Вопросы к экзамену по курсу “Случайные процессы”

лектор — профессор Д. А. Шабанов

осенний семестр 2016, поток ПМИ

1. Общее понятие случайного процесса (случайной функции), траектории случайного процесса. Примеры случайных процессов: случайное блуждание, процессы восстановления, модель страхования Крамера – Лундберга. Лемма о конечности п.н. процесса восстановления.

2. Производящие функции случайных величин, их основные свойства. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Соотношение между производящими функциями числа частиц в n-м и $(n+1)$-м поколениях. Вывод уравнения для вероятности вырождения процесса.

3. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса.

4. Пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ случайных величин, его основные свойства. Лемма о непрерывности скалярного произведения.

5. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Предельная теорема для надкритического случая.

6. Пространство траекторий случайного процесса, цилиндрическая сигма-алгебра на нем. Эквивалентное определение случайного процесса, как одного измеримого отображения в пространство траекторий. Конечномерные распределения случайного процесса. Доказательство того, что конечномерные распределения однозначно определяют распределение всего процесса в целом.

7. Конечномерные распределения случайного процесса. Лемма об условиях симметрии и согласованности. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса (б/д). Условия согласованности вероятностных мер на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ в терминах характеристических функций (б/д). Следствие для процессов, индексированных множеством $T \subset \mathbb{R}$.

8. Процессы с независимыми приращениями. Критерий существования процесса с независимыми приращениями в терминах характеристических функций приращений.

9. Пуассоновский процесс постоянной интенсивности как процесс с независимыми приращениями, доказательство существования. Явная конструкция пуассоновского процесса: процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин. Следствие из явной конструкции: свойства траекторий пуассоновского процесса.

10. Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса, их симметричность и неотрицательная определенность. Гауссовские случайные процессы. Доказательство существования гауссовского процесса с заданными функцией среднего и ковариационной функцией.

11. Винеровский процесс (процесс броуновского движения). Доказательство существования. Теорема о двух эквивалентных определениях винеровского процесса.

12. Модификация случайного процесса. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации (б/д). Доказательство существования непрерывной модификации у винеровского процесса. Теорема о недифференцируемости траекторий винеровского процесса (б/д).

13. Закон повторного логарифма для винеровского процесса (б/д). Смысл закона повторного логарифма. Локальный закон повторного логарифма для винеровского процесса.

14. Функции Хаара и Шаудера. Три вспомогательных леммы и построение явной конструкции винеровского процесса на $[0, 1]$. Построение явной конструкции винеровского процесса на $\mathbb{R}_+$.

15. Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, согласованность случайного процесса с фильтрацией, естественная фильтрация случайного процесса. Марковские моменты и моменты остановки. Процессы Леви. Строго марковское свойство для процессов Леви.

16. Принцип отражения для винеровского процесса. Момент достижения винеровским процессом уровня x. Доказательство того, что он является моментом остановки. Совместное распределение максимума винеровского процесса на отрезке $[0, t]$ и его правого конца. Теорема Башелье.

17. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями. Примеры мартингалов и субмартингалов. Разложение Дуба для согласованных процессов с дискретным временем.

18. Мартингалы. Теорема об остановке для дискретного времени и следствие из нее.

19. Мартингалы. Опциональные моменты и теорема об остановке для случая непрерывного времени (б/д). Пример ее применения: теорема об оценке вероятности разорения в модели страхования Крамера–Лундберга.

20. Марковские цепи с дискретным временем. Теорема о независимости “будущего” и “прошлого” при фиксированном “настоящем”. Фазовое пространство, переходные вероятности и начальное распределение марковской цепи. Лемма о свойствах переходных вероятностей, уравнения Колмогорова–Чепмена.

21. Однородные марковские цепи. Примеры: простейшее случайное блуждание на прямой и ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Стационарное и предельное распределения однородной марковской цепи. Свойства цепи с начальным стационарным распределением. Эргодическая теорема для марковских цепей с дискретным временем. Стационарность и предельность эргодического распределения марковской цепи.

22. Стохастическая непрерывность и непрерывность в среднем квадратичном случайного процесса. Критерий непрерывности в среднем квадратичном для L^2-процесса.

23. Дифференцирование случайных процессов в среднем квадратичном. Критерий непрерывной дифференцируемости в среднем квадратичном случайного процесса на интервале (б/д). Вычисление математических ожиданий и ковариаций L^2-производных от случайного процесса.

24. Интегрирование случайных процессов в среднем квадратичном. Критерий интегрируемости в среднем квадратичном на отрезке и следствие из него. Вычисление математических ожиданий и ковариаций L^2-интегралов от случайного процесса.

25. Стационарные случайные процессы: стационарность в узком и широком смыслах. Взаимосвязь между ними. Стационарность в узком смысле марковской цепи с начальным стационарным распределением. Теорема об эквивалентности двух понятий стационарности для гауссовских процессов.

26. Ортогональные случайные меры на полукольце подмножеств. Структурная мера ортогональной случайной меры. Теорема о связи ортогональных случайных мер на полукольце полуинтервалов и процессов с ортогональными приращениями.

27. Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере. Продолжение с полукольца $\mathcal{K}$ ортогональной случайной меры на алгебру $\alpha(\mathcal{K})$ и ее структурной меры на сигма-алгебру $\sigma(\mathcal{K})$. Определение и основные свойства стохастического интеграла от простых функций.

28. Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере. Построение стохастического интеграла для произвольной функции из $L^2(\Lambda, \sigma(\mathcal{K}), \mu)$. Его основные свойства. Идея построения стохастического интеграла в случае, когда $\Lambda \notin \mathcal{K}$.

29. Спектральное представление. Теорема Карунена.

30. Спектральное представление. Ковариационная функция стационарной в широком смысле последовательности, ее основные свойства. Теорема Герглотца (док-во достаточности). Спектральная мера и спектральная плотность стационарной в широком смысле последовательности. Вычисление спектральной плотности с помощью ряда Фурье. Теорема о спектральном представлении стационарной в широком смысле последовательности.

31. Спектральное представление. Ковариационная функция стационарного в широком смысле процесса на прямой, ее основные свойства. Теорема Бохнера – Хинчина (док-во достаточности). Спектральная мера и спектральная плотность стационарного в широком смысле процесса. Вычисление спектральной плотности с помощью формулы обращения. Теорема о спектральном представлении стационарного в широком смысле случайного процесса на прямой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. — 4-е изд. — М.: МЦНМО, 2007.

2. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005.

3. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — 4-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2003.

4. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. — М.: Мир, 1984.

6. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. — 2-е изд. — М.: Наука.Физматлит, 1996.

7. *Ватутин В.А.* Ветвящиеся процессы и их применения. — Лекционные курсы НОЦ. Т.8 — М.:МИАН, 2008.