In [25]:
```
import numpy as np
import scipy.stats as sps
from tqdm import tqdm
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import sys
%matplotlib inline
```

In [6]:
```
sample = []
with open('48.txt', 'r+') as f:
    for line in f.readlines():
        sample.append(float(line))
sample = pd.Series(sample)
```

In [7]:
```
len(sample)
```

Out[7]:
```
1000
```

In [8]:
```
sample.describe()
```

Out[8]:
```
count     1000.000000
mean       164.405616
std       1699.319514
min          1.003000
25%          1.692250
50%          3.741000
75%         12.780250
max      41394.891000
dtype: float64
```

Посмотрев на среднее, видно, что параметр распределения Парето <= 1 из свойств данного распределения

Для построения доверительного интервала для параметра α, воспользуемся методом центральной статистики, то есть попробуем подобрать такую статистику, чье распределение не зависит от α. Есть факт, что если у нас есть случайная величина, распределенная по $\xi \sim Pareto(\alpha, x_m)$, то $ln(\xi) \sim exp(\alpha)$. Это просто проверить. Далее, мы знаем, что $exp(\alpha) \sim \Gamma(1, \alpha)$. Так же мы знаем, что χ^2 распределение с 2n степенями свободы является так же $\Gamma(n, \frac{1}{2})$. А при суммировании n независимых случайных величин, распределенных как $\Gamma(1, \alpha)$, мы получим с.в., распределенную как $\Gamma(n, \alpha)$. Если у нас есть некая константа $c > 0$ (у нас она удовлетворяет этому), то $c \cdot \Gamma(\alpha, \theta) \sim \Gamma(\alpha, \frac{\theta}{c})$ То есть, чтобы из $\Gamma(n, \alpha)$ сделать $\Gamma(n, \frac{1}{2})$, нужно домножить это на $2 \cdot \alpha$. Тогда получим χ^2 распределение с 2n степенями свободы, не зависящее от α. Супер!

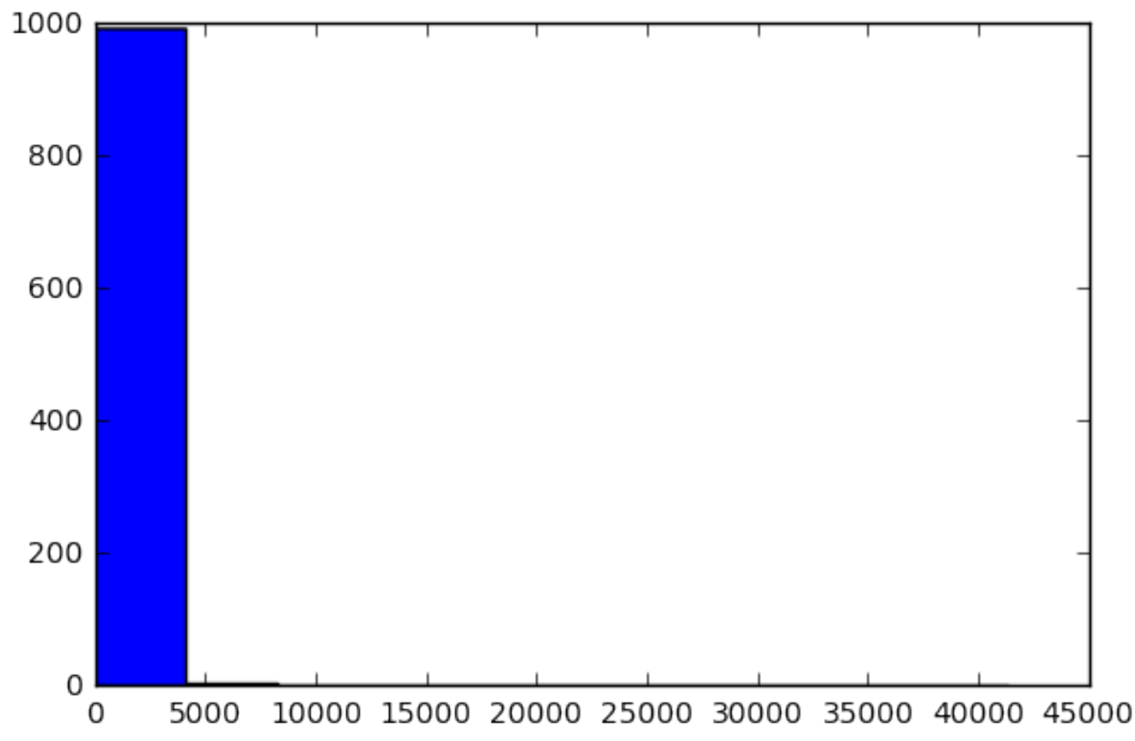
То есть в кач-ве центральной статистики берем $2\alpha \cdot n \cdot \overline{ln(X)}$ Ну а точным доверительным интервалом будет следующая пара статистик:

$$P\left(\frac{z_{\frac{1-\gamma}{2}}}{2n\overline{ln(X)}} \le \alpha \le \frac{z_{\frac{1+\gamma}{2}}}{2n\overline{ln(X)}}\right) = \gamma$$

Где Z_u - квантиль распределения Хи-квадрат с 2n степенями свободы уровня u

Ну а теперь приступим непосредственно к построению и отрисовке

In [43]:
```
plt.hist(sample)
plt.show()
```



In [23]:
```
gamma = 0.95
cumsumed_ln_of_sample = np.cumsum(np.log(sample))
confints = []
for n in tqdm(range(1, sample.size + 1)):
    first_quantile = sps.chi2.ppf((1 - gamma) / 2, 2 * n)
    second_quantile = sps.chi2.ppf((1 + gamma) / 2, 2 * n)
    (left, right) = (first_quantile / (2 * cumsumed_ln_of_sample[n
- 1]), second_quantile / (2 * cumsumed_ln_of_sample[n - 1]))
    confints.append((left, right))
```

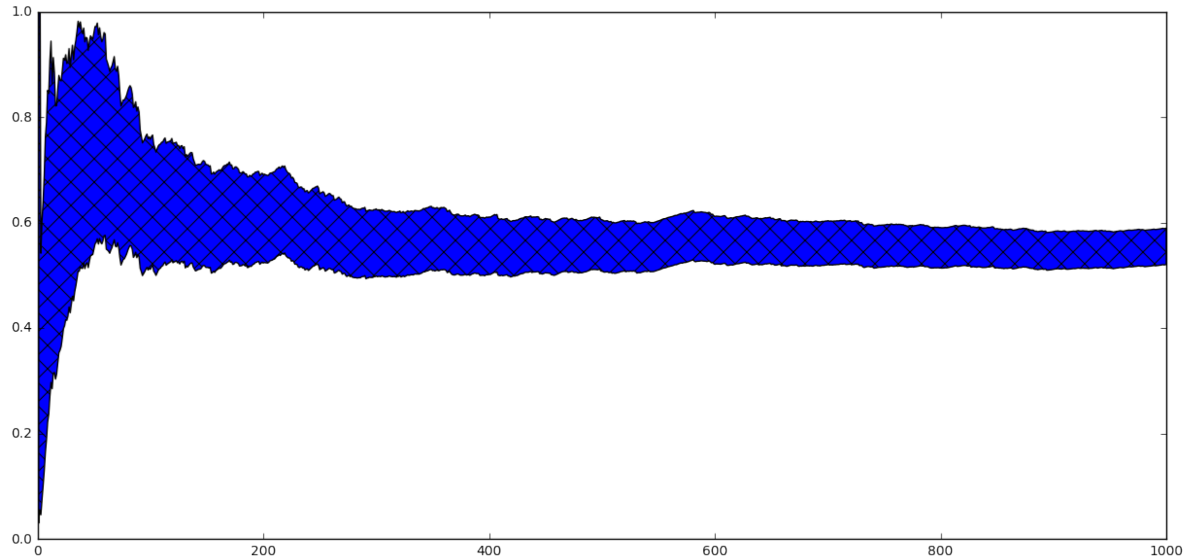
```
100%|██████████| 1000/1000 [00:00<00:00, 2341.22it/s]
```

In [26]:
```
confints = np.array(confints)
```

In [31]:
```
confints[-1]
```

Out[31]:
```
array([ 0.52119822,  0.58999844])
```

In [33]:
```
plt.figure(figsize=(15,7))
plt.fill_between(range(1, sample.size + 1), confints[:,0], confints
[:,1], antialiased=True, hatch='x')
plt.ylim(0, 1)
plt.show()
```



In [46]:
```
print("Доверительный интервал на всей выборке", confints[-1])
```

```
Доверительный интервал на всей выборке [ 0.52119822  0.58999844]
```

При росте размера выборки интервал становится более узким, и начиная с 400 уже не сильно изменяет длину. Сам же интервал довольно точно оценивает параметр, несмотря на небольшой(1000) размер выборки. [0.52119822 0.58999844], всего 7 сотых его длина

In [ ]: