Задание 2

Семен Федотов, 2 группа

Март, 2017

Условие 1. *Пусть $X_1 \dots X_n$ - выборка из распределения Cauchy(θ). Построить оценку параметра θ методом моментов.*

Proof. Можно попробовать найти пробную функцию g так, чтобы интеграл$(Eg(X_1))$ сходился. Сделаем так, чтобы g индикатором $I((-\infty,-1]\cup[-1,+\infty))$, тогда интеграл будет сходиться и мы получим нужную нам оценку: $\hat{\theta} = \frac{1}{\tan(\frac{\pi\cdot(1-\overline{g(X)})}{2})}$.

Давайте покажем, как это получить: Наша g - четная функция $\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{\theta}{\pi(\theta^2+x^2)}dx = 2\cdot\int\limits_{0}^{+\infty} g(x)\frac{\theta}{\pi(\theta^2+x^2)}dx =$ /g - индикатор, который не зануляется вне $(-1,1)$ / $= 2\cdot\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\theta}{\pi(\theta^2+x^2)}dx = \frac{2\theta}{\pi}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{(\theta^2+x^2)}dx = \frac{2}{\pi\theta}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{(1+\frac{x^2}{\theta^2})}dx =$ /Внесем под дифференциал $\frac{x}{\theta}$/ $= \frac{2}{\pi}\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{(1+(\frac{x}{\theta})^2)}d\frac{x}{\theta} = \frac{2}{\pi}\cdot\arctan(\frac{x}{\theta})\mid_1^{+\infty} = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\theta}) =$ / Метод моментов / $= \overline{g(X)} = \overline{I_A(X)}$, Где A $= (-\infty,-1]\cup[-1,+\infty)$. Обозначим $\overline{g(X)} = \tilde{X}$. Тогда $\frac{2}{\pi}\cdot(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\theta}) = \tilde{X} \Leftrightarrow$ $1-\frac{2}{\pi}\cdot\arctan\frac{1}{\theta} = \tilde{X} = \frac{\pi(1-\tilde{X})}{2} = \arctan\frac{1}{\theta} \Leftrightarrow \tan(\frac{\pi(1-\tilde{X})}{2}) = \frac{1}{\theta} \Rightarrow$

$$\hat{\theta} = 1\frac{1}{\tan(\frac{\pi(1-\tilde{X})}{2})}$$

Вот мы и получили искомую оценку! Вообще есть множество вариантов взять пробную функцию, например, $\sin\alpha x$ или $\cos\alpha x$. Впоследствии, получим интеграл Лапласа, который сходится. Ну и сможем найти нужную нам оценку □

Условие 2. $\mathcal{N}(\theta,1)$. *Есть ли рнмк для $H_0:\theta=0$ против двусторонней альтернативы.*

Proof. Ответ: нет. Пусть все же есть рнмк для проверки нашей гипотезы: $\{X\in B\}$ уровня значимости α. Нужно проверить, что среди всех критериев с таким же уровнем значимости, он является наиболее мощным. Вообще, что такое уровень значимости в нашей задаче - такое число $\alpha : P_{\theta=0}(X\in B)\le\alpha$. То есть вероятность отвергнуть верную нулевую гипотезу не больше этого α. А далее, нужно проверить, является ли он наиболее мощным. То есть: $\forall P_x\in\mathcal{P}_1\forall R : P_x(X\in B)\ge P_x(X\in R)$. Приведем док-во для одномерного случая(выборка размера 1), оно легко продолжается на случай выборки размера n. Что такое $X\sim\mathcal{N}(0,1); P_{\theta=0}(X\in B) = \int\limits_{x\in B}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ - мера множества B. Возьмем множество R такой же меры, как и B. Чтобы прийти к противоречию, нам нужно доказать, что мощность $Q(R,P_x)$ больше мощности $Q(B,P_x)$, хотя бы на одном из распределений и альтернативной гипотезы. Возьмем R далеко в конце распределения(далеко в +), нужно подобрать теперь сдвиг(θ) после которого будет R находиться около матожидания(там мера его будет наибольшей.), а B переедет налево, в конец распределения. Конечно, мн-во B может иметь вообще любой характер(разреженное, содержащее луч). В конце концов мера сдвинутого R будет больше. Ну то же самое можно провернуть и в многомерном случае. Так как при справедливости нулевой гипотезы у нас центр распределения в нуле, то оно будет симметрично. Будем, например делать срез по одной из компонент и переходить в пространство меньшей размерности(Могу, если надо у доски рассказать, разобрать случаи)

Либо можно попробовать так. Применим 2 раза т. о монотонном отношении правдоподобия и построим два соответсвующих критерия(рнмк) для проверки $H_1:\theta\le\theta_0, R_1:\theta>\theta_0$ и $H_2:\theta\ge\theta_0, R_2:\theta<\theta_0$. Пусть теперь существует рнмк для исходной задачи (H, vs R). $X\in B$. Тогда $P(X\in B)\ge P(S(X)>u_1)$, и такое же нер-во для второго критерия. $\theta_2<\theta_0<\theta_1$ А так как мы исп отношение правдоподобий, то наши критерии переписываются в виде $\frac{p(x|\theta_1)}{p(x|\theta_0)}>\lambda_1$ и $\frac{p(x|\theta_2)}{p(x|\theta_0)}>\lambda_2$ Вот, но теперь пусть на какой-то выборке гипотеза отвергается. Но так как отношение правдоподобий монотонно по статистике S, то $\forall y : T(y)>T(x)\Rightarrow$ для y тоже отвергается гипотеза, так как знак сохранится(следует из первой части нового критерия), и аналогично для $\forall y : T(y)<T(x)\Rightarrow$ отвергается(из второй части). Что тогда? Если хотя бы на какой то выборке у нас гипотеза отвергается, то она отвергается при любой другой выборке. Ну а если нет такого, то она отвергается вообще для любой выборки. Противоречие!

□

Условие 3. *Пусть* $X_1 \dots X_n$ *- выборка из распределения* $\Gamma(\alpha, \theta)$ *- оба параметра неизвестны. Предложить критерий для проверки гипотезы* $H_0 : \alpha = 1$ *против* $H_1 : \alpha > 1$.

Proof. Воспользуемся методом построения асимптотического критерия. В качестве статистики возьмем $\frac{\sum X_i - nEX_1}{\sqrt{nDX_1}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,1)$, где $EX_1 = \frac{\alpha}{\theta}, DX_1 = \frac{\alpha}{\theta^2}$ Это верно из ЦПТ(у нас набор норсв с конечной дисперсией). Подставим матожидание и дисперсию:

$$\frac{\theta \sum X_i - n\alpha_0}{\sqrt{n\alpha_0}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,1)$$

Есть проблема, мы не знаем ни один параметр из распределения, но если мы подставим их состоятельные оценки, то сходимость сохранится(). Оценки найдем методом моментов, и если выйдет так, что m_1^-1, m_2^-1 окажутся непрерывными, то оценка будет состоятельной. В кач-ве пробных функций возьмем стандартные: x и x^2.

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\theta} = \overline{X}, \\ \frac{\alpha + \alpha^2}{\theta^2} = \overline{X^2} \end{cases}$$

(видно, что мы получили непрерывные функции, а значит, оценка будет состоятельной) Выразим оттуда неизвестный нам параметры и получим:

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{\overline{X}^2}{\overline{X^2} - \overline{X}^2}, \\ \hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \end{cases}$$

. Подставим эти оценки в исходное выражение и возьмьмем квантиль уровня 1 - α стандартного нормального распределения. $\square$