Программа и задачи курса “Случайные процессы”

лектор — профессор Д. А. Шабанов

осень — 2015

ПРОГРАММА

1. Понятие случайного процесса (случайной функции). Примеры: случайное блуждание, процессы восстановления, эмпирические меры, модель страхования Крамера – Лундберга.

2. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса.

3. Пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ случайных величин, его основные свойства. Лемма о непрерывности скалярного произведения.

4. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Предельная теорема для надкритического случая.

5. Пространство траекторий случайного процесса, цилиндрическая сигма-алгебра на нем. Эквивалентное определение случайного процесса, как одного измеримого отображения в пространство траекторий.

6. Конечномерные распределения случайного процесса. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях (док-во необходимости). Условия согласованности вероятностных мер на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ в терминах характеристических функций.

7. Процессы с независимыми приращениями: критерий существования в терминах характеристических функций приращений.

8. Пуассоновский процесс постоянной интенсивности как процесс с независимыми приращениями. Явная конструкция пуассоновского процесса: процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин.

9. Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса, их неотрицательная определенность.

10. Гауссовские случайные процессы. Доказательство существования гауссовского процесса с заданными функцией среднего и ковариационной функцией.

11. Винеровский процесс (процесс броуновского движения). Теорема о двух эквивалентных определениях винеровского процесса.

12. Модификация случайного процесса. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации (б/д). Непрерывность с вероятностью 1 траекторий винеровского процесса.

13. Функции Хаара и Шаудера. Явная конструкция винеровского процесса.

14. Дополнительные свойства траекторий винеровского процесса: недифференцируемость с вероятностью 1 (б/д), неограниченность вариации на любом конечном отрезке, закон повторного логарифма (б/д) и его локальное следствие.

15. Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, естественная фильтрация случайного процесса. Марковские моменты и моменты остановки.

16. Строго марковское свойство и принцип отражения для винеровского процесса. Теорема Башелье.

17. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями и для марковских процессов. Разложение Дуба для согласованных процессов с дискретным временем.

18. Мартингалы. Теорема Дуба об остановке и следствие из нее. Теорема об остановке в непрерывном случае (б/д), ее применение: оценка вероятности разорения в модели страхования Крамера – Лундберга.

19. Марковские цепи с дискретным временем. Теорема о независимости "будущего" и "прошлого" при фиксированном "настоящем". Примеры марковских цепей: простейшее случайное блуждание на прямой и ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона.

20. Фазовое пространство, матрицы переходных вероятностей и начальное распределение для марковской цепи с дискретным временем. Понятие однородной марковской цепи. Уравнения Колмогорова – Чепмена и следствия из них. Стационарное и предельное распределения однородной марковской цепи. Свойства цепи с начальным стационарным распределением.

21. Эргодическая теорема для марковских цепей с дискретным временем. Стационарность и предельность эргодического распределения марковской цепи.

22. Классификация состояний однородных марковских цепей. Неразложимые классы и циклические подклассы. Возвратные и невозвратные состояния, критерий возвратности и пример его применения к случайному блуждания на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$.

23. Стохастическая непрерывность и непрерывность в среднем квадратичном случайного процесса. Критерий непрерывности в среднем квадратичном L^2-процесса в терминах корреляционной функции. Критерий стохастической непрерывности в терминах сходимостей двумерных конечномерных распределений.

24. Дифференцирование случайных процессов по вероятности и в среднем квадратичном. Критерий дифференцируемости в среднем квадратичном случайного процесса

на отрезке (б/д). Вычисление математического ожидания, корреляционной и ковариационной функций L^2-производной от случайного процесса.

25. Интегрирование случайных процессов в среднем квадратичном. Доказательство того, что из непрерывности в среднем квадратичном следует интегрируемость. Вычисление математического ожидания, корреляционной и ковариационной функций L^2-интеграла от случайного процесса.

26. Стационарные случайные процессы: стационарность в узком и широком смыслах. Доказательство эквивалентности этих понятий для гауссовских процессов. Стационарность в узком смысле марковской цепи с начальным стационарным распределением.

27. Ортогональные случайные меры на измеримых пространствах. Взаимная однозначность ортогональных случайных мер на полукольце полуинтервалов и L^2-процессами с ортогональными приращениями.

28. Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере. Продолжение с полукольца ортогональной случайной меры и ее структурной меры. Определение и свойства стохастического интеграла от простых функций. Построение стохастического интеграла для произвольной функции из $L^2(\Lambda, \mathcal{A}, \mu)$. Теорема об его основных свойствах (б/д).

29. Теорема Карунена (б/д). Спектральное представление. Теорема Герглотца (б/д). Теорема о спектральном представлении стационарной в широком смысле последовательности. Спектральная плотность стационарной в широком смысле последовательности, ее вычисление с помощью ряда Фурье.

30. Теорема Бохнера – Хинчина (б/д). Спектральная плотность стационарного в широком смысле процесса, ее вычисление с помощью формулы обращения. Спектральное представление стационарного в широком смысле случайного процесса на прямой.

31. Начала стохастического исчисления. Стохастический интеграл Ито, построение и основные свойства. Формула Ито (б/д), примеры ее использования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2004.

2. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005.

3. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — 4-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2003.

4. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. — М.: Мир, 1984.

6. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. — 2-е изд. — М.: Наука.Физматлит, 1996.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Ветвящиеся процессы

1. Найдите производящую функцию числа частиц в n-м поколении, если производящая функция числа потомков одной частицы равна

   а) $pz + 1 - p$, б) $(1-p)/(1-pz)$, в) $1 - p(1-z)^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

2. Найдите вероятности вырождения для ветвящихся процессов с производящей функцией числа потомков одной частицы

   а) $(1-p)/(1-pz)$, б) $1 - p(1-z)^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, в) $(1+z+z^2+z^3)/4$.

3. Найдите распределение момента вырождения N для ветвящихся процессов с производящей функцией числа потомков одной частицы

   а) $pz + 1 - p$, б) $1 - p(1-z)^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

4. Пусть ξ — число потомков частицы в ветвящемся процессе Гальтона-Ватсона $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$. Обозначим $\mathsf{E}\xi = \mu$, $\mathsf{D}\xi = \sigma^2$. Найдите $\mathsf{E}X_n$ и $\mathsf{D}X_n$.

5. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс с законом размножения частиц ξ. Обозначим через $Y_n = X_n + \ldots + X_0$ — общее число частиц в процессе за время n, а через $\varphi_{Y_n}(s)$ — его производящую функцию. Докажите, что
$$\varphi_{Y_n}(s) = s\varphi_\xi(\varphi_{Y_{n-1}}(s)).$$

6. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0,1)$, а $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс с законом размножения частиц ξ. Вычислите производящую функцию общего числа частиц в процессе, а также найдите вероятность того, что всего в процессе было ровно k частиц.

2. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс

1. Пусть $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ — процесс с независимыми приращениями. Докажите, что для любых $t > s$ случайная величина $X_t - X_s$ не зависит от $\sigma(X_u, u \leqslant s)$.

2. Задан процесс $\{Y_t = \sum\limits_{j=1}^{N_t} \xi_j,\ t \geqslant 0\}$, где $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие также от пуассоновского процесса $N = \{N_t, t \geqslant 0\}$ интенсивности λ. Докажите, что процесс Y_t имеет независимые приращения.

3. Пусть $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ — независимые экспоненциальные случайные величины с параметром λ, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, а $N = \{N_t, t \geqslant 0\}$ — процесс восстановления, построенный по ним (пуассоновский процесс интенсивности λ). Для каждого $t > 0$ обозначим $V_t = S_{N_t+1} - t$ ("перескок") и $U_t = t - S_{N_t}$ ("недоскок").

   а) Вычислите вероятность $\mathsf{P}(V_t > v, U_t > u) =?$

   б) Докажите, что V_t и U_t — независимы, и что $V_t \sim Exp(\lambda)$.

   в) Вычислите функцию распределения U_t и $\mathsf{E}U_t$.

4. Пусть $N = \{N_t, t \geqslant 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Найдите математическое ожидание числа таких его скачков на отрезке $[0, T]$, что а) в их правой a-окрестности нет других скачков (эта окрестность может выходить и за пределы отрезка), б) в их левой a-окрестности нет других скачков, в) в их a-окрестности нет других скачков (эта окрестность может выходить и за пределы отрезка).

5. Пусть $(N_t, t \geqslant 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Найдите предел п.н. N_t/t при $t \to +\infty$.

6. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ — процесс восстановления для независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$. Верно ли, что процесс X_t всегда имеет независимые приращения?

3. Гауссовские процессы. Винеровский процесс

1. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что следующие процессы тоже винеровские

   а) $X_t = t\ W_{1/t} I\{t > 0\}$, б) $X_t = \sqrt{c}\ W_{t/c}$, $c > 0$, в) $X_t = W_{t+a} - W_a$, $a > 0$, г) $X_t = W_t\, I\{t < T\} + (2W_T - W_t) I\{t \geqslant T\}$.

2. Пусть $(Y_t, t \in [0, 1])$ — гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $r(s, t) = \min(s, t) - st$. Докажите, что такой процесс существует и что процесс $X_t = (t+1)Y_{t/(t+1)}$, $t \geqslant 0$ является винеровским.

3. Пусть $W_t^1, \ldots, W_t^d$ — независимые винеровские процессы. Докажите, что с вероятностью 1 процесс $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d)$ (многомерный винеровский процесс) выйдет из шара произвольного фиксированного радиуса r с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^d$.

4. Докажите, что существует гауссовский процесс $X = (X_t, t \in \mathbb{R}_+^d)$ с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией

$$R(s, t) = \prod_{k=1}^{d} \min(s_k, t_k),$$

   где $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d$.

5. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что с вероятностью 1 его траектория имеет неограниченную вариацию на произвольном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, т.е. что

$$\sup_T \sum_{i=1}^n |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = +\infty \text{ п.н.},$$

где $T = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$.

6. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — независимые $\mathcal{N}(0, 1)$ случайные величины. Докажите, что процесс

$$X_t = \frac{\xi_0 t}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^\infty \frac{\sin(kt)}{k}\, \xi_k$$

является винеровским на отрезке $[0, \pi]$ (ряд понимается, как предел частичных сумм в L^2).

Указание: надо разложить функцию $I_{[0,t]}(x)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе на $[0, \pi]$, составленной из $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx)$.

4. Марковские моменты. Принцип отражения для винеровского процесса

1. Пусть задана фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$, а $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — марковские моменты относительно $\mathbb{F}$. Докажите, что случайные величины

$$\sum_{k=1}^m \tau_k, \quad \prod_{k=1}^m \tau_k, \quad \sup_k \tau_k, \quad \inf_k \tau_k$$

тоже являются марковскими моментами относительно $\mathbb{F}$.

2. Пусть τ – марковский момент относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$. Докажите, что тогда марковским моментом будет и величина

$$\tau_n := \sum_{k=1}^\infty k 2^{-n}\, I_{A_{n,k}},$$

где $A_{n,1} = \{0 \leqslant \tau \leqslant 2^{-n}\}$, $A_{n,k} = \{(k-1)2^{-n} < \tau \leqslant k 2^{-n}\}$ при $k \geqslant 2$.

3. Пусть τ — марковский момент относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in T)$, где $T = \mathbb{N}$ или $\mathbb{R}_+$. Положим

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \in T \;\; A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

Докажите, что $\mathcal{F}_\tau$ является сигма-алгеброй и что τ является $\mathcal{F}_\tau$-измеримой случайной величиной.

4. Пусть τ — марковский момент относительно фильтрации $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$, а случайный процесс $(X_n, n \in \mathbb{N})$ согласован с $\mathbb{F}$. Докажите, что X_τ является $\mathcal{F}_\tau$-измеримыми (считаем, что $X_\tau = +\infty$, если $\tau = +\infty$).

5. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Положим $\tau_y = \min\{t : \ W_t = y\}$ для $y > 0$. С помощью теоремы Башелье найдите плотность случайной величины τ_y, а также $\mathsf{E}\tau_y$.

6. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Положим $\tau = \min\{t : \ W_t = y\}$ для некоторого $y > 0$. Найдите плотность случайной величины $Y_a = \sup_{t \in [\tau, \tau+a]} W_t$.

7. Используя задачу 3 найдите

$$\mathsf{P}\left(W_t \text{ не имеет нулей на отрезке } [s,u]\right),$$

где W_t — винеровский процесс, а $u > s > 0$.

5. Мартингалы

1. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что процесс $Y_t = W_t^2 - t$ является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.

2. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Найдите все такие пары $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, что процесс

$$X_t = \exp\left\{\alpha W_t + \beta t\right\}, \ t \geq 0$$

является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом) относительно естественной фильтрации процесса W_t.

3. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — такая последовательность случайных величин, что для любого n существует плотность $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ — другая последовательность случайных величин, причем также для любого n существует плотность $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Докажите, что процесс

$$X_n = \frac{g_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)}$$

является мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ n \in \mathbb{N})$.

4. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс, а τ — момент остановки относительно его естественной фильтрации. Докажите, что процесс

$$X_t = W_{t \wedge \tau}, \ t \geqslant 0$$

является мартингалом относительно естественной фильтрации процесса W_t.

Указание: надо аппроксимировать τ марковскими моментами с конечным числом значений.

5. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс, а $\tau = \min\{t : |W_t| = 1\}$. Вычислите $\mathsf{E}\tau$.

6. Пусть $(S_n, n \in \mathbb{N})$ — простейшее случайное блуждание с вероятностью шага вправо p. Пусть $a < x < b$ — целые числа, а $X_n = x + S_n$, $n \geqslant 1$. Обозначим $\tau = \min\{n : S_n \in \{a, b\}\}$ — момент выхода процесса X_n из полосы. Докажите, что $\mathsf{E}\tau < +\infty$

   Указание: надо использовать решение задачи 4.

6. Марковские цепи

1. Пусть ξ_n — цепь Маркова с фазовым пространством $S = \{1, 2, 3\}$, начальным состоянием $\xi_0 = 1$ п.н. и матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix}.$$

   Положим $\eta_n = I\{\xi_n = 1\} + 2I\{\xi_n \neq 1\}$. Докажите, что η_n — тоже марковская цепь и найдите ее матрицу переходов.

2. Цепь Маркова $(\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности $\mathsf{P}(\xi_{n+1} = k+1 |\ \xi_n = k) = p$, $\mathsf{P}(\xi_{n+1} = k |\ \xi_n = k) = 1-p$, $k, n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$. Найдите распределение ξ_n. Докажите, что последовательность $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \min\{n :\ \xi_n = k\}$ также является цепью Маркова и найдите ее переходные вероятности.

3. Цепь Маркова $(\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности $\mathsf{P}(\xi_{n+1} = k+1 |\ \xi_n = k) = a^{-k}$, $\mathsf{P}(\xi_{n+1} = k |\ \xi_n = k) = 1 - a^{-k}$, $k, n \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Найдите $\mathsf{E}a^{\xi_n}$ и $\mathsf{D}a^{\xi_n}$.

4. Приведите пример такой однородной марковской цепи с дискретным временем, что

   а) у нее есть стационарное распределение, но нет предельного;

   б) у нее есть ровно одно стационарное распределение, но нет предельного;

   в) у нее нет стационарного распределения, но есть пределы переходных вероятностей при $n \to \infty$.

5. Пусть $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — простейшее случайное блуждание на прямой с вероятностью шага вправо $p \in (0, 1)$. Рассматривая S_n как однородную марковскую цепь, найдите

   а) неразложимые классов этой цепи;

   б) все циклические подклассы;

   в) все существенные состояния;

   г) периоды состояний;

   д) все возвратные состояния.

6. Докажите, что если i и j — сообщающиеся состояния однородной марковской цепи и состояние i — возвратно, то состояние j тоже возвратно.

7. Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, имеющий пуассоновское $Pois(1)$ распределение в качестве закона размножения частиц. Рассматривая X_n как однородную марковскую цепь, найдите

   а) неразложимые классов этой цепи;

   б) все циклические подклассы;

   в) все существенные состояния;

   г) периоды состояний;

   д) все возвратные состояния.

7. Интегрирование и дифференцирование в L^2

1. Являются ли пуассоновский процесс $(N_t, t \geqslant 0)$ и винеровский процесс $(W_t, t \geqslant 0)$ дифференцируемыми а) по вероятности, б) в среднем квадратичном?

2. Пусть $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ — гауссовские случайные векторы размерности m. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$, то ξ — тоже гауссовский вектор.

3. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Найдите распределение случайной величины $X_t = \int_0^t W_s ds$. Докажите, что процесс $(X_t, t \geqslant 0)$ является гауссовским. Найдите его ковариационную функцию.

4. Задан случайный процесс $X_t = \int\limits_0^t e^{-W_s} ds$, где W_s — винеровский процесс. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса X_t.

5. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Вычислите для $t > 0$ предел в L^2 при $n \to \infty$ у выражения
$$\sum_{i=1}^{n} W_{t(i-1)/n} \left(W_{ti/n} - W_{t(i-1)/n} \right).$$

8. Стационарные процессы

1. Пусть $N = \{N(t), t \geqslant 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ, а случайная величина η не зависит от N, причем $\mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = 1/2$. Является ли процесс $X_t = \eta(-1)^{N_t}$ стационарным, и в каком смысле?

2. Пусть f — периодическая функция на $\mathbb{R}$ с периодом $T > 0$. Случайная величина ξ равномерно распределена на $[0, T]$. Случайный вектор (ζ, η) не зависит от ξ. Докажите, что процесс $X_t = \zeta \cdot f(\eta t + \xi)$ стационарен в узком смысле.

3. Пусть $W_t^{(1)}$ и $W_t^{(2)}$ — независимые винеровские процессы. Для любого $t \in \mathbb{R}$ положим $X_t = W_t^{(1)} I\{t \geqslant 0\} + W_{-t}^{(2)} I\{t < 0\}$. Докажите, что процесс $Y_t = \frac{1}{h}(X_t - X_{t-h})$ является стационарным в широком смысле. Найдите его ковариационную функцию и спектральную плотность.

4. Пусть $(X_t, t \in \mathbb{R})$ — гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $r(s,t) = a\, e^{-b|s-t|}$, $a, b > 0$. Докажите, что такой процесс существует и найдите его спектральную плотность.

9. Спектральное представление

1. Пусть Λ — множество, $\mathcal{A}$ — алгебра его подмножеств, а μ — мера на $\mathcal{A}$. Пусть отображение $Z : \mathcal{A} \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ удовлетворяет равенству

$$\mathsf{E} Z(B) Z(C) = \mu(B \cap C) \text{ для любых } B, C \in \mathcal{A}.$$

Докажите, что Z есть ортогональная мера на $\mathcal{A}$.

2. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — числа из отрезка $[-\pi, \pi]$, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ — центрированные попарно некоррелированные случайные величины. Докажите, что процесс $(X_n, n \in \mathbb{Z})$, где

$$X_n = \sum_{j=1}^{k} e^{i\lambda_j n} \Phi_j,$$

является стационарным в широком смысле и найдите его спектральное представление.

3. Пусть $\{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — белый шум. Положим

$$X_n = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{n-1} + \frac{1}{4}\,\varepsilon_{n-2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Вычислите спектральную плотность процесса X_n.

4. Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — стационарная в широком смысле последовательность со средним a и ковариационной функцией $R(n)$. Докажите, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{L^2} a$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} R(k) \longrightarrow 0.$$

5. Пусть $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ — многочлен, а $P\left(\frac{d}{dt}\right)$ — соответствующий оператор дифференцирования в L^2. Пусть $(\xi_t, t \in \mathbb{R})$ — стационарный в широком смысле процесс с известным спектральным представлением. Стационарный в широком смысле процесс $(X_t, t \in \mathbb{R})$ имеет спектральное представление и, кроме того, удовлетворяет уравнению
$$P\left(\frac{d}{dt}\right) X_t = \xi_t.$$
Найдите спектральное представление для X_t. При каких условиях на многочлен P решение уравнения единственно?

6. Стационарный процесс $(Y_t, t \in \mathbb{R})$ удовлетворяет равенству $dY_t/dt = X_t$, где стационарный процесс $(X_t, t \in \mathbb{R})$ имеет спектральную плотность $f(\lambda) = \lambda^2 I\{|\lambda| < 1\}$. Найдите $cov(Y_1, Y_0)$.

7. Случайный процесс $(X_t, t \in \mathbb{R})$ является центрированным и стационарным в широком смысле. Его спектральная плотность равна $f(\lambda) = |\lambda|\, I_{[-2,2]}(\lambda)$. Используя спектральное представление, найдите спектральную плотность процесса Y_t, удовлетворяющего уравнению $\frac{d^2}{dt^2} Y_t + 5Y_t = X_t$. Вычислите $\mathsf{D}Y_1$.

8. Пусть $(X_t, t \in \mathbb{R})$ — стационарный в широком смысле процесс, а
$$X_t = m + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} Z(d\lambda),$$
— его спектральное представление. Докажите, что
$$(L^2) \lim_{b-a \to +\infty} \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b X_t dt \right) = m + Z(\{0\}).$$

10. Начала стохастического исчисления

1. Пусть $(X_t, t \geq 0)$ — предсказуемый процесс, непрерывный в с/к на отрезке $[a, b]$. Докажите, что тогда интеграл Ито
$$\int\limits_a^b X_t dW_t := \int\limits_0^{+\infty} I\{a < t \leq b\} X_t dW_t$$
может быть получен как предел в с/к сумм $\sum_{k=1}^n X_{t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$ при стремлении к нулю разбиения $T = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ отрезка $[a, b]$.

2. Пусть τ — момент остановки относительно естественной фильтрации винеровского процесса $(W_t, t \geq 0)$, причем $\mathsf{E}\tau < +\infty$. Докажите, что

   а) $\int_0^{+\infty} I\{t \leq \tau\} dW_t = W_\tau$, если τ принимает лишь конечное число значений;

   б) $\int_0^{+\infty} I\{t \leq \tau\} dW_t = W_\tau$, если τ — произвольный;

   в) $\mathsf{E}W_\tau^2 = \mathsf{E}\tau$.

3. Решите стохастические дифференциальные уравнения:

   а)
$$dX_t = X_t dW_t,\ X_0 = 1.$$

   б)
$$dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t dW_t,\ X_0 = 1.$$

4. Пусть $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ — двумерный процесс, задающийся стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = -\frac{1}{2} X_t dt + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_t dW_t,$$

   где $(W_t, t \geq 0)$ – одномерный винеровский процесс.

   а) Докажите, что $(X_t^1)^2 + (X_t^2)^2 = const$ п.н.

   б) Решите уравнение в предположении, что $X_0^1 = 1$, $X_0^2 = 0$.