Задание 1

Семен Федотов, 2 группа

Февраль, 2017

1 Задача 1.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ - выборка из нормального распределения с параметрами (a, σ^2). Найти доверительный интервал уровня γ, для его третьего момента.

Proof. Для начала найдем этот третий момент: Знаем, что центральный нечетный момент равен нулю у нормальной с.в. То есть: $0 = E(X-a)^3 = E(X^3 - 3aX^2 + 3a^2X - a^3) = EX^3 - 3a(a^2+\sigma^2) + 3a^3 - a^3 \Rightarrow EX^3 = a^3 + 3a\sigma^2$. Для этой величины нужен нам доверительный интервал. Из курса статистики, мы умеем строить доверительный интервал для а и σ^2, при неизвестный обоих параметрах. Построим уровня доверия: $\gamma + c_1 u \gamma + c_2$, константы позже подберем. Вот эти интервалы: 1)

$$P(\overline{X} - \sqrt{\frac{S^2}{n-1}} \cdot z_{\frac{1+(\gamma+c_1)}{2}} < \alpha < \overline{X} + \sqrt{\frac{S^2}{n-1}} \cdot z_{\frac{1+(\gamma+c_1)}{2}}) = \gamma + c_1$$

Тут квантиль распр Стьюдента с (n - 1) степ свободы. 2)

$$P(0 < \sigma^2 < \frac{nS^2}{z_{1-(\gamma+c_2)}}) = \gamma + c_2$$

, Тут квантиль хи квадрат с (n - 1) степенью свободы
Эти доверительные интервалы получаются из следствия теоремы об ортогональном разложении.
Супер, обозначим за Ω_1 - множество тех ω, на которых выполняется первый довинт. Аналогично введем Ω_2. Имея доверительный интервал для σ^2, он очевидно преобразуется, чтобы найти довинт того же уровня доверия для $3\sigma^2$. Хотим построить довинт для $3\sigma^2 \cdot a$. Возьмем такой:$(\min(0, left_1) < 3\sigma^2 \cdot a < 3right_2 \cdot right_1) \geq \gamma_3$(это если у доверительного инетрвала для а обе границы положительные, аналогично рассматриваются оставшиеся случаи).(Пусть этот довинт выполняется на Ω_3) где left и right - левые и правые границы тех интервалов. Далее, имея интервал для а, он очевидно, преобразуется до ^{3}(все возведем в куб, уровень доверия останется тот же). Нам нужен довинт для суммы $a^3 + 3\sigma^2 \cdot a$. Сложим левые и правые границы. Тогда оно верно по крайней мере на $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_3$. Найдем долю этого пересечения. Она больше либо равна $\frac{\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega}{\Omega}$. Нужно, чтобы эта величина была хотя бы γ. мы это можем сделать подобрав хорошо константы c_1, c_2 $\square$

2 Задача 2.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из распределения $U(-\theta, \theta), \theta > 0$. Построить оценку параметра θ методом максимального правдоподобия. Проверить её на состоятельность.

Proof. Во-первых, посмотрим на плотность данного распределения: $p(x) = \frac{1}{2\theta} \cdot I(x \in [-\theta, \theta])$. Приступим к оцениванию: распишем правдоподобие нашей выборки: $f(X, \theta) = (\frac{1}{2\theta})^n \cdot I(x_1 \in [-\theta, \theta], \dots, x_n \in [-\theta, \theta])$. То есть, правдоподобие будет равно нулю, если хотя бы один элемент из выборки не лежит в отрезке от $-\theta$ до θ. Мы хотим найти $\underset{\theta}{\operatorname{argmax}}$. Заметим, чтобы правдоподобие было равно нулю, то θ должна удовлетворять следующему условию: $\theta \geq \max(|X_{(1)}|, |X_{(n)}|) \Leftrightarrow \theta \geq \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ Хорошо, но чем больше θ, удовл. этому условию, тем меньше значение правдоподобия. Значит, $\hat{\theta} = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. Так как у нас изначально набор н.о.р., то мы можем сначала модуля равномерного, а потом максимума этих модулей. Если $\xi \sim U(-\theta, \theta)$, то $|\xi| \sim U(0, \theta)$. (Просто плотность в каждой точке увеличилась в 2 раза). Обозначим $|x_i|$ как z_i. ну а теперь найдем распределение максимума модулей: $F(t) = P(max(z_1, \dots, z_n) \leq t) = P(z_1 \leq t, \dots, z_n \leq t) = \prod_{i=1}^{n} P(z_i \leq t) = (F_{z_1}(t))^n$ (Так как если был набор независимых, то применив к ним борелевскую функцию, получим снова независимые в совокуп, ну а у таких вероятность произведения распадается в произведение вероятностей) , пусть t лежит внутри $[0, \theta]$ чтобы не писать индикатор).
Найдем теперь плотность максимума: нужно взять и продифференцировать функцию распределения. $((F_{z_1}(t))^n)' = ((\frac{t}{\theta})^n)' = \frac{n}{\theta} \cdot (\frac{t}{\theta})^{n-1}$. Хотим проверить ее на состоятельность , т.е. $\forall \varepsilon > 0 \; P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) \to 0$.

$P(|\hat{\theta}-\theta| \geq \varepsilon) = P(\hat{\theta}-\theta \geq \varepsilon) + P(\hat{\theta}-\theta \leq -\varepsilon) = 0 + F_{\hat{\theta}}(\theta-\varepsilon) =$/(Здесь первое слагаемое равно нулю, т.к. $\hat{\theta} <= \theta$ Ведь максимум модулей в выборке никогда не превысит параметр равномерного распределение, может лишь только быть меньшим или равным)./$= (\frac{\theta-\varepsilon}{\theta})^n \to 0$ при $n \to +\infty$. Так как $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что наша оценка является состоятельной! $\hat{\theta} = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ □

3 Задача 3.

По выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $U(0, \theta), \theta > 1$, с помощью метода моментов найти несмещенную оценку параметра $\frac{1}{\theta}$.

Proof. В чем заключается метод моментов в нашем случае? - В подборе пробной функции g(x) такой, что оценка, полученная благодаря данной функции, окажется несмещенной для параметра $\frac{1}{\theta}$. Посмотрим на $Eg(X_1) = \int\limits_0^\theta \frac{1}{\theta} g(x)dx = \overline{g(X)}$. Отсюда надо выразить $\frac{1}{\theta}$, тогда и получим оценку этого параметра. $\int\limits_0^\theta \frac{1}{\theta} g(x)dx = \frac{1}{\theta} \int\limits_0^\theta g(x)dx$. Посмотрим, а что будет, если $\int\limits_0^\theta g(x)dx$ будет равен 1. Тогда $\frac{1}{\theta} = \overline{g(X)} = \hat{\theta}$ - оценка методом моментов с пробной функцией g. Но тогда посмотрим на матожидание этой оценки: $E\hat{\theta} = E\overline{g(X)} =$/ Из линейности матожидания/ $= Eg(X_1) = \frac{1}{\theta}$, как мы предположили раньше $\Rightarrow$ получили несмещенную оценку! Значит, нам осталось подобрать функцию, удовлетворяющую следующему свойству: $\int\limits_0^\theta g(x)dx = 1$. Таких функций очень много, благодаря тому, что $\theta > 1$. можем отделить и сделать нашу g(x) = 0, при x > 1. То есть осталось ее определить на [0,1], так, чтобы интеграл по [0,1] был равен 1. Ну, например, можно взять тождественную единицу, ну или $2x; 3x^2, \ldots$. Пусть все же g(x) = I([0,1]) - индикатор отрезка [0,1]. Понятно, что интеграл будет равен 1. $\hat{\theta} = \overline{I_X([0,1])}$ □

4 Задача 4.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из распределения $U(a, b), b > a > 0$Выбрав в качестве априорного распределения сопряженное, найти байесовскую оценку двумерного параметра (a,b).

Proof. Возьмем в качестве сопряженного распределения двумерное распределение Парето с параметрами $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\alpha})$(Его можно получить из обычного Парето одномерного, аккуратно проинтегрировав с индикаторами. Откуда вообще Парето? Если бы у нас было распределение от 0 до θ, то Одномерный Парето является к нему сопряженным). Покажем, что оно сопряженное. Рассмотрим плотность двумерного Парето с этими параметрами: $p(a, b) = \frac{\hat{\alpha}(\hat{\alpha}+1)\cdot(\hat{b}-\hat{a})^{\hat{\alpha}}}{(b-a)^{\hat{\alpha}+2}} \cdot I(a \leq \hat{a}, b \geq \hat{b})$. Для нахождения байесовской оценки не будем считать условное матожидание, а возьмем $\underset{\theta}{\operatorname{argmax}} p(\theta|X)$.$p(\theta|X) = \frac{p(X|\theta)p(\theta)}{\int\limits_{\theta^* \in \Theta} p(X|\theta^*)p(\theta^*)d\theta^*}$. То, что в знаменателе, вообще не зависит от θ, значит можем убрать. Распишем числитель, воспользовавшись априорными знаниями и $\theta = (a, b)$: $p(x|\theta)p(\theta) = \frac{1}{(b-a)^{n+\hat{\alpha}+2}} \cdot \hat{\alpha}(\hat{\alpha}+1) \cdot I(a \leq \hat{a}, b \geq \hat{b}) \cdot \prod\limits_{i=1}^n I(a \leq X_i \leq b)$. Так, как нам не важны константы, то уберем их. В конце концов, получим снова двумерный Парето, но с другими параметрами, а именно: $(\min(\hat{a}, X_1, \ldots, X_n), \max(\hat{b}, X_1, \ldots, X_n), \alpha + n)$. Супер, это распределение является сопряженным. Осталось понять при каком (a, b), достигается максимум у плотности нового Парето.Очевидно, он будет достигнут при параметрах a и b, как можно более близких к друг другу, чтобы разность была как можно меньше. То есть, когда $(a, b) = (\min(\hat{a}, X_1, \ldots, X_n), \max(\hat{b}, X_1, \ldots, X_n)$ Ответ. Иначе индикатор занулится и плотномть будет нулевой. □