco del triunfo sobre su calzada. El puente tiene una longitud de 193.0 m, una altura de 58.2 m y un ancho  $t = 8.0$  m. Asimismo, la estructura está construido en bloques de granito unidos en ocasiones con grapas metálicas (SAAE, 2019). Se supone que el material cuenta con un peso específico  $\gamma = 26 \text{ kN/m}^3$ , un módulo de Young  $E = 50 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  y una relación de Poisson  $\nu = 0.28$ . Se considera la acción de una carga uniforme distribuida  $w = 10 \text{ kN/m}^2$  y del peso propio del material.

El dominio del problema se dividió en una malla no estructurada de 1279 nudos y 1255 elementos cuadrilaterales bilineales, como se indica en la Figura 8.13(b). Se restringieron las componentes de desplazamiento en las direcciones  $x$  y  $y$ , sobre los apoyos.

El archivo `puente61.geo` contiene la geometría, condiciones de borde, cargas aplicadas, propiedades mecánicas y parámetros de construcción de la malla. Este archivo se lee en GMSH y desde allí se genera la malla de elementos finitos, la cual se almacena en el archivo `puente61.msh`.

Después se realiza el análisis por elementos finitos, escribiendo la instrucción `PEFICA puente61 10` desde la línea de comandos de GNU-Octave. El programa PE-



**Figura 8.12:** Ejemplo de la aplicación del principio de Saint Venant a una lámina con carga puntual. Relación entre el esfuerzo normal en la dirección de la carga  $\sigma_{yy}$  y el esfuerzo promedio  $\sigma_{prom}$  evaluado para: (a)  $d_1 = b/4$ , (b)  $d_2 = b/2$ , y (c)  $d_3 = b$ .

FiCA 2.0 almacena los resultados en los archivos `puente61.pos` y `puente61.pos.opt`. Estos últimos se pueden visualizar en el programa GMSH.

En la Figura 8.14(a) se presenta tres resultados: (i) la configuración deformada de la malla de elementos finitos y la configuración no deformada como un contorno del dominio del problema, (ii) la norma del vector de desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  medida en metros, y (iii) los vectores de la fuerza total en cada nudo medida en kN, que particularmente corresponden a las reacciones en los apoyos.

La distribución del esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$  medido en kN/m<sup>2</sup> se indican en la Figura 8.14(b). Se observa un valor máximo del esfuerzo normal  $\sigma_1^{\text{máx}} = 659 \text{ kN/m}^2$  ubicado en la esquina superior izquierda del puente. Asimismo, se encuentran otros valores altos en el centro del tercer arco y en la cara superior del puente entre el cuarto y quinto arco.

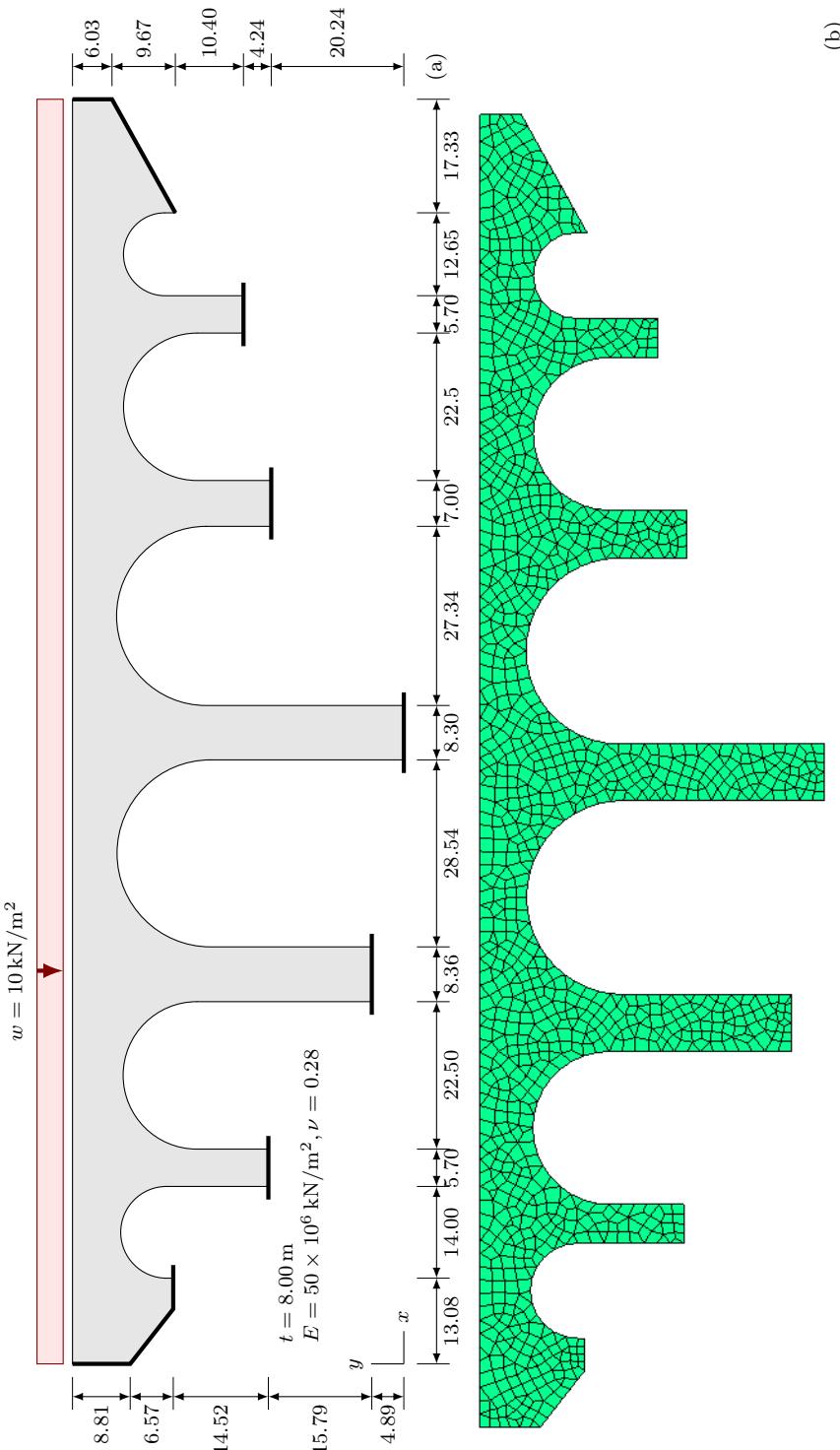


Figura 8.13: Ejemplo de un puente romano de seis luces: (a) esquema general, y (b) malla de elementos finitos.

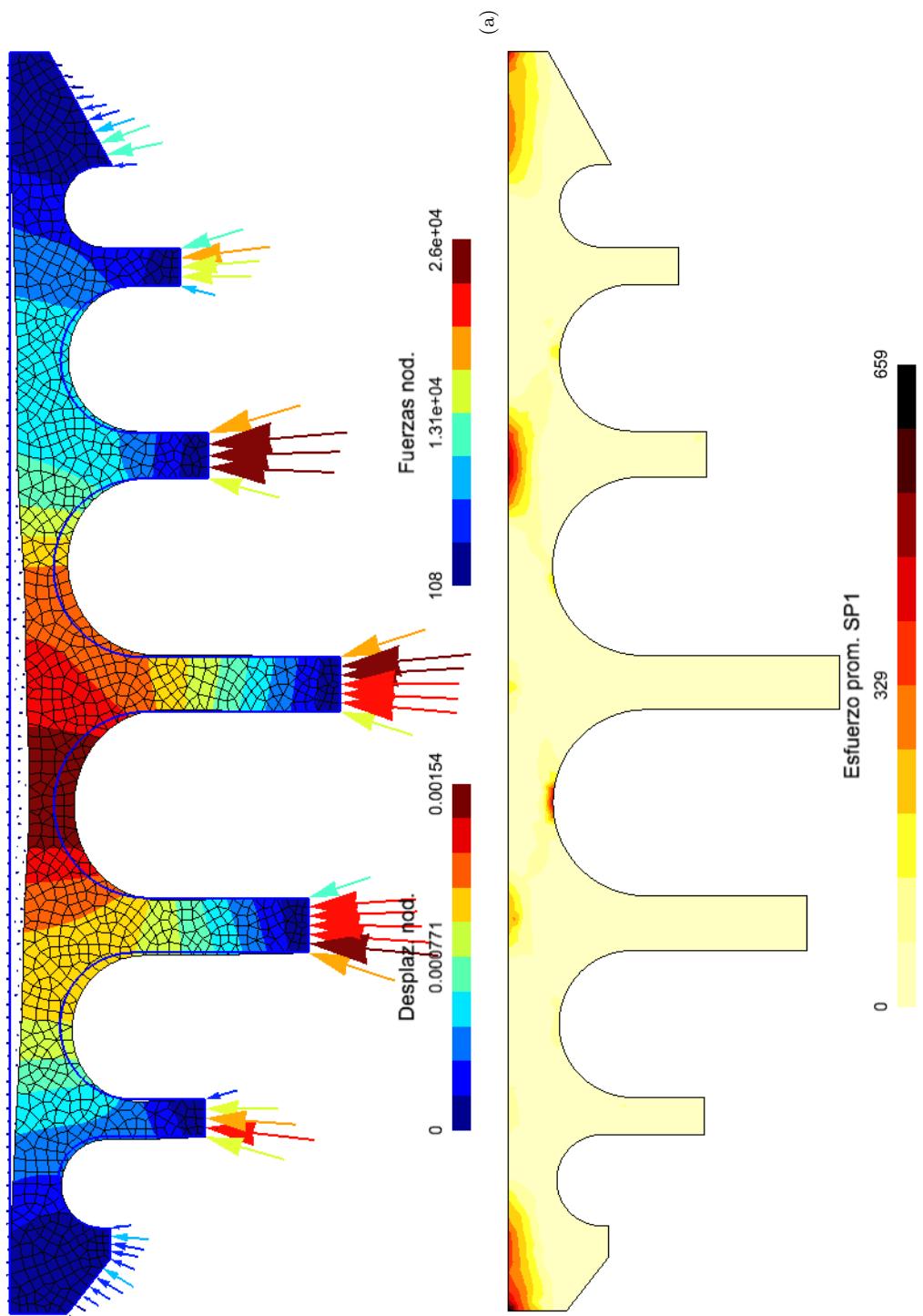
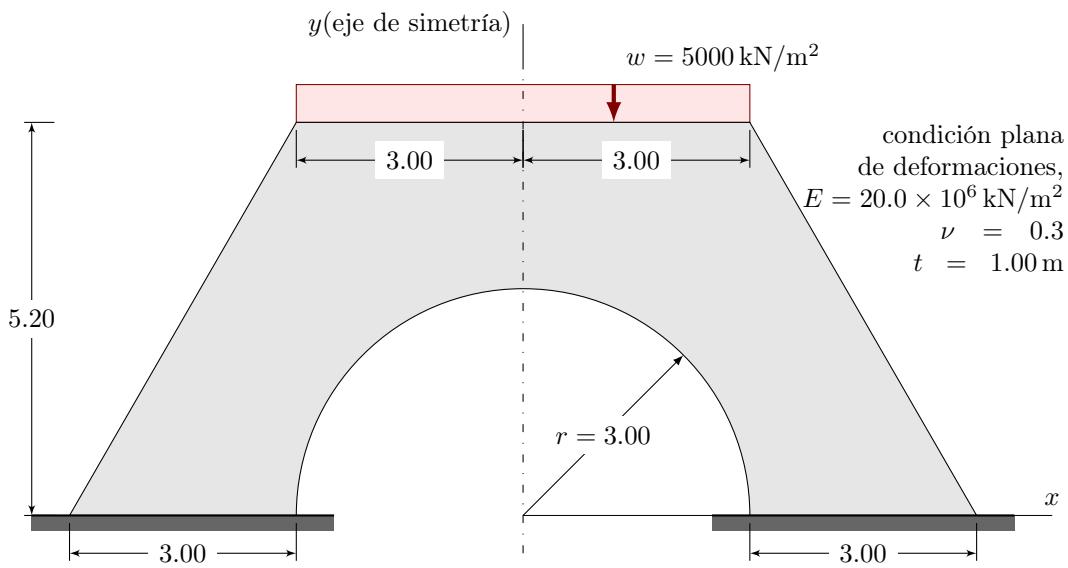


Figura 8.14: Ejemplo de un puente romano de seis luces: (a) configuración deformada, norma del vector de desplazamiento  $\|u\|$  en metros y vectores de fuerzas de reacción en kN, y (b) esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$  en  $\text{kN/m}^2$ . El contorno azul indica la configuración no deformada.



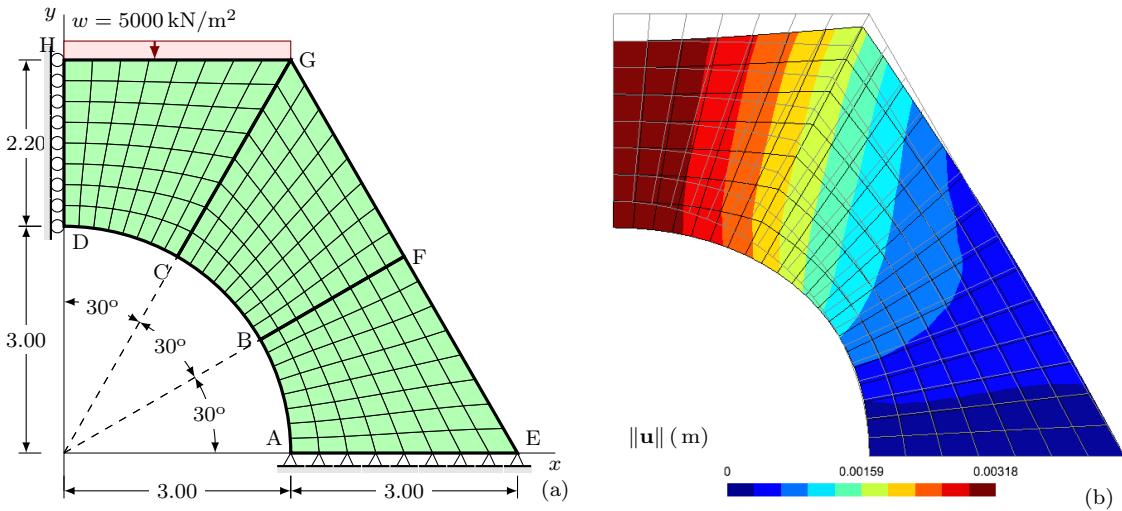
**Figura 8.15:** Ejemplo de una estructura de drenaje sometida a carga distribuida uniforme: geometría, carga aplicada  $w$  y condiciones de apoyo.

### 8.8.6 Estructura de drenaje sometida a carga distribuida uniforme

Una estructura de drenaje larga y de sección transversal constante, soporta una carga distribuida uniforme de  $w = 5\,000 \text{ kN/m}^2$  en su cara superior, como lo muestra la Figura 8.15. Tal estructura está hecha de concreto, con módulo de Young  $E = 20 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  y relación de Poisson  $\nu = 0.3$  (Weaver & Johnson, 1984). Se desea obtener la distribución de los esfuerzos principales en la estructura.

El problema se simplifica a una condición plana de deformaciones en el plano  $xy$  y se analiza una tajada de un metro de espesor, es decir, la dimensión en dirección  $z$  corresponde a  $t = 1.0 \text{ m}$ .

La simetría del problema con respecto al eje  $y$  permite modelar la mitad de su dominio, considerando que sobre tal eje el desplazamiento en dirección  $x$  es igual a cero, es decir  $u(x = 0, y) = 0$ , como lo muestra la Figura 8.16(a). Asimismo, el empotramiento en la base se representa mediante la restricción al desplazamiento en las direcciones  $x$  y  $y$  de los nudos que conforman la línea horizontal inferior derecha.



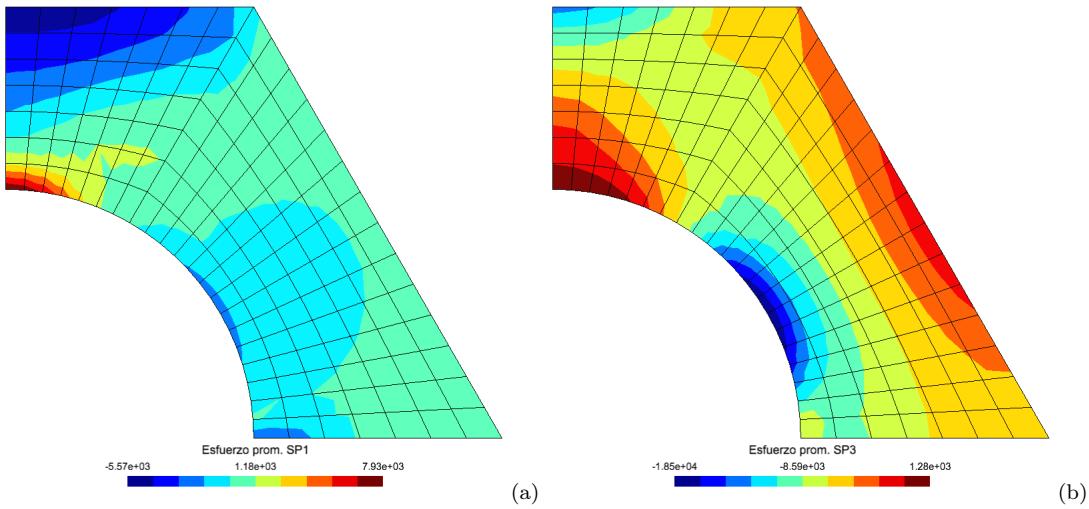
**Figura 8.16:** Ejemplo de una estructura de drenaje sometida a carga distribuida uniforme: (a) malla de elementos finitos con condiciones de borde y la carga  $w$ , y (b) configuración deformada y norma del vector de desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  en metros.

El dominio se modeló con una malla estructurada de elementos finitos cuadrilaterales lineales, la cual se construyó a partir de tres superficies de cuatro lados. En la Figura 8.16(a) se observa que cada lado de las superficies AEFB, BFGC y CGHD, contiene los lados de 8 elementos cuadrilaterales.

La geometría, cargas externas, condiciones de borde, propiedades del material y los parámetros de generación de malla están contenidos en el archivo `LIBR04.geo`. Éste último se lee en el programa GMSH y desde allí se construye la malla de elementos finitos, la cual se almacena en el archivo `LIBR04.msh`.

El análisis del problema mediante el método de los elementos finitos, se realiza ejecutando la línea de comando `PEFICA LIBR04 10`, desde el entorno de GNU-Octave, cuyo directorio actual esté ubicado en la carpeta `PEFBID`. Los resultados se almacenan en los archivos `LIBR04.pos` y `LIBR04.pos.opt`, los cuales se pueden visualizar en el entorno gráfico de GMSH.

La Figura 8.17 ilustra la distribución de los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  en el dominio, medida en  $\text{kN/m}^2$ . Se observa que el esfuerzo máximo de tensión es de  $7930 \text{ kN/m}^2$  y ocurre en la cara inferior central de la estructura. En cambio, el



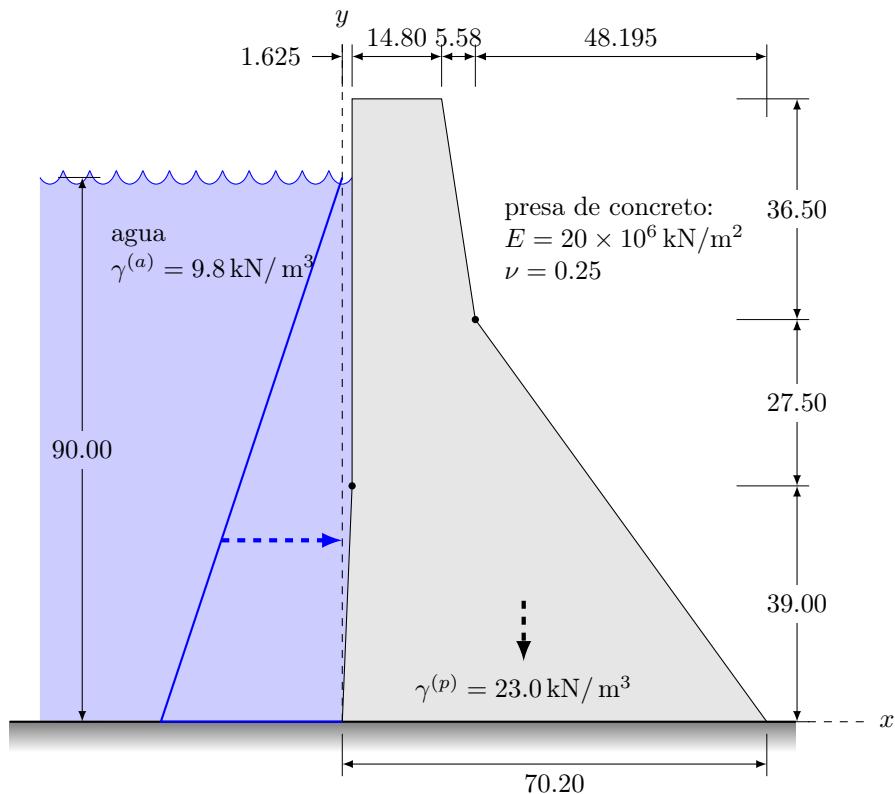
**Figura 8.17:** Ejemplo de una estructura de drenaje sometida a carga distribuida uniforme: (a) esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$  en  $\text{kN}/\text{m}^2$  y (b) esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  en  $\text{kN}/\text{m}^2$

esfuerzo máximo de compresión es de  $18\,500 \text{ kN}/\text{m}^2$  y está ubicado sobre la semicircunferencia a  $30^\circ$  aproximadamente con respecto a la horizontal.

### 8.8.7 Presa hidráulica de sección constante

Una presa hidráulica de concreto de gran longitud y sección transversal constante está sometida a dos acciones externas: (i) las fuerzas de cuerpo dadas por el peso específico del concreto  $\gamma^{(c)} = 23.0 \text{ kN}/\text{m}^3$  y (ii) la presión hidroestática del agua con peso específico  $\gamma^{(a)} = 9.8 \text{ kN}/\text{m}^3$  en una altura  $h^{(a)} = 90.0 \text{ m}$ . La geometría ha sido tomada de la presa de Koyna en la India, la cual se ilustra en la Figura 8.18, junto con las condiciones de apoyo y las acciones externas. El concreto tiene un módulo de Young  $E = 20 \times 10^6 \text{ kN}/\text{m}^2$  y una relación de Poisson  $\nu = 0.25$ . El problema se considera plano de deformaciones con espesor unitario  $t = 1.00 \text{ m}$ .

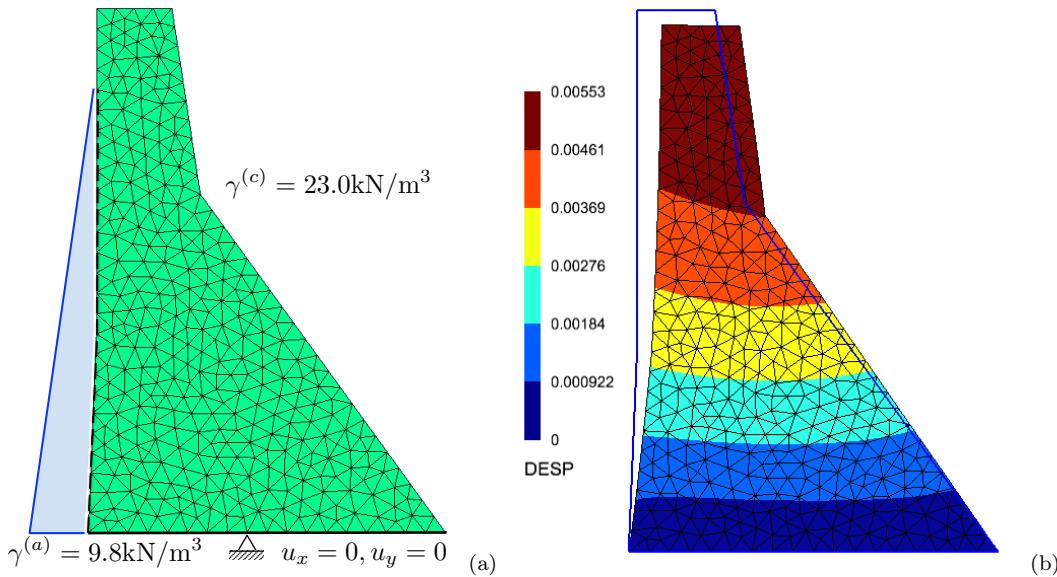
Se divide el dominio de la presa una malla no estructurada uniforme de 625 elementos finitos triangulares lineales y 353 nudos, como se ilustra en la Figura 8.19(a). Para construir la geometría del problema y la malla se utiliza el programa GMSH, como se describe en el Capítulo 10. En GMSH se definen las características del problema y se almacenan en el archivo KOYNA01.geo. A continuación se genera la malla



**Figura 8.18:** Ejemplo de una presa hidráulica de sección constante sometida a la presión del agua y a su peso propio. Esquema general. Las unidades de longitud se indican en metros.

y se guarda en el archivo KOYNA01.msh. Éste último se lee durante la ejecución del programa PEFICA 2.0, cuando se escribe la instrucción PEFICA KOYNA01 11, en la línea de comando de GNU–Octave.

Los resultados del problema se almacenan en los archivos KOYNA01.pos y KOYNA01.pos.opt, en el formato que permite su visualización en el programa GMSH. La Figura 8.19(b) muestra el valor de la norma del vector de desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  en metros en la configuración deformada de la malla. La línea azul corresponde al contorno de la presa en la configuración no deformada.



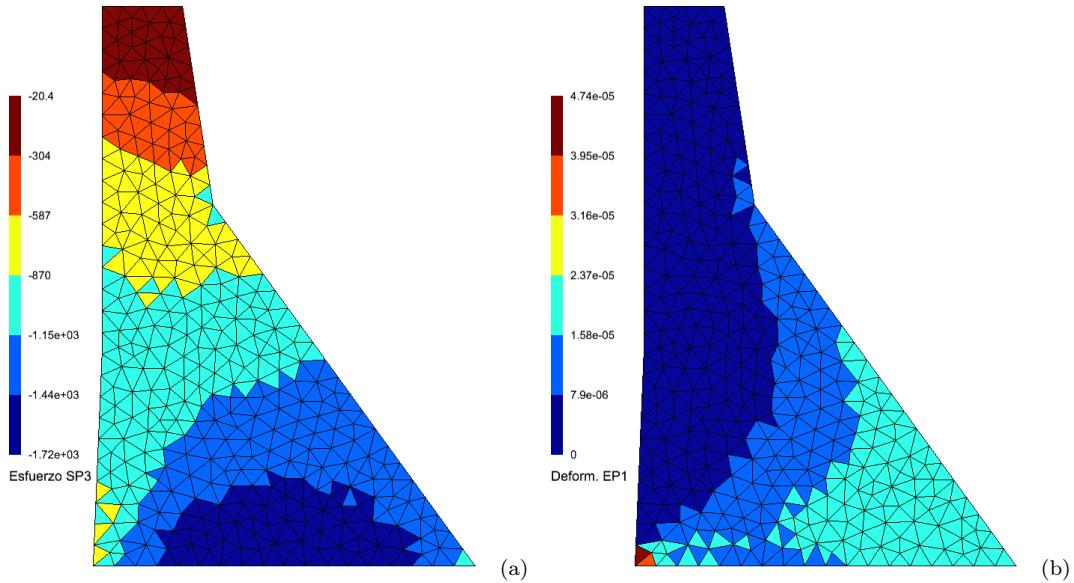
**Figura 8.19:** Ejemplo de una presa hidráulica de sección constante sometida a la presión del agua y a su peso propio: (a) malla de elementos finitos, y (b) norma del vector desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  en metros y configuración deformada.

### 8.8.7.1 Resultados evaluados en el interior de los elementos

El último parámetro utilizado en la línea de comando **PEFICA KOYNA01 11**, establece que los esfuerzos y las deformaciones son evaluadas en el interior de cada elemento finito. Por tal razón, se espera un valor constante en cada elemento triangular lineal de la malla. La Figura 8.20 presenta el esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  en  $\text{kN/m}^2$ , y la deformación principal mayor  $\varepsilon_1$ , evaluada en el interior de cada elemento finito.

### 8.8.7.2 Resultados promedio en los nudos y suavizados

Una copia del archivo **KOYNA01.msh**, denominada **KOYNA02.msh**, se utiliza para analizar de nuevo el mismo problema, pero modificando el tipo de resultados. En particular ahora se obtienen los valores promedio en los nudos de esfuerzo y deformación, escribiendo la instrucción **PEFICA KOYNA02 10**, en la línea de comando de GNU–Octave. Los resultados de este procedimiento serán almacenados en los archivos **KOYNA02.pos** y **KOYNA02.pos.opt**, y se pueden visualizar en el programa GMSH. La Figura 8.21



**Figura 8.20:** Ejemplo de una presa hidráulica de sección constante sometida a la presión del agua y a su peso propio. Resultados en el interior de los elementos del: (a) esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  en  $\text{kN}/\text{m}^2$ , y (b) deformación principal mayor  $\varepsilon_1$ .

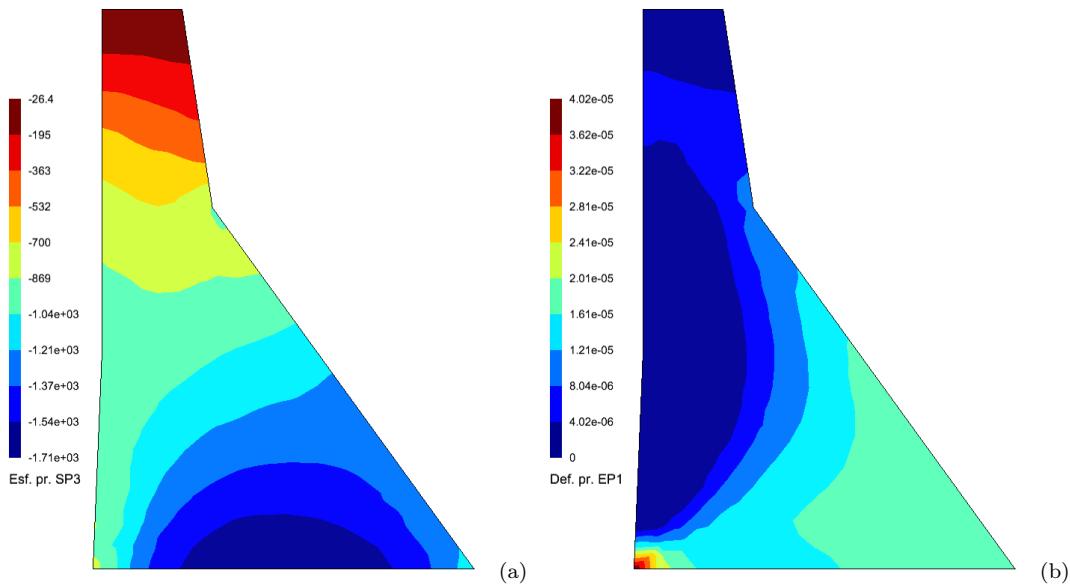
ilustra el valor suavizado a partir del promedio en los nudos del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  y de la deformación principal mayor  $\varepsilon_1$ .

### 8.8.8 Suelo sometido a una carga vertical bajo una zapata de cimentación

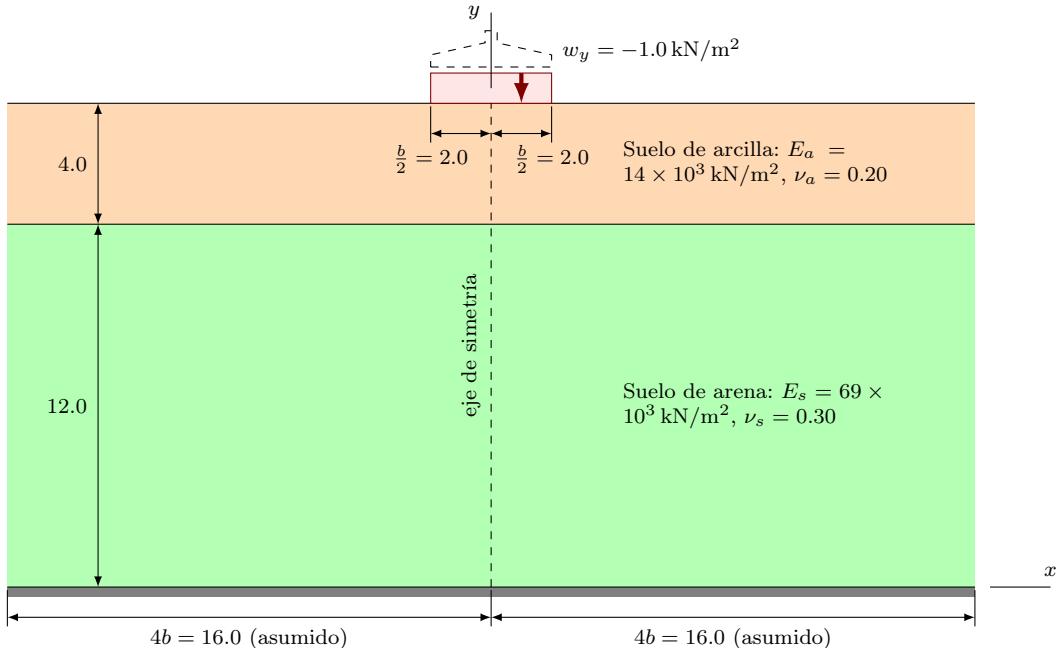
Una zapata alargada y de ancho  $b = 4.0 \text{ m}$ , transmite una carga distribuida uniforme vertical  $w_y = -1.0 \text{ kN}/\text{m}^2$  a dos capas de suelo, como lo ilustra la Figura 8.22. Debajo de la segunda capa de suelo se encuentra roca considerada no deformable.

La capa de suelo superior corresponde a una arcilla, cuyo módulo de Young es  $E_a = 14 \times 10^3 \text{ kN}/\text{m}^2$  y su relación de Poisson es  $\nu_a = 0.20$ . La capa de suelo inferior es una arena con módulo de Young  $E_s = 69 \times 10^3 \text{ kN}/\text{m}^2$  y relación de Poisson  $\nu_s = 0.30$ .

La geometría del problema permite considerarlo como plano de deformaciones con espesor  $t = 1.0 \text{ m}$ . Asimismo, la simetría con respecto al eje  $y$  simplifica el análisis a la mitad del dominio. Sobre tal eje de simetría el desplazamiento en dirección  $x$  es igual a cero, es decir  $u(x = 0, y) = 0$ . En cambio, en el límite inferior de las capas de suelo se establece que las componentes de desplazamiento en las dos direcciones son



**Figura 8.21:** Ejemplo de una presa hidráulica de sección constante sometida a la presión del agua y a su peso propio. Resultados en promedio en los nudos del: (a) esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  en  $\text{kN}/\text{m}^2$ , y (b) deformación principal mayor  $\varepsilon_1$ .



**Figura 8.22:** Ejemplo de un suelo sometido a una carga vertical bajo una zapata de cimentación. Esquema general del problema. Medidas dadas en metros.

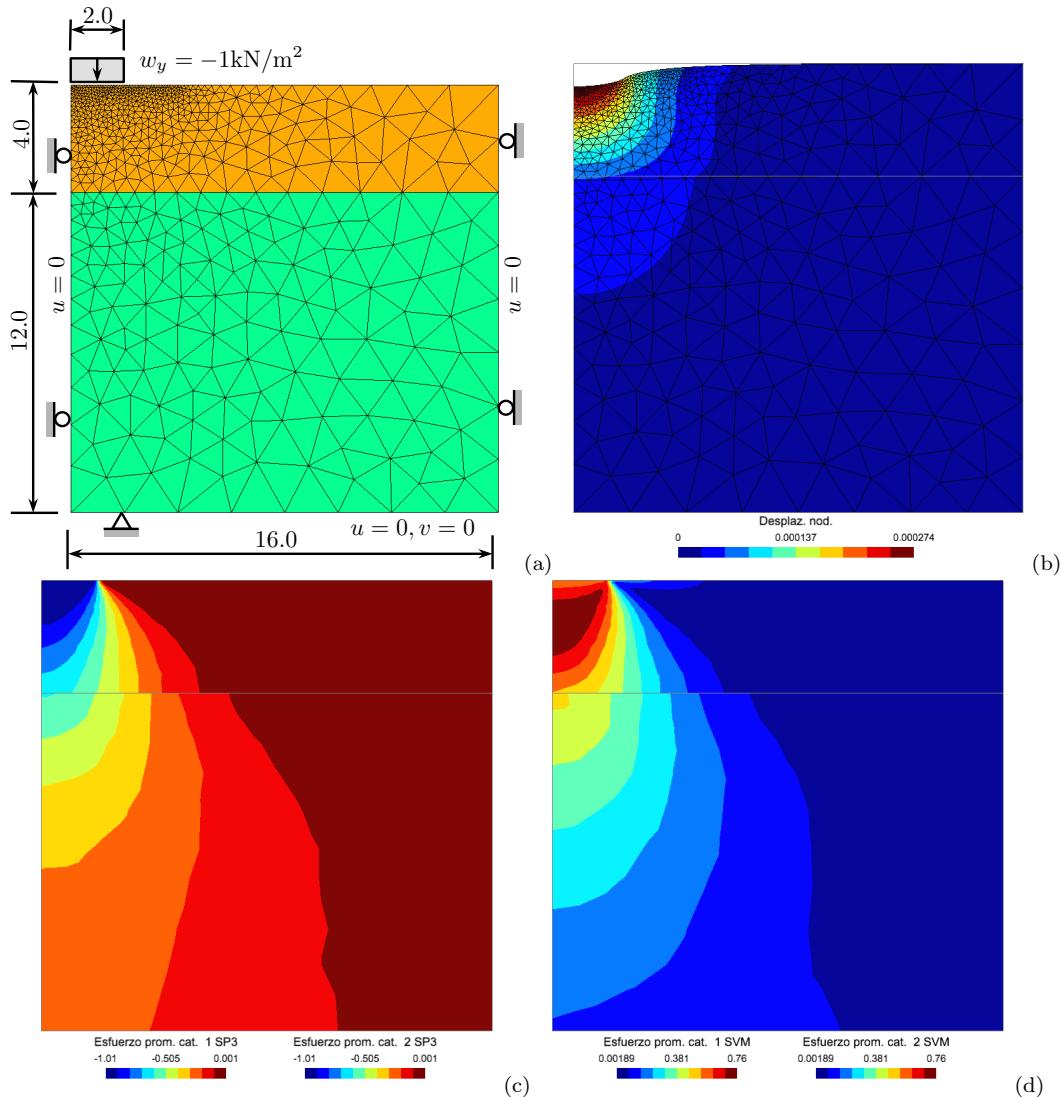
nulas, es decir  $u(x, y = 0) = 0$  y  $v(x, y = 0) = 0$ . El ancho del dominio del problema no está definido. Para este ejemplo se consideró que el efecto de la carga  $w_y$  es despreciable para un ancho de  $8b = 32.0$  m, es decir, para un ancho de  $4b = 16.0$  m en la mitad representada.

El archivo `suelo1.geo` contiene las entidades geométricas y físicas del problema y los parámetros de construcción de la malla de elementos finitos. El programa GMSH puede abrir `suelo1.geo` y con su información, generar y guardar la malla en un archivo `suelo1.msh`. Particularmente, el dominio se dividió en 1184 elementos triangulares lineales y 645 nudos asociados a dos materiales diferentes: suelo de arcilla y suelo de arena, como lo ilustra la Figura 8.23(a).

Desde el programa GNU–Octave y en el directorio de trabajo \PEFBID, se ejecuta la línea de comando PEFICA `suelo1 12`, haciendo que el programa PEFiCA 2.0 resuelva el problema y almacene los resultados promedio sobre los nudos para cada una de las categorías asociadas al material. Los archivos `suelo1.pos` y `suelo1.pos.opt` contienen tales resultados en el formato del postproceso gráfico de GMSH.

La Figura 8.23(b) indica la configuración deformada y la norma del vector de desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  medida en metros. El contorno de color gris corresponde a la configuración no deformada de las dos capas de suelo.

La Figura 8.23(c) y (d), presentan la distribución de los esfuerzos: principal menor  $\sigma_3$  y equivalente de von Mises  $\sigma_{vm}$ , medidos en  $\text{kN/m}^2$ . Este tipo de resultados son calculados como el promedio en los nudos asociados al mismo material. Por tal razón se presenta discontinuidad del resultado en la frontera entre dos materiales.



**Figura 8.23:** Ejemplo de un suelo sometido a una carga vertical bajo una zapata de cimentación: (a) malla de elementos finitos donde se distingue suelo de arcilla y suelo de arena, (b) configuración deformada y norma del vector desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$ , (c) esfuerzo principal menor  $\sigma_3$ , evaluado en los nudos para cada material y medido  $\text{kN/m}^2$ , y (d) esfuerzo equivalente de von Mises  $\sigma_{vm}$ , evaluado en los nudos para cada material y medido  $\text{kN/m}^2$ .



## Capítulo 9

# Implementación de la solución del problema elástico lineal tridimensional

El programa PEFiCA 2.0 resuelve problemas mecánicos estáticos tridimensionales, mediante las rutinas de GNU-Octave incluidas en la carpeta \PEFTRI. Este tipo de problemas consideran: (i) deformaciones infinitesimales, (ii) materiales elásticos lineales e isotrópicos, (iii) acción de cargas estáticas puntuales o distribuidas y (iv) grados de libertad asociados a las componentes de desplazamiento en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

### 9.1 Archivo de entrada de datos para PEFiCA 2.0

El archivo de entrada de datos para el programa PEFiCA 2.0 contiene la malla de elementos finitos, las propiedades mecánicas y geométricas, las condiciones de borde y las cargas aplicadas del problema. Este archivo de entrada debe estar ubicado en la sub-carpeta \DATOS dentro de la carpeta \PEFTRI. El programa puede leer los datos a partir de los dos tipos de archivos de entrada indicados a continuación.

### 9.1.1 Archivo de entrada tipo *script* de GNU–Octave

El archivo de entrada tipo *script* de GNU–Octave con extensión .m contiene directamente la definición de variables escalares y matriciales que describen el problema. Los nombres designados a dichas variables son los mismos utilizados posteriormente en la rutina principal de proceso. El programa PEFiCA 2.0 lee éste tipo de archivo de entrada, cuando el parámetro  $\langle ople \rangle$  descrito en la Subsección 6.3.2 es igual a 07.

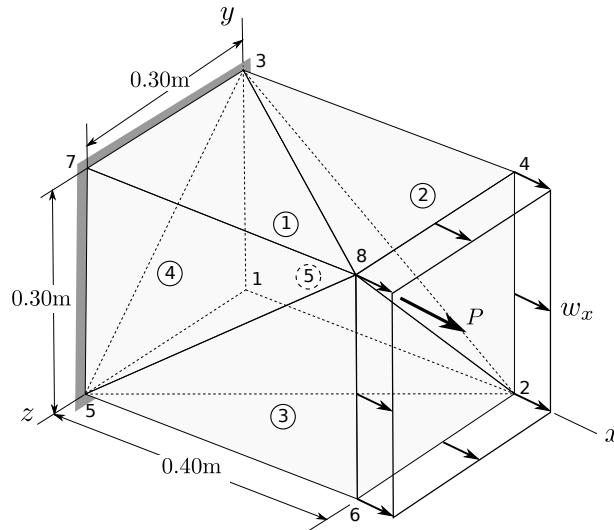
### 9.1.2 Archivo de entrada tipo *mesh* de GMSH

El archivo de entrada tipo *mesh* con extensión .msh para PEFiCA 2.0, es aquel que se exporta desde el programa GMSH en formato ASCII versión 2, como lo describe la Sección 10.15. El programa PEFiCA 2.0 lee éste tipo de archivo de entrada, cuando el parámetro  $\langle ople \rangle$  descrito en la Subsección 6.3.2 es igual a 10, 11, 12, 13 o 14.

## 9.2 Variables de datos del programa

Las variables de datos del programa son escalares y matrices que representan la geometría, las condiciones de borde, las propiedades mecánicas y las cargas aplicadas sobre el sólido. A continuación se describen tales variables y se indica su valor en un ejemplo particular.

El ejemplo consiste en un bloque empotrado en su extremo izquierdo y sometido en su extremo derecho a dos cargas: una distribuida uniforme de  $w_x = 20\,000 \text{ kN/m}^2$  y una puntual de  $P = 1\,000 \text{ kN}$ . El bloque está hecho de un material con módulo de Young  $E = 20 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  y relación de Poisson  $\nu = 0.3$ . El dominio del problema se divide en 5 elementos tetraédricos lineales, como lo indica la Figura 9.1.



**Figura 9.1:** Ejemplo de problema de elasticidad tridimensional: bloque de 5 elementos tetraédricos lineales sometido a una fuerza puntual  $P$  y una carga distribuida  $w_x$ .

### 9.2.1 Parámetros generales del problema

La variable **TLEN** corresponde al parámetro  $\langle ople \rangle$ , que determina el tipo de entrada de datos y de salida de resultados en la ejecución de PEFICA 2.0. Asimismo, la variable **PRO** depende de **TLEN** y establece el tipo de evaluación de los resultados así:

- Si  $PRO=0$  calcula los resultados promedio en los nudos.
- Si  $PRO=1$  evalúa los resultados en el interior de los elementos con una sola categoría de material.
- Si  $PRO=2$  calcula los resultados en el interior de los elementos con varias categorías.

En el código del programa principal PEFICA se puede definir la variable **IMPR=5**, con el fin de generar los archivos de postproceso gráfico de GMSH **.pos** y **.pos.opt**.

El tipo de evaluación de los esfuerzos y las deformaciones en el elemento se define con la variable **ENNU**. Para evaluar los esfuerzos y las deformaciones en los puntos de Gauss, en los nudos o en el centro del elemento, se establece **ENNU=0**, **ENNU=1** o **ENNU=2**, respectivamente.

Las variables `NNUE` y `NGAU` establecen el número máximo de nudos y de puntos de Gauss por elemento, respectivamente. En este momento, el programa cuenta con elementos tetraédricos lineales y en consecuencia `NNUE=4` y `NGAU=1`.

El tipo de problema mecánico tridimensional está determinado por las variables `TIPR=30` y `NDIM=3`.

El número de elementos, de nudos y de categorías de la malla se definen con las variables `NELE`, `NNUD` y `NCAT`, respectivamente.

Para el ejemplo ilustrado en la Figura 9.1, los parámetros generales que se escriben en el archivo de entrada tipo *script* son:

---

```

1000 % PEFICA archivo de datos de entrada
% -----
1002 % datos generales
1003 NELE = 5;      % numero de elementos
1004 NNUD = 8;      % numero de nudos
1005 NNUE = 4;      % numero maximo de nudos por elemento
1006 NGAU = 1;      % numero maximo de puntos de Gauss por elemento
1007 NDIM = 3;      % numero de dimensiones
1008 NCAT = 1;      % numero de categorias de elementos
1009 TIPR = 30;      % codigo del tipo de problema:
1010 % 30: tridimensional
1011 ENNU = 1;      % tipo de evaluacion de esfuerzos/deformaciones en el elemento
1012 % 0: eval en PG, 1: eval en los nudos, 2: eval en centro del elemen
1013 IMPR = 5;      % tipo de impresion de los resultados 5: en GMSH

```

---

**Listado 9.1:** Ejemplo de problema tridimensional. Parámetros generales

### 9.2.2 Tabla de categorías

La tabla de categorías o matriz `CAT` contiene en cada fila las propiedades mecánicas del material, los parámetros de la geometría y el tipo de elemento finito, en unidades consistentes de fuerza y de longitud. El número de la fila identifica el número de la categoría.

Cada categoría contiene: el módulo de Young  $\langle eyou \rangle$ , la relación de Poisson  $\langle pois \rangle$  y el peso específico  $\langle gamm \rangle$  del material; el tipo  $\langle tipe \rangle$ , el número de nudos  $\langle nuel \rangle$  y el número de puntos de Gauss  $\langle pgau \rangle$  del elemento finito. Se cuenta con el elemento tetraédrico lineal de continuidad  $C_0$ , designado como:  $\langle tipe \rangle=301$ . El parámetro

$\langle dumy \rangle$  no se utiliza en el problema tridimensional y se fija a un valor de cero. El formato de cada fila de la matriz CAT es de la forma:

```
CAT = [ <eyou> <pois> <gamm> <dumy> <tipe> <nuel> <pgau> ;
```

donde la última fila termina con `] ;`.

En el ejemplo mostrado en la Figura 9.1, se define una categoría para todos los elementos tetraédricos lineales de la malla identificados como  $\langle tipe \rangle = 301$ , conformados por 4 nudos ( $\langle nuel \rangle = 4$ ) y evaluados en un punto de Gauss ( $\langle pgau \rangle = 1$ ). Asimismo, se desprecia el peso propio del material ( $\langle gamm \rangle = 0.00$ ), y se considera un módulo de Young y una relación de Poisson  $\langle eyou \rangle = 20 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  y  $\langle pois \rangle = 0.30$ , respectivamente. En este caso la tabla de categorías escrita en el archivo de entrada de datos contiene lo siguiente:

```
1000 CAT = [ ...  
20E6 0.30 0.00 0 301 4 1 ] ; % 1
```

**Listado 9.2:** Ejemplo de problema tridimensional. Tabla de categorías

### 9.2.3 Tabla de conectividades y categorías de los elementos

La tabla de conectividades y categorías de los elementos o matriz ELE contiene en cada fila los identificadores de la categoría  $\langle icat \rangle$  y de los nudos de cada elemento  $\langle nud_i \rangle \langle nud_j \rangle \dots$ . En consecuencia el número de filas de ELE corresponde al número de elementos finitos NELE y el número de columnas será 1 más la cantidad de nudos de un elemento NNUE. El número de la fila identifica al número del elemento finito de forma secuencial. El formato de cada fila de la matriz ELE es de la forma:

```
ELE = [ <icat> <nudi> <nudj> ... ;
```

donde la última fila termina con `] ;`.

La Figura 9.1 muestra una malla de 5 elementos tetraédricos lineales de 4 nudos. En consecuencia la tabla de conectividades y categorías por elemento se escribe en el archivo de entrada como:

```

1000 ELE = [ ...
1001 1 1 3 5 2 ; % 1
1002 1 2 3 8 4 ; % 2
1003 1 2 8 5 6 ; % 3
1004 1 3 5 8 7 ; % 4
1005 1 3 2 8 5 ]; % 5

```

**Listado 9.3:** Ejemplo de problema tridimensional. Tabla de conectividades y categorías de los elementos

#### 9.2.4 Tabla de coordenadas de los nudos

La tabla de coordenadas de los nudos o matriz XYZ de problemas tridimensionales contiene en cada fila las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  de los nudos de la malla. Los parámetros  $\langle x_{nud} \rangle$ ,  $\langle y_{nud} \rangle$  y  $\langle z_{nud} \rangle$  corresponden a las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  de cada nudo en la unidad de longitud escogida para el problema. El número de la fila identifica al número del nudo de forma secuencial. El formato de cada fila de la matriz XYZ es de la forma:

$$\text{XYZ} = [ \langle x_{nud} \rangle \langle y_{nud} \rangle \langle z_{nud} \rangle ;$$

donde la última fila termina con  $] ;$ .

El ejemplo mostrado en la Figura 9.1 indica que la malla cuenta con 8 nudos referidos al sistema coordenado  $xyz$ . Por lo tanto la tabla de coordenadas de los nudos que se debe escribir en el archivo de entrada es:

```

1000 XYZ = [ ...
1001 0.0 0.0 0.0 ; % 1
1002 0.4 0.0 0.0 ; % 2
1003 0.0 0.3 0.0 ; % 3
1004 0.4 0.3 0.0 ; % 4
1005 0.0 0.0 0.3 ; % 5
1006 0.4 0.0 0.3 ; % 6
1007 0.0 0.3 0.3 ; % 7
1008 0.4 0.3 0.3 ]; % 8

```

**Listado 9.4:** Ejemplo de problema tridimensional. Tabla de coordenadas de los nudos

### 9.2.5 Tabla de desplazamientos conocidos en los nudos

La tabla de desplazamientos conocidos en los nudos o matriz UCO establece cuáles desplazamientos en los nudos son conocidos y su respectivo valor en unidades consistentes de longitud.

La primera columna de la matriz UCO contiene el identificador del nudo  $\langle inud \rangle$ , la segunda columna indica con  $\langle dcux \rangle = 1$  si el desplazamiento en dirección  $x$  es conocido y con  $\langle dcux \rangle = 0$  si es desconocido, la tercera columna indica con  $\langle dcuy \rangle = 1$  si el desplazamiento en dirección  $y$  es conocido y con  $\langle dcuy \rangle = 0$  si es desconocido, la cuarta columna indica con  $\langle dcuz \rangle = 1$  si el desplazamiento en dirección  $z$  es conocido y con  $\langle dcuz \rangle = 0$  si es desconocido, la quinta, la sexta y la séptima columna,  $\langle vaux \rangle$ ,  $\langle vauy \rangle$  y  $\langle vauz \rangle$ , almacenan los valores de los desplazamientos en  $x$ , en  $y$  y en  $z$ , en el caso que sean conocidos. El formato de cada fila de la matriz UCO es de la forma:

$$\text{UCO} = [ \langle inud \rangle \langle dcux \rangle \langle dcuy \rangle \langle dcuz \rangle \langle vaux \rangle \langle vauy \rangle \langle vauz \rangle; ];$$

donde la última fila termina con  $] ; .$

El ejemplo ilustrado en la Figura 9.1 establece que el desplazamiento en  $x$ , en  $y$  y en  $z$  de los nudos 1, 3, 5 y 7 es conocido e igual a 0.00. Para tal caso el archivo de entrada debe incluir lo siguiente:

```

1000 UCO = [ ...
001 1 1 1 0.0000 0.0000 0.0000 ; ...
1002 003 1 1 1 0.0000 0.0000 0.0000 ; ...
005 1 1 1 0.0000 0.0000 0.0000 ; ...
1004 007 1 1 1 0.0000 0.0000 0.0000 ; ...
1 ;

```

**Listado 9.5:** Ejemplo de problema tridimensional. Tabla de desplazamientos conocidos

### 9.2.6 Tabla de fuerzas aplicadas en los nudos

La tabla de fuerzas aplicadas en los nudos o matriz FUN indica el nudo y el valor de la fuerza aplicada en unidades consistentes. La primera columna de la matriz FUN contiene el identificador del nudo donde ocurre la fuerza puntual  $\langle inud \rangle$ , la segunda, la tercera y la cuarta columna establecen el valor  $\langle funx \rangle$ ,  $\langle funy \rangle$  y  $\langle funz \rangle$  de dicha fuerza en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. El signo positivo de la fuerza puntual indica que ésta tiene el sentido del semi-eje positivo  $x$ ,  $y$  o  $z$ . El formato de cada fila de la matriz FUN en problemas mecánicos tridimensionales es de la forma:

$$\text{FUN} = [ \langle inud \rangle \langle funx \rangle \langle funy \rangle \langle funz \rangle ;$$

donde la última fila termina con  $] ;$ .

La lámina ilustrada en la Figura 9.1 está sometida a una carga puntual en el nudo 8, en dirección  $x$  de 1 000 kN. Por lo tanto, la matriz FUN es de la forma:

```
1000 FUN = [ ...
008 1000 0.0 0.0 ;...
1002 ];
```

**Listado 9.6:** Ejemplo de problema tridimensional. Tabla de fuerzas puntuales en los nudos

### 9.2.7 Tabla de cargas distribuidas en los elementos

La tabla de cargas distribuidas aplicadas en los elementos o matriz FDI indica las presiones en sistema global, local o asociadas a la acción hidrostática, que ocurren sobre las caras de algunos elementos finitos.

Particularmente, el formato de cada fila de la matriz FDI, cuando se aplican cargas distribuidas uniformes en sistema coordenado global, es de la forma:

$$\text{FDI} = [ \langle rele \rangle \langle nud_i \rangle \langle nud_j \rangle \langle nud_k \rangle \langle pre_x \rangle \langle pre_y \rangle \langle pre_z \rangle 0 ]$$

donde la última fila termina con  $] ;$ . El parámetro  $\langle rele \rangle$  indica el número del elemento finito cargado y los parámetros  $\langle nud_i \rangle$ ,  $\langle nud_j \rangle$  y  $\langle nud_k \rangle$  establecen los números de los nudos que delimitan la cara del mismo. El valor de la carga distribuida en las

direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  están definidos por los parámetros  $\langle\text{prex}\rangle$ ,  $\langle\text{prey}\rangle$  y  $\langle\text{prez}\rangle$ , respectivamente en unidades consistentes de fuerza por longitud al cuadrado. El signo positivo de estos últimos corresponde a la dirección positiva de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

En cambio, el formato de cada fila de la matriz FDI, cuando se aplican cargas distribuidas uniformes en sistema coordenado local es:

$$\text{FDI} = [ \langle\text{rele}\rangle \langle\text{nudi}\rangle \langle\text{nudj}\rangle \langle\text{nudk}\rangle 0 \langle\text{pren}\rangle 0 1 ]$$

donde la última fila termina con  $] ;$ . El parámetro  $\langle\text{rele}\rangle$  indica el número del elemento finito cargado y los parámetros  $\langle\text{nudi}\rangle$ ,  $\langle\text{nudj}\rangle$  y  $\langle\text{nudk}\rangle$  establecen los números de los nudos que delimitan la cara del mismo. El valor de la carga distribuida normal a la cara está definida por el parámetro  $\langle\text{pren}\rangle$  en unidades consistentes de fuerza por longitud al cuadrado. El sentido positivo de la presión normal a la cara corresponde a la dirección que entra al elemento finito.

Para aplicar la presión del agua con peso específico  $\gamma_w$  o  $\langle\text{gawa}\rangle$  a un nivel con respecto al origen coordenado global  $h_w$  o  $\langle\text{hewa}\rangle$  en dirección  $y$ , el formato de cada fila de la matriz FDI es:

$$\text{FDI} = [ \langle\text{rele}\rangle \langle\text{nudi}\rangle \langle\text{nudj}\rangle \langle\text{nudk}\rangle \langle\text{gawa}\rangle \langle\text{hewa}\rangle 0 2 ]$$

donde la última fila termina con  $] ;$ .

La presión hidráulica se representa por una carga uniforme distribuida  $p_n^{(e)}$  evaluada con respecto al centroide  $(x_c^{(e)}, y_c^{(e)}, z_c^{(e)})$  de cada elemento finito cargado ( $e$ ) como  $p_n^{(e)} = \gamma_w(h_w - y_c^{(e)}) > 0$ . El sentido positivo de la presión hidráulica aplicada está definido por la dirección que entra al elemento finito. La aplicación de este tipo de acción se describe en la Subsección 4.8.4.

El ejemplo ilustrado en la Figura 9.1 está sometido a una carga distribuida uniforme  $w_x = 20\,000 \text{ kN/m}^2$  en la cara limitada por los nudos 2, 4 y 8 del elemento 2, y la cara de nudos 2, 6 y 8 del elemento 3. Por lo tanto, la matriz FDI es de la forma:

```
1000 FDI = [ ...
002 002 004 008 20000.0 0.0 0.0 0 ;...
1002 003 002 006 008 20000.0 0.0 0.0 0 ];
```

**Listado 9.7:** Ejemplo de problema tridimensional. Tabla de de cargas distribuidas en los elementos

## 9.3 Variables del proceso de cálculo

La subrutina principal PEFICA.m define un conjunto de variables escalares y matriciales para el análisis por elementos finitos.

### 9.3.1 Variables escalares

Las variables escalares utilizadas en la rutina principal de cálculo son las siguientes:

- ADAT es una variable tipo cadena de caracteres que contiene el nombre del archivo de entrada de datos sin extensión.
- TLEN, PRO y IMPR son variables enteras que determinan: el tipo de entrada de datos y de salida de resultados en la ejecución de PEFICA 2.0, el tipo de evaluación de los resultados, y el modo de presentación de resultados, como se indica en la Subsección 9.2.1.
- TINT, TINI y TFIN contienen el tiempo medido por el reloj del computador en segundos, para el inicio de la rutina principal, para el inicio de un grupo de instrucciones y para el final de un grupo de instrucciones o de la rutina principal, respectivamente.
- NELE contiene el número de elementos finitos de la malla. Esta variable se obtiene del número de filas de la matriz ELE.
- NNUD contiene el número de nudos de la malla. Esta variable se obtiene del número de filas de la matriz XYZ.
- NDIM corresponde al número de dimensiones del problema y se obtiene del número de columnas de la matriz XYZ. Particularmente, NDIM=3 para problemas tridimensionales.
- NNUE es el número máximo de nudos de los tipos de elementos finitos de la malla.

- **NGAU** corresponde al número máximo de puntos de Gauss de los tipos de elementos finitos de la malla.
- **NCAT** es el número de categorías de material o tipo de elemento utilizadas en la malla.
- **ENNU** establece el tipo de evaluación de los esfuerzos y las deformaciones en el elemento finito. **ENNU=0** indica evaluación en los puntos de Gauss, **ENNU=1** en los nudos y **ENNU=2** en el centro del elemento finito.
- **TIPR** indica el tipo de problema. En particular **TIPR=30** indica un problema mecánico tridimensional de sólidos.
- **PMAT=3**, **PELE=4** y **PCAT**, corresponden al número de propiedades de material, de los elementos y de la categoría de un problema tridimensional, respectivamente. Este último es igual a  $\text{PCAT} = \text{PMAT} + \text{PELE}$ .
- **NCOM** es el número de componentes de esfuerzo o de deformación obtenidas en un problema mecánico. Particularmente **NCOM=6** para problemas tridimensionales.
- **NGLN** corresponde al número de grados de libertad asociados a cada nudo. Esta variable es igual al número de columnas de la tabla de desplazamientos conocidos **UC0** menos 1 y dividido en 2.
- **NGLT** contienen el número de grados de libertad total de la malla, calculado como  $\text{NGLT} = \text{NGLN} * \text{NNUD}$ .
- **NGLC** y **NGLD** contienen el número de grados de libertad conocidos y desconocidos de la malla, respectivamente. **NGLC** se obtiene del número de condiciones de borde impuestas en la tabla **UC0**. Mientras que **NGLD** se calcula como  $\text{NGLD} = \text{NGLT} - \text{NGLC}$ .
- **IELE** es el identificador de un elemento finito, que se utiliza habitualmente como el contador en un ciclo definido por las instrucciones de GNU-Octave **for ... end**.

- **NUEL** corresponde al número de nudos de un elemento finito específico. Se designa automáticamente cuando se leen los datos de un archivo **.msh**.
- **NKEL** es el tamaño de la matriz de rigidez de un elemento finito específico, almacenada en **KEL**.
- **IKEL** y **JKEL** son los números de fila y de columna dentro de la matriz de rigidez de un elemento **KEL**, respectivamente. Se utilizan como contadores en ciclos definido por las instrucciones de GNU–Octave **for ... end**.
- **GAMT** es la suma del peso específico de material establecido en la tabla **CAT**. Este parámetro tiene como objetivo indicar si se considera o no el peso propio del material en el análisis.
- **ICAT** es el identificador de la categoría correspondiente a un elemento finito específico, extraída de la tabla de conectividades y categorías de los elementos **ELE**.
- **NFEL** es el número de columnas del vector de fuerzas equivalentes a cargas distribuidas en un elemento finito específico, almacenada en **FEL**.
- **IFEL** indica el número de fila dentro del vector **FEL**. Se utilizan como contadores en ciclos definido por las instrucciones de GNU–Octave **for ... end**.
- **NFDI** corresponde al número fuerzas distribuidas definidas en la tabla **FDI**.
- **IFDI** indica el contador de las fuerzas distribuidas en la tabla **FDI**.
- **NEVA** establece el número de puntos evaluados en el interior de un elemento finito. Si **ENNU=0** el parámetro **NEVA=NGAU**. Si **ENNU=1** entonces **NEVA=NNUE** y si **ENNU=2** el parámetro **NEVA=1**.
- **IEVA** es el identificador de un punto de evaluación en el elemento, el cual se utiliza como el contador en un ciclo definido por las instrucciones de GNU–Octave **for ... end**.

- IRES es un entero que indica la ubicación de un resultado en la tabla SRE o ERE.
- ICOM es el identificador de la componente de esfuerzo o deformación en el elemento. Se utiliza como el contador en un ciclo definido por las instrucciones de GNU-Octave `for ... end`.
- JCOM es el identificador de los esfuerzos o deformaciones principales en el elemento. Se utiliza como el contador en un ciclo definido por las instrucciones de GNU-Octave `for ... end`.
- STVM corresponde al esfuerzo de von Mises obtenido a partir de los esfuerzos principales con la función TRPRIN.
- POIS contiene temporalmente la relación de Poisson del material leída de la tabla CAT.

### 9.3.2 Variables matriciales

Las variables matriciales utilizadas en la rutina principal de cálculo son las siguientes:

- SUP es una tabla auxiliar que identifica el número del volumen asociado al elemento finito tetraédrico, definida en archivo de entrada de datos `.msh` de GMSH.
- La tabla de grados de libertad por nudo MGL es una matriz de NNUD filas por NGLN columnas, que contiene los identificadores de los grados de libertad por nudo.
- UBB es el sub-vector de desplazamientos nodales conocidos de la malla  $\mathbf{a}_\beta$ , ordenado de acuerdo con la numeración de los grados de libertad. Esta matriz se construye con la información de la tabla de desplazamientos conocidos UCO.
- La tabla de incidencias INC es una matriz de NELE filas por NGLN\*NNUE columnas, que contiene en cada fila los identificadores de los grados de libertad de cada elemento finito.

- XYE es una matriz que contiene las coordenadas de los nudos de un elemento específico. En particular, para elementos tetraédricos lineales esta matriz es de la forma:

$$\text{XYE} = [ \langle xnui \rangle \langle ynui \rangle \langle znui \rangle ; \langle xnuj \rangle \langle ynuj \rangle \langle znuj \rangle ; \langle xnuk \rangle \langle ynuk \rangle \langle znuk \rangle ; \langle xnul \rangle \langle ynul \rangle \langle znul \rangle ]$$

donde  $\langle xnui \rangle$ ,  $\langle ynui \rangle$  y  $\langle znui \rangle$  son las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  del nudo inicial  $i$ . Asimismo,  $\langle xnuj \rangle$ ,  $\langle ynuj \rangle$ ,  $\langle znuj \rangle$ ,  $\langle xnuk \rangle$ ,  $\langle ynuk \rangle$ ,  $\langle znuk \rangle$ ,  $\langle xnul \rangle$ ,  $\langle ynul \rangle$  y  $\langle znul \rangle$  indican las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  de los nudos  $j$ ,  $k$  y  $l$  del elemento.

- CAE es una matriz fila que contiene las propiedades de la categoría de un elemento, la cual corresponde a la fila de la tabla categorías de un elemento finito específico. En consecuencia su formato es casi el mismo de la matriz CAT, así:

$$\text{CAE} = [ \langle eyou \rangle \langle pois \rangle \langle gamm \rangle \langle dumy \rangle \langle tipe \rangle \langle nuel \rangle \langle pgau \rangle ]$$

donde  $\langle eyou \rangle$ ,  $\langle pois \rangle$  y  $\langle gamm \rangle$  son el módulo de elasticidad, la relación de Poisson y el peso específico del material. Asimismo,  $\langle tipe \rangle$ ,  $\langle nuel \rangle$  y  $\langle pgau \rangle$  corresponden el tipo, el número de nudos y el número de puntos de Gauss del elemento. El parámetro  $\langle dumy \rangle$  no se utiliza en problemas tridimensionales y conserva un valor de cero.

- KEL y KGS son las matrices de rigidez de un elemento finito específico de tamaño NKEL y la matriz de rigidez de la malla de tamaño NGLT, respectivamente. La matriz de rigidez de la malla KGS se obtiene del proceso de ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos finitos KEL. En cambio, la matriz de rigidez del elemento se calcula con la función KELEME.
- KAA es la sub-matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ , conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas 1 a NGLD y las columnas 1 a NGLD. En cambio KAB es la sub-matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ , conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas 1 a NGLD y las columnas

NGLD+1 a NGLT. La sub-matriz de rigidez de la malla KBA definida como  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$ , está conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas NGLD+1 a NGLT y las columnas 1 a NGLD. Finalmente, KBB es la sub-matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}_{\beta\beta}$ , conformada por los coeficientes de la matriz KGS ubicados en las filas NGLD+1 a NGLT y las columnas NGLD+1 a NGLT.

- FEL y FGS son los vectores de fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas en un elemento finito específico  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  y en la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_s$ , respectivamente. FEL y FGS son matrices columna con NKEL y NGLT filas, respectivamente. El vector de fuerzas equivalentes de la malla FGS se obtiene del proceso de ensamblaje de los vectores de fuerzas equivalentes de los elementos finitos FEL. En cambio, el vector de fuerzas equivalentes a la acción de las presiones en las caras del elemento se calcula con la función FELEMS.
- FEL y FGC son los vectores de fuerzas equivalentes al peso propio en un elemento finito específico  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  y en la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_b$ , respectivamente. FEL y FGC son matrices columna con NKEL y NGLT filas, respectivamente. El vector de fuerzas equivalentes de la malla FGC se obtiene del proceso de ensamblaje de los vectores de fuerzas equivalentes de los elementos finitos FEL. En cambio, el vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del elemento se calcula con la función FELEM.C.
- FGN es el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla  $\mathbf{f}^{(n)}$ , la cual se obtiene de la tabla de fuerzas nodales FUN, utilizando la función ORTAVE.
- FGT es el vector de fuerzas totales  $\mathbf{f}$ , que resulta de la suma entre las fuerzas equivalentes de cuerpo y de superficie, y las fuerzas aplicadas directamente sobre los nudos sin conocer las reacciones, es decir  $\mathbf{FGT}=\mathbf{FGC}+\mathbf{FGS}+\mathbf{FGN}$ .
- FAA es el sub-vector de fuerzas totales  $\mathbf{f}_\alpha$ , conformado por los coeficientes del vector FGT ubicados en las filas 1 a NGLD.

- NEL es la matriz de funciones de forma de un elemento finito específico  $\mathbf{N}_{(e)}$ . Esta matriz se calcula mediante al función NELEME.
- BEL es la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma de un elemento finito específico  $\mathbf{B}_{(e)}$ . Esta matriz se calcula mediante al función BELEME.
- TEM es una matriz de se utiliza en varios líneas del código, para almacenar valores temporales del análisis.

## 9.4 Variables de resultados del programa

Los resultados obtenidos con el programa PEFICA 2.0 se almacenan en varias matrices, las cuales se describen a continuación:

- UAA es el sub-vector de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{u}_\alpha$ , el cual se obtiene al resolver un sistema de ecuaciones simultaneas de la forma  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{u}_\beta$ , que se calcula en GNU-Octave con la siguiente instrucción:

$$\text{UAA} = (\text{KAA}) \setminus (\text{FAA} - \text{KAB} * \text{UBB});$$

- UTO es el vector de desplazamientos nodales completo  $\mathbf{u}^T = [\mathbf{u}_\alpha^T \quad \mathbf{u}_\beta^T]$ , construido a partir de los vectores de desplazamientos nodales desconocidos y conocidos, así:  $\text{UTO} = [\text{UAA} ; \text{UBB}]$ .
- La tabla UXY contiene en cada fila las componentes de desplazamiento calculadas en cada nudo de la malla. En particular para problemas tridimensionales, el formato de una fila esta tabla es:

$$\text{UXY} = [ \langle \text{desx} \rangle \langle \text{desy} \rangle \langle \text{desz} \rangle;$$

donde  $\langle \text{desx} \rangle$ ,  $\langle \text{desy} \rangle$  y  $\langle \text{desz} \rangle$  son las componentes de desplazamiento en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  en el nudo identificado por el número de la fila. Tales desplazamientos son calculados en la misma unidad de longitud utilizada en los datos de entrada.

- $\mathbf{FBB}$  es el sub-vector de las fuerzas totales desconocidas  $\mathbf{f}_\beta$ . Se calcula en GNU-Octave de la forma:

$$\mathbf{FBB} = \mathbf{KBA} * \mathbf{UAA} + \mathbf{KBB} * \mathbf{UBB} ;$$

Tales fuerzas se expresan en la misma unidad de fuerza utilizada en los parámetros de entrada.

- $\mathbf{FTO}$  es el vector de fuerzas totales, obtenido de la forma:  $\mathbf{FTO} = [ \mathbf{FAA} ; \mathbf{FBB} ] ;$ .
- La tabla  $\mathbf{FXY}$  contiene en cada fila las componentes de fuerzas totales en cada nudo de la malla. En particular para problemas tridimensionales, el formato de una fila esta tabla es:

$$\mathbf{FXY} = [ \langle f_{ux} \rangle \langle f_{uy} \rangle \langle f_{uz} \rangle ;$$

donde  $\langle f_{ux} \rangle$ ,  $\langle f_{uy} \rangle$  y  $\langle f_{uz} \rangle$  son las componentes de la fuerza total en direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  en el nudo identificado por el número de la fila. Tal vector se obtiene de la forma:  $[\mathbf{FXY}] = \text{ORVETA}(\mathbf{FTO}, \mathbf{MGL}) ;$ .

- $\mathbf{FGE}$  es el vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio y de las presiones en las caras  $\tilde{\mathbf{f}}$ .
- $\mathbf{FGB}$  es el sub-vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio y de las presiones en las caras  $\tilde{\mathbf{f}}_\beta$ , asociado con los grados de libertad  $\mathbf{NGLD+1}$  a  $\mathbf{NGLT}$ .
- $\mathbf{FNB}$  es el sub-vector de fuerzas desconocidas aplicadas directamente en los nudos  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ , es decir de las reacciones en los apoyos.
- $\mathbf{FNA}$  es el sub-vector de fuerzas conocidas aplicadas directamente en los nudos  $\mathbf{f}_\alpha^{(n)}$ .
- $\mathbf{FNT}$  es el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos  $\mathbf{f}^{(n)}$ , obtenido de la operación  $\mathbf{FNT} = [ \mathbf{FNA} ; \mathbf{FNB} ] ;$ .

- **FNX** es la tabla de fuerzas aplicadas directamente en los nudos, obtenida de la organización del vector **FNT**.
- **UEL** es el vector de desplazamientos nodales de un elemento finito específico, el cual se obtiene extrayendo sus coeficientes del vector de desplazamientos nodales de la malla **UT0**, mediante la función **EXTRAV**.
- **DEL** corresponde a la matriz constitutiva del material elástico lineal e isotrópico, obtenida con la función **DELEME**.
- **EPE** y **STE** son las matrices columna que contienen las componentes de deformación  $[\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]$  y de esfuerzo  $[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}]$  evaluado en un punto del interior de un elemento finito. Tales vectores se calculan así: **EPE = BEL \* UEL;** **STE = DEL \* EPE;**
- **SPR** es una matriz columna que contiene los esfuerzos principales  $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ , calculado con la función **TRPRIN**.
- **EPR** es una matriz columna que contiene las deformaciones principales  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]$ , calculado con la función **TRPRIN**.
- **SRE** es una tabla que contiene los valores de esfuerzo por punto en los nudos o en los puntos de Gauss de cada elemento. El formato de cada fila de esta tabla es el siguiente:

$$\text{SRE} = [ \langle iele \rangle \langle ieva \rangle \langle stxx \rangle \langle styy \rangle \langle stzz \rangle \langle stxy \rangle \langle stxz \rangle \langle styz \rangle \langle stp1 \rangle \langle stp2 \rangle \\ \langle stp3 \rangle \langle stvm \rangle ; ]$$

donde  $\langle iele \rangle$  y  $\langle ieva \rangle$  son los identificadores del elemento y del punto de evaluación. Asimismo,  $\langle stxx \rangle, \langle styy \rangle, \langle stzz \rangle, \langle stxy \rangle, \langle stxz \rangle$  y  $\langle styz \rangle$  son las componentes de esfuerzo  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$ . Los parámetros  $\langle stp1 \rangle, \langle stp2 \rangle, \langle stp3 \rangle$  y  $\langle stvm \rangle$  corresponden a los esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  y el esfuerzo de von Mises  $\sigma_{vm}$ .

- ERE es una tabla que contiene los valores de deformación por punto en los nudos o en los puntos de Gauss de cada elemento. El formato de cada fila de esta tabla es el siguiente:

$$\text{ERE} = [\langle iele \rangle \langle ieva \rangle \langle ep_{xx} \rangle \langle ep_{yy} \rangle \langle ep_{zz} \rangle \langle gaxy \rangle \langle gaxz \rangle \langle gayz \rangle \langle epp1 \rangle \\ \langle epp2 \rangle \langle epp3 \rangle];$$

donde  $\langle iele \rangle$  y  $\langle ieva \rangle$  son los identificadores del elemento y del punto de evaluación. Asimismo,  $\langle ep_{xx} \rangle$ ,  $\langle ep_{yy} \rangle$ ,  $\langle ep_{zz} \rangle$ ,  $\langle gaxy \rangle$ ,  $\langle gaxz \rangle$  y  $\langle gayz \rangle$  son las componentes de deformación  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$ . Los parámetros  $\langle epp1 \rangle$ ,  $\langle epp2 \rangle$  y  $\langle epp3 \rangle$  corresponden a las deformaciones principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$ .

## 9.5 Rutina principal del programa PEFICA.m

La rutina principal del programa corresponde al conjunto de instrucciones que permiten la solución de un tipo de problema de elementos finitos específico. Tales instrucciones son operaciones y llamados a funciones propias del lenguaje o proporcionadas como parte de PEFICA 2.0.

En particular, el archivo `PEFICA.m` de la carpeta `\PEFTRI`, resuelve problemas mecánicos estáticos tridimensionales. Este archivo utiliza operaciones y funciones de GNU-Octave, y las funciones contenidas en la sub-carpeta `\PEFTRI\FUNCIONES`.

A continuación se describen las instrucciones de la rutina principal del programa en bloques relacionados a tareas específicas.

### 9.5.1 Ubicación de archivos y lectura de datos de entrada

En el Listado 9.8, inicialmente se adicionan las ubicaciones de las carpetas de las funciones propias del programa y de los datos de entrada de los problemas. Esto permite el acceso directo a los archivos contenidos en dichas carpetas sin necesidad de escribir la ruta completa. En las siguientes líneas de calcula el tiempo en que comienza la ejecución de la rutina y en el cual inicia la lectura de datos. Después se leen los datos del problema ejecutando un archivo de extensión `.m` tipo

*script* o interpretando un archivo de extensión .msh generado por GMSH. Los escalares y matrices leídas son: NNUD, NELE, NNUE, NGAU, NDIM, NCAT, TIPR, ENNU, IMPR, XYZ, ELE, CAT, UCO, FUN, FDI, SUP

Al final se calcula y presenta en pantalla el tiempo transcurrido durante la lectura de datos.

```

1000 function PEFICA (ADAT,TLEC)
% -----
1002 % control de ausencia de argumentos
1003 if exist('ADAT') == 0
1004     fprintf('PEFICA. La funcion requiere <nombre archivo datos>.\n')
1005     return
1006 end
1007 if exist('TLEC') == 0
1008     TLEC='10';
1009     fprintf('PEFICA. La funcion tomara por defecto a <opciones lectura>=10.\n')
1010 end
1011 ADAD = strcat('./DATOS/',ADAT);
1012 TLEN = str2num(TLEC);

1014 % adicionar carpetas y tomar tiempo inicial
1015 addpath('./FUNCIONES');
1016 addpath('./DATOS');
1017 TINT = IMTIEM('Inicio de ejecucion del programa \n',0);

1018 % lectura de archivo de entrada de datos
1019 % -----
1020 if TLEN<10
1021     % opcion de lectura de entrada de datos de archivo .m
1022     % exportado de GiD o escrito directamente. El formato A de los
1023     % desplazamientos y las fuerzas conocidos
1024     TINI = IMTIEM('Lectura de datos de entrada de archivo .m ',0);
1025     run(ADAT);
1026     SUP = ones(1,NELE); % tabla de id del volumen asociado a cada elemento
1027     PRO=1;
1028 else
1029     % opcion de lectura de entrada de datos de archivo .msh de GMSH
1030     TINI = IMTIEM('Lectura de datos de entrada de archivo .msh de GMSH ',0);
1031     [NNUD,NELE,NNUE,NGAU,NDIM,NCAT,TIPR,ENNU,IMPR,...
1032     XYZ,ELE,CAT,UCO,FUN,FDI,SUP] = LEGMSH(ADAD);
1033     % convertir despl conoc de formato B a formato A
1034     % para este tipo de problema NDIM=NGLN el cual aun no ha sido calculado
1035     [TEM] = ORVEBA(UCO,TLEN,NDIM,0); UCO=TEM;
1036     % convertir FUN de formato B a formato A
1037     [TEM] = ORVEBA(FUN,TLEN,NDIM,1); FUN=TEM;
1038 
```

```

1040      % sub opciones del calculo de los esfuerzos y deformaciones promedio en
1041      % nudos o en el interior de los elementos con una o varias categoria
1042      PRO=TLEN-10;
1043  end %endif

1044 ELE = int64(ELE); % cambio de tipo de datos para las matrices enteras

1046 if TIPR==30
1047     PMAT = 3;      % numero de propiedades de cada material [ EYOU POIS GAMM ]
1048     PELE = 4;      % numero de propiedades de cada elemento [ DUMM TIPE NUEL PGAU ]
1049     PCAT = PMAT+PELE;    % numero de propiedades en cada categoria
1050     NCOM=6; % NCOM: numero de componentes de esfuerzo o deformacion
1051 else
1052     error('Tipo incorrecto de problema');
1053 end % endif problema tridimensional, material isotropico
1054
1055 TFIN = IMTIEM(,,TINI);

```

**Listado 9.8:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA (archivo PEFICA.m), donde se establecen las ubicaciones de los archivos y se leen los datos de entrada.

### 9.5.2 Grados de libertad de nudos y elementos

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 9.9 define las tablas de los grados de libertad asociadas a los nudos y a los elementos a partir de las tablas de desplazamientos conocidos UCO y de conectividades ELE. Aquí se crea la tabla de grados de libertad por nudo MGL, el sub-vector de desplazamientos conocidos UBB y se obtiene el numero de grados de libertad por nudo NGLN y el numero de grados de libertad conocidos NGLC. Además se construye la tabla de incidencias o grados de libertad por elemento INC.

```

1000 TINI = IMTIEM('Grados de libertad de nudos y elementos ',0);
1001 [MGL,UBB,NGLN,NGLC] = NGLUCO(UCO,NNUD);
1002 NGLT = NNUD*NGLN; % numero de grados de libertad del solido
1003 NGLD = NGLT-NGLC; % numero de grados de libertad conocidos
1004 [INC] = NGLELE(ELE,MGL);
1005 TFIN = IMTIEM(,,TINI);
1006 % indicador de parametros de la malla
1007 fprintf('Malla de %g nudos, %g elementos y %g GLs\n', NNUD,NELE,NGLT);

```

**Listado 9.9:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se definen las tablas de grados de libertad asociadas a los nudos y a los elementos.

### 9.5.3 Matriz de rigidez de los elementos y de la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 9.10 calcula la matriz de rigidez de cada elemento finito  $\mathbf{K}_{(e)}$  y la suma a la matriz de rigidez de la malla  $\mathbf{K}$  en los grado de libertad correspondientes, es decir ensambla la matriz  $\mathbf{K}_{(e)}$  en  $\mathbf{K}$ . Inicialmente se establece un ciclo por elemento finito en donde se calcula la matriz de rigidez de un elemento KEL, a partir de: (i) las características geométricas y de material CAE extraídas de la tabla de categorías CAT, y (ii) de las coordenadas de los nudos XYE extraída de las tablas XYZ. A continuación se suman los coeficientes de la matriz de rigidez del elemento KEL a la matriz de rigidez de la malla KGS, de acuerdo con los grados de libertad del elemento indicados en la matriz de incidencias INC. Después de finalizado el ciclo por elemento, se establecen las sub-matrices de rigidez de la malla  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ ,  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$  y  $\mathbf{K}_{\beta\beta}$ , cuyo tamaño está definido por los grados de libertad desconocidos y conocidos.

```

1000 TINI = IMTIEM('Matriz de rigidez del sólido ',0);
% -----
1002 KGS = zeros(NGLT,NGLT); % definición de tamaño de la matriz de rigidez sólido
1004 for IELE = 1:NELE
    % matriz de rigidez de elemento
    CAE(1:PCAT) = CAT(ELE(IELE,1),1:PCAT); % propiedades de la categoría elem IELE
    NUEL = CAE(1,PMAT+3); % número de nudos del elemento IELE
    XYE(1:NUEL,1:NDIM) = XYZ(ELE(IELE,2:NUEL+1),1:NDIM); % coordenadas nudos elem IELE
    [KEL] = KELEME(TIPR,XYE,CAE); % matriz de rigidez del elemento IELE
    % ensamblaje de KEL() del elemento IELE en KGS() del sólido
    NKEL = size(KEL,1); % tamaño de la matriz de rigidez del elemento
    for IKEL=1:NKEL
        for JKEL=1:NKEL
            if ( INC(IELE, IKEL) ~= 0 & INC(IELE, JKEL) ~= 0)
                KGS(INC(IELE, IKEL), INC(IELE, JKEL)) = ...
                KGS(INC(IELE, IKEL), INC(IELE, JKEL)) + KEL(IKEL, JKEL);
            end % endif
        end % endfor JKEL
    end % endfor IKEL
    % fin del ensamblaje
1020 end
% submatrices de rigidez del sólido
1022 KAA = KGS(1:NGLD,1:NGLD); % submatriz K_{alpha,alpha}
1023 KAB = KGS(1:NGLD,NGLD+1:NGLT); % submatriz K_{alpha,beta}
1024 KBA = KGS(NGLD+1:NGLT,1:NGLD); % submatriz K_{beta,alpha}
1025 KBB = KGS(NGLD+1:NGLT,NGLD+1:NGLT); % submatriz K_{beta,beta}

```

```
1026 clear KGS; % eliminar matriz de la memoria
    TFIN = IMTIEM(,,TINI);
```

**Listado 9.10:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se obtiene la matriz de rigidez de los elementos y de la malla.

#### 9.5.4 Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material en los elementos y en la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 9.11 calcula el vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material en cada elemento finito  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  y la respectiva suma de éste con el vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material en la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_b$  en los grados de libertad correspondientes, es decir, se ensambla el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  en  $\tilde{\mathbf{f}}_b$ . Inicialmente se determina si el peso propio del material se ha definido en la tabla CAT, mediante el escalar GAMT. A continuación se realiza un ciclo desde 1 hasta el número de elementos finitos dentro del cual se realizan las siguientes tareas: (i) se calcula el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  de acuerdo con las características del elemento y el peso propio del material correspondiente y se guarda en la matriz FEL, (ii) se ensambla el vector anterior en el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_b$  en los grados de libertad indicados en la matriz de incidencia INC y se almacena en la matriz FGC.

```
1000 TINI = IMTIEM('Vectores de fuerzas en los nudos del sólido ',0);
    % Vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio en el sólido
    % -----
1002 FGC = zeros(NGLT,1); % definición de tamaño del vector de fuerza cuerpo sólido
    GAMT = sum(CAT(:,3));
    if GAMT~=0; % control de problemas sin fuerzas de cuerpo GAMM=0
        for IELE = 1:NELE
            % vector de fuerza equivalente en el elemento
            CAE(1:PCAT) = CAT(ELE(IELE,1),1:PCAT); % propiedades de la categ elem IELE
            NUEL = CAE(1,PMAT+3); % número de nudos del elemento IELE
            XYE(1:NUEL,1:NDIM) = XYZ(ELE(IELE,2:NUEL+1),1:NDIM); % coor nud de elem IELE
            [FEL] = FELEM(XYE,CAE); % vector de fuerzas de cuerpo del elemento
            % ensamblaje de FEL() del elemento IELE en FGC() del sólido
            NFEL = size(FEL,1); % tamaño de vector del elemento
            for IFEL=1:NFEL
                if INC(IELE, IFEL) ~= 0
                    FGC(INC(IELE, IFEL), 1) = FGC(INC(IELE, IFEL), 1) + FEL(IFEL,1);
                end % endif
            end % endfor IFEL
        end % endfor IELE
    end % endif
end % endfunction
```

```

1020      % fin ensamblaje
    end % endfor
end % endif

```

**Listado 9.11:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se obtiene el vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material sobre los elementos y sobre la malla.

### 9.5.5 Vector de fuerzas equivalentes a la acción de cargas distribuidas en los elementos y en la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 9.12 calcula el vector de fuerzas equivalentes a la acción de cargas distribuidas o presiones en cada elemento finito  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  y lo ensambla en el respectivo vector de la malla  $\tilde{\mathbf{f}}_s$ . En esta parte del código se realiza un ciclo desde 1 hasta el número de cargas distribuidas NFDI definidas en la tabla FDI. Dentro de tal ciclo se realizan las siguientes tareas: (i) se calcula el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$  de acuerdo con las características del elemento y de la carga distribuida y se guarda en la matriz FEL, y (ii) se ensambla el vector anterior en el vector  $\tilde{\mathbf{f}}_s$  en los grados de libertad indicados en la matriz de incidencia INC, almacenando sus coeficientes en la matriz FGS.

```

1000 % Vector de fuerzas de superficie en el sólido
% -----
1002 NFDI = size(FDI,1); % numero de cargas distribuidas en elementos
FGS = zeros(NGLT,1); % definición de tamaño del vec fuerz superf del sólido
1004 for IFDI = 1:NFDI % ciclo por carga distribuida
if FDI(IFDI,1) ~= 0; % control de problemas sin fuerzas de superficie
1006 IELE = FDI(IFDI,1); % id del elemento cargado
TIPE = CAT(ELE(IELE,1),5); % tipo de elemento cargado
[NUEL,NUCA,DUMM] = PBNUEL(TIPE); % nudos del elemento y de la cara
1008 XYE(1:NUEL,1:NDIM) = XYZ(ELE(IELE,2:NUEL+1),1:NDIM); % coor nud de elem IELE
XYC(1:NUCA,1:NDIM) = XYZ(FDI(IFDI,2:NUCA+1),1:NDIM); % coor nud de cara IFDI
1010 ELA = ELE(IELE,2:NUEL+1); % id nudos del elemento cargado
FDE = FDI(IFDI,:); % id de los nudos de la cara cargada, valor carga
[FEL] = FELEMS(TIPE,XYE,XYC,ELA,FDE); % vec fuerza de superf del elemento
1012 % ensamblaje de FEL() del elemento IELE en FGS() del sólido
NFEL = size(FEL,1); % tamaño de vector del elemento
1014 for IFEL=1:NFEL
if INC(IELE, IFEL) ~= 0
1016     FGS(INC(IELE, IFEL), 1) = FGS(INC(IELE, IFEL), 1) + FEL(IFEL,1);
1018     end % endif
end % endfor IFEL
1020

```

```

1022    % fin ensamblaje
1023    end % endif
1024    end % endfor

```

**Listado 9.12:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se obtiene el vector de fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas de los elementos y de la malla.

### 9.5.6 Vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla y vector de fuerzas totales

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 9.13 tiene las tareas indicadas a continuación. Primero calcular el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla  $\mathbf{f}^{(n)}$ , mediante el proceso de organización por grados de libertad, definido por las funciones ORTAEX y ORTAVE, cuyo resultado se guarda en la matriz FGN. Después se calculan las fuerzas totales de la malla, como  $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}_b + \tilde{\mathbf{f}}_s + \mathbf{f}^{(n)}$ . Tal resultado se almacena en la matriz FGT. Finalmente se extrae el sub-vector  $\mathbf{f}_\alpha$  del vector de fuerzas totales  $\mathbf{f}$ , asociado a los grados de libertad desconocidos, el cual se guarda en la matriz FAA.

```

1000    % Vector de fuerzas aplicadas direct en los nudos del solido
1001    %
1002    [TEM] = ORTAEX(FUN,NNUD); % tabla de fuerzas puntuales extendida a todos nudos
1003    [FGN] = ORTAVE(TEM,MGL); % vector de fuerzas en los nudos del solido
1004    % solo es valido del GL=1 hasta GL=NGLD, los terminos donde GL>NGLD son las
1005    % reacciones en los apoyos que aun son desconocidas
1006
1007    % Vector de fuerzas totales equival en los nudos del solido
1008    %
1009    % fuer.totales = fuer.eq.cuerpo + fuer.eq.superficie + fuer.aplic.dir.nudos
1010    FGT = FGC + FGS + FGN;
1011    FAA = FGT(1:NGLD,1); % subvec.fuer.totales conocidas alpha, entre 1<=GL<=NGLD

```

**Listado 9.13:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se obtiene el vector de fuerzas equivalentes a las cargas distribuidas de los elementos y de la malla.

### 9.5.7 Vector y tabla de desplazamientos en los nudos de la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 9.14 calcula el vector de desplazamientos en los nudos de la malla  $\mathbf{a}$  y la respectiva tabla organizada por nudos UXY. Primero calcula el sub-vector de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{u}_\alpha$  almacenados en la matriz UAA, resolviendo un sistema de ecuaciones simultáneas de la forma  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta$ . Después se construye el vector de desplazamientos nodales  $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_\alpha^T \quad \mathbf{a}_\beta^T]^T$ , almacenado en la matriz UTO, a partir del resultado anterior  $\mathbf{a}_\alpha$  y del sub-vector de desplazamientos conocidos  $\mathbf{a}_\beta$ , almacenado en la matriz UBB. Finalmente se construye una tabla de resultados UXY que contiene las componentes de desplazamiento ordenados por nudo.

```

1000 TINI = IMTIEM('Desplazamientos y reacciones en los nudos del sólido ',0);
1001 % Desplazamientos en los nudos del sólido
1002 %
1003 % -----
1004 % solución de un sistema de ecuaciones simultáneas para obtener el
1005 % subvector de desplazamientos nodales desconocidos u_{alpha}
1006 UAA = (KAA) \ (FAA - KAB * UBB);
1007 UTO = [ UAA ; UBB ]; % vector de desplaz. nodales completo
1008 [UXY] = ORVETA(UTO,MGL); % tabla de desplaz. nodales en formato UX,UY

```

**Listado 9.14:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula el vector y la tabla de desplazamientos en los nudos de la malla.

### 9.5.8 Vector y tabla de fuerzas totales en los nudos de la malla

La parte de la rutina principal mostrada en el Listado 9.15 calcula el sub-vector de fuerzas totales en los nudos de la malla  $\mathbf{f}_\beta$  y la respectiva tabla ordenada por nudos FXY.

Inicialmente se calcula el sub-vector de fuerzas nodales desconocidas  $\mathbf{f}_\beta$  mediante la operación matricial  $\mathbf{f}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{a}_\beta$ , y se almacena en la matriz FBB. Después se construye el vector de fuerzas nodales  $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_\alpha^T \quad \mathbf{f}_\beta^T]^T$  y se almacena en la matriz FTO. Finalmente, se genera una tabla de resultados FXY, que contiene las componentes de fuerza ordenadas por nudo.

```

1000 % Fuerzas totales en los nudos del sólido
1001 %
1002 FBB = KBA * UAA + KBB * UBB; % subvector de fuerzas totales desconoc

```

```

1004 FTO = [ FAA ; FBB ]; % vector de fuerzas totales
      [FXY] = ORVETA(FTO,MGL); % tabla de fuerzas totales nodales en formato FX,FY

```

**Listado 9.15:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula el vector y la tabla de reacciones en los nudos de la malla.

### 9.5.9 Vector y tabla de fuerzas aplicadas directamente en nudos y reacciones de la malla

La parte opcional de la rutina principal mostrada en el Listado 9.16, permite calcular el vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos de la malla  $\mathbf{f}^{(n)}$  y la respectiva tabla ordenada por nudos FNX. Las componentes de  $\mathbf{f}^{(n)}$  asociadas a los desplazamientos conocidos corresponden a las reacciones en los nudos de la malla  $\mathbf{f}_\beta^{(n)}$ .

Éste procedimiento se realiza cuando se escoge el parámetro  $\langle ople \rangle = 12$ , en la ejecución del programa indicada en la Subsección 6.3.1.

Inicialmente se suman las fuerzas equivalentes a la acción del peso propio y de las presiones de la forma  $\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{f}}_b + \tilde{\mathbf{f}}_s$  y se almacena su resultado en la matriz FGE. De tal vector se extrae el sub-vector  $\tilde{\mathbf{f}}_\beta$ , el cual se guarda en la matriz FGB. Después se calcula el sub-vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos mediante la resta  $\tilde{\mathbf{f}}_\beta^{(n)} = \mathbf{f}_\beta - \tilde{\mathbf{f}}_\beta$  y se almacena en la matriz FNB. A continuación se extrae el sub-vector de fuerzas aplicadas directamente en los nudos  $\tilde{\mathbf{f}}_\alpha^{(n)}$  y se reconstruye el vector  $\tilde{\mathbf{f}}^{(n)}$ , el cual se almacena en la matriz FNT. Finalmente se genera una tabla de resultados FNX que contiene las componentes de las fuerza aplicadas directamente y ordenadas por nudo, excluyendo las fuerzas equivalentes. Las siguientes líneas de código en el Listado 8.16 permiten la presentación de los resultados diferentes de cero en la ventana de comandos.

```

1000 % Reacciones en los nudos del sólido
1001 if TLEN==12
1002   FGE = FGC + FGS; % vector de fuerzas equival. de cuerpo y superficie
1003   FGB = FGE(NGLD+1:NGLT,1); % subvector beta de fuer.equival.de cuerpo y superf
1004   FNB = FBB - FGB; % subvector de fuerzas desconocidas en los nudos = reacciones
1005   FNA = FGN(1:NGLD,1); % subvec.fuer.totales conocidas alpha, entre 1<=GL<=NGLD
1006   FNT = [ FNA ; FNB ]; % vector de fuerzas en los nudos
1007   [FNX] = ORVETA(FNT,MGL); % tabla de fuerzas nodales (reacciones) en formato FX,FY
1008   IMTBXY(FNX,'\\nFuerzas directamente en los nudos (reacciones)\\n',...
           ' nudo          fx          fy          fz\\n');

```

```
1010 end % endif
TFIN = IMTIEM( , , TINI);
```

**Listado 9.16:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula el vector y la tabla de reacciones en los nudos de la malla.

### 9.5.10 Deformaciones y esfuerzos en el interior de cada elemento finito

Los valores de las componentes de deformación y de esfuerzo en el interior de cada elemento se calculan en la parte del código ilustrada en el Listado 9.17. Allí, se establece un ciclo por elemento en el cual se realizan las siguientes tareas:

- Se extrae el vector de desplazamientos nodales del elemento  $\mathbf{a}_{(e)}$ , almacenado en la matriz UEL, a partir del vector de desplazamientos nodales de la malla  $\mathbf{a}$  y la tabla de incidencias INC.
- Se extraen las coordenadas de los nudos del elemento XYE, a partir de la tabla de coordenadas de todos los nudos de la malla XYZ.
- Se extraen las características de la categoría específica CAE, a partir de la tabla de categorías CAT.
- Se obtiene la matriz constitutiva del material DEL, utilizando la función DELEM.
- Se define si se evalúan los resultados en los puntos de Gauss o en los nudos con la variable ENNU.
- Se establece un ciclo por puntos en el elemento de contador es IEVA, en el cual se realizan las siguientes tareas:
  - Se define la posición en coordenadas naturales de un punto en el elemento finito y se almacena en XYP.
  - Se obtiene la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma del elemento en ese punto BEL, utilizando la función BELEM.
  - Se calcula el vector de deformación del elemento en ese punto mediante el producto EPE=BEL\*UEL.

- Se calcula el vector de esfuerzo del elemento en ese punto mediante el producto  $\text{STE}=\text{DEL}*\text{EPE}$ .
- Se obtienen los esfuerzos principales  $\text{SPR}$  y el esfuerzo de von Mises  $\text{SVM}$ , utilizando la función  $\text{TRPRIN}$ .
- Se obtienen las deformaciones principales  $\text{EPR}$  utilizando la función  $\text{TRPRIN}$ .
- Se almacenan los resultados de esfuerzo y de deformación en las tablas  $\text{SRE}$  y  $\text{ERE}$ .

```

1000 TINI = IMTIEM('Deformaciones y esfuerzos en cada elemento ',0);
% -----
1002 if ENNU==0; NEVA=NGAU; end; % evaluada en los puntos de Gauss
if ENNU==1; NEVA=NNUE; end; % evaluada en los nudos
1004 if ENNU==2; NEVA=1; end; % evaluada en el centro del elemento

1006 SRE = zeros(NELE*NEVA,NCOM+6); % crear tabla de esfuerzos por elemento en Gmsh
ERE = zeros(NELE*NEVA,NCOM+5); % crear tabla de deformaci por elemento en Gmsh
IRES = 0; % indice de la tabla de esfuerzos y deformaciones para Gmsh

1010 for IELE = 1:NELE % ciclo por elemento
    NUEL = CAT(ELE(IELE,1),6); % numero de nudos del elemento
    NGLE = NUEL*NGLN; % numero de GL por elemento
    UEL = EXTRAV(UTO,INC,IELE,NGLE); % vector de despl nodales del elemento
1014
    TIPE = CAT(ELE(IELE,1),5); % codigo tipo del elemento
    XYE(1:NUEL,1:NDIM) = XYZ(ELE(IELE,2:NUEL+1),1:NDIM); % coor nud de elem IELE
    CAE = CAT(ELE(IELE,1),:); % propiedades de la categ eleme IELE
    [DEL] = DELEME(CAE,TIPR); % matriz constitutiva del material
    [TEM] = PBPGAU(NEVA, NDIM, ENNU); % ubicacion y ponder de puntos de Gauss
    POIS = CAE(2); % relacion de Poisson

1022 for IEVA = 1:NEVA % ciclo por punto de Gauss o por nudo
    XYP = TEM(IEVA,1:2); % ubicacion de puntos de Gauss o por nudos
    % fprintf('elemento %g en el punto %g: \n',IELE,IEVA);
    BEL = BELEME(XYE,XYP, TIPE); % matriz B en el punto de Gauss o nudo IGAU
    % vector de deformaciones del elem. IELE en el punto IGAU
    % EPE = [ EXX, EYY, EZZ, GXY, GXZ, GYZ ]
    EPE = BEL * UEL;
    % vector de esfuerzos del elem. IELE en el punto IGAU
    % STE = [ SXX, SYY, SZZ, SXY, SXZ, SYZ ]
    STE = DEL * EPE;

1030
    % esfuerzos y deformac principales y esfuerzo de von Mises para 3D

```

```

1034      [SPR,STVM] = TRPRIN(STE,0); % vector esfuerzo principal y esf VM
1035      [EPR,DUMY] = TRPRIN(EPE,1); % vector de deformac principales
1036
1037      % preparar tabla de esfuerzos y de deformaciones por elemento para GiD
1038      % con elemento de valor constante en su interior
1039      IRES = IRES+1; % ubicacion del resultado en la tabla SRE() o ERE()
1040
1041      SRE(IRES,1) = IELE; % tabla de esfuerzos, numero del elemento IELE
1042      ERE(IRES,1) = IELE; % tabla de deformaci, numero del elemento IELE
1043      if ENNU==0
1044          % evaluacion en puntos de Gauss
1045          SRE(IRES,2) = IEVA; % tabla de esfuerzos, numero del PG
1046          ERE(IRES,2) = IEVA; % tabla de deformaci, numero del PG
1047      elseif ENNU==1
1048          % evaluacion en los extremos de cada elemento
1049          SRE(IRES,2) = ELE(IELE,IEVA+1); % tabla de esfuerzo, numero del nudo
1050          ERE(IRES,2) = ELE(IELE,IEVA+1); % tabla de deformac, numero del nudo
1051      elseif ENNU==2
1052          % evaluacion en el centro
1053          SRE(IRES,2) = 0; % tabla de esfuerzo, 0 indica el centro
1054          ERE(IRES,2) = 0; % tabla de deformac, 0 indica el centro
1055      end % endif
1056
1057      for ICOM = 1:NCOM % componente de esfuerzo leida
1058          SRE(IRES, ICOM+2) = STE(ICOM, 1); % tab esfue SXX, SYY, SZZ, SXZ,
1059          SYZ
1060          ERE(IRES, ICOM+2) = EPE(ICOM, 1); % tab defor EXX, EYY, EZZ, GXY, GXZ,
1061          GYZ
1062      end % endfor ICOM
1063      for JCOM = 1:3 % esfuerzos o deformaciones principales
1064          SRE(IRES, JCOM+NCOM+2) = SPR(JCOM, 1); % tabla esf.princ SP1,SP2,SP3
1065          ERE(IRES, JCOM+NCOM+2) = EPR(JCOM, 1); % tabla defor.princ EP1,EP2,EP3
1066      end % endfor JCOM
1067      SRE(IRES, NCOM+6) = STVM; % esfuerzo de von Mises
1068
1069      end % endfor IEVA
1070  end % endfor IELE
1071  TFIN = IMTIEM(' ',TINI);

```

**Listado 9.17:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se calcula las deformaciones y los esfuerzos en cada elemento.

### 9.5.11 Presentación de resultados

El siguiente listado indica la parte del código del programa PEFICA 2.0 que presenta los resultados del análisis en la ventana de comandos, para el programa GMSH.

---

```

1000 % Presentacion de resultados
1001 %
1002 if (IMPR==5)
1003   TINI = IMTIEM('Presentacion de resultados en GMSH (.pos y .pos.opt) ',0);
1004 %
1005 ADAD = strcat('./DATOS/',ADAT);
1006 %
1007 % imprimir GMSH .pos y .pos.opt
1008 IMGMESH(ADAD,NNUD,NELE,NNUE,NGAU,NCAT,XYZ,ELE,SUP,UXY,FXY,SRE,ERE,PRO);
1009 TFIN = IMTIEM(' ',TINI); % tiempo de ejecucion
1010 end % endif IMPR
1011 %
1012 % mostrar tiempo final
1013 TFIN = IMTIEM('Tiempo total de ejecucion del programa ',TINT);

```

---

**Listado 9.18:** Parte de la Rutina principal del programa PEFICA, donde se presentan los resultados.

## 9.6 Formatos de las tablas de desplazamientos conocidos y fuerzas puntuales

Los desplazamientos conocidos y las fuerzas puntuales se escriben en dos formatos. El Formato A fue presentado en la Subsección 9.2.5 para el desplazamiento y en la Subsección 9.2.6 para la fuerza. Este formato se obtiene cuando los datos de entrada se escriben directamente un archivo **.m**.

En el Formato A, la primera columna de la matriz **UC0** contiene el identificador del nudo  $\langle inud \rangle$ , la segunda columna indica con  $\langle dcux \rangle=1$  si el desplazamiento en dirección  $x$  es conocido y con  $\langle dcux \rangle=0$  si es desconocido, la tercera columna indica con  $\langle dcuy \rangle=1$  si el desplazamiento en dirección  $y$  es conocido y con  $\langle dcuy \rangle=0$  si es desconocido, la cuarta columna indica con  $\langle dcuz \rangle=1$  si el desplazamiento en dirección  $z$  es conocido y con  $\langle dcuz \rangle=0$  si es desconocido, y la quinta, sexta y séptima columna,  $\langle vaux \rangle$ ,  $\langle vauy \rangle$  y  $\langle vauz \rangle$ , almacenan los valores de los desplazamientos en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , en el caso que sean conocidos.

En cambio, el Formato B se genera a partir del preproceso realizado con el programa GMSH. En este formato cada fila de la matriz de desplazamientos conocidos UCO tiene la siguiente sintaxis:

$$\text{UCO} = [ \langle \text{inud} \rangle \langle \text{dcid} \rangle \langle \text{dcva} \rangle ;$$

donde  $\langle \text{inud} \rangle$  es el número del nudo,  $\langle \text{dcva} \rangle$  es el valor del desplazamiento conocido y  $\langle \text{dcid} \rangle$  corresponde al identificador de la componente de desplazamiento.  $\langle \text{dcid} \rangle=1$  indica la componente de desplazamiento en dirección  $x$ , mientras que  $\langle \text{dcid} \rangle=2$  determina la componente en dirección  $y$ , y  $\langle \text{dcid} \rangle=3$  indica la componente en dirección  $z$ .

El Formato B de cada fila de la tabla de fuerzas aplicadas en los nudos FUN tiene la siguiente sintaxis:

$$\text{FUN} = [ \langle \text{inud} \rangle \langle \text{dcid} \rangle \langle \text{dcva} \rangle ;$$

donde  $\langle \text{inud} \rangle$  es el número del nudo,  $\langle \text{dcva} \rangle$  es el valor de la fuerza puntual y  $\langle \text{dcid} \rangle$  corresponde al identificador de la componente de fuerza.  $\langle \text{dcid} \rangle=1$  indica la componente de la fuerza en dirección  $x$ , mientras que  $\langle \text{dcid} \rangle=2$  determina la componente en dirección  $y$ , y  $\langle \text{dcid} \rangle=3$  indica la componente en dirección  $z$ .

## 9.7 Funciones propias del programa

El programa PEFiCA 2.0 incluye un conjunto de funciones desarrolladas para realizar tareas específicas de cálculo y organización en el marco del método de los elementos finitos. Cada función está escrita en un archivo de extensión .m, con la sintaxis del lenguaje GNU–Octave. El conjunto de archivos está incluido en la sub-carpeta \FUNCIONES. A continuación se describen las funciones propias del programa.

### 9.7.1 Función de lectura de datos del programa GMSH: LEGMSH

La función LEGMSH lee los datos de entrada de un problema a partir de un archivo ADAD con extensión `.msh` generado por el programa GMSH. La sintaxis de dicha función es de la forma:

```
[NNUD,NELE,NNUE,NGAU,NDIM,NCAT,TIPR,ENNU,IMPR,...  
XYZ,ELE,CAT,UC0,FUN,FDI,SUP] = LEGMSH(ADAD);
```

Esta instrucción genera una tabla de desplazamientos conocidos `UC0` y una tabla de fuerzas puntuales `FUN` en Formato B (Sección 9.6).

### 9.7.2 Función de la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma: BELEME

La función BELEME calcula la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma  $\mathbf{B}_{(e)}$ , la cual se almacena en la matriz de GNU–Octave de nombre  $\langle bel \rangle$ .

Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: la matriz que contiene las coordenadas de los nudos de un elemento  $\langle xye \rangle$ , la coordenada del punto  $\langle xip \rangle$  donde se evalúa la función de forma dentro del elemento en sistema coordenado natural  $0 < \xi < 1$  y  $0 < \eta < 1$ ,  $0 < \zeta < 1$  y el identificador del tipo de elemento finito  $\langle tipe \rangle$ . La instrucción que llama a esta función tiene el siguiente formato:

```
[\langle bel \rangle] = BELEME(\langle xye \rangle, \langle xip \rangle, \langle tipe \rangle);
```

Para el elemento tetraédrico lineal mostrado en la Figura 4.4 se tienen las particularidades indicadas a continuación. El identificador del tipo de elemento  $\langle tipe \rangle$  es igual a 301. El parámetro  $\langle xip \rangle$  no es necesario para obtener la matriz  $\mathbf{B}_{(e)}$ , sin embargo se requiere una variable ficticia. El parámetro  $\langle xye \rangle$  es una tabla de 4 filas y 3 columnas que contiene en cada fila las coordenadas globales  $(x_i, y_i, z_i)$  en el nudo  $i$  del elemento finito, es decir:

$$\langle xye \rangle = [ x_1 \ y_1 \ z_1; x_2 \ y_2 \ z_2; x_3 \ y_3 \ z_3; x_4 \ y_4 \ z_4];$$

La Ecuación 4.23 indica los coeficientes de la matriz  $\mathbf{B}_{(e)}$  que se construye con ésta instrucción.

### 9.7.3 Función de la matriz de rigidez: KELEME

La función KELEME calcula la matriz de rigidez del elemento finto  $\mathbf{K}_{(e)}$ , la cual se almacena en la matriz de GNU–Octave de nombre  $\langle kel \rangle$ .

Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: un escalar que indica el tipo de problema  $\langle tipr \rangle$ , una matriz que contiene las coordenadas de los nudos del elemento  $\langle xye \rangle$ , y una matriz fila que contiene las propiedades de la categoría de un elemento  $\langle cae \rangle$ . La instrucción que llama a esta función tiene el siguiente formato:

$$[\langle kel \rangle] = \text{KELEME}(\langle tipr \rangle \langle xye \rangle, \langle cae \rangle);$$

Para el elemento tetraédrico lineal los coeficientes de la matriz  $\mathbf{K}_{(e)}$  calculados por esta instrucción se indican en la Ecuación 4.33 o Tabla 4.2.

### 9.7.4 Función de la matriz constitutiva del material asociado a un elemento: DELEME

La función DELEME calcula la matriz constitutiva del material asociado al elemento  $\mathbf{D}_{(e)}$ , la cual se almacena en la matriz de GNU–Octave de nombre  $\langle del \rangle$ .

Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: un escalar que indica el tipo de problema  $\langle tipr \rangle$  y una matriz fila que contiene las propiedades de la categoría de un elemento  $\langle cae \rangle$ . La instrucción que llama a esta función tiene el siguiente formato:

$$[\langle del \rangle] = \text{DELEME}(\langle cae \rangle \langle tipr \rangle);$$

Para un material elástico lineal e isotrópico, los coeficientes de la matriz  $\mathbf{D}_{(e)}$  calculados por esta instrucción se indican en la Ecuación 4.7.

### 9.7.5 Función del vector de fuerzas equivalentes a la acción una presión en un elemento: FELEMS

La función FELEMS calcula el vector de fuerzas equivalentes a la acción de una carga distribuida uniforme o presión sobre una cara del elemento finito  $\tilde{\mathbf{f}}_s^{(e)}$ , el cual se almacena en la matriz columna de GNU–Octave de nombre  $\langle fel \rangle$ .

Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: identificador del tipo de elemento  $\langle tipe \rangle$ , coordenadas de los nudos del elemento  $\langle xye \rangle$ , coordenadas de los nudos de la cara cargada  $\langle xyc \rangle$ , identificador de los nudos del elemento  $\langle ela \rangle$  y las características de la carga distribuida extraídas de la tabla FDI llamada  $\langle fde \rangle$ . Este último tiene el siguiente formato:

$$\langle fde \rangle = [\langle ie \rangle \langle nud1 \rangle \langle nudj \rangle \langle nudk \rangle \langle pre1 \rangle \langle pre2 \rangle \langle pre3 \rangle \langle gloc \rangle]$$

donde,  $\langle ie \rangle$  es el identificador del elemento, y  $\langle nud1 \rangle$ ,  $\langle nudj \rangle$  y  $\langle nudk \rangle$ , corresponden a los identificadores de los nudos de la cara cargada.

Para el elemento tetraédrico lineal mostrado en la Figura 4.4, el parámetro  $\langle xyc \rangle$  contiene las coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  del nudo  $i$ ,  $(x_j, y_j, z_j)$  del nudo  $j$ , y  $(x_k, y_k, z_k)$  del nudo  $k$ , que conforman la cara cargada, con el siguiente formato:

$$\langle xyc \rangle = [ x_i \; y_i \; z_i; \; x_j \; y_j \; z_j; \; x_k \; y_k \; z_k];$$

En cambio, el parámetro  $\langle ela \rangle$  contiene una fila con los identificadores de los nudos que conforman el elemento finito  $\langle nud1 \rangle$ ,  $\langle nud2 \rangle$ ,  $\langle nud3 \rangle$  y  $\langle nud4 \rangle$ , tomado de la tabla de conectividades de la malla, así:

$$\langle ela \rangle = [\langle nud1 \rangle \langle nud2 \rangle \langle nud3 \rangle \langle nud4 \rangle]$$

Esta función se invoca escribiendo una instrucción en el programa que tenga la siguiente sintaxis:

$$[\langle fel \rangle] = \text{FELEMS}(\langle tipe \rangle, \langle xye \rangle, \langle xyc \rangle, \langle ela \rangle, \langle fde \rangle);$$

Los tipos de presión sobre la cara  $c$  de un elemento tetraédrico lineal  $e$ , que se pueden aplicar son los siguientes:

- Si  $\langle gloc \rangle$  es igual a 0, se aplican componentes de presión uniforme en sistema coordenado global  $p_{cx}^{(e)}$ ,  $p_{cy}^{(e)}$  y  $p_{cz}^{(e)}$ , correspondientes a los parámetros  $\langle pre1 \rangle$ ,  $\langle pre2 \rangle$  y  $\langle pre3 \rangle$  respectivamente. El vector de fuerzas equivalentes generado se explica en la Subsección 4.8.2.
- Si  $\langle gloc \rangle$  es igual a 1, se aplica presión uniforme normal entrando a la cara  $p_{cn}^{(e)}$ , correspondiente al parámetro  $\langle pre2 \rangle$ . Los parámetros  $\langle pre1 \rangle$  y  $\langle pre3 \rangle$  no se utilizan en este caso y pueden fijarse con valor 0. El vector de fuerzas equivalentes generado se explica en la Subsección 4.8.3.
- Si  $\langle gloc \rangle$  es igual a 2, se aplica presión hidrostática en función del peso específico del agua  $\gamma_w$  y su altura  $h_w$  con respecto a  $y$ , correspondientes a los parámetros  $\langle pre1 \rangle$  y  $\langle pre2 \rangle$ , respectivamente. El parámetro  $\langle pre3 \rangle$  no se utilizan en este caso y pueden fijarse con valor 0. El vector de fuerzas equivalentes generado se explica en la Subsección 4.8.4.

#### 9.7.6 Función del vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio de un elemento: FELEM

La función FELEM calcula el vector de fuerzas equivalentes a la acción del peso propio del material sobre el elemento  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$ , el cual se almacena en la matriz columna de GNU-Octave de nombre  $\langle fel \rangle$ .

Los parámetros de entrada de esta función son los siguientes: una matriz que contiene las coordenadas de los nudos del elemento  $\langle xye \rangle$  y una matriz fila que contiene las propiedades de la categoría de un elemento  $\langle cae \rangle$ . Esta función se invoca mediante una instrucción con el siguiente formato:

$$[\langle fel \rangle] = \text{FELEM}(\langle xye \rangle, \langle cae \rangle);$$

Para el elemento tetraédrico lineal los coeficientes del vector  $\tilde{\mathbf{f}}_{b\gamma}^{(e)}$  calculados por esta instrucción se indican en la Ecuación 4.43.

### 9.7.7 Funciones propias de construcción de la tabla de grados de libertad por nudo y por elemento: NGLUCO y NGLELE

Las tablas que contienen la numeración de grados de libertad asociados a los nudos y a los elementos de la malla se designa mediante las funciones **NGLUCO** y **NGLELE**, respectivamente.

La tabla de grados de libertad asociados a los nudos almacenada en la matriz de GNU-Octave **MGL** contiene en cada fila el identificador de los grados de libertad de cada nudo de la malla. En consecuencia, su número de filas y de columnas corresponde a la cantidad de nudos de la malla **NNUD** y a la cantidad de grados de libertad por nudo **NGLN**. El número de la fila coincide con el identificador del nudo.

La primera tarea de la función **NGLUCO** es numerar de forma especial los grados de libertad asociados a cada nudo de la malla. Tal numeración asegura que los grados de libertad con desplazamiento desconocido estén numerados de manera consecutiva ascendente desde 1, y que los grados de libertad con desplazamiento conocido estén numerados de forma consecutiva desde el número de grados de libertad desconocidos más uno **NGLD+1** hasta el número de grados de libertad total **NGLT**. La segunda tarea de **NGLUCO** consiste en crear el sub-vector de desplazamientos conocidos de la malla. La instrucción que invoca a esta función puede escribirse de la forma:

```
[MGL, UBB, NGLN, NGLC] = NGLUCO(UCO, NNUD);
```

En esta expresión se consideran como parámetros de entrada: la tabla de desplazamientos conocidos almacenada en la matriz **UCO** y el número de nudos corresponde a la variable escalar **NNUD**. Asimismo, los parámetros de salida serán: la tabla de grados de libertad por nudo almacenada en la matriz **MGL**, el sub-vector de desplazamientos nodales conocidos almacenada en la matriz columna **UBB**, el número de grados de libertad por nudo correspondiente a la variable escalar **NGLN** y el número de grados de libertad conocidos de la malla guardada en la variable escalar **NGLC**.

La función **NGLELE** tiene como objetivo construir la tabla de incidencias o tabla de grados de libertad por elemento, la cual se almacena en la matriz de nombre **INC**. Esta tabla contiene en cada fila el identificador de los grados de libertad de cada elemento de la malla. En consecuencia, su número de filas y de columnas corresponde a la

cantidad de elementos de la malla NELE y a la cantidad de grados de libertad por nudo multiplicado por el número de nudos de un elemento  $\text{NGLN} = \text{NGLN} * \text{NNUE}$ . El número de la fila coincide con el identificador del nudo. El orden de los coeficientes de una fila de la matriz INC corresponde al mismo orden establecido a los grados de libertad del elemento finito en sus matrices características, como por ejemplo en su matriz de rigidez. La instrucción que ejecuta a esta función se puede escribir así:

**[INC] = NGLELE(ELE,MGL);**

siendo ELE y MGL los nombres de las matrices que contienen la tabla de conectividades de los elementos y la tabla de grados de libertad por nudo, respectivamente como parámetros de entrada.

#### **9.7.8 Funciones propias de organización de vectores y tablas de valores nodales: ORTAEX, ORTAVE y ORVETA**

Las funciones propias del programa PEFiCA 2.0 dedicadas a la organización de vectores y tablas de valores nodales, como fuerzas y desplazamientos, se describen a continuación:

- Dada una tabla que contiene entidades asociadas a algunos nudos específicos  $\langle tal \rangle$ , la función ORTAEX construye una tabla extendida y ordenada de tales entidades  $\langle tex \rangle$  para todos los nudos de la malla  $\langle nnud \rangle$ , considerando un valor de cero en las entidades no incluidas en  $\langle tal \rangle$ . El formato de la instrucción que ejecuta esta función es:

**[ $\langle tex \rangle$ ] = ORTAEX( $\langle tal \rangle$ , $\langle nnud \rangle$ );**

Es habitual utilizar esta función para extender la tabla de fuerzas puntuales aplicadas en los nudos FUN a una tabla que incluya las fuerzas puntuales aplicadas en todos los nudos de la malla FEX, así:

**[FEX] = ORTAEX(FUN,NNUD);**

- La función ORTAVE crea un vector de fuerzas (o desplazamientos) nodales de la malla ordenado por sus grados de libertad, a partir de la tabla de fuerzas (o desplazamientos) ordenada por la numeración de los nudos en cada fila. Como ejemplo, se considera conocida una tabla de fuerzas (o desplazamientos) donde cada fila contiene los valores de las componentes de fuerza (o desplazamiento) de cada nudo, denominada TAB. Asimismo, la tabla de grados de libertad por nudo también es conocida y almacenada en la matriz MGL. La función ORTAVE construye una matriz columna o vector VEC, que contiene el valor de fuerza (o desplazamiento) en el grado de libertad correspondiente al número de la fila. La instrucción de este procedimiento es la siguiente:

```
[VEC] = ORTAVE(TAB,MGL);
```

- La función ORVETA crea una tabla de fuerzas (o desplazamientos) ordenada por la numeración de los nudos en cada fila, a partir del vector de fuerzas (o desplazamientos) nodales de la malla ordenado por sus grados de libertad. Considerando que se conoce la matriz columna o vector VEC, que contiene el valor de fuerza (o desplazamiento) en el grado de libertad correspondiente al número de la fila, y que también se conoce la tabla de grados de libertad por nudo MGL, la función ORVETA construye una tabla de fuerzas (o desplazamientos) TAB, donde cada fila contiene los valores de las componentes de fuerza (o desplazamiento) de cada nudo. La instrucción de este procedimiento es la siguiente:

```
[TAB] = ORVETA(VEC,MGL);
```

### 9.7.9 Función propia de extracción de vectores elementales: EXTRAV

La función EXTRAV construye el vector de desplazamientos nodales asociado a un elemento específico, a partir del vector tal entidad asociado a todos los grados de libertad de la malla. El formato de la instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

```
VEL = EXTRAV(VGL, INC, IELE, NGLE);
```

donde los parámetros de entrada son: el vector de desplazamientos nodales de la malla almacenado en la matriz columna VGL, la tabla de incidencias INC, el identificador del elemento finito IELE, y el número de grados de libertad del elemento NGLE. Si se introduce NGLE=0, su valor se modifica al número de columnas de la matriz INC. El parámetro de salida de la función es el vector de desplazamientos nodales de un elemento finito, el cual se almacena en la matriz columna VEL.

### 9.7.10 Función propia de presentación de resultados: IMGMSH

La función IMGMSH tiene como objetivo presentar resultados obtenidos del análisis por elementos finitos gráficamente en el programa GMSH. Tales resultados son: desplazamientos, fuerzas, deformaciones y esfuerzos. Esta función crea los archivos .pos y .pos.opt. La instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

```
IMGMSH(ADAD, NNUD, NELE, NNUE, NGAU, NCAT, XYZ, ELE, SUP, UXY, FXY, SRE, ERE, PRO);
```

### 9.7.11 Otras funciones propias

La función IMTIEM imprime en la ventana de comando un texto que indica el comienzo de un grupo de instrucciones y calcula el tiempo al final. La instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

$$\langle tfin \rangle = \text{IMTIEM}(\langle text \rangle, \langle tini \rangle);$$

donde  $\langle text \rangle$  corresponde al texto que se desea imprimir en la ventana de comando,  $\langle tini \rangle$  es la variable que establece el tiempo inicial del grupo de instrucciones y  $\langle tfin \rangle$

es el tiempo al comienzo del grupo de instrucciones si  $\langle tini \rangle = 0$  o corresponde al tiempo al final del grupo de instrucciones si  $\langle tini \rangle$  es diferente de 0.

La función **IMTBXY** imprime en la ventana de comando una tabla de resultados ordenada por componentes en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , excluyendo aquellas iguales a cero. La instrucción que ejecuta esta función es de la forma:

$$\text{IMTBXY}(\langle mxy \rangle, \langle tit1 \rangle, \langle tit2 \rangle);$$

donde  $\langle mxy \rangle$  es la matriz de resultados, mientras que  $\langle tit1 \rangle$  y  $\langle tit2 \rangle$  son las cadenas de caracteres del título de la tabla y del rótulo de sus columnas.

La función **ORSOCA** obtiene una tabla de promedio de cada componente sobre los nudos a partir de la misma cantidad obtenida en los extremos de los elementos cuando existen varias categorías. El formato de la instrucción que ejecuta esta función es el siguiente:

$$[\text{NUD}, \text{NUCA}] = \text{ORSOCA}(\text{ELE}, \text{REL}, \text{NNUD}, \text{NCOM}, \text{ICAT});$$

donde **ELE** es la tabla de categorías y conectividades de los elementos, **REL** es tabla con la cantidad especificada en los extremos de cada elemento, **NNUD** es el número de nudos, **NCOM** es el número de componentes de resultados y **ICAT** es el identificador de la categoría de elementos que será presentada. Esta función obtiene la tabla de resultados promedio de la cantidad en los nudos **NUD** y el número de nudos de la categoría **ICAT**, denominado **NUCA**.

La función **ORSONO** obtiene una tabla de promedio de cada componente sobre los nudos a partir de la misma cantidad obtenida en los extremos de los elementos, aplicable a mallas de una categoría y un tipo de elemento. El formato de la instrucción que ejecuta esta función es el siguiente:

$$[\text{RNU}] = \text{ORSONO}(\text{ELE}, \text{REL}, \text{NNUD}, \text{NCOM});$$

donde **ELE** es la tabla de categorías y conectividades de los elementos, **REL** es tabla con la cantidad especificada en los extremos de cada elemento, **NNUD** es el número de nudos y **NCOM** es el número de componentes de resultados. Esta función obtiene la tabla de resultados promedio de la cantidad en los nudos **RNU**.

La función **ORVEBA** crea una tabla de desplazamientos conocidos o fuerzas puntuales en Formato A a partir de la respectiva tabla en Formato B (Sección 9.6). Esta instrucción se escribe así:

$$[VUA] = ORVEBA(VUB, TLEN, NGLN, TASK);$$

donde **VUB** es la tabla de desplazamientos o fuerzas puntuales en Formato B, **TLEN** es el indicador del tipo de lectura de datos y escritura de resultados, **NGLN** es el número de grados de libertad por nudo, **TASK** es el indicador de la tarea el cual corresponde a **TASK=0** para desplazamientos conocidos y **TASK=1** para fuerzas puntuales. La función obtiene la matriz **VUA** que contiene la tabla de desplazamientos conocidos o fuerzas puntuales en Formato A.

## 9.8 Ejemplos de aplicación

Esta sección describe algunos problemas mecánicos de sólidos tridimensionales resueltos con el programa \PEFTRI \PEFICA.m, los cuales están incluidos en la carpeta \PEFTRI \DATOS del paquete. Para cada problema se encuentra: (i) un archivo de datos que contiene la geometría, los desplazamientos conocidos, las acciones aplicadas y los parámetros de construcción de malla en formato de preproceso de GMSH o .m, (ii) un archivo que contiene la malla de elementos finitos utilizada, y (iii) dos archivos que contienen los resultados en el formato de postproceso de GMSH.

Las unidades utilizadas para definir las características del problema son las mismas presentadas en los resultados. En general los ejemplos descritos a continuación utilizan kN y m como unidades de fuerza y longitud, respectivamente.

### 9.8.1 Bloque empotrado sometido a carga distribuida y puntual

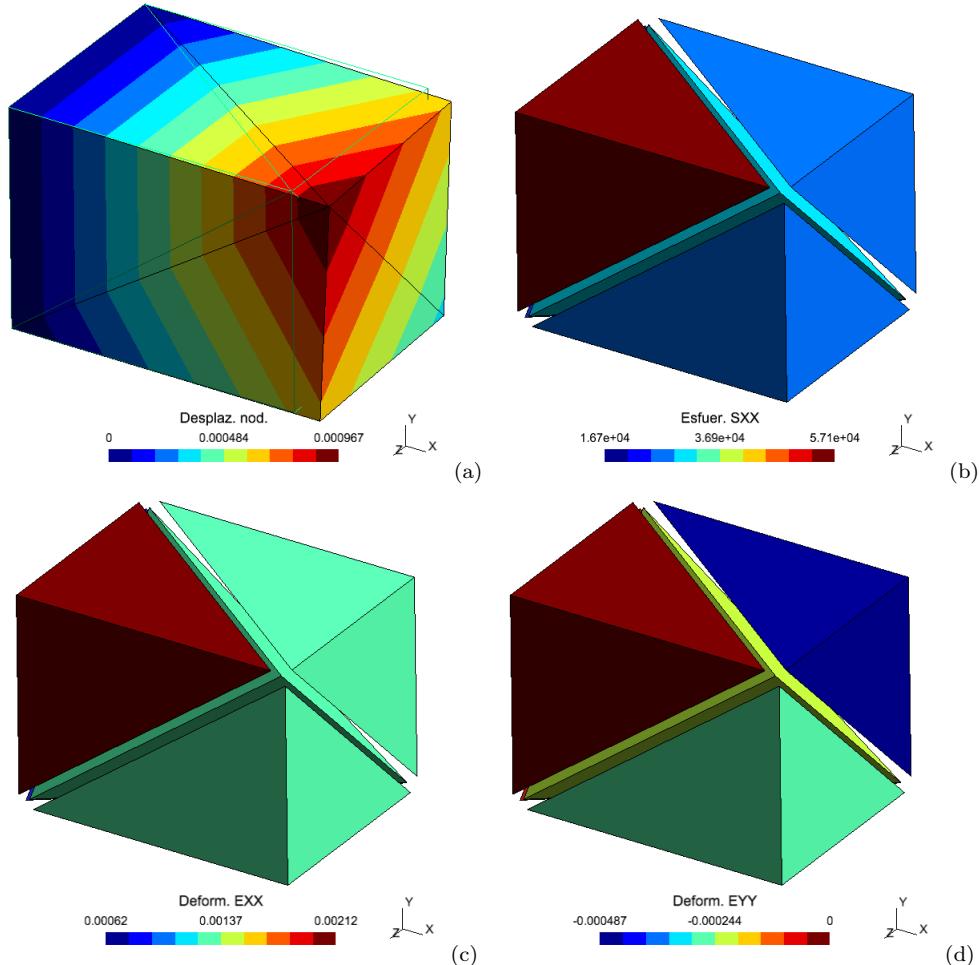
Un bloque de  $0.30\text{ m} \times 0.30\text{ m} \times 0.40\text{ m}$  empotrado en su extremo izquierdo, está sometido a una carga distribuida uniforme de  $w_x = 20\,000\text{ kN/m}^2$  en su extremo derecho y a una carga puntual de  $P = 1\,000\text{ kN}$  en una esquina, como lo indica la Figura 9.1. El bloque está hecho de un material cuyo módulo de Young es  $E = 20 \times 10^6\text{ kN/m}^2$  y su relación de Poisson es  $\nu = 0.3$ .

#### 9.8.1.1 Resultados evaluados en el interior de los elementos a partir de un archivo de datos *script*

El dominio del problema se divide en 5 elementos tetraedros lineales y 8 nudos, también mostrados en la Figura 9.1. El archivo de entrada de datos de este problema **trid1.m**, fue descrito en la Sección 9.2.

En el programa GNU–Octave y desde el directorio de trabajo \PEFTRI, se ejecuta la línea de comando PEFICA **trid1 07**. Con esta instrucción el programa PEFICA 2.0 resuelve el problema a partir de la información del archivo **trid1.m** y escribe los archivos **trid1.pos** y **trid1.pos.opt**, que contienen los resultados evaluados en el interior de los elementos. Estos últimos tienen el formato del programa de postproceso gráfico GMSH.

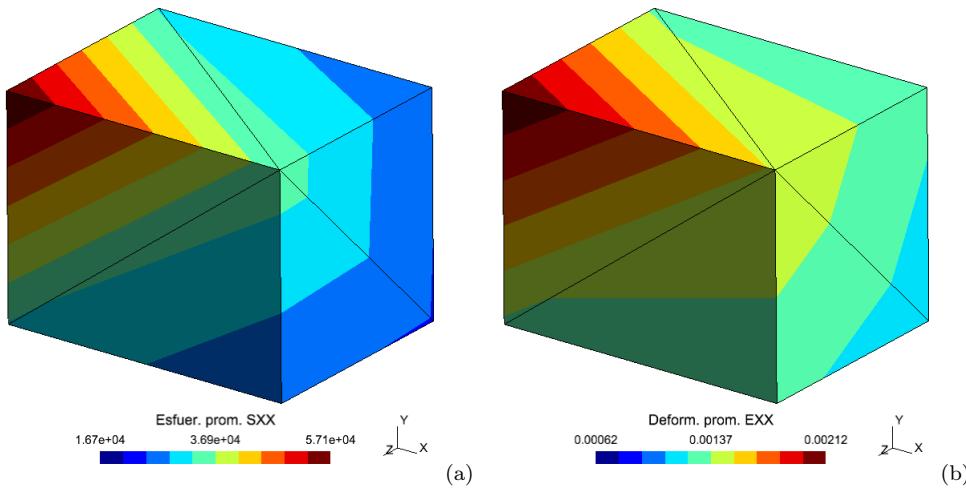
La Figura 9.2(a) presenta la configuración deformada y norma del vector desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  medida en metros. En cambio, las Figura 9.2(b), (c) y (d) presentan el esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$ , y las deformaciones longitudinales  $\varepsilon_{xx}$  y  $\varepsilon_{yy}$ , respectivamente, evaluadas en el interior de cada elemento. En estas figuras los elementos finitos han sido separados sutilmente entre sí, con el fin de mostrar el resultado en elemento finito interior.



**Figura 9.2:** Ejemplo de un bloque empotrado sometido a carga distribuida y puntual: (a) configuración deformada y norma del vector desplazamiento medida en metros; resultados evaluados en el interior de cada elemento y separados sutilmente de: (b) el esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$  medido en kN/m<sup>2</sup>, (c) la deformación longitudinal  $\epsilon_{xx}$  y la deformación longitudinal  $\epsilon_{yy}$ .

### 9.8.1.2 Resultados promedio en los nudos y suavizados en la malla a partir de los archivos de datos de GMSH

El archivo `trid2.geo` contiene la geometría, condiciones de borde, cargas, propiedades mecánicas y parámetros de construcción de la malla en el formato de preproceso para GMSH. A partir de este último, se genera la malla de elementos finitos y se almacena en el archivo `trid2.msh`.



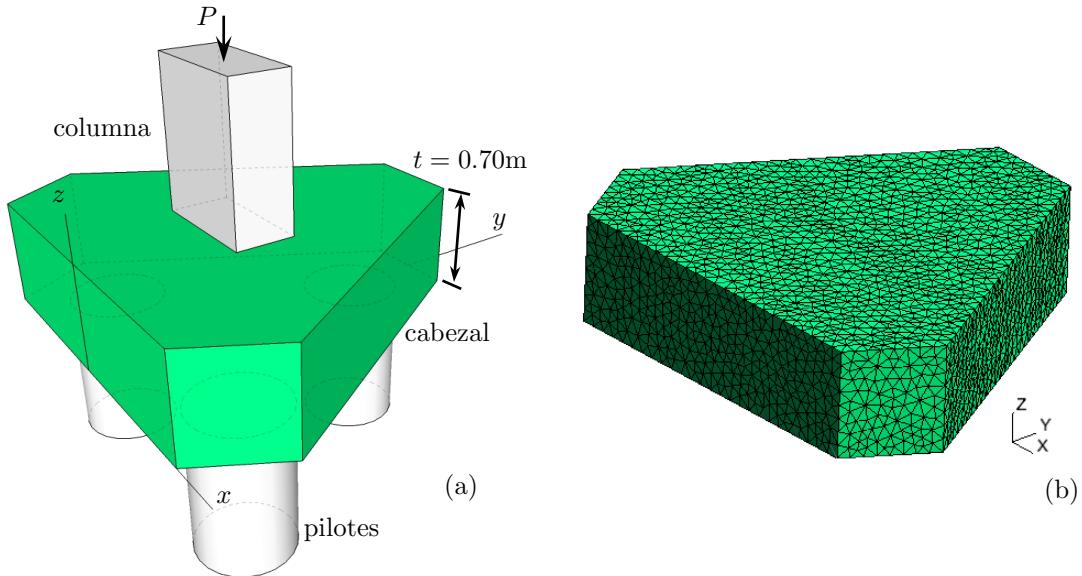
**Figura 9.3:** Ejemplo de un bloque empotrado sometido a carga distribuida y puntual. Resultados promedio en los nudos y suavizados en la malla de: (a) el esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$  medido en  $\text{kN}/\text{m}^2$ , y (b) la deformación longitudinal  $\varepsilon_{xx}$ .

En el programa GNU–Octave se ejecuta la línea de comando `PEFICA trid2 10`. Con esta instrucción el programa PEFICA 2.0 resuelve el problema a partir de la información del archivo `trid2.msh` y escribe los archivos `trid2.pos` y `trid2.pos.opt`, que contienen los resultados promedio en los nudos y suavizados en la malla. Estos últimos tienen el formato del programa de postproceso gráfico GMSH.

La Figura 9.3(a) y (b) presentan el esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$  y las deformaciones longitudinales  $\varepsilon_{xx}$  respectivamente, evaluando el promedio en los nudos.

### 9.8.2 Cabezal de pilotes sometido a una carga transmitida por una columna

Un cabezal de cimentación con sección transversal hexagonal, está apoyado en tres pilotes y soporta una presión uniforme en dirección  $-z$  de  $w_z = 14\,583 \text{ kN}/\text{m}^2$ , la cual se transmite por la columna como acción equivalente a una carga puntual  $P$  (Figura 9.4(a)). El cabezal está hecho de concreto con módulo de Young  $E = 20 \times 10^6 \text{ kN}/\text{m}^2$  y relación de Poisson  $\nu = 0.3$ . La geometría del elemento estructural está indicada en la Figura 9.5, mediante la vista en planta de la cara superior e inferior.



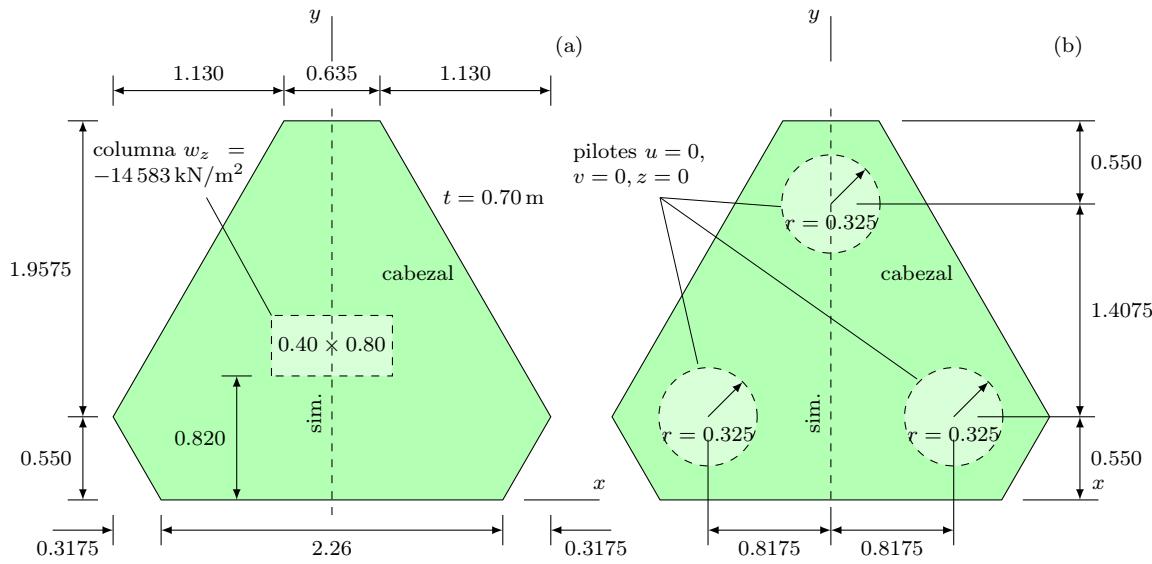
**Figura 9.4:** Ejemplo de un cabezal de pilotes y sometido a una carga transmitida por una columna: (a) esquema general tridimensional y (b) malla de elementos finitos del cabezal.

La presión uniforme  $w_z$  se aplica al cabezal en el área de  $0.40\text{ m} \times 0.8\text{ m}$ , correspondiente a la sección transversal rectangular de la columna, como lo ilustra la Figura 9.5(a). En cambio, las componentes de desplazamiento se consideran nulas en el contacto del cabezal con la sección circular de los pilotes en la cara inferior, como se muestra en la Figura 9.5(b).

El archivo `cabezal1.geo` contiene la geometría, las condiciones de borde, la carga aplicada, las propiedades del material y los parámetros de construcción de la malla. Tal archivo se lee por el programa GMSH y éste genera y exporta el archivo `cabezal1.msh` con la malla de elementos finitos.

A pesar de la simetría del problema, se construyó una malla no estructurada de 22414 elementos tetraédricos lineales y 5265 nudos del cabezal completo, mostrada en la Figura 9.4(b).

Después se ejecuta PEFICA 2.0 mediante la instrucción `PEFICA cabezal1 10` desde el directorio `\PEFTRI` en el programa GNU–Octave. Lo anterior produce los archivos `cabezal1.pos` y `cabezal1.pos.opt`, los cuales contienen los resultados del problema en el formato de postproceso gráfico de GMSH.



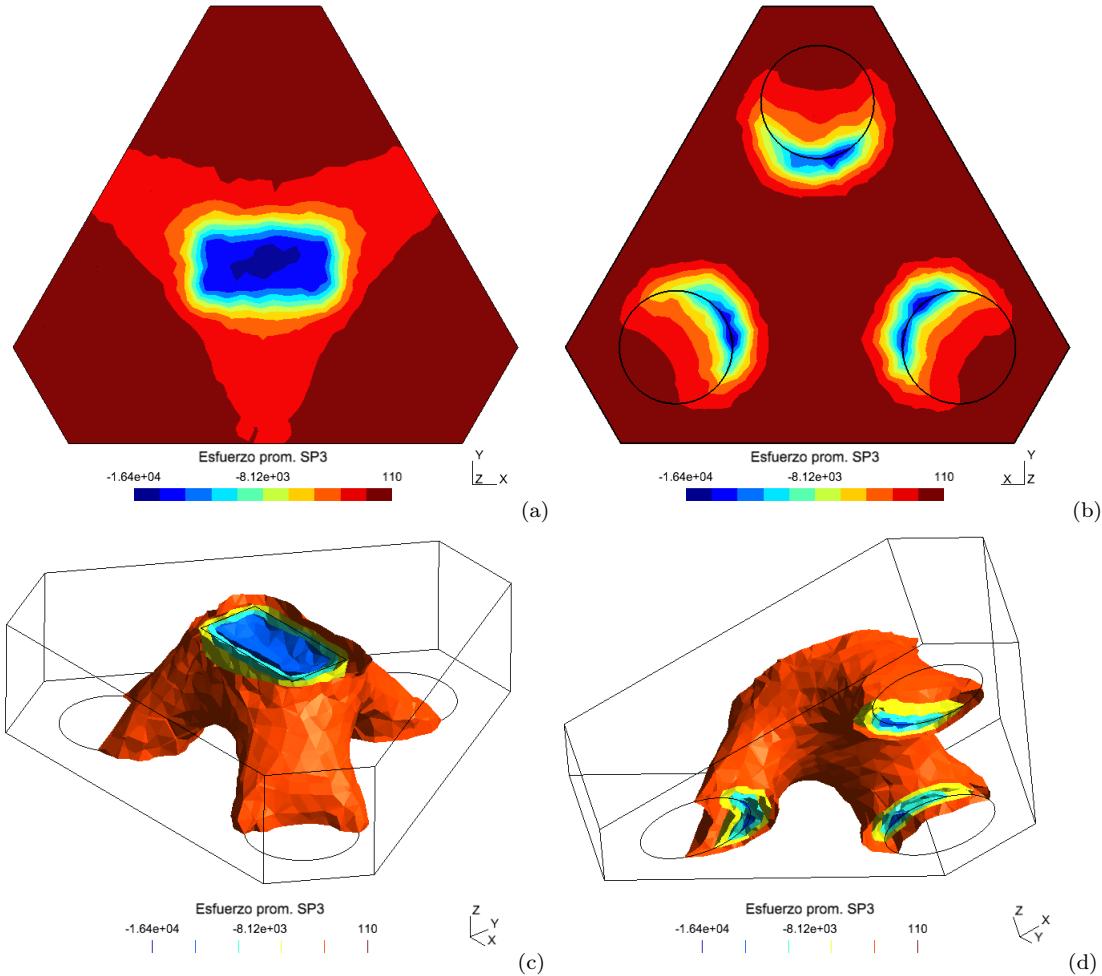
**Figura 9.5:** Ejemplo de un cabezal de pilotes y sometido a una carga transmitida por una columna. Vistas en planta: (a) en la cara superior y (b) en la cara inferior. Las medidas están dadas en metros.

La distribución del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  promedio en los nudos, se ilustra en la Figura 9.6, con diferentes vistas y medido en  $\text{kN}/\text{m}^2$ . Primero se observa este resultado en la cara superior del cabezal, donde la compresión máxima ocurre en el contacto con la columna (Figura 9.6(a)). Asimismo, se presenta máxima compresión en una cuarta parte del contacto con cada pilote, como se observa en la cara inferior del cabezal presentada en la Figura 9.6(b). Los resultados en el interior del cabezal se pueden representar mediante superficies de igual valor de  $\sigma_3$ , como lo indican las figuras 9.6(c) y (d).

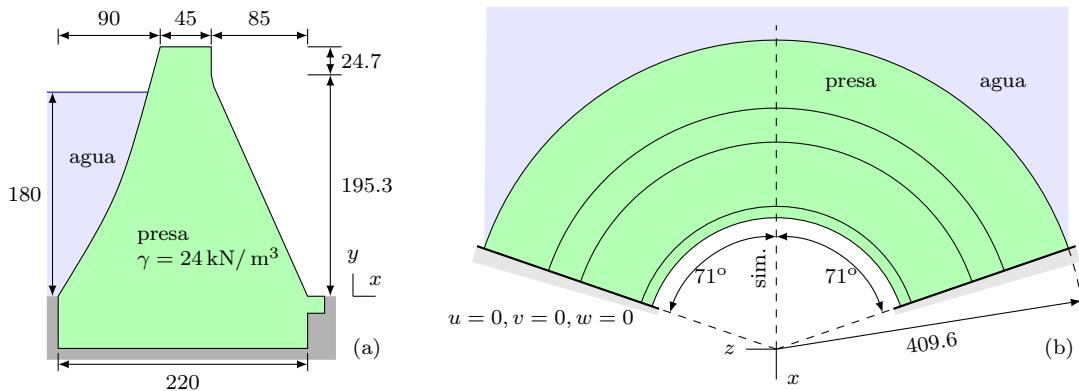
### 9.8.3 Presa de bóveda sometida a la presión hidráulica y su peso propio

Una presa de bóveda con geometría similar a la presa Hoover en Estados Unidos, mostrada en la Figura 4.1(a), está sometida a la presión hidráulica y a su peso propio. La presa está empotrada en roca en sus costados y en su base, donde las componentes de desplazamiento son nulas, es decir,  $u = 0$ ,  $v = 0$  y  $w = 0$ .

La geometría de la sección transversal de la presa y una vista de planta se indican en la Figura 9.7. La capa de agua tiene una altura  $h_w = 180.0 \text{ m}$  y un peso



**Figura 9.6:** Ejemplo de un cabezal de pilotes y sometido a una carga transmitida por una columna. Esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  promedio en los nudos, medido en  $\text{kN/m}^2$ : (a) vista en planta de la cara superior, (b) vista en planta de la cara inferior, (c) vista tridimensional mostrando la cara superior y (d) vista tridimensional mostrando la cara inferior.



**Figura 9.7:** Ejemplo de una presa de bóveda sometida a la presión hidráulica y su peso propio. Geometría de: (a) la sección transversal y (b) vista de planta. Las medidas están dadas en metros.

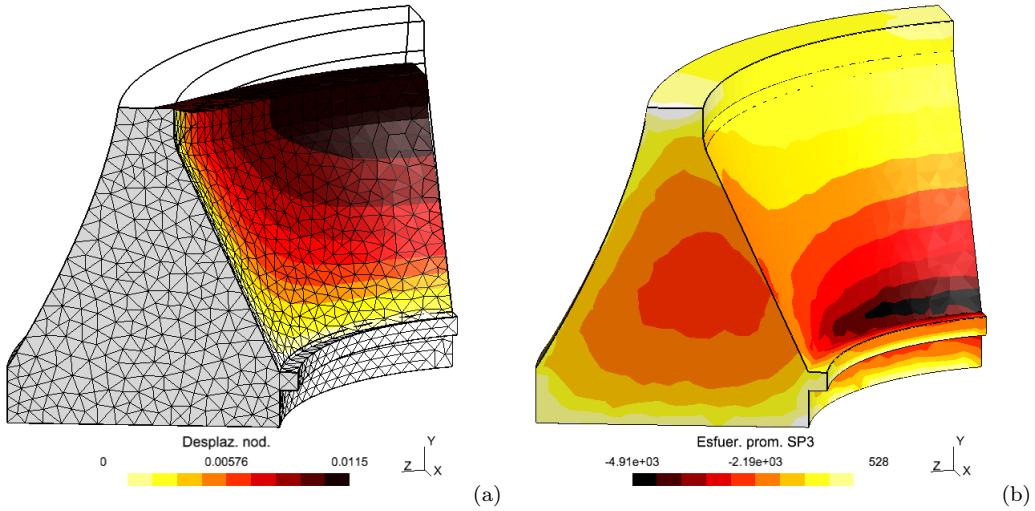
específico  $\gamma_w = 9.8 \text{ kN/m}^3$ . El material de la presa es concreto con peso específico  $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$ , módulo de Young  $E = 45.4 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  y relación de Poisson  $\nu = 0.21$ .

La simetría con respecto al plano  $xy$  permite simular la mitad del dominio del problema, mediante una malla no estructurada de 16 458 elementos tetraédricos lineales y 3 866 nudos, como lo muestra la Figura 4.1(b). La sección transversal A corresponde al apoyo lateral en la roca, mientras que la sección transversal B coincide con el plano de simetría. En este último la componente de desplazamiento en dirección  $z$  es igual a cero.

El archivo `hoover1.geo` contiene la geometría, las condiciones de borde, las acciones externas, las propiedades mecánicas y los parámetros de generación de la malla, correspondientes a la mitad de la presa en formato de preproceso de GMSH.

Después se lee el archivo `hoover1.geo`, se genera la malla de elementos finitos y se exporta tal malla en el archivo `hoover1.msh` desde el programa GMSH.

A continuación se ejecuta la instrucción PEFICA `hoover1 10`, desde el directorio activo `\PEFTRI` en el entorno de GNU-Octave. El programa PEFiCA 2.0 analiza el problema y produce los archivos `hoover1.pos` y `hoover1.pos.opt` con los resultados en formato de postproceso de GMSH.

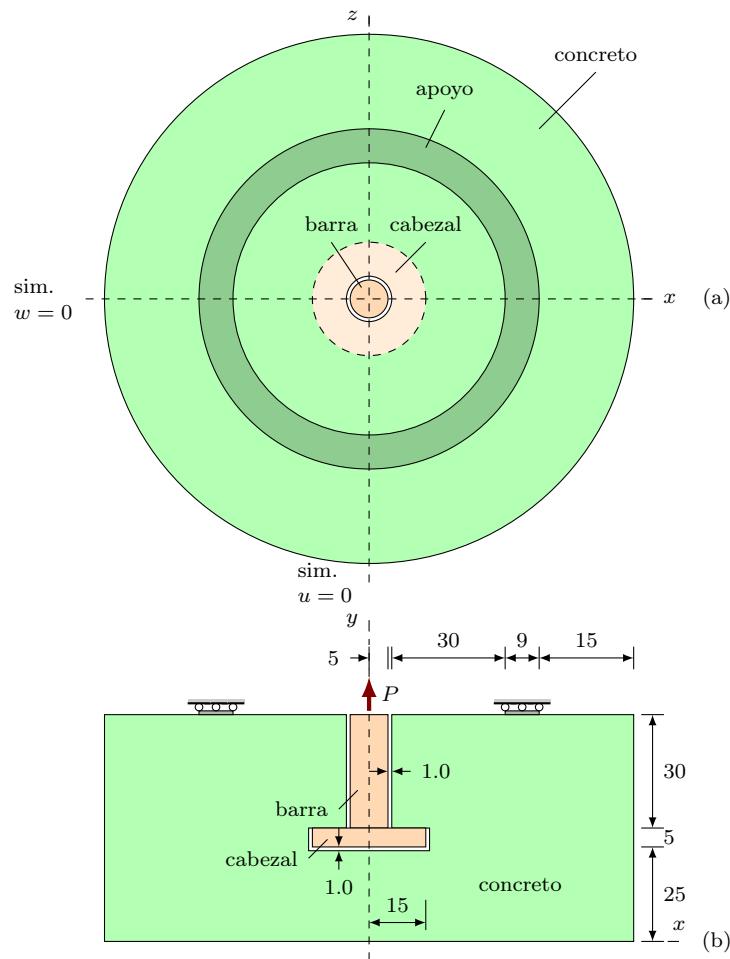


**Figura 9.8:** Ejemplo de una presa de bóveda sometida a la presión hidráulica y su peso propio: (a) configuración deformada y norma del vector de desplazamiento en metros, y (b) distribución de esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  medida en  $\text{kN/m}^2$ .

La Figura 9.8 presenta la configuración deformada y norma del vector de desplazamiento  $\|\mathbf{u}\|$  en metros, y la distribución del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  medido en  $\text{kN/m}^2$ .

#### 9.8.4 Ensayo de resistencia al arrancamiento del concreto

Este ensayo experimental busca determinar la resistencia a la compresión del concreto, mediante la evaluación de la fuerza necesaria para desprender la cabeza de una barra de acero embebida en su interior. Tal ensayo ha sido estandarizado en la norma ASTM C-900 (ASTM, 2007). En particular la Figura 9.9 describe el arrancamiento de una barra y cabezal de acero con 10 mm y 30 mm de diámetro, respectivamente, embebidos en una región cilíndrica de concreto de 60 mm de altura y 120 mm de diámetro. Se considera que el concreto tiene un módulo de Young  $E_c = 20 \text{ GPa}$ , una relación de Poisson  $\nu_c = 0.25$  y resistencia a la compresión  $\sigma_{cu} = 26.3 \text{ MPa}$ , mientras que el acero cuenta con un módulo de elasticidad  $E_a = 200 \text{ GPa}$ , una relación de Poisson  $\nu_a = 0.20$  y esfuerzo de fluencia  $\sigma_{ay} = 250 \text{ MPa}$ . La región de concreto se apoya



**Figura 9.9:** Ejemplo del ensayo resistencia al arrancamiento del concreto. Vista desde el: (a) plano  $xz$ , y (b) plano  $xy$ . Las medidas están dadas en milímetros.

en un anillo circular y se aplica una carga puntual  $P$  en el extremo de la barra de acero. Los dos materiales solamente están en contacto en la cara superior del cabezal.

El objetivo de este ejemplo es determinar: (i) la carga puntual  $P_{cl}$ , para la cual el esfuerzo principal menor del concreto alcanza el esfuerzo límite de proporcionalidad en compresión dado como el 40 % de la resistencia la compresión  $\sigma_{cl} = 0.40\sigma_{cu}$ , (ii) la carga puntual  $P_{tl}$ , para la cual el esfuerzo principal mayor del concreto alcanza el esfuerzo límite de proporcionalidad en tensión dado como el 10 % de la resistencia

la compresión  $\sigma_{tl} = 0.10\sigma_{cu}$  y (iii) la carga puntual  $P_{ay}$ , para la cual el esfuerzo de Von Mises del acero alcanza su fluencia  $\sigma_{ay}$ .

El problema exhibe una simetría que permite simplificar su dominio a una cuarta parte, estableciendo que la componente del desplazamiento en dirección  $z$  es igual a cero en el plano de simetría  $xy$  y que la componente de desplazamiento en  $x$  es nula en el plano de simetría  $yz$ . En la simulación se aplica una presión uniforme sobre la cara superior de la barra  $w_y = P/A$ , asumiendo un valor de  $P = 1 \text{ N}$  y recordando que el área de la sección transversal de la barra es  $A = \pi \cdot (10 \text{ mm})^2/4 = 78.54 \text{ mm}^2$ . En consecuencia, la carga  $w_y = 12.73 \times 10^{-3} \text{ N/mm}^2$ .

Con el entorno de preproceso de GMSH se definió la geometría en milímetros, las condiciones de apoyo, las cargas aplicadas en N y las propiedades de los materiales, como el módulo de Young en  $\text{N/mm}^2$ . Asimismo, se establecieron los parámetros de la malla, considerando mayor densidad en la zona cercana al contacto entre el cabezal de acero y el concreto. El archivo `pullout1.geo` contiene la información anterior definiendo el parámetro `1f=2.0` como tamaño medio del elemento en la zona de interés (`tmzi`) igual a  $2.0 \text{ mm}$ . Como parte del preproceso se generó una malla de 13 959 elementos tetraédricos lineales y 3 124 nudos, la cual se guardó en el archivo `pullout1.msh`.

Después de analizó el problema con el programa PEFICA 2.0, ejecutando la instrucción `PEFICA pullout1 12`. Los resultados fueron obtenidos como el suavizado de valores promedio en los nudos para varias categorías de material, en este caso concreto y acero. Los archivos `pullout1.pos` y `pullout1.pos.opt`

El procedimiento anterior se repitió para construir otras 2 mallas de elementos finitos tetraédricos lineales de diferente densidad, considerando el tamaño medio del elemento en la zona de interés igual a `1f=1.5` y `1f=1.0`. Las características de cada simulación, como el número de nudos y de elementos de la malla y algunos resultados representativos, se ilustran en la Tabla 9.1. Allí las columnas  $\sigma_{c,1}^{\max}$ ,  $|\sigma_{c,3}^{\max}|$  y  $\sigma_{a,vm}^{\max}$ , corresponden al valor máximo en cada simulación del esfuerzo principal mayor del concreto, del esfuerzo principal menor en valor absoluto sobre el concreto y del esfuerzo de Von Mises en el acero, respectivamente. La columna `tmzi` indica el tamaño promedio del lado de los elementos finitos en la zona de interés. En cambio, la

nom. archivo	n.nudos	n.elems	tmzi(mm)	$\sigma_{c,1}^{\text{máx}}(\text{Pa})$	$ \sigma_{c,3}^{\text{máx}} (\text{Pa})$	$\sigma_{a,vm}^{\text{máx}}(\text{Pa})$
pullout1	3124	13959	2.0	1430	3400	14900
pullout2	6113	28927	1.5	1500	4420	18500
pullout3	15205	77089	1.0	2050	5190	20200

**Tabla 9.1:** Características y resultados representativos de las mallas de elementos finitos utilizadas en el ensayo de resistencia al arrancamiento del concreto. La columna nom.archivo indica el nombre común de los archivos con extensiones .geo, .msh, .pos y .pos.opt de cada simulación. La columna tmzi presenta el tamaño medio del elemento finito en la zona de interés en mm.

columna nom.archivo indica el nombre común de los archivos con extensiones .geo, .msh, .pos y .pos.opt de cada simulación.

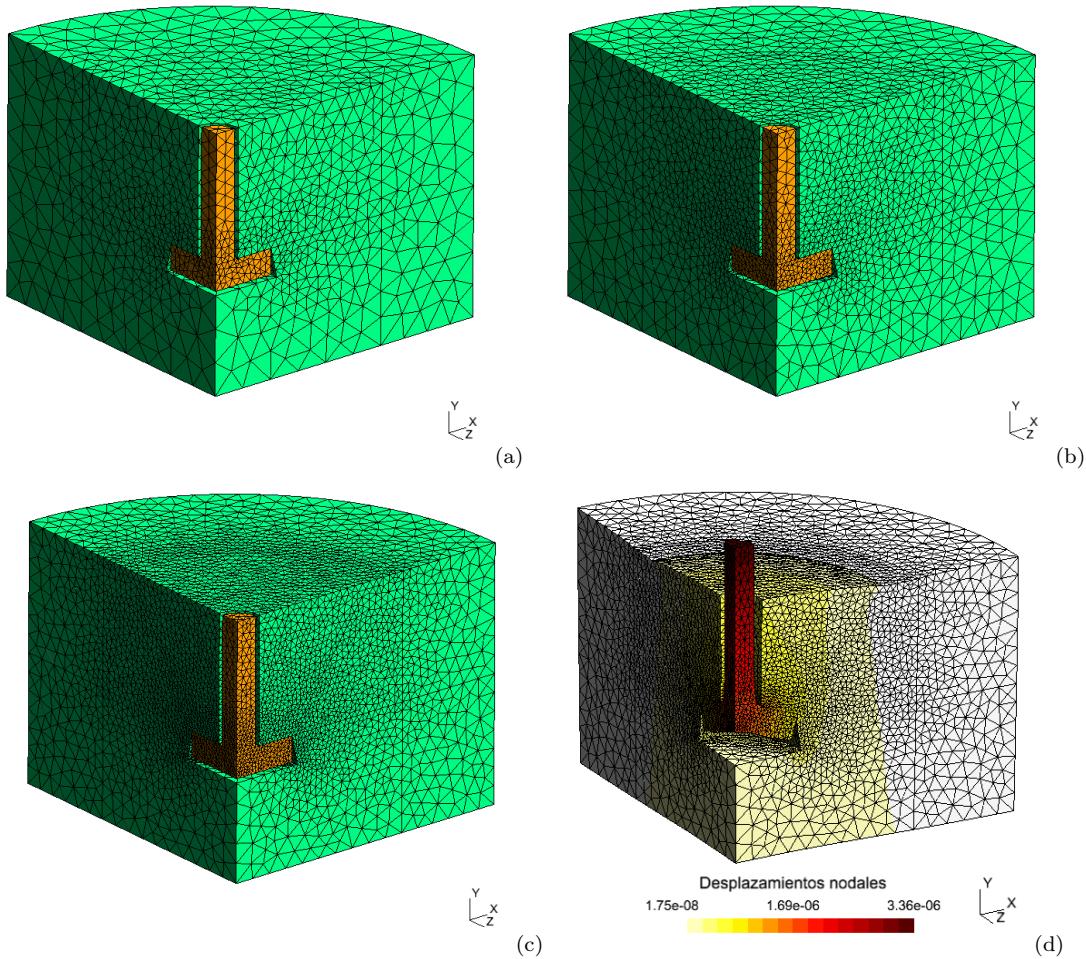
La Figura 9.10(a), (b) y (c) presentan las 3 mallas de elementos finitos tetraédricos lineales utilizadas para simular este problema. Se diferencia en colores los elementos de concreto y de acero.

Los resultados de la segunda simulación se obtienen ejecutando PEFICA 2.0 desde GNU-Octave con la instrucción PEFICA pullout2 12. En cambio, la tercera simulación se realiza con la instrucción PEFICA pullout3 14, con el fin de representar adicionalmente el vector de cada dirección principal en los nudos. Por ejemplo, la Figura 9.11(a) indica la dirección principal menor y el valor del esfuerzo  $\sigma_3$  en el concreto medido en N/mm<sup>2</sup>.

El archivo pullout4.geo es igual a pullout2.geo, por lo tanto genera la misma malla de 28 927 elementos finitos, la cual se almacena en el archivo pullout4.msh. La diferencia consiste en que se ejecuta la instrucción PEFICA pullout4 13, con el fin de obtener los resultados en el interior de los elementos. Por ejemplo, la Figura 9.11(b) muestra el valor del esfuerzo  $\sigma_1$  dentro de cada elemento.

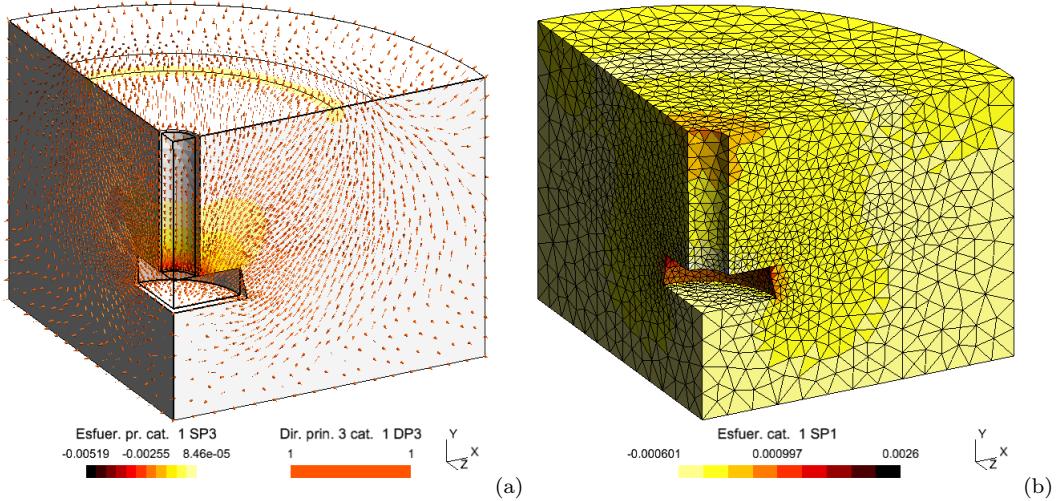
Los desplazamientos nodales y la configuración deformada del sólido producidos por la fuerza de arrancamiento en la malla más fina se puede observar en la Figura 9.10(d).

La Figura 9.12(a) muestra la distribución del esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$  sobre el concreto, obtenida en la malla mas fina. Tal esfuerzo adquiere un valor máximo de  $\sigma_{c,1}^{\text{máx}} = 2\,050 \text{ N/m}^2$  en el contorno del orificio cerca del cabezal.



**Figura 9.10:** Ejemplo del ensayo resistencia al arrancamiento del concreto: (a) malla `pullout1.msh` de 3124 nodos, (b) malla `pullout2.msh` de 6113, (c) malla `pullout3.msh` de 15205 y (d) desplazamientos nodales en mm y configuración deformada.

El esfuerzo de Von Mises máximo en el acero se presenta en la unión entre la barra y el cabezal con un valor de  $\sigma_{a,vm}^{\max} = 20\,200 \text{ MPa}$ , como lo indica la Figura 9.12(b). La Figura 9.12(c) muestra la distribución del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  sobre el concreto. Tal esfuerzo adquiere un valor máximo absoluto de  $|\sigma_{c,3}^{\max}| = 5\,190 \text{ N/m}^2$  en la zona de contacto con el cabezal de acero y se reduce progresivamente hasta el apoyo formando un tronco de cono. Asimismo, la deformación principal menor  $\varepsilon_3$



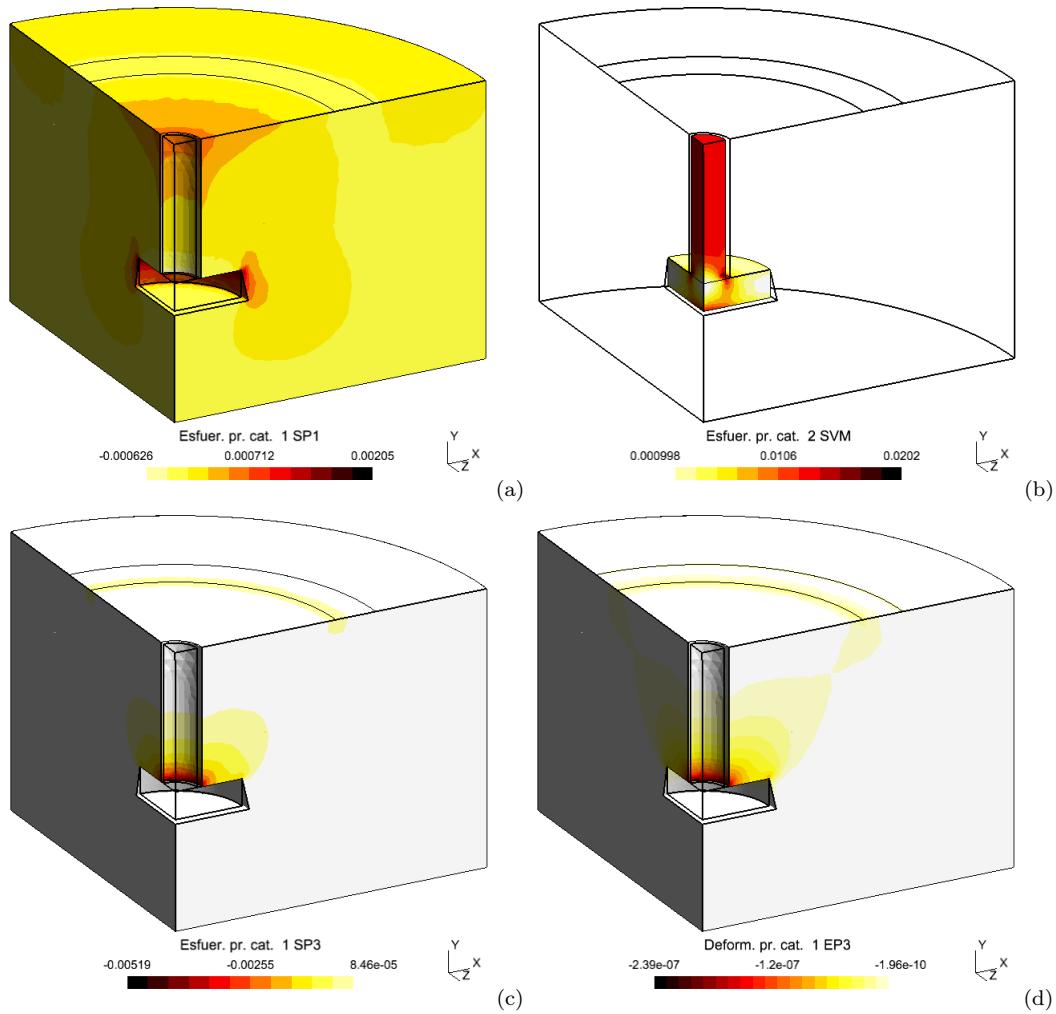
**Figura 9.11:** Ejemplo del ensayo resistencia al arrancamiento del concreto: (a) dirección principal menor y valor del esfuerzo  $\sigma_3$  promedio en los nudos sobre el concreto, dado en MPa para la malla de 77089 elementos y (b) esfuerzo principal mayor en el interior de los elementos  $\sigma_1$  sobre el concreto dado en MPa, para la malla de 28927 elementos.

exhibe una distribución similar como lo indica la Figura 9.12(d), cuyo valor máximo es  $|\varepsilon_3^{\text{máx}}| = 2.39 \times 10^{-7}$ .

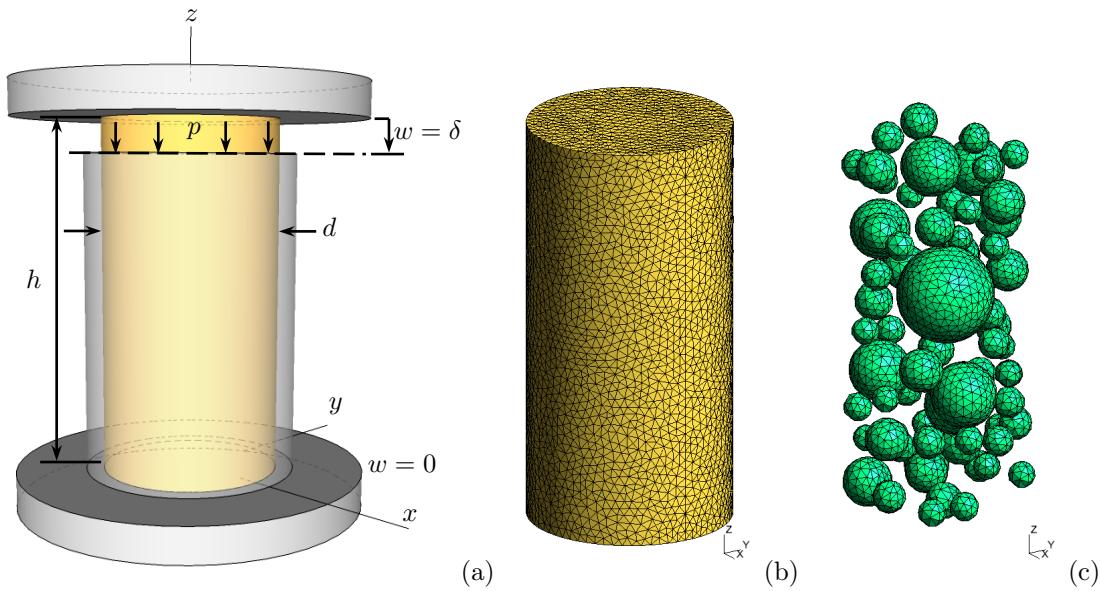
De acuerdo a lo anterior, la relación entre el esfuerzo permisible a compresión y el esfuerzo principal menor actuante en el concreto es  $n_{cl} = 0.40 \cdot 26.3 \times 10^6 / 5190 = 2027$  y en consecuencia la carga puntual que alcanza el esfuerzo límite de proporcionalidad del concreto en compresión es  $P_{cl} = 2.03$  kN.

Por otro lado, el cociente entre el esfuerzo permisible de tensión y el esfuerzo principal mayor actuante en el concreto es  $n_{tl} = 0.10 \cdot 26.3 \times 10^6 / 2050 = 1,283$ , esto indica que la carga puntual que alcanza el esfuerzo límite de proporcionalidad del concreto en tensión es  $P_{tl} = 1.28$  kN.

La relación entre el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo de Von Mises actuante en el acero es  $n_{ay} = 250 \times 10^6 / 20200 = 12\,376$  y en consecuencia la carga puntual que alcanza el esfuerzo de fluencia en el acero es  $P_{ay} = 12.38$  kN.



**Figura 9.12:** Ejemplo del ensayo resistencia al arrancamiento del concreto. Resultado en la malla mas fina: (a) esfuerzo principal mayor promedio en los nudos sobre el concreto dado en MPa, (b) esfuerzo de Von Mises promedio en los nudos sobre el acero dado en MPa, (c) esfuerzo principal menor promedio en los nudos sobre el concreto dado en MPa y (d) deformación principal menor promedio en los nudos sobre el concreto.



**Figura 9.13:** Ejemplo de un ensayo a compresión de un cilindro de concreto como material formado por agregados y mortero: (a) esquema general, (b) malla de elementos finitos de la matriz de mortero, y (c) malla de elementos finitos de las esferas de agregado.

### 9.8.5 Ensayo de compresión de un cilindro de concreto como material formado por agregados y mortero

Un cilindro sometido a compresión uniforme está hecho de concreto, el cual es representado como un material compuesto conformado por un 20 % en volumen de partículas esféricas de agregado embebidas en un 80 % de matriz de mortero. Se estableció una granulometría específica del concreto y una ubicación aleatoria de 72 partículas esféricas (Linero & Amaya, 2018). El cilindro tiene un diámetro  $d = 3'' = 0.0762\text{ m}$  y una altura  $h = 6'' = 0.1524\text{ m}$ , se apoya en su cara inferior y está sometido a un desplazamiento vertical uniforme en su cara superior de  $\delta = -1\text{ mm}$ , que genera una reacción distribuida media  $p$  (Figura 9.13(a)). Se considera que el mortero tiene un módulo de Young  $E_m = 25\text{ GPa}$ , una relación de Poisson  $\nu_m = 0.2$ , mientras que el agregado cuenta con un módulo de elasticidad  $E_a = 70\text{ GPa}$  y una relación de Poisson  $\nu_a = 0.2$ .

El objetivo de este ejemplo es determinar: (i) el módulo de elasticidad del concreto  $E_c = p/\bar{\varepsilon}_{zz}$  a partir del presión media de reacción en la cara superior  $p = \sum R_z/A$  y la deformación longitudinal media  $\bar{\varepsilon}_{zz} = \delta/h = -0.001 \text{ m}/0.1524 \text{ m} = -6.561 \times 10^{-3}$ , y (ii) determinar la distribución del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  sobre el agregado y sobre el mortero.

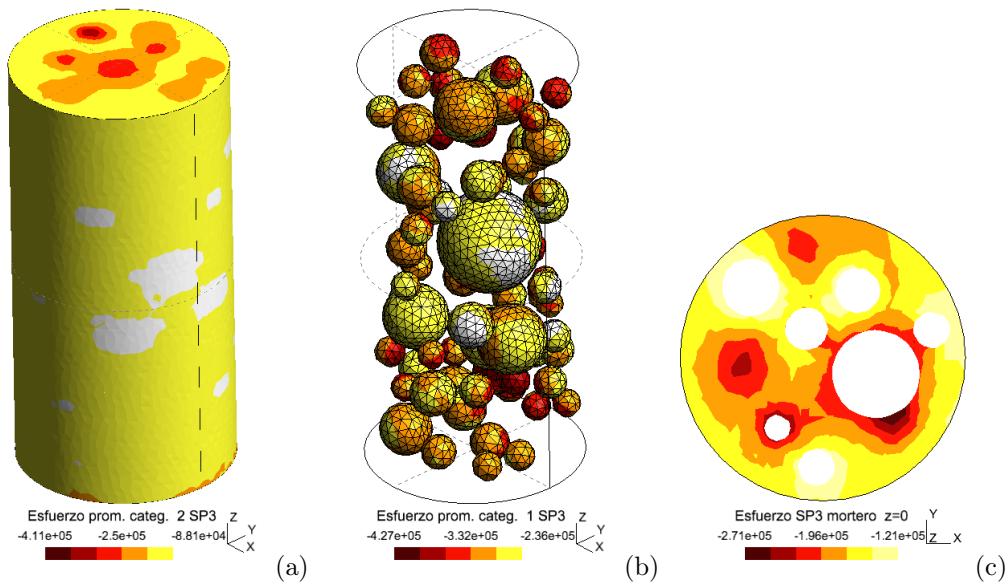
El problema se describe en el entorno de preproceso gráfico de GMSH y se guarda en el archivo `cilindr1.geo`. Desde allí se genera una malla no estructurada de 15 104 nudos y 77 082 elementos tetraédricos lineales. Tales elementos están asociados a parámetros mecánicos diferentes para el mortero y los agregados, como lo muestra las figuras 9.13(b) y (c). La malla generada se almacena en el archivo `cilindr1.msh`.

Se analizó el problema con el programa PEFICA 2.0, ejecutando la instrucción `PEFICA cilindr1 12` desde el directorio `PEFTRI` en el programa GNU-Octave.

Los resultados se almacenan en los archivos `cilindr1.pos` y `cilindr1.pos.opt`, los cuales se pueden visualizar en el entorno de postproceso gráfico de GMSH.

La sumatoria de las fuerzas de reacción en los nudos de la cara superior del cilindro son iguales a  $\sum R_z = -907.87 \text{ kN}$ , y por lo tanto la presión media reactiva es  $p = \sum R_z/A = -907.87 \text{ kN}/(\pi \cdot (0.0381 \text{ m})^2) = -199\,078 \text{ kN/m}^2$ . El módulo de elasticidad del concreto se obtiene como  $E_c = -199.078 \text{ GPa} / -6.561 \times 10^{-3} = 30.34 \text{ GPa}$ .

Por otro lado, se obtuvo la distribución del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  en cada material como se indica en la Figura 9.14. Allí se observa que el valor mínimo de  $\sigma_3$  es  $-411\,000 \text{ kN/m}^2$  en el mortero y  $-427\,000 \text{ kN/m}^2$  en el agregado, lo cual corresponde a 2.06 y 2.14 veces la presión media sobre la cara superior  $p$ , respectivamente.



**Figura 9.14:** Esfuerzo principal menor en la simulación del ensayo de compresión de un cilindro de concreto, medido en  $\text{kN/m}^2$ : (a) vista tridimensional en el mortero, (b) vista tridimensional en el agregado, y (c) vista de un corte para  $z = 0$  en el mortero.



## Capítulo 10

### Programa GMSH en el preproceso

GMSH es un programa multiplataforma de licencia libre y gratuita que permite crear el archivo de datos que constituyen un problema de elementos finitos y presentar de forma gráfica los resultados obtenidos de un análisis (Geuzaine & Remacle, 2009, 2019). Lo primero se logra a partir de la construcción de entidades geométricas y la designación de características físicas, introducidas en un entorno gráfico o a través de un archivo plano de instrucciones. La segunda utilidad del programa lee un archivo plano o binario que contiene la malla de elementos finitos y los resultados escalares, vectoriales o tensoriales, y los representa en el dominio del problema para cada instante de tiempo.

Esta herramienta permite la construcción del archivo que incluye los nudos, los elementos finitos con sus propiedades asociadas, las cargas aplicadas y los desplazamientos conocidos de un problema mecánico. Asimismo, después de realizado el análisis con el método de los elementos finitos, tal herramienta puede presentar cada resultado de desplazamiento, deformación o esfuerzo de forma gráfica, mediante líneas de igual valor o áreas llenas en rangos de valores, entre otras. También puede dibujar la configuración deformada del sólido y las reacciones en los apoyos.

Este capítulo es un breve manual de usuario del prepoceso de los datos de entrada mediante el programa GMSH. En cambio, en el próximo capítulo se describe el postproceso gráfico de los resultados con la misma herramienta.

A continuación se describe la generación del archivo de datos de entrada de un problema mediante el programa GMSH, adaptada para el PEFiCA 2.0.

## 10.1 Procedimiento general

El programa GMSH construye un archivo en formato ASCII de extensión `.geo`, el cual contiene las líneas de comando correspondientes a acciones específicas realizadas en el entorno gráfico. Cada vez que se concluye una acción específica en el entorno gráfico, éste archivo se actualiza con una nueva línea de comando. Tales acciones están relacionadas con la creación y modificación de entidades geométricas y físicas, y con los parámetros de la generación de la futura malla de elementos finitos.

Desde el entorno gráfico de preprocesso en GMSH se genera la malla de elementos finitos del problema, la cual se exporta de la memoria RAM del computador a un archivo de extensión `.msh`.

Después se ejecuta el programa PEFiCA 2.0 leyendo los datos de entrada del archivo `.msh` y se obtienen el archivos de resultados y parámetros de salida con extensión `.pos` y `.pos.opt`, los cuales tienen el formato de postproceso del programa GMSH.

## 10.2 Deshacer en GMSH

El entorno gráfico de GMSH permite deshacer la última acción realizada, haciendo clic en **Modules >Geometry >Remove last script command** del menú lateral. Esto elimina la última línea de comando escrita en el archivo `.geo` y recarga las demás instrucciones. Tal procedimiento se puede realizar varias veces, sin embargo no tiene la posibilidad de rehacer.

Otra forma de deshacer y rehacer instrucciones en GMSH es modificando el archivo `.geo`. Este archivo se puede abrir con un editor de texto o haciendo clic en **Modules >Geometry >Edit script** del menú lateral de GMSH.

Para deshacer se eliminan o se comentan las líneas de comando no deseadas en el archivo `.geo`. En cambio para rehacer se descomentan las líneas de comando que

anteriormente no se deseaban. En cualquiera de los dos casos se guarda el archivo **.geo** y se hace clic en **Modules >Geometry >Reload script** del menú lateral o se oprime la tecla **0** en el entorno gráfico de GMSH.

En la sintaxis del archivo **.geo**, una línea de comando se comenta, es decir convierte en un comentario no ejecutable, si comienza con los caracteres **//**.

### 10.3 Comenzar a utilizar GMSH

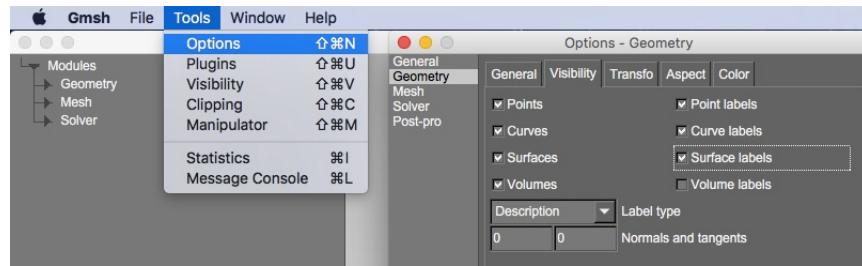
Primero se abre el entorno gráfico de GMSH, se hace clic en **File >New...**, se selecciona una carpeta y se escribe el nombre del archivo que identificará al problema con extensión **.geo**. A continuación se escoge en la ventana **Geometry kernel** el tipo de librerías internas que usará GMSH para visualizar la geometría. Para esto se hace clic sobre el botón **OpenCASCADE** si se requieren: las operaciones booleanas entre entidades geométricas o la construcción rápida de formas convencionales como rectángulos, círculos, cilindros o esferas. En caso contrario se puede hacer clic sobre el botón **Built-in** cuando solo se necesitan las librerías básicas integradas a GMSH.

### 10.4 Opciones de presentación de las entidades geométricas

Las opciones de presentación gráfica de las entidades geométricas se pueden definir haciendo clic en **Tools >Options** del menú superior, y escogiendo **Geometry** en el menú lateral de la ventana **Options**.

En la pestaña **Visibility** mostrada en la Figura 10.1, se pueden definir los siguientes parámetros de visualización de las entidades geométricas:

- La presentación de los puntos, líneas, superficies o volúmenes se establece marcando la casilla de verificación **Points**, **Lines**, **Surfaces** o **Volumes**, respectivamente.
- La presentación de la información de cada punto, línea, superficie o volumen se establece marcando la casilla de verificación **Point labels**, **Line labels**, **Surface labels** o **Volume labels**, respectivamente.

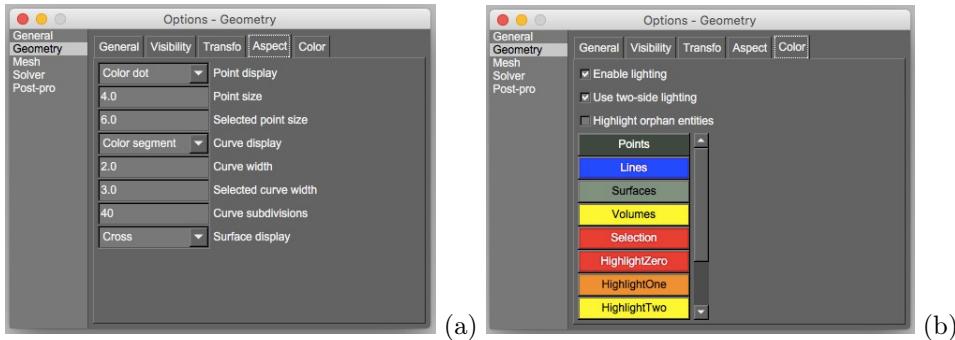


**Figura 10.1:** GMSH: activar la presentación del identificador de cada entidad geométrica en el entorno gráfico. Parámetros de visualización de las entidades

- El tipo de información presentada de la entidad geométrica se define en la caja desplegable **Label type**. Las opciones correspondientes son:
  - **Description** para mostrar el tipo de entidad geométrica, el número identificador y la(s) entidad(es) física(s) asociadas a él.
  - **Elementary tags** para mostrar el número identificador de la entidad geométrica.
  - **Physical tags** para mostrar el número identificador de la(s) entidad(es) física(s) asociadas a esta entidad geométrica.

En la pestaña **Aspect** mostrada en la Figura 10.2(a), se pueden definir los siguientes parámetros del aspecto de las entidades geométricas:

- La apariencia de los puntos se establece en la caja desplegable **Point display**, donde se puede escoger: **Color dot** para mostrarlos como cuadrados o **3D sphere** para mostrarlos como esferas.
- El tamaño de los puntos no seleccionados y seleccionados se establece en las cajas **Point size** y **Selected point size**, respectivamente.
- La apariencia de las líneas se establece en la caja desplegable **Curve display**, donde se puede escoger: **Color segment** para mostrarlas como líneas o **3D cylinder** para mostrarlas como cilindros.
- El tamaño de las líneas no seleccionadas y seleccionadas se establece en las cajas **Curve width** y **Selected curve width**, respectivamente.



**Figura 10.2:** GMSH. Opciones de presentación de las entidades geométricas: (a) parámetros de aspecto, y (b) parámetros de color.

- El número de segmentos en que muestra las líneas se define en la caja **Curve subdivisions**.
- La apariencia de las superficies se establece en la caja desplegable **Surface display**, donde se puede escoger: **Cross** para mostrarlas con dos líneas perpendiculares en cruz desde su centro o **Solid** para mostrarlas como una región llena de un color.

En la pestaña **Color** mostrada en la Figura 10.2(b), se pueden definir el color de cada entidad geométrica, haciendo clic sobre el botón **Points** para los puntos, **Lines** para las líneas, **Surfaces** para las superficies y **Volumes** para los volúmenes. En la ventana **Color chooser** se selecciona el color de la entidad de acuerdo con un formato y escala específica. Si se escoge **rgb** la escala de color varía entre 0 y 1 con el formato rojo-verde-azul (RGB), si se escoge **byte** la escala varía entre 0 y 255 también con formato RGB, si se escoge **hex** el formato es sexagesimal y si se selecciona **hsv** el formato es matiz-saturación-valor (HSV).

## 10.5 Construcción directa de entidades geométricas

La geometría corresponde al conjunto de puntos, líneas rectas o curvas, superficies y volúmenes que delimitan el dominio del problema. Estas entidades geométricas se definen en el entorno gráfico GMSH como se indica a continuación.

### 10.5.1 Construcción de puntos

Los puntos son lugares geométricos definidos por sus coordenadas  $x, y, z$  en el espacio. Para crear un punto se selecciona en el menú lateral **Modules**  $\triangleright$  **Geometry**  $\triangleright$  **Elementary entities**  $\triangleright$  **Add**  $\triangleright$  **Point**, después se introducen las coordenadas del punto en la pestaña **Point** de la ventana **Elementary Entity Context** y se hace clic en **Add**, o se ubica el puntero del ratón en la coordenada correspondiente sobre cuadrícula y se oprime la tecla **e**, como lo indica la Figura 10.3. Este procedimiento se puede repetir para construir nuevos puntos y se termina oprimiendo la tecla **q**.

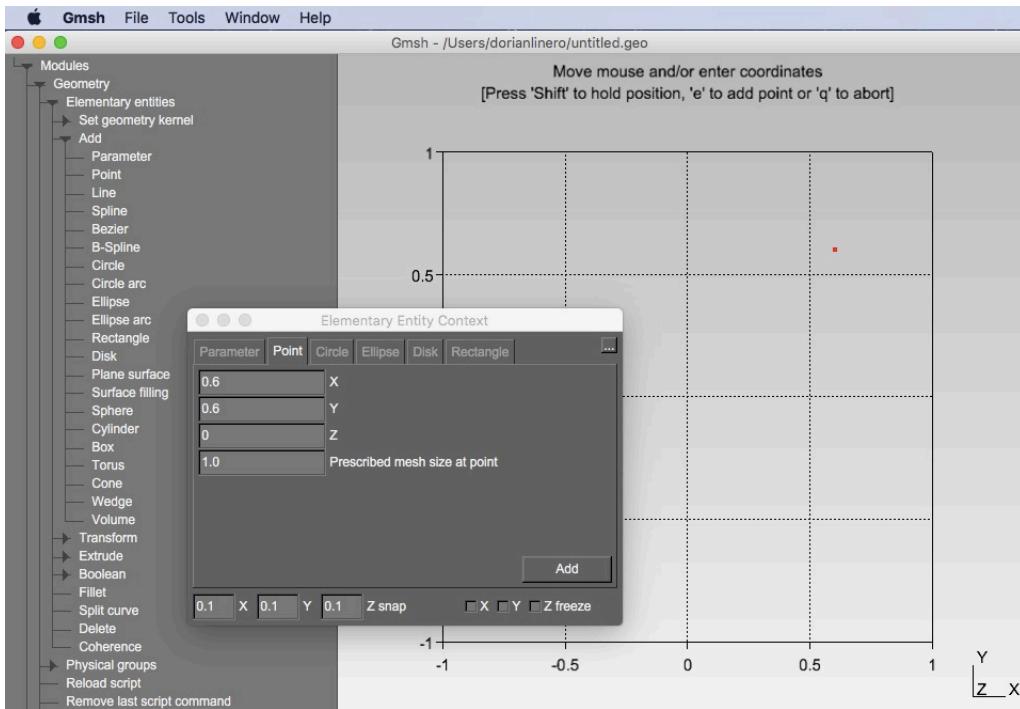
La precisión del puntero sobre la cuadrícula se establece por los parámetros **X** **Y** **Zsnap** que aparecen en la parte inferior de la ventana **Elementary Entity Context**.

El tamaño de los elementos finitos que serán construidos sobre el punto está definido por el parámetro **Prescribed mesh size at point** de la ventana **Elementary Entity Context**. Si dicho parámetro aún no se ha escogido, se podrá establecer más adelante, como se indicará en la Sección 10.12.

Cada vez que se crea un punto en el entorno gráfico se adiciona en el archivo de extensión **.geo** una línea con la siguiente sintaxis:

$$\text{Point}(\langle ipoint \rangle) = \{ \langle xcoord \rangle, \langle ycoord \rangle, \langle zcoord \rangle, \langle tamalla \rangle \}$$

donde  $\langle ipoint \rangle$  es el identificador del punto,  $\langle xcoord \rangle, \langle ycoord \rangle, \langle zcoord \rangle$  corresponden a las coordenadas  $x, y, z$  del punto, y  $\langle tamalla \rangle$  define el tamaño de los elementos finitos que serán construidos sobre el punto.



**Figura 10.3:** GMSH: crear un punto en el entorno gráfico. Menú lateral, ventana de coordenadas y cuadrícula interactiva.

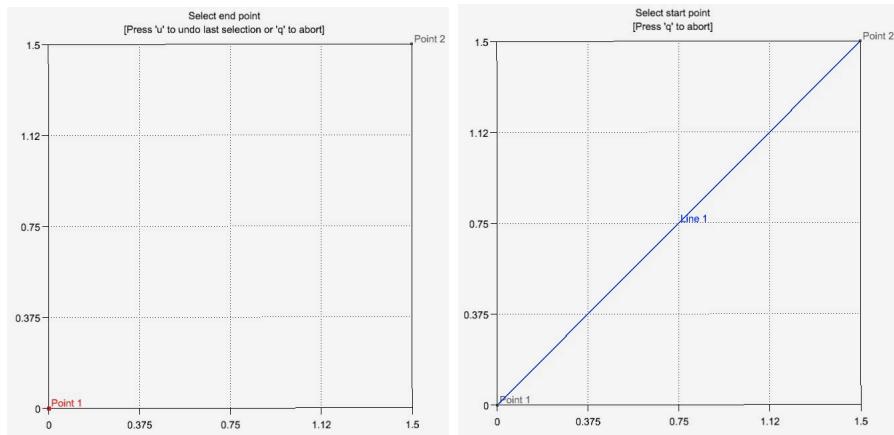
### 10.5.2 Construcción de líneas

Después de definidos los puntos se pueden construir líneas rectas de la siguiente forma: (i) se escoge **Modules**  $\triangleright$  **Geometry**  $\triangleright$  **Elementary entities**  $\triangleright$  **Add**  $\triangleright$  **Line** en el menú lateral, (ii) se ubica el puntero del ratón en el punto que corresponde al extremo inicial de la línea, (iii) se hace clic sobre el punto para seleccionarlo, y (iv) se repiten los dos últimos pasos sobre el punto que corresponda al extremo final de la línea, como se indica en la Figura 10.4. Este procedimiento se puede repetir para construir nuevas líneas y se termina oprimiendo la tecla **q**.

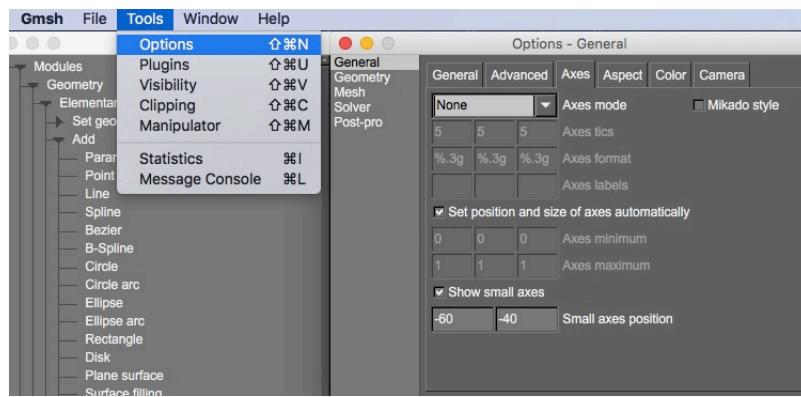
Cada vez que se crea una línea recta en el entorno gráfico se adiciona en el archivo de extensión **.geo** una instrucción con la siguiente sintaxis:

```
Line(ilinea) = {inudo, jnudo};
```

donde *ilinea* es el identificador de la línea, y *inudo*, *jnudo* corresponden a los identificadores de los puntos inicial y final de la línea.



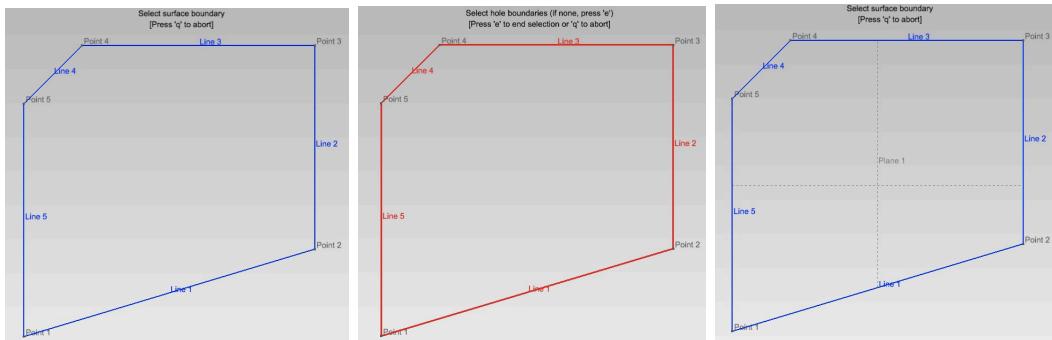
**Figura 10.4:** GMSH. Crear una línea recta sobre la cuadrícula del entorno gráfico: selección del punto que corresponde al extremo inicial de la línea y selección del punto que corresponde al extremo final de la línea



**Figura 10.5:** GMSH. Modificar o retirar el tipo de cuadrícula en el entorno gráfico.

También se pueden construir diferentes tipos de líneas curvas escogiendo en el menú lateral **Modules >Geometry >Elementary entities >Add >...**, alguna de las siguientes formas: **>Spline**, **>Bezier**, **>B-Spline**, **>Circle arc** o **>Ellipse arc**.

El tipo cuadrícula se puede modificar o retirar escogiendo **Tools >Options** del menú superior, y seleccionando **General** de la lista lateral, **Axes** de las pestañas y **Axes mode** de la lista desplegable, encontradas en la ventana **Options** como lo ilustra la Figura 10.5.



**Figura 10.6:** GMSH. Crear una superficie en el entorno gráfico a partir de las líneas que constituyen su contorno.

### 10.5.3 Construcción de superficies

Una superficie se construye de la siguiente manera: (i) se escoge **Modules**  $\triangleright$  **Geometry**  $\triangleright$  **Elementary entities**  $\triangleright$  **Add**  $\triangleright$  **Plane surface** del menú lateral, (ii) se seleccionan las líneas rectas o curvas que constituyen el contorno de la superficie haciendo clic con el ratón, y (iii) se oprime la tecla **e**. Para finalizar la creación de superficies se oprime la tecla **q**. En la Figura 10.6 se ilustra la construcción de una superficie a partir de 5 líneas existentes.

Cada vez que se crea una superficie en el entorno gráfico se adicionan en el archivo de extensión **.geo** dos instrucciones. La primera establece un grupo de líneas que se conectan entre sí por sus extremos, denominada curva de ciclo y escrita con el siguiente formato:

```
Curve Loop(icurciclo) = {ilinea, jlinea, klinea, ...};
```

donde *icurciclo* es el identificador del grupo de líneas continuas conectadas entre sí, mientras que *ilinea*, *jlinea*, *klinea*, ... corresponden a los identificadores de cada línea.

La segunda instrucción establece la superficie de acuerdo con la siguiente sintaxis:

```
Plane Surface(isuper) = {icurciclo};
```

donde *isuper* es el identificador de la superficie, y *icurciclo* es el identificador de la curva de ciclo definida previamente con el comando **Curve Loop**.

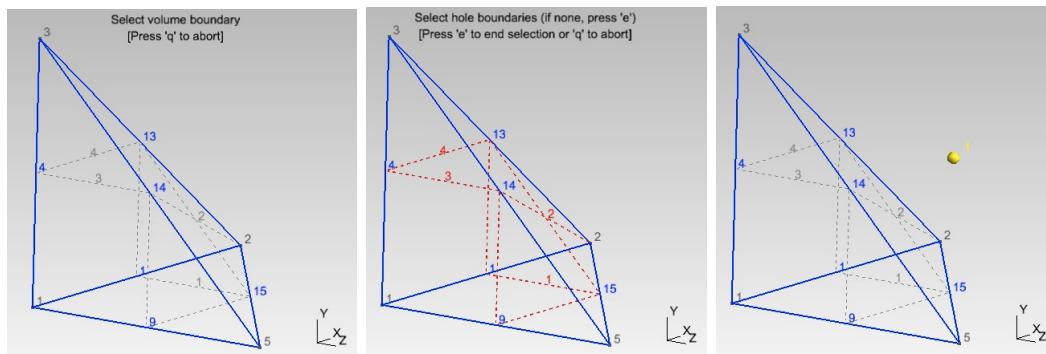


Figura 10.7: GMSH. Crear un volumen en el entorno gráfico a partir de las superficies que constituyen su contorno.

#### 10.5.4 Construcción de volúmenes

Los sólidos en dominios tridimensionales requieren ser definidos mediante entidades geométricas tipo volumen. Tal entidad se construye definiendo las superficies que la encierran o mediante diferentes tipos de extrusión de superficies.

Dado el conjunto de superficies que pueden encerrar un volumen, éste último se construye de la siguiente forma: (i) se escoge **Modules >Geometry >Elementary entities >Add >Volume** del menú lateral, (ii) se seleccionan las superficies que constituyen el contorno del volumen haciendo clic con el ratón, y (iii) se oprime la tecla **e**. Para finalizar la creación de volúmenes se oprime la tecla **q**. En la Figura 10.7 se ilustra la construcción de un volumen a partir de 4 superficies existentes.

Cada vez que se crea una superficie en el entorno gráfico se adicionan en el archivo de extensión **.geo** dos líneas de comando. La primera establece un grupo de superficies que se conectan entre sí por sus lados, denominado superficie de ciclo y escrita con el siguiente formato:

**Surface Loop(*isupciclo*) = {*isup*, *jsup*, *ksup*, ...};**

donde *isupciclo* es el identificador del grupo conformado por un conjunto de superficies conectadas por sus lados, mientras que *isup*, *jsup*, *ksup*, ... corresponden a los identificadores de cada superficie.

La segunda línea de comando define el volumen de acuerdo con la siguiente sintaxis:

---

```
Volume(ivol) = {isupciclo};
```

donde *ivol* es el identificador del volumen, y *isupciclo* es el identificador de la superficie de ciclo definida previamente con el comando Surface Loop.

## 10.6 Construcción de formas habituales con una instrucción

Muchas veces puede ser práctico construir los puntos, líneas y la superficie que definen una forma habitual con una sola instrucción. El motor gráfico OpenCASCADE de GMSH, permite crear rectángulos, círculos, paralelepípedos, esferas, cilindros y otros tipos de formas geométricas habituales en un solo paso.

En el menú lateral Modules  $\triangleright$ Geometry  $\triangleright$ Elementary entities  $\triangleright$ Add, se encuentran las entidades con formas que pueden generarse. A continuación se activa una ventana interactiva donde se definen las características de la forma geométrica.

### 10.6.1 Construcción de un rectángulo

Para crear un rectángulo, primero se selecciona Modules  $\triangleright$ Geometry  $\triangleright$ Elementary entities  $\triangleright$ Add  $\triangleright$ Rectangle en el menú lateral, lo cual activa la ventana Elementary entities context. En esta ventana se introducen: las coordenadas del extremo inferior izquierdo del rectángulo en las cajas X,Y,Z, y su base y altura en las cajas DX y DY, respectivamente, sobre el plano *xy*. Haciendo clic en el botón Add se construye la geometría. Para finalizar se cierra la ventana y se oprime la tecla q.

Cuando se ejecuta esta instrucción se adiciona automáticamente la siguiente línea de comando al archivo .geo:

```
Rectangle( idsu ) = { extx, exty, extz, disx, disy, rede };
```

donde *idsu* es el número identificador de la superficie, *extx*, *exty*, *extz* son las coordenadas del extremo inferior izquierdo, *disx*, *disy* corresponden a la base y la altura del rectángulo y *rede* es un parámetro para redondear las esquinas.

### 10.6.2 Construcción de un círculo

Para crear un círculo o una superficie encerrada por una elipse, primero se selecciona Modules  $\triangleright$  Geometry  $\triangleright$  Elementary entities  $\triangleright$  Add  $\triangleright$  Disk en el menú lateral, lo cual activa la ventana Elementary entities context. En esta ventana se introducen: las coordenadas del centro del círculo en las cajas Center X, Center Y y Center Z, y su radios Radius X y Radius Y, en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Haciendo clic en el botón Add se construye la geometría. Para finalizar se cierra la ventana y se oprime la tecla q. Si la forma es un círculo se introduce el mismo valor de Radius X y Radius Y, en cambio si la superficie está encerrada por una elipse se definen valores diferentes de ese parámetro.

Cuando se ejecuta esta instrucción se adiciona automáticamente la siguiente línea de comando al archivo .geo:

```
Disk( idsu ) = { cenx, ceny, cenz, radx, rady };
```

donde *idsu* es el número identificador de la superficie, *cenx*, *ceny*, *cenz* son las coordenadas del centro del círculo, y *radx*, *rady* corresponden a los radios en dirección  $x$  y  $y$ .

### 10.6.3 Construcción de un paralelepípedo regular

Para crear un volumen de forma de paralelepípedo regular o caja, primero se selecciona Modules  $\triangleright$  Geometry  $\triangleright$  Elementary entities  $\triangleright$  Add  $\triangleright$  Box en el menú lateral, lo cual activa la ventana Elementary entities context. Allí se indican las coordenadas del extremo anterior inferior izquierdo del paralelepípedo, escribiendo en las casillas X, Y y Z. Asimismo, se establecen las dimensiones en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , escribiendo en las casillas DX, DY y DZ, respectivamente.

La caja se construye haciendo clic en el botón Add y para finalizar se cierra la ventana y se oprime la tecla q. Cuando se ejecuta tal acción se adiciona automáticamente la siguiente línea de comando al archivo .geo:

```
Box( idvo ) = { extx, exty, extz, disx, disy, disz };
```

donde *idvo* es el número identificador del volumen, *extx*, *exty*, *extz* son las coordenadas de un extremo de la caja y *disx*, *disy*, *disz* son las dimensiones en dirección *x*, *y* y *z*.

#### 10.6.4 Construcción de un cilindro

Para crear un volumen de forma cilíndrica, primero se selecciona **Modules** ▷ **Geometry** ▷ **Elementary entities** ▷ **Add** ▷ **Cylinder** en el menú lateral, lo cual activa la ventana **Elementary entities context**. Allí se introducen las coordenadas del centro de un círculo de la base del cilindro en las casillas **Center base X**, **Center base Y** y **Center base Z**. Asimismo, se definen las proyecciones del eje longitudinal del cilindro en las direcciones *x*, *y* y *z*, en las casillas **Axis DX**, **Axis DY** y **Axis DZ**, respectivamente. El radio del círculo base se escribe en la caja **Radius**. En general, el cilindro corresponde a la extrusión de un sector de círculo, cuyo ángulo está definido por el parámetro **Angle** en radianes. Si **Angle = 2\*Pi** el sector circular es un círculo completo.

El cilindro se construye haciendo clic en el botón **Add** y para finalizar se cierra la ventana y se oprime la tecla **q**.

Cuando se ejecuta esta instrucción se adiciona automáticamente la siguiente línea de comando al archivo **.geo**:

```
Cylinder( idvo ) = { cenx, ceny, cenz, axdx, axdy, axdz, radi, angl };
```

donde *idvo* es el número identificador del volumen, *cenx*, *ceny*, *cenz* son las coordenadas del centro del círculo de la base del cilindro; *axdx*, *axdy*, *axdz* corresponde a las proyecciones del eje longitudinal del cilindro en las direcciones *x*, *y* y *z*, y *radi* es el radio del círculo base. El parámetro *angl* determina el ángulo en radianes del sector circular de la sección transversal del cilindro.

### 10.6.5 Construcción de una esfera

Para crear un volumen de forma esférica, primero se selecciona **Modules**  $\triangleright$  **Geometry**  $\triangleright$  **Elementary entities**  $\triangleright$  **Add**  $\triangleright$  **Sphere** en el menú lateral, lo cual activa la ventana **Elementary entities context**. Allí se introducen las coordenadas del centro de la esfera en las cajas **Center X**, **Center Y** y **Center Z**. Asimismo, se escribe el radio en la caja **Radius**. Los parámetros **Angle 1**, **Angle 2** y **Angle 3**, permiten representar volúmenes de cuñas esféricas. Para una esfera completa **Angle 1 = -Pi/2**, **Angle 2 = Pi/2**, **Angle 3 = 2\*Pi**.

La esfera se construye haciendo clic en el botón **Add** y para finalizar se cierra la ventana y se oprime la tecla **q**. Cuando se ejecuta tal acción se adiciona automáticamente la siguiente línea de comando al archivo **.geo**:

```
Sphere( idvo ) = { cenx, ceny, cenz, radi, ang1, ang2, ang3 };
```

donde *idvo* es el número identificador del volumen, *cenx*, *ceny*, *cenz* son las coordenadas del centro de la esfera y *radi* es su radio. Los parámetros *ang1*, *ang2* y *ang3*, permiten la construcción de una cuña esférica.

## 10.7 Operaciones booleanas entre entidades geométricas

Las operaciones booleanas permiten construir regiones a partir de la intersección, unión y resta de superficies o volúmenes preexistentes.

GSMH define **object** o entidad(es) objeto como aquella(s) que será(n) operada(s) (restada, unida o intersectada) por la(s) entidad(es) denominada(s) **tool** o entidad(es) herramienta.

### 10.7.1 Resta entre superficies

La resta entre superficies se describe mediante un ejemplo, en el cual se construye una superficie con dos orificios a partir de la diferencia entre un rectángulo (entidad objeto) y dos círculos en su interior (entidades herramienta). El procedimiento es el siguiente (Figura 10.8):

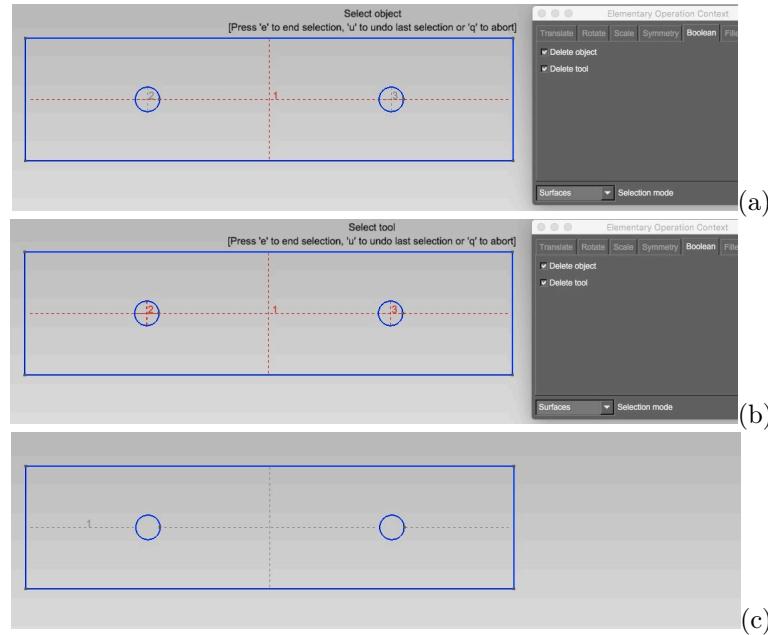
- Escoger Modules >Geometry >Elementary entities >Boolean >Difference(Cut) del menú lateral. Esto activa la pestaña Boolean de la ventana Elementary operation context.
- Seleccionar Surface en la caja desplegable Selection mode.
- Seleccionar la(s) superficie(s) que será(n) la(s) entidad(es) objeto, y terminar la selección con la tecla e. En particular, seleccionar el rectángulo.
- Seleccionar la(s) superficie(s) que será(n) la(s) entidad(es) herramienta, y terminar la selección con la tecla e. En particular, seleccionar los círculos.
- Terminar la operación con la tecla q. El resultado es la eliminación de las superficies preexistentes (objeto y herramienta) y la creación de una nueva superficie con orificios, la cual está identificada con el número 1.

Después de realizar este procedimiento en el entorno gráfico, se adiciona en el archivo de extensión .geo, la siguiente línea de comando:

```
BooleanDifference{ Surface{1}; Delete; }{ Surface{2}; Surface{3};  
Delete; }
```

donde Surface{1} del primer corchete identifica al rectángulo (entidad objeto), mientras que Surface{2}; Surface{3} del segundo corchete indican a los círculos (entidades herramienta). La palabra clave Delete en el primero y en el segundo corchete establece que serán eliminadas las entidades objeto y herramienta, respectivamente.

En ocasiones las entidades objeto y herramienta están superpuestas de tal forma que no es posible seleccionar la entidad que está detrás de la otra. Para superar



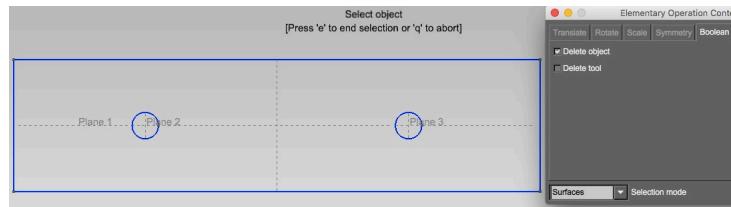
**Figura 10.8:** GMSH. Construcción de una superficie a partir de la resta entre un rectángulo y dos círculos.

esto, se puede ocultar la entidad que está al frente mientras se realiza la operación booleana, activando la ventana **Visibility** desde el menú superior **Tools ▷ Visibility**, como se explicará en la Sección 10.13.

### 10.7.2 Resta entre la entidad objeto y la herramienta, conservando la herramienta

A partir del rectángulo y dos círculos, se desea construir una rectángulo con dos orificios y conservar las dos superficies circulares. El procedimiento es el mismo indicado en el apartado anterior, excepto que se debe desmarcar la caja de verificación **Delete tool**, en la pestaña **Boolean** de la ventana **Elementary operation context** (Figura 10.9).

El resultado es la eliminación del rectángulo preexistente identificado con el número 1 (entidad objeto), la conservación de los círculos identificados con los números 2 y 3 (entidades herramienta) y la creación de una nueva superficie con dos orificios, la cual está identificada con el número 1.



**Figura 10.9:** GMSH. Construcción de una superficie a partir de la resta entre un rectángulo y dos círculos, conservando los dos círculos.

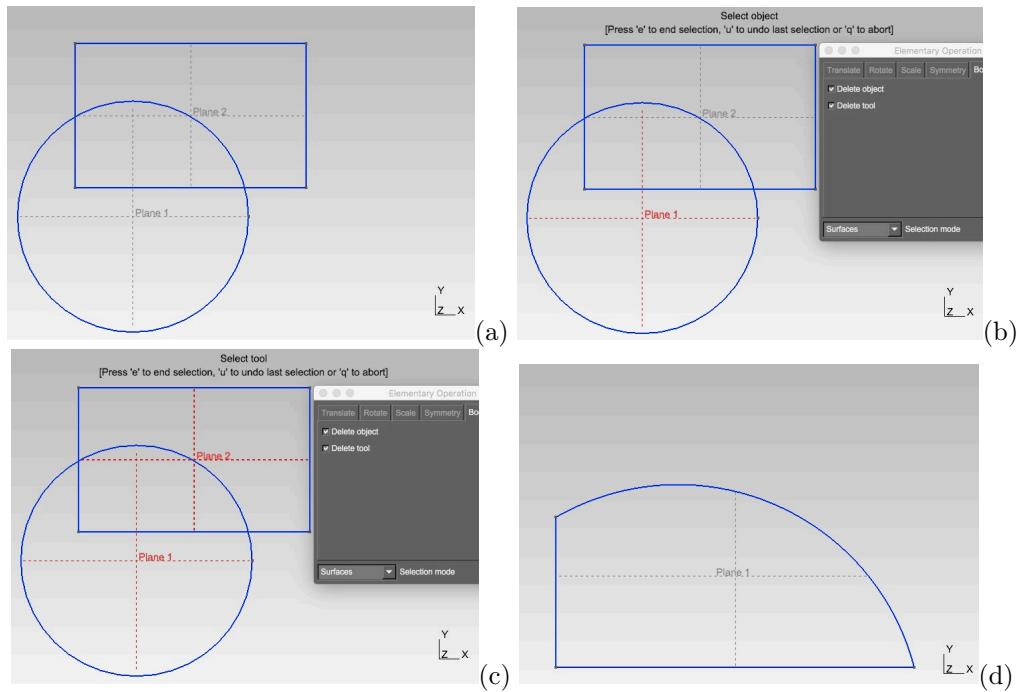
Después de realizar este procedimiento en el entorno gráfico, se adiciona en el archivo de extensión .geo, la siguiente línea de comando:

```
BooleanDifference{ Surface{1}; Delete; }{ Surface{2}; Surface{3}; }
```

### 10.7.3 Intersección entre superficies

La intersección entre superficies se describe mediante un ejemplo, en el cual se construye una superficie que corresponde a la intersección entre un círculo (entidad objeto) y un rectángulo (entidades herramienta). El procedimiento es el siguiente (Figura 10.10):

- Escoger Modules > Geometry > Elementary entities > Boolean > Intersection(Common) del menú lateral. Esto activa la pestaña Boolean de la ventana Elementary operation context.
- Seleccionar Surface en la caja desplegable Selection mode.
- Seleccionar la(s) superficie(s) que será(n) la(s) entidad(es) objeto, y terminar la selección con la tecla e. En particular, seleccionar el círculo.
- Seleccionar la(s) superficie(s) que será(n) la(s) entidad(es) herramienta, y terminar la selección con la tecla e. En particular, seleccionar el rectángulo.
- Terminar la operación con la tecla q. El resultado es la eliminación de las superficies preexistentes (objeto y herramienta) y la creación de una nueva superficie identificada con el número 1, que corresponde a la intersección.



**Figura 10.10:** GMSH. Construcción de una superficie de la intersección entre un círculo y un rectángulo.

Después de realizar este procedimiento en el entorno gráfico, se adiciona en el archivo de extensión .geo, la siguiente línea de comando:

```
BooleanIntersection{ Surface{1}; Delete; }{ Surface{2}; Delete; }
```

donde **Surface{1}** del primer corchete identifica a la entidad objeto, en este caso el círculo y **Surface{2}** del segundo corchete indica a la entidad herramienta, en particular el rectángulo. La palabra clave **Delete** en el primero y en el segundo corchete establece que serán eliminadas tanto la entidad objeto como la herramienta.

#### 10.7.4 Unión entre superficies mediante la operación Union

La unión entre superficies se describe mediante el ejemplo mostrado en la Figura 10.11(a), en el cual se construye una superficie que corresponde a la unión entre un círculo (entidad objeto) y un rectángulo (entidades herramienta). El procedimiento es el siguiente:

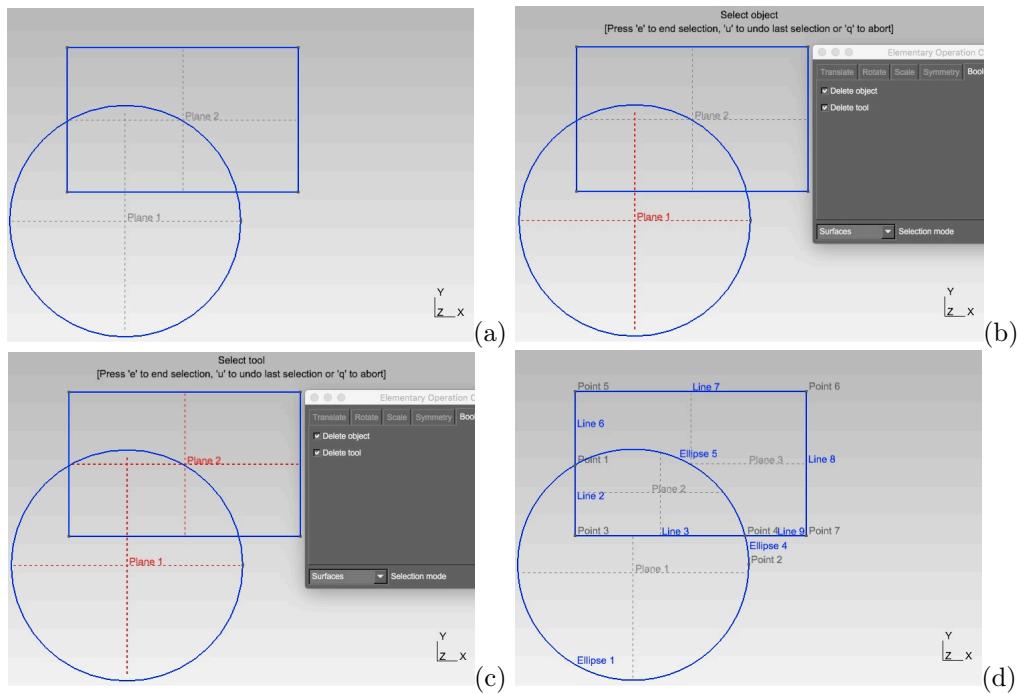
- Escoger Modules  $\triangleright$  Geometry  $\triangleright$  Elementary entities  $\triangleright$  Boolean  $\triangleright$  Union(Fuse) del menú lateral. Esto activa la pestaña Boolean de la ventana Elementary operation context.
- Seleccionar Surface en la caja desplegable Selection mode.
- Seleccionar la(s) superficie(s) que será(n) la(s) entidad(es) objeto, y terminar la selección con la tecla e. En particular, seleccionar el círculo (Figura 10.11(b)).
- Seleccionar la(s) superficie(s) que será(n) la(s) entidad(es) herramienta, y terminar la selección con la tecla e. En particular, seleccionar el rectángulo (Figura 10.11(c)).
- Terminar la operación con la tecla q. La Figura 10.11(d) ilustra el resultado, donde se eliminan las superficies preexistentes (entidades objeto y herramienta) y se crean tres nuevas superficies: la número 1 corresponde a la resta entre el objeto y la herramienta, la número 3 es la resta entre la herramienta y el objeto, y la número 2 corresponde a la intersección entre las dos entidades.

Después de realizar este procedimiento en el entorno gráfico, se adiciona en el archivo de extensión .geo, la siguiente línea de comando:

```
BooleanUnion{ Surface{1}; Delete; }{ Surface{2}; Delete; }
```

donde Surface{1} del primer corchete identifica a la entidad objeto, en este caso el círculo y Surface{2} del segundo corchete indica a la entidad herramienta, en particular el rectángulo. La palabra clave Delete en el primero y en el segundo corchete establece que serán eliminadas tanto la entidad objeto como la herramienta.

La operación booleana de unión también permite fusionar entidades geométricas superpuestas en el contorno entre varias entidades de mayor jerarquía.



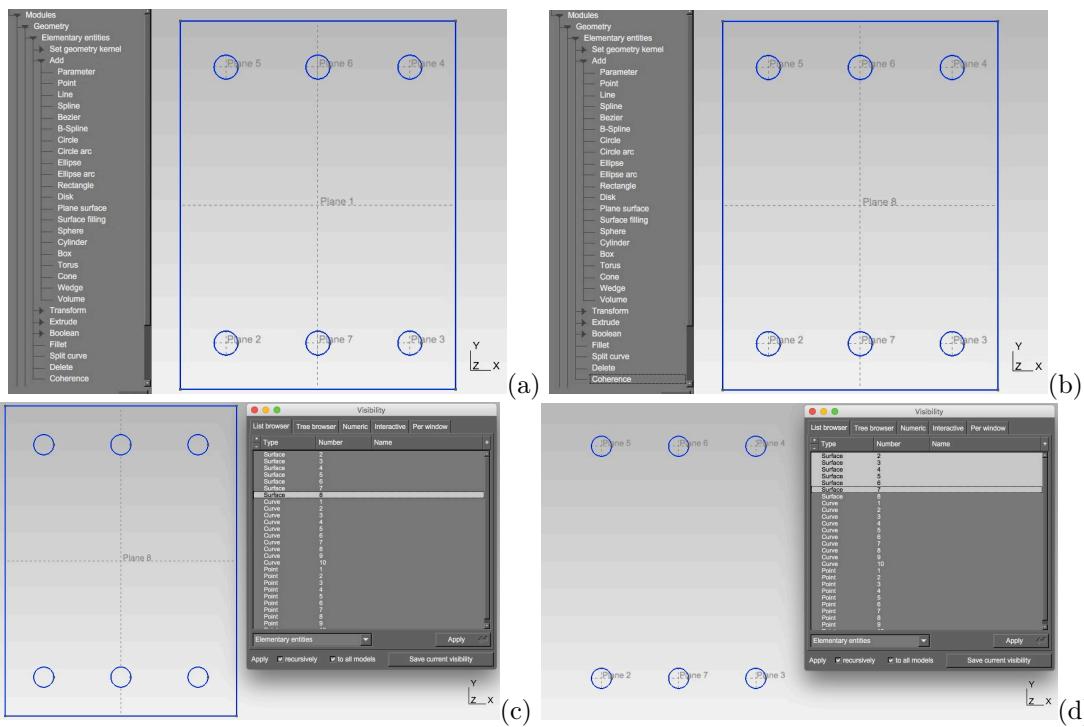
**Figura 10.11:** GMSH. Construcción de una superficie de la unión entre un círculo y un rectángulo.

### 10.7.5 Unión entre todas las superficies mediante la operación Coherence

La unión entre las superficies existentes se puede realizar mediante el procedimiento anterior. Sin embargo, cuando se deben unir muchas superficies es útil hacerlo a través de una sola operación, denominada **Coherence**.

Por ejemplo, se construye el rectángulo **Plane 1** y seis círculos superpuestos **Plane 2** a **Plane 7**, como se muestra en la Figura 10.12(a). A continuación se unen las superficies, haciendo clic en **Modules**  $\triangleright$  **Geometry**  $\triangleright$  **Elementary entities**  $\triangleright$  **Coherence** del menú lateral. El resultado se muestra en la Figura 10.12(b), donde la superficie **Plane 8** corresponde a la resta entre el rectángulo y los círculos.

Para visualizar por separado las superficies resultantes, se hace clic en **Tools**  $\triangleright$  **Visibility** del menú superior y se escoge la pestaña **List browser**. Allí se selecciona **Surface 8** y se hace clic sobre el botón **Apply**, presentando exclusivamente la superficie **Plane 8**, como lo muestra la Figura 10.12(c). Asimismo, se pueden visualizar los



**Figura 10.12:** GMSH. Construcción de las superficies resultantes de la unión entre un rectángulo y seis círculos.

círculos escogiendo **Surface 2** a **Surface 7** en la pestaña **List browser** y haciendo clic en **Apply**, como se ilustra en la Figura 10.12(d).

Después de realizar este procedimiento en el entorno gráfico, se adiciona en el archivo de extensión **.geo**, la línea de comando: **Coherence**;

### 10.7.6 División de una superficie mediante una línea

La división de una superficie mediante una línea se puede describir con un ejemplo, en el cual se busca dividir un círculo en dos semi-círculos por una línea recta. El procedimiento es el siguiente:

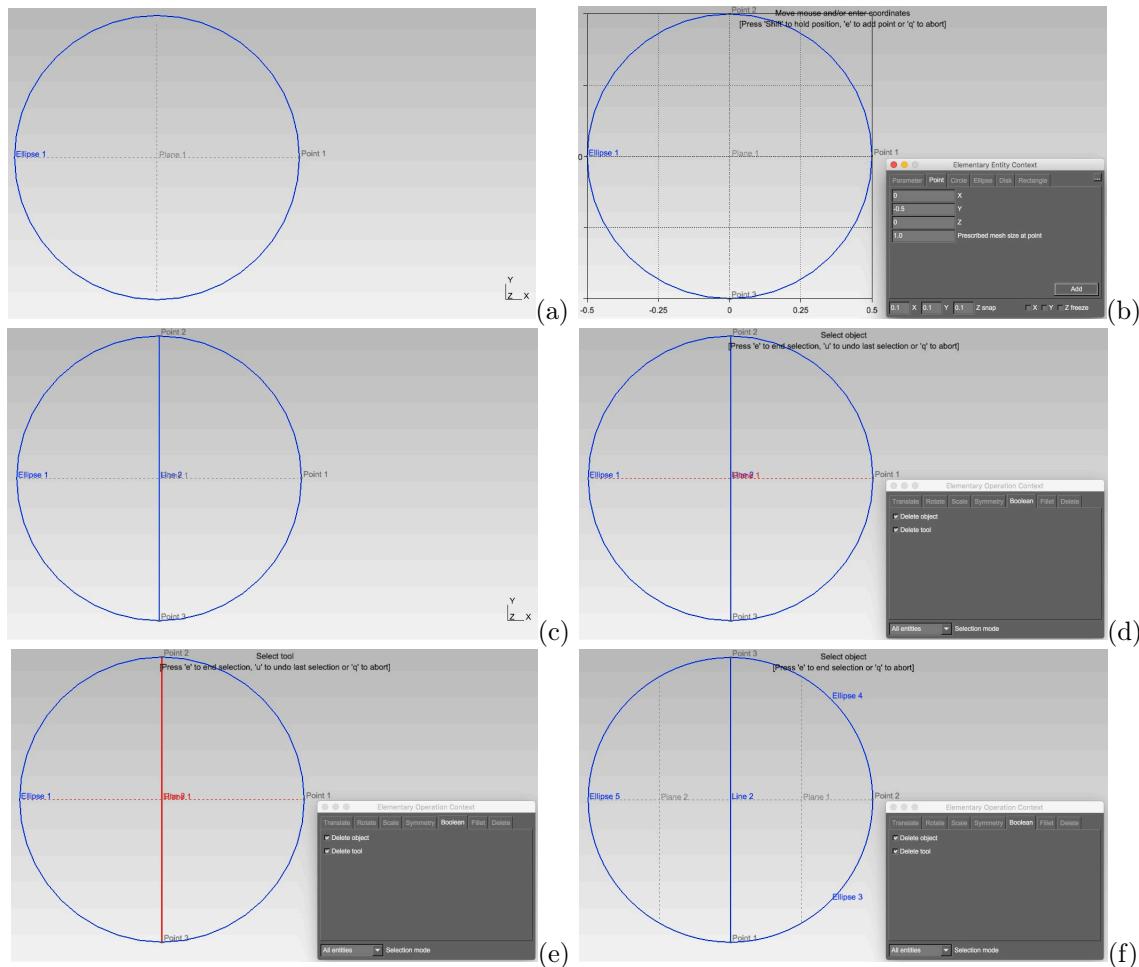
- Construir un círculo como se ilustra en la Figura 10.13(a), cuyas entidades son el punto **Point 1**, la circunferencia **Ellipse 1** y el plano **Plane 1**.
- Construir los puntos **Point 2** y **Point 3** y la línea recta **Line 2**, mostrados en las figuras 10.13(b) y (c).

- Escoger Modules > Geometry > Elementary entities > Boolean > Fragments(Coherence) del menú lateral. Esto activa la pestaña Boolean de la ventana Elementary operation context.
- Seleccionar Surface en la caja desplegable Selection mode.
- Seleccionar la(s) superficie(s) que será(n) la(s) entidad(es) objeto, y terminar la selección con la tecla e. En particular, seleccionar el círculo (Figura 10.13(d)).
- Seleccionar la(s) superficie(s) que será(n) la(s) entidad(es) herramienta, y terminar la selección con la tecla e. En particular, se selecciona Lines en la caja desplegable Selection mode y se hace clic sobre la línea Line 2 (Figura 10.13(e)).
- Terminar la operación con la tecla q. La Figura 10.13(f) ilustra el resultado, donde se eliminan las superficies preexistentes (entidades objeto y herramienta) y se crean dos nuevas superficies en forma de semi-círculo: Plane 1 limitado por las líneas Ellipse 5 y Line 2, y Plane 2 conformado por Ellipse 3, Ellipse 4 y Line 2.

Después de realizar este procedimiento en el entorno gráfico, automáticamente se adiciona en el archivo de extensión .geo, la siguiente línea de comando:

```
BooleanFragments{ Surface{1}; Delete; }{ Curve{2}; Delete; }
```

donde Surface{1} del primer corchete identifica a la entidad objeto, en este caso el círculo y Surface{2} del segundo corchete indica a la entidad herramienta, en particular la línea Line 2. La palabra clave Delete en el primero y en el segundo corchete establece que serán eliminadas tanto la entidad objeto como la herramienta.



**Figura 10.13:** GMSH. División de un círculo en dos semi-círculos mediante una línea recta.

### 10.7.7 Fusionar puntos y líneas superpuestas

En ocasiones se construyen superficies en las cuales hay nudos y líneas que ocupan el mismo lugar geométrico. Éste caso genera mallas de elementos finitos con nudos incompatibles. La compatibilidad del desplazamiento en los nudos se puede asegurar si el contorno común entre dos superficies está definido previamente por los mismos puntos y líneas. Cuando lo anterior no ocurre, se deben fusionar las entidades superpuestas. El siguiente ejemplo describe la fusión de puntos y líneas en el contorno común entre dos superficies rectangulares.

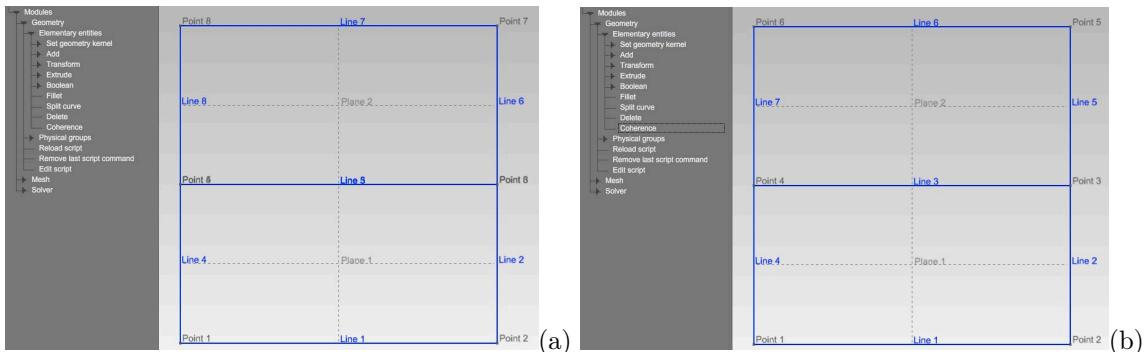


Figura 10.14: GMSH. Fusionar dos nudos o líneas superpuestas.

La primera superficie **Plane 1** está conformada por los puntos **Point 1**, **Point 2**, **Point 3** y **Point 4**, y las líneas **Line 1**, **Line 2**, **Line 3** y **Line 4**. La segunda superficie **Plane 2** contiene los puntos **Point 5**, **Point 6**, **Point 7** y **Point 8**, y las líneas **Line 5**, **Line 6**, **Line 7** y **Line 8**. La Figura 10.14(a) ilustra tales entidades geométricas, donde se observa que la línea **Line 3** y los puntos **Point 3** y **Point 4** de la superficie **Plane 1**, se superponen con la línea **Line 5** y los puntos **Point 5** y **Point 6** de la superficie **Plane 2**.

Para fusionar las entidades superpuestas se hace clic sobre **Modules**  $\triangleright$  **Geometry**  $\triangleright$  **Elementary entities**  $\triangleright$  **Coherence** del menú lateral. Si no se observa ningún cambio en el entorno gráfico, se debe refrescar haciendo un acercamiento o desplazamiento sobre la imagen. La Figura 10.14(b) ilustra la línea **Line 3** y los puntos **Point 3** y **Point 4**, compartidos entre las dos superficies.

Después de realizar este procedimiento, automáticamente se adiciona en el archivo de extensión **.geo**, línea de comando: **Coherence;**

### 10.7.8 Operaciones booleanas entre volúmenes

De la misma forma como se indicó en los apartados anteriores, se pueden realizar la resta, la intersección o la unión entre entidades tipo volumen. Como resultado de la operación se genera uno o varios volúmenes.

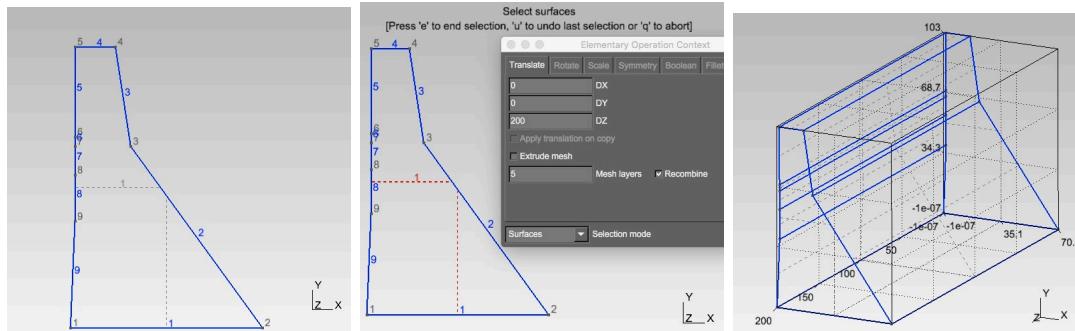
## 10.8 Construcción de entidades geométricas mediante extrusión de entidades de menor jerarquía

El procedimiento de extrusión consiste en generar una entidad geométrica a partir de la traslación o rotación de un conjunto de entidades de menor jerarquía. Por ejemplo, el volumen de una barra prismática se puede generar mediante la extrusión por traslación de un superficie que represente su sección transversal.

### 10.8.1 Construcción de volúmenes a partir de la extrusión por traslación de superficies

A continuación se indica el procedimiento para generar un volumen a partir de la extrusión por traslación en dirección  $z$  de una superficie sobre el plano  $xy$ , como se indica en la Figura 10.15.

- Se escoge Modules  $\triangleright$  Geometry  $\triangleright$  Elementary entities  $\triangleright$  Extrude  $\triangleright$  Translate del menú lateral. Esto activa la pestaña Translate la ventana Elementary operation context.



**Figura 10.15:** GMSH. Construcción de un volumen a partir de la extrusión por traslación de una superficie.

- En la caja DZ de la pestaña Translate, se escribe la longitud de la extrusión por translación en la dirección  $z$ , en este ejemplo 200 unidades de longitud.
- En la caja desplegable Selection mode de la pestaña Translate, se escoge Surfaces.
- En el entorno gráfico se selecciona la superficie que serán extruidas y se oprime la tecla e. Para finalizar la operación de extrusión se oprime la tecla q.
- Como resultado se ha construido un volumen con sus entidades vinculadas como superficies, líneas y puntos. Para observar el volumen se debe modificar la vista con el ratón.

En general, en las cajas DX, DY y DZ de la pestaña Translate en la ventana Elementary operation context, se pueden definir las componentes del vector de extrusión por translación en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Cada vez que se realiza una extrusión en el entorno gráfico se adiciona una línea de comando en el archivo de extensión .geo. Dicha instrucción tiene el siguiente formato:

```
Extrude { dx, dy, dz } {Surface{isup}; ... }
```

donde  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  son las longitudes de extrusión por translación en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Asimismo,  $isup$  es el identificador de la superficie que será extruida.

### 10.8.2 Construcción de volúmenes a partir de la extrusión por rotación de superficies

A continuación se indica el procedimiento para generar un volumen de revolución a partir de la extrusión por rotación de una superficie contenida en el plano  $xy$ , con respecto a un vector generatriz paralelo al eje  $y$ , como se indica en la Figura 10.16.

- Se escoge Modules  $\triangleright$  Geometry  $\triangleright$  Elementary entities  $\triangleright$  Extrude  $\triangleright$  Rotate del menú lateral. Esto activa la pestaña Rotate la ventana Elementary operation context.
- El vector generatriz es paralelo al eje  $y$  y está definido entre las coordenadas (-210,0,0) y (0,1,0) unidades de longitud. Por lo tanto en las cajas Axis point X, Axis point Y y Axis point Z de la pestaña Rotate, se debe escribir -210, 0 y 0, respectivamente. Asimismo, en las cajas Axis DX, Axis DY y Axis DZ se debe escribir 0,1 y 0, respectivamente.
- Para hacer la extrusión en un ángulo de  $90^\circ = \pi/2$ , se escribe tal cantidad en radianes sobre la caja Angle como Pi/2.
- En la caja desplegable Selection mode de la pestaña Translate, se selecciona Surfaces.
- En el entorno gráfico se selecciona(n) la(s) superficie(s) que serán extruidas y se oprime la tecla e. Para finalizar la operación de extrusión se oprime la tecla q.
- Como resultado se ha(n) construido el (o los) volumen(es), que se pueden visualizar modificando la vista con el ratón (Figura 10.16).

En general, sobre las cajas Axis point X, Axis point Y y Axis point Z de la pestaña Rotate, se escribes las coordenadas del extremo inicial del vector generatriz de la extrusión por rotación. Asimismo, las cajas Axis DX, Axis DY y Axis DZ, determinan las coordenadas del extremo final de tal vector. Por otro lado, la caja Angle define el ángulo en radianes de la extrusión por rotación.

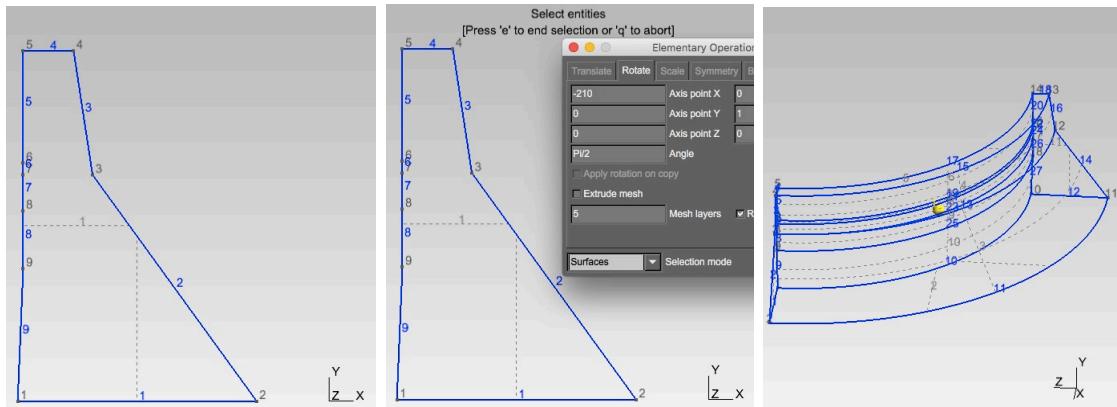


Figura 10.16: GMSH. Construcción de un volumen a partir de la extrusión por translación de una superficie.

Cada vez que se realiza una extrusión en el entorno gráfico se adiciona una línea de comando en el archivo de extensión .geo. Dicha instrucción tiene el siguiente formato:

```
Extrude { { dx, dy, dz }, { xp, yp, zp }, ang } {Surface{ isup }; ... }
```

donde  $xp$ ,  $yp$ ,  $zp$  y  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  son las coordenadas del punto inicial y final respectivamente de la línea generatriz de la extrusión por rotación. Asimismo,  $ang$  es el ángulo de extrusión y  $isup$  es el identificador de la superficie que será extruida.

## 10.9 Preparación de entidades físicas en GMSH para el proceso en PEFiCA en problemas bidimensionales

Las entidades físicas del programa GMSH permiten agrupar puntos, líneas, superficies o volúmenes que representen una condición o característica física común. Cada entidad física tiene un nombre y un número que lo identifica. En particular el programa PEFiCA 2.0 lee los desplazamientos conocidos, las cargas aplicadas, algunas características geométricas y las propiedades mecánicas a través del nombre de las entidades físicas designadas en GMSH.

Particularmente en problemas de sólidos en condición plana de esfuerzos o de deformaciones denominados problemas bidimensionales, las entidades físicas definen los parámetros indicados a continuación.

### 10.9.1 Definición del espesor y las propiedades mecánicas del material

El espesor y las propiedades mecánicas de las regiones que conforman el dominio del problema se establecen en categorías de la siguiente forma:

- En el menú lateral mostrado a la izquierda en la Figura 10.17, se escoge **Modules** >**Geometry** >**Physical groups** >**Add** >**Surface**.
- En la ventana **Physical group context** mostrada a la derecha en la Figura 10.17, se escribe el nombre de la entidad física con la siguiente sintaxis:

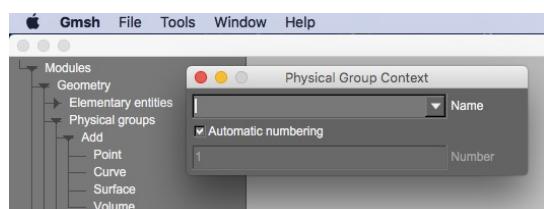
```
CATE EYOU=eyou POIS=pois GAMM=gamm TESP=tesp TIPR=tipr
```

donde *eyou* es el módulo de Young, *pois* es la relación de Poisson, *gamm* es el peso específico (si se omite el parámetro *GAMM=0*), *tesp* es el espesor, *tipr* es el tipo de problema (si se omite el parámetro *TIPR=20*), si es un problema plano de esfuerzos *tipr* es 20 y si es un problema plano de deformaciones *tipr* es 21. No se deben dejar espacios antes o después del carácter =.

- Se selecciona(n) la(s) superficie(s) que están asociadas a tal entidad física y se oprime la tecla e.
- Se finaliza el procedimiento oprimiendo la tecla q.

En el análisis se considera el peso propio del material en dirección *-y*, cuando el valor del parámetro *gamm* es diferente de cero.

El procedimiento anterior se puede repetir para crear una nueva entidad física que represente otra región del dominio con espesor o propiedades mecánicas diferentes. Tales características serán atribuidas a los elementos finitos que pertenecen a cada región, en el momento de generar la malla.



**Figura 10.17:** GMSH: ventana de creación de entidad física.

Cada vez que se crea una entidad física asociada con el espesor y las propiedades mecánicas del material en el entorno gráfico se adiciona en el archivo de extensión **.geo** la siguiente línea de comando:

```
Physical Surface( "CATE EYOU=eyou POIS=pois GAMM=gamm
TESP=tesp TIPR=tipr ") = { isup , jsup , ... };
```

donde *isup,jsup,...* son los identificadores de las superficies designadas a la entidad física.

### 10.9.2 Definición de desplazamientos conocidos: condiciones de borde

Los lugares del dominio donde se conoce el valor del desplazamiento se establecen en GMSH, sobre puntos o líneas existentes, de la siguiente manera:

- Si el desplazamiento conocido está definido en una línea, se escoge **Modules**  $\triangleright$ **Geometry**  $\triangleright$ **Physical groups**  $\triangleright$ **Add**  $\triangleright$ **Curve** en el menú lateral mostrado a la izquierda en la Figura 10.17. En cambio, si el desplazamiento conocido está ubicado en un punto, se escoge **Modules**  $\triangleright$ **Geometry**  $\triangleright$ **Physical groups**  $\triangleright$ **Add**  $\triangleright$ **Point** en el menú lateral.
- En la ventana **Physical group context** mostrada a la derecha en la Figura 10.17, se escribe el nombre de la entidad física con la siguiente sintaxis:

```
DISP UX=ux UY=uy
```

donde *ux* es el valor conocido de la componente de desplazamiento en dirección *x*, y *uy* es el valor conocido de la componente de desplazamiento en dirección *y*. Solo se indica la componente de valor conocido, en consecuencia, si en un punto o una línea se conoce exclusivamente el desplazamiento en *y* la sintaxis es: **DISP UY=*uy***. Asimismo, si solo se conoce el desplazamiento en *x* la sintaxis es: **DISP UX=*ux***. No se deben dejar espacios antes o después del carácter **=**.

- Se selecciona(n) la(s) líneas(s) o los puntos que están asociadas a tal entidad física y se oprime la tecla **e**.

- Se finaliza el procedimiento oprimiendo la tecla q.

El procedimiento anterior se puede repetir para crear una nueva entidad física que represente otro grupo de líneas o puntos donde se conozca alguna componente de desplazamiento. Los desplazamientos conocidos serán atribuidos a los nudos que pertenezcan a las líneas o puntos vinculados a la entidad física, en el momento de generar la malla.

Si varias entidades físicas sobre líneas definen el mismo desplazamiento conocido, se conserva el valor establecido por la primera entidad física. Por otro lado, si un mismo desplazamiento conocido ha sido definido por una entidad física sobre línea y otra sobre punto, se conserva esta última.

Cada vez que se crea una entidad física sobre líneas en el entorno gráfico para definir desplazamientos conocidos, se adiciona en el archivo de extensión .geo la siguiente línea de comando:

```
Physical Curve ( "DISP UX=ux UY=uy" ) = { ilin , jlin , ... };
```

donde *ilin,jlin,...* son los identificadores de las líneas designadas a la entidad física.

Asimismo, cuando se asigna una entidad física de este tipo sobre puntos, la línea de comando en el archivo .geo es:

```
Physical Point ( "DISP UX=ux UY= uy" ) = { ipun , jpun , ... };
```

donde *ipun,jpun,...* son los identificadores de los puntos designados a la entidad física.

### 10.9.3 Aplicación de cargas puntuales

En el programa GMSH, los lugares del dominio donde se aplican cargas puntuales se definen sobre algunos puntos o líneas existentes, de la siguiente manera:

- Si la carga puntual está aplicada en un punto, se escoge **Modules**  $\triangleright$ **Geometry**  $\triangleright$ **Physical groups**  $\triangleright$ **Add**  $\triangleright$ **Point** en el menú lateral mostrado a la izquierda en la Figura 10.17. En cambio, si la carga puntual está aplicada en los futuros nudos asociados a una línea, se escoge **Modules**  $\triangleright$ **Geometry**  $\triangleright$ **Physical groups**  $\triangleright$ **Add**  $\triangleright$ **Curve** en el menú lateral.

- En la ventana Physical group context mostrada a la derecha en la Figura 10.17, se escribe el nombre de la entidad física con la siguiente sintaxis:

```
LOAD FX=fx FY=fy
```

donde  $fx$  es el valor de la componente de la carga puntual en dirección  $x$ , y  $fy$  es el valor de la componente de la carga puntual en dirección  $y$ . Si se aplica una sola componente puede omitirse la componente nula. No se deben dejar espacios antes o después del carácter =.

- Se selecciona(n) el o los puntos (o también la o las líneas) que están asociadas a tal entidad física y se oprime la tecla e.
- Se finaliza el procedimiento oprimiendo la tecla q.

El procedimiento anterior se puede repetir para crear una nueva entidad física sobre otro grupo de puntos o líneas donde se aplique otra carga puntual. Las cargas puntuales serán aplicadas a los nudos que pertenezcan a los puntos o líneas vinculados a la entidad física, en el momento de generar la malla.

Si varias entidades físicas sobre puntos definen la carga puntual de un mismo lugar, se establece el valor de carga dado por la última entidad física.

Cada vez que se crea una entidad física sobre líneas en el entorno gráfico para definir cargas puntuales, se adiciona en el archivo de extensión .geo la siguiente línea de comando:

```
Physical Curve ( "LOAD FX=fx FY=fy" ) = { ilin , jlin , ... };
```

donde  $ilin, jlin, \dots$  son los identificadores de las líneas designadas a la entidad física.

Asimismo, cuando se asigna una entidad física de este tipo sobre puntos, la línea de comando en el archivo .geo es:

```
Physical Point ( "LOAD FX=fx FY=fy" ) = { ipun , jpun , ... };
```

donde  $ipun, jpun, \dots$  son los identificadores de los puntos designados a la entidad física.

#### 10.9.4 Aplicación de cargas distribuidas

Las cargas distribuidas o presiones que se aplican al sólido, se representan en GMSH mediante entidades físicas sobre líneas así:

- En el menú lateral presentado a la izquierda de la Figura 10.17, se escoge **Modules**  $\triangleright$  **Geometry**  $\triangleright$  **Physical groups**  $\triangleright$  **Add**  $\triangleright$  **Curve**.
- En la ventana **Physical group context** mostrada a la derecha en la Figura 10.17, se escribe el nombre de la entidad física con la siguiente sintaxis, dependiendo del tipo de presión aplicada así:
  - Si la presión es uniforme y sus componentes están definidas en el sistema global de coordenadas, la sintaxis es:

**PRES WX= $wx$  WY= $wy$**

donde,  $wx$  y  $wy$  son los valores de las componentes de presión uniforme en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente en unidades consistentes de fuerza por longitud al cuadrado. No se deben dejar espacios antes o después del carácter  $=$ .

- Si la presión es uniforme y sus componentes están definidas en el sistema local de coordenadas, la sintaxis es:

**PRES WN= $wn$  WT= $wt$**

donde,  $wn$  y  $wt$  son los valores de las componentes de presión uniforme en la dirección normal  $\bar{x}$  y tangencial  $\bar{y}$  a la línea, como lo indica la Figura 3.7, dadas en unidades consistentes de fuerza por longitud al cuadrado. El eje  $\bar{x}$  positivo corresponde con la normal a la línea donde se aplica la presión, entrando al dominio. En cambio, el eje  $\bar{y}$  es perpendicular a  $\bar{x}$ , siguiendo la regla de la mano derecha y considerando a  $\bar{z} = z$  saliendo de la pantalla. No se deben dejar espacios antes o después del carácter  $=$ .

- Si se aplica presión hidráulica sobre línea como lo ilustra la Figura 3.8, la sintaxis es:

**PRES GAWA=*gawa* HEWA=*hewa***

donde *gawa* es el peso específico del agua y *hewa* es el nivel del agua con respecto al origen coordenado global. La presión hidráulica es normal a la línea y es positiva entrando al dominio del sólido. Tal presión varía de forma lineal con respecto a *y* como se indica en la Ecuación 3.62. El programa PEFICA 2.0 lee este tipo de entidad física y la convierte en presiones de variación lineal en la cara de los elementos finitos que conforman la línea. No se deben dejar espacios antes o después del carácter **=**.

- Se selecciona(n) la(s) líneas(s) o los puntos que están asociadas a tal entidad física y se oprime la tecla **e**.
- Se finaliza el procedimiento oprimiendo la tecla **q**.

El procedimiento anterior se puede repetir para crear una nueva entidad física sobre otro grupo de líneas donde se aplique otra presión. Las presiones serán aplicadas a los lados de los elementos finitos que pertenezcan a las líneas vinculadas a la entidad física, en el momento de generar la malla.

En particular, cuando se crea una entidad física sobre líneas en el entorno gráfico para definir cargas distribuidas uniformes en sistema coordenado global, se adiciona en el archivo de extensión **.geo** la siguiente línea de comando:

**Physical Curve ( "PRES WX=*wx* WY=*wy*" ) = { *ilin* , *jlin* , ... };**

donde *ilin*,*jlin*,... son los identificadores de las líneas designadas a la entidad física. En cambio, si se aplica una presión uniforme en sistema coordenado local o una presión hidráulica, la línea de comando es respectivamente:

**Physical Curve ( "PRES WN=*wn* WT=*wt*" ) = { *ilin* , *jlin* , ... };**

**Physical Curve ( "PRES GAWA=*gawa* HEWA=*hewa*" ) = { *ilin* , *jlin* , ... };**

La Tabla 10.1 indica el nombre de la entidad física en GMSH que pueda ser interpretado por el programa PEFICA 2.0, con el fin de representar condiciones de borde

Definición	Nombre entidad física	Tipo ent. geo.
espesor y propiedades de material	CATE EYOU= <i>eyou</i> POIS= <i>pois</i> GAMM= <i>gamm</i> TESP= <i>tesp</i> TIPR= <i>tipr</i>	superficies
desplazamiento conocido	DISP UX= <i>ux</i> UY= <i>uy</i>	puntos, líneas
carga puntual	LOAD FX= <i>fx</i> FY= <i>fy</i>	puntos, líneas
carga distribuida uniforme sistema global	PRES WX= <i>wx</i> WY= <i>wy</i>	líneas
carga distribuida uniforme sistema local	PRES WN= <i>wn</i> WT= <i>wt</i>	líneas
presión hidráulica	PRES GAWA= <i>gawa</i> HEWA= <i>hewa</i>	líneas

**Tabla 10.1:** Nombre de las entidades físicas en GMSH interpretados por PEFiCA, que representan condiciones de borde o categorías de material y espesor sobre superficies, líneas o puntos del dominio de problemas bidimensionales.

o categorías de material y espesor. Sobre una superficie, línea o punto del dominio se pueden definir espesores, propiedades mecánicas del material, desplazamientos conocidos, cargas puntuales y cargas distribuidas.

## 10.10 Preparación de entidades físicas en GMSH para el proceso en PEFiCA en problemas tridimensionales

Particularmente en problemas de sólidos en el espacio tridimensional, las entidades físicas definen los parámetros indicados a continuación.

### 10.10.1 Definición de las propiedades mecánicas del material

Las propiedades mecánicas de los volúmenes que conforman el dominio del problema se establecen en categorías de la siguiente forma:

- En el menú lateral mostrado a la izquierda en la Figura 10.17, se escoge Modules  $\triangleright$ Geometry  $\triangleright$ Physical groups  $\triangleright$ Add  $\triangleright$ Volume.
- En la ventana Physical group context mostrada a la derecha en la Figura 10.17, se escribe el nombre de la entidad física con la siguiente sintaxis:

---

**CATE EYOU=eyou POIS=pois GAMM=gamm TIPR=tipr**

donde *eyou* es el módulo de Young, *pois* es la relación de Poisson, *gamm* es el peso específico (si se omite el parámetro **GAMM=0**) y *tipr* es el tipo de problema (si se omite el parámetro **TIPR=30**). No se deben dejar espacios antes o después del carácter =.

- Se selecciona(n) lo(s) volumen(es) que están asociadas a tal entidad física y se oprime la tecla e.
- Se finaliza el procedimiento oprimiendo la tecla q.

El procedimiento anterior se puede repetir para crear una nueva entidad física que represente otra región del dominio propiedades mecánicas diferentes. Tales características serán atribuidas a los elementos finitos que pertenecen a cada región, en el momento de generar la malla.

Cada vez que se crea una entidad física asociada con las propiedades mecánicas del material en el entorno gráfico se adiciona en el archivo de extensión .geo la siguiente línea de comando:

```
Physical Volume( "CATE EYOU=eyou POIS=pois GAMM=gamm
TIPR=tipr ") = { ivol , jvol , ... };
```

donde *ivol,jvol,...* son los identificadores de los volúmenes designados a la entidad física.

### 10.10.2 Definición de desplazamientos conocidos: condiciones de borde

Los lugares del dominio donde se conoce el valor del desplazamiento se establecen en GMSH, sobre puntos o superficies existentes, de la siguiente manera:

- Si el desplazamiento conocido está definido en una superficie, se escoge **Modules**  $\triangleright$ **Geometry**  $\triangleright$ **Physical groups**  $\triangleright$ **Add**  $\triangleright$ **Surface** en el menú lateral mostrado a la izquierda en la Figura 10.17. En cambio, si el desplazamiento conocido está ubicado en un punto, se escoge **Modules**  $\triangleright$ **Geometry**  $\triangleright$ **Physical groups**  $\triangleright$ **Add**  $\triangleright$ **Point** en el menú lateral.

- En la ventana **Physical group context** mostrada a la derecha en la Figura 10.17, se escribe el nombre de la entidad física con la siguiente sintaxis:

```
DISP UX=ux UY=uy UZ=uz
```

donde *ux*, *uy* y *uz* son los valores conocidos de las componentes de desplazamiento en las direcciones *x*, *y* y *z*, respectivamente. Solo se indica la componente de valor conocido. Por ejemplo, si en un punto o una superficie se conoce exclusivamente el desplazamiento en *z* la sintaxis es: DISP UZ=*uz*. No se deben dejar espacios antes o después del carácter =.

- Se selecciona(n) la(s) superficies(s) o los puntos que están asociadas a tal entidad física y se oprime la tecla e.
- Se finaliza el procedimiento oprimiendo la tecla q.

El procedimiento anterior se puede repetir para crear una nueva entidad física que represente otro grupo de superficies o puntos donde se conozca alguna componente de desplazamiento. Los desplazamientos conocidos serán atribuidos a los nudos que pertenezcan a las superficies o puntos vinculados a la entidad física, en el momento de generar la malla.

Si varias entidades físicas sobre superficies definen el mismo desplazamiento conocido, se conserva el valor establecido por la primera entidad física. Por otro lado, si un mismo desplazamiento conocido ha sido definido por una entidad física sobre superficie y otra sobre punto, se conserva esta última.

Cada vez que se crea una entidad física sobre superficies en el entorno gráfico para definir desplazamientos conocidos, se adiciona en el archivo de extensión .geo la siguiente línea de comando:

```
Physical Surface ( "DISP UX=ux UY=uy UZ=uz ") = { isup , jsup , ... };
```

donde *isup*,*jsup*,... son los identificadores de las superficies designadas a la entidad física.

Asimismo, cuando se asigna una entidad física de este tipo sobre puntos, la línea de comando en el archivo .geo es:

---

**Physical Point ( "DISP UX=*ux* UY= *uy* UZ= *uz*" ) = { *ipun* , *jpun* , ... };**

donde *ipun*,*jpun*,... son los identificadores de los puntos designados a la entidad física.

### 10.10.3 Aplicación de cargas puntuales

En el programa GMSH, los lugares del dominio donde se aplican cargas puntuales se definen sobre algunos puntos o superficies existentes, de la siguiente manera:

- Si la carga puntual está aplicada en un punto, se escoge **Modules >Geometry >Physical groups >Add >Point** en el menú lateral mostrado a la izquierda en la Figura 10.17. En cambio, si la carga puntual está aplicada en los futuros nudos asociados a una superficie, se escoge **Modules >Geometry >Physical groups >Add >Surface** en el menú lateral.
- En la ventana **Physical group context** mostrada a la derecha en la Figura 10.17, se escribe el nombre de la entidad física con la siguiente sintaxis:

**LOAD FX=*fx* FY= FZ=*fz***

donde *fx*, *fy* y *fz* son los valores de las componentes de la carga puntual en las direcciones *x*, *y* y *z*, respectivamente. Si se aplica una sola componente, pueden omitirse las componentes iguales a cero. No se deben dejar espacios antes o después del carácter =.

- Se selecciona(n) el (o los) puntos (o también la o las superficies) que están asociadas a tal entidad física y se oprime la tecla e.
- Se finaliza el procedimiento oprimiendo la tecla q.

El procedimiento anterior se puede repetir para crear una nueva entidad física sobre otro grupo de puntos o superficies donde se aplique otra carga puntual. Las cargas puntuales serán aplicadas a los nudos que pertenezcan a los puntos o superficies vinculados a la entidad física, en el momento de generar la malla.

Si varias entidades físicas sobre puntos definen la carga puntual de un mismo lugar, se establece el valor de carga dado por la última entidad física.

Cada vez que se crea una entidad física sobre superficies en el entorno gráfico para definir cargas puntuales, se adiciona en el archivo de extensión .geo la siguiente línea de comando:

```
Physical Surface ( "LOAD FX= $f_x$  FY= $f_y$  FZ= $f_z$ " ) = {  $i_{sup}$  ,  $j_{sup}$  , ... };
```

donde  $i_{sup}, j_{sup}, \dots$  son los identificadores de las superficies designadas a la entidad física.

Asimismo, cuando se asigna una entidad física de este tipo sobre puntos, la línea de comando en el archivo .geo es:

```
Physical Point ( "LOAD FX= $f_x$  FY= $f_y$  FZ= $f_z$ " ) = {  $i_{pun}$  ,  $j_{pun}$  , ... };
```

donde  $i_{pun}, j_{pun}, \dots$  son los identificadores de los puntos designados a la entidad física.

#### 10.10.4 Aplicación de cargas distribuidas

Las cargas distribuidas o presiones que se aplican al sólido, se representan en GMSH mediante entidades físicas sobre superficies así:

- En el menú lateral presentado a la izquierda de la Figura 10.17, se escoge Modules  $\triangleright$  Geometry  $\triangleright$  Physical groups  $\triangleright$  Add  $\triangleright$  Surface.
- En la ventana Physical group context mostrada a la derecha en la Figura 10.17, se escribe el nombre de la entidad física con la siguiente sintaxis, dependiendo del tipo de presión aplicada así:
  - Si la presión es uniforme y sus componentes están definidas en el sistema global de coordenadas, la sintaxis es:

```
PRES WX= $w_x$  WY= $w_y$  WZ= $w_z$ 
```

donde,  $w_x$ ,  $w_y$  y  $w_z$  son los valores de las componentes de presión uniforme en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. No se deben dejar espacios antes o después del carácter =.

- Si la presión es uniforme y normal a la superficie sobre la cual actúa, la sintaxis es:

PRES WN=*wn*

donde, *wn* es el valor de la presión uniforme normal, considerada como positiva entrando a la superficie sobre la cual actúa.

- Si se aplica presión hidráulica sobre superficie la sintaxis es:

PRES GAWA=*gawa* HEWA=*hewa*

donde *gawa* es el peso específico del agua  $\gamma_w$ , y *hewa* es el nivel del agua con respecto al origen coordenado global *h<sub>w</sub>*. Con esta información PE-FiCA 2.0 aplicará una presión uniforme normal entrando a la cara de los elementos finitos que conformarán la superficie, cuyo valor es igual a  $p_n = \gamma_w(h_w - y)$ . No se deben dejar espacios antes o después del carácter =.

- Se selecciona(n) la(s) superficie(s) que están asociadas a tal entidad física y se oprime la tecla e.
- Se finaliza el procedimiento oprimiendo la tecla q.

El procedimiento anterior se puede repetir para crear una nueva entidad física sobre otro grupo de superficies donde se aplique otra presión. Las presiones serán aplicadas a las caras de los elementos finitos que pertenezcan a las superficies vinculadas a la entidad física, en el momento de generar la malla.

En particular, cuando se crea una entidad física sobre superficies en el entorno gráfico, para definir cargas distribuidas uniformes en sistema coordenado global, se adiciona en el archivo de extensión .geo la siguiente línea de comando:

`Physical Surface ( "PRES WX=wx WY=wy WZ=wz" ) = { isup , jsup , ... };`

donde *isup*,*jsup*,... son los identificadores de las superficies designadas a la entidad física. En cambio, si se aplica una presión uniforme en sistema coordenado local o una presión hidráulica, la línea de comando es respectivamente:

Definición	Nombre entidad física	Tipo ent. geo.
propiedades de material	CATE EYOU= <i>eyou</i> POIS= <i>pois</i> GAMM= <i>gamm</i> TIPR= <i>tipr</i>	volúmenes
desplazamiento conocido	DISP UX= <i>ux</i> UY= <i>uy</i> UZ= <i>uz</i>	puntos, superficies
carga puntual	LOAD FX= <i>fx</i> FY= <i>fy</i> FZ= <i>fz</i>	puntos, superficies
carga distribuida uniforme SG	PRES WX= <i>wx</i> WY= <i>wy</i> WZ= <i>wz</i>	superficies
carga distribuida uniforme SL	PRES WN= <i>wn</i>	superficies
presión hidráulica	PRES GAWA= <i>gawa</i> HEWA= <i>hewa</i>	superficies

**Tabla 10.2:** Nombre de las entidades físicas en GMSH interpretados por PEFiCA, que representan condiciones de borde o categorías de material sobre volúmenes, superficies o puntos del dominio en problemas tridimensionales.

Physical Surface ( "PRES WN=*wn*" ) = { *isup* , *jsup* , ... };

Physical Surface ( "PRES GAWA=*gawa* HEWA=*hewa*" ) = { *isup* , *jsup* , ... };

La Tabla 10.2 indica el nombre de la entidad física en GMSH que pueda ser interpretada por el programa PEFiCA 2.0, con el fin de representar condiciones de borde o categorías de material. Sobre una superficie, línea o punto del dominio se pueden definir propiedades mecánicas del material, desplazamientos conocidos, cargas puntuales y cargas distribuidas.

## 10.11 Generación de malla de elementos finitos en GMSH para problemas bidimensionales

En el programa GMSH se define la densidad y distribución de la malla de elementos finitos triangulares y cuadrilaterales utilizando diferentes parámetros.

En la simulación numérica es común generar más de una malla antes de escoger una de ellas como definitiva. Cada vez que se deseé volver a generar la malla de elementos finitos se debe:

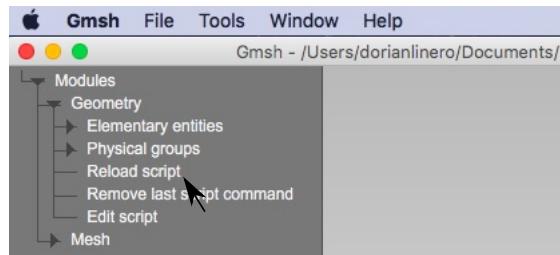


Figura 10.18: GMSH: recargar archivo .geo desde el menú lateral.

- Recargar el archivo de extensión .geo, haciendo clic en **Modules** > **Geometry** > **Reload script** desde el menú lateral o oprimiendo la tecla del número 0, como lo ilustra la Figura 10.18.
- Establecer los parámetros de generación de malla como se indica en los siguientes apartados, para diferentes densidades y distribuciones de malla y para distintos tipos de elementos finitos.
- Generar la malla de elementos finitos haciendo clic en **Modules** > **Mesh** > **2D** desde el menú lateral o oprimiendo la tecla 2.

La generación de la malla de elementos finitos se ilustra en las siguientes secciones, tomando como ejemplo la mitad del dominio de la estructura de drenaje simétrica presentada en la Figura 8.15.

### 10.11.1 Opciones de presentación de la malla

Las opciones de presentación gráfica de la malla de elementos finitos se muestran haciendo clic en **Tools** > **Options** del menú superior y escogiendo **Mesh** del menú lateral de la ventana **Options**.

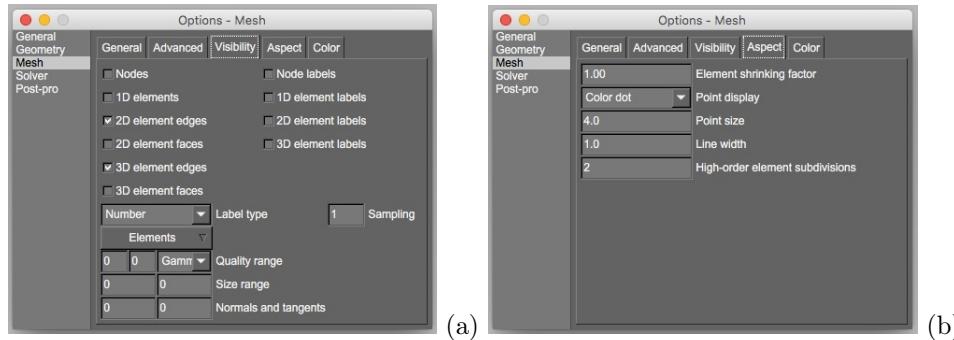
En la pestaña **Visibility** mostrada en la Figura 10.19(a), se establecen los parámetros relacionados con la visibilidad de los nudos y elementos que conforman la malla. Tales parámetros son los siguientes:

- Los nudos y los elementos unidimensionales se muestran cuando están marcadas las casillas de verificación **Nodes** y **1D elements**, respectivamente.

- Los lados de los elementos bidimensionales y de los elementos tridimensionales se muestran cuando están marcadas las casillas de verificación **2D element edges** y **3D element edges**, respectivamente.
- Las superficies limitadas por los elementos bidimensionales y los elementos tridimensionales se muestran cuando están marcadas las casillas de verificación **2D element faces** y **3D element faces**, respectivamente.
- La información asociada a cada nudo, elemento unidimensional, elemento bidimensional y elemento tridimensional se muestra cuando están marcadas las casillas de verificación **Node labels**, **1D element labels**, **2D element labels** y **3D element labels**, respectivamente.
- El tipo de información que se presentará en los nudos y elementos se establece en la caja desplegable **Label type**, donde se puede escoger:
  - **Number** para que muestre el número identificador de los nudos y los elementos.
  - **Elementary tag** para que muestre el número identificador de la entidad geométrica asociada a cada nudo y elemento.
  - **Physical tag** para que muestre el número identificador de la entidad física asociada a cada nudo y elemento. Se utiliza en número cero cuando el nudo o elemento no está asociado a ninguna entidad física.
  - **Coordinates** para mostrar las coordenadas de los nudos y del centro de los elementos.

En la pestaña **Aspect** mostrada en la Figura 10.19(b), se establecen los parámetros relacionados con el aspecto de los nudos y elementos que conforman la malla. Tales parámetros son los siguientes:

- El factor de reducción del tamaño del elemento finito se define en la caja **Element shrinking factor**. Por ejemplo, un factor de 0.9 muestra una reducción del tamaño de los elementos con respecto a su centro.



**Figura 10.19:** GMSH. Opciones de presentación de la malla: (a) parámetros de visibilidad, y (b) parámetros de aspecto.

- La apariencia de los puntos se establece en la caja desplegable **Point display**, donde se puede escoger: **Color dot** para mostrarlos como cuadrados o **3D sphere** para mostrarlos como esferas.
- El tamaño de los puntos y el espesor de los lados de los elementos se establecen en las cajas **Point size** y **Line width**, respectivamente.

En la pestaña **Color** mostrada en la Figura 10.20, se establecen los parámetros relacionados con el color de los nudos y elementos que conforman la malla.



**Figura 10.20:** GMSH. Opciones de presentación de la malla: parámetros de color.

La clasificación por color de los elementos finitos se establece en la caja des-

- By **element type** para diferenciar los elementos finitos por su tipo. Por ejemplo, utiliza colores distintos para los elementos triangulares y los cuadrilaterales.

- By **elementary entity** para diferenciar los elementos finitos por su entidad geométrica asociada. Por ejemplo, un color específico para los elementos que están asociados a cada superficie.

- By physical group para diferenciar los elementos finitos por su entidad física asociada.

El color se define haciendo clic sobre el botón **Points** para los nudos, **Triangles** para los elementos triangulares o **Quadrangles** para los elementos cuadrilaterales, y se escoge el color en la la ventana **Color chooser**.

También se puede definir los colores con que sean clasificado a los elementos previamente en la caja desplegable **Colo-**

**ring mode**. Para esto se hace clic sobre el botón **One** que está en la caja desplegable inferior, y se escoge el color de la primera entidad o tipo de elemento en la ventana **Color chooser**. Se la misma forma se establecen los colores de las siguientes entidades o tipos en que se hayan clasificado los elementos, haciendo clic en los botones **Two**, **Three**, **Four**, etc.

La elección del color en la ventana **Color chooser** depende de los formatos indicados en la Sección 10.4.

### 10.11.2 Generación de mallas no estructuradas uniformes con elementos triangulares lineales

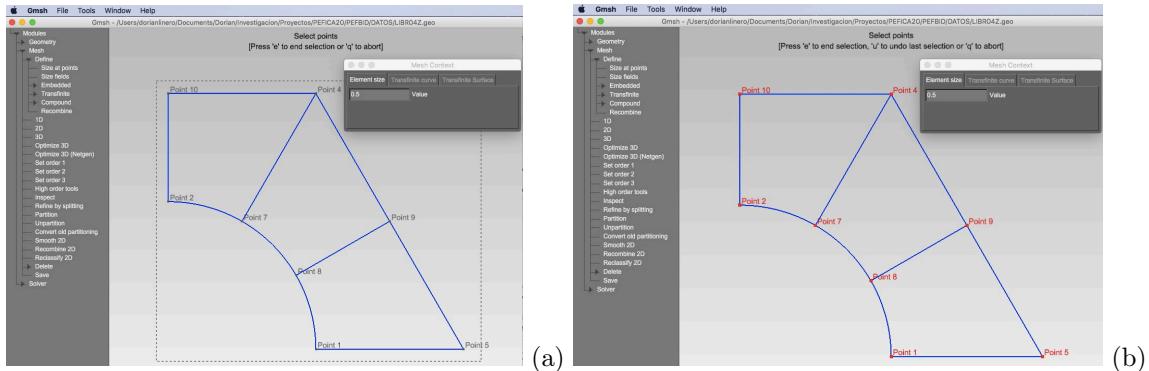
Una malla no estructurada uniforme de elementos finitos triangulares lineales está definida por el tamaño del elemento finito asociado a los puntos de la geometría.

GMSH permite generar mallas de elementos de tamaño uniforme de dos formas distintas: mediante una instrucción al final de la construcción de la geometría del problema o a través de un parámetro de tamaño incluido en la definición de cada punto.

#### 10.11.2.1 Generación de malla utilizando Characteristic Length

El procedimiento para definir el tamaño del elemento finito y generar la malla en el entorno gráfico es el siguiente:

- Seleccionar **Modules**  $\triangleright$  **Mesh**  $\triangleright$  **Define**  $\triangleright$  **Size at points**, en el menú lateral. Escribir el tamaño del elemento finito en la caja **Value**, de la pestaña **Element size**, en la ventana **Mesh context**. Tal valor se debe presentar en la unidad de longitud utilizada en la simulación.



**Figura 10.21:** GMSH: definición del tamaño del elemento finito asociado a los puntos de la geometría. En particular se define un tamaño de 0.5 en 8 nudos seleccionados

- Seleccionar todos los puntos de la geometría del problema en la ventana gráfica.

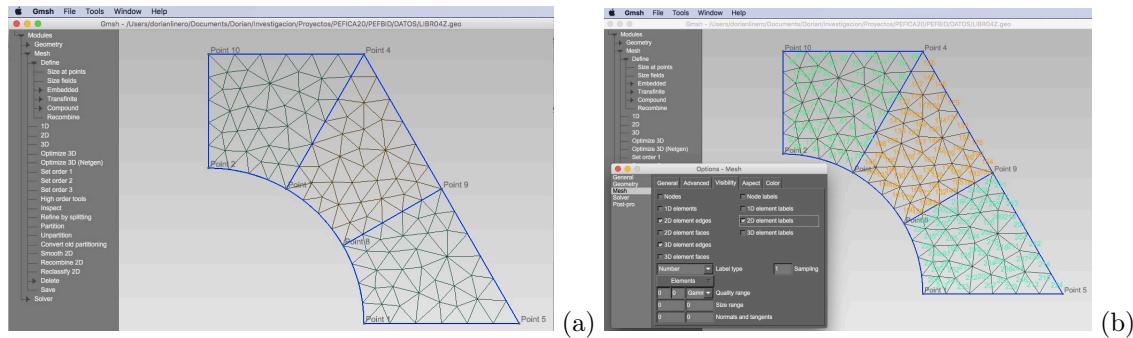
Esta operación se realiza:

- arrastrando el ratón mientras están oprimidos su botón izquierdo y la tecla **ctrl**,
- marcando un rectángulo con el ratón que incluya a todos los puntos, como lo ilustra la Figura 10.21,
- oprimiendo la tecla **e** para confirmar la selección de los nudos, y
- oprimiendo la tecla **q** para finalizar la operación.
- Generar la malla de elementos finitos haciendo clic en **Modules >Mesh >2D** o oprimiendo la tecla **2**, como se observa en la Figura 10.22.

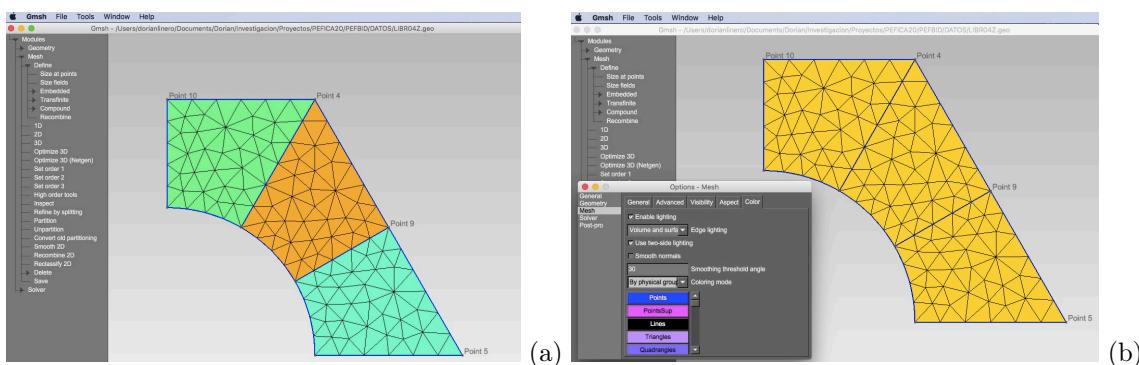
Después de imponer el tamaño de los elementos finitos a los puntos, aparece una línea de comando al final del archivo **.geo** con el siguiente formato:

```
Characteristic Length { ipun , jpun , ... } = lele ;
```

donde *ipun,jpun,...* son los identificadores de los puntos designados al tamaño *lele* del elemento finito.



**Figura 10.22:** GMSH: generación de la malla de elementos finitos: (a) lados de los elementos finitos solamente, y (b) adicionalmente identificadores de los elementos.



**Figura 10.23:** GMSH: diferenciación de las características de la malla de elementos finitos por colores. En este problema particular, el dominio está conformado por tres superficies que pertenecen a una entidad física. En (a) se diferencian los elementos que pertenecen a la misma superficie y en (b) se muestran aquellos que hacen parte de la misma entidad física.

### 10.11.2.2 Generación de malla utilizando un parámetro en la definición de los puntos

El procedimiento para establecer el tamaño de los elementos finitos desde la definición de los puntos y generar la malla es el siguiente:

- Antes de definir los puntos de la geometría, se selecciona **Modules >Geometry >Elementary entities >Add >Parameters**, en el menú lateral. Esto activa la pestaña **Parameter** de la ventana **Elementary Entities Context**.
- A continuación se escribe el nombre del parámetro (que podría ser *lc* como se indica por defecto) en la caja **Name**, y el tamaño del elemento finito en la

caja **Value**. Después se hace clic en el botón **Add**. Este procedimiento se puede repetir para definir otras variables.

- Se definen los puntos de la geometría del problema, seleccionando **Modules**  $\triangleright$ **Geometry**  $\triangleright$ **Elementary entities**  $\triangleright$ **Add**  $\triangleright$ **Point**, en el menú lateral. Esto activa la pestaña **Point** de la ventana **Elementary Entities Context**.
- Se escribe el nombre del parámetro establecido anteriormente en la caja **Prescribed mesh size at point** (por ejemplo *lc*). Después se definen las coordenadas del punto y se hace clic en el botón **Add**. Este procedimiento repite para cada punto.
- Se construyen las demás entidades geométricas y las entidades físicas.
- Al final se genera la malla de elementos finitos haciendo clic en **Modules**  $\triangleright$ **Mesh**  $\triangleright$ **2D** o oprimiendo la tecla 2.

Cuando se establece un parámetro de nombre *npar* y valor *vpar*, aparece la siguiente línea de comando en el archivo *.geo*:

```
npar = DefineNumber[ vpar , Name "Parameters/ npar "];
```

Después de imponer el tamaño de los elementos finitos a los puntos, aparece una línea de comando al final del archivo *.geo* con el siguiente formato:

```
Point( ipun ) = { ipux , ipuy , ipuz , npar };
```

donde *ipun* es el número identificador del punto, *ipux*,*ipuy*,*ipuz* son las coordenadas del punto y *npar* es el nombre del parámetro que contiene el tamaño del elemento finito.

El menú lateral muestra un nuevo árbol llamado **Parameters**, el cual indica el valor y el nombre de cada parámetro creado. Ahora se puede: recargar el archivo *.geo*, modificar el valor del parámetro y volver a generar la malla. Esta operación solo afecta el entorno gráfico, mientras que el archivo *.geo* conserva el valor inicial del parámetro.

Otra forma para establecer el tamaño de los elementos finitos a partir de la definición de los nudos es la siguiente:

- Se abre el archivo `.geo` con un editor de texto o se hace clic en **Modules**  $\triangleright$ **Geometry**  $\triangleright$ **Edit script** del menú lateral del entorno gráfico de GMSH.
- Antes de la definición de los puntos en el archivo `.geo`, se establece un parámetro de tamaño del elemento, escribiendo la instrucción

$$npar = vpar ;$$

donde *npar* es el nombre del parámetro (por ejemplo *lc*) y *vpar* es su valor.

- Se guarda el archivo `.geo` y se regresa al entorno gráfico de GMSH.
- Se definen los puntos de la geometría del problema, seleccionando **Modules**  $\triangleright$ **Geometry**  $\triangleright$ **Elementary entities**  $\triangleright$ **Add**  $\triangleright$ **Point**, en el menú lateral. Esto activa la pestaña **Point** de la ventana **Elementary Entities Context**.
- Se escribe el nombre del parámetro establecido anteriormente en la caja **Prescribed mesh size at point** (por ejemplo *lc*). Después se definen las coordenadas del punto y se hace clic en el botón **Add**. Este procedimiento repite para cada punto.
- Se construyen las demás entidades geométricas y las entidades físicas.
- Al final de genera la malla de elementos finitos haciendo clic en **Modules**  $\triangleright$ **Mesh**  $\triangleright$ **2D** o oprimiendo la tecla 2.

Para deshacer se eliminan o se comentan las líneas de comando no deseadas en el archivo `.geo`. En cambio para rehacer se descomentan las líneas de comando que anteriormente no se deseaban. En cualquiera de los dos casos se guarda el archivo `.geo` y se hace clic en **Modules**  $\triangleright$ **Geometry**  $\triangleright$ **Reload script** del menú lateral o se oprime la tecla 0 en el entorno gráfico de GMSH.

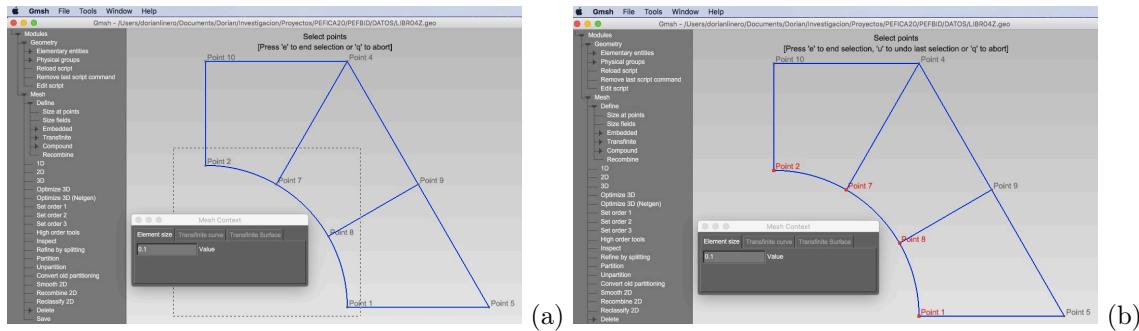
### 10.11.3 Apariencia y diferenciación de los elementos finitos en la malla generada

Por defecto, la malla de elementos finitos se muestra mediante los lados de cada elemento. Para modificar la apariencia, se selecciona **Tools > Options > Mesh** de menú superior y se escoge la pestaña **Visibility**, donde ya aparece marcada la caja de verificación **2D element edges**. Marcando la caja de verificación **2D element faces** se presentan los elementos finitos por colores, y marcando **2D element labels** se indica el identificador de cada elemento, como se ilustra en la Figura 10.22.

Además se pueden diferenciar por colores a los elementos finitos que pertenecen a una superficie o a una entidad física específica. Esta operación consiste en: (i) hacer clic en **Tools > Options > Mesh** del menú superior, (ii) seleccionar la pestaña **Color** y (iii) escoger en la caja desplegable **coloring mode** la opción **By elementary entity** para diferenciar por superficies o **By physical group** para diferenciar por entidad física. En el problema particular mostrado en la Figura 10.23, el dominio está conformado por tres superficies que pertenecen a una entidad física. En la Figura 10.23(a) se diferencian los elementos que pertenecen a la misma superficie y en la Figura 10.23(b) se diferencian aquellos elementos que hacen parte de la misma entidad física.

### 10.11.4 Generación de mallas no estructuradas con elementos triangulares lineales de diferente tamaño

En ocasiones se desea generar una malla no estructurada con elementos finitos de diferente tamaño de acuerdo con la ubicación en el dominio del problema. Cada zona donde se desea mayor densidad de elementos finitos se puede establecer como: (i) el tamaño del elemento finito sobre un punto de la geometría, o (ii) el número de nudos de la futura malla contenidos en una línea de la geometría.



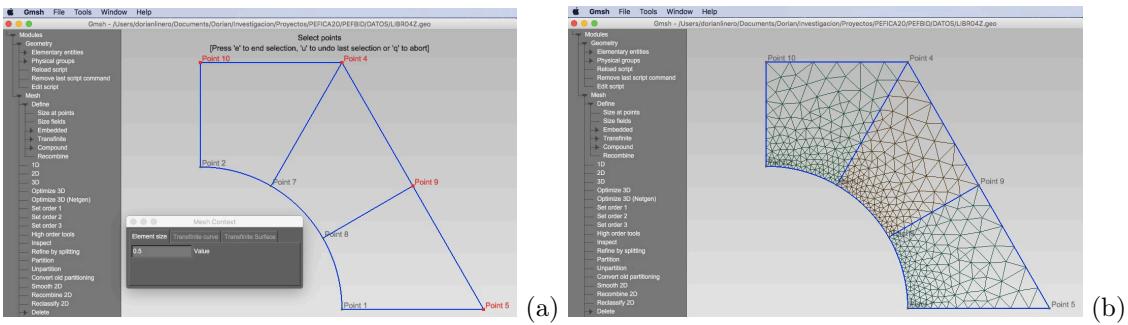
**Figura 10.24:** GMSH: definición del tamaño del elemento finito asociado a los puntos de la geometría. En particular se define un tamaño de 0.1 en 4 puntos seleccionados.

#### 10.11.4.1 Definición del tamaño del elemento finito sobre puntos

El procedimiento para definir y generar una malla con varios tamaños diferentes de elementos asociados a los puntos es el siguiente:

- Seleccionar **Modules**  $\triangleright$  **Mesh**  $\triangleright$  **Define**  $\triangleright$  **Size at points**, en el menú lateral. Escribir el tamaño del elemento finito de la primera zona en la caja **Value**, de la pestaña **Element size**, en la ventana **Mesh context**. Tal valor se debe presentar en la unidad de longitud utilizada en la simulación.
- Seleccionar los puntos de la primera zona del dominio en la ventana gráfica, como se indicó en el apartado anterior. En la Figura 10.24 se ilustra la selección de los puntos sobre el arco de circunferencia, en los cuales se desea construir una malla con elementos de tamaño 0.1.
- Repetir los dos pasos anteriores para cada una de las zonas donde el tamaño del elemento se desee definir con otro valor. En la Figura 10.25(a) se ilustra la selección de los puntos en los cuales se desea construir una malla con elementos de tamaño 0.5.
- Generar la malla de elementos finitos haciendo clic en **Modules**  $\triangleright$  **Mesh**  $\triangleright$  **2D** o oprimiendo la tecla 2, como se observa en la Figura 10.25(b).

Después de imponer los diferentes tamaños de los elementos finitos a los puntos, aparecen varias líneas de comando al final del archivo .geo. Cada conjunto de puntos



**Figura 10.25:** GMSH: (a) definición de un tamaño del elemento finito de 0.5 asociado a 4 puntos de la geometría, (b) malla de elementos finitos triangulares de tamaño 0.1 en el arco y 0.5 en los lados superior y derecho.

asociados a un tamaño específico de elemento finito se indican con una línea de comando, mostrando el siguiente formato:

```
Characteristic Length { ipu1 , jpu1 , ... } = lel1 ;
Characteristic Length { ipu2 , jpu2 , ... } = lel2 ;
:
Characteristic Length { ipun , jpun , ... } = leln;
```

donde  $ipu1, jpu1, \dots$  son los identificadores de los puntos designados al primer tamaño del elemento finito  $lel1$ , mientras que  $ipu2, jpu2, \dots$  identifican los puntos designados al segundo tamaño del elemento finito  $lel2$ . Asimismo,  $ipun, jpun, \dots$  son los puntos asociados al último tamaño de elemento  $leln$ .

Particularmente, cuando se establece que la librería gráfica utilizada es OpenCASCADE, el tamaño del elemento definido en el último parámetro de la instrucción Point, prevalece a la designación realizada con la instrucción Characteristic Length en el archivo .geo. Si la geometría se ha construido sin utilizar la instrucción Point, el tamaño del elemento lo establecen las instrucciones de definición de malla, como Characteristic Length.

A pesar de lo anterior, el entorno gráfico de GMSH permite definir una vez el tamaño de los elementos finitos, seleccionando Modules > Mesh > Define > Size at points del menú lateral. Sin embargo estas características no se conservan cuando se carga o recarga el archivo .geo.

Por otro lado, si se establece la librería gráfica Built-In incluida en GMSH al principio del archivo `.geo`, el tamaño del elemento se actualiza cada vez que lo defina una nueva instrucción de este tipo, como `Characteristic Length`. La desventaja de este procedimiento es que tal librería gráfica no puede realizar operaciones booleanas entre entidades geométricas o construir directamente algunas formas convencionales.

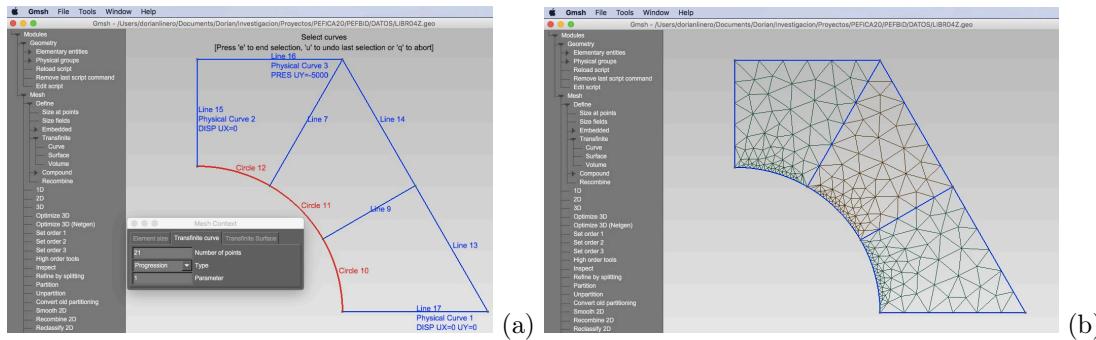
#### 10.11.4.2 Definición del número de nudos sobre una línea

Otra forma de construir malla no uniformes es definiendo la cantidad de nudos que se desean generar sobre una o varias líneas de la geometría. Para esto se realiza el siguiente procedimiento:

- Definir un tamaño constante de los elementos finitos de conformarán la malla mediante el procedimiento presentado en la Subsubsección 10.11.2.1, sin generar la malla.
- Hacer clic en `Modules > Mesh > Define > Transfinite > Curve`, en el menú lateral. Escribir el número de nudos que serán generados sobre la o las líneas en la caja `Number of points`, de la pestaña `Transfinite curve`, en la ventana `Mesh context`.
- Seleccionar la(s) línea(s) donde se desea establecer el número de nudos. En la Figura 10.26(a) se ilustra la selección de las líneas sobre el arco de circunferencia, en los cuales se desea construir una malla con 21 nudos.
- Repetir el paso anterior para cada conjunto de líneas donde se desea establecer otro número de nudos.
- Generar la malla de elementos finitos haciendo clic en `Modules > Mesh > 2D` o oprimiendo la tecla 2. La Figura 10.26(b) muestra la malla generada.

Después realizar el procedimiento anterior aparece una línea de comando en el archivo `.geo`, de la forma:

```
Transfinite Curve { ili1 , jli1 , ... } = nnu1 Using Progression 1;
Transfinite Curve { ili2 , jli2 , ... } = nnu2 Using Progression 1;
```



**Figura 10.26:** GMSH: (a) definición del número de nudos sobre una línea (en particular 21 nudos), y (b) malla generada.

:

Transfinite Curve { *ilin* , *jlin* , ... } = *nnun* Using Progression 1;

donde *il1,jl1,...* son los identificadores de las líneas designadas a la primera cantidad de nudos por línea *nnu1*, mientras que *il2,jl2,...* identifican los puntos designados a la segunda cantidad de nudos por línea *nnu2*. Asimismo, *ilin,jlin,...* son las líneas asociadas a la última cantidad de nudos por línea *nnun*.

La distribución de los nudos sobre una línea por defecto es uniforme. Sin embargo, el programa permite que tal distribución sea progresiva, es decir, que la separación entre parejas de nudos se reduzca o se amplíe sobre la línea. Para definir una separación progresiva entre los nudos de una línea se debe:

- Hacer clic en **Modules** ▷ **Mesh** ▷ **Define** ▷ **Transfinite** ▷ **Curve**, en el menú lateral. Se activará la la pestaña **Transfinite curve**, en la ventana **Mesh context**.
- Escribir el factor de separación progresiva entre parejas de nudos en la caja **Parameter**.
- Seleccionar la(s) línea(s) donde se desea establecer el número de nudos con dicha distribución.
- Generar la malla de elementos finitos haciendo clic en **Modules** ▷ **Mesh** ▷ **2D** o oprimiendo la tecla 2.

Este procedimiento produce una línea de comando en el archivo .geo con el siguiente formato:

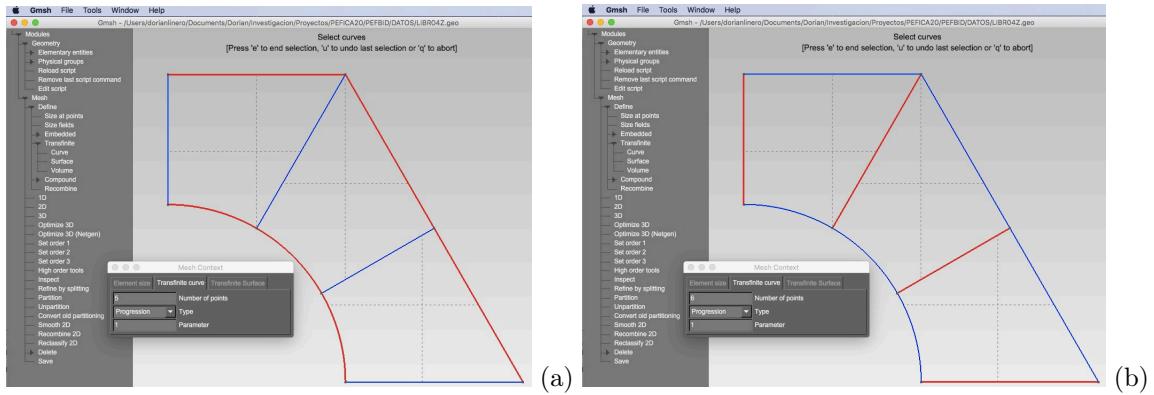
```
Transfinite Curve { ilin , jlin , ... } = nnun Using Progression fsep;
```

donde *fsep* es el factor de separación progresiva entre parejas de nudos.

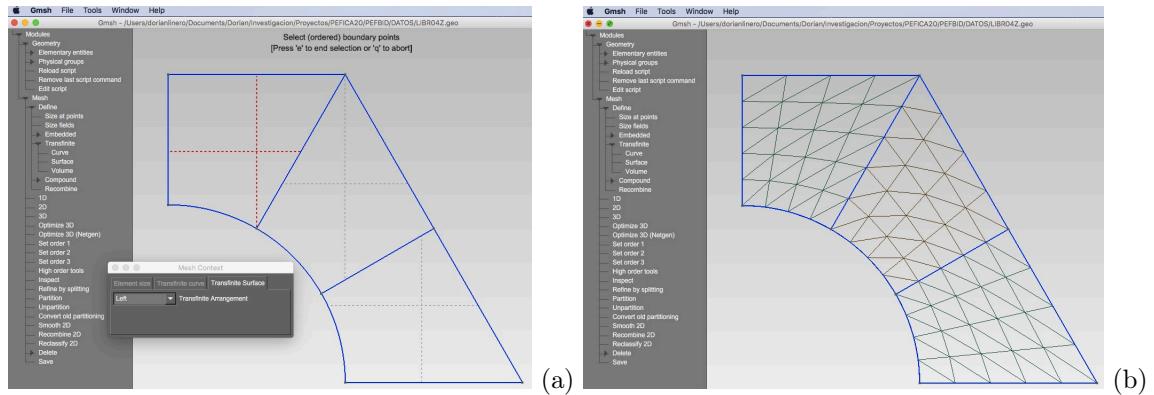
### 10.11.5 Generación de mallas estructuradas con elementos triangulares lineales

En general, para construir mallas estructuradas se requiere dividir el dominio del problema en superficies conformadas por 4 lados. El procedimiento para definir y generar mallas de este tipo con elementos triangulares lineales es el siguiente:

- Hacer clic en Modules ▷ Mesh ▷ Define ▷ Transfinite ▷ Curve, en el menú lateral.  
Se activará la pestaña Transfinite curve de la ventana Mesh context.
- Escribir en Number of points el número de nudos de la malla que serán generados sobre líneas. Seleccionar las líneas opuestas de cada superficie, como se indica en la Figura 10.27(a). Oprimir la tecla e y finalizar con la tecla q.
- Repetir el paso anterior para el conjunto de las otras líneas opuestas de las superficies, como se indica en la Figura 10.27(b).
- Hacer clic en Modules ▷ Mesh ▷ Define ▷ Transfinite ▷ Surface, en el menú lateral.  
Se activará la pestaña Transfinite surface de la ventana Mesh context.
- Escoger en Transfinite Arrangement la alineación del arreglo de elementos triangulares entre izquierdo Left, derecho Right o alternado Alternated.
- Hacer clic sobre las superficies del dominio y confirmar la selección con la tecla e. Finalizar la operación con la tecla q. La Figura 10.28(a) muestra la ventana Mesh context donde se escoge una superficie con alineación izquierda de los elementos.



**Figura 10.27:** GMSH. Generación de mallas estructuradas con elementos triangulares: (a) definición del número de nudos sobre el primer conjunto de líneas opuestas (5 nudos por línea para este ejemplo), y (b) definición del número de nudos sobre el segundo conjunto de líneas opuestas (6 nudos por línea para este ejemplo).

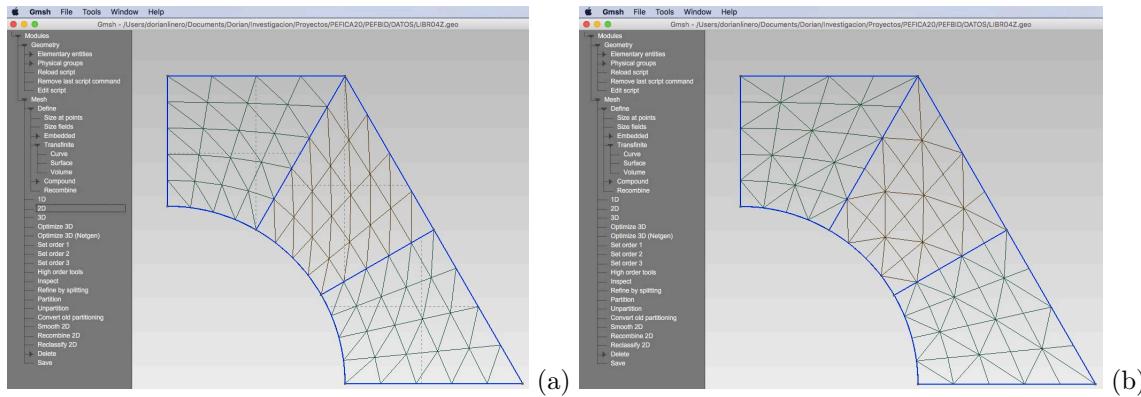


**Figura 10.28:** GMSH. Generación de mallas estructuradas con elementos triangulares: (a) definición de las superficies con malla con alineación izquierda, y (b) malla generada.

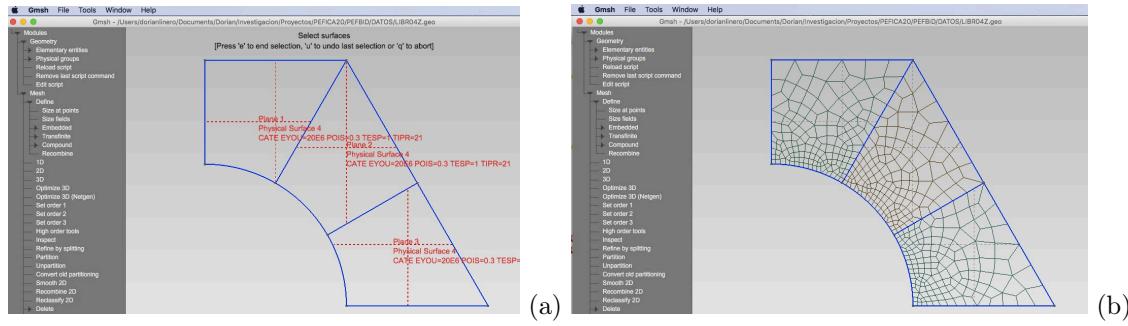
- Generar la malla de elementos finitos haciendo clic en **Modules** ▷ **Mesh** ▷ **2D** o oprimiendo la tecla 2. La Figura 10.28(b) muestra la malla generada.

Una malla de triángulos con alineación derecha del arreglo de elementos se obtiene seleccionando **Right** en la caja **Transfinite Arrangement** de la ventana **Mesh context**. Esto genera una malla como la mostrada en la Figura 10.29(a). En cambio, una malla de triángulos con alineación alternada se genera seleccionando **Alternated**, como lo muestra la Figura 10.29(b).

Este procedimiento produce una línea de comando por cada superficie en el archivo **.geo**, con el siguiente formato:



**Figura 10.29:** GMSH. Generación de mallas estructuradas con elementos triangulares: (a) malla generada con alineación derecha, y (b) malla generada con alineación alternada.



**Figura 10.30:** GMSH: (a) definición de elementos finitos cuadrilaterales asociados a las superficies de la geometría, (b) malla de elementos finitos cuadrilaterales de tamaño 0.1 en el arco y 0.5 en los lados superior y derecho.

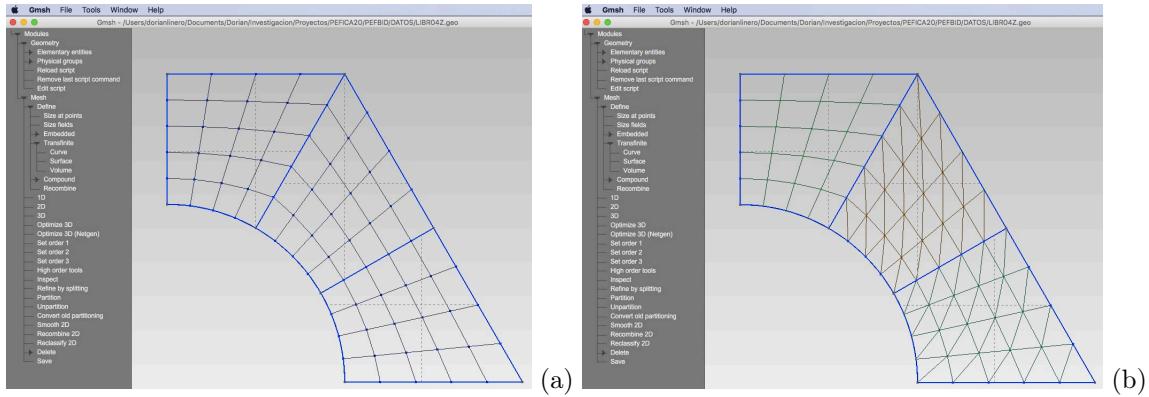
`Transfinite Surface { isup } tali ;`

donde *isup* es el identificador de la superficie. Asimismo, *tali* indica si tipo de alineación de la malla de elementos triangulares es izquierda, derecha o alternada, utilizando las palabras clave **Left**, **Right** o **Alternated**, respectivamente.

#### 10.11.6 Generación de mallas elementos cuadrilaterales bilineales

Para generar mallas de elementos finitos cuadrilaterales bilineales en el programa GMSH, la región definida por dos elementos triangulares se transforma en un elemento cuadrilateral.

La definición y generación de mallas con elementos cuadrilaterales se realiza en el entorno gráfico mediante el siguiente procedimiento:



**Figura 10.31:** GMSH: malla estructurada distribuida en 5 por 6 nudos sobre cada línea: (a) con 60 elementos cuadrilaterales y (b) con 80 elementos triangulares y 20 elementos cuadrilaterales.

- Definir los parámetros de la malla como se indicó en los apartados anteriores para elementos triangulares. Es decir, realizar dichos procedimientos a excepción del paso correspondiente a la generación de la malla.
- Seleccionar **Modules >Mesh >Define >Recombine**, en el menú lateral. Hacer clic sobre las superficies del dominio, oprimir la tecla **e** para confirmar la selección (Figura 10.30(a)) y finalizar la operación oprimiendo la tecla **q**.
- Generar la malla de elementos finitos cuadrilaterales haciendo clic en **Modules >Mesh >2D** o oprimiendo la tecla **2**. La Figura 10.30(b) muestra una malla no estructurada particular donde el tamaño de los elementos cuadrilaterales sobre el arco es 0.1 y en los lados superior y derecho es de 0.5. En cambio, la Figura 10.31(a) presenta una malla estructurada para el mismo problema de elementos cuadrilaterales distribuidos en 5 por 6 nudos sobre cada línea.

Después de establecer en el entorno gráfico que los elementos finitos serán cuadrilaterales en las superficies seleccionadas, aparece una línea de comando en el archivo **.geo** con el siguiente formato:

```
Recombine Surface { isup , jsup , ... };
```

donde *isup,jsup,...* son los identificadores de las superficies designadas para contener elementos cuadrilaterales.

### 10.11.7 Generación de mallas elementos triangulares lineales y cuadrilaterales bilineales

Cuando se desea construir una malla de elementos triangulares en una región del dominio y de elementos cuadrilaterales en otra, se realiza un procedimiento similar al indicado en la Subsección 10.11.6. Solo se diferencia en que la transformación de dos elementos triangulares a uno cuadrilateral se aplica solamente sobre algunas superficies específicas del dominio. La Figura 10.31(b) ilustra la malla generada donde se escogió la transformación de elementos triangulares a cuadrilaterales en una de las 3 superficies del dominio.

### 10.11.8 Tipos de elementos finitos generados por GMSH

Como se indicó en el ultimo paso de los procedimientos anteriores la malla de elementos finitos se genera haciendo clic en **Modules >Mesh >2D** o oprimiendo la tecla 2. Cuando se realiza esta operación el programa GMSH define los elementos finitos bidimensionales, pero adicionalmente produce elementos unidimensionales sobre las líneas de la geometría.

La Figura 10.32 ilustra la numeración de los elementos finitos generados en el entorno gráfico de GMSH. Aquí se observan 27 elementos finitos bidimensionales numerados del 39 al 65 y 30 elementos unidimensionales lineales numerados del 9 al 38. Para presentar la numeración de los elementos finitos, se hace clic en **Tools >Options** del menú superior, se selecciona la ventana **Mesh** y la pestaña **Visibility**, y se confirman las casillas **1D elements**, **1D element labels**, **2D element edges** y **2D element labels**.

## 10.12 Generación de malla de elementos finitos en GMSH para problemas tridimensionales

En el programa GMSH permite generar mallas de elementos finitos tetraédricos y hexaédricos ajustando su tamaño y distribución en el interior de las entidades geométricas. Es habitual escoger la malla de análisis después de generar diferentes distri-

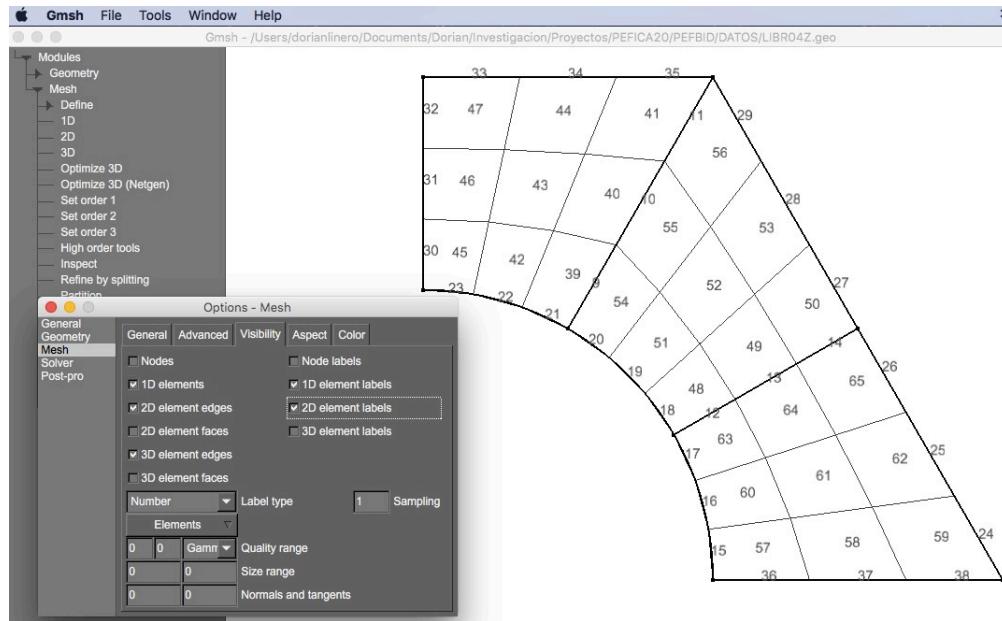
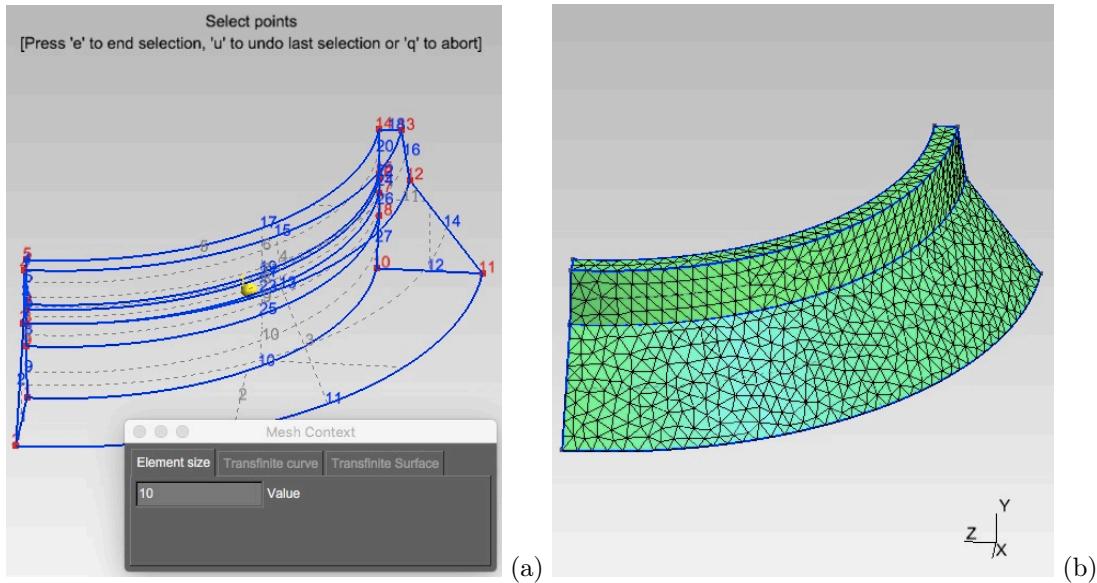


Figura 10.32: Gmsh. Numeración de los elementos finitos de una malla generada por la instrucción del programa.

bucciones preliminares. Por lo tanto, cada vez que se desee volver a generar la malla de elementos finitos tridimensionales se debe:

- Recargar el archivo de extensión .geo, haciendo clic en **Modules** > **Geometry** > **Reload script** desde el menú lateral o oprimiendo la tecla del número 0.
- Establecer los parámetros de generación de malla como se indica en los siguientes apartados, para diferentes densidades y distribuciones de malla y para distintos tipos de elementos finitos.
- Generar la malla de elementos finitos haciendo clic en **Modules** > **Mesh** > **3D** desde el menú lateral o oprimiendo la tecla 3.



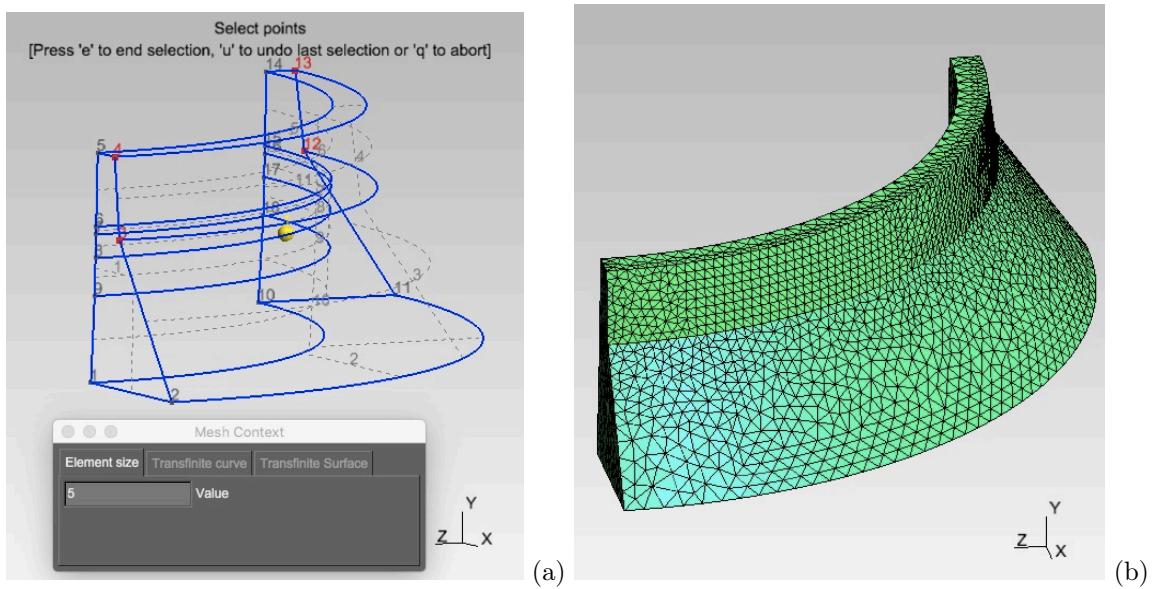
**Figura 10.33:** GMSH: generación de la malla no estructurada uniforme de elementos finitos tetraédricos: (a) asignación del tamaño del elemento finito asociado a los puntos de la geometría, (b) malla de elementos finitos.

### 10.12.1 Generación de mallas uniformes no estructuradas con elementos tetraédricos lineales

Una malla no estructurada uniforme de elementos finitos tetraédricos lineales está definida por el tamaño del elemento finito asociado a los puntos de la geometría.

El procedimiento para definir el tamaño de los elementos finitos tetraédricos en mallas uniformes tiene dos alternativas distintas. En la primera se define la instrucción `Characteristic length` al final de la construcción de la geometría del problema, de la misma forma como se describió en la Subsubsección 10.11.2.1. La Figura 10.33(a) ilustra la asignación de un tamaño de 10 unidades de longitud a los elementos finitos cercanos a los puntos de un volumen. La segunda consiste en establecer como variable el parámetro de tamaño de elemento, que está incluido en la definición de cada punto, como se presentó en la Subsubsección 10.11.2.2.

A continuación, la malla de elementos finitos tridimensionales se genera, haciendo clic en `Modules >Mesh >3D` o oprimiendo la tecla 3, como se observa en la Figura 10.33(b).



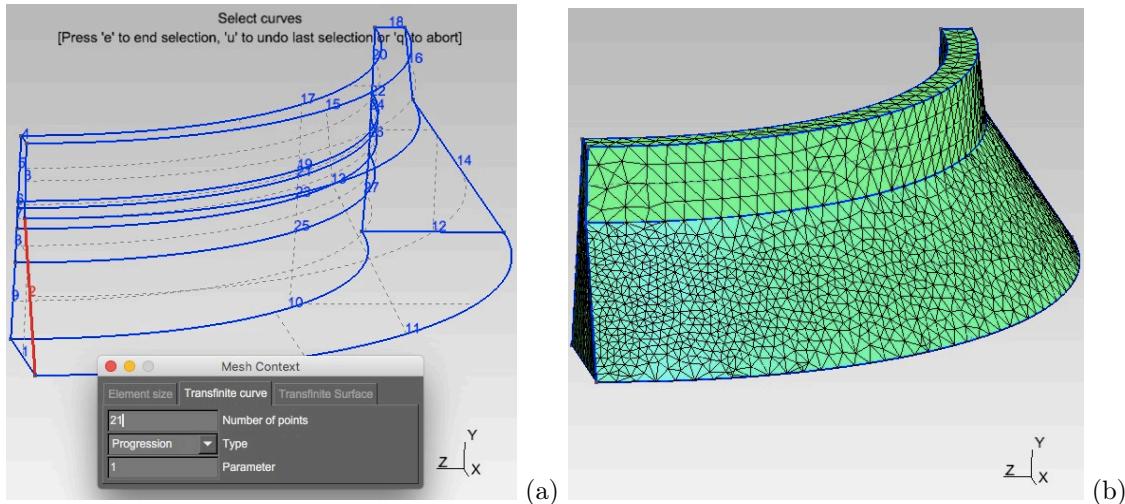
**Figura 10.34:** GMSH: generación de la malla no estructurada y no uniforme de elementos finitos tetraédricos: (a) asignación del tamaño del elemento finito asociado a los puntos particulares 3, 4, 12 y 13 de la geometría, (b) malla de elementos finitos.

### 10.12.2 Generación de mallas no uniformes y no estructuradas con elementos tetraédricos lineales

Las mallas no uniformes muestran mayor densidad de elementos finitos en regiones particulares del sólido. Tales zonas pueden estar asociadas a algunos puntos, líneas o superficies que conforman el volumen.

Si la región donde se desea mayor densidad de elementos está alrededor de un conjunto de puntos, se puede asignar a dicho punto un tamaño de elemento finito menor al asignado a los demás puntos, mediante el procedimiento indicado en la Subsubsección 10.11.4.1. Después se genera la malla, haciendo clic en **Modules > Mesh > 3D** o oprimiendo la tecla 3.

En el volumen mostrado en la Figura 10.34(a) se asigna un tamaño de 5 unidades de longitud en los puntos 3, 4, 12 y 13, mientras que los demás puntos tienen asignado un tamaño de elemento de 10 unidades de longitud. La malla generada con estos parámetros se ilustra en la Figura 10.34(b), donde se observan elementos finitos de menor tamaño en la cara limitada por los puntos 3, 4, 12 y 13.



**Figura 10.35:** GMSH: generación de la malla no estructurada y no uniforme de elementos finitos tetraédricos: (a) asignación de 21 futuros nudos sobre la línea 2 de la geometría, (b) malla de elementos finitos.

Si la región donde se desea mayor densidad de elementos está definida por una o varias líneas, se puede asignar a dichas líneas un número de futuros nudos mediante el procedimiento indicado en la Subsubsección 10.11.4.2. En el ejemplo en particular mostrado en la Figura 10.35(a), se asignan 21 futuros nudos sobre la línea 2 de la geometría. Después de la asignación de este parámetro, se oprime la tecla 3 y se genera la malla de elementos finitos mostrada en Figura 10.35(b).

### 10.12.3 Generación de mallas no estructuradas con elementos tetraédricos lineales con una cara estructurada

Una malla no estructurada de elementos tetraédricos lineales puede tener una o varias regiones, donde las caras de los elementos finitos muestren una distribución estructurada. La Figura 10.36 ilustra el proceso de asignación de parámetros y generación de una malla de elementos finitos con esta característica. Tal procedimiento en este ejemplo es el siguiente:

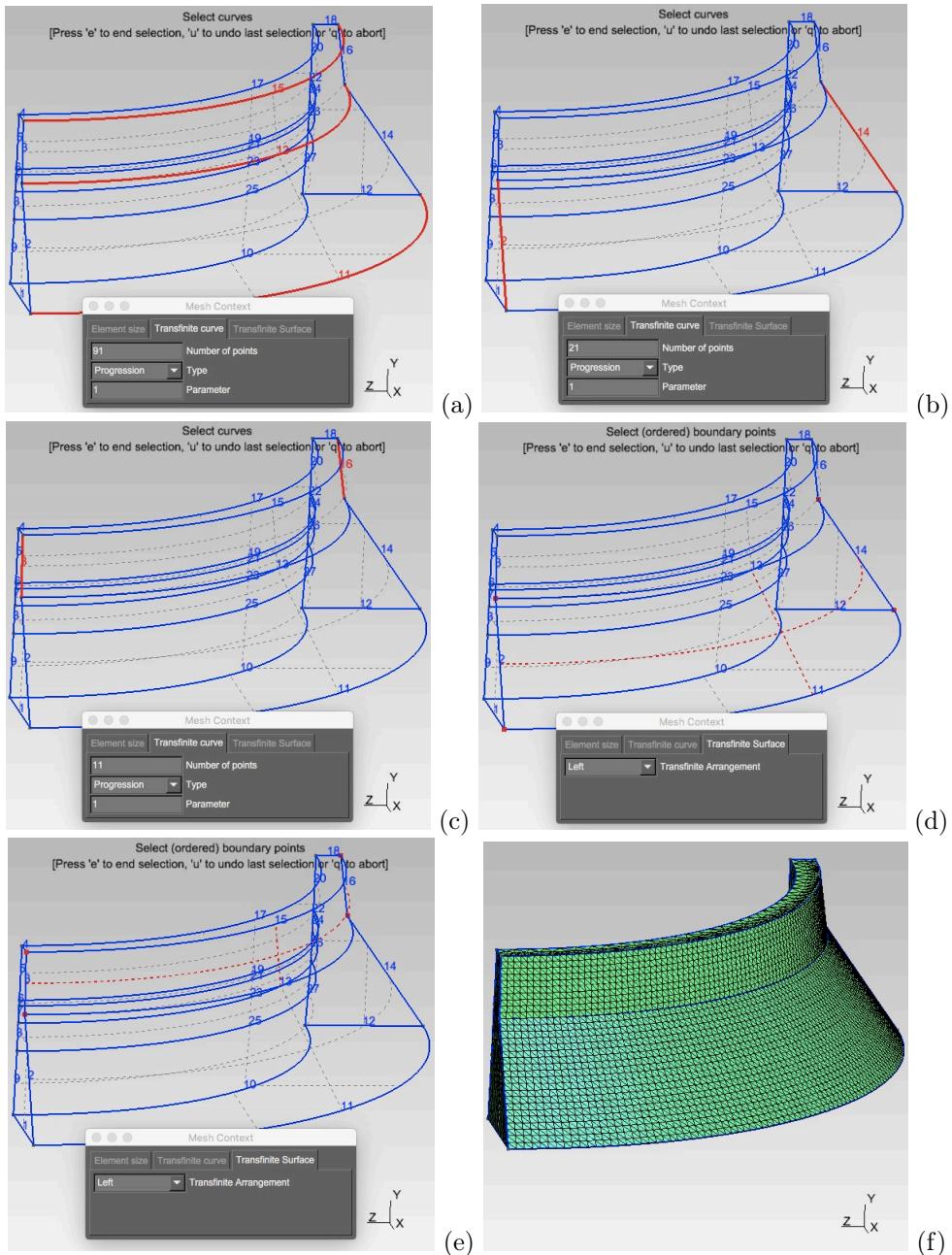
- Se asignan 91 futuros nudos sobre las líneas 11, 12 y 15, haciendo clic en **Modules**  $\triangleright$  **Mesh**  $\triangleright$  **Transfinite**  $\triangleright$  **Curve**, escribiendo 91 en la caja **Number points**, seleccionando las líneas correspondientes y oprimiendo la tecla **e** (Figura 10.36(a)).

- Se asignan 21 futuros nudos sobre las líneas 2 y 14, haciendo clic en **Modules**  $\triangleright$ **Mesh**  $\triangleright$ **Transfinite**  $\triangleright$ **Curve**, escribiendo 21 en la caja **Number points**, seleccionando las líneas correspondientes y oprimiendo la tecla **e** (Figura 10.36(b)).
- Se asignan 11 futuros nudos sobre las líneas 3 y 6, haciendo clic en **Modules**  $\triangleright$ **Mesh**  $\triangleright$ **Transfinite**  $\triangleright$ **Curve**, escribiendo 11 en la caja **Number points**, seleccionando las líneas correspondientes y oprimiendo la tecla **e** (Figura 10.36(c)). Se finaliza la asignación sobre líneas oprimiendo la tecla **q**.
- Se seleccionan las superficies donde se desea una distribución estructurada de las caras de los elementos. Para esto, se hace clic en **Modules**  $\triangleright$ **Mesh**  $\triangleright$ **Transfinite**  $\triangleright$ **Surface**, se escoge la orientación del arreglo de elementos en la caja desplegable **Transfinite arrangement**, se selecciona la primera superficie y se indica el orden de los puntos que la componen (Figura 10.36(d)). Este procedimiento se repite para la segunda superficie (Figura 10.36(e)), y se finaliza oprimiendo la tecla **q**. Tales superficies deben estar conformadas por 4 líneas.
- Se genera la malla de elementos tetraédricos lineales, haciendo clic en **Modules**  $\triangleright$ **Mesh**  $\triangleright$ **3D** o oprimiendo la tecla **3**. Se observa que las caras de los tetraedros que conforman las superficies escogidas muestran una distribución estructurada (Figura 10.36(f)).

#### 10.12.4 Generación de mallas estructuradas con elementos tetraédricos lineales

Una malla estructurada de elementos tetraédricos lineales requiere que los nudos y las caras de tales elementos también muestren una distribución estructurada. La Figura 10.37 y la Figura 10.38 ilustran un ejemplo del proceso de asignación de parámetros de la malla sobre líneas, superficies y volúmenes. Asimismo, muestra malla de elementos finitos generada. Tal procedimiento es el siguiente:

- Se asignan 91 futuros nudos sobre las líneas 9, 11, 18, 16, 13 y 8, haciendo clic en **Modules**  $\triangleright$ **Mesh**  $\triangleright$ **Transfinite**  $\triangleright$ **Curve**, escribiendo 91 en la caja **Num-**



**Figura 10.36:** GMSH: generación de la malla no estructurada de elementos finitos tetraédricos, con una cara de estructurada: (a) asignación de 91 futuros nudos sobre las líneas 11, 12 y 15, (b) asignación de 21 futuros nudos sobre las líneas 2 y 14, (c) asignación de 11 futuros nudos sobre las líneas 3 y 6, (d) y (e) asignación de caras de elementos con distribución estructurada para las superficies y determinación del orden de los puntos que la componen, (f) malla de elementos finitos generada.

ber points, seleccionando las líneas correspondientes y oprimiendo la tecla **e** (Figura 10.37(b)).

- Se asignan 21 futuros nudos sobre las líneas 6, 2, 15 y 12, haciendo clic en **Modules > Mesh > Transfinite > Curve**, escribiendo 21 en la caja **Number points**, seleccionando las líneas correspondientes y oprimiendo la tecla **e** (Figura 10.36(c)).
- Se asignan 11 futuros nudos sobre las líneas 3, 5, 20 y 17, haciendo clic en **Modules > Mesh > Transfinite > Curve**, escribiendo 11 en la caja **Number points**, seleccionando las líneas correspondientes y oprimiendo la tecla **e** (Figura 10.36(d)).
- Se asignan 5 futuros nudos sobre las líneas 7, 4, 10, 14 y 19, haciendo clic en **Modules > Mesh > Transfinite > Curve**, escribiendo 5 en la caja **Number points**, seleccionando las líneas correspondientes y oprimiendo la tecla **e** (Figura 10.36(e)).  
Se finaliza la asignación sobre líneas oprimiendo la tecla **q**.
- Se seleccionan las superficies donde se desea una distribución estructurada de las caras de los elementos. Para esto, se hace clic en **Modules > Mesh > Transfinite > Surface**, se selecciona la primera superficie y se escoge la orientación del arreglo de elementos en la caja desplegable **Transfinite arrangement** (Figura 10.36(f)). Este procedimiento se repite para las demás superficies. Se finaliza la asignación sobre superficies oprimiendo la tecla **q**. El orden de los puntos que conforman la superficie se puede omitir. Asimismo, las superficies deben estar conformadas por 4 líneas.
- Se seleccionan los volúmenes donde se desea una distribución estructurada de la malla. Para esto, se hace clic en **Modules > Mesh > Transfinite > Volume**, se selecciona el primer volumen y los puntos que lo conforman, con el fin de establecer su orden (Figura 10.38(a)). Este procedimiento se repite para el segundo volumen (Figura 10.38(b)). Se finaliza la asignación sobre volúmenes oprimiendo la tecla **q**.
- Se genera la malla de elementos tetraédricos lineales, haciendo clic en **Modules > Mesh > 3D** o oprimiendo la tecla **3**. En la Figura 10.38(c) y (d) se presentan

dos vistas diferentes de la malla estructurada de elementos finitos que se ha generado.

Las líneas de código que se crean en el archivo de extensión .geo, cuando se asignan los parámetros de la malla del ejemplo anterior, son las siguientes:

```

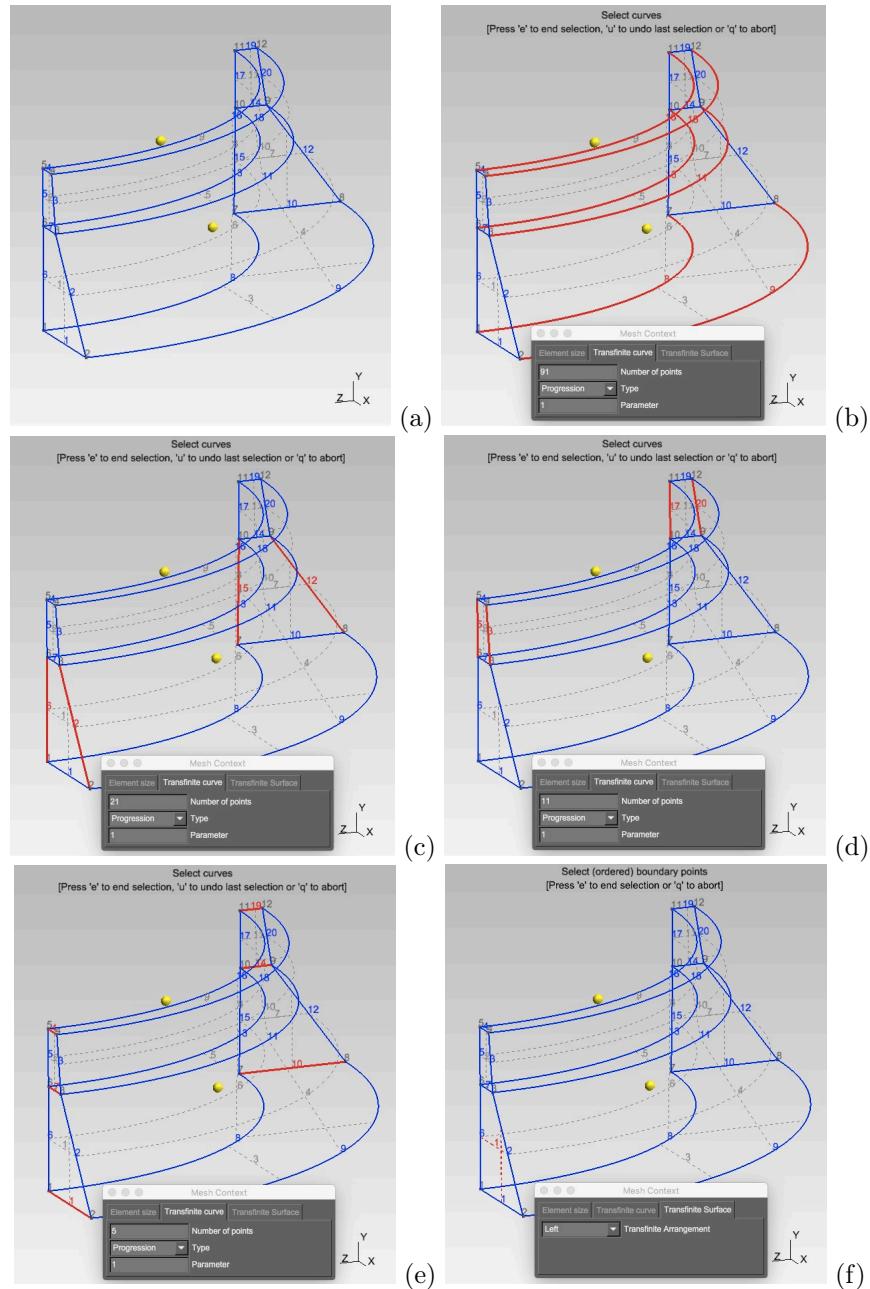
1000 Transfinite Curve {9, 11, 18, 16, 13, 8} = 91 Using Progression 1;
1001 Transfinite Curve {6, 2, 15, 12} = 21 Using Progression 1;
1002 Transfinite Curve {3, 5, 20, 17} = 11 Using Progression 1;
1003 Transfinite Curve {1, 7, 4, 10, 14, 19} = 5 Using Progression 1;
1004 Transfinite Surface {1};
1005 Transfinite Surface {2};
1006 Transfinite Surface {3};
1007 Transfinite Surface {4};
1008 Transfinite Surface {5};
1009 Transfinite Surface {6};
1010 Transfinite Surface {5};
1011 Transfinite Surface {7};
1012 Transfinite Surface {8};
1013 Transfinite Surface {9};
1014 Transfinite Surface {10};
1015 Transfinite Surface {11};
1016 Transfinite Volume{1} = {2, 8, 7, 1, 3, 9, 10, 6};
1017 Transfinite Volume{2} = {3, 9, 10, 6, 4, 12, 11, 5};

```

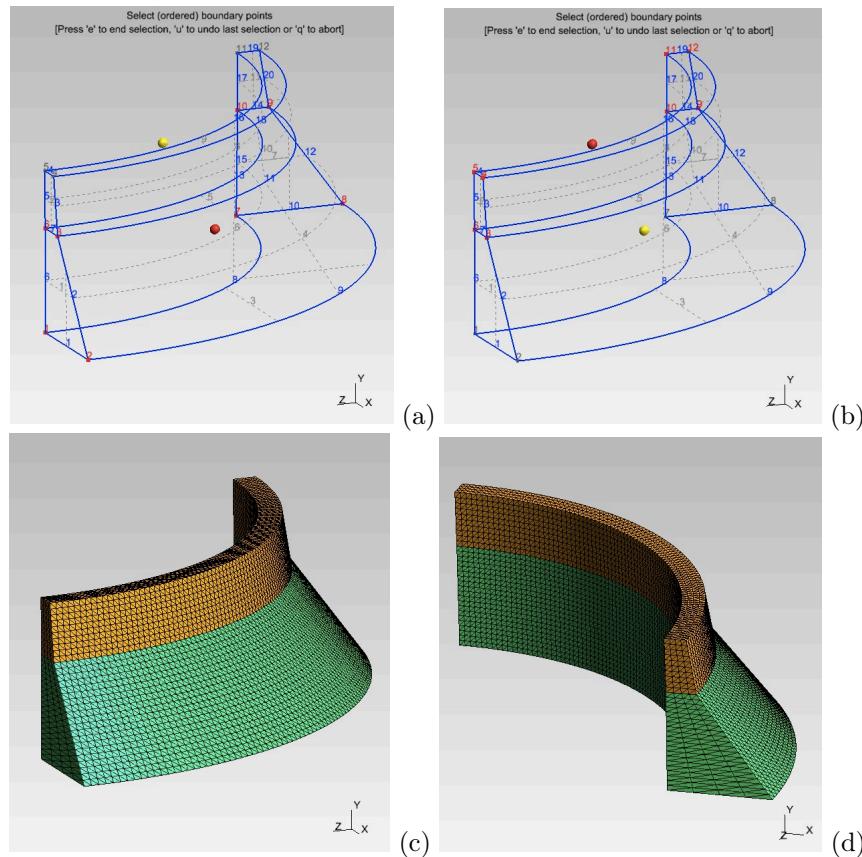
**Listado 10.1:** GMSH: ejemplo de las líneas de código de asignación de parámetros de una malla estructurada en el archivo .geo.

### 10.13 Opciones de visibilidad de entidades específicas

Un problema simulado en GMSH contiene entidades geométricas, entidades físicas, nudos y elementos finitos. En ocasiones se desea visualizar en el entorno gráfico, uno o algunos elementos de una entidad específica, mientras se mantienen ocultos los demás. El programa permite seleccionar el elemento de una entidad que se desea visualizar de tres formas diferentes: escogiendo el elemento de una lista, escribiendo su número identificador, o haciendo clic sobre él.



**Figura 10.37:** GMSH: generación de la malla estructurada de elementos finitos tetraédricos: (a) entidades geométricas del problema, (b) asignación de 91 futuros nudos sobre las líneas 9, 11, 18, 16, 13 y 8, (c) asignación de 21 futuros nudos sobre las líneas 6, 2, 15 y 12, (d) asignación de 11 futuros nudos sobre las líneas 3, 5, 20 y 17, (e) asignación de 5 futuros nudos sobre las líneas 1, 7, 4, 10, 14 y 19, (f) asignación de caras de elementos con distribución estructurada para las superficies que conforman los volúmenes.



**Figura 10.38:** GMSH: generación de la malla estructurada de elementos finitos tetraédricos: (a) y (b) asignación de malla estructurada para el primero y el segundo volumen y determinación del orden de los puntos que la componen, (c) y (d) vistas de la malla de elementos finitos generada.

### 10.13.1 Visualizar un elemento escogiéndolo de una lista

El procedimiento para visualizar uno o varios elementos seleccionados de una lista, es el siguiente:

- Hacer clic en Tools > Visibility del menú superior, y seleccionar la pestaña List browser de la ventana Visibility.
- Si se desea seleccionar un elemento de una entidad geométrica:
  - se escoge Elementary entities de la caja desplegable inferior. Esto activa una tabla con el tipo (Type), el número (Number) y el nombre (Name) designado a la entidad.



**Figura 10.39:** Visualización de un elemento escogiéndolo de una lista: (a) elemento de entidad geométrica, (b) elemento de entidad física.

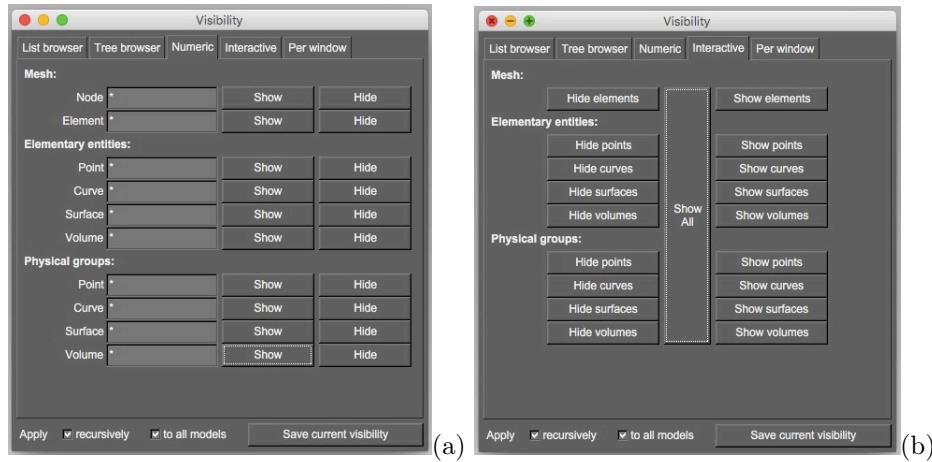
- se marca el o los elementos de las entidades geométricas que se desean visualizar y se hace clic en el botón **Apply**, como se indica en la Figura 10.39(a). Para marcar varios elementos consecutivos o no consecutivos se utilizan las teclas **shift** y **ctrl**(**cmd** en Mac), respectivamente.
- para recuperar la visualización de todos los elementos de las entidades geométricas se marcan todos de la lista y se hace clic en en el botón **Apply**.
- Si se desea seleccionar un elemento de una entidad física, se escoge **Physical group** de la caja desplegable inferior. Esto activa una tabla con el tipo (**Type**), el número (**Number**) y el nombre (**Name**) designado a la entidad (Figura 10.39(b)). A continuación se realizan los dos pasos indicados en el ítem anterior.

### 10.13.2 Visualizar un elemento escribiendo su número identificador

El procedimiento para visualizar un elemento escribiendo su número identificador, es el siguiente:

- Hacer clic en **Tools > Visibility** del menú superior, y seleccionar la pestaña **Numeric** de la ventana **Visibility** (Figura 10.40(a)).

- Si se desea visualizar solamente un elemento de las entidades geométricas (**Elementary entities**) o de las entidades físicas (**Physical group**):
  - Se escribe \* en las cajas **Point**, **Curve**, **Surface** y **Volume**, y se hace clic sobre los botones **Hide** a la derecha de cada caja, para ocultar todos los elementos de las entidades geométricas o físicas.
  - Se escribe el número del punto, línea, superficie o volumen en la caja **Point**, **Curve**, **Surface** o **Volume**, respectivamente. Se hace clic sobre el botón **Show** a la derecha de cada caja.
  - Para visualizar todas los elementos de las entidades geométricas o físicas, se escribe \* en las cajas **Point**, **Curve**, **Surface** y **Volume**, y se hace clic sobre el botón **Show** a la derecha de cada caja.
- Si se desea visualizar solamente un nudo o un elemento finito de la malla:
  - Se escribe \* en las cajas **Node** y **Element**, y se hace clic sobre los botones **Hide** a la derecha de cada caja, para ocultar todos los nudos y elementos de la malla.
  - Se escribe el número del nudo o elemento finito en la caja **Node**, o **Element**, respectivamente. Se hace clic sobre el botón **Show** a la derecha de cada caja.
  - Para visualizar todos los nudos y elementos finitos de la malla, se escribe \* en las cajas **Node** y **Element** y se hace clic sobre el botón **Show** a la derecha de cada caja.



**Figura 10.40:** Visualización de un elemento de una entidad: (a) escribiendo su número identificador, (b) haciendo clic sobre él.

### 10.13.3 Ocultar un elemento haciendo clic sobre él

El procedimiento para ocultar uno o varios elementos de una entidad haciendo clic sobre él o ellos, es el siguiente:

- Hacer clic en Tools ▷ Visibility del menú superior, y seleccionar la pestaña Interactive de la ventana Visibility (Figura 10.40(b)).
- Para ocultar uno o varios elementos de las entidades geométricas (Elementary entities) o de las entidades físicas (Physical group):
  - Se hace clic sobre el botón Hide points, Hide curves, Hide surfaces o Hide volumes, de acuerdo con el tipo de entidad que se desea ocultar.
  - En el entorno gráfico, se hace clic sobre el o los elementos a ocultar. Se termina la instrucción con la tecla q.
  - Para mostrar todos los elementos de cada tipo de entidad se hace clic en el botón Show points, Show curves, Show surfaces o Show volumes.
- Para ocultar uno o varios elementos finitos de la malla:

- Se hace clic sobre el botón **Hide elements** y en el entorno gráfico, se hace clic sobre el o los elementos finitos a ocultar. Se termina la instrucción con la tecla **q**.
- Para mostrar todos los elementos finitos de la malla se hace clic en el botón **Show elements**.
- Para mostrar todos los elementos de la malla y de las entidades geométricas y físicas, se hace clic en el botón **Show All**.

## 10.14 Producción del archivo de características del problema

Desde el entorno gráfico del programa GMSH se construye un archivo de características del problema con extensión **.geo**, el cual contiene las entidades y operaciones geométricas, las entidades físicas y los parámetros de generación de la malla de elementos finitos. El archivo de extensión **.geo** se actualiza cada vez que se realiza una acción en el entorno gráfico. Dicho archivo tiene formato ASCII y puede leerse y modificarse con cualquier editor de texto. El Listado 10.3 muestra el contenido del archivo **.geo** para el ejemplo mostrado en la Figura 10.32.

```

1000 // Gmsh project created on Tue Nov  6 16:46:21 2018
1001 SetFactory("OpenCASCADE");
1002 Point(1) = {0, 0, 0, 1.0};
1003 Point(2) = {6, 0, 0, 1.0};
1004 Point(3) = {3, 5.2, 0, 1.0};
1005 Point(4) = {0, 5.2, 0, 1.0};
1006 Line(1) = {1, 2};
1007 Line(2) = {2, 3};
1008 Line(3) = {3, 4};
1009 Line(4) = {4, 1};
1010 Circle(5) = {0, 0, 0, 3, 0, 2*Pi};
1011 Curve Loop(1) = {1, 2, 3, 4};
1012 Plane Surface(1) = {1};
1013 Curve Loop(2) = {5};
1014 Plane Surface(2) = {2};
1015 BooleanDifference{ Surface{1}; Delete; }{ Surface{2}; Delete; }
1016 Point(6) = {0, 0, 0, 1.0};
1017 Point(7) = {4.5, 2.6, -0, 1.0};
1018 Line(6) = {6, 7};
1019 Line(7) = {6, 4};

```

```

1020 BooleanFragments{ Curve{7}; Curve{6}; Delete; }{ Curve{1}; Delete; }
1021 BooleanFragments{ Curve{4}; Delete; }{ Curve{9}; Delete; }
1022 Recursive Delete {
1023   Surface{1};
1024 }
1025 Point(10) = {0, 5.2, -0, 1.0};
1026 Line(15) = {2, 10};
1027 Line(16) = {10, 4};
1028 Line(17) = {1, 5};
1029 Curve Loop(1) = {12, 15, 16, -7};
1030 Plane Surface(1) = {1};
1031 Curve Loop(2) = {11, 7, -14, -9};
1032 Plane Surface(2) = {2};
1033 Curve Loop(3) = {10, 9, -13, -17};
1034 Plane Surface(3) = {3};
1035 Recursive Delete {
1036   Curve{8}; Curve{6};
1037 }
1038 Physical Curve("DISP UX=0 UY=0") = {17};
1039 Physical Curve("DISP UX=0") = {15};
1040 Physical Curve("PRES WY=-5000") = {16};
1041 Physical Surface("CATE EYOU=20E6 POIS=0.3 TESP=1 TIPR=21") = {1, 2, 3};
1042 Transfinite Curve {12, 11, 10, 13, 14, 16} = 4 Using Progression 1;
1043 Transfinite Curve {15, 7, 9, 17} = 4 Using Progression 1;
1044 Transfinite Surface {1} Right;
1045 Transfinite Surface {2} Right;
1046 Transfinite Surface {3} Right;
1047 Recombine Surface {1,2,3};

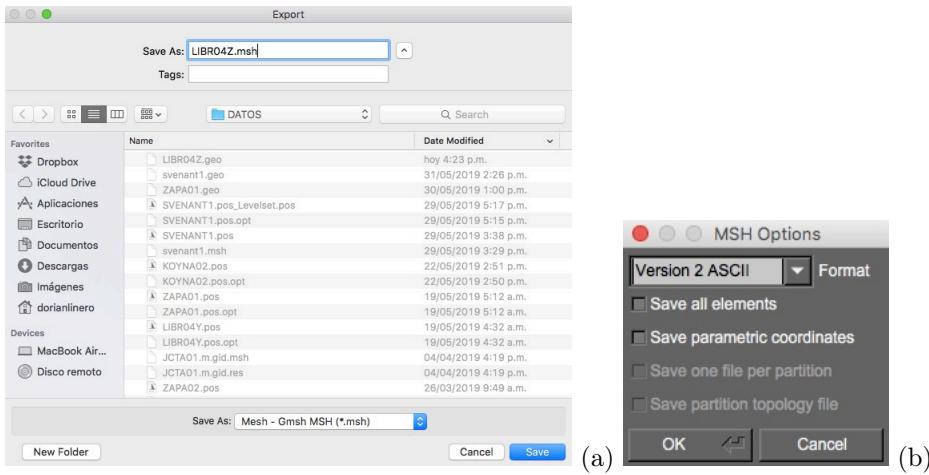
```

**Listado 10.2:** GMSH: Archivo completo de extensión .geo, el cual contiene las entidades geométricas, las entidades físicas y los parámetros de malla para un ejemplo.

## 10.15 Obtención del archivo de la malla de elementos finitos

La información de la malla de elementos finitos generada mediante los procedimientos indicados en la Sección 10.12, permanece en la memoria RAM del computador hasta que se recarga el archivo .geo o cuando se cierra el programa GMSH. Tales datos se pueden exportar a un archivo de extensión .msh en formato ASCII de la versión 2 de GMSH, el cual puede ser leído por el programa PEFiCA 2.0. El procedimiento para obtener dicho archivo en el programa GMSH es el siguiente:

- Hacer clic en File > Export... del menú superior. Se activará la ventana Export.

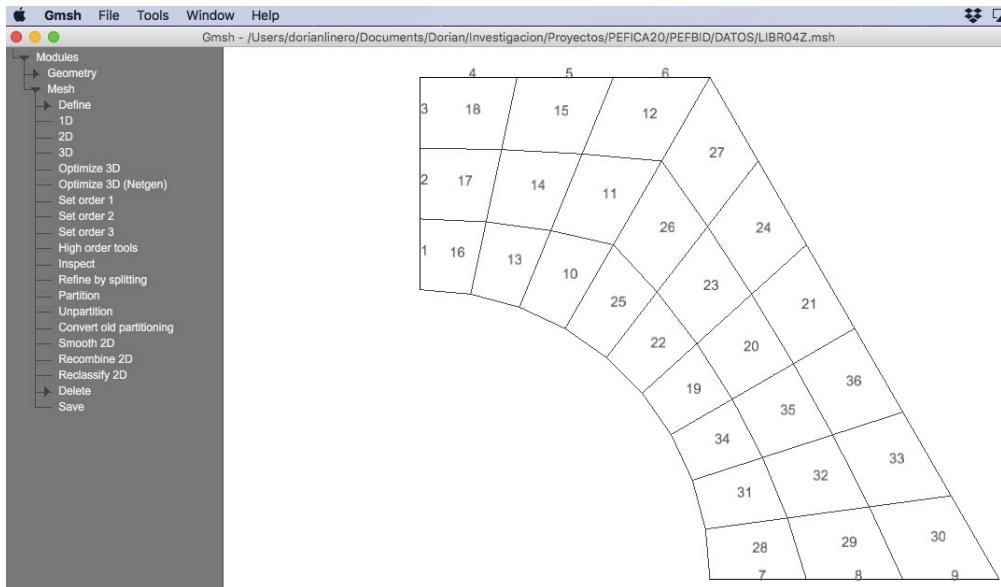


**Figura 10.41:** GMSH. Obtención del archivo de la malla de elementos finitos: (a) ventana Export donde se establece el nombre y la ubicación del archivo .msh, y (b) ventana MSH Options donde se define el formato de tal archivo.

- Escribir el nombre de un archivo con extensión **.msh**, en la caja **Save As** de la parte superior de la ventana **Export**. Este archivo almacenará la información de la malla de elementos finitos. Seleccionar la carpeta que contendrá dicho archivo.
- Hacer clic en la caja **Save As** de la parte inferior de la ventana **Export**. Escoger el formato de exportación del archivo **.msh** como **Mesh - Gmsh MSH (\*.msh)**. Hacer clic en el botón **Save**.
- Seleccionar **Version 2 ASCII** en la caja **Format** de la ventana **MSH Options**, y hacer clic en el botón **OK**.

El archivo de la malla de elementos finitos o simplemente archivo **.msh** incluye elementos finitos asociados a cada entidad física sobre puntos, líneas, superficies y volúmenes. Por ejemplo, cuando la malla presentada en la Figura 10.32 se exporta a un archivo **.msh**, este último contiene: (i) 27 elementos bidimensionales numerados del 10 al 36 asociados a la entidad física sobre superficie de la categoría de material, y (ii) 9 elementos unidimensionales numerados del 1 al 9 asociados a las entidades físicas sobre líneas de los desplazamientos conocidos y de las cargas aplicadas.

Para presentar la numeración de los elementos finitos de la malla exportada, se abre el programa GMSH, se hace clic en **File > Open...** del menú superior, se selecciona



**Figura 10.42:** GMSH. Numeración de los elementos finitos de una malla almacenada en el archivo exportado .msh.

el archivo de extensión .msh correspondiente, se hace clic en Tools > Options del menú superior, se selecciona la ventana Mesh y la pestaña Visibility, y se confirman las casillas 1D elements, 1D element labels, 2D element edges y 2D element labels.

El archivo .msh exportado tiene en formato ASCII, el cual se puede leer con cualquier editor de texto. Tal archivo contiene la siguiente información (Geuzaine & Remacle, 2019):

- El bloque entre las instrucciones \$PhysicalNames y \$EndPhysicalNames, contiene las características de las entidades físicas. La siguiente línea después del encabezado del bloque indica el número de entidades físicas definidas. A continuación cada fila contiene el tipo, el número identificador y el nombre que describe una entidad física. El tipo establece el orden de la entidad geométrica sobre la cual se aplica la entidad física, como se define en la Sección 10.16. La sintaxis del nombre de la entidad física permite indicar los desplazamientos conocidos, las cargas aplicadas, y las propiedades mecánicas y geométricas asociadas a los nudos o elementos de la malla, que serán leídas por PEFiCA 2.0 (Tabla 10.1 y Tabla 10.2). En el siguiente listado se ilustra el bloque de 4 entidades físicas de un problema particular.

```

1000 $PhysicalNames
1002 4
1002 1 1 "DISP UX=0 UY=0"
1004 1 2 "DISP UX=0"
1004 1 3 "PRES WY=-5000"
1006 2 4 "CATE EYOU=20E6 POIS=0.3 TESP=1 TIPR=21"
1006 $EndPhysicalNames

```

**Listado 10.3:** GMSH: Bloque de entidades físicas en el archivo .msh.

- El bloque entre las instrucciones `$Nodes` y `$EndNodes`, contiene las coordenadas de los nudos de la malla. En la línea después del encabezado se indica el número de nudos, mientras que cada una de las siguientes líneas contienen el número identificador y las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  de un nudo. Una parte del bloque de coordenadas del ejemplo en cuestión, incluyendo los nudos 1, 2, 3 y 40, se ilustra en el siguiente listado.

```

1000 $Nodes
1002 40
1002 1 3.00 0.00 0.00
1004 2 0.00 3.00 0.00
1004 3 3.00 5.20 0.00
1006 :
1006 40 4.27 1.49 0.00
1006 $EndNodes
1008

```

**Listado 10.4:** GMSH: Bloque de coordenadas de los nudos en el archivo .msh.

- El bloque entre las instrucciones `$Elements` y `$EndElement`s, contiene las características de cada elemento finito. En la línea después del encabezado se indica el número de elementos, mientras que cada una de las siguientes líneas contiene para un elemento finito: el número identificador, el tipo indicado en la Sección 10.16, el identificador de partición de malla (2 por defecto), el identificador de la entidad física asociada, el identificador de la entidad geométrica asociada, y los números identificadores de los nudos que lo conforman. El si-

guiente listado muestra parte del bloque de las características de los primeros 20 elementos finitos de 36.

---

```

1000  $Elements
1001  36
1002  1 1 2 2 15 2 23
1003  2 1 2 2 15 23 24
1004  3 1 2 2 15 24 8
1005  4 1 2 3 16 8 25
1006  5 1 2 3 16 25 26
1007  6 1 2 3 16 26 3
1008  7 1 2 1 17 1 27
1009  8 1 2 1 17 27 28
1010  9 1 2 1 17 28 4
1011  10 3 2 4 1 5 17 29 9
1012  11 3 2 4 1 9 29 30 10
1013  12 3 2 4 1 10 30 26 3
1014  13 3 2 4 1 17 18 31 29
1015  14 3 2 4 1 29 31 32 30
1016  15 3 2 4 1 30 32 25 26
1017  16 3 2 4 1 18 2 23 31
1018  17 3 2 4 1 31 23 24 32
1019  18 3 2 4 1 32 24 8 25
1020  19 3 2 4 2 6 15 33 11
1021  20 3 2 4 2 11 33 34 12
1022  :
1023  36 3 2 4 3 40 12 7 20
1024  $EndElements

```

---

**Listado 10.5:** GMSH: Bloque de elementos en el archivo .msh.

En el bloque **\$Elements** del Listado 10.5 se observa que los elementos finitos triangulares 10 al 36 están asociados a la entidad física número 4. Tal entidad se describe en la línea 1005 del Listado 10.3. El primer parámetro de esa línea es igual a 2, indicando que la entidad física se aplica sobre una superficie de acuerdo con la nomenclatura descrita en la Sección 10.16. El segundo parámetro igual a 4 es el número indicador de la entidad física, y el tercer parámetro entre comillas es su nombre. La sintaxis de éste último permite a PEFiCA 2.0 identificar que el espesor del elemento es  $t = 1.0$  m, el tipo de problema es condición plana de deformaciones, el módulo de Young y la relación de Poisson del material son  $E = 20 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup> y  $\nu = 0.3$ .

Los elementos finitos tipo línea 7, 8 y 9 indicados en el Listado 10.5 están asociados a la entidad física 1. Ésta última se define en la línea 1002 del Listado 10.3, donde el primer parámetro igual a 1 indica que la entidad física se aplica sobre una línea, el segundo parámetro igual a 1 identifica la entidad física y el tercer parámetro entre comillas corresponde a su nombre. La sintaxis del nombre de esta entidad física permite que PEFiCA 2.0 identifique la ubicación de una condición de borde, en la cual las componentes de desplazamiento en las direcciones  $x$  y  $y$  son iguales a cero, es decir  $u = 0, v = 0$ . Asimismo, los elementos tipo línea 1,2 y 3 localizan la condición de borde  $u = 0$  dada por la entidad física 2 y los elementos tipo línea 4, 5 y 6 ubican la presión aplicada  $w_y = -5\,000 \text{ kN/m}^2$  dada por la entidad física 3.

En general, los elementos finitos exportados al archivo `.msh` que están asociados a entidades geométricas de menor jerarquía a las superficies en los problemas bidimensionales y a los volúmenes en problemas tridimensionales, describen las condiciones de borde y las cargas aplicadas. El programa PEFiCA 2.0 utiliza estos elementos para identificar tales condiciones y después los elimina, dejando una malla con los elementos finitos reales en el archivo `.pos`.

## 10.16 Tipos de entidad física y tipos de elementos finitos definidos en GMSH

Las entidades físicas de GMSH se clasifican de acuerdo con la entidad geométrica sobre la cual se aplican. En el bloque que contiene las características de las entidades físicas del archivo `.msh`, una entidad física aplicada sobre puntos se designa como 0, sobre líneas como 1, sobre superficies como 2 y sobre volúmenes como 3.

Por otro lado, el programa GMSH establece diferentes tipos de elementos finitos, los cuales se designan en el bloque de características de los elementos contenidas en los archivos `.msh` y `.pos`, así: 15 si el elemento es equivalente a un nudo, 1 si el elemento es una línea de 2 nudos, 2 si es un elemento triangular de 3 nudos, 3 si es un elemento cuadrilateral de 4 nudos, 4 si es un elemento tetraédrico de 4 nudos, 5 si es un elemento hexaédrico de 8 nudos. Otros tipos de elementos se describen en la Sección 9.1 del manual de referencia (Geuzaine & Remacle, 2019).



## Capítulo 11

# Programa GMSH en el postproceso

Este capítulo es un breve manual de usuario postproceso de los resultados obtenidos mediante el programa GMSH. Esta herramienta permite presentar cada resultado de desplazamiento, deformación o esfuerzo de forma gráfica, mediante líneas de igual valor o áreas llenas en rangos de valores, entre otras. También puede dibujar la configuración deformada del sólido y las reacciones en los apoyos.

### 11.1 Archivo de resultados gráficos para GMSH

GMSH es un programa multiplataforma de licencia libre y gratuita que permite presentar de forma gráfica los resultados obtenidos de un análisis (Geuzaine & Remacle, 2009, 2019). El programa lee un archivo plano o binario de extensión .pos, el cual está dividido en bloques que contienen la malla de elementos finitos y los resultados escalares, vectoriales o tensoriales, representados en el dominio del problema para cada instante de tiempo. Asimismo, también lee un archivo de extensión .pos.opt que contiene las opciones generales de visualización de los resultados.

### 11.1.1 Bloques de la malla de elementos finitos

Durante la ejecución del programa PEFiCA 2.0 se escriben las características de la malla en el archivo `.pos`, a partir de la información del problema dada en el archivo `.msh`. Los tres primeros bloques del archivo `.pos` corresponden: al identificador de la versión de GMSH, las coordenadas de los nudos y las características asociadas a cada elemento finito. El bloque de coordenadas de los nudos de la malla tiene el siguiente formato:

```
$Nodes
nnud
inud xnui ynui znui
...
$EndNodes
```

siendo *nnud* el número de nudos de la malla, *inud* el número identificador de un nudo y *xnui*, *ynui* y *znui*, las coordenadas del nudo *inud* en las direcciones *x*, *y* y *z*, respectivamente.

El bloque de características de los elementos finitos tiene el siguiente formato:

```
$Elements
nele
iele tiei pmei efei egei niei njei nkei ... nnei
...
$EndElements
```

donde *nele* establece la cantidad de elementos finitos de la malla y *iele* indica el número de un elemento finito. El identificador del tipo de elemento finito *tiei* descrito en la Sección 10.16. Los parámetros *pmei*, *efeи* y *egei* son los identificadores de la partición de malla (por defecto 2), la entidad física y la entidad geométrica a la cual pertenece el elemento finito *iele*. Finalmente, *niei*, *njei*, *nkei* ... y *nnei* indican los números de los nudos del elemento finito *iele*.

El siguiente listado ilustra los tres primeros bloques para una malla de 8 nudos en el espacio tridimensional y 5 elementos tetraédricos lineales.

```

1000 $MeshFormat
2.0 0 8
1002 $EndMeshFormat
$Nodes
1004 8
1005 1 +0.0000e+00 +0.0000e+00 +0.0000e+00
1006 2 +4.0000e-01 +0.0000e+00 +0.0000e+00
1007 3 +0.0000e+00 +3.0000e-01 +0.0000e+00
1008 4 +4.0000e-01 +3.0000e-01 +0.0000e+00
1009 5 +0.0000e+00 +0.0000e+00 +3.0000e-01
1010 6 +4.0000e-01 +0.0000e+00 +3.0000e-01
1011 7 +0.0000e+00 +3.0000e-01 +3.0000e-01
1012 8 +4.0000e-01 +3.0000e-01 +3.0000e-01
$EndNodes
1014 $Elements
1015 5
1016 1 4 2 1 1 1 3 5 2
1017 2 4 2 1 2 2 3 8 4
1018 3 4 2 1 3 2 8 5 6
1019 4 4 2 1 4 3 5 8 7
1020 5 4 2 1 5 3 2 8 5
$EndElements

```

**Listado 11.1:** GMSH: Ejemplo de los bloques de versión, nudos y elementos del archivo de resultados .pos.

### 11.1.2 Generalidades sobre la representación gráfica de resultados mediante *vistas*

Cada resultado específico, nodal o elemental, se puede representar gráficamente en GMSH mediante una *vista*. Los datos de cada una de ellas, su nombre y su tipo se definen en un bloque dentro del archivo .pos. A continuación se describe la sintaxis de los bloques que contienen una vista de resultado.

### 11.1.3 Formato de un bloque de resultado en los nudos

El programa GMSH puede representar gráficamente entidades escalares, vectoriales o tensoriales en los nudos, con el siguiente formato (aquí presentado a tres columnas):

\$NodeData	<i>tiem</i>	<i>nnuv</i>
<i>npac</i>	<i>npai</i>	<i>inud coni</i>
<i>nomb</i>	<i>paso</i>	...
<i>npar</i>	<i>ncom</i>	\$EndNodes

Los parámetros de este bloque son explicados a continuación:

- *npac*, *npar* y *npai* es el número de parámetros tipo cadena de caracteres, tipo real y tipo entero asociados al resultado. Los dos primeros corresponden a 1 y el tercero a 3.
- *tiem* es el valor del tiempo correspondiente un resultado. En particular en problemas estáticos como los aquí presentados, solo existe un instante de tiempo y se fija en un valor virtual de 1.0.
- *paso* es un valor entero que indica el paso de tiempo al cual corresponden los resultados. Asimismo, en problemas estáticos se asigna como 0.
- *ncom* es el número de componentes del campo que se desea representar, es decir, si el resultado es escalar *ncom*=1, si es vectorial *ncom*=3 y si es tensorial *ncom*=9.
- *nnuv* es el número de nudos que se desean representar en la vista. Este parámetro no necesariamente es el total de nudos de la malla, por ejemplo, los resultados de una categoría están dados en nudos asociados a ella.
- En la misma línea del archivo se tiene el parámetro *inud* que corresponde al número del nudo y el conjunto de parámetros *coni*, los cuales son los valores de las componentes del campo escalar, vectorial o tensorial que se desea representar, así:

```

    si ncom=1 entonces coni=con1
    si ncom=3 entonces coni=con1 con2 con3
    si ncom=9 entonces coni=con1 con2 con3 con4 con5 con6 con7 con8 con9

```

siendo *con1* ... *con9* las componentes del campo correspondiente.

El Listado 11.2 y el Listado 11.3 ilustran el bloque del vector fuerza actuante en los nudos y el bloque del escalar esfuerzo principal mayor promedio en los nudos, los cuales fueron calculados por PEFICA 2.0 para el ejemplo anterior.

---

```

1000 $NodeData
1
1002 "Fuerzas nodelas"
1
1004 +1.0000e+00
3
1006 0
3
1008 8
1009 1 +2.617753e+02 +1.148722e+02 +1.148723e+02
1010 2 +0.000000e+00 +0.000000e+00 +0.000000e+00
1011 3 -2.617753e+02 -3.146609e+00 -4.908638e+02
1012 4 +0.000000e+00 +0.000000e+00 +0.000000e+00
1013 5 -2.617754e+02 -4.908638e+02 -3.146596e+00
1014 6 +0.000000e+00 +0.000000e+00 +0.000000e+00
1015 7 -7.382246e+02 +3.791382e+02 +3.791382e+02
1016 8 +1.000000e+03 +0.000000e+00 +0.000000e+00
$EndNodeData

```

---

**Listado 11.2:** GMSH: Bloque de vector desplazamiento en los nudos del archivo de resultados .pos.

---

```

1000 $NodeData
1
1002 "Esfuerzo prom. SP1"
1
1004 +1.0000e+00
3
1006 0
1
1007 1
1008 8
1009 1 +2.404690e+03
1010 2 +8.660132e+03
1011 3 +1.568588e+04
1012 4 +9.247676e+03

```

---

```

5  +1.568588e+04
6  +9.247677e+03
7  +3.735066e+04
8  +1.739662e+04
$EndNodeData

```

**Listado 11.3:** GMSH: Bloque de esfuerzo principal mayor promedio en los nudos del archivo de resultados .pos.

#### 11.1.4 Formato de un bloque de resultado en el interior de los elementos

Para representar gráficamente un resultado en el interior de cada elemento finito, el programa GMSH debe leer los valores en los nudos que conforman cada uno de los elementos, con el siguiente formato:

<code>\$ElementNodeData</code> <code>npac</code> <code>nomb</code> <code>npar</code>	$tiem$ $npai$ $paso$ $ncom$	$nele$ $iele\ nnue\ coei$ $\dots$ <code>\$EndElementNodeData</code>
---	--------------------------------------	--

Los parámetros de este bloque son explicados a continuación:

- $npac$ ,  $npar$  y  $npai$  es el número de parámetros tipo cadena de caracteres, tipo real y tipo entero asociados al resultado. Los dos primeros corresponden a 1 y el tercero a 3.
- $tiem$  es el valor del tiempo correspondiente un resultado. En particular en problemas estáticos como los aquí presentados, solo existe un instante de tiempo y en consecuencia este parámetro se fija en un valor virtual de 1.0.
- $paso$  es un valor entero que indica el paso de tiempo al cual corresponden los resultados. Asimismo, en problemas estáticos se asigna como 0.
- $ncom$  es el número de componentes del campo que se desea representar, es decir, si el resultado es escalar  $ncom=1$ , si es vectorial  $ncom=3$  y si es tensorial  $ncom=9$ .

- $nеле$  es el número de elementos que se desean representar, el cual no necesariamente es el total de elementos de la malla.
- En la misma línea del archivo se tiene el parámetro  $iele$  que corresponde al número del elemento,  $nnue$  que es el número de nudos por elemento y el conjunto de parámetros  $coei$ , los cuales son los valores de las componentes de la campo escalar, vectorial y tensorial que se desea representar. Por ejemplo, si el número de componentes es  $ncom=1$  y el número de nudos por elemento es  $nnue=4$ , el conjunto de parámetros  $coei$  corresponderá a  $cen1$ ,  $cen2$ ,  $cen3$  y  $cen4$ , los cuales son los valores del resultado en los nudos 1, 2, 3 y 4 del elemento finito  $iele$ .

El Listado 11.4 ilustra el bloque de la cantidad escalar deformación principal menor, evaluada en el interior de 8 elementos tetraédricos lineales, la cual fue calculada por PEFiCA 2.0 para el ejemplo anterior.

---

```

1000 $ElementNodeData
1
1002 "Deformacion EP3"
1
1004 +1.0000e+00
3
1006 0
1
1008 5
1      4    -9.243572e-04   -9.243572e-04   -9.243572e-04   -9.243572e-04
1010 2      4    -4.985450e-04   -4.985450e-04   -4.985450e-04   -4.985450e-04
3      4    -4.985450e-04   -4.985450e-04   -4.985450e-04   -4.985450e-04
1012 4      4    -5.444037e-04   -5.444037e-04   -5.444037e-04   -5.444037e-04
5      4    -5.108037e-04   -5.108037e-04   -5.108037e-04   -5.108037e-04
1014 $EndElementNodeData

```

---

**Listado 11.4:** GMSH: Bloque del escalar deformación principal menor en el interior de los elementos, del archivo de resultados .pos.

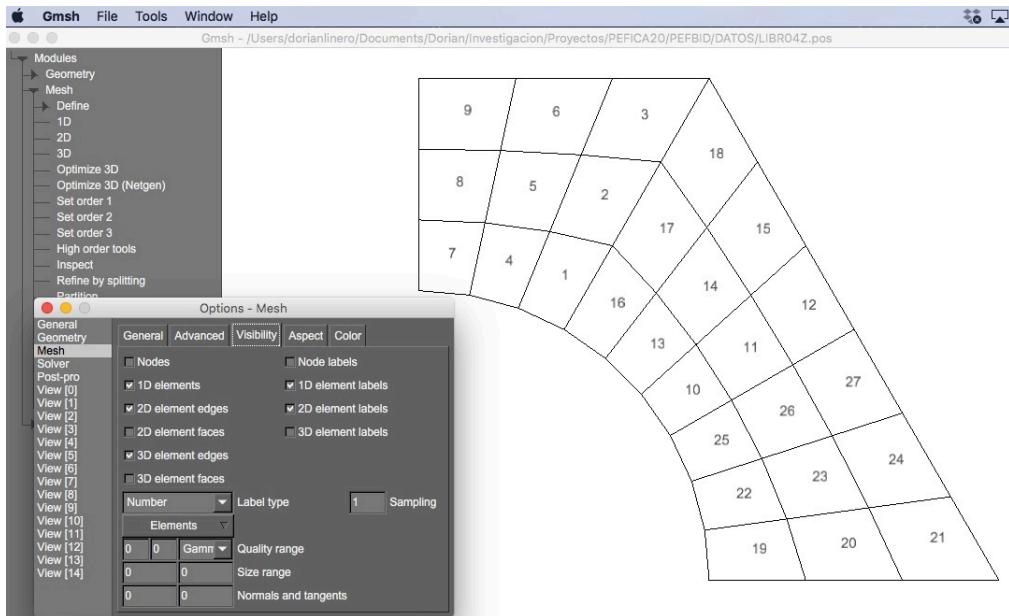
## 11.2 Malla de elementos finitos utilizada para el análisis

El primer procedimiento realizado por el programa PEFiCA 2.0 consiste en leer el archivo de entrada de datos con extensión `.msh`, y construir los arreglos que contienen la información del problema. En esta etapa PEFiCA 2.0 excluye los elementos finitos del archivo `.msh` que no sean parte del análisis y ajusta la numeración de los elementos de forma secuencial. En consecuencia para un análisis bidimensional, los elementos finitos unidimensionales incluidos en el archivo de entrada de extensión `.msh` son excluidos en el archivo de salida de extensión `.pos`. Por ejemplo, se tiene un archivo `.msh` con la malla mostrada en la Figura 10.42, se analiza dicha malla con el programa PEFiCA 2.0, y se obtiene el archivo de salida `.pos`. La malla contenida en este último tiene 27 elementos finitos bidimensionales numerados del 1 al 27, como lo ilustra la Figura 11.1. De igual manera, para un análisis tridimensional, los elementos finitos de línea y de superficie incluidos en el archivo de entrada de extensión `.msh`, son excluidos en el archivo de salida de extensión `.pos`.

Para presentar la numeración de los elementos finitos de la malla bidimensional analizada en el archivo de postproceso, se abre el programa GMSH, se hace clic en **File >Open...** del menú superior, se selecciona el archivo de extensión `.pos` correspondiente, se hace clic en **Tools >Options** del menú superior, se selecciona la ventana **Mesh** y la pestaña **Visibility**, y se marcan las casillas **2D element edges**, **2D element faces** y **2D element labels**. Para mallas tridimensionales se marcan las casillas **3D element edges**, **3D element faces** y **3D element labels**.

## 11.3 Opciones en la presentación de resultados de la malla

Para cada *vista* se pueden definir diferentes propiedades de presentación como escala de colores, número y tipo de intervalos, entre otras. Las opciones en la presentación de resultados de la malla de elementos finitos se establecen haciendo clic en **Tools >Options** del menú superior y escogiendo la(s) vista(s) que se desea(n) modificar.



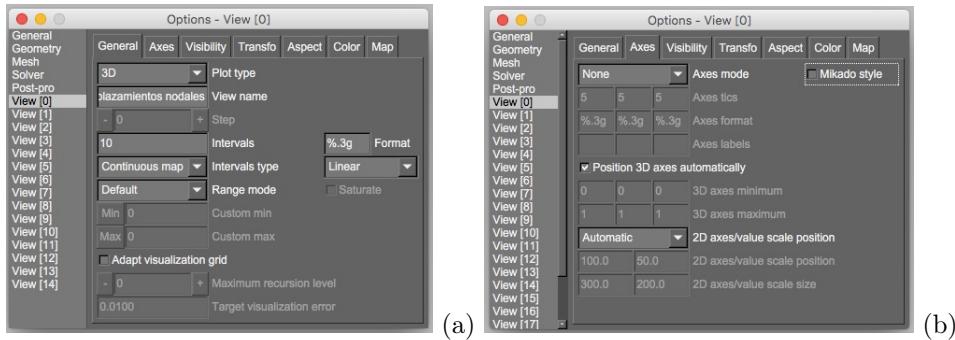
**Figura 11.1:** GMSH. Numeración de los elementos finitos de una malla almacenada en el archivo de postproceso .pos, producido por PEFiCA 2.0.

### 11.3.1 Opciones gráficas generales

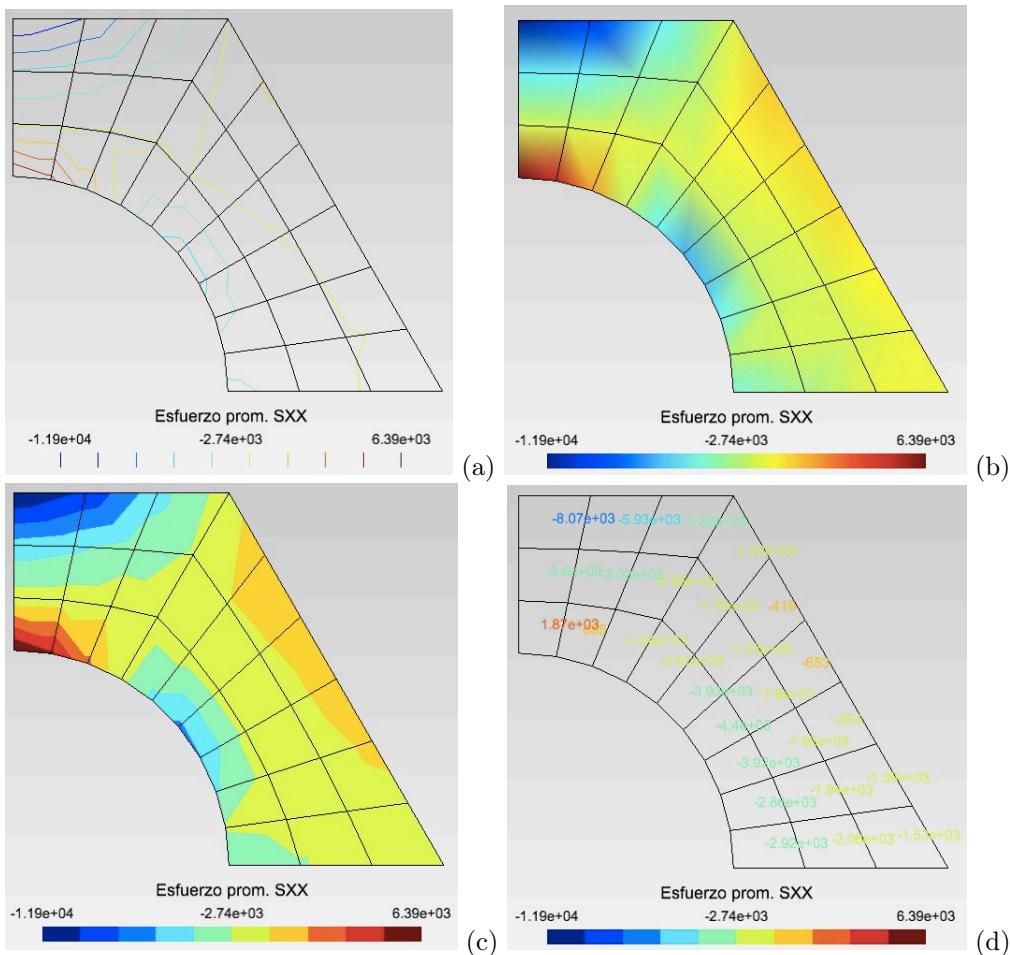
La pestaña General en la ventana Options - View mostrada en la Figura 11.2(a), permite establecer los siguientes parámetros:

- El tipo de dibujo se define en la caja Plot type, donde se puede escoger:
  - 3D para presentar resultados en espacios bi- o tri- dimensionales o
  - 2D para mostrar gráficas de abscisa y ordenada.
- El número de intervalos en que se divide la escala de valores del resultado se escribe en la caja Intervals.
- El tipo de presentación gráfica de los intervalos de los resultados se define en la caja Intervals type, donde se puede escoger:
  - Iso-values para presentar líneas o superficies de igual resultado en problemas bi- o tri-dimensionales, respectivamente (Figura 11.3(a)),

- **Continuous map** para mostrar el resultado de forma continua con mapa de colores (Figura 11.3(b)),
  - **Filled iso-values** para presentar cada intervalo de resultados con un color específico (Figura 11.3(c)), o
  - **Numeric values** para mostrar el valor en el centro del elemento finito (Figura 11.3(d)).
- El rango de valores presentados se define en la caja **Range mode**, donde se puede escoger:
    - **Default** para que automáticamente tome el rango entre los valores mínimo y máximo del resultado en todos los pasos de carga,
    - **Custom** para establecer directamente los valores mínimo y máximo en las cajas **Custom min** y **Custom max**, respectivamente, y
    - **Per step** para que tome el rango entre los valores mínimo y máximo del resultado en el paso de carga en particular.
  - El formato de los números que aparecen en la escala de valores del resultado se define en la caja lateral **Format**, siguiendo la sintaxis del lenguaje C. Por ejemplo, **%.4e** escribe un real en notación científica con 4 cifras decimales, **%.6f** escribe el número en formato de punto flotante con 6 cifras decimales, o **%.3g** escribe un número en el formato más corto entre **%.3e** y **%.3f**.
  - El tipo de escala de valores del resultado se define en la caja inferior desplegable **Format**, donde se puede escoger: **Linear** para escala lineal, **Logarithmic** para escala logarítmica, y **Double logarithmic** para escala doble logarítmica.



**Figura 11.2:** GMSH. Pestañas de la ventana de opciones de una vista de resultados: (a) parámetros generales y (b) parámetros de los ejes.



**Figura 11.3:** GMSH. Tipos de presentación gráfica de los intervalos de los resultados: (a) mostrar líneas de igual resultado, (b) presentar resultado de forma continua con mapa de colores, (c) mostrar cada intervalo de resultados con un color específico, o (d) mostrar el valor en el centro del elemento finito.

### 11.3.2 Opciones gráficas de los ejes

La pestaña **Axes** en la ventana **Options - View** mostrada en la Figura 11.2(b), permite definir el tipo de presentación de los ejes sobre la malla o gráfica se define en la caja **Axis mode**, donde se puede escoger:

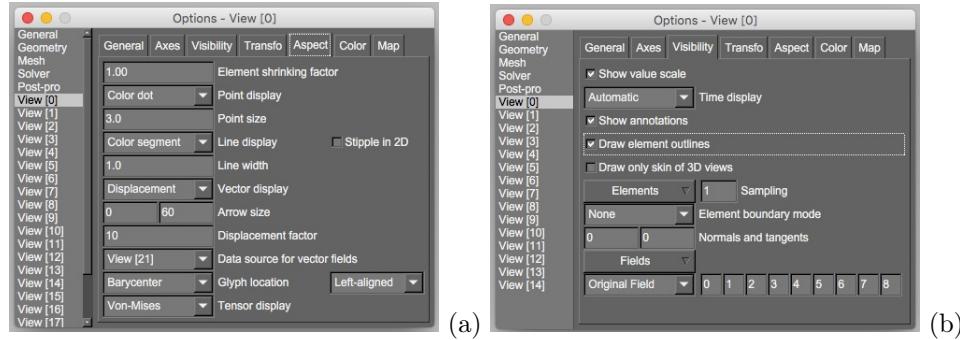
- **None** para que no se presenten ejes,
- **Simple axis** para mostrar cada eje coordenado mediante una línea,
- **Box** para mostrar los ejes en una caja que encierra la malla o la gráfica,
- **Full grid** o **Open grid** para mostrar los ejes en una caja que encierra la malla o la gráfica, incluyendo las líneas de división, y
- **Ruler** para mostrar una regla sobre la diagonal de la caja que encierra a la malla o gráfica.

### 11.3.3 Opciones en el aspecto del gráfico

La pestaña **Aspect** en la ventana **Options - View** mostrada en la Figura 11.4(a), permite definir los siguientes parámetros:

- El factor de reducción del tamaño del elemento finito donde se presenta el resultado se define en la caja **Element shrinking factor**. Por ejemplo, un factor de 0.9 muestra una reducción del tamaño de los elementos con respecto a su centro, que facilita la visualización de los resultados en elementos del interior de la malla.
- El espesor de los lados o caras de los elementos finitos en el resultado se establece en la caja **Line width**.
- El tipo de presentación de los resultados vectoriales se define en la caja desplegable **Vector display**, donde se puede escoger:

- **Line**, **Arrow**, **Pyramid** 3D **Arrow** o **Comet** para dibujar una segmento de línea, una flecha plana, una pirámide, una flecha tridimensional o una línea con círculo en su extremo, respectivamente. El tamaño, color y orientación de cada tipo de representación gráfica corresponde a la norma y dirección del vector resultado.
- **Displacement** para dibujar la malla desplazada con respecto a las coordenadas originales de los nudos. El cambio de posición de cada nudo está determinado por el vector de resultado. En particular, si el vector de resultado es el desplazamiento entonces el dibujo corresponderá a la configuración deformada de la malla.
- El tamaño mínimo y máximo de la flecha, línea o pirámide del resultado vectorial se define en las dos cajas de texto al lado de **Arrow size**.
- La ubicación de la línea, flecha o pirámide del resultado vectorial se define en las cajas desplegables de **Glyph location**. La caja a la izquierda de **Glyph location** permite escoger **Barycenter** o **Node** para que el tipo de representación gráfica se ubique en el centro de cada elemento finito o en los nudos de la malla, respectivamente. En cambio, la caja a la derecha de **Glyph location** define si el segmento de línea, flecha o pirámide está al comienzo de su punto de ubicación con **Left-aligned**, al final con **Right-aligned**, o en el centro con **Centered**.
- El factor de amplificación del vector de desplazamiento utilizado para dibujar la malla deformada se define en la caja **Displacement factor**.
- La superposición de otro resultado en la vista se puede definir en la caja desplegable **Data source of vector fields**. Allí se puede escoger el resultado de la misma vista con **Self** o el resultado almacenado en otra vista **View [nv]**. Esta opción es útil para mostrar la configuración deformada y una componente de esfuerzo o de deformación simultáneamente.



**Figura 11.4:** GMSH. Pestañas de la ventana de opciones de una vista de resultados: (a) parámetros de aspecto y (b) parámetros de visualización de la malla.

### 11.3.4 Opciones de visualización de la malla sobre el resultado

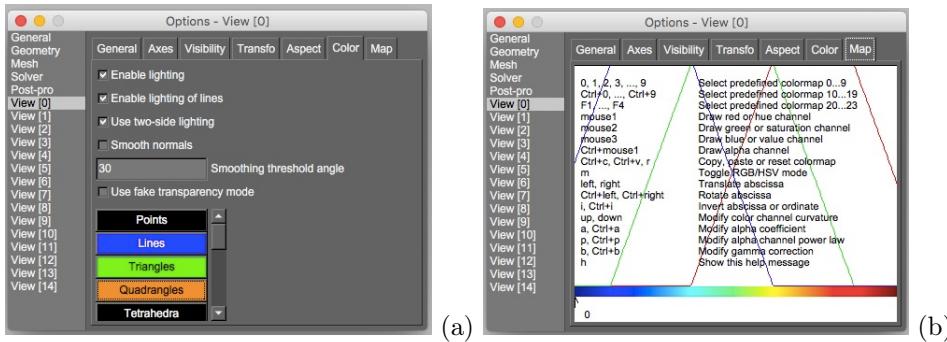
En la pestaña **Visibility** de la ventana **Options - View** mostrada en la Figura 11.4(b), se dibujan los lados o caras de los elementos finitos, cuando la casilla de verificación **Draw element outlines** está marcada.

### 11.3.5 Opciones de color de la malla sobre el resultado

En la pestaña **Color** de la ventana **Options - View** mostrada en la Figura 11.5(a), se define el color de los lados de los elementos finitos triangulares, cuadrilaterales, tetraédricos o hexaédricos. Para ello se hace clic sobre **Triangles**, **Quadrangles**, **Tetrahedra** o **Hexahedra** respectivamente en la caja desplegable, y se escoge el color sobre la subventana **color Chooser**. Aquí se pueden usar valores en la escala RGB entre 0 y 1 seleccionando **rgb**, o entre 0 y 255 escogiendo **byte**.

### 11.3.6 Opciones de la escala de colores del resultado

En la pestaña **Map** de la ventana **Options - View** mostrada en la Figura 11.5(b), se define la escala de colores de los intervalos del resultado de la vista. Para ello se sigue la ayuda que aparece en la ventana, la cual indica como cambiar a otra la escala de colores utilizando el teclado o el ratón. Por ejemplo, si se desea presentar el resultado en escala de grises de claro a oscuro se oprime a tecla **9** y después la tecla **i**. Para recuperar la ayuda en la ventana se oprime la tecla **h**.

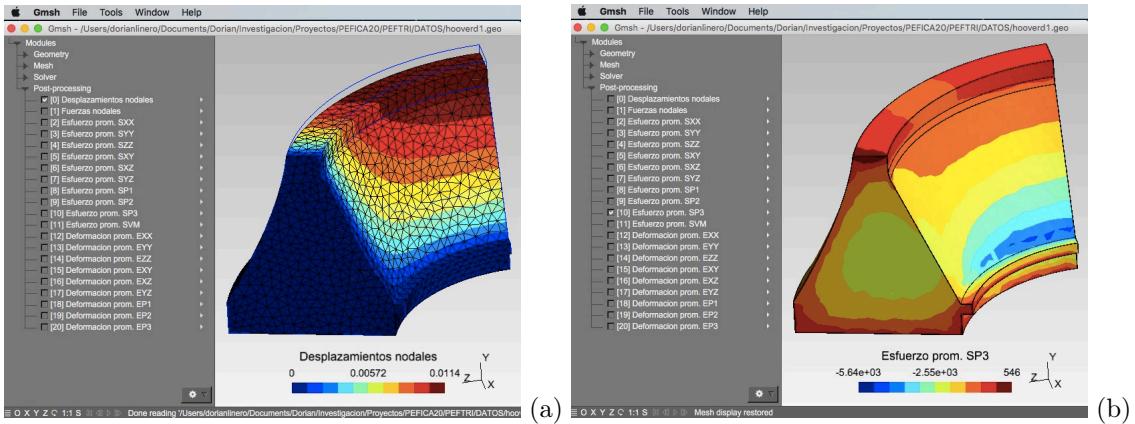


**Figura 11.5:** GMSH. Pestañas de la ventana de opciones de una vista de resultados: (a) parámetros de color de la malla y (b) parámetros de colores de los resultados.

### 11.3.7 Superposición de la geometría con los resultados

En ocasiones se desea superponer el contorno de la geometría del problema con uno o varios de los resultados de la simulación. Este tipo de presentación gráfica se logra mediante el siguiente procedimiento:

- Se abren los archivos **.pos** de los resultados y **.geo** de la geometría del problema en el entorno gráfico.
- Se muestran las líneas y se ocultan los puntos, las superficies y los volúmenes de la siguiente manera: haciendo clic en **Tools > Options** del menú superior, seleccionando **Geometry** de la lista lateral, haciendo clic en la pestaña **Visibility**, marcando la casilla **Curves** y desmarcando las casillas **Points**, **Surface** y **Volumes**.
- Se oculta la malla no asociada a los resultados, haciendo clic en **Tools > Options** de menú superior, seleccionando **Mesh** de la lista lateral, haciendo clic en la pestaña **Visibility**, y desmarcando todas las casillas.
- Si se desea presentar el contorno de la geometría original y la malla deformada, se hace clic en **Tools > Options** del menú superior, se selecciona la vista del desplazamiento nodal en la lista lateral (**View[0]** en los análisis realizados con PEFICA 2.0) y se marca la casilla **Draw element outlines**. Un ejemplo de la vista obtenida se ilustra en la Figura 11.6(a)

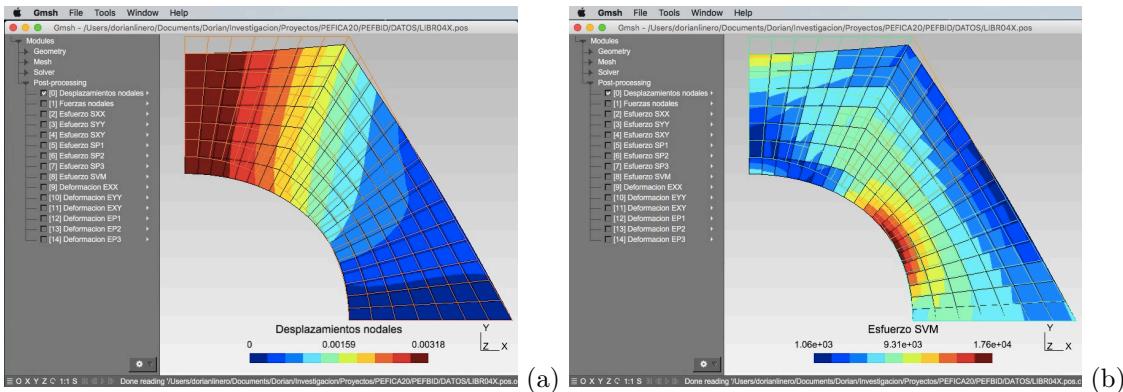


**Figura 11.6:** GMSH. Superposición de la geometría con el resultado de: (a) configuración deformada y desplazamiento incluyendo la malla y (b) esfuerzo principal menor excluyendo la malla.

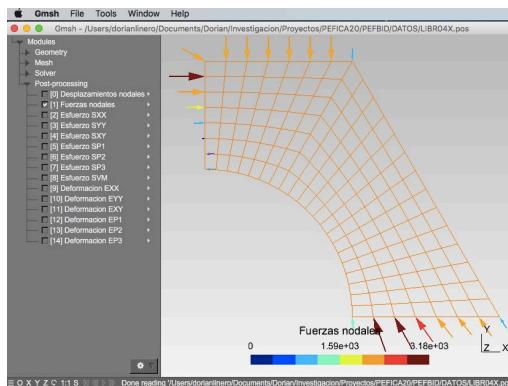
- Si se desea presentar el contorno de la geometría original y un resultado diferente promedio en los nudos, ocultando la malla de elementos finitos: se hace clic en **Tools > Options** del menú superior, se selecciona la vista del resultado en la lista lateral y se desmarca la casilla **Draw element outlines**. Un ejemplo de la vista obtenida se ilustra en la Figura 11.6(b).

## 11.4 Presentación del desplazamiento, la deformada, y las fuerzas en los nudos de la malla

El análisis mecánico realizado con PEFICA 2.0 genera como resultado el vector del desplazamiento en cada uno de los nudos de la malla. Tal resultado se presenta en la vista número 0 en el menú lateral del entorno gráfico de GMSH, indicada como **View[0]**. Por defecto, se muestra la norma del vector desplazamiento en escala en 10 intervalos de colores sobre la configuración deformada del sólido. Asimismo, se observa la malla de elementos finitos sin deformar. El factor de amplificación del vector de desplazamiento se ajusta como lo indica la Subsección 11.3.3, y la malla sobre la configuración deformada de muestra como lo explica la Subsección 11.3.4. La Figura 11.7(a) ilustra un ejemplo del entorno gráfico con esta vista activa.



**Figura 11.7:** GMSH. Vista de resultados sobre la configuración deformada de la malla: (a) de la norma del vector desplazamiento en los nudos y (b) del esfuerzo de Von Mises en el interior de los elementos.



**Figura 11.8:** GMSH. Vista de resultados de fuerzas actuantes equivalentes y reacciones en los nudos.

Se puede presentar otro resultado sobre la configuración deformada de la malla como se indicó en la Subsección 11.3.3. Por ejemplo, la Figura 11.7(b) muestra la distribución del esfuerzo de Von Mises en el interior de los elementos sobre la configuración deformada.

PEFiCA 2.0 calcula las fuerzas totales que actúan en los nudos de la malla. Tal resultado se presenta en la vista número 1, indicada como **View[1]** en el menú lateral del entorno gráfico de GMSH. Por defecto esta vista muestra los vectores de fuerza entrando a los nudos mediante flechas como se indica en el ejemplo de la Figura 11.8. El tamaño y el tipo de flecha se pueden modificar como lo presenta la Subsección 11.3.3.

## 11.5 Presentación de las componentes de esfuerzo y de deformación en problemas bidimensionales

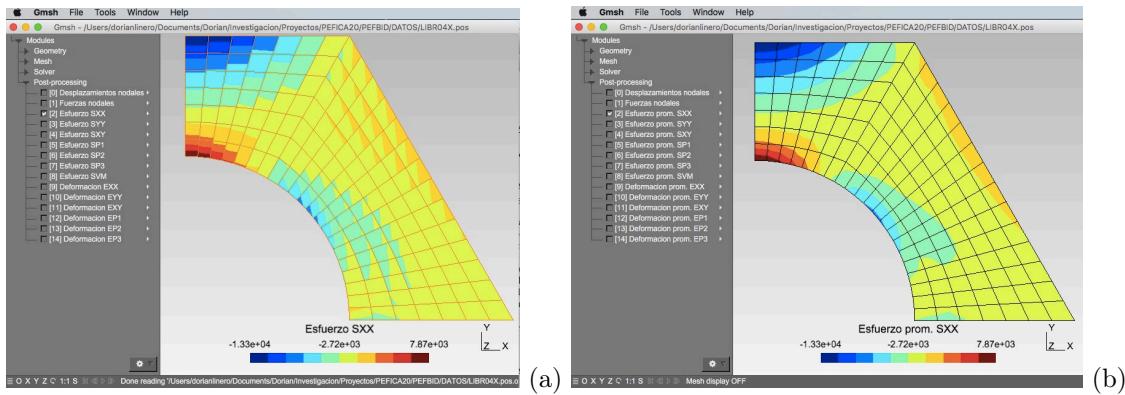
El esfuerzo y la deformación de un sólido son entidades tensoriales, sin embargo el programa PEFICA 2.0 genera una vista de resultado escalar por cada componente de esfuerzo y de deformación. Asimismo, los programas de análisis bidimensional \PEFBID\PEFICA y tridimensional \PEFTRI\PEFICA, cuentan con varias opciones de lectura de datos y escritura de resultados, las cuales se definen en la línea de ejecución en GNU-Octave, con la sintaxis indicada en la Sección 6.3.

### 11.5.1 Problema bidimensional con una categoría de material y espesor

Cuando se realiza un análisis bidimensional en el plano  $xy$ , considerando una sola categoría de material y espesor; es decir, ejecutando \PEFBID\PEFICA con la opción  $\langle ople \rangle$  igual a 07, 08, 10 o 11 (Subsección 6.3.1), el archivo .pos presenta los siguientes resultados:

- Las componentes de esfuerzo:  $\sigma_{xx}$  en View[2],  $\sigma_{yy}$  en View[3] y  $\sigma_{xy}$  en View[4].
- Los esfuerzos principales:  $\sigma_1$  en View[5],  $\sigma_2$  en View[6] y  $\sigma_3$  en View[7], siendo  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .
- El esfuerzo del criterio de fluencia de Von Mises  $\sigma_{vm}$  en View[8].
- Las componentes de deformación en notación de ingeniería:  $\varepsilon_{xx}$  en View[9],  $\varepsilon_{yy}$  en View[10] y  $\gamma_{xy}$  en View[11].
- Las deformaciones principales:  $\varepsilon_1$  en View[12],  $\varepsilon_2$  en View[13] y  $\varepsilon_3$  en View[14], siendo  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ .

Las opciones  $\langle ople \rangle=07$  o  $\langle ople \rangle=10$ , generan esfuerzos y deformaciones promedio en los nudos de la malla, mientras que las opciones  $\langle ople \rangle=08$  o  $\langle ople \rangle=11$ , producen esfuerzos y deformaciones en el interior de los elementos utilizando su respectiva función de aproximación. La Figura 11.9 muestra para un mismo ejemplo, el esfuerzo  $\sigma_{xx}$  promedio en los nudos en la parte (a) y en el interior de los elementos en la parte (b).

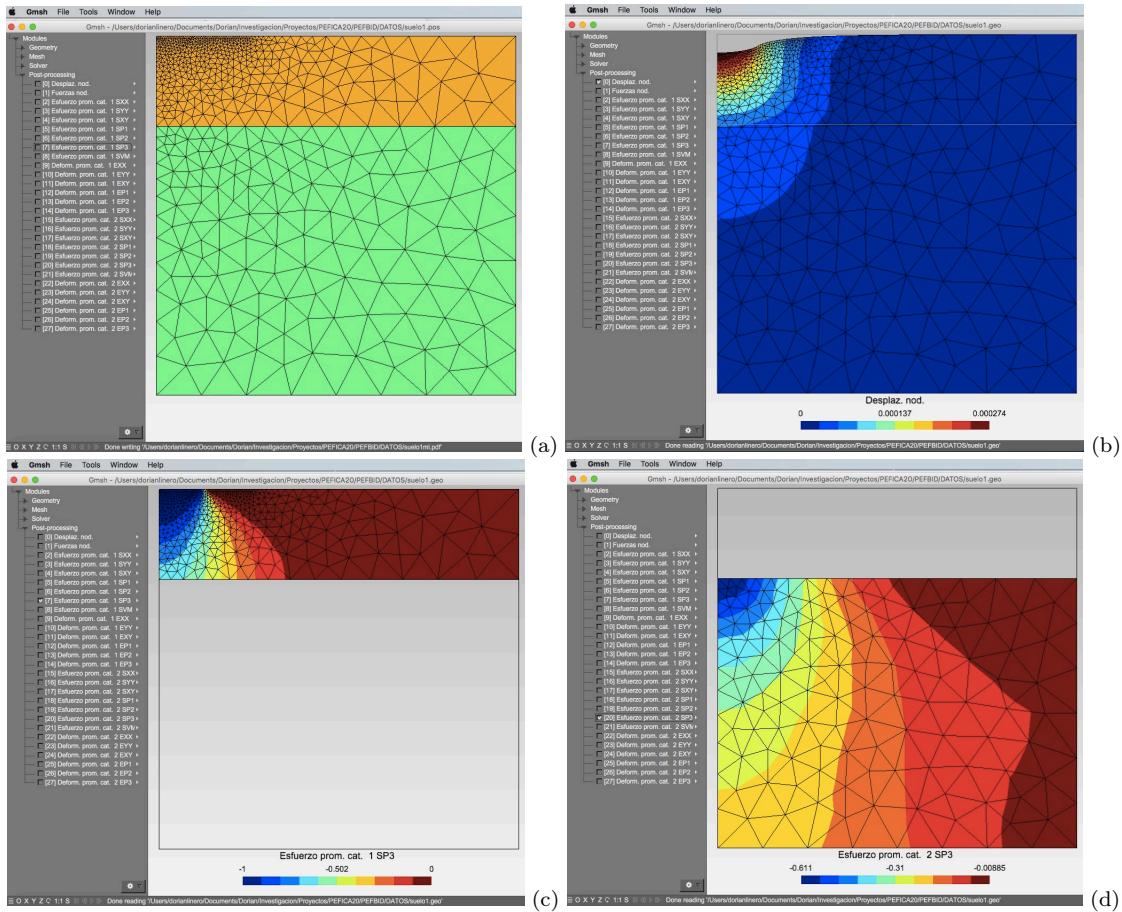


**Figura 11.9:** GMSH. Vista de resultados de la componente de esfuerzo  $\sigma_{xx}$  en un problema bidimensional con una categoría de material y espesor: (a) promedio en los nudos, y (b) en el interior de los elementos.

### 11.5.2 Problema bidimensional con varias categoría de material o espesor

Cuando se realiza un análisis bidimensional en el plano  $xy$ , considerando varias categorías de material o espesor, el archivo .pos presenta separadamente los resultados de cada una de ellas. Cada grupo de vistas de una categoría contiene valores promedio en los nudos de: las componentes de esfuerzo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$ , los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , el esfuerzo de Von Mises  $\sigma_{vm}$ , las componentes de deformación  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\gamma_{xy}$ , y las deformaciones principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$ . Para obtener este tipo de resultados se ejecuta \PEFBID\PEFICA con la opción  $\langle ope \rangle = 12$ .

Dos capas de suelo están sometidas a una carga distribuida parcial uniforme transmitida por una zapata de cimentación, como lo ilustra la Figura 8.22. La simetría con respecto al eje vertical permite simular la mitad del dominio. La malla de elementos finitos mostrada en la Figura 11.10(a), distingue dos categorías de material asociadas a las capas de suelo de arcilla y arena. La Figura 11.10(b) ilustra la configuración deformada y la norma del vector desplazamiento en metros. La Figura 11.10(c) indica la vista del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  promedio en los nudos de la primera categoría de material, correspondiente al suelo de arcilla. La Figura 11.10(d) muestra la vista del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  promedio en los nudos de la segunda categoría de material, correspondiente al suelo de arena.



**Figura 11.10:** Gmsh. Vista de resultados promedio en los nudos en un problema bidimensional con varias categoría de material: (a) malla de elementos finitos donde se diferencia una capa de suelo de arcilla y otra de suelo de arena, (b) configuración deformada y la norma del vector desplazamiento en metros, (c) vista del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  promedio en los nudos y medida en  $\text{kN}/\text{m}^2$ , de la primera categoría de material correspondiente al suelo de arcilla, y (d) muestra la vista de del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  promedio en los nudos y medida en  $\text{kN}/\text{m}^2$ , de la segunda categoría de material correspondiente al suelo de arena.

## 11.6 Presentación de las componentes de esfuerzo y de deformación en problemas tridimensionales

A continuación se indica la forma de presentar las componentes de esfuerzo y de deformación en problemas tridimensionales, con sus diferentes opciones.

### 11.6.1 Problema tridimensional con una categoría de material

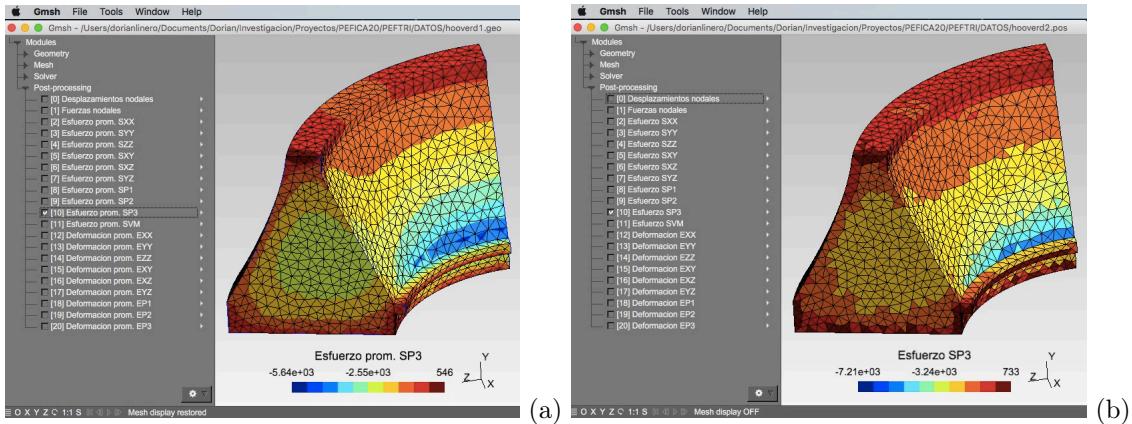
Cuando se realiza un análisis tridimensional considerando una sola categoría de material; es decir, ejecutando \PEFTRI\PEFICA con la opción  $\langle ople \rangle$  igual a 07, 10 o 11 (Subsección 6.3.2), el archivo .pos presenta los siguientes resultados:

- Las componentes de esfuerzo:  $\sigma_{xx}$  en View[2],  $\sigma_{yy}$  en View[3],  $\sigma_{zz}$  en View[4],  $\sigma_{xy}$  en View[5],  $\sigma_{xz}$  en View[6] y  $\sigma_{yz}$  en View[7].
- Los esfuerzos principales:  $\sigma_1$  en View[8],  $\sigma_2$  en View[9] y  $\sigma_3$  en View[10], siendo  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .
- El esfuerzo del criterio de fluencia de Von Mises  $\sigma_{vm}$  en View[11].
- Las componentes de deformación en notación de ingeniería:  $\varepsilon_{xx}$  en View[12],  $\varepsilon_{yy}$  en View[13],  $\varepsilon_{zz}$  en View[14],  $\gamma_{xy}$  en View[15],  $\gamma_{xz}$  en View[16] y  $\gamma_{yz}$  en View[17].
- Las deformaciones principales:  $\varepsilon_1$  en View[18],  $\varepsilon_2$  en View[19] y  $\varepsilon_3$  en View[20], siendo  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ .

Las opciones  $\langle ople \rangle = 07$  o  $\langle ople \rangle = 10$ , generan esfuerzos y deformaciones promedio en los nudos de la malla, mientras que la opción  $\langle ople \rangle = 11$ , produce esfuerzos y deformaciones en el interior de los elementos utilizando su respectiva función de aproximación. La Figura 11.11 muestra el esfuerzo  $\sigma_3$  promedio en los nudos en la parte (a) y en el interior de los elementos en la parte (b), para un mismo ejemplo.

### 11.6.2 Problema tridimensional con varias categoría de material o espesor

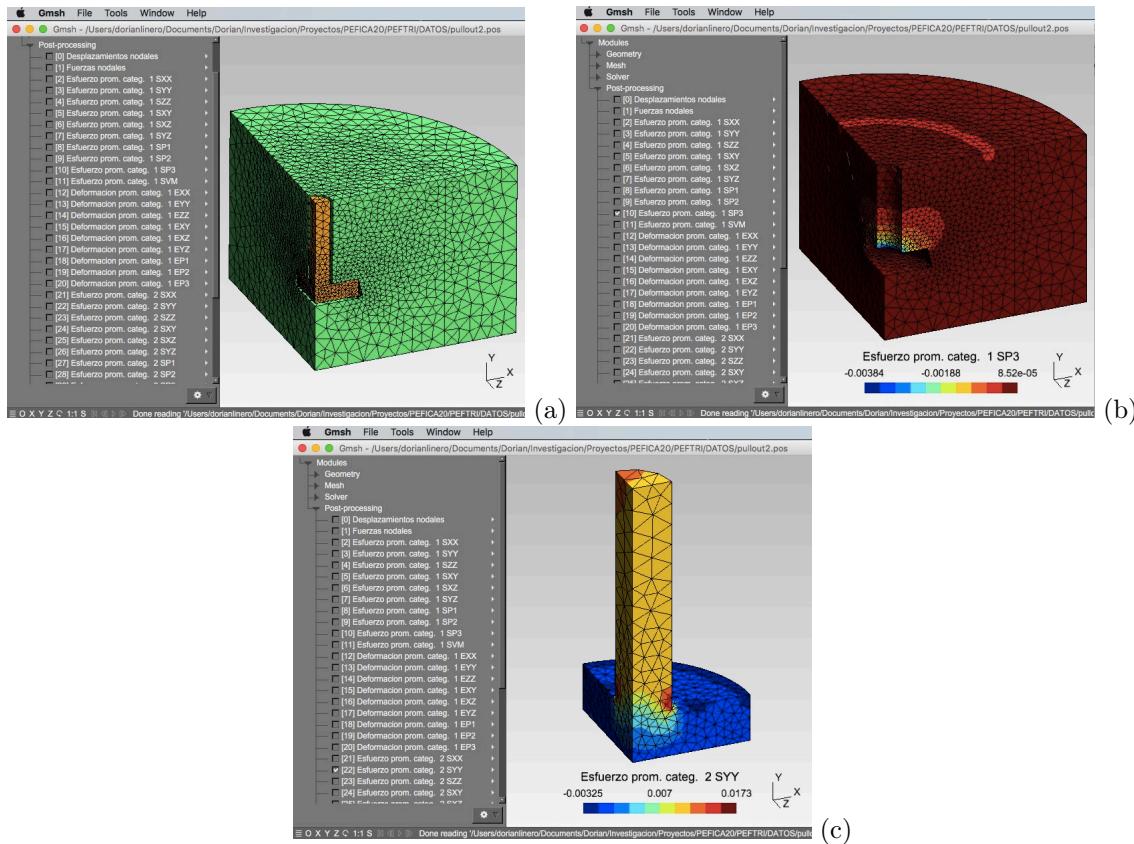
Cuando se realiza un análisis tridimensional, considerando varias categorías de material, el archivo .pos presenta separadamente los resultados de cada una de ellas. Cada grupo de vistas de una categoría contiene: las componentes de esfuerzo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$ , los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , el esfuerzo de Von Mises  $\sigma_{vm}$ , las componentes de deformación  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  y las deformaciones principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$ .



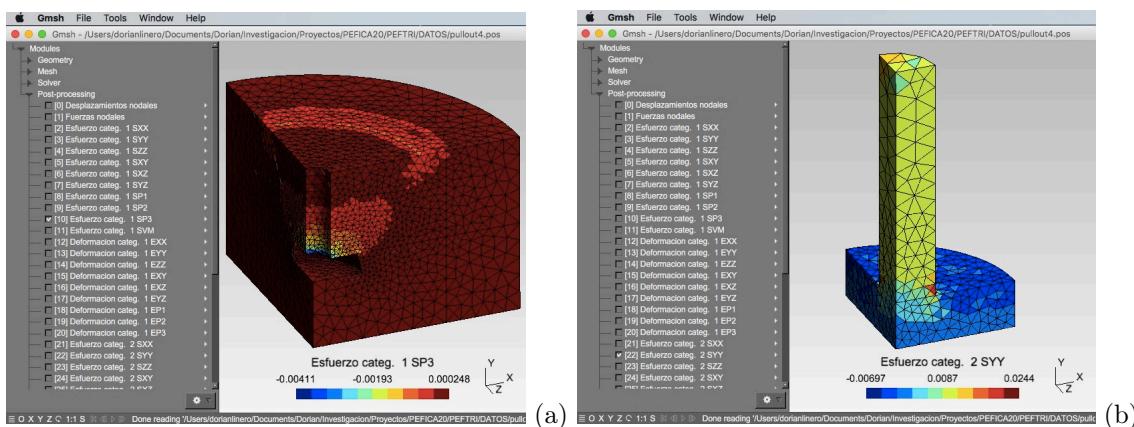
**Figura 11.11:** GMSH. Vista de resultados de la componente de esfuerzo  $\sigma_3$  en un problema tridimensional: (a) promedio en los nudos, y (b) en el interior de los elementos.

Para calcular este tipo de resultados, evaluados como el promedio en los nudos, se ejecuta \PEFTRI\PEFICA con la opción  $\langle ople \rangle = 12$ . La Figura 11.12(a) muestra la malla de elementos finitos de la simulación de un problema doblemente simétrico en el cual una barra de acero embebida en un cilindro de concreto, es arrancada axialmente. El problema tiene dos categorías de material diferenciadas por colores. La Figura 11.12(b) ilustra la distribución del esfuerzo principal menor promedio en los nudos  $\sigma_3$  de la primera categoría correspondiente al cilindro de concreto y la Figura 11.10(c) muestra el esfuerzo normal  $\sigma_{yy}$  promedio en los nudos de la segunda categoría correspondiente a la barra de acero.

En cambio, para obtener los resultados en el interior de los elementos se ejecuta \PEFTRI\PEFICA con la opción  $\langle ople \rangle = 13$ . Para el mismo problema, la Figura 11.13 muestra el esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  de la primera categoría y el esfuerzo normal  $\sigma_{yy}$  de la segunda categoría en el interior de los elementos. Se observa un solo color en el interior de cada elemento, como se espera en elementos tetraédricos de aproximación lineal.



**Figura 11.12:** GMSH. Vista de resultados promedio en los nudos en un problema tridimensional con varias categoría de material: (a) malla de elementos finitos, (b)  $\sigma_3$  en el concreto, y (c)  $\sigma_{yy}$  en el acero.



**Figura 11.13:** GMSH. Vista de resultados en el interior de cada elemento en un problema tridimensional con varias categoría de material: (a)  $\sigma_3$  en el concreto, y (b)  $\sigma_{yy}$  en el acero.

### 11.6.3 Problema tridimensional incluyendo direcciones principales de esfuerzo

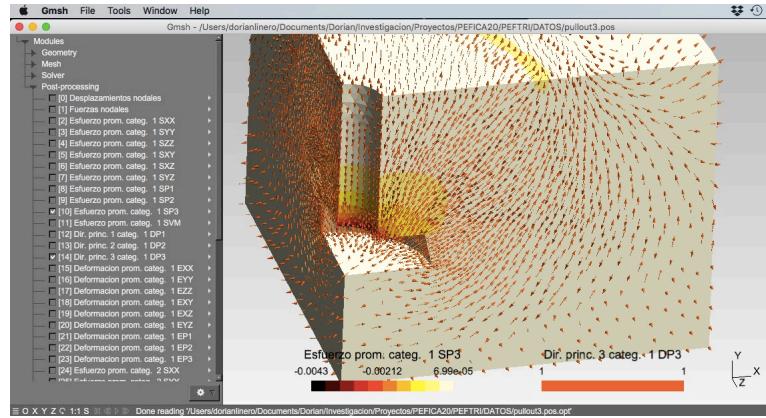
Adicionalmente a los resultados promedio en los nudos presentados en las secciones anteriores, en ocasiones se desea representar las direcciones de los esfuerzos principales mediante vectores para cada categoría. Para calcular este tipo de resultados, se ejecuta \PEFTRI\PEFICA con la opción  $\langle ople \rangle = 14$ . El archivo .pos contiene ahora tres vistas adicionales por cada categoría, correspondientes a los vectores unitarios de las direcciones principales de esfuerzo  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  y  $\mathbf{n}_3$ . Para el ejemplo anterior, tales direcciones sobre la categoría 1 de material se presentan en las vistas View[12] Dir. princ. 1 categ. 1 DP1, View[13] Dir. princ. 2 categ. 1 DP2 y View[14] Dir. princ. 3 categ. 1 DP3, respectivamente.

En la pestaña **Aspect** de la ventana Options se puede definir el tamaño de la flecha mínimo y máximo en las cajas Arrow size y la ubicación de la flecha en las cajas desplegables Glyph location. Asimismo, en la pestaña General se pueden establecer el número de intervalos de color en la caja Intervals y el tipo de presentación de intervalos en la caja desplegable Intervals type. Para una visualización mas clara se recomienda escoger: Intervals = 1, Intervals type = Filled iso-values, Arrow size = 20, Glyph location = Node, Centered.

La vista de una dirección principal se puede superponer a otra, como por ejemplo la vista de la magnitud del esfuerzo principal correspondiente. La Figura 11.14 muestra el esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  y su dirección  $\mathbf{n}_3$  del concreto, para el ejemplo ilustrado en la sección anterior.

## 11.7 Presentación de resultados nodales a partir de resultados elementales en GMSH: suavizado

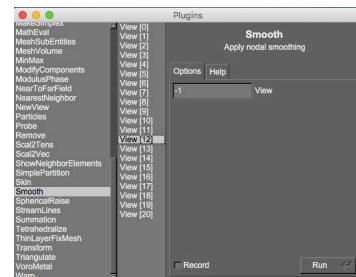
El programa GMSH puede generar un resultado promedio en los nudos, a partir del resultado en el interior de los elementos presentado en una vista, como se indica a continuación.



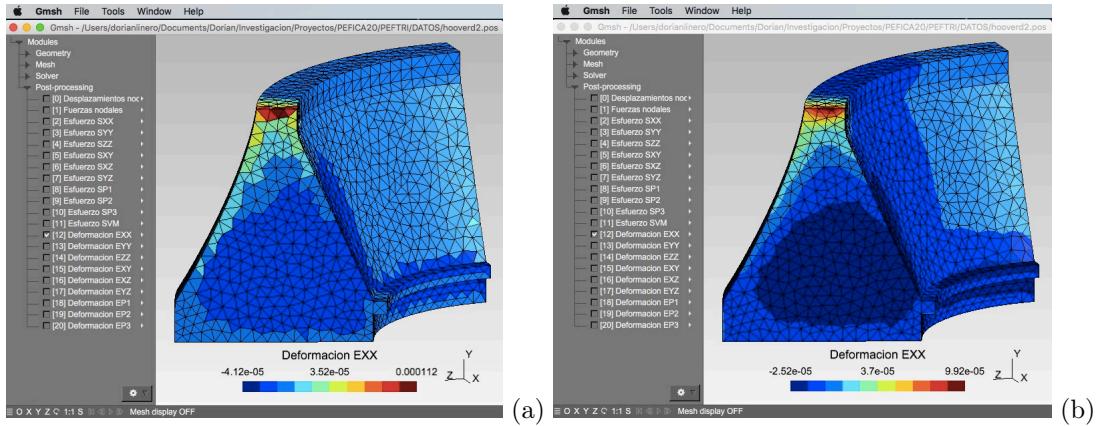
**Figura 11.14:** GMSH. Vista de un problema tridimensional correspondiente al esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  y su dirección  $n_3$  en el concreto.

Primero se hace clic en **Tools**  $\triangleright$  **Plugins** del menú superior, lo cual activa la ventana **Plugins** mostrada en la Figura 11.15. A continuación se selecciona **Smooth** del menú lateral de dicha ventana, se escoge(n) la(s) vista(s) cuyos resultados se desean suavizar del menú central, y se hace clic en el botón **Run**. Si se marca la caja de verificación **Record** en la ventana **Plugins**, se modifican a valores nodales los resultados de la(s) vista(s) en el archivo **.pos**. Si tal caja no está marcada, el suavizado no se conserva cuando se vuelve a cargar el archivo **.pos**.

Este procedimiento produce el valor promedio de un resultado en los nudos sobre la misma vista. Por ejemplo, la vista de la deformación  $\varepsilon_{xx}$  en un problema tridimensional en el interior de los elementos mostrada en la Figura 11.16(a), se suaviza a valores promedio en los nudos presentados en la Figura 11.16(b).



**Figura 11.15:** GMSH. Ventana del Plugins para suavizado de resultados.

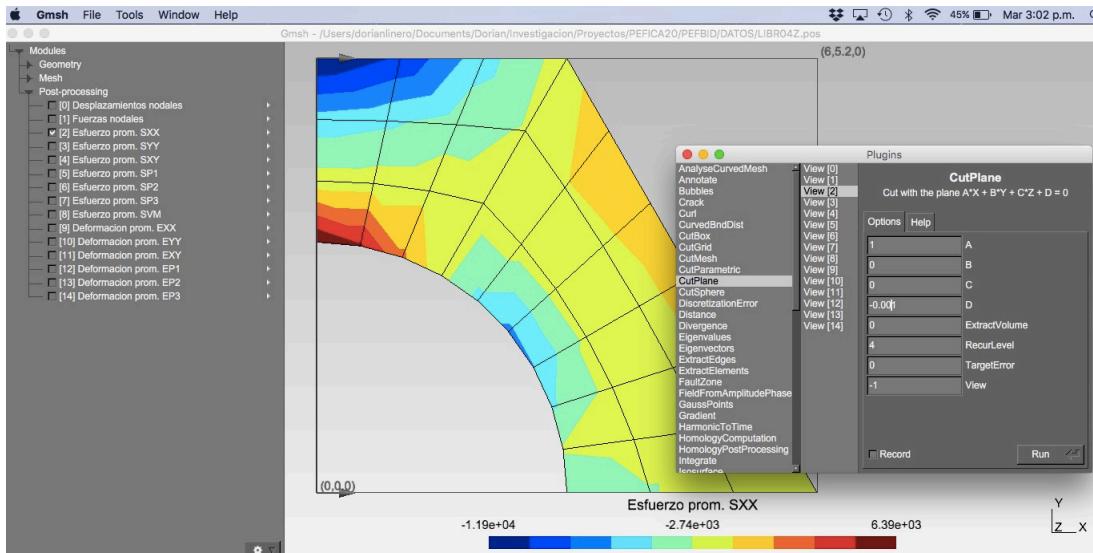


**Figura 11.16:** GMSH. Vista de la deformación  $\varepsilon_{xx}$  en un problema tridimensional: (a) en el interior de los elementos, y (b) promedio en los nudos obtenido del proceso de suavizado.

## 11.8 Presentación de resultados de problemas bidimensionales sobre líneas de corte

De los resultados obtenidos en los nudos de la malla de elementos finitos se puede extraer y representar gráficamente aquellos que ocurren sobre una línea de corte en problemas bidimensionales o sobre un plano de corte en problemas tridimensionales. El procedimiento para realizar esta operación en problemas bidimensionales es el siguiente:

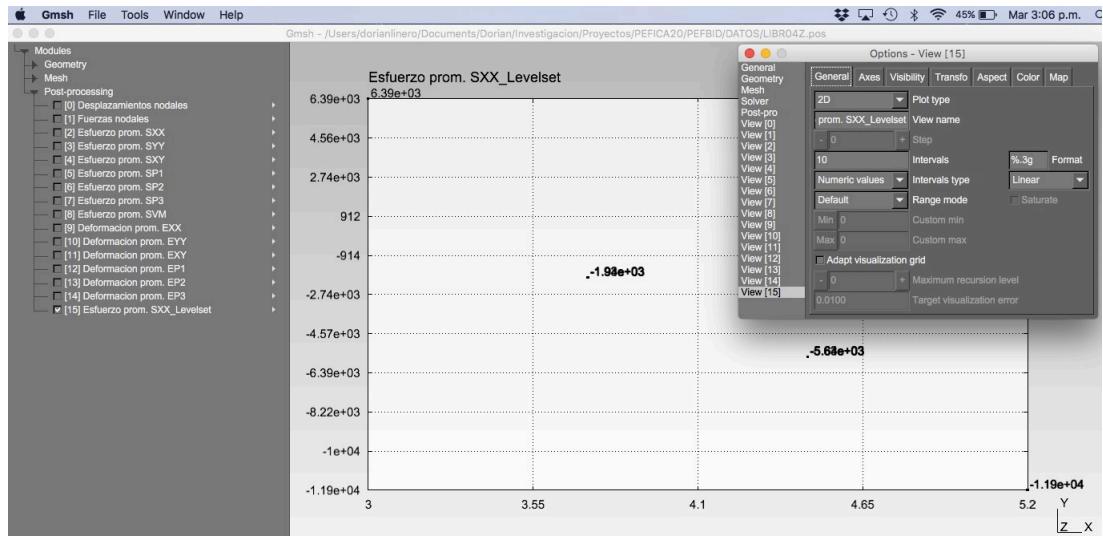
- Hacer clic en Tools > Plugins del menú superior, seleccionar Cutedplane, marcar la vista del resultado que se desea representar, como lo indica la Figura 11.17.
- Escribir los coeficientes de la ecuación del plano o línea de corte  $Ax + By + Cz + D = 0$ , sobre el cual se presentarán los resultados en la pestaña Options. Por ejemplo, una línea de corte vertical a 2.5 unidades de longitud del origen coordenado tiene  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$  y  $D = -2.5$ . Una línea de corte horizontal a -1.8 unidades de longitud del origen coordenado tiene  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = 0$  y  $D = 1.8$ .



**Figura 11.17:** GMSH. Presentación de resultados sobre líneas. Definición de la línea sobre la cual se presentará un resultado.

- Oprimir la tecla Run y cerrar la ventana Plugins. Se creará una nueva vista cuyo nombre será el mismo de la vista marcada en el primer paso seguido de la palabra `_levelset`.
- Activar exclusivamente la vista creada en el paso anterior. Hacer clic Tools ▷ Options del menú superior.
- Marcar la nueva vista, seleccionar la pestaña General, escoger 2D en la caja de tipo de dibujo Plot type y Numeric values en la caja de tipo de trazado intervals type.
- Seleccionar la pestaña Axes y escoger Full grid en la caja Axes mode.
- Seleccionar la pestaña Map y oprimir la tecla del número 0 para modificar la escala de colores a negro.
- Cerrar la ventana Options - View.

La Figura 11.18 muestra una gráfica, cuya abscisa tiene la posición sobre la línea de corte y la ordenada indica el resultado en los puntos de intersección entre los



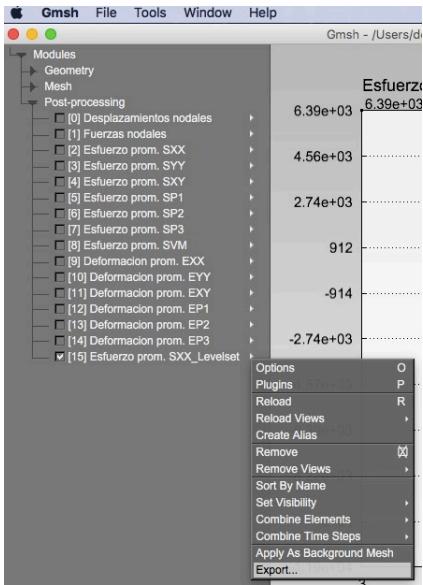
**Figura 11.18:** GMSH. Presentación de resultados sobre líneas. Nueva vista con la gráfica que muestra la posición sobre la línea en el eje horizontal y el valor del resultado en el eje vertical, en puntos específicos de la malla.

lados de los elementos finitos y la línea de corte. En un lado compartido entre dos elementos se generan dos valores en la misma posición.

El resultado sobre la línea se puede exportar a un archivo ASCII, donde se pueden identificar y ordenar las posiciones y los resultados de los puntos sobre una gráfica de abscisa y ordenada. Este procedimiento consiste en:

- Hacer clic sobre la cabeza de flecha a la derecha de la vista que contiene el resultado sobre la línea, como lo indica la Figura 11.19.
- Seleccionar **Export...** en el menú que se activa. Aparece la ventana **Export**. Escoger el formato de salida **Generic TXT (\*.txt)** en la caja **Save as** de la parte inferior de la ventana **Export**. Hacer clic sobre el botón **Save**.

- Establecer el nombre y la ubicación del archivo con extensión **.pos**, donde se desea almacenar el resultado sobre una línea. Cuidar que el nombre de este archivo no coincida con el nombre del archivo **.pos** de los resultados del problema.



**Figura 11.19:** GMSH. Presentación de resultados sobre líneas. Exportar a un archivo.

Las últimas 4 columnas del archivo exportado corresponden a las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y el resultado en los puntos de intersección entre los elementos finitos y la línea. El Listado 11.5 muestra las últimas 4 columnas del archivo exportado del

ejemplo anterior, donde se han definido 6 puntos de intersección.

0.001000	3.733255	0	-1942.908138
0.001000	2.999912	0	6389.180701
0.001000	4.466682	0	-5638.730533
0.001000	3.733255	0	-1942.908139
0.001000	5.2	0	-11868.03112
0.001000	4.466682	0	-5638.730533

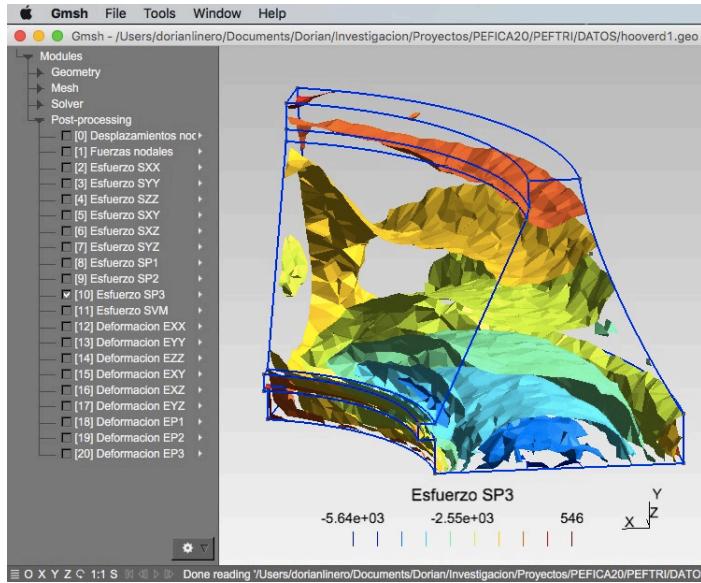
**Listado 11.5:** GMSH: Archivo exportado de resultados sobre líneas.

Otra alternativa es exportar el archivo de resultados sobre una línea es escoger el formato de salida **GMSH Mesh-based (\*.pos)** en la caja **Save as** de la parte inferior de la ventana **Export**. Hacer clic sobre el botón **Save**.

El archivo exportado tiene un formato similar a un archivo de postproceso **.pos**, donde cada punto de la gráfica se representa con un nudo y los tramos entre los puntos se describen con elementos finitos unidimensionales lineales (aparentemente no se generan correctamente).

## 11.9 Presentación de resultados de problemas tridimensionales en el interior del sólido

Una vista de resultados promedio en los nudos de un problema tridimensional, cuyo tipo de intervalo de colores **Interval type** es **Continuous map** o **Filled iso-values**, muestra valores solamente en el contorno del sólido. Sin embargo, en algunos casos se desea observar los resultados en el interior del mismo. Para ello se puede recurrir a los procedimientos indicados a continuación.

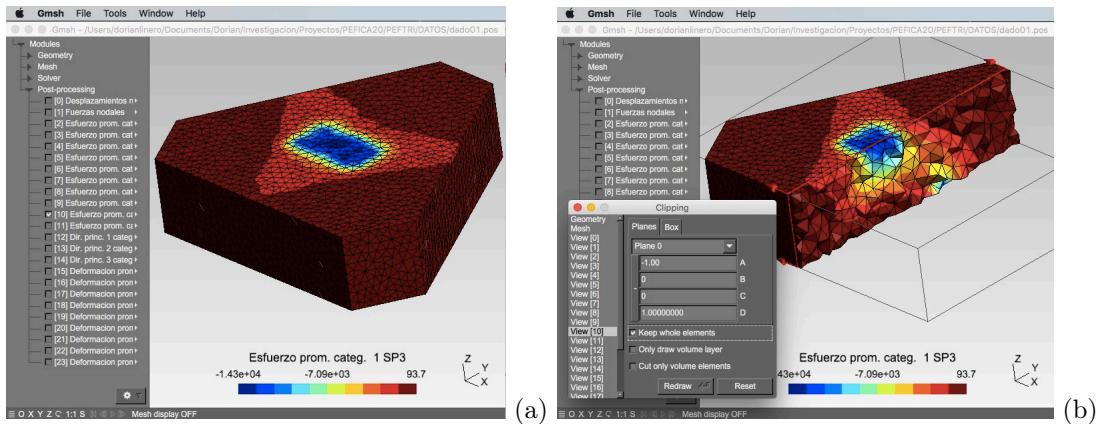


**Figura 11.20:** GMSH. Superficies de igual valor del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  de un problema tridimensional, superpuesto con la geometría.

### 11.9.1 Presentación de resultados mediante superficies de igual valor

Se pueden presentar resultados promedio en los nudos del interior del sólido, mediante superficies de colores en las cuales el valor es el mismo. El procedimiento consiste en hacer clic en **Tools > Options** del menú superior, escoger la vista, seleccionar la pestaña **General** y escoger **iso-values** en la caja desplegable **Interval type**. La presentación de la vista muestra ahora superficies de igual valor del resultado junto con la malla de elementos finitos. En ocasiones, la densidad de la malla no permite una visualización adecuada de tales iso-superficies. Para superar esto se recomienda ocultar la malla y cargar el archivo **.geo** del problema, como se indicó en la Subsección 11.3.7.

La Figura 11.20 muestra las superficies de igual valor del esfuerzo principal menor  $\sigma_3$  de un problema tridimensional particular, superpuesto con las entidades geométricas. Allí se observa que el esfuerzo más negativo se presenta en la parte inferior del sólido con una distribución en forma de arco.



**Figura 11.21:** GMSH. Vista del esfuerzo principal menor en un problema tridimensional: (a) en el contorno del sólido, y (b) en el plano de corte  $-x = 1$ .

### 11.9.2 Presentación interactiva de resultados en planos de corte

Otra forma de observar resultados en el interior de un sólido es realizando un corte en la intersección de un plano específico con el sólido. Este procedimiento se puede realizar de forma interactiva, de la siguiente forma. Primero se hace clic en **Tools**  $\triangleright$  **Clipping** del menú superior, lo cual activa la ventana **Clipping**, después se escoge la vista y en la pestaña **Planes** se definen los parámetros de la ecuación del plano de corte  $Ax + By + Cz = D$ . Finalmente se marca o se desmarca la caja de verificación **Keep whole elements** para que se muestren o no los elementos finitos completos en el plano de corte, y se marca o se desmarca la caja de verificación **Only draw volume layer** para que aparezca o no los elementos que cruzan el plano de corte exclusivamente. La Figura 11.21(a) ilustra la vista del esfuerzo principal menor en el contorno de un sólido tridimensional, mientras que la Figura 11.21(b) muestra la distribución de tal resultado en un plano de corte  $-x = 1$  unidades de longitud.

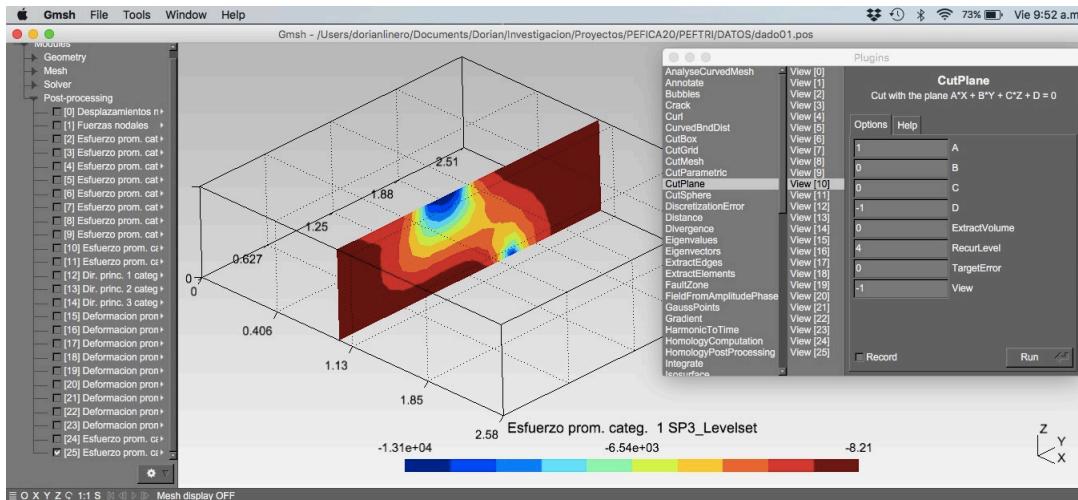


Figura 11.22: Gmsh. Presentación en la vista nueva del esfuerzo principal menor sobre el plano de corte  $yz$  a  $x = 1.0$  unidades de longitud, para un problema tridimensional particular.

### 11.9.3 Presentación en una vista nueva de resultados en un plano de corte

Además de las formas anteriores de presentación de problemas tridimensionales, se pueden mostrar los resultados en un plano de corte sobre una vista nueva, de la siguiente manera:

- Se hace clic en Tools  $\triangleright$  Plugins del menú superior, se selecciona CutPlane y se elige la vista del resultado que se desea representar.
- Se escriben los coeficientes de la ecuación del plano  $Ax + By + Cz + D = 0$ , sobre el cual se presentarán los resultados en la pestaña Options.
- Se oprime la tecla Run y se cierra la ventana Plugins. Lo anterior creará una nueva vista cuyo nombre será el mismo de la vista elegida en el primer paso seguido de la palabra \_levelset.
- Se activar exclusivamente la vista creada en el paso anterior.

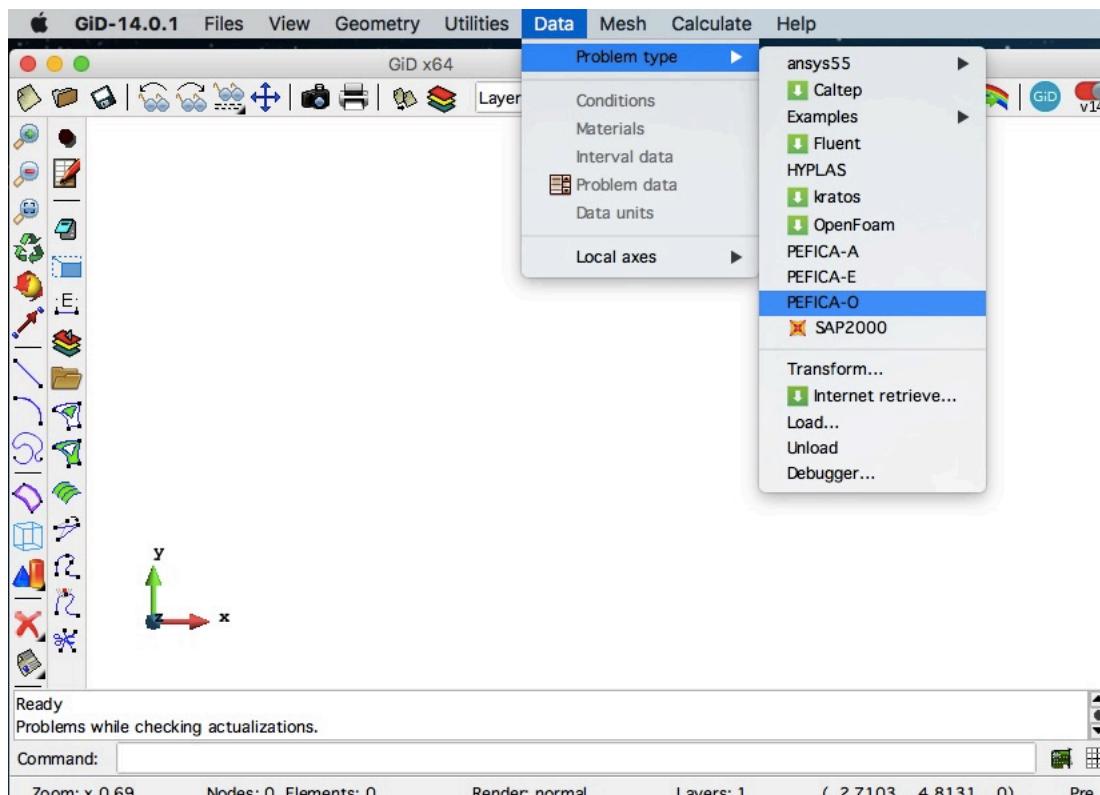
La Figura 11.22 ilustra la nueva vista del esfuerzo principal menor sobre el plano de corte  $yz$  a  $x = 1.0$  unidades de longitud, para un problema tridimensional particular.

## Capítulo 12

# Programa de preprocesso y postproceso GiD para problemas bidimensionales

Este capítulo es un breve manual de usuario del preprocesso de los datos de entrada y del postproceso de los resultados obtenidos en problemas mecánicos bidimensionales, mediante el programa GiD (CIMNE, 2000). Estas herramientas permiten la construcción del archivo que incluye los nudos, los elementos finitos con sus propiedades asociadas, las cargas aplicadas y los desplazamientos conocidos de un sólido. Asimismo, después de realizado el análisis con el método de los elementos finitos, tales herramientas pueden presentar cada resultado de desplazamiento, deformación o esfuerzo de forma gráfica, mediante líneas de igual valor o áreas llenas en rangos de valores, entre otras. También puede dibujar la configuración deformada del sólido y las reacciones en los apoyos. La versión gratuita de éste programa está limitada a 1000 elementos finitos.

El programa cuenta con un entorno gráfico de preprocesso de los datos de entrada y otro similar para el postproceso de los resultados. El entorno de preprocesso tiene un menú superior, una línea de comando ubicada en la parte inferior denominada **Command:**, y tres barras de iconos localizadas en la parte superior e izquierda, como lo indica la Figura 12.1.



**Figura 12.1:** Entorno gráfico de preprocess en GiD. Menú Data > Problem type en GiD, después de instalar el *problem type* propio de PEFICA 2.0, llamado PEFICA-O.

## 12.1 Instalación del *problem type* en GiD

El programa GiD permite personalizar la apariencia del preprocess y de la estructura del archivo de entrada construido, mediante un conjunto de archivos denominados *problem type*. En particular, el archivo comprimido PEFICA20.zip incluye un *problem type* propio para la construcción del archivo de entrada de datos .m para PEFICA 2.0. El procedimiento de instalación es el siguiente:

- Descargar e instalar el programa GiD desde la página web <https://www.gidhome.com/>.
- Descargar el archivo PEFICA20.zip desde el vínculo <https://www.dropbox.com/s/or6atr96ffeuois5/PEFICA20.zip?dl=0>.

- Descomprimir el archivo anterior en el disco duro. Se generará una carpeta PEFICA20.
- Copiar la carpeta PEFICA-0.gid, ubicada dentro de la carpeta PEFICA20\TPRGID y pegarla en la carpeta problemtypes ubicada dentro de alguna de las carpetas del programa GiD.
- Abrir el programa GiD y hacer clic sobre Data >Problem type en el menú superior. Verificar que se despliega la opción PEFICA-O y hacer clic sobre ella, como lo ilustra la Figura 12.1.

## 12.2 Preproceso: construcción del archivo de entrada en GiD

El programa GiD y el *problem type* PEFICA-O, permiten definir la geometría, las propiedades mecánicas, las condiciones de borde y de cargas externas que constituyen el archivo de entrada de datos para PEFiCA 2.0 en formato .m.

El primer paso en la construcción del archivo de entrada es abrir el programa GiD y hacer clic sobre PEFICA-O, después de desplegar el menú superior Data >Problem type >PEFICA-O, como lo ilustra la Figura 12.1.

El procedimiento de creación del archivo de datos de entrada de un problema mecánico bidimensional se describe mediante el siguiente ejemplo.

Una lámina cuadrada de  $l = 1.00$  m de lado,  $t = 0.025$  m de espesor y un orificio en el centro de diámetro  $d = 0.125$  m, está sometida a una carga distribuida por unidad de área  $p = 100 \times 10^3$  kN/m<sup>2</sup> en dirección  $x$ , como se indica en la Figura 8.7(a). La lámina está hecha de acero cuyo módulo de Young y relación de Poisson son iguales a  $E = 200 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup> y  $\nu = 0.3$ , respectivamente. El objetivo del problema es encontrar los desplazamientos, las deformaciones y los esfuerzos sobre la lámina.

La geometría y los parámetros del problema indicados anteriormente se introducen al programa GiD, conservando siempre la misma unidad de longitud y de fuerzas. En particular para este ejemplo, se definen las longitudes o distancias en m y las fuerzas en kN.

### 12.2.1 Geometría del problema

La geometría del problema está definida por puntos, líneas y superficies que constituyen el dominio de análisis. En el ejemplo de la Figura 8.7(a), se observa que la geometría y las condiciones de carga son simétricas con respecto a los ejes  $AA'$  y  $BB'$ . En consecuencia se puede analizar una cuarta parte de la lámina como lo ilustra la Figura 8.7(b). El procedimiento para definir la geometría es el siguiente:

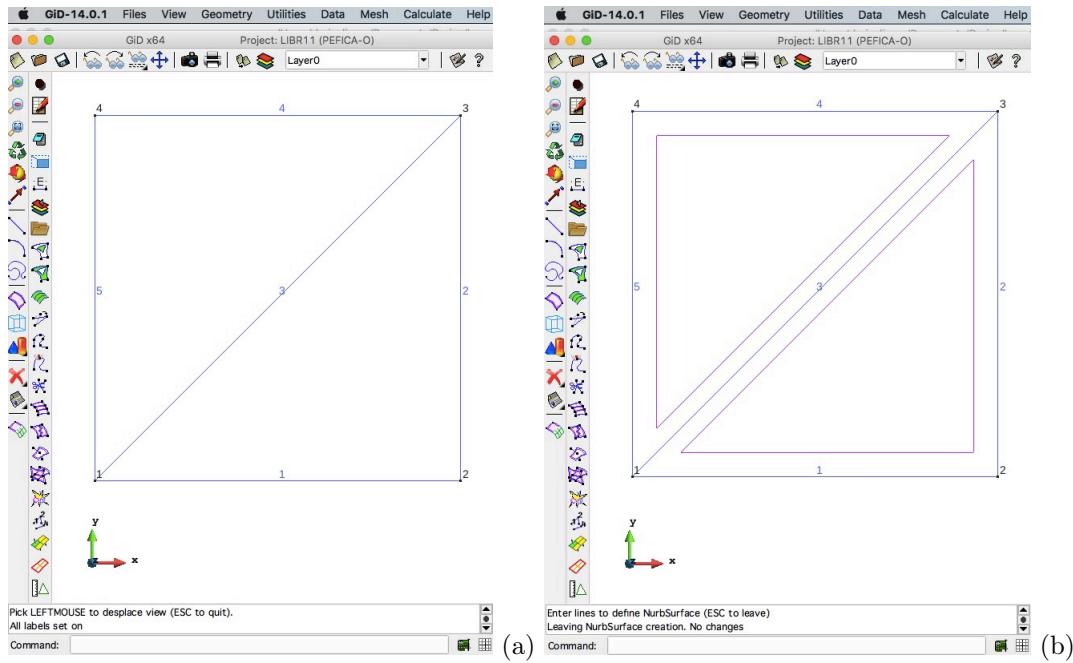
- Guardar la carpeta de datos haciendo clic en **File > Save as...** del menú superior y escribiendo el nombre designado para el problema. GiD construye una carpeta con extensión **.gid** que contiene varios archivos con información del problema. En particular para el ejemplo se guardó con el nombre de carpeta **LBR11.gid**.
- Crear un grupo de tres líneas rectas así: haciendo clic en **Geometry > Create > Stranght line** del menú superior, escribiendo sobre la línea de comando las coordenadas  $(x, y)$  del punto en un extremo de la línea recta  $0.0, 0.0$ , oprimiendo la tecla **Enter**, escribiendo las coordenadas  $(x, y)$  del punto en el otro extremo de la línea  $0.5, 0.0$  y oprimiendo la tecla **Enter**. Se puede continuar con la construcción de las siguientes dos líneas, escribiendo la coordenada  $(x, y)$  del extremo final de la segunda línea  $0.5, 0.5$ , seguido de la tecla **Enter** y haciendo clic cerca el punto inicial de coordenadas  $(0.0, 0.0)$  y confirmando que coincide con dicha coordenada. Para finalizar la creación de estas líneas se oprime la tecla **Esc**.
- Crear un grupo de dos líneas rectas, escogiendo **Geometry > Create > Stranght line** del menú superior, haciendo clic cerca al punto de coordenadas  $(0.5, 0.5)$  y confirmando que coincide con dicho punto, escribiendo la coordenada  $0, 0.5$  del siguiente punto, haciendo clic cerca del punto de coordenadas  $(0.0, 0.0)$  y confirmando que coincide con dicho punto. Para finalizar la creación de estas líneas se oprime la tecla **Esc**.
- Observar las etiquetas que identifican a los puntos y las líneas, seleccionando **View > Label > All on** del menú superior. El resultado se ilustra en la Figura 12.2(a).

- Crear una superficie triangular a partir de las líneas de contorno, escogiendo **Geometry**  $\triangleright$  **Create**  $\triangleright$  **NURBS Surface**  $\triangleright$  **By contour** del menú superior, haciendo clic sobre las líneas 1, 2 y 3, y terminando con la tecla **Esc**. De la misma manera, se crea la segunda superficie triangular conformada por las líneas 3, 4 y 5, como se ilustra en la Figura 12.2(b).
- Crear una superficie circular de radio 0.0625 m y centro en la coordenada (0.0, 0.0), seleccionando **Geometry**  $\triangleright$  **Create**  $\triangleright$  **Object**  $\triangleright$  **Circle** del menú superior, haciendo clic cerca al punto de coordenadas (0.0, 0.0), confirmando que la normal al círculo es el eje *z* positivo, escribiendo el radio de 0.0625 en la línea de comando y terminado con la tecla **Enter**. Las tres superficies se muestran en la Figura 12.3(a).
- Restar las superficies triangulares a la superficie circular, seleccionando **Geometry**  $\triangleright$  **Edit**  $\triangleright$  **Surface boolean op.**  $\triangleright$  **Subtraction** en el menú superior, haciendo clic sobre cada una de las superficies triangulares seguido de la tecla **Esc**, haciendo clic sobre la superficie circular seguido de la tecla **Esc**. El resultado de esta operación corresponde a la cuarta parte superior derecha del ejemplo doblemente simétrico, como se ilustra en la Figura 12.3(b).

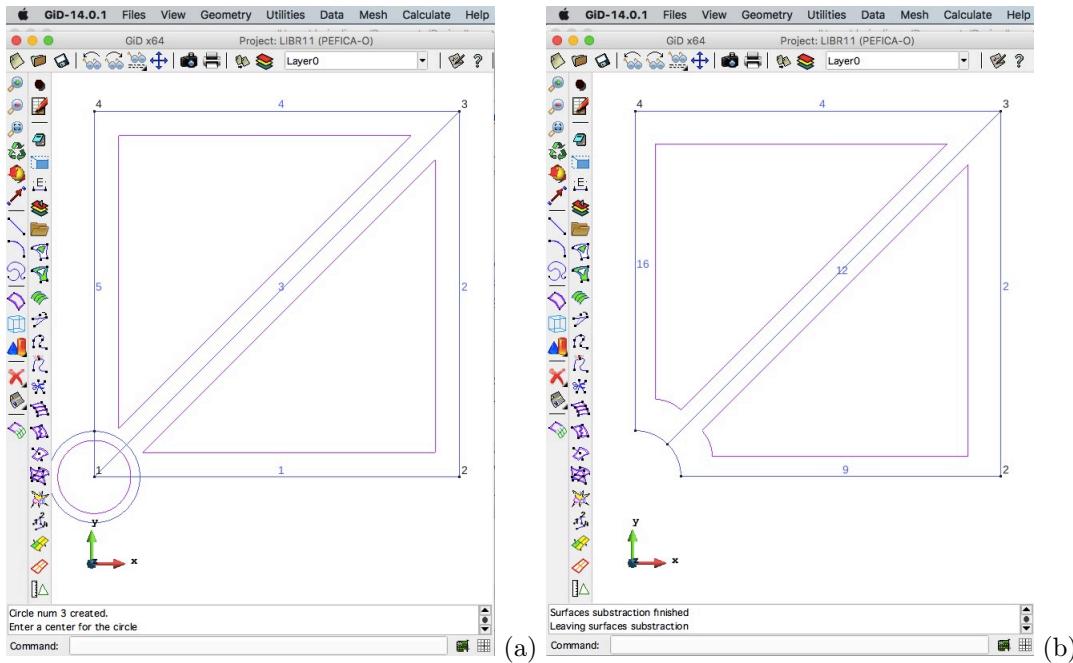
### 12.2.2 Condiciones de borde del problema

Las condiciones de borde como los desplazamientos conocidos sobre el sólido del ejemplo de la Figura 8.7(b), se definen de GiD de la siguiente forma:

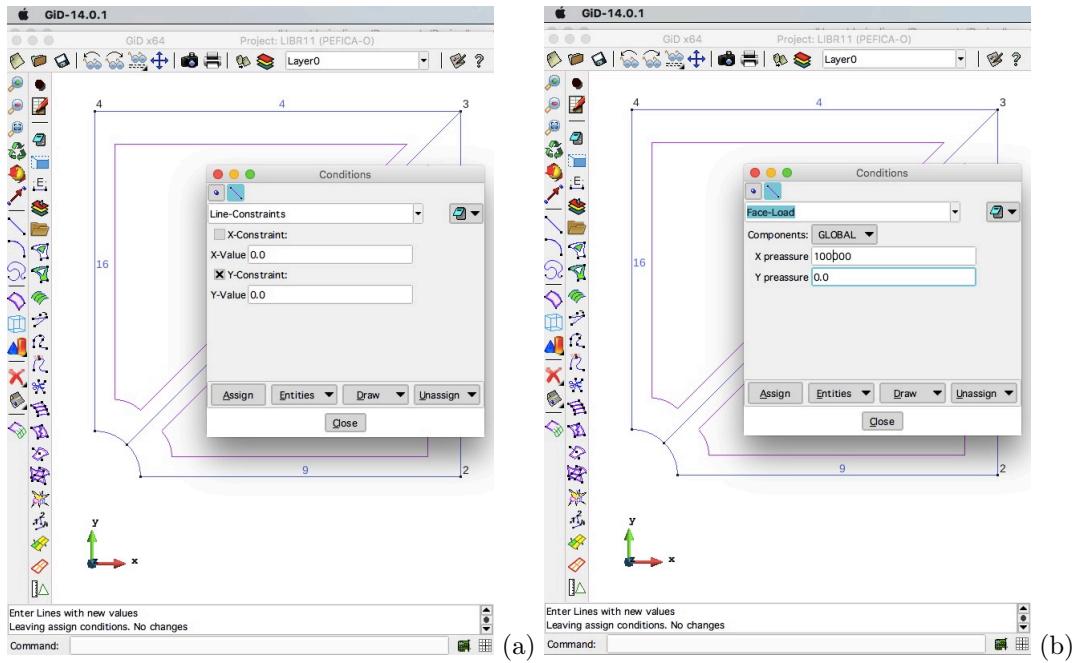
- Se impone un desplazamiento en *y* conocido  $v = 0$  sobre el eje de simetría horizontal, seleccionando **Data**  $\triangleright$  **Conditions** del menú superior, lo cual activa la ventana **Conditions** (Figura 12.4(a)). En esta ventana se hace clic en el ícono de una línea, se selecciona la opción **Line-Constraints**, se desmarca la casilla de verificación **X-Constraint**, se marca la casilla de verificación **Y-Constraint**, se escribe 0.0 en la caja **Y-Value**, se hace clic sobre el botón **Assign** y en el entorno gráfico se hace clic sobre la Línea 9 de la geometría. Se finaliza el procedimiento oprimiendo la tecla **Esc**.



**Figura 12.2:** GiD. Construcción de la geometría del ejemplo: (a) líneas y puntos numerados, y (b) dos superficies triangulares.



**Figura 12.3:** GiD. Construcción de la geometría del ejemplo: (a) dos superficies triangulares y una circular, y (b) resultado de restar las superficies triangulares a la superficie circular.



**Figura 12.4:** GiD. Construcción de la geometría del ejemplo: (a) imposición de desplazamiento vertical conocido  $v = 0$  sobre el eje horizontal de simetría, y (b) imposición de la carga distribuida  $p = 100 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$  sobre la línea vertical derecha.

- Se impone un desplazamiento en  $x$  conocido  $u = 0$  sobre el eje de simetría vertical, seleccionando Data  $\triangleright$  Conditions del menú superior, lo cual activa la ventana Conditions. En esta ventana se hace clic en el ícono de una línea, se selecciona la opción Line-Constraints, se marca la casilla de verificación X-Constraint, se escribe 0.0 en la caja X-Value, se desmarca la casilla de verificación Y-Constraint, se hace clic sobre el botón Assign y en el entorno gráfico se hace clic sobre la Línea 16 de la geometría. Se finaliza el procedimiento oprimiendo la tecla Esc y haciendo clic sobre el botón Close.
- Se presentan las condiciones de borde impuestas, seleccionando Data  $\triangleright$  Conditions del menú superior, y escogiendo Draw  $\triangleright$  All conditions  $\triangleright$  Exclude local axis en la ventana Conditions.

### 12.2.3 Cargas aplicadas al problema

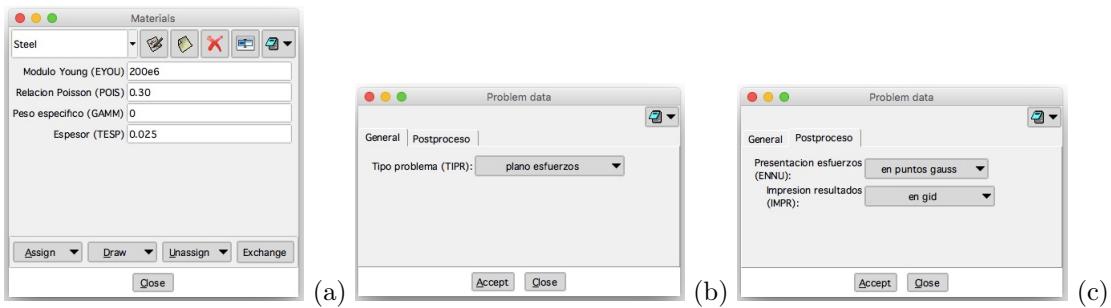
Las cargas aplicadas al problema como la presión sobre las caras laterales de la lámina del ejemplo de la Figura 8.7(b), se definen de GiD de la siguiente forma:

- Se impone una carga distribuida  $p = 100 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$  sobre la línea vertical derecha, seleccionando **Data >Conditions** del menú superior, lo cual activa la ventana **Conditions** (Figura 12.4(b)).
- En esta ventana, se hace clic en el ícono de una línea, se selecciona la opción **Face-Load**, se escoge la opción **GLOBAL**, se escribe el valor de la presión en dirección  $x$  de  $100\text{E+03}$ , se conserva el valor de 0 en la dirección  $y$ , se hace clic sobre el botón **Assign** y en el entorno gráfico se hace clic sobre la Línea 2.
- Se finaliza el procedimiento oprimiendo la tecla **Esc**.

### 12.2.4 Propiedades del material y espesor del sólido

Las propiedades del material y el espesor del sólido del ejemplo (Figura 8.7) se asignan en GiD de la siguiente manera:

- Se selecciona **Data >Materials** del menú superior, lo cual activa la ventana **Materials** como lo indica la Figura 12.5(a).
- En las cajas correspondientes de esta ventana se escribe: **módulo de Young(EYOU)** de  $200\text{E+06}$ , **relación de Poisson(POIS)** de 0.3 y **espesor(TESP)** de 0.025. Las unidades fueron definidas al comienzo de esta sección como fuerzas en  $\text{kN}$  y longitudes en  $\text{m}$ , en consecuencia el módulo de Young estará expresado en  $\text{kN/m}^2$ . En el ejemplo se desprecia el peso propio del material, con lo cual se conserva el valor de cero del parámetro **peso específico(GAMM)**. Se actualizan los cambios de estas propiedades haciendo clic en el ícono **Update changes**, ubicado en la parte superior de esta ventana.
- Se hace clic sobre el botón **Assign** ubicado en la parte inferior de la ventana **Materials**, y se hace clic sobre las superficies en el entorno gráfico. Se finaliza oprimiendo la tecla **Esc**.



**Figura 12.5:** Construcción del archivo de entrada de datos en GiD: (a) ventana Materials de propiedades mecánicas del material y espesor del sólido , (b) pestaña General de datos generales del problema dentro de la ventana Problem data, (c) pestaña Postprocesso de parámetros del postproceso del problema dentro de la ventana Problem data.

- Se observa el resultado de la operación seleccionando Draw >All materials en la ventana Materials.

### 12.2.5 Parámetros generales y opciones de postproceso del problema

Los problemas mecánicos bidimensionales son una simplificación en la cual se puede establecer un estado plano de esfuerzos o un estado plano de deformaciones. Una de estas dos opciones se puede escoger en la caja desplegable **Tipo de problema(TIPR)** de la pestaña **General** de la ventana **Problem data**. Tal ventana se activa haciendo clic en **Data >Problem data** en el menú principal (Figura 12.5(b)).

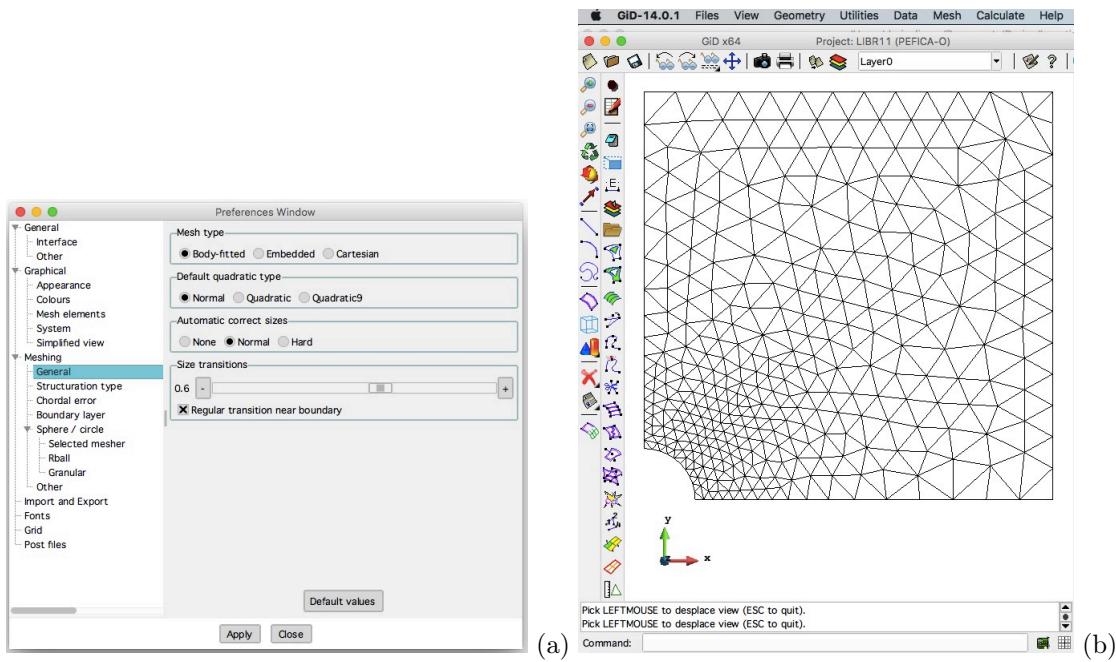
En la misma ventana indicada anteriormente, se puede escoger la pestaña **Postproceso**, mostrada en la Figura 12.5(c), con el fin de definir:

- el lugar en el interior de cada elemento donde se evaluarán los esfuerzos y las deformaciones. Para el ejemplo se escoge **en puntos de Gauss** en la caja desplegable **Presentación de esfuerzos(ENNU)**.
- el tipo de presentación e impresión de los resultados. Para el ejemplo se escoge **en gid** de la caja desplegable **Impresión de resultados(IMPR)**.

### 12.2.6 Generación de una malla no estructurada de elementos triangulares lineales

La cuarta parte del dominio de la lámina del ejemplo mostrado en la Figura 8.7(b), será representada con una malla no estructurada de elementos triangulares lineales. Se tendrán elementos de 0.01 m de tamaño en el arco circular del orificio y de 0.04 m de tamaño en el resto de la malla. El procedimiento para generar una malla con estas características consiste en:

- Definir la transición entre tamaños de elementos, seleccionando del menú superior **Utilities > Preferences** y desplazando la barra **Size transitions** con el botón - para una transición más lenta y con el botón + para una transición más rápida. Finalizar la operación haciendo clic sobre el botón **Apply** y después sobre el botón **Close**. En particular se ajusta el parámetro **Size transitions** a 0.2.
- Definir el tipo de elemento finito, seleccionando **Mesh > Element type > Triangle** y haciendo clic sobre las superficies que serán malladas. Finalizar la instrucción oprimiendo la tecla **Esc**.
- Definir el tamaño de los elementos cercanos al orificio, seleccionando **Mesh > Unstructured > Assign size on lines**, escribiendo el tamaño del elemento de 0.01 en la ventana de diálogo, haciendo clic en el botón **Assign** y haciendo clic sobre las líneas del contorno del orificio. Finalizar la instrucción oprimiendo la tecla **Esc** y haciendo clic sobre el botón **Close** de la ventana de diálogo.
- Definir el tamaño de los otros elementos, seleccionando **Mesh > Unstructured > Assign size on surfaces**, escribiendo el tamaño del elemento de 0.04 en la ventana de diálogo, haciendo clic en el botón **Assign** y haciendo clic sobre las superficies. Finalizar la instrucción oprimiendo la tecla **Esc** y haciendo clic sobre el botón **Close** de la ventana de diálogo.
- Generar la malla de elementos finitos, seleccionando **Mesh > Generate mesh ...**, haciendo clic en el botón **ok** sin modificar la caja **Enter size of elements to be generated** de la ventana **Mesh generate**. Lo anterior activa la ventana **Progress**



**Figura 12.6:** Construcción del archivo de entrada de datos en GiD: (a) ventana de preferencias donde se ajusta la transición en el tamaño de la malla, (b) malla no estructurada de elementos triangulares lineales obtenida para el ejemplo.

in meshing, donde se indica el número de elementos y de nudos generados. La operación se finaliza haciendo clic sobre el botón **View mesh** y el resultado se ilustra en la Figura 12.6.

### 12.2.7 Eliminar una malla generada y sus parámetros

Después de generar una malla se pueden eliminar sus parámetros y los elementos finitos que la componen de la siguiente manera:

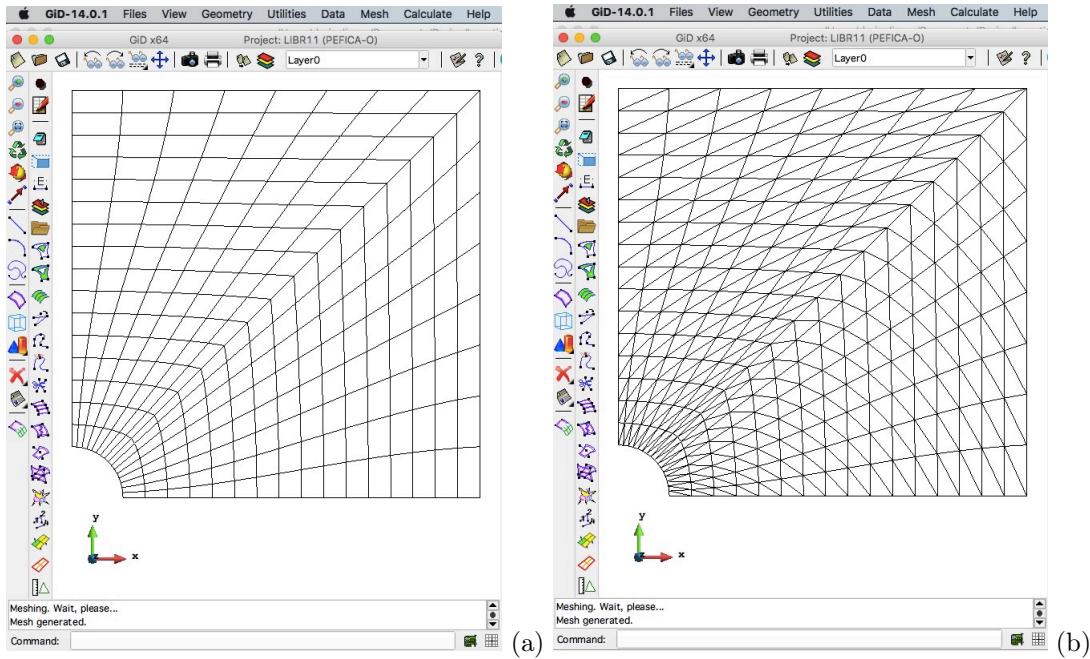
- seleccionando **Mesh >Reset mesh data** y haciendo clic en el botón **ok** en la ventana de diálogo, para eliminar los parámetros de la malla.
- seleccionando **Mesh >Erase mesh** y haciendo clic en el botón **ok** en la ventana de diálogo, para eliminar los parámetros de la malla.

### 12.2.8 Generación de una malla estructurada de elementos cuadrilaterales bilineales

Ahora, la cuarta parte del dominio de la lámina del ejemplo mostrado en la Figura 8.7(b), será representada con una malla no estructurada de elementos cuadrilaterales bilineales.

Se tendrán elementos de 0.01 m de tamaño en el arco circular del orificio y de 0.04 m de tamaño en el resto de la malla. El procedimiento para generar una malla con estas características consiste en:

- Definir el tipo de elemento finito, seleccionando **Mesh >Element type >Quadrilateral** y haciendo clic sobre la superficies que serán malladas. Finalizar la instrucción oprimiendo la tecla **Esc**.
- Definir el tamaño de los elementos, seleccionando **Mesh >Structured >Surface >Assign number of cells** y haciendo clic en las superficies (conformadas por 4 líneas). A continuación se escribe un número de 8 divisiones del primer grupo de las líneas opuestas, se hace clic en el botón **Assign**, se hace clic sobre las dos líneas que forman el orificio, y se oprime la tecla **Esc**. Después se escribe un número de 16 divisiones del segundo grupo de las líneas opuestas, se hace clic en el botón **Assign**, se hace clic sobre una de las dos líneas opuestas (indicadas como 9, 12 o 16), se oprime la tecla **Esc** y se hace clic en el botón **Close**.
- Generar la malla de elementos finitos, seleccionando **Mesh >Generate mesh ...**, haciendo clic en el botón **ok** sin modificar la caja **Enter size of elements to be generated** de la ventana **Mesh generate**. Lo anterior activa la ventana **Progress in meshing**, donde se indica el número de elementos y de nudos generados. La operación se finaliza haciendo clic sobre el botón **View mesh** y el resultado se ilustra en la Figura 12.7(a).



**Figura 12.7:** Construcción del archivo de entrada de datos en GiD. Malla estructurada obtenida para el ejemplo con elementos finitos: (a) cuadrilaterales bilineales y (b) triangulares lineales.

### 12.2.9 Generación de una malla estructurada de elementos triangulares lineales

Para generar una malla estructurada de elementos triangulares lineales se realiza el procedimiento anterior cambiando la definición del tipo de elemento a triangular, es decir, seleccionando **Mesh >Element type >Triangle**, haciendo clic sobre la superficies que serán malladas y finalizando con la tecla **Esc**. El resultado es la malla mostrada en la Figura 12.7(b).

### 12.2.10 Construcción del archivo de datos de entrada

El archivo de datos de entrada para el programa PEFiCA 2.0 con extensión **.m** se construye en GiD de la siguiente forma. Se selecciona **Calculate >Calculate** del menú superior del entorno gráfico y se hace clic en el botón **Ok** de la ventana **Process info**. Éste procedimiento crea un archivo con el mismo nombre de la carpeta del problema

en GiD pero con extensión .m. Tal archivo debe ubicarse en la carpeta \PEFBID\DATOS o \PEFTRI\DATOS, para que pueda ser leída por el programa PEFICA 2.0.

Para el ejemplo desarrollado en las secciones anteriores, la carpeta tenía el nombre LBR11.gid y en consecuencia el archivo de datos de entrada construido se denominaba LBR11.m. Partes tal archivo se presentan en el Listado 12.1.

```

1000 :
1001 :
1002 % datos generales
1003 NELE = 256;      % numero de elementos
1004 NNUD = 289;     % numero de nudos
1005 NNUE = 4;       % numero maximo de nudos por elemento
1006 NGAU = 4;       % numero maximo de puntos de Gauss por elemento
1007 NDIM = 2;       % numero de dimensiones
1008 NCAT = 1;       % numero de categorias de elementos
1009 TIPR = 20;      % codigo del tipo de problema:
1010 % 20: plano de esfuerzos, 21: plano de deformaciones
1011 ENNU = 0;        % tipo de evaluacion de esfuerzos/deformaciones en el elemento
1012 % 0: eval en PG, 1: eval en los nudos, 2: eval en centro del elemen
1013 IMPR = 2;        % tipo de impresion de los resultados
1014 % 0: ninguno, 1: en ventana de comandos, 2: en GiD, 3: en VC y GiD

1015 % tabla de categoria y conectividades de los elementos: ELE()
1016 % incluye: categoria ICAT, primer nudo NUDI, segundo nudo NUDJ, tercer nudo NUDK
1017 % cuarto nudo NUDL (en cuadrilaterales)
1018 % ELE = [ ICAT NUDI NUDJ NUDK NUDL ] % IELE
1019 ELE = [ ...
1020   1    122    124    166    165 ; % 1
1021   1    88     89     124    122 ; % 2
1022   1    59     62     89     88 ; % 3
1023 :
1024 :
1025   1    267    284    282    263 ; % 254
1026   1    269    286    284    267 ; % 255
1027   1    277    289    286    269 ]; % 256

1028 % tabla de coordenadas de los nudos: XYZ()
1029 % incluye: coord. x: XNUD, coord. y: YNUD
1030 % XYZ = [ XNUD YNUD ] % INUD
1031 XYZ = [ ...
1032   +5.000000e-01    +5.000000e-01 ; % 1
1033   +4.715121e-01    +4.715121e-01 ; % 2
1034   +4.375000e-01    +5.000000e-01 ; % 3
1035 :
1036 :

```

```

1040      +6.219905e-02      +6.126071e-03 ; % 287
1040      +6.250000e-02      +0.000000e+00 ; % 288
1040      +0.000000e+00      +6.250000e-02 ]; % 289

1042
% tabla de categorias de los elementos: CAT()
1044 % incluye tipos de material y tipo de elemento
1044 % propiedades del material: modulo de Young :EYOU, relacion de Poisson: POIS,
1046 % peso especifico GAMM.
1046 % propiedades del elemento: espesor: TESP,
1048 % tipo: TIPE, num. nudos: NUEL, puntos Gauss: PGAU
1048 % CAT = [ EYOU POIS GAMM TESP TIPE NUEL PGAU ] % ICAT
1050 CAT = [ ...
1050      +2.0000e+08      +3.0000e-01      +0.0000e+00      +2.5000e-02    202  4 4 ]; % 1

1052
% tabla de desplazamientos conocidos: UCO()
1054 % incluye numero del nudo INUD, indicador si el desplazamiento es conocido o no,
1054 % y valor del desplazamiento conocido. Si el nudo en la tabla se repite
1056 % se considera la condicion de borde presentada
1056 % en la primera fila asociada a dicho nudo.
1058 % Indicador del desplazamiento en x: DCUX, vale 0:desconocido 1:conocido;
1060 % indicador del desplazamiento en y: DCUY, vale 0:desconocido 1:conocido;
1060 % valor del desplazamiento conocido en x: VAUX,
1060 % valor del desplazamiento conocido en y: VAUY.
1062 % VAUX no sera leida si el desplazamiento es desconocido, es decir DCUX=0,
1062 % VAUY no sera leida si el desplazamiento es desconocido, es decir DCUY=0.
1064 UCO = [ INUD DCUX DCUY VAUX VAUY ]
UCO = [ ...
1066 164 1 0 0.000000 0.000000 ;...
1066 165 0 1 0.000000 0.000000 ;...
1068 166 0 1 0.000000 0.000000 ;...
1068 :
1070 :
1070 277 1 0 0.000000 0.000000 ;...
1072 288 0 1 0.000000 0.000000 ;...
1072 289 1 0 0.000000 0.000000 ;...
1074 ];
1074

1076 % tabla de fuerzas aplicadas en los nudos de la malla. Incluye numero del
1078 % nudo INUD, valor de la fuerza en direccion x FUNX y valor de la fuerza
1078 % en direccion y FUNY.
1078 % FUN = [ INUD FUNX FUNY ]
1080 FUN = zeros(1,3); % No hay fuerzas aplicadas en los nudos

1082 % tabla de fuerzas uniformes distribuidas que se aplican en las caras
1084 % de los elementos. Incluye numero identificador del elemento en giD IELE,
1084 % numero de los nudos inicial y final de la cara cargada NUDI y NUDJ,
1084 % valor de la presion en direccion x y en direccion y, PREX y PREY,

```

```

1086 % indicador del sistema % coord de la carga GLOC: =0: global, =1: local.
% FDI = [ IELE NUDI NUDJ PREX PREY GLOC ]
1088 FDI = [ ...
1089   1    165    122  +1.0000e+05  +0.0000e+00 0 ;...
1090   2    122     88  +1.0000e+05  +0.0000e+00 0 ;...
1091   3     88     59  +1.0000e+05  +0.0000e+00 0 ;...
1092   4     59     36  +1.0000e+05  +0.0000e+00 0 ;...
1093   5     36     20  +1.0000e+05  +0.0000e+00 0 ;...
1094   6     20      9  +1.0000e+05  +0.0000e+00 0 ;...
1095   7      9      4  +1.0000e+05  +0.0000e+00 0 ;...
1096   8      4      1  +1.0000e+05  +0.0000e+00 0 ;...
1097 ];

```

**Listado 12.1:** Partes del archivo de entrada de datos para el ejemplo generado por GiD.

## 12.3 Proceso de cálculo en PEFiCA 2.0

El programa PEFiCA 2.0 permite resolver un problema mecánico bidimensional por el método de los elementos finitos, a partir de un archivo de entrada generado por GiD, como se explicó en la Sección 6.3.

Como ejemplo, se construyó el archivo de entrada de datos LIBR11.m utilizando el entorno de preprocesso de GiD y se resolvió el problema mecánico con el programa PEFiCA 2.0, escribiendo en la Ventana de Comandos de GNU–Octave la siguiente instrucción:

```
>> PEFICA LIBR11 05
```

finalizando con la tecla **Enter**. El último parámetro de la instrucción anterior determina el tipo presentación de resultados. En particular el parámetro 05 genera los archivos de salida de resultados LIBR11.gid.res y LIBR11.gid.msh, que pueden leerse en el postproceso de GiD. La Sección 6.3 describe otras opciones posibles.

## 12.4 Postproceso: representación gráfica de los resultados en GiD

El programa GiD tiene un entorno gráfico de representación de los resultados del problema, el cual permite visualizar desplazamientos, fuerzas, deformaciones y esfuerzos en la malla de elementos finitos, mediante áreas llenas o líneas de igual valor.

El primer paso consiste en abrir el programa GiD y seleccionar **File >Postprocess** desde el menú superior. A continuación se abre el archivo de extensión **.gid.res**, seleccionando **File >Open**. Para el ejemplo desarrollado se abre el archivo **LIBR11.gid.res**.

### 12.4.1 Configuración deformada y desplazamientos

La configuración deformada del problema y la norma del vector desplazamiento se pueden representar en GiD en áreas llenas de la siguiente forma:

- Para visualizar solamente la configuración deformada del sólido se selecciona **View results >Deformations >Displacement** en el menú superior. En la línea de comando de escribe el factor de exageración de la deformada y se finaliza con la tecla **Enter**. La Figura 12.8 ilustra la configuración deformada de la malla del ejemplo, utilizando un factor de exageración de 200.
- Para presentar la norma del vector desplazamiento se selecciona **View results >Contour fill >Displacement >Displacement** en el menú superior. La Figura 12.9 muestra este resultado para el ejemplo desarrollado anteriormente.
- Para presentar simultáneamente los dos resultados anteriores, se realizan los procedimientos del segundo y después del primer ítem.

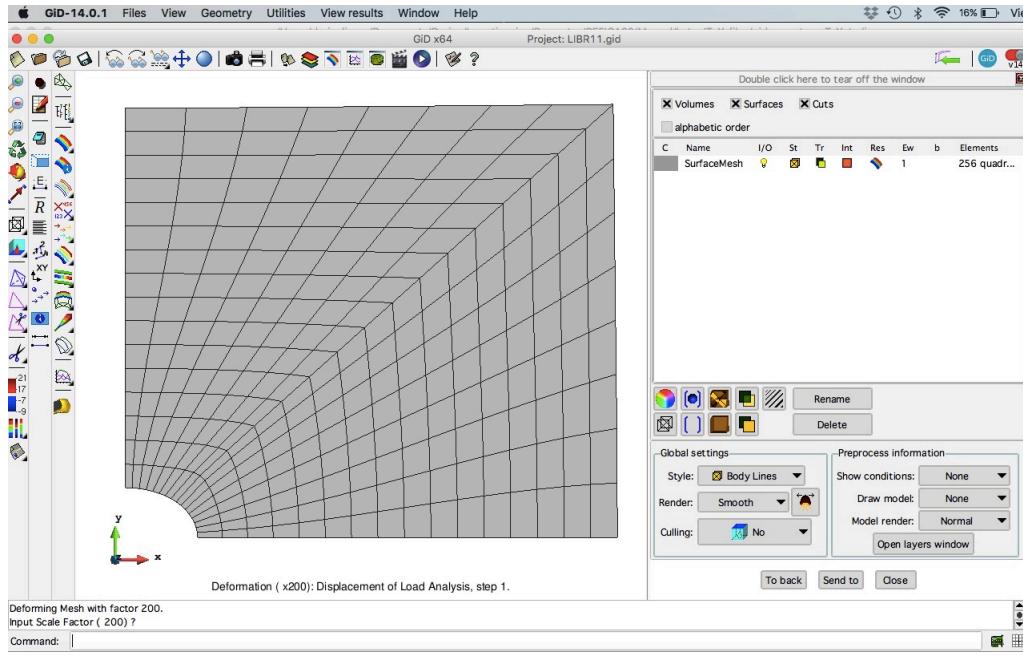


Figura 12.8: Representación gráfica de resultados en GiD. Configuración deformada de la malla para el ejemplo.

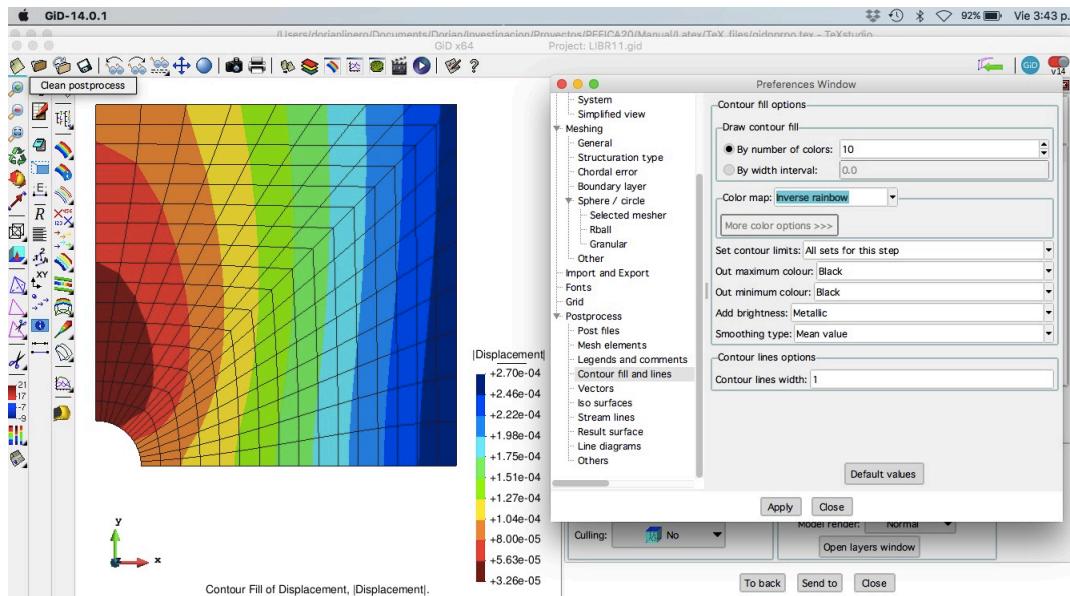
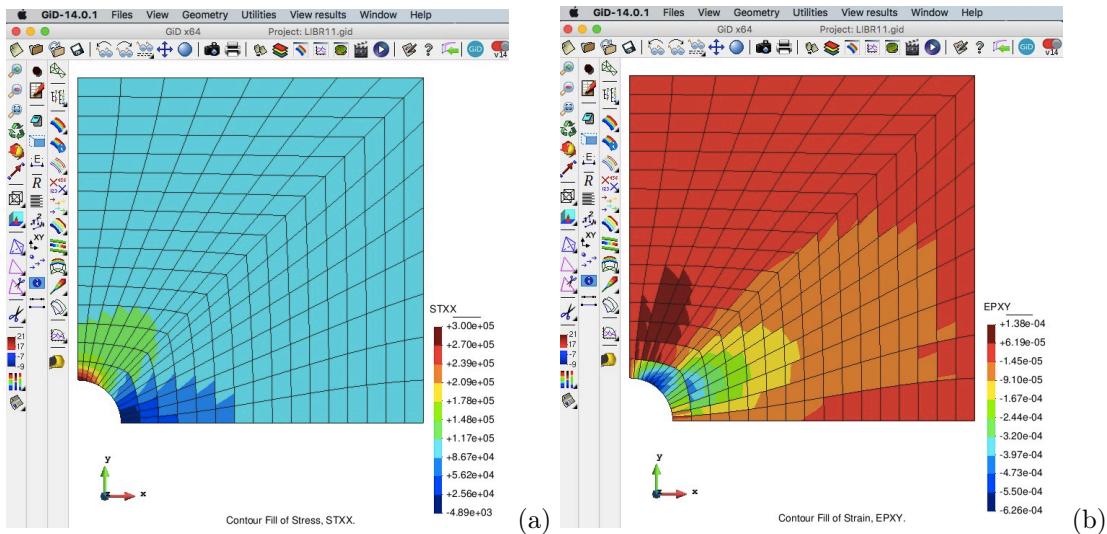


Figura 12.9: Representación gráfica de resultados en GiD. Norma del vector desplazamiento en el ejemplo.

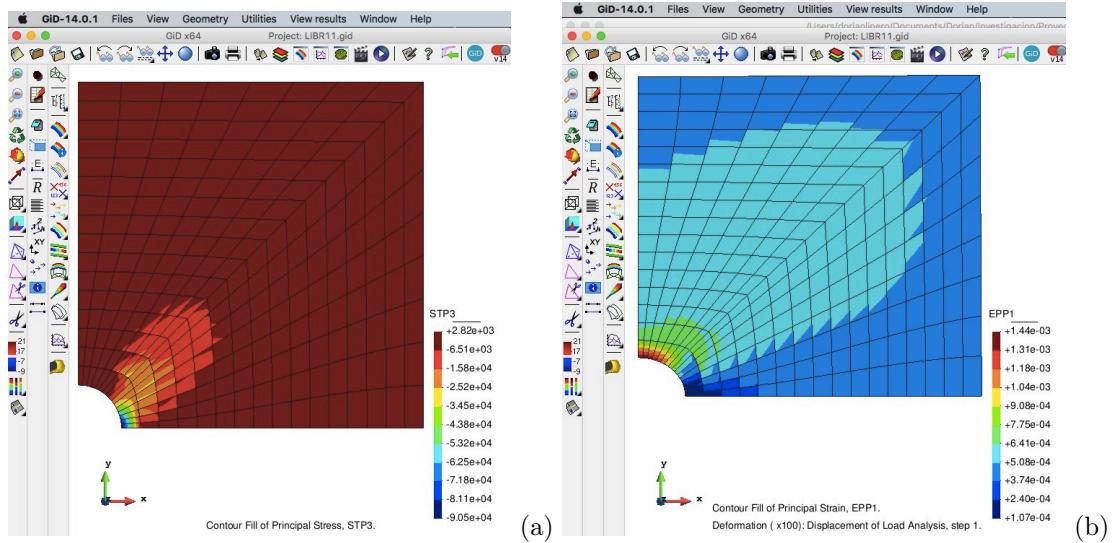


**Figura 12.10:** Representación gráfica de resultados en el programa GiD del ejemplo, evaluados en el interior de cada elemento: (a) componente de esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$  y (b) componente de deformación angular  $\gamma_{xy}$ .

### 12.4.2 Esfuerzo o deformación en el interior de los elementos

Las componentes de deformación en el interior de los elementos finitos se pueden representar, seleccionando **View results**  $\triangleright$  **Contour fill**  $\triangleright$  **Strain**  $\triangleright$  y la componente correspondiente, en el menú superior. EPXX, EPYY y EPXY corresponden a las componentes  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  y  $\gamma_{xy}$ , respectivamente. Asimismo, las componentes de esfuerzo en el interior de los elementos finitos se pueden representar, seleccionando **View results**  $\triangleright$  **Contour fill**  $\triangleright$  **Stress**  $\triangleright$  y la componente correspondiente, en el menú superior. STXX, STYY y STXY corresponden a las componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{xy}$ , respectivamente. La Figura 12.10 ilustra la componente de esfuerzo  $\sigma_{xx}$  y de deformación  $\gamma_{xy}$  del ejemplo desarrollado en el interior de elementos cuadrilaterales bilineales. Allí se observa la discontinuidad esperada del resultado entre un elemento y otro.

Por otro lado, las deformaciones principales en el interior de los elementos se pueden representar, seleccionando **View results**  $\triangleright$  **Contour fill**  $\triangleright$  **Principal strain**  $\triangleright$  y la componente correspondiente, en el menú superior. EPP1, EPP2 y EPP3 indican las deformaciones principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$ , respectivamente. De igual forma, los esfuerzos principales en el interior de cada elemento se dibujan, seleccionando **View results**  $\triangleright$  **Contour fill**  $\triangleright$  **Principal stress**  $\triangleright$  y la componente correspondiente, en el menú



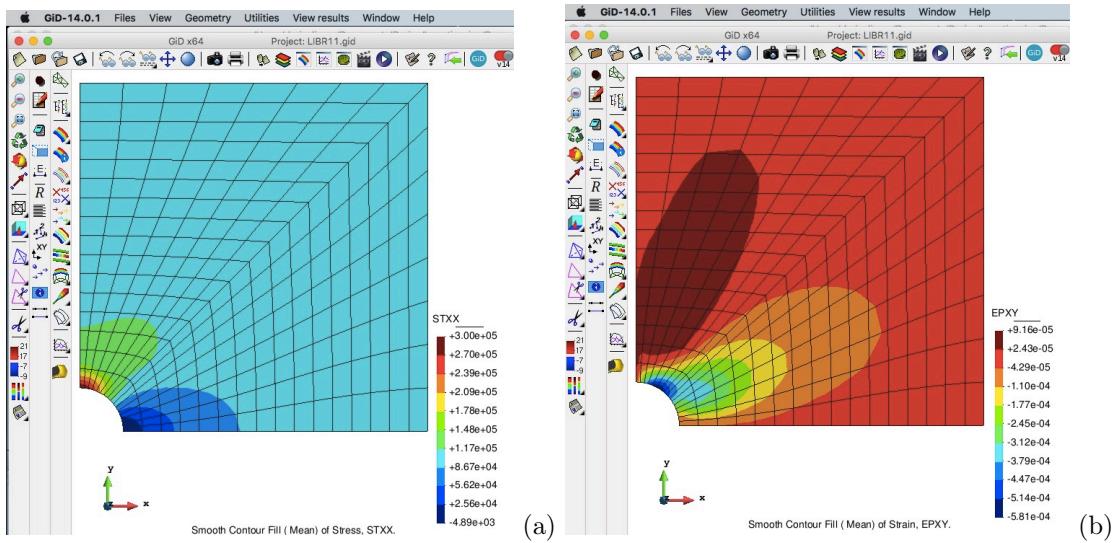
**Figura 12.11:** Representación gráfica de resultados en el programa GiD del ejemplo, evaluados en el interior de cada elemento: (a) esfuerzo principal  $\sigma_3$  y (b) deformación principal  $\varepsilon_1$ .

superior. STP1, STP2 y STP3 indican los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , respectivamente. La Figura 12.11 ilustra el esfuerzo principal  $\sigma_3$  y la deformación principal  $\varepsilon_1$  del ejemplo desarrollado en el interior de elementos cuadrilaterales bilineales.

### 12.4.3 Esfuerzo o deformación promedio en los nudos de la malla: suavizado

El programa GiD evalúa cada componente de esfuerzo o de deformación promedio en los nudos a partir de los valores correspondientes en los puntos de integración de Gauss. Tales resultados se obtienen seleccionando en el menú superior **View results**  $\triangleright$  **Contour fill**  $\triangleright$  **Smoothed**  $\triangleright$  y el tipo de entidad. Las entidades que pueden representarse son las siguientes:

- deformaciones principales, seleccionando **Principal Strain** y escogiendo EPP1, EPP2 o EPP3, para mostrar  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  o  $\varepsilon_3$ , respectivamente.
- esfuerzos principales, seleccionando **Principal Stress** y escogiendo STP1, STP2 o STP3, para mostrar  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  o  $\sigma_3$ , respectivamente.



**Figura 12.12:** Representación gráfica de resultados en el programa GiD del ejemplo, evaluados como el promedio en los nudos: (a) componente de esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$  y (b) componente de deformación angular  $\gamma_{xy}$ .

- componentes de deformación, seleccionando **Strain** y escogiendo **EPXX**, **EPYY** o **EPXY**, para mostrar  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  o  $\gamma_{xy}$ , respectivamente.
- componentes de esfuerzo, seleccionando **Stress** y escogiendo **STXX**, **STYY** o **STXY**, para mostrar  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  o  $\sigma_{xy}$ , respectivamente.

La Figura 12.12 ilustra el valor promedio en los nudos de la componente de esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$  y de la componente de deformación angular  $\gamma_{xy}$ , en el ejemplo desarrollado. Se observa que los valores de esfuerzo o de deformación se distribuyen de forma suave sobre la malla en comparación con los valores presentados en la Figura 12.10.

#### 12.4.4 Definición de opciones de representación gráfica

Algunas de las posibilidades de representación gráfica de los resultados sobre la malla de elementos finitos son las siguientes:

- Los colores de las áreas llenas y de las isolíneas se establecen seleccionando **Utilities > Preferences ...** del menú superior y activando la ventana **Preferences**. Allí se selecciona **Postprocess > Contour fill and lines** del menú lateral, se escribe el número de colores deseados en la caja **Draw contour fill – By number of colors:**,

se despliega la caja **Color map** para modificar el mapa de colores y se termina con el botón **Apply**. La Figura 12.9 ilustra la norma del desplazamiento en el ejemplo considerando 10 colores y mapa **inverse rainbow**.

- Los tipos de presentación del dominio se definen desplegando la caja **Global settings – Style** en la ventana incrustada a la derecha del entorno gráfico. Algunas de las opciones son: **Boundaries** para mostrar solo el contorno, **Body bound** para mostrar el interior sin malla y el contorno, **Body lines** para presentar el resultado en el interior incluyendo la malla.
- El rango de valores presentados se modifica haciendo clic sobre los iconos del primer menú lateral derecho **set maximum value** y **set minimum value** para fijar los valores máximo y mínimo, respectivamente.
- La representación gráfica mediante áreas llenas se realiza escogiendo **View results**  $\triangleright$  **Contour fill**  $\triangleright$  y el tipo de resultado. En cambio, para dibujar líneas de igual valor se selecciona **View results**  $\triangleright$  **Contour lines**  $\triangleright$  y el tipo de resultado.

## Referencias

- ASTM. (2007). Standard test method for pullout strength of hardened concrete. Standard. ASTM.
- CIMNE. (2000). *GiD Reference manual*. Barcelona: International Center For Numerical Methods In Engineering (CIMNE).
- Cook, R., Malkus, D., Plesha, M., & Witt, R. (2001). *Concepts and applications of finite elements analysis* (4th). New York: John Wiley & Sons.
- Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., & Wehbring, R. (2019). *GNU Octave*. A high-level interactive language for numerical computations Edition 5 for Octave version 5.1.0. Boston, USA: Free Software Foundation. Recuperado desde <https://octave.org/octave.pdf>
- Gere, J. & Goodno, B. (2009). *Mecánica de Materiales* (Séptima). Mexico: Cengage Learning Editores.
- Geuzaine, C. & Remacle, J. (2009). Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11), 1309-1331.
- Geuzaine, C. & Remacle, J. (2019). *Gmsh reference manual*. The documentation for Gmsh 4.3.0. A finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. Recuperado desde <http://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.pdf>

- Hughes, T. J. R. (2000). *The finite element method*. New York: Dover.
- Lai, W. & Saibel, E. (1965). *Elements of Mechanics of Elastic Solids*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J. (1990). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Linero, D. (1999). Euler. Programa didáctico de elementos finitos. Bogotá: Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Colombia.
- Linero, D. (2000). Euler: programa didáctico de elementos finitos. *Revista Ingeniería e Investigación*, 46, 35-44.
- Linero, D. (2009). PEFiCA - Programa de elementos finitos a código abierto. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Linero, D. & Amaya, M. (2018). Determination of the concrete elastic modulus by means of a mesoscopic approach with the finite elements methods. En J. Useche (Ed.), *Mecánica de Materiales V. Experimentación, modelado numérico y teórico. SMEC-2018*. Universidad Tecnológica de Bolívar.
- Linero, D. & Garzón, D. (2012). Enseñanza del método de los elementos finitos en ingeniería civil y mecánica utilizando el programa de computador a código abierto PEFiCA. *Revista Educación en Ingeniería*, 7(14), 35-46. doi:<https://doi.org/10.26507/rei.v7n14.242>
- Linero, D. & Garzón, D. A. (2010). *Elementos de la mecánica del medio continuo para cuerpos sólidos. Volumen 1: Temas Básicos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Linero, D., Garzon, D., & Ramirez, A. (2013). *Análisis estructural mediante el método de los elementos finitos. Introducción al comportamiento lineal elástico*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.
- Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Oliver, X. & Agelet, C. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Barcelona: Edicions UPC.
- Onate, E. (1995). *Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos*. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.

- Oñate, E. (2009). *Structural Analysis with the Finite Element Method*. CIMNE - Springer.
- SAAE. (2019). Historia de la arquitectura en España. Puente de Alcántara sobre el Tajo, en Cáceres. Web Page. Recuperado desde [http://www.spanisharts.com/arquitectura/imagenes/roma/alcantara\\_puente.html](http://www.spanisharts.com/arquitectura/imagenes/roma/alcantara_puente.html)
- Segerlind, L. (1984). *Applied Finite Element Analysis*. Wiley.
- Timoshenko, S. P. & Goodier, J. (1970). *Theory of Elasticity*. Mc Graw Hill.
- Weaver, J. & Johnson, C. (1984). *Finite elements for structural analysis*. New Jersey: Prentice Hall.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R., & Zhu, J. (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* (Sixth edit). Elsevier.
- Zienkiewicz, O. & Taylor, R. (2005). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics* (Sixth edit). Elsevier.